VERHANDLUNGEN

DES DRITTEN INTERNATIONALEN

MATHEMATIKER-KONGRESSES

IN HEIDELBERG VOM 8. BIS 13. AUGUST 1904.

HERAUSGEGEBEN VON DEM SCHRIFTFÜHRER DES KONGRESSES

Dr. A. KRAZER

PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE KARLSRUHE I. B.

MIT EINER ANSICHT VON HEIDELBERG IN HELIOGRAVÜRE.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1905.

Vorwort.

Der Ausschuß für die Vorbereitung des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses hat in seiner Sitzung vom 20. April 1903 dem Schriftführer die Veröffentlichung eines Berichtes über die Verhandlungen des Kongresses übertragen. Ich bin daher sofort nach Beendigung des Kongresses an die Erfüllung dieser Aufgabe gegangen und bin heute in der Lage, dem mathematischen Publikum die „Verhandlungen des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses" zu übergeben.

Das Buch besteht den Beschlüssen des Ausschusses gemäß aus drei Teilen.

Der erste Teil, „Chronik des Kongresses", enthält die Vorgeschichte des Kongresses, das Programm desselben, das Verzeichnis der Kongreßmitglieder, eine Schilderung des Verlaufes des Kongresses, einen Bericht über die Tätigkeit der Sektionen und das Protokoll der Geschäftssitzung.

Der zweite Teil, „Wissenschaftliche Vorträge", enthält die Königsbergersche Gedächtnisrede auf Jacobi, die vier in den allgemeinen Sitzungen gehaltenen Vorträge von Painlevé, Greenhill, Segre und Wirtinger und die Sektionsvorträge. Von diesen fehlen nur zwei, der Vortrag von Guichard: „Sur les systèmes triples orthogonaux" aus der dritten und der Vortrag von Volterra: „Sur la théorie des ondes" aus der vierten Sektion, deren Manuskripte von den Verfassern nicht eingesandt worden sind.

Der dritte Teil, „Die Literatur- und Modellausstellung", enthält einen Bericht über die Ausstellung, das Verzeichnis der Aussteller und die in der Ausstellung gehaltenen Vorträge von Runge, Wiener und Schilling.

Zum Schlusse erfülle ich noch eine angenehme Pflicht, indem ich meinem verehrten Kollegen Gutzmer für die Freundlichkeit, mit welcher er alle Korrekturen mit mir gelesen hat, und der verehrlichen Verlagsbuchhandlung für die Bereitwilligkeit, mit welcher sie bei der Herstellung des Werkes auf alle meine Wünsche eingegangen ist, bestens danke. Ebenso habe ich Herrn J. Hörning in Heidelberg zu danken, welcher mir das schöne Bild von Heidelberg aus dem in seinem Verlage erschienenen Werke von Pfaff, „Heidelberg und Umgebung“, zur Ausschmückung unserer Verhandlungen bereitwillig zur Verfügung gestellt hat.

Traunstein, Villa Heimgarten, den 21. März 1905.

Krazer.

Inhaltsverzeichnis.

Erster Teil.

Chronik des Kongresses.

Zweiter Teil.

Wissenschaftliche Vorträge.

A. Gedächtnisrede auf C. G. J. Jacobi.

B. Vorträge in den allgemeinen Sitzungen.

C. Vorträge in den Sektionssitzungen.

I. Sektion.

V. Sektion.

VI. Sektion.

Dritter Teil.

Die Literatur- und Modellausstellung.

Erster Teil.

Chronik des Kongresses.

A. Vorgeschichte des Kongresses.

Auf dem II. Internationalen Mathematiker-Kongreß zu Paris 1900 hatte die Deutsche Mathematiker-Vereinigung den Auftrag übernommen, den nächsten Kongreß im Jahre 1904 einzuberufen. Schon in der Geschäftssitzung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung zu Hamburg im Herbste 1901 wurde Weber-Straßburg zum Vorsitzenden des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses gewählt und in einer Vorbesprechung zu Leipzig am 27. März 1902 wurde eine erste Grundlage für die Organisation des Kongresses gewonnen. Es trat damals schon eine deutliche Stimmung für Heidelberg hervor, und nachdem inzwischen der Stadtrat zu Heidelberg sich bereit erklärt hatte den Kongreß gastlich aufzunehmen, wurde in der Geschäftssitzung vom 25. September 1902 zu Karlsbad endgültig beschlossen den Kongreß anfangs August 1904 nach Heidelberg einzuladen. Es wurde der Berichterstatter zum Schriftführer des Kongresses gewählt und ein Ausschuß für die Vorbereitung des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses eingesetzt, der nach einigen nachträglich erfolgten Kooptationen aus folgenden Mitgliedern bestand:

> **A. Ackermann-Teubner**, Verlagsbuchhändler in Leipzig. **A. v. Brill**, Professor an der Universität Tübingen. **M. Cantor**, Professor an der Universität Heidelberg. **M. Disteli**, Professor an der Universität Straßburg. **W. v. Dyck**, Professor an der Technischen Hochschule München. **A. Gutzmer**, Professor an der Universität Jena. **G. Hauck**, Professor an der Technischen Hochschule Berlin. **D. Hilbert**, Professor an der Universität Göttingen. **F. Klein**, Professor an der Universität Göttingen. **A. Kneser**, Professor an der Bergakademie Berlin. **L. Königsberger**. Professor an der Universität Heidelberg. **A. Krazer**, Professor an der Technischen Hochschule Karlsruhe. **J. Lüroth**, Professor an der Universität Freiburg. **R. Mehmke**, Professor an der Technischen Hochschule Stuttgart. **F. Meyer**, Professor an der Universität Königsberg. **M. Nöther**, Professor an der

Universität Erlangen. **C. Runge**, Professor an der Technischen Hochschule Hannover. **H. Schubert**, Professor am Johanneum Hamburg. **F. Schur**, Professor an der Technischen Hochschule Karlsruhe. **H. A. Schwarz**, Professor an der Universität Berlin. **P. Stäckel**, Professor an der Universität Kiel. **J. P. Treutlein**, Direktor des Real- und Reform-Gymnasiums Karlsruhe. **H. Weber**, Professor an der Universität Straßburg.

Dieser Ausschuß trat zum erstenmal am 20. April 1903 in Heidelberg zu einer Beratung zusammen. Die damaligen Beschlüsse blieben für die spätere Gestaltung des Kongresses maßgebend und mögen daher hier mitgeteilt werden.

Da in das Jahr 1904 der hundertste Jahrestag der Geburt des großen deutschen Mathematikers C. G. J. Jacobi fällt, so wurde der Gedanke einer Jacobi-Feier erwogen, und nachdem Königsberger-Heidelberg sich bereit erklärt hatte die Festrede zu übernehmen und eine umfassende wissenschaftliche Biographie Jacobis dem Kongresse vorzulegen, wurde beschlossen mit dem Kongresse eine Jacobi-Feier zu verbinden, welche in einer in der ersten allgemeinen Sitzung durch Königsberger zu haltenden Gedächtnisrede auf Jacobi gipfle.

Bezüglich der wissenschaftlichen Vorträge wurde beschlossen, daß in zwei weiteren allgemeinen Sitzungen vier größere Vorträge stattfinden sollen und zwar so, daß je ein Vortrag in deutscher, in englischer, in französischer und in italienischer Sprache gehalten werde. Die Bestimmung der Vortragenden wurde dem Vorsitzenden übertragen.

Alle anderen Vorträge sollen in Sektionssitzungen stattfinden, für welche zwei Tage in Aussicht zu nehmen sind. Es wurden 6 Sektionen gebildet und für diese aus den Reihen der Ausschußmitglieder Einführende gewählt mit dem Auftrage für Sektionsvorträge zu sorgen und die Konstituierung der Sektionen auf dem Kongresse zu leiten.

I. Sektion: Arithmetik und Algebra.
Einführende: *Kneser*-Berlin und *Lüroth*-Freiburg.

II. Sektion: Analysis.
Einführende: *Hilbert*-Göttingen und *Schwarz*-Berlin.

III. Sektion: Geometrie.
Einführende: v. *Brill*-Tübingen, *Meyer*-Königsberg und *Schur*-Karlsruhe.

IV. Sektion: Angewandte Mathematik.
Einführende: *Hauck*-Berlin, *Klein*-Göttingen und *Runge*-Hannover.

V. Sektion: Geschichte der Mathematik.

Einführende: *M. Cantor*-Heidelberg und *Stäckel*-Kiel.

VI. Sektion: Pädagogik.

Einführende: *Schubert*-Hamburg und *Treutlein*-Karlsruhe.

Nachdem schon in Karlsbad der Wunsch ausgesprochen worden war mit dem Kongresse eine Ausstellung zu verbinden, wurde nunmehr beschlossen, daß auf dem Kongresse sowohl eine Ausstellung mathematischer Modelle und Apparate als auch eine solche mathematischer Literatur veranstaltet werde, daß aber beide Ausstellungen sich auf die wichtigeren Erscheinungen der letzten zehn Jahre beschränken sollten, und nur die erstere auch ältere, historisch interessante Originalmodelle umfassen dürfe. Mit den Ausstellungen sollten einleitende und erläuternde Vorträge und Demonstrationen verbunden werden. Für die Modellausstellung wurde eine Kommission bestehend aus Disteli-Straßburg, v. Dyck-München und Mehmke-Stuttgart gewählt; mit der Literaturausstellung wurden Gutzmer-Jena und der Berichterstatter beauftragt.

Über die Verhandlungen des Kongresses ist nach den damaligen Beschlüssen durch den Schriftführer ein Bericht zu veröffentlichen. Dieser Bericht soll eine Schilderung der Vorgeschichte des Kongresses und seines Verlaufes, ganz besonders aber alle auf dem Kongresse gehaltenen Vorträge in der Sprache, in der sie gehalten wurden, umfassen; er soll möglichst bald herausgegeben und allen Kongreßmitgliedern gratis zugestellt werden. Die Gedächtnisrede Königsbergers soll besonders gedruckt und noch vor Schluß des Kongresses allen Teilnehmern als Festgabe überreicht werden.

Bezüglich der auf dem Kongresse stattfindenden Festlichkeiten hatte die Stadt Heidelberg von vornherein sich erboten eine Schloßbeleuchtung auf städtische Kosten zu veranstalten und den Teilnehmern Schiffe zur Besichtigung der Beleuchtung zur Verfügung zu stellen. Ferner hatte Seine Königliche Hoheit der Großherzog von Baden mitteilen lassen, daß er bereit sei, einen Empfang der Kongreßteilnehmer im Schloßgarten zu Schwetzingen anzubieten. Vom Kongresse selbst war ein Bankett in Aussicht genommen, zu dessen Teilnahme jedes Mitglied berechtigt sein sollte. Endlich hatte die Deutsche Mathematiker-Vereinigung die Veranstaltung einer Abendunterhaltung ins Auge gefaßt.

Zur finanziellen Sicherstellung des Kongresses hatte die badische Regierung schon damals einen Zuschuß von 3000 M. in Aussicht gestellt, und ferner hatte die Firma B. G. Teubner einen Beitrag von 2000 M. dem Kongresse zur beliebigen Verwendung überwiesen.

Es wurde beschlossen von jedem Teilnehmer des Kongresses einen Beitrag von 20 M. gegen Aushändigung einer Hauptkarte zu erheben; dabei soll das Recht Teilnehmer zu werden an keine besondere Bedingung geknüpft sein. Eine solche Hauptkarte berechtigt zur Teilnahme an allen Sitzungen und Festlichkeiten des Kongresses, zur Besichtigung der Ausstellung, zum Bezuge der Festschrift und der Verhandlungen des Kongresses und verleiht außerdem die Berechtigung, die im Verlage von B. G. Teubner erscheinende Jacobi-Biographie Königsbergers zu einem bedeutend ermäßigten Preise (von ungefär $1/3$ des Ladenpreises) zu beziehen. Jedem Kongreßteilnehmer stehen außerdem für seine Angehörigen Nebenkarten zum Preise von 10 M. zur Verfügung zur Teilnahme an den allgemeinen Sitzungen und an allen Festlichkeiten des Kongresses.

Zur Deckung der darüber hinausgehenden Kosten des Kongresses insbesondere der Drucklegung der Festschrift und der Verhandlungen sowie der mit dem Kongresse verbundenen Ausstellung wurde eine Kommission beauftragt, von der Reichsregierung und dem preußischen Kultusministerium unter Hervorhebung des Momentes der nationalen Repräsentation einerseits und der Jacobi-Feier andererseits einen Zuschuß von zusammen 10 000 M. zu erbitten.

Die Ausschußmitglieder M. Cantor und Königsberger traten mit den Stadträten Ellmer, Fuchs, Krall und Krieger in Heidelberg zu einem Lokalausschuß zusammen, und es wurde weiter ein Damenkomitee für den Empfang und die Unterhaltung der Damen in Aussicht genommen.

Die nun folgenden Monate waren der Vorbereitung des Kongresses auf Grund dieser Beschlüsse gewidmet.

Bereits im Juni 1903 wurde eine erste Einladung zur Teilnahme an dem Kongresse an 2000 Mathematiker aller Länder versendet. Dabei war für die Ausdehnung dieser persönlichen Einladungen das Prinzip maßgebend, daß zunächst eingeladen werden sollten die Mitglieder der großen mathematischen Gesellschaften: Deutsche Mathematiker-Vereinigung, Société mathématique de France, London Mathematical Society, Wiskundig Genootschap te Amsterdam, Circolo Matematico di Palermo, mathematische Gesellschaft zu Moskau und Kasan, American Mathematical Society. Für andere Länder wie Ungarn, Schweden, Norwegen, Spanien, Portugal u. a. wurden von dortigen Mathematikern Verzeichnisse von Adressen mitgeteilt. Neben diesen persönlichen Einladungen wurde für die Verbreitung der Einladung durch Beilegung derselben in mehr als 25 000 Exemplaren zu den wichtigeren mathematischen Zeitschriften gesorgt. Die Firma B. G. Teubner hat weiter in allen ihren mathematischen Zeitschriften ein kurzes Einladungszirkular unentgeltlich zum Abdruck gebracht. Endlich wurden Notizen an die Allgemeine Zeitung in München und an die Kölnische Zeitung gesandt.

Den persönlichen Einladungen waren Postkarten beigelegt zum Zwecke einer unverbindlichen Mitteilung, ob der Adressat dem Kongresse wahrscheinlich beiwohnen werde oder nicht. Bis Ende September 1903 waren daraufhin Zusagen auf 357 Haupt- und 134 Nebenkarten eingelaufen, welche Zahlen sich später noch auf 380 und 140 erhöhten.

Für die allgemeinen Sitzungen sagten auf Einladung des Vorsitzenden Wirtinger-Wien, Greenhill-London, Darboux-Paris und Segre-Turin Vorträge zu; zu unserem lebhaften Bedauern mußte Darboux später infolge anderweitiger an ihn herantretender Verpflichtungen seine Zusage zurückziehen. Painlevé-Paris hatte die große Freundlichkeit an seiner Stelle einen Vortrag zu übernehmen.

Auf eine am 27. Juni 1903 an den preußischen Minister der geistlichen, Unterrichts- und Medizinalangelegenheiten gerichtete Eingabe um Bewilligung eines Zuschusses von 10 000 M. zu den Kosten des Kongresses aus Mitteln des Reiches und von Preußen beschloß der Bundesrat 5000 M. zu diesem Zwecke in den Etat einzustellen, und weiter wurde aus dem Allerhöchsten Dispositionsfond Seiner Majestät des Kaisers und Königs ein Zuschuß von 5000 M. insbesondere zur Ermöglichung der Herstellung der dem Andenken Jacobis gewidmeten Festschrift Königsbergers bewilligt.

Unter dem 5. Februar 1904 hatte Seine Königliche Hoheit der Großherzog von Baden dem Schriftführer des Kongresses mitteilen lassen, daß er gern in Aussicht nehmen wolle einer Einladung zur Teilnahme am III. Internationalen Mathematiker-Kongresse zu folgen. Am 7. Mai empfing er den Vorsitzenden und den Schriftführer in einer Audienz, um die Einladung zum Kongresse persönlich entgegenzunehmen, teilte aber zugleich mit, daß er mit Rücksicht darauf, daß der Kongreß in die Zeit des ihm von den Ärzten angeratenen Aufenthaltes in St. Moritz falle, genötigt sei, sich durch Seine Königliche Hoheit den Erbgroßherzog vertreten zu lassen. Seine Königliche Hoheit der Erbgroßherzog sagte nicht nur in einer Audienz vom 18. Juni sein Erscheinen in der I. allgemeinen Sitzung und auf dem Bankette zu, sondern erwies auch dem Kongresse die hohe Auszeichnung das Ehrenpräsidium zu übernehmen.

Am 6. März 1904 fand eine zweite Sitzung des Ausschusses in

Heidelberg statt, in welcher das Programm des Kongresses im einzelnen durchberaten und genauer festgesest wurde.

Im Mai 1904 wurde die definitive Einladung zum Kongresse in der gleichen Weise wie die frühere, vorläufige verbreitet. Den persönlichen Einladungen war jetzt eine Postkarte beigelegt, vermittels welcher der Adressat sich durch den inzwischen zusammengetretenen Wohnungsausschuß Wohnung in einem Gasthofe oder in einem Privathause besorgen lassen konnte. Besondere Einladungen wurden an den Reichskanzler, an das preußische Kultusministerium, an die badischen Ministerien des Auswärtigen und des Unterrichts, an die Universität und an die naturwissenschaftlich-mathematische Fakultät Heidelberg, an die Universität Freiburg, an die Technische Hochschule Karlsruhe, an die Stadt Heidelberg und speziell zur Jacobi-Feier an die Akademie der Wissenschaften zu Berlin, an die Universitäten Berlin und Königsberg, sowie an eine Reihe von Verwandten Jacobis gerichtet.

B. Programm des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg 1904.

Montag, den 8. August.

Abends 8 Uhr: Empfang der Kongreßteilnehmer in der Stadthalle.

Dienstag, den 9. August.

Vormittags 10 Uhr: Erste allgemeine Sitzung im Museumssaal.

1. Eröffnung des Kongresses; Begrüßungsansprachen.
2. Gedächtnisrede des Herrn Königsberger-Heidelberg auf C. G. J. Jacobi.
3. Ansprache des Herrn Schwarz-Berlin.

Nachmittags 4 Uhr: Bildung der Sektionen, Festsetzung der Geschäftsordnung und der Reihenfolge der angemeldeten Vorträge in den Hörsälen des Museumsgebäudes.

Abends 7 Uhr: Bankett in der Stadthalle.

Mittwoch, den 10. August.

Vormittags 9 Uhr: Sektionssitzungen in den Hörsälen des Museumsgebäudes.

Nachmittags 5 Uhr: Empfang des Kongresses durch Seine Königliche Hoheit den Großherzog von Baden in Schwetzingen.

Donnerstag, den 11. August.

Vormittags 10 Uhr: Zweite allgemeine Sitzung in der Aula der Universität.

1. Überreichung der Geschichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung durch Herrn Gutzmer-Jena.
2. Überreichung des ersten Bandes der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften durch Herrn Klein-Göttingen und des ersten Heftes der französichen Ausgabe der Enzyklopädie durch Herrn Molk-Nancy.
3. Vortrag des Herrn Painlevé-Paris: Le problème moderne de l'intégration des équations différentielles.

4. Vortrag des Herrn Greenhill-London: The mathematical theory of the top (considered historically).

Nachmittags 4 Uhr: Eröffnung der Ausstellung im Museumssaal durch die Herren Disteli-Straßburg und Gutzmer-Jena. Vorträge und Demonstrationen.

Abends 6.25 Uhr: Eisenbahnfahrt nach Schlierbach. Überfahrt nach Ziegelhausen. Von dort 8 Uhr Rückfahrt auf dem Neckar und Schloßbeleuchtung (gegeben von der Stadt Heidelberg).

Freitag, den 12. August.

Vormittags 9 Uhr: Sektionssitzungen in den Hörsälen des Museumsgebäudes.

Nachmittags $4^1/_2$ Uhr: Vorträge und Demonstrationen in der Ausstellung.

Abends $7^1/_2$ Uhr: Abendunterhaltung in der Schloßrestauration (veranstaltet von der Deutschen Mathematiker-Vereinigung).

Samstag, den 13. August.

Vormittags $9^1/_2$ Uhr: Geschäftssitzung (Beschlußfassung über die dem Kongreß vorgeschlagenen Resolutionen; Festsetzung des IV. Internationalen Mathematiker-Kongresses), und

Vormittags 10 Uhr: Dritte allgemeine Sitzung in der Aula der Universität.

1. Vortrag des Herrn Segre-Turin: La geometria d'oggidì e i suoi legami coll' analisi.
2. Vortrag des Herrn Wirtinger-Wien: Riemanns Vorlesungen über die hypergeometrische Reihe und ihre Bedeutung.
3. Schluß des Kongresses.

Nachmittags 4 Uhr: Damen-Kaffee in der Stiftsmühle.

Sonntag, den 14. August.

Ausflüge in die Umgegend Heidelbergs.

C. Verzeichnis der Kongreßmitglieder.

Ehrenpräsident:

Seine Königliche Hoheit der Erbgroßherzog Friedrich von Baden.

In seiner Begleitung erschienen:

Generalleutnant Exz. v. Müller, Generaladjutant Seiner Königlichen Hoheit des Großherzogs,

Hofmarschall Freiherr v. Freystedt, Exz.

Oberleutnant Freiherr v. Goeler.

Mitglieder:

Namen	Stand	Wohnort
Ackermann-Teubner, A.	Verlagsbuchhändler.	Leipzig.
Allardice, R. E.	Professor.	Stanford.
Anderegg, F.	Professor.	Oberlin.
Andrade, J.	Professor.	Besançon.
Autonne, L.	Professor, Ingenieur.	Lyon.
Axer, A.	Dr.	Przemysl.
Bartlett, D.	Professor.	Boston.
Beke, E.	Professor.	Budapest.
Beliankin, J.	Professor.	Kiew.
Bendixon, I.	Professor.	Stockholm.
Bernhard.	Professor.	Stuttgart.
Bernstein, S.	Dr.	Paris.
Berry, A.	Professor.	Cambridge.
Frau Berry.		
Bloch, B.	Professor.	Straßburg.
Blumenthal, O.	Privatdozent.	Marburg.
Frl. Blumenthal.		
Bobay, L.	stud. math.	Thann i. E.

Namen	Stand	Wohnort
Bobylew, D.	Professor.	St. Petersburg.
Bochniček, St.	Dr.	Agram.
Böhm.	Ministerialrat.	Karlsruhe.
Böhm, K.	Privatdozent.	Heidelberg.
Börsch, A.	Professor.	Potsdam.
Bonaparte, Prince R.		Paris.
Bonnesen, T.	Privatdozent.	Kopenhagen.
Bopp, K.	Dr.	Heidelberg.
Frau Bopp.		
Borel, E.	Professor.	Paris.
Borelius, J.	Professor.	Lund.
Boucheny, M.	Professor.	Paris.
Castles, L.		
Boutroux, P.	Dr.	Paris.
Braune.	Prorektor d. Universität.	Heidelberg.
Braunmühl, A. v.	Professor.	München.
Breznyik, J.	Professor.	Selmecbanya.
Brill, A. v.	Professor.	Tübingen.
Brocard, H.	Chef de bataillon.	Bar-le-Duc.
Brocke, E.	Wissenschaftl. Hilfslehrer, cand. prob.	Münster i. E.
Brückner, M.	Oberlehrer.	Bautzen.
Bryan, G. H.	Professor.	Bangor.
Bullard, W. G.	Professor.	Syracuse.
Bunitzky, J.	Privatdozent.	Odessa.
Burger, E.	Lehramtspraktikant.	Freiburg i. B.
Burger, R.	Professor.	Freiburg i. B.
Burkhardt, H.	Professor.	Zürich.
Byskow, J.	Professor.	Gjedved.
Giodesen C. C.		
Cahen.	Professor.	Paris.
Cantor, G.	Professor.	Halle.
Frl. Else Cantor.		
Frl. Marie Cantor.		
Cantor, M.	Professor.	Heidelberg.
Capelli, A.	Professor.	Neapel.
Caratheodory, C.	Dr.	Göttingen.

Namen	Stand	Wohnort
Carvallo, E.	Professor.	Paris.
Frl. Carvallo.		
Caspar, M.	stud. math.	Tübingen.
Castelnuovo, G.	Professor.	Rom.
Ceresole, P.	Dr.	Lausanne.
Christensen, V.		Kopenhagen.
Frau Christensen.		
Coolidge, J. L.	Professor.	Cambridge, Mass.
Crathorne, A. R.	Instruktor.	Madison.
Frau Crathorne.		
Crayen, W.	Verlagsbuchhändler.	Leipzig.
Cunningham, A. J.	Leutenant-Colonel.	Kensington.
Curjel, H.	M. A.	Southport.
Czuber, E.	Professor.	Wien.
Czuber jun.		
Dalwigk, F. v.	Privatdozent.	Marburg.
Darboux, G.	Professor.	Paris.
Dauß, St.	Professor.	Mannheim.
Degen, R.	Dr.	Heidelberg.
Dehn, M.	Privatdozent.	Münster.
Delaunay, N.	Professor.	Warschau.
Delaunay, B.		
Dickstein, S.	Professor.	Warschau.
Dingler, H.	stud. math.	Aschaffenburg.
Disteli, M.	Professor.	Straßburg.
Doehlemann, K.	Professor.	München.
Duclout, G.	Ingenieur.	Buenos-Aires.
Dziwinski, P.	Professor.	Lemberg.
Eckhardt, E.	Professor.	Homburg v. d. H.
Ellmer.	Stadtrat.	Heidelberg.
Emanuel, D.	Professor.	Bukarest.
Eneström, G.	Bibliothekar.	Stockholm.
Engel, F.	Professor.	Greifswald.
Epstein, P.	Privatdozent.	Straßburg.
Frau Epstein.		
Ette, C. R.	Magister.	Kopenhagen.

Namen	Stand	Wohnort
Faber, G.	Gymnasiallehrer.	Traunstein.
Frl. Faber.		
Färber, K.	Oberlehrer.	Berlin.
Fehr, H.	Professor.	Genf.
Feldhaus, F. M.	Ingenieur.	Rohrbach.
Finsterbusch, J.	Professor.	Zwickau.
Finsterwalder, S.	Professor.	München.
Fischer, P. B.	Gymnasiallehrer.	Gera.
Flatt, R.	Privatdozent.	Basel.
Fouët, E. A.	Professor.	Paris.
Fredholm, J.	Privatdozent.	Stockholm.
Fricke, R.	Professor.	Braunschweig.
Fuchs, C.	Stadtrat.	Heidelberg.
Galdeano, Z. de.	Professor.	Saragossa.
Galvani, L.	Professor.	Bologna.
Gans, R.	Privatdozent.	Tübingen.
Gauthier-Villars, A.	Verlagsbuchhändler.	Paris.
Geck, E.	Oberlehrer.	Stuttgart.
Geiser, C. F.	Professor.	Zürich.
Frl. Geiser.		
Genese, R. W.	Professor.	Aberystwyth.
Glaser.	Professor.	Stuttgart.
Gordan, P.	Professor.	Erlangen.
Frau Gordan.		
Gram, J. P.	Direktor.	Kopenhagen.
Frau Gram.		
Graßmann, H.	Professor.	Halle.
Greber, J.	Professor.	Heidelberg.
Greenhill, A. G.	Professor.	London.
Gubler, E.	Privatdozent.	Zürich.
Guccia, G. B.	Professor.	Palermo.
Günther, N.	Privatdozent.	St. Petersburg.
Guichard, C.	Professor.	Clermont-Ferrand.
Guldberg, A.*)	Privatdozent.	Christiania.
Frau Guldberg.		
Gutzmer, A.	Professor.	Jena.

*) Vertreter der Gesellschaft der Wiss. zu Christiania.

Namen	Stand	Wohnort
Hadamard, J.	Professor.	Paris.
Hahn, H.	Dr.	Wien.
Hamel, G.	Privatdozent.	Karlsruhe.
Hansen, C.	Dr.	Kopenhagen.
Frau Hansen.		
Haß, P.	stud. math.	Hamburg.
Hauff.	Professor.	Bensheim.
Hausdorff, F.	Professor.	Leipzig.
Haveland, K.	Bank-Mathematiker.	Mannheim.
Hebting.	Oberamtmann.	Heidelberg.
Heffter, L.	Professor.	Bonn.
Helm, G.	Professor.	Dresden.
Hensel, K.	Professor.	Marburg.
Herterich.	Referendar.	Heidelberg.
Hettner, G.	Professor.	Berlin.
Hilbert, D.	Professor.	Göttingen.
Frau Hilbert.		
Hočevar, F.	Professor.	Graz.
Frau Hočevar.		
Jaccottet, Ch.	Professor.	Lutry.
Jacobi, H.		Zehlendorf.
Frl. G. Jacobi.		Cannstadt.
Frl. M. Jacobi.		Cannstadt.
Frau Prof. Jacobi.		Charlottenburg.
Jacobsthal, E.	stud. phil.	Berlin.
Jacobsthal, W.	Oberlehrer.	Straßburg i. E.
Jahnke, E.	Privatdozent.	Berlin.
Janisch, E.	Professor.	Prag.
Jolles, St.	Professor.	Charlottenburg.
Frau Jolles.		
Jonescu, J.	Professor.	Bukarest.
Juel, C.	Dozent.	Kopenhagen.
Kagan, B.	Privatdozent.	Odessa.
Kalähne, A.	Privatdozent.	Heidelberg.
Kamp, H. v. d.	Professor.	Middelburg.
Kapteyn, W.	Professor.	Utrecht.
Keller, H.	Dr.	Heidelberg.

Namen	Stand	Wohnort
Kemlein, G.	Gymnasialprofessor.	Ludwigshafen a. Rh.
Kempe, A.	Professor.	Rotterdam.
Kiepert, L.	Professor.	Hannover.
Klein, F.	Professor.	Göttingen.
Klug, L.	Professor.	Klausenburg.
Kneser, A.	Professor.	Berlin.
Knoblauch, J.	Professor.	Berlin.
Kobald, E.	Professor.	Leoben.
Köbe, P.	cand. math.	Berlin.
Köhler, C.	Professor.	Heidelberg.
Kölmel, F.	Professor.	Baden-Baden.
König, J.	Professor.	Budapest.
Königsberger, L.	Professor.	Heidelberg.
Frau Königsberger.		
Frl. Königsberger.		
Köster, G.	Buchhändler.	Heidelberg.
Kollros, L.	Professor.	La Chaux de Fonds.
Kolossoff, C.	Professor.	Dorpat.
Krall, J. H.	Stadtrat.	Heidelberg.
Krause, M.	Professor.	Dresden.
Frau Krause.		
Krazer, A.	Professor.	Karlsruhe.
Krieger.	Stadtrat.	Heidelberg.
Kriemler, K.	Privatdozent.	Karlsruhe.
Kürschak, J.	Professor.	Budapest.
Frau Kürschak.		
Kuhse, F.	cand. math.	Wismar.
Frl. Kuhse.		
Kwietniewski, St.	Dr.	Warschau.
Laisant, C. A.	Dr.	Paris.
Lamey.	Hauptmann.	Heidelberg.
Lampe, E.	Professor.	Berlin.
Frau Lampe.		
Lancelin, F.	Astronom.	Paris.
Landau, E.	Privatdozent.	Berlin.
Landsberg, G.	Professor.	Heidelberg.
Larsen, O.	Dr.	Aarhus.
Frau Larsen.		

Namen	Stand	Wohnort
Laub, J.	stud. math.	Göttingen.
Lebeuf, A.	Professor.	Besançon.
Levi-Cività, T.	Professor.	Padua.
Levi-Cività.		
Lewent, L.	cand. prob.	Berlin.
Lez, H.		Lorrez-le-Bocage.
Liebmann, H.	Privatdozent.	Leipzig.
Lilienthal, R. v.	Professor.	Münster.
Lindelöf, L.	Staatsrat.	Helsingfors.
Frl. Esther Lindelöf.		
Frl. Thyra Lindelöf.		
Lindelöf, E.	Professor.	Helsingfors.
Linnemann, M.	cand. astr.	Göttingen.
Loewy, A.	Professor.	Freiburg i. B.
London, F.	Professor.	Breslau.
Loria, G.	Professor.	Genua.
Ludwig, W.	Privatdozent.	Karlsruhe.
Lüroth, J.*)	Professor.	Freiburg.
Macaulay, F. S.	Professor.	London.
Macfarlane, A.	Professor.	Chatham.
Majcen, G.	Professor.	Agram.
Mantell, L.	étud. en Math.	Paris.
Marschall, Frh. v.	Ministerialdirektor.	Karlsruhe.
Martin, A.		Washington.
Maurer, R.	Professor.	Eberbach.
Maximova, E.	Gymnasiallehrerin.	Ustüschna.
Mayer, A.	Professor.	Leipzig.
Mehmke, R.	Professor.	Stuttgart.
Menzel.	Dr.	Höxter.
Merlin, E.	Professor.	Brüssel.
Mestschersky, J.	Professor.	St. Petersburg.
Meyer, F.**)	Professor.	Königsberg i. P.
Minkowski, H.	Professor.	Göttingen.
Frau Minkowski.		
Mirimanoff, D.	Privatdozent.	Genf.
Mittag-Leffler, G.	Professor.	Stockholm.

*) Vertreter der Universität Freiburg i. B.

**) Vertreter der Universität Königsberg i. P.

Namen	Stand	Wohnort
Miwa, K.*)	Professor.	Kyoto.
Molk, J.	Professor.	Nancy.
Frau Molk.		
Mollerup, J.	Dr.	Kopenhagen.
Morera, G.	Professor.	Turin.
Morley, F.	Professor.	Baltimore.
Müller, C.	Dr.	Göttingen.
Müller, Emil.	Professor.	Wien.
Müller, Eugen.	Professor.	Konstanz.
Müller, H.	Dr.	Göttingen.
Müller, R.	Professor.	Berlin.
Munnik, F. de.	Professor.	Utrecht.
Naetsch, E.	Professor.	Dresden.
Nakagawa, S.	Dr.	Tokio.
Nalenz.	Feldmesser.	Köln.
Netto, E.	Professor.	Gießen.
Noether, M.	Professor.	Erlangen.
Frau Noether.		
Oß, S. L. van.	Professor.	Zalt-Bommel.
Pahl, F.	Professor.	Charlottenburg.
Painlevé, P.	Professor.	Paris.
Papperitz, E.	Professor.	Freiberg i. S.
Pcheborsky, A.	Privatdozent.	Charkow.
Perlewitz.	Dr.	Hamburg.
Perrin, E.	Professor.	Paris.
Reibel, Ch.		
Perron, O.	Dr.	Frankenthal.
Petersen, L.	Adjunkt.	Horsens.
Frau Petersen.		
Pfeiffer, G. F.	Privatdozent.	Kiew.
Phragmen, E.	Professor.	Stockholm.
Plamenewsky, H.	Dr.	Tiflis.
Poliakoff, A.	Magistrand.	Moskau.

*) Vertreter der japanischen Regierung.

Namen	Stand	Wohnort
Prandtl, L.	Professor.	Hannover.
Probst, F.	Dr.	Potsdam.
Pund, O.	Oberlehrer.	Hamburg.
Quelle, R.	Verlagsbuchhändler.	Leipzig.
Reuschle, C.	Professor.	Stuttgart.
Reye, Th.	Professor.	Straßburg i. E.
Roe, E. D.	Professor.	Syracuse.
Rohn, K.	Professor.	Dresden.
Rost, G.	Professor.	Würzburg.
Runge, K.	Professor.	Hannover.
Salkowski, E.	Dr.	Berlin.
Schafstein, K.	Dr.	Göttingen.
Schatunowsky, S.	Lehrer.	Odessa.
Scheffers, G.	Professor.	Darmstadt.
Frau Scheffers.		
Schilling, F.	Professor.	Danzig.
Frau Schilling.		
Schimmack, R.	Assistent.	Göttingen.
Frau Schimmack.		
Schlesinger, L.	Professor.	Klausenburg.
Schlink, W.	Privatdozent.	Darmstadt.
Schmid, Th.	Professor.	Wien.
Schnarrenberger, C.	Dr.	Heidelberg.
Schnöckel, J.	Landmesser.	Aachen.
Schönflies, A.	Professor.	Königsberg i. P.
Frau Schönflies.		
Schotten, H.	Gymnasialdirektor.	Halle.
Schoute, P. H.	Professor.	Groningen.
Schubert, H.	Professor.	Hamburg.
Schütte, Fr.	Oberlehrer.	Düren.
Schumpelick, A.	Oberlehrer.	Hamburg.
Schur, F.	Professor.	Karlsruhe.
Schur, I.	Privatdozent.	Berlin.
Schwacha, B.	Gymnasialdirektor.	Wilhering.

Namen	Stand	Wohnort
Schwarz, H. A.*)	Professor.	Berlin.
Schwering, K.	Gymnasialdirektor.	Köln.
Segel, M.	Professor.	Riga.
Segre, C.	Professor.	Turin.
Seliwanoff, D.	Professor.	St. Petersburg.
Shilow, M.	Rechnerin an der Sternwarte.	Pulkowa.
Simon, F.	Gymnasialdirektor.	Szaszvaros.
Simon, M.	Professor.	Straßburg i. E.
Frl. Simon.		
Sixtel, W.	Direktor.	Orenburg.
Smith, D.	Professor.	New-York.
Frau Smith.		
Smith, O. A.	cand. mag.	Kopenhagen.
Frau Smith.		
Sommer, J.	Professor.	Danzig.
Sommerfeld, A.	Professor.	Aachen.
Sourek, A. v.**)	Professor.	Sofia.
Souslow, G.	Professor.	Kiew.
Spieß, O.	Privatdozent.	Basel.
Stäckel, P.	Professor.	Kiel.
Stanewitsch, W.	Dr.	St. Petersburg.
Steinitz, E.	Professor.	Berlin.
Stephanos, K.	Professor.	Athen.
Sterneck, D. v.	Professor.	Czernowicz.
Study, E.	Professor.	Bonn.
Stuyvaert, M.	Professor.	Gent.
Suppantschitsch, R.	Professor.	Lichtenwald.
Suter, H.	Professor.	Kilchberg bei Zürich.
Tannery, P.	Directeur des Manufactures de l'Etat.	Pantin, Paris.
Frau Tannery.		
Thieme, H.	Professor.	Posen.
Timtschenko, J.	Privatdozent.	Odessa.
Frau Timtschenko.		
Titov, B.	Assistent am technischen Institut.	Tomsk.
Frau Titov.		

*) Vertreter der Universität und der Akademie der Wiss. zu Berlin.

**) Vertreter des bulgarischen Unterrichtsministeriums.

Namen	Stand	Wohnort
Tötössy, B. v.	Professor.	Budapest.
Treiber, G.	Professor.	Plankstadt.
Tyler, H. W.	Professor.	Boston.
Ullrich, E.	Professor.	Heidelberg.
Frau Ullrich.		
Vacca, G.	Professor.	Genua.
Vailati, G.	Professor.	Como.
Valentiner, H.	Direktor.	Kopenhagen.
Frau Valentiner.		
Valentiner, W.	Professor.	Heidelberg.
Vleck, J. M. van.	Professor.	Middletown.
Frl. Jenny v. Vleck.		
Frl. Klara v. Vleck.		
Volterra, V.	Professor.	Rom.
Frau Volterra.		
Voronoï, G.	Professor.	Warschau.
Walz.	Bürgermeister.	Heidelberg.
Wassiljef, A.	Professor.	Kasan.
Weber, E. v.	Professor.	München.
Weber, H.	Professor.	Straßburg.
Frl. Anna Weber.		
Frl. Mila Weber.		
Frl. Helene Bauer.		
Weber, R. H.	Privatdozent.	Heidelberg.
Weingarten, J.	Professor.	Freiburg i. B.
Weinmeister, J. Ph.	Professor.	Tharandt.
Frau Weinmeister.		
Weiß, F.	Oberlehrer.	Großlichterfelde.
Frau Weiß.		
Westfall, W. D. A.	stud. math.	Port Jervis.
Wieland.	Bürgermeister.	Heidelberg.
Wieleitner, H.	Gymnasiallehrer.	Speyer.
Wiener, H.	Professor.	Darmstadt.
Wilckens.	Oberbürgermeister.	Heidelberg.
Wilczynski, E.	Professor.	Berkeley.
Wild, J.	Professor.	St. Gallen.

Namen	Stand	Wohnort
Wilson, E. B.*)	Instruktor.	New Haven.
Wilson, R. E.	stud. math.	Göttingen.
Wiman, A.	Professor.	Upsala.
Wirth, J.	Lehramtspraktikant.	Freiburg i. B.
Wirtinger, W.	Professor.	Wien.
Wölffing, E.	Professor.	Stuttgart.
Wolf, M.	Professor.	Heidelberg.
Frau Wolf.		
Wolkow, A.	Magister.	Moskau.
Woronetz, P.	Professor.	Kiew.
Wulkow, H.	Privatgelehrter.	München.
Zahler, R.	Dr.	Türkheim.
Zaremba, St.	Professor.	Krakau.
Zermelo, E.	Privatdozent.	Göttingen.
Zeuthen, H. G.	Professor.	Kopenhagen.
Zindler, K.	Professor.	Innsbruck.
Zühlke, P.	Oberlehrer.	Charlottenburg.

*) Vertreter der Yale-Universität zu New Haven.

Nach Ländern geordnet ergibt diese Teilnehmerliste die folgende Gruppierung:

Land	Hauptkarten	Nebenkarten
Deutsches Reich	173	31
Rußland	30	4
Österreich-Ungarn	25	3
Frankreich	24	5
Vereinigte Staaten von Nordamerika	15	4
Dänemark	13	8
Italien	12	2
Schweiz	12	1
Schweden und Norwegen	8	1
Großbritannien	7	1
Niederlande	6	—
Belgien	2	—
Japan	2	—
Rumänien	2	—
Argentinien	1	—
Bulgarien	1	—
Canada	1	—
Griechenland	1	—
Spanien	1	—
	336	60

Im ganzen waren also 19 Länder durch 396 Personen vertreten.

D. Verlauf des Kongresses.

Montag, den 8. August.

Nachdem schon im Laufe des Nachmittags die bis dahin eingetroffenen Kongreßteilnehmer sich auf eine Aufforderung im Tageblatt hin im Café Imperial zusammengefunden hatten, begann der offizielle Teil des Kongresses abends 8 Uhr mit dem Empfang der Kongreßteilnehmer in der Stadthalle. Der Saal füllte sich rasch mit Gästen aus aller Herren Ländern. Um $\frac{1}{2}$10 Uhr begrüßte Cantor-Heidelberg als Vorsitzender des Lokalausschusses die Erschienenen und hieß sie in Heidelberg herzlich willkommen. Weitere Reden wurden nicht gehalten; der Abend war nur dazu bestimmt, den Kongreßteilnehmern Gelegenheit zu geben sich gegenseitig kennen zu lernen, den schon Bekannten sich zu begrüßen.

Dienstag den 9. August.

Gegen $\frac{3}{4}$10 Uhr vormittags fuhr Seine Königliche Hoheit der Erbgroßherzog, der kurz zuvor in Heidelberg eingetroffen und von den Spitzen der staatlichen und städtischen Behörden am Bahnhofe empfangen worden war, mit seiner Begleitung an dem jetzt Universitätszwecken dienenden Museumsgebäude vor, wo er von dem Vorsitzenden und dem Schriftführer des Kongresses empfangen und zu dem großen Saale, in welchem die erste allgemeine Sitzung stattfinden sollte, hinaufgeleitet wurde. Dort hatten sich die Kongreßteilnehmer bereits vollzählig eingefunden und brachten dem eintretenden Erbgroßherzog eine lebhafte Ovation. Nachdem Dieser Sich die Mitglieder des Ausschusses hatte vorstellen lassen, eröffnete Weber-Straßburg den Kongreß mit folgender Rede:

Seine Königliche Hoheit der Erbgroßherzog Friedrich von Baden hat die Gnade gehabt, das Ehrenpräsidium des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses zu übernehmen, und hat mich zu beauftragen geruht den Kongreß zu eröffnen. So rufe ich allen, die Sie unserer Einladung gefolgt sind, ein herzliches Willkommen zu.

Zum drittenmal haben sich die Mathematiker aller Länder zu gemeinsamer Arbeit zusammengefunden, und da drängt sich die Frage auf: Was hat uns zusammengeführt? Was haben wir erreicht und was hoffen wir noch zu erreichen?

Es ist in der Mathematik nicht anders als in allen anderen Gebieten der Kultur. Man hat erkannt, daß mehr zu gewinnen ist durch gemeinsame Arbeit der Gleichstrebenden, als wenn jeder seinen eigenen Weg geht. Man hat eingesehen, daß auch die Wissenschaft die Aufgabe hat, mit dem Leben in Berührung zu bleiben, daß der einzelne nicht für sich steht, sondern seine Arbeit der Gesamtheit schuldig ist. Wenn auch auf wissenschaftlichem Gebiete jeder bedeutsame Fortschritt zunächst die Tat eines einzelnen erleuchteten Geistes ist, so soll doch der große Strom nicht in lauter kleine Rinnsale auseinanderlaufen.

Darum bedarf die Wissenschaft neben der immer mehr in die Tiefe gehenden Einzelforschung einer zusammenfassenden Tätigkeit, in der sie sich ihrer Stellung und Aufgabe im ganzen Organismus unseres Kulturlebens bewußt wird. Solche Zeiten der Sammlung sind zugleich die Zeiten reichsten wissenschaftlichen Lebens, wo jede Tätigkeit die andere anregt und fördert. So waren die Tage von Newton und Leibniz. Und so war es an der Wende des 18. und 19. Jahrhunderts, wo von Frankreich die große geistige Bewegung ausging, als neben der reichsten wissenschaftlichen Produktion jene klassischen Lehrwerke entstanden, die wir noch heute bewundern. Ob wir jetzt wieder in einer solchen Periode stehen und welche Frucht der Wissenschaft daraus erwächst, das wird erst die kommende Zeit beurteilen können. Wir aber erfüllen unsere Pflicht, wenn jeder einzelne sein Bestes tut, und wenn wir uns in neidlosem Zusammenarbeiten die Hand reichen.

Gestatten Sie mir, einen flüchtigen Blick auf die Schicksale unserer Wissenschaft während der seit unserem ersten Kongreß verflossenen Jahre zu werfen. Gar viele, zu denen wir damals noch in Verehrung als zu unseren Meistern aufblickten, sind nicht mehr unter den Lebenden. Manchem von uns ist der eine oder andere von ihnen mehr als Lehrer, er ist ihm Freund und Vater gewesen. Es drängt mich, an dieser Stelle ihnen einige Worte dankbaren Andenkens zu widmen.

Wir beklagen zunächst unseren Karl Weierstraß, der im Jahr 1897 hochbetagt von uns geschieden ist, betrauert von zahlreichen Schülern und Freunden. Er hat der funktionentheoretischen Forschung auf lange hinaus die Richtung gegeben. Er hat unablässig auf die Punkte hingewiesen, wo die Grundlagen der Mathematik nicht sicher genug erschienen, und hat mit Glück und Scharfsinn an der Befestigung dieser Fundamente gearbeitet. Der Einfluß seiner mächtigen und liebenswürdigen Persönlichkeit hat unauslöschliche Spuren bei uns, die wir ihn gekannt haben, zurückgelassen, und weit über die Grenzen seines Vaterlandes hinaus geht seine Wirksamkeit. Sind es doch heutzutage nicht minder als Deutschland die außerdeutschen Länder, die die Weierstraßsche Funktionentheorie weiterbilden.

Ich gedenke sodann mit Wehmut eines Mannes, der jedem, der mit ihm in Berührung zu kommen das Glück hatte, unvergeßlich ist, Charles Hermite, der im Jahr 1901 aus dem irdischen Leben abgerufen wurde. Seine wissenschaftliche Größe auch nur flüchtig zu berühren gestattet mir die Enge dieser Stunde nicht. Aber gedenken darf ich des warmherzigen bescheidenen Mannes ohne Falsch, der für jedes wissenschaftliche Streben, von welcher Seite es auch kommen mochte, selbstlose Anerkennung hatte, der jedem aus dem Reichtum seines Geistes freigebig mitteilte und jedes aufstrebende Talent durch Anregung und Aufmunterung förderte. Unvergeßlich sind mir die Stunden, die ich vor achtzehn Jahren hier mit ihm verleben durfte, da er der Universität Heidelberg zu ihrem großen Jubelfeste die Glückwünsche der Pariser Akademie überbrachte.

England hat im Jahr 1897 durch den Tod des 83jährigen Sylvester einen herben Verlust erlitten. Wenn er auch das ganze weite Gebiet der Mathematik nicht so allseitig beherrschte und bebaute, wie sein jüngerer größerer Landsmann und vertrauter Arbeitsgenosse Arthur Cayley, der ihm zwei Jahre früher im Tode vorangegangen war, so sind seine originellen Ideen und eigenartigen Methoden, sein genialer Blick, der die Resultate vorausahnte und die Wege zu ihnen bahnte, für die Algebra und Zahlentheorie von unvergänglichem Werte. Auch der dritte in dem Bunde der großen englischen Algebraiker des 19. Jahrhunderts, George Salmon, der Meister in der Anwendung der Algebra auf die Geometrie, ist vor kurzem aus dem Leben gegangen.

Ich gedenke ferner des jung verstorbenen Sophus Lie, der, geistesverwandt seinem großen Landsmann Abel, in der modernen Gruppentheorie neue Wege geöffnet hat, der den besten Teil seines Lebens bei uns in Deutschland gewirkt hat, den aber dann, schon erkrankt, die Liebe des Nordländers zur Heimat nach Norwegen zurückgeführt hat, wo er ein frühes Grab fand.

Auch Brioschi, der als verehrter Senior den Mittelpunkt unseres ersten Kongresses bildete, ist kurze Zeit darauf aus dem Leben geschieden. Was die moderne Algebra ihm verdankt, wie er die von Gauß, Abel, Galois ausgehenden neuen Gedanken weiter bildete und dem Verständnis zugänglich machte, ist in frischem Andenken bei den Zeitgenossen. Unvergessen ist aber auch in seinem Vaterlande seine

Tätigkeit als Staatsmann, die Verdienste, die er sich in dem neuerstandenen Königreich Italien um die Hebung des Unterrichtswesens und auf anderen Gebieten der Staatsverwaltung erworben hat.

Und als wir die Vorbereitungen zu diesem unserem dritten Kongresse ins Werk setzten, da hatten wir die Hoffnung, den Mitbegründer der neueren Geometrie, den großen Mathematiker und tapferen Patrioten, dem das heutige Italien so viel verdankt, Luigi Cremona hier zu begrüßen und vielleicht sprechen zu hören. Vor wenigen Monaten hat der Tod auch diesem tatenreichen Leben ein Ende gemacht.

Lassen Sie mich auch dem Andenken an Erwin Bruno Christoffel einige Worte widmen, der im Jahre 1900 unter schweren körperlichen Leiden sein einsames Leben beschloß. Wer den stattlichen und interessanten Mann gekannt hat, bewahrt das Bild einer ungewöhnlichen und bedeutenden Persönlichkeit. In der Wissenschaft und wo er als Lehrer gewirkt hat, in Zürich, in Berlin, in Straßburg hat er tiefe Spuren hinterlassen. Der deutschen Universität Straßburg hat er von ihrer Begründung an durch mehr als 20 Jahre als eines ihrer hervorragendsten Mitglieder angehört, bis ihn die Beschwerden des Alters zwangen, der Lehrtätigkeit zu entsagen.

Endlich kann ich — gerade in Heidelberg — nicht an dem Andenken eines Mannes mit Stillschweigen vorübergehen, Lazarus Fuchs. Mit Freuden hat er noch die Nachricht begrüßt, daß gerade hier auf dem ihm zur zweiten Heimat gewordenen Boden sich die Mathematiker versammeln sollten. Aber er selbst durfte es nicht mehr erleben. In seinen Arbeiten zur Theorie der Differentialgleichungen hat er sich ein unvergängliches Denkmal gesetzt.

Es ist damit die Liste derer noch lange nicht erschöpft, die in den letzten Jahren aus dem wissenschaftlichen Schaffen abgerufen sind. Ich kann sie nicht alle erwähnen und ich bitte, es nicht als ein Zeichen minderer Schätzung zu betrachten, wenn ich von den übrigen nicht spreche.

Ich muß gestehen, als ich begann, mir aus Anlaß des bevorstehenden Kongresses die Geschichte der Wissenschaft der letzten Jahre ins Gedächtnis zurückzurufen, da hatte ich zuerst den Eindruck, als ob ich nur an Gräbern der Vergangenheit stehe; eine so reiche Ernte hat der Tod gehalten.

Ein anderes Bild aber zeigt sich mir, wenn ich die Arbeiten und Erfolge unserer heutigen Wissenschaft betrachte. Hier ist überall frisches Leben. Nirgends ist Stillstand. Die Gedanken und Anregungen der vergangenen Periode sind auf allen Gebieten weiter verfolgt. Neue Fragen sind gestellt, neue Forschungsgebiete erschlossen. Diesem Eindruck eines stetigen Fortschrittes kann sich niemand entziehen, der auf ein geraumes Stück Geschichte der Wissenschaft in eigener Erinnerung zurückblickt.

Fragen, die in unseren Jugendjahren im Vordergrund des Interesses standen, treten zurück, teils weil sie als definitiv beantwortet gelten, teils weil sich die Forschung neuen Fragen zugewandt hat.

Eine nicht lange hinter uns liegende Zeit hat mit Meisterschaft die formale Seite der Mathematik gepflegt, ihre Methoden zu einem schön gerundeten Ganzen gestaltet, dessen wir uns noch jetzt erfreuen, wenn auch die gegenwärtige Generation nicht mehr in dem Maße das entscheidende Gewicht darauf legt.

Von großem Einfluß auf die Fortbildung unserer Wissenschaft ist die durchgreifende Umgestaltung der Physik gewesen, die, teils durch die Entdeckung neuer Tatsachen, teils aber auch durch eine veränderte Anschauung über das Wesen von Kraft und Materie, in unseren Tagen einen mächtigen Aufschwung genommen hat. Die Folgerungen aus diesen neuen Anschauungen zu sichern ist eine Aufgabe der Mathematik, der die alten Hilfsmittel nicht immer gewachsen waren.

Es ist wohl mehr ein Zukunftsbild, wenn ich auf eine Entwicklung der Analysis hinweise, deren Ansätze sich wohl hie und da — besonders bei englischen Forschern — erkennen lassen, die unter Verzicht auf die mathematische Schärfe der Begriffe den Bedürfnissen der Physik genügt, indem sie mit den unserer Wahrnehmung der Außenwelt anhaftenden unscharfen Grenzen und allmählichen Übergängen rechnet. In dem gleichen Sinne wirken die Anforderungen, die die moderne Technik an unsere Wissenschaft stellt.

Daß hierdurch eine Menge neuer Gedanken in Bewegung gesetzt werden, die nach Klärung und Weiterbildung ringen, gibt unserer Wissenschaft frisches reges Leben.

Auf der anderen Seite stehen die abstrakten Zweige der Wissenschaft, die sich — nach einem drastischen Ausdruck von Dirichlet — noch mit keiner Anwendung befleckt haben, im Ernst gesprochen, in denen die Reinheit der mathematischen Idee Selbstzweck ist. In der Tat ist es der Natur der Sache nach unmöglich, daß Fragen wie die nach der Quadratur des Kreises oder der Dreiteilung des Winkels jemals irgend welche praktische Bedeutung erlangen. Gleichwohl haben gerade solche Fragen, soweit die historische Überlieferung zurückreicht, das wissenschaftliche Denken unausgesetzt und intensiv beschäftigt, und für die Entwicklung des mathematischen Geistes sind sie von der allergrößten Bedeutung gewesen.

Hier geht durch die ganze Geschichte der Wissenschaft ein Zug stetigen Zusammenhanges, der im 19. Jahrhundert durch die glänzenden Namen von Gauß, Lagrange, Abel gekennzeichnet ist. Auch unsere Zeit hat auf diesem Gebiete manches alte Problem gelöst und den Ausblick auf neue geöffnet. So ist uns die Quadratur des Kreises heute eine abgetane Sache, und Algebra und Zahlentheorie haben sich zu einem Ganzen vereinigt, in dem die Harmonie und Gesetzmäßigkeit des Zahlenreiches immer schöner hervorleuchtet.

Wohl kaum hat es eine Zeit gegeben, da der philosophische Teil unserer Wissenschaft, die Frage nach dem letzten Grunde unserer mathematischen Überzeugung ein so allgemeines Interesse in Anspruch nahm, wie jetzt. Diese uralten Fragen sind wieder in Fluß gebracht durch die Untersuchungen von Gauß, Riemann, Helmholtz, und sind in unseren Tagen von einer neuen Seite angegriffen worden. Und wenn dadurch der naive Glaube an die Voraussetzungslosigkeit unserer Wissenschaft erschüttert ist, so hat sich dagegen gezeigt, daß wir ebenso wie nach oben an dem Weiterbau der Wissenschaft, nach unten an dem Suchen nach den Wurzeln und letzten Gründen ein Ziel haben, dem wir uns zwar nähern, das wir aber niemals ganz erreichen werden.

Eine große Rolle spielen heutzutage endlich die pädagogischen Fragen. Das vielgestaltige Leben unserer Zeit hat auch dem Jugendunterricht neue Aufgaben gestellt. Der Stoff hat sich erweitert und die Frage drängt sich auf, wie es zu vereinigen ist, der Jugend die Summe der fürs Leben notwendigen Kenntnisse und Fertigkeiten beizubringen, ohne doch die harmonische Ausbildung des Geistes zur vollen Humanität preiszugeben. Und auf der Stufe des Hochschul-Unterrichts handelt es sich gleichfalls darum, die Gymnastik des Geistes, die durch die strenge Disziplin des mathematischen Denkens gewonnen wird, ohne Überlastung mit den Anforderungen des Fachstudiums zu vereinigen.

Es wird die Aufgabe unseres Kongresses sein, von dem gesamten Leben unserer Wissenschaft und von ihrem gegenwärtigen Stande Rechenschaft zu geben. Wir waren bemüht, in den Sektionen und in den allgemeinen Versammlungen für jeden Zweig unserer Wissenschaft charakteristische Proben zu geben, und wir haben bereitwilliges Entgegenkommen gefunden, für das ich schon jetzt Dank sage.

Aber wir haben noch eine Aufgabe der Pietät zu erfüllen. Vor zwei Jahren haben wir das hundertjährige Geburtsjubiläum von Niels Henrik Abel unter herzerfreuender Gastfreundschaft seines Heimatlandes Norwegen glänzend gefeiert. Zwei Jahre später als Abel ist sein Nebenbuhler und Mitstreiter Jacobi geboren. Es fällt also in das Jahr unseres Kongresses der hundertste Geburtstag dieses großen

Mathematikers. Seinem Gedächtnis gilt in erster Linie der heutige Eröffnungstag unseres Kongresses.

Hiermit erkläre ich den dritten internationalen Mathematiker-Kongreß für eröffnet.

Nach Beendigung dieser Rede sprach Seine Königliche Hoheit der Erbgroßherzog den Kongreßteilnehmern in herzlichen Worten Seinen und Seines Hohen Vaters Willkommengruß aus, welchen Weber mit einigen Worten des Dankes erwiderte. Hierauf begrüßten den Kongreß Ministerialdirektor Freiherr v. Marschall im Namen der badischen Regierung, Prorektor Professor Braune im Namen der Universität Heidelberg und der beiden anderen Hochschulen Badens und Oberbürgermeister Dr. Wilckens im Namen der Stadt Heidelberg. Nachdem sodann der Schriftführer ein Begrüßungstelegramm des Preußischen Kultusministers verlesen und der Vorsitzende auf die stattgefundenen Begrüßungen gedankt hatte, ergriff Königsberger-Heidelberg das Wort, um die Gedächtnisrede auf Jacobi zu halten.

Nach dieser Rede erhob sich Schwarz-Berlin zu folgender Ansprache:

Es ist mir die hohe Ehre zuteil geworden, im Namen der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften, sowie im Namen von Rektor und Senat der Königlichen Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin, zugleich auch im Namen des hier anwesenden Vertreters der Königlichen Albertus-Universität zu Königsberg in Preußen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung den Dank auszusprechen für die Einladung zur Teilnahme an der mit dem III. Internationalen Mathematiker-Kongreß verbundenen Jacobifeier.

Mit ungeteilter freudiger Zustimmung haben die genannten Körperschaften, zu denen Jacobi während seiner glänzenden akademischen Wirksamkeit in engster Beziehung stand, Kenntnis erhalten von dem Beschlusse der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, zu Ehren Jacobis eine Sonderfeier zu veranstalten.

Wenn auch unter gewöhnlichen Verhältnissen die drei Körperschaften, in deren Namen zu sprechen ich die Ehre habe, unbestritten das nächste Anrecht darauf gehabt haben würden, eine Feier zu Ehren Jacobis zu veranstalten, so ist mit dem Zeitpunkte, an welchem der Beschluß gefaßt wurde, den III. Internationalen Mathematiker-Kongreß auf deutschem Boden und zwar in Heidelberg abzuhalten, die Sachlage eine völlig andere geworden. Keiner der drei genannten Körperschaften würde es möglich gewesen sein, der Jacobifeier einen so unvergleichlich schönen Rahmen zu geben, wie ihn Heidelberg bietet; denn unter allen den schönen und schönsten Fleckchen Erde, welche unser deutsches Vaterland sein eigen nennt, gibt es nur ein Heidelberg!

Sicherlich wäre es auch schwer gewesen, außerhalb Heidelbergs einen Mann zu finden, der in gleicher Weise geeignet und geneigt gewesen wäre, mit gleich liebevoller Hingebung den Lebensumständen und den wissenschaftlichen Leistungen des großen Mathematikers nachzuforschen und sie mit solcher Kunst und Vollendung darzustellen, wie es der Herr Vorredner getan hat.

Dem mir erteilten Auftrage komme ich nach, wenn ich im Namen der genannten drei Körperschaften Euerer Königlichen Hoheit, der Deutschen Mathematiker-Vereinigung und allen Teilnehmern an dem III. Internationalen Mathematiker-Kongresse den Dank für die Ehrung ausspreche, welche Sie dem Andenken Jacobis durch die heutige Feier haben zuteil werden lassen.

Noch einen Auftrag habe ich zu erfüllen.

Die Preußische Akademie der Wissenschaften hat das Andenken Jacobis durch die Herausgabe seiner wissenschaftlichen Werke geehrt; sie hat aber noch eine andere Pflicht der Pietät dem großen Gelehrten gegenüber erfüllt.

Vor wenig Jahren erhielt ein Mitglied der Akademie von der damals noch lebenden hochbetagten Gattin des Verstorbenen die Mitteilung, daß eine Pflege des Jacobischen Grabes fernerhin nicht gestattet werden solle. Dies war für die Akademie die Veranlassung, sofort die erforderlichen Verhandlungen einzuleiten und mit Erfolg durchzuführen, um aus den Mitteln der Akademie die Grabstätte Jacobis für die Zeit zu erwerben, während der der Dreifaltigkeitskirchhof in Berlin, auf welchem die Grabstätte belegen ist (am Blücherplatz vor dem Hallischen Tore), überhaupt als Kirchhof bestehen bleiben wird.

Die Akademie hat die fernere Pflege des Jacobischen Grabes und des auf ihm errichteten Kreuzes übernommen und für eine passende, einfache aber würdige Einfriedigung desselben Sorge getragen.

Infolge des Beschlusses der physikalisch-mathematischen Klasse der Akademie bin ich beauftragt, die Grabstätte Jacobis in ihrem gegenwärtigen Zustande den Teilnehmern des Kongresses im photographischen Bilde vorzuführen.

Ich bin ferner beauftragt, das Bild selbst, nachdem die Kongreßteilnehmer es betrachtet haben werden, Herrn Geheimrat Koenigsberger, dem Biographen Jacobis, mit der Bitte zu übergeben, es dauernd in Besitz nehmen und ihm in seinem Hause einen Platz gewähren zu wollen.

Damit war das Programm der ersten allgemeinen Sitzung beendigt; Seine Königliche Hoheit der Erbgroßherzog verweilte noch längere Zeit im Saale, um sich eine größere Anzahl der anwesenden auswärtigen Kongreßmitglieder vorstellen zu lassen.

Nachmittags 4 Uhr erfolgte die Bildung der Sektionen, über deren Tätigkeit unten gesondert berichtet wird.

Abends 7 Uhr begann das Bankett in der Stadthalle, zu welchem wiederum Seine Königliche Hoheit der Erbgroßherzog erschien. Den Reigen der Toaste eröffnete der Vorsitzende, Weber-Straßburg, mit einem Toaste auf den Kaiser und den Großherzog und einer Begrüßung des Erbgroßherzogs, worauf Dieser mit einem Toaste auf die Staatsoberhäupter aller auf dem Kongreß vertretenen Länder antwortete. Es wurden hierauf folgende Huldigungstelegramme an den Kaiser und den Großherzog abgesandt:

An des Kaisers Majestät, Berlin.

Dem machtvollen Herrscher des Deutschen Reiches, dem unermüdlichen Schirmer des Friedens sendet der zum erstenmal auf deutschem Boden versammelte Internationale Mathematiker-Kongreß ehrerbietigste Huldigung.

Im Auftrage: Prof. Weber. Prof. Krazer.

An Seine Königliche Hoheit den Großherzog von Baden, St. Moritz-Bad.

Dem allverehrten Fürsten und Herrn des schönen Landes, dessen Gastfreundschaft wir genießen, dem warmherzigen Beschützer von Kunst und Wissenschaft huldigen wir in Verehrung und Dankbarkeit.

Die zum III. Internationalen Kongreß in Heidelberg versammelten Mathematiker.

Im Auftrage: Prof. Weber. Prof. Krazer.

Sodann sprach Klein-Göttingen den Dank der Deutschen Mathematiker-Vereinigung allen Behörden, die zum Zustandekommen des Kongresses mitgewirkt hatten, insbesondere der badischen Regierung aus, namens welcher Ministerialdirektor Freiherr v. Marschall mit einem Hoch auf die mathematische Wissenschaft erwiderte. Darauf begrüßte der Schriftführer im Namen der deutschen Mathematiker die ausländischen Kollegen; namens dieser dankte Geiser-Zürich, indem er auf die Verbrüderung der Nationen durch die Wissenschaft sein Glas leerte. Einen Toast von Nöther-Erlangen auf die Stadt Heidelberg erwiderte Bürgermeister Walz. Als letzter erhob sich endlich Heffter-Bonn zu einem mit lebhaftem Beifall aufgenommenen mathematischen

Damentoast. Gegen 10 Uhr verließ Seine Königliche Hoheit der Erbgroßherzog das Bankett, dessen Teilnehmer sich dann zu kleineren Gruppen vereinigten.

Mittwoch, den 10. August.

Den Vormittag füllten Sektionssitzungen aus. Für den Nachmittag hatte Seine Königliche Hoheit der Großherzog den Kongreß zu einem Empfang in den Schloßgarten nach Schwetzingen eingeladen, wohin zwei Sonderzüge um 4^{20} und 4^{30} Uhr die Gäste brachten. Kurz vor den Kongreßteilnehmern war in Vertretung Seines Hohen Vaters Seine Königliche Hoheit der Erbgroßherzog in Schwetzingen eingetroffen. Er erwartete die Gäste im Schloßgarten und nahm bis gegen 7 Uhr die Vorstellung aller Erschienenen entgegen. Während des Empfanges war im Garten Tee serviert worden. Später scharten sich die Kongreßteilnehmer vor den in der Orangerie aufgestellten Büffetts. Um 8 Uhr gingen die Gäste, nachdem noch Weber-Straßburg ein Hoch auf Seine Königliche Hoheit den Erbgroßherzog ausgebracht hatte, zum Bahnhof zurück, um mit den um 8^{10} und 8^{25} Uhr abgehenden Sonderzügen nach Heidelberg zurückzukehren.

Donnerstag, den 11. August.

Beim Beginn der in der Aula der Universität vormittags 10 Uhr stattfindenden 2. allgemeinen Sitzung verlas der Schriftführer zunächst die folgenden, tags zuvor eingetroffenen Antworttelegramme des Kaisers und des Großherzogs:

An den Mathematiker-Kongreß, Heidelberg.

Aus Swinemünde.

Seine Majestät der Kaiser und König lassen den Mitgliedern des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses, der zum erstenmal auf deutschem Boden sich versammelt hat, Seinen Kaiserlichen Gruß entbieten und für das Huldigungstelegramm Dank sagen. Den Arbeiten des Kongresses wünscht Seine Majestät besten Erfolg. Im Allerhöchsten Auftrag

v. Tschirsky, kgl. Gesandter.

An die Herren Professoren Weber und Krazer, Heidelberg.

Aus St. Moritz-Bad.

Ich ersuche Sie beide, den Mitgliedern des so hoch schätzbaren Mathematiker-Kongresses meinen wärmsten Dank zu übermitteln für die mir gewidmete, sehr freundliche Begrüßung und für den so werten Ausdruck Ihrer Gefühle. Ich bin sehr erfreut darüber, daß es der ehrwürdigen Ruperto-Carola vergönnt ist, einen so seltenen Kongreß in ihrer Mitte zu besitzen und ihm treue Gastfreundschaft zu bieten. Ich wünsche von Herzen, daß Sie alle Ihrem Aufenthalt in meinem Lande ein freundliches Andenken bewahren mögen.

Friedrich, Großherzog von Baden.

Hierauf überreichte Gutzmer-Jena die im Auftrage des Vorstandes von ihm verfaßte Geschichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung mit folgenden Worten:

Mehr als im allgemeinen andere Wissenschaften erfordert die Mathematik von ihren Jüngern ein Versenken in die Einsamkeit, um fern dem Getriebe des realen Lebens den Gesetzen von Maß und Zahl nachspüren zu können.

Aber neben den Fragen, die der Einzelne zu beantworten sucht, die vielleicht erst in seinem Kopfe zu Problemen geworden sind, gibt es auch in der Mathematik Aufgaben mannigfacher Art, die nur durch das Zusammenwirken der Mathematiker erledigt werden können.

Um den weiten Kreis dieser Aufgaben einigermaßen zu kennzeichnen, sei nur an die wichtige Frage der zweckmäßigen Gestaltung des Unterrichts erinnert, an die Frage einer angemessenen Formulierung der Prüfungsordnungen, an die Berücksichtigung der Anwendungen der Mathematik auf die Probleme des Lebens, auf Astronomie, Geodäsie und Physik und — last aber gewiß nicht least — auf die Technik. Es sei ferner hingewiesen auf die besondere Wichtigkeit, welche z. B. auch für den Einzelforscher die Referate und Encyklopädien besitzen, die nur von einer Gemeinschaft von Fachgenossen hergestellt werden können.

So gewiß es ist und bleiben wird, daß die großen Fortschritte der Mathematik durch die Entdeckungen einzelner bevorzugter Forscher herbeigeführt werden, so sicher kann behauptet werden, daß es stets Fragen gibt, die eine Kooperation voraussetzen, und daß es Zeiten gibt, wo die Erledigung dieser Fragen von ebenso großer Bedeutung ist als die Entdeckung des einen oder anderen Theorems.

In einer solchen Zeit scheinen wir jetzt zu leben. Überall, in England, in Frankreich, in Amerika, in Deutschland sind wichtige Fragen dieser Art zur Erledigung gebracht worden oder harren ihrer baldigen Lösung.

In Deutschland hat die Deutsche Mathematiker-Vereinigung den bezeichneten Kreis von Fragen mit unausgesetzter Aufmerksamkeit verfolgt und an deren Lösung und Klärung mitgewirkt. Es erschien als ein Bedürfnis, von der Tätigkeit der Vereinigung Rechenschaft abzulegen. Das ist in einer kleinen Schrift geschehen, die ich im Auftrage des Vorstandes verfaßt habe. Ich möchte nicht verfehlen, allen den Herren meinen Dank auszusprechen, die mich durch Mitteilungen und Bemerkungen unterstützt haben, und dabei auch des Entgegenkommens der Verlagsbuchhandlung von B. G. Teubner in Leipzig dankbar zu gedenken.

Das anspruchslose Heft ist den Teilnehmern des gegenwärtigen Kongresses gewidmet, und ich schätze es mir zur besonderen Ehre, diese „Geschichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ gerade hier in Heidelberg, wo vor 15 Jahren auf Anregung von Georg Cantor der Plan zu ihrer Gründung nach außen hin bekannt gegeben wurde, angesichts einer illustren internationalen Versammlung Ihnen, hochgeehrter Herr Präsident, hiermit überreichen zu dürfen.

Nachdem Gutzmer geendigt hatte, überreichte Klein-Göttingen namens der Akademischen Kommission (in Vertretung ihres Vorsitzenden v. Dyck-München) den nunmehr fertiggestellten ersten Band der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Das Schlußheft des Bandes enthält außer einem allgemeinen einleitenden Bericht des Vorsitzenden und einem besonderen Vorwort des Herausgebers F. Meyer-Königsberg insbesondere ein von letzterem gearbeitetes ausführliches alphabetisches Autoren- und Sachregister. Der Vortragende dankt allen Mitarbeitern (deren hingebende Tätigkeit in erster Linie das Zustandekommen des Bandes ermöglichte), ferner F. Meyer, dessen Initiative der Plan der Encyklopädie anfänglich entsprungen ist und der nun auch zuerst die Genugtuung erlebt, einen abgeschlossenen Band vorlegen zu können, endlich auch noch der Verlagsbuchhandlung, welche ihre große Leistungsfähigkeit sozusagen unbeschränkt in den Dienst des Unternehmens gestellt hat. An den ferneren Bänden II—VI wird z. Z. gleichförmig weiter gearbeitet, so daß man ihrer Fertigstellung in absehbarer Zeit entgegensehen darf. Aber zugleich eröffnen sich bereits Perspektiven auf fernere Weiterführung des Unternehmens. Molk-Nancy wird sogleich das erste Heft einer französischen Ausgabe vorlegen, die unter Mitwirkung hervorragendster französischer Autoren zustande kommt und damit als zweite verbesserte Auflage der bisherigen Ausgabe erscheinen kann. Man darf hoffen, daß später wieder eine neue deutsche Ausgabe folgt, in der alles das viele Material an Berichtigungen und Vervollständigungen, welches bis dahin zusammengekommen sein wird, eingearbeitet werden soll. Die Redaktion der deutschen Ausgabe bittet die Mathematiker des In- und Auslandes schon jetzt ihr solches Material zukommen zu lassen.

Hierauf sprach Molk-Nancy unter Überreichung des ersten Heftes der von ihm herausgegebenen französischen Ausgabe der Encyklopädie folgendes:

J'ai l'honneur de vous présenter le premier fascicule de l'édition française de l'Encyclopédie des sciences mathématiques. Cette édition française vient s'adjoindre à l'édition allemande de la même Encyclopédie. Ce n'est pas une simple traduction: c'est un exposé, fait par des mathématiciens de langue française, des articles contenus dans l'édition allemande; ces articles sont complétés, mis à jour; le mode d'exposition est d'ailleurs entièrement conforme aux traditions françaises. Toutefois le caractère général de la première édition est conservé: l'édition française est publiée sous les auspices des mêmes Académies; un délégué de ces Académies en suit la publication; d'autre part, le rôle considérable joué, dans la réalisation de la conception même de l'Encyclopédie, par les rédacteurs des différents tomes de l'édition allemande est mis en évidence par la mention du nom de ces rédacteurs sur la page-titre de chacun des volumes de l'édition française.

Les noms des éditeurs de notre édition, B. G. Teubner à Leipzig et Gauthier-Villars à Paris sont universellement connus et chacun sait ce que la science mathématique leur doit. Leur devise commune est et sera: Viribus unitis.

Pour faciliter les recherches du lecteur, le titre de chaque article est reproduit, en tout ou en partie, de deux pages en deux pages; ce titre est encadré par le nom de l'auteur de l'article allemand et par celui de l'auteur de l'exposé français. Ces deux auteurs forment ainsi un complexe où la seconde unité, l'unité française, vient compléter la première unité, l'unité allemande. Il serait certes désirable que d'autres unités viennent s'adjoindre à ces deux unités pour donner encore davantage à l'Encyclopédie un caractère aussi universel que la Mathématique elle-même; cette adjonction est possible sans que rien ne soit changé à l'idée directrice imprimée à l'Encyclopédie par les rédacteurs de la première édition: notre édition française en fournira une première preuve tangible.

François Viète, notre maître à tous, écrivait, en tête d'un de ses principaux ouvrages:

„Je fais le mien autant que Dieu le permet

„Que chacun fasse le sien et la science accroîtra.

En nous donnant son concours dans le domaine qu'il a le plus approfondi, chacun de vous, Messieurs, peut contribuer à ce que l'Encyclopédie réponde de mieux en mieux aux besoins des mathématiciens et des ingénieurs contemporains. Et par celà même „la science accroîtra“.

Es folgten sodann die Vorträge von Painlevé-Paris: Le problème moderne de l'intégration des équations différentielles, und von Greenhill-London: The mathematical theory of the top (considered historically).

Nachmittags 4 Uhr wurde im Museumssaale durch Ansprachen von Gutzmer-Jena und Disteli-Straßburg die Ausstellung mathematischer Literatur und mathematischer Modelle und Apparate eröffnet.*) An diese Ansprachen schloß sich zunächst ein kurzer Vortrag von Runge-Hannover über die Leibnizsche Rechenmaschine, sodann Demonstrationen mit dem Zeißischen Epidiaskop und ein Vortrag mit Schattenbildern von Wiener-Darmstadt.

Um $^1/_2$7 Uhr stand ein Sonderzug zur Fahrt nach Schlierbach bereit, von wo die Fähre die Teilnehmer nach Ziegelhausen übersetzte. Um 8 Uhr ertönte dort das Signal zur Abfahrt und es fuhren die Kongreßteilnehmer in den von der Stadt Heidelberg gestellten Booten den Fluß hinunter zur Besichtigung der Schloßbeleuchtung und des sich daran anschließenden Feuerwerks. Gegen $^1/_2$10 Uhr legten die Boote an der Stadthalle an. Die Kongreßteilnehmer verließen unter Hochrufen auf die Stadt Heidelberg die Boote und blieben lebhaft bewegt von dem gesehenen, einzigartigen Schauspiele noch einige Stunden in zwangloser Unterhaltung beisammen.

Freitag, den 12. August.

Der Vormittag war, wie am Mittwoch, Sektionssitzungen gewidmet.

Nachmittags von $4^1/_2$ Uhr an fanden Vorträge und Demonstrationen in der Ausstellung statt und zwar:

I. Demonstration von Apparaten aus der optischen Werkstätte von Carl Zeiß in Jena; II. Demonstrationsvortrag von Wiener-Darmstadt über die Entwicklung geometrischer Formen; III. Vortrag und Demonstration von Schilling-Göttingen.

Abends $7^1/_2$ Uhr begann die zu Ehren der Kongreßmitglieder von der Deutschen Mathematiker-Vereinigung veranstaltete Abendunterhaltung in der Schloßrestauration. Das Programm des Abends bestand aus drei Teilen: einem musikalischen Teile, in welchem das städtische Orchester abwechselnd mit Männerchören des Heidelberger Sängerver-

*) Siehe den im III. Teil folgenden Bericht über die Ausstellung.

bandes eine Reihe von Musikstücken zum Vortrag brachte. Den zweiten Teil des Programmes bildete ein unterhalb der Scheffelterrasse abgebranntes Feuerwerk, eingeleitet durch eine Beleuchtung der Ostfassade des Schlosses. Um 10 Uhr folgte als dritter Teil ein allgemeiner Kommers unter dem Vorsitze von Schubert-Hamburg, der die Kongreßteilnehmer bis nach Mitternacht zusammenhielt.

Samstag, den 13. August.

Nach einer vormittags 9 Uhr stattgefundenen kurzen Sitzung des Ausschusses begann um $9\frac{1}{2}$ Uhr die Geschäftssitzung des Kongresses, deren Protokoll unten abgedruckt ist. An diese schloß sich unmittelbar die 3. allgemeine Sitzung mit den Vorträgen von Segre-Turin: La geometria d'oggidì e i suoi legami coll' analisi, und von Wirtinger-Wien: Riemanns Vorlesungen über die hypergeometrische Reihe und ihre Bedeutung. Hierauf verlas der Schriftführer folgendes, während der Sitzung eingelaufene Antworttelegramm Seiner Königlichen Hoheit des Erbgroßherzogs auf eine ihm während des gestrigen Abends telegraphisch übersandte Huldigung:

Herrn Professor Schubert, Heidelberg.

Aus Badenweiler.

Den Teilnehmern am III. Internationalen Mathematiker-Tag, die bei der gestern von der Deutschen Mathematiker-Vereinigung veranstalteten Abendunterhaltung meiner so freundlich gedachten, sage ich hierfür meinen verbindlichsten Dank. Es wird mir stets eine werte Erinnerung sein, die Herren persönlich haben begrüßen und am Beginn des Kongresses mich haben beteiligen zu können, dem ich den erfreulichsten und befriedigendsten Abschluß wünsche.

Friedrich, Erbgroßherzog von Baden.

Hierauf schloß Weber den Kongreß mit folgender Ansprache:

Wir nahen uns dem Schlusse des Kongresses und es liegt mir die angenehme Pflicht ob, allen denen zu danken, die zum Gelingen des Kongresses beigetragen haben. Zunächst also allen, die hierher gekommen sind, um an dem Kongreß teilzunehmen, die zum Teil sehr weite Reisen nicht gescheut haben, um sich hier mit uns zu wissenschaftlicher Arbeit zu' vereinigen; möchten sie alle befriedigt und mit schönen Eindrücken und Erinnerungen in ihre Heimat zurückkehren. Insbesondere habe ich aber auch aller derer zu gedenken, die uns durch materielle Unterstützung in den Stand gesetzt haben, Ihnen das zu bieten, was Sie hier gefunden haben.

Seitdem es feststand, daß der III. Internationale Mathematiker-Kongreß in Deutschland stattfinden sollte, hat sich der Vorstand unserer Vereinigung mit der Frage der Organisation beschäftigt. Es tauchte zuerst die Frage auf, in welcher Stadt des weiten Deutschen Reiches wir Sie empfangen sollten, und da hat die Erwägung, daß es in einer kleineren Stadt leichter sein würde, die Kollegen einander nahe zu bringen, als in der Großstadt, den Ausschlag gegeben, daß wir Sie nicht nach der Reichshauptstadt, sondern nach Heidelberg eingeladen haben, das für einen wissenschaftlichen Kongreß so außerordentlich günstige Bedingungen bietet.

Es beschäftigte uns sodann die Frage, die sich so leicht in irdischen Dingen dem kühnen Flug der Gedanken und Hoffnungen wie ein Bleigewicht anhaftet: woher nehmen wir die Mittel, um unsere Gäste würdig zu empfangen und ihnen alle die wissenschaftlichen und literarischen Gaben zu bieten, die wir im Sinne hatten. Aber auch hier blieben wir nicht lange in der Not stecken. Es hat uns auf die Kunde, daß sich der Kongreß in Heidelberg versammeln sollte, die badische Staatsregierung sofort einen Beitrag von 3000 M. zu ganz freier Verwendung in Aussicht gestellt, den der Landtag in dankenswerter Liberalität bewilligt hat. Es hat sodann Seine Majestät der Kaiser und König von Preußen aus seinem Dispositionsfond, mit besonderer Rücksicht auf die Jacobi-Feier und die damit im Zusammenhang stehende Publikation der Jacobi-Biographie, 5000 M. bewilligt, und die gleiche Summe ist von der Reichsregierung hinzugefügt worden. Ferner ist uns von der Teubnerschen Firma, der stets hilfsbereiten Freundin unserer Wissenschaft, ein Zuschuß von 2000 M. zu Teil geworden.

Mit so reichen Mitteln ausgestattet, konnten wir es wagen, ohne allzu ängstliche Sparsamkeit in die Vorbereitung einzutreten, und ich spreche allen, die in so freigebiger Weise dazu beigetragen haben, die finanzielle Grundlage des Kongresses zu sichern, den herzlichsten Dank aus. Es läßt sich natürlich in diesem Augenblick die finanzielle Lage noch nicht vollständig übersehen, aber wir können doch schon mit Sicherheit darauf rechnen, daß der Abschluß ein günstiger sein wird. Wir werden dem Vorstand der Deutschen Mathematiker-Vereinigung sobald als möglich genaue Rechnung ablegen.

Außerdem aber hat eine herzliche Gastfreundschaft dazu beigetragen, den Kongreß zu einem so schönen Feste zu gestalten. Mein Dank gilt in erster Linie Seiner Königlichen Hoheit dem Großherzog von Baden, der sein warmes Interesse an unserer Sache in so erhebender Weise zum Ausdruck gebracht hat, und Seinem durchlauchtigsten Sohne, dem Erbgroßherzog Friedrich, der uns in des Großherzogs

Namen empfangen und das Ehren-Präsidium unserer Eröffnungs-Sitzung übernommen hat. Wir alle waren von der hinreißenden Liebenswürdigkeit des edlen Fürsten bezaubert.

Ich danke sodann auch der Stadt Heidelberg, die durch Entsendung von Vertretern zu den Vorarbeiten des Ausschusses von Anfang an ihr Interssse an unserer Versammlung betätigt und uns jetzt eine so gastliche Aufnahme bereitet hat.

Sodann danke ich Seiner Magnifizenz dem Prorektor der Universität, der uns in den Räumen der Universität ein Obdach gewährt und uns durch seine Gegenwart bei den Sitzungen geehrt hat. In dem schönen neuen Saale der Universität hat die so lehrreiche Ausstellung der mathematischen Literatur, der Modelle und Apparate, deren Gelingen wir dem opferwilligen Zusammenwirken der Aussteller und unseres Komitees verdanken, eine würdige Stätte gefunden.

Nicht zum wenigsten gilt aber mein Dank allen denen, die durch Vorträge in den allgemeinen und in den Sektionssitzungen oder durch Demonstrationen in der Ausstellung dem Kongresse seinen wissenschaftlichen Inhalt gegeben haben, endlich auch allen denen, die in verborgener und bescheidener Arbeit in den verschiedenen Ausschüssen das komplizierte Räderwerk im Gange erhalten haben.

Ihnen allen aber rufe ich ein herzliches Lebewohl zu. Behalten Sie die Heidelberger Tage in freundlicher Erinnerung!

Auf Wiedersehen in Rom!

Am Nachmittag war für die Damen offizieller Kaffee in der Stiftsmühle. Ein Teil der Herren folgte einer Einladung Wolfs zur Besichtigung seines astrophysikalischen Instituts und traf von dort aus später gleichfalls in der Stiftsmühle ein. Baron von Bernus hatte in freundlichster Weise dem Kongresse eine Einladung zum Besuche des Stiftes Neuburg und zur Besichtigung seiner Sammlungen übersandt, die von vielen benutzt wurde.

E. Bericht über die Tätigkeit der Sektionen.

Geschäftsordnung der Sektionen.

1. Zur Leitung der Geschäfte wird ein Vorsitzender bestellt, dessen Wahl in jeder Sitzung für die nächstfolgende stattfindet. Vorsitzende der ersten Sitzung sind die Einführenden.

2. Zur Führung eines Sitzungsprotokolls werden Schriftführer ernannt.

3. Die Reihenfolge, in der die angekündigten Vorträge gehalten werden sollen, wird in der ersten Sitzung bestimmt.

4. Die Dauer eines Vortrages soll 20 Minuten nicht überschreiten. In der Diskussion werden einem Redner 5 Minuten gestattet. Kein Redner erhält in derselben Diskussion mehr als einmal das Wort. Diese Bestimmung findet auch auf den Vortragenden Anwendung, über dessen Vortrag die Diskussion stattfindet.

5. Die Herren, die an der Debatte teilgenommen haben, können einen kurzen Bericht über ihre Äußerungen an die Einführenden einreichen.

6. Die an jedem Tage abzuhaltenden Vorträge sollen durch Anschlag an den Türen der Sektionszimmer und am Eingange des Museumsgebäudes bekannt gemacht werden.

I. Sektion (Arithmetik und Algebra).

Dienstag, den 9. August, nachmittags 4 Uhr.

Der Einführende, J. Lüroth, eröffnet die Sitzung um 4 Uhr 20 Min. mit einer kurzen Begrüßungsansprache.

Hierauf wird die Reihenfolge der Vorträge für die Mittwochssitzung bestimmt und D. Seliwanoff zum Vorsitzenden der ersten Sitzung gewählt.

Mittwoch, den 10. August, vormittags 9 Uhr.

Vorsitzender: D. Seliwanoff.
Schriftführer: G. Faber.

Gehaltene Vorträge.

1. P. Gordan: Über die Auflösung der Gleichungen 6. Grades.
   Diskussion: H. Valentiner, A. Wiman.
2. J. König: Zum Kontinuum-Problem.
   Diskussion: G. Cantor, D. Hilbert, A. Schönflies.
3. A. Capelli: Ein Beitrag zum Fermatschen Satze.
4. F. Hočevar: Über die Bestimmung der linearen Teiler einer algebraischen Form.
   Diskussion: J. Lüroth, G. Landsberg.
5. A. Guldberg: Über lineare Differenzengleichungen.

Zum Vorsitzenden der nächsten Sitzung wird E. Netto gewählt und darauf um 11 Uhr 20 Min. die Sitzung geschlossen.

Freitag, den 12. August, vormittags 9 Uhr.

Vorsitzender: E. Netto.
Schriftführer: G. Faber.

Gehaltene Vorträge.

1. H. Minkowski: Zur Geometrie der Zahlen.
2. D. Hilbert: Über die Grundlagen der Logik und Arithmetik.
   Diskussion: J. König, G. Cantor.
3. G. Voronoï: Sur une propriété du discriminant des fonctions entières.
   Diskussion: D. Seliwanoff, E. Netto.
4. A. Wiman: Die metazyklischen Gleichungen 9. Grades.
   Diskussion: E. Netto.
5. A. Loewy: Über reduzible Gruppen linearer homogener Substitutionen.
6. K. Stephanos: Sur une catégorie d'équations fonctionnelles.
7. E. B. Wilson: On products in additive fields.
   Diskussion: E. Jahnke, E. B. Wilson.
8. Eugen Müller: Mitteilungen über die Herausgabe von E. Schröders Nachlaß.

Um 12 Uhr 40 Min. schließt E. Netto die Sitzung.

II. Sektion (Analysis).

Mittwoch, den 10. August, vormittags 9 Uhr.

Vorsitzende: G. Mittag-Leffler und L. Lindelöf.
Schriftführer: P. Boutroux.

Gehaltene Vorträge.

1. L. Schlesinger: Über das Riemannsche Fragment zur Theorie der linearen Differentialgleichungen und daran anschließende neuere Arbeiten.
2. E. Borel: Sur l'interpolation des fonctions continues par des polynômes.
   Diskussion: G. Mittag-Leffler.
3. D. Hilbert: Über eine Anwendung der Integralgleichungen auf ein Problem der Funktionentheorie.
   Diskussion: L. Schlesinger.
4. G. Voronoï: Sur le développement, à l'aide des fontions cylindriques, des sommes doubles $\Sigma f(pm^2 + 2qmn + rn^2)$, où $pm^2 + 2qmn + rn^2$ est une forme quadratique positive à coefficients entiers.
   Diskussion: P. Epstein, M. Krause.
5. R. Fricke: Neue Entwicklungen über den Existenzbeweis der polymorphen Funktionen.
   Diskussion: H. A. Schwarz, L. Schlesinger, W. Wirtinger.

Freitag, den 12. August, vormittags 9¼ Uhr.

Vorsitzende: J. Hadamard und T. Levi-Civita.
Schriftführer: E. Landau.

Gehaltene Vorträge.

1. P. Boutroux: Sur les fonctions entières d'ordre entier.
2. G. Mittag-Leffler: Sur une classe de fonctions entières.
   Diskussion: P. Painlevé, H. A. Schwarz.
3. J. Hadamard: Sur les solutions fondamentales des équations linéaires aux dérivées partielles.
   Diskussion: V. Volterra.
4. A. Capelli: Über die Additionsformeln der Thetafunktionen.
   Diskussion: M. Krause, A. Krazer.

III. Sektion (Geometrie).

Dienstag, den 9. August, nachmittags 4 Uhr.

A. v. Brill begrüßt die Versammlung. Es wird hierauf in die Besprechung der Geschäftsordnung eingetreten. Zum Vorsitzenden wird

H. G. Zeuthen gewählt; außerdem erfolgt die Ernennung der Schriftführer. Absatz 4 der Geschäftsordnung wird dahin abgeändert, daß kein Redner in der Diskussion das Wort mehr als zweimal erhält (statt einmal). Die Zeit der Sitzungen wird auf 9—11 und $11^1/_2$—1 Uhr festgesetzt.

Sodann spricht A. v. Brill über Elimination und Geometrie in den letzten Jahrzehnten. An der Diskussion beteiligen sich H. G. Zeuthen, F. Meyer und J. König; zum Schlusse ergreift nochmals A. v. Brill das Wort.

Mittwoch, den 10. August, vormittags 9 Uhr.

Vorsitzende: C. Segre und F. Morley.

Schriftführer: E. Geck und M. Caspar.

Gehaltene Vorträge.

1. F. S. Macaulay: The intersections of plane curves, with extensions to n-dimensional algebraic manifolds.
   Diskussion: P. H. Schoute.
2. C. Guichard: Sur les systèmes triples orthogonaux.
3. E. Study: Kürzeste Wege im komplexen Gebiet.
   Diskussion: L. Autonne, C. Segre.

Pause von $^1/_2$ Stunde ($10^3/_4$—$11^1/_4$ Uhr).

4. F. Meyer: Über Grundzüge einer Theorie des Tetraeders.
   Diskussion: F. Schur und K. Stephanos.
5. K. Rohn: Über algebraische Raumkurven.
   Diskussion: M. Noether.
6. G. Scheffers: Über Isogonalkurven, Äquitangentialkurven und komplexe Zahlen.
   Diskussion: Emil Müller, F. Engel, R. v. Lilienthal, F. Meyer.

Freitag, den 12. August, vormittags 9 Uhr.

A. v. Brill eröffnet die Sitzung und legt drei Abhandlungen vor, deren Verfasser am Erscheinen verhindert sind, nämlich:

A. Cabreira: Note sur les rapports polygonaux.

M. Tichomandritzky: Die Winkelsumme eines ebenen Dreiecks.

W. Sixtel: Ableitung der einfachsten Gleichungen der Kurven 2. Grades in Cartesischen rechtwinkligen Koordinaten (russisch);

sodann wird die Sitzung wie folgt fortgesetzt:

Vorsitzende: C. Guichard und C. F. Geiser.
Schriftführer: W. Ludwig.

Gehaltene Vorträge.

1. A. Schönflies: Struktur der perfekten Mengen.
2. K. Zindler: Zur Differentialgeometrie der Linienkomplexe.
   Diskussion: F. Meyer.
3. E. Wilczynski: The general projective theory of space curves and ruled surfaces.
   Diskussion: G. Scheffers, E. Study.
4. J. Andrade: Détermination des mouvements μ de solides aux trajectoires sphériques.
5. J. Knoblauch: Grundformeln der Theorie der Strahlensysteme.
   Diskussion: K. Zindler, E. Wilczynski.

Pause von $\frac{1}{2}$ Stunde (11—11$\frac{1}{2}$ Uhr).

6. R. v. Lilienthal: Über äquidistante Kurven auf einer Fläche.
   Diskussion: J. Knoblauch.
7. L. Autonne: Sur les substitutions crémoniennes dans l'espace à plusieurs dimensions.
8. R. W. Genese: On some useful theorems in the continued multiplication of the regressive product in real four-point space.
9. E. Study: Über das Prinzip der Erhaltung der Anzahl.
   Diskussion: H. G. Zeuthen, A. v. Brill, H. Schubert, K. Rohn, M. Noether.

IV. Sektion (Angewandte Mathematik).

Dienstag, den 9. August, nachmittags 4 Uhr.

F. Klein begrüßt die Anwesenden und verbreitet sich kurz über die Aufgabe der angewandten Mathematik, besonders über die pädagogische Seite.

Schriftführer werden A. Sommerfeld und R. Gans.

Mittwoch, den 10. August, 1. Sitzung, vormittags 9 Uhr.

Vorsitzender: J. M. van Vleck.

Gehaltene Vorträge.

1. N. Delaunay: Sur le problème des trois corps.
2. T. Levi-Civita: Sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps.

3. F. Weingarten: Ein einfaches Beispiel einer stationären und rotationslosen Bewegung einer tropfbaren schweren Flüssigkeit mit freier Begrenzung.

Mittwoch, den 10. August, 2. Sitzung, vormittags $11\frac{1}{2}$ Uhr.

Vorsitzende: V. Volterra und J. Hadamard.

Gehaltene Vorträge.

1. V. Volterra: Sur la théorie des ondes.
2. J. Hadamard: Sur les données aux limites dans les équations aux dérivées partielles de la physique mathématique.
3. A. Sommerfeld: Über die Mechanik der Elektronen.
4. R. W. Genese: On the development of the „Ausdehnungslehre“ according to the principles of statics.

Freitag, den 12. August, 1. Sitzung, vormittags 9 Uhr.

Vorsitzende: A. Börsch und S. Finsterwalder.

Gehaltene Vorträge.

1. H. Weber: Bemerkungen aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen.
2. J. Andrade: Recherches chronométriques.
3. A. Börsch: Die Grundlagen der Bestimmung der Erdgestalt.
4. S. Finsterwalder: Flüchtige Aufnahmen mittels Photogrammetrie.

Freitag, den 12. August, 2. Sitzung, vormittags $11\frac{1}{2}$ Uhr.

(In der Ausstellung.)

Vorsitzender: F. Klein.

Gehaltene Vorträge.

1. L. Prandtl: Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung.
2. A. Kempe: Ein Gelenkmechanismus.

Außerdem Vorführung der Leibnizschen Rechenmaschine durch C. Runge und Demonstration zahlreicher Apparate durch die Aussteller.

V. Sektion (Geschichte der Mathematik).

Dienstag, den 9. August, nachmittags 4 Uhr.

Vorsitzende: M. Cantor und P. Stäckel.

Begrüßung der Sektion durch den Vorsitzenden M. Cantor.
Enbloc-Annahme der vorgedruckten Geschäftsordnung.

Wahl der Schriftführer: K. Bopp und E. Wölffing.

Festsetzung der Reihenfolge der Vorträge.

Vortrag: M. Cantor: Einführung in die Geschichte der Mathematik; Hinweis auf neue Resultate.

Diskussion: A. v. Braunmühl, M. Simon, F. M. Feldhaus, E. Lampe, P. Tannery, K. Schwering.

Zu Vorsitzenden der nächsten Sitzungen werden gewählt: H. G. Zeuthen, P. Tannery, A. v. Braunmühl, G. Loria.

Mittwoch, den 10. August, vormittags 10 Uhr.

Vorsitzende: H. G. Zeuthen und P. Tannery.

Gehaltene Vorträge.

1. P. Tannery: Pour l'histoire du problème inverse des tangentes.
2. S. Dickstein: Wronski als Mathematiker.
   Diskussion: P. Tannery, S. Dickstein, G. Loria.
3. M. Simon: Über die Mathematik der Ägypter.
   Diskussion: M. Cantor, M. Simon.

Pause von $\frac{1}{2}$ Stunde ($10\frac{3}{4}$—$11\frac{1}{4}$ Uhr).

4. H. G. Zeuthen: Gebrauch und Mißbrauch historischer Benennungen in der Mathematik.
   Diskussion: M. Simon, H. G. Zeuthen.
5. L. Schlesinger: Bericht über die Herausgabe der gesammelten Werke von L. Fuchs und Überreichung des I. Bandes.
6. G. Eneström: Welcher Platz gebührt der Geschichte der Mathematik in einer Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften?
7. A. v. Braunmühl: Zur Geschichte der Differentialgleichungen.
   Diskussion: P. Stäckel, A. v. Braunmühl.
8. H. Suter: Zur Geschichte der Mathematik bei den Indern und Arabern. I. Mitteilung.

Freitag, den 12. August, vormittags 10 Uhr.

Vorsitzende: A. v. Braunmühl und G. Loria.

Eine Resolution, betreffend die Herausgabe der Werke Eulers durch die Carnegie-Institution, wird von F. Morley und A. Wassiljef vorgeschlagen und auf Vorschlag von M. Cantor an die morgige Geschäftssitzung überwiesen. Eine von F. M. Feldhaus vorgelegte Resolution, betreffend die Bildung einer engeren Vereinigung der Historiker der Mathematik, wird angenommen und auf Vorschlag von E. Lampe der Wunsch hinzugefügt, daß sie auf die Tagesordnung des nächsten Kongresses gesetzt werde.

Gehaltene Vorträge.

1. G. Loria: Pour une histoire de la géométrie analytique.
   Diskussion: M. Cantor, G. Loria, A. v. Braunmühl, H. G. Zeuthen.
2. H. Suter: Zur Geschichte der Mathematik bei den Indern und Arabern. II. Mitteilung.
3. G. Vailati: Intorno al significato della differenza tra gl'assiomi ed i postulati nella geometria greca.

G. Loria schließt die Sitzungen der Sektion um $11^3/_4$ Uhr.

VI. Sektion (Pädagogik).

Dienstag, den 9. August, nachmittags $4^1/_2$—6 Uhr.

Vorsitzender: H. Schubert-Hamburg.

Nach einer kurzen Begrüßung teilt der Einführende H. Schubert mit, daß der andere Einführende J. P. Treutlein leider nicht in Heidelberg anwesend sein kann, ferner, daß J. Greber das Sekretariat der Sektion freundlichst übernommen hat. Darauf geschieht eine Gesamtvorstellung der Anwesenden. Der Vorschlag des Einführenden, daß wegen der großen Zahl der angemeldeten Vorträge schon heute drei Vorträge gehalten werden sollen, wird angenommen. Es sind folgende Abhandlungen an die Sektion eingelaufen, die vorgelegt werden:

F. Klein: Über eine zeitgemäße Umgestaltung des mathematischen Unterrichts an den höheren Schulen.

H. Schubert: Elementare Berechnung der Logarithmen.

P. Buffa: Primo Studio della Geometria Piana.

A. G. Greenhill: Exercises in Practical Mathematics.

Darauf wird die Vortragsliste angenommen und es werden folgende drei Vorträge gehalten:

1. A. G. Greenhill: Teaching of mechanics by familiar applications on a large scale.
   Diskussion: A. Gutzmer.
2. A. Gutzmer: Über die auf die Anwendungen gerichteten Bestrebungen im mathematischen Unterricht der deutschen Universitäten.
   Diskussion: G. Reuschle, H. Schotten.
3. G. Loria: Sur l'enseignement des mathématiques en Italie.
   Diskussion: B. Bloch.

Für die Sitzung am Mittwoch vor dem Frühstück (9—11 Uhr) wird als Vorsitzender A. G. Greenhill vorgeschlagen und gewählt.

Mittwoch, den 10. August, vormittags 9—11 Uhr.

Vorsitzender: A. G. Greenhill.

Eingelaufen sind und werden vorgelegt:

G. Veronese: La Laguna di Venezia.

C. A. Laisant und H. Fehr: L'Enseignement Mathématique VI^e Année. No. 4.

Es werden folgende Vorträge gehalten:

1. H. Fehr: L'enquête de „L'enseignement mathématique" sur la méthode de travail des mathématiciens.
2. P. Stäckel: Über die Notwendigkeit regelmäßiger Vorlesungen über elementare Mathematik an den Universitäten.
   Diskussion: M. Krause.
3. R. Fricke: Bemerkungen über den mathematischen Unterricht an den technischen Hochschulen in Deutschland.
   Diskussion: A. Gutzmer, P. Stäckel, M. Krause, E. Czuber, P. Dziwinski, H. Schotten, B. Bloch, E. Lampe, R. Flatt.

Zum Vorsitzenden für den 2. Teil der Sitzung wird H. Fehr gewählt.

Infolge der Erkrankung von J. P. Treutlein wird als stellvertretender Einführender E. Lampe vorgeschlagen und gewählt.

Mittwoch, den 10. August, mittags 12—$1\frac{1}{2}$ Uhr.

Vorsitzender: H. Fehr.

Gehaltene Vorträge.

1. J. Andrade: L'enseignement scientifique aux écoles professionelles et les „Mathématiques de l'ingénieur".
   Diskussion: B. Bloch, A. G. Greenhill.
2. H. Schotten: Welche Aufgabe hat der mathematische Unterricht auf den deutschen Schulen und wie passen die Lehrpläne zu dieser Aufgabe?
   Diskussion: B. Bloch, R. Maurer, E. Gubler.

Als Vorsitzender für Freitag wird H. Schotten gewählt.

Freitag, den 12. August, vormittags 9—11 Uhr.

Vorsitzender: H. Schotten.

Es findet die von H. Schotten beantragte Resolution einstimmige Annahme:

„Die Pädagogische Sektion des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses beschließt einstimmig dahin sich auszusprechen:

1. daß der Unterricht in der darstellenden Geometrie für die Realanstalten obligatorisch werden müsse; an den Gymnasien wäre Einführung als fakultatives Fach wünschenswert;
2. daß dieser Unterricht durchaus von den Lehrern der Mathematik zu erteilen sei und zwar müßte als Regel angesehen werden, daß er in den Händen des Lehrers liegt, der auch den mathematischen Unterricht in der Klasse hat.“

Gehaltene Vorträge.

1. M. Simon: Über komplexe Zahlen; über den Lehrgang in der sphärischen Trigonometrie; literarisch-historische Notizen.
   Diskussion: H. Schotten, M. Simon, H. Schubert, E. Ullrich, H. Thieme, H. Wieleitner, B. Bloch, E. Lampe.
2. H. Thieme: Wirkung der wissenschaftlichen Ergebnisse auf den Unterricht in der elementaren Mathematik.
   Diskussion: B. Bloch, H. Thieme.
3. A. v. Sourek: Über den mathematischen Unterricht in Bulgarien.

Freitag, den 12. August, mittags 12—2 Uhr.

Vorsitzender: E. Gubler.

Gehaltene Vorträge.

1. F. Meyer: Über das Wesen mathematischer Beweise.
2. J. Finsterbusch: Über eine neue einfache und vor allem einheitliche Methode, die Rauminhalte der Körper zu bestimmen, deren Querschnittsfunktion den dritten Grad der Höhe nicht übersteigt.
   Diskussion: B. Bloch, J. Finsterbusch, E. Lampe, P. Epstein.
3. M. Brückner: Über die diskontinuierlichen und nicht-konvexen gleicheckig-gleichflächigen Polyeder.

E. Lampe spricht den Vorsitzenden den Dank aus für die Leitung der Sitzungen, worauf E. Gubler seinerseits den beiden Einführenden, H. Schubert und E. Lampe, für ihre Mühewaltung dankt.

F. Protokoll der Geschäftssitzung des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses.

Samstag, den 13. August, vormittags $9\frac{1}{2}$ Uhr.

I. Beschlußfassung über die dem Kongresse vorgeschlagenen Resolutionen:

I. Resolution.

„Die Unterzeichneten bitten um Zustimmung zu folgendem Wunsche:

In Anbetracht, daß die Geschichte der Mathematik heute eine Disziplin von unbestreitbarer Wichtigkeit bildet, daß ihr Nutzen sowohl vom rein mathematischen als auch vom pädagogischen Standpunkte immer stärker hervortritt und daß es daher unerläßlich ist, ihr in dem öffentlichen Unterrichte die gebührende Stelle anzuweisen, und

unter Berücksichtigung der Wünsche der 5. Sektion des Internationalen Kongresses für vergleichende Geschichtsforschung (Paris, Juli 1900) und der 8. Sektion des Internationalen Historiker-Kongresses (Rom, 1903) adoptiert der III. Internationale Mathematiker-Kongreß zu Heidelberg und macht zu den seinigen die von dem Kongreß zu Rom ausgesprochenen Wünsche internationalen Charakters:

1) Daß die Geschichte der exakten Wissenschaften an den Universitäten gelehrt werde, indem entsprechende Vorlesungen eingerichtet werden für die vier Teile:

1. Mathematik und Astronomie.
2. Physik und Chemie.
3. Naturwissenschaften.
4. Medizin.

2) Daß die Elemente der Geschichte der exakten Wissenschaften

in das Programm der einzelnen Unterrichtsgegenstände der Gymnasien aufgenommen werden.

P. Tannery. A. v. Braunmühl. E. Lampe. G. Loria.
M. Simon. D. E. Smith. P. Stäckel. E. Wölffing."

Die Resolution wird von der Versammlung durch Akklamation angenommen.

II. Resolution.

„Le troisième Congrès international des mathématiciens, considérant que l'édition complète des oeuvres d'Euler a une haute importance scientifique, appuie la proposition faite à la „Carnegie Institution" par le Comité mathématique constitué sous la présidence de M. Moore et émet le voeu de sa prochaine réalisation.

En considérant d'autre part que le succès de cette édition exige le concours de plusieurs savants de tous les pays dont la réunion pour l'élaboration du plan et la discussion des autres questions s'y rapportant pourront se faire pendant le prochain Congrès, le 3ième Congrès prie la Commission d'organisation du Congrès suivant de lui présenter un rapport sur l'état de la question ainsi que sur les mesures qu'aurait pu prendre le Congrès pour contribuer de sa part à la réussite de cette importante entreprise scientifique.

F. Morley. A. Wassilief."

Die Versammlung teilt die Überzeugung von der großen Wichtigkeit einer Gesamtausgabe der Werke Eulers, bemerkt, daß Schritte zu einer Durchführung des Unternehmens auch bereits seitens der Akademien zu St. Petersburg und Berlin getan sind, und spricht die Hoffnung aus, daß dem nächsten Kongresse über den Fortschritt der Angelegenheit berichtet werden kann.

III. Resolution.

„Die V. Sektion des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses zu Heidelberg erklärt, es sei wünschenswert, daß eine engere Vereinigung der Historiker der mathematischen Wissenschaften zustande komme. Da die Aufgaben einer solchen Gesellschaft internationale sind, so soll die Gesellschaft eine internationale werden. Nichtsdestoweniger ist ein Zusammenwirken mit ähnlichen und verwandten nationalen Gesellschaften, Zeitschriften, Museen usw. zu erstreben.

Es wird der Wunsch hinzugefügt, daß diese Resolution auf die Tagesordnung des nächsten Kongresses gesetzt werde."

Die Resolution wird von der Versammlung durch Akklamation angenommen.

IV. Resolution.

„Der Kongreß begrüßt mit der wärmsten Sympathie die Bestrebungen der Mathematiker, daß überall die für den modernen Betrieb mathematischer Studien unentbehrlichen Einrichtungen (genügend viele Lehrstühle, ausreichende Bibliotheken, Zeichensäle, Arbeitsräume, Modellsammlungen, Projektionseinrichtungen usw.) getroffen werden mögen, und spricht den dringenden Wunsch aus, daß die Regierungen und sonstige maßgebende Instanzen ihnen die nötige Unterstützung gewähren."

Die Resolution wird von der Versammlung durch Akklamation angenommen.

II. Festsetzung des IV. Internationalen Mathematiker-Kongresses.

Volterra-Rom überbringt die Einladung der Accademia dei Lincei, den IV. Internationalen Mathematiker-Kongreß im Frühjahr 1908 zu Rom abzuhalten, mit folgenden Worten:

Les membres de la section mathématique de l'Académie des Lincei se sont réunis au mois de Juin dernier et ils ont décidé de vous proposer de tenir le prochain congrès des mathématiciens à Rome.

Nachdem die Versammlung die Einladung mit lebhaftem Beifall angenommen, fährt Volterra fort:

Je vous remercie de l'honneur que vous nous avez fait en choisissant Rome comme siège du prochain congrès. Je propose de réunir le congrès au printemps de 1908, en laissant au comité le soin d'en préciser la date.

En même temps j'ai l'honneur de faire part au congrès que M. Guccia a mis à la disposition du Circolo matematico di Palermo la somme de 3000 frs. pour un prix international qui, sous le nom de medaille Guccia, sera décerné pendant le prochain congrès à un mémoire faisant faire un progrès essentiel à la théorie des courbes gauches algébriques. La commission qui jugera le concours est composée de M. M. Noether, Poincaré et Segre.

Hierauf spricht Greenhill-London den Wunsch aus, daß der V. Kongreß in England stattfinde, indem er ausführt:

I left London under the impression that England was to be honoured with the visit of the International Congress of Mathematicians on the next occasion after Germany; and I think this impression was shared by the other English present here.

But we find now that Italy is the fortunate country, and is to receive the Congress in 1908.

Disappointed in our expectation we must congratulate Italy and Rome on its good fortune, and we must content ourselves with the next best in our wish, and hope that England may be selected at this Assembly as the meeting place in 1911 or 12.

I beg then to place before this General Meeting the formal proposition that the International Congress of Mathematicians, next after Italy, shall be held in England.

Nach einer kurzen geschäftlichen Benachrichtigung der Versammlung durch Klein-Göttingen, daß die Ausstellung auch noch am Sonntag Vormittag dem Besuche geöffnet sei, ergreift Schwarz-Berlin das Wort, um dem Vorsitzenden und dem Schriftführer des Kongresses sowie dem Leiter der Ausstellung, Disteli-Straßburg, den Dank der Teilnehmer des Kongresses für ihre Mühewaltung auszusprechen.

Hierauf wird die Geschäftssitzung geschlossen.

Zweiter Teil.

Wissenschaftliche Vorträge.

A. Gedächtnisrede auf C. G. J. Jacobi.

Carl Gustav Jacob Jacobi.

Rede zu der von dem Internationalen Mathematiker-Kongreß in Heidelberg veranstalteten Feier der hundertsten Wiederkehr seines Geburtstages gehalten am 9. August 1904

von

L. Koenigsberger in Heidelberg.

Im Kreise der Familie wie im Leben der Völker ist es eine schöne Sitte und heilige Pflicht, in den Augenblicken der Freude über Glück und Gedeihen der Seinigen, in den Momenten frohbewußten Stolzes auf die erworbenen Güter und nationalen Errungenschaften, der hervorragenden Männer zu gedenken, denen wir Dank schulden für den Bau, dessen Fundament sie gelegt und den sie aufrichten halfen mit unermüdlicher Arbeit, getragen von idealer Humanität, von der begeisterten Hingabe für das Wohl ihrer Nation zur Erkämpfung und Verteidigung von allem dem, was ihr teuer und heilig, oder die, begnadet durch die Genialität ihres Geistes, geleitet von der Liebe zur Wahrheit und einem unbezwinglichen Forschungstriebe, im Reiche geistiger und sittlicher Macht dastehen als Merkzeichen fortschreitender Entwicklung des Menschengeschlechts in Kunst und Wissenschaft. Und so war es ein schöner Gedanke und ein einer großen wissenschaftlichen Gemeinschaft würdiger Akt der Pietät, daß der alle Nationen umfassende Kongreß der Mathematiker nicht nur von ausgezeichneten Forschern die moderne Entwicklung einzelner Teile der exakten Wissenschaften vor einem naturwissenschaftlicher Arbeit freundlich gesinnten Kreise in großen Zügen gezeichnet wissen will, nicht nur all' die hervorragenden Mitarbeiter an den Fortschritten der mathematischen

Wissenschaft im engeren Kreise der Eingeweihten die Prinzipien und Resultate ihrer eignen Arbeit will darlegen sehen, sondern gleichsam zur weihevollen Einleitung für schwere und ernste Arbeit eine Gedenkfeier des genialen Begründers großer und umfassender Disziplinen unserer Wissenschaft veranstaltet hat, welcher vor hundert Jahren, nachdem die großen Mathematiker Frankreichs nach Euler und den Bernoullis fast allein in langem, stetigem Zuge die Fahne mathematischer und mathematisch-physikalischer Forschung hochgehalten, und als große und anregende Lehrer der kommenden Generation Lust und Mut zu schwerer Arbeit eingeflößt, dem mit gewaltiger schöpferischer Kraft auf der Höhe exakter Forschung einsam thronenden Göttinger Meister zu Hilfe kam, um auch Deutschland bei der Entwicklung der mathematischen Wissenschaft ebenbürtig an die Seite Frankreichs treten zu lassen.

Carl Gustav Jacob Jacobi wurde zu Potsdam am 10. Dezember 1804 geboren, als zweiter Sohn des Bankiers Simon Jacobi und dessen Frau, aus deren Ehe noch zwei Söhne, Moritz und Eduard, sowie eine Tochter, Therese, entsprossen. Nachdem der geistig ungewöhnlich regsame Knabe die erste Unterweisung in den alten Sprachen und den Elementen der Mathematik von seinem mütterlichen Oheim, „unicus et carissimus praeceptor", wie er ihn später nannte, erhalten, trat er im November 1816, noch nicht 12 Jahre alt, in die zweite Klasse des Potsdamer Gymnasiums ein und wurde schon nach einem halben Jahre in die erste Klasse aufgenommen, in welcher er 4 Jahre verbleiben mußte, um nicht vor zurückgelegtem 16. Jahre der Universität zugeführt zu werden. Wie an den meisten Gymnasien Preußens war nach der staatlichen und geistigen Erhebung des Volkes der Unterricht in den alten Sprachen und der Geschichte ein vorzüglicher, getragen von der Begeisterung für das staatliche und künstlerische Leben der Völker des Altertums, und von sittlichem Ernst im Hinblick auf die bevorstehende kulturelle und geistige Arbeit der kommenden Generation. Wir wollen aber heute auch mit Achtung des wackeren Mannes gedenken, dem es damals oblag, den Schülern des Potsdamer Gymnasiums den mathematischen Unterricht zu erteilen, und welcher durch Abfassung von Lehrbüchern auch literarisch sich betätigt hat. Auf der, Liebe, Dankbarkeit und Verehrung bezeugenden Urkunde, welche Heinrich Bauer im Jahre 1845 von dessen Schülern zu seinem 50jährigen Lehrerjubiläum überreicht wurde, prangt als größte Zierde der Name des damals auf der Höhe seines Ruhms stehenden Jacobi, der dem Jubilar das Diplom eines Ehrenmitgliedes der Deutschen Gesellschaft zu Königsberg persönlich überbrachte.

Ostern 1821, kaum 16 Jahre alt, bestand Jacobi sein Abiturientenexamen; die als sehr gut beurteilte mathematische Arbeit behandelte in klarer und eleganter Weise ein Problem der sphärischen Astronomie, dessen Herleitung mit dem Geständnis schloß: „ob dieser Beweis in irgend einem Lehrbuche vorkommt, weiß ich nicht, aus Unkunde der mathematischen Literatur.“ „Von Gott mit seltenen Anlagen des Geistes beglückt“, lautet sein Abgangszeugnis, „sind seine Kenntnisse in den Sprachen wie in der Mathematik ebenso gründlich als ausgezeichnet, ganz ungewöhnlich in der griechischen Sprache und in der Geschichte“, und als das Konsistorium das Jacobi von seinen Lehrern gespendete Lob zu ausgedehnt erachtete, erwiderten die in ihrem Berufe stolzen und freimütigen Männer: „er ist ein universeller Kopf, besitzt ungewöhnliche Fähigkeiten und eine hohe Ruhe des Geistes, ergreift und umfaßt alles, ohne durch Ermüdung unterbrochen zu werden; jetzt studiert er zwar Philologie und Mathematik, schwerlich aber möchten ihn diese Fächer auf immer fixieren, in jedem Falle wird er sich einst merkwürdig machen.“

In der Tat hatte er sich zuerst mit größter Begeisterung und erstaunlicher Arbeitskraft dem Studium der alten Sprachen gewidmet und im Seminar die Aufmerksamkeit Boeckhs, des Altmeisters griechischer Philologie, erregt. „Miramini, commilitones suavissimi, philologum me vobis philologis dissertatiunculam proponere de Pappi Alexandri collectionibus mathematicis“ lauten die Eingangsworte seiner in philologischer und mathematischer Hinsicht ausgezeichneten Seminararbeit, die aber schon zu einer Zeit verfaßt war, als sein Entschluß feststand, sich ganz der Mathematik zu widmen. „Indem ich so doch einige Zeit mich ernstlich mit der Philologie beschäftigte“, schreibt er seinem Onkel, „gelang es mir, einen Blick zu tun in die innere Herrlichkeit des alten hellenischen Lebens, so daß ich wenigstens nicht ohne Kampf dessen weitere Erforschung aufgeben konnte. Denn aufgeben muß ich sie für jetzt ganz. Der ungeheure Koloß, den die Arbeiten eines Euler, Lagrange, Laplace hervorgerufen haben, erfordert die ungeheuerste Kraft und Anstrengung des Nachdenkens, wenn man in seine innere Natur eindringen will und nicht bloß äußerlich daran herumkramen. Über diesen Meister zu werden, daß man nicht jeden Augenblick fürchten muß, von ihm erdrückt zu werden, treibt ein Drang, der nicht rasten und ruhen läßt, bis man oben steht und das ganze Werk übersehen kann.“

Die Arbeiten der großen französischen Mathematiker sowie die Schriften von Euler und Gauß waren seine Lehrmeister; denn Vorlesungen, wie sie damals in Berlin und an allen andern deutschen Universitäten gehalten wurden, konnten ihm nicht genügen. Gauß, angestaunt und bewundert von allen, welche exakter Forschung sich widmeten, dozierte an einer kleinen Universität vor wenigen Zuhörern; was er gab, war neu und von genialer Originalität, überall boten sich überraschende Gesichtspunkte mit einem weiten Ausblick in die Fernen der Wissenschaft, alles war exakt im Inhalt, präzis in der Form; aber es fehlte Gauß die auch äußerlich sich kundgebende Wärme und Begeisterung, welche den mathematischen Lehrer notwendig beherrschen muß, wenn die zum Teil so trockenen und nüchternen Wahrheiten einen selbst empfänglichen Verstand befruchten, wenn die von den Schwingen eines noch so genialen Geistes ausgehenden Ideen auf einem noch jugendfrischen Resonanzboden einen Widerhall finden sollen. Und auf den Kathedern all der andern deutschen Universitäten stand im zweiten Dezennium des vorigen Jahrhunderts weder ein bedeutender Lehrer noch ein hervorragender Forscher. Als Dirichlet den Trieb in sich fühlte, mathematischen Studien sich zu widmen, konnten auch ihm die Vorlesungen über die Elemente der synthetischen und analytischen Geometrie, über die Anfangsgründe der Algebra und über die alles beherrschende Kombinatorik an den Universitäten seines Vaterlandes ein Genüge nicht bieten, und er wandte sich nach Paris, um von den großen französischen Forschern an deren berühmter Universität Wissenschaft und Methode, Vertiefung und Klarheit zu lernen.

Ganz auf seine eigene Kraft angewiesen, ohne jegliche Leitung seiner Studien legte Jacobi schon nach einem Jahre gewaltiger geistiger Anstrengung, kaum 20 Jahre alt, mit ausgezeichnetem Erfolge bei Poselger seine Staatsprüfung ab und traf sogleich die Vorbereitungen zum Doktorexamen. Nachdem sein Examinator Dirksen in der mündlichen Prüfung Jacobi „mit lobenswerten Kenntnissen ausgerüstet“ und in der eingereichten Arbeit „meditationes analyticae“ eine „mehr als gewöhnliche Selbständigkeit und eine gewisse Originalität der Behandlung“ gefunden, wurde ihm gestattet, seine Habilitation mit der Promotion zu verbinden und einen Teil der eingereichten Probeschrift unter dem Titel „Disquisitiones analyticae de fractionibus simplicibus“ als Dissertation zu veröffentlichen, eine Arbeit, aus der uns schon die ungewöhnliche Tiefe und Klarheit seiner mathematischen Anschauungen entgegentritt. Durch Einführung der unendlichen Reihen zur Bestimmung der Koeffizienten der allgemeinen Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen bringt er ein funktionentheoretisches Element in die algebraischen Untersuchungen, das später seine Fruchtbarkeit in der Ausbildung der Theorie der eindeutigen Funktionen erwiesen, und benutzt zugleich die angewandten Prinzipien zu interessanten Transformationen unendlicher Reihen.

So stand Jacobi, noch nicht 21 Jahre alt, auf dem Berliner Katheder und zeigte schon bei seinem ersten Auftreten nach dem Zeugnis seiner damaligen Zuhörer ein so hoch entwickeltes Lehrtalent, daß das Ministerium bereits nach einem halben Jahre auf seinen Wunsch, die Lehrtätigkeit als Privatdozent in Königsberg an Stelle des eben verstorbenen ordentlichen Professors der Mathematik Wrede fortsetzen zu dürfen, bereitwillig einging, um dadurch dem jungen Dozenten mehr Aussicht für eine etwaige Beförderung bieten zu können. Und während ihm so durch seine Versetzung nach Königsberg ein weites und fruchtbares Feld für sein Lehrtalent eröffnet wurde, war es für seine schriftstellerische Tätigkeit ein glückverheißendes Ereignis, daß sich Crelle in Berlin damals bereits mit dem Gedanken der Gründung einer mathematischen Zeitschrift trug und denselben in kürzester Zeit, wenn auch unter den schwierigsten Verhältnissen, zum Segen der mathematischen Wissenschaften zur Ausführung zu bringen wußte. Schon im Sommer 1826 übersandte Jacobi an Crelle mit den Worten: „ich mache Sie zum Herrn über Leben und Tod der kleinen Geschöpfe" zwei kürzere Arbeiten, welche Ausführungen und Vereinfachungen Gaußscher Untersuchungen über die angenäherte Berechnung von Integralen enthielten, während er sich zugleich in dessen überaus schwierige zahlentheoretische Arbeiten, vor allem in das Studium seiner disquisitiones arithmeticae vertiefte.

Bereits am Ende des achtzehnten Jahrhunderts hatte Gauß, 20 Jahre alt, mit staunenswerter Tiefe und unvergleichlicher Genialität eine neue Zahlentheorie geschaffen, in dieser die Kreisteilung mit der Transzendentenlehre verknüpft und die Basis zur späteren Funktionentheorie gelegt, noch im ersten Viertel des vorigen Jahrhunderts eine Flächenlehre geschaffen, welche den abstraktesten geometrischen Wahrheiten eine der Mechanik und mathematischen Physik adäquate Form gab, nicht lange darauf die Sätze der heutigen Potentialtheorie aufgebaut, in der Geschichte der Physik und Astronomie durch große und weittragende Entdeckungen seinen Namen unvergänglich eingegraben, und diesen nach einem schöpferischen Wirken ohnegleichen bis in die Mitte des neunzehnten Jahrhunderts in ungeschwächtem Glanze erhalten. Aber niemand war imstande gewesen, seinen Untersuchungen zu folgen, niemand konnte es wagen, seinen Forschungen sich anzuschließen und sie fortzuführen, bis Jacobi 1825 auf den Schauplatz mathematischer Forschung trat, wenn auch selbst eine Zeitlang allein stehend und deshalb gezwungen, mit der riesigsten Anstrengung des

Geistes und dem ganzen moralischen Mute eines wissenschaftlichen Bahnbrechers den Boden mathematischer Arbeit in Deutschland fruchtbar zu machen, doch in stetem Hinweis auf den großen Göttinger Meister.

So übte zunächst die Zahlentheorie, diese schwierigste, weil abstrakteste, aller mathematischen Disziplinen, auf Jacobi die größte Anziehungskraft aus, und er erregte durch die schriftliche Mitteilung der Resultate, zu denen er in seinen Untersuchungen über die 3. und 5. Potenzreste gelangt war, in hohem Grade das Interesse von Gauß, dem er sich schüchtern mit den Worten genähert: „Nur der Eifer für die Wissenschaft konnte einem unbekannten jungen Mann die Kühnheit einflößen, aus seinem Dunkel zu einem Mathematiker, der in solchem Ruhmesglanze dasteht, zu reden“; aber sein intimer Umgang mit Bessel, einer der größten Zierden astronomischer Wissenschaft, führte ihn auch wieder von den abstraktesten Untersuchungen weg zur Beschäftigung mit den verschiedenartigsten Anwendungen der Mathematik, zum Staunen seines damals in Göttingen studierenden älteren Bruders Moritz, des späteren bekannten Petersburger Physikers und Erfinders der Galvanoplastik; „wenn sich die transzendentale Universalität meines Geistes“, schreibt ihm dieser, „manifestiert im Erkennen und Auffassen der Qualitäten der Mauersteine und des Gemäuers überhaupt, so machst Du mir diese Universalität gewiß und mit vollem Rechte streitig, indem Du durch und in Deinem Briefe darlegst, mit welcher Leichtigkeit Du ein Feld bebaust, das bisher Deiner innersten Natur fremd zu sein schien, Astronomie und Physik, Pendelversuche, Dreiecknetze und Karten. Das freut mich, weil es mich vielleicht rächt, und Du erkennst, daß eben das nur Wert hat, was sich betätigen läßt“.

Von Bessel angeregt, beschäftigte er sich mit der Frage der Ausdrückbarkeit der Wurzeln einer Gleichung durch bestimmte Integrale, auf ein Prinzip sich stützend, das im engsten Zusammenhange mit den Untersuchungen von Cauchy steht, welche die Nullwerte einer Funktion durch das Randintegral des vollständig begrenzten Raumes bestimmen; er erschloß, ohne von dem fundamentalen Gedanken Gauß' von der Einführung der komplexen Größen in die Zahlentheorie Kenntnis zu haben, durch eine wunderbare Divination geleitet, allgemeingültige zahlentheoretische Sätze über die Kreisteilung und die kubischen Reste, und schien im Besitze neuer und fruchtbarer Prinzipien eben im Begriff, weitgreifende Forschungen auf diesem Gebiete einzuleiten, als sein Geist von Untersuchungen ganz anderer Art in Anspruch genommen wurde, deren Früchte schon im Sommer 1827 den 22jährigen jungen Mann in die vorderste Reihe der Mathematiker stellen sollten.

„Sie sehen mich im Begriff", antwortete Jacobi eines Tages einem Freunde, der ihn auffallend verstimmt fand und nach dem Grunde dieser Verstimmung fragte, „dieses Buch (Legendres exercices) auf die Bibliothek zurückzuschicken, mit welchem ich entschiedenes Unglück habe. Wenn ich sonst ein bedeutendes Werk studiert habe, hat es mich immer zu eigenen Gedanken angeregt, und ist dabei etwas für mich abgefallen. Diesmal bin ich ganz leer ausgegangen und nicht zum geringsten Einfalle inspiriert worden." Und gerade auf diesem Gebiete war es ihm beschieden, unverwelkliche Lorbeeren zu pflücken.

Der ausgezeichnete französische Mathematiker Legendre hatte zwar in jenem Werke die Grundlage für eine umfassende Theorie der elliptischen Integrale geschaffen; aber für die weitere Ausgestaltung der Transzendentenlehre konnte nur durch Einführung neuer und schöpferischer Gedanken eine mathematische Disziplin sich entwickeln, welche das α und ω der modernen Analysis werden sollte, und an deren Begründung sich die wunderbare produktive Kraft Jacobis so glänzend betätigte. Zugleich mit Jacobi tritt der um zwei Jahre ältere große norwegische Mathematiker Abel auf den Schauplatz wissenschaftlicher Arbeit in derselben Richtung, etwas früher als jener, der eine nichts wissend von dem andern, aber beide nach den Andeutungen in den disquisitiones arithmeticae wohl ahnend, daß Gauß schon seit nahezu 30 Jahren im Besitze der großen Geheimnisse dieser so verborgenen Wahrheiten sein mußte; doch auch er wagt es so wenig wie Jacobi, schriftlich oder mündlich dessen Rat und Wissen in Anspruch zu nehmen, er, wie Jacobi, fühlte sich fremd gegenüber der strengen und verschlossenen Natur jenes mächtigen Geistes, denn impulsiv ist Abels Verstand und sein Gemüt, wie es die Natur Jacobis gewesen.

Abel war Jacobi bereits weit vorausgeeilt in der Erforschung der Transzendenten, ohne daß dieser in Königsberg von dessen Entdeckungen rechtzeitig Kenntnis erhalten. Zwei kurze Briefe vom 13. Juni und 2. August 1827 an Schumacher, welche die Basis legten für die Transformationstheorie der elliptischen Integrale, zeigten der mathematischen Welt, daß Jacobi der Wissenschaft neue Gedanken und Prinzipien erobert habe; die unendliche Reihe der Modulnketten und das Prinzip der doppelten Periodizität werden in der Geschichte der Mathematik bei Abel wie bei Jacobi stets als ein Stetigkeitssprung des Geistes in der Erforschung mathematischer

Wahrheiten erscheinen. Dem französischen Altmeister und unermüdlichen Forscher in der Theorie der elliptischen Integrale brachte diese Entdeckung Jacobis eine derartige Überraschung, daß er ihr durchaus keinen Glauben schenken wollte, als ihm der schöne Brief Jacobis, der mit den Worten beginnt: „Monsieur, un jeune géomètre ose vous présenter quelques découvertes faites dans la théorie des fonctions elliptiques, auxquelles il a été conduit par l'étude assidue de vos beaux écrits", die Mitteilung von den Funden brachte, welche deutlich die ungeheure Tragweite seiner Prinzipien für den ganzen weiteren Ausbau der Transzendentenlehre erkennen ließen. Mit diesen Zeilen beginnt der für die Geschichte der mathematischen Wissenschaften so hochinteressante Briefwechsel zwischen Legendre und Jacobi, der sich bis zum Jahre 1832, ein halbes Jahr vor des ersteren Tode, hinzog, und zugleich entwickelte sich vor den erstaunten Blicken der mathematischen Welt jener wunderbare Wettkampf zwischen Abel und Jacobi, wie er, fern von Neid und Mißgunst, nur von der reinsten Liebe zur Wahrheit getragen, fast ohnegleichen dasteht in der Geschichte der mathematischen Wissenschaften. „Je puis me reposer", schreibt Legendre ein wenig später, „sur le zèle de deux athlètes infatigables tels que vous et M. Abel; je me félicite néanmoins d'avoir vécu assez longtemps pour être témoin de ces luttes généreuses entre deux jeunes athlètes également vigoureux, qui fond tourner leurs efforts au profit de la science dont ils reculent de plus en plus les limites."

Jacobis Plan, schon während der Herbstferien 1827 eine ausführliche Darstellung seiner Transformationstheorie sowie der weiteren Resultate seiner Forschungen in der Theorie der elliptischen Funktionen zu veröffentlichen, erlitt zunächst dadurch eine kurze Verzögerung, daß er durch eine neue und ganz heterogene Gedankenreihe zur Vertiefung der Untersuchungen von Lagrange und Pfaff bezüglich der Integration totaler und partieller Differentialgleichungen geführt wurde; während er in eleganter und symmetrischer Form die Pfaffsche Methode für die Integration einer allgemeinen totalen Differentialgleichung entwickelt und den Zusammenhang derselben mit den Untersuchungen von Lagrange feststellt, wird er zu jener merkwürdigen Erweiterung des Lagrangeschen Integrationsverfahrens für eine lineare partielle Differentialgleichung auf ein simultanes lineares System von ganz besonderer Form geführt und gelangt auf diesem Wege zur Ausdehnung der Methode von Lagrange für die Integration einer beliebigen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung von zwei auf solche mit beliebig vielen unabhängigen Variabeln.

So stand Jacobi in kürzester Zeit neben Gauß als einer der Führer beim Ausbau der mathematischen Wissenschaft; aber noch immer war er, obwohl der einzige Lehrer der Mathematik an der Universität Königsberg, Privatdozent mit 200 Talern Gehalt, und als der preußische Minister die Fakultät um ihre Ansicht betreffs Ernennung Jacobis zum außerordentlichen Professor befragte, da setzte dieselbe freilich keinen Zweifel in dessen ausgezeichnete wissenschaftliche Leistungen, lehnte aber trotzdem seine Ernennung ab, weil er, ein so junger Mann, sich unangemessen über einige ältere akademische Lehrer geäußert und seinen näheren Umgang wesentlich im Kreise von jüngeren Dozenten gesucht habe — von Dove, Neumann und anderen, Namen, die heute ein jeder von uns mit Pietät und Verehrung nennt. In erfreulicher Objektivität hebt dem gegenüber der Kurator der Universität in seinem Bericht an den Minister die Besorgnisse der Fakultät als unzutreffend hervor, und das günstige Urteil, welches Bessel über Jacobis wissenschaftliche Leistungen abgab, sowie der in der Akademie erstattete enthusiastische Bericht Legendres über dessen Arbeiten — „Legendre hat den Neid gemordet und an den Galgen gebracht", schreibt ihm sein Bruder Moritz — bestimmten die Regierung, ihn noch am Ende des Jahres 1827 zum außerordentlichen Professor zu ernennen; wenige Monate später erfolgte die gleiche Rangerhöhung für Neumann und Dove.

Inzwischen war der erste Teil der recherches von Abel erschienen und diesem die Priorität der Entdeckung in sehr vielen Punkten der Transzendentenlehre gesichert — und nun begann jenes ernste und schwere Ringen zwischen den beiden jugendlichen Forschern, beide beseelt von dem edelsten wissenschaftlichen Ehrgeiz und lauterster Wahrheitsliebe. Wir bewundern das gegenseitige Ineinandergreifen und sich Ergänzen ihrer Untersuchungen, das sich Stützen des einen auf die Resultate und Methoden des anderen, und so blieb beiden keine Zeit zu der geplanten Ausarbeitung einer zusammenhängenden, in allen Teilen wohlbegründeten Theorie, denn jeder Tag fast brachte eine neue Entdeckung. Während Legendre sein Erstaunen noch immer nicht gemindert über die unendliche Anzahl von Transformationen eines elliptischen Integrals in ein gleichgestaltetes, „véritable Protée analytique", hatte Jacobi schon eine Anwendung der elliptischen Transzendenten auf das bekannte geometrische Schließungsproblem gemacht, die algebraischen Auflösungen der Divisionsgleichungen der elliptischen Funktionen, wie sie Abel gegeben, inhaltlich und formal vereinfacht, die Theorie der Modulargleichungen begründet und, wiederum von einer wunderbaren Divination geleitet, in den analytischen Ausdrücken der elliptischen Umkehrungsfunktion die Fundamentaltranszendente, die ϑ-Funktion, erkannt, auf welcher sich für alle Folgezeit die Theorie der elliptischen und Abelschen Transzendenten aufbauen sollte.

Aber viele dieser Entdeckungen hatte auch Abel, entweder früher oder ein wenig später als Jacobi, gemacht; „hat er mit Ihrem Kalbe gepflügt, oder mit eigenen kräftigen Stieren?" fragt Bessel Jacobi, als der zweite Teil der Abelschen recherches in dessen Hände gekommen. Jacobi erkennt nun, daß Abel wohl schon früher als er das allgemeine Transformationsproblem gelöst, und dies treibt ihn wieder zu immer größerer Eile und unaufhaltsamer Arbeit an; er beginnt im September 1828 den Druck seines großen Werkes, in welchem er eine zusammenhängende Theorie der elliptischen Funktionen entwerfen will, publiziert daneben eine Arbeit nach der anderen über die Eigenschaften seiner Transzendenten — aber nun trennen sich auch die Wege und Methoden dieser beiden Forscher immer mehr, und, während Jacobi zu sehr allgemeinen Untersuchungen, zum Teil rein funktionentheoretischer Natur, geführt wird, wendet sich Abel der schwierigen Theorie der Integrale algebraischer Funktionen zu.

Es nahte die Zeit, in der die Wünsche des für die Entwicklung der mathematischen Wissenschaften unermüdlich tätigen Crelle in Berlin sich zu realisieren schienen; Abel sollte Norwegen verlassen, sich an der Berliner Universität habilitieren, dort ein mathematisches Seminar begründen und bei der Redaktion des Crelleschen Journals dauernd beteiligt sein. In den Wünschen Humboldts und Legendres lag es, daß das Seminar mit verhältnismäßig reichen Mitteln ausgestattet und den Händen Abels und Jacobis anvertraut werden sollte, um in Gemeinschaft mit Dirichlet und Steiner, welche bereits an der Universität dozierten, eine neue Generation schaffensfreudiger und arbeitslustiger junger Mathematiker heranzubilden; Jacobi wurde jedoch auf Antrag der Universität „als in allen Beziehungen der Beförderung zum ordentlichen Professor würdig" durch seine im März 1829 erfolgte Ernennung zunächst in Königsberg festgehalten.

Inzwischen hatte er die fundamentale Arbeit Abels über das Additionstheorem der Integrale algebraischer Funktionen der Vergessenheit entrissen, nachdem dieselbe bereits seit nahezu 2 Jahren durch ein unglückliches Zusammentreffen von Zufälligkeiten in der Pariser Akademie unbeachtet geblieben; „monumentum aere perennius" nennt Jacobi dieses Abelsche Theorem, „quelle découverte de M. Abel que cette généralisation de l'intégral d'Euler! a-t-on jamais vu pareille chose!" ruft Legendre aus, der, wie er das 1. Supplement seines traité den Jacobischen Entdeckungen gewidmet, zum Gegenstand seines 2. Supplements die Behandlung jenes wunderbaren Theorems für hyperelliptische Integrale gewählt hat.

Die Berufung Abels nach Berlin war vom Minister unterzeichnet, die Autorisation des Königs zur Bildung eines Seminars für höhere Mathematik und Physik erteilt, Jacobi in Königsberg zum ordentlichen Professor ernannt, und eine aussichtsvolle Zukunft eröffnete sich in Deutschland den mathematischen Studien. Da starb Abel plötzlich am 2. April 1829, 27 Jahre alt, „l'espérance que j'avais conçue de le trouver à Berlin a été donc cruellement déçue, . . . il s'en est allé, mais il a laissé un grand exemple", so meldet Jacobi in Trauer und Bestürzung Legendre den Tod Abels.

Wenige Tage später erschienen die Fundamenta nova functionum ellipticarum von Jacobi, ein Werk, das sich den Gaußschen disquisitiones arithmeticae würdig anreiht, und das aller Augen auf deren Verfasser richten ließ — der 24jährige junge Mann stand unbestritten da als der erste deutsche Mathematiker nächst Gauß, aber körperlich und geistig erschöpft von dem gewaltigen, unaufhörlichen Schaffen. Er reiste zu seinen Eltern nach Potsdam, um dort zunächst nur kurze Zeit auszuruhen; hier wurde die erste persönliche Bekanntschaft zwischen Jacobi und Dirichlet angeknüpft, und auf einer Reise, die sie zusammen nach Halle und von dort aus in Gesellschaft von Wilhelm Weber nach Thüringen unternahmen, lernten sie sich näher kennen. Das Ministerium gab ihm bereitwilligst einen Urlaub für das ganze Sommersemester, und er begab sich, nachdem er noch einige Monate bei seinen Verwandten und Freunden in Berlin sich aufgehalten, nach Paris, wo er vom Ende des August bis zur Mitte des Oktober in vollem Genuß von Natur und Kunst lebte, zugleich aber auch in beständigem wissenschaftlichen Verkehr mit Legendre, Fourier, Poisson und anderen hervorragenden Mathematikern und Physikern, die ihn später zum Teil noch überlebt haben.

Nach Königsberg zurückgekehrt hielt er — zum erstenmal an einer deutschen Universität — eine Vorlesung über die Anfangsgründe der Theorie der elliptischen Transzendenten, wurde aber auch durch den ständigen Verkehr mit Bessel veranlaßt, sich allmählich wieder Problemen anderer Natur zuzuwenden, welche die Sturmschen Veröffentlichungen über algebraische Gleichungen, die mit Hilfe seiner functio generatix sich ergebenden Reihen für die Lösungen einer solchen, und interessante Entwicklungsformen von Funktionen mehrerer Variablen betrafen, welche eng mit der Theorie der Fourierschen Reihen verknüpft sind.

Die Anerkennung, welche ihm von den ausgezeichneten französischen Mathematikern zuteil wurde, der bekannte Bericht Poissons über seine Fundamenta, die ihm erwiesene Ehre, daß die Pariser Akademie ihren großen Preis zwischen ihm und den Angehörigen Abels teilte, sowie die wiederholte Anerkennung „seiner verdienstvollen Wirksamkeit und beifallswerten litterarischen Leistungen“ von seiten der preußischen Regierung konnten ihn mit Befriedigung und Genugtuung auf das zurückblicken lassen, was er vollbracht; er war eben mit den Vorbereitungen zu einer großen achtstündigen Vorlesung über elliptische Funktionen beschäftigt, die er für das nächste Sommersemester in Aussicht genommen, als der Beginn des Jahres 1831 eine entscheidende Wendung in seinem Leben herbeiführte.

„Liebe Marie! Es ist eine besondere Angelegenheit, die mich treibt, Ihnen zu schreiben, und ich mag Ihnen, ohne weitere Vorbereitung, die Sache einfältiglich eröffnen“, so beginnt der erste Brief Jacobis an seine zukünftige Braut, die Tochter des Kommerzienrates Schwinck in Königsberg, welche eben an das Krankenlager ihrer älteren Schwester, der Frau des Regierungspräsidenten v. Wissmann in Frankfurt a. O., geeilt war. „Von früh auf mit den ernstesten Arbeiten beschäftigt, in ihnen den Kreis meines Daseins erschöpft glaubend, von ihnen volle Befriedigung alles dessen erhaltend, was jugendliche Ruhmbegierde nur träumen konnte, mußte ich mir selbst befremdlich vorkommen, als ein scheinbar reiches Dasein mir mit einem Male leer, und Ruhm und Ehre und Wissenschaft gar nicht mehr wesentlich erschienen und gering gegen einen freundlichen Blick von Ihrem Auge, wenn mir dieser würde“, und sehr bald darauf darf er ihr schreiben:

„Dieser Schritt ist geschehen mit solcher Notwendigkeit, bedingt durch die innerste Art Ihres Seins und des meinen, wie etwa die ewigen Gesetze der Natur und des Geistes erfolgen mögen: hier war keine willkürliche Entschließung erst zu fassen und mithin keine Übereilung. Und so geschah es mir wohl oft in entscheidenden Augenblicken meines Lebens, wie es gewiß dem ungetrübten Geiste immer geschieht, daß ihm eine notwendige Tat klar vor der Seele steht, selbst wenn er sich Gründe des Verstandes dagegen, so gut wie jeder andere, an den Fingern abzählen kann.“

Am 11. September fand die Hochzeit statt, und nun erst gewinnt Jacobi wieder die völlige Konzentration in der Wissenschaft. „Mit meinen Arbeiten“, schrieb er jetzt seinem Bruder, „steht es so, daß ich viele Jahre nur zu schreiben brauchte, indem die seltensten Resultate gesammelt sind, bei vielem, was schon fleißig ausgearbeitet ist, nur die letzte Hand fehlt, aber ich konnte bisher nie die Freudigkeit finden, die zum Vollenden nötig ist. Bin ich jetzt nun freudig wie je, zu jeder Unternehmung und Arbeit, so ist Hoffnung für manches."

Noch vor Ende des Jahres folgen, von seinen Aufzeichnungen über das Divisionsproblem und die komplexe Multiplikation abgesehen, die so interessanten und für die Anwendungen wichtigen Arbeiten über die Transformation der Doppelintegrale, von denen er einen Teil als Dissertation zur Übernahme des Ordinariats verwandte. „Et mundus naturalis et homo sibi conscius a Deo O. M. creati sunt; eaedem leges aeternae mentis humanae, eaedem naturae; quae est conditio, sine qua non intelligibilis esset mundus, sine qua nulla daretur rerum naturae cognitio ..... Est causa vera progressus mathesis necessaria ejus explicatio, quae fit secundum leges menti humanae insitas aeternas", lautet eine Stelle in jener schönen, von Neumann uns aufbewahrten Antrittsrede, und der neuen Würde gab er zugleich dauernden Glanz durch seine so berühmt gewordene Arbeit: Considerationes generales de transcendentibus Abelianis.

Inwieweit alle seine früheren Arbeiten auf dem Gebiete der Transzendenten bis zum Jahre 1829 von den großen Schöpfungen Abels beeinflußt waren, ist hier nicht der Ort festzustellen; so wie Abel, ohne von den Arbeiten Jacobis Kenntnis zu haben, durch seine fundamentalen und weitgreifenden Untersuchungen der Theorie der elliptischen Funktionen unbetretene und ungeahnte Gebiete eröffnete, so dürfen wir uns doch auf der anderen Seite der Überzeugung nicht verschließen, daß auch Jacobi, wenn Abel nicht mit in den Wettkampf getreten wäre, auf diesem Felde allein alles das geschaffen hätte, was er von 1827 an in der Theorie der elliptischen Transzendenten in Wirklichkeit schöpferisch gestaltet hat. Ob er aber ohne die Vorarbeiten Abels den Weg gefunden hätte, um in das Gebiet der höheren Transzendenten als der elliptischen einzutreten? Jedenfalls können wir diese Frage nicht definitiv bejahend beantworten. Wir wissen, daß er, schon auf der Höhe seiner ruhmvollen produktiven Tätigkeit stehend, immer und immer wieder sich mit der Frage der Umkehrung der hyperelliptischen Integrale beschäftigte, durch seine Untersuchungen über die Existenz von Funktionen einer Variablen mit mehr als zwei Perioden zwar zu bedeutsamen, aber doch immer nur negativen Resultaten gekommen war, daß aber wohl sein durch eine wunderbare Divination geglückter Ansatz, die Einführung von Funktionen so vieler unabhängiger Variablen, als es der algebraischen Irrationalität zugehörige Integrale erster Gattung gibt, ihm kaum gelungen wäre, wenn nicht Abel durch sein die ganze Theorie der Integrale algebraischer Funktionen beherrschendes Theorem der Mathematik für alle Zeiten die

Wege gewiesen hätte, auf denen allein ein weiterer Ausbau der Analysis sich ermöglichen ließ. War doch offenbar auch ein Größerer als Jacobi an diesem Problem gescheitert, und dies gewiß für ihn, der gewohnt war, alles in fertiger, abgeschlossener, in seinem Fundament wie in seinem Aufbau unverrückbarer Form den Mathematikern zu überliefern, der Grund, weshalb von der Fülle seiner schon aus dem 18. Jahrhundert datierenden Entdeckungen der mathematischen Welt erst lange nach seinem Tode Kunde geworden. Trotzdem gehört die von Jacobi auf Grund des Abelschen Theorems aufgebaute Definition der höheren Transzendenten zu seinen glänzendsten Entdeckungen, und wir finden keinen Anhaltspunkt für die Annahme, daß etwa Abel schon selbst, trotz vieler vergeblichen Versuche zur Umkehrung der hyperelliptischen Integrale, auf den Gedanken der Einführung von Funktionen mehrerer Variablen gekommen wäre.

Neben diesen Arbeiten beschäftigten aber Jacobi die tiefsten Untersuchungen über zahlentheoretische Fragen, und er entdeckte durch eine merkwürdige Induktion mittels der Vergleichung gewisser Sätze der Kreisteilung und der Zusammensetzung der quadratischen Formen negativer Determinante das Gesetz für die Klassenanzahl derselben; zugleich wandte er die schönen und eleganten Beziehungen zwischen den verschiedenen Ausdrücken seiner elliptischen Transzendenten auf immer wichtigere und schwierigere Probleme der Mechanik und Astronomie an. „Ich arbeite jetzt", schreibt er im Dezember 1832 seinem Bruder Moritz, „an einer großen Abhandlung über die Anziehung der Ellipsoide, worüber ich selbst nach den Arbeiten von Newton, Maclaurin, d'Alembert, Lagrange, Ivory, Gauß, die darüber gehandelt, viel Interessantes gefunden habe. Doch macht mir die Ausarbeitung eine ungeheure Mühe, denn es ist schwer, alles auf das beste zu machen, nachdem es gemacht ist, und erstes verlangt man." Leider sind uns all diese umfangreichen Untersuchungen unbekannt geblieben.

Neben der intensivsten produktiven Tätigkeit gestaltete sich Jacobis Wirksamkeit als Lehrer und Leiter des mathematischen Seminars immer erfolgreicher; er zwang seine Zuhörer nicht bloß in den Bann seiner Vorstellungen, überlieferte ihnen nicht nur eine Fülle von Kenntnissen und eröffnete ihnen neue Gesichtspunkte auf ihnen noch unbekannte Gebiete, sondern er fesselte auch deren Interesse dauernd durch die glückliche Verbindung der historischen Entwicklung der Probleme mit den mannigfachsten, den heterogensten Disziplinen mathematischer Wissenschaft entnommenen und kritisch beleuchteten Lösungen derselben. Durch den Hinweis auf stets sich ihm bietende neue Probleme, die er immer wieder zu bewältigen wußte, trieb er auch seine Schüler dazu, ihre Kräfte selbständig zu versuchen an der Fortführung und Erweiterung der Wissenschaft, und rief ihren Ehrgeiz wach, sich selbst zu fühlen als eine neue Generation von Mathematikern, voll Arbeitsmut und Selbstvertrauen, aber bescheiden und nicht polternd mit wissenschaftlichem Geklingel — denn neben ihnen stand ihr Meister, unerreichbar, der große Mathematiker, freilich selbst seiner Kraft sich wohl bewußt und in seiner steten Wahrheitsliebe auch nie es verleugnend, daß er sich zu den hervorragendsten Mathematikern seiner Zeit zähle, aber trotzdem bescheiden gegen wirklich große Menschen, human und anerkennend gegen jedes aufstrebende Talent.

„Man hat mir vorgeworfen, ich sei stolz gegen alles Niedere und nur demütig gegen das Höhere", hatte er schon mehrere Jahre zuvor einem Freunde gegenüber geäußert. „Aber jener unendliche Maßstab, den man an die Welt in sich und außer sich anlegt, hindert vor aller Überschätzung seiner selbst, indem man immer das unendliche Ziel im Auge hat und seine beschränkte Kraft. In jenem Stolz und in jener Demut will ich immer zu beharren streben, ja immer stolzer und immer demütiger werden."

Wenn auch die Arbeiten Jacobis jetzt allmählich eine wesentlich andere Richtung nehmen, indem er immer mehr die Theorie der Differentialgleichungen und das Gebiet der Mechanik in den Bereich seiner Forschungen zieht, so tritt doch zunächst von diesen Untersuchungen nichts in die Öffentlichkeit. Von einer überaus interessanten hydrostatischen Arbeit abgesehen, in welcher er zur Verwunderung aller Mathematiker nachwies, daß eine homogene flüssige Masse mit Beibehaltung ihrer äußeren Gestalt sich gleichförmig um eine feste Achse drehen kann, wenn diese Gestalt nicht nur, wie man bisher angenommen, ein Rotationsellipsoid ist, sondern daß auch ein ungleichachsiges Ellipsoid den Bedingungen des Gleichgewichts genügen kann, berichten seine Publikationen nur von grundlegenden algebraischen „Jacobischen" Sätzen, auf denen später die Theorie der Abelschen Transzendenten basiert wurde, und von seinen bahnbrechenden Untersuchungen über die Eliminationstheorie und den damit eng verbundenen, so berühmt gewordenen Theoremen über algebraische Linien und Flächen. Kein Gebiet der mathematischen Wissenschaften blieb von seinen Entdeckungen unberührt, und um so mehr machte sich daher bei ihm das Bedürfnis auch nach einer persönlichen Berührung mit gleichstrebenden Mitarbeitern auf den verschiedenen Wissensgebieten geltend.

Die Abgeschiedenheit Königsbergs von den wissenschaftlichen Zentren Europas ließen in Jacobi den Wunsch nach einer Versetzung an eine andere preußische Universität rege werden, und er richtete nach dem Tode Diesterwegs an den Minister die Bitte um Verleihung der Professur in Bonn, der es jedoch im Interesse der Sache für wünschenswert hielt, daß Jacobi „für jetzt seine verdienstliche Wirksamkeit in Königsberg fortsetze und das Studium der mathematischen Wissenschaften dort ferner immer mehr begründe". Auch Bessel konnte aus leicht verständlichem Egoismus das Gesuch Jacobis in Berlin nur lau unterstützen: „Obgleich ich mir lieber einen Finger abschneiden, als sagen will, daß es meiner Ansicht angemessen sei, Sie lebendig aus Königsberg zu lassen, so will ich mir doch auch lieber den Hals abschneiden, als sagen, daß Sie nicht allenthalben als ein Schatz glänzen würden."

Nachdem Jacobi im Winter 1835/36 seine durch die Nachschrift von Rosenhain uns erhaltene 10stündige Vorlesung über die Theorie der elliptischen Funktionen gehalten, die an Tiefe und Eleganz der Darstellung sowie in der reichen Fülle des gebotenen Stoffes von keiner seiner früheren Vorlesungen erreicht wurde, und durch die Aufstellung der bekannten Relationen zwischen den Produkten von vier ϑ-Funktionen für die Entwicklung der Transzendentenlehre so bedeutungsvoll geworden, hörte für längere Zeit seine Beschäftigung mit der Theorie der elliptischen und Abelschen Funktionen auf — er hatte in der Tat die ganze Spannkraft seines Geistes nötig, um endlich mit seinen weittragenden Entdeckungen in der Mechanik, der Variationsrechnung und der Theorie der Differentialgleichungen, wenn auch zunächst nur noch in Andeutungen in die Öffentlichkeit zu treten.

Er macht im Juni 1836 Bessel von seinen Entdeckungen eine kurze Mitteilung mit den einleitenden Worten: „Sollte man wohl bei einer so gemeinen Sache, wie die Bewegung eines Punktes in einer Ebene, noch Neues bemerken können?", und seinem Bruder Moritz schreibt er im September: „Ich geriet auf einige sehr abstrakte Ideen über die Behandlung der Differentialgleichungen, welche in den Problemen der Mechanik vorkommen, indem diese Differentialgleichungen durch ihre besondere Form Erleichterungen für die Integration zulassen, welche man noch nicht bemerkt hatte. Diese Betrachtungen werden desto wichtiger, wie ich glaube, werden, weil sie sich zugleich auf die Differentialgleichungen ausdehnen, welche bei den isoperimetrischen Problemen und der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung vorkommen."

Und nun faßt er endlich im November 1836 all die gefundenen Resultate in einem an die Berliner Akademie gerichteten Schreiben kurz zusammen, verkündet die uns Mathematikern so wohlbekannten

Theoreme von der Umformung der 2. Variation der Integrale und den Kriterien der Maxima und Minima, hebt die wesentlichen Eigenschaften der dynamischen Differentialgleichungen und die Vorteile hervor, welche man aus deren besonderer Form für ihre Integration ziehen kann, und zeigt die Bedeutung der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung in einer knappen, für die ganze Tragweite dieser Untersuchungen jedoch schon charakteristischen Form. Zugleich entwirft er die überaus tiefen, weit eingreifenden und umfangreichen Aufzeichnungen über die Behandlung der Probleme der Mechanik und die Methoden für die Integration der partiellen Differentialgleichungen, die uns später bekannt geworden, und welche zu einem großen Werke zusammenzustellen anfänglich in seinem Plane lag; doch wiederum traten immer neue Interessen, immer größere und immer weitere Probleme einer systematischen Ausführung aller jener Untersuchungen hindernd in den Weg. Von neuem fesselten ihn zahlentheoretische Probleme; „was meine Studien betrifft", schreibt er im Dezember 1837 seinem Bruder, „so habe ich seit einem Jahre mehr erfunden, d. h. von anderen erfundene Schwierigkeiten gelöst als seit langer Zeit, die analytische Mechanik, die Variationsrechnung und die Zahlentheorie sind diesmal der Schauplatz; in letzterer bin ich dabei, eine große Abhandlung von gegen 20 Bogen zu beenden, auch habe ich endlich angefangen, einiges aus meiner Theorie der Störungen von guten Freunden in Zahlen ausführen zu lassen." Aber die Fülle der Entdeckungen, die ihm zuströmen, läßt ihn immer mehr zur Erkenntnis kommen, daß er zunächst zu einer zusammenhängenden Bearbeitung all der auf den verschiedensten mathematischen Gebieten gewonnenen Resultate keine Zeit finden wird, und er schickt daher wenigstens kurze Skizzierungen seiner fundamentalen Sätze der Kreisteilung und seiner Untersuchungen über die Prinzipien der Mechanik an die Berliner und Pariser Akademie; die Einleitungsworte zu seiner Vorlesung über Variationsrechnung:

„In der Geschichte der Mathematik und vermutlich auch bei dem Entwicklungsgange aller anderen Wissenschaften trifft es sich oft, daß bei der ersten Entdeckung einer neuen Disziplin kühne und starke Geister in einem einzelnen Punkte weit über ihre Zeit hinaus vorwärts dringen und Fortschritte machen, die erst von ihren Nachkommen verstanden und benutzt werden",

finden auf alle seine Arbeiten in der Theorie der Transzendenten wie in der Zahlentheorie, in der Mechanik wie in der Theorie der Differentialgleichungen eine treffende Anwendung.

Es ist unmöglich, an dieser Stelle auch nur einen annähernden

Begriff von der Fülle analytischer Wahrheiten und mechanischer Theoreme zu geben, mit welchen Jacobi in staunenswerter Genialität die mathematische Wissenschaft bereicherte. Aber die Folgen der ungeheuren geistigen Anstrengung blieben nicht aus; Kopfschmerzen und nervöse Zustände machten jede weitere Tätigkeit unmöglich, und Jacobi wurde gezwungen, zum Zwecke einer Badekur für den Sommer Urlaub zu nehmen. Er reiste zunächst im März 1839 auf einige Wochen zu seiner Mutter nach Potsdam — seinen Vater hatte er schon im Jahre 1832 verloren —, lebte in dieser Zeit in Berlin in stetem Umgang mit Humboldt, Dirichlet und Steiner, und besuchte auch seinen verehrten Lehrer Boeckh, der nur eines an ihm auszusetzen hatte, daß er aus Potsdam sei, „da sei noch nie ein berühmter Mann hergekommen" — daß damals ein junger Potsdamer und Schüler desselben Gymnasiums, der wenige Jahre später durch sein Prinzip von der Erhaltung der Kraft der gesamten naturwissenschaftlichen Forschung neue Bahnen weisen sollte, sich bereits als junger Student in Berlin befand, konnte Boeckh noch nicht wissen.

Nachdem Jacobi noch Zeit gefunden, eine durch eine merkwürdige analytische Substitution wichtig gewordene Arbeit über die geodätische Linie des ungleichachsigen Ellipsoides fertig zu stellen, und der Akademie, wohl im Hinblick auf den in einigen Wochen in Aussicht genommenen Besuch bei Gauß, eine Untersuchung über die in der Theorie der höheren Potenzreste zu betrachtenden komplexen Primzahlen vorgelegt hatte, in welcher er überaus interessante Betrachtungen über die Gaußsche Einführung der komplexen Zahlen in die Arithmetik anstellt, ging er zu einer mehrwöchentlichen Kur nach Marienbad, besuchte auf der Rückreise Schweins in Heidelberg, „der mich als Lehrer von Steiner und weil ich als Student viel in seinen Sachen gelesen, interessierte", und kehrte, nachdem er auch Gauß einen kurzen Besuch abgestattet, nach 7 Monate langer Abwesenheit mit frischen Kräften zu seinen so ungern abgebrochenen Untersuchungen nach Königsberg zurück, wo ihn, als eine der ersten Zierden der Hochschule, der junge König bei seiner Krönung in Königsberg besonders auszeichnete und wissenschaftliche Ehrungen der seltensten Art von allen Seiten ihm zuteil wurden.

„Ich habe in den 7 Monaten, die ich abwesend war, mein bißchen Mathematik ganz vergessen und muß wieder von vorn anfangen", schreibt er seinem Bruder. „Ich quäle mich seit langer Zeit mit der Ausarbeitung und immer wiederholten Umarbeitung eines großen, 'Phoronomia sive de solutionum finitarum problematum mechanicorum natura et investigatione' betitelten Werkes; sobald diese etwa zehn Bogen betragende Einleitung fertig ist, will ich den Druck beginnen lassen";

aber schon wenige Monate später, nachdem er inzwischen eine Reihe analytischer und astronomischer Arbeiten publiziert hatte, meldet er ihm:

„Ich habe es jetzt aufgegeben, ein größeres mechanisches Werk unter dem Titel Phoronomie zu schreiben, denn ich habe nicht gehörig langen Atem dazu, 20 Abhandlungen wer weiß wie viel Jahre noch zurückzuhalten, bis noch 20 andere dazu geschrieben. Ich werde in irgend einer Form alles, was ich fertig habe, in einzelnen Abhandlungen von Stapel laufen lassen, und wenn nur erst der astronomische Dämon, der übrigens das Prioritätsrecht hat, da diese astronomischen Hirngespinste sehr alt sind, mich losgelassen, so soll eine wahre Sündflut von einzelnen Abhandlungen kommen."

Und in der Tat folgten sogleich seine systematische Bearbeitung der Theorie der Determinanten, sowie seine berühmte Arbeit über Funktionaldeterminanten, für uns jetzt die Grundlage der Algebra und Funktionentheorie, und seine fundamentalen „Dilucidationes" legten auf Grund seiner Multiplikatorentheorie den Zusammenhang zwischen einem Systeme totaler und einer partiellen Differentialgleichung in einer für alle Folgezeit gültigen und festen Form dar.

Mißliche Familienverhältnisse zwangen Jacobi zunächst zur Unterbrechung seiner Arbeiten; unvorhergesehene, sehr große pekuniäre Verluste machten die Auflösung des väterlichen Geschäftes notwendig, und als er bei seiner Ankunft in Potsdam sah, daß nicht bloß er, sondern auch seine Mutter ihr gesamtes Vermögen verloren hatten, faßte er trotz aller materiellen Schwierigkeiten sogleich den Entschluß, seine Mutter zu sich nach Königsberg zu nehmen. „Glücklicherweise kann ein solches Talent nicht verderben", so lauten die Schlußworte des Briefes, in dem Bessel Gauß von dem Unglücke Jacobis berichtet; „aber ich hätte ihm doch das Gefühl der Freiheit ferner gewünscht, welches Vermögensbesitz gewährt."

„Wer ihn damals sah", erzählt Dirichlet, „konnte in seiner Stimmung nicht die geringste Veränderung wahrnehmen; er sprach mit demselben Interesse wie immer von wissenschaftlichen Dingen und klagte nur darüber, daß die unerwartete Reise ihn aus einer Untersuchung gerissen habe, die ihn gerade lebhaft beschäftigte."

Von diesen Untersuchungen, welche das Prinzip des letzten Multiplikators betrafen, sollte die wissenschaftliche Welt sehr bald Kunde erhalten durch seine Vorträge auf der British Association in Manchester und in der Akademie zu Paris, wohin er und Bessel sich im Juli 1842 auf Wunsch des Königs begaben; „ich bin der Überzeugung“, schreibt ihm der Minister, „daß Sie durch Erfüllung dieses Wunsches die Genugtuung gern gewähren werden, welche in dieser Reise für unser Vaterland liegt.“

Seine große Wintervorlesung 1842/43 über die Integration der Differentialgleichungen, welche nach einer Nachschrift Borchardts mit geringfügigen Abänderungen als Jacobis Vorlesungen über Dynamik 1866 von Clebsch herausgegeben wurde, ist für alle Folgezeit für unsere Vorlesungen sowohl wie für die ganze weitere Fortentwicklung der Mechanik bestimmend und grundlegend geworden. Es folgten wichtige, hochinteressante Arbeiten über das Problem der drei Körper und das Abelsche Theorem; noch in den Weihnachtsferien verfaßte er einige erst nach seinem Tode veröffentlichte Aufzeichnungen über die geodätischen Linien eines Rotationsellipsoids und kettenbruchähnliche Algorithmen zur Feststellung der Periodizität der Kettenbrüche auch für Kubikwurzeln, und übersandte endlich noch der Berliner Akademie eine Untersuchung über neue Entwicklungen in der Störungsrechnung — nun aber brach Jacobi, der sich schon seit Beginn des Jahres krank gefühlt, völlig zusammen. Von Angst getrieben eilte Dirichlet in den Osterferien an sein Krankenlager und verweilte 3 Wochen bei seinem Freunde. „Dirichlets 16tägiger Aufenthalt“, schreibt Jacobi seinem Bruder, „ist mir eine große Erquickung gewesen — er hat etwa 60 Bogen Zahlentheorie von mir mitgenommen, um zu sehen, wie viel noch bis zur Herausgabe dabei zu tun ist; denn ich bin ganz außer Stande, so etwas jetzt auch nur anzusehen.“

Dirichlet und Humboldt, vereint mit Schönlein, suchten nun in Berlin einen längeren Urlaub und eine namhafte Reiseunterstützung zu einem Aufenthalt in Italien für ihn zu erwirken, und schon nach wenig Tagen schrieb der König aus Sanssouci an Jacobi: „Mit lebhaftem Bedauern habe ich von Ihrem mißlichen Gesundheitszustande Kenntnis erhalten, zu meiner Beruhigung aber auch zugleich die Versicherung, daß Sie von dem Aufenthalte in einem milderen Klima Ihre gänzliche Wiederherstellung erwarten dürfen“, und bewilligte alles, was Jacobis Freunde erbeten. Nachdem dieser noch einige kleinere Arbeiten abgeschlossen, trennte er sich am 9. Juli von seiner Familie, bei welcher er seine Mutter zurückließ, konnte aber zu seiner großen Freude seinem Bruder melden: „Das Beste bei der Sache ist ein ausgezeichneter Begleiter, der mir geworden ist, ein junger, liebenswürdiger, talentvoller, unabhängiger Mathematiker Namens Borchardt, welchen ich gestern promoviert habe. Dirichlet wird den ganzen Winter mit seiner Familie ebenfalls in Italien zubringen."

Wir besitzen in Briefen an seine Frau die eingehendsten Schilderungen Jacobis von seinem Aufenthalte in Rom und Neapel, von dem gewaltigen Eindruck, den die Kunstwerke Italiens auf ihn gemacht, von dem monatelangen Zusammensein mit Dirichlet, Steiner und Borchardt, und von dem Besuche der Naturforscherversammlung in Lucca, wo ihm die ehrendsten Ovationen erwiesen wurden. Überaus interessant ist sein Bericht an Bessel von der Audienz, die ihm und Dirichlet von dem Papste Gregor XVI. gewährt wurde: „da Sie eine Schwäche für gekrönte Häupter haben — wie denn Herr von Goethe richtig in seinem Carmen sagt: 'Aus der Welt ist derzumalen Übermacht nicht zu verbannen. Mir gefällt es zu verkehren mit Gescheuten und Tyrannen' —, so werden Sie unsere Bewunderung gewiß teilen, wenn sie hören, daß er nicht nur von Newton, Kepler, Copernicus, Laplace mit großer Teilnahme sprach, sondern genau anzugeben wußte, daß sich die Quadrate der Umlaufzeiten wie die Kuben der mittleren Entfernungen verhalten ... kurz Sie werden es billigen, wenn ich einem so einsichtigen Manne voll Verehrung die Hände küßte, während Dirichlet als Katholik einige so ungeschickte Versuche machte, ihm die Füße zu küssen, daß der Papst es nicht dazu kommen ließ."

Mit der in Italien erfreulich fortschreitenden Besserung seines körperlichen Befindens erwachte auch sogleich wieder die Lust zu erneuter wissenschaftlicher Arbeit; er veröffentlichte während der 5 Monate seines Aufenthaltes in Italien mehrere kleinere Aufsätze in einer italienischen Zeitschrift, schrieb den ersten Teil der wichtigen, sehr umfangreichen, für das Crellesche Journal bestimmten Abhandlung über die Theorie des Multiplikators totaler Differentialgleichungen und unternahm in seinen Mußestunden die Vergleichung der im Vatikan aufbewahrten Handschriften des Diophant.

Ende Juni 1844 traf Jacobi wieder in Berlin ein, und endlich gelang es den vereinten Bemühungen seiner Freunde, es zu ermöglichen, daß er seine schwankende Gesundheit nicht wieder dem rauhen Klima Königsbergs auszusetzen brauchte; „in wohlwollender Berücksichtigung der leidenden Gesundheit des Professor Jacobi", lautet die Kabinettsorder vom 20. August 1844, „welche dessen Aufenthalt in Königsberg nach dem Urteil der Ärzte zur Zeit gefährlich macht, will ich demselben gestatten, bis zur völligen Wiederherstellung in Berlin zu wohnen damit er daselbst ganz der Wissenschaft leben und an den Vorlesungen der Universität nur insoweit teilnehmen möge, als er dies selbst mit seinen körperlichen Kräften und seinen wissenschaftlichen Beschäftigungen für verträglich hält", und es wurden Jacobi außer seinem in Königsberg bezogenen Gehalt „mit Rücksicht auf die größere Teuerung Berlins und die durch seine Kränklichkeit herbeigeführten außerordentlichen Ausgaben" noch 1000 Taler aus dem Königlichen Dispositionsfonds bewilligt. „Ihre wissenschaftliche Laufbahn hat hier ihren Anfang genommen", sagt Bessel in seiner Abschiedsrede auf Jacobi; „aber wie der Schneesturz, der sich fortreißend vergrößert, rissen Sie die Masse, die, bis Sie in ihre Nähe kamen, geruht hatte, mit Sich fort. Ein Jahr nach Ihrem hiesigen Erscheinen kamen die elliptischen Transzendenten in Bewegung, und was als festgewachsener, undurchdringlicher Fels erschienen war, folgte, zertrümmert und seine innerste Beschaffenheit enthüllend, Ihrem Laufe. Schon 1829 waren Ihre neuen Grundlagen der elliptischen Funktionen erschienen, und Legendre, ein starker Vorgänger von Ihnen, ein sehr starker, folgte willig Ihrem Siegeszuge. Aber Ihre Spur wird in allen Teilen der Mathematik durch gleichgroße Erfolge bezeichnet ... Sie haben in gleichem Maße die Analysis, die Zahlentheorie, die Geometrie, die Mechanik bereichert. Wer eine Ihrer Abhandlungen studierte, ohne die andern zu kennen, der würde schwören, daß der Gegenstand der einen der letzte Zweck all Ihrer Anstrengungen wäre."

Im Oktober 1844 nach Berlin übergesiedelt, machte er sich sogleich an die Fertigstellung seiner Untersuchungen über die Säkularstörungen und des zweiten Teiles seiner umfangreichen Arbeit, in welcher er eine zusammenhängende Theorie des Multiplikators sowie der Anwendung derselben auf die dynamischen Differentialgleichungen und die Herleitung des berühmt gewordenen Satzes lieferte von der Zurückführung des letzten Integrales der Bewegungsgleichungen auf Quadraturen, Theoreme, deren er schon vor Jahren in den Briefen an seine Freunde und in seinen Vorlesungen Erwähnung getan. Aber die erneute geistige Anstrengung wirkte wieder schädlich auf seinen Gesundheitszustand ein, „zu meinem alten, nie ganz verschwindenden Übel kam ein Schwindel, der mich erfaßte, wenn ich auch nur eine Viertelstunde arbeiten wollte", und es sank ihm der Mut zur Fertigstellung all der von ihm so groß angelegten Werke. Wie er früher Dirichlet in Königsberg ein umfangreiches Manuskript zahlentheoretischen Inhalts zur Durchsicht gegeben, so wiederholte er jetzt den schon früher gegen Hesse geäußerten Wunsch, daß dieser sein etwa 30 Bogen starkes Manuskript über Flächen zweiten Grades und die Attraktion der Ellipsoide druckfertig mache; alle diese Manuskripte, sowie die bereits ausgearbeiteten Teile des geplanten großen Werkes über Phoronomie sind weder später veröffentlicht, noch in seinem Nachlasse aufgefunden worden.

Mußte er sich nun zunächst im Interesse seiner Gesundheit Beschränkung auferlegen in seiner produktiven Tätigkeit, so wirkte er nach anderen Richtungen hin segensreich, indem er überall für seine ausgezeichneten mathematischen Freunde sowie für die neue Generation jugendlicher mathematischer Kräfte mit seinem in den leitenden wissenschaftlichen Kreisen maßgebenden Einfluß helfend eintrat; ein an den Minister gerichtetes Memoire, getragen von dem Gefühle vornehmer Unabhängigkeit und würdig eines großen Forschers, sicherte Steiner eine sorgenfreie Stellung an der Berliner Universität, und zwei Briefe, die er an den König und Humboldt gerichtet, erhielten Dirichlet bei seiner Berufung nach Heidelberg im Jahre 1846 seinem bisherigen so segensreichen Wirkungskreise. Auch in seiner wissenschaftlichen Korrespondenz ließ er eine Unterbrechung nicht eintreten, und zu seinen früheren Schülern und Freunden Richelot, Hesse, Rosenhain u. a. gesellte sich jetzt der junge ausgezeichnete französische Mathematiker Hermite, an dessen Mitteilungen anschließend, oder wenigstens durch dieselben angeregt, Jacobi wiederum eine Reihe interessanter Arbeiten über die Eigenschaften der elliptischen und Abelschen Transzendenten veröffentlichte.

Die großen Verhältnisse Berlins, die künstlerischen Bestrebungen der gebildeten Kreise, unterstützt und gepflegt von den kunstsinnigen, idealen Anschauungen des jungen Königs, regten auch in Jacobi all die Interessen wieder an, denen er in Italien in so enthusiastischer Weise nachgegangen; „niemand kann mit mehr Verständnis Musik hören als er“, schrieb eine kunstverständige Dame, und sein Vortrag in der Singakademie über Descartes fand eine begeisterte Aufnahme; „ich habe die Schrift mit dem lebhaftesten Interesse gelesen,“ schreibt ihm der Minister Eichhorn, „weil darin über theologische Zeloten und politische Strudelköpfe ein Urteil gesprochen ist, welches ähnlichen Geistern unserer Zeit zum Korrectiv dienen könnte.“ Wir bemerken zugleich sein immer mehr wachsendes Interesse für die Entwicklung der mathematischen Physik, das durch seinen Verkehr mit Neumann und Weber gefördert worden, und das ihn auch bewog, für die wissenschaftliche Förderung des jugendlichen Kirchhoff tatkräftig einzutreten. Ein Jahr nach seinem Vortrage über Descartes, in welchem er schon auf die neuere Entwicklung der Mechanik und Physik hingewiesen, erschien die „Erhaltung der Kraft“ von Helmholtz; „die physikalischen Autoritäten“, sagt dieser 50 Jahre später, „waren geneigt, die Richtigkeit des Gesetzes zu leugnen und in dem eifrigen Kampfe gegen Hegels Naturphilosophie, den sie führten, auch meine Arbeit für eine phantastische Spekulation zu erklären. Nur der Mathematiker Jacobi erkannte den Zusammenhang meines Gedankenganges mit dem der Mathematiker des vorigen Jahrhunderts, interessierte sich für meinen Versuch und schützte mich vor Mißdeutung."

Im Herbst 1846 erschien der erste Band seiner opuscula mathematica mit einer Widmung an König Friedrich Wilhelm IV., die schon in den nächsten Lebensjahren Jacobis eine verhängnisvolle Rolle spielen sollte. „Wir haben nach den Freiheitskriegen in den Regionen des Gedankens weiter gekämpft, unterstützt von der heiligen Allianz mit dem Geiste, die Preußen geschlossen, und manchen glorreichen Sieg in den Wissenschaften erstritten. Und so rühmen wir uns, auch in der mathematischen Wissenschaft nicht mehr die Zweiten zu sein."

Wenn Jacobi auch in dieser Zeit noch einzelne sehr interessante und wichtige Arbeiten über die Eigenschaften der Pentagonalzahlen, die Integration der hyperelliptischen Differentialgleichungen und die in den kleinsten Teilen ähnliche Abbildung eines ungleichachsigen Ellipsoids auf einer Ebene veröffentlichte, so war er doch durch die fortdauernden Schwächezustände an anhaltender intensiver geistiger Anstrengung gehindert, und da er außerstande war, im Winter 1846/47 eine größere Vorlesung zu halten, so war es ihm eine erwünschte Beschäftigung und geistige Erholung, als ihn im Jahre 1846 Humboldt veranlaßte, ihm über die Mathematik der Hellenen fragmentarische Mitteilungen zu machen, um diese für seinen Kosmos zu benutzen; die im Nachlasse Jacobis gefundenen Aufzeichnungen legen Zeugnis ab von den langjährigen und tiefen Studien, welche er der Geschichte der mathematischen Wissenschaften gewidmet hat. Als aber in der Mitte des Jahres 1847 sein Gesundheitszustand sich besserte, da folgten sogleich wieder mit der Theorie der Transzendenten im Zusammenhange stehende Publikationen, welche die verschiedenen Arten der Zerlegung einer Zahl in zwei Faktoren und eine partikulare Lösung der Laplaceschen Potentialgleichung betrafen; als besonders interessant ist jedoch eine am 15. Juli 1847 der Berliner Akademie vorgelegte, aber nicht veröffentlichte Note „Über die Geschichte des Prinzips der kleinsten Aktion" hervorzuheben, die sich zum Teil in seinen nachgelassenen Papieren vorgefunden hat. „Jacobi eliminiert", sagt Helmholtz, „die Zeit aus dem zu variierenden Intregrale; physikalisch ist seine einschränkende Bedingung für ein vollständig bekanntes und in sich abgeschlossenes Körpersystem stets als gültig anzusehen; Hamiltons

Form dagegen erlaubt die Bewegungsgleichungen auch für unvollständig abgeschlossene Systeme durchzuführen, auf welche veränderliche äußere Einflüsse wirken, die von einer Rückwirkung des bewegten Systems unabhängig angesehen werden können." Wir wissen jetzt, daß Jacobi in seinen Aufzeichnungen über partielle Differentialgleichungen jenem Prinzip schon die von Helmholtz geforderte Form, ohne es ausdrücklich auszusprechen, gegeben hat.

Mit dem Sommer 1847 begann die durch Krankheit und Sorgen herbeigeführte geistige Depression allmählich immer mehr zu weichen, die alte Arbeitslust und Arbeitskraft kehrten wieder, und er meldete seinem Bruder: „Endlich bin ich dazu gekommen, ein großes Memoire über analytische Mechanik zu schreiben, welches Ostrogradzky hoffentlich so rühren muß, daß er deshalb deutsch lernen wird." Jacobi nahm seine Untersuchungen über die ϑ-Funktionen und die Differentialgleichung, welcher diese genügen, wieder auf, entwickelte das später nach Sylvester benannte Trägheitsgesetz der quadratischen Formen, knüpfte in einer großen zahlentheoretischen Arbeit ein neues Band zwischen der Zahlenlehre und der Theorie der Transzendenten, in welcher er zu wichtigen Ausdehnungen Gaußscher und Dirichletscher Sätze geführt wurde, und entwarf eine erst vor kurzem in den Papieren Borchardts aufgefundene Skizze der Entwicklungsgeschichte der elliptischen und Abelschen Transzendenten, voll von dem lebhaftesten Interesse für die Arbeiten von Rosenhain und Goepel, deren Untersuchungen ganz in dem von Jacobi geschaffenen Boden wurzelten. Von neuem suchte er wieder an deutschen Universitäten Boden zu gewinnen für ausgezeichnete junge mathematische Kräfte, und selbst der eigentlichen mathematischen Wissenschaft ferner liegenden Erscheinungen, wie dem Rechengenie Dase, brachte er das lebhafteste Interesse und die tatkräftigste Unterstützung entgegen.

Da traten die gewaltigen politischen Umwälzungen im März 1848 ein, und Jacobi, der eine feste Stellung an der Universität nicht innehatte und dem bei der gewaltsamen Umgestaltung der staatlichen Verhältnisse jeden Augenblick ein großer Teil seines Gehaltes, der ausschließlich von der Gnade des Königs abhing, entzogen werden konnte, mußte, zumal da er seiner liberalen politischen Gesinnung wiederholt Ausdruck gegeben, im Interesse seiner zahlreichen Familie darauf bedacht sein, eine feste und den andern Gelehrten koordinierte Stellung einzunehmen. Er ersuchte den Minister, ihn nicht länger in seiner Ausnahmestellung zu belassen und ihn zum ordentlichen Professor an der Berliner Universität zu ernennen, wurde aber auf ein Gutachten der Fakultät hin: „Da bereits 3 Mathematiker ihr angehören, auch die Art, wie Professor Jacobi in der letzten Zeit sich öffentlich hat vernehmen lassen, nicht einmal die Sicherheit gebe, daß seine Mitwirkung an dem Reorganisationswerke eine heilsame für die Universität sein werde", von dem Minister abschlägig beschieden.

Jacobi war im Sommer 1848 im Konstitutionellen Klub, von Dove aufgefordert, als Redner für die konstitutionelle Monarchie aufgetreten, hatte in einer Ansprache, in welcher er nach dem Ausspruche Schellings die größten Muster der alten griechischen Redner erreicht haben soll, endlosen Beifall geerntet, war aber nunmehr, nachdem ihm das stete Schwanken der Tagesmeinung überdrüssig geworden, schon seit länger als einem Jahre dem politischen Leben völlig fern geblieben und hatte in einer Reihe ausgezeichneter, zum großen Teil dem Gebiete der Astronomie angehöriger Arbeiten Ruhe und Befriedigung gesucht, als endlich am 31. Mai 1849, nachdem bis dahin die immer mehr erstarkende Reaktion sich an Jacobi noch nicht herangewagt, von dem Minister Ladenberg die Anfrage an ihn erging, ob es ihm sein Gesundheitszustand nicht gestatte, wieder nach Königsberg überzusiedeln, und bald darauf die Mitteilung, daß ihm der von dem Könige gewährte Zuschuß von nun an entzogen sei. Jacobi war nun gezwungen, seine Frau mit den 7 minderjährigen Kindern in das weit billigere Gotha, zu seinem Freunde Hansen, einem der bedeutendsten Astronomen seiner Zeit, übersiedeln zu lassen, während er selbst in ein Zimmer im Hotel de Londres in Berlin zog, von dem aus seine noch folgenden, so berühmt gewordenen Arbeiten datiert sind. Da erhielt er am Ende des Jahres 1849 ein glänzende Berufung an die Wiener Universität, und jetzt erst, nach unendlichen politischen Pressionen und Demütigungen, wurde ihm von seiten der preußischen Regierung — „er wolle lieber alle fortlassen, nur Jacobi nicht, der sei eine Naturkraft", schrieb der aufgeklärte Leiter des Unterrichtswesens Johannes Schultze an den König — durch Vermittlung Humboldts und den Edelsinn des Königs die frühere Unterstützung nicht nur als Gehalt bewilligt, sondern auch mit Rückdatierung noch erhöht.

Aber die Aufregungen des letzten Jahres hatten seine Gesundheit tief erschüttert; seine körperliche Kraft war völlig gebrochen, sein Geist schien freilich die alte Spannkraft behalten zu haben. Außer einer Reihe hervorragender Arbeiten astronomischen Inhaltes, welche eine wesentliche Vervollkommnung seiner Störungsuntersuchungen zum Gegenstande hatten, sandte er noch im März 1850 seine berühmte Arbeit „Sur la rotation d'un corps" an die Pariser Akademie, in welcher sich so wunderbar eine ausgezeichnete geometrisch-mechanische

Anschauung mit einer unvergleichlichen Genialität in der Behandlung analytischer Formen zeigt, Untersuchungen, die er in vielen umfangreichen Aufzeichnungen durch hochinteressante Theoreme ergänzt und fortgeführt, und erweitert endlich noch in seiner Arbeit über die Anzahl der Doppeltangenten algebraischer Kurven bei Begründung und Ergänzung der Plückerschen Formeln seine ersten Prinzipien für die Untersuchung algebraisch-geometrischer Probleme.

Aus den Weihnachtsferien von dem Besuche der Seinigen in Gotha zurückgekehrt, erkrankte er an der Grippe, schien sich jedoch schnell wieder zu erholen, als er am 11. Februar von neuem zusammenbrach; noch vier Tage vor seinem Tode beklagte er Dirichlet gegenüber das Mißgeschick, das über vielen seiner größeren Arbeiten gewaltet; „aber ich sehe ein, daß ich nicht länger zögern darf, jene älteren Arbeiten, denen ich einen so großen Teil meiner besten Kraft gewidmet habe, der Öffentlichkeit zu übergeben, wenn sie noch erfolgreich in den Gang der Wissenschaft eingreifen sollen.“ Am 18. Februar abends 11 Uhr, acht Tage nach seiner Erkrankung, erlag er ohne Kampf.

Dirichlet, Borchardt und Weierstraß haben, durch ausgezeichnete jüngere Gelehrte unterstützt, der mathematischen Welt durch Herausgabe seiner gesammelten Werke den ungeheuren Schatz seiner staunenswerten produktiven Tätigkeit überliefert, seine Schüler haben die nachfolgende Generation mit dem Ruhme seiner unvergleichlichen Lehrtätigkeit erfüllt, und Dirichlet war es, der ihm auch als Menschen in seiner herrlichen Gedächtnisrede ein bleibendes Denkmal gesetzt hat, in einer Zeit, in welcher die Wogen der politischen Leidenschaft für eine freie Meinungsäußerung den ganzen Mut einer von der edelsten Freundschaft, der reinsten Wahrheitsliebe und hoher wissenschaftlicher Bedeutung getragenen Persönlichkeit erforderten.

„Soll ich den Versuch wagen,“ sagt Dirichlet, „ihn zu schildern, wie er außerhalb der wissenschaftlichen Sphäre denen erschien, die den mathematischen Wissenschaften fernstehen, so muß ich es als den Grundzug seines Wesens bezeichnen, daß er ganz in der Welt der Gedanken lebte, und daß in ihm das, wozu es bei den meisten, selbst bedeutenden Menschen eines besondern Anlaufs bedarf, das Denken zum habituellen Zustande und wie zur zweiten Natur geworden war. Der unerschöpfliche Vorrat an Wissen und eigenen Gedanken, eine eigentümlich humoristische, die Dinge scharf bezeichnende Ausdruckweise verliehen dem großen Mathematiker auch im geselligen Verkehr eine ungewöhnliche Bedeutung. Wie Jacobis Gedankenkultus sich in

6*

der Anerkennung von Abels großer Entdeckung kundgab, so zeigte er einen ähnlichen Sinn für alles geistig Bedeutende. Er schätzte die Dinge danach ab, wie der menschliche Geist sich in ihnen offenbare, und behandelte alles mit Gleichmut, was die Welt der Gedanken nicht berührte.“

Wie die Worte Jacobis zündeten und die Begeisterung der Hörer anfachten, so erweckten auch seine Schriften durch Inhalt und Form steten und lauten Nachhall in den Köpfen der neuen Generation von Mathematikern, und in diesem Sinne dürfen wir auch Hermite und Weierstraß, die beiden vornehmsten Repräsentanten mathematischer Forschung in der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts, zu seinen Schülern zählen — und wir alle, die Schüler dieser beiden ausgezeichneten Forscher, welche wir noch in Verehrung und Pietät die Worte und Anschauungen Jacobis wie Orakel und mathematische Mysterien uns überliefern hörten, wir, die wir hier versammelt sind, um das Andenken jenes großen Meisters zu feiern, wir alle sind Schüler Jacobis.

Hochansehnliche Versammlung!

Möge es mir gelungen sein, auch denjenigen von Ihnen, die unserer Wissenschaft ferner stehen, nicht bloß ein Gefühl der Bewunderung abgewonnen zu haben für den großen Baumeister, der, von mathematischen, philosophischen und ästhetischen Gesichtspunkten geleitet, mitgewirkt hat an der Errichtung des gewaltigen Gebäudes, zu dem sich, von unscheinbaren Anfängen sich erhebend, unsere Wissenschaft allmählich ausgestaltet hat; möge es mir auch geglückt sein, Ihnen einen, wenn auch nur flüchtigen, Blick in den Bau der mathematischen Wissenschaft selbst eröffnet zu haben, den Stolz und die Zierde menschlicher Geistesarbeit. Gewiß ist der Raum nur die Form der reinen Anschauung, die Zeit nur die Form des reinen Denkens, gewiß sind die ersten Grundsteine unserer Wissenschaft, wie des Denkens überhaupt, der irdischen Erfahrung entnommen, aber diese Grundsteine sind tief versenkt, so tief, daß auch wir, die Bewohner dieser Stätten menschlicher Erkenntnis, sie selbst nicht mehr zu sehen, nicht mehr zu beschreiben vermögen, und deshalb, wenn auch nicht immer mit Recht, bei dem kleinsten Schwanken und Erzittern des Gebäudes selbst an seiner Festigkeit zu zweifeln anfangen — aber jeder Sturm, jeder gewaltsame Eingriff in die Schönheit des mathematischen Prachtbaus, mag ein Feind ihn zu zertrümmern suchen, ein ungeschickter Baugehilfe einen falschen Stein einsetzen, oder auch ein genialer Künstler das Gebäude mit einem allzuschweren Felsen belasten — das Gebäude wird nur noch schöner, sein Gefüge nur noch fester, und gewährt den Naturwissenschaften, die sich behaglichere, üppigere und vornehmere Wohnstätten aufgeschlagen, wenn irgendein Unwetter ihre Kreise stört und die Grundlagen ihres schönen Heims ins Schwanken bringt, gern ein schützendes Obdach — ist doch die Mathematik selbst die Wissenschaft von der Natur der Dinge in und um uns, soweit sie menschlicher Erkenntnis überhaupt sich offenbaren.

> „Sedet Sphinx illa inde a creatione mundi, sedebit in sempiternum, proponit aenigmata generi mortalium; at suo tantum tempore venit Oedipus ab Apolline missus"

sagt Jacobi in seiner geistvollen Rede zum Ruhme der mathematischen Wissenschaft.

B. Vorträge in den allgemeinen Sitzungen.

Le problème moderne de l'intégration des équations différentielles.

Vortrag, gehalten in der 2. allgemeinen Sitzung am 11. August
von

P. Painlevé aus Paris.

Le problème de l'intégration dans l'ancienne analyse.

La théorie des équations différentielles est née avec le calcul infinitésimal. C'est l'étude scientifique des phénomènes naturels qui avait guidé Newton et Leibnitz, comme leurs prédécesseurs, jusqu'à leurs découvertes définitives: une fois acquises les deux notions fondamentales d'intégrale et de différentielle, c'est encore l'étude de la nature qui devait en diriger les premières applications. Grâce à ces deux notions, la méthode expérimentale, interprétée, analysée, allait donner tous ses fruits. C'est qu'en effet, à travers le phénomène fini — toujours complexe, grossièrement simplifié, — la différentiation atteint le phénomène élementaire; elle décompose toute modification dans le temps et l'espace en une combinaison de modifications infinitésimales, j'entends de modifications infiniment brèves n'intéressant que des particules infiniment petites de matière. C'est en différentiant que Galilée déduit de ses expériences sur le plan incliné les lois de la pesanteur, que Newton déduit des lois de Kepler le principe de la gravitation universelle. Le but de l'intégration est, au contraire, connaissant les lois élémentaires d'un phénomène, de reconstituer le phénomène fini. Comment superposer, comment sommer cette infinité de modifications infiniment petites qui composent la modification totale? C'est ce problème, réciproque du premier, mais d'une difficulté autrement profonde, qui constitue l'objet du calcul intégral: il se traduit, en général, par des équations différentielles, ordinaires ou aux dérivées partielles, (suivant que le phénomène dépend d'un seul ou de plusieurs paramètres indépendants), et tout l'effort consiste à intégrer ces équations différentielles connaissant les conditions initiales ou aux limites du phénomène. L'étude du mouvement d'un solide pesant, celle du mouvement de n points qui s'attirent suivant les lois de Newton [problème des n corps], voilà deux problèmes types de calcul intégral, de difficulté bien différente. Laissant de côté le vaste champ des équations aux dérivées partielles, si heureusement renouvelé ces dernières années, je ne parlerai ici que des équations différentielles à une variable.

Le développement de la nouvelle science, à peine crée, tient du prodige: appliquant à tous les ordres de phénomènes physiques les principes du calcul infinitésimal, les successeurs de Newton et de Leibnitz accumulent en moins d'un siècle les plus éclatantes découvertes. Comme ils se limitent, dans chaque classe de faits, aux exemples simples, rudimentaires, qui se présentent les premiers, les problèmes qu'ils ont à traiter sont naturels et peu compliqués, réductibles à des cas connus [quadratures, équations différentielles linéaires, etc.]. Leur imagination, toujours soutenue et guidée par le problème réel, démêle avec une ad mirable perspicacité le jeu d'opérations élémentaires auquel se ramène l'intégration des systèmes différentiels rencontrés. En élucidant des types particuliers, ils mettent en évidence de nombreuses propriétés générales que l'avenir vérifiera rigoureusement: degré d'indétermination des intégrales, rôle des constantes, des fonctions arbitraires, des conditions aux limites, etc. Les sciences théoriques et expérimentales se développent dans une étroite connexité: tout progrès en analyse a son retentissement immédiat en physique, et réciproquement. C'est l'époque la plus glorieuse et la plus féconde dans l'histoire des Mathématiques, l'époque où il semble vraiment qu'elles soient la clef de l'univers. On ne saurait mieux comparer cet afflux de vérités nouvelles qu'au mouvement d'une vague qui occupe en un instant l'espace grand ouvert devant elle et qui s'arrête au pied d'une ceinture de granit. La vague s'arrêta quand tout ce qui était intégrable, dans les problèmes naturels, fut intégré.

Mais toutes les tentatives faites pour intégrer à l'aide d'opérations simples (quadratures et autres) une équation différentielle quelconque, avaient échoué. Il était donc plus que vraisemblable qu'une telle réduction était chimérique. La seule ressource qui restât aux chercheurs, c'était d'aborder directement l'étude de l'intégrale par des méthodes d'approximations successives bien adaptées. Tel est l'effort qui s'imposait aux Mathématiques vers l'époque où l'œuvre de Cauchy commence. C'est cet effort qu'elles ont tenté, et qui dirige, explique et justifie leur développement dans tout le cours du dernier siècle.

Le problème moderne de l'intégration. — Introduction des variables complexes.

La tâche qu'i allaient remplir Cauchy, ses contemporains et ses successeurs était (au moins en apparence) singulièrement plus ingrate que celles des mathématiciens du XVIII^e siècle, et ses résultats moins brillants. C'est ce qui explique pourquoi certains esprits, un peu superficiels, estiment qu'il y a un abîme entre l'analyse moderne et l'analyse d'il y a cent ans. Les Mathématiques, à les en croire, se seraient volontairement détournées de la réalité pour devenir une sorte de science de curiosité, vivant sur elle-même, un jeu d'esprit dont le seul intérêt serait la difficulté et dont les efforts ne sauraient plus contribuer d'aucune manière à l'étude rationnelle de l'univers. De toutes les transformations qu'aient subies les Mathématiques, l'introduction systématique des imaginaires est celle qui a le plus contribué à créer ce malentendu.

Cette introduction n'était-elle qu'une fantaisie? Pouvait-on l'éviter ou s'imposait-elle par la nature des choses? Pour comprendre qu'elle s'imposait, il suffit de consulter l'histoire même de la science. De tous les modes de développement d'une fonction réelle, le plus simple, celui qui s'est présenté tout d'abord, c'est le développement en série de Taylor. Or, si on ne considère que les valeurs réelles de la variable, les caprices de cette série, de sa convergence semblent échapper à toute loi: une fonction réelle, partout continue ainsi que ses dérivées, telle que $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, n'est représentée par sa série de Taylor que sur un segment limité de l'axe des x, alors que e^x est représenté pour x quelconque. Qu'on introduise les valeurs complexes de la variable, et tout s'éclaire. Ce sont les points singuliers imaginaires qui influent sur le développement et en arrêtent la convergence, même pour les valeurs réelles de la variable.

Ce n'est pas ici le lieu de discuter les circonstances algébriques qui ont engendré les quantités imaginaires, en même temps que les conventions de calcul qui les concernent. Que ces conventions soient légitimes puisqu'elles n'impliquent aucune contradiction, c'est là un fait qui est hors de conteste, en dépit des obscurités dont on s'est plu parfois à entourer la question. Le paradoxe, ce n'est pas que ces conventions soient légitimes, c'est qu'elles soient utiles et fécondes. De cette utilité, la théorie de la série de Taylor est, à elle seule, une preuve suffisante.

Je sais bien que les séries de polynômes, récemment découvertes, qui généralisent et peuvent remplacer la série de Taylor, jouissent de la remarquable propriété de converger sur l'axe réel jusqu'au premier point singulier de la fonction. Mais, bien loin d'aller contre l'intervention des imaginaires, cette découverte la justifie, puisqu'elle résulte elle-même de la théorie des fonctions de variables complexes.

Le succès couronna d'ailleurs immédiatement l'emploi des imaginaires. Le „calcul des limites" établit rigoureusement toutes les propriétés fondamentales des équations différentielles, et donna une base solide à la théorie. L'équation différentielle de Legendre

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = (1 - y^2)(1 - k^2y^2)$$

était demeurée stérile tant qu'on s'était restreint aux variables réelles; rien ne la distinguait des équations analogues où le second membre est un polynôme de degré quelconque. En embrassant le champ complexe, Abel et Jacobi découvrent d'un coup la double périodicité, la représentation de $y(x)$ par des séries entières très convergentes, fondent la théorie des fonctions elliptiques, qui engendre à son tour toute la théorie des fonctions analytiques uniformes. Plus tard, ce sont les propriétés si fécondes des équations différentielles linéaires, et tant d'autres brillantes découvertes. — L'introduction des imaginaires était donc bien dans la nature des choses. Ce n'est point par caprice que les mathématiciens y ont eu recours, ni pour dissimuler, sous d'obscures complications scholastiques, leur impuissance à traiter les problèmes réels. Bien au contraire: s'ils ont étendu leurs spéculations au champ complexe, c'est pour éclairer, pour élucider les difficultés trop profondes du champ réel.

Les variables imaginaires une fois introduites, l'intégration d'une équation différentielle pouvait être tentée dans deux voies différentes:

1° On pouvait chercher à la ramener à des équations simples (quadratures, équations linéaires, etc.); c'est-à-dire poursuivre (conformément aux traditions de l'ancienne analyse) l'intégration formelle de l'équation;

2° Si on n'apercevait aucune réduction de ce genre, on pouvait chercher à étudier l'intégrale générale, par approximations, dans tout son champ réel et complexe, à mettre en évidence ses propriétés, ses singularités, etc.

Je voudrais justifier en deux mots les termes d'intégration formelle que j'ai employés au sujet du premier problème. Je remarque d'abord qu'une équation prise au hasard ne comportera en général aucune intégration formelle. De plus, même si une équation est intégrée formellement, l'étude des relations entre la fonction et la variable n'est pas achevée. C'est ainsi que l'équation de Jacobi, citée plut haut, équivaut à la quadrature:

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}},$$

mais cette quadrature ne met nullement en évidence les propriétés de la fonction $y(x)$. Une remarque analogue s'applique aux équations linéaires, ainsi qu'aux équations de définition des fonctions automorphes (équations qui, comme on sait, se ramènent formellement à une équation de Riccati). En définitive, on peut dire qu'en toute logique, l'intégration d'une équation différentielle se décomposera en deux opérations successives:

1° Réduction de l'équation à des équations irréductibles;

2° Étude directe, dans tout le champ réel et complexe, de l'intégrale de ces équations irréductibles.

De l'irréductibilité des équations différentielles. — Théorie des groupes.

Mais ici, une question se pose: la théorie de la réductibilité des équations différentielles a fait l'objet de travaux variés et considérables; toute la théorie des groupes s'y rattache. Or, que faut-il entendre exactement par ce mot „réductibilité“? Quand dira-t-on qu'une équation différentielle est irréductible? Si elle est réductible, comment précisera-t-on sa réductibilité?

C'est seulement dans ces dernières années qu'on est parvenu à une définition de la réductibilité, vraiment générale et philosophique et qui embrasse tous les cas particuliers. Cette définition est même si récente, elle soulève des difficultés si délicates qu'on ne peut dire encore qu'elle ait reçu unanimement droit de cité en mathématiques, mais elle sera classique avant quelques années. Voici cette définition.

Considérons une équation différentielle algébrique*), que je choisis d'abord du premier ordre, soit l'équation:

$$\text{(e)} \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y);$$

l'intégrale générale $y(x)$ de cette équation dépend d'une constante arbitraire, soit u; autrement dit, l'équation (e) définit une fonction y de deux variables x, u, ou plutôt une infinité de telles fonctions (qui se déduisent d'une quelconque d'entre elles en remplaçant u par une fonction arbitraire de u). Si on veut encore, il est loisible de considérer

*) Je me limite ici aux équations algébriques, mais il serait facile d'étendre la théorie à des équations différentielles quelconques, en élargissant (comme en algèbre) le domaine de rationalité.

u comme fonction de x, y; cette fonction vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} f = 0, \tag{E}$$

qui équivaut à l'équation (e).

L'intégrale générale de l'équation (e) sera dite réductible si on peut adjoindre à l'équation (E) d'autres équations (algébriques) en $x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \cdots$, qui soient compatibles avec l'équation (E) sans en être une conséquence.

Tous les types classiques d'équations du premier ordre (équation linéaire, équation de Riccati, etc.) rentrent dans cette définition. Par exemple, pour l'équation linéaire, on peut adjoindre à l'équation (E) la condition: $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. De même, si l'équation admet un facteur intégrant algébrique $\lambda(x, y)$, on peut adjoindre à l'équation (E) l'équation: $\frac{\partial u}{\partial y} = \lambda$. D'une manière générale, quel que soit le mode d'intégration qu'on imagine (intégration par quadratures de différentielles totales, ou par combinaison de quadratures superposées, etc.), on vérifie qu'il n'échappe pas à la définition précédente.

Il n'est pas difficile de comprendre pourquoi, si on veut bien préciser les opérations dont dispose l'intégration formelle: elle doit définir la fonction $y(x, u)$ par des procédés tels qu'on puisse à l'aide d'un nombre fini d'opérations non transcendantes (dérivations, éliminations, etc.) vérifier si cette fonction $y(x, u)$ satisfait bien à l'équation donnée; les séries, les intégrales définies lui sont interdites, et plus généralement tous les procédés dont on ne peut vérifier la justesse qu'à l'aide d'opérations transcendantes. En dernière analyse, l'intégration formelle pourra toujours être réduite à ceci: substitution à l'équation (E) d'un certain système d'équations algébriques aux dérivées partielles, portant sur x, y, u et d'autres variables ou fonctions auxiliaires, système tel qu'on puisse, à l'aide d'un nombre limité de dérivations et d'éliminations, décider s'il définit au moins une fonction $u(x, y)$ qui soit solution de l'équation (E).

Mais, dans ces conditions, il sera loisible (moyennant un nombre fini de dérivations et d'éliminations) de déduire du système auxiliaire les relations qu'il entraîne entre x, y et u. Si ces relations se réduisent à l'équation (E) ou à ses conséquences, le système auxiliaire n'est d'aucune utilité, car son intégration se laisse décomposer en deux opérations successives, dont la première est l'intégration de (E). Si, au contraire, ces relations ne sont pas conséquences de (E), l'équation donnée (e) est réductible au sens que nous avons défini.

La définition s'étend d'ailleurs d'elle-même à une équation (ou à un système différentiel) d'ordre quelconque. S'il s'agit, par exemple, d'un système du 2e ordre

$$\text{(S)} \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y, z), \quad \frac{dz}{dx} = \varphi(x, y, z),$$

on regarde y et z comme fonctions de x et des deux constantes arbitraires u, v, ou (si on veut) u et v comme fonctions de x, y, z; ces fonctions u, v vérifient le système:

$$(\Sigma) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} f + \frac{\partial u}{\partial z} \varphi = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} f + \frac{\partial v}{\partial z} \varphi = 0.$$

Le système S est dit réductible, si on peut adjoindre au système Σ d'autres équations algébriques, portant sur x, y, u, v et les dérivées partielles de u, v, équations qui soient compatibles*) avec Σ sans en être des conséquences. Nous appellerons système réduit le système formé par Σ et les équations adjointes.

Cette définition admise, on peut établir une proposition qui domine toute la théorie de la réductibilité et que j'énonce dans le cas du premier ordre:

„Quand une équation différentielle est réductible, parmi les systèmes réduits, il en est toujours un, d'ordre différentiel minimum, qui jouit des propriétés suivantes: 1° il est automorphe, c'est-à-dire que sa solution générale $u(x, y)$ se déduit d'une solution particulière quelconque $u_1(x, y)$ par les transformations $u = \psi(u_1)$ d'un *groupe*; 2° tous les autres systèmes réduits se déduisent de celui-là en y remplaçant u par une fonction $U(u)$ qui vérifie une équation différentielle algébrique (en u, U) arbitrairement choisie."

Cet énoncé, qui s'étend immédiatement à une équation différentielle d'ordre quelconque, donne la raison profonde du rôle capital et presque exclusif que joue la théorie des groupes dans la réduction des équations différentielles. Il fait éclater l'importance d'une énumération complète des groupes continus finis et infinis à une, deux, trois, etc. variables.

C'est ainsi que l'énumération si simple des groupes continus à une variable entraîne ce théorème:

„Quand une équation du premier ordre est réductible, quatre cas seulement peuvent se présenter: 1° l'équation s'intègre algébriquement; 2° elle admet un facteur intégrant algébrique; 3° elle admet un facteur intégrant dont le logarithme a ses deux dérivées premières algébriques;

*) J'entends par là que Σ et les équations adjointes ont au moins une solution u, v commune, où u et v sont deux fonctions distinctes de x, y, z.

4^0 une intégrale première $u(x, y)$ est donné par un système différentiel dont la solution générale est de la forme $u = \frac{au_1 + b}{cu_1 + d}$, ($a, b, c, d$ constantes arbitraires), système qui se ramène, comme on sait, à une équation de Riccati."

Considérons encore une équation du second ordre dont le coëfficient différentiel ne dépend que de x, y, soit l'équation:

$$\frac{dz}{dx} = \varphi(x, y), \quad \text{avec } \frac{dy}{dx} = z.$$

Une telle équation n'est pas irréductible, car elle admet un dernier multiplicateur égal à l'unité, et on peut, par suite, adjoindre au système Σ l'équation:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = 1.$$

Si le coëfficient différentiel $\varphi(x, y)$ est une fonction arbitraire quelconque, aucune réduction ultérieure n'est possible. Dans l'hypothèse où l'équation comporte une réduction nouvelle, l'énumération que Sophus Lie a faite des groupes continus, finis ou infinis, à deux variables, suffit à démontrer que deux cas seulement se présentent: „Il existe des intégrales premières $u(x, y, z)$ qui sont données par un système différentiel algébrique dont la solution générale est 1^0 soit de la forme: $u = au_1 + bu_2 + c$ (a, b, c constantes arbitraires), 2^0 soit de la forme $u = \chi(u_1)$, (χ fonction arbitraire)."

De l'intégration analytique d'une équation irréductible. — Intégrales uniformes.

Supposons maintenant que nous soyons en présence d'une équation reconnue irréductible.*) Quel est le but idéal, si on peut dire, qu'il convient de se proposer en l'étudiant? Quand dira-t-on que l'intégration de cette équation est *parfaite*, au sens moderne du mot?

*) Nous nous sommes occupés exclusivement de la réductibilité de l'intégrale générale d'une équation différentielle. Quand certaines solutions particulières (mais non l'intégrale générale) sont réductibles, par exemple sont algébriques, on convient de dire encore que l'équation considérée est irréductible, mais comporte des solutions exceptionnelles. Les considérations indiquées plus haut sur l'intégration formelle montrent que toute solution exceptionnelle satisfait nécessairement à une équation différentielle (algébrique) d'ordre moindre: en fin de compte, l'étude d'une solution exceptionnelle se ramène à l'étude d'une équation différentielle d'ordre moindre, dont l'intégrale *générale* est réductible, ou dont *aucune* solution n'est réductible: toutes les solutions de la nouvelle équation sont solutions exceptionnelles de la première.

L'équation déjà citée:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = (1 - y^2)(1 - k^2 y^2),$$

bien que réductible, va nous servir de guide. Sans doute, elle définit x en fonction de y par une quadrature, mais la fonction $y(x)$ définie par cette équation n'était pas exprimable explicitement à l'aide des transcendantes élémentaires connues: Abel et Jacobi ont pourtant *intégré* cette équation en représentant $y(x)$ par le quotient de deux séries entières, très convergentes et qui mettent en évidence toutes les propriétés de la fonction dans le domaine réel et complexe.

D'une manière générale, une équation différentielle irréductible devra être regardée comme *intégrée* si, par un procédé quelconque d'approximation indéfinie (série, fraction continue, intégrale définie, etc.), on arrive à représenter l'intégrale générale dans tout son domaine d'existence (réel et complexe), avec une erreur aussi petite qu'on veut, dont on saura fixer une limite, la représentation mettant en évidence les propriétés fondamentales de l'intégrale, permettant de tenir compte des conditions initiales, etc.

Parmi les fonctions analytiques, les fonctions uniformes sont celles dont les propriétés et les modes de représentation sont les plus simples et les mieux étudiés. Il est donc naturel de rechercher, en premier lieu, les équations différentielles dont l'intégrale générale peut être définie en égalant à zéro des fonctions uniformes, et notamment les équations différentielles qui possèdent des intégrales premières uniformes. Si, par exemple, une équation du premier ordre admet une intégrale première

$$P(x, y) = c^{te},$$

où P est une fonction entière de x, y qu'on sait développer en série de Mac-Laurin, il est clair que la connaissance de cette intégrale sera singulièrement précieuse. Il restera toutefois à résoudre l'équation implicite par rapport à la fonction y. Il ne faut pas d'ailleurs se dissimuler que la recherche de telles intégrales premières est un problème de la plus profonde difficulté.

Mais il est un cas particulier (encore que fort étendu) où le problème peut être abordé dès maintenant avec succès: c'est le cas où l'intégrale générale $y(x)$ est elle-même une fonction uniforme dans tout son domaine d'existence. Le problème ainsi particularisé est une généralisation directe des découvertes d'Abel et de Jacobi.

Si on se limite au premier ordre, le problème ne conduit qu'à des résultats connus. Mais il en va tout autrement pour les équations d'ordre supérieur. C'est ainsi que, dès le second ordre, on rencontre des types d'équations entièrement nouveaux, qu'on sait épuiser, et dont le plus simple peut recevoir la forme canonique:

$$(1) \qquad y'' = 6y^2 + x.$$

L'intégrale générale de cette équation est une fonction méromorphe qui se laisse représenter par le quotient de deux fonctions entières, à savoir par l'expression; $y = \frac{d}{dx}\frac{u'_x}{u} \equiv \frac{d^2}{dx^2}\log u$, u designant une fonction entière qui vérifie l'équation très simple du troisième ordre

$$\frac{z''^2}{2} + 2z'^3 + xz' - z = 0, \text{ où } z = \frac{u'}{u}.$$

Cette fonction entière $u(x)$ est développable en série de Mac-Laurin, les coëfficients se calculant par dérivations successives: on connaît donc une représentation très simple de $y(x)$ dans tout le plan complexe, représentation entièrement analogue à celle de la fonction $\wp$ par la fonction σ. On sait d'ailleurs étudier le mode d'indétermination des fonctions $u(x)$ et $y(x)$ pour $x = \infty$; le genre de $u(x)$ est 2, son ordre $\frac{5}{2}$, sa croissance est régulière; la distribution des pôles et des zéros de $y(x)$ est, dès lors, nettement précisée.

D'autre part, on peut montrer qu'au point de vue de l'intégration formelle, l'équation $y'' = 6y^2 + x$ rentre dans la classe la plus générale, la classe irréductible des équations:

$$y'' = \varphi(x, y);$$

autrement dit, nul procédé ancien d'intégration ne peut rien ajouter à la connaissance du dernier multiplicateur égal à l'unité. C'est là le premier exemple d'une équation différentielle qui n'est attaquable par aucune méthode d'intégration formelle et qui comporte, par la théorie des fonctions, une intégration parfaite au sens moderne du mot. Jusque dans ces dernières années, toutes les équations différentielles qu'on savait étudier étaient réductibles aux équations linéaires, aux quadratures, ou à leurs combinaisons: c'est parce qu'on connaissait à l'avance la manière dont les constantes figuraient dans l'intégrale qu'on pouvait pénétrer dans les propriétés de cette intégrale; les équations qui définissent les transcendantes classiques (fonctions elliptiques, abéliennes et dégénérescences, fonctions automorphes, etc.) n'échappent pas à cette remarque. Au contraire, l'intégrale $y(x)$ de l'équation (1), regardée comme fonction des constantes x_0, y_0, y_0', est (par rapport à chacune de ces constantes) une fonction uniforme et méromorphe, de nature (suivant l'expression anglaise) „transcendentally transcendental", comme la fonction Γ, c'est-à-dire qui ne vérifie aucune équation différentielle algébrique. Il résulte notamment de ce qui précède que les transcendantes uniformes $y(x)$ définies par l'équation (1) ne sauraient s'exprimer par aucune combinaison de transcendantes classiques, puisqu'une telle combinaison, si enchevêtrée soit-elle, vérifie toujours un système différentiel réductible aux quadratures et aux équations linéaires.

Les mêmes propriétés appartiennent aux autres types irréductibles d'équations du second ordre dont l'intégrale générale est uniforme.

On peut encore, généralisant un peu le dernier problème, étudier les équations différentielles dont l'intégrale est une fonction à n branches ou a ses points critiques fixes. Mais quels que soient les progrès que doivent accomplir, par la suite, ces difficiles problèmes et les problèmes plus vastes de même nature, il est bien évident, d'une part qu'on n'épuisera jamais toutes les équations parfaitement intégrables, d'autre part qu'une équation prise au hasard ne rentrera pas dans ces types spéciaux. L'intérêt de ces classes remarquables d'équations, qui est évident au point de vue purement mathématique, pourrait donc sembler moindre au point de vue des applications, si on ne savait quel bénéfice les méthodes générales retirent toujours de problèmes difficiles et précis, élucidés à fond. C'est sur cette dernier idée que je voudrais insister, pour terminer, en parlant de l'intégration approximative et directe des problèmes réels.

L'intégration approchée dans le domaine réel.

Quand une équation différentielle qui se présente dans une application, ne comporte (ou n'apparaît comporter) ni intégration formelle, ni intégration analytique, comment en aborder l'étude dans l'état actuel de la science? La seule ressource est de l'attaquer directement à l'aide des procédés d'approximation aujourd'hui acquis, en se laissant guider autant que possible par le phénomène réel que traduit l'équation. Le problème, dans ces conditions, peut revêtir, comme on sait, un double aspect: se propose-t-on de reconnaître s'il existe des solutions périodiques, si une trajectoire est fermée, etc., la question est d'espèce qualitative; au contraire, la détermination approchée de la position d'un mobile à un instant quelconque est d'espèce quantitative. Prenons comme exemple le problème des n corps: la question de savoir si notre système planétaire est stable rentre dans la première catégorie, le calcul des éphémérides dans la seconde. Les deux problèmes, qualitatif et quantitatif, sont d'ailleurs loin d'être indépendants: leur connexité est étroite; tout progrès de l'un est un progrès de l'autre.

Les travaux considérables suscités à la fin du dernier siècle par le problème qualitatif, leur brillante application au problème des trois corps, sont trop connus pour qu'il soit nécessaire d'y insister d'avantage. Je voudrais seulement, dans ce domaine strictement réel, signaler l'influence fécondante de la théorie des fonctions analytiques. Je n'en citerai que deux preuves. On sait le rôle capital que jouent, dans la discussion des courbes définies par les équations différentielles, les points singuliers (nœuds, cols, centres, etc.), points qui correspondent à ces valeurs des variables pour lesquelles les coëfficients différentiels ont la forme $\frac{0}{0}$: jamais les allures des intégrales au voisinage de ces valeurs n'auraient été élucidées, si les analystes n'avaient été rompus par avance aux singularités des fonctions analytiques et à leurs modes de développement. La seconde preuve que j'ai en vue, c'est la théorie des équations différentielles dépendant d'un paramètre, théorie qui seule a permis la recherche des solutions périodiques, et qui est née du calcul des limites.

Quant au problème quantitatif, il doit plus encore aux fonctions analytiques. Les procédés d'approximation applicables aux équations différentielles réelles sont aujourd'hui nombreux, simples, plastiques; ils s'adaptent aux différents modes de conditions initiales: conditions initiales de Cauchy, ou (comme pour l'équilibre des fils) valeurs de la fonction pour deux valeurs données de la variable, etc. Il est parfaitement vrai que ces procédés peuvent être exposés sans la considération d'imaginaires, et que Cauchy les avait indiqués au moment même où il jetait les premiers fondements de la théorie des fonctions analytiques. Mais précisément, ils étaient en quelque sorte tombés en sommeil; s'ils se sont ranimés, c'est sous l'influence des méthodes et des raisonnements analytiques qui seuls permettaient d'aller au fond des choses.

Considérons, par exemple, la première méthode de Cauchy, la plus élémentaire, celle qu'on peut appeler la méthode des différences, puisqu'elle consiste à regarder les équations différentielles comme limites d'équations aux différences. On sait aujourd'hui que, dans cette méthode, la convergence vers l'intégrale est assurée tant que, partant des conditions initiales, on ne rencontre pas une singularité $x = a$ des fonctions $y(x)$, $z(x)$, ... Mais cette singularité peut être de deux espèces suivant que, x tendant vers a, les fonctions $y, z, \ldots$ tendent vers des valeurs déterminées ou sont indéterminées. La difficulté est, dans le second cas, d'une nature autrement subtile que dans le premier; si on a su la prévoir, c'est grâce à l'étude classique des points essentiels analytiques; si on commence, non sans peine, à la discuter, c'est grâce à la théorie des fonctions, en employant ses modes de raisonnement sur la croissance, le genre et l'indétermination à l'infini d'une fonction entière.

En particulier, le problème quantitatif des 3 corps doit à l'analyse des variables complexes ses derniers progrès. On a établi en effet, dans le cas de trois corps (mais non dans le cas de n), que les coordonnées des points restent finies et déterminées quel que soit t. Il suit de là que seul le choc proprement dit peut donner lieu à difficulté. D'autre part, on est parvenu récemment à former la condition analytique nécessaire et suffisante pour qu'il y ait choc au bout d'un temps fini. Il ne reste plus qu'un dernier effort à tenter pour que le problème quantitatif des trois corps soit théoriquement résolu.

Mais pour ne parler que des résultats acquis, il convient de ne pas oublier que les méthodes d'approximation applicables aujourd'hui à une équation différentielle quelconque, si elles sont encore théoriquement imparfaites, se montrent pourtant, dans une foule de cas, d'une efficacité très suffisante. C'est ainsi que le problème quantitatif des n corps que j'ai choisi comme type, n'est pas rigoureusement résolu jusqu'ici; mais les éphémérides de notre système solaire n'en sont pas moins calculées pour trois siècles avec une surprenante précision. Il faut d'ailleurs se garder de croire que la puissance des méthodes actuelles soit épuisée par cet effort. Admettons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse de calculer les positions mutuelles, dans 10.000 ans, des astres du système solaire, avec une erreur plus petite que 8 rayons terrestres: les méthodes actuelles fournissent-elles sûrement le moyen théorique d'effectuer ce calcul? Non, il y a une restriction, mais bien légère, et que voici. Si les lois de Kepler étaient exactes, la distance de deux astres donnés du système resterait supérieure à un minimum δ; il est bien invraisemblable que d'ici 10.000 ans cette distance s'abaisse jusqu'à $\frac{\delta}{5}$, par exemple, ou au dessous. Or les procédés modernes, moyennant un nombre fini d'opérations qu'on peut limiter d'avance,p ermettront sûrement d'affirmer: ou bien qu'on possède les éphémérides pour 10.000 années, avec l'approximation voulue, ou bien que, dans cette intervalle, la distance de deux des astres est devenue moindre que le minimum supposée $\frac{\delta}{5}$. En un mot, l'état du système solaire sera calculé, pour 10.000 ans, avec l'exactitude exigée, à moins que, durant cette période, notre système ne se soit invraisemblablement déformé: auquel cas, la marche même du calcul avertirait de cette déformation. Tel est le degré de perfection et d'imperfection des procédés généraux de calcul dont on dispose aujourd'hui.

Ces indications, si insuffisantes qu'elles soient, peuvent donner quelque idée du labeur colossal qu'ont accompli les analystes, au cours du dernier siècle, dans le seul domaine des équations différentielles.

Intégration formelle, intégration analytique, aussi parfaite que possible, dans le champ complexe, intégration approchée dans le domaine réel, telles sont les trois directions dans lesquelles se sont développées les mathématiques. Au centre de toutes ces recherches, la théorie des fonctions apparaît comme jouant un rôle directeur et prépondérant. Il n'en faut pas conclure que ce rôle lui appartiendra toujours. Il n'y a aucune absurdité à penser qu'elle sera jugée un jour de la même manière dont nous jugeons, par exemple, l'œuvre arithmétique de Gauß, c'est-à-dire qu'elle apparaîtra comme une des parties les plus harmonieuses et les mieux construites de l'édifice mathématique, mais comme un monument du passé. Peut-être possédera-t-on alors des méthodes d'investigations plus puissantes et plus profondes, qui permettront de s'attaquer hardiment aux équations différentielles, en ne se souciant que du problème réel qu'elles traduisent. Mais ces méthodes fécondes et vivantes, c'est de la théorie des fonctions qu'elles seront nées.

The Mathematical Theory of the Top considered historically.

Vortrag, gehalten in der 2. allgemeinen Sitzung am 11. August

von

A. G. Greenhill aus London.

(Mit Demonstrationen.)

The historical order can be taken in two directions for giving a summary account of the Mathematical Theory of the Top or Gyroscope.

If we adopt the present as our epoch of reckoning, we should begin with a citation of the most modern work on the subject, as incorporated into the Theorie des Kreisels of Klein and Sommerfeld, now in course of publication.

Proceeding backward from this point of departure against the stream of time, we meet the name of Routh, Hess, Lottner, Jacobi, Poisson, Lagrange, to cite a few only, until we reach Euler, and his immediate precursor, Segner of Halle, whose Specimen theoriae turbinum is the first work to give precision to our subject.

Receding further to the period of Newton, we cannot consider as very successful his application of gyroscopic theory to the precession of the equinox, in Book III of the Principia; although Newton's method in Maxwell's hand proved useful for a discussion of Saturns rings.

Returning now at the top of the tide, we take the Specimen theoriae turbinum, 1755, as the effective starting point; and I venture to suggest that it deserves to be reprinted in the series of Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, as it is moreover the first to discuss the principal axes of a body.

Theoria turbinum might be taken to mean — theory of turbines — of which Segner was also the inventor; but turbo here means the spinning top, and Segner's attention was first drawn to the subject by reading an article in the Gentleman's Magazine of 1754 on Serson's artificial horizon, a top with polished surface intended to give a horizontal reflecting plane when the sea horizon was obscured.

The invention was taken up by the English Admiralty, and Serson was sent on a voyage in 1744 to make a practical test; but his ship the Victory was lost with all hands on the Casquets near Alderney soon after the start.

A specimen of Serson's top is preserved in the museum of Kings College London; the idea has been revived of late years by the French navigators, for which the Comptes rendus 1896 may be consulted; it is claimed to give good results in skilful hands where an ordinary observation would otherwise be impracticable.

Segner's theory is developed in Euler's Theoria motus corporum rigidorum, 1765, in which the angles ϑ, φ, ψ are introduced, still employed in modern treatment.

But Euler discusses the motion of a top on a smooth horizontal plane over which the point is free to wander, in which case the motion is hyperelliptic.

If the reduction to the elliptic function is required the point must be restrained to a fixed spot, as in a smooth cup in a model here, which Dr. R. H. Weber will spin, in the Maxwell top, or in this suspended wheel.

A desired gyroscopic motion can be realised by this apparatus; and I beg to call attention to the simplicity of the construction: a bicycle wheel, a brass stalk, a bicycle hub or pedal fastened in an iron support bolted to a railway sleeper; material all ready to hand and requiring little skill for adjustment.

No need for the lecturer to interrupt the course of his explanation while spinning the wheel with a stick.

Perry says in his popular treatise on the Spinning Top, p. 69: „I believe there are few mathematical explanations of phenomena which may not be given in quite ordinary language to people who have an ordinary amount of experience."

To us the most familiar instance is the way in which Poinsot, as Maxwell says „brought Dynamics under the power of an Analysis more searching than the Calculus, in which ideas take the place of symbols and intelligible propositions supersede equations".

I avail myself of the rare privilege of addressing a mathematical andience to interpret Perry's: „ordinary amount of experience" as we understand it, and to place before you in statements as few as possible the essential theory of a top when the motion is expressible by the elliptic function, the case where the body has uniaxial symmetry and is free to move under gravity about a point in its axis.

I need not weary you with any demonstration, as you can carry it out better and easier of yourself.

Employ the usual notation for the physical constants: W the weight in g, Wh the preponderance in g-cm, A and C in g-cm^2 the principal moments of inertia, equatorial and polar, at the fixed point O; also l the length of the equivalent simple pendulum, so that $A = Whl$; and let n denote the mean angular velocity in the small conical motion and T seconds the period, when as shown in equation

$$(1)\qquad \frac{4\pi^2}{T^2} = n^2 = \frac{g}{l} = \frac{Whg}{A},$$

or $$Whg = An^2,$$

the quantity denoted by P in Klein-Sommerfeld.

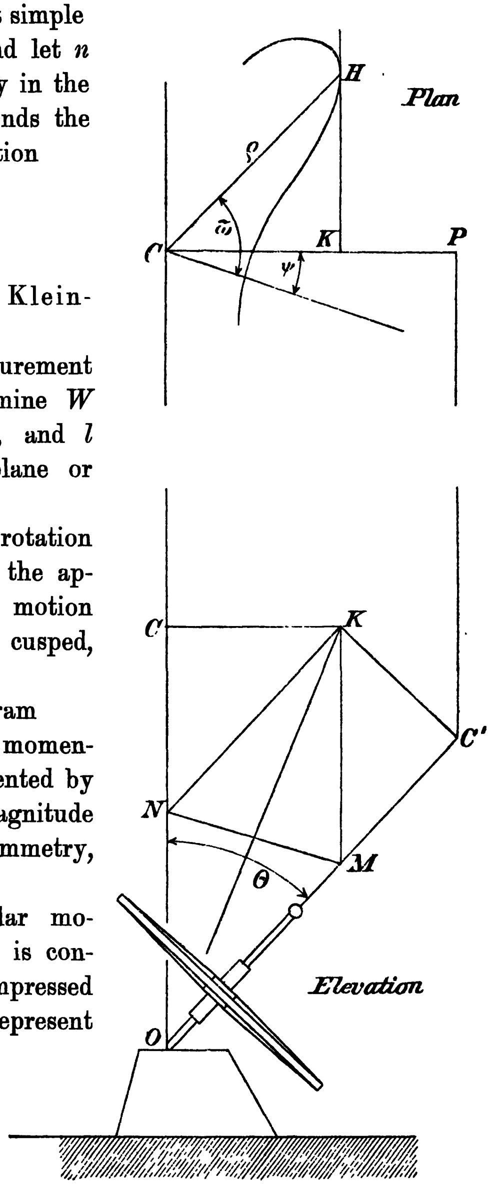
If accurate physical measurement was required, we could determine W and Wh by a spring balance, and l by swinging a plummet, in plane or conical oscillation.

If the wheel is spun with rotation R so that $G' = CR$, and given the appropriate projection, the desired motion is obtained, either undulating, cusped, or looped.

Referring now to the diagram

I. The component angular momentum (G') about the axis, represented by the vector OC', is constant in magnitude in consequence of the uniaxial symmetry, but varies in direction.

II. The component angular momentum (G) about the vertical is constant, because the axis of the impressed couple of gravity is horizontal; represent G by the fixed vector OC.



III. Then OK is the component angular momentum in the vertical plane COC'; and if KH is the component perpendicular to this plane,

$$(2)\qquad KH = A\frac{d\vartheta}{dt},\quad C'K = A\sin\vartheta\frac{d\psi}{dt},\quad OC' = G',$$

forming three rectangular components OC', $C'K$, KH of the resultant vector OH.

Since

$$C'K \sin \vartheta = OC - OC' \cos \vartheta$$

$$(3) \qquad A \sin^2 \vartheta \frac{d\psi}{dt} = G - G' \cos \vartheta,$$

a fundamental equation; and we notice that

$$ON = A \frac{d\psi}{dt}, \quad \text{and in a spherical top } OM = A \frac{d\varphi}{dt}.$$

IV. The vector OH of resultant angular momentum thus describes a curve in a horizontal plane through C, and the curve is a Poinsot herpolhode. Here is the essential statement of Jacobi on the top, that the motion is compounded of two Poinsot movements, the second movement corresponding to an interchange of G and G', and Euler's angles φ and ψ.

V. The projection P on a horizontal plane of any point, such as C' fixed in the axis, describes a hodograph of the curve of H.

For the hodograph of H is traced out by the vector of the impressed couple of gravity, and this vector is

$$(4) \qquad Whg \sin \vartheta e^{(\psi + \frac{1}{2}\pi)i} = iAn^2 \sin \vartheta e^{\psi i} = \frac{d}{dt}(\varrho e^{\varpi i}),$$

if ϱ, ϖ denote the polar coordinates of H in a horizontal plane with C as origin.

This theorem of the hodograph is true generally for any unsymmetrical top, but now the analytical difficulty is to discover the curve of $\varrho e^{\varpi i}$; so far a few isolated special cases only have been invented by Kowalevski, Bobyleff, Jukovsky, Kolosoff, and other Russian mathematicians. But in the symmetrical top

VI. $\varrho e^{\varpi i}$ is the vector of a Poinsot herpolhode, and this follows immediately from the relation

$$OH^2 - 2A\,(\text{kinetic energy}) = \text{constant},$$

so that

$$(5) \qquad OH^2 = 2AWhg(F - \cos \vartheta)$$

where F is a third dynamical constant, G and G' being the other two.

By geometry

$$(6) \qquad OK^2 = \frac{CC'^2}{\sin^2 \vartheta} = \frac{OC^2 - 2OC \cdot OC' \cos \vartheta + OC'^2}{\sin^2 \vartheta},$$

and the elimination of ϑ between (5) and (6) gives OK, the perpendicular on the tangent at H, in terms of OH, is a form characteristic of a Poinsot herpolhode.

Again, putting $4 A W h g = k^2$, OH is given in terms of OK by

$$(7) \qquad F - 2\frac{OH^2}{k^2} = \cos\vartheta = \frac{OC \cdot OC' - KC \cdot KC'}{OK^2}$$

$$= \frac{OC \cdot OC' - \sqrt{(OK^2 - OC^2)}\sqrt{(OK^2 - OC'^2)}}{OK^2}.$$

VII. We see now that the stationary values of OK are OC' and OC, and then KC' or KC is zero; the polhode curve is then a bit of a geodesic on the polhode cone, and the herpolhode in the plane of CK or $C'K$ has an inflexion, or else the tangent passes through C' or C, and the herpolhode has loops.

When the axis of the top describes a looped figure, a stationary value of ψ corresponds to an inflexion on the herpolhode of H; the investigations of Hess and Desparre show that the rolling quadric which generates the herpolhode must be the momental surface of a body not restricted to ordinary matter of positive density throughout.

VIII. Since

$$KH^2 = OH^2 - OK^2$$

$$A^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = 2A^2 n^2 (F - \cos\vartheta) - \frac{G^2 - 2GG'\cos\vartheta + G'^2}{\sin^2\vartheta}$$

or

$$(8) \quad \left(\frac{d\cos\vartheta}{dt}\right)^2 = 2n^2(F - \cos\vartheta)(1 - \cos^2\vartheta) - \frac{G^2 - 2GG'\cos\vartheta + G'^2}{A^2},$$

a second fundamental equation which gives $\cos\vartheta$ as an elliptic function of the time; and this with equation (3) define the position of the axis by Euler's angles ϑ and ψ.

IX. With steady precessional motion $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$, $KH = 0$; and Poinsot's rolling quadric is of revolution, describing a circular herpolhode, having a slight undulation with apsidal angle $\frac{ON}{NM}\pi$ when the axis of the top makes a small nutation; and there are $\frac{C}{A} \cdot \frac{MN}{OC'}$ nutations for one revolution of the wheel, beating time with a pendulum of length $4\frac{OM \cdot ON}{MN^2} l$.

In popular elementary explanation of gyroscopic action, with rapid rotation about the axis OC' and small deviating couple, as in precession as treated by Poinsot himself (Connaissance des temps 1858) it is sufficient to take OH and OC' as practically coincident, so that the velocity of C' is equal to the impressed couple.

But Poinsot's rolling quadric in top motion is now an attenuated elongated figure, producing a herpolhode of circular appearance indeed, but which on scrutiny may prove to be crinkled or looped; Klein calls this tremulous motion the pseudo-regular precession.

X. Kirchhoff's Kinetic Analogue of the top with a bent and twisted wire shown in this model amounts to saying that — the hodograph of a point moving along the wire with constant velocity is a spherical curve, such as described by a point on the axis of a symmetrical top, or by a ball rolling on a spherical surface; and the plan of the elastica is the curve of H.

In the analogue with a top spinning upright we meet the condition required for the stability of the shaft of a screw steamer.

There is another kinetic analogue if we ignore gravity, in this revolving chain; we may call it Clebsch's Analogue (Crelle, 57) but here the axial distance is proportional to the time, and not the arcual distance, as in Kirchhoff's elastica.

XI. The analytical question is reduced now to the discussion of the Poinsot herpolhode, and this we know can be expressed by

$$\rho e^{\varpi i} = a \frac{\vartheta 0 \, \vartheta(u+v)}{\vartheta u \, \vartheta v} \exp \left(\frac{Gi}{2An} - \operatorname{zs} v\right) u, \tag{9}$$

where u grows uniformly with the time, and we must put

$$u = mt + K'i, \quad \text{while} \quad v = K + fK'i,$$

where m and f are real numbers.

Thus when qualified by a certain exponential function of the time, $\rho e^{\varpi i}$ is a Lamé function of the 1st order, and $\sin \vartheta e^{\psi i}$ is composed of Lamé functions of the 1st and 2d order, reducing to one of the 2d order only in the case of the Spherical Pendulum, as shown by Hermite in the Comptes rendus, 1877—82.

If we are concerned with the motion of the axis only of the top, defined by ϑ and ψ, the solution in complete; the angle ψ is shown in this model by the revolution of the wire on the bicycle axle, and ϑ is the inclination of the stalk to the vertical.

XII. But the third Eulerian angle φ introduces the second Poinsot motion, with its elliptic parameter $v' = K + f'K'i$; and now Klein's functions $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ give a symmetrical and complete solution, being Lamé functions of the 1st order with parameter

$$\begin{aligned} v_1 &= \tfrac{1}{2}(v + v') = K + \tfrac{1}{2}(f + f')K'i, \\ v_2 &= \tfrac{1}{2}(v - v') = \qquad \tfrac{1}{2}(f - f')K'i, \\ v_1 + v_2 &= v, \qquad\qquad v_1 - v_2 = v', \end{aligned} \tag{10}$$

v_1 and v_2 corresponding to the pole $\vartheta = 0$ and $\vartheta = \pi$, the highest and lowest position of the top.

These parameters v and v', or v_1 and v_2 with the modulus k will specify the motion completely; they have been called the analytical constants of a state of motion.

The hodograph relation

$$\frac{d}{dt}(\varrho e^{\varpi i}) = iAn^2 \sin \vartheta e^{\psi i} = 2An^2 \alpha\beta \tag{11}$$

is now seen to be the dynamical interpretation of the analytical result in Halphen's Fonctions elliptiques I p. 230:

$$\frac{d}{du}\left[\frac{\sigma(u+v_1+v_2)}{\sigma u\,\sigma(v_1+v_2)}e^{-u\zeta v_1-u\zeta v_2}\right] = \frac{\sigma(u+v_1)}{\sigma u\,\sigma v_1}e^{-u\zeta v_1}\cdot\frac{\sigma(u+v_2)}{\sigma u\,\sigma v_2}e^{-u\zeta v_2}. \tag{12}$$

In an article published recently in the American Annals of Mathematics I have tried to illustrate the subject by the choice of simple cases where the motion becomes algebraical except for one exponential function of the time, and this again can be cancelled by the choice of a disposable constant. To effect these conditions we choose an elliptic parameter v a simple aliquot μ^{th} part of a period, so that f is a simple rational fraction; in this case where μv is congruent to a half-period,

$$\left[\frac{\vartheta 0\,\vartheta(u+v)}{\vartheta u\,\vartheta v}\right]^u \tag{13}$$

is a rational algebraical function of the elliptic functions of u; and the herpolhode vector of H is an algebraical function, qualified by an exponential function of the time.

It is Abel's quotient then of two theta functions, ϑu and $\vartheta\,(u+v)$, with constant phase difference v, which is required in dynamical applications, and not the thetafunction ϑu by itself.

When the phase difference v is a half-period we obtain the elliptic function; and when v is any other rational fraction of a period, the quotient becomes an algebraical function of the elliptic functions of u; a collection of the simplest results will be found in the Philosophical Transactions. London 1904.

I will be so bold as to offer an heretical opinion in the presence too of Dr. Königsberger, Krause, Krazer, and other authorities on the subject, that the thetafunction by itself is not the expression of any important physical law; and to begin elliptic function theory with the theta-function, the great invention of Jacobi or rather of Gauss as now appears, although the order which commends itself to the analyst, is deterrent to a student of Natural Philosophy.

The simple case of bisection, $f = \frac{1}{2}$, will serve for a type; the present company will prefer to carry on a generalisation unaided.

Here in a diagram of motion which has been made algebraical, and the curve of H is shown generated by rolling motion as a Poinsot herpolhode; the apparatus is rather crude by comparison with that constructed by Schilling of Halle.

The second Poinsot movement is generated by the same polhode curve, rolling on a plane at a new distance, and now we can see the looped figure associated with the undulating curve of H in the first movement.

Darboux's representation of the top motion by a deformable hyperboloid is shown in this apparatus; the motion is specified here by what may be called the geometrical constants.

Various intermediate states of the deformation are shown in the plane COC' by the diagrams on the wall drawn by Mr. Hadcock, giving the geometrical interpretation of Darboux's relations of the two associated Poinsot movements.

The mathematical models designed by Buka and Wiener can be constructed I hope to represent this special case in a more durable manner.

If no rotation is given to the wheel, the axis moves like a Spherical Pendulum.

It will be noticed however that the wheel acquires an angular displacement proportional to the conical angle swept out by the axis, revealed by the gradual revolution of the chalkmark.

The jerky motion in the vertical position is due to the hyperelliptic influence of the stalk, which we have ignored in our elliptic function treatment.

As the axis of the gyroscope wheel is restricted to keep below the level of the centre, we have here another bicycle wheel which we spin by hand in a small cup, to imitate the motion of the toy spinning top, or the Maxwell top.

By loading this wheel with an iron bar, we convert it into a simple and effective pendulum for plane oscillation, and it can be made to beat time with a pendulum of assigned length by changing the inclination of the axis.

In this way we construct a mechanical illustration of the results of Complex Multiplication given by our President Professor Weber in his Elliptic Functions.

Thus for instance holding the axis horizontal and letting the wheel swing through 300°, from I to XI o'clock, the period is the same as when it swings through 60°, from V to VII, if of threefold length, or if the axis is held at an angle of one in three to the vertical, the slope of the face of a regular tetrahedron.

And so on for the other results of Complex Multiplication.

The mention of practical application is I hope repellent no longer to a mathematical audience; so besides the artificial horizon of Serson cited already, and the precession of the equinox, we may instance the centrifugal separator, Schlick's gyroscope to mitigate the rolling of a ship, in which the electric-light dynamos can assist, and the attempt made to control the swinging cabin of the Bessemer ship.

But when we try to utilise its directive power, the gyroscope behaves like the Irish pig described by Perry, who could not be persuaded to go to Cork unless his master pretended to drive the pig home; or rather as the crab who will go the road you wish by pushing him sideways; and so too the gyroscope.

The gyroscope will not exercise his directive power in steering a torpedo, or as the brain of Maxim's flying machine except when moving a very light relay: resembling Maxwell's intelligent demon, which by the expenditure of an infinitesimal amount of energy in moving a trap door is capable of upsetting the second law of thermodynamics.

I will conclude with another quotation of Maxwell „To those who study the progress of exact science, the common spinning top is a symbol of the labours and perplexities of men who had threaded successfully the mazes of planetary motion. The mathematician of the last (XVIII.) century, searching through nature for problems worthy of his analysis, found in the toy of youth ample occupation for the highest mathematical powers."

La Geometria d' oggidì e i suoi legami coll' Analisi.

Vortrag, gehalten in der 3. allgemeinen Sitzung am 13. August

von

C. Segre aus Turin.

Voi conoscete il volumetto che l' Università di Kolozsvár ha publicato due anni sono, pel centenario dalla nascita di Giovanni Bolyai.*) Ne sono parte precipua una memoria di L. Schlesinger sulle applicazioni della geometria assoluta alla teoria delle funzioni di variabile complessa, ed un' altra di P. Stäckel sulla meccanica analitica in relazione colle varietà di più dimensioni.**) Così alla glorificazione del grande geometra ungherese prendevano parte l' Analisi e la Meccanica!

A me parve di vedere in ciò un nuovo indizio dei sentimenti fraterni che vanno sempre più legando fra loro i vari rami della Matematica!

Per quel che riguarda la Meccanica, non occorre che io dica quanta parte abbia e debba avere in essa la Geometria! Solo mi permetterò di ricordarvi, a proposito della Geometria moderna, una rappresentazione, di grande importanza suggestiva, a cui ormai, dopo l' esempio dato da Hertz, tutti i cultori della Meccanica ricorrono liberamente. Voglio dire la rappresentazione di un sistema mobile con n gradi di libertà per mezzo di un punto dello spazio ad n o a $2n$ dimensioni. Indicando la forza viva con $\frac{ds^2}{dt^2}$, il problema del moto equivale a quello geometrico delle geodetiche di uno spazio ad n dimensioni, in cui ds sia l'elemento lineare!

Quanto ai legami che stringono la Geometria e l' Analisi, si può dire che essi derivano principalmente da ciò che in molta parte gli oggetti di cui esse si occupano sono gli stessi, almeno in un

---

*) Joannis Bolyai in memoriam.

**) V. anche Stäckel, Bericht über die Mechanik mehrfacher Mannigfaltigkeiten, Jahresb. d. Deutschen Math.-Verein. 12, 1903, p. 469.

senso astratto! Dicendo così, io non alludo soltanto a quei campi che tutti riconoscono esser comuni alle due scienze: come, ad esempio, la teoria dei gruppi e quella degli aggregati (ensembles, Mengen). Io penso ad un' identità molto più larga, che solo è nascosta in parte dalla differenza dei nomi. Così quello che l' analista chiama una funzione $y = f(x)$, il geometra considera come curva $y = f(x)$, o come corrispondenza fra il punto x e il punto y. Ciò che l' analista chiama equazione differenziale sarà pel geometra una certa varietà di elementi nel senso di Sophus Lie. E i gruppi di trasformazioni lineari usati nello studio delle funzioni automorfe da Poincaré e Klein, e poi dai loro successori, si posson considerare come particolari gruppi di movimenti non-euclidei. Persino il concetto primitivo di punto si può riguardare come comune alla Geometria ed all' Analisi: poichè in molta parte della Geometria d' oggidì i punti si posson concepire in modo puramente numerico, come si fa, ad esempio, nella teoria degli aggregati o in quella delle funzioni!

La differenza fra Geometria ed Analisi consiste invece, talvolta nei problemi che esse pongono, più spesso nei metodi con cui esse li trattano. Ed è appunto collo scambiarsi fra loro i problemi, e col prestarsi reciprocamente l' ajuto dei rispettivi metodi, che le due scienze sorelle rendono l' una all' altra servizî immensi!

L' identità che ho accennato fra gli oggetti della Geometria moderna e quelli dell' Analisi si collega ad un carattere spiccatissimo che la Geometria è andata acquistando sempre più. Questo carattere, da cui son derivati i maggiori progressi di quella scienza, è la grande generalità ed astrazione nei concetti e nelle proposizioni.

A prova di ciò non occorre che io ricordi l'estensione che s' è fatta coll' aggiungere agli elementi geometrici reali quelli imaginari, nè l' altra che accanto alle linee e superficie pose i sistemi comunque infiniti di linee o superficie, i connessi, e così via. E nemmeno occorre che io vi parli della geometria degli spazî a più dimensioni, nella quale tanto si è lavorato nell' ultimo ventennio, e che tanto ha contribuito ad ampliare il campo d' azione dei matematici! Ma scendendo invece dalle vette della scienza alle sue basi, noi vediamo che appunto la detta astrazione si trova nei più recenti lavori sui fondamenti della geometria di Peano, Veronese, Pieri, come in quelli di Hilbert e della sua scuola. In fatti essi svolgono la geometria in modo esclusivamente deduttivo, senz' alcun ricorso all' intuizione spaziale (räumliche Anschauung): cosicchè le parole punto, retta, movimento, ecc. non esigono più l' interpretazione consueta, ma possono riceverne parecchie, diverse fra loro, di qualsiasi natura, per esempio puramente aritmetiche, purchè soddisfacciano al sistema di postulati o definizioni che furon poste. In questo modo, accanto alle due geometrie non-euclidee di qualche tempo addietro, son divenute possibili in questi ultimi anni tutta una serie numerosa di nuove geometrie!

Questa moltiplicità d' interpretazioni per gli elementi geometrici, che incontriamo tanto nel moderno indirizzo di studio dei fondamenti, quanto in un modo ben noto di concepire gli spazî a più dimensioni, presenta grande utilità. Grazie ad essa ogni risultato si traduce in infiniti nuovi risultati, immediatamente! Qualcosa di simile si ha nella meccanica moderna, quando si parla di problemi dinamici equivalenti, sebbene si riferiscano a sistemi molto diversi.

Alcuni hanno obiettato, anche ultimamente*), che, quando gli enti geometrici vengono concepiti in modo così astratto, oppure quando vengon trattati solo con metodo logico-deduttivo, senza ricorrere alle figure, alla intuizione spaziale, non si fa più vera geometria! Possiamo dire, o Signori, che questa è solo una quistione di parole! Ma si può anche dire che l'ampliarsi della Geometria ha fatto passare l' intuizione spaziale, che una volta era per essa un elemento indispensabile, in seconda linea. Chi mai può concepire nella sua mente un connesso, oppure lo spazio di punti imaginari che Staudt ha studiato sinteticamente? Così l' intuizione spaziale ha cessato di essere necessaria. E ciò invece che caratterizza la Geometria d' oggidì è, come già accennavo, la forma dei suoi problemi o dei suoi ragionamenti!**)

E a proposito dei metodi geometrici, permettetemi che io vi dica anche il mio pensiero intorno ad un' accusa che a loro vien fatta talvolta: cioè di poco rigore. Già nel congresso internazionale di Parigi Hilbert aveva protestato energicamente contro l' opinione che solo l' Analisi, e non la Geometria, sia suscettibile di una trattazione pienamente rigorosa.***) E in fatti: perchè non dovebbero esser rigo-

*) V. ad esempio E. B. Wilson, The so-called Foundations of Geometry, Archiv d. Math. u. Phys. (3) 6, 1903, p. 104. — Del resto questo articolo ha pienamente ragione, quando raccomanda di guardarsi dalle esagerazioni, dalle manie.

**) Cfr. anche il mio artic° Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche, Rivista di mat. I, 1891; ristampato ora in inglese nel Bull. Amer. Math. Society (2) 10, 1904. — Veggasi pure E. Study, Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903, ove, a pag. 271, sono esposte delle idee che si accordano pienamente colle mie.

***) D. Hilbert, Mathematische Probleme, Göttinger Nachr. 1900.

rosi quei ragionamenti geometrici i quali fossero svolti a fil di logica? Il dubbio potrebbe aversi solo per quegli altri casi in cui insieme al ragionamento puro si adopera anche la intuizione geometrica: per esempio nelle ricerche più comuni di Analysis situs o topologia. Ma, come ho detto prima, questo accade solo in una piccola parte della Geometria moderna! E fra parentesi ricorderò che, secondo rilevava ultimamente Osgood*), anche nella odierna teoria delle funzioni di una variabile complessa vi sono dei teoremi, la cui dimostrazione non è stata finora liberata dall' uso della intuizione geometrica! D' altra parte bisogna pur avvertire che già s'è cominciato a mettere sotto forma matematicamente esatta alcuni concetti e proposizioni dell' Analysis situs: ad esempio in recenti lavori di Schoenflies, Osgood ed altri.

In generale si può dire che i geometri aspirano oggidì al rigore quanto gli analisti! È vero che gli strumenti di cui essi si servono talvolta non furon creati perfetti: come perfetti non erano i procedimenti usati dagli analisti un secolo fa! Ma si deve tener presente che alla Geometria, forse più che all' Analisi, occorre lasciar libera anzitutto la fantasia che guida alla scoperta: mentre è opera posteriore lo stabilire il tutto in modo rigoroso! Ed i geometri mirano a perfezionare i loro metodi, ricorrendo volontieri all' esempio ed all' ajuto dell' Analisi. Così dalle ricerche analitiche di Puiseux si è dedotto il concetto geometrico esatto di ramo o ciclo di curva algebrica. Grazie ad esso Cayley, Smith, Halphen, Noether, Zeuthen, ecc. han potuto dare una teoria pienamente rigorosa delle singolarità superiori delle curve piane; il teorema sul numero delle intersezioni di tali curve ha acquistato, col fissare la moltiplicità di ogni intersezione, un significato geometrico pienamente soddisfacente. Con ciò è stata avviata la trattazione rigorosa delle questioni relative alla moltiplicità delle soluzioni dei problemi geometrici. Ma una tale trattazione sarà compiuta solo quando saran compiute le ricerche analoghe per le intersezioni delle varietà algebriche a più dimensioni.

La stessa cosa accadrà per tutti i metodi della Geometria numerativa, poichè in sostanza tutti si riducono a problemi d' intersezioni di varietà algebriche! Così le critiche mosse anche ultimamente**) a quello che Schubert ha chiamato Princip von der Erhaltung

---

*) W. F. Osgood, On a Gap in the ordinary Presentation of Weierstrass' Theory of Functions, Bull. Amer. Math. Soc. (2) 10, 1904, p. 294.

**) V. la nota a pag. 378 della citata Geometrie der Dynamen dello Study; e G. Kohn, Über das Prinzip von der Erhaltung der Anzahl, Archiv d. Math. u. Phys. (3) 4, 1903, p. 312.

der Anzahl potranno essere eliminate.*) Un mio discepolo, il Giambelli, da me spinto a studiar la questione, mi disse di esser riuscito a fissare delle grandi classi di problemi per le quali vale quel principio di Schubert, ed altre per cui esso va modificato in un modo ben determinato. In base a queste ricerche tutti i numerosi risultati ottenuti dallo Schubert e da altri, anche in questi ultimi anni, per mezzo di quel principio, sarebbero pienamente giustificati! Noterò di passaggio che fra i recenti risultati di geometria numerativa ve ne sono di molto importanti relativi agl' iperspazî. Essi son dovuti principalmente allo stesso Schubert ed a vari geometri italiani, a partire dal Castelnuovo fino al Giambelli. E si riferiscono: gli uni al numero degli spazî che verificano date condizioni, in particolare quella di secare in dati modi più spazî dati, od anche una curva o varietà data; gli altri invece a numeri di quadriche o di reciprocità, e così via.

Fra questi risultati ve ne sono che hanno uno speciale interesse per l' Algebra. E molti problemi difficilissimi dell' Algebra relativi alla determinazione di numeri posson risolversi facilmente colla Geometria numerativa! D' altra parte, come già accennai, questa deve ricorrere all' Algebra per la dimostrazione dei suoi principî, per la trattazione rigorosa delle varietà algebriche e delle loro intersezioni. Una tale trattazione s' è già cominciato a fare seguendo i concetti di Kronecker ed altri. Così Hilbert in un lavoro fondamentale**) ha trovato la forma di quella che egli ha chiamato funzione caratteristica di un modulo, e che dà la postulazione di una varietà algebrica qualunque per forme di un ordine abbastanta elevato. E dopo di Hilbert altri han tentato di risolvere più completamente il problema della postulazione in certi determinati casi; oppure, come nelle numerose ricerche sul teorema di Noether $Af + B\varphi$, si sono occupati della rappresentazione di una varietà algebrica come costituente un modulo. Ma il campo amplissimo è tuttora aperto, e degno di profonde ricerche!

Signori, vi è una moda in Geometria come dovunque! Ma la moda di cui ora io voglio parlarvi rappresenta un grande progresso! Prima vi avevo detto dell' astrazione che ha acquistato la Geometria colla grande estensione data al sistema degli enti da studiare. Orbene

*) È notevole che nel Lehrbuch der Algebra di H. Weber (I. Bd., 1. Aufl., 1895, p. 163) si ricorre appunto a quel principio, per dimostrare il teorema di Bézout nel caso di 3 o più equazioni con altrettante incognite.

**) Über die Theorie der algebraischen Formen, Math. Annalen 36, 1890, p. 473.

l' astrazione s' è compiuta anche in un altro modo: cioè coll' ampliamento del gruppo di trasformazioni, che, nel senso di Klein, si pone a base dello studio. Una volta il gruppo di trasformazioni, che si sottintendeva come fondamentale, era quello della Geometria elementare. Poi, dopo Poncelet, i geometri s' erano abituati al punto di vista projettivo, e questo era ordinariamente sottinteso. Ai nostri giorni invece si tende a preferire un gruppo fondamentale ancora più ampio: il gruppo delle trasformazioni birazionali!

Con ciò non intendo certo dire che siano scarsi attualmente i lavori nell' indirizzo projettivo! Così poc' anzi alludevo a ricerche projettive essenziali sulle varietà algebriche a più dimensioni. Inoltre si sa bene che le proposizioni d'indirizzo birazionale si mutano, con un semplice artifizio, in proposizioni projettive. E nemmeno mancano lavori d' indole metrica, come tutti sanno! È certo però che sono state rare in questi ultimi tempi le ricerche un po' generali, nell' indirizzo projettivo, sulle curve piane o superficie algebriche, sui complessi di rette, ecc., le quali fiorivano invece anni sono. Ciò è forse dovuto in parte alla complicazione che s' incontrerebbe nel proseguirle. In pari tempo è andata un po' giù di moda la corrispondente teoria analitica, cioè la teoria degl' invarianti delle forme algebriche; sebbene essa sia stata, per così dire, rinfrescata da nuovi metodi e posta in nuova luce dalla teoria dei gruppi di Sophus Lie. Invece l' indirizzo che Riemann ha tracciato per lo studio delle funzioni algebriche di una variabile e dei loro integrali, cioè quello rivolto alle proprietà che non mutano per trasformazioni birazionali delle variabili, può dirsi il trionfatore nelle ricerche algebrico-geometriche d' oggidì!

A ciò contribuì moltissimo la teoria generale delle trasformazioni birazionali del piano e dello spazio: merito speciale del Cremona, di cui noi tutti da un anno rimpiangiamo la perdita! Da essa in fatti derivò il concetto di proprietà invariabili per trasformazioni Cremoniane: applicato ad esempio dal Bertini alle involuzioni del piano.

Ma un' influenza anche maggiore sul trionfo odierno delle proprietà degli enti algebrici, che non mutano per trasformazioni birazionali degli enti stessi, ebbe la Memoria del 1873 di Brill e Noether: Über die algebraischen Funktionen und ihre Anwendung in der Geometrie.*) Essa non ha solo contribuito — come già prima Clebsch e Gordan — a far conoscere quell' indirizzo di Riemann. Col sostituire alle funzioni algebriche le serie lineari di gruppi di punti sopra una curva algebrica, essa ha anche dato ai teoremi noti

*) Math. Ann. 7, p. 269.

e ad altri, nuovi e fondamentali, una tal forma geometrica da prestarsi immediatamente alle applicazioni. L' influenza di quella Memoria sulla Geometria attuale è stata immensa! Ne derivarono direttamente le ricerche moderne sulle curve algebriche sghembe ed iperspaziali, quelle sui sistemi lineari di curve piane, ed altre ancora. Tutta una scuola di geometri italiani riconosce nella Memoria di Brill e Noether il suo punto di partenza!

Più fecondi ancora divennero quei concetti, quando, per opera appunto di questa scuola, essi acquistarono un carattere più astratto e più generale, venendo riferiti a curve iperspaziali, e specialmente introducendosi metodicamente l' importante nozione di somma di due serie lineari (corrispondente a quella di prodotto nel campo di razionalità definito da un irrazionale algebrico). Con questi strumenti Castelnuovo ha ottenuto nuovi risultati notevolissimi sulle curve algebriche, per esempio riguardo alla questione che ho già citata della postulazione. Più notevole ancora è il modo come quella teoria ha potuto applicarsi, od estendersi per analogia, nella geometria delle superficie!

Mentre in Francia il Picard studiava le superficie algebriche per via trascendente, svolgeva cioè la teoria degl' integrali doppi e degl' integrali di differenziali totali delle funzioni algebriche di due variabili, e l' Humbert si occupava con successo delle così dette superficie iperellitiche, in Italia, dal 1893 in poi, Enriques e Castelnuovo presero a costruire geometricamente la teoria dei sistemi lineari di curve sopra una superficie algebrica. Essi applicarono i concetti della geometria sopra una curva ed i concetti analoghi relativi ad una superficie, per esempio quelli di somma e differenza di due sistemi lineari, da cui poi si passa a quello di sistema aggiunto di un sistema dato; e nello stesso tempo si valsero, approfondendole ulteriormente, delle importanti proposizioni che già il Noether aveva ottenuto in questo campo. Così riuscirono a stabilire una lunga serie di nuovi risultati veramente brillanti. Citerò, solo come esempî, la dimostrazione della razionalità di tutte le involuzioni piane; lo studio di nuovi caratteri di una superficie, invariabili per trasformazioni birazionali; le condizioni perchè una superficie sia razionale, oppure sia riferibile ad una rigata; la possibilità di eliminare da una superficie le così dette curve eccezionali, se la superficie non è riferibile ad una rigata.*) Nel trattato in cui il Picard, coadiuvato dal Simart, va esponendo la Théorie

*) V. Castelnuovo-Enriques: Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche, Annali di matematica (3) 6, 1901, pag. 165. Ivi son citati anche i lavori precedenti.

des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*), accanto alle sue proprie ricerche analitiche egli ha pur fatto posto ad una parte di quelle geometriche di Castelnuovo ed Enriques.

La geometria sopra una superficie si applica — non occorre dirlo — a varietà algebriche doppiamente infinite qualunque. Così il Fano se n' è servito nello studio delle congruenze di rette. Ed altri giovani si sono ora messi a coltivarla, tra cui De Franchis e Severi. Fra le tante questioni a cui tendono le ricerche attuali citerò la seguente, di grande importanza: è possibile fissare sopra una data superficie algebrica un numero finito di sistemi continui di curve, sì che ogni altra curva algebrica possa dedursi da quelle colle operazioni di addizione e sottrazione? Finora essa era stata risolta affermativamente solo per certe classi di superficie.**) Il Severi ritiene di possederne la soluzione per qualunque superficie, ma ancora non l' ha publicata. Teoremi siffatti hanno un' alta importanza sì geometrica che algebrica. Essi permettono di definire per le curve giacenti su una data superficie certi caratteri, grazie a cui molte proprietà delle curve stesse, per esempio il numero delle loro mutue intersezioni, risultino determinate.

Alla geometria delle trasformazioni birazionali appartiene anche lo studio delle corrispondenze algebriche su una data varietà. Voi sapete, o Signori, che Hurwitz, per mezzo degl' integrali Abeliani e delle funzioni Θ, è riuscito a trattare in modo completo le corrispondenze algebriche fra i punti di una data curva algebrica: in particolare le corrispondenze birazionali. Quanto alle corrispondenze sulle superficie algebriche, si hanno solo pochi risultati speciali, di Picard, Castelnuovo-Enriques e Painlevé, intorno alle superficie che ammettono una serie continua di trasformazioni birazionali.

Invece per quel che riguarda i gruppi di trasformazioni birazionali del piano, essi sono stati determinati completamente: quelli d' ordine finito da Kantor e Wiman, quelli continui da Enriques. Enriques e Fano hanno poi determinato anche i gruppi continui birazionali dello spazio. In queste ricerche i metodi geometrici hanno servito ben più che quelli analitici. Del resto tutti sanno quanto il grande creatore della teoria dei gruppi continui, Sophus Lie, si sia valso dei metodi geometrici nella sua costruzione; e come, ad esempio,

*) Paris, t. I, 1897; t. II, 1900, 1904.

**) Così il Picard (Théorie t. II, pag. 246—47) ha un teorema analitico, che risolve la questione per quelle superficie i cui integrali di differenziali totali si riducono a combinazioni algebrico-logaritmiche.

il problema della struttura dei gruppi continui finiti si riduca a studiare la intersezione di certe varietà lineari e quadratiche!

La teoria dei gruppi, sia quella di Galois, sia quella di Lie, si presenta spesso nelle ricerche geometriche dei nostri tempi. E vi sono sicuri indizî che la sua influenza sulla Geometria è destinata a crescere!

Le varietà di enti che si considerano ordinariamente in Geometria sono analitiche, od in particolare algebriche: definibili cioè con legami analitici od algebrici fra le coordinate complesse dei loro elementi. Ma, seguendo la tendenza ad ampliare il campo geometrico, si possono anche studiare delle varietà più generali: ottenute cioè considerando staccatamente, come variabili indipendenti, le due componenti reali di ogni coordinata complessa; e ponendo dei legami fra le varie coppie di componenti reali. Se questi legami sono algebrici, si hanno le così dette varietà iperalgebriche, intorno a cui io ho publicato verso il 1890 alcune ricerche.*) Fra esse vi sono le imagini geometriche di quelle forme quadratiche di Hermite a variabili complesse coniugate, che si son presentate tanto spesso in questi anni, collegandosi ai gruppi di sostituzioni lineari ed alle funzioni automorfe. Così le forme di Hermite nel campo quaternario rappresentano delle corrispondenze fra punti e piani molto analoghe alla polarità rispetto ad una quadrica. Considerandole sotto questo aspetto geometrico, varie questioni su quelle forme, per esempio sulle loro espressioni canoniche, sulle loro trasformazioni lineari in sè stesse, ecc., riescono notevolmente semplificate.

Fra le varietà iperalgebriche si trovan pure quelle composte dei punti reali di una varietà algebrica. Così dalla geometria degli enti complessi passiamo a quella degli enti reali!

Le funzioni di variabili complesse han fatto trascurare per qualche tempo le funzioni di variabili reali, sebbene queste sian più importanti di quelle! Ora, o Signori, lo stesso fatto è accaduto in Geometria! Sono pochi gli scienziati che si occupano delle questioni di realità, o forma, o topologia; quantunque esse costituiscano un campo così degno di essere coltivato!

Quanto all' Analysis situs, dopo i noti lavori di W. Dyck e quelli del Picard, si sono avute, anche ultimamente, parecchie ricerche originali del Poincaré su problemi molto generali.

Intorno alla forma delle superficie algebriche non si è più avuto

*) Atti Accad. Torino t[i] 25 e 26, quattro Note; e Math. Ann. 40.

nulla di essenziale dopo ciò che ha fatto il Rohn per le superficie del 4° ordine. Invece sulla forma delle curve algebriche Hilbert*) ha risolto alcune questioni: per esempio sui rami pari di curve piane che possono stare l' uno dentro l' altro, e sulle curve sghembe di dato ordine col massimo numero di rami. Klein**) ha studiato le questioni di realità per le forme di contatto (Berührungsformen) della curva canonica reale di genere dato (Normalkurve der φ), in base alla distinzione da lui fatta delle superficie simmetriche di Riemann in specie. E qualche altra ricerca è stata fatta da F. Meyer ed altri.

Alcuni scienziati, come H. Brunn e più ancora A. Kneser***), han tentato di studiare la forma delle curve reali senza porre la condizione dell' algebricità, solo ammettendo qualche condizione di continuità. I risultati più notevoli in questa direzione furon ottenuti nel 1899 da C. Juel†), specialmente profittando del fatto che in determinati casi una corrispondenza reale d' indici p, q ha sempre $p+q$ coincidenze reali.

Infine anche nella trattazione delle curve definite da equazioni differenziali si è discussa la forma delle curve. Citerò fra i moderni, oltre alle note ricerche di Poincaré e Picard, ed a quelle speciali di Hadamard relative alle trajettorie ed alle geodetiche di una data superficie, una tesi del 1903 di H. Dulac.††) È notevole che, per aver la forma delle curve integrali di un' equazione differenziale di 1° ordine in prossimità di un punto singolare, si può ricorrere ad un procedimente del tutto analogo a quello che si usa pei rami reali di una curva algebrica uscenti da un punto singolare.

Dalla geometria complessa ero passato a quella reale. Ma debbo pure avvertire che l' astrazione, che ripetutamente ho messo in evidenza come un carattere della Geometria moderna, ha avuto anche l' effetto di moltiplicare, per così dire, le geometrie complesse.

Da un lato si può avere l' opportunità di considerare certi enti geometrici come punti di nuova natura, aventi per coordinate numeri complessi di specie superiore. Così nello studio delle varietà iper-

---

*) Über die reellen Züge algebraischer Curven, Math. Ann. 38, 1891, p. 115.

**) Über Realitätsverhältnisse bei der Normalcurve der φ, Math. Ann. 42, 1893, p. 1.

***) Math. Ann. 31, 34, 41.

†) Introduction à l' étude des courbes graphiques, Mém. Acad. Danemark, Kjobenhavn 1899.

††) Recherches sur les points singuliers des équations différentielles, Paris 1903.

algebriche, fin nei problemi più semplici che nascono dalla considerazione dei rami reali di una curva algebrica, si son presentati spontaneamente dei punti bicomplessi.*)

D' altra parte, come strumenti di ricerca, si sa bene, fin dai lavori di Grassmann e di Hamilton, che varie sorte di numeri complessi posson servire utilmente in Geometria. Così con tali numeri si son rappresentati analiticamente i movimenti, e poi anche i gruppi lineari omogenei, ecc. In questi ultimi anni, seguendo un antico accenno di Clifford, si son considerati in particolare i tre sistemi di numeri complessi a due unità $a + b\varepsilon$, in cui il quadrato dell' unità ε vale -1, $+1$, 0. Essi rappresentano in un certo senso le tre geometrie iperbolica, ellittica, parabolica. Quelli con $\varepsilon^2 = 0$ ebbero applicazioni importanti, specialmente nella geometria della retta, da vari scienziati: Study, Kotjelnikoff, Seiliger, Johannes Petersen.**) Nella Geometrie der Dynamen dello Study ne è fatto ampio uso. Assumendo tre di questi numeri come coordinate omogenee di una retta nello spazio, la geometria metrica delle rette e dei complessi lineari o dinami acquista una singolare semplicità ed eleganza! È notevole che questa geometria metrica viene a differire da quella ordinaria per quel che riguarda gli elementi all' infinito. Volendo render chiuso il continuo formato dalle ∞^4 rette proprie dello spazio, lo si può completare aggiungendo non le ordinarie rette all' infinito ma gli ordinari punti all' infinito!***)

Non è improbabile che anche altre specie particolari di numeri complessi vengano a rendere importanti servizî alla Geometria!

Anche una limitazione del corpo dei numeri adoperati in Geometria sembra destinata ad un avvenire! La teoria aritmetica delle forme nel campo dei numeri interi equivale ad una geometria del reticolo (Zahlengitter) costituito dai punti colle coordinate intere. Di ciò ha fatto notevoli applicazioni ad es° H. Minkowski nella sua „Geometrie der Zahlen“†) e altrove. Similmente Poincaré in una memoria del 1901 „Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques“††) ha cominciato a considerare le curve piane algebriche a coefficienti razionali, dal punto di vista del gruppo di quelle

*) V. il mio lavoro già citato dei Math. Ann. 40.

**) V. le citazioni a pag. 207—8 del libro di Study. — Il nome Petersen è stato poi mutato in Hjelmslev.

***) V. anche Study, Ein neuer Zweig der Geometrie, Jahrb. der Deutschen Math.-Verein. 11, 1902, p. 97.

†) Leipzig 1896. V. anche Math. Ann. 54, 1901, p. 91.

††) Journ. de math. (5) 7, p. 161.

trasformazioni birazionali i cui coefficienti son pure razionali. Si hanno allora, per l' equivalenza di due curve da questo punto di vista, dei criteri nuovi, più restrittivi che nella ordinaria geometria sopra una curva. Così, oltre al genere, compajono certi nuovi caratteri invariantivi.

Una geometria dei punti di coordinate razionali si presenta come una necessità matematica a chi accetti il concetto di Kronecker e di Gustave Robin*), che esclude dall' Analisi i così detti numeri irrazionali!

Si avvera quanto il Klein**) nel 1892 profetava: cioè che col tempo la unione della Geometria colla teoria delle funzioni non sarebbe più bastata, ma come terza alleata avrebbe dovuto entrare la teoria dei numeri!

Così, o Signori, il mio discorso — che, per non stancarvi troppo, io debbo troncare — ritorna al suo punto di partenza. Quantunque io non abbia nemmen parlato della geometria differenziale, di quella che Monge chiamava „Application de l' Analyse à la Géométrie", pure voi avrete notato quanto numerosi sono gli analisti, che io ho citato per le loro ricerche geometriche! Ciò deriva, io credo, non solo dal possedere l' Analisi strumenti potenti per la trattazione dei problemi geometrici, ma anche dal fatto che i campi geometrici più coltivati ai nostri giorni presentano questo carattere: d' interessare in un modo o nell' altro anche gli analisti. Ed ora questi intendono bene l' importanza della Geometria. E così, per dare ancora qualche esempio, la concezione geometrica delle equazioni differenziali è accolta da tutti!***) E così voi vedete Wirtinger e Poincaré ricorrere a certe varietà iperspaziali nei più recenti studî delle funzioni Abeliane e delle Θ; e Pincherle, che rappresenta le funzioni analitiche con punti di uno spazio ad infinite dimensioni, traendone grandi vantaggi nello studio delle operazioni funzionali; e i trattati ultimi di Picard, di Hensel-Landsberg, di Krazer, e di altri, che si valgono ripetutamente delle rappresentazioni geometriche! — Finora queste rappresentazioni si son fatte specialmente per le funzioni algebriche e loro integrali. Ma, se il parallelismo fra Geometria ed Analisi sarà esteso a campi numerici e funzionali più ampî e più varî, ne potranno derivare nuovi punti di vista e nuovi importanti risultati per entrambe le scienze!

*) Théorie nouvelle des fonctions, exclusivement fondée sur l' idée de nombre. Paris 1903.

**) Riemannsche Flächen II. Lithogr. Vorles. Göttingen 1892, p. 71.

***) Cfr., fra tante, le ricerche geometriche di E. von Weber per la Theorie der Systeme Pfaffscher Gleichungen, Math. Ann. 55, 1901, p. 386.

Riemanns Vorlesungen über die hypergeometrische Reihe und ihre Bedeutung.

Vortrag, gehalten in der 3. allgemeinen Sitzung am 13 August

von

W. Wirtinger aus Wien.

Wenn ich es heute unternehme, vor Ihnen über eine Vorlesung zu sprechen, die nun bald vor 50 Jahren gehalten wurde und noch dazu über einen sehr speziellen Gegenstand, so muß ich fast fürchten in ihren Augen rückständig zu erscheinen. Aber Sie werden vielleicht milder urteilen, wenn ich vorausschicke, daß es sich dabei um die ersten Mitteilungen über Methoden handelt, welche in einem wichtigen und noch lange nicht ausgebauten Teile der heutigen Funktionentheorie erst viel später zur vollen Geltung gekommen sind und deren Tragweite noch nicht erschöpft scheint. Auch handelt es sich dabei nicht so sehr darum, Ausblicke in weite noch unberührte Gebiete zu gewinnen, sondern in ihrer allgemeinen Natur wohlerkannte Erscheinungen im konkreten Fall ins Auge zu fassen und so vielleicht den Zugang zu neuen Problemen zu eröffnen.

Als Riemann an seine Untersuchungen über die hypergeometrische Reihe herantrat, fand er einen großen Vorrat von Beziehungen und Entwicklungen vor, welche bereits Gauß aus der formellen Gestalt der Reihe durch Rechnung entwickelt hatte.

Dieser hatte mit der ihm eigenen Sicherheit des mathematischen Taktes gerade diejenigen Beziehungen und Gesichtspunkte herausgegriffen, welche in der Tat für die Folge maßgebend geworden sind, und ist, wie der zweite, erst nach seinem Tode veröffentlichte Teil seiner Untersuchungen lehrte, dabei von dem Gedanken geleitet worden, mit Hilfe der Differentialgleichung zweiter Ordnung, welcher diese Reihe genügt, sich von der Beschränkung freizumachen, welche die Konvergenz eben dieser Reihe den Formeln des ersten Teiles auferlegte.

E. E. Kummer hatte sodann die Transformationen dieser Reihe gerade von der Differentialgleichung aus einer ungemein eingehenden

Untersuchung unterzogen und eine große Reihe von speziellen Beziehungen zu den elliptischen Integralen und Funktionen dargelegt. Seine Methode stützte sich bereits auf die für die spätere Entwicklung fundamentale Tatsache, daß der Quotient zweier partikulärer Integrale einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung seinerseits einer nicht mehr linearen Differentialgleichung dritter Ordnung genügt. Im speziellen Fall der Perioden des elliptischen Integrals erster Gattung hatte bereits Jacobi in der Theorie der Modulargleichungen davon Gebrauch gemacht, und diese Differentialgleichung dritter Ordnung für die Legendresche lineare Differentialgleichung der Perioden des elliptischen Integrals erster Gattung aufgestellt. Historisch interessant ist es aber, daß bereits Lagrange bei einer Aufgabe der Kartenprojektion, der konformen Abbildung, auf den einen Teil dieser Formel, den Differentialausdruck, gestoßen war.

Die schöne Abhandlung Jacobis über die Integration der Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe durch bestimmte Integrale wurde erst 1859 nach dessen Tode herausgegeben. Für Riemann und Jacobi erscheint daher als gemeinsame Quelle der Anregung der zweite Band der Institutiones calculi integralis von Euler, sowie einige andere Abhandlungen dieses in seiner Fruchtbarkeit unvergleichlichen Mannes. Nehmen wir dazu noch zwei Arbeiten, eine von Pfaff und eine von Gudermann, welche spezielle Probleme der Transformation dieser Reihen behandeln, so haben wir damit so ziemlich den Vorrat von Methoden und Resultaten charakterisiert, welchen Riemann auf diesem Gebiet vorfand.

Dazu brachte er nun den ihm eigentümlichen Gedanken mit, die Funktionen nicht durch einen bestimmten Ausdruck festzulegen, sondern durch ihre Unstetigkeiten und die Art ihrer Vieldeutigkeit oder, wie wir heute sagen würden, durch Relationen zwischen den verschiedenen analytischen Fortsetzungen, welche derselben Stelle des Gebietes angehören, in welchem die Funktion definiert werden soll. Daß endlich auch die Beschaffenheit des Gebietes selbst nach seinem einfachen oder mehrfachen Zusammenhang, also nach den verschiedenen Arten geschlossener Wege, welche auf demselben möglich sind, wesentlich in Betracht kommt, hatte er schon in seiner Dissertation erkannt. Auch hier hatte er schon angedeutet, daß eine Funktion einer komplexen Veränderlichen nicht gerade durch die Werte an der Begrenzung eines Gebietes, sondern auch durch Relationen zwischen dem reellen und imaginären Teil, ja sogar durch Relationen zwischen diesen Werten an verschiedenen Stellen der Begrenzung ganz oder teilweise bestimmt sein könne.

Dies sind ungefähr die allgemeinen Gedanken und die speziellen Resultate, welche Riemann vorfand, als er im Wintersemester 1856/57 seine erste Vorlesung über diesen Gegenstand unter dem Titel: Die Funktionen einer veränderlichen komplexen Größe, insbesondere hypergeometrische Reihen und verwandte Transzendenten, — drei Stunden wöchentlich — ankündigte und auch hielt.

Erhalten ist uns diese Vorlesung im Umriß durch eine Nachschrift von E. Schering. Daraus entstand dann die Abhandlung von 1857: Beiträge zur Theorie der durch die Gaußsche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Funktionen.

Schon der äußere Anblick unterscheidet diese Arbeit wesentlich von denen seiner Vorgänger. An Stelle der langen und mühsamen Rechnung erscheint hier die Überlegung, allerdings oft nicht weniger schwierig, welche von Resultat zu Resultat führt. An Stelle der Formel mit zunächst beschränktem Geltungsgebiet tritt die Definition einer ganzen Funktionsklasse durch die Forderung an drei Stellen je durch zwei Zweige von bestimmtem Verhalten darstellbar zu sein, und außerdem sollen je drei ihrer Zweige durch eine homogene lineare Relation verbunden sein. Aus dieser Definition fließt dann fast unmittelbar die ganze Kette von Relationen und Transformationen, welche bisher durch Rechnung gefunden waren, und eine Reihe neuer, überdies aber eine tiefere Einsicht in die Natur der untersuchten Funktionsklasse, Dinge, die in einer Versammlung von Mathematikern ausführlich zu beschreiben heute bereits überflüssig sein dürfte. Während nun in der Abhandlung die bestimmten Integrale nur gestreift werden, geht die Vorlesung ausführlich auf sie ein, doch noch immer unter Benützung der Reihenentwicklung als vermittelnden Gliedes. Die Kettenbruchentwicklungen, welche bereits Gauß gegeben hatte, erfahren hier eine neue Darstellung, und der Ansatz zum Konvergenzbeweise derselben wird mit Hilfe asymptotischer Entwicklungen auf Grund eines Gedankens, den Riemann auch in seiner Habilitationsschrift über die trigonometrischen Reihen benützt, unternommen. Die Darlegungen desselben beschließen die Scheringschen Aufzeichnungen auch äußerlich, sie sind auf der innern Seite des Einbandes des Heftes geschrieben und unvollendet. Der wesentliche Inhalt dieser letzten Untersuchung ist in das Fragment XXII der gesammelten Werke übergegangen nach einer späteren Aufzeichnung von 1863. Ihrer Entstehung nach aber reichen diese Ansätze, wie das Scheringsche Heft zeigt, in jene erste Vorlesung über die hypergeometrische Reihe zurück.

Weder die Abhandlung noch diese erste Vorlesung greifen aber die Untersuchung der bestimmten Integrale als Funktionen der außer der Integrationsveränderlichen auftretenden Variablen, oder genauer als Funktionen der singulären Stellen des Integranden, direkt an.

Ferner tritt nirgends die durch den Integralquotienten vermittelte konforme Abbildung auf; es wird noch nicht untersucht, in welcher Beziehung die Gebiete der unabhängigen Variablen und des Quotienten zweier partikulären Integrale zueinander stehen, und damit entfällt auch das Studium dieser Abhängigkeit in der Weise, daß nun die Variable der Differentialgleichung als Funktion des Integralquotienten betrachtet wird.

Alle diese wesentlichen und neuen Gedanken sind erst in der zweiten Vorlesung hinzugekommen, welche Riemann unter demselben Titel im Wintersemester 1858/59, vier Stunden wöchentlich, hielt. Da er selbst darüber nichts publiziert hat, so wären diese Ansätze als Riemann eigentümlich nicht mehr nachzuweisen, wenn nicht ein glücklicher Zufall und die Pietät eines der wenigen noch überlebenden Hörer dieser Vorlesungen uns dieselben aufbewahrt hätte. Allerdings kamen sie erst zu einer Zeit wieder zum Vorschein, wo die Resultate und Probleme längst von anderer Seite wiedergefunden waren. Um so interessanter aber ist es zu sehen, wie die Wissenschaft von selbst in stetiger Entwicklung alle die Methoden und Probleme wieder stellte und ausbildete, welche Jahrzehnte vorher Riemann mit der ihm eigenen schlichten Selbstverständlichkeit seinen Hörern vorgelegt und entwickelt hatte, von denen aber zu dieser Zeit kaum einer in der Lage war, diese Ansätze nach ihrer Bedeutung zu würdigen, geschweige denn sie selbständig weiter zu bilden.

Herr Professor Wilhelm von Bezold, zur Zeit Direktor des kgl. preußischen meteorologischen Institutes in Berlin, hatte diese Vorlesung besucht und aus Achtung vor dem Rufe und Ansehen Riemanns an der Universität sorgfältig in Gabelsbergerscher Stenographie aufgezeichnet, deren Kenntnis er aus seiner Heimat, München, mitbrachte. Dort hatte ja auch deren Erfinder gewirkt. Da er damals am Beginn seiner Studien stand, so konnte er die Tragweite der neuen Gedanken Riemanns nicht sogleich beurteilen — und wie viele Mathematiker hätten es damals gekonnt? Später widmete er sich der Physik und Meteorologie und so geriet denn auch jene Aufzeichnung in Vergessenheit. Erst nach Jahrzehnten, etwa im Anfang der Neunziger Jahre des vorigen Jahrhunderts, kamen ihm diese wieder durch einen Zufall in Erinnerung, und er brachte sie zunächst zur Kenntnis seiner Berliner Kollegen. Besonders Fuchs interessierte sich so sehr für den Inhalt, daß er im Jahre 1894 für seinen eigenen Gebrauch eine Übertragung in Kurrentschrift anfertigen ließ. Die Einordnung und Übertragung des gesamten Riemannschen Nachlasses an die Göttinger Universitätsbibliothek veranlaßte sodann Herrn v. Bezold, diese Aufzeichnungen ebenfalls dorthin zu überweisen. Als dann Herr Nöther den Plan faßte, zu Riemanns Werken Nachträge herauszugeben, wurden auch diejenigen Teile dieser Vorlesung mit einbezogen, welche ihrem Inhalt nach nicht schon anderweitig als dem Riemannschen Gedankenkreise angehörig nachgewiesen waren.

Was nun die Vorlesung selbst betrifft, so beginnt sie mit einer Einleitung in die seither längst zum Gemeingut der Mathematiker gewordene Riemannsche Auffassung des Funktionsbegriffes, geht sodann über auf eine kurze Erläuterung der Verzweigung der algebraischen Funktionen und setzt hierauf sogleich mit den allgemeinen Gedanken des nachgelassenen Fragmentes über lineare Differentialgleichungen ein. Es werden die Elemente der Determinantentheorie, der Zusammensetzung und Reduktion linearer Substitutionen in aller Kürze entwickelt und nun Systeme von Funktionen definiert, welche bei Umläufen um gewisse singuläre Punkte gegebene Substitutionen erleiden. Riemann stellte also seine Hörer ohne jede Rücksicht auf die historische Kontinuität, ohne irgend welche induktive Vorbereitung gleich in den ersten Vorlesungen vor ein Problem von großer Allgemeinheit, welches irgend einen Zusammenhang mit der damals geläufigen Auffassung einer Differentialgleichung durchaus nicht unmittelbar zeigte. Aber noch mehr. Daß überhaupt dieses Problem auch nur in den einfachsten Fällen eine Lösung zuläßt, ist durchaus nicht von vornherein einzusehen, und es brauchte lange Zeit, bis die Schwierigkeiten, welche sich aus einer genaueren Fassung dieses Problems ergeben, erkannt waren. Riemann selbst hatte sie erst teilweise erledigt, soweit wir nach seinem Nachlaß urteilen können. Es bedurfte der ganzen Reihe von Untersuchungen und Entdeckungen auf dem Gebiete der linearen Differentialgleichungen, wie sie an die Namen Fuchs, Klein, Poincaré geknüpft sind, um schließlich die Hilfsmittel bereit zu stellen, mit denen in der letzten Zeit Herr Schlesinger wenigstens einen Teil dieser Fragestellung hat erledigen können. Freilich, sollte es den Bemühungen der Mathematiker gelingen, auf den von Herrn Hilbert betretenen neuen Wegen das Dirichletsche Prinzip nicht nur in dem alten Glanze seiner heuristischen Kraft — denn diesen hat es niemals verloren — sondern auch als Beweismittel im Sinne der heutigen, durch so viele analytischen Erfahrungen bereicherten und darum verschärften Analysis wieder erstehen zu lassen, so ließe sich ein großer, vielleicht der wichtigste Teil der in Betracht kommenden Fälle erledigen.

Für die übrigen Fälle kann vielleicht eine weitere Ausbildung jener Methoden, welche an die Fredholmsche Integralgleichung anknüpfen und die ja ebenfalls mit den alten Aufgaben des Dirichletschen Prinzipes enge zusammenhängen, einst die volle Erledigung bringen. Es ist aber auch kaum ein Zweifel, daß bei dieser Gelegenheit noch manche verborgene Schwierigkeit und manches Problem noch für kommende Geschlechter übrig bleiben wird.

Vor diese Auffassung nun stellte Riemann seine Hörer. Zunächst führte er ihnen ein so definiertes Funktionssystem für nur zwei Verzweigungspunkte vor, um dann sofort in den Inhalt seiner Abhandlung über die hypergeometrische Reihe einzugehen. Schon in den einleitenden Worten zu dieser hatte Riemann eine Behandlung dieser Funktionen von der Darstellung derselben durch bestimmte Integrale ausgehend als gleichberechtigt mit der auf Grundlage der Differentialgleichung entwickelten hingestellt und seine Methode diesen beiden als eine neue gegenübergestellt. Ob die schon erwähnte, von Heine im gleichen Jahr publizierte, nachgelassene Abhandlung Jacobis noch im Laufe der Vorlesung zur Kenntnis Riemanns gekommen ist, kann ich nicht entscheiden. Wohl aber ist zu betonen, daß er bereits in seinen Vorlesungen aus dem Jahre 1855 die Behandlung der Eulerschen Integrale erster und zweiter Art auf Grund von geschlossenen und schleifenförmigen Integrationswegen in den Hauptzügen durchgeführt hatte, in ähnlicher Weise, wie sie später von Hankel unter Berufung auf Riemann in seiner Dissertation gegeben worden ist.

Bisher war es aber nur die Umgestaltung des Integrals durch Abänderung des Integrationsweges zur Vermeidung solcher Stellen, an denen die zu integrierende Funktion eine Integration überhaupt nicht gestattete. Auch wurde gerade dieses Hilfsmittel nicht nach seiner ganzen Tragweite von ihm nachweislich ausgebildet, obgleich einzelne Spuren und Andeutungen nach dieser Richtung hin vorhanden sind. Erst die Herren Camille Jordan, Pochhammer, Nekrassoff haben durch Einführung des Doppelumlaufintegrals den letzten Schritt in dieser Richtung getan, so weit wenigstens als Funktionen von ähnlichem Verhalten in Betracht kommen, wie der Integrand des hypergeometrischen Integrals. Jetzt aber, in der Vorlesung, werden die hypergeometrischen Integrale geradezu daraufhin untersucht, wie sie sich bei geschlossenen Umläufen des Parameters verhalten, und daraus, sowie aus den in sehr durchsichtiger Weise entwickelten linearen Relationen zwischen ihnen — sie ergeben sich einfach durch zwei Randintegrationen — wird gezeigt, daß sie den allgemeinen an eine P-Funktion zu stellenden Forderungen in bestimmter Weise entsprechen. Dieser Gedankengang findet sich später erst bei Fuchs gelegentlich der Untersuchung der

Perioden eines hyperelliptischen Integrals erster Gattung als Funktion eines Verzweigungspunktes und etwas später in dem Werke von Herrn Camille Jordan über Substitutionentheorie und ist an der zuletzt genannten Stelle ohne nähere Angabe Herrn Mathieu zugeschrieben.

Nicht unerwähnt darf ich dabei auch lassen, daß sich im Nachlasse Riemanns ein Blatt vorgefunden hat, welches unter anderm die Figur des Doppelumlaufes zeigt. Doch wäre es nicht unmöglich, daß dieses Blatt erst später hineingekommen ist, da sich keinerlei die Datierung nur einigermaßen ermöglichenden Angaben darauf befinden. Dagegen ist ein anderes Blatt wohl mit Sicherheit Riemann zuzuschreiben, auf welchem die Schreibweise des hypergeometrischen Integrals derart modifiziert ist, daß dasselbe als absolute Invariante, als bloße Funktion des Doppelverhältnisses der vier singulären Stellen des Integranden erscheint.

Die Entwicklungen des folgenden Abschnittes gruppieren sich um den Begriff der Kettenbrüche und deren Beziehungen zur Theorie der benachbarten Funktionen, sind jedoch nicht so gut erhalten, daß es hier, wo es nicht bloß auf allgemeine Fragestellung, sondern auf konkrete Führung der Rechnung ankommt, möglich wäre, den Gedankengang mit voller Sicherheit festzustellen. Eine Untersuchung der Konvergenzverhältnisse und der zur wirklichen Berechnung der Funktion geeigneten Reihen beschließt die allgemeine Theorie, welche nun durch Anwendungen auf elliptische Integrale, Kugelfunktionen und ähnliches erläutert wird.

Interessant ist, daß Riemann die Arbeiten Heines über dessen Verallgemeinerung der hypergeometrischen Reihe in der Vorlesung zwar wiedergegeben hat, jedoch ohne irgendwie zu versuchen, diese Reihe seinem allgemeinen Programm einzuordnen. Dies ist erst später von Thomae geschehen.

Während nun die bisherigen Entwicklungen für die Verfolgung der aus der Abhandlung bekannten Ansätze neue Hilfsmittel geben und dadurch die weitere Entwicklung der Theorie fördern, treten nun für die damalige Zeit ganz neue Fragestellungen ein. An erster Stelle steht die einfache Bemerkung, daß die Integrale einer Differentialgleichung mit analytischen Koeffizienten sich linear und homogen substituieren, wenn die unabhängige Variable einen geschlossenen Weg allgemeiner Art durchläuft, und daß daher umgekehrt die unabhängige Variable als Funktion des Integralquotienten aufgefaßt bei gewissen linear gebrochenen Substitutionen ungeändert bleibt. Die hier so schlicht gebotene Fragestellung ist sogleich in ganzer Allgemeinheit aufgefaßt, ohne Beschränkung auf etwa mögliche eindeutige Umkehrung des

Integralquotienten, eine Beschränkung, welche bei dem ersten Aufwerfen dieser Frage in der Tat nicht nötig erscheint, wenn man sich von vornherein auf den Standpunkt stellt, den Riemann in der Theorie der Abelschen Integrale eingenommen hat, als er die Umkehrung eines einzelnen Integrals erster Gattung unter dem Gesichtspunkt der konformen Abbildung einer Verzweigungsfläche auf ein System von p Parallelogrammen in Betracht zog, und damit die Schwierigkeit vollständig überwand, welche Jacobi dazu veranlaßt hatte, solche Umkehrungsfunktionen für unmöglich zu erklären.

In der Tat ist in der späteren Literatur, und zwar sowohl in den von den Herren H. A. Schwarz und F. Schottky behandelten spezielleren Fällen, als auch in den glänzenden und weitreichenden Abhandlungen des Herrn Poincaré, immer der Fall eindeutiger Umkehrbarkeit besonders in den Vordergrund getreten. Erst der von Herrn Klein eingeführte Begriff des Fundamentalbereiches bringt die Frage wieder auf die allgemeinste Fassung, ein Begriff, den Klein unter ausdrücklicher Bezugnahme auf die von Riemann in der Theorie der Abelschen Funktionen betrachtete Figur von p Parallelogrammen mit $2p-2$ Verzweigungspunkten aufgestellt und diskutiert hat. Seither waren ja namentlich die Bemühungen des letztgenannten Forschers besonders in Vorlesungen dahin gerichtet, die Stellung der eindeutigen Funktionen unter den allgemeinen zu erforschen, eine Frage, die Poincaré von anderer Seite her bearbeitet hatte und die gerade zu den schwierigsten und wichtigsten in der Theorie der automorphen Funktionen gehört. Jene klassische Figur aber von p Parallelogrammen und ihren Wiederholungen ist von Riemann selbst sehr viel eingehender studiert worden, als seine Veröffentlichungen zeigen.

Die Art und Weise, wie wir davon Kenntnis erhalten, zeigt aber auch die persönliche Liebenswürdigkeit Riemanns in schönem Lichte.

Als er nämlich im Frühjahr 1865 bereits schwer krank in Pisa Erholung suchte, befragte ihn Herr Prym über einen speziellen Fall dieser Figur. Riemann, dem das Sprechen damals bereits schwer fiel, versprach schriftliche Antwort. Aber er begnügte sich nicht mit einigen flüchtigen Zeilen, sondern wir fanden in seinem Nachlaß einen sorgfältigen Entwurf der Antwort, kannten aber den Anlaß nicht. Als nun das Manuskript unserer Nachträge vor der Drucklegung an Herrn Prym ging, erfuhren wir erst, daß auch die Reinschrift dieses Schreibens noch erhalten sei und im Besitze des genannten Herrn sich befinde. Auch in seinen letzten Untersuchungen über die allgemeinen Thetafunktionen hat Riemann von dieser Figur ausgedehnten Gebrauch gemacht. Am Schlusse der eben erwähnten Mitteilung macht er die Bemerkung, daß eine bestimmt ausgewählte Gestalt dieser Figur bei der Untersuchung der Differentialgleichungen, welchen die Perioden der Abelschen Integrale genügen, gute Dienste leiste. Untersuchungen in dieser Richtung liegen seither weder von Riemann selbst noch von anderer Seite vor, und es ist vorläufig nicht im einzelnen zu sehen, welches etwa der Gedankengang Riemanns hier gewesen sein mag. Man darf es aber wohl als gewiß hinstellen, daß eine Untersuchung dieser Figur und der ihr im Sinne der linearen Periodentransformation äquivalenten, insbesondere die Aufsuchung einer reduzierten Normalform oder Scharen von solchen, welche durch lineare Transformation immer erreichbar sind, unsere Kenntnis von der Natur der transzendenten Moduln eines algebraischen Gebildes und ihres Zusammenhanges mit den algebraischen wesentlich erweitern würde, und die Frage nach den Beziehungen des algebraischen Gebildes zu den Perioden eines bestimmten, passend ausgewählten Integrals erster Gattung der Lösung näher bringen würde, in ähnlicher Weise, wie die auf Dirichlet und seine Theorie der quadratischen Formen zurückgehende Heranziehung des reduzierten Parallelogrammes fast unmittelbar zum Fundamentalbereich der elliptischen Modulfunktionen führt.

Nach dieser Abschweifung lassen Sie mich wieder zum eigentlichen Gegenstande des Vortrages zurückkehren und noch hervorheben, daß auch die unter dem Namen des Schwarzschen Differentialparameters bekannte Differentialinvariante, dieselbe, welcher wir bereits bei Kummer gedachten, gleich zu Beginn der Untersuchung eintritt. Riemann hat ja von diesem Differentialparameter außer in dem hinterlassenen Fragment über die Abbildung eines von Kreisen begrenzten Gebietes auf die Halbebene auch in dem 1860 entstandenen, von Hattendorf bearbeiteten Aufsatz über Minimalflächen Gebrauch gemacht und ihn auf ein Problem angewendet, welches mit den Fragen, worüber hier zu berichten ist, aufs engste zusammenhängt, nämlich auf die konforme Abbildung eines von Bogen größter Kreise auf der Kugel begrenzten Flächenstückes auf die Halbebene. Überhaupt scheinen die Entwicklungen dieses nachgelassenen Stückes in einem gewissen innern Zusammenhang mit der Vorlesung über die hypergeometrische Reihe zu stehen, eine Ansicht, welche sowohl durch innere Gründe, wie Verwendung ähnlicher Hilfsmittel, ja sogar direkt derselben Funktionen, als auch durch den äußeren Umstand gestützt wird, daß das Manuskript in dem der Vorlesung unmittelbar folgenden Jahre entstanden ist.

Eben diese Untersuchung der Umkehrung eines Quotienten zweier partikulärer Integrale der Differentialgleichung unternimmt nun Riemann in der Vorlesung unter der Einschränkung, daß die charakteristischen Exponenten der einzelnen Zweige der P-Funktion reell und so beschaffen sind, daß der Integralquotient an den singulären Stellen endlich bleibt, ferner, daß die Winkel des bei der Abbildung entstehenden Kreisbogendreieckes sämtlich kleiner als π sind. Er zeigt, daß unter diesen Umständen das Gebiet der komplexen Größen mit positivem imaginären Teil auf ein Kreisbogendreieck ohne Verzweigungspunkt im Innern abgebildet wird, welches sich nirgends selbst überdeckt, so daß also die Umkehrungsfunktion innerhalb dieses Gebietes eindeutig ist. Er setzt aber ausdrücklich hinzu, daß bei komplizierteren Differentialgleichungen im allgemeinen dieses Resultat sich nicht ergeben werde.

Auch verweist er ausdrücklich auf das Vorbild der elliptischen Funktionen, wo ja ebenfalls der Quotient zweier Perioden als unabhängige Variable von Jacobi eingeführt worden sei.

Nun wird eine kurze Darstellung der Übertragung der komplexen Variablen durch stereographische Projektion auf die Kugel eingeschaltet, eine Sache, auf welche sich Herr C. Neumann in der ersten Auflage seiner Vorlesungen über die Abelschen Integrale als aus Riemanns Vorlesungen herrührend bezieht. Dadurch wird dann die Untersuchung der Umkehrungsfunktion mit der Geometrie von Kreisbogendreiecken auf der Kugelfläche in Verbindung gesetzt. Es wäre nun hier naheliegend, eine Andeutung zu machen über jene bedeutungsvolle Scheidung der Kreisbogendreiecke in drei Klassen, je nachdem der Schnittpunkt der Ebenen der drei Begrenzungskreise im Innern der Kugel, auf der Kugel oder außerhalb derselben liegt. Diese Unterscheidung, welche erst von Herrn H. A. Schwarz durchgeführt wurde, wird in der Vorlesung nicht ausdrücklich erwähnt, sondern nur der Fall in Betracht gezogen, daß das ebene Kreisbogendreieck sich auf ein sphärisches Dreieck im engeren Sinn des Wortes, also ein von größten Kreisen begrenztes abbilden lasse. Jedoch läßt sich aus der vorliegenden Nachschrift nicht mit Sicherheit entnehmen, daß Riemann diesen Fall als einen speziellen ausdrücklich bezeichnet hätte. Daß ihm jedoch der Sachverhalt nicht gänzlich verborgen sein konnte, geht aus dem später ausführlicher zu besprechenden Fall der elliptischen Modulfunktionen hervor, welchen er genauer ausführte, sowie auch aus der Bemerkung, man müsse ebene Figuren heranziehen, wenn einer der Winkel des Kreisbogendreieckes gleich Null sei. Man wird also nur sagen können, Riemann habe im Falle der Umkehrung des Integralquotienten der hypergeometrischen Reihe die Unterscheidung der elliptischen, hyperbolischen und parabolischen Gruppen wohl implicite gestreift, ohne sie jedoch ausdrücklich zu formulieren.

Damit habe ich auch bereits dadurch, daß ich den Begriff der Gruppe herangezogen habe, angedeutet, daß in demselben Abschnitt Riemann sich die analytische Fortsetzung der Abbildung durch symmetrische Wiederholung des ersten Kreisbogendreieckes vollzogen gedacht hat. Eben dieses Prinzip der Symmetrie findet sich auch in der vorhin erwähnten Abhandlung über Minimalflächen und darauf nimmt auch Herr H. A. Schwarz in seiner Abhandlung Bezug.

So kurz nun auch das Symmetrieprinzip an der erwähnten Stelle der Vorlesungen auseinandergesetzt ist, so wird es doch sogleich für die Beantwortung einer wichtigen Frage verwertet, nämlich: wann zwischen den Umkehrungsfunktionen zweier solcher Integralquotienten eine algebraische Relation bestehe. Die Antwort wird durch die Bemerkung gegeben, daß dann eine und dieselbe sphärische Figur sich auf zwei Arten aus einer geraden Anzahl abwechselnd kongruenter und symmetrischer Dreiecke zusammensetzen lassen muß. Damit ist nicht nur für den vorliegenden speziellen Fall, sondern auch für den ganzen Kreis der in dem Gebiete der automorphen Funktionen auftretenden Transformationsfragen ein Prinzip erkannt, welches nur der Durchführung bedurfte, um in den Hauptzügen die Transformationstheorie dieser Funktionen ebenso übersichtlich zu gestalten wie die der elliptischen Funktionen.

Die spezielle Inbetrachtnahme der vorliegenden Funktionen liefert aber nun Riemann nicht nur die bereits aus der Abhandlung bekannten, zum Teil schon von Kummer gefundenen Transformationen, sondern auch die Einsicht, daß außer diesen auch noch die regulären Körper solche Transformationen liefern müssen, und damit war sowohl die Frage nach den algebraischen Funktionen mit linearen Transformationen in sich, als auch nach den algebraisch integrierbaren Fällen der hypergeometrischen Differentialgleichung und überhaupt nach allen mit den endlichen Gruppen linear gebrochener Substitutionen einer Veränderlichen wenigstens im Keime aufgeworfen und auch die Mittel zu ihrer Lösung gegeben. Man weiß, daß alle diese schönen und fruchtbaren Probleme brach lagen, bis sie von H. A. Schwarz, Fuchs, Camille Jordan, Klein von analytischer, geometrischer und gruppentheoretischer Seite aus nach und nach wieder aufgefunden und erledigt wurden. Daß die in der Riemannschen Vorlesung gebotene Anregung im Gegensatze zur Theorie der Abelschen Funktionen so wenig unmittelbare Wirkung hatte, dürfte in erster Linie daran gelegen sein, daß der Gruppenbegriff damals noch nicht allgemein jene beherrschende und verbindende Stellung einnahm, wie er sie später und wohl unter wesentlicher Mitwirkung des Eindrucks eben der hier genannten Probleme erreichte.

Speziell für die hypergeometrischen Funktionen wurden diese Untersuchungen erst von den Herrn E. Goursat und E. Papperitz wieder aufgenommen, wobei die leitenden Gedanken eben jene Riemannschen waren, ohne daß natürlich ein solcher Zusammenhang stattgefunden hat.

Nach Aufstellung und Erläuterung des eben besprochenen Transformationsproblems wendet sich nun Riemann in einer Einschaltung den nicht homogenen linearen Differentialgleichungen zu, und leitet nach Lagrange die adjungierte Differentialgleichung ab, deren geeignet spezialisierte Lösung dann zur Integration der nicht homogenen Gleichung verwendet wird.

Hieran knüpft Riemann die Bemerkung, daß die Integrale einer nicht homogenen Differentialgleichung bei Umläufen der unabhängigen Variablen um singuläre Stellen sich im allgemeinen bis auf ein lineares Aggregat der Integrale der homogenen Gleichung reproduzieren.

Er stellt nun die nicht homogene Differentialgleichung für das Integral eines hypergeometrischen Differentialausdruckes mit veränderlicher oberer Grenze wirklich auf. Sodann wird die Methode der Eulerschen Integration durch bestimmte Integrale für eine homogene Gleichung zweiter Ordnung auseinandergesetzt, und darauf hingewiesen, daß man so eine nicht homogene Differentialgleichung erhalte, wenn man bei der Integration eine der Grenzen veränderlich läßt. Dieser Sachverhalt wird nun an den elliptischen Integralen erster Gattung erläutert, und gezeigt, wie man die Differentialgleichung für die vollständigen elliptischen Integrale aus der nicht homogenen Differentialgleichung für das Integral erster Gattung erhalten kann.

Dadurch wird Riemann auf einen Gedanken geführt, der, soviel ich weiß, in der Literatur bisher nicht hervorgetreten ist. Er setzt nämlich die Lösung der nicht homogenen Differentialgleichung in Analogie zu dem gewöhnlichen elliptischen Integral und die Lösungen der homogenen Gleichung analog den Perioden des elliptischen Integrals erster Gattung. So, wie sehr viele Eigenschaften der vollständigen elliptischen Integrale erst aus der Betrachtung des unbestimmten Integrals als Funktion der obern Grenze gefunden worden seien, da eben dieses eine sehr einfache Funktion der obern Grenze sei, ebenso sei zu erwarten, daß viele Eigenschaften der vollständigen hypergeometrischen Integrale erst aus der Untersuchung des unbestimmten Integrals eines hypergeometrischen Differentials als Funktion der obern Grenze gefunden werden würden, welches ja in der Tat eine viel einfachere Funktion der obern Grenze sei, als die vollständigen hypergeometrischen Integrale von der unabhängigen Variablen der Differentialgleichung.

Dieser Gedanke wird dann übertragen auf Differentialgleichungen, welche durch bestimmte Integrale sich lösen lassen, und dann weiterhin auf noch allgemeinere Differentialgleichungen, indem sich Riemann in den Differentialausdruck eine passende Funktion der unabhängigen Veränderlichen und eines Parameters eingesetzt denkt, und nun postuliert, die allgemeine Lösung der durch Gleichsetzung des Differentialausdruckes und des Substitutionsresultates erhaltenen nicht homogenen Gleichung als Funktion des Parameters zu untersuchen, wodurch bei passender Wahl der substituierten Funktion dann auch die vollständige Lösung der homogenen Differentialgleichung werde erhalten werden können. Er schließt diese Auseinandersetzung mit der Bemerkung, daß diese Transzendenten eine sehr wichtige Rolle für die Theorie der Differentialgleichungen spielen, und er mag dabei außer an die hypergeometrischen Integrale an die Perioden der Abelschen Integrale gedacht haben, mit deren Differentialgleichungen er sich ja eingehender beschäftigt hatte, wie außer aus dem schon früher erwähnten Schreiben an Herrn Prym und aus der Abhandlung über Abelsche Funktionen auch aus einem nachgelassenen Blatte hervorgeht, auf welchem er die Änderung der Perioden eines hyperelliptischen Integrals erster Gattung als Funktion der Verzweigungspunkte beim Durchlaufen geschlossener Wege seitens der letzteren eingehender untersucht.

Den Schluß der Vorlesung bildet eine Betrachtung der ganzen elliptischen Integrale als Funktionen des Moduls und insbesondere die wirkliche Durchführung der konformen Abbildung des Gebietes für den Modul k^2 durch das Verhältnis der beiden Perioden des elliptischen Integrals erster Gattung. Er gelangt dabei zu jener seither so wohl bekannt gewordenen und so viel studierten Figur des Kreibogenvierecks, welches in der heutigen Ausdrucksweise den Fundamentalbereich für k^2 und der daraus entspringenden Einteilung des Gebietes der komplexen Zahlen mit positivem imaginären Teil bildet. Es ist interessant, zu bemerken, daß in dem gleichen Jahre (1859) die erste ausführlichere Untersuchung der von Jacobi bereits aufgefundenen Ausdrücke für den Legendreschen Modul durch das Periodenverhältnis von Hermite durchgeführt wurde.

Aber Riemann versäumt auch nicht, aus dem Umstand, daß die singulären Werte Null, Eins, Unendlich des Moduls nur an der Grenze des Gebietes des Periodenverhältnisses auftreten, sowie daraus, daß die einzelnen bei analytischer Fortsetzung entstehenden Gebiete des Periodenverhältnisses die Halbebene gerade einfach überdecken, den Schluß zu ziehen, daß jede Funktion, welche nur an den Stellen Null, Eins, Unendlich unstetig oder vieldeutig wird, in eine eindeutige Funktion des Periodenverhältnisses übergeht, wenn die ursprüngliche unabhängige

Variable als das Doppelverhältnis der vier Verzweigungspunkte eines elliptischen Gebildes aufgefaßt wird. Erst zwanzig Jahre später ist Herr Klein bei seinen Untersuchungen über elliptische Modulfunktionen wieder auf diesen Satz geführt worden und hat ihn mit besonderer Betonung der allgemeinen hypergeometrischen Funktion neuerdings ausgesprochen.

Damit also war zum erstenmal an das Problem der eindeutigen Parameterdarstellung herangetreten, welches später Herr Poincaré in so allgemeiner Weise und gerade auf Grund Riemannscher Prinzipien gelöst hat.

Wir sind am Ende der Riemannschen Vorlesung angelangt. Den allgemeinen Gedankengang und die wichtigsten Beziehungen zu den heutigen Fragen haben wir nun besprochen; werfen wir noch einen Blick auf die Methode der Bearbeitung und Darstellung.

Von den allgemeinsten Umrissen einer neuen Funktionsklasse ausgehend, werden die einzelnen Darstellungen einer sehr speziellen Funktion und deren Eigenschaften einer eingehenden Diskussion unterworfen und gerade daraus neue Problemstellungen gewonnen. Im ersten Teile sind es die bestimmten Integrale, welche dem allgemeinen Schema der P-Funktionen eingeordnet werden, im zweiten Teil werden die elliptischen Modulfunktionen und die Integralquotienten der hypergeometrischen Reihe dem allgemeineren Problem der Umkehrung von Integralquotienten linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung eingefügt, und eben dabei ergibt sich einerseits Vertiefung durch Heranziehung der konformen Abbildung, andrerseits der Ausblick auf die Theorie der nicht homogenen Differentialgleichungen, sowie die Möglichkeit der eindeutigen Darstellung weit allgemeinerer Funktionen. Es ist ein beständiges Zusammenwirken von Induktion und Abstraktion, gleich als wenn der am einzelnen geschärfte Blick nun auch im weiteren Gebiete sich zurechtfindet, weil von vornherein die Aufmerksamkeit eine bestimmte Richtung empfangen hat. So tragen namentlich die letzten Abschnitte der Vorlesung das Gepräge unmittelbarer Wiedergabe des soeben Gefundenen, ohne Rücksicht auf die verhältnismäßig geringe Durchbildung der Einzelheiten. Sie zeigen uns Riemann unmittelbar an der Arbeit, ein Beispiel, welches für die großen Mathematiker um die Mitte des 19. Jahrhunderts gewiß nicht häufig ist.

Damit lassen Sie mich den Boden des historischen Berichtes verlassen und zu der Frage übergehen, in welcher Richtung ein weiterer Ausbau der Riemannschen Ideen auf diesem Gebiete etwa noch erfolgen könnte. Es ist ja bekannt, daß schon Kummer am Schlusse seiner Abhandlung eine Reihe erwähnt, welche als Verallgemeinerung der Gaußschen Reihe angesehen werden kann. Herr Thomae hat in verschiedener Richtung die Riemannschen Methoden auf analoge Transzendente angewendet und die Herrn Appell und Goursat haben Funktionen mehrerer Variablen eingeführt, welche schon früher Herr Pochhammer als bestimmte Integrale untersucht hatte, und welche im wesentlichen bestimmte Integrale zwischen Verzweigungspunkten von Funktionen sind, die sich von denen des gewöhnlichen hypergeometrischen Integrals nur durch die größere Anzahl der Faktoren unterscheiden. Solche Reihen hat dann besonders Herr Picard benutzt, um seine allgemeine Theorie der automorphen Funktionen mehrerer Variablen zu erläutern. Er hat bei diesen die Frage nach der eindeutigen Umkehrbarkeit gestellt und erledigt und ist dabei zur Verallgemeinerung der Schwarzschen Resultate bei der Gaußschen Reihe gekommen. Ausführlich hat dann diese letzten Untersuchungen Herr Levavasseur dargestellt. In der allerletzten Zeit hat noch Herr Hilbert den elliptischen Modulfunktionen allgemeinere an die Seite gestellt, welche für Zahlkörper, die mit allen ihren konjugierten reell sind, eine ähnliche Rolle spielen, wie die elliptischen Modulfunktionen für den Körper der ganzen Zahlen.

Aber nicht von diesen weiteren Verallgemeinerungen, von denen manche weit über das Gebiet einer Variablen hinausgreifen, will ich ausführlicher sprechen, sondern von einer andern, welche zwar im engern Kreise sich bewegt, mir aber doch der Aufmerksamkeit wert erscheint, weil sie geeignet ist, die Verbindung herzustellen zwischen den hier berichteten Gedanken Riemanns und jenen, welche aus der Theorie der Abelschen Funktionen stammen, den ausgezeichneten Stellen des algebraischen Gebildes, seinen algebraischen Moduln und den Moduln der zugehörigen Θ-Funktionen.

Zunächst wird man versuchen, die hypergeometrische Funktion dadurch auf das elliptische Gebilde zu übertragen, daß man Integrale von Funktionen betrachtet, welche sich beim Umlauf um singuläre Punkte des Integranden und längs der Querschnitte mit konstanten Faktoren multiplizieren. In der Tat scheint Riemann, wie eine flüchtige Notiz aus seinem Nachlaß berichtet, an eine derartige Verallgemeinerung gedacht zu haben. Will man aber nun diese Integrale, in ähnlicher Weise wie die hypergeometrischen, als Funktionen der einzelnen singulären Stellen des Integranden untersuchen, so stößt man, abgesehen von andern Umständen, vor allem auf die Schwierigkeit, daß diese singulären Stellen nicht unabhängig voneinander veränderlich sind, sondern sowohl untereinander als mit den Multiplikatoren durch gewisse Relationen verknüpft sind. Eben diese Schwierigkeit stellt sich in erhöhtem Maße ein, wenn man statt eines elliptischen Gebildes solche höheren Geschlechtes heranzieht. Aus dieser Schwierigkeit weist nun eine einfache Bemerkung den Ausweg, welche zugleich die wirkliche Darstellung der hypergeometrischen Funktion in dem Gebiete der elliptischen Modulfunktionen leistet. Eine solche Darstellung ist ja bereits von Herrn Papperitz im Anschluß an die Differentialgleichung gegeben worden. Einfacher aber und zur weiteren Verwertung geeigneter erhält man sie aus dem hypergeometrischen Integral, wenn man das durch die vier Verzweigungspunkte des Integranden bestimmte elliptische Gebilde heranzieht. Bei Einführung des zugehörigen Integrals erster Gattung als Integrationsvariable verwandelt sich nämlich das Integral in ein zwischen zwei Halbperioden erstrecktes Integral über ein Produkt von Potenzen der vier gewöhnlichen Jacobischen Θ-Funktionen. In dieser Gestalt ist nun der Satz, mit welchem Riemann seine Vorlesung schloß, in seiner Anwendung auf die hypergeometrische Reihe auch durch eine bestimmte und leicht zu handhabende Formel realisiert, und die ganze Theorie der hypergeometrischen Funktion läßt sich auf Grund des wohlbekannten und durchsichtigen Verhaltens der Θ-Funktionen leicht entwickeln.

Aber dieser einfache Ansatz führt naturgemäß weiter zu allgemeineren Integralen auf dem elliptischen Gebilde. So, wie uns hier Θ, deren Nullstellen Halbperioden sind, entgegentreten und die Integration gerade zwischen Halbperioden geführt wird, so kann man jetzt Integrale über Produkte von Potenzen solcher Θ-Funktionen der Integration zugrunde legen, welche an den n^2 Stellen verschwinden, denen durch n geteilte Perioden entsprechen, also Θ mit $n$tel Charakteristiken, und die Integration selbst wieder zwischen singulären Stellen des Integranden, also $n$tel Perioden, erstrecken.

Die so gewonnenen Integrale lassen sich dann wieder unter zwei Gesichtspunkten betrachten. Einmal erscheinen sie im wesentlichen als eindeutige Funktionen des Periodenverhältnisses am elliptischen Gebilde, also im Bereiche der elliptischen Modulfunktionen, das andere Mal aber als polymorphe Formenschar in ihrer Abhängigkeit von den algebraischen Modulfunktionen, nämlich als Integrale linearer Differentialgleichungen von der Ordnung n^2 mit Koeffizienten, welche Modulfunktionen der Stufe n sind, also bei der Hauptkongruenzuntergruppe modulo n ungeändert bleiben.

Diese Funktionen zeigen in vielen Beziehungen ein der gewöhnlichen hypergeometrischen Reihe analoges Verhalten und erweitern die bei dieser bekannten, merkwürdigen Eigenschaften in eigentümlicher Weise. Um nur eine einzelne derartige Analogie weiter auszuführen, sei daran erinnert, daß die hypergeometrische Funktion bis auf Vertauschungen der Exponenten im wesentlichen ungeändert bleibt, wenn für die unabhängige Variable der Reihe nach die sechs verschiedenen Werte gesetzt werden, welche das Doppelverhältnis von vier Punkten annehmen kann. Bei unsern allgemeineren Funktionen ist nun der Sachverhalt der, daß diese im wesentlichen bis auf Exponentenvertauschungen ungeändert bleiben, wenn auf das zur $n$ten Stufe gehörige algebraische Gebilde eine seiner Transformationen in sich ausgeübt wird. Für die niedersten Stufen, $n = 3$ und $n = 5$, erhält man so Funktionen, für welche die linearen Substitutionen der Tetraeder- und der Ikosaedergruppe dieselbe Bedeutung haben, wie jene ersterwähnten einfacheren linearen Substitutionen der Gruppe, welche die Werte eines Doppelverhältnisses ineinander überführen.

Es ist als sicher zu betrachten, daß eine vollständige Theorie der hier angeführten Funktionen nach Art derjenigen, wie wir sie für die hypergeometrische Funktion besitzen, insbesondere die Untersuchung derjenigen Fälle, in welchen diese Funktionen wieder selbst auf algebraische zurückgeführt werden können, von großem Interesse sein würde, schon deshalb, weil wir an der Hand der eindeutigen Darstellung im Gebiete der elliptischen Modulfunktionen alle Erscheinungen bequem verfolgen und mit den bekannten algebraischen und gruppentheoretischen Verhältnissen in Verbindung bringen können.

Aber unser Ansatz reicht auch noch über das Gebiet der elliptischen Funktionen hinaus, freilich nicht mehr in so ausgedehnter Weise, daß zu jedem algebraischen Gebilde eine ins Unendliche fortlaufende Reihe von derartigen Funktionen, den verschiedenen Werten der Zahl n entsprechend, existiert. In der Tat, wollte man die im vorigen betrachteten Integrale auf dem elliptischen Gebilde in seiner algebraischen Gestalt aufstellen, so würde man sogleich erkennen, daß sie wesentlich an das Vorhandensein von solchen elliptischen Funktionen gebunden sind, deren $n$te Wurzeln am elliptischen Gebilde unverzweigt sind. Solche Funktionen aber gibt es für ein Geschlecht größer als eins nur in ganz speziellen Fällen als wohlcharakterisierte Einzelwesen. Nur wenn $n = 2$ genommen wird, hat man in den von Riemann als Abelsche Funktionen bezeichneten Funktionen ein solches System immer zur Verfügung. Deren Quadrate sind ja nach Riemanns Erklärung proportional denjenigen Differentialen erster Gattung, deren Nullstellen paarweise zusammenfallen, und aufs engste mit den Θ-Funktionen von ungerader Charakteristik verknüpft. Am einfachsten und übersichtlichsten erhält man nun diejenigen Bildungen, welche unseren Ansatz verallgemeinern, wenn man sich homogener Variabler bedient und geradezu die Formen erster Gattung als solche einführt, ein Vorgehen, dessen Vorteile ja Herr Klein schon in so vielen über das algebraische Gebiet hinausliegenden Problemen betont hat. Die in Rede stehenden Bildungen werden dann bestimmte Integrale, bezw. Doppelumlaufintegrale zwischen zwei Nullstellen einer oder zweier verschiedener Abelscher Formen über einen Integranden, welcher ein Produkt von Potenzen der einzelnen Abelschen Formen ist, deren Exponenten zur Summe 1 haben. Als Differential ist dabei die von Klein mit $d\omega$ bezeichnete überall endliche Differentialform von der Dimension -1 zu verwenden.

Die Gesamtheit dieser Integrale mit gleichen Exponentensystemen der Integranden muß nun wieder durch eine endliche Anzahl linearunabhängiger darstellbar sein und eine ganze Reihe analoger Erscheinungen zeigen wie diejenigen, welche wir auf dem elliptischen Gebilde konstatiert haben, wenn man sie als Funktionen der Moduln des algebraischen Gebildes auffaßt. Insbesondere läßt sich erwarten, daß die Beziehungen zu den Moduln der zugehörigen Θ-Funktionen und derjenigen linearen Periodentransformationen, welche die Charakteristiken der Θ-Funktionen ungeändert lassen, von besonderem Interesse sein werden.

Diese Erwartung erscheint um so berechtigter, als schon der nächstliegende Fall, welcher dem Geschlechte 2 entspricht, in dieser Richtung ein bemerkenswertes Verhalten aufweist. Hier nämlich sind die zu betrachtenden Integrale nicht verschieden von denen, die bei der Integration der Tissot-Pochhammerschen Differentialgleichung auftreten. Es sind Integrale zwischen den Verzweigungspunkten eines Produktes von Potenzen von sechs linearen Faktoren. Jeder einzelne solcher verschwindet an einer Verzweigungsstelle des hyperelliptischen Gebildes. Und nun zeigt sich bei genauerer Untersuchung, daß diese Integrale ebenso eindeutige Funktionen der zum hyperelliptischen Gebilde gehörigen drei Thetamoduln sind, wie die gewöhnliche hypergeometrische Funktion eindeutige Funktion des zum elliptischen Gebilde gehörigen Thetamoduls ist. Diese Darstellung läßt sich allerdings nicht so unmittelbar auch formell in Evidenz setzen, wie bei der gewöhnlichen hypergeometrischen Funktion, aber gerade die notwendige Einzeluntersuchung führt auf interessante Eigenheiten der Monodromiegruppe der hyperelliptischen Funktionen, worauf ich jedoch hier ohne weitläufig zu werden nicht eingehen kann.

Aber auch mit den Riemannschen Gedanken über nicht homogene Differentialgleichungen lassen sich diese Ansätze in Beziehung bringen, wenn man statt der bestimmten Integrale die zugehörigen unbestimmten

Integrationen ins Auge faßt. Endlich wird es bereits im elliptischen Fall von Interesse sein, auch die durch die hier betrachteten Integrale vermittelte konforme Abbildung zu studieren.

Mit dem Hinweis auf diese weiteren Probleme lassen Sie mich schließen. Wenn auch die Bearbeitung dieser Funktionen fürs erste dem Gebiete der Einzelforschung angehört, so dürfen wir doch nicht vergessen — und die größten Meister der Wissenschaft haben oft und mit Nachdruck darauf hingewiesen —, daß gerade die Verfolgung der erst nur interessant erscheinenden Einzelfälle unsere Kräfte stärkt, die Durchbildung unserer Methoden erzwingt und dadurch uns erst zu wirklichem Fortschritt ins Allgemeine befähigt. Denn trotz der deduktiven Gestalt, welche wir unsern Resultaten geben, können wir auf den induktiven Weg auf die Dauer so wenig verzichten, wie alle andere menschliche Wissenschaft.

C. Vorträge in den Sektionssitzungen.

I. Sektion.

Über die Auflösung der Gleichungen 6^{ten} Grades.

Von

P. Gordan aus Erlangen.

Herr Klein hatte die Güte, mich auf die Arbeiten aufmerksam zu machen, welche die Herren Wiman und Lachtin in den Math. Annalen Bd. 47 und 51 veröffentlicht haben. Wiman stellt eine Gruppe von 360 Kollineationen $\sum$ auf, welche den geraden Substitutionen von 6 Elementen isomorph ist; sie führen 6 gewisse Kegelschnitte

$$K_1,\ K_2,\ \cdots,\ K_6$$

ineinander über.

Diese, ich will sie konjugiert nennen, sind so beschaffen, daß die Determinanten der Aggregate

$$\lambda K_\varrho + \mu K_\sigma$$

von je 2 unter ihnen den Wert

$$\Delta_{\lambda K_\varrho + \mu K_\sigma} = \lambda^3 + \mu^3$$

besitzen. Schreibt man die K in der Normalform, bezogen auf das gemeinsame Polardreieck von K_1 und K_2, so wird

$$\begin{aligned}
K_1 &= x_1^2 + j\,x_2^2 + j^2 x_3^2\\
K_2 &= x_1^2 + j^2 x_2^2 + j\,x_3^2\\
K_3 &= r^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \sqrt{3}\,r(x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2)\\
K_4 &= r^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \sqrt{3}\,r(x_2x_3 - x_3x_1 - x_1x_2)\\
K_5 &= r^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \sqrt{3}\,r(-x_2x_3 + x_3x_1 - x_1x_2)\\
K_6 &= r^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \sqrt{3}\,r(-x_2x_3 - x_3x_1 + x_1x_2).
\end{aligned}$$

Die Gleichung 6^{ten} Grades G, welche die Kuben der Formen K zu

Wurzeln hat, ist die Normalform der allgemeinen Gleichung 6^{ten} Grades. Hierbei ist

$$4r = -\sqrt{3} + i\sqrt{5}; \quad 4s = -\sqrt{3} - i\sqrt{5}.$$

Diejenigen Formen, welche sich bei den Kollineationen $\sum$ nicht ändern, bezeichnen wir mit Φ. Die Koeffizienten der Gleichung G sind solche Formen Φ u. a.

$$f = K_1^3 + K_2^3 + \cdots K_6^3 = a_x^6.$$

Die Kovarianten von f sind gleichfalls Φ, die einfachsten sind:

1. die Hessesche Form $\varphi\binom{12}{x} = a_x^4 a_{1,x}^4 a_{2,x}^4 (a\, a_1\, a_2)^2$.

Aus f und φ bilden wir zunächst die Zwischenform

$$(f\varphi u)^2 = u_\gamma^2$$

und hieraus

2. die Form $\psi\binom{30}{x} = (\gamma\gamma x)^2$.

3. die Funktionaldeterminante $R = (f\varphi\psi)$.

φ und ψ sind gerade Kovarianten; R ist eine ungerade. Wiman hat den Satz bewiesen:

„Die geraden Φ sind ganze Funktionen

$$F(f, \varphi, \psi)$$

und die ungeraden sind Produkte

$$R \cdot F(f, \varphi, \psi);“$$

u. a. sind die Koeffizienten der Gleichung 6^{ten} Grades G Funktionen $F(f, \varphi, \psi)$ und R^2 gleichfalls.

Wir nennen die Verhältnisse der

$$x_1, x_2, x_3$$

Valentinerirrationalitäten und die Quotienten

$$\frac{\varDelta}{f^2}, \quad \frac{\psi}{f^5}$$

Valentinerparameter.

Die Auflösung der Gleichungen 6^{ten} Grades ist hierdurch auf die Aufgabe zurückgeführt:

„Die Valentinerirrationalitäten sollen aus den Valentinerparametern berechnet werden.“

Um sie zu lösen, stellt Herr Lachtin 3 partielle Differentialgleichungen auf.

Die Partikularlösungen sind die Quotienten

$$\frac{x_1}{\sqrt[6]{f}}, \quad \frac{x_2}{\sqrt[6]{f}}, \quad \frac{x_3}{\sqrt[6]{f}}$$

und die Koeffizienten gerade Kovarianten H von f. Diese H sind Formen Φ, also ganze Funktionen

$$F(f, \varphi, \psi).$$

Herr Klein hat mich nun aufgefordert, diese F zu berechnen, oder mit anderen Worten, die Differentialgleichungen des Herrn Lachtin so umzuformen, daß darin nunmehr nur noch ganze Funktionen F der Valentinerparameter:

$$v = \left(\frac{5}{12} + \frac{i}{4}\sqrt{-15}\right) f^{-2}\varphi; \quad w = 6\left(\frac{5}{12} + \frac{i}{4}\sqrt{-15}\right)^3 f^{-5}\psi$$

auftreten; ebenso soll die Gleichung 6ten Grades in den Koeffizienten nur $F(v, w)$ enthalten.

Es würde hier zu weit führen, wenn ich Ihnen ausführlich die Rechnungen auseinandersetzte, welche mich zum Ziele geführt haben; ich bitte Sie aber, mir einige Worte über die dabei angewandte Methode zu gestatten. Zunächst sagte ich mir, das System S einer allgemeinen ternären Form vom 6ten Grade ist viel zu umfangreich, als daß ich es unternehmen könnte, es aufzustellen und die Relationen zwischen den Kovarianten zu bestimmen. Es muß daher der Umstand benutzt werden, daß nur gewisse Kovarianten zu berechnen sind und daß wir es mit einer speziellen Form

$$f = K_1^3 + K_2^3 + \cdots K_6^3$$

zu tun haben. Bei genauerer Prüfung ergab sich, daß nur 2 Teilsysteme von S vorkommen:

1. die Formen, welche vom ternären kubischen Formensystem übernommen sind,
2. die Formen, welche durch Faltung der Hesseschen Form entstehen, und ihre Überschiebungen mit den ersteren.

Von besonderem Nutzen war mir bei meinen Untersuchungen diese Erweiterung des Wimanschen Satzes:

„Die Zwischenformen Z von f, welche in den u quadratisch sind, sind Aggregate der 6 einfachsten Z. Die Koeffizienten sind Formen Φ."

Die Resultate lauten:

I. Die Gleichung:

$$\begin{aligned} x^6 - 30 s x^5 + 15\left(22 s^2 + \sqrt{3}\, s v\right) x^4 + 5\left(-(80 s + 77\sqrt{3}) + 3\sqrt{3}\,(8\sqrt{3}\, s + 7) v\right) x^3 \\ + \frac{15}{4}\left(-(68\sqrt{3}\, r + 203) - 6\sqrt{3}\,(16 r - 3\sqrt{3}) v + 3(4\sqrt{3}\, r - 1) v^2\right) x^2 \\ + \frac{3}{4}\left(72\sqrt{3}\, w - 170 r - 207\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\,(10\sqrt{3}\, r + 127) v - 120 s^3 v^2\right) \bar{x} \\ - 5\sqrt{3}\, s^3 (3\sqrt{3}\, s v + 1)^3 = 0 \end{aligned}$$

hat die Wurzeln

$$\frac{30\,s}{f}K^3.$$

II. Setzt man

$$a_{21}=3-v+2v^2;\quad a_{22}=3-v-2v^2;\quad a_{31}=3-6v-v^2+2v^3;$$
$$a_{32}=9-11v+25v^2-6v^3;\quad a_{34}=-9+30v-43v^2+6v^3;$$
$$a_{33}=9-11v+2v^3;\quad a_{35}=27-72v+39v^2-10v^3;$$
$$a_{41}=9-18v+13v^2+12v^4;$$
$$b=-18w^3+18(+v)w^2+3(a_{22}a_{34}-54(1-v)^2-4a_{35}v)+a_{41}a_{35}$$
$$h_1(y)=5y+12(2-5v)\frac{\partial y}{\partial v}+2(4(159-370v+65v^2)-75w)\frac{\partial y}{\partial w}$$
$$h_2(y)=132\frac{\partial y}{\partial v}+8(273-95v)\frac{\partial y}{\partial w}$$
$$h_3(y)=6\cdot 870\frac{\partial y}{\partial w},$$

so haben die Differentialgleichungen

$$50b\frac{\partial_2 y}{\partial w^2}+h_1(y)(w-a_{31})+\frac{1}{6}h_2(y)(6vw-a_{32})$$
$$+\frac{1}{36}h_3(y)(-6w^2+36(1-v)w+a_{21}a_{34}-54(1-v)^2)=0$$

$$-20b\left((5v-21)\frac{\partial_2 y}{\partial w^2}+3\frac{\partial_2 y}{\partial v\,\partial w}\right)+h_1(y)(3a_{21}w-a_{35})$$
$$+h_2(y)(3w^2-9(1-v)w+a_{35}v)+\frac{1}{6}h_3(y)(a_{35}w-a_{31}a_{35})=0$$

$$\frac{8}{3}b\left((5v-21)^2\frac{\partial_2 y}{\partial w^2}+6(5v-21)\frac{\partial_2 y}{\partial v\,\partial w}+9\frac{\partial_2 y}{\partial v^2}-\frac{15}{2}\frac{\partial y}{\partial w}\right)$$
$$+h_1(y)(-6vw^2+3a_{21}w-a_{21}a_{35})+h_2(y)(3(3-v)w^2-(a_{35}+3a_{33}v)w$$
$$+a_{22}a_{33}v)+\frac{1}{18}h_3(y)(3a_{21}a_{35}w-a_{35}^2)=0$$

die Partikularlösungen

$$\frac{x_1}{\sqrt[6]{f}};\quad \frac{x_2}{\sqrt[6]{f}};\quad \frac{x_3}{\sqrt[6]{f}}.$$

Zum Kontinuum-Problem.*)

Von

J. König aus Budapest.

---

1. Es sei $M_1, M_2, M_3, \cdots$ eine abzählbar unendliche Folge beliebiger Mengen, deren Mächtigkeit wir mit $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3, \ldots$ bezeichnen.

Mit Hilfe dieser Mengenfolge definieren wir zwei neue Mengen.

Die Summe der abzählbar unendlichen Mengenfolge, in symbolischer Bezeichnung:

$$S = M_1 + M_2 + M_3 + \cdots$$

bedeute jene Menge, die durch Zusammenfassung aller Elemente von $M_1, M_2, M_3, \cdots$ entsteht, wobei die verschiedenen Mengen angehörigen Elemente immer als voneinander verschieden anzusehen sind. Die Mächtigkeit von S bezeichnen wir mit $\mathfrak{s}$.

Das Produkt der abzählbar unendlichen Mengenfolge, in symbolischer Bezeichnung:

$$P = M_1 M_2 M_3 \cdots$$

bedeute jene Mengen, deren Elemente alle Komplexe

$$\mu = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots)$$

sind, wo α_i ein beliebiges Element der Menge M_i sein kann; es enthält demnach jedes μ ein und nur ein Element jeder beliebigen Menge der Folge. Es wird bequem sein, α_i als i-ten Index des Elementes μ zu bezeichnen. Die Mächtigkeit von P sei $\mathfrak{p}$.

Sind insbesondere alle M_i identisch $= M$, so wird statt P in der gebräuchlichen Bezeichnung $M^{\aleph_0}$ geschrieben.

Wir beweisen, daß, wenn die Mengen $M_1, \cdots$ transfinit sind**), immer die Beziehung

---

*) Für die hier benutzten Begriffe und Sätze sind die Arbeiten Georg Cantors, des Schöpfers der Mengenlehre, einzusehen. Insbesondere: „Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, I. und II" (Math. Annalen, Bd. 46 und 49).

Vgl. ferner A. Schoenflies: „Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten" (Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver. VIII. 2).

**) Der Satz ist allgemeiner. Es besteht (1) dann und nur dann, wenn $\mathfrak{p}$

$$\mathfrak{s} \leqq \mathfrak{p} \leqq \mathfrak{s}^{\aleph_0} \tag{1}$$

besteht.

Eine Teilmenge von P, die $\sim S$ ist, kann in der Tat leicht angegeben werden. Man wähle zu diesem Zweck aus jedem M_i ein bestimmtes Element β_i, und ändere in

$$\mu = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots)$$

immer nur einen Index, z. B. den k^{ten}, für welchen jedes Element von M_k zu setzen ist, mit Ausschluß von β_k. Die durch Mutation des k^{ten} Index entstandene Menge der μ ist augenscheinlich der Menge M_k, mit Ausschluß des Elementes β_k, äquivalent, also, da M_k transfinit ist, auch $\sim M_k$. Die Gesamtheit der so definierten μ ist eine Teilmenge von P und $\sim S$.

Noch leichter ist der zweite Teil der in (1) enthaltenen Behauptung zu erhärten. Wenn man in $S^{\aleph_0}$ als k^{ten} Index nicht alle Elemente von S, sondern nur diejenigen zuläßt, die Elemente von M_k sind, so erhält man unmittelbar eine Teilmenge von $S^{\aleph_0}$, die $\sim P$ ist.

Aus (1) folgt noch, indem man zur ${\aleph_0}^{\text{ten}}$ Potenz erhebt:

$$\mathfrak{s}^{\aleph_0} \leqq \mathfrak{p}^{\aleph_0} \leqq \mathfrak{s}^{\aleph_0},$$

und hieraus infolge des Äquivalenzsatzes:

$$\mathfrak{p}^{\aleph_0} = \mathfrak{s}^{\aleph_0}. \tag{2}$$

2. Es soll nun weiter vorausgesetzt werden, daß die Mächtigkeiten der Mengen M_i durchweg wachsen, das heißt immer

$$\mathfrak{m}_i < \mathfrak{m}_{i+1}$$

ist. Wir beweisen, daß in diesem Falle niemals $\mathfrak{p} = \mathfrak{s}$, also wegen (1) immer

$$\mathfrak{p} > \mathfrak{s} \tag{3}$$

ist.

Anders ausgedrückt: Die Äquivalenz $P \sim S$ ist unter den jetzt festgestellten Bedingungen unmöglich. In der Tat führt diese Annahme zu einem Widerspruch.

Soll nämlich zwischen P und S eine ausnahmslos ein-eindeutige Beziehung bestehen, so müssen auch die in S enthaltenen Elemente von M_k entsprechende Elemente von P bestimmen. Die in diesen Elementen zur Verwendung gelangenden $k+1^{\text{ten}}$ Indizes bilden also eine Menge, deren Mächtigkeit höchstens $\mathfrak{m}_k$ ist. Die $k+1^{\text{ten}}$ Indizes der Elemente

---

transfinit ist. Wir beschränken uns der Kürze wegen auf den oben angegebenen Fall.

von P sind aber aus der Menge M_{k+1} zu wählen, deren Mächtigkeit $\mathfrak{m}_{k+1} > \mathfrak{m}_k$ ist. Es gibt demnach eine Teilmenge M'_{k+1} von M_{k+1}, die bei der Bildung jener Elemente von P, die Elementen von M_k entsprechen, gar nicht zur Verwendung gelangt.

Bildet man also solche Elemente von P, in denen vom zweiten Index ab Elemente von $M'_2, M'_3, \cdots$ benützt werden, so kann ein solches bei der angenommenen Äquivalenzbeziehung keinem, in irgend einem M_i enthaltenen Elemente entsprechen. D. h. die angenommene Äquivalenzbeziehung ist als unmöglich erwiesen.

3. Ist A_μ irgend eine wohlgeordnete Menge von der Mächtigkeit $\aleph_\mu$, so gibt es nach den bekannten Grundsätzen der Cantorschen Theorie eine abzählbar unendliche Folge wohlgeordneter Mengen

$$A_{\mu+1},\ A_{\mu+2},\ A_{\mu+3},\ \cdots$$

so daß, wenn wir die ihnen entsprechenden Mächtigkeiten mit

$$\aleph_{\mu+1},\ \aleph_{\mu+2},\ \aleph_{\mu+3},\ \cdots$$

bezeichnen,

$$\aleph_\mu < \aleph_{\mu+1} < \aleph_{\mu+2} < \cdots$$

ist.

Wir bilden nun die Mengen S und P in bezug auf diese Folge wohlgeordneter Mengen. S ist jetzt eine abzählbar unendliche Folge wohlgeordneter Mengen, also selbst eine wohlgeordnete Menge, deren Mächtigkeit entsprechend mit $\mathfrak{s} = \aleph_{\mu+\omega}$ bezeichnet wird.

Dann ist wegen $\mathfrak{p} > \mathfrak{s}$ auch

$$\mathfrak{p}^{\aleph_0} = \mathfrak{s}^{\aleph_0} > \mathfrak{s}.$$

Da aber für das Kontinuum

$$(2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0},$$

kann das Kontinuum keiner wohlgeordneten Menge vom Charakter $\aleph_{\mu+\omega}$ äquivalent sein.

Der einfachste Fall ergibt die Nichtabzählbarkeit des Kontinuums.

4. Herr Bernstein*) hat den allgemeinen Satz

$$\aleph_x^{\aleph_0} = \aleph_x 2^{\aleph_0}$$

aufgestellt, aus dem, wenn man voraussetzt, daß das Kontinuum irgend einer wohlgeordneten Menge A_μ von der Mächtigkeit $\aleph_\mu$ äquivalent ist, und $\aleph_x = \aleph_{\mu+\omega}$ gesetzt wird,

$$\aleph_{\mu+\omega}^{\aleph_0} = \aleph_{\mu+\omega}\aleph_\mu = \aleph_{\mu+\omega}$$

*) Felix Bernstein, Untersuchungen aus der Mengenlehre. Inaug.-Dissertation. Göttingen 1901. pag. 49.

folgen würde. Die Annahme, daß das Kontinuum einer wohlgeordneten Menge äquivalent ist, wäre also gewiß falsch, wenn der Bernsteinsche Satz allgemein richtig wäre. Leider hat jedoch dessen Beweis eine wesentliche Lücke, da für $\aleph_\omega$, und jede der oben betrachten „singulären" wohlgeordneten Mengen, die Annahme, daß jede abzählbare Teilmenge in einem Abschnitte der ganzen Menge liegt, nicht mehr statthaft ist.

Ich erwähne dies vor allem, um den Schluß, den ich in meinem Kongreßvortrage unter Annahme der Richtigkeit des Bernsteinschen Satzes aus diesem zog, ausdrücklich zurückzunehmen.

Doch glaube ich, daß die Sache noch außer der historischen Treue ein gewisses Interesse bietet.

Wäre nämlich umgekehrt das Kontinuum keiner wohlgeordneten Menge äquivalent, also größer als jede wohlgeordnete Menge, so würde aus

$$2^{\aleph_0} > \aleph_x$$

immer auch

$$\aleph_x^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph_x 2^{\aleph_0}, \tag{B.}$$

der Bernsteinsche Satz folgen.

Dieser formuliert also geradezu das Kontinuumproblem in neuer und nicht uninteressanter Weise.

Ist (B.) allgemein richtig, so kann das Kontinuum keiner wohlgeordneten Menge äquivalent sein. Kann man aber (B.) auch nur für ein $\aleph$ als falsch erweisen, so muß das Kontinuum einer wohlgeordneten Menge äquivalent sein.

Insbesondere wird das Kontinuum in der abzählbaren Folge

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \cdots$$

enthalten sein oder nicht, je nachdem $\aleph_\omega^{\aleph_0}$ größer oder gleich $2^{\aleph_0}$ ist.

Ein Beitrag zum Fermatschen Satze.

Von

A. Capelli aus Neapel.

I.

1. In der Fermatschen Gleichung

$$a^{b-1} = 1 + \alpha b, \tag{1}$$

wo a und b Primzahhlen sind, läßt sich die ganze Zahl α bezeichnen durch

$$\alpha = E\left(\frac{a^{b-1}}{b}\right),$$

indem man mit $E(x)$ die größte natürliche Zahl versteht, welche in irgend einer positiven Zahl x enthalten ist.

Ich will hier zeigen, wie man die Größe $E\left(\frac{a^{b-1}}{b}\right)$ in sehr einfacher Weise rational und ganz durch die Größen:

$$E\left(\frac{a^{b-2}}{b}\right), \qquad E\left(\frac{b^{a-2}}{a}\right)$$

ausdrücken kann.

Schreibt man die Fermatsche Gleichung in der etwas symmetrischeren Gestalt

$$a^{b-1} + b^{a-1} = 1 + Aab,$$

so gilt, wie wir im folgenden beweisen werden, für die entsprechende Größe

$$A = E\left(\frac{a^{b-1} + b^{a-1}}{ab}\right) = E\left(\frac{a^{b-2}}{b} + \frac{b^{a-2}}{a}\right)$$

die Gleichung

$$A = 1 + E\left(\frac{a^{b-2}}{b}\right) + E\left(\frac{b^{a-2}}{a}\right), \tag{I}$$

und aus dieser läßt sich der gewünschte Ausdruck von $E\left(\frac{a^{b-1}}{b}\right)$ unmittelbar entnehmen:

$$E\left(\frac{a^{b-1}}{b}\right) = a\left[1 + E\left(\frac{a^{b-2}}{b}\right) + E\left(\frac{b^{a-2}}{a}\right)\right] - b^{a-2}.$$

2. Versteht man unter $\varphi(x)$, wie gewöhnlich, die Anzahl der Zahlen, welche kleiner als x und zu x relativ prim sind, so kann man der sogenannten verallgemeinerten Fermatschen Gleichung:

$$a^{\varphi(b)} = 1 + \alpha b,$$

wo a und b relative Primzahlen sind, die symmetrischere Gestalt geben:

$$a^{\varphi(b)} + b^{\varphi(a)} = 1 + Aab,$$

und man hat, als Verallgemeinerung der entsprechenden obigen Gleichung:

$$A = 1 + E\left(\frac{a^{\varphi(b)-1}}{b}\right) + E\left(\frac{b^{\varphi(a)-1}}{a}\right). \qquad \text{(I)}'$$

Aus dieser Gleichung folgt dann leicht der Ausdruck von α:

$$\alpha = E\left(\frac{a^{\varphi(b)}}{b}\right) = a\left[1 + E\left(\frac{a^{\varphi(b)-1}}{b}\right) + E\left(\frac{b^{\varphi(a)-1}}{a}\right)\right] - b^{\varphi(a)-1}.$$

II.

1. Im folgenden bezeichnen wir mit dem Symbol

$$[x]_a$$

den positiven Rest von irgend einer ganzen Zahl x in bezug auf den Modul a. Sind also a und b relative Primzahlen, so hat man wegen des Fermatschen Satzes:

$$[a^{\varphi(b)}]_b = [b^{\varphi(a)}]_a.$$

Es besteht nun eine sehr einfache Beziehung auch zwischen den zwei Größen

$$[a^{\varphi(b)-1}]_b, \quad [b^{\varphi(a)-1}]_a,$$

und eben an diese Beziehung läßt sich der Beweis der oben angeführten Formeln (I) und (I)′ anknüpfen.

Da die Summe

$$a^\lambda [a^{\varphi(b)-\lambda}]_b + b^\lambda [b^{\varphi(a)-\lambda}]_a - 1$$

für jeden positiven ganzzahligen Wert von λ, wie man leicht erkennen kann, durch das Produkt ab teilbar ist, schreiben wir

$$a^\lambda [a^{\varphi(b)-\lambda}]_b + b^\lambda [b^{\varphi(a)-\lambda}]_a - 1 = M_\lambda ab,$$

wo M_λ eine von λ abhängende ganze positive Zahl ist. Aus dieser Gleichung kann man, wenn man beachtet, daß

$$[a^{\varphi(b)-\lambda}]_b < b, \quad [b^{\varphi(a)-\lambda}]_a < a,$$

die Folgerung ziehen, daß:

$$a^\lambda b + b^\lambda a - 1 > M_\lambda ab$$

und hieraus

$$M_\lambda < a^{\lambda-1} + b^{\lambda-1}.$$

Aus dieser Ungleichheit geht nun, im Falle $\lambda = 1$, die Gleichung hervor:

$$M_1 = 1.$$

Es besteht also die Relation

$$a\left[a^{\varphi(b)-1}\right]_b + b\left[b^{\varphi(a)-1}\right]_a = 1 + ab. \tag{II}$$

Sind a und b Primzahlen, so hat man insbesondere

$$a\left[a^{b-2}\right]_b + b\left[b^{a-2}\right]_a = 1 + ab.$$

2. Wenn man nun die Gleichungen:

$$a^{\varphi(b)-1} = \left[a^{\varphi(b)-1}\right]_b + b \cdot E\left(\frac{a^{\varphi(b)-1}}{b}\right),$$

$$b^{\varphi(a)-1} = \left[b^{\varphi(a)-1}\right]_a + a \cdot E\left(\frac{b^{\varphi(a)-1}}{a}\right),$$

respektive mit a und b multipliziert und addiert, so erhält man, mit Rücksicht auf Gleichung (II):

$$a^{\varphi(b)} + b^{\varphi(a)} = 1 + ab\left[1 + E\left(\frac{a^{\varphi(b)-1}}{b}\right) + E\left(\frac{b^{\varphi(a)-1}}{a}\right)\right],$$

was eben zu beweisen war.

Über die Bestimmung der linearen Teiler einer algebraischen Form.

Von

F. Hočevar aus Graz.

In den zahlreichen Arbeiten über die linearen Teiler der Formen beschäftigte man sich bisher in der Regel nur mit solchen Formen, deren sämtliche Faktoren linear sind. Den Gegenstand meines Vortrages bilden nun beliebige Formen, somit auch solche, welche irreduktible Faktoren verschiedener Grade enthalten, und ich will auf zwei verschiedenen Wegen, welche allerdings zum Teil zusammenfallen, zeigen, wie man die linearen Faktoren solcher Formen bestimmen kann.

§ 1. Nach beiden Methoden muß zunächst die gegebene Form von ihren vielfachen Faktoren befreit werden. Zu diesem Zwecke sieht man nach, ob die Form eine Variable enthält, deren höchste Potenz von gleichem Grade ist wie die Form. Ist keine solche Variable vorhanden, so kann man durch eine umkehrbare lineare Substitution bewirken, daß einige oder auch sämtliche Variable der erwähnten Forderung genügen. Ich kann also ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die vorgelegte Form

$$F(x_1, x_2, \cdots x_n), \qquad n > 2,$$

wenn sie vom p^{ten} Grade ist, auch das Glied mit x_1^p enthält.

Dividiert man nun die Form F durch den größten gemeinsamen Teiler der Form und ihrer Ableitung nach x_1, so erhält man, wie ich vor kurzem bewiesen habe*), eine Form

$$f(x_1, x_2, \cdots x_n),$$

welche dieselben irreduktiblen Faktoren enthält wie F, jedoch jeden nur in der ersten Potenz. Es genügt also die linearen Faktoren der letzteren

*) Hočevar, Über die Zerlegbarkeit algebraischer Formen in lineare Faktoren, Wiener Sitzungsberichte, Februar 1904, pag. 409—428.

Form zu bestimmen, und man hat dann nur noch ihre Multiplizität in der ursprünglich gegebenen festzustellen.

Die so erhaltene Form f ist zu ihrer Ableitung nach x_1 teilerfremd.

§ 2. Die erste der beiden Methoden zur Bestimmung der linearen Teiler, welche ich hier mitteilen will, beruht auf folgendem Satze:

I. Kennt man ein spezielles Wertsystem

$$x_i = a_i \quad (i = 1, 2, \cdots n),$$

für welches ein linearer Teiler der Form f verschwindet und alle übrigen (linearen und nichtlinearen) Teiler von Null verschieden sind, so ist hierdurch jener lineare Teiler bestimmt und zwar ausgedrückt durch

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0.$$

Der Zeiger Null soll hier und im folgenden andeuten, daß die Variablen x durch die speziellen Werte a ersetzt sind.

Beweis. Es sei

$$u = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

der lineare Teiler der Form f, welcher für $x_i = a_i\ (i = 1, 2, \cdots n)$ verschwindet. Ist nun

$$f = uv,$$

somit

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = u \frac{\partial v}{\partial x_i} + c_i v,$$

so folgt durch die Substitution $x_i = a_i\ (i = 1, 2, \cdots n)$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0 = c_i v_0,$$

und da nach der Voraussetzung $v_0 \neq 0$ ist,

$$u = \frac{1}{v_0} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0.$$

Damit ist der Satz I bewiesen, da bei der Bestimmung eines Teilers ein konstanter Faktor nicht in Betracht kommt. Für $n = 3$ hat dieser Satz folgende geometrische Bedeutung (und eine analoge für $n = 4$):

Hat die Kurve $f = 0$ einen geradlinigen Zweig und kennt man die Koordinaten $x_i = a_i$ irgend eines seiner Punkte, durch welchen kein anderer Zweig der Kurve hindurchgeht, so ist hierdurch die Gleichung jenes geradlinigen Zweiges bestimmt; es ist die Gleichung der Tangente an die Kurve $f = 0$ mit dem Punkte $x_i = a_i$ als Berührungspunkt.

§ 3. Um nun sämtliche linearen Teiler der Form f zu bestimmen, setze man in der Gleichung $f = 0$

$$x_2 = a_2, \quad x_3 = a_3, \cdots \quad x_n = a_n.$$

Die Werte a seien so gewählt, daß die entsprechenden Werte von x_1, d. h. die Wurzeln der Gleichung

$$f(x_1, a_2, a_3, \cdots a_n) = 0,$$

welche mit

$$x_1 = a_1^{(1)}, \quad a_1^{(2)}, \cdots \quad a_1^{(m)}$$

bezeichnet werden sollen, voneinander verschieden sind. Dies ist stets möglich, ja sogar im allgemeinen der Fall, da f zur Ableitung nach x_1 teilerfremd ist und die Diskriminante der obigen Gleichung für ∞^{n-1} Wertsysteme der a von Null verschieden ist und nur für ∞^{n-2} Wertsysteme verschwindet.

Hat nun die Form f einen linearen Teiler, so verschwindet derselbe für eines der Wertsysteme

$$x_1 = a_1^{(\lambda)}, \quad x_2 = a_2, \cdots \quad x_n = a_n$$
$$(\lambda = 1, 2, \cdots m)$$

und alle anderen Teiler der Form sind für dasselbe Wertsystem von Null verschieden. Somit ist nach dem Satze I der lineare Teiler mit einem der Ausdrücke

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_\lambda$$
$$(\lambda = 1, 2, \cdots m)$$

identisch. Das gleiche gilt von jedem anderen linearen Teiler. Man erhält somit sämtliche linearen Teiler der Form f, indem man aus den eben berechneten linearen Ausdrücken jene herausgreift, welche Teiler der Form f sind, was sich durch direkten Versuch feststellen läßt.

Das eben entwickelte Verfahren ist, wie man sieht, sehr einfach und führt stets zum Ziele. Es haftet ihm jedoch die Unbequemlichkeit an, daß der erforderliche Rechnungsaufwand und insbesondere der Grad der aufzulösenden Gleichung vom Grade der Form und nicht von der Anzahl der linearen Teiler abhängt. Wenn also z. B. eine Form m^{ten} Grades keinen linearen Teiler besitzt, so muß man, um dies nach unserem Verfahren zu konstatieren, dennoch eine Gleichung m^{ten} Grades auflösen, die entsprechenden m linearen Ausdrücke berechnen und die Form durch jeden derselben dividieren.

§ 4. Von diesem Mangel ist die zweite Methode frei, welche auf gewissen Eigenschaften der Hesseschen Determinante beruht. Da für das Zerfallen einer quadratischen Form in lineare Faktoren notwendig ist und hinreicht, daß alle dreizeiligen Minoren ihrer Determinante, somit auch ihrer Hesseschen Determinante verschwinden, so ist die Vermutung gerechtfertigt, daß auch bei Formen höherer Grade das Vorhandensein linearer Teiler durch die dreizeiligen Minoren ihrer Hesseschen Determinante angezeigt wird. In der Tat bestehen die Sätze:

II. Jeder lineare Teiler einer Form ist zugleich ein Teiler aller dreizeiligen Minoren ihrer Hesseschen Determinante.

Beweis. Es sei

$$f = uv, \quad u = \Sigma c_i x_i,$$

also

$$f_{ik} = c_i v_k + c_k v_i + u v_{ik}.$$

Dann ist

$$\Sigma \pm f_{\alpha\lambda} f_{\beta\mu} f_{\gamma\nu} = H + Ku + Lu^2 + Mu^3.$$

Darin bedeuten H, K, L, M leicht zu berechnende Formen, von denen die erste identisch verschwindet.*)

III. Jeder nichtlineare Teiler einer Form, welcher zugleich ein Teiler aller dreizeiligen Minoren ihrer Hesseschen Determinante ist, läßt sich in lineare Faktoren zerlegen.

Beweis. Mit Benutzung der im § 3 bestimmten Nullstellen der Form f erhält man aus der Gleichung $f = 0$ für x_1 die Potenzreihen

$$x_1 = a_1^{(\lambda)} + (x_2 - a_2)\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right)_\lambda + \cdots \qquad + (x_n - a_n)\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_n}\right)_\lambda$$
$$+ \frac{1}{2}(x_2 - a_2)^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial x_2^2}\right)_\lambda + \cdots$$
$$(\lambda = 1, 2, \cdots m).$$

Es sei nun v ein Teiler k^{ten} Grades von f, also etwa

$$f = vw.$$

Dann sind k der obigen Potenzreihen, etwa die $\lambda = 1, 2, \cdots k$ entsprechenden, identisch mit jenen, die man für x_1 aus der Gleichung $v = 0$ mit Benutzung der $\lambda = 1, 2, \cdots k$ entsprechenden Nullstellen von f erhält.

Aus der Gleichung $f = 0$ folgt durch Differentiation und mit Anwendung der Eulerschen Relationen die Formel**)

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{1}{(m-1)^2 f_1^3} \cdot \sum_{\alpha,\beta} x_\alpha x_\beta \cdot \begin{vmatrix} f_{11} & f_{1k} & f_{1\beta} \\ f_{i1} & f_{ik} & f_{i\beta} \\ f_{\alpha 1} & f_{\alpha k} & f_{\alpha\beta} \end{vmatrix},$$
$$(\alpha, \beta = 2, 3, \cdots n).$$

*) Vgl. a. a. O., pag. 411.

**) Vgl. a. a. O., pag. 416.

Wenn also v ein Teiler sämtlicher dreizeiligen Minoren von $H(f)$ ist, so hat man

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{Gv}{f_1{}^3} = \frac{Gf}{f_1{}^3 w} = Uf,$$

worin G eine gewisse ganze Funktion bedeutet und U eine gebrochene Funktion, deren Nenner nur die Faktoren f_1 und w enthält. Aus der letzten Gleichung folgt weiter

$$\frac{\partial^3 x_1}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l} = \left(U_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_l} + U_l\right) f + U\left(f_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_l} + f_l\right) = Vf,$$

worin V eine gebrochene Funktion bedeutet, deren Nenner nur die Faktoren f_1 und w enthält u. s. f. Da nun an den den Werten $\lambda = 1, 2, \cdots k$ entsprechenden Nullstellen von f diese Form verschwindet, hingegen f_1 und w von Null verschieden sind, so fallen in den aus $v = 0$ für x_1 erhaltenen Potenzreihen alle Glieder von höherer als der ersten Ordnung weg und v zerfällt also in lauter lineare Faktoren. W. z. b. w.

Aus den Sätzen II und III folgt der Satz:

IV. Der größte gemeinsame Teiler einer Form und aller dreizeiligen Minoren ihrer Hesseschen Determinante ist zugleich das Produkt aller linearen Teiler der Form.

Auf Grund dieses Satzes kann man die linearen Teiler einer Form auch auf folgende Weise bestimmen: Man berechnet mittels des Euklidschen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler T der Form f und aller dreizeiligen Minoren von $H(f)$ und zerlegt ihn dann nach der ersten Methode in seine (linearen) Faktoren.

Ist T vom Grade k, so enthält die Form k lineare Teiler und man hat in diesem Falle nur eine Gleichung k^{ten} Grades aufzulösen.

Ist $T \equiv f$, so zerfällt f in lauter lineare Faktoren.

Für das Zerfallen einer Form f in lauter lineare Faktoren ist also notwendig und hinreichend, daß alle dreizeiligen Minoren von $H(f)$ durch f teilbar sind.*)

Ist T konstant, so besitzt die Form keinen linearen Teiler. Dies kann man also auch schon behaupten, wenn f zu einem dreizeiligen Minor von $H(f)$ teilerfremd ist.

§ 5. Der Satz IV ist für $n = 3$ in unveränderter Form gut brauchbar und lautet in diesem Falle:

Der größte gemeinsame Teiler einer ternären Form und ihrer Hesseschen Determinante ist zugleich das Produkt der linearen Teiler der Form.

Für $n > 3$ erfordert jedoch die Anwendung des Satzes IV wegen

*) Dieser Satz wurde a. a. O., pag. 419, direkt abgeleitet.

der großen Anzahl der dreizeiligen Minoren überaus langwierige Rechnungen. Diese Anzahl beträgt im allgemeinen Falle

$$\frac{1}{2}\binom{n}{3}\cdot\left[\binom{n}{3}+1\right],$$

somit für $n = 4, 5, 6, \cdots$ beziehungsweise $10, 55, 210, \cdots$

Es läßt sich nun zeigen, daß eine weit geringere Anzahl der dreizeiligen Minoren zur Berechnung des T ausreicht, wenn man sich des folgenden Satzes bedient:

V. Ist in einer Matrix, deren Elemente ganze Funktionen der Variablen $x_1, x_2, \cdots x_n$ sind, irgend eine r-zeilige Determinante d teilerfremd zu einer ganzen Funktion v, welche keine vielfachen Faktoren enthält, und ist jede $(r+1)$-zeilige Determinante der Matrix, welche aus d durch Hinzufügung einer Zeile und einer Spalte entsteht, durch v teilbar, so sind auch alle übrigen $(r+1)$-zeiligen Determinanten der Matrix durch v teilbar.

Dieser Satz ist dem bekannten Kroneckerschen Satze*), durch welchen man die Berechnung des Ranges einer Determinante mit konstanten Elementen abkürzen kann, nachgebildet und wird mit Hilfe desselben und von Stetigkeitsbetrachtungen bewiesen.**)

Aus dem Satze V ergibt sich durch Spezialisierung der Satz

VI. Ist in $H(f)$ der Diagonalminor

$$\Sigma \pm f_{11} f_{22}$$

zu f teilerfremd, so ist der gr. g. Teiler von f und der $\binom{n-1}{2}$ Minoren

$$\Sigma \pm f_{11} f_{22} f_{\alpha\beta}$$
$$(\alpha, \beta = 3, 4, \cdots n)$$

auch ein Teiler aller übrigen dreizeiligen Minoren von $H(f)$.

Somit genügt es zur Berechnung des Produkts der linearen Teiler einer Form für $n = 4, 5, 6, \cdots$ beziehungsweise nur $3, 6, 10, \cdots$ dreizeilige Minoren von $H(f)$ zu verwenden, wenn man zuvor einen zu f teilerfremden zweizeiligen Diagonalminor von $H(f)$ gefunden hat.

---

*) Kronecker, Journ. f. Math., 72; auch Baltzer, Determinanten, 4. Aufl., pag. 73.

**) In der Diskussion bemerkte Herr Landsberg, daß dieser Satz schon in der im 99. Bande des Crelleschen Journals publizierten Abhandlung Kroneckers und zwar in allgemeinerer Form enthalten sei.

Über lineare Differenzengleichungen.

Von

A. Guldberg aus Christiania.

Schon längst ist man auf die große Analogie, die zwischen der heorie der linearen Differentialgleichungen und der linearen Differenzen-leichungen besteht, aufmerksam gewesen. Ich darf insofern für die ltere Zeit nur die Arbeiten von Euler, Laplace, Lagrange und auchy, und für die neuere Zeit die Arbeiten von Mansion, Hey-ıann, Pincherle, Selivanoff und Epsteen nennen, die sich mit iesen Gegenständen beschäftigt haben. Es scheint mir aber, daß man och nicht alle Analogien zwischen diesen zwei Theorien ausgenutzt at, ich erlaube mir daher kurz einige vielleicht neue Bemerkungen ber die linearen Differenzengleichungen zu machen.

1. Es sei gegeben die lineare homogene Differenzengleichung $^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$\text{I)} \quad P(y_x) \equiv y_{x+n} + p_x^{(1)} y_{x+n-1} + p_x^{(2)} y_{x+n-2} + \cdots + p_x^{(n)} y_x = 0,$$

o die p_x gegebene Funktionen von x bedeuten.

Man hat dann:

$$P(y_x z_x) \equiv z_x P y_x + \Delta z_x \;\; P' y_x + \Delta^2 z_x P'' y_x + \cdots + \Delta^n z_x \;\; y_{x+n},$$

o Py_x, $P'y_x$, ... nach einem leicht ersichtbaren Algorithmus abge-eitet sind. Diese Formel ermöglicht die Ordnungserniedrigung von (I) m eine Einheit, sobald man eine partikuläre Lösung $y_x^{(1)}$ kennt; denn etzt man $y_x = y_x^{(1)} z_x$, so enthält die Gleichung für z_x die Funktion z_x nicht ıehr explizit. Genügt $y_x^{(1)}$ zugleich den Gleichungen $Py_x = 0$, $P'y_x = 0, \cdots$, $P^{(k-1)} y_x = 0$, mit anderen Worten, sind $y_x^{(1)}, x y_x^{(1)}, \cdots, x^{(k-1)} y_x^{(1)}$ gleich-eitig Lösungen von (I), so erniedrigt sich die Ordnung um k Ein-ıeiten*); dieser Fall entspricht dem einer k-fachen Lösung (nach Königsbergers Terminologie) einer linearen Differentialgleichung. Man ann so die Ordnung sukzessive um k Einheiten erniedrigen, wenn man

---

*) Guldberg: Comptes Rendus, tome 137 p. 560.

k partikuläre Lösungen kennt; aber man muß dazu voraussetzen, daß diese Lösungen linear unabhängig, d. h. durch keine homogene lineare Relation mit konstanten Koeffizienten verknüpft seien. Die Bedingung dafür ist bekanntlich, daß die Determinante

$$\varDelta(y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \cdots, y_x^{(k)}) = \begin{vmatrix} y_x^{(1)} & \cdots & y_x^{(k)} \\ y_{x+1}^{(1)} & \cdots & y_{x+1}^{(k)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{x+k-1}^{(1)} & \cdots & y_{x+k-1}^{(k)} \end{vmatrix}$$

nicht identisch Null ist.

Man beweist ferner, daß die Gleichung (I) unter gewissen Bedingungen, die wir hier stets als erfüllt voraussetzen, Systeme von n linearen unabhängigen Lösungen besitzt; man nennt diese Fundamentallösungen. Jedes Fundamentalsystem läßt sich auf die Form bringen*):

$$y_x^{(1)} = v_x^{(1)}, \quad y_x^{(2)} = v_x^{(1)} \Sigma v_x^{(2)}, \quad y_x^{(3)} = v_x^{(1)} \Sigma v_x^{(2)} \Sigma v_x^{(3)}, \cdots,$$
$$y_x^{(n)} = v_x^{(1)} \Sigma v_x^{(2)} \cdots \Sigma v_x^{(n)},$$

in der keine von den Funktionen $v_x^{(1)}, v_x^{(2)}, \cdots, v_x^{(n)}$ identisch Null ist.

Die allgemeine Lösung von (1) ist:

$$y_x = \sum_1^n c_k y_x^{(k)},$$

wenn $y_x^{(1)}, \cdots, y_x^{(n)}$ ein Fundamentalsystem partikulärer Lösungen bilden und die $c_1, \cdots, c_n$ willkürliche Konstanten sind.

2. Gleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Hat die Gleichung (I) konstante Koeffizienten, d. h. ist $p_x^{(1)} = a_1, \cdots, p_x^{(n)} = a_n$, so läßt sie sich bekanntlich durch elementare Funktionen integrieren.

Denn setzt man

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n,$$

wo die a jetzt Konstante sind, so gibt jede Wurzel $c_1, c_2, \cdots, c_n$ der „charakteristischen" Gleichung $f(x) = 0$ eine Lösung $y_x = c^x$ und jede k-fache Wurzel k Lösungen $c^x, xc^x, \cdots, x^{(k-1)}c^x$. Man erhält n Lösungen und beweist, daß sie linear unabhängig sind (Satz von Moivre, Euler).

3. Erniedrigung der Ordnung der Gleichung.

Man kann die Ordnung der Gleichung $Py_x = 0$ auch jedesmal erniedrigen, wenn man eine andere lineare Gleichung kennt, die mit ihr Lösungen gemein hat. Seien Ay_x und By_x zwei Ausdrücke derselben

*) Guldberg: Comptes Rendus, tome 137 p. 560.

Form wie Py_x, der zweite nicht von höherer Ordnung als der erste. Setzt man zur Vereinfachung voraus, daß die ersten Koeffizienten aller dieser Ausdrücke sich auf 1 reduzieren, so kann man durch rationale Operationen zwei analoge Ausdrücke Qy_x und Ry_x, den zweiten von niedrigerer Ordnung als By_x, so bestimmen, daß identisch

$$Ay_x \equiv Q(By_x) + \varrho(x) \cdot Ry_x$$

wird. Dann ist jede gemeinsame Lösung von $A = 0$ und $B = 0$ auch Lösung von $R = 0$ und umgekehrt. Man erhält so durch ein analoges Verfahren wie bei der linearen Differentialgleichung eine lineare Differenzengleichung $Cy_x = 0$, deren Lösungen die sämtlichen gemeinsamen Lösungen von $A = 0$ und $B = 0$ sind.*) Die Voraussetzung läßt sich aber ersetzen durch die, daß $Py_x = 0$ alle Lösungen einer linearen Gleichung k^{ter} Ordnung $Sy_x = 0$ zuläßt, und daß folglich eine Identität der Form $P(y_x) = T(Sy_x)$ besteht, in der Ty_x einen linearen Differenzenausdruck $(n-k)^{\text{ter}}$ Ordnung bedeutet.

4. Die lineare Gleichung, die ein gegebenes Fundamentalsystem von Lösungen $y_x^{(1)}, \cdots, y_x^{(n)}$ besitzt, ist

$$Py_x \equiv \varDelta(y_x, y_x^{(1)}, \cdots, y_x^{(n)}) = 0$$

mit der früher angegebenen Bedeutung von $\varDelta$.

Man erhält daraus Ausdrücke der Verhältnisse $p_x^{(i)}$ durch die $y_x^{(1)}, \cdots, y_x^{(n)}$ und ihre sukzessiven Werte in der Form von Determinantenquotienten, entsprechend den Ausdrücken der Koeffizienten einer linearen Differentialgleichung. Speziell hat man die Formel:

$$(-1)^n \cdot p_x^{(n)} = \frac{\varDelta_{x+1}}{\varDelta_x} \text{**)},$$

wo

$$\varDelta_x = \begin{vmatrix} y_x^{(1)} & \cdots & y_x^{(n)} \\ y_{x+1}^{(1)} & \cdots & y_{x+1}^{(n)} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ y_{x+n-1}^{(1)} & \cdots & y_{x+n-1}^{(n)} \end{vmatrix}.$$

5. Rationale Differenzenfunktionen der Lösungen eines Fundamentalsystems.

Auch die Theorie der invarianten Funktionen der Lösungen einer linearen Differentialgleichung hat ihr Analogon in der Theorie der

---

*) Pincherle: Memorie delle R. Accad. di Bologna, S. V. t. V p. 87; Mansion: Memoire cour. par l'Ac. R. de Belgique, t. 22; Guldberg: Comptes Rendus, t. 137 p. 560.

**) Heymann: Crelles Journal, B. 109 p. 114; Guldberg: Comptes Rendus, t. 137 p. 560.

linearen Differenzengleichungen. Das allgemeinste Fundamentalsystem $\bar{y}_x^{(1)}, \cdots, \bar{y}_x^{(n)}$ der Gleichung (I) läßt sich aus einem speziellen $y_x^{(1)}, \cdots, y_x^{(n)}$ durch die Gleichungen

$$\bar{y}_x^{(i)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, y_x^{(k)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ableiten, die die allgemeine homogene Gruppe G definieren. Diese Gruppe spielt also hier dieselbe Rolle wie bei den linearen Differentialgleichungen und wie die Gruppe der Vertauschungen von n Buchstaben für die algebraische Gleichung n^{ter} Ordnung. Die $p_x^{(k)}$ sind als Funktionen der y_x und ihrer sukzessiven Werte Differenzeninvarianten der Gruppe G, und jede mit den y_x und ihren sukzessiven Werten gebildete Differenzeninvariante von G ist Funktion der $p_x^{(k)}$ und ihrer sukzessiven Werte allein; ist sie überdies eine rationale Funktion der y_x, ihrer sukzessiven Werte und von x, so ist auch ihr Ausdruck in den $p_x^{(k)}$, ihren sukzessiven Werten und x rational. Jede relative Differenzeninvariante von G ist das Produkt einer rationalen Funktion der $p_x^{(k)}$ und ihrer sukzessiven Werte in $\Pi(-1)^n p_x^{(n)}$.*)

Sei allgemeiner R irgend eine Differenzenfunktion, die rational aus $y_x^{(1)}, \cdots, y_x^{(n)}$, ihren sukzessiven Werten und x gebildet ist. Ihre Eigenschaften sind verknüpft mit denjenigen ihrer Gruppe, d. h. derjenigen Untergruppe g von G, bei der die Form dieser Funktion ungeändert bleibt. Die aus R durch die allgemeine Transformation von G abgeleitete Funktion ist die allgemeine Lösung einer in R und seinen sukzessiven Werten rationalen Differenzengleichung $\Psi(R) = 0$, deren Koeffizienten rationale Funktionen der $p_x^{(k)}$, ihrer sukzessiven Werte und von x sind. Man kann $\Psi(R) = 0$ eine Transformierte oder Resolvente von $Py_x = 0$ nennen; sie ist von der Ordnung $n^2 - r$, wenn r die Zahl der Parameter von g ist.

Sei S eine andere Differenzenfunktion derselben Natur wie R, und h ihre Gruppe. Ist h in g enthalten, so läßt sich R rational in S, den $p_x^{(k)}$, ihren sukzessiven Werten und x ausdrücken. Allgemein genügt R einer rationalen Differenzengleichung, deren Koeffizienten rationale Funktionen von S, den $p_x^{(k)}$, ihren sukzessiven Werten und von x sind, und deren Ordnung gleich ist der Differenz zwischen der Parameterzahl von h und der größten gemeinsamen Untergruppe von g und h.

Wenn S keine Transformation von G außer der identischen zuläßt, läßt sich jede Funktion R, also auch jedes der Integrale $y_x^{(1)}, \cdots, y_x^{(n)}$

*) Guldberg: Comptes Rendus, t. 137 p. 614.

rational durch S, die $p_x^{(k)}$, ihre sukzessiven Werte und x ausdrücken. Speziell gilt das für die Funktion $S = u_x^{(1)} y_x^{(1)} + u_x^{(2)} y_x^{(2)} + \cdots + u_x^{(n)} y_x^{(n)}$, in der die $u_x^{(i)}$ unbestimmte Funktionen von x bedeuten; sie genügt einer linearen homogenen Differenzengleichung $n^{2\text{ter}}$ Ordnung.

Nimmt man

$$z_x = R y_x \equiv u_x^{(1)} y_{x+n-1} + u_x^{(2)} y_{x+n-2} + \cdots + u_x^{(n)} y_x,$$

unter $u_x^{(1)}, \cdots, u_x^{(n)}$ rationale Funktionen von x, den $p_x^{(k)}$ und ihren sukzessiven Werten verstanden, so erhält man eine lineare Resolvente $Q z_x$, die im allgemeinen wie $P y_x$ von n^{ter} Ordnung ist. Die Lösungen von $P y_x = 0$ und $Q z_x = 0$ entsprechen einander durch die Relation $z_x = R y_x$ und auch durch eine umgekehrte von derselben Form $y_x = S z_x$. Die Gleichungen $P y_x = 0$, $Q z_x = 0$ sind von derselben Art.

6. Assoziierte Differenzengleichungen.

Nach dem eben Erwähnten sind die einfachsten Resolventen diejenigen, denen die Minoren der Determinante $\Delta(y_x^{(1)}, \cdots, y_x^{(n)})$ genügen. Diese Determinante selbst genügt der Gleichung 1^{ter} Ordnung:

$$\Delta_{x+1} + (-1)^n p_x^{(n)} \Delta_x = 0.$$

Alle aus denselben m Zeilen von Δ entnommenen Minoren genügen einer und derselben Gleichung und bilden von ihr ein Fundamentalsystem von Lösungen; ersetzt man die m Zeilen durch m andere, so erhält man eine Gleichung derselben Art. Man kann sich also für jedes m auf die Untersuchung derjenigen Gleichung beschränken, welcher $\Delta(y_x^{(1)}, \cdots, y_x^{(m)})$ genügt; sie heiße die $(n-m)^{\text{te}}$ Assoziierte von $P y_x = 0$. Die Lösungen eines Fundamentalsystems von ihr sind (außer für $m = 1$ und $m = n - 1$) durch homogene ganze Relationen mit konstanten Koeffizienten verbunden; diese Gleichungen dienen u. a. zur Untersuchung der Reduzibilität von linearen Gleichungen.

7. Rationelle Integrationstheorie.

Die lineare Differenzengleichung n^{ter} Ordnung gestattet, wie die lineare Differentialgleichung, eine rationelle Integrationstheorie.

Die gegebene Gleichung entspricht nämlich mit Beziehung auf einen gegebenen Rationalitätsbereich einer Untergruppe G der allgemeinen homogenen linearen Gruppe in n Veränderlichen mit folgender Doppeleigenschaft: 1. Jede rationale Differenzenfunktion V, deren numerischer Wert rational ist, gestattet numerisch alle Transformationen von G. 2. Jede Funktion V, die numerisch alle Transformationen von G gestattet, hat einen rationalen numerischen Wert.*)

Durch eine solche Gruppe ist jede spezielle Gleichung charakterisiert.

*) Guldberg: Comptes Rendus, t. 137 p. 639.

Die hieraus entspringende Integrationstheorie besteht in der sukzessiven Reduktion der Gruppe durch Adjunktion neuer, durch Hilfsgleichungen definierten Funktionen von x. Sei G_1 eine invariante Maximaluntergruppe von G und Ω_1 eine charakteristische Invariante von G_1; Ω_1 genügt als Funktion von Ω, wo Ω eine Invariante von G ist, einer rationalen Differenzengleichung. Ist diese integriert, so genügt die Adjunktion eines ihrer Integrale zur Reduktion der Transformationsgruppe auf G_1. Ist die Gruppe auf G_1 reduziert, so fährt man ebenso fort.

Die Tragweite dieser Methode ergibt sich aus dem Satze: Wenn die Integration einer rationalen Hilfsgleichung die Gruppe G reduziert, so reduziert sie sie auf eine invariante Untergruppe.

Man schließt hieraus insbesondere:

$Py_x = 0$ ist dann und nur dann durch Quadraturen integrierbar, wenn ihre Transformationsgruppe eine integrable Gruppe ist.

Daraus folgt, daß die allgemeine lineare Gleichung n^{ter} Ordnung für $n > 1$ nicht durch endliche Quadraturen integrierbar ist.

8. Die lineare homogene Differenzengleichung 2^{ter} Ordnung.

Als ein Beispiel der in 7. kurz besprochenen Integrationstheorie werden wir die lineare Differenzengleichung 2^{ter} Ordnung betrachten. Die folgende Tabelle stellt die lineare homogene Gruppe in zwei Veränderlichen und ihre sämtlichen algebraischen Untergruppen dar:

(1) $\bar{y}_x^{(1)} = t_1 y_x^{(1)} + t_2 y_x^{(2)}, \quad \bar{y}_x^{(2)} = t_3 y_x^{(1)} + t_4 y_x^{(2)};$

(2) $\bar{y}_x^{(1)} = t_1 y_x^{(1)} + t_2 y_x^{(2)}, \quad \bar{y}_x^{(2)} = t_3 y_x^{(1)} + t_4 y_x^{(2)},$

wo $t_1 t_4 - t_2 t_3 = 1$ ist;

(3) $\bar{y}_x^{(1)} = t_1 y_x^{(1)}, \quad \bar{y}_x^{(2)} = t_2 y_x^{(2)} + t_3 y_x^{(1)};$

(4) $\bar{y}_x^{(1)} = t_1 y_x^{(1)}, \quad \bar{y}_x^{(2)} = t_1 y_x^{(2)} + t_2 y_x^{(1)};$

(5) $\bar{y}_x^{(1)} = t_1 y_x^{(1)}, \quad \bar{y}_x^{(2)} = t_2 y_x^{(2)};$

(6) $\bar{y}_x^{(1)} = t_1^{\,e} y_x^{(1)}, \quad \bar{y}_x^{(2)} = t_1^{\,e+1}(y_x^{(2)} + t_2 y_x^{(1)});$

(7) $\bar{y}_x^{(1)} = t y_x^{(1)}, \quad \bar{y}_x^{(2)} = t y_x^{(2)};$

(8) $\bar{y}_x^{(1)} = y_x^{(1)}, \quad \bar{y}_x^{(2)} = y_x^{(2)} + t y_x^{(1)};$

(9) $\bar{y}_x^{(1)} = t^e y_x^{(1)}, \quad \bar{y}_x^{(2)} = t^{e+1} y_x^{(2)}.$

Die Gruppen (2) und (7) sind die einzigen invarianten Untergruppen der allgemeinen linearen homogenen Gruppe (1). Die Gruppen (3) bis (9) sind alle integrabel.

Betrachten wir die allgemeine lineare Differenzengleichung 2^{ter} Ordnung:

(I) $$y_{x+2} + p_x y_{x+1} + q_x y_x = 0,$$

so entspricht ihr die allgemeine lineare Gruppe (1). Die Gruppe (2) hat nun die Invariante

$$y_x^{(1)} y_{x+1}^{(2)} - y_x^{(2)} y_{x+1}^{(1)} = \Delta_x,$$

die durch die Gleichung

$$\text{(a)} \qquad \Delta_{x+1} + q_x \Delta_x = 0$$

bestimmt ist. Die Gruppe (3) hat die Invariante

$$\frac{y_{x+1}^{(1)}}{y_x^{(1)}} = u_x,$$

wo u_x durch die Gleichung

$$\text{(b)} \qquad u_x u_{x+1} + p_x u_x + q_x = 0$$

bestimmt ist.

Wird nun die Gleichung (a) gelöst, so reduziert sich die Gruppe der Gleichung (I) auf die spezielle lineare Gruppe. Wird nun gleichzeitig die Gleichung (b) gelöst, so reduziert sich diese neue Gruppe auf die identische Gruppe, die Gruppe (2) ist ja einfach. Die Gleichung (I) muß daher jetzt gelöst sein. Das ist auch der Fall. Denn es seien u_x, $u_x^{(1)}$, $u_x^{(2)}$ 3 Lösungen der Gleichung (b); es gibt dann 3 Lösungen der Gleichung (I), so daß wir haben:

$$\frac{y_{x+1}^{(1)}}{y_x^{(1)}} = u_x^{(1)}, \qquad \frac{y_{x+1}^{(2)}}{y_x^{(2)}} = u_x^{(2)}, \qquad \frac{y_{x+1}^{(1)} + y_{x+1}^{(2)}}{y_x^{(1)} + y_x^{(2)}} = u_x,$$

wo

$$y_x^{(1)} y_{x+1}^{(2)} - y_x^{(2)} y_{x+1}^{(1)} = \Delta_x$$

ist; denn die 2 ersten Formeln definieren $y_x^{(1)}$ und $y_x^{(2)}$ bis auf einen Faktor. Wir erhalten dann:

$$(u_x - u_x^{(1)}) y_x^{(1)} + (u_x - u_x^{(2)}) y_x^{(2)} = 0,$$
$$y_x^{(1)} y_x^{(2)} (u_x^{(2)} - u_x^{(1)}) = \Delta_x,$$

und daher

$$y_x^{(1)} = \sqrt{\frac{(u_x - u_x^{(2)}) \Delta_x}{(u_x - u_x^{(1)})(u_x^{(1)} - u_x^{(2)})}}, \qquad y_x^{(2)} = -\sqrt{\frac{(u_x - u_x^{(1)}) \Delta_x}{(u_x - u_x^{(2)})(u_x^{(1)} - u_x^{(2)})}}.$$

Das Wurzelzeichen kommt daher, daß die Gruppen von Δ_x, u_x, $u_x^{(1)}$ und $u_x^{(2)}$ die gemeinsame Transformation

$$\bar{y}_x^{(1)} = -y_x^{(1)}, \quad \bar{y}_x^{(2)} = -y_x^{(2)}$$

besitzen.

Um nun zum Schluß die durch endliche Quadraturen integrierbaren Gleichungen zu erhalten, bemerken wir, daß der Ausdruck $\frac{y_{x+1}^{(1)}}{y_x^{(1)}}$ zu der Gruppe (3) gehört, welche Gruppe aber sämtliche folgenden Gruppen enthält, d. h. alle integrablen Gruppen. Wir haben somit den Satz: Soll eine lineare Differenzengleichung 2ter Ordnung durch endliche Quadraturen integrierbar sein, so muß für irgend eines ihrer Integrale $y_x^{(1)}$ der Ausdruck $\frac{y_{x+1}^{(1)}}{y_x^{(1)}}$ rational sein.

Zur Geometrie der Zahlen.

(Mit Projektionsbildern auf einer Doppeltafel.)

Von

H. Minkowski aus Göttingen.

Im folgenden möchte ich versuchen, in kurzen Zügen einen Bericht über ein eigenartiges, zahlreicher Anwendungen fähiges Kapitel der Zahlentheorie zu geben, ein Kapitel, von dem Charles Hermite einmal als der „introduction des variables continues dans la théorie des nombres" gesprochen hat. Einige hervorstechende Probleme darin betreffen die Abschätzung der kleinsten Beträge kontinuierlich veränderlicher Ausdrücke für ganzzahlige Werte der Variabeln.

Die in dieses Gebiet fallenden Tatsachen sind zumeist einer geometrischen Darstellung fähig, und dieser Umstand ist für die in letzter Zeit hier erzielten Fortschritte derart maßgebend gewesen, daß ich geradezu das ganze Gebiet als die Geometrie der Zahlen bezeichnet habe.

(Fig. 1.) Die erste Figur illustriert für die Ebene dasjenige Theorem, welches mit Recht als das Fundamentaltheorem der Geometrie der Zahlen bezeichnet werden kann, weil es fast in jede Untersuchung auf diesem Gebiete hineinspielt.

In der Ebene denken wir uns irgendwelche Parallelkoordinaten x, y eingeführt, wobei noch für jede Achse der Einheitsmaßstab beliebig gewählt sein kann. Die Punkte mit ganzzahligen Koordinaten x, y bilden das Zahlengitter in x, y. Dieses Gitter kann auf mannigfaltige Weise durch ein Gerüst von kongruenten homothetischen Parallelogrammen gestützt werden, welche die Ebene lückenlos überdecken und als deren Ecken die Punkte des Gitters erscheinen. Bei einer vollständigen und einfachen Überdeckung der Ebene kommt danach sozusagen auf jeden Gitterpunkt ein homologes Gebiet von einem Flächeninhalt $\iint dx\, dy = 1$.

Nun denken wir uns irgend eine geschlossene konvexe Kurve, welche im Nullpunkt einen Mittelpunkt haben soll; sie darf auch geradlinige Stücke aufweisen. Das von ihr umschlossene Gebiet dilatieren wir vom Nullpunkte aus (bezw. wir ziehen es zusammen) nach allen Richtungen in gleichem Verhältnisse zu einer solchen homothetischen, d. h. ähnlichen und ähnlich gelegenen, der grün umrandeten Figur, welche im Inneren den Nullpunkt als einzigen Gitterpunkt enthalten, ihren Rand aber durch wenigstens einen weiteren Gitterpunkt schicken soll. Ziehen wir weiter diese grüne Figur vom Nullpunkte aus im Verhältnisse $1:2$ zusammen und konstruieren um jeden anderen Gitterpunkt das homologe Gebiet, so erhalten wir offenbar lauter solche Gebiete, die nicht ineinander eindringen. Da nun bei lückenloser Überdeckung der Ebene im Durchschnitt auf einen Gitterpunkt ein Flächeninhalt $= 1$ kommt, so muß der Flächeninhalt eines solchen rot umgrenzten Gebiets < 1 bezw. $= 1$ sein, falls diese roten Gebiete ebenfalls die Ebene lückenlos ausfüllen. Das von der grünen Kurve umschlossene Gebiet hat daher einen Inhalt $\leqq 4$. Treiben wir es endlich zu einem homothetischen Gebiete genau vom Inhalte 4 auf, so kommen wir zu dem Fundamentaltheoreme:

Ein konvexes Gebiet mit einem Mittelpunkt im Nullpunkt vom Flächeninhalt 4 enthält stets wenigstens einen weiteren Gitterpunkt.

Die Formeln in der Figur geben den analytischen Ausdruck dieses Theorems. Genügt eine Funktion $f(x, y)$ den Bedingungen (1)—(4) und ist J der Flächeninhalt des Gebiets $f \leqq 1$, so kann man stets solche ganze Zahlen x, y, die nicht beide Null sind, finden, wofür die Funktion $f \leqq 2J^{-\frac{1}{2}}$ ausfällt. (1) besagt, daß f wesentlich positiv, (2), daß es homogen von der ersten Dimension ist, (3), daß das Gebiet $f \leqq 1$ einen Mittelpunkt hat, und wird die Länge der Verbindungsstrecke zweier Punkte mit den relativen Koordinaten x, y durch $f(x, y)$ definiert, so besagt (4), daß in einem Dreiecke die Summe zweier Seitenlängen niemals kleiner als die Länge der dritten Seite sein soll.

(Fig. 2.) Eine ausgezeichnete Anwendung dieses Satzes erläutert die nächste Figur. Bekanntlich tragen die gewöhnlichen Kettenbruchentwickelungen für Funktionen einer Variabeln einen einfacheren Charakter als die analogen Entwickelungen für reelle Größen. Eine Funktion $f(z)$, die für $z = \infty$ einen Pol hat, läßt sich in einen Kettenbruch (1) entwickeln, worin $F_0(z)$ und die Nenner $F_1(z)$, $F_2(z)$, $\cdots$ ganze rationale Funktionen sind. Die Näherungsbrüche dieses Kettenbruchs lassen sich von vornherein charakterisieren, ohne daß es nötig wäre, sie erst sukzessive durch die Entwickelung ausfindig zu machen. Als Näherungsbruch tritt hier jeder solche Quotient $P(z)/Q(z)$ zweier teilerfremden ganzen Funktionen auf, für welchen der Ausdruck (2), nach fallenden Potenzen von z entwickelt, mit einer Potenz von negativem Exponenten beginnt. Während eine sehr weitgehende Analogie zwischen den Eigenschaften der ganzen Funktionen und der ganzen Zahlen besteht, schien zu dem genannten Satze ein entsprechender in der Arithmetik zu fehlen. Dieses Analogon finden wir darin, daß für eine beliebige reelle Größe a die sämtlichen gekürzten Brüche x/y, welche die Ungleichung (3) erfüllen, für welche also $(x-ay)y$ in den Grenzen $-\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$ liegt, sich als die Näherungsbrüche einer bestimmten Kettenbruchentwickelung (4) mit ganzzahligem g_0 und lauter positiven ganzzahligen $g_1, g_2, \cdots$ anordnen.*)

Sind, um etwas allgemeinere Umstände zu betrachten, ξ, η zwei binäre lineare Formen in x, y mit beliebigen reellen Koeffizienten und einer Determinante $= 1$ (im speziellen würden wir $\xi = x - ay$, $\eta = y$ annehmen), so besteht ein sehr anschaulicher Zusammenhang zwischen den sämtlichen möglichen Auflösungen der Ungleichung $|\xi\eta| < \frac{1}{2}$ in ganzen Zahlen x, y ohne gemeinsamen Teiler.**) Wir zeichnen die Geraden $\xi = 0$, $\eta = 0$, etwa rechtwinklig zueinander, und die beiden Hyperbeln $\xi\eta = \frac{1}{2}$ und $\xi\eta = -\frac{1}{2}$. Wir legen eine beliebige Tangente an den Hyperbelast im ersten ξ, η-Quadranten und konstruieren dazu die Spiegelbilder in den drei anderen Quadranten, so daß wir ein Tangentenparallelogramm mit den Diagonalen $\xi = 0$, $\eta = 0$ erhalten. Ein solches Parallelogramm enthält nun stets wenigstens eine primitive (d. h. aus ganzen relativ primen Zahlen $x, y \neq 0, 0$ bestehende) Lösung der Ungleichung $|\xi\eta| < \frac{1}{2}$, und es enthält höchstens zwei verschiedene solcher Lösungen, wobei dann die Determinante aus den Koordinaten x, y dieser Lösungen stets ± 1 ist. Zwei entgegengesetzte Systeme x, y und $-x, -y$ betrachten wir hier nicht als verschieden. Umgekehrt gibt es zu jeder primitiven Lösung x, y eine solche Form jenes Tangentenparallelogramms, wobei es nur diese Lösung (und $-x$, $-y$) enthält, und andererseits, wofern dafür nicht $\xi = 0$ ist, auch eine solche Form, wobei es diese und außerdem noch eine zweite primitive Lösung mit kleinerem $|\xi|$ enthält Deformieren wir nun das Tangentenparallelogramm kontinuierlich, indem wir die Tangenten an den bezüglichen Hyperbelästen entlang gleiten lassen, so erhalten wir abwechselnd die rot und grün gezeichneten Formen mit einer und mit zwei primitiven Lösungen, und es

*) Wie die Aussage hier gefaßt ist, darf a nicht gerade die Hälfte einer ungeraden ganzen Zahl sein.

**) Wir nehmen hier an, daß $\xi\eta$ nicht gerade mit der Form $\frac{1}{2}(X^2 - Y^2)$ arithmetisch äquivalent ist.

tritt die Gesamtheit der primitiven Auflösungen der diophantischen Ungleichung $|\xi\eta| < \frac{1}{2}$, geordnet nach abnehmendem $|\xi|$ (und wachsendem $|\eta|$), — die zu den Formen ξ, η gehörige Diagonalkette — hervor.

(Fig. 3.) Mit den nicht homogenen diophantischen Ungleichungen hat sich wohl zuerst Tschebyscheff beschäftigt und darüber ein Theorem folgender Art entwickelt: Sind a, b zwei beliebige reelle Größen, so kann man stets ganze Zahlen x, y finden, wofür die Ungleichung (1) gilt. Statt des Faktors $\frac{1}{4}$ rechts hat Tschebyscheff hier eine etwas ungünstigere Konstante. Die am weitesten führenden Schlüsse in dieser Richtung knüpfen an die nun folgenden Zeichnungen an:

ξ, η mögen wieder zwei lineare Formen in x, y mit beliebigen reellen Koeffizienten und einer Determinante $= 1$ bedeuten. Mit Hilfe zweier aufeinander folgenden Glieder der vorhin besprochenen Diagonalkette zu ξ, η können wir ein System homologer Parallelogramme um die einzelnen Gitterpunkte als Mittelpunkte, die roten Parallelogramme, konstruieren, deren Diagonalen parallel den Linien $\xi = 0$, $\eta = 0$ sind und wobei nicht zwei ineinander eindringen, wobei aber jedes an vier (bei lückenloser Überdeckung der Ebene an sechs oder acht) andere Parallelogramme angrenzt. Dabei können sich noch zwei verschiedene Möglichkeiten darbieten, die in der oberen und der unteren Zeichnung zur Darstellung gebracht sind, indem ein Parallelogramm entweder mit jeder Seite an ein benachbartes oder nur mit zwei Seiten jedesmal an je zwei benachbarte anstößt. Die roten Parallelogramme lassen nun (im allgemeinen) noch Lücken zwischen sich. Wir dilatieren sie von ihren Mittelpunkten zu homothetischen Parallelogrammen in demjenigen bestimmten Verhältnis, wobei sie jedesmal über die Hälfte anstoßender Lücken hinauswachsen, und wir erhalten dadurch die grün gezeichneten Parallelogramme, welche nun die ganze Ebene vollständig, aber zum Teil mehrfach überdecken. Dabei zeigt es sich, daß diese neuen Bereiche keine Partie der Ebene mehr als zweifach überdecken, und ist infolgedessen der Flächeninhalt $\iint dx\,dy$ eines grünen Parallelogramms $\leqq 2$. Diese Tatsache führt zu folgendem Satze:

Sind ξ_0, η_0 irgend zwei reelle Werte, so kann man stets solche ganze Zahlen x, y finden, daß die Ungleichung (3) gilt. Der vorhin formulierte Satz über den Ausdruck $x - ay - b$ ist nur ein Spezialfall dieser allgemeineren Aussage. —

Das arithmetische Fundamentaltheorem über konvexe Gebilde läßt sich mit Leichtigkeit auf den Raum, sowie auf Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension übertragen. Eine seiner wertvollsten Anwendungen findet das Theorem zu einfachen Beweisen der Dirichletschen Sätze über die Einheiten in den algebraischen Zahlkörpern.

Im Raume werden wir so für das parallelepipedische Punktgitter der ganzzahligen Systeme von 3 Variabeln x, y, z den Satz haben: Ein konvexer Körper mit einem Mittelpunkt im Nullpunkt und von einem Volumen $\iiint dx\,dy\,dz \leqq 8$ enthält stets wenigstens einen weiteren Gitterpunkt.

Auf diesen Satz gründen wir wirklich brauchbare Methoden zur Ermittelung der sämtlichen Einheiten in einem gegebenen kubischen Zahlkörper.

(Fig. 4.) Handelt es sich zunächst um einen kubischen reellen Körper mit negativer Diskriminante, wobei die zwei konjugierten Körper einander konjugiert komplex sind, so existiert in dem Körper eine völlig bestimmte positive Fundamentaleinheit von möglichst kleinem Betrage > 1. Das Verfahren zur Gewinnung dieser Einheit läßt sich an der oberen Zeichnung in Figur 4 klarmachen. Es sei ξ eine Basisform des gegebenen Körpers, η, ζ seien die konjugierten Formen in den konjugierten Körpern. Sind λ, μ positive Parameter, so geben uns die Gleichungen $\xi = \pm\lambda$ zwei Ebenen, $|\eta| = \mu$ eine elliptische Zylinderfläche. Wir können die zwei Parameter λ, μ derart bestimmen, daß der begrenzte zylindrische Raum (1) (der rote Zylinder in der Figur) sowohl auf einer Basisfläche einen Gitterpunkt A wie auf der Mantelfläche einen Gitterpunkt B (und natürlich gleichzeitig auch die in bezug auf den Nullpunkt diametral gegenüberliegenden Gitterpunkte A', B') aufweist. Nun bedürfen wir eines neuen Gitterpunktes C, um hernach aus den Koordinaten von A, B, C eine hier nützliche lineare Substitution zu entnehmen. Wir variieren den elliptischen Zylinder (1) als solchen, indem wir in den zwei Basisflächen diejenigen parallelen Durchmesser festhalten, deren Ebene durch B, B' geht, dagegen die zu ihnen konjugierten Durchmesser dilatieren und entsprechend den ganzen zylindrischen Raum ausdehnen, bis wir einen neuen Gitterpunkt C auf seiner Mantelfläche auftreten sehen. In diesem Zustande (mit den schwarz gezeichneten Rändern) bezeichnen wir den Zylinder als einen extremen. Wir finden, daß die Determinante aus den Koordinaten von A, B, C gleich ± 1 ist, wenn sie nicht unter besonderen Umständen Null ist. Von jedem extremen Zylinder können wir nun zu einem benachbarten schmäleren extremen Zylinder fortschreiten. Wir ziehen die ursprünglichen Basisflächen homothetisch von der Achse aus zusammen, bis ihre Ränder durch A, A' gehen, wodurch diese Punkte auf die Mantelfläche treten, und können dann, ohne daß Gitterpunkte ins Innere des Zylinders eintreten, den Zylinder ausziehen, die Basisflächen parallel mit ihrer Anfangslage vom Nullpunkte entfernen, bis sie von neuem auf Gitterpunkte D, D' stoßen, und von diesem weiteren Zustande aus können wir dann wie vorhin einen extremen Zylinder herstellen. Danach existiert eine bestimmte Kette von extremen Zylindern, und die Betrachtung der auf ihren Basisflächen auftretenden Gitterpunkte führt mit Sicherheit eben zur Auffindung der Fundamentaleinheit in dem gegebenen kubischen Zahlkörper. —

Das allgemeine Theorem über konvexe Körper, auf Parallelepipede angewandt, führt zur Folgerung: Sind ξ, η, ζ irgend drei lineare Formen in x, y, z mit beliebigen reellen Koeffizienten und einer Determinante $\pm \varDelta$, wobei $\varDelta > 0$ ist, so kann man für die Variabeln x, y, z stets solche ganze Zahlen, die nicht sämtlich Null sind, finden, daß dadurch die Beträge aller drei Formen $\leqq \sqrt[3]{\varDelta}$ ausfallen.

Liegt nun ein kubischer Körper mit positiver Diskriminante vor, dessen konjugierte Körper also sämtlich reell sind, und handelt es sich um die Ermittelung aller Einheiten im Körper, so seien ξ, η, ζ konjugierte Basisformen in dem Körper und seinen zwei konjugierten Körpern. Wir fassen alsdann die Gesamtheit aller solchen „extremen“ Parallelepipede mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und mit Seitenflächen parallel den Ebenen $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ ins Auge, welche im Inneren vom ganzen Gitter nur den Nullpunkt enthalten, aber auf allen Seitenflächen mit besonderen Gitterpunkten versehen sind. Es existieren hier unendlich viele Parallelepipede von diesem Charakter, sie besitzen eine bestimmte Verkettung untereinander, und die Kenntnis dieser führt uns mit Sicherheit zur Aufstellung aller Einheiten im gegebenen Zahlkörper. Den Übergang von einem extremen Parallelepiped zu seinen benachbarten in der Kette vermittelt ein einfacher Algorithmus, der sich vor allem nach der Art richtet, wie die Gitterpunkte auf den Seitenflächen des Parallelepipeds in Hinsicht auf deren Mittellinien liegen. In dieser Beziehung bieten sich wesentlich drei Möglichkeiten dar, die in den Figuren (I), (II), (III) zum Ausdruck gebracht sind. In den Fällen (I) und (II) erweist sich die Determinante aus den Koordinaten von A, B, C gleich 1, im Falle (III) ist sie Null und fällt dabei der Schwerpunkt des Dreiecks ABC in den Nullpunkt.

(Fig. 5.) Ich hebe noch das folgende anziehende Problem hervor, welches auch in der Theorie von der Struktur der Kristalle eine Stelle findet:

Wir denken uns einen beliebigen Grundkörper im Raume vorgelegt. Lauter mit ihm kongruente und parallel orientierte

Körper in unendlicher Anzahl seien so angeordnet, daß ihre Schwerpunkte ein parallelepipedisches Punktsystem bilden und daß nicht zwei der Körper ineinander eindringen. Unter welchen Umständen schließen sich die Körper so dicht als überhaupt möglich zusammen, sind also die zwischen ihnen vorhandenen Lücken auf ein Minimum an Volumen reduziert?

Für den Fall, daß der Grundkörper ein Oktaeder ist, gibt Fig. 5 die Lösung des Problems an. In der fraglichen dichtesten gitterförmigen Lagerung muß jedes einzelne der Oktaeder in bestimmter Weise an vierzehn benachbarte anstoßen. Hier ist, in eine Ebene umgeklappt, das halbe Netz eines der Oktaeder dargestellt und sind in den vier Seitenflächen (durch zur Hälfte rote Berandung) die 7 Partien mit Mittelpunkt angezeigt, in welchen das Oktaeder sich an benachbarte anlegt. Das Minimum des Raumes, welches die Lücken zwischen den Oktaedern noch darbieten, verhält sich zu dem von den Oktaedern eingenommenen Raume in diesem Falle der dichtesten Lagerung wie $1:19$. Dieses Resultat gestattet folgende rein arithmetische Einkleidung:

Sind $\varphi, \chi, \psi, \omega$ irgend vier lineare Formen in x, y, z mit beliebigen reellen Koeffizienten, deren Summe identisch Null ist und wobei je drei eine Determinante $\pm 4\Delta (\Delta > 0)$ haben, so kann man stets solche ganze Zahlen x, y, z, die nicht sämtlich Null sind, finden, daß die Ungleichungen (2) gelten.

Von diesem Ergebnisse machen wir noch eine bemerkenswerte Anwendung. Es seien a, b zwei beliebige reelle Größen, t ein positiver Parameter, so bestimmen die 8 Ebenen (3) ein Oktaeder. Indem noch t beliebig groß angenommen werden kann, entspringt hieraus diese Folgerung:

Man kann zwei beliebige reelle Größen a, b stets durch Brüche x/z und y/z mit gleichem Nenner beliebig genau und zugleich derart annähern, daß die Ungleichungen (4) statthaben.

(Fig. 6.) Wir werfen nun die Frage auf: Wie übertragen sich die Sätze über die Approximation einer reellen Größe durch Zahlen des natürlichen Rationalitätsbereiches auf das Gebiet der komplexen Größen? Man wird hier zunächst auf Approximationen im Zahlkörper der dritten oder der vierten Einheitswurzel ausgehen. Im Körper der dritten Einheitswurzel liegen die Dinge wesentlich einfacher und werden die Sätze sehr ähnlich denen für reelle Größen. Ich will hier nur die verwickelteren Beziehungen im Körper der vierten Einheitswurzel berühren.

Es seien ξ, η zwei lineare Formen mit beliebigen komplexen Koeffizienten und zwei komplexen Variabeln $x + ix'$, $y + iy'$ von einer Determinante $\Delta \neq 0$, so richten wir unser Augenmerk auf diejenigen „extremen" Zahlenpaare $x + ix'$, $y + iy' \neq 0, 0$ im Zahlkörper von i, zu welchen nicht ein Zahlenpaar derselben Art angebbar ist, das sowohl $|\xi|$ wie $|\eta|$ kleiner werden läßt. Wir können die zwei Zahlen eines Paares mit einer und derselben Einheit -1, $\pm i$ multiplizieren, das entstehende assoziierte Paar gilt uns hier als nicht verschieden von dem ursprünglichen. Alle vorhandenen extremen Paare lassen sich nun in eine Kette nach der Größe von $|\xi|$ (und zugleich von $|\eta|$) ordnen. Zwei benachbarte Paare der Kette zusammen sind leicht a priori zu charakterisieren. Nämlich die zugehörige Determinante (2) ist entweder (A) eine Einheit ± 1, $\pm i$ oder (B) gleich $(1 + i)$, multipliziert in eine Einheit. Wir benutzen diese zwei Paare als Vertikalreihen der Matrix einer auf ξ, η anzuwendenden Substitution und erhalten dadurch für ξ, η die Ausdrücke (3), worin $|\varrho|$, $|\sigma|$ beide $\leqq 1$ sind. Indem wir das zweite Paar durch ein assoziiertes ersetzen und eventuell noch i in $-i$ umwandeln, können wir ϱ auf den in den Zeichnungen rot markierten Oktanten des Einheitskreises (bez. $1/\varrho$ auf den konjugierten Oktanten außerhalb dieses Kreises) bringen. Es sind nun die Fälle (A) und (B) zu unterscheiden, auf welche sich die größere bez. die kleinere Zeichnung bezieht. Im Falle (A) wird jener Oktant durch gewisse Kreise vom Radius 1 bez. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ in fünf Stücke zerlegt, die in der Figur fortlaufend mit I—V nummeriert sind. Wenn ϱ in ein bestimmtes derselben fällt, kann jedesmal σ nur in diejenigen grünbegrenzten Stücke des Einheitskreises fallen, in welche die nämliche Nummer eingetragen ist. Der kleinste Wert für den Betrag der Determinante $|1 - \varrho\sigma|$ entsteht, wenn ϱ, σ den scharfen mit kleinen Kreuzen bezeichneten Ecken der Figur entsprechen. Im Falle (B) kann ϱ nur in das rote Gebiet (I) und σ dann nur in das grüne Gebiet (I) fallen. Als wichtigstes Ergebnis entnehmen wir hieraus:

Man kann in die Formen ξ, η für $x + ix'$, $y + iy'$ stets solche ganze Zahlen des Körpers von i, die nicht beide Null sind, setzen, daß dabei die Ungleichungen (4) gelten. —

Endlich möchte ich noch einige Worte über Kriterien für algebraische Zahlen hinzufügen.

(Fig. 7.) Durch diese Figur suche ich dem bekannten Lagrangeschen Kriterium für eine reelle quadratische Irrationalzahl eine neue Seite abzugewinnen. In einem Quadrat von der Seitenlänge 1 sind hier auf der linken vertikalen Seite, der y-Achse, fortgesetzt Halbierungen vorgenommen, so daß sukzessive alle Punkte erhalten werden, deren Ordinate eine rein dyadische Zahl, d. h. eine rationale Zahl mit einer Potenz von 2 als Nenner ist. Jedem auf der y-Achse auftretenden

Intervall oder Teilpunkt wird nun ein Intervall bez. ein rationaler Teilpunkt auf der x-Achse, der unteren horizontalen Seite, dadurch zugeordnet, daß zunächst den Endwerten $y=0$ und $y=1$ die Endwerte $x=0$ und $x=1$ entsprechen sollen, und weiter, so oft dort ein Intervall halbiert wird, hier zwischen die Endpunkte a/b, a'/b' des zugeordneten Intervalls, a und b, ferner a' und b' als relativ prim gedacht, ein neuer Teilpunkt in $x=(a+a')/(b+b')$ eingeschaltet wird. Auf der horizontalen Seite treten so als Teilpunkte sukzessive alle Punkte mit rationaler Abszisse auf, und die Zuordnung der gleichzeitig konstruierten Abszissen und Ordinaten liefert uns das Bild einer beständig wachsenden Funktion $y=?(x)$, zunächst für alle rationalen x, dann durch die Forderung der Stetigkeit erweitert auf beliebige reelle Argumente im Intervalle $0 \leqq x \leqq 1$, während gleichzeitig y dieses Intervall beliebig durchläuft. Wenn nun x eine quadratische Irrationalzahl ist und daher auf eine periodische Kettenbruchentwickelung führt, so entspricht dadurch dem Werte $y=?(x)$ eine periodische Dualentwickelung und erweist sich infolgedessen y als rational. Wir erhalten dadurch die Sätze:

Ist x eine quadratische Irrationalzahl, so ist y rational, aber nicht rein dyadisch. Ist x rational, so ist y rein dyadisch. Und diese Sätze sind völlig umkehrbar.

(Fig. 8.) Die letzte Figur zeigt nun eine Verallgemeinerung dieser Sätze auf kubische Irrationalitäten, welche Herr Louis Kollros in seiner Dissertation (Zürich 1904) entwickelt hat:

Einerseits wird hier ein Quadrat, in welchem ξ, η in den Grenzen 0 und 1 laufen, in der Weise behandelt, daß es zuerst durch die Diagonale $\xi=\eta$ in zwei gleichschenklige rechtwinklige Dreiecke zerlegt wird und in der Folge jedes einmal entstehende gleichschenklige rechtwinklige Dreieck durch die Verbindung von der Spitze nach der Mitte der Hypotenuse in zwei gleichschenklige rechtwinklige Dreiecke aufgelöst wird. Andererseits erfährt gleichzeitig ein zweites Quadrat, in welchem x, y in den Grenzen 0 und 1 laufen, eine gewisse Schritt für Schritt zugeordnete Zerfällung in Dreiecke: zunächst werden die vier Ecken des Quadrats den vier Ecken des ersten Quadrats mit gleichwertigen Koordinaten und weiter die Linie $x=y$ der Linie $\xi=\eta$ zugeordnet, und in der Folge wird, wo dort eine Hypotenuse halbiert und hernach eine geradlinige Verbindung eingeführt wird, hier zwischen die Endpunkte der zugeordneten Strecke, wenn deren Koordinaten $a/c, b/c$ und $a'/c', b'/c'$ und a, b, c sowie a', b', c' relativ prime Zahlen sind, als ein neuer Teilpunkt der Punkt mit den Koordinaten $x=(a+a')/(c+c')$, $y=(b+b')/(c+c')$ eingeschaltet und hernach die entsprechende geradlinige Verbindung vorgenommen. Dadurch werden zwei eindeutig umkehrbare Beziehungen (1) festgesetzt, zunächst für alle rationalen x, y und dyadischen ξ, η und hernach durch die Forderung der Stetigkeit überhaupt für beliebige Argumente und Funktionswerte in den Grenzen 0 und 1. Dabei findet nun Kollros die folgenden Sätze, welche freilich in einem wesentlichen Punkte noch nicht bewiesen sind, deren Richtigkeit aber nach einer Menge von Beispielen in hohem Grade plausibel erscheint:

Sind $1, x, y$ drei unabhängige Zahlen in einem reellen kubischen Körper, so sind ξ, η rational und ist keine der Größen $\xi, \eta, \xi + \eta$, $\xi - \eta$ rein dyadisch. Gehören x, y einem quadratischen Körper an, ohne beide rational zu sein, so sind ξ, η rational und ist eine der Größen $\xi, \eta, \xi + \eta, \xi - \eta$ rein dyadisch. Sind x, y beide rational, so sind ξ, η beide rein dyadisch. Diese Sätze sind vollkommen umkehrbar.

Nimmt man $y = x^2$, so erlangt man hierdurch ein vollständiges Kriterium dafür, daß x eine reelle kubische Irrationalzahl ist. Besonders zu betonen ist, daß diese Sätze für alle kubischen Körper und nicht etwa bloß für solche mit negativer Diskriminante, in welchen nur eine Fundamentaleinheit vorhanden ist, zuzutreffen scheinen.

Diese Aufzählung von speziellen Ergebnissen aus der Geometrie der Zahlen ließe sich noch weiterführen. Aber ich habe vielleicht mein Ziel bereits erreicht und Sie mögen den Eindruck gewonnen haben, daß es sich hier um Fragen handelt, welche die Fundamente der Größenlehre berühren, welche der Auffassung leicht zugänglich sind und welche uns die Disziplinen der Algebra, Arithmetik, Geometrie in harmonischer Wechselwirkung zeigen.

Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik.

Von

D. Hilbert aus Göttingen.

Während wir heute bei den Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie über die einzuschlagenden Wege und die zu erstrebenden Ziele im wesentlichen untereinander einig sind, ist es mit der Frage nach den Grundlagen der Arithmetik anders bestellt: hier stehen sich gegenwärtig noch die verschiedensten Meinungen der Forscher schroff einander gegenüber.

Die Schwierigkeiten bei der Begründung der Arithmetik sind zum Teil in der Tat anders geartete als diejenigen, die bei der Begründung der Geometrie zu überwinden waren. Bei der Prüfung der Grundlagen der Geometrie konnten gewisse Schwierigkeiten, die rein arithmetischer Natur sind, beiseite gelassen werden; bei der Begründung der Arithmetik aber erscheint die Berufung auf eine andere Grunddisziplin unerlaubt. Ich werde die wesentlichen Schwierigkeiten bei der Begründung der Arithmetik am deutlichsten hervortreten lassen, indem ich die Anschauungen einzelner Forscher einer kurzen kritischen Erörterung unterwerfe.

L. Kronecker hat bekanntlich in dem Begriff der ganzen Zahl das eigentliche Fundament der Arithmetik erblickt; er bildete sich die Auffassung, daß die ganze Zahl und zwar als Allgemeinbegriff (Parameterwert) direkt und unmittelbar da sei; dadurch wurde er verhindert zu erkennen, daß der Begriff der ganzen Zahl einer Begründung bedürftig und fähig ist. Insofern möchte ich ihn als *Dogmatiker* bezeichnen: er nimmt die ganze Zahl mit ihren wesentlichen Eigenschaften als Dogma hin und blickt nicht weiter rückwärts.

H. Helmholtz vertritt den Standpunkt des *Empiristen*; der Standpunkt der reinen Erfahrung aber scheint mir durch den Hinweis widerlegt, daß aus der Erfahrung, d. h. durch das Experiment, niemals die Möglichkeit oder die Existenz einer beliebig großen Zahl entnommen werden kann. Denn die Zahl der Dinge, die Gegenstand unserer Erfahrung sind, liegt, wenn sie auch groß ist, doch unterhalb einer endlichen Grenze.

E. B. Christoffel und alle diejenigen Gegner Kroneckers, die von dem richtigen Gefühl geleitet, daß ohne den Begriff der Irrationalzahl die gesamte Analysis zur Unfruchtbarkeit verurteilt bliebe, durch Auffindung „positiver" Eigenschaften dieses Begriffes oder durch ähnliche Mittel die Existenz der Irrationalzahl zu retten suchen, möchte ich als *Opportunisten* bezeichnen. Eine sachliche Widerlegung des Kroneckerschen Standpunktes aber wurde durch dieselben meiner Meinung nach nicht erreicht.

Unter den Gelehrten, welche tiefer in das Wesen der ganzen Zahl eingedrungen sind, nenne ich die folgenden:

G. Frege stellt sich die Aufgabe, die Gesetze der Arithmetik durch die Mittel der *Logik*, diese in hergebrachtem Sinne aufgefaßt, zu begründen. Er hat das Verdienst, die wesentlichen Eigenschaften des Begriffes der ganzen Zahl sowie die Bedeutung des Schlusses der vollständigen Induktion richtig erkannt zu haben. Indem er aber seinem Plane treu unter anderem auch dies als Grundsatz hinnimmt, daß ein Begriff (eine Menge) definiert und unmittelbar verwendbar sei, wenn nur für jeden Gegenstand bestimmt ist, ob er unter den Begriff falle oder nicht, und auch den Begriff „jeder" dabei keiner Einschränkung unterwirft, setzt er sich gerade denjenigen mengentheoretischen Paradoxien aus, die beispielsweise in dem Begriffe der Menge aller Mengen liegen und die, wie mir scheint, zeigen, daß die Auffassungen und Untersuchungsmittel der Logik, im hergebrachten Sinne aufgefaßt, nicht den strengen Anforderungen, die die Mengenlehre stellt, gewachsen sind. Die Vermeidung solcher Widersprüche und die Klärung jener Paradoxien ist vielmehr bei den Untersuchungen über den Zahlbegriff von vornherein als ein Hauptziel ins Auge zu fassen.

R. Dedekind hat die mathematischen Schwierigkeiten bei der Begründung des Zahlbegriffes klar erkannt und in äußerst scharfsinniger Weise zuerst einen Aufbau der Theorie der ganzen Zahlen geliefert. Ich möchte aber seine Methode insofern als eine *transzendentale* bezeichnen, als er den Nachweis für die Existenz des Unendlichen auf einem Wege führt, dessen Grundidee wohl in ähnlicher Weise von philosophischer Seite benutzt wird — ein Weg freilich, den ich wegen des unvermeidlichen Widerspruches des dabei zur Verwendung kommenden Begriffes der Gesamtheit aller Dinge als gangbar und sicher nicht anerkennen kann.

G. Cantor hat den genannten Widerspruch empfunden und diesem Empfinden dadurch Ausdruck verliehen, daß er „konsistente“ und „nichtkonsistente“ Mengen unterscheidet. Indem er aber meiner Meinung nach für diese Unterscheidung kein scharfes Kriterium aufstellt, muß ich seine Auffassung über diesen Punkt als eine solche bezeichnen, die dem *subjektiven* Ermessen noch Spielraum läßt und daher keine objektive Sicherheit gewährt.

Ich bin der Meinung, daß alle die berührten Schwierigkeiten sich überwinden lassen und daß man zu einer strengen und völlig befriedigenden Begründung des Zahlbegriffes gelangen kann, und zwar durch eine Methode, die ich die *axiomatische* nennen und deren Grundidee ich im folgenden kurz entwickeln möchte.

Man bezeichnet wohl die Arithmetik als einen Teil der Logik und setzt meist bei der Begründung der Arithmetik die hergebrachten logischen Grundbegriffe voraus. Allein bei aufmerksamer Betrachtung werden wir gewahr, daß bei der hergebrachten Darstellung der Gesetze der Logik gewisse arithmetische Grundbegriffe, z. B. der Begriff der Menge, zum Teil auch der Begriff der Zahl bereits zur Verwendung kommen. Wir geraten so in eine Zwickmühle und zur Vermeidung von Paradoxien ist daher eine teilweise gleichzeitige Entwicklung der Gesetze der Logik und der Arithmetik erforderlich.

Wie ich mir diesen gemeinsamen Aufbau denke, kann ich in der Kürze eines Vortrages nur andeuten. Ich bitte daher zu entschuldigen, wenn es mir nur gelingt, Ihnen eine ungefähre Vorstellung davon zu geben, in welcher Richtung meine Untersuchungen sich bewegen. Auch werde ich mich der leichteren Verständlichkeit wegen mehr der gewohnten Sprache „in Worten“ und der darin mittelbar zum Ausdruck kommenden Gesetze der Logik bedienen, als bei einem exakten Aufbau wünschenswert wäre.

Ein Gegenstand unseres Denkens heiße ein Gedankending oder kurz ein Ding und werde durch ein Zeichen benannt.

Wir legen unserer Betrachtung zunächst ein Gedankending 1 (eins) zugrunde. Die Zusammenfassungen dieses Dinges mit sich zu je zwei, drei oder mehr Malen, wie:

$$11,\quad 111,\quad 1111$$

bezeichnen wir als Kombinationen des Dinges 1 mit sich; ebenso heißen irgendwelche Kombinationen dieser Kombinationen, wie:

$$(1)(11),\quad (11)(11)(11),\quad ((11)(11))(11),\quad ((111)(1))(1)$$

wieder Kombinationen jenes Dinges 1 mit sich. Die Kombinationen werden ebenfalls schlechtweg als Dinge und dem gegenüber dann das zugrunde gelegte Gedankending 1 als einfaches Ding bezeichnet.

Wir fügen nun ein zweites einfaches Gedankending hinzu und benennen dasselbe mit dem Zeichen $=$ (gleich). Alsdann bilden wir die Kombinationen dieser zwei Gedankendinge, wie:

$$1 =,\ 11 =, \cdots\ (1)(=1)(===),\ ((11)(1)(=))(==),\ 1=1,\ (11)=(1)(1).$$

Wir sagen, die Kombination a der einfachen Dinge $1, =$ differiere mit der Kombination b jener Dinge, wenn sie, was die Art und Reihenfolge der Kombination oder die Wahl und das Eingehen der Dinge $1, =$ selbst anbetrifft, irgendwie voneinander abweichen, d. h. wenn a und b nicht miteinander identisch sind.

Jetzt denken wir uns die Kombinationen jener zwei einfachen Dinge in zwei Klassen, die Klasse der Seienden und die der Nichtseienden verteilt: jedes Ding, das der Klasse der Seienden angehört, differiert mit jedem Dinge, das der Klasse der Nichtseienden angehört. Jede Kombination der zwei einfachen Dinge $1, =$ gehört einer dieser beiden Klassen an.

Wenn a eine Kombination der zwei zugrunde liegenden Dinge $1, =$ ist, so bezeichnen wir mit a auch die Aussage, daß a der Klasse der Seienden angehört, und mit $\bar{a}$ die Aussage, daß a der Klasse der Nichtseienden angehört. Wir bezeichnen a als eine richtige Aussage, wenn a der Klasse der Seienden angehört; dagegen heiße $\bar{a}$ eine richtige Aussage, wenn a der Klasse der Nichtseienden angehört. Die Aussagen a und $\bar{a}$ bilden einen Widerspruch.

Der Inbegriff zweier Aussagen A, B, in Zeichen

$$A \mid B,$$

in Worten: „aus A folgt B" oder „wenn A richtig ist, ist auch B richtig" heißt ebenfalls eine Aussage und zwar heißt A dann die Voraussetzung, B die Behauptung. Voraussetzung und Behauptung können selbst wiederum aus mehreren Aussagen A_1, A_2 bez. B_1, B_2, B_3 usw., bestehen in Zeichen:

$$A_1 \text{ u. } A_2 \mid B_1 \text{ o. } B_2 \text{ o. } B_3,$$

in Worten: „aus A_1 und A_2 folgt B_1 oder B_2 oder B_3" usw.

Wegen des Zeichens o. (oder) wäre, da die Negation bereits eingeführt ist, das Zeichen $\mid$ zu vermeiden möglich; ich benutze es in diesem Vortrage lediglich, um mich an die gewohnte Wortsprache möglichst anzuschließen.

Wir wollen unter $A_1, A_2, \cdots$ bez. diejenigen Aussagen verstehen, die — kurz ausgedrückt — aus einer Aussage $A(x)$ hervorgehen, indem wir an Stelle der „Willkürlichen“ x die Gedankendinge $1, =$ und die Kombinationen derselben nehmen; dann schreiben wir die Aussagen

$$A_1 \text{ o. } A_2 \text{ o. } A_3, \cdots \quad \text{bez.} \quad A_1 \text{ u. } A_2 \text{ u. } A_3, \cdots$$

auch wie folgt

$$A(x^{(o)}), \quad \text{in Worten „wenigstens für ein } x\text{“}$$

$$\text{bez. } A(x^{(u)}), \quad \text{in Worten „für jedes einzelne } x\text{“},$$

hierin erblicken wir lediglich eine abkürzende Schreibweise.

Wir bilden nun aus den zugrunde gelegten zwei Dingen $1, =$ die folgenden Aussagen:

$$1. \quad x = x$$

$$2. \quad \{x = y \text{ u. } w(x)\} \,|\, w(y).$$

Dabei bedeutet x (im Sinne von $x^{(u)}$) jedes der zwei zugrunde gelegten Gedankendinge und jede Kombination derselben; in 2. ist y (im Sinne von $y^{(u)}$) ebenfalls jedes jener Dinge und jede Kombination, ferner $w(x)$ eine „willkürliche“ Kombination, die die „Willkürliche“ x (im Sinne von $x^{(u)}$) enthält; die Aussage 2. lautet in Worten: Aus $x = y$ und $w(x)$ folgt $w(y)$.

Die Aussagen 1., 2. bilden die Definition des Begriffes $=$ (gleich) und werden insofern auch Axiome genannt.

Wenn man an Stelle der Willkürlichen x, y in den Axiomen 1., 2. die einfachen Dinge $1, =$ oder besondere Kombinationen derselben setzt, so entstehen besondere Aussagen, welche Folgerungen jener Axiome heißen mögen. Wir betrachten eine Reihe gewisser Folgerungen von der Art, daß die Voraussetzungen der letzten Folgerung der Reihe mit den Behauptungen der voranstehenden Folgerungen identisch sind. Nehmen wir dann die Voraussetzungen der voranstehenden Folgerungen als Voraussetzung und die Behauptung der letzten Folgerung als Behauptung, so entsteht eine neue Aussage, die wiederum als Folgerung aus den Axiomen bezeichnet werden möge. Durch Fortsetzung dieses Schlußverfahrens können wir weitere Folgerungen erhalten.

Wir wählen nun aus diesen Folgerungen diejenigen aus, die die einfache Form der Aussage a (Behauptung ohne Voraussetzung) haben, und fassen die so entstehenden Dinge a in der Klasse der Seienden zusammen, während die von diesen differierenden Dinge zu der Klasse der Nichtseienden gehören mögen. Wir erkennen, daß aus 1., 2. immer nur Folgerungen von der Form $\alpha = \alpha$ entstehen, wo α eine Kombination der Dinge $1, =$ ist. Die Axiome 1., 2. sind auch ihrerseits gegenüber der getroffenen Verteilung der Dinge in die zwei Klassen erfüllt, d. h. richtige Aussagen, und wegen dieser Eigenschaft der

Axiome 1., 2. bezeichnen wir den durch dieselbe definierten Begriff = (gleich) als einen widerspruchsfreien Begriff.

Ich möchte darauf aufmerksam machen, daß die Axiome 1., 2. eine Aussage von der Form $\bar{a}$, d. h. eine Aussage, wonach eine Kombination in der Klasse der Nichtseienden vorkommen soll, überhaupt nicht enthalten. Wir würden also auch den Axiomen genügen können, indem wir die Kombinationen der zwei einfachen Dinge sämtlich in die Klasse der Seienden aufnehmen und die Klasse der Nichtseienden leer ließen. Die vorhin gewählte Verteilung in die zwei Klassen zeigt jedoch besser, wie man in den späteren schwierigeren Fällen zu verfahren hat.

Wir führen jetzt den Bau der logischen Grundlagen des mathematischen Denkens weiter, indem wir zu den zwei Gedankendingen 1, = die drei weiteren Gedankendinge $\mathfrak{u}$ (unendliche Menge, Unendlich), $\mathfrak{f}$ (Folgendes), $\mathfrak{f}'$ (begleitende Operation) hinzufügen und für dieselben die folgenden Axiome festsetzen:

$$3.\quad \mathfrak{f}(\mathfrak{u}x) = \mathfrak{u}(\mathfrak{f}'x)$$

$$4.\quad \mathfrak{f}(\mathfrak{u}x) = \mathfrak{f}(\mathfrak{u}y)\ |\ \mathfrak{u}x = \mathfrak{u}y$$

$$5.\quad \overline{\mathfrak{f}}(\overline{\mathfrak{u}x})\ \overline{=}\ \mathfrak{u}1$$

Dabei bedeutet die Willkürliche x (im Sinne von $x^{(u)}$) jedes der fünf jetzt zugrunde liegenden Gedankendinge und jede Kombination derselben. Das Gedankending $\mathfrak{u}$ werde kurz unendliche Menge und die Kombination $\mathfrak{u}x$ (z. B. $\mathfrak{u}1$, $\mathfrak{u}(11)$, $\mathfrak{u}\mathfrak{f}$) ein Element dieser unendlichen Menge $\mathfrak{u}$ genannt. Das Axiom 3. drückt dann aus, daß auf jedes Element $\mathfrak{u}x$ ein bestimmtes Gedankending $\mathfrak{f}(\mathfrak{u}x)$ folgt, welches einem Element der Menge $\mathfrak{u}$, nämlich dem Element $\mathfrak{u}(\mathfrak{f}'x)$ gleich ist, d. h. ebenfalls der Menge $\mathfrak{u}$ angehört. Das Axiom 4. spricht die Tatsache aus, daß, wenn auf zwei Elemente der Menge $\mathfrak{u}$ das gleiche Element folgt, jene Elemente ebenfalls einander gleich sind. Nach Axiom 5. gibt es in $\mathfrak{u}$ kein Element, dem das Element $\mathfrak{u}1$ folgt; dieses Element $\mathfrak{u}1$ heiße daher das erste Element in $\mathfrak{u}$.

Wir haben nun die Axiome 1.—5. der entsprechenden Untersuchung zu unterwerfen, wie vorhin die Axiome 1., 2.; dabei ist zu beachten, daß jene Axiome 1., 2. zugleich eine Erweiterung ihrer Gültigkeit erfahren, insofern nunmehr die Willkürlichen x, y beliebige Kombinationen der fünf zugrunde liegenden einfachen Dinge bedeuten.

Wir fragen wiederum, ob gewisse Folgerungen aus den Axiomen 1. bis 5. einen Widerspruch bilden oder ob im Gegenteil die zugrunde gelegten fünf Gedankendinge 1, =, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}'$ und deren Kombinationen sich in die Klasse der Seienden und die Klasse der Nichtseienden verteilen lassen derart, daß die Axiome 1.—5. dieser Klasseneinteilung gegenüber sich erfüllen, d. h. jede Folgerung aus jenen Axiomen zu einer richtigen Aussage gegenüber jener Klasseneinteilung wird. Zur Beantwortung dieser Frage berücksichtigen wir, daß das Axiom 5. das einzige ist, welches zu Aussagen von der Form $\bar{a}$, d. h. daß eine Kombination a der fünf zugrunde liegenden Gedankendinge zur Klasse der Nichtseienden gehören soll, Anlaß gibt. Aussagen, die mit 5. einen Widerspruch bilden, müssen daher jedenfalls von der Form

$$6.\quad \mathfrak{f}(\mathfrak{u}x^{(o)}) = \mathfrak{u}1$$

sein; eine solche Folgerung aber kann aus den Axiomen 1.—4. auf keine Weise entstehen.

Um dies einzusehen, bezeichnen wir die Gleichung, d. h. das Gedankending $a = b$ als eine homogene Gleichung, wenn sowohl a wie b Kombinationen von je zwei einfachen Dingen sind, ebenso wenn a und b beide irgendwelche Kombinationen von je drei oder beide irgendwelche Kombinationen von je vier oder mehr einfachen Dingen sind; beispielsweise heißen

$$(11) = (\mathfrak{f}\mathfrak{u}), \qquad (\mathfrak{f}\mathfrak{f} = (\mathfrak{u}\mathfrak{f}'), \qquad (\mathfrak{f}11) = (\mathfrak{u}1 =),$$
$$(\mathfrak{f}1)(\mathfrak{f}1) = (1111), \qquad (\mathfrak{f}(\mathfrak{f}\mathfrak{f}'\mathfrak{u})) = (1\mathfrak{u}\mathfrak{u}1),$$
$$((\mathfrak{f}\mathfrak{f})(111)) = ((1)(11)(11)), \qquad (\mathfrak{f}\mathfrak{u}11=) = (\mathfrak{u}\mathfrak{u}111\mathfrak{u})$$

homogene Gleichungen. Aus den Axiomen 1. und 2. allein folgen, wie wir vorhin gesehen haben, lauter homogene Gleichungen, nämlich die Gleichungen von der Form $\alpha = \alpha$. Ebenso liefert Axiom 3., wenn wir darin für x irgend ein Gedankending nehmen, nur homogene Gleichungen. Desgleichen weist Axiom 4. in der Behauptung gewiß stets eine homogene Gleichung auf, sobald die Voraussetzung eine homogene Gleichung ist und somit können überhaupt nur homogene Gleichungen als Folgerungen aus den Axiomen 1.—4. auftreten. Nun ist aber die Gleichung 6., die doch bewiesen werden sollte, gewiß keine homogene Gleichung, da man darin an Stelle von $x^{(o)}$ eine Kombination zu nehmen hat und dadurch die linke Seite eine Kombination von drei oder mehr einfachen Dingen wird, während die rechte Seite eine Kombination von den zwei einfachen Dingen $\mathfrak{u}$ und 1 bleibt.

Hiermit ist, wie ich glaube, der Grundgedanke, um die Richtigkeit meiner Behauptung zu erkennen, dargelegt; zur vollständigen Durchführung des Beweises bedarf es des Begriffes der endlichen Ordnungszahl und gewisser Sätze über den Begriff der Gleichzahligkeit, die man in der Tat an dieser Stelle schon ohne Mühe aufstellen und ableiten kann: man hat eben zur vollständigen Durchführung des dargelegten Grundgedankens noch diejenigen Gesichtspunkte zu berücksichtigen, auf die ich am Schlusse meines Vortrages (vgl. V.) noch kurz hinweisen will.

Die gewünschte Klasseneinteilung ergibt sich also, wenn man alle Dinge a, wo a eine Folgerung aus den Axiomen 1.—4. ist, zur Klasse der Seienden zählt und alle diejenigen Dinge in die Klasse der Nichtseienden aufnimmt, die mit diesen differieren, insbesondere die Dinge $\mathfrak{f}(\mathfrak{u}x) = \mathfrak{u}1$. Wegen der so gefundenen Eigenschaft der aufgestellten Axiome erkennen wir, daß dieselben überhaupt nie zu einem Widerspruch führen, und bezeichnen daher die durch dieselben definierten Gedankendinge $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}'$ als widerspruchsfreie Begriffe oder Operationen oder als widerspruchsfrei existierend. Was insbesondere den Begriff des Unendlichen $\mathfrak{u}$ anbetrifft, so erscheint durch die oben angedeutete Darlegung die Behauptung der Existenz des Unendlichen $\mathfrak{u}$ gerechtfertigt; denn sie erhält jetzt eine bestimmte Bedeutung und einen später stets anzuwendenden Inhalt.

Die eben skizzierte Betrachtung bildet den ersten Fall, in dem es gelingt, den direkten Nachweis für die Widerspruchslosigkeit von Axiomen zu führen, während die sonst — inbesondere in der Geometrie — für solche Nachweise übliche Methode der geeigneten Spezialisierung oder Bildung von Beispielen hier notwendig versagt.

Daß dieser direkte Nachweis hier gelingt, ist, wie man sieht, wesentlich dem Umstande zu verdanken, daß eine Aussage von der Form $\bar{a}$, d. h. eine Aussage, wonach eine gewisse Kombination der Klasse der Nichtseienden angehören soll, nur an einer Stelle als Behauptung, nämlich in Axiom 5., auftritt.

Indem wir die bekannten Axiome für die vollständige Induktion in die von mir gewählte Sprache übertragen, gelangen wir in ähnlicher Weise zu der Widerspruchsfreiheit der so vermehrten Axiome, d. h. zum Beweise der widerspruchsfreien Existenz des sogenannten kleinsten Unendlich*) (d. h. des Ordnungstypus $1, 2, 3, \cdots$).

Es bietet keine Schwierigkeit, den Begriff der endlichen Ordnungszahl nach den oben aufgestellten Prinzipien zu begründen; es geschehe dies auf Grund des Axioms, daß jede Menge, die das erste Element der Ordnungszahl und, falls ihr irgend eines angehört, auch das diesem folgende enthält, gewiß stets das letzte Element enthalten muß. Der Beweis der Widerspruchslosigkeit der Axiome erfolgt hier sehr leicht durch Heranziehung eines Beispiels, etwa der Zahl zwei. Es kommt dann darauf an zu zeigen, daß eine Anordnung der Elemente der endlichen Ordnungszahl möglich ist, so daß jede Teilmenge derselben ein erstes

*) Vgl. meinen auf dem Internationalen Mathematiker-Kongreß zu Paris 1900 gehaltenen Vortrag: Mathematische Probleme, 2. Die Widerspruchslosigkeit der arithmetischen Axiome.

und ein letztes Element besitzt — eine Tatsache, die wir dadurch beweisen, daß wir ein Gedankending $<$ durch das Axiom

$$(x < y \text{ u. } y < z) | x < z$$

definieren und dann die Widerspruchsfreiheit der aufgestellten Axiome unter Hinzufügung dieses neuen Axiomes erkennen, sobald x, y, z willkürliche Elemente der endlichen Ordnungszahl bedeuten. Mit Benutzung der Tatsache der Existenz des kleinsten Unendlich folgt dann auch der Satz, daß zu jeder endlichen Ordnungszahl eine noch größere Ordnungszahl gefunden werden kann.

Die Prinzipien, die für den Aufbau und die weitere Ausführung der Gesetze des mathematischen Denkens in der beabsichtigten Weise maßgebend sein müssen, sind kurz folgende:

I. Auf einem bestimmten Standpunkt in der Entwicklung der Theorie angelangt darf ich eine weitere Aussage als richtig bezeichnen, sobald erkannt worden ist, daß sie als Axiom zu den bisher als richtig befundenen Aussagen hinzugefügt, keinen Widerspruch ergibt, d. h. zu Folgerungen führt, die gegenüber einer gewissen Verteilung der Dinge in die Klasse der Seienden und die der Nichtseienden sämtlich richtige Aussagen sind.

II. In den Axiomen vertreten die Willkürlichen — als Ersatz für den Begriff „jedes“ oder „alle“ in der üblichen Logik — nur diejenigen Gedankendinge und deren Kombinationen untereinander, die auf jenem Standpunkt zugrunde gelegt sind oder neu definiert werden sollen. Bei der Herleitung von Folgerungen aus den Axiomen dürfen daher die Willkürlichen, die in den Axiomen auftreten, nur durch solche Gedankendinge und deren Kombinationen ersetzt werden. Auch ist in gehöriger Weise zu berücksichtigen, daß durch die Zufügung und Zugrundelegung eines neuen Gedankendinges die bisherigen Axiome eine Erweiterung ihrer Gültigkeit erfahren bez. einer sinngemäßen Abänderung zu unterwerfen sind.

III. Die Menge ist allgemein als ein Gedankending m definiert und die Kombinationen mx heißen die Elemente der Menge m, so daß also — im Gegensatz zu der üblichen Auffassung — der Begriff des Elementes einer Menge erst als späteres Erzeugnis des Mengenbegriffes selbst erscheint.

Genau so wie der Begriff „Menge“ sind auch „Zuordnung“, „Transformation“, „Beziehung“, „Funktion“ Gedankendinge, für die, genau wie vorhin mit dem Begriff „Unendlich“ geschehen ist, die passenden Axiome in Ansatz zu bringen sind und die dann im Falle der Möglichkeit der Verteilung der betreffenden Kombinationen in die Klasse der Seienden und die der Nichtseienden als widerspruchslos existierend erkannt werden können.

In I. kommt das schöpferische Prinzip zum Ausdruck, das uns im freiesten Gebrauch zu immer neuen Begriffsbildungen berechtigt mit der einzigen Beschränkung der Vermeidung eines Widerspruchs. Die zu Anfang dieses Vortrages erwähnten Paradoxien werden durch II. und III. unmöglich; insbesondere gilt dies von dem Paradoxon der Menge aller sich nicht selbst als Element enthaltenden Mengen.

Um die weitgehende inhaltliche Übereinstimmung des in III. definierten Mengenbegriffes mit dem üblichen Mengenbegriffe erkennen zu lassen, beweise ich folgenden Satz:

Es seien auf einem bestimmten Standpunkte in der Entwicklung $1, \cdots, \alpha, \cdots, \mathfrak{k}$ die zugrunde liegenden Gedankendinge und $a(\mathfrak{x})$ eine Kombination derselben, die die Willkürliche $\mathfrak{x}$ enthält; ferner sei $a(\alpha)$ eine richtige Aussage (d. h. $a(\alpha)$ in der Klasse der Seienden): alsdann existiert gewiß ein Gedankending m von der Art, daß $a(mx)$ für die Willkürliche x lauter richtige Aussagen darstellt (d. h. $a(mx)$ immer in der Klasse der Seienden sich befindet) und auch umgekehrt jedes Ding $\mathfrak{x}$, für welches $a(\mathfrak{x})$ eine richtige Aussage darstellt, einer Kombination $mx^{(o)}$ gleich wird, so daß die Aussage

$$\mathfrak{x} = mx^{(o)}$$

richtig ist, d. h. die Dinge $\mathfrak{x}$, für die $a(\mathfrak{x})$ eine richtige Aussage wird, bilden die Elemente einer Menge m im Sinne obiger Definition.

Zum Beweise stellen wir das folgende Axiom auf: es ist m ein Gedankending, für welches die Aussagen

$$7. \quad a(\mathfrak{x}) \mid m\mathfrak{x} = \mathfrak{x}$$

$$8. \quad \overline{a(\mathfrak{x})} \mid m\mathfrak{x} = \alpha$$

richtig sind, d. h. wenn $\mathfrak{x}$ ein Ding ist, derart, daß $a(\mathfrak{x})$ zur Klasse der Seienden gehört, so soll $m\mathfrak{x} = \mathfrak{x}$, sonst $m\mathfrak{x} = \alpha$ gelten, fügen dieses Axiom zu den Axiomen hinzu, die für die Dinge $1, \cdots, \alpha, \cdots, \mathfrak{k}$ gelten, und nehmen dann an, daß dadurch ein Widerspruch zustande komme, d. h. daß für die Dinge $1, \cdots, \alpha, \cdots, \mathfrak{k}, m$ etwa die Aussagen

$$p(m) \quad \text{und} \quad \overline{p(m)}$$

zugleich Folgerungen seien, wo $p(m)$ eine gewisse Kombination der Dinge $1, \cdots, \mathfrak{k}, m$ ist. Dabei bedeutet 8. in Worten die Festsetzung $m\mathfrak{x} = \alpha$, wenn $a(\mathfrak{x})$ zur Klasse der Nichtseienden gehört. Überall, wo in $p(m)$ das Ding m in der Kombination $m\mathfrak{x}$ auftritt, ersetze man den Axiomen 7. und 8. entsprechend und mit Rücksicht auf 2. die Kombination $m\mathfrak{x}$ durch $\mathfrak{x}$ bez. α; aus $p(m)$ entstehe auf diese Weise $q(m)$ (wo nun $q(m)$ das Ding m nicht mehr in einer Kombination mx enthält), dann müßte $q(m)$ eine Folgerung aus dem ursprünglich zugrunde liegenden Axiome für $1, \cdots, \alpha, \cdots, \mathfrak{k}$ sein und mithin auch richtig bleiben, wenn wir für m irgend eines dieser Dinge etwa das Ding 1 nehmen. Da die nämliche Überlegung auch für die Aussage $\overline{p(m)}$ gilt, so wäre also auch auf dem ursprünglichen Standpunkte bei Zugrundelegung der Dinge $1, \cdots, \alpha, \cdots, \mathfrak{k}$ der Widerspruch

$$q(1) \quad \text{und} \quad \overline{q(1)}$$

vorhanden, was nicht sein kann — vorausgesetzt, daß die Dinge $1, \cdots, \mathfrak{k}$ widerspruchsfrei existieren. Wir müssen also unsere Annahme, daß ein Widerspruch zustande komme, verwerfen, d. h. m existiert widerspruchsfrei, was zu beweisen war.

IV. Wenn man ein bestimmt vorgelegtes System von Axiomen nach den obigen Prinzipien untersuchen will, so hat man die Kombinationen der zugrunde liegenden Dinge in die zwei Klassen, die der Seienden und die der Nichtseienden zu verteilen, wobei den Axiomen die Rolle von Vorschriften zufällt, denen die Verteilung genügen muß. Die Hauptschwierigkeit wird darin bestehen, die Möglichkeit der Verteilung aller Dinge in die zwei Klassen, die der Seienden und die der Nichtseienden, zu erkennen. Die Frage nach der Möglichkeit dieser Verteilung ist wesentlich gleichbedeutend mit der Frage, ob die Folgerungen, die man aus den Axiomen durch Spezialisierung und Verbindung in dem früher erläuterten Sinne gewinnen kann, zu einem Widerspruch führen oder nicht, wenn man noch die bekannten logischen Schlußweisen wie

$$\{(a \mid b) \text{ u. } (\bar{a} \mid b)\} \mid b$$
$$\{(a \text{ o. } b) \text{ u. } (a \text{ o. } c)\} \mid \{a \text{ o. } (b \text{ u. } c)\}$$

hinzunimmt. Die Widerspruchslosigkeit der Axiome kann dann entweder so erkannt werden, daß man zeigt, wie ein etwaiger Widerspruch sich schon auf einem früheren Standpunkt in der Entwicklung der Theorie zeigen müßte, oder indem man die Annahme macht, es gäbe einen Beweis, der aus den Axiomen auf einen bestimmten Widerspruch führt, und alsdann dartut, daß ein solcher Beweis nicht möglich ist, nämlich in sich einen Widerspruch enthielte. So lief ja auch der vorhin skizzierte Beweis für die widerspruchsfreie Existenz des Unendlichen darauf hinaus, zu erkennen, daß ein Beweis für die Gleichung 6. aus den Axiomen 1.—4. nicht möglich ist.

V. Wenn im Bisherigen von mehreren Gedankendingen, Kombinationen, Kombinationen mehrfacher Art oder mehreren Willkürlichen die Rede war, so sollte dabei stets eine begrenzte Anzahl solcher

Dinge gemeint sein. Nach Aufstellung der Definition der endlichen Zahl sind wir imstande, jene Ausdrucksweise in ihrer allgemeinen Bedeutung zu fassen. Auch die Bedeutung der „beliebigen“ Folgerung und des „Differierens“ einer Aussage mit allen Aussagen von gewisser Art ist nunmehr auf Grund der Definition der endlichen Zahl — der Idee der vollständigen Induktion entsprechend — durch ein rekurrentes Verfahren einer exakten Beschreibung fähig. So ist dann auch die vollständige Durchführung des vorhin angedeuteten Beweises zu denken, daß die Aussage $\mathfrak{f}(\mathfrak{u}x^{(o)}) = \mathfrak{u}1$ von jeder Aussage differiert, die durch eine endliche Anzahl von Schritten als Folgerung aus den Axiomen 1.—4. entsteht: man hat eben den Beweis selbst als ein mathematisches Gebilde, nämlich eine endliche Menge zu betrachten, deren Elemente durch Aussagen verbunden sind, die zum Ausdruck bringen, daß der Beweis aus 1.—4. auf 6. führt, und man hat dann zu zeigen, daß ein solcher Beweis einen Widerspruch enthält und also nicht in unserem definierten Sinne widerspruchsfrei existiert.

Ähnlich wie die Existenz des kleinsten Unendlich bewiesen werden kann, folgt die Existenz des Inbegriffs der reellen Zahlen: in der Tat sind die Axiome, wie ich sie für die reellen Zahlen aufgestellt habe*), genau durch solche Formeln ausdrückbar, wie die bisher aufgestellten Axiome. Was insbesondere dasjenige Axiom betrifft, das ich das Vollständigkeitsaxiom genannt habe, so bringt dasselbe zum Ausdruck, daß der Inbegriff der reellen Zahlen im Sinne der umkehrbar eindeutigen elementweisen Beziehbarkeit jede andere Menge enthält, deren Elemente ebenfalls die vorangehenden Axiome erfüllen; in dieser Auffassung wird auch das Vollständigkeitsaxiom eine durch Formeln von obiger Bauart ausdrückbare Forderung und die Axiome für den Inbegriff der reellen Zahlen unterscheiden sich qualitativ in keiner Hinsicht etwa von den zur Definition der ganzen Zahlen notwendigen Axiomen. In der Erkenntnis dieser Tatsache liegt, wie ich meine, die sachliche Widerlegung der von L. Kronecker vertretenen und zu Anfang meines Vortrages als dogmatisch bezeichneten Auffassung der Grundlagen der Arithmetik.

In gleicher Weise zeigt sich, daß den Grundbegriffen der Cantorschen Mengenlehre, insbesondere den Cantorschen Alefs die widerspruchsfreie Existenz zukommt.

---

*) Grundlagen der Geometrie, zweite Auflage, Leipzig 1903, S. 24—26.

Sur une propriété du discriminant des fonctions entières.

Von

G. Voronoï aus Warschau.

Considérons une fonction $F(x)$ entière rationnelle du degré n

$$F(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

à coefficients entiers $a_1, a_2, \cdots a_n$ et à discriminant D qui n'est pas nul.

Prenons un nombre premier quelconque p qui n'est pas un diviseur du discriminant D et supposons qu'on ait décomposé la fonction $F(x)$ en facteurs irréductibles par rapport au module p.

Comme tous ces facteurs

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots \varphi_\nu(x)$$

sont différents par rapport au module p, en vertu de la supposition faite, on aura la congruence

$$F(x) \equiv \varphi_1(x)\varphi_2(x)\cdots\varphi_\nu(x) \qquad (\text{mod. } p). \tag{1}$$

Le nombre ν des facteurs irréductibles de la fonction $F(x)$, par rapport au module p, jouit d'une propriété remarquable.

Théorème. *Le nombre ν des facteurs irréductibles de la fonction $F(x)$ par rapport au module p vérifie l'équation*

$$\left(\frac{D}{p}\right) = (-1)^{n-\nu},$$

où $\left(\frac{D}{p}\right)$ est le symbole de Legendre.

Examinons, en premier lieu, le cas $\nu = 1$. Dans ce cas, la fonction $F(x)$ est irréductible par rapport au module p.

Soit ϱ une racine quelconque de l'équation

$$F(x) = 0. \tag{2}$$

Envisageons le domaine des nombres entiers algébriques dépendant de la racine choisie ϱ de cette équation.

Comme on sait, les nombres entiers algébriques

$$\varrho,\ \varrho^p,\ \cdots\ \varrho^{p^{n-1}}$$

présentent les racines différentes de la congruence

$$F(x) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p),$$

dans le domaine considéré des nombres entiers algébriques.

Désignons

(3) $$\varrho = \varrho_0,\quad \varrho^p = \varrho_1,\ \cdots\ \varrho^{p^{n-1}} = \varrho_{n-1}$$

et considérons une fonction entière rationnelle à coefficients entiers $\sigma(\varrho_0, \varrho_1, \cdots \varrho_{n-1})$, symétrique par rapport aux variables $\varrho_0, \varrho_1, \cdots \varrho_{n-1}$.

En remplaçant dans la fonction $\sigma(\varrho_0, \varrho_1, \cdots \varrho_{n-1})$ les nombres algébriques $\varrho_0, \varrho_1, \cdots \varrho_{n-1}$ par les racines de l'équation (2), on obtiendra une fonction symétrique de ces racines dont la valeur est un nombre entier. En désignant ce nombre par σ, on aura une congruence

(4) $$\sigma(\varrho_0, \varrho_1, \cdots \varrho_{n-1}) \equiv \sigma \qquad (\text{mod. } p),$$

ce qui est aisé à démontrer.

Cela posé, considérons la fonction symétrique des variables $\varrho_0, \varrho_1, \cdots \varrho_{n-1}$

$$\sigma(\varrho_0, \varrho_1, \cdots \varrho_{n-1}) = \Pi(\varrho_i - \varrho_j)^2,$$

où

$$i = 0, 1, 2, \cdots n-1, \quad j = 0, 1, 2, \cdots n-1 \quad \text{et} \quad i < j.$$

En remplaçant dans la fonction considérée les variables $\varrho_0, \varrho_1, \cdots \varrho_{n-1}$ par les racines de l'équation (2), on obtiendra une fonction symétrique dont la valeur est égale au discriminant D de la fonction $F(x)$; il en résulte, en vertu de (4), la congruence suivante:

(5) $$\Pi(\varrho_i - \varrho_j)^2 \equiv D \qquad (\text{mod. } p).$$

En observant qu'en vertu de (3) le produit

$$\Pi(\varrho_i - \varrho_j) \quad \text{où} \quad i < j,$$

présente un nombre entier algébrique dépendant de la racine choisie ϱ de l'équation (2), désignons

(6) $$\omega(\varrho) = \Pi(\varrho_i - \varrho_j) \quad \text{où} \quad i < j.$$

En élevant les deux parties de cette égalité à la puissance p, on obtient

(7) $$[\omega(\varrho)]^p = \Pi(\varrho_i^p - \varrho_j^p).$$

Comme à cause de (3)

$$\varrho_i^p = \varrho_{i+1} \quad \text{tant que} \quad i < n-1$$

et

$$\varrho_{n-1}^p = \varrho^{p^n} \equiv \varrho \qquad (\text{mod. } p),$$

de l'égalité (7) il suit

$$[\omega(\varrho)]^p \equiv (-1)^{n-1}\,\Pi(\varrho_i - \varrho_j) \qquad (\text{mod. } p) \qquad (i<j),$$

et il en résulte à cause de (6)

$$[\omega(\varrho)]^{p-1} \equiv (-1)^{n-1} \qquad (\text{mod. } p).$$

D'autre part, en vertu de (5), on a

$$D^{\frac{p-1}{2}} = [\omega(\varrho)]^{p-1},$$

et par conséquent

$$D^{\frac{p-1}{2}} = (-1)^{n-1},$$

ou autrement

$$\left(\frac{D}{p}\right) = (-1)^{n-1};$$

donc, le théorème énoncé est démontré dans le cas $\nu = 1$.

Abordons maintenant le cas général.

Désignons

(8) $$F^{(0)}(x) = \varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\cdots\varphi_\nu(x)$$

et soit $D^{(0)}$ le discriminant de la fonction $F^{(0)}(x)$.

En vertu de la congruence (1), on aura

(9) $$D^{(0)} \equiv D \qquad (\text{mod. } p).$$

Désignons par $d_1, d_2, \cdots d_\nu$ les discriminants des fonctions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \cdots \varphi_\nu(x)$.

En vertu de (8), on peut poser

(10) $$D^{(0)} = d_1 d_2 \cdots d_\nu k^2,$$

où k est un nombre entier.

De (9) et (10) il suit

(11) $$\left(\frac{D}{p}\right) = \left(\frac{d_1}{p}\right)\left(\frac{d_2}{p}\right)\cdots\left(\frac{d_\nu}{p}\right).$$

Désignons par $m_1, m_2, \cdots m_\nu$ les degrés des fonctions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \cdots \varphi_\nu(x)$, on aura

(12) $$m_1 + m_2 + \cdots + m_\nu = n.$$

En vertu de ce qui a été dit précédemment, on aura les égalités

$$\left(\frac{d_1}{p}\right) = (-1)^{m_1-1},\quad \left(\frac{d_2}{p}\right) = (-1)^{m_2-1},\ \cdots\ \left(\frac{d_\nu}{p}\right) = (-1)^{m_\nu-1},$$

et à cause de (11) et (12) il vient

$$\left(\frac{D}{p}\right) = (-1)^{n-\nu}.$$

Le théorème démontré est susceptible d'applications nombreuses et importantes.

1. En posant $n = 2$, on aura deux cas à distinguer: $\nu = 1$ ou $\nu = 2$; dans le premier cas $\left(\frac{D}{p}\right) = -1$ et dans le second cas $\left(\frac{D}{p}\right) = +1$; donc la congruence du second degré

$$x^2 + a_1 x + a_2 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

n'a pas de racines réelles tant que $\left(\frac{D}{p}\right) = -1$ et possède deux racines réelles tant que $\left(\frac{D}{p}\right) = +1$.

Ce sont des résultats bien connus.

2. En posant $n = 3$, on aura trois cas à distinguer: $\nu = 1$, 2 ou 3; dans les premier et troisième cas $\left(\frac{D}{p}\right) = +1$, dans le second cas $\left(\frac{D}{p}\right) = -1$; donc la congruence du troisième degré

$$x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

n'a qu'une seule racine réelle tant que $\left(\frac{D}{p}\right) = -1$ et possède trois racines réelles ou n'en a aucune tant que $\left(\frac{D}{p}\right) = +1$.

J'ai obtenu ces résultats d'une autre manière dans mon Mémoire intitulé: Sur les nombres entiers algébriques dépendant des racines de l'équation cubique, Pétersbourg 1894 (en russe).

Au dernier moment, j'ai reçu une lettre de M. K. Hensel qui a bien voulu m'annoncer de ce que la formule

$$\left(\frac{D}{p}\right) = (-1)^{n-\nu}$$

a été communiquée par M. L. Stickelberger en 1897 au premier congrès international des mathématiciens à Zurich.

Die metazyklischen Gleichungen 9. Grades.

Von

A. Wiman aus Upsala.

In den größeren Handbüchern der Algebra wird bekanntlich stets den metazyklischen Gleichungen neunten Grades ein besonderes Kapitel gewidmet. Man findet dort insbesondere die schönen gegenseitigen Beziehungen zwischen den Wurzeln auseinandergesetzt, wie sie in der gegenseitigen Lage der neun Wendepunkte einer Kurve 3. Ordnung einen geometrischen Ausdruck finden. Wie man aber die neun Wurzeln wirklich darstellt, d. h. wie ein algebraischer Ausdruck zu bilden ist, der nur die Werte der neun Wurzeln und keine anderen Werte annehmen kann, darüber ist meines Wissens noch nichts veröffentlicht worden. Diese Aufgabe stellen wir uns hier, wobei wir uns auf primitive Gleichungen beschränken wollen. Die fragliche Aufgabe ist bis jetzt nur für die metazyklischen Gleichungen von Primzahlgrad, sowie für diejenigen achten Grades gelöst worden.

Es gibt sieben verschiedene Typen von primitiven metazyklischen Gleichungen 9. Grades, indem die Galoissche Gruppe der Gleichung sich auf sieben verschiedene Weisen gestalten kann. Man kann ja den Wurzeln x in solcher Weise zwei ganze Zahlen z_1, z_2 als Indizes beifügen, welche nach dem Modul 3 genommen werden, daß die Substitutionen der Gruppe durch lineare Kongruenzen

$$\begin{aligned} z_1' &\equiv \alpha_{11} z_1 + \alpha_{12} z_2 + \alpha_1 \\ z_2' &\equiv \alpha_{21} z_1 + \alpha_{22} z_2 + \alpha_2 \end{aligned} \qquad (\text{mod. } 3)$$

ihren Ausdruck finden. Es sei G die Galoissche Gruppe der Gleichung. Diese Gruppe besitzt eine ausgezeichnete Untergruppe G_1, welche die Substitutionen von den beiden Typen

$$(S) \qquad \begin{aligned} z_1' &\equiv z_1 + \alpha_1 \\ z_2' &\equiv z_2 + \alpha_2 \end{aligned}$$

und

$$(S_1) \qquad \begin{aligned} z_1' &\equiv -z_1+\alpha_1 \\ z_2' &\equiv -z_2+\alpha_2 \end{aligned}$$

enthält. Die Faktorgruppe

$$\frac{G}{G_1}=H_1$$

ist nun mit einer Vertauschungsgruppe von vier Dingen holoedrisch isomorph. Dieser Zusammenhang mit den Vertauschungsgruppen von vier Dingen findet darin seine Erklärung, daß, falls die Gruppe der Gleichung durch Adjunktion von Irrationalitäten auf G_1 reduziert wird, vier verschiedene Imprimitivitätssysteme auftreten, welche ja beim Wendepunktsprobleme in den vier Wendepunktsdreiecken eine geometrische Veranschaulichung finden. Damit die Gleichung primitiv sei, muß die der Gruppe H_1 zugeordnete Vertauschungsgruppe von vier Dingen kein Element invariant lassen. Da es nun solcher Vertauschungsgruppen von vier Dingen sieben verschiedene Typen gibt, so bekommt man auch für die Gruppe G sieben verschiedene Typen.

Als Lagrangesche Resolventen bezeichnen wir hier die Größen

$$(\varepsilon, x)_{t_1,t_2}=\sum_{z_1,z_2}\varepsilon^{t_1z_1+t_2z_2}x_{z_1,z_2}, \qquad \left(\varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)$$

wo die ganzen Zahlen t_1, t_2 nach dem Modul 3 genommen werden und nicht beide verschwinden. Man hat also acht solche Resolventen. Setzen wir noch

$$\sum_{z_1,z_2}x_{z_1,z_2}=A,$$

so bekommen wir die Wurzeln in der Gestalt

$$x_{z_1,z_2}=\frac{1}{9}\left[A+\sum_{t_1,t_2}\varepsilon^{-(t_1z_1+t_2z_2)}(\varepsilon,x)_{t_1,t_2}\right].$$

Hier hat man aber zunächst rechts einen algebraischen Ausdruck, welcher eine überzählige Anzahl von Werten annimmt. Die Größen

$$[(\varepsilon,x)_{t_1,t_2}]^3=\varrho_{t_1,t_2}$$

sind ja die Wurzeln einer metazyklischen Gleichung achten Grades, deren Gruppe sich leicht aufstellen läßt. Die Größen ϱ_{t_1,t_2} gehören dem Körper $R(x,\varepsilon)$ an, und man kann direkt die Vertauschungen dieser Größen aufstellen, welche bewirkt werden, wenn man die Substitutionen des fraglichen Körpers ausführt. Dabei sind zwar zwei Fälle besonders zu berücksichtigen, je nachdem $R(\varepsilon)$ als Unterkörper von $R(x)$ auftritt oder nicht. In beiden Fällen findet man aber, daß die Gruppe dieser Gleichung achten Grades mit der Faktorgruppe

$$\frac{G}{G_2}=H_2$$

holoedrisch isomorph ist, wo G_2 die durch die Substitutionen S erzeugte ausgezeichnete Untergruppe von G bezeichnet. In fünf von den sieben Hauptfällen ist die Gruppe der Gleichung achten Grades transitiv, so daß keine von den Lagrangeschen Resolventen gleich Null sein kann. In den beiden übrigen Hauptfällen zerfällt aber die Gleichung achten Grades in zwei Gleichungen vierten Grades, und von den Lagrangeschen Resolventen können vier identisch verschwinden; ja es lässt sich sogar durch rationale Transformation immer bewirken, daß letztere Eigenschaft eintrift. Bei dem folgenden Verfahren setzen wir aber voraus, daß sämtliche Resolventen von Null verschieden sind. In den Fällen, wo dies nicht zutrifft, lassen sich die Wurzeln in noch einfacherer Weise darstellen; wir wollen aber der Kürze halber darauf nicht eingehen.

Wollte man nun die Lagrangeschen Resolventen durch die dritten Wurzeln aus den Größen ϱ_{t_1, t_2} ersetzen, so bekäme man für x_{z_1, z_2} einen Ausdruck, welcher die überzählige Anzahl von 3^8 Werten annehmen könnte. Um diesem Übelstande zu entgehen, führen wir acht neue Größen

$$\sigma_{u_1, u_2} = \prod_{t_1 u_1 + t_2 u_2 \equiv 2} (\varepsilon, x)_{t_1, t_2}$$

ein. Man findet leicht, daß auch die Größen σ_{u_1, u_2} einer Gleichung achten Grades genügen, deren Gruppe mit der Gruppe H_2 holoedrisch isomorph ist. Das Produkt

$$\prod_{t_1, t_2} (\varepsilon, x)_{t_1, t_2} = C$$

der Lagrangeschen Resolventen bleibt bei den Substitutionen des Körpers $R(x, \varepsilon)$ ungeändert und ist also eine rationale Größe. Schreiben wir noch

$$\sigma^{\frac{1}{3}}_{u_1, u_2} = \tau_{u_1, u_2},$$

so läßt sich der eben gegebene Ausdruck für x_{z_1, z_2} in die folgende Gestalt umformen

$$\text{(I)} \qquad \frac{1}{9}\left[A + \frac{1}{C}\sum_{t_1, t_2}\left\{\prod_{t_1 u_1 + t_2 u_2 \equiv 1} \tau_{u_1, u_2} \prod_{t_1 u_1 + t_2 u_2 \equiv 2} \tau^2_{u_1, u_2}\right\}\right].$$

Man bekommt alle Werte, welche dieser Ausdruck annehmen kann, wenn $\tau_{0,1}$ und $\tau_{1,0}$ unabhängig voneinander alle ihre Werte durchlaufen und die anderen Größen τ_{u_1, u_2} beliebig fixiert werden. Aus der Gestalt von (I) ersieht man unmittelbar, daß man dieselbe Wirkung bekommt, falls man τ_{u_1, u_2} den Faktor ε oder $\tau_{1,0}$ den Faktor ε^{u_1} und $\tau_{0,1}$ den Faktor ε^{u_2} zufügt. In beiden Fällen bekommt ja das zu den Indizes t_1, t_2 gehörige Summenglied den Faktor $\varepsilon^{t_1 u_1 + t_2 u_2}$. Der zuletzt gefundene

Ausdruck nimmt also nur neun Werte an, d. h. die Werte der neun Wurzeln.

Vielleicht wird man jetzt die Frage stellen: Wie steht denn die Sache mit den primitiven metazyklischen Gleichungen im allgemeinen? Hierzu will ich nur bemerken, daß ich schon 1901 (in der Öfversigt der Schwedischen Akademie d. Wissenschaften) einen Ausdruck für die Wurzeln von entsprechender Form (nur anscheinend etwas allgemeiner) aufgestellt habe. Inwieweit aber die Wurzeln sich wirklich immer in der dort angegebenen Weise darstellen lassen, um dies zu entscheiden, dürften sehr tief gehende Untersuchungen erforderlich sein.

Nur noch ein Paar Worte über die Realität der Wurzeln. Aus dem Wendepunktsprobleme kennt man ja schon einen Fall, wo 3 Wurzeln reell und die übrigen imaginär sind. Man scheint aber noch nicht zu wissen, ob es in dem natürlichen Rationalitätsbereiche metazyklische Gleichungen gibt, welche entweder neun reelle Wurzeln oder eine relle und acht imaginäre Wurzeln besitzen. Diese Fragen können wir jetzt entscheiden. Sind nämlich die Größen σ_{u_1,u_2} sämtlich reell, so bekommt man eine reelle und acht imaginäre Wurzeln. Dagegen hat man neun reelle Wurzeln, falls je zwei Größen σ_{u_1,u_2} und $\sigma_{2u_1,2u_2}$ konjugiert imaginär sind. Daß diese beiden Möglichkeiten bezüglich der Größen σ_{u_1,u_2} wirklich stattfinden, erkennt man leicht. Es genügt z. B. den Fall zu betrachten, wo die zugehörige Gleichung achten Grades zyklisch ist, durch welche Eigenschaft einer der sieben Hauptfälle charakterisiert wird.

Über reduzible Gruppen linearer homogener Substitutionen.

Von

A. Loewy aus Freiburg i. B.

Während die Theorie der endlichen Gruppen linearer homogener Substitutionen seit Cauchys und Galois' Zeiten ein von den Mathematikern eifrig gepflegtes Gebiet darstellt, befindet sich die allgemeine Theorie der Gruppen linearer homogener Substitutionen noch in ihren ersten Stadien. Unter einer Gruppe $\mathfrak{G}$ linearer homogener Substitutionen verstehen wir hierbei eine Gesamtheit linearer homogener Substitutionen von der Vollständigkeit, daß das Produkt irgend zweier sowie die reciproke zu jeder in $\mathfrak{G}$ enthaltenen Substitution der Gesamtheit $\mathfrak{G}$ angehört. Die bei endlichen Gruppen linearer homogener Substitutionen für den Gruppencharakter bereits für sich allein ausreichende Abgeschlossenheit in bezug auf die Produktbildung genügt bei allgemeinen Gruppen linearer homogener Substitutionen nicht. Die Substitutionskoeffizienten von $\mathfrak{G}$ sollen keiner Annahme unterworfen sein; die Gruppe kann also kontinuierlich oder diskontinuierlich sein, jedoch soll durch die Voraussetzung, daß die Gruppe $\mathfrak{G}$ stets das wirkliche Produkt irgend zweier ihr angehöriger Substitutionen enthält, ausgeschlossen sein, daß $\mathfrak{G}$ eine Kongruenzgruppe ist. Im folgenden will ich mir erlauben, über meine Untersuchungen in bezug auf die Reduzibilität der Gruppen linearer homogener Substitutionen zu berichten.

Eine Gruppe $\mathfrak{G}$ linearer homogener Substitutionen in n Variablen heißt reduzibel, wenn man $\nu < n$ lineare homogene Kombinationen der Variablen mit konstanten Koeffizienten finden kann, die durch jede Substitution von $\mathfrak{G}$ nur untereinander transformiert werden. Anders ausgedrückt, eine Gruppe $\mathfrak{G}$ linearer homogener Substitutionen in n Variablen heißt reduzibel, wenn man eine konstante Matrix T von nicht verschwindender Determinante finden kann, so daß die Matrix einer jeden Substitution der zu $\mathfrak{G}$ ähnlichen Gruppe $\mathfrak{A} = T\mathfrak{G}T^{-1}$ von der besonderen Form:

$$
(\mathrm{a})\qquad
\begin{matrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\nu} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\nu} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \cdots & a_{\nu\nu} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
a_{\nu+1,1} & a_{\nu+1,2} & \cdots & a_{\nu+1,\nu} & a_{\nu+1,\nu+1} & a_{\nu+1,\nu+2} & \cdots & a_{\nu+1,n} \\
a_{\nu+2,1} & a_{\nu+2,2} & \cdots & a_{\nu+2,\nu} & a_{\nu+2,\nu+1} & a_{\nu+2,\nu+2} & \cdots & a_{\nu+2,n} \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n\nu} & a_{n,\nu+1} & a_{n,\nu+2} & \cdots & a_{nn}
\end{matrix}
$$

wird.

Lassen sich alle Substitutionen von $\mathfrak{G}$ in die Form (a) überführen, so drücken wir dies auch kurz so aus: $\mathfrak{G}$ läßt sich in die Form

$$
\begin{matrix}
\mathfrak{A}_{11} & 0 \\
\mathfrak{A}_{21} & \mathfrak{A}_{22}
\end{matrix}
$$

bringen; hierbei bedeutet $\mathfrak{A}_{11}$ ein Quadrat mit ν Zeilen und ν Kolonnen, $\mathfrak{A}_{21}$ ein Rechteck mit $n-\nu$ Zeilen und ν Kolonnen, $\mathfrak{A}_{22}$ ein Quadrat mit $n-\nu$ Zeilen und $n-\nu$ Kolonnen. Ist eine Gruppe von der besonderen Form:

$$
\begin{matrix}
\mathfrak{A}_{11} & 0 \\
\mathfrak{A}_{21} & \mathfrak{A}_{22}
\end{matrix},
$$

so bilden die ersten ν Variablen für sich eine zu der ursprünglichen Gruppe isomorphe Gruppe; sie wird durch die Gesamtheit der Matrizes $\mathfrak{A}_{11}$ gegeben. Ebenso bilden auch die Substitutionen in $n-\nu$ Variablen, deren Matrizes durch $\mathfrak{A}_{22}$ bestimmt werden, eine mit der ursprünglichen isomorphe Gruppe. Als einfachstes Beispiel einer reduziblen Gruppe sei irgend eine Permutationsgruppe angeführt; denn bei ihr wird die Summe der Variablen in sich transformiert.

Eine jede reduzible Gruppe $\mathfrak{G}$ linearer homogener Substitutionen läßt sich durch wiederholte Einführung linearer homogener Funktionen der Variablen mit konstanten Koeffizienten stets derartig in eine ähnliche Gruppe $\mathfrak{A} = R\mathfrak{G}R^{-1}$ transformieren, wobei R eine Matrix von nicht verschwindender Determinante ist, daß jede Matrix einer Substitution von $\mathfrak{A}$ oder, wie ich statt dessen kurz sage, die Gruppe $\mathfrak{A}$ von der besonderen Form:

$$
(\mathfrak{A})\qquad
\begin{matrix}
\mathfrak{a}_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\mathfrak{a}_{21} & \mathfrak{a}_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\mathfrak{a}_{31} & \mathfrak{a}_{32} & \mathfrak{a}_{33} & 0 & \cdots & 0 \\
. & . & . & . & . & . \\
\mathfrak{a}_{\lambda 1} & \mathfrak{a}_{\lambda 2} & \mathfrak{a}_{\lambda 3} & \mathfrak{a}_{\lambda 4} & \cdots & \mathfrak{a}_{\lambda\lambda}
\end{matrix}
$$

wird; $\mathfrak{a}_{ki}$ bedeutet hierbei ($k \geqq i$) ein Rechteck mit f_k Zeilen und f_i Kolonnen, $f_1 + f_2 + \cdots + f_\lambda = n$. Sind die λ mit $\mathfrak{G}$ isomorphen Gruppen linearer homogener Substitutionen, die durch die Matrizes $\mathfrak{a}_{11}$, $\mathfrak{a}_{22}, \cdots, \mathfrak{a}_{\lambda\lambda}$ definiert werden, was stets zu erreichen und worauf für das Folgende besonderes Gewicht zu legen ist, irreduzible Gruppen, so sagen wir: $\mathfrak{G}$ ist unter Hervorhebung seiner irreduziblen Bestandteile oder Teilgruppen in eine ähnliche Gruppe transformiert; die irreduziblen Gruppen $\mathfrak{a}_{11}, \mathfrak{a}_{22}, \cdots, \mathfrak{a}_{\lambda\lambda}$ heißen die irreduziblen Bestandteile oder Teilgruppen von $\mathfrak{G}$, die sich bei der Darstellung von $\mathfrak{G}$ in der Form $\mathfrak{A}$ ergeben.

Für die irreduziblen Bestandteile von $\mathfrak{G}$ gilt der auch für die Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen wichtige Satz, daß, wie auch immer die Gruppe $\mathfrak{G}$ unter Hervorhebung ihrer irreduziblen Bestandteile in eine ähnliche Gruppe transformiert wird, die irreduziblen Bestandteile von $\mathfrak{G}$, falls man ähnliche Gruppen als nicht verschieden ansieht, bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt sind. (Über die Reduzibilität der Gruppen linearer homogener Substitutionen. Transactions of the American Math. Society, Vol. 4, S. 44.)

Unter den Gruppen linearer homogener Substitutionen verdienen diejenigen eine besondere Aufmerksamkeit, die ich nach einem brieflichen Vorschlage von Herrn W. Burnside*) als vollständig reduzibel bezeichne. Eine Gruppe $\mathfrak{G}$ linearer homogener Substitutionen heißt vollständig reduzibel, wenn man wenigstens eine konstante Matrix R von nicht verschwindender Determinante finden kann, so daß die zu $\mathfrak{G}$ ähnliche Gruppe $R\mathfrak{G}R^{-1}$ von der besonderen Form:

$$\begin{matrix} \mathfrak{a}_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathfrak{a}_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{a}_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathfrak{a}_{\lambda\lambda} \end{matrix}$$

wird, also außer in der Diagonale lauter Nullmatrizes enthält. Eine vollständig reduzible Gruppe linearer homogener Substitutionen ist mithin auf folgende Art charakterisiert: Man kann durch Einführung neuer Variablen stets erreichen, daß die Variablen nach der Transformation in Systeme zerfallen, die Variablen eines jeden Systems sich nur untereinander transformieren und die Gruppen linearer homogener Sub-

*) Vgl. wegen dieses Begriffes auch W. Burnsides Aufsätze in den Acta mathematica, Bd. 28, S. 369 und in den Proceedings of the London Math. Society (2) Vol. 1, S. 117 (Jahrg. 1903).

stitutionen, die jedes Variablensystem für sich allein definiert, irreduzibel sind. In der Bezeichnung „vollständig reduzibel" sollen auch die irreduziblen Gruppen eingeschlossen sein; bei den irreduziblen Gruppen ist in dem zuletzt hingeschriebenen Schema $\lambda = 1$.

Bei einer großen Anzahl von Gruppen folgt aus ihrem Charakter unmittelbar ihre vollständige Reduzibilität. Eine derartige Klasse von Gruppen habe ich in den Transactions of the American Math. Society, Vol. 4, S. 171, mitgeteilt, und Herr L. E. Dickson hat im Anschluß an meine Untersuchungen das von mir erhaltene Resultat ebendort, S. 434, sehr weitgehend verallgemeinert. Bei mir handelt es sich um Gruppen linearer homogener Substitutionen mit reellen Koeffizienten, bei Herrn Dickson um solche mit Koeffizienten aus einem gewissen unendlichen Zahlkörper.

Zu den vollständig reduziblen Gruppen gehören, wie man beweisen kann, alle Gruppen linearer homogener Substitutionen, die eine definite Hermitesche Form in sich transformieren.

Nach einem von Herrn Moore und mir in der gleichen Woche veröffentlichten Satze gehört zu jeder endlichen Gruppe linearer homogener Substitutionen eine invariante definite Hermitesche Form. Aus dem mitgeteilten Theoreme folgt daher der von Herrn Frobenius im Verlaufe seiner tiefgehenden Untersuchungen über die endlichen Gruppen linearer homogener Substitutionen erhaltene und auch hiervon unabhängig von Herrn Maschke (Math. Annalen Bd. 52) gefundene Fundamentalsatz: Jede endliche Gruppe linearer homogener Substitutionen ist vollständig reduzibel.

Während jede endliche Gruppe linearer homogener Substitutionen vollständig reduzibel ist, trifft dies nicht für jede unendliche zu. Es gilt folgender Satz:

Zu jeder Gruppe $\mathfrak{G}$ linearer homogener Substitutionen gehören μ vollständig reduzible Gruppen linearer homogener Substitutionen; diese sind ebenso wie die irreduziblen Bestandteile von $\mathfrak{G}$, wenn man ähnliche Gruppen als nicht verschieden ansieht, völlig eindeutig bestimmt. Die μ vollständig reduziblen, zu $\mathfrak{G}$ gehörigen Gruppen sind, was für die irreduziblen Bestandteile von $\mathfrak{G}$ nicht zutrifft, auch ihrer Reihenfolge nach eindeutig festgelegt. Man kann also von der ersten, zweiten usw. bis μten vollständig reduziblen zu $\mathfrak{G}$ gehörigen Gruppe sprechen. Die Gesamtzahl der Variablen der μ Gruppen ist gleich der Variablenzahl von $\mathfrak{G}$. Ist $\mu = 1$, so ist $\mathfrak{G}$ vollständig reduzibel.

Die vorstehenden Sätze sind nicht nur, wie ich glaube, insofern von Wert, als sie über die Stellung der endlichen Gruppen linearer homogener Substitutionen in der allgemeinen Theorie Aufschluß geben, sie lieferten mir auch neue Gesichtspunkte für die Theorie der Reduzibilität der linearen homogenen Differentialgleichungen.

Der Begriff der Reduzibilität einer linearen homogenen Differentialgleichung erfordert die Fixierung eines Rationalitätsbereiches Σ. Der Einfachkeit wegen sei Σ ein unendlicher Zahlkörper Ω oder ein System rationaler Funktionen einer Variablen mit Koeffizienten aus einem Zahlkörper Ω. Alle auftretenden Differentialgleichungen sollen ausnahmslos Koeffizienten aus Σ haben. Im Anschluß an Herrn Frobenius nennen wir eine lineare homogene Differentialgleichung mit Koeffizienten aus Σ irreduzibel oder reduzibel, je nachdem sie mit einer linearen homogenen Differentialgleichung niedrigerer Ordnung mit Koeffizienten aus Σ kein oder ein Integral gemeinsam hat. Eine lineare homogene Differentialgleichung $V = 0$ mit Koeffizienten aus Σ heißt vollständig reduzibel, wenn man voneinander verschiedene irreduzible lineare homogene Differentialgleichungen $J_1 = 0$, $J_2 = 0, \cdots, J_\mu = 0$ mit Koeffizienten aus Σ finden kann, so daß die Ordnung der vorgelegten linearen homogenen Differentialgleichung $V = 0$ gleich der Summe der Ordnungen von $J_1 = 0$, $J_2 = 0, \cdots, J_\mu = 0$ wird und $V = 0$ unter allen linearen homogenen Differentialgleichungen diejenige niedrigster Ordnung ist, die durch die Integrale aller Differentialgleichungen $J_1 = 0$, $J_2 = 0, \cdots, J_\mu = 0$ gleichzeitig erfüllt wird. Von der vollständig reduziblen linearen homogenen Differentialgleichung $V = 0$ sagen wir auch: sie ist das kleinste gemeinsame Vielfache der irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen $J_1 = 0$, $J_2 = 0, \cdots, J_\mu = 0$. Eine vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung $V = 0$ kann auch auf folgende, mit der obigen gleichwertige Weise charakterisiert werden: für sie existiert wenigstens ein Fundamentalsystem von Integralen, so daß ein jedes Element dieses Fundamentalsystems auch Integral einer irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichung wird. Die irreduzible lineare homogene Differentialgleichung soll als Spezialfall der vollständig reduziblen linearen homogenen Differentialgleichung angesehen werden.

Man kann dann beweisen: Existiert für eine vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung $V = 0$, die kleinstes gemeinsames Vielfaches der irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen $J_1 = 0$, $J_2 = 0, \cdots, J_\mu = 0$ ist, nur noch eine von den angegebenen verschiedene irreduzible lineare homogene Differentialgleichung, die mit $V = 0$ ein Integral gemeinsam hat, so wird $V = 0$ durch die Integrale von unendlich vielen verschiedenen irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen befriedigt; eine vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung ist nur auf eine einzige oder auf unendlich viele Weisen kleinstes gemeinsames Vielfaches irreduzibler linearer homogener Differentialgleichungen.

Nicht jede lineare homogene Differentialgleichung $D = 0$ mit Koeffizienten aus Σ ist vollständig reduzibel. Zu jeder linearen homogenen Differentialgleichung $D = 0$ mit Koeffizienten aus Σ gehört eine eindeutig bestimmte vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung höchster Ordnung mit Koeffizienten aus Σ, deren sämtliche Integrale der Gleichung $D = 0$ genügen. Notwendig und hinreichend, damit eine lineare homogene Differentialgleichung $D = 0$ mit unendlich vielen irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen Integrale gemeinsam hat, ist, daß die zu $D = 0$ gehörige vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung höchster Ordnung sich wenigstens auf zwei und daher auf unendlich viele Arten als kleinstes gemeinsames Vielfaches irreduzibler linearer homogener Differentialgleichungen auffassen läßt. Hieraus folgt als spezieller Fall der Satz:

Wird eine lineare homogene Differentialgleichung $D = 0$ mit Koeffizienten aus Σ nur durch die Integrale einer endlichen Anzahl verschiedener irreduzibler linearer homogener Differentialgleichungen befriedigt, so muß die Summe der Ordnungen dieser irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen stets kleiner oder höchstens gleich der Ordnung von $D = 0$ sein.

Sur une catégorie d'équations fonctionnelles.*)

Von

K. Stephanos aus Athen.

Monsieur Stephanos part de la proposition suivante:

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction de deux variables $F(x, y)$ soit exprimable par une formule telle que:

$$F(x, y) = \Sigma \varphi_i(x) \psi_i(y), \qquad (i = 1, 2, \cdots m)$$

consiste dans l'évanouissement identique du déterminant

$$\begin{vmatrix} F & \frac{\partial F}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial^m F}{\partial x^m} \\ \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \cdots & \frac{\partial^{m+1} F}{\partial x^m \partial y} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^m F}{\partial y^m} & \frac{\partial^{m+1} F}{\partial x \partial y^m} & \cdots & \frac{\partial^{2m} F}{\partial x^m \partial y^m} \end{vmatrix},$$

et expose les résultats de l'application de cette proposition à l'examen des questions suivantes:

1. Quelles sont les fonctions $f(x)$ donnant lieu à une formule d'addition telle que:

$$f(x + y) = \Sigma \varphi_i(x) \psi_i(y), \qquad (i = 1, 2, \cdots m).$$

2. Quelles sont les fonctions $f(x)$ donnant lieu à une formule telle que:

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \Sigma \varphi_i(x) \psi_i(y), \qquad (i = 1, 2, \cdots m).$$

*) Une exposition plus détaillée de cette communication sera insérée dans le vol. XVIII (1904) des Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.

3. Quelles sont les fonctions $f(x)$ donnant lieu à une formule telle que:

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \Sigma \varphi_i(x) \psi_i(y) (x-y)^{i-1}, \qquad (i = 1, 2, \cdots m).$$

4. Dans quel cas le développement de $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ par la formule de Lagrange conduit à une expression à m termes:

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \Sigma \psi_i(y) \frac{(x-y)^{i-1}}{[\varphi(x)]^i}, \qquad (i = 1, 2, \cdots m),$$

où:

$$\psi_i(y) = \frac{1}{i!} \frac{d^{i-1}[f'(y) \varphi(y)^i]}{dy^{i-1}}.$$

On Products in Additive Fields.

Von

E. B. Wilson aus New Haven.

---

1. Introductory. — That to which I ask your attention at this time is intimately related to vector analysis, but the treatment here followed will be from a far broader point of view than that usually adopted in discussing a geometrical or physical analysis and every attempt will be made to avoid the numerous petty disputes over questions of mere notation. To indicate the present viewpoint the general title „products in additive fields" has been chosen, and that which follows may be considered as belonging to the subject of multiple algebra in its most extended sense rather than to any one special multiple algebra.

As it is not our purpose in this communication to discuss the foundation of Multiple Algebra whether upon a system of logical concepts or upon a set of postulates, we merely state — what is probably subject to no mistaken interpretation — that the members of the fields considered may be added (and subtracted) according to the ordinary rules of algebraic operation, and that in particular any two members of the field, say $\boldsymbol{a}$ and $\boldsymbol{b}$, may be expressed by means of numerical coefficients a_i and b_i in terms of the same finite number of fundamental elements $\boldsymbol{e}_i$, called units. Thus

$$\boldsymbol{a} = \sum_1^n a_i \boldsymbol{e}_i, \qquad \boldsymbol{b} = \sum_1^n b_i \boldsymbol{e}_i$$

2. Historical. — It would be ungracious to begin without first acknowledging that all which I have to say draws its immediate inspiration from the late J. Willard Gibbs, and that the more important part of what I here offer must be attributed directly to him. Yet, to determine exactly whether or not he might have agreed to all that follows is impossible. Thus while giving to him all that may be valuable and broad-minded, I wish distinctly to reserve for myself whatever is narrow-minded or mistaken.

A little history may be pardoned. In the early eighties Gibbs printed, for private distribution and especially for the use of his pupils in mathematical physics, a small pamphlet entitled *Elements of Vector Analysis.**) Twenty years later when it was desired that a more formal publication of the matter should be made, the author put forward two strong objections. In the first place he contended that there was not enough of originality in what he had accomplished in vector analysis. Although the method resembles to a large extent that of Grassmann and although the ideas that underlie it are, as we shall see, yet more closely allied to those of the author of the *Ausdehnungslehre,* nevertheless whoever is acquainted with Gibbs's treatment of the potential and of dyadics with especial reference to that which concerns double multiplication will readily attribute this first objection to the author's well known modesty.**) In the second place he felt convinced that few, if any, could understand the import of his *views* in the smaller field of vector analysis if the *Vector Analysis****) was published apart from a more general work on Multiple Algebra. Although the criticisms adverse or favorable, which have been passed on the *Vector Analysis* have quite substantiated this prophetic conviction of Gibbs, one may be permitted not so much to regret the publication of that work as to lament the fact that death came before it was possible to publish the *Multiple Algebra.*

In 1886 Gibbs, then vice-president of the American Association for the Advancement of Science, delivered an address on *Multiple Algebra.* This was published in the *Proceedings* of the Association†), where unfortunately it has shared to a large extent the oblivion so long suffered by the more famous papers on thermodynamics. Like them, too, it is written in a very general and none too clear style. Although written more than fifteen years before the author's death, this address is his most important publication on multiple algebra,

---

*) *Elements of Vector Analysis arranged for the use of students in Physics* by J. Willard Gibbs. New Haven. 88 pp. 1881—4. No longer to be obtained.

**) His use of ideas other than Grassmann's was considerable. See §§ 4—7.

***) *Vector Analysis: a text-book for the use of students of mathematics and physics:* founded upon the lectures of J. Willard Gibbs, by Edwin Bidwell Wilson. New York, Charles Scribner's Sons, XIII + 436 pp. 1901.

†) Proceedings of the American Association for the Advancement of Science, vol. 35, pp. 37—66 (1887); hereafter cited as *Adress.*

and as such it deserves careful study not alone for what it states precisely but, like the works of other great men such as Maxwell and Grassmann, for what it suggests. In his lectures on multiple algebra, Gibbs spent so much of his time in developing the more restricted geometrical algebras of Grassmann, whose work he so much admired, that he frequently did not get far beyond the content of this address and it is to be feared that the manuscript which he left behind contains but an inconsiderable part of what he had in a state of full development in his mind.

3. The formal product. — In the first *Ausdehnungslehre* Grassmann, the great philosopher of algebra whose real successor in many ways was Gibbs, wrote as follows:*)

Die Beziehung der Multiplikation zur Addition haben wir dahin bestimmt, daß

$$\begin{aligned}(a+b)c &= ac+bc\\ c(a+b) &= ca+cb\end{aligned} \tag{1}$$

ist; und dadurch war uns der Begriff der Multiplikation festgestellt.

In 1897 Whitehead**) states the definition more explicitly, pointing out that the two multiple quantities which are multiplied need not belong to the same field and that the product need not possess the associative property. It may incidentally be noted that the product does not necessarily belong to the field of either factor or to a field constructed from the combined fields of both factors.

If equations (1) and these alone are taken as the complete definition of the product of multiple quantities, the product becomes purely formal. Let

$$a = \sum_1^n a_i e_i \quad \text{and} \quad b = \sum_1^m b_j e_j,$$

then

$$ab = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=m} a_i b_j e_i e_j' \tag{2}$$

This is a new multiple quantity with nm units $e_i e_j'$. It may further be noted that the product

$$abc = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=m} \sum_{k=1}^{k=l} a_i b_j c_k e_i e_j' e_k''$$

of three factors is necessarily associative provided that no other conditions than equations (1) are imposed. For then the units $e_i e_j' e_k'$

*) *Ausdehnungslehre* (1844) § 10, p. 11, Edition of 1878.

**) *A Treatise on Universal Algebra*, vol. 1, pp. 26—27.

are merely symbols or keys (to use the expression of Cauchy). The introduction of other conditions may or may not render the product non-associative. Thus in the case of vectors, the vector product is non-associative, the scalar product does not admit the association of factors, whereas the quaternion product and the exterior product of Grassmann are associative. The equality $\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{a'b'}$ of two formal products evidently implies the equality of the corresponding factors, except for the possible transference of a scalar multiplier from one factor to another. That is, if $\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{a'b'}$, then $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{a'}$ and $\boldsymbol{b} = y\boldsymbol{b'}$, where $xy = 1$. Thus the knowledge of the value of the formal product affords as much information concerning the individual factors as could be expected.*)

The case which arises almost universally in practice is that in which the two multiple quantities occurring in a product belong to fields constructed from the same number of fundamental units. And this is the case which we shall consider from this point on. The formal product is, then, a multiple quantity in a field of n^2 units. If the units $\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$ be considered as denoting the position of the terms, the formal product $\boldsymbol{ab}$ becomes in a certain manner equivalent to the matricular array

$$\begin{matrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & a_n b_n . \end{matrix}$$

The multiple quantity formed by adding together a number of terms $\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{b}_j$, that is a *dyadic polynomial*

$$\Phi = \Sigma c_i \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{b}_i,$$

may evidently be expressed in the same manner. It is the possibility of developing a theory of dyadic polynomials which shall include the theory of matrices that makes the study of the formal product or dyad of especial importance. The definition (see below) of a product which has a scalar value and which may be denoted by $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, immediately suggests the use of the dyadic polynomial to express a linear transformation. If $\boldsymbol{r}$ be the vector of a point in space,

$$\boldsymbol{r}' = \Phi\cdot\boldsymbol{r} = \Sigma c_i \boldsymbol{a}_i (\boldsymbol{b}_i\cdot\boldsymbol{r}) = \Sigma c_i (\boldsymbol{b}_i\cdot\boldsymbol{r}) \boldsymbol{a}_i$$

and the multiplication of matrices

$$\Phi\cdot\Phi' = (\Sigma c_i \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{b}_i)\cdot(\Sigma c_j' \boldsymbol{a}_j' \boldsymbol{b}_j') = \Sigma c_i c_j' (\boldsymbol{b}_i\cdot\boldsymbol{a}_j') \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{b}_j'.$$

Thus if one but stops to consider the formal product before passing

*) Compare *Vector Analysis*, pp. 272—3.

on to the detailed theory of special products, he can see at a glance that this product not only has logical precedence over all others but may naturally serve the end of giving expression to the closely related and important subjects of matrices and linear transformations.

4. **Special Products.** — The introduction of the special products may be made from several points of view. To follow the method used by Grassmann, let there be assumed certain supplementary equations of condition of the form

$$\Sigma a_{rs} e_r e_s = 0 \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, n)$$

between the units e_r, e_s. Let it further be assumed that the equations (1) are unchanged when for the units e_r, e_s there be substituted any quantities in their field. These assumptions lead to Grassmann's *lineal**) product, of which there are two types, called algebraic and combinatory, defined by the relations

$$e_r e_s = e_s e_r \qquad \text{algebraic,}$$
and
$$e_r e_s = -e_s e_r \qquad \text{combinatory.} \tag{3}$$

The first of these is of utmost importance in the theory of invariants. But far greater attention is usually bestowed upon the second, out of which is built the theory of the progressive and regressive products and all the geometric interpretations so intimately connected with them. It may well be doubted if there is any more elegant and natural method of treating the ordinary geometric properties of n-dimensional space than by following the method of Grassmann. It was this that Gibbs was accustomed to do in the first part of his course on multiple algebra; using, however, the formal product rather than Grassmann's fraction to represent the linear function.

It is to be noticed that when following this method of procedure the product of two factors does not belong to the field of the factors, but is of the second kind. In the same way, the product of three factors is in a new field, a field of the third kind; and so on. This constitutes a radical departure from the ordinary ideas of algebra in which the product belongs to the field of the factors. Moreover, the restriction to lineal products cuts out a large number of important algebras. For instance, in quaternions and biquaternions the product of two factors follows neither of the rules (3). Thus there is suggested a second general point of view which in its origin seems to be purely algebraic, whereas the system of Grassmann was in its origin (though not in all the subsequent development) geometric.

*) *Sur les différents genres de multiplication*, Crelles Journal, vol. 49, pp. 123—141 (1855). *Ausdehnungslehre* (1862), § 37, pp. 20—21.

Following Benjamin Peirce, it may be assumed that the product belongs to the field of the factors.*) The value of the product is then determinable by setting up a multiplication table for the units. Thus if $e_i e_j = e_{i+j}$ and if two e's are considered equal when their indices differ by a multiple of n, multiplication is the same as algebraic multiplication in a cyclotomic body. In this case multiplication is associative. If there are three units and if $e_i e_j = \pm e_k$ according as i, j, k are in the cyclic order 123 or 132, multiplication is the same as that of the vector product. Here multiplication is not associative. The problem of determining all the linear associative algebras which possess a modulus has recently been exhaustively treated by H. E. Hawkes**). The corresponding problem for non-associative algebras has not been treated, so far as I am aware. Yet the restriction of association cannot always be imposed upon the algebras with which it is convenient to work: witness, the various vector algebras in current use among physicists. Moreover, the restriction that the products belong to the field of the factors may readily be abandoned.

Thus it is seen that neither the points of view and developments of Grassmann nor those of Peirce are in themselves so all-inclusive as to render the others unworthy of consideration. As a further corroboration of this may be mentioned the fact that the *Encyclopaedie der Mathematischen Wissenschaften*, Bd. 1***), contains a report on the latter, while it is reserved for another volume to present the former. Evidently the multiple algebra of to-day, if it would be complete, must treat both sides of the matter.

5. **Vector Algebra.**†) — These two points of view and the possibility of combining them, coupled with the desire to create some-

*) The germ of the idea certainly goes back to Hamilton, but Peirce's memoir on *Linear Associative Algebra* was the first to give anything approaching a satisfactory treatment of the general problem.

**) *The enumeration of non-quaternion number-systems*, Mathematische Annalen, vol. 58, pp. 361—389 (1904). Other references to the literature will be found there.

***) *Theorie der gemeinen und höheren komplexen Größen* von E. Study. pp. 147—183. Compare foot-note 13: „Bei den verwandten Begriffsbildungen Grassmann's fehlt ein wesentliches Moment, nämlich die Zurückleitung der Produkte auf die Größen des Systems selbst.“ And foot-note 6: „In allgemeinerem Sinne noch als in der Theorie der Systeme komplexer Größen werden die Worte Produkt und Multiplikation von H. Grassmann und anderen verwendet.“

†) This fifth section may be regarded more particularly than the rest of the communication as a reply to R. Mehmke's *Vergleich der Vectoranalysis amerikanischer Richtung und derjenigen deutsch-italienischer Richtung*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, vol. 13, pp. 217—228 (1904).

thing which should be simple and useful for the physicist rather than for the geometer, were the elements that Gibbs had in mind in constructing his vector analysis. Taking the general standpoint of Grassmann the formal product was regarded as the fundamental product. This is

$$\begin{aligned} \boldsymbol{ab} = {} & a_1 b_1 \boldsymbol{ii} + a_1 b_2 \boldsymbol{ij} + a_1 b_3 \boldsymbol{ik} \\ & + a_2 b_1 \boldsymbol{ji} + a_2 b_2 \boldsymbol{jj} + a_2 b_3 \boldsymbol{jk} \\ & + a_3 b_1 \boldsymbol{ki} + a_3 b_2 \boldsymbol{kj} + a_3 b_3 \boldsymbol{kk}, \end{aligned}$$

if
$$\boldsymbol{a} = a_1 \boldsymbol{i} + a_2 \boldsymbol{j} + a_3 \boldsymbol{k}$$
and
$$\boldsymbol{b} = b_1 \boldsymbol{i} + b_2 \boldsymbol{j} + b_3 \boldsymbol{k}.$$

From this the scalar product may be obtained by means of the multiplication table

	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}$	1	0	0
$\boldsymbol{j}$	0	1	0
$\boldsymbol{k}$	0	0	1

and the vector product by means of

	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}$	0	$\boldsymbol{k}$	$-\boldsymbol{j}$
$\boldsymbol{j}$	$-\boldsymbol{k}$	0	$\boldsymbol{i}$
$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{j}$	$-\boldsymbol{i}$	0

Thus *)
$$\boldsymbol{a}{\scriptstyle s}\boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$
and
$$\boldsymbol{a}{\scriptstyle v}\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k}.$$

In this way the point of view taken by Peirce comes in as an essential idea in the system — but broadened so as to include the pos-

*) Gibbs used $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ and $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ where we use $\boldsymbol{a}{\scriptstyle s}\boldsymbol{b}$ and $\boldsymbol{a}{\scriptstyle v}\boldsymbol{b}$. We have introduced the change here merely for the convenience of the reader who may not be sufficiently familiar with the $\cdot$ and the $\times$ to remember which it is that denotes the scalar product and which the vector product. The use of the dot and the cross has been criticised on the ground that they are separators in ordinary algebra but are used to unite the factors rather than to separate them in vector algebra. This objection is hardly valid. For, were it not for the *separation* implied by the dot and the cross, the factors would come together and make the formal product $\boldsymbol{ab}$.

sibility of the product being not of the field of the factors. Regarding the matter from a purely theoretical and philosophical point of view I fail to find in any other system of vector algebra ideas so broad and instructive, so in accord with that liberal attitude which must be taken now-a-days in dealing with multiple algebra as a whole.

As there is considerable divergence of opinion in regard to the relations between the products of Grassmann and those of Gibbs, it may be permitted to go into some detail as to the ideas underlying the combinatory product $[\boldsymbol{ab}]$ which is of the second kind, its index $|[\boldsymbol{ab}]$ which is of the first kind, and the interior product $[\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}]$ — contrasting them with the products $\boldsymbol{a}_s\boldsymbol{b}$ and $\boldsymbol{a}_v\boldsymbol{b}$.

The numerical value of $[\boldsymbol{ab}]$ does not differ from that of $\boldsymbol{a}_v\boldsymbol{b}$. But there are vital differences between the products. When the directions of the axes are reversed $[\boldsymbol{ab}]$ does not change sign, whereas $\boldsymbol{a}_v\boldsymbol{b}$ does.' Moreover, analytically $[\boldsymbol{ab}]$ is a quantity of the second kind and is not in the field of the factors, whereas $\boldsymbol{a}_v\boldsymbol{b}$ is of the first kind and is in the field of its factors: geometrically speaking, the former represents a plane, the latter a directed line. The conceptions are different and each seems equally valid. Why anybody should wish to deny the utility of either one is not easy to see. For the development of projective geometry in three or in n dimensions and for exhibiting the law of duality, the combinatory product $[\boldsymbol{ab}]$ has undoubted advantages over the vector product. For these purposes Gibbs used it to the exclusion of the latter. But for use in the ordinary branches of physics he discarded it. The physicist cares little for the principle of projective duality, little for n dimensions. Moreover he has to do with so many radically different sorts of vector quantities — displacements, couples, plane areas, forces, fluxes — that, if he is to have any vector analysis at all, he must regard the elements which are common to all these directed quantities rather than those which are different in the different quantities. And of the differences the nice geometric question of distinguishing between directed lines and oriented planes is among the least noteworthy. Long before any vector method became widely used the physicist was accustomed to look upon an element of surface as a directed quantity, directed along the normal to the surface.

The index $|[\boldsymbol{ab}]$ of the product $[\boldsymbol{ab}]$ is numerically equal to the vector product $\boldsymbol{a}_v\boldsymbol{b}$; and it suffers the same change of sign when the directions of the axes are reversed. But when it is introduced in the manner chosen by Grassmann it appears more as a function of the product $[\boldsymbol{ab}]$ than as a product itself, existing by its own right. Once the point of view be changed and the combinatory product be abandoned in defining the vector product, the method becomes essentially that of Gibbs and the notation of the index had best be abandoned, or rather reserved for its proper uses — for it has important uses.*) I would by no means belittle the value of the index. I would merely point out that there are other points of view which are equally possible and which for some purposes may be preferred.

With respect to the scalar product $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ and the interior product $[\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}]$, much the same line of argument may be applied. So different are they in point of view that nothing but their common numerical value could ever for a moment have led to their confusion. The first, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$, deals directly with two vector quantities, whether they represent lines or planes or a line and a plane, in much the same way as the formula

$$\cos \Theta = ll' + mm' + nn'$$

deals with the direction-cosines l, m, n and l', m', n' without stopping to enquire whether they be the direction-cosines of a straight line or of the normal to a plane. The product $[\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}]$ multiplies the vector $\boldsymbol{a}$ and the index of the vector $\boldsymbol{b}$. This is an indirect method of handling the vector $\boldsymbol{b}$ and cannot appeal very strongly to the physicist. Moreover, it should be pointed out that the product $[\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}]$ is in no sense a scalar product except by accident, and then not always. The product is in reality the combinatory product of $\boldsymbol{a}$ and the index of $\boldsymbol{b}$.**) Now if $\boldsymbol{a}$ and $\boldsymbol{b}$ both represent lines, the index of $\boldsymbol{b}$ is a plane and the product $[\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}]$ becomes a scalar quantity by virtue of the assumption that in a three-dimensional system the product of the three independent units is a scalar. If on the other hand, $\boldsymbol{b}$ represents a plane (is a bivector in the sense of Mehmke), the index of $\boldsymbol{b}$ is a line and the product $[\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}]$ is a vector quantity. In similar manner if $\boldsymbol{a}$ represents a plane, and $\boldsymbol{b}$ a line, the product (by the theory of regression) is a vector. Finally if $\boldsymbol{a}$ is a plane vector and $\boldsymbol{b}$ also a plane vector, the product again takes on a scalar value.

Two illustrations of this difference can be obtained from mechanics. In the system of Gibbs the work is always expressed as

$$dW = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}.$$

In the case of the motion of a particle the force is, apart from its dimensions, a directed line. So is also the displacement. But to represent the work in Grassmann's system it becomes necessary to

*) Gibbs made constant use of the index in his course on multiple algebra.

**) *Ausdehnungslehre* (1862), § 137, p. 107.

regard either the displacement or the force as a plane vector. Thus in this case

$$dW = [\boldsymbol{F} | d\boldsymbol{r}] = [d\boldsymbol{r} | \boldsymbol{F}].$$

In the theory of continuous media the force is pressural. It may be represented as the product of a surface into a scalar; $\boldsymbol{F} = f d\boldsymbol{S}$. Then the work, in the system of Grassmann, becomes

$$dW = [\boldsymbol{F} d\boldsymbol{r}] = f[d\boldsymbol{S} d\boldsymbol{r}].$$

Now it is certainly permissible and probably reasonable for the physicist to sacrifice the distinction between line vectors and plane vectors, which is less than other distinctions between the directed quantities which he employs, and to give up the geometric principles of duality and of n dimensions, which he rarely wants, rather than to have two different notations for the scalar product.*) Precisely the same remark applies in the case of the index and the vector product. The index of the combinatory product is not a vector product and the interior product is not a scalar product. The values of the interior product and of the index of the combinatorial product depend on what sort of factors have been multiplied together.

This is not a distinction without a difference. And I have gone into the matter to such an extent merely to indicate in some measure why and how Gibbs, who was as enthusiastic in his admiration of Grassmann as anyone could be and who spent much of his course on multiple algebra in developing the method of Grassmann, did nevertheless deliberately depart from that method and draw somewhat on the method of Peirce in constructing the vector analysis which he thought most apt for use in physics.

6. **Double Products.****) — After this long digression into the special field of vector algebra it is necessary to return to the general subject of multiple algebra and take up the consideration of the products of dyads and dyadic polynomials. Grassmann's „point analysis" will serve as an illustration. Let A, B, C, D be four points not lying in the same plane. Let a, b, c, d be four scalars so chosen that their sum is unity. Then any point X may be expressed in one and only one way as

$$X = aA + bB + cC + dD.$$

Then, if the open product of Grassmann***) be employed, the linear

*) Compare L. Prandtl: *Über die physikalische Richtung in der Vektoranalysis*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, vol. 13, pp. 436—449 (1904).

**) Compare Gibbs' *Address*, p. 60. And *Vector Analysis*, pp. 306—321.

***) *Ausdehnungslehre* (1844), § 172, pp. 264—272, Edition of 1878. The de-transformation of the space of the points X into that of the points X' is given by

$$X' = \Phi X,$$

where*)

$$\begin{aligned}(ABCD)\Phi = {} & a_{11}A\cdot()\,|\,A + a_{12}A\cdot()\,|\,B + a_{13}A\cdot()\,|\,C + a_{14}A\cdot()\,|\,D\\ & + a_{21}B\cdot()\,|\,A + a_{22}B\cdot()\,|\,B + a_{23}B\cdot()\,|\,C + a_{24}B\cdot()\,|\,D\\ & + a_{31}C\cdot()\,|\,A + a_{32}C\cdot()\,|\,B + a_{33}C\cdot()\,|\,C + a_{34}C\cdot()\,|\,D\\ & + a_{41}D\cdot()\,|\,A + a_{42}D\cdot()\,|\,B + a_{43}D\cdot()\,|\,C + a_{44}D\cdot()\,|\,D\end{aligned}$$

and where the sum of the coefficients in the columns is in each case unity. The plane at infinity is left invariant by such a transformation. The dyadic Φ, therefore, represents the most general affine transformation of space. The product of two such transformations is represented by the product of their dyadic polynomials, the product of the individual dyads being indicated by

$$(B\cdot()|C)\,(A\cdot()|D) = B\cdot[A|C]\cdot()|D = [A|C]\cdot B\cdot()|D.$$

The parenthesis which indicates where the letter is to be inserted in forming the product may be dispensed with if the sign of the index be placed between the dyadic and the letter into which it is to be multiplied. Thus

$$X' = \Phi|X,$$

where

$$\begin{aligned}(ABCD)\Phi = {} & a_{11}\,A\cdot A + a_{12}\,A\cdot B + a_{13}\,A\cdot C + a_{14}\,A\cdot D\\ & a_{21}\,B\cdot A + a_{22}\,B\cdot B + a_{23}\,B\cdot C + a_{24}\,B\cdot D\\ & a_{31}\,C\cdot A + a_{32}\,C\cdot B + a_{33}\,C\cdot C + a_{34}\,C\cdot D\\ & a_{41}\,D\cdot A + a_{42}\,D\cdot B + a_{43}\,D\cdot C + a_{44}\,D\cdot D.\end{aligned}$$

The multiplication of two dyads is now indicated as

$$B\cdot C|A\cdot D = [C|A]\,B\cdot D.$$

The product of two transformations will now be represented by $\Phi|\Psi$. The difference in the notations amounts in reality to little more than a question whether the sign of multiplication shall be introduced into the body of the dyad or placed between the dyads.**)

---

velopments in the second *Ausdehnungslehre* (1862), §§ 353—363, pp. 228—233, where more than one opening is allowed are more general.

*) If $ABCD = 1$, this factor can be omitted. Otherwise it must be retained to keep the „dimensions" right.

**) It is, of course, possible to write the first expression for Φ in such a manner that the opening comes on the end. This is the form in which Gibbs used the dyadic. The individual dyads appeared as the formal product of a point and a plane. In the form we have given second the dyads are products of points.

The second method of notation lends itself readily to expressing a double product*) which has a scalar value and which is defined by equations like

$$B \cdot C \,||\, A \cdot D = [B|A]\,[C|D].$$

This double product corresponds to a multiplication of two matrices performed by multiplying the terms in corresponding places in the matrices and adding the products.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} = a_{11} b_{11} + a_{12} b_{12} + \cdots + a_{1n} b_{1n} \\ + a_{21} b_{21} + a_{22} b_{22} + \cdots + a_{2n} b_{2n} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ + a_{n1} b_{n1} + a_{n2} b_{n2} + \cdots + a_{nn} b_{nn}. \end{matrix}$$

In a similar manner a double product founded on the combinatory instead of the interior product may be formed. As the exterior product has been denoted by bracketing the letters, the double product will be denoted by placing two brackets around the dyads. The defining equations are like

$$[[B \cdot C,\, A \cdot D]] = [BA] \cdot [CD].$$

This is again a dyad, but of a different sort from the original dyads. If a dyadic be multiplied into itself by this double multiplication and if the result be divided by 2, the dyadic thus obtained gives the transformation not of points into points but of segments into segments.**)

$$\Phi_2 = \tfrac{1}{2}[[\Phi\Phi]], \qquad X'Y' = [\Phi_2|XY].$$

In like manner, if the dyadic Φ_2 be multiplied into itself by double combinatory multiplication and if the result be divided by 3, the dyadic

$$\Phi_3 = \tfrac{1}{3}[[\Phi_2\Phi]] = \tfrac{1}{6}\big[[[\Phi\Phi\Phi]]\big]$$

represents the transformation of planes into planes — thus

$$X'Y'Z' = \Phi_3|XYZ.$$

Carrying the process one step farther it yields a scalar quantity

$$\Phi_4 = \tfrac{1}{4}[[\Phi_3\Phi]] = \tfrac{1}{24}\Big[\big[[[\Phi\Phi\Phi\Phi]]\big]\Big],$$

which is equal to the ratio of volumes in the transformed and original space. The identical transformation is represented by the dyadic

$$(ABCD)J = A \cdot A + B \cdot B + C \cdot C + D \cdot D; \qquad X' = J|X.$$

The successive products J_2, J_3, J_4, formed as above, are the idemfactors for segments, planes, and volumes. The last is the scalar 1.

*) For the uses of this product in physics see Prandtl, loc. cit.

**) If $ABCD \neq 1$, so that $|XY \neq |X|Y$, the dyadic Φ_2 must be multiplied by $ABCD$. The same remark applies to Φ_3 and Φ_4.

The multiple quantities Φ_2, Φ_3, Φ_4 may be regarded as a sort of series of powers of Φ; and on this a considerable analytic theory may be founded.*) The formula for the expansion of a binomial is

$$(\Phi + \Psi)_k = \Phi_k + [[\Phi_{k-1}\Psi]] + [[\Phi_{k-2}\Psi_2]] + \cdots + [[\Phi\Psi_{k-1}]] + \Psi_k.$$

Another fundamental relation is

$$\Phi|\Phi_{n-1,c} = \Phi_n|J,$$

where the subscrit C denotes that the order of the factors in the dyads has been interchanged. From this relation may be proved the Hamilton-Cayley equation

$$\Phi^n - [[\Phi J_{n-1}]]\Phi^{n-1} + [[\Phi_2 J_{n-2}]]\Phi^{n-2} - \cdots + (-1)^n \Phi_n J = 0$$

which any dyadic satisfies.**) But the development of these questions cannot be taken up here. Enough has been said to indicate how Gibbs introduced and used double products between dyads.***)

7. Conclusion. — In concluding we may say that Gibbs, as an ardent admirer and independent follower of Grassmann, went back, as was always his wont, to the earliest and most elemental parts of his predecessor's theories. He took the formal product and made it the fundamental starting point of his whole system of multiple algebra. In this he was but developing, in somewhat changed form, the early idea of the open product. Instead of representing the linear function as a fraction following the method of Grassmann†), he used the formal product — partly because he was thus freed from introducing the new idea of a fraction, partly because products are generally more easy to manipulate from the purely analytic point of view. He took the ideas of exterior and interior multiplication, but not content to stop there he went on, guided by geometry on the one hand and by

*) The theory of matrices and the quadrate algebras of C. S. Peirce were among the subjects treated by Gibbs.

**) The coefficients in this equation are scalar quantities and are evidently invariants. See *Vector Analysis* § 122, pp. 319—320. The dyadic Φ^p is the product $\Phi|\Phi|\cdots|\Phi$ taken to p terms. If Φ were written in the form generally employed by Gibbs, where the dyads are of the form $C \cdot \frac{ABC}{ABCD}$, so that the „dimensions" take care of themselves the product Φ^p is merely $\Phi\Phi \cdots \Phi$ to p factors.

***) Compare also a short article by P. F. Smith on *J. Willard Gibbs: A short sketch and an appreciation of his work in pure mathematics*, Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 10, pp. 34—39 (1903).

†) *Ausdehnungslehre* (1862), § 377, p. 241, et *seq.* It is to be mentioned that Gibbs frequently did use the notion of a fraction — especially in reference to differentiation. This usage, however, was incidental rather than fundamental.

the theory of matrices on the other, to develop a theory of double products. In this way he acquired*) „a great wealth of multiplicative relations between these multiple quantities. I say „wealth of multiplicative relations" designedly, for there is hardly any kind of relations between things which are the objects of mathematical study, which add so much to the resources of the student as those which we call multiplicative, except, perhaps the simpler class, which we call additive, and which are presupposed in the multiplicative. This is a truth quite independent of our using any of the notations of multiple algebra, althongh a suitable notation for such relations will of course increase their value."

Passing to the ideas of Peirce, from whom he had borrowed a number of technical terms for use in his theory of dyadics, he gained other points of view. In particular he drew from all sides the ideas upon which to found his vector analysis. The perception of differences between the scalar and vector products and the products of Grassmann led to the introduction of a specific notation avoiding confusion among things so easy to confuse. This special multiple algebra was for him but one of many. Indeed each group of problems would have its own multiple algebra chosen with especial reference to its particular needs. With his broad view, however, this variety of the individual did but bring out more clearly the unity of the whole system. He says**): „But I do not so much desire to call your attention to the diversity of the applications of multiple algebra, as to the simplicity and unity of its principles. The student of multiple algebra suddenly finds himself freed from various restrictions to which he has been accustomed. To many, doubtless, this liberty seems like an invitation to license. Here is a boundless field in which caprice may riot. It is not strange if some look with distrust for the result of such an experiment. But the farther we advance, the more evident it becomes that this, too, is a realm subject to law. The more we study the subject, the more we find all that is most useful and beautiful attaching itself to a few central principles. We begin by studying *multiple algebras:* we end, I think, by studying *multiple algebra.*"

*) The following quotation comes from his *Address,* p. 62.

**) *Address*, p. 66.

Mitteilungen über die Herausgabe von E. Schröders Nachlaß.

Von

E. Müller aus Konstanz.

Es war beabsichtigt, den zweiten Teil des zweiten Bandes der „Algebra der Logik“ von Ernst Schröder dem Kongreß vorzulegen. Ist dies nun zwar infolge einer Verzögerung in der Drucklegung nicht mehr möglich, so bitte ich doch um die Ehre, auf die bevorstehende und noch weiterhin fortzusetzende Herausgabe Schröderscher Werke aus seinen zahlreichen hinterlassenen Manuskripten mit kurzen Worten hinzuweisen.

Von der „Algebra der Logik“ gab der Verfasser den ersten Band im Jahre 1890 heraus, im folgenden Jahre sodann die erste Abteilung des zweiten Bandes. Die zweite Abteilung desselben sollte, dem Vorwort zufolge, noch im gleichen Jahre nachfolgen und den Schluß des Werkes bilden; ein Inhaltsverzeichnis dazu war schon dem ersten Band vorgedruckt. Der hiernach in Aussicht genommene Stoff des letzten Halbbandes schwoll indessen bei der Detailbearbeitung in unerwarteter Weise derart an, daß dafür ein besonderer dritter Band bestimmt wurde, dessen „erste Abteilung“ 1895 in einer Stärke von über 700 Seiten im Drucke erschienen ist.

Eine zweite Abteilung hat Schröder, wie zum zweiten, so auch zum dritten Band nicht mehr herausgegeben. Er starb im Jahre 1902. Bezüglich seines Lebensganges und seiner mathematischen, insbesondere mathematisch-logischen Veröffentlichungen darf ich wohl auf zwei in letzter Zeit erschienene Arbeiten des Herrn Lüroth in den Jahresberichten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*) hinweisen. Im Auftrag dieser Vereinigung habe ich es übernommen, aus den hinterlassenen Papieren das, was sich auf die „Algebra der Logik“, Schröders Haupt- und Lebenswerk, bezieht und noch von ihm hinreichend aus-

---

*) „Ernst Schröder †“, Bd. XII, 1903, Heft 5, S. 249 ff., und „Aus der Algebra der Relative“, Bd. XIII, 1904, Heft 2, S. 73 ff.

geführt erscheint, im Druck herauszugeben. Ich ergreife die Gelegenheit, der Vereinigung zu danken für den mich ehrenden Auftrag, sowie ich auch Herrn Lüroth für mehrfache tätige Unterstützung zu besonderem Dank verbunden bin.

Es fand sich zunächst ein ziemlich vollständig ausgearbeitetes Manuskript zu einem zweiten Teil des zweiten Bandes vor, worin nun freilich größtenteils ganz andere Gegenstände behandelt sind, als die in dem früher beigedruckten Inhaltsverzeichnis angegebenen. An Stelle nämlich der dem neu hinzutretenden dritten Band zugewiesenen Algebra der Relative (oder Beziehungsbegriffe) geben die beiden ersten Paragraphen eine Reihe von Verbesserungen und Ergänzungen zum ersten Band, und der dritte einen kritischen Überblick über die gesamte bis hierher vorliegende Disziplin und über neuere einschlägige Literatur. Zwei weitere Abschnitte greifen einzelne strittige Punkte der bisherigen Theorie heraus, um sie von allen Seiten gründlichst zu beleuchten. Sodann frägt ein folgender Abschnitt nach den allgemeinsten Kalkuln und Knüpfungen mit bestimmten formalen Eigenschaften, z. B. der Kommutativität oder der Assoziativität. Es sind dies Probleme, die sich berühren mit solchen aus dem schon 1873 erschienenen ersten Band des Lehrbuches der Arithmetik und Algebra. Der letzte Abschnitt endlich — der einzige aus dem ursprünglichen Plane noch übernommene — handelt von der Modalität der Urteile und weist zuletzt noch auf eine wichtige Aufgabe der algebraischen Logik hin: Aus den einzeln irgendwie gegebenen Wahrscheinlichkeiten der Prämissen zu deduktiven Schlußfolgerungen nach allgemeinen Methoden abzuleiten die Wahrscheinlichkeit einer jeden Art von Konklusion, die sie zu liefern vermögen, ja auch einer jeden Aussage, die zu den Prämissen nur überhaupt in gegebener Beziehung steht. „Ich hoffe, dasjenige, was in dieser Hinsicht bereits geleistet erscheint, samt dem, was mir selbst darin zu erreichen möglich, spätestens im dritten Bande meines Lehrbuches der Arithmetik und Algebra systematisch darzustellen, wofern es mir vergönnt sein wird, auch dieses von mir begonnene Werk noch seiner Vollendung entgegenzuführen.“ Diese Hoffnung, mit deren Ausdruck der Band schließen sollte — und nun auch schließen wird —, hat sich nicht erfüllt; von jenem, der Absicht nach vierbändigen, arithmetisch-algebraischen Werke ist außer dem ersten, schon früher vom Verfasser herausgegebenen Band nichts mehr erschienen.

Es erübrigt noch, zweier Anhänge zu gedenken, die beide verschiedenartige Anwendungen des Logikkalkuls zum Gegenstand haben. Der eine Anhang beschäftigt sich mit der Ermittelung der neuen Grenzen beliebig vielfacher Integrale bei Abänderung der Integrationsfolge und gibt dafür eine allgemein anwendbare, logisch-rechnerische Methode, welche, von McColl gefunden, von Schröder in einem wesentlichen Punkte verbessert und ergänzt wird. Im zweiten Anhang wird — im Anschluß an Kempe — gezeigt, daß und wie die geometria situs lediglich mittels Rechnung nach den Gesetzen des Logikkalkuls begründet werden kann; es besteht zwischen gewissen Relationen dieses Kalkuls und der Beziehung der Kollinearität von Punkten im Raum eine weitgehende Analogie; ein geniales Aperçu Kempes, welches, wie Schröder meint, ahnen läßt, daß dieser Kalkul eine Fundgrube auch noch für andere Theorien verschiedenen Charakters bilden wird.

Während der besprochene Halbband binnen kurzem erscheinen wird, ist es mir dagegen leider nicht möglich, über die beabsichtigte Vollendung des dritten Bandes genauere Angaben zu machen. Es ist dazu viel handschriftliches Material vorhanden; doch besteht dasselbe großenteils aus nur wenig ausgeführten Entwürfen zu verschiedenen einzelnen Teilen, die vielleicht auch getrennt nacheinander veröffentlicht werden könnten.

Bei dem Umfang des ganzen Werkes mag es von Interesse sein, daß ich auch einen, allerdings nur andeutenden, Entwurf zu einem kurzen Abriß der gesamten Disziplin (zunächst, soweit dieselbe in den ersten zwei Bänden behandelt ist) vorfand und sogleich nach Fertigstellung des zweiten Bandes in Angriff zu nehmen gedenke

II. Sektion.

Über das Riemannsche Fragment zur Theorie der linearen Differentialgleichungen und daran anschließende neuere Arbeiten.

Von

L. Schlesinger aus Klausenburg.

1. Als im Jahre 1876 in der ersten Ausgabe von Riemanns gesammelten Werken das Fragment „Zwei allgemeine Lehrsätze über lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Koeffizienten“ aus Riemanns Nachlasse zum erstenmal veröffentlicht wurde, war ein ansehnlicher Teil der in diesem Fragmente enthaltenen Resultate durch die seit 1865 von Fuchs und seinen Mitarbeitern geschaffene Theorie der linearen Differentialgleichungen vorweggenommen und überholt. — Die Klasse von Differentialgleichungen, deren Integrale keinen Punkt der Unbestimmtheit besitzen und die wir heute als die Fuchssche bezeichnen, hatte sich dem Begründer der neueren Theorie der linearen Differentialgleichungen als die naturgemäße Verallgemeinerung der Differentialgleichung der Gaußschen Reihe in der Weise dargeboten, daß für sie einerseits jede der Differentialgleichung formal genügende Potenzreihe auch konvergiert und andererseits die Art des Verhaltens der Integrale in der Umgebung einer singulären Stelle aus den Koeffizienten der Differentialgleichung mit algebraischen Hilfsmitteln abgeleitet werden kann. Riemann war von seinem Standpunkte aus ebenso naturgemäß zu derselben Klasse geführt worden, weil die Koeffizienten der linearen Differentialgleichung, welcher die von ihm*) postulierten Funktionssysteme mit gegebenen Verzweigungspunkten und gegebenen Fundamentalsubstitutionen genügen, nur dann mit Sicherheit als algebraische Funktionen der unabhängigen Variabeln erschienen,

*) Werke (II. Aufl., 1892), S. 379.

wenn er diesen Funktionssystemen die Bedingung auferlegte, an keiner Stelle von unendlich hoher Ordnung unendlich zu werden.*)

Während aber die Fuchssche Theorie ihrer Eigenart gemäß sich zunächst der Erforschung der in der Umgebung singulärer Stellen auftretenden Besonderheiten (Fuchs, Hamburger u. a.), alsbald, namentlich durch Herrn Thomé, auch der Untersuchung der Integrale in der Umgebung von Unbestimmtheitsstellen zuwandte, in die Natur der Abhängigkeit der Koeffizienten der Fundamentalsubstitutionen von den in den Koeffizienten der Differentialgleichung auftretenden Konstanten einzudringen (Fuchs, Crelle Bd. 75, 76) und in der Behandlung spezieller Differentialgleichungen (für die Periodizitätsmoduln der Abelschen Integrale, algebraisch integrierbare, Lamésche) sich zu bewähren suchte, eröffnete sich Riemann durch den von ihm gewählten und seiner allgemeinen funktionentheoretischen Denkweise entsprechenden Ausgangspunkt sofort der Begriff der gleichverzweigten Funktionssysteme, die er — wie in seiner Theorie der algebraischen Funktionen — in eine Klasse zusammenfaßte und damit denjenigen Gesichtspunkt schuf, der beim Bekanntwerden seiner nachgelassenen Aufzeichnungen als wesentlich neues — wenn auch in der Theorie der Gaußschen Differentialgleichung (Gauß, Riemann) vorbereitetes — Element in die vorhandene Theorie eintrat.

In der Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale hatte Riemann, unbekümmert um die Schwierigkeiten, die dem von ihm auf das Dirichletsche Prinzip gegründeten Existenzbeweise für eine durch ihre Verzweigungsart gegebene algebraische Funktion anhaften, mit dem Klassenbegriffe und den dazu gehörigen Invarianten (p und Klassenmoduln) sogleich den Nerv der ganzen Theorie zu treffen gewußt, durch dessen Bloßlegen ihm selbst der Zugang zu der Theorie der allgemeinen Abelschen Funktionen und seinen Nachfolgern, die auf den algebraischen Grundlagen Abels, Puiseux' und Galois' weiterbauen wollten, das Ziel gegeben war, auf welches losgesteuert werden mußte. In der Theorie der linearen Differentialgleichungen, die zur Zeit, als Riemann sich ihrer Bearbeitung zuwandte, noch in den Kinderschuhen des XVIII. Jahrhunderts stak, vermochte selbst Riemanns genialische Unbefangenheit nicht, den Schwierigkeiten des Existenzbeweises zu begegnen, und so wurden die fundamentalen Gedanken, die in dem Fragmente niedergelegt waren, durch die Selbstkritik ihres Urhebers zu langjähriger Unfruchtbarkeit verurteilt. Glücklicherweise erwuchs hieraus für die Wissenschaft kein dauernder Verlust; denn was

*) Werke (II. Aufl., 1892), S. 382.

an Riemanns Gedanken reif zur Befruchtung war und noch vieles, was darüber hinaus ging, hatten Fuchs und seine Mitarbeiter unabhängig von Riemann zutage gefördert, und der Klassenbegriff mit den an diesen Begriff sich anschließenden Problemen kam auch 1876 noch zu früh. — In der Tat macht sich in der Entwickelung der Theorie der linearen Differentialgleichungen das Bekanntwerden des Riemannschen Fragmentes nicht als ein deus ex machina geltend, diese Entwickelung nimmt vielmehr ihren stetigen Fortgang, bis sie auf dem Wege über die aus jener Theorie entspringenden Umkehrprobleme zu dem Punkte gelangt, wo die Betrachtung der gleichverzweigten Funktionssysteme in zwingender Weise auftritt. Da nämlich diejenige Fuchssche Funktion, welche die unabhängige Variable einer linearen Differentialgleichung der Fuchsschen Klasse als Funktion des die Integrale in Fuchssche Zetafunktionen uniformisierenden Parameters liefert, allein durch die Lage der Verzweigungspunkte und durch die linearen Substitutionen bestimmt wird, die ein Fundamentalsystem bei Umkreisung dieser Verzweigungspunkte erfährt, sah sich Herr Poincaré (Acta Mathem. Bd. 5, 1885) veranlaßt, die Gesamtheit derjenigen Differentialgleichungen in Betracht zu ziehen, denen die Verzweigungspunkte nebst den zu diesen gehörigen Fundamentalsubstitutionen gemein sind, und wurde dadurch — wie es scheint, ohne von Riemanns Fragment Kenntnis genommen zu haben — zu dem den Riemannschen Klassenbegriff umfassenden Artbegriffe (espèce) geführt.

Wahrscheinlich war es auch in der Theorie der algebraischen Funktionen die Einsicht, daß ein und dasselbe System von Thetafunktionen die sämtlichen algebraischen Beziehungen zwischen zwei Variabeln uniformisiert, welche durch birationale Transformationen ineinander übergeführt werden können, die Riemann darauf hingeleitet hat, den Klassenbegriff zum Mittelpunkte seiner Theorie der algebraischen Funktionen zu machen; und wenn es auch nahe liegt anzunehmen, daß Riemann rein der Analogie folgend, der von ihm geplanten Theorie der linearen Differentialgleichungen die Lehre von den gleichverzweigten Funktionen, die sich bei den algebraischen Funktionen so glänzend bewährt hatte, zugrunde legen wollte, so wird man doch mit Rücksicht auf gewisse Abbildungsaufgaben*), mit denen sich Riemann beschäftigt hat, ferner mit Rücksicht darauf, daß er in seiner Vorlesung über die hypergeometrische Reihe die uniformisierende Kraft der Modulfunktion spielen läßt**), namentlich aber nach den in den kleingedruckten Sätzen des

*) Werke (1892), Abh. XXVI, S. 440.

**) Werke (Nachträge, 1902), III, S. 93.

Fragmentes enthaltenen Andeutungen*) den Gedanken nicht abweisen können, daß er auch die Uniformisierung der durch eine lineare Differentialgleichung mit algebraischen Koeffizienten statuierten Beziehung ahnend geschaut haben mag, vielleicht in einer Form (nämlich durch Funktionen mehrerer Variabeln), die uns auch heute noch verborgen ist!

Nachdem sich Herr Heun (1887/88) mit den Koeffizienten der Relationen, die zwischen Funktionssystemen einer und derselben Art bestehen, beschäftigt hatte, begegnen wir von 1888 ab dem Riemannschen Klassen- (eigentlich dem Poincaréschen Art-)begriffe in den Untersuchungen von Fuchs über lineare Differentialgleichungen, deren Substitutionsgruppe von einem in den Koeffizienten auftretenden Parameter unabhängig ist. Wenngleich Fuchs diese Untersuchungen unzweifelhaft in der Absicht unternommen hat, zunächst die Theorie der Differentialgleichungen, denen die Periodizitätsmoduln der Abelschen Integrale genügen, zu vertiefen und in der Richtung der vollständig integrabeln Systeme linearer partieller Differentialgleichungen (Picard, Appell, Horn u. a.) zu verallgemeinern, so zeigen dieselben doch, wie ich nachgewiesen habe (Crelle Bd. 123, 1901), einen sehr nahen und überraschenden Zusammenhang mit den von Riemann in seinem Fragmente formulierten Problemen, und die Erkenntnis dieses Zusammenhanges war es auch, der ich die Veranlassung zum eingehenden Studium des Riemannschen Fragmentes verdanke. Ehe ich nun auf eine Besprechung meiner hierauf bezüglichen Versuche eingehe, muß ich noch die Bemerkungen von Herrn F. Klein (Annalen Bd. 46, 1895) und die leider unvollendet gebliebene Untersuchung E. Ritters (Annalen Bd. 47, 1896) „über Riemannsche Formenscharen auf einem beliebigen algebraischen Gebilde" erwähnen, die letztere namentlich auch darum, weil Ritter daselbst (S. 158, Zeile 11—10 v. u.) etwa gleichzeitig mit mir (Handbuch Bd. II, 1, 1897, S. 110**)) die Möglichkeit erwähnt, die Existenz der von Riemann im Fragmente postulierten Funktionssysteme mit Hilfe von Herrn Poincarés fonctions zétafuchsiennes zu beweisen; allerdings scheint es sich bei Ritter nur um eine flüchtige Bemerkung zu handeln, da er ohne Einschränkung von der „Existenz solcher Formenscharen bei beliebig vorgegebener Gruppe" spricht, während doch die séries zétafuchsiennes nur unter gewissen beschränkenden Voraussetzungen für die Fundamentalsubstitutionen der Gruppe konvergieren (vergl. unten).

2. Bei meinen Studien im Anschlusse an das Riemannsche Frag-

*) Werke (1892), S. 386.

**) Der betreffende Bogen ist im März 1896 gedruckt.

ment — die bis in das Jahr 1895 zurückreichen*) — stellte ich mir die Aufgabe, die Theorie der linearen Differentialgleichungen — deren Koeffizienten ich zunächst nicht wie Riemann als beliebige algebraische, sondern als rationale Funktionen der unabhängigen Variabeln voraussetzte — in der durch das Fragment gewiesenen Richtung und überhaupt der funktionentheoretischen Auffassung Riemanns gemäß auszugestalten, namentlich den Existenzbeweis für die von Riemann postulierten Funktionssysteme zu erbringen, die Konsequenzen zu verfolgen, die sich aus Riemanns Problemstellung für die allgemeine Theorie der linearen Differentialgleichungen ergeben, endlich die Andeutungen zu enträtseln und auf ihren Wahrheitsgehalt zu prüfen, die Riemann an der von ihm in seinem Manuskript als „nicht richtig“ bezeichneten, in der Edition kleingedruckten Stelle des Fragmentes**) ausspricht.

Um zunächst festen Boden unter den Füßen zu haben, gründete ich (1898)***) einen Existenzbeweis auf Herrn Poincarés Theorie der Fuchsschen Zetafunktionen, wobei ich allerdings eine sehr wesentliche Einschränkung mit in den Kauf nehmen mußte, indem zur Sicherung der Konvergenz der séries zétafuchsiennes den Fundamentalsubstitutionen, die das postulierte Funktionssystem erfahren soll, wenn die unabhängige Variable die vorgegebenen Verzweigungspunkte umkreist, die Bedingung aufzuerlegen war, daß die Wurzeln ihrer Fundamentalgleichungen den Modul Eins besitzen.

Auf Grund des Existenzbeweises, also vorläufig unter ständigem Festhalten an jenen von mir sogenannten Konvergenzbedingungen, gelang

1) im engsten Anschlusse an Riemann die Herstellung eines innerhalb der Klasse eindeutig bestimmten Funktionssystems mit der Minimalzahl außerwesentlich singulärer Stellen (Handbuch Bd. II, 1, S. 365—393; Crelle Bd. 123, S. 166 ff.);

2) der Nachweis, daß bei unbestimmter Lage der Verzweigungspunkte und willkürlichen konstanten Elementen der Fundamentalsubstitutionen die so determinierten Funktionssysteme im wesentlichen die allgemeinsten sind, die durch lineare Differentialgleichungen definiert werden, deren Gruppe von einem in den Koeffizienten auftretenden Parameter unabhängig ist (Crelle Bd. 123, S. 173), wodurch der bereits erwähnte

*) Im Sommersemester 1895 hielt ich an der Berliner Universität mit einem kleinen Kreise von Zuhörern Übungen im Anschlusse an das R.sche Fragment.

**) Werke (1892), S. 385, 386.

***) Handbuch Bd. II, 2 (1898), S. 382 ff.; Comptes Rendus t. 126, S. 723; Crelle Bd. 123, S. 138.

Zusammenhang zwischen dem Riemannschen Probleme und den Untersuchungen von Fuchs (1888 ff.) dargelegt war;

3) der Nachweis, daß eine beliebige lineare Differentialgleichung mit eindeutigen Koeffizienten und einer endlichen Anzahl von Verzweigungspunkten stets einer Differentialgleichung der Fuchsschen Klasse kogredient sei, und daß jede lineare Differentialgleichung mit rationalen Koeffizienten durch Adjunktion einer gewissen eindeutigen Funktion zum Rationalitätsbereiche den Charakter einer Differentialgleichung der Fuchsschen Klasse erhält*) (Crelle Bd. 124, S. 47);

4) die vollständige Erledigung der Frage nach dem analytischen Charakter der Abhängigkeit des in 1) erwähnten Funktionssystems von den unabhängig veränderlich gedachten Verzweigungspunkten, und im Zusammenhange damit die allgemeinste Definition einer bemerkenswerten Klasse von Funktionen mehrerer Variabeln, die als Funktionen jeder einzelnen Variabeln einer linearen Differentialgleichung mit in allen Variabeln eindeutigen Koeffizienten und einer endlichen Anzahl von Verzweigungspunkten genügen, einer Klasse von Funktionen, wie sie wohl Riemann vorgeschwebt haben mag, als er die später von ihm selbst verworfenen Bemerkungen (Werke, S. 386, Zeile 7—12) niederschrieb, und als deren spezieller Fall die durch eine Tissot-Pochhammersche Differentialgleichung definierten Funktionen in ihrer Abhängigkeit von der Differentiationsvariabeln und den Verzweigungspunkten erscheinen. (Berliner Sitzungsberichte 1902, S. 283; Crelle Bd. 124, S. 292.)

3. Ein Weg, der für den Fall allgemeiner, den Konvergenzbedingungen nicht genügender Fundamentalsubstitutionen zu einem Existenzbeweise führen konnte, war durch die folgende Erwägung gewiesen.

Nach den von Riemann, Herrn Poincaré u. a. vorgenommenen Konstantenzählungen läßt sich stets eine Differentialgleichung der Fuchsschen Klasse herstellen, die für die vorgeschriebenen Verzweigungspunkte $a_1, \cdots, a_\sigma, \infty$ mit den gegebenen Fundamentalsubstitutionen $A_1, \cdots, A_\sigma, A_{\sigma+1}$ konkordierende Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichungen besitzt, und in welcher die Anzahl der in den Koeffizienten noch auftretenden disponibeln Parameter mit der Anzahl der wesentlichen Parameter übereinstimmt, von denen die Fundamentalsubstitutionen nach Festlegung der Wurzeln ihrer Fundamentalgleichungen noch abhängen. Um das letztere zu erreichen, muß jedoch der Differentialgleichung, wenn sie von höherer als der zweiten Ordnung ist, noch eine gewisse

*) Durch den ersten Satz ist zugleich ein Weg gewiesen, wie die Poincarésche Integrationsmethode einer linearen Differentialgleichung der Fuchsschen Klasse für eine lineare Differentialgleichung mit beliebigen eindeutigen Koeffizienten und einer endlichen Anzahl von Verzweigungspunkten nutzbar gemacht werden kann.

Anzahl außerwesentlich singulärer Punkte zuerteilt werden. Es handelt sich dann darum zu entscheiden, ob über die in den Koeffizienten verbliebenen Parameter so disponiert werden kann, daß, bei bestimmter Lage der von den Verzweigungspunkten aus nach dem Unendlichen hin gelegten Querschnitte, die Fundamentalsubstitutionen, die ein durch seine Anfangswerte bestimmtes Fundamentalsystem erfährt, mit den gegebenen Substitutionen übereinstimmen; die Frage kommt also auf die Anwendung der Prinzipien der Klein-Poincaréschen méthode de continuité hinaus. Nun erschwert die notwendige Einführung der außerwesentlich singulären Punkte die im Sinne jener Prinzipien erforderlichen Vor- und Nebenuntersuchungen sehr bedeutend, man mußte demnach auf ein Mittel bedacht sein, durch welches sich die Einführung der außerwesentlich singulären Punkte umgehen ließe. Ein solches bietet sich aber in der denkbar einfachsten und vollkommensten Weise dar, indem man an die Stelle der linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung ein kanonisches System von n linearen Differentialgleichungen erster Ordnung treten läßt.

Ein Funktionssystem der Klasse, dessen Exponenten bei den sämtlichen Verzweigungspunkten vorgeschriebene Werte haben, hängt, wie ich (Handbuch Bd. II, 1, S. 385 ff.) nachgewiesen habe, von gewissen linear eingehenden willkürlichen Konstanten ab, deren Anzahl durch die Summe der Exponenten bei den sämtlichen Verzweigungspunkten bestimmt wird. Richtet man, was stets möglich ist, die Exponenten so ein, daß ihre Summe sich auf Null reduziert, so ist diese Anzahl gleich n, d. h. man hat genau n linear unabhängige Funktionssysteme von der gedachten Beschaffenheit. Faßt man diese zu einer Funktionalmatrix zusammen und zwar so, daß die einzelnen Funktionssysteme die Zeilen füllen, so ist diese, abgesehen von einer rechts komponierenden konstanten Matrix, vollkommen bestimmt. Fixiert man diese konstante Matrix durch Anfangsbedingungen, so bildet die so eindeutig determinierende Funktionalmatrix ein Fundamentalsystem (Integralmatrix) eines linearen Differentialsystems, welches, wie man unschwer erkennt, keine anderen singulären Punkte aufweist, wie die gegebenen Verzweigungspunkte $a_1, \cdots, a_\sigma, \infty$ und in der Umgebung jeder dieser Stellen die sogenannte kanonische Form (Horn) hat, also (vgl. Koenigsberger, Lehrbuch, 1889, S. 452) in der Form

$$\frac{dy_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda \sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{A_{\lambda\varkappa}^{(\nu)}}{x - a_\nu} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

mit konstanten $A_{\lambda\varkappa}^{(\nu)}$ erscheint. Da hier die Anzahl der konstanten Parameter, die nach Fixierung der Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichungen in den Koeffizienten des Differentialsystems, abgesehen von den $a_1, \cdots, a_\sigma$, noch auftreten, genau mit der Anzahl der Parameter übereinstimmt, von denen die gegebenen Fundamentalsubstitutionen nach Festlegung der Wurzeln ihrer Fundamentalgleichungen noch abhängen, so bietet die Anwendung der méthode de continuité keine weiteren Schwierigkeiten mehr dar. Ich habe*) für den Fall, wo die Fundamentalgleichungen der gegebenen Fundamentalsubstitutionen keine mehrfachen Wurzeln haben, die Betrachtung im einzelnen durchgeführt, im allgemeinen Falle sind noch gewisse Hilfsbetrachtungen algebraischer Natur erforderlich, die sich aber auch ohne Schwierigkeit erledigen lassen.

4. Genau genommen ist auf diese Weise die Existenz der von Riemann postulierten Funktionssysteme nicht direkt erwiesen, sondern einerseits auf die Frage der Existenz einer Integralmatrix für ein lineares Differentialsystem mit rationalen Koeffizienten, andererseits darauf zurückgeführt, daß die Lösungen eines linearen Differentialsystems von der vorhin angegebenen kanonischen Form an keiner Stelle unbestimmt werden. Die klassische Theorie der linearen Differentialgleichungen erledigt bekanntlich sowohl diese Existenzfrage als auch den Nachweis der letzteren Tatsache durch Konvergenzuntersuchungen von Potenzreihen, die dem Differentialsysteme formal genügen. Wenngleich Riemann selbst in seiner Theorie der Abelschen Funktionen von der Potenzreihenentwickelung einer algebraischen Funktion Gebrauch macht und sich dabei auf Cauchy, die Fouriersche Reihe und Lagrange beruft, so scheint mir doch dieses Hilfsmittel in den Rahmen einer im Sinne Riemanns zu entwickelnden Theorie nicht hineinzupassen, da es die Art und Weise, wie sich die postulierten monogenen Funktionen der komplexen Variabeln aus ihren realen und imaginären Bestandteilen zusammenfügen, nicht in Evidenz setzt. Ich suchte darum zunächst nach einer Methode, die den Beweis für die Existenz monogener Integralmatrizen eines linearen Differentialsystems mit monogenen Koeffizienten derart zu erbringen gestattet, daß die auftretenden monogenen Funktionen in ihre realen und imaginären Bestandteile zerlegt erscheinen, und ich fand dieselbe, indem ich an die schönen Untersuchungen anknüpfte, die Herr Volterra in den Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL) 1887 und 1899 veröffentlicht hat.

Zunächst beweise ich für ein lineares Differentialsystem

*) In einer der Redaktion des Crelleschen Journals im April d. J. eingereichten Arbeit.

$$\frac{dy_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} a_{\lambda\varkappa} y_\lambda, \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

dessen Koeffizienten $a_{i\varkappa}$ eindeutige und — wie wir der Einfachheit wegen voraussetzen wollen — stetige Funktionen der realen Variabeln x sind, nach dem Cauchy-Lipschitzschen Verfahren die Existenz einer Integralmatrix $(y_{i\varkappa})$, die sich für den regulären Wert $x = x_0$ auf die Einheitsmatrix $(\delta_{i\varkappa})$ reduziert, und setze

$$(y_{i\varkappa}) = \widehat{\int_{x_0}^{x}} (a_{i\varkappa} dx + \delta_{i\varkappa}).$$

Dann betrachte ich ein totales Differentialsystem von der Form

$$du_\varkappa = d\xi \sum_{\lambda=1}^{m} \alpha_{\lambda\varkappa}^{(1)} u_\lambda + d\eta \sum_{\lambda=1}^{m} \alpha_{\lambda\varkappa}^{(2)} u_\lambda, \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, m)$$

dessen Koeffizienten reale und innerhalb eines einfach zusammenhängenden Bereiches S differentiierbare Funktionen der realen Variabeln ξ, η sind, die den Integrabilitätsbedingungen genügen. Wenn das durch die vier Punkte (ξ_0, η_0), (ξ_0, η), (ξ, η), (ξ, η_0) bestimmte Rechteck ganz innerhalb S liegt, so stimmen die beiden Ausdrücke:

$$\widehat{\int_{\eta_0}^{\eta}} (\alpha_{i\varkappa}^{(2)}(\xi_0, \eta)\, d\eta + \delta_{i\varkappa}) \cdot \widehat{\int_{\xi_0}^{\xi}} (\alpha_{i\varkappa}^{(1)}(\xi, \eta)\, d\xi + \delta_{i\varkappa})$$

und

$$\widehat{\int_{\xi_0}^{\xi}} (\alpha_{i\varkappa}^{(1)}(\xi, \eta_0)\, d\xi + \delta_{i\varkappa}) \cdot \widehat{\int_{\eta_0}^{\eta}} (\alpha_{i\varkappa}^{(2)}(\xi, \eta)\, d\eta + \delta_{i\varkappa})$$

miteinander überein und definieren ein Lösungssystem

$$(v_{i\varkappa}) = \widehat{\int_{(\xi_0, \eta_0)}^{(\xi, \eta)}} (\alpha_{i\varkappa}^{(1)} d\xi + \alpha_{i\varkappa}^{(2)} d\eta + \delta_{i\varkappa})$$

des gegebenen totalen Differentialsystems. Die Identität der beiden obigen Ausdrücke kann auch so ausgesprochen werden, daß $(v_{i\varkappa})$ erstreckt über die Begrenzung eines ganz innerhalb S gelegenen Rechtecks gleich der Einheitsmatrix $(\delta_{i\varkappa})$ ist.

Für einen beliebigen Punkt ξ, η innerhalb S erfolgt nun die Definition der Integralmatrix $(v_{i\varkappa})$ mittelst eines von (ξ_0, η_0) nach (ξ, η) hingelegten treppenförmigen Weges, ganz ähnlich, wie es mein Freund Heffter (Gött. Nachrichten, 1904) für die gewöhnliche Quadratur angeben hat, wobei man nur darauf achten muß, daß sich unsere reale Integralmatrix

$$\overbrace{\int_{x_0}^{x}}(a_{i\varkappa}\,dx + \delta_{i\varkappa})$$

für $n = 1$ nicht auf das bestimmte Integral selbst, sondern auf

$$e^{\int_{x_0}^{x} a\,dx}$$

reduziert.

Ich nehme nun $m = 2n$ und erteile den Koeffizientenmatrizen die „gespaltene" Form:

$$\left.\begin{aligned}\underset{(i,\varkappa=1,2,\cdots,2n)}{(\alpha_{i\varkappa}^{(1)})} &= \begin{pmatrix}\alpha_{i\varkappa} & \beta_{i\varkappa}\\ -\beta_{i\varkappa} & \alpha_{i\varkappa}\end{pmatrix}\\ \underset{(i,\varkappa=1,2,\cdots,2n)}{(\alpha_{i\varkappa}^{(2)})} &= \begin{pmatrix}-\beta_{i\varkappa} & \alpha_{i\varkappa}\\ -\alpha_{i\varkappa} & -\beta_{i\varkappa}\end{pmatrix}\end{aligned}\right\}\ (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n).$$

Die Integrabilitätsbedingungen ziehen dann die Gleichungen

$$\frac{\partial \alpha_{i\varkappa}}{\partial \xi} = \frac{\partial \beta_{i\varkappa}}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial \alpha_{i\varkappa}}{\partial \eta} = -\frac{\partial \beta_{i\varkappa}}{\partial \xi}$$

nach sich, und man erkennt leicht, daß die Integralmatrix

$$(w_{i\varkappa}) = \overbrace{\int_{(\xi_0,\eta_0)}^{(\xi,\eta)}}(\alpha_{i\varkappa}^{(1)}\,d\xi + \alpha_{i\varkappa}^{(2)}\,d\eta + \delta_{i\varkappa})$$

in der gespaltenen Form

$$(w_{i\varkappa}) = \begin{pmatrix}u_{i\varkappa} & v_{i\varkappa}\\ -v_{i\varkappa} & u_{i\varkappa}\end{pmatrix}$$

darstellbar ist, wo

$$\frac{\partial u_{i\varkappa}}{\partial \xi} = \frac{\partial v_{i\varkappa}}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial u_{i\varkappa}}{\partial \eta} = -\frac{\partial v_{i\varkappa}}{\partial \xi},$$

so daß die Elemente der Matrix

$$(y_{i\varkappa}) = (u_{i\varkappa} + \sqrt{-1}\, v_{i\varkappa})$$

monogene und innerhalb S holomorphe Funktionen von $x = \xi + \eta\sqrt{-1}$ sind. Offenbar stellt dann $(y_{i\varkappa})$ eine Integralmatrix des Differentialsystems

$$\frac{dy_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n}(\alpha_{\lambda\varkappa} + \sqrt{-1}\,\beta_{\lambda\varkappa})\,y_\lambda \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

dar, und zwar diejenige, die sich für $x = \xi_0 + \eta_0\sqrt{-1}$ auf $(\delta_{i\varkappa})$ reduziert. Damit ist der gewünschte Existenzbeweis erbracht; betreffs weiterer Folgerungen verweise ich auf eine zweite der Redaktion des Crelleschen Journals eingereichte Abhandlung, wo auch ein Weg angegeben ist, der zu einem Nachweise der oben erwähnten Eigenschaft der Lösungen eines kanonischen Differentialsystems, ohne Zuhilfenahme von Konvergenzbetrachtungen formal aufgestellter Reihen, führt.

Sur l'interpolation des fonctions continues par des polynomes.

Von

E. Borel aus Paris.

---

1. Le problème de l'interpolation consiste essentiellement dans la détermination approchée d'une fonction, dont on suppose connues les valeurs pour un certain nombre de valeurs de la variable. C'est un problème qui se pose fréquemment dans les sciences physiques; l'on est souvent conduit à prendre un polynome comme fonction approchée.

Or, Lagrange nous a appris à calculer un polynome de degré q qui, pour $q+1$ valeurs de la variable, prend les mêmes valeurs qu'une fonction donnée. Supposons que la fonction $f(x)$ soit étudiée dans l'intervalle $(0-1)$; posons, en désignant par q un entier positif quelconque et par p un entier positif ou nul au plus égal à q:

$$(1) \qquad f\left(\frac{p}{q}\right) = c_{p,q}$$

$$P_{p,q}(x) = \frac{\left(x-\frac{p+1}{q}\right)\left(x-\frac{p+2}{q}\right)\cdots\left(x-\frac{q}{q}\right)\left(x-\frac{0}{q}\right)\left(x-\frac{1}{q}\right)\cdots\left(x-\frac{p-1}{q}\right)}{\left(\frac{p}{q}-\frac{p+1}{q}\right)\left(\frac{p}{q}-\frac{p+2}{q}\right)\cdots\left(\frac{p}{q}-\frac{q}{q}\right)\left(\frac{p}{q}-\frac{0}{q}\right)\left(\frac{p}{q}-\frac{1}{q}\right)\cdots\left(\frac{p}{q}-\frac{p-1}{q}\right)},$$

la formule de Lagrange est la suivante:

$$(2) \qquad P_q(x) = \sum_{p=0}^{p=q} c_{p,q} P_{p,q}(x).$$

Le caractère essentiel de cette formule est de faire connaître le polynome d'interpolation $P_q(x)$ par une combinaison bilinéaire simple des constantes $c_{p,q}$ qui dépendent de la fonction étudiée, et des polynomes $P_{p,q}(x)$ qui n'en dépendent pas.

2. Faisons, à partir de maintenant, l'hypothèse que la fonction $f(x)$ est continue. On sait alors, grâce à Weierstraß, qu'il est possible d'en approcher autant que l'on veut au moyen de polynomes. Il est dès lors naturel de se demander si les polynomes de Lagrange

fournissent une approximation de plus en plus grande à mesure que leur degré q augmente indéfiniment. Cette question est tellement naturelle qu'elle a déjà dû être étudiée et résolue; je ne connais pas de travaux sur ce sujet; mais vous pourrez sans doute m'en indiquer.*) En tous cas, j'ai pu former un exemple d'une fonction pour laquelle la formule de Lagrange, loin de donner une approximation indéfinie, diverge lorsque le degré q augmente indéfiniment.**) Donc, lorsque l'on applique la formule (2) à une fonction empirique, pour laquelle les constantes $c_{p,q}$ sont données par l'expérience, on n'est pas du tout certain de ne pas obtenir un polynome approché $P_q(x)$ très différent de la fonction donnée et même d'autant plus différent que le nombre $q+1$ des expériences est plus élevé.

3. Il est dès lors naturel de se demander s'il n'est pas possible d'obtenir une formule

$$\Pi_q(x) = \sum_{p=0}^{p=q} c_{p,q} \Pi_{p,q}(x) \tag{3}$$

analogue à la formule (2), dans laquelle les $c_{p,q}$ auraient toujours la signification (1) mais où les polynomes $\Pi_{p,q}(x)$ seraient choisis de manière que cette formule d'interpolation (3) donne une approximation qui tende uniformément vers zéro lorsque q augmente indéfiniment.

Nous allons voir que cela est possible; la formule que nous obtiendrons est, à la vérité, plus compliquée que celle de Lagrange, car les polynomes $\Pi_{p,q}(x)$ sont bien moins simples que les polynomes $P_{p,q}(x)$; mais ils ont ce même caractère essentiel de ne dépendre que des indices p et q, c'est à dire de pouvoir être calculés indépendamment de toute fonction particulière $f(x)$. Leur calcul effectif ne présente d'ailleurs aucune difficulté théorique, mais paraît exiger des calculs assez longs; c'est là un sujet de travail de nature à intéresser un jeune chercheur.

---

*) En réponse à la question que je posais ainsi à mes auditeurs, M. Mittag-Leffler a bien voulu faire connaître, après ma communication, que M. Runge avait déjà étudié cette question et formé plusieurs exemples de fonctions pour lesquelles la formule de Lagrange diverge. Le mémoire de M. Runge: Über empirische Funktionen und die Interpolation zwischen äquidistanten Ordinaten se trouve dans la Zeitschrift für Math. und Phys. (Bd. XLVI, 1901, p. 229). Une traduction française en paraîtra dans les Acta Mathematica.

**) Je trouve inutile de donner ici cet exemple, moins simple d'ailleurs que ceux de M. Runge. On le trouvera dans mes Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes, rédigées par Maurice Fréchet. Paris, Gauthier-Villars, 1905.

4. Pour définir le polynome $\Pi_{p,q}(x)$ nous introduirons la fonction continue $\varphi_{p,q}$ définie comme il suit:

$$\text{pour } 0 \leqq x \leqq \frac{p-1}{q}: \qquad \varphi_{p,q}(x) = 0,$$

$$\text{pour } \frac{p-1}{q} \leqq x \leqq \frac{p}{q}: \qquad \varphi_{p,q}(x) = qx - p + 1,$$

$$\text{pour } \frac{p}{q} \leqq x \leqq \frac{p+1}{q}: \qquad \varphi_{p,q}(x) = -qx + p + 1,$$

$$\text{pour } \frac{p+1}{q} \leqq x \leqq 1: \qquad \varphi_{p,q}(x) = 0.$$

Lorsque p prend l'une des valeurs extrêmes 0 ou q, il n'y a pas à tenir compte des intervalles qui se trouvent à l'extérieur de l'intervalle $(0-1)$, la fonction $\varphi_{p,q}(x)$ ne devant être définie que dans cet intervalle.

La fonction $\varphi_{p,q}(x)$ étant continue dans l'intervalle $(0-1)$ nous savons, d'après le théorème fondamental de Weierstraß, calculer un polynome $\Pi_{p,q}(x)$ tel que l'inégalité

$$0 \leqq x \leqq 1$$

entraîne:

$$(4) \qquad |\varphi_{p,q}(x) - \Pi_{p,q}(x)| < \frac{1}{q^2},$$

le calcul peut être fait d'une infinité de manières; nous supposerons qu'on en ait choisie une bien déterminée.

Il est alors très aisé de démontrer que le polynome $\Pi_q(x)$ tend uniformément vers $f(x)$ lorsque q augmente indéfiniment.*)

5. On peut déduire de ce qui précède un développement de $f(x)$ en série uniformément convergente; en remplaçant, dans le second membre de (4), la quantité $\frac{1}{q^2}$ par $\frac{1}{q^3}$, la série convergerait absolument.

6. Un tel développement ne peut pas, en général, être dérivé; mais il peut être intégré terme à terme. L'intégration des polynomes $\Pi_{p,q}(x)$ permet ainsi d'obtenir d'autres polynomes analogues et cette opération peut être répétée indéfiniment. On obtient ainsi des formules analogues à la formule (3), mais susceptibles d'être dérivées aussi souvent que l'on veut.

Posons, en effet

$$\int_0^x f(x)\,dx = F(x),$$

$$\int_0^x \Pi_{p,q}(x)\,dx = \sigma_{p,q}(x),$$

*) On trouvera la démonstration dans le livre cité plus haut.

(5) $$\sigma_q(x) = \sum_{p=0}^{p=q} f\left(\frac{p}{q}\right) \sigma_{p,q}(x).$$

On a évidemment

(6) $$F\left(\frac{p+1}{q}\right) - F\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q} f\left(\frac{p}{q}\right) + \frac{\varepsilon}{q} = \frac{1}{q} f\left(\frac{p+1}{q}\right) + \frac{\varepsilon'}{q},$$

les nombres ε et ε' tendant vers zéro avec $\frac{1}{q}$.

Si, dans la formule (5), on remplace $f\left(\frac{p}{q}\right)$ par la valeur déduite de (6) en négligeant ε ou ε' on obtient une expression de la forme

$$\tau_q(x) = \sum_{p=0}^{p=q} F\left(\frac{p}{q}\right) \tau_{p,q}(x),$$

les $\tau_{p,q}(x)$ s'exprimant immédiatement au moyen des $\sigma_{p,q}(x)$. On prendra, par exemple:

$$\begin{aligned}
\tau_{0,q}(x) &= -q\sigma_{0,q}(x), \\
\tau_{p,q}(x) &= q[\sigma_{p-1,q}(x) - \sigma_{p,q}(x)], \qquad (p = 1, 2, \cdots, q-2), \\
\tau_{q-1,q}(x) &= q[\sigma_{q-2,q}(x) - \sigma_{q-1,q}(x) - \sigma_{q,q}(x)], \\
\tau_{q,q}(x) &= q[\sigma_{q,q}(x) + \sigma_{q-1,q}(x)],
\end{aligned}$$

car il est loisible de se servir de l'une ou de l'autre des formules (6) sous la réserve que p et $p+1$ soient tous deux non négatifs et au plus égaux à q. La fonction $\Pi_q(x)$ tendant uniformément vers $f(x)$, il en résulte que $\sigma_q(x)$ et $\tau_q(x)$ tendent uniformément vers $F(x)$.

Je ne m'arrêterai pas sur les généralisations aisées de ce qui précède dans de nombreuses directions.

Über eine Anwendung der Integralgleichungen auf ein Problem der Funktionentheorie.

Von

D. Hilbert aus Göttingen.

Unter einer „Integralgleichung" verstehe ich eine Gleichung von der Gestalt

$$f(s) = \int_a^b K(s, \sigma)\, \varphi(\sigma)\, d\sigma$$

oder

$$f(s) = \varphi(s) - \int_a^b K(s, \sigma)\, \varphi(\sigma)\, d\sigma.$$

Im Falle eines symmetrischen „Kernes" $K(s, \sigma)$ steht — wie ich in zwei Mitteilungen in den Göttinger Nachrichten dieses Jahres ausgeführt habe — die Theorie der Integralgleichungen im engsten Zusammenhange mit der „quadratischen Integralform"

$$Q(x) = \int_a^b \int_a^b K(s, \sigma)\, x(s)\, x(\sigma)\, ds\, d\sigma,$$

deren Theorie als das transzendente Analogon zu der bekannten algebraischen Theorie der quadratischen Form mit n Veränderlichen aufzufassen ist. Den besonderen Arten quadratischer Formen, z. B. denjenigen mit nicht verschwindender Diskriminante oder denjenigen, die für reelle Variable nur positive Werte annehmen, entsprechen gewisse besondere Arten quadratischer Integralformen, nämlich Integralformen, deren Kerne ich in den genannten Mitteilungen als „abgeschlossen", „allgemein" bezw. „definit" bezeichnet habe.

Die Theorie der algebraischen quadratischen Formen mit n Veränderlichen wird durch den Satz beherrscht, daß jede solche Form stets und nur auf eine Weise als Summe von n Quadraten linearer Formen darstellbar ist, wobei diesen letzteren noch die bekannten Orthogonalitätsbedingungen aufzuerlegen sind. Diesem Satze entspricht in der Theorie der quadratischen Integralformen ebenfalls ein Theorem von grundlegender Bedeutung, nämlich die Tatsache, daß die Integralform $Q(x)$ sich stets als unendliche Summe von Quadraten „linearer Integralformen“ darstellen läßt, wie folgt:

$$Q(x) = \frac{1}{\lambda^{(1)}}\left\{\int_a^b \psi^{(1)}(s)\,x(s)\,ds\right\}^2 + \frac{1}{\lambda^{(2)}}\left\{\int_a^b \psi^{(2)}(s)\,x(s)\,ds\right\}^2 + \cdots,$$

wobei die von mir als „Eigenfunktionen“ bezeichneten Funktionen $\psi^{(1)}(s)$, $\psi^{(2)}(s)$, $\cdots$ die „Orthogonalitätsbedingungen“:

$$\int_a^b \psi^{(l)}(s)\,\psi^{(m)}(s)\,ds = 0 \qquad (l \neq m)$$
$$= 1 \qquad (l = m)$$

erfüllen.

Die Anwendungen dieser Theorie der Integralgleichungen sind sehr mannigfaltige.

Wenn man eine Greensche Funktion einer gewöhnlichen oder partiellen Differentialgleichung $D(u) = 0$ zweiter Ordnung von elliptischem Typus als Kern einer Integralgleichung wählt, so folgt durch Auflösung dieser Integralgleichung die Greensche Funktion für die allgemeinere Integralgleichung $D(u) + u = 0$, d. h. *es sind einerseits die Integration einer Differentialgleichung zweiter Ordnung bei gegebenen Randbedingungen und andererseits die Lösung einer Integralgleichung äquivalente Probleme.*

Ist die zugrunde gelegte Differentialgleichung sich selbst adjungiert, so fällt die Greensche Funktion symmetrisch in den Parametern und Argumenten aus, und wegen dieser Symmetrie des Kernes der betreffenden Integralgleichung kommt alsdann das vorhin genannte Theorem über die Darstellung der quadratischen Integralform $Q(x)$ zur Geltung: *als Resultat erscheinen insbesondere die Entwickelungen willkürlicher Funktionen nach trigonometrischen, Besselschen, Kugel-, Laméschen, Sturmschen und allgemeinen Funktionen, wie sie in der mathematischen Physik auftreten.*

Die Variationsrechnung beschäftigt sich mit dem Problem, Integrale von der Gestalt

$$\int_a^b F\left(\frac{dy}{dx}, y\right) dx, \qquad \iint_{(J)} F\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, u\right) dx\,dy, \;\cdots$$

eventuell unter Hinzunahme von Nebenbedingungen zu einem Minimum zu machen. Wenn die Funktionen F in ihren Argumenten $\frac{dy}{dx}, y$ bezw. $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, u$ von nicht höherem als zweitem Grade ausfallen, so stellt sich die merkwürdige Tatsache heraus, daß jene Integrale in die Gestalt gewisser quadratischer Integralformen transformiert werden können. *Wir gelangen auf diese Weise zu der Lösung von Aufgaben der Variationsrechnung, die, soweit ich sehe, mit den in der bisherigen Variationsrechnung üblichen Mitteln nicht zu behandeln sind.*

Unter den *Anwendungen der Integralgleichungen auf die Theorie der analytischen Funktionen* möchte ich nur die Lösung eines Problems hervorheben, auf das mich meine Untersuchungen über das Riemannsche Problem der Konstruktion linearer Differentialgleichungen mit vorgeschriebener Monodromiegruppe führten.

Es sei C eine geschlossene Randkurve in der xy-Ebene mit der Gesamtbogenlänge 2π; die Bogenlänge derselben, von einem bestimmten Anfangspunkte auf C an bis zu einem beliebigen Punkte auf C gerechnet, werde mit s bezeichnet. Endlich seien $a(s)$, $b(s)$, $c(s)$ stetig differenzierbare Funktionen von s mit der Periode 2π, von denen die beiden ersten Funktionen $a(s)$, $b(s)$ keine gemeinsame Nullstelle haben sollen. Mein Problem besteht dann darin, eine innerhalb C reguläre analytische Funktion

$$f(z) = u(xy) + iv(xy)$$

zu finden, deren Real- und Imaginärteil $u(s)$ bezw. $v(s)$ auf der Randkurve C der linearen Relation

$$a(s)\,u(s) + b(s)\,v(s) + c(s) = 0$$

genügen.

Zur Lösung dieses Problems betrachten wir zunächst den Fall, daß eine innerhalb C reguläre und von Null verschiedene analytische Funktion

$$\gamma(z) = \alpha(xy) + i\beta(xy)$$

existiert, deren Real- und Imaginärteil $\alpha(s)$ bezw. $\beta(s)$ auf der Randkurve C der Bedingung

$$a(s)\,\alpha(s) + b(s)\,\beta(s) = 0$$

genügen; konstruieren wir alsdann eine innerhalb C reguläre Potentialfunktion $v^*(xy)$, deren Randwerte

$$v^*(s) = \frac{c(s)\,\beta(s)}{a(s)\,\{(\alpha(s))^2 + (\beta(s))^2\}} = -\frac{c(s)\,\alpha(s)}{b(s)\,\{(\alpha(s))^2 + (\beta(s))^2\}}$$

sind und bedeutet $-u^*(xy)$ eine zu $v^*(xy)$ konjugierte Potentialfunktion, so ist

$$f(z) = \{u^*(xy) + iv^*(xy)\}\,\{\alpha(xy) + i\beta(xy)\}$$

eine analytische Funktion, die das vorgelegte Problem löst.

Nunmehr nehmen wir an, daß es keine von Null verschiedene

Funktion $\gamma(z)$ von der genannten Beschaffenheit gäbe. Alsdann gibt es sicher auch keine von Null verschiedene analytische Funktion $\gamma^*(z)$, deren Real- und Imaginärteil $\alpha^*(s)$ bezw. $\beta^*(s)$ auf der Randkurve C der Bedingung

$$a(s)\,\alpha^*(s) - b(s)\,\beta^*(s) = 0$$

genügen; denn sonst wäre

$$\gamma(z) = \frac{1}{\gamma^*(z)} = \alpha(xy) + i\beta(xy)$$

eine analytische Funktion, von der wir sofort erkennen, daß ihr Real- und Imaginärteil auf C die Gleichung

$$a(s)\alpha(s) + b(s)\,\beta(s) = 0$$

befriedigen, was nicht sein sollte.

Wir bezeichnen mit $G(xy, \xi\eta)$ die zum Innern von C gehörige Greensche Funktion zweiter Art, d. h. diejenige Lösung der Differentialgleichung

$$\varDelta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \text{const.},$$

die an der Stelle ξ, η in bekannter Weise logarithmisch unendlich wird und deren normale Ableitung auf C verschwindet. Lassen wir x, y in den Randpunkt s und ξ, η in den Randpunkt σ wandern, so entsteht aus $G(xy, \xi\eta)$ eine Funktion der zwei Variabeln s, σ, die wir mit $G(s, \sigma)$ bezeichnen wollen; man findet leicht:

$$\frac{\partial G(s,\sigma)}{\partial \sigma} = \frac{1}{2\pi}\left\{\operatorname{cotg}\frac{\sigma - s}{2} + A(s,\sigma)\right\},$$

wo $A(s, \sigma)$ eine durchweg stetig differenzierbare Funktion ist. Ist nun $u(xy)$ irgend eine innerhalb und auf C reguläre Potentialfunktion und sind $u(s)$ ihre Randwerte, so ergeben sich die Randwerte einer zu $u(xy)$ konjugierten Potentialfunktion $v(xy)$ durch die Formel

$$v(s) = \int_{-\pi}^{+\pi} u(\sigma)\frac{\partial G(s,\sigma)}{\partial \sigma}\,d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u(\sigma)\left\{\operatorname{cotg}\frac{\sigma - s}{2} + A(s,\sigma)\right\}d\sigma,$$

wo für das Integral der Cauchysche Hauptwert zu nehmen ist.

Das gestellte Problem läuft demnach auf die Aufgabe hinaus, eine Funktion $u(s)$ zu finden, die der Bedingung

$$L(s) \equiv a(s)\,u(s) + b(s)\int_{-\pi}^{+\pi} u(\sigma)\frac{\partial G(s,\sigma)}{\partial \sigma}\,d\sigma + c(s) = 0$$

oder

$$L(s) \equiv a(s)\,u(s) + \frac{1}{2\pi}\,b(s)\int\limits_{-\pi}^{+\pi} u(\sigma)\left\{\operatorname{cotg}\frac{\sigma - s}{2} + A(s,\sigma)\right\}d\sigma + c(s) = 0 \quad (1)$$

Genüge leistet. Wir denken uns in dieser Bedingungsgleichung (1) ϱ statt s eingesetzt, multiplizieren sie mit

$$\frac{\partial G(s,\varrho)}{\partial \varrho} = \frac{1}{2\pi}\left\{\operatorname{cotg}\frac{\varrho - s}{2} + A(s,\varrho)\right\}$$

und integrieren alsdann nach ϱ zwischen den Grenzen $-\pi$ bis $+\pi$; dadurch erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-\pi}^{+\pi} L(\varrho)\frac{\partial G(s,\varrho)}{\partial \varrho}\,d\varrho \equiv{} & \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} a(\varrho)\,u(\varrho)\left\{\operatorname{cotg}\frac{\varrho - s}{2} + A(s,\varrho)\right\}d\varrho \\
& + \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} b(\varrho)\,u(\sigma)\left\{\operatorname{cotg}\frac{\varrho - s}{2} + A(s,\varrho)\right\}\left\{\operatorname{cotg}\frac{\sigma - \varrho}{2} + A(\varrho,\sigma)\right\}d\varrho\,d\sigma \\
& + \int\limits_{-\pi}^{+\pi} c(\varrho)\frac{\partial G(s,\varrho)}{\partial \varrho}\,d\varrho \\
\equiv{} & \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} a(\varrho)\,u(\varrho)\operatorname{cotg}\frac{\varrho - s}{2}\,d\varrho \\
& + \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} b(\varrho)\,u(\sigma)\operatorname{cotg}\frac{\varrho - s}{2}\operatorname{cotg}\frac{\sigma - \varrho}{2}\,d\varrho\,d\sigma \\
& + \int\limits_{-\pi}^{+\pi} B(s,\varrho)\,u(\varrho)\,d\varrho + d(s) = 0;
\end{aligned}$$

dabei ist zur Abkürzung

$$\begin{aligned}
B(s,\varrho) ={} & \frac{1}{2\pi}\,a(\varrho)\,A(s,\varrho) \\
& + \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} b(\sigma)\left\{A(\sigma,\varrho)\operatorname{cotg}\frac{\sigma - s}{2} + A(s,\sigma)\operatorname{cotg}\frac{\varrho - \sigma}{2}\right\}d\sigma \\
& + \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} b(\sigma)\,A(s,\sigma)\,A(\sigma,\varrho)\,d\sigma,
\end{aligned}$$

$$d(s) = \int\limits_{-\pi}^{+\pi} c(\varrho)\frac{\partial G(s,\varrho)}{\partial \varrho}\,d\varrho$$

gesetzt, und da $A(\sigma,\varrho)$, $c(s)$ stetig differenzierbare Funktionen sind, so erweisen sich $B(\varrho,s)$, $d(s)$ als stetige Funktion der Argumente.

Setzen wir nunmehr

$$a(\varrho) = a(s) + a(\varrho, s) \operatorname{tang} \frac{\varrho - s}{2},$$

$$b(\varrho) = b(s) + b(\varrho, s) \operatorname{tang} \frac{\varrho - s}{2},$$

wo $a(\varrho, s)$, $b(\varrho, s)$ stetige Funktionen von ϱ, s bedeuten, so wird

$$\int_{-\pi}^{+\pi} a(\varrho)\, u(\varrho) \operatorname{cotg} \frac{\varrho - s}{2}\, d\varrho$$

$$= \int_{-\pi}^{+\pi} u(\varrho) \left\{ a(s) \operatorname{cotg} \frac{\varrho - s}{2} + a(\varrho, s) \right\} d\varrho,$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} b(\varrho)\, u(\sigma) \operatorname{cotg} \frac{\varrho - s}{2} \operatorname{cotg} \frac{\sigma - \varrho}{2}\, d\varrho\, d\sigma$$

$$= b(s) \int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u(\sigma) \operatorname{cotg} \frac{\varrho - s}{2} \operatorname{cotg} \frac{\sigma - \varrho}{2}\, d\varrho\, d\sigma + \int_{-\pi}^{+\pi} C(s, \sigma)\, u(\sigma)\, d\sigma,$$

wo $C(s, \sigma)$ wiederum eine stetige Funktion bedeutet.

Wegen der Identität (vgl. meine zweite Mitteilung über Integralgleichungen in den Göttinger Nachrichten, S. 253)

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u(\sigma) \operatorname{cotg} \frac{\varrho - s}{2} \operatorname{cotg} \frac{\sigma - \varrho}{2}\, d\varrho\, d\sigma = -u(s) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} u(\sigma)\, d\sigma$$

folgt mithin

$$\int_{-\pi}^{+\pi} L(\varrho) \frac{\partial G(s, \varrho)}{\partial \varrho}\, d\varrho \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} u(\sigma) \left\{ a(s) \operatorname{cotg} \frac{\sigma - s}{2} + D(s, \sigma) \right\} d\sigma \qquad (2)$$
$$- b(s)\, u(s) + d(s) = 0,$$

wo $D(s, \sigma)$ wiederum eine stetige Funktion von s, σ bedeutet.

Wenn wir (1) mit $a(s)$, (2) mit $-b(s)$ multiplizieren und die erhaltenen Gleichungen addieren, so entsteht

$$a(s)\, L(s) - b(s) \int_{-\pi}^{+\pi} L(\varrho) \frac{\partial G(s, \varrho)}{\partial \varrho}\, d\varrho \equiv \{(a(s))^2 + (b(s))^2\}\, u(s)$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\, b(s) \int_{-\pi}^{+\pi} u(\sigma) \{ a(s)\, A(s, \sigma) - D(s, \sigma) \}\, d\sigma \qquad (3)$$
$$+ a(s)\, c(s) - b(s)\, d(s) = 0,$$

d. h. die Randwerte $u(s)$ der gesuchten Potentialfunktion $u(xy)$ müssen notwendig der Integralgleichung

$$u(s) + \frac{1}{2\pi} \frac{b(s)}{(a(s))^2 + (b(s))^2} \int_{-\pi}^{+\pi} u(\sigma) \{ a(s) A(s, \sigma) - D(s, \sigma) \} \, d\sigma \\ + \frac{a(s)\, c(s) - b(s)\, d(s)}{(a(s))^2 + (b(s))^2} = 0 \tag{4}$$

genügen. Nun verschwindet der Ausdruck $a(s)\, c(s) - b(s)\, d(s)$ sicher nicht identisch in s, da $c(s)$, $d(s)$ die Randwerte von Real- bezw. Imaginärteil einer analytischen Funktion sind und es bei der von uns gemachten Annahme eine analytische Funktion von dieser Beschaffenheit nicht geben konnte.

Die Anwendung der Fredholmschen Formeln (vgl. meine erste Mitteilung über Integralgleichungen in den Göttinger Nachrichten, S. 57—62) lehrt dann, daß es stets eine Lösung $u(s)$ dieser Integralgleichung gibt, — es sei denn, daß die Integralgleichung

$$u(s) + \frac{1}{2\pi} \frac{b(s)}{(a(s))^2 + (b(s))^2} \int_{-\pi}^{+\pi} u(\sigma) \{ a(s) A(s, \sigma) - D(s, \sigma) \} \, d\sigma = 0 \tag{5}$$

eine von Null verschiedene Lösung $u(s)$ besitzt. Der letztere Fall ist aber unmöglich: denn wäre $u(s)$ eine Lösung von (5) und setzen wir

$$L^*(s) = a(s)\, u(s) + b(s) \int_{-\pi}^{+\pi} u(\sigma) \frac{\partial G(s, \sigma)}{\partial \sigma} \, d\sigma,$$

so würde aus (5)

$$a(s)\, L^*(s) - b(s) \int_{-\pi}^{+\pi} L^*(\varrho) \frac{\partial G(s, \varrho)}{\partial \varrho} \, d\varrho = 0$$

folgen. Da nun

$$\alpha(s) = L^*(s) \quad \text{und} \quad \beta(s) = \int_{-\pi}^{+\pi} L^*(\varrho) \frac{\partial G(s, \varrho)}{\partial \varrho} \, d\varrho$$

die Randwerte von Real- und Imaginärteil einer analytischen Funktion sind, so müßte wegen der gegenwärtigen Annahme $L^*(s)$ identisch null sein, und hieraus wiederum folgt in gleicher Weise das identische Verschwinden von $u(s)$.

Es sei nun $u(s)$ die Lösung der Integralgleichung (4); bilden wir mittelst dieser Funktion $u(s)$ den Ausdruck $L(s)$, so stellen wegen (3)

$$\alpha(s) = L(s) \quad \text{und} \quad \beta(s) = \int_{-\pi}^{+\pi} L(\varrho) \frac{\partial G(s, \varrho)}{\partial \varrho} \, d\varrho$$

wiederum die Randwerte von Real- und Imaginärteil einer analytischen Funktion dar, die die Bedingung

$$a(s)\, \alpha(s) - b(s)\, \beta(s) = 0$$

erfüllen. Da es eine solche analytische Funktion — von Null abgesehen — nicht geben sollte, so folgt notwendig

$$\alpha(s) = L(s) = 0,$$

d. h. die Funktionen $u(s)$ und

$$v(s) = \int_{-\pi}^{+\pi} u(\sigma) \frac{\partial G(s, \sigma)}{\partial \sigma} d\sigma$$

erfüllen die gegebene lineare Bedingung und stellen mithin die Randwerte von Real- und Imaginärteil der gewünschten analytischen Funktion dar.

Damit ist das vorgelegte Problem vollständig gelöst.

Sur le développement, à l'aide des fonctions cylindriques, des sommes doubles $\Sigma f(pm^2 + 2qmn + rn^2)$, où $pm^2 + 2qmn + rn^2$ est une forme positive à coefficients entiers.

Von

G. Voronoï aus Warschau.

Considérons une somme double

$$S = \sum_{m,\,n} f(pm^2 + 2qmn + rn^2)$$

dans l'ensemble des variables entières m et n défini par les inégalités

$$a < pm^2 + 2qmn + rn^2 \leqq b,$$

a et b étant deux paramètres positifs et $pm^2 + 2qmn + rn^2$ une forme quadratique positive à coefficients entiers.

En désignant par le symbole $\tau(\varkappa)$ le nombre des solutions, en nombres entiers m et n, de l'équation

$$pm^2 + 2qmn + rn^2 = \varkappa,$$

on peut présenter la somme S sous la forme suivante:

$$S = \sum_{m,\,n} f(pm^2 + 2qmn + rn^2) = \sum_{\varkappa > a}^{\varkappa \leqq b} \tau(\varkappa) f(\varkappa).$$

Supposons que la fonction $f(x)$ soit continue dans l'intervalle $a < x < b$.

Désignons par $\varphi(x)$ la fonction numérique représentée par la somme

(1) $$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{n \leqq x} \tau(n),$$

où l'on a posé $\tau(0) = 1$.

Considérons les sommes

$$S_n = \sum_{\varkappa=0}^{n-1} f(\xi_\varkappa)\,[\varphi(x_{\varkappa+1}) - \varphi(x_\varkappa)]$$

en supposant que, comme à l'ordinaire, $\xi_0, \xi_1, \cdots \xi_{n-1}$ soient des valeurs quelconques de la variable x contenues dans les intervalles correspondants

$$(x_0, x_1),\ (x_1, x_2),\ \cdots\ (x_{n-1}, x_n) \quad \text{où} \quad x_0 = a \quad \text{et} \quad x_n = b.$$

On démontrera sans peine que les sommes S_n tendent vers une limite fixe à mesure que toutes les différences $x_1 - x_0,\ x_2 - x_1, \cdots x_n - x_{n-1}$ décroissent infiniment. On désignera cette limite d'après Stieltjes*) par le symbole $\int_a^b f(x)\,d\varphi(x)$ et on l'appellera intégrale définie.

Il est aisé à démontrer que, dans le cas considéré, la limite des sommes S_n est égale à la valeur de la somme double S; il en résulte la formule fondamentale

$$\sum_{n>a}^{n\leq b} \tau(n) f(n) = \int_a^b f(x)\,d\varphi(x). \tag{2}$$

Les intégrales définies de Stieltjes possèdent les propriétés fondamentales des intégrales définies ordinaires.

En intégrant par parties, on obtient, en vertu de (2),

$$\sum_{n>a}^{n\leq b} \tau(n) f(n) = \varphi(b) f(b) - \varphi(a) f(a) - \int_a^b \varphi(x)\,df(x).$$

En vertu de la formule obtenue, l'étude de la somme S se réduit à l'étude de la fonction numérique $\varphi(x)$.

Comme on sait, la fonction numérique $\varphi(x)$ a une valeur asymptotique $\frac{\pi}{\sqrt{\varDelta}}\,x$ où $\varDelta = pr - q^2$; en posant

$$\varphi(x) = \frac{\pi}{\sqrt{\varDelta}}\,x + r(x), \tag{3}$$

on aura le reste $r(x)$ dont l'ordre ne surpasse pas celui de la fonction $\sqrt{x}$.

En substituant cette expression de la fonction $\varphi(x)$ dans la formule (2), on obtient, en vertu des propriétés des intégrales définies de Stieltjes,

---

*) Stieltjes, Recherches sur les fractions continues. (Annales de la Faculté des sciences de Toulouse, t. VIII. 1894, p. 71.)

$$\sum_{n>a}^{n\leq b} \tau(n)f(n) = \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}} \int_a^b f(x)dx + \int_a^b f(x)dr(x).$$

En intégrant par parties, on trouve

$$1) \quad \sum_{n>a}^{n\leq b} \tau(n)f(n) = \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}} \int_a^b f(x)dx + r(b)f(b) - r(a)f(a) - \int_a^b r(x)df(x).$$

La formule obtenue peut servir au calcul des valeurs approchées de la somme S puisqu'on connait la valeur approchée de la fonction $r(x)$.

Une formule de la théorie des fonctions abéliennes, due à Rosenhain*), fournit un moyen pour l'étude plus approfondie de la fonction $r(x)$:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi z(pm^2+2qmn+rn^2)} = \frac{1}{z\sqrt{\Delta}} \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi}{\Delta z}(pm^2+2qmn+rn^2)}$$

Cette formule subsiste à condition que la partie réelle de la variable z soit positive.

En introduisant le symbole $\tau(n)$, on présentera la formule de Rosenhain sous la forme suivante:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tau(n)\, e^{-\pi z n} = \frac{1}{z\sqrt{\Delta}} \sum_{n=0}^{\infty} \tau(n)\, e^{-\frac{\pi}{\Delta z} n}.$$

Multiplions les deux parties de cette égalité par

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{e^{\pi x z}}{z} dz \quad \text{où} \quad x > 0$$

et intégrons les fonctions obtenues, par rapport à la variable complexe z, dans le domaine défini par les conditions

$$z = \alpha + ti, \quad -\infty < t < \infty \quad \text{et} \quad \alpha > 0.$$

On obtient la formule

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-\infty i}^{\alpha+\infty i} \sum_{n=0}^{\infty} \tau(n)\, e^{\pi z(x-n)} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-\infty i}^{\alpha+\infty i} \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{n=0}^{\infty} \tau(n)\, e^{\pi x z - \frac{\pi}{\Delta z} n} \frac{dz}{z^2}.$$

En admettant que dans la formule obtenue il est permis d'intervertir le signe de sommation avec le signe d'intégration, on aura

*) Rosenhain, Abhandlung über die Funktionen zweier Variabler mit vier Perioden, welche die Inversen sind der ultra-elliptischen Integrale erster Klasse. (Ostwalds Klassiker, Nr. 65, p. 36.)

$$(5)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\tau(n)\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-\infty i}^{\alpha+\infty i} e^{\pi z(x-n)}\frac{dz}{z}=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\sum_{n=0}^{\infty}\tau(n)\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-\infty i}^{\alpha+\infty i} e^{\pi x z-\frac{\pi}{\Delta z}n}\frac{dz}{z^2}.$$

En observant que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-\infty i}^{\alpha+\infty i} e^{\pi z(x-n)}\frac{dz}{z}=1 \qquad \text{tant que } x-n>0,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-\infty i}^{\alpha+\infty i} e^{\pi z(x-n)}\frac{dz}{z}=0 \qquad \text{tant que } x-n<0,$$

et

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-\infty i}^{\alpha+\infty i}\frac{dz}{z}=\frac{1}{2},$$

on présentera l'égalité (5) sous la forme suivante

$$\sum_{n=0}^{n\leq x}\tau(n)-\frac{1}{2}\tau(x)=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\sum_{n=0}^{\infty}\tau(n)\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-\infty i}^{\alpha+\infty i} e^{\pi x z-\frac{\pi}{\Delta z}n}\frac{dz}{z^2}$$

où le symbole $\tau(x)$ a la valeur 0 quand x n'est pas un nombre entier.

En observant que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-\infty i}^{\alpha+\infty i} e^{\pi x z}\frac{dz}{z^2}=\pi x \qquad \text{tant que } x>0,$$

on présentera l'égalité précédente sous la forme suivante:

$$\sum_{n=0}^{n\leq x}\tau(n)=\frac{1}{2}\tau(x)+\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}x+\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-\infty i}^{\alpha+\infty i} e^{\pi x z-\frac{\pi}{\Delta z}n}\frac{dz}{z^2}.$$

En vertu des égalités (1) et (3), il vient

$$(6)\qquad r(x)=\frac{1}{2}\tau(x)+\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-\infty i}^{\alpha+\infty i} e^{\pi x z-\frac{\pi}{\Delta z}n}\frac{dz}{z^2}.$$

Les intégrales définies qui figurent dans la seconde partie de la formule obtenue représentent les fonctions cylindriques.

En désignant par $\eta_\varkappa(x)$ la fonction cylindrique définie par la série infinie

$$\eta_\varkappa(x)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(-1)^\lambda}{\lambda!}\cdot\frac{x^{\varkappa+\lambda}}{(\varkappa+\lambda)!},$$

on aura l'égalité

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-\varkappa i}^{\alpha+\infty i} e^{\pi x z - \frac{\pi}{\varDelta z} n}\frac{dz}{z^2} = \frac{\varDelta}{\pi n}\eta_1\left(\frac{\pi^2 n x}{\varDelta}\right),$$

:t la formule (6) prend la forme

$$r(x) = \frac{1}{2}\tau(x) + \frac{\pi}{\sqrt{\varDelta}}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{\varDelta}{\pi^2 n}\eta_1\left(\frac{\pi^2 n x}{\varDelta}\right). \tag{7}$$

En substituant l'expression obtenue de la fonction $r(x)$ dans la ormule (4), on déduira une formule générale

$$\sum_{n>a}^{n\leq b}\tau(n)f(n) = \frac{\pi}{\sqrt{\varDelta}}\int_a^b f(x)\,dx + \frac{1}{2}\tau(b)f(b) - \frac{1}{2}\tau(a)f(a) \tag{8}$$

$$+\frac{\pi}{\sqrt{\varDelta}}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\int_a^b f(x)\,\eta\left(\frac{\pi^2 n x}{\varDelta}\right)dx,$$

ù la fonction cylindrique $\eta(x)$ est définie par la série infinie

$$\eta(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(-1)^\lambda}{\lambda!}\frac{x^\lambda}{\lambda!}.$$

La formule (8) subsiste a condition que la fonction $f(x)$ soit coninue dans l'intervalle $a < x < b$ et ne possède dans cet intervalle qu'un ombre fini des maxima et des minima.

Les développements connus des fonctions cylindriques dans les éries semi-convergentes conduisent, en vertu de la formule (8), aux ésultats remarquables concernant les valeurs approchées des sommes onsidérées.

De cette manière on démontrera, par exemple, que la fonction umérique

$$\sum_{n=0}^{n\leq x}\tau(n)\frac{(x-n)^\varkappa}{\varkappa!} \quad \text{où} \quad \varkappa > 0$$

st représentée par la fonction $\frac{\pi}{\sqrt{\varDelta}}\frac{x^{\varkappa+1}}{(\varkappa+1)!}$ avec une erreur dont l'ordre e surpasse pas celui de la fonction $x^{\frac{\varkappa}{2}+\frac{1}{4}}$.

Le développement (7) de la fonction $r(x)$ en série infinie, à l'aide es fonctions cylindriques, à été obtenu comme le résultat de l'appliation du facteur discontinu de Cauchy à la formule de Rosenain. Malgré la simplicité et l'élégance de cette méthode, elle ne perıet pas de démontrer rigoureusement la formule (7) et doît être emplacée par une autre méthode.

Neue Entwicklungen über den Existenzbeweis der polymorphen Funktionen.

Von

R. Fricke aus Braunschweig.

Die Mitteilungen, welche ich Ihnen heute vorlegen möchte, beziehen sich auf dasjenige Gebiet, dem ich seit einer geraumen Reihe von Jahren einen Teil meiner Mußestunden gewidmet habe, auf die Theorie der automorphen Funktionen. Die umfassende Darstellung dieser Theorie, welche ich im Verein mit Herrn Klein bei der Verlagsbuchhandlung von B. G. Teubner herausgebe, ist an einer Stelle ins Stocken geraten, welche mir von vornherein als besonders schwierig erschien. Es handelt sich um die allgemeine Frage der Existenz der linear-polymorphen oder kurz polymorphen Funktionen, welche die Eigenschaften der zu den automorphen Funktionen inversen Funktionen tragen.

Ich beschränke mich ausschließlich auf das Gebiet der automorphen Funktionen oder automorphen Gebilde mit Hauptkreis, auf diejenigen Funktionen also, welche von Herrn Poincaré als Fuchssche Funktionen bezeichnet wurden. Das Argument der automorphen Funktionen nenne ich ζ, eine einzelne solche Funktion sei $z = \varphi(\zeta)$. Das zugehörige Fundamentalpolygon in der ζ-Ebene, resp. der ζ-Halbebene wird durch $z = \varphi(\zeta)$ auf eine geschlossene Riemannsche Fläche über der z-Ebene abgebildet, welche das Geschlecht p habe. Das Polygon möge n Eckpunkte aufweisen, welche Fixpunkte elliptischer oder parabolischer Substitutionen sind; ihnen mögen Punkte der Riemannschen Fläche entsprechen, welche bei $z = e_1, e_2, \cdots, e_n$ gelegen sind. Die Winkel des Polygons an den fraglichen Ecken sind $\frac{2\pi}{l_1}, \frac{2\pi}{l_2}, \cdots, \frac{2\pi}{l_n}$, wo $l_1, l_2, \cdots, l_n$ ganze Zahlen $\geqq 2$ oder ∞ sind. Die Zusammenstellung (p, n) heißt „Charakter" des automorphen Gebildes, $(p, n; l_1, \cdots, l_n)$ dessen „Signatur"; wir sagen auch, die Riemannsche Fläche sei mit n

Punkten $e_1, \cdots, e_n$ signiert, denen alsdann die ganzen Zahlen $l_1, \cdots, l_n$ zugeordnet sind.

Die zu $z = \varphi(\zeta)$ inverse Funktion sei $\zeta = f(z)$. Sie heißt eine linear-polymorphe Funktion auf der Fläche, weil sie sich bei Umläufen von z auf der Fläche linear substituiert. Des näheren sind diese Substitutionen solche, daß die geeignet zerschnittene Fläche auf ein Hauptkreispolygon, wie es eben in der Theorie der eigentlich diskontinuierlichen Hauptkreisgruppen auftritt, abgebildet wird.

Bekannt ist der Vergleich mit der Theorie der elliptischen Funktionen, den ich indessen des besseren Verständnisses halber kurz andeute. Dem Hauptkreispolygon entspricht dort das Periodenparallelogramm in der Ebene des Integrals erster Gattung. Eine geeignet gewählte doppelt-periodische Funktion bildet das Parallelogramm auf eine zweiblättrige Riemannsche Fläche ab. Auf letzterer wäre das Integral das Analogon unserer polymorphen Funktionen. Auf jeder Riemannschen Fläche des Geschlechtes 1 existiert eine solche polymorphe Funktion, und man kennt die bedeutenden Vorteile, welche der Schritt mit sich bringt, diese Größe als unabhängige Variable für die übrigen auf der Fläche auftretenden Funktionen anzusetzen.

Von hier aus verstehen Sie die fundamentale Bedeutung der Frage, ob vielleicht auf jeder irgend wie signierten Riemannschen Fläche des Charakters (p, n) eine polymorphe Funktion $\zeta = f(z)$ existieren möchte, welche die Abbildung der Fläche auf ein Hauptkreispolygon vorgeschriebener Signatur leistet. Diese Funktion würde für das zur gegebenen Fläche gehörende algebraische Gebilde dieselbe zentrale Stellung einnehmen, wie das Integral erster Gattung auf der Riemannschen Fläche des Geschlechtes $p = 1$.

Es ist nun bereits 20 Jahre her, daß die aufgeworfene Frage durch die Herren Klein und Poincaré im bejahenden Sinne beantwortet wurde. Der so entspringende Satz wurde wegen seiner grundlegenden Bedeutung von Klein als „Fundamentaltheorem" bezeichnet. Die Beweisansätze, welche die beiden genannten Forscher zur Stützung des Fundamentaltheorems benutzten, gründen sich auf Kontinuitätsbetrachtungen. Man hat auf der einen Seite bei der einzelnen Signatur $(p, n; l_1, \cdots, l_n)$ das Kontinuum zugehöriger automorpher Gebilde, auf der anderen Seite das Kontinuum der mit dieser Signatur versehenen Riemannschen Flächen. Man sucht aus dem, was man über die Bezeichnung dieser beiden Kontinua von Hause aus weiß, den Schluß zu ziehen, daß diese Beziehung notwendig eine wechselweise eindeutige sein müsse, womit dann also in der Tat jede Riemannsche Fläche rückwärts ihr zugehöriges Hauptkreispolygon bekommt.

Im Laufe der Weiterentwicklung sind neben der Kontinuitätsmethode noch mehrere weitere Beweisansätze hinzugekommen. Indessen beziehen sich diese nur auf besondere Fälle, und sie können nicht die universelle Bedeutung der Kontinuitätsmethode für sich in Anspruch nehmen.

Diese Methode fanden, wie schon gesagt, die Herren Klein und Poincaré unabhängig voneinander auf. Die bezügliche Hauptarbeit Poincarés ist im Herbste 1883, etwa ein Jahr später als diejenige Kleins, erschienen. Sie geht entsprechend aber auch viel tiefer in die Einzelheiten und die großen Schwierigkeiten des Beweisganges ein; und ich glaube, daß es sich hier um eine der tiefsten und schönsten Arbeiten des genialen Forschers aus der damaligen Periode seiner Entwicklung handelt.

Trotzdem und obschon, soweit mir bekannt geworden ist, Herr Poincaré auch heute noch seinen Beweis des Fundamentaltheorems vermöge der Kontinuitätsmethode für bündig hält, habe ich gerade an dieser Stelle bei der umfassenden Darstellung der Theorie der automorphen Funktionen, welche ich eingangs nannte, erhebliche Schwierigkeiten gefunden. Diese Schwierigkeiten liegen nach zwei Richtungen hin.

Erstlich hat man öfters geäußert, daß die Stetigkeitsbetrachtungen, welche beim Kontinuitätsbeweise zur Verwendung kommen, den gesteigerten Anforderungen der Mengentheoretiker nicht mehr zu genügen imstande seien. Gerade aus dem Gebiete der Theorie der automorphen Funktionen, über das ich zu sprechen im Begriffe stehe, ist die Anregung geflossen, daß z. B. Herr Schönflies den mengentheoretischen Beweis des Satzes gab, daß das umkehrbar eindeutige und stetige Abbild der Fläche eines Quadrates wieder ein einfach zusammenhängendes Flächenstück ist. Es würde mich sehr interessieren, von den Herren Mengentheoretikern zu hören, wie es mit der Erweiterung dieses Satzes auf mehrdimensionale reguläre Würfel, sowie überhaupt auf mehrdimensionale einfach zusammenhängende Bereiche steht.

Im übrigen möchte ich der Überzeugung Ausdruck geben, daß es sich, wenn ich so sagen darf, bei der Umarbeitung des Kontinuitätsbeweises auf die Denk- und Sprechweise der Mengenlehre keineswegs um eine Schwierigkeit handelt, welche diesen Beweis zu Falle bringen könnte. Überhaupt kann die Sachlage vielleicht so bezeichnet werden: Da man die Kontinua, von denen etwas bewiesen werden soll, eigentlich nicht recht kannte, so setzte man an ihre Stelle die allgemeinste Definition der Kontinua, welche die Mengenlehre ermöglicht, und war dadurch genötigt, die Diskussion in das Gebiet einer durch ihre Allgemeinheit schwierigen mengentheoretischen Untersuchung zu verlegen.

In den vorstehenden Worten ist auch bereits die zweite Schwierigkeit, mit der ich zu kämpfen hatte und noch habe, zur Andeutung gebracht: die mangelnde Kenntnis der Kontinua, deren gegenseitige Beziehungen man studieren will. Ich kann nicht umhin, dies auszusprechen, trotz der vielen geistreichen Ideen, welche insonderheit Herr Poincaré zur Gewinnung der gewünschten Kenntnis angegeben hat. Es ist demnach neuerdings der gewiesene Ansatzpunkt für meine eigenen Arbeiten geworden, in der klaren Erkenntnis der Kontinua automorpher Gebilde und der gegenüberstehenden Kontinua algebraischer Gebilde Fortschritte zu machen. Und nun ist es das eigentliche Ziel meiner heutigen Mitteilung, auszusprechen, daß ich in der genannten Richtung einmal zu einem gewissen allgemeinen Satze gelangt bin, darüber hinaus aber Spezialuntersuchungen ausgeführt habe, welche den Beweis des Fundamentaltheorems bei einer Reihe niederer Signaturen zum endgültigen Abschlusse brachten.

Was den allgemeinen Satz angeht, so sei eine beliebige Signatur $(p, n; l_1, \cdots, l_n)$ vorgelegt. Ich habe schon vor längerer Zeit den exakten Beweis geführt, daß jedes dieser Signatur angehörige Polygon in jedes andere zugehörige Polygon kontinuierlich überführbar ist, daß also die gesamten Polygone gegebener Signatur ein einziges Kontinuum bilden. Die Dimension m dieses Kontinuums ist schon in den ursprünglichen Arbeiten der Herren Poincaré und Klein bestimmt. Was mir aber neu war, ist die Möglichkeit, dieses m-dimensionale Kontinuum auf die Punkte eines m-dimensionalen regulären Würfels eindeutig stetig zu beziehen. Unser Kontinuum wird somit in demselben Sinne den Charakter des einfachen Zusammenhanges besitzen, wie der genannte Würfel.

Ein wichtiger Gesichtspunkt tritt jetzt hinzu. Das Polygon ist Abbild einer zerschnittenen Riemannschen Fläche. Zerschneidungen kann man aber bei ein und derselben Fläche, allgemein zu reden, unendlich viele angeben. Unendlich viele Polygone des Kontinuums stellen ein und dasselbe automorphe Gebilde, ein und dieselbe Gruppe linearer ζ-Substitutionen dar. Wie den Zusammenhang zwischen all diesen unwesentlich verschiedenen Polygonen finden?

Wiederum darf ich an die Analogie mit den doppeltperiodischen Funktionen vorab erinnern. Die verschiedenen kanonischen Schnittsysteme auf einer Fläche des Geschlechtes $p = 1$ liefern in dem zugehörigen Periodenquotienten ω ebensoviele Werte dieses Moduls. Diese Werte hängen vermöge linearer Substitutionen $\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$ zusammen, welche letztere die „elliptische Modulgruppe“ bilden.

Ein DB.*) dieser Gruppe liefert uns das Abbild aller unterschiedenen elliptischen Gebilde, während die ganze ω-Halbebene als Abbild des Kontinuums aller Parallelogramme zu gelten hat.

Genau analog im allgemeinen Gebiete der automorphen Funktionen! Das einzelne Polygon stellen wir durch ein System von Invarianten oder Moduln dar. Alle zulässigen Wertsysteme der Moduln geben uns eine analytische Darstellung des Polygonkontinuums; und man kann vermittels dieser Moduln eine geometrische Deutung des Polygonkontinuums, sei es durch die Punkte eines m-dimensionalen regulären Würfels, wie oben, sei es durch einen vielleicht im Einzelfalle zweckmäßiger gewählten m-dimensionalen einfach zusammenhängenden Bereich begründen. Der Übergang zu einem neuen Querschnittssysteme zieht nun eine birationale Transformation des Modulsystems nach sich; und die gesamten bei der einzelnen Signatur auftretenden Modultransformationen dieser Art liefern die zugehörige automorphe Modulgruppe. Der DB. dieser Modulgruppe ist uns nun offenbar das Abbild des Kontinuums automorpher Gebilde; und erst in diesem Kontinuum, nicht im Polygonkontinuum, haben wir das erreicht, was wir dem Kontinuum algebraischer Gebilde gegenüberstellen müssen.

Die Aufstellung der DB. der automorphen Modulgruppen, wenigstens zunächst bei niederen Signaturen, war bei dieser Sachlage das nächste Hauptziel meiner Untersuchungen. Die ausführliche Theorie der Fundamentalpolygone in der ζ-Halbebene bezw. ζ-Ebene hat mir hier den Weg gebahnt. Es ist ja das Schicksal von Vorträgen, wie wir sie heute hören, daß man immer da, wo die Entwicklung in das Gebiet reizvoller Einzeluntersuchungen überleitet, aus Mangel an Zeit einhalten muß. Lassen Sie mich demnach über die fraglichen Untersuchungen nur einen allgemeinen und wie ich glaube sehr wichtigen Gesichtspunkt angeben. Ich operiere in der Theorie der Fundamentalpolygone nicht mit den Kreisbogenfiguren der ζ-Ebene, sondern mit geradlinigen Figuren in der projektiven oder genauer hyperbolischen Ebene. An Stelle der von Poincaré in der ζ-Halbebene eingeführten nicht-euklidischen Maßbestimmung tritt nun die Cayleysche projektive Maßbestimmung des hyperbolischen Falles. Diese scheinbar unwesentliche Umformung der Polygone hat sich methodisch in der Folge als höchst wertvoll erwiesen. Unser Auge, unsere geometrische Auffassung ist nun einmal an die Geradlinigkeit gewöhnt. Indem die Polygontheorie in das Gebiet projektiv geometrischer Konstruktionen verlegt

*) Diskontinuitätsbereich.

ist, habe ich sie bis zu dem Grade ausbilden können, welcher für die Kontinuitätsmethode unerläßlich erscheint.

Meine Angaben würden zu unbestimmt bleiben, wollte ich nicht wenigstens in einem Spezialfalle das endliche Ergebnis der Untersuchung namhaft machen. Ich wähle die Signatur $(0, 4; l_1, l_2, l_3, l_4)$, wo das einfach zusammenhängende Polygonkontinuum zweidimensional wird. Die Modultheorie liefert als Bild dieses Kontinuums ein Stück der durch

$$x^2 + y^2 + z^2 - xyz + ux + vy + wz + J = 0$$

dargestellten Fläche dritter Ordnung; x, y, z sind die Moduln, u, v, w, J Koeffizienten, welche sich aus den Zahlen l_1, l_2, l_3, l_4 leicht berechnen lassen. Die Polygontheorie liefert als DB. der Modulgruppe ein auf diesem Flächenstück gelegenes Doppeldreieck. Das eine Elementardreieck hat als Randkurven:

$$yz - 2x = u, \quad zx - 2y = v, \quad xy - 2z = w,$$

Das andere entsteht durch eine Art Spiegelung des ersten an einer seiner drei Seiten.

Das gegenüberstehende Kontinuum algebraischer Gebilde umfaßt alle mit vier Punkten signierten Ebenen; die Punkte mögen bei e_1, e_2, e_3, e_4 liegen, sie müssen den Polygonecken mit den Winkeln $\frac{2\pi}{l_1}, \cdots, \frac{2\pi}{l_4}$ korrespondieren. Offenbar ist dieses Kontinuum invariant dargestellt durch alle komplexen Werte des Doppelverhältnisses:

$$\lambda = -\frac{(e_1 - e_2)(e_3 - e_4)}{(e_1 - e_3)(e_4 - e_2)}.$$

Nun muß man die Abbildung des obigen Doppeldreiecks auf die λ-Ebene studieren. Von vornherein weiß man, daß diese Abbildung stetig eindeutig und rückwärts höchstens eindeutig ist. Man stellt zuerst fest, daß der Rand des Elementardreiecks sich gerade genau auf die ganze reelle λ-Achse überträgt, wobei die Ecken des Dreiecks die Stellen $\lambda = 0, 1, \infty$ liefern. Daß das Abbild des Dreiecksinnern alsdann weiter die eine, etwa die positive Halbebene gerade vollständig bedeckt, ist, wie mir scheint, eine nicht sehr schwierige Folge der bestehenden Voraussetzungen, und ich glaube nicht, daß man nötig hat, hier noch weitgehend auf die Begriffe und Denkweisen der Mengenlehre einzugehen.

Doppeldreieck und λ-Ebene sind aufeinander eindeutig bezogen: Auf jeder mit vier Punkten $e_1, \cdot\cdot, e_4$ signierten Ebene gibt es eine polymorphe Funktion, welche dieselbe auf ein Hauptkreispolygon vorgeschriebener Signatur $(0, 4; l_1, \cdot\cdot, l_4)$ wie gewünscht abbildet.

Hiermit ist das Fundamentaltheorem im Falle der Signaturen $(0, 4; l_1, l_2, l_3, l_4)$ bewiesen, und ich begnüge mich mit der weiteren Angabe, daß ich dasselbe entsprechend bei einer Reihe weiterer Signaturen zu Ende gebracht habe, bei denen man mit Kontinuis von einer, zwei oder drei Dimensionen zu tun hat.

Diskussion:

L. Schlesinger bemerkt, daß er aus dem Vortrage nicht entnehmen konnte, welche Punkte des Poincaréschen Beweises beanstandet werden sollten, und daß demnach seine Überzeugung von der Bündigkeit dieses Beweises in keiner Weise erschüttert worden ist.

In seiner Erwiderung bezeichnet der Vortragende wiederholend und ergänzend eine Reihe von Gesichtspunkten, deren volle Aufklärung für einen bündigen Beweis unerläßlich ist, die jedoch bei Poincaré teils gar nicht, teils als unentwickelte Ansätze vorliegen.

Sur les fonctions entières d'ordre entier.

Von

P. Boutroux aus Paris.

1. On sait aujourd'hui qu'il existe une relation étroite entre deux éléments essentiels d'une fonction entière: la densité de ses zéros et la croissance de son module lorsque le module de la variable augmente indéfiniment. Cette relation a pu être déterminée avec une très grande précision pour toutes les fonctions entières dont l'ordre n'est pas entier. Soit, en d'autres termes, ϱ le plus petit nombre positif tel que les séries $\Sigma a_i^{-\varrho-\varepsilon}$, $\Sigma a_i^{-\varrho+\varepsilon}$, étendues aux divers zéros de la fonction, soient, la première convergente, la seconde divergente, quelque petit que soit ε. La relation que l'on a obtenue est valable lorsque ϱ n'est pas entier. En revanche, elle peut cesser de l'être si le nombre ϱ est entier.

Le cas des fonctions d'ordre entier apparaît ainsi, au premier abord, comme beaucoup plus compliqué que le cas général. Il se trouve cependant que ces fonctions jouissent de propriétés remarquables spéciales qui souvent, au contraire, les rendront plus simples que les autres. C'est ce que je voudrais montrer par un exemple, à propos de deux notes récentes publiées par MM. Hardy et Wiman.*)

2. Je rappellerai d'abord quelques résultats antérieurs.

Considérons le produit de facteurs primaires à croissance regulière

$$G(z) = \Pi\left(1 - \frac{z}{a_i}\right) e^{\frac{z}{a_i} + \cdots + \frac{z^p}{p a_i^p}},$$

*) Hardy: On the roots of the equation $\frac{1}{\Gamma(x+1)} = c$. (Proceedings of the London Mathematical Society, ser. 2, Vol. II, part. I.) — Wiman: Sur le cas d'exception dans la théorie des fonctions entières. (Arkiv for Mathematik, Astronomi och Fysik, 1904 Band I.)

et supposons d'abord, pour fixer les idées, que l'ordre*) du module $|a_n|$ du zéro de rang n soit

$$(n \log n)^{\frac{1}{p}}. \qquad \text{(p entier, genre du produit)}$$

Si la règle applicable aux produits d'ordre non entier était valable pour $G(z)$, le module maximum (pour $|z| = r$), $\mathsf{M}(r)$, de $G(z)$ serait de l'orde de

$$M(r) = e^{r^p (\log r)^{-1}}.$$

Mais cette règle est en général inapplicable. — Déterminons le nombre n par la condition $|a_n| = \eta r$ (η nombre positif donné): j'ai établi**) qu'il y avait lieu de distinguer deux cas:

1°. Si la somme $\sum\limits_1^n \frac{1}{a_i^p}$ est, pour des valeurs de n indéfinement croissantes, supérieure en module à une quantité A, alors, pour ces valeurs, $\mathsf{M}(r)$ est de l'ordre de e^{Ar^p}, et par suite d'ordre supérieur à $M(r)$.

2°. Si la série $\sum \frac{1}{a_i^p}$ (les zéros étant rangés par ordre de modules croissants) est semi-convergente et a pour somme zéro, la règle générale est satisfaite, et $\mathsf{M}(r)$ est de l'ordre de $M(r)$.

Ainsi, l'ordre de grandeur de la fonction $G(z)$ dépend essentiellement de la distribution et, en particulier, des arguments de ses zéros. Il est clair qu'une disposition des zéros rendant la série $\sum \frac{1}{a_i^p}$ semi-convergente et égale à 0 sera une disposition très spéciale. Supposons la croissance des modules des zéros régulière, et soit par exemple $p = 1$. Il faudra, pour que la condition voulue soit remplie, que les zéros soient approximativement égaux et de signes contraires, — circonstance évidemment exceptionnelle.

Nous obtenons des résultats analogues, si nous considérons une fonction $G(z)$, pour laquelle l'ordre de $|a_n|$ soit de la forme***)

$$\mu(n) = [n (\log n)^{\alpha}]^{\frac{1}{p}}.$$

Si tous les a_n se trouvent, par exemple, dans un même angle, le module maximum $\mathsf{M}(r)$ est de l'ordre de

$$e^{r^p (\log r)^{1-\alpha}}.$$

*) J'adopte ici la terminologie abrégée qu'a employée M. Wiman. Voir la note citée pp. 328—29.

**) J'ai exposé ces divers résultats dans un mémoire Sur quelques propriétés des fonctions entières. (Acta Mathematica, tome 28).

***) On traiterait tout aussi complètement le cas où $\mu(n)$ est de la forme

$$[n (\log n)^{\alpha_1} (\log \log n)^{\alpha_2} \cdots]^{\frac{1}{p}}.$$

Si au contraire ils sont tels que la série $\sum \frac{1}{a_i^p}$ soit nulle, $\mathsf{M}(r)$ a pour ordre

$$M_1(r) = e^{r^p (\log r)^{-\alpha}}.$$

D'une manière générale, pour que l'ordre de $\mathsf{M}(r)$ soit $M_1(r)$, il faut que la valeur de $\sum_1^n \frac{1}{a_i^p}$ ne dépende que d'un ensemble partiel de zéros $b_{n'}$ croissant, en module, comme

$$[n' (\log n')^{\alpha-1}]^{\frac{1}{p}},$$

et que la série $\sum \frac{1}{a_i^p}$ étendue aux zéros restants soit semi-convergente. L'ensemble partiel laissé de côté $b_1, b_2, \cdots, b_{n'}$, est d'ailleurs manifestement négligeable par rapport à l'ensemble total des zéros a_i.

Les fonctions que je viens de citer sont des fonctions pour lesquelles l'ordre est égal au genre. On fait, d'une manière toute semblable, l'étude du cas où $\varrho = p + 1$.

3. Le nouveau résultat que j'ai en vue est relatif à la distribution des zéros de la somme $G(z) + g(z)$, $g(z)$ étant une fonction entière quelconque dont l'ordre est moindre que l'ordre de $G(z)$.

M. Wiman a démontré le théorème suivant: si l'on ajoute à la fonction $G(z)$ une fonction quelconque $g(z)$ d'ordre inférieur, toutes les fonctions $G(z) + g(z)$ obéissent à la loi qui régit les fonctions d'ordre non entier. — Reprenons, par exemple, notre première fonction pour laquelle $|a_n|$ croît comme $(n \log n)^{\frac{1}{p}}$. Le module maximum de cette fonction $G(z)$ croît comme e^{Ar^p}. L'ordre du $n^{\text{ième}}$ zéro, a_n', de $G(z) + g(z)$ sera donc $n^{\frac{1}{p}}$.

En rapprochant ce théorème des résultats que j'ai rappelés, on arrive à la conclusion suivante:

Quelle que soit la fonction $g(z)$, la distribution des zéros, a_n', de $G + g$ est telle que la série $\sum \frac{1}{a_i'^p}$ soit semi-convergente et égale à zéro.

Dans le cas plus général où l'ordre de $|a_n|$ est $\mu(n)$, on peut encore affirmer que la série $\sum \frac{1}{a_i'^p}$, étendue aux zéros de $G + g$ (à l'exclusion peut-être d'un ensemble partiel de zéros négligeable par rapport à l'ensemble total) est semi-convergente.

Ce résultat peut, à première vue, paraître paradoxal. La distribution des zéros de $G(z)$ est arbitraire, aussi bien que celle des zéros de $g(z)$: et cependant la distribution des zéros de $G + g$ obéit à une loi invariable. C'est là, il est aisé de s'en rendre compte, une circonstance qui ne se présente pas dans la théorie des fonctions d'ordre non entier.

Mais la remarque suivante suffit à expliquer cette bizarrerie. Bornons-nous au produit $G(z)$ d'ordre $(n \log n)^{\frac{1}{p}}$, pour lequel la somme $\sum_1^n \frac{1}{a_i^p}$ croît en module plus vite qu'une fonction $A(r)$. On vérifie alors que dans p angles égaux issus de l'origine, le module de $G(z)$ reste toujours comparable à e^{Ar^p} (plus précisément le rapport $\frac{\log|G|}{Ar^p}$ reste compris entre deux nombres finis). Dans les p angles intermédiaires, $|G(z)|$ est nécessairement de l'ordre de grandeur de e^{-Ar^p}. En effet, le module maximum de la fonction $G(z) \cdot G(-z)$ doit, d'après le théorème qui régit les fonctions d'ordre non entier rester inférieur à une expression de la forme $e^{hr^p(\log r)^{-1}}$. Ainsi le produit $G(z)$ se comporte exactement comme l'exponentielle e^{Ar^p}. C'est là le caractère très particulier qui est propre aux fonctions d'ordre et de genre p satisfaisant au théorème de M. Wiman. Un facteur primaire se compose d'un facteur simple et d'une partie exponentielle: or, dans les cas ordinaires, l'influence du facteur simple est prépondérante; dans les cas considérés ici, c'est au contraire l'influence de la partie exponentielle qui l'emporte.

4. Cette remarque explique pourquoi les fonctions d'ordre entier ont une allure beaucoup plus simple et régulière que les fonctions d'ordre non entier. Ainsi M. Hardy a démontré que, sauf pour la valeur $c = 0$, les racines $a_n(c)$ de l'équation $\frac{1}{\Gamma(x+1)} = c$ convergent vers l'axe imaginaire. De plus l'on a, pour deux valeurs différentes quelconques de c

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n(c')}{a_n(c'')} = 1.$$

On pourrait se demander si cette dernière propriété, tout au moins, n'est pas une propriété générale des fonctions entières. Mais on reconnaîtra vite qu'elle est dûe, en réalité, aux circonstances particulières que je viens de signaler.

5. Comme exemple de fonctions entières d'ordre $\varrho = p + 1$, je renverrai à celles que j'ai considérées au § 31 de mon mémoire sur les fonctions entières. Je m'étais placé dans le cas particulier où $p = 0$ et où tous les zéros sont réels et positifs, ces zéros satisfaisant à partir d'une certaine valeur de i à la double inégalité

$$i(\log i)^{1+\alpha-\gamma} < a_i \leqq i(\log i)^{1+\alpha}. \qquad \text{($\alpha > 0$, γ arbitrairement petit)}$$

Considérons un angle A arbitrairement petit ayant pour bissectrice l'axe des y. A partir d'une certaine valeur de r, le module de $f(z)$ sera comparable

à gauche de l'angle A à $e^{-r(\log r)^{-1-\alpha}}$

à droite de l'angle A à $e^{r(\log r)^{-1-\alpha}}$.

Les racines d'une équation de la forme $f(z) = c$ convergeront donc, ici encore, vers l'axe imaginaire. En particulier, si c est réel, les racines a_i' d'une telle équation seront deux à deux imaginaires conjuguées. On vérifie alors immédiatement que la série $\sum \frac{1}{a_i'}$ est semi-convergente et a pour somme zéro. Nous obtenons ainsi les mêmes résultats que dans les cas où $\varrho = p$.

Remarquons, pour terminer, que les renseignements obtenus sur la distribution des zéros résolvent immédiatement la question du genre. Ainsi, lorsque $\alpha < 1$, la fonction $f(z)$ est de genre zéro. La fonction $f(z) - c$ est au contraire du genre 1, quelle que soit la constante c.

Sur une classe de fonctions entières.

Von

G. Mittag-Leffler aus Stockholm.

J'ai introduit dans des notes différentes une nouvelle fonction entière $E_\alpha(x)$ qui est, je le montrerai à une autre occasion, d'une grande importance pour la théorie générale des fonctions entières de genre fini.*) C'est l'étude de l'intégrale

$$(1) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int\limits^{S} \frac{e^{z^{\frac{1}{\alpha}}}}{z-x}\,dz$$

qui m'a conduit le plus facilement et le plus directement à mes résultats. Dans le cas où α est réel et positif le contour S, qui doit être parcouru dans le sens direct, est défini de la manière suivante.

On désigne par ϱ une quantité positive aussi grande que l'on voudra et par ε une autre quantité positive inférieure à deux. Le contour S sera composé: du segment compris entre l'infini et le point $\varrho^\alpha e^{-i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$ sur le vecteur issu de l'origine et ayant pour argument $-\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}$, de l'arc de cercle tracé par l'extrémité d'un vecteur de longueur ϱ tournant autour de l'origine dans le sens direct de $\varrho^\alpha e^{-i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$ à $\varrho^\alpha e^{i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$; et enfin du segment compris entre $\varrho^\alpha e^{i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$ et l'infini sur le vecteur issu de l'origine et ayant pour argument $\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}\cdot$

*) Voir pour le cas où α est réel et positif: „Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène. Cinquième note. § 2 et 3." Acta mathematica, T. 29, et pour le cas où α est complexe: „Sopra la funzione $E_\alpha(x)$." Atti R. Accad. dei Lincei. Rend. Ser. 5. Vol. 13, 3 gennaio 1904.

L'égalité

(2) $$E_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi i}\int^{S} \frac{1}{\alpha}\,\frac{e^{z^{\frac{1}{\alpha}}}}{z-x}\,dz$$

a lieu pour tous les points x qui sont situés du même côté de S que l'origine.

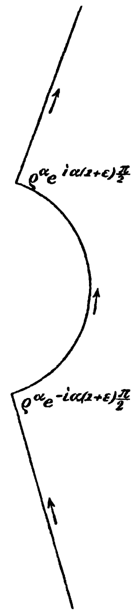


fig. 1.

En mettant dans l'intégrale (1) au lieu de $e^{z^{\frac{1}{\alpha}}}$ l'expression plus générale

$$e^{z^{\frac{1}{\alpha}}(\log z)^{\frac{1}{\alpha_1}}(\log_2 z)^{\frac{1}{\alpha_2}}\cdots(\log_n z)^{\frac{1}{\alpha_n}}},$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ sont des constantes positives, l'intégrale

(3) $$\frac{1}{2\pi i}\int^{S} \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{e^{z^{\frac{1}{\alpha}}(\log z)^{\frac{1}{\alpha_1}}(\log_2 z)^{\frac{1}{\alpha_2}}\cdots(\log_n z)^{\frac{1}{\alpha_n}}}}{z-x}\,dz$$

définira une nouvelle fonction $E_{\alpha\alpha_1\cdots\alpha_n}(x)$ qui a des propriétés tout à fait analogues à celles de la fonction $E_\alpha(x)$. En faisant par exemple

(4) $$2 > \alpha > 0$$

(5) $$x = re^{i\varphi}$$

et en désignant par δ une quantité positive arbitrairement petite on obtient:

(6) $$\left| E_{\alpha\alpha_1\cdots\alpha_n}(x) - \frac{1}{\alpha}e^{x^{\frac{1}{\alpha}}(\log x)^{\frac{1}{\alpha_1}}(\log_2 x)^{\frac{1}{\alpha_2}}\cdots(\log_n x)^{\frac{1}{\alpha_n}}} \right| < \delta;$$

$$-\alpha\frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \alpha\frac{\pi}{2}$$

et

(7) $$|E_{\alpha\alpha_1\cdots\alpha_n}(x)| < \delta; \qquad 2\pi - \alpha\frac{\pi}{2} > \varphi > \alpha\frac{\pi}{2}.$$

Les fonctions $E_{\alpha\alpha_1\cdots\alpha_n}(x)$ sont les plus simples parmi les fonctions entières de genre fini qui ont fait l'objet de l'étude de M. E. Lindelöf dans son mémoire remarquable: „Sur la théorie des fonctions entières de genre fini."*)

Les fonctions $E_\alpha(x)$ et $E_{\alpha\alpha_1\cdots\alpha_n}(x)$ ont la propriété caractéristique d'augmenter uniformément et indéfiniment quand $|x|$ va vers l'infini dans un angle intérieur à l'angle $-\alpha\frac{\pi}{2} < \varphi < \alpha\frac{\pi}{2}$; $x = re^{i\varphi}$, mais de descendre uniformément au dessous de toute limite quand $|x|$ va vers l'infini dans un angle intérieur à l'angle $2\pi - \alpha\frac{\pi}{2} > \varphi > \alpha\frac{\pi}{2}$. On

*) Acta Soc. Fenn. T. XXXI, no. 1.

peut faire l'angle $-\alpha\frac{\pi}{2} < \varphi < \alpha\frac{\pi}{2}$ aussi petit qu'on veut en diminuant suffisamment α. Il est donc naturel de se demander s'il existe des fonctions entières qui augmentent indéfiniment avec $|x|$ le long d'un seul vecteur, mais qui diminuent indéfiniment quand $|x|$ va vers l'infini dans un domaine quelconque en dehors de ce vecteur. Un théorème remarquable de M. **Phragmén** montre que de telles fonctions ne peuvent pas être de genre fini.*)

On peut au contraire donner des exemples aussi nombreux qu'on voudra de telles fonctions de genre infini. En voici un.

Introduisons au lieu de l'intégrale (1) la nouvelle intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{\Sigma} e^{e^z}\frac{dz}{z-x}, \tag{8}$$

où le contour Σ est choisi de la manière suivante. Il est composé: partie, de deux droites parallèles à l'axe réel, infinies dans le sens positif de cet axe et situées de part et d'autre à une distance de l'axe réel comprise entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$; partie, d'une droite orthogonale réunissant ces parallèles et coupant l'axe réel en un point arbitraire.

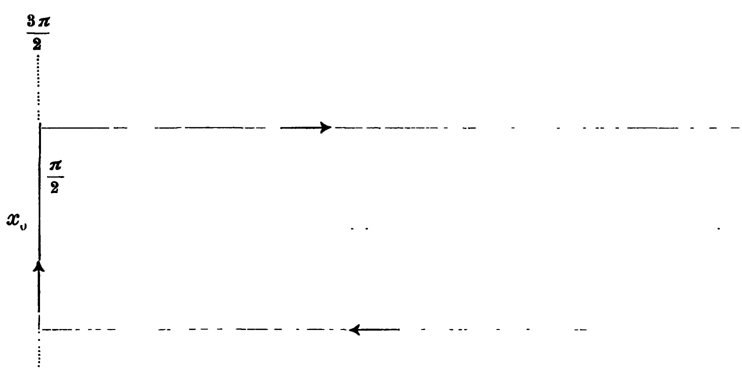


fig. 2.

On voit immédiatement que dans ces conditions l'intégrale est convergente. Attendu que l'axe réel est coupé par la ligne orthogonale en un point arbitraire, il s'ensuit encore que l'intégrale (8) définit une fonction entière, soit $E(x)$, et qu'elle représente cette fonction pour tous les x qui sont situés de même côté de Σ que les points réels négatifs infiniment éloignés. On a donc

*) E. **Phragmén**, „Sur une extension d'un théorème classique de la théorie des fonctions". Acta Math. 28, pag. 351.

(9) $$E(x) = \frac{1}{2\pi i}\int^{\Sigma} e^{e^z} \frac{dz}{z-x}$$

égalité valable pour les points x qui sont situés de ce côté de Σ, — le côté négatif, comme nous dirons dans la suite. Nous appelerons l'autre côté côté positif.

Une conséquence directe de cette égalité est que $|E(x)|$ s'approche indéfiniment de zéro en même temps que x va vers l'infini du côté négatif de Σ. Supposons maintenant que x soit situé du côté positif de Σ. Appelons x_0 le point, où la ligne orthogonale, qui fait partie de Σ, coupe l'axe réel. Coupons cet axe en un autre point x_1 tel que x soit situé entre les deux orthogonales passant par x_0 et par x_1. Appelons Σ_1 le contour Σ dont le côté orthogonal à l'axe réel passe par x_1. On a:

(10) $$E(x) = \frac{1}{2\pi i}\int^{\Sigma_1} e^{e^z} \frac{dz}{z-x}.$$

Mais on a d'un autre côté:

(11) $$\frac{1}{2\pi i}\int^{\Sigma_1} e^{e^z} \frac{dz}{z-x} = \frac{1}{2\pi i}\int^{R} e^{e^z} \frac{dz}{z-x} + \int^{\Sigma} e^{e^z} \frac{dz}{z-x},$$

où R désigne le quadrilatère compris entre les orthogonales passant par x_0 et par x_1.

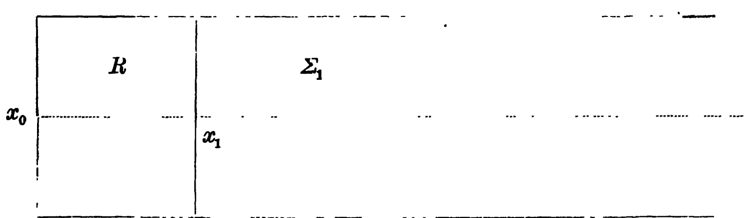


fig. 3.

On obtient par conséquent:

(12) $$E(x) = e^{e^x} + \frac{1}{2\pi i}\int^{\Sigma} e^{e^z} \frac{dz}{z-x}.$$

L'intégrale:

(8) $$\frac{1}{2\pi i}\int^{\Sigma} e^{e^z} \frac{dz}{z-x},$$

où x se trouve du côté positif de Σ s'approche évidemment indéfiniment de zéro quand x va vers l'infini.

On peut donc résumer les résultats concernant la fonction $E(x)$ dans le théorème suivant:

Théorème A. „La fonction entière définie par l'égalité

$$E(x) = \frac{1}{2\pi i}\int^{\Sigma} e^{e^z} \frac{dz}{z - x},$$

qui a lieu du côté négatif de Σ, se comporte quant à sa croissance de la manière suivante:

Quand x va vers l'infini du côté négatif d'un contour Σ, le module $|E(x)|$ s'approche en même temps uniformément et indéfiniment de zéro. Quand au contraire x va vers l'infini du côté positif du même contour Σ, le module

$$|E(x) - e^{e^x}|$$

diminue en même temps uniformément et indéfiniment."

Un corollaire immédiat de ce théorème est le suivant:

Théorème B. „Quand $x = re^{i\varphi}$ va vers l'infini le long d'un vecteur $0 < \varphi < 2\pi$ le module $|E(x)|$ diminue en même temps indéfiniment. Quand au contraire x va vers l'infini le long du vecteur $\varphi = {0 \atop 2\pi}$, c'est le module

$$|E(x) - e^{e^x}|$$

qui en même temps diminue indéfiniment."

On pourra se servir de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{\Sigma_k} e^{e^{z^k}} \frac{dz}{z - x} \qquad (k = \text{constante positive}) \tag{13}$$

d'une manière absolument semblable à celle qui a servi pour l'intégrale plus spéciale

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{\Sigma} e^{e^z} \frac{dz}{z - x}; \tag{8}$$

on définira ainsi une autre fonction plus générale que $E(x)$. Le contour Σ_k sera alors composé: partie, de deux lignes infinies dans le sens positif de l'axe réel,

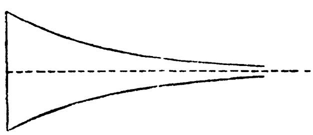


fig. 4.

$$\varrho^k \sin k\varphi = a, \quad \varrho^k \sin k\varphi = -a; \quad \frac{\pi}{2} < a < \frac{3\pi}{2}; \tag{14}$$

partie, d'une orthogonale à l'axe réel réunissant ces deux lignes. On voit que, k étant plus grand que un, les deux lignes (14) s'approchent d'une manière asymptotique à l'axe réel positif.

Nous désignerons par $E_k(x)$ la fonction qui correspond à ces valeurs de k et qui est définie par l'égalité

$$(15) \qquad E_k(x) = \frac{1}{2\pi i}\int^{\Sigma_k} e^{e^{z^k}}\,\frac{dz}{z-x},$$

laquelle a lieu du côté négatif de Σ_k. On voit que l'on a le théorème suivant:

Théorème C. „La fonction $E_k(x)$ s'approche indéfiniment et d'une manière uniforme de zéro quand x va vers l'infini dans un domaine situé à l'infini en dehors de l'axe réel positif. Quand au contraire x augmente indéfiniment le long de cet axe, le module

$$\left|E_k(x) - e^{e^{x^k}}\right|$$

s'approche en même temps indéfiniment de zéro."

Une nouvelle question se pose ici. Existe-il des fonctions entières qui diminuent indéfiniment le long de tous les vecteurs? Il est facile d'en donner des exemples. Un des plus simples s'obtient de la manière suivante.

Faisons

$$(16) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int^{\Sigma} e^{e^z}\cdot e^{-e^{e^z}}\,\frac{dz}{z-x}$$

et choisissons le contour Σ de la même manière que pour l'intégrale (8). On obtient alors par le même raisonnement que pour l'intégrale (8) le théorème suivant.

Théorème D. „La fonction entière $\mathfrak{E}(x)$ définie par l'égalité

$$(17) \qquad \mathfrak{E}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int^{\Sigma} e^{e^z}\cdot e^{-e^{e^z}}\,\frac{dz}{z-x},$$

qui a lieu du côté négatif de Σ, se comporte quant à sa croissance de telle manière que le module $|\mathfrak{E}(x)|$ diminue uniformément et indéfiniment quand x va vers l'infini du côté négatif de Σ, tandis que le module

$$\left|\mathfrak{E}(x) - e^{e^x}\cdot e^{-e^{e^x}}\right|$$

diminue uniformément et indéfiniment quand x va vers l'infini du côté positif de Σ."

On voit que

$$e^{e^x}\cdot e^{-e^{e^x}}$$

diminue indéfiniment quand x va vers l'infini le long de l'axe réel positif. Un corollaire immédiat du théorème D sera par conséquent:

Théorème E. „Quand x va vers l'infini le long d'un vecteur quelconque la fonction $\mathfrak{E}(x)$ s'approche en même temps indéfiniment de zéro."

Au lieu de partir de l'intégrale

$$(16)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int^{\Sigma} e^{e^z}\cdot e^{-e^{e^z}}\frac{dz}{z-x}$$

ou aurait pu partir de l'intégrale plus générale

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{\Sigma_k} e^{e^{z^k}}\cdot e^{-e^{e^{z^k}}}\frac{dz}{z-x}.$$

Le contour Σ_k doit être dans ce cas le même que pour l'intégrale (13). Désignons par $\mathfrak{E}_k(x)$ la fonction définie par l'intégrale (18), où on suppose k réel et plus grand que un. On obtient le théorème suivant.

Théorème F. „La fonction entière $\mathfrak{E}_k(x)$ définie par l'égalité

$$\mathfrak{E}_k(x)=\frac{1}{2\pi i}\int^{\Sigma_k} e^{e^{z^k}}\cdot e^{-e^{e^{z^k}}}\frac{dz}{z-x},$$

qui a lieu du côté négatif de Σ_k s'approche indéfiniment et d'une manière uniforme de zéro quand x va vers l'infini dans un domaine quelconque situé à l'infini en dehors de l'axe réel positif. Quand x augmente au-dessus de toute limite le long de cet axe, la fonction s'approche encore indéfiniment de zéro."

Sur les solutions fondamentales des équations linéaires aux dérivées partielles.

Von

J. Hadamard aus Paris.

Si l'on fait abstraction du cas de deux variables, la plus simple des équations linéaires aux dérivées partielles du type dit hyperbolique est l'équation du son, ou des ondes sphériques

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Le problème de déterminer une solution u d'une pareille équation par les valeurs de u et $\frac{\partial u}{\partial t}$ pour $t = 0$ (problème de Cauchy) a été résolu par les travaux de Poisson et de Kirchhoff.

La première solution de cette nature qui ait été obtenue ensuite est celle qui est due à M. Volterra, et qui est relative à l'équation des ondes cylindriques:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \tag{1}$$

De nombreux auteurs, — parmi lesquels je citerai MM. Le Roux, Coulon, d'Adhémar, etc.*) — ont tenté, dans ces dernières années, de généraliser la méthode de M. Volterra à des équations à coefficients variables. Ils ont éprouvé des difficultés disproportionnées, semble-t-il, à la difficulté intrinsèque de la question, et n'ont pu parvenir à obtenir l'équivalent du résultat de M. Volterra, c'est à dire à mettre la solution sous la forme d'une intégrale multiple, étendue à la frontière donnée, et dont l'élément se calcule immédiatement à l'aide des données.

Ces difficultés tiennent, en effet, comme nous allons le voir, à une imperfection de la méthode employée, imperfection qui apparaîtra si

*) J'aurais à citer d'autre part des travaux (tels que ceux de M. Tedone) relatifs aux équations à coefficients constants, mais à un plus grand nombre de variables indépendantes. Je laisse ce sujet de coté dans la communication actuelle.

nous rappelons les résultats obtenus dans le cas elliptique, pour l'équation de Laplace $\Delta u = 0$, par exemple.

La théorie de cette équation repose tout entière sur l'existence d'une solution particulière que l'on peut appeler fondamentale et qui n'est autre, en l'espèce, que la quantité $\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}$. Considérée comme fonction de x, y, z, cette quantité présente une singularité au point (x', y', z'). Elle n'admet d'ailleurs aucun autre point singulier réel. Par contre, elle est singulière sur toute une surface imaginaire, à savoir le cône isotrope de sommet (x', y', z').

A ce cône isotrope correspond, dans le cas d'une équation quelconque, une surface à point conique, le conoïde caractéristique l'enveloppe des caractéristiques qui passent par le point singulier et qui correspond, physiquement, à l'onde produite par un ébranlement limité primitivement à ce point.

Cette surface Γ, imaginaire dans le cas elliptique, est réelle dans le cas hyperbolique. Elle joue un rôle nécessaire dans toute recherche sur l'équation correspondante, et il n'est pas étonnant que les fonctions employées dans l'intégration de cette équation se comportent d'une manière particulière sur Γ.

Il existe, en effet, pour les équations à caractéristiques réelles comme pour les équations à caractéristiques imaginaires, des solutions fondamentales, singulières sur Γ et n'admettant aucune autre singularité. Seulement ces solutions se montrent, au moins au premier abord, absolument inutilisables pour l'intégration: lorsqu'on les introduit dans la formule bien connue qui sert de base à toutes les théories relatives aux équations linéaires aux dérivées partielles, on tombe sur des intégrales multiples dépourvues de sens.

Aussi les recherches de M. Volterra et de ses successeurs reposent-elles sur d'autres solutions particulières, dont les singularités sont d'ordre moins élevé que celles de la solution fondamentale. Mais cet avantage est racheté par un inconvénient: les nouvelles solutions sont singulières, non seulement (comme la solution fondamentale) en un point O et sur le conoïde caractéristique Γ qui a pour sommet ce point, mais encore sur toute une ligne l passant par O. Pour l'équation (1), ainsi d'ailleurs, que pour les autres équations analogues considérées par MM. Coulon et d'Adhémar, — la ligne l est la droite $x = x'$, $y = y'$, parallèle à l'axe des t menée par le point O.

Or il est aisé de voir que l'intervention de cette ligne n'est nullement imposée par la nature de la question. Reprenons, par exemple, l'équation (1): il existe une infinité de transformations (homographiques) qui n'altèrent pas cette équation: par de telles transformations, la droite l est changée en une droite quelconque l' passant par O et intérieure au cône Γ. D'autres transformations (analogues à des inversions) et qui laissent également invariante l'équation (1), permettent de changer la droite l en une conique l''.

Il est clair, dès lors, que la droite l n'a pas à jouer, dans le problème posé, un autre rôle que la droite l' ou la conique l''. Ce caractère quelque peu artificiel des solutions employées explique précisément que l'on n'ait pas pu les former directement dans le cas général. On les obtient au contraire sans aucune difficulté, comme nous allons le voir, en les rattachant à la solution fondamentale.

A cet effet, faisons partir du point O, à l'intérieur de Γ, une ligne arbitraire l, les coordonnées d'un point qui varie sur l étant fonctions d'un paramètre μ. A chaque point ω de l', — autrement dit, à chaque valeur de μ, — correspondent, pour l'adjointe de l'équation donnée (laquelle peut être une équation linéaire du second ordre à trois variables indépendantes tout à fait quelconque) un conoïde caractéristique γ et une solution fondamentale u, laquelle est fonction de x, y, z, μ. Considérons alors l'intégrale

$$U = \int f(\mu) \cdot u(x, y, z, \mu) d\mu$$

étendue le long de la ligne l, depuis le point O jusqu'à un autre point quelconque O_1 de l. U est une fonction de x, y, z, également solution de l'équation adjointe.

Mais, au moins dans le voisinage de Γ, U sera une imaginaire $U_1 + iU_2$. Il arrive ici, comme dans plusieurs cas analogues*), que chacune des parties réelle et imaginaire de U est encore une solution de la même équation.

La fonction U_1 fournit la solution de M. Volterra pour le problème intérieur. Il suffit, pour retrouver l'expression même de M. Volterra, de supposer que l'équation donnée est l'équation (1) (identique à son adjointe) et que l soit, comme précédemment, la parallèle à l'axe des t.

Partons donc de la quantité U_1: nous n'aurons qu'à suivre exactement la méthode de M. Volterra pour arriver, dans le cas d'une équation tout à fait quelconque, à une formule parfaitement analogue à la sienne et qui fait connaître l'intégrale de la solution cherchée prise suivant OO_1.

---

*) Voir Darboux, Leçons sur la théorie des surfaces, tome II; Levi-Civita, Sopra una classe di integrali dell' equazione $A^2 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ (Nuovo Cimento, tomo VI_4, 1897): Volterra, Congrès de Paris, 1900.

Il suffira enfin de dériver par rapport à la position du point O, — ou, ce qui revient au même, de rendre $\overline{OO_1}$ infiniment petit aprés avoir divisé par OO_1, — pour avoir la valeur de cette solution au point O lui-même. La question est donc ainsi complètement résolue.

Il reste à savoir si l'on ne peut pas éliminer du resultat la fonction U_1, de manière à n'y laisser que la solution fondamentale u. Il faudrait, pour cela, expliciter la dérivée dont nous venons de parler.

En opérant ainsi, on retombe sur la difficulté que nous avions signalée en commençant, à savoir l'intervention d'intégrales infinies.

Mais comme nous allons le faire voir, il n'est nullement nécessaire d'éviter cette intervention; et il convient, au contraire, d'aborder la difficulté de front, à l'aide des considérations suivantes.

Envisageons l'intégrale:

$$\int_a^b \frac{A(x)}{(b-x)^{1+\alpha}} dx. \qquad (0<\alpha<1) \tag{2}$$

Cette intégrale n'a aucun sens (si $A(b) \neq 0$). Il en sera de même pour l'expression:

$$\frac{B(x)}{(b-x)^{\alpha}} \tag{3}$$

pour $x = b$.

Mais la somme de ces deux expressions peut être définie, moyennant la condition

$$A(b) = \alpha B(b). \tag{4}$$

Alors, en effet, elle peut s'écrire:

$$\int_a^b \frac{A(x) - A(b)}{(b-x)^{1+\alpha}} dx + \left[\frac{B(x) - B(b)}{(b-x)^{\alpha}}\right]_{x=b} \tag{5}$$

et, — si les fonctions A, B satisfont à la condition de Lipschitz, comme nous le supposerons —, chaque terme de cette expression a un sens.

On peut aller plus loin: non seulement, en effet, le second terme de l'expression précédente a une valeur déterminée, mais cette valeur est nulle (toujours moyennant la condition de Lipschitz).

L'expression (5) est donc indépendante de la fonction B: elle est entièrement définie quand on donne l'intégrale (2).

En un mot, on peut parler, sans ambiguité, de la partie finie de l'intégrale infinie (2).

Toutes ces considérations s'étendent sans difficulté, d'une part aux intégrales de la forme

$$\int_a^b \frac{A(x)}{(b-x)^{p+\alpha}}\,dx, \tag{2'}$$

où p est un entier positif quelconque; d'autre part, aux intégrales multiples. Dans ce dernier cas, le rôle de la quantité (3) est joué par une intégrale de frontière.

De plus, les symboles que nous venons de définir se prêtent très simplement à la différentiation. Si, en effet, l'intégrale (2) ou l'intégrale (2′), ou encore l'intégrale ordinaire

$$\int_a^b \frac{A(x)}{(b-x)^{\alpha}}\,dx,$$

dépendent d'un paramètre, lequel entre dans b, il suffira, pour obtenir la dérivée de ces intégrales ou de leurs parties finies, de différentier sous le signe $\int$ (en faisant varier b sous ce signe, mais sans tenir compte de la variation de la limite supérieure) et de prendre la partie finie du résultat; et cette remarque s'étend encore aux intégrales multiples.

C'est à des expressions de cette nature que l'on est conduit par les calculs dont nous avons parlé tout à l'heure; et, moyennant leur emploi, ces calculs n'offrent plus aucune difficulté. On peut même se passer complètement de la solution U_1 et partir immédiatement de la solution fondamentale u. On substituera celle-ci dans la formule fondamentale: on obtient ainsi des intégrales infinies; mais la partie finie de ces intégrales fournit le résultat cherché.

Les principes posés dans ce qui précède simplifient aussi notablement l'étude des solutions obtenues, et, en particulier, la synthèse de ces solutions. On sait que cette synthèse n'est pas sans présenter quelque difficulté. M. d'Adhémar (thèse de l'Université de Paris) a pu, au prix de calculs assez délicats, vérifier en ce qui regarde l'équation (1) que les conditions aux limites sont remplies; mais il ne s'est pas livré au même travail pour l'équation aux dérivées partielles elle-même. Or cette vérification, extrêmement malaisée au premier abord, est, comme on le conçoit aisément, rendue beaucoup plus simple par ce fait qu'on peut différentier, sans aucune précaution, les parties finies des intégrales infinies. En particulier, pour l'équation sans second membre, cette vérification est immédiate et n'exige aucun raisonnement spécial.

Les considérations précédentes paraissent devoir s'étendre sans difficulté au cas d'un nombre de variables supérieur à trois et impair:

La seule différence est que la formation même de l'intégrale U conduit à introduire des intégrales infinies dont on prend la partie finie*).

Il en est tout autrement dans le cas de n pair. Celui-ci conduit encore à introduire des intégrales infinies d'une forme analogue à (2'), mais dans lesquelles l'exposant du dénominateur est entier. Cette circonstance introduit une difficulté nouvelle.

Il faut, d'ailleurs, s'attendre à priori à voir la théorie des équations à un nombre pair de variables indépendantes différer essentiellement de la précédente.

On sait, en effet, qu'il existe des équations à un nombre pair de variables pour lesquelles le principe de Huyghens a lieu (par exemple l'équation des ondes sphériques). Au contraire, ce principe n'est pas vrai pour l'équation des ondes cylindriques.

Or les formules auxquelles nous sommes conduits pour les équations à trois variables indépendantes et à coefficients quelconques, entraînent la conséquence que toutes ces équations se comportent ici comme l'équation (1): il n'en est aucune pour laquelle le principe de Huyghens ait lieu.

Toute formule de même nature donnerait la même conclusion: en particulier, il n'est pas douteux que celle-ci ne s'applique à toutes les équations à $2p + 1$ variables, quel que soit l'entier p.

Du fait qu'elle ne s'étend pas aux équations où le nombre des variables indépendantes est pair, il faut, en un mot, que celles-ci présentent avec les autres des différences profondes.

Je terminerai en signalant, dans un ordre d'idées tout différent de celui qui vient de nous occuper, une formule rencontrée dans d'autres recherches relatives aux équations aux dérivées partielles**) et qu'il serait intéressant de généraliser.

Les propriétés de la fonction de Riemann relative soit à l'équation des télégraphistes, soit à l'équation d'Euler et de Poisson, fournissent en effet, entre autres conséquences:

1° une formule intégrale à la fonction de Bessel $J_0(x)$ et faisant connaître l'intégrale définie:

$$\int_{t=0}^{t=1} J_0(a\sqrt{1-t})\, dJ_0(b\sqrt{t}).$$

*) Dans le cas du problème extérieur à trois variables, que je n'ai d'ailleurs pas étudié jusqu'à présent, la solution à employer (laquelle donne, pour l'équation (1), les expressions employées par M. Volterra) est fournie par la partie imaginaire U_2 de l'intégrale U.

**) Bull. Soc. Math. Fr. t. XXXI, 1903.

Cette formule peut se retrouver aisément d'une manière directe et cette nouvelle démonstration en fournit immédiatement une généralisation aux fonctions de Bessel d'indice différent de zéro*).

2° une formule analogue relative à certaines séries hypergéométriques.

Cette formule paraît-elle aussi n'être qu'un cas particulier, la méthode que j'ai employée ne permettant pas d'atteindre le cas général. Un jeune géomètre américain, M. Curtiss, en a trouvé une démonstration directe, mais qu'il n'a pas été possible l'étendre à d'autres cas que celui que j'avais traité moi-même. Il ne semble pas douteux qu'on n'en puisse obtenir une généralisation intéressante.

---

*) J'ignorais, lorsque ma communication a été présentée, que ces formules relatives à la fonction de Bessel étaient dues en réalité à M. Cailler, professeur à l'Université de Genève, qui les a établies en 1899 (Bull. Soc. Math. 2ième série, tome XXIII) et a montré qu'elles pouvaient servir de base à une théorie trés élégante et très simple des fonctions de Bessel.

Über die Additionsformeln der Thetafunktionen.

Von

A. Capelli aus Neapel.

Es scheint für die Behandlung der elliptischen Funktionen sehr nützlich zu sein, alle die partikulären Additionsformeln der Thetafunktionen einer Veränderlichen in eine einzige Formel mit beliebigen Charakteristiken zusammenzufassen. Dieses Problem ist, wenigstens für ganzzahlige Charakteristiken, schon längst gelöst worden. Hermite hat dafür (1858) in seiner Abhandlung*) „Sur quelques formules relatives à la transformation des fonctions elliptiques" den viergliedrigen Ausdruck gegeben:

$$\begin{aligned}
&2\theta_{\mu,\nu}(x+y)\cdot\theta_{\mu',\nu'}(x-y)\cdot\theta_{\mu-\mu',0}(0)\cdot\theta_{0,\nu-\nu'}(0)\\
&=\theta_{\mu,\nu}(x)\cdot\theta_{\mu',\nu'}(x)\cdot\theta_{\alpha,0}(y)\cdot\theta_{0,\beta}(y)\\
&+(-1)^{\nu}\theta_{\mu+1,\nu}(x)\cdot\theta_{\mu'+1,\nu'}(x)\cdot\theta_{\alpha+1,0}(y)\cdot\theta_{1,\beta}(y)\\
&+(-1)^{\nu}\theta_{\mu+1,\nu+1}(x)\cdot\theta_{\mu'+1,\nu'+1}(x)\cdot\theta_{\alpha+1,1}(y)\cdot\theta_{1,\beta+1}(y)\\
&+\theta_{\mu,\nu+1}(x)\cdot\theta_{\mu',\nu'+1}(x)\cdot\theta_{\alpha,1}(y)\cdot\theta_{0,\beta+1}(y),
\end{aligned}$$

wo

$$\alpha=\mu-\mu',\quad \beta=\nu-\nu'.$$

Diese von Hermite ohne Beweis angegebene Formel hat er vielleicht auf empirischem Wege gefunden, oder vielleicht hat er sie aus den ihm damals schon bekannten Jacobischen Thetaformeln hergeleitet. Beweise von analogen Formeln finden sich aber schon in Abhandlungen von Betti**) (1860) und von H. Smith***) (1866). Die nachträgliche Literatur über die Fundamentalrelationen zwischen Thetafunktionen einer Veränderlichen hat zwar viele und sehr inter-

*) Journal de Liouville 2. Vol. III, p. 27 (1858).

**) La teorica delle funzioni ellittiche e sue applicazioni. (Annali di Mat. di Tortolini III, p. 26, 1860.)

***) On a Formula for the Multiplication of four Theta Fonctions. (Proc. London M. S. I, Mai 1866.)

essante Arbeiten, namentlich von deutschen Mathematikern, zu erwähnen*); es ist aber, soviel ich weiß, bis zur letzten Zeit noch nicht versucht worden, ob es vielleicht möglich wäre, den oben erwähnten viergliedrigen Ausdruck durch einen zweigliedrigen zu ersetzen. Auf die Möglichkeit einer derartigen Reduktion glaubte ich aus der Tatsache schließen zu dürfen, daß alle die gewöhnlichen Additionsformeln, mit partikulären ganzzahligen Charakteristiken, in der Tat zweigliedrig sind. Andererseits erschien es mir wünschenswert, die Möglichkeit zu erörtern, alle derartigen Ausdrücke auf beliebige reelle oder imaginäre Werte der Charakteristikzahlen auszudehnen.

Die oben erwähnte Reduktion ist mir erst im vergangenen Jahre 1903 gelungen. Wenn man die Thetafunktionen mit zwei Charakteristikzahlen γ und g folgendermaßen erklärt:

$$\vartheta_{\gamma,g}(u) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\pi i \omega \left(n+\frac{\gamma}{2}\right)^2 + 2\pi i \left(n+\frac{\gamma}{2}\right)\left(u+\frac{g}{2}\right)},$$

so läßt sich der von mir erreichte zweigliedrige Ausdruck wie folgt hinschreiben:

$$\begin{aligned}\vartheta_{\gamma_1,g_1}(u+v)\cdot\vartheta_{\gamma_2,g_2}(u-v)\cdot\vartheta_{\sigma,s}(0)\cdot\vartheta_{\varrho,r}(0)&\\ =\vartheta_{\gamma_1,g_1}(v)\cdot\vartheta_{\gamma_2,g_2}(-v)\cdot\vartheta_{\sigma,s}(u)\cdot\vartheta_{\varrho,r}(u)&\qquad\text{(A)}\\ +(-1)^{\sigma}\vartheta_{\gamma_1+1-\sigma,g_1+1-s}(v)\cdot\vartheta_{\gamma_2+1-\sigma,g_2+1-s}(-v)\cdot\vartheta_{11}(u)\cdot\vartheta_{\gamma_1+\gamma_2-1,g_1+g_2-1}(u),&\end{aligned}$$

wo der Kürze wegen

$$\varrho=\gamma_1+\gamma_2-\sigma,\quad r=g_1+g_2-s$$

gesetzt worden ist.

Einen anderen Ausdruck habe ich in diesem Jahre gefunden, nämlich:

$$\begin{aligned}\vartheta_{\gamma_1,g_1}(u+v)\cdot\vartheta_{\gamma_2,g_2}(u-v)\cdot\vartheta_{\sigma,s}(0)\cdot\vartheta_{\varrho,r}(0)&\\ =\vartheta_{\gamma_1+\varepsilon',g_1+\eta'}(v)\cdot\vartheta_{\gamma_2+\varepsilon',g_2+\eta'}(-v)\cdot\vartheta_{\sigma-\varepsilon',s-\eta'}(u)\cdot\vartheta_{\varrho-\varepsilon',r-\eta'}(u)&\qquad\text{(B)}\\ +\vartheta_{\gamma_1+\varepsilon'',g_1+\eta''}(v)\cdot\vartheta_{\gamma_2+\varepsilon'',g_2+\eta''}(-v)\cdot\vartheta_{\sigma-\varepsilon'',s-\eta''}(u)\cdot\vartheta_{\varrho-\varepsilon'',r-\eta''}(u).&\end{aligned}$$

In diesen Formeln sind die ganzzahligen Wertepaare (σ, s), (ε', η'), (ε'', η'') so zu wählen, daß die vier Wertepaare

$$(0,0),\quad(\sigma+1,\ s+1),\quad(\varepsilon',\eta'),\quad(\varepsilon'',\eta'')$$

voneinander (mod. 2) verschieden sind.

Die Beweise der Formeln (A) und (B) habe ich in den „Rendi-

*) Dabei brauche ich nur an das wertvolle Werk von Krazer zu verweisen: Lehrbuch der Thetafunktionen (Leipzig, Teubner 1903); vgl. p. 318 bis 336.

conti dei Lincei"*) schon veröffentlicht; und in denselben durften γ_1, g_1, γ_2, g_2 beliebige ganzzahlige Werte annehmen.

Erst seit noch kürzerer Zeit habe ich erkannt, daß mein Beweisgang sich derart modifizieren läßt, daß die Beschränkung der Ganzzahligkeit von γ_1, g_1, γ_2, g_2 überflüssig wird. Die Formeln (A) und (B) bestehen also für irgendwelche reelle oder imaginäre Werte der Charakteristikzahlen $\gamma_1, g_1, \gamma_2, g_2$. Nur für die Zahlen σ und s muß man ganzzahlige (nicht beide $\equiv 1$, mod. 2) Werte nehmen.

Wegen der großen Allgemeinheit dieser Formeln und wegen der Zweckmäßigkeit ihrer Verwendung in den Grundlagen der Theorie der doppeltperiodischen Funktionen, z. B. bei der Herstellung der allgemeinsten Additionsformeln der Thetaquotienten, habe ich mich entschlossen diese kurze Mitteilung darüber zu machen. Ich möchte den Wunsch aussprechen, daß in der Zukunft derartige allgemeinste Formeln in den Lehrbüchern über elliptische Funktionen nicht mehr fehlen.

Herr Prof. M. Krause, dem ich meine Formeln, eben in diesen Kongreßtagen, mitgeteilt habe, hat aus denselben die bekannte Weierstraßsche Formel hergeleitet. Möglicherweise ist damit nicht nur eine Bestätigung der Formeln erlangt worden, sondern vielleicht sogar der Weg zu einem neuen Beweise derselben angedeutet.

Diskussion.

Herr M. Krause teilt mit, daß er in einer Besprechung mit Herrn W. Wirtinger zu der Ansicht gekommen sei, die Capellische Formel müsse als Spezialfall der Weierstraßschen erhalten werden können, da ja die willkürlichen Charakteristiken nichts anderes als neue Variable seien.

*) Sulle relazioni algebriche fra le funzioni ϑ di una variabile (April 1903 und Juni 1904).

III. Sektion.

Elimination und Geometrie in den letzten Jahrzehnten.

Von

A. Brill aus Tübingen.

Vor jetzt fast 50 Jahren zog als Professor der Mathematik an dieser Universität ein Königsberger Gelehrter ein, der, in den großen Traditionen der Jacobischen Schule aufgewachsen, wie Kirchhoff und in Gemeinschaft mit diesem den heimischen Wissenschaftsbetrieb in Süddeutschland einzuführen sich anschickte. Erst 46 Jahre alt, hatte Hesse damals doch bereits sein Lebenswerk im wesentlichen abgeschlossen. Es war ein Werk, das eine neue Blütezeit der algebraischen Geometrie einzuleiten bestimmt war. Zu dem mächtigen Aufschwung, den dieser Wissenszweig etwa von den vierziger Jahren ab genommen hat, nachdem er fast ein Jahrhundert lang hinter anderen zurückgeblieben war, haben Geometrie und Algebra zu gleichen Teilen beigetragen.

Französische Geometer hatten im Anfang des 19. Jahrhunderts der Geometrie neue fundamentale Begriffsbildungen zugeführt, die von Plücker und Möbius algebraisch erfaßt und verarbeitet worden waren. Zugleich hatten Cauchy und Jacobi der Algebra das wundervolle Instrument der Determinanten in einwandfreier und leicht zugänglicher Form zur Verfügung gestellt, das nun in dem Wettkampf um die Palme zwischen Geometrie und Algebra, zwischen Anschauung und Rechnung seine Kraft erproben sollte. Mit welcher Meisterschaft Hesse im Wettstreit mit dem erfindungsreichen Steiner das neue Werkzeug handhabte, davon berichten treffliche Biographien der beiden.

Das Quadrat der Elemente ist ihm keineswegs bloß das Symbol für ein schwerfälliges Aggregat von Gliedern; einfach und mehrfach gerändert gewinnt die Determinante in Hesses Hand eine Art von tektonischer Gliederung, die gewisse Schlüsse schon mit dem Auge zu vollziehen gestattet; aus der Determinante der zweiten Differential-Quotienten erwächst der Geometrie ein neuer projektiver Grundbegriff, an dessen (schon aus dem Bau ersichtlicher) Invarianten-Eigenschaft Cayley anknüpft; und das Wort Hyperdeterminante bezeichnet die nächste Phase der nun rasch der Invarianten-Theorie zustrebenden Entwicklung.

Auf einen kleinen Bereich des mächtigen Wissensgebietes, das sich von hier der Geometrie eröffnete, nämlich auf die Theorie der Elimination in ihrer Beziehung zur Geometrie wollen Sie mir erlauben, einen kurzen Blick zu werfen, und mit den folgenden Bemerkungen eine Art von geometrischem Anhang zu dem in der Enzyklopädie von algebraischer Seite erstatteten ausführlichen Bericht über Elimination*) zu geben.

Hesses mathematische Abhandlungen sind durchdrungen und beherrscht von einem gewissen Gefühl für Gleichmaß, das ihn in der Ausbeutung einer Methode gerade so weit gehen läßt, als noch ein ästhetisch befriedigendes Ergebnis zu hoffen steht. In der unmittelbar folgenden Periode der Geschichte der Geometrie stellt man sich oft umgekehrt zuerst die Aufgabe, und greift sie wohl mit neuen, eigens zu dem Zweck ersonnenen Hilfsmitteln an, deren völlige Beherrschung aber einer späteren Zeit überlassen wird.

Hesse hatte die algebraische Bedingung dafür, daß sich drei Kegelschnitte in einem Punkte treffen, mit Hilfe der Funktionaldeterminante in überaus eleganter Weise auf das Verschwinden einer Determinante zurückgeführt. Dieser Weg erwies sich für Kurven von verschiedener Ordnung nicht mehr als gangbar. So versuchte Cayley das folgende Verfahren. Ähnlich wie man bei zwei Gleichungen mit einer Unbekannten verfährt, so multipliziert Cayley die drei gegebenen mit gewissen Potenzprodukten der Unbekannten. Er erhält so ein hinsichtlich der Potenzprodukte lineares System, dessen Koeffizienten jedoch nicht mehr, wie in jenem einfachen Fall, eine Determinante sondern eine Matrix von solchen bilden. Zwischen den einzelnen Gleichungen besteht eine Anzahl linearer Beziehungen, die wieder zu einer neuen Matrix führen. Die Resultante stellt nun Cayley dar als Quotienten aus einer beliebigen Determinante der ersten Matrix durch eine ihr zugeordnete der zweiten. Bei noch mehr als drei Gleichungen erscheint sogar eine ganze Kette solcher Matrizes, Bildungen, die von

*) E. Netto, Enzyklopädie der math. Wiss. I B 1 a und I B 1 b.

einem allgemeineren Gesichtspunkte aus neuerdings Herr Hilbert in einem später noch zu berührenden Aufsatz behandelt hat.

Viele Probleme der Geometrie führen auf solche überzählige Systeme von Gleichungen mit gegenseitiger Abhängigkeit (Salmon nennt sie beschränkte Systeme). Den Weg zu ihrer Lösung wies Cayley in einem 1849 erschienenen Aufsatz, an den später Salmon, S. Roberts und andere anschlossen.

Auf ein solches System, nämlich auf das simultane Verschwinden aller ersten Minoren der Hesseschen Form, wurde Clebsch durch die Aufgabe geführt, die Gleichung einer Fläche dritter Ordnung auf die Ebenen ihres Pentaeders zu beziehen. Ebenso kommt eine gewisse Frage der eindeutigen Transformation von ebenen Kurven auf das Verschwinden einer Matrix zurück, nämlich die Frage nach den Punktepaaren einer Kurve, die sich zu Doppelpunkten der transformierten vereinigen. Es sind dies Punktepaare von der Eigenschaft, daß sie für jede durch sie hindurchgehende Transformationskurve bloß ein Bestimmungsstück liefern; und so bilden diese Paare ein einfaches Beispiel zu den sogenannten ausgezeichneten Punktgruppen, die gleichfalls alle auf verschwindende Matrizes führen. Diese Punktgruppen spielen in der Geometrie auf einer Kurve eine Rolle, und es ist bekannt, mit welchem Erfolge für das Studium dieser und anderer Punktgruppen auf den eindimensionalen Gebilden die neuere italienische Schule die Geometrie der Mannigfaltigkeiten in höheren Räumen mit einer Art von Anschauungsapparat zur Bewältigung abgebraischer Fragen ausgestattet hat. Die Anzahlbestimmung der ausgezeichneten Punktgruppen gelingt dann durch eine merkwürdige Verwendung des später noch zu besprechenden Prinzips der Erhaltung der Anzahl, worauf ich leider hier nicht eingehen kann.

Wie Clebsch durch das Pentaeder, so wurde auf das Verschwinden der ersten Minoren einer Determinante, deren Elemente die Variabeln linear enthalten, Herr Reye durch ein Problem über lineare Mannigfaltigkeiten kollinearer Räume geführt. Das Verschwinden der zweiten Minoren ist jedoch noch nicht behandelt worden und scheint Schwierigkeiten zu bereiten.

Eine andere Gruppe von geometrischen Aufgaben führt auf die Bedingung dafür, daß eine Anzahl von Gleichungen, die bereits durch ein oder mehrere Wertsysteme der Unbestimmten identisch erfüllt werden, noch ein weiteres solches gemeinsam haben. Man wendet hierfür das Mittel der Variation der Konstanten an, derart, daß die Resultante des variierten Systems nicht mehr identisch verschwindet. Das niederste Glied, das in der Entwicklung dieser Resultante (nach Potenzen der Variation) von Null verschieden ist, stellt dann, von den durch das Verfahren hereingezogenen überflüssigen Lösungen durch Division befreit, die gesuchte Resultante dar. Hermite bedient sich dieses Hilfsmittels zur Bildung der Bedingung, daß eine Kurve mehr als einen Doppelpunkt besitzt. Es wird auch mit Vorteil zur Ermittelung der Koinzidenzen von Korrespondenzen auf einer Kurve verwendet.

Eine genauere Analyse und eine Vergleichung der erwähnten Methoden mit anderen dem gleichen Zweck dienenden, die ich mir hier versagen muß, würde ihre Kraft und Schmiegsamkeit erweisen. Handelt es sich aber nicht um die wirkliche Darstellung des Eliminationsergebnisses, sondern nur um eine Gradbestimmung, also um die Anzahl der Lösungen, so wird die Algebra auch jetzt noch an Leistungsfähigkeit übertroffen von den bekannten geometrischen Abzählungsmethoden, die in der Mitte der sechziger Jahre und seitdem die Geometrie mit ihren Abzählungsergebnissen geradezu überschüttet haben; ich meine die Charakteristikenmethode, das Korrespondenzprinzip und neuerdings das Prinzip der Erhaltung der Anzahl.

Diese Prinzipe geben an, wie der Grad der Resultante gewisser Gruppen von Bedingungsgleichungen von dem der letzteren abhängt, wobei auf die Bildung der Resultante selbst oder gar der Zwischenglieder und damit meistens auch auf völlige Strenge der Beweisführung verzichtet wird. Ihre Aufgabe ist es, auf den weniger bekannten Gebieten der Geometrie durch oft hartes Pionierwerk den rauhen Boden für die spätere Einzelarbeit der Algebra zu ebnen und zu erschließen.

Die Prüfung freilich der Gültigkeitsgrenzen dieser Prinzipe wird immer Sache der Algebra bleiben. In dieser Absicht hat für die Charakteristikenformel Clebsch einen Beweis auf die Theorie der quadratischen Ternärformen gegründet, den später Halphen u. a. ergänzten. Auch die Korrespondenzformel ist vielfach algebraisch untersucht worden. Nur für das Prinzip der Erhaltung der Anzahl steht eine algebraische Würdigung noch aus. Ein Urteil darüber, ob und in welchem Umfange dasselbe gültig ist, wird nur aus den allgemeinen Grundlagen der Eliminationstheorie geschöpft werden können. Auf diese Grundlagen wollen Sie mir deshalb erlauben, noch mit einigen Worten einzugehen

---

Der Begriff Resultante eines Gleichungssystems ist je nach dem Ausgangspunkt verschieden zu fassen. Stellt man nach Poisson die Resultante aus $n+1$ Gleichungen mit n Unbekannten als symmetrische Funktion der Wurzelsysteme dar, die irgend n unter ihnen gemeinsam haben, so ist, wie dies z. B. Herr Hadamard tut, der Nachweis zu erbringen, daß der Endausdruck von der Wahl dieser n Gleichungen nicht abhängt. Aber auch abgesehen davon tritt eine Schwierigkeit auf, auf die zuerst Schläfli aufmerksam gemacht hat. Sie besteht darin, daß die Darstellung der symmetrischen Funktionen der n Variabelnsysteme keine eindeutige zu sein pflegt, weil Relationen zwischen den letzteren bestehen. Dem Studium dieser unendlich vielen Relationen sind für den Fall $n=2$ mehrere Arbeiten von Junker gewidmet, die von anderer Seite durch Aufstellung eines endlichen Divisorensystems derselben ergänzt wurden. Auch Herr Gordan hat ein solches aufgestellt. Indessen steht eine jedenfalls noch mögliche Reduktion der beiden Systeme auf eine geringere Anzahl bis jetzt aus.

Eine andere Eigenschaft der Resultante legt Bézout ihrer Bildung zugrunde, nämlich die, daß sie ein aus den Koeffizienten ihrer Komponenten gebildetes Polynom (von gewissem Grad) ist, das sich aus eben diesen Komponenten (den Funktionen, aus denen eliminiert wird) linear und homogen mit ganzen Koeffizienten zusammensetzen läßt.

Man ist neuerdings auf diesen Ausgangspunkt zurückgegangen. So Herr Mertens in mehreren Abhandlungen über Elimination, wo die vollständige Theorie auf dieser Grundlage aufgebaut wird. Daß die Resultante Φ als Polynom der angegebenen Art, das für alle gemeinsamen Verschwindungswerte der $n+1$ Funktionen $f_1, f_2, \cdots f_{n+1}$ der Veränderlichen verschwindet, sich als lineare homogene Funktion dieser Funktionen darstellen läßt, beweist Herr Perrin durch Entwicklung von Φ nach gewissen (durch Variation der Konstanten in den f erhaltenen) Zusatzgliedern. Solche Polynome existieren (auch bei numerischen Koeffizienten der f) immer, wenn die $n+1$ Funktionen f nicht n, sondern $n+1$ Veränderliche enthalten. Dann läßt sich nach einem Satze des Herrn Hilbert für jede Funktion Φ, die für die Verschwindungswerte der $n+1$ Funktionen f verschwindet, ein ganzzahliger Exponent ϱ bestimmen derart, daß Φ^ϱ als lineare homogene Funktion der f darstellbar ist. Soll sich bereits die erste Potenz in dieser Weise darstellen lassen, so muß Φ in den gemeinsamen Nullstellen der gegebenen Funktionen gewisse Bedingungen erfüllen, mit deren Aufstellung für den Fall von zwei Variabeln sich bekanntlich die Abhandlung: „Über einen Satz“ usw. von Noether und daran anschließende neuere beschäftigen. Eine Arbeit des Herrn Macaulay erhebt die Frage nach der Gestalt einer Funktion, die, mit einer vorgegebenen multipliziert, dem Produkt die gewünschte Darstellbarkeit verschafft, wobei das Verhalten der gegebenen Funktion in einem Schnittpunkt auch durch das simultane Verschwinden von mehr als zwei Funktionen definiert sein kann. Was den allgemeinen Fall angeht, daß $n+1$ Funktionen f mit $n+1$ Variabeln vorliegen, die jedoch nur für diskrete Wertsysteme zugleich verschwinden, so hat die Bedingungen für die Darstellbarkeit einer Funktion Φ als linearer Funktion derselben Herr König in seinem Werk über algebraische Größen angegeben.

Das früher erwähnte geometrische Beispiel, daß drei Flächen sich außer in diskreten Punkten noch in einer Kurve schneiden, bezeichnet ein Vorkommen, das die Theorie der Elimination bereits mehrfach beschäftigt hat und wohl noch viel beschäftigen wird. Schon Cayley weist in der Abhandlung: on curves which satisfy given conditions auf die Möglichkeit hin, daß n Gleichungen mit n Unbekannten in der Weise voneinander abhängen können, daß sie alle (außer für diskrete Wertsysteme) noch für die Punkte von Mannigfaltigkeiten höherer Dimension — die Unbestimmten als Koordinaten in einem Raume von n Dimensionen gedeutet — verschwinden.

Einer systematischen Darstellung aller möglichen Fälle, d. h. aller einem gegebenen Gleichungssystem gemeinsamen Lösungen tritt aber erst Kronecker näher in seiner Festschrift: Arithmetische Theorie der algebraischen Größen. Seine Methode beruht auf der wiederholten Elimination von einer Unbekannten aus zwei Gleichungen (die er übrigens durch das Euklidische Teiler-Verfahren vollzieht). Er befreit nämlich zunächst die gegebenen Funktionen der n „Unbestimmten" oder Variabeln, wie ich mir zu sagen erlauben werde, von einem etwa vorhandenen gemeinsamen Teiler, bildet aus den so vorbereiteten Funktionen zwei lineare Kombinationen mit unbestimmten Koeffizienten und eliminiert aus diesen eine der Variabeln; dann bilden die Faktoren der Koeffizientenprodukte, einzeln gleich Null gesetzt, ein neues System von Gleichungen, die, von ihrem größten gemeinsamen Faktor befreit, zu zwei neuen linearen Kombinationen zusammengefaßt werden usf. Die so der Reihe nach gewonnenen größten gemeinsamen Teiler, die erst n, dann $n-1$, dann $n-2, \ldots 2, 1, 0$ Variable enthalten, nennt Kronecker Teilresolventen und ihr Produkt, das den ganzen Inhalt, und nur den Inhalt von dem darstellt, was das vorliegende Gleichungssystem Gemeinsames an Lösungen besitzt, die Gesamtresolvente. Diese Begriffsbildungen hat Herr König noch durch den der Multiplizität ergänzt, d. h. der Vielfachheit, in der jede Teilresolvente auftritt. — Von etwaigen Zufälligkeiten, die von einem besonderen Verhalten der Lösungssysteme gegen das Koordinatensystem der n Variabeln herrühren können, befreit man sich, indem man ganze lineare Funktionen der Variabeln an deren Stelle einführt.

Macht man nun noch homogen und führt statt der von Kronecker angewandten ganzen Substitutionen linear gebrochene ein, um auch diejenigen Besonderheiten auszuschalten, die mit dem Verhalten gegen das Unendliche zusammenhängen; verwendet man damit in Zusammenhang, wie Herr Mertens, statt der unbestimmten Multiplikatoren ganze Funktionen von passendem Grad mit noch unbestimmten Koeffizienten, so wird keine noch so spezielle Verfügung über die noch willkürlichen Koeffizienten der gegebenen n Funktionen weder an der Ordnung der Teilresolventen hinsichtlich der Variabeln noch an deren etwaiger Multiplizität*) etwas ändern, wenn man hierbei nur auf solche besonderen Wertsysteme verzichtet, für welche eine der Teilresolventen identisch verschwindet.

Man kann von diesem Umstande bei geometrischen Abzählungen, sofern sie in Gradbestimmungen bestehen, Nutzen ziehen. Denn innerhalb der durch das identische Verschwinden der Gesamtresolvente gesteckten Grenzen kann nach dem Gesagten eine Ausartung der zum Schnitt gebrachten geometrischen Mannigfaltigkeiten eine Änderung insbesondere des Grades der Schnittgebilde nicht bewirken. — So kann man z. B. ohne weiteres auf die Zahl der Schnittpunkte von drei Flächen aus dem Sonderfall solcher Flächen schließen, die in Ebenen zerfallen, wenn die Flächen keine Kurve gemeinsam haben.

Im allgemeinen wird jedoch nicht, wie in diesem Beispiel, der Grad des Schnittgebildes von den Graden der Komponenten allein abhängen. Vielmehr bestehen in dem Fall, daß Schnittgebilde von höherer Dimension auftreten, zwischen den Komponenten gewisse Relationen, durch welche dieselben näher charakterisiert werden, und die bei allen Wertänderungen der Koeffizienten bestehen bleiben müssen. Es sind hiernach nur Sonderwerte der Koeffizienten nach Maßgabe jener Relationen: mit einem Worte nur Ausartungen zulässig, wenn die Gradzahlen der Schnittgebilde sich nicht ändern sollen. Diese Gradzahlen hängen übrigens mit denjenigen Zahlen zusammen, die Herr Hilbert charakteristische Funktionen nennt. Die charakteristische Funktion eines Gebildes gibt die Anzahl der Bedingungen dafür an, daß irgend eine allgemeine Mannigfaltigkeit von genügend hohem Grade das Gebilde ganz enthält.

Für eine Raumkurve z. B. gehen in die charakteristische Funktion ihre Ordnung und ihr Rang (oder besser gesagt: die Zahl ihrer scheinbaren Doppelpunkte) ein. Von diesen beiden Zahlen allein hängt andererseits die Zahl der diskreten Schnittpunkte ab, die drei durch eine und dieselbe Raumkurve gehende Flächen außerhalb derselben gemein-

*) Von der Unterscheidung verschiedener Faktoren derselben Teilresolvente, die durch Konstantenänderung ineinander übergehen könnten, muß dabei freilich abgesehen werden.

sam haben, also der Grad ihrer Teilresolvente erster Dimension, wobei übrigens die Raumkurve auch noch wirkliche Doppelpunkte haben kann. Nach dem Gesagten lassen sich nun auch diese Flächen durch Ebenensysteme ersetzen, die diesmal aber ein System von Geraden gemeinsam haben müssen, welches die gleiche Ordnung und die gleiche Anzahl von scheinbaren Doppelpunkten wie die Raumkurve besitzt. So erhebt sich die Frage, ob jede allgemeine algebraische Raumkurve durch besondere Wahl der Konstanten, von denen sie abhängt, in ein System von Geraden überführbar ist, eine Frage, die vor einigen Jahren von der Dänischen Akademie der Wissenschaften gestellt wurde, auf die einzugehen aber hier nicht der Ort ist.

Da bei Ausartungen, die keine der Teilresolventen zum identischen Verschwinden bringen, die Gradzahlen erhalten bleiben, so ist mit dieser Einschränkung nach dem Gesagten auch das Prinzip der Erhaltung der Anzahl anzuerkennen. Gewisse zu falschen Ergebnissen führende Anwendungen, die jüngst gegen dasselbe geltend gemacht wurden, betreffen, soweit es sich überhaupt um Gradabzählungen handelt, eben solche Fälle, für die eine der Teilresolventen identisch Null wird*). Daß übrigens die von Herrn Schubert mit Hilfe seines Prinzips bestimmten Anzahlen des Strahls richtig sind, zeigt deren Prüfung auf algebraischer Grundlage, worüber demnächst Herr Caspar in den Mathematischen Annalen berichten wird.

Diese Ausführungen wollten bloß den Standpunkt bezeichnen, von dem aus, nach Ansicht des Referenten, der Algebraiker die in Rede stehende Frage zu beurteilen hat. Ermutigend sind zwar die Ergebnisse nicht. Denn es wäre streng genommen in jedem Falle besonders zu prüfen, ob die erhobenen Forderungen auch wirklich erfüllt sind; namentlich welche Teilresolventen von dem identischen Verschwinden auszuschließen sind, und wie die Gradzahlen derselben mit den Charakteren der Schnittgebilde zusammenhängen. Auch die Berücksichtigung von Grenzlagen kann sich als notwendig erweisen.

Der Geometer aber wird, unbekümmert um diese Vorsichtsmaßregeln, nach wie vor sich des Prinzips mit Gewinn für die Wissenschaft bedienen können, wenn ihn ein gewisser geometrischer Takt leitet, und eine verhältnismäßig einfache Sachlage Fehlgriffen begegnet.

Lassen Sie mich hiermit diese flüchtigen Bemerkungen zu den jüngsten Fortschritten der Eliminationstheorie schließen. Man verdankt diese Fortschritte, es kann nicht geleugnet werden, einem Eingreifen

---

*) S. die Note von Herrn S. Kohn „Über das Prinzip der Erhaltung der Anzahl", Arch. für Math. und Phys. (3), 4, 1902, S. 312.

der Arithmetik und der Formentheorie, nachdem die Anregung zum Ausbau der Eliminationsmethoden lange Zeit fast ausschließlich von der Geometrie ausgegangen war. Aber solche Übergänge bringt der Zug einer gesunden Entwicklung immer mit sich.

Eine halbhundertjährige Periode des Aufschwungs der algebraischen Geometrie ist vorüber. Die Geometrie sucht neue Beziehungen, und eine jüngere Generation widmet sich der Erforschung ihrer Grundlagen und vielgestaltigen den Krümmungseigenschaften der Gebilde geltenden Untersuchungen. Der Wechsel aber hat auch für den einzelnen Wissenschaftszweig seine Berechtigung; auf eine Periode der Blüte folgt wohl ein Stillstand, eine Zeit der Sammlung und des Abrechnens, wo das Minderwertige zurücktritt. Das Wertvolle aber wird innerlich weiter keimen, um von späteren Generationen zu neuem Leben erweckt zu werden.

The intersections of plane curves, with extensions to n-dimensional algebraic manifolds.

Von

F. S. Macaulay aus London.

Note. In the following paper §§ 1—7 contain a general outline for space of n dimensions; §§ 8, 9 summarize the properties which have been proved for the plane; and § 10 discusses extensions of § 9 to n-dimensional space. It is recommended that §§ 1—4, 8—10 should be first read; §§ 4a—7 are difficult and § 6 is largely conjectural.

Explanations of the following terms will be found in the articles indicated: — linear (or z-)equations of a manifold (M), intersection, in § 1; prime equation and derivates, ζ-equations, in § 3; base-point, multiplicity, t-set point, in § 4 (v. also §§ 6, 8); degree of ζ-equation and z-equation in § 4a; proper multiple and non-multiple manifolds in § 6; independent curves through a point in § 9, IV; base-points residual with respect to a one-set point in § 9, V; residual base-points on a base-curve in § 9, VII; defect and excess of a given series of base-points in § 9, VIII.

Examples of the linear equations of base-points are given in § 1 (Footnote), § 4 (end), and § 10 (exs. 1, 3, 4).

1. The general problem with which the theory of intersections is connected is a well known one which has been attacked in a variety of ways. If $M_1, M_2, \cdots, M_k$ are k given integral non-homogeneous polynomials in n independent variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$, what are the conditions that must be satisfied by a polynomial M in order that we may have

$$M = M_1 X_1 + \cdots + M_k X_k, \quad \text{or } M \equiv 0 \quad (\text{mod. } M_1, M_2, \cdots, M_k),$$

where $X_1, X_2, \cdots, X_k$ are undetermined polynomials? The particular aspect of the problem with which this paper is concerned is the consideration of the linear equations, or systems of linear equations, which the coefficients of M must satisfy. We shall call these the **linear equations***) **of the manifold** (M), which is the intersection of the k manifolds $M_1 = M_2 = \cdots = M_k = 0$.

*) Thus the linear equations of a manifold (M) are the equations satisfied

An investigation of the properties of the linear equations of the ıanifold (M) offers a point of attack in the theory of modular systems hich seems to have been wholly neglected by the followers of Kro- ecker; notwithstanding that the questions raised force themselves into otice, especially in connection with Noether's fundamental theorem nd its extensions*). It may be claimed from the evidence given below hat the investigation is one of considerable importance; it rests at the utset on very simple ideas; the theorems to which it leads are of the ighest degree of generality; and it yields results which are not ob- ainable by the usual theory, from which it differs by giving full play o the algebraic conception of multiplicity. Thus the manifold (M) to be regarded from the point of view of its total algebraic content, ach proper manifold which forms part of (M) having a definite multi- licity in (M), a proper non-multiple manifold of (M) being one

---

y the coefficients of a polynomial M which express the conditions that the ıanifold $M = 0$ contains the manifold (M). We assume that the degree d of M given, as the number of independent linear equations of (M) increases in gen- ral with the degree of the polynomial M whose coefficients have to satisfy the quations.

The linear equation of an ordinary point $a_1, a_2, \cdots, a_n$ for the linear mani- old $z_0 + z_1 x_1 + \cdots + z_n x_n = 0$ is $z_0 + a_1 z_1 + \cdots + a_n z_n = 0$; and for the ıanifold $\Sigma z_{pqr} x_1^p x_2^q x_3^r = 0$, of degree d, is $\Sigma a_1^p a_2^q a_3^r z_{pqr} = 0$, where $+ q + r \leqq d$. An ordinary point has only one linear equation, all its deri- ates (§ 3) being the same as the original or prime equation.

*) Since writing this paper Professor Noether and Professor Brill have indly drawn my attention to the recently published „Einleitung in die allgemeine heorie der algebraischen Größen" by Julius König (B. G. Teubner, Leipzig, 1903). his work, remarkable for its precision and comprehensiveness and the large ad- itions it makes to the subject, contains a much desired proof of the extension f Noether's theorem to the case of k polynomials $M_1, M_2, \cdots, M_k$ in k variables hen (M) is of zero dimensions, i. e., when the equations $M_1 = M_2 = \cdots = M_k = 0$ ave only a finite number of solutions. I assume throughout my paper a still ırther, and what I regard as a fundamental, extension, viz., to the case of k poly- omials in n variables, where $k \geqq n$. The theorem is that if, for each and every nite point of intersection of $M_1 = M_2 = \cdots = M_k = 0$ taken as origin, a given olynomial M can be expressed in the form $M_1 P_1 + \cdots + M_k P_k$, where $P_1, P_2, \cdots, P_k$ are undetermined integral power series, then $M \equiv 0$ (mod. $M_1, M_2, \cdots, M_k$). The theorem can be finally extended so as to be free of all estrictions with respect to (M), k, or n. It is sufficient that M should be of the orm $M_1 P_1 + \cdots + M_k P_k$ as far as terms of a certain finite (but it may be very igh) degree for a single point taken as origin within each proper manifold of M), a point which is common to several proper manifolds of (M) serving for all f them.

A precise definition of what I have called the usual conception of multiplic- y in § 4 below is given in the „Einleitung . . .", Chap. VI., § 15, p. 308.

whose multiplicity is 1. The intersection of any number of manifolds $(M), (N), \cdots$ has the same meaning as the greatest common part, or *H. C. F.*, of the modular systems $M, N, \cdots$, i. e., the intersection of (M) and (N) is (H), where $H \equiv 0 \pmod{M_1, M_2, \cdots, N_1, N_2, \cdots}$. The proper manifolds of (H), if there be more than one, are partial intersections of (M) and (N); and, in particular, an isolated point of (H) is the intersection of (M) and (N) at that point, which may be of any degree of multiplicity.

2. The intersection problem. The question of the number of linearly independent polynomials M of given degree d which contain (M), i. e. which are of the form $M_1 X_1 + \cdots + M_k X_k$, is (with some extensive limitations) solved by Hilbert.*) This question leads to the consideration of the general solution of the equation

$$M_1 X_1 + M_2 X_2 + \cdots + M_k X_k = 0,$$

and also of the system of equations

$$M_{1i} X_1 + M_{2i} X_2 + \cdots + M_{mi} X_m = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, l),$$

where $X_1, X_2, \cdots, X_m$ are the unknowns. The latter system of equations is precisely of the same character as the system

$$M_{1i} X_1 + \cdots + M_{mi} X_m \equiv 0 \pmod{M_1, M_2, \cdots, M_k}, \quad (i = 1, 2, \cdots, l),$$

since this new system requires only that the coefficients of

$$M_{1i} X_1 + \cdots + M_{mi} X_m \qquad (i = 1, 2, \cdots, l)$$

should satisfy the linear equations of (M).

The problem of the solution of the last system of equations reduces to what may be called the problem of the theory of intersections if we put $m = 1$. Writing X for X_1, and N_i for M_{1i}, the system of equations becomes

$$XN_i \equiv 0 \pmod{M_1, M_2, \cdots, M_k}, \qquad (i = 1, 2, \cdots, l);$$

or

$$XN \equiv 0 \pmod{M_1, M_2, \cdots, M_k},$$

where

$$N \equiv 0 \pmod{N_1, N_2, \cdots, N_l}.$$

Expressed in words, this problem is to find the most general modular system X whose product with a given modular system N contains a given modular system M, or to find the simplest algebraic manifold (X) which in composition with (N) includes (M); for, as Hilbert has shown (l. c.), the general solution is $X \equiv 0 \pmod{X_1, X_2, \cdots}$, where $X_1, X_2, \cdots$ are a finite number of particular solutions of X.

*) „Über die Theorie der algebraischen Formen", Math. Ann., B. 36 (1890). The limitations are 1) that d has a sufficiently high value, and 2) that the polynomials are homogeneous, which is equivalent to the restriction that $M_1 X_1, \cdots, M_k X_k$ are all to be of degree d.

The apparently most natural way to set about finding X is first) find the linear equations of (M) from which the linear equations f (X) can be immediately deduced (§ 3), and then to solve the linear juations of (X). Thus there are two converse problems to consider, orresponding to the two ways in which a manifold (M) may be given; ther the polynomials which determine (M) are given, in which case is required to find its linear equations; or the linear equations of (M) e given, in which case it is required to solve them so as to find ıe polynomials which determine it. This paper does not deal with ıe second problem, and goes only a little way towards solving the rst. The solution of the first will suggest methods of attacking the cond. The given system of linear equations must first be resolved ıto equivalent proper systems, corresponding to proper manifolds. The orresponding modular systems must then be found, and then the odular system containing them all, i. e. their *L. C. M.*

3. The character of the linear equations of a manifold. Ve shall suppose that there are only three variables x_1, x_2, x_3, as the xtension to any number of variables or dimensions involves for the ıost part no new principle. Let

$$M_i = \Sigma a_{pqr}^{(i)} x_1^p x_2^q x_3^r \qquad (i = 1, 2, \cdots, k)$$

nd

$$M = \Sigma z_{pqr} x_1^p x_2^q x_3^r \equiv 0 \qquad (\text{mod. } M_1, M_2, \cdots, M_k).$$

uppose $\Sigma \zeta_{pqr} z_{pqr} = 0$ to be any linear equation of (M), i. e. any equaon satisfied identically by the coefficients z of M, the ζ's being onstants in which no arbitrary parameters are involved. Then, since ıis equation is a consequence of

$$M \equiv 0 \qquad (\text{mod. } M_1, M_2, \cdots, M_k),$$

nd since $M \equiv 0$ requires at the same time that $x_1^l x_2^m x_3^n M \equiv 0$, r

$$\Sigma z_{pqr} x_1^{p+l} x_2^{q+m} x_3^{r+n} \equiv 0,$$

e have

$$\Sigma \zeta_{p+l, q+m, r+n} z_{pqr} = 0,$$

here l, m, n are any positive integers, the summation sign Σ refering only to p, q, r. There is no limit to the values of l, m, n; and, the origin is not within the manifold, the ζ's must form an infinite eries, ζ_{pqr} being in that case a function of p, q, r. Thus every linear quation $\Sigma \zeta_{pqr} z_{pqr} = 0$ involves an infinite number of derived equaions (or derivates), viz., $\Sigma \zeta_{p+l, q+m, r+n} z_{pqr} = 0$, of which the equation $\Sigma \zeta_{pqr} z_{pqr} = 0$ is the source (or prime equation), where l, m, n are ny positive integers, fixed for one derivate.

Hence the characteristic property of any system of linear equations of a manifold is that the derivates of any equation of the system are all included in the system. Any given system of equations of this character is a system of linear equations of a manifold.

In a given system of linear equations we need (for many purposes) only consider the prime equations; and we may either reduce the number of these to a minimum, or what would appear to be more useful, bring them to standard forms corresponding to proper manifolds.

All equations $\Sigma \zeta_{pqr} z_{pqr} = 0$ satisfied identically by the coefficients of M are also satisfied by the coefficients of each one of the polynomials $M_1, M_2, \cdots, M_k$. Hence we have

$$\Sigma a^{(i)}_{pqr} \zeta_{pqr} = 0, \qquad \Sigma a^{(i)}_{pqr} \zeta_{p+l, q+m, r+n} = 0, \qquad (i = 1, 2, \cdots, k).$$

Conversely, provided the ζ's satisfy all these equations (which we shall call the ζ-equations), the coefficients of M satisfy the corresponding linear or z-equations, viz.

$$\Sigma \zeta_{pqr} z_{pqr} = 0, \qquad \Sigma \zeta_{p+l, q+m, r+n} z_{pqr} = 0;$$

and there are no equations satisfied by the z's which are not obtainable in this way.

When the number of ζ's is infinite a direct solution of the ζ-equations is impossible; and the values of the ζ's must be sought in some other way, as illustrated in § 5 (ex. 3) and § 7 (exs. 4, 5). The number of z's is, however, finite, so that the linear or z-equations are manageable if the ζ's are known.

By making the coefficients of XN_i $(i = 1, 2, \cdots, l)$ satisfy the equation $\Sigma \zeta_{pqr} z_{pqr} = 0$ (v. § 2), we obtain l similar equations for the coefficients of X, viz.

$$\Sigma \theta^{(i)}_{pqr} z_{pqr} = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, l);$$

and to the derived equation $\Sigma \zeta_{p+l, q+m, r+n} z_{pqr} = 0$ corresponds the l derived equations

$$\Sigma \theta^{(i)}_{p+l, q+m, r+n} z_{pqr} = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, l).$$

Thus to each prime equation of (M) correspond l prime equations of (X); but some of these may be identities, and others may be included in the rest and their derivates.

4. Base-points. A specially important case is that in which (M) is of zero dimensions, i. e. consists of a finite number of isolated points. Each of the points is called a base-point, and is itself a manifold, with a definite system of linear equations, the totality of which make up the linear equations of (M). Points at infinity may be disregarded as they supply no equations for (M). A base-point differs from any

other manifold in that it has a finite and definite number of independent linear equations. If each base-point of (M) is one-set, i. e. has a single prime linear equation (v. § 10, I), then a single prime linear equation can be obtained for (M) by simply adding the prime linear equations of its several base-points. The linear equations of any proper manifold in respect to polynomials of degree d are the linear equations of a base-point of sufficiently high multiplicity chosen anywhere out of the manifold.

A base-point situated at the origin has a further distinctive property, viz., that the ζ's corresponding to it are finite in number, every ζ_{pqr} whose degree $p+q+r$ exceeds a certain finite limit being zero. With this restriction the ζ's may have any constant values, and the base-point may have any finite number of prime linear equations. The inear equations of the base-point do not include any z_{pqr} whose degree $p+q+r$ exceeds the limit mentioned above, i. e. they do not include any partial differential coefficients of M above a certain finite order, $\frac{z_{pqr}}{p!\,q!\,r!}$ being the value of $\frac{\partial^{p+q+r} M}{\partial x_1{}^p \partial x_2{}^q \partial x_3{}^r}$ at the origin.

The linear equations of a base-point are to be understood as referred to the point as origin, unless the contrary is stated. They may be written in either of the two forms

$$\Sigma\, \zeta^{(i)}_{pqr} z_{pqr} = 0, \qquad \Sigma\, \zeta^{(i)}_{p+l,q+m,r+n} z_{pqr} = 0, \qquad (i = 1, 2, \cdots, t);$$

or

$$\Sigma\, \zeta^{(i)}_{pqr} z_{pqr} = 0, \qquad \Sigma\, \zeta^{(i)}_{pqr} z_{p-l,q-m,r-n} = 0, \qquad (i = 1, 2, \cdots, t),$$

where $z_{p-l,q-m,r-n}$ is zero if any one of the integers $p-l$, $q-m$, $r-n$ is negative. The latter form is generally preferable, but is only suitable for cases in which there are only a finite number of ζ's (v. § 5, ex. 3) which do not vanish. (For example, the derivates of the prime equation $z_{400}+z_{111}=0$ are $z_{300}+z_{011}=z_{101}=z_{110}=z_{200}=z_{100}=z_{010}=z_{001}=z_{000}=0$.)

The linear equations of the same base-point, when situated at the point a_1, a_2, a_3, in reference to a manifold $M = \Sigma\, z_{pqr} x_1{}^p x_2{}^q x_3{}^r = 0$ of degree d, are

$$\sum \frac{\zeta^{(i)}_{pqr}}{p!\,q!\,r!} \frac{\partial^{p+q+r} M}{\partial a_1{}^p \partial a_2{}^q \partial a_3{}^r} = 0, \quad \sum \frac{\zeta^{(i)}_{pqr}}{\overline{p-l}!\,\overline{q-m}!\,\overline{r-n}!} \frac{\partial^{p-l+q-m+r-n} M}{\partial a_1{}^{p-l} \partial a_2{}^{q-m} \partial a_3{}^{r-n}} = 0,$$

where $i = 1, \cdots, t$, and $\frac{\partial^{p+q+r} M}{\partial a_1{}^p \partial a_2{}^q \partial a_3{}^r}$ denotes the value of $\frac{\partial^{p+q+r} M}{\partial x_1{}^p \partial x_2{}^q \partial x_3{}^r}$ at the point a_1, a_2, a_3.

The multiplicity of a base-point is defined as the total number of independent linear equations corresponding to it. This definition is consistent with the usual conception of multiplicity of a solution in the case of two equations for two unknowns, and also, I believe, in the case of n equations for n unknowns. It is not however confined to these cases, as it applies equally to the case of k equations for n unknowns when $k > n$ (v. § 10, ex. 3).

A t-set point is a base-point which has t prime linear equations, no one of which is deducible from the rest and their derivates.

The prime linear equations of a base-point at the origin may be any equations whatever of finite degree, the whole system of equations of the base-point consisting of the prime equations and all their derivates. A plane curve with a multiple point of order k cannot contain any t-set point thereat, where $t > k$ (l. c. 3, Footnote § 8); and contains the k-set point, or ordinary k-point, $z_{k-1,0} = z_{k-2,1} = \cdots = z_{0,k-1} = 0$, which is the intersection of the $k+1$ curves $x_1^k = x_1^{k-1}x_2 = \cdots = x_2^k = 0$. The ordinary k-point is contained in the one-set point $z_{k-1,k-1} = 0$. Any t-set point whose prime equations are of degree $\leqq d$ is clearly contained in the ordinary $(d+1)$-point, and also in the one-set point $z_{dd\ldots} = 0$. The prime equation of the base-point at the origin on the curve $x_2 = a_1x_1 + a_2x_1^2 + \cdots$, of multiplicity $\mu + 1$, is found by substituting for x_2 in $\Sigma z_{pq}x_1^p x_2^q = 0$ and equating the coefficient of x_1^μ to zero, i. e., it is

$$\sum \frac{q!\, a_1^{q_1} \cdots a_\mu^{q_\mu}}{q_1! \cdots q_\mu!} z_{pq} = 0 \qquad (p + q_1 + 2q_2 + \cdots + \mu q_\mu = \mu),$$

where $q = q_1 + q_2 + \cdots + q_\mu$.

4a.*) To find the linear equations of a base-point common to $M_1, M_2, \cdots, M_k$ situated at the point a_1, a_2, a_3, we first transfer the origin to the point, by substituting $x_1 + a_1,\ x_2 + a_2,\ x_3 + a_3$ for x_1, x_2, x_3 in $M_1, M_2, \cdots, M_k$. We then form the ζ-equations corresponding to $M_1, M_2, \cdots, M_k$ referred to the new origin, viz.

$$\Sigma a_{pqr}^{(i)} \zeta_{pqr} = 0, \qquad \Sigma a_{pqr}^{(i)} \zeta_{p+l,q+m,r+n} = 0, \qquad (i = 1, 2, \cdots, k).$$

We define the degree of a ζ- (or z-)equation as the lowest (or highest) degree of any ζ (or z) occurring in that equation. Thus no ζ-equation is of zero degree, since $a_{000}^{(i)}$ vanishes; and the degree of the ζ-equation $\Sigma a_{pqr}^{(i)} \zeta_{p+l,q+m,r+n} = 0$ is $h + l + m + n$ if the origin is a multiple point of order h on M_i. The whole system of ζ-equations must be arranged in sets, each set comprising all equations of the same degree and being one degree higher than the previous set. The equations must then be modified so that the terms of lowest degree in any one set are all linearly independent. This modification consists in removing as many equations as

*) For fuller details of the method of this article, see l. c. 4, Footnote § 8.

ossible out of any set into sets of higher degree. When, after fully arrying out the process of modification, we arrive at a set of deree d containing as many equations as there are ζ's of degree d, viz. $(d+1)(d+2)$, we may assume that all ζ's of degree $\geqq d$ vanish. f there is no set of degree d containing $\frac{1}{2}(d+1)(d+2)$ equations, hen the intersection of $M_1, M_2, \cdots, M_k$ at the origin is a base-point f infinite multiplicity, i. e. $M_1, M_2, \cdots, M_k$ have a curve or higher ianifold in common which contains the origin.

The modified ζ-equations can then be solved in such a way as to nd the independent prime linear equations of the base-point. To explain how this is accomplished we will suppose first that all the prime inear or z-equations have been found. Any solution of the ζ-equations gives the coefficients of a z-equation, and the coefficients of any -equation (prime or derivate) form a solution of the ζ-equations. We rrange the prime z-equations and all their derivates in sets, each set omprising all equations of one degree and being one degree lower han the previous set, while the first set is of degree $d-1$. We then nodify them in a similar way to the ζ-equations so as to reduce the umber of equations in each set to a minimum, by removing as many quations as possible out of any set into sets of lower degree. The coeficients of the modified system of z-equations must then give the total umber of independent solutions of the ζ-equations. For this, it is ecessary and sufficient that $\zeta_n + z_n = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ for all values f n up to $d-1$ (including the case $\zeta_n = 0$), where ζ_n and z_n are the umbers of ζ- and z-equations of degree n in the final modified arangement. If the coefficients of one z-equation (derived from one olution of the ζ-equations) and its derivates suffice to give the comlete solution of the ζ-equations the base-point is one-set; if the coeficients of t equations and their derivates are required the base-point is -set; and $t \geqq z_{d-1}$.

Similarly if the linear equations of a base-point are given we can arry out the reverse process and find the polynomials $M_1, M_2, \cdots, M_k$ which determine it, and the least value of k.

The linear or z-equations of the base-point common to $M_1, M_2, \cdots, M_k$ t the origin are the linear equations which are identically satisfied by he coefficients of $M_1P_1 + \cdots + M_kP_k$, where $P_1, P_2, \cdots, P_k$ are arbirary integral power series; and any M which contains the base-point an be expressed in the form $M_1P_1 + \cdots + M_kP_k$.

5. In the following examples the linear equations of a manifold nean the prime linear equations.

Example 1. The linear equation of a manifold (M) which consists of a finite number of isolated ordinary points, is $\Sigma \zeta_{pqr} z_{pqr} = 0$, where ζ_{pqr} is the sum of the values of $x_1^p x_2^q x_3^r$ for the several points.

Thus, if the whole intersection in finite space of three surfaces M_1, M_2, M_3 consists of a finite number of isolated ordinary points the linear equation of (M) is $\Sigma \zeta_{pqr} z_{pqr} = 0$ where ζ_{pqr} is a rational function of the coefficients of M_1, M_2, M_3. Similarly for n polynomials $M_1, M_2, \cdots, M_n$ in n variables. By known theorems this linear equation and its derivates includes all the linear equations of (M).

Example 2. A one-set point at the origin has a single linear equation of finite degree $\Sigma \zeta_{pqr} z_{pqr} = 0$, where the ζ's are any constants. If the one-set point is situated at a_1, a_2, a_3 its equation (§ 4) is

$$\sum \frac{\zeta_{pqr}}{p!\,q!\,r!} \frac{\partial^{p+q+r} M}{\partial a_1^p \partial a_2^q \partial a_3^r} = 0,$$

where the ζ's are the same as before.

From this it may be shown that, when $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, $a_3 \neq 0$, the equation is

$$\Sigma a_1^p a_2^q a_3^r \zeta(p, q, r)\, z_{pqr} = 0,$$

where $\zeta(p, q, r)$ is an integral polynomial in p, q, r. There are two ways of writing the system of derivates. One is

$$\Sigma a_1^p a_2^q a_3^r \frac{\partial^{l+m+n} \zeta(p, q, r)}{\partial p^l \partial q^m \partial r^n} z_{pqr} = 0;$$

and the other is the old form

$$\Sigma a_1^{p+l} a_2^{q+m} a_3^{r+n} \zeta(p+l, q+m, r+n)\, z_{pqr} = 0,$$

or

$$\Sigma a_1^p a_2^q a_3^r \zeta(p+l, q+m, r+n)\, z_{pqr} = 0.$$

When $a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$, $a_3 \neq 0$, the linear equation takes the form

$$\Sigma a_2^q a_3^r \zeta_p(q, r)\, z_{pqr} = 0,$$

where $\zeta_p(q, r)$ is a polynomial in q, r, different for different values of p, and vanishing identically when p exceeds a certain finite limit. The (l, m, n) derivate is

$$\Sigma a_2^q a_3^r \zeta_{p+l}(q+m, r+n)\, z_{pqr} = 0.$$

When $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 \neq 0$, the linear equation takes the form

$$\Sigma a_3^r \zeta_{pq}(r)\, z_{pqr} = 0,$$

where $\zeta_{pq}(r)$ is a polynomial in r, which vanishes identically when $p+q$ exceeds a certain finite limit. The (l, m, n) derivate is

$$\Sigma a_3^r \zeta_{p+l, q+m}(r+n)\, z_{pqr} = 0.$$

When $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, the linear equation and its derivates are (as before)

$$\Sigma \zeta_{pqr} z_{pqr} = 0, \qquad \Sigma \zeta_{pqr} z_{p-l, q-m, r-n} = 0.$$

n the product $\Sigma \zeta_{pqr} x_1^{-p} x_2^{-q} x_3^{-r} \times \Sigma z_{pqr} x_1^p x_2^q x_3^r$ the constant term $\Sigma \zeta_{pqr} z_{pqr}$ vanishes, and also the coefficient $\Sigma \zeta_{pqr} z_{p-l,q-m,r-n}$ of any erm $x_1^{-l} x_2^{-m} x_3^{-n}$ in which all the indices $-l$, $-m$, $-n$ are negaive or zero. Consequently, if l_1, l_2, l_3 are the highest values of p, q, r which occur in any non-vanishing ζ, we have, on multiplying by $x_1^{l_1} x_2^{l_2} x_3^{l_3}$,

$$\Sigma \zeta_{pqr} x_1^{l_1-p} x_2^{l_2-q} x_3^{l_3-r} \times \Sigma z_{pqr} x_1^p x_2^q x_3^r = x_1^{l_1+1} F_1 + x_2^{l_2+1} F_2 + x_3^{l_3+1} F_3,$$

vhere F_1, F_2, F_3 are polynomials. Also $\Sigma \zeta_{pqr} x_1^{l_1-p} x_2^{l_2-q} x_3^{l_3-r}$ is a polyıomial $F(x_1^{l_1}, x_2^{l_2}, x_3^{l_3})$ in which every term divides $x_1^{l_1} x_2^{l_2} x_3^{l_3}$; while the ight hand side $x_1^{l_1+1} F_1 + x_2^{l_2+1} F_2 + x_3^{l_3+1} F_3$ is a complementary polyıomial in which no term is present which divides $x_1^{l_1} x_2^{l_2} x_3^{l_3}$. Hence we ıave another way of stating the problem of finding the ζ's corresponding o the base-point common to $M_1, M_2, \cdots, M_k$ at the origin: — the roblem is that of finding all polynomials $F(x_1^{l_1}, x_2^{l_2}, x_3^{l_3})$ whose proluct with each of the polynomials $M_1, M_2, \cdots, M_k$ gives a polynomial omplementary to $F(x_1^{l_1}, x_2^{l_2}, x_3^{l_3})$ in the sense just defined. Then ζ_{pqr} s the coefficient of $x_1^{l_1-p} x_2^{l_2-q} x_3^{l_3-r}$ in $F(x_1^{l_1}, x_2^{l_2}, x_3^{l_3})$.

Example 3. In order to obtain true linear or z-equations of inite degree for a given proper non-multiple manifold of h dimenions in space of n dimensions the origin must be moved to a nonaultiple point within the manifold. This having been done, x_{h+1}, $x_{h+2}, \cdots, x_n$ can be expanded as integral power series in $x_1, x_2, \cdots, x_h$, he constant terms in all the expansions being zero. On substituting hem in

$$\Sigma x_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdots x_n^{p_n} z_{p_1 p_2 \cdots p_n} = 0,$$

nd equating the coefficient of $x_1^{l_1} x_2^{l_2} \cdots x_h^{l_h}$ to zero, we obtain a linear quation of the manifold of degree $l_1 + l_2 + \cdots + l_h$. This linear equaion and its derivates must be satisfied for any M which contains the iven manifold; and they express the conditions that, on substituting he expansions for $x_{h+1}, x_{h+2}, \cdots, x_n$ in M the coefficients of all terms vhich divide $x_1^{l_1} x_2^{l_2} \cdots x_h^{l_h}$ vanish.

The linear equation is

$$\Sigma \zeta_{p_1 p_2 \cdots p_n} z_{p_1 p_2 \cdots p_n} = 0,$$

vhere $\zeta_{p_1 p_2 \cdots p_n}$ is the coefficient of $x_1^{l_1} x_2^{l_2} \cdots x_h^{l_h}$ in $x_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdots x_n^{p_n}$, or he coefficient of $x_1^{l_1-p_1} \cdots x_h^{l_h-p_h}$ in $x_{h+1}^{p_{h+1}} \cdots x_n^{p_n}$. Any derivate is

$$\Sigma \zeta_{p_1 p_2 \cdots p_n} z_{p_1-m_1, p_2-m_2, \cdots, p_n-m_n} = 0;$$

ut all derivates are included in the $(x_1, x_2, \cdots, x_h)$ derivates, i. e. those or which $m_{h+1} = m_{h+2} = \cdots = m_n = 0$. Also, if we only use the

$(x_1, \cdots, x_h)$ derivates, the condition that the origin should lie within the given manifold is no longer necessary. For every ζ for which $p_1 > l_1$, or $p_2 > l_2, \cdots$, or $p_h > l_h$ is zero; and, if we apply the linear equation and its $(x_1, \cdots, x_h)$ derivates to an M of degree d, every ζ for which $p_{h+1} > d$, or $p_{h+2} > d, \cdots$, or $p_n > d$ may be disregarded, since every such ζ is associated in all the derivates with a z which vanishes. The linear equation is then of finite degree, since $p_i \leqq l_i \; (i = 1, 2, \cdots, h)$ and $p_i \leqq d \; (i = h + 1, \cdots, n)$.

If the given manifold is a linear one, so that $x_{h+1}, \cdots, x_n$ are given linear functions of $x_1, x_2, \cdots, x_h$, then the equation (of degree nd

$$\Sigma \zeta_{d-p_1, d-p_2, \cdots, d-p_n} z_{d-p_1, d-p_2, \cdots, d-p_n} = 0,$$

where $\zeta_{d-p_1, \cdots, d-p_n}$ is the coefficient of $x_1^{p_1} \cdots x_h^{p_h}$ in $x_{h+1}^{d-p_{h+1}} \cdots x_n^{d-p_n}$,

is a single linear equation of the manifold in respect to polynomials of degree d, provided $(x_1, \cdots, x_h)$ derivates are only taken. That is to say, this linear equation and its $(x_1, \cdots, x_h)$ derivates applied to an M of degree d, express the necessary and sufficient conditions that M contains the given manifold; for they express the conditions that all terms which divide $x_1^d x_2^d \cdots x_h^d$ disappear from M when for $x_{h+1}, \cdots$, x_n are substituted their values as linear functions of $x_1, x_2, \cdots, x_h$.

The condition that $\zeta_{d-p_1, d-p_2, \cdots, d-p_n}$ does not vanish is

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_h \leqq d - p_{h+1} + \cdots + d - p_n,$$

or

$$\Sigma p \leqq (n-h)d \quad \text{and} \quad \Sigma(d-p) \geqq hd.$$

Hence the linear equation contains no terms of degree $< hd$; and it is only a certain number of the $(x_1, \cdots, x_h)$ derivates which do not vanish identically, when applied to an M of degree d. In order that a derivate may not vanish identically we must have $m_1 \leqq d, \cdots, m_h \leqq d$, $m_1 + \cdots + m_h \geqq (h-1)d$, or each $d - m \geqq 0$ and $\Sigma(d-m) \leqq d$. Hence the total number of equations which do not vanish identically is equal to the number of terms in a polynomial of degree d in h variables. But this is also the number of independent equations which express the conditions that M vanishes identically when $x_{h+1}, \cdots, x_n$ are replaced by their values in terms of $x_1, \cdots, x_h$. We thus see that the $(x_1, x_2, \cdots, x_h)$ derivates of the linear equation which do not vanish identically are all independent of one another.

As an example, suppose it required to express the conditions that the manifold $x_3 = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2$ is contained in the manifold $M = 0$ of degree 2. The linear equation is

$$\Sigma \zeta_{2-p_1, 2-p_2, 2-p_3} z_{2-p_1, 2-p_2, 2-p_3} = 0,$$

where $\zeta_{2-p_1\,2-p_2\,2-p_3}$ is the coefficient of $x_1^{p_1}x_2^{p_2}$ in $(c_0+c_1x_1+c_2x_2)^{2-p_3}$. The only values for p_1, p_2, p_3 are those for which $p_1+p_2 \leqq 2-p_3$, or $\Sigma p \leqq 2$. Hence we have the following sets of corresponding values

$p_1 =$ 0	1	0	0	0	1	1	2	0	0
$p_2 =$ 0	0	1	0	1	0	1	0	2	0
$p_3 =$ 0	0	0	1	1	1	0	0	0	2
$\zeta = c_0^2$	$2c_0c_1$	$2c_0c_2$	c_0	c_2	c_1	$2c_1c_2$	c_1^2	c_2^2	1.

The linear equation therefore is

$$c_0^2 z_{222} + 2c_0c_1 z_{122} + 2c_0c_2 z_{212} + c_0 z_{221} + c_2 z_{211} + c_1 z_{121} + 2c_1c_2 z_{112}$$
$$+ c_1^2 z_{022} + c_2^2 z_{202} + z_{220} = 0.$$

Taking the (x_1, x_2) derivates of this equation, and afterwards putting every z of degree >2 equal to zero, we have

$$c_0^2 z_{002} + c_0 z_{001} + z_{000} = 0,$$
$$2c_0c_2 z_{002} + c_0 z_{011} + c_2 z_{001} + z_{010} = 0,$$
$$2c_0c_1 z_{002} + c_0 z_{101} + c_1 z_{001} + z_{100} = 0,$$
$$c_2^2 z_{002} + c_2 z_{011} + z_{020} = 0,$$
$$c_1^2 z_{002} + c_1 z_{101} + z_{200} = 0,$$
$$2c_1c_2 z_{002} + c_1 z_{011} + c_2 z_{101} + z_{110} = 0,$$

which is the correct system of equations expressing the conditions that $c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 - x_3$ is a factor of $\Sigma z_{pqr} x_1^p x_2^q x_3^r$ $(p+q+r \leqq 2)$.

6. The manifold (M) in n dimensions, which is the intersection of the k manifolds $M_1 = M_2 = \cdots = M_k = 0$ is made up of a finite number of proper manifolds of equal or unequal dimensions; and each proper manifold may be multiple*) or non-multiple in (M). Each proper multiple manifold of (M) of h dimensions, which is not contained as a whole in another proper manifold of (M) of higher dimensions, has a definite multiplicity**) μ in (M), which is defined as follows: — Take the origin at a general point of the proper mani-

*) A multiple manifold is one in which every point is a repeated point, such as a line of intersection of two or more surfaces which is a multiple line on all of them, a line of intersection (or line of contact) of two or more surfaces which all touch one another along the line, and a point of intersection of two or more curves (or three or more surfaces) which is a multiple point on all. A proper non-multiple manifold is one in which the general point is not repeated, such as a proper surface which possesses only a finite number of multiple lines and points.

**) The μ manifolds of a proper μ-ple manifold of (M) all coincide in space, but have separate analytical identities; although their resolution (by means of the linear equations of the μ-ple manifold) into μ distinct members is not in general unique.

fold, and express h of the variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$ as linear homogeneous functions of the remainder with arbitrary constant coefficients, and substitute these values in $M_1, M_2, \cdots, M_k$, and M, thus changing them to $M_1', M_2', \cdots, M_k'$, and M', in $n-h$ variables; then μ is the multiplicity of the base-point determined by $M_1', M_2', \cdots, M_k'$ at the origin (§ 4). In finding the value of μ by this method we find at the same time the linear equations of the multiple manifold, if the coordinates of the general point of it can be expressed in terms of arbitrary parameters. - Two examples are given below.

The proper manifolds of (M) which are wholly contained in others of higher dimensions have a certain residuary multiplicity; which I am unable at present to define algebraically. These manifolds and their effect on the linear equations are more difficult to find.

In order that we may have $XN \equiv 0 \pmod{M_1, M_2, \cdots, M_k}$, the manifold (X) must contain every proper non-multiple manifold of (M) which is not contained in (N). It must also contain any μ-ple manifold of (M) to a certain multiplicity η. The number η satisfies the relation $\eta \leqq \mu - \varrho$, where ϱ is the multiplicity of the same manifold in the intersection of (M) and (N). If $\varrho = \mu$, then $\eta = 0$; if $\varrho = 0$, then $\eta = \mu$; and if $\varrho < \mu$, then $\eta > 0$. Also, if the dimensions h of the μ-ple manifold is equal to $n-k$ (which is the lowest value it can have, and requires $n \geqq k$), then I think that $\eta = \mu - \varrho$. In the other extreme case when h is $n-1$ (which is the highest value h can have), η must equal $\mu - \varrho$; for the μ-ple manifold is then expressible by a single equation $H^\mu = 0$, and H^μ must be a factor of XN. For values of h between $n-k$ and $n-1$ we may have $\eta < \mu - \varrho$.

7. Example 4. To find the linear equations of the manifold (M) which is the intersection of the three surfaces

$$M_1 = x_1^3, \quad M_2 = x_2^3, \quad M_3 = x_1 x_2 + (x_1^2 + x_2^2) x_3.$$

All points of (M) lie in the manifold $x_1 = x_2 = 0$. Change the origin to any point $0, 0, c$ in the manifold, and put $x_3 = a x_1 + b x_2$; then

$$M_1' = x_1^3,\ M_2' = x_2^3,\ M_3' = x_1 x_2 + (x_1^2 + x_2^2)(a x_1 + b x_2 + c),$$
$$M' = \Sigma z_{pqr} x_1^p x_2^q (a x_1 + b x_2 + c)^r.$$

The equations of the base-point at the origin determined by M_1', M_2', M_3', i. e. the equations identically satisfied by the coefficients of $M_1' P_1 + M_2' P_2 + M_3' P_3$, are

$$z_{20} = z_{02} = c z_{11},$$

and their derivates $z_{10} = z_{01} = z_{00} = 0$. There are thus 5 independent equations, and 5 is therefore the multiplicity of the manifold $x_1 = x_2 = 0$

in (M). To find the linear equations of (M) we need only consider the prime equations $z_{20} = z_{02} = cz_{11}$, where z_{20}, z_{02}, z_{11} stand for the coefficients of x_1^2, x_2^2, x_1x_2 in M'. Thus

$$z_{20} = \Sigma z_{20\,r} c^r + \Sigma z_{10\,r} r c^{r-1} a + \Sigma z_{00\,r} \tfrac{1}{2} r(r-1) c^{r-2} a^2,$$
$$z_{02} = \Sigma z_{02\,r} c^r + \Sigma z_{01\,r} r c^{r-1} b + \Sigma z_{00\,r} \tfrac{1}{2} r(r-1) c^{r-2} b^2,$$
$$z_{11} = \Sigma z_{11\,r} c^r + \Sigma z_{10\,r} r c^{r-1} b + \Sigma z_{01\,r} r c^{r-1} a + \Sigma z_{00\,r} r(r-1) c^{r-2} ab.$$

By equating coefficients of powers of a, b, c in the equations $z_{20} = z_{02} = cz_{11}$, we obtain

$$z_{20\,r} = z_{02\,r} = z_{11\,r-1} \text{ for all integral values of } r,$$

as the prime linear equations of (M). If M is of degree d the prime equations are $z_{20\,d} = z_{02\,d} = z_{11\,d-1}$, as the derivates of these include all the linear equations of degree $\leqq d$.

Example 5. Take

$$M_1 = x_1^2 + x_2(x_3 - h), \quad M_2 = x_2^2 + x_1(x_3 - k), \quad M_3 = x_1x_2.$$

All points of (M) lie in $x_1 = x_2 = 0$, and, as in Ex. 4, we have

$$M_1' = x_1^2 + x_2(ax_1 + bx_2 + c - h), \qquad M_2' = x_2^2 + x_1(ax_1 + bx_2 + c - k),$$
$$M_3' = x_1x_2, \quad M' = \Sigma z_{pqr} x_1^p x_2^q (ax_1 + bx_2 + c)^r.$$

The only equation of the base-point determined by M_1', M_2', M_3' is $z_{00} = 0$, so that the manifold $x_1 = x_2 = 0$ is non-multiple in (M). Corresponding to $z_{00} = 0$, we have for (M)

$$\Sigma z_{00\,r} c^r = 0, \quad \text{i. e. } z_{00\,r} = 0.$$

There are, however, special values of c, viz. $c = h$ and $c = k$, which give other equations of (M) the points $0, 0, h$ and $0, 0, k$ being manifolds of (M) contained in the higher manifold $x_1 = x_2 = 0$. If these special points had belonged to a second proper manifold of (M), and had been merely the intersection of the two manifolds, we should obtain the new equations of (M) from considering a general point of the second manifold, without specially considering the points of intersection. The general method, however, is to consider all special positions of the origin which have a greater multiplicity than the general position.

Take $c = h$, $(h \neq k)$; then a, b only are arbitrary, and

$$M_1' = x_1^2 + x_2(ax_1 + bx_2), \; M_2' = x_2^2 + x_1(ax_1 + bx_2 + h - k), \; M_3' = x_1x_2,$$
$$M' = \Sigma z_{pqr} x_1^p x_2^q (ax_1 + bx_2 + h)^r.$$

Here, for general values of a, b, the multiplicity of the base-point of M_1', M_2', M_3' is 2, and its prime equation is $z_{01} = 0$; to which corresponds the equation $\Sigma z_{01\,r} h^r + \Sigma z_{00\,r} r h^{r-1} b = 0$ of (M). But for special values of a, b, viz. when $b = 0$, the multiplicity of the base-point is increased, and the prime equation is $(h-k)z_{02}=z_{10}$, to which corresponds the equation

$$(h-k)\,\Sigma z_{02r}h^r=\Sigma z_{10r}h^r+\Sigma z_{00r}rh^{r-1}a.$$

The only new prime equation of (M) thus supplied is

$$(h-k)\,\Sigma z_{02r}h^r=\Sigma z_{10r}h^r.$$

Similarly, for $c=k$, we have the new equation $(k-h)\,\Sigma z_{20r}k^r=\Sigma z_{01r}k^r$. Hence the prime linear equations of (M) are

$$z_{00r}=0,\quad (h-k)\,\Sigma h^r z_{02r}=\Sigma h^r z_{10r},\quad (k-h)\,\Sigma k^r z_{20r}=\Sigma k^r z_{01r}.$$

If $h=k=0$, the equations can be shown to be

$$z_{00r}=0,\quad z_{200}=z_{011},\quad z_{020}=z_{101}.$$

8. The intersections of plane curves. A general conception of the structure and properties of any algebraic manifold, taking due account of multiplicity, must depend on the conception of multiple points or base-points. In regard to the plane several properties of base-points have been definitely proved*), and afford an indication of analogous properties in more extended space. We proceed to summarize these properties, first repeating what is meant by a base-point.

A base-point is a point (a_1, a_2) of definite multiplicity μ which supplies μ independent conditions for any curve of sufficiently high degree which contains it, the conditions being expressed by μ independent linear equations which the coefficients z_{pq} of the curve must satisfy. The base-point may be given as the intersection at a_1, a_2 of k given curves $M_1, M_2, \cdots, M_k$, which have no branch in common through the point a_1, a_2, or it may be given by its linear equations.**) In the former case its μ linear equations are obtained by referring M_1, $M_2, \cdots, M_k$ to the point a_1, a_2 as origin, and finding the equations which are identically satisfied by the coefficients of $M_1P_1+M_2P_2$

*) 1. "The Theorem of Residuation etc.", Proceedings of the London Mathematical Society, Vol. 31 (1900), p. 381—423.

2. "Extensions of the Riemann-Roch Theorem in Plane Geometry", Proc. Lond. Math. Soc., Vol. 32 (1901), p. 418—430.

3. "On a method for dealing with the Intersections of Plane Curves", by Prof. C. A. Scott, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 3 (1902), p. 216—263; containing a simplified and general discussion of the properties of a one-set system of equations, and theorems connected therewith.

4. A paper with the same title as that by Prof. Scott, to be published in the Trans. Amer. Math. Soc., October 1904; containing a new proof of the one-set theorem and its converse, and a discussion of the ζ-equations.

**) Unless the contrary is implied, by a given base-point is meant one whose linear equations are given.

$+ \cdots + M_k P_k$, where $P_1, P_2, \cdots, P_k$ are arbitrary integral power series (§ 4a), and finally transferring the origin back to its original position, and transforming the linear equations accordingly (§ 4). The linear equations referred to the point itself as origin consist of a small number of prime equations $\Sigma \zeta_{pq} z_{pq} = 0$, and their derivates

$$\Sigma \zeta_{pq} z_{p-l, q-m} = 0,$$

where the ζ's are constants, and l, m are any two positive integers, fixed for one derivate. Every ζ_{pq} whose degree $p+q$ exceeds a certain finite limit is zero. No z_{pq} whose degree $p+q$ exceeds this limit appears in the equations; and each z_{pq} for which $p+q$ is equal to the limit can appear only in the prime equations.

9. The principal properties of base-points in a plane are the following:

I. The one-set theorem. All points of intersection of two curves M_1, M_2, having no common factor, are one-set points (l. c. 1, 3).

In other words, all the linear equations of (M) supplied by any one of its base-points consist of a single linear equation and its derivates. By simply adding the linear equations of the several base-points we obtain a single linear equation for the whole of (M). It is doubtful, however, whether anything is to be gained by so doing, since the result is to compound the equations of (M). A more useful process would be to reduce the prime equations of the separate base-points to their simplest forms.

II. The multiplicity of any point of intersection of M_1, M_2, defined as the number of times the point is repeated in the complete solution of the equations $M_1 = M_2 = 0$, is equal to the multiplicity of the corresponding base-point, defined as the total number of independent linear equations it possesses.

No very satisfactory proof of this has been given, the simplest being an indirect one depending on Noether's theorem. If μ' is the multiplicity according to the former definition, and μ according to the latter, then μ, μ' are both invariant under linear transformation, and it is comparatively easy to prove that $\mu' \geqq \mu$ (l. c. 1, 3). This is done by proving that x_1^{μ} is a factor of the x_1-eliminant of M_1, M_2 when the origin is taken at the point, so that x_1^{μ} is a factor of $x_1^{\mu'}$, and consequently $\mu \leqq \mu'$. By Noether's theorem, the whole number of independent conditions satisfied by the coefficients of a curve M which is of the form $M_1 X_1 + M_2 X_2$ is equal to or less than $\Sigma \mu$. Also, by another known theorem, the number is $\Sigma \mu'$, provided the degree of M is sufficiently great, and M_1, M_2 have been linearly transformed so as to have no intersection at infinity. Hence $\Sigma\mu \geqq \Sigma\mu'$: and this, taken with the previous result $\mu \leqq \mu'$, requires $\mu = \mu'$.

III. Two general fixed curves drawn through any one-set point whose prime linear equation is given have no higher intersection thereat (l. c. 1, 4).

This is the converse of I. Any two curves drawn through the one-set point determine a one-set point which contains the given one. The theorem states that unless the curves are further specialised they will dètermine a one-set point of the same multiplicity as the given one, and identical with it.

This theorem, and also IV and VI below, are only true for two dimensions.

IV. If k independent curves are drawn through a point they determine a $(k-1)$-set point (l. c. 1, 4).

Conversely, k general fixed curves drawn through a given $(k-1)$-set point have no higher intersection, i. e. they determine the $(k-1)$-set point.

By k independent curves through the origin is meant k curves $M_1, M_2, \cdots, M_k$ such that no identical equation of the form

$$M_1 X_1 + M_2 X_2 + \cdots + M_k X_k = 0$$

can hold unless $X_1, X_2, \cdots, X_k$ all vanish at the origin. If X_k had a non-vanishing constant term, M_k would be of the form $M_1 P_1 + \cdots + M_{k-1} P_{k-1}$ and pass through the whole intersection of $M_1, M_2, \cdots, M_{k-1}$ at the origin, and the whole intersection would be $(k-2)$-set if $M_1, M_2, \cdots, M_{k-1}$ were independent curves through the origin.

The conditions that a curve M_1', and that two curves M_1', M_2', should belong to a set of k curves which determine the same $(k-1)$-set point*) as $M_1, M_2, \cdots, M_k$, are that the constant terms of $P_1, P_2, \cdots, P_k$ should not all vanish, and should not be proportional to the constant terms of $P_1', P_2', \cdots, P_k'$, where

$$M_1' = M_1 P_1 + M_2 P_2 + \cdots + M_k P_k,$$
$$M_2' = M_1 P_1' + M_2 P_2' + \cdots + M_k P_k'.$$

The constant terms of the P's and P''s are all unique. A similar condition can easily be stated for $k' (\leqq k)$ curves $M_1', M_2', \cdots, M_{k'}'$.

V. The whole system of independent linear equations of any base-point can be so arranged that the first μ_1 of them $(\mu_1 = 1, 2, \cdots, \mu)$ are the equations of a base-point of multiplicity μ_1 (l. c. 2).

Thus each new equation, taken in its order, adds one more con-

*) The equations are always referred to the point as origin, unless the contrary is stated.

dition for a curve whose coefficients satisfy them, a condition equivalent to that of passing through an ordinary point. Any such arrangement resolves the base-point into simple elements equivalent to ordinary points; only the first equation is unique, viz. $z_{00} = 0$.

The proof of this property is very simple. Consider all numbers of two digits $(00, 01, \cdots, lm, \cdots)$ whose radix is equal to the degree of the prime equation $\Sigma\, \zeta_{pq} z_{pq} = 0$, and arrange them in their natural descending order (numbers for which $l + m >$ the radix may be omitted). Then, taking the number lm to represent the derivate $\Sigma\, \zeta_{pq} z_{p-l, q-m} = 0$, the corresponding order of arrangement of the equations is such that each equation is preceded by all its derivates. If we now omit all equations which are consequences of preceding ones, the first μ_1 which are left are the equations of a base-point of multiplicity μ_1. The proof may be easily extended to any number of prime equations and any number of dimensions.

The following theorem (l. c. 2) is required for the proof of VIII. The μ independent equations of a one-set point can be so arranged that the first μ_1 of them are the equations of any given base-point of multiplicity μ_1 contained in the one-set point, and the first μ_2 of them $(\mu_2 = 1, 2, \cdots, \mu)$ are the equations of a base-point of multiplicity μ_2.

Connected with these theorems are the conditions that a product $MM' = 0$ (geometrically a sum $M + M'$) should contain a given one-set point at the origin. Let $M = \Sigma\, z_{pq} x_1^p x_2^q$, and $M' = \Sigma\, z'_{pq} x_1^p x_2^q$; and let $E = 0$ be the prime equation of the one-set point, and $E_1 = E_2 = \cdots = E_\mu = 0$ any set of independent equations of the one-set system. The value of E for MM' can then be written

$$E_1 E_\mu' + E_2 E'_{\mu-1} + \cdots + E_\mu E_1',$$

where $E_1', E_2', \cdots, E_\mu'$ are linear independent functions of the coefficients z'_{pq}, and are equivalent as a whole to $E_1, E_2, \cdots, E_\mu$, with z'_{pq} written for z_{pq}. We can choose $E_1 = E_2 = \cdots = E_{\mu_1} = 0$ to be the equations of any base-point of multiplicity μ_1 contained in the one-set point. Suppose this is the fixed base-point of highest multiplicity contained in the one-set point and in the manifold (M). Then the conditions that the value of E for MM' may vanish are $E_1' = E_2' = \cdots = E'_{\mu-\mu_1} = 0$, i. e. that (M') should contain a certain base-point of multiplicity $\mu - \mu_1$ which is also contained in the one-set point. These conditions are sufficient that the one-set point should lie on MM'; for not only E, but every derivate of E, can be easily proved to vanish for MM', provided

$$E_1 = E_2 = \cdots = E_{\mu_1} = 0 \quad \text{and} \quad E_1' = E_2' = \cdots = E'_{\mu-\mu_1} = 0$$

The two base-points whose equations are those just written are called residual base-points with respect to the one-set point. The sum of their multiplicities is equal to the multiplicity of the one-set point.

Thus the necessary and sufficient conditions that MM' should contain a given one-set point of multiplicity μ are that M should contain some (i. e. any) fixed base-point of multiplicity μ_1 contained in the one-set point, and that M' should contain the residual base-point of multiplicity $\mu - \mu_1$.

The two one-set points at the origin determined by M_1, M_2 and M_1, M_3 respectively are residual with respect to the one-set point determined by M_1, $M_2 M_3$. Let the three one-set points be μ_2, μ_3, μ (so that $\mu = \mu_2 + \mu_3$), and let Y, Z be any curves through μ_2, μ_3; then

$$YZ = (M_1 P_1 + M_2 P_2)(M_1 P_3 + M_3 P_4) = M_1 P_5 + M_2 M_3 P_6,$$

i. e. the product of Z and any Y contains μ. But the only base-point common to every Y is μ_2, which is contained in μ. Hence every Z must contain the base-point μ_3' residual to μ_2 with respect to μ. But again the only base-point common to every Z is μ_3; hence μ_3 contains μ_3'; and μ_3, μ_3', being of equal multiplicity, must be identical.

Given a one-set point and a base-point contained in it the residual base-point can be found; but the necessary and sufficient conditions that two given base-points may be residual with respect to a one-set point which is not given are not known.

VI. If one of two residual base-points is t-set, the other is $(t-1)$-set or t-set or $(t+1)$-set (l. c. 1, 4.).

This theorem is intimately connected with IV. If M_1, M_2 are two curves which determine the one-set point with respect to which the two base-points are residual, then, if one is t-set, the other is $(t-1)$-set or t-set or $(t+1)$-set according as both, or one, or neither of M_1, M_2 can be chosen to form part of a set of $t+1$ curves which determine the t-set point (v. IV).

If $XN = M_1 X_1 + M_2 X_2$, where $N \equiv 0$ (mod. $N_1, N_2, \cdots, N_l$), the least number of curves which suffice to determine (X) is l' or $l'-1$ or $l'+1$, where l' is the least number of curves $N_1', N_2', \cdots, N_{l'}'$ which are equivalent to the modular system $M_1, M_2, N_1, \cdots, N_l$*).

*) The proof follows from the fact that $XN' = M_1 X_1 + M_2 X_2$ and (N') contains an $(l'-1)$-set point. The case in which (X) contains one-set points only is a possible exception. Two curves which would then suffice to determine (X) would have to be special curves whose whole-intersection beyond (X) would

The three cases correspond to whether one or two or none of the curves N_1', N_2', $\cdots$, $N_{l'}'$ can be replaced by one or both or either of the curves M_1, M_2 without altering (N'). Each of the curves M_1, M_2 can be counted in one and one only of the two sets which determine (N') and (X).

VII. The Theorem of Residuation (Restsatz).

1) Two base-points which are residual to the same base-point on the same base-curve are equivalent or coresidual, i. e., any base-point on the same base-curve which is residual to one is also residual to the other. (All the base-points are situated at the same point and are defined by their equations.)

2) Two series of base-points which are residual to the same series on the same base-curve are coresidual (base-points at infinity being disregarded).

Two base-points which are residual with respect to a one-set point are said to make up the one-set point; and if M_1, M_2 are two curves which determine the one-set point, each of the base-points is called the remaining intersection of M_1, M_2 as regards the other base-point. The two base-points are also said to be residual on M_1, or M_2; thus, in order that two base-points may be residual on a base-curve, they must make up a one-set point which is the whole intersection of the base-curve and some other curve at the point.

The following theorem is not equivalent to the theorem of residuation in its general form as given above, but is a consequence of it, and also of the last theorem in V: If part of the intersection of M_1, M_2 is the whole intersection of M_1, M_3 in the finite region of the plane, the remaining part is the whole intersection of M_1, X_3, where $M_2 = M_1 X_1 + M_3 X_3$.

VIII. The Riemann-Roch or Brill-Noether Reciprocity Theorem.

Take any two curves M_1, M_2 of degrees l_1, l_2, having no common factor and no intersection at infinity; and divide their whole intersection $Q + R$ $(= l_1 l_2)$ into any two residual series of base-points, Q and R. Denote the l-ic defects*) of Q, R, $Q + R$ by d_l, d_l', D_l,

---

have to be at infinity. I believe that such curves always exist for any manifold made up of one-set points, although I know of no proof.

*) By the l-ic defect of Q is meant the defect of Q in determining an l-ic, or curve of degree l, so that $d_l + 1$ is the number of linearly independent l-ics through Q. If no l-ic can be drawn through Q, then $d_l + 1 = 0$, or $d_l = -1$. By the l-ic excess of Q is meant the excess of the number Q above the number of independent conditions that Q supplies for an l-ic. Thus Q supplies $Q - e_l$ in-

and the l-ic excesses by e_l, e_l', E_l. The values of D_l and E_l are known for all values of l, by Cayley's and other theorems. The general reciprocity theorem expresses the values of d', e' in terms of those of d, e viz.

$$e_{l'}' = d_l - D_l, \quad e_l = d_{l'}' - D_{l'}, \quad \text{where } l + l' = l_1 + l_2 - 3.$$

These two formulae are equivalent to one only; and are correct for all positive integral values of l, l', including zero.

Another theorem, including the case in which M_1, M_2 have intersections at infinity, which are disregarded, is as follows: If any series $Q + R$ of one-set points in a plane is divided into any two residual series of base-points Q and R, by dividing each one-set point of $Q + R$ into any two residual base-points, then

$$e_{l'}' \geqq d_l - D_l \quad \text{and} \quad e_l \geqq d_{l'}' - D_{l'}, \quad \text{provided} \quad E_{l+l'} > 0.$$

The proviso $E_{l+l'} > 0$ is not quite sufficient; it is to be understood as meaning that the prime equation of **any** one of the one-set points in $Q + R$ is, for curves of degree $l + l'$, a consequence of the derivates of that equation and the prime equations of all the other one-set points and their derivates. The two inequalities are not equivalent, the first giving an inferior and the second a superior limit for $d_{l'}'$ for a certain range of values of l'. The nearest limits are obtained by choosing the value of $l + l'$ as high as possible, consistently with $E_{l+l'} > 0$.

10. Of the properties mentioned above, III, IV and VI are only true in the plane; but I, II, V, VII and VIII appear to be true for space of n dimensions. These properties are all closely connected with one another (with the exception of II which is a more or less independent proposition) and with the assumed extension of Noether's theorem, viz., if M is of the form $M_1P_1 + M_2P_2 + \cdots + M_kP_k$ whatever point in finite space be taken as origin, then $M = M_1X_1 + M_2X_2 + \cdots + M_kX_k$.

I. **The one-set theorem.** In space of n dimensions all isolated points of intersection of $M_1, M_2, \cdots, M_n$ are one-set points.

I have succeeded in proving this for the "simple" case, although the proof has not been published and is too long to be given here. From this and other evidence I infer that the theorem is true generally,

---

dependent conditions for an l-ic; and we have $Q - e_l + d_l + 1 = \frac{1}{2}(l+1)(l+2)$ for all positive integral values of l, whether an l-ic can be drawn through Q or not.

and that it may be regarded as the most fundamental theorem in connection with the linear equations of points and manifolds.

The "simple" case is that in which, the point being taken as origin, the resultant of the terms of lowest degree in $M_1, M_2, \cdots, M_n$ does not vanish. This case is proved by a direct consideration of the ζ-equations (as in l. c. 4) with the help of theorems in the general (resultant) theory of elimination. A proof for the general case by the same direct method would be quite impossible; and I have not succeeded in deducing it from the corresponding theorem for the plane. There is, moreover, a striking difference for the "simple" case according as we are dealing with the plane or space of n dimensions. In the plane the coefficients ζ_{pq} in the prime equation may be any constants, but in n-dimensional space they satisfy definite relations which are independent of the coefficients of $M_1, M_2, \cdots, M_n$.

From the last mentioned property it follows that n general manifolds $M_1 = M_2 = \cdots = M_n = 0$ drawn through a given one-set point do not suffice as a rule to determine it; but have a higher intersection at the point. It also follows that the whole intersection at a point of more than n independent manifolds $M_1 = M_2 = \cdots = M_k = 0$ may be a one-set point; and the conditions that this may be the case form an important subject for investigation. Hence III, IV, and VI of § 9 are not true in n dimensions.

II. The reasons for supposing that the number μ of independent linear equations of the one-set point at the origin determined by $M_1, M_2, \cdots, M_n$ is equal to the multiplicity μ' of the solution $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ in the complete solution of the equations $M_1 = M_2 = \cdots = M_n = 0$ are practically the same as those already advanced in § 9 for the case $n = 2$; with this difference, however, that we can only show the probable correctness of the inequality $\mu' \geqq \mu$, instead of actually proving it. The μ equations arise from the fact that μ' ordinary points of intersection of $M_1, M_2, \cdots, M_n$ have coalesced in some way at the origin; and since μ' separate ordinary points of intersection would only supply μ' equations for the coefficients of $M = M_1 X_1 + M_2 X_2 + \ldots + M_n X_n$, it seems inconceivable that they should supply more than μ' equations by becoming coincident; hence $\mu' \geqq \mu$. It is to be observed that the μ equations supplied by any point of intersection are quite independent of those supplied by all others, assuming M to be of sufficiently high degree; for the equations are linear relations among the values of the partial differential coefficients (of finite order) of M at the point, which are all independent of one another for any finite number of points.

The reasons given do not depend in any way on the points of intersection being one-set points, so that the correctness or incorrectness of II is independent of that of I.

The following examples illustrate I and II.

Example 1. The intersection of $x_1^{l_1+1} = x_2^{l_2+1} = \cdots = x_n^{l_n+1} = 0$ at the origin is a one-set point whose prime equation is $z_{l_1 l_2 \ldots l_n} = 0$. This equation and its derivates include $(l_1+1)(l_2+1)\ldots(l_n+1)$ independent equations.

Example 2. The base-point residual to the given base-point $\Sigma \zeta_{pq\ldots} z_{pq\ldots} = 0$, $\Sigma \zeta'_{pq\ldots} z_{pq\ldots} = 0, \cdots$ with respect to the one-set point $E = z_{l_1 l_2 \ldots l_n} = 0$, where $l_1, l_2, \cdots$ are the highest values of $p, q \cdots$ which occur in any of the prime equations, is the base-point determined by the manifolds

$$x_1^{l_1+1} = \cdots = x_n^{l_n+1} = \Sigma \zeta_{pq\ldots} x_1^{l_1-p} x_2^{l_2-q} \cdots$$
$$= \Sigma \zeta'_{pq\ldots} x_1^{l_1-p} x_2^{l_2-q} \cdots = \cdots = 0.$$

For the base-point residual to the last with respect to the one-set point is the original base-point, its prime equations being obtained by making E vanish for the product of $\Sigma z_{pq\ldots} x_1^p x_2^q \cdots$ with each of the polynomials $x_1^{l_1+1}, \cdots, x_n^{l_n+1}, \Sigma \zeta_{pq\ldots} x_1^{l_1-p} x_2^{l_2-q} \cdots$, etc. (§ 9, V).

Example 3. To find the prime equation of the one-set point at the origin determined by the three surfaces

$$x_2 x_3 + x_1^3 = x_3 x_1 + x_2^3 = x_1 x_2 + x_3^3 = 0.$$

Considering the coefficients of

$$M_1 P_1 + M_2 P_2 + M_3 P_3 = \Sigma z_{pqr} x_1^p x_2^q x_3^r,$$

i. e., of

$$(x_2 x_3 + x_1^3)(l_0 + l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3 x_3 + \cdots)$$
$$+ (x_3 x_1 + x_2^3)(m_0 + m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \cdots)$$
$$+ (x_1 x_2 + x_3^3)(n_0 + n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + \cdots),$$

we see that

$$z_{400} = l_1, \quad z_{040} = m_2, \quad z_{004} = n_3, \; z_{111} = l_1 + m_2 + n_3;$$

therefore

$$z_{400} + z_{040} + z_{004} = z_{111}.$$

The derivates of this equation are

$$z_{300} = z_{011}, \quad z_{030} = z_{101}, \quad z_{003} = z_{110},$$
$$z_{200} = z_{020} = z_{002} = z_{100} = z_{010} = z_{001} = z_{000} = 0.$$

These 11 equations are satisfied identically by the coefficients of $M_1 P_1 + M_2 P_2 + M_3 P_3$; and it can be shown that there are no others. Hence the intersection of M_1, M_2, M_3 at the origin is a one-set point of multiplicity 11.

The base-point determined at the origin by the four surfaces

$$x_2x_3 + x_1^3 = x_3x_1 + x_2^3 = x_1x_2 + x_3^3 = x_1x_2x_3 = 0$$

is the base-point of highest multiplicity contained in the one-set point $z_{400} + z_{040} + z_{004} = z_{111}$ which lies on the surface $x_1x_2x_3 = 0$. This is the 3-set point $z_{300} = z_{011}$, $z_{030} = z_{101}$, $z_{003} = z_{110}$, of multiplicity 10.

Example 4. To find the number of surfaces which are necessary to determine the one-set point $z_{300} + z_{030} + z_{003} = 0$.

The derivates are $z_{200} = z_{020} = z_{002} = z_{100} = z_{010} = z_{001} = z_{000} = 0$. Hence three general surfaces through the point are

$$a_{011}x_2x_3 + a_{300}x_1^3 + \cdots = b_{101}x_3x_1 + b_{300}x_1^4 + \cdots = c_{110}x_1x_2 + c_{300}x_1^3 + \cdots = 0,$$

where $a_{300} + a_{030} + a_{003} = b_{300} + b_{030} + b_{003} = c_{300} + c_{030} + c_{003} = 0$. These relations have no effect as regards the number it is required to find. The three surfaces determine a one-set point at the origin of higher multiplicity than the given one, the prime equation of which may be obtained by eliminating the arbitrary parameters involved in z_{011}, z_{010}, z_{110}, z_{021}, z_{012}, z_{102}, z_{201}, z_{210}, z_{120}, z_{111}, z_{400}, z_{040}, z_{004}, where $M_1P_1 + M_2P_2 + M_3P_3 = \Sigma z_{pqr}x_1^p x_2^q x_3^r$.

Four general surfaces drawn through the one-set point intersect in a 2-set point at the origin whose prime equations involve z_{300}, z_{030}, z_{003}, z_{011}, z_{101}, z_{110}, one being the equation $z_{300} + z_{030} + z_{003} = 0$.

The least number of surfaces that will suffice to determine the given one-set point is five.

V. The whole of § 9, V with the exception of the last paragraph but one, is immediately applicable to space of n dimensions.

VII. The excepted paragraph of § 9, V together with § 9, VII relate to properties of base-points on a given base-curve, and can be extended to space of n dimensions by taking the base-curve C to be any algebraic space curve. For the part of C in the neighbourhood of any particular point is determinable by $n-1$ equations in x_1, $x_2, \cdots, x_n$ (although the same equations may not serve for all points on C), and therefore any isolated point of intersection of C with a manifold $M_1 = 0$ is a one-set point, assuming § 10, I. Hence we have the following properties:

Two one-set points determined at the same point by C, M_1 and C, M_2 respectively are residual with respect to the one-set point determined by C, M_1M_2.

If M_1, M_2 are drawn through any base-point on C, their remaining intersections with C at the point are coresidual on C.

If M_1, M_2 are drawn through any given series of base-points on

C their whole remaining intersections with C in the finite region of space are coresidual on C.

If part of the intersection of C, M_1 is the whole intersection of C, M_2 in the finite region of space the remaining part is the whole intersection of C, M_3.

VIII. If any series $Q + R$ of one-set points in the finite region of space of n dimensions is divided into any two residual series of base-points Q and R, by dividing each one-set point of $Q + R$ into any two residual base-points, and if d_l, d_l', D_l are the l-ic defects, and e_l, e_l', E_l the l-ic excesses, of Q, R, $Q + R$ respectively, then

$$e_{l'}' \geqq d_l - D_l \quad \text{and} \quad e_l \geqq d_{l'}' - D_{l'}, \quad \text{provided } E_{l+l'} > 0;$$

the proviso $E_{l+l'} > 0$ being understood to mean that the prime equation of any one of the one-set points of $Q + R$ is, for manifolds $M = 0$ of degree $l + l'$, a consequence of the derivates of that equation and the prime equations of all the other one-set points and their derivates.

The proof of this is exactly similar to that given in l. c. 2, by assuming the one-set theorem for n dimensions. The inequalities may be changed to equalities when, and only when, $E_l + E_{l'} = Q + R$*). For, from the relation

$$Q - e_l + d_l + 1 = \frac{(l+1)(l+2)\cdots(l+n)}{n!},$$

we have

$$Q - e_l + d_l = Q + R - E_l + D_l,$$

and

$$R - e_{l'}' + d_{l'}' = Q + R - E_{l'} + D_{l'};$$

and, by adding,

$$d_l + d_{l'}' - e_l - e_{l'}' = D_l + D_{l'},$$

i. e.,

$$(e_{l'}' - d_l + D_l) + (e_l - d_{l'}' + D_{l'}) = 0;$$

therefore

$$e_{l'}' = d_l - D_l \quad \text{and} \quad e_l = d_{l'}' - D_{l'}.$$

If $Q + R$ is the whole intersection of an algebraic curve C, requiring more than $n - 1$ equations for its complete determination, and a manifold $M_1 = 0$, the conditions $E_l + E_{l'} = Q + R$, $E_l + E_{l'} > 0$ are not in general satisfied for any values of l, l'; but they are satisfied for all values of l, l' in the following case:

If the n manifolds $M_1 = M_2 = \cdots = M_n = 0$, of degrees $l_1, l_2, \cdots, l_n$, have no intersection at infinity (i. e. if the resultant of the terms

*) When $E_l + E_{l'} = Q + R$ the only possible value of $E_{l+l'} > 0$ is 1.

of highest degree in $M_1, M_2, \cdots, M_n$ does not vanish), and if $Q + R$ $(= l_1, l_2, \cdots, l_n)$ is their whole intersection, then

$e_{l'}' = d_l - D_l$ and $e_l = d_{l'}' - D_{l'}$, where $l + l' = l_1 + l_2 + \cdots + l_n - n - 1$.

We will prove that $E_l + E_{l'} = Q + R$ and $E_{l+l'} > 0$ (in the sense ascribed above) by assuming the extensions of Noether's theorem mentioned in § 1. The condition that $M_1, M_2, \cdots, M_n$ have no intersection at infinity ensures two things: 1) $M_1, M_2, \cdots, M_n$ have none but isolated points of intersection, and the intersection of any k of them is of $n - k$ dimensions only, for otherwise the intersection of $M_1, M_2, \cdots, M_n$ would contain a manifold of dimensions $\geqq 1$, and would include points at infinity; 2) any polynomial of degree l of the form $M_1 X_1 + M_2 X_2 + \cdots + M_k X_k$ can be so expressed that each of the terms $M_1 X_1, \cdots, M_k X_k$ is of degree $\leqq l$. This may be proved by induction. It is sufficient to show that if $M_1 X_1$ is of higher degree than $M = M_1 X_1 + M_2 X_2 + \cdots + M_n X_n$, and of as high degree as anyone of the terms $M_1 X_1, M_2 X_2, \cdots, M_n X_n$, then the degree of $M_1 X_1$ can be lowered without increasing the degree of any other term. Take all the terms in M which are of the same degree as $M_1 X_1$, viz., $M_1 X_1 + M_2 X_2 + \cdots + M_k X_k$. Then we must have

$$M_1' X_1' + M_2' X_2' + \cdots + M_k' X_k' = 0,$$

where M_i', X_i' $(i = 1, 2, \cdots, n)$ are homogeneous polynomials formed by the terms of highest degree in M_i, X_i. By making the substitution

$$x_n = 1 + t_1 x_1 + t_2 x_2 + \cdots + t_{n-1} x_{n-1},$$

the identity becomes one in non-homogeneous polynomials with $n - 1$ variables $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$, viz.

$$M_1^{(t)} X_1^{(t)} + M_2^{(t)} X_2^{(t)} + \cdots + M_k^{(t)} X_k^{(t)} = 0.$$

Now $M_1^{(t)}, M_2^{(t)}, \cdots, M_n^{(t)}$ cannot vanish simultaneously (since the resultant of $M_1', M_2', \cdots, M_n'$ does not vanish), and consequently any k of them intersect in a manifold of $(n-1) - k$ dimensions only. Hence, by the extensions of Noether's theorem,

$$X_1^{(t)} = M_2^{(t)} X_2'^{(t)} + \cdots + M_k^{(t)} X_k'^{(t)},$$

where, as only $n - 1$ variables are involved, and $M_2^{(t)}, M_3^{(t)}, \cdots, M_n^{(t)}$ have no intersection at infinity, we may assume that no term on the right hand is of higher degree than $X_1^{(t)}$. Making this identity homogeneous by means of the relation

$$x_n - t_1 x_1 - \cdots - t_{n-1} x_{n-1} = 1,$$

we have

$$X_1' = M_2' X_2'' + \cdots + M_k' X_k'',$$

where X_1', M_2', $\cdots$, M_k' are the same as above, and each of the terms on the right hand is of the same degree as X_1'. Hence also

$$X_1 = M_2 X_2'' + \cdots + M_k X_k'' + X_1'',$$

where X_1'' is of less degree than X_1. If now we substitute this value for X_1 in $M_1 X_1 + M_2 X_2 + \cdots + M_n X_n$ the result will be to lower the degree of the first term from $M_1 X_1$ to $M_1 X_1''$ without increasing the degree of any other term.

Let $C(k, l)$ denote the total number of independent linear equations of the intersection of $M_1, M_2, \cdots, M_k$ in respect to manifolds $M = 0$ of degree l, that is, the total number of independent linear equations identically satisfied by the coefficients of $M_1 X_1 + M_2 X_2 + \cdots + M_k X_k$, where $X_1, X_2, \cdots, X_k$ are arbitrary polynomials of degrees $l - l_1$, $l - l_2, \cdots, l - l_k$. (Thus $C(n, l)$ is the number of independent conditions supplied by $Q + R$ for l-ics, i. e., $C(n, l) = Q + R - E_l$.) Suppose $M_1 X_1 + \cdots + M_k X_k$ to satisfy such further conditions that it takes the form $M_1 Y_1 + \cdots + M_{k-1} Y_{k-1}$. For this, it is necessary and sufficient that

$$M_k X_k = M_1 (Y_1 - X_1) + M_2 (Y_2 - X_2) + \cdots + M_{k-1} (Y_{k-1} - X_{k-1}),$$

i. e.,

$$X_k = M_1 X_1' + M_2 X_2' + \cdots + M_{k-1} X_{k-1}'.$$

Hence, since X_k is of degree $l - l_k$, the number of independent conditions that its coefficients must satisfy is $C(k-1, l-l_k)$. As none of these can be irrelevant, there must be a precisely equal number of independent conditions satisfied by the coefficients of $M_1 X_1 + \cdots + M_k X_k$ in order that it may take the form $M_1 Y_1 + \cdots + M_{k-1} Y_{k-1}$. Hence we have

$$C(k-1, l) = C(k, l) + C(k-1, l-l_k),$$

or

$$C(k, l) = C(k-1, l) - C(k-1, l-l_k).$$

Let F_k be the power series in x in which the coefficient of x^l is $C(k, l)$. Then

$$\begin{aligned} F_k &= F_{k-1} - x^{l_k} F_{k-1} = (1 - x^{l_k}) F_{k-1} \\ &= (1 - x^{l_k})(1 - x^{l_{k-1}}) \cdots (1 - x^{l_2}) F_1 \\ &= (1 - x^{l_1})(1 - x^{l_2}) \cdots (1 - x^{l_k})(1 - x)^{-n-1}. \end{aligned}$$

Thus $C(k, l)$, being the coefficient of x^l in F_k, is a number depending only on $l, l_1, \cdots, l_k, n$. Now

$$\begin{aligned} Q + R - E_l &= C(n, l) \\ &= \text{coefficient of } x^l \text{ in } (1 - x^{l_1}) \cdots (1 - x^{l_n})(1 - x)^{-n-1}. \end{aligned}$$

Hence we have

$$Q + R - E_l = \text{sum of first } l+1 \text{ coefficients in } \prod_{i=1}^{n}(1 + x + \cdots + x^{l_i - 1});$$

and

$$Q + R - E_{l'} = \text{sum of first } l'+1 \text{ coefficients in } \Pi$$
$$= \text{sum of last } l'+1 \text{ coefficients in } \Pi;$$

and, by adding,

$$2(Q+R) - E_l - E_{l'} = \text{sum of all coefficients in } \Pi = l_1 l_2 \cdots l_n = Q + R,$$

i. e.

$$E_l + E_{l'} = Q + R.$$

Also

$$E_{l+l'} = 1.$$

It follows from the above that E_l is equal to the number of factors of $x_1^{l_1-1} x_2^{l_2-1} \cdots x_n^{l_n-1}$ of degree exceeding l. We obtain Cayley's theorem from this if we take n equal to 2 and l to be not less than l_1 or l_2.

It has still to be shown that the prime equation of any one-set point of $Q + R$ is a consequence of all the remaining linear equations of $Q + R$ in respect to an M of degree $l_1 + l_2 + \cdots + l_n - n - 1$. Take the origin at any one of the points, and let the coefficients of M satisfy all the linear equations of $Q + R$ with the exception of the prime equation of the one-set point at the origin. Now MM' contains the whole one-set point at the origin provided M' contains the base-point residual to that which M contains (§ 9, V), which is of multiplicity 1, and therefore an ordinary point. Hence we have

$$x_i M \equiv 0 \pmod{M_1, M_2, \cdots, M_n}, \qquad (i = 1, 2, \cdots, n);$$

and it is required to prove that

$$M \equiv 0 \pmod{M_1, M_2, \cdots, M_n}.$$

Let

$$x_i M = X_{1i} M_1 + X_{2i} M_2 + \cdots + X_{ni} M_n \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

Then

$$x_i (X_{11} M_1 + X_{21} M_2 + \cdots + X_{n1} M_n) = x_1 (X_{1i} M_1 + X_{2i} M_2 + \cdots + X_{ni} M_n),$$

i. e.

$$(x_i X_{11} - x_1 X_{1i}) M_1 \equiv 0 \pmod{M_2, \cdots, M_n};$$

therefore

$$x_i X_{11} - x_1 X_{1i} \equiv 0 \pmod{M_2, \cdots, M_n}.$$

Putting $x_1 = 0$, and writing X_{11}', M_i' for the values taken by X_{11}, M_i, we have

$$x_i X_{11}' \equiv 0 \pmod{M_2', \cdots, M_n'}, \qquad (i = 2, \cdots, n).$$

Here, since $M_2', \cdots. M_n'$ have no intersection at infinity (this being ensured by originally substituting $t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n$ for x_1 if need be), and X'_{11} is of degree $l_2 + \cdots + l_n - (n-1) - 1$, we have, by assuming the theorem for $n-1$ variables*),

$$X'_{11} \equiv 0 \quad (\text{mod. } M_2', \cdots, M_n'),$$

i. e.

$$X_{11} \equiv x_1 X_1 \quad (\text{mod. } M_2, \cdots, M_n);$$

but

$$x_1 M - X_{11} M_1 \equiv 0 \quad (\text{mod. } M_2, \cdots, M_n);$$

therefore

$$x_1 (M - X_1 M_1) \equiv 0 \quad (\text{mod. } M_2, \cdots, M_n),$$

$$M - X_1 M_1 \equiv 0 \quad (\text{mod. } M_2, \cdots, M_n),$$

$$M \equiv 0 \quad (\text{mod. } M_1, M_2, \cdots, M_n).$$

*) The theorem is proved for two variables in l. c. 2.

Kürzeste Wege im komplexen Gebiet.

Von

E. Study aus Bonn.

Ähnliche Eigenschaften wie die quadratischen Formen haben bekanntlich die stets reellwertigen sogenannten Hermiteschen Formen, nämlich bilineare Formen $\Sigma a_{ik} x_i \bar{x}_k$ $(i, k = 1, 2, \cdots, n)$ mit konjugiert-komplexen Veränderlichen x_i, $\bar{x}_i$ und konjugiert-komplexen Koeffizienten $a_{ik} = \bar{a}_{ki}$. Wir wollen nun zeigen, daß man unter gewissen Einschränkungen aus einer solchen Form eine Art der Maßbestimmung ableiten kann, die verwandt ist der von Cayley aus einer quadratischen Form abgeleiteten sogenannten projektiven Maßbestimmung, sich aber von dieser dadurch unterscheidet, daß die Entfernung zweier Punkte in dem zu betrachtenden komplexen Gebiet stets reell ist. Wir werden so zu drei Hauptarten reeller Maßgeometrie im komplexen Gebiet kommen, die durch die Worte elliptisch, parabolisch, hyperbolisch unterschieden werden können und, bei reellen Werten der Koeffizienten a_{ik}, im reellen Gebiet in die gewöhnlich ebenso bezeichneten Arten von Geometrie konstanten Riemannschen Krümmungsmaßes übergehen. Da der zu erklärende Entfernungsbegriff mit den Prädikaten „größer" und „kleiner" verbunden werden kann, so wird mit dieser Erweiterung der reellen Geometrie eine Ausdehnung des Satzes von der Geraden als kürzestem Weg auf das komplexe Gebiet gefunden sein.

Wir behandeln etwas eingehender nur den in vieler Hinsicht wichtigsten „elliptischen" Fall, in dem die Hermitesche Form definit und zwar positiv ist, und also bekanntlich durch lineare Transformationen in die Gestalt

$$x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \cdots + x_n\bar{x}_n$$

übergeführt werden kann. Setzen wir dann zur Abkürzung

$$(x\bar{y}) = (\bar{y}x) = \Sigma a_{ik} x_i \bar{y}_k \quad \{a_{ik} = \bar{a}_{ki}\},$$

im genannten besonderen Falle also

$$(x\bar{y}) = (\bar{y}x) = x_1\bar{y}_1 + \cdots + x_n\bar{y}_n,$$

so ist der Begriff der („elliptischen Hermiteschen") Entfernung zweier Punkte x, y, nämlich zweier Punkte mit den homogenen komplexen Koordinaten $x_1 : x_2 : \cdots : x_n$, $y_1 : y_2 : \cdots : y_n$, durch die Formel

$$(x, y) \equiv 2 \arccos \frac{\sqrt{(x\bar{y})(\bar{x}y)}}{\sqrt{(x\bar{x})}\sqrt{(y\bar{y})}} \mod. 2\pi \tag{1}$$

erklärt. Man sieht hieraus, daß in der Tat zwei beliebige Punkte im komplexen Gebiet eine stets reelle Entfernung (x, y) erhalten. Diese ist reell-periodisch mit der Periode 2π und übrigens bis aufs Vorzeichen bestimmt. Sie führt zu folgendem Ausdruck für das Quadrat des Bogenelementes:

$$ds^2 = 4\,\frac{(x\bar{x})(dx\,d\bar{x}) - (x\,d\bar{x})(\bar{x}\,dx)}{(x\bar{x})^2}.$$

Zerspaltet man hier die komplexen Veränderlichen und deren Zuwüchse in ihre reellen und rein imaginären Bestandteile, so erhält man eine wesentlich positive quadratische Differentialform, die, in bekannter Weise, eine besondere Art der Geometrie in dem $(2n - 2)$-dimensionalen „realen" Gebiet definiert, dessen Raumelement der Punkt des komplexen Gebietes n^{ter} Stufe ist. Natürlich bleibt noch nachzuweisen, daß durch geeignete Integration — längs geodätischer Linien — aus dem Ausdruck für ds wieder eben die zuvor erklärte Funktion (x, y) hervorgeht; andernfalls würde der Name „Entfernung" für diese nicht gerechtfertigt sein.

Die Art der Geometrie, zu der wir hier gelangt sind, hat nun sehr bemerkenswerte Eigenschaften. Sie gehört nicht zu denen von konstantem Riemannschem Krümmungsmaß; sie schließt aber gewisse besonders einfach erklärte Mannigfaltigkeiten ein, die ein konstantes Riemannsches Krümmungsmaß haben. Wenn z. B. die Hermitesche Form in der angeführten speziellen Gestalt gegeben ist, oder überhaupt reelle Koeffizienten hat, so hat die Gesamtheit der reellen Punkte (eine $n-1$-dimensionale Mannigfaltigkeit) das konstante Krümmungsmaß $\frac{1}{4}$. Die konstruierte Hermitesche Maßbestimmung reduziert sich dann im reellen Gebiet auf eine gewöhnliche Cayleysche, und zwar auf eine sogenannte elliptische Maßbestimmung.

Greift man ferner aus dem komplexen Gebiet die ∞^2 Punkte einer beliebigen Geraden heraus, so hat man vor sich eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit vom Krümmungsmaß Eins. Die Maßbestimmung für die Punkte dieser Geraden ist nicht wesentlich verschieden von der gewöhnlichen sphärischen Maßbestimmung.

Der Ort aller Punkte y nämlich, die von einem gegebenen Punkte x die Entfernung $\equiv \pi$ mod. 2π haben, ist eine — im komplexen Gebiete $(2n-4)$-dimensionale — lineare Mannigfaltigkeit, die „absolute Polare“ des Punktes x, dargestellt durch die einfache Gleichung

$$(\bar{x}y) = 0,$$

und diese schneidet jede durch x gelegte Gerade in einem von x verschiedenen Punkte x', der zu x in umkehrbarer Beziehung steht. Die ∞^2 Punkte irgend einer Geraden werden daher in bestimmter Weise gepaart. Man kann dann das komplexe Gebiet der Geraden so auf eine Riemannsche Kugelfläche vom Radius Eins abbilden, daß die Bilder gepaarter Punkte x, x' einander auf der Kugel diametral gegenüberliegen. Die Entfernung zweier Punkte x, y wird dann identisch mit dem sphärischen Abstande ihrer Bildpunkte. Die geodätischen Linien auf der Bildkugel sind nun die größten Kreise; und diese sind die Bilder gewisser ∞^2 Staudtscher Ketten, die in bezug auf die eingeführte Maßbestimmung ebenfalls geodätisch sind, zunächst auf der betrachteten Geraden.

Es gibt also auf jeder reellen oder imaginären Geraden einen einzigen kürzesten Weg zwischen je zwei verschiedenen Punkten x, y, die nicht „konjugiert“, d. h. nicht durch die Gleichung

$$(\bar{x}y) = 0 = (x\bar{y})$$

verbunden sind; und dieser Weg liegt auf einer bestimmten unter den ∞^1 Staudtschen Ketten, durch die man die beiden Punkte verbinden kann. Seine Länge ist der absolut kleinste Wert der Entfernung der beiden Punkte.

Die beschriebenen speziellen Ketten, die wir Normalketten nennen wollen, lassen sich sehr leicht angeben. Sie sind erschöpfend dadurch charakterisiert, daß ihre Punkte vermöge der Gleichung $(\bar{x}x') = 0$ gepaart sind. Um zwei gegebene (z. B. nicht konjugierte) Punkte x, y durch eine Normalkette zu verbinden, wähle man die — nur bis auf einen komplexen Faktor bestimmten — Koordinaten etwa des Punktes y so, daß die Gleichung

$$(x\bar{y}) = (\bar{x}y)$$

besteht, der Ausdruck $(x\bar{y})$ also reell wird. Bedeuten dann $\sigma : \tau$ reelle Verhältnisgrößen, so liegt der Punkt

$$z = \sigma x + \tau y$$

(d. h. der Punkt mit den homogenen Koordinaten $z_i = \sigma x_i + \tau y_i$) auf der x und y verbindenden Normalkette, und diese ganze Kette wird gefunden, wenn man $\sigma : \tau$ variiert.

Der kürzeste Weg auf der Verbindungsgeraden zweier nicht konjugierter Punkte ist nun der überhaupt kürzeste Weg zwischen diesen Punkten.*)

Wir verzichten hier auf die Wiedergabe des übrigens einfachen Beweises für diesen grundlegenden Satz und bemerken nur, daß dieser Beweis mit Hilfe der nahe liegenden, für drei beliebige Punkte x, y, z geltenden Ungleichung

$$\begin{vmatrix} (x\bar{x}) & (x\bar{y}) & (x\bar{z}) \\ (y\bar{x}) & (y\bar{y}) & (y\bar{z}) \\ (z\bar{x}) & (z\bar{y}) & (z\bar{z}) \end{vmatrix} \geqq 0$$

geführt werden kann.

Es hat sich also herausgestellt, daß die geodätischen Linien in der betrachteten $(2n-2)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit eine sehr einfache Beschaffenheit haben. Sie sind sämtlich geschlossen und sie haben alle die gleiche Länge 2π. Übrigens haben nicht nur die Normalketten eine einfache Bedeutung für unsere Geometrie, sondern die Staudtschen Ketten überhaupt. Jede solche liegt auf einer bestimmten Geraden, und sie kann daher, wie ein Blick auf die Bildkugel zeigt, auf zwei Arten als ein (spezieller) geodätischer Kreis aufgefaßt werden.

Bemerkenswerte Eigenschaften haben die sogenannten geodätischen Flächen**) in unserem $(2n-2)$-dimensionalen „Hermiteschen" Raume. Zu ihnen gehören zunächst die ∞^{4n-8} Geraden im komplexen Gebiet. Jede von diesen ist selbstverständlicherweise auf ∞^2 Arten geodätische Fläche. Sie enthält ∞^3 Staudtsche Ketten, darunter ∞^2 Normalketten, deren je zwei verschiedene einander in zwei Punkten schneiden. Alle übrigen geodätischen Flächen, deren Mannigfaltigkeit ∞^{6n-10} ist $(n>2)$, enthalten genau ∞^2 Staudtsche Ketten (deren je zwei einander in einem Punkte schneiden), und sie sind hierdurch vollkommen charakterisiert. Unter ihnen befinden sich insbesondere ∞^{6n-13} solche, deren sämtliche Staudtsche Ketten Normalketten und also geodätische Linien sind. In jeder einzelnen unter diesen reduziert sich die Hermitesche Maßbestimmung auf eine gewöhnliche Cayleysche und zwar elliptische Maßbestimmung vom Krümmungsmaß $\frac{1}{4}$. Jede von ihnen ist natürlich ebenfalls auf ∞^2 Arten geodätische Fläche (während die übrigen Flächen mit ∞^2 Ketten nur auf je eine Art geodätische Flächen sind). Das Quadrat des Bogen-

*) Zwischen zwei konjugierten Punkten gibt es, wie auf der Bildkugel, ∞^1 kürzeste Wege, die alle dieselbe Länge π haben.

**) Übrigens empfehlen sich statt der Worte „Linie" und „Fläche" in diesem Zusammenhange andere. Vergleiche die am Schlusse genannte Abhandlung.

elementes auf einer geodätischen Fläche, die nicht zu den genannten ∞^{4n-8} gehört, hat die für gewisse (nur ideal-geschlossene, nämlich glockenförmige) Umdrehungsflächen des gewöhnlichen Raumes charakteristische Form:

$$ds^2 = du^2 + 4\sin^2\frac{u}{2}\left\{1 - k^2\sin^2\frac{u}{2}\right\}dv^2,$$

wo die Konstante k^2, die stets < 1 ist, mit der Krümmung K_0 der geodätischen Fläche in deren „Zentrum“ oder „Nabelpunkt“ durch die Gleichung zusammenhängt

$$4K_0 = 1 + 3k^2.$$

Diese Krümmung K_0, also das Riemannsche Krümmungsmaß, das zu irgend einem Büschel von Fortschreitungsrichtungen gehört, ist andrerseits gegeben durch die Formel

$$K_0 = \frac{A + 4B}{4(A + B)},$$

wo, nach Bezeichnung zweier der ∞^1 Fortschreitungsrichtungen durch die Symbole d und δ,

$$A = (x\bar{x}) \cdot |(x\bar{x})(dx d\bar{x})(\delta x\,\delta\bar{x})|,$$

$$4B = -\left\{\begin{vmatrix}(x\bar{x}) & (x\delta\bar{x}) \\ (dx\,\bar{x}) & (dx\,\delta\bar{x})\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}(\bar{x}x) & (\bar{x}\delta x) \\ (d\bar{x}x) & (d\bar{x}\delta x)\end{vmatrix}\right\}^2$$

niemals negative Größen bedeuten. K_0 variiert also zwischen den Extremen 1 und $\frac{1}{4}$. Die Extreme selbst entsprechen den ∞^{4n-8} Geraden ($A = 0$) und den anderen ∞^{6n-13} geodätischen Flächen ($B = 0$), die konstantes Krümmungsmaß und ∞^2 Zentra oder Nabelpunkte haben.

Aus dem Bogenelement entwickelt man ohne Mühe die ganze Reihe von Begriffen und Ausdrücken, deren Anfangsglieder das Flächenelement und das dreidimensionale Volumenelement sind. Beispielsweise findet sich für das Flächenelement die Formel

$$\{ds \cdot \delta s \cdot \sin(ds, \delta s)\}^2 = 16\,\frac{A + B}{(x\bar{x})^4};$$

die Gesamtfläche einer zum Parameter k^2 (s. oben) gehörigen geodätischen Fläche wird danach

$$8\pi\int_0^1 \frac{x(1 - k^2x^2)}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}}\,dx \qquad \{1 \geqq k^2 \geqq 0\},$$

wobei der oben nicht auftretende Grenzfall $k^2 = 1$ der der Geraden ist.

Das letzte Glied in der genannten Reihe liefert, gehörig integriert, das Gesamtvolumen des als elliptischer Hermitescher Raum betrachteten $(2n - 2)$-dimensionalen komplexen Gebietes

$$V = \frac{(4\pi)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Wir gehen nicht weiter auf Einzelheiten ein, sondern wenden uns jetzt zur Betrachtung einiger allgemeiner Probleme der Gruppentheorie, die mit unserer Maßgeometrie zusammenhängen.

Wir verlangen, alle im $(2n - 2)$-dimensionalen Gebiete analytischen Transformationen zu bestimmen, die irgend eine der folgenden Eigenschaften haben:

1) Die Transformationsgleichungen sollen die Gleichung

$$ds'^2 = ds^2$$

nach sich ziehen.

2) Sie sollen irgend eine Gleichung der Form

$$ds'^2 = \varrho(x, \bar{x}) \cdot ds^2$$

nach sich ziehen.

3) Sie sollen geodätische Linien (Normalketten) in ebensolche überführen.

Im Falle 1) zunächst läßt sich unschwer einsehen, daß die fraglichen Transformationen entweder Kollineationen oder Antikollineationen sein müssen (nach Segres Ausdruck), d. h. daß sie in einer der beiden Formen

$$\begin{aligned} x_i' &= a_{i1} x_1 + \cdots + a_{in} x_n, \\ x_i' &= a_{i1} \bar{x}_1 + \cdots + a_{in} \bar{x}_n \end{aligned} \qquad \{|a_{ik}| \neq 0\}$$

sich müssen schreiben lassen. Die explizite Darstellung aller der verlangten Transformationen ergibt sich dann aus einer Untersuchung des Herrn A. Loewy.*) Man kommt zu dem folgenden Resultat, das übrigens von Herrn Loewy nicht ausgesprochen worden ist:

Die Transformationen, die das Problem 1) lösen, bilden eine sogenannte gemischte Gruppe (G_{n^2-1}, H_{n^2-1}), deren beide Scharen abgeschlossene $(n^2 - 1)$-dimensionale Kontinua bilden. Beide Arten von Transformationen lassen auch die Entfernung endlich-verschiedener Punkte ungeändert. Sie sind also analog den Bewegungen und Umlegungen (entsprechend den Begriffen Kongruenz und Symmetrie) im sphärischen Raume, und können daher durch die gleichen Worte (mit einem zur Unterscheidung dienenden Zusatz) bezeichnet werden. Die kontinuierliche Gruppe G_{n^2-1} der Bewegungen im elliptischen Hermiteschen Raume ist nicht nur transitiv, sondern überdies auch primitiv und einfach.**)

---

*) Über bilineare Formen mit konjugiert-imaginären Variabeln. Halle 1898, Acta Leopoldina LXXI Nr. 8.

**) Sie stellt einen bis jetzt, wie es scheint, nicht bemerkten Typus der Zu-

Die Aufgaben 2) und 3) können nunmehr mit einem Worte erledigt werden, wenn auch im Falle 2) der hier nicht wiederzugebende Beweis einige Umstände macht. Abgesehen nämlich von dem einfachsten Falle $n = 2$, der eine evidente Ausnahme bildet, gilt der bemerkenswerte Satz, daß die vollständige Lösung auch dieser Aufgaben durch die Gruppe (G_{n^2-1}, H_{n^2-1}) geliefert wird. In bezug auf diese beiden Probleme 2), 3) der konformen und der geodätischen Abbildung, wie wir uns kurz ausdrücken können, hat also unser quadratischer Differentialausdruck ds^2 ein anderes (und zwar allgemeineres) Verhalten als das Bogenelement einer Mannigfaltigkeit konstanten Riemannschen Krümmungsmaßes.

Eine weitere interessante Frage, die sich hier anschließt, ist die, ob es nicht möglich sein wird, in einem höheren Raume konstanter Krümmung eine reelle $(2n-2)$-dimensionale Mannigfaltigkeit so anzugeben, daß die gewöhnliche — Euklidische oder Nicht-Euklidische — Geometrie auf dieser Mannigfaltigkeit mit der hier betrachteten übereinstimmt. Dies läßt sich in der Tat auf mannigfache Art erreichen. Es läßt sich z. B. im Euklidischen Raume von $n^2 - 1$ Dimensionen eine rationale Mannigfaltigkeit M_{2n-2} von der Ordnung $\binom{2n-2}{n-1}$ finden, die der genannten Forderung genügt. Sie verläuft auf einer sphärischen Mannigfaltigkeit vom Krümmungsmaß $\frac{n}{(2n-1)}$, und ist auf das komplexe Gebiet, unter Gleichheit entsprechender geodätischer Abstände, vollkommen eindeutig umkehrbar und stetig abgebildet. Alle Transformationen von G_{n^2-1} z. B. werden durch diese Abbildung als Euklidische Bewegungen wiedergegeben. Die komplexen Gebiete aller Geraden erscheinen als Kugeln vom Radius Eins. Die größten Kreise auf diesen Kugeln sind die Bilder der Normalketten; sie sind die geodätischen Linien auf M_{2n-2}.

Von den angestellten Betrachtungen lassen sich gruppentheoretische Anwendungen machen, die auch für die Funktionentheorie von Bedeutung sind. Nach einer bekannten Bemerkung der Herren Loewy und Moore läßt jede endliche Gruppe linearer Transformationen (mindestens) eine überall positive Hermitesche Form (und natürlich auch deren reelle Vielfache) in Ruhe. Daraus folgt nunmehr, daß jeder endlichen Gruppe von Kollineationen eine holoëdrisch isomorphe Gruppe reeller Euklidischer Bewegungen zugeordnet werden kann. Es folgt also, daß die reelle Euklidische Geometrie,

---

ammensetzung reell-einfacher Gruppen dar. Vgl. die am Schlusse erwähnte usführlichere Darstellung.

genügend entwickelt, bereits die ganze Theorie der endlichen Kollineationsgruppen einschließen wird.

Ferner ergibt sich aus dem Vorgetragenen, daß man für alle endlichen Kollineationsgruppen mit vollkommener Präzision Fundamentalbereiche in der Weise definieren kann, wie es Herr F. Klein im einfachsten Falle $n = 2$ ausgeführt hat.

Das Gesagte läßt sich, mutatis mutandis, auf den Fall übertragen, wo die zugrunde gelegte Hermitesche Form in der Gestalt

$$x_1 \bar{x}_1 - x_2 \bar{x}_2 - \cdots - x_n \bar{x}_n$$

geschrieben werden kann. Das komplexe Gebiet wird dann durch die ∞^{2n-3} Nullstellen der Form in einen „inneren" und einen „äußeren" Teil zerlegt. Im Inneren hat man eine der gewöhnlichen hyperbolischen Geometrie verwandte Art der Geometrie, wobei der Ausdruck für die („hyperbolische Hermitesche") Entfernung zweier Punkte x, y durch einen hyperbolischen Arcus cosinus oder durch den Logarithmus eines Doppelverhältnisses erklärt ist:

$$\begin{aligned}(x,y) &= 2 \operatorname{arc} \cos h \frac{\sqrt{(x\bar{y})(\bar{x}y)}}{\sqrt{(x\bar{x})}\sqrt{(y\bar{y})}} \\ &= \lg \frac{\sqrt{(x\bar{y})(\bar{x}y)} + \sqrt{(x\bar{y})(\bar{x}y) - (x\bar{x})(y\bar{y})}}{\sqrt{(x\bar{y})(\bar{x}y)} - \sqrt{(x\bar{y})(\bar{x}y) - (x\bar{x})(y\bar{y})}},\end{aligned} \tag{2}$$

wo

$$(x\bar{y}) = x_1\bar{y}_1 - x_2\bar{y}_2 - \cdots - x_n\bar{y}_n.$$

Die in das Innere des komplexen Gebietes eindringenden Geraden erhalten in diesem Falle das Krümmungsmaß -1.

Zwischen der elliptischen und der hyperbolischen Hermiteschen Geometrie steht ein als parabolisch zu bezeichnender Grenzfall. In diesem Falle kann man, ohne der Sache Schaden zu tun, nicht-homogene Koordinaten verwenden. Man kann dann den nunmehr algebraischen Ausdruck für die („parabolische Hermitesche") Entfernung zweier Punkte x, y in die einfache Form

$$(x,y) = \sqrt{\Sigma(y_i - x_i)(\bar{y}_i - \bar{x}_i)} \tag{3}$$

setzen ($i = 2, 3, \cdots, n$), die im reellen Gebiete die gewöhnliche (Euklidische) Entfernung zweier Punkte liefert. In diesem Falle allein hat der Ausdruck für das Quadrat des Bogenelementes ein konstantes Krümmungsmaß, nämlich Null.

Wegen weiterer Ausführungen verweisen wir auf eine Arbeit, die, unter dem gleichen Titel wie diese Mitteilung, demnächst in den Mathematischen Annalen erscheinen wird.

Erwähnt sei noch, daß man auch aus anderen Arten bilinearer

'ormen, insbesondere aus beliebigen von nicht verschwindender Dis-
:riminante, neue Arten der Maßbestimmung ableiten kann.

Nachdem der Verfasser das Thema seines Vortrags der eingesetzten
Commission bereits mitgeteilt hatte, hat er Kenntnis erhalten davon, daß
in italienischer Mathematiker, Herr G. Fubini, ebenfalls auf den Gedanken
'ekommen sei, Hermitesche Formen zur Erklärung einer Maßbestimmung
u verwenden. In der inzwischen erschienenen Arbeit dieses Autors*) findet
ich in der Tat dieser Grundgedanke der besprochenen Theorie, nicht aber
uch eine wirkliche Erweiterung des Satzes von der Geraden als kürzestem
Veg. Da diese Untersuchung auch sonst nicht so weit geht, wie die soeben
kizzirte, und manches Unbefriedigende enthält, so schien keine Veranlas-
ung dazu gegeben, den einmal angezeigten Vortrag zurückzuziehen.

*) Istituto Veneto LXIII, 2, 1904.

Über Grundzüge einer Theorie des Tetraeders.

Von

F. Meyer aus Königsberg i. P.

Die „neuere Dreiecksgeometrie“ ist in den letzten Jahrzehnten eine umfangreiche Disziplin geworden. Bei zunehmender Fülle der Einzelergebnisse macht sich aber auch das Bedürfnis geltend, das Gebiet nach sachgemäßen Klassifikationsprinzipien zu ordnen und so zu einer Wissenschaft zu gestalten.

Als zwei hervorragende Prinzipien dieser Art seien hier genannt einmal die systematische Einführung der beiden imaginären Kreispunkte (bezw. eines absoluten Kegelschnitts), andererseits die der quadratischen Verwandtschaft, insbesondere der eineindeutigen, der sich wiederum als Spezialfall die Inversion unterordnet.*)

Für eine entsprechende Geometrie des Tetraeders sind zwar jene beiden Prinzipien unmittelbar verallgemeinerungsfähig, vermöge Einführung des Kugelkreises sowie einer gewissen eineindeutigen kubischen Verwandtschaft, dagegen ist bisher, wenn man von speziellen Tetraedern oder mehreren Tetraedern in spezieller Lage absieht, noch wenig Material vorhanden.**)

Der Verfasser hält es daher für nützlich, seine bislang in dieser

*) Auf Grund dieser Prinzipien hat Herr Stud. G. Berkhan eine neue und überdies vielfach erweiterte Darstellung der neueren Dreiecksgeometrie geliefert, in einer am 20. Juli 1904 von der Königsberger philosophischen Fakultät gekrönten Preisarbeit (ein Auszug wird voraussichtlich bald als Dissertation erscheinen). Ein weiteres, theoretisch sich darbietendes Prinzip, die Sätze nach der Natur der Funktionen zu ordnen, die für sie einen extremen Wert annehmen, scheint praktisch schwer durchführbar. Endlich erweist sich die Einführung der komplexen Größen nur für gewisse Teilgebiete der Dreiecksgeometrie als zweckmäßig.

**) Eingehend untersucht sind die Komplexe der Geraden, die die Ebenen eines Tetraeders in konstantem Doppelverhältnis treffen, ferner die sogenannten Tetraedralflächen u. a.

Richtung angestellten Untersuchungen*) hier in den Hauptzügen zusammenzufassen und in einigen Punkten zu ergänzen.

Wenn auch das Tetraeder, besonders in metrischer Hinsicht, eine vielfach verwickeltere Konfiguration darbietet, als das Dreieck, so erfreut es sich doch andererseits eines gewissen Vorzuges. Von der verwirrenden Mannigfaltigkeit der „merkwürdigen“ Punkte (resp. Geraden) des Dreiecks bleibt bei der Ausdehnung auf das Tetraeder, wie es scheint, nur eine verhältnismäßig kleine Anzahl bestehen; die Mehrzahl geht über in gewisse ausgezeichnete Flächen zweiter Ordnung resp. Klasse.

Damit ordnet sich von vornherein die Theorie des Tetraeders der Theorie der allgemeinen quadratischen Formen in höherem Maße unter, als die Theorie des Dreiecks. Auch der Umstand, daß die Anzahl der Dimensionen des Raumes ungerade ist, erweist sich als vorteilhaft.

Wir betrachten das Tetraeder zuvörderst als eine, in sich dualistische ausgeartete Fläche vierter Ordnung resp. Klasse und setzen diese in Beziehung (d. h. Schnitt resp. Berührung) zu andern Flächen gewisser Ordnung resp. Klasse, insonderheit zum Kugelkreise.

Eine erste Gruppe von Sätzen stellt Ausdehnungen des Pascalschen Satzes über Kegelschnitte und verwandte Erscheinungen dar. Man faßt zweckmäßig Sätze dieser Art als Spezialfälle einer umfassenderen Klasse von Erscheinungen auf, was analytisch darin seinen Ausdruck findet, daß man sie gewissen Identitäten unterordnet.

Das vorgelegte Tetraeder mit den Ecken A_i und den Gegenebenen A_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ diene als Koordinatentetraeder, wobei der Mittelpunkt der ihm einbeschriebenen Inkugel als Einheitspunkt (mit den Koordinaten $1, 1, 1, 1$) benutzt werde. Die Kante $A_l A_m$ $(x_i = 0, x_k = 0)$ sei mit k_{lm} bezeichnet, die inneren Flächenwinkel**) $(\mathsf{A}_l, \mathsf{A}_m)$ mit γ_{lm}, deren Kosinus mit c_{lm}.

---

*) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, IX [1] (1900) p. 91; XII [1] (1903) p. 137; Archiv für Math. u. Physik (3) 1 (1901), p. 372; (3) 5 (1903), p. 168, 282; (3) 8 (1904), p. 135.

**) Diese sechs Flächenwinkel sind an eine bestimmte Relation gebunden, die ihren einfachsten Ausdruck darin findet, daß die Determinante $|c_{ik}|$ der Gleichung (IV) des Kugelkreises verschwindet. Auch die Unterdeterminanten dieser „Kugelkreisdeterminante“ $|c_{ik}|$ stehen in einfacher Beziehung zu den Bestimmungsstücken des Tetraeders. Ist Γ_{ik} die erste Unterdeterminante von c_{ik}, und bedeuten $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ die Inhalte der Seitenflächen des Tetraeders, so lehrt einmalige Ränderung von $|c_{ik}|$ mit Punktkoordinaten x, daß Γ_{ik} proportional wird mit $\Delta_i \Delta_k$. Der Proportionalitätsfaktor bestimmt sich aus der Formel für die Entfernung zweier

Ein Punkt „x_{ik}" auf der Kante k_{ik} ist durch seine Koordinate $x_{ik} = \frac{x_i}{x_k}$ $\left(\text{oder auch durch } x_{ki} = \frac{x_k}{x_i}\right)$ bestimmt, dualistisch eine Ebene „u_{ik}" durch die Gegenkante k_{lm} vermöge ihrer Koordinate $u_{ik} = \frac{u_i}{u_k}$ $\left(\text{oder auch durch } u_{ki} = \frac{u_k}{u_i}\right)$. Ein Punkt x_{ik} liegt dann und nur dann auf einer Ebene u_{ki}, wenn $x_i u_i + x_k u_k = 0$ d. h. wenn:

(1)
$$x_{ik} = -u_{ki}.$$

Um zyklische Anordnungen zu erzielen, zerlege man das Tetraeder in windschiefe Vierecke, was offenbar auf drei Arten möglich ist: $\overline{A_1 A_2 A_3 A_4}$, $\overline{A_1 A_3 A_4 A_2}$, $\overline{A_1 A_4 A_2 A_3}$, und greife etwa das erste Viereck $\overline{A_1 A_2 A_3 A_4}$ heraus.

Es liege ferner eine Fläche n. Ordnung F_n vor:

(2)
$$F_n = (a_i x_i^n + a_k x_k^n + a_l x_l^n + a_m x_m^n) + \cdots = 0, \quad (i, k, l, m = 1, 2, 3, 4),$$

die durch keine Tetraederecke gehe. Das Produkt P_{ik} der Koordinaten $x_{ik}^{(1)}, x_{ik}^{(2)}, \ldots, x_{ik}^{(n)}$ der n Schnittpunkte von F_n mit der Kante k_{ik} bestimmt sich durch:

Punkte, angewandt auf eine Höhe des Tetraeders. Sind h_1, h_2, h_3, h_4 die Längen der vier Höhen, T das Volumen des Tetraeders, so kommt:

$$\sqrt{-\Gamma_{ii}} = \Delta_i \frac{h_1 h_2 h_3 h_4}{18 T^2},$$

und $-\Gamma_{ik}$ ist das Produkt der beiden, zu den Ecken A_i und A_k gehörigen Eckensinus.

Ist andererseits $\Gamma_{i_1 k_1}^{i_2 k_2}$ $(i_1 \neq k_1, i_2 \neq k_2)$ diejenige zweite Unterdeterminante von $|c_{ik}|$, die durch Streichung der i_1^{ten}, k_1^{ten} Horizontalreihe und der i_2^{ten}, k_2^{ten} Vertikalreihe entsteht, bedeuten ferner $s_{l_1 m_1}$, $s_{l_2 m_2}$ die Sinus der Flächenwinkel $\gamma_{l_1 m_1}$, $\gamma_{l_2 m_2}$, und werden die Indizes i, k, l, m in zyklischer Folge genommen, so lehrt die Formel für den Winkel zweier Geraden, daß:

$$\Gamma_{i_1 k_1}^{i_2 k_2} = s_{l_1 m_1} s_{l_2 m_2} \cos\left(k_{l_1 m_1}, k_{l_2 m_2}\right),$$

wo die Richtung der Kanten in dem angegebenen Sinne zu erfolgen hat. Im besondern ist hier die Formel:

$$\Gamma_{ik}^{il} = c_{kl} + c_{km} c_{lm} = s_{km} s_{lm} \cos\left(k_{km}, k_{lm}\right)$$

nichts anderes als die Grundformel der sphärischen Trigonometrie, angewandt auf das Dreikant A_i, während:

$$\Gamma_{ik}^{lm} = c_{il} c_{km} - c_{im} c_{kl} = s_{ik} s_{lm} \cos\left(k_{ik}, k_{lm}\right)$$

den Winkel zweier Gegenkanten liefert.

(3) $$P_{ik} = (-1)^n \frac{a_k}{a_i}.$$

„Mithin gilt für das Produkt X der zyklisch angeordneten Koordinaten $x_{12}^{(r)}, x_{23}^{(r)}, x_{34}^{(r)}, x_{41}^{(r)}$ $(r = 1, 2, \cdots, n)$ aller $4n$ Schnittpunkte einer Fläche n. Ordnung F_n mit den Kanten des Vierecks $\overline{A_1A_2A_3A_4}$:

(Ia) $$X = 1,$$

und dualistisch für das Produkt U der zyklisch geordneten Koordinaten aller 4ν Berührungsebenen, die durch die Kanten des Vierecks an eine Fläche ν. Klasse Φ_ν gehen:

(Ib) $$U = 1.“$$

Aber auch umgekehrt*) liegen viermal n Punkte auf den Kanten des Vierecks $\overline{A_1A_2A_3A_4}$ (von denen keiner in eine Ecke fällt) auf einer F'_n, wenn die Bedingung (Ia) erfüllt ist, und dualistisch für (Ib).

Besonders häufig wird von dem Spezialfall n resp. $\nu = 1$ Gebrauch gemacht.

Die Identitäten (Ia), (Ib) seien zum Andenken an Carnot, der sie im Falle des Dreiecks und für $n = 2$ zuerst (in geometrischer Gestalt) aufgestellt und verwendet hat, die Carnotschen Identitäten genannt.

Diese Identitäten werden in Verknüpfung gesetzt mit einer gewissen zyklisch fortschreitenden Verbindung je dreier Punkte (resp. Punkte-n-tupel) auf drei verschiedenen Kanten des Vierecks durch Ebenen (resp. F_n). Da diese Art von Verbindung, wiederum im Falle des Dreiecks und für $n = 2$ zuerst von Pascal bei Aufstellung seines bekannten Kegelschnittsatzes ausgeübt wurde, sei sie als Pascalsches Verbindungsprinzip bezeichnet.

Der einfachste Typus dieser Verbindung tritt für 3 . 4 Punkte ein. Dann liegt auf jeder Kante k_{ik} des Vierecks ein Tripel von Punkten $x_{ik}, x'_{ik}, x''_{ik}$. Diese 12 Punkte verbinde man durch 4 Ebenen nach dem Schema:

$$x_{12},\ x'_{23},\ x''_{34};\ x_{23},\ x'_{34},\ x''_{41};\ x_{34},\ x'_{41},\ x''_{12};\ x_{41},\ x'_{12},\ x''_{23},$$

*) Der Beweis beruht auf der evidenten Tatsache, daß sich n (von Null verschiedene) Größen, deren Produkt den Wert Eins besitzt, in die Gestalt $\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_2}{a_3}, \frac{a_3}{a_4}, \ldots, \frac{a_n}{a_1}$ setzen lassen. Im Falle der Ebene (eines Dreiecks) tritt die Modifikation ein, daß (Ia) und (Ib) zu ersetzen sind durch $X = (-1)^n$, $U = (-1)^n$. Für ein ungerades n lassen sich n Größen mit dem Produktwert -1 in die Gestalt $-\frac{a_1}{a_2}, -\frac{a_2}{a_3}, \ldots, -\frac{a_n}{a_1}$ bringen.

so schneiden diese Ebenen auf der jeweiligen Restkante die Restpunkte $z_{41}, z_{12}, z_{23}, z_{34}$ aus. Bedeutet jetzt X das Produkt aller 12 x, Z dasjenige aller 4 z, so führt die Multiplikation der vier korrespondierenden Formeln (Ia) ($n = 1$) zu der Identität:

(II) $$XZ = 1.$$

Erhält also im besondern X den Wert Eins, so auch Z, und umgekehrt. Dies sagt aus:

„Liegt auf jeder Kante eines windschiefen Vierecks ein Tripel von Punkten (je mit Ausschluß der Ecken), und verbindet man diese 12 Punkte nach dem Pascalschen Prinzip durch 4 Ebenen, die dann noch 4 Restpunkte ausschneiden, so liegen die 12 Punkte dann und nur dann auf einer F_3, wenn die 4 Restpunkte auf einer Ebene („der Pascalschen Ebene") liegen." („Pascalscher Satz für Flächen 3. Ordnung.")

Es hat keine Schwierigkeit, diesen Satz auf eine F_{3n} und ihre Pascalsche F_n zu übertragen*), resp. auf eine $\Phi_{3\nu}$ und ihre Pascalsche Φ_ν.

Andererseits führt die gleichzeitige Verwendung der Identitäten (Ia) und (Ib) in Verbindung mit (1) zu einem in sich dualistischen Satze. Auf jeder Kante des Vierecks befinde sich wieder ein Punkte-n-tupel, das von der Gegenkante je durch ein Ebenen-n-tupel projiziert werde. Bezeichnet wiederum X das Produkt der zyklisch angeordneten Koordinaten aller $4n$ Punkte, U das entsprechende für die $4n$ Ebenen, so folgt aus der Identität:

(III) $$XU = 1$$

für $X = 1$, $U = 1$**) der Satz:

„Gehören 4 Punkte-n-tupel auf den Kanten eines windschiefen Vierecks einer F_n an, so sind auch die $4n$ von den Gegenkanten aus projizierenden Ebenen Berührungsebenen einer Φ_n, und umgekehrt."

---

*) Andererseits geht aus dem Pascalschen Satze für F_3 ein solcher für Raumkurven 3. Ordnung hervor, indem man die Kurve von jeder Ecke A_i auf die Gegenebene A_i durch einen Kegel 3. Ordnung projiziert.

Das Pascalsche Verbindungsprinzip läßt sich auch auf F_2 anwenden, indem man immer nur je 2 der 8 Punkte x_{ik}, x'_{kl} durch eine beliebige Ebene verbindet und die beiden Restpunkte in Betracht zieht. Entsprechend bei einer F_{2n}.

**) Auch der Fall $X = -1$, $U = -1$ hat eine einfache Bedeutung. Z. B. für $n = 1$ ergibt sich: Sind die 4 Kanten eines windschiefen Vierecks Tangenten einer F_2, so sind die 4, die Berührungspunkte je von der Gegenkante aus projizierenden Ebenen die bez. Tangentialebenen der F_2.

Im Falle der Ebene tritt an die Stelle von (III): $XU = (-1)^n$, so daß der Satz des Textes nur für ein gerades n gilt.

Ist etwa für $n = 2$ die Gleichung der F_2: $\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$, so lautet die der zugehörigen Φ_2:

$$\Phi_2 = \Sigma \frac{u_i^2}{a_{ii}} - \Sigma\Sigma\, u_i u_k \frac{a_{ik}}{a_{ii} a_{kk}} = 0. \tag{4}$$

Wählt man im besondern als Φ_2 den Kugelkreis K:

$$\mathsf{K} = \Sigma\Sigma\, u_{ik}\, c_{ik} = 0 \qquad (c_{ii} = -1,\ c_{ik} = \cos\gamma_{ik}), \tag{IV}$$

so wird die Gleichung der zugehörigen F_2:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + \Sigma\Sigma\, x_i x_k c_{ik} = 0, \tag{5}$$

d. i. wegen der Symmetrie in den x:

„Die 6 Punktinvolutionen, die auf den Kanten eines Tetraeders ausgeschnitten werden durch die 6 rechtwinkligen Ebeneninvolutionen, deren Achsen die jeweiligen Gegenkanten sind, sind konjugiert in bezug auf eine (einzige) bestimmte F_2 (5)."

Nunmehr fasse man alle drei Vierecke des Tetraeders gleichzeitig ins Auge, andererseits dessen vier Dreiecke.

Man gehe zunächst wieder von einer F_2 aus: $\Sigma\Sigma\, a_{ik} x_i x_k = 0$. Die F_2 schneidet aus der Kante k_{ik} das Punktepaar x_{ik}, x_{ik}' aus:

$$x_i^2 a_{ii} + 2 x_i x_k a_{ik} + x_k^2 a_{kk} = 0. \tag{6}$$

Für $x_{ik} x_{ik}' = p_{ik} = \frac{1}{p_{ki}}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &\equiv p_{23} p_{34} p_{42} = 1, & \Delta_2 &\equiv p_{43} p_{31} p_{14} = 1, \\ \Delta_3 &\equiv p_{12} p_{24} p_{41} = 1, & \Delta_4 &\equiv p_{13} p_{32} p_{21} = 1, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} M_{12} &\equiv p_{12} p_{23} p_{34} p_{41} = 1, & M_{13} &\equiv p_{13} p_{34} p_{42} p_{21} = 1, \\ M_{14} &\equiv p_{14} p_{42} p_{23} p_{31} = 1. \end{aligned} \tag{8}$$

Bildet man andererseits die linken Seiten der Relationen (7), (8) für 6 ganz beliebig gewählte Wertepaare x_{ik}, x_{ik}', so gelten ersichtlich die Identitäten:

$$\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4 = 1;\ M_{12} = \Delta_1 \Delta_2,\ M_{13} = \Delta_1 \Delta_3,\ M_{14} = \Delta_1 \Delta_4. \tag{V}$$

Sind also im besondern drei der $\Delta = 1$, so auch das vierte, und damit auch jedes M; sind drei der $\Delta = -1$, so auch das vierte, jedes M ist aber wieder $= +1$. Umgekehrt, sind alle $M = 1$, so sind entweder alle $\Delta = 1$, oder aber alle $= -1$. Das ist der Inhalt des Satzes:

„Wenn von 6 Punktepaaren auf den Kanten eines Tetraeders dreimal die 3 Punktepaare je in einer Tetraederebene einem Kegelschnitt C_2 angehören, so auch das vierte, und die 4 C_2 gehören einer F_2 an. Weiß man aber nur, daß die 4 Punktepaare auf jedem der 3 Vierecke des Tetraeders einer F_2 angehören, so sind zwei Fälle möglich. Entweder liegen wieder alle 6 Punktepaare x_{ik}, x_{ik}' auf einer F_2, oder aber die 6 Punktepaare y_{ik}, y_{ik}', wo je $(x_{ik} y_{ik})(A_i A_k)$, und $(x_{ik}' y_{ik}')$ $(A_i A_k)$ harmonische Paare sind."

Ersetzt man wiederum die 6 Punktepaare durch 6 Punkte-n-tupel, so treten an die Stelle der F_2, C_2 entsprechend Flächen resp. Kurven n. Ordnung F_n, C_n.

Zugleich gilt, auf Grund von (1), der oben für ein Viereck ausgesprochene Satz für das ganze Tetraeder:

„Gehören 6 Punkte-n-tupel auf den Kanten eines Tetraeders einer F_n an, so auch die 6 von den Gegenkanten aus projizierenden Ebenen-n-tupel einer Φ_n, und umgekehrt."*)

Eine weitere Gruppe hierhergehöriger Sätze erhält man, wenn man den Ebenen des Tetraeders die Dreikante der Gegenecken zuordnet. Auf Grund wiederholter Anwendung von (Ia) und des bisher befolgten Multiplikationsprinzips ergibt sich so:

„Schneidet man jedes der 4 Dreikante eines Tetraeders mit einer F_n, so gehören die so erzeugten $3 \cdot 4 \cdot n = 6 \cdot 2 \cdot n$ Schnittpunkte dann und nur dann einer F_{2n} an, wenn die von den 4 F_n auf den Gegenebenen des Tetraeders ausgeschnittenen 4 C_n einer F_{2n} angehören**) (u. entspr. dualistisch)."

Die Ausdehnung der bisherigen Sätze, die sich kurz als Pascal-Carnotsche Geometrie des Tetraeders charakterisieren lassen, auf den Raum von d Dimensionen bietet keine prinzipiellen Schwierigkeiten. Durch geeignete Projektion solcher Konfigurationen auf niedere Räume findet man neue Sätze.

Hieraus folgt u. a. sofort der Satz: „Berührt jede von 2 F_2 sämtliche Kanten eines Tetraeders, so liegen die $2 \cdot 6$ Berührungspunkte wiederum auf einer F_2." Dagegen ist der analog von Gergonne formulierte Satz: „Die $3 \cdot 4$ Berührungspunkte dreier, einem Tetraeder einbeschriebenen Φ_2 gehören einer F_2 an", nicht richtig, wie Herr Sturm (Arch. f. Math. Phys. (3) 5 p. 9 [1903]) gezeigt hat.

---

*) Im Falle $n = 2$ fallen die F_2 und Φ_2 dann und nur dann zusammen, wenn das Tetraeder ein Poltetraeder der F_2 resp. Φ_2 ist.

**) Für $n = 1$ kommt man auf einen bekannten Satz von Chasles zurück. Aus ihm läßt sich ein interessanter Grenzfall ableiten. Die $2 \cdot 6$ Punktepaare seien reell, und je drei einer Ecke A_i zunächst gelegene Punkte mögen der Ecke beliebig nahe rücken. Dann kommt: „Vier Ebenen durch die Ecken eines Tetraeders sind dann und nur dann die Berührungsebenen einer dem Tetraeder umbeschriebenen Fläche 2. Grades, wenn die Spuren jener Ebenen in den Gegenebenen des Tetraeders einer Regelschar 2. Grades angehören, und umgekehrt." Wir werden diesem Satze weiter unten in einem ganz andern Zusammenhange begegnen.

War bisher ausdrücklich festgesetzt, daß die das Tetraeder bezw. gewisse Kanten desselben schneidenden Flächen durch keine Ecke gehen sollten, so gibt es auch Sätze, wo diese Beschränkung wegfällt. „Markiert man z. B. auf jeder Kante k_{ik} einen bestimmten (in keine Ecke fallenden) Punkt B_{lm}, und legt jeweils durch eine Ecke A_i und die 3 Punkte B_{kl}, B_{km}, B_{lm} diejenige Fläche 2. Ordnung $F_2^{(i)}$, die noch durch einen beliebig, aber fest gewählten (keine Kante treffenden) Kegelschnitt K geht, so schneiden sich diese vier Flächen in einem und demselben Punkte.“

Auch dieser Satz (der entsprechend im Raume von d Dimensionen gilt) läßt sich einer einfachen Identität unterordnen.

Der Kegelschnitt K werde aus der Ebene $u_x = 0$ durch die ihn mit den Ecken A_i verbindende Fläche 2. Ordnung A:

9) $$A \equiv a_{xx} \equiv a_{12} x_1 x_2 + \cdots + a_{34} x_3 x_4 = 0$$

ausgeschnitten. Durch K geht eine ∞^4-Schar von Flächen 2. Grades F:

10) $$F \equiv u_x v_x - a_{xx} = 0.$$

Soll F durch A_i gehen — F sei alsdann mit $F^{(i)}$ bezeichnet —, so lautet die Gleichung von $F^{(i)}$:

11) $$F^{(i)} \equiv u_x V_i - a_{xx} = 0,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

12) $$V_i \equiv x_k v_{ki} + x_l v_{li} + x_m v_{mi} \quad (i, k, l, m = 1, 2, 3, 4).$$

$F^{(i)}$ schneidet aus k_{im} noch einen Punkt $B_{kl}^{(i)}$ aus, analog $F^{(m)}$ aus k_{im} noch einen Punkt $B_{kl}^{(m)}$. Sollen beide Punkte in einen einzigen B_{kl} zusammenfallen, so ist dazu notwendig und hinreichend, daß:

13) $$u_i v_{mi} + u_m v_{im} = a_{im}.$$

Multipliziert man diese 6 Relationen je mit $x_i x_m$ und addiert, so resultiert die fragliche Identität:

VI) $$a_{xx} \equiv \Sigma x_i u_i V_i.$$

Hieraus geht der genannte Satz hervor, denn die 4 Flächen $F^{(i)}$ schneiden sich in dem durch die Gleichungen:

14) $$V_1 = V_2 = V_3 = V_4$$

bestimmten Punkte. Dies gilt auch dann noch, wenn der gemeinsame Wert der 4 V_i gleich Null ist.

Ist im besondern K der Kugelkreis, so schneiden sich die 4 Kugeln durch A_i, B_{kl}, B_{km}, B_{lm} in einem Punkte.*)

*) Der Satz ist von Herrn W. Haskell (Archiv f. Math. u. Phys. (3) 5, p. 278 (1903)) aufgestellt und bewiesen worden. Den obigen Beweis der projektiven

Der entsprechende Satz in der Ebene weist eine spezifische Eigenart auf. Ist hier der gemeinsame Wert der drei in Frage kommenden Größen V_i gleich Null, so sagt das aus, daß die 3 Punkte B auf den Seiten des Grunddreiecks in einer Geraden liegen, und umgekehrt. Somit schneiden sich die 4 den 4 Dreiseiten eines Vierseits umbeschriebenen, zugleich noch durch zwei feste Punkte K_1, K_2 gehenden Kegelschnitte in einem Punkte.

Sind wiederum im besondern K_1, K_2 die beiden imaginären Kreispunkte, so hat man den Steinerschen Satz, daß die 4 Umkreise der 4 Dreiseite eines Vierseits durch einen Punkt gehen.

Gerade hieraus läßt sich aber sofort folgern, daß der entsprechende Satz in einem Raume von mehr als 2 Dimensionen nicht richtig ist.

Also schneiden sich z. B. die 5 Umkugeln der 5 Tetraeder eines Fünfflachs nicht in einem Punkte. Ferner schneiden sich zwar je 4 der Umkugeln auf der fünften Ebene des Fünfflachs, aber diese neuen 5 Punkte liegen ebensowenig auf einer Kugel.

Bisher war das Tetraeder als ein allgemeines vorausgesetzt. Auf die vielfach aufgestellten Sätze über spezielle Tetraeder (z. B. solche, in denen sich die 4 Höhen in einem Punkte schneiden), sowie über zwei Tetraeder in besonderer (hyperboloidischer, perspektivischer) Lage sei hier nur hingewiesen.

Nur ein Satz dieser Gattung sei hervorgehoben, da er zeigt, welche Vorsicht bei der Übertragung von Sätzen der Ebene auf den Raum obwalten muß.

Es seien drei Tetraeder mit den Ecken A_i, B_i, C_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ gegeben, die nur der einzigen Bedingung unterliegen sollen, daß die vier Ebenen $(A_i B_i C_i)$ sich in einem Punkte schneiden. Nach Analogie mit dem Satze des Desargues für zwei perspektive Dreiecke in der Ebene wäre zu vermuten, daß dann auch die vier Schnittpunkte der entsprechenden Gegenebenen $\mathsf{A}_i, \mathsf{B}_i, \Gamma_i$ in einer Ebene liegen, und umgekehrt. Das ist indessen im allgemeinen nicht*) der Fall, wie man leicht erkennt, wenn man z. B. die drei Tetraeder so wählt, daß zwei von ihnen eine zugeordnete Ecke gemein haben.

Die bisher besprochenen Gruppen von Sätzen bilden gewissermaßen eine Einleitung in die Theorie des Tetraeders, da nur von den elementarsten Hilfsmitteln Gebrauch gemacht wird.

Verallgemeinerung des Satzes, nebst einer Reihe weiterer Folgerungen, hat der Vortragende ib. p. 282 abgeleitet.

*) Folglich ist auch die dem Falle der Ebene versuchsweise entsprechend gebildete Determinantenidentität im allgemeinen nicht gültig.

Nunmehr werde sowohl der Kugelkreis, wie die eingangs er-
vähnte Transformation systematisch herangezogen.

Die Erweiterungen, die eintreten, wenn der Kugelkreis K (IV) lurch eine mehr oder weniger allgemeine Fläche 2. Klasse ersetzt wird, nögen an der jeweiligen Stelle hervorgehoben werden.

Es gibt acht dem Tetraeder einbeschriebene Kugeln. Deren (reelle) Mittelpunkte sind die „Einheitspunkte" M_i*) ($i = 1, 2, \cdots, 8$), d. i. die Punkte, deren Koordinaten, bis auf das Vorzeichen, der Einheit proportional sind. Diese 8 Einheitspunkte M sind die Grundpunkte eines Netzes N von Flächen 2. Ordnung:

15) $$N \equiv \varkappa(x_1^2 - x_2^2) + \lambda(x_1^2 - x_3^2) + \mu(x_1^2 - x_4^2) = 0.$$

Eine Fläche 2. Klasse $\Phi_2 \equiv \Sigma\Sigma\alpha_{ik}u_iu_k = 0$ ist dann und nur dann conjugiert (apolar) zu allen Flächen des Netzes N, wenn:

16) $$\alpha_{11} = \alpha_{22} \equiv \alpha_{33} = \alpha_{44}.$$

Im besondern ist also ein Punktepaar $P = (x)$, $Q = (y)$ mit der Gleichung $\Phi_2 \equiv u_xu_y \equiv 0$ dann und nur dann konjugiert in bezug auf alle Flächen von N, wenn die x_i den y_i umgekehrt proportional sind:

VII) $$\varrho x_iy_i = 1.$$

Die Punkte (x), (y) sind dann entsprechende Punkte der eineindeutigen kubischen Verwandtschaft T (VII).

In der Schar von Flächen 2 Klasse:

17) $$\nu u_xu_y - \mathsf{K} = 0$$

gibt es eine und nur eine Fläche Φ, in deren Gleichung wegen (VII) die Quadrate der u herausfallen, die also dem Tetraeder einbeschrieben ist. Ist umgekehrt Φ eine solche dem Tetraeder einbeschriebene Fläche 2. Klasse, daß sich in der Schar $\omega\Phi + \mathsf{K} = 0$ ein Punktepaar (x), (y) befindet, so sind (x), (y) konjugiert in bezug auf das Netz N.

Nun bedeutet die Schar (17) eine Schar konfokaler Rotationsflächen 2. Ordnung mit P, Q als den beiden festen Brennpunkten, und umgekehrt läßt sich jede Rotationsfläche 2. Ordnung auffassen als Individuum einer Schar von Flächen 2. Klasse, der K und das Paar ihrer beiden festen Brennpunkte angehört.

*) Wie leicht zu sehen, geht irgend eine Verbindungsgerade zweier Einheitspunkte entweder durch eine Ecke oder sie trifft zugleich zwei Gegenkanten. Umgekehrt gehen durch jede Ecke vier Gerade, die je zwei der Einheitspunkte tragen. Markiert man andererseits auf jeder Kante k_{ik} die beiden Punkte H_{ik}, H'_{ik}, in denen sie von den Halbierungsebenen des gegenüberliegenden Flächenwinkels getroffen wird, so trägt jede der vier Geraden $H_{ik}H_{lm}$, $H_{ik}H'_{lm}$, $H'_{ik}H_{lm}$, $H'_{ik}H'_{lm}$ ein Paar der Einheitspunkte. Damit sind gerade die 28 Verbindungsgeraden der 8 Einheitspunkte erschöpft.

Rückt im besondern der eine der beiden Punkte P, Q in bestimmter Richtung ins Unendliche, so tritt der Grenzfall einer Schar konfokaler Rotationsparaboloide ein, und umgekehrt läßt sich wiederum ein Rotationsparaboloid auffassen als Individuum einer Schar von Flächen 2. Klasse, der außer K das aus dem festen Brennpunkte der Fläche und dem unendlich fernen Punkte ihrer Achse bestehende Punktepaar angehört.

Somit gilt der Satz:*)

;„Zwei korrespondierende Punkte der Transformation T (VII) sind die Brennpunkte einer dem Tetraeder einbeschriebenen Rotationsfläche 2. Ordnung, und umgekehrt.“

Zwei solche Punkte heißen, wie bei der analogen Erscheinung im Dreieck, „Gegenpunkte“ des Tetraeders. Die sich selbst entsprechenden Punkte, die „Einheitspunkte“ der Transformation T, sind die Mittelpunkte der dem Tetraeder einbeschriebenen Kugeln, fallen also mit den obigen acht Einheitspunkten M_i zusammen.

Beschreibt**) ein Punkt P eine Gerade g, so durchläuft sein Gegenpunkt Q eine durch die Ecken A_i gehende Raumkurve 3. Ordnung C_3, das „Bild“ der Geraden g. Das Bild einer Ebene ist eine Fläche 3. Ordnung F_3, die in den Ecken A_i Knotenpunkte besitzt. Ist im besondern die Ebene die unendlich ferne E_ω:

(VIII) $$\mathsf{E}_\omega \equiv x_1 \Delta_1 + x_2 \Delta_2 + x_3 \Delta_3 + x_4 \Delta_4 = 0, \text{***})$$

wo die Δ_i die Inhalte der 4 Tetraederdreiecke bedeuten, so wird die entsprechende Fläche 3. Ordnung $F_3^{(\omega)}$:

(18) $$F_3^{(\omega)} = \frac{\Delta_1}{x_1} + \frac{\Delta_2}{x_2} + \frac{\Delta_3}{x_3} + \frac{\Delta_4}{x_4} = 0.$$

Diese Fläche $F_3^{(\omega)}$†) ist demnach der Ort der Brennpunkte der dem Tetraeder einbeschriebenen Rotationsparaboloide. Andererseits ist sie, wie leicht zu zeigen, der Ort eines Punktes mit der Eigenschaft,

---

*) Dieser zuerst vom Vortragenden aufgestellte und bewiesene Satz (Arch. f. Math. u. Phys. (3) 5, p. 168 [1903]) ist in der Straßburger Dissertation (1903) von H. Berger, „Über Rotationsflächen zweiten Grades, die einem gegebenen Tetraeder eingeschrieben sind“ mit rein synthetischen Mitteln untersucht worden.

**) Vgl. F. Geiser, Journ. f. Math. 69 (1868), p. 179.

***) Die Gleichung (VIII) der unendlich fernen Ebene ist eine unmittelbare Folge des „Projektionssatzes“: $\Delta_i = \Delta_k c_{ik} + \Delta_l c_{il} + \Delta_m c_{im}$. Die drei Produkte rechterhand sind die Inhalte der Projektionen der Dreiecke Δ_k, Δ_l, Δ_m auf das Dreieck Δ_i.

†) Die $F_3^{(\omega)}$ geht u. a. durch die 28 Mittelpunkte der 28 Strecken $M_i M_k$. Allgemein geht durch die 28 Mittelpunkte der 28 Strecken, die je zwei der 8 Grundpunkte eines Flächennetzes 2. Ordnung verbinden, eine Fläche 3. Ordnung.

aß die 4 Fußpunkte der von ihm auf die Tetraederebenen gefällten ote in einer Ebene liegen.

Für diese Fläche $F_3^{(\omega)}$ lassen sich die bekannten Sätze über die uf einer beliebigen Fläche 3. Ordnung gelegenen Kurven spezialisieren. o gibt es auf ihr, abgesehen von den (vierfach zählenden) Tetraeder-anten, noch drei Gerade g_1, g_2, g_3, die in der Ebene:

$$\text{19)} \qquad \mathsf{E} = \frac{x_1}{\varDelta_1} + \frac{x_2}{\varDelta_2} + \frac{x_3}{\varDelta_3} + \frac{x_4}{\varDelta_4} = 0$$

egen. Projiziert man die $F_3^{(\omega)}$ von einer Tetraederecke A_i aus auf die bene E, so hat man die einfachste Abbildung der Fläche auf die bene.

„Auf Grund dieser Abbildung hat man ein Übertragungsprinzip, m die Geometrie des Dreiecks (der Geraden g_1, g_2, g_3) auf die Fläche $F_3^{(\omega)}$ und damit auf das Tetraeder selbst zu übertragen."

Die Theorie der Gegenpunkte beim Dreieck führt zu einer Reihe on Sätzen über Kegelschnitte, die, durch gewisse Punkte bestimmt, och durch gewisse weitere Punkte gehen.

Die entsprechende Theorie im Raume gestaltet sich ungleich mannig-ltiger; es seien zwei Sätze dieser Art hervorgehoben.

In der Transformation T (VII) entspricht einer Ebene E_i, die durch ine (und nur eine) Ecke A_i geht, ein Kegel 2. Ordnung K_i, der die rei von A_i auslaufenden Tetraederkanten enthält. Die Spuren von E_i nd K_i in der Tetraederebene A_i entsprechen sich in einer quadratischen erwandtschaft T_i, deren Fundamentalpunkte die Ecken A_k, A_l, A_m und eren Einheitspunkte die Spuren $G_i^{(1)}, G_i^{(2)}, G_i^{(3)}, G_i^{(4)}$ der vier Geraden ind, die die $2 \cdot 4$ Punkte M_i von A_i aus projizieren. Sucht man ins-esondere denjenigen Kegel K_i', der das Bild der durch A_i zur Ebene A_i arallel gelegten Ebene E_i' ist, so ergibt sich der Satz:

„Die durch eine Tetraederecke A_i zur Gegenebene A_i parallel ge-egte Ebene E_i trifft jede der 24 Geraden $M_i M_k$, die nicht durch A_i eht, in einem Punkte P_{ik}, zu dem man den bez. M_i, M_k vierten har-ionischen Punkt Q_{ik} bestimme. Die 24 Spurpunkte der Geraden $A_i Q_{ik}$ n der Ebene A_i liegen auf einem „Neunpunkte-Kegelschnitte", der so-wohl durch A_k, A_l, A_m wie durch die 6 Mittelpunkte der 6 Strecken $G_i^{(r)}, G_i^{(s)}$ $(r, s = 1, 2, 3, 4)$ geht."

Ein entsprechender Satz gilt für jeden der Kegel K_i.

Zweitens geht eine Ebene durch eine Tetraederkante k_{ik} vermöge er Transformation T (VII) wieder in eine solche über. Diese Ebenen-aare durch k_{ik} bilden eine Involution, deren Doppelelemente die Ialbierungsebenen $\mathsf{H}_{ik}, \mathsf{H}_{ik}'$ des Flächenwinkels γ_{ik} sind. Jede dieser beiden Ebenen trägt 4 der 8 Punkte M. Seien etwa M_1, M_2, M_3, M_4 die 4 auf H_{ik} gelegenen Punkte M; die Gegenkante k_{lm} werde von H_{ik} in H_{ik} getroffen. Die Ebene H_{ik} entspricht sich selbst vermöge (VII), und zwar entsprechen sich die Punkte von H_{ik} vermöge einer quadratischen Verwandschaft T_{ik} mit den Fundamentalpunkten A_i, A_k, H_{ik} und den Einheitspunkten M_1, M_2, M_3, M_4. Insbesondere ist das Bild der unendlich fernen Geraden ω_{ik} von H_{ik} ein „Neunpunkte-Kegelschnitt" C_{ik}, der außer durch die 3 Punkte A_i, A_k, H_{ik} noch durch die 6 Mittelpunkte der 6 Strecken $M_r M_s$ $(r, s = 1, 2, 3, 4)$ geht.

Nun ist in der Transformation T das Bild irgend einer unendlichfernen Geraden g_ω des Raumes eine gewisse durch die 4 Ecken A laufende Raumkurve 3. Ordnung.*) Da aber jede unendlichferne Gerade g_ω die 12 Geraden ω_{ik} treffen muß, und umgekehrt eine Gerade, die zwei solche Gerade ω_{ik} trifft, eine Gerade g_ω sein muß, so hat man das Ergebnis:

„In jeder der 12, die Flächenwinkel des Tetraeders halbierenden Ebenen existiert vermöge der 4 auf ihr gegebenen Einheitspunkte M ein bestimmter Neunpunkte-Kegelschnitt. Jede durch die Ecken des Tetraeders gelegte Raumkurve 3. Ordnung, die zweien dieser 12 Kegelschnitte begegnet, trifft auch die 10 übrigen."

Die dualistischen Eigenschaften treten bei der Ebenenverwandtschaft

(VII') $$\sigma u_i v_i = 1$$

auf. Die beiden Verwandtschaften (VII) und (VII') sind aber noch in einer besonderen Art miteinander verknüpft. Die Verwandtschaft (VII') besitzt 8 Einheitsebenen M_i. Diese lassen sich auf eine und nur eine Art in zwei vierfach perspektiv**) liegende Tetraeder T_1, T_2 anordnen, deren Ecken dann gerade die 8 Einheitspunkte M_i der Verwandtschaft (VII) sind. Versteht man unter T_1, T_2 zugleich die Produkte der

*) Die 16 Geraden, die je eine Ecke von T_1 mit einer Ecke von T_2 verbinden, sind gerade die 16, p. 331, Anm. *) erwähnten, durch die Ecken A_i laufenden Geraden $M_i M_k$, während die zwölf übrigen, je zwei Gegenkanten treffenden, sich aus den 2 · 6 Kanten der beiden Tetraeder T_1, T_2 zusammensetzen.

**) Diese ∞^4 dem Tetraeder umbeschriebenen C_3 stehen zu den ∞^5 dem Tetraeder einbeschriebenen Flächen 2. Klasse Φ_2 in der Beziehung, daß es, im allgemeinen, außer dem vorhandenen Tetraeder kein zweites gibt, das einer der C_3 ein- und einer der Φ_2 umbeschrieben wäre (und entsprechend dualistisch). Dagegen gehören zu jeder der C_3 noch ∞^3 (apolare) der Φ_2, und zu jeder der Φ_2 noch ∞^2 (apolare) der C_3, so daß außer dem in Rede stehenden Tetraeder noch eine ∞^2 lineare Schar solcher existiert (cf. W. Fr. Meyer, Apolarität und rationale Kurven, Tübingen 1883, p. 279).

bezüglichen Ebenenformen, so herrscht (bei passender Wahl von Proortionalitätsfaktoren) die Identität:

$$?0) \qquad T_1 - T_2 = -48 x_1 x_2 x_3 x_4.$$

$_1$ und T_2 bilden daher mit dem ursprünglichen Tetraeder ein Tripel esmischer Tetraeder; dieselben zeigen auch insofern ein symmetrisches 'erhalten', als immer die Ecken je zweier derselben die Grundpunkte ines Flächennetzes 2. Ordnung bilden, und die bez. des Netzes konıgierten Raumpunkte eine Transformation von der Natur (VII) bilden, eren 4 Fundamentalpunkte eben die Ecken des dritten Tetraeders sind ınd entsprechend dualistisch).

Aber auch umgekehrt, wie sich durch einfache Rechnung zeigen ißt, sind drei vierfach perspektive Tetraeder auch drei desmische, d. h. sie ehören einem Büschel von Flächen 4. Ordnung an, oder, was dasselbe st, es besteht für sie eine Identität von der Form (20), wenn man von usartungen absieht, also allgemein festsetzt, daß keine Ecke resp. bene irgend eines der drei Tetraeder mit einer Ebene resp. Ecke eines er beiden andern inzident sein soll. Dabei ist eines der drei Tetraeder, as man wieder als Koordinatentetraeder wählen mag, willkürlich, desleichen eine Ecke M eines zweiten Tetraeders, dann aber sind die ieben übrigen Ecken eindeutig bestimmt.*)

Das Netz N_1 von Flächen 2. Ordnung durch die acht Ecken der eiden letzteren Tetraeder tritt jetzt allgemeiner an die Stelle des üheren Netzes N, in das es speziell übergeht, wenn der Punkt M er „Einheitspunkt", d. i. der Schnittpunkt der Halbierungsebenen der ıneren Flächenwinkel des ersten Tetraeders wird.

Andererseits verallgemeinert sich der Kugelkreis K jetzt in einen nderen imaginären Kegelschnitt K_i $(i = 1, 2, \cdots, 8)$ vermöge einer erjenigen acht Kollineationen, die das erste Tetraeder unverändert läßt nd dessen Einheitspunkt in den beliebig gewählten Punkt M, d. h. ı irgend eine der acht Ecken der beiden anderen Tetraeder überführt.

Es werde nunmehr eine andere wichtige Konfiguration in Betracht ezogen, die unmittelbar durch Beziehung des Kugelkreises K (IV) zum 'etraeder erzeugt wird, nämlich die der Höhen des Tetraeders. Es sei

---

*) Aus dieser Umkehrung folgt u. a., bei metrischer Spezialisiernng, eine beıerkenswerte Ausdehnung des bekannten Satzes der Ebene „Die Mittelpunkte der trecken der 3 Paare von Gegenpunkten eines vollständigen Vierseits liegen auf iner Geraden" auf den Raum.

Greift man nämlich von 3 desmischen Tetraedern irgend 2 heraus, so gehen eren 8 Ebenen auf 6 Arten zu je 4 durch 2 „Gegenpunkte". „Die Mittelpunkte er 6 Strecken dieser 6 Paare von Gegenpunkten liegen alsdann auf einer Ebene."

jedoch gleich betont, daß gerade die wesentlichsten Eigenschaften dieser Konfiguration erst hervortreten, wenn man den Kugelkreis durch eine beliebige Fläche 2. Klasse ersetzt. Die Fußpunkte H_i der Höhen h_i des Tetraeders haben die Koordinaten*):

$$(21)\qquad x_i = 0,\quad x_k = c_{ik},\quad x_l = c_{il},\quad x_m = c_{im}\qquad (i, k, l, m = 1, 2, 3, 4).$$

Man erhält sie direkt aus der Definition der Höhen als derjenigen Ecktransversalen, die zu den bez. Gegenebenen in Beziehung zum Kugelkreis K konjugiert sind. Die Höhen h_i sind alsdann (zu den Gegenebenen) gleichzeitig konjugiert in Beziehung zu der ganzen ∞^4-Schar von Flächen 2. Klasse Φ_2:

$$(22)\qquad \lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 + \lambda_3 u_3^2 + \lambda_4 u_4^2 + \lambda \mathsf{K} = 0,$$

die sich linear zusammensetzt aus dem Kugelkreise K und der ∞^3-Schar der Φ_2, für die das Tetraeder Poltetraeder ist („Polarflächen").

Es gibt eine und nur eine Fläche 2. Klasse H, die die Ebenen A_i des Tetraeders in den Höhenfußpunkten H_i berührt:**)

$$(\mathrm{IX})\qquad \mathsf{H} \equiv u_1 u_2 c_{12} + \cdots + u_3 u_4 c_{34} = 0.$$

Der Mittelpunkt L dieser Fläche H besitzt die Koordinaten Δ_i.

*) Hieraus folgt sofort, da die Koordinaten der rechtwinkligen Projektion eines Raumpunktes (y) auf die Tetraederebene A_i die Werte $x_i = 0$, $x_k = y_k + y_i c_{ik}$, $x_l = y_l + y_i c_{il}$, $x_m = y_m + y_i c_{im}$ besitzen, daß sich die Höhen eines Tetraeders dann und nur dann in einem Punkte (η) schneiden, wenn die zwei Bedingungen $c_{12} c_{34} = c_{13} c_{24} = c_{14} c_{23}$ erfüllt sind. Die Größen η sind alsdann bestimmt durch $\frac{\eta_i}{\eta_k} = \frac{c_{ik}}{c_{kl}} = \frac{c_{im}}{c_{km}}$. In der Tat wird dann, wie es sein muß, die linke Seite der Höhenfläche $P(\mathrm{X}')$ proportional zum Quadrate von $u_1 \eta_1 + u_2 \eta_2 + u_3 \eta_3 + u_4 \eta_4$, indem die η_i^2 den Größen σ_i proportional werden. Ist nur eine der beiden obigen Bedingungen erfüllt, so sagt deren Form den bekannten Satz aus, daß, wenn sich zwei Höhen des Tetraeders treffen, dies auch für die beiden anderen gilt. Andererseits folgt aus der Theorie des Kugelkreises, daß die Bedingung $c_{13} c_{24} = c_{14} c_{23}$ damit äquivalent ist, daß die beiden Gegenkanten k_{12}, k_{34} aufeinander senkrecht stehen. Findet dies Ereignis also zweimal statt, so auch das dritte Mal (und dies bleibt auch gültig, wenn der Kugelkreis durch eine beliebige Fläche 2. Klasse ersetzt wird), und dann und nur dann treffen sich die vier Höhen in einem Punkte. Und dieser Satz ist wiederum nur ein Spezialfall des folgenden, der ebenso für ein ebenes Viereck gilt und übrigens auch elementar leicht beweisbar ist. Nimmt man die Richtungen der Kanten in der zyklischen Folge $\overline{1234}$, während die k_{ik} jetzt die absoluten Längen der Kanten bedeuten mögen, so ist die Summe der drei Produkte („der skalaren Produkte der Gegenkanten-Vektoren") $k_{ik} k_{lm} \cos(k_{ik}, k_{lm})$ gleich Null.

**) Die Fläche H gehört also der durch die ausgezeichnete, zum Flächennetze N apolare Polarfläche $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 0$ erzeugten konfokalen Schar an.

Da andererseits der Schwerpunkt S*) des Tetraeders die Koordinaten $\frac{1}{\Delta_i}$ hat, so sind beide Punkte Gegenpunkte des Tetraeders, also nach dem Satz auf p. 332 die festen Brennpunkte einer dem Tetraeder einbeschriebenen Rotationsfläche 2. Ordnung:

$$23)\quad u_1u_2\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_2}+\frac{\Delta_2}{\Delta_1}+2c_{12}\right)+\cdots+u_3u_4\left(\frac{\Delta_3}{\Delta_4}+\frac{\Delta_4}{\Delta_3}+2c_{34}\right)=0.$$

Der Punkt L ist das Analogon zum Lemoineschen Punkt beim Dreieck.

Die Höhen h_i gehören**) der einen Regelschar einer Fläche 2. Ordnung an, der „Höhenfläche" R:

$$\text{X)}\quad R\equiv(\pi_3-\pi_4)(x_1x_2c_{34}+x_3x_4c_{12})+(\pi_4-\pi_2)(x_1x_3c_{24}-x_2x_4c_{13}) \\ +(\pi_2-\pi_3)(x_1x_4c_{23}+x_2x_3c_{14})=0,$$

wo:

$$24)\quad \pi_2=c_{12}c_{34},\quad \pi_3=c_{13}c_{24},\quad \pi_4=c_{14}c_{23}.$$

Als Klassenfläche P aufgefaßt, hat die Höhenfläche zur Gleichung:

$$\text{X}')\quad P\equiv u_1^2\sigma_1+u_2^2\sigma_2+u_3^2\sigma_3+u_4^2\sigma_4+(\pi_3+\pi_4)(c_{34}u_3u_4+c_{12}u_1u_2) \\ +(\pi_2+\pi_4)(c_{24}u_2u_4+c_{13}u_1u_3)+(\pi_2+\pi_3)(c_{23}u_2u_3+c_{14}u_1u_4)=0,$$

wo:

$$25)\quad \sigma_i=c_{ik}c_{il}c_{im}\qquad (i,k,l,m=1,2,3,4).$$

Es zeigt sich nun, daß die drei erwähnten Haupteigenschaften der

---

*) Der Schwerpunkt S ist seinerseits Mittelpunkt zweier ausgezeichneter Flächen 2. Ordnung (Ellipsoide); einmal der Fläche, die die Kanten des Tetraeders in ihren Mittelpunkten berührt (oder, was dasselbe ist, aus den Dreiecken des Tetraeders die Steinerschen Ellipsen ausschneidet), andererseits der Fläche, die die Ebenen der Dreiecke in deren Schwerpunkten berührt. Der bekannte Satz über den Schwerpunkt des Dreiecks als Mittelpunkt der Steinerschen Ellipse läßt daher eine doppelte Ausdehnung auf das Tetraeder zu.

**) Ein ähnlicher Satz gilt in Beziehung auf eine beliebig, aber fest gewählte Ebene: Fällt man von den Ecken A_i des Tetraeders Lote auf eine feste Ebene und von deren Fußpunkten wiederum die Lote auf die bez. Ebenen A_i des Tetraeders, so gehören die letzteren vier Lote einer Regelschar 2. Grades an." Auch dieser Satz bleibt erhalten bei Ersetzung des Kugelkreises durch eine beliebige Fläche 2. Klasse. Das ist eine Erweiterung des Satzes über den „Lotpunkt" beim Dreieck (s. K. Cwojdzinski im Archiv f. Math. u. Phys. (3) 1 [1901], p. 175). Zu der Konfiguration der Höhen sei noch bemerkt, daß sich bekannte Sätze des Dreiecks nur teilweise auf das Tetrader übertragen lassen. Fällt man z. B. von jedem Höhenfußpunkt H_i auf die drei Kanten der Ebene A_i Lote, so liegen die $3\cdot 4$ Fußpunkte dieser Lote auf einer Fläche 2. Ordnung. Fällt man dagegen von H_i die Lote auf die drei von A_i auslaufenden Kanten oder auch auf die drei anderen Tetraederebenen A_k, A_l, A_m, so gehören beidemal die $3\cdot 4$ Fußpunkte der gefällten Lote keiner Fläche 2. Ordnung an.

Höhen, sobald man den Kugelkreis durch eine beliebige Fläche 2. Klasse ersetzt, sobald also die 6 Größen c_{ik} ganz beliebig gewählt sind, einander äquivalent werden.

Seien t_i irgend vier Ecktransversalen des Tetraeders, T_i ihre Spuren in den Gegenebenen A_i. Stellt man dann jeweils die drei notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür auf, daß:

(A) die Geraden t_i zu den Ebenen A_i konjugiert sind in bezug auf irgend eine Fläche 2. Klasse Φ_2 (und damit von selbst für eine ganze ∞^4-Schar *) solcher);

(B) daß eine Fläche 2. Klasse H existiert, die die Ebenen A_i in den Punkten T_i berührt;

(C) daß die vier Geraden t_i der einen Regelschar einer Fläche 2. Ordnung resp. Klasse $R = P$ angehören,

so sind diese 3 Bedingungen jedesmal die nämlichen.

Dieser Satz werde kurz als „Transversalentheorem“ des Tetraeders zitiert.

Der algebraische Ausdruck **) dieser drei Bedingungen ist einfach

---

*) Dies stimmt überein mit einem bekannten Abzählungsprinzip. Für vier beliebig gewählte t_i und eine unbekannte Φ_2 repräsentiert die Forderung (A) acht Bedingungen, so daß es zunächst scheint, als ob stets eine ∞^1-Schar von zugehörigen Φ_2 existiert. In Wahrheit gibt es eine solche Φ_2 erst nach Erfülltsein dreier Bedingungen für die t_i, dann aber muß auch die Schar der Φ_2 eine ∞^{1+3} sein.

**) Die Äquivalenz der Bedingungen (26) und (C) findet sich schon bei O. Hermes, J. f. Math. 56 (1859), p. 218. Hieran schließen sich Sätze über vierfach perspektive Tetraeder bei K. Doehlemann, Arch. f. Math. u. Phys. (2) 17 (1899), p. 160; s. auch L. Klug, ib. (3) 8 (1904), p. 157). Sind die Koordinaten der 4 Punkte T_i zunächst als $3 \cdot 4$ beliebige Größen β_{ik}, β_{il}, β_{im} gegeben, so erhält man die 3 Bedingungen des Textes in der einfachsten Form, wenn man noch zur Abkürzung

$$\frac{\beta_{ik}}{\beta_{ki}} = p_{ik} = \frac{1}{p_{ki}}$$

setzt:

$$A_1 \equiv p_{32}p_{24}p_{43} = 1,\ A_2 \equiv p_{13}p_{34}p_{41} = 1,\ A_3 \equiv p_{21}p_{14}p_{42} = 1,\ A_4 \equiv p_{12}p_{23}p_{31} = 1.$$

Denn diese 4 Bedingungen, die vollkommen von der Gestalt (7) sind, reduzieren sich vermöge der Identität $A_1 A_2 A_3 A_4 \equiv 1$ auf drei. Sind sie erfüllt, so lassen sich sofort 4 Größen a_1, a_2, a_3, a_4 angeben, so daß $p_{ki} = \frac{a_i}{a_k}$ wird. Dann aber ergeben sich für $a_i\beta_{ik} = \alpha_{ik}$, $a_k\beta_{ki} = \alpha_{ki}$ gerade die symmetrischen Größen (26). Analoge Erscheinungen treten auf für solche Punktquadrupel T_i, deren Koordinaten sich in die Form β_{ik} bringen lassen, wo $\beta_{ik} = -\beta_{ki}$. Diese Bedingungen sind äquivalent mit jeder der beiden Forderungen:

(A) Die Ecktransversalen t_i sind zu den Ebenen A_i konjugiert in bezug auf irgend ein Nullsystem (und damit von selbst für eine ganze ∞^4-Schar solcher);

der, daß die Koordinaten der Punkte T_i solchen Größen $\alpha_{ik}, \alpha_{il}, \alpha_{im}$ ($i, k, l, m = 1, 2, 3, 4$) proportional gesetzt werden können, daß stets:

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki} \tag{26}$$

wird, oder kürzer gesagt, daß die aus den Koordinaten der Punkte T_i gebildete Determinante in eine symmetrische Gestalt Δ_α gebracht werden kann. Diese 6 Größen α_{ik} (26) sind dann zugleich die Koeffizienten der Fläche H (IX) (mit der Determinante Δ_α) und treten im übrigen an die Stelle der früheren speziellen c_{ik}.

Neben das obige Theorem tritt das dualistische.

Die Bedingungen (26) mögen noch weiter verfolgt werden. Sie sind z. B. stets erfüllt für vier durch einen Raumpunkt (y) laufende Ecktransversalen t_i. Denn die Koordinaten von T_i lassen sich offenbar in die Form setzen:

$$\alpha_{ik} = y_i y_k, \quad \alpha_{il} = y_i y_l, \quad \alpha_{im} = y_i y_m, \tag{27}$$

und umgekehrt, wenn stets $\alpha_{ik} = y_i y_k$, so entstehen die T_i durch Projektion des Punktes (y) von den Ecken A_i aus.

Man gehe ferner von zwei beliebig gewählten Wertsystemen (26): (α_{ik}), (α'_{ik}) aus, die also zwei Quadrupel von Punkten T_i, T_i' darstellen. Dann ist für jeden Wert von λ auch ($\alpha_{ik} + \lambda\alpha'_{ik}$) ein solches, das den Punkten $T_i^{(\lambda)}$ entsprechen möge.

Durch den gleichen Wert von λ sind dann die 4 Geraden $\gamma_i = (T_i, T_i')$ projektiv aufeinander bezogen. Auf irgend zwei der

---

(B) Es existiert ein Nullsystem (mit den Koeffizienten β_{ik}) derart, daß in bezug auf dasselbe die Punkte T_i die Pole der Ebenen A_i sind.

Nur zu der Eigenschaft (C) des Textes existiert kein unmittelbares Analogon.

Zu diesen Punktquadrupeln T_i ($\beta_{ik} = -\beta_{ki}$) gehören u. a. die Schnittpunkte einer Geraden mit den Tetraederebenen, ferner die Spuren der in den Ecken A_i an eine dem Tetraeder umbeschriebene Raumkurve 3. Ordnung gelegten Tangenten, endlich die Schmiegungspunkte einer dem Tetraeder einbeschriebenen Raumkurve 3. Ordnung. Die weitere Bedingung, die diese drei speziellen Punktquadrupel charakterisiert, lautet der Reihe nach:

$$\beta_{12}\beta_{34} + \beta_{13}\beta_{42} + \beta_{14}\beta_{23} = 0,$$
$$\frac{1}{\beta_{12}\beta_{34}} + \frac{1}{\beta_{13}\beta_{42}} + \frac{1}{\beta_{14}\beta_{23}} = 0,$$
$$\sqrt[3]{\beta_{12}\beta_{34}} + \sqrt[3]{\beta_{13}\beta_{42}} + \sqrt[3]{\beta_{14}\beta_{23}} = 0.$$

Auch die Sätze des Textes über zwei und drei Punktquadrupel T_i lassen sich auf den Fall $\beta_{ik} = -\beta_{ki}$ unmittelbar übertragen. Es sei noch bemerkt, daß aus den Bedingungen (26) auch leicht ein einfacher algebraischer Beweis des bekannten Satzes folgt, daß die Figur zweier vierfach-perspektiver Tetraeder eine in sich dualistische ist.

Geraden g_i, g_k erhält man unmittelbar ein drittes Paar zugeordneter Punkte durch die Schnittpunkte mit der Kante k_{lm} ($x_i = 0$, $x_k = 0$).

Je vier auf diese Weise korrespondierende Punkte $T_i^{(\lambda)}$ sind daher die Berührungspunkte einer dem Tetraeder einbeschriebenen Fläche 2. Klasse $\Phi_2^{(\lambda)}$, und diese Flächen bilden eine lineare Schar $\Phi_2 + \lambda \Phi_2'$ usw.

Die aus den beiden Systemen (α_{ik}), (α'_{ik}) zu bildenden zweireihigen Determinanten repräsentieren, wie man aus der Theorie der Kegelschnitte weiß, acht unabhängige Konstanten.

In der Tat kann man durch Umkehrung obiger Figur von vier willkürlichen Geraden g_i in den Tetraederebenen A_i ausgehen.

„Diese vier Geraden g_i sind alsdann durch die Forderung, daß je vier zugeordnete Punkte derselben ein Punktsystem (T_i) bilden sollen, in eindeutig bestimmter Weise aufeinander projektiv bezogen.“

Im besondern*) seien T_i, T_i' in A_i die Spuren von $2 \cdot 4$ Ecktransversalen t_i, t_i', die den beiden Regelscharen ein- und derselben Fläche 2. Grades angehören. Dann sind die 4 Ebenen (t_i, t_i') die 4 Tangentialebenen dieser dem Tetraeder umbeschriebenen Fläche 2. Grades in den Ecken des Tetraeders, mithin gehören nach dem zum Transversalentheorem dualistischen Satze die 4 Spuren $g_i = (T_i, T_i')$ der Ebenen (t_i, t_i') in A_i wiederum einer Regelschar einer dem Tetraeder einbeschriebenen Fläche 2. Klasse an.**)

Auf diese Figur kommen wir noch genauer zurück.

Entsprechend sind vermöge dreier Wertsysteme (26): (α_{ik}), (α'_{ik}), (α''_{ik}) die vier Tetraederebenen kollinear aufeinander bezogen, so daß

---

*) Seien andererseits T_i, T_i' die Projektionen zweier Raumpunkte (y), (y') von den Ecken A_i auf die Gegenebenen A_i, so bilden die $3 \cdot 4 = 2 \cdot 6$ Treffpunkte der Geraden (T_i, T_i') mit den Kanten der Ebenen A_i ein Beispiel zur zweiten Hälfte des Satzes auf p. 327. Denn das zyklisch geordnete Produkt der Koordinaten der 6 auf einer Ebene A_i befindlichen Kantenpunkte erhält stets den Wert der negativen Einheit.

**) Die Koordinaten der Berührungspunkte dieser Fläche 2. Klasse in den Ebenen A_i lassen sich übersichtlich darstellen. Denn die Gleichung der Fläche als Ordnungs- wie als Klassenfläche geht aus den Gleichungen für die Flächen $R = P$ (X) resp. (X') hervor, wenn man dort die x_i mit den u_i vertauscht und statt der c_{ik} die Koordinaten δ_{ik} der Geraden $\overline{T_i T_i'}$ einsetzt. Dabei haben die δ_{ik}, in symmetrische Gestalt gebracht, die Werte:

$$\frac{\delta_{12}}{c_{34}} = \frac{\delta_{34}}{c_{12}} = \pi_3 - \pi_4, \quad \frac{\delta_{13}}{c_{42}} = \frac{\delta_{42}}{c_{13}} = \pi_4 - \pi_2, \quad \frac{\delta_{14}}{c_{23}} = \frac{\delta_{23}}{c_{14}} = \pi_2 - \pi_3,$$

und die damaligen Größen π_2, π_3, π_4 sind zu ersetzen durch:

$$\delta_{12}\delta_{34} = \pi_2(\pi_3 - \pi_4)^2, \quad \delta_{13}\delta_{42} = \pi_3(\pi_4 - \pi_2)^2, \quad \delta_{14}\delta_{23} = \pi_4(\pi_2 - \pi_3)^2.$$

Denn die jetzige Aufgabe ist gerade die zur Aufstellung der Gleichung der Fläche $R = P$ dualistische.

stets die Kanten sich selber entsprechen, die zugehörigen Berührungsflächen Φ_2 bilden eine Scharschar usw.

Wir kehren zurück zur Höhenfläche $R = P$ resp. ihrer projektiven Verallgemeinerung, so daß die c_{ik} (21) ganz beliebige Größen bedeuten können.

Die durch die Kanten k_{lm} des Tetraeders an die Fläche R gehenden Tangentialebenen schneiden auf den Gegenkanten k_{ik} sechs Punktepaare T_{ik}, T'_{ik} aus, die nach dem Satze auf p. 328 einer Fläche 2. Ordnung G angehören. Die Gleichung von G lautet:

$$\text{(XI)} \quad G \equiv x_1^2\varrho_1 + x_2^2\varrho_2 + x_3^2\varrho_3 + x_4^2\varrho_4 - (\pi_3 + \pi_4)(c_{12}x_3x_4 + c_{34}x_1x_2) \\ - (\pi_2 + \pi_4)(c_{13}x_2x_4 + c_{24}x_1x_3) - (\pi_2 + \pi_3)(c_{14}x_2x_3 + c_{23}x_1x_4) = 0,$$

wo:

$$\text{(28)} \qquad \varrho_i = \frac{\pi_2\pi_3\pi_4}{\sigma_i}.$$

Sei die Polarfläche $x_1^2\varrho_1 + x_2^2\varrho_2 + x_3^2\varrho_3 + x_4^2\varrho_4 = 0$ mit P_ϱ bezeichnet, die drei Flächen $c_{12}x_3x_4 + c_{34}x_1x_2 = 0$ usw. mit C_2, C_3, C_4, die nämlichen vier Flächen, als Klassenflächen, mit Π_ϱ, Γ_2, Γ_3, Γ_4.

Dann erscheint die verallgemeinerte Höhenfläche, als Ordnungsfläche R aufgefaßt, als Individuum des Netzes (C_2, C_3, C_4), als Klassenfläche P aufgefaßt, als Individuum des Gewebes $(\Pi_\varrho, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4)$, weiter die Fläche G, als Ordnungsfläche aufgefaßt, als Individuum des Gebüsches $(P_\varrho, C_2, C_3, C_4)$; endlich gehört die Fläche 2. Grades, die die vier Geraden $\overline{T_i, T_i'}$ enthält, als Ordnungsfläche B dem Gebüsch $(P_\varrho, C_2, C_3, C_4)$ an, als Klassenfläche B der Scharschar $(\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4)$, und das Büschel (B, G) enthält eine dem Tetraeder umbeschriebene Fläche.

Eine wichtigere Eigenschaft der projektiv verallgemeinerten Höhenkonfiguration erhält man vermöge des Doppelverhältnisses D_{ik}, das das Punktepaar T_{ik}, T'_{ik} mit den Ecken A_i, A_k auf der Kante k_{ik} bildet. Die sechs sich so ergebenden Doppelverhältnisse besitzen die Werte $D_{ik} = \frac{\pi_r}{\pi_s}$ $(r, s = 2, 3, 4)$, wobei je zwei Gegenkanten reziproke Werte zugeordnet werden mögen.*)

Andererseits bilden die vier Ecktransversalen t_i auf der Fläche R ein gewisses Doppelverhältnis $\varDelta_{ik}$ und die vier Nebentransversalen $\overline{t_i}$,

*) Verbindet man daher die hierdurch zugeordneten Punkte der beiden Quadrupel A_i, A_k, T_{lm}, T'_{lm} und A_l, A_m, T_{ik}, T'_{ik}; so erhält man vier Gerade einer Regelschar, die der Fläche 2. Ordnung $c_{ik}x_lx_m = c_{lm}x_ix_k$ angehört. Diese drei Flächen sind die „Gegenflächen" (d. i. Ort der Gegenpunkte) der drei oben erwähnten Flächen C_2, C_3, C_4.

d. i. die vier Ecktransversalen, die der zweiten Regelschar auf der Fläche R angehören, ein zweites Doppelverhältnis $\varDelta'_{ik}$ *).

Dann besteht die Relation:

---

*) Die sechs Werte von $\varDelta_{ik}$ resp. $\varDelta'_{ik}$ sind:

$$\frac{\pi_t - \pi_s}{\pi_t - \pi_r} \text{ resp. } \frac{\pi_t - \pi_s}{\pi_t - \pi_r} \cdot \frac{\pi_r}{\pi_s} \qquad (r, s, t = 2, 3, 4).$$

Mit Hilfe dieser Bemerkung läßt sich die Fläche $R = P$ auch übersichtlich mittels zweier Parameter λ, μ darstellen. Für die Klassenfläche P ergibt sich, für

$$\lambda_{ik} = \lambda_i - \lambda_k, \quad \mu_{ik} = \mu_i - \mu_k:$$

$$\text{(Xa')} \qquad \sigma u_i = \alpha_i(\lambda - \lambda_i)(\mu - \mu_i),$$

$$\varrho c_{ik} = \frac{\lambda_{ik}}{\mu_{lm}}, \quad \frac{\tau}{\alpha_i^2} = c_{ik} c_{il} c_{im} \lambda_{ik} \lambda_{il} \lambda_{im} \mu_{ik} \mu_{il} \mu_{im}$$

$(i, k, l, m$ zyklisch $= 1, 2, 3, 4)$.

Andererseits gilt für die Ordnungsfläche R:

$$\text{(Xa)} \qquad \sigma' \frac{x_i}{a_i} = \begin{vmatrix} \lambda\mu, & \lambda, & \mu, & 1 \\ \lambda_k\mu_k, & \lambda_k, & \mu_k, & 1 \\ \lambda_l\mu_l, & \lambda_l, & \mu_l, & 1 \\ \lambda_m\mu_m, & \lambda_m, & \mu_m, & 1 \end{vmatrix} = (\lambda - \lambda_k)(\mu - \mu_l)\lambda_{il}\mu_{ik} - (\lambda - \lambda_l)(\mu - \mu_k)\lambda_{ik}\mu_{il},$$

$$\varrho c_{ik} = \frac{\lambda_{ik}}{\mu_{lm}}, \quad \tau' a_i^2 = c_{ik} c_{il} c_{im} \lambda_{ik} \lambda_{il} \lambda_{im} \mu_{ik} \mu_{il} \mu_{im},$$

so daß also die a_i^2 den α_i^2 und damit auch die a_i den α_i umgekehrt proportional sind.

Hierbei entsprechen die Geraden t_i den Werten $\mu = \mu_i$ und die Geraden t_i' den Werten $\lambda = \lambda_i$. Die vier Werte λ resp. μ sind nur je an die eine Relation gebunden:

$$\frac{\lambda_{12}\lambda_{34}}{\lambda_{13}\lambda_{24}} = \frac{\pi_4 - \pi_3}{\pi_4 - \pi_2},$$

$$\frac{\mu_{12}\mu_{34}}{\mu_{13}\mu_{24}} = \frac{\pi_4 - \pi_3}{\pi_4 - \pi_2} \cdot \frac{\pi_2}{\pi_3}.$$

Mit Rücksicht auf p. 324 Anm. drücken sich die Doppelverhältnisse

$$\frac{\pi_4 - \pi_3}{\pi_4 - \pi_2}, \quad \frac{\pi_4 - \pi_3}{\pi_4 - \pi_2} \cdot \frac{\pi_2}{\pi_3}$$

mittels der Winkel resp. Kanten des Tetraeders aus, wie folgt:

$$\frac{\pi_4 - \pi_3}{\pi_4 - \pi_2} = \frac{s_{12} s_{34} \cos(k_{12}, k_{34})}{s_{13} s_{42} \cos(k_{13}, k_{42})} = \frac{k_{12} k_{34} \cos(k_{12}, k_{34})}{k_{13} k_{42} \cos(k_{13}, k_{42})},$$

$$\frac{\pi_4 - \pi_3}{\pi_4 - \pi_2} \cdot \frac{\pi_2}{\pi_3} = \frac{\sin 2\gamma_{12} \sin 2\gamma_{34} \cos(k_{12}, k_{34})}{\sin 2\gamma_{13} \sin 2\gamma_{42} \cos(k_{13}, k_{42})},$$

und entsprechend die zugehörigen Doppelverhältnisse.

Noch sei bemerkt, daß die Doppelverhältnisse $\varDelta$, $\varDelta'$ zugleich die der Punktquadrupel sind, die die beiden Geradenscharen der Fläche $R = P$ aus den Tetraederebenen ausschneiden.

$$D_{ik} = \frac{\Delta_{ik}}{\Delta'_{ik}}. \tag{XII}$$

Ferner liegen nach dem Satze der p. 338 die vier Geraden $T_i T_i'$ (wo die T_i' die Spuren der t_i' in den A_i) auf einer weiteren Regelfläche 2. Grades. Deren Schnittpunkte mit den Kanten bilden mit den zugehörigen Ecken wiederum sechs Werte, die Doppelverhältnis-Produkte $\Delta_{ik}\Delta'_{ik}$.

Man kann auch umgekehrt von der Fläche $R = P$ als einer beliebigen, dem Tetraeder umbeschriebenen Fläche 2. Grades ausgehen, dann gibt es zwei zugehörige, dem Tetraeder einbeschriebene Flächen H, H', deren Koeffizienten c_{ik}, c'_{ik} durch übersichtliche Ausdrücke in der Art von den Koeffizienten von R abhängen, daß die c_{ik} den c'_{lm} umgekehrt proportional werden.

Die Ecktransversalen t_i, t_i', die den beiden Regelscharen von R angehören, sind zu den Ebenen A_i konjugiert in bezug auf die ∞^4-Schar von Flächen 2. Klasse Φ resp. Φ':

$$\begin{cases} \Phi \equiv c_{11}u_1^2 + \cdots + c_{44}u_4^2 + 2c_{12}u_1u_2 + \cdots + 2c_{34}u_3u_4 = 0, \\ \Phi' \equiv c'_{11}u_1^2 + \cdots + c'_{44}u_4^2 + 2c'_{12}u_1u_2 + \cdots + 2c'_{34}u_3u_4 = 0, \end{cases} \tag{28}$$

wo die c_{ii}, c'_{ii} willkürlich, und die c_{ik}, c'_{ik} die oben angegebenen Größen sind, die Koordinaten der Spuren T_i, T_i' der t_i, t_i' in den Ebenen A_i.

Unter den Flächen Φ resp. Φ' gibt es eine ∞^1-Schar, die apolar ist zum Flächennetze N: für sie sind die c_{ii} resp. die c'_{ii} einander gleich.

Für die in einen Kegelschnitt ausartenden Flächen Φ resp. Φ' dieser ∞^1-Schar gilt noch der auf p. 337 aufgestellte Satz über die Gegenpunkte L, S, wenn man daselbst den Kugelkreis durch einen beliebigen Kegelschnitt ersetzt.

Durch anderweitige metrische Spezialisierung der untersuchten Konfiguration gelangt man zu bemerkenswerten Winkeleigenschaften des Tetraeders.

Man gehe von der (projektiv verallgemeinerten) Höhenfläche $R = P$ als einer beliebigen, dem Tetraeder umbeschriebenen Fläche 2. Grades aus und spezialisiere diese wieder zu einer Kugel. Dann sagt der Satz über das Doppelverhältnis D aus:

„Legt man in den Ecken eines Tetraeders an die ihm umbeschriebene Kugel (Umkugel) die Tangentialebenen und schneidet jede von ihnen mit den drei in der bez. Ecke zusammenstoßenden Tetraederebenen, so bilden die Spuren der letzteren drei Winkel, die für jede Tetraederebene die nämliche Größe besitzen.“

Denn die Geraden t_i, t_i' des allgemeinen Satzes werden jetzt die durch die Tetraederecken gehenden Minimalgeraden auf der Umkugel und deren mit $\frac{1}{2i}$ multiplizierten Logarithmen der drei wesentlich verschiedenen Werte von $D\left(D,\, 1-D,\, \frac{D}{D-1}\right)$ die bezüglichen Winkel.

Der soeben ausgeführte Satz läßt sich einfacher so aussprechen:

„Beschreibt man einer Kugel ein Tetraeder ein, so schneiden sich die von den Tetraederebenen aus der Kugel ausgeschnittenen Kreise C_1, C_2, C_3, C_4 in drei Paaren gleicher Winkel $(C_i, C_k) = (C_l, C_m)$."

Durch stereographische Projektion der Kugel auf die Ebene ergibt sich der analoge Satz für die Ebene:

„Legt man durch je drei von vier Punkten einer Ebene einen Kreis, so schneiden sich von diesen vier Kreisen je zwei unter demselben Winkel wie die beiden andern."

Unterwirft man endlich diese Figur der Ebene einer geeigneten Inversion, so kommt man auf den elementaren Satz über die Gleichheit der Peripheriewinkel auf demselben Kreisbogen zurück.

Umgekehrt wird man von hier aus nicht nur wiederum mittels Inversion und stereographischer Projektion zu den oben erwähnten Eigenschaften der Kugel zurückgeführt, sondern es scheint dieser Weg auch ein naturgemäßer zu sein, den Satz von der Gleichheit der Peripheriewinkel auf demselben Kreisbogen von der Ebene auf die Kugel zu übertragen. Spricht man die obige Eigenschaft der Kugel dualistisch aus, so gelangt man zu dem zuerst von Bang bemerkten Satze:

„Verbindet man je einen der vier Berührungspunkte einer dem Tetraeder einbeschriebenen Kugel mit den drei Tetraederecken der zugehörigen Berührungsebene, so bilden die Verbindungsgeraden drei Winkel, die für jede der vier Tetraederebenen die nämlichen sind."

Kehrt man zurück zu dem allgemeinen Satz über die Doppelverhältnisse und beschränkt sich auf zwei Gegenkanten des Tetraeders, so reduziert sich der Satz auf eine fundamentale Eigenschaft der Figur, die aus einer beliebigen Fläche 2. Grades F und zwei beliebigen, windschiefen Geraden g, h gebildet wird. Die Geraden g, h schneiden aus F zwei Punktepaare G_1, G_2; H_1, H_2 aus; andererseits gehen durch g, h je zwei Tangentialebenen an F, die h, g in zwei weiteren Punktepaaren H_1', H_2'; G_1', G_2' treffen.

„Dann ist das Doppelverhältnis der beiden Punktepaare $(G_1, G_2; G_1', G_2')$ auf g gleich demjenigen der beiden Punktepaare $(H_1, H_2; H_1', H_2')$ auf h."

Sieht man F als die absolute Fläche der nichteuklidischen Geometrie an, so ergibt sich, daß die unendlich ferne Strecke einer Raumgeraden g von einer anderen Raumgeraden h aus unter demselben

Winkel projiziert wird, wie die unendlich ferne Strecke der letzteren Geraden von der ersteren aus. In dieser Fassung erscheint der in Rede stehende Satz als ein elementarer, auch leicht direkt beweisbarer Satz der nichteuklidischen Geometrie.

Für den oben in projektiver Verallgemeinerung gegebenen Satz hat der Vortragende eine Reihe voneinander unabhängiger Beweise geliefert, unter anderen auch einen solchen, der eine elementare Determinantenidentität als Quelle erscheinen läßt. Von hier aus läßt sich der Satz auch ausdehnen, indem man das durch die Fläche F bestimmte räumliche Polarsystem durch eine allgemeine Korrelation ersetzt.

Es lassen sich ferner für die drei obigen Doppelverhältnisse D, Δ, Δ' algebraische Ausdrücke aufstellen, die simultane Invarianten der Fläche F sowie der beiden Geraden g, h sind.

Den eigentlichen geometrischen Grund des in Rede stehenden Satzes erkennt man aber in der Theorie der eine Fläche 2. Grades invariant lassenden Kollineationen K.

Solcher automorpher Kollineationen K gibt es ∞^6; jede von ihnen ist entweder „von der ersten Art", indem sie beide Geradenscharen der Fläche F miteinander vertauscht, oder aber „von der zweiten Art", indem sie jede der beiden Geradenscharen von F in sich überführt. Soll K indessen außerdem noch zwei beliebige Raumgerade g, h miteinander vertauschen, so kann sie nur von der zweiten Art sein und wird dann zugleich zu einer räumlichen (quaternären) Involution; jeder der zwei Parameter der beiden Geradenscharen auf F erfährt seinerseits eine lineare Substitution, die eine binäre Involution ist. Man erkennt dann unmittelbar, daß gerade zwei Kollineationen der zweiten Art existieren, die das Verlangte leisten.

Damit ist der in Rede stehende Satz von der Gleichheit der beiden, auf g, h entstehenden Doppelverhältnisse nur eine andere Fassung der grundlegenden Tatsache, daß das Doppelverhältnis eine Invariante der Kollineation ist.

Man kann schließlich den soeben skizzierten Zusammenhang zwischen quaternären und binären Involutionen auch von der Theorie der räumlichen Kollineationen aus begründen, vermöge deren sich die Punkte je einer von zwei windschiefen Geraden g, h binär involutorisch entsprechen. Diese Kollineationen erweisen sich als quaternäre Involutionen. Es sind dabei die beiden Hauptfälle zu unterscheiden, daß die beiden Geraden g, h reell oder aber konjugiert komplex sind.

Hinterher fragt man nach allen Flächen 2. Grades F, die vermöge einer solchen Rauminvolution in sich übergehen, und gelangt so zu unserem Hauptsatz wieder zurück.

Die Rechnung läßt sich so führen, daß sie auch bei verschwindender Diskriminante von F gültig bleibt.

Nimmt man dann insbesondere wiederum F als Kugelkreis, so resultiert der Satz der Kinematik:

„Es gibt zwei und nur zwei Bewegungen, nämlich Umwendungen, die zwei beliebig gegebene windschiefe Raumgerade ineinander überführen."

Über algebraische Raumkurven.

Von

K. Rohn aus Dresden.

Das Studium der algebraischen Raumkurven R_n^p von der Ordnung
, und dem Geschlecht p gründet sich am besten auf die Punktgruppen, ie auf einer solchen Kurve existieren. In hervorragendem Maße macht iervon Noether in seiner Arbeit: „Zur Grundlegung der Theorie der lgebraischen Raumkurven, Abh. der Akad. der Wiss. zu Berlin (1882)“ ebrauch. Es empfiehlt sich jedoch in dieser Richtung noch weiter u gehen und auf der R_n^p alle Scharen von Gruppen von in Punkten n Betracht zu ziehen, die von der Gesamtheit der Flächen i. Ord. $i = 1, 2, 3, \cdots$) auf ihr ausgeschnitten werden. In diesen Scharen piegeln sich die Eigenschaften der R_n^p und ihrer Restkurve wieder, o daß ihre Kenntnis die Einordnung der R_n^p in Familien und ihre harakteristischen Merkmale lehrt. Sobald $p > n - 3$ ist, werden die enannten Scharen zum Teil Spezialscharen sein. Es sind nun zwei vesentlich verschiedene Fälle zu unterscheiden. Erstens: Die Flächen . Ord. ($i = 1, 2, 3, \cdots$) schneiden aus der R_n^p Vollscharen aus — nögen das nun Spezialscharen sein oder nicht. Dieses Verhalten tritt ei den meisten Kurvenfamilien ein. Es lassen sich hier alle Scharen nmittelbar angeben und damit auch die charakteristischen Eigenschaften ler betr. Kurvenfamilie. Insbesondere ergibt sich die Bestimmung der onstantenzahl im Anschluß hieran einfach, eine Frage, die bekanntlich esondere Schwierigkeiten macht. Zweitens: Die Flächen i. Ord. chneiden für besondere Werte von i nur Teilscharen aus. Dieses Veralten spricht sich bei der R_n^p in einer besonderen Beziehung zu den lächen $(i + 1)$. Ord. Φ_{i+1} aus, welche die R_n^p ganz enthalten. Liefern ämlich die Flächen $(i + 1)$. Ord. auf der R_n^p eine Vollschar, die lächen i. Ord. aber eine Teilschar, die um 3 kleiner ist als die Vollchar, dann schneidet eine beliebige Ebene die R_n^p in n Punkten und ie Flächen Φ_{i+1} in Kurven φ_{i+1}, die nicht mehr die volle Kurven-

schar durch diese n Punkte bilden, sondern eine um 3 kleinere Schar. Hier treten Schwierigkeiten ein, die sich, wie es scheint, nur mit Hilfe der Restkurve von R_n^p bewältigen lassen. Doch ist die niedrigste Restkurve hier von wesentlich geringerer Ordnung als R_n^p, kann aber reduzibel sein. Der Zusammenhang zwischen den Scharen auf R_n^p und den Scharen auf ihrer Restkurve, den Verfasser in einer kleinen Note in den Ber. der Königl. Sächs. Gesellsch. der Wiss. zu Leipzig (6. Dez. 1897) behandelt hat, führt auch hier zum Ziel. Es ist indessen fraglich, ob sich ein geschlossener Ausdruck für die Konstantenzahl auch hier angeben läßt, wie das im erstgenannten Falle möglich ist. Diese kurzen Notizen mögen genügen, da eine spätere ausführliche Behandlung des Gegenstandes beabsichtigt ist.

Über Isogonalkurven, Äquitangentialkurven und komplexe Zahlen.

Von

G. Scheffers aus Darmstadt.

Der Ausgangspunkt der Betrachtungen, über die ich hier kurz berichten möchte, sind die isogonalen Trajektorien: Liegt eine einfach unendliche Schar von Kurven γ in der Ebene vor, so kann man diejenigen Kurven betrachten, die sie unter einem konstanten Winkel α schneiden. Sie heißen bekanntlich isogonale Trajektorien oder Isogonalkurven. Da der Winkel α noch variieren kann, so ergeben sich so ∞^2 Isogonalkurven. Für derartige Kurvenscharen fand ich vor mehreren Jahren*) einen einfachen Satz, von dem ich nachträglich erfuhr, daß er schon vorher von Herrn Cesàro**) aufgestellt worden war. Faßt man nämlich alle diejenigen Isogonalkurven ins Auge, die durch einen beliebig, aber bestimmt gewählten Punkt P der Ebene gehen, so findet man, daß sie in P solche Krümmungskreise haben, die ein Büschel bilden, die also außer P noch einen zweiten Punkt P' gemein haben. Als ich die Gleichungen, die die Koordinaten des Punktes P' durch die des Punktes P ausdrücken, näher betrachtete, bemerkte ich ziemlich zufällig, daß sie eine merkwürdige Eigenschaft haben, daß sie nämlich ihre charakteristische Form beibehalten, wenn man sie nach den Koordinaten des ursprünglich gewählten Punktes P auflöst. Daraus ergab sich ein neuer Satz. Er lautet so:

Zu jeder Schar von ∞^2 Isogonalkurven in der Ebene gibt es eine ganz bestimmte zweite Schar von ∞^2 Isogonalkurven in der Ebene. Die Beziehung zwischen beiden Scharen ist vollständig wechselseitig und besteht in folgendem: Alle die-

---

*) Siehe Leipziger Berichte 1898, S. 216—294.

**) „Lezioni di geometria intrinseca“, Neapel 1896, deutsche Ausgabe „Vorlesungen über natürliche Geometrie“, besorgt von Kowalewski, Leipzig 1901, S. 148.

jenigen Kurven der ersten Schar, die durch einen beliebig gewählten Punkt P gehen, haben dort Krümmungskreise, die noch einen zweiten Punkt P' — nach dem Cesàroschen Satze — gemein haben, und in diesem zweiten Punkte P' sind diese selben Kreise die Krümmungskreise derjenigen Kurven der zweiten Schar, die durch P' gehen.

Da ich diesen Satz einem analytischen Zufall verdankte, befriedigte mich sein Beweis nicht. Den inneren Grund dafür erkannte ich vielmehr erst, als ich die Betrachtung in enge Beziehung zu gewissen leicht definierbaren Berührungstransformationen brachte. Wenn nämlich eine einfach unendliche Schar von Kurven γ gegeben ist, so geht durch jeden Punkt P der Ebene eine Kurve γ. Sie hat in P eine bestimmte Tangente g. Ich betrachtete nun diejenige Berührungstransformation $\mathfrak{A}_0$, die jeden Punkt P in die zugehörige Tangente g verwandelt. Sie steht natürlich in engem Zusammenhang mit den Kurven γ, da sie jedes Linienelement jeder dieser Kurven in Ruhe läßt. Ich drehte nun jedes Linienelement der Schar γ um seinen Punkt P um ein und denselben konstanten Winkel α, wodurch jede Gerade g in eine gedrehte Gerade g_α überging. Alsdann betrachtete ich diejenige Berührungstransformation $\mathfrak{A}_\alpha$, die jeden Punkt P in die durch ihn gehende, durch Drehung erhaltene Gerade g_α verwandelt. Diese Berührungstransformation $\mathfrak{A}_\alpha$ steht in derselben engen Beziehung, in der $\mathfrak{A}_0$ zu den Kurven γ steht, zu denjenigen Kurven, die alle Kurven γ unter dem Winkel α schneiden. Da der Winkel α variieren kann, so betrachtete ich also eine Schar von ∞^1 Berührungstransformationen $\mathfrak{A}_\alpha$. Jede führt jeden Punkt in eine durch ihn gehende Gerade über. Man erkennt nun leicht auf synthetischem Wege, wie die Linienelemente irgend eines Punktes bei einer dieser Berührungstransformationen in die einer Geraden übergehen. Daraus ergab sich alsdann von selbst zunächst der Cesàrosche und alsdann mein neuer Satz. Ich gehe auf diese Überlegungen hier nicht näher ein, weil ich sie kürzlich in einer Arbeit schon veröffentlicht habe.*)

Weshalb ich von diesen Dingen spreche, das hat einen anderen Grund: Die Untersuchung der erwähnten Berührungstransformationen $\mathfrak{A}_\alpha$ führte mich nämlich dazu, eine zweite in gewissem Sinne hierzu dualistische Reihe von Überlegungen anzustellen; und dies ergab eine Reihe von interessanten Analogien:

---

*) Siehe Leipziger Berichte 1904, S. 105—116. Dort ist auf S. 113 eine kleine Zwischenbetrachtung übersehen worden, die ich in einer bald erscheinenden ausführlichen Darstellung angeben werde.

Gehe ich zunächst wieder von den Kurven einer einfach unend-ichen Schar γ aus, so wird jede Gerade g der Ebene eine Kurve γ be-ühren. Ist P der Berührungspunkt, so kann ich diejenige Berührungs-ransformation $\mathfrak{B}_0$ betrachten, die jede Gerade g in den zugehörigen Berührungspunkt P verwandelt. Sie ist natürlich invers zu der zuerst rwähnten Berührungstransformation $\mathfrak{A}_0$. Während ich nun aber bei en ursprünglichen Betrachtungen jedes Linienelement der Kurven γ m seinen Punkt um einen konstanten Winkel α drehte, verfuhr ich ier anders: Ich verschob jedes Linienelement der Kurven γ auf seiner eraden g um eine konstante Strecke a, wodurch jeder Berührungs-unkt P längs seiner Tangente g um die konstante Strecke a nach inem neuen Punkte P_a gebracht wird. Alsdann definierte ich als eine Berührungstransformation $\mathfrak{B}_a$ diejenige, die jede Gerade g der Ebene n den durch Verschiebung auf ihr erhaltenen Punkt P_a verwandelt. Da die Strecke a variieren kann, ergeben sich so ∞^1 Berührungstrans-ormationen $\mathfrak{B}_a$. Indem ich diese synthetisch gerade so untersuchte vie die vorhin genannten Berührungstransformationen $\mathfrak{A}_\alpha$, gelangte ich u Sätzen analog den vorhin erwähnten. Sie beziehen sich auf eine eue Art von Scharen von ∞^2 Kurven. Wenn man nämlich jedes Element der Kurven γ auf seiner Geraden um dieselbe Strecke a ver-chiebt, so gehen die Elemente in die einer neuen Kurvenschar über. Die Kurven dieser neuen Schar haben die folgende charakteristische Eigenschaft: Jede solche Kurve hat mit allen ∞^1 Kurven γ Tangenten on der konstanten Länge a gemein. Eine Kurve, die so beschaffen st, daß die ∞^1 Tangenten, die sie mit gegebenen ∞^1 Kurven γ ge-nein hat, sämtlich dieselbe Länge haben — gemessen von Berührungs-unkt zu Berührungspunkt —, will ich eine Äquitangentialkurve ler Schar γ nennen. (Diese Bezeichnung kommt allerdings in der nathematischen Literatur schon in einer anderen, aber viel einfacheren Bedeutung vor.) Es gibt ihrer unendlich viele, und da die Strecke a variieren kann, so gelangt man zu ∞^2 Äquitangentialkurven der ge-gebenen Schar γ.

Für solche Kurven nun ergaben sich analoge Sätze wie für die sogonalkurven. Ich fasse das Ergebnis sogleich wie folgt zusammen:

Zu jeder Schar von ∞^2 Äquitangentialkurven in der Ebene gibt es eine ganz bestimmte zweite Schar von ∞^2 Äquitan-gentialkurven in der Ebene. Die Beziehung zwischen beiden Scharen ist vollständig wechselseitig und besteht in folgen-lem: Alle diejenigen Kurven der ersten Schar, die eine be-iebig gewählte Gerade g berühren, haben in ihren Berüh-rungspunkten Krümmungskreise, die sämtlich noch eine zweite Gerade g' berühren, und in den Berührungspunkten mit g' sind diese selben Kreise zugleich die Krümmungskreise derjenigen Kurven der zweiten Schar, die die Gerade g' berühren.

Die Analogie geht aber noch weiter:

Zu den Isogonalkurven stehen die konformen Abbildungen in engster Beziehung. In der Tat: Eine konforme Abbildung bildet ja jeden Punkt als einen Punkt so ab, daß jeder Winkel dabei in wahrer Größe erscheint, also ungeändert bleibt. Daraus erhellt, daß eine Schar von Isogonalkurven durch konforme Abbildung immer wieder in eine Schar von Isogonalkurven übergeht. Was gibt es nun, das hierzu bei der zweiten Betrachtungsreihe, bei den Äquitangentialkurven, analog ist? Hier tritt die Gerade statt des Punktes in den Vordergrund, und an die Stelle des Winkels tritt hier die Strecke. Ich fragte daher nach denjenigen Berührungstransformationen der Ebene, die jede Gerade in eine Gerade und jede Strecke in eine gleich lange Strecke verwandeln. Wenn nämlich Gerade in Gerade übergeht, gehen zwei Linienelemente einer Geraden wieder in zwei Linienelemente einer Geraden über. Ich verlangte also, daß die Entfernung der Punkte der beiden ursprünglichen Linienelemente gleich der Entfernung der Punkte der beiden neuen Linienelemente sei. Eine derartige Berührungstransformation verwandelt irgend zwei Kurven mit einer gemeinsamen Tangente wieder in zwei Kurven mit einer gemeinsamen Tangente, und zwar ist die Länge der ursprünglichen Tangente gleich der Länge der neuen Tangente. Es erhellt also, daß derartige Berührungstransformationen, die ich äquilonge Transformationen nenne, jede Schar von Äquitangentialkurven wieder in eine Schar von Äquitangentialkurven verwandeln.

Es gibt in der Tat derartige Berührungstransformationen. Man kann sie leicht aufstellen, wobei man ohne Mühe erkennt, daß es sich empfiehlt, jene Größen als Linienkoordinaten u, v zu benutzen, die in der Hesseschen Normalform der Gleichung einer Geraden auftreten. Ich wähle also einen Anfangspunkt O und eine Anfangsrichtung in der Ebene und lege eine beliebige Gerade g dadurch fest, daß ich von O das Lot auf sie fälle. Alsdann sei u der Winkel des Lotes mit der Anfangsrichtung und v die Länge des Lotes. Bei beiden Bestimmungsstücken wäre noch eine Vorzeichenbestimmung zu treffen, worauf ich hier nicht eingehen will. In diesen Linienkoordinaten u, v lauten nun die Gleichungen einer äquilongen Transformation einfach so:

$$(1) \qquad u' = \varphi(u), \qquad v' = \varphi'(u)v + \psi(u),$$

wo φ und ψ irgendwie zu wählende Funktionen von u allein bedeuten. Diese Gleichungen führen jede Gerade (u, v) in eine neue Gerade (u', v') über, und zwar ist die Transformation so beschaffen, daß sie jede Strecke in eine gleichlange Strecke verwandelt.

Alle äquilongen Transformationen bilden wie alle konformen Abbildungen eine Gruppe und zwar eine unendliche Gruppe. Wir kommen also zur äquilongen Gruppe als Analogon der konformen Gruppe.

Die Analogie geht nun noch weiter, und indem ich dies auseinandersetze, komme ich zu dem interessantesten Gesichtspunkte:

Es ist Ihnen geläufig, in wie engem Zusammenhange die konforme Gruppe mit den komplexen Zahlen $x + iy$ steht. Mittels der komplexen Zahlen läßt sich ja jede konforme Abbildung durch eine einzige Gleichung ausdrücken:

$$x' + iy' = f(x + iy), \tag{2}$$

wo f irgendeine analytische Funktion von $x + iy$ bedeutet. Wenn x, y gewöhnliche rechtwinklige Punktkoordinaten sind und wenn wir den Punkt (x, y) als Träger der komplexen Zahl $x + iy$ betrachten, so ist jedem Punkte der Ebene eine komplexe Zahl zugeordnet. Die Gleichung (2) ordnet jeder Zahl eine neue, also jedem Punkte der Ebene einen neuen Punkt zu, und dies ist bekanntlich nichts anderes als eine konforme Abbildung.

Die Frage ist nun die, ob sich auch für die äquilonge Gruppe eine analoge Darstellung angeben läßt. Dies ist in der Tat der Fall:

Es gibt außer den gewöhnlichen komplexen Zahlen $x + iy$, die aus den beiden Einheiten 1 und i zusammengesetzt sind, bekanntlich noch andere Zahlen, die den gewöhnlichen Rechenregeln der Addition und Multiplikation folgen und die ebenfalls aus zwei Einheiten zusammengesetzt sind. Übrigens ist hier das Gesetz der Kommutation bei der Multiplikation eine Folge der übrigen. Es ist nun längst bewiesen worden, daß alle Zahlensysteme in zwei Einheiten durch passende Auswahl der Einheiten auf einen von gewissen zwei und nur zwei Typen zurückgeführt werden können.*) Der eine Typus ist der der gewöhnlichen komplexen Zahlen, gebildet aus den beiden Einheiten 1 und i, wo $i^2 = -1$ ist. Der andere Typus besteht aus denjenigen Zahlen, die aus 1 und einer Einheit j gebildet

*) Um einem naheliegenden Einwand von vornherein zu begegnen, sei ausdrücklich hervorgehoben, daß im Text von den „Typen", nicht aber von den „Gestalten" der Systeme die Rede ist. Vgl. Enzykl. der math. Wissensch. I A 4, S. 166. Unsere Betrachtungen gelten auch für die imaginären Gebilde der Ebene.

sind, wo $j^2 = 0$ ist. Es lag nun die Vermutung nahe, dieses zweite Zahlensystem, das allein in zwei Einheiten — abgesehen von dem gewöhnlichen — vorhanden ist, für die äquilonge Gruppe zu verwerten. Ich habe in früheren Arbeiten allgemein die Frage behandelt, ob es innerhalb eines höheren Zahlensystems „analytische" Funktionen gibt. Es ist der Fall, wenn das System auch kommutativ ist, was gerade hier zutrifft. Man kann daher — und zwar ohne Mühe — die „analytischen" Funktionen $f(u+jv)$ der Veränderlichen $u+jv$ innerhalb dieses zweiten Zahlensystems berechnen. Und nun zeigt sich: Wenn wir allgemein eine Gleichung ansetzen von der Form:

$$u' + jv' = f(u + jv), \tag{3}$$

wo f eine „analytische" Funktion von $u+jv$ sei, so ist sie in der Tat eine Darstellung einer äquilongen Transformation. Der Unterschied gegenüber der Darstellung (2) einer konformen Transformation ist folgender: Bei der konformen Gruppe sind die Koeffizienten x, y der Zahl $x+iy$ als rechtwinklige Punktkoordinaten zu deuten, und alsdann ist der Punkt (x, y) der Träger der komplexen Zahl $x+iy$. Hier, bei der äquilongen Gruppe, sind die Koeffizienten u, v der Zahl $u+jv$ als die vorhin definierten Hesseschen Linienkoordinaten u, v zu deuten, und alsdann ist die Gerade (u, v) der Träger der komplexen Zahl $u+jv$. Die Gleichung (3) ordnet jeder Zahl $u+jv$ eine neue Zahl $u'+jv'$ und infolgedessen jeder Geraden (u, v) eine neue Gerade (u', v') zu, und diese Zuordnung ist nichts anderes als eine äquilonge Berührungstransformation.

Wie Sie sehen, ergibt sich auf einem naturgemäßen Wege, ohne Zwang, vielmehr in einer Reihe von auffallenden Analogien eine einfache geometrische Deutung des einzigen komplexen Zahlensystems, das in zwei Einheiten außer dem gewöhnlichen komplexen Systeme existiert. Dieses zweite System spielt also für die äquilongen Transformationen und die Äquitangentialkurven dieselbe wichtige Rolle, wie es das gewöhnliche System für die konformen Transformationen und die Isogonalkurven tut.

Mit der Skizzierung meiner wesentlichsten Ergebnisse bin ich fertig; ich darf aber vielleicht noch folgende Bemerkung anknüpfen:

Die Definition der Isogonalkurven leidet ebenso wie die der Äquitangentialkurven daran, daß sie von vornherein eine in der Schar von ∞^2 Kurven enthaltene Schar von ∞^1 Kurven γ auszeichnet, die tatsächlich keine ausgezeichnete Rolle spielt.

Statt nämlich z. B. die Isogonalkurven aus den ursprünglichen Kurven γ abzuleiten, kann man sie ebenso gut aus solchen ∞^1 Kurven ıbleiten, die alle Kurven γ unter ein und demselben Winkel α schneiden. Es ist daher erwünscht, für die Isogonalkurven ebenso wie für die Äquitangentialkurven eine charakteristische Eigenschaft zu kennen, bei leren Formulierung keine Kurven der Schar bevorzugt werden. Bei len Isogonalkurven kann dies so geschehen: Wählen wir eine Kurve γ_0 der Schar γ und zwei beliebige isogonale Trajektorien aus, so bilden ılle drei ein Dreieck, bei dem wir durch die jener Kurve γ_0 gegenüberliegende Ecke noch die hindurchgehende Kurve γ ziehen wollen. Aus einigen Winkelgleichheiten, die aus dem Begriffe der isogonalen Trajektorien folgen, ergibt sich in dieser Figur sofort, daß die Summe ler Winkel des Kurvendreiecks zwei Rechte beträgt. Es gilt aber ıuch, wie sich leicht beweisen läßt, der umgekehrte Satz, so daß man ie Isogonalkurven so definieren kann:

Eine Schar von ∞^2 Kurven in der Ebene ist dann und nur lann eine Schar von Isogonalkurven, wenn in jedem Dreieck, las irgend drei Kurven der Schar miteinander bilden, die Winkelsumme zwei Rechte beträgt.

Scharen von Isogonalkurven haben also als charakteristische Eigenchaft jene Eigenschaft, die der Schar aller Geraden der Ebene zuommt. Die Gesamtheit aller Geraden selbst bildet eine in gewissem Sinne triviale Schar von Isogonalkurven.

Für Äquitangentialkurven gilt etwas Analoges:

Eine Schar von ∞^2 Kurven in der Ebene ist dann und ıur dann eine Schar von Äquitangentialkurven, wenn bei edem Dreieck, das irgend drei Kurven der Schar miteinander ıilden, die Summe der drei gemeinsamen geradlinigen Tanentenstücke gleich Null ist.

Hierbei hat man natürlich die Fortschreitungssinne der Kurven zu erücksichtigen und das Dreieck, infolge dessen auch die Tangenten, ı einem Sinne zu durchlaufen, wodurch sich eben die drei Tangententücke in ihrer Summe gegenseitig aufheben. Ich kann jedoch hier uf diese Einzelheiten nicht genauer eingehen.

Es ist vielleicht nützlich, einige Beispiele von Scharen von ıquitangentialkurven anzugeben: Wählt man als Kurven γ alle ∞^1 Kreise, die eine Gerade in einem bestimmten Punkte berühren, o erkennt man sofort, daß jeder Kreis, der die Gerade irgendwo berührt, eine Äquitangentialkurve ist. Alle ∞^2 Kreise also, die eine erade berühren, bilden eine Schar von Äquitangentialurven. Es ist dies die einfachste und in gewissem Sinne eine triiale Schar von Äquitangentialkurven.

Wählen wir als die ∞^1 Kurven γ alle konzentrischen Kreise um

O, so hat eine Äquitangentialkurve mit der konstanten Tangentenlänge a augenscheinlich folgende Eigenschaft: Alle ihre Normalen haben von O den Abstand a, d. h. die Kurve ist eine Evolvente des Kreises um O mit dem Radius a. Demnach bilden alle ∞^2 Kreisevolventen aller ∞^1 konzentrischen Kreise eine Schar von Äquitangentialkurven.

Ein drittes Beispiel endlich finden wir, wenn wir die ∞^1 Kurven γ sich auf die ∞^1 Punkte einer Kurve δ reduzieren lassen. Jede Äquitangentialkurve muß hier Tangenten haben, deren Länge, gemessen bis zum Schnitt mit δ, konstant ist, d. h.: Alle ∞^2 Traktrizen ein und derselben Direktrixkurve δ bilden eine Schar von Äquitangentialkurven.

Schon diese einfachen Beispiele zeigen, daß der Begriff der Äquitangentialkurven für wichtige Kurvenklassen eine besondere Bedeutung hat.

Struktur der perfekten Mengen.

Von

A. SCHÖNFLIES aus Königsberg.

Der Vortrag ist in ausführlicherer Darstellung in den Mathematischen Annalen, Band 59, Seite 129 erschienen.

Zur Differentialgeometrie der Linienkomplexe.

Von

K. Zindler aus Innsbruck.

Wir wollen uns damit befassen, von der Umgebung eines regulären Strahles eines Linienkomplexes eine anschauliche Vorstellung zu gewinnen; eine solche hat man bisher nur von der Verteilung der schneidenden Nachbarstrahlen. Zunächst wollen wir die „Fortschreitungsrichtung im Linienraum" definieren und durch Koordinaten festlegen. Wenn der Strahl irgendwie durch (sagen wir der Einfachheit halber vier von einander unabhängige) Koordinaten $u_1, \cdots, u_4$ gegeben ist, so ist durch die Inkremente du_n, auf deren Verhältnisse es nur ankommt, eine von diesem Strahl ausgehende Richtung bestimmt. Es kommt uns aber hier nicht auf diesen allgemeinen Richtungsbegriff an, der sich in einer beliebigen Mannigfaltigkeit aufstellen läßt, sondern darauf, die Richtungen im Linienraum in geometrisch unmittelbar anschaulicher Weise zu definieren. Hierzu dient folgender Ausgangspunkt: Analog wie im Punktraum alle Kurven, die sich in einem Punkte berühren, daselbst dieselbe Richtung haben, sagen wir: Alle Regelflächen, die sich längs einer ganzen Erzeugenden berühren, sollen in ihr dieselbe Richtung haben.

Zur Untersuchung der metrischen Eigenschaften der Umgebung eines Strahles ist folgendes Koordinatensystem nützlich: Wir wählen einen festen Strahl als „Achse" $\mathfrak{A}$, auf ihr einen festen Punkt O als „Ursprung" und durch $\mathfrak{A}$ eine feste Ebene ε, die „Ausgangsebene". Der kürzeste Abstand einer beliebigen Geraden g von der Achse sei NG, wobei N auf $\mathfrak{A}$ liege. Als die vier Koordinaten von g wählen wir nun:

die Strecken $NG = a$ und $ON = z$,

den Winkel α, den NG mit ε bildet,

den Winkel ω, den g mit $\mathfrak{A}$ bildet.

Wenn nun zwei durch $\mathfrak{A}$ gehende Regelflächen sich längs $\mathfrak{A}$ berühren sollen, so ist dazu notwendig und hinreichend, daß die Zentralpunkte und die Zentralebenen zusammenfallen und daß die Verteilungsparameter P gleich sind. Nun ist

$$P = \lim \frac{a}{\omega},$$

während der Zentralpunkt unmittelbar durch $\lim z$ und die Zentralebene durch $\lim \alpha$ bestimmt ist. Während wir also

$$a,\ z,\ \alpha,\ \omega$$

als Linienkoordinaten wählten, sind

(1) $$z,\ \alpha,\ P$$

als die drei „Koordinaten einer Fortschreitungsrichtung", die von $\mathfrak{A}$ ausgeht, brauchbar. Bilden wir mit $P = \text{const.}$ von $\mathfrak{A}$ ausgehend eine Regelfläche, so ist diese, wenn auch z und α konstant bleiben, wegen

$$a = P\omega$$

eine gewöhnliche gerade Schraubenfläche, die als Annäherung jeder Regelfläche der Richtung z, α, P im selben Sinne gelten kann, wie die Tangente als Annäherung einer Kurve und Repräsentant ihrer Richtung. Ferner kann diese Schraubenfläche durch einen einzigen Nachbarstrahl bestimmt werden, der also auch als Repräsentant der betreffenden Fortschreitungsrichtung betrachtet werden kann.

Ist nun die Umgebung eines Komplexstrahles zu untersuchen, so machen wir denselben zur Achse $\mathfrak{A}$ unseres Koordinatensystems. Dann sind von $\mathfrak{A}$ aus im Komplex nur mehr ∞^2 Richtungen enthalten; es muß also zwischen den drei Richtungskoordinaten eine Relation bestehen. Diese läßt sich, indem man das Koordinatensystem möglichst ausgezeichnet wählt, auf die einfache Form bringen:

(2) $$P = z \operatorname{tg} \alpha - m,$$

wobei m eine Konstante ist. Aus dieser Gleichung, die mit Hilfe der berührenden Strahlengewinde bewiesen werden kann, muß man alle Eigenschaften der Umgebung eines Komplexstrahles entnehmen können, die von keinen höheren als ersten Ableitungen abhängen, sagen wir kurz: alle „Eigenschaften erster Ordnung." Wir suchen zunächst alle Regelflächen heraus, die in A eine Kuspidalerzeugende haben, setzen also $P = 0$; dann stellt die Gleichung

$$z \operatorname{tg} \alpha = m$$

die wohlbekannte Korrelation dar, die den Punkten auf $\mathfrak{A}$ die Berührungsebenen ihrer Komplexkegel zuordnet.

Um auch für die nichtschneidenden Nachbarstrahlen von $\mathfrak{A}$ eine anschauliche Anordnung zu treffen, wählen wir für jede durch (2) bestimmte Richtung einen Repräsentanten, dessen kürzester Abstand von $\mathfrak{A}$ eine feste willkürlich gewählte Größe a hat, mit anderen Worten, wir wählen die Repräsentanten unter den Tangenten eines festen Zylinders C mit der Achse $\mathfrak{A}$. Ferner fassen wir alle Richtungen zusammen, für die P denselben konstanten Wert hat. Dann können wir aus

$$z \operatorname{tg} \alpha = m + P = \text{const.} = c \tag{3}$$

die Lage des Berührungspunktes G eines Nachbarstrahles mit C entnehmen. Denn z und α können als Koordinaten von G auf C aufgefaßt werden. Die Punkte G bilden eine Kurve vierter Ordnung C_4 mit zwei diametral gegenüberliegenden Asymptoten; sie kann wegen $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$ als Schnitt von C mit dem gleichseitigen Paraboloid

$$yz = cx$$

erhalten werden und geht durch Abwicklung von C in die bekannte ebene Kurve $z = c \cot \alpha$ über. Bewegen wir nun einen Strahl so, daß er stets C in einem Punkte von C_4 berührt und stets denselben Winkel

$$\omega = \frac{a}{P}$$

mit $\mathfrak{A}$ bildet, so erhalten wir ∞^1 Strahlen, die alle dem Komplex angehörenden Richtungen mit dem Parameter P repräsentieren. Für die ∞^1 Werte P erhalten wir ∞^1 Kurven C_4 und hiermit alle ∞^2 Richtungen des Komplexes. Alle diese Kurven gehen übrigens aus einer derselben hervor, indem man die Abstände aller Punkte von der XY-Ebene im selben Verhältnis ändert. Je nach dem Vorzeichen von m teilen sich die Umgebungen der regulären Strahlen aller Komplexe in zwei Klassen; die Umgebungen aller Strahlen derselben Klasse sind untereinander im selben Sinne ähnlich, wie man bei der konformen Abbildung von Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen spricht.

In einer Kongruenz sind von einem Strahl aus nur ∞^1 Richtungen enthalten. Es müssen also zwischen den drei Richtungskoordinaten (1) zwei Relationen bestehen. Die eine davon, die z als Funktion von α gibt, ist schon lange bekannt, es ist die Hamiltonsche Gleichung; die andere (P als Funktion von α) scheint bisher noch nicht aufgestellt worden zu sein, ist aber ebenso einfach. Ich muß hier jedoch (sowie auch wegen der Beweise einiger früheren Ergebnisse) auf den in Vorbereitung begriffenen zweiten Band meiner Liniengeometrie (Sammlung Schubert bei Göschen, Leipzig) verweisen.

Die Richtungen im Linienraume wurden, nachdem Klein auf diesen Begriff hingewiesen hatte (Math. Ann. Bd. V), namentlich von Königs in seiner Thèse (Paris, 1882) untersucht, wo sich auch beiläufig die Gleichung (2) ohne weitere Diskussion findet; aber dieser operiert vorzugsweise mit den äquivalenten Korrelationen und verfolgt seine Untersuchungen nicht bis zu so anschaulichen Ergebnissen.

The general projective theory of space curves and ruled surfaces.

Von

E. Wilczynski aus Berkeley.

It is my purpose in this paper, to give a brief account of the ıvestigations which I have been carrying on for the last few years. 'rojective geometry has, on the whole, heretofore confined itself to he consideration of algebraic configurations. On the other hand, he general theory of surfaces, congruences, etc., generally known as ifferential geometry, has been concerned almost exclusively with ıetrical properties. The general character of my own investigations perhaps sufficiently indicated by describing them as belonging to n intermediate domain. The properties, upon which attention is fixed, re projective properties. But the methods, essentially connected with he theory of invariants of linear differential equations, apply to the ıost general configurations of the class considered, and are not conned to the algebraic cases. These general ideas I have applied in etail to the theory of ruled surfaces and space curves. The latter pplication is one in which I have been able to make use of some apers of Halphen, whose geometrical aspect has never been properly ppreciated. It appears, in fact, that a clear comprehension of the heory of space curves from this point of view is not possible without previously developed theory of ruled surfaces. I shall begin, thereore, with the theory of ruled surfaces, and give only a very brief inication of the theory of space curves. My papers on this subject are o be found in the Transactions of the American Mathematical ociety. Before long I hope to be able to present the matter in the ıore satisfactory form of a small volume, which will be completed ong before it would have been, had it not been for the generous upport of the Carnegie Institution of Washington.

§ 1. Consider a system of differential equations, of the form

$$\text{(1)}\qquad \begin{aligned} y'' + p_{11}y' + p_{12}z' + q_{11}y + q_{12}z &= 0, \\ z'' + p_{21}y' + p_{22}z' + q_{21}y + q_{22}z &= 0. \end{aligned}$$

A transformation of the form

$$\text{(2)}\qquad \eta = \alpha y + \beta z, \quad \zeta = \gamma y + \delta z, \quad \xi = f(x),$$

where α, β, γ, δ, f are arbitrary functions of x, converts it into another system of the same form. A function of the coefficients of (1) and of their derivatives, which has the same value as the corresponding function formed for the transformed system, is called an invariant. Covariants are invariant functions which contain y, z, y', z' as well as the coefficients of (1).

The most important invariants and covariants are formed in the following manner. Put

$$\text{(3)}\qquad \begin{aligned} u_{11} &= 2p_{11}' - 4q_{11} + p_{11}^2 + p_{12}p_{21}, \\ u_{12} &= 2p_{12}' - 4q_{12} + p_{12}(p_{11} + p_{22}), \\ u_{21} &= 2p_{21}' - 4q_{21} + p_{21}(p_{11} + p_{22}), \\ u_{22} &= 2p_{22}' - 4q_{22} + p_{22}^2 + p_{12}p_{21}, \end{aligned}$$

and

$$\text{(4)}\qquad \begin{aligned} v_{11} &= 2u_{11}' + p_{12}u_{21} - p_{21}u_{12}, \\ v_{12} &= 2u_{12}' + (p_{11} - p_{22})u_{12} - p_{12}(u_{11} - u_{22}), \\ v_{21} &= 2u_{21}' - (p_{11} - p_{22})u_{21} + p_{21}(u_{11} - u_{22}), \\ v_{22} &= 2u_{22}' - p_{12}u_{21} + p_{21}u_{12}, \end{aligned}$$

and imagine a third set of four quantities w_{ik}, formed from v_{ik} and p_{ik} in the same way as the quantities v_{ik} are formed from u_{ik} and p_{ik}. Then we can easily write down the expressions for the invariants, viz.:

$$\text{(5)}\qquad \begin{aligned} \theta_4 &= (u_{11} - u_{22})^2 + 4u_{12}u_{21}, \\ \theta_6 &= 2(u_{11} + u_{22})\theta_4 - \tfrac{5}{4}[(v_{11} - v_{22})^2 + 4v_{12}v_{21}] + (u_{11} - u_{22})(w_{11} - w_{22}) \\ &\qquad + 2(w_{12}u_{21} + w_{21}u_{12}), \\ \theta_{10} &= (u_{12}v_{21} - u_{21}v_{12})^2 - [(u_{11} - u_{22})v_{12} - (v_{11} - v_{22})u_{12}][(u_{11} - u_{22})v_{21} \\ &\qquad - (v_{11} - v_{22})u_{21}], \end{aligned}$$

and

$$\text{(6)}\qquad \theta_9 = \Delta = \begin{vmatrix} u_{11} - u_{22} & u_{12} & u_{21} \\ v_{11} - v_{22} & v_{12} & v_{21} \\ w_{11} - w_{22} & w_{12} & w_{21} \end{vmatrix}.$$

To express the covariants in a simple manner, we write

$$\text{(7)}\qquad \varrho = 2y' + p_{11}y + p_{12}z, \quad \sigma = 2z' + p_{21}y + p_{22}z,$$

whence we obtain the following covariants:

$$C_2 = u_{12} z^2 - u_{21} y^2 + (u_{11} - u_{22}) y z,$$
$$C_5 = [(u_{11} - u_{22}) v_{12} - (v_{11} - v_{22}) u_{12}] z^2 + [(u_{11} - u_{22}) v_{21} - (v_{11} - v_{22}) u_{21}] y^2 + 2(u_{12} v_{21} - u_{21} v_{12}) y z,$$

(8) $C_1 = z\varrho - y\sigma,$

$$C_3 = \begin{vmatrix} 2(u_{11} - u_{22})\varrho + 4u_{12}\sigma + \frac{1}{2}(v_{11} - v_{22}) y + v_{12} z & y \\ 4u_{21}\varrho - 2(u_{11} - u_{22})\sigma + v_{21} y - \frac{1}{2}(v_{11} - v_{22}) z & z \end{vmatrix}.$$

The indices in (5), (6) and (8) indicate the weight of the invariant or covariant considered, a notion which we need not explain for our present purpose.

If (y_k, z_k) for $k = 1, 2, 3, 4$ are four pairs of functions satisfying (1), and for which the determinant

$$D = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & y_1' & z_1' \\ y_2 & z_2 & y_2' & z_2' \\ y_3 & z_3 & y_3' & z_3' \\ y_4 & z_4 & y_4' & z_4' \end{vmatrix} \tag{9}$$

does not vanish, the most general solutions of (1) are given by

$$y = \sum_{k=1}^{4} c_k y_k, \qquad z = \sum_{k=1}^{4} c_k z_k,$$

with four arbitrary constants $c_1, \cdots, c_4$.

Let $y_1, \cdots, y_4$ be interpreted as the homogeneous coordinates of a point P_y, $z_1, \cdots, z_4$ as the coordinates of another point P_z. As x changes, these points describe two curves C_y and C_z. Let L_{yz} or g be the line joining P_y to P_z. It gives rise to a ruled surface S. Any ruled surface may be studied in this way with any two curves upon it, provided that it be not developable. The developable surfaces are excluded by the condition $D \neq 0$.

The part which the transformation (2) plays in this theory is now quite obvious. The points P_y and P_z are changed by it into two other points P_η and P_ζ of g, i. e. the curves C_y and C_z on S are converted into any two others C_η and C_ζ, while the parameter x is, at the same time, transformed in an arbitrary manner.

Since the coefficients p_{ik} and q_{ik} are invariant under projective transformations, the invariants, which we have defined above, will express by their vanishing projective properties of the ruled surface S. Thus, for example, if $\Delta = 0$, S belongs to a linear complex.

It is possible to characterize the important curves of the ruled surface by very simple conditions. For instance, if $p_{12} = 0$, C_y is an asymptotic curve. If $u_{12} = 0$, C_y is one branch of the flecnode curve (curve in each of whose points a tangent may be drawn to S having four consecutive points in common with it). If $u_{21} = 0$, C_z is a branch of the flecnode curve. If $\theta_4 = 0$, the two branches of the flecnode curve coincide. In general the two factors of the covariant C_2 give the flecnodes of g. The two factors of C_5 give the complex points of g. These points may be defined as follows. Five consecutive generators of S determine its osculating linear complex. Now, to any point P of g there corresponds a plane in this linear complex. Moreover this plane contains g. There also corresponds to P another plane through g, namely that which is tangent to S at P. There will be, in general, two points on g for which these two planes will coincide. These are the complex points, and are determined by the covariant C_5. We find moreover, that on every generator the flecnodes and the complex points form a harmonic group.

The covariant C_1 gives rise to considerations of the greatest interest. By means of (7) we obtain two further points P_ϱ and P_σ, such that the skew quadrilateral $P_y P_\varrho P_\sigma P_z$ is situated upon the hyperboloid H which osculates S along g. $P_\varrho P_\sigma$ is therefore a generator of H of the same kind as g. If the independent variable be transformed by putting $\xi = \xi(x)$, ϱ and σ are changed into

$$\bar{\varrho} = \frac{1}{\xi'}(\varrho + \eta y), \qquad \bar{\sigma} = \frac{1}{\xi'}(\sigma + \eta z),$$

where

$$\eta = \frac{\xi''}{\xi'}.$$

This shows, that by an appropriate choice of the independent variable the line $P_\varrho P_\sigma$ may be made to coincide with any generator of H belonging to the same set as g.

We are led, in this way, to consider the congruence Γ, made up of the generators of the first set, upon the osculating hyperboloids of H. Any four of its developables of either family intersect all of the asymptotic tangents of S in point-rows of the same cross-ratio. Its focal surface coincides with the flecnode surface of S, and is therefore a ruled surface. It is a W-congruence, i. e. the asymptotic lines of the two sheets of its focal surface correspond to each other.

We may pick out a ruled surface of Γ whose generators intersect one of the sheets of the flecnode surface along an asymptotic curve. It will then intersect the other sheet also along an asymptotic curve, owing to the fact that Γ is a W-congruence. Any four surfaces of this kind will intersect all of the asymptotic tangents of S in point-rows of the same cross-ratio.

The important part, played in the theory of ruled surfaces by the flecnode curve, makes it important to investigate to what extent a ruled surface is determined when one branch of the flecnode curve is arbitrarily prescribed. It appears that the general expression of the ruled surface, which contains a given curve as one branch of its flecnode curve, depends upon an arbitrary function. A geometrical construction makes this quite obvious. Similar results hold for the complex curve. A very remarkable theorem demonstrates the existence of a family of ∞^1 surfaces, having one of the branches of their flecnode curve in common. This theorem is as follows.

1. If at every point of the flecnode curve of S there be drawn the generator of the surface, the flecnode tangent, the tangent to the flecnode curve and finally, the line which is the harmonic conjugate of the latter with respect to the other two, the locus of these last lines is a developable surface, called the secondary developable of the flecnode curve.

2. There exists a single infinity of ruled surfaces, each having one branch of its flecnode curve in common with that of S. This family of ∞^1 surfaces may be described as an involution of which any surface of the family and its flecnode surface form a pair. The primary and secondary developables of the branch of the flecnode curve considered are the double surfaces of this involution. In fact, the generators of these surfaces at every point of their common flecnode curve, form an involution in the usual sense.

§ 2. The theory of space curves is based upon the theory of the invariants and covariants of the equation

$$y^{(4)} + 4p_1 y^{(3)} + 6p_2 y'' + 4p_3 y' + p_4 y = 0,$$

under the transformations

$$\eta = \lambda(x) y, \qquad \xi = f(x),$$

where λ and f are arbitrary functions. The covariants are functions of

$$z = y' + p_1 y,$$
$$\varrho = y'' + 2p_1 y' + p_2 y,$$
$$\sigma = y^{(3)} + 3p_1 y'' + 3p_2 y' + p_3 y,$$

and it is the geometrical interpretation of these quantities which furnishes the groundwork of this whole theory, a point which has hitherto been neglected. It turns out moreover that the properties of the ruled surfaces, generated by the lines obtained by joining P_y to P_z, P_ϱ and P_σ, are of importance for the purpose of carrying out this interpretation. For this reason the theory of ruled surfaces must come first from this point of view. The theory of space curves then appears as one of its applications.

Détermination des mouvements μ de solides aux trajectoires sphériques.

Von

J. Andrade aus Besançon.

Considérons l'ébranlement du solide S à l'époque t; soient trois axes ox, oy, oz rectangulaires fixes dans le solide S et se coupant en o; soient ξ, η, ζ les projections sur ces axes de la vitesse de o par rapport à l'espace E_0; soient enfin p, q, r les projections suivant les mêmes axes de la vitesse de rotation instantanée à l'époque t.

Soient A, B, C les coordonnées relatives à l'époque t du centre de la sphère qui porte la trajectoire du point du solide ayant x, y, z pour coordonnées.

L'immobilité du point (A, B, C) est exprimée par les équations:

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\xi + qC - rB + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \\ &\eta + rA - pC + \frac{\partial B}{\partial t} = 0 \\ &\zeta + pB - qA + \frac{\partial C}{\partial t} = 0 \end{aligned}\right.$$

et la sphéricité de la trajectoire du point x, y, z ou la constance de la distance des points (A, B, C) (x, y, z) est exprimée par:

$$(2)\qquad (x - A)\frac{\partial A}{\partial t} + (y - B)\frac{\partial B}{\partial t} + (z - C)\frac{\partial C}{\partial t} = 0,$$

ou, ce qui revient au même, par:

$$(2\text{ bis})\qquad \begin{aligned} \Sigma A\,(\xi + qz - ry) \equiv A(\xi + qz - ry) + B(\eta + rx - pz) \\ + C(\zeta + py - qx) = \Sigma x\xi \equiv x\xi + y\eta + z\zeta, \end{aligned}$$

ou, en faisant:

$$\begin{aligned} \xi + qz - ry &= X \\ \eta + rx - pz &= Y \\ \zeta + py - qx &= Z, \end{aligned}$$

par:

$$(2\text{ ter})\qquad \Sigma AX = \xi x + \eta y + \zeta z.$$

Le problème consiste ainsi à trouver trois fonctions A, B, C de ;, y, z et de t unies aux 6 fonctions ξ, η, ζ, p, q, r de t par les équaions (1) et (2ter).

Un lemme géométrique nous permettra tout à l'heure de dégager a solution de ce problème en apparence très compliqué; observons l'abord que si $A_0\, B_0\, C_0$ est un groupe de 3 fonctions A, B, C correpondant à un point particulier $x_0\, y_0\, z_0$ du solide, nous pourrons poser:

$$A = A_0 + a$$
$$B = B_0 + b$$
$$C = C_0 + c,$$

;, b, c seront alors des solutions u, v, w, du système:

$$qw - rv + \frac{du}{dt} = 0$$
$$ru - pw + \frac{dv}{dt} = 0$$
$$pv - qu + \frac{dw}{dt} = 0;$$

i donc nous désignons 3 solutions orthogonales de ce système qui eprésentent les cosinus directeurs de 3 directions absolument fixes par:

$$\begin{matrix} g_1 & h_1 & k_1 \\ g_2 & h_2 & k_2 \\ g_3 & h_3 & k_3 \end{matrix}$$

ous aurons:

$$\begin{aligned} a &= \varphi_1 g_1 + \varphi_2 g_2 + \varphi_3 g_3 \\ b &= \varphi_1 h_1 + \varphi_2 h_2 + \varphi_3 h_3 \\ c &= \varphi_1 k_1 + \varphi_2 k_2 + \varphi_3 k_3 \end{aligned}$$

φ_1, φ_2, φ_3 désignant des fonctions des seules variables x, y, z.

i alors nous posons:

$$\begin{aligned} P_1 &= g_1 X + h_1 Y + k_1 Z \\ P_2 &= g_2 X + h_2 Y + k_2 Z \\ P_3 &= g_3 X + h_3 Y + k_3 Z \end{aligned}$$

les g, h, k sont de simples fonctions de t,

équation (2ter) prend la forme:

$$(3)\quad \varphi_1 P_1 + \varphi_2 P_2 + \varphi_3 P_3 + A_0 X + B_0 Y + C_0 Z = \xi x + \eta y + \zeta z.$$

Etude du mouvement d'orientation d'un mouvement μ.

Examinons d'abord les conséquences que l'on peut tirer de la forme ıême de cette équation qui doit être satisfaite identiquement quelsue soient x, y, z.

1°. Aucun des numérateurs des $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ ne peut être d'un degré supérieur à celui du dénominateur ou, si non, l'équation rendue entière nous indiquerait un mouvement d'orientation dans lequel toute droite du corps ferait un angle fixe avec une direction associée de l'espace, ce qui exigerait de suite la fixité de la direction de la rotation instantanée; supposons alors qu'il n'en soit pas encore ainsi.

2°. Sous le bénéfice de la remarque qui précède, on peut désigner par λ une indéterminée et examiner sur l'équation l'effet de la substitution

$$\begin{array}{c|c} x & x+\lambda p \\ y & y+\lambda q \\ z & z+\lambda r \end{array}$$

et on trouve alors que si $F(x, y, z)$ désigne l'ensemble des termes du plus haut degré dans le dénominateur des φ on aura $F(p, q, r) = 0$.

3°. Si le degré de F était supérieur au degré de tous les numérateurs on pourrait trouver dans le mouvement inverse de μ un centre d'une sphère dont la vitesse relative devrait être normale à une infinité de directions arbitrairement choisies, et par conséquent nulle avec ses composantes; il y aurait alors pivotement, c'est un cas banal de mouvement μ.

4°. Toute direction du solide qui satisfait à l'équation $F(x, y, z) = 0$ fournit des points de la figure pivotante dont le mouvement définit le mouvement d'orientation de μ, ces points auront, tous, des trajectoires planes. Car si les numérateurs des φ s'annulaient en même temps on retomberait sur un mouvement banal.

Conséquences géométriques de ces faits pour le mouvement d'orientation.

Il résulte des remarques précédentes que si la direction de l'axe instantané est variable, la figure sphérique dont le glissement définit le mouvement d'orientation de μ possédera une courbe C jouissant des propriétés suivantes:

1°. Tous les points de C décrivent des cercles.

2°. Le pôle P de rotation instantanée est à chaque instant sur la courbe C.

Distinguons ici deux sortes de mouvements μ, suivant que les centres des sphères qui portent les trajectoires forment un ensemble à 3 ou à 2 dimensions, tout autre cas donnant de suite le cas banal du pivotement sur un point fixe.

Examinons d'abord les mouvements μ de première espèce: pour ceux-ci la sphère fixe possèdera aussi une courbe γ jouissant des propriétés suivantes:

Tous les points de γ sont des centres de cercles décrits par des points convenables de la figure mobile, et le pôle instantané décrit γ sur la sphère fixe.

Si nous laissons de côté deux cas faciles à envisager directement, savoir: le cas où les courbes C et γ se confondent avec le cercle de l'infini de la sphère, et le cas où les points de C ou γ décriraient dans leurs mouvements relatifs des génératrices imaginaires de la sphère, les courbes C et γ pourront constituer deux roulettes sphériques capables de définir le déplacement de la figure sphérique (même dans le domaine imaginaire).

Envisageons le roulement de C sur γ, sur le point de contact actuel P; soient M et M' deux points correspondants, qui viendront plus tard en contact; le centre du cercle décrit par M sera le point I où la tangente sphérique à γ en M' rencontre l'arc de grand cercle ou corde sphérique PM.

Considérons la position limite de I quand M tend vers P, par hypothèse celle-ci est à une distance finie de P; donc l'angle $M'IM$ a une signification et est un infiniment petit α du même ordre que MM' c'est à dire du second; de même soit J le point où la tangente sphérique à C en M coupe la corde sphérique PM', l'angle $M'JM$ est un infiniment petit β du second ordre; observons que les points I et J sont par hypothèse distincts et à distance finie; dès lors l'un ou l'autre des deux triangles sphériques symétriques IJM ou IJM' nous donne, après avoir observé que le couple (IJ) pas plus que le couple (MM') ne peuvent former ici des couples isotropes:

$$\cos \widehat{JMI} = \pm \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos IJ,$$

d'où nous concluons que $\sin \widehat{JMI}$, et par suite l'angle de contingence de l'une et l'autre courbe est infiniment petit du second ordre. Les deux courbes C et γ seraient deux arcs de grand cercle, et dès lors comme on sait l'axe instantané aurait une direction invariable.

Cas des mouvements μ de seconde espèce, s'il en existe.

Les centres des sphères qui portent les trajectoires sont alors sur une surface S, et à chaque point de cette surface correspond une droite, axe d'un cercle décrit par le point de la surface dans le mouvement inverse de μ. Observons d'ailleurs que:

Ce mouvement inverse n'est pas un mouvement μ.

Nous définissons ainsi une congruence de droites.

Nous pourrons alors envisager les surfaces focales de cette congruence.

Dans ce but je m'appuierai sur les remarques de cinématique qui suivent et dont la démonstration est facile:

1°. Si dans un mouvement μ présumé un point du solide en mouvement décrit un cercle non isotrope situé dans un plan perpendiculaire à une droite non isotrope, ce mouvement μ ne saurait être que le résultat d'une rotation autour d'un axe fixe accompagné d'une rotation *égale* autour d'un axe entrainé dans le premier mouvement.

2°. Si dans le mouvement d'un solide une droite fixe du solide a pour conjuguée une droite parallèle à une direction fixe de l'espace, les deux directions font un angle constant.

Si à ces deux remarques on ajoute l'étude facile des glissements plans dans lesquels tous les points d'une droite décrivent des cercles, on peut discuter la congruence précédente et aboutir encore, après une discussion un peu longue, à cette conclusion que, *dans tout mouvement μ non banal la direction de l'axe instantané est fixe.*

Prenons comme axe oz une parallèle à cette direction fixe*), alors:

$$k_3 = 1;\ g_3 = h_3 = k_1 = k_2 = 0$$

$$p = q = 0$$

$$\begin{array}{lll} X = \xi - ry & P_1 = g_1 X + h_1 Y & A_0, B_0, C_0 \text{ sont solutions de} \\ Y = \eta + rx & P_2 = g_2 X + h_2 Y & \left\{\begin{array}{l} \xi - rB_0 + \frac{dA_0}{dt} = 0 \\ \eta + rA_0 + \frac{dB_0}{dt} = 0 \\ \zeta + \qquad \frac{dC_0}{dt} = 0 \end{array}\right. \\ Z = \zeta & P_3 = \zeta & \end{array}$$

$\varphi_3 = z$, φ_1 et φ_2 sont alors 2 fonctions de x et y seuls assujetties à l'identité:

$$\varphi_1 P_1 + \varphi_2 P_2 + A_0 X + B_0 Y + C_0 Z = \xi x + \eta y. \tag{4}$$

φ_1 et φ_2 sont alors deux fractions rationnelles en x et y, dont le dénominateur commun est du 3e degré au plus.

---

*) Ce choix de la direction de l'axe oz sera toujours permis sauf dans le cas où la direction fixe de la rotation instantanée serait isotrope c'est á dire le cas où $p^2 + q^2 + r^2 = 0$.

Ce cas *donnerait un mouvement imaginaire* dont l'étude s'achèvera d'ailleurs aisément en faisant comme il est permis $r = 0$.

Considérons alors les valeurs de x et y qui annulent ce dénominateur commun; la relation (4) ainsi particularisée exprime ou bien que le point du plan $z = 0$ considéré est immobile en projection ou bien qu'il décrit une droite, à moins que φ_1 et φ_2 soient constants.

Nous laissons toujours les simples translations et les simples pivotements de côté; alors si on ne considère que les mouvements de solides réels, ces différentes conséquences ne sont compatibles qu'avec un point réel du plan qui est fixe.

Ainsi les seuls mouvements μ réels possibles, hors le cas banal de la translation ou du pivotement permanents, consistent en un mouvement de solide où l'axe instantané de rotation et de glissement a une position fixe dans l'espace.

Démontrons enfin que dans le cas auquel nous venons d'aboutir il suffit qu'une trajectoire soit sphérique pour que toutes le soient.

Prenons comme axe oz l'axe fixe de rotation et de glissement.

Mais alors l'équation (4) se simplifie car, d'une part,

$$\xi = \eta = 0,$$

et d'autre part on aura:

$$g_2 = -h_1 \qquad A_0 = mg_1 + ng_2 \equiv mg_1 - nh_1$$
$$h_2 = g_1 \qquad B_0 = mh_1 + nh_2 \equiv mh_1 + ng_1$$

m, n, constants,

puis si on fait:

$$P = -y\varphi_1 + x\varphi_2 + nx - my$$
$$Q = \quad x\varphi_1 + y\varphi_2 + ny + mx,$$

et si l'on désigne par P_0, Q_0 les valeurs de P et Q pour $x = x_0$, $y = y_0$, il vient en retranchant les deux équations (4) correspondantes, et supprimant le facteur r:

$$g_1 (P - P_0) + h_1 (Q - Q_0) = 0$$

g_1 et h_1 étant de la forme $\cos T$ et $\sin T$, T étant une fonction de t,

d'où l'on conclut immédiatement:

$$P = P_0, \qquad Q = Q_0$$

c'est à dire:

$$\varphi_2 = \frac{x(P_0 + my - nx) + y(Q_0 - ny - mx)}{x^2 + y^2}$$

$$\varphi_1 = \frac{x(Q_0 - ny - mx) - y(P_0 + my - nx)}{x^2 + y^2}.$$

Cette détermination de φ_1 et φ_2 démontre le théorème.

Nous venons donc de démontrer la proposition suivante:

En écartant les mouvements de translation et de pivotement permanents, tout mouvement μ de solide réel aux trajectoires sphériques est un mouvement où l'axe de rotation et de glissement est fixe et qui est guidé par la trajectoire sphérique d'un point du solide; celle-ci est l'intersection d'un cylindre de révolution et d'une sphère. Et réciproquement un pareil mouvement est un mouvement μ.

P. S. En relisant les dernières épreuves de ce mémoire je remarque qu'il est facile de simplifier une démonstration donnée plus haut en la débarrassant de la considération des deux espèces de mouvements μ; mais je me bornerai ici à cette dernière remarque.

Grundformeln der Theorie der Strahlensysteme.

Von

J. Knoblauch aus Berlin.

In mehreren Abhandlungen, die seit 1899 in den Annali di Matematica erschienen sind, hat Bianchi die Deformation der Strahlensysteme untersucht und im Anschluß daran namentlich die Sätze über lie Biegung der Flächen zweiten Grades eingehend behandelt, die wir lem Präsidenten unserer heutigen Sitzung, Herrn Guichard, verdanken.)ie Fundamentalformeln, auf die sich Bianchi dabei stützt und die r auch in den zweiten Band der neuen Ausgabe seiner Lezioni di geonetria differenziale (1903) aufgenommen hat, beruhen auf einer besonleren Annahme über die Parameter u, v, als deren Funktionen die Betimmungsgrößen des Strahlensystems betrachtet werden. Die Kurven $= \text{const.}$, $u = \text{const.}$ bilden nämlich auf der Ausgangsfläche ein speielles orthogonales System, sodaß $F_0 = 0$ ist. Die ersten Richtungsosinuse dieser Kurven seien A_0 und A_0'; für den Strahl und die Noraale der Ausgangsfläche sollen X und X_0 dieselbe Bedeutung haben; sei der Winkel des Strahles mit der Ausgangsfläche, und $E_0, L_0, \cdots$ ie Fundamentalgrößen dieser Fläche. Bei Bianchi findet sich — ab;esehen von den hier gewählten Bezeichnungen — z. B. die Gleichung

$$\frac{\partial X}{\partial u} = -\sin\sigma\left(\frac{L_0}{\sqrt{E_0}} + \frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)A_0 - \left(\sin\sigma\frac{M_0}{\sqrt{G_0}} + \frac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\right)A_0' + \cos\sigma\left(\frac{L_0}{\sqrt{E_0}} + \frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)X_0.$$

ie enthält neben Größen, deren Definition ohne weiteres von der Vahl der Parameter unabhängig gemacht werden kann, wie σ, A_0, A_0', X_0, andere, für die dies nicht der Fall ist. Das System der undamentalformeln gewinnt nun sehr an Übersichtlichkeit und gleicheitig an Allgemeinheit, wenn die Größen der zweiten Art entfernt rerden, was man dadurch erreichen kann, daß man an Stelle der)ifferentiationen von vornherein die Theta-Operationen einführt. Geometrisch betrachtet sind diese nichts anderes als Differentiationen längs Kurven, wie sie seit Jahrzehnten oft benutzt und in Deutschland namentlich von v. Lilienthal in einer Anzahl von Arbeiten angewendet worden sind. Ihre ganze Bedeutung zeigt sich aber, wie mir scheint und wie ich wiederholt hervorgehoben habe, nur dann, wenn schon ihre Definition an die Theorie eines Paares quadratischer Differentialformen geknüpft wird. Bei der Ausdehnung dieser Einführungsweise auf die Theorie der Strahlensysteme stehen übrigens verschiedene Wege offen. Handelt es sich um die Eigenschaften eines Strahlensystems als solchen, so ist es angemessen, die Θ-Operationen auf die beiden Fundamentalformen dieses Systems zu gründen. Dient dagegen, wie bei den Bianchi'schen Untersuchungen, das Strahlensystem als Hilfsmittel für die Herleitung von Eigenschaften einer Fläche aus bestimmten Voraussetzungen über eine andere, so wird man die Differentiationen längs Kurven auf dieser Fläche ausführen. Es gelten dann die Formeln, die ich im 3. Jahrgang der Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft, S. 80—81, angegeben habe und in denen man, unter Wahrung der Allgemeinheit der Parameter, die Kurve c zweckmäßig so wählt, wie Bianchi es tut. Dann werden z. B. die beiden Formeln für $\frac{\partial X}{\partial u}$ und $\frac{\partial X}{\partial v}$, deren erste oben angegeben ist, durch zwei andere der Form

$$\Theta X = B_{10} X_0 + B_{11} A_0 + B_{12} A_0',$$
$$\Theta' X = B_{20} X_0 + B_{21} A_0 + B_{22} A_0'$$

ersetzt, in denen die Koeffizienten $B_{10}, \cdots B_{22}$ nur von den durch die Kurven c und c' bestimmten geometrischen Größen n, n', t, g, g', sowie von dem Winkel σ und seinen beiden geometrischen Ableitungen $\Theta\sigma$ und $\Theta'\sigma$ abhängen.

Es ist nicht meine Absicht, die Grundformeln der Theorie der Strahlensysteme in der Gestalt, die sie bei Einführung kovarianter Operationen annehmen, hier anzugeben oder gar herzuleiten. Diese Entwicklung soll an anderer Stelle ausgeführt werden.

Über äquidistante Kurven auf einer Fläche.

Von

R. v. Lilienthal aus Münster i. W.

Besitzt das Quadrat des Linienelements einer Fläche die Form:

$$dp^2 + 2\cos\varphi\, dp\, dq + dq^2,$$

o sagt man nach dem Vorgange von A. Voß, daß die beiden einfach nendlichen Kurvenscharen $p = \text{const.}$, $q = \text{const.}$ ein äquidistantes ystem bilden.*) Die geometrische Eigentümlichkeit dieses Systems beteht in folgendem. Greift man aus den Kurven $q = \text{const.}$ (bez. $p = \text{const.}$) ine beliebige heraus und trägt von ihr aus in derselben Richtung auf en Kurven $p = \text{const.}$ (bez. $q = \text{const.}$) gleiche Bogenlängen ab, so erält man eine zweite Kurve $q = \text{const.}$ (bez. $p = \text{const.}$).

Nun kennt man seit Langem den Satz, daß die Haupttangenten-urven der pseudosphärischen Flächen, ebenso wie ihre sphärischen ilder, ein äquidistantes System bilden. Man kann aber auch umekehrt zeigen, 1) daß die einzigen Flächen, auf denen die Hauptangentenkurven ein äquidistantes System bilden, die pseudosphärischen 'lächen sind, und 2) daß nur den letzteren die Eigenschaft zukommt, urch die sphärischen Bilder der Haupttangentenkurven auf der Eineitskugel ein äquidistantes System festzulegen.

Wie eine negativ gekrümmte Fläche durch das Vorhandensein der laupttangentenkurven ausgezeichnet ist, so besitzt jede positiv gerümmte Fläche ein System von Kurven, die schon von Dupin berachtet und von E. Pucci charakteristische Kurven genannt rurden. Es handelt sich um ein solches System konjugierter Kurven, ı dem jede Einzelkurve der einen Schar von jeder Einzelkurve der nderen Schar unter einem Winkel geschnitten wird, der jedesmal das linimum aller Winkel darstellt, die an der betrachteten Stelle zwischen onjugierten Tangenten möglich sind.

*) Über die in Frage kommende Literatur vergl. Encyklopädie der mathem. Viss. III D 3, Nr. 40; III D 6a, Nr. 12; III D 3, Nr. 4, S. 115.

Man kann nun fragen, ob es Flächen gibt, bei denen das sphärische Bild der charakteristischen Kurven aus einem äquidistanten System besteht. Diese Frage, auf die hier nicht näher eingegangen werden soll, ist unter der Voraussetzung, daß die Hauptkrümmungshalbmesser der Fläche voneinander unabhängig seien, zu verneinen, anderenfalls zu bejahen. Aber die Frage, ob es Flächen gibt, deren charakteristische Kurven selbst ein äquidistantes System bilden, ist für beide Flächenarten zu bejahen. Von vornherein ist klar, daß die in Rede stehenden Flächen zu den Schiebungsflächen gehören müssen.

Geben wir dem Quadrat des Linienelements, insofern die Krümmungslinien zu Parameterlinien genommen werden, die Form:

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2$$

und bezeichnen mit $\frac{1}{R_1}$ die Normalkrümmung der Kurven $v = \text{const.}$, mit $\frac{1}{R_2}$ die Normalkrümmung der Kurven $u = \text{const.}$, so führt unsere Frage zunächst auf die Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial R_1}{\partial u} = \frac{\partial R_2}{\partial u} \frac{(R_1 + 3R_2) R_1}{(R_2 - R_1) R_2}, \qquad \frac{\partial R_2}{\partial v} = \frac{\partial R_1}{\partial v} \frac{R_2 (R_2 + 3R_1)}{R_1 (R_1 - R_2)}.$$

Bei der Integration dieser Differentialgleichungen sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem nämlich die Fläche als eine Weingartensche vorausgesetzt wird oder nicht, d. h. je nachdem man zwischen den Größen R_1 und R_2 eine Beziehung annimmt oder nicht.

Betrachten wir zunächst die Größen R_1 und R_2 als voneinander unabhängig.

Die Integration unserer Differentialgleichungen ergibt dann:

$$R_1 = \frac{u\sqrt{uv}}{u+v}, \qquad R_2 = \frac{v\sqrt{uv}}{u+v}.$$

Die beiden ersten Fundamentalgleichungen liefern:

$$\sqrt{E} = \frac{U}{\sqrt{u+v}}, \qquad \sqrt{G} = \frac{V}{\sqrt{u+v}},$$

wo U nur von u, V nur von v abhängt. Die Hinzunahme der dritten Fundamentalgleichung gestattet die Bestimmung der Funktionen U und V. Man erhält

$$ds^2 = \frac{1}{u+v}\left\{\frac{u}{c_1 u^3 + c_2 u^2 + c_3 u - 4} du^2 + \frac{v}{-c_1 v^3 + c_2 v^2 - c_3 v - 4} dv^2\right\},$$

$$2\,dp = \frac{du}{\sqrt{c_1 u^3 + c_2 u^2 + c_3 u - 4}} + \frac{dv}{\sqrt{-c_1 v^3 + c_2 v^2 - c_3 v - 4}},$$

$$2\,dq = \frac{-du}{\sqrt{c_1 u^3 + c_2 u^2 + c_3 u - 4}} + \frac{-dv}{\sqrt{-c_1 v^3 + c_2 v^2 - c_3 v - 4}},$$

wo c_1, c_2, c_3 willkürliche Konstante bezeichnen.

Hiermit ist nach einem bekannten Satz die Existenz unserer Flächen nachgewiesen und zugleich gezeigt, daß wir es mit isothermen Flächen zu tun haben, was sich auch ohne Integration der Fundamentalgleichungen nachweisen läßt.

Nehmen wir jetzt das Bestehen einer Beziehung zwischen R_1 und R_2 an. Da zeigt sich, daß eine Schar der Krümmungslinien aus geodätischen Linien bestehen muß. Setzen wir die Kurven $v = \text{const.}$ als geodätisch voraus, so folgt die Beziehung:

$$(R_1 + R_2)^2 = \varkappa \frac{R_1}{R_2},$$

wo $\varkappa$ eine positive Konstante bezeichnet.

Das Vorhandensein von Flächen mit der fraglichen Eigenschaft soll auf einem anderen, als dem vorhin eingeschlagenen Wege dargetan werden.

In dem Bestreben einfach gestaltete Flächen zu finden, auf denen man die Haupttangentenkurven und charakteristischen Linien auf mechanische Weise beschreiben kann, bestimmte ich diejenigen Umdrehungsflächen, auf denen jene Kurven sich, wie ich in Ermangelung eines besseren Ausdrucks sagen will, als Schraubenlinien darstellen, d. h. als Linien, die durch den Schnittpunkt einer solchen Geraden mit der Fläche erzeugt werden, welche die Drehungsachse senkrecht schneidet und um dieselbe eine Schraubenbewegung ausführt. Sollen die charakteristischen Kurven solche Schraubenlinien sein, und bezeichnen wir den Parameter der Schraubung mit m, so findet man als Gleichungen der fraglichen Umdrehungsflächen die folgenden:

$$x = u \cos v, \qquad y = u \sin v, \qquad z = m \arcsin \frac{u}{cm},$$

wo c eine willkürliche Konstante bedeutet. Für $m = c = 1$ haben wir es also mit der Umdrehungsfläche der sinus-Linie um ihre Mittelgerade zu tun.

Führen wir nun die Veränderlichen p_1 und q_1 ein mittels der Gleichungen:

$$u = cm \sin \frac{p_1 + q_1}{2}, \qquad v = \frac{p_1 - q_1}{2},$$

so erhalten wir:

$$x = \frac{cm}{2}(\sin p_1 + \sin q_1), \quad y = \frac{-cm}{2}(\cos p_1 - \cos q_1), \quad z = \frac{m(p_1 + q_1)}{2},$$

$$ds^2 = \frac{m^2}{4}(1 + c^2)\left\{dp_1^2 + 2\frac{c^2 \cos(p_1 + q_1) + 1}{c^2 + 1} dp_1 dq_1 + dq_1^2\right\}.$$

Hier sind die Kurven $p_1 = \text{const.}$, $q_1 = \text{const.}$ die gesuchten charakteristischen Kurven. Die eine Schar derselben entsteht durch Rechtsschraubungen, die andere durch Linksschraubungen der beweglichen Geraden. Zugleich zeigen die Ausdrücke von x, y, z, daß die Kurven $p_1 = \text{const.}$, $q_1 = \text{const.}$ gewöhnliche Schraubenlinien auf Kreiszylindern vom Querschnitthalbmesser $\frac{cm}{2}$ sind, wobei die Zylinder jedesmal die Drehungsachse als Erzeugende enthalten. Ferner zeigen die fraglichen Ausdrücke, daß unsere Flächen ebenfalls durch Schiebungen derselben gewöhnlichen Schraubenlinien erhalten werden. Endlich folgt aus dem Ausdruck für ds^2, daß die charakteristischen Kurven ein äquidistantes System bilden, bei dem die oben benutzten Veränderlichen p und q — die Bogenlängen der fraglichen Kurven — durch die Gleichungen:

$$p = \frac{m}{2}\sqrt{1+c^2}\,p_1, \qquad q = \frac{m}{2}\sqrt{1+c^2}\,q_1$$

bestimmt sind. Die Beziehung zwischen den Hauptkrümmungshalbmessern unserer Flächen hat die Gestalt:

$$(R_1 + R_2)^2 = m^2(1+c^2)^2\frac{R_1}{R_2}.$$

Sur les substitutions crémoniennes dans l'espace à plusieurs dimensions.

Von

L. Autonne aus Lyon.

Prenons $2N$ variables x_i et u_i $\{i = 1, 2, \cdots, N\}$ liées par les trois relations

$$\omega = \Sigma\, xu = 0, \quad 1 = \Sigma\, ex = \Sigma\, gu,$$

où les e_i et g_i sont des constantes numériques arbitrairement choisies une fois pour toutes. Envisageons les x_i et u_i comme étant respectivement les coordonnées homogènes d'un point x ou d'un plan u dans un espace à $N-1$ dimensions. En vertu de la condition $\omega = 0$, le plan u passe par le point x et on a ainsi un élément (x, u). L'espace contient

$$\infty^{2N-3}$$

éléments.

Construisons avec les coordonnées x_i et u_i de l'élément (x, u) un polynome

$$f\binom{m}{x}; \binom{m'}{u}$$

homogène séparément par rapport aux x_i et aux u_i, avec les degrés m et m' d'homogénéité. f sera une forme mixte, ayant m pour ordre et m' pour classe. Les éléments dont les coordonnées annullent M formes mixtes constituent par définition une variété à $2N-3-M$ dimensions.

Deux éléments infiniment voisins (x, u) et $(x + dx, u + du)$ sont en situation réunie si on a les deux relations

$$\Sigma\, u dx = \Sigma\, x du = 0,$$

lesquelles ne sont pas distinctes, en vertu de

$$d\omega = \Sigma\, x du + \Sigma\, u dx = 0.$$

Une variété est intégrale si deux éléments infiniment voisins quelconques sont toujours en situation réunie.

J'ai nommé **substitution crémonienne** s une transformation entre **éléments**, qui est à la fois birationnelle (par rapport aux coordonnées de l'élément) et de contact („Berührungstransformation").

s est exprimée, ainsi que son inverse s^{-1}, par les algorithmes suivants:

$$s = \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i\begin{pmatrix} m \\ x \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} m' \\ u \end{pmatrix} \\ u_i & \psi_i\begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} n' \\ u \end{pmatrix} \end{vmatrix}, \qquad s^{-1} = \begin{vmatrix} x_i & \theta_i\begin{pmatrix} p \\ x \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} p' \\ u \end{pmatrix} \\ u_i & \eta_i\begin{pmatrix} q \\ x \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} q' \\ u \end{pmatrix} \end{vmatrix},$$

où $\varphi_i\begin{pmatrix} m \\ x \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} m' \\ u \end{pmatrix}$ par exemple est une forme mixte ayant m pour ordre et m' pour classe. Les entiers $m, m', \cdots, q' \geqq 0$. Pour la birationalité, il faut et il suffit que l'on ait, en égard à $\omega = 0$, $\Sigma\,\varphi\,\psi = \Sigma\,\theta\,\eta = 0$, puis

$$\varphi_i(\theta;\ \eta) \quad \text{et} \quad \theta_i(\varphi;\ \psi) \text{ proportionnelle à } x_i,$$
$$\psi_i(\theta;\ \eta) \quad \text{et} \quad \eta_i(\varphi;\ \psi) \text{ proportionnelle à } u_i.$$

Pour que s soit de contact, il faut et il suffit que

$$\Sigma\,\psi\,d\varphi = P\,\Sigma\,u\,dx, \qquad \Sigma\,\theta\,d\eta = Q\,\Sigma\,u\,dx,$$

P et Q étant des formes mixtes. Autrement dit, vis-à-vis de s, $\Sigma\,u\,dx$ se comporte comme un invariant.

Considérons l'élément (y, v), où les y_i sont proportionnelles aux $\varphi_i(x;\ u)$ et les v_i aux $\psi_i(x;\ u)$. On écrira

$$(y, v) = s[(x, u)].$$

De même

$$(x, u) = s^{-1}[(y, v)].$$

On voit que la terminologie précédente est une généralisation de diverses idées dues à **Plücker**, **Lie**, **Cremona**, $\cdots$ pour ne parler que des savants morts.

Depuis longtemps je m'occupe des substitutions crémoniennes, pour $N = 3$, cas du plan*), et pour $N = 4$, cas de l'espace ordinaire.**)

---

*) Voici ce que j'ai publié dans le Journal de Mathématiques:

„Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe des substitutions linéaires de contact" (1887, p. 63).

„Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe quadratique crémonien." Premier Mémoire: „Etude d'une substitution crémonienne isolée" (1888, p. 17). Deuxième Mémoire: „Multiplication des crémoniennes; groupes quadratiques; groupe directeur" (1888, p. 407).

**) „Sur les formes quaternaires à deux séries de variables", dans „Mémoires Couronnés et Mémoires des Savants Etrangers", publiés par l'Académie Royale de Belgique (tome 59; année 1901).

„Sur les substitutions crémoniennes dans l'espace" (Journal de l'Ecole Polytechnique, 2ème Série, 8ème Cahier).

Aujourd'hui je me propose de communiquer au Congrès quelques résultats, obtenus récemment et non encore publiés. Ces résultats concernent, pour N quelconque, les propriétés générales et la classification des crémoniennes s.

Les notions capitales dans la matière sont celles des entiers caractéristiques et des variétés primordiales.

Voici ce qu'on entendra par là. Désignons les dérivées partielles par les notations abrégées $\{i, j = 1, 2, \cdots, N\}$

$$\varphi_{ij} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}, \quad \varphi'_{ij} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}, \quad \cdots, \quad \eta'_{ij} = \frac{\partial \eta_i}{\partial u_j}$$

et formons les huit tableaux à $N + 1$ lignes et N colonnes

$$\{\varphi\} = \left\|\begin{matrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1N} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{N1} & \cdots & \varphi_{NN} \\ u_1 & \cdots & u_N \end{matrix}\right\|; \qquad \{\varphi'\} = \left\|\begin{matrix} \varphi'_{11} & \cdots & \varphi'_{1N} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi'_{N1} & \cdots & \varphi'_{NN} \\ x_1 & \cdots & x_N \end{matrix}\right\|;$$

$$\{\psi\}; \quad \{\psi'\}; \quad \{\theta\}; \quad \{\theta'\}; \quad \{\eta\}; \quad \{\eta'\}.$$

Soient $r_\varphi, r_{\varphi'}, \cdots, r_{\eta'}$ les rangs des huit tableaux. Ces huit entiers sont égaux deux à deux ainsi qu'il suit

$$r_\varphi = r_{\eta'}, \quad r_{\varphi'} = r_{\theta'}, \quad r_\psi = r_\eta, \quad r_{\psi'} = r_\theta,$$

et fournissent quatre entiers caractéristiques compris entre 3 et N.

Considérons maintenant la variété X à $N - 2$ dimensions, constituée par les éléments, où le point x est donné, tandisque le plan u prend toutes les positions possibles autour de x. L'élément-image $(y, v) = s[(x, u)]$ décrira par définition une variété primordiale P_x à $N - 2$ dimensions. Le point y décrira la variété Y_x et le plan v décrira la variété V_x. Pareillement la variété U, où dans l'élément courant (x, u) le plan u est fixe, conduira à la variété primordiale P_u, lieu des ∞^{N-2} éléments $(y, v) = s[(x, u)]$. Le point y décrira la variété ponctuelle Y_u; le plan v décrira la variété planaire V_u. De même, par rapport à la crémonienne inverse s^{-1}, les éléments $(x, u) = s^{-1}[(y, v)]$ constitueront, pour y fixe, une variété primordiale P'_y. Le point x décrira la variété ponctuelle X_y et le plan u décrira la variété planaire U_y. Enfin si c'est v qui est fixe, on aura la variété primordiale P'_v, où le point x décrira la variété ponctuelle X_v et le plan u décrira la variété planaire U_v. Toute variété primordiale est intégrale. Le nombre des dimensions pour les variétés ponctuelles ou planaires qui interviennent dans la constitution des variétés primordiales est le suivant:

$$
\begin{array}{llll}
Y_u & \text{et} & U_y & \text{ont } r_\varphi - 2 = r_{\eta'} - 2 \text{ dimensions,} \\
Y_x & \text{et} & X_y & \text{ont } r_{\varphi'} - 2 = r_{\theta'} - 2 \text{ dimensions,} \\
V_x & \text{et} & X_v & \text{ont } r_{\psi'} - 2 = r_\theta - 2 \text{ dimensions,} \\
V_u & \text{et} & U_v & \text{ont } r_\psi - 2 = r_\eta - 2 \text{ dimensions.}
\end{array}
$$

L'importance de la considération des variétés primordiales réside dans le théorème suivant: „Une variété P intégrale donnée est primordiale pour une ou aucune substitution crémonienne s."

La classification des s est donc identique à celle des variétés P. Par exemple si P est une des variétés X ou U considerées plus haut (éléments à point x fixe ou à plan u fixe), la crémonienne s se ramène à une transformation ponctuelle prolongée („erweiterte") au sens de Lie.

La construction effective des variétés intégrales P, susceptibles d'être primordiales, appelle bien entendu des recherches plus approfondies.

On some useful Theorems in the Continued Multiplication of a Regressive Product in real four-point Space.

Von

R. W. Genese aus Aberystwyth.

Let BC be a Regressive Product of Einfache Größen and A an Einfache Größe such that AC is scalar; then

1° if A be contained in B, $A \cdot BC = AC \cdot B$,

2° if A be not in B, $A \cdot BC = AC \cdot B - AB \cdot C$.

The first theorem holds also for n-point space and may be deduced from Art. 108 of the Ausdehnungslehre of 1862 as follows: since A is contained in B and AC is a product of all the extensive units, it is always possible to resolve B into a product AD in such a manner that D is contained in C, viz. by choosing D in the subregion common to B and C. To illustrate this, suppose A a point in a plane B, C a plane intersecting B in XY; then B may be expressed as a product in an infinite number of ways such as APQ, but AXY is one of them, the length of XY being properly determined.

Then $BC = AD \cdot C$

$= AC \cdot D$ by Art. 108, D being in C,

$A \cdot BC = A(AC \cdot D)$

$= AC \cdot AD$, since AC is scalar,

$= AC \cdot B$.

It is however more instructive to consider geometrically the three cases which may occur in real space.

Case I.

B a line, C an area and therefore A a point in the line B.

Let O be the intersection of B and C, then we may take

$$B = OP, \qquad C = OQR,$$

so that $$BC = O \cdot OPQR,$$

$$\begin{aligned} A \cdot BC &= AO \cdot OPQR \\ &= OA \cdot POQR \\ &= OP \cdot \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}} POQR \quad \text{(using a bar }\overline{\quad}\text{ to abstract measure)} \\ &= OP \cdot AOQR \\ &= \quad B \cdot AC. \end{aligned}$$

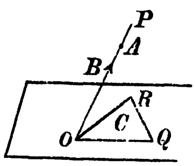


fig. 1.

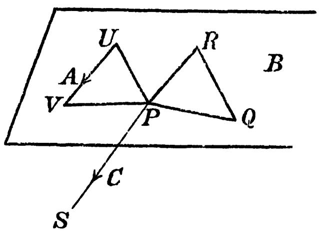


fig. 2.

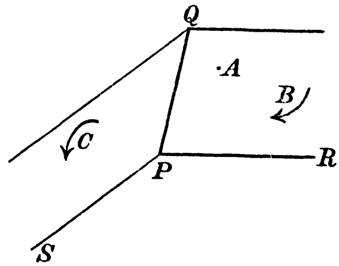


fig. 3.

Case II.

B an area, C a line, A a line lying in B.
We put $B = PQR$, $C = PS$, $A = UV$.
Then $BC = P \cdot PQRS$,

$$\begin{aligned} A \cdot BC &= UVP \cdot PQRS \\ &= PQR \cdot \frac{\overline{UVP}}{\overline{PQR}} \cdot PQRS \\ &= PQR \cdot PUVS \\ &= \quad B \cdot UVPS \\ &= \quad B \cdot AC. \end{aligned}$$

Case III.

B and C areas and therefore A point lying in B.

Put $\quad B = PQR$,

$\quad\quad C = PQS$.

Then $\quad BC = PQ \cdot PQRS$,

$$\begin{aligned} A \cdot BC &= APQ \cdot PQRS \\ &= PQR \cdot \frac{\overline{APQ}}{\overline{PQR}} \cdot PQRS \\ &= PQR \cdot PQAS \\ &= PQR \cdot APQS \\ &= \quad B \quad \cdot AC. \end{aligned}$$

The following examples show the utility of the theorem.

Ex. I. To find the intersection of a plane PQR and a line ST, ^{0} in terms of S and T, 2^0 in terms of P, Q, R.

1^0. Let $ST \cdot PQR = xS + yT$.

Then $S(ST \cdot PQR) = \qquad ySТ$;

ut also, by the theorem,

$$= ST \cdot SPQR,$$

then $\qquad y = SPQR.$

Similarly $\qquad x = -TPQR.$

Therefore $\quad ST \cdot PQR = SPQR \cdot T - TPQR \cdot S.$

2^0. Let $\quad PQR \cdot ST = xP + yQ + zR.$

Then $\quad QR(PQR \cdot ST) = xQRP = xPQR,$

ut also $\qquad = PQR \cdot QRST.$

Therefore $\qquad x = QRST.$

Similarly $\qquad y = RPST, \qquad z = PQST.$

Finally

$$PQR \cdot ST = QRST \cdot P + RPST \cdot Q + PQST \cdot R.$$

Ex. II. To find the intersection of PQR and any other plane σ n terms of the sides of PQR.

Put $\quad PQR \cdot \sigma = xQR + yRP + zPQ.$

Then $P(PQR \cdot \sigma) = xPQR,$

ut also $\qquad = P\sigma \cdot PQR.$

Therefore $\qquad x = P\sigma.$

Similarly $\qquad y = Q\sigma, \qquad z = R\sigma.$

Hence $\quad PQR \cdot \sigma = P\sigma \cdot QR + Q\sigma \cdot RP + R\sigma \cdot PQ.$

The coefficients are here clearly proportional to the distances of ?, Q, R from the plane σ.

The interpretation in Statics is interesting, viz., if along the ides of a triangle in order there act forces whose measures are pro- ortional to the sides multiplied each by the distance of the opposite ertex from a plane σ, their resultant acts along the intersection of σ rith the plane of the triangle.

Ex. III. If ω_1, ω_2 denote two twists (Blätter) and A a mass-point, $A(\omega_1 \omega_2)$ is another twist (Blatt). To resolve $A(\omega_1 \omega_2)$ into twists in he planes of ω_1, ω_2.

Let any line through A meet ω_1, ω_2 in P, Q

nd let $\qquad A = xP + yQ.$

Then $\quad A(\omega_1 \omega_2) = xP(\omega_1 \omega_2) + yQ(\omega_1 \omega_2).$

Now $P(\omega_1 \omega_2) = P\omega_2 \cdot \omega_1$, because P is in ω_1,

$Q(\omega_1 \omega_2) = - Q(\omega_2 \omega_1) = - Q\omega_1 \cdot \omega_2$.

Thus $A(\omega_1 \omega_2) = xP\omega_2 \cdot \omega_1 - yQ\omega_1 \cdot \omega_2$.

Again $A\omega_1 = (xP + yQ)\omega_1$

$= yQ\omega_1$, since $P\omega_1 = \sigma$,

so $A\omega_2 = xP\omega_2$.

Finally $A(\omega_1 \omega_2) = A\omega_2 \cdot \omega_1 - A\omega_1 \cdot \omega_2$.

The last result is a particular case of the second theorem which we now proceed to consider. All the possible cases are given by the following schema of dimensions

$$1\,(3 \cdot 3)$$
$$1\,(2 \cdot 3)$$
$$2\,(3 \cdot 2).$$

The second of these means

A a point, B a line, C an area (Blatt).

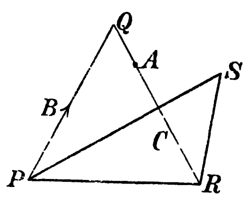


fig. 4.

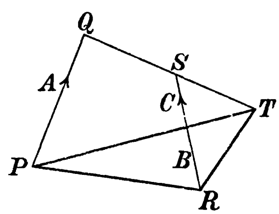


fig. 5.

Let B meet C in P and take $B = PQ$. Draw QA meeting C in R and take $C = PRS$.

Then $A = xQ + yR$, say

$BC = P(PQRS)$

$= P(+1)$, say

$A \cdot BC = xQP + yRP$.

Again $AC = A \cdot PRS = xQPRS = x(-1)$

$AC \cdot B = -xPQ = xQP$

$AB = yRPQ$

$AB \cdot C = yRPQ(-RPS)$

$= yRP(-RPQS) = -yRP(+1)$.

Hence $A \cdot BC = AC \cdot B - AB \cdot C$.

For the third case

$A =$ a line, $B =$ an area (Blatt), $C =$ a line (Stab).

Let A meet B in P, and take $A = PQ$, let B meet C in R, and ake $C = RS$; lastly let QS meet B in T, then omitting a numerical actor throughout, we may take $B = PRT$.

Then
$$\begin{aligned} BC &= RTP \cdot RS = R \cdot RTPS, \\ A \cdot BC &= PQR \cdot RTPS = -PRQ \cdot PRTS, \\ AC \cdot B &= PQRS \cdot PRT = QRSQ \cdot PRT, \\ AB \cdot C &= (PQ \cdot PRT)RS = (P \cdot PQRT)RS \\ &= PQRT \cdot PRS = PRTQ \cdot PRS. \end{aligned}$$

Now by Ex. 1 above
$$PRT \cdot SQ = PRTQ \cdot S - PRTS \cdot Q$$
and also $= PRSQ \cdot T$.

Multiplying by PR:
$$PRTQ \cdot PRS = PRTS \cdot PRQ + PRSQ \cdot PRT,$$
$$AB \cdot C = -A \cdot BC + AC \cdot B.$$

Therefore
$$A \cdot BC = AC \cdot B - AB \cdot C.$$

Remark. Theorem 2 can be frequently employed with the removal of the condition that BC is regressive, there being only one case of failure, viz., when A, B, C are each of two dimensions in points; t is clear that there can be no relation between any three lines in space.

Thus in Ex. 1 above
$$PQR(S \cdot T) = PQRT \cdot S - PQRS \cdot T.$$

Again from Ex. II
$$\begin{aligned} \sigma(PQR) &= \sigma R \cdot PQ - \sigma Q \cdot PR + \sigma P \cdot QR \\ &= \sigma R \cdot PQ - (\sigma Q \cdot P - \sigma P \cdot Q)R \\ &= \sigma R \cdot PQ - (\sigma \cdot PQ)R. \end{aligned}$$

And from III.
$$A(\omega_1 \omega_2) = A\omega_2 \cdot \omega_1 - A\omega_1 \cdot \omega_2.$$

Then
$$\omega_2 A \cdot \omega_1 = -A(\omega_1 \omega_2) + \omega_1 A \cdot \omega_2$$

or
$$\omega_1(\omega_2 A) = \omega_1 A \cdot \omega_2 - (\omega_1 \omega_2) A.$$

There remains only one case to examine, viz. line (point · line).

Expressing in points
$$\begin{aligned} PQ \cdot (R \cdot ST) &= PQ \cdot RST \\ &= PQST \cdot R - PQRT \cdot S + PQRS \cdot T \\ &= (PQ \cdot ST) \cdot R - (PQ \cdot R) \cdot ST \end{aligned}$$

by Ex. I. and the theorem holds.

Über das Prinzip der Erhaltung der Anzahl.

Von

E. Study aus Bonn.

Im folgenden wird, in etwas weiterer Ausführung, der Inhalt eines Vortrages wiedergegeben, den der Verfasser in der geometrischen Sektion des Mathematikerkongresses zu Heidelberg gehalten hat. Diese Bemerkungen waren veranlaßt worden durch eine Diskussion, die sich an einen Vortrag des Einführenden der Sektion, Herrn A. v. Brill, angeknüpft hatte. —

Die Anforderungen, die Mathematiker an die Schärfe ihrer Begriffe und an die Strenge ihrer Beweise zu stellen pflegen, sind zu verschiedenen Zeiten sehr verschieden gewesen. Sie werden wohl häufiger als durch individuelle Veranlagung bestimmt durch den Zustand der Wissenschaft, den der einzelne vorfindet. Hat doch selbst ein Mathematiker wie E. Kummer, da er das Gebiet der Geometrie betrat, in seiner wegen ihres Gedankeninhaltes mit Recht geschätzten Arbeit über die algebraischen Strahlensysteme, gänzlich die Grundsätze verleugnet, die an seinen arithmetischen Arbeiten gerühmt werden. Die Geometrie ist großenteils heute noch weit entfernt von der Präzision, die bei rein analytischen Untersuchungen, dank besonders dem Einfluß von Weierstraß, nunmehr allgemein als unerläßlich betrachtet wird, und, was schlimmer ist, es scheint in weiten Kreisen auch gar kein Gefühl für das Unhaltbare des gegenwärtigen Zustandes vorhanden zu sein. In unzähligen Fällen werden die Objekte geometrischer Untersuchungen so undeutlich erklärt, daß man den Sinn der einzelnen Begriffe aus den darüber aufgestellten Behauptungen zu erraten suchen muß, wobei natürlich Meinungsverschiedenheiten entstehen können.*) Ein-

*) Eine nun schon etwas zurückliegende Erörterung der Art war die über das sogenannte Charakteristikenproblem der Kegelschnitte. Sie war veranlaßt worden dadurch, daß Chasles Behauptungen über „Kegelschnitte“ aufgestellt hatte, ohne diesen Begriff gehörig zu erklären. Neueren Datums sind gewisse Er-

schränkungen der wesentlichsten Art werden „stillschweigend" eingeführt, und bereits erklärte Begriffe werden, dem flüchtigen Leser wie jedenfalls meistens auch dem Autor selbst unmerklich, verengert, erweitert oder sonstwie verschoben. Und nicht einmal dann pflegt die (öffentlich geübte) Kritik irgendwelche Einwendungen zu machen, wenn der herkömmliche Mangel an Sorgfalt bei Formulierung geometrischer Theoreme in nichtssagenden Zusätzen („im allgemeinen") schon äußerlich hervortritt. Bei aller Milde des Urteils, die im einzelnen Falle und namentlich wo Schwierigkeiten vorliegen, gewiß am Platze sein wird, muß es doch gesagt werden, daß durch eine weitgehende Duldung solcher Vorkommnisse das Ansehen der Geometrie geschädigt und deren wissenschaftlicher Charakter beeinträchtigt wird. Es darf nun einmal nichts von der Forderung abgelassen werden, daß jeder einzelne Begriff scharf bezeichnet werden soll, und daß die Ausnahmen von irgend einem Satze entweder einzeln aufgezählt oder womöglich durch zweckmäßige Umbildung der Begriffe selbst beseitigt werden müssen.*) Auch die evidentesten und trivialsten Ausnahmefälle dürfen natürlich nicht mit Stillschweigen übergangen werden, wenn die Behauptung Anspruch machen soll auf das Epitheton richtig, bei dem es kein Nahezu, kein Mehr oder Minder geben darf.

In der Nichtbeachtung so selbstverständlicher Forderungen hat man unseres Erachtens den Schlüssel für das Verständnis, wie so mancher anderen auffallenden Erscheinung, so auch der Rolle, die der

örterungen über „die Grundlagen der Geometrie". Daß diese an sich nicht erfreulichen Diskussionen nicht geradezu an der Tagesordnung sind, zeigt, wie gleichgültig man solchen prinzipiellen Fragen gegenübersteht.

*) Die Schwierigkeiten, die in den geometrischen Begriffen liegen, sind gewiß nicht gering, und es ist auch nur gerecht zu bemerken, daß die Sprache dem Geometer ganz andere Hindernisse entgegenstellt als dem Analytiker mit seiner, gegenwärtig noch wenigstens, viel kleineren Zahl von Begriffen. Von einem geometrischen Begriff — z. B. Punkt, Kreis, Kegelschnitt, um nur einige der elementarsten zu nennen — steht meistens nur der Kern wirklich fest — reeller eigentlicher Punkt, reeller irreduzibeler Kreis oder Kegelschnitt — während Grenzfälle und andere Erweiterungen daran in mannigfacher Weise angeschlossen werden können und oft auch müssen. Da man sich zu der dann eigentlich erforderlichen Vervielfältigung der Terminologie nicht entschließen wollte, so hat man zu der Auskunft gegriffen, mit einem und demselben Wortzeichen bald diesen bald jenen Begriff zu verbinden, nach Art der Buchstabenzeichen, die ja auch alles Mögliche bedeuten. Ein solcher Notbehelf kann aber natürlich nur dann als einigermaßen annehmbar erachtet werden, wenn jeder einzelne Autor die Verpflichtung fühlt, zu sagen, *was* er denn mit solchen im Sprachgebrauch schwankenden Worten meint, und dann auch bei seiner Erklärung bleibt. Aus der entgegengesetzten Gepflogenheit ist die herrschende Verwirrung entstanden, die wohl schon manchen fähigen Kopf in unserer Zeit von der Geometrie fern gehalten hat.

Satz von der „Erhaltung der Anzahl“ in der gegenwärtigen Literatur spielt. Hat man einmal auf präzisen Ausdruck dort verzichtet, wo er nicht schwer zu finden gewesen wäre, und zwar sozusagen grundsätzlich, so ist es nicht zu verwundern, wenn bei Problemen, die Schwierigkeiten bieten, ebenfalls nicht unterschieden wird zwischen dem, was man etwa als Embryonalzustand einer mathematischen Wahrheit bezeichnen kann, und einem ausgewachsenen wohlgebildeten Theorem. Und ebensowenig kann es überraschen, wenn das Gefühl für Stringenz der Beweise verloren geht, wenn die Grenze verwischt wird zwischen bloßer Vermutung oder Hypothese und gesichertem Besitz der Wissenschaft. Solche Überschreitungen sind sicher höchst gefährlich, wenn sie systematisch und ohne Einspruch der berufenen Kritik verübt werden. Schreiben wir doch vor allem für die Generation, der die Zukunft gehört, und deren kritische Fähigkeiten erst entwickelt werden sollen. Ist hier irgend etwas anderes angemessen als ein *rückhaltloses* Eingeständnis des wirklichen Sachverhaltes, d. h. natürlich dessen, was wir, Irrtum vorbehalten, bei gewissenhafter Prüfung für den Sachverhalt ansehen?

Das „Prinzip der Erhaltung der Anzahl“ oder „Prinzip der speziellen Lage“ oder „der Kontinuität“ oder wie immer man es nennen mag, ist formuliert worden von Herrn H. Schubert, insbesondere in seinem Werke „Kalkül der abzählenden Geometrie“ (Leipzig, 1879). Danach soll eine beliebige „geometrische Anzahl“ — die Zahl der Lösungen eines algebraisch-geometrischen Problems, das „im allgemeinen“ eine endliche Zahl von Lösungen hat — entweder erhalten bleiben, oder unendlich werden, wenn man die Konstanten der Figuren, von denen sie abhängt, *irgendwie* abändert. Zur Begründung verwies Herr Schubert darauf, daß es sich im Grunde nur um eine besondere Auslegung des Fundamentalsatzes der Algebra handele.*) Benutzt wird sodann dieses sogenannte Prinzip von Herrn Schubert selbst und anderen zur Bestimmung der Anzahl der Lösungen von Aufgaben, die größtenteils weit jenseits der Grenzen liegen, innerhalb deren zur Zeit eine direkte algebraische Analyse ausführbar ist.**)

Obwohl nun das genannte „Prinzip“ seit etwa drei Dezennien ohne öffentlich geäußerten Widerspruch in der mathematischen Literatur figuriert zu haben scheint, und obwohl fortwährend neue Anwendungen davon gemacht werden, so kann es doch unseres Erachtens gar nicht

*) Wegen der genaueren Formulierung vgl. § 4 des genannten Werkes.

**) Ähnliche Anwendungen finden sich übrigens schon lange vor der allgemeinen Formulierung. Z. B. ist Steiner zu mehreren (nicht immer richtigen) Zahlen sicher durch Kontinuitätsbetrachtungen gekommen.

zweifelhaft sein, daß ihm die Rolle nicht zukommt, die man ihm, stillschweigend oder sogar ausdrücklich, eingeräumt hat.

Zunächst hat der Begriff der geometrischen Figur, wie er von Herrn Schubert gefaßt und durch Beispiele erläutert wird, einen so befremdlichen Umfang, daß es eigentlich von vorn herein höchst unwahrscheinlich ist, daß sich darüber etwas Allgemeingültiges aussagen ließe. Man sieht sich auch sogleich zu einer Interpretation genötigt: „Gemeint" sein können nur solche Figuren, deren Mannigfaltigkeit ein im Sinne von G. Cantor abgeschlossenes algebraisches Kontinuum bildet, d. h. eindeutig umkehrbar abgebildet werden kann auf eine algebraische Punktmannigfaltigkeit, die in dem projektiven Punktkontinuum irgend eines höheren Raumes verläuft. (Andernfalls hätte man schon in der Zahl der Mittelpunkte oder Symmetrieachsen eines Kegelschnittes Beispiele, in denen die Behauptung von der Erhaltung der Anzahl nicht zutrifft.) Unter stetigen Änderungen einer Figur werden dann solche zu verstehen sein, bei denen der Bildpunkt seine Lage stetig ändert. Sobald man aber die Sache so ausdrückt, sieht man, wie bedenklich auch der weitere Begriff der „geometrischen Anzahl" ist. Es seien z. B. vorgelegt eine (nach der üblichen Ausdrucksweise) r-dimensionale algebraische Mannigfaltigkeit M_r und auf dieser zwei andere M_s und M_{r-s}. Wir wollen annehmen, daß diese sich in einer gewissen endlichen Anzahl verschiedener Punkte schneiden, die durch Auflösung einer algebraischen Gleichung zu ermitteln sind. M_s möge nun von gewissen Parametern abhängen. Ändert man diese, so werden die Schnittpunkte sich zum Teil überlagern können, und dies wird z. B. so eintreten können, daß sie alle oder zum Teil in Doppelpunkte, mehrfach zählende Kurven usw. von M_r hineinrücken. Um also von einer Erhaltung der Anzahl reden zu können, müßte es möglich sein, die „Multiplizität" der Schnittpunkte irgendwie zu beurteilen. Das kann aber im Falle singulärer Stellen sicher nicht ausgeführt werden, ohne daß man *besondere und zweckmäßige Bestimmungen* trifft. Andernfalls kann der Schluß: „Wenn M_s zerfällt, $M_s = M_s' \cdot M_s''$, so verteilen sich die Schnittpunkte auf M_s' und M_s''", zu falschen Zahlen führen, da ja die Schnittpunkte von M_s' mit M_{r-s} zum Teil identisch sein können mit den Schnittpunkten von M_s'' mit M_{r-s}. Es ist aber weder bewiesen, noch richtig, daß solche Bestimmungen immer möglich sind.*) Aber auch schon unter weniger speziellen Voraussetzungen kann man die „richtige" (d. h. mit dem Prinzip verträgliche) Multiplizität eines Schnittpunktes nicht

*) Wir geben weiterhin ein Beispiel, in dem das Prinzip sich nicht auf diese Art „retten" läßt (S. 394).

beurteilen. Denn dort höchstens kann man ein legitimes Anwendungsgebiet des fraglichen Prinzips suchen, wo die Algebra sich zur Zeit als unzureichend erweist, übergroße Schwierigkeiten bietet. Gerade in den Fällen also, um die es sich handelt, fehlt der nötige Ansatz*): Es wird eine Aussage über gewisse Zahlen gemacht, die man gar nicht ermitteln kann, es fehlt dem Satze das klar definierte Objekt. Aus dem gleichen Grunde kann man auch nicht wohl sagen, „Grenzfälle der bezeichneten Art sind auszuschließen“; um sie auszuschließen, müßte man sie eben schon kennen, auf Grund einer eingehenden Untersuchung von M_r, die fast überall fehlt. Dabei hat die skizzierte Gattung von Beispielen noch einen relativ sehr einfachen Charakter.

Aber auch wenn wir das nicht unbedenkliche Zugeständnis machen wollen, daß in jedem einzelnen Falle der Anwendung das Objekt der Aussage substituiert werden kann, so kann immer noch nicht der auch neuerdings noch versuchte Hinweis auf den Fundamentalsatz der Algebra zugegeben werden.**) Die Annahme ist schlechthin ungerechtfertigt, daß ein algebraisches Problem, dem „im allgemeinen“ eine endliche Zahl von Lösungen zukommt, seinen erschöpfenden und allgemeingültigen Ausdruck in einer algebraischen Gleichung finden müßte, derart, daß unter allen Umständen jeder Wurzel der Gleichung eine Lösung entspräche und umgekehrt. Das Problem könnte z. B. äquivalent sein mit der Aufgabe, die gemeinsamen Schnittpunkte von mehr als drei Flächen im Raume zu finden. Ob aber ein solches Verhalten vorliegt, das zu entscheiden fehlen wiederum die Hilfsmittel gerade in den Fällen, auf die es ankommt. Man kann sich über die Schwierigkeiten, die im Ansatz der in Worte gekleideten Probleme liegen — die größten Schwierigkeiten in der Geometrie — nicht einfach hinwegsetzen.

In der Tat kann die Zahl der Lösungen einer Aufgabe in besonderen Fällen sowohl eine Erhöhung als auch eine Erniedrigung erfahren, natürlich ohne jeden Widerspruch mit dem Fundamentalsatz der Algebra. Ein elementares Beispiel für den ersten Fall ist die Zahl der Projektivitäten, die die Figur von vier getrennten Punkten auf einer Geraden oder das zugehörige Polarsystem 4. Ordnung in Ruhe lassen. Eine gewisse Aufgabe der Kinematik führt im allgemeinen zu Geraden einer Linienkongruenz 1. Ordnung 0. Klasse, im besonderen Falle zu solchen einer Kongruenz 0. Ordnung 1. Klasse.***) Fügt man

*) Die Widerspruchslosigkeit einer Aufgabe pflegt von den abzählenden Geometern beurteilt zu werden mit Hilfe der Methode der Konstantenzählung.

**) Wie es scheint, betrachtet Herr Schubert selbst diese Argumentation jetzt nicht mehr als genügend.

***) Math. Ann. Bd. 39. 1891. S. 458.

also die Forderung hinzu, daß eine solche Gerade einen passend gewählten Punkt enthalten soll, so hat man ein Beispiel für die Erniedrigung der Lösungszahl.

Das Prinzip der Erhaltung der Anzahl muß also aufgegeben werden, und zwar, wie uns scheint, für immer: Bei der unübersehbaren Mannigfaltigkeit von Ausnahmen, die sich mit leichter Mühe finden lassen, wird es nicht möglich sein, durch eine etwaige sorgfältigere Formulierung das „zu retten", was als das Wesentliche daran erscheint, und seiner Zeit auch neu war, nämlich seine (vermeintliche) Einfachheit, seine ungeheure Allgemeinheit und die in diesen Eigenschaften begründete — wiederum vermeintliche — Sicherheit des Vordringens in dunkle Gebiete.

Mit diesem Urteil wollen wir gewiß nicht endgültig den Stab brechen über alle einzelnen Anwendungen, die man von dem fraglichen Prinzip gemacht hat. Wenn auch gesagt werden muß, daß diese Anwendungen zumeist nicht genügend gesichert sein werden, so kann doch wohl jener dunkle „mathematische Takt" oder „Instinkt" die Geometer vor fehlerhaften Resultaten im einzelnen geschützt haben, so etwa wie er Riemann bewahrt hat vor materiell unrichtigen Folgerungen aus dem bezeichnenderweise ebenfalls „Prinzip" genannten Schlußverfahren, das Dirichlets Namen trägt. Wir glauben, daß es sich auch wirklich zum Teil so verhält, meinen aber, daß zum mindesten bei der gegenwärtigen Sachlage zu viel Skeptizismus ein kleineres Übel ist als zu wenig.

Typisch für eine besonders wichtige, vielleicht die wichtigste, Kategorie von Anwendungen ist folgender Schluß: Von jeder algebraischen Kurve aus, die auf einer *singularitätenfreien* Fläche 2. Ordnung verläuft, kann man kontinuierlich zu einer reduzibelen Kurve übergehen, die aus lauter Erzeugenden der Fläche besteht. „Folglich" liefert die Zahl der Schnittpunkte zweier solcher ausgearteter Kurven die Zahl der Schnittpunkte in jedem beliebigen Falle, so lange die beiden Kurven keinen gemeinsamen Bestandteil enthalten. Man kommt so zu der bekannten Formel $\mu\nu' + \nu\mu'$, die leicht rein algebraisch begründet werden kann. Aber auch die Schlußweise selbst läßt sich hier noch rechtfertigen. Streichen wir dagegen in Obigem das Wort „singularitätenfrei", und ersetzen wir die betrachtete Fläche durch einen irreduzibelen Kegel, so bleibt der Vordersatz richtig, die Folgerung aber fällt: Man darf jetzt nicht mehr, wie zuvor, jeden Bestandteil der einen Kurve mit jedem der anderen zum Schnitt bringen und die gefundenen Schnittpunktzahlen addieren. Bemerkt man, daß unter viel verwickelteren Umständen die aus solchen Vorkommnissen sich ergebenden

Schwierigkeiten nirgends erörtert sind, so wird man den Resultaten dieser Untersuchungen (soweit sie überhaupt als verständlich erscheinen) kein allzugroßes Vertrauen entgegenbringen können.

Aber das Beispiel von den Kurven auf dem Kegel 2. Ordnung lehrt noch etwas mehr. Es seien vorgelegt zwei solche Kurven der Ordnungen $2m + \mu$ und $2m' + \mu'$, deren erste z. B. mit einer veränderlichen Erzeugenden des Kegels m bewegliche Schnittpunkte bilden möge. Dann ist die Anzahl der nicht notwendig in den Scheitel fallenden Schnittpunkte beider Kurven, sachgemäße Zählung vorausgesetzt, gleich

$$2mm' + \mu m' + m\mu'.$$

Diese Zahl bleibt in Grenzfällen nicht erhalten. Schreibt man aber, wie es angemessen ist, den beiden Kurven noch $\mu\mu'$ weitere im Doppelpunkt des Kegels überlagerte Schnittpunkte zu, und vereinigt man *die Hälfte* dieser Zahl mit der obigen zu einer neuen Summe, so entsteht das halbe Produkt der Ordnungen beider Kurven; die neue Summe bleibt also bei jeder Art des Zerfallens erhalten, so lange sie einen Sinn hat, so lange nämlich, als beide Kurven keinen gemeinsamen Bestandteil haben. Das Beispiel ist ziemlich trivial, es zeigt aber doch, daß in gewissen Fällen Sätze *ähnlich* dem von der „Erhaltung der Anzahl" existieren können, in denen *gebrochene* Multiplizitäten auftreten, an Stelle der ganzen der Schubertschen Formulierung.*)

Als vertrauenswürdig, nämlich strenger Ableitung fähig, können, wie uns scheint, unter den Anwendungen des fraglichen Prinzips betrachtet werden gewisse Zahlen analog den Bézoutschen, die sich auf *singularitätenfreie* Mannigfaltigkeiten beziehen.**) Nicht selten wird an Stelle des „Prinzips" eine rein algebraische Begründung substituiert werden können, und manchmal auch ziemlich mühelos; wo dann freilich zu sagen sein wird, daß das „Prinzip" besser aus dem Spiele geblieben wäre. Solche Anwendungen aber, wie sie z. B. Herr Castelnuovo gemacht hat, werden bis auf weiteres noch nicht als gesichert betrachtet werden dürfen. Bei vielen muß, wie uns scheint, zur Zeit überhaupt jedes Urteil über ihre materielle Richtigkeit als verfrüht betrachtet werden. Wo aber hypothetische Vorstellungen sich einmischen, da sollte es möglich sein, das auch zu erkennen; die Schwierigkeiten werden hervortreten, wenn nur auf die Umgrenzung der Begriffe gehörige Sorgfalt verwendet wird. Dann wird natürlich zu fordern sein, daß das Hypothetische *mit aller Deutlichkeit* als solches bezeichnet werde.

*) Einige Beispiele der Art werden in des Verfassers „Geometrie der Dynamen" behandelt. (Leipzig, 1903, S. 377, 378).

**) Z. B. die Schubertschen Inzidenzformeln, Math. Ann. Bd. 57 (1903).

Schließlich wollen wir nochmals hervorheben, daß nach unserer Meinung die allgemeine Verbreitung einer nachlässigen Ausdrucksweise die Hauptwurzel wie vieler anderer Übel, so auch im letzten Grunde des hier besprochenen ist. Es scheint uns eine Notwendigkeit zu sein, daß die unablässige Verwischung des Unterschiedes solcher Begriffe wie „zwei Punkte“ und „zwei verschiedene Punkte“ schließlich zu Mißständen der geschilderten Art führen muß. Soll eine gründliche Besserung erzielt werden, so wird man also sein Augenmerk unter anderem auch auf die der Sprache noch anhaftenden Ungenauigkeiten zu lenken haben. Die Mitwirkung Vieler aber wird zum Reinigungswerk erforderlich sein. Vor allem wird die Kritik sich gegenwärtig halten müssen, *daß Präzision in geometricis nicht in perpetuum wie eine Nebensache behandelt werden darf.* *)

*) Der Umstand, daß es sich um eine Lebensfrage der Geometrie handelt, mag es rechtfertigen, daß wir bei anderen Gelegenheiten schon Gesagtes hier wiederholt haben. Denn die früheren Darlegungen des Verfassers haben fast keine Beachtung gefunden.

Öffentlich angeschlossen hat sich den vorgetragenen Ansichten (soweit es sich um die „Erhaltung der Anzahl“ handelt) bis jetzt in der Tat nur Herr G. Kohn: Archiv für Mathematik, Bd. IV. 1903. S. 312—316. Wir verweisen wegen weiterer Ausführungen und Beispiele auf diese Arbeit.

IV. Sektion.

Über die Aufgabe der angewandten Mathematik, besonders über die pädagogische Seite.

Von

F. Klein aus Göttingen.

F. Klein begrüßt namens der anderen Einführenden (von denen G. Hauck leider durch Krankheit verhindert ist, gegenwärtig zu sein) die Versammlung, indem er darauf hinweist, daß die angewandte Mathematik als solche keine geschlossene Disziplin vorstellt. Vergleicht man die Gesamtwissenschaft der Mathematik mit einer Festung, so repräsentieren die verschiedenen Teile der angewandten Mathematik die Außenforts, welche die Innenwerke nach allen Richtungen umgeben und über welche die Verbindung mit dem Vorgelände hinüberführt. Gemeinsam allen Teilen der angewandten Mathematik ist dementsprechend nur dies, daß der mathematische Gedanke bei ihnen in notwendige und untrennbare Verbindung zu einem Gebiete anderweiter wissenschaftlicher Fragestellungen tritt. Die angewandte Mathematik steht dadurch in ausgesprochenem Gegensatz zu demjenigen Zweige unserer Wissenschaft, den man als Zitadelle der Festung ansehen mag, zur formalen Mathematik (im Leibnizschen Sinne), d. h. zu derjenigen Behandlung mathematischer Fragen, welche nach Möglichkeit von jeder konkreten Bedeutung der vorkommenden Größen oder Symbole absieht und nur nach den äußerlichen Gesetzen fragt, nach denen dieselben kombiniert werden sollen.

Zum Gedeihen der Wissenschaft ist ohne Zweifel die freie Entwicklung aller ihrer Teile erforderlich. Die angewandte Mathematik übernimmt dabei die doppelte Aufgabe, den zentralen Teilen immer wieder von außen neue Anregungen zuzuführen und umgekehrt die Erträgnisse der zentralen Forschung nach außen zur Wirkung zu bringen.

Die Geltung der Mathematik innerhalb des weiten Bereiches sonstiger wesentlicher Interessen erscheint daher in erster Linie an die erfolgreiche Betätigung der Vertreter der angewandten Mathematik gebunden. Daher sollen wir insbesondere an derjenigen Stelle einsetzen, wo die ausgiebigste Gelegenheit zu einer Einwirkung der Mathematik auf weitere Kreise gegeben ist: beim Jugendunterricht.

Von diesem Gesichtspunkte aus legt Vortragender eine von ihm neuerdings verfaßte Schrift vor: Über eine zeitgemäße Umgestaltung des mathematischen Unterrichts an den höheren Schulen (Leipzig 1904; die Schrift ist gleichzeitig in der pädagogischen Sektion durch Herrn Schubert zur Kenntnis gebracht worden). Der Zielpunkt ist: die Funktionentheorie in geometrischer Form und damit die elementaren Ansätze der Differential- und Integralrechnung, als denjenigen Teil der reinen Mathematik, von dem alle heutigen Anwendungsgebiete gleichmäßig beherrscht werden, an den oberen Klassen unserer höheren Schulen unter Beiseiteschiebung minder wichtiger Kapitel in den Mittelpunkt des arithmetischen Unterrichts zu rücken. Ein derartiges Vorgehen scheint vielleicht revolutionär, ist aber in Wirklichkeit, wie der Vortragende an charakteristischen Beispielen zeigt, an unseren Schulen in weitem Umfange längst vorbereitet. Insonderheit tragen hierzu die mathematischen Überlegungen aus dem Gebiete der Mechanik und der Physik bei, denen sich die Schule nicht entziehen kann. — Übrigens ist die genannte Schrift nur das erste Heft eines Sammelbandes von Vorträgen über Fragen des mathematischen und physikalischen Unterrichts, welcher im Anschluß an den letzte Ostern in Göttingen abgehaltenen Ferienkurs für Oberlehrer der Mathematik und Physik demnächst publiziert werden soll (Leipzig, Teubner); derselbe enthält Beiträge der Herren O. Behrendsen, E. Bose, E. Götting, F. Klein, E. Riecke, F. Schilling, K. Schwarzschild, J. Stark. Dieser Sammelband wieder ist als ein vorbereitender Beitrag zu der allgemeinen Debatte über den mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht an unseren höheren Schulen gedacht, welche im September d. J. bei Gelegenheit der Breslauer Naturforscherversammlung abgehalten werden soll.

Sur le problème des trois corps.

Von

N. Delaunay aus Warschau.

Le problème des trois corps a intéressé les mathématiciens depuis Newton. Les théorèmes élémentaires, que je vais exposer, me paraissent présenter quelque intérêt justement par ce qu'on ne s'attend-pas à trouver quelque chose d'élémentaire dans le cas général du problème qui, en présentant beaucoup de difficultés, était l'objet de tant de travaux celèbres.

§ 1. Théorème I. Il existe un centre des forces dans le mouvement des trois corps qui s'attirent mutuellement suivant les lois de Newton.

Démonstration. Soient 1, 2, 3 les points de l'espace dans lesquels sont concentrées les masses m_1, m_2, m_3 respectivement. Posons que l'origine des coordonnées planes est en point 1, que la droite 1, 3 est l'axe des x, l'axe des y étant perpendiculaire à l'axe des x. Soient α, β, γ les côtés du triangle 1, 2, 3 opposés respectivement aux sommets 1, 2, 3. Sur le point m_1 agissent: la force: $\frac{m_1 m_2}{\gamma^2}$ suivant la droite γ et la force $\frac{m_1 m_3}{\beta^2}$ suivant la droite β. Les projections de la résultante A de ces deux forces sur les axes des coordonnées sont:

(1)
$$x_1 = \frac{m_1 m_2 x_2}{\gamma^3} + \frac{m_1 m_3 x_3}{\beta^3}$$
$$y_1 = \frac{m_1 m_2 y_2}{\gamma^3}.$$

Les coordonnées des points 1, 2, 3 sont respectivement: (x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3); on a donc:

(2)
$$x_1 = y_1 = y_3 = 0$$

suivant le choix des coordonnées.

L'équation de la droite, suivant laquelle agit la résultante A des forces $\frac{m_1 m_2}{\gamma^2}$ et $\frac{m_1 m_3}{\beta^2}$, est:

$$y = \frac{Y_1}{X_1} x. \tag{3}$$

L'équation du côté α est:

$$y = \frac{y_2}{(x_2 - x_3)} x - \frac{x_3 y_2}{(x_2 - x_3)}. \tag{4}$$

En calculant x et y des équations (3) et (4), on aura donc les formules:

$$x = \frac{X_1 x_3 y_2}{X_1 y_2 - (x_2 - x_3) Y_1} \tag{5}$$

$$y = \frac{Y_1 x_3 y_2}{X_1 y_2 - (x_2 - x_3) Y_1}, \tag{6}$$

qui déterminent les coordonnées x et y du point d'intersection de la résultante A avec le côté α.

En mettant dans (5) et (6) les valeurs de X_1 et Y_1 tirées des (1) et (2), on a

$$x = \frac{m_2 \beta^3 x_2 + m_3 \gamma^3 x_3}{m_2 \beta^3 + m_3 \gamma^3} \tag{7}$$

$$y = \frac{m_2 \beta^3 y_2}{m_2 \beta^3 + m_3 \gamma^3}. \tag{8}$$

Ces formules (7) et (8) montrent que le point d'intersection de la résultante A avec le côté α est le centre de gravité des masses fictives et variables $m_2 \beta^3$ et $m_3 \gamma^3$ situées respectivement dans les points 2 et 3.

Ainsi, la résultante A, qui agit sur le point m_1, se trouve sur la droite menée par le sommet 1 du triangle et par le centre de gravité des masses fictives $m_2 \beta^3$ et $m_3 \gamma^3$ situées respectivement dans les points 2 et 3.

On obtiendrait des résultats analogues pour la résultante B qui agit sur le point m_2 et pour la résultante C qui agit sur le point m_3.

On voit donc que les résultantes A, B et C se coupent dans le même point D qui est le centre de gravité des masses fictives $m_1 \alpha^3$, $m_2 \beta^3$, $m_3 \gamma^3$ situées respectivement dans les points 1, 2 et 3.

Le mouvement des trois points m_1, m_2 et m_3 se produit donc comme si ces trois points étaient soumis seulement à l'action des forces variables qui les attirent à un centre mobile D des forces. Ce qu'il fallait démontrer.

§ 2. La démonstration du théorème I contient, en même temps, la démonstration du

Théorème II. Le centre d'attraction dans le problème des trois corps se trouve dans le centre de gravité des masses fictives et variables $m_1 \alpha^3$, $m_2 \beta^3$, $m_3 \gamma^3$ qu'on aurait placées respectivement dans les points 1, 2, 3 où se trouvent, réellement, les masses m_1, m_2, m_3.

On a donc (en trois dimensions) pour les coordonnées rectangulaires du centre D d'attraction, dans le problème des trois corps, les formules:

$$x = \frac{m_1\alpha^3 x_1 + m_2\beta^3 x_2 + m_3\gamma^3 x_3}{m_1\alpha^3 + m_2\beta^3 + m_3\gamma^3} \tag{9}$$

$$y = \frac{m_1\alpha^3 y_1 + m_2\beta^3 y_2 + m_3\gamma^3 y_3}{m_1\alpha^3 + m_2\beta^3 + m_3\gamma^3} \tag{10}$$

$$z = \frac{m_1\alpha^3 z_1 + m_2\beta^3 z_2 + m_3\gamma^3 z_3}{m_1\alpha^3 + m_2\beta^3 + m_3\gamma^3}. \tag{11}$$

En posant, pour abréger:

$$m_1\alpha^3 + m_2\beta^3 + m_3\gamma^3 = \omega \tag{12}$$

$$m_1\alpha^3 x_1 + m_2\beta^3 x_2 + m_3\gamma^3 x_3 = \xi \tag{13}$$

$$m_1\alpha^3 y_1 + m_2\beta^3 y_2 + m_3\gamma^3 y_3 = \eta \tag{14}$$

$$m_1\alpha^3 z_1 + m_2\beta^3 z_2 + m_3\gamma^3 z_3 = \zeta, \tag{15}$$

on peut donner aux formules (9), (10) et (11) la forme:

$$x = \frac{\xi}{\omega} \tag{16}$$

$$y = \frac{\eta}{\omega} \tag{17}$$

$$z = \frac{\zeta}{\omega}. \tag{18}$$

§ 3. Les équations différentielles du problème des trois corps, d'après nos notations, sont:

$$\frac{m_2(x_2 - x_1)}{\gamma^3} + \frac{m_3(x_3 - x_1)}{\beta^3} = \frac{d^2x_1}{dt^2}, \quad \frac{m_2(y_2 - y_1)}{\gamma^3} + \frac{m_3(y_3 - y_1)}{\beta^3} = \frac{d^2y_1}{dt^2},$$
$$\frac{m_2(z_2 - z_1)}{\gamma^3} + \frac{m_3(z_3 - z_1)}{\beta^3} = \frac{d^2z_1}{dt^2};$$

$$\frac{m_3(x_3 - x_2)}{\alpha^3} + \frac{m_1(x_1 - x_2)}{\gamma^3} = \frac{d^2x_2}{dt^2}, \quad \frac{m_3(y_3 - y_2)}{\alpha^3} + \frac{m_1(y_1 - y_2)}{\gamma^3} = \frac{d^2y_2}{dt^2},$$
$$\frac{m_3(z_3 - z_2)}{\alpha^3} + \frac{m_1(z_1 - z_2)}{\gamma^3} = \frac{d^2z_2}{dt^2};$$

$$\frac{m_1(x_1 - x_3)}{\beta^3} + \frac{m_2(x_2 - x_3)}{\alpha^3} = \frac{d^2x_3}{dt^2}, \quad \frac{m_1(y_1 - y_3)}{\beta^3} + \frac{m_2(y_2 - y_3)}{\alpha^3} = \frac{d^2y_3}{dt^2},$$
$$\frac{m_1(z_1 - z_3)}{\beta^3} + \frac{m_2(z_2 - z_3)}{\alpha^3} = \frac{d^2z_3}{dt^2}.$$

La première de ces 9 équations peut être facilement transformée en

$$m_2\beta^3(x_2 - x_1) + m_3\gamma^3(x_3 - x_1) = \frac{d^2x_1}{dt^2}\beta^3\gamma^3.$$

Ce qui prend, en raison des (12) et (13), la forme:

$$\xi - \omega x_1 = \beta^3\gamma^3 \frac{d^2x_1}{dt^2}$$

et, en raison de (16), la forme:

$$(x - x_1)\omega = \beta^3\gamma^3 \frac{d^2 x_1}{dt^2}.$$

On transforme de la même manière les autres 8 équations, et on a:

$$(x - x_1)\omega = \beta^3\gamma^3 \frac{d^2 x_1}{dt^2}, \quad (y - y_1)\omega = \beta^3\gamma^3 \frac{d^2 y_1}{dt^2}, \quad (z - z_1)\omega = \beta^3\gamma^3 \frac{d^2 z_1}{dt^2};$$

$$(x - x_2)\omega = \gamma^3\alpha^3 \frac{d^2 x_2}{dt^2}, \quad (y - y_2)\omega = \gamma^3\alpha^3 \frac{d^2 y_2}{dt^2}, \quad (z - z_2)\omega = \gamma^3\alpha^3 \frac{d^2 z_2}{dt^2};$$

$$(x - x_3)\omega = \alpha^3\beta^3 \frac{d^2 x_3}{dt^2}, \quad (y - y_3)\omega = \alpha^3\beta^3 \frac{d^2 y_3}{dt^2}, \quad (z - z_3)\omega = \alpha^3\beta^3 \frac{d^2 z_3}{dt^2}.$$

Cette forme des équations différentielles du problème des trois corps et la notion du centre d'attraction pourraient être utiles pour la recherche des solutions particulières du problème.

Sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps.

Von

T. Levi-Civita aus Padua.

Je vais résumer, en causant et commentant en peu, le contenu d'un mémoire, qui paraîtra prochainement sous ce même titre dans les „Acta Mathematica" de M. Mittag-Leffler.

* * *

Dans le problème des trois corps (points matériels S, J, P, qui s'attirent suivant la loi de Newton) les forces et par conséquent les équations différentielles du mouvement se comportent d'une façon analytique régulière, tant que les positions des trois points sont distinctes.

D'après cela il est prèsque évident qu'il ne peut y avoir autre raison de singularité pour le mouvement en dehors de la circonstance que deux des trois corps (ou tous les trois) se rapprochent indéfiniment.

Plus précisement M. Painlevé*) a démontré que, à partir des conditions initiales données, des singularités peuvent se présenter alors seulement qu'une au moins des distances mutuelles tend vers zéro pour t convergent vers une valeur finie t_1.

Quoi qu'il en soit, les résultats récents de M. Mittag-Leffler sur la représentation des branches uniformes des fonctions analytiques permettent d'affirmer que:

Dans le problème des trois corps, les coordonnées sont exprimables, en tout cas et pendant toute la durée du mouvement, par des séries jouissant des propriétés fondamentales des séries de Taylor.

*) Voir ses „Leçons etc., professées à Stockholm", chez A. Hermann, Paris 1897, page 583.

Soit en effet x une quelconque de ces coordonnées. D'après la conclusion de M. Painlevé, rappelée tout-à-l'heure, la fonction $x(t)$ reste régulière pour toutes les valeurs de t qu'il y a lieu de considérer: savoir, de l'instant initial t_0 jusqu'à l'infini dans le cas général, où il n'y a pas de choc au bout d'un temps fini; de t_0 à t_1 (ce dernier instant exclu), lorsque le choc intervient. Dans les deux cas, les intervalles de l'axe réel (t_0, ∞), (t_0, t_1) sont intérieurs à l'étoile de M. Mittag-Leffler se rapportant au point t_0. Les équations du mouvement fournissent d'ailleurs, en fonction des données initiales, les dérivées successives de la fonction $x(t)$ au centre t_0 de l'étoile. Il suffit donc de construire, en se servant de ces valeurs, un des développements indiqués par M. Mittag-Leffler pour en tirer une expression de $x(t)$ embrassant toute la durée du mouvement.

On peut dire que le problème est résolu. Mais (tout en restant dans le terrain théorique, où l'on fait abstraction de la complexité des moyens employés) ce n'est pas une résolution complète. Elle est, pour ainsi dire, aridement quantitative, et ne nous laisse pas apercevoir la nature du mouvement.

A ce point de vue se pose d'abord la question de la prévision des chocs: conditions à remplir par les circonstances initiales pour que deux des trois corps ou tous les trois se choquent au bout d'un temps fini.

La première partie de cette question, dont je m'étais occupé pour le cas particulier du problème restreint*), vient d'être brillamment discutée par M. Bisconcini dans un mémoire, qui va paraître dans les „Acta Mathematica". La seconde attend encore une réponse.

Mais, lors même qu'on en posséderait une, il ne serait pas encore permis de tirer des conséquences astronomiques.

En effet les corps célestes ne sont pas des points matériels, et il est loisible de les traiter ainsi pourvu seulement que leurs dimensions soient négligeables par rapport aux distances, c'est-à-dire (dimensions et dégré d'approximation étant donnés) pourvu que leurs distances ne descendent pas au dessous d'une certaine limite ε. A cette condition seulement les conclusions mathématiques seront acceptables.

En l'espèce, pour pouvoir affirmer qu'à partir d'un état initial donné le mouvement se poursuivra régulièrement quel que soit t, il faudra être certain que les distances mutuelles restent supérieures à l'ε susdit.

---

*) „Traiettorie singolari ed urti nel problema ristretto dei tre corpi", Annali di Matematica, Ser. III, T. IX, 1903.

Reconnaître d'avance sur les données initiales quand il en est bien ainsi, voilà le but essentiel du côté qualitatif de notre problème.

J'ai réussi à faire un petit pas pour le cas particulier du problème restreint.

* * *

Il est à peine nécessaire de rappeler que ce cas particulier est caractérisé par les conditions suivantes:

la masse de P est négligeable et n'exerce par conséquent aucune influence sur le mouvement des deux autres corps S et J;

ce mouvement (qui, d'après la première hypothèse, doit correspondre à une solution du problème des deux corps) est le plus simple possible, savoir S et J tournent uniformément autour de leur centre de gravité O; le corps P se meut (initialement et par suite à tout instant) dans le plan, qui contient les deux orbites circulaires de S et de J.

On est ramené de la sorte à un problème avec deux degrés de liberté: Mouvement plan d'un point P soumis à l'attraction newtonienne des deux centres (mobiles) S et J.

Pour rendre la notation aussi simple que possible il convient d'adopter:

la distance constante $\overline{SJ}$ comme unité de longueur;

la somme des masses des deux corps S et J comme unité de masse: μ étant alors la masse de J, celle de S sera $\nu = 1 - \mu$;

l'unité de temps de façon que la vitesse de la rotation de la droite SJ autour de O soit 1.

Dans ces conditions la constante de gravitation universelle a la valeur 1, et le potentiel des forces agissantes sur l'unité de masse de P est

$$\frac{\nu}{r} + \frac{\mu}{\varDelta},$$

en désignant par r la distance $\overline{PS}$, par $\varDelta$ la distance $\overline{PJ}$.

Rapportons la position de P à des axes mobiles x, y, ayant l'origine en S, et SJ pour direction positive de x.

Soient d'autre part p et q les composantes de la vitesse héliocentrique de P, c'est-à-dire de la vitesse rapportée à un système de direction invariable (ce qui n'est pas x, y), ayant l'origine en S.

On reconnaît aisément — je ne vous entretiendrai pas avec des passages tout-à-fait élémentaires — que les équations du mouvement de P peuvent être présentées sous la forme canonique suivante:

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial p}, & \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial q}; \\ \dfrac{dp}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial x}, & \dfrac{dq}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial y}, \end{cases}$$

pourvu qu'on pose:

$$F = \frac{1}{2}\left\{(p+y)^2 + (q-x)^2\right\} - \left\{\frac{\nu}{r} + \frac{1}{2}r^2 + \mu\left(\frac{1}{\varDelta} - x\right)\right\}.$$

Comme F ne contient pas t, le système (I) admet l'intégrale évidente (dite de Jacobi) $F = \text{const.}$, que j'écrirai

$$(1) \qquad F = -C;$$

par cette même indépendence de t, la méthode d'intégration de Jacobi, appliquée au système (I), conduit à envisager (1) comme une équation aux dérivées partielles du premier ordre par rapport à une fonction inconnue W d'après les positions

$$(2) \qquad p = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial W}{\partial y}.$$

Ceci bien posé, rattachons-nous aux remarques précédentes, d'après lesquelles le mouvement se poursuit régulièrement tant que les distances ne tendent pas vers zéro.

Dans le cas actuel, $\overline{SJ}$ restant constante, il y a lieu de se préoccuper seulement de la circonstance que P se rapproche indéfiniment d'un de ces deux points. Il suffit d'ailleurs d'en envisager un, S par exemple, puisque le rôle de l'autre est absolument identique et les conclusions seraient par suite les mêmes.

Je me suis pourtant proposé l'étude des trajectoires du système (c'est-à-dire des courbes décrites par le point P, rapportées aux axes x, y) dans une région suffisamment petite entourant le centre S.

Les équations (I) présentent des singularités en S, qui proviennent du terme $\frac{\nu}{r}$ de F (et de ce terme seulement).

Il en est de même de l'équation de Hamilton-Jacobi

$$F = -C$$

envisagée comme équation aux dérivées partielles en W. Mais elle peut être régularisée (ce qui réussit d'ailleurs même pour le système différentiel (I)). J'entends par là qu'on peut, par un changement convenable de variables indépendantes, faire disparaître la singularité.

Il suffit d'avoir recours à la transformation (conforme)

$$(3) \qquad x + iy = (\xi + i\eta)^2$$

pour que, après avoir chassé d'une part et d'autre le dénominateur

$$\varrho^2 = \xi^2 + \eta^2 = r,$$

l'équation (1) prenne la forme (parfaitement régulière au point $\xi = \eta = 0$)

$$(1') \quad \frac{1}{8}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial \xi} + 2\varrho^2\eta\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial \eta} - 2\varrho^2\xi\right)^2\right] = \nu - C\varrho^2 + \frac{1}{2}\varrho^6 + \mu\varrho^2\left(\frac{1}{\varDelta} - x\right).$$

Par la même transformation les formules (2) deviennent

$$(2') \quad \begin{cases} p = \frac{1}{2\varrho^2}\left(\xi\frac{\partial W}{\partial \xi} - \eta\frac{\partial W}{\partial \eta}\right), \\ q = \frac{1}{2\varrho^2}\left(\eta\frac{\partial W}{\partial \xi} + \xi\frac{\partial W}{\partial \eta}\right). \end{cases}$$

La régularité de (1′) est la clef de voûte de ce qui va suivre.

On comprend en effet qu'il n'y a désormais plus de difficulté à établir l'existence d'une, et même d'une infinité d'intégrales de (1′), holomorphes au point S, et complètes, c'est-à-dire contenant, outre C, une seconde constante essentielle α.

L'intégrale, que j'ai considérée, a la forme

$$W = \sqrt{8\nu}\,(\xi \cos\alpha + \eta \sin\alpha) + \cdots,$$

les termes non écrits étant d'ordre supérieure au premier par rapport à ξ, η.

En glissant sur les détails de démonstration, j'arrive au résultat principal:

C'est que l'équation (formée d'après la méthode de Jacobi)

$$(\mathrm{II}) \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \beta,$$

où β désigne une nouvelle constante, est apte à représenter (sous forme évidemment holomorphe) tous les arcs A de trajectoire possibles au voisinage de S. D'une façon plus précise, on peut délimiter autour de S un certain domaine D (dépendant de la constante C), tel que, si P pénètre dans D, son mouvement a lieu nécessairement sur une des courbes (II).

La nature analytique de W permet de tirer, presque en corollaires, les conclusions suivantes:

Aucun des arcs A ne peut se rapprocher indéfiniment de S sans le rejoindre jamais; c'est-à-dire tout arc A ne passant pas exactement au point S en reste à une distance finie. La moindre distance ∂ du point S à un arc A peut être exprimée en fonction (uniforme à l'intérieur de D) d'un quelconque des états de mouvement de P sur l'arc. Ou bien $\partial = 0$; c'est la condition du choc. Ou bien $\partial > 0$. On peut affirmer que, sur l'arc A, le mouvement se poursuit régulièrement. Si en surplus $\partial > \varepsilon$, il sera permis d'attribuer un sens physique au résultat mathématique.

Rien n'autorise toutefois des prévisions à longue échéance ($\partial > \varepsilon$, ni même $\partial > 0$, quel que soit t). C'est une remarque essentielle, que je dois à l'obligeance de M. Phragmén. On conçoit en effet qu'on puisse bien, en suivant une trajectoire déterminée, sortir de D le long d'un arc A et y rentrer le long d'un arc différent A', et ainsi de suite, avec des nouveaux ∂ ayant même zéro pour limite inférieure. Il arrive sans doute — et on peut le constater déjà dans les cas élémentaire, où la masse μ de J serait nulle — qu'une trajectoire pénètre successivement dans D par une série indéfinie de arcs A, qui, tout en étant en continuation analytique, se présentent à l'intérieur de D comme des éléments distincts. Quant à la limite inférieure des ∂, je n'en puis rien dire. Tous mes efforts dans cette direction ont complètement échoués.

Il n'en reste pas moins un résultat positif se rapportant à la région D: Si $\partial > \varepsilon$ il n'y a rien à craindre actuellement du voisinage de S. Seuls des rapprochements nouveaux (c'est-à-dire précédés par des sorties de D) pourraient devenir dangereux.

* * *

Il m'importe de prévenir une objection.

Je vais d'abord la suggérer par les remarques suivantes:

Toutes les trajectoires d'un certain domaine D autour de S (subordonné à la valeur de C) peuvent être représentées — avons-nous dit — sous la forme

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \beta, \tag{II}$$

le premier membre dépendant de ξ, η, C, α.

Les composantes p, q de la vitesse du mobile au point quelconque ξ, η d'une de ces trajectoires sont données par les formules (2').

Imaginons de tirer de ces formules C et α en fonction de p, q (ξ et η), et faisons la substitution dans $\frac{\partial W}{\partial \alpha}$; de même exprimons-y ξ, η à l'aide de x, y.

On obtient en définitive une véritable intégrale des équations différentielles du mouvement

$$f(x, y, p, q) = \beta.$$

On démontre sans peine qu'une telle intégrale ne coïncide point avec $F = \text{const.}$, et est bien uniforme (et holomorphe) au voisinage d'un quelconque des états de mouvement (x, y, p, q) possibles à l'intérieur de D (le point S étant seulement excepté).*)

*) On veut dire par là que, pour un quelconque de ces états, soit (x_0, y_0, p_0, q_0), il existe un domaine non nul (de l'espace analytique x, y, p, q autour

Voici maintenant l'objection à laquelle je faisais allusion:

L'existence d'une intégrale uniforme, autre que $F =$ const., est en contradiction avec un résultat bien connu de M. Poincaré.

A la vérité la contradiction n'existe pas, et on le met au jour bien simplement en ayant égard aux limites de validité du théorème de M. Poincaré. On y établit la non-existence d'intégrales uniformes par rapport aux variables képlériennes, ce qui implique l'uniformité au voisinage de tous les états de mouvement (x, y, p, q), qui appartiennent à une même orbite osculatrice (elliptique).

On ne peut pas exclure d'après ce théorème l'existence d'intégrales uniformes pour quelque portion de l'orbite seulement, ni non plus au voisinage de quelque état non-elliptique.

Notre intégrale

$$f = \beta,$$

qui est uniforme dans le domaine D, se trouve précisément dans l'une ou dans l'autre de ces conditions.

* * *

J'ai sans doute abusé de votre bienveillante attention et je m'empresse à prendre congé en exprimant une présomption personnelle.

Je pense qu'il doit bien réussir (et par des moyens simples, comme on vient d'en avoir exemple) de régulariser l'équation de Hamilton-Jacobi, même pour le problème général des trois corps.

On y puisera peut-être une confiance bienfaisante pour des nouvels efforts tendant à parfectionner de plus en plus les méthodes d'approximation quantitative.

---

des valeurs x_0, y_0, p_0, q_0) tel que, lorsqu'on se donne dans ce domaine trois des quantités x, y, p, q, la quatrième reste déterminée sans ambiguité par la relation $f = \beta$.

ìin einfaches-Beispiel einer stationären und rotationslosen ìewegung einer tropfbaren schweren Flüssigkeit mit freier Begrenzung.

Von

J. Weingarten aus Freiburg i. B.

Unter den stationären Bewegungen einer inkompressiblen reibungs- ›sen Flüssigkeit, denen ein Geschwindigkeitspotential zukommt, sind iejenigen einer Darstellung am zugänglichsten, bei denen das Ge- :hwindigkeitspotential nur von zweien der rechtwinkligen Koordinaten , y, z eines bewegten Teilchens abhängt. Sind x und y diese Ko- rdinaten, so bewegen sich alle Teilchen in Parallelebenen zur Ebene er (x, y), und jeder Funktion der komplexen Variablen $x + yi$ ent- ɔricht eine gewisse stationäre Flüssigkeitsbewegung, so wie umgekehrt ›der rotationslosen Bewegung eine zugehörige Funktion von $x + yi$.

Wenn durch u und v die Geschwindigkeitskomponenten eines be- :achteten Teilchens nach den Achsen bezeichnet werden, so folgen aus er Kontinuitätsgleichung und der Bedingung der Rotationslosigkeit der ìewegung die Gleichungen:

$$\text{l)} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \qquad (2) \qquad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

ʼelche die nachstehende zur Folge haben:

$$(u - vi)(dx + idy) = df(x + yi) = d(\varphi + \psi i),$$

ie selbst wiederum zu den Gleichungen:

$$\text{3)} \qquad \varphi + \psi i = f(x + yi), \qquad (4) \qquad u - vi = f'(x + yi)$$

ihrt, in denen $f(x + yi)$ eine beliebige Funktion von $x + yi$ be- ɘichnet. Die Funktion φ der Variablen x, y gibt das Geschwindig- eitspotential der Bewegung an.

Wir werden voraussetzen, daß die bewegte Flüssigkeit in ihrem ɑneren nur durch die Schwere angegriffen sei, und durch g die Acceleration der Schwere, durch γ das Gewicht der Volumeneinheit Flüssigkeit bezeichnen.

Wenn der Achse der x die Richtung der Schwere beigelegt wird, so lauten die Eulerschen Bewegungsgleichungen:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=g-\frac{g}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial x},\qquad u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{g}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial y}.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichung (2) ergibt sich aus ihnen:

$$p=\text{Konst.}+\gamma x-\frac{1}{2}\frac{\gamma}{g}(u^2+v^2), \tag{5}$$

durch welche Gleichung der Druck in jedem Punkte der Flüssigkeit bestimmt ist, falls er in einem Punkte gegeben wird.

Die Stromlinien der Flüssigkeit ergeben sich, wie bekannt, aus der Gleichung $\psi=$ Konst.

Sollen, vermöge der Funktion $f(x+yi)$, Bewegungen dargestellt werden, bei denen die Flüssigkeit eine ruhende Atmosphäre von gegebenem Druck p_0 zur teilweisen Begrenzung hat, so muß diese Grenze mit einer Stromlinie (oder dem Stück einer solchen) zusammenfallen. Die Funktion $f(x+yi)=\varphi+\psi i$ muß alsdann die Eigenschaft besitzen, daß für $p=p_0$ die Funktion ψ in eine Konstante übergeht.

Ein sehr einfaches Beispiel, bei welchem diese Bedingung erfüllt wird, bietet die Funktion

$$f(x+yi)=\frac{2}{3}\sqrt{2g\cos\alpha}\,e^{\frac{3}{2}\alpha i}(x+yi)^{\frac{3}{2}}=\varphi+\psi i$$

dar, in welcher α einen zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ beliebig gewählten Winkel bezeichnet. Unter dieser Annahme wird:

$$f'(x+yi)=\sqrt{2g\cos\alpha}\,e^{\frac{3}{2}\alpha i}(x+yi)^{\frac{1}{2}}=u-vi.$$

Ersetzt man die rechtwinkligen Koordinaten x und y durch die Substitutionen $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, so bestimmen sich das Geschwindigkeitspotential φ, die Funktion ψ und die Geschwindigkeitskomponenten u, v durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi&=\frac{2}{3}\sqrt{2g\cos\alpha}\,r^{\frac{3}{2}}\cos\frac{3(\theta+\alpha)}{2},\\
\psi&=\frac{2}{3}\sqrt{2g\cos\alpha}\,r^{\frac{3}{2}}\sin\frac{3(\theta+\alpha)}{2},\\
u&=\sqrt{2g\cos\alpha}\,r^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\theta+3\alpha}{2},\\
v&=-\sqrt{2g\cos\alpha}\,r^{\frac{1}{2}}\sin\frac{\theta+3\alpha}{2}.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Aus den letzten zwei Gleichungen folgert man:

$$u^2 + v^2 = 2gr\cos\alpha$$

nd damit aus Gleichung (5):

$$p = p_0 + \gamma r(\cos\theta - \cos\alpha), \tag{7}$$

renn p_0 den Druck im Anfangspunkte der Koordinaten angibt, der sich uch als der freien Flüssigkeitsbegrenzung angehörig ergeben wird.

Die zweite der Gleichungen (6) zeigt nämlich, daß die Funktion verschwindet für alle Punkte, in denen θ den Wert $-\alpha$ oder $-\alpha + \frac{2\pi}{3}$ annimmt, d. h. in den Schenkeln eines Winkels von 120°, er zum Scheitel den Anfangspunkt der Koordinaten hat. Der eine ı die Seite der negativen y zeigende Schenkel ist unter dem Winkel gegen die x-Achse geneigt, während der andere Schenkel in die eite der positiven y zeigt. Die gebrochene Linie, welche diesen Vinkel darstellt, ist daher eine Stromlinie. Wir setzen voraus, daß ewegte Flüssigkeit sich nur im Innern dieses Winkels befinde. Alsann wird für alle Punkte in der Flüssigkeit die Funktion ψ von positvem Werte und verschwindet nur an der durch die Winkelschenkel elbst gegebenen Begrenzung.

Die Stromlinien der Flüssigkeit sind alsdann durch die Gleichung

$$r^{\frac{3}{2}} \sin\frac{3(\theta+\alpha)}{2} = C$$

estimmt, in welcher C eine positive Konstante bezeichnet. Im Undlichen wird für jede Stromlinie der Winkel θ entweder $-\alpha$ oder $-\alpha + \frac{2\pi}{3}$. Alle Stromlinien nähern sich daher im Unendlichen den ichenkeln des begrenzenden Winkels asymptotisch und ähneln in der 'orm Hyperbelzweigen vom Asymptotenwinkel 120°, mit denen sie uch die Symmetrie gegen die Halbierungslinie dieses Winkels gemein aben. Man bemerkt ferner, daß die Wahl des Winkels α weder die 'orm der Stromlinien, noch die Form der Äquipotentialkurven beeinußt, sondern nur ihre Lage durch eine Drehung um den Anfangspunkt er Koordinaten.

Wir wollen ferner eine der Stromlinien, diejenige für welche $\psi = C_0$, längs einer festen Wand verlaufend denken, diese Wand als ine weitere Begrenzung der Flüssigkeit auffassen, und durch zwei der y-Ebene parallele Wände diese Begrenzung vervollständigen. Alsdann esteht die gesamte Begrenzung der Flüssigkeit aus einer nach der eitlinie von der Gleichung:

$$r^{\frac{3}{2}} \sin\frac{3(\theta+\alpha)}{2} = C_0$$

geformten zylindrischen Fläche, den beiden Ebenen, deren Spuren in der xy-Ebene durch die Schenkel $\theta = -\alpha$ und $\theta = -\alpha + \frac{2\pi}{3}$ gebildet werden, und den beiden der letzteren Ebene parallelen Wänden. Die Formel (7) zeigt alsdann, daß in derjenigen Ebene, deren Spur durch $\theta = -\alpha$ gegeben wird, der Druck p überall konstant und gleich p_0 wird. Diese Ebene wird daher eine freie Grenze gegen eine ruhende Atmosphäre vom Druck p_0 bilden.

Die zweite Ebene, deren Spur durch $\theta = -\alpha + \frac{2\pi}{3}$ bestimmt ist, hat dagegen nicht die Eigenschaft in allen Punkten den nämlichen Druck zu zeigen, sondern ihr entlang muß die Strömung längs einer festen Wand erfolgen. Erst am Anfangspunkte der Koordinaten geht sie in eine freie über, allerdings mit der Geschwindigkeit Null beginnend.

Nur in dem Falle, daß für den Winkel α der Wert $\frac{\pi}{3}$ gewählt wird, ist auch diese zweite Ebene der Gleichung (7) gemäß eine Fläche gleichen Druckes p_0, also ebenfalls freie Grenze. Die Leitlinie der festen Zylinderfläche hat alsdann die Gleichung

$$r^{\frac{3}{2}} \cos \frac{3\theta}{2} = C_0.$$

In diesem Falle bewegt sich die Flüssigkeit in einem Bett von rechteckigem Querschnitt mit zylindrischer gekrümmter Bodenfläche derart, daß ihre freie Oberfläche die Form eines Daches mit einem Winkel von 120^0 besitzt.

In dem First dieses Daches ist die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen Null; in der nach der positiven Seite der y liegenden Dachfläche steigen die Teilchen geradlinig und gleichförmig verzögert auf, bis zum First, während sie auf der entgegengesetzten Seite gleichförmig beschleunigt herabstürzen. Es tritt der eigentümliche Fall ein, daß die freie Oberfläche eine scharfe Kante zeigt.

Es wäre vielleicht möglich eine derartige Wasserbewegung annäherungsweise darzustellen. In weiter Entfernung von dem First der freien Oberfläche ist die Tiefe der Flüssigkeit in ihrem Bett sehr klein, dagegen die Geschwindigkeit sehr groß und vom Werte $\sqrt{gr}$. Durch eine der Tiefe entsprechende Eintrittsöffnung würde sich aus einem Reservoir mit passender Druckhöhe das Wasser mit der erforderten Geschwindigkeit und Richtung in den nach der angegebenen Leitlinie geformten Kanal hineintreiben lassen, und wenn es gelänge einen stationären Zustand herbeizuführen, so müßte dieser angenähert dem theoretischen Falle entsprechen.

Andere Annahmen über die Größe des Winkels α bieten untergeordnetes Interesse. Bei der Wahl $\alpha = 0$ würde zwar die freie Grenze ler Flüssigkeit durch eine vertikale Ebene, in der die Flüssigkeit ıach den Fallgesetzen hinuntertropft, gebildet sein. Aber eine solche Bewegung, wie sie die obigen Formeln ergeben, könnte nicht in der gesamten, wie angegeben, begrenzten Flüssigkeit statthaben, da in lem Gebiete großer Werte von r der Druck wesentlich negativ ausallen würde. Nur wenn dem Winkel α der Wert $\frac{\pi}{3}$ oder ein größerer Wert beigelegt wird, bleibt es ausgeschlossen, daß in einem Teile des Flüssigkeitsgebietes der Druck negativ ausfällt. Alsdann ergibt sich ür die freie Grenze der Flüssigkeit eine schiefe Ebene, welche unter inem geringeren Winkel als 30^0 gegen die Horizontalebene geneigt ist, ın welcher die Flüssigkeitsteilchen, den Gesetzen der schiefen Ebene olgend, herabfließen, während eine zweite schiefe Ebene als feste Wand uftritt. In dem Grenzfalle $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ würde, wie zu erwarten, Bewegung nicht auftreten

Sur les données aux limites dans les équations aux dérivées partielles de la physique mathématique.

Von

J. Hadamard aus Paris.

Parmi les différents systèmes de conditions par lesquels on peut déterminer une solution d'une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre (nous nous bornerons ici à de telles équations), deux seulement ont été considérés pendant longtemps par les géomètres.

L'Analyse en impose un, le problème de Cauchy, celui dans lequel on donne, tout le long de la frontière du domaine que l'on considère, la fonction inconnue z et l'une de ses dérivées premières (ce qui revient à les donner toutes).

Les applications physiques peuvent également conduire au problème de Cauchy, pour des équations du type hyperbolique: c'est ce qui arrive lorsqu'on étudie le mouvement d'un milieu indéfini. Mais elles ne conduisent jamais au problème de Cauchy dans le cas elliptique. Dans ce cas, le premier problème qui se soit présenté aux physico-mathématiciens est celui de Dirichlet, dans lequel on donne, sur une surface fermée, les valeurs de l'inconnue seule. Ils se sont vite aperçus qu'il y avait également lieu de considérer le cas où ce n'était pas la valeur de z, mais celle d'une de ses dérivées (la dérivée normale) qui était donnée (problème hydrodynamique).

Il y a d'ailleurs, au premier abord, contradiction contre les résultats rencontrés de part et d'autre. D'un côté, en effet, on démontre qu'on a le droit de se donner, sur une surface, l'inconnue et une de ses dérivées et que le problème ainsi posé est possible et déterminé; de l'autre, on constate que la solution est entièrement déterminée lorsqu'on fixe soit l'une, soit l'autre des deux données précédentes. Cette circonstance s'explique 1° par la différence qui existe entre les formes des frontières considérées dans l'un et l'autre cas, celles-ci étant les unes fermées, les autres ouvertes; et surtout 2° par ce fait que le raisonnement général d'où résulte la possibilité du problème de *Cauchy* suppose les données analytiques, cette possibilité cessant en fait avec l'analyticité des données dans le cas elliptique.

Mais il s'en faut que les deux classes de problèmes dont nous venons de parler soient les seules auxquelles on puisse avoir affaire. Elles correspondent très souvent, au contraire, à des cas extrêmement particuliers ou même exceptionnels. Par exemple, l'étude des mouvements d'un liquide limité *en tous sens* par une paroi solide conduit à se poser, relativement à une fonction harmonique inconnue, le problème dit *hydrodynamique*, celui dont nous avons parlé plus haut. Mais le cas d'un liquide renfermé dans un vase entièrement clos qu'il remplit exactement, ne se présente jamais: on a toujours, en fait, à considérer une surface libre. On se trouve alors en face d'un problème notablement différent, à servir la détermination d'une fonction harmonique par les valeurs de sa dérivée normale sur *une partie* de la frontière (la paroi solide) et celles de l'inconnue elle-même sur l'autre partie (surface libre).

De tels problèmes, que l'on peut appeler *problèmes mixtes*, où la nature des données diffère d'une partie à l'autre de la frontière, se présentent dans toute sorte de questions analogues relatives aux fonctions harmoniques.

Mais les équations du type hyperbolique appellent, elles aussi, des observations toutes semblables. Nous avons dit que la propagation d'un mouvement dans un milieu indéfini conduisait au problème de *Cauchy*. Il en est tout autrement dans le cas d'un milieu limité, — c'est à dire dans le cas qui se présente toujours en réalité. Si on traduit analytiquement le problème physique ainsi posé, on est conduit à considérer un domaine (à quatre dimensions) limité par deux sortes de frontières. Sur les unes, on se donne l'inconnue et sa dérivée; sur les autres, *l'inconnue seule*, comme il arrivait dans le cas elliptique. C'est donc encore à un problème mixte que l'on a affaire.

Toutefois, ce problème mixte est loin d'être de même nature que le premier, et il serait à souhaiter que l'on eût à sa disposition deux termes différents pour les désigner. Dans un cas, en effet, on n'a nulle part qu'une donnée à sa disposition (à savoir soit l'inconnue, soit une dérivée) tandis que dans l'autre, il est une partie de la frontière où les deux données de *Cauchy* sont connues.

La solution du problème mixte est, pour le cas elliptique, assez analogue à celle du problème de *Dirichlet*. On peut le ramener, comme celle de *Dirichlet*, à la formation d'une fonction de *Green* (dépendant des coordonnées de deux points); la seule différence est que les cas où cette fonction de Green est explicitement connue sont très rares.

Pour le cas hyperbolique, les différences sont beaucoup plus profondes. Comme on peut le prévoir d'après ce qui précède, le problème mixte se rapproche, dans une certaine mesure, des problèmes correspondant au cas elliptique: et, en effet, la difficulté du problème mixte, beaucoup plus grande que celle du problème de Cauchy, provient de ce que la solution dépend essentiellement de la forme du domaine, ainsi qu'il arrive pour le problème de Dirichlet. Rien de pareil ne se produisait pour le problème de Cauchy: si, par exemple, on considère le cas de deux variables, il suffit, comme on sait, pour résoudre ce problème, d'avoir formé la fonction de Riemann, laquelle ne dépend que de l'équation et non de la courbe qui porte les données.

Au contraire, pour le problème mixte, j'ai pu, dans un travail précédent*), établir que la solution dépend d'une sorte de fonction de Green (définie dans le travail en question), laquelle dépend à la fois de l'équation et de la forme de la courbe frontière. Il est d'ailleurs des cas (tels que le problème de la propagation de l'électricité dans un cable limité) où cette fonction de Green se forme très aisément.

---

*) Sur un problème mixte aux dérivées partielles (Bull. Soc. Math. Fr. t. XXXI, 1903).

Über die Mechanik der Elektronen.

Von

A. Sommerfeld aus Aachen.

Die Elektronentheorie als der jüngste und hoffnungsvollste Sproß er mathematischen Physik darf heutzutage ein ganz besonderes Intersse beanspruchen. Bezeichnend für die ihr innewohnende Kraft ist ie folgende Tatsache: Als Lorentz die Theorie ausbaute, war sein lick wesentlich auf die alten optischen Probleme der Aberration, er Fresnelschen Mitführung usw. gerichtet. Seitdem ist eine Fülle euer wunderbarster Tatsachen von der experimentellen Forschung ns Licht gefördert worden, das Zeeman-Phänomen, die Röntgenstrahlen, ie Bequerelstrahlen. Und bei jeder dieser Entdeckungen, die von dem rsprünglichen Machtbereiche der Elektronen fernab zu liegen schienen, at die Theorie ein erlösendes Wort zu sprechen vermocht; sie hat ntweder das Rätselhafte der Erscheinungen in allgemeinen Umrissen rhellt wie bei den Röntgenstrahlen, oder sie hat wie bei dem Zeemanhänomen und den Radiumstrahlen ganz bestimmte zahlenmäßige Analtspunkte zur Beurteilung der Erscheinungen geliefert.

Seit Jahresfrist war ich bemüht, mir einen neuen Zugang zu dieser heorie zu bahnen; meine Ergebnisse habe ich in den „Göttinger Nachchten“*) mitgeteilt.

Zunächst kam es darauf an, das von einem Elektron bei beliebiger ewegung erregte elektrische und magnetische Feld zu berechnen, was ı äußerst einfacher Form gelingt. Als Probe gebe ich die Formeln ir den besonders einfachen Fall eines gleichförmig über seine Oberäche geladenen Elektrons an. Das skalare Potential Φ und das ektorpotential $\mathfrak{A}$ (oder genauer gesagt, der „Rotationsbestandteil“ des tzteren) lauten:

---

*) Zur Elektronentheorie, Note I März 1904, Note II Juli 1904: die Ergebisse namentlich der Note I sind vereinfacht in einer Mitteilung an die Amsteramer Akademie, November 1904. Proceedings pag. 346.

$$(1) \qquad \Phi = \frac{\varepsilon c}{8\pi a}\int\limits_0^\infty \frac{\lambda\, d\tau}{R}, \quad \mathfrak{A} = \frac{\varepsilon}{8\pi a}\int\limits_0^\infty [\mathfrak{w}_{t-\tau}\mathfrak{R}]\,\frac{\lambda'\, d\tau}{R}.$$

ε = Ladung des Elektrons (in elektrostatischen, Heavisideschen Einheiten gemessen), a = Radius des als kugelförmig vorausgesetzten Elektrons, τ = vergangene Zeit, welche von dem Zeitpunkte t aus rückwärts gerechnet wird, R = Abstand des Aufpunktes von der Lage des Elektronenmittelpunktes zur Zeit $t - \tau$, $\mathfrak{R}$ derselbe Abstand, als Vektor aufgefaßt, $\mathfrak{w}$ = Winkelgeschwindigkeit der Rotation, welche nach Achse und Größe beliebig wechseln darf, $[\mathfrak{w}\mathfrak{R}]$ = Vektorprodukt aus Winkelgeschwindigkeit und Fahrstrahl $\mathfrak{R}$, c = Lichtgeschwindigkeit, also $c\tau$ = Lichtweg während der Zeit τ,

$$\lambda = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}, \quad \lambda' = \begin{cases} \dfrac{a^2 + R^2 - c^2\tau^2}{2R^2} \\ 0 \end{cases},$$

je nachdem das Dreieck aus den Seiten a, R, $c\tau$ möglich ist oder nicht.

Wenn insbesondere, wie wir in der Folge voraussetzen wollen, der Mittelpunkt des Elektrons in Ruhe bleibt, dieses also eine reine Rotationsbewegung ausführt, so reduziert sich Φ auf das gewöhnliche elektrostatische Potential und $\mathfrak{A}$ auf

$$(2) \qquad \mathfrak{A} = \frac{\varepsilon}{8\pi a}\int\limits_{\frac{|r-a|}{c}}^{\frac{r+a}{c}} [\mathfrak{w}_{t-\tau}\mathfrak{r}]\,\frac{a^2 + r^2 - c^2\tau^2}{2r^3}\,d\tau.$$

R ist in den konstanten Abstand r des Aufpunktes vom Elektronenmittelpunkte übergegangen. Für innere Punkte lautet die untere Grenze des Integrals, wie aus der Bedingung der Dreiecksmöglichkeit hervorgeht, $(a - r)/c$, für äußere Punkte $(r - a)/c$.

Wesentlich tiefer gehend als die Frage nach der Darstellung des Feldes ist die dynamische Frage nach dem Ablauf der Bewegungen des Elektrons. Dem fundamentalen Ansatz von Lorentz folgend, setzen wir die Kraft pro Ladungseinheit in folgender Weise an:

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{H}];$$

elektrische und magnetische Feldstärke $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ sind dabei aus den Potentialen Φ und $\mathfrak{A}$ in bekannter Weise abzuleiten; wenn außer der Translationsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ eine Rotationsgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$ vorhanden ist, so ist auch diese zu berücksichtigen und $\mathfrak{v}$ durch $\mathfrak{v} + [\mathfrak{w}\mathfrak{r}]$ zu ersetzen.

Sodann setzen wir die Kräfte $\mathfrak{f}$ nach den Regeln der Statik zuammen zu einer resultierenden Einzelkraft $\mathfrak{F}$ und einem resultierenden (räftepaar $\mathfrak{N}$. Diese Zusammensetzung ist eine recht mühsame Sache, ie gelingt aber trotzdem bei ganz allgemeinem Charakter der Transations- oder Rotationsbewegung.

Nimmt man an, daß ein äußeres von der Bewegung unseres Elekrons unabhängiges Feld nicht vorhanden ist, und daß das Elektron :eine träge Masse im gewöhnlichen Sinne besitzt, so liefern die Resulierenden $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{N}$ bekanntlich zugleich auch das Bewegungsgesetz in ler Form

$$\mathfrak{F} = 0, \quad \mathfrak{N} = 0.$$

Ich teile hier nur die Werte von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{N}$ bei beliebiger Rotations-›ewegung um eine feste Achse mit:

$$3) \qquad \mathfrak{F} = 0, \qquad \frac{-24\pi a^2 c}{\varepsilon^2}\,\mathfrak{N} = \int_0^{2a/c} \dot{\mathfrak{w}}_{t-\tau}(2a^2 - c^2\tau^2)\,d\tau.$$

Das Gesetz für den Ablauf der freien Rotationsbewegung lautet laher einfach:

$$4) \qquad \int_0^{\tau'} \dot{\mathfrak{w}}_{t-\tau}(2a^2 - c^2\tau^2)\,d\tau = 0.$$

$' = 2a/c$ ist diejenige Zeit, in der das Licht unser Elektron überstreicht.)er Ablauf der Bewegung wird also bestimmt nicht allein durch den ›ewegungszustand im Zeitpunkte t, sondern durch den Bewegungserlauf während des zwar sehr kurzen aber endlichen Zeitintervalls von er Länge $\tau' = 2a/c$. Die Bewegungsgleichung erscheint zunächst nicht ls Differentialgleichung, d. h. nicht als eine Gleichung, welche ie Augenblickswerte von Geschwindigkeit und Beschleunigung zur Zeit t ıiteinander verknüpft, sondern als Integralgleichung, welche die ⟨eschwindigkeiten während eines endlichen Zeitintervalles verbindet.

Von der Integralgleichung geht man leicht über zu einer Funkionalgleichung, welche den Bewegungszustand, d. h. den Drehrinkel φ, die Drehgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$ und die Drehbeschleunigung $\dot{\mathfrak{w}}$ ur Zeit t mit dem Bewegungszustande zur Zeit $t - \tau'$ in Beziehung etzt. Durch partielle Integration ergibt sich nämlich aus (4) sofort:

$$5) \qquad \frac{\tau'^2}{4}(\dot{\mathfrak{w}}_{t-\tau'} + \dot{\mathfrak{w}}_t) + \tau'\mathfrak{w}_{t-\tau'} + \varphi_{t-\tau'} - \varphi_t = 0.$$

Natürlich kann man durch Reihenentwickelung die Gleichung chließlich auch in die Form einer Differentialgleichung formal umchreiben, die dann aber naturgemäß von unendlich hoher Ordnung rird; sie lautet:

$$(6) \quad \left(\frac{1}{4}\frac{1}{1!}-\frac{1}{3!}\right)\varphi+\left(\frac{1}{4}\frac{1}{2!}-\frac{1}{4!}\right)\tau'\mathfrak{w}+\left(\frac{1}{4}\frac{1}{3!}-\frac{1}{5!}\right)\tau'^2\dot{\mathfrak{w}}+\cdots=0\,.$$

Daß nämlich die Probleme der gewöhnlichen Mechanik allgemein zu reden auf Differentialgleichungen 2^{ter} Ordnung führen, liegt offenbar daran, daß mit der Lage und der Geschwindigkeit des Systems auch die Beschleunigung und der weitere Ablauf bestimmt ist. Das Integral der Bewegungsgleichung kann hier für jede Koordinate nur zwei Integrationskonstanten enthalten. In der „Übermechanik" der Elektronen dagegen ist der weitere Bewegungsverlauf erst bestimmt, wenn die vorangehende Bewegung während eines endlichen Zeitintervalles, d. h. wenn außer Lage und Geschwindigkeit auch die Beschleunigung und alle höheren Differentialquotienten derselben gegeben werden. Das vollständige Integral der Bewegungsgleichung muß hier notwendig unendlich viele Integrationskonstanten aufweisen und die Bewegungsgleichung daher von unendlich hoher Ordnung werden.

Sowie die seitherige Theorie der Differentialgleichungen recht eigentlich auf die Probleme der Mechanik zugeschnitten war, so dürfen wir hoffen, daß die von Hilbert inaugurierte Theorie der Integralgleichungen in unserer Übermechanik fruchtbar werden wird. In dem einfachen vorliegenden Falle reichen wir indessen mit wohlbekannten Methoden aus. Da unsere Differentialgleichung (6) eine lineare mit konstanten Koeffizienten ist, werden wir sie in Strenge durch eine Exponentialfunktion lösen. Machen wir z. B. den bequemen Ansatz:

$$(7) \qquad \varphi = A e^{2i\gamma t/\tau'},$$

so bleibt die Amplitude A willkürlich. Der Exponent γ bestimmt sich am besten aus der Funktionalgleichung (5); dieselbe liefert für γ eine Bedingung, welche sich auf die einfache Form bringen läßt:

$$(8) \qquad e^{2i\gamma} = \frac{1+i\gamma}{1-i\gamma} \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg}\gamma = \gamma\,.$$

Die wohlbekannte Untersuchung dieser transzendenten Gleichung lehrt, daß es unendlich viele reelle und keine komplexen oder rein imaginären Wurzeln γ gibt. Die kleinste nicht verschwindende Wurzel wird rund:

$$\gamma = 4{,}50.$$

Das asymptotische Gesetz der Wurzeln von großem Betrage lautet:

$$\gamma = \frac{2m+1}{2}\pi \quad \text{für} \quad m = \pm\infty\,.$$

Im besonderen zählt natürlich auch $\gamma = 0$ zu den Wurzeln.

Das Elektron ist also einer unendlichen Serie von Eigenschwingungen fähig, in denen es ohne Dämpfung hin- und herotieren kann. Die Eigenperioden sind allgemein gegeben durch $\pi\tau'/\gamma$.)em Wurzelwerte $\gamma = 0$ entspricht als mögliche kräftefreie Bewegung lie gleichförmige Rotation.

Die Möglichkeit solcher kräftefreier Schwingungen, bei denen das ückdrehende Moment durch das Eigenfeld des Elektrons, also durch lie Bewegung selbst erzeugt wird, gehört fraglos zu den merkwürdigsten Tatsachen unserer Übermechanik. Diese Möglichkeit ist für den Fall leichförmiger Volumladung, wo die Verhältnisse nicht ganz so übersichtlich liegen, wie bei gleichförmiger Oberflächenladung, von Hrn. Herglotz*) entdeckt worden. Die von mir hinzugefügte einfache Darstellung les Feldes und der Bewegungsgleichung wird ein tieferes Studium lieser Schwingungen ermöglichen.

Vielleicht können wir uns das Zustandekommen derartiger Schwingungen durch die folgende, natürlich sehr rohe Betrachtung etwas verständlicher machen. Indem sich das Elektron durch eine gewisse erste Lage I hindurchbewegt, sendet es eine Wirkung in den Raum hinaus, lie es, in eine zweite Lage II gelangt, teilweise wieder auffängt. Die Schwingungsdauer ist nun gerade so zu bemessen, daß der hierbei erhaltene Antrieb das Elektron wieder nach I zurückwirft.

Noch möge erwähnt werden, daß die Möglichkeit unserer Eigenschwingungen keineswegs etwa an das Vorkommen von Überlichtgeschwindigkeiten gebunden ist. Die bei unseren Schwingungen auftretenden größten Geschwindigkeiten (am Umfange des Elektrons) hängen on der Größe der Amplitude A ab, und sind daher, da A willkürlich, ür unser Problem belanglos. Wählt man A hinreichend klein, so bewegt sich jedes Ladungselement zweifellos mit Unterlichtgeschwindigkeit.

Es ist verlockend, von dem Spektrum des rotierenden Elektrons u reden. Wir berechnen also aus den gefundenen Schwingungsperioden die zugehörigen Wellenlängen:

$$\lambda = c\frac{\pi\tau'}{\gamma} = \frac{2\pi}{\gamma}a.$$

Leider sind diese Wellenlängen außerordentlich klein, nämlich von der Größenordnung des Elektronenradius a und es häufen sich die reziproken Wellenlängen, als Linienspektrum aufgetragen, nicht im Endlichen, ondern im Unendlichen. Es kommt hinzu, daß unsere Schwingungen keine Ausstrahlung ergeben können, da sie ungedämpft sind. Eine igentliche Analogie mit den optischen Spektren ist also kaum vorhanden. Immerhin ist das Vorhandensein unserer unendlichen Serie on Eigenschwingungen bei nur einem Grade von mechanischer Be-

*) Zur Elektronentheorie, Göttinger Nachrichten, November 1903.

wegungsfreiheit (Rotation um eine feste Achse) und ohne Zuhilfenahme einer „quasielastischen Kraft", wie man sie in der Theorie der Dispersion anzunehmen gezwungen ist, auch für die Auffassung der sichtbaren Spektren von Interesse.

Mehr nach der mathematischen Seite zielt die folgende Bemerkung: Während wir durch (7) eine einzelne der möglichen Eigenschwingungen des rotierenden Elektrons dargestellt haben, können wir nachträglich nach der allgemeinsten kräftefreien Rotationsbewegung fragen. Diese wird sich als allgemeinste Überlagerung der Eigenschwingungen darstellen lassen, dem Umstande entsprechend, daß sich das allgemeine Integral unserer Differentialgleichung (6) aus den partikulären Integralen (7) linear zusammensetzt in der Form:

$$\varphi = \sum_{0}^{\infty}{}^{(n)} A_n e^{2i\gamma_n t/\tau'}$$

oder reell geschrieben:

$$\varphi = \sum_{0}^{\infty} a_n \cos\frac{2\gamma_n t}{\tau'} + \sum_{1}^{\infty} b_n \sin\frac{2\gamma_n t}{\tau'}.$$

Wir dürfen erwarten, daß sich dieser Ausdruck dem in allgemeinster Weise vorzuschreibenden Anfangszustande anpassen läßt. Als „Anfangszustand" haben wir uns die Werte von φ in dem Intervall von $t = 0$ bis $t = \tau'$ willkürlich vorzuschreiben, durch welche Werte dann vermöge der Integralgleichung (4) oder der Funktionalgleichung (5) die folgende Bewegung festgelegt ist. Ist der Anfangszustand gegeben durch $\varphi = f(t)$, so haben wir also zu verlangen, daß sich die willkürliche Funktion $f(t)$ zwischen $t = 0$ und $t = \tau'$ in der Form entwickeln läßt:

$$f(t) = \sum_{0}^{\infty} a_n \cos\frac{2\gamma_n t}{\tau'} + \sum_{1}^{\infty} b_n \sin\frac{2\gamma_n t}{\tau'}.$$

Zum Zwecke der Koeffizientenbestimmung empfiehlt es sich statt der vorstehenden Sinus- und Cosinusfunktionen die folgenden linearen Kombinationen derselben einzuführen:

$$u_0 = 1,\ u_n = \cos\left(\frac{2\gamma_n t}{\tau'} - \gamma_n\right) - \cos\gamma_n,\ v_n = \sin\left(\frac{2\gamma_n t}{\tau'} - \gamma_n\right),$$

welche den sog. Orthogonalitätsbedingungen:

$$\int_0^{\tau'} u_n u_m\, dt = \int_0^{\tau'} u_n v_m\, dt = \int_0^{\tau'} v_n v_m\, dt = 0$$

bei nicht identischem n und m genügen und daher eine Koeffizientenbestimmung genau in Fourierscher Weise gestatten. Unsere hiernach modifizierte Form der fraglichen Reihenentwicklung lautet:

$$f(t) = \sum_0^\infty c_n u_n(t) + \sum_1^\infty d_n v_n(t), \; c_n = \frac{\int\limits_0^{\tau'} f(t) u_n(t)\,dt}{\int\limits_0^{\tau'} u_n^2(t)\,dt}, \; d_n = \frac{\int\limits_0^{\tau'} f(t) v_n(t)\,dt}{\int\limits_0^{\tau'} v_n^2(t)\,dt}.$$

Übrigens kommt ein spezieller Fall derselben bereits bei Fourier selbst gelegentlich der Wärmeleitung in einer Kugel vor, derjenige nämlich, wo vermöge besonderer Symmetrie-Eigenschaften von f die Koeffizienten c sämtlich verschwinden. In diesem Spezialfalle kann man z. B. nach Cauchy den Beweis für die Möglichkeit der betr. Entwicklung in Strenge erbringen; es unterliegt wohl keinem Zweifel, daß der Beweis auch auf die von uns postulierte allgemeine Entwicklung ausgedehnt werden kann. Die Elektronentheorie erweist sich hierbei als heuristisches Hilfsmittel zur Auffindung mathematischer Sätze in demselben Maße wie in früheren Zeiten die Wärmeleitungs- oder die Potentialtheorie.

Die näheren Umstände bei den freien Rotationsschwingungen können wir uns durch die Untersuchung des Feldes und des Energieflusses deutlicher machen. Ausgehend von der Formel (2) für $\mathfrak{A}$ berechnet man leicht in jedem Punkte außerhalb und innerhalb des Elektrons die Feldstärken $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$. Man findet, daß im Äußeren für die freien Schwingungsperioden gerade $\mathfrak{A}=0$, $\mathfrak{H}=0$ wird. Im Äußeren haben wir daher auch keinen Energiefluß und keine andere Energie als diejenige elektrostatische, die der ruhenden Ladung zukommt. Diese beträgt in den hier gewählten Einheiten:

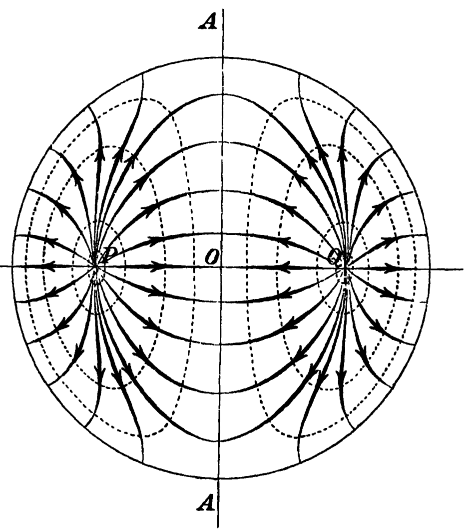


Fig. 1.

$$W_a = \frac{\varepsilon^2}{8\pi a}. \tag{9}$$

Im Innern dagegen sind $\mathfrak{A}$ und daher auch $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ von Null verschieden. Wenn man den Energiefluß $\mathfrak{S} = c[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]$ bestimmt, so findet man einfache Formeln, die mit der vorstehenden Figur äquivalent sind.

Die Drehachse AA ist aufrecht gezeichnet; in dieser ist der Energiefluß natürlich Null, desgleichen an der Oberfläche des Elektrons, weil nach außen keine Energie abgegeben wird. Die Strömungslinien der Energie liegen in den Meridianebenen durch die Drehachse. In der Figur ist zugleich die Stärke des Energieflusses durch die Stärke des Ausziehens dieser Linien angedeutet. Nach einer viertel Schwingungsdauer kehren die Pfeile des Energieflusses ihren Sinn um. Natürlich strömt die Energie nicht inkompressibel, es findet vielmehr eine abwechselnde Verdichtung und Verdünnung der Energie nach dem in der Äquatorebene um O durch die Punkte P, Q hindurchgelegten Kreise hin statt. Außer den Strömungslinien sind ihre orthogonalen Trajektorien, welche für die Konstruktion der ersteren nützlich sind, punktiert eingetragen.

Der gesamte Energieinhalt des Elektronen-Innern bestimmt sich durch die einfache Formel:

$$W_i = \frac{(\varepsilon A)^2}{12\pi a}(1+\gamma^2)\sin^2\gamma. \tag{10}$$

Wenn die Amplitude A nicht zu klein ist, kann dieser Energieinhalt ein ganz beträchtlicher sein. Verglichen mit dem Gehalt des ganzen Äußeren an elektrostatischer Energie, Gleichung (9), haben wir:

$$\frac{W_i}{W_a} = \frac{2}{3} A^2(1+\gamma^2)\sin^2\gamma.$$

Dies gibt für die Grundschwingung $\gamma = 4{,}50$ und beispielsweise für die Amplitude $A = \pi$:

$$\frac{W_i}{W_a} = 132.$$

Während sich die Energie W_a als elektrostatische Wirkung äußert, ist die mehr als hundertfache Energie W_i völlig latent und nach außen hin durch nichts bemerkbar.

Stellen wir uns schließlich etwa vor, daß durch irgend einen geheimnisvollen Eingriff diese latente Energie der Rotationsbewegung in wirksame Energie der Translationsbewegung verwandelt wird! Die letztere kann man der Hauptsache nach richtig als kinetische Energie $\mu v^2/2$ berechnen, wenn v der Lichtgeschwindigkeit nicht zu nahe kommt. Dabei ist die elektromagnetische longitudinale Masse μ in bekannter Weise folgendermaßen zu definieren:

$$\mu = \frac{\varepsilon^2}{4\pi a}\frac{1}{c^2}\left\{\frac{2}{3} + \frac{4}{5}\frac{v^2}{c^2} + \cdots\right\}.$$

Indem wir also die Rotationsenergie W_i gleich der Translationsenergie $\mu v^2/2$ setzen, ergibt sich:

$$\frac{2}{3} A^2(1+\gamma^2)\sin^2\gamma = \frac{v^2}{c^2}\left\{\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\frac{v^2}{c^2}+\cdots\right\}.$$

Soll z. B. die Geschwindigkeit v gleich $c/2$ werden, so ist dazu als Größe der ursprünglich vorhandenen Amplitude A unter Voraussetzung der Grundschwingung $\gamma = 4{,}50$ erforderlich $A = 0{,}13 = 7^0{,}5$.

Die letzten Betrachtungen habe ich hier unter dem Gesichtspunkte mitgeteilt, daß sie eine Art Modell für eine mögliche Konstitution des Radiumatoms liefern können. Es steht nichts im Wege, die Elektronen, die am Aufbau des Radiums beteiligt sind, mit Rotationsenergie auszustatten. Nehmen wir ferner lediglich der Einfachheit wegen an, daß sie Oberflächenladung haben, so ist nach außen hin zunächst nichts von einer Wirkung dieser Energie zu verspüren. Wenn sich aber die rotierende Bewegung irgendwie in fortschreitende umsetzt, so haben wir schon bei mäßigen Rotationsamplituden fortschreitende Geschwindigkeiten zu erwarten, die mit den beobachteten Geschwindigkeiten der β-Bequerelstrahlen vergleichbar sind.

Unser Modell des Radiumatoms läßt sich plausibler gestalten, wenn wir die Rotationsbewegung am Orte durch eine Kreisbewegung ersetzen, die ebenfalls bei gewissen Werten der Umlaufzeit eine mögliche kräftefreie Bahn des Elektrons darstellt. Denken wir uns diese Bahn irgendwie gestört, so haben wir nicht erst die Transformation der Rotations- in Translationsenergie nötig, sondern können uns direkt vorstellen, daß das eine oder andere Elektron das System der übrigen Radiumelektronen verläßt und als Bequerelstrahl in die Erscheinung tritt.

Rechnerische Ergänzungen. Die Formeln (1) sind in meiner Note I, Gött. Nachr. 1904 Heft 2, § 5 und 6, die Gleichungen (3)—(6) in meiner Note II. ebenda Heft 4, § 19 und 20 abgeleitet.

Das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ außerhalb des Elektrons, $r > a$. Indem wir in (2) eintragen:

$$\varphi = Ae^{2i\gamma t/\tau'},\quad \mathfrak{w}_{t-\tau} = \frac{2i\gamma}{\tau'} Ae^{2i\gamma(t-\tau)/\tau'}$$

und unter $\mathfrak{l}$ einen Einheitsvektor in Richtung der Drehungsachse verstehen, haben wir:

$$\mathfrak{A} = \frac{\varepsilon A}{8\pi a}\frac{2i\gamma}{\tau'}[\mathfrak{l}\mathfrak{r}]e^{2i\gamma t/\tau'}J, \tag{11}$$

mit der Abkürzung

$$J = \int_{(r-a)/c}^{(r+a)/c} e^{-2i\gamma\tau/\tau'}\frac{a^2+r^2-c^2\tau^2}{2r^3}\,d\tau. \tag{12}$$

Als geeignete Integrationsvariable benutze man eine Größe u, die mit τ

durch die Gleichung $c\tau = r + au$ zusammenhängt. Es wird dann mit Rücksicht auf $\tau' = 2a/c$:

$$J = \frac{a}{2cr^3} e^{-i\gamma r/a} \int_{-1}^{+1} e^{-i\gamma u} (a^2 - 2aru - a^2u^2) du$$

$$= -\frac{a}{cr^3} e^{-i\gamma r/a} \left(\frac{2ari}{\gamma} + \frac{2a^2}{\gamma^2}\right) \left(\cos\gamma - \frac{\sin\gamma}{\gamma}\right);$$

somit

$$\mathfrak{A} = \frac{\varepsilon A}{4\pi r^2} [\mathfrak{r}] e^{i\gamma\left(\frac{2t}{\tau'} - \frac{r}{a}\right)} \left(1 - \frac{ai}{\gamma r}\right) \left(\cos\gamma - \frac{\sin\gamma}{\gamma}\right). \tag{13}$$

Wegen der Gleichung (8) ist daher im ganzen Außenraum $\mathfrak{A} = 0$, also auch:

$$\mathfrak{H} = \operatorname{rot}\mathfrak{A} = 0, \quad \mathfrak{S} = c[\mathfrak{E}\mathfrak{H}] = 0.$$

Das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ im Innern des Elektrons, $r < a$. Wir können auch jetzt von Gleichung (11) ausgehen, wenn wir in dem Werte von J das Vorzeichen der unteren Grenze abändern:

$$J = \int_{(a-r)/c}^{(a+r)/c} e^{-2i\gamma\tau/\tau'} \frac{a^2 + r^2 - c^2\tau^2}{2r^3} d\tau. \tag{14}$$

Als Integrationsvariable empfiehlt sich jetzt eine Größe u, die wir folgendermaßen definieren: $c\tau = a + ru$. Führen wir noch die Abkürzung

$$\Gamma = \gamma \frac{r}{a}$$

ein, so ergibt sich mit Rücksicht auf $\tau' = 2a/c$:

$$J = \frac{1}{2cr^2} e^{-i\gamma} \int_{-1}^{+1} e^{-i\Gamma u} (r^2 - 2aru - r^2u^2) du$$

$$= -\frac{1}{cr^2} e^{-i\gamma} \left(\frac{2ari}{\Gamma} + \frac{2r^2}{\Gamma^2}\right) \left(\cos\Gamma - \frac{\sin\Gamma}{\Gamma}\right);$$

somit

$$\mathfrak{A} = \frac{\varepsilon A}{4\pi r^2} [\mathfrak{r}] e^{i\gamma\left(\frac{2t}{\tau'} - 1\right)} \left(1 - \frac{i}{\gamma}\right) \left(\cos\Gamma - \frac{\sin\Gamma}{\Gamma}\right). \tag{15}$$

Man beachte, daß $\mathfrak{A}$ für $r = 0$, $\Gamma = 0$ endlich bleibt und für $r = a$, $\Gamma = \gamma$ verschwindet, also stetig in den außerhalb des Elektrons herrschenden Wert $\mathfrak{A} = 0$ übergeht.

Die Feldstärken $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ im Innern des Elektrons. Diese sind allgemein mittels der Potentiale Φ und $\mathfrak{A}$ folgendermaßen bestimmt:

$$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t}, \quad \mathfrak{H} = \operatorname{rot}\mathfrak{A}.$$

Da in unserem Falle das skalare Potential Φ im Innern des Elektrons konstant ist, so haben wir direkt, indem wir von dem komplexen Werte zu seinem reellen Teil „$\mathfrak{Re}$“ übergehen

$$\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} = -\frac{\varepsilon A}{4\pi a}[\mathfrak{l}\mathfrak{r}]f(r)\,\mathfrak{Re}\left\{(i\gamma+1)e^{i\gamma\left(\frac{2t}{\tau'}-1\right)}\right\} \tag{16}$$

bei Benutzung der Abkürzung:

$$f(r) = \frac{1}{r^2}\left(\cos\Gamma - \frac{\sin\Gamma}{\Gamma}\right) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\frac{\sin\Gamma}{\Gamma}. \tag{17}$$

Man überzeugt sich ferner leicht, daß

$$\operatorname{rot}\{[\mathfrak{l}\mathfrak{r}]f(r)\} = 2\mathfrak{l}f(r) + [\mathfrak{r}[\mathfrak{l}\mathfrak{r}]]\frac{1}{r}\frac{df}{dr} = \mathfrak{l}\left(2f + r\frac{df}{dr}\right) - \mathfrak{r}(\mathfrak{l}\mathfrak{r})\frac{1}{r}\frac{df}{dr},$$

wobei $(\mathfrak{l}\mathfrak{r})$ das skalare Produkt aus $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{l}$ bedeutet. Es wird daher

$$\mathfrak{H} = \operatorname{rot}\mathfrak{A} = \frac{\varepsilon A}{4\pi}\left(\mathfrak{l}\left(2f + r\frac{df}{dr}\right) - \mathfrak{r}(\mathfrak{l}\mathfrak{r})\frac{1}{r}\frac{df}{dr}\right)\mathfrak{Re}\left\{\left(1-\frac{i}{\gamma}\right)e^{i\gamma\left(\frac{2t}{\tau'}-1\right)}\right\}. \tag{18}$$

Der Energiefluß $\mathfrak{S} = c[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]$. Das Produkt der beiden reellen Teile „$\mathfrak{Re}$“ in $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ beträgt:

$$\left\{-\gamma\sin\gamma\left(\frac{2t}{\tau'}-1\right) + \cos\gamma\left(\frac{2t}{\tau'}-1\right)\right\}\left\{\cos\gamma\left(\frac{2t}{\tau'}-1\right) + \frac{1}{\gamma}\sin\gamma\left(\frac{2t}{\tau'}-1\right)\right\}$$
$$= \cos 2\gamma\left(\frac{2t}{\tau'}-1\right) + \frac{1-\gamma^2}{2\gamma}\sin 2\gamma\left(\frac{2t}{\tau'}-1\right),$$

oder wegen der Gleichung $\operatorname{tg}\gamma = \gamma$:

$$\cos 2\gamma\left(\frac{2t}{\tau'}-1\right) + \frac{\cos 2\gamma}{\sin 2\gamma}\sin 2\gamma\left(\frac{2t}{\tau'}-1\right) = \frac{\sin\frac{4\gamma t}{\tau'}}{\sin 2\gamma}.$$

Bei der Berechnung von $[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]$ sind ferner zu bilden:

$$[[\mathfrak{l}\mathfrak{r}]\mathfrak{l}] = \mathfrak{r} - \mathfrak{l}(\mathfrak{r}\mathfrak{l}), \qquad [[\mathfrak{l}\mathfrak{r}]\mathfrak{r}] = \mathfrak{r}(\mathfrak{l}\mathfrak{r}) - \mathfrak{l}r^2.$$

Mit Rücksicht auf Vorstehendes ergibt sich nun:

$$\mathfrak{S} = c[\mathfrak{E}\mathfrak{H}] = -\left(\frac{\varepsilon A}{4\pi}\right)^2\frac{c}{a}\frac{\sin\frac{4\gamma t}{\tau'}}{\sin 2\gamma}\left\{\mathfrak{r}\left(2f + \frac{r^2-(\mathfrak{r}\mathfrak{l})^2}{r}\frac{df}{dr}\right) - 2\mathfrak{l}(\mathfrak{r}\mathfrak{l})f\right\}f.$$

$\mathfrak{S}$ möge in seine drei rechtwinkligen Komponenten $\mathfrak{S}_x$, $\mathfrak{S}_y$, $\mathfrak{S}_z$ zerlegt werden, und es möge die z-Achse mit der Richtung von $\mathfrak{l}$, d. h. mit der Drehachse zusammenfallen. Dann ist

$$(\mathfrak{r}\mathfrak{l}) = z, \quad r^2 - (\mathfrak{r}\mathfrak{l})^2 = x^2 + y^2$$

also

$$\left.\begin{matrix}\mathfrak{S}_x\\ \mathfrak{S}_y\\ \mathfrak{S}_z\end{matrix}\right\} = -\left(\frac{\varepsilon A}{4\pi}\right)^2\frac{c}{a}\frac{\sin\frac{4\gamma t}{\tau'}}{\sin 2\gamma}f\left\{\begin{matrix}x\left(2f + \frac{x^2+y^2}{r}\frac{df}{dr}\right),\\ y\left(2f + \frac{x^2+y^2}{r}\frac{df}{dr}\right),\\ z\,\frac{x^2+y^2}{r}\frac{df}{dr}.\end{matrix}\right.$$

Der Energiefluß findet daher überall in den Meridianebenen durch die Drehachse statt; in der Drehachse selbst ($x = y = 0$) sowie auf der Oberfläche des Elektrons ($r = a$, $\Gamma = \gamma$, $f = 0$) verschwindet $\mathfrak{S}$; will man hier, was zulässig ist, trotzdem von einer Richtung des Energieflusses sprechen, so kann man sagen: sowohl auf der Drehachse wie auf der Oberfläche steht der (der Größe nach verschwindende) Energiefluß senkrecht. Wenn wir t um eine viertel Schwingungsdauer $\pi\tau'/4\gamma$ vermehren, kehrt der Energiefluß seine Richtung um.

Zum Zwecke der genaueren Zeichnung bemerke man, daß der Vektor $\mathfrak{S}$ gleichgerichtet ist mit dem Vektor

$$\mathfrak{T} = \operatorname{grad}\{(x^2 + y^2)f\},$$

dessen Komponenten lauten:

$$\mathfrak{T}_x = x\left(2f + \frac{x^2+y^2}{r}\frac{df}{dr}\right), \quad \mathfrak{T}_y = y\left(2f + \frac{x^2+y^2}{r}\frac{df}{dr}\right)$$

$$\mathfrak{T}_z = z\,\frac{x^2+y^2}{r}\frac{df}{dr}.$$

Somit werden die orthogonalen Trajektorien des Energieflusses in jeder Meridianebene dargestellt durch die Gleichung

$$(x^2 + y^2)f = \text{const.}$$

Es sind dies Ovale, welche im Falle der Grundschwingung in jeder Meridianebene zwei Punkte P, Q, symmetrisch zur Drehachse auf dem zu dieser senkrechten Durchmesser gelegen, umschließen. Aus diesen Punkten müssen daher die Linien des Energieflusses hervorquellen, um auf der Drehachse oder auf der Oberfläche des Elektrons senkrecht zu endigen. Der durch die Punkte P, Q in der Meridianebene gelegte und mit dem Elektron konzentrische Kreis gehört ebenfalls zu den Strömungslinien der Energie. Der in der Äquatorebene durch dieselben Punkte gelegte Kreis kann als Knotenlinie der Energiepulsation bezeichnet werden.

Den vorstehenden Angaben gemäß ist die Figur des Textes gezeichnet worden. Bei den Oberschwingungen gibt es mehrere Punktepaare vom Charakter des Paares P, Q und daher weitere Unterteilungen des Kugelinnern.

Der Energieinhalt des Elektrons. Aus der obigen Berechnung von $\mathfrak{E}$, Gleichung (16), folgt:

$$\left.\begin{matrix}\mathfrak{E}_x\\ \mathfrak{E}_y\\ \mathfrak{E}_z\end{matrix}\right\} = \frac{\varepsilon A}{4\pi a}\left(-\gamma\sin\gamma\left(\frac{2t}{\tau'}-1\right) + \cos\gamma\left(\frac{2t}{\tau'}-1\right)\right) f(r) \left\{\begin{matrix}-y,\\ x,\\ 0,\end{matrix}\right.$$

also als zeitlicher Mittelwert des Quadrates des absoluten Betrages von $\mathfrak{E}$:

$$\overline{\mathfrak{E}^2} = \left(\frac{\varepsilon A}{4\pi a}\right)^2 \frac{\gamma^2+1}{2} f^2(r)(x^2+y^2).$$

Ähnlich folgt aus den obigen Angaben über $\mathfrak{H}$, Gleichung (18):

$$\overline{\mathfrak{H}^2} = \left(\frac{\varepsilon A}{4\pi}\right)^2 \frac{\gamma^2+1}{2\gamma^2}\left(4f^2 + (x^2+y^2)\frac{df}{dr}\left(\frac{4f}{r}+\frac{df}{dr}\right)\right).$$

Wir integrieren zunächst $\overline{\mathfrak{E}^2}$ und $\overline{\mathfrak{H}^2}$ über eine Kugelfläche vom Radius r, wobei sowohl r wie f und df/dr als konstant zu behandeln sind. Da

$$\int x^2 d\sigma = \int y^2 d\sigma = \frac{1}{3}\int r^2 d\sigma = \frac{4\pi}{3} r^4,$$

so entsteht:

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} \int \overline{\mathfrak{E}^2} d\sigma &= \left(\frac{\varepsilon A}{4\pi a}\right)^2 \frac{\gamma^2+1}{2} f^2(r)\frac{8\pi}{3} r^4,\\ \int \overline{\mathfrak{H}^2} d\sigma &= \left(\frac{\varepsilon A}{4\pi}\right)^2 \frac{\gamma^2+1}{2\gamma^2}\left(4f^2 + \frac{2}{3} r^2 \frac{df}{dr}\left(\frac{4f}{r}+\frac{df}{dr}\right)\right) 4\pi r^2. \end{aligned}\right.$$

Der Gehalt des ganzen Innern an elektrischer und magnetischer Energie, im Mittel der Zeit, ergibt sich nun zu:

$$(20)\qquad W_e = \frac{1}{2}\int_0^a dr \int \overline{\mathfrak{E}^2} d\sigma,\quad W_m = \frac{1}{2}\int_0^a dr \int \overline{\mathfrak{H}^2} d\sigma.$$

Bei der Integration von $\overline{\mathfrak{H}^2}$ nach r verschwindet der folgende Teil:

$$\int_0^a \left(4f^2 + \frac{8}{3} r f \frac{df}{dr}\right) r^2 dr = \frac{4}{3}\int_0^a \frac{d}{dr}(r^3 f^2) dr,$$

weil an der oberen Grenze f, an der unteren r verschwindet. Wir haben daher nach (19) und (20) einfach:

$$W_e = \frac{(\varepsilon A)^2}{12\pi a^2}\frac{\gamma^2+1}{2}\int_0^a f^2 r^4 dr,\qquad W_m = \frac{(\varepsilon A)^2}{12\pi}\frac{\gamma^2+1}{2\gamma^2}\int_0^a \left(\frac{df}{dr}\right)^2 r^4 dr,$$

$$(21)\qquad W = W_e + W_m = \frac{(\varepsilon A)^2}{12\pi a^2}\frac{\gamma^2+1}{2}\int_0^a \left(f^2 + \left(\frac{a}{\gamma}\frac{df}{dr}\right)^2\right) r^4 dr.$$

Letztere Größe stellt übrigens, da der Energiefluß durch die Oberfläche des Elektrons Null ist, nicht nur den zeitlichen Mittelwert, sondern zugleich auch den Augenblickswert des Energieinhaltes dar.

In (21) benutzen wir als Integrationsvariable die Größe $\Gamma = \gamma r/a$ und führen die Abkürzungen ein:

$$u = \frac{\sin\Gamma}{\Gamma},\quad v = \frac{1}{\Gamma}\frac{du}{d\Gamma}.$$

Dann haben wir

$$f = \left(\frac{\gamma}{a}\right)^2 \frac{1}{\Gamma}\frac{du}{d\Gamma},\quad \frac{a}{\gamma}\frac{df}{dr} = \left(\frac{\gamma}{a}\right)^2 \frac{dv}{d\Gamma},$$

$$\int_0^a \left(f^2 + \left(\frac{a}{\gamma}\frac{df}{dr}\right)^2\right) r^4 dr = \frac{a}{\gamma}\int_0^\gamma \left(\Gamma^2\left(\frac{du}{d\Gamma}\right)^2 + \Gamma^4\left(\frac{dv}{d\Gamma}\right)^2\right) d\Gamma.$$

$$(22) \qquad W = \frac{(\varepsilon A)^2}{12\pi a}\,\frac{\gamma^2+1}{2\gamma}\int_0^\gamma \left(\Gamma^2\left(\frac{du}{d\Gamma}\right)^2 + \Gamma^4\left(\frac{dv}{d\Gamma}\right)^2\right) d\Gamma.$$

Die Funktionen u und v genügen den folgenden Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2u}{d\Gamma^2} + \frac{2}{\Gamma}\frac{du}{d\Gamma} + u = 0,$$

$$\frac{d^2v}{d\Gamma^2} + \frac{3}{\Gamma}\frac{dv}{d\Gamma} + v = 0.$$

Multiplizieren wir die erste mit $\Gamma^3 du/d\Gamma$, die zweite mit $\Gamma^5 dv/d\Gamma$ und integrieren von 0 bis γ, so folgt:

$$\int \Gamma^3 \frac{du}{d\Gamma}\frac{d^2u}{d\Gamma^2}\,d\Gamma + 2\int \Gamma^2\left(\frac{du}{d\Gamma}\right)^2 d\Gamma + \int \Gamma^3 u\,\frac{du}{d\Gamma}\,d\Gamma = 0,$$

$$\int \Gamma^5 \frac{dv}{d\Gamma}\frac{d^2v}{d\Gamma^2}\,d\Gamma + 3\int \Gamma^4\left(\frac{dv}{d\Gamma}\right)^2 d\Gamma + \int \Gamma^5 v\,\frac{dv}{d\Gamma}\,d\Gamma = 0.$$

Das erste Glied läßt sich in beiden Gleichungen durch partielle Integration auf das mittelste, das letzte Glied auf

$$\int \Gamma^2 u^2 d\Gamma = \int \sin^2\Gamma\, d\Gamma \quad \text{oder} \quad \int \Gamma^4 v^2 d\Gamma = \int \Gamma^2\left(\frac{du}{d\Gamma}\right)^2 d\Gamma$$

zurückführen. Man erhält daher, wenn man berücksichtigt, daß $du/d\Gamma$ für $\Gamma = 0$ und $\Gamma = \gamma$ verschwindet:

$$\frac{1}{2}\int \Gamma^2\left(\frac{du}{d\Gamma}\right)^2 d\Gamma = \frac{3}{2}\int \sin^2\Gamma\, d\Gamma - \frac{\gamma}{2}\sin^2\gamma,$$

$$\frac{1}{2}\int \Gamma^4\left(\frac{dv}{d\Gamma}\right)^2 d\Gamma = \frac{5}{2}\int \Gamma^2\left(\frac{du}{d\Gamma}\right)^2 d\Gamma - \frac{\gamma}{2}\sin^2\gamma$$

$$= \frac{15}{2}\int \sin^2\Gamma\, d\Gamma - 3\gamma\sin^2\gamma,$$

somit

$$\int_0^\gamma \left(\Gamma^2\left(\frac{du}{d\Gamma}\right)^2 + \Gamma^4\left(\frac{dv}{d\Gamma}\right)^2\right) d\Gamma = 18\int_0^\gamma \sin^2\Gamma\, d\Gamma - 7\gamma\sin^2\gamma$$

$$= 9\left(\gamma - \frac{\sin 2\gamma}{2}\right) - 7\gamma\sin^2\gamma = 2\gamma\sin^2\gamma,$$

letzteres vermöge der Gleichung $\operatorname{tg}\gamma = \gamma$.

Gehen wir auf den Ausdruck (22) von W zurück, so haben wir

$$W = \frac{(\varepsilon A)^2}{12\pi a}(\gamma^2+1)\sin^2\gamma,$$

aus dem die weiteren Schlüsse des Textes gezogen sind (s. Gleichung (10), wo nur W_i statt W geschrieben wurde).

Gegensätzliches Verhalten einer rotierenden Volumladung. Wenn ein gleichförmig über sein Volumen geladenes Elektron nach dem Gesetze (7) rotiert, so ist nach Gleichung (29) meiner ersten Note das Vektorpotential im Äußeren desselben folgendermaßen zu berechnen:

$$\mathfrak{A} = \frac{3\varepsilon A}{32\pi a}\frac{2i\gamma}{\tau'}[\mathfrak{l}\mathfrak{r}]e^{2i\gamma t/\tau'}J,$$

$$J = \frac{1}{2r^3}\int\limits_{(r-a)/c}^{(r+a)/c} e^{-2i\gamma\tau/\tau'}\left(a^2 + 2r^2 - 2c^2\tau^2 - \frac{(r-c\tau)^3(3r+c\tau)}{a^2}\right)d\tau.$$

Führen wir eine Integrationsvariable u ein durch die Beziehung $c\tau = r + au$, so wird

$$J = \frac{a}{2cr^3}e^{-i\gamma r/a}\int\limits_{-1}^{+1} e^{-i\gamma u}(a^2 - 4aru - 2a^2u^2 + 4aru^3 + a^2u^4)du$$

$$= -\frac{24ia^2}{c\gamma^3 r^2}e^{-i\gamma r/a}\left(1 - \frac{ai}{\gamma r}\right)\left(\cos\gamma + \frac{\sin\gamma}{\gamma}\left(\frac{\gamma^2}{3} - 1\right)\right),$$

somit

$$\mathfrak{A} = \frac{9\varepsilon A}{4\pi\gamma^2 r^2}[\mathfrak{l}\mathfrak{r}]e^{i\gamma\left(\frac{2t}{\tau'} - \frac{r}{a}\right)}\left(1 - \frac{ai}{\gamma r}\right)\left(\cos\gamma + \frac{\sin\gamma}{\gamma}\left(\frac{\gamma^2}{3} - 1\right)\right). \tag{20}$$

Von dem früheren Werte (13) des Vektorpotentials bei Oberflächenladung unterscheidet sich dieser Ausdruck im wesentlichen dadurch, daß der frühere Faktor $\cos\gamma - \frac{\sin\gamma}{\gamma}$ ersetzt ist durch

$$\cos\gamma + \frac{\sin\gamma}{\gamma}\left(\frac{\gamma^2}{3} - 1\right).$$

Nach Analogie mit dem Früheren liegt die Vermutung nahe, daß wir die Eigenschwingungen im jetzigen Falle erhalten möchten, indem wir diesen Faktor gleich Null setzen, also die Eigenperioden aus der transzendenten Gleichung

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{3\gamma}{3 - \gamma^2} \tag{21}$$

bestimmen. Diese Schwingungen würden wieder nach außen hin latent sein, keine Ausstrahlung ergeben und daher ungedämpft verlaufen, sofern sie überhaupt nach den dynamischen Prinzipien der Elektronenmechanik möglich sind. Indessen zeigt es sich, daß unsere Vermutung irrig ist. Die Eigenschwingungen werden nicht durch Gleichung (21), sondern durch Gleichung (100′) meiner zweiten Note (zuerst von Herglotz gefunden) bestimmt. Wir schreiben Gleichung (100′) möglichst im Anschluß an das Vorhergehende, indem wir dort $\beta = 2i\gamma$ setzen:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\frac{1}{5}\gamma^5 - 3\gamma(\gamma^2 - 3i\gamma - 3)}{-\frac{i}{5}\gamma^5 + (\gamma^2 - 3)(\gamma^2 - 3i\gamma - 3)}. \tag{22}$$

Diese Gleichung unterscheidet sich von (21) durch die Glieder mit γ^5 im Zähler und Nenner, nach deren Streichung sie mit jener identisch wird.

Jedenfalls verschwindet für die durch Gleichung (22) bestimmten Werte von γ der Ausdruck (20) für das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ im Äußeren des Elektrons nicht. Die Eigenschwingungen bei Volumladung sind daher nach außen hin nicht latent, sie geben Ausstrahlung und müssen dementsprechend gedämpft sein. In der Tat hat Herglotz bewiesen, daß Gleichung (22) keine reellen, sondern lediglich Wurzeln mit positiv imaginärem Teile haben kann. Der auffällige Gegensatz zwischen Oberflächen- und Volumladung, der Umstand nämlich, daß im einen Falle die Eigenschwingungen ungedämpft, im andern Falle gedämpft sind, findet sonach durch die Bestimmung des von diesen Schwingungen nach außen erregten Feldes seine Erklärung. Er hängt damit zusammen, daß bei gleichförmiger Oberflächenladung zufälligerweise die Perioden der nach außen latenten Schwingungen und der Eigenschwingungen zusammenfallen, daß dagegen bei gleichförmiger Volumladung oder bei allgemeiner Ladungsverteilung diese Perioden auseinanderfallen.

On the Development of the „Ausdehnungslehre" according to the principles of Statics.

Von

R. W. Genese aus Aberystwyth.

In a paper read before the Association Francaise at Caen in 1894 the present writer explained how, for the plane, Grassmann's progressive and regressive multiplications could be easily interpreted and explained by the principles of Statics. In this paper the treatment is extended to real space of three dimensions. The general arguments of the former paper respecting mass-points and forces will be assumed in this, but some details must be considered.

1. A mass-point P is given by the equation

$$P = \Sigma m_r A_r, \tag{1}$$

its intensity being Σm_r.

If however $\Sigma m_r = 0$, let the positive members of the right side be collected into one mG and the others into $-mH$, then two cases may arise:

1⁰. if $G = H$ (i. e. G coincide with H), the masses balance and the left side must be replaced by zero (this case is excluded, of course, if the points A form an independent system);

2⁰. $G \neq H$, then the right side of (1) $= m(G - H)$, and P is a point of zero mass at infinity or a vector.

At this early stage in the subject an interesting theorem presents itself.

If masses at the vertices of a tetrahedron $A_1 A_2 A_3 A_4$ be displaced to any points A_1', A_2', A_3', A_4' respectively, then ratios may be so chosen that their mass-centre is undisturbed.

For, let

$$\begin{aligned} A_1' &= a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 + a_4 A_4, \\ A_2' &= b_1 A_1 + b_2 A_2 + \text{etc.}, \\ A_3' &= c_1 A_1 + \text{etc.}, \\ A_4' &= d_1 A_1 + \text{etc.}, \end{aligned}$$

with the conditions

$$\Sigma a = 1, \quad \Sigma b = 1 \text{ etc.}$$

The centre of masses m_1, m_2, m_3, m_4 at A_1', A_2', A_3', A_4' is

$$(m_1 a_1 + m_2 b_1 + m_3 c_1 + m_4 d_1) A_1 + (m_1 a_2 + \text{etc.}) A_2 + \text{etc.}$$

This will coincide with the centre of the same masses at A_1, A_2, A_3, A_4

$$\left.\begin{array}{l}\text{if} \quad m_1 a_1 + m_2 b_1 + m_3 c_1 + m_4 d_1 = m_1 \\ \text{and three similar equations are consistent.}\end{array}\right\} \qquad \text{(X)}$$

The necessary condition is

$$\begin{vmatrix} a_1 - 1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 - 1 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 - 1 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

But this occurs, because the sum of each column is zero; three of the four equations (X) then give $m_1 : m_2 : m_3 : m_4$. If however the tetrahedron $A_1' A_2' A_3' A_4'$ be a displaced position of $A_1 A_2 A_3 A_4$ and if the displacement can be effected by a rotation about an axis l, then any point whatever of l gives a solution of the problem (m_1, m_2, m_3, m_4 being regarded as tetrahedral coordinates). In that case any two of the equations (X) represent planes whose intersection gives the axis of rotation. It is further obvious that if the equations (X) admit of only one solution; then an axis of rotation cannot exist: to illustrate this case suppose A_1', A_2' etc. to be obtained by joining A_1, A_2 etc. to any point O and producing so that $A_1 O = O A_1'$ etc., then the point O has the same coordinates referred to either tetrahedron, but no axis of rotation can exist.*)

2. The multiplication of two unit-mass equations

$$P = \Sigma m_r A_r,$$
$$Q = \Sigma n_r A_r,$$

gives a force-equation

$$PQ = \Sigma (m_r n_s - m_s n_r) A_r A_s.$$

Two special cases may occur:

---

*) The above theorem is easily confirmed thus: we know that a linear relation connects any four given vectors in space; therefore

$$\sum_1^4 m_r (A_r' - A_r) = 0, \quad \text{or} \quad \sum_1^4 m_r A_r' = \sum_1^4 m_r A_r.$$

1^0. If one of the two, say $\dot{Q}$, be a vector $= G - H$, we have

$$\begin{aligned} PQ &= PG - PH \\ &= \text{a force through } P \text{ equal and parallel to } HG \\ &\quad \text{and in the same sense,} \end{aligned}$$

. e. PQ is along the line joining P to the point at infinity on HG roduced through G. In this theory then we must consider a straight ine as having two points at infinity and modify Euclid's first postuate thus, — the problem of drawing a straight line from one point o another in general admits of one solution only but that of joining wo antipodal points at infinity is poristic.

The two points are indistinguishable in the analytical geometry f the straight line, but that of the circle supports the theory; for, he equation to a chord of a circle of radius r is

$$x \cos\frac{\alpha+\beta}{2} + y \sin\frac{\alpha+\beta}{2} = r \cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Let $\alpha = \beta + \pi$ and r become infinite, then

$$\begin{aligned} -x \sin\beta + y \cos\beta &= \infty \times 0 \\ &= \text{anything} \end{aligned}$$

nd the join is one of a system of parallels.

The analogy with spherical geometry is obvious.

2^0. If the other P be also a vector $= E - F$, say

$$\begin{aligned} PQ &= EQ - FQ \\ &= \text{a force through } E \text{ together with an equal} \\ &\quad \text{unlike parallel force through } F \\ &= \text{a couple,} \end{aligned}$$

r, thus, assuming the theory of vectors we may draw them from the ame point A, say

$$\begin{aligned} P &= B - A, \\ Q &= C - A, \end{aligned}$$

hen

$$\begin{aligned} PQ &= BC - BA - AC \\ &= BC + CA + AB \\ &= \text{a couple.} \end{aligned}$$

3. Conversely if a form of the second class $S = \Sigma m A_r A_s$ can e resolved into factors it represents a force or a couple; if not, of ourse, a wrench.

Grassmann obtained the necessary condition in the elegant form $[S S] = 0$; it may however be more useful to show how to construct the force in the case in which the forces are reduced to a system acting along the sides of a tetrahedron of reference $A_1 A_2 A_3 A_4$.

Let $S \equiv a A_1 A_4 + b A_2 A_4 + c A_3 A_4 + f A_2 A_3 + g A_3 A_1 + h A_1 A_2$ and one of the coefficients, a say, not zero; then identically

$$\begin{aligned} aS &= (aA_1 + bA_2 + cA_3)(aA_4 - gA_3 + hA_2) \\ &\quad + (af + bg + ch) A_2 A_3 \\ &= PQ + m A_2 A_3 \quad \text{say.} \end{aligned}$$

Here P is in the plane $A_1 A_2 A_3$, Q in $A_4 A_3 A_2$ and since a does not vanish, the line PQ cannot meet $A_2 A_3$. Hence the system S is a wrench unless $m = 0$.

Therefore $$af + bg + ch = 0 \tag{1}$$

is the necessary condition that S may reduce to the form PQ.

If now $$a + b + c = 0, \tag{2}$$

P is a vector and PQ a force as in § 2, 1⁰.

If also $$a - g + h = 0, \tag{3}$$

Q is a vector and PQ a couple as in § 2, 2⁰.

From (1), (2) and (3) we can deduce

$$b - h + f = 0, \tag{4}$$

$$c - f + g = 0. \tag{5}$$

In fact from any three of the five equations (1) to (5) the other two can be deduced.

These special conditions for a couple may however be obtained more directly.

The last three terms of S give rise to a force in the plane $A_1 A_2 A_3$; the first three to a force through A_4 and the point $aA_1 + bA_2 + cA_3$. If then S be a couple, this last point must be at infinity and $a + b + c = 0$. Similarly by other partitions of S $a - g + h = 0$ or $a = g - h$ etc.

Hence $$\begin{aligned} S &= f(A_3A_4 + A_4A_2 + A_2A_3) + g(A_1A_4 + A_4A_2 + A_2A_1) \\ &\quad + h(A_2A_4 + A_4A_1 + A_1A_2) \\ &= \text{sum of three couples.} \end{aligned}$$

Thus three conditions are necessary and sufficient.

If u, v, w denote the vectors $A_4 - A_1$, $A_4 - A_2$, $A_4 - A_3$ the last result may be written

$$S = fvw + gwu + huv.$$

Along three rotors in space it is clearly not always possible to assign forces equivalent to a couple. In fact such forces translated to a point must balance. They are therefore parallel to one plane, or the rotors must be generators of a hyperbolic paraboloid.

4. In plane a form of the third class ABC is treated as a scalar measuring the moment of a force BC about A (or its equal, the moment of AB about C). In space, however, it must be taken as a new physical entity which may be called a posited twist or, for brevity, a twist.

We shall see that it has analogies with a statical couple and differs only from a couple in that it is not transferable to a parallel plane.

Theorem. If $\Sigma AB = 0$ express that a system of forces is in equilibrium, then P being any point in space we shall have $\Sigma PAB = 0$, expressing that a system of couples is in equilibrium, PAB denoting a couple whose moment is twice the area of the triangle PAB in the plane PAB and in the sense of the circuit PAB.

The proof is immediate, viz., a couple PAB may be replaced by a force AB and an equal unlike parallel force through P: but the system ΣAB balances and if translated to P and reversed, again balances.

Cor. Transposing a term the theorem may be restated thus. If $PQ = \Sigma AB$ then $OPQ = \Sigma OAB$. Of course if PQ pass through O, $OPQ = 0$ and conversely.

Illustration. Let A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 be four forces in equilibrium. Take any point P in A_1B_1, then, by the theorem, the couples PA_2B_2, PA_3B_3, PA_4B_4 balance. Hence their axes are coplanar and their planes meet in a straight line PQ. Thus PQ meets all four rotors with the usual geometrical inference. We see also that a quadric containing three straight lines may be defined as the locus of a point the planes joining which to the three straight lines meet in a straight line. If a system of forces S be equivalent to a wrench, or a couple, $A_1B_1 + A_2B_2$, it is clear that for no point P can be $PS = 0$. If however the system be equivalent to a single force and P be any point on its rotor

$$PS = 0,$$

which is therefore the equation of the resultant.

5. The product $AB \cdot C$ must be defined as the twist ABC and the same as $A \cdot BC$ or, therefore, as $C \cdot AB$.

Then
$$\begin{aligned}(mP + nQ)AB &= AB(mP + nQ)\\ &= A(mBP + nBQ)\\ &= m \cdot ABP + n \cdot ABQ\\ &= mP \cdot AB + nQ \cdot AB,\end{aligned}$$

i. e. a point as an operator may be distributed.

Of course any theorem concerning twists holds also for couples, though the converse is not true.

The proof of the analogous theorem for couples is simple.

Let $mP + nQ = (m+n)R$, then we have to show that

$$(m+n)RAB = mPAB + nQAB.$$

Now, as a couple, RAB may be replaced by forces $RA + AB + BR$ and by Leibniz's theorem

$$(m+n)RA = mPA + nQA,$$
$$(m+n)BR = mBP + nBQ,$$

also identically

$$(m+n)AB = mAB + nAB.$$

Adding in columns we have the required theorem.

This would not, however, serve as a proof of the property of twists. We now see how to compound twists whose planes intersect: the case of parallel twists requires special consideration.

6. To the couple acting on a rigid body and transferable to a parallel plane corresponds, as we have seen, the product of two vectors, thus, if PQR and ABC be different planes, and if

$$Q - P = B - A,$$
$$R - P = C - A,$$

then multiplying

$$QR + RP + PQ = BC + CA + AB,$$

the planes are parallel and the couples equivalent: but the twist PQR is not the same as ABC.

For we have

$$\begin{aligned} PQR &= P(Q-P)(R-P) = P(B-A)(C-A),\\ ABC &= A(B-A)(C-A).\end{aligned}$$

Then $$PQR - ABC = (P-A)(B-A)(C-A),$$

which does not vanish.

The product of three non co-planar vectors is of the same unfixed character as the vector or couple; it is measured by the volume of the parallelepiped with edges AP, AB, AC, and bears the same relation to that solid that the couple bears to the twist or the vector to the rotor.

The difficulty is precisely the same as that in statics when, to avoid null forces at infinity, we introduce the conception of a couple measured by an area.

The property of the product of three vectors that its addition transfers a twist to a parallel plane, suggests as an expressive name „a Lift“.

Of course if two parallel twists be not equal and opposite, they may be compounded. If u, v be unit vectors in the plane of a twist ABC, we may write

$$ABC = A \cdot muv$$

and for a parallel twist

$$DEF = D \cdot nuv.$$

Then
$$\begin{aligned} ABC + DEF &= (mA + nD) \cdot uv \\ &= (m+n) R \cdot uv \quad \text{say} \end{aligned}$$

with obvious interpretation.

It has been assumed that a twist may be replaced by an equal twist in its plane; this may be justified thus.

If
$$ABC = ADE,$$
$$A(BC - DE) = 0.$$

Then A lies on the resultant of BC and $-DE$, which are therefore in one plane with A. Taking moments about A, the necessary condition is

$$\text{moment } ABC = \text{moment } ADE.$$

It is now clear that every form of the third class ΣABC is reducible to one twist except in the case in which it degenerates into a Lift.

7. Definition. A monomial $ABCD$ of the fourth class is a scalar product of an area BCD by the distance of the point A from its plane (or, 6 vol. tetrahedron $ABCD$) to be taken as a positive or negative quantity according as the sense of the circuit BCD viewed from A is counter-clock-wise or not.

It is further assumed that this form, really $A \cdot BCD$, is indistinguishable from $AB \cdot CD$ or $ABC \cdot D$ and it may be called accordingly the moment of a point with respect to a twist the moment of a force (or rotor) with respect to a rotor or the moment of a twist with respect to a point. The second of these agrees with statics; but the others are peculiar to the Ausdehnungslehre. We have

$$ABC \cdot D = ABCD = -DABC = -D \cdot ABC,$$

i. e. the third kind of moment, and similarly the first, is non-commutative. But $AB \cdot CD = ABCD = CDAB = CD \cdot AB$ and is commutative.

Theorem. The sum of the moments of any point in space with respect to a number of balancing twists posited trough one point (or whose planes pass through one point) is zero. Let a system of couples completely represented by a series of areas $\Sigma\alpha$ balance about a point O. Drawing through O a series of lines ΣOA as axes of these couples, we know that a system of forces represented by these lines balances. Resolving along any line OP we have the scalar relation

$$\Sigma \overline{OA} \cos POA = 0.$$

Drawing PN perpendicular to one of the planes α we see that:

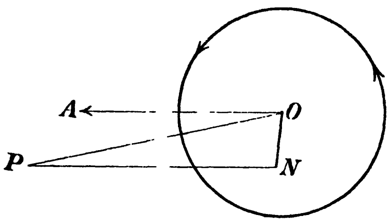


fig. 1.

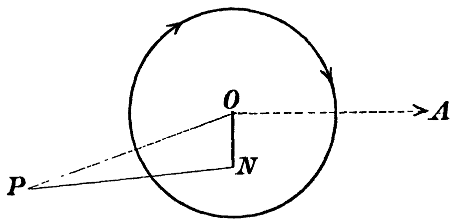


fig. 2.

1⁰ if NP be in the same direction as A (fig. 1)

$$\cos POA = \sin NOP = \frac{NP}{OP};$$

2⁰ if not (fig. 2)

$$\cos POA = -\cos NOP = \frac{-NP}{OP}.$$

Substituting and multiplying by OP, we get, with due regard to sign,

$$\Sigma\alpha \cdot NP = 0$$

which is the theorem.

Another form of proof may be given.

If $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ be the areas of the faces of a polyhedron, $p_1, p_2, \cdots p_n$ the perpendiculars on them from any point P, then having regard to sign

$$\Sigma p\alpha = 3 \text{ vol. of polyhedron.}$$

Also if couples $2\alpha_1, 2\alpha_2, \cdots 2\alpha_n$ act in the faces of the polyhedron all having the positive aspect from a point inside (so that in naming the faces each edge is counted in both ways) they balance.

Now let the polyhedron, remaining similar to itself, dwindle to infinitesimal dimensions, and we have the above theorem.

The theorem may now be extended to twists not passing through one point.

In elementary Uniplanar Statics the theorem of moments applied to balancing forces acting at one point is merely a form of an equation of resolution, the advantage of the introduction of perpendiculars s only seen when the theorem is extended to the case of the equilibrium of four or more forces not acting at one point.

The following simple illustration points to the probability of the usefulness of the Grassmannian twist in practical statics. Let l, l' be opposite sides of a rectangular plate. Suppose two couples α, β with resultant γ to act in planes containing l and equal and opposite couples α', β' with resultant γ' in planes containing l'.

Then in statics there is equilibrium whatever be the orientation of γ, γ' assuming perfect resistance to torsion.

If, however, the couples be replaced by twists, then γ, γ' do not balance unless they are in the same plane, that of the plate. The necessary condition for the absence of torsion is then obtained by taking moments about any point in l' in the form $p\alpha + q\beta = 0$.

Regressive Multiplication.

8. The conditions for the equilibrium of any number of forces in space may be discussed in the following manner.

Let forces f_1, f_2 etc. acting along rotors l_1, l_2 etc. be in equilibrium and

1⁰ let a plane α be drawn cutting all the rotors in the points A_1, A_2 etc. respectively.

Then each force f can be resolved into a force n normal to the plane and a force t in the plane.

It is obvious that the system Σn must balance independently and likewise the system Σt.

And conversely if these systems balance separately the original forces are in equilibrium.

We have then a mass-point condition

$$\Sigma n_r A_r = 0.$$

That is if the rotor l_r make angle Θ_r with the plane

$$\Sigma f_r \sin \Theta_r \cdot A_r = 0.$$

Hence if we define the product of a rotor of length f (in a definite sense) by a plane of area α as a point of mass $\alpha f \sin \Theta$, with a proper convention of sign, we shall be able from an equation of forces $\Sigma f = 0$ to obtain one of masses, and the first kind of regressive multiplication is explained.

Convention of sign.

Let AB represent f, and a plane $ACD(\alpha)$; then if the aspect of the circuit ACD viewed from B be clock-wise the product is positive: if not, as in the figure 3, negative.

[An opposite convention might be used but this is chosen for agreement with Grassmann's formula

$$ACD \cdot AB = A \cdot ACDB$$
$$= -(BACD) \cdot A.]$$

Let us take the special case of four balancing forces along given generators of an hyperboloid of one sheet (fig. 4).

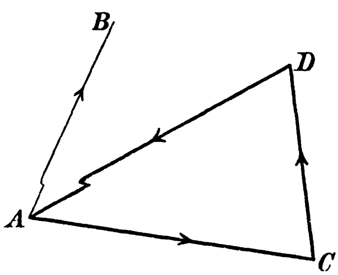


fig. 3.

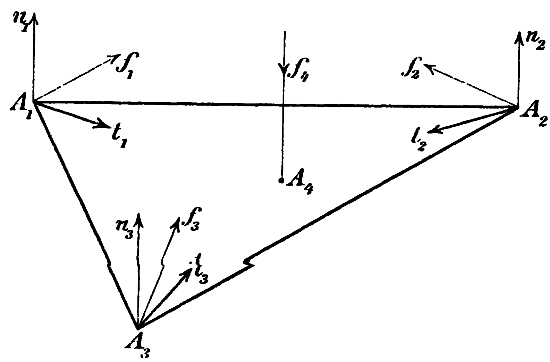


fig. 4.

Then from the mass-equation

$$f_1 \sin \Theta_1 \cdot A_1 + \text{etc.} + f_4 \sin \Theta_4 \cdot A_4 = 0,$$

we infer by elementary statics that the masses are proportional to the areas of the triangles $A_2 A_3 A_4$, $A_3 A_4 A_1$ etc., hence the ratios $f_1 : f_2 : f_3 : f_4$ are at once obtained.

Or, we may multiply the equation into $A_2 A_3$ say, getting

$$f_1 \sin \Theta_1 A_1 A_2 A_3 + \text{etc.} + f_4 \sin \Theta_4 A_4 A_2 A_3 = 0$$

etc.

It may be remarked that we have here also a property of the hyperboloid, viz., if we draw a series of parallel planes (so that the Θ's are unaltered) across four given generators of the same system, then the areas of the four triangles of the tetrastigm in each plane are in constant ratios although the figures are not similar: a relation of the kind called by Möbius „affinity".

Again if the cutting plane be perpendicular to f_4 there are only three components t_1, t_2, t_3 in the plane and their lines of action must meet in one point. Therefore the projections of three non-intersecting generating lines of a hyperboloid of one sheet on a plane perpendicular to a fourth generator of the same system cointersect.

Returning to the general theory.

If 2⁰ the plane α be drawn parallel to one of the rotors l_1, then A_1 is at infinity and the system $n_2 + n_3 +$ etc. will be equivalent to a couple in a plane normal to α.

The difficulty may be met very simply thus. Let l_1 be projected on α into l_1'. We may then replace the force f_1 by a force f_1' (taking the place of the former t_1) and a couple. This couple then balances $n_2 + n_3 +$ etc.

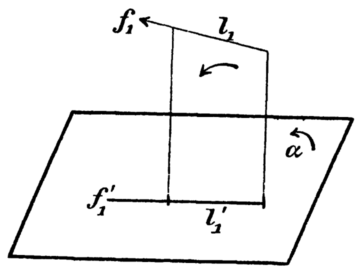


fig. 5.

The same method applies if α be parallel to more than one rotor.

In the particular case of four forces we may take α parallel to two rotors, say l_3, l_4, then $n_1 + n_2$ form a couple, or

$$f_1 \sin \Theta_1 + f_2 \sin \Theta_2 = 0;$$

another way of obtaining $f_1 : f_2$.

Möbius' celebrated solution of this problem must be regarded rather as a property of shortest distances between four generators of a hyperboloid of one sheet, the ratios of the forces being first determined by translating the forces to act at one point, then if the forces be parallel to the vectors u_1, u_2, u_3, u_4

$$\frac{f_1}{\sin(u_2 u_3 u_4)} = \text{similar fractions},$$

$(u_2 u_3 u_4)$ being the solid angle whose edges are u_2, u_3, u_4.

9. The next case of regressive multiplication occurs when we wish to return from a relation of twists (or areas) to one of masses; — viz. — by using a line as multiplier.

Theorem. Let $\Sigma\alpha = 0$ denote that a number of twists balance and let any line l meet their planes in A_1, A_2 etc. Then $\Sigma l\alpha = 0$ will be a mass-point equation, any term such as $l\alpha$, meaning the point A_1 with mass $\bar{\alpha}_1 \sin(\widehat{l\alpha_1})$ with the proper convention of sign (the intensity of l being common to all the terms may be omitted).

For, let O be any point in l and multiply the given relation by O, then

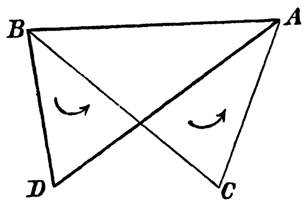
$$\Sigma \bar{\alpha}\, \overline{OA} \sin(\widehat{l\alpha}) = 0.$$

But the points A_1, A_2 etc. being fixed and this scalar relation true for any point on l, the required relation of mass-points is established.

There remains only one other kind of regressive multiplication, that of two twists (or areas).

Definition. The product of two twists is a force along the intersection of their planes equal to the product of the measures of the twists and the sine of the angle between them with a suitable convention for direction.

Convention. Let A, B be points on the intersection of the planes of two twists and let C, D be chosen one in each plane so that the twists are completely specified by ABC, ABD; then the product of the twists is to be taken as acting in the sense of AB if the



ABD in plane of paper.
C in front.
fig. 6.

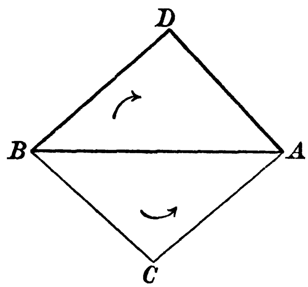


fig. 7.

aspect of the circuit ABD viewed from C is counter clock-wise, if the aspect be clock-wise the product must be taken in the sense BA.

In fig. 6 the product is along AB, in fig. 7 along BA.

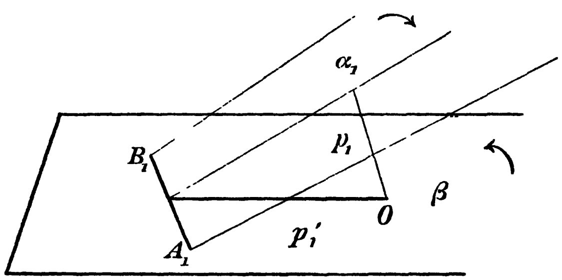


Diagram for $\beta\alpha_1$ (along $B_1 A_1$).
fig. 8.

An equivalent convention is — the product is in the direction looking along which rotation from ABC to ABD (the shortest way) is left-handed.

Theorem. If $\Sigma\alpha = 0$ imply that a system of twists balance, and β be any twist in space, then

$$\Sigma\beta\alpha = 0,$$

i. e. a number of forces (in the plane β) balance.

We may take β as of unit intensity.

For, multiply $\Sigma\alpha = 0$ by any point O in plane β, then

$$\Sigma p\bar{\alpha} = 0,$$

where p is the perpendicular from O on α.

Let p_1', p_2' etc. be the perpendiculars from O on the lines $\beta\alpha_1$, $\beta\alpha_2$ etc., then

$$p_1 = p_1' \sin(\widehat{\beta\alpha_1})$$
etc.

Therefore
$$\Sigma p_1' \alpha_1 \sin(\widehat{\beta\alpha_1}) = 0.$$

Which, since O is any point in the plane β, proves by moments, that forces $\alpha_1 \sin\widehat{\beta\alpha_1}$ along $\beta\alpha_1$, $\alpha_2 \sin\widehat{\beta\alpha_2}$ along $\beta\alpha_2$ etc. balance.

The convention for the direction of the line $\beta\alpha$ will be found to secure consistent signs for the moments round O of the forces in the plane β.

10. The three kinds of regressive multiplication having been explained, it is convenient (if only for mnemonic purpose) to sum them up in Grassmann's formula.

Changing, for the moment, to his notation, let A, B, C denote each, any one of the magnitudes hitherto considered (mass-point, force or twist) and let the product ABC be scalar (i. e. contain just four point factors), then

$$AB \cdot AC = ABC \cdot A.$$

Thus, returning to the point notation,

$$PQR \cdot PS = PQRS \cdot P,$$
$$PQ \cdot PRS = PQRS \cdot P,$$
$$PQR \cdot PQS = PQRS \cdot PQ,$$

which will be found to agree with the definitions which were introduced for the deduction of the theorems. The last formula turns on the trigonometry of the tetrahedron, viz.

$$PQR \cdot PQS \sin PQ(R, S) = 6 \text{ vol. } PQRS \times PQ.$$

The theorems which have been obtained by Statics may be utilized for Geometry with the proper interpretation of the various operations.

Bemerkungen
aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen.

Von

H. Weber aus Straßburg i. E.

I. Herr Hadamard hat in seinem Vortrage einen paradox erscheinenden Umstand aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen berührt, zu dem ich in meinem Buche (Riemann-Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, Bd. II, § 90, Braunschweig 1901) eine Erläuterung gegeben habe, die ich hier kurz wiedergeben möchte. Es handelt sich um die Differentialgleichung der schwingenden Saite:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

in der wir unter x die Abszisse, unter y die Zeit verstehen. Das Integral u dieser Gleichung ist bestimmt, wenn die Anfangsverschiebung

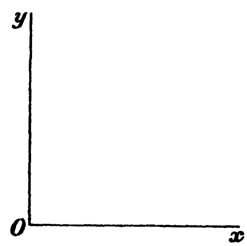


Fig. 1.

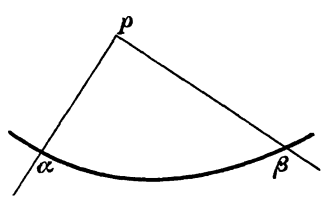


Fig. 2.

und die Anfangsgeschwindigkeit gegeben sind, während an den Enden nur die Verschiebung (z. B. bei festen Endpunkten $u = 0$) willkürlich gegeben ist. Nehmen wir der Einfachheit halber eine nur einseitig begrenzte und befestigte Saite oder eine Luftsäule in einer unendlich langen nur einseitig gedeckten Pfeife, und tragen x und y als Koordinaten in einer Ebene auf (Fig. 1), so ist u in dem positiven Quadranten bestimmt, wenn u und $\frac{\partial u}{\partial y}$ für $y = 0$ und positive x, u für $x = 0$ und positive y gegeben sind. Hier haben also die beiden Teile der Begrenzung, die zu der Differentialgleichung vollkommen gleichartig stehen, in bezug auf die Grenzbedingungen ein ganz verschiedenes Verhalten. Um dies zu erklären, ersetze ich den rechten Winkel xoy durch eine beliebige Kurve $\alpha\beta$ (Fig. 2) und nehme an, daß längs dieser Kurve

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi_1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi_2 \tag{2}$$

und außerdem in einem Punkte der Wert von u bekannt sei, oder, was dasselbe ist, u und sein nach der Normalen genommener Differentialquotient. Durch Anwendung des Gaußschen Integralsatzes auf das Dreieck $\alpha\beta p$ ergibt sich:

$$2u_p = u_\alpha + u_\beta + \int_\alpha^\beta (\varphi_1 dy + \varphi_2 dx), \tag{3}$$

worin das Integral über die Kurve $\alpha\beta$ zu erstrecken ist. Hierdurch ist u_p in dem veränderlichen Punkt p und damit in dem ganzen Dreieck $\alpha\beta p$ bestimmt, wenn φ_1 und φ_2 auf dem Kurvenbogen $\alpha\beta$ bekannt sind.

Wir stellen aber nun die Frage, ob der Ausdruck (3) den Forderungen (1), (2) wirklich genügt. Daß die Differentialgleichung (1) allgemein befriedigt ist, sieht man leicht ein. Anders ist es aber mit den Grenzbedingungen. Um diese zu diskutieren, bilden wir aus (3), indem wir unter x, y die Koordinaten des Punktes p verstehen, durch einfache Betrachtungen:

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial u}{\partial x} &= \varphi_1(\alpha) - \varphi_2(\alpha) + \varphi_1(\beta) + \varphi_2(\beta), \\ 2\frac{\partial u}{\partial y} &= -\varphi_1(\alpha) + \varphi_2(\alpha) + \varphi_1(\beta) + \varphi_2(\beta), \end{aligned} \tag{4}$$

und wenn wir nun mit dem Punkt p auf die Kurve $\alpha\beta$, etwa in den Punkt α, hineinrücken, haben wir zwei Fälle zu unterscheiden.

Wenn die durch α gezogene Parallele zu $p\beta$ den Bogen $\alpha\beta$ nicht schneidet, so wird, wenn p nach α rückt, β gleichfalls nach α rücken (Fig. 2) und die Gleichungen (4) ergeben:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi_1(\alpha), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi_2(\alpha). \tag{5}$$

Wenn aber, wie in Figur 3, diese Parallele die Kurve $\alpha\beta$ in α_1 schneidet, so rückt β nach α_1 und aus (4) ergibt sich:

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial u}{\partial x} &= \varphi_1(\alpha) - \varphi_2(\alpha) + \varphi_1(\alpha_1) + \varphi_2(\alpha_1), \\ 2\frac{\partial u}{\partial y} &= -\varphi_1(\alpha) + \varphi_2(\alpha) + \varphi_1(\alpha_1) + \varphi_2(\alpha_1). \end{aligned} \tag{6}$$

Die Grenzbedingungen $\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi_1$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi_2$ sind also nur dann erfüllt, wenn

$$\varphi_1(\alpha) + \varphi_2(\alpha) = \varphi_1(\alpha_1) + \varphi_2(\alpha_1).$$

Zieht man also an die Kurve $\alpha\beta$ zwei zueinander rechtwinklige Tangenten, die unter 45^0 gegen die Achse geneigt sind und in den Punkten a, b berühren, so sind nun auf dem Bogen ab die Funktionen φ_1, φ_2 beliebig, und dadurch ist die Funktion u in dem Dreieck abc bestimmt. Über diesen Bogen hinaus besteht eine Abhängigkeit der

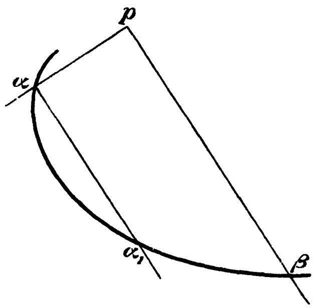


Fig. 3.

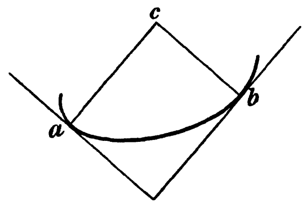


Fig. 4.

Funktionswerte φ_1, φ_2 von den Werten, die diese Funktionen auf dem Bogen a, b haben.

Die Anwendung auf die Frage, von der wir ausgingen, ergibt sich hieraus von selbst und wird veranschaulicht durch die Figur 5. An

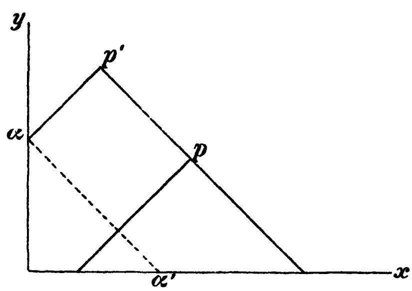


Fig. 5.

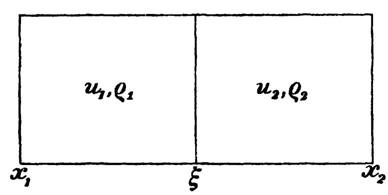


Fig. 6

der x-Achse können φ_1 und φ_2 willkürlich angenommen werden. An der y-Achse sollte $\varphi_1 = 0$ sein; φ_2 kann dann aber nicht mehr willkürlich sein, sondern muß gleich $\varphi_1(\alpha') + \varphi_2(\alpha')$ sein.

II. Eine zweite Bemerkung, die ich zu machen habe, bezieht sich auf einen irreversiblen Vorgang von der Art, die Herr Bryan in der vorigen Sitzung im Anschluß an den Vortrag des Herrn Volterra erwähnt hat.

Lord Rayleigh hat in seinem Werke „Theory of Sound" gegen Riemanns Theorie der Luftschwingungen mit endlicher Amplitude einen Einwand erhoben, der sich darauf gründet, daß Riemanns Formeln in gewissen Fällen einen Verlust oder einen Gewinn an Energie zu ergeben scheinen. Ich habe in dem schon erwähnten Buche (Riemann-Weber § 179, 180) diesem Einwand durch eine Betrachtung zu begegnen versucht, deren wesentlichen Inhalt ich an einem einfachen Beispiel in folgendem wiedergeben will.

Es sei u und ϱ Geschwindigkeit und Dichtigkeit des Gases, als Funktionen von x und t gedacht, und der Druck $p = \varphi(\varrho)$ eine gegebene Funktion von ϱ. Nach Riemanns Annahme, daß der Wärmeaustausch zu vernachlässigen sei, ergibt sich $\varphi(\varrho) = a^2\varrho^k$, wo k das Verhältnis der beiden spezifischen Wärmen, also eine Konstante, und ebenso a eine Konstante ist. Denken wir uns eine Luftsäule, die begrenzt ist von zwei Querschnitten bei den Abszissen x_1, x_2, so kann in dieser ein stationärer Zustand bestehen, wenn die Endquerschnitte passend bewegt werden, und wenn die Funktionen u, ϱ für $x < \xi$ die konstanten Werte u_1, ϱ_1 und für $x > \xi$ die konstanten Werte u_2, ϱ_2 haben, und ξ bleibt unveränderlich, wenn die Relationen bestehen:

$$u_1 = -\sqrt{\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\,\frac{\varphi(\varrho_1) - \varphi(\varrho_2)}{\varrho_1 - \varrho_2}},$$

$$u_2 = -\sqrt{\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\,\frac{\varphi(\varrho_1) - \varphi(\varrho_2)}{\varrho_1 - \varrho_2}}.$$

Geben wir den Quadratwurzeln das positive Zeichen, so fließt das Gas in der Richtung der abnehmenden x, und wir haben bei $x = \xi$ einen zwar absolut ruhenden, relativ zur Gasmasse aber vorwärts schreitenden Stoß, der ein Verdichtungsstoß ist, wenn $\varrho_1 > \varrho_2$, und ein Verdünnungsstoß, wenn $\varrho_1 < \varrho_2$ ist.

Setzen wir den Querschnitt unserer Gassäule $= 1$ und

$$\begin{aligned} A &= \tfrac{1}{2}u_1{}^2\varrho_1(\xi - x_1) + \tfrac{1}{2}u_2{}^2\varrho_2(x_2 - \xi),\\ B &= \varrho_1\psi(\varrho_1)\,(\xi - x_1) + \varrho_2\psi(\varrho_2)\,(x_2 - \xi),\\ C &= \varphi(\varrho_1)u_1 - \varphi(\varrho_2)u_2, \end{aligned}$$

worin $\psi(\varrho) = \int \frac{\varphi(\varrho)\,d\varrho}{\varrho^2}$, so ist A die kinetische Energie der Gassäule, B die „innere Energie", C die Arbeit des Druckes gegen die Endflächen, und es ergibt sich:

$$C = \frac{d(A+B)}{dt} + \frac{d\mu}{dr}\Delta\theta, \tag{1}$$

worin $d\mu$ die im Zeitelement dt durch den Querschnitt hindurchgedrückte Gasmasse und

$$\Delta\theta = \tfrac{1}{2}(u_2{}^2 - u_1{}^2) + \psi(\varrho_2) - \psi(\varrho_1) + \frac{\varphi(\varrho_2)}{\varrho_2} - \frac{\varphi(\varrho_1)}{\varrho_1}$$

ist.

Bei einem stetigen Vorgang würde $\Delta\theta = 0$ sein und die Arbeit des Druckes wäre einfach gleich der Vermehrung der Energie.

Für einen Verdichtungsstoß erweist sich $\varDelta\theta$ stets als positiv, und die Arbeit des Druckes hat nicht nur die Vermehrung der Energie $A + B$, sondern auch den an der Unstetigkeitsstelle stattfindenden Energieverlust zu decken. Dies steht in Einklang mit dem allgemeinen mechanischen Gesetz, nach dem bei unstetigen Bewegungen immer ein Energieverlust stattfindet. Über den Verbleib dieser Energie geben uns die mechanischen Differentialgleichungen keinen Aufschluß.

Ist aber $\varrho_1 < \varrho_2$, so ist $\varDelta\theta$ negativ, und es würde durch die Unstetigkeit nach der Formel (1) ein Energiegewinn stattfinden. Die Maschine, die wir uns gedacht haben, würde also, in Widerspruch mit dem Energiegesetz, Energie nach außen abgeben. Wie erklärt sich dieser Widerspruch, da doch durch Umkehrung der Vorzeichen von u und x die Bedingungsgleichungen nicht aufhören, befriedigt zu sein? Er erklärt sich dadurch, daß im Falle $\varrho_1 < \varrho_2$ eine andere Lösung möglich ist, bei der die Unstetigkeit in eine oder in zwei Verdünnungswellen oder in eine Verdünnungswelle und einen rückwärts schreitenden Verdichtungsstoß aufgelöst wird, worüber das Nähere in § 177 des Bandes II von Riemann-Weber zu finden ist.

Bei $\varrho_1 > \varrho_2$ ist aber nur die eine Art von Bewegung mit vorwärts schreitendem Verdichtungsstoß möglich. Hierin liegt auch die Erklärung dafür, daß in der Riemannschen Theorie nirgends Verdünnungsstöße, sondern nur Verdichtungsstöße vorkommen.

Ähnliche Erscheinungen zeigt die Theorie der elektrolytischen Verschiebungen.

Nimmt man die Quadratwurzeln positiv, also u_1, u_2 negativ, so schreitet die Stelle ξ relativ zu dem Gase vorwärts, und wir haben, wenn $\varrho_1 > \varrho_2$ ist, einen vorwärtsschreitenden Verdichtungsstoß, wenn dagegen $\varrho_1 < \varrho_2$ ist, einen vorwärtsschreitenden Verdünnungsstoß. Nun zeigt es sich, daß bei den Verdichtungsstößen Energie verloren geht (wie bei jeder unstetigen Bewegung in der Mechanik). Bei Verdünnungsstößen würde aber Energie gewonnen werden, und darum kommen Verdünnungsstöße in der Riemannschen Theorie nicht vor.

Der Vorgang, wie er durch die Figur 6 dargestellt ist, ist daher physisch nicht umkehrbar, obwohl die Bedingungsgleichungen auch für den umgekehrten Bewegungsvorgang befriedigt sind.

Es zeigt sich nämlich, daß in dem Falle $\varrho_1 < \varrho_2$ noch ein zweiter und zwar stetiger Zustand den Bedingungen genügt, den man am anschaulichsten darstellen kann, wenn man x und t (die Zeit) als Koordinaten betrachtet.

Recherches chronométriques.

Von

J. Andrade aus Besançon.

Dans ce mémoire j'exposerai d'une part le résumé de mes recherches sur quelques problèmes importants de chronométrie et d'autre part mes idées sur le rôle d'un laboratoire de recherches expérimentales.

I. Quelques mots sur les fondateurs de la chronométrie. Recherches sur quelques problèmes fondamentaux des théories chronométriques.

J'ai eu à m'occuper, dans mon enseignement de chronométrie, de divers problèmes de la mécanique des horloges et des chronomètres; c'est-là une science relativement récente, dont les premiers fondements ont eu pour but de préciser les lois qui avaient déjà été soupçonnées et appliquées d'instinct par des artistes de génie au premier rang desquels je nommerai le Français Pierre le Roy et l'Anglais Arnold.

Les fondateurs de ce que l'on peut appeler la dynamique du chronomètre, furent l'ingénieur Phillips, l'astronome Yvon Villarceau et M. Caspari, l'ingénieur hydrographe qui dirigeait encore récemment le service chronométrique de la marine française.

A ces noms il convient d'ajouter, au moins pour l'influence de ses idées, Résal.

La théorie des horloges, beaucoup plus facile que celle des chronomètres, a donné lieu au problème intéressant de la synchronisation, problème dont la solution, devinée par Foucault, précisée pour la première fois par Cornu, demandait encore un dernier effort.

On pourra s'étonner que la théorie des échappements qui, en somme, devrait être commune aux horloges et aux montres ne soit pas ici mentionnée.

C'est que le problème des échappements est un problème de l'horlogerie dans lequel les théoriciens, sauf un conseil très général facile à énoncer, n'ont guère apporté de clarté. Après les fondateurs de la dynamique de la montre sont venus ces techniciens horlogers qui continuent encore leur œuvre délicate, plus difficile peut-être que l'œuvre des fondateurs: MM. Grossman père et fils, MM. Berner qui sont l'honneur de l'enseignement technique en Suisse, pour ne citer que ceux que j'ai le mieux étudiés.

Les fondateurs représentaient pour ainsi dire l'œuvre mathématique fondamentale de la théorie de l'horlogerie.

Les techniciens suisses se placent entre eux et les créateurs de ce que j'appellerai volontiers l'horlogerie physique, inaugurée récemment par les travaux de M. Brillouin, de M. Guillaume, et continuée par M. Ditisheim pour ne citer que les chercheurs les plus heureux.

Mes travaux personnels déjà poursuivis peuvent se rattacher à la première catégorie de recherches.

Le plan des travaux pour lesquels je n'ai pas encore de ressources mais dont je crois cependant devoir signaler les tendances, se rattache à l'horlogerie physique.

Mes travaux d'horlogerie mathématique, dont j'ai énoncé les principaux résultats dans la „France horlogère" et dans les „Archives des sciences physiques et naturelles de Genève" ont porté jusqu'ici sur l'étude de l'échappement de Graham, sur l'effet d'inertie propre au spiral cylindrique Phillips des chronomètres marins, et sur la théorie de la synchronisation.

Je me bornerai ici à l'exposé de ces deux derniers travaux qui, je l'espère, vous intéresseront.

II. Effet d'inertie du spiral cylindrique Phillips.

M. Caspari a le premier attiré l'attention sur cet effet, et il en a le premier assigné une valeur approchée.

Mais la question doit être reprise, car les calculs du savant auteur et même son analyse doivent être corrigés et complétés.

Considérons un spiral cylindrique de chronomètre marin, spiral à spires très rapprochées; de la partie régulière et cylindrique du spiral, soit en un point B, le régleur distrait par un pincement approprié du métal deux courbes terminales planes qui admettent un axe de symétrie commun, l'une PB s'encastre en P dans le bâti du chronomètre, l'autre va se détacher sur une spire beaucoup plus éloignée et s'encastrer dans le pivot du balancier du chronomètre.

Phillips a montré que si le centre de gravité géométrique de l'arc PB est placé d'une manière qu'il a fait connaître par rapport à la ongueur de l'arc PB et aux points de raccord P et B, la réaction de 'encastrement du piton se réduira à un couple en sorte que lorsque e spiral est écarté de la position du point mort *et maintenu u repos*, il transmet au balancier un couple égal au premier, et dont 'intensité est proportionnelle à l'écart a du balancier au point mort.

C'est-là une condition suffisante d'isochronisme de la vibration du palancier qui, abstraction faite des autres résistances, aura alors un nouvement pendulaire.

Les lois de Phillips ont été vérifiées par des pesées statiques; la ègle de Phillips donne les conditions de l'isochronisme statique ;'est-à-dire en négligeant la masse même du spiral.

J'ai évalué la perturbation de cette masse sur l'isochronisme; ce problème avait été étudié en 1876 par M. Caspari; ce savant a supposé que le moment transmis au balancier pendant le mouvement wait même valeur que dans les pesées statiques de Phillips, cette nypothèse néglige ainsi des quantités de même ordre que celles qu'on e propose d'évaluer, et il est indispensable de tenir compte de l'inertie lu spiral dans la distribution du moment de flexion le long de la fibre noyenne de ce spiral.

Les mémoires de M. Caspari ont été republiés dans le volume du Congrès de Chronométrie de 1900.

En 1903 dans la „France horlogère" j'ai repris la théorie de M. Caspari ot montré que si, à l'approximation que nous indiquerons tout à l'heure, l est permis de négliger l'effet du déplacement du centre de gravité lu spiral, il est nécessaire de tenir compte de l'influence de l'inertie lu spiral dans la distribution du moment de flexion.

Je me contenterai d'indiquer ici le résultat de la correction qu'il aut apporter à l'évaluation de M. Caspari; renvoyant pour plus de létails à mon mémoire de la „France horlogère" ou à un résumé de elui-ci dans les „Archives de Genève."

Soient: a l'écart du balancier au point mort, r_0 le rayon de la portion cylindrique du spiral au repos, p son étendue angulaire sensiblement égale au rapport de sa longueur complète L à r_0, m la masse lu ressort spiral muni de ses courbes Phillips; EI le moment d'élasticité du spiral.

Je trouve pour le mouvement du balancier du chronomètre, dont e moment d'inertie est A, l'équation:

$$1)\qquad \left[A + \frac{2}{3}\frac{mr_0^2}{\left(1+\frac{a}{p}\right)^2}\right]\frac{d^2a}{dt^2} - \frac{1}{3}\frac{mr_0^2}{\left(1+\frac{a}{p}\right)^2}\frac{1}{p+a}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = -EI\frac{a}{L}.$$

L'analyse incomplète de M. Caspari l'avait conduit à l'équation:

$$(2)\qquad \left[A + \frac{1}{2}\frac{m r_0^2}{\left(1+\frac{a}{p}\right)^2}\right]\frac{d^2 a}{dt^2} - \frac{1}{2}\frac{m r_0^2}{\left(1+\frac{a}{p}\right)^2}\frac{1}{p+a}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = -EI\frac{a}{L}.$$

Les équations (1) et (2) rentrent d'ailleurs dans un même type que nous écrirons, en faisant

$$1 + \frac{a}{p} = y, \quad k^2 = \frac{EI}{AL}:$$

$$(3)\qquad \left(1 + \frac{n^2}{y^2}\right)\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{g^2}{y^3}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + k^2(y-1) = 0;$$

dès lors, si nous posons:

$$\frac{2g^2}{n^2} = f^2, \quad \bar{n}^2 = \frac{n^2}{1+n^2},$$

a_0 = demi-amplitude du balancier; et si nous avons égard d'une part à la petitesse de n^2 qui, dans l'interprétation (1) et pour un type usuel est moindre que $\frac{1}{225}$, d'autre part à la petitesse de $\frac{a_0}{p}$, nous trouverons en intégrant par la méthode d'approximation des séries que la durée de l'oscillation simple du mouvement (3) a pour valeur approchée:

$$(3\,\text{bis})\qquad T = \pi\sqrt{\frac{AL}{EI}}\sqrt{1+n^2}\left[1 + \left(\left(\frac{3f^2}{8} + \frac{9}{16}(2-f^2)\right)\right)\bar{n}^2\frac{a_0^2}{p^2}\right].$$

Le coëfficient de l'avance aux petits arcs est proportionnel au coëfficient de $\frac{a_0^2}{p^2}$ dans la parenthèse précédente; ce coëfficient sera

$$\begin{cases} \frac{15}{16}\cdot\frac{2}{3}\frac{m r_0^2}{A} \text{ dans le mouvement (1),} \\ \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\frac{m r_0^2}{A} \text{ dans le mouvement (2),} \end{cases}$$

notre coëfficient d'avance aux petits arcs est donc à celui de M. Caspari sensiblement dans le rapport de 5 à 3, or, pour les types usuels de la Marine, M. Caspari avait assigné, pour une réduction de l'amplitude totale passant de 3 demi-tours à 1 demi-tour, une avance diurne de 1^s; cette avance diurne des chronomètres marins doit donc être portée à 1^s, 66.

III. Mes recherches sur la théorie de la synchronisation.

Lorsque l'on néglige l'effet propre de l'échappement d'une horloge synchronisée, la synchronisation se réduit à l'étude d'un mouvement pendulaire uniformément amorti, troublé par une force fonction périodique du temps.

Ce problème célèbre a été étudié avec soin par divers géomètres ou physiciens; sa solution analytique n'offre aucune difficulté et l'on sait que la force synchronisante impose asymptotiquement sa période au mouvement qui sans elle s'éteindrait indéfiniment: oscillations indéfiniment réduites mais qui seraient encore isochrones avec une période qui ne dépend que de la force pendulaire et du coëfficient constant d'amortissement, pourvu que celui ci soit modéré.

Les représentations que Cornu a données de ce phénomène m'ont suggéré une méthode nouvelle, tout à fait élémentaire et aisément assimilable par les élèves de toute école d'horlogerie.

J'ai donné cette méthode aux „Archives de Genève" (1904) et j'en ai résumé une esquisse dans ma communication à la section pédagogique de ce congrès.

Si le beau mémoire de Cornu épuise complètement la théorie et les vérifications physiques du problème réduit à ses termes simples énoncés plus haut, il ne saurait cependant constituer une théorie complète de la synchronisation des horloges, car il ne tient aucun compte de l'échappement propre à l'horloge synchronisée.

Le problème ainsi posé semblait au premier abord beaucoup plus difficile, et je ne l'aurais probablement pas abordé si dans la théorie élémentaire du problème réduit que je viens de rappeler je n'avais pas trouvé le germe d'une généralisation féconde.

Dans le problème réduit du mouvement amorti synchronisé, le mouvement périodique asymptotique, à période donnée à l'avance, résultait d'une transformation de figure très simple: la transformation par similitude directe avec condensation, le point double de cette transformation définie pour une époque t_0 était le point limite des points représentatifs de l'état du mouvement envisagé aux époques:

$$t_0 + nT, \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots, \infty)$$

T étant la période synchronisante. C'était-là évidemment l'idée qu'il fallait généraliser; il fallait encore former ici un critérium de la convergence de substitutions répétées plus générales, et un criterium qualitatif capable de nous renseigner même dans l'emploi d'une méthode d'approximations successives. Dans cet ordre d'idées un théorème bien connu de M. Kœnigs se présentait alors de lui-même à l'esprit; ce théorème concerne les substitutions répetées:

$$x_{i+1} = \varphi(x_i)$$

qui sont convergentes pour $i = \infty$ et vers la valeur ξ pourvu que

1° $\varphi'(\xi)$ ait un module moindre que 1,

2° que la valeur de départ x_0 soit suffisamment voisine de ξ.

Dans une courte note qui se trouve au volume publié en l'honneur du jubilé de M. le professeur Boltzmann j'ai montré que la généralisation facile du critérium de M. Kœnigs pour plusieurs variables donnait la clef d'une théorie complète de la synchronisation des horloges, et aussi une théorie du régime permanent des chronomètres; cette théorie est alors débarrassée des hypothèses trop spéciales que l'on rencontre dans les monographies de mouvements faites par Villarceau.

Puis j'ai donné des conditions de synchronisation un peu plus larges aux Comptes Rendus de l'Académie des sciences de Paris en 1903. Et enfin en 1904 aux Archives de Genève j'ai montré que cette nouvelle théorie permettait de comparer simplement la méthode de Foucault et la méthode de Cornu.

Je résume ici cette comparaison:

L'élément essentiel de la synchronisation des horloges réside dans l'amortissement naturel ou augmenté de l'horloge à synchroniser; et pour produire la synchronisation on atténue le rapport de l'effet de l'échappement à l'amplitude vis-à-vis de l'amortissement: ce résultat peut s'obtenir soit par l'atténuation de la force de l'échappement de l'horloge qui sera soumise à la force magnétique synchronisante, soit par une augmentation artificielle de l'amortissement; la première méthode est celle de Foucault, la seconde celle de Cornu.

Pour simplifier l'énoncé de cette loi j'ai supposé que l'échappement agissait instantanément au point mort (hypothèse habituelle de Villarceau) et ce que j'appelle dans les notes précitées effet de l'échappement est le rapport du moment de l'impulsion dû à l'échappement au produit du moment d'inertie du pendule multiplié par $\frac{2\pi}{T}$, T étant la durée approchée de l'oscillation du pendule.

Cet effet devra être doublé lorsque l'échappement agit dans les deux sens, ce qui est le cas habituel.

IV. Ce que devrait être un laboratoire de chronométrie expérimentale.

Les théories des problèmes fondamentaux de la chronométrie sont, nul ne le conteste, les guides les plus sûrs pour l'art du régleur; certes aussi les questions théoriques de la mécanique horlogère ne sont pas épuisées.

N'oublions pas toutefois que les méthodes d'approximation employées dans la mécanique de la montre n'ont qu'une approximation même théoriquement limitée; et l'approximation cesse dès qu'il n'y a plus d'huile; cette seule raison suffit pour nous inviter à multiplier les recherches de chronométrie expérimentale; au premier abord ces mots „Recherches de chronométrie expérimentale“ peuvent surprendre, et je dois m'en expliquer.

Qui donc, semble-t-il, a le plus d'intérêt à perfectionner la marche des chronomètres? les artistes évidemment; or les efforts de ceux-ci sont enrégistrés par les concours des observatoires; le véritable champ des recherches expérimentales c'est l'atelier de l'artiste chronométrier, l'observatoire contrôle et atteste les progrès, que voulez vous de plus?

Cela est vrai: l'observatoire contrôle et l'artiste progresse.

J'ajouterai même qu'il y a des artistes qui, non contents de réussir, veulent comprendre les lois les plus cachées de leur art.

Exemple: c'est un artiste M. Ditisheim qui vient de nous apprendre comment l'air agit sur le mouvement des chronomètres, — beaucoup plus par la surcharge d'une gaine entrainée avec le balancier que par la résistance balistique.

Je sais aussi que les artistes n'ont pas attendu l'analyse de leur art pour marcher de l'avant; ils avaient deviné le balancier compensateur.

Et c'est précisément pour celà que je proclame le besoin de recherches de chronométrie expérimentale; recherches qui devront être aussi variées que possible et auxquelles participeront un jour et l'intuition de l'artiste et la sagacité du physicien.

Sans entrer dans de trop longs détails je dirai de suite pourquoi des laboratoires de chronométrie expérimentale, travaillant sur des problèmes plus variés que ceux qui suffisent à l'industrie horlogère du moment, me paraissent nécessaires pour les progrès même de la chronométrie. Et pour fixer nos idées, je prendrai comme exemple le problème du régulateur des chronomètres marins.

En supposant la bienfacture parfaite, les huiles longtemps constantes, la précision des chronomètres marins pouvait, aux yeux d'un pur théoricien, sembler complètement définie il y a quelques années par la connaissance approfondie de l'échappement, et de l'appareil compensateur.

Surviennent les belles expériences de M. Brillouin, photographiant les mouvements mêmes du balancier, et surprenant l'effet irrécusable des irrégularités des dentures du rouage sur l'amplitude de son oscillation; par l'effet de ces irrégularités l'amplitude peut varier du vingtième. Bien plus, ces variations s'accentuent si le fini de dentures est à la main, poussée trop loin, d'où: des règles de bienfacture; déduites de ces recherches nées cependant hors du comptoir.

On savait que ces irrégularités doivent se produire, car il faut fatiguer un peu le rouage soit par la marche naturelle, soit par une marche factice du chronomètre avant d'obtenir la période de marche normale; mais on ne supçonnaît pas une telle variation de l'amplitude.

Ces perturbations de l'amplitude, se répercutent par le défaut d'isochronisme sur la marche de la montre.

Un échappement électrique les pourrait certainement atténuer; et voici une première direction de recherches expérimentales.

Mais si nous remarquons que nous n'utilisons que deux organes régulateurs, le pendule et le ressort spiral des chronomètres, ne voyons nous pas immédiatement le secours immense que l'étude physique systématique de variétés plus étendues de mouvements vibratoires conservables apporterait aux chronométriers de demain?

Ces exemples peuvent suffire à montrer l'importance de recherches chronométriques expérimentales, nouvelles et variées.

Nous avons déjà à l'université de Besançon un enseignement de chronométrie; cet enseignement auquel collaborent l'université et l'école d'horlogerie est l'objet d'une sollicitude éclairée de la part de nos assemblées régionales, sollicitude à laquelle je me plais à rendre ici un public hommage.

Mais à côté de cette œuvre éminemment utile, et éminemment intéressante au point de vue pédagogique, œuvre où disparaissent les barrières factices que les administrations se plaisent volontiers à établir entre les diverses catégories d'enseignement, sans se soucier parfois de reconnaître qu'on ne coupe point l'esprit humain en deux, — à côté de l'enseignement proprement horloger, nous voulons établir un laboratoire de recherches chronométriques.

Nous voulons espérer que cette œuvre nouvelle mais urgente trouvera en France et en particulier à Besançon les moyens de naître et de se développer.

Et, à ce propos, je me plais à rappeler ce qui a été fait pour une science plus favorisée; il y a quelques années nous manquions en France d'un observatoire élevé sous un ciel clair; un ami éclairé de la science fit surgir l'observatoire de Nice.

Nous avons besoin aujourd'hui d'un laboratoire pour provoquer une suite de sérieuses recherches de Chronométrie expérimentale.

J'espère que notre effort sera lui aussi compris et appuyé dans notre pays.

Die Grundlagen der Bestimmung der Erdgestalt.

Von

A. Börsch aus Potsdam.

Neben der Astronomie war es die Geodäsie, die schon seit den ältesten Anfängen und während der ersten Entwicklungsperioden der Mathematik ein ausgezeichnetes und mit ihr eng verbundenes Anwendungsgebiet dieser Wissenschaft bildete, und zwar sowohl in der einfachsten Form als Feldmessung und Felderteilung, als auch in der eigentlichen Bedeutung als Erdmessung. Als nach der Entdeckung der allgemeinen Gravitation durch Newton, und nachdem dieser selbst und Huygens aus theoretischen Gründen geschlossen hatten, daß man das abgeplattete Rotationsellipsoid als die mathematische Figur der Erde ansehen müsse, — also ungefähr vom Beginn des 18. Jahrhunderts an — unter Frankreichs Vortritt der internationale Wettstreit in der Ausführung von Gradmessungen zum Zwecke der Bestimmung der Elemente des Erdellipsoids entbrannt war, waren die ausführenden Geodäten zumeist auch noch Forscher in der theoretischen Mathematik. Erst mit dem gewaltigen Aufschwung, den im vorigen Jahrhundert die reine Mathematik in allen ihren Zweigen nahm, ging für die Geodäsie der Zusammenhang mit der Theorie, zuerst allmählich und dann in stets zunehmendem Maße verloren, so daß ihre Weiterentwicklung fast nur noch den Geodäten von Fach und einigen Astronomen zufiel. Eine bemerkenswerte Ausnahme, deren alles umfassender Geist bis über die Mitte des 19. Jahrhunderts hineinragt, wird durch den Namen Gauß bezeichnet. In der neuesten Zeit jedoch ist das Bestreben allgemeiner und mit Erfolg hervorgetreten, Theorie und Praxis einander wieder zu nähern, und zwar gerade mit besonderer Rücksicht auf die Geodäsie; ich brauche z. B. nur daran zu erinnern, daß die Geodäsie jetzt in Preußen ein, wenn auch nur fakultativer Prüfungsgegenstand für die Kandidaten des höheren Schulamts, die die Lehrbefähigung in der Mathematik erlangen wollen, geworden ist. Ich glaube mich nicht zu irren, wenn ich diesem Bestreben die für mich ehrenvolle Aufforderung zuschreibe, vor Ihnen einige vielleicht allgemeiner interessierende Abschnitte aus den mathematischen Grundlagen zur Bestimmung der Erdgestalt in engem Rahmen und notgedrungen in nur ganz allgemeinen Zügen zu besprechen. Sie werden es aber mit mir bedauern, daß der berufene Vertreter dieses Faches, Herr F. R. Helmert, mein verehrter Chef, leider verhindert war, Ihnen seine Ideen und die Ergebnisse seiner Forschungen selbst vorzutragen.

Bis gegen das Ende des 18. Jahrhunderts glaubte man, durch wenige in möglichst verschiedenen Breiten gelegene und mit äußerster Genauigkeit ausgeführte Gradmessungen — und zwar kamen damals fast nur Breitengradmessungen in Betracht — die Elemente des Erdellipsoids (halbe große Achse und Abplattung) bestimmen zu können, eine Anschauung, die besonders scharf in der hierauf begründeten Ableitung eines sogenannten natürlichen Längenmaßes, des Meters, zutage tritt. Differenzen, die sich in der Länge der Breitengrade in verschiedenen Gegenden, unter denselben und unter verschiedenen Breiten, gegen die theoretischen Werte ergaben, wurden den Beobachtungen, vorzüglich aber den astronomischen Bestimmungen, zur Last gelegt; ich weise dazu z. B. darauf hin, welch einen verhängnisvollen Einfluß die nach den Beobachtungen in den Wintern 1792/93 und 1793/94 gefundene Differenz von 3″ zwischen dem geodätischen und astronomischen Breitenunterschied der nur etwa 2 km voneinander entfernt gelegenen Punkte Montjouy und Barcelona auf das Geschick Méchains ausgeübt hat. Jedoch fing man schon an, größere Unterschiede zwischen den beobachteten und den aus den trigonometrischen Messungen unter Zugrundelegung eines bestimmten Ellipsoids berechneten Breiten durch lokale Attraktionen, zunächst durch solche sichtbarer Massen, zu erklären; Orte mit solchen lokalen Lotstörungen hielt man für ungeeignet zur Anlegung astronomischer Stationen.. Durch die infolge der Vervollkommnung der Instrumente und der Beobachtungsmethoden immer häufiger als solche erkannten Lotstörungen veranlaßt, kam man gegen das Ende des 18. Jahrhunderts auf die Idee, durch schickliche Wahl der Lage und der Dimensionen eines besonderen Referenz-Ellipsoides diese Lotabweichungen für ein beschränktes Gebiet, wie z. B. Großbritannien und Irland, möglichst klein zu machen. Der Erfolg war jedoch gering. Auch der im Jahre 1838 gemachte Versuch Bessels, seiner ostpreußischen Gradmessung eine beliebig gelegene und gestaltete Fläche 2. Ordnung anzupassen, mißlang trotz der geringen Ausdehnung des betrachteten geodätischen Dreiecks Memel—Königsberg—Trunz, da in den beobachteten Polhöhen und Azimuten noch Reste im Betrage von mehreren Sekunden übrig blieben. Man glaubte aber gleichwohl noch längere Zeit hindurch, aus den bereits vorhandenen Gradmessungen mit einiger Sicherheit ein allgemeines Erdellipsoid ableiten zu können, was scheinbar die aus verschiedenen Berechnungen und unter Benutzung von z. T. verschiedenem Material hervorgegangenen, ziemlich übereinstimmenden Werte der halben großen Achse und der Abplattung bestätigten, wie sie u. a. durch Walbeck, Airy und Bessel (1841) ermittelt wurden. Die Besselschen Elemente galten lange Zeit als die besten, und auch heute liegen sie noch den Berechnungen vieler und ausgedehnter Landesvermessungen zugrunde. Indessen ergaben neuere Ableitungen aus den Jahren 1866 und 1880 durch A. R. Clarke nach einer sorgfältigen Diskussion der Ergebnisse, besonders aber der bei den einzelnen Gradmessungen benutzten Längeneinheiten, gegen Bessel eine Vergrößerung der halben großen Achse um etwa 1 km und eine solche der Abplattung von 1 : 299 auf 1 : 293. Man war sich hierbei, abgesehen von einigen anderen Bedenken, darüber klar, daß sich die so bestimmte Meridianellipse nur den einzelnen Gradmessungen möglichst gut anschließt, für jede einzelne aber die kleine Achse nicht mit der Rotationsachse der Erde zusammenzufallen braucht, sondern ihr nur parallel gelegt wird, wodurch z. B. kontinentale Unregelmäßigkeiten in der Gestalt der Erde verdeckt werden können. Bei einer nachträglichen trigonometrischen Verbindung zweier Breitengradmessungen müßte sich dieser Umstand bemerkbar machen. So äußerte er sich bei der 1889 bewirkten Verbindung der russisch-skandinavischen mit der englisch-französischen Gradmessung dadurch, daß sich eine windschiefe Verdrehung beider Meridianbogen gegeneinander im Betrage von etwa 5″ ergab, die später (1900) auf einem anderen Rechnungswege bestätigt wurde. Erreichten die Abstände der kleinen Achse der Meridianellipse von der Erdachse für verschiedene Gradmessungen mehrere Kilometer, was von vornherein nicht ausgeschlossen erscheint, so wäre natürlich das errechnete Ellipsoid kaum als eine auch nur oberflächliche Darstellung der Erdgestalt anzusehen. Der hervorragende Einfluß, den die ostindische Gradmessung, sowohl infolge ihrer Ausdehnung, als auch auf Grund ihrer geographischen Lage in der Nähe des Äquators zwischen dem Indischen Ozean und dem Himalaya mit dem Hochlande von Tibet, auf die Bestimmung der Erdelemente ausüben mußte, vermehrte zunächst die Zweifel an der Möglichkeit einer genauen Bestimmung der Erdgestalt als Rotationsellipsoid; läßt sich ihr doch überdies ein Besselsches und ein Clarkesches Ellipsoid fast gleich gut anpassen.

Die Folgerungen, die bereits aus den 1828 bekannten Ergebnissen für die Weiterentwicklung und die Aufgaben der wissenschaftlichen Geodäsie zu ziehen waren, hat wohl Gauß in der „Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen Göttingen und Altona“ zuerst in voller Klarheit ausgesprochen. Ich glaube nichts Besseres tun zu können, als die betreffende Stelle hier wörtlich anzuführen: „Nach unserem Dafürhalten betrachtet man diesen Gegenstand [nämlich das Auftreten von Lotabweichungen] aus einem falschen Gesichtspunkte, wenn man bei solchen Erscheinungen immer nur von Lokalablenkungen der Lotlinie spricht, und sie also gleichsam nur als einzelne Ausnahmen ansieht. Was wir im geometrischen Sinn Oberfläche der Erde nennen, ist nichts anderes als diejenige Fläche, welche überall die Richtung der Schwere senkrecht schneidet, und von der die Oberfläche des Weltmeers einen Teil ausmacht. Die Richtung der Schwere an jedem Punkte wird aber durch die Gestalt des festen Teils der Erde und seine ungleiche Dichtigkeit bestimmt, und an der äußern Rinde der Erde, von der allein wir etwas wissen, zeigt sich diese Gestalt und Dichtigkeit als höchst unregelmäßig; die Unregelmäßigkeit der Dichtigkeit mag sich leicht noch ziemlich tief unter die äußere Rinde erstrecken und entzieht sich ganz unsern Berechnungen, zu welchen fast alle Daten fehlen. Die geometrische Oberfläche ist das Produkt der Gesamtwirkung dieser ungleich verteilten Elemente, und anstatt vorkommende unzweideutige Beweise der Unregelmäßigkeit befremdend zu finden, scheint es eher zu bewundern, daß sie nicht noch größer ist. Wären die astronomischen Beobachtungen einer zehn- oder hundertmal größeren Genauigkeit fähig, als sie gegenwärtig haben, so würden sie diese Unregelmäßigkeit ohne Zweifel überall nachweisen. Bei dieser Lage der Sache hindert aber nichts, die Erde im Ganzen als ein elliptisches Revolutionssphäroid zu betrachten, von dem die wirkliche (geometrische) Oberfläche überall bald in stärkern, bald in schwächern, bald in kürzern, bald in längern Undulationen abweicht. Wäre es möglich, die ganze Erde mit einem trigonometrischen Netze gleichsam zu umspinnen, und die gegenseitige Lage aller Punkte dadurch zu berechnen, so würde das idealische Revolutionssphäroid dasjenige sein, auf welchem berechnet die Richtungen der Vertikalen die möglich beste Übereinstimmung mit den astronomischen Beobachtungen gäben.“

Als mathematische Erdgestalt wird also eine der Niveauflächen $W=$ constans definiert, die aus der Kräftefunktion W der Erde entspringen, und zwar etwas schärfer ausgedrückt nach Bessel: diejenige Fläche, die die Oberfläche des Wassers eines mit dem Meere zusammenhängenden, die Erde bedeckenden Netzes von engen Kanälen bilden würde, wobei aber das Wasser in relativer Ruhe gegen den Erdkörper, also ohne Strömungen und ohne die Einwirkungen von Sonne und Mond (Ebbe und Flut) und der Winde und unter unveränderlichem Luftdrucke an der Meeresoberfläche gedacht wird. Für diese Fläche $W = W_0$ ist dann später von J. B. Listing der Name Geoid eingeführt worden.

Gauß wies auch darauf hin, daß zur Untersuchung des Geoids nicht die Vervielfältigung der Gradmessungen die Hauptsache ist, sondern die Ausführung möglichst ausgedehnter und im Zusammenhang stehender trigonometrischer und astronomischer Messungen; er beklagt sich bitter über die Schwierigkeiten mancher Art, die diesem Zusammenschluß schon damals innerhalb Deutschlands und seiner Nachbarländer entgegenwirkten. General Baeyer suchte diese Forderung zunächst für Zentraleuropa 1861 durch die Begründung der Mitteleuropäischen Gradmessung zu erfüllen, mit der ausgesprochenen Absicht, die Krümmungsverhältnisse der Erde in dem fraglichen Gebiet zu untersuchen. Die Mitteleuropäische Gradmessung erweiterte sich 1867 zur Europäischen und 1886 nach Baeyers Tode, und nachdem fast alle Kulturstaaten der Konvention beigetreten waren, zur Internationalen Erdmessung. Durch sie und die großen Mittel, die ihr nach jeder Richtung hin, besonders auch in der Personen- und Geldfrage, zur Verfügung stehen, angeregt, konnte man der Frage nach der Möglichkeit der Bestimmung des Geoids oder wenigstens einzelner seiner Teile, sowie der Feststellung der dazu nötigen Erfordernisse theoretischer und praktischer Natur näher treten. Man mußte vor allen Dingen untersuchen, ob die Lösung der Aufgabe ohne Hypothesen über das Bildungsgesetz der Fläche möglich sei, und ob für den Fall, daß man aus praktischen Gründen gewisse Hypothesen zuzulassen gezwungen wird, sich ihr Einfluß mit hinreichender Schärfe ermitteln oder als belanglos gegenüber den durch die Beobachtungsfehler verursachten Unsicherheiten nachweisen läßt.

Weil man nur auf einem kleineren Teile der Erdoberfläche hinreichend genaue Beobachtungen anstellen kann, so ist es zunächst unmöglich, das Geoid als Ganzes zu ermitteln, da sich die Flächen $W =$ constans und insbesondere das Geoid nicht durch eine einzige analytische Funktion darstellen lassen. Denn die zweiten Differentialquotienten von W und mit ihnen die Krümmungsverhältnisse werden bei sprungweiser Änderung der Dichte, also z. B. beim Übergang von Luft in Wasser oder von Wasser in Gestein und bei der Verschiedenheit in der Dichte der Gesteinsarten, ebenfalls unstetig. Drastisch erläutert dies H. Bruns (1878) durch den Ausspruch: „Ebensowenig, wie man versuchen wird, das Bild, welches eine geognostische Karte gewährt, mit einigem Anspruch auf Treue in eine Formel zu zwängen, ebensowenig wird man auf ein brauchbares Resultat rechnen dürfen, wenn man es unternimmt, für die Gestalt der Geoide einen Ausdruck zu suchen, der die wahre Form derselben bis auf Quantitäten von der Ordnung der Beobachtungsfehler angibt." Ein Beispiel hierfür liefert der bereits erwähnte Besselsche Versuch.

Bevor ich aber zur Besprechung der verschiedenen Methoden für die Bestimmung oder die Darstellung von Flächenstücken des Geoids übergehe, muß ich noch einen kurzen Überblick über die Rolle geben, die die Ermittelung der Intensität der Schwerkraft bei den Untersuchungen über die allgemeine Erdgestalt für sich allein und im Zusammenhang mit den Gradmessungen spielt; ihre Bedeutung für Spezialuntersuchungen wird später gleichzeitig mit diesen zur Sprache kommen.

Die Schwerkraft g steht mit der Kräftefunktion durch die Gleichung

$$g = -\partial W / \partial n$$

in Beziehung, wo n die nach außen gerichtete Normale der Niveaufläche bedeutet. Schweremessungen waren indessen mit ausreichender Genauigkeit bis in die neueste Zeit nur durch Pendelbeobachtungen zu erlangen und dadurch auf das feste Land beschränkt.

Clairaut leitete 1738 unter der Annahme, daß ein homogen geschichtetes Rotationsellipsoid Gleichgewichtsfigur der Erde sei, sein bekanntes Theorem ab, das die Abplattung mit der Schwerkraft am Äquator und am Pol und mit der Schwungkraft am Äquator in Beziehung setzt. Unter anderen haben dann später besonders G. G. Stokes, H. Bruns und F. R. Helmert zur Verallgemeinerung dieses Theorems beigetragen. Indem man für W, wenn man noch gewisse plausible Annahmen macht, nur die ersten Glieder seiner Entwicklung ansetzt, so erhält man unter Beschränkung auf die Glieder zweiten Ranges (Bruns) algebraische Rotationsflächen 14. Ordnung — Sphäroide — oder durch Mitnahme gewisser Glieder vierten Ranges (Helmert) ebenfalls Rotationsflächen — Niveausphäroide —, die beide zur Äquatorebene symmetrisch sind und mit $U =$ constans bezeichnet werden mögen. Da alle bisherigen Erfahrungen gezeigt haben, daß $W - U$ für alle Punkte der Erdrinde hinreichend klein ist, so ist die Funktion U, in der einen oder in der anderen Form, als die angemessenste erste Approximation für die Kräftefunktion W anzusehen und am geeignetsten, sich von den Lot- und Schwerestörungen eine klare Vorstellung zu machen. Indessen weicht die Fläche $U = W_0$, das Normalsphäroid, in der zweiten Darstellungsart von einem Rotationsellipsoid mit denselben Achsen nur so wenig ab — die Maximaldistanz beider bleibt z. B. bei einer Abplattung von 1 : 299 unter 13 m —, daß man in den meisten Fällen dieses Normalsphäroid durch ein Ellipsoid ersetzt denken kann. Die Bestimmung eines allgemeinen Erdellipsoids behält daher auch jetzt noch eine gewisse Bedeutung. Die Fläche $U = W_0$ ist nun gerade die Fläche, für deren Punkte man sich bei Anwendung des erweiterten Clairautschen Theorems die auf die Meeresoberfläche reduzierten Pendellängen gegeben denkt. Hierbei nimmt man an, daß diese „normale Schwerkraft" γ_0 etwa in der Form

$$\gamma_0 = g_a (1 + b_2 \sin \varphi^2 + b_4 \sin \varphi^4)$$

dargestellt werden kann, wo φ die geographische Breite bedeutet und die Schwerkraft am Äquator g_a sowie b_2 und b_4 in passender Weise aus den Beobachtungen abzuleiten sind; hierdurch nimmt die Formel für γ_0 zugleich den Charakter eines Interpolationsausdrucks an. Die Berechtigung dieses Ansatzes wird durch besondere Konvergenzuntersuchungen und auf Grund geeigneter Massenverschiebungen (Kondensationsmethode Helmerts) nachgewiesen. Das kleine Glied mit b_4 ist übrigens vor kurzem theoretisch und auch seinem numerischen Betrage nach von E. Wiechert und H. G. Darwin unter der Annahme hydrostatischer Schichtung der Erdoberfläche berechnet worden. Die neueste Bestimmung der Abplattung des Normalsphäroids aus den Schweremessungen durch Helmert im Jahre 1901, die sich nur wenig von seinem 1884 gefundenen Resultat unterscheidet, ergibt hierfür mit einer relativ großen Sicherheit 1 : 298,3. Diese Untersuchung erstreckte sich getrennt auf eine sehr große Anzahl von Festlands- und von Küstenstationen, die auf die Mittelbreiten von 5° bis 75° in Intervallen von je 5° verteilt sind; die Stationen auf kleinen Inseln in tiefem Wasser wurden ihres besondern Verhaltens wegen vorerst noch ausgeschlossen. Die gute Übereinstimmung der aus beiden Gruppen einzeln erhaltenen Werte der Abplattung ist für die Schätzung der Genauigkeit der genannten Zahl besonders wertvoll.

Da die Bestimmung der Abplattung aus den Gradmessungen, z. T. schon wegen ihrer jetzigen Verteilung, und auch ihre Ableitung aus astronomischen Daten, aus Mondstörungen und aus der Präzessionskonstanten, deren Ergebnisse sich aber gleichwohl dem neuen Werte nahe anschließen, ungenauer ist, so ist der Helmertsche Wert heute als der beste anzusehen. Dagegen kann man aus hinlänglich ausgedehnten Gradmessungen, etwa von über 2000 km Ausdehnung, unter Annahme des genannten Abplattungswertes, sehr wohl die halbe große Achse des Erdellipsoids ableiten. Vorläufige Untersuchungen im Zentralbureau der Internationalen Erdmessung zu Potsdam, bei denen vor allem auch die beiden neuen großen Längengradmessungen, die europäische in 52° und die nordamerikanische in 39° Breite berücksichtigt wurden, haben für die halbe große Achse den abgerundeten Wert 6378 km ergeben.

Wenn die Schwere auf der ganzen Erdoberfläche bekannt wäre, so könnte man nach einer Formel von G. G. Stokes (1849) die regionalen Erhebungen N des Geoids gegen das Normalsphäroid aus den Schwerestörungen, d. h. aus den Abweichungen der auf die Meeresfläche reduzierten beobachteten Schwere von der entsprechenden nach der Formel für γ_0 berechneten, ableiten. Abgesehen davon, daß auch für die Zukunft nur in ganz besonders günstigen Fällen eine solche Verteilung der Schwerestationen möglich sein wird, um mit einiger Sicherheit N für einzelne Punkte bestimmen zu können, ist die Formel zur Ermittlung der allgemeinen Erdgestalt schon dadurch unbrauchbar, weil sie nur die Variationen des Radius vector liefert, während sein Mittelwert anderweit gegeben sein muß. Dieser kann allein durch Gradmessungen ermittelt werden. Denn auch eine an sich interessante Formel, die es erlaubt, die mittlere Krümmung der Niveauflächen am Beobachtungsort zu berechnen, wenn dort g und seine Änderung mit der Höhe bekannt ist, kommt praktisch nicht in Betracht. Endlich kann aus Schwerkraftsmessungen in Verbindung mit Höhenmessungen allein ein mittlerer Erdradius nur in ganz roher Weise abgeleitet werden. Die Gradmessungen werden daher auch aus diesen Gründen ihre Unentbehrlichkeit bei der Ableitung der allgemeinen Erdgestalt behaupten.

Seit der Einführung der Potentialtheorie in die Untersuchungen über die Erdgestalt dachte man natürlich sehr bald daran, die Erhebungen und Senkungen des Geoids gegen das Normalsphäroid, die durch die Anziehung der sichtbaren und verschieden dichten Massen der Erdrinde, hauptsächlich infolge des Gegensatzes von Festländern und Ozeanen, entstehen müssen, durch Rechnung, wenn auch zuerst nur in roher Schätzung, zu ermitteln. Nach den mehr theoretischen Betrachtungen von G. G. Stokes (1849) waren es besonders Ph. Fischer (1868) und J. B. Listing (1872 und 1878), die unter mancherlei, z. T. unzutreffenden Annahmen solche Rechnungen anstellten. So fand Fischer, daß sich an den Küsten der Festländer das Geoid um 600 m erhebt, die unter den Festländern bis auf 1000 m steigen könnten; nach Listing sollten sogar die Depressionen der Meeresfläche allein über 1000 m betragen, so daß ihm Störungen des Radius vector bis zur Amplitude von 2000 m möglich erschienen. H. Bruns stellte 1878 zuerst auf richtigen Voraussetzungen beruhende Untersuchungen an, wobei freilich die Verteilung von Wasser und Land noch sehr idealisiert angenommen wurde, und fand, daß man wohl noch zugeben könne, daß das Geoid gegen das Normalsphäroid Aus- und Einbiegungen besitze, deren Beträge zwischen $\pm$ 500 m enthalten seien. Zu ähnlichen Resultaten (zwischen $-$ 400 m und $+$ 300 m, jedenfalls aber auch unter $\pm$ 500 m) kommt Helmert 1884, indem er, abgesehen von andern Annahmen, die Kontinente in angemessener Weise durch fünf abgestumpfte Kreiskegel ersetzt denkt. Durch eingehende Untersuchungen über den Verlauf der Schwerkraft gelangt er aber zu der Ansicht, daß mit der Annahme von Störungsmassen, die der äußern Figur der Festlandsmassen entsprechen, das beobachtete Verhalten der Schwerkraft, wonach sie sich auf den kleineren Inseln der Ozeane stets größer zeigt als auf dem Festlande, unvereinbar ist. Es wird also schon eine Kompensation der Festländer durch unterirdische Massendefekte als wahrscheinlich angenommen. Andererseits hatte aber Faye (1880 und 1886) die Hypothese aufgestellt, daß die Dichtigkeit gewisser Erdschichten unter den Ozeanen größer sei als die der entsprechenden unter den Festländern. Unter diesen Umständen würden dann die Höhenstörungen des Geoids nur Bruchteile von $\pm$ 500 m betragen. Die Ergebnisse der Gradmessungen und die der Pendelmessungen in Vorderindien hatten übrigens schon 1855 J. H. Pratt zu der Annahme geführt, daß die Massenanhäufungen, welche der äußeren Begrenzung der Kontinentalmassen entsprechen, durch Dichtigkeitsverminderungen bis zur Tiefe von einigen hundert Kilometern ausgeglichen werden.

Die große Ausdehnung, die die Schwerkraftsmessungen erfahren haben, seitdem es das v. Sternecksche invariable Halbsekundenpendel ermöglicht, leicht, rasch und mit großer Genauigkeit relative Bestimmungen der Schwerkraft auszuführen, in Verbindung mit neuen Erfahrungen über die Verteilung der Lotabweichungen gaben Helmert 1890 die Mittel in die Hand, in seiner „Schwerkraft im Hochgebirge“ nachzuweisen, daß die Abstände des Geoids vom Normalsphäroid unterhalb der Grenzen von $\pm$ 200 m bleiben, und daß deshalb die Gebirge und auch die Kontinente zum größten Teil durch unterirdische Massendefekte kompensiert seien. Schon 1899 konnte aber Helmert auf Grund seiner früheren Untersuchungen und aus den Ergebnissen der Gradmessungen, besonders der neuen europäischen Längengradmessung in 52° Breite, schließen, daß sich alle Störungen des Geoids, auch die kontinentaler Natur und die unter den Ozeanen, sogar in den Grenzen $\pm$ 100 m bewegen werden. Diese $\pm$ 100 m sind aber vollkommen ausreichend, um den Widerspruch in den aus den Gradmessungen und den Pendelmessungen erhaltenen Werten der Abplattung zu erklären.

Auch die vorher erwähnte windschiefe Lage des russischen Breitenbogens gegenüber dem französisch-englischen würde sich auf eine durch kontinentale Anziehung verursachte Erhebung des Geoids in dem südlichen Teile der ersten im Betrage von unter 50 m zurückführen lassen.

Zur vollständigen Bestätigung der angeführten Zahlen war es aber von der größten Wichtigkeit, auch über den Tiefen des Ozeans Schweremessungen ausführen zu können; doch zeigten sich alle Vorschläge, dies zu ermöglichen, für ungeeignet und zu ungenau. Erst 1901 gelang es O. Hecker, auf Helmerts Anregung hin, durch vergleichende Beobachtungen an Quecksilberbarometern und Siedethermometern (nach Mohn) auf dem Atlantischen Ozean zwischen Hamburg, Lissabon und Rio de Janeiro die Schwerkraft mit der nötigen Sicherheit zu bestimmen. Das Ergebnis war, daß die Schwerkraft auf dem tiefen Wasser des Atlantischen Ozeans zwischen Lissabon und Bahia als normal und der kontinentalen Schwereformel Helmerts von 1901 entsprechend gefunden wurde. Auch die von Nansen bei seiner Polarfahrt über dem tiefen Polarmeer auf dem Eise angeordneten Pendelmessungen bestätigen diese Erfahrung. Man kann also mit der Prattschen Hypothese von der überall vorhandenen isostatischen Lagerung der Massen der Erdkruste (wenn auch nur im Sinne einer allgemeinen Regel) als einer Tatsache rechnen und behaupten, daß sich die radialen Anomalien des Geoids in den vorher angegebenen Grenzen von $\pm$ 100 m halten. Man mag sich etwa vorstellen, daß die Massen- und Dichteunterschiede der physischen Erdoberfläche im wesentlichen durch Massenverschiebungen aus einer ursprünglich homogenen oder homogen geschichteten Erdrinde entstanden sind. Natürlich braucht man sich diese Isostasie nicht für jedes Quadratmeter der Erdoberfläche erfüllt zu denken, sondern vielleicht für Kreise von einigen hundet Kilometern Radius, um von der Größenordnung dieser Zahl eine angenäherte Vorstellung zu geben. Hierauf weisen auch die auf Grund der Attraktionswirkungen sichtbarer Massen berechneten relativen Lotabweichungen hin, die bei deren Berücksichtigung bis auf 25—40 km Umkreis durch die beobachteten Lotabweichungen meistens angenähert dargestellt werden. Dazu kommt noch, daß die geometrischen Nivellements nach Anbringung des normalen Teiles der durch die Nichtparallelität der Niveauflächen bedingten Reduktionen ergeben haben, daß die Mittelwasser der Europa umspülenden Meere bis auf Beträge von der Ordnung der Beobachtungsfehler und bis auf solche, die durch lokale Störungen, wie vorherrschende Winde, verursacht werden, einer Niveaufläche angehören.

Eine wichtige Folge der skizzierten Resultate ist es, daß man sich nunmehr die in der bisher üblichen Weise berechneten trigonometrischen

Messungen mit ausreichender Genauigkeit als auf ein bestimmtes Referenzellipsoid übertragen denken kann, nachdem man nötigenfalls noch die kleinen Richtungsverbesserungen wegen der Abweichung des Vertikalschnitts von der geodätischen Linie und wegen der Meereshöhe des Objekts berücksichtigt hat. Sollten sich aber nachträglich größere oder stark mit der Lage der Stationen veränderliche Lotabweichungen herausstellen, so hindert nichts, das Dreiecksnetz wiederholt mit Rücksicht hierauf zu berechnen und so zum Ziele zu gelangen. Jedenfalls sind aber relative Lotabweichungen von etwa 100″ nur noch in ganz vereinzelten Fällen zu erwarten; meistens werden sie unter 10″—20″ bleiben und keinen sich über größere Gebiete erstreckenden systematischen Charakter annehmen. Endlich findet auf Grund dieser Verhältnisse auch der Vorschlag Helmerts eine Stütze: die Schweremessungen je nach ihrer speziellen Verwendungsweise in zwei verschiedenen Arten auf das Meeresniveau zu reduzieren. Bei ihrer Benutzung für allgemeine Untersuchungen (Bestimmung der Abplattung) hält er es nämlich für angebracht, sie nur unter Berücksichtigung des normalen Teiles der Schwerkraftsänderung mit der Höhe, also wie in freier Luft (nach Stokes und Faye), auf die Meeresfläche zu übertragen, wobei indessen in bestimmten Fällen noch Kondensationsbeträge anzubringen sind. Der Erfolg hat auch hier wieder die Prattsche Hypothese bestätigt. Bei Untersuchungen über regionale Schwerestörungen sollte man aber die Wirkung der über dem Meeresniveau gelegenen Massen beachten (nach Bouguer, jedoch unter Berücksichtigung der sogenannten topographischen Reduktion). Die Vergleichung der in letzter Art reduzierten Schweremessungen mit den normalen Werten gestattet im Grunde genommen sodann nur die Erkenntnis der auf die Meeresoberfläche kondensiert gedachten, unter ihr gelegenen Massenüberschüsse oder Defekte. Sollen also Hypothesen über die wirkliche Massenlagerung auf ihre Zulässigkeit hin geprüft werden, so ist auch hierzu die Kenntnis der Lotabweichungen nötig.

Endlich will ich, wie schon erwähnt, noch etwas auf die Methoden eingehen, die für die tatsächliche Darstellung von Flächenstücken des Geoids in begrenzten Vermessungsgebieten in Frage kommen, und zwar werde ich mich dabei, der historischen Entwicklung folgend, im allgemeinen auf die Vorschläge beschränken, die ein in sich abgeschlossenes Bild gewähren und die mit den Namen Yvon Villarceau, H. Bruns und F. R. Helmert verknüpft sind.

Villarceau hat zwei Wege angegeben, um die „wahre Figur der Erde“ aus Lotabweichungen zu bestimmen. Für die erste Methode (1868) setzt er voraus, daß die trigonometrischen Messungen ein auf ein bestimmtes Referenzellipsoid projiziertes Dreiecksnetz ergeben haben, daß auf sämtlichen Dreieckspunkten Breite und Länge oder Azimut bestimmt sind, deren Werte auch als für das Ellipsoid gültig angenommen werden, und daß diese Stationen sowohl in ein trigonometrisches als auch in ein geometrisches Nivellement (durch Zenitdistanzmessungen und vermittels des Nivellierinstruments) einbezogen sind. Durch das trigonometrische Nivellement werden unter Berücksichtigung des Einflusses der Lotabweichungen auf die gemessenen Zenitdistanzen die Höhen über dem Referenzellipsoid, das man am besten an einer bestimmten Stelle mit dem Mittelwasser des Meeres zusammenfallen läßt, erhalten, während das geometrische Nivellement direkt Meereshöhen liefere. Die Differenzen beider Höhen geben bis auf eine Konstante, die man in geeigneter Weise bestimmen kann, die Höhen der Geoidpunkte über den entsprechenden des Ellipsoids. Es ist dies also eine Bestimmung des Geoids durch Punkte, die bei genügend dichter Lage der Stationen zu einer graphischen Darstellung des Geoids durch Kurven führt, die die Punkte gleichen Geoidabstands verbinden, in ähnlicher Weise, wie die Darstellung des Geländes auf einer Karte durch Niveaukurven erlangt wird. Villarceau ist sich dabei der Vernachlässigungen bewußt, die durch die übliche Reduktion der Grundlinien auf die Meeresfläche statt auf das Ellipsoid und durch den Einfluß der Krümmung der Lotlinien auf die astronomischen Daten für das Ellipsoid entstehen. Dazu kommt noch, daß er außer der Möglichkeit der Projektion des Dreiecksnetzes auf das Ellipsoid auch annimmt, daß das in der damals üblichen Weise beobachtete und berechnete geometrische Nivellement Meereshöhen gibt, während dies nur angenähert der Fall ist, da hierzu außerdem die Kenntnis der Schwere längs des Nivellementsweges notwendig ist. Besonders aber kommt in Betracht, daß die Resultate des trigonometrischen Nivellements, hauptsächlich infolge der Unsicherheit über die wirklichen Refraktionsbeträge, denen der Lichtstrahl unterworfen ist, zu ungenau sind.

Villarceau macht deshalb (1871 und 1873) noch einen Vorschlag, worauf er übrigens schon 1868 hingewiesen hatte, bei dem er auf beide Arten von Nivellements verzichtet, indem er durch die aus den astronomischen Beobachtungen ihrer Richtung nach gegebenen Vertikalen eine Fläche legt, die sie rechtwinklig schneidet, also eine Bestimmung durch Vertikallinien. Er entwickelt die Distanz des Geoids vom Ellipsoid, wieder bis auf eine Konstante, einmal nach einfachen und doppelten trigonometrischen Reihen und sodann nach Potenzen der geodätischen Breiten- und Längendifferenzen gegen einen Zentralpunkt, und zwar im zweiten Fall für Winkel- und für Linearmaß. Abgesehen davon, daß solche Reihen nur schwach konvergieren und daher praktisch kaum anwendbar sind, wird also vorausgesetzt, daß N eine analytische Funktion ist. Dies tritt darin hervor, daß, wenn ξ und η die Lotabweichungen für einen Punkt im Meridian und im Parallel und B und L seine Breite und Länge bezeichnen, bei der Bestimmung der Reihenkoeffizienten von der Gleichung $\partial \xi / \partial L = - \partial \eta / \partial B$ Gebrauch gemacht wird, was beides mit $\partial^2 N / \partial B \partial L$ identisch sei. Da diese Annahme aber nicht korrekt ist, so haben solche Entwicklungen nur einen interpolatorischen Charakter; das Geoid wird aber von der ermittelten Fläche in sehr merklicher Weise abweichen können. Villarceau vereinfacht seine analytische Methode selbst schon, indem er sie für die Herstellung von Meridian- und Parallelbogenprofilen einrichtet.

H. Bruns hat es in seiner durchaus auf der Potentialtheorie beruhenden „Figur der Erde" (1878) als die Aufgabe der wissenschaftlichen Geodäsie bezeichnet, die Kräftefunktion der Erde hypothesenfrei zu ermitteln. Er findet, daß die der neueren Geodäsie zur Verfügung stehenden Hilfsmittel, nämlich

1. Astronomische Bestimmungen (Polhöhen, Längen, Azimute),
2. Triangulation (Horizontalwinkel, Grundlinien),
3. Trigonometrisches Nivellement (Messung von Zenitdistanzen),
4. Geometrisches Nivellement,
5. Bestimmungen der Intensität der Schwerkraft,

für eine solche Lösung der Aufgabe, soweit sie überhaupt möglich ist, hinreichend aber auch notwendig sind. Das eigentliche Endergebnis der geodätischen Operationen wird danach nur bestehen können 1) in einem Verzeichnis von Koordinaten von möglichst vielen Punkten eines Geoids nebst den dazugehörigen Werten von W und g und 2) in einer graphischen Darstellung. Und zwar bestimmen die trigonometrischen Messungen und das trigonometrische Nivellement die Gestalt eines Gradmessungspolyeders, dessen Eckpunkte die Beobachtungsstationen sind und dessen Orientierung zur Richtung der Erdachse durch zwei astronomische Bestimmungen, z. B. Polhöhe und Azimut, oder zwei Polhöhen usw., erhalten wird. Die astronomischen Beobachtungen geben die Richtung der durch die Polyedereckpunkte gehenden Vertikalen und das geometrische Nivellement in Verbindung mit Schweremessungen, die längs der Nivellementswege auszuführen sind, Differenzen der Kräftefunktion $W - W_0$, wo W_0 zu der durch den Nullpunkt der Höhen gehenden Niveaufläche, also etwa der mittleren Meeresfläche an einem bestimmten Punkte, gehört; es folgt dies einfach aus der Gleichung $\partial W = - g \partial h$. Der Abstand der Polyeder von der Rotationsachse der Erde läßt sich dagegen nicht ermitteln. Da diese Lösung, als der

Anschauung entbehrend, nur wenig befriedigen kann, so kommt noch die Konstruktion einzelner Geoidpunkte hinzu. Aus den $W - W_0$ erhält man nämlich durch Division mit g_m, wo g_m einen bestimmten Mittelwert aus den Werten von g längs der Normalen auf das Geoid bedeutet, Meereshöhen H. Trägt man diese auf den Vertikalen von den Polyederecken aus ab, so erhält man dadurch die Koordinaten der den einzelnen Stationen entsprechenden Punkte eines bestimmten Geoids. Diese Punkte bilden ein Netz von Geoidpunkten erster Ordnung, welches dann als Grundlage für die Einschaltung beliebig vieler neuer Punkte mittels trigonometrischer Messungen und geometrischer Nivellements dient. Hierbei treten aber ein paar Unsicherheiten auf, die erstens durch die Schätzung von g_m und zweitens durch das Abtragen von H auf den Vertikalen anstatt auf den Normalen zum Geoid entstehen, jedenfalls aber von geringem Einfluß sind.

Auch hier ist es das trigonometrische Nivellement, das durch seine geringe Genauigkeit bis jetzt der wirklichen Ausführung der Brunsschen Methode die größten Hindernisse bereitet. Man könnte ja die Längen der Dreiecksseiten verkleinern, etwa im Durchschnitt auf 15 km, und dadurch eine größere Genauigkeit erzielen. Die entstehende Mehrarbeit, und da außerdem alle Punkte astronomisch bestimmt werden müssen, machen aber selbst für kleinere Gebiete das Verfahren praktisch unausführbar. Jedenfalls hat indessen die Brunssche Arbeit das große Verdienst, die mathematischen Grundlagen der Geodäsie und ihre erreichbaren Ziele klar und scharf dargelegt zu haben.

Die Schwierigkeiten, die sich der hypothesenfreien Bestimmung des Geoids entgegenstellten, haben F. R. Helmert veranlaßt, sich in seinen „Theorien der höheren Geodäsie“ (1880 und 1884) wieder mit der Methode der Lotabweichungen zu beschäftigen. Insbesondere kam er zu dem Ergebnis, daß sich die Bestimmung von Meridianprofilen des Geoids durch ein sogenanntes astronomisches Nivellement wegen der leicht und mit hinreichender Genauigkeit in kurzer Zeit ausführbaren Breitenbestimmungen empfiehlt. Liegen die Breitenstationen nur so dicht, daß man zwischen ihnen den Verlauf der Lotabweichungen hinreichend genau durch eine Kurve darstellen kann, so erhält man aus einer mechanischen Quadratur oder aus einer Flächenermittlung mit dem Planimeter in einfacher Weise das Geoidprofil, bezogen auf das zugrunde gelegte Referenzellipsoid, das in dem Punkte, wo die Lotabweichung im Meridian zu Null angenommen wurde, das Geoid berührt. Werden in einer zu untersuchenden Gegend diese Meridianprofile hinreichend dicht nebeneinander angelegt, so genügt ein in ähnlicher Art abgeleitetes Westostprofil, um eine graphische Darstellung des Geoids durch Niveaukurven zu konstruieren. Einige Beispiele zeigten sofort die Anwendbarkeit dieser Methode. Ein erstes größeres Beispiel konnte aber Helmert 1888 durch die Konstruktion des Geoidprofils im Meridian des Brockens von Sophienhoi in Schleswig (Breite 55,4°) bis zum Lanserkopf bei Innsbruck (47,2°) liefern. Gegen ein das Geoid in Sophienhoi berührendes Clarkesches Ellipsoid erhebt sich das erste im Harz auf etwa 4 m, bis zur bayerischen Hochebene auf 6 m, um in den Voralpen am Lanserkopf 10 m Abstand zu erreichen.

Auch bei diesen Untersuchungen wird noch nicht auf die Lotkrümmung Rücksicht genommen, jedoch wird ihr Einfluß als so gering nachgewiesen, daß er den allgemeinen Charakter der ermittelten Fläche nicht zu ändern vermag, weil die in den Werten von N hieraus entstehenden Fehler nicht erheblich sind. Die Lotkrümmungen erhalten aber eine ganz andere Bedeutung, wenn man für das Geoid den möglichst genauen Verlauf der Krümmungsverhältnisse erforschen will.

Eine angenäherte Berücksichtigung der Lotkrümmung bei der Ableitung der Lotabweichungen dadurch, daß man die Breiten nur um ihren normalen Teil verbessert, der durch die Annahme, daß die Niveauflächen eine Schar koaxialer Ellipsoide seien, definiert wird, hat wegen des weit größeren Einflusses der wirklichen Massenanordnung nur wenig Wert, zumal da für die Lotabweichungen im Parallel etwas Ähnliches nicht existiert. Im Jahre 1895 schlug deshalb P. Pizzetti vor, diese Reduktion mittels der Schwerkraft, die hierzu in ihrem Verlauf auf der physischen Erdoberfläche genügend genau ermittelt sein muß, auszuführen, da ihre horizontale Änderungsgeschwindigkeit in einer einfachen Beziehung zur Lotkrümmung steht. Da er aber selbst findet, daß diese Reduktion schon wegen der mangelnden Kenntnis der Dichtigkeitsverhältnisse Bedenken unterliegt, so schlägt er weiter vor, auf eine die betreffende Gegend in freier Luft durchschneidende Niveaufläche zu reduzieren, wodurch allerdings die Frage nach den Abweichungen des Geoids vom Ellipsoid nicht gelöst wird. Nach Helmert entstehen aber auch hierbei Bedenken, und zwar erstens schon bei der Reduktion der beobachteten Schwerkräfte auf dasselbe Niveau (z. B. an Böschungen, wo sich die Ableitungen der Schwere nach der Breite und Länge beim Übergang von Luft in Erde unstetig ändern), und weil andererseits die Annahme der Proportionalität der Krümmungsbeträge der Lotlinien mit den Höhenunterschieden im Gebirge nicht zutrifft.

In allerneuester Zeit (1901 und 1902) ist aber von Helmert ein Verfahren angegeben worden, kleine Flächenstücke des Geoids aus Lotabweichungen mit Rücksicht auf Lotkrümmung zu bestimmen, das die

Kenntnis der Lotabweichungen und der Intensität der Schwerkraft im ganzen betrachteten Gebiet an der physischen Erdoberfläche, oder doch wenigstens eine derartig dichte Lage der Beobachtungsstationen voraussetzt, daß man zwischen den beobachteten Lotabweichungen und Schwerestörungen hinreichend genau interpolieren kann. Diese Methode besteht darin, daß an die in gewöhnlicher Weise aus astronomischen Nivellements ermittelten Erhebungen N des Geoids über dem Referenzellipsoid kleine Korrektionen angebracht werden, deren Ermittlung mit Hilfe der Schwerkraft in ähnlicher Weise erfolgt, wie die Ableitung der Meereshöhen aus den durch geometrisches Nivellement gefundenen Unterschieden der Kräftefunktion. Ihre Genauigkeit hängt, außer von dem Einflusse der Beobachtungsfehler und von dem vielleicht noch unzureichenden Beobachtungsmaterial, von der Sicherheit ab, mit der die mittlere Schwerkraft in jeder Lotlinie innerhalb einer gewissen Strecke geschätzt werden kann. Die hierbei begangenen Fehler werden aber meistens unterhalb der aus den zuerst genannten Ursachen entspringenden bleiben und sind überdies lokaler Natur, indem sie immer nur den einzelnen Punkt beeinflussen und sich nicht fortpflanzen.

Die Konstruktion des Geoids aus den Meridian- und Westostprofilen durch eine Karte mit Kurven $N =$ constans erfolgt dann in der schon früher angegebenen Weise, wobei die N bis auf eine allen gemeinsame Konstante bestimmt sind, die jedoch, bei sonstiger freier Verfügung, klein und von der Ordnung der Variationen der N sein muß. Die Lotabweichungen Λ' für Punkte des Geoids lassen sich dann aus $\Lambda' = dN/ds_0$, wo ds_0 dem Linearelement auf dem Ellipsoid entspricht, oder auch aus bekannten Formeln der Interpolationsrechnung ermitteln. Ist Λ die entsprechende Lotabweichung auf der physischen Erdoberfläche, so erhält man aus $\Lambda - \Lambda'$ auch nachträglich noch indirekt den Betrag der Lotkrümmung.

Außer einer Anzahl von Meridianprofilen sind bis jetzt folgende mehr oder minder vollkommene Versuche, das Geoid aus Lotabweichungen zu bestimmen, ausgeführt worden:

1. Von C. G. Andrae 1883 für den Harz (größte Variation von N: 2 m),
2. Von General Pomerantzew 1897 für das Ferganagebiet in Zentralasien (größte Variation von N: 13 m bei einer größten relativen Lotabweichung in Breite von 76″ für 110 km nahezu meridionaler Entfernung),
3. Von J. B. Messerschmitt 1901 für die Schweiz (größte Variation von N: 5 m) und endlich

4. Von der U. S. Coast and Geodetic Survey 1903 für den östlichen Teil der U. S. A. (größte Variation von N: 6 m).

Eine Bearbeitung des Geoids im Harzgebiet, für das schon seit 30 Jahren Beobachtungsmaterial gesammelt wird, nach dem neuesten Verfahren Helmerts ist im Geodätischen Institut bei Potsdam im Gange.

Aus diesen Einzeluntersuchungen kann man wohl ebenfalls schließen, daß die Prattsche Hypothese so weit erfüllt sein wird, daß die Maximalwerte von N wahrscheinlich nicht über $\pm$ 100 m liegen werden. Um so mehr ist zu erwarten, daß man jetzt Stücke des Geoids, trotz der verbleibenden Hypothesen, so genau bestimmen kann, daß die noch vorhandenen Unsicherheiten fast nur durch die unvermeidlichen Beobachtungsfehler verursacht werden.

Somit würde das Ziel der wissenschaftlichen Geodäsie, wie es wenigstens heute aufgefaßt wird, auch praktisch zu erreichen sein.

Flüchtige Aufnahmen mittels Photogrammetrie.

Von

S. Finsterwalder aus München.

Als flüchtig mögen solche Aufnahmen bezeichnet werden, bei welchen die Standpunkte des Instrumentes nicht durch eigene Messungen höheren Genauigkeitsgrades festgelegt werden. Die photographischen Aufnahmen sollen je nach der Art des benützten Instrumentes folgendermaßen unterschieden werden: 1. Aufnahmen ohne jede Orientierung, wie sie das von einer perspektivisch richtig zeichnenden Linse erzeugte Negativ darstellt; 2. Aufnahmen mit innerer Orientierung, bei welchen die Lage der Linse gegenüber der lichtempfindlichen Platte bekannt ist (Aufnahmen dieser Art werden bei freihändiger Benutzung eines Apparates von bekannten Abmessungen erzielt); 3. Aufnahmen mit innerer und äußerer Orientierung, bei welchen auch die Stellung des Apparates im Raum gegenüber der Lotlinie und den Himmelsrichtungen gegeben ist. Der Teil der äußeren Orientierung, welcher sich auf die Lotlinie bezieht, ist leicht und sehr genau mittels der Libelle zu ermitteln; als Hilfsmittel für die Orientierung gegen die Himmelsrichtungen kommt nur die Bussole in Betracht. Je nachdem nur der erste oder beide Teile der äußeren Orientierung gegeben sind, sprechen wir von unvollständiger oder vollständiger äußerer Orientierung.

Den soeben gekennzeichneten Arten der Aufnahmen entsprechend sind folgende Fragestellungen der flüchtigen Photogrammetrie zu erörtern.

Erstens: die Rekonstruktion des Gegenstandes aus nicht orientierten Bildern. Wie ich an anderer Stelle gezeigt habe*), sind vier Bilder des Gegenstandes notwendig und ausreichend, um diesen selbst (soweit er auf wenigstens zweien der Bilder sichtbar ist) samt der Lage der Standpunkte zu ihm bis auf den Maßstab und

*) Die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung für das Jahr 1897, VI, 2, S. 14. Leipzig 1899.

lie Stellung im Raum festzulegen; jedoch ist die wirkliche Ausführung ler Rekonstruktion mit den derzeitigen mathematischen Hilfsmitteln ıoch nicht gelungen. Das Problem kommt auf die Aufgabe hinaus, inen Kegelschnitt im Raum zu finden, der 4 vorgegebene Paare sich chneidender Geraden trifft.

Zweitens: die Rekonstruktion des Gegenstandes aus Bildern mit innerer Orientierung. Hierbei genügen bereits zwei Bilder um die Gestalt des Gegenstandes und die Lage der beiden Standpunkte in bezug auf denselben bis auf den Maßstab und die Stellung im Raum zu finden. Immerhin ist auch in diesem Falle die Durchführung der Konstruktion bisher nur auf dem Wege des Tastens gelungen.*)

Drittens: die Rekonstruktion des Gegenstandes aus Bildern mit innerer und äußerer Orientierung. Auch hier sind wei Bilder zur Wiederherstellung des Gegenstandes notwendig, aber nan findet dann nicht bloß die Form des Gegenstandes und die Lage ler Standpunkte in bezug auf denselben, sondern auch die Stellung lesselben im Raum.**) Der Maßstab bleibt natürlich auch hier unestimmt. Von diesem dritten Problem soll im folgenden ausschließlich lie Rede sein.

Ist die äußere Orientierung vollständig gegeben, so ist die Rekontruktion sehr einfach auszuführen. Man bedient sich dazu am besten les Hilfsmittels der gnomonischen Projektion. Man wähle einen Punkt O md eine Horizontalebene e in der Entfernung „Eins" davon. Jede Richtung wird dann durch den Punkt dargestellt, in welchem die Parallele zu ihr durch den Punkt O die Horizontalebene e schneidet. Die Standpunkte der beiden Aufnahmen sollen mit O_1 und O_2 beeichnet werden. Die gnomonische Projektion der Standlinie $O_1 O_2$ sei lsdann der Punkt O_{12} in der Ebene e. Von den Standpunkten O_1 nd O_2 werden die Strahlen nach einem Punkt P des Gegenstandes, er auf beiden Bildern sichtbar ist, gezogen. Die gnomonischen Projekionen der Richtungen $O_1 P$ und $O_2 P$ seien P_1 und P_2. Da die drei Richtungen $O_1 P$, $O_2 P$ und $O_1 O_2$ in einer Ebene liegen, müssen die rei gnomonischen Bilder P_1, P_2, O_{12} in einer Geraden liegen. Sind ie beiden Aufnahmen vollständig orientiert, so kann man P_1 und P_2

*) S. Finsterwalder: Eine Grundaufgabe der Photogrammetrie und ihre nwendung auf Ballonaufnahmen. Abhdlgn. der K. Bayr. Akad. der Wiss. II Kl. 4. Bd. 2. Abt. S. 225. München 1903.

**) S. Finsterwalder: Eine neue Art die Photogrammetrie bei flüchtigen ufnahmen zu verwenden. Sitzber. der K. Bayr. Akad. der Wiss. II. Kl. 34. Bd. . 103. München 1904.

aus den Bildern ohne weiteres finden und in der Verbindungslinie $P_1 P_2$ erhält man einen geometrischen Ort für O_{12}. Die Bilder eines zweiten Objektpunktes Q liefern einen zweiten Ort für O_{12}, das somit als Schnitt zweier Geraden erhalten wird. $O\,O_{12}$ gibt dann die Richtung der Standlinie $O_1 O_2$; man kann sie noch von beliebiger Länge annehmen und aus ihr nach den gewöhnlichen Regeln der Photogrammetrie Grundriß und Höhe der einzelnen Objektpunkte P, Q usw. bestimmen. Aber auch ohne Zuhilfenahme einer weiteren Konstruktion läßt sich die Höhe z_p des Objektpunktes P aus der gnomonischen Projektion berechnen. Sind z_1, z_2, z_p die Höhen der Punkte O_1, O_2 und P, so besteht die einfache Beziehung:

$$z_p - z_1 = \frac{z_2 - z_1}{\overline{P_1 P_2}} \cdot \overline{O_{12} P_2}.$$

In ähnlicher Weise lassen sich auch die beiden anderen Koordinaten x_p und y_p berechnen, wenn man neben der gnomonischen Projektion auf die Horizontalebene e auch noch jene auf zwei Vertikalebenen parallel zur XZ- und YZ-Ebene zeichnet. Zu diesem Behufe genügt es die Figur in der Horizontalebene e durch zwei Linien im Abstand „Eins" vom Grundrisse O_0 des Punktes O parallel zu den Koordinatenebenen zu schneiden. Sind P_1', P_2' und O_{12}' die Schnittpunkte der Linie parallel zur YZ-Ebene mit $O_0 P_1$, $O_0 P_2$ und $O_0 O_{12}$, so wird:

$$x_p - x_1 = \frac{x_2 - x_1}{\overline{P_1' P_2'}} \, \overline{O_{12}' P_2'}$$

und ähnlich ist die Formel für y_p. Wird die Richtung der Standlinie parallel zu einer Koordinatenebene, z. B. horizontal, so geht die erstgenannte Formel über in:

$$z_p - z_1 = \frac{b}{\overline{P_1 P_2}},$$

wo b die Länge der Basis bedeutet.

Diese bequemen Konstruktionen gelten nur dann, wenn die äußere Orientierung des Apparates vollständig ist, wenn er also mit Libellen und Bussole ausgerüstet ist. Indessen kann man auch für den praktisch wichtigen Fall der unvollständigen äußeren Orientierung, wobei nur die Lage des Apparates gegen die Lotlinie bekannt ist, ein einfaches Verfahren der Rekonstruktion angeben. Es ist nämlich in diesem Falle die gnomonische Horizontalprojektion der Strahlen eines jeden der beiden Bilder leicht zu ermitteln, man kennt nur zunächst noch nicht den Winkel, unter welchem die beiden getrennten Projektionen um den gemeinsamen Mittelpunkt O_0 zu drehen sind, damit sie zusammen die gnomonische Horizontalprojektion des gesuchten Objektes darstellen. Dazu ist notwendig, daß die Verbindungslinien gleichbenannter Punkte der getrennten Projektionen, wie $P_1 P_2$, $Q_1 Q_2$ usf. durch einen gemeinsamen Punkt O_{12} gehen, der dann die gnomonische Projektion der Standlinie $O_1 O_2$ gibt. Es genügen bereits 3 Paare solcher Punkte, um O_{12} zu bestimmen, aber die Berechnung des Winkels, unter dem die beiden getrennten Projektionen gegeneinander gedreht werden müssen, damit sich die Verbindungslinien entsprechender Punkte in einem Punkte schneiden, führt auf eine allgemeine Gleichung 6. Grades.*) Ihre Auflösung ersetzt man im praktischen Falle durch ein einfaches graphisches Näherungsverfahren, indem man die eine, auf Pauspapier gezeichnete Projektion so auf die andere legt, daß die Mittelpunkte sich decken, und so lange dreht, bis die Bedingung erfüllt ist. Die Verbesserung des so erhaltenen Näherungswertes nach der Methode der kleinsten Quadrate auf Grund einer großen Zahl entsprechender Punkte, deren Verbindungslinien sich in einem Punkt schneiden müssen, läßt sich in ähnlicher Einfachheit durchführen wie beim sogenannten Pothenotschen Problem.

Nur ganz selten sind die wiederherzustellenden Objekte von der Art, daß sie von zwei Punkten aus genügend übersehen und daher aus zwei Aufnahmen rekonstruiert werden können. Fast immer braucht man eine größere Zahl von Standpunkten, die dann unter sich paarweise in Verbindung gesetzt werden müssen. Die gnomonische Projektion gibt ein einfaches Mittel an die Hand, die Verbindung so zu bewirken, daß keine schädliche Anhäufung der bei den einzelnen Konstruktionen unvermeidlichen Fehler entsteht. Betrachten wir zunächst drei Standpunkte O_1, O_2, O_3. Es gibt dann drei Standlinien, $O_1 O_2$, $O_2 O_3$, $O_3 O_1$, denen in der gnomonischen Projektion drei Punkte O_{12}, O_{23}, O_{31} entsprechen. Da die Standlinien in einer Ebene liegen, so liegen die drei Punkte auf einer Geraden. Einem Objektpunkte P gehören drei Strahlen $O_1 P$, $O_2 P$, $O_3 P$ zu, welche die Punkte P_1, P_2, P_3 als gnomonische Bilder haben. Letztere bilden ein Dreieck, dessen Seiten durch die Punkte O_{12}, O_{23}, O_{31} gehen. Einem zweiten Objektpunkte Q gehört ein Dreieck $Q_1 Q_2 Q_3$ zu, dessen Seiten durch die gleichen auf einer Geraden liegenden Punkte gehen und das infolgedessen perspektiv zu $P_1 P_2 P_3$ ist. Das perspektivische Zentrum beider Dreiecke ist das gnomonische Bild der Verbindungslinie PQ. Liegt noch ein dritter Objektpunkt R vor, so entstehen in ähnlicher Weise drei perspektivische Zentren, die wieder auf einer Geraden liegen, welche selbst das gnomonische Bild der Ebene PQR ist und deren Stellung im Raum bestimmt. Diese Beziehungen und eine Menge anderer, die aus der Übertragung stereometrischer Konstruktionen am Objekt auf die gnomonische

*) Vergl. das vorhergehende Zitat. S. 108.

Projektion folgen, gestatten zunächst alle auf Winkelverhältnisse des Objektes bezüglichen Fragen aus der gnomonischen Projektion zu beantworten, sie ermöglichen in einfachster Weise die Aufsuchung des Bildes eines Objektpunktes auf einer Aufnahme, wenn die Bilder desselben auf zwei andern Aufnahmen bekannt sind, und sie erleichtern wesentlich die Orientierung einer dritten Aufnahme gegenüber zwei andern, schon gegeneinander orientierten Aufnahmen. Von besonderer Bedeutung aber werden diese Beziehungen, wenn eine größere Anzahl n von Standpunkten vorliegt. Es gibt dann $\frac{n(n-1)}{2}$ Punkte O_{ik}, die $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ mal auf Geraden liegen müssen. Bei der aufeinanderfolgenden Konstruktion der Punkte O_{ik} hat man darauf zu sehen, daß diese Lagenbeziehung genau eingehalten wird, denn nur dann läßt sich aus den Punkten O_{ik} ein in sich widerspruchloses Netz von n Standpunkten O_i herstellen, das später als feste Grundlage für die Rekonstruktion des Objektes aus den einzelnen Bildern dienen kann.

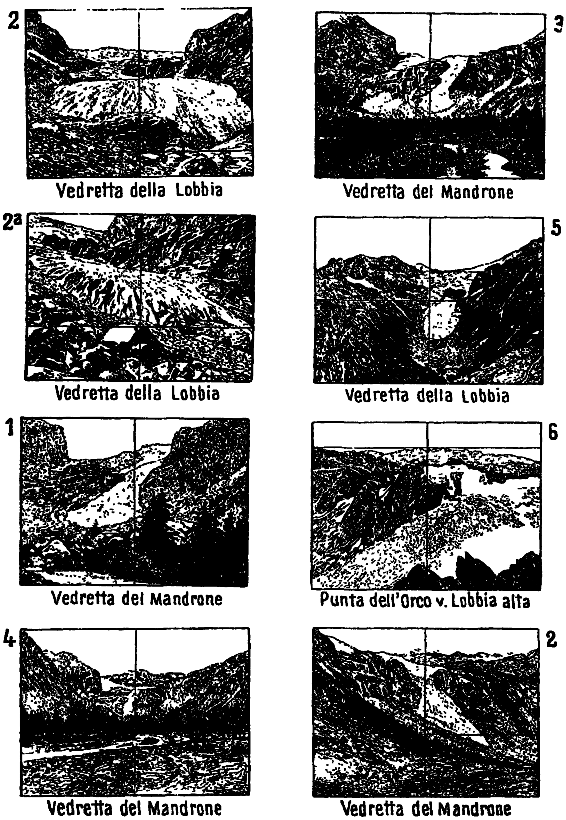


Fig. 1.

Als Beispiel für die auseinandergesetzte Methode diene eine Aufnahme des Talschlusses des Val di Genova im Quellgebiet der Sarca in der Adamellogruppe der südlichen Ostalpen, welche ich im Jahre 1895 behufs Feststellung der Lage der Gletscherzungen der Vedretta del Mandrone und der Vedretta della Lobbia ausgeführt habe. Anbei (siehe Fig. 1) sind 8 Aufnahmen von 6 bezw. 7 verschiedenen, durch Ziffern bezeichneten Standpunkten samt Hauptvertikale und Horizont in ein Fünftel der natürlichen Größe in Strichzeichnung wiedergegeben.*) Die

*) Die Aufnahmen geschahen mittels eines vom Verfasser angegebenen Photo-

ildweite in dieser Verkleinerung beträgt 30 mm. Der Standpunkt 2ª ist egenüber 2 durch direkte Messungen festgelegt, er scheidet also für iese Betrachtungen aus. Die übrigen 6 Standpunkte sind unter sich icht verbunden und mit Ausnahme der Sicht 2 bis 5 ist keine Sicht wischen ihnen möglich. Sämtliche Aufnahmen sind nur gegen die otlinie orientiert. Die ursprüngliche Absicht, sie in das vorhandene artenmaterial einzupassen, scheiterte an der Unzulänglichkeit desselben nd so blieben sie 8 Jahre unbenutzt liegen. Die Verarbeitung nach er neuen Methode geschah schließlich auf dem Wege, daß je zwei von en Aufnahmen, auf welchen gemeinsame Punkte erkennbar waren, ach der vorhin auseinandergesetzten Näherungsmethode gegeneinander rientiert wurden. Auf diese Weise entstanden in der gnomonischen rojektion Fig. 2 der Reihe nach die 10 Punkte O_{12}, O_{23}, O_{31}, O_{14}, O_{24}, O_{34}, $)_{25}$, O_{56}, O_{26} und O_{51}, welche fünfmal zu dreien auf Geraden liegen mußten.)ie fehlenden fünf Punkte O_{16}, O_{36}, O_{46}, O_{35} und O_{45}, welche Paaren on Bildern entsprachen, auf welchen gemeinsame Punkte nicht vorommen, ließen sich durch einfaches Linienziehen ergänzen. Hierauf urde ein vorläufiger Maßstab ermittelt, wobei der barometrisch geessene Höhenunterschied zwischen der höchsten und der tiefsten Station ca. 1650 m) als Grundlage diente. Daran schloß sich die Rekontruktion des Netzes der Standpunkte aus der gnomonischen Projektion m Maßstab 1 : 10 000 und die Bestimmung einiger Gipfelpunkte. Nunehr konnten die beiden trigonometrischen Punkte: Lobbia bassa 2959 m nd Corno Stablel 2868 m sicher identifiziert und nach ihrer bekannten ntfernung der Maßstab verbessert werden. Die gegenseitige Lage der tandpunkte und ihre Höhen sowie die endgültige Konstruktion der letscherzungen ist aus Fig. 3 zu ersehen.

Die auseinandergesetzte Methode der flüchtigen Aufnahme ist an as Vorhandensein größerer Höhenunterschiede zwischen Standpunkten nd Objektpunkten geknüpft. Nur in diesem Falle gibt sie zufriedentellende Ergebnisse. Ist das Objekt eben und liegen die Aufnahmeunkte in der gleichen Ebene, so hört die Möglichkeit der Rekonstruktion us zwei Aufnahmen auf. Die gnomonische Projektion verflüchtigt sich abei ins Unendliche. Der Umstand, daß Richtungen von geringer eigung durch sehr fern gelegene Punkte gnomonisch abgebildet werden, ird übrigens schon bei Konstruktionen lästig, die sonst noch ein ganz ufriedenstellendes Ergebnis liefern. Diese Schwierigkeit vermeidet man fast allen Fällen der Praxis, wenn man statt oder neben der gno-

---

eodolits, der bei Festhaltung der vertikalen Bildebene eine weitgehende Verchiebung des Horizontes in vertikaler Richtung zuläßt. Vergl. Zeitschrift für nstrumentenkunde 1895, S. 371.

monischen Projektion die polarreziproke Figur derselben in bezug auf einen Kreis vom Radius $\sqrt{-1}$ mit dem Mittelpunkt im Zentrum der

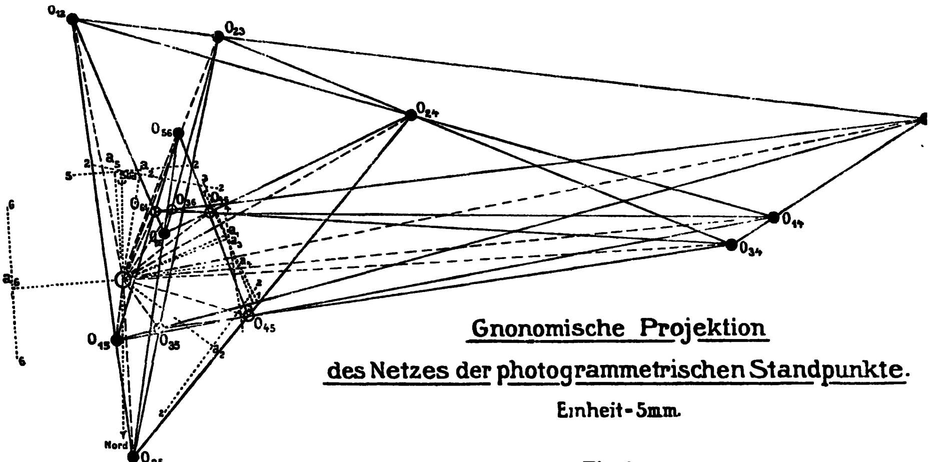


Fig. 2.

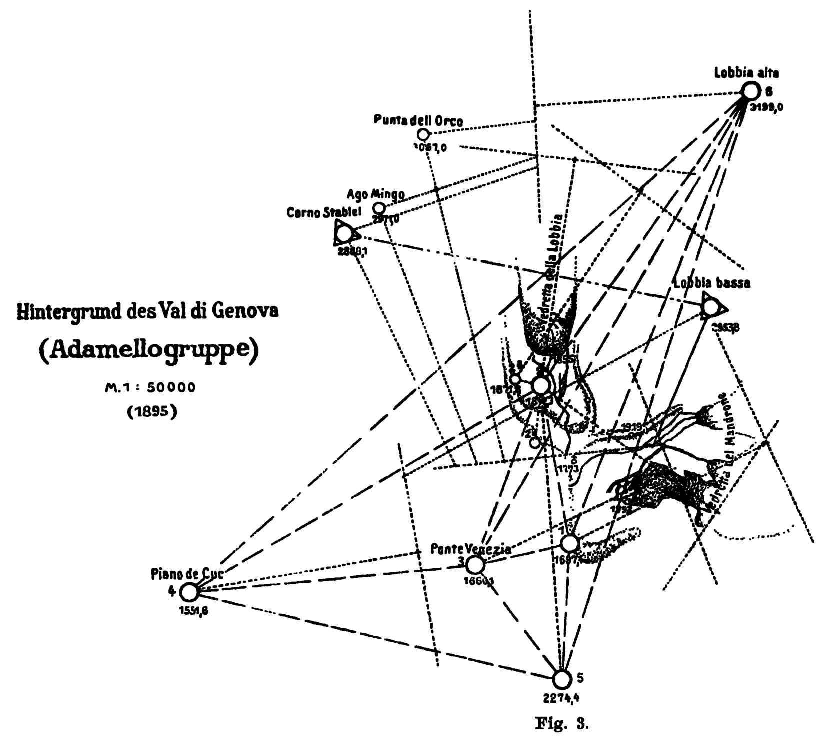


Fig. 3.

Projektion zeichnet. Wenn dann keine der Verbindungslinien zweier Standpunkte oder Verbindungsebenen dreier Standpunkte eine Neigung gegen die Horizontalebene größer als 45° hat, so findet die Figur innerhalb eines Kreises vom Radius Eins Platz. Man kann dann auch die graphische Näherungskonstruktion, welche bei unvollständiger Orientierung gegen die Lotlinie nötig wird, an der reziproken Figur ausführen und sie besteht nun darin, ein Dreieck um einen vorgegebenen Punkt in der Ebene eines anderen Dreiecks so lange zu drehen, bis die Schnittpunkte entsprechender Seiten auf einer Geraden liegen. In dieser Form ist die Konstruktion in der Tat noch bequemer auszuführen als in der ursprünglichen.

Bei den vorstehenden Erörterungen und insbesondere bei dem Beispiele wurde in erster Linie auf die Verhältnisse bei der allgemein üblichen Geländeaufnahme Rücksicht genommen. Neuerdings sind die Methoden, welche die Orientierung gegen die Lotlinie auch im Luftballon ermöglichen, praktisch soweit ausgebildet, daß die Neigung des Apparates im Moment der Aufnahme bis auf wenige Minuten ermittelt werden kann. Das gnomonische Bild der Visierlinien einer solchen Aufnahme ist nichts anderes als eine perspektivische Umzeichnung derselben für eine horizontale Bildebene. Die zur Zeit vorhandenen Perspektographen gestatten noch nicht, eine solche Umzeichnung mit der hier nötigen Genauigkeit vorzunehmen. Dagegen ist diese Möglichkeit auf optischem Wege vorhanden, und die optische Werkstätte von Zeiß in Jena ist gegenwärtig mit der Ausführung eines von Herrn v. Rohr und dem Verfasser gemeinsam konstruierten Linsensystems beschäftigt, welches solche Umzeichnungen bei einem Neigungswinkel der beiden Bildebenen zwischen 0° und 50° noch genau und scharf auszuführen imstande sein wird. Hierdurch wird der hier auseinandergesetzten Methode der flüchtigen Aufnahme ein neues Feld erschlossen.

Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung.

Von

L. Prandtl aus Hannover.

(Hierzu eine Figurentafel.)

In der klassischen Hydrodynamik wird vorwiegend die Bewegung der *reibungslosen* Flüssigkeit behandelt. Von der *reibenden Flüssigkeit* besitzt man die Differentialgleichung der Bewegung, deren Ansatz durch physikalische Beobachtungen wohl bestätigt ist. An Lösungen dieser Differentialgleichung hat man außer eindimensionalen Problemen, wie sie u. a. von Lord Rayleigh*) gegeben wurden, nur solche, bei denen die Trägheit der Flüssigkeit vernachlässigt ist, oder wenigstens keine Rolle spielt. Das zwei- und dreidimensionale Problem mit Berücksichtigung von Reibung *und* Trägheit harrt noch der Lösung. Der Grund hierfür liegt wohl in den unangenehmen Eigenschaften der Differentialgleichung. Diese lautet in Gibbsscher Vektorsymbolik**)

$$\varrho\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \circ \nabla \boldsymbol{v}\right) + \nabla (V + p) = k \nabla^2 \boldsymbol{v} \tag{1}$$

($\boldsymbol{v}$ Geschwindigkeit, ϱ Dichte, V Kräftefunktion, p Druck, k Reibungskonstante); dazu kommt noch die Kontinuitätsgleichung: für inkompressible Flüssigkeiten, die hier allein behandelt werden sollen, wird einfach

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0.$$

Der Differentialgleichung ist leicht zu entnehmen, daß bei genügend langsamen und auch langsam veränderten Bewegungen der Faktor von ϱ gegenüber den andern Gliedern beliebig klein wird, so daß hier mit genügender Annäherung der Einfluß der Trägheit vernachlässigt werden darf. Umgekehrt wird bei genügend rascher Be-

*) Proceedings Lond. Math. Soc. 11 S. 57 = Papers I S. 474 f.

**) $\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b}$ skalares Produkt, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ Vektorprodukt, ∇ Hamiltonscher Differentiator $\left(\nabla = \mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)$.

wegung das in $\boldsymbol{v}$ quadratische Glied $\boldsymbol{v} \circ \nabla \boldsymbol{v}$ (Anderung der Geschwindigkeit infolge Ortswechsels) groß genug, um die Reibungswirkung $k \nabla^2 \boldsymbol{v}$ als ganz nebensächlich erscheinen zu lassen. In den in der Technik in Frage kommenden Fällen von Flüssigkeitsbewegungen trifft letzteres fast immer zu. Es liegt also hier nahe, einfach die Gleichung der reibungslosen Flüssigkeit zu benutzen. Man weiß indessen, daß die bekannten Lösungen dieser Gleichung meist sehr schlecht mit der Erfahrung übereinstimmen; ich erinnere nur an die Dirichletsche Kugel, die sich nach der Theorie widerstandslos bewegen soll.

Ich habe mir nun die Aufgabe gestellt, systematisch die Bewegungsgesetze einer Flüssigkeit zu durchforschen, *deren Reibung als sehr klein angenommen wird.* Die Reibung soll so klein sein, daß sie überall vernachlässigt werden darf, wo nicht etwa große Geschwindigkeitsunterschiede auftreten, oder eine akkumulierende Wirkung der Reibung stattfindet. Dieser Plan hat sich als sehr fruchtbar erwiesen, indem man einerseits auf mathematische Formulierungen kommt, die eine Bewältigung der Probleme ermöglichen, andrerseits die Übereinstimmung mit der Beobachtung sehr befriedigend zu werden verspricht. Um eines gleich hier zu erwähnen: wenn man, z. B. bei der stationierenden Bewegung um eine Kugel herum, von der Bewegung mit Reibung zur Grenze der Reibungslosigkeit übergeht, so erhält man etwas ganz anderes als die Dirichlet-Bewegung. Die Dirichlet-Bewegung ist nur mehr ein Anfangszustand, der alsbald durch die Wirkung einer auch noch so kleinen Reibung gestört wird.

Ich gehe nun zu den Einzelfragen über. Die Kraft auf den Einheitswürfel, welche von der Reibung herrührt, ist

$$\boldsymbol{K} = k \nabla^2 \boldsymbol{v}; \tag{2}$$

bezeichnet man mit $\boldsymbol{w} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \boldsymbol{v}$ den Wirbel, so ist nach einer bekannten vektor-analytischen Umformung unter Berücksichtigung, daß $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$ ist: $\boldsymbol{K} = 2k \operatorname{rot} \boldsymbol{w}$. Hieraus ergibt sich ohne weiteres, daß für $\boldsymbol{w} = 0$ auch $\boldsymbol{K} = 0$ wird, d. h. daß auch bei beliebig starker Reibung die wirbelfreie Bewegung eine mögliche Bewegung darstellt; wenn sie trotzdem sich in gewissen Fällen nicht erhält, so liegt das daran, daß sich vom Rande her wirbelnde Flüssigkeit in die wirbelfreie hineinschiebt.

Bei einer beliebigen periodischen oder zyklischen Bewegung kann sich bei längerer Dauer die Wirkung der Reibung, auch wenn sie sehr klein ist, anhäufen.

Man muß daher für den Beharrungszustand verlangen, daß die Arbeit von $\boldsymbol{K}$, also das Linienintegral $\int \boldsymbol{K} \circ d\boldsymbol{s}$ längs jeder Stromlinie bei zyklischen Bewegungen für einen vollen Zyklus gleich Null wird; bei nach dem Orte periodischen Strömungen hat man

$$\int^{P} \boldsymbol{K} \circ d\boldsymbol{s} = (V_2 + p_2) - (V_1 + p_1).$$

Bei zweidimensionalen Bewegungen, bei denen eine Stromfunktion ψ*) existiert, läßt sich hieraus mit Hilfe der Helmholtzschen Wirbelgesetze eine allgemeine Aussage über die Verteilung des Wirbels herleiten. Bei der ebenen Bewegung erhält man**)

$$\frac{dw}{d\psi} = \frac{(V_2 + p_2) - (V_1 + p_1)}{2k\int^{P} \boldsymbol{v} \circ d\boldsymbol{s}};$$

bei geschlossenen Stromlinien wird dies gleich Null; also ergibt sich hier das einfache Resultat, daß innerhalb eines Gebietes von geschlossenen Stromlinien der Wirbel einen konstanten Wert annimmt.

Bei axialsymmetrischen Bewegungen mit Strömung in Meridianebenen wird für geschlossene Stromlinien der Wirbel proportional dem Radius: $w = cr$; dies ergibt eine Kraft $K = 4kc$ in Richtung der Achse.

Die bei weitem wichtigste Frage des Problems ist das Verhalten der Flüssigkeit an den Wänden der festen Körper. Den physikalischen Vorgängen in der Grenzschicht zwischen Flüssigkeit und festem Körper wird man in genügender Weise gerecht, wenn man annimmt, daß die Flüssigkeit an den Wänden hafte, daß also dort die Geschwindigkeit überall gleich Null bezw. gleich der Körpergeschwindigkeit sei. Ist nun die Reibung sehr klein und der Weg der Flüssigkeit längs der Wand nicht allzu lang, so wird schon in nächster Nähe der Wand die Geschwindigkeit ihren normalen Wert haben. In der schmalen Übergangsschicht ergeben dann die schroffen Geschwindigkeitsunterschiede trotz der kleinen Reibungskonstanten merkliche Wirkungen.

Man behandelt dieses Problem am besten, indem man in der allgemeinen Differentialgleichung planmäßige Vernachlässigungen vornimmt. Nimmt man k als klein von der zweiten Ordnung, so wird die Dicke der Übergangsschicht klein von der ersten Ordnung, ebenso die Normalkomponente der Geschwindigkeit. Die Querunterschiede des Druckes

---

*) Vgl. Encyklopädie der mathem. Wissensch. IV 14, 7.

**) Nach Helmholtz ist der Wirbel eines Teilchens dauernd dessen Länge in der Richtung der Wirbelachse proportional; also ist bei der stationären ebenen Bewegung auf jeder Stromlinie ($\psi = \text{const.}$) w konstant, also $w = f(\psi)$; hiermit wird

$$\int \boldsymbol{K} \circ d\boldsymbol{s} = 2k\int \operatorname{rot} \boldsymbol{w} \circ d\boldsymbol{s} = 2kf'(\psi)\int \operatorname{rot} \boldsymbol{\psi} \circ d\boldsymbol{s} = 2kf'(\psi)\int \boldsymbol{v} \circ d\boldsymbol{s}.$$

können vernachlässigt werden, ebenso eine etwaige Krümmung der Stromlinien. Die Druckverteilung wird unserer Übergangsschicht von der freien Flüssigkeit aufgeprägt.

Für das ebene Problem, das ich bisher allein behandelt habe, erhält man beim stationären Zustand (X-Richtung tangential, Y-Richtung normal, u und v die entsprechenden Geschwindigkeitskomponenten) die Differentialgleichung

$$\varrho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{dp}{dx}=k\frac{\partial^2 u}{\partial y^2};$$

dazu kommt noch

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

Ist, wie gewöhnlich, $\frac{dp}{dx}$ durchaus gegeben, ferner für den Anfangsquerschnitt der Verlauf von u, so läßt sich jede derartige Aufgabe numerisch bewältigen, indem man durch Quadraturen aus jedem u das zugehörige $\frac{\partial u}{\partial x}$ gewinnen kann; damit kann man mit Hilfe eines der bekannten Näherungsverfahren*) immer wieder um einen Schritt in der X-Richtung weiterkommen. Eine Schwierigkeit besteht dabei allerdings in verschiedenen am festen Rande auftretenden Singularitäten. Der einfachste Fall der hier behandelten Bewegungszustände ist der, daß das Wasser an einer ebenen dünnen Platte entlang strömt. Hier ist eine Reduktion der Variablen möglich; man kann $u=f\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)$ setzen. Durch numerische Auflösung der entstehenden Differentialgleichung kommt man auf eine Formel für den Widerstand

$$R=1{,}1\cdots b\sqrt{k\varrho l u_0^3}$$

(b Breite, l Länge der Platte, u_0 Geschwindigkeit des ungestörten Wassers gegenüber der Platte). Den Verlauf von u gibt Fig. 1.

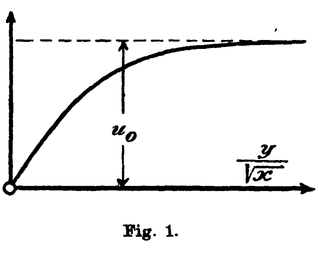


Fig. 1.

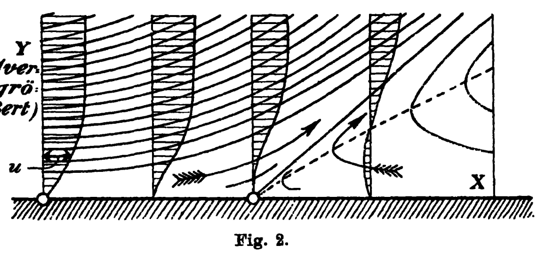


Fig. 2.

Das für die Anwendung wichtigste Ergebnis dieser Untersuchungen ist aber das, daß sich in bestimmten Fällen an einer durch die äußeren Bedingungen vollständig gegebenen Stelle *der Flüssigkeitsstrom von der Wand ablöst* (vgl. Fig. 2). Es schiebt sich also eine Flüssigkeits-

*) Vgl. z. B. Zeitschr. f. Math. u. Physik Bd. 46 S. 435 (Kutta).

schicht, die durch die Reibung an der Wand in Rotation versetzt ist, in die freie Flüssigkeit hinaus und spielt dort, eine völlige Umgestaltung der Bewegung bewirkend, dieselbe Rolle wie die Helmholtzschen Trennungsschichten. Bei einer Veränderung der Reibungskonstanten k ändert sich lediglich die Dicke der Wirbelschicht (sie ist der Größe $\sqrt{\frac{kl}{\varrho u}}$ proportional), alles übrige bleibt unverändert; man kann also, wenn man will, zur Grenze $k = 0$ übergehen und behält immer noch dieselbe Strömungsfigur.

Wie eine nähere Diskussion ergibt, ist die notwendige Bedingung

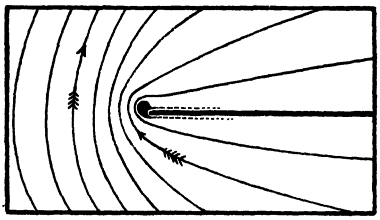


Fig. 3.

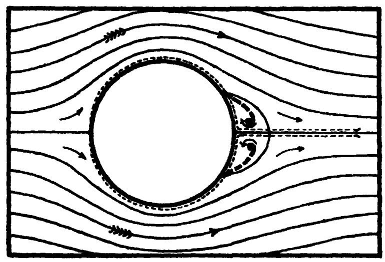


Fig. 5.

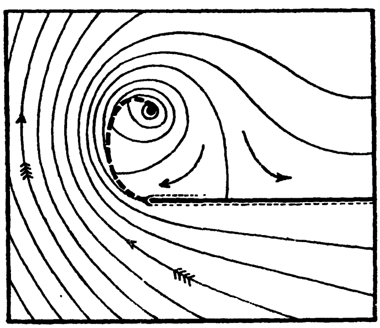


Fig. 4.

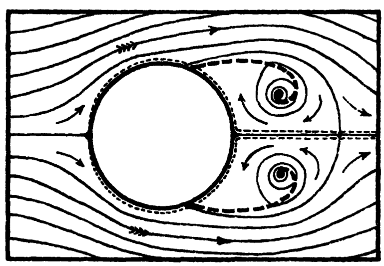


Fig. 6.

für das Ablösen des Strahles die, daß längs der Wand in der Richtung der Strömung eine Drucksteigerung vorhanden ist. Welche Größe diese Drucksteigerung in bestimmten Fällen haben muß, kann erst aus der noch vorzunehmenden numerischen Auswertung des Problems entnommen werden. Als einen plausiblen Grund für das Ablösen der Strömung kann man angeben, daß bei einer Drucksteigerung die freie Flüssigkeit ihre kinetische Energie zum Teil in potentielle umsetzt. Die Übergangsschichten haben aber einen großen Teil ihrer kinetischen Energie eingebüßt; sie besitzen nicht mehr genug, um in das Gebiet höheren Druckes einzudringen, und werden daher diesem seitlich ausweichen.

Nach dem Vorhergehenden zerfällt also die Behandlung eines bestimmten Strömungsvorganges in zwei miteinander in Wechselwirkung stehende Teile: einerseits hat man die *freie Flüssigkeit*, die als reibungslos nach den Helmholtzschen Wirbelgesetzen behandelt werden kann, andrerseits die Übergangsschichten an den festen Grenzen, deren Bewegung durch die freie Flüssigkeit geregelt wird, die aber ihrerseits durch die Aussendung von Wirbelschichten der freien Bewegung das charakteristische Gepräge geben.

Ich habe versucht, in ein paar Fällen den Vorgang durch Zeichnen der Stromlinien näher zu verfolgen; die Ergebnisse machen indes auf quantitative Richtigkeit keinen Anspruch. Soweit die Bewegung wirbelfrei ist, benutzt man mit Vorteil beim Zeichnen den Umstand, daß die

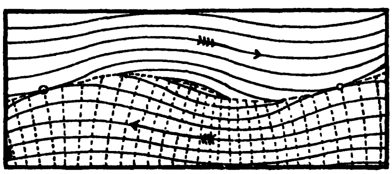


Fig. 7.

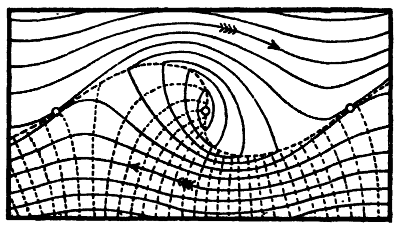


Fig. 8.

Stromlinien mit den Linien konstanten Geschwindigkeitspotentials ein quadratisches Kurvennetz bilden.

Fig. 3 und 4 zeigen den Beginn der Bewegung um eine in die Strömung hineinragende Wand in zwei Stadien. Die wirbelfreie Anfangsbewegung wird durch eine von der Kante des Hindernisses ausgehende und sich spiralig aufwickelnde Trennungsschicht (gestrichelt) rasch umgestaltet; der Wirbel rückt immer weiter ab und läßt hinter der zum Schluß stationären Trennungsschicht ruhendes Wasser zurück.

Wie sich der analoge Vorgang bei einem Kreiszylinder abspielt, ist aus Fig. 5 und 6 zu ersehen; die von der Reibung in Rotation versetzten Flüssigkeitsschichten sind wieder durch Strichelung kenntlich gemacht. Die Trennungsflächen erstrecken sich auch hier im Beharrungszustande ins Unendliche. All diese Trennungsflächen sind bekanntlich labil; ist eine kleine sinusförmige Störung vorhanden, so entstehen Bewegungen, wie sie in Fig. 7 und 8 dargestellt sind. Man sieht, wie sich durch das Ineinandergreifen der Flüssigkeitsströme deutlich gesonderte Wirbel ausbilden Die Wirbelschicht wird im Innern dieser Wirbel aufgerollt, wie in Fig. 9 angedeutet ist. Die Linien dieser Figur sind keine Stromlinien, sondern solche, wie sie etwa durch Beigabe von gefärbter Flüssigkeit erhalten würden.

Ich will nun noch kurz von Versuchen berichten, die ich zum Vergleich mit der Theorie unternommen habe. Der Versuchsapparat (in Fig. 10 in Aufriß und Grundriß dargestellt) besteht aus einer $1^1/_2$ m langen Wanne mit einem Zwischenboden. Das Wasser wird durch ein Schaufelrad in Umlauf versetzt und tritt, durch einen Leitapparat *a* und vier Siebe *b* geordnet und beruhigt, ziemlich wirbelfrei in den Oberlauf ein; bei *c* wird das zu untersuchende Objekt eingesetzt. Im Wasser ist ein aus feinen glänzenden Blättchen bestehendes Mineral (Eisenglimmer) suspendiert; dadurch treten alle einigermaßen deformierten Stellen des Wassers, also besonders alle Wirbel durch einen eigentümlichen Glanz hervor, der durch die Orientierung der dort befindlichen Blättchen hervorgerufen wird.

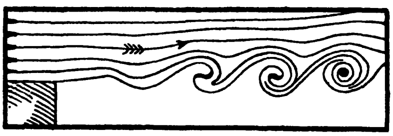


Fig. 9.

Die auf der Tafel zusammengestellten Photogramme sind auf diese Weise erhalten. Bei allen geht die Strömung von links nach rechts. Nr. 1—4 behandelt die Bewegung an einer in die Strömung hineinragenden Wand. Man erkennt die Trennungsfläche, die von der Kante ausgeht; sie ist in 1 noch sehr klein, in 2 bereits mit starken Störungen überdeckt, in 3 reicht der Wirbel über das ganze Bild, 4 zeigt den „Beharrungszustand"; man bemerkt auch oberhalb der Wand eine Störung; da in der Ecke infolge der Stauung des Wasserstroms ein höherer Druck herrscht, löst sich (vgl. S. 488) mit der Zeit auch hier der Flüssigkeitsstrom von der Wand ab. Die verschiedenen im „wirbelfreien" Teil der Strömung sichtbaren Streifen (besonders in Nr. 1 und 2) rühren davon her, daß beim Beginn der Bewegung die Flüssigkeit nicht völlig ruhig war. Nr. 5 und 6 gibt die Strömung um ein kreisförmig gebogenes Hindernis, oder, wenn man will, durch einen stetig verengten und wieder erweiterten Kanal. Nr. 5 zeigt ein Stadium kurz nach Beginn der Bewegung. Die obere Trennungsfläche ist zu einer Spirale aufgewunden, die untere langgestreckt und in sehr regel-

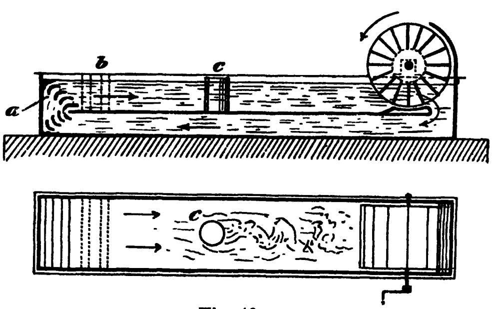


Fig. 10.

mäßige Wirbel zerfallen. Auf der konvexen Seite nahe am rechten Ende bemerkt man den Beginn einer sich ablösenden Strömung; Nr. 6 zeigt den Beharrungszustand, bei dem sich die Strömung ungefähr in engstem Querschnitt ablöst.

Nr. 7—10 zeigt die Strömung um ein kreiszylindrisches Hindernis (einen Pfahl). Nr. 7 zeigt den Beginn der Ablösung, 8 und 9 weitere Stadien; zwischen den beiden Wirbeln ist ein Strich sichtbar, dieser besteht aus Wasser, das vor Beginn der Ablösung der Übergangsschicht angehört hatte. Nr. 10 zeigt den Beharrungszustand. Der Schweif von wirbelndem Wasser hinter dem Zylinder pendelt hin und her, daher die unsymmetrische Augenblicksgestalt. Der Zylinder enthält einen längs einer Erzeugenden verlaufenden Spalt; stellt man diesen so, wie in Nr. 11 und 12 und saugt mit einem Schlauch Wasser aus dem Zylinderinnern ab, so kann man die Übergangsschicht einer Seite abfangen. Wenn sie fehlt, muß auch ihre Wirkung, die Ablösung, ausbleiben. In Nr. 11, das zeitlich Nr. 9 entspricht, sieht man nur einen Wirbel und den Strich. In Nr. 12 (Beharrungszustand) schließt sich, obwohl, wie man sieht, nur ein verschwindender Teil des Wassers ins Innere des Zylinders tritt, die Strömung bis zum Schlitz eng an die Wand des Zylinders an; dafür hat sich aber jetzt an der ebenen Außenwand der Wanne eine Trennungsfläche gebildet (eine erste Andeutung dieser Erscheinung ist bereits in 11 zu sehen). Da in der sich erweiternden Durchflußöffnung die Geschwindigkeit abnehmen muß und daher der Druck steigt*), sind die Bedingungen für ein Ablösen der Strömung von der Wand gegeben, so daß auch diese auffallende Erscheinung in der vorgetragenen Theorie ihre Begründung erhält.

---

*) Es ist $\frac{1}{2}\varrho v^2 + V + p = \text{const.}$ auf jeder Stromlinie.

Ein Gelenkmechanismus zur Teilung des Winkels.

Von

A. Kempe aus Rotterdam.

Der vorliegende Gelenkmechanismus bezweckt die Teilung des Winkels in beliebig viele gleiche Teile, nämlich so, daß, wenn mit ihm gewisse Kurven gezogen sind, es nur einer Transversale bedarf, um den Winkel in alle möglichen Teile geteilt zu haben (Fig. 1).

Das Hauptsächliche an diesem Instrumente sind die zwei oder drei

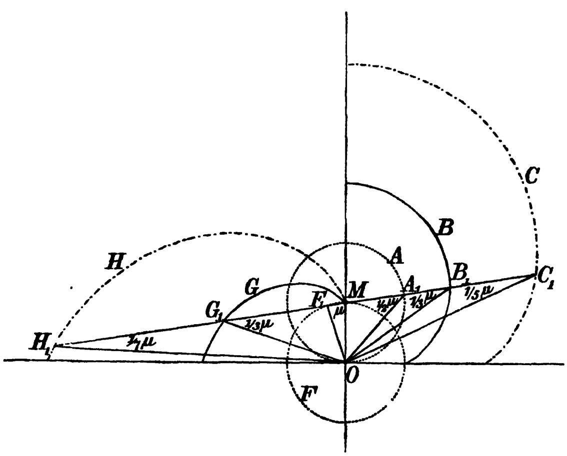


Fig. 1.

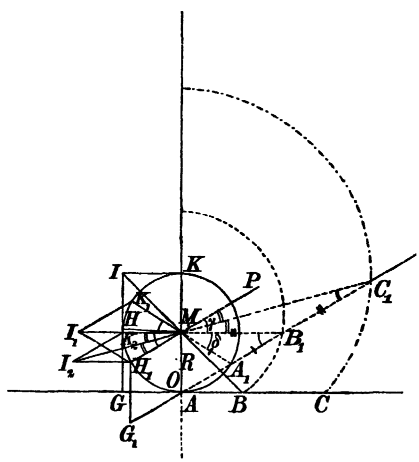


Fig. 2.

Rauten (Fig. 2), die derartig gestellt sind, daß die rechte Seite der zweiten mit der Diagonale der ersten zusammenfällt, die rechte Seite der dritten mit der Diagonale der zweiten usw.

Der Motor des Ganzen ist eine untere Raute $H_1 M A G_1$, deren Seite AM in M und O zwei feste Punkte hat. Alles andere kann sich gelenkmäßig bewegen.

Wenn nun der Mechanismus in eine beliebige Stellung gebracht wird, so ist ersichtlich, daß alle verlängerten Diagonalen der Rauten die verlängerte untere Seite der motorischen Raute in Punkten A_1, B_1, C_1 usw. (Fig. 2) so schneiden, daß eine Reihe gleichschenkliger Dreiecke entsteht, die für unsere zu zeichnenden Kurven von der höchsten Wichtigkeit ist; denn wenn der Schnittpunkt der verlängerten $K_1 M$ und $G_1 O$ — Punkt A_1 also — einen Kreis beschreibt, beschreibt gleichzeitig der Schnittpunkt B_1 (Schnittpunkt von $I_1 M$ und $G_1 O B_1$) die Kurve B_1, der Schnittpunkt C_1 (Schnittpunkt von $I_2 M$ und $G_1 O C_1$) die Kurve C_1 usw., welche Kurven einen willkürlichen Winkel μ respektive in 3, 5, 9 usw. $2^n + 1$ gleiche Teile teilen. Es ist dies in Fig. 3 für $5 = 2^2 + 1$ dargestellt; Fig. 4 stellt die Kurven von Fig. 2 im ganzen Umriß dar. Ich habe die Kreisbewegung von A_1 (Fig. 2) erleichtert mittels zweier Zahnräder, mit $K_1 M$ und $G_1 A$ fest verbunden, deren Umfänge zueinander

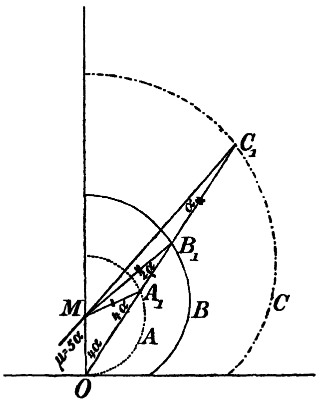


Fig. 3.

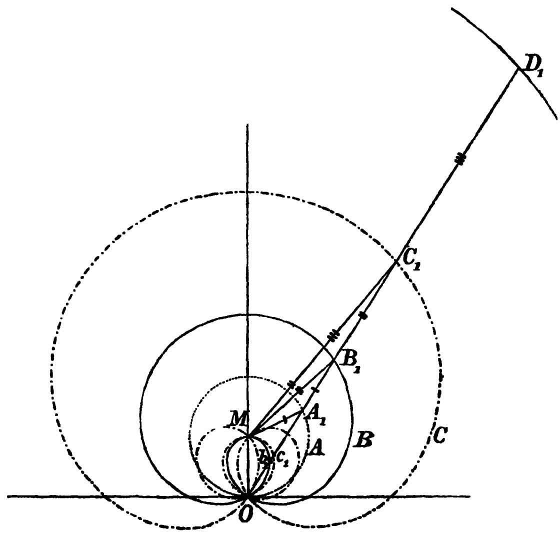


Fig. 4.

sich verhalten wie 1 : 2 und die respektive in M und O ihre Mittelpunkte haben. Immer doch ist $\angle KMA_1 = 2 \angle MAA_1$. Werden also diese Zahnräder in Bewegung gesetzt, mittels eines dritten Zahnrades, zwischen beiden angebracht, so geht A_1 den Kreisumfang entlang, B_1 beschreibt die Kurve B_1 und C_1 die Kurve C_1. Es bewegt sich also der ganze Mechanismus und der Kreis, die Kurve B_1 (3-Teiler), die Kurve C_1 (5-Teiler) etc. entstehen gleichzeitig. Ein Schreibstiftchen, richtig angebracht, zieht ihre Spuren kontinuierlich.

Ich habe sie Schleifenkurven genannt, der eigentümlichen Schleifen wegen, die jeder in verschiedener, aber ganz regelmäßiger Zahl angehören.

Die Kurve B_1 ist der Limaçon von Pascal, das ganze System also eine Erweiterung der Lehre dieser Kurve, und wie dieser den Winkel in 3 gleiche Teile teilt, so teilen die Kurven C_1 usw. diesen in $5, 9, 17, \cdots 2^n + 1$ gleiche Teile (Fig. 4 und Fig. 1 rechte Hälfte).

Wenn nun dieser Gelenkmechanismus 180^0 um OMK gedreht wird (Fig. 5), so bekommt man eine Reihe Kurven L_1, N_1 usw., die auf ähnliche Weise entstehen wie die vorhergehenden und durch die aufeinanderfolgenden, gleichschenkligen Dreiecke denselben Winkel μ in $3, 7, 15, \cdots 2^n - 1$ gleiche Teile teilen, wie es Fig. 6 und Fig. 1 (linke Hälfte) in den Kurven G, H usw. zeigen: es ist in Fig. 6 der Fall veranschaulicht, wo μ in $7\,(2^3 - 1)$ gleiche Teile geteilt ist. Auch hier gilt: während der Schnittpunkt F_1 (Fig. 5) der verlängerten $K_1 M$ und $G_1 O$ den Kreis OM beschreibt, beschreibt der Schnittpunkt L_1 der verlängerten Diagonale $I_1 M$ und $G_1 O$ eine Kurve L_1 als geometrischen

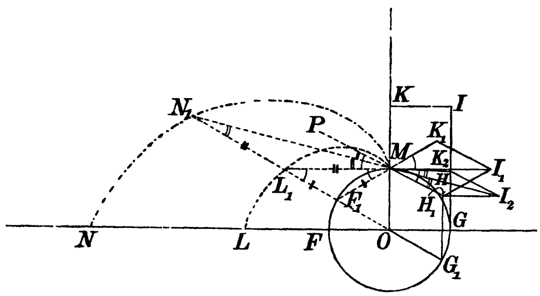


Fig. 5.

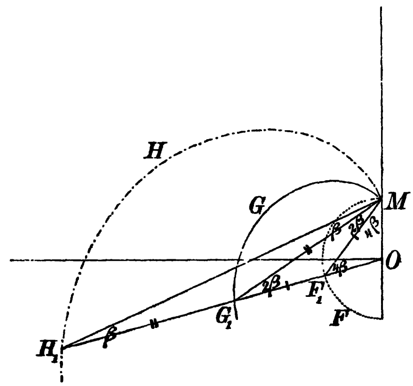


Fig. 6.

Ort aller L_1 so, daß $F_1 M = F_1 L_1$ ist, und gleichzeitig beschreibt N_1 eine solche so, daß $L_1 M = L_1 N_1$ ist usw. Nur ist hier zu bemerken, daß der erzeugende Kreis, dem alle nachfolgenden Kurven ihre Entstehung verdanken, nicht seinen Mittelpunkt in M, sondern in O hat, und die Zahnräder zur Kreisbewegung, wovon oben die Rede war, umgelegt werden müssen. Die $2^n - 1$ Teiler in ihrem ganzen Umriß gezogen werden in Fig. 7 dargestellt: es ist die Kurve $G_1 g_1$ mit zwei Schleifen der 3-Teiler, die Kurve $H_1 h_1$ mit sechs Schleifen, der 7-Teiler.

Alles zusammen genommen haben wir also: der Gelenkmechanismus links gelegt beschreibt die $2^n + 1$ Teiler; derselbe rechts gelegt beschreibt die $2^n - 1$ Teiler.

In Fig. 1 sind alle diese Kurven gezogen und es erhellt augenblicklich, daß man nur $\angle\,\mu$ in M zu legen braucht und seinen Schenkel MH_1 durch M hindurch zu verlängern, um mittels der Transversale $H_1 C_1$ die beliebige Teilung in gleiche Teile vollbracht zu haben. Denn es ist infolge Fermats Theorem die Primzahl p Teiler von $2^{p-1}-1$ $=\left(2^{\frac{p-1}{2}}-1\right)\left(2^{\frac{p-1}{2}}+1\right)=(2^n-1)(2^n+1)$. Es muß also p Teiler sein, entweder von 2^n-1 oder von 2^n+1, und es sind eben unsere Kurven, die den $\frac{1}{2^n+1}$ oder den $\frac{1}{2^n-1}$ten Teil eines Winkels finden lassen.

Es ist hiermit das Problem der allgemeinen Winkelteilung völlig gelöst.

Ich bemerke nebenbei, daß, wie Fig. 1 zeigt:

1°. die Kurven nicht in ihrem ganzen Umriß gezogen zu sein brauchen, da ein Quadrant zur Teilung vollkommen hin-

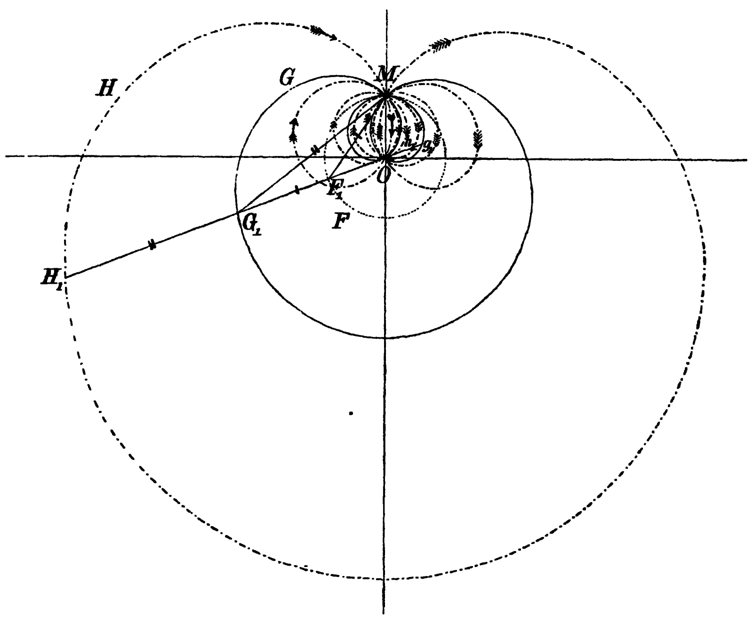


Fig. 7.

reicht, weil man immer aus Winkeln $> 90^0$ durch Halbierung Winkel $< 90^0$ herleiten kann; es ist dies in technischer Hinsicht ein großer Vorteil;

2°. daß, wenn sie gezogen sind, die Kurven lithographisch zu vervielfältigen sind und ein für allemal eine Teilungstafel darbieten.

Es ist noch zu bemerken, daß der vorliegende Gelenkmechanismus sehr zu vereinfachen ist, indem man nur zwei Rauten *IKMH* und *HMOG* (Fig. 2 und Fig. 5) anwendet. Sie brauchen nur so benutzt zu werden, daß — *MO* (Fig. 2) ist wieder eine feste Linie — während der oben genannte Schnittpunkt A_1 den Kreisumfang beschreibt, der Schnittpunkt B_1 den 3-Teiler beschreibt; nachher: wenn man $K_1 M$ in den Stand $I_1 M$ verlegt, so wird $I_1 M$ den Stand $I_2 M$ annehmen und folglich der Punkt A_1 in B_1 und B_1 in C_1 übergehen; wird also $A_1 (B_1)$ den 3-Teiler beschreiben, so beschreibt $B_1 (C_1)$ den 5-Teiler usw., es wird also leicht jede folgende Kurve aus der vorhergehenden konstruiert.

Das nämliche ist zu sagen von den $2^n - 1$ Teilern (Fig. 5), wo wieder der vereinfachte Mechanismus 180^0 um OMK gedreht werden muß.

Dieser Mechanismus ist zwar bedeutend einfacher als der vorhergehende, allein den Umriß einer Kurve von einem Schnittpunkte zweier Geraden genau beschreiben zu lassen hat seine Schwierigkeiten in technischer Hinsicht. Indessen: auch diesen Schwierigkeiten ist mit Zahnrädern, deren Umfänge sich zueinander verhalten wie $2:3$; $4:5$; $8:9$ etc., abzuhelfen, nur muß dann die Vorrichtung so sein, daß die aufeinander wirkenden Räder leicht verwechselt werden können, und auch dies wird nicht unmöglich sein.

Das weitere über die stetige Konstruktion dieser Kurven und deren Theorie ist zu finden in: Zeitschrift für Mathematik und Physik 49. Bd., 3. und 4 Heft 1903. Weiter in den Mémoires de la Société royale des Sciences de Liége, 2. série, tome XX, 1898, und in dem klassischen Werke: Über spezielle algebr. und transc. Kurven von Gino Loria (Deutsch übersetzt von Schütte, Leipzig, B. G. Teubner, 1902).

(Nach dem Vortrage wurden beigegebene Figuren mittels eines Zeißschen trefflichen Reflektors auf einen Schirm projiziert.)

V. Sektion.

Einführung in die Geschichte der Mathematik; Hinweis auf neue Resultate.

Von

M. Cantor aus Heidelberg.

Der vorbereitende Ausschuß hat für die Eröffnungssitzung der einzelnen Sektionen außer den mit der Konstituierung verbundenen Geschäften einen Vortrag eines der Einführenden vorgesehen, und mir wurde in unserer Sektion durch Vereinbarung der Einführenden untereinander die Ehre zugeteilt, diesen Vortrag vor Ihnen zu halten. Wenn ich die Absicht des Ausschusses recht verstehe, wollte er durch seinen Beschluß nicht bloß einen Vortrag für die Eröffnungssitzung sichern, sondern auch eine gewisse Direktive für den Inhalt desselben geben, der eine Art von Einleitung in das Gebiet geben möge, das der Sektion zugewiesen ist. In diesem Sinne fasse ich wenigstens meine Aufgabe auf.

Man spricht nicht selten vom organischen Werden, vom organischen Wachstum einer Wissenschaft. In der Tat gleicht die Mathematik einem stattlichen Baume, der nach oben höher und höher strebt, gleichzeitig aber auch seine Wurzeln tiefer und tiefer hinabtreibt, um immer gesichertere Grundlagen zu gewinnen. Auch die Disziplin, welche ich in diesem Augenblick besonders zu beachten habe, zeigt, wenn auch nicht ganz in dem soeben angegebenen Sinne, ein doppeltes Wachstum. Nach vorwärts und nach rückwärts hat die Geschichte der Mathematik an Ausdehnung gewonnen.

Nach vorwärts sind Jahrzehnte, welche für die Ältesten unter uns Gegenwart waren, zur Vergangenheit geworden und bei der ungewöhnlich raschen Entwicklung des mathematischen Denkens seit einem halben Jahrhundert so sehr zur Vergangenheit, daß ihre Ergebnisse der Geschichte anheimgefallen sind. Kopfschüttelnd frägt der moderne

Mathematiker, wie es mit jener Zeit beschaffen war, in welcher Funktionenlehre und projektive Geometrie, Invarianten und Gruppentheorie, um nur einige wenige moderne Sammelnamen zu erwähnen, noch nicht vorhanden waren. Kaum begreiflich ist ihm vielleicht, wie Euler, wie Lagrange, wie Gauß, Geisteshelden die auch ihm mit dem Lorbeer der Unsterblichkeit geschmückt erscheinen, ohne jene Hilfsmittel auskommen konnten. Als wunderbare Mär erscheint ihnen, daß Abel 1829, Galois 1832, Cauchy 1842, Riemann gar erst 1866 vom Leben Abschied nahmen. Sie alle bilden für ihn bereits geschichtliche Merkpunkte. Aber nicht minder nach rückwärts hat in dem angedeuteten Zeitraume die Geschichte der Mathematik an Ausdehnung gewonnen. Das Grabscheit des Altertumsforschers hat auch für den Mathematiker Wissenswertes zutage gefördert, die Lehrer der Sprachkunde haben Texte verständlich und zum Gemeingut gemacht, welche in dem Zauberschlafe von Jahrtausenden geruht hatten. Ihnen allen sind wir zum größten Danke verpflichtet.

Vielleicht haben wir auch umgekehrt einigen Anspruch auf Dank uns erworben, wo der Mathematiker dem Sprachkundigen Vorspanndienste zu leisten imstande war und ihm half ans Licht ziehen, was jenem mehr oder weniger dunkel bleiben mußte, weil er mit dem Sprachinhalte weniger vertraut als mit der Sprache war. Nicht als ob Gleichgewicht zwischen Leistung und Gegenleistung stattfände. Es mag ja sein, daß der Orientalist bei Bestimmung des Alters der im Pentateuch zusammengeschweißten Einzelbestandteile von der Bemerkung Gebrauch machen kann, das Vorkommen der Zahlen 6, 60 und ihrer Vielfachen bezeuge die Entstehung des betreffenden Verses in oder nach dem Babylonischen Exil. Es mag ebenso dem lateinischen Lexikographen erwünscht sein, darauf aufmerksam gemacht zu werden, das Wort sexcenties in der Bedeutung von außerordentlich oft könne nicht früher vorkommen, als seit der Einführung chaldäischer Kulte in Rom. Die griechische Literaturgeschichte hat möglicherweise als unumstößliche Wahrheit festzuhalten, die Lebenszeit Herons von Alexandria müsse so bestimmt werden, daß vielleicht Vitruvius unter Augustus, jedenfalls aber römische Feldmesser des Kaisers Trajan seine Metrica benutzen konnten. Vielleicht ließen bei aufmerksamem Nachsuchen sich noch einige weitere Beispiele auffinden. Von einem solchen werde ich sogleich reden. Aber im allgemeinen liegt die Sache so, daß der Geschichtschreiber der Mathematik sich mit den Jahres- oder Jahrhundertzahlen abfinden muß, welche der Literarhistoriker ihm liefert. Für die Richtigkeit jener Zahlen ist der letztere verantwortlich, und der Mathematiker ist unter Umständen genötigt, diesen oder jenen Schriftsteller

›inem andern Kapitel seiner Darstellung einzuverleiben, als es vorher ler Fall war, wenn die Meinung der Literarhistoriker über sein Zeitılter sich änderte. Ich erinnere an den zu Serenos von Antinoeia gevordenen Serenos von Antissa, der dadurch um einige Jahrhunderte ıerabgedrückt erscheint und vermutlich der Zeit zwischen Pappos und Theon, also dem IV. nachchristlichen Jahrhunderte, angehört. Der gevaltigste Umschwung hat sich in dieser Beziehung in der Geschichte ler indischen Geometrie vollzogen. Wenn die die ältesten geometrischen Vorschriften enthaltenden Çulvasutras, wie man gegenwärtig allgemein ınnimmt, im IV. oder V. vorchristlichen Jahrhunderte niedergeschrieben ind, inhaltlich aber noch weiter, etwa bis ins X. Jahrhundert, zurückgehen, so ist an eine Anregung durch alexandrinische Schriftsteller, lie man früher annahm, selbstredend in keiner Weise zu denken. Aber gerade hier ist vielleicht der Mathematiker imstande, wiederum befruchtend auf die philologisch-historische Forschung einzuwirken und hr seinerseits neue Fragen zur Beantwortung vorzulegen, und das ist las vor wenigen Augenblicken durch mich angekündigte weitere Beispiel. Es ist nicht tunlich hier auf diesen weitführenden Gegenstand einugehen, aber ich darf mich wohl auf meinen ihn behandelnden Aufsatz n dem Archiv der Mathematik und Physik beziehen.

Ich beabsichtige ja ohnehin nicht, Sie heute einzuladen in Gemeinchaft mit mir irgend einem besonderen geschichtlichen Gegenstande hre Aufmerksamkeit zuzuwenden. Ich will vielmehr nur feststellen, vas Sie alle, die Sie zur Konstituierung der V. Sektion zusammengetreten sind, ebenso gut wissen wie ich, daß die Geschichte der Mathematik unter den mathematischen Teildisziplinen einen Platz einimmt, daß sie ihn aber auch verdient. Universitas litterarum, Universalität der Wissenschaft kennzeichnet die Hochschule, welche eshalb mit geringer Wortänderung den Namen der Universität angenommen hat. Ausblicke nach anderen Wissenschaften öffnen sich ller Orten. Aufgaben werden von der einen Wissenschaft gestellt, velche die andere zu lösen hat. Das sind die Brücken, die von einem ngeren Gebiete nach zahlreichen Grenzgebieten hinüberführen. Auch er Geschichte der Mathematik fehlt es nicht an Beziehungen, nicht n Anwendung. Das Bewußtsein ihrer Berechtigung, die vor einem Menschenalter da und dort noch in Frage gestellt wurde, ist heute ein llverbreitetes, und ihm ist die Tatsache entsprungen, daß in Zürich, ı Paris, in Heidelberg bei der Zusammenkunft der allen Ländern entstammenden Mathematiker eine eigene Kongreßabteilung den geschichtlich mathematischen Bestrebungen zur Verfügung gestellt worden ist. Das Bewußtsein der Berechtigung der Geschichte der Mathematik als eines besonderen Wissensgebietes hat aber auch sonstige Folgen gehabt, auf die mir ein kurzes Eingehen geboten scheint, weil dadurch voraussichtlich Erörterungen hervorgerufen werden, aus welchen wir zu lernen Gelegenheit haben dürften. Ich will nicht betonen, daß an einer ganzen Reihe von Universitäten Vorlesungen über Geschichte der Mathematik in mehr oder weniger häufiger Wiederkehr gehalten werden. Worüber werden keine Vorlesungen gehalten, oder wenigstens angekündigt! Aber eine deutsche Hochschule ist darüber hinausgegangen. Sie wissen, daß ich München meine, wo Kollege von Braunmühl ein historisch-mathematisches Seminar gegründet hat. Es kann uns nur lehrreich sein, wenn er uns über die Einrichtung dieser seiner Gründung und über die Erfolge, die er damit erzielt hat, Auskunft erteilen will.

Ein Zweites, was ich andeuten möchte, ist das Vorhandensein besonderer regelmäßig erscheinender Zeitschriften für Geschichte der Mathematik. Die älteste derartige Zeitschrift, das Bulletino Boncompagni, hat zwar mit dem Jahrgange 1887 zu erscheinen aufgehört; die historisch-literarische Abteilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik ist Ende 1900 eingegangen. Aber noch besteht das italienische Bolletino di bibliografia e storia delle scienze mathematiche sowie die mehr international gehaltene Bibliotheca mathematica. Es hieße Eulen nach Athen tragen, hielte ich es für notwendig von diesen beiden Zeitschriften weiteres zu berichten, deren Wert allen Mitgliedern unserer Sektion genügend bekannt ist. Vielen von uns ist auch vor etwa einem halben Jahre ein Rundschreiben zugegangen, in welchem von einem neuen Unternehmen die Rede war, und darüber ein paar Worte zu sagen ist vielleicht nicht überflüssig. Es handelt sich um die Gründung einer wissenschaftlichen Gesellschaft für Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik mit ziemlich weitgesteckten Zielen, zu deren Erreichung unter anderem auch eine illustrierte Monatschrift als Mittel in Aussicht genommen ist. Der Unterzeichner jenes Rundschreibens, Herr Ingenieur Feldhaus, befindet sich unter uns. Ich darf annehmen, es sei ihm willkommen uns über seinen Plan kurz berichten zu können, der über die Pflege der Geschichte der Mathematik wesentlich hinausgeht.

Noch viel weiter geht freilich ein anderer Gedanke, den uns niemand besser zu entwickeln vermag, als dessen gegenwärtiger Träger, mein verehrter Freund Paul Tannery. Sie wissen ja, daß es in Frankreich einen eigenen Lehrstuhl für die Geschichte der exakten Wissenschaften gibt. Sie wissen ferner, daß dieser Lehrstuhl neu zu besetzen war, und daß unter den beiden Wettbewerbern, welche für lenselben in Aussicht genommen waren, nicht der Mathematiker, sondern ler Chemiker den Sieg davon trug. Ich habe, und wir alle haben das Recht den gegenwärtigen Inhaber des Lehrstuhles nicht zu kennen, lessen Arbeitsgebiet dem unsrigen viel zu fern liegt. Herrn Tannery md seine überaus zahlreichen Verdienste kennen wir um so besser, md ich bin überzeugt im Sinne aller Anwesenden zu sprechen, wenn ch sage, wir würden es verstanden und aufs freudigste begrüßt haben, väre Herr Tannery ernannt worden. Was ich wenigstens aber nicht verstehe, ist die Tatsache, daß um einen Lehrstuhl ein Wettbewerb wischen einem Mathematiker und einem Chemiker überhaupt möglich st. Vielleicht darf ich noch bestimmter mich ausdrücken: ich verstehe nicht die Möglichkeit einer von einem Einzelnen gelehrten histoire générale des sciences und habe diesen Zweifel auch Herrn Tannery brieflich ausgesprochen, als er mir die Programmabhandlung zuschickte, velche er unter diesem Titel in der Revue de synthèse historique veröffentlicht hat. Ich würde, und ich meine sagen zu dürfen, wir würden Herrn Tannery dankbar sein, wenn er von der Anordnung seines Buches, velches 1905 bereits erscheinen soll, uns einige Andeutungen zu geben für tunlich hielte.

Das sind die Erörterungen, welche in die Wege zu leiten ich für len Zielpunkt meines einführenden Vortrages gehalten habe. Dieselben verden sicherlich nur bestätigen, daß unserer Sektion ein großes md schönes Arbeitsfeld zugewiesen ist, daß die Geschichte der Mathematik hinreicht eine Lebensaufgabe zu bilden.

Pour l'histoire du problème inverse des tangentes.

Von

P. TANNERY aus Paris.

Les Lettres de Descartes, telles que Clerselier les a publiées, contenaient (Tome III, 1667, p. 409—416) une*) pièce adressée par le philosophe, le 20 février 1639, à Florimond Debeaune**), ce conseiller au présidial de Blois qui rédigea en français les Notae breves et les deux petits traités algébriques dont Schooten a inséré un texte latin dans ses éditions de la Géométrie de Descartes.

Cette lettre, publiée d'après la minute, ne paraît point avoir circulé avant 1667. Debeaune semble l'avoir gardée d'autant plus jalousement que son importance mathématique était plus considérable. D'autre part, il était mort en 1652, et ses papiers n'avaient point été conservés.***)

*) Voir Oeuvres de Descartes (éd. Charles Adam et Paul Tannery, Paris, Cerf, t. II, p. 510). — Je citerai les cinq premiers tomes de cette édition, qui comprennent la Correspondance, sous la rubrique C. D. — Cette Correspondance contient deux autres lettres de Descartes à Debeaune, que Clerselier avait publiées sans indiquer le destinataire. Pour l'une (C. D. II, p. 541) du 30 avril 1639, l'attribution s'imposait d'elle-même; pour l'autre (ibid., p. 451), elle n'est assurée que depuis la découverte des lettres de Debeaune, dont je vais parler.

**) Ordinairement appelé „de Beaune", mais il signait (très-lisiblement) „Debeaune." Il était né à Blois, le 7 octobre 1601, d'un père qui portait le même prénom et était bâtard d'un petit-fils de Samblançay (Jacques de Beaune, baron de), le surintendant des finances pendu à Montfaucon en 1527 et dont la mémoire fut réhabilitée plus tard. Ce premier Florimond avait au reste obtenu en 1583 les privilèges de noblesse, et il laissa à son fils la seigneurie de Goulioust, mais il n'avait pas le droit de prendre le nom nobiliaire de son père naturel, qui le protégea sans le reconnaître.

***) J'ai à la vérité trouvé, à la Bibliothèque Nationale de Paris, un texte français des Notae breves. Mais c'est une copie, et je n'ai pû m'assurer encore qu'elle représente bien le texte original et non pas simplement une traduction du latin de Schooten.

Dès 1667 au contraire, cette lettre de Descartes dut attirer vivement l'attention des mathématiciens; elle traite en effet un problème inverse des tangentes, le premier que l'on sache avoir été posé*), et ce problème, qui conduit à une courbe logarithmique, est devenu classique de bonne heure. Mais sur les circonstances qui avaient amené Debeaune à soulever un problème de ce genre, sur son travail personnel en la matière, le seul document auquel on pût se reporter laissait subsister nombre d'obscurités historiques.

J'ai été assez heureux pour découvrir**), dans le ms. 7049 de la Hofbibliothek de Vienne, sept lettres (huit pièces) autographes de Debeaune. Elles ont été publiées par mes soins dans les additions du tome V de la Correspondance de Descartes (paru en 1903) sous le numérotage alphabétique qui suit:

A.	Lettre	à Mersenne,	du	25	septembre	1638,	pages 515—517.
B.	„	à Roberval,	„	10	octobre	„	„ 517—518.
C.	(Annexe de la lettre B)				„	„	„ 519—524.
D.	Lettre	à Mersenne,	du	13	novembre	„	„ 526—529.
E.	„	„	„	25	février	1639,	„ 531—533.
F.	„	„	„	5	mars	„	„ 534—536.
G.	„	„	„	16	„	„	„ 536—539.
H.	„	„	„	3	avril	„	„ 539—542.

Quoique ces lettres ne permettent point d'élucider complètement la question, et que même elles soulèvent, sur d'autres points, des énigmes nouvelles, elles suffisent pour redresser quelques fausses conjectures auxquelles conduisait naturellement la lecture de la lettre précitée de Descartes.

C'est ce que je me propose de montrer ci-après.

---

1. Le 20 février 1639, Descartes parle de trois lignes courbes proposées par Debeaune; mais il les désigne comme deuxième, troisième et quatrième. Il y en avait donc une première. Sur celle-ci, nous avons deux indications dans une lettre de Descartes à Mersenne du

---

*) Celui de Kepler, sur lequel M. Cantor (Vorlesungen, II_1, p. 754) a appelé l'attention, est évidemment d'une tout autre nature; il rentre en effet dans la géométrie générale des coniques.

**) Ou plutôt retrouver. — Si en effet ces lettres n'étaient pas cataloguées, Libri en avait eu connaissance au cours de ses recherches pour une édition des Oeuvres de Fermat, et une copie, actuellement à la Bibliothèque Nationale, en avait même été prise par Despeyrous en 1847. Mais cette copie n'était pas d'avantage cataloguée, et le fait de l'existence des lettres en question n'avait pas été signalé.

15 nov. 1638 (C. D., II, p. 424, 19; 444, 24); elles se réduisent à ceci. Descartes affirme que cette courbe est une hyperbole, et que ceux qui ne l'ont pas reconnu se sont grandement mépris; il s'étonne notamment que Debeaune s'y soit trompé, après avoir constaté que cette courbe satisfaisait à la définition des lignes du premier genre, donnée dans la Géométrie.

Ceci suppose que l'équation de cette première courbe de Debeaune avait été obtenue sous forme finie; quant à la deuxième, c'est la courbe logarithmique du problème connu; la troisième, également logarithmique, est suffisamment déterminée par les indications de Descartes; enfin pour la quatrième, il dit qu'il ne l'a point examinée, et que Debeaune aimera probablement mieux désormais la chercher lui-même.

De cet ensemble de données, on était naturellement amené à supposer que Debeaune avait proposé en même temps quatre problèmes inverses des tangentes; que pour le premier, très-simple, lui et les géomètres de Paris auraient immédiatement obtenu la solution sous forme d'une équation du second degré entre les coordonnées, sans s'apercevoir toutefois que cette équation représentait une hyperbole; pour les trois autres au contraire, l'intervention de Descartes aurait été réclamée.

Or les choses se passèrent tout autrement. Tout d'abord (à savoir vers le commencement de septembre 1638) Debeaune ne proposa que deux questions: la première était un problème direct des tangentes, dans un cas où il ne parvenait point à appliquer la méthode de Descartes; la seconde était le problème inverse classique. Debeaune, dans une première lettre (perdue) à Mersenne, lui avait demandé de soumettre ces deux difficultés à Descartes; mais le Minime commença par les communiquer aux géomètres de Paris. Quant au troisième et au quatrième problème, Debeaune les posa directement à Descartes, dans une lettre que nous n'avons malheureusement pas, mais qui dut être écrite au commencement de février 1639 et accompagner l'envoi des Notes sur la Géométrie. Mersenne qui servait d'intermédiaire pour la correspondance, dut en avoir connaissance (lettre G., p. 537); mais ces nouveaux problèmes ne paraissent point avoir jamais été communiqués aux géomètres de Paris. Désormais, Debeaune n'attend de ceux-ci que ce qu'ils pourront faire pour sa seconde ligne; et c'est pour cela qu'il tiendra soigneusement secrète la solution de Descartes (la lettre du 20 fév. 1639), qui l'a complètement satisfait.

2. Ainsi nous avons tout d'abord à éclaircir l'histoire de la première ligne de Debeaune, qui constituait jusqu'à présent une énigme décevante.

Les autographes de Debeaune ne contiennent pas l'énoncé du problème relatif à cette ligne. Mais je l'ai retrouvé (cf. C. D. t. V, p. 514) dans le ms. fr. 12 262 de la Bibl. Nat., au fond, il est identique avec celui qui est développé dans les Notae breves (1e édit. 1649, p. 147—150), comme exemple pour la règle des tangentes de Descartes. A la fin, Debeaune remarque que la courbe est une hyperbole, dont il a donné plus haut la construction. On retrouve en effet cette construction à la p. 132, dans l'Observatio secunda sur la synthèse des lieux plans.

Une partie des calculs des Notae breves se retrouve littéralement dans la lettre A. La question d'identification est donc bien tranchée.

En fait, Debeaune avait défini un lieu géométrique par une relation simple qui conduit immédiatement à l'équation:

$$x^2 - xy - by = 0 \tag{1}$$

Il demandait de trouver la tangente, et il proposait ce problème comme difficulté concernant la méthode de Descartes.

Pour expliquer en quoi consistait la difficulté qu'il rencontrait, il faut rappeler la marche des calculs indiqués par Descartes pour la détermination de la tangente.

Soit une équation: $F(x, y) = 0$, telle que (1). Descartes introduit la longueur s de la normale par rapport à l'axe des y, et la longueur $v - y$ de la sous-normale par rapport au même axe. Elles sont liées par la relation:

$$s^2 = x^2 + v^2 - 2vy + y^2. \tag{2}$$

En éliminant x, par exemple entre (1) et (2), Descartes obtient une équation (3) qu'il ordonne en y, et dont les coefficients contiennent les quantités v et s. Il identifie cette équation avec une autre de même degré en y, qu'il forme avec des coefficients indéterminés de façon qu'il y ait deux racines égales à e. Au moyen des identités ainsi établies, il élimine les coefficients indéterminés, ainsi que s, et arrive finalement à une équation (4) en v et y.

Dans les exemples qu'il donne, l'équation (3) est tantôt du second, tantôt du 6e degré. Or, pour le cas proposé par Debeaune, elle est du quatrième degré. N'ayant plus de modèle sous les yeux, et ne s'étant pas encore bien assimilé la méthode nouvelle des coefficients indéterminés, le géomètre de Blois s'était trouvé dérouté.

Cela peut nous faire sourire, et n'est évidemment pas de nature à relever Debeaune à nos yeux. Mais il est juste d'ajouter qu'il parvint à débrouiller la question sans aides, ce qu'il annonce à Mersenne dans la lettre A. Seulement il le prie de demander à Descartes d'expliquer comment il se fait que la courbe (1) rentre dans le premier genre défini par l'auteur de la Géométrie, alors que cette courbe n'est aucune des sections coniques. Comment était-il tombé dans cette erreur?

C'est que la discussion de l'équation du second degré, telle que l'avait rédigée Descartes, présente des lacunes. En particulier, il n'a pas considéré le cas d'une asymptote parallèle à un axe, et il ramène l'équation générale à la forme

$$y = m - \frac{n}{z} x + \sqrt{m^2 + ox - \frac{p}{m} x^2},$$

qui devient illusoire quand $m = 0$. C'était le cas, Debeaune devant, pour appliquer la méthode de Descartes, résoudre l'équation (1) par rapport à x.

Dans sa lettre B, le 10 oct. 1638, Debeaune persiste toujours dans son opinion; il ne fut détrompé que par l'avis, reçu de Descartes, que la courbe était une hyperbole. Le 13 nov. (lettre D), il en envoya la démonstration à Mersenne, en le priant de la communiquer à Roberval, et, s'il le jugeait bon, à Beaugrand et à Descartes; en même temps, il a la prudence de lui recommander de ne pas envoyer en Hollande ce que Roberval avait rédigé sur la première ligne, afin de ne pas l'exposer aux railleries de Descartes, comme n'ayant pas reconnu l'hyperbole. Précaution inutile! Mersenne n'avait pu tenir sa plume et avait déjà écrit à Descartes que les géomètres de Paris doutaient de son assertion.

3. Les premières questions de Debeaune ne paraissent pas avoir été envoyées par Mersenne à Descartes avant le 18 sept.; Descartes répondit le 11 octobre dans une pièce (perdue) jointe à sa lettre au Minime du même jour (C. D., II, 420, 8). Cette pièce contenait l'avis que la première ligne de Debeaune était une hyperbole, et dès lors Descartes s'était probablement dispensé de faire le calcul de la tangente; en même temps qu'il s'excusait sans doute de ne pouvoir s'occuper immédiatement de la seconde ligne.

Ce n'est que le 15 novembre (C. D. II, 424, 13 et 444, 29) qu'il répondit à Mersenne au sujet de la lettre A de Debeaune; il se contenta de confirmer son assertion, tout en prévoyant que, sur le vu de la première réponse, Debeaune s'était déjà détrompé.

Cependant deux autres géomètres s'étaient occupés de la question proposée par Debeaune pour sa première ligne. Tout d'abord Beaugrand: Debeaune, dès la lettre A, accuse en effet réception d'une communication de celui-ci, qui avait trouvé la tangente. Cela lui était facile, car il connaissait la méthode de Fermat, que Debeaune ignorait encore; mais Beaugrand donnait cette tangente sans démonstration; aussi Debeaune, qui n'avait posé le problème que pour avoir une méthode générale, ne se montre nullement satisfait.

Roberval envoya plus tard une solution plus détaillée, dont Debeaune le remercie dans la lettre B; peut-être cette solution était-elle également obtenue à l'aide de la méthode de Fermat; en tout cas Roberval avait offert à Debeaune, de lui communiquer cette méthode, ce que ce dernier s'empresse de réclamer. Mais quelle qu'eût été en tout cas la méthode d'invention suivie par Roberval, il n'avait point fait connaître son analyse et s'était borné à une solution synthétique.

En résumé, ni l'un ni l'autre ne s'étaient encore assimilé les procédés de Descartes autant que Debeaune l'avait déjà fait.

4. L'histoire de la première ligne de Debeaune peut être considérée désormais comme suffisamment éclaircie.

En ce qui concerne la seconde, la pièce C nous fournit l'énoncé exact, assez différent, comme forme, de ceux que l'on donne d'ordinaire. Voici cet énoncé:

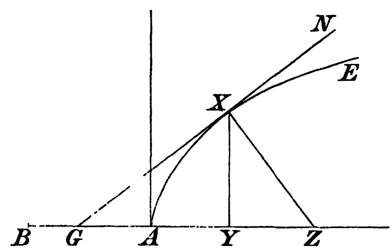


fig. 1.

„Soit la courbe AXE, de laquelle le sommet soit A, l'axe AYZ, et que la propriété de cette courbe soit telle, qu'ayant pris en icelle tel point qu'on voudra, comme X, duquel soit menée la ligne droite XY perpendiculairement ordonnée à l'axe, et par le même point X ayant mené la touchante GXN, sur laquelle, au point X, élevant la perpendiculaire XZ jusqu'à l'axe, il y ait même raison de ZY à YX que d'une ligne donnée, comme AB, à la ligne YX moins AY."

Posant $AY = y,\quad XY = x,\quad AB = \beta,$

et, comme Descartes, $AZ = v,\quad XZ = s,$

Debeaune arrive immédiatement à la relation

$$\frac{v-y}{x} = \frac{\beta}{x-y}. \tag{5}$$

La même pièce C contient la solution que Debeaune avait cru trouver, pour obtenir l'équation en x, y, de sa ligne, ainsi qu'il l'avait annoncé à Mersenne dès le 25 sept. 1638 (lettre A).

Il élimine x entre la condition (5), et la relation cartésienne (2)

$$s^2 = x^2 + v^2 - 2vy + y^2. \tag{2}$$

Il arrive ainsi à une équation du quatrième degré en y, qu'il identifie avec une équation à coefficients indéterminés, ayant deux racines égales. Entre les relations aussi établies, il élimine les coefficients indéterminés, ainsi que s, et aboutit à une équation du troisième degré en ν et y. Eliminant maintenant ν entre cette équation et la condition (5), il obtient finalement une équation en x, y:

$$x^3 + (\beta - 3y)x^2 - (\beta y + 3y^2)x - \beta^2 y - y^3 = 0, \tag{6}$$

qui est pour lui l'équation cherchée. Il montre ensuite comment on peut construire la courbe par points, etc.

Les calculs, très-longs, sont bien menés, et l'on ne peut, en tous cas, dénier à Debeaune une réelle habileté comme algébriste.

Il est évidemment possible d'arriver aujourd'hui au même résultat que lui par une voie beaucoup plus abrégée.

Soit en général une relation donnant x en fonction de y et de ν:

$$x = F(y, \nu). \tag{7}$$

Substituons dans (2) et prenons les dérivées par rapport à y, comme si s et ν étaient constants, on aura

$$\frac{\nu - y}{x} = \frac{dF(y, \nu)}{dy}. \tag{8}$$

Eliminant ν entre (7) et (8), on a une équation

$$\varphi(x, y) = 0. \tag{9}$$

C'est celle qu'a trouvèe Debeaune; elle correspond ainsi à un procédé parfaitement général et précis, mais auquel il est difficile, je crois, de donner une signification géométrique présentant quelqu'intérêt.

5. Roberval, dès avant le 10 octobre, avait déterminé l'asymptote ($x = y + \beta$) de la courbe: résultat qui n'offrait pas de difficultés majeures, mais qui n'est point absolument négligeable. Il différa sa réponse à Debeaune, et laissa ainsi celui-ci reconnaître de lui-même son erreur, ce qu'il fit dès le 13 novembre (lettre D). Roberval s'acharna encore assez longtemps sur ce problème, mais n'aboutit pas; d'abord il crut que la ligne était une hyperbole (C. D. II, 502, 19), puis il soutint que le problème n'était pas déterminé.

A un moment donné (lettre F), il aurait cru qu'une droite satisfaisait à la question, et en effet l'équation

$$\frac{\nu - y}{x} = \frac{dx}{dy} = \frac{\beta}{x - y}$$

admet comme solution particulière

$$\nu = y + x, \quad x = y + \beta, \quad \frac{dy}{dx} = 1.$$

Mais la droite ne passe pas par le sommet, comme le demandait Debeaune. A cette date nous sommes au commencement de mars 1639, Roberval serait donc retombé sur la droite primitivement déterminée par lui comme asymptote. Ceci montre assez que toute sa science était en défaut.

Voilà à peu près tout ce que l'on sait des tentatives de Roberval. Beaugrand réussit encore moins; Debeaune ne parle de lui, au sujet de cette seconde ligne, qu'à propos d'un incident de sa correspondance avec Descartes, incident sur lequel je reviendrai tout-à-l'heure. Enfin les lettres de Debeaune ne confirment nullement que le problème ait été proposé à Fermat, comme l'indiquerait un passage d'une lettre de Descartes (C. D. II, 562, 14), tandisque, dans celles de Fermat, on ne trouve rien concernant cette question.

6. Lorsqu'il eut connaissance de la lettre A, où Debeaune déclarait s'être satisfait au sujet de ses lignes, Descartes se jugea dispensé de s'occuper de la seconde; mais, dès le 25 octobre, Mersenne, sans l'autorisation du géomètre de Blois et contre son désir, envoya en Hollande la pièce C. Descartes, en répondant le 15 novembre, constata „le cercle logique“ (C. D. II, p. 438—439) dans lequel Debeaune était tombé; cependant il apprécia favorablement le mathématicien qui essayait d'appliquer les méthodes de la Géométrie, et il „admire que Debeaune en eût pu tant apprendre du peu que lui-même avait écrit.“

Sa réponse se croisa avec une lettre (malheureusement perdue) que Debeaune adressa pour lui à Mersenne en même temps que la lettre D (13 nov. 1638). Debeaune dut y parler beaucoup moins de ses lignes que des Notes qu'il rédigeait sur la Géométrie, et surtout de son projet d'essayer la machine proposée dans la Dioptrique pour la taille des verres de lunette. Nous avons la réponse de Descartes (C. D. II, p. 451), qui ne touche que ce dernier sujet, et doit être incomplète; en tous cas sa date exacte nous manque, de même que celle de la lettre qu'il écrivit en même temps à Mersenne (C. D. II, p. 466 et suiv.).

Cependant, dans la lettre D, Debeaune avait prié Mersenne d'insister auprès de Descartes pour obtenir de lui l'invention de la seconde ligne, qu'il affirme présenter pour lui un intérêt théorique très grand, en dehors de la question mathématique elle-même. C'est probablement dès lors dans sa réponse que Descartes lui demanda si pour l'usage qu'il voulait faire de cette ligne, il ne pouvait se servir de la droite satisfaisant à l'équation de condition. Il avait donc fait la remarque qui avait frappé Roberval, et Debeaune déclare l'avoir faite lui-même auparavant.

Mais cette observation de Descartes communiquée par Mersenne à Beaugrand donna à celui-ci l'occasion d'accuser le philosophe d'avoir indiqué une fausse solution. Debeaune rétablit les faits, et dans une lettre du 9 janvier 1639 (C. D. II, 491) Descartes déclara à Mersenne qu'il ne croyait pas devoir, pour son compte, s'occuper davantage de Beaugrand.

7. Malheureusement, entre le 13 nov. 1638 et le 26 fév. 1639, la correspondance entre Debeaune et Mersenne présente une interruption qui ne peut guère s'expliquer que par la perte de lettres écrites pendant cet intervalle. En tout cas ce fut vers la fin de janvier ou le commencement de février 1639 qu'il envoya ses Notes à Descartes (lequel ne les reçut qu'après le 9 février), et c'est probablement en même temps qu'il lui adressa la lettre (perdue) à laquelle le philosophe répondit le 20 février. Nous savons, par cette réponse, que cette lettre de Debeaune contenait une proposition sur l'aire de l'une de ses lignes courbes, aire trouvée sans que l'équation eût été obtenue sous forme finie. C'est en même temps qu'il dût proposer à Descartes, comme questions semblables, sa troisième et sa quatrième ligne, au sujet desquelles on ne retrouve aucune mention antérieure.

L'invention de la quadrature par Debeaune est particulièrement intéressante, en ce qu'elle montre qu'il avait reconnu de lui-même au moins une partie de la relation entre le problème inverse des tangentes et celui des quadratures. On ne peut d'ailleurs concevoir cette invention sans admettre qu'il ait considéré le triangle infinitésimal formé par les différences de l'abscisse et de l'ordonnée, et par le segment correspondant de la tangente.

Cette considération, qu'il a pu emprunter à la méthode des tangentes de Fermat, mais à laquelle il a très bien pu arriver proprio Marte, lui fournissait d'ailleurs immédiatement la quadrature au moins dans le cas de la troisième courbe, pour laquelle il avait posé la condition:

$$\frac{v-y}{x}=\frac{x}{\beta}.$$

Comme on a immédiatement, par les triangles semblables,

$$\frac{v-y}{x}=\frac{\Delta x}{\Delta y},$$

on en déduit pour l'aire,

$$\Sigma x \Delta y = \Sigma \beta \Delta x = \beta x.$$

8. La lettre F, écrite avant que la réponse de Descartes ne fut parvenue à Debeaune, nous offre une transformation de la question

posée par celui-ci, qui n'est pas moins intéressante en ce qu'elle nous montre qu'il avait pleine conscience de la généralité du problème:

„Mais pour éclaircir la matière, soit quelconque ligne courbe AB, son sommet A, son axe AD, la ligne DB perpendiculairement ordonnée sur icelui; la tangente de la courbe au point B, CB, qui rencontre l'axe prolongé au point C. On a méthode, ayant une équation qui explique le rapport d'entre les lignes AD et DB, de trouver la ligne CD. Je demande au contraire la méthode, ayant une équation qui explique le rapport d'entre CD et DB, de pouvoir trouver la ligne AB. Et pour exemple particulier, faisant $DB = x$, et la ligne prise à discrétion $GH = \beta$, que nous ayons la ligne $CD = \frac{\beta x}{\beta - x}$; je demande la ligne AD."

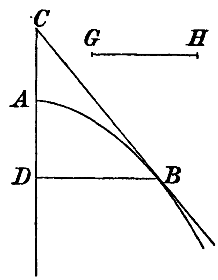


fig. 2.

Dans cet exemple particulier, où CD est, non plus la sous-normale, mais la sous-tangente sur l'axe des Y (ce qui se rapproche de la méthode de Fermat):

$$CD = x\frac{dy}{dx} = \frac{\beta x}{\beta - x}, \quad dy = \frac{\beta\, dx}{\beta - x}, \quad y = \beta \log \frac{\beta}{\beta - x}.$$

Serait-ce là la quatrième ligne de Debeaune?

Mais, pour nous, ce dernier problème se ramène, comme au reste celui de la troisième ligne, à une quadrature immédiate. Pour la seconde ligne, au contraire,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y}{\beta},$$

les variables ne sont pas séparées, il y a là une complication caractéristique; or nous ne trouvons aucun indice que Debeaune soit parvenu à effectuer la séparation au moyen d'un changement de coordonnées, comme l'a fait Descartes dans sa lettre du 20 février 1639.

Je ne m'arrêterai pas à la solution contenue dans cette lettre qui est bien connue, et que j'ai au reste spécialement annotée dans la nouvelle édition de la Correspondance de Descartes. Je me borne à rappeler que si, dans cette solution, on ne lit pas le mot de logarithmes (non reçu encore en Géométrie), ceux-ci n'en sont pas moins définis par Descartes d'une façon tout-à-fait analogue à celle de Napier, ce qui suppose une connaissance exacte de l'invention de ce dernier.

9. La réponse de Descartes satisfit entièrement Debeaune, comme il le déclare à Mersenne dans la lettre G (26 mars 1639). Mais on y voit en même temps qu'il se propose de construire effectivement sa seconde ligne par points, en suivant les indications de Descartes; de

même, dans la lettre E, il ne désirait de Roberval que „la description de sa ligne par points".

Il suit de là que si Debeaune avait proposé sa première ligne (problème direct des tangentes) dans un but purement géométrique — j'entends pour approfondir la méthode publiée par Descartes —, pour sa seconde ligne (problème inverse), il avait au contraire en vue une application particulière.

Il est bien malaisé de préciser cette application. Mais l'ordre d'idées auquel elle appartenait est très clairement indiqué dans les lettres de Debeaune, malgré des réticences calculées, et il est bien certain par ces lettres que le problème inverse des tangentes ne s'est pas présenté à son esprit comme un simple renversement de la méthode de Descartes; il a été amené à le formuler en vue du développement de conceptions mécaniques.

Pour bien faire comprendre ce qui en est, je dois faire remarquer, au préalable, que dans les lettres de Debeaune à Mersenne, la question des lignes du géomètre de Blois ne joue qu'un rôle assez secondaire. A côté d'autres questions mathématiques, il entretient le Minime de sujets trés variés, optique, expériences sur la réfraction, mais surtout mécanique.

Les Nuove Scienze de Galilée venaient de paraître vers le milieu de 1638, et elles avaient attiré l'attention de Debeaune au moins aussi vivement que les Essais de Descartes: „Je reviens à Galilée" écrit-il à Mersenne le 13 nov. 1638, et comme il ne lui en avait pas parlé dans la lettre immédiatement précédente, il faut qu'il l'ait fait au moins dans la première perdue du commencement de septembre. Cette fois, il touche la question de la résistance du milieu dans le mouvement des projectiles et celle du point d'égalité qu'il promet d'expliquer plus au long. Plus tard il insistera à plusieurs reprises auprès du Minime pour avoir communication des notes critiques de Descartes sur le nouvel ouvrage de Galilée (c. a. d. la lettre à Mersenne du 11 oct. 1638. C. D. II, p. 380—388). Il dit, à cette occasion, qu'il n'est pas en plusieurs choses de l'avis du savant italien, mais Mersenne écrit au contraire à Descartes qu'en mécanique, Debeaune suit les pensées de Galilée (C. D. II, p. 443, 4). C'est qu'il a eu, entre les mains, dès septembre 1633, une pièce dont nous devons regretter la perte, à savoir une ébauche d'un traité rédigé par Debeaune (lettre A), ébauche que l'auteur communiqua également à Roberval pour avoir son avis (lettre B). Il la donne comme „un petit traité de pensées rudes et mal polies, c'est-à-dire écrites comme elles sont nées, sans avoir été agencées, ni mises en copie par aucune transcription."

10. Or, en partant de ses questions géométriques, il déclare

(lettre A) qu'il s'agit pour lui d'une science qu'il désire avoir et qui lui serait grandement utile pour expliquer ses pensées. Sa seconde ligne est „un excellent problème et dont les usages sont admirables, comme il fera voir, si M. Descartes en prend la peine" (lettre D). Cependant il ne voudrait pas communiquer l'usage de ses lignes à d'autre qu'à Mersenne et c'est pour cela qu'il n'a posé la question que comme géométrique (lettre E). Il en a besoin pour prouver l'isochronisme des vibrations des cordes et des oscillations du pendule, qu'il croit (avec Galilée) rigoureusement de même durée quels que soient les arcs d'amplitude (lettre F). Au reste, il a mûri des pensées et se propose de refaire son traité sur un autre plan. Quand il a reçu la solution de Descartes, il annonce (lettre G) qu'après avoir construit sa seconde ligne, il en déduira et appliquera ses pensées. Dans la même lettre, il explique à Mersenne la loi de la chute des corps de Galilée, mais il trouve la démonstration beaucoup plus aisée et naturelle par les triangles.

Enfin, dans sa dernière lettre (H, du 3 avril), il annonce à Mersenne qu'il va écrire à Descartes pour lui exposer succinctement ses principes, et notamment ce qui regarde la percussion. Si cette lettre est perdue, nous avons la réponse de Descartes, du 30 avril (C. D. II, p. 541); malheureusement elle ne nous éclaire pas beaucoup pour la question qui nous occupe: Descartes y expose surtout ses propres idées sur la constance de la quantité de mouvement, sur l'inertie naturelle et sur la cause de la pesanteur. Nous sommes donc réduits, en ce qui concerne les pensées de Florimond Debeaune sur la mécanique, et sur l'usage qu'il voulait faire à ce sujet du problème inverse des tangentes, aux indications que fournissent ses lettres, et que j'ai résumées plus haut. Si incomplètes que soient ces indications, elles sont, je crois, suffisamment caractéristiques.

Debeaune n'a jamais réalisé le projet qu'il annonçait à Mersenne; on est naturellement amené à croire qu'il s'est heurté à des difficultés insurmontables pour lui. Si géniale que pût être son idée, elle était prématurée, d'autant qu'il voulait s'attaquer à des questions physiques qui exigeaient encore une longue succession de progrès des connaissances mathématiques, avant de pouvoir être abordées utilement.

S'il a conçu la possibilité d'appliquer la solution du problème inverse des tangentes aux questions de dynamique, il n'a pas formulé cette idée avec précision, en sorte que nous ne savons point s'il ne s'y mêlait pas quelqu'erreur capitale.*) Il n'est resté de son effort

*) Il semble bien, d'après ce qu'il dit sur la démonstration de la loi de la

dans cette direction que la position même du problème inverse; elle doit suffire pour que sa mémoire soit conservée dans l'histoire de la mathématique à un rang plus élevé que celui de simple commentateur de la Géométrie de Descartes.

11. Comme mathématicien, Debeaune se montre d'ailleurs incontestablement au moins à la hauteur de Roberval. La cruelle maladie qui le frappa de bonne heure l'a empêché de donner toute sa mesure, et il faut lui en tenir compte. Ses lettres, ainsi que je l'ai indiqué, sont d'ailleurs intéressantes pour l'histoire des sciences physiques, et méritent à cet égard d'être spécialement étudiées. Mais en terminant, je ferai au contraire une remarque d'ordre mathématique. Dans ses calculs, Debeaune ne place pas l'exposant comme Descartes, il l'écrit sur sa ligne, immédiatement après la lettre affectée, ainsi qu'avait fait Hérigone dès 1634. Il déclare d'ailleurs que c'est dans Hérigone qu'il a appris ce qu'il sait d'algèbre. Ce fait a son intérêt, en ce qu'il témoigne de l'influence méritée qu'exerça le Cours mathématique d'Hérigone comme ouvrage didactique.*)

---

chute des corps de Galilée, qu'on ne puisse lui refuser l'idée de représenter le temps par une abscisse, la vitesse par une ordonnée, et l'espace parcouru par une aire. Il aurait donc introduit les différentielles de la vitesse et du temps; mais il ne semble point que leur rapport corresponde pour lui au concept newtonien de la force. Il suit de plus près les traces de Galilée; son problème s'expliquerait en supposant que, voulant tenir compte de la résistance du milieu, il avait admis que la loi des carrés devait être corrigée en retranchant un terme proportionnel à la vitesse, et qu'il chercha, dans cette hypothèse, la relation entre la vitesse et le temps. Ce n'aurait été qu'après avoir réussi à obtenir dans cette voie un accord satisfaisant avec l'expérience qu'il aurait abordé les questions d'isochronisme (?).

*) J'ajoute, d'autre part, que rien dans le ton des lettres de Debeaune ne laisse supposer qu'il ait eu des relations antérieures avec Descartes. D'après la Correspondance de Descartes (t. I. p. 252), celui-ci l'aurait connu depuis assez longtemps au moins de nom: puisque le 10 mai 1639, il aurait écrit à Mersenne: „Mandez-moy si M. de Beaune fait imprimer quelque chose.“ Malheureusement on n'est jamais bien sûr des noms propres donnés par Clerselier qui a parfois complété à tort les abréviations des minutes de Descartes. On pourrait très bien supposer dans ce passage „Beau(grand) si non même B(alzac).“ Quant à l'indication „de Beaune“, pour le N . . . à qui Descartes pense en automne 1634 (C. D. I, p. 322, 21) pour travailler aux lunettes, je la considère désormais comme absolument erronée, qu'elle provienne de Clerselier ou de Legrand.

Wronski als Mathematiker.

Von

S. Dickstein aus Warschau.

Der ehrenvollen Einladung des hochverehrten Einführenden der historischen Sektion unseres Kongresses einen Vortrag über Wronski zu halten Folge leistend, erlaube ich mir Ihre Zeit in Anspruch zu nehmen, um Ihnen eine Charakteristik dieses geistreichen und wenig bekannten Mannes (1778—1853) zu geben.*) Ich muß aber gleich gestehen, daß ich in der kurzen mir zugemessenen Zeit nur einen flüchtigen Überblick über einen Teil seiner Wirksamkeit Ihnen geben kann. Wronski war ein Polyhistor, kein Gebiet menschlichen Wissens war ihm fremd; er hat umfangreiche Werke über verschiedenartige Gegenstände veröffentlicht und noch mehr findet man in seinem ungedruckt gebliebenen Nachlasse.**) Er beschäftigte sich mit Mathematik, Mechanik und Physik, Himmelsmechanik und Astronomie, Statistik und politischer Ökonomie, mit Geschichte, Politik und Philosophie, er versuchte seine Kräfte in mehreren mechanischen und technischen Erfindungen. Ich kann hier natürlich nicht alle seine Leistungen in diesen verschiedenen Gebieten besprechen, ich muß mich auf die Mathematik beschränken und kann von dieser sogar nicht alles von ihm Geleistete Ihnen vorführen. Wronskis Philosophie darf ich aber nicht unerwähnt lassen, weil er selbst seine ganze wissenschaftliche Arbeit als philosophische Tat betrachtete und fast in allen seinen mathematischen Schriften Mathematik mit Philosophie vermengte. Die Einwirkung seiner philosophischen Ansichten merkt man schon an der von ihm systematisch geübten eigenartigen dichotomischen Zergliederung des Inhalts aller seiner Arbeiten.

*) Über Wronskis Leben und Werke ist von mir ein Buch in polnischer Sprache herausgegeben worden „Hoene Wroński, jego życie i prace“, Krakau 1896, Verlag der Krakauer Akademie der Wissenschaften. gr. 8°. 363 S.

**) Ein Verzeichnis aller Schriften und Manuskripte von Wronski findet man in meiner Arbeit: „Catalogue des oeuvres imprimées et manuscrites de Wronski“ (Krakau 1896), die den zweiten Teil des unter *) zitierten Buches bildet.

Er sagte doch selbst: „l'une des plus belles prérogatives de la raison est d'être capable de former un système, d'être architectonique.“ Die Zahlen e und π nannte er „philosophische Zahlen“ und zwar die erste die der Theorie der Logarithmen, die zweite die der Theorie des Sinus; die von ihm verallgemeinerte Bernoullische und Eulersche Annäherungsmethode zur Auflösung algebraischer Gleichungen nannte er teleologisch usw. Aber noch mehr: durch seine Philosophie, die er „absolute“ oder — als Philosophie der von ihm gepredigten neuen Ära der Geschichte der Menschheit — auch „Messianismus“ genannt hat, wollte er die ganze menschliche Wissenschaft reformieren und dieselbe auf unfehlbaren Grundlagen errichten. Zu seinem philosophischen System gelangte er durch die Kantische Philosophie. Er wollte diese Philosophie, die er als die größte Entdeckung des XVIII. Jahrhunderts bezeichnete, weiterführen und vollenden, bis in das Absolute hinauf. Kant — sagt Wronski — war der erste, der nicht nur die Form sondern auch den Inhalt oder die Natur der Erkenntnis erfaßt habe; für Kant aber war die Erkenntnis noch eine durch die Bedingungen des reflektierenden Gemütes gebundene Reflexion des Seins. Der fundamentale Irrtum der Kantischen Philosophie bestand nach Wronski in der Vermengung des Seins mit der eigentlichen spontanen Tätigkeit der Erkenntnis. Die drei Prinzipien des Kantischen Systems, nämlich 1. die „mechanische“ Voraussetzung einer besonderen Form der menschlichen Erkenntnis, 2. das Kriterium der Notwendigkeit dieser Erkenntnis, 3. die Unbedingtheit der moralischen Gesetze entbehren der systematischen Einheitlichkeit; die Lehre sei unvollständig, weil sie das Absolute nur in die Postulate der praktischen Vernunft versetzt und der reinen Vernunft Schranken vorschreibt, welche das absolute Erkennen verschließen. Wenn auch also Kant die Richtung nach dem Absoluten angebahnt und seine Nachfolger Fichte, Schelling und Hegel Versuche zur Lösung dieses großen Problems gemacht haben, so seien doch die Resultate ihrer Gedankenarbeit einseitig und haben nichts mehr als Schemata zur weiteren Arbeit geliefert. Ich kann hier nicht die Grundlage der Wronskischen Philosophie ausführlich darstellen — dieser Gegenstand gehört ja zu der Geschichte der Philosophie — uns geht doch nur die Anwendung dieses seines im Absoluten verobjektivierten Rationalismus des XVIII. Jahrhunderts auf die Wissenschaft und speziell auf die Mathematik an. Ist also absolute Erkenntnis möglich, so müssen für jede Wissenschaft absolute und notwendige Gesetze existieren, welche ihre Entwicklung regeln und aus welcher alle ihre Wahrheiten sich als notwendige Folgerungen ergeben. Solche absolute Gesetze glaubte Wronski für jede Wissenschaft und speziell für die Mathematik aufstellen zu können. Dieselben hießen: „La loi suprême“ = das höchste Gesetz, „le problème universel“ = das universelle Problem, „loi (oder concours) téléologique“ = das teleologische Gesetz.

Ehe ich aber den Inhalt und die Bedeutung dieser Gesetze in der Wronskischen Mathematik erkläre, muß ich in aller Kürze über die eigentlich mathematischen Leistungen von Wronski berichten. Ich habe schon vor mehreren Jahren dieselben in einer Reihe von Noten*) in der Eneströmschen Bibliotheca mathematica besprochen, ich habe dort auch den Zusammenhang der Wronskischen Ideen mit denen anderer Mathematiker berücksichtigt, ich werde also nur wiederholen müssen, was ich dort auseinander gesetzt habe. Also zuerst die „sommes combinatoires“ oder „fonctions schins“ von Wronski waren eigentlich nach heutiger Benennung Differential- oder Differenzen-Determinanten, auch jetzt Wronskianen genannt. Wronski zeigte einige Eigenschaften und den Gebrauch dieser Gebilde zuerst in seiner im Jahre 1810 der Pariser Akademie vorgelegten (aber ungedruckt gebliebenen) Abhandlung unter d. T.: „Premier principe des méthodes algorithmiques comme base de la Technie algorithmique“**) und wendete dieselben in seinen späteren gedruckten Werken hauptsächlich auf die Entwicklung der Funktionen in Reihen an. Seine „fonctions alephs“ sind symmetrische Funktionen, die er in einer etwas schwerfälligen Bezeichnung für die Auflösung algebraischer Gleichungen und für die Zahlentheorie gebrauchte. In der Handhabung dieser Instrumente und der vielfach von ihm benutzten sogenannten „Aggregats“ oder kombinatorischen Gebilde zeigt sich Wronski als sehr geschickter Kombinatoriker, der ziemlich ermüdende Rechnungen nicht scheute und in dieser Hinsicht den deutschen Kombinatorikern an die Seite gestellt werden kann. Es hat auch ein deutscher Kombinatoriker, der etwa um zwei Jahre jüngere Fr. Schweins sehr viel aus Wronskis Schriften***) geschöpft und mehrere Wronskische Formeln seinem Hauptwerke: „Theorie der Differenzen und Differentiale“ (Heidelberg 1825) einverleibt. Die sogenannte teleologische Methode zur Auflösung algebraischer Gleichungen, die Wronski

*) Sur les découvertes mathématiques de Wronski (2), 6, 1892, p. 48—52, 85—90; 7, 1893, p. 9—14; 8, 1894, p. 49—54, 85—87; 10, 1896, p. 5—12.

**) Den Inhalt dieser Abhandlung habe ich in der oben zitierten polnischen Arbeit über Wronskis Leben und Werke (S. 29—34) besprochen.

***) Nämlich aus der „Introduction à la philosophie des mathématiques“ und der „Philosophie de la Technie algorithmique“. Auf S. 613 seines Werkes schreibt Schweins: „Im Jahre 1821 lernten wir die Arbeiten von Wronski kennen und fanden, daß ihm die Ehre gebührt, die allgemeinsten Fakultäten zuerst untersucht und bekannt gemacht zu haben.“

durch Einführung der Funktionen „aleph“ aus den bekannten Methoden von Bernoulli und Euler zu vervollständigen suchte, ging den bezüglichen Arbeiten von Jacobi, Fourier und anderen voraus.*)

Weniger glücklich war Wronski in seinem Versuche aus dem Jahre 1812 über die Auflösung algebraischer Gleichungen aller Grade, in welchem er, mit den Ergebnissen der älteren Untersuchungen von Ruffini unbekannt, allgemeine Formeln für die Wurzeln algebraischer Gleichungen von irgend welchem Grade aufzustellen glaubte. Aber erst im Jahre 1816 hat Ruffini selbst und im Jahre 1818 der portugiesische Mathematiker Torriani die Unzulänglichkeit der Wronskischen Theorie gezeigt.**)

In seinem ersten Werke: „Introduction à la Philosophie des mathématiques“ (Paris 1811) gibt Wronski eine analytische Definition höherer trigonometrischer Funktionen, von welchen die Kreis- und Hyperbelfunktionen nur spezielle Fälle sind, beweist das Additionstheorem dieser Funktionen und mehrere ihrer Eigenschaften. Durch diese neue Art analytischer Funktionen wollte er die ihm unsympathischen „fonctions elliptiques“ von Legendre ersetzen und dieselben auf die Integration der Differentialgleichungen und die Probleme der Himmelsmechanik anwenden. In demselben Werke führt Wronski eine neue Infinitesimalrechnung, ein Gegenstück zur gewöhnlichen Differentialrechnung ein; er nennt sie „calcul des gradules“ und definiert die in ihr vorkommenden infinitesimalen Größen γx, γy mittels der Gleichung

$$y^{1+\gamma y} = f(x^{1+\gamma x}).$$

Soviel ich weiß, hat diese infinitesimale Exponentialrechnung, sowie die analogen Versuche anderer Mathematiker keine nennenswerten Ergebnisse geliefert.

Es ist weiter zu erwähnen Wronskis Methode der Integration linearer Differentialgleichungen, welche auf folgendem Gedanken beruht. Es sei

*) Vergl. meine Abhandlung: „Über die teleologische Methode von Hoene Wronski zur Auflösung algebraischer Gleichungen (Sitzungsberichte der Krakauer Akad. d. Wissenschaften, 19, 1889, p. 167; 20, 1890, p. 287).

**) Ruffini Paolo, Intorno al metodo generale proposto dal Sig. Hoene Wronski. Memoria ... ricevuta il 20 marzo 1816 (Mem. d. Società Italiana delle scienze, 18, Modena 1820); Torriani João Evangelista, Memoria premiada na Sessão publica de 24 de Junho de 1818 sobre o programma ... Dar a demonstraçao das Formulas propostas por Wronski para a resolução geral das equações (Mem. da Acad. Real das sciencias de Lisboa); vergl. H. Burkhardt, Die Anfänge der Gruppentheorie und Paolo Ruffini (Zeitschr. für Mathem. und Physik, 37, 1892, Supplement S. 157).

$$\psi(x) = H_0 \Omega + H_1 \frac{d\Omega}{dx} + \cdots + H_\mu \frac{d^\mu \Omega}{dx^\mu} = 0$$

die gegebene Differentialgleichung, in welcher $H_0, H_1, \ldots, H_\mu$ Funktionen von x sind, die auch die gesuchte Funktion Ω, ihre Differentiale und Differenzen enthalten können; k sei ein bestimmter Wert von x, für welchen $H_0, H_1, \ldots, H_\mu$ die Werte $[H_0], [H_1], \ldots, [H_\mu]$ annehmen: führt man einen Parameter a und eine Funktion se^{rx} ein, wo s und r willkürliche Konstanten sind, und bildet die allgemeinere Gleichung

$$(x) + (1-a)\, se^{rx} = [H_0]\left(\frac{H_0}{[H_0]}\right)^a \Omega + [H_1]\left(\frac{H_1}{[H_1]}\right)^a \frac{d\Omega}{dx} + \cdots + [H_\mu]\left(\frac{H_\mu}{[H_\mu]}\right)^a \frac{d^\mu \Omega}{dx^\mu} = 0,$$

so geht dieselbe in die gegebene für $a = 1$ über; für $a = 0$ aber erhält man die sogenannte „reduzierte" Gleichung

$$\psi(x) + se^{rx} = [H_0]\Omega + [H_1]\frac{d\Omega}{dx} + \cdots + [H_\mu]\frac{d^\mu \Omega}{dx^\mu} = 0$$

mit konstanten Koffizienten, welche man leicht integrieren kann. Betrachtet man die Integrale der gegebenen Gleichung als Funktionen von a, so gibt die Entwicklung dieser Funktionen nach den Potenzen des Parameters a für $a = 1$ die gesuchten Integrale. Natürlich ist bei Wronski von den Gültigkeitsgrenzen dieser Methode nicht die Rede.

Analog ist seine folgende Methode zur Auflösung algebraischer Gleichungen. Es sei

$$A_0 + A_1 y + \cdots + A_m y^m = 0$$

die gegebene Gleichung; trennt man ihre linke Seite in zwei Teile P und Q und führt einen Parameter x ein, so daß $xP + Q = 0$ sei, so erhält man eine neue Gleichung, die für $x = 1$ in die gegebene übergeht; für $x = 0$ aber bekommt man die einfachere Gleichung $Q = 0$. Nach Auflösung derselben entwickelt man die Wurzeln der Gleichung $xP + Q = 0$ nach Potenzen von x und setzt dann $x = 1$ ein.

Man findet in den Schriften von Wronski mehrere sehr interessante Entwicklungen für die höheren Differentialquotienten zusammengesetzter Funktionen, verschiedene Interpolationsformeln für einfache und mehrfache Integrale und auch eine Anweisung zum Gebrauch dieser Interpolationsmethoden für die Integration irgend welcher gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen.

In der „Philosophie de la Technie algorithmique" (2 Bände, Paris 1816—1817) findet man mehrere ausführliche Erklärungen über divergente Reihen, deren Gebrauch Wronski als ganz legitim betrachtete und welche er durch geeignete Transformationen in konvergente zu verwandeln wußte. Seine Methode entbehrt natürlich der Strenge, welche erst durch die moderne Funktionentheorie möglich wurde. Wir begegnen auch hier mehreren Betrachtungen über die Konvergenz der Reihen, die aber den klaren und einfachen, freilich etwas späteren Untersuchungen von Bolzano und Cauchy nachstehen.

Alle oben besprochenen Leistungen von Wronski sind aber — wenn ich so sagen darf — als Nebenprodukte seiner allgemeinsten Auffassung mathematischer Probleme zu betrachten. In der „Philosophie de la Technie algorithmique“ fragt Wronski: „En quoi consistent les Mathématiques; n'y aurait-il pas moyen d'embrasser par un seul problème tous les problèmes de ces sciences et de résoudre généralement ce problème universel“ und antwortet auf diese Frage mittels seiner „Loi suprême“; es sei ihm das einzige allgemeinste die Bildung mathematischer Größen beherrschende Gesetz. Es hat die Form:

$$F(x) = A_0\Omega_0 + A_1\Omega_1 + A_2\Omega_2 + \cdots;$$

$F(x)$ ist die gegebene Funktion von x; Ω_0, Ω_1, Ω_2, $\cdots$ sind ganz willkürliche Funktionen derselben Variablen; A_0, A_1, A_2, ... sind konstante Koeffizienten, die aus den gegebenen Funktionen zu bestimmen sind. Die zweibändige „Philosophie de la Technie“ ist zum größten Teil der Herleitung und den Anwendungen der „Loi suprême“ gewidmet. Die Koeffizienten werden im allgemeinen durch unendliche Reihen, in deren Gliedern die oben genannten Funktionen „schin“ vorkommen, ausgedrückt. Die Begründung Wronskis ist natürlich rein formell und vermag den heutigen Anforderungen nicht zu genügen. Wronski aber legte das Hauptgewicht auf die Form der Entwicklung; sie ist ihm das höchste Gesetz der Algorithmie — so nannte er den aus Arithmetik, Algebra und Analysis bestehenden Zweig der Mathematik — nicht nur weil sie alle möglichen Reihenentwicklungen und insbesondere die damals bekannten Entwicklungen der Funktionen in unendliche Reihen umfaßt, sondern auch weil sie alle anderen Entwicklungsarten in sich enthält. Wronski zeigt nämlich, auf welche Weise man aus seiner allgemeinsten Entwicklungsform zu den Entwicklungen in unendliche Reihen, in unendliche Produkte und Kettenbrüche gelangt.

Das „Problème universel“ folgt unmittelbar aus der „Loi suprême“ und hat folgende Form: Es seien x, x_1, x_2, ... mehrere unabhängige Variablen, $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... Funktionen von x und es sei

$$0 = f(x) + x_1 f_1(x) + x_2 f_2(x) + \cdots;$$

man sucht die Entwicklung einer Funktion $F(x)$ derselben Variablen x. Die Entwicklung lautet:

$$F(x) = M_0 + \frac{x_1}{1} M(1)_1 + \frac{x_1^2}{1\cdot 2} M(1,1)_2 + \frac{x_1^3}{1\cdot 2\cdot 3} M(1,1,1)_3 + \cdots$$
$$+ \frac{x_2}{1} M(2)_1 + \frac{x_1 x_2}{1\cdot 1} M(1,2)_2 + \frac{x_1^2 x_2}{1\cdot 2\cdot 1} M(1,1,2)_3 + \cdots$$
$$+ \frac{x_3}{1} M(3)_1 + \frac{x_2^2}{1\cdot 2} M(2,2)_2 + \frac{x_1 x_2^2}{1\cdot 1\cdot 2} M(1,2,2)_3 + \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

wo man die Koeffizienten M als Funktionen „schin" nach der Formel

$$M(p, q, r, \ldots, \omega)_\mu$$
$$= (-1)^\mu \frac{\mathfrak{w}\left(df(x)\, d^2 f(x)^2 \cdots d^{\mu-1} f(x)^{\mu-1} d^\mu \left[\int f_p(x) f_q(x) \cdots f_\omega(x)\, dF(x)\right]\right)}{1\cdot 1\cdot 2\cdots 1\cdot 2\cdots \mu \left(df(x)\right)^{1+2+\cdots+\mu}}$$

berechnet, in welcher man in den Differentialen statt x den Wert einsetzt, für welchen $f(x) = 0$ ist. Im ganz speziellen Falle $f(x) = a + x$, $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = 0$ ist in dieser Entwicklung die bekannte Lagrangesche Reihe enthalten. Dieses „Problem" kann natürlich sehr leicht für Funktionen $F(x, y, z, \ldots)$, mehrerer Variablen aufgestellt werden. Nach einer Bemerkung von Wronski umfaßt es alle immanenten und transzendenten Gleichungen, alle primitiven und Differentialgleichungen.

Auf die „Loi suprême" gründet sich die sogenannte „Méthode suprême", eine Methode zur Entwicklung der Funktionen nach Polynomen. Sind in der allgemeinsten Form

$$F(x) = A_0 \Omega_0 + A_1 \Omega_1 + A_2 \Omega_2 + \cdots$$

die Funktionen $\Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_\omega$ so gewählt, daß sie der Differentialgleichung

$$\mathfrak{w}\left[d\Omega_1 d^2\Omega_2 \cdots d^\omega \Omega_\omega d^{\omega+1} F(x)\right] = 0$$

möglichst genau genügen, und haben die folgenden Funktionen $\Omega_{\omega+1}$, $\Omega_{\omega+2}, \ldots$ die Fakultätenform

$$\Omega_{\omega+\lambda} = \varphi(x)\,\varphi(x+\xi) \cdots \varphi(x + (\omega + \lambda - 1)\xi), \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots)$$

so gelangt man zu einer Entwicklung von der Form:

$$F(x) = F(a) + \frac{D_a F}{1} P_1 \cdot (x-a)$$
$$+ \frac{D_a^2 F}{1\cdot 2} P_2 \cdot (x-a)^2 + \cdots + \frac{D_a^\omega F}{1\cdot 2\cdots \omega} P_\omega \cdot (x-a)^\omega + \varphi_\omega;$$

hier sind $P_1, P_2, \cdots, P_\omega$ Polynome, die aus den Differentialquotienten der Funktion $F(x)$ gebildet sind; φ_ω aber ist der Ergänzungsterm oder der Rest der Reihe. Hier also führt Wronski den Rest der Reihen ein, den er in seinen früheren Arbeiten als ganz entbehrlich betrachtete, und spricht sogar von der Konvergenz der Entwicklung. Für $\omega = 1$,

$\omega = 2, \ldots$ erhält man die sukzessiven, immer genaueren Darstellungen der gesuchten Funktion. Diese Entwicklungsmethode von Wronski könnte man — so scheint es mir — als ein Vorstadium der späteren strengen Entwicklungen von Weierstraß und Mittag-Leffler betrachten.

Das dritte Wronskische Gesetz, nämlich das „teleologische", hat eine von der oben genannten ganz verschiedene Natur. Während nämlich die zwei ersten mit Funktionen und zwar mit stetigen Funktionen — denn nur solche überhaupt hat Wronski im Sinne — zu tun haben, begegnen wir in der Zahlentheorie Größen, die sich in diskreten, endlichen Intervallen verändern und statt auf Gleichungen auf Kongruenzen führen. Das teleologische Gesetz gibt die Auflösungsform einer solchen Kongruenz $x^m \equiv a$ (mod. M) mittels der Funktionen „aleph". Ein Teil des großen 1. Bandes des „Messianisme ou la Réforme absolue du savoir humain" (1847) ist dieser Auflösungsmethode verschiedener Probleme der Zahlentheorie gewidmet.

Diese sind nach Wronski die „höchsten Prinzipien" der Mathematik, die sich aus seiner absoluten Philosophie unmittelbar und a priori ergeben. Ich kann hier nicht auf die Frage eingehen, auf welche Weise dies möglich sei, nur darf ich vielleicht die Bemerkung nicht unterlassen, daß mich die Einsicht in die ersten handschriftlichen Arbeiten von Wronski (vom Jahre 1803 an) belehrt hat, daß er zu seinen Ergebnissen durch allmähliche und immer allgemeinere Versuche gelangt ist. Gewiß ist der Gedanke einer einheitlichen Entwicklung der Wissenschaft aus wenigen allgemeinen Prinzipien philosophisch und wissenschaftlich berechtigt, aber die Wronskischen Prinzipien können nicht als einfache irreduktible Grundsätze gelten, die der ganzen Entwicklung zugrunde liegen; sie sind vielmehr zusammengesetzte Formen, die an der Spitze stehen, und ihre Allgemeinheit ist scheinbar, weil sie sich eigentlich nur auf Funktionen einfachster Art und auf diese nur unter gewissen Voraussetzungen, die Wronski unbekannt geblieben sind, beziehen können. Wronski wollte aber die von ihm gegebene Form als eine vollendete für alle Zukunft gelten lassen; die spätere Entwicklung der Wissenschaft hat jedoch gezeigt, daß dieselbe nicht das geeignete Mittel dazu war, um die tieferen und verborgenen Eigenschaften der Funktionen zu entdecken.

In seinen ersten handschriftlichen Arbeiten ist Wronski noch ein Bewunderer der „Théorie des fonctions analytiques" von Lagrange, die er „oeuvre sublime et philosophique" nennt. Aber er hat recht schnell seine Meinung geändert. Nachdem nämlich seine oben erwähnte der Pariser Akademie im Jahre 1810 vorgelegte Abhandlung, obwohl von

Lagrange selbst günstig beurteilt, nicht die von Wronski gewünschte Aufnahme seitens der Akademie erfahren hatte, ließ er im „Moniteur" eine heftige Entgegnung erscheinen, in welcher er der Akademie die Kompetenz zur Beurteilung der philosophischen Bedeutung seiner Arbeit absprach. Seine zweite von den Kommissären der Akademie abgewiesene Abhandlung: „Réfutation de la Théorie des fonctions analytiques de Lagrange" (gedruckt Paris 1812), ist schon direkt gegen die Grundlagen des Lagrangeschen Werkes gerichtet.*) Durch diese Schrift wurde der Bruch Wronskis mit der Pariser Akademie auf immer vollzogen. Der leidenschaftliche Ton seiner späteren Werke, die Vermengung wissenschaftlicher Sachen mit persönlichen Angriffen haben der wissenschaftlichen Tätigkeit von Wronski großen Schaden zugefügt. So z. B. ist seine lesenswerte Schrift: „Philosophie de l'Infini" (1814), welche gegen Carnots Metaphysik der Infinitesimalrechnung und auch andere Derivationsmethoden kämpft, fast unbeachtet geblieben. In dieser Schrift stellt sich Wronski als ein heftiger Gegner allen den Bestrebungen gegenüber, welche den Unendlichkeitsbegriff aus der Wissenschaft verbannen wollen. Er steht auf dem Standpunkte der Leibnizschen Differentialrechnung. Für die Prioritätsfrage zwischen Leibniz und Newton ist für ihn entscheidend der Umstand, daß die Newtonsche Methode nur ein Übergang sei von den Indivisibilien zur eigentlichen Differentialrechnung, Leibnizens Entdeckung beziehe sich aber auf die wahre, abstrakte Natur dieser Rechnung. Von Eulers bekannten Grundlagen der Infinitesimalrechnung sagt er: „Quant à Euler, véritable fauteur des évanouissantes, nous ne pouvons concilier son opinion à cet égard avec la justesse et la profondeur de son esprit, si ce n'est en admettant avec peine que la profondeur et la justesse mathémathiques ne supposent pas nécessairement la profondeur et la grandeur philosophiques."

Wronski hat auch manches als praktischer Rechner zur Beherrschung mathematischer Rechnungen beigetragen. Er hat eine originelle Einrichtung logarithmischer Tafeln unter dem Titel: „Canons de logarithmes" (Paris 1827) veröffentlicht, in welchen der ganze Inhalt der siebenstelligen Tafeln auf einem Blatte enthalten ist.**) Er hat einen „Anneau

---

*) Siehe S. Dickstein, Zur Geschichte der Prinzipien der Infinitesimalrechnung. Die Kritiker der „Théorie des fonctions analytiques de Lagrange". Cantors Festschrift (Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik und Physik, 9, 1899. S. 67).

**) Das Werkchen enthält auch vier-, fünf- und sechsstellige Logarithmentafeln und den ersten Entwurf der teleologischen Methode zur Auflösung algebraischer Gleichungen.

arithmétique" und einen „Calculateur universel" erdacht, zur Ausführung nicht nur gewöhnlicher arithmetischer Rechnungen sondern auch zur Auflösung algebraischer und transzendenter Gleichungen, zur Auswertung von Integralen und zur Integration von Differentialgleichungen. Leider habe ich eine genaue Erklärung der dem „Calculateur" zugrunde liegenden Idee nicht finden können. Diese technischen Hilfsmittel sind nur ein kleiner Teil der von Wronski erdachten vielen mechanischen und physikalischen Apparate und Maschinen.

Es darf hier nicht übergangen werden, daß Wronski sich viel mit der Geschichte der Mathematik beschäftigt hat, wie man aus seinen Werken und Manuskripten sehen kann. Er besaß eine große Belesenheit in der mathematischen Literatur. Sein kleines Werkchen: „A course of mathematics, introduction determining the general state of the mathematics" (London 1821) enthält seine historiosophischen Ansichten über den Gang der Entwicklung der mathematischen Disziplinen. Die von ihm geplante „Histoire philosophique des mathématiques" ist nicht erschienen; als Teile derselben können allerdings die in der „Philosophie de l'Infini", in der „Philosophie de la Technie" und in dem „Messianisme" dargelegten historischen Ausführungen betrachtet werden.

Stünde mir mehr Zeit zur Verfügung, so würde ich mir erlauben Ihnen über die in den Wronskischen Schriften vorkommenden Fundamentalbegriffe der Mathematik, über seine Klassifikation der reinen und angewandten Mathematik, in welcher man ein Analogon zur heutigen Präzisions- und Approximationsmathematik finden kann, über seinen Plan „der Vollendung der mathematischen Reform" und über den von ihm ausführlich behandelten Zusammenhang der Grundbegriffe der Mathematik mit denen der kritischen Philosophie zu berichten. Aber die Zeit drängt und ich muß mich auf die Bemerkung beschränken, daß die Wronskischen Ideen, obwohl dieselben in den Werken von Montferrier, West und anderen*) ausführlich dargestellt worden sind,

*) Montferrier A. S., Dictionnaire des sciences mathématiques pures et appliquées, Paris 1834—1840; 2. Auflage 1844, und in italienischer Übersetzung mit Zusätzen von Gasbarri und François unter dem Titel: Dizionario delle scienze matematiche pure ed applicate etc. in 8 Bänden mit mehreren Tafeln (1838—1849). Montferrier, Encyclopédie mathématique ou exposition complète de toutes les branches des mathématiques d'après les principes des mathématiques de Hoëné Wronski in 4 Bänden s. d.; S. West, Exposé des méthodes générales en mathématiques, Paris 1886; das Verzeichnis aller Schriften, die sich auf Wronskis Theorien und Methoden beziehen, findet sich in meinem zitierten Catalogue des oeuvres imprimées et manuscrites de Wronski, Krakau 1896. (Vgl. in der jüngst [13. September 1904] erschienenen Lieferung des X. Bandes 2. Heft der Jahresberichte der D. M.-V. H. Burkhardts Bericht: „Entwicklungen nach oszillieren-

keinen merklichen Einfluß ausgeübt haben. Noch weniger sind seine Untersuchungen in der Himmelsmechanik bekannt. Was aber insbesondere seine Philosophie der Mathematik betrifft, so hat dieselbe natürlich jetzt nur ein historisches Interesse. Durch die bahnbrechenden Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie und der neuen Funktionentheorie, durch die sogenannte axiomatische Behandlung der Grundprinzipien der mathematischen Wissenschaft hat die philosophisch-kritische Arbeit in neue Bahnen eingelenkt, und wenn vor einiger Zeit von der Arithmetisierung der reinen Mathematik gesprochen wurde, so ist schon jetzt — wenn ich mich so ausdrücken darf — von der Logisierung der reinen Mathematik die Rede. Die Wronskische Philosophie der Mathematik, mag sie auch mehrere Unkorrektheiten und vielleicht übereilte Verallgemeinerungen enthalten, hat doch, ebenso wie die analogen Versuche von Fries, Apelt und anderen, ihren historischen Reiz als ein systematischer Versuch, die in der vor-Cauchyschen Periode herrschenden Ideen mit den Grundbegriffen der kritischen Philosophie zu verbinden und unter sehr allgemeine Gesichtspunkte zu bringen.

den Funktionen", § 180: „Die allgemeinen Formulierungen von Hoene Wronski" [S. 794—804]).

Über die Mathematik der Ägypter.

Von

M. Simon aus Straßburg.

Die Mathematik der alten Ägypter war dem bäuerlichen Charakter des Volkes entsprechend vom Anfang an realistisch und ist es stets geblieben. Zum Beweis könnte ich die Stelle aus Herons Metrica, von Schoene 1903 ediert, vorlesen, welche auch beweist, daß Archimedes seine Formel über die Kugel experimentell gefunden hat.

Die Ägypter selbst schrieben sich wie die Erfindung der meisten Wissenschaften, so auch die der Mathematik zu, die Gott Thot gelehrt haben sollte. Von einer Erfindung der Mathematik kann überhaupt nicht die Rede sein; mathematische Vorstellungen finden sich auch bei den Tieren. Wenn der Regenwurm ein Grashälmchen in seine Röhre schleppt und sieht, daß es vorne zu breit ist, so kehrt er es um und schleppt es mit der Spitze zuerst hinein, die Bienen haben bei ihrem Zellenbau eine schwierige Minimumaufgabe gelöst, die Spinne benutzt ihr Bein als Maßzirkel. Dann aber bestanden zwischen Ägyptern und Babyloniern, bezw. Sumerern uralte Kulturzusammenhänge, und wenigstens in der Statik, d. h. in der Kunst des Wägens, ist Ägypten von Babylon abhängig. Jedenfalls waren die Ägypter die Lehrer der Hellenen; in der ganzen Welt des Mittelmeers hatte ihre Wissenschaft den höchsten Ruf, ägyptische Feldmesser und Baumeister waren bis tief in die Römische Kaiserzeit die gesuchtesten; einen hohen Ruf hatte ihre Reißkunst und besonders ihre Astronomie, deren Beobachtungen außerordentlich lange fortgesetzt waren. Man muß freilich sagen, daß die eigentümlichen, ganz neuerdings von Borchardt erklärten Instrumente mit den unseren keinen Vergleich zulassen und nicht auf der Höhe der babylonischen standen. Eine direkte altägyptische Urkunde sprach zum erstenmal zu uns im math. Papyros Rhind, über den 1868 der Engländer Birch der Ztschr. für ägypt. Spr. einen kurzen Bericht gab; 1872 erhielt Aug. Eisenlohr in Heidelberg eine lithographische Abschrift des Textes und in fünfjähriger mühevoller Arbeit entzifferte er denselben, unterstützt von seinem Bruder Friedrich und vor allem von unserm ehrwürdigen Altmeister Moritz Cantor. Die Ausgabe ist jetzt veraltet, die Namen und die Maße sind falsch gelesen, ein Beschamaß existiert nicht, es ist pśḏ 9 mit pꜣwtj Urgott verwechselt etc., und eine neue Ausgabe durch Wellstein wäre sehr zu wünschen.

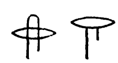
Der Papyrus beginnt mit den Worten: „Vorschrift zu gelangen zur Kenntnis aller dunklen Dinge, aller Geheimnisse, welche sind in den Dingen. Verfaßt wurde diese Schrift im Jahre 33 im 4. Wassermonat (Mesore) unter König Raâ-us (Leben spendend), nach dem Muster alter Schriften in der Zeit des Königs Raenmat vom Schreiber Aahmesu (Jahmose)“. Der König heißt nicht Raaus, sondern mit seinem Horusnamen Apophis, wie die furchtbare Schlange des Typhon, und mit seinem Königsnamen: A-wosi-re: Groß ist die Macht des Rê. Rê, nicht Ra, ist die heiße Mittagssonne, deren Gewalt nirgends fühlbarer als in Ägypten, und deren Kult sowohl im alten, als im mittlern Reich alle übrigen überwog. Der König des Musters ist Namaré, „Wahrheit eignet der Sonne“, Amenemhêt etwa um 2200. Die Muster sind, wie es scheint, gefunden von Petrie in Kahun um 1889, deren Papyri Griffiths 1897 herausgegeben hat.

Eisenlohr und mit ihm Cantor bezeichnen den Papyrus als ein mathematisches Handbuch der alten Ägypter, ja sogar als ein „Vademecum eines ägyptischen Feldmessers“. Dem gegenüber erklärte Eugen Révillout, der Herausgeber der Revue Egyptologique, in einer Note, die Cantor, wie es scheint, entgangen ist, da sie auch dem rührigen soviel jüngern Borchardt entgangen ist, das Heft ganz kurz und klar für das Heft eines schlechten Schülers, das einige Jahrhunderte später von einem Schreiber ohne alle mathematische Bildung, und solcher gab es schon im alten Ägypten, dem Jahmose, dem Sohne des Mondes, abgeschrieben und einem schlichten Landmann verkauft ist. Dieser Ansicht Révillouts schloß sich Weyr in seinem Festvortrag in der Wiener Akademie an, auch Borchardt und ich pflichten ihm bei. Das Heft wimmelt geradezu von groben Rechenfehlern, die öfter vom Lehrer mit roter Tinte, comme chez nous, korrigiert sind, öfter nur generaliter bemerkt sind. So kommt z. B. ein Exempel vor, wo der Schüler durchgehend 14 mit 9 verwechselt hat. Die Schrift ist alt hieratisch, ganz ähnlich wie beim Papyrus Ebers, unserer Hauptquelle für die Geschichte der ägyptischen Medizin. Das Hieratische verhält sich zu den Hieroglyphen, die nur in prähistorischer Zeit eine wirkliche Bilderschrift waren, wie unsere Schreib- zur Druckschrift; es entsteht durch

Ligaturen, welche die Schrift immer schwerer lesbar machten, so daß es schließlich durch das Demotische ersetzt wurde. In unserem Beispiel schreibt der Lehrer nur eine 14 an den Rand; er läßt, wenn die Exempel falsch sind, Proben machen, gibt dieselbe Aufgabe mit anderen Zahlen. Gelegentlich gibt er selbst Aufgaben an, die ganz anderen Teilen der Mathematik angehören. Es kommen auch Fehler genug vor, die auf Rechnung des Schreibers gehen.

Die Ansicht Révillouts ist schon an sich wahrscheinlich, da die große Mehrzahl der auf uns gekommenen Papyri Schülerhefte sind. Es gab schon im alten Reich ein ausgedehntes Schulwesen, die Schulen sbo waren ähnlich wie die französischen Collèges Privatschulen, auch Tempelschulen etc.; sie waren ganz und gar realistisch, ihr Zweck war nicht die formale Geistesbildung, von toten Buchstaben abgezogen, sie übersetzten nicht wie wir den Julius Caesar Shakespeares oder Bismarckreden ins Lateinische, sondern sie hatten Fachschulen für Ackersleute, Baumeister, Feldmesser, Intendanten, Kaufleute etc. Unser Heft entstammt einer Landwirtschaftsschule. Es schließt mit den Worten: Fange das Ungeziefer und Mäuse, vertilge das Unkraut aller Art, bitte Gott Rê um Wärme, Wind und um hohes Wasser. Das letzte war die Hauptsache. Ägypten, sagt Herodot, ist ein Geschenk des Nils; damit das Jahr gut war, mußte die Nilhöhe am Pegel von Memphis 16 Ellen à 0,538 m betragen, bei 18 war es ein gesegnetes, was darüber war, war vom Übel.

Aber auch abgesehen von dem Spruche bezeugt es der Inhalt des Heftes; die Beispiele sind zum weitaus größten Teile direkt für den Gebrauch der Landwirtschaft bestimmt. Ein nicht unwichtiges Argument für Révillout gab mir Spiegelberg; der Papyrus soll nämlich vorzüglich erhalten sein, was äußerst unwahrscheinlich bei einem vielgebrauchten Handbuch. Es ist übrigens keineswegs ausgeschlossen, daß der Schreiber zwei verschiedene Hefte benutzt hat.

Der Inhalt ist völlig bei Cantor I angegeben; doch muß ich die Bruchrechnung erwähnen, die den Beginn macht; sie rechnen nur mit Brüchen mit dem konstanten Zähler 1, eine Ausnahme bildet der Bruch $\frac{2}{3}$  neb. Dieselbe Bruchrechnung findet sich im Papyrus von Kahun, der $1/2$ Jahrtausend älter ist; mit denselben Brüchen rechnet Heron, und der griechische Papyros von Achmin, den Baillet 1892 untersuchte und auf 7—800 n. Chr. setzte, zeigt genau dieselbe Rechnung, die sich also über 3000 Jahre intakt erhalten hat, ein sprechendes Zeugnis für das zähe Beharrungsvermögen der Ägypter. Ich füge als ein zweites Beispiel eines solchen Beharrungsvermögens die Aufg.

No. 79 an, welche beweist, daß den Ägyptern wie die arithmetische Reihe (Aufg. 64) auch die geometrische Reihe um 2000 v. Chr. bekannt war. Es ist von einer Leiter die Rede (Sutek), welche aus den Sprossen 7, 49, 343, 2401, 16807 besteht, und neben diesen 5 Zahlen stehen Namen, welche etwa Person, Katze, Maus, Gerste, Maß heißen. Eisenlohr glaubte, daß dies die Namen der 5 ersten Potenzen seien, während doch erst ganz neuerdings dynamo dynamis für die 4. Potenz bei Heron konstatiert ist. Die Aufgabe blieb rätselhaft, bis Rodet dieselbe Aufgabe im Liber abaci des Leonardo Pisano (1200) fand, der aus Afrika stammt. Die Aufgabe heißt also: 7 Personen haben je 7 Katzen, jede Katze frißt 7 Mäuse, jede Maus 7 Ähren, jede Ähre bringt 7 Maß. ? ist die Summe. Die Rechnung geschieht genau nach der richtigen Formel $\frac{a^n - 1}{a - 1}a$. Nicht vielleicht, wie Cantor meint, sondern unzweifelhaft war den Ägyptern damals die Summation der geometrischen Reihe bekannt, und durch 3000 Jahre hat sich die Aufgabe und ihre Berechnung in Nordafrika gehalten.

Als ein Beispiel der Mühe und des Scharfsinnes, welchen Cantor angewandt hat, erwähne ich die Gleichung 1. Grades in No. 28. Sie lautet:

nb(?) m iw, r-ḥmt m ꜥn, mt wḏꜣ

$\frac{2}{3}$ im hinzugehen, $\frac{1}{3}$ im hinweggehen, 10 bleibt übrig. Die Übersetzung ist

$$x + \tfrac{2}{3}\,x - \tfrac{1}{3}\,(x + \tfrac{2}{3}) = 10.$$

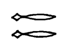
Die Rechnung ist falsch, das Resultat richtig; noch komplizierter ist No. 29.

Zu den Gleichungen ersten Grades eine Bemerkung: Rodet, der tüchtige Sanskritist und Indomane, hat im Journal Asiatique von 1882 einen Artikel geschrieben: Les prétendus problèmes d'Algèbre du manuel du calculateur égyptien, worin er einerseits, wie Révillout ihm nachgewiesen hat, Eisenlohr und Cantor stark geplündert hat, andererseits Cantor heftig angegriffen hat, der gesagt habe, daß die Ägypter die Gleichungen ersten Grades ähnlich wie wir behandelten. Rodet meint, daß sie sich der regula falsi, d. h. des Probierens, bedient hätten. Nun sagt schon Cantor, daß unsere Methode dem Grunde nach nichts anderes ist. Daß aber die Ägypter in der Tat die regula falsi als ausgesprochene Methode benutzten, geht nicht nur aus Aufg. 40, einer Gleichung ersten Grades mit zwei Unbekannten, hervor, sondern noch mehr aus den quadratischen Gleichungen, die nicht bei Jahmose vorkommen, und auch von Cantor, 2. Ausgabe, Teil 1, noch nicht erwähnt werden konnten.

Als Griffiths 1897 die Petrie-Papyri aus Kahun und Gurob herausgab, fand sich dort auf Taf. 8 das erste Beispiel einer quadratischen Gleichung (S. 17); 1900 hat Schack im Berliner Papyrus 6619 aus dem mittleren Reich ein zweites gefunden:

Ein ferneres [Beispiel der Verteilung einer gegebenen Fläche auf mehrere Quadrate]. Wenn dir gesagt wird [100 Quadratellen auf zwei unbekannte Größen zu verteilen] und [$\frac{3}{4}$ der Seite der] einen Größe für die andere [zu nehmen]. Bitte gib mir [jede der] unbekannten Größen an.

So haben wir also $x^2 + y^2 = 100$, $x : y = 1 : \frac{3}{4}$. Die Ausrechnung geschieht mit der regula falsi, wie folgt:

Mache ein Rechteck von immer 1 und nimm $\frac{3}{4}$ [der Seitenlänge] der einen für die andere, [das gibt $\frac{3}{4}$]. Multipliziere dies mit $\frac{3}{4}$, das gibt $\frac{9}{16}$. Wenn so die eine Größe zu 1, die andere zu $\frac{3}{4}$ angenommen ist, so vereinige diese beiden Größen, das gibt $\frac{25}{16}$. Nimm die Quadratwurzel daraus, das gibt $\frac{5}{4}$, nimm die Wurzel der gegebenen, das gibt 10, teile 10 durch $\frac{5}{4}$, der Quotient ist 8. — Das Wurzelzeichen tm ist , dem unseren so ähnlich, daß es gar nicht unmöglich ist, daß unseres auf dies zurückgeht. Das Divisionszeichen ist hier , sonst Differenz. Der Rest ist zerstört, doch ist noch so viel zu erkennen: Nimm $\frac{3}{4}$ von dieser 8, gibt 6.

Das Beispiel des Kahuner Papyrus bezieht sich darauf, 120 Kubikellen in 10 Balken von der Höhe einer Elle zu zerlegen, deren Seiten sich wie $1 : \frac{3}{4}$ verhalten, also $xy = 12$ und $x : y = 1 : \frac{3}{4}$. Der Verfasser geht hier davon aus, daß der Inhalt des Rechtecks mit $\frac{4}{3}$ multipliziert das Quadrat der großen Seite gibt und findet so $x = 4$, $y = 3$.

Das 3. Beispiel hat Schack 1903 aus demselben Papyrusfragment entziffert, es handelt sich um $x : y = 2 : 1\frac{1}{2}$ und $x^2 + y^2 = 400$; wird dann probeweise $x = 2$, $y = 1\frac{1}{2}$ gesetzt, so gibt es $6\frac{1}{4}$, die $\sqrt{}$ ist $2\frac{1}{2}$, dies ist $\frac{1}{8}$ von 20, also ist $x = 16$, $y = 12$.

Wir sehen, das Dreieck 3, 4, 5 nicht nur, sondern auch die Ähnlichkeit war den Ägyptern schon 2000 v. Chr. bekannt.

Ich komme zur Geometrie. Die Quadratur des Zirkels findet sich in No. 41, 48, 50 des Papyrus Rhind; sie setzt den Kreis gleich einem Quadrat, dessen Seite $\frac{8}{9}d$, d. h. $\pi = 3{,}16$, eine Übereinstimmung mit dem indischen Näherungswert $\sqrt{10} = 3{,}162$, welche zu denken gibt. Wie sie diesen erstaunlich genauen Wert erhielten, scheint mir klar; sie nahmen einen Zylinder mit der Höhe h und dem Durchmesser d, füllten ihn mit Wasser und gossen dies Wasser in einen Balken mit dem Grundquadrat d, stieg das Wasser bis zur Höhe η, so war $x d^2 h = d^2 \eta$

und $x = \frac{\eta}{h} = \frac{64}{81}$. Wie selbstverständlich es war, daß man das Volumen eines Gefäßes von konstantem Querschnitt proportional seiner Höhe setzte, kann man bei Heron lesen. Ich schließe hier gleich den Inhalt der Halbkugel an und folge Borchardt, Ztsch. Bd. 35, 1897, S. 150. Im ersten Hefte der Kahuner Papyri auf Tafel 8 ist eine Figur gezeichnet und von Griffiths richtig gelesen und umschrieben, aber nicht richtig erklärt, obwohl er sagt, es scheint, daß damit ein kreisförmiger Fruchthaufen, dessen Durchmesser 12, und dessen Höhe 8 sind, gemeint ist. Borchardt hat hierin die Berechnung eines halbkugelförmigen Fruchthaufens vom Durchmesser 8 Ellen erkannt, das Resultat ist $1365\frac{1}{3}$, also in 1/10 Kubikellen ausgedrückt. Für π ergibt sich 3,2, die Näherung ist ungenauer als bei Jahmose. Cantor hat die Interpretation Borchardts nicht akzeptiert, mir scheint sie unwiderleglich, wenn man die Schlußbemerkung bei Borchardt beachtet. Das Resultat ist durch Ausmessen solcher halbkugelförmigen Haufen gefunden und darnach die Regel $32d^3/16$. Dabei viele Beobachtungsfehler. Die mathematische Form des Haufens ist kaum herzustellen, die Hohlmaße, das Hin und seine Teile (Hin $= 0{,}45$ l) nicht immer gleichgefüllt, und endlich lassen sich von einem größeren Getreidehaufen infolge des größeren Drucks und der dichteren Lagerung der Körner in seinem Innern in praxi mehr kleinere Maße füllen, als man theoretisch rein nach dem Volumen erwarten sollte. Die Aufgabe, zu ermitteln, wieviel kleine Maße sich aus einem gegebenen großen füllen lassen, gibt, so gefaßt, auch unsern heutigen Physikern Rätsel auf; daher ist es gar nicht wunderbar, daß die alten Ägypter sie nicht aufs Haar lösen konnten. M. H., Sie finden ganz ähnliche Aufgaben z. B. in der Korrespondenz Quetelet bearbeitet.

Der 3. Abschnitt des Papyrus Rhind, der eigentlich geometrische Teil, handelt von der Ausmessung der Felder, kreisförmiger, dreieckiger, trapezförmiger und solcher, die in dergleichen zerlegt werden. Cantor faßte die Dreiecke und Trapeze als gleichschenklige und vindizierte den Ägyptern den groben Fehler, das gleichschenklige Dreieck zu bestimmen als halbes Produkt der Grundlinie und des Schenkels, bezw. das Trapez als halbes Produkt der Mittellinie und des Schenkels. Und diesen Fehler sollen sie bis nach Christo, hunderte von Jahren nach Euklid und Heron begangen haben, und Cantor hat an seiner Auffassung festgehalten, trotz der Kritik Révillouts von 82 und der ganz unabhängigen Borchardts, die darauf hinwiesen, daß die Figuren ganz rohe Handzeichnungen sind, wie Sie sich bei No. 48 überzeugen können, wo statt des Kreises ein rohes Siebeneck gezeichnet ist, und daß es so gut rechtwinklige wie gleichschenklige Dreiecke, bezw. Trapeze darstellen könne. Allerdings stützte sich Cantor auf die berühmte Schenkungsurkunde von Edfu des Ptolemäus XI., Alexander I., etwa um 100 v. Chr., mit ihren 164 Kolumnen, von denen Lepsius schon 1855 die ersten 66 ediert hatte. Die Felder sind viereckig, die Seiten paarweise angegeben und schon Lepsius hatte erkannt, daß ihre Berechnung meist nach der Formel $\frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2}$ vorgenommen ist, aber keineswegs ausnahmslos. Sieht man sich aber die Urkunde an, welche Brugsch im Thesaurus inscriptionum von 1884 Bd. 3 ediert hat, so sieht man, daß es sich um höchst genaue Ersetzung der Irrationalitäten durch Rationales handelt.

Aber, meine Herren, die Angaben sind in dubio immer zu groß; in der Urkunde rühmt sich der Köng seiner Geschenke an den Gott. Das neue Reich und die folgenden Regierungen hatten den alten Feudalstaat zertrümmert, sie stützten sich auf die auch sonst nicht unbekannte Verbindung von Altar und Thron, id est Soldaten, eine Verbindung, in der dem Altar erfahrungsgemäß der Löwenanteil zufällt, man denke an die ungeheuren Schenkungen im Papyrus Harris, und da war es natürlich, daß der König in solchen Urkunden lieber zu viel als zu wenig sagte. Übrigens hat Cantor schon sehr richtig bemerkt, daß auch unsere Feldmesser, und nach meiner Information die mathematisch gebildeten, sich Wurzelausziehungen gerne sparen.

Aus den mit unendlichem Fleiß von Wilcken gesammelten Ostraka, das sind im wesentlichen Steuerquittungen auf dem billigsten Materiale, auf Tonscherben, wissen wir, daß es eine eigne Steuer gab, *περὶ γεωμετρίας*; wir wissen, daß die Ägypter mutmaßlich schon in ältester Zeit eine Reichsbank hatten, ferner eine Plankammer. Statt des Tabakmonopols hatten sie das Ölmonopol; jedes Fleckchen, das einen Ölbaum trug, wurde vermessen, jedes Stück Weizenland, von dem eine eigene Abgabe zur Ernährung der Soldaten gezahlt wurde. Herodot berichtet von den jährlichen Kontrollmessungen des Sesostris, und dann sollten sie solche grobe Fehler begangen haben? Aber ich kann für Révillout und Borchardt einen Beweis bringen; hier sehen Sie die Figuren des Codex Konstantinopolitanus der Metrica des Heron, zwei Dreiecke und die darin gefällten Höhen; die Winkel weichen von einem rechten mehr ab als in den Figuren bei Jahmose. Das gleiche gilt natürlich auch von den Trapezen, und die Zerlegung geschah in rechtwinklige Dreiecke und Trapeze. Die Ägypter wußten wie wir, daß das Dreieck $\frac{1}{2}\, gh$ ist.

Ich gehe nun zu der wichtigsten Streitfrage, zur Pyramidenberechnung und damit zur Trigonometrie und Ähnlichkeitslehre der Ägypter über. Daß sie mit dem Begriff der Ähnlichkeit vertraut waren, folgt schon aus den quadratischen Gleichungen. Sie überzogen die Wände der Tempel mit einem Netz von Quadraten und bildeten dann die Vorlage in geändertem Maßstabe ab. Eine unvollendet gebliebene Kammer in dem Grabe Sethis I. aus der 19. Dynastie, etwa um 1200, des Vaters des großen Ramses II., zeigt uns dieses Netz, in dem wir wohl auch Anfänge des Koordinatensystems erblicken müssen.

Die Trigonometrie findet sich in IV, Aufg. No. 56—60. Die Pyramide wurde bekanntlich in rechtwinkligen Absätzen gebaut und dann mit den Quadern bekleidet, und es galt, den Böschungswinkel zu bestimmen.

Es kamen 4 Abmessungen in Betracht (siehe Fig. 1); bei den ersten 4 Aufgaben zwei, die 1) wḫ3 ṯb-t (wörtlich: Suchen des pr m wś(ḫ) Fußsohlen), und die 2) nach Eisenlohr: die aus der Säge heraustretende Linie, nach Révillout und Borchardt in Übereinstimmung mit Brugsch die aus der Breite heraustretende, und ad 60 3) die ḳ3j n ḥrw, unzweifelhaft Höhe, und 4) senti, unzweifelhaft Basis, wie das Koptische bekundet.

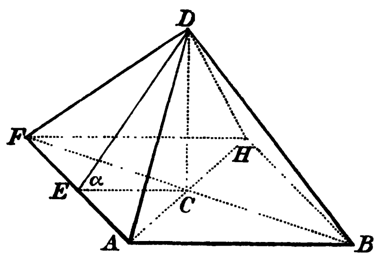


Fig. 1.

Es wird dann nach dem (śḳd) gefragt; es ist dies das Verhältnis von $\frac{1}{2}1 : 2$, bezw. $\frac{1}{2}3 : 4$, also eine trigonometrische Funktion, die zur Bestimmung des Winkels dient. Eisenlohr leitet śḳd von ḳd ähnlich machen ab.

Cantor und Eisenlohr mit ihm entscheiden sich, die wḫ3 ṯb-t als die Diagonale der Grundlinie und die pt m wś(ḫ) als die sichtbare Seitenkante aufzufassen, und erklären in den 4 ersten Aufgaben das śḳd als $^1/_2$ Diagonale: Seitenkante, d. h. als Cosinus des Neigungswinkels zwischen Kante und Grundfläche.

In Aufgabe 60 sind 3) und 4), was unbestreitbar war, als Höhe der Pyramide und Grundlinie, DC und AB, erklärt, und dort wird der śḳd auch von Eisenlohr und Cantor als Cotang. des Böschungswinkels erklärt. Die Aufgabe 60 ist entstellt, es handelt sich dort um eine în (on?) genannte viel steilere Pyramide, vermutlich (Révillout) um einen Monolithen.

Ein în, 15 Ellen sein senti, 30 sein ḳ3j, laß mich seinen śḳd wissen; multipliziere 15 mit $\frac{1}{2}$, das ist $7\frac{1}{2}$; multipliziere $7\frac{1}{2}$ mit 4, um 30 zu erhalten; sein rḫi ist 4 . . ., das ist der zugehörige śḳd (nämlich $\frac{1}{4}$).

Eisenlohr setzt hinzu, die Bedeutung von rḫi ist unklar, was jedoch ohne Einfluß auf die Aufgabe ist. Nun rḫi ist die Tangente, und die Ägypter kannten die Funktion tangens auch. Révillout und Borchardt, 1882 und 1893, wenden sich gegen Eisenlohr und Cantor vom Standpunkt des Architekten. Die Kantenlänge hat keinen praktischen Wert, obwohl sie direkt meßbar ist, was die Diagonale nicht einmal ist.

Der Winkel zwischen beiden hat für den ausführenden Steinmetz gar kein Interesse, da er sich an seinem Werkstück von selbst ergibt, wenn die Neigung der beiden zusammenstoßenden Seitenflächen richtig angelegt ist. Setzt man pr m wś(ḫ) = ḳ3j n ḥrw, und wḫ3 ṯb-t = senti, so ist das śḳd in allen Fällen die Contangente des Böschungswinkels.

Révillout leitet śḳd ab als intensivum (!) von ket, sich bewegen, und übersetzt es als beweglichen Punkt am Richtscheit. Das Richtscheit, ḥapt, kommt oft in Abbildungen vor, bisweilen haben es die Könige in der Hand; seine aufrecht stehende Kathete war eine Elle, die horizontale war in die 28 Teile, 7 Palmen zu 4 Finger, geteilt, und unmittelbar aus dem śḳd also, dem veränderlichen Punkt, wurde durch eine Schnur der Böschungswinkel gegeben. Diese Erklärung ist sachlich wahrscheinlich, wenn auch grammatisch nicht haltbar. Wohl kommt es oft genug vor, daß die Ägypter, deren Reich ja aus zwei verschiedenen zusammengewachsen ist, zwei Ausdrücke für dieselbe Sache haben: Die Pyramide heißt smer und ìn, der Kreis deben und ḳd, aber daß sie zwei verschiedene trigonometrische Funktionen mit dem gleichen Namen benennen sollten, wäre eine Ungeheuerlichkeit. Aber Borchardt und Eisenlohr haben beide die Rechnung zu Hilfe genommen Eisenlohr hat die Winkel an den Pyramiden von Cheops, Chephren und Mykerinos gemessen, und sie stimmen so ziemlich. Mich wundert das nicht, das kommt uns Lehrern oft genug vor. Borchardt hat die Böschungswinkel berechnet; No. 1 gibt genau auf die Sekunde den Winkel der unteren Hälfte der südlichen Steinpyramide von Darchur, No. 2, der viermal auftritt, genau die Böschung der 2 Pyramiden von Gizeh, wie sie Petrie an Ort und Stelle gemessen hat, und No. 60 genau den von Petrie gemessenen Winkel der Mastaba von Meidum 1892. Und man kann nachweisen, daß die alten Architekten nach sogenannten Leeren arbeiteten, denn an der Eckenwinkelmauer der Mastaba zu Meidum (Petrie) ist die Vorzeichnung gemäß No. 60 erhalten.

Und nun noch eins, meine Herren, was ich Ihnen trotz der vorgerückten Zeit nicht vorenthalten darf. Nicht Leonardo, nicht Dürer, nicht Lambert und Monge haben die Darstellende Geometrie erfunden:

Hier, meine Herren, sehen Sie „Werkzeichnungen“ der alten Ägypter; auf dem Pylon des Nektanebustempels auf der Insel Philae, an der Stelle, von wo der Bauführer den Bau am besten übersehen konnte, sind Grund- und Aufriß, als bewußte Orthogonalprojektionen, eingeritzt. Und noch liegen Säulen da, die genau nach diesen Rissen gearbeitet sind. (Es wurde vorgelegt, Borchardt, Altägyptische Werkzeichnungen, Ztschr. für äg. Spr., 1896.)

Gebrauch und Mißbrauch historischer Benennungen in der Mathematik.

Von

H. G. ZEUTHEN aus Kopenhagen.

Historische Benennungen, besonders Personennamen, werden in der Mathematik sehr oft an einen Satz, eine Formel, eine Methode usw. angeknüpft. Oft geschieht dies wesentlich nur, um überhaupt einen Namen zu haben, der dazu dienen kann, den betreffenden Gegenstand zu bezeichnen; zur selben Zeit will man aber gewöhnlich einen geschichtlichen Zusammenhang bewahren und wohl namentlich die Verdienste früherer Mathematiker in dankbarer Erinnerung festhalten. Solche Benennungen haben auch in der Tat dazu gedient, auch den nichthistorischen Mathematikern einige Vorstellungen vom Ursprunge der von ihnen behandelten Sachen beizubringen und ihnen Verehrung für ihre Vorgänger einzuflößen; aber eben weil dieses gut ist, gilt es, die Benennungen so zu wählen, daß diese Vorstellungen richtig werden und die Verehrung gebührend angebracht sei. Wir kennen wohl alle viele Beispiele davon, daß dieses keineswegs überall erreicht ist, und daß also künftig eine Verbesserung der Verhältnisse zu wünschen ist. Dies muß geschehen teils durch eine mäßige Abänderung der schon landläufigen, gar zu irreleitenden Benennungen, teils dadurch, daß wir scharf Front machen gegen alle Neubildungen, die nicht die wirklichen historischen Verhältnisse respektieren. Ja, über solche allgemeine Prinzipien könnten wir wohl alle einig werden. Zu ihrer richtigen Anwendung kommt man aber vielleicht am besten durch eine Diskussion, und um eine solche hervorzurufen, wähle ich eben solche Beispiele, über welche ich nicht im voraus sicher bin, volle Einigkeit zu finden.

Erstens, die Abänderung älterer, allen bekannten Benennungen muß, wie ich sagte, eine mäßige sein. Wenn auch eine solche Benennung den wahren Ursprung nicht richtig bezeichnet, kann auch ihr Gebrauch schon der Geschichte angehören und muß daher eben von

Historikern gewissermaßen respektiert werden. In einer neuen Abhandlung, wo ich von vorpythagoräischen Kenntnissen des Pythagoräischen Satzes und Pythagoräischer Dreiecke in Indien spreche, hege ich gar kein Bedenken, doch fortwährend diese bekannten Benennungen zu benutzen. Und Pythagoras verdient es wohl. Mit ihm fängt nämlich nach allen Berichten die griechische Behandlung der Geometrie an, diejenige, von welcher die jetzige eine Fortsetzung ist, und sie setzt eben an mit der Benutzung des genannten Satzes, welcher schon früh zur Entdeckung inkommensurabler Größen und damit zu dem Gebrauch von Beweisen führte, welche von den rein numerischen Beziehungen unabhängig waren.

Ein anderes Beispiel: Man erzählt uns oft, daß man vor allem die natürlichen Logarithmen nicht Npersche Logarithmen nennen darf; denn diejenigen, welche Neper benutzte, waren etwas ganz anderes. Nun, der Name „natürliche Logarithmen“ ist an und für sich gut und bezeichnend. Man bedarf also eigentlich nicht des anderen; aber eben als Historiker möchte ich gern einen Namen festhalten, der, wie es mir scheint, sehr gut und treffend eben an Nepers Verdienste erinnert. Die faktischen Abweichungen seiner Logarithmen von den natürlichen rühren erstens von einem kleinen Rechenfehler her, aber um seine Logarithmen zu kennen, muß man sich an seine Definition halten. Diese fällt in seiner Sprache durchaus mit der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{r}$$

zusammen, mit der Grenzbedingung, daß $x = 0 \quad y = r$ geben soll. Also ist sein Logarithmus x durch

$$\frac{x}{r} = -\log\frac{y}{r}$$

bestimmt. Er kennt zwar nicht die hier benutzte Sprache; denselben Gedanken drückt er aber geometrisch oder kinematisch mit derselben Genauigkeit aus, die wir durch diese Sprache erhalten. r ist 10^7; es ist also nur eine höhere Einheit, die den Gebrauch von Dezimalbrüchen ersetzt, und das Vorzeichen rührt nur davon her, daß Neper vorzugsweise sein Hilfsmittel auf echte Brüche $\left(\frac{y}{r} = \sin x \text{ oder } \cos x\right)$ anwenden will. Diese Zufälligkeiten dürfen aber nicht daran hindern zu sehen, daß Neper denjenigen allgemeinen Gesichtspunkt einnimmt und klar ausdrückt, der uns auf die Grundzahl e führt, einen Gesichtspunkt, von welchem aus er wirklich die logarithmische Funktion definiert, und auf welchen man zurückkommen mußte, um die erste, nicht algebraisch lösbare umgekehrte Tangentenaufgabe zu behandeln. Er verdient daher genannt zu werden, wenn unsere Schüler, die früher Logarithmen nur durch oft wenig strenge Erweiterungen des Potenzbegriffes kannten, der ganz allgemeinen Definition durch eine Differentialgleichung begegnen. Zwar sind Nepers Logarithmen nicht ganz identisch mit den natürlichen. Diese sind aber eben nach Nepers Prinzipien gebildet und dürfen daher wohl Nepersche genannt werden.

Als Beispiel einer landläufigen aber irreführenden Benennung möchte ich erstens den Apollonischen Satz nennen. Man denkt dabei an die Eigenschaft einer Ellipse oder Hyperbel, daß die Quadrate paralleler Halbsehnen den Rechtecken der Stücke des ihnen entsprechenden Durchmessers proportional sind. Eben in dieser Form kennt schon Archimedes die so ausgedrückte Gleichung eines Kegelschnittes und sie zeigt sich als der damalige Ausgangspunkt der planimetrischen Untersuchungen über die Kurven. Diesen Ausgangspunkt nimmt auch Apollonios, dessen abweichende Ausdrucksweise nicht die modernen Geometer daran gehindert hat, dem Satz, den sie nach ihm benennen, die Archimedische Form wiederzugeben. Der Name „Satz von Apollonios" ließe sich vielleicht verteidigen, wenn man dadurch seine Bedeutung in der griechischen Lehre von den Kegelschnitten, die wir wesentlich durch Apollonios kennen, hervorzuheben wünschte. Die Sache stellt sich aber anders dadurch, daß der geometrisch recht unwesentliche und daher in der modernen Wiedergabe unberücksichtigte Unterschied der Formen, welche Archimedes und Apollonios demselben Satz geben, eine historische Bedeutung gehabt hat. Apollonios knüpft ihn an die antike Darstellung von Gleichungen zweiten Grades, die elliptische, hyperbolische und einfache oder parabolische Flächenanlage, und hat daran weiter die heutigen Namen der Kurven geknüpft. Dieser Ursprung der Benennungen, die wir alltäglich anwenden, verdient natürlich bekannt zu sein. Wenn man ihn aber mit dem sogenannten Satze von Apollonios in Verbindung bringt, diesem noch dazu die ältere Archimedische Form gibt, statt nur von der neuen Apollonischen Form eines auch vor ihm sehr benutzten Satzes zu sprechen, dann gibt man ausdrücklich eine falsche Vorstellung von der vorapollonischen Lehre von den Kegelschnitten. Um solches zu vermeiden, ist es vorzuziehen, den Satz in unpersönlicher Weise zu bezeichnen. Man könnte ihn die Durchmessergleichung (und im wichtigsten Spezialfalle Achsengleichung) der Kegelschnitte nennen. Befürchtet man aber dadurch der analytischen Geometrie vorzugreifen, so kann man ihn mit einem altertümlicheren Ausdruck das Durchmesser*symptom* nennen.

Einen anderen Satz, der schon vor Apollonios bekannt war, den aber Apollonios namentlich in seinem dritten Buche zu seinen wunderbaren Untersuchungen über solche allgemeine Eigenschaften der Kegelschnitte benutzt, die nicht an das Zentrum, an Durchmesser, Achsen oder Brennpunkte anknüpfen, hat man den Satz von Newton genannt. Er sagt aus, daß, wenn man von verschiedenen Punkten in zwei gegebenen Richtungen Transversale an einen Kegelschnitt zieht, die Rechtecke der vom Kegelschnitte abgeschnittenen Stücke, vom Punkte aus gerechnet, immer dasselbe Verhältnis haben. Newton gehört gewiß die Erweiterung dieses Satzes auf alle algebraischen Kurven. Besonders aber beschäftigt auch er sich mit seiner Anwendung auf Kegelschnitte, nämlich im interessanten geometrischen Abschnitte der *Principia.* Und er ist soweit davon entfernt, diesen Satz als eine eigene Erfindung zu beanspruchen, daß er vielmehr bemüht ist, durch solche Hilfsmittel, welche den Alten zu Gebote standen, ihre Bestimmungen der sogenannten Örter zu drei oder vier Geraden wiederzufinden. Den in diesen Bestimmungen enthaltenen Satz den „Satz von Pappos“ zu nennen, kommt mir nicht zutreffend vor, da es eben aus den Besprechungen von Pappos selbst und von Appollonios hervorgeht, daß Apollonios und teilweise schon Euklid die betreffenden Bestimmungen kannten.

Wichtiger und hoffentlich erfolgreicher als die Kritik solcher eingebürgerten Bezeichnungen dürfte jedoch die Bekämpfung solcher neuen Bezeichnungen sein, die eben in unseren Tagen entstehen. Auf solche Neubildungen zielen daher meine Bemerkungen wesentlich ab, und zwar besonders auf diejenigen, welche die hervorragenden Untersuchungen unseres neuen Jahrhunderts über die Prinzipien der Geometrie betreffen.

Hier tut es mir zunächst recht leid, die Umänderung des Gebrauches der Bezeichnung „Pascals Satz“ zu sehen. Dies war bisher eine Benennung, welche die größtmögliche historische Berechtigung hatte. Vor Pascal hatte niemand daran gedacht, die vor ihm zwar nicht ganz unbekannte Beziehung zwischen sechs willkürlichen Punkten eines Kegelschnittes als eine lineare Konstruktion darzustellen, geschweige denn ihr eine so einfache und prägnante Form zu geben. Und Pascal sah die volle Bedeutung des dadurch gewonnenen Resultates ein, nämlich daß man darauf die ganze Lehre von den Kegelschnitten aufbauen kann. Daher erweckte der Satz gleich die Bewunderung des damaligen besten Kenners Desargues, der ihn la Pascale nannte. Ob Pascal bemerkt hat, daß seine Anwendung auf einen von zwei Geraden zusammengesetzten Kegelschnitt eine an und für sich interessante Konfiguration darbietet, davon wissen wir gar nichts, oder vielmehr wir haben gar keinen Grund es zu glauben. Jedenfalls gehört der ursprüngliche „Pascalsche Satz“ der Lehre von den Kegelschnitten an, und zu dieser Lehre gehören auch die Fortsetzungen von Kirkman, Steiner und viele andere. Wenn man dagegen in der Lehre von den Prinzipien davon spricht, welche Voraussetzungen nötig sind, um den „Satz von Pascal“ zu beweisen, oder fragt, ob man ihn selbst als Voraussetzung aufstellen muß, oder von einer nicht Pascalschen Geometrie spricht, das heißt einer Geometrie ohne den Satz von Pascal, so ist dieser Satz gar nicht der Satz von Pascal in der Bedeutung, in welcher man bisher mit dem besten Recht diese Benennung gebraucht hat. Daher weiß man jetzt, wenn eine Abhandlung den Titel „Beweis des Satzes von Pascal“ hat, gar nicht, wovon die Rede ist.

In diesem Falle erklärt man jedoch in seinem Kontexte völlig, in welchem begrenzten Sinne man den Namen „Pascals Satz“ nimmt, und verrückt also nicht das Verhältnis zu älteren Untersuchungen. Durch andere Benennungen entsteht aber eine solche Verrückung. Dies dürfte der Fall sein, wenn man die eigentlichen geometrischen Voraussetzungen „Axiome“ nennt und nicht wie Euklid „Postulate“ *αἰτήματα*. Zwar wissen wir von Aristoteles*), daß das Wort Axiom auch die mathematischen Voraussetzungen bezeichnet, und zwar solche, die bei Euklid als *κοιναὶ ἔννοιαι* „allgemeine Begriffe“ auftreten. Schon Aristoteles hebt aber ihren allgemeinen und nicht nur geometrischen Charakter hervor. Eben dadurch wurde diese Bezeichnung so ausgetreten, daß Euklid (jedenfalls Nachfolger von Aristoteles) eines neuen Wortes für die eigentlichen geometrischen Voraussetzungen bedurfte und dann *αἰτήματα* erfand. Dies Wort sollte zwar den Problemen so entsprechen, wie die *κοιναὶ ἔννοιαι* den Theoremen. Wie die Figurauffassung bei Euklid eben an die Probleme anknüpft, mußten auch seine Forderungssätze der exakten Figurauffassung den Grund und Boden bereiten. Daß sie es faktisch tun, wissen wir jetzt, da namentlich das berühmte 11. Axiom als 5. Postulat seinen richtigen historischen Platz gefunden hat. Das Wort Postulat, Forderung ist auch bezeichnend. Der Geometer hat sich als Geometer gar nicht darum zu kümmern, woher das in den so bezeichneten Sätzen enthaltene Wissen kommt, sondern nur darum, was ihm nötig ist, um darauf ein exaktes System aufzuführen, und dann fordert er dieses. Aber eben dieselbe Betrachtung macht man in der jetzigen Zeit geltend. Wie ausgetreten ist auch in unserer Zeit das Wort Axiom von Philosophen und Erkenntnistheoretikern, die zwar mit der Bearbeitung des früher sogenannten apriorischen Wissens eine sehr nützliche, aber nicht eben eine mathe-

*) Wenn ich hier und im folgenden auf Aristoteles verweise, beziehe ich mich auf eine neue Schrift von Heiberg, Mathematisches zu Aristoteles (Abh. zur Geschichte der math. Wissensch. XVIII).

matische Arbeit geleistet haben. Jetzt haben die Geometer daher denselben Grund wie zur Zeit Euklids diese Benennung loswerden zu wollen, und sie können da nichts Besseres tun, als durch den Gebrauch desselben Wortes ihre Übereinstimmung mit seinen Bestrebungen zu bezeichnen. Wie er, denkt man ja eben auch jetzt an die Wirkungen der verschiedenen Voraussetzungen in der Geometrie selbst. Man prüft sie dadurch, daß man Geometrien baut, wo diese oder jene Voraussetzung fehlt, die Nicht-Euklidische, Nicht-Archimedische usw. Eben dadurch beweist man, daß eine Voraussetzung nicht eine Folge anderer ist, daß man also, wenigstens geometrisch gesprochen, nicht gezwungen ist, sie anzunehmen, also eben daß man sie postulieren muß, um sie zu haben.

Indem man bei Euklid genau sieht, wo er jedes Postulat benutzt, wird alles, was vorausgeht, ein Stück einer Nichtgeometrie, so z. B. erstes Buch bis I, 28 inkl. ein Stück Nicht-Euklidischer Geometrie uud die jetzige Nicht-Euklidische Geometrie bildet nicht einen Gegensatz zu den Gedanken Euklids, sondern ist vielmehr eine weitere Ausbildung des Gedankens, der ihn dazu gebracht hat, sein 5. Postulat ausdrücklich aufzustellen. Viel weiter ist Euklid aber gekommen in der Bildung der jetzt so genannten Nicht-Archimedischen Geometrie. Dieser gehören nämlich seine vier ersten Bücher an (auch 7.—9. Buch und 11. Buch). Sie umfaßt also z. B. den Pythagoräischen Satz, die Lösung von Gleichungen zweiten Grades in geometrischer Form, den Potenzsatz für den Kreis, darunter mehrere Sätze, wo man nicht nur jetzt, sondern auch, wie man es aus Aristoteles ersehen kann, vor Euklid Proportionen benutzte. Und der Nicht-Archimedische Charakter dieser Bücher ist durchaus keine Zufälligkeit. Dieses Faktum wird aber ganz verschleiert, wenn man das Infinitesimalpostulat „Archimedes' Postulat" nennt, und in Anschluß an diese Benennung von der Nicht-Archimedischen Geometrie spricht.

Dieses Postulat wird schon von Aristoteles als Grundlage der Infinitesimaluntersuchungen genannt, und rührt also wahrscheinlich von Eudoxos her. Bei Euklid tritt es zwar nicht als Postulat, sondern nur in einer Definition auf. Die 4. Definition des 5. Buches spricht aus, „daß zwei Größen ein Verhältnis haben, wenn sie durch Vervielfachung einander übertreffen können." Dadurch wird nicht nur gesagt, daß sie homogen sein müssen, sondern auch die von Aristoteles und Archimedes genannte Voraussetzung ausdrücklich aufgestellt, daß man von der einen Größe ein so großes Vielfaches nehmen kann, daß es die andere übertrifft. Daß dieser ausdrückliche Ausspruch nicht zufällig ist, geht aus dem fleißigen Gebrauche hervor, den Euklid in demselben Buche eben von dieser Voraussetzung macht, und ohne welchen es ihm gar nicht gelingen würde, die Proportionssätze auch für den Fall inkommensurabler Größen zu beweisen. Diese Voraussetzung kommt so früh wegen ihrer Anwendung auf Proportionen. Euklids spätere Exhaustionsbeweise stützen sich zwar auf einen anders formulierten Satz X 1.: „Wenn man von einer Größe die Hälfte oder mehr hinwegnimmt, kann man durch Fortsetzung dieser Operation eine Größe erhalten, die kleiner ist als eine andere gegebene.“ Dieser Satz stützt sich aber eben auf die genannte Definition, also auf das jetzt so genannte Archimedische Postulat.

Die Benennung „das Archimedische Postulat“ oder besser „die Archimedischen Postulate“ würde dagegen auf andere Voraussetzungen passen, die Archimedes im Anfang der Schrift über Kugel und Zylinder aufstellt. Sie beabsichtigen, die Begriffe Länge und Fläche auch auf krumme Linien und Oberflächen anwendbar zu machen. Diese Begriffe beziehen sich nämlich in der griechischen Geometrie wie im heutigen geometrischen System ursprünglich nur auf Gerade und ebene Figuren (weshalb es ein circulus viciosus sein würde die Bestimmung „kürzester Weg“ als Definition der Geraden zu betrachten). Zur Anwendung auf krumme Linien und Flächen sind daher neue Postulate oder wie Archimedes hier sagt λαμβανόμενα Annahmen oder, wie wir jetzt sagen, erweiterte Definitionen der genannten Begriffe nötig. So verstanden auch Fermat und Pascal den Archimedes und sie bauen ihre exakte Längenbestimmungen auf seine Annahmen. Wenn man auch künftig diese die Archimedischen Postulate nennen wird, so wird man dadurch daran erinnert werden, daß es nicht eine moderne Beobachtung ist, daß man nicht von dem Längen- oder Flächeninhalt krummer Linien und Oberflächen reden kann, ohne neue Voraussetzungen einzuführen, die einer genauen Formulieruug bedürfen.

Bericht über die Herausgabe der gesammelten Werke von L. Fuchs.

Von

L. Schlesinger aus Klausenburg.

Alsbald nach dem am 26. April 1902 erfolgten Ableben von L. Fuchs wurde innerhalb der Familie des so unerwartet Hingeschiedenen die Frage der Herausgabe seiner gesammelten Werke erörtert. Dem Wunsche der Witwe, Frau Geheimrätin Fuchs, gemäß übernahm ich im Verein mit dem ältesten Sohne des verewigten Meisters, Herrn Oberlehrer Dr. Richard Fuchs in Berlin, die Herausgabe, und die Verhandlungen, die wir mit der Verlagsfirma Mayer & Müller in Berlin einleiteten, führten zu dem erfreulichen Ergebnisse, daß die Herausgabe ohne irgend welche materielle Beihilfe von dritter Seite in Angriff genommen werden konnte. Die Ausgabe sollte sich der äußeren Form nach an die von derselben Firma verlegten „Mathematischen Werke von Karl Weierstraß" anschließen und außer den von Fuchs selbst veröffentlichten Arbeiten dasjenige, was sich im handschriftlichen Nachlasse an publikationsfähigen Aufzeichnungen vorfinden sollte, eventuell auch einige der von Fuchs an der Berliner Universität gehaltenen Vorlesungen umfassen. Die Sichtung und Verwertung des handschriftlichen Nachlasses — in den ich selbst keine Einsicht genommen habe — sollte Herrn Richard Fuchs als dem Sohne vorbehalten bleiben; nach seinen vorläufigen Angaben dürfte die Ausbeute keine allzu umfangreiche sein, was für diejenigen, die die Produktionsweise von Fuchs kennen, also wissen, daß er die Ergebnisse seiner Spekulationen erst für den Druck aufzuschreiben, sonst aber kaum Aufzeichnungen zu machen pflegte, nichts Überraschendes haben kann.

Die Zusammenstellung des gedruckt vorliegenden Materials ergab 80 teils größere, teils kleinere Aufsätze streng wissenschaftlichen Inhalts, denen sich noch drei akademische Reden*), sowie einige kleinere Notizen, zumeist kurze Nekrologe, die Fuchs in seiner Eigenschaft als Redakteur des Crelleschen Journals in diesem veröffentlicht hat, anreihen. Es wurden demgemäß zuvörderst drei Bände geplant, in denen die sämtlichen gedruckten Arbeiten, das aus dem Nachlasse zu Publizierende, ferner eine Bibliographie der Theorie der linearen Differentialgleichungen von 1865 an und eine Lebensskizze Platz finden sollten; für eventuell noch zu veröffentlichende Vorlesungshefte sollen weitere Bände vorbehalten bleiben.

Da sich die Arbeiten von Fuchs, abgesehen von zwei Abhandlungen geometrischen und zweien zahlentheoretischen Inhaltes, die aus der ersten Zeit seiner schriftstellerischen Tätigkeit stammen, fast ausschließlich auf die Theorie der Differentialgleichungen beziehen, also ein durchaus einheitliches Gebiet mathematischer Forschung betreffen, da ferner — mit wenigen Ausnahmen — die zeitlich aufeinander folgenden Arbeiten auch inhaltlich aneinander anschließende Untersuchungen enthalten, war für die Anordnung des Materials in der Gesamtausgabe die streng chronologische Reihenfolge das von selbst gegebene Prinzip. Diesem Prinzipe gemäß ließ sich auch der Inhalt der einzelnen Bände so gestalten, daß jeder Band — mit geringen Ausnahmen — eine in sich zusammenhängende Gruppe von Untersuchungen umfaßt. Der erste Band, dessen Druck eben abgeschlossen ist und den ich die Ehre habe hier vorzulegen**), enthält die achtzehn bis zur Übersiedelung nach Heidelberg (Ostern 1875) veröffentlichten Abhandlungen, der zweite, der etwa binnen Jahresfrist nachfolgen soll, wird die vierundzwanzig in Heidelberg (Ostern 1875 bis Ostern 1884) entstandenen Arbeiten und die elf Abhandlungen aus den Jahren 1884—1887 der zweiten Berliner Zeit enthalten, während für den dritten Band nebst den von 1888 ab veröffentlichten übrigen gedruckten Aufsätzen noch die Reden etc., der Nachlaß, sowie die erwähnte Bibliographie und Lebensskizze bestimmt sind.

In bezug auf die Art, wie die redaktionelle Arbeit ausgeführt wurde, mag der vorliegende erste Band für sich selbst sprechen; ich möchte an die Fachgenossen die Bitte richten, mit Ausstellungen und Abänderungsvorschlägen nicht zurückhalten zu wollen, damit solche womöglich schon beim zweiten Bande berücksichtigt werden können.

Möchte diese Gesamtausgabe der mathematischen Werke von

---

*) Eine Königgeburtstagsrede, Greifswald 1873, und die beiden Berliner Rektoratsreden 1899—1900.

**) VIII u. 476 S. in 4°, Mayer & Müller, Berlin 1904.

L. Fuchs mit dazu beitragen, das Lebenswerk des Verewigten, (welches — wie der Redner der Berliner Akademie 1884 sagte — „dem mathematischen Königreiche eine neue Provinz hinzugefügt hat und der erfolgreichen Durchforschung und fruchtbringenden Aufschließung derselben“ gewidmet war), der jetzigen und den zukünftigen mathematischen Generationen lebendig zu erhalten, und dadurch immer wieder den Ausgangspunkt für weitere Forschungen auf dem unerschöpflichen Gebiete der Theorie der Differentialgleichungen bilden!

Welcher Platz gebührt der Geschichte der Mathematik in einer Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften?

Von

G. Eneström aus Stockholm.

Die Beantwortung der Frage, die ich heute zu behandeln beabsichtige, hängt natürlich in erster Linie davon ab, was man unter „Geschichte“ und unter „Enzyklopädie“ der Mathematik versteht. Ohne Zweifel können die Ansichten in betreff der Bedeutung dieser Worte verschieden sein, und es wäre darum nicht ohne Interesse, eine eingehende Untersuchung hierüber anzustellen. Indessen würde eine solche Untersuchung allein die ganze mir jetzt zur Verfügung stehende Zeit in Anspruch nehmen, und schon aus diesem Grunde ist es nötig, davon abzustehen. Eigentlich notwendig ist die Untersuchung auch nicht, denn meine Auffassung der Frage, was man unter Geschichte der Mathematik verstehen soll, habe ich schon in mehreren Artikeln der Bibliotheca Mathematica auseinandergesetzt, und ich kann mich also hier, unter Verweisung auf diese Artikel, darauf beschränken zu erwähnen, daß ich unter Geschichte der Mathematik im eigentlichsten Sinne eine wirkliche Entwicklungsgeschichte der mathematischen Theorien verstehe. Auf der anderen Seite bin ich gerade durch die seit einigen Jahren erscheinende *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* angeregt worden, mich mit der jetzt von mir gestellten Frage zu beschäftigen, und ich habe darum einen bestimmten Anlaß, dem Term „Enzyklopädie“ eine Bedeutung zu geben, die mit dem Zwecke des soeben erwähnten Unternehmens übereinstimmt. Auf diese Weise dürfte auch meine Frage ein aktuelleres Interesse bieten, als wenn ich dem Worte „Enzyklopädie“ einen anderen Sinn gegeben hätte.

Ich nehme also hier ohne weiteres an, daß es der Zweck einer Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften ist, in erster Linie eine Kodifikation der bisherigen Errungenschaften dieser Wissenschaften zu bringen, und zwar so, daß die Sätze in systematischer Ordnungsfolge mitgeteilt sind; ferner soll über die Methoden, wodurch die Resultate hergeleitet werden, berichtet werden, oder die Methoden sollen wenigstens angedeutet werden, und noch dazu soll der Leser durch bibliographische Verweise in den Stand gesetzt werden, von denselben genauere Kenntnis zu nehmen.

Eine solche Enzyklopädie kann auf verschiedene Weise benutzt werden. Sie kann den Universitätslehrern den Stoff ihrer Vorlesungen liefern, sie kann ebenso gut dem Mathematiker, der sich auf einem gewissen Gebiete orientieren will, die nötigen Aufschlüsse geben, sie kann endlich die jungen Fachgenossen, die ihre Wissenschaft weiter ausbilden wollen, belehren, was schon getan ist. Für die Benutzer der zwei ersten Klassen können historische Notizen ohne Zweifel erwünscht sein, aber wie ausführlich und auf welche Weise sie gebracht werden sollen, dürfte kaum festgestellt werden können; der eine Leser braucht gar keine solchen Notizen, der andere wünscht vielleicht besonders eingehend die historische Entwicklung zu verfolgen.

Anders liegt dagegen die Sache in betreff der Benutzer der zuletzt erwähnten Klasse. Freilich hat es Forscher auf dem mathematischen Gebiete gegeben, die durch ihre Anlagen darauf angewiesen waren, ihre eigenen Wege zu gehen, ohne sich um die Wege ihrer Vorgänger zu bekümmern, und die gerade auf diese Weise die Entwicklung der Wissenschaft am kräftigsten gefördert haben, aber solche Forscher sind immer selten gewesen und werden voraussichtlich künftighin noch seltener werden. Für die meisten Mathematiker, die eigene Untersuchungen anstellen wollen, muß es besonders lehrreich sein, genau zu wissen, nicht nur wie die jetzt bekannten Sätze am zweckmäßigsten hergeleitet werden, sondern auch, auf welche Weise die Entdeckungen tatsächlich gemacht worden sind, denn sie können daraus wertvolle Anregungen bekommen, wie sie selbst verfahren sollen. Im allgemeinen haben sie wohl von vorn herein eine Spezialität ausgewählt, mit der sie sich beschäftigen werden, und dem Anschein nach könnte es darum genügen, wenn die Enzyklopädie bei der Behandlung dieser Spezialität die erwünschten Aufschlüsse über die historische Entwicklung derselben brächte. Nun ist aber zu bemerken, daß eine Enzyklopädie im allgemeinen von einer großen Anzahl von Fachgenossen bearbeitet werden muß, und daß es gar nicht gewöhnlich ist, daß ein Mathematiker, der ein gewisses Gebiet speziell studiert hat, sich auch mit der Geschichte desselben so eingehend beschäftigt hat, daß er diese in einem Enzyklopädieartikel befriedigend behandeln kann; auf der anderen Seite ist es oft unmöglich, Fachgenossen zu finden, die geneigt sind, die von anderen Mitarbeitern verfaßten Artikel zu verbessern oder zu ergänzen. Schon aus diesem Grunde ist es wünschenswert, daß historische Notizen nicht ausschließlich in den besonderen Artikeln zu finden sind, sondern daß es auch eine Gesamtdarstellung der historischen Entwicklung der verschiedenen mathematischen Theorien geben wird.

Aber dieser Grund ist gewiß nicht der einzige, aus dem eine solche Anordnung empfohlen werden kann. Wenn die Spezialartikel der Enzyklopädie nur die gesicherten Resultate und die Methoden, wodurch diese hergeleitet werden, enthalten sollen, so hat man keinen eigentlichen Anlaß, in einem solchen Artikel die historisch vorhandenen Methoden zu erwähnen, die entweder zu unrichtigen Resultaten oder auf unrichtigem Wege zu richtigen Resultaten geführt haben. Aber Methoden dieser Art können für die künftigen Forscher auf dem betreffenden Gebiete sehr lehrreich sein. Ebenso lehrreich ist es zu ersehen, wie Resultate, die einem gewissen Gebiete angehören, bisweilen durch Methoden gewonnen worden sind, die für einen ganz anderen Zweck bestimmt waren. Endlich soll darauf aufmerksam gemacht werden, daß der allgemeine Überblick über die historische Entwicklung, der gewiß auch für die künftigen Forscher belehrend ist, wesentlich erleichtert wird, wenn die Einzelheiten zuerst in besonderen Artikeln behandelt worden sind. Will man den jungen Mathematikern eine solche Übersicht bieten, so ist folglich besonders angebracht, dieselbe in eine Enzyklopädie der Mathematik unterzubringen.

Ich habe jetzt die Antwort auf meine Frage unter Bezugnahme auf den Nutzen, den eine Enzyklopädie mit sich führt, zu ermitteln gesucht, aber die Sache kann auch von einem anderen Gesichtspunkte aus betrachtet werden. Wenn es der Zweck einer Enzyklopädie ist, eine Kodifikation der Errungenschaften der Mathematik zu bieten, so ist es wohl angezeigt, darin auch die Errungenschaften der mathematisch-historischen Forschung zu bringen, sofern diese wirklich als mathematisch betrachtet werden können. Und meines Erachtens kann man mit gutem Recht behaupten, daß eine wirkliche Entwicklungsgeschichte der mathematischen Theorien eine rein mathematische Disziplin ist.

Aus den jetzt auseinandergesetzten Gründen bin ich der Ansicht, daß eine Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften nicht nur in den Spezialartikeln historische Notizen bringen, sondern noch dazu eine Gesamtdarstellung der Geschichte der Mathematik enthalten soll. Die Ausführlichkeit dieser Darstellung hängt wesentlich von der Ausführlichkeit der besonderen Artikel ab, und wenn im voraus festgestellt ist, daß in diesen Artikeln die Methoden selbst im allgemeinen nicht auseinandergesetzt werden, sondern nur Andeutungen und bibliographische Verweise hinsichtlich derselben vorkommen sollen, so ist es angebracht, in der von mir befürworteten Gesamtdarstellung nur die wichtigsten Punkte der historischen Entwicklung der Mathematik zu behandeln. Als solche Punkte, die für die Benutzer einer Enzyklopädie besonderes Interesse haben dürften, möchte ich die folgenden hervorheben:

1) Welche Fragen haben zu verschiedenen Zeiten vorzugsweise die Aufmerksamkeit der Mathematiker in Anspruch genommen?
2) Welcher innere Zusammenhang findet zwischen den gleichzeitig oder nacheinander behandelten Fragen statt?
3) Welche Methoden sind benutzt worden, um die Fragen zu erledigen, und mit welchem Erfolge?
4) Welche Resultate sind dadurch nebenbei erhalten worden, die für die Entwicklung der Mathematik wertvoll geworden sind, zuweilen sogar wertvoller als die direkt gesuchten Resultate?

Dagegen halte ich es für weniger angebracht, auf die kulturhistorische Bedeutung der Mathematik einzugehen. Fragen dieser Art können gewiß von Interesse sein, aber gesicherte Resultate der mathematisch-historischen Forschung sind sie im allgemeinen nicht.

* * *

Ich habe oben bemerkt, daß die seit einigen Jahren erscheinende *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* mich angeregt hat, mich mit der jetzt von mir behandelten Frage zu beschäftigen. Ob meine Ansichten mit denen der Begründer dieses Unternehmens genau übereinstimmen, weiß ich nicht, aber jedenfalls dürfte ein wesentlicher Meinungsunterschied nicht vorhanden sein. In der Tat gibt es Spezialartikel, die die historische Seite des Gegenstandes gebührend berücksichtigen, und wenn es andere Artikel gibt, wo dies leider nicht der Fall ist, so dürfte dieser Umstand lediglich auf der Schwierigkeit, passende Mitarbeiter zu finden, beruhen. Dazu kommt noch, daß der ursprüngliche Entwurf des Programmes des noch nicht in Angriff genommenen letzten Bandes der *Encyklopädie* eine Gesamtübersicht über die Entwicklung der mathematischen Wissenschaften im neunzehnten Jahrhundert in Aussicht stellte. Freilich fehlt dieser Punkt im letzten Entwurf des Programmes (dort wird ganz allgemein von der Behandlung historischer Fragen gesprochen), aber dies bedeutet wohl nur, daß man vorläufig von einer genaueren Disposition des letzten Bandes der *Encyklopädie* Abstand genommen hat, und zwar darum, weil es voraussichtlich einige Jahre dauern wird, bevor dieser Band in Angriff genommen wird. Dem Umstande, daß der von mir zitierte Entwurf des Programmes nur von der Geschichte des neunzehnten Jahrhunderts spricht, lege ich keine größere Bedeutung bei, denn in den bisher erschienenen Spezialartikeln ist eine Menge von historischen Notizen sogar über griechische und arabische Mathematik mitgeteilt worden, und es liegt wohl kein Grund vor, warum gerade die Gesamtdarstellung sich ausschließlich auf das neunzehnte Jahrhundert beschränken soll.

Es scheint mir also, als ob das, was ich hier in betreff der Behandlung der Geschichte der Mathematik vorgeschlagen habe, keine wesentliche Modifikation, sondern nur eine programmäßige Ergänzung des Planes der *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* wäre.

Zur Geschichte der Differentialgleichungen.

Von

A. v. Braunmühl aus München.

---

1. Eine Pfaffsche Differentialgleichung bei Newton.

Newton stellt sich in seiner Methodus fluxionum et serierum infinitarum in Problema II die Aufgabe: „Aus einer Gleichung zwischen den Fluxionen von Größen die Relation zwischen diesen Größen selbst (Quantitates fluxiones) zu finden“, d. h. in unserer Ausdrucksweise, eine gegebene Differentialgleichung zu integrieren. Dabei unterscheidet er bekanntlich vier Gattungen von Differentialgleichungen, die wir in folgender Form schreiben können:

I. $F(\dot{x}, \dot{y}, x) = 0, \quad \text{oder} \quad F(\dot{x}, \dot{y}, y) = 0,$

II. $F(\dot{x}, \dot{y}, x, y) = 0,$

III. $F(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ldots, x, y, z, \ldots) = 0.$

Für die dritte Gattung, die uns hier allein interessiert, gibt Newton nur das eine Beispiel:

$$2\dot{x} - \dot{z} + x\dot{y} = 0,$$

oder in unserer Schreibweise

$$2dx - dz + xdy = 0;$$

dies ist aber eine sogenannte Pfaffsche Differentialgleichung. Zu ihrer Lösung, sagt Newton, müsse man zwischen zweien der drei Variabeln, z. B. zwischen x und y, eine ganz beliebige Relation annehmen, etwa $x = y^2$. Hiermit folgt dann

$$4y\,dy - dz + y^2 dy = 0$$

und durch Integration (Newton setzt die Integrationskonstante $= 0$)

$$2y^2 - z + \tfrac{1}{3}y^3 = 0,$$

oder mit Wiedereinführung von x:

$$2x + \tfrac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} = z.$$

Dann heißt es weiter: „Ergo ex infinitis modis, quibus x, y et z altera ad alteram possunt referri, unus inventus fuit, qui exponitur per tres aequationes $x = y^2$, $2y^2 + \frac{1}{3}y^3 = z$ (oder $2x + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$)." Wenn man in der bekannten Weise die vorgelegte Gleichung integriert, indem man etwa dx mittels der Relation $dx = \frac{\partial x}{\partial z} dz + \frac{\partial x}{\partial y} dy$ eliminiert, so tritt eine willkürliche Funktion $\varphi(y)$ auf; gibt man derselben die spezielle Form $\varphi(y) = -\frac{1}{6}y^3$, so entspricht diese Newtons Annahme.

Da er ausdrücklich hervorhebt, daß man eine ganz beliebige Relation zwischen zweien der drei Variabeln annehmen kann, so sieht man, daß er den Charakter des Problems sehr wohl erkannt hat. Es hindert ihn offenbar nur der Mangel einer Funktionsbezeichnung an der allgemeinen Darstellung der beiden Integrale. Für Newtons richtige Einsicht spricht auch der Umstand, daß er an derselben Stelle bemerkt, beim Vorhandensein von vier Variabeln müßten zwei willkürliche Relationen und im allgemeinen so viele Beziehungen angenommen werden, daß noch zwei Variable unabhängig bleiben.

Eine geometrische Interpretation der Integrale dieser Gleichungen hat jedoch Newton nicht versucht; während er nämlich sonst stets von geometrischen oder mechanischen Betrachtungen ausging, scheint ihn hier die Macht seines neuen Kalküls auf rein analytischem Wege zu Gleichungen geführt zu haben, deren geometrische Deutung seine Kräfte überstieg, da man damals mit der analytischen Darstellung von Raumkurven noch wenig vertraut war. In diesem Unvermögen, eine geometrische Darstellung seiner Lösung zu geben, liegt auch wohl der Grund, warum er diesen seinen III. Fall nicht weiter verfolgte.

Der Fall III fand zunächst überhaupt keine Beachtung, bis Euler und Clairaut ziemlich gleichzeitig (1739) bei ihren Untersuchungen über den Multiplikator auf Differentialausdrücke mit mehr als zwei Variabeln kamen. Da sie aber davon ausgingen, totale Differentialausdrücke herzustellen, deren Integrale im Falle dreier Variabeln durch die Flächen eine unmittelbare geometrische Interpretation finden, so hielten sie die den Integrabilitätsbedingungen nicht genügenden Differentialausdrücke überhaupt für absurd und schenkten ihnen keine weitere Beachtung. Namentlich betonte Euler immer wieder diese Absurdität*), und seine Zeitgenossen pflichteten ihm bei, bis endlich Monge,

*) Trotzdem hat Euler, worauf Herr P. Stäckel in den Berichten der Sächsischen Gesellschaft der Wissensch. zu Leipzig 1902 hinwies, sogenannte Mongesche Gleichungen behandelt, und auch in seinem demnächst in dem 4. Hefte der Bibliotheca mathem. erscheinenden Briefwechsel mit Joh. Bernoulli (herausgegeben von Eneström) finden sich Stellen, welche sich auf die von ihm als analysis infinitorum indeterminata bezeichnete Wissenschaft beziehen.

von geometrischen Anschauungen ausgehend, 1784 die wahre Bedeutung dieser Differentialausdrücke fand und ihre Behandlung lehrte. Auch erkannte er sofort ihren Zusammenhang mit den partiellen Differentialgleichungen und lehrte sowohl die ersteren in die letzteren als auch umgekehrt überführen. Ferner beschränkte er sich gleich von Anfang an nicht auf Differentialausdrücke vom ersten Grade in dx, dy, dz, sondern ging überhaupt von Differentialausdrücken aus, die in den drei Differentialen homogen vom 2. Grade waren, so daß später Lie diese Art von Differentialgleichungen mit Recht Mongesche Gleichungen nannte.

2. Die ersten partiellen Differentialgleichungen.

Das Trajektorienproblem hatte Veranlassung gegeben, Kurven zu behandeln, in deren Gleichungen ein variabler Parameter auftritt, den Jakob Hermann Modulus nannte. Dementsprechend hieß man solche Gleichungen Modulargleichungen, ein Name, den auch Euler beibehielt (1734/35) und der sich noch bei Lagrange (1785) findet. Bei Eulers Untersuchungen solcher Modulargleichungen scheinen überhaupt zum erstenmal partielle Differentialgleichungen vorzukommen, ohne daß jedoch Euler ihren eigenartigen Charakter betont, wenn er auch ihre Integration lehrt. In der Abhandlung „De infinitis curvis ejusdem generis" (Commentarii Acad. Petrop. 1734/35, Petrop. 1740) sucht er nämlich die Gleichung

$$dz + Pdx = 0$$

durch den Multiplikator R zu einer totalen zu machen, so daß

$$Rdz + PRdx = dS = 0$$

wird. Setzen wir Eulers Schreibweise, der damals noch keine Bezeichnung für die partiellen Differentialquotienten hatte, in unsere um, so ist die aus der Integrationsbedingung folgende partielle Differentialgleichung, welche zu integrieren ist,

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{P \partial R}{\partial z} + \frac{R \partial P}{\partial z}.$$

Euler bedient sich zu ihrer Lösung der auch heute noch gebräuchlichen Methode. Er eliminiert aus dieser Gleichung und aus

$$dR = \frac{\partial R}{\partial x}\, dx + \frac{\partial R}{\partial z}\, dz$$

$\frac{\partial R}{\partial x}$ und erhält mit Beachtung der gegebenen Gleichung:

$$\frac{dR}{R} = \frac{\partial P}{\partial z}\, dx,$$

woraus der Multiplikator folgt.

Systematisch haben dann Euler und D'Alembert partielle Differentialgleichungen um 1762 zuerst behandelt und zwar ersterer in dem Aufsatze „Investigatio functionum ex data differentialium conditione" (Novi Comm. Acad. Petrop. 1762/63, Petrop. 1764), indem er sich die Aufgabe stellte, eine Funktion V zu finden, für welche $dV = Pdx + Qdy$ ist, wenn zwischen V, P, Q, x, y eine Relation besteht. Die allgemeinste Differentialgleichung, die er damals löste, ist die Gleichung:

$$V = \varphi\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}\right).$$

D'Alembert aber behandelte in Untersuchungen aus demselben Jahre, die aber erst 1768 unter dem Titel „Recherches sur le calcul intégral" im IV. Bande seiner Opuscules erschienen, die linearen partiellen Differentialgleichungen zum erstenmal systematisch.

Er nahm zuerst die lineare partielle Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\text{I.} \qquad \frac{\partial q}{\partial x} + A\frac{\partial q}{\partial z} + Cq = 0$$

in Angriff, setzte, wie Euler schon 1750 bei Integration der linearen totalen Differentialgleichung getan hatte, $q = e^w$ und erhielt hierdurch

$$\frac{\partial w}{\partial x} + A\frac{\partial w}{\partial z} + C = 0.$$

Indem er dann $\frac{\partial w}{\partial x}$ mit Hilfe von $dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial z}dz$ eliminierte, ergab sich

$$-\left(A\frac{\partial w}{\partial z} + C\right)dx + \frac{\partial w}{\partial z}dz = dw,$$

woraus er sofort schloß, daß $\frac{\partial w}{\partial z} = \varphi(z - Ax)$ sein muß. Damit folgt dann $\frac{\partial w}{\partial x} = -C - A\varphi(z - Ax)$, und hiermit ergaben sich leicht w und q.

Nun schreitet D'Alembert zu der allgemeineren Gleichung vor

$$\text{II.} \qquad \frac{\partial q}{\partial x} + \zeta\frac{\partial q}{\partial z} + w = 0,$$

wo ζ und w Funktionen von x und z sind. Dieselbe Operation wie vorhin führt zu der Gleichung:

$$dq = \frac{\partial q}{\partial z}dz - \left(\zeta\frac{\partial q}{\partial z} + w\right)dx,$$

die er aber nicht, wie später (1774 und 1779) Lagrange getan hat, mit Beachtung des völlig willkürlichen Wertes von $\frac{\partial q}{\partial z}$ in die beiden totalen Gleichungen

$$dq + wdx = 0 \quad \text{und} \quad \zeta dx - dz = 0$$

zerlegt, sondern mit Unterscheidung dreier Fälle auf die Möglichkeit ein totales Differential darzustellen untersucht. Allerdings lieferte ihm auch diese umständliche Untersuchung jene beiden totalen simultanen Differentialgleichungen.

Endlich betrachtet D'Alembert noch die Gleichung

III. $$\frac{\partial z}{\partial x} + \lambda \frac{\partial z}{\partial t} + \xi z + \nu = 0,$$

worin λ, ξ, ν Funktionen von x und t sind. Diese reduziert er durch die Substitution $q = \mu z$ auf die Lösung zweier Gleichungen von der Form II (wenn man daselbst $z = t$ setzt), je für q und für μ.

Die allgemeinste lineare Differentialgleichung

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} V + Z$$

aber, wo $V = \varphi(x, y)$, $Z = \psi(x, y, z)$ ist, hat Laplace 1773, also ein Jahr vor Lagrange, gelöst (Mém. de l'Acad. de Paris pour l'année 1774, Paris 1777), indem er eine vierte Variable einführte, die er passend bestimmte.

Zur Geschichte der Mathematik bei den Indern und Arabern.

Von

H. Suter aus Zürich.

1. Über die Vielecksformel in Bhâskaras Lîlâvatî.

Bekanntlich besaßen die Inder zwei merkwürdige Formeln, um die Seite jedes regelmäßigen Vielecks aus dem Radius des umbeschriebenen Kreises zu berechnen. Die erste befindet sich in der Lîlâvatî (Colebrooke, p. 94), sie lautet:

$$s = \frac{4db(p-b)}{\frac{5}{4}p^2 - b(p-b)},$$

wo d = Durchmesser, b = Bogen und p = Peripherie (letztere beide in Graden oder Längenzahlen gegeben) bedeuten; setzt man an Stelle von b die Größe $\frac{p}{n}$, wo n die Seitenzahl des Polygons ist, so nimmt sie die Form an:

$$s = \frac{4d(n-1)}{\frac{5}{4}n^2 - (n-1)}.$$

Die zweite heißt:

$$s = \frac{3d}{\sqrt{n(n-1)+6}};$$

sie findet sich in den bisher veröffentlichten mathematischen und astronomischen Schriften der Inder unseres Wissens nicht, wird aber von Jordanus Nemorarius in seinem liber de triangulis und wohl nach diesem von Regiomontanus (vergl. Zeitschrift f. Math. u. Phys. 42, 1897, hist.-literar. Abteilg., p. 150 u. 151) ausdrücklich den Indern zugeschrieben. Bei el-Karchî (Kâfî fî'l-ḥisâb, edid. Hochheim, II. p. 26) findet sich dieselbe Formel, aber umgekehrt d aus s berechnet; sie gehört also zu dem wenigen, was el-Karchî den Indern entnommen hat. Die zweite Formel gibt genaue Werte für $n = 3$, 4 und 6, die erste nur für $n = 6$, dagegen ist diese für größere n etwas genauer, gibt aber stets zu große Werte, während die andere zu kleine gibt. M. Cantor (Vorlesungen I_2, p. 618) nennt die erstere eine Formel, „deren Ableitung noch nicht enträtselt ist“. Nun hat mich eine Note in Banerjis

Ausgabe von Colebrookes Übersetzung der Lîlâvatî*) auf den Weg gewiesen, auf welchem sehr wahrscheinlich die Inder zu dieser Formel gelangt sind. Banerji will an dem genannten Orte die Formel auf ihre Genauigkeit prüfen und führt sie an der Hand folgender Figur nach und nach über in

$$s = \frac{\text{arc } ACB \cdot \text{arc } AB \cdot 4d}{\frac{5}{4}p^2 - \text{arc } ACB \cdot AB} = \frac{4d\{(\frac{1}{2}p)^2 - (\text{arc } BC)^2\}}{\frac{5}{4}p^2 - (\frac{1}{2}p)^2 + (\text{arc } BC)^2}$$

$$= \frac{d(4\pi^2 - 4\beta^2)}{4\pi^2 + \beta^2} = d \cdot \frac{1 - \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^2}{1 + \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^2}$$

$$= d\left\{1 - \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^2\right\} \cdot \left\{1 - \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^4 - \text{etc.}\right\}$$

$$= d\left(1 - \frac{5\beta^2}{4\pi^2}\right),$$

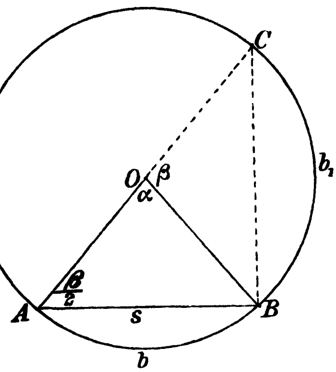


Fig. 1.

wenn höhere Potenzen von $\frac{\beta}{\pi}$ als die zweite vernachlässigt werden. Nun ist, wenn $\pi = \frac{22}{7}$ genommen wird, $\frac{5}{4\pi^2}$ nahezu $= \frac{1}{8}$, also $s = d\left(1 - \frac{\beta^2}{8}\right)$; der genaue Wert von s ist aber

$$= d \cos\frac{\beta}{2} = d\left(1 - \frac{\beta^2}{8} + \frac{\beta^4}{16\cdot 24} - \text{etc.}\right).$$

Hieraus ergibt sich der Grad der indischen Annäherung. So weit Banerji.

Wir schlagen nun den umgekehrten Weg ein und gehen aus von der Gleichung:

$$s = d \cdot \cos\frac{\beta}{2}.$$

Nun kannten die Inder die Beziehung $\cos\varphi = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$, sie setzen also:

$$s = d\left(1 - 2\sin^2\frac{\beta}{4}\right),$$

oder da bei kleinen Winkeln $\sin\frac{\beta}{4} \sim \frac{\beta}{4}$ ist:

$$s = d\left(1 - \frac{\beta^2}{8}\right).$$

Nun ist aber $\frac{5}{4\pi^2}$ nahezu $= \frac{1}{8}$, ja, wenn $\pi = \sqrt{10}$ angenommen wird, genau $= \frac{1}{8}$, also ist:

*) Colebrooke, Translation of the Lîlâvatî. With notes by Haran Chandra Banerji. Calcutta 1893, p. 123—124

$$s = d\left(1 - \frac{5\beta^2}{4\pi^2}\right) = d\left(1 - \frac{5b_1^2}{p^2}\right) = d\left(\frac{p^2 - 5b_1^2}{p^2}\right).$$

Dieser Wert stimmt noch nicht für das Sechseck, also für $b_1 = \frac{p}{3}$, er ist etwas zu klein $\left(s = \frac{4}{9}d\right)$; die indischen Mathematiker werden nun versucht haben, den Bruch $\frac{p^2 - 5b_1^2}{p^2}$ so einzurichten, daß er einen etwas größeren und zugleich für das Sechseck richtigen Wert ergab; sie fanden leicht, daß dies der Fall ist, wenn man zu Zähler und Nenner b_1^2 addiert, dann hat man:

$$s = d\left(\frac{p^2 - 4b_1^2}{p^2 + b_1^2}\right),$$

oder $b_1 = \frac{p}{2} - b$ gesetzt:

$$s = d\left(\frac{p^2 - 4\left(\frac{p}{2} - b\right)^2}{p^2 + \left(\frac{p}{2} - b\right)^2}\right) = 4d\left(\frac{b(p-b)}{\frac{5}{4}p^2 - b(p-b)}\right).$$

II. Über den Verfasser des „liber augmenti et diminutionis."

In der Biblioth. mathem. (3_3, 1902, p. 350—354) habe ich eine Abhandlung veröffentlicht „über die im liber augmenti et diminutionis vorkommenden Autoren", und habe in bezug auf den Verfasser Abraham zwischen drei Personen die Wahl gelassen, denen ungefähr dieselbe Wahrscheinlichkeit zukommt, nämlich zwischen Ibrâhîm b. Iûnis, bekannt unter dem Namen Ibn el-Ḥassâb, gest. 920/21, Ibrâhîm b. Aḥmed b. Moʿâḏ el Šaʿbânî, gest. 914/15, und Ibrâhîm b. Muh. b. Ašaḥ el-Fehmî, gest. 1056. Bei weitern Studien über diese Frage hat nun bei mir eine andere Idee eine große Wahrscheinlichkeit gewonnen, daß nämlich die genannte Schrift das „Buch der Vermehrung und der Verminderung" des Šoǵâʿ b. Aslam sei, dem der Fihrist (vergl. Suter, die Mathem. und Astron. d. Araber, p. 43, und Nachträge und Berichtigungen, p. 164) ein solches Werk zuschreibt. Ich werde diese Ansicht im folgenden zu begründen versuchen.

Man wird erstaunt fragen, wie aus Šoǵâʿ b. Aslam ein Abraham entstehen könne; es ist aber in der Tat möglich, daß in der arabischen Schrift Ibrâhîm statt Aslam gelesen werden kann (welch' letzterer Name nebenbei gesagt sehr selten war), wir haben sogar ein direktes Zeugnis dafür: in der Vorrede zur lateinischen Übersetzung der Schrift des Šoǵâʿ b. Aslam „über die Ausmessung des Fünfecks und Zehnecks", die sich im Pariser Ms. 7377A (fol. 93^b beginnend) befindet, und von der G. Sacerdote nach der in München (225, 3^0) befindlichen hebräischen

Übersetzung eine sehr der Verbesserung bedürftige italienische Übersetzung veröffentlicht hat*), heißt es im Anfang: Dixit Abu Camel Ssagia**) fil. Abrahim aggregator istius libri. Da nun die lateinische Übersetzung dieser Schrift den Namen Abraham (allerdings nur hinter dem Worte filius) enthält, so dürfen wir uns wohl fragen: könnte dieses „Abraham“ nicht auch in andere lateinische Übersetzungen von Arbeiten Šoǵâʿs übergegangen sein, also z. B. in die Übersetzung des „Buches von der Vermehrung und der Verminderung“?

Daß die Arbeiten Šoǵâʿ b. Aslams sehr verbreitet und geschätzt waren, dafür führe ich folgende Zeugnisse an: Im arabischen Original hat man bis jetzt allerdings nur eine Schrift Šoǵâʿs gefunden, nämlich seine Ṭarâʾif (Auserlesenes, Seltenes) aus der Rechenkunst, in Leiden (1003); es existieren aber hebräische Übersetzungen von dreien seiner Werke: von der Algebra, von der Schrift über das Fünfeck und Zehneck, und von den Ṭarâʾif aus der Rechenkunst (München 225 und Paris 1029), und zwar liegen diesen nicht die arabischen Originale, auch nicht die sofort zu nennenden lateinischen Übersetzungen zugrunde, sondern sehr wahrscheinlich spanische Übersetzungen. Ins Lateinische übersetzt sind die Schrift über das Fünfeck und Zehneck, und sehr wahrscheinlich die Algebra und die Ṭarâʾif; alle drei befinden sich in Paris Ms. 7377 A.***) Ibn Chaldûn sagt in seinen Prolegomena (Ausgabe v. Beirût, 1886, p. 422), daß die Algebra des Šoǵâʿ b. Aslam zu den besten Werken dieser Art gehöre und von spanischen Gelehrten öfters kommentiert worden sei, so z. B. von el-Qorešî (vielleicht dem bekannten Schriftsteller über Geheimwissenschaften und magische Quadrate, Aḥmed b. ʿAlî el-Bûnî el Qorešî, gest. 1225). Diese Stelle ist nach der Übersetzung Woepckes (Recherches sur plusieurs ouvrages de Léon. de Pise, in den Atti dell' accad. dei Nuovi Lincei, 1859, T. XII.) bis jetzt auf die Algebra des Muḥ. b. Mûsâ el-Chowârezmî bezogen worden, die unmittelbar vor derjenigen des Šoǵâʿ b. Aslam erwähnt wird; es muß zugegeben werden, daß so übersetzt werden kann, wie Woepcke übersetzt hat, allein das Richtige ist jedenfalls, die Worte „dies Buch gehöre zu den besten Werken dieser Art“ auf die Algebra des Ibn Aslam zu beziehen. So hat es in der Tat auch Ḥ. Chalfa aufgefaßt, indem er die eben angeführten Worte Ibn Chaldûns der Nennung der Algebra

*) Festschrift zum 80. Geburtstage M. Steinschneiders, Leipzig 1896, p. 167—194.

**) Hieraus ist vielleicht das Sayd entstanden, das sich im Pariser Ms. 7266 in einer Randnote neben der Abhandlung des Abhabuchr befindet.

***) Vergl. Steinschneider, Die hebräischen Übersetzungen des Mittelalters. Berlin 1893, p. 584—588.

Ibn Aslams beifügt (II. 585); auch den Kommentar des Qorešî zählt Ḥ. Chalfa (l. c.) jedenfalls nach Ibn Chaldûn zu den besten dieses Werkes. Da nun diese Algebra mit ihrem Kommentar bei den Westarabern so hoch gestellt war, so liegt der Schluß nahe, daß dieselbe in Spanien und Nordafrika verbreitet gewesen und also wohl auch ins Lateinische übersetzt worden sein wird. War nun die Algebra so geschätzt, so wird man auch den übrigen damals noch vorhandenen Werken Ibn Aslams größere Aufmerksamkeit geschenkt haben.

Wir kommen nun zu den Hauptgründen, die dafür sprechen, daß der liber augmenti et diminutionis von Šoǵâʿ b. Aslam verfaßt sei. Diese Abhandlung befindet sich in lateinischer Übersetzung in den drei Pariser Mss. 7266, 7377 A und 9335; im zuletztgenannten schließt damit eine Reihe von Abhandlungen über Arithmetik, Algebra, Flächen- und Körperberechnung ab*), im Ms. 7377 A aber folgen auf diesen liber augmenti etc. unmittelbar die drei oben genannten Abhandlungen in der Reihenfolge: Algebra, Fünfeck und Zehneck, Ṭarâʾif. Die Algebra ist anonym, sie wurde daher auch vom Verfasser des Pariser Cataloges (T. IV. Paris 1744) und auch von B. Boncompagni (Della vita e delle opere di Gherardo Cremonese etc., Roma 1851, p. 54) nicht als eine eigene Abhandlung erkannt, sondern als zweiter Teil oder Schluß des liber augmenti etc. angesehen. Die Schrift über das Fünfeck und Zehneck wird ausdrücklich dem Abû Camel Ssagia fil. Abrahim, d. h. dem Abû Kâmil Šoǵâʿ b. Aslam zugeschrieben; in der Vorrede wird auf eine Algebra desselben Verfassers hingewiesen. Die letzte Abhandlung ist wieder anonym, aber höchst wahrscheinlich eine Übersetzung der Ṭarâʾif des Šoǵâʿ b. Aslam. In der hebräischen Übersetzung der Algebra (München 225) heißt es nun am Schlusse: „aus dieser Frage (Aufgabe) können viele andere abgeleitet werden, deren Operation (Auflösung) sich erklären läßt nach den Methoden, welche wir früher gelehrt haben**), und denen, welche wir in diesem Buche hinzugefügt haben.“ Was liegt nun näher als anzunehmen, Abû Kâmil b. Aslam weise mit den Worten „welche wir früher gelehrt haben“ auf die im liber augmenti etc. gelehrten indischen Methoden hin, während die „in diesem Buche hinzugefügten“ die rein algebraischen (d. h. die sechs Fälle der Gleichungen ersten und zweiten Grades) seien?

---

*) Vergl. A. A. Björnbo, in der Biblioth. mathem. 3_3, 1902, p. 63—75, und P. Tannery, ibid. 2_3, 1901, p. 45—47.

**) Steinschneider (l. c. p. 586) übersetzt etwas freier: „welche vorangegangen sind“, was auch auf einen andern Verfasser schließen ließe, während die wörtliche Übersetzung beweist, daß sowohl die früheren als auch die jetzigen Methoden von demselben Autor erklärt worden sind.

Man gestatte mir, noch einen letzten, wenn auch nicht entscheidenden Grund für meine Ansicht anzuführen. In der Biblioth. mathem. (3_3, 1902, p. 350—354) habe ich nachgewiesen, daß der im liber augmenti etc. genannte Iob filius Salomonis identisch sei mit dem Erbteiler Eijûb b. Soleimân, und daß bei diesem der Ägypter ʿAbdelġanî b. Abî ʿAqîl die Erbteilungen gehört habe; nun war Ibn Aslam ebenfalls ein Ägypter, lebte wahrscheinlich ungefähr zur selben Zeit (c. 900) wie ʿAbdelġanî, und ist also vielleicht ebenfalls ein Schüler von Eijûb b. Soleimân gewesen, hat also seinen Lehrer in seinem Buche über „die Vermehrung und die Verminderung" zitiert. Vielleicht hat er diesen Eijûb b. Soleimân in Spanien gehört, vielleicht längere Zeit in Spanien oder Nordafrika gelebt, daher waren seine Schriften gerade dort verbreitet.

Ich schließe hiermit diese Untersuchung mit dem Wunsche, es möchten in nächster Zeit die zweite und vierte der oben genannten Abhandlungen des Pariser Ms. 7377 A veröffentlicht werden, und zwar nicht bloß mit Angabe der Anfangs- und Schlußworte, sondern womöglich vollständig; ich glaube, daß dadurch die Frage über den Verfasser des liber augmenti et diminutionis zur endgültigen Erledigung gebracht werden könnte.

Pour une histoire de la géométrie analytique.

Von

G. Loria aus Genua.

I.

Vous connaissez tous l'Analytische Geometrie du regretté Richard Baltzer. Suivant mon sentiment, c'est le premier traité de géométrie analytique qui offre d'une manière saisissante les caractères de ce qu'on entend à présent par application de l'analyse à la géométrie. Personne n'ignore qu'on y trouve étudiées tour à tour la géométrie de la droite, celle du plan et enfin celle de l'espace, et que même des notices sur les espaces supérieurs n'y font pas défaut. Des exactes déterminations des signes des figures mènent l'auteur à des formules d'une généralité parfaite, qui sont tout prêtes pour être appliquées sans besoin d'avoir recours à la figure; l'emploi des coordonnées homogènes, combiné avec les concepts fondamentaux de la géométrie projective, rend possible la considération des éléments à l'infini, tandisque l'emploi de notations expressives et l'application de la théorie des formes et des déterminants donnent à toute sorte de calculs une élégance et une symétrie parfaites.

Quoique Baltzer ne manque pas de donner une idée de l'application de l'algèbre à la résolution des problèmes déterminés, sa géométrie analytique est au fond une théorie des lieux géométriques. Si on compare les procédés de Baltzer avec ceux qui caractérisent la géométrie grecque on trouve des différences tellement profondes que le lecteur se demande naturellement comment le savant professeur de l'Université de Giessen ait pu déclarer dans son Avant-propos que les théories qu'il expose sont les arrières-petites-nièces de celles que l'antiquité nous a transmis avec la marque de fabrique d'Apollonius.

II.

Mais cet étonnement disparaît bientôt si on compare les ouvrages d'Apollonius à la source la plus ancienne de la géométrie analytique:

la Géométrie de Descartes (1637) porte en effet l'empreinte évidente des pensées des mathématiciens grecs. Quoique son auteur ait remarqué avec raison dans son Discours de la méthode que „l'analyse des anciens . . . est toujours si astreinte à la considération des figures, qu'elle ne peut exercer l'entendement sans fatiguer l'imagination", la solution du problème de Pappus donnée par lui*), résultant d'applications répétées du théorème de Pythagore et des propriétés des triangles semblables, est inséparable de la considération continuelle de la figure; en général ses procédés manquent des qualités de généralité et d'élégance aujourd'hui si appréciées; de sorte qu'ils ne paraissent qu'une lourde traduction de la géométrie hellène dans le langage de l'algèbre élémentaire. Mais quelques grossiers et primitifs que nous semblent ces procédés, leur valeur est prouvée par les conséquences qu'ils ont données entre les mains de leur inventeur; c'est donc avec raison que Descartes, dont la modestie n'égalait pas le génie, déclarait qu'ils étaient „autant au delà de la géométrie ordinaire que la réthorique de Cicéron est au delà de l'a. b. c. des enfants".**)

Ce n'est pas mon intention de m'arrêter sur les applications que ce grand philosophe fit de la méthode des coordonnées; je veux seulement fixer l'attention de la Section sur l'essence et sur la forme de la méthode qu'il a forgée, et particulièrement sur les doutes et les questions qui surgissent en étudiant son ouvrage immortel. Par exemple: Descartes avait-il l'idée et connaissait-il le mécanisme de la transformation des coordonnées? était-il en mesure de tracer exactement une courbe définie par son équation? Or à la première de ces questions semble répondre un passage de l'ouvrage cité, où Descartes affirme***) l'impossibilité de modifier le degré de l'équation d'une courbe par des

*) Il paraît que c'est le philosophe Golius qui attira l'attention de Descartes sur cette question, car c'est à lui qu'il en envoya la première solution, qui lui avait couté cinque ou six semaines de travail (voyez Oeuvres de Descartes, éd. Adam et Tannery, T. 1, Paris 1897, p. 232—235 et 244) et qu'il dut plus tard défendre des attaques de Roberval (id. T. IV, 1901, p. 363). — Comparez aussi la solution du problème du cercle tangent à trois autres envoyée par Descartes à la Princesse Elisabeth de Bohème en Novembre 1643 (id. T. IV, p. 38—42).

**) Lettre à Mersenne (Oeuvres T. I, p. 479). Un peu plus bas (p. 480) Descartes ajoute que „nos neveux ne trouveront jamais rien en cette matière que je ne pusse aussi avoir trouvé aussi bien qu'eux, si j'eusse voulu prendre la peine de la rechercher".

***) „Encore qu'il y ait beaucoup de choix pour rendre l'équation plus courte et plus aisée, toutefois, en quelle façon qu'on les prenne, on peut toujours faire que la ligne paraisse du même genre, ainsi qu'il est aisé de démontrer." La géométrie, éd. Hermann, Paris 1886, p. 19.

changements d'axes; à cette question se rapportent aussi quelques phrases de la correspondence de l'illustre savant*) où, pour confondre son adversaire Roberval, il représente par des équations différentes la courbe qu'on appelle à présent feuille de Cartesius. Ces phrases servent aussi à prouver jusqu'à quel point il savait tracer une courbe dont il connaissait l'équation; car, quoique avec le ton hautain qui le caractérise, il dit, à propos de la feuille, que sa forme „se voit à l'oeil sans aucun esprit ni science"**), il n'y a aucun doute que de cette courbe il ne considérait que la boucle; ne pouvant pas interpréter les valeurs infinies des coordonnées, ses branches infinies lui restèrent inconnues; ses contemporains, ne connaissant non plus les conventions sur les signes des coordonnées, ajoutèrent arbitrairement à cette boucle trois autres égales et parvinrent de la sorte à la fameuse galande.

III.

Si la discrétion ne m'imposait pas d'être court je pourrais multiplier les preuves des différences qui existent, dans le fond aussi bien qu'à la surface, entre la Géométrie cartésienne et notre géométrie analytique. Mais je préfère de rappeler que presque en même temps que Descartes, peut-être un peu auparavant, un autre grand savant français concevait et développait la méthode de coordonnées***); or quelle relation y a-t-il entre la géométrie analytique de Fermat et la nôtre? Pour répondre à cette question remarquons que le point de départ des considérations géométrico-analytiques de Fermat est l'observation vraiment fondamentale et tout-à-fait originale, que toute équation entre deux variables peut se considérer comme représentant une courbe, pourvu qu'on considère ces variables comme les coordonnées d'un point du plan. En la développant le célèbre géomètre découvrit que toute équation du premier degré représente une droite et prouva, par de nombreux exemples, qu'il pouvait, à l'aide de transfor-

*) Oeuvres de Descartes, éd. Adam et Tannery, T. II, Paris 1898, p. 316 et 336. Comp. mon ouvrage Spezielle alg. und transz. ebene Kurven (Leipzig 1902), p. 53.

**) Oeuvres de Descartes, T. II, p. 317.

***) Ad locos planos et solidos isagoge (publié en 1679; voyez Oeuvres de Fermat, éd. Tannery et Henry, T. I, 1891, p. 91—110), „qui est un traité analytique concernant la solution des problemes plans et solides; qui avoit esté veu devant que M. Descartes eut rien publié sur ce sujet" (id. p. 360).

Il est bon de remarquer que Fermat, comme Viète, représente les coordonnées par des voyelles, tandisque c'est à Descartes que remonte notre habitude de les indiquer par les lettres x, y . . .

mations de coordonnées, déterminer l'espèce de la section conique représentée par une équation de second ordre donnée ad libitum. Ajoutons que, par sa généralisation de la spirale d'Archimède, il s'est mis à la tête de ceux qui, en reprenant un ordre d'idées, dont la source se trouve dans les oeuvres du célèbre Syracusain, enrichirent la géométrie du système de coordonnées polaires.

Ces remarques, qu'il serait aisé de développer, prouvent que la géométrie analytique de Fermat est bien plus proche de la nôtre que ne le soit celle de Descartes. Mais tout le monde sait que les idées du Toulousain jouirent d'une diffusion très restreinte et par là exercèrent une influence extrèmement moindre que celle qu'on en pouvait attendre; ce n'est que dans ces derniers temps que les historiens de la géométrie ont pris l'habitude de mettre Fermat à côté de Descartes; auparavant on suivait l'exemple du P. Rabuel*), qui considérait Fermat comme un disciple de Descartes, ou celui de Fontenelle, qui croyait dire une chose complètement exacte en écrivant: „ça été une excellente idée, et d'une utilité inestimable à toute la géométrie que celle de Descartes, d'exprimer la nature des courbes par des équations algébriques.“**)

IV.

Ce système d'attribuer à l'auteur du Discours de la méthode la paternité de la géométrie analytique, bien qu'historiquement faux, peut facilement s'expliquer, car le prix d'une plante est directement proportionnel aux fruits qu'elle fut capable de donner, et tous les travaux, auxquels la méthode des coordonnées est redevable de quelque progrès, sont, presque sans exception, des dérivations de la Géométrie de Descartes. Dans la liste de ces travaux la première place devrait être occupée par les commentaires dûs à un gentilhomme, dont le nom nous est inconnu***), et aux traducteurs en Latin de la Géométrie (De Beaune et Schooten)†); mais tous, s'intéressant plutôt aux recher-

*) Commentaire sur la Géométrie de Descartes (Lyon 1730), Préface.

**) Histoire de l'Académie des sciences, Année MDCCXXIX, p. 37.

***) Descartes en parle dans la lettre qu'il écrivit au P. Mersenne le 27 Mai 1638 (Oeuvres de Descartes, T. II, p. 146); le (médiocre) travail dont il s'agit a pour titre Calcul de Mons. des Cartes et n'a été publié qu' en 1896 par H. Adam (voir Bull. des Sciences math., 2e Série, T. XX, I. Partie).

†) Renati Descartes Geometria cum notis Florimondi de Beaune. Opera atque studio Francisci à Schooten (Lugd. Bat., 1649). Voyez à ce sujet quelques lettres de Descartes publiées par MM. Adam et Tannery dans le T. II (p. 479, 510, 575) des Oeuvres de Descartes.

Dans une histoire complète de la géométrie analytique, parmi les successeurs ches algébriques du maître, ne surent combler aucune des lacunes géométriques qu'il avait laissées. On peut répéter presque la même chose de Wallis; celui-ci*) traduisit habilement les Coniques d'Apollonius dans la langue cartésienne; mais dès qu'il abandonna cette théorie et se hasarda dans une région encore inexplorée, il commit une grave erreur, en cherchant la forme de la parabole cubique; il fournit ainsi une preuve nouvelle d'une imperfection existant dans la méthode des coordonnées, telle qu'on la lit en Descartes (tout aussi bien que dans l'ancienne trigonométrie**)), imperfection provenant de l'absence des signes des coordonnées; nous l'avons déjà remarquée ci-dessus, et il serait aisé d'en signaler plusieurs fâcheuses conséquences dans les lettres de Sluse, Schooten, Huygens et Leibniz***). Cette imperfection nous apparaît si grave qu'on peut s'étonner qu'on ne se soit pas hâté de la corriger; si on veut s'expliquer ce fait et d'autres aussi étonnants offerts par l'histoire de la géométrie analytique, il faut se ressouvenir, que la naissance de cette branche des mathématiques fut bientôt suivie par celles du calcul infinitésimal, et que le désir de montrer la puissance de celui-ci fit oublier le besoin de s'occuper ex-professo de sa soeur ainée: bref, dans cette époque l'histoire de la géométrie analytique se confond avec celle des applications géométriques de l'analyse infinitésimale.†)

---

de Descartes, devront prendre place de Witt, qui dans ses Elementa curvarum linearum (publiés en appendice de la traduction que nous venons de citer) discuta les équations cartésiennes du 1er et 2d degré, A. J. Hermann, qui dans son mémoire De locis solidis ad mentem Cartesii concinne construendis (Comment. Petrop. T. IV, 1729, p. 15—25) s'occupa de la classification des courbes du 2d degré, et C. Rabuel qui, dans son Commentaire sur la Géométrie de Descartes (Lyon 1730), expliqua toutes les phrases obscures du maître; mais il ne faut pas oublier que ce dernier, ayant écrit presque un siècle après la publication de la Géométrie de Descartes (dont l'impression finit le 8 Juin 1637; Oeuvres de Descartes, T. I, p. 381), subit l'influence des géomètres postérieurs.

*) Dans son ouvrage: Tractatus de sectionis conicis nova methodo expositi, publié la première fois en 1655.

**) Comp. Tropfke, Geschichte der Elementar-Mathematik (Leipzig 1903), p. 224.

***) Voyez Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche T. III, 1900, p. 42—45; et encore plusieurs passages de mon ouvrage ci-dessus cité sur les courbes planes particulières.

†) A remarquer dans cette époque la familiarité que tout le monde avait avec le concept général de coordonnées; voyez p. ex. l'Analyse des infiniment petits (Paris 1696) du Marquis de l'Hôpital.

V.

Malgré la préférence marquée pour les nouveaux calculs, que sentirent et manifestèrent les géomètres de la seconde moitié du XVII. Siècle, les culteurs de la méthode des coordonnées ne manquèrent pas complètement. Nous trouvons parmi eux avant tout Roberval, qui, abandonnant enfin le rôle d'oppositeur aveugle aux idées de Descartes, qu'il avait joué jusqu'alors, consacra à cette branche des mathématiques une section de son mémoire De geometrica planarum et cubicarum aequationum resolutione*), dans laquelle il établit les équations du cercle, des coniques et de la conchoïde; remarquez, Messieurs, que de la droite il ne fit pas même mention! Ce mémoire est probablement tiré de leçons que Roberval fit au Collège de France. Un des plus intéressants chapitres de l'Arithmétique universelle a non seulement un sujet, mais aussi une origine analogue: car on sait que cet ouvrage est tiré des leçons que Newton tint pendant les années 1673—1683: toutefois le niveau de ces leçons est bien plus haut que celui du mémoire de Roberval; en effet l'auteur des Principia y montre qu'il sait trouver l'équation et déterminer la nature de toute section plane d'un cône du second ordre.

A peu près dans la même époque, de la Hire parcourait une route analogue à celle suivie par Roberval, dans un opuscule auquel, si je ne me trompe, les historiens ne prêtèrent pas encore assez d'attention; c'est l'opuscule traitant Les lieux géométriques (1679), qui fait suite aux célèbres Nouveaux éléments des sections coniques**), et où est proposée pour la géométrie analytique une nomenclature originale qui rappelle celle bien connue que Desargues imagina pour la géométrie de position. Ajoutons que de la Hire comme ses contemporains, ne considérait pas tous les deux axes coordonnées, mais seulement celui des abscisses, l'origine et la direction des ordonnées: c'est une habitude digne d'être remarquée, car elle prouve que pour Descartes et pour ses successeurs les deux coordonnées d'un point étaient deux grandeurs d'espèces différentes.***)

---

*) Mém. de l'Académie (Paris) T. VI, p. 177—198.

**) Voyez aussi les Remarques sur la construction des lieux géométriques et des équations (Mém. de l'Acad. des Sciences, Année MDCCX, p. 7—45).

***) La nécessité d'être bref ne m'a pas permis de parler dans une communication au Congrès d'un ouvrage, publié en 1687 par Ozanam, dont le plan est semblable à celui de la Hire. Il se compose en effet de trois parties qui portent les titres suivants: Traité des lignes du premier genre expliquées par une méthode nouvelle et facile. Traité de la construction des

La renommée, qu'un sort injuste nia aux recherches de géométrie analytique de la Hire, fut généreusement accordée au Traité analytique des sections coniques du marquis de l'Hôpital*), livre beau et bon, qui exerça l'influence la plus saine en France et à l'étranger, et que même aujourd'hui on lit avec plaisir.**)

Quoique dans ce traité les conventions relatives aux signes des coordonnées n'atteignent pas toute la précision désirable, toutefois les valeurs négatives des coordonnées sont admises et interprétées; et quoique l'axe des coordonnées ne soit pas encore introduit dès le debut, il fait son apparition dans plusieurs occasions. Je veux ajouter que, pour le marquis de l'Hôpital, tout aussi bien que pour de la Hire, la théorie des lieux géométriques n'est pas le but suprème de la géométrie analytique; au contraire elle est plutôt une préparation à la résolution des problèmes déterminés à l'aide d'intersection des lignes; qu'on me permette de remarquer, que, suivant mes idées, aujourd'hui on a tort de négliger complètement dans l'enseignement ce côté si important, théoriquement et pratiquement, de la doctrine des courbes.

VI.

Parmi les différentes routes que peuvent suivre les culteurs d'une théorie, aucune, suivant mon sentiment, n'est préférable à celle qui porte à des vérités nouvelles par des applications variées de cette théorie; un soutien puissant à cette opinion nous est donné par l'Enumeratio linearum tertii ordinis.***) En effet dans cet ouvrage Newton se pro-

---

équations pour la solution des problèmes déterminés. Traité des lieux géométriques, expliqué par une méthode courte et facile. La I semble une traduction des Coniques d'Apollonius dans le langage cartésien. Dans la II Ozanam prouve qu'il connaît la forme de la parabole solide $x^3 = a^2y$ (voyez les figures 37 et 38), tandis que celle de la cissoïde (voyez fig. 35) lui était connue imparfaitement. Dans la III il réduit les équations des lieux du 1[r] et du 2[d] ordre à des formes simples, à l'aide des changements de variables (transformations de coordonnées); c'est la plus importante des trois.

*) Cet ouvrage, qui était fini en 1704, ne fut publié qu'en 1707, après la mort de l'auteur.

**) On peut ajouter que tandis que de la Hire désigne toujours l'origine des coordonnées par la lettre O, de l'Hôpital préfère la lettre A; la même chose firent P. Rabuel dans son Commentaire, M. G. Agnesi dans ses Istituzioni analitiche (Milan 1748), Waring dans ses Miscellanea analytica (Cantabrigiae 1762), Prony (Journal de l'Ec. pol. T. I, 1794), Paoli dans ses excellents Elementi di algebra (Pise 1794), Livet (Journ. de l'Ec. pol., XIII. cah. 1806) etc.

***) Quoique publié seulement 1704, cet ouvrage semble remonter à l'année 1676.

posa la classification des courbes planes du 3e ordre; mais, comme il appliqua à ce but la transformation des coordonnées, réduisant les équations de toutes les cubiques planes à cinq formes canoniques et en déduisant l'existence d'un égal nombre de courbes, d'où toutes les autres peuvent se tirer per umbras, il est évident que le changement des axes coordonnées atteint dans les mains du célèbre mathématicien anglais le degré de procédé d'investigation géométrique. Cela serait sans doute suffisant à prouver l'éminente signification de l'Enumeratio dans l'histoire de la théorie qui nous occupe: mais cette importance s'accroît par tout ce que firent des géomètres tels que Nicole et Clairaut*) pour établir la vérité des nombreux théorèmes énoncés par Newton: la méthode de démonstration dont ils se servirent est probablement la même que celui-ci employa comme méthode de découverte; elle est si naturelle, si fine et si puissante qu'on doit la considérer comme exposante d'une science déjà mûre.

L'influence bienfaisante de Newton se retrouve dans les ouvrages de Mac-Laurin, dans les recherches par lesquelles l'abbé Bragelogne s'efforça de classer toutes les courbes du 4e ordre**) et mieux encore dans un livre bien connu de Gua de Malves***) qui, quoique ayant un but en apparence polémique, a donné des résultats que la science a conservés dans ses fastes: tel est la méthode indiquée pour rechercher la nature des points à l'infini d'une courbe quelconque et qui remplit une déplorable lacune dans la géométrie de ce temps. Un perfectionnement plus modeste, mais qui toutefois ne mérite pas d'être oublié, est l'ouvrage d'un professeur de l'université de Pise, le P. Caraccioli, qui

---

Il a été commenté — sous la direction de Newton lui-même — par Stirling dans le livre Lineae tertii ordinis newtonianae (Oxford 1717).

*) J. Nicole, Traité des lignes du troisième ordre ou des courbes du second genre (Mém. de l'Acad. des sciences, MDCCXXIX). Clairaut, Sur les courbes que l'on forme en coupant une surface courbe quelconque par un plan donné de position. (Id.); on trouve dans cet important mémoire l'équation du plan sous la forme $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ et la remarque (que d'ailleurs l'auteur avait déjà faite dans son célèbre mémoire sur les courbes gauches) que toute équation homogène en x, y, z représente un cône dont le sommet tombe dans l'origine des coordonnées.

**) Examen des lignes du quatrième ordre ou courbes du troisième genre. Sur les lignes du quatrième ordre (Mém. de l'Académie, Paris MDCCXXX).

***) Usage de l'analyse de Descartes pour découvrir, sans le secours du calcul différentiel, les propriétés ou affections principales des lignes géométriques de tous les ordres (Paris 1740). Comp. Sauerbeck, Abh. zur Gesch. der Math., XV. Heft, 1902.

remarqua*) la possibilité de déduire d'une courbe plane quelconque toute une classe de courbes, par la variation des constantes (coefficients ou exposants) qui entrent dans son équation cartésienne ou polaire.

VII.

L'apparition d'Euler sur la scène du monde détermine pour la géométrie analytique, comme pour presque toutes les branches des mathématiques, le commencement d'une époque nouvelle; le t. II de l'Introductio in analysin infinitorum (1748) est en effet un traité de géométrie analytique qui ne diffère après tout des nôtres que pour ce qu'on n'y trouve pas les expressions générales de distances, angles, etc.; ces quantités y sont determinées chaque fois qu'il est nécessaire par la considération directe de la figure. Euler paye une attention tout à fait spéciale aux signes et à la transformation des coordonnées; c'est à lui qu' est dû l'emploi constant de l'axe des ordonnées à côté de celui des abscisses; c'est encore lui qui établit le premier que les deux coordonnées d'un point sont des grandeurs absolument de la même nature; c'est lui enfin qui répandit partout l'habitude d'employer les coordonnées polaires tout aussi bien que les coordonnées cartésiennes. Il faut encore se rappeler que l'Introductio contient la première exposition élémentaire de la géométrie analytique de l'espace, dont les traveaux de Parent et de Clairaut faisaient déjà prévoir le grand et beau avenir.

Dans le même temps qu' Euler écrivait cet ouvrage célèbre, Gabriel Cramer rédigeait son Introduction à l'analyse des courbes planes algébriques (1750), dont la ressemblance avec l'Introductio est surprenante, mais dont le plan, étant plus restreint, consentit à l'auteur de parvenir à une profondeur plus grande. Pour Cramer, tout aussi bien que pour Euler, le but de la géométrie analytique paraît être d'établir les équations des courbes et de les discuter; pour Cramer, encore plus que pour Euler, le moyen le plus propre pour arriver à ce but est fourni par la transformation des coordonnées; „l'analyse des courbes“ (déclare-t-il en effet) „consiste en partie à déterminer la position des axes, de telle manière qu'il en résulte pour exprimer une courbe, l'équation la plus simple et la plus convenable au but qu'on se propose“. Mais chez Cramer, comme chez ses prédécesseurs, on chercherait en vain des formules générales pour la détermination des gran-

*) De lineis curvis liber (Pisis 1740). Comp. G. Loria, Giambattista Caraccioli; schizzo biografico (Boll. di bibliogr. e storia delle scienze matem., T. VI, 1903, p. 33—38); voyer aussi mon ouvrage sur les courbes planes.

deurs géométriques, de manière qu'on dirait qu'à tous soit restée cachée la possibilité d'appliquer les coordonnées à l'étude des figures de la géométrie élémentaire, telles que angles, distances, triangles etc.*)

VIII.

Or ce bloc de questions a été courageusement attaché et complètement épuisé par le grand géomètre auquel l'Italie donna la naissance, l'Allemagne la première haute position officielle et la France tous les honneurs auxquels le génie a droit: il va sans dire que je parle de Lagrange, dont le fondamental mémoire, ayant comme titre Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires**), contient des formules d'une élégance parfaite et d'une généralité sans bornes.***) C'est vraiment le premier travail écrit dans l'esprit de la géométrie analytique moderne; sa haute signification n'échappa pas à son auteur qui remarqua: „Indépendamment de l'utilité directe que ces solutions peuvent avoir dans plusieurs occasions, elles serviront à montrer avec combien de facilité et de succès la méthode algébrique peut être employée dans les questions qui paraissent être les plus du ressort de la Géométrie proprement dite, et les moins propres à être traitées par le calcul.“

Dès la publication de ce mémoire, où sous la modestie apparente du thème se cache la profondeur des idées, la géométrie analytique s'est enlargie par l'aggrégation de figures, dont elle ne s'était pas occupée jusqu'alors. Quoique cette augmentation de programme suffirait pour assurer à Lagrange une place très distinguée dans l'histoire de la géométrie analytique, ce n'est pourtant pas la seule contribution qu'il ait donné à la science qui nous occupe; celle dont nous avons parlé est directe, mais il y en a une autre de nature différente qu'il nous reste à signaler. On sait que dans sa Mécanique ana-

---

*) Quoique la même chose puisse se répéter par rapport au Traité des courbes algébriques publié en 1756 sans nom d'auteur par Dionis du Séjour et Goudin, il est juste d'y remarquer au moins la détermination de l'angle qu' une droite quelconque forme avec l'axe des abscisses.

**) Nouveaux mémoires de l'Académie de Berlin, 1773.

***) Lagrange eut l'inspiration à écrire ce travail pendant qu'il s'occupait de sa Nouvelle solution du problème du mouvement de rotation d'un corps de figure quelconque qui n'est animé par aucune force accélératrice (Mém. de Berlin, 1773). Comme suite peut être consideré le mémoire de Binet, Sur un système de formules analytiques et leurs applications à des considérations géométriques (Journ. de l'Ec. pol., XVI. cah. 1813).

lytique (1788) ce grand géomètre s'est „proposé de réduire la théorie de cette science, et l'art de résoudre les problèmes qui s'y rapportent, à des formules générales dont le simple développement donne toutes les équations nécessaires pour la solution de chaque problème"; les méthodes exposées „ne demandent ni constructions ni raisonnements géométriques ou mécaniques mais seulement opérations algébriques, assujetties à une marche régulière et uniforme". Dans la Mécanique analytique se trouve réfléchi l'esprit algébrique de l'époque; elle était destinée à être accueillie avec enthousiasme par les analystes et (comme l'appetit vient en mangeant) à les pousser à augmenter encore l'empire de l'analyse en transformant dans une de ses provinces le royaume jusqu'alors indépendant de la géométrie, comme Lagrange avait opéré pour la mécanique. Et en effet, neuf ans après l'apparition de la Mécanique analytique, Lacroix dans son grand Traité de calcul différentiel et de calcul intégral (1797), s'inspirant aussi aux recherches d'analyse appliquée à la géométrie qui rendirent Monge immortel, se proposa et réussit à établir la proposition énoncée par lui dans ces termes: „En écartant soigneusement toutes les constructions géométriques j'ai voulu faire sentir au Lecteur qu'il existait une manière d'envisager la Géométrie, qu'on pourrait appeler Géométrie analytique, et qui consisterait à déduire les propriétés de l'extention du plus petit nombre de principes, par des méthodes purement analytiques, comme Lagrange fit dans sa Mécanique à l'égard des propriétés de l'équilibre et de mouvement." Le nom de géométrie analytique, que Newton avait employé dans une autre signification*), fait ici son entrée dans les mathématiques où il était destiné à rester toujours; et l'acte de naissance de cette branche de la géométrie, que nous venons de rapporter, explique la raison de son étonnante ressemblance avec la mécanique analytique; elle en est la fille, et elle conserve les traits et l'allure de sa célèbre mère!

IX.

Ce que nous venons de dire prouve, sans que nous insistions d'avantage, le rôle extrèmement important joué par Lacroix dans la construction de notre géométrie algébrique. Mais on doit reconnaître que ce n'est ni son monumental traité de calcul infinitésimal, ni non plus un de ses modestes ouvrages didactiques**) qui réussirent à déterminer

---

*) Voyez l'écrit posthume Artis analyticae specimina vel Geometria analytica publié par Horseley en 1779 dans le T. I de sa grande édition complète des oeuvres de Newton.

**) Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et sphérique et d'application de l'algèbre à la géométrie (Paris 1799).

l'adoption générale de la nouvelle manière de concevoir l'application de l'algèbre à la géométrie. Si je ne me trompe, ce mérite revient à l'Essai de géométrie analytique de J. B. Biot, qui depuis 1802 jouit en France et à l'étranger d'une renommée et d'une influence tout à fait exceptionnelles et d'ailleurs bien méritées; c'est le premier traité élémentaire qui commence par l'exposition des questions relatives aux points, aux droits et aux plans et ou les lieux géométriques du 1[er] et du 2[d] ordre occupent, comme ils méritent, une place prépondérante; c'est enfin le premier où la géométrie du plan soit traitée conjointement avec la géométrie de l'espace.

La nouvelle direction donnée à la géométrie analytique par les géomètres français de la fin du XVIII. Siècle est si rationnelle que tout le monde l'adopta*) et elle ne sera pas abandonnée de sitôt: par l'influence avant tout des élèves de Monge**), ensuite par celle de la géométrie projective et enfin à cause des progrès accomplis par l'algèbre, elle a obtenu des améliorations dans les détails et des augmentations considérables; mais son programme est resté tel qu'il était il y a un siècle. Les derniers trente ans du XVIII. Siècle ont donc pour la géométrie analytique une importance comparable à celle que possède l'époque de Descartes et Fermat: c'est depuis lors que cette science a cessé d'être un chapitre d'introduction à l'analyse infinitésimale pour devenir une branche des mathématiques, ayant un but et des méthodes particulières.

Ces deux périodes — savoir celle de Descartes et Fermat et celle de Lagrange, Monge et Lacroix — méritent donc également d'être étudiées jusqu'au fond. C'était bien mon intention de le faire. Étant convaincu

*) Voyez A. Burg, Anfangsgründe der analytischen Geometrie (Wien 1824), le seul traité allemand de géométrie analytique un peu ancien que je connais. Suivant M. Tropfke (Geschichte der Elementar-Mathematik, T. II, Leipzig 1903, p. 422) c'est Meier Hirsch (Sammlung geom. Aufgaben, II. Bd., Berlin 1807) qui introduisit dans les écoles allemandes les concepts modernes de la géométrie analytique.

**) Un trait caractéristique curieux des recherches de géométrie analytique accomplies dans l'école de Monge est la préférence marquée pour la géométrie de l'espace. La preuve la plus ancienne de cela se trouve dans l'Application de l'analyse à la géométrie de Monge lui-même. D'autres sont fournies par les articles de Livet (Journ. de l'Ec. pol., XIII. cah., 1806), Français (id. XIX. cah. 1808) et Hachette (Corresp. sur l'Ec. pol., T. II, 1809—1813) sur le problème général de la transformation des coordonnées et par les Eléments de géométrie à trois dimensions (Paris 1817) de ce dernier; une dernière (last but not least!) par le programme d'un cours d'Application d'algèbre à la géométrie, publié par Monge et Hachette en 1811 dans l'XI. cahier du Journal de l'Ec. pol.

que nous sommes maintenant dans l'époque des histoires des théories spéciales, je m'étais proposé d'écrire une histoire de la géométrie analytique; c'est un ouvrage, dont l'intérêt me semble évident, et pour lequel j'ai rassemblé un nombre assez considérable d'éléments. Toutefois mon recueil présente aujourd'hui des lacunes qu'il serait indispensable de remplir; mais cela exigerait des sources d'une abondance comparable à la richesse des bibliothèques de Paris, de Londres, de Munich ou de Rome. Comme, malheureusement, aucune de ces bibliothèques ne se trouve à ma disposition, les efforts, que depuis quelques années j'ai fait dans ce but, m'ont coûtés une grande dépense de temps et de forces, sans donner les résultats que j'en attendais; et c'est avec un regret, que je n'essayerai pas de décrire, que j'ai dû renoncer à les continuer. Dans ces conditions j'ai jugé utile de résumer en peu de mots les lignes générales de l'ouvrage que je projetais, en exprimant le voeu que quelqu'un, s'inspirant à l'exemple de M. Braunmühl, enrichisse l'histoire des mathématiques d'un nouveau élément relatif à la géométrie analytique. Je ressemble donc à la mère qui, faute de lait, pour assurer la vie à ses enfants, doit recourir à un aide étranger. A cet aide que j'invoque, je promets dès aujourd'hui l'appui le plus cordial et ma reconnaissance la plus vive; et le monde des savants ne manquera pas de l'applaudir et de lui décerner les lauriers qu'il réserve aux personnes qui ont bien mérité de la science.

Intorno al significato della differenza tra gl' assiomi ed i postulati nella geometria greca.

Von

G. Vailati aus Como.

La distinzione tradizionale tra postulati (αἰτήματα) e assiomi (ἀξιώματα o κοιναὶ ἔννοιαι) è concepita ordinariamente come non avente altra ragione di essere che il grado minore di evidenza dei postulati di fronte agli assiomi; essa è riguardata, cioè, come una conseguenza del semplice fatto che le proposizioni che stanno a base della geometria non presentano tutte allo stesso grado le qualità che ci inducono ad ammetterle senza dimostrazione.

Dato questo modo d' interpretare la suddetta distinzione, è naturale che le recenti ricerche sui principi della geometria, in quanto appunto tendono ad attribuire sempre minor parte all' „intuizione" ed al criterio dell' „evidenza" nella scelta delle proposizioni fondamentali, sembrino favorire l' opinione che la differenza suddetta sia da riguardare come trascurabile, anzi come affatto estranea al campo cui deve rivolgersi l' attenzione del geometra.

Diventa quindi tanto più interessante ricercare se il diverso grado di evidenza costituisca effettivamente il solo criterio in base al quale la distinzione tra assiomi e postulati può essere giustificata, e se i geometri greci che l' introdussero non fossero guidati ad essa anche da qualche altro ordine di considerazioni di diverso carattere e di più fondamentale importanza.

Un interessante documento in proposito ci è stato fortunatamente conservato in un passo di Proclo (Commentarii in primum Euclidis elementorum librum)*) la cui portata mi propongo qui di far rilevare.

*) Nelle citazioni che avrò da fare di quest' opera mi riferisco all' edizione curata da G. Friedlein (Leipzig, Teubner 1873).

Proclo accenna in esso a tre diversi significati attribuiti alla suddetta distinzione da geometri o filosofi delle varie scuole.

Il primo di questi significati è quello che Proclo riporta essere stato adottato da Gemino e che consiste nel dire che la differenza tra assiomi e postulati è analoga a quella tra teoremi e problemi. Allo stesso modo, cioè, come i problemi si riferiscono alla costruzione di figure che soddisfino a date condizioni, mentre i teoremi enunciano delle proprietà (σνμπτώματα) di figure date, o supposte costruibili, così i postulati affermano la possibilità di qualche costruzione (non riducibile ad altre già ammesse come eseguibili), mentre gli assiomi enunciano qualche proprietà che si attribuisce (senza dimostrazione) a qualche figura di cui si sia già postulata, o dimostrata, la costruibilità.

È per tale ragione che, nel testo di Euclide, l' enumerazione dei postulati precede quella degli assiomi.

La differenza tra problemi e teoremi è anche caratterizzata da Proclo, in un altro passo della stessa opera (pg. 79), col dire che, nel caso dei problemi, si tratta di costruire una data figura in modo che essa soddisfi a delle condizioni alle quali essa potrebbe anche non soddisfare, mentre, invece, nel caso dei teoremi si tratta di condizioni, o di proprietà le quali la figura in questione non può a meno che presentare, in aggiunta, s' intende, a quelle che essa già possiede per definizione. Così, aggiunge Proclo, chi considerasse come un problema la proposizione seguente: „Inscrivere un angolo retto in una semicirconferenza“, darebbe prova di non conoscere la geometria, in quanto lascerebbe intendere che egli crede che un angolo inscritto in una semicirconferenza possa anche non essere retto.

In altre parole, un teorema, per il solo fatto di affermare che se una figura soddisfa a un gruppo A di condizioni soddisfa anche a un altro gruppo B, esclude che la costruzione d' una figura che soddisfi contemporaneamente ai due gruppi di condizioni A, B, costituisca un problema diverso da quello che consisterebbe nel costruire una figura soddisfacente alle condizioni del gruppo A.

L' ufficio dei teoremi consisterebbe quindi nel ridurre la soluzione d' un problema a quella di un altro, nel diminuire cioè il numero dei problemi che occorre saper risolvere o supporre risolubili. I postulati sarebbero quelli, tra i problemi, che da nessun teorema sono ridotti ad altri problemi più semplici o elementari.

Mentre un postulato afferma che è possibile costruire una figura in modo che essa soddisfi, o non soddisfi, a certe condizioni (per esempio un circolo avente dato raggio e dato centro), un assioma afferma che è impossibile costruire una figura che soddisfi, o non soddisfi a date condizioni (per esempio che è impossibile costruire due triangoli aventi due lati e l' angolo compreso rispettivamente uguali, senza che essi abbiano rispettivamente uguali anche gli altri due angoli).

Secondo questa interpretazione, la differenza tra assiomi e postulati verrebbe quindi a coincidere con quella che i logici riconoscono sussistere tra le proposizioni generali affermative e le proposizioni particolari negative (o tra le proposizioni generali negative come: „Nessun A è un B" e le proposizioni particolari affermative come „Qualche A è un B") in quanto le proposizioni generali appunto negano, mentre le proposizioni particolari affermano, l' esistenza di oggetti appartenenti contemporaneamente a due o più classi (Leibniz).

Occorre tuttavia notare che la distinzione tra proposizioni generali e proposizioni particolari va qui intesa in un senso più fondamentale di quello che ad essa si attribuisce dalla logica tradizionale. Occorre cioè che si considerino come proposizioni „particolari" non solo quelle il cui soggetto si presenta preceduto dalla parola „qualche" (o da altra equivalente) ma in generale ogni proposizione che contenga, sotto qualsiasi forma, qualche „affermazione di esistenza".

In questo senso, per esempio, sono da qualificare come proposizioni „particolari" anche quelle che, pure avendo il loro soggetto preceduto dalle parole „ogni", „tutti", o altre equivalenti, pure contengono, sotto la forma che i grammatici chiamano di „complemento indiretto", delle preposizioni reggenti un nome preceduto dalla parola „qualche" (o altra equivalente).

Per spiegarmi con un esempio, si consideri la proposizione designata ordinariamente come il postulato di Archimede, cioè:

„Ogni segmento, moltiplicato per qualche numero, può superare qualunque altro segmento."*)

Essa ha certamente la forma di una proposizione generale in quanto afferma che tutti i segmenti godono della proprietà che essa enuncia. Eppure, ciò nonostante, essa è una proposizione „particolare" nel senso sopra indicato, poichè ciò che in essa propriamente si afferma è che „Dati due segmenti qualunque", esistono sempre dei numeri tali che, moltiplicando per essi uno dei segmenti dati si ottenga un segmento più grande dell' altro segmento dato.

Un altro punto nel quale le distinzioni della logica scolastica tradizionale si manifestano non sufficientemente precise in rapporto al

---

*) È, come è noto, la stessa proposizione che figura in Euclide tra le definizioni premesse al Libro V.

soggetto di cui parliamo è quello delle proposizioni cosidette di „determinazione“ quelle cioè nelle quali si afferma che una data figura è determinata in modo unico da qualche condizione, o insieme di condizioni, per esempio la proposizione: „per due punti passa una retta e una sola.“

Alla domanda se le proposizioni di questo genere siano da collocare tra gli assiomi o tra i postulati occorre rispondere distinguendo le due specie di affermazioni che ognuna di tali proposizioni contiene. Esse sono dei postulati per quella parte di esse che afferma l' esistenza di qualche figura soddisfacente alla condizione considerata; sono invece degli assiomi par quella parte in cui affermano che di tali figure non ne può esistere più di una.

Anche qui tuttavia occorre porre in guardia contro un ulteriore equivoco che può nascere dal fatto che non tutte le proposizioni di geometria che si presentano come affermazioni dell' unicità di una figura soddisfacente a date condizioni, sono senz' altro da riguardare come non contenenti affermazioni di esistenza. Ve ne sono di quelle infatti nelle quali l' affermazione di esistenza ha luogo nonostante che essa non si riferisca allo stesso oggetto al quale si riferisce l' affermazione dell' unicità.

È questo il caso, per esempio, per il postulato delle parallele in quanto esso, pure equivalendo ad affermare che per un punto preso fuori di una retta non si può condurre più di una parallela ad essa, non cessa per questo di equivalere all' asserzione che, date in un piano tre rette di cui due a, b siano parallele e la terza c tagli una di esse, per esempio a, esiste un punto comune alle rette c e b.

Non si può quindi dare ragione a Proclo quando afferma che la suddetta proposizione, nel caso che si attribuisca, alla distinzione tra assiomi e postulati, il significato di cui stiamo parlando, andrebbe classificata tra gli assiomi, o tra i teoremi, invece che tra i postulati.*)

Un avvertenza di genere opposto è da fare in riguardo a un altra specie di proposizioni le quali, mentre presentano l' aspetto di proposizioni contenenti affermazioni di esistenza, pure non sono postulati, nel senso sopradefinito, ma invece delle semplici definizioni, cioè delle proposizioni aventi solo l' ufficio di introdurre qualche nuova

*) Op. cit. pg. 183 e pg. 191: *τοῦτο καὶ παντελῶς διαγράφειν χρὴ τῶν αἰτημάτων.* Proclo tuttavia ritenendola dimostrabile la vorrebbe collocare tra i teoremi piuttosto che tra gli assiomi. Contro quelli che ritenevano si dovesse accettare come „evidente“ egli riporta un interessante osservazione di Gemino in cui si raccommanda ai geometri di non fidarsi troppo dell' intuizione (*μὴ πάνυ προσέχειν τὸν νοῦν ταῖς πιθαναῖς φαντασίαις*).

locuzione e di spiegare il significato che ad essa si vuole attribuire.

Un esempio tipico delle proposizioni di questo genere ci è fornito dal cosidetto postulato di Dedekind. Poichè infatti la possibilità di dividere l' insieme dei numeri razionali in classi che soddisfino alle condizioni da esso contemplate non dipende affatte dalla sua ammissione o non ammissione, l' unico ufficio che gli può essere attribuito è quello di introdurre un' opportuna convenzione per designare tali classi e per porre in rilievo le analogie che sussistono tra le loro proprietà generali e quelle di cui godono le classi formate dai numeri minori (o maggiori) di un dato numero razionale.

La stessa osservazione è da ripetere anche per le altre proposizioni che, pur presentandosi, come questa, sotto forma di affermazioni di esistenza, servono in realtà solo ad estendere e generalizzare il significato di qualche locuzione, rendendola applicabile a un campo più vasto di quello al quale prima era riservata. Tali sono, ad esempio le proposizioni nelle quali, mediante il concetto di „limite" vien precisato il significato da attribuire alle parole „lunghezza", „area" (definite prima solo pel caso dei segmenti rettilinei, o delle superficie piane poligonali) nel caso di altre linee, o superficie.

Passerò ora ad esaminare il secondo dei tre significati che Proclo riporta essere stati assegnati alla distinzione tra assiomi e postulati.

Esso può essere caratterizzato col dire che sono assiomi tutte le proposizioni (non dimostrate) che, pel fatto di enunciare proprietà comuni a ogni specie di grandezze, o quantità, hanno validità e portata anche fuori dal campo della geometria. Sono invece postulati quelle altre, tra le proposizioni non dimostrate, in cui si considera qualche fatto puramente geometrico, o qualche proprietà avente significato solo per le figure o gli enti contemplati dalla geometria.

È in conformità a questo significato che, nel testo d'Euclide, sono classificati tra gli assiomi gli enunciati che si riferiscono alle proprietà dell' eguaglianza, o della relazione tra „tutto" e „parti", mentre invece si trova collocata tra i postulati la proposizione: „Tutti gli angoli retti sono uguali" la quale pure, non contenendo alcuna affermazione di esistenza o di costruibilità, dovrebbe, nel caso che si seguisse il criterio di cui abbiamo prima parlato, essere classificata tra gli assiomi, come Proclo stesso osserva.

Anche questo secondo significato, come il primo, non ha bisogno che di essere alquanto precisato e chiarito per manifestarsi come connesso a un importante distinzione alla quale tendono a dar rilievo le recenti ricerche sui principi della geometria. È noto, infatti, come queste tendano a far assumere alle parti più astratte della matematica sempre più l' aspetto di una serie di deduzioni miranti a determinare quali siano le proprietà di cui godrebbe un dato sistema di relazioni e di operazioni, definite soltanto coll' assegnar loro un certo numero di proprietà fondamentali. I risultati così ottenuti restano suscettibili di venir applicati a qualunque speciale sistema di relazioni e operazioni purchè per esso si verifichi il gruppo di proprietà che è stato assunto a base della trattazione.

Le proposizioni, ora, nelle quali si afferma che un dato speciale sistema di relazioni ed operazioni soddisfa effettivamente alle condizioni contemplate dalla teoria generale, e richieste per le applicabilità di questa, costituiscono un ulteriore gruppo di premesse che devono essere assunte dalla speciale teoria in questione e che sono ben da distinguere da quelle che stanno a base della teoria generale.

Indicando queste ultime col nome di assiomi, e riservando il nome di „postulati“ alle premesse speciali di ogni singola teoria, si vorrebbe dunque ad attribuire a questi due termini tecnici un senso non molto differente da quello che essi assumerebbero in questa seconda delle tre interpretazioni di Proclo.

Ci rimane ora a considerare la terza che da Proclo è appoggiata all' autorità di Aristotele e secondo la quale sarebbero assiomi quelle tra le proposizioni fondamentali che sono valide „per se stesse“ (καθ' ἑαυτά), cioè in virtù del significato stesso dei termini che vi figurano, mentre sarebbero invece postulati le altre che, per quanto evidenti, irrecusabili, pure non risultano come conseguenza „necessaria“ (ἐξ ἀνάγκης) dalle definizioni adottate per i termini che vi figurano, e potrebbero quindi essere negate da alcuno che accetti tale definizioni, senza che egli possa essere convinto di cadere in contraddizione.

Contro questo terzo modo di concepire la distinzione tra assiomi e postulati sarebbe anzitutto da obbiettare che, poichè per esso la verità degli assiomi è una conseguenza del significato stesso dei termini che essi contengono, gli assiomi cesserebbero dal far parte delle proposizioni fondamentali della geometria, e discenderebbero al rango di semplici teoremi, dimostrabili col sostituire, in essi, ai termini che contengono, le loro rispettive definizioni.

Se tuttavia esaminiamo un po' più a fondo in che senso si possa asserire che, per esempio, l' assioma: „Due grandezze eguali a una terza sono eguali tra loro“ è vero per definizione, siamo condotti a concludere che l' unico senso possibile è questo: che la proprietà della relazione di uguaglianza, enunciata nella suddetta proposizione, appartiene a quelle che contribuiscono a costituire il nostro concetto di „uguaglianza“, che cioè una tale proprietà è da noi compresa fra quelle che esigiamo siano possedute dalle relazioni che distinguano dalle altre col nome di eguaglianze.

Veniamo così a caratterizzare gli „assiomi“ in un modo poco diverso dal secondo di quelli che abbiamo esaminati sopra, e che consiste nel riguardarli appunto come proposizioni aventi l' ufficio di contribuire a „definire“ un sistema di relazioni ed operazioni, mediante l' enunciazione di determinate proprietà cui esso deva soddisfare.

Le „definizioni“ insomma, di cui qui si tratta non sono altro che quelle che si designano ordinariamente col nome di „definizioni per mezzo di postulati“ (o meglio „per mezzo di assiomi“): quelle, cioè, che si effettuano, non col dichiarare che il significato del segno di relazione o di operazione che si vuol definire è equivalente a quello espresso di un gruppo di segni di significato già noto, ma, invece, coll' affermare che delle espressioni di data forma, in ciascuna delle quali figura il segno della relazione o della operazione da definire, sono deducibili le une dalle altre. È ciò che avviene per esempio quando si definisce l' uguaglianza come una relazione godente delle due note proprietà caratteristiche (transitività, simmettria).*)

È alle definizioni di questo tipo che è indispensabile ricorrere ogni qualvolta si tratta di determinare il significato dei segni di relazioni od operazioni che si assumono come „primitivi“ (cioè non analizzabili o determinabili con una definizione propriamente detta) ed è solo riferendosi ad esse che si può asserire con ragione che le trattazioni di pura matematica, in quanto mirano a sviluppare deduttivamente le proprietà d' un sistema di relazioni e di operazioni definite in tal modo, non hanno bisogno di alcun postulato, o ammissione, all' infuori dei principi generali della logica che stanno a base di qualsiasi forma di ragionamento deduttivo.

*) Con le definizioni di questo tipo viene indirettamente a essere definito anche il significato dei nomi di classe che designano gli enti tali che fra essi si possano stabilire relazioni od operazioni godenti delle proprietà considerate; come quando ad esempio si definisce il nome di quantità come quello di una classe di enti tali che fra essi si possa stabilire una relazione godente delle note proprietà dei segni $>$ ed $<$, cioè transitiva e asimmetrica. Si hanno così delle definizioni „implicite“, tra le quali un caso particolare importante è costituito dalle così dette definizioni „per astrazione“ (Peano), quale ad esempio la definizione di „rapporto“ (λόγος) nel libro V di Euclide.

VI. Sektion.

Teaching of mechanics by familiar applications on a large scale.

Von

A. G. Greenhill aus London.

Speaking etymologically, the Paedagogic Section is the one occupied with the Education of the youthful mind; as that is so, I have no right to be here to address you, as my students have been military officers, who have served according to Regulations in professional duty for at least five years.

Notwithstanding this anomaly of age, and encouraged by the words of our poet Dryden — „Men are but children of a larger growth" — I will set before you some of the ideals and methods we pursue.

I have circulated in the room some specimen exercises not going beyond Rectilinear Motion in Dynamics, which we find useful to focus the attention; and you will notice that a presentation strictly concrete is adopted. General Theory is reserved until after the discussion of actual examples; the ideas grow in the natural order of development, as recommended by Professor Perry.

Perry is honoured greatly to find his name quoted by Dr. Fricke as a pioneer in modern instruction, even here in Germany; and I am proud to declare myself one of his school.

We trust to resonance with the interest of the student; if he does not care for the dynamics of a railway train, he may be attracted with the same theory in an automobile car or a bicycle.

Although my students have been engaged in an active outdoor practical life, I find it is not easy to eradicate the idea that mathematics is anything more than making marks on a sheet of paper.

It is difficult to persuade them to look out of the window, either of a class room or railway carriage, to study the pageant of life and its dynamical interest unrolling before their eyes.

To give an instance. I was delighted to lure the members of a class to avow, individually and collectively, that they had never seen a Hydraulic Press. But, I said, you have followed in your prescribed course of instruction the manufacturing operations in Woolwich Arsenal the forging of large guns, drawing out cartridge cases, making wheels, lifting stores by a crane into a ship at the wharf: and even at an hotel you have been elevated in a lift.

O yes! if you mean that, we have seen it. But we have not come to the Hydraulic Press yet, as the lecturer on Mechanism will not hoist his diagram of it till next time.

The fault of this aloof attitude of mind was mainly due to our own former arid, unreal, unpractical presentation of Mechanics; but now we are working hard to rectify this, as we see from the Reports of the Paedagogic Conference in Paris, and Professor Klein's various Addresses.

An indispensible adjunct of the class room is a mathematical Workshop, in which the student can confirm the laws of energy and momentum with homely experiments; a hammer and nail, a block of wood, thread and elastic spheres and a bouncing ball, a large wheel gyroscope and so on.

Historical research will discover that Perry had a predecessor in Galileo, Stevinus and Archimedes, and that we are reverting to an earlier procedure.

Take the story of Galileo and the swinging lamp, as described in the German student song: the application to a clock was an afterthought not worked out in his lifetime, let Galileo saw at once the superiority of the pendulum over the clepsydra water clock in beating out assigned equal intervals of time, and so verifying experimentally the laws of motion he was discovering.

For instance a little ball rolling down an incline and describing a certain distance from rest in one beat of a pendulum, will describe four times the distance in two beats, or the same distance in one beat of a pendulum of fourfold length. I think this is a detail requiring amplification in Mach's stimulating Historical Lectures on Mechanics.

We find two bicycles lashed together make a simple four-wheeled truck for incline experiments; it is easy to chock one or more of the wheels to investigate the effect of friction, and so determine the slope on which a carriage or train can be kept under control. In this company there is no need to point out the variety obtainable in this experiment from position of C. G., inflation of tire, and other conditions.

But I venture to ask why the pendulum formula for the time of a beat is written $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ instead of $\sqrt{\frac{l}{L}}$, where L is the length of the pendulum which beats a second; especially as it is L whic his measured experimentally, and not g, but g is derived from L by the formula $g = \pi^2 L$.

For most practical work we can take $L = 1$ meter; thus the pendulum which beats a march of N paces a minute is $l = \left(\frac{600}{N}\right)^2$ cm long; and 1% increase in N require 2% decrease in l.

For further analogy with pendulum oscillatory motion, we look out of the window again at the swaying of a tree or telegraph wire, the tide in the river, and when it is dark at the electric lamps now fed with an oscillating current.

Then to examine the theory more closely, hang up a weight by a spring balance; I find an old-fashioned six inch 32 ℔ round shot will serve. Then in the electric analogy, the weight represents the self-induction, the spring the varying voltage due to capacity, and the friction represents ohms of resistance.

We notice that the scale is graduated uniformly; if this is correct, then l the deflection of the spring is the equivalent pendulum length for vertical oscillation; and so also most of the results of dynamical problems on vibration are stated more concisely in terms of a length, the length of the equivalent pendulum which synchronizes, instead of the period of vibration, with the advantage that the result can be checked experimentally by a plummet at the end of a thread.

Many other dynamical results can be expressed in terms of a length:

1. The velocity of long tidal waves in shallow water is that due to falling half the depth.

2. The velocity of transversal vibration of a stretched rope is due to falling half the tension length; that is the length of rope hanging vertically which will give the tension.

3. In a fly-wheel, or tire of a motor car, the bursting velocity is due to half the breaking length.

4. The relative velocity of propagation of transversal waves in a belt or chain running in a curve or circle is the velocity of the chain; and this combined with the chain velocity gives two sets of waves, one propagated with double velocity which pass unnoticed, and the other set with zero velocity, and so stationary and visible, as in Kelvin's experiment.

5. The velocity of propagation of longitudinal vibration is due to half the elastic length, defined in Young's Natural Philosophy

as the length which hanging vertically would produce unit extension; but as the elastic limit would then have long been exceeded, the statement was improved by Maxwell to calling the elastic length n times the length which produces extension $\frac{1}{n}$, small enough to be well within the elastic limit.

I will not venture to go further into detail, but content myself with reminding you that the Laws of Motion were not firmly established except by Observation of the Solar System, the Dynamics on the greatest scale with which we are acquainted.

In an appeal to Experiment we ought to select the steamship, railway train, and traffic on the road as the largest illustrations of Dynamics created by human agency; and finally in the class room and workshop we can show the application on a small scale of the same principles.

But Experimental Science has hitherto been abandoned by the Mathematician to the Professor of Physics or Engineering, who thus takes charge of the large buildings and apparatus provided now regardless of expense.

I think the Mathematical Professor loses stimulus and runs a danger, at least in England, of being reduced to the rank of Demonstrator, in Physics or Engineering, if he holds himself aloof and will not undertake the direction, as of old, of the Experimental part of all exact Mathematical Science.

Über die auf die Anwendungen gerichteten Bestrebungen im mathematischen Unterricht der deutschen Universitäten.

Von

A. GUTZMER aus Jena.

Auf Wunsch des Herrn Einführenden dieser Sektion habe ich es übernommen, über die auf die Anwendungen gerichteten Bestrebungen im mathematischen Unterricht der deutschen Universitäten zu sprechen. Da es sich um innere deutsche Angelegenheiten handelt, die nur einem Teile der Mitglieder dieser internationalen Versammlung bekannt sind, bitte ich behufs besseren Verständnisses in meiner Darlegung etwas weiter ausholen zu dürfen. —

Während der letzten Jahre sind Fragen der Organisation und Umgestaltung des höheren Unterrichtswesens in Deutschland Gegenstand vieler und eingehender Erörterungen gewesen, die auch die Mathematik in den Kreis der Betrachtung gezogen haben, wo es sich u. a., allgemein zu reden, um die volle Geltendmachung eines mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsideales der realistischen Lehranstalten sowie um eine stärkere Belebung des mathematischen Unterrichts durch Anwendungen auf naturwissenschaftliche, technische oder soziale Fragen handelt.

Diese machtvolle Bewegung, die zuweilen nahezu stürmisch wurde, ist an unseren Universitäten nicht spurlos vorübergegangen; man kann vielmehr sagen, daß sie zum großen Teile ihren Ausgang von den Universitäten genommen hat, von diesen ausgelöst worden ist. Denn die neuen Bestrebungen sind eng verknüpft mit dem Namen von F. Klein, der schon vor langen Jahren als junger Professor und später zu wiederholten Malen seine Stimme erhoben hat, um gegenüber der abstrakten, den Anwendungen abholden reinen Mathematik auf die Notwendigkeit hinzuweisen, die Anwendungen an den Universitäten zu berücksichtigen, das Raumanschauungsvermögen der Studierenden zu entwickeln, die Fähigkeit der mathematischen Erfassung und Formulierung der Erscheinungen und Vorgänge im Leben, in der Natur und in der Technik zu wecken und zu schärfen.

Diese Forderungen entsprachen einem tiefen Bedürfnis; denn bei vielen Mathematikern hatte die einseitige formale Ausbildung eine Art von Stoffhunger nach konkreten Problemen und Anwendungen erzeugt. Auch den führenden Mathematikern der vorangehenden Periode war von dem sich anbahnenden Wandel eine Ahnung aufgegangen; wenigstens haben mir sowohl Weierstraß als auch Kronecker wiederholt ihre Meinung dahin ausgesprochen, daß der reichen Entwicklung der abstrakten Mathematik eine Periode der Anwendungen folgen werde; sicher seien nunmehr viele Probleme der theoretischen Physik, der Astronomie und der Technik, die man bisher nicht anzugreifen wußte, für eine Lösung reif.

Ein mächtiger Anstoß für die Reformbewegung ging namentlich auch von den Ingenieurkreisen aus. Auf die einzelnen Phasen dieser Strömungen näher einzugehen, die jetzt wesentlich nur noch von historischem Interesse sind, liegt außerhalb des Rahmens der heutigen Erörterung. Immerhin verdient die Tatsache betont zu werden, daß es zum großen Teile grade Mathematiker der strengen und abstrakten Richtung sind, die einer Berücksichtigung der Anwendungen der Mathematik das Wort geredet oder praktisch die Wege geebnet haben. Zur Bekräftigung dessen seien hier nur v. Brill, R. Fricke, Hauck, Klein, Krazer, Reye, Stäckel, H. Weber genannt, ohne damit die Liste dieser Namen zu erschöpfen. Daß grade die reinen Mathematiker in dieser Sache die Führung übernommen haben, ist ein Vorgang, dem neuerdings in den Vereinigten Staaten ein paralleles Vorgehen an die Seite getreten ist.

Mit weitem Blick ist die preußische Regierung, der sich die mitteldeutschen Staaten und Elsaß-Lothringen angeschlossen haben, dem hervorgetretenen Bedürfnis in der Prüfungsordnung vom Jahre 1898 entgegengekommen; es wurde einerseits die Lehrbefähigung für angewandte Mathematik neu geschaffen, andererseits wurde bestimmt, daß von der an Technischen Hochschulen zugebrachten Studienzeit bis zu drei Semester angerechnet werden können.

Infolge dieser neuen Bestimmungen haben die Universitäten sich bemüht, den Studierenden Gelegenheit zur Erwerbung der Kenntnisse und Fertigkeiten zu bieten, die für die neue Lehrbefähigung gefordert werden. Auf diese Dinge braucht hier nicht näher eingegangen zu werden, da außer dem Referat und Korreferat von H. Weber*) und

*) Jahresbericht 8, 95—104.

G. Hauck*) und anderen Aufsätzen insbesondere zwei zusammenfassende Berichte von P. Stäckel**) über den ganzen Komplex dieser Fragen in trefflichster Weise unterrichten. In dem letzten dieser beiden Berichte hat Stäckel die Ergebnisse seiner Betrachtungen zu einer Reihe von Thesen zusammengefaßt und dadurch die ganze Frage einen guten Schritt weitergebracht. Für die fernere Diskussion liegt nun eine bestimmte Grundlage und Ordnung vor. Ich möchte meine eigenen Darlegungen den Stäckelschen Thesen anpassen und meine in einigen Punkten abweichende Auffassung bei den einzelnen Thesen zum Ausdruck bringen.

Der ersten These: „Die Trennung der mathematisch-physikalischen und der biologischen Fächer ist seitens der Mathematiker aufs wärmste zu unterstützen“ werden wir unbedingt zustimmen, sowohl im Interesse der Vertiefung der mathematisch-physikalischen Fachausbildung als auch im Interesse der sehr wünschenswerten Hebung des biologischen Unterrichts. Selbstverständlich soll es dem einzelnen je nach Neigung und Begabung unbenommen bleiben, sich die Lehrbefähigung in Mathematik, Physik und Biologie zu erwerben; es handelt sich hier nur um das allgemeine Prinzip der Trennung dieser Fächer.

Nicht ganz so uneingeschränkt vermag ich die zweite These zu unterschreiben: „Bei den Anforderungen für die Lehrbefähigung in der reinen Mathematik ist auf eine Entlastung der Kandidaten Bedacht zu nehmen, jedoch eine vertiefte Einsicht in die Elemente der Mathematik zu fordern.“ Der letzten Forderung einer vertieften Einsicht in die Elemente stimme ich unbedingt zu; sie entspricht durchaus dem Stande der heutigen Wissenschaft, die ja grade durch die Forschungen auf diesem Gebiete um Ergebnisse von großer Tiefe und Tragweite bereichert worden ist, und sie berücksichtigt auch die wahren Bedürfnisse der künftigen Lehrer. Was die Frage der Entlastung der Kandidaten betrifft, so scheint mir, daß man nicht unter die keineswegs hochgespannten Anforderungen herabgehen sollte, die in der Prüfungsordnung vorgesehen sind. Ich glaube, daß dies auch Stäckels Meinung ist, und daß er nur davor warnen will, die der Natur der Sache nach unbestimmt gehaltenen Angaben der Prüfungsordnung zu weit nach oben zu interpretieren. Eine Verringerung der Anforderungen bei der Oberlehrerprüfung würde meines Erachtens nicht mehr die vertiefte mathematische Ausbildung gewährleisten, die der akademisch gebildete Lehrer besitzen muß. Ich möchte hier kurz auf die beherzigenswerte Dar-

*) Jahresbericht 8, 105—118.
**) Jahresbericht 11, 26—37; 13, 313—341.

legung über die in München 1893 gepflogenen Verhandlungen über die Frage der Prüfungsordnungen*) verweisen.

Wenden wir uns nunmehr zur dritten These. Es werden darin die Anforderungen für die Lehrbefähigung in der angewandten Mathematik formuliert; dieselben sollen umfassen: a) darstellende Geometrie nebst graphischer Statik, b) niedere Geodäsie und Elemente der höheren Geodäsie nebst Ausgleichungsrechnung und Beherrschung der numerischen Methoden zur Verwertung von Beobachtungen.

Dieser These vermag ich mich am wenigsten anzuschließen. Ich halte es für sehr bedauerlich, daß die darstellende Geometrie nicht für alle Mathematiker obligatorisch ist. Soweit ich unterrichtet bin, ist dies in Süddeutschland der Fall, und das ist dort dem Unterricht auf den humanistischen und realistischen Anstalten sehr zu statten gekommen. Freilich tritt durch die Hinzunahme der darstellenden Geometrie eine Mehrbelastung der einzelnen Studierenden ein, aber diese ist sehr gering und tritt ganz in den Hintergrund gegenüber den Vorteilen, die mit dieser Ausbildung verbunden sind. Und von einer Mehrbelastung wird vollends dann gar nicht mehr die Rede sein können, wenn die Fiktion des akademischen Trienniums zu Fall gebracht wird. In der Tat stimme ich durchaus für die Verlängerung der Studienzeit auf vier Jahre, so wie es in Süddeutschland (Bayern) schon lange der Fall ist; dies würde zugleich dem tatsächlichen Zustande in Norddeutschland Ausdruck geben.

Wird aber die darstellende Geometrie für alle Mathematiker obligatorisch gemacht, so wird damit vor allem die mathematische Ausbildung der Oberlehrer in Deutschland nahezu einheitlich, sodaß ein Austausch namentlich in Zeiten des Mangels bezw. Überflusses an Lehrkräften erleichtert wird. Hierzu kommt noch, daß die zwangsweise Einführung der darstellenden Geometrie die leider kaum zu vermeidende Unterscheidung in Mathematiker an humanistischen und an realistischen Anstalten, die Stäckel in seiner vierten These fordert, erheblich mildert. Der genannten These stimme ich auch deswegen durchaus zu, weil durch sie allein die Erwerbung der Lehrbefähigung in angewandter Mathematik für die Anstellung einen Wert erhält. Ohne Zweifel wäre es am besten, die Kenntnis der angewandten Mathematik von allen Kandidaten zu verlangen, die auf der Oberstufe mathematischen Unterricht erteilen wollen; indessen sind starke Gründe vorhanden, die dagegen sprechen und den durch die Stäckelsche vierte These gewiesenen Weg als den gangbarsten erscheinen lassen.

*) Jahresbericht 3, 5—6.

Für die allgemeine Einführung der darstellenden Geometrie in die mathematische Ausbildung der künftigen Oberlehrer spricht aber noch ein weiterer Gesichtspunkt, der nicht außer Acht gelassen werden darf. Nach allen meinen Beobachtungen und Erfahrungen, und ich denke damit keinem Widerspruche zu begegnen, liegt kaum irgend ein Gebiet so darnieder wie die Stereometrie. Hier muß Wandel geschaffen werden, und hierauf bezieht sich ja zum Teil die viel und laut erhobene Forderung der besseren Ausbildung der Raumanschauung. Damit muß natürlich vor allem bei den Lehramtskandidaten begonnen werden; sie müssen mit der Fähigkeit ausgerüstet werden, räumliche Gebilde zeichnerisch darzustellen, d. h. die künftigen Lehrer der Mathematik müssen sich die Elemente der darstellenden Geometrie aneignen. Das gilt auch grade von den Mathematikern, die an humanistischen Lehranstalten wirken; verlangen doch die Lehrpläne auch auf den Gymnasien eine „Anleitung zu perspektivischer Zeichnung", die natürlich nur auf Grund der Methoden der darstellenden Geometrie gegeben werden kann. Ich trete also aus den dargelegten Gründen und zugleich im Sinne der zweiten These Stäckels ein für eine Abzweigung der darstellenden Geometrie von der angewandten Mathematik.

Was soll nun also die angewandte Mathematik umfassen?

Mit Stäckel rechne ich dazu die in der vierten These unter b) genannten Gebiete: niedere Geodäsie, Elemente der höheren Geodäsie, Ausgleichungsrechnung, Beherrschung der numerischen Methoden zur Verwertung von Beobachtungen, und ferner natürlich graphische Statik. Aber während ich vor einer Übertreibung der Ansprüche in Geodäsie usw. warnen möchte, erscheint mir die graphische Statik doch etwas zu mager gegenüber dem in der geltenden Prüfungsordnung vorgeschriebenen Umfang, wo doch wenigstens das Wort „technische Mechanik" erwähnt wird. Ohne Berücksichtigung der Festigkeitslehre hat die graphische Statik nicht den vollen Nutzen, man bleibt sonst in den Elementen der technischen Mechanik stecken, während die dynamischen Probleme im Vordergrunde des heutigen Interesses stehen. Auch sollte man überhaupt sich davor hüten, in eine Überschätzung des Graphischen zu verfallen, denn nicht selten wird die analytische Behandlung einer Aufgabe einfacher als die graphische. Grade in der Durchdringung verschiedener Methoden und in der Erkenntnis ihrer besonderen Vorzüge und ihrer Leistungsfähigkeit liegt ein eigenartiger Reiz und eine große erzieherische Bedeutung.

Bei der Beschränkung auf die Stäckelschen Anforderungen, die in geschickter Weise das sogenannte „Gaußsche Programm" zur Geltung zu bringen suchen, ist meines Erachtens die Gefahr nicht vermieden, daß einerseits in mehr oder weniger naher Zukunft von neuem eine Entfremdung zwischen den Mathematikern und Ingenieuren eintritt, und daß andererseits infolgedessen die so vorgebildeten Lehrer mit der Befähigung in reiner und angewandter Mathematik nicht einmal den Ansprüchen und Bedürfnissen der technischen Mittelschulen zu genügen fähig sein werden. Ein Abströmen unseres Überflusses von Kandidaten in diesen Kanal ist dann ausgeschlossen; der Mathematiker wird die Sprache des Technikers nicht verstehen, und damit ist der Gegensatz und die gegenseitige Geringschätzung mit ihren unerfreulichen Folgen geschaffen.

Ich meine also, es sollten Festigkeitslehre, Elastizitätstheorie, Thermodynamik, Elektrotechnik usw. an den Universitäten gepflegt werden, und das kann vielfach mit verhältnismäßig geringen Mitteln geschehen, wenn die Physiker der technischen Physik angemessene Beachtung schenken, wie es auch Stäckel in einer späteren These verlangt. Geschieht dies, so läßt sich in der angewandten Mathematik und Physik ein erfreuliches Ergebnis auch an den Universitäten erzielen, die nicht so günstig gestellt sind, besondere Institute dafür zu besitzen wie Jena dank der Carl Zeißstiftung oder gar wie Göttingen, das in Bezug auf Institutseinrichtung und Zahl der Dozenten eine geradezu inkommensurable Präponderanz besitzt.

Auf die übrigen Thesen Stäckels einzugehen, liegt für mich um so weniger Anlaß vor, als ich ihnen durchaus zustimme. Nur bliebe bei der sechsten These zu wünschen, daß die Promotionsbedingungen in betreff der angewandten Mathematik und der technischen Physik einheitlich formuliert würden, und zwar bis auf weiteres in Übereinstimmung mit den in Göttingen und Jena geltenden Bestimmungen.

* * *

Zum Schluß gestatte ich mir noch einen anderen Punkt zu berühren, der sich auch auf eine „Anwendung“ bezieht, nämlich auf eine Anwendung der Pädagogik im mathematischen Universitätsunterricht. Auch A. Pringsheim hat in seiner Rede über den Wert und angeblichen Unwert der Mathematik*) diese Frage gestreift. Auf den ersten Blick liegt ja etwas Verführerisches in der Forderung, daß an den Universitäten für eine *mathematische Pädagogik* Sorge getragen werden sollte. Dennoch möchte ich mich dagegen aussprechen, und zwar nicht so sehr wegen der etwaigen finanziellen Schwierigkeiten als vielmehr aus inneren Gründen.

---

*) Jahresbericht 13, 357—382.

Die Universitäten sind in erster Linie wissenschaftliche Bildungsanstalten oder sollten es doch sein, und ihre Aufgabe besteht, soweit die künftigen Lehrer in Frage kommen, in der *wissenschaftlichen* Ausbildung der letzteren, wozu auch selbstverständlich die wissenschaftliche Pädagogik gehört. Sofern die Vorlesungen über das letztere Gebiet nicht etwa schon die mathematischen Unterrichtsmethoden in den Kreis ihrer Erörterung ziehen, werden natürlich auch besondere, von Mathematikern dargebotene Vorträge über Methoden und Geschichte der Elementarmathematik den Studierenden für ihren künftigen Beruf äußerst nützlich sein; man wird sogar aufs lebhafteste wünschen und fordern müssen, daß Vorlesungen dieser Art an den Universitäten in regelmäßiger Wiederkehr gehalten werden. Aber die eigentliche praktische Pädagogik muß, wie überhaupt so auch in dem Gebiete der Mathematik, nach meinem Dafürhalten nicht Aufgabe der Universität, sondern des Seminar- und Probejahres sein. Ich halte diese Einrichtung des Seminar- und Probejahres für eine sehr glückliche Schöpfung der Unterrichtsverwaltung und bin überzeugt, daß sie bei weiterer aufmerksamer und liebevoller Pflege und verständnisvollem Ausbau die segensreichste Wirkung haben wird. Denn hier lernen die Schulamtskandidaten einen wirklichen Schulbetrieb kennen, hier haben sie Lehrmeister, die über eine ausgedehnte Erfahrung und Übung verfügen; kein Hochschulpädagoge kann ihnen auf die Dauer dasselbe bieten. Pädagogische Anleitungen haben für das jugendliche Gemüt leicht den fatalen Beigeschmack des Pedantischen; es gehört eine gewisse Reife dazu, die tiefere methodische oder ethische Bedeutung pädagogischer Maßnahmen und Unterrichtsverfahren voll zu erkennen und sich zu eigen zu machen. Deswegen sollte man die Einführung in die pädagogische Praxis nicht schon in die Zeit der wissenschaftlichen Universitätsstudien verlegen. Und wie wundervoll ist überdies der Gedanke, die Lehrer selbst dazu heranzuziehen, daß sie die letzte Feile an die Ausbildung ihres Nachwuchses anlegen — all die Erfahrung, die hohe Intelligenz und der Idealismus unseres akademischen Lehrerstandes gelangen hierbei zur fruchtbaren Mitarbeit. So wenig die Universität der gerichtlichen Praxis fertige Juristen, der medizinischen Praxis fertige Ärzte liefert, so wenig kann sie den höheren Lehranstalten fertig ausgebildete Lehrer zur Verfügung stellen; sie muß es den akademischen Lehrerkreisen überlassen, die wissenschaftlich durchgebildeten Kandidaten in die hohe Kunst der pädagogischen Praxis einzuführen.

Zu wünschen wäre nun, daß auch das technische Mittelschulwesen in ähnlicher Weise organisiert würde wie die höheren Lehranstalten, nämlich hinsichtlich der wissenschaftlichen Ausbildung — wozu vielleicht die Technischen Hochschulen den geeignetsten Boden bilden — wie auch hinsichtlich der pädagogischen Ausbildung ihrer Lehrkräfte. Ob sich das nach Lage der Dinge bald erreichen ließe, mag dahingestellt bleiben, im Interesse des technischen Unterrichts und des nationalen Wohlstandes sollte es aber mit allen Kräften erstrebt werden. Mit dem Aufwand verhältnismäßig geringer Mittel ließe sich grade auf diesem Gebiete Großes erreichen.

Sur l'enseignement des mathématiques en Italie.

Von

G. Loria aus Genua.

Le savant illustre qui s'occupa de l'organisation de cette section du Congrès (M. H. Schubert), m'ayant fait l'honneur de m'inviter à traiter quelque sujet relatif à l'enseignement des mathématiques en Italie, j'étais libre de m'occuper de quelque question spéciale, ou bien de faire une revue rapide des problèmes pédagogiques relatifs aux sciences exactes, qui ont été discutés ou résolus de nos jours dans mon pays: j'ai choisi ce second système, car plus étendu est le thème qu'on traite et plus est légitime l'espérance d'intéresser une assemblée nombreuse; et, d'ailleurs, aucun des problèmes d'instruction, qui pouvaient prétendre d'être choisis par moi, n'est doué de titres de préminence absolue, comparables p. ex. à ceux que possèdent les questions que MM. Klein et Perry ont récemment mis à l'ordre du jour en Allemagne et en Angleterre. Par conséquence je me propose, de faire à la hâte une course à travers les écoles moyennes d'Italie, en offrant mes services de Cicéron à mes honorés collègues de l'étranger qui s'intéressent aux programmes d'enseignement et aux livres de texte; si dans cette course je ne m'arrêterai pas aux universités, c'est que la liberté académique qu'y règne et gouverne s'oppose à une marche rigoureusement uniforme de l'enseignement supérieur et ne permet pas de remarques générales.*)

Les traditions géométriques de l'Italie sont sans contestation euclidiennes; dès que les ténèbres du Moyen-Age furent éclaircies des éditions, des traductions, des commentaires des Eléments d'Euclide commencèrent à paraître et elles continuèrent à se succéder sans cesse, en portant les signatures de personalités éminentes, telles que Tartaglia, Commandino, Viviani, Borelli, Grandi, Sacheri, Fagnano, Flauti: la série

---

*) Je veux seulement remarquer l'introduction dans nos Universités d'un cours spécial de mathématiques pour les chimistes et les naturalistes

brillante que forment ces representative men, par sa continuité prouve le culte sans bornes et presque sans athées que ma patrie pendant bien de siècles paya au grand Alexandrin.

Toutefois, au moment où elle, devenue enfin libre, put jouir, d'un bout à l'autre, d'un gouvernement national, elle conservait encore dans son organisation scolaire des traces déplorables et évidentes de son séculaire servage. Dans l'ancien Piemont p. ex., certainement à cause de l'influence française, on préférait la méthode demi-arithmétique de Legendre aux rigoureux procédés géométriques d'Euclide: tandis que dans les provinces qui venaient de secouer le joug autrichien se trouvaient répandus des manuels écrits avec le seul but évident de spéculation commerciale*); ils étaient si peu satisfaisant que Cremona, devenu professeur dans un Gymnase de la Lombardie, n'en voulut adopter aucun comme livre de texte, et salua, comme signal d'amélioration actuelle et comme source de progrès futurs, la traduction d'un ouvrage, aujourd'hui déjà oublié.**)

Chargé en 1867 par son gouvernement de tracer les lignes générales d'une réforme de l'enseignement géométrique dans les écoles classiques italiennes, Cremona n'hésita pas un seul instant de proposer comme remède le retour pur et simple aux Eléments d'Euclide. Si cette mesure, que le gouvernement s'empressa d'adopter, peut paraître aujourd'hui un peu trop draconienne, lorsqu'on tient compte du but qu'elle se proposait (et qu'elle atteint en effet), c'est-à-dire d'extirper de nos écoles les mauvaises habitudes introduites par certains livres, elle doit être considérée comme un des actes du grand mathématicien qui le signalent à reconnaissance éternelle de ses concitoyens. Il est juste d'ajouter que dans sa courageuse entreprise il eut comme alliés deux autres fameux savants, Brioschi et Betti, dont l'excellente édition d'Euclide rendit, non seulement possible, mais relativement aisée, la réforme proposée par Cremona.

Le retour à la source pure de la géométrie grecque, ayant comme résultat immédiate des préjudices matériels, provoqua une opposition vive, mais qui ne pouvait durer longtemps et qui par bonheur finit bientôt par s'éteindre. Toutefois les grands mathématiciens, qui introduisirent derechef les Eléments d'Euclide dans les écoles italiennes, ne niaient pas que ce livre, après vingt-deux siècles, eut besoin de retouches; par conséquent le gouvernement italien ouvrait un concours pour un traité inédit de géométrie élémentaire et un peu plus tard

*) Comp. Rivista ginnasiale e delle scuole tecniche e reali, T. IV, p. 444 et 719.

**) Je veux parler du Traité de Géométrie d'Amiot.

adoucissait la disposition que nous avons citée tout à l'heure, en se bornant à prétendre que l'enseignement classique fut fait par la méthode, mais non sur le texte même d'Euclide. Voilà une décision qu'on ne saurait trop louer; car c'est elle qui permit l'adoption dans nos écoles de bons traités tels que ceux de Sannia et d'Ovidio et de Faifofer; c'est elle qui invita en quelque sorte les géomètres à chercher si les théories exposées par le grand maître grec se prêtaient à des améliorations didactiques et scientifiques, et donna d'essor à des recherches couronnées par des résultats d'une importance considérable; telles sont celles, ayant trait à la théorie de l'équivalence des polygones et des polyèdres, et qui parvinrent à corriger un défaut, existant dans les Eléments d'Euclide, que Legendre lui-même n'avait pu ôter.

Ce régime de liberté toujours croissante, si conforme au naturel du peuple italien, eut encore un autre résultat important, c'est-à-dire d'encourager des savants de premier ordre, vivants au déhors des écoles moyennes, à tourner leur pensées du côté des éléments de la géométrie.

Le premier des savants qui entrèrent dans cette voie est notre regretté De Paolis, qui, par un excellent manuel, tout-à-fait original, non seulement rendit populaire dans nos écoles l'idée d'abandonner l'ancienne séparation entre la géométrie plane et la géométrie de l'espace, mais, par de nombreux exemples, prouva l'utilité théorique de cette innovation.

Non moins radicale est la réforme que proposa plus tard M. Veronese, en poursuivant le cours des idées qui caractérisent ses célèbres recherches de géométrie à plusieurs dimensions; bornons-nous à signaler ses efforts victorieux pour déterminer le rôle de l'idée de mouvement dans les démonstrations géométriques, et la conclusion, à laquelle il parvint, qu'il est scientifiquement possible et utile du point de vue pédagogique, de bannir tout-à-fait ce concept. L'importance de l'action de M. Veronese a été accrue par les discussions soulevées par ses propositions.

Moins révolutionnaires ont été les derniers entre les savants italiens qui s'occupèrent de la géométrie élémentaire; en effet MM. Enriques et Amaldi, en se rattachant de nouveau à la tradition euclidienne, se proposèrent dans un livre récent de réformer les Eléments d'Euclide, en les exposant sous une forme correspondante à l'état actuel de la science et aux besoins de nos écoles; la question des postulats fondamentaux de la géométrie et la théorie de l'équivalence attirèrent leur attention d'une manière tout-à-fait spéciale, dans le but de satisfaire à la fois aux exigeances de l'enseignement et à celles de la science d'aujourd'hui.

De nature bien différente est enfin l'essai d'introduire la logique mathématique dans l'enseignement élémentaire de la géométrie, aussi bien que de l'algèbre; cet essai doit être cité car il se base sur une méthode qui compte en Italie des culteurs nombreux et habiles; mais, ceux-là même qui considèrent favorablement le calcul logique dans ses applications à l'analyse microscopique des idées fondamentales des mathématiques, ne croient pas qu'il soit destiné à nous fournir la solution définitive du problème de l'enseignement élémentaire.

Ayant eu l'occasion de citer des travaux didactiques ayant trait au calcul, il ne m'est pas permis de taire que des maîtres tels que MM. Arzelà, Capelli et Pincherle, par des essais qu'on ne saurait assez louer, ont affranchie ma patrie de la nécessité de recourir à l'étranger pour avoir des bons manuels d'arithmétique et d'algèbre.

Les élèves des savants que nous venons de nommer, dès qu'ils occupèrent une chaire dans l'enseignement moyen, se proposèrent, par des efforts qui les honorent, de mettre à l'épreuve ces nouveaux procédés didactiques; par cela il réussirent de les rendre plus parfaits dans les détails et plus adaptés à l'intelligence des jeunes gens. En conséquence l'ancien type de nos écoles subit une modification radicale; car les jeunes professeurs, essayant avec un enthousiasme communicatif les méthodes nouvelles, ramenèrent de la vie et de la lumière dans les mornes salles où auparavant quelque vieux maître, tout en bâillant, exposait l'ancienne démonstration du théorème de Pythagore, en présence d'un auditoire sommeillant. Le grand public, en général enclin à se méfier des nouveautés, suit avec appréhension ce changement, appuyé en cela par les maîtres de „l'ancien régime“, qui considèrent tout ce mouvement par le même oeil que certains anciens médecins jugent les modernes procédés curatifs; maix ceux qui ont foi dans le progrès indéfini du savoir ne peuvent que saluer avec joie les progrès que fait la méthode d'enseignement de la géométrie, tout en procédant toujours sur la route indestructible frayée par Euclide.

Dans la société Mathésis, fondée il y a quelques années parmi ceux qui enseignent les sciences exactes dans les écoles moyennes, se réfléchit d'une manière saisissante cette vie qu'anime nos professeurs de mathématiques; son noble programme a été résumé heureusement par un de ses présidents, en écrivant que son but est de tourner les progrès de la science à l'avantage de l'école. En attirant l'attention des savants sur des thèmes déterminés, en dirigeant les discussions relatives, en fixant des réunions partielles et des congrès généraux, Mathésis tient allumé ce feu sacré qui nous paraît nécessaire pour que les professeurs des écoles moyennes soient dignes de la haute fonction que la société leur a confiée; si, en revenant à ces procédés anciens, elle aura soin de maintenir le contact continuel de ses sociétaires avec les membres du corps universitaire, elle contribuera à développer de plus en plus cet échange d'idées, entre les professeurs de tous les degrés, qui nous semble indispensable si on veut assurer cette continuité dans l'enseignement de la même branche du savoir, qui paraît indispensable à tous ceux qui se rappellent que natura abhorret a saltus.

Parmi les questions qu'on a discutées au sein de Mathésis il y en a deux qui, par leur importance, méritent que nous en disions quelques mots.

La première a été soulevée par la publication du traité de géométrie De Paolis et consiste dans la recherche des avantages que peut tirer l'enseignement si l'on détruit l'ancienne séparation élevée (ou consacrée) par Euclide entre la géométrie plane et celle de l'espace. Dès 1825 Gergonne observait „qu'il est raisonnablement permis de se demander si notre manière de diviser la géométrie en géométrie plane et géométrie de l'espace est aussi naturelle et aussi exactement conforme à l'essence des choses, que vingt siècles d'habitude ont pu nous le persuader“; c'est la même idée que soutient une quinzaine d'années après un obscur géomètre français, de Mahistre, dont M. Laisant a récemment opéré l'exhumation.*)

La 2e éd. de l'ouvrage de Mahistre parut dans la même année (1844) où fut publié le Lehrgebäude der niederen Geometrie de Carl Anton Bretschneider, dans lequel la fusion entrevue par Gergonne est effectuée, car, au lieu de l'ancienne division de la géométrie, on trouve celle en géométrie de position, géométrie de la forme, géométrie de la mesure. Si nous ne nous trompons pas, Bretschneider en Allemagne, non plus que Gergonne en France, ne trouva des imitateurs, quoique Schlömilch n'ait pas hésité à proclamer que „la prééminence de la planimétrie est une erreur, le ton doit être donné par la stéréométrie“. Quant à l'Italie il est bien remarquable que dans les programmes officiels pour nos Instituts techniques, publiés en Octobre 1871, on lit les lignes suivants, dues sans doute à Brioschi: „Se servir de l'espace à trois dimensions, même dans les questions de géométrie plane, est un des artifices d'investigation géométrique, que même les anciens ont connu, et qui contribue à donner bientôt aux élèves l'habitude de voir par les yeux de l'esprit les figures géométriques de l'espace idéal.“ Et peu après Cremona ajoutait dans un ouvrage cé-

*) L'Enseignement mathématique T. III, 1901, p. 98 et suiv.

lèbre*): „Les considérations stéréométriques donnent bien souvent le moyen de rendre facile et intuitif ce qui en géométrie plane serait compliqué et de démonstration difficile: d'ailleurs elles aiguisent l'intelligence et aident le développement de cette imagination géométrique, qui est une qualité essentielle de l'ingénieur pour qu'il puisse concevoir les figures de l'espace même sans l'aide d'un dessein ou d'un modèle". Presque au même instant où le grand maître italien écrivit ces lignes, un éminent géomètre français, M. Méray, en s'inspirant aux idées de Gergonne, effectuait la fusion des deux géométries, par ses excellents Nouveaux éléments. Mais il semble qu'à ce moment-là ses idées ne furent guère goutées par ses compatriotes, ni à l'étranger; en tout cas elles n'étaient pas connues par De Paolis lorsqu'il conçut le plan de ses Elementi di geometria (Torino, 1884). C'est par la publication de ce livre que commencèrent en Italie les longues discussions entre fusionistes et séparatistes; et il est digne d'être noté que l'écho de ces débats, étant arrivé jusqu'à Dijon, par l'organe de celui qui a l'honneur de vous parler**), M. Méray fut encouragé de revenir sur ses anciennes méthodes et de les perfectionner; un succès étonnant, constaté par des documents officiels, a couronné ces nouveaux efforts!

On s'est plu à me peindre comme un fusioniste ardent; c'est une exagération; aimant en général toute nouveauté, j'ai considéré avec vive sympathie l'apparition d'une méthode nouvelle pour considérer l'ensemble des vérités géométriques. D'ailleurs, lorsqu'un procédé a été imaginé par des personnes distingués, appartenants à des nationalités et à d'époques différentes, et lorsqu'il s'est montré capable d'applications très vastes et très variées***), il me semble qu'il ne mérite pas d'être relégué parmi des produits artificiels destinés à mourir, même si ses résultats n'autorisaient pas encore à trancher la question en sa faveur.

Cela étant, il est naturel que j'exprime le voeu que la question de la fusion de la planimétrie et de la stéréométrie soit étudiée d'une manière large et complète, en essayant de la résoudre en se servant tout aussi bien de considérations théoriques et des résultats des expériences qu'on a déjà faites†) et qu'on est en train de faire.

L'autre des questions traitées au sein de l'Association Mathésis,

*) Elementi di geometria projettiva (Torino, 1873).

**) Voyez ma conférence sur La storia della matematica, lue le 15 Sept. 1898 au I. Congrès des professeurs des écoles moyennes.

***) On peut par ex. l'appliquer aussi dans l'enseignement de la géométrie analytique, comme l'a prouvé Biot dès l'an 1802.

†) Il est bon de remarquer que les derniers programmes italiens ont été rédigés de manière qu'ils peuvent servir aux fusionistes, aussi bien qu'aux séparatistes.

auxquelles je fis allusion un peu plus haut, est la recherche des moyens pour augmenter le profit de l'enseignement des éléments des mathématiques. Or cet enseignement donne-t-il en général des résultats moindres que les autres enseignements parallèles, scientifiques ou littéraires? Je ne saurais l'affirmer. Toutefois je trouve belle et digne de considération la question que je viens de rapporter, car tout maître doit s'efforcer d'accroître l'efficacité de son enseignement, quelque soit le degré qu'il a déjà atteint. On ne peut s'attendre à obtenir une solution définitive et complète de la question énoncée; les observations générales que suivent ne sont destinées qu'à l'éclaircir un peu. Je vais commencer par une qu'a faite Hermite, presque à la veille de sa mort; voilà comment s'exprimait ce grand maître:

„Bacon de Verulam a dit que l'admiration est le principe du savoir; sa pensée qui est juste en général, l'est surtout à l'égard de notre science, et je m'en autoriserai pour exprimer le désir qu'on fasse, pour les étudiants, la part la plus large aux choses simples et belles qu'à l'extrème rigueur, aujourd'hui si en honneur, mais bien peu attrayante, souvent même fatiguante, sans grand profit pour le commençant qui n'en peut comprendre l'intérêt".*)

Une idée analogue à celle de Bacon a été émise par un philosophe italien, Bovio, en disant que „le but de l'enseignement secondaire est celui d'apprendre, non la science, mais l'amour de la science". Or les mathématiques peuvent se considérer sous un double aspect; c'est-à-dire on peut les admirer comme un modèle incomparable d'édifice scientifique, d'une solidité si parfaite que même le zèle de la critique n'a su en secouer les bases; ou bien comme fournissant des moyens de recherche si sûrs et puissants que toutes les autres sciences y eurent recours, dès qu'elles abandonnèrent leur état d'enfance. Or si c'est une prérogative de quelques esprits d'élite d'aimer dès la jeunesse la mathématique pour ses qualités théoriques, toute personne intelligente ne peut rester froide en présence des belles applications, qu'elle reçoit et qui le font apparaître comme la véritable logique des sciences de la Nature. En conséquence il ne sera pas assez recommandé aux professeurs de mathématiques de traduire, sons une forme concrète, les questions mathématiques**) et d'insérer, au milieu de l'exposition des

*) Archiv für Mathematik und Physik, 3. Reihe, I. Bd., 1901, p. 20.

**) P. ex. le problème „trouver la hauteur d'une pyramide triangulaire, en connaissant les angles faits avec le plan ABC de la base par les arêtes latéraux VA, VB, VC," peut s'énoncer: „calculer la hauteur d'une aréostate V, en connaissant ses angles d'élévation, lorsqu'on l'observe depuis trois points A, B, C, dont les distances mutuelles sont connues." Et la question de „trouver l'interdoctrines, le plus souvent qu'ils peuvent, des applications pratiques variées et intéressantes. C'est d'ailleurs une idée que j'ai trouvé déjà appliquée dans un excellent traité de géométrie publié en Allemagne: je parle de celui de MM. Henrici et Treutlein, où, comme application de la trigonométrie, on trouve les éléments de la triangulation du grand-duché de Bade!

Le nom vénéré de M. Treutlein, que je viens de prononcer, me donne l'occasion de déclarer que je me range aussi de son côté lorsqu'il recommande l'introduction d'un élément historique dans l'exposé des théories mathématiques: „les matières de la géométrie (a remarqué Blaise Pascal) sont si sérieuses d'elles même, qu'il est avantageux qu'il s'offre quelque occasion pour les rendre un peu divertissantes"; or c'est l'élément historique qui fournit peut-être le moyen meilleur pour interrompre la marche un peu lourde des déductions mathématiques.

Permettez-moi, Messieurs, que j'ajoute enfin une proposition concernant particulièrement la géométrie. Dans l'enseignement universitaire les cours de géométrie projective et de géométrie descriptive sont accompagnés d'exercises méthodiques de dessein, dans lesquelles les étudiants effectuent les constructions et appliquent les théories exposées par le professeur; c'est un système on ne peut plus bon, qui sert à familiariser les élèves avec les méthodes dont les sources se trouvent dans les oeuvres immortelles de Monge et Poncelet. Or pourquoi ce système ne pourrait-il pas s'étendre aux écoles moyennes? Deux heures d'exercises graphiques chaque semaine suffiront aux élèves pour s'emparer de l'essence même des procédés propres de la géométrie, et par ce commerce continuel avec les cercles et les triangles ils apprendront à aimer ce qu'auparavant ils ne faisaient que redouter: qu'il me soit permis de fixer sur cette idée l'attention des savants pédagogistes qui me font l'honneur de m'écouter.

Comme c'est bien naturel au sein de l'Association Mathésis on a beaucoup parlé de programmes d'enseignement, en s'occupant des écoles classiques (Gymnasien) aussi bien que des écoles et des instituts techniques (niedere und obere Realschulen). C'est à propos de ces dernières que la différence des idées s'est manifestée le plus vivement et n'est pas encore disparue; c'est une chose qu'on pouvait prévoir et qu'il n'est pas difficile de s'expliquer; car l'enseignement technique n'a pas un type déterminé et fixe dans tout le monde civil; en Italie il y a des personnes qui croient bon de le forger sur le modèle des latein-

---

section d'une surface avec un cône circulaire" est identique au fond avec celle de „déterminer l'ombre portée par un disque sur une surface donnée".

losen Schulen de l'Allemagne ou de l'enseignement moderne de la France, tandis que d'autres soutiennent l'opinion qu'il faut lui donner un caractère franchement professionel, telle que l'aurait une école des arts et métiers. Je ne sais pas si ce soit la cause ou l'effet de cette diversité d'opinions le fait que nos instituts techniques ont fait un voyage d'aller et retour du ministère de l'instruction à celui de l'agriculture et commerce; en tout cas il me semble que ces écoles soient aujourd'hui formées par des éléments hétérogènes, luttant sourdement entre eux pour l'hégémonie et entre lesquels il naîtra tôt ou tard une scission définitive.

Comme professeur universitaire je m'intéresse particulièrement au programme de la section physico-mathématique, car c'est elle seule qui mène aux écoles supérieures. Or ce programme a subi beaucoup de changements et je crois qu'il en subira encore, car le but même qu'il se propose n'est pas bien déterminé: pour les mathématiques il doit s'elever au dessus des théories tout-à-fait élémentaires, mais il ne doit pas atteindre les mathématiques supérieurs; il doit donc comprendre les mathématiques complémentaires. Or quelles sont les théories embrassées sous ce nom? Personne ne pourrait à present le dire, ni le saurait dire jamais. Par conséquence, suivant mon sentiment, il n'y a qu'une manière de rédiger le programme des mathématiques pour la section physico-mathématique des instituts techniques, c'est de faire une liste assez nombreuse de thèmes, entre lesquels le professeur pourrait choisir suivant ses idées et ses attitudes, ou bien suivant les traditions de l'établissement auquel il appartient ou au naturel des élèves. Cette idée n'est pas nouvelle dans le fond car elle constitue la moëlle du Lehrplan, publié il y a trois ans pour les Oberrealschulen de l'Allemagne; c'est une idée profonde et extrèmement libérale, qui fait honneur aux savants qui en ont pris l'initiative et il est à souhaiter qu'elle soit appliquée d'une manière encore plus générale.

Messieurs! Le temps très borné dont je disposais ne m'a pas permis de traiter tout au fond les questions que j'ai énoncées, mais seulement de les effleurer. Toutefois je me flatte que par le peu que j'ai dit on verra que si l'Italie, dans ce dernier demi-siècle, sous la guide de capitains tels que Brioschi, Cremona, Beltrami, Betti et Dini, sut prendre une place distinguée parmi les nations où fleurissent les sciences exactes, elle n'a pas oublié les questions d'enseignement, en y portant une note caractéristique marquée. Ainsi ma patrie s'est montrée convaincue que si c'est aux savants qu'on doit la science d'aujourd'hui, c'est aux maîtres de préparer les conquêtes de la science de demain.

L'enquête de „L'Enseignement Mathématique" sur la méthode de travail des mathématiciens.

Von

H. Fehr aus Genf.

La communication que j'ai l'honneur de vous présenter n'a pas pour objet un travail mathématique proprement dit, mais, par son but, elle est de nature à interesser l'ensemble des mathématiciens.

La Rédaction de „l'Enseignement Mathématique" a pensé qu'il y a lieu de saisir l'occassion de ce congrès pour signaler son Enquête sur la méthode de travail des mathématiciens, et c'est au nom de ladite Rédaction que je vous présente aujourd'hui le Questionnaire. Je regrette que mon collègue et vénéré ami M. Laisant, l'un de ceux qui ont pris l'initiative de nos congrès, n'ait pu venir prendre part à nos séances; il vous aurait exposé, mieux que je ne puis le faire, les grandes lignes du travail auquel nous vous invitons à collaborer.

Le but de notre enquête est de consulter les mathématiciens sur des questions relatives à leur méthode de travail et de dégager de l'ensemble des réponses un certain nombre de renseignements et de conseils qui seront profitables non seulement aux jeunes mathématiciens, mais à l'enseignement mathématique d'une manière générale.

C'est à la suite d'une proposition de M. Ed. Maillet que nous avons examiné le projet d'une pareille enquête. La préparation du questionnaire était un travail qui, en raison même de son importance, méritait d'être fait avec beaucoup de soin après avoir entendu l'avis et les conseils de nos lecteurs et de quelques spécialistes en matière de psychologie expérimentale.

L'enquête porte, d'une part, sur des questions d'ordre psychologique (questions n^{os} 1 à 21, 29 et 30), d'autre part, sur des questions relatives au mode de vie du mathématicien (n^{os} 22 à 28). Il y a en effet intérêt à connaître non seulement les habitudes de travail du mathématicien, mais aussi ses habitudes d'hygiène générale et d'obtenir ainsi son avis sur les moyens qu'il juge le plus propre à faciliter le travail intellectuel.

Voici le texte du Questionnaire:

Avant-propos. — Il va de soi qu'il est loisible à chacun de ne répondre que sur les points à sa convenance et qu'il ne doit voir dans notre pensée aucune tentative d'indiscrétion. Par contre il ne saurait nous opposer aucun argument emprunté à une sorte de fausse modestie. Chacun a le droit de dire: „la manière dont je travaille n'a pas d'intérêt pour les autres.“ Mais il est certain que la manière dont l'*ensemble* des mathématiciens travaille a le plus grand intérêt. Et même, de l'inévitable diversité des réponses doit sortir un très utile enseignement.

Questions d'ordre phsychologique.

1. — a) A quelle époque, d'après vos souvenirs, et dans quelles circonstances, le goût des sciences mathématiques s'est-il emparé de vous?

b) Ce goût est-il héréditaire chez vous? Avez-vous eu dans votre ascendance, ou y a-t-il parmi les autres membres de votre famille (frères et soeurs, oncles, cousins, etc.) des personnes spécialement douées au point de vue mathématique? Leur exemple ou leur influence personnelle ont-ils été pour quelque chose dans votre inclination du côté des mathématiques?

2. — Quelles sont les branches de la science mathématique vers lesquelles vous vous êtes senti plus particulièrement attiré?

3. — Etes-vous plutôt attiré par l'intérêt de la science mathématique en elle-même, ou par les applications de cette science aux phénomènes de la nature?

4. — Avez-vous conservé un souvenir précis de votre manière de travailler lorsque vous poursuiviez vos études, alors que le but était plutôt de s'assimiler les richesses d'autrui que de vous livrer à des recherches personnelles? Avez-vous sur ce point quelques renseignements intéressants à fournir?

5. — Une fois les études mathématiques usuelles (correspondant par exemple au programme de la licence mathématique ou de l'agrégation ou de deux licences) terminées, dans quel sens avez-vous cru devoir orienter vos études? Avez-vous d'abord cherché à acquérir une instruction générale très étendue sur plusieurs points de la science avant de produire ou de publier quelque chose de sérieux? Avez-vous au contraire cherché à approfondir d'abord un point particulier en n'étudiant à peu près que ce qui était indispensable dans ce but; et n'est-ce qu'ensuite que vous vous êtes étendu peu à peu? Et si vous avez employé d'autres méthodes pouvez-vous les indiquer sommairement? Quelle est celle que vous préférez?

6. — Avez-vous cherché à vous rendre compte de la genèse des vérités, découvertes par vous, auxquelles vous attachez le plus de prix?

7. — Quelle est, selon vous, la part du hasard ou de l'inspiration dans les découvertes mathématiques? Cette part est-elle aussi grande toujours qu'elle le paraît?

8. — a) Avez-vous remarqué parfois que des découvertes ou des solutions, sur un sujet complètement étranger à vos recherches du moment, vous aient apparu, alors qu'elles correspondaient à des recherches antérieures infructueuses?

b) Vous arrive-t-il de calculer ou de résoudre des problèmes en rêve? ou de voir surgir toutes prêtes, en vous réveillant le matin, des solutions ou découvertes soit complètement inattendues, soit vainement poursuivies la veille ou les jours précédents?

9. — Estimez-vous que vos principales découvertes aient été le résultat d'un travail voulu, dirigé dans un sens précis, ou bien se soient présentées à votre esprit spontanément pour ainsi dire?

10. — Lorsque vous avez obtenu un résultat sur un sujet que vous poursuivez en vue de publier vos recherches, rédigez-vous immédiatement la partie de votre travail correspondante? Au contraire, accumulez-vous vos résultats sous forme de simples notes, pour n'aborder la rédaction que sur un ensemble important?

11. — D'une manière générale, quelle est la part d'importance que vous attribuez aux lectures en matière de recherches mathématiques? Quels conseils donneriez-vous à ce sujet à un jeune mathématicien pourvu de l'instruction classique habituelle?

12. — Avant d'entamer un travail, cherchez-vous tout d'abord à vous assimiler les travaux qui ont été produits sur le même sujet?

13. — Préférez-vous au contraire laisser à votre esprit son entière liberté, sauf à vérifier ensuite, par des lectures sur le sujet, la part qui vous est personnelle dans les résultats que vous avez obtenus?

14. — Quand vous abordez une question cherchez-vous à étudier de suite d'une façon aussi générale que possible les problèmes plus ou moins précis que vous vous posez? Préférez-vous habituellement traiter d'abord des cas particuliers, ou un cas étendu, pour généraliser ensuite progressivement?

15. — Faites-vous une distinction, au point de vue de la méthode, entre le travail d'invention et celui de rédaction?

16. — Vos habitudes de travail, depuis vos études terminées, vous semblent-elles avoir été sensiblement les mêmes?

17. — Dans vos principales recherches, avez-vous poursuivi constamment votre but, sans discontinuité, ou bien avez-vous abandonné le sujet à certains moments, pour y revenir plus tard?

Si vous avez pratiqué les deux méthodes, de laquelle, en général, vous êtes-vous le mieux trouvé?

18. — Quel est, d'après vous, le temps minimum qu'un mathématicien ayant d'autres occupations journalières doit consacrer dans sa journée, sa semaine et son année aux mathématiques pour arriver à cultiver avec fruit certaines branches des mêmes mathématiques? Vaut-il mieux quand on a le choix, d'après vous, travailler tous les jours un peu: une heure, par exemple, au minimum?

19. — a) Quelles sont vos distractions ou occupations favorites, ou vos goûts dominants, en dehors de l'étude des mathématiques, ou dans vos moments de loisir? — b) Les occupations ou distractions artistiques, littéraires, la musique et la poésie en particulier, vous semblent-elles de nature à détourner de l'invention mathématique, ou bien la favorisent-elles, par le repos qu'elles procurent à l'esprit momentanément? — c) Vous sentez-vous attirés par les questions d'ordre métaphysique, éthique ou religieux, ou au contraire celles-ci vous répugnent-elles?

20. — Si vous avez des occupations professionnelles absorbantes, comment vous appliquez-vous à les concilier avec vos travaux personnels?

21. — Quels conseils, en résumé, donneriez-vous: a) à un jeune homme poursuivant ses études mathématiques?

b) à un jeune mathématicien, ayant achevé ses études ordinaires, et désireux de poursuivre une carrière scientifique?

Questions relatives au mode de vie du mathématicien.

22. — Croyez-vous utile au mathématicien d'observer quelques règles particulières dans l'hygiène: régime, heures des repas, intervalles à observer?

23. — Quelle durée normale quotidienne de sommeil vous semble nécessaire?

24. — Le travail du mathématicien dans une journée doit-il être coupé, selon vous, par d'autres occupations, ou par des exercices physiques proportionnés à l'âge et aux forces de chacun?

25. — a) Avez-vous la tendance ou l'habitude de travailler pendant des semaines et des mois d'une façon régulière, continue, égale, ou au contraire par bourrées et comme par à-coups? — b) Avez-vous des phases marquées d'excitation et d'entrain, puis de dépression et d'incapacité de travail? — c) Avez-vous remarqué si ces alternances présentent une périodicité régulière, et dans ce cas, quel est approximativement le nombre des jours de la phase d'activité et de la phase d'inertie? — d) Les circonstances ambiantes physiques et météorologiques (température, lumière ou obscurité, saisons etc.) ont-elles une influence appréciable sur vos facultés de travail?

26. — Quels exercices physiques pratiquez-vous ou avez-vous pratiqués, comme diversion aux travaux intellectuels? Auxquels donnez-vous la préférence?

27. — Donnez-vous la préférence au travail du matin ou à celui du soir?

28. — Les périodes de vacances, si vous en prenez, sont-elles utilisées par vous à des travaux mathématiques (et dans quelle mesure?) ou bien consacrées entièrement à la distraction ou au repos?

Observations finales.

1° Il y aurait naturellement une foule d'autres détails qu'il serait utile de connaître par enquête: 29 a) si l'on travaille plus facilement debout, ou assis, ou étendu; — b) à la planche noire ou sur le papier; — c) à quel point on est distrait par les bruits extérieurs; — d) si l'on peut poursuivre un problème en promenade, en chemin de fer; — e) de l'influence des excitants ou des calmants: tabac, café, alcool, etc., sur la quantité et la qualité du travail.

Au point de vue psychologique, il serait très important de savoir de quelles images internes de quelle forme de „parole intérieure" se servent les mathématiciens; s'ils sont moteurs, auditifs, visuels ou mixtes, suivant le sujet dont ils s'occupent (30).

Mais nous craignons de décourager le lecteur par la longueur du questionnaire, aussi croyons-nous utile de rappeler que *chacun est libre de laisser de côté les questions pour lesquelles il éprouve quelque embarras à répondre.*

2° Si, d'autre part, certains pensaient pouvoir fournir des renseignements intéressants ne répondant pourtant à aucune des questions précédentes, les présentes lignes les invitent à les donner sans hésiter.

3° Si quelques personnes ayant connu d'assez près des mathématiciens disparus aujourd'hui étaient à même de fournir des indications les concernant sur une partie des questions qui précèdent, nous leur demandons instamment de vouloir bien le faire. Elles apporteront ainsi une contribution importante et utile à l'histoire de la science mathématique et de ses développements.

La Rédaction.

Bien qu'il ait été établi avec beaucoup de soin, le Questionnaire ne manquera pas de soulever quelques critiques et quelques objections. On pourra lui reprocher sa longueur; mais nous tenons à rappeler que personne n'est tenu à répondre à toutes les questions posées. Chacun se bornera à répondre à celles pour lesquelles il a la réponse toute prête.

D'autre part on nous dira que beaucoup de mathématiciens s'abstiendront entièrement de répondre, parce qu'ils considèrent la méthode de travail comme une sorte de propriété personnelle. Nous ne croyons pas cette objection fondée. Ce serait faire injure aux mathématiciens dignes de ce titre et remonter plusieurs siècles en arrière, que d'admettre qu'ils gardent leur méthode de travail comme une sorte de secret. Nous croyons au contraire qu'en réfléchissant à la portée de cette enquête chacun reconnaîtra qu'il est désirable que les réponses soient aussi nombreuses que possible afin que les résultats de l'enquête représentent bien l'opinion générale des mathématiciens. En apportant sa collaboration sous forme de réponses chacun accomplira donc un travail utile à la fois à la science et à l'enseignement.

Nous espérons en effet que cette enquête donnera aussi des indications utiles à l'enseignement et fournira ainsi d'utiles contributions non seulement à la psychologie du mathématicien, mais aussi à la pédagogie des mathématiques. Nous entendons ici, il n'est guère besoin d'insister, la pédagogie scientifique ou expérimentale, telle qu'elle résulte des progrès récents de la psychologie expérimentale et qui se distingue de l'ancienne pédagogie en ce qu'elle est faite, non pas d'idées préconçues, mais de résultats basés sur l'observation et sur l'expérience. Envisagée à ce point de vue la pédagogie des mathématiques est encore presqu'entièrement à faire.

Über die Notwendigkeit regelmäßiger Vorlesungen über elementare Mathematik an den Universitäten.

Von

P. Stäckel aus Kiel.

Der Unterricht an den philosophischen Fakultäten der deutschen Universitäten ist im wesentlichen so organisiert, als ob sein Ziel sei, wissenschaftliche Forscher heranzubilden; daß die Mehrzahl der Studierenden später an höheren Schulen die Elemente zu lehren haben wird, tritt bei ihm scheinbar ganz in den Hintergrund. Ohne Zweifel werden wir dieses System, das aufs engste mit der Eigenart der deutschen Universitäten zusammenhängt, nicht aufgeben wollen, allein es läßt sich nicht verkennen, daß es in der Mathematik für die höheren Schulen beträchtliche Schwierigkeiten mit sich bringt, denn die Elemente dieser Wissenschaft zu lehren, ist eine schwere Kunst, die gelernt sein will, und wir dürfen unsere Jugend nicht Pfuschern in ihr überliefern. Man hat daher wiederholt gefordert, daß an den Universitäten besondere Vorlesungen und Übungen eingerichtet werden sollten, in denen die künftigen Lehrer der Mathematik eine systematische Ausbildung in der mathematischen Pädagogik erhielten. Es möge dahingestellt bleiben, ob solche pädagogische „Übungen am Phantom" den erhofften Nutzen bringen würden. Jedenfalls würden sie den Charakter des Universitätsstudiums vollständig verändern. Meines Erachtens sollte die nur allzukurze Studentenzeit der Befriedigung des theoretischen Triebes vorbehalten bleiben, ist sie doch für den Lehrer in den meisten Fällen die einzige Zeit seines Lebens, wo er, noch frei von den Fesseln des Amtes, sich in voller Begeisterung allem Guten, Schönen und Wahren widmen darf. Sie schmälern hieße eine reiche Quelle der Berufsfreudigkeit verstopfen, die aus jenen Jahren idealen Strebens ihre Nahrung zieht. Ohne die Wichtigkeit der pädagogischen Ausbildung der Lehramtskandidaten zu unterschätzen, haben es die philosophischen Fakultäten daher mit Recht abgelehnt, Fachschulen für Lehrer zu werden; diese Ausbildung muß, wie es bisher mit gutem Erfolge geschehen ist, während des pädagogischen Seminar- und Probejahres stattfinden.

Aber, wird man mir vielleicht einwenden, ist denn das mathematische Studium in seiner gegenwärtigen Gestalt geeignet, eine solche Berufsfreudigkeit zu erzeugen? Zeigt nicht die Erfahrung, daß bei den Studierenden, die sich so lange und so ausschließlich mit den feinsten Untersuchungen aus den höchsten Gebieten der Mathematik beschäftigt haben, nicht selten der wissenschaftliche Enthusiasmus in einen wissenschaftlichen Hochmut umschlägt, so daß sie, um mit Herrn F. Klein zu reden, als praktische Lehrer die längst vergessenen Elemente nur mit Widerwillen als ihrer nicht würdig wieder vornehmen und, für ihren Beruf verdorben, sich in selbstgefälliger Unzufriedenheit verzehren? Und ist es nicht ebenso bedauerlich, daß so mancher Lehrer die auf der Universität erworbene wissenschaftliche Ausbildung bald als unnütz über Bord wirft und mit voller Kraft dem Lande der Banausen zusteuert? In der Tat ist es eine betrübende Erscheinung, daß sich seit mehr als fünfzig Jahren zwischen Universitätswissenschaft und Schulunterricht eine tiefe Kluft aufgetan hat, die beiden Teilen zum Schaden gereicht. Denn wenn die Fühlung mit der Wissenschaft verloren geht, kann sich der Lehrerstand, trotz aller äußeren Anerkennung, nicht auf der von ihm beanspruchten Höhe halten, die Wissenschaft aber leidet nicht nur durch den Verlust so vieler wertvoller Mitarbeiter, sondern gerät auch in die Gefahr, den Zusammenhang mit der Wirklichkeit ganz zu verlieren und einseitigem Spezialistentum anheimzufallen.

Glücklicherweise hat man begonnen, diese Kluft von beiden Seiten her auszufüllen. Von seiten der Schule, indem die Lehre von den Kegelschnitten und der Koordinatenbegriff in den Lehrplan aufgenommen und die Behandlung des Funktionsbegriffes empfohlen worden ist; auch die Ferienkurse und die neuerdings von Herrn Latrille vorgeschlagenen Informationskurse gehören hierher. Von seiten der Universität, indem den Anwendungen fast überall mehr Raum gegönnt wurde. Ein weiterer Schritt in dieser Richtung würden Vorlesungen sein, in denen die Elementar-Mathematik von einem höheren Standpunkte aus behandelt wird. Solche Vorlesungen würden sich mit Leichtigkeit in den herkömmlichen Unterrichtsbetrieb eingliedern lassen, sie würden die spätere pädagogische Ausbildung der Lehramtskandidaten erheblich erleichtern, sie würden dazu beitragen, daß der Lehrer der Mathematik mit der Entwickelung seiner Wissenschaft in Beziehung bleibt.

Vorlesungen über Gegenstände der Elementar-Mathematik sind nichts Neues für die Universitäten. Um nur einige Tatsachen aus der neuesten Zeit anzuführen, so hat Herr H. Weber seit dem Jahre 1888 in Marburg, Göttingen und Straßburg über Enzyklopädie der Elementarmathematik gelesen; in Straßburg ist ihm neuerdings Herr Simon an die Seite getreten. Im Anschluß an seine Vorlesungen läßt Herr Weber in Gemeinschaft mit Herrn Wellstein eine dreibändige Enzyklopädie der Elementar-Mathematik erscheinen, von der bereits der erste Band, elementare Algebra und Analysis, vorliegt, während wir von Herrn Simon einen Artikel über elementare Geometrie im dritten Bande der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften zu erwarten haben. Ferner hat Herr F. Klein in einer bald darauf veröffentlichten Vorlesung des Sommersemesters 1894 dargelegt, was die moderne Wissenschaft über die Möglichkeit elementar-geometrischer Konstruktionen zu sagen weiß. Endlich wird von Herrn F. W. Meyer in Königsberg seit 1898 ein Repetitorium der Elementar-Mathematik abgehalten. Bemerkenswert ist auch, daß die ausländischen Fachgenossen lebhaften Anteil an den Elementen nehmen. In Frankreich haben so hervorragende Forscher wie die Herren Appell, Boutroux, Borel, Hadamard, Jules und Paul Tannery es nicht verschmäht, Lehrbücher über Gegenstände aus der Elementar-Mathematik zu verfassen, und sie haben sich dieser Aufgabe mit glänzendem Geschick entledigt. In Italien hat die elementare Geometrie durch die Herren Veronese und Ingrami eine neue, strengere Darstellung erfahren; dazu kommt die Sammlung von Aufsätzen über die Probleme der Elementargeometrie, die wir Herrn Enriques verdanken. In England endlich, wo Euklids Elemente noch immer dem elementaren Unterrichte in der Mathematik zugrunde liegen, sind doch Bestrebungen vorhanden, die auf eine Reform hinzielen. In diesem Zusammenhange sei noch erwähnt, daß in Deutschland, Frankreich und Italien eine Reihe von Zeitschriften die elementare Mathematik pflegt, an denen Hochschullehrer eifrig mitarbeiten.

Wenn man auch unter diesen Umständen annehmen darf, daß der Vorschlag, Vorlesungen über Elementar-Mathematik zu einem integrierenden Bestandteile des Programmes der Universitäten zu machen, allgemeine Zustimmung finden wird, so wird freilich seine praktische Durchführung an manchen Orten auf Schwierigkeiten stoßen. Wo die Mathematik nur durch zwei oder gar nur durch einen Dozenten vertreten ist, da werden sich allerdings keine neuen Vorlesungen einrichten lassen. Hoffen wir, daß die dem Kongresse unterbreitete Resolution, wonach dieser den Bestrebungen der Mathematiker, daß überall die für den modernen Betrieb der Mathematik erforderlichen Einrichtungen getroffen werden, seine wärmste Sympathie ausspricht und den Wunsch äußert, daß die Regierungen diese Bestrebungen unterstützen mögen, Annahme finde und dazu beitrage, daß so unwürdigen Zuständen bald ein Ende gemacht wird.

Wenn ein junger Mann die Universität bezieht, um Mathematik zu studieren, so brennt er darauf, die neuen, lockenden Gebiete zu betreten, die sich ihm in der höheren Analysis und in der höheren Geometrie eröffnen. Nimmt man hinzu, daß die Auffassung der Elementar-Mathematik, die in den von mir vorgeschlagenen Vorlesungen zur Geltung kommen soll, eine gewisse Reife des Urteils voraussetzt, die erst durch längere Beschäftigung mit der höheren Mathematik erworben werden kann, so ergibt sich, daß diese Vorlesungen an das Ende der Studienzeit gehören; man könnte sie geradezu als einen Übergang zu der praktischen Tätigkeit des Unterrichtens bezeichnen. Um Mißverständnissen vorzubeugen, möchte ich hinzufügen, daß wir vielleicht noch einmal genötigt sein werden, auch an den Anfang der Studienzeit gewisse elementare Vorlesungen zu stellen, nämlich Kurse in den Elementen der höheren Mathematik für Studierende, die von den humanistischen Gymnasien kommen; auf diese Frage einzugehen, ist jedoch wohl noch verfrüht.

Die Aufgabe der Vorlesungen über Elementar-Mathematik muß vor allem sein, Interesse für die Elemente zu erwecken. Es liegt in der Natur des mathematischen Schulunterrichtes, daß der Lehrer sich auf die Mitteilung von Dingen beschränkt, deren wissenschaftliche Untersuchung vollständig erledigt ist oder es doch zu sein scheint, und daß er sich bemüht, etwas Abgeschlossenes zu geben. Hieraus erklärt sich wohl die Tatsache, daß der Mathematiker von Fach so oft von Laien gefragt wird, womit er sich denn eigentlich beschäftige; die Probleme der Mathematik seien doch einfacher Natur und im Grunde längst gelöst. Wenn man ihm sagt, daß die Mathematik eine in der lebendigsten Entwickelung begriffene Wissenschaft sei, in der man noch Großes leisten könne, so begegnet man einem ungläubigen Staunen, das sich je nach der Erziehung des Fragenden in mehr oder weniger höflicher Form äußert. Aber auch die Studierenden der Mathematik meinen nicht selten, daß es sich in den Elementen um längst abgetane, fertige Dinge handle, und das Fertige hat für die Jugend keinen Reiz. Es müßte daher in den Vorlesungen durch eine historische Betrachtung nachgewiesen werden, daß die sogenannten Elemente gar nichts Festes sind, daß nicht nur ihre Form, sondern auch ihr Inhalt im Laufe der Zeit gewaltige Änderungen erfahren hat; man denke etwa an Euklids Elemente und ein modernes Lehrbuch der Geometrie. Es müßte ferner durch eine meritorische Untersuchung gezeigt werden, daß sich zwischen den Elementen und der sogenannten höheren Mathematik gar keine scharfe Grenze ziehen läßt, weder dem Gegenstande noch der Methode nach. Denn einerseits liefert die Elementar-Mathematik bereits Probleme, deren Behandlung und, wenn sie möglich ist, vollständige Lösung Hilfsmittel der höheren Mathematik erfordert, man denke an das Problem der Primzahlen, die Dreiteilung des Winkels, die Quadratur des Kreises, und es kann in ihr der Grenzbegriff nicht entbehrt werden, der somit keineswegs der höheren Mathematik eigentümlich ist; andererseits sieht man sich in dieser häufig veranlaßt, auf die Elemente zurückzugreifen und die alten Probleme mit neuen Mitteln zu behandeln, man denke etwa an die schönen Untersuchungen von Herrn Study über sphärische Trigonometrie. Endlich müßte dargelegt werden, welche Schwierigkeiten prinzipieller Natur gerade in den scheinbar einfachsten Teilen der Mathematik verborgen liegen, so daß nicht nur das Ende, sondern auch der Anfang der Mathematik in Dunkel gehüllt ist.

In engem Zusammenhange hiermit steht die zweite Aufgabe der Vorlesungen, tiefere Einsicht in die Elemente zu vermitteln. Wie Herr Meyer sehr richtig bemerkt hat, sollte der Lehrer für sich auf einem höheren Standpunkte stehen, als er den Schülern gegenüber einzunehmen genötigt ist, sonst kann er den Stoff nicht beherrschen und ist gezwungen, da seine Zeit knapp ist, sich dem Gange zweifelhafter Lehrbücher anzuvertrauen. Die Durchführung im einzelnen wird, wie bei jeder akademischen Vorlesung, von der Individualität des Vortragenden abhängen; immerhin wird es aber möglich und nützlich sein einige allgemeine Gesichtspunkte anzugeben. Zwei Momente scheinen mir gleichmäßige Berücksichtigung zu verlangen: das spezifisch-mathematische und das historisch-literarische.

Was das spezifisch-mathematische Moment betrifft, so kann ich mich als auf ein Vorbild, wie der Stoff zu behandeln ist, auf die elementare Algebra und Analysis von Herrn Weber berufen. Nicht als ob ich meinte, daß das ganze, in dem umfangreichen Bande enthaltene Material vorgetragen werden sollte und als ob die von Herrn Weber gewählte Anordnung beibehalten werden müsse, vielmehr wird es darauf ankommen, den Hörern eine Übersicht über das Ganze der Elementar-Mathematik zu geben und sie zu veranlassen und zu befähigen, das Webersche Werk selbst mit Erfolg in die Hand zu nehmen.

Eine unentbehrliche Ergänzung der Vorlesungen scheinen mir Übungen zu bilden, in denen die Lösung von Aufgaben behandelt wird. Es gibt in den Elementen eine Fülle der schönsten Aufgaben, an die sich zu machen jeden reizen muß, der ein Herz für Mathematik hat. Ein Meister auch auf diesem Gebiete ist Cayley gewesen; es würde ein dankenswertes Unternehmen sein, wenn jemand eine Auswahl der von ihm behandelten Aufgaben herausgeben wollte. Während gegenwärtig ein großer Teil der Studierenden der selbständigen Lösung solcher

Aufgaben mit kläglicher Zaghaftigkeit und tappendem Ungeschick gegenübertritt, sollten wir es dahin bringen, daß sie wetteifern, die eleganteste Lösung zu liefern. Auch die gemeinsame Lektüre von Euklids Elementen ist, wie mir die Erfahrung gezeigt hat, ein dankbares Thema bei solchen Übungen. Die Beteiligung an ihnen scheint mir nicht minder wichtig zu sein als die an den Übungen der mathematischen Seminare.

Beides: Interesse und tiefere Einsicht wird wesentlich gefördert durch die Berücksichtigung des historisch-literarischen Momentes. Wer mathematischen Unterricht erteilt, sollte etwas wissen über die Geschichte der Dinge, von denen er redet; er sollte zum Beispiel dem Schüler erzählen können, wie die logarithmisch-trigonometrischen Tafeln entstanden sind, die er ihm in die Hand gibt. Geschichtliche Einsicht hat aber für den Lehrer noch höheren Wert. Was uns jetzt als selbstverständlich erscheint, ist das Ergebnis langer Entwickelungen. Daher gibt nur das Studium der Geschichte Verständnis für die Schwierigkeiten, die überwunden werden mußten, damit auch nur die allereinfachsten mathematischen Wahrheiten errungen wurden. Der historisch gebildete Mathematiker wird deshalb die Nöte des Schülers begreifen und mitfühlen, der in die Elemente einzudringen sich müht.

So wünschenswert demnach die Einfügung geschichtlicher Betrachtungen erscheint, so schwierig war es doch bis vor kurzem, sich die erforderlichen Daten zu verschaffen. Erfreulicherweise steht es jetzt besser, wo wir die Notions mathématiques von Herrn Tannery und die Geschichte der Elementar-Mathematik von Herrn Tropfke besitzen. Auch ist zu hoffen, daß uns die Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften in dieser Beziehung nützlich sein wird.

Neben Angaben über die Geschichte der Mathematik würde ich Bemerkungen über die Geschichte des mathematischen Unterrichtes für angebracht halten; gehört doch auch das Unterrichtswesen zu den Lebensäußerungen des Organismus, den wir Mathematik nennen. Es könnte nichts schaden, wenn dabei gelegentlich die Lehrpläne unserer höheren Schulen zur Besprechung gelangten, mit denen sich zu beschäftigen auch die Universitätsdozenten Veranlassung haben. Endlich müßten die literarischen Hilfsmittel angegeben werden, die der Studierende zu seiner Weiterbildung gebrauchen soll, wobei vor allem die im Laufe dieses Vortrages angeführten Veröffentlichungen in Betracht kämen.

Von der ausgiebigen Berücksichtigung des historisch-literarischen Momentes verspreche ich mir noch einen weiteren Vorteil, den ich nicht unerwähnt lassen darf. Daß ein vielbeschäftigter Lehrer gleichzeitig mathematisch-produktiv tätig ist, wird leider immer schwieriger, denn die moderne Wissenschaft arbeitet mit so verwickelten Hilfsmitteln, daß nur beständige Übung zu schöpferischen Leistungen befähigt. Dagegen bietet die geschichtliche Forschung noch weitere Probleme, deren Lösung von Interesse ist und an denen ein jeder arbeiten kann, der historischen Sinn und allgemeine Bildung besitzt. Für solche geschichtliche Forschungen, die die Fühlung mit der lebendigen Wissenschaft erhalten, scheinen mir besonders die Lehrer an den humanistischen Anstalten berufen zu sein, deren Bildungsideal man wohl als Erziehung des historischen Sinnes bezeichnen darf.

Es ist wohl kaum nötig, ausdrücklich hervorzuheben, daß es nicht meine Meinung sein kann, die in einer solchen Vorlesung über Elementar-Mathematik vorgetragenen Dinge, also etwa die Untersuchungen über die Grundlagen der Arithmetik und der Geometrie, sollten unmittelbare Verwendung für den Unterricht finden. Wohl aber bin ich überzeugt, daß diese Vorlesungen ein gut Teil zur Vertiefung und Bereicherung des Unterrichtes beitragen können, indem sie sozusagen dessen potentielle Energie steigern.

Indem ich schließe, möchte ich die Ergebnisse meiner Betrachtungen in Form von Thesen zusammenfassen:

I. Die praktisch-pädagogische Ausbildung der Lehramtskandidaten gehört nicht an die Universität.

II. Wohl aber ist zu wünschen, daß die gegenwärtig noch bestehende Kluft zwischen Universitätswissenschaft und Schulunterricht ausgefüllt werde.

III. Außer Ferien- und Informationskursen, an denen die Universitäten mitzuwirken berufen sind, würde bei dem eigentlichen Unterrichtsbetriebe für diesen Zweck in Betracht kommen:
  1. Ausgiebige Berücksichtigung der Anwendungen,
  2. Vorlesungen, in denen die Elemente von einem höheren Standpunkte aus behandelt werden.

IV. Solche Vorlesungen über Elementarmathematik würden
  1. sich dem herkömmlichen Universitätsunterrichte mit Leichtigkeit eingliedern lassen, und zwar sollten sie am Schluß der Studienzeit ihre Stelle finden,
  2. die künftige pädagogische Ausbildung wirksam unterstützen,
  3. dazu beitragen, daß die Lehrer der Mathematik in lebendiger Fühlung mit ihrer Wissenschaft bleiben.

V. Damit dieses Ziel erreicht werde, sollen diese Vorlesungen
  1. das Interesse für die Elemente erwecken,
  2. tiefere Einsicht in sie vermitteln, wobei
     a) das spezifisch-mathematische
     b) das historisch-literarische Moment

  gleichmäßige Berücksichtigung erfordern.

Bemerkungen über den mathematischen Unterricht an den technischen Hochschulen in Deutschland.

Von

R. Fricke aus Braunschweig.

Wenn ich mir infolge einer liebenswürdigen Aufforderung unseres Herrn Einführenden ein paar Bemerkungen über den mathematischen Unterricht an den deutschen technischen Hochschulen erlauben möchte, so glaube ich mir betreffs des Umfangs dieser Bemerkungen aus verschiedenen Rücksichten Reserve auferlegen zu müssen. Einmal haben wir ja die Ehre, eine internationale Zusammenkunft hier in Heidelberg begrüßen zu dürfen, und es wird demnach nicht gestattet sein, einen allzu breiten Raum für spezielle deutsche Fragen zu beanspruchen, deren ausführlichere Diskussion vielmehr vor das Forum unserer Deutschen Mathematiker-Vereinigung gehört. Andrerseits ist der mathematische Hochschulunterricht in Deutschland seit Mitte der neunziger Jahre vorigen Jahrhunderts von den gesamten an ihm interessierten Kreisen so ausführlich und lebhaft pro und contra besprochen worden, daß es heute nicht wohl möglich ist, mit wesentlich neuen Gesichtspunkten an diesen Gegenstand heranzutreten. Ich möchte somit meine Aufgabe darauf beschränken, Sie in möglichster Kürze an einige der markantesten Züge zu erinnern, welche in der neueren Entwicklung des mathematischen Hochschulunterrichts hervorgetreten sind.

Ich hatte den Beginn jener lebhaften, den mathematischen Unterricht kritisierenden Strömung auf die Mitte der neunziger Jahre vorigen Jahrhunderts angesetzt. Damals war es, als vor allen Hr. Riedler in Charlottenburg in zahlreichen Reden und Abhandlungen die Frage der Ingienieurerziehung behandelte, als er speziell den mathematischen Unterricht betreffend die Worte aussprach: „Es muß mit dem einseitigen, auch die Schulen beherrschenden Universitätsgeiste, der von der Wirklichkeit der Dinge ablenkt, prinzipiell gebrochen werden.“

Solche Worte fanden an den verschiedensten Stellen lebhaften Widerhall, und da man alsbald an den Plan einer Einschränkung des mathematischen Unterrichts herantrat, so war es an den Mathematikern, sich zu sammeln, um gegen die entstandene Strömung ihrerseits Stellung zu nehmen. Dies ist im Herbst 1896 geschehen, wo die Lehrer der Mathematik an den technischen Hochschulen zu einer zweitägigen Besprechung der schwebenden Fragen in Darmstadt zusammenkamen. Das Ergebnis dieser Besprechungen wurde in einem Protokoll niedergelegt, welches späterhin die Zustimmung sämtlicher Professoren der Mathematik an den deutschen technischen Hochschulen gewann. Ein Sturm der Entgegnungen wurde entfesselt, als dieses Protokoll an die Öffentlichkeit trat. Vor allen waren es die Herren Barkhausen in Hannover und Mohr in Dresden, welche sich durch ausführliche und sehr beachtenswerte Erwiderungen hervortaten.

Nichts liegt mir ferner, als einem Wiederaufleben der damaligen Diskussion das Wort zu reden. Acht Jahre liegen dazwischen, und wir alle sehen wohl heute die damalige Lage mit anderen Augen an. Ich für mein Teil will nicht anstehen zu erklären, daß ich nach meiner heutigen Überzeugung das Darmstädter Protokoll nach Form und Inhalt für unzweckmäßig halte. Ich finde den Streit, ob die Mathematik eine Hilfswissenschaft oder eine Grundwissenschaft der Technik genannt werden soll, öde und gleichgültig. Das aber ist meine Überzeugung, daß das zentrale Lehrgebiet jeder technischen Unterrichtsanstalt die „technische Mechanik" ist, und daß die Mathematik insoweit und nur insoweit zum Vortrage kommen muß, als sie zum Verständnis der technischen Mechanik und zur wissenschaftlichen Fortentwicklung derselben erforderlich ist. Ich habe gerne Gelegenheit gesucht, mich mit technischen Kollegen über prinzipielle Fragen des Hochschulunterrichts zu unterhalten, und ich habe auf Grundlage der gekennzeichneten Auffassung gutes Einvernehmen erzielt.

Eine verständnisvolle Führung des Lehramtes der technischen Mechanik ist für den Gesamtorganismus einer technischen Hochschule von größter Bedeutung. Die technische Hochschule ist in bezug auf die Zusammensetzung ihres Lehrkörpers namentlich im Vergleich zur Universität in einer bösen Lage. Eine Anzahl insonderheit vorbereitender Lehrfächer ist mit Dozenten zu besetzen, welche ihre Ausbildung an der Universität gefunden haben. Die eigentlichen technischen Wissenschaften aber werden von Lehrern vertreten, welche an den Hochschulen selber vorgebildet sind, und welche eben deshalb von vornherein den Geist der Anstalten, an denen sie zu wirken haben, weit besser kennen. Gewöhnlich aber sind diese Lehrer auch noch durch die Schule der technischen Praxis gegangen und haben auf diese Weise noch in erhöhtem

Maße die Fähigkeit gewonnen, die Ausbildung der künftigen Ingenieure in die rechten Wege zu leiten. Da gibt es eine klaffende Lücke im Lehrkörper der Hochschulen. Und wenn ich auch der festen Hoffnung bin, daß wir im Laufe der Zeit für die Ausbildung der künftigen Lehrer an den Hochschulen einen Weg finden werden, der diese Schwierigkeit für immer hebt, so zeigt sich die tiefgehende Lücke heute wohl noch für jeden, der in den inneren Organismus einer technischen Hochschule hineinsieht. Vor längerem hörte ich einmal hierüber eine drastische Äußerung eines Lehrers der Technik, obwohl gerade dieser mit einem Mathematiker zusammenarbeitete, der auf technische Ideen mehr als mancher andere einzugehen verstand. Er erzählte, der Mathematiker habe bei einem einzelnen Probleme immer erst zwei Tage nötig gehabt, um sich überhaupt die technische Auffassung der Sache zu eigen zu machen. Dann bringe er sie auf seine Art in eine Form; und nun habe er selbst, der Techniker, zwei Tage nötig, um sich zum Verständnis der mathematischen Auffassung durchzuarbeiten. Da denkt man unwillkürlich an Goethes Wort: „Die Mathematiker sind eine Art Franzosen: redet man zu ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es alsobald ganz etwas anderes.“ Ich meine, an dieser Stelle hat der technische Mechaniker einen höchst wichtigen Beruf, nämlich als Dolmetscher zu wirken zwischen den Technikern und Mathematikern, sie zum gegenseitigen Verständnis und zu einer ersprießlichen Zusammenarbeit zu bringen.

Wenn ich auch vorhin die Mathematik zur Gehilfin der technischen Mechanik machte, so meine ich nicht, daß sie dabei schlecht fahren wird. Indem ich dies Verhältnis noch ein wenig mehr in die Einzelheiten verfolge, finde ich hierbei zugleich Gelegenheit, mich noch über ein paar weitere Gesichtspunkte, die mir wichtig scheinen, zu äußern.

In welchem Umfange würde denn die Mathematik, wenn die ausgesprochene Thesis als zu Recht bestehend anerkannt wird, an den technischen Hochschulen zum Vortrage gelangen? Ich erinnere zunächst an einen Ausspruch, der seinerzeit von technischer Seite gemacht wurde, daß nämlich $^9/_{10}$ aller technischen Aufgaben mit Hilfe der Elementarmathematik lösbar seien. Mag dieses Verhältnis auch ein wenig hoch gegriffen sein, unzweifelhaft bleibt, daß eine gründliche Schulung in der niederen Mathematik eigentlich eine unerläßliche Vorbedingung für das Ergreifen des Ingenieurberufs sein sollte. Aber ebenso unzweifelhaft steht fest, daß die technische Hochschule auch für ihre Durchschnittsstudenten nie die Elemente der Differential- und Integralrechnung wird entbehren können. Bereits bei den ersten Grundlagen der technischen Mechanik, wenn es sich z. B. um Schwerpunktsbestimmungen oder um Trägheitsmomente handelt, ist die Integralrechnung unentbehrlich. Die Hilfsmittel der Differentialrechnung müssen dem wissenschaftlich arbeitenden Techniker auf Schritt und Tritt zur Hand sein; er muß in seiner Weise immer wieder dem Worte folgen, das Kronecker allerdings nicht ganz richtig Goethes Faust entnahm:

„Du kannst im Großen nichts verrichten
Und fängst es nun im Kleinen an."

So ist denn auch kaum je ernstlich daran gedacht worden, den Unterricht in den Elementen der höheren Analysis von der technischen Hochschule zu bannen.

Gleichwohl ist gegen diesen Unterricht neuestens eine schwere Gefahr im Anzuge, die ich zu charakterisieren nicht unterlassen darf. Es ist eine Bewegung entstanden, die den Unterricht in den Elementen der höheren Analysis an die Oberklasse der Gymnasien und Realanstalten zu bringen strebt. Hr. Geheimrat Klein hat diesen Standpunkt mit großer Energie aufgegriffen und neuestens im Kreise der führenden Techniker sowie bei den Regierungen dafür Propaganda gemacht. Ich will gar nicht verkennen, daß dieser Plan für den Universitätsunterricht seine Vorteile haben mag. Da gibt es eine Reihe von Fächern, bei denen die Kenntnis der Elemente der Differential- und Integralrechnung von Nutzen ist. Den Studierenden werden einführende Vorlesungen geboten. Aber sie verspüren im Gefühle ihrer jungen akademischen Freiheit wenig Lust, diese Vorlesungen, die ja nicht eigentlich zu ihrem Fachstudium gehören, bis zu ihrem Ende zu hören. Da liegt ja der Wunsch nahe, ihnen die Sache im Schulzwange noch kurz vor Schluß beizubringen. Aber es möchte sehr die Frage sein, ob eine solche Maßregel zum Nutzen der Schule ausschlägt. Mag der Schulunterricht auch hier und da an den Grenzbegriff heranführen. Von solchen vereinzelten Beispielen ist es noch ein weiter Schritt bis zur Erfassung der Grundbegriffe in allgemeiner Gestalt und bis zum verständnisvollen Gebrauche allgemeiner Symbole; ich habe diese Erfahrung im Unterrichte immer wieder aufs neue machen müssen. Mag auch der alte Süvernsche Lehrplan, der jedoch in der Hauptsache wohl nur auf dem Papiere gestanden hat, in der fraglichen Richtung merkwürdig weit gegangen sein; bei dem heutigen Standpunkte besonders unserer humanistischen Gymnasien scheint mir die Übernahme der Elemente der Differential- und Integralrechnung in das Abiturientenjahr höchst bedenklich zu sein und wird jedenfalls lebhaften Widerspruch erwecken. Man möchte demnach die Frage vielleicht für keine sehr akute halten. Indes dürfen wir nicht vergessen, daß die Preußische Unterrichtsverwaltung neuestens z. B. in der Berechtigungsfrage sehr radikal und dabei unabhängig von den übrigen deutschen Bundesstaaten vorgegangen ist. Wir könnten demnach auch in der hier in Rede stehenden Frage eine Überraschung erleben, welche dann zumal die norddeutschen Kleinstaaten in eine Zwangslage versetzen würde. Ich meine, daß wir demnach allen Anlaß haben, zu dieser Frage Stellung zu nehmen, um so mehr als bei derselben ein wichtiges Interesse der technischen Hochschulen auf dem Spiele steht. Es ist gewiß nicht der Zielpunkt der angestrebten Neuerung, den Unterricht in der höheren Analysis an den technischen Hochschulen zu untergraben, und doch ist eine höchst gefährliche Wirkung nach dieser Richtung zu befürchten. Wir dürfen eben nicht vergessen, daß der normale Studierende der Technik die Mathematik doch nur als ein notwendiges Übel ansieht. Daß ihm die Schule die Kenntnis der höheren Analysis in solchem Umfange vermittelt, wie er sie zum Verständnis der späteren technischen Vorlesungen braucht, ist ja selbstverständlich ausgeschlossen. Statt dessen wird er nun mit einer Halbbildung zu uns kommen, und da ist die große Gefahr nicht zu verkennen, daß ihn diese Halbbildung überhebend und ablehnend gegenüber einem Unterrichte macht, den auszuüben die Pflicht und das Recht der technischen Hochschule ist. Ich meine in der Tat, die technischen Hochschulen sollten den ordnungsmäßigen Unterricht in den Elementen der höheren Analysis als ihr Gebiet reklamieren und sich demnach den Tendenzen, auch nur einen Teil dieses Unterrichts an die Mittelschulen zu verschieben, ablehnend gegenüberstellen.*)

Ich komme zu einem weiteren gleichfalls höchst wichtigen Gegenstande. Bereits bei den Diskussionen in den neunziger Jahren ist auch von technischer Seite immer wieder der Wunsch nach einer Entwicklung des mathematischen Unterrichts in die Höhe geäußert. Die radikalste Entgegnung auf das Darmstädter Protokoll erschien am

---

*) In einer auf den Vortrag folgenden Diskussion wurde erwidert, es sei ein Irrtum, daß Hr. Klein die von ihm befürwortete Neuerung für alle drei in Deutschland vertretenen Gattungen höherer Schulen vorgeschlagen habe, vielmehr habe er dieselbe einzig für die Realanstalten ins Auge gefaßt. Zum mindesten sei dies der neuerdings von Hrn. Klein eingenommene Standpunkt. Erst an dieser Stelle kann ich darauf definitiv mit einem Zitat aus der „neuesten", im Juli d. J. erschienenen Schrift Kleins (Über eine zeitgemäße Umgestaltung des mathematischen Unterrichts an den höheren Schulen, Leipzig und Berlin 1904) antworten: „Die vorbereitende Darlegung des Funktionsbegriffes aber, ich wiederhole es, und die erste Einführung in die analytische Geometrie und die Anfänge der Differential- und Integralrechnung sollte allen Arten höherer Schulen gemeinsam sein" (p. 7 a. a. O.).

12. November 1897 in der Zeitschrift für Architektur und Ingenieurwesen, unterzeichnet von mehr als 50 Professoren der Technik. Und doch lautet die Thesis 3 dieser Entgegnung: „Eine besonders weitgehende Ausbildung in der Mathematik ist nur für einzelne notwendig, und wird von diesen am besten in einem Nachstudium erworben. Sie muß an den technischen Hochschulen ermöglicht werden, muß aber ganz außerhalb des regelmäßigen Studienganges bleiben.“ Ich stimme dieser Forderung vollständig bei und wünsche insbesondere, daß auch hier die Mathematik Hand in Hand mit der Wissenschaft der technischen Mechanik geht, welche im Laufe des letzten Jahrzehnts in eine Periode glänzender Entwicklung eingetreten ist.

Hier berühren wir uns enge mit der schwerwiegenden Frage nach der wissenschaftlichen und unterrichtlichen Ausgestaltung der allgemeinen Abteilungen der technischen Hochschulen. Was zunächst die tatsächlichen Verhältnisse anbetrifft, so bestehen erhebliche Unterschiede an den verschiedenen technischen Hochschulen Deutschlands. An den Hochschulen in Dresden und in Süddeutschland sind die allgemeinen Abteilungen mit selbständigen Lehrzielen ausgestattet. Die Heranbildung der Lehrer realistischer Fächer an den Mittelschulen, realistischer und technischer Fächer an den technischen Mittel- und Hochschulen steht im Zentrum dieser selbständigen Lehrziele. In Preußen ist durch die seit 1898 gültige Prüfungsordnung für das höhere Lehramt den künftigen Lehrern der Mathematik und der Naturwissenschaften gestattet, drei von den geforderten sechs Studienhalbjahren an einer technischen Hochschule zuzubringen. Aber soweit mir bekannt wurde, ist von dieser Erlaubnis seither noch kein sehr weitgehender Gebrauch gemacht worden.

Und doch glaube ich, daß in der Aufnahme und kräftigen Fortentwicklung der in Dresden und in Süddeutschland bereits bestehenden Einrichtungen an allen deutschen Hochschulen der allerwesentlichste Schritt zu einer gedeihlichen wissenschaftlichen Entwicklung der technischen Hochschulen liegen würde; und zwar erstlich für das Innenleben der Hochschulen selber: Schon Grashof hat auf der 7. Hauptversammlung des Vereins Deutscher Ingenieure die sehr berechtigte Forderung gestellt, daß die technischen Hochschulen ihre eigenen künftigen Lehrer selbst bilden sollen. Nur wenn wir hierzu durch wissenschaftliche Entwicklung nach der mathematisch-mechanischen Seite die Mittel gewinnen, wird mit der Zeit die so schwer empfundene Inhomogeneität aus den Lehrkörpern der technischen Hochschulen verschwinden.

Ein Weiteres kommt hinzu: Wir haben seit einer Reihe von Jahren für die Oberlehrer der Mathematik und der Naturwissenschaften die neue Fakultas für angewandte Mathematik, welche die Fächer der darstellenden Geometrie, der technischen Mechanik und der Geodäsie umfaßt. Eine Fülle von Äußerungen, Referaten und Reden hat diese neue Einrichtung hervorgerufen und immer wieder ist die Schwierigkeit betont worden, daß die Universitäten, von ganz vereinzelten Ausnahmen abgesehen, zur Zeit gar nicht imstande seien, in den genannten Gebieten eine ausreichende Vorbildung zu gewähren. Ist doch sogar bereits der Vorschlag ausgesprochen, man solle der fraglichen Schwierigkeit halber das doch so wichtige Fach der technischen Mechanik überhaupt ausschließen.*)

Nun, meine Herren, in Deutschland haben wir jetzt zehn technische Hochschulen, von denen jede unmittelbar imstande ist, hier den Universitäten helfend beizuspringen. Warum in falsch verstandenem Konkurrenzeifer an jeder Universität ein kleines Polytechnikum gründen wollen, wenn durch einfaches Hand in Hand gehen der Universitäten mit den allgemeinen Abteilungen der technischen Hochschulen alle Schwierigkeiten gehoben werden? Sollen wir abwarten, daß der Verein zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften noch dringender, als es bisher schon geschah, die Forderung stellt, daß sich die allgemeinen Abteilungen der Hochschulen ihrer Kandidaten annehmen? So rufe ich den Vertretern der philosophischen Fakultäten der Universitäten zu: Verzetteln Sie Ihre Unterrichtskräfte nicht mit Dingen, die bei der Mehrzahl der Universitäten doch eine Unvollkommenheit bleiben müssen! Schließen Sie sich vielmehr zusammen mit den allgemeinen Abteilungen der technischen Hochschulen, und suchen Sie denselben nicht ein Unterrichtsgebiet vorzuenthalten, das naturgemäß jenen gebührt! So können Sie selber dahin wirken, daß die allgemeinen Abteilungen nicht mehr unter den Fachabteilungen stehen, sondern im engen Verein mit den Fachabteilungen, aber auch mit selbständigen Lehrzielen und mit einer festen wissenschaftlichen Organisation ausgestattet neben dieselben treten, damit sie sich entfalten können als wahre philosophische Fakultäten der technischen Hochschulen zum Wohle dieser Unterrichtsanstalten, zum Gedeihen deutscher Wissenschaft!

*) Hr. Study hat seinem in Bd. 8 des Jahresberichtes der Deutschen Mathematiker-Vereinigung im Jahre 1900 veröffentlichten Aufsatze „Einige Bemerkungen zu der neuen preußischen Prüfungsordnung“ sieben Thesen angefügt. Die sechste unter denselben hat folgenden Wortlaut: „Die technische Mechanik ist nicht in das allgemeine Unterrichtsprogramm der Universitäten aufzunehmen.“

L'enseignement scientifique aux écoles professionnelles et les „Mathématiques de l'ingénieur".

Von

J. Andrade aus Besançon.

I. Quels besoins ont imposé à Besançon l'enseignement des mathématiques de l'ingénieur?

J'ai créé à l'Université de Besançon l'enseignement de la chronométrie. Le but ici poursuivi est tout simplement la fusion, la pénétration réciproque de l'intuition ouvrière, de l'intuition technique et de l'intuition scientifique. Ce but à atteindre a été nettement entrevu par les promoteurs du nouvel enseignement; mais la réalisation même de cet enseignement n'a pas vérifié toutes les prévisions. On avait prévu des étudiants horlogers qui, pour la plupart seraient des fils d'industriels, ou si l'on préfère, des étudiants patrons.

Or, sauf une exception, nos étudiants horlogers ont été jusqu'ici des ouvriers. Je m'en réjouis pour l'avenir, car à côté de l'école commerciale qui ne voit le progrès que dans l'aveugle imitation de Genève, je vois naître un petit noyau d'artisans originaux, un noyau de chercheurs qui sauront renouveler l'horizon de leurs idées, et faire progresser cette horlogerie technique sans laquelle l'horlogerie commerciale elle-même ne peut vivre longtemps.

Le commerce est le but, c'est évident; cependant s'il faut en horlogerie des capitaux, ne faisons pas fi des chercheurs et des trouveurs; l'idée, l'idée vivante est elle aussi un capital. Je me réjouis donc d'avoir des élèves ouvriers.

Des étudiants ouvriers: ce simple fait a eu des conséquences imprévues; je ne retiendrai ici que celles qui peuvent intéresser la section de pédagogie de ce congrès. Nos auditeurs ouvriers, par suite d'une entente encore incomplète entre l'école d'horlogerie et l'université, ne viennent à nous qu'après leur sortie de l'école professionnelle; ils viennent suivre à l'université et les travaux pratiques de réglage et le cours de chronométrie; mais ils nous arrivent ignorant les connaissances mathématiques les plus élémentaires et les plus indispensables à l'intelligence de leur art. J'ai donc dû me préoccuper de leur donner le plus vite et le plus sûrement possible les rudiments des mathématiques du contre-maître et même pour quelques points délicats de l'étude du réglage les éléments des mathématiques de l'ingénieur. Ainsi est né à Besançon, pour les besoins mêmes de l'enseignement regulier de la chronométrie, le cours des „Mathématiques de l'ingénieur". Je dois ajouter que ce cours qui s'est imposé à nous comme un enseignement annexe du cours de chronométrie, a attiré d'autres auditeurs plus nombreux que les étudiants horlogers, et en particulier les étudiants de l'électricité industrielle.

II. Qu'est ce que les „Mathématiques de l'ingénieur"?

Ce cours forme un enseignement extrêmement élémentaire, pourtant il n'est pas le cours élémentaire de nos lycées. A la fois plus et moins, à coup sûr il est autre. Moins étendu, mais plus proche des applications techniques il ne s'adresse pas à des jeunes gens dont les loisirs d'esprit sont assurés jusqu'à la vingt-cinquième année; il s'adresse au contraire à des artisans qui ont besoin d'apprendre les mathématiques sur leurs outils. Les mathématiques ainsi étudiées au seuil même du chantier, du laboratoire ou de l'atelier doivent être enseignées par des méthodes à la fois plus simples et plus puissantes que ne l'exige l'éducation ordinaire de nos bacheliers.

Nous touchons ici à l'une des erreurs les plus répandues autour de l'enseignement professionnel. On considère volontiers l'enseignement scientifique des écoles professionnelles comme une simple amputation de l'enseignement secondaire. Il importe au contraire que l'enseignement professionnel garde son originalité propre. Et en effet, les élèves de l'enseignement professionnel, et plus encore les élèves ouvriers ont fréquemment une intuition très vive des phénomènes mécaniques et c'est sur cette intuition naturelle que l'on doit s'appuyer pour illustrer les notions mathématiques dont ils ont besoin dès qu'ils veulent être plus que des manoeuvres.

Ainsi, bien loin de croire que l'éducation mathématique des artisans puisse être confiée à n'importe qui, je suis au contraire persuadé que l'enseignement vivant exigé par les artisans finira, un jour ou l'autre, par simplifier l'enseignement même de nos bacheliers.

III. Observations pédagogiques suscitées par l'enseignement des „Mathématiques de l'ingénieur".

Voici diverses observations que j'ai constatées dans la pratique de mon enseignement nouveau. Les déterminations de fonctions que l'on rencontre dans les problèmes de la mécanique horlogère ont pu être parfaitement saisies par mes étudiants ouvriers lorsque la question comportait une interprétation géométrique adéquate au problème. L'un des exemples les plus nets que j'en puisse donner ici, est l'assimilation complète par des étudiants ouvriers de la théorie des phénomènes de la synchronisation. Cette théorie n'est qu'un jeu pour un étudiant qui possède la notion des équations différentielles linéaires; je me suis proposé de la rendre plus simple encore et de la réduire à la simple géométrie de l'enfant. J'y suis parvenu par l'étude préalable du mouvement spiral uniforme; en projetant en axes obliques convenables ce mouvement qui généralise le mouvement circulaire, j'établis ainsi d'une manière intuitive les propriétés du mouvement pendulaire uniformément amorti (Archives de Genève, février 1904). Soit alors à étudier, ce que devient ce mouvement, quand il est troublé par une accélération périodique.

Nous supposerons d'abord celle-ci répartie en phases d'intensité constante, en nombre fini, une variation brusque existant alors entre deux phases contigues; soit T la période de cette répartition périodique; je fais alors usage de la représentation de Cornu qui définit à chaque instant l'état de mouvement (position et vitesse) d'un point mobile sur une droite qui passe par les pôles des diverses spirales utilisées, au moyen d'un point de la spirale qui a le premier point pour projection oblique. Les points $M_0, M_1, M_2, \cdots M_n \cdots$, représentatifs de l'état du mouvement envisagé aux époques:

$$t_0, t_0 + T, t_0 + 2T, \cdots t_0 + nT \cdots,$$

dérivent, chacun du précédent, par une même transformation de figure, savoir: une similitude directe à échelle constante et moindre que 1. Or il est extrêmement facile de montrer que cette transformation de figure possède un point double P, c'est à dire un point P qui coïncide avec son transformé; d'où résulte évidemment que la transformation se réduit à une rotation fixe autour de P, suivie d'une homothétie déterminée avec condensation autour du même point P. Donc, quand n croît indéfiniment, les points M_n tendent vers P. Chacune des valeurs de t_0 comprise dans un intervalle fixe d'étendue T fournit ainsi un point P; cet ensemble de points P forme une courbe fermée qui est la courbe représentative du régime périodique, à période T, vers lequel tend asymptotiquement le mouvement réel. Comme ces résultats sont complètement indépendants de la succession des phases de constance de la force synchronisante, on conçoit aisément, et cela suffit ici, que ces résultats subsisteront encore dans le cas d'une force continue quelconque, mais périodique, de période T. Telle est l'esquisse de la méthode géométrique fort simple qui permet à des étudiants ouvriers de se rendre compte du phénomène de la synchronisation, tout au moins dans le cas simple où l'on néglige l'influence de l'échappement propre à l'horloge synchronisée. C'est l'approximation de Cornu; — je l'ai complétée ailleurs.

Je me suis étendu un peu sur cet exemple, pour ne point rester dans les vagues généralités, mais il est encore d'autres notions que l'image géométrique rend accessibles à des étudiants artisans; telles sont les méthodes d'approximations successives et avec elles la belle méthode d'intégration par quadratures répétées en séries, que l'on doit à M. Picard, — ces méthodes, dis-je, convenablement interprétées et surtout utilisées sont facilement assimilables. Notons, en passant, que la méthode de M. Picard est ici la plus rapide pour parvenir aux séries entières qui représentent $\sin x$ et $\cos x$; on peut, dans un enseignement simplifié, la combiner avec la méthode projective de Huyghens. On peut donc nettement affirmer que la notion des infiniment petits n'offre aucune difficulté capable d'arrêter nos artisans toutes les fois qu'elle est appliquée à des variables déjà intéressantes pour eux. Mais, en revanche, tout calcul littéral abstrait les arrête. Résoudre deux équations littérales du 1^er^ degré sera pour eux bien plus difficile que de comprendre le phénomène de la synchronisation.

Voilà un fait pédagogique qui surprendra peut-être; j'en garantis cependant l'exactitude absolue. Ce fait, d'ailleurs, tient uniquement, selon moi, à ce que l'algèbre élémentaire est enseignée à l'école professionnelle comme on l'enseigne à des élèves qui ont des années de collège devant eux. On leur parle de monômes, de binômes et d'irrationnelles, ce sont choses qu'ils ne voient point à l'atelier. Au contraire si on leur montre que toutes les opérations arithmétiques se ramènent à l'addition et au sectionnement, bref si la notation littérale leur devient familière des leurs premiers pas dans l'arithmétique raisonnée, et si aussitôt par l'image des segments on leur fait concevoir le calcul des quantités continues, leur terreur du calcul littéral abstrait s'évanouira.

A des étudiants horlogers qui n'ont pas de culture mathématique préalable, vous pourrez faire saisir par le calcul quelques-unes des lois de la dynamique de la montre, c'est-à-dire du réglage; c'est que nos étudiants connaissent déjà les variables qui apparaissent d'elles-mêmes dans le calcul, ils les connaissent et ils sont désireux de se rendre compte de leurs relations; aussi suivront-ils attentifs, tout raisonnement même long pourvu que celui-ci conserve les quantités auxquelles ils s'intéressent directement. Leur attention ne lâche prise que si, par ce qui vous paraît un besoin du calcul, vous introduisez des quantités auxiliaires. Le changement abstrait de variables les déroute, ils voudraient toucher la variable nouvelle, aussi bien que la première qui leur est familière.

Lorsque l'étudiant artisan ne sent pas la nécessité de se remettre à l'école d'un bon maître d'algèbre ou lorsqu'il n'en a pas le temps, et s'il veut néanmoins comprendre la théorie d'un phénomène qui l'intéresse, bref s'il veut comprendre une loi qui ne peut être claire que dans la langue du calcul, le maître devra l'intéresser à un calcul littéral nécessaire par des exemples où entrent en jeu des variables familières, et peu-à-peu lui faire sentir que la multiplicité des étapes de ces changements de variable peut, le plus souvent, être évitée par l'emploi d'un symbole approprié.

IV. Quelques conclusions.

En résumé, si le collégien a plus de loisirs et aussi plus d'esprit d'imitation, l'étudiant artisan a sur le collégien le grand avantage de connaître les variables fondamentales qui l'intéressent; il les connaît, soit par le toucher, soit par cette intuition motrice dont Herbert Spencer a saisi toute l'importance psychologique; il emploie pour ainsi dire des variables vécues par lui.

Si le collégien a une certaine philosophie apparente, officielle oserai-je dire, des notions scientifiques, l'élève ouvrier a en germe plus de philosophie naturelle et vécue. Et, voilà pourquoi il est possible, avec une géométrie dont l'instinct de la mécanique n'est jamais absent, voilà, dis-je, pourquoi il est possible à des étudiants ouvriers de se faire une philosophie naturelle bien supérieure à celle de nos bacheliers. Et voilà aussi pourquoi, je ne crains pas de souligner ici l'importance de ces „Mathématiques de l'ingénieur".

Importantes, d'abord par leur but d'utilité immédiate, elles seront plus appréciées encore dans l'avenir, car elles finiront bien, un jour ou l'autre, par simplifier l'enseignement même des nos bacheliers qui est vraiment d'une anharmonie exagérée. A cette oeuvre de progrès contribuera ainsi, sans le vouloir, cet enseignement des mathématiques de l'ingénieur, s'il sait garder son originalité propre, jusqu'au jour où il réagira sur la pédagogie mathématique imposée à nos enfants.

Welche Aufgabe hat der mathematische Unterricht auf den deutschen Schulen und wie passen die Lehrpläne zu dieser Aufgabe?

Von

H. Schotten aus Halle a. S.

1. Die Aufgabe des mathematischen Unterrichts.

Seit die Mathematik als Lehrgegenstand in die höheren Schulen eingeführt worden ist, hat die Diskussion über seine eigentliche Aufgabe nicht geruht. Es ist nicht zweifelhaft, daß es zunächst praktische Erwägungen waren, die die Aufnahme der Mathematik unter die Lehrgegenstände bewirkten. Aber mit der Zeit trat dieser Gesichtspunkt immer mehr in den Hintergrund und seine Bedeutung wurde lediglich in formaler Hinsicht gewürdigt. Man rühmte ihm „Übung der Urteilskraft" nach, „Gewöhnung an Klarheit und Bestimmtheit der Begriffe", „Konsequenz im Denken", ohne im geringsten den Inhalt gegenüber der Methode zu beachten; ja man sprach sich direkt gegen etwaige praktische Anwendungen aus, so daß in der Tat die Form ohne jeden Inhalt erschien. Z. B. lehrte auch Schrader in seiner Pädagogik: „Es handelt sich nicht um die Weite und die praktische Verwendbarkeit des mathematischen Wissens, sondern um eine angemessene Geistesbildung mittels der Mathematik."

Es war infolgedessen natürlich, daß bei diesem Betriebe die Mathematik und der mathematische Unterricht an den höheren Schulen in eine schiefe Stellung gelangten, daß man davon als von einem „geistvollen Sport" sprach, der „ohne jede Bedeutung für das praktische Leben sei", und daß ihm in immer größerem Maße — zum Teil auch wegen der schlechten Erfolge — die ursprüngliche Sympathie verloren ging. Es muß allerdings auch zugegeben werden, daß gerade dieser formelle Betrieb nicht immer und überall die richtigen Straßen wandelte, in öde Äußerlichkeiten und Auswendiglernen von Formeln ausartete, in Behandlung von subtilen Übungsaufgaben ohne einen anderen Zweck, als die Überlegenheit des Lehrers darzutun und die Schüler möglichst zurückzustoßen: kurz die Mathematik wurde nur getrieben um ihrer selbst willen ohne jeden Blick, sei es nach der praktischen Seite hin, sei es nach wirklicher Ausbildung des Denkvermögens oder der Anschauung. Und wie interessant und fruchtbar läßt sich auch rein formell der mathematische Unterricht gestalten (z. B. Gesetze resp. Formeln). Dazu kam, daß die Philologen der Mathematik gegenüber eine fast feindliche Stellung einnahmen, wie denn der Ausspruch des auf seine Erfolge im klassischen Unterrichte stolzen Direktors „ich habe Gott sei Dank einen schlechten Mathematiker“ unvergessen bleibt. Nebenbei bemerkt soll diese Auffassung durchaus noch nicht überall überwunden sein. Auch das Diktum von Johannes Schulze „In einer Zeile Cornelius Nepos liegt mehr Bildungsstoff als in der ganzen Mathematik“ ist bezeichnend für die Stellung weiter Kreise gegenüber dem mathematischen Unterricht; aber wir brauchen so weit gar nicht zurückzugreifen, erst vor wenigen Jahren ist ein Buch erschienen, in dem weitläufig auseinandergesetzt wurde, daß die Behandlung eines Satzes, wie „die Rose blüht“ im lateinischen Unterricht mehr bildende Kraft besitze, als die gesamten geometrischen Konstruktionsaufgaben.

Es ist aber anzuerkennen, daß auch andere Urteile ausgesprochen worden sind, z. B.: „Aber selbst die Mathematik, wiewohl vorzugsweise für die Entwicklung der Denkkraft ergiebig und nebenbei, namentlich in der Geometrie und Stereometrie, nicht ohne Nutzen für die Klarheit und Ordnung der Phantasie, übt doch insofern auch eine gemütsbildende Wirkung aus, als die Forderung strenger Abstraktion den Willen der Zöglinge sammelt und kräftigt.“

Es ist nur natürlich, daß man von mathematischer Seite immer von neuem bestrebt war, für eine richtige Auffassung der eigentlichen Aufgabe des mathematischen Unterrichts Verständnis zu erwecken. Lange Zeit haben die Schulmathematiker diesen Kampf allein führen müssen, nur ganz vereinzelt fanden sich Universitätslehrer, die Interesse für die Stellung der Mathematik im Unterrichtsplan der höheren Schulen hatten und dieses Interesse auch betätigten. Jetzt ist eine glückliche Wendung eingetreten, und es ist mit großer Freude zu begrüßen, daß sogar auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß eine pädagogische Sektion gebildet worden ist, die — wie die zahlreichen Anmeldungen von Vorträgen sowohl von Universitätslehrern wie von Schulmännern zeigen — großes

Interesse an der Sache beweist; eine weitere sehr wichtige Tatsache ist, daß der mathematisch-naturwissenschaftliche Unterricht zum Gegenstand der Diskussion auf der diesjährigen Naturforscher-Versammlung gemacht werden wird. — An dem Verdienste, das Interesse für die Frage wieder erweckt zu haben, partizipiert entschieden der seit 13 Jahren bestehende Verein zur Förderung des mathematischen Unterrichts: es kann aber andererseits nicht geleugnet werden, daß die Reformen im höheren Schulwesen, die uns die Regierungszeit unseres Kaisers gebracht hat, auch einen wesentlichen Anstoß zur Behandlung der pädagogischen Fragen auf dem mathematischen Gebiet gegeben haben. Gerade die Erklärung der Gleichwertigkeit der von den verschiedenen Arten der höheren Schulen vermittelten Bildung hat die Verpflichtung der Realanstalten ihren Bildungsstoff inhaltlich und methodisch auszugestalten in erster Linie hervorgerufen: und hier gerade setzen nun die Bestrebungen der Interessenten ein. Die Aufgabe des mathematischen Unterrichts bedarf durchaus einer bestimmten Festsetzung und Umgrenzung, damit die Fehler, die den früheren Lehrplänen, wie auch den letzten — wenn auch in geringerem Maße — anhaften, zugunsten einer gesunden Entwicklung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts ausgemerzt werden, damit nicht wieder ein Ausspruch möglich ist, wie der Kramers: „Der neue Lehrplan krankt daran, daß die Lehrstoffe, die in U 1 und O 1 hinzutreten, so neu und umfangreich sind, daß an eine Vertiefung der Kenntnisse und an eine Fortbildung zu freudigem Können nicht zu denken ist.“ Nach ihm werden zu viele neue mathematische Lehrgegenstände in den oberen Klassen unvermittelt angeschlossen, die noch dazu zu schwer sind, so daß eine Anwendung und Vertiefung ausgeschlossen ist. Ich möchte bei dieser Gelegenheit auf den wichtigen Unterschied zwischen Übungsaufgaben und Anwendungen aufmerksam machen; ein Unterschied, der, wie es scheint, lange nicht genug beachtet und seiner Bedeutung nach gewürdigt wird: wie denn alle bis jetzt in Aufgabensammlungen vorliegenden Reformversuche, die angeblich auf Anwendungen hinauslaufen, im wesentlichen nur das Material der Übungsaufgaben betreffen.

Wenn es sich nun um die Festsetzung der Aufgabe des mathematischen Unterrichts handelt, so ist zu bedenken, daß ganz entschieden in den letzten Jahrzehnten ein Wechsel unseres Bildungsideales überhaupt sich vollzogen hat. Die Bildungsschule, wie sie früher einzig und allein durch das Gymnasium repräsentiert wurde, hat jetzt ganz allgemein neue Aufgaben zu lösen, und damit hat sich auch die Aufgabe des mathematischen Unterrichts geändert. Denn das muß aufs schärfste betont werden, eine Festsetzung der mathematischen Unterrichtsaufgabe darf nicht für sich allein erfolgen, sondern nur in Hinsicht auf die Aufgabe der höheren Schulen überhaupt, damit der Fehler vermieden wird, der allen Reformen der letzten Zeit anhaftet. Es kann so lange nicht von einer wirklichen Reform des höheren Schulwesens die Rede sein, als sie für sich allein erfolgt, ohne daß der Zusammenhang nach unten und oben hin, nach den Vorschulen und den Hochschulen beachtet wird. Es darf ferner nicht unberücksichtigt bleiben, daß zwei mächtige Strömungen zurzeit Einfluß auf die Gestaltung des höheren Schulwesens erstreben und — wie die Sachen liegen — beanspruchen dürfen und erhalten müssen. Die eine verdankt ihren Ursprung dem Allgemeinen Deutschen Verein für Schulgesundheitspflege, die andere den Männern, die bei den deutschen Erziehungstagen sich zusammenfinden.*) Die Angriffe, die von diesen beiden Seiten her gegen die Gestaltung unseres höheren Schulwesens überhaupt gerichtet werden: der Umstand, daß die bisherigen Reformen von ihnen überhaupt nicht als wirkliche Reformen anerkannt werden; schließlich der Grundzug dieser Bestrebungen gegen das humanistische Gymnasium für die deutsche Bildungsschule, der in vielen, sehr wichtigen Punkten den jetzigen Bestrebungen zur Verbesserung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts nahe kommt, lassen es als angezeigt erachten, von vornherein nicht ohne Rücksicht auf sie zu arbeiten. Oder will man rein theoretisch die Forderungen der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultäten aufstellen? Ohne Rücksicht auf den Gesamtlehrplan? Ohne Rücksicht auf die Möglichkeit der praktischen Verwirklichung, gewissermaßen als Idealprogramm einer völligen Umgestaltung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Lehrpläne? Das wäre ja auch ein Standpunkt, von dem aus die Frage nach der Gestaltung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts sich behandeln ließe. Ob es sich empfiehlt ihn einzunehmen? Die Beantwortung dieser Frage liegt außerhalb des Rahmens dessen, was ich mir Ihnen vorzutragen vorgenommen hatte; aber es ist offenbar, daß diese Frage von größter prinzipieller Bedeutung ist.

Was nun die Frage nach der Aufgabe des mathematischen Unterrichts betrifft, so ist zunächst festzulegen, daß sie eine doppelte ist: eine materielle und formelle. Von dem vorher gekennzeichneten Standpunkt, daß der Mathematik nur eine formale Bedeutung im

*) Blätter für deutsche Erziehung. — Friedrichshagen-Berlin.

Lehrplan der höheren Schulen zukomme: eine Ansicht, die im wesentlichen auch noch Reidt in seiner Anleitung vertritt, muß man entschieden abgehen, obwohl die sehr wesentliche bildende Kraft nach dieser Richtung hin keineswegs geleugnet werden darf und auch im Lehrplan zu angemessener Berücksichtigung gelangen muß. In materieller Beziehung handelt es sich in erster Linie um ein festes, positives Wissen, eine Einsicht in den Zusammenhang der verschiedenen Zweige der Mathematik untereinander, wie innerhalb der einzelnen wiederum der auf- und auseinander folgenden Sätze und Regeln. Diese Aufgabe, die Übermittelung positiver Kenntnisse in systematischer Anordnung muß durch theoretische Unterweisung und durch Übung gelöst werden: erst auf Grund eines wohlgeordneten und durch Übungsaufgaben belebten und befestigten Wissens kann an die Anwendungen gegangen werden. Hier aber tritt ein neues Moment hinzu, der Unterricht wird jetzt auch in hervorragendem Maße Sachunterricht: hierin liegt seine Hauptbedeutung, aber auch seine größte Schwierigkeit. Abgesehen hiervon muß aber gelten, daß wir uns unter allen Umständen vor einem Fehler hüten müssen, der für unser jetziges Schulsystem nicht nur auf unserem besonderen Gebiete charakteristisch ist. Die Pädagogik arbeitet gern mit Schlagworten, z. B. das berühmte „Wissen und Können“; ich möchte für das, was ich meine, auch ein Wort geben: „Hunger, nicht Übersättigung“. Wir müssen die Aufgabe des mathematischen Unterrichts an den höheren Schulen so gestalten, daß die Schüler mit einem lebhaften Hunger nach mehr erfüllt sind, sich nicht übersättigt und voll Widerwillen von der Mathematik abwenden, sobald sie der Schule den Rücken kehren. Nicht in der Ausdehnung auf das ganze Gebiet der möglichen Anwendungen, in der Pflege darauf zugeschnittener Aufgaben darf das Salz des mathematischen Unterrichts gesucht werden: er muß vielmehr mit Wegweisern auf gangbare Pfade versehen sein, ohne daß es notwendig erscheint, diese Pfade auch alle zu wandeln. Nebenbei liegt in der Bevorzugung der Anwendungen noch die große Gefahr, daß ein Gefühl der Beherrschung nach dieser Seite hin erweckt wird, die in der Tat sich nicht findet, sich bei der geringen Stundenzahl nicht finden kann. Der Hinweis auf die Probleme, die Andeutung der Methodenverwendung wird meistens genügen: sie werden — bei geschickter Behandlung — den rechten Hunger erwecken, der aber nun bei dem einzelnen nach seiner Individualität sein Objekt sich suchen wird; dadurch wird der Zwang vermieden: das Schlimmste, der Todfeind alles wahrhaften Interesses, aller freudigen Arbeit.

Auf der diesjährigen Versammlung des Vereins zur Förderung des mathematischen Unterrichts hat Direktor Nath-Nordhausen ein Referat gegeben über die Bildungsaufgabe der Mathematik innerhalb des Lehrplans der höheren Schulen. Er stellte in These 2 die Aufgabe des mathematischen Unterrichts folgendermaßen dar:

in materialer Beziehung ein nach der Eigenart der einzelnen Schulorganismen verschieden abgegrenztes Gebiet des Wissens zu überliefern und die Schüler fähig zu machen, diesen Stoff in selbständigem Können zu verwerten;

in formaler Beziehung sich an der allgemeinen geistigen Ausbildung der Schüler in sinnlicher, intellektueller, ethischer und ästhetischer Hinsicht in einer ihr eignen, durch andere Lehrfächer nicht zu ersetzenden Weise zu beteiligen.

Nach den vorausgegangenen Bemerkungen wird es klar geworden sein, daß diese These — die übrigens von der Versammlung einstimmig angenommen wurde — im wesentlichen auch meinen Anschauungen über die Aufgabe des mathematischen Unterrichts entspricht, wobei ich freilich nicht unterlassen möchte, wiederholt darauf hinzuweisen, daß auch unser Unterrichtsfach als höchstes Ziel die Freude am Schaffen zu erwecken sich vorstellen muß. Aber gerade hier liegen die Bedingungen für die Mathematik ja ganz besonders günstig: scheint doch jede selbständige Lösung einer Aufgabe als eine Tat, die ein hohes Gefühl der Befriedigung erweckt.

2. Die Forderungen der bestehenden Lehrpläne.

Es ist nun meine Absicht, zu entwickeln, wie die Lehrpläne von 1901 dieser Aufgabe gegenüberstehen. In den allgemeinen Bemerkungen der Lehrpläne wird ausdrücklich ausgesprochen, daß durch die grundsätzliche Anerkennung der Gleichwertigkeit der drei Arten höherer Lehranstalten die Möglichkeit geboten wird, die Eigenart einer jeden kräftiger zu pflegen. Diese Worte deuten darauf hin, daß das Gymnasium wieder mehr den sprachlich-historischen Charakter annehmen soll, während die Realanstalten die mathematisch-naturwissenschaftliche Seite der Ausbildung für sich besonders in Anspruch nehmen werden. Freilich werden wir da einem großen Gegensatz begegnen: das Gymnasium wird das Sprachlich-Historische ganz entschieden in den Vordergrund stellen und stellen können, das Mathematisch-Naturwissenschaftliche nur als notwendiges Übel betreiben, während die Realanstalten die sprachlichen Fächer nicht hinter die mathematisch-naturwissenschaftlichen zurückstellen können; das ergibt sich schon aus der Stundenzahl (Religion und die technischen Fächer sind überall unberücksichtigt geblieben): für Sprachen und Geschichte existieren am Gymnasium 167 Stunden, und wenn man die Erdkunde hinzunimmt, die auf den Gymnasien wohl mehr historisch-politisch als physikalisch betrieben werden wird, 176 Stunden; für Mathematik und Naturwissenschaften gibt es 52 Stunden. Das Verhältnis ist also günstigsten Falles 3,2 : 1, d. h. ein entschiedenes Übergewicht nach der ersten Seite hin. Bei den Realgymnasien ist das Verhältnis fast genau 2 : 1, also ebenfalls noch ein entschieden sprachlich-historischer Charakter der Schule. Schließlich bei der Oberrealschule annähernd 5 : 4. Also auch hier stehen die zeitlichen Mittel noch nicht einmal gleich: obwohl hier die Erdkunde zu der zweiten Kategorie gerechnet ist, sonst ist das Verhältnis etwa 7 : 4. Eine Anstalt, auf der der mathematisch-naturwissenschaftliche Charakter in einer größeren Stundenzahl zum Ausdruck käme, existiert nicht. Alle unsere höheren Lehranstalten sind also in erster Linie Sprachschulen. Das ist zu bedenken, wenn der Lehrstoff für die Realanstalten auf unserem Gebiete zu umgrenzen ist: es kann sich in der Tat weniger um eine andere Festsetzung der Grenzen, des Umfangs gegenüber dem Gymnasium handeln, als um eine gründlichere, vertiefende Behandlung desselben Lehrstoffs. Das sind die äußeren Verhältnisse für unser Lehrfach; daß sie auf den Reformschulen noch ungünstiger sind, sei nur nebenbei bemerkt. Aus den methodischen Bemerkungen, die den neuen Lehrplänen von 1901 beigefügt sind, ist besonders zu erwähnen, daß den Schülern ein eingehendes Verständnis des Funktionsbegriffes zu erschließen ist. Hierauf kann man schon frühzeitig im mathematischen Unterricht hinarbeiten, ja propädeutische Übungen schon auf der untersten Stufe zeichnerisch ausführen lassen. Aber hier würde man entschieden das Verständnis fördern, wenn man den Funktionsbegriff auch in den übrigen Fächern mehr in den Sprachgebrauch einführte resp. ihn in der Mathematik auch da verwendete, wo er nicht direkt seiner selbst wegen als Übungsstoff verarbeitet wird. Ein Vergleich der bestehenden Lehrpläne von 1901 mit den früheren zeigt zwar eine günstige Tendenz für unsere Fächer, daß aber bei weitem nicht alle Wünsche befriedigt sind, zeigt eben die lebhafte Bewegung auf diesem Gebiete, neben anderem sind besonders die Bestrebungen nach der Einführung biologischen Unterrichts an den oberen Klassen zu erwähnen: es ist auch zu konstatieren, daß die Verschiedenheiten in den verschiedenen Lehrplänen auf dem Gebiete der Mathematik sehr gering sind, verschwindend auf der unteren und mittleren Stufe: von einer wirklichen Reform kann auch hier nicht die Rede sein; und dabei wäre vielleicht das Richtigste eine Revolution. Von einem Einfluß z. B. des Fortschritts in der Wissenschaft „spürest du kaum einen Hauch". In der Tat, die Schüler auch der Realanstalten stehen der Mathematik der Hochschulen fast fremd gegenüber, nicht einmal die Probleme sind ihnen bekannt, auf die man doch einen Ausblick eröffnen sollte, mit einem Hinweis vielleicht auch auf die Methoden der Lösung. Welchen Einfluß hatte seinerzeit Hindenburg und seine Schule auf die Lehrpläne ausgeübt: ein Einfluß, dessen Spuren noch heute deutlich zu merken sind. Aber in der Folge ist bis heute kein Versuch wieder gemacht worden, von der Wissenschaft her einen entscheidenden Einfluß auf die Gestaltung der Lehrpläne zu gewinnen.

Betrachtet man die Verteilung des Lehrstoffs im einzelnen, so tritt überall hervor, daß die formale Bedeutung des mathematischen Unterrichts noch allzusehr im Vordergrund steht, daß tatsächlich die anfangs erwähnten Klagen Kramers auch noch jetzt zu Recht bestehen. Der Einfluß der Lehrpläne wird aber noch durch einen weiteren Umstand für eine Ausgestaltung und freie Entwicklung des mathematischen Unterrichts verderblich: sie sind die eiserne Zuchtrute für die Revision dieses Unterrichts, sei es auf den einzelnen Stufen, sei es in der Reifeprüfung, und bewirken ein Arbeiten auf äußerlichen Erfolg, auf das, was sich vorführen läßt, wodurch die wesentliche Aufgabe des mathematischen Unterrichts stark benachteiligt wird. Solange in der Reifeprüfung noch streng nach den Lehrplänen der Maßstab an die Leistungen der Schüler angelegt wird, auf jedem der verschiedensten Gebiete unweigerlich die Darlegung ganz bestimmter Einzelkenntnisse verlangt wird, ist an eine freie Ausgestaltung unseres Unterrichts, besonders auf der obersten Stufe, nicht zu denken. Mir ist ein Fall mitgeteilt worden, daß im Abiturientenexamen der prüfende Lehrer die Frage stellte: „Worin beruht das Wesen und der Wert der analytischen Geometrie?" und daß er vom Vorsitzenden zurechtgewiesen wurde mit den Worten: „Lassen Sie das. Fragen Sie Formeln!" Ja, meine Herren, wenn wir als höchstes Ziel vor Augen haben sollen, daß unsere Schüler eine recht große Anzahl von Formeln auswendig wissen, so steht es um die ethische und ästhetische und noch manche andere Seite der Bedeutung des mathematischen Unterrichts schlecht. Dabei ist zu bedenken, daß wir — wie bei all unserem Unterricht — das Beste, was wir geben können, nicht in der Prüfung zeigen können, nämlich die Einwirkung unseres Unterrichts auf den Verstand und den Charakter unserer Zöglinge. Das Beste ruht oft und bedarf eines glücklichen individuellen Momentes der Auslösung; dies tritt aber selten genug gerade im Examen ein. Ich möchte hier an die schönen Worte erinnern, mit denen der Prorektor der Universität Bonn den Prinzen Eitel-Friedrich bei der Exmatrikulation begrüßt hat. Die inneren Erfolge — wie ich sie nennen möchte — zeigen sich fast durchweg erst im späteren Leben. Und wie oft da grelle Unterschiede mit dem Ausfall der Prüfung vorkommen, ist zu bekannt, als daß ich hier darauf einzugehen nötig hätte. Auch die Aufgaben für die schriftliche Prüfung würde ich anders stellen, als es jetzt üblich ist: in einer Weise, die sicher ein Urteil über das Wissen der Abiturienten gewährte. Wie oft kann man beobachten, daß ein Schüler in der begreiflichen Aufregung eine Aufgabe falsch anfaßt, sich festbeißt und schließlich eine ungenügende Arbeit abgibt, obwohl er sonst immer Gutes geleistet hat. Ich würde daher dafür sein, daß wenigstens eine Aufgabe allgemeinen Charakters gestellt wird, die zugleich eine Beurteilung nach anderer Seite hin zuließe. Solche Themata wären etwa aus der Algebra „Die Gleichungen“ oder „Der Zusammenhang der Wurzeln und Koeffizienten einer Gleichung“, aus dem Gebiete der Arithmetik „Über unendliche Reihen“, „Der Moivresche Lehrsatz und seine Anwendung“, aus der Planimetrie „Die Konstruktionsaufgabe“, „Über die Anwendungen der Ähnlichkeitslehre“, aus der analytischen Geometrie „Die Behandlung der geraden Linie“, „Die Entwicklung der Tangenteneigenschaften bei einer Kurve“, aus der synthetischen „Die Parabel“ usf. usf. Aus der ganzen Art der Darstellung formell wie inhaltlich würde der geistige Gewinn, den der Betreffende aus dem mathematischen Unterrichte gezogen, viel evidenter erkannt werden können, als aus der Behandlung einer einzelnen Aufgabe, z. B. einer kubischen Gleichung, zumal da ja gefordert werden könnte, die allgemeine Darstellung an einem bestimmten selbst zu wählenden Beispiele durchzuführen. Neben einer solchen Hauptaufgabe dann noch höchstens eine spezielle Frage resp. ein Exempel oder besser noch eine zeichnerische Aufgabe aus der darstellenden Geometrie.

Daß unser mathematischer Unterricht seiner Aufgabe nicht überall gerecht wird, liegt an seiner Schwierigkeit: nicht an dem Mangel einer besonderen Begabung, sondern sehr oft — das kann nicht geleugnet werden — an der Art der Darbietung. Es ist ja in dieser Beziehung im allgemeinen sehr viel besser geworden im Vergleich zu früheren Zeiten, aber eine unablässige Arbeit an der Verbesserung der Unterrichts-Methoden ist und bleibt eine dringende Forderung. Zum guten Teil freilich werden diese Bestrebungen durch unser ganzes

Schulsystem, insbesondere durch die Lehrpläne und ihre Forderungen hintangehalten. Um nur ein Beispiel zu erwähnen: In der Obersekunda der Oberrealschule soll durchgenommen werden: Arithmetische Reihen und geometrische Reihen, Zinseszins- und Rentenrechnung. Die imaginären und komplexen Größen. Reziproke und binomische, sowie schwierigere quadratische Gleichungen. Die Lehre von den harmonischen Punkten und Strahlen, Chordalen, Ähnlichkeitspunkten und -Achsen mit Konstruktionsaufgaben. Die Ergänzung und Fortführung der Goniometrie; schwierigere Dreiecksberechnungen. Systematische Begründung der Stereometrie und weitere Ausführungen und Anwendungen. Zur Verfügung stehen höchstens 200 Stunden im Jahre, wenn man den Ausfall einzelner Stunden unberücksichtigt läßt. Mindestens 20 Stunden gehen für die geforderten schriftlichen Arbeiten (Extemporalien) verloren, ebensoviele werden zur Zurückgabe verwendet werden müssen. Wo bleibt da Zeit zu einer gründlichen Vermittlung des überreichen Lehrstoffs, geschweige denn zu Anwendungen auf den verschiedenen hier sich darbietenden Gebieten? wo die Möglichkeit ethisch und ästhetisch auf die Schüler einzuwirken? Und diese selbst! Sie verlieren bei der Hetze alle Lust und alle Freude an der Arbeit. Kaum daß sie sich in eins der heterogenen Gebiete eingearbeitet haben, daß sie anfangen mit Lust und Liebe darin zu arbeiten, nachdem ihnen ein volles Verständnis aufgegangen, so wird es verlassen und ein neues stürmt auf sie ein. Von einer wirklich geistigen Verarbeitung kann da keine Rede sein: und greift man dann in Prima auf diese Sachen zurück, so zeigt sich überall tabula rasa; die Kenntnisse, die ja wohl einmal vorhanden waren, sind dahin, und von dem Einfluß auf mathematisches Denken, auf Anschauung usf. ist wenig oder nichts zu spüren.

Das ist nur ein Beispiel, das ich aus den Lehrplänen herausgegriffen habe, aber es ist typisch für sie. Was wir am allerersten erstreben sollten, daß unsere Schüler arbeiten lernen, daß sie gern und freudig arbeiten: das ist fast unmöglich geworden; an dessen Stelle tritt das Büffeln, das Einpauken. Damit wirken wir aber nicht erzieherisch, abgesehen davon, daß auch den Lehrern die Freude am Unterricht auf diese Weise verbittert wird. Welch schädlichen Einfluß gerade dieser Hetzbetrieb auf die Wahrhaftigkeit der Schüler ausübt, ist gar nicht zu sagen: unser Fach, dem gerade nachgerühmt wird, daß es in besonderem Maße das Gefühl für Wahrheit und Recht erweckt und befestigt, wird auf diese Weise bedauerlicherweise ebenfalls mitwirken, die Achtung vor der Wahrheit zu untergraben. Doch genug hiervon.

Lassen Sie mich, m. h. H., nur kurz noch einmal wiederholen, daß nach meiner Ansicht eine Revision der mathematischen Lehrpläne dringend notwendig ist, nebenbei gesagt freilich auch des Schulsystems überhaupt; daß diese Veränderungen Hand in Hand gehen müssen, unter Berücksichtigung einerseits der ebenso notwendigen Umänderung der Vorbereitungsschulen, andererseits der von den Hochschulen aufzustellenden Forderungen, die allerdings nicht nur das Endziel des mathematischen Unterrichts auf den höheren Lehranstalten ins Auge fassen dürfen, sondern auch die Ausgestaltung im einzelnen, besonders die Berücksichtigung der verschiedenen Gebiete der Mathematik beachten müssen. Auf Grund dieser Gutachten müßte dann die Schulverwaltung von praktischen Schulmännern einen neuen Lehrplan ausarbeiten lassen, dessen Einführung und Durchführung dann hoffentlich auch die Klagen über die große Kluft zwischen Schule und Universität auf unserem Gebiete verstummen lassen würden. Freilich muß ich gestehen, daß ich zweifelhaft geworden bin, ob diese Klage mit Recht gerade von uns erhoben wird. Denn genau genommen, hat diese Kluft auf allen Gebieten, mit Ausnahme allein der klassischen Philologie und vielleicht auch der Theologie, bestanden und besteht noch. Es ist auch sicher, daß, um diese Kluft zu überbrücken, man nicht allein die Schule reformieren, sondern daß auch von der Hochschule her entgegengekommen werden muß. In erster Linie ist hier die Forderung aufzustellen, daß dem späteren Lehrer neben den Grundlagen der allgemeinen Pädagogik auch besondere Fach-Unterrichtsmethodik geboten wird, daneben aber auch z. B. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, wie des mathematischen Unterrichts. Dringt die Überzeugung von dem Wechsel unseres Bildungsideales durch, so wird allerdings die Schule den größeren Schritt tun müssen, ohne daß aber der Fehler begangen werden darf, die Realanstalten zu wirklichen Fachschulen zu machen. Daß sie jedoch in irgend einer Weise — vielleicht nach Art der französischen Lehrpläne — sich einer solchen Gestaltung etwas mehr nähern als bisher, dürfte wohl in absehbarer Zeit nicht zu umgehen sein. Festzuhalten ist dabei immer, daß der Unterricht an den höheren Schulen in höherem oder geringerem Maße im wesentlichen einen propädeutischen Charakter trägt.

Und nun möchte ich schließen mit den Worten:

„Den bestehenden Mißverhältnissen abzuhelfen ist Pflicht, die Erfüllung derselben ist aber bedingt durch Einverständnis in Ziel und Zweck. Die wesentlichste Bedingung zur Realisierung einer Reform ist Einhelligkeit der Arbeit auf Schule und Universität."

„Gelänge es uns, den Standpunkt der Schule zu erhöhen, den Horizont zu erweitern, den Lehrinhalt zu vertiefen, bald müßte man den Einfluß spüren. Das Bewußtsein, der gesamten Wissenschaft gedient zu haben, wird uns erheben."

M. H. Diese Worte sind entnommen einer akademischen Festrede Arthur von Öttingens, „Über den mathematischen Unterricht in der Schule", gehalten am 12. Dezember 1872 in Dorpat: und heute schreiben wir 1904.

Über komplexe Zahlen; über den Lehrgang in der sphärischen Trigonometrie; literarisch-historische Notizen.

Von

M. Simon aus Straßburg i. E.

Dem Wunsche Ihres Einführenden Folge leistend, erlaube ich mir Ihnen einige Bemerkungen zu unterbreiten. Die erste Bemerkung, die ich zu machen habe, bezieht sich auf die Rechnung mit komplexen Zahlen. Gewöhnlich wird es so dargestellt, daß die quadratischen Gleichungen zu dieser Erweiterung des Zahlbegriffs führen, dieselben liefern allerdings zuerst komplexe Zahlen, aber wenn von einem Rechteck verlangt wird, daß sein Umfang 20 und sein Inhalt 29 sei, so zeigen die Zahlen $5 \pm 2i$ nur an, daß, da ein solches Rechteck nicht existiert, auch seine Seiten keine Maßzahlen haben. Kurz, in den Problemen 2. Grades liegt nichts, was zur Rechnung mit komplexen Zahlen nötigt. Anders die Gleichung 3. Grades. Das Problem, von einer Kugel $1/3$ durch eine Ebene abzuschneiden, hat evidente Existenz; nennt man $r/p = x$, so erhält man die Gleichung $x^3 - \frac{9}{4}x + \frac{3}{4} = 0$ also $x = \sqrt[3]{-\frac{3}{8}(1 - i\sqrt{2})} + \sqrt[3]{-\frac{3}{8}(1 + i\sqrt{2})}$, und hier beim casus irreducibilis wird man gezwungen mit komplexen Zahlen zu rechnen. Es ist kein Zufall, daß der erste, der mit komplexen Zahlen gerechnet hat, Cardanus war. Die Konsequenz heißt für den Lehrplan: entweder keine komplexen Zahlen, oder im Anschluß an die Gleichung 3. Grades.

Meine zweite Bemerkung bezieht sich auf die sphärische Trigonometrie. Zunächst halte ich es für die Schule durchaus nötig, sich auf sphärische Dreiecke, deren Bogen geodätische Linien sind, zu beschränken und die Möbius- bezw. Studysche Verallgemeinerung der Universität zu überlassen. Man gehe dann genau den Gang der planen Trigonometrie, deren beste Repetitition die sphärische ist. Zunächst das rechtwinkelige Dreieck und dabei der Grundgedanke: den Bogen durch seinen Sinus unter tunlichster Benutzung des Radius als Längeneinheit zu ersetzen. Man gelangt dadurch von selbst zu dem von vier rechtwinkligen planen Dreiecken begrenzten Tetraeder, aus dem man in $\frac{1}{2}$ Stunde die gesamte Trigonometrie des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks herausholt.

Dann kommt, wörtlich wie in der Planimetrie (vgl. Baumeister IX, S. 98), der erste bezw. dritte Kongruenzfall, und darauf der (fälschlich) sogenannte zweite, der reziproke; ich will den Beweis kurz geben. Wenn a, β und γ gegeben sind, so zerschneide man das Dreieck durch $h_c = CF$ in zwei rechtwinklige Dreiecke und benutze die beiden Formeln $\cos c = \cos a \cos b$ und $\cos \alpha = \sin \beta \cos a$. Dann ist aus ACF $\cos \alpha = \sin(\gamma - \gamma') \cos h = \sin \gamma \cos \gamma' \cos h - \cos \gamma \sin \gamma' \cos h$, und da $\cos h = \cos a / \cos FB$, so ist, wenn man dies für $\cos h$ im ersten Glied einführt, $\cos \alpha = \sin \gamma \sin \beta \cos a - \cos \gamma \cos \beta$.

Diesen Gang hat Euler in den Acta von 1779 und der große Graßmann 1865. Diese Formel in der Form

$$\cos(\pi - \alpha) = \cos(\pi - \beta) \cos(\pi - \gamma) + \sin(\pi - \beta) \sin(\pi - \gamma) \cos(\pi - a)$$

führt ganz direkt und genetisch zur Einführung der Polarecke bezw. des Supplementardreiecks, das gewöhnlich in den Unterricht hereinschneit wie ein Deus ex machina.

Zur Polarisierung möchte ich bemerken, daß die Einführung der Supplementwinkel in die Formeln zwar unbedingt elegant ist, man hat nur mechanisch die lateinischen mit den griechischen Buchstaben zu vertauschen; aber gerade wegen des Mechanischen empfiehlt sie sich nicht für die Schule. Ich spreche hier den Satz aus, häufig ist das mathematisch Elegantere nicht das für die Schüler Zweckmäßigere (Vgl. Hilfswinkel, Produktische Umformungen etc.). Im Anschluß an diesen Satz kann ich die Forderungen Hoüels, dieses ebenso bedeutenden wie in Deutschland unbekannten Methodikers, nach einer Tafel der natürlichen Werte der Funktionen von Minute zu Minute nur unterstützen.

Literarhistorisch ist zu sagen, das die Einführung der Supplementwinkel in die Formeln nicht auf Edouard Lucas, auch nicht auf Graßmann (Trigonometrie S. 105), sondern auf Kornelius Keogh zurückgeht.

Wirkung der wissenschaftlichen Ergebnisse auf den Unterricht in der elementaren Mathematik.

Von

H. Thieme aus Posen.

Der Aufforderung unseres verehrten Herrn Vorsitzenden, auf diesem Kongreß einen Vortrag über die Wirkung der Ergebnisse der Wissenschaft auf den Unterricht in der elementaren Mathematik zu halten, bin ich nur nach einigem Zögern gefolgt. Es ist einem einzelnen nicht gut möglich, alle die wissenschaftlichen Ergebnisse zu kennen, die für den Unterricht von Bedeutung sind, ebensowenig kann er wissen, welche Wirkungen diese Ergebnisse aller Orten bereits gehabt haben. Dazu kommt, daß gerade in Fragen des Unterrichts schon die Grundanschauungen der einzelnen Persönlichkeiten so verschieden zu sein pflegen, daß der Versuch, andere für die eigenen Anschauungen zu gewinnen, wenig Aussicht auf Erfolg verspricht.

Wenn man aber die namentlich in neuerer Zeit so erfolgreichen Bestrebungen der Wissenschaft, in die Probleme der elementaren Mathematik Klarheit zu bringen, auch nur einigermaßen verfolgt hat und dann sieht, wie gering, namentlich in Deutschland, der Einfluß dieser Forschungen auf den praktischen Unterrichtsbetrieb ist, so fühlt man sich doch verpflichtet, nach dem Grunde zu fragen, warum die Schule diese Forschungen nicht für sich verwendet, und zu untersuchen, wie weit dieses Außerachtlassen der wissenschaftlichen Ergebnisse notwendig, wie weit es unberechtigt ist.

Die Arbeit der Wissenschaft für die elementare Mathematik erstreckt sich nach drei Richtungen. Erstens bietet uns die neuere Wissenschaft eine logisch einwandfreie Begründung der Elemente, zweitens ordnen die neueren Untersuchungen große Gebiete der Elementarmathematik viel allgemeineren Fragen unter und ermöglichen durch deren Beantwortung eine tiefere Einsicht in den Zusammenhang der einzelnen Begriffe und Sätze, drittens haben neuere Forschungen die elementare Mathematik mit einer großen Zahl neuer Sätze bereichert.

Ehe wir an die Frage herangehen, ob diese neueren Forschungsergebnisse in irgend einer Weise im Unterricht berücksichtigt werden können, müssen wir uns einiger wesentlicher Vorbedingungen bewußt werden.

Bei allen Forderungen eines Faches an die Schule ist Rücksicht zu nehmen auf die für das Fach verfügbare Zeit und auf das Fassungsvermögen der Schüler, daneben auch auf den augenblicklichen Stand des Unterrichts — ein plötzlicher Umsturz ist eine praktische Unmöglichkeit — und auf den Grad der Verbreitung, den die Forschungen, die Berücksichtigung heischen, schon erlangt haben.

Was den ersten Punkt betrifft, so werden wir uns darüber klar sein müssen, daß ein Mehr an Zeit der Mathematik zunächst nicht bewilligt werden wird, so sehr dies auch für die Humangymnasien zu bedauern ist. Neben den alten Hauptfächern der Gymnasien, die ihren Besitzstand mit Energie und Erfolg verteidigen, verlangen neue auf den höheren Schulen Berücksichtigung, so in erhöhtem Maße in neuerer Zeit die biologischen Fächer; außerdem nehmen die höheren Schulen auch jetzt schon die Arbeitskraft ihrer Zöglinge in ausreichend hohem Maße in Anspruch.

Aber mag viel oder wenig Zeit zur Verfügung stehen, so gibt es doch eine Forderung von grundsätzlicher Bedeutung, die an jeden Unterricht, namentlich aber an den mathematischen Unterricht, zu stellen ist. Der Lehrer darf den Schülern nichts bringen, für dessen Kenntnis und Verständnis er in ihnen kein Bedürfnis zu wecken vermag. Eine Hauptaufgabe des Lehrers der Mathematik wird es immer sein müssen, im Schüler dies Bedürfnis hervorzurufen, namentlich das Verlangen nach Aufdeckung der gegenseitigen Abhängigkeit der Eigenschaften, nach ihrem Beweise; so mancher Mißerfolg im mathematischen Unterricht erklärt sich aus der Nichtbeachtung dieser Vorbedingung eines ersprießlichen Unterrichts. Wo der Unterricht jenes Bedürfnis nicht zu wecken in der Lage ist, muß Verzicht geleistet werden.

Dazu kommt ein weiteres. Es genügt nicht, daß die Schüler verstehen, was der Lehrer ihnen erklärt; nicht passives Rezipieren, sondern aktive Mitarbeit der Schüler muß bei jedem Unterricht erreicht werden, die Schüler müssen auf jeder Stufe das freudige Gefühl gewinnen, selbst etwas Neues nicht bloß zu wissen, sondern zu können. Daher müssen die freien Übungen, die Aufgaben, im mathematischen Unterricht mehr im Vordergrunde stehen als die gemeinsamen Entwicklungen von Lehrern und Schülern.

Aus diesen Vorbedingungen für jeden mathematischen Unterricht erklärt sich in der Hauptsache unser heutiges Unterrichtsverfahren, hieraus die Tatsache, daß wir uns jetzt im arithmetischen Anfangsunterricht zunächst auf Veranschaulichung der Regeln beschränken und dann die Regeln möglichst ausgibig zum Lösen von Aufgaben verwenden, hieraus auch, daß wir in der Geometrie im Anfangsunterricht so manche Eigenschaften der Figuren ohne Beweis als richtig annehmen.

Trotzdem bin ich der Ansicht, daß in unserem Unterricht die Ergebnisse der neueren wissenschaftlichen Forschungen in weit höherem Maße Berücksichtigung finden können als bisher, ohne daß die Schüler mehr belastet werden als jetzt, daß im besonderen so manche logischen Mängel, die dem jetzigen Unterricht noch anhaften, beseitigt werden müssen. Nach dieser Richtung sollte uns, wenn den vorher von mir angegebenen Vorbedingungen des Unterrichts genügt ist, als ideales Ziel gelten, was Graßmann in der Vorrede seiner Arithmetik ausspricht. Er sagt: „Daß auch schon für den ersten wissenschaftlichen Unterricht die möglichst strengste Methode vor jeder anderen den Vorzug verdiene, werden wohl wenige bestreiten. Namentlich wird jeder Pädagog einen folgerichtigen Beweis einem in Trugschlüssen fortschreitenden oder sich im Zirkel bewegenden vorziehen, ja es wird für ihn eine moralische Unmöglichkeit sein, mit Bewußtsein einen Beweis der letztern Art den Schülern vorzutragen und sie gewissermaßen hinters Licht zu führen." „Scheinbeweise öffnen der Oberflächlichkeit Tor und Tür." „Die Mathematik in ihrer strengsten Form, in ihrer unerbittlichen Konsequenz ist allein imstande, den Schüler vor der modischen Herrschaft der geistreichen Phrase zu bewahren."

Doch wenden wir uns jetzt dem einzelnen zu.

Der mathematische Unterricht gliedert sich in Arithmetik und Algebra einerseits und die geometrischen Disziplinen andererseits.

Eine logisch strenge Begründung der Arithmetik besitzen wir noch nicht lange. Graßmann konnte in seiner 1861 erschienenen Arithmetik sich rühmen, die erste einwandfreie Entwicklung der arithmetischen Lehren zu geben. Seit Graßmann ist auf exakte Begründung der Arithmetik von seiten der hervorragendsten Mathematiker viel Sorgfalt verwandt worden. Die Vorlesungen von Weierstraß, die Schriften von Hankel, Schroeder, Stolz u. a., die Arbeiten von G. Cantor, Dedekind, Peano u. a über die Natur der Zahlen haben die richtigen Anschauungen über die Grundlegung der Arithmetik in weitere und weitere Kreise getragen. In wenig umfangreichen Werken, der theoretischen Arithmetik von Stolz und Gmeiner und der Enzyklopädie der Elementar-Mathematik von Weber und Wellstein, wird der jetzige Stand der Wissenschaft jedem leicht zugänglich gemacht.

Im praktischen Schulunterricht sowie in den arithmetischen Lehr- und Übungsbüchern der Schule ist dieser neuere Stand der Wissenschaft noch lange nicht zu der Geltung gelangt, die er verdient. Da finden wir z. B. immer wieder die Gleichungen $(-a)(-b) = +ab$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a + bi = c + di$, wenn $a = c$ und $b = d$ ist, nicht, wie es sein sollte, als Definitionen, sondern als zu beweisende Lehrsätze behandelt. Die einfache Forderung, daß man jeden Begriff und jeden Lehrsatz auf seinen Geltungsbereich zu untersuchen hat, daß man sie über diesen Geltungsbereich hinaus nicht verwenden darf, findet noch lange nicht allgemeine Beachtung. Die Begriffe gleich, größer, kleiner, die Begriffe des Addierens, Multiplizierens, Potenzierens, die zunächst nur für absolute Zahlen definiert sind, werden auf negative, gebrochene, irrationale, imaginäre und komplexe Zahlen angewandt, ohne die Berechtigung hierzu irgendwie zu untersuchen.

Allerdings können wir uns im Anfangsunterricht nicht auf langatmige logische Erörterungen einlassen; wir würden dadurch die Schüler nur abschrecken und das bekannte Vorurteil von der besonderen Befähigung fördern. Wir müssen uns anfangs mit einer anschaulichen Ableitung der Gesetze begnügen. Indessen müssen wir uns dabei auch der Grenzen des Veranschaulichungsmittels bewußt bleiben; jeder Vergleich hinkt. Die Veranschaulichung der positiven und negativen Zahlen durch Vermögen und Schulden führt bekanntlich zu dem Satze, an dem jeder Tertianer Anstoß nimmt, daß „Schulden mal Schulden Vermögen gibt". Um solchen Fehlern vorzubeugen, ist von vornherein, auch auf der Unterstufe, zu betonen, daß alle direkten Rechnungen für jede neue Zahlenart neu zu erklären sind; dann gibt es ein solches Paradoxon nicht.

Auf der Oberstufe muß mehr geschehen. Hier muß den Schülern bei Gelegenheit der irrationalen und komplexen Zahlen, auf die besondere Sorgfalt zu verwenden ist, der ganze Aufbau des Systems der arithmetischen Begriffe und Operationen im Zusammenhange vorgeführt werden. Weniger von Bedeutung ist, welche Definition der irrationalen Zahlen dabei zugrunde gelegt wird, ob die von Weierstraß, Dedekind oder G. Cantor.

Recht mangelhaft im Unterricht ist noch die Behandlung der unendlichen Reihen. Daß sie zum Abschluß der Lehren der elementaren Arithmetik gehören, wird sich wohl nicht bestreiten lassen. Der Schüler arbeitet jahrelang mit Logarithmen und trigonometrischen

Funktionen, benutzt dauernd die Logarithmentafeln. Da ist es doch wünschenswert, daß er einen möglichst klaren Einblick in die Eigenschaften dieser Funktionen erhält, daß er auch erfährt, wie man die benutzten Tafeln herstellen kann.

Wie die Lehre von den unendlichen Reihen ohne Differential- und Integralrechnung streng zu begründen ist, hat Weber in der Enzyklopädie der Elementar-Mathematik gezeigt. Ob die Schule die Entwicklungen Webers für den Unterricht verwenden soll, oder ob sie den in neuerer Zeit namentlich von F. Klein empfohlenen Weg gehen und die Differential- und Integralrechnung in den Unterricht aufnehmen soll, das ist eine Frage, über die man sich in Fachkreisen in der nächsten Zeit klar werden muß. Aus mannigfachen Gründen, namentlich um den für alle Verhältnisse des Lebens so wichtigen Funktionsbegriff im Unterricht gebührend zur Klarheit und Geltung bringen zu können, würde ich mich für den letzteren Weg entscheiden.

Die Aufnahme anderweitiger neuer Forschungsergebnisse in den Unterricht, etwa der Lehre von den Determinanten oder der Lehre von den Invarianten und Kovarianten, scheint mir dagegen nicht erforderlich; ein Hinweis auf die Bedeutung dieser Lehren kann gelegentlich erfolgen und wird bei dem einen oder anderen Schüler anregend wirken.

Mehr Schwierigkeiten als der arithmetische Unterricht bietet der geometrische. Bekanntlich haben wir von Euklid einen Lehrgang der Geometrie von außerordentlich hoher Vollkommenheit überkommen. Ebenso bekannt ist, daß der Lehrgang Euklids kein Königsweg ist, daß die Unterrichtsergebnisse in der Geometrie lange Zeit mangelhafte waren. Man hat deshalb den Lehrgang den verschiedenartigsten Umgestaltungen unterworfen. Man fand, daß es den Schülern vielfach an Anschauungen fehle, und schuf deshalb die propädeutische Anschauungslehre, in der man wie im arithmetischen Anfangsunterricht zunächst alle Beweise wegließ. Das, was man in dieser Propädeutik lehrte, faßten die Schüler leicht. Aber man täuschte sich sehr, wenn man damit die sachlichen Schwierigkeiten überwunden glaubte. Diese zeigten sich sofort wieder, sobald man von den Schülern Beweise und selbständiges Lösen von Aufgaben verlangte.

Man suchte sich über die Schwierigkeiten hinwegzuhelfen durch Änderung der Beweise. Leider sind diese Änderungen mehrfach nur Verschlechterungen des Lehrgangs, die neuen Beweise, wie z. B. der in neuerer Zeit wunderbarerweise so vielfach empfohlene Thibautsche Beweis des Parallelenaxioms, Scheinbeweise. Gegen solche Beweise muß im Interesse der logischen Ausbildung der Schüler Protest eingelegt werden.

In dem jetzt üblichen Lehrgange der Geometrie sind fehlerhaft vielfach die Definitionen der Grundbegriffe, mangelhaft die Auswahl der benutzten Grundsätze, mangelhaft so mancher Beweis, namentlich auch die Behandlung der irrationalen Zahlen in der Geometrie.

In allen diesen Dingen ist durch die neueren Forschungen über die Grundlagen der Geometrie völlige Klarheit geschaffen worden. Eine ganze Reihe der gebräuchlichen Fehler läßt sich vermeiden, ohne die Schüler mehr zu belasten als bei dem bisherigen Verfahren.

Um den Unterricht überhaupt beginnen zu können, werden wir die Schüler zunächst anschaulich mit Körpern, Flächen und Linien und mit einzelnen ihrer Eigenschaften bekannt machen, werden aber nicht Definitionen von Linie und Fläche geben. Die neuere Analysis lehrt uns, daß allgemeine Definitionen von Linie und Fläche unmöglich sind. Ebenso werden wir auf die Definition der Geraden verzichten müssen. Da wir die Linie nicht definieren können, können wir auch die Gerade nicht unter diesen Begriff subsumieren. Die Begriffe der Entfernung und der Richtung setzen den Begriff der Geraden schon voraus. Nebenbei braucht eine Linie an und für sich weder eine Länge noch eine Richtung zu haben. Daß es zwischen zwei Punkten eine kürzeste Entfernung gibt, ist von vornherein durchaus nicht gewiß, und in einer Geraden gibt es bekanntlich zwei Richtungen.

Die Eigenschaften der Ebene lassen sich, wie Peano und Veronese gezeigt haben, unter Voraussetzung gewisser Postulate aus denen der Geraden ableiten. Für den Anfangsunterricht aber sind diese wissenschaftlich außerordentlich wertvollen Entwicklungen schwer verwendbar. Im Anfangsunterricht werden wir einfach als Grundsatz voraussetzen müssen, daß man in der Ebene von jedem Punkte zu jedem andern eine Gerade ziehen kann.

Schwierigkeiten macht im Anfangsunterricht ferner der Begriff des Winkels. Es gibt keine Definition des Winkels, auf Grund deren sich alle seine Eigenschaften ableiten ließen. Um mit Winkeln operieren zu können, muß man für zwei Winkel die Bedeutung der Begriffe gleich, größer, kleiner, der Summe und der Differenz festlegen. Das muß unabhängig davon geschehen, ob man den Winkel als ein Gebilde, das aus zwei von einem Punkte ausgehenden Strahlen besteht, als Richtungsunterschied, als Größe der Drehung, als Maß der Drehung, als Grenzwert eines Kreissektors bei unendlich wachsendem Radius oder als Teil der Ebene definiert. Logisch ist diejenige Definition die beste, bei der so wenig andere Begriffe benutzt werden wie möglich; das ist bei der ersten der genannten Definitionen der Fall. Im Interesse der Anschaulichkeit wird man sich im propädeutischen Unterricht nicht so knapp fassen wollen; wenn man da etwa den Winkel als Drehungsgröße oder als Teil der Ebene einführen will, so ist dagegen nicht viel zu sagen, man muß sich aber bewußt bleiben, daß logisch damit nichts gewonnen ist.

Von besonderer Bedeutung für den Unterricht ist die Stellung, die den Grundsätzen anzuweisen ist. Was zu einer wissenschaftlichen Begründung der Geometrie gehört, wissen wir aus den Arbeiten von Pasch, Veronese, Peano und Hilbert. Eine derartig genaue Begründung der Lehren ist aber für unsere Schüler nicht verwendbar.

Die Zahl der Grundsätze, die man zur exakten Begründung braucht, ist so groß, daß der Anfänger sie schwer überschauen kann. Die Entwicklungen sind dabei zunächst so abstrakt und schreiten so langsam vorwärts, daß ein Anfänger ihnen keinen Geschmack abgewinnen kann.

Im Anfangsunterricht werden wir von den Grundsätzen nur die von Hilbert so bezeichneten Axiome der Verknüpfung und das Parallelenaxiom ausdrücklich als solche hinstellen. Von den Axiomen der Anordnung, der Kongruenz und der Stetigkeit werden wir wie bisher zunächst Gebrauch machen, ohne sie besonders aufzuführen. Auf der Oberstufe, bei Gelegenheit des stereometrischen Unterrichts, werden wir auf die Notwendigkeit dieser Axiome hinweisen. Ein vollständig durchgeführtes exaktes System der Lehren der Geometrie ist auch auf der Oberstufe nicht möglich; die verfügbare Unterrichtszeit ist für näherliegende Dinge notwendig.

Von Wichtigkeit für die Elementargeometrie sind weiter die Forschungen von Schur, Hilbert u. a. über die Lehren vom Flächeninhalt und von den Proportionen. Die Lehre von den Proportionen (das Rechnen mit Strecken) kann unabhängig vom Begriff der Zahl und unabhängig vom Archimedischen Postulat begründet werden, ebenso die Lehre von der Inhaltsgleichheit. Zur Lehre von der Flächengleichheit ist das Archimedische Postulat erforderlich. Wir wandeln in der Lehre von den Proportionen in der Hauptsache auf den Bahnen Legendres, der dies Gebiet arithmetisiert hat. Mit den irrationalen Zahlen benutzen wir hier ein Hilfsmittel, das mehr enthält, als erforderlich ist, das also die Art der Abhängigkeit der Lehren voneinander nicht klar hervortreten läßt.

Wer zum erstenmal die schöne Darstellung der Lehren von den Proportionen und vom Flächeninhalt bei Hilbert liest, wird sich leicht versucht fühlen, sie in den Unterricht zu übertragen. Bei näherem Zusehen wird man aber wohl davon Abstand nehmen und bei dem alten Verfahren bleiben trotz seiner Mängel. Die irrationalen Zahlen können wir schließlich in der Geometrie doch nicht vermeiden, und wir freuen uns, in ihnen ein Hilfsmittel zu besitzen, durch welches wir im Unterricht weite Gebiete gleichmäßig bewältigen können.

Einem Flächenstück, wie im Unterricht Brauch, eine bestimmte Größe zuzuschreiben, hat man zunächt kein Recht; man weiß nicht, ob dasselbe Flächenstück, in verschiedener Weise als Summe aufgefaßt, stets dieselbe Größe gibt. Es wird aber schwer sein, im Anfänger Zweifel an dieser Tatsache hervorzurufen und die Notwendigkeit des hier erforderlichen Axioms verständlich zu machen. Ebenso wird der Schüler im Addieren und Subtrahieren von Flächenstücken kein Erschleichen von geometrischen Wahrheiten sehen. Also wird man wohl auch hier von Änderungen absehen können.

Im Zusammenhange mit diesen Fragen steht die Frage der allgemeinen Größensätze. Für die Arithmetik, für Zahlen, sind diese Sätze keine Grundsätze, sondern beweisbare, rein analytische Wahrheiten. Für die Geometrie geben sie ein bequemes Mittel, die Begriffe gleich, größer, kleiner, Summe, Differenz auf die geometrischen Größen: Strecke, Winkel, Bogen, Fläche, Volumen, Verhältnis anzuwenden.

Bei Voraussetzung des Archimedischen Grundsatzes und des Grenzbegriffs sind die allgemeinen Größensätze bis zu einem gewissen Grade entbehrlich. Das Verständnis hierfür wird den Schülern der Oberstufe bei der Behandlung der irrationalen Zahlen in der Geometrie wohl eröffnet werden können. Es ist bei dieser Gelegenheit der Nachweis zu führen, daß unter Voraussetzung jener Postulate jeder Länge, jedem Winkel, jeder Fläche, jedem Körper für ein gegebenes Maß eine rationale oder irrationale Maßzahl zugeordnet werden kann, daß sich das Operieren mit den geometrischen Größen auf das Operieren mit Zahlen zurückführen läßt. Dabei kann dann erwähnt werden, daß damit die allgemeinen Größensätze beweisbare Sätze werden.

Auf der Unterstufe bleiben diese Sätze für den Unterricht unentbehrlich. Der Schüler braucht zunächst, wenn er irgendwie selbständig werden soll, für seine Beweise ein leicht übersehbares Schema, und ein solches Schema liefern ihm die allgemeinen Größensätze.

Von Bedeutung für den Unterricht sind natürlich auch in der Geometrie nicht nur die Forschungen, die auf eine schärfere Begründung der Elemente abzielen.

Von besonderer Wichtigkeit sind hier die Lehren der projektiven Geometrie. Wir wissen seit Steiner und Staudt, daß die Methoden der synthetischen Geometrie uns einen viel tieferen Einblick in die gegenseitige Abhängigkeit der geometrischen Eigenschaften gewähren als die altererbten Verfahrungsweisen Euklids, wir wissen, daß die in den Elementen behandelten Eigenschaften der Kongruenz, Gleichheit und Ähnlichkeit sich den viel allgemeineren Eigenschaften der Kollinearität unterordnen. In Berücksichtigung dieser Tatsachen haben Hubert Müller, Henrici und Treutlein sehr wertvolle Lehrbücher geschaffen, die von den Grundbegriffen der projektiven Geometrie aus das ganze Gebäude der elementaren Geometrie organisch aufbauen. Eine weitergehende Verbreitung haben diese Lehrgänge trotz ihrer Vorzüge nicht gewonnen. Es liegt doch wohl daran, daß der Anfänger für allgemeine Begriffe kein Interesse besitzt, daß sein Interesse leichter für spezielle Eigenschaften geschlossener Figuren, die er selbst herstellen kann, zu gewinnen ist. Fruchtbar gemacht werden für den Unterricht können und müssen die Ergebnisse der projektiven Geometrie bis zu einem gewissen Grade aber doch; es ist auf der Oberstufe die Unterordnung der einzelnen besonderen Begriffe (Kongruenz, Gleichheit, Ähnlichkeit, Affinität) unter den der Kollinearität nachzuweisen. Fruchtbar zu machen ist diese Erkenntnis auch für das Aufgabenlösen, zur Ableitung allgemeinerer Lösungsmethoden, wie uns das Petersen mustergültig in seinen „Methoden und Theorien“ gezeigt hat.

Werfen wir noch kurz einen Blick auf die Forschungsergebnisse, die den Bestand der Lehren der Elementargeometrie an Zahl vermehrt haben. Zu erwähnen ist da zunächst die Ausbildung der Geometrie des Dreiecks durch die Lehren von dem Grebeschen Punkt und all dem, was sich in neuerer Zeit daran geschlossen hat. Dahin gehört auch die in der Gegenwart so erfolgreich gepflegte Geometrographie. Alle diese Dinge haben ihren Wert und bieten mannigfaltiges Interesse dar. Im Unterricht wird ihrer nur gelegentlich gedacht werden können; zu tieferem Eingehen fehlt es an Zeit. Die Schule soll keine Spezialisten ausbilden, sie soll den Schülern in der Mathematik eins der Hilfsmittel an die Hand geben, die der Menschengeist sich geschaffen hat, die Außenwelt zu verstehen und zu beherrschen.

Ich bin am Schluß meiner Betrachtungen. Welches ist nun das Ergebnis?

Die neueren wissenschaftlichen Forschungen, welche die Elementar-Mathematik zum Gegenstande haben, sind allerdings für die Schule von großem Wert. Jeder Schulmathematiker sollte Werke wie die theoretische Arithmetik von Stolz und Gmeiner, die Enzyklopädie der Elementar-Mathematik von Weber und Wellstein, die neuere Geometrie von Pasch, die Grundlagen der Geometrie von Hilbert, die Elemente von Veronese und die Elemente von Ingrami kennen. Vor allem sollten die Verfasser von Schulbüchern jene Werke kennen, ebenso die Verfasser von Abhandlungen über die mathematischen Grundbegriffe, ehe sie an die eigene Arbeit gehen.

Im Anschluß an jene hervorragenden Werke ist dahin zu streben, daß aus der Schulliteratur und aus dem Unterricht die fehlerhaften Definitionen und die Scheinbeweise verschwinden. Die logische Durchbildung ihrer Zöglinge wird immer eine Hauptaufgabe jeder höheren Schule bleiben.

Spannen wir aber in der Forderung nach strengerer Begründung der Lehren des Elementarunterrichts, namentlich auf der Unterstufe, den Bogen nicht zu straff. Der Geist der Schüler soll zu reger Betätigung geweckt werden; das ist nur möglich, wenn wir ihm Nahrung geben, die dem jeweiligen Stande seiner Ausbildung entspricht.

Sorgen wir dafür, daß unsere Zöglinge die Schule mit dem Bewußtsein verlassen, in keinem Punkte der Wissenschaft fertig zu sein, mit der Überzeugung, daß in jedem Punkte ein tieferes Eindringen in den Stoff notwendig ist, als auf der Schule möglich war.

Über den mathematischen Unterricht in Bulgarien.

Von

A. V. Šourek aus Sofia.

Da das hochlöbliche bulgarische Unterrichtsministerium zum erstenmal den Internationalen Mathematiker-Kongreß beschickt und da von dem bulgarischen Unterrichtswesen, besonders aber von der Hochschule sehr wenig bekannt ist, so finde ich es zweckmäßig, die hochgeehrten Herren Fachgenossen mit dem Stande der Mathematik in Bulgarien überhaupt und an den bulgarischen Schulen besonders bekannt zu machen.

Ich halte dieses mein Vorhaben auch deshalb für wichtig, weil Bulgarien einer der jüngsten Staaten und die Hochschule eine der jüngsten auf diesem Kongresse vertretenen Universitäten ist. Jeder Neuling, wenn er in eine so ehrwürdige Versammlung eintreten will, muß sich zuerst vorstellen, um aufgenommen zu werden. Auch andererseits halte ich es für meine Pflicht, weil viele unserer Jünglinge auf den auswärtigen Hochschulen aufgenommen wurden, ohne daß man ihnen besondere Schwierigkeiten in den Weg gelegt hätte.

* * *

Die Entwicklung der Mathematik in Bulgarien fällt erst in die neueste Zeit.

Es ist nicht möglich, zu bestimmen, auf welcher Stufe sich die Mathematik vor der Befreiung der Bulgaren vom türkischen Joche befand.

In der alten bulgarischen Literaturgeschichte geschieht der Mathematik keine Erwähnung, kein altes Manuskript enthält etwas von diesem Gegenstande.

Aus der „Goldenen Zeit“ des bulgarischen Car Simeon ist auch nichts zurückgeblieben und nach der Unterjochung Bulgariens durch die Türken war es nicht denkbar, irgend eine Schrift in bulgarischer Sprache zu veröffentlichen.

Es gab bis zum Jahre 1839, wo die türkische Regierung dem Archimandrit Theodosis eine Buchdruckerei in Salonichi bewilligte, welche aber bald darauf abbrannte, weder Buchdruckereien, noch ein Publikum, welches Bücher kaufen konnte und durfte. Mit großen Schwierigkeiten war es auch verbunden, Schriftarten anzuschaffen und sie über die Grenze nach Bulgarien zu bringen, da es in diesem Lande keine Schriftgießereien gab. Es gab damals weder Setzer, noch Korrektoren, die Zensur war sehr streng, jeder Schriftsteller wurde als Feind der Regierung — als „Comita" betrachtet; man verfolgte, quälte und bewachte ihn streng, wenn er die türkische Regierung nur irgend wie erwähnt hatte. So erzählt z. B. der bulgarische Teubner — Christo Danov —, daß es ihm nicht möglich war, im Jahre 1876 eine Arithmetik, die von Christo Botev, einem bulgarischen Revolutionär, übersetzt wurde, im Druck erscheinen zu lassen, bevor er verschiedene darin enthaltene Aufgaben, wie z. B.: wieviel Okas „pilav" (Reis) man im Sultanspalais verbraucht, wieviel Gehalt dem Sultan per Tag zufällt, wieviel Türken auf einen Bulgaren auf der Balkanhalbinsel kommen, ausgelassen hatte, denn auf Grund ähnlicher Aufgaben wäre seine — ihm bewilligte — Buchhandlung jedenfalls geschlossen und er eingekerkert worden.

Ebenso schwierig war es, Bücher unter dem Volke zu verbreiten. Der erwähnte Buchhändler Christo Danov trug öfter selbst die Bücher im Sacke über den Balkan.

Die ersten bulgarischen mathematischen Bücher erschienen nicht im Lande selbst, sondern in Rußland, Serbien, Österreich, Rumänien, auch einige in Konstantinopel und kurz vor dem Kriege auch in Rustschuk. Die erste Arithmetik von Christaki Pavlovič erschien in Belgrad im Jahre 1833 auf 112 Seiten 8° mit 2 Tafeln; die erste Algebra von Vaklidov, 160 Seiten stark, im Jahre 1859 in Konstantinopel und die erste Geometrie von V. Gruev, 72 Seiten 8° mit 78 Figuren, bei L. Sommer in Wien im Jahre 1867. — Bis zum Befreiungskriege vom Jahre 1877 erschienen — wie Herr N. Načev in seinem „Bibliografičesky pregled" vom Jahre 1889 behauptet — im ganzen 28 Lehrbücher über Arithmetik mit 2 Aufgabensammlungen, 2 Algebras und 3 Geometrien.

Alle die genannten Schriften waren praktischen Charakters und hatten die Bestimmung, dem Schüler solche Kenntnisse beizubringen, die ihm im praktischen Leben Nutzen bringen könnten; in der Arithmetik besonders legte man Gewicht auf die vier arithmetischen Grundoperationen, gemeine und Dezimalbrüche, Verhältnisse und Proportionen, Regeldetri, Prozentrechnungen usw. — Wie Christo Danov behauptet, kannte man vor 50 Jahren in Bulgarien nur Addieren und Subtrahieren. Vom Multiplizieren und Dividieren hatten dazumal nur die gelehrten türkischen Kadi (Richter) einen Begriff. Der Ruhm eines solchen Gelehrten verbreitete sich in seinem ganzen Wirkungskreise und jeder bemühte sich, die Bekanntschaft eines so berühmten Mannes zu machen.

Bis zum Jahre 1877 gab es verhältnismäßig sehr wenig Schulen. Der Pope (Priester) war gewöhnlich auch Lehrer und unterrichtete die Kinder in den kirchlichen Räumen, oder es gab einen Daskal (Lehrer), der außer dem Unterrichte noch verschiedene Handwerke betrieb, Bittgesuche schrieb usw. Nur in größeren Städten gab es besser eingerichtete Schulen von 2 oder 3 Klassen. Midhat-Pascha gestattete der Stadt Gabrovo sogar ein Gymnasium und Philippopel ein Seminar. Die Statistik aus dem Jahre 1878—79 verzeichnet 1027 Knaben- und 61 Mädchenschulen.

Nach dem Befreiungskriege begannen die Russen Mittelschulen in Bulgarien zu gründen und widmeten vielen davon, wie z. B. Slivno und Lom-Palanka, große Geldbeträge zu ihrer Erhaltung. Es war ein freudiger Blick auf dieses Treiben. Aus Böhmen, Kroatien und Rußland wurden Lehrer berufen, damit verschiedene Lehrgegenstände in den neu eröffneten Mittelschulen vorgetragen werden könnten. Auf ziemlich hoher Stufe standen damals die Realgymnasien von Philippopel, Slivno, Gabrovo und Sofia.

Außerdem wurden Lehrerbildungsanstalten gegründet und diejenigen, die solche Anstalten absolvierten, bemühten sich im Volke Kultur zu verbreiten. Auf allen oben genannten Anstalten wurde auch Mathematik gepflegt, in Südbulgarien hauptsächlich in dem Maße und nach dem Muster wie in Österreich.

Die besten der von diesen Anstalten entlassenen Schüler wurden daselbst als Lehrer für untere Klassen angestellt, wo sie bis zum heutigen Tage gewissenhaft zur vollkommenen Zufriedenheit der Regierung ihre Pflicht erfüllen.

Wie sich das Schulwesen damals in Bulgarien entwickelte, ist daraus ersichtlich, daß im Jahre 1880—81 im Fürstentum sich ein klassisches Gymnasium mit 5 Klassen, 7 Lehrern und 228 Schülern, außerdem 5 Realschulen (Gabrovo, Lom-Palanka, Kistendel, Rustschuk und Widdin) befanden; außerdem gab es drei Pädagogien in Dupnitza, Sylistra und Belogradčík, ein Priesterseminar in Leskovec, ein Mädchenpädagogium in Šumen und zwei Mädchengymnasien in Sofia und Tirnowo. Diese Anstalten hatten meistens nur vier Klassen. In

Südbulgarien, d. h. Ost-Rumelien, gab es bloß zwei Gymnasien in **Philippopel** und **Slivno**, zwei Mädchengymnasien in **Philippopel** und **Stara-Zagora** und eine Lehrerbildungsanstalt im schönen **Kazanlík**. Die Regierung unterhielt 380 Stipendiaten im Lande und 34 Stipendiaten im Auslande und erteilte 28 Unterstützungen den im Auslande studierenden Bulgaren.

Wie in diesen Zeiten die Mathematik gepflegt wurde, beweist der Umstand, daß vom Jahre 1877 bis 1887 die mathematische Literatur um 19 Lehrbücher über Arithmetik, 7 arithmetische Aufgabensammlungen, 3 Algebras, 10 Geometrien (Planimetrie und Stereometrie), 1 Logarithmentafel, 2 Trigonometrien und 1 analytische Geometrie mehr ausweist.

Obzwar von damals bis zum heutigen Tage der Lehrplan in den genannten Schulen einigemal geändert wurde, so haben diese Veränderungen den mathematischen Unterricht nicht fühlbar berührt. Der neueste Lehrplan für Knabengymnasien vom 1. September 1903 erweist:

Lehrgegenstände:	Klassen:											Im ganzen
				der Realabteilung				des Gymnasiums				
	I	II	III	IV	V	VI	VII	IV	V	VI	VII	
Arithmetik	3	3	3	—	—	—	—	—	—	—	—	9
Geometrie mit geom. Zeichnen	—	2	2	—	—	—	—	—	—	—	—	4
Algebra	—	—	—	5	5	5	4	4	3	3	3	19
und Geometrie	—	—	—		—	—	—					13
Darstellende Geometrie	—	—	—	—	2	2	2	—	—	—	—	6
Physik	—	—	2	—	3	3	2	—	2	2	2	10 8

Dieser Lehrplan unterscheidet sich von den früheren dadurch, daß das geometrische Zeichnen in der I. und IV. Klasse weggelassen ist und die darstellende Geometrie nur 6 Stunden wöchentlich vorgetragen wird, wogegen früher diesem Gegenstande 9 Stunden gewidmet wurden.

Was den Unterrichtsplan anbelangt, so wird für einzelne Klassen folgendes zum Durcharbeiten vorgeschrieben.

I. Arithmetik:

I. Klasse: Numeration (Rechnen und Messen, dekadische und metrische Systeme, römische und altslawische Ziffern).

II. Klasse: Eigenschaften und die vier Grundoperationen mit den gewöhnlichen Brüchen. Die Verwandlung der gewöhnlichen Brüche in

Dezimalbrüche und umgekehrt. Periodische Brüche. Die vier Grundrechnungsarten mit den mehrnamig benannten Zahlen.

III. Klasse: Benützung der Buchstaben und Klammern bei den vier Grundrechnungsarten; Begriff einer allgemeinen Zahl und Bedeutung derselben. Proportionalität; Verhältnisse und Proportionen. Aufgaben über einfache und zusammengesetzte Regeldetri, über Prozentrechnungen, Rabatt- und Diskontrechnungen, Terminzahlungen, Teilungs- und Alligationsrechnungen. Zweite und dritte Potenz einer Zahl und das Ausziehen der zweiten und dritten Wurzel aus dekadischen Zahlen. Einfache Buchführung und die einfachsten kaufmännischen Rechnungsarten.

II. Algebra.

IV. Klasse: Erste vier Grundrechnungsarten mit rational-absoluten allgemeinen Zahlen. Teilbarkeit der Zahlen. Zahlensysteme. Verhältnisse und Proportionen. Positive und negative Zahlen; die vier Grundoperationen mit denselben. Gleichungen und Ungleichungen mit einer Unbekannten vom I. Grade.

V. Klasse: Gleichungen vom I. Grade mit zwei und mehreren Unbekannten. Unbestimmte Gleichungen. Potenzen und Wurzeln. Quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten. Gleichungen, die sich auf quadratische zurückführen lassen. Quadratische Gleichungen mit zwei unbekannten Größen.

VI. Klasse: Begriff der Logarithmen; allgemeine Eigenschaften derselben. Logarithmentafeln mit Anwendungen. Exponentialgleichungen. Arithmetische und geometrische Progressionen mit Anwendungen. Begriff vom Maximum und Minimum mit einfachsten Aufgaben.

VII. Klasse: Kombinationslehre. Binomialsatz für ganze und positive Exponenten. Eigenschaften der Binomialkoeffizienten. Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

III. Geometrie.

II. Klasse: Grundbegriffe der Geometrie und anschauliche Erklärung elementarer Körperformen: Würfel, Prisma, Pyramide, Zylinder, Kegel und Kugel. Erläuterung der wichtigsten ebenen geometrischen Gebilde und ihrer charakteristischen Merkmale auf dem Wege der Anschauung. Kongruenz. Begriff des Flächeninhaltes. Flächenberechnung vom Quadrate, Rechtecke, Parallelogramm, Dreieck usw.

Übungen im Gebrauche der Reißinstrumente. Konstruktionszeichnen im Anschluß an den behandelten Lehrstoff und unter Berücksichtigung einfacher ornamentaler Formen und Vorlagen.

III. Klasse: Ähnlichkeit der Figuren; Situationszeichnen. Grundlehren der Stereometrie. Bestimmung der Oberfläche und des Rauminhaltes der elementaren Körperformen.

IV. Klasse. Planimetrie: Die geometrischen Grundgebilde. Parallelentheorie. Kongruenz und Ähnlichkeit der ebenen Figuren. Lehrsätze, Aufgaben und Konstruktionen, die sich durch elementare Eigenschaften der Figuren, durch Kongruenz und Ähnlichkeit erklären lassen.

V. Klasse. Planimetrie: Flächengleichheit, Flächenverwandlung und Teilung; Flächenberechnung. Dreieckstransversalen. Harmonische Punktreihen und Strahlenbüschel, Ähnlichheitspunkte und Strahlen. Potenz eines Punktes in bezug auf einen Kreis. Kreisbüschel. Chordalen. Polare und Pol.

VI. Klasse. a) Trigonometrie: Goniometrische Funktionen im rechtwinkligen Dreiecke. Auflösung des rechtwinkligen Dreiecks. Auflösung des gleichschenkligen Dreiecks und regulärer Polygone. Erweiterung der goniometrischen Funktionen. Hauptsätze zur Auflösung schiefwinkliger Dreiecke. Einfache goniometrische Gleichungen.

b) Stereometrie: Die wichtigsten Sätze über gegenseitige Lage der Geraden und Ebenen im Raume. Grundeigenschaften der körperlichen Ecke überhaupt und der Polarecke im besonderen. Einteilung und Eigenschaften der Körper. Kongruenz und Symmetrie, Ähnlichkeit und Zentralähnlichkeit der Körper. Oberfläche und Rauminhalt des Prismas, der Pyramide und des Pyramidenstutzes. Oberfläche und Rauminhalt des Zylinders, des Kegels und des Kegelstumpfes, sowie der Kugel und ihrer einfach begrenzten Teile.

VII. Klasse. Analytische Geometrie: Analytische Behandlung der Geraden, des Kreises und der Kegelschnitte mit Zugrundlegung des rechtwinkligen Koordinatensystems.

IV. Darstellende Geometrie.

V. Klasse: Wichtigste Lehrsätze über die Lagenbeziehungen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen im Raume. Darstellung der Punkte, der Geraden und der Ebenen. Einübung der Fundamentalaufgaben der darstellenden Geometrie.

VI. Klasse: Projektionen der ebenen Figuren und Bestimmung ihrer Schlagschatten. Die Ellipse als Orthogonalprojektion des Kreises. Eigenschaften der Ellipse.

VII. Klasse: Darstellung von Prismen, Pyramiden, Zylinder, Kegel und Kugel; ihre ebenen Schnitte. Parallelbeleuchtung derselben Körper. Leichtere Fälle von Durchdringungen dieser Körper.

Im klassischen Gymnasium wird Algebra nach demselben Plan vorgetragen, aber mit weniger Anwendungen. Was aber die Geometrie anbelangt, so finden einige Abweichungen statt, und zwar wird in der VI. Klasse in der Trigonometrie nur das rechtwinklige und gleichschenklige Dreieck und die Auflösung regulärer Polygone behandelt. In der Septima wird die analytische Geometrie nicht vorgetragen, sondern nur Trigonometrie, besonders das schiefwinklige Dreieck.

Nach demselben Lehrplane trägt man die Mathematik in der Militärschule, der sogenannten „Junkerschule" vor. Bei den Vorträgen über darstellende Geometrie berücksichtigt man mehr die Anwendungen dieses Gegenstandes auf Fortifikationsarbeiten und andere Militärzwecke.

Außer in den Gymnasien wird die Mathematik auch in den Mädchenschulen vorgetragen; diese Schulen werden „Mädchengymnasien" genannt und enthalten sieben Klassen. In den ersten fünf Klassen lernen die Mädchen:

	I	II	III	IV	V
Arithmetik . .	3	3	3		
Algebra				3	3
Geometrie . . .				2	2
Physik			2	2	2

In der V. Klasse legen sie eine Prüfung, die sogenannte „Abgangsprüfung" ab, wonach sie dann entweder in den allgemeinen Fortbildungskurs oder in die pädagogische Abteilung des Mädchengymnasiums eintreten können. Jede dieser zwei Abteilungen dauert zwei Jahre. In dem Fortbildungskurse werden der Mathematik $5 + 4 = 9$ Stunden und der Physik und Chemie $3 + 5 = 8$ Stunden wöchentlich gewidmet.

In der VI. Klasse wird folgendes vorgetragen:

1. Algebra: Potenzen und Wurzelgrößen mit ganzen und gebrochenen, positiven und negativen Exponenten. Rationale und irrationale Größen. Bildung der zweiten und dritten Potenz zusammengesetzter Ausdrücke und dekadischer Zahlen, sowie Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzel aus denselben. Begriff der imaginären und komplexen Zahlen mit graphischer Darstellung. Quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten. Gleichungen, welche sich wie quadratische behandeln lassen. Quadratische Gleichungen mit mehreren Unbekannten. Logarithmen. Eigenschaften der Logarithmen, sowie Logarithmentafeln mit deren Anwendungen.

2. Aus der Geometrie wird zuerst Planimetrie mit Konstruktionen behandelt, dann ausführlich ebene Trigonometrie, ja sogar mit Anwendung auf praktische Geometrie.

In der VII. Klasse werden Progressionen und Zinseszinsen, Renten, Amortisation mit Anwendungen vorgetragen. Dann wiederholt man die Stereometrie, die in der V. Klasse gelehrt wurde, und nimmt hinzu ausführlich sphärische Trigonometrie und zwar: Hauptformeln des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks, Sinus-, Kosinussatz, Gaußsche Gleichungen und Nepersche Analogien, Formeln für den sphärischen Exzeß und die Dreiecksfläche mit Anwendung auf Stereometrie. Die analytische Geometrie wird hier nicht vorgetragen.

In der pädagogischen Abteilung des Mädchengymnasiums wird Mathematik nicht vorgetragen. Dagegen aber in den Lehrerbildungsanstalten Bulgariens werden

	I. Kurs	II. Kurs	III. Kurs	IV. Kurs	Zusammen
der Mathematik ...	3	4	3	—	10
der Physik........	2	2	2	—	6

Stunden gewidmet und zwar wird Algebra, Planimetrie und Stereometrie gelehrt. Aus der Algebra werden außer Potenzen und Wurzeln auch Logarithmen mit Anwendungen auf Zinseszinsen, Rentenrechnungen und quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten gelehrt.

Der Mangel an Lehrern im allgemeinen und solchen mit solider mathematischer Bildung im besonderen war bald nach dem Befreiungskriege sehr fühlbar. Deshalb gab schon am 5. Mai 1887 der damalige Unterrichtsminister Theodor Ivančov*) den Erlaß: bei dem Gymnasium in Sofia eine VIII. pädagogische Klasse zu eröffnen. In dieser Zeit jedoch fand ein Ministerwechsel statt und sein Nachfolger Dr. Čomakov benannte noch am 23. Juni 1887 diese VIII. Klasse „eine höhere pädagogische Klasse". Am 2. September desselben Jahres erließ der neue Unterrichtsminister Živkov ein Zirkular, mittels dessen beim höheren pädagogischen Kurs eine historisch-pädagogische Abteilung eröffnet wurde. Um diesem Kurse Hörer zu verschaffen, gründete er Stipendien zu 720 Frs. jährlich.

Dieser pädagogische Kurs wurde aber durch eine neue Verordnung vom 18. Dezember 1888 völlig vom Gymnasium getrennt und begann am 1. Januar 1889 unter dem Namen: „Vysšo učiliště" (Hochschule) seine Funktion. Noch in demselben Schuljahre 1888—1889 wurde ein physiko-mathematischer Kurs eröffnet mit 4 Professoren der Mathe-

*) Siehe: Dr. A. Theodorov: „Otčet za Vysšeto učiliště v. Sofia za 1902—1903".

matik, Physik und Chemie (ohne Naturgeschichte) und 34 Hörern. Dieser Kurs wurde für drei Jahre bestimmt. Am Ende des Schuljahres 1891—1892 absolvierten diesen Kurs die ersten 23 Hörer, unter ihnen 14 Mathematiker. Im Jahre 1892—1893 wurde noch eine juridische Abteilung bei der Hochschule mit 7 Professoren und 67 Studenten eingeführt.

Am 20. Dezember 1894 erschien durch einen fürstlichen Ukaz (Erlaß) das „Gesetz für die Hochschule", deren Abteilungen Fakultäten benannt sind, und wonach die einer Hochschule gebührende Einrichtung und Ordnung eingeführt wird. Im Jahre 1896—1897 wurde durch eine Ergänzung zur früheren Verordnung die innere Autonomie der Hochschule, die Freiheit des Studiums, sowie die vierjährige Dauer des Lehrkurses eingeführt. Bis zu Ende des Schuljahres 1904 absolvierten die physiko-mathematische Fakultät im ganzen 244 Hörer, darunter Mathematiker wie folgt:

Schuljahr:	Mathematiker:	Schuljahr:	Mathematiker:
1891—1892	14	1897—1898	9
1892—1893	8	1898—1899	3
1893—1894	6	1899—1900	11
1894—1895	9	1900—1901	6
1895—1896	9	1901—1902	15
1896—1897	8	1902—1903	5

und im Schuljahre 1904—1905 weitere 14 Hörer, im ganzen während 13 Jahren 117 Mathematiker.

Am 5. Juli 1897 hat der verstorbene Evlogi Georgiev der Hochschule außer einem großen Bauplatze noch 6 Millionen Frs. vermacht, um die technischen Wissenschaften an der Hochschule zu fördern. Am 23. Januar 1904 erschien durch den jetzigen tätigen Minister Dr. Šišmanov ein neues Gesetz, zufolge dessen die bulgarische „Hochschule" vom 1. Oktober 1904 an „Universität" benannt wird.

Das neue Gesetz bestimmt für die physiko-mathematische Fakultät folgende Lehrstühle:

1. für Grundlagen der höheren Mathematik,
2. „ höhere Analysis,
3. „ Geometrie,
4. „ Experimental-Physik,
5. „ mathematische Physik und analytische Mechanik,
6. „ Astronomie,
7. „ praktische Geometrie,
8. „ anorganische und analytische Chemie,

9. für organische und theoretische Chemie,
10. „ Technologie und Agrikulturchemie,
11. „ Industrialphysik,
12. „ mechanische Technologie,
13. „ Zoologie und Embryologie,
14. „ vergleichende Anatomie und Histologie,
15. „ Botanik,
16. „ Geologie und Paläontologie,
17. „ Mineralogie und Petrographie.

Diese „physiko-mathematische Fakultät“ besteht:

1. aus einer Abteilung für Mathematik und Physik,
2. „ „ „ „ Chemie,
3. „ „ „ „ Naturgeschichte.

Auf der ganzen Fakultät tragen: 10 ordentliche Professoren, 3 außerordentliche, 2 Dozenten mit 3 Assistenten vor. Die Mathematik selbst wird von 3 ordentlichen und 1 außerordentlichen Professor vorgetragen.

Der Studienplan für Mathematiker und Physiker ist folgender:

a) Vorlesungen:

Über	Semester:							
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
1. Grundlagen der höh. Mathemat.	4	4	5	5	—	—	—	—
mit der höheren Algebra I.	—	—	1	2	—	—	—	—
2. Höhere Analysis I	—	—	—	—	2	2	—	—
3. Höhere Analysis II	—	—	—	—	4	4	2	2
4. Höhere Algebra II	—	—	—	—	2	2	—	—
5. Zahlentheorie	—	—	—	—	2	2	—	—
6. Analytische Geometrie I	3	3	—	—	—	—	—	—
7. Analytische Geometrie II	—	—	3	3	—	—	—	—
8. Projektive Geometrie	—	—	—	—	[3	3	3	3]
9. Darstellende Geometrie	[4	4	4	4]	—	—	—	—
10. Höhere Geometrie	—	—	—	—	—	—	2	2
11. Analytische Mechanik	—	—	—	—	4	4	2	2
12. Mathematische Physik	—	—	—	—	3	3	3	3
13. Exper. Physik	4	4	4	4	—	—	—	—
14. Meteorologie	—	—	2	2	—	—	—	—
15. Astronomie: sphärische und praktische	—	—	—	—	3	2	—	—
theoretische	—	—	—	—	—	—	4	4
Astrophysik	—	—	—	—	—	—	—	2

b) Praktische Übungen:

Aus	Semester:							
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Grundlagen der höh. Mathematik.	2	2	2	2	—	—	—	—
Analytische Geometrie I	2	2	—	—	—	—	—	—
Analytische Geometrie II	—	—	2	2	—	—	—	—
Konstruktive Übungen aus der Geometrie der Lage	—	—	2	2	2	2	2	2
Konstruktive Übungen aus der darstellenden Geometrie	2	2	2	2	—	—	—	—
Exper. Physik .... Meteorologie	2	2	2	2	2	2	4	4

Dieser Studienplan erheischt einige Erklärungen, damit sichtbar werde, in welchem Maße die genannten mathematischen Gegenstände vorgetragen werden.

Unter „Grundlagen der höheren Mathematik" versteht man: irrationale Zahlen, Grenzen, unendliche Folgen und Reihen, unendliche Produkte und Kettenbrüche, Determinantenlehre, Theorie der komplexen Zahlen, Theorie der algebraischen Gleichungen (höhere Algebra I. Teil), Differential- und Integralrechnung, Einleitung in die Theorie der Differentialgleichungen, geometrische Anwendungen.

Vorlesungen über „höhere Analysis" bestehen aus:

1. Höhere Algebra (II. Teil, Theorie der linearen Substitutionen), Zahlentheorie,
2. Vielfache Integrale, Differentialgleichungen, Variationsrechnung,
3. Funktionsrechnung.

Die Lehrkanzel „der Geometrie" enthält Vorlesungen:

1. über analytische Geometrie der Ebene und des Raumes,
2. über Geometrie der Lage (projekt. Geometrie),
3. über darstellende Geometrie,
4. über höhere Geometrie und Methodik der Geometrie.

Was die analytische Geometrie der Ebene anbelangt, so wird sie während zwei Jahren vorgetragen. Außer dem Punkte, der Geraden und dem Kreise mit den geometrischen Örtern werden besonders Linien zweiter Ordnung ausführlich im orthogonalen, klinogonalen und Polarkoordinatensystem behandelt. Es wird ein besonderes Gewicht auf Tangenten, Polaren, Asymptoten, konjugierte Durchmesser, Hauptdurchmesser, auf die Transformation der Gleichung einer zentralen Kurve der II. Ordnung auf die Achsen, und einer nichtzentralen Kurve auf den Hauptdurchmesser und die Scheiteltangente gelegt und dann einzeln die

Ellipse, Hyperbel und Parabel besprochen. Außerdem werden die Hörer mit einigen höheren Kurven, wie z. B. mit dem Descartes'schen Blatt, der kubischen und semikubischen Parabel, kubischen Hyperbel, Zissoide, Strophoide, dann mit den Cassinischen Linien besonders mit der Lemniskate und den Kartesianischen Kurven, sowie mit den Konchoiden z. B. von Nicomed, der Pascalschen Spirale und Kardioide, ebenso mit den biquadratischen Parabeln:

$$y^4 = a^3x, \; y^4 = ax^3 \quad \text{und} \quad y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$$

bekannt gemacht. Außerdem werden auch einige transzendente Linien wie die drei Arten von Zykloiden, Epi- und Hypozykloiden, besonders Astroide, und die Evolvente des Kreises, sowie trigonometrische Linien und trigonometrische Spiralen, ebenso die Exponentialkurven $y = be^{\frac{x}{a}}$ und die reziproke Exponentiale, die Kettenlinie und die Spiralen (archimedische, hyperbolische und logarithmische) bezüglich ihrer Anwendungen auf das graphische Rechnen besprochen. Es werden dabei nicht nur die Kurven ordentlich konstruiert, sondern auch ihr Lauf, Tangenten und Normalen, Krümmung und besondere Punkte studiert. Außer den analytischen Mitteln benützt man dabei auch mit Vorteil, wo es geht, die kinematische Geometrie, deren Grundlagen auch vorgetragen werden.

Auch die analytische Geometrie des Raumes wird ziemlich ausführlich studiert. Zuerst werden die Hörer mit dem Orthogonal-Koordinatensystem, dann mit dem Polarkoordinatensystem und ihrem Zusammenhange bekannt gemacht. Es wird zuerst die Lage eines Punktes in verschiedenen Oktanten, die gegenseitige Lage zweier Punkte, ihre Distanz, wie auch die Winkel, welche ihre Verbindungslinie mit den Achsen und Koordinatenebenen bilden, ermittelt. Darauf wird die Lage irgend eines Punktes durch das einfache Verhältnis bestimmt und angewendet, sowie die Projektionen eines Dreiecks auf die Grundebenen und ihr Zusammenhang besprochen. Durch Elimination des Parameters λ wird die Gleichung einer Geraden, die durch zwei Punkte geht, gefunden, dann durch Projektionen ausgedrückt, die gegenseitige Lage von zwei Geraden, sowie ihr Winkel besprochen, und die Parallelität und Perpendikularität besonders erwähnt und angewendet.

Die Ebene wird als geometrischer Ort eines Punktes, der gleiche Entfernungen von zwei gegebenen Punkten hat, aufgefaßt, ihre allgemeine, Normal-, Parameterform ermittelt und die besonderen Lagen gegen die Grundebenen erklärt. Dann werden die gegenseitigen Lagen von Punkt und Ebene, von Geraden und Ebenen, besonders der Durchschnitt einer Geraden mit der Ebene, Ebene durch die Gerade, Aufgaben über diese Lagenverhältnisse besprochen. Dann geht man zu zwei Ebenen über, man ermittelt zuerst die Durchschnittslinie, zeigt wann zwei Ebenen parallel sind. Was die metrischen Relationen der Grundelemente anbelangt, so wird zuerst das Perpendikel vom Punkte zur Ebene geführt, die orthogonale Projektion eines Punktes und einer Geraden auf eine Ebene bestimmt, die Entfernung eines Punktes von einer Ebene ermittelt und dann die Winkel: 1. einer Geraden mit einer Ebene, 2. zweier Ebenen besprochen und bei den Ebenen, die gegenseitig senkrecht sind, angewendet. Diese gegenseitigen Lagen werden mit einer Reihe Aufgaben, worin besonders die Achse zweier windschiefen Geraden erwähnt wird, geschlossen. Überall, wo nur möglich, benützt man die Plückerschen Abkürzungen. Nach diesen Aufgaben bestimmt man das Volumen eines Tetraeders durch die Koordinaten seiner Eckpunkte, durch die Längen seiner Kanten und durch seine Seitenflächen. Dann wird die Projektion einer Strecke, eines gebrochenen Linienzuges auf eine Achse gebildet und zur Bestimmung der Entfernung zweier Punkte in einem schiefwinkligen Koordinatensystem benützt. Danach werden die verschiedenen Transformationen, besonders die Eulersche, erklärt und die Kugel ausführlich studiert.

Dann werden die verschiedenen Flächen wie: Zylinder, Kegel, Rotationsflächen, windschiefe Flächen (besonders Konoide) besprochen, ihre allgemeinen Gleichungen, sowie ebenen Schnitte ermittelt. Nachher werden die Flächen vom II. Grade ausführlich mit Rücksicht auf ihre Kreisschnitte studiert. Nach allem diesen werden die Hörer mit der Schraubenlinie, sowie mit den Raumkurven, ihren Tangenten, Oskulationsebenen, Normalebenen, Hauptnormalen, Binormalen, ebenso mit der Flexion und Torsion bekannt gemacht. Endlich werden die Flächen im allgemeinen behandelt und ihre Krümmung besonders studiert. Man vereinigt hier die analytische Geometrie mit der Differentialgeometrie.

Bei den Vorlesungen über darstellende Geometrie und Geometrie der Lage werden stets zwei Jahrgänge vereinigt.

Die Vorlesungen über darstellende Geometrie behandeln: die drei Grundoperationen der darstellenden Geometrie (Determination, Projektion und Konstruktion der Grundelemente) überhaupt und in zentraler, schiefer, kotierter und axonometrischer Projektion insbesondere. Es wird hauptsächlich das Projizieren auf eine Ebene mit Vorteil benützt und auf den Zusammenhang aller Projektionsarten ein großes Gewicht gelegt. Außerdem wird auch Perspektive (freie und Theatralperspektive), hauptsächlich aber die Mongesche Projektion mit ihrer Anwendung auf metrische Relationen und Konstruktionsaufgaben behandelt. Nachher wird das Dreikant und die Polyeder, sowie die Flächen II. Grades konstruiert, besonders aber die Raumkurven (Schraubenlinie, geodätische Linien des Kegels) studiert und die abwickelbaren Flächen, die zehn Arten der windschiefen Flächen, wie es für Lehramtskandidaten nötig ist, behandelt. Außerdem wird überall auf Beleuchtungskonstruktionen Rücksicht genommen.

Es bleibt noch übrig, den Lehrstoff der projektiven Geometrie zu besprechen.

Es werden zuerst die Grundelemente erklärt, ihre Inzidenz und Dualität berührt, dann die Perspektivität und Projektivität, die konlokale Lage, besonders die involutorische zweier projektiver Grundgebilde I. Stufe behandelt. Es werden ausführlich die Erzeugnisse zweier gleichartiger projektiver Grundgebilde I. Stufe und zwar: Kegelschnitte, Kegel und windschiefe Flächen vorgetragen. Es wird ein besonderes Gewicht auf die Kollineation und Reziprozität im ebenen Felde und Bündel gelegt.

Die höhere Geometrie, die außer dem allgemeinen Koordinatenbegriff das Hauptsächlichste aus der Transformationslehre berührt, analytische Mechanik und Astronomie werden auch ausführlich behandelt. Die Vorlesungen über den letztgenannten Gegenstand werden durch praktische Übungen am gut eingerichteten Observatorium ergänzt.

Jeder Hörer der Hochschule ist verpflichtet, alle im Lehrplane bezeichneten Vorlesungen zu besuchen. Die Hörer der Physik müssen außerdem noch den Vorlesungen über analytische Chemie, sowie den praktischen Übungen im Laboratorium während zweier Semester beiwohnen, werden aber dafür von den konstruktiven Übungen aus der darstellenden Geometrie befreit.

Die Mathematiker sind verpflichtet während drei, und die Physiker während sieben Semester an den praktischen Übungen im physikalischen Institute teilzunehmen.

Die Hörer müssen alle praktischen Übungen in den Seminarien sowie in den Laboratorien nachweisen; im entgegengesetzten Falle wird ihnen das Semester nicht gerechnet.

Alle zwei Jahre werden die Hörer einer Prüfung unterzogen. Bei der I. Staatsprüfung verlangt man Kenntnis:

1. der Grundlagen der höheren Mathematik,
2. der analytischen Geometrie und
3. der Experimentalphysik und Meteorologie.

Die zweite Staatsprüfung besteht aus:

1. höherer Analysis,
2 analytischer Mechanik,

3. Astronomie,
4. höherer, projektiver und darstellender Geometrie und
5. mathematischer Physik.

Jeder Kandidat ist gezwungen, in der höheren Analysis und noch zwei anderen Gegenständen, die er sich unter den oben angeführten wählt, Prüfung abzulegen. Die Lehramtskandidaten der darstellenden Geometrie müssen zu ihren Prüfungen die höhere Geometrie mit der projektiven und darstellenden Geometrie wählen, diejenigen dagegen, welche die Physik wählen, brauchen in den letztgenannten Gegenständen keine Prüfung abzulegen.

Nach vollendetem Studium und zweijähriger Lehrtätigkeit muß nach den neuen Verordnungen ein jeder Lehramtskandidat noch eine strenge Staatsprüfung ablegen.

Außer den Vorträgen hilft beim Studium der Mathematik auch eine verhältnismäßig reiche Bibliothek und Lesehalle, wo die besten mathematischen Zeitschriften und Enzyklopädien zur Benützung aufgestellt sind. Zum besseren Verständnis des Gegenstandes dient eine Sammlung mathematischer Modelle, welche aus:

133 Modellen für darstellende Geometrie,
185 „ „ höhere Geometrie,
50 „ „ Geometrie überhaupt,
187 verschiedenen anderen Hilfsmitteln

besteht, im Werte von 6414,81 Frcs.

Die photographischen Aufnahmen dieser Sammlungen sind in der Kongreßausstellung zu sehen. Auf einer dieser Photographien sind jene Modelle und Hilfsmittel zusammengestellt, welche vom Referenten selbst herrühren und welche auf den Ausstellungen in Antwerpen und Philippopel prämiiert wurden.

Um der Hochschule ein wissenschaftlich gebildetes Personal zu verschaffen, werden die talentierten Absolventen ins Ausland geschickt, um dort die Vorlesungen der berühmtesten Professoren zu hören und sich in den einzelnen Fächern der Mathematik zu spezialisieren.

Als Mittel zur Verbreitung der mathematischen Wissenschaften in Bulgarien dient auch der im Jahre 1896 gegründete Verein: „Physikomathmatičesko družestvo“.

Der Zweck dieses Vereines ist:

1. Den Mitgliedern zur Vervollkommnung behilflich zu sein und sie zu selbständiger Tätigkeit anzueifern.
2. Die Entwicklung der mathematischen Literatur zu fördern.

3. Verschiedene Fragen, die den mathematischen Unterricht betreffen, aufzustellen und zu beurteilen, und Mittel zu finden, welche zur Verbesserung des allgemeinen Unterrichts nötig sind.
4. Eine allgemeine Terminologie festzustellen.
5. Verschiedene, hauptsächlich aber bulgarische Lehrbücher und Abhandlungen einer ernsten Kritik zu unterwerfen.
6. Moralisch und materiell für die Ausgabe und Verbreitung selbständiger wissenschaftlicher Werke, Abhandlungen und guter Lehrbücher behilflich zu sein.

Damit der Verein seinen Zweck erreiche, werden alle 14 Tage Vorträge und Referate gehalten und verschiedene wissenschaftliche und pädagogische Fragen gelöst.

Der Verein besitzt seine eigene Bibliothek, bezieht viele Zeitschriften, hat im Jahre 1901 „Godišnik" (45 S.), herausgegeben und in der letzten Zeit redigiert er auch seine eigene Zeitschrift: „Spisanie na physiko-mathematičesko družestvo vav Sofia", deren Hauptzweck darin besteht, die Methodik der mathematischen Wissenschaften in Bulgarien im allgemeinen zu pflegen.

„Knižovno Družestvo" — eine Art bulgarische Akademie der Wissenschaften — hat für die Verbreitung der Mathematik in Bulgarien sehr wenig getan. In der Literatur ist außer den Lehrbüchern bis jetzt nicht viel geleistet worden. Hauptsächlich fehlen die Mittel und Verleger zur Ausgabe größerer Werke, besonders der Vorlesungen.

Hoffentlich werden wir bei einem der späteren Kongresse in dieser Hinsicht so glücklich sein, einen besseren Erfolg konstatieren und die bis dahin voraussichtlich bereicherte bulgarische mathematische Literatur in der Kongreßausstellung vorlegen zu können.

Über das Wesen mathematischer Beweise.*)

Von

F. Meyer aus Königsberg i. P.

Das Folgende soll nichts weniger als eine Studie zur Kantphilologie sein. Der Verfasser will nur einige Anregungen geben, von denen er hofft, daß sie andere, denen mehr Muße und Geschick zu Gebote steht, weiter verfolgen mögen; irgend eine Erschöpfung des Themas erscheint an sich ausgeschlossen. In kurzer Zeit wird der erste Band der „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften"**) abgeschlossen vorliegen. Er schildert in historisch-kritischer Entwicklung die Fortschritte, die das 19. Jahrhundert in der Arithmetik, Algebra, Zahlentheorie, sowie auf einigen angrenzenden Gebieten gezeitigt hat. Der Herausgeber sagt daselbst in seiner Vorrede (S. XXVI): „Möge die Encyklopädie, die die mathematischen Erfindungen eines Jahrhunderts in historischer Entwicklung vorführt, auch das erkenntnistheoretische Studium der grundlegenden Frage, was in der Mathematik denn eigentlich als „neu" zu gelten habe, beleben! Besteht das Neue in einer durch innere Anschauung gewonnenen Vermehrung und Vertiefung eines Besitzstandes aprioristischer Erkenntnisse oder kommt es nur zurück auf eine andere Gruppierung vorhandener Erfahrungstatsachen?" In der Tat, wenn man bedenkt, daß daselbst auf einem Raume von wenig über 1100 Seiten in knapper Form von neuen fruchtbaren Ideen,

*) Dieser Aufsatz erschien zuerst u. d. Titel „Kant und das Wesen des Neuen in der Mathematik" in dem Werke „Zur Erinnerung an Immanuel Kant". Herausgegeben von der Universität Königsberg i. Pr. Halle 1904. Als der Verf. seinerzeit das Thema einreichte, trug er sich mit der Absicht, die Entwicklungen des Textes mit besonderer Berücksichtigung der mathematischen Beweise weiter auszuführen, wurde jedoch durch andere Arbeiten daran verhindert. Indessen ist auf Wunsch der Redaktion der obige Titel ungeändert geblieben.

**) Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Bd. I, herausg. von W. Fr. Meyer. Leipzig, B. G. Teubner, 1904. [Dieser Band ist inzwischen, im August 1904, erschienen.]

Methoden und Sätzen berichtet wird, so wird man von selbst zu der Frage gedrängt, wie denn die unterscheidenden begrifflichen und anschaulichen Merkmale des „Neuen“ gegenüber dem „Alten“ festzulegen seien. Kants Lehre über die erkenntnistheoretische Stellung der mathematischen Wahrheiten, daß es „reine Erkenntnisse a priori“ seien, darf als bekannt vorausgesetzt werden; auf die vielfachen Versuche, diese Lehre zu stützen oder aber sie zu verwerfen, sei hier nur hingewiesen.

Wenn wir im folgenden die Kantsche Apriorität als Grundlage adoptieren, und unsere Entwicklungen sich danach zwanglos in das Kantsche System einfügen lassen, so werden diese Entwicklungen doch nicht unbedingt daran gebunden sein; sie würden auch bestehen bleiben können, wenn man von mehr oder weniger empiristischen Erkenntnisquellen ausginge.

Kant nimmt die grundlegenden mathematischen Begriffe und Operationen als ein unabhängig von der Erfahrung gegebenes geistiges Besitztum an — es ist in diesem Sinne beachtenswert, daß die von ihm angezogenen Beispiele elementarsten Charakters sind —, und denkt sich alle weiteren Sätze, soweit es sich nur um den Beweis ihrer Existenz handelt, als durch rein logische Schlüsse daraus abgeleitet, und so jenes ursprüngliche Besitztum immer mehr vertieft und abgerundet. Wie und in welcher Reihenfolge derartige Schlüsse zu ziehen sind, um zu vorgesteckten Zielen zu gelangen, wie der Forscher dabei schöpferisch, konstruktiv zu verfahren hat, liegt für Kant auf einem gänzlich anderen Gebiete; er postuliert zu dem Behuf einen Akt der „Synthese“, einer Art innerer Anschauung, auf Grund deren erst beispielsweise die Inhalte der beiden Begriffe $7+5$ und 12 als gleichwertig erkannt werden. Im übrigen aber erscheint Kant die in Rede stehende Frage vom Standpunkte seines vielumfassenden Systems aus als eine akzessorische; es ist ihm weniger eine allgemeine philosophische Frage, denn eine spezifisch-mathematische Fachfrage. Es sei gestattet, in dieser Richtung eine Bemerkung allgemeiner Natur über das Verhältnis der Philosophie zu den Einzelwissenschaften einzuschalten. Die Philosophie sieht es als ihre Aufgabe an, allgemein verbindliche Normen des Denkens überhaupt aufzustellen und diese auf die obersten, allgemeinsten Erscheinungen des geistigen Lebens anzuwenden; jene Normen sollen dann jeder einzelwissenschaftlichen Untersuchung zugrunde liegen, jene allgemeinsten Erscheinungen mögen sich in jeder Wissenschaft, je nach deren Charakter und deren Bedürfnissen einerseits spezifizieren, andererseits weiter ausgestalten.

Nun ist es aber eine wohlbekannte Tatsache, daß innerhalb des Rahmens jeder fortschreitenden Einzelwissenschaft „allgemeine“ Begriffe und Untersuchungsmethoden einer fortlaufenden Verschiebung, einer bald stetigen bald unstetigen Kompression und Dilatation unterworfen sind, daß sie sich selbst mit immer reicherem Inhalte erfüllen, unfruchtbare Keime abstoßen, andere in sich aufnehmen. Dieses selbstkorrigierende Verfahren geschieht in solchem Umfange, daß oft ein ursprünglich festgelegter Begriff später kaum noch wiederzuerkennen ist, so sehr hat er sich den veränderten Daseinsbedingungen anpassen müssen.

Eines der instruktivsten Beispiele dieser Art ist der Begriff der Zahl. Zu dem ursprünglichen Begriff der natürlichen Zahl trat der der negativen, der gebrochenen, der algebraischen, der irrationalen Zahl. Diesen Zahlen als reellen traten weiterhin als die umfassenderen die gewöhnlichen und höheren komplexen Zahlen gegenüber, und über alle diese erhebt sich die Schöpfung der transfiniten Zahlen (s. u. S. 678). Die Berechtigung, diese sämtlichen Gedankengebilde, so verschieden sie zunächst erscheinen, dem Zahlbegriff unterzuordnen, geht daraus hervor, daß sie im wesentlichen den nämlichen logischen Verknüpfungsgesetzen gehorchen. So weichen der Gang der allgemeinen Philosophie und der Gang innerhalb der einzelnen „Fachphilosophie“ nicht unwesentlich voneinander ab. Der Philosoph wird stets wieder zu denselben grundlegenden Fragen der als Ganzes aufgefaßten Erscheinungswelt zurückgeführt; in der Einzelwissenschaft sieht der Forscher aus der glücklichen Lösung eines besonderen Problems eine Reihe neuer, ungelöster entspringen. Wenn das Bild gestattet ist: so oft der Philosoph glaubt, seiner Hydra einen Kopf abgehauen zu haben, derselbe Kopf wächst sofort wieder; dem Einzelforscher dagegen erwachsen an Stelle des einen abgetrennten Kopfes zehn solche von anderer Beschaffenheit.

Und doch wäre eine gegenseitige Unterstützung sehr heilsam; je mehr im Einzelnen durchgebildete Fachphilosophen entwickelt würden, um so mehr würde auch der Philosoph *κατ' ἐξοχήν* genötigt werden, seinen zu allgemein gestellten Aufgaben eine gewisse Beschränkung aufzuerlegen, in dieser Beschränkung würde er dafür zu präziseren Lösungen gelangen.

Um nunmehr unsere eigentliche Aufgabe in Angriff zu nehmen, denken wir uns für den Augenblick einen gewissen Besitzstand grundlegender mathematischer Begriffe, Sätze und Methoden als vorhanden, gleichgültig woher er stamme, und fragen, wie sich dieser Besitzstand vermehren läßt. Wir wünschen, ganz im Sinne Kants, zu zeigen, daß die gedachte Vermehrung, entgegen dem äußeren Anscheine, keine materielle, sondern nur eine formale ist, daß die Erweiterung mathematischer Erkenntnisse nur in einer anderen Anordnung, Gruppierung, Zusammenstellung, Trennung und Verbindung bereits vorhandener besteht.

Um diese Auffassung zunächst an einem einfachen Bilde aus dem gewöhnlichen Leben zu erläutern: Jedermann weiß, daß ein und dasselbe Zimmer mit ein und demselben Mobiliar je nach der Aufstellung und Verteilung des letzteren dem Beschauer einen ganz anderen, einen „neuen“ Eindruck bietet, daß man sogar auch leicht einen gewollten Eindruck, einen bestimmten „Stil“ durch passende Anordnung hervorrufen kann. Nicht anders ist es in der Mathematik: durch bloße Umordnung von Teilen wird der Eindruck von Neuem, von Fortschritten erzeugt. Einer der inneren Gründe dieser befremdenden Erscheinung liegt in dem eigentümlichen Verhältnis zwischen Anschauungs- und Schließungsvermögen. Dies Verhältnis ist ein zwiefaches. Auf der einen Seite erklimmt der Verstand mühsam Stufe um Stufe, bis er zum letzten, den Beweis eines Satzes krönenden Schlusse gelangt; ist dieser Anstieg aber einmal vollendet, so vermag die innere Anschauung*), wie vom Gipfel einer Höhe, den ganzen zurückgelegten Weg mit einem Blick zu umspannen.

Auf der anderen Seite ist unser Anschauungsvermögen, namentlich in der Geometrie, ein überaus beschränktes, ja geradezu dürftiges**), sobald ihm eine größere Anzahl verschiedenartig verknüpfter Elemente unvermittelt gegenübertritt, während das Schließungsvermögen, trotz seiner Langsamkeit, geradezu als ein unbegrenztes fungiert. Dazu tritt ein in der Mathematik spezifisch ausgebildetes Moment, das Verfahren der vollständigen Induktion (des Schlusses von n auf $n + 1$). So unzweifelhaft dies Verfahren wegen seiner Sicherheit der Mathematik unschätzbare Dienste geleistet hat und noch leisten wird***), es leidet doch wieder an einem erheblichen Mangel; statt das innere Gewebe der leitenden Gedankenfäden aufzudecken, umhüllt es dasselbe vielmehr wie mit einem Schleier; oder um lieber das oben gebrauchte Bild weiter auszuführen: man läßt sich von einem Führer einen steilen Berg heraufziehen, und behält sich nur vor, den letzten obersten kleinen Gipfel

---

*) Wenn anders der Beweis gewissen Anforderungen genügt, s. u. S. 681, 683.

**) Das ist einer der Hauptgründe, weshalb bei der modernen Festlegung der Grundlagen der Geometrie von einem System durch gewisse Axiome verknüpfter Begriffe ausgegangen wird, mit denen dann nach festen Vorschriften geradezu wie mit Größen gerechnet wird. S. D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, Festschrift zur Enthüllung des Gauß-Weber-Denkmals, Leipzig, 2. Aufl., 1903! K. Th. Vahlen, Abstrakte Geometrie, Leipzig 1904. (Wird demnächst erscheinen.)

***) Vgl. H. Poincaré, Wissenschaft und Hypothese. Deutsch von F. und L. Lindemann, Leipzig 1904.

selbst zu ersteigen. Gerade die vollständige Induktion ist es, die oft zu einem neuen, unerwarteten Ergebnis führt, wie man erkennt, wenn es gelingt, einen direkten, allmählich zum Ziele führenden Beweis zu finden; dann entpuppt sich das scheinbar Neue als eine Aneinanderreihung selbstverständlicher Tatsachen.

Da eine systematische Ausführung unseres Hauptgedankens über die Entstehung des Neuen in Anbetracht der grenzenlosen Ausdehnung des Gebietes unmöglich erscheint, müssen wir uns bescheiden, eine Reihe mathematischer Typen vorzuführen, und diese wiederum durch geeignete Beispiele zu kennzeichnen, deren Verständnis keinen zu großen*) Aufwand mathematischer Vorkenntnisse erfordert.

Am deutlichsten, weil am unmittelbarsten, ist die fragliche Erscheinung in der elementaren Kombinatorik ausgeprägt. Wer zuerst den Satz aufstellte und bewies, daß die Anzahl der Vertauschungen von n Dingen gleich $1 \times 2 \times 3 \cdots n$ ist — eine Zahl, die bei größeren Werten von n eine solche Höhe erreicht, daß sie bei dem Laien ein ungekünsteltes, verwirrendes Erstaunen erwecken muß — glaubte gewiß, einen großen, wahrhaft neuen Satz entdeckt zu haben. Und doch ist das Ergebnis nur eine Aneinanderreihung einiger Trivialitäten. Daß zwei Dinge zwei Anordnungen zulassen, sieht ein Kind ein, desgleichen, daß von drei Dingen jedes einmal an eine bestimmte (erste) Stelle gebracht werden kann; dies, mit dem Vorigen verbunden, lehrt, daß die Anordnungen von drei Dingen sich in drei Gruppen zu je zwei verteilen, daß also ihre Anzahl 2×3 ist. Von vier Dingen kann wiederum jedes einmal eine erste Stelle einnehmen, während die drei übrigen jeweils ihren 2×3 Anordnungen unterworfen werden können; mithin gruppieren sich die Anordnungen von vier Dingen in vier Klassen von je 2×3, ihre Gesamtanzahl ist also $2 \times 3 \times 4$. So ist klar, daß bei jedem neu hinzutretenden Element bei der Anzahl der vorher möglichen Anordnungen die das Element angebende Kardinalzahl als weiterer Faktor figurieren muß. Die vollständige Induktion ist hier nicht einmal erforderlich und dient nur zur bündigen Zusammenfassung der skizzierten Tätigkeiten. Wer wäre aber imstande, etwa von den 3 628 800 Arten, wie 10 Personen an einem Tische ihre Plätze wechseln können, eine deutliche Vorstellung zu besitzen?

Ganz ähnlich verhält es sich mit einem zweiten grundlegenden

*) Die meisten Leser werden freilich umgekehrt der Meinung sein, daß dieser Aufwand ein viel zu großer sei. Indessen läßt sich etwa aus bloßen elementaren Sätzen über das Dreieck die Tiefe der neueren mathematischen Begriffe nicht entnehmen.

Satze der Kombinatorik, daß man, wenn n_1 Dinge einer ersten Gruppe gegeben sind, n_2 Dinge einer zweiten, $\cdots$, n_i Dinge einer i^{ten} Gruppe, genau auf $n_1 \times n_2 \cdots \times n_i$ Arten je ein Ding der ersten Gruppe mit je einem der zweiten, $\cdots$, mit je einem der i^{ten} Gruppe zusammenstellen kann, wenn auf die Anordnung dieser Zusammenstellungen keine Rücksicht genommen wird. Usf. Als zweiter Typus der in Rede stehenden Erscheinungen diene der berühmte Pythagoräische Satz des rechtwinkligen Dreiecks. Die meisten Leser werden sich mit einem gewissen Unbehagen der künstlichen Figur erinnern, mittels derer im Schulunterricht der fragliche Satz herausdemonstriert wurde, und würden wohl schwerlich imstande sein, trotz aller Anstrengungen jene Figur sich wieder herzustellen. An die richtige systematische Stelle gebracht, hat der Satz nur das eine Eigentümliche an sich, daß er zwei Tatsachen von großer Einfachheit so miteinander vereinigt, daß ein unwesentliches Moment entfernt wird.

Der grundlegende Satz, daß bei zwei ähnlichen Dreiecken (i. e. solchen mit bezw. gleichen Winkeln) die Seitenlängen des einen sich verhalten, wie die des anderen, kann und soll gleich im Anfange der Lehre vom Dreieck abgeleitet werden und mag hier als vorhanden angesehen werden. Liegt nun ein beliebiges Dreieck ABC vor, so ist mit ihm implizite auch jede Strecke AD mitgegeben, die eine Ecke A mit irgend einem Punkte D der Gegenseite BC verbindet. Unter diesen unbegrenzt vielen Möglichkeiten gibt es offenbar sicher eine, so daß das Teildreieck ABD mit dem ganzen Dreieck ABC ähnlich wird. Verlangt man aber, um ein gleichmäßigeres, ein symmetrisches Ergebnis zu erzielen, daß auch das zweite Teildreieck ACD dem ganzen Dreieck ähnlich wird, oder, was dasselbe ist, daß alle drei Dreiecke ABC, ABD, ACD einander ähnlich werden, so ist das wiederum nur so möglich, daß AD eine Höhe des Dreiecks ABC, und überdies der Winkel desselben bei A ein rechter ist.

Bezeichnet man dann, wie üblich, die Längen der Seiten des nunmehr als rechtwinklig vorausgesetzten Dreiecks ABC mit a, b, c, die Abschnitte, in die die Hypotenuse a durch die Höhe $AD = h$ zerlegt wird, mit p, q, so ist die Ähnlichkeit je eines Teildreiecks mit dem ganzen Dreieck gleichwertig mit den Aussagen $b^2 = ap$, $c^2 = aq$, die zusammen wiederum für das rechtwinklige Dreieck charakteristisch sind. Um die unwesentlichen, weil erst in zweiter Linie auftretenden Stücke p, q zu entfernen, hat man nur jene beiden Relationen zu addieren; das Resultat $b^2 + c^2 = a(p + q) = a^2$ ist der Pythagoräische Satz, der also wiederum für das rechtwinklige Dreieck charakteristisch ist.

Würde man nur auf die Ähnlichkeit der beiden Teildreiecke achten, so ergäbe sich die andere fundamentale Aussage $h^2 = pq$, die abermals für das rechtwinklige Dreieck charakteristisch ist, mit dem Pythagoräischen Satze inhaltlich völlig gleichwertig erscheint, und formal nur dadurch von ihm abweicht, daß sie „neue" Elemente, die Höhe h und die Abschnitte p, q der Hypotenuse enthält.

Vom Pythagoräischen Satze zum Aufbau der elementaren Trigonometrie sind nur wenige Schritte erforderlich.

Um den Pythagoräischen Satz in eine Form zu kleiden, die von dem zufällig gewählten Längenmaßstab unabhängig ist, führt man die Verhältnisse der Seiten a, b, c als selbständige Bildungen ein; man nennt sie die (sechs) trigonometrischen Funktionen eines der beiden spitzen Winkel des Dreiecks. Der Pythagoräische Satz zeigt unmittelbar, wie diese sechs Funktionen durch die einfachste Rechnung auf irgend eine von ihnen zurückgeführt werden können. Um indessen dem Auge eine wohlgefällige Form*) darzubieten, führt man jene Reduktion nur selten durch, sondern behält drei (oder vier) jener Funktionen (sinus, cosinus, tangens resp. cotangens) gleichzeitig bei. Hierdurch erklärt sich der Reichtum der trigonometrischen Beziehungen; man opfert der schönen Form die Einfachheit, die Einheit des Inhalts. Wir kommen auf dieses bedeutsame Moment noch weiterhin zurück.

Ein beliebiges Dreieck wird durch eine Höhe in zwei rechtwinklige Teildreiecke zerlegt; sobald man daher auf diese die trigonometrischen Beziehungen anwendet, und diese wiederum so vereinigt, daß unwesentliche, d. h. für eine jeweilige „Auflösung" des Dreiecks nicht in Betracht kommende, Stücke entfernt („eliminiert") werden, gruppiert sich der Stoff zu immer anderen Gestalten. Trotzdem ist dieser Reichtum nur ein scheinbarer, wesentlich durch die vielfachen eigenartigen Benennungen hervorgerufener; es ist stets nur die Variation des einen Themas, daß man von einem Punkte auf eine Gerade nur ein einziges Lot fällen kann. So oft es sich hierbei darum handelt, aus drei unabhängigen Stücken (Seiten und Winkeln) des Dreiecks ein viertes zu bestimmen, ist die Anzahl der Gruppierungsmöglichkeiten eine eng begrenzte und leicht übersehbare**); sobald man da-

*) Hierbei ist freilich auch noch das praktische Bedürfnis, das den Logarithmentafeln für Zahlen und trigonometrische Funktionen Rechnung tragen muß, maßgebend; wir beschränken uns aber im Texte auf die „reine" Mathematik. Auf einer höheren Stufe ist es gerade wesentlich, die verschiedenen trigonometrischen Funktionen voneinander getrennt zu halten.

**) Von der selbständigen Einführung weiterer Dreieckselemente, wie Höhen, gegen versucht, eine Relation zwischen fünf, oder gar sechs Stücken des Dreiecks zu konstruieren, ist die Anzahl der Möglichkeiten naturgemäß eine unbegrenzte, und es ist dem subjektiven Geschmacke des Forschers der weiteste Spielraum gelassen. Er wird z. B. Wert darauf legen, daß gewisse Elemente nur linear in den Formeln auftreten, usw.

Für die Erkenntnis des Wertes der Trigonometrie des Dreiecks erscheint es aber durchaus notwendig, festzustellen (wie das der Verfasser in einer früheren Arbeit*) entwickelt hat), wie sich allein aus drei unabhängigen Grundformeln durch reine Rechenprozesse, sozusagen mittels einer Rechenmaschine, alle etwaigen übrigen herleiten lassen. Das Entsprechende gilt für den Aufbau der sphärischen Trigonometrie, der Polygonometrie usw.

Wir gehen zu anderen Typen über. Hier wird ein weiteres, ebenfalls der Mathematik spezifisch angehöriges Hilfsmoment in den Vordergrund treten, das ist die merkwürdige Rolle, die Identitäten bei der Entstehung „neuer" Sätze spielen.

Ein instruktives Beispiel aus der elementaren Planimetrie wird durch den Ptolemäischen Satz geliefert, der vielleicht manchem Leser als ein besonderes Kuriosum im Gedächtnis geblieben ist. Der Satz sagt aus, daß in einem Kreisviereck die Summe der Produkte je zweier Gegenseiten gleich dem Produkte der Diagonalen ist. Führt man die Winkel $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ ein, die die nach den Ecken des Vierecks laufenden Radien mit irgend einer festen Anfangsrichtung bilden, und setzt $\operatorname{tg} \frac{\varphi_i}{2} = \lambda_i (i = 1, 2, 3, 4)$, so lehrt eine Rechnung von wenigen Zeilen, daß der in Rede stehende Satz nur ein geometrischer Ausdruck**) für die Existenz der evidenten Identität ist:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4) + (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_2) + (\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_3) = 0.$$

Die Bedeutung des Satzes für die Kreislehre erhellt dann hinterher wieder daraus, daß er für den Kreis charakteristisch ist; vier Punkte der Ebene liegen dann und nur dann auf einem Kreise, wenn für sie die Ptolemäische Eigenschaft zutrifft.

Die Umkehrung dieser Erscheinung führt sofort zu einem um-

---

seiten- und winkelhalbierende Transversalen, ein- und umbeschriebene Kreise usw., soll hier ganz abgesehen werden.

*) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 7_1 (1899), S. 147—154.

**) Näheres siehe in der Abhandlung des Verfassers im Archiv der Mathematik und Physik, (3) 7 (1904), S. 1—15.

fassenderen Standpunkt. So oft man vier Größen λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 durch vier gleichberechtigte geometrische Objekte (Bilder) deutet, die nur noch der Bedingung zu genügen haben, daß auch den (sechs) Differenzen $\lambda_i - \lambda_k$ eine selbständige geometrische Bedeutung zukommt, gelangt man zu einem „neuen" geometrischen Satze; alle diese Sätze sind jedoch nur verschiedene Anschauungsmanifestationen einer einzigen Erkenntnisquelle. So gewinnt man u. a. die die Theorie des Doppelverhältnisses beherrschende Fundamentalrelation, ferner die die Theorie der Geraden im Raume beherrschende „Linienkoordinatenidentität", usw.

Der Gehalt derartiger Identitäten für die Erkenntnis und Herleitung geometrischer Wahrheiten wird ein ungleich fruchtbarerer, wenn in ihnen noch ein willkürlicher Parameter zur Verfügung steht.

Zur Erläuterung möge ein Typus von Sätzen dienen, deren bekanntester Repräsentant der Pascalsche Satz für Kegelschnitte ist. Anstatt von vornherein sechs Punkte auf einem Kegelschnitte ins Auge zu fassen, gehe man zunächst von sechs beliebigen Punkten A_1, $A_2, \cdots A_6$ einer Ebene aus, die man in irgend einer Reihenfolge durch Strecken verbinde. Die drei Paare von Gegenseiten des Sechsecks liefern drei Schnittpunkte S_1, S_2, S_3. Mittels geeigneter Koordinaten läßt sich dann auf ganz einfachem Wege eine Identität $A \equiv B$ aufstellen. Hier bedeuten A und B gewisse rechnerische Ausdrücke, mit der besonderen Eigenschaft, daß, wenn A den speziellen Wert der Einheit annimmt, die sechs Punkte $A_1, A_2, \cdots A_6$ auf einem Kegelschnitt liegen, andererseits, wenn B gleich der Einheit wird, die drei Punkte S_1, S_2, S_3 ein und derselben Geraden angehören. Damit erscheint der Pascalsche Satz nebst seiner Umkehrung als der unmittelbare geometrische Ausdruck der Identität $A \equiv B$.

Mit demselben Rechte hätte man aber dem Ausdrucke A irgend einen Zahlwert c beilegen können, womit ihn gleichzeitig der Ausdruck B erhält; je nach dem betreffenden Werte des „Parameters" c gruppiert sich das Sechseck nach anderer Vorschrift. Das Prinzip ist also offenbar dies, daß man den Pascalschen Satz als eine Spezialerscheinung innerhalb einer unbegrenzten Klasse in gewisser Hinsicht gleichartiger Erscheinungen auffaßt, die alle in der Identität $A \equiv B$ wurzeln. Der Grund aber, weshalb man gerade dem Pascalschen Satze eine so hervorragende Bedeutung beimißt, ist ein doppelter. Einmal beanspruchen die Kegelschnitte, ganz abgesehen von deren vielseitiger Verwendung in Mechanik, Technik usw., in der Systematik der geometrischen Gebilde der Ebene ihren Platz mit an erster Stelle, da sich ihre Theorie unmittelbar über der der Geraden erhebt. Sodann kommt dem Pascalschen Satze innerhalb der Kegelschnittslehre eine zentrale Stellung zu, da sich aus ihm allein alle anderen Eigenschaften der Kegelschnitte ableiten lassen. Das oben entwickelte Prinzip ist indessen einer weitgehenden Verallgemeinerung fähig. Gerade so, wie man ein Sechseck in drei Punktepaare gruppieren kann, die auf den Seiten eines Dreiecks liegen, kann man auf den letzteren drei Gruppen von n Punkten ($n = 2, 3, \cdots$) annehmen, entsprechend im Raume auf den sechs Kanten eines Tetraeders, resp. auf den vier Kanten eines windschiefen Vierecks, sechs resp. vier Gruppen von je n Punkten, usf.; stets existiert eine der obigen Identität $A \equiv B$ analoge mit analogen Schlüssen (für Kurven, Flächen n^{ter} Ordnung, usf.), und die unbegrenzte Reihe dieser Identitäten läßt sich wiederum einem einzigen Typus unterordnen, der sie alle umfaßt.

Von diesem Gruppierungsstandpunkt aus erfährt der Pascalsche Satz eine ganz andere Bedeutung, als bei der gewöhnlichen Auffassung; er bildet nur die erste Stufe einer nach vielfacher Richtung hin beliebig ausdehnbaren „Pascalschen Geometrie".*)

Derartiger tiefgreifender Typen lassen sich in der Geometrie noch manche aufbauen; es sei etwa an die Theorie der orthogonalen Substitutionen erinnert, ferner an die, eine ungeahnte Fülle von geometrischen Eigenschaften einschließende Figur des einer Fläche zweiter Ordnung ein- resp. umbeschriebenen Tetraeders, weiter an die Lehre von den Ausartungen eines Gebildes zweiter Ordnung, u. a. m.

Leider steht zurzeit eine in dieser Richtung systematisch fortschreitende Behandlung der Geometrie noch aus; danach wäre jeder Satz einer gewissen Identität unterzuordnen, woraus sein erkenntnistheoretischer Inhalt als einzelnes Glied einer unendlichen Kette gleichberechtigter Sätze unmittelbar entspränge.

Es gibt manche Mathematiker, die eine derartige Entwicklung der Geometrie mit einer gewissen Herablassung als eine „formale" kennzeichnen; ohne es zu wollen, sprechen sie damit eine nicht geringe Anerkennung aus, da sich gerade auf diesem Wege eine ungekünstelte Einordnung der geometrischen Wahrheiten in das System der Kantschen Erkenntnistheorie vollziehen läßt.

Gehen wir nunmehr zu einem grundlegenden Typus aus der Arithmetik und Analysis über, zu der Theorie der Irrationalzahlen (allgemeiner, von Grenzwerten überhaupt). Die bekanntesten Beispiele sind ja jedem geläufig; es sind die in kleineren oder größeren Tafeln

*) Siehe die Abhandlung des Verfassers, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 9_1 (1901), S. 91—99.

vereinigten Logarithmen der natürlichen Zahlen; diese Logarithmen brechen aber, wie wohl kaum zu bemerken nötig ist, nicht etwa an der betreffenden Stelle ab, sondern sind unbegrenzt fortsetzbare Dezimalbrüche. Eine für die Theorie der irrationalen Größen bessere Darstellung wird allerdings durch die Kettenbrüche geliefert; jeder unbegrenzte (regelmäßige) Kettenbruch besitzt als Wert eine bestimmte irrationale Zahl und umgekehrt; oder mit anderen Worten, jede Irrationalzahl ist äquivalent einer bestimmten unbegrenzt fortsetzbaren Reihe natürlicher Zahlen, aber auch umgekehrt repräsentiert jede noch so willkürliche, unbegrenzt fortsetzbar gedachte Anordnung natürlicher Zahlen (wobei beliebige Wiederholungen gestattet sind) eine bestimmte Irrationalität. Man kann sich aber auch eine andere, besonders für Anwendungen geeignetere Auffassung bilden. Danach drückt jeder Satz über Irrationalzahlen eine gewisse endliche Relation zwischen gewöhnlichen Brüchen aus, nur daß diese Relation nicht genau, sondern bloß angenähert gilt. Man ist aber imstande, diese Beziehung zwischen Brüchen in unbegrenzt viele Formen zu kleiden, für jede Form den Fehler, d. i. die Abweichung von der Genauigkeit, in gewisse Grenzen einzuschließen. Unsere Anschauung ist indessen nicht fähig, mit einer derartigen Menge im wesentlichen gleichwertiger Sätze gleichzeitig zu operieren. Man begnügt sich daher mit einem Repräsentanten, den man so wählt, daß man sich den Fehler bereits unter eine Genauigkeitsgrenze von genügender Kleinheit herabgedrückt denkt. Wenn man daher von der Gleichheit zwischen Irrationalitäten spricht, so ist das nur als eine sprachliche Abkürzung, eine Art Stenographie zu verstehen, indem man auf die Angabe des Fehlers, als etwas Unwesentlichem, verzichtet. Man nimmt gewisse Teile für das Ganze, und gibt doch diesen Teilen Benennungen, die den Eindruck des Ganzen, und damit von etwas Neuem, hervorrufen. Ein Planet bewegt sich in einer Ellipse, wenn man von den verhältnismäßig geringfügigen Störungen durch andere Himmelskörper absieht.

Wenn man nun aber den Begriff der Gleichheit, auf dem doch das Rechnen mit Irrationalitäten in letzter Linie beruht, schärfer ins Auge faßt, so erkennt man wieder die Unterordnung unter unser allgemeines Gruppierungsprinzip. Nach der üblichen Auffassung definiert man zwei Größen als gleich, wenn ihre Differenz den Wert (genauer Grenzwert) Null besitzt. In vielen Gebieten der Analysis ist es aber zweckmäßiger, unter zwei gleichen Größen solche zu verstehen, deren Quotient den Wert Eins hat. Offenbar kommt diese zweite Definition auf die erste zurück, wenn man, statt mit den Größen selbst, mit ihren Logarithmen operiert. Dieser Gedanke läßt sich verallgemeinern. Es sei $f(x)$ eine, wenn auch an gewisse Beschränkungen gebundene, willkürliche Funktion einer variabeln Größe x; man erhält dann den allgemeineren Begriff der Gleichheit zweier Größen a, b durch die Festsetzung $f(a) = f(b)$. Der Analysis stehen die Hilfsmittel zu Gebote, wenn es erforderlich erscheint, den allgemeineren Begriff auf den ursprünglichen speziellsten ($a = b$) zurückzuführen, d. h. die Differenz $f(a) - f(b)$ mit der Differenz $a - b$ zu vergleichen. Aber gerade durch die Beibehaltung einer solchen Funktion $f(x)$ gruppieren sich die Sätze über Irrationalitäten, vom Standpunkte der Erkenntnistheorie aus, nach dem spezielleren oder allgemeineren Charakter der Funktion $f(x)$. Oder anders ausgedrückt, je nach Auswahl der Funktion $f(x)$ nimmt ein und derselbe Satz eine unbegrenzte Reihe von stets neu erscheinenden Einkleidungen an.

Auf einen letzten Typus von Erscheinungen, der einer der neuesten Schöpfungen der Mathematik angehört, können wir seiner subtilen Natur halber nur kurz hindeuten, trotzdem gerade er eine der schönsten Bestätigungen unserer Gesamtanschauungen ergibt. Es sind das die G. Cantorschen transfiniten Zahlen.*) Nach der einfachsten Erklärung sind die transfiniten (oder überendlichen) Zahlen nichts anderes, als die verschiedenen denkbaren Anordnungen der natürlichen Zahlenreihe. Die Berechtigung, diese Anordnungen als wirkliche, wenn auch völlig andere „Zahlen" anzusprechen, entspringt der Möglichkeit, einmal bestimmte, logisch unanfechtbare Erzeugungsprinzipien für sie zu bilden, andererseits sie logischen Verknüpfungsgesetzen zu unterwerfen, die in den wesentlichsten Punkten mit den elementaren arithmetischen Verknüpfungen (Addition, Multiplikation, Potenzierung usw.) übereinstimmen.

Wer davor zurückschreckt, Anordnungen von unbegrenzt vielen Elementen vorzunehmen, braucht nur daran erinnert zu werden, daß schon ein einziges Ding zu einer Reihe unbegrenzt vieler Veranlassung geben kann; der Umstand, daß ich dieses Ding denke, kann bereits als ein zweites Ding angesehen werden, das Denken dieses Umstandes als ein drittes Ding, usf.**)

G. Cantor***) zieht es vor, von zwei verschiedenen Dingen auszugehen; ihre gedankliche Zusammenfassung repräsentiert ein drittes,

*) Siehe etwa den Artikel „Mengenlehre" von A. Schönflies, in der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. I, Heft 2 (1899), S. 184 f.

**) Vgl. R. Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen? Braunschweig 1887, 2. Aufl. 1893.

***) Nach einem vor der mathematischen Sektion der Naturforscherversammlung in Kassel (September 1903) gehaltenen Vortrage.

die Zusammenfassung des letzteren mit einem der beiden ersteren ein viertes, fünftes, usf. Stets erscheinen neue Dinge, die doch in den alten schon vorhanden waren.

Aber die neuere Mathematik ist in der glücklichen Lage, die Schwierigkeiten, die durch die in Rede stehenden Gruppierungen unbegrenzt vieler Elemente entstehen, in vielen Fällen auf andere Weise zu überwinden. Ein derartiges System von Objekten (Zahlen, Größen, Funktionen, geometrischen Gebilden, überhaupt Operationen) wird nach Maßgabe bestimmter Forderungen auf eine endliche Anzahl von „Klassen“ zurückgeführt, und diese Klassen, die geradezu das ursprüngliche System zu ersetzen imstande sind, werden ihrerseits analogen Gruppierungen unterworfen.

Indem wir den Zyklus dieser Erwägungen hiermit abbrechen, wollen wir nunmehr einem Einwande begegnen, den ein kritischer Leser bei sich schon erhoben haben wird. Danach erscheint unsere Auffassung im kleinen, d. h. im Gebiete der Mathematik, als das, was man im großen unter einer rein mechanischen Weltanschauung zu verstehen pflegt. Wenn wirklich alles darauf hinausläuft, daß sich nur gewisse Elemente nach gewissen Vorschriften gruppieren, wo bleibt da die persönliche Schöpfungskraft des Forschers? Wird nicht die Mathematik dadurch eine Wissenschaft des Selbstverständlichen, was um so merkwürdiger wäre, als sie allgemein als eine Wissenschaft des Schwerverständlichen gilt?*)

Um gleich die Hauptantwort zu geben: allerdings ist die Mathematik auf der einen Seite in ihren deduktiven Beweisen eine logische Wissenschaft; andererseits aber ist sie im induktiven Aufbau der Beweise, im Herausgreifen der wesentlichen Momente, in der Gestaltungsfähigkeit der Formen ebenso sehr eine ästhetische Kunst.

Wollte man aber fragen, was denn in einer einzelnen Kunstschöpfung, sei sie ein Gemälde oder eine Statue oder ein Bauwerk, als „neu“ zu erklären wäre, so würde sich schwerlich eine befriedigende Antwort erteilen lassen; der subjektive künstlerische Geschmack, die gestaltende Phantasie wird immer ein imponderabile bleiben.

Glücklicherweise erlaubt die analoge Frage in dem begrenzteren Gebiete der Mathematik eher eine Lösung, da sich hier, wenigstens in vielen Fällen, der Geschmack, wenn man so sagen darf, durch Zahlen, oder durch quantitative Momente fixieren läßt.

---

*) Siehe A. Pringsheim, „Über Wert und angeblichen Unwert der Mathematik“, Rede, gehalten in der Münchener Akademie der Wissenschaften, 14. März 1904.

Wenn wir der Frage näher treten, nach welchen hervorstechenderen Prinzipien die Auswahl bei den verschiedenerlei Gruppierungsmodalitäten vor sich geht, so müssen wir uns wiederum auf einzelne Erscheinungstypen beschränken.

Ein Haupttypus ist sicher der, daß man von vornherein die Probleme so stellt, daß ein Minimum von Lösungen eintritt, oder daß ein gewisser Ausdruck einen minimalen (resp. maximalen) Wert erhält; jedes Ergebnis dieser Art gewährt dem Geiste einen ästhetischen Genuß. Auf die das ganze Gebiet der Mathematik durchziehenden Aufgaben über Minima (resp. Maxima) von Funktionen kann hier nur hingewiesen werden.*)

Im besonderen gibt es große Klassen mathematischer Aufgaben, die ihren Ausdruck in algebraischen oder transzendenten Gleichungssystemen finden, denen eine aber auch nur eine Lösung zukommt, und hier zerlegt sich die Schwierigkeit von selbst in zwei solche: einmal ist überhaupt zu zeigen, daß eine einzige Lösung der gemeinten Art wirklich existiert (logisches Moment), sodann aber ist die Lösung auch zu konstruieren (künstlerisches Moment). Dies Doppelprinzip wird sogar auf die Aufstellung von Definitionen übertragen; nach Kronecker**) soll eine Definition nicht nur logisch einwurfsfrei sein, sondern man soll auch imstande sein, eine begrenzte Reihe von Operationen anzugeben, mit deren Hilfe die in der Definition auftretenden neuen Merkmale erst als wirkliche Gebilde mit Leib und Seele geschaffen werden.

In der Funktionentheorie und mathematischen Physik ist oft der Angelpunkt einer ganzen Entwicklung die Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit einer gewissen Lösung, zumeist eines Systems partieller Differentalgleichungen, wobei aus einer zuvörderst unbegrenzten Anzahl von Lösungen diejenige herauszuschälen ist, die noch einer oder mehreren Nebenbedingungen genügt.

Aber auch schon in der elementaren Geometrie und Algebra übt

---

*) Ein lehrreiches Beispiel dieser Art bietet die sogenannte „neuere Dreiecksgeometrie". Das Chaos der Sätze dieses Gebietes läßt sich dadurch ordnen, daß man die Sätze klassifiziert je nach der Natur der Funktion, die bei dem betreffenden Satze ein Minimum (resp. Maximum) wird. Es ist aber wohl zu beachten, daß diese erkenntnistheoretisch einfache Einteilung keineswegs auch die für eine mathematische Durchführung zweckmäßigste ist. Denn die im Laufe der Entwicklung ausgebildeten Rechnungsalgorithmen und geometrischen Konstruktionsmethoden sind unter dem Einfluß ganz anders gearteter Momente entstanden.

) Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen. Festschrift, Berlin 1882, § 4. Dedekind, in der S. 678 Anm.) zitierten Schrift (S. 2), läßt auch eine unbegrenzte Anzahl von Operationen zu.

das in Rede stehende Prinzip einen maßgebenden Einfluß aus. Der hervorragendste Satz dieser Art, der auf die verschiedensten Gebiete der Algebra, Zahlentheorie und Funktionentheorie ausdehnbar ist, ist der Euklidische Fundamentalsatz der eindeutigen Zerlegbarkeit einer natürlichen Zahl in Primfaktoren. Ferner besitzt zwar eine Gleichung n^{ten} Grades n Wurzeln, man ist aber imstande, jede einzelne derselben von den anderen abzusondern und sie selbständig zu charakterisieren; das Entsprechende gilt von den mn Schnittpunkten zweier algebraischer Kurven m^{ter} resp. n^{ter} Ordnung, usf.

Gerade in der Algebra und Geometrie wird das genannte Prinzip der Eindeutigkeit einer besonders fruchtbaren Spezifikation unterworfen: man frägt nach den notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß ein System von Gleichungen, dem im allgemeinen keine gemeinsame Lösung zukommt, im besonderen eine (aber auch nur eine) solche besitzt, oder in geometrischem Gewande, wann sich eine gewisse Reihe gleichartiger Gebilde im besonderen eines gemeinsamen „Schnittgebildes“ erfreut.

So gibt es ausgedehnte Gebiete der Geometrie, in denen stets als ein neuer Satz proklamiert wird, wenn drei oder mehr Punkte einer Ebene auf einer Geraden liegen, drei oder mehr Geraden sich in einem Punkte schneiden, vier oder mehr Punkte auf einem Kreise liegen, sechs oder mehr Punkte auf einem Kegelschnitte usf. und entsprechend bei räumlichen Gebilden. Alle derartigen Sätze finden dann wiederum ihr analytisches Äquivalent in gewissen Identitäten, wie schon oben hervorgehoben wurde, und werden dadurch zu größeren oder kleineren, wohl abgegrenzten Gruppen zusammengefaßt.

Kehren wir nochmals einen Augenblick zu dem allgemeineren Begriffe eines Minimums zurück, so möchten wir noch betonen, wie dieser Begriff auch auf die Vereinfachung der Beweise einzuwirken geeignet ist. Die meisten, tiefer gelegenen Sätze der Mathematik sind ursprünglich auf mühsamem, eine lange Kette von Schlußreihen durchlaufendem Wege abgeleitet worden. Die fortschreitende Entwicklung der Wissenschaft drängt aber dazu, diese Schlußreihen durch solche von zunehmender Kürze und Bündigkeit zu ersetzen; man ist erst befriedigt, wenn ein gewisses Minimum von Schlüssen erreicht ist, das der geistigen Anschauung gestattet, den Beweis als ein Ganzes zu umfassen, bis in der Tat das Ergebnis das Ideal der Selbstverständlichkeit gewonnen hat. Wie wäre es sonst möglich, sich bei der überwuchernden Fülle von Einzelheiten noch ein Verständnis für den Zusammenhang des Ganzen zu bewahren?

So wird das Prinzip des Minimums zugleich einer der wirksamsten Hebel in der mathematischen Pädagogik.

Ein anderer ästhetischer Typus ist der der Symmetrie mathematischer Gebilde. Es sei z. B. an die regulären Polygone und Polyeder erinnert; halbreguläre Gebilde und ähnliche entstehen durch geeignete „Kombination" rein regulärer. Die an sich so einfache Theorie der regulären Polygone nimmt, wenn man wiederum die Frage nach der wirklichen Ausführbarkeit mit den einfachsten Mitteln — Konstruktion mit Lineal und Zirkel, d. i. Auflösung von Gleichungen ersten und zweiten Grades — erhebt, einen ungeahnten Umfang an, sie hat u. a. der Zahlentheorie ganz neue Bahnen gewiesen. Das symmetrischste krummlinige Gebilde der Ebene ist der Kreis; die analoge Frage nach der Konstruktion des Kreisumfanges (oder auch des Kreisinhaltes) mit Lineal und Zirkel hat die Geometer jahrtausendelang beschäftigt, bis sie in der neuesten Zeit ihre Erledigung gefunden hat. Wenn diese Erledigung auch eine negative ist, d. h. nur die Unmöglichkeit der gewünschten Konstruktion dartut, so hat sie dafür die Analysis wesentlich vertieft und erweitert.

Im Raume hat die Frage nach den Drehungen, die die regulären Körper mit sich zur Deckung bringen — also im Grunde wiederum nur eine rein kombinatorische Frage — einen tiefen Zusammenhang jener Körper mit scheinbar ganz abseits liegenden Gebieten aus der Algebra und der Theorie der linearen Differentialgleichungen enthüllt.

Noch mehr wirkt das Prinzip der Symmetrie an seiner eigentlichen Stelle; die Theorie der symmetrischen ganzen Funktionen ist der Schlüssel der ganzen Algebra geworden. Hier tritt abermals ein neues Moment hinzu, das sich spezifisch mathematisch ausbauen läßt, die Methode der Symbolik. Man geht von gewissen einfachsten Elementen aus, die aber an sich nur Zeichen sind, und erst in gewissen arithmetischen Verbindungen zu realen Größen führen. Das ist die „symbolische Formentheorie". Aber diese Verbindungen sind selbst an das Gesetz der Symmetrie gebunden und führen wiederum zu identischen Umformungen, die nur jeweils der geeigneten Deutung und Verwertung harren.

Die Rolle der Identitäten überhaupt läßt sich jetzt von allgemeinerem Gesichtspunkt aus erfassen und verstehen, wenn man das Prinzip des Minimums mit dem der Symmetrie verknüpft. Eine Identität läßt sich immer auf die Form eines, in einer Reihe von Elementen symmetrischen Ausdrucks bringen, dessen absoluter Wert zum kleinstmöglichen Minimum, nämlich zur Null geworden ist. Andrerseits läßt sich aber auch jede Identität, und zwar in mannigfaltiger Art, auf die

Form der identischen Gleichheit zweier Ausdrücke bringen; so oft es nun gelingt, beide Ausdrücke unabhängig voneinander in irgend einem Gebiete zu deuten, hat man einen „neuen“ Satz gefunden. Offenbar läßt sich das darin liegende Evolutionsprinzip leicht dahin verallgemeinern, daß es auch in andern Wissenschaften mit Erfolg verwendet werden kann (wie es denn in der Tat oft so verwendet wird); so oft man zu einer und derselben Erscheinung auf zwei verschiedenen Wegen gelangen kann, hat man sein Erkenntnisgebiet erweitert.

Ein dem Prinzip der Symmetrie verwandtes Prinzip ist das eines „geschlossenen Systems“, oder, wie man in der Mathematik sagt, einer „Gruppe“.

Unter einer Gruppe versteht man allgemein ein System, einen Komplex von irgend welchen gleichartigen (mathematischen) Operationen von der ausgezeichneten Besonderheit, daß die hintereinander erfolgte Ausführung irgend zweier Operationen mit einer dritten Operation des Komplexes gleichwertig ist, oder genauer gesagt, durch eine solche ersetzt werden kann. Das einfachste Beispiel aus der Geometrie ist das System der Drehungen einer Geraden in einer Ebene um einen festen Punkt; es ist einleuchtend, daß die sukzessive Drehung um zwei Winkel α, β zu demselben Ergebnis führt, als die einzige Drehung um den Winkel $\alpha + \beta$.*)

Man kann mit einigem Recht behaupten, daß der Inhalt der hervorragendsten Sätze der Mathematik dem Gruppenbegriff untergeordnet werden kann. Nicht wenig trägt dazu bei, daß man einen systematischen Algorithmus für die Handhabung des Gruppenbegriffes entwickelt hat, der zu symbolischen Identitäten führt, deren Realisierung nur der geeigneten konkreten Bilder bedarf.

Als einen letzten Typus in der Aufzählung von Auswahlmotiven führen wir die Methode der Übertragungsprinzipien an. Diese Methode bringt die uns schon wiederholt entgegengetretene Erscheinung in ein wissenschaftliches System, daß der Fortschritt der Wissenschaft wesentlich dadurch bedingt ist, daß man eine möglichst große Anzahl äußerlich ganz verschiedenartiger, innerlich aber verwandter Sätze auf eine einzige Erkenntnisquelle zurückzuführen vermag. Umgekehrt erwächst daraus eine subjektive, unbegrenzt ausdehnbare Erzeugungsfähigkeit, einen logisch fixierten und in seiner grundlegenden Bedeutung erkannten Satz auf immer andere und andere Gebiete zu

---

*) Auch dieser Begriff der Gruppe läßt sich auf das Schlußverfahren anwenden, insofern das System der für das Eintreten einer Erscheinung notwendigen Bedingungen die Eigenschaften der Gruppe besitzt.

„übertragen“ („abzubilden“), oder was auf dasselbe hinauskommt, immer andere Anschauungsbilder für ein Substrat herbeizuholen. Beispiele dafür sind bereits oben angeführt worden.*)

Um ein Bild aus dem Leben zu gebrauchen, verfährt ein Romanschriftsteller, ein Dramatiker nicht anders, wenn er die vielen, in ihrer Mannigfaltigkeit verwirrenden Einzelzüge und Einzelhandlungen einer Person aus deren einheitlich geschlossenen „Charakter“ herzuleiten versucht. Es sei dabei an die Schopenhauersche Fortbildung der Kantschen Lehre erinnert, wonach der Charakter das allein Unzerstörbare im Menschen ist, dem alles übrige nur als Bild, als Folie, als Rahmen dient.

Speziell in der Mathematik wird das konsequent gehandhabte „Übertragungsprinzip“ immer mehr dazu führen, daß sich die Wissenschaft auf eine möglichst geringe Anzahl von Fundamentalsätzen konzentriert, die dann an den verschiedenen Einzelgebieten ihre Spiegelung erfahren. Diese Fundamentalsätze stellen dann in gewissem Sinne den zu Anfang nur hypothetisch angenommenen ursprünglichen Besitz apriorischer Erkenntnisse der Mathematik dar, während die übrigen als — nach den dargelegten Regeln — daraus abgeleitete erscheinen

Es muß eingestanden werden, daß bei dieser Auffassung der Begriff eines ursprünglichen a priori kein fester, sondern vielmehr ein elastischer, je nach den Fortschritten der Wissenschaft ausdehnbarer oder aber zusammenziehbarer wird. Es hat indessen den Anschein, als ob gerade hierdurch der Anwendbarkeit der Kantschen Erkenntnisprinzipien auf die einzelnen Wissenschaften ein weiterer Spielraum zugewiesen werde.

Ist bisher von einer wissenschaftlichen und künstlerischen Gruppierungsauswahl des Forschers die Rede gewesen, so soll doch auch eines andersartigen Moments gedacht werden, das als ein rein menschliches bezeichnet werden muß. Das ist das nicht zu unterschätzende Moment des Sportes und der Mode. Was Gauß**) von der höheren Arithmetik, der Königin der Mathematik, hervorhebt, daß sie ihre Jünger, je eifriger sie sich ihr hingeben, um so mehr bestrickt, gilt analog, je nach der Geschmacksrichtung des einzelnen, von allen Ein-

*) Ein schönes Beispiel aus der Geometrie ist u. a. die stereographische Projektion einer Kugel auf eine Ebene, wobei Kreise in Kreise übergehen und die Winkel erhalten bleiben. Alle Sätze über Kreise und Gerade in der Ebene lassen sich so unmittelbar auf die Kugel übertragen; umgekehrt wird z. B. die Konstruktion von Kristallnetzen auf eine solche in der Ebene zurückgeführt.

**) Disquisitiones arithmeticae, Lipsiae 1801, Praefatio: „illecebris harum quaestionum ita fui implicatus, ut eas deserere non potuerim.“

zelgebieten der Mathematik. Hat sich jemand erst in „seinem“ Gebiete eine gewisse Fertigkeit in der Handhabung der spezifischen, gedanklichen und anschaulichen Wendungen angeeignet, so findet er eine naturgemäße Befriedigung darin, diese Fertigkeit zur Virtuosität auszubilden. Der Erfolg wird oft der sein, daß bei diesem steten Graben und Bohren in einer Richtung sehr verborgene Wahrheiten ans Licht gefördert werden. Aber auch die Schattenseiten dieses persönlichen Verfahrens liegen auf der Hand; Einseitigkeit und Vernachlässigung des Ganzen erwachsen daraus, sehr zum Schaden der Wissenschaft. Trifft es nun im besonderen zu, daß die überwiegende Kultivierung einzelner Disziplinen in den Händen von Autoritäten liegt, so wirkt bei der Mehrzahl der anderen Forscher jener unwiderstehliche Nachahmungstrieb, den man eben als Mode bezeichnet, deren tyrannische Wirkung auf das Kulturleben der Völker zur Genüge erwiesen ist. So kennt die Geschichte der Mathematik Perioden, in denen ausschließlich die Geometrie gefördert ward, andere wieder, in denen das gleiche von der Algebra, von der Analysis galt. Aber auch ganz beschränkte Gebiete, wie die Kombinatorik im engsten Sinne des Wortes, haben zeitweilig die Mathematik völlig beherrscht. In solchen Zeiten gehen, wie die Erfahrung lehrt, leicht die Früchte früherer Entwicklungsperioden verloren und müssen später mühsam wieder von neuem gewonnen werden.

Wenn wir im obigen den Versuch gemacht haben, die Lehre Kants von den synthetischen Urteilen der Mathematik weiter auszuführen — indem wir die Tätigkeiten der Gruppierung und der Auswahl bei der Gruppierung zugrunde legten —, demnach die Mathematik in ihrem Streben nach neuen Erkenntnissen als eine Art erweiterter Kombinatorik hinzustellen, die sich nicht mehr auf farblose Elemente beschränkt, sondern sich auf lebendige Begriffe, Methoden und Sätze erstreckt, so liegt es nahe, einige Vergleiche mit andern Wissenschaften zu ziehen, wo analoge Strömungen herrschen. Man denke an die Farbenlehre; die Physiologie hat nachgewiesen, wie die unbegrenzte Mannigfaltigkeit der verschiedenen Farbennuancen durch geeignete Mischung einiger weniger Grundfarben entsteht.

Ferner sei auf die Chemie hingewiesen. Es fehlt zwar bisher der völlige Nachweis, daß die Anzahl der Elemente notwendig eine begrenzte sein müsse, da ja selbst bei Annahme des periodischen Systems eine zunehmende Erweiterung nach oben nicht ausgeschlossen wäre; jedenfalls ist man zurzeit imstande, die weitaus größte Anzahl bekannter Verbindungen durch „Gruppierung“ einer verhältnismäßig geringen Anzahl von Elementaratomen in befriedigender Weise zu erzeugen. Gewisse physikalische Erscheinungen machen es sogar wahrscheinlich, daß es in Wirklichkeit nur Elementaratome einer einzigen Art gibt. Würde die Chemie jemals dahin gelangen, alle Stoffe in Atome eines einzigen Urelementes aufzulösen, so würde sie auch das Ideal einer geometrischen „Kombinatorik" erreicht haben, ja geradezu sich mit einer solchen decken. Endlich sei es auch noch gestattet, auf manche Ähnlichkeiten der Mathematik mit der Darwinschen Entwicklungstheorie aufmerksam zu machen. Hier wie dort eine unbegrenzte Anzahl von Erzeugungsmöglichkeiten, deren maßlose Wirkung durch geeignete Gruppierungsauswahl beschränkt wird. Der Kampf ums Dasein läßt sich in der Mathematik gerade wegen der schärferen Umgrenzung der Einzelgebilde besonders deutlich verfolgen. Bei weitem die größte Mehrzahl „neuer" Begriffe und Sätze erweist sich als nicht lebensfähig, weil sie entweder zu eng oder aber zu kompliziert gefaßt sind, zugunsten weniger bleibender, die nicht ihr Wesen von fremden zu erborgen brauchen, sondern selbst die Kraft besitzen, sich eine eigene Welt zu schaffen, die sie als Zentralsonnen mit Licht, Wärme und Leben erfüllen.

Über eine neue einfache und vor allem einheitliche Methode, die Rauminhalte der Körper zu bestimmen, deren Querschnittsfunktion den dritten Grad der Höhe nicht übersteigt, und ihre Verallgemeinerung.*)

Von

J. Finsterbusch aus Zwickau i. S.

Meine im folgenden entwickelte Methode der Rauminhaltsbestimmung geht in gewissem Sinne aus einer Weiterbildung des Cavalierischen Prinzips hervor und macht außer diesem nur noch vom Verhältnis ähnlicher Körper Gebrauch. Sie führt zur Aufstellung eines Doppelsatzes, der, seiner Einfachheit und bequemen Handhabung wegen, geeignet ist, von Anfang an allen Inhaltsberechnungen der elementaren Stereometrie als Grundlage zu dienen, und also einen einfachen und vor allem einheitlichen Aufbau ihrer Berechnungen ermöglicht, den die meisten Lehrbücher leider vermissen lassen.**) Die Methode hat bei einmaliger Anwendung dieses Doppelsatzes denselben Geltungsbereich wie die Simpsonsche Formel; nur ist sie bedeutend einfacher, da sie entweder nur den Mittelquerschnitt oder

*) Vorliegende Aufzeichnung weicht, wie schon aus dem Zusatz in der Überschrift hervorgeht, insofern von dem gehaltenen Vortrage ab, als ich die Beschränkung der Querschnittsfunktion auf den 3ten Grad der Höhe, welche durch die Kürze der Zeit von 20 Minuten geboten war, fallen gelassen habe. Ich glaube dazu um so mehr berechtigt zu sein, als in der dem Vortrage folgenden Diskussion diese Verallgemeinerung zur Sprache kam. Da ferner die sogenannte mechanische Quadratur mehrfach erwähnt wurde, habe ich am Schlusse eine einfache Ableitung der Gaußschen Formeln und einiger anderen als Anwendung meiner Methode hinzugefügt.

**) Als löbliche Ausnahme sei z. B. Heinze-Lucke, Genetische Stereometrie erwähnt, ein Werk, das streng einheitlich angeordnet ist, da alle behandelten Körper aus einem allgemeinen „Zentralkörper“ abgeleitet werden, deren Inhaltsbestimmungen aber nicht einfach sind, da die Simpsonsche Formel benutzt wird.

die Randquerschnitte bez. irgend zwei äquidistante, aber nicht beides als bekannt voraussetzt. Eine n-malige Anwendung des Satzes führt zum Beweise der allgemeinen „Summenformel". Die Methode gestattet einen und denselben Körper auf verschiedene Arten zu berechnen, unter denen natürlich immer eine den Vorzug verdient. Die allgemein übliche Archimedische Kugelberechnung z. B., die sich auch aus meiner Methode ergibt, ist nicht die einfachste, welche möglich ist, da sie den Kegelinhalt als bekannt voraussetzt.

Zur Begründung meines Doppelsatzes können verschiedene Wege eingeschlagen werden. Bei Beschränkung auf Körper zweiten Grades, über die ja viele Lehrbücher nicht hinausgehen, kann der Satz für die gleichachsigen Körper (Kugel und gleichseitige Hyperboloide) bewiesen und dann seine Gültigkeit durch affine Transformationen (sei es durch Reliefprojektion, wie man die affine Verkürzung oder Verlängerung in der Höhenrichtung nennen könnte, sei es durch affine Verschiebung der Querschnitte in ihren Ebenen) auf die allgemeinen Körper zweiten Grades ausgedehnt werden. Auch für die Prismatoide mit ebenen oder windschiefen Seitenflächen, welche hierher gehören, läßt sich der Doppelsatz leicht rein geometrisch mit Hilfe der zugeordneten Pyramide beweisen.

Ich wähle im folgenden den algebraischen Weg, weil nur dieser gestattet, den Doppelsatz in seiner allgemeinsten Form aufzustellen.

1. Der Untersuchung werden solche Körper unterworfen, die durch eine jede zur $\xi\eta$-Ebene parallele Ebene in der beliebigen Entfernung ζ geschnitten, einen Querschnitt Q_ζ besitzen, der durch die ganze Funktion

$$Q_\zeta = \mathsf{A}_0 + \mathsf{A}_1\zeta + \mathsf{A}_2\zeta^2 + \mathsf{A}_3\zeta^3 + \cdots + \mathsf{A}_m\zeta^m$$

dargestellt wird. Ein solcher gemischter Körper m^{ten} Grades kann auch als Summe von $m+1$ Reinkörpern 0^{ten} bis m^{ten} Grades aufgefaßt werden. Durch eine Koordinatenverschiebung längs der ζ-Achse werden sämtliche Koeffizienten mit Ausnahme des höchsten A_m verändert, wodurch unter Umständen eine wesentliche Vereinfachung der Funktion erzielt wird.

2. Eine besondere Beachtung verdienen hierbei unter den Körpern $m = 2n^{\text{ten}}$ Grades die, deren Querschnittsfunktion durch eine gewisse Koordinatenverschiebung k in eine solche übergeführt werden kann, die ausschließlich gerade Potenzen von $z = \zeta - k$ enthält. Ein solcher Körper soll Zentralkörper und die Ebene $\zeta = k$ seine Zentralebene genannt werden. In bezug auf letztere besitzt der Körper in je zwei äquidistanten Ebenen, also in den Höhen $\zeta = k \pm z$, gleiche Querschnitte. Daraus folgt, daß eine Zentralschicht, d. h. eine solche,

deren mittlere Ebene zugleich Zentralebene des Körpers ist, durch die Zentralebene halbiert wird.

3. Soll Q die Querschnittsfunktion eines Zentralkörpers $2n^{\text{ten}}$ Grades sein, so müssen zwischen k und den Koeffizienten (ausgenommen A_0) — den n verschwindenden neuen Koeffizienten A mit ungeraden Indizes gemäß — n leicht abzuleitende Bedingungsgleichungen bestehen. Wird aus der letzten

$$A_{2n-1} \equiv \mathsf{A}_{2n-1} + 2n\mathsf{A}_{2n} \cdot k = 0$$

k berechnet und in die übrigen eingesetzt, so ergeben sich $n-1$ Bedingungsgleichungen, welchen die ursprünglichen $2n$ Koeffizienten $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \cdots, \mathsf{A}_{2n}$ genügen müssen, wenn nach Substitution von $\zeta = k + z$ die Querschnittsfunktion übergehen soll in

$$Q = A_0 + A_2 z^2 + A_4 z^4 + \cdots + A_{2n} z^{2n}.$$

4. Nach diesen Vorbemerkungen gehen wir an unsere Aufgabe, den Rauminhalt eines gemischten Körpers m^{ten} Grades zu bestimmen. Um die Rechnung möglichst kurz und einfach zu gestalten, wählen wir die Mittelebene des Körpers von der Höhe h zur xy-Ebene. Der zu berechnende Körper $2n^{\text{te}}$ oder $2n+1^{\text{ten}}$ Grades, je nachdem $A_{2n+1} = 0$ ist oder nicht, hat dann in drei äquidistanten Ebenen $z = +z,\ 0,\ -z$ die Querschnitte

$$\begin{aligned}
Q_z &= A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \cdots + A_{2n} z^{2n} + A_{2n+1} z^{2n+1}\\
Q_0 &= A_0\\
Q_{-z} &= A_0 - A_1 z + A_2 z^2 - A_3 z^3 + \cdots + A_{2n} z^{2n} - A_{2n+1} z^{2n+1}.
\end{aligned}$$

Für die halbe Querschnittsumme in je zwei äquidistanten Ebenen zur Mittelebene ergibt sich demnach

$$\frac{1}{2}\left(Q_z + Q_{-z}\right) = A_0 + A_2 z^2 + A_4 z^4 + \cdots + A_{2n} z^{2n},$$

woraus ohne weiteres folgt: Eine Körperschicht $2n^{\text{ten}}$ oder $2n+1^{\text{ten}}$ Grades hat denselben Rauminhalt wie eine Zentralschicht eines Zentralkörpers $2n^{\text{ten}}$ Grades von gleicher Höhe. In diesem Satze ist zugleich die Reduktion des Körpers $2n+1^{\text{ten}}$ Grades um einen Grad ausgesprochen.

Ganz dasselbe gilt auch von der Differenz oder Summe gleichhoher Schichten zweier Körper I und II, denn für ihre Querschnittfunktionen Q' und Q'' folgt, wenn $A_0' \mp A_0''$ durch $Q_0' \mp Q_0''$ ersetzt wird,

$$\frac{1}{2}\left[(Q_z' \mp Q_z'') + (Q_{-z}' \mp Q_{-z}'')\right] = (Q_0' \mp Q_0'') + (A_2' \mp A_2'')z^2 + \cdots + (A_{2n}' \mp A_{2n}'')z^{2n}.$$

5. Wählen wir den zweiten Körper so, daß entweder die Gleichungen

$$\text{(D)} \qquad A_2' - A_2'' = 0,\ A_4' - A_4'' = 0,\ \cdots,\ A_{2n}' - A_{2n}'' = 0$$

oder

$$\text{(S)} \qquad A_2' + A_2'' = 0,\ A_4' + A_4'' = 0,\ \cdots,\ A_{2n}' + A_{2n}'' = 0$$

bestehen, und bilden dann die Differenz der Körper, den D-Körper, oder ihre Summe, den S-Körper, so gilt für die drei Differenzen oder Summen der Querschnitte der Körper I und II, d. h. für die drei Querschnitte des D- oder S-Körpers, die wir kurz bezügl. mit G_z, G_0, G_{-z} bezeichnen wollen:

$$\frac{1}{2}\left(G_z + G_{-z}\right) = G_0,$$

d. h.: In einem D- oder S-Körper ist die halbe Summe der Querschnitte in je zwei äquidistanten Ebenen zur Mittelebene gleich dem Mittelschnitt. Für den Rauminhalt eines solchen Körpers von der Höhe h erhält man daher ohne weiteres

$$\text{(D, S)} \qquad V = G_0 h = \frac{1}{2}\left(G_z + G_{-z}\right)h = \frac{1}{2}\left(G_{\frac{h}{2}} + G_{-\frac{h}{2}}\right)h,$$

d. h. den Doppelsatz: Der Rauminhalt eines D- oder S-Körpers ist gleich einem Zylinder von gleicher Höhe, dessen Grundfläche gleich dem Mittelschnitt oder gleich der halben Summe zweier äquidistanter Schnitte, insonderheit der beiden Begrenzungsschnitte ist.

6. Diese Sätze enthalten einen wichtigen Sonderfall, den wir nicht unerwähnt lassen können. Erstrecken sich nämlich obige Bedingungsgleichungen (5) auch auf die Koeffizienten mit ungeraden Indizes, unterliegen daher die Koeffizienten der Querschnittsfunktionen den Bedingungen

$$\text{(D*)} \qquad A_1' - A_1'' = 0,\ A_2' - A_2'' = 0,\ A_3' - A_3'' = 0,\ \cdots,\ A_m' - A_m'' = 0$$

oder

$$\text{(S*)} \qquad A_1' + A_1'' = 0,\ A_2' + A_2'' = 0,\ A_3' + A_3'' = 0,\ \cdots,\ A_m' + A_m'' = 0,$$

so folgt die einfachere Beziehung

$$G_{\frac{h}{2}} = G_z = G_0 = G_{-z} = G_{-\frac{h}{2}},$$

d. h.: In einem D^*- oder S^*-Körper sind alle dem Mittelschnitt parallele Querschnitte einander gleich, und mithin

$$V = G_0 h = G_z h = G_{\frac{h}{2}} h = \cdots$$

Der D^*- oder S^*-Körper und der raumgleiche Zylinder sind also Cavalierische Körper.

7. Sind insbesondere I und II Schichten von Zentralkörpern, so folgt, da ihre Koeffizienten den Bedingungen $A'_{2n-1} \mp A''_{2n-1} = 0$ und $A'_{2n} \mp A''_{2n} = 0$ genügen, nach (3) für die Entfernungen ihrer Zentralebene von der xy-Ebene $k' = k''$, d. h.: Der Sonderfall D^* oder S^* findet bei Zentralkörpern nur dann statt, wenn diese eine gemeinsame, der xy-Ebene parallele Zentralebene haben. Ist $A_1' = A_1'' = 0$, $A_3' = A_3'' = 0$, $\cdots$, $A'_{2n-1} = A''_{2n-1} = 0$, so fällt diese mit der xy-Ebene selbst zusammen.

8. Kehren wir zur allgemeinen Untersuchung zurück. Unsere Aufgabe ist nun, den Rauminhalt eines der beiden Körper mit Hilfe des andern zu bestimmen. Ist die Querschnittsfunktion vom 0^{ten} oder 1^{ten} Grade, so ist ein Hilfskörper überflüssig, da Körper I allein schon den oben aufgestellten Formeln D bez. S genügt. Ist die Funktion dagegen vom 2^{ten} oder von höherem Grade, so unterliegt der Hilfskörper II außer den Bedingungen (5) jedenfalls der weiteren, daß

(a) entweder das Verhältnis seines Inhaltes zum Körper I,

(b) oder sein Inhalt selbst

von vornherein feststeht. Wir werden noch zu untersuchen haben, ob und wie weit sich diese neue Bedingung (a) oder (b) mit den unter (5) aufgestellten vereinigen läßt. Jetzt werde die Möglichkeit vorausgesetzt. Der Fall (b) scheidet vorläufig aus, da, um die Reinheit der Methode zu wahren, der Rauminhalt des Hilfskörpers ebenfalls als unbekannt anzusehen ist. Dies gilt zwar auch im Falle (a), in dem jedoch beide Körper, da ihr Raumverhältnis v feststehen soll, durch einander ausgedrückt werden können ($\mathrm{I} = v\,\mathrm{II}$). Unsere Methode zerfällt demnach in zwei, von denen Methode (a), weil sie auf die Inhaltsbestimmung eines Körpers, eines Vielfachen von I oder II, hinauskommt, zunächst in Betracht zu ziehen ist, während Methode (b) erst dann Anwendung findet, wenn mit (a) der Rauminhalt des geeigneten Hilfskörpers gewonnen worden ist.

9. Aus einem Körper I kann nun dadurch ein anderer II von vorgeschriebenem Inhaltsverhältnis hergeleitet werden, daß eine, zwei oder alle drei Koordinaten in vorgeschriebenen Verhältnissen verändert werden: $x' = \varepsilon_1 x''$, $y' = \varepsilon_2 y''$, $z' = \varepsilon_3 z''$. Dies führt auf affine und insbesondere ähnliche Verwandtschaft. Von den verschiedenen Möglichkeiten, die sich hier bieten, je nachdem sich die Veränderung auf z oder Q allein oder auf beide erstreckt, empfiehlt sich als das einfachste und naturgemäßeste die Ähnlichkeit heranzuziehen und zwar Q und z so zu verändern, daß zwischen beiden Körpern die Beziehungen bestehen

$$(\alpha) \qquad \text{entweder} \quad Q' = \varepsilon^2 Q'' \quad \text{und} \quad z' = \cdot z''$$
$$(\beta) \qquad \text{oder} \quad Q' = \varepsilon Q'' \quad \text{und} \quad z' = \varepsilon z''.$$

10. Nur um uns kurz ausdrücken zu können, denken wir uns sämtliche Querschnitte des Körpers I und II verwandelt

(α) entweder in ähnliche und ähnlich liegende Figuren ($Q = C_2 x^2$) mit der z-Achse als gemeinsamer Ähnlichkeitslinie,

(β) oder in Rechtecke von konstanter Breite ($Q = C_1 x$), deren eine variable Seite die Abszisse x ist.

Das eine oder andere ist ja bei vielen der zu untersuchenden Körper ohnehin schon der Fall. Die so verwandelten Körper I und II sind dann gleichhohe Schichten, die

(α) entweder ähnlichen Körpern,

(β) oder Zylindern mit ähnlichen Grundflächen (in der xz-Ebene) angehören.

In letzterem Falle reduziert sich die Kubatur des Körpers auf die Quadratur der Grundfläche.*)

11. Jede durch die z-Achse gehende (insbesondere die xz-)Ebene schneide die Oberfläche des Körpers in einer Meridiankurve. Deren Gleichung folgt dann aus den beiden Ausdrücken für den Querschnitt

$$(\alpha) \qquad Q_z \equiv C_2 x^2 = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots + A_m z^m$$
$$(\beta) \qquad \text{oder} \quad Q_z \equiv C_1 x \;\; = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots + A_m z^m.$$

Die ähnlichen Meridiankurven zweier Körper, die obigen Bedingungen (a, α) oder (a, β) genügen, haben im allgemeinen den Koordinatenanfangspunkt nicht zum Ähnlichkeitspunkt; es ist daher für I eine Verschiebung dieser Kurve längs der z-Achse und für II eine ähnliche Transformation erforderlich, d. h. in vorstehender Gleichung sind die Substitutionen $x' | k + z$ und $\varepsilon x'' | \varepsilon z$ für $x | z$ vorzunehmen. Bezogen auf dasselbe Achsenkreuz erhalten wir als Querschnittsfunktionen und Meridiankurven der Körper I und II entweder

$$(\alpha) \quad \begin{cases} Q'_z \equiv C_2 x'^2 = A_0 + A_1(k+z) + A_2(k+z)^2 + A_3(k+z)^3 + \cdots + A_m(k+z)^m \\ Q''_z \equiv C_2 x''^2 = \varepsilon^{-2} A_0 + \varepsilon^{-1} A_1 z + A_2 z^2 + \varepsilon A_3 z^3 + \cdots + \varepsilon^{m-2} A_m z^m \end{cases}$$

oder

$$(\beta) \quad \begin{cases} Q'_z \equiv C_1 x' = A_0 + A_1(k+z) + A_2(k+z)^2 + A_3(k+z)^3 + \cdots + A_m(k+z)^m \\ Q''_z \equiv C_1 x'' = \varepsilon^{-1} A_0 + A_1 z + \varepsilon A_2 z^2 + \varepsilon^2 A_3 z^3 + \cdots + \varepsilon^{m-1} A_m z^m. \end{cases}$$

---

*) Es entsprechen sich also immer ein stereometrisches und ein planimetrisches Problem, z. B. die Kubatur des Kegels und die Quadratur der Parabel.

12. Sollen nach Methode (a) Körper I und II ein bekanntes Verhältnis haben, so genügt nicht, daß

(α) die Raumgebilde, denen I und II als Schichten gleicher Höhe,

(β) die Meridiankurven, denen die Grundflächen von I und II als Streifen gleicher Höhe

angehören, ähnlich sind, sondern diese selbst müssen ähnlich sein oder aus einander ähnlichen Teilen bestehen. Ersteres ist aber nicht zu brauchen, da der gleichen Höhen zufolge $\varepsilon = 1$ und mithin $\mathrm{I} - \mathrm{II} = 0$ sich ergeben würde. Vielmehr muß ein Körper, z. B. II, aus mehreren, am einfachsten aus zwei raumgleichen Schichten gleicher Höhe eines Raumgebildes bestehen, d. h. ein Zentralkörper sein. Es folgt daher: Körper II ist die Zentralschicht von der Höhe h, Körper I mithin die halbe Zentralschicht von gleicher Höhe.

Die Verschiebung ist $k = \frac{h}{2}$, das Ähnlichkeitsverhältnis $\varepsilon = 2$ und zwischen I und II besteht nach (10)

$$(\alpha) \qquad \text{entweder} \quad \mathrm{I} = 2^3 \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{II} = 4\,\mathrm{II}$$

$$(\beta) \qquad \text{oder} \quad \mathrm{I} = 2^2 \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{II} = 2\,\mathrm{II}.$$

Die Querschnittsfunktionen und Gleichungen der Meridiankurven unserer ähnlichen Zentralkörperschichten $2n^{\text{ten}}$ Grades sind demnach entweder

$$(\alpha) \quad \begin{cases} Q_z' \equiv C_2 x'^2 = A_0 + A_2\left(\frac{h}{2}+z\right)^2 + A_4\left(\frac{h}{2}+z\right)^4 + \cdots + A_{2n}\left(\frac{h}{2}+z\right)^{2n} \\ Q_z'' \equiv C_2 x''^2 = \frac{1}{4}\,A_0 + A_2 z^2 + 4A_4 z^4 + \cdots + 2^{2n-2}A_{2n} z^{2n} \end{cases}$$

oder

$$(\beta) \quad \begin{cases} Q_z' \equiv C_1 x' = A_0 + A_2\left(\frac{h}{2}+z\right)^2 + A_4\left(\frac{h}{2}+z\right)^4 + \cdots + A_{2n}\left(\frac{h}{2}+z\right)^{2n} \\ Q_z'' \equiv C_1 x'' = \frac{1}{2}\,A_0 + 2A_2 z^2 + 8A_4 z^4 + \cdots + 2^{2n-1}A_{2n} z^{2n}. \end{cases}$$

13. Nunmehr können wir die Frage (8) beantworten, inwieweit die Koeffizienten vorstehender Gleichungen mit den früheren Bedingungen (5) in Einklang zu bringen sind. Selbstverständlich muß vorher Q' nach Potenzen von z geordnet werden. Da die Koeffizienten mit gleichen Indizes immer im Vorzeichen übereinstimmen, kommen nur die Bedingungen für D-Körper (nicht S-Körper) in Betracht.

Beginnen wir mit $m = 2n = 2$. Aus vorstehenden Gleichungen folgt entweder

$$(\alpha) \qquad A_2' = A_2'' = A_2,$$

welche mit der früheren einen Bedingung (5) ohne weiteres übereinstimmt, und also $D = \mathrm{I} - \mathrm{II} = 3\,\mathrm{II}$ liefert, oder

$$(\beta) \qquad A_2' = A_2, \quad A_2'' = 2\,A_2,$$

was mit der früheren dann im Einklang steht, wenn Q' doppelt genommen wird, und $D = 2\,\mathrm{I} - \mathrm{II} = 3\,\mathrm{II}$ ergibt. Hierbei sind die Körper $2\,\mathrm{I}$ und $\frac{1}{2}\,\mathrm{II}$ ähnlich, wenn bei I die Breite verdoppelt wird. Wir haben also zunächst das Resultat: Mit Methode a können Zentralschichten von Körpern zweiten Grades berechnet werden.

14. Für höhere, $2n^{\text{te}}$, Potenzen sind n voneinander unabhängige Bedingungen zugleich zu erfüllen, was nicht möglich ist. Durch Vervielfachung des Körpers I läßt sich jedoch auch hier (wie vorhin unter (β)) die Übereinstimmung der höchsten Koeffizienten erreichen, und dies ist wertvoll, weil dann durch Bildung eines Differenzkörpers der Grad um 2 erniedrigt wird. Für die höchsten Koeffizienten der Querschnittsfunktionen der Körper $\mathrm{I}^{(2n)}$ und $\mathrm{II}^{(2n)}$ lautet die alte Bedingung (5)

$$A'_{2n} = A''_{2n} = A_{2n}$$

und die neue (12) entweder

$$(\alpha) \qquad A'_{2n} = A_{2n} \quad \text{und} \quad A''_{2n} = 2^{2n-2} A_{2n}.$$

oder

$$(\beta) \qquad A'_{2n} = A_{2n} \quad \text{und} \quad A''_{2n} = 2^{2n-1} A_{2n};$$

für den entstehenden Differenzkörper $D^{(2n-2)}$ erhalten wir daher entweder

$$(\alpha) \quad D^{(2n-2)} = 2^{2n-2}\mathrm{I}^{(2n)} - \mathrm{II}^{(2n)} = \frac{2^{2n}-1}{4} \cdot \mathrm{I}^{(2n)} = (2^{2n}-1) \cdot \mathrm{II}^{(2n)}$$

oder

$$(\beta) \quad D^{(2n-2)} = 2^{2n-1}\mathrm{I}^{(2n)} - \mathrm{II}^{(2n)} = \frac{2^{2n}-1}{2} \cdot \mathrm{I}^{(2n)} = (2^{2n}-1) \cdot \mathrm{II}^{(2n)}.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Rekursionsformel, indem wir $D^{(2n-2)}$ als den neuen Körper $\mathrm{II}^{(2n-2)}$ betrachten usw., gelangen wir zu dem Resultat: Zentralschichten von Körpern $2n^{\text{ten}}$ Grades können durch n-malige Anwendung der Methode (a) berechnet werden.

15. Hiermit ist unsere Aufgabe eigentlich gelöst, da nach (4) jeder Körper $2n^{\text{ten}}$ oder $2n+1^{\text{ten}}$ Grades als Zentralschicht eines gemischten Zentralkörpers $2n^{\text{ten}}$ Grades dargestellt werden kann. Es handelt sich nur noch darum, die Kubatur wirklich auszuführen und zwar zunächst an den Reinkörpern $2n-1^{\text{ten}}$ und $2n^{\text{ten}}$ Grades. Dies soll durch Induktion geschehen. Wir haben demnach zu beweisen,

daß, wenn ein Reinkörper von der Querschnittsfunktion $Q = A\zeta^m$, $m = 0, 1, 2, \cdots, 2n-2$ vorausgesetzt, die Inhaltsformel

$$V_{\zeta=0}^{\zeta=h} = \frac{Ah^{m+1}}{m+1} = \frac{Q_{(\zeta=h)}h}{m+1}$$

hat, diese auch noch für $m = 2n-1$ und $m = 2n$, also allgemein gilt.

Beweis für $m = 2n-1$. Ist $Q = A\zeta^{2n-1} = A(k+z)^{2n-1}$ und $h = 2k$, so folgt nach (4)

$$\frac{1}{2}\left(Q_z + Q_{-z}\right) = A\left\{k^{2n-1} + \binom{2n-1}{2}k^{2n-3}z^2 + \cdots + \binom{2n-1}{2n-2}kz^{2n-2}\right\},$$

also der Voraussetzung gemäß

$$V_{z=-k}^{z=k} = 2Ak^{2n}\left\{1 + \binom{2n-1}{2}\frac{1}{3} + \binom{2n-1}{4}\frac{1}{5} + \cdots + \binom{2n-1}{2n-2}\frac{1}{2n-1}\right\}.$$

Nun ist

$$\binom{2n-1}{\lambda}\frac{1}{\lambda+1} = \frac{1}{2n}\binom{2n}{\lambda+1},$$

folglich

$$V_{z=-k}^{z=k} = \frac{2Ak^{2n}}{2n}\left\{\binom{2n}{1} + \binom{2n}{3} + \binom{2n}{5} + \cdots + \binom{2n}{2n-1}\right\}.$$

Unter Berücksichtigung der Identität

$$\frac{(1+1)^\lambda - (1-1)^\lambda}{2} = 2^{\lambda-1} = \binom{\lambda}{1} + \binom{\lambda}{3} + \binom{\lambda}{5} + \cdots$$

ergibt sich

$$V_{\zeta=0}^{\zeta=h} = V_{z=-k}^{z=k} = \frac{2Ak^{2n}}{2n}\cdot 2^{2n-1} = \frac{A\cdot(2k)^{2n-1}\cdot 2k}{2n} = \frac{Q_{(\zeta=h)}h}{2n} \qquad \text{q. e. d.}$$

Beweis für $m = 2n$. Die Anwendung unserer Rekursionsformel (14, α) auf den zu berechnenden Reinkörper V(= der halben Zentralschicht I) vom Querschnitt $Q = A\zeta^{2n} = A(k+z)^{2n}$ und der ähnlichen Zentralschicht II vom Querschnitt $Q'' = 2^{2n-2}Az^{2n}$ (vergleiche 12, α) ergibt für den Querschnitt G des Differenzkörpers $D^{(2n-2)}$

$$G = 2^{2n-2}Q - Q''$$

$$G = 2^{2n-2}A\left\{k^{2n} + \binom{2n}{1}k^{2n-1}z + \binom{2n}{2}k^{2n-2}z^2 + \cdots + \binom{2n}{2n-1}kz^{2n-1}\right\}$$

$$\frac{G_z + G_{-z}}{2} = 2^{2n-2}A\left\{k^{2n} + \binom{2n}{2}k^{2n-2}z^2 + \cdots + \binom{2n}{2n-2}k^2z^{2n-2}\right\}$$

und demnach für seinen Inhalt $D^{(2n-2)} = 2^{2n-2}\mathrm{I} - \mathrm{II}$ oder

$$\frac{2^{2n}-1}{4}\cdot V_{z=-k}^{z=k} = 2^{2n-2}\cdot 2Ak^{2n+1}\left\{1 + \binom{2n}{2}\frac{1}{3} + \binom{2n}{4}\frac{1}{5} + \cdots + \binom{2n}{2n-2}\frac{1}{2n-1}\right\}.$$

Wird in der Klammer $\binom{2n}{2n} - 1 = 0$ hinzugefügt und wie vorhin berücksichtigt, daß $\binom{2n}{\lambda}\frac{1}{\lambda+1} = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{\lambda+1}$ ist, so folgt

$$\frac{2^{2n}-1}{4}\cdot V_{z=-k}^{z=k} = \frac{2^{2n-1}Ak^{2n+1}}{2n+1}\left\{\binom{2n+1}{1}+\binom{2n+1}{3}+\cdots+\binom{2n+1}{2n-1}+\binom{2n+1}{2n+1}-1\right\}$$

$$= \frac{2^{2n-1}Ak^{2n+1}}{2n+1}\left\{2^{2n}-1\right\},$$

und endlich

$$V_{\zeta=0}^{\zeta=h} = V_{z=-k}^{z=k} = \frac{A\cdot(2k)^{2n}\cdot 2k}{2n+1} = \frac{Q_{(\zeta=h)}h}{2n+1} \qquad \text{q. e. d.}$$

Bei Anwendung der Rekursionsformel (β) würde sich der Beweis fast ebenso gestaltet haben.

Da nun für die Reinkörper 0^{ten} bez. 1^{ten} Grades von der Querschnittsfunktion A_0 bez. $A_1\zeta$ der Inhalt

$$A_0 h = Q_{(\zeta=h)}h \quad \text{bez.} \quad \frac{1}{2}A_1 h^2 = \frac{1}{2}Q_{(\zeta=h)}h$$

der Formel genügt, so ist damit ihre allgemeine Gültigkeit für Reinkörper bewiesen.*)

16. Mithin hat auch ein gemischter Körper vom Querschnitt

$$Q = A_0 + A_1\zeta + A_2\zeta^2 + \cdots + A_m\zeta^m$$

und der Höhe h den Inhalt

$$V_{\zeta=0}^{\zeta=h} = A_0 h + \frac{1}{2}A_1 h^2 + \frac{1}{3}A_2 h^3 + \cdots + \frac{1}{m+1}A_m h^{m+1},$$

oder in anderer Form: Ein gemischter Körper $2n^{\text{ten}}$ bez. $2n+1^{\text{ten}}$ Grades vom Querschnitt

$$Q = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots + A_{2n}z^{2n} + A_{2n+1}z^{2n+1}$$

und ebenso eine Zentralschicht $2n^{\text{ten}}$ Grades vom Querschnitt

$$G = A_0 + A_2 z^2 + A_4 z^4 + \cdots + A_{2n}z^{2n}$$

und der Höhe $h = 2k$ hat den Inhalt

$$V_{z=-k}^{z=+k} = 2\left\{A_0 k + \frac{1}{3}A_2 k^3 + \frac{1}{5}A_4 k^5 + \cdots + \frac{1}{2n+1}A_{2n}k^{2n+1}\right\}.$$

*) Eine viel kürzere elementare Ableitung dieser Formel, auch für gebrochene und negative Exponenten, gebe ich in meiner Abhandlung: „Über die Quadratur höherer Parabeln und Hyperbeln und die Kubatur solcher Körper, die diese Kurven zu Meridiankurven haben.“ Daselbst entwickle ich auch eine neue, überraschend einfache Methode der Quadratur der gewöhnlichen Hyperbel. XXXII. Jahresbericht des Vereins für Naturkunde zu Zwickau i. S. 1902, Druck von B. G. Teubner in Leipzig, 1905.

17. Hiermit ist eine allgemeine Inhaltsformel gewonnen, und es scheint nunmehr die Methode (a) selbst ihren Zweck erfüllt zu haben, und die noch zu behandelnde Methode (b), die Inhaltsbestimmung eines Körpers mit Hilfe eines bekannten Körpers, überhaupt überflüssig geworden zu sein. Dem ist jedoch nicht so. Für einen Körper hoher Potenz ist es allerdings geraten, ihn nach eben entwickelter Formel direkt als algebraische Summe von Reinkörpern zu berechnen, wie es ja die Integralrechnung auch tut; für einen gemischten Körper 1^{ten} oder 2^{ten} Grades dagegen ist es, wie an einigen Beispielen gezeigt werden soll, überraschend einfacher, ihn als einen einzigen aufzufassen — darin liegt das wesentlich Neue — und nach Methode (a) oder (b), also indirekt mit Hilfe eines D- bez. S-Körpers zu bestimmen. Vor allen Dingen umgeht man auf diese Weise schon die Aufstellung der Querschnittsfunktion, denn als Bestimmungsstücke sind gewöhnlich außer der Höhe h nicht deren Konstanten A_0, A_1, A_2, sondern ein oder zwei Querschnitte selbst und eine die Gestalt der Meridiankurve bestimmende Größe gegeben.

Methode (a) kann nach (13) nur für zentrale Schichten in Frage kommen. Diese lassen sich aber auch, wie es für nicht zentrale ausschließlich der Fall ist, nach Methode (b) finden. Alle hierher gehörenden Berechnungen — nach (4) auch die von Körpern dritten Grades — können mit Hilfe eines einzigen bekannten Körpers zweiten Grades, z. B. des Reinkörpers 2^{ten} Grades, also entweder (α) des Kegels oder (β) des parabolischen Zylinders, der die z-Achse zur Scheiteltangente hat, ausgeführt werden. Dies ist aber nicht immer die einfachste Berechnungsart.

18. Auf die Körper ersten und zweiten Grades soll nun näher eingegangen werden. Die Meridiankurve

$$(\alpha) \qquad C_2 x^2 = A_0 + A_1 z + A_2 z^2$$

oder

$$(\beta) \qquad C_1 x = A_0 + A_1 z + A_2 z^2$$

eines gemischten Körpers ersten oder zweiten Grades, je nachdem $A_2 = 0$ ist oder nicht, stellt mit Ausnahme (β_1) einen Kegelschnitt dar und zwar, wenn

(α_1) $A_2 = 0$ Parabel P_1, deren Achse
(α_2) $A_2 > 0$ und $A_0 > 0$ Hyperbel H_1, deren Nebenachse
$A_0 < 0$ „ H_2, deren Hauptachse
} die z-Achse ist,

(α_2) $A_2 > 0$ und $A_0 = 0$ Geradenpaar H_0, dessen eine Winkelhalbierende } die z-Achse ist,
$A_2 < 0$ und $A_0 > 0$ Ellipse E, deren eine Achse }
$A_0 < 0$ imag. Ellipse E_i,
(β_1) $A_2 = 0$ Gerade,
(β_2) $A_2 \gtrless 0$ Parabel P_2, deren Achse der x-Achse parallel läuft.

Laufen die parallelen Querschnittsebenen keiner Achse des Meridiankegelschnitts parallel, so bedeuten a und c konjugierte Durchmesser, und als Koordinatensystem ist das schiefwinklige zu betrachten, dessen z-Achse die Richtung von c hat.

19. Sind a und c die Halbachsen oder konjugierte Halbmesser des Kegelschnitts, so ist für die Ellipse oder Hyperbel

$$\frac{a^2}{c^2} = \mp \frac{A_2}{C_2}.$$

Alle Meridiankurven eines Körpers gehen durch dieselben reellen oder imaginären Punkte der z-Achse, stimmen also im Mittelpunkte und dem Halbmesser c überein, wie leicht daraus gefolgert werden kann, daß alle Meridiankurven dieselben Koeffizienten A_0, A_1, A_2 haben, und nur C_2 sich ändert.

Die Körper selbst sollen nur nach ihren Meridiankurven als parabolische, elliptische und hyperbolische Schichten erster oder zweiter Art bezeichnet werden; die Gestalt der untereinander ähnlichen Querschnitte kommt hierbei gar nicht in Betracht. Die hyperbolischen Schichten besitzen einen Asymptotenkegel, dessen Querschnitte denen der Schicht ähnlich sind. Die Mantelfläche einer Schicht gehört im besonderen einer Fläche zweiter Ordnung an, wenn die ähnlichen und ähnlich gelegenen Querschnitte ebenfalls Kegelschnitte sind, deren Mittelpunkte auf der z-Achse liegen.

20. Nach (11) stimmen nun zwei ähnliche Meridiankurven für jedes Ähnlichkeitsverhältnis ε überein: in den Vorzeichen von A_0' und A_0'', ferner in den Koeffizienten $C_2' = C_2''$ und $A_2' = A_2''$. Letztere beide Gleichungen werden auch von zwei ähnlich-konjugierten Hyperbeln H_1' und H_2'' (d. h. solchen, von denen jede der konjugierten der andern ähnlich ist) befolgt, aber A_0' und A_0'' haben verschiedene Vorzeichen. Da nach (5) ein D-Körper nur an die Bedingung $A_2' - A_2'' = 0$ gebunden ist, so kann er entweder durch 2 elliptische oder durch 2 hyperbolische Schichten gleicher oder verschiedener Art hergestellt werden. Für einen S-Körper ist $A_2' + A_2'' = 0$ Bedingung; A_2' und A_2'' haben demnach verschiedene Vorzeichen, und seine Her-

stellung erfordert also eine elliptische und eine hyperbolische Schicht erster oder zweiter Art. Aus obigen Bedingungen ergibt sich daher in allen Fällen, abgesehen vom Vorzeichen: $\frac{A_2'}{C_2'} = \frac{A_2''}{C_2''}$, also die Gleichheit der Verhältnisse entsprechender konjugierter Durchmesser, insbesondere der Achsen.

Der Doppelsatz (5) kann daher für Körper zweiten Grades wie folgt ausgesprochen werden:

Der D-Körper zweier elliptischer oder zweier hyperbolischer Schichten gleicher oder verschiedener Art
Der S-Körper einer elliptischen und einer hyperbolischen Schicht erster oder zweiter Art

von gleicher Höhe, deren parallele Querschnitte einander ähnlich sind, und deren entsprechende Meridiankurven in den Verhältnissen der gleichgerichteten Achsen übereinstimmen, ist gleich einem Zylinder von gleicher Höhe, dessen Grundfläche gleich dem Mittelschnitt oder der halben Summe zweier äquidistanten, insonderheit der beiden Begrenzungsschnitte des $\left\{\begin{matrix} D\text{-Körpers} \\ S\text{-Körpers} \end{matrix}\right\}$ ist.

Laufen im besonderen die Begrenzungsebenen der Schichten der Zentrale der Meridiankurven parallel, so ist der $\left\{\begin{matrix} D^*\text{-Körper} \\ S^*\text{-Körper} \end{matrix}\right\}$ ein Cavalierischer Körper des Zylinders, da in diesem Falle alle parallelen Körperschnitte einander gleich sind.

21. Um die Einfachheit der Methode zu zeigen, mögen nun einige Beispiele folgen, in denen wir uns auf den Fall beschränken, daß die parallelen Querschnitte senkrecht auf der Halbachse c stehen. Soll jedoch allgemein c nur ein konjugierter Halbmesser vom Neigungswinkel ω gegen die xy-Ebene sein, so ist in den betreffenden Formeln c bez. Γ_0 durch $c \sin \omega$ bez. $\frac{\Gamma_0}{\sin^2 \omega}$ zu ersetzen.

Zunächst Berechnungen nach

Methode a. Hier handelt es sich immer um Aufstellung eines D-Körpers, der mit D_α oder D_β bezeichnet werden soll, je nachdem Methode (a, α) oder (a, β) zugrunde gelegt wird.

Kegel (= I), gegeben durch $Q'_{\frac{h}{2}} = G$ und Höhe h. Hilfskörper II ist ein Doppelkegel.

Die Mittelschnitte sind $Q_0' = \frac{1}{4} G$ und $Q_0'' = 0$. Dann ergibt sich $D_\alpha = \mathrm{I} - \mathrm{II} = \frac{3}{4}\,\mathrm{I} = (Q_0' - Q_0'')\,h = \frac{1}{4}\,Gh$ und also

$$J = \frac{1}{3}\,Gh.$$

Elliptischer Vollkörper ($=$ II), gegeben durch $Q_0'' = G$ und $h = 2c$. Hilfskörper I ist ein halber elliptischer Vollkörper. Die Randschnitte sind $Q'_{-c} = 4G$, $Q'_c = 0$ und $Q''_{-c} = Q''_c = 0$.

$$D_\alpha = \mathrm{I} - \mathrm{II} = 3\,\mathrm{II} = \frac{(Q'_{-c} - Q''_{-c}) + (Q'_c - Q''_c)}{2} \cdot h = 4Gc$$

$$J = \frac{2}{3}\,Gh = \frac{4}{3}\,Gc.$$

Im Sonderfall des Ellipsoids von den Halbachsen a, b, c ist

$$J = \frac{4}{3}\,abc\pi.$$

In gleicher Weise können die elliptische Zentralschicht und hyperbolische Zentralschicht erster Art berechnet werden.

Parabolischer Zylinder, dessen Scheiteltangente die z-Achse ($=$ I), gegeben durch die Ordinate h und $Q'_{\frac{h}{2}} = G = bg$, wenn b die konstante Breite des Querschnittsrechtecks bedeutet, $Q'_{-\frac{h}{2}} = 0$. Die Berechnung ist identisch mit der Quadratur der Parabel. Für die Zentralschicht II ist $Q''_{-\frac{h}{2}} = Q''_{\frac{h}{2}} = \frac{1}{2}\,G$. Nach (13) folgt

$$D_\beta = 2\,\mathrm{I} - \mathrm{II} = \frac{3}{2}\,\mathrm{I} = \frac{\left(2Q'_{+\frac{h}{2}} - Q''_{+\frac{h}{2}}\right) + \left(2Q'_{-\frac{h}{2}} - Q''_{-\frac{h}{2}}\right)}{2} \cdot h$$

$$\frac{3}{2}\,J = \frac{\left(2G - \frac{1}{2}\,G\right) + \left(0 - \frac{1}{2}\,G\right)}{2}\,h$$

$$J = \frac{1}{3}\,Gh = \frac{1}{3}\,bgh.$$

Mit Benutzung der Mittelschnitte ist die Rechnung noch einfacher: $Q_0' = \frac{1}{4}\,G$ und $Q_0'' = 0$, also

$$D_\beta = 2\,\mathrm{I} - \mathrm{II} = \frac{3}{2}\,\mathrm{I} = (2\,Q_0' - Q_0'')\,h$$

$$\frac{3}{2}\,J = \frac{G}{2}\,h$$

$$J = \frac{1}{3}\,Gh.$$

22. Hieran schließen wir einige Berechnungen nach

Methode b; sie zerfallen in vier Arten, je nachdem ein D-, D^*-, S- oder S^*-Körper aufgestellt wird.

Elliptische nicht zentrale Schicht $(=\mathrm{I})$, gegeben durch die Höhe h, $Q'_{-\frac{h}{2}} = G_1$, $Q'_{\frac{h}{2}} = G_2$ und Γ_0, den Mittelschnitt des ähnlichen Vollkörpers von der Halbachse 1 in der z-Achse. Ist II der Vollkörper von der Höhe h, so ist $Q_0'' = \Gamma_0 \left(\frac{h}{2}\right)^2$, $Q''_{-\frac{h}{2}} = Q''_{\frac{h}{2}} = 0$.

$$D_\alpha = \mathrm{I} - \mathrm{II} = J - \frac{2}{3}\,\Gamma_0 \left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{\left(Q'_{-\frac{h}{2}} - Q''_{-\frac{h}{2}}\right) + \left(Q'_{\frac{h}{2}} - Q''_{\frac{h}{2}}\right)}{2} \cdot h$$

$$J - \frac{1}{6}\,\Gamma_0 h^3 = \frac{G_1 + G_2}{2} \cdot h$$

$$J = \frac{h}{6}\left\{3(G_1 + G_2) + \Gamma_0 h^2\right\}.$$

Parabolische Schicht (deren Achse die z-Achse ist); da $\frac{a}{c} = 0$ und also auch $\Gamma_0 = 0$ ist, folgt

$$J = \frac{h}{2}\left(G_1 + G_2\right).$$

Bei direkter Berechnung der parabolischen Schicht kann die Inhaltsformel sofort hingeschrieben werden, da die Schicht als Körper ersten Grades der D_α-Körper selbst ist.

Im besonderen: Schicht des Rotationsellipsoids, gegeben durch h, r_1, r_2, und $\frac{a}{c}$ oder $\Gamma_0 = \frac{a^2}{c^2}\pi$,

$$J = \frac{\pi h}{6}\left\{3(r_1^2 + r_2^2) + \left(\frac{a}{c}h\right)^2\right\}$$

und hieraus Kugelschicht, für die $\frac{a}{c} = 1$ ist,

$$J = \frac{\pi h}{6}\left\{3(r_1^2 + r_2^2) + h^2\right\}.$$

In gleicher Weise können die nicht zentralen hyperbolischen Schichten erster und zweiter Art berechnet werden.

Kegelstumpf $(=\mathrm{I})$, gegeben durch h, $Q'_{\frac{h}{2}} = G_1$ und $Q'_{-\frac{h}{2}} = G_2$. Ist II der Vollkegel von der Höhe h, so folgt

$$\sqrt{Q''_{\frac{h}{2}}} = \sqrt{Q'_{\frac{h}{2}}} - \sqrt{Q'_{-\frac{h}{2}}} = \sqrt{G_1} - \sqrt{G_2} \quad \text{und} \quad Q''_{-\frac{h}{2}} = 0$$

$$D_\alpha = \mathrm{I} - \mathrm{II} = J - \frac{1}{3}\,Q''_{\frac{h}{2}} \cdot h = \frac{\left(Q'_{-\frac{h}{2}} - Q''_{-\frac{h}{2}}\right) + \left(Q'_{\frac{h}{2}} - Q''_{\frac{h}{2}}\right)}{2} \cdot h$$

$$J - \frac{1}{3}\left(\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2}\right)^2 h = \frac{G_1 - \left(\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2}\right)^2 + G_2}{2} \cdot h$$

$$J = \frac{3(G_1 + G_2) - \left(\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2}\right)^2}{6} \cdot h$$

$$J = \frac{h}{3}\left(G_1 + \sqrt{G_1 G_2} + G_2\right).$$

Hyperbolische Zentralschicht erster Art ($=$ I), gegeben durch h, $Q_0' = G$ und die gemeinsame Halbachse c der Meridiankurven. Ist II der Asymptotenkegel, so folgt $Q''_{-\frac{h}{2}} = Q''_{\frac{h}{2}} = G \cdot \left(\frac{h}{2c}\right)^2$

$$D_\alpha^* = \mathrm{I} - \mathrm{II} = J - \frac{1}{3}\, G\left(\frac{h}{2c}\right)^2 h = G \cdot h$$

$$J = Gh\left(1 + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2c}\right)^2\right).$$

Im besonderen ist für $h = 2c$

$$J = \frac{4}{3}\, Gh = \frac{8}{3}\, Gc,$$

und ferner Hyperboloid erster Art von den Halbachsen a, b, c

$$J = \frac{8}{3}\, abc\pi.$$

Ganz analog gestaltet sich die Berechnung der

Elliptischen Zentralschicht ($=$ I), wenn II der Doppelkegel ist, für welchen $Q_c'' = Q_0'$ ist. Es folgt aus

$$S_\alpha^* = \mathrm{I} + \mathrm{II} \qquad J = Gh\left(1 - \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2c}\right)^2\right).$$

Im Sonderfall der Kugel erhält man die Archimedische Kugelberechnung.

23. Zum Schlusse mögen noch die Gaußschen Formeln der mechanischen Quadratur*) und einige andere nach meiner Methode in einfacher Weise abgeleitet werden.

Für Körper $2n^{\text{ten}}$ und $2n + 1^{\text{ten}}$ Grades sind übereinstimmend wenigstens $n + 1$ Werte der Querschnittsfunktion

$$Q(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots + A_{2n} z^{2n} + A_{2n+1} z^{2n+1}$$

erforderlich, die paarweise äquidistant zum Mittelschnitt liegen.

Dieser Gaußsche Satz erhellt sofort aus unserem Reduktionssatze (4), nach welchem jeder der beiden Körper durch eine inhaltsgleiche Zentralschicht $2n^{\text{ten}}$ Grades ersetzt werden kann. Ihre Querschnittsfunktion

$$G(z) = A_0 + A_2 z^2 + \cdots + A_{2n} z^{2n}$$

---

*) C. F. Gauß, Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi. Werke III. Band, Seite 163—196; ferner aus den Göttingischen gelehrten Anzeigen abgedruckt Seite 202—206.

Eine elementare Ableitung der ersten drei Gaußschen Formeln hat auch E. Lampe in den Sitzungsberichten der Berliner math. Gesellsch. gegeben. Siehe Archiv d. Math. Bd. V, 1903.

hat $n+1$ Koeffizienten, erfordert also gerade so viel Bestimmungsstücke, als nach Gauß Funktionswerte Q gegeben sein müssen. Nun ist unser Ersatzkörper eine Zentralschicht, also $G(z)=G(-z)$; die $n+1$ Querschnitte müssen daher symmetrisch zum Mittelschnitt angeordnet sein. Wir erhalten,

wenn n ungerade ist $\mu=\frac{n+1}{2}$ symmetrisch gelegene Paare von Querschnitten, dagegen

wenn n gerade ist, $\mu=\frac{n}{2}$ symmetrisch gelegene Paare und den Mittelschnitt.

Die so angeordneten $n+1$ Querschnitte G haben nur $(n+1-\mu)$ verschiedene Werte, es werden also μ Bestimmungsstücke frei, welche gerade zur Ermittelung gewisser Koeffizienten ϱ hinreichen.

Die Inhaltsformel nimmt, wenn wir zur Abkürzung

$$G(z_\mu)=G(-z_\mu)$$

mit G_μ bezeichnen und $2G_\mu$ für $Q(z_\mu)+Q(-z_\mu)$ setzen, die Gestalt an

$$V_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}=\frac{h}{\varrho_0+2\varrho_1+\cdots+2\varrho_\mu}\left\{\varrho_0 G_0+2\varrho_1 G_1+2\varrho_2 G_2+\cdots+2\varrho_\mu G_\mu\right\},$$

wobei $\varrho_0=0$ oder 1 zu setzen ist, je nachdem n ungerade oder gerade ist. Aus obiger Querschnittsfunktion $Q(z)$ oder $G(z)$ folgt nach (16)

$$V_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}=A_0h+\frac{1}{3}A_2\left(\frac{h}{2}\right)^2h+\cdots+\frac{1}{2n+1}A_{2n}\left(\frac{h}{2}\right)^{2n}h.$$

Die Übereinstimmung beider Formeln auch für die Reinkörper 2^{ten}, 4^{ten}, $\cdots$, $2n^{\text{ten}}$ Grades liefert die nötigen Bestimmungsgleichungen zur Berechnung der $n+1$ Unbekannten z_μ und ϱ_μ. Die eine noch fehlende Gleichung erledigt sich dadurch, daß, wenn $\varrho_0=0$ ist, $\varrho_1=1$ gesetzt werden kann, dagegen wenn $\varrho_0=1$ ist, $z_0=0$ sein muß.

In der Formel für V ist dann die Funktion Q wieder einzuführen, also zu setzen

$$2\varrho_\mu G_\mu=\varrho_\mu\big(Q(z_\mu)+Q(-z_\mu)\big).$$

24. Stellen wir nun die ersten drei Gaußschen Formeln auf:

Körper 0^{ten} oder 1^{ten} Grades. $n=0$, $\varrho_0=1$, $\mu=0$.

$$(0_0)\qquad V_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}=hQ(0).\qquad \text{(I. Gaußsche Formel)}$$

Körper 2^{ten} oder 3^{ten} Grades. $n=1$, $\varrho_0=0$, $\mu=1$.

$$V_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{h}{2\varrho_1}\left\{2\varrho_1 G_1\right\} = A_0 h + \frac{1}{3} A_2 \left(\frac{h}{2}\right)^2 h.$$

Für den Reinkörper 2^{ten} Grades ist $G_1 = A_2 z_1^2$, also der Inhalt

$$h \cdot A_2 z_1^2 = \frac{1}{3} A_2 \frac{h^2}{4} h$$

und mithin

$$z_1^2 = \frac{h^2}{12}, \quad z_1 = \pm \frac{h}{6}\sqrt{3}.$$

Aus

$$V_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{h}{2}\left\{Q(z_1) + Q(-z_1)\right\}$$

erhalten wir also:

$$(\mathrm{I}_0) \qquad V_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{h}{2}\left\{Q\left(\frac{h}{6}\sqrt{3}\right) + Q\left(-\frac{h}{6}\sqrt{3}\right)\right\}. \text{(II. Gaußsche Formel)}$$

Körper 4^{ten} oder 5^{ten} Grades. $n = 2$, $\varrho_0 = 1$, $\mu = 1$.

$$V_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{h}{1+2\varrho_1}\left\{G_0 + 2\varrho_1 G_1\right\} = A_0 h + \frac{1}{3} A_2 \left(\frac{h}{2}\right)^2 h + \frac{1}{5} A_4 \left(\frac{h}{2}\right)^4 h.$$

Für den Reinkörper 2^{ten} Grades ist $G_0 = 0$ und $G_1 = A_2 z_1^2$, also der Inhalt

$$\frac{h}{1+2\varrho_1}\left\{2\varrho_1 A_2 z_1^2\right\} = \frac{1}{3} A_2 \frac{h^2}{4} \cdot h$$

und mithin

$$(1) \qquad \frac{\varrho_1}{1+2\varrho_1} z_1^2 = \frac{h^2}{24}.$$

Für die Reinkörper 4^{ten} Grades ist $G_0 = 0$ und $G_1 = A_4 z_1^4$, also der Inhalt

$$\frac{h}{1+2\varrho_1}\left\{2\varrho_1 A_4 z_1^4\right\} = \frac{1}{5} A_4 \frac{h^4}{16} \cdot h$$

und mithin

$$(2) \qquad \frac{\varrho_1}{1+2\varrho_1} z_1^4 = \frac{h^4}{160}.$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) ergibt sich durch Division

$$z_1^2 = \frac{3}{20} h^2; \quad z_1 = \pm \frac{h}{10}\sqrt{15}.$$

Wird dieser Wert in Gleichung (1) eingesetzt, so folgt

$$\varrho_1 = \frac{5}{8}.$$

Aus

$$V_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{h}{1+2\varrho_1}\left\{Q_0 + \varrho_1\left(Q(z_1) + Q(-z_1)\right)\right\}$$

erhalten wir also:

$$(\mathrm{II}_0) \qquad V_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{h}{18}\left\{5\,Q\left(\frac{h}{10}\sqrt{15}\right) + 8\,Q(0) + 5\,Q\left(-\frac{h}{10}\sqrt{15}\right)\right\}.$$

(III. Gaußsche Formel)

Gauß führt die Berechnung bis $n = 6$, also bis zu den Körpern 12ten und 13ten Grades aus. Die drei eben entwickelten Formeln sind die einzigen bis zu $n = 6$, welche rationale Koeffizienten ϱ aufweisen. Im III. Bd. Seite 206 von Gauß' Werken steht, daß die Koeffizienten in den meisten Fällen Irrationalgrößen sind. Ich vermute, daß sie für die Körper vom 16ten und 17ten Grad wieder rational sind und die Rationalität der Koeffizienten demselben Gesetz gehorcht, das Gauß für die algebraische Auflösbarkeit der Kreisteilungsgleichung aufgestellt hat.

25. Es erübrigen noch einige Bemerkungen über andere Formeln der sogenannten mechanischen Quadratur: Ist für einen Körper $2n$ten oder $2n+1$ten Grades gerade die Minimalzahl $n+1$ von Querschnitten vorgeschrieben, so ist die von Gauß aufgestellte die einzig mögliche Inhaltsformel (N_0); ist dagegen die Zahl der vorgeschriebenen Funktionswerte um k größer, so lassen sich in ganz derselben Weise für jedes k unendlich viele Inhaltsformeln (N_k) ableiten, nur können von den zu bestimmenden Größen z und ϱ noch k willkürlich angenommen werden. So erhält man z. B. für

Körper bis zum 3ten Grade $n = 1$

bei 3 Funktionswerten $k = 1$, also für $\varrho_0 = 1$, $z_0 = 0$ und das freigewählte $z_1 = \pm \frac{h}{2}$ das zugeordnete $\varrho_1 = \frac{1}{4}$, mithin die bekannte Simpsonsche Formel

$$(\mathrm{I}_1) \qquad V_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{h}{6}\left\{Q\left(\frac{h}{2}\right) + 4\,Q(0) + Q\left(-\frac{h}{2}\right)\right\},$$

bei 4 Funktionswerten $k = 2$, also für $\varrho_0 = 0$, $\varrho_1 = 1$ und die frei gewählten $z_1 = \pm\frac{h}{2}$ und $z_2 = \pm\frac{h}{4}$ das zugeordnete $\varrho_2 = 8$, mithin

$$(\mathrm{I}_2') \qquad V_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{h}{18}\left\{Q\left(\frac{h}{2}\right) + 8\,Q\left(\frac{h}{4}\right) + 8\,Q\left(-\frac{h}{4}\right) + Q\left(-\frac{h}{2}\right)\right\},$$

ebenso für die frei gewählten $z_1 = \pm\frac{h}{2}$ und $z_2 = \pm\frac{h}{6}$ das zugeordnete $\varrho_2 = 3$, mithin die Cotes-Newtonsche Formel

$$(\mathrm{I}_2'') \qquad V_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{h}{8}\left\{Q\left(\frac{h}{2}\right) + 3\,Q\left(\frac{h}{6}\right) + 3\,Q\left(-\frac{h}{6}\right) + Q\left(-\frac{h}{2}\right)\right\}$$

und ebenso für die frei gewählten $z_1 = \pm \frac{h}{3}$ und $z_2 = \pm \frac{h}{6}$ das zugeordnete $\varrho_2 = \frac{1}{2}$, mithin

$$(\mathrm{I}_2''') \quad V_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{h}{6}\left\{2Q\left(\frac{h}{3}\right) + Q\left(\frac{h}{6}\right) + Q\left(-\frac{h}{6}\right) + 2Q\left(-\frac{h}{3}\right)\right\}.$$

Ferner erhält man z. B. für

Körper bis zum 5^{ten} Grade $n = 2$

bei 4 Funktionswerten $k = 1$, also für $\varrho_0 = 0$, $\varrho_1 = 1$, und das frei gewählte $z_1 = \pm \frac{h}{2}$ die zugeordneten $z_2 = \pm \frac{h}{10}\sqrt{5}$ und $\varrho_2 = 5$, mithin

$$(\mathrm{II}_1) \quad V_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{h}{12}\left\{Q\left(\frac{h}{2}\right) + 5Q\left(\frac{h}{10}\sqrt{5}\right) + 5Q\left(-\frac{h}{10}\sqrt{5}\right) + Q\left(-\frac{h}{2}\right)\right\}$$

bei 5 Funktionswerten $k = 2$, also für $\varrho_0 = 1$, $z_0 = 0$ und die frei gewählten $z_1 = \pm \frac{h}{2}$ und $z_3 = \pm \frac{h}{4}$ die zugeordneten $\varrho_1 = \frac{7}{12}$ und $\varrho_2 = \frac{8}{3}$, mithin

$$(\mathrm{II}_2) \quad V_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{h}{90}\left\{7Q\left(\frac{h}{2}\right) + 32Q\left(\frac{h}{4}\right) + 12Q(0) + 32Q\left(-\frac{h}{4}\right) + 7Q\left(-\frac{h}{2}\right)\right\}.$$

Diese Beispiele mögen genügen. Jede dieser Formeln (N_k) stellt bei Anwendung auf einen Körper, dessen Grad $2n + 1$ übersteigt, nur eine mehr oder weniger gute Näherungsformel dar. So sind z. B. für den Körper 4^{ten} oder 5^{ten} Grades von den angeführten Formeln mit 4 Querschnitten (I_2'') und (I_2''') Näherungsformeln, (II_1) dagegen eine exakte Inhaltsformel.*) Auf die Fehlerbestimmung der Näherungsformeln hier einzugehen, würde zu weit führen.

---

*) Die Formeln I_1, I_2' und II_2 befinden sich in der Abhandlung von Gauß, a. a. O. S. 146.

Die Formeln (I_2'), (I_2'') und (I_2''') fand ich früher einmal — beim Suchen nach solchen, die $Q(0)$ nicht enthalten — dadurch, daß ich den Körper V in 2, bez. 3 gleich hohe Schichten A, B, bez. A, C, B zerschnitt und die Simpsonsche Formel I_2 auf die 3 bez. je 4 durch ( ) bezeichneten Schichten anwandte. Ich erhielt so

I_2' aus $3V = 4(A) + 4(B) - (A + B)$,
I_2'' „ $4V = (A + C + B) - 3(C) + 3(A + C) + 3(B + C)$.
II_2''' „ $2V = 3(A) + 3(C) + 3(B) - (A + C + B)$,

Meine Formel II_1 für Körper bis zum fünften Grade ist die einzige exakte Formel von vier Funktionswerten, die die Begrenzungsquerschnitte enthält.

Über die diskontinuierlichen und nicht-konvexen gleicheckig-gleichflächigen Polyeder.

Von

M. Brückner aus Bautzen.

Prof. Heß sprach mir vor einigen Jahren brieflich sein Bedauern aus, daß er seine Untersuchungen aus der Polyedertheorie aus verschiedenen Gründen habe beiseite liegen lassen, und forderte mich auf, seine Untersuchungen, besonders der gleicheckigen und gleichflächigen Polyeder fortzuführen. Es ist Ihnen bekannt, wie weit die Resultate, die Heß in seiner „Kugelteilung" veröffentlicht hat, auf diesem Gebiete reichen; doch gestatten Sie vielleicht einen ganz kurzen historischen Überblick. Das Problem, die gleicheckigen und zugleich gleichflächigen Polyeder zu finden, war längst gelöst für den Fall, daß die Ecken sowohl wie die Flächen regulär sind. Wir haben hier die 5 Platonischen und bei Berücksichtigung von Ecken und Flächen höherer Art die 4 Kepler-Poinsotschen Polyeder. Heß stellte nun das Problem allgemeiner, indem er von der Regelmäßigkeit der Grenzflächen und Ecken absah, und nur die Bedingung der Kongruenz dieser Gebilde beibehielt; überdies aber nur solche Polyeder zunächst berücksichtigte, die als kontinuierlich und konvex in dem bekannten Sinne zu gelten haben. Schon Wiener hatte in seiner klassischen Schrift „Über Vielecke und Vielflache" neben den 4 Kepler-Poinsotschen kontinuierlichen konvexen Polyedern die regulär diskontinuierlichen erwähnt, nämlich die bekannten Kombinationen von 5 und 10 Tetraedern im Dodekaeder. Auch Heß führt in seiner Hauptabhandlung vom Jahre 1876 „Über die zugleich gleicheckigen und gleichflächigen Polyeder" neben den von ihm gefundenen 8 kontinuierlichen und konvexen Gebilden dieser Art wenigstens beiläufig einige der nicht-konvexen Polyeder des Ikosaedersystems an, ohne aber weiter auf sie einzugehen und überdies nicht ohne Irrtümer. Neben der Auffindung der genannten 8, von mir als „Heßsche Polyeder“ bezeichneten Körper besteht das Hauptverdienst der Schrift in der Darstellung der allgemeinen Methoden der Ableitung der gleicheckig-gleichflächigen Polyeder auf Grund zweier Sätze über den inneren Kern und die äußere von den Ecken gebildete Hülle dieser Vielflache. In den Marburger Berichten des Jahres 1877 endlich gibt Heß das Schlußresultat seiner weiteren Untersuchungen, indem er verschiedene grundlegende Sätze für die nicht-konvexen Vielflache, z. B. die allgemeinste hier geltende Eulersche Gleichung, ableitet, und einige merkwürdige solche Polyeder aufzählt. Die auch in mein Buch übergegangenen Irrtümer, besonders der vorhergehenden Schrift, sind, wie mir Heß mitteilte, durch die Tatsache veranlaßt, daß er die erst später in seiner Kugelteilung erwähnten eigentümlichen nicht-konvexen Polyeder, die er Stephanoide nennt, damals noch nicht erkannt hatte. Dagegen sind die vorläufigen Angaben über die diskontinuierlichen, aus Sphenoiden bestehenden Polyeder korrekt, so daß ich nur nötig hatte, dem von Heß ausgesprochenen Wunsche, diese Gebilde genauer zu untersuchen und zu modellieren, nachzukommen; freilich war auch hier der Reichtum der aufgefundenen verschiedenen Typen ein doch unvermuteter. Etwas schwieriger war die zweite, noch nicht systematisch in Angriff genommene Bestimmung der möglichen nicht-konvexen, unter Umständen auch einseitigen Polyeder.

Das Prinzip der Ableitung der hier in Frage kommenden Gebilde ist dasselbe wie das zur Auffindung der konvexen Polyeder von Heß angewandte, oben schon erwähnte. Die Ebenen jedes gleicheckig-gleichflächigen Polyeders bilden als innerste Zelle einen Kern, der ein gleichflächiges Polyeder erster Art darstellt; die Ecken aber liegen wie die eines gleicheckigen Polyeders erster Art. Sowohl aus dem inneren Kern wie der äußeren Hülle können also die Gebilde höherer Art erschlossen werden; für die Konstruktion näher liegend ist das erste Verfahren. Man zeichnet die Spuren der Ebenen sämtlicher Grenzflächen eines gleichflächigen Polyeders mit der Ebene einer ersten solchen Grenzfläche und sucht diejenigen Schnittpunkte dieser Spuren auf, die auf einer Kugel so wie die Ecken eines gleicheckigen Polyeders der erster Art liegen, in ihrer Ebene also auf einem Kreise, nämlich auf einem kleinen Kreise jener Kugel. Bilden die Verbindungskanten dieser Schnittpunkte ein zusammenhängendes Polygon mit nur positiven Flächenzellen und kehren die Kanten des Polyeders dem Mittelpunkte des umbeschriebenen Kreises sämtlich ihre Innenseite zu, so ergibt sich ein konvexes Polyeder; fallen diese Bedingungen ganz oder teilweise weg, so ist das Polyeder nicht-konvex oder diskontinuierlich.*) In jedem Falle vereinfacht sich die Auffindung der benötigten linearen Figur noch durch die Bemerkung, daß durch jeden ihrer Eckpunkte gleichviel Spuren laufen müssen, da die Ecken des zu findenden Polyeders kongruent oder symmetrisch sind. Endlich ist von größter Wichtigkeit die Beachtung der Reziprozität. Denn das einem gleichflächig-gleicheckigen Polyeder polar-reziproke in Bezug auf die umbeschriebene Kugel ist wieder ein ebensolches, dessen Ecken und Flächen ihrer Art nach aus den Flächen und Ecken des ursprünglichen folgen. Mit dem ersten Polyeder ist also immer das polar-reziproke mitgefunden. Heß hatte nun gezeigt, daß zur Bestimmung der möglichen konvexen Polyeder — ich lasse das Beiwort gleicheckig-gleichflächig auch künftig weg — die vollständigen Figuren des Ikosaeders und Triakontaeders genügen. Aus den Ecken der so gefundenen 4 Polyeder leitet er dann die Flächen der 4 ihnen reziproken ab, deren Kerne gewisse Varietäten eines Deltoidhexekontaeders, eines Pentakisdodekaeders und zweier Dyakishexekontaeder sind. Alle konvexen Polyeder gehörten also dem Ikosaedersystem an. Läßt man aber auch für die konvexen Polyeder die Beschränkung fallen, daß eine Grenzfläche zu jeder Ecke des Vielflaches nur 2 Kanten beiträgt, so existiert noch ein dem Oktaedersystem angehörendes 9. konvexes Polyeder, das sich selbst polar-reziprok entspricht, d. h. autopolar ist. Der innere Kern ist bei einem solchen Vielflache reziprok der äußeren Hülle. Zur Auffindung der nicht-konvexen und diskontinuierlichen Polyeder sind nun die vollständigen Figuren sämtlicher vollzähligen gleichflächigen Polyeder erster Art in den bekannten 3 Hauptklassen, dem Prismensystem, dem Oktaeder- und dem Ikosaedersystem systematisch zu untersuchen. Das scheint auf den ersten Blick ein fast unausführbares Unternehmen. Doch beachte man das Folgende. Alle gleichflächigen Polyeder erster Art jedes der 3 genannten Systeme sind als spezielle Fälle in einem derselben enthalten, nach dem man passend das ganze System benennt; die des 2. z. B. in dem 48-Flach, dem Hexakisoktaeder, die des 3. im Dyakishexekontaeder. Durch Zusammenfallen bestimmter Nachbarflächen dieser allgemeinsten Körper entstehen die speziellen, wie für das 2. System auch aus der Kristallographie bekannt ist. Führt man die Heßschen Ableitungskoeffizienten σ und τ ein, die für das allgemeinste Polyeder jedes Systems unabhängig voneinander sind, nur in gewisse Grenzen eingeschlossen, damit das Polyeder konvex bleibt, so

*) Als Beispiel führte ich hier die vollständige Figur für eine bestimmte Varietät des Dyakishexekontaeders vor, die die Fläche eines nicht konvexen Polyeders enthält.

sind die speziellen Körper durch bestimmte Relationen zwischen σ und τ charakterisiert, während für die letzten nicht variablen Polyeder jedes Systems, das Hexaeder, Oktaeder, Rhombendodekaeder, sowie das Dodekaeder, Ikosaeder und Triakontaeder, σ und τ feste Werte erhalten. Die Flächen der in der vollständigen Figur des allgemeinsten Körpers enthaltenen Polyeder werden bei Variation des σ und τ in den vollständigen Figuren der speziellen Körper entweder entarten oder als Flächen einfacherer Polyeder erhalten bleiben, und man kann umgekehrt also wenigstens aus dem Vorhandensein von brauchbaren Figuren in den speziellen Fällen auf solche in den allgemeinen zurückschließen. Zudem ist zu beachten, daß die Einzelkörper eines diskontinuierlichen Polyeders selbst gleicheckig und gleichflächig sind, wie die Einzelfiguren eines diskontinuierlichen regulären Vielecks selbst reguläre Polygone sind. Es zeigte sich in der Tat, daß sämtliche diskontinuierlichen Polyeder Kombinationen sind von quadratischen und rhombischen Sphenoiden, Tetraedern, Oktaedern, Hexaedern, regulären Sternpolyedern und Stephanoiden. — Bei der Kürze der verfügbaren Zeit werde ich mich um so mehr mit einem gedrängten Überblick über die erhaltenen Resultate begnügen können, als ich bezüglich der Einzelheiten vorläufig auf das gedruckte Verzeichnis der ausgestellten Modelle verweisen darf. Nur die Gruppe der sog. Stephanoide verlangt eine Erläuterung. Heß hatte deren 2 Klassen unterschieden, von denen die der 2. Klasse aber nur die Hemigonien und Hemiedrien derer der 1. Klasse sind, überdies auch nur die Stephanoide einfachster Art berücksichtigt. Wie am Modell ersichtlich, gehört ein vollzähliges Stephanoid dem Prismensystem an; sein Kern ist die reguläre Doppelpyramide, die Hülle das reguläre n-seitige Prisma. Die Flächen sind überschlagene Vierecke 2. Art, die Ecken 4-kantig von der 4. Art und jedes Stephanoid ist autopolar. Für jedes n existiert eine bestimmte Anzahl verschiedener Stephanoide, die sich durch die Lage der Grenzflächen im Hüllpolyeder unterscheiden. Ich bezeichne ein solches vollzähliges Stephanoid mit dem Symbol St_n und füge in Klammern zwei charakteristische Zahlen bei. Ist φ der Zentriwinkel der Seite des n-Ecks und sind $\lambda \cdot \varphi$ und $\mu \cdot \varphi$ die Zentriwinkel zu den Diagonalen des Grenzvierecks des Stephanoids als Sehnen in den umbeschriebenen Kreisen der beiden Deckflächen, so laute das Symbol $St_n\binom{\lambda}{\mu}$. Die Hemigonien werden durch Strichelung, St_n', unterschieden. Da jede Fläche aus 2 kongruenten Zellen entgegengesetzten Vorzeichens besteht, also den Inhalt Null hat, so verschwindet die Oberfläche und somit der Inhalt des ganzen Polyeders, das aber zweiseitig ist, d. h.

das Möbiussche Kantengesetz erfüllt. Ich habe solche nicht-konvexe Vielflache, deren einfachste Vertreter eben die Stephanoide sind, kurz als „Nullpolyeder" bezeichnet und ihnen als weitere Klasse, wie Heß, dann alle die gegenübergestellt, deren Inhalt bei bestimmter Annahme der Koeffizienten der Zellen der Grenzflächen positiv wird. Es gilt der Satz bis auf eine Ausnahme, daß alle Nullpolyeder des Oktaeder- und Ikosaedersystems, seien sie diskontinuierlich oder nicht, sich zurückführen lassen auf Kombinationen von Stephanoiden. Betrachten wir nun in erster Linie diejenigen diskontinuierlichen konvexen Polyeder, die Gruppierungen von quadratischen oder rhombischen Sphenoiden sind. Lassen wir das Prismensystem hier beiseite, da ich dergleichen Modelle nicht ausgestellt habe, so treffen wir zunächst im Oktaedersystem 3 große Gruppierungen stets quadratischer Sphenoide und 4 Gruppierungen rhombischer Sphenoide, die nur für gewisse Werte der σ und τ des Kernpolyeders zu quadratischen werden. Jedem gleicheckigen $(6 + 8 + 12)$-flächigen $2 \cdot 24$-Eck, der allgemeinsten Hülle dieser Gruppierungen, lassen sich 12 solcher Sphenoide jeder Gruppe einschreiben, an deren Stelle bei den speziellen Hüllkörpern unter Umständen 6 Sphenoide treten. Die möglichen Typen dieser 7 Gruppierungen sind sämtlich ausgestellt, während von den 5 Gruppierungen von je 30 rhombischen Sphenoiden im $(12 + 20 + 30)$-flächigen $2 \cdot 60$-Eck sich nur typische Vertreter vorfinden. Stets quadratische Sphenoide können hier nicht existieren. Die Tatsache des Vorkommens der Sphenoidgruppierungen im Oktaeder- und Ikosaedersystem erhellt aus der Möglichkeit, die Ecken des $2 \cdot 24$-Ecks, sowie die des $2 \cdot 60$-Ecks auf 7, bezüglich auf 5 verschiedenerlei Weise so zu gruppieren, daß je 8 Ecken des Hüllpolyeders die Ecken eines rechtwinkligen Parallelepipeds bilden, dem sich 2 rhombische Sphenoide einschreiben lassen, die in quadratische übergehen, wenn die Deckflächen jener Parallelepipede gleichkantig werden, in reguläre Sphenoide, d. h. Tetraeder, wenn an Stelle der ungleichkantigen Parallelepipede Hexaeder treten.

Gehen wir nun zu den nicht-konvexen Polyedern, zunächst den Nullpolyedern des Ikosaedersystems über. Die 120 Ecken des allgemeinsten gleicheckigen Körpers, des genannten $(12 + 20 + 30)$-flächigen $2 \cdot 60$-Ecks, liegen 12 mal zu je 10 in parallelen Ebenen und es bilden die $2 \cdot 10$-Ecken in je 2 gleichweit vom Zentrum des Polyeders entfernten Ebenen die Hälfte der Ecken eines $(2 + 2p)$-flächigen $2 \cdot 2p$-Ecks, für $p = 10$, d. h. einer Hemigonie des allgemeinsten gleicheckigen Körpers im Prismensystem, der zwei Stephanoide $St_5'\binom{2}{1}$ einbeschrieben werden können. Daraus folgt, daß im Ikosaedersystem zunächst 6 Gruppierungen von je 12 solchen Stephanoiden existieren, die für die speziellen Körper des Systems sich zuweilen auf 6 Stephanoide reduzieren. Während nun im allgemeinen die $12 \cdot 10$ Ecken des $2 \cdot 60$-Ecks die Ecken von 12 halbregulären $2 \cdot 5$-Ecken bilden, wird für gewisse Varietäten des Hüllkörpers jedes dieser halbregulären Zehnecke in ein reguläres Zehneck übergeführt werden, wenn man die Werte σ und τ des Kernpolyeders gewissen Relationen unterwirft. Dann lassen sich aber die Ecken des $2 \cdot 60$-Ecks auffassen als die von 6 regulären zehnseitigen Prismen, denen je 2 Stephanoide anderer Art, nämlich je 2 $St_5\binom{3}{1}$ einbeschrieben sind. Dies ergibt das Resultat, daß im Ikosaedersystem noch 5 Gruppierungen von je 12 Stephanoiden existieren, da die sechste aus leicht ableitbaren Gründen unmöglich ist. Treten an Stelle des allgemeinsten Kernpolyeders, des Dyakishexekontaeders, die speziellen Polyeder des Ikosaedersystems, so ergibt sich schließlich der interessante Satz, daß die letztgenannten Gruppierungen in die 4 ersten von Heß angeführten kontinuierlichen Nullpolyeder übergehen, indem je 2 vierkantige Flächen verschiedener Stephanoide zu einem kontinuierlichen Sechseck verschmelzen. Überdies zeigt sich nebenbei, daß das 5. früher von Heß angegebene kontinuierliche Nullpolyeder nicht existiert; dagegen erhält man durch Zusammenfallen der Ecken und Flächen zweier Typen verschiedenen Gruppen angehörender Stephanoide ein höchst kompliziertes kontinuierliches autopolares Nullpolyeder mit 120 sechskantigen Ecken 5. Art und 120 sechseckigen Grenzflächen 3. Art, dessen Kern eine besondere Varietät des Dyakishexekontaeders ist. Die von Heß seinerzeit für Möbiussche Polyeder angesprochenen sind zum Teil Spezialfälle aus den ersten der angeführten Stephanoidgruppierungen.

Das allgemeinste Polyeder des Oktaedersystems kann aus hier nicht zu erörternden Gründen keine Veranlassung zu dergleichen Gruppierungen geben. Jedoch lassen sich für bestimmte Werte der σ und τ des Kernpolyeders solche $(6+8+12)$-flächige $2 \cdot 24$-eckige Hüllpolyeder bestimmen, deren Ecken zu je 8 in 6 parallelen Ebenen liegend, in diesen Ebenen, natürlich jedesmal nur in je 2 gleichweit vom Zentrum entfernt liegenden, die Ecken regulärer 8-Ecke bilden, so daß sich die Ecken des Hüllpolyeders auf dreierlei Weise als Ecken von 3 regulären achtseitigen Prismen auffassen lassen. Danach existieren im Oktaedersystem 3 verschiedene Gruppierungen von je 6 Stephanoiden $St_4'\binom{2}{1}$. Für die speziellen Kerne ergeben sich unter anderen die von Heß in den Marburger Berichten 1877 erwähnten kontinuierlichen Nullpolyeder des Oktaedersystems. Was nun die nicht-konvexen

Polyeder der ersten Klasse betrifft, deren Inhalt positiv gewählt werden kann, so existieren diese, soweit sich bisher ergab, nur für die einfacheren Varietäten der Kernpolyeder, so daß ihre Auffindung nicht allzu schwierig war; allerdings mangelt es noch an einem Beweise, daß sämtliche möglichen nicht-konvexen Polyeder dieser Klasse bereits abgeleitet sind. Zum Schlusse möchte ich noch auf die interessanten 6 Möbiusschen Polyeder aufmerksam machen, von denen 3 zum inneren Kern das Triakontaeder haben, während die Grenzflächen der anderen, ihnen polar-reziproken aus den vollständigen Figuren bestimmter Varietäten des Pentakisdodekaeders und Deltoidhexekontaeders zu entnehmen sind.

Wenn auch zugegeben werden muß, daß die von mir Ihnen hier vorgetragenen Sätze sozusagen zum Luxus in der Geometrie gehören, da die Möglichkeit praktischer Verwendung so gut wie ausgeschlossen erscheint, so glaube ich doch, daß ihnen ein rein theoretisches Interesse wohl entgegengebracht werden kann, und ich hoffe die vollständigen Untersuchungen im Zusammenhange in den Abhandlungen der Kaiserl. Leopold. Carolin. Akad. d. Naturf. später zu veröffentlichen.

Dritter Teil.

Die Literatur- und Modellausstellung.

A. Bericht über die Ausstellung.

Von

M. Disteli in Straßburg i. E.

Nachdem bereits im September 1902 auf der Versammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung zu Karlsbad der Beschluß gefaßt worden war, mit dem III. Internationalen Mathematiker-Kongreß eine Ausstellung wissenschaftlicher Literatur, sowie neuerer mathematischer Modelle und Apparate zu verbinden, beauftragte der vorbereitende Ausschuß in seiner Sitzung vom 20. April 1903 in Heidelberg mit der Ausführung dieses Vorschlages eine Kommission, bestehend aus den Mitgliedern: Disteli-Straßburg, von Dyck-München, Gutzmer-Jena, Krazer-Karlsruhe, Mehmke-Stuttgart. Später wurde diesem Beschluß noch der weitere hinzugefügt, in der Ausstellung Gelegenheit zu Demonstrationen mit Lichtbildern zu geben, teils zur Unterstützung von Vorträgen, teils zur selbständigen Darlegung dieses modernen Hilfsmittels im mathematischen Unterricht.

Dem genannten Zwecke diente ein Projektionsapparat System Schuckert, sowie das Epidiaskop der Firma Carl Zeiß in Jena. Als Ausstellungssaal konnte der große, neu hergestellte Saal im Museumsgebäude am Ludwigsplatz in Aussicht genommen werden.

Von einer detaillierten Angabe und näheren Beschreibung aller eingegangenen Ausstellungsgegenstände muß bei dem unserem Ausstellungsbericht zu Gebote stehenden Raume abgesehen werden. Wir beschränken uns vielmehr darauf, unter Abschnitt B bezüglich der Literatur die Namen derjenigen Firmen anzugeben, die sich an der Ausstellung in der Hauptsache beteiligt haben, und bezüglich der Modellausstellung eine summarische Übersicht der ausgestellten Gegenstände durch wissenschaftliche Institute und die einzelnen Aussteller anzuführen.

Die Eröffnung der Ausstellungen wurde auf Donnerstag den 11. August festgesetzt und es waren dazu zwei größere Demonstrationen mit Lichtbildern in Aussicht genommen. Nachdem die Teilnehmer des Kongresses zu diesem Zwecke auf den Galerien des Ausstellungssaales Platz genommen, begrüßte zur festgesetzten Stunde nachmittags $4\frac{1}{2}$ Uhr

Gutzmer-Jena die Erschienenen zur Eröffnung der Literaturausstellung mit folgender Ansprache:

Hochgeehrte Anwesende!

Im September 1902 wurde auf der Versammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung zu Karlsbad der Beschluß gefaßt, mit dem III. Internationalen Mathematiker-Kongreß eine Ausstellung neuerer mathematischer Modelle und der wissenschaftlichen Literatur der letzten 10 Jahre zu verbinden. Von dem vorbereitenden Ausschuß des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses ist mir der Auftrag zuteil geworden, die Literaturausstellung mit einigen Worten zu eröffnen.

Ausstellungen mathematischer Modelle und Apparate haben bereits bei früheren Gelegenheiten stattgefunden, und sie haben stets ungemein lehrreich, anregend und befruchtend gewirkt; eine Ausstellung mathematischer Literatur stellt dagegen eine Neuerung dar. Denn daß bei Gelegenheit der Weltausstellungen zu Chicago 1893 und zu Paris 1900 in dem allgemeinen Rahmen der Literatur auch mathematische Schriften ausgelegt wurden und daß dies auch in diesem Jahre zu St. Louis geschieht, kommt naturgemäß nicht in Betracht im Vergleiche mit der gegenwärtigen Literaturausstellung, die sich auf die mathematischen Wissenschaften beschränkt, aber in diesem Gebiete eine möglichst große Vollständigkeit für den Zeitraum der letzten 10 Jahre erstrebt.

Freilich sind wir hinter dem gesteckten Ziele weit zurückgeblieben.

Denn wenn wir einen Blick werfen auf die gesamte literarische Produktion der Welt und auf die wissenschaftliche mathematische Produktion, so kommen wir zu ganz gewaltigen Zahlen. In Deutschland waren z. B. von den 24792 im Jahre 1900 erschienenen Büchern allein 1390 über Mathematik und Naturwissenschaften (= 5,6%), und nach einer Zählung von Felix Müller gelangen im Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik mehr als 2000 Schriften jährlich zur Besprechung, womit aber längst nicht Vollständigkeit erreicht wird. Mit Rücksicht auf die Kürze der verfügbaren Zeit will ich auf dieses Zahlenmaterial hier nicht näher eingehen, indem ich auf die unten im Anhang wiedergegebene Zusammenstellung verweise. Indessen möchte ich an dieser Stelle, gerade im Hinblick auf den internationalen Charakter der gegenwärtigen Versammlung darauf hinweisen, wie ungleichwertig die Statistik über die literarischen Erscheinungen ist, selbst wenn man die besten Quellen heranzieht. Es wäre zu wünschen, daß hier durch eine internationale Vereinbarung nach dem Vorbilde der internationalen Katalog-Konferenz eine gleichmäßige Klassifikation der Werke und Zeitschriften herbeigeführt würde. Erst dann wäre ein statistisch zutreffendes Bild von dem literarischen Schaffen der einzelnen Völker zu gewinnen. Allerdings darf überhaupt der Wert einer derartigen Statistik nicht überschätzt werden, denn gerade in der Mathematik kann die wissenschaftliche Leistung eines Volkes nicht ausschließlich nach der Zahl der Bücher oder Abhandlungen bemessen werden: hier gilt es ganz besonders zu wägen und nicht zu zählen!

Wir haben die Ausstellung von vornherein auf die wissenschaftliche Literatur beschränkt. Aber auch in dieser Beschränkung war eine angenäherte Vollständigkeit nicht im Bereiche der Möglichkeit gelegen. Denn mancher Verfasser hat sich in übergroßer Bescheidenheit nicht bewegen lassen, seine Schriften auszustellen, während es uns andererseits nicht immer möglich gewesen ist, alle Verfasser und Verleger mathematischer wissenschaftlicher Literatur zu erreichen und für die Ausstellung zu interessieren. Einige große Sendungen, die uns angemeldet wurden, sind nicht eingetroffen.

In der Unmöglichkeit, jeden einzelnen hier namhaft zu machen, der die literarische Ausstellung beschickt hat, sei es mir gestattet, mich auf die Anführung einiger Namen zu beschränken. Ich nenne zuerst die Firma B. G. Teubner in Leipzig, der die Deutsche Mathematiker-Vereinigung überhaupt zu besonderem Danke verbunden ist; ich nenne sodann die glänzende Ausstellung von Gauthier-Villars in Paris: beide Firmen nehmen mit der von ihnen eingesandten Literatur die eine Längsseite des Saales ein. Auf der anderen Längsseite sind zunächst andere deutsche Verleger vertreten wie Vieweg & Sohn (Braunschweig), Göschen (Leipzig), Engelmann (Leipzig), Mayer & Müller (Berlin) usw. Alsdann folgt das Ausland. Ich hebe hier die Ausstellung von Huygens' Werken durch die Gesellschaft der Wissenschaften zu Haarlem hervor; ferner erregt ganz besonderes Interesse die Gruppe italienischer Literatur, um deren Zustandekommen sich die Firma Ulrico Hoepli in Mailand in dankenswerter Weise verdient gemacht hat. Es folgen des weiteren französische Firmen wie Vuibert et Nony, Delagrave und Colin, die den Verlag mathematischer Werke pflegen. Den Schluß macht eine Reihe kleinerer Gruppen von Literatur, deren Aufzählung an dieser Stelle ermüden würde. Es ist mir eine angenehme Pflicht, allen Ausstellern dafür, daß sie unserer Einladung gefolgt sind, namens des vorbereitenden Ausschusses dieses Kongresses den wärmsten Dank auszusprechen. Ebenso danke ich auch den Herren aufs beste, die uns hier am Orte in freundlichster Weise unterstützt haben.

Zum Schluß möchte ich nochmals betonen, daß es sich bei der literarischen Ausstellung um einen ersten Versuch handelt, dem hoffentlich viele andere ähnliche, bessere und vollständigere Ausstellungen folgen werden.

Ohne der Initiative späterer Kongresse vorgreifen zu wollen, erlaube ich mir einige Gesichtspunkte hervorzuheben, die vielleicht künftig Beachtung verdienen. Und da möchte ich vor allen Dingen empfehlen, daß die Literaturausstellungen sich einen engeren Rahmen wählen als wir es getan haben. Meines Erachtens wäre es z. B. von großem Interesse, wenn jedesmal das einladende Land seine eigene mathematische Literatur für einen bestimmten Zeitabschnitt so vollständig als möglich ausstellte. Das läßt sich durchaus erreichen, denn im eigenen Lande kennt man die Verhältnisse gut und kann auf allseitige Unterstützung rechnen.

Ein anderer Gesichtspunkt wäre der, daß man etwa alle Lehrbücher einer bestimmten Kategorie zur Ausstellung vereinigte. Wie lehrreich wäre z. B. eine möglichst vollständige Sammlung der englischen und amerikanischen Text-books für den höheren mathematischen Unterricht oder einen bestimmten Zweig desselben. Andere Vorschläge dieser Art hat G. Eneström gemacht*), so daß ich mich füglich enthalten kann, näher darauf einzugehen.

Wie sehr aber auch unsere Literatur-Ausstellung hinter den berechtigten Wünschen und Erwartungen zurückbleiben mag, ein Ergebnis wird dennoch auch hier jedem deutlich werden: die stetig wachsende Bedeutung der mathematischen Wissenschaften für das gesamte Leben aller Kulturvölker der Gegenwart.

Anhang.

Einige Zahlen aus der Statistik über die literarische Produktion der Welt.

1. Auf der ganzen Welt wurden gedruckt:

1436—1536	:	42 000	Bücher
1536—1636	:	575 000	"
1636—1736	:	1 225 000	"
1736—1822	:	1 839 000	"
1822—1887	:	6 500 000	"
1887—1898	:	1 782 000	"
1899	:	150 000	"
1900	:	150 000	"
1901	:	150 000	"
1902	:	150 000	"
		12 563 000	Bücher

= rund $12^1/_2$ Millionen Bücher (einschl. Neuausgaben und Übersetzungen).

*) Bibliotheca Mathematica, dritte Folge. IV. Band. 4. Heft.

2. In Deutschland betrug die Gesamtzahl der Druckschriften:

im 15. Jahrhundert	:	16—24 000
„ 16. „	:	100 000
„ 17. „	:	200 000
„ 18. „	:	500 000

3. Bücherproduktion Deutschlands 1861—1900:

	1861—65	1866—70	1871—75	1876—80	1881—85	1886—90	1891—95	1896—1900
Gesamte ücherproduktion	47 455	50 260	57 617	70 233	76 719	86 101	109 778	118 456
arunter:								
ath., Naturw. . .	3 016	3 539	4 136	4 884	5 294	5 633	6 290	6 424
rzieh., Unterricht.	5 297	6 041	7 995	11 222	12 009	12 662	14 127	18 104
hilosophie.	406	513	841	769	716	760	1 134	1 522
au-, Ingenieurwiss.	914	949	1 491	1 933	2 228	2 090	3 005	3 474

4. Bücherproduktion der einzelnen Länder im Jahre 1900.*)

Deutschland:	Insgesamt	24 792
Darunter:	Math., Naturw.	1 390
	Erziehung, Unterricht	3 697
	Bau-, Ingenieurwiss.	739
Österreich-Ungarn:	Exakte Wissenschaften	173
Frankreich:	Insgesamt	10 004
Darunter:	Mathemat. i. allg.	28
	Astronomie, Meteorol., Mechanik	32
	Physik, Chemie	87
	Erziehung, Unterricht	40
Niederlande:	Insgesamt	2 889
Darunter:	Math., Astronomie, Meteorol.	30
	Baukunst, Wasserbau, Mechanik	52
	Erziehung, Unterricht	99
Belgien:	Insgesamt	2 511
Darunter:	Reine Wissenschaften	175
	Unterrichtswesen	92
	Industrie	173

*) Die nachstehenden Angaben, den neuesten und zuverlässigsten Quellen entnommen, zeigen deutlich, daß mangels einer einheitlichen Klassifikation die aufgeführten Zahlen nicht vergleichbar sind. Aufgenommen wurden alle Rubriken, in denen math. Werke enthalten sein können. Über mehrere Länder waren entsprechende Angaben nicht zu erlangen.

Italien:	Insgesamt	9 935
Darunter:	Wissenschaften (Math., Phys.)	322
	Ingenieurwesen	228
	Unterricht, Erziehung	398

Großbritannien:

Insgesamt	neue Werke	5 760
	„ Auflagen	1 389

Darunter:

Künste, Wissenschaften, Illustrierte Werke	neue Werke	385
	„ Auflagen	63

Dänemark:	Insgesamt	1 251
Darunter:	Mathemat., Astronomie	56
	Naturwissenschaften	53
	Pädagogik, Jugendschriften	61
	Industrie	13

Norwegen:	Insgesamt	646
Darunter:	Mathematik	20
	Naturwissenschaften	45
	Erziehung, Unterricht	27
	Technologie etc.	54

Schweden:	Insgesamt	1 682
Darunter:	Mathemat., Astronomie	35
	Naturwissenschaften	36
	Unterricht, Jugendschriften	176
	Technologie etc.	125

Vereinigte Staaten von Nordamerika:

	Neue Bücher	Neue Auflagen	Darunter amerik. Autoren	Fremde Autoren	Eingeführte englische Werke
Insgesamt	4490 (5496)	1866 (2645)	3378 (4701)	1388 (2122)	1090 (1318)
Darunter:					
Mathemat., Physik ..	160 (250)	24 (42)	99 (215)	24 (21)	61 (56)
Erziehung etc.	431 (529)	210 (31)	347 (366)	196 (136)	98 (58)

Die entsprechenden Zahlen für das Jahr 1901 sind in Klammern angegeben, so daß sich insgesamt eine beträchtliche Steigerung im Jahre 1901 herausstellt, die sich in den einzelnen Kolonnen beläuft auf:

Insgesamt: 22% 42% 21% 53% 21%.

5. Zeitschriften erschienen in Deutschland im Jahre 1901:

	Insgesamt	5545
Darunter für:	Mathematik und Astronomie	18
	Naturwissenschaften	138
	Erziehung, Unterrichtswissensch.	262
	Bau-, Ingenieurwesen etc.	224

6. Dissertationen und Programme erschienen in Deutschland 1900/1901 insgesamt: 3802, davon über exakte Wissenschaften, Mathematik, Physik, Astronomie, Meteorologie: 324.

An die Eröffnung der Literaturausstellung schloß sich unmittelbar diejenige der Modellausstellung, welche von Disteli-Straßburg mit folgenden Worten eingeleitet wurde:

Hochgeehrte Versammlung!

Im Auftrage des vorbereitenden Ausschusses habe ich die Ehre, die Modellausstellung, die Sie heute freundlich mit Ihrer Gegenwart beehren, ebenfalls mit einigen Worten zu eröffnen.

So einleuchtend auch der Vorschlag erscheinen mochte, mit dem gegenwärtigen Kongresse eine Ausstellung mathematischer Modelle und Apparate zu verbinden, wäre doch seine erfolgreiche Durchführung ohne das günstige Entgegenkommen, das er überall gefunden, nicht möglich gewesen, und ich erachte es daher als eine erste und angenehme Pflicht, namens der Ausstellungskommission die ihren Bestrebungen zuteil gewordene sympathische Aufnahme aufs Wärmste zu verdanken.

Unser Dank gebührt vor allem dem Großherzoglich Badischen Ministerium für die wertvolle und fördernde Unterstützung, deren sich unser Projekt von Anfang an zu erfreuen hatte; sodann den leitenden Behörden der Universität Heidelberg, welche uns diesen künstlerisch ausgestatteten Saal in entgegenkommender Weise zur Verfügung stellten, sowie dem archäologischen Institut der Universität, welches der Kommission die gesamte vorhandene Projektionseinrichtung überlassen hat. Er gebührt ferner den wissenschaftlichen Instituten und allen Herren Ausstellern für die gewährte Bereitwilligkeit, auf unsere Wünsche einzugehen und die Ausstellung mit ihren Erzeugnissen zu beschicken, insbesondere dem Landesdirektorium der Provinz Hannover, welches es uns ermöglichte, das Modell der Leibnizschen Rechenmaschine im Original ausstellen zu können.

Es liegt in der Natur der Sache, daß im Gegensatze zur literarischen Produktion, die sich über das Gesamtgebiet der mathematischen

Disziplinen erstreckt, der Konstruktion mathematischer Modelle und Apparate engere Grenzen gezogen sind. Trotzdem besteht auch hier eine bemerkenswerte Vielseitigkeit.

Die gegenwärtige Ausstellung will nun keineswegs den Anspruch auf Vollständigkeit bezüglich der Leistungen erheben, die auf dem genannten Gebiete wissenschaftlicher Betätigung zu verzeichnen sind. Indem für die Kommission der Gedanke leitend war, nur solche Modelle zur Ausstellung zu bringen, welche in den ungefähr zehn letzten Jahren neu hinzugekommen sind, also von allen denjenigen Erzeugnissen abzusehen, die auf der glänzenden Ausstellung vom Jahre 1893 in München*) zusammen gestellt waren, gelang es, der Ausstellung zweckmäßig ein übersichtliches Maß räumlicher Ausdehnung zu geben, und erklärt sich aus diesem Grunde der beschränkte Umfang des jetzt Gebotenen.

Der Überblick über das Ganze ist daher ein sehr einfacher und bedarf kaum eines Kommentars. Es ist an dieser Stelle nicht möglich auf Einzelheiten einzugehen und die Fortschritte alle aufzuzählen, die Ihrem kundigen Blick beim Besuche der Ausstellung nicht entgehen werden. Ich darf mich begnügen zu erwähnen, daß unter den Ausstellern mathematischer Instrumente und Apparate Firmen wie Carl Zeiß in Jena, Chateau Frères in Paris, G. Coradi in Zürich und andere vertreten sind, während unter den ausgestellten Modellen zur Geometrie, Kinematik und mathematischen Physik neben zahlreichen anderen Darbietungen nur die „Sammlung mathematischer Modelle“ von H. Wiener in Darmstadt und der Verlag der Firma M. Schilling in Halle a. S. hervorgehoben werden mögen.

Noch sei mir gestattet darauf aufmerksam zu machen, daß neben der bereits erwähnten Leibnizschen Rechenmaschine, über welche heute Herr Runge-Hannover noch sprechen wird, die Ausstellung noch ein zweites historisches Modell besitzt: nämlich das Original des Modells der Fläche dritter Ordnung mit 27 reellen Geraden, entworfen von weiland Professor Christian Wiener in Karlsruhe, welches Original uns von der dortigen Großh. Technischen Hochschule freundlichst zur Verfügung gestellt wurde.

Erlauben Sie mir ferner noch einige geschäftliche Mitteilungen machen zu dürfen. Zunächst sind zur nähern Orientierung im Saale alle Modelltische mit den Namen der betreffenden Aussteller versehen und sind vielen Ausstellungsgegenständen Kataloge, Abhandlungen oder

*) Vergleiche: Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente nebst Nachtrag, herausgegeben von Prof. Walter Dyck, München 1892 u. 1893.

Zeichnungen hinzugefügt, deren Sie sich beim Besuche der Ausstellung nach Gutdünken bedienen mögen.

Die Ausstellung ist täglich geöffnet vormittags 9 bis 1 Uhr, nachmittags 3 bis 7 Uhr und bin ich in der angenehmen Lage mitzuteilen, daß eine Reihe von Kongreßteilnehmern sich bereit erklärt hat, Interessenten während der Ausstellungstage Modelle und Apparate mit erläuternden Vorträgen zu demonstrieren. Zeit und Thema dieser in der Ausstellung zu haltenden Vorträge werden jeweils durch Anschlag im Empfangsbureau, sowie an den Saaleingängen zur Ausstellung bekannt gegeben werden.

Neben Modellen und Apparaten bildet aber in neuerer Zeit auch die Verwendung des elektrischen Projektionsapparates ein wertvolles Hilfsmittel im Gebiete des mathematischen Unterrichtes, zumal wenn es sich um Vorträge vor einem ausgedehnten Auditorium handelt.

Der vorbereitende Ausschuß glaubte daher durch Veranstaltung einiger Demonstrationen nach verschiedenen Projektionsarten versuchen zu sollen, Ihnen ein Bild dieser modernen Darstellungsmethoden zu geben.

Zu diesen Demonstrationen hat sich die Firma Carl Zeiß in Jena bereit erklärt, welche Ihnen die Verwendung und Wirkungsweise ihres Epidiaskopes an einer Reihe von Lichtbildern diverser Gegenstände und verschiedenen Genres zeigen wird. Sodann darf ich bereits zwei Vorträge von Herrn H. Wiener-Darmstadt anmelden, welcher an einer Serie von Schattenbildern seiner Modelle die Entwicklung geometrischer Formen demonstrieren wird, sowie einen Vortrag von Herrn F. Schilling-Göttingen über die Frage: Welche Vorteile gewährt die Benützung des Projektionsapparates im mathematischen Unterricht? Diese Vorträge finden, soweit die Zeit reicht, heute statt und werden morgen Freitag nachmittags 3 Uhr in diesem Saale fortgeführt werden.

Indem ich, hochgeehrte Anwesende, zum Schlusse meiner Mitteilungen gerne der Hoffnung Ausdruck gebe, daß die Ausstellungen trotz etwaiger Mängel und Unvollkommenheiten an innerem Werte genug zu bieten vermögen, um Ihres Interesses würdig zu sein, gestatte ich mir noch, Sie nach Beendigung der heutigen Eröffnungsdemonstrationen namens der Ausstellungskommission zu einem Rundgange durch den Saal ergebenst einzuladen.

Nach Eröffnung beider Ausstellungen fand der erste Vortrag statt, indem Runge-Hannover historische Bemerkungen zur Leibnizschen Rechenmaschine machte, die er am Original erläuterte mit der gleichzeitigen Ankündigung, seine vorläufigen Mitteilungen mit Demonstrationen Freitags in der Ausstellung weiter ausführen zu wollen.

Seine historischen Bemerkungen finden sich im Referat zusammengefaßt unter Abschnitt C.

Nachdem sodann der Saal verdunkelt worden war, schloß sich an diesen Vortrag die erste Demonstration mit Lichtbildern, ausgeführt mit dem Epidiaskop Zeiß und geleitet vom Vertreter dieser Firma. Nach einer kurzen Beschreibung der Einrichtung und Wirkungsweise des Apparates erfolgten zahlreiche Projektionen undurchsichtiger Körper von flacher Form mittels auffallendem Licht (episkopische Projektion), sowie von durchsichtigen Körpern (Diapositive) für durchfallendes Licht (epidiaskopische Projektion). Während bei den episkopischen Projektionen namentlich die brillante Wiedergabe der Farben auffiel, zeigten die epidiaskopischen Bilder hauptsächlich in der Wiedergabe landschaftlicher Motive eine weitgehende Schärfe und plastische Vertiefung, selbst bei bedeutenden Vergrößerungen.

Nach Beendigung dieser Veranstaltung trat an Stelle des Epidiaskops der Projektionsapparat Schuckert. Mit diesem Apparate entwarf H. Wiener-Darmstadt eine Lehre der Entwicklung geometrischer Formen unter Vorführung von Modellen in Schattenbildern. Dieser Vortrag wurde Freitag nachmittags durch einen zweiten ergänzt. Der unter Abschnitt C aufgeführte diesbezügliche Bericht gibt den Inhalt beider Vorträge gemeinsam wieder, geordnet nach den leitenden Gesichtspunkten und unter Hinzufügen einiger weiterer erläuternden Bemerkungen, zu denen in den Vorträgen selbst die Zeit fehlte, aber bei den Führungen durch die Sammlungen Gelegenheit gegeben war.

Mit Schluß des ersten der eben genannten Vorträge war die zweite in Aussicht genommene Demonstration beendet, und die Stunde herangerückt, mit welcher nach einer kurzen Besichtigung der Ausstellung der erste Ausstellungstag programmgemäß seinen Abschluß fand.

Die Ausstellung wurde Freitag den 12. August morgens 9 Uhr wieder geöffnet und hielt daselbst $9^1/_4$ Uhr zunächst Minkowski-Göttingen vor der Sektion I seinen Vortrag; „Zur Geometrie der Zahlen“ unter Vorführung zahlreicher Lichtbilder, die mittels des Epidiaskops im unverdunkelten Raume entworfen wurden. Nach dem Vortrage fanden für die Anwesenden Erklärungen der ausgestellten Modelle durch Mitglieder der Ausstellungskommission und die Vertreter verschiedener Firmen statt.

Ein besonders reges Leben aber entfaltete sich in der Ausstellung während der Demonstrationen der Sektion IV. für Angewandte

Mathematik, die von $11^1/_2$ bis $1^1/_2$ Uhr in dem Ausstellungssaale stattfanden. Außer den bereits in der Sektion angemeldeten seien insbesondere hervorgehoben die folgenden interessanten Vorträge und Versuche, die teils vor teils nach der Sitzung bei gruppenweiser Führung stattfanden und auf welche durch Anschlag hingewiesen worden war:

A. Greenhill: Demonstrationen am Gyroskop, dem deformablen Hyperboloid Darboux und diversen Modellen der theoretischen und praktischen Mechanik.

A. Kempe: Erklärung und Demonstration eines Gelenkmechanismus zur Teilung des Winkels.

F. Klein: Demonstrationen mit dem Maxwellschen Kreisel, dem Gyrostaten, den Flüssigkeitskreiseln und Erklärung der Gipsmodelle über die Ausbreitung der Wärme in einem Stabe.

L. Prandtl: Vortrag über Flüssigkeitsbewegung bei kleiner Reibung mit Hilfe von Lichtbildern des Epidiaskops.

C. Runge: Erklärung und Demonstrationen der Leibnizschen Rechenmaschine am Original.

M. Brückner: Erklärung der gleicheckig-gleichseitigen Polyeder.

S. Finsterwalder: Über die deformablen Drahtgeflechte von Minimalflächen; Erklärung des Gletschermodells und des photogrammmetrischen Apparates.

F. Schilling: Erklärung neuer kinematischer Modelle zur Verzahnungslehre der Stirnräder.

A. Sommerfeld: Demonstration des Töplerschen Universalapparates.

H. Wiener: Erklärung und Vorführung zahlreicher Modelle aus „H. Wieners Sammlung mathematischer Modelle“ insbesondere der beweglichen Drahtmodelle.

Die Ausstellung wurde sodann nachmittags 3 Uhr wieder geöffnet und fand um 4 Uhr die angekündete Fortsetzung größerer Lichtbilderdemonstrationen statt.

F. Schilling-Göttingen eröffnete dieselbe mit einer Besprechung der Frage: Welche Vorteile gewährt die Benutzung des Projektionsapparates im mathematischen Unterricht?, bei welcher Gelegenheit an einer großen Zahl von Lichtbildern verschiedenartig hergestellter Diapositive unter Benutzung des Epidiaskops die mannigfaltige Verwendung des Projektionsapparates überhaupt, insbesondere in der darstellenden Geometrie, graphischen Statik, Photogrammetrie, Perspektive und Kinematik dargelegt wurde. Das Referat dieses Vortrages, welches gleichzeitig auch die auf diesen Vortrag folgende Ergänzung umfaßt, folgt unter Abschnitt C.

An diese Demonstrationen reihte sich die Fortsetzung des Donnerstags begonnenen Vortrages von H. Wiener: Entwicklung geometrischer Formen, über welchen Vortrag gleichzeitig mit dem ersten in dem unter dieser Überschrift gegebenen Bericht unter C referiert ist. Der Vortragende entwarf mittels des Projektionsapparates eine stattliche Zahl von Schattenbildern diverser Modelle, durch welche u. a. die Entstehung aller Besonderheiten, die bei der Projektion geometrischer Linien- und Flächengebilde auftreten, insbesondere die Umrißlinien von Rotations- und Schraubenflächen, sowie ihre Beziehungen zu den Haupttangentenkurven durch rotierende Drahtmodelle erklärt und anschaulich dargelegt wurden.

An diese Ausführungen schloß sich alsdann der bereits erwähnte zweite Vortrag von F. Schilling, welcher die episkopische Projektion verschiedener beweglicher kinematischer Modelle insbesondere zur Verzahnungslehre zum Gegenstand hatte.

Damit war auch die für den zweiten Ausstellungstag in Aussicht genommene Reihe von Lichtbilderdemonstrationen beendet, während die Ausstellung selbst bis Sonntag den 16. August mittags geöffnet blieb.

Der zahlreiche Besuch, dessen sie sich erfreute, darf wohl als eine Bestätigung angesehen werden, daß die Veranstaltungen ihren Zweck erreichten und das Interesse nachhaltig wachzuhalten vermochten. Gab die Literaturausstellung ihrerseits ein Bild von dem bedeutenden Umfange der Produktion auf allen Gebieten mathematischer Betätigung, so zeigte anderseits die Modellausstellung eine immerhin beachtenswerte Vielseitigkeit der Hilfsmittel, die dem Mathematiker zur Veranschaulichung seiner Ideen zu Gebote stehen.

In diesem Sinne werden wohl jedem Besucher der Ausstellung Modelle und Lichtbilder von schätzenswerter Bedeutung im Unterricht erschienen sein, nicht als Mittel, um an eigener Gedankenarbeit zu sparen oder die Konstruktionen im Zeichensaal durch eine flüchtige Folge fertiger Lichtbilder zu ersetzen, wohl aber als Träger und Vermittler von Anschauungen, Vorstellungen und Erfahrungen, um bei dem stetig wachsenden Umfang der mathematischen Disziplinen das Gute erfolgreich zu verbreiten und das Interesse für Neues dauernd und belebend anzuregen.

B. Verzeichnis der Aussteller.

A. Literaturausstellung.

An der Literaturausstellung beteiligten sich die folgenden in alphabetischer Ordnung aufgeführten Firmen des In- und Auslandes:

I. Deutschland.

1. Baumgärtners Buchhandlung, Leipzig.
2. G. Braunsche Hofbuchdruckerei u. Verlag, Karlsruhe.
3. Ferd. Dümmlers Verlagsbuchh., Berlin.
4. Dürrsche Buchhandlung, Leipzig.
5. Wilhelm Engelmann, Verlagsbuchhandlung, Leipzig.
6. G. Freytag, Leipzig.
7. G. J. Göschensche Verlagshandlung, Leipzig.
8. Robert Grassmanns Verlag, Stettin.
9. Helwingsche Verlagsbuchhandlung, Hannover.
10. Ferdinand Hirt, Breslau.
11. C. A. Kochs Verlag (H. Ehlers), Dresden.
12. M. Krayn, Verlagsbuchhandlung, Berlin.
13. Mayer & Müller, Berlin.
14. Metzlersche Buchhandlung, Stuttgart.
15. Moritz Schauenburg, Lahr.
16. Ferdinand Schöningh, Paderborn.
17. Leonhard Simion Nachf., Berlin.
18. Eugen Strien's Verlag, Halle a. S.
19. B. G. Teubner, Leipzig.
20. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig.
21. J. J. Weber, Leipzig.
22. Konrad Wittwer, Sort.- u. Verlagsbuchhandlung, Stuttgart.
23. Hermann Zieger, Leipzig.

II. Ausland.

1. The Royal Irish Academy, Dublin.
2. Augustin Allné.
3. Wilhelm Braumüller, Wien.
4. Carvallo, Examinateur de sortie à l'École polytech., Paris, rue Clovis 1.
5. Lauro Clariana Ricart, Catedrático en la Universidad Barcelona, Balmes 67.
6. D. Coelingh, Amsterdam.
7. Armand Colin, Librairie, Paris, rue de Mézières 5.
8. Ch. Delagrave, Libraire, Paris, rue Soufflot 15.
9. S. Dickstein, Professor, Warschau, Marszalkowska 117.
10. G. Eneström, Bibliothekar, Stockholm, Grefturegatan 77.
11. Victorino Garcia de la Cour, Catedrático en la Universidad Madrid.
12. Zoel de Galdeano, Catedrático en la Universidad Zaragoza, Cóso 99.
13. Gauthier-Villars, Imprimeur-Libraire, Paris.
14. Georg & Co., Librairie, Genève.
15. Carl Gerolds Sohn, Verlagshandlung, Wien.
16. Gesellschaft der Wissenschaften, Christiania.
17. R. Giusti, Livorno.
18. U. Hoepli, Mailand.
19. Alfred Hölder, Wien.
20. Holländ. Gesellsch. der Wissenschaften, Haarlem.
21. Andr. Fred. Høst & Son, Kopenhagen.
22. Ad. Hoste, Imprimeur-Editeur, Gand.
23. A. Macfarlane, Professor, Gowrie Grove, Chatham, Ontario, Canada.
24. Murillo, Madrid.
25. B. Pellerano, Neapel.
26. J. K. Puzyna, Professor, Lwow (Lemberg).
27. Fr. Řivnáč, Prag.
28. J. Ruis y Casas, Catedrático en la Universidad Zaragoza, Calle de San Miguel 30.
29. Kgl. Danske Widenskab. Selskab, Kopenhagen.
30. A. W. Sijthoff, Leiden.
31. E. Spoerri, Pisa.
32. F. Gomes Teixeira, Professor, Porto.

33. Eduardo Torroja y Caballé, Catedrático en la Universidad, Madrid.
34. Vuibert & Nony, Librairie, Paris, Boul. St. Germain 63.
35. A. Wassilieff, Professor, Universität, Kasan.
36. N. Zanichelli, Bologna.

B. Modellausstellung.

Zur leichteren Übersicht mögen die ausgestellten Gegenstände in zwei Gruppen gesondert aufgeführt werden. Sie verteilen sich in folgender Weise auf die in alphabetischer Ordnung zusammengestellten Aussteller der verschiedenen Länder:

a) Instrumente und Apparate.

1. Bombicki und Lamm, Berlin.
   Rechenmaschine „Triumphator".
2. Chateau Frères, Firma für Präzisionsmechanik, Paris.
   Kurvenerzeugungsapparate: Campylograph Dechevrens, Zirkel Schwartzbard; Torrès' Maschine zur Auflösung trinomischer Gleichungen: Winkelteiler nach Longchampt und Malassis-Chateau. Zahlreiche Zeichnungen und Photographien der erzeugbaren Kurven.
3. G. Coradi, Mathematisch-mechanisches Institut, Zürich.
   Differentiator G. Coradi; Integraph System Abdank-Abakanowicz; Parabolograph Payne-Coradi; Harmonischer Analysator nach Prof. O. Henrici, London.
4. Göttingen, Mathematisches Institut der Universität.
   Kreisel nach Maxwell; Gyrostat nach Lord Kelvin; Flüssigkeitskreisel nach Prof. Schwarzschild-Göttingen. Verschiedene Diapositive zur kinematischen Erzeugung von Kurven; Modelle und Tafeln zur Funktionenlehre, Flächentheorie und mathematischen Physik.
5. A Greenhill, Professor, London.
   Das hängende und das gestützte rotierende Rad (Gyroskop), das deformable Hyperboloid Darboux; verbesserter Flaschenzug; Modelle zur Mechanik.
6. Grimme, Natalis & Co., Maschinenfabrik Braunschweig.
   Die Rechenmaschinen „Brunsviga" und „Addograph".
7. A. Kempe, Gymnasialoberlehrer, Rotterdam.
   Gelenkmechanismus zur Teilung des Winkels.
8. Landesdirektorium der Provinz Hannover.
   Original der Leibnizschen Rechenmaschine.

9. O. Leuner, Mechanisches Institut der K. Technischen Hochschule, Dresden.
   Der Töplersche Universalapparat für den Mechanik-Unterricht.
10. J. Schnöckel, K. Landesvermesser, Aachen.
    Apparat zur mechanischen Bestimmung des Inhaltes und der Momente verschiedener Ordnung ebener Flächenstücke.
11. Wien, K. u. K. Technische Hochschule.
    Zyklograph und Ellipsograph nach Prof. Th. Schmid, ausgestellt von Mechaniker Penocny, Wien.
12. Carl Zeiß, Optische Werkstätte Jena.
    Das Epidiaskop und Episkop. Reichhaltige Sammlung optischer, zum Teil für Demonstrationszwecke zerlegbarer Instrumente: Neue Stereoskope, Stereometer, Verantlupen, Relieffernrohre, Feldstecher, photographische Apparate, diverse Diapositive.

b) Mathematische Modelle.

1. M. Brückner, Gymnasialoberlehrer, Bautzen.
   Große Sammlung von Kartonmodellen der gleicheckig-gleichseitigen Polyeder.
2. E. Estanave, Dr. ès sciences, Paris.
   Hyperbolograph.
3. S. Finsterwalder, Professor, München.
   Diverse bewegliche Drahtmodelle von Minimalflächen; Modelle zu praktischen Problemen der Kugelteilung; Gletschermodell und neuer photogrammetrischer Apparat.
4. Jena, Mathematisches Institut der Universität.
   Reguläre Raumeinteilung bei Nichteuklidischer Maßbestimmung; räumliches Netz eines regulären Körpers im vierdimensionalen Raum von Prof. Hoßfeld in Eisenach.
5. Karlsruhe, Großh. Technische Hochschule.
   Originalmodelle der Fläche III. Ordn. mit 27 reellen Geraden, entworfen von weiland Professor Christian Wiener; Vorlesungsmodelle zur darstellenden Geometrie (ausgeführt vom Mechaniker F. Steflitschek, Wien); der Perspektivapparat von Professor E. Brauer, Karlsruhe.
6. L. Klug, Professor, Klausenburg.
   Holzmodelle des Ringes und Schraubenrohrs mit Isophoten. Modelle des geraden, schiefen und des Plückerschen Konoids, sowie der geraden Normalenfläche des Kegels II. Ordng. nebst ihren Schattenbestimmungen.

7. C. Leist, Professor a. d. K. Technischen Hochschule, Berlin. Apparat zur Darstellung räumlicher Figuren für den Mechanikunterricht. (Vorlesungsmodell.)

8. M. Schilling*), Verlagshandlung, Halle a. S.

I. Mathematische Physik. Gipsmodell zur Darstellung der Gestaltsänderung einer schwingenden Saite, sowie

2 Gipsmodelle zur Theorie der Wärmestrahlung in einem Stabe nach Prof. F. Klein, Göttingen; konstruiert von Oberlehrer Dr. Schellenberg, Mülheim a. d. R.

3 Räumliche Drahtmodelle der elektrischen Äquipotential- und Kraftlinien nach Prof. O. Wiener, Leipzig.

II. Geometrie. 3 Kartonmodelle über die Krümmung der Flächen, nach Prof. Ch. Wiener, Karlsruhe.

5 Gipsmodelle der Flächen II. Ordnung zum Gebrauche für Studierende.

5 Fadenmodelle einiger einfacher Regelflächen: Hyperboloid, Paraboloid, Plückersches Zylindroid, Developpable der Raumkurve IV. Ordnung mit Doppelpunkt von Prof. H. Wiener, Darmstadt.

7 Fadenmodelle der Kegel III. Ordnung vom Geschlecht Null und Eins von Prof. H. Wiener, Darmstadt.

10 Gipsmodelle architektonischer Polyeder zum Unterricht in darstellender und projektiver Geometrie nach Prof. G. Hauck, Berlin.

Vorlesungsmodelle einer Durchdringung von Pyramide und Prisma, sowie einer projektiven Erzeugung der Kegelschnitte nach Prof. F. Schilling, Göttingen. Einzelne, sowie Systeme von Schraubenlinien mit der nämlichen Ganghöhe.

6 Modelle zur Theorie der kubischen Raumkurve: Kubische Ellipse, Hyperbel, Parabel und Horopter, auf durchsichtigen Zelluloidzylindern, dargestellt von Dr. W. Ludwig, Karlsruhe.

2 Gipsmodelle für die Abbildung der projektiven Ebene auf eine im Endlichen geschlossene singularitätenfreie Fläche von Dr. W. Boy, Göttingen.

Gipsmodell der Grenzfläche eines parabolischen Strahlsystems nach Prof. K. Zindler, Innsbruck.

---

*) Für eine ausführliche Erklärung und Beschreibung der oben angeführten Modelle verweisen wir auf den „Katalog mathematischer Modelle", veröffentlicht durch die Verlagshandlung M. Schilling, Halle a. S. 1903, welcher der Ausstellung beigegeben war.

Gipsmodell einer Fläche III. Ordnung mit parabolischem Punkt nach Prof. P. Stäckel, Kiel.

III. Kinematik. 3 Modelle zur Kreiseltheorie: Die epi- und perizykloidische Drehung eines kraftfreien, starren Körpers und ihre Übergangsform nach Prof. H. Graßmann, Gießen.

12 Modelle von Prof. F. Schilling*), Göttingen. Erzeugung der Trochoiden, Zykloiden und Kreisevolventen; Zwillingskurbelgetriebe und Inversoren nach Peaucellier, Hart und Sylvester-Kempe.

11 Modelle von Prof. F. Schilling zur Verzahnungstheorie der Stirnräder. Erzeugung der Pascalschen Kurven. Die Methoden der Zykloiden- und Evolventenverzahnung der Stirnräder; Methoden der Hilfspolbahnen, der Äquidistanten, der sekundären Polbahnen und der Triebstockverzahnung.

9. F. Steflitschek, Mechaniker, Wien.

Universalapparat der Durchdringungen von Prismen- und Zylinderflächen mit beliebigen Körpern. Universalschnittebene oder Profiltaster für beliebige Körperquerschnitte.

10. B. v. Tötössy, Professor, Budapest.

Mehrere Bände ausgewählter Lösungen von Problemen der projektiven und darstellenden Geometrie, die anläßlich der Staatsprüfungen von der K. K. Technischen Hochschule Budapest gestellt wurden.

11. W. Voigt, Professor, Göttingen.

Modelle zur Elastizität, der Pyro- und Piezoelektrizität der Krystalle.

12. H. Wiener in Darmstadt und Mathematisches Institut**) der Großh. Technischen Hochschule zu Darmstadt (unter Leitung von Prof. H. Wiener***)).

I Ebene Gebilde. Projektionsmodelle.

II. Ebenflächige Raumgebilde. Die 5 regelmäßigen (Platonischen) Vielflache in Draht, sowie die höheren (Keplerschen

---

*) Vergleiche die Fußnote Abschnitt C, S. 755.

**) Man vergleiche den Zusatz I im Anhang zu H. Wieners Vortrag „Entwicklung geometrischer Formen".

***) Ein ausführliches Verzeichnis sämtlicher im math. Institut der Techn. Hochschule zu Darmstadt unter Leitung von Prof. H. Wiener angefertigten Modelle, insbesondere der in der Heidelberger Ausstellung enthaltenen, kann von dem genannten Institut bezogen werden. Die wichtigeren erscheinen in „H. Wieners Sammlung mathematischer Modelle", deren Verlag vom 1. Jannar 1905 ab B. G. Teubner in Leipzig übernommen hat.

Über die einzelnen Modelle finden sich erläuternde Bemerkungen in H. Wieners Vortrag S. 739, sowie in dem Anhang dazu S. 746.

und Poinsotschen) Vielflache mit Fäden in Drahtgestellen durch ihre Kanten dargestellt. Regelmäßige Vielstrahlen als geschlossene Spiegelsysteme.

In Kanten biegbare (offene) Vielflache (vergl. unten: „Flächenbiegung").

III. Zylinder und Kegel 2. Ordnung in Kreisschnitten beweglich (vergl. „Flächen 2. Ordn."). Die Kegel 3. Ordnung in 7 Gestalten (Fadenmodelle).

IV. Raumkurven und abwickelbare Flächen. Krümmung und Torsion.

Singularitäten der Raumkurven: Fadenmodelle ihrer abwickelbaren Flächen in je 8 Fällen für viererlei Lage der betrachteten Kurvenstelle gegen das unendlich Ferne.

Die 4 Fälle der Raumkurve 3. Ordnung in ihrer Lage gegen das unendlich Ferne, als Punktkurve mit ihren Asymptoten (Drahtmodelle), als Tangentenkurve (Fadenmodelle), und als Durchdringung (desgl.). In denselben dreierlei Darstellungen die Raumkurve 4. Ordnung erster Art mit ihren wesentlich verschiedenen Gestalten.

Rationale Lissajoussche Kurven.

Transzendente Raumkurven: Schraubenlinie mit Schmiegungsellipse. Raumkurve, die aus der Schraubenlinie mittels einer Imaginär-Projektion abgeleitet ist. — Kollineares Raumbild der Schraubenlinie. Logarithmische Spirale auf dem Kegel. Geodätische Linien auf dem Kegel mit 1 und 2 Doppelpunkten. Loxodrome auf der Kugel. Haupttangentenkurve einer schiefen geschlossenen Regelschraubenfläche, auf der Drehfläche einer Hyperbel gelegen, deren eine Asymptote Drehachse ist.

V. Regelflächen: Zylindroide (vgl. auch unter „Flächen 2. Ordn.").

VI. Flächen 2. Ordnung. Gips- und Fadenmodelle der Flächen 2. Ordnung in verschiedenen Ausführungen. Drahtmodelle der Hauptschnitte.

Bewegliche Modelle mit 2 Scharen gerader Erzeugender und solche mit zwei Scharen von Kreisschnitten aus Drähten, die an Kreuzungen durch „H. Wieners geschränktes Verbindungsgelenk" verbunden sind. Geradliniges Dreh-Hyperboloid und Paraboloid als bewegliche Fadenmodelle ohne angehängte Gewichte.

VII. Dreh- und Schraubenflächen. Kreisring und Drehfläche einer zur Sinuslinie affinen Meridiankurve (Drahtmodelle auf einer Achse drehbar). Geschlossene Regel-Schraubenfläche (Wendelfläche und schiefe) als Fadenmodelle und als Drahtmodelle mit eingesetzten Haupttangentenkurven. Röhrenschraubenfläche aus Drahtkreisen).

VIII. Büschel von Flächen 2. Ordnung. Sämtliche durch v. Staudt aufgestellte 14 Arten, jede mit den wichtigsten durch Reellitätsunterschiede bedingten Hauptfällen (27 Fadenmodelle). Hierunter Darstellung der imaginären Geraden 2. Art (nach v. Staudt), Berührung von Hyperboloiden, entsprechend den hyperboloidischen Zahnrädern, Durchdringungen in Raumkurven 4. Ordnung 1. Art.

IX. Scharen von Flächen 2. Ordnung. Flächen gleichen Böschungswinkels (gleichen Gefälles) über einem horizontalen Kegelschnitt in verschiedenen Ausführungen und zwar über Ellipse, Parabel und Hyperbel (letzterer Fall nach einem von C. Rodenberg angegebenen Modell).

X. Beleuchtung von Flächen. Gipsmodelle mit farbiger Abtönung der durch Lichtgleichen getrennten Bereiche. Kugel, Ringfläche; Urne als Drehfläche einer zur Sinuslinie affinen Meridianlinie und als Drehfläche einer aus Geraden und Kreisbögen zusammengesetzten Meridianlinie. Abwickelbare und windschiefe Schraubenfläche. Elliptisches und hyperbolisches Paraboloid. Böschungsfläche über einer Ellipse.

XI. Geländedarstellungen. Gipsmodelle mit Höhenlinien, desgleichen mit Kurven gleicher Flächensteilheit (gleichen Gefälles). Reliefkarten zur Feststellung der Wirkung verschiedener Überhöhung.

XII. Flächenbiegung. Die Biegung einer Fläche mit zwei Scharen kongruenter geodätischer Linien, die auch für endliche Biegungen 2 Systeme einander zugeordneter Biegungslinien bleiben (Vossische Fläche), veranschaulicht durch endliche Biegung eines aus ebenen Vierecken bestehenden Vielflaches.*)

*) Vergl. die Verh. d. Ges. d. Naturf. und Ärzte, 75. Vers. zu Cassel, S. 29.

C. Vorträge.

Über die Leibnizsche Rechenmaschine.

Von

C. Runge aus Hannover.

Darf ich die Aufmerksamkeit der Versammlung auf einen Gegenstand der Ausstellung lenken, den das Landesdirektorium der Provinz Hannover uns freundlichst zu Verfügung gestellt hat. Sie sehen hier die Rechenmaschine, die von Leibniz erfunden und zu seinen Lebzeiten ausgeführt worden ist. Sie ist deshalb so interessant, weil sie in wesentlichen Dingen mit der modernen Rechenmaschine von Thomas übereinstimmt. Allerdings ist bei der modernen Rechenmaschine die Zehnerübertragung weit vollkommener eingerichtet. Die Schwierigkeit, die hierbei überwunden werden mußte, besteht hauptsächlich in der Übertragung der Zehner für den Fall, daß mehrere Übertragungen sich aufeinander stützen. Wenn z. B. zu 9999 die Zahl 1111 addiert werden soll, so sind die Zehnerübertragungen voneinander unabhängig. Die Leibnizsche Maschine würde diese Rechnung richtig ausführen. Wenn dagegen zu 9999 die Zahl 1 addiert werden soll, so wird jede folgende Zehnerübertragung erst durch die vorhergehende veranlaßt. Die Leibnizsche Maschine würde nur die ersten beiden Neuner in Null verwandeln und ihr Ergebnis würde 9900 statt 10 000 sein. Diesem Mangel hat Leibniz dadurch abzuhelfen gesucht, daß er Signale angebracht hat, die in solchen Fällen das Ausbleiben der Zehnerübertragungen erkennen lassen. Sie sehen an der hinteren Seite der Maschine fünfeckige Scheiben an den Achsen der Räder, welche die Zehnerübertragung vorbereiten. Nach Vollendung der Rechnung sollten diese Scheiben so stehen, daß die oberste Seite jedes Fünfecks horizontal ist. Bleibt nun eine vorbereitete Zehnerübertragung aus, so bleibt das Fünfeck schief stehn. Der Rechner hat dann mit der Hand das Fünfeck in die normale Lage zu bringen, wodurch die ausgebliebene Zehnerübertragung nachträglich bewirkt wird.

Auch bei der modernen Thomasschen Rechenmaschine bleibt die Zehnerübertragung unter Umständen aus, aber allerdings erst wenn eine weit größere Anzahl von Übertragungen sich aufeinander stützen. Für diesen Fall hat Burkhardt bei seiner Ausführung der Thomasschen Rechenmaschine ähnlich wie Leibniz ein Signal eingeführt. Es besteht in einem Glockenzeichen, dessen Ertönen den Rechner veranlaßt, mit der Hand die ausgebliebene Zehnerübertragung anzubringen.

Die mechanische Ausführung der Leibnizschen Maschine hat so viele Unvollkommenheiten, daß sie heute nicht ordentlich zu gebrauchen ist. Ja es ist zweifelhaft, ob sie jemals ordentlich funktioniert hat. Bei guter Ausführung würde sie dagegen durchaus brauchbar sein, wenn auch die Einrichtung der Signale für die ausbleibenden Zehnerübertragungen eine größere Aufmerksamkeit beim Rechnen verlangen würde als bei der modernen Form der Maschine.

(In der Sitzung der Sektion IV am Freitag 12. Aug. wurde die Maschine vorgeführt und im einzelnen erläutert.)

Entwicklung geometrischer Formen.

Von

H. Wiener aus Darmstadt.

I. Einleitende Betrachtungen.

Es ist eine Reihe von Abstraktionen nötig, die uns aus den physisch wahrgenommenen Gegenständen geometrische Gebilde liefern. Sieht man von Farbenunterschieden und Helligkeitstönen der Teile eines Gegenstandes ab, so bleibt nichts an ihm übrig, wodurch er sich unserem Auge darbieten könnte. Wenn man also die Form durch Abstraktion von Farbe und Helligkeit erklären will, so entsteht ein Widerspruch zwischen Idee und Darstellbarkeit der Form. In der Zeichnung geometrischer Formen behilft man sich von jeher dadurch, daß man das räumliche Gebilde durch Linien*) darstellt (schwarz auf weiß), und man wählt als solche entweder die Grenzen aus, in denen ihre einzelnen Flächen zusammenstoßen, oder Umrisse, oder andere Linien, wie es gerade der Zweck verlangt. Entsprechendes gilt, wenn geometrische Gebilde räumlich, also in Modellen dargestellt werden.

Fig. 1.

Daraus entspringt die Forderung, die man an geometrische Modelle stellen muß, wenn sie auf das Auge wirksam sein sollen: sie dürfen nicht aus Flächen, sondern sollen aus Linien bestehend dargestellt werden, d. h. das ganze Modell bestehe aus Draht-Stäben und -Kurven, vielleicht auch mit eingespannten Fäden. Als Beispiel diene ein Würfel, dessen Bild beistehend wiedergegeben ist, einmal, wenn man ihn, unter

*) In der Figur sind dies Körper von Druckerschwärze u. ä., die in ihrer geringen Breite und noch geringeren Höhe den gewollten Hinweis auf die Abstraktion der „Linie" geben.

Abstraktion der Helligkeitstönung seiner Flächen als Vollkörper, und das anderemal, wenn man ihn aus Kanten gebildet darstellt. Nebenbei ergibt sich für solche Ausführung der wichtige Vorteil gegenüber den Gips- oder Pappmodellen, daß von den Flächen auch die hinteren, sonst verdeckten Teile sichtbar gemacht werden. Die in ihren Kanten aus Draht hergestellten regelmäßigen Körper geben ein nützliches Beispiel.

II. Das Schattenwerfen von Modellen.

Sollen geometrische Modelle einem größeren Kreis vorgeführt werden, so hat das alleinige Vorzeigen mancherlei Nachteile; namentlich werden bei den sehr verschiedenen Sehrichtungen die Modelle jedem einzelnen wieder ein anderes Bild gewähren. Läßt man aber das in der geschilderten Weise durchsichtig gemachte Modell seinen Schatten auf einen hellen Schirm werfen, etwa auf einen durchscheinenden, der zwischen Zuschauer und Lichtquelle steht, so erhält man ein für alle Zuschauer gemeinsames Bild, das dasselbe ist, wie es ein an Stelle der Lichtquelle befindliches Auge sieht.

Die Vorteile der Benutzung von Modellen im mathematischen Unterricht (es ist nur davor zu warnen, die Modelle zum Ersatz des Tafelzeichnens nehmen zu wollen, statt zu seiner Ergänzung) treten beim Schattenwerfen besonders hervor. Die Konstruktion an der Tafel zeige z. B. eine Durchdringung von zwei Zylindern, dann gibt sie das Bild der Durchdringungskurve nur für eine Sehstrahlrichtung. Aber das gegen den Lichtstrahl verschiedentlich gedrehte Drahtmodell dieser Kurve gibt Bilder für alle möglichen Lagen des Sehstrahls. Leichter wie auf irgend eine andere Art treten hier die Übergänge von einer Form zur andern hervor. Als Beispiel mannigfaltiger Formen in verschiedenen Übergängen dienen wieder die Bilder der aus Drähten hergestellten regelmäßigen Körper.

Die im folgenden genannten Modelle wurden während des Vortrags alle in dieser Weise in Schattenbildern vorgeführt.

III. Über die Entwickelung geometrischer Formen.

Um aus gegebenen geometrischen Formen neue zu entwickeln, kennt man verschiedene Weisen. Die einfachste ist das Projizieren, und zwar von ebenen Gebilden in andere Ebenen, oder von Raumgebilden in die Ebene und in etwas erweiterter Auffassung, von räumlichen Gebilden in den Raum (Reliefperspektive). Als Ergänzung hierzu muß die Imaginärprojektion genannt werden, bei der reelle Teile der Figur in imaginäre übergehen und umgekehrt. Eine andere Weise besteht in der Erzeugung von Flächen aus Linien (aus Geraden, aus ebenen Kurven oder solchen des Raumes), wie z. B. die Erzeugung von Flächen durch Drehung und Schraubung einer Linie um eine Achse. Umgekehrt gewinnt man wieder Linien aus Flächen durch Beziehungen, die diese Flächen zu Ebenen (z. B. in ebenen Schnitten) oder zu Punkten oder Richtungen haben (z. B. Umrisse, Helligkeitskurven bei Beleuchtung aus einem Punkt oder in einer Richtung) oder aber durch Aufsuchen ausgezeichneter Linien und Liniensysteme auf der Fläche (parabolische Linie, Haupttangentenkurven, Krümmungslinien). Im folgenden sollen solche Entwickelungsweisen von Formen aus einfacheren betont werden, die auf das sinnliche Erfassen von Kurven und Flächen Bezug haben, d. h. auf ihre Darstellung im Bilde.

IV. Beispiele solcher Entwickelungen.

A. Kurven.

Zur Erläuterung der Projektion ebener Kurven (insbesondere der Parallelprojektion, der affinen Abbildung) werden Flachmodelle aus Draht vorgeführt: Regelmäßige Vielecke, Kreis, rechtwinklige Hyperbel, Parabel, Sinuslinie. Der Kreis mit umschriebenem Quadrat liefert bei Parallelprojektion Sätze über die Ellipse; die Sinuslinie hat ein affines Bild, das als Kunstform häufige Verwendung findet (vgl. später ihre Drehfläche, die Urne).

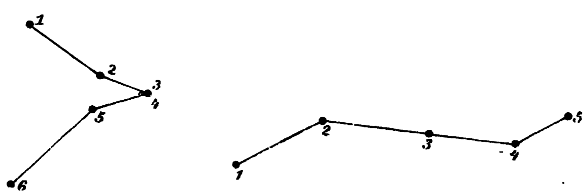


Fig. 2.

Bei Projektion von Raumkurven sind wichtig die scheinbaren Singularitäten: Spitze, wenn der Sehstrahl, Wendepunkt, wenn die Schmiegungsebene einer singularitätenfreien Stelle der Raumkurve projiziert wird. Bei Veränderung der Sehstrahlen sind Übergänge zu beobachten vom scheinbaren Doppelpunkt durch die Spitze hindurch zum isolierten Doppelpunkt, dessen Auftreten sich durch zwei benachbarte Wendepunkte andeutet. Als Modell dient ein beliebiges Stück gewundenen Drahtes; statt dessen ist sehr lehrreich ein Sehnenzug, der die obigen bei Projektion auftretenden Singularitäten an endlichen geraden Strecken versinnbildlicht (man vgl. die Figuren, wo einmal die Strecke 3 4, das anderemal die durch zwei aufeinanderfolgende Strecken gelegte Ebene 2 3 4 durch das Auge geht).

Von rationalen Raumkurven sind als einfachste Beispiele die von der 3. Ordnung zu erwähnen; sie haben in der Projektion stets einen Doppelpunkt (Knotenpunkt, Spitze oder isolierten Doppelpunkt). Von den vier durch ihr Verhalten im Unendlichen bestimmten Fällen eignen sich zwei noch zur Verdeutlichung der Entwickelung von Kurven durch stetiges Verändern, indem man die Kurve aus den (in den Modellen gleichfalls enthaltenen) drei Asymptoten (Fall der kubischen Hyperbel) oder aus der Geraden und der sie schneidenden parabolischen Asymptote (Fall der parabolischen Hyperbel) hervorgegangen denkt.

Von den Raumkurven 4. Ordnung sind diejenigen auch in Anwendungen wichtig, die als Durchdringungen von Flächen 2. Ordnung erscheinen, rationale mit Doppelpunkt (Knotenpunkt, Spitze oder isoliertem Doppelpunkt) und solche vom Geschlechte eins in ihren drei Gestalten: zwei paare Kurvenzüge, ein paarer Zug, zwei unpaare Züge.

Von transzendenten Raumkurven ist die wichtigste die gemeine Schraubenlinie. Ein Modell dieser Kurve zeigt gleichzeitig die Schmiegungsellipse (im Modell nach jedem beliebigen Punkt hin verschiebbar), d. h. den Schnitt der Schmiegungsebene mit dem Schraubenzylinder. Da diese Ellipse beim Projizieren der Raumkurve wieder zur Schmiegungsellipse wird, die insbesondere im Scheitel vierpunktig berührt, so liefert sie bei Konstruktion der Zykloiden (sowie der Sinuslinie) und ihrer affinen Bilder ein einfaches aus der Anschauung unmittelbar entnommenes Verfahren zur Konstruktion der Krümmung dieser Kurven.*)

Als Beispiel für die Imaginärprojektion**) sei eine Raumkurve erwähnt, die aus der Schraubenlinie abgeleitet wird. Durch Imaginärprojektion findet man aus dem Kreise die rechtwinklige (gleichseitige) Hyperbel, und durch dieselbe kinematische Konstruktion, die aus dem Kreise die Schraubenlinie liefert (wobei die Zeit der überstrichenen Fläche des Radius proportional gesetzt wird), erhält man aus der rechtwinkligen Hyperbel die genannte Raumkurve. Und wie sich die Schraubenlinie auf drei geeignet gewählte Koordinaten-Ebenen als Cosinuslinie, Sinuslinie und Kreis projiziert, so geschieht es mit unserer Kurve in die Linien des Cosinus hyperbolicus (Kettenlinie), des Sinus hyperbolicus und in die rechtwinklige Hyperbel.***)

---

*) In der Literatur finde ich die Schmiegungsellipse wohl für Bestimmung der Krümmung der Schraubenlinie und der Sinuslinie, nicht aber der Krümmung der Zykloiden benutzt.

**) Chr. Wiener, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Bd. I, S. 315 ff.

***) Weiteres vergleiche man im Zusatz III, S. 748.

Die wegen physikalischer Anwendung wichtigen ebenen und räumlichen Lissajousschen Kurven ergeben sich durch ähnliche kinematische Betrachtungen, wie die Schraubenlinie. Die ebenen lassen sich durch Projektion aus räumlichen Lissajousschen Kurven gewinnen, die durch Aufwickeln von Sinuslinien auf Drehzylinder entstehen. Durch Drehen des Zylinders erhält man bekanntlich Kurven, die sich durch größere oder kleinere Phasenverschiebungen unterscheiden. Für jedes (von 1 verschiedene) Schwingungsverhältnis lassen sich zweierlei solcher Raumkurven angeben.*) Bei räumlichen Lissajousschen Kurven läßt sich in jedem Modell nur eine bestimmte Phasenverschiebung darstellen; so sind für das Schwingungsverhältnis 2 : 3 : 5 in vier Modellen Beispiele wechselnder Phasenverschiebung angegeben.

B. Flächen.

Bei der bildlichen Darstellung von Flächen unter den zu Eingang erwähnten Abstraktionen gilt der Grundsatz, daß jede Fläche nur durch Kurven dargestellt werden kann, die auf ihr verlaufen. Geht die Fläche ins Unendliche, so ist sie, um vorstellbar zu sein, durch Randlinien auf ein endliches Stück abzuschneiden. Die Umrisse genügen nicht, um den Eindruck der Fläche als Grenze des Körpers hervorzurufen.

Da hier nämlich, nach Voraussetzung, von Helligkeitsunterschieden abgesehen wird, so müssen andre Zeichen der Rundung eintreten. Hierzu nimmt man Kurven, die von sichtbaren Teilen über den Umriß hinweg zu unsichtbaren Teilen führen. Das scheinbare Berühren des Umrisses ist hier das Bezeichnende. (Daß auch die Umrißlinien selbst vom Sichtbaren zum Unsichtbaren führen können, wird später besprochen.) Sind die Kurven der Flächen (wie bei Draht- oder Fadenmodellen) auch in ihrem hinteren Verlauf zu sehen, so kann in der Zeichnung, die diesen Modellen nachgebildet ist, die Umrißlinie entbehrt werden, und es entsteht ein klares Bild, wenn in der Zeichnung, wie bei Überschneidungen, die vorderen Teile gegenüber den hinteren Teilen kenntlich gemacht sind. Beim Schattenwerfen solcher Modelle sind die dem Schirme näheren Teile durch größere Schärfe von den anderen zu unterscheiden. Auf diese Weise geben Drahtmodelle von Flächen 2. Ordnung, die nur die Hauptschnitte, und falls die Flächen ins Unendliche gehen, Randkurven enthalten, ein deutliches Bild der Fläche.

---

*) H. Wiener, Vortrag, gehalten im naturw. Verein für Sachsen u. Thür. (Zeitschrift für Naturwissenschaften, 67. Bd., 1894, S. 231 ff.).

Durch Einfachheit der Erzeugung und deshalb auch der konstruktiven Behandlung zeichnen sich die Dreh- (Rotations-) und Schraubenflächen aus. Der Kreisring und die urnenförmige Drehfläche, deren Meridianlinie das affine Bild einer Sinuslinie ist, eignen sich als Beispiele; der Ring ist wegen der Fülle seiner besonderen Eigenschaften weniger zur Erörterung der allgemeinen Eigenschaften der Drehflächen dienlich als die Urne. Von den Schraubenflächen sind die Wendelfläche (gerade geschlossene Schraubenfläche) und die schräge geschlossene Schraubenfläche die Beispiele, die in der Technik die weiteste Verwendung zeigen und zur geometrischen Behandlung am fruchtbarsten sind. Die Schraubenröhrenfläche sei ihnen hinzugefügt.

Eine eigenartige optische Erscheinung, die eine neue Entwicklungsweise von Kurvensystemen aus Flächen in sich birgt, entsteht bei Modellen von Drehflächen durch Drehung um ihre Achse. Wir denken uns die Fläche durch eine gewisse Anzahl sich regelmäßig wiederholender Meridiane*) dargestellt, und sehen diese im Modell aus glänzenden Messingdrähten verfertigt. Dann erscheinen auf dem hinteren (etwa konkaven) Teil des durch die Drehung entstandenen Flächenscheines feststehende dunkle Linien in endlichen Abständen. Und umgekehrt erscheinen beim Schattenwerfen des sich drehenden Modells in der (in der Mitte blassen, am Rande dunkleren) Schattenfläche feststehende helle Linien, die als der vorderen, dem Licht abgewandten (etwa konvexen) Seite angehörig zu denken sind. Beiderlei Erzeugungen ergänzen sich und liefern ein die Fläche überlagerndes System von Linien, die ich Verdeckungslinien**) nennen möchte.

Die zuletzt aufgezählten Flächengattungen besitzen Teile mit negativer Flächenkrümmung und geben als solche Beispiele ab für das Auftreten von verdeckten Umrissen. Wenn ein Umrißsehstrahl außer den beiden in den Berührungspunkt zusammenfallenden Punkten noch einen dritten Punkt mit der Fläche gemein hat, so kann es vor-

---

*) Statt ihrer könnten beliebige kongruente, die Kurve durch ihre Drehung erzeugende Kurven in regelmäßiger Wiederkehr angenommen werden.

**) Man kann sich ein zusammengehöriges Paar einer vorderen und hinteren Verdeckungslinie erzeugt denken durch den Schnitt der Fläche mit einer Geraden, die, stets Sehstrahl bleibend, längs eines vorderen und eines hinteren Meridians hingleitet, während sich diese Meridiane bei der Drehung scheinbar gegeneinander bewegen. Da in kurzen Zwischenräumen der enteilende Sehstrahl durch einen solchen ersetzt wird, der die beiden folgenden, in die alte Lage einrückenden Meridiane trifft, so steht die vordere wie die hintere Linie fest. Wo der Sehstrahl mehrere Schnittpunkte mit der Fläche hat, überlagern sich mehrere Systeme von Verdeckungslinien. Bei den Schraubenflächen schreiten diese Linien, sich selbst kongruent bleibend, in der Richtung der Schraubenachse fort.

kommen, daß an einer Stelle dieser dritte mit den beiden andern zusammenrückt. Der wahre Umriß, d. h. der Ort der Berührungspunkte aller berührenden Sehstrahlen, wird dann an dieser Stelle einen Sehstrahl zur Tangente haben, und es wird der Umriß an dieser Stelle von sichtbaren Teilen zu unsichtbaren übergehen. Die Umrißlinie wird an der Stelle, wo sie vom Sehstrahl berührt wird, im Bilde eine Spitze zeigen. Die Tangente selbst, die drei zusammenfallende Punkte mit der Fläche gemein hat, ist dann eine Haupttangente (Asymptote ihrer Dupinschen Indikatrix).

Hierdurch treten die Haupttangentenkurven der Fläche als wichtig für ihre Bilder hervor. Im allgemeinen wird eine solche Kurve an der Umrißstelle einen scheinbaren Wendepunkt besitzen. Denn jede Berührungsebene der Fläche ist für eine durch ihren Berührungspunkt hindurchgehende Haupttangentenkurve Schmiegungsebene und für den Umriß geht die Berührungsebene durch das Auge. Daß nicht nur die Schmiegungsebene, sondern auch die Tangente der Haupttangentenkurve durch das Auge geht, so daß anstatt des scheinbaren Wendepunkts eine scheinbare Spitze tritt, ist hiervon ein Sonderfall, der sich an den vorhin erwähnten Stellen des verschwindenden Umrisses vorfindet.

In den in Schattenbildern vorgezeigten Modellen der beiden Regelschraubenflächen (Wendelfläche und schräge, geschlossene Schraubenfläche) sind die Haupttangentenkurven aus Drähten eingesetzt, auf der ersten bilden sie Schraubenlinien, auf der letzteren sind es Kurven, die sich auf eine zur Schraubenachse senkrechte Ebene in der Richtung der Achse als hyperbolische Spiralen projizieren.

Bei einer durchsichtigen Darstellung der Flächen, wie sie diese Drahtmodelle geben, sind die Haupttangentenkurven die für die Auffassung der Form wichtigsten Gebilde; denn schon für den Zeichner, der nach der Natur irgend welche verwickelteren Flächen mit negativ gekrümmten Teilen (z. B. eine Hand) aufnehmen will, bieten die Stellen des verschwindenden Umrisses die größten Schwierigkeiten. Hat er sich aber mit Hilfe solcher Modelle daran gewöhnt, wie von verschwindenden Randlinien, so auch von den verschwindenden Umrissen den verdeckten Verlauf hinzuzudenken, so lösen sich manche der Schwierigkeiten auf. Die Untersuchung der Haupttangentenkurven kann daher auch dazu beitragen, das Auffassen der Flächenform zu erleichtern.

Anhang.

An die Vorträge schloß sich eine Führung durch die Sammlung an, und ebenso fanden während der Zeit der Ausstellung für Gruppen oder einzelne Besucher Erklärungen statt, aus denen in den folgenden Zusätzen einige wichtigere Punkte hervorgehoben sein mögen.

Zusatz I. Bemerkungen über die Entstehung der Modelle.

Von den 180 Modellen, die durch H. Wiener und das mathematische Institut der Technischen Hochschule zu Darmstadt ausgestellt waren, ist die Mehrzahl im mathematischen Institut von Assistenten und Studierenden konstruiert und ausgeführt. Ein Teil wird auch anderen Unterrichtsanstalten zugänglich gemacht durch Veröffentlichung in „H. Wieners Sammlung mathematischer Modelle“ (Verlag von B. G. Teubner) oder ist früher im Brillschen (später M. Schillingschen) Verlag erschienen. Die Modelle sind für den Gebrauch in Vorlesungen bestimmt und deshalb möglichst durchsichtig*), meist aus Drähten und Fäden verfertigt, Gips ist als Material da gewählt, wo einzelne Schichten abzutönen waren. Sie sind für einen größeren Hörsaal bemessen, ihre Höhe i. a. etwa 30 cm und darüber.

Zusatz II. Singularitäten der Raumkurven.

An einer gegebenen Stelle einer Raumkurve kann der Punkt, die Schmiegungsebene und die Tangente ein Rückkehrelement sein, oder nicht, und man unterscheidet danach 8 verschiedene Fälle von Singularitäten (die nicht singuläre Stelle eingerechnet). Als Beispiele zu allen 8 Fällen dienen solche Kurven, die an einer gegebenen Stelle entweder den Punkt zum Spiegelpunkt, oder die Schmiegungsebene, Normalebene, oder rektifizierende Ebene zur Spiegelebene, oder endlich die Binormale. Tangente oder Hauptnormale zur Spiegelachse besitzen. Wenn nun jede dieser Spiegelungen durch die Spiegelung am Punkte, an der Schmiegungsebene und an der Tangente ausgedrückt wird (die Spiegelung an der Hauptnormale als Folge der Spiegelungen an Punkt, Schmiegungsebene und Tangente, die Spiegelung an der Binormale als Folge der Spiegelungen an Punkt und Schmiegungsebene, u. s. f.), so gilt der Satz, daß an der betrachteten Stelle dasjenige der drei Elemente Punkt, Schmiegungsebene, Tangente bei einem jener 8 Fälle ein

*) Man vergleiche den voranstehenden Bericht über H. Wieners Vortrag: „Entwicklung geometrischer Formen,“ S. 740.

Rückkehrelement ist, das in dieser Spiegelfolge nicht vorkommt, und das Element kein Rückkehrelement, das vorkommt.*)

Richtet man es so ein, daß der unendlich ferne Punkt der Binormale ein Punkt der Raumkurve, die unendlich ferne Gerade der Normalebene seine Tangente und die unendlich ferne Ebene seine Schmiegungsebene ist, so hat man eine unendlich ferne Stelle der Raumkurve, die infolge der von vorhin bestehenden Spiegelungen mit der zur ersten dualen Singularität behaftet ist. Denn die Spiegelebene an dem ersten Punkt ist im projektiven Sinne gleichzeitig auch Spiegelung an der unendlich fernen Ebene, d. h. an der Schmiegungsebene der zweiten Singularität, und ebenso die Spiegelung an der endlichen Schmiegungsebene zugleich die am unendlich fernen Punkt der Raumkurve, und schließlich die (achsige) Spiegelung an der endlichen Tangente zugleich Spiegelung an der dazu windschiefen Tangente des unendlich fernen Punktes.

Daher kann man durch dieselben 8 Modelle von Raumkurven Singularitäten darstellen, die

1. einen endlichen Punkt (mit endlicher Tangente u. Schmiegungsebene),
2. eine unendlich ferne Schmiegungsebene (mit unendlich fernem Punkt und eben solcher Tangente) besitzt.

Die gegenseitige Lage dieser beiden Stellen ist so, daß die zwei Punkte Ecken, die zwei Tangenten windschiefe Kanten und die zwei Schmiegungsebenen Seiten eines Tetraeders sind, von dem eine Seite im Unendlichen liegt.

Bildet man nun die Raumkurve kollinear so ab, daß das Tetraeder in sich übergeht, und daß beide betrachteten Stellen ins Unendliche fallen, so erhält man in den neuen 8 Raumkurven Beispiele für die 8 Fälle, wobei

3. ein Punkt unendlich fern wird, während seine Tangente und Schmiegungsebene ins Endliche reichen;
4. eine Tangente (mit ihrem Kurvenpunkt) ins Unendliche rückt, während die Schmiegungsebene ins Endliche reicht.

So werden durch 16 Modelle alle 8 Fälle von Singularitäten für die viererlei Lagen dargestellt, die ein Punkt mit seiner Tangente und Schmiegungsebene gegen das unendlich Ferne haben kann.**)

---

*) Da die Charakteristik der Spiegelung = − 1 ist, so wird durch den obigen Satz auf die Bezeichnung v. Staudts zurückgegriffen, der das Fortschreiten eines Elements durch −, das Rückkehren durch + ausdrückt (Geom. d. Lage, Nr. 209). Chr. Wiener (Lehrbuch der Darst. Geom. I Bd., S. 214) hat die umgekehrte Bezeichnung eingeführt.

**) Für den einen Fall des endlichen Punktes hat Chr. Wiener an der

Zusatz III. Verwandte der Schraubenlinie.

Ein Punkt P durchlaufe eine gleichseitige Hyperbel, deren reelle (x-) und ideelle (y-) Halbachse die Länge a habe, derart, daß sein aus der Hyperbelmitte O (dem Nullpunkt) gezogener Fahrstrahl in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht. Gleichzeitig werde die Hyperbel in der zu ihrer Ebene senkrechten Richtung (der z-Richtung) mit gleichförmiger Geschwindigkeit verschoben, und diese Geschwindigkeit sei so gewählt, daß, wenn der Fahrstrahl in der Hyperbelebene die Fläche $\frac{1}{2}a^2$ überstrichen hat, der beschreibende Punkt die Höhe a über der Anfangsebene erreicht hat. Die senkrechten Projektionen der so durch P beschriebenen Raumkurve auf die (x, z)- und die (y, z)-Ebene sind die Cosinushyperbolicus-Linie (Kettenlinie) und die Sinushyperbolicus-Linie.*)

Die Raumkurve hat mancherlei Übereinstimmung mit der gemeinen Schraubenlinie. Der aus einem beliebigen Punkte konstruierte Richtkegel der Kurventangenten ist ein Drehkegel, dessen Achse zur y-Achse parallel ist und dessen Öffnung gleich einem Rechten ist. Legt man den Scheitel des Richtkegels insbesondere in den Punkt Q der z-Achse, der die Höhe a über O hat, und trägt vom Kegelscheitel aus auf jeder Tangente die zugehörige Geschwindigkeit des Punktes P auf, so ist bei geeigneter Wahl der Streckeneinheit der Ort der Endpunkte der Geschwindigkeiten (der Hodograph der Raumkurve) die zur gegebenen konjugierte rechtwinklige Hyperbel, während der Ort der Endpunkte der von O aus aufgetragenen Beschleunigungen (der 2. Hodograph) die gegebene Hyperbel selbst ist.

Da die nach Q parallel verschobene Schmiegungsebene eines Punktes P die Berührungsebene des Richtkegels längs der verschobenen Tangente ist, so fällt die ebenso verschobene Binormale des Punktes P (wegen der Rechtwinkligkeit der Kegelöffnung) mit der der Tangente gegenüberliegenden Erzeugenden zusammen und die nach Q verschobenen Hauptnormalen bilden einen Strahlenbüschel, der in die (x, z)- Ebene fällt. Die von Q aus gezogene Normalbeschleunigung beschreibt also ebenfalls diesen Strahlenbüschel, und man kann beweisen, daß ihre Endpunkte einen Kreis mit dem Radius a bilden.

Techn. Hochschule zu Karlsruhe solche Modelle durch Studierende anfertigen lassen; später hat für denselben einen Fall Björling in Lund solche Modelle herausgegeben. Diese beiden Reihen zeigen eine ganz andere Ausführung als die hier vorliegende.

*) Die Gleichungen dieser Kurve und der Ausdruck ihrer Bogenlänge finden sich im Übungsbuch von Schlömilch, II. Teil, 1. Auflage (1870) S. 89.

Aus der Lage der verschobenen Binormalen folgt, daß die rektifizierenden Ebenen stets senkrecht zur (x, z)-Ebene sind, daß sie also einen senkrecht über der Kettenlinie errichteten Zylinder umhüllen; und da die Tangenten der Raumkurve mit der Achse des Richtkegels, also auch mit den Erzeugenden dieses Zylinders stets einen halben Rechten einschließen, so ist die Raumkurve eine geodätische Linie des über der Kettenlinie senkrecht errichteten Zylinders. Aus der Lage der verschobenen Tangente und Binormale folgt, daß beide gleichzeitig gleiche Winkel überstreichen, daß also (abgesehen von einer näheren Festsetzung des Vorzeichens) in jedem Punkte der Raumkurve ihre Krümmung gleich ihrer Torsion ist. Diese Eigenschaft, und die andere, daß die 2. Ableitung des Krümmungsradius nach dem Bogen eine Konstante $\left(=\frac{2}{a}\right)$ ist, ergeben die natürlichen Gleichungen dieser Raumkurve.

Die Kettenlinie wird hierbei von einem Punkte P'', der die senkrechte Projektion von P auf die (x, z)-Ebene ist, so durchlaufen, daß die x-Koordinate einer jeden Lage von P'' die Beschleunigung des Punktes nach Größe und Richtung angibt; Geschwindigkeit und Beschleunigung haben dann stets gleiche Länge, und die Normalbeschleunigung ist für alle Lagen nach Größe und Richtung gleich der der Raumkurve, hat also die konstante Länge a.

Zusatz IV. Büschel von Flächen 2. Ordnung.

v. Staudt*) unterscheidet 22 Arten von Büscheln der Flächen 2. Ordnung, von denen die 8 ersten Arten in einem Bündel enthalten sind; unter den 14 übrigen Arten enthält eine unendlich viele Kegel, die 13 andern enthalten vier Kegel, deren Getrenntsein oder Zusammenrücken in einen doppelten, dreifachen oder vierfachen durch das Schema ausgedrückt wird:

a) 1111 b) 211 c) 22 d) 31 e) 4.

Ganz allgemein kann ein Kegel 2. Ordnung in dreierlei Gestalt auftreten, als eigentlicher Kegel und als entartend in ein Ebenenpaar oder

*) Die v. Staudtschen Untersuchungen geben die Ableitung dieser Fälle durchaus unabhängig von Stetigkeitsbetrachtungen, wie sie hier der kürzeren Ausdrucksweise halber beim „Zusammenrücken" benützt sind. Wegen der Literatur über diesen Gegenstand, insbesondere über den Zusammenhang mit der Determinante des Büschels und ihren Elementarteilern vergl. man in der Enzykl. d. math. Wiss. die Abhandlung von O. Staude über „Flächen 2. Ordnung und ihre Systeme und Durchdringungskurven". Dort findet sich auch die im Text folgende Tabelle, aber ohne die hier gegebene geometrische Deutung.

in eine Doppelebene; dementsprechend ist die Kegelspitze ein Punkt (einstufiges Gebilde) oder jeder Punkt der Schnittgeraden der Ebenen des Paares (zweistufiges Gebilde), oder jeder Punkt der Doppelebene (dreistufiges Gebilde). Im Büschel geschieht das Zusammenrücken zweier Kegel so, daß entweder auch die Spitzen zusammenrücken (einstufig, eigentlicher doppelt gerechneter Kegel), oder so, daß sie getrennt bleiben und eine Gerade bestimmen, von der jeder Punkt als Spitze gilt (zweistufig, als doppelter Kegel zu rechnendes Ebenenpaar). Und Entsprechendes gilt für das Zusammenrücken von drei oder vier Kegeln; rücken insbesondere drei Kegel so zusammen, daß ihre Spitzen getrennt bleiben, so bilden sie eine dreifach zu rechnende Doppelebene, von der jeder Punkt als Spitze gilt.

Für das Zusammenrücken der vier Kegelspitzen erhält man ein dem obigen gleiches Schema:

I) 1111 II) 211 III) 22 IV) 31 V) 4.

Beide lassen sich kombinieren und liefern so die 13 erwähnten Arten von Flächenbüscheln:

	a	b	c	d	e
I	1, 1, 1, 1	11, 1, 1	11, 11	111, 1	
II		2, 1, 1	2, 11	21, 1	211
III			2, 2		22
IV				3, 1	31
V					4

In dieser Tabelle bedeutet jede der durch Kommas getrennten Zifferngruppen einen Kegel von einer Vielfachheit, die die Quersumme dieser Gruppe ergibt; *eine* alleinstehende Ziffer bedeutet einen eigentlichen Kegel, *zwei* durch Kommas nicht getrennte Ziffern ein Ebenenpaar, *drei* eine Doppelebene, die Zahlen 1, 2, 3, 4 geben die Anzahl der Kegelspitzen an, die zusammenrücken.

Welche Vorteile gewährt die Benutzung des Projektionsapparates im mathematischen Unterricht?*)

Von

F. Schilling aus Göttingen.

Ich möchte mir erlauben, Ihnen die Benutzung des Projektionsapparates im mathematischen Unterricht an einer großen Reihe von Beispielen vorzuführen, in der Hoffnung, manche von Ihnen anzuregen, auch Ihrerseits in den mathematischen Stunden von den dadurch erreichten Vorteilen Gebrauch zu machen.

Mein Vortrag wird in zwei Abschnitte zerfallen: einmal soll er die verschiedenen Methoden der Projektion für den mathematischen Unterricht, sodann die verschiedenen Verwendungsarten des Apparates in didaktischer Hinsicht Ihnen vor Augen führen.

I. Was den ersten Punkt betrifft, so haben wir in Göttingen für den mathematischen Unterricht eine große Reihe spezieller Methoden zum Projizieren ausgebildet. Am einfachsten ist es, wie bekannt, gewöhnliche Diapositive zu benutzen, die auf photographischem Wege hergestellt werden, für unsere Zwecke besonders Photographien von Zeichnungen. Unsere Diapositive haben das Format von 9×12 cm; meist lassen wir sie dort anfertigen zum Preise von 1,35 M. das Stück. Doch besonders bei Diapositiven von Zeichnungen zeigt sich, daß die feinen Linien zu wenig sichtbar sind; es ist leicht, diesem Übelstande dadurch abzuhelfen, daß man die Linien mit gewöhnlicher Tusche nachzieht. Man hat hierbei den Vorteil, auch farbige Tusche verwenden und dadurch einzelne Teile der Zeichnung besonders hervorheben zu können. Auch haben wir wiederholt ganze Flächen mit durchsichtigen Farben angelegt.**)

*) Leider ist es der Natur der Sache nach nur möglich, diesen Vortrag, der durch fast hundert Projektionsbilder unterstützt wurde, im Auszuge wiederzugeben.

**) Wir haben dazu sogenannte Kölitz-Farben benutzt, die man in den größeren Handlungen für photographische Artikel erhält.

Eine andere sehr einfache Methode, Projektionsbilder herzustellen, besteht darin, daß man Glasscheiben, die mit einer Gelatineschicht oder mit Negativlack oder auch mit verdünntem Gummi arabicum überzogen sind, benutzt, um direkt auf ihnen zu zeichnen. Am bequemsten stellt man solche Platten sich her, indem man gewöhnliche photographische Glasplatten, einfach in Fixiernatronlösung legt, wenn man es nicht vorzieht, die Glasscheiben mit einem der genannten Stoffe selbst zu beziehen. Natürlich kann man auch hier wieder Linien mit farbiger Tusche zeichnen und Flächen mit Farben anlegen.

Noch einfacher ist es, Gelatineblättchen, die jede Papierhandlung gleich in richtiger Größe besorgt, zu benutzen, um auf ihnen direkt zu zeichnen. Beim Projizieren werden dann diese Blättchen in einen Rahmen gelegt. Dieser besteht aus zwei Glasscheiben, die in eine dünne Metallumrandung gefaßt und an ihrer Längsseite durch ein Scharnier verbunden sind. Diese letzte Methode empfiehlt sich wegen ihrer Billigkeit besonders dann, wenn es sich darum handelt, Bilder für einen gelegentlichen Zweck herzustellen oder auf Reisen mitzunehmen, da die Blättchen leicht und unzerbrechlich sind.

Ferner kann ich Ihnen einige Bildchen projizieren, welche die Bewegung der Spitze eines Kreisels darstellen; interessant ist daran, daß der Kreisel selbst bei seiner Bewegung sie auf einer mit Ruß bezogenen Glasplatte eingeschrieben hat.*)

Um Beispiele zu geben, wie man die Methode der Diapositive bedeutend vervollkommnen kann, will ich Ihnen noch einige bewegliche Diapositivmodelle zeigen. Das erste stellt die kinematische Erzeugung der Epitrochoiden (zyklischen Kurven) dar: Ein kleines Zahnrad aus Zelluloid rollt, wie Sie sehen, auf einem eben solchen ab und beschreibt mit dreien seiner Punkte die verschlungene, gestreckte und gespitzte Epitrochoide. Ein zweites Diapositivmodell zeigt in ähnlicher Weise die Erzeugung der gewöhnlichen Zykloide als Evolute einer andern kongruenten, deren Scheitel in den Spitzen der ersten liegen. Sie sehen in dem Projektionsbilde deutlich, wie ein Faden auf der zuletzt genannten Zykloide abrollt und mit einem seiner Punkte die erste beschreibt.

Auf eine letzte Verwendungsart des Projektionsapparates, Schattenbilder von Drahtmodellen auf den Projektionsschirm zu werfen, brauche ich selbst nicht näher einzugehen, da Herr H. Wiener über

*) Vgl. E. Klein und A. Sommerfeld, Theorie des Kreisels, Heft 3, Leipzig 1903, p 622.

diese von ihm besonders ausgebildete Methode Ihnen in ausführlicher Weise bereits vorgetragen hat. Im Grunde leistet der Projektionsapparat hier dasselbe, wie das nicht immer zur Verfügung stehende Sonnenlicht.

II. Was nun ferner die verschiedenen Verwendungsarten des Apparates beim Unterricht angeht, so will ich zunächst folgendes hervorheben: Es ist oft zweckmäßig, Aufgaben, die man zeichnen will, vorher zu projizieren, um an den Projektionen die Methoden zu erklären, die man beim Zeichnen ausführen will. Zum Beispiel wird es gut sein, die Figur eines Dodekaeders fertig vor Augen zu haben, ehe man daran geht, sie im einzelnen an der Tafel zu zeichnen. Ausdrücklich will ich betonen, daß auch nicht im geringsten durch die Benutzung des Projektionsapparates das Zeichnen der Figuren an der Wandtafel eine Einschränkung erfahren und der Vorteil, welchen das allmähliche Entstehen der Figuren darbietet, beeinträchtigt werden soll. Das Projektionsbild gestattet ferner, oft nach Ausführung der Zeichnung leicht Erweiterungen der Figur andeuten zu können, deren Durchführung an der Wandtafel wegen der dazu nötigen Zeit nicht möglich wäre. Hat man z. B. das Dodekaeder fertig gezeichnet, so kann man an dem Projektionsbilde noch erklären, wie man einen Schnitt durch dasselbe legen kann. In ganz ähnlicher Weise wird es oft erwünscht sein, zur Ergänzung der an der Tafel gezeichneten Aufgabe ähnliche Aufgaben, die gleiche Methoden erfordern, wenigstens im Projektionsbilde den Schülern vorführen zu können. Zum Beispiel wird man auf andere Darstellungen des Dodekaeders als gerade die gezeichnete und auf die verschiedenen Darstellungen des Ikosaeders, die ja ganz gleiche Methoden erfordern, oder auf Darstellungen der verschiedensten Kristalle, von denen man vielleicht das eine oder das andere gezeichnet hat, hinweisen können. Oft ist es nötig, an früher gezeichnete Aufgaben zu erinnern, und dabei ist es wünschenswert, die fertige Figur noch einmal vor Augen zu haben. Ich erwähne, daß man z. B. für die Durchdringung zweier Körper gern an die Durchdringung zweier Dreiecke, für die Durchdringung zweier Kegel oder Zylinder an die Durchdringung von Prismen und Pyramiden erinnert. Mit Leichtigkeit kann man zu diesem Zwecke die in Diapositiven vorhandenen früheren Figuren wieder vor Augen führen.

Ich nenne weiter als Beispiele zum Projizieren Literatur- und Formelzusammenstellungen, Abbildungen aus Büchern, deren Vorführung oft zweckmäßig oder gar notwendig ist, um sich überhaupt verständlich machen zu können. Ähnliche Zwecke wie mit Projektionsbildern verfolgt man ja auch mit der Benutzung von mathematischen Modellen.

Doch bei einem größeren Zuhörerkreise erweisen sich letztere oft als zu klein; ich habe es wiederholt als angenehm empfunden, an den Projektionsbildern, die durch Photographieren der Modelle gewonnen sind, die Eigenschaften der letzteren allgemein verständlich auseinandersetzen zu können, um es dann dem Einzelnen zu überlassen, sie nachher an den Modellen selber näher zu studieren. (Beispiele: Kreisschnitte der Flächen zweiten Grades mit den Nabelpunkten; Konstruktion der Zahnräder, Polarplanimeter u. dgl.). Handelt es sich nun gar um große technische Anwendungen, an die man beim Unterricht zur Belebung der theoretischen Ausführungen erinnern möchte, so ist der Projektionsapparat geradezu unentbehrlich. Denn wie ganz anders wirkt diese Erwähnung beim Vortrag, wenn sie von einem anschaulichen Bilde begleitet ist (Königsche Schnellpresse als Beispiel für die Geradführung in der Kinematik; Bahnhofshallen, Brückenanlagen und andere große Eisenkonstruktionen als Beispiele für die Fachwerke in der graphischen Statik usw.).

Habe ich bisher die vielen Projektionsbilder, die ich Ihnen vorführen konnte, aus dem Gebiete der Fächer, die sich auf geometrisches Zeichnen beziehen, gewählt, so will ich doch nicht unterlassen, auch auf die Benutzung des Projektionsapparates in anderen mathematischen Disziplinen hinzuweisen. Ich möchte Ihnen noch eine Reihe Projektionsbilder aus der projektiven und der analytischen Geometrie, der Flächentheorie, der Differential- und Integralrechnung vorführen, um zu zeigen, daß auch auf diesen Gebieten die Verwendung des Projektionsapparates wesentliche Vorteile darbietet. (Beispiele: Projektionsbilder zur angenäherten Darstellung von Funktionen durch Benutzung der ersten Glieder in der Entwicklung der Taylorschen Reihe, sowie das Analoge bei der Entwiklung der Funktionen in Fouriersche Reihen.)

Aus meinen bisherigen Ausführungen dürfte zur Genüge hervorgehen, welche Vorteile die Verwendung des Projektionsapparates gerade auch beim mathematischen Unterricht darbietet. Zweifellos gestattet er eine außerordentliche Belebung des Vortrages, die besonders in Rücksicht darauf wünschenswert sein dürfte, daß im Universitätsunterricht die „Angewandte Mathematik“ als besonderes Fach eingeführt ist, und auch in den höheren Schulen die Anwendungen der Mathematik mehr als bisher herangezogen werden sollen. Die Benutzung des Apparates verschafft dem Vortragenden selbst eine nicht unwesentliche Erleichterung der Ausdrucksweise, wenn er seinen Vortrag an ein Projektionsbild anlehnen kann, und Hand in Hand damit eine größere Möglichkeit, sich den Schülern leicht verständlich zu machen. Sie gestattet die Erwähnung und Besprechung von Dingen, die sonst nur unvollkommen oder überhaupt nicht vorgetragen werden könnten; sie ermöglicht nicht unbedeutende Zeitersparnis, was besonders bei gelegentlichen Vorträgen durch Projektionen von Formeln und Figuren wünschenswert ist.

Ich möchte noch besonders hervorheben, daß bei allen erwähnten Benutzungsarten die einfachsten Ausführungen des Projektionsapparates sich als ausreichend erweisen. Falls nicht geradezu direktes Sonnenlicht in das Zimmer scheint, ist sogar dessen Verdunkelung nicht notwendig, was sehr erwünscht ist. Hiernach ist die Anschaffung eines einfachsten Apparates am empfehlenswertesten, besonders auch seiner bequemeren Bedienung und größeren Haltbarkeit wegen. Die Vorteile, welche die epidiaskopische Einrichtung des vollkommensten, hier ausgestellten Apparates der Firma Carl Zeiß in Jena darbietet, und die von deren Vertreter an zahlreichen Beispielen uns bereits näher vorgeführt wurden, sind für den mathematischen Unterricht sehr wohl entbehrlich. Um indes diese Vorteile speziell für den mathematischen Unterricht hervortreten zu lassen, habe ich mir erlaubt, in einem Ergänzungsvortrag die von mir konstruierten kinematischen Modelle*) der Ausstellung, die auch unter Abschnitt B näher aufgeführt sind, episkopisch direkt zu projizieren und während ihrer Bewegung, welche die Projektionsbilder sehr gut wiedergaben, näher zu erläutern.

*) Diese Modelle sind zugleich mit zwei ihre Theorie und Verwendung beschreibenden Abhandlungen (Separatabzüge aus der Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 44, 1899 und Bd. 51, 1904) im Verlage von Martin Schilling in Halle a. S. erschienen.

Verzeichnis der Vortragenden.

Grassmann's, Hermann, gesammelte mathematische und physikalische Werke. Auf Veranlassung der mathematisch-physikalischen Klasse der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften und unter Mitwirkung der Herren Jacob Lüroth, Eduard Study, Justus Grassmann, Hermann Grassmann der Jüngere, Georg Scheffers herausgegeben von Friedrich Engel.

II. Band. I. Teil. Die Abhandlungen zur Geometrie und Analysis. Mit 45 Figuren im Text. [X u. 452 S.] gr. 8. 1904. geh. ℳ 16.—

II. — II. — Die Abhandlungen zur Mechanik und zur mathematischen Physik. Mit 51 Figuren im Text. [266 S.] gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 14.—

Hilbert, Dr. **David,** o. Professor an der Universität Göttingen, Grundlagen der Geometrie. Zweite, durch Zusätze vermehrte und mit fünf Anhängen versehene Auflage. Mit zahlreichen in den Text gedruckten Figuren. [VI u. 175 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 5.20, geb. ℳ 5.60.

Klein, F., und E. Riecke, neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts an höheren Schulen. Vorträge, gehalten bei Gelegenheit des Ferienkurses für Oberlehrer der Mathematik und Physik, Göttingen, Ostern 1904. Enthaltend Beiträge der Herren O. Behrendsen, E. Bose, E. Götting, F. Klein, E. Riecke, F. Schilling, J. Stark, K. Schwarzschild. Teil I. Mit 6 Figuren im Text. [VIII u. 190 S.] gr. 8. 1904. geh. n. ℳ 3.60. Teil II. Mit 151 Figuren und 5 Doppeltafeln. [VI u. 198 S.] gr. 8. 1904. geh. n. ℳ 4.60, geb. ℳ 5.— Beide Teile in einen Band geb. n. ℳ 8.60.

Koenigsberger, Leo, Carl Gustav Jacob Jacobi. Festschrift zur Feier der hundertsten Wiederkehr seines Geburtstages. Mit einem Bildnis und dem Faksimile eines Briefes. [XVIII u. 554 S.] gr. 8. 1904. In Leinwand geb. n. ℳ 16.—

Krazer, Dr. **Adolf,** o. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe, Lehrbuch der Thetafunktionen. Mit 9 Textfiguren. gr. 8. 1903. [XXIV u. 509 S.] In Leinw. geb. n. ℳ 24.—

Netto, Dr. **Eugen,** o. ö. Professor an der Universität Gießen, Elementare Algebra. Akademische Vorlesungen für Studierende der ersten Semester. Mit 19 Figuren im Text. [VIII u. 200 S.] gr. 8. 1904. geb. n. ℳ 4.40.

Poincaré, Henri, Membre de l'Institut. Wissenschaft und Hypothese. Autorisierte deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen von F. und L. Lindemann. [XVI u. 342 S.] 8. 1904. geb. n. ℳ 4.80.

Schüssler, Dr. **Rudolf,** o. ö. Professor an der Technischen Hochschule in Graz, orthogonale Axonometrie. Ein Lehrbuch zum Selbststudium. Mit 29 Figurentafeln in besonderem Hefte. [VIII u. 170 S.] gr. 8. 1905. geb. n. ℳ 7.—

Stolz, Dr. **Otto,** und Dr. **J. Anton Gmeiner,** Einleitung in die Funktionentheorie. Zweite, umgearbeitete und vermehrte Auflage der von den Verfassern in der „Theoretischen Arithmetik" nicht berücksichtigten Abschnitte der „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik" von O. Stolz. In 2 Abteilungen. I. Abteilung. Mit 10 Figuren im Text. [VI u. 242 S.] gr. 8. 1904. geb. n. ℳ 6.—

Vahlen, Karl Theodor, abstrakte Geometrie. Untersuchungen über die Grundlagen der Euklidischen und Nicht-Euklidischen Geometrie. Mit zahlreichen Figuren im Text. [XII u. 302 S.] gr. 8. 1905. geb. n. ℳ 12.—

Weber, H., Professor in Straßburg, und **J. Wellstein,** Professor in Gießen, Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer u. Studierende. In 3 Bänden. [I. Elementare Algebra und Analysis. II. Elementare Geometrie. III. Anwendung der Elementarmathematik.] I. Band. [XIV u. 446 S.] gr. 8. 1903. In Leinw. geb. n. ℳ 8.— [Bd. II u. III. Unter d. Presse.]

Webster, Arthur Gordon, A. B. (Harv.) Ph. D. (Berol.), Professor of Physics, Clark University, Worcester, Mass., the Dynamics of Particles, and of rigid, elastic, and fluid Bodies, being Lectures on Mathematical Physics. [XII u. 588 S.] gr. 8. 1904. geb. n. ℳ 14.—