

Einzelkonstruktionen aus dem Maschinenbau
Herausgegeben von Ingenieur C. Volk-Berlin □ □ □ Drittes Heft

Zahnräder

Erster Teil

Stirn- und Kegelräder mit geraden Zähnen

von

Dr. A. Schiebel,

o. ö. Professor der deutschen technischen Hochschule zu Prag

Zweite, vermehrte Auflage

Mit 132 Textfiguren



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

1922

Einzelkonstruktionen aus dem Maschinenbau

Herausgegeben von Ingenieur C. Volk-Berlin □ □ □ Drittes Heft

Zahnräder

Erster Teil

Stirn- und Kegelräder mit geraden Zähnen

von

Dr. A. Schiebel,

o. ö. Professor der deutschen technischen Hochschule zu Prag

Zweite, vermehrte Auflage

Mit 132 Textfiguren



Springer-Verlag
Berlin Heidelberg GmbH
1922

**Alle Rechte,
insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.**

ISBN 978-3-662-22740-4

ISBN 978-3-662-24669-6 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-662-24669-6

Copyright 1922 by Springer-Verlag Berlin Heidelberg

Ursprünglich erschienen bei Julius Springer in Berlin in 1992.

Zur Einführung.

Mit dem Sammelnamen „Maschinen-Elemente“ bezeichnet man jene Konstruktionsteile, die sich an einer Reihe von Maschinen in ähnlichen Formen vorfinden und die — losgelöst von diesen Maschinen — berechnet und entworfen werden können.

Zunächst verstand man darunter eigentlich nur die Schrauben, Nieten und Keile, die Triebwerksteile, die Elemente der Dampfmaschine, die Rohre und Absperr-Vorrichtungen. Erst später kamen auch die Einzelkonstruktionen der Hebe- und Verlademaschinen hinzu und in der neuesten Zeit schenkt man auch den Elementen der Werkzeugmaschinen gebührende Beachtung, während noch viele Zweige des Maschinenbaues der gleichen Berücksichtigung harren. Aber nicht nur die Grenzen, die dem Begriff der „Maschinen-Elemente“ zukommen, haben sich so beträchtlich erweitert, daß kein geringerer als Bach sagen mußte, es sei „dem einzelnen einfach unmöglich, sich auf allen in Betracht kommenden, zum Teil sehr weit ausgedehnten Gebieten vollständig auf dem Laufenden zu erhalten“, sondern auch die einzelnen Elemente haben eine so reiche Ausgestaltung erfahren, verlangen zu ihrem sachgemäßen Entwurf die Verwertung so mannigfacher Erfahrungen, daß neben den zusammenfassenden Büchern über Maschinenteile auch Sonderhefte am Platze sein dürften, die sich nur mit einem Konstruktionsteil beschäftigen.

Dabei wird die Behandlung eine andre sein müssen, je nachdem Konstruktionen in Frage kommen, die immer wieder — unter Anpassung an die verschiedensten Bedingungen — berechnet und entworfen werden müssen, oder die, wie z. B. die Kugellager, eigentlich nur von wenigen Ingenieuren konstruktiv behandelt werden, während die größere Zahl der Fachgenossen mit der Auswahl, dem Einbau und dem Betrieb zu tun hat, oder ob es sich endlich um Teile handelt, für deren Entwurf in erster Linie die praktischen Erfahrungen und bewährte Ausführungen maßgebend sind. Daraus geht hervor, daß es verfehlt gewesen wäre, den Sonderheften irgendeine Einheitlichkeit aufzuzwingen, eine äußere Übereinstimmung in bezug auf den Inhalt und die Anordnung. Es war im Gegenteil die Aufgabe der Verfasser, stets jene Darstellung zu wählen, die dem zu behandelnden Gegenstand am besten zu entsprechen schien. So war einmal die rechnerische, dann wieder die betriebstechnische oder die technologische Seite der Aufgabe stärker zu betonen. Und während z. B. eines der Sonderhefte nur die Zylinder ortsfester Dampfmaschinen behandelt und die Zylinder anderer Motoren den folgenden Heften zuweist, versucht das Heft über Kolben die Wandlungen zu zeigen, die dieses eine Element erfährt, je nachdem es für eine Dampfmaschine oder ein Gebläse, für eine Pumpe oder eine Gasmaschine bestimmt ist.

In den einzelnen Heften haben die Verfasser nicht nur ihre eigenen, zum Teil auf langjähriger Praxis beruhenden Erfahrungen niedergelegt, sondern auch die Mitteilungen und Anregungen von Ingenieuren verwertet, die auf dem gleichen Gebiete tätig sind. Allen Heften gemeinsam ist die Verwendung eines reichen Figurenmateriails, für dessen sorgfältige Wiedergabe ich der Verlagsbuchhandlung zu besonderem Danke verpflichtet bin.

Möchten die „Einzelkonstruktionen“ überall dort gute Dienste leisten, in Schulen und in Fabriken, wo junge Fachgenossen abwägen und aufbauen, wo sie sich mühen und sich üben im Dienste der Technik.

Berlin, im Herbst 1911.

C. Volk.

Vorwort.

Der Verfasser hat es sich zur Aufgabe gestellt, ein zeitgemäßes Bild von dem gegenwärtigen Stande des Zahnradbaues zu geben; der Konstruktion, Berechnung und Herstellung wurde dabei gleiches Augenmerk gewidmet.

Das in den Lehrbüchern der Maschinenelemente bisher Gebotene wurde unter Ausschaltung veralteter Einzelheiten als Grundstock übernommen und durch die Aufnahme von neuen Konstruktionen, von Ergebnissen praktischer Untersuchungen und Erfahrungen, sowie durch ausführliche Besprechung der Bearbeitung erweitert. Den Stoff hierzu holte sich der Verfasser nicht allein aus den Veröffentlichungen der neueren Fachliteratur, eine größere Zahl von Mitteilungen und Zeichnungen verdankt er der Zuwendung von einzelnen mit dem Zahnradbaue beschäftigten Firmen, denen für diese wertvolle Unterstützung der verbindlichste Dank ausgesprochen sei.

Die Aufnahme der Bearbeitung ist gerechtfertigt durch die Tatsache, daß erst mit ihrer Vervollkommnung der eigentliche Fortschritt im Zahnradbau einsetzt. Das Zahngetriebe ist sehr feinfühlig, ein ruhiger Gang ist nur bei theoretisch genauer Herstellung der Zahnflächen zu erreichen. Erforderlich ist eine Bearbeitung der Zähne in der Maschine mit möglichst einfach gehaltenen Schneidwerkzeugen; die Übertragung gezeichneter Profile auf die Ausführung ist zu umständlich und zu ungenau.

Es wurde daher die Verzahnungstheorie vom Standpunkte der Bearbeitung behandelt. Sie umfaßt nicht nur die vollständige geometrische Festlegung der Zahnflächen, sondern auch die Ermittlung der Bewegungsvorgänge für die Erzeugung dieser Flächen. Bei der Gewinnung der einzelnen Erkenntnisse wurde von möglichst einfachen Grundlagen und Anschauungen ausgegangen und je nach der zu erzielenden Einfachheit und Übersichtlichkeit bald ein rechnerischer, bald ein zeichnerischer Weg eingeschlagen. Daß in einzelnen Fällen auch verwickeltere geometrische Beziehungen herangezogen wurden, ist durch die Schwierigkeiten der Verzahnungstheorie begründet, die vorgeschrittenerer geometrischer Vorstellungen nicht entbehren kann. Jedoch handelt es sich dabei um Einzelheiten, die erst beim eingehenden Eindringen in den Gegenstand von Belang sind, daher also vom Anfänger beim ersten Studium ohne Beeinträchtigung des Verständnisses für den übrigen Inhalt weggelassen werden können.

Die bekannten Profilkonstruktionen wurden knapp gestreift; weitergehende Ausführungen in dieser Richtung verfolgen den Zweck, eine Einsicht in jene Faktoren zu gewinnen, die die Ausführungsverhältnisse beeinflussen. Es handelt sich hierbei weniger um Profilausmittlungen als um die Untersuchung des Eingriffs.

Die Besprechung der Ausführungsfehler und ihrer Folgen ist eine notwendige Ergänzung für die Beurteilung der Güte der Bearbeitung, zumal einige Verfahren den theoretischen Vorbedingungen nicht genau entsprechen. Neu eingeführt wurde ein exakt definierter Begriff der Fehlerhaftigkeit als Verhältnisswert, die plötzliche Geschwindigkeitserhöhung δ des getriebenen Rades beim Eingriffswechsel als Ursache der Stoßwirkungen. Ihr Zahlenwert kann aus bekannten Ungenauigkeiten ausgerechnet oder auch am ausgeführten Räderpaar mit einem zweckentsprechenden Prüfapparate graphisch ermittelt werden.

Das Ineinandergreifen mancher Gebiete zwang den Verfasser, mitunter von dem systematisch fortschreitenden Aufbau des Stoffes Abstand zu nehmen. Zu Gunsten einer übersichtlichen Gliederung des Inhalts mußten vorzeitig Einzelheiten gebracht werden, die erst durch die Kenntnis späterer Abschnitte verständlich

werden (u. a. erfordert eine richtige Auffassung des im Abschnitt V behandelten Schneckenfräsers eine vorherige Orientierung über das Schneckengetriebe).

In einem späteren Hefte soll die Besprechung der Stirn- und Kegelräder mit Schraubenzähnen und der Radausführungen für sich kreuzende Achsen erfolgen.

Prag, im April 1911.

Dr. A. Schiebel.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Die allorts sich geltend machenden Bestrebungen, im Zahnradbau weitgehende Normalien einzuführen, haben den Verfasser veranlaßt, eine ausführliche Neubearbeitung der Evolventenverzahnung vorzunehmen und eine abwägende Besprechung der bekannt gewordenen Vorschläge vorzubringen.

Manche Mängel der Zahnausbildung werden schon durch eine verständige Handhabung der Satzräderverzahnung beseitigt. Hierzu gehört zunächst das unbedingte Kürzen von Zahnköpfen, die über den Getriebeeingriff hinausreichen, und bei den kleinsten Zähnezahlen auch das Kürzen der unnötig großen Fußtiefen. Radiale Fußansätze können dann ohne weiteres durch verstärkte Fußanschlüsse nach verlängerten Zykloiden ersetzt werden, wodurch die Festigkeit des Zahnes beträchtlich gewinnt. Allerdings ist eine derartige Fußausbildung nur bei der Zahngestaltung im Modell oder mit Formfräser möglich. Bei der Bearbeitung nach dem Wälzverfahren geht dagegen der eingriffsfähige Fußteil bei Zähnezahlen unter 32 verloren, so daß die Satzräderausführung versagt.

Frei von allen Mängeln ist eine zweckmäßig durchgeführte Sonderverzahnung. Man bezieht die Zahnausbildung nicht mehr auf die Teilkreise, sondern auf eigene Modulkreise und leitet die Zahngestalt aus einem Zahnstangeneingriff ab, wodurch die denkbar größte Einfachheit in der Ausführung erreicht wird. Die Profilabrückungen sind dann die kennzeichnenden Größen der Zahnausbildung eines Getriebes; sie bestimmen die Fuß- und Kopfhöhen, sowie die Achsenentfernung, deren genaue rechnerische Ermittlung die einzige Unbequemlichkeit ist. Wird die Größe der Profilabrückung nur von der Zähnezahl des eigenen Rades abhängig gemacht, so gelangt man zwar zu einer Satzausführung der Räder, doch gleichmäßig günstige Verhältnisse werden im ganzen Ausführungsbereich nicht erzielt. Da auch die Satzausführung keine nennenswerte Vereinfachung mit sich bringt, so empfiehlt es sich, der Eigenart jedes Getriebes Rechnung zu tragen und die günstigsten Werte der Profilabrückung in Abhängigkeit von Zähnezahl und Übersetzung anzuwenden.

An Stelle der verschiedenen bekannten und auch zum Teil geheim gehaltenen Angaben über die Größe der Profilabrückung, die wohl größtenteils empirischer Herkunft sind, hat der Verfasser ein aus geometrischen Beziehungen abgeleitetes System aufgestellt, das allen Bearbeitungsverfahren gerecht wird. Bei der Bearbeitung nach dem Wälzverfahren stellen sich zwar Unterschneidungen ein, doch sind sie wirkungslos, weil sie außerhalb des Getriebeeingriffes verbleibende Fußteile betreffen. Das Geltungsbereich des Systems bleibt nicht allein auf die Stirnräder mit geraden Zähnen beschränkt, sondern ist auch übertragbar auf die Kegelräder und alle Räder mit Schraubenzähnen.

Im Abschnitt Kegelräder wurde der Nachweis aufgenommen, daß das alte Tredgoldsche Verfahren der angenäherten Zahnflankenermittlung in den abgewinkelten Mantelflächen der Ergänzungskegel vollständig für das Aufzeichnen genügt. Diese Einschaltung soll den Einwurf grober Fehlerhaftigkeit entkräften, der in der Literatur auf Grund falscher Berechnung aufgetaucht ist.

Prag, im November 1921.

Dr. A. Schiebel.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
I. Die Verzahnung der Stirnräder	1
A. Verzahnungsgesetze und Eingriffsverhältnisse	3
B. Zyklidenverzahnung	10
C. Satzradverzahnung nach Evolventen	13
D. Sonderverzahnung nach Evolventen	23
II. Die Verzahnung der Kegelräder	41
A. Zyklidenverzahnung	42
B. Evolventenverzahnung	44
C. Angenäherte Verzahnung	45
D. Sonderverzahnung nach Evolventen	48
III. Die Zahnreibung	54
A. Stirnräder	54
B. Kegelräder	57
IV. Die Abnützung der Zähne	58
V. Die Bearbeitung der Stirnräder	61
A. Das Formfräsen	62
B. Das Hobeln und Stoßen mit Spitzstichel	63
C. Das Abwälzverfahren	66
1. Die Bearbeitung auf der Stirnradstoßmaschine der Fellows Gear Shaper Co., Springfield	67
2. Die Bearbeitung mit Schneckenfräser	68
3. Das Hobeln mit mehrzähliger Zahnstange	71
VI. Die Bearbeitung der Kegelräder	71
VII. Die Unregelmäßigkeiten des Ganges fehlerhafter Zahntriebe	74
1. Fehler der Evolventenflanken mit radialem Fußansatz bei kleinen Zähnezahlen	80
2. Teilungsfehler	81
3. Fehler von Zyklidenverzahnungen bei unrichtiger Achsenentfernung	82
4. Fehler der formgefrästen Stirnradzähne	82
5. Fehler der mit Schneckenfräser bearbeiteten Stirnradzähne	83
VIII. Die Berechnung der Stirnräder	84
A. Rücksichtnahme auf Festigkeit (Krafträder)	84
B. Rücksichtnahme auf Geschwindigkeit (Arbeitsräder)	85
IX. Die Berechnung der Kegelräder	89
X. Die Befestigung der Räder	90
XI. Die Konstruktion der Räder	93
XII. Geteilte Räder	95
XIII. Räder mit Holzzähnen	98
XIV. Rohhauträder	101
XV. Die Triebstockverzahnung	103
XVI. Das Grissongetriebe	104

I. Die Verzahnung der Stirnräder.

Das Übersetzungsverhältnis i ist das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten ω oder der Umdrehungszahlen n von getriebener und treibender Welle. Das Übersetzungsverhältnis kann bei allen Zahnradgetrieben durch das umgekehrte Verhältnis der Zähnezahlen der Paarung ausgedrückt werden.

$$i = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Bei paralleler Achsenlage bestehen zwei sich berührende Kreiszyylinder, Teilrißflächen der Räder genannt, die gleiche Umfangsgeschwindigkeit v aufweisen. Für die Radien R_1, R_2 der Teilkreise, als welche man die Schnitte der Teilrißflächen mit einer zur Achsenlage senkrechten Ebene bezeichnet, gilt daher die Beziehung

$$v = R_1 \omega_1 = R_2 \omega_2$$

oder auch

$$i = \frac{R_1}{R_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{z_1}{z_2} \dots \dots \dots (1)$$

Die Achsenentfernung a wird somit durch den Berührungspunkt C der beiden Teilkreise, späterhin Zentralpunkt genannt, im Übersetzungsverhältnis geteilt (Fig. 1). Nachdem

$$a = R_1 + R_2,$$

berechnen sich die Teilkreisradien aus

$$R_1 = \frac{a}{1 + \frac{z_2}{z_1}}, \quad R_2 = \frac{a}{1 + \frac{z_1}{z_2}}.$$

Die relative Bewegung der beiden Räder entspricht einem Abrollen der beiden Teilrißzyylinder aufeinander. Sie ist momentan eine Drehbewegung um die Berührungsgerade der beiden Zylinder als Momentanachse mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\Omega = \omega_1 + \omega_2.$$

In einem Berührungspunkt P zweier Zahnflächen, der im Abstände ξ von der Momentanachse C liegt, findet ein Gleiten der Flächen aufeinander statt; Richtung und Geschwindigkeit v_g des Gleitens entsprechen der relativen Drehbewegung um C .

$$v_g = \Omega \cdot \xi = (\omega_1 + \omega_2) \xi \dots \dots \dots (2)$$

Sollen beide Wellen im gleichen Drehsinn laufen, so wird die in Fig. 2 dargestellte Hohlradanordnung ausgeführt. In den vorstehenden Beziehungen sind

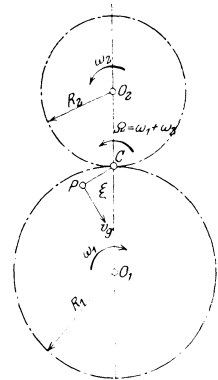


Fig. 1.

in diesem Falle die auf das Hohlrad bezugnehmenden Größen im negativen Ausdrücke einzuführen, also

$$R_1 = \frac{a}{z_2 - 1}, \quad R_2 = -\frac{a}{1 - \frac{z_1}{z_2}}, \quad \Omega = \omega_1 - \omega_2.$$

In einfachster Ausführung erhalten die Stirnräder gerade Zähne, also Zahnflächen, deren gerade Erzeugende parallel zur Achse verlaufen (Fig. 3). Die Zahnabmessungen werden von der Zahnteilung t , d. i. der im Teilkreise gemessene Abstand zweier Zähne, abhängig gemacht.

Es ist
$$2R\pi = zt.$$

Für zwei im Eingriff stehende Räder muß natürlich eine gleiche Teilung vorgesehen sein. Die Zahnstärken s im Teilkreise werden gewöhnlich ebenfalls gleichgehalten; ihre Bemessung mit

$$s = \frac{t}{2}$$

schließt toten Gang im Getriebe aus, erfordert jedoch eine äußerst genaue Bearbeitung und Aufstellung. Durch die Belassung eines tangentiellen Spielraumes

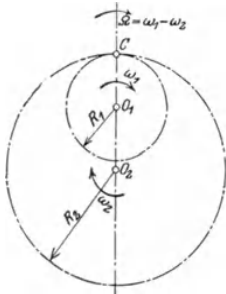


Fig. 2.

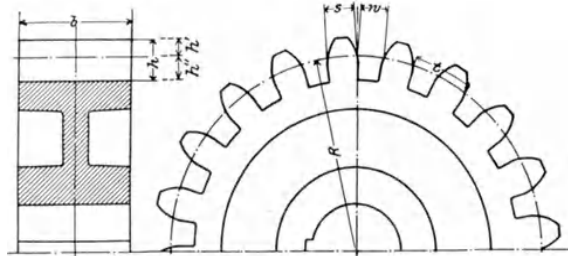


Fig. 3.

wird das Klemmen der Zähne bei Ungenauigkeiten verhindert; dieser wird für Räder mit unbearbeiteten Zähnen ungefähr $\frac{t}{20}$ gehalten, also

$$\text{Zahnstärke } s = \frac{19}{40} t$$

$$\text{und Lückenweite } w = \frac{21}{40} t.$$

Für die Zahnhöhe gelten folgende normale Bemessungen:

$$\text{Kopfhöhe } h' = 0,3 t$$

$$\text{Fußtiefe } h'' = 0,4 t.$$

Es ist somit gesamte Zahnhöhe $h = 0,7 t$ und das radiale Spiel zwischen Kopf und Fuß $= 0,1 t$.

Um die Teilkreishalbmesser R in runden Maßen ausführen zu können, wird die Teilung als Vielfaches von π gehalten.

$$t = m\pi.$$

Man nennt

$$m = \frac{t}{\pi}$$

den Modul der Teilung; es ist dann der Teilkreisdurchmesser

$$2R = z \frac{t}{\pi}.$$

Üblich ist eine Abstufung der Moduln um $\frac{1}{4}$ bis $m = 3$, $\frac{1}{2}$ bis $m = 6$; darüber hinaus erfolgt die Abstufung in vollen Einheiten.

Bei geschnittenen Zähnen macht man die Zahnabmessung abhängig vom Modul. Die größere Genauigkeit der Ausführung läßt ein kleineres radiales Spiel zwischen Kopf und Fuß zu in der Größe von

$$\frac{1}{6} \frac{t_0}{\pi}.$$

Es ist die Kopfhöhe $h' = \kappa' \frac{t}{\pi} = \frac{t}{\pi}$, also $\kappa' = 1$,

Fußtiefe $h'' = \kappa'' \frac{t}{\pi} = \frac{7}{6} \frac{t}{\pi}$, $\kappa'' = \frac{7}{6}$,

daher gesamte Zahnhöhe $h = h' + h'' = 2\frac{1}{6} \frac{t}{\pi}$.

Das tangentielle Flankenspiel beträgt bei den kleineren Moduln ($m = 10$) ungefähr 0,4 mm; werden die geschnittenen Zähne noch gehärtet und nachgeschliffen, so läßt sich das Spiel bis auf 0,2 mm herabsetzen.

Von den vorstehenden normalen Zahnabmessungen wird bei Sonderverzahnungen dann abgegangen, wenn eine Änderung günstigere Verhältnisse hinsichtlich Festigkeit, Eingriff und Abnutzung herbeiführt. Die Räder der kleinsten Zahnzahlen sind in normalen Zahngrößen nicht ausführbar; erst eine abweichende Bemessung in Zahnstärke, Kopfhöhe und Fußtiefe schafft die Möglichkeit der Durchführung.

A. Verzahnungsgesetze und Eingriffsverhältnisse.

In dem Berührungspunkt P (Fig. 1) zweier Zahnprofile findet nach vorigem ein Abgleiten statt, dessen Richtung v_g senkrecht auf PC steht und der momentanen Relativedrehung um C entspricht. Damit ein solches Gleiten möglich ist, muß die gemeinschaftliche Tangente der beiden Profile an der Berührungsstelle P in die Richtung der Gleitgeschwindigkeit v_g hineinfallen. Die hierzu senkrecht stehende Profilnormale, in deren Richtung sich der Zahndruck äußert, deckt sich dann mit PC . Diesem einfachen Verhalten wird Ausdruck gegeben durch das Verzahnungsgesetz:

Die Normale im Berührungspunkte zweier Zahnprofile geht durch den Berührungspunkt der beiden Teilkreise, den Zentralpunkt C , hindurch.

Dieses Gesetz gestattet die Feststellung der Eingriffslinie eines Zahnprofils, d. i. der geometrische Ort aller Punkte, in welchen das Profil bei der Drehung mit dem Zahne des eingreifenden Rades in Berührung tritt. Die Profilnormale in einem Punkte P_1 der Zahnflanke vom Rade O_1 trifft den eigenen Teilkreis R_1 in p_1 (Fig. 4). In die Eingriffsstellung gelangt diese Normale dann, wenn sie durch den Zentralpunkt C hindurchgeht. Die Ermittlung des Ein-

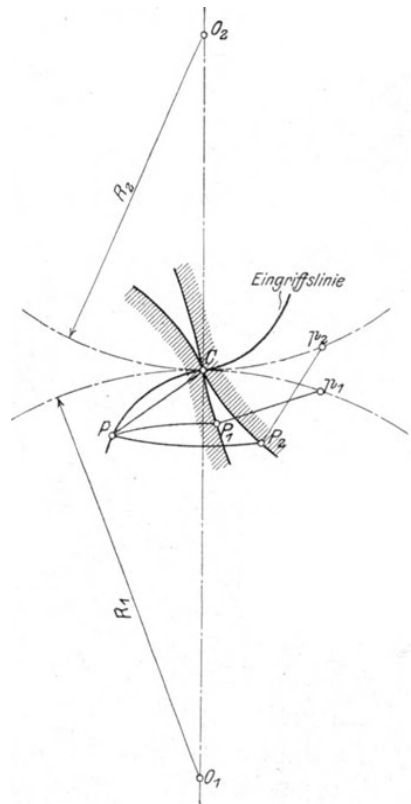


Fig. 4.

griffpunktes P erfolgt somit durch Verdrehung der Strecke P_1p_1 um O_1 nach PC ; nur im Punkte P kann der Zahnpunkt P_1 in Berührung mit einem anderen Rade treten. Auf diese Art wird punktweise der ganze Verlauf der Eingriffslinie aus dem Zahnprofil gefunden. Zwischen Zahnprofil und Eingriffslinie besteht somit ein gesetzmäßiger geometrischer Zusammenhang.

Mit Hilfe der Eingriffslinie läßt sich ferner das Zahnprofil vom Rade O_2 herausfinden, das mit dem bekannten Zahnprofil des Rades O_1 in richtigen Eingriff kommt. Die Zahnflanken werden gewöhnlich in einer Lage eingezeichnet, in der sie sich im Zentralpunkt C berühren. Der Normalenabschnitt P_1p_1 mußte im Teilkreise im Betrage p_1C gedreht werden, damit er aus der Profilmittellage in die Eingriffstellung gelangt. Einen gleichen Betrag p_2C legt dabei der Normalenabschnitt P_2p_2 im zweiten Rade zurück, nachdem die Geschwindigkeiten in den Teilkreisen gleich sind. Man hat deshalb die Bogenlänge

$$Cp_1 = Cp_2$$

zu machen und eine Rückdrehung des Normalenabschnittes PC der Eingriffslage um O_2 nach P_2p_2 vorzunehmen. P_2 ist dann der Flankenpunkt des zweiten Rades, der in P mit dem Profilmunkte P_1 des ersten Rades in Eingriff tritt. Bei der Annahme eines Profils ist somit die Flanke des eingreifenden Zahnes vollständig bestimmt.

Die Möglichkeit der Ausführung übt nun eine gewisse Einschränkung auf die Wahl des Zahnprofils aus. Ausführbar sind nur Zahnflächen, die in der Berührungs-

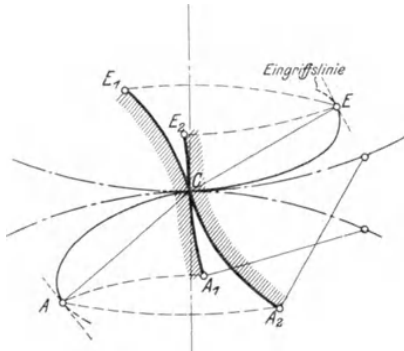


Fig. 5.

stelle konvex auf konvex oder konvex auf konkav aufeinanderliegen, wobei im letzteren Falle der konkave Teil einen größeren Krümmungsradius als der konvexe besitzen muß.

Aus dem Verlauf der Eingriffslinien gegenüber dem Zentralpunkt C und den beiden Radmittelpunkten sind die Grenzen der Ausführbarkeit leicht zu ersehen. Zeigt die Eingriffslinie nach Fig. 5 einen schlingenartigen

Verlauf, so bleibt die Ausführung der zugehörigen Zahnprofile beschränkt auf den Teil $A E$, der durch die vom Zentralpunkt C am weitest abstehenden Punkte A und E begrenzt ist.

Bei dem Verlaufe der Eingriffslinie der Fig. 6 bestimmen die Punkte A und E , die den Radmittelpunkten zunächst liegen, das verwendbare Gebiet des Eingriffes. Im Grenzpunkt A kommt der Fußpunkt A_1 der Zahnkurve zum Eingriff. Dem weiter abliegenden Eingriffspunkt a ist geometrisch zugeordnet der Zahnpunkt a_1 ,

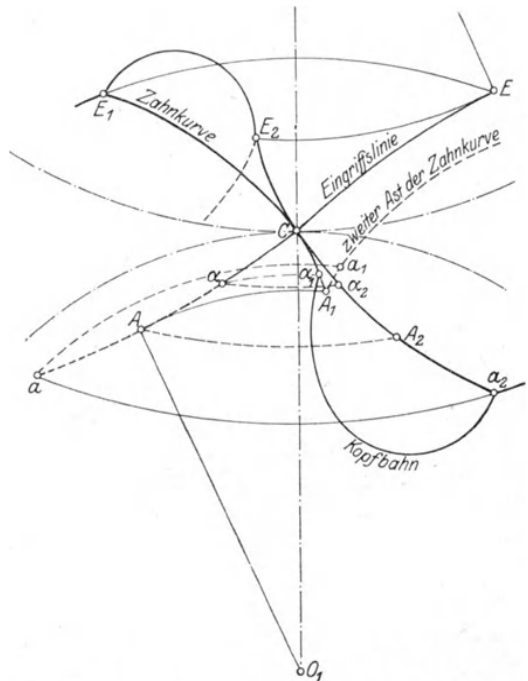


Fig. 6.

der sich bereits auf einem zweiten Aste der Zahnkurve befindet. Die Fortsetzung der Zahnkurve über ihren Fußpunkt ist aber unausführbar.

Unregelmäßigkeiten sind ausgeschlossen, sobald die Kopfkreise der Räder nicht über das eingriffsfähige Bereich AE der Eingriffslinie hinausreichen. Die einzelnen Profilpunkte des einen Rades beschreiben dann in relativer Bewegung Bahnen, welche die Zahnflanke des eingreifenden Rades tangieren. Die relative Bahn des äußersten Flankenpunktes am Kopfkreise tritt am weitesten in die Zahnücke ein und ist daher bestimmend für den Anschluß des Zahnes an den Radboden. Eine überhöhte Ausführung $A_2\alpha_2$ des Profils über die Zahnhöhe CA_2 , die mit Rücksicht auf den Verlauf der Eingriffslinie CA im Rade O_1 noch eingriffsfähig ist, führt zu Unzukömmlichkeiten (Fig. 6). Die relative Kopfbahn der überhöhten Zahnspitze α_2 schneidet dann im Punkte α_1 in die Fußflanke CA_1 des Rades O_1 ein. Für den freien Durchgang wird eine, als Zahnunterschneidung bezeichnete Ausnehmung des Zahnfußes erforderlich, wobei das Fußende α_1A_1 in Wegfall kommt. Damit geht der Eingriff am Endteil $A\alpha$ der Eingriffslinie verloren und ein weiterer Teil $A_2\alpha_2$ der Kopfflanke wird überflüssig.

Eine Kopfüberhöhung über das Eingriffsbereich ist daher zwecklos und führt zu einer Eingriffsminderung. Sie erfordert eine Unterschneidung des eingreifenden Zahnfußes, die aber unausführbar ist bei einer Zahngestaltung durch Einformen mit Modell oder durch Ausschneiden mit Formfräser. Unterbleibt die Unterschneidung, so weist die Ausführung eine grobe Fehlerhaftigkeit auf.

Der Kopfkreis eines Rades darf über den Grenzpunkt der Eingriffslinie, welcher den wirklichen Getriebeeingriff einschließt, nicht hinausreichen. Diese Bedingung ist in allen Fällen streng einzuhalten. Führen Verzahnungsangaben, wie z. B. die Satzräderverzahnung nach Evolventen zu einem Überschreiten des Kopfkreises, so ist von der normalen Zahnhöhenbemessung abzustehen und die Kopfhöhe entsprechend zu kürzen.

Unterschnittene Zähne liefert die Bearbeitung nach dem Wälzverfahren, wenn die äußerste Schneidkante des Werkzeuges aus dem Eingriffsbereich des Zahnfußes heraustritt. Insofern eine derartige Unterschneidung im Getriebeeingriff des Rades eine Eingriffsminderung verursacht, ist die Ausführung zu verwerfen, zumal größere Unterschneidungen den Zahnfuß arg schwächen.

Kommt dagegen nur ein außerhalb des Getriebeeingriffes verbleibender Flankenteil in Wegfall, so ist die Unterschneidung ohne weiteres zulässig. Sie ist dann lediglich eine Folge der Bearbeitung, ihr Vorhandensein wird beim Getriebeeingriff nicht benötigt. Eine erlaubte Unterschneidung bietet den Vorteil, daß die eingreifenden Kopfkanten auch im abgenützten Fußprofil noch ungehinderten Auslauf vorfinden.

Die relative Kopfbahn der Zahnspitze in der Lücke des eingreifenden Zahnes ist eine verlängerte Zykloide, sie wird vom Punkte A_2 beim Abrollen des Teilkreises R_2 auf dem Teilkreise R_1 (Fig. 7) durchlaufen. Ihrer Aufzeichnung geht zunächst die Bestimmung der Epizykloide voran, in der sich der Punkt C beim Abrollen bewegt. Ist das Abrollen von C nach p_1 fortgeschritten, so fällt p_2 mit p_1 zusammen; es sind die beiden Teilkreisbögen gleich,

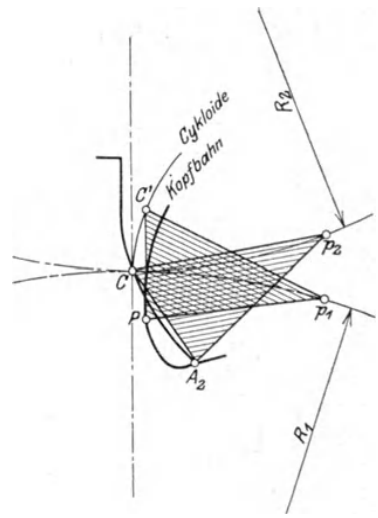


Fig. 7. Ermittlung der relativen Kopfbahn.

$$\widehat{Cp_1} = \widehat{Cp_2}.$$

Der Punkt C gelangt beim Abrollen nach Punkt C' , der am einfachsten durch Übertragen des Dreieckes Cp_1p_2 in die symmetrische Lage p_1CC' erhalten wird, also

$$Cp_2 = p_1C' \quad \text{und} \quad p_1p_2 = CC'.$$

Die ursprüngliche Stellung des Dreieckes Cp_2A_2 geht beim Abrollen in die Lage $C'p_1P$ über; es liefert daher das weitere Übertragen der Dreiecksseiten

$$CA_2 = C'P \quad \text{und} \quad p_2A_2 = p_1P$$

den Punkt P , in dem die Zahnspitze A_2 steht, sobald ein Abrollen von C nach p_1 stattgefunden hat.

Diese punktweise Bestimmung der Kopfbahn kann durch ein vereinfachtes Verfahren ersetzt werden, wobei die Bestimmung der Epizykloide des Punktes C entfällt. Man hüllt die Kopfbahn nur durch Kreise ein, die aus den einzelnen Teilkreispunkten p_1 mit den zugehörigen Halbmessern A_2p_2 eingezeichnet werden.

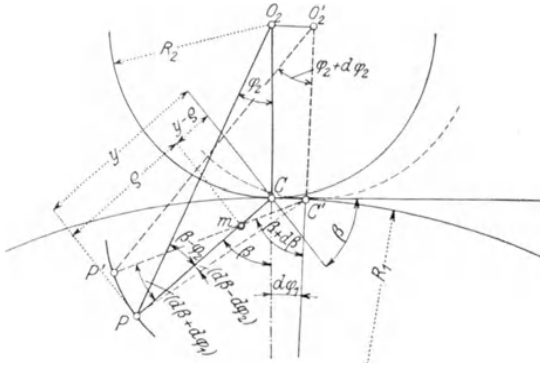


Fig. 8.

Das Aufzeichnen der Kopfbahn läßt sich noch weiter vereinfachen mit dem Ersatz von Kurventeilen durch Krümmungskreise. In Fig. 8 ist P ein Punkt der verlängerten Zykloide, bestimmt durch seine Entfernung y vom Wälzpunkt C und den Winkel β .

Bei der Elementarwälzung

$$\widehat{CC'} = R_1 \cdot d\varphi_1 = R_2 \cdot d\varphi_2$$

geht die Normale PC der Kurve in die neue Lage $P'C'$ über. Im Schnittpunkt der beiden Normalen liegt der Krümmungspunkt m .

Die Winkeländerung $d\beta$ berechnet sich aus dem Dreieck PCC' :

$$R_1 \cdot d\varphi_1 \cdot \cos \beta = y(d\beta - d\varphi_2), \quad \text{also} \quad \frac{d\beta}{d\varphi_1} = \frac{R_1 \cos \beta}{y} + \frac{R_1}{R_2}.$$

Das Dreieck mCC' ergibt

$$R_1 d\varphi_1 \cos \beta = (y - \varrho)(d\beta + d\varphi_1).$$

Daraus ist die Entfernung des Krümmungsmittelpunktes vom Wälzpunkte bestimmt mit

$$y - \varrho = \frac{y}{1 + y \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 \cos \beta}}.$$

Die Einführung der Hilfsgröße $x = \frac{R_1 R_2 \cos \beta}{R_1 + R_2}$ ergibt eine einfache zeichnerische Ermittlung aus

$$y - \varrho = \frac{xy}{x + y}.$$

Man fällt aus dem Zentralpunkt C und den beiden Radmittelpunkten Senkrechte auf die Richtung PC (Fig. 9). Der Abschnitt $CN_2 = R_2 \cos \beta$ wird alsdann nach N_2H übertragen und mit der Geraden N_1H auf der mittleren Senkrechten die Strecke $CE = x$ abgeschnitten. Das gleiche Ergebnis liefert das Übertragen des Abschnittes $N_1C = R_1 \cos \beta$ nach N_1H' . Für die Zahnstange $R_2 = \infty$ ist $x = R_1 \cos \beta$; man hat daher in diesem Sonderfalle den Abschnitt $N_1C = R_1 \cos \beta$ unmittelbar auf der mittleren Senkrechten aufzutragen.

Fügt man auf der mittleren Senkrechten zum Abstand x noch die Größe y hinzu, so führt gemäß der früheren Gleichung das Ziehen der beiden Parallelen PF und mE zur Feststellung des Krümmungsmittelpunktes m . Ein Kreis aus diesem Punkte mit dem Halbmesser ρ ersetzt den Linienteil der verlängerten Epizykloide im Punkte P .

Für das Aufsuchen der Scheitelkrümmung hat man den Punkt P um den Radmittelpunkt O_2 nach P_0 einzudrehen und die Konstruktion in gleicher Weise durchzuführen. Da in dieser Stellung $\beta=0$ ist, so erhält man den Abschnitt x_0 durch Einschneiden einer Geraden O_1H_0 , deren Punkt H_0 im Abstände R_2 von O_2 liegt.

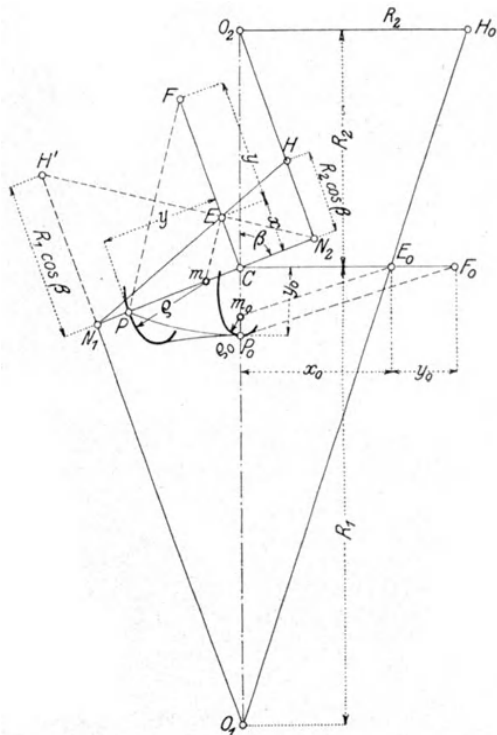


Fig. 9.

Bestimmung der Krümmungsradien der relativen Kopfbahn.

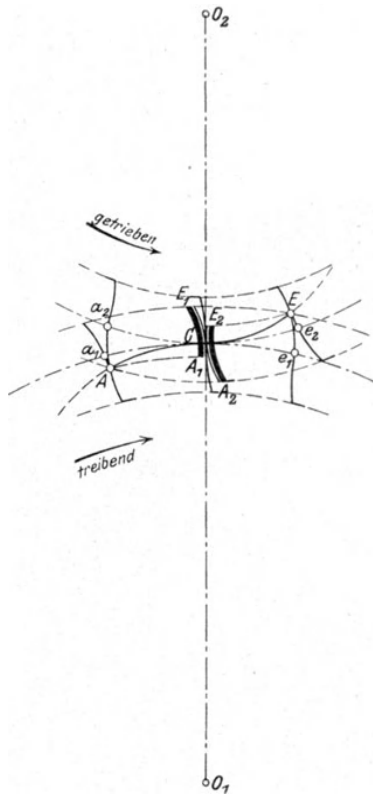


Fig. 10.

Eingriffsbild.

Zu x_0 addiert man die Strecke $E_0F_0 = y_0 = P_0C$. Die Parallele E_0m_0 zu P_0F_0 geht durch den Krümmungsmittelpunkt m_0 des Kurvenscheitels hindurch, dessen Verlauf durch einen Kreis vom Radius ρ_0 ersetzt wird.

Den Verlauf der Eingriffslinie innerhalb der beiden Kopfkreise bezeichnet man als die Eingriffsstrecke. Der Fuß des treibenden Zahnes erfaßt in A (Fig. 10) die Zahnspitze des getriebenen Rades; der längs AE fortschreitende Eingriff des Flankenpaares ist in E beendet. Die Berührungsstelle wandert somit beim treibenden Zahn vom Fuß A_1 zur Spitze E_1 , während sie beim getriebenen Zahn sich in entgegengesetzter Richtung innerhalb A_2E_2 bewegt.

Den Weg, den die Räder im Teilkreise von Anfang bis Ende Eingriff eines Flankenpaares zurücklegen, bezeichnet man als den Eingriffsbogen $a_1Ce_1 = a_2Ce_2$. Um die Beständigkeit der Drehung zu wahren, muß beim Außereingriffreten eines Flankenpaares das folgende bereits den Eingriff aufgenommen haben; es muß deshalb der Eingriffsbogen größer als die Teilung sein. Die Zahl der im gleichzeitigen

Eingriff stehenden Flankenpaare wird durch das Verhältnis von Eingriffsbogen und Teilung, die sogenannte Eingriffsdauer ε ausgedrückt:

$$\varepsilon = \frac{\text{Eingriffsbogen}}{\text{Teilung}} > 1.$$

Aus dem Eingriffsbilde der Fig. 10 ist zu entnehmen, daß der an den Radboden anschließende Fußteil des Zahnes nicht zum Eingriff gelangt. Es ist deshalb das Heranführen der Zahnkurve bis zum Radboden nicht unbedingt notwendig. Insbesondere bei kleinen Zähnezahlen gewinnt die Festigkeit des Zahnes durch einen verstärkten Fußanschluß, der jedoch dem Durchgang des Zahnkopfes vom eingreifenden Rade genügend freien Raum bieten muß. Eine passende und

geometrisch bestimmte Profilüberführung erreicht man durch eine verlängerte Epizykloide, die in tangentielltem Anschluß den Fußkreis mit der Zahnkurve verbindet. Eine solche Anschlußkurve liegt stets außerhalb der relativen Kopfbahn des eingreifenden Zahnes. Endet die Zahnkurve in einem Fußpunkte, der außerhalb des Fußkreises liegt, dann wird eine derartige Überführung zur Notwendigkeit.

In Fig. 11 sei vom Zahnpunkt p , dessen Eingriffsstelle in P liegt, der Fußanschluß als verlängerte Epizykloide durchzuführen. Diese Kurve entspricht der relativen Bahn der Zahnspitze S eines Hilfsrades, dessen Kopfkreis durch den Eingriffspunkt P hindurchgeht und den Fußkreis des Rades in P_0 berührt. Damit ist die Größe des Hilfsrades mit dem Mittelpunkt o und weiters auch die Zahnspitze S des zugehörigen Zahnprofils festgelegt. Die zeichnerische Ermittlung der von S durchlaufenen Kopf-

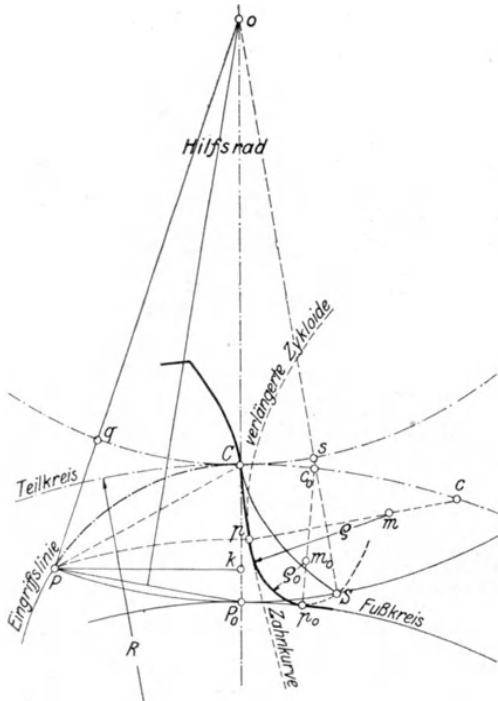


Fig. 11.
Verstärkter Fußanschluß.

Verwendung von Krümmungskreisen. Das Eindrehen der Strecke PC nach pc liefert die Zahnnormale, auf welcher der Krümmungsmittelpunkt m liegt. Die Lage der Scheitelnormalen $p_0 c_0$ ist von der geometrischen Gestalt der Eingriffslinie abhängig; das Aufsuchen dieser Lage wird in den späteren Abschnitten behandelt. Die Größen der Krümmungsradien ϱ und ϱ_0 werden nach dem Vorgange der Fig. 9 ermittelt.

Obwohl in der Wahl der Zahnprofile eine gewisse Freiheit besteht, wird man sich bei der praktischen Ausführung doch nur auf solche Formen beschränken, die aus einer möglichst einfachen, geometrisch bestimmten Erzeugung hervorgehen. Insbesondere wird man solche Profile bevorzugen, die sich aus der Einhüllung einer einfachen Tangentenbewegung ergeben, nachdem die Schneidkante des bearbeitenden Werkzeugs das Profil tangentiell treffen muß.

Die Tangente im Berührungspunkt P eines Zahnprofils steht senkrecht zu PC (Fig. 12); sie schneidet die Zentrale in o_1 . Stellt man nun die Forderung, daß im weiteren Eingriff sämtliche Tangentiallagen durch o_1 hindurchgehen, so ergibt sich

als Eingriffslinie ein Kreis mit dem Durchmesser $o_1 C = 2 \rho_1$. Die Tangente dreht sich beim Fortschreiten des Eingriffs mit einer Winkelgeschwindigkeit ω_1' , deren Größe durch die Beziehung festgelegt ist:

$$R_1 \cdot \omega_1 = 2 \rho_1 \omega_1'.$$

Nachdem der Winkel $\delta = 2\gamma$ ist, dreht sich dabei der Radius $m_1 P$ des Eingriffskreises mit einer Geschwindigkeit $\omega_1'' = 2\omega_1'$, so daß die vorstehende Gleichung auch geschrieben werden kann:

$$R_1 \omega_1 = \rho \omega_1''.$$

Sie besagt, daß die Geschwindigkeit im Teilkreise gleich jener ist, mit der der Eingriff im Eingriffskreise fortschreitet. Dieses Verhalten ermöglicht nun eine einfache Konstruktion der Zahnkurve durch Abrollen des Eingriffskreises am Umfange des Teilkreises. Bei dieser Bewegung beschreibt der Punkt C des Eingriffskreises eine Zykloide, die die Zahnform darstellt. Die gestellte Forderung der Zahneinhüllung durch eine um eine feste Achse o_1 sich drehende Ebene führt somit zur Zykloidenverzahnung mit kreisförmiger Eingriffslinie.

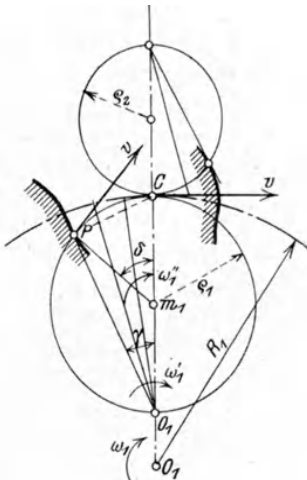


Fig. 12.

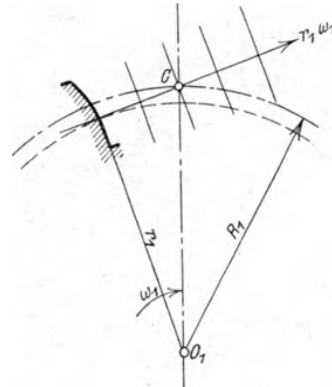


Fig. 13.

Stellt man die Bedingung, daß die Tangente im Berührungspunkte der Zahnprofile eine unveränderliche Richtung beibehält, so wird die Eingriffslinie zur Geraden (Fig. 13). In dieser wandert dann der Eingriff mit einer Geschwindigkeit entsprechend der Umfangsgeschwindigkeit im sogenannten Grundkreise r_1 , den die Eingriffsgerade berührt. Dieser Umstand kommt einem Abrollen der Eingriffsgeraden am Grundkreise gleich; die hierbei vom Punkte C durchlaufene Bahn ist eine Evolvente. Die Forderung einer parallelen Verschiebung der Tangentialebene an die Zahnflächen in der Eingriffsstelle ergibt daher eine Evolventenverzahnung mit gerader Eingriffslinie.

Dem Bedürfnisse, Stirnräder mit verschiedenen Zähnezahlen beliebig miteinander in richtigem Eingriff paaren zu können, sofern sie gleiche Teilung und gleiche Zahnstärke im Teilkreis aufweisen, kommt man durch die Ausführung von Satzrädern entgegen. Die Bedingung richtigen Eingriffes ist durch Flanken mit sich deckenden Eingriffslinien erfüllt, die einen zum Zentralpunkt verkehrt symmetrischen Verlauf aufweisen. Für die Festlegung von Satzräderverzahnungen sind daher bestimmte Angaben über die Form und Größe der Eingriffslinie notwendig.

B. Zykloidenverzahnung.

Um Kopf und Fuß der Flanken zu erhalten, werden zwei zu beiden Seiten des Zentralpunktes C liegende Kreise mit den Radien ρ_1 und ρ_2 als Eingriffslinie gewählt (Fig. 14). Die Zahnprofile entsprechen den Bahnen des Punktes C beim Wälzen dieser beiden Kreise auf den Teilkreisen R_1 und R_2 . Das Abrollen des außerhalb liegenden Kreises liefert die Kopfflanke als Epizykloide, das Wälzen des innerhalb liegenden Kreises die Fußflanke als Hypozykloide.

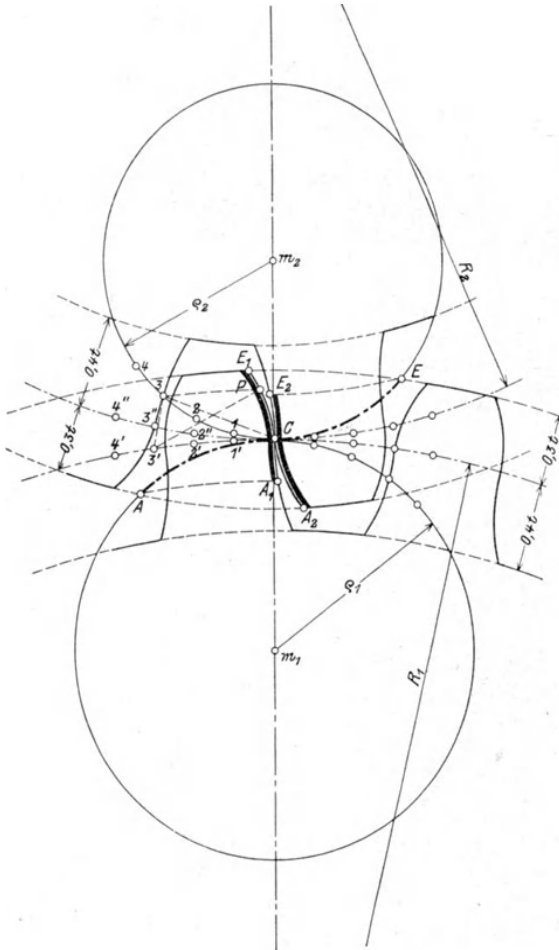


Fig. 14.
Normale Zykloidenverzahnung.

Die Größe der Rollkreise beeinflusst die Zahnform und ihre Eingriffsverhältnisse. Beim Größerwerden des Rollkreises nähert sich die Fußflanke mehr der radialen Richtung, der Zahn setzt mit kleinerer Stärke am Radkranz an. Die Festigkeit des Zahnes vermindert sich daher mit zunehmenden Rollkreisradien, die auch ungünstige Verhältnisse hinsichtlich Gleiten, Reibung und Abnutzung schaffen. Es gleitet nämlich der Fußteil A_1C auf dem Kopf A_2C ; mit dem Unterschiede dieser beiden Flankenlängen, der mit größerem Rollkreise zunimmt, wächst auch das Gleiten und der Reibungsverlust. Dagegen führt die Vergrößerung der Wälzkreise zu einer Verlängerung des Eingriffs und zu geringeren Schrägstellungen des Zahndruckes, ein Umstand, der für die Ruhe des Ganges von Bedeutung ist.

Bei der zeichnerischen Ermittlung werden zunächst auf den Teil- und Eingriffskreisen gleiche Teile in der angedeuteten Weise eingetragen. Zwei in gleicher Bogenentfernung vom Zentralpunkt C abstehende Punkte des Teil- und Rollkreises bilden mit C ein Dreieck, das nun auf gleicher Grundlinie symmetrisch übertragen wird. Der Ort der übertragenen Dreieckspitze ist dann der gesuchte Zykloidenpunkt; z. B. wird der Punkt P aus dem Dreiecke $C3'3$ dadurch erhalten, daß man $C3 = 3'P$ und $3'3 = CP$ macht.

Die Eingriffslinie besteht aus den beiden Bogenteilen AC und CE ; ihre Gesamtlänge entspricht dem Eingriffsbogen, nachdem der Eingriff in der Eingriffslinie mit der Teilkreisgeschwindigkeit fortschreitet. Es ist daher die Eingriffsdauer

$$\varepsilon = \frac{\widehat{ACE}}{t}$$

Der Zahndruck ändert beim Eingriffsverlaufe seine Richtung; von der tangentiellen Lage in C weicht er um so mehr ab, je weiter der Eingriffspunkt von C absteht.

Bei diesen ungleichen Beeinflussungen werden die günstigsten Verhältnisse erreicht durch eine Bemessung des im Teilkreise R innenliegenden Rollkreises ϱ in der Größe von ungefähr

$$\varrho = \frac{1}{3} R.$$

Die übliche Angabe für Zykloiden-Satzräder macht die Rollkreisgröße abhängig von der Teilung

$$\varrho = \frac{11}{4} \frac{t}{\pi} = 0,875 t.$$

Eine Ausführung von Rädern mit größeren Zähnezahlen und höheren Geschwindigkeiten nach dieser Satzräderbemessung ist jedoch wegen der zu geringen Eingriffsdauer nicht empfehlenswert; in solchen Fällen wird eine Eingriffsdauer $\varepsilon \geq 2$ notwendig.

Bei der Verwendung großer Eingriffskreise fällt der Fußansatz am Radboden verhältnismäßig schwach aus, es empfiehlt sich dann einen verstärkten Fußanschluß nach Fig. 11 auszuführen. Da der zum Eingriff gelangende Teil der Fußflanke desto weiter nach innen reicht, je größer das eingreifende Rad ist, so beläßt man die Zahnkurve so lang, daß sie für einen Zahnstangeneingriff ausreicht. Dann ist der Zahnfuß eingriffsfähig für alle Radgrößen bis zur Zahnstange. Die Kopfgerade Pk schneidet im Punkt P die Eingriffslinie. Das Eindrehen des Endpunktes P der Eingriffslinie auf die Zahnkurve liefert im Punkt p die Anschlußstelle der verlängerten Epizykloide. Zum Auffinden des Scheitelpunktes p_0 führt folgende Überlegung. Auf der Eingriffslinie und den Teilkreisen werden gleiche Wege zurückgelegt. Die Bogenlänge qCs am Teilkreis des Hilfsrades ist gleich groß der Bogenlänge PC am Eingriffskreise. Beim Wälzen des Hilfsrades am Teilkreise R um den Betrag $Cs = Cc_0$ gelangt die Strecke Ss nach p_0c_0 . Das Auftragen der Bogenlänge PC des Eingriffskreises vom Punkt q über C hinaus nach c_0 und das Einschneiden des Fußkreises mit der Geraden c_0p_0 führt demnach zur Lagbestimmung des Scheitelpunktes p_0 .

Fig. 15 zeigt die Verzahnung eines Hohlrades. Eine solche Anordnung weist eine größere Eingriffsdauer auf, als der Eingriff zweier außenverzahnten Räder; auch schmiegen sich die Profile inniger aneinander. Bei der Ausführung eines verstärkten Fußanschlusses ist darauf zu achten, daß der zum Eingriff gelangende Fußteil des Innenrades länger ist als bei Zahnstangeneingriff.

Die Flanken einer Zahnstange (Fig. 16) erhält man durch das Wälzen der beiden Eingriffskreise auf der Teilrißgeraden als gemeine Zykloiden.

Die Fußflanke wird zur radialen Geraden (Fig. 15), sobald der Rollkreisdurchmesser gleich dem Teilkreishalbmesser ist:

$$2\varrho = R.$$

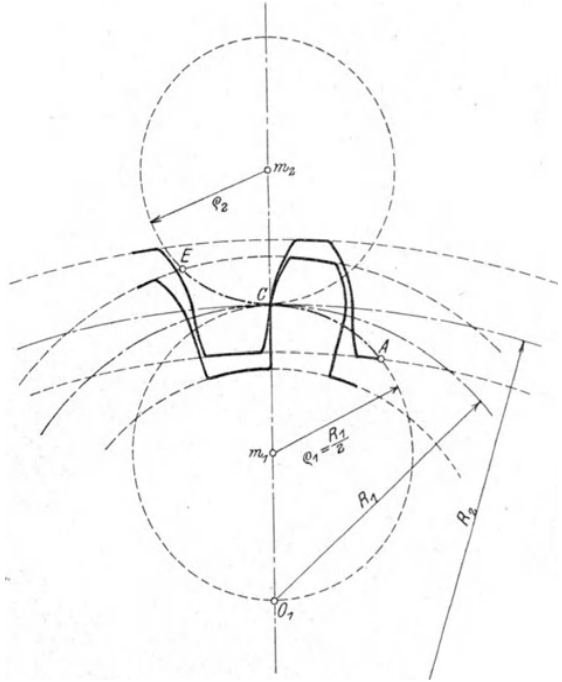


Fig. 15.
Hohlradverzahnung.

Dieser Fall trifft nach der Satzräderbemessung beim 11 zähligen Rade ein. Wird der Rollkreis noch größer gehalten, so wird der Zahn im Fuße unterschritten (Fig. 16). Dieser Umstand erfordert neben der Notwendigkeit einer hinreichend großen Eingriffsdauer eine besondere Beachtung bei der Ausführung der Flanken von Rädern kleinstér Zähnezahlen.

Fig. 16 zeigt ein 4zähliges Ritzel für eine Zahnstangenwinde; mit den eingetragenen Größen der Wälzkreise erreicht man die günstigsten Verzahnungsverhältnisse. Die Verschwächung des Zahnes wird verringert durch eine kürzere Bemessung des Zahnfußes; eine Verkürzung des Eingriffes vermeidet man dabei durch entsprechend längere Ausbildung des Zahnkopfes. Weiter muß aber noch die Zahnstärke im Teilkreise etwa auf $0,6 t$ vergrößert werden, damit Zahnfuß

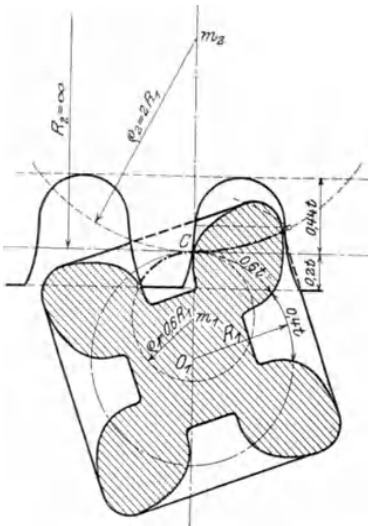


Fig. 16.
Abnormale Zykloidenverzahnung.

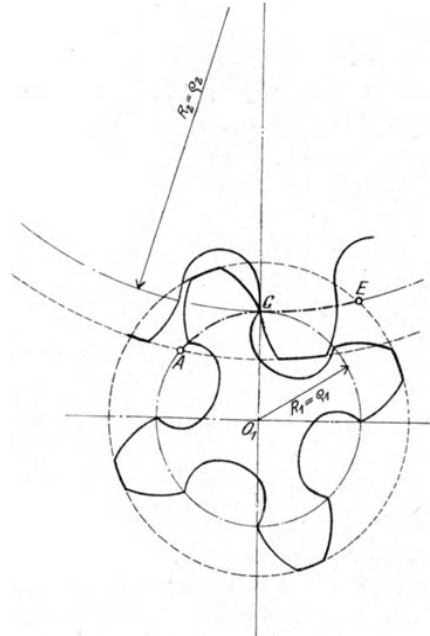


Fig. 17.
Punktverzahnung.

und Zahnspitze genügend stark ausfallen. Die Zahnspitze rundet man ab; ebenso zweckmäßig ist eine Ausrundung der Zahnstangenlücken, weil dadurch die im Teilrisse verschwächten Zähne hinreichend starke Fußansätze erhalten.

Wird der Rollkreis gleich dem Teilkreis gehalten, so schrumpft die Fußflanke in einen am Teilkreis liegenden Punkt zusammen. Eine derartige Verzahnung nennt man Punktverzahnung (Fig. 17); der Anschluß der Zahnköpfe an den Radkranz erfolgt hier unter Berücksichtigung der relativen Kopfbahn. Da mit der gesamten Kopfllanke immer nur ein und derselbe Fußpunkt zum Eingriff kommt, so wird die Teilkreisstelle der Zähne rasch abgenützt. Aus diesem Grunde wird die Punktverzahnung nur selten ausgeführt, obwohl sie den denkbar längsten Eingriff aufweist.

Bei Rädern, deren Gang ein ruhiger sein soll, müssen die Zähnezahlen und die Rollkreise so groß gehalten sein, daß immer zwei Zähne im Eingriff stehen.

Die Auflage des konvexen Kopfes in der konkaven Fußfläche führt ein inniges Anschmiegen der Zähne herbei, wodurch Kantenpressung und Abnützung verringert wird. Der Verlauf der Abnützung über die Zahnlänge ist gleichmäßiger als bei

Evolventen (siehe Abschnitt IV). Auch ergeben sich bei Satzrädernbemessung leidliche Eingriffsverhältnisse für kleine Zähnezahlen bis 11.

Diesen günstigen Eigenschaften von geringerem Belang stehen jedoch schwerwiegende Nachteile gegenüber. Zykloidenzähne sind sehr empfindlich hinsichtlich genauer Einhaltung des Achsenabstandes; geringfügige Ungenauigkeiten verursachen schon fühlbare Unregelmäßigkeiten (siehe Abschnitt VIIc).

Die Maschinenbearbeitung der Zähne ist wohl möglich, doch ist sie weit umständlicher als bei Evolventen und kann keine so hochwertigen Ergebnisse hinsichtlich Flächenglätte und Genauigkeit liefern. Die Ursache der Umständlichkeit liegt in der Zusammensetzung des Profils aus Kopf und Fußflanke von verschiedenem Linienverlauf; auch bringt die Übertragung des Zahnstangenzahnes auf das Schneidprofil des Werkzeuges wegen des gekrümmten Zahnverlaufes keine Vereinfachung. Der Grund der Unvollkommenheit ist in dem Umstand zu suchen, daß auf den konkaven Fußflächen der Zähne tangentielle Schnitte mit geraden Schneidkanten ausgeschlossen sind.

Mangels einer ausgesprochenen Krümmung im Teilriß ist die Zykloidengestalt der Stirnzähne ungeeignet zur Übertragung als Ersatzprofil auf andere Radformen.

Ganz allgemein ist die Zykloide zur Zahngestaltung weniger vorteilhaft als die Evolvente. Eine zweckmäßige Evolventenausführung, allerdings frei von den einengenden Angaben der üblichen Satzrädernbemessung, liefert in allen Fällen ein günstigeres Verzahnungsbild.

C. Satzrädernverzahnung nach Evolventen.

Die Eingriffslinie der Evolventenzähne ist eine Gerade, deren Neigungswinkel $(90 - \alpha)$ gegen die Rädermitte die Zahngestalt kennzeichnet.

Den Ergänzungswinkel α bezeichnet man als den Eingriffswinkel, dessen Größe die übliche Satzrädernangabe bemißt mit

$$\alpha_0 = 15^\circ.$$

Außer dieser Winkelgröße sind bei den Satzrädern noch die Zahnabmessungen festgelegt. Räder gleicher Teilung sollen gleiche Zahnstärke im Teilkreise, gleiche Kopfhöhe und gleiche Fußtiefe in normaler Bemessung aufweisen. Bei kleinen Zähnezahlen ist man zwar genötigt Kürzungen der normalen Zahnhöhe vorzunehmen, doch darf eine solche Zahnhöhenverkleinerung die Paarungsmöglichkeit eines Rades mit allen übrigen Radgrößen nicht verhindern.

Die Kreise mit den Radien

$$r_1 = R_1 \cos \alpha \quad \text{und} \quad r_2 = R_2 \cos \alpha,$$

die in N_1 und N_2 die Eingriffsgerade tangieren, sind die Grundkreise (Fig. 18). Die Flankenkurven erhält man als Evolventen durch Abwälzen der Eingriffsgeraden auf den Grundkreisen.

Die Geschwindigkeit, mit welcher der Eingriff in der Eingriffsgeraden fortschreitet, entspricht der Umfangsgeschwindigkeit $v \cos \alpha$ in den Grundkreisen. Der durchlaufenen Eingriffsstrecke ist somit ein Eingriffsbogen zugehörig von

$$\frac{\overline{K_1 K_2}}{\cos \alpha}$$

und es ist die Eingriffsdauer

$$\varepsilon = \frac{\overline{K_1 K_2}}{t \cos \alpha}.$$

Ihre Werte verbleiben bei $\alpha = 15^\circ$ unter 2,4.

Der Zahndruck behält die unveränderliche Richtung der Eingriffsgeraden bei

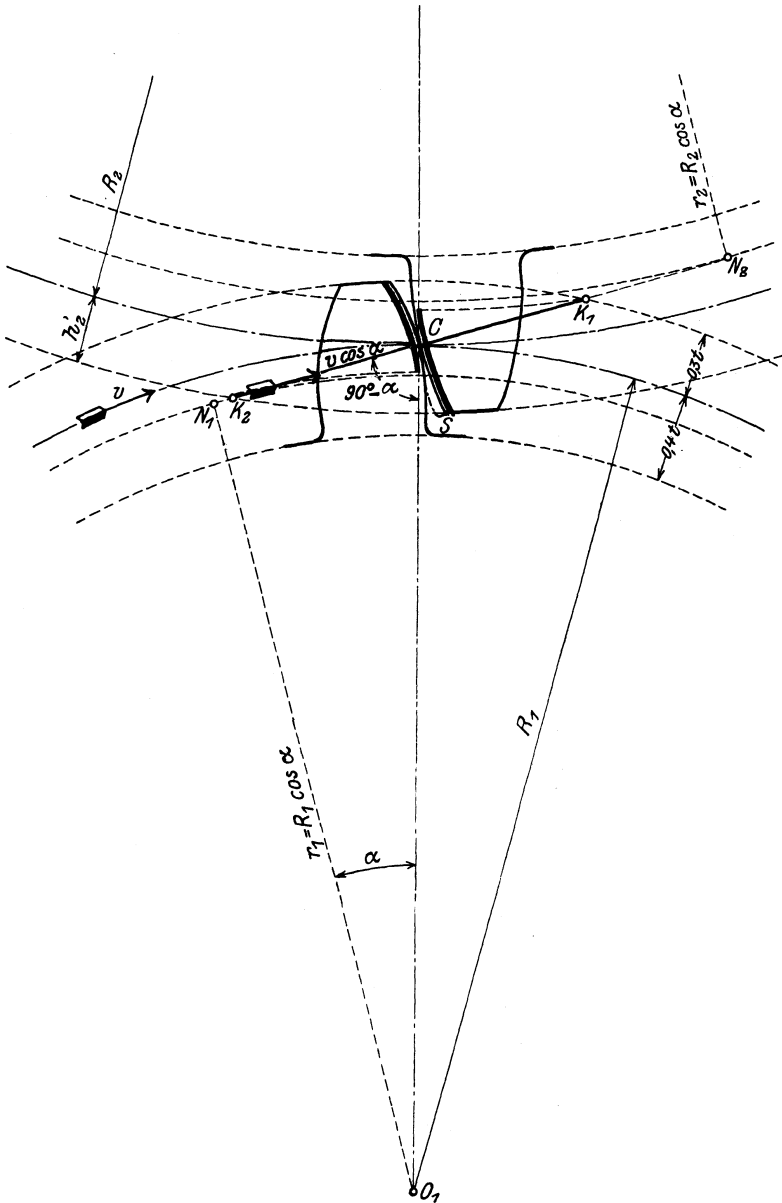


Fig. 18.

Normale Evolventenverzahnung.

Eine besonders einfache Gestalt weisen die geraden Evolventenzähne der Zahnstange (Fig. 19) auf; da der Tangierungspunkt N_2 ins Unendliche fällt, geht die Evolvente in eine Gerade über, senkrecht zur Eingriffslinie.

Hohlräder erhalten konkave Flanken (Fig. 20). Die bei der Zykloidenverzahnung hervorgehobenen Vorteile eines innigeren Anschmiegens der Flanken und einer längeren Eingriffsdauer stellen sich auch hier ein.

Beim Aufzeichnen der Zahnevolvente ist der Kopf- und Fußpunkt genau zu ermitteln. Durch Übertragen des Abschnittes NC der Eingriffsgereaden (Fig. 21) im Bogenmaße auf den Grundkreis

$$\overline{NC} = \widehat{NF}$$

erhält man den Fußpunkt F der Evolvente. Das Eindrehen des Abschnittes NK der Eingriffslinie nach nk , wobei

$$\widehat{nN} = \overline{CK}$$

gehalten wird, liefert den Kopfpunkt k . Der Krümmungsmittelpunkt des in k anschließenden Evolvententeils ist der Grundkreispunkt n .

Der Evolventenfußpunkt am Grundkreis fällt bei Zahnzahlen unter 75 außerhalb des Fußkreises. Der übliche Anschluß des Profils an den Radboden durch eine radiale Gerade (Fig. 18), die mit kleiner Rundung in den Fußkreis überführt wird, liefert schwache Fußansätze. Besser ist die Ausführung eines verstärkten Fußanschlusses durch eine verlängerte Epizykloide, die im Fußpunkt F der Evolvente tangentiell anschließt (Fig. 21). Für die Ermittlung der Kurve ist nach den Ausführungen des Abschnittes

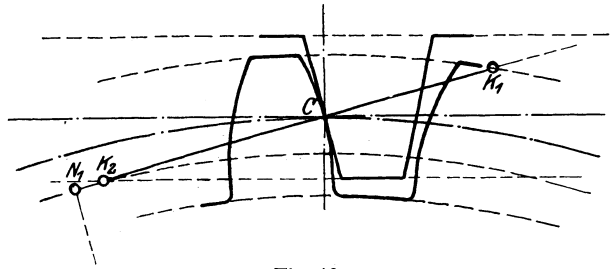


Fig. 19.
Verzahnung der Zahnstange.

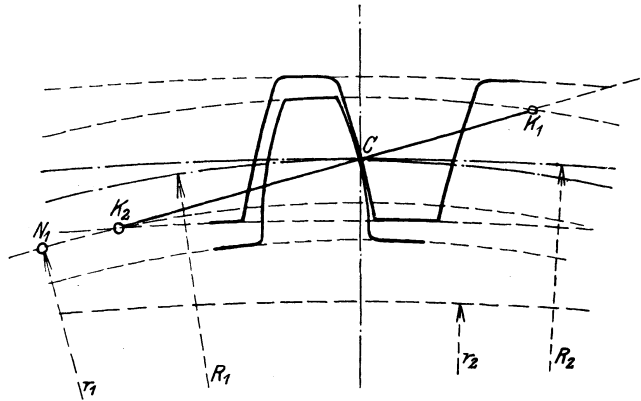


Fig. 20.
Verzahnung des Hohlrades.

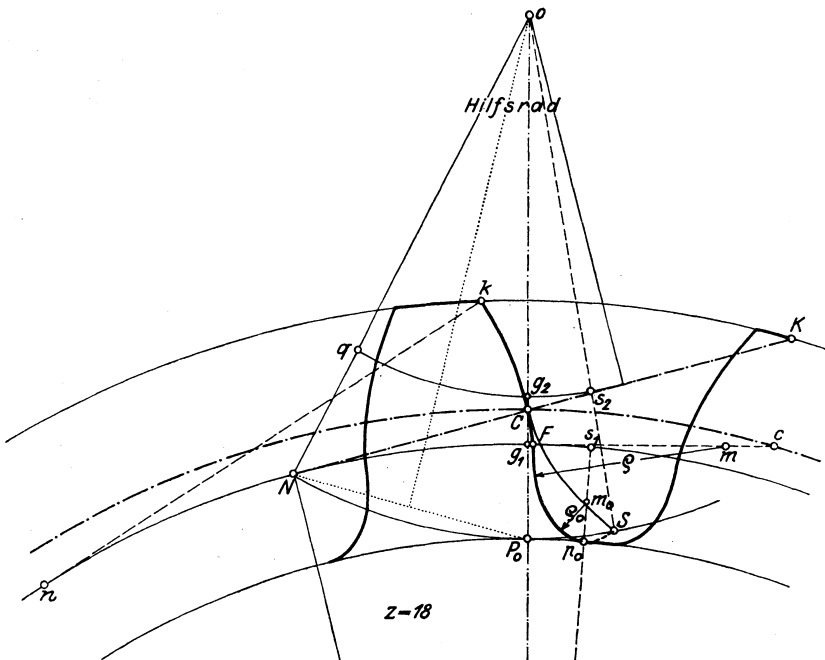


Fig. 21. Verstärkter Satzrädierzahn bei kleiner Zahnzahl $z < 30$.

Falle kann daher der Kopfkreis nur bis zum Punkte N_1 reichen. Es bestehen dann die Beziehungen:

$$\overline{N_1 N_2} = (r_1 + r_2) \operatorname{tg} \alpha = r_2 \operatorname{tg} \beta_2,$$

$$\overline{N_1 O_2} = R_2 + h_2' = \frac{r_2}{\cos \beta_2} = R_2 \frac{\cos \alpha}{\cos \beta_2}.$$

Das Einführen der Zähnezahlen und des Verhältniswertes κ_2' der Kopfhöhe aus

$$h_2' = \kappa_2' \left(\frac{t}{\pi} \right)$$

liefert die Bestimmungsgleichungen der Kopfhöhe für die Grenzausführungen:

$$\operatorname{tg} \beta_2 = \left(1 + \frac{z_1}{z_2} \right) \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\kappa_2' = \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \beta_2} - 1 \right) \frac{z_2}{2}.$$

Danach ist für den Satzräderwinkel $\alpha_0 = 15^\circ$ und die normale Kopfhöhe

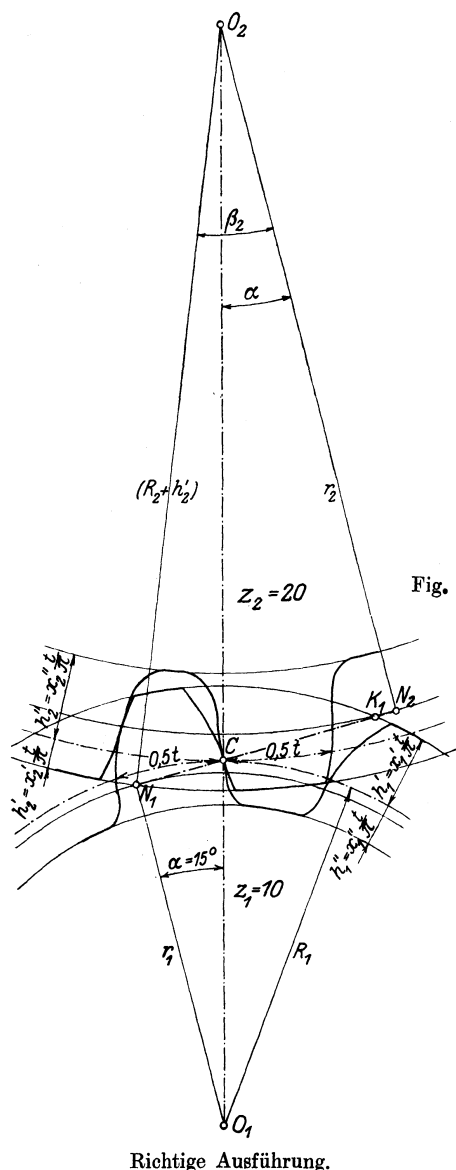
$$\kappa_2' = 1.$$

die Mindestzähnezahl]

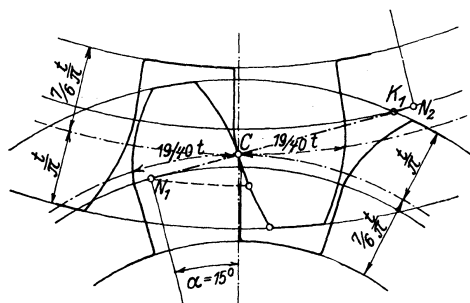
$$z_1 \sim 20 \quad 24 \quad 26 \quad 28 \quad 30,$$

bei der Übersetzung

$$\frac{z_2}{z_1} = 1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad \infty.$$



Richtige Ausführung.



Falsche Ausführung.

Fig. 23. Satzrädernetriebe mit kleineren Zähnezahlen.

grobe Fehlerhaftigkeit ein. Die Größe der zulässigen Kopfhöhe h' kann, sofern man der zeichnerischen Ermittlung ausweichen will, aus den vorstehenden Gleichungen berechnet werden. Die Zusammenstellung der Rechnungswerte in Fig. 24 erleichtert das Aufsuchen. Die als Ordinaten aufgetragenen Verhältniswerte κ' der Kopfhöhen gehören den Zähnezahlen der Abszissen an, die im reziproken Zahlenwert $1:z$ aufgetragen sind, um das ganze Ausführungsgebiet bis zur Zahnstange

zu fassen. Abgegrenzt sind die Ordinaten durch Kurven, deren Zahlenbezeichnung die Zähnezahzahl des eingreifenden Rades ausdrückt.

Für den Grenzfall der kleinsten Eingriffsdauer $\varepsilon=1$ und einer Heranziehung der vollen Länge $N_1 N_2$ zum Eingriff ergeben nach Fig. 23 die Beziehungen

$$N_1 N_2 = t \cos \alpha_0 = (R_1 + R_2) \sin \alpha_0 \quad \text{und} \quad 2\pi(R_1 + R_2) = (z_1 + z_2) t$$

eine Zähnesumme von $z_1 + z_2 = 23,4$.

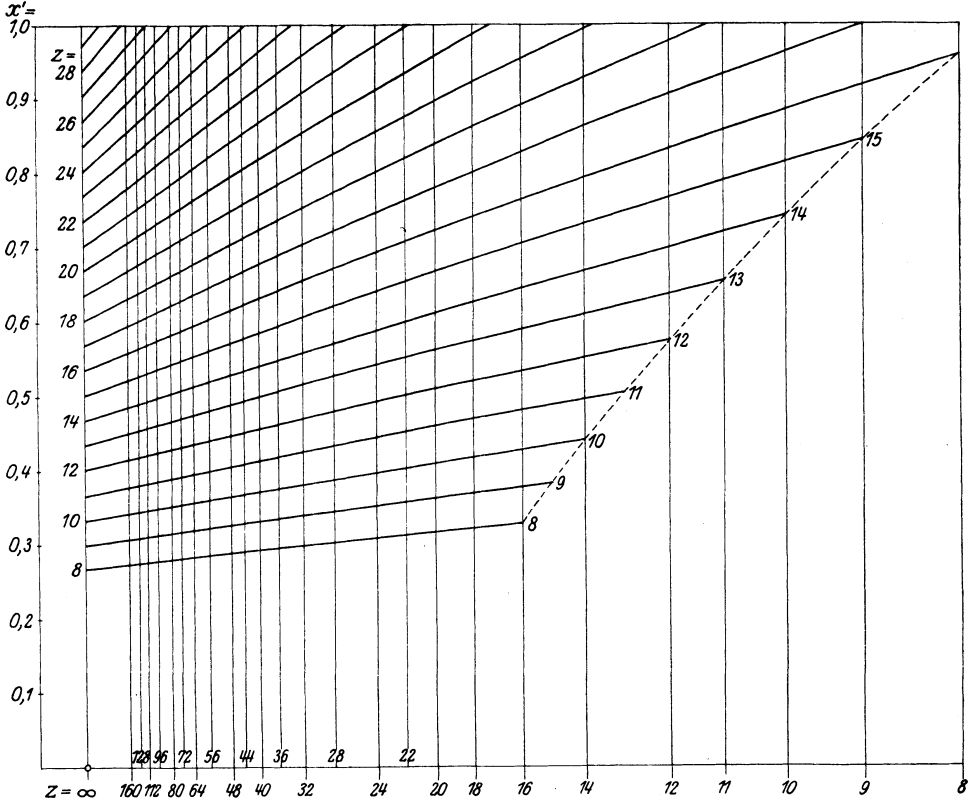


Fig. 24. Auf den Modul bezogene Verhältniswerte x' der Kopfhöhen für die Zähnezahzahl der Abszissen.

Die kleinste noch ausführbare Zähnesumme eines Satzrädernetriebes beträgt somit $(z_1 + z_2) = 24$ bei einer Eingriffsdauer von $\varepsilon = 1,02$. Mit der Zähnezahzahl des kleinen Rades kann man dabei bis auf $z_1 = 8$ herabgehen; darunter tritt der Punkt N_2 bereits aus dem Gebiet der normalen Kopfhöhe heraus.

Durch die notwendige Kürzung der Kopfhöhe wird das radiale Spiel zwischen Kopf und Fuß größer. Räder mit Zähnezahlen unter 16 greifen immer in gekürzte Zahnköpfe ein; deswegen ist hier eine Ausführung der Fußtiefe in normaler Bemessung $\frac{1}{6} \frac{t}{\pi}$ überflüssig. Es wird zur Verringerung des unnützen Spiels eine Kürzung der Fußtiefe vorgenommen (Fig. 23). Die größte Fußtiefe erfordert das kleinste eingreifende Rad. Da die kleinste Zähnesumme 24 beträgt, so hat man den Verhältniswert κ_1'' der Fußtiefe von der Zähnezahzahl z_1 so zu bemessen, daß die Kopfhöhe κ_2' des eingreifenden Rades von der Zähnezahzahl $z_2 = (24 - z_1)$ das normale Spiel von $\frac{1}{6} \frac{t}{\pi}$ vorfindet, also

$$\kappa_1'' = \kappa_2' + \frac{1}{6}.$$

Dann ist die Fußtiefe ausreichend groß für alle Paarungen. Die Größen κ_2 sind die Ordinaten der strichliert eingetragenen Grenzkurve in der Fig. 24. Danach betragen unter Zurechnung des Spiels die auf den Modul bezogenen Verhältniswerte κ'' der gekürzten Fußtiefen bei Zähnezahlen unter 16:

$z =$	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\kappa'' =$	0,49	0,55	0,61	0,67	0,74	0,82	0,91	1,01	1,12.

Durch Einhalten der notwendigen Kopfkürzungen und der etwaigen Fußkürzung, sowie durch Ausbilden verstärkter Fußanschlüsse, läßt sich, unbeschadet des Satzrädereigenschaften, auch für kleine Zähnezahlen noch ein halbwegs befriedigendes Verzahnungsbild schaffen, während das Festhalten der normalen Zahnhöhe und des radialen Fußanschlusses ohne Unterschneidung zu einer grob fehlerhaften Ausführung wegen der zu weit vorstehenden Zahnköpfe führt. Aus der Gegenüberstellung des richtig und falsch ausgeführten Getriebes in Fig. 23 ist deutlich der erreichte Vorteil zu ersehen.

Die zeichnerische Ermittlung der Zahnevolvente samt Fußanschluß ist notwendig bei der Ausführung eines Zahnmodells für das Einformen und bei der Ausführung eines Formfräasers für das Ausschneiden der Zähne.

Diese Ermittlung entfällt bei der Bearbeitung der Zähne nach dem Wälzverfahren; hier formt die Werkzeugschneide in abwälzender Bewegung die Zahngestalt, wobei der äußerste Schneidenpunkt den Fußanschluß ausarbeitet.

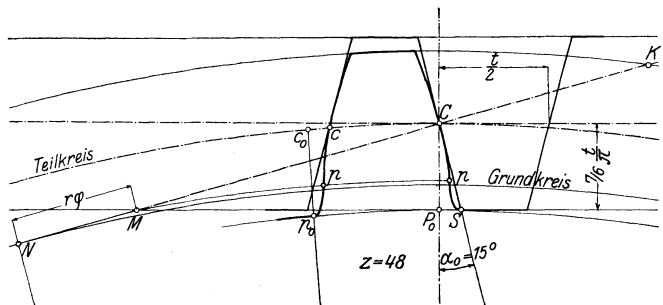


Fig. 25. Nach dem Wälzverfahren geschnittenes Zahnprofil bei großer Zähnezahl $z > 35$.

Bei dem Wälzverfahren ist die Werkzeugschneide übereinstimmend mit einem Zahnstangenprofil (Fig. 25) von den normalen Abmessungen:

Zahnstärke auf der Teilgeraden = halbe Teilung,

Kopfhöhe = $\frac{t}{\pi}$, entsprechend der normalen Fußtiefe der Zähne,

Zahnschräge $\alpha_0 = 15^\circ$, entsprechend dem Satzräderwinkel der Eingriffsgewinde.

Die Zahnevolvente wird so weit ausgeschnitten, als der Zahnstangeneingriff des Fräasers reicht. Die Kopfgerade der Zahnstange begrenzt in M die Eingriffstrecke. Am zugehörigen Zahnpunkt p setzt tangierend eine verlängerte Evolvente als Anschlußkurve an, die beim Abwälzen der Zahnstange auf dem Teilkreise vom Kopfpunkt S durchlaufen wird. Ihr Scheitelpunkt p_0 liegt auf einem Halbmesser $p_0 c_0$, der vom Teilkreis um den Betrag $c c_0 = P_0 S$ absteht.

Beim Wälzverfahren wird die Fußecke des Zahnes unnötig weit ausgeräumt; dieser Umstand ist aus Fig. 22 zu entnehmen. Notwendig ist die Zahnevolvente nur bis zum Eingriffspunkte P für die Eingriffsfähigkeit mit einer Zahnstange von normaler Kopfhöhe Ck . Der bis zur normalen Fußtiefe CP_0 überhöhte Kopf des Schneidprofils schneidet den Evolventenfuß weiter nach innen bis zum Eingriffspunkt M aus, wodurch der Fußanschluß schwächer ausfällt.

Bei Zähnezahlen über 35 liegt der Kopfabschnitt M des Schneidprofils innerhalb des eingriffsfähigen Gebietes CN der Eingriffslinie; es setzt daher nach dem Bilde der Fig. 25 die Anschlußkurve tangierend an den Evolventenverlauf an.

bei welcher der Wert φ der Eingriffsminderung abhängig ist vom Zahnstangenabschnitte λ und dem Eingriffswinkel α . Da zufolge des transzendenten Charakters der Gleichungen eine unmittelbare Berechnung der Werte nicht möglich ist, so sind in der Zahlentafel 1 die Funktionswerte für den Satzräderwinkel $\alpha_0 = 15^\circ$ zusammengestellt. Zu den in Hundertstel abgestuften Werten von λ sind die zugehörigen Größen von φ eingetragen; die angeschlossenen Differenzen zweier Nachbarwerte von φ dienen zur Berechnung der Zwischenwerte durch Interpolation.

Für leichte Unterscheidungen gilt ungefähr der Grenzwert

$$\varphi = 0,5 \lambda.$$

Für mittlere Unterscheidungen kann man sich auch mit der angenäherten Formel

$$\varphi = 0,5 \lambda (1 - \lambda)$$

behelfen.

Zahlentafel 1.

Verhältnismerte φ der Eingriffsminderung bei Unterscheidung für den Eingriffswinkel $\alpha_0 = 15^\circ$.

λ	φ	Differenz	λ	φ	Differenz	λ	φ	Differenz
0,00	0,00000		0,13	0,05612		0,26	0,10181	
		0,00486			0,00380			0,00323
0,01	0,00486		0,14	0,05992		0,27	0,10504	
		0,00476			0,00375			0,00320
0,02	0,00962		0,15	0,06367		0,28	0,10824	
		0,00465			0,00370			0,00317
0,03	0,01427		0,16	0,06737		0,29	0,11141	
		0,00455			0,00364			0,00313
0,04	0,01882		0,17	0,07101		0,30	0,11454	
		0,00446			0,00359			0,00310
0,05	0,02328		0,18	0,07460		0,31	0,11764	
		0,00437			0,00355			0,00307
0,06	0,02765		0,19	0,07815		0,32	0,12071	
		0,00429			0,00350			0,00305
0,07	0,03194		0,20	0,08165		0,33	0,12376	
		0,00421			0,00346			0,00302
0,08	0,03615		0,21	0,08511		0,34	0,12678	
		0,00413			0,00342			0,00299
0,09	0,04028		0,22	0,08853		0,35	0,12977	
		0,00406			0,00338			0,00297
0,10	0,04434		0,23	0,09191		0,36	0,13274	
		0,00399			0,00334			0,00294
0,11	0,04833		0,24	0,09525		0,37	0,13568	
		0,00393			0,00330			0,00292
0,12	0,05226		0,25	0,09855		0,38	0,13860	
		0,00386			0,00326			0,00290

Bestimmend für die Größe des Zahnstangenabschnittes $r\lambda$ ist die Fußtiefe h'' des Zahnes; eine Beziehung zwischen beiden Größen ergibt das Dreieck CP_0P' der Fig. 26:

$$h'' = r(\lambda + \text{tg } \alpha) \sin \alpha, \text{ daraus}$$

$$\lambda = \frac{1}{\sin \alpha} \frac{h''}{r} - \text{tg } \alpha.$$

Durch Einführen der Verhältnismerte aus den Gleichungen

$$h'' = \kappa'' \frac{t}{\pi}, \quad r = \frac{z t}{2 \pi} \cdot \cos \alpha$$

gelangt man zum Verhältnismerte des Zahnstangenabschnittes

$$\lambda = \frac{4}{z \sin 2 \alpha} \cdot \kappa'' - \text{tg } \alpha \dots \dots \dots (3)$$

Für den Satzräderwinkel $\alpha_0 = 15^\circ$ ist

$$\lambda = \frac{8}{z} \cdot \kappa'' - 0,26795 \dots \dots \dots (4)$$

Die vorstehenden Darlegungen zeigen, daß der Zahnstangeneingriff des Wälzverfahrens ein Zahnprofil liefert, dessen Evolvente allgemein nicht bis zum Fußpunkte reicht. Dadurch ergibt sich eine Verkürzung des sonst bis zum Punkt N reichenden Eingriffsgebietes der Eingriffsgeraden im Betrage von $\overline{NM} = r \cdot \varphi$.

Die Größe der Eingriffsminderung φ ist abhängig von dem Zahnstangenabschnitt λ . Fällt dieser Abschnitt nach auswärts, so ist λ positiv und es besteht eine Unterschneidung. Der zugehörige Wert φ ist aus der Zahlentafel 1 zu entnehmen.

Liegt der Zahnstangenabschnitt innerhalb CN , so wird λ negativ und es ist die Eingriffsminderung längengleich dem Abschnitte, also

$$\varphi = -\lambda.$$

Die Anschlußkurve des Zahnprofils setzt dann tangierend an die Zahnevolvente an.

Für einen bestimmten Fall ermöglicht die rechnerische Ermittlung von φ das Eintragen des Grenzpunktes M auf der Eingriffsgeraden (Fig. 25, 27). Das Eindrehen des Punktes M auf das Zahnprofil liefert dann den inneren Begrenzungspunkt p der Zahnevolvente, an den die Übergangskurve anschließt.

Beim Aufzeichnen der Unterschneidungslinie kann man sich der Krümmungskreise bedienen. Das Eindrehen des Punktes M der Eingriffslinie (Fig. 26) auf die Kopfgerade der Zahnstange liefert den Punkt P der Normalen PC für den Anfangspunkt p der Unterschneidungslinie. Die Lage des Krümmungsmittelpunktes m auf dieser Normalen wird nach dem Vorgang der Fig. 9 ermittelt. Der Scheitelpunkt p_0 liegt auf der radialen Geraden p_0c_0 , deren Abstand im Teilkreis von der Radmitte gleich ist:

$$Cc_0 = P_0S.$$

Der Krümmungsmittelpunkt m_0 fällt ungefähr in den Schnitt der Geraden CS und p_0c_0 hinein.

In Fig. 27 ist die Zahngestalt eines 14zähligen Rades dargestellt, wie sie aus der Bearbeitung nach dem Wälzverfahren hervorgeht. Die Eingriffsminderung NM durch die Unterschneidung ist bereits so beträchtlich, daß der verbleibende Teil MK der Eingriffsgeraden einer Eingriffsdauer von $\varepsilon = 1,09$ gleichkommt. Damit die Eingriffsstrecke bei K ungeschmälert bleibt, kann dieses Rad von der kleinsten Zähnezah $z_1 = 14$ nur gepaart werden mit einem zweiten Rade von der Mindestzähnezah $z_2 = 24$.

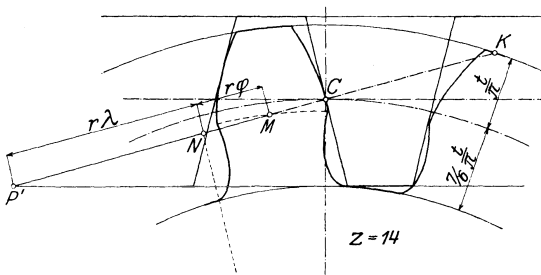


Fig. 27. Nach dem Wälzverfahren geschnittenes Zahnprofil bei kleiner Zähnezah $z < 35$.

Die vorstehenden Darlegungen zeigen, daß die Evolventenverzahnung in Satzräderausführung nur für größere Zähnezahlen geeignet ist. Bei Zähnezahlen unter 30 treten Unvollkommenheiten der Zahnausgestaltung auf. Kürzungen der normalen Kopfhöhe des Zahnes werden notwendig; die Zahnfräser arbeiten aber die Zahnlücken in normaler Fußtiefe aus. Dadurch ergibt sich ein unnötig großer Spielraum zwischen Kopf und Fuß und weiters auch ein unnütz großer Materialaushub. Bei Zähnezahlen unter 20 stellt sich bereits eine unliebsame Verringerung der Eingriffsdauer und eine merkliche Verschiedenheit in den Fußstärken der Zähne (Fig. 23) ein. Die Grenze der Ausführbarkeit ist schließlich für form-

gefräste Zähne bei einer Zähnesumme von 24 und für Zähne, die nach dem Wälzverfahren geschnitten sind, bei einer Zähnesumme von 38 erreicht.

Der Umstand, daß die konvexe Form der Evolventenzähne keine so innige Anschmiegung ermöglicht wie bei den Zykloiden, ist hinsichtlich Zahnpressung und Abnützung nachteilig. Besonders ungünstige Abnutzungsverhältnisse (siehe Abschnitt IV) bestehen für den unmittelbar am Evolventenfußpunkt anschließenden Flankenteil, dessen Ausschaltung vom Eingriff bei raschlaufenden Rädern wünschenswert ist.

Diesen Unvollkommenheiten stehen jedoch zwei Vorzüge gegenüber, die den Evolventenzähnen zu einer ausgesprochenen Überlegenheit über die Zykloiden-gestaltung verhelfen.

Ein Vorteil der Evolventenzähne, der allerdings mit der Abnützung und bei ungenauer Herstellung verloren geht, besteht in der Unempfindlichkeit gegen unrichtigen Achsenabstand. Bei einer Verschiebung der Räder bleibt das Übersetzungsverhältnis und der richtige Zahneingriff gewahrt; die Eingriffsgerade folgt tangierend den geänderten Lagen der Grundkreise. Dabei vergrößert sich das tangentielle Flankenspiel etwa um den halben Betrag der Radabrückung (siehe Gleichung 23).

Der zweite Vorteil liegt in der Einfachheit der Zahngestaltung, die die Ausführung erleichtert und einen höhern Genauigkeitsgrad zu erreichen gestattet. Günstig für die Bearbeitung ist nicht allein der Umstand, daß der eingreifende Zahnteil nur einen einzigen Flächenverlauf von geometrisch einfacher Erzeugung aufweist, sondern auch die ebene Zahnfläche der Evolventenzahnstange. Ihre Übertragung auf die Gestaltung der Schneidwerkzeuge führt zu geraden Schneidkanten und einfachen Bewegungsvorgängen in den Bearbeitungsmaschinen. Gegenwärtig werden ausnahmslos nur Evolventenzähne geschnitten.

Die Unvollkommenheiten der Evolventenzähne bei kleinen Zähnezahlen verursacht die Satzräderbeschränkung. Führt man jedoch Sonderverzahnungen aus, so erreicht man bei den kleinsten Zähnezahlen hinsichtlich Eingriffslänge und Zahnfußstärke noch befriedigende Ausführungen, die den Zykloiden überlegen sind.

Ein erweitertes Verwendungsgebiet finden die Evolventenzähne der Stirnräder bei der Ersatzverzahnung der übrigen Radformen; für eine solche Anwendung ist die Evolvente besonders geeignet, da die Eingriffsgerade in einfachster Weise die Profilkrümmung und Tangentenlage im Teilrißpunkt festlegt.

D. Sonderverzahnung nach Evolventen.

Durch Ausführung von Sonderverzahnungen lassen sich die ungünstigen Verhältnisse der Satzräder wesentlich verbessern. Der Zweck der Sonderverzahnung wird erst dann vollkommen erreicht, wenn tatsächlich die beste Zahngestaltung zur Durchführung gelangt. Da die günstigste Zahnform eines Rades nicht allein von der eigenen Zähnezahl, sondern auch von der Übersetzung beeinflusst wird, so erfordert jedes Getriebe besondere Zahnausführungen der Räder. Dieser Umstand macht die Anwendung der Sonderverzahnung abhängig von der Zahnbearbeitung.

Keine Schwierigkeit verursacht die Ausführung von Sonderverzahnungen beim Schneiden der Zähne nach dem Wälzverfahren; hier gelingt es durch abnormales Anstellen der für Satzräder bestimmten Werkzeuge die passenden Zahnänderungen zu erzielen.

Dagegen erfordert die Sonderverzahnung ein eigenes Formfräserpaar für jedes Getriebe. Zu ihrer Anfertigung wird man sich nur dann entschließen, wenn die Kosten durch eine entsprechend hohe Ausführungszahl des Getriebes gedeckt sind.

Eine erweiterte Benützung solcher Sonderfräser zur Bearbeitung naheliegender Getriebe ist zwar möglich, aber die erreichten Vorteile verringern sich mit der Ausdehnung des Verwendungsgebietes. Aus diesem Grunde sind alle Vorschläge unvollkommen, die auf eine Gruppenausführung der Sonderverzahnung hinzielen. Einer umfassenden Normung mit einfachen Angaben ist die Evolventenverzahnung nicht zugänglich.

Zu einem günstigen Verzahnungsbild gelangt man durch Vergrößerung der eingreifenden Flankenlänge im kleinen Rade des Getriebes. Hierzu stehen zwei Mittel zu Gebote. Eine Verschiebung der Zahnhöhe nach außen verlängert den Kopfteil der Flanke. Eine gleich wirksame Verlängerung des eingreifenden Fußteils erreicht man durch eine Vergrößerung des Eingriffswinkels α , da der Grundkreis weiter vom Teilkreis abrückt. Bei diesen Änderungen stellen sich wesentliche Verschiedenheiten in den Fußstärken der eingreifenden Zähne ein; ihre Ausgleichung erfolgt durch ungleiche Bemessung der Zahnstärken in den Teilkreisen. Zur

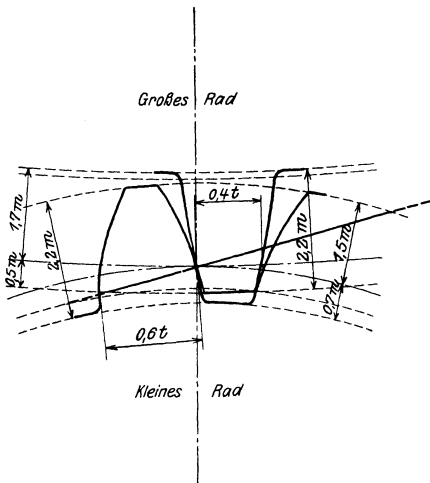


Fig. 28. A.E.G.-Verzahnung.

Anwendung beider Mittel ist man bei den kleinen Zähnezahlen genötigt. Bei mittleren Zähnezahlen und größeren Übersetzungen genügt unter Beibehaltung des Satzräderwinkels von 15° eine bloße Zahnhöhenverschiebung, um hinreichend Verbesserungen herbeizuführen.

Nach dem Vorschlag von Lasche¹⁾ wendet die allgemeine Elektrizitäts-Gesellschaft entsprechend den in Fig. 28 eingetragenen Verhältnissen, für Motorenvorgelege eine Zahnhöhenverschiebung im Betrage des halben Moduls an. Diese Verschiebungsgröße schließt Unregelmäßigkeiten aus bei Zähnezahlen über 14 und Übersetzungen über 1:3; günstigere Anordnungen ergeben sich jedoch erst bei Ausführungen über diesen Grenzwerten (1:4). Zur Ausgleichung der Verschiedenheit, die

sich in den Fußstärken bei dieser größeren Verschiebung geltend macht, wird die Zahnstärke im Teilkreis $0,6t$ im kleinen und $0,4t$ im großen Rade gehalten.

Eine derartige Festlegung der Zahnhöhenverschiebung ist mit Vorteil nur auf eine verhältnismäßig kleine Ausführungsgruppe anwendbar. Eine allgemeine Anwendung erfordert bereits eine veränderliche Bemessung²⁾ der Zahnhöhenverschiebung in Abhängigkeit von den Zähnezahlen des Getriebes. Da überdies auch die Bemessung der Zahnstärken veränderliche Angaben erheischt, so fällt die Kennzeichnung der Ausführung ziemlich umständlich aus. Normalisierungsbestrebungen in dieser Richtung sind als verfehlt zu bezeichnen, weil sie weder Einfachheit verbürgen, noch den günstigen Einfluß einer Eingriffswinkeländerung ausnützen. Bei geänderter Zahnausführung trägt das Aufrechterhalten des Satzradwinkels im Eingriff zur Vereinfachung nicht bei.

Eine willkürliche Vergrößerung des Eingriffswinkels auf etwa 20° und darüber schafft bessere Verhältnisse nur für ein beschränktes Ausführungsgebiet. Einen gleichmäßig günstigen Einfluß bewahrt man durch eine von den Zähnezahlen abhängige Winkelbemessung. Die Kennzeichnung der Zahngestaltung durch die drei

¹⁾ Siehe Lasche, „Elektrischer Antrieb mittels Zahnradübertragung“. Ztschr. d. Ver. d. Ing. 1899, S. 1492.

²⁾ Siehe Jung, „Zahnhöhenkorrektur bei Stirnrädern“. Der Betrieb 1919, S. 104.

veränderlichen Größen der Zahnhöhenverschiebung, der Zahnstärke und des Eingriffswinkels wird aber so umständlich, daß auf diesem Wege ein System der günstigsten Sonderausführungen nicht aufgestellt werden kann. Die Ursache dieser Umständlichkeit liegt in der Bezugnahme der Größen auf den Teilkreis.

Eine weitaus einfachere Durchführung der Sonderverzahnung gewährt die Eigenschaft der Evolventenzähne auch bei geänderter Achsenentfernung, den richtigen Eingriff aufrechtzuerhalten; die Eingriffsgerade folgt dem Grundkreis und nimmt einen andern Neigungswinkel an. Gleiche Grundkreisteilung ist die einzige Voraussetzung für das Zusammenarbeiten zweier Räder. Ihre Achsenentfernung ist durch den Umstand bedingt, daß die Zahnflanken aufsitzen oder nur ein den Ungenauigkeiten angemessenes Flankenspiel frei bleibt; demnach werden Achsenabstand und Eingriffswinkel zu Folgegrößen der Zahnausführung und scheiden aus der Reihe der bestimmenden Angaben aus. Es erübrigt nur, passende Zahnausführungen ausfindig zu machen.

Die Zahnausführung eines Rades kann man abhängig machen bloß von der eigenen Zähnezahl. Damit schafft man einen Rädersatz, dessen einzelne Größen bei gleicher Grundkreisteilung beliebig untereinander gepaart werden können. Eine Umständlichkeit tritt insofern auf, als die ungleichen Eingriffswinkel eine besondere Ermittlung des Achsenabstandes erfordern. Eine derartige Satzausführung der Sonderverzahnung, wie sie zuerst von Hoppe¹⁾ angewendet wurde, bringt bei Zähnezahlen unter 30 zwar wesentliche Verbesserungen gegenüber der normalen Satzräderverzahnung mit dem unveränderlichen Eingriffswinkel von 15°, jedoch gleichmäßig günstige Verhältnisse werden im ganzen Ausführungsgebiet nicht erreicht. Außerdem besteht ein Mangel in dem ungleich tiefen Eindringen der Zähne, das größere Lückentiefen notwendig macht. Das Beharren auf der Satzausführung ist nur dann gerechtfertigt, wenn die Räder mit einem Formfräsersatz geschnitten werden.

Volle Freiheit bietet das Wälzverfahren. Um in allen Fällen zur günstigsten Getriebeausführung zu gelangen, wird die Zahnausbildung eines Rades nicht nur von der eigenen, sondern auch von der Zähnezahl des eingreifenden Rades abhängig gemacht, ohne daß dabei irgendwelche Umständlichkeit mit in den Kauf genommen wird. Solche Einzelverzahnungen, bei denen die Eigenart jedes Getriebes voll berücksichtigt wird, hat Maag²⁾ mit Erfolg in der Praxis eingeführt.

Über die zweckmäßigsten Zahnausbildungen liegen verschiedene Angaben vor, die durchwegs empirischer Herkunft sind. Um zu solchen Angaben zu gelangen, braucht man nicht erst auf mehr oder minder gute Erfahrungen an ausgeführten Trieben zurückzugreifen. Das Eingriffsbild allein entscheidet über die Zweckmäßigkeit; aus dem geometrischen Zusammenhang des Bildes lassen sich die Bedingungen der günstigsten Zahnausführungen herausfinden und zu einem System der Sonderverzahnung vereinen.

Allgemein verschafft man sich eine einfache Kennzeichnung durch Entwicklung der Zahngestalt aus einem spielfreien Zahnstangeneingriff, übereinstimmend mit dem Entstehen des Zahnes bei der Bearbeitung nach dem Wälzverfahren. Durch diesen Umstand wird insbesondere ein einfaches Messen der Zahnausführung ermöglicht.

Die grundlegende Zahnstange erhält Satzräderbemessung (Fig. 29), also

$$\text{Eingriffswinkel } \alpha_0 = 15^\circ,$$

$$\text{Modulteilung } t_0 = m \cdot \pi,$$

¹⁾ Siehe Kammerer, „Technische Mittel für akademische Vorlesungen über Maschinenbau“. Ztschr. d. Ver. d. Ing. 1903, S. 854.

²⁾ Schweizerische Bauzeitung 1917, Nr. 12.

Zahnstärke auf der mittleren Geraden, die den Namen Modulgerade trägt, $= \frac{t_0}{2}$,

Kopfhöhe über der Modulgeraden, entsprechend der normalen Zahnfußtiefe, $= \frac{7}{6} \frac{t_0}{\pi}$.

Da nun alle Punkte der Zahnstange gleiche Fortbewegungsgeschwindigkeit besitzen, so kann bei einem Getriebeeingriff die Teilrißgerade auch außerhalb der Modulgeraden in einem beliebigen Abstände

$$x = \xi \left(\frac{t_0}{\pi} \right)$$

angeordnet werden. Der auf den Modul bezogene Verhältniswert ξ der Profilabrückung sei positiv beim Abrücken vom Rade, negativ bei der Annäherung zum Rade.

Für den Teilkreis des in die Zahnstange eingreifenden Rades sei die Bezeichnung Modulkreis gewählt, da auf seinem Umfange die Modulteilung besteht:

$$2R_0 = z \left(\frac{t_0}{\pi} \right).$$

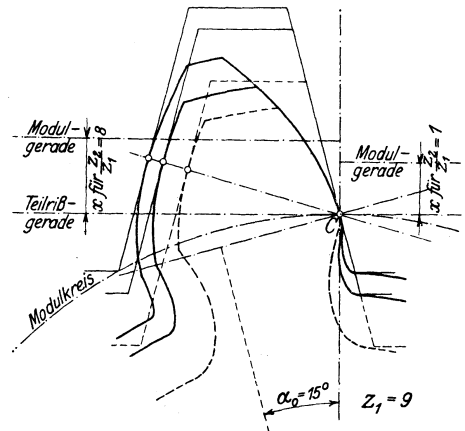
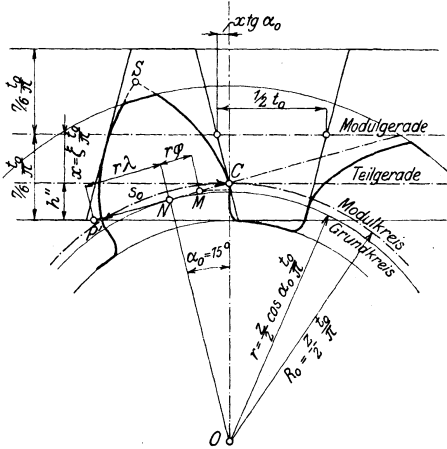


Fig. 29. Zahnausbildung mit Profilabrückung.

Fig. 30. Zahnformen eines 9zähligen Rades.

Die Profilabrückung ξ ist die kennzeichnende Größe der Zahngestalt; durch Veränderung von ξ ergeben sich beim gleichen Rade verschiedene Zahnausbildungen, die in Fußtiefe und Zahnstärke ungleich sind. Aus der Reihe dieser Ausbildungen greift man nun die passendste für ein bestimmtes Übersetzungsverhältnis heraus. Aus der Fig. 30 ist zu entnehmen, daß die Fußstärke des Zahnes mit wachsender Profilabrückung zunimmt, dagegen aber der Kopfteil spitzer ausfällt. In der gleichen Figur ist strichliert das Profil eines 9zähligen Rades eingetragen, das sich ohne Profilabrückung einstellt; es ist wegen der großen Unterschneidung unbrauchbar.

Die Fußtiefe des Zahnes innerhalb des Modulkreises beträgt nach Fig. 29:

$$h'' = x'' \left(\frac{t_0}{\pi} \right) = \left(\frac{7}{6} - \xi \right) \left(\frac{t_0}{\pi} \right) \dots \dots \dots (5)$$

Die Zahnstärke der Zahnstange im Teilriß ist um den Betrag $2x \operatorname{tg} \alpha_0$ kleiner als in der Modulgeraden; bei spielfreiem Eingriff ist deshalb die Stärke des Radzahnes im Modulkreis um den gleichen Betrag größer als die halbe Teilung, also

$$s_0 = \frac{t_0}{2} + 2x \operatorname{tg} \alpha_0 = 2 \left(\frac{\pi}{4} + \xi \operatorname{tg} \alpha_0 \right) \left(\frac{t_0}{\pi} \right) \dots \dots \dots (6)$$

Dieser Stärke des Zahnes im Modulkreise entspricht eine gewisse Stärke des Zahnes am Grundkreise, deren Einführung die weitere Behandlung vereinfacht; zu ihrer Ermittlung gelangt man durch folgende Überlegung. Der Radius R eines beliebigen Punktes C der Evolvente, die am Grundkreis vom Radius r aufsteht, schließe mit der Senkrechten ON auf den Fahrstrahl CN (Fig. 31) den Winkel α ein. Dieser Winkel bestimmt nicht nur den Halbmesser

$$R = \frac{r}{\cos \alpha}$$

des Evolventenpunktes, sondern auch seine Winkelentfernung vom Fußpunkt F der Evolvente gleich

$$(\operatorname{tg} \alpha - \alpha),$$

da gemäß der Erzeugung der Evolvente die Bedingung besteht

$$\widehat{CN} = \widehat{NF} = r \operatorname{tg} \alpha.$$

Zum Aufsuchen der Funktionswerte $(\operatorname{tg} \alpha - \alpha)$ dient die Zahlentafel 2; eingetragen sind die Werte für Winkelabstufungen von 10 Minuten. Zwischenwerte sind aus den beigefügten Differenzen für eine Minute zu ermitteln.

Die Zahnstärke am Grundkreis (Fig. 31) ist festgelegt durch die Angabe des Winkels γ der Zahnspitze S im Schnittpunkt der beiden Zahnprofile; die Winkelgröße der halben Fußstärke ist $(\operatorname{tg} \gamma - \gamma)$. Aus dieser Fußstärke berechnet sich die halbe Zahnstärke an einem beliebigen Radius R mit

$$\frac{s}{2} = \left[(\operatorname{tg} \gamma - \gamma) - (\operatorname{tg} \alpha - \alpha) \right] \frac{r}{\cos \alpha} = \left[(\operatorname{tg} \gamma - \gamma) - (\operatorname{tg} \alpha - \alpha) \right] \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} \cdot \frac{z}{2} \left(\frac{t_0}{\pi} \right) \quad (7)$$

Das Einführen von $\alpha = \alpha_0$ in diese allgemeine Gleichung der Zahnstärke ergibt die halbe Zahnstärke am Modulkreis

$$\frac{s_0}{2} = \left[(\operatorname{tg} \gamma - \gamma) - (\operatorname{tg} \alpha_0 - \alpha_0) \right] \frac{z}{2} \left(\frac{t_0}{\pi} \right).$$

Das Gleichsetzen dieser Größe mit dem früher aus dem Zahnstangeneingriff errechneten Werte der Zahnstärke in Gl. 6 liefert die Beziehung

$$(\operatorname{tg} \gamma - \gamma) = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha_0}{z} \cdot \xi + \left[\frac{\pi}{2z} + (\operatorname{tg} \alpha_0 - \alpha_0) \right] \dots \dots \dots (8)$$

Dieser Ausdruck bestimmt die Winkelgröße der halben Fußstärke am Grundkreis für einen Zahn von der Profilabrückung ξ .

Als eigentliche Fußstärke f kommt die Zahnstärke auf einem Kreise in Betracht, der die bei der Bearbeitung nach dem Wälzverfahren ausgeschnittene Zahnevolvente innen abgrenzt. Die Lage dieses Grenzpunktes p der Evolvente (Fig. 31) ist nach früherem (siehe Abschnitt IC) aus der Eingriffsminderung φ festgelegt durch den Fahrstrahl

$$\overline{Mp} = r \varphi.$$

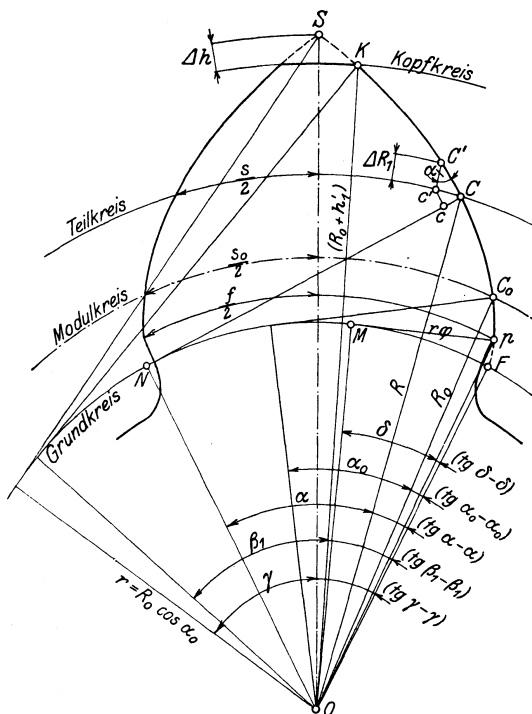


Fig. 31.

Zahlentafel 2
Funktionswerte ($\operatorname{tg} \alpha - \alpha$).

α	$\operatorname{tg} \alpha - \alpha$	Diff. 1'	α	$\operatorname{tg} \alpha - \alpha$	Diff. 1'	α	$\operatorname{tg} \alpha - \alpha$	Diff. 1'
9° 0'	0,001304		16° 0'	0,007493		23° 0'	0,023049	
10'	0,001379	7,5	10'	0,007735	24,2	10'	0,023577	52,8
20'	0,001456	7,7	20'	0,007982	24,7	20'	0,024114	53,7
30'	0,001536	8,0	30'	0,008234	25,3	30'	0,024659	54,5
40'	0,001618	8,3	40'	0,008492	25,8	40'	0,025214	55,4
50'	0,001705	8,6	50'	0,008756	26,4	50'	0,025778	56,3
10° 0'	0,001794	8,9	17° 0'	0,009025	26,9	24° 0'	0,026350	57,2
10'	0,001886	9,2	10'	0,009299	27,5	10'	0,026931	58,1
20'	0,001981	9,5	20'	0,009580	28,0	20'	0,027521	59,0
30'	0,002079	9,8	30'	0,009866	28,6	30'	0,028120	59,9
40'	0,002181	10,1	40'	0,010158	29,2	40'	0,028729	60,9
50'	0,002286	10,4	50'	0,010457	29,8	50'	0,029348	61,8
11° 0'	0,002394	10,8	18° 0'	0,010761	30,4	25° 0'	0,029976	62,7
10'	0,002506	11,1	10'	0,011071	31,0	10'	0,030613	63,7
20'	0,002621	11,5	20'	0,011387	31,6	20'	0,031260	64,7
30'	0,002739	11,8	30'	0,011709	32,2	30'	0,031917	65,7
40'	0,002861	12,2	40'	0,012038	32,9	40'	0,032583	66,7
50'	0,002987	12,5	50'	0,012374	33,5	50'	0,033261	67,7
12° 0'	0,003117	12,9	19° 0'	0,012715	34,1	26° 0'	0,033947	68,7
10'	0,003250	13,3	10'	0,013063	34,8	10'	0,034644	69,7
20'	0,003387	13,7	20'	0,013417	35,4	20'	0,035351	70,7
30'	0,003528	14,1	30'	0,013779	36,1	30'	0,036069	71,8
40'	0,003673	14,5	40'	0,014147	36,8	40'	0,036797	72,8
50'	0,003822	14,9	50'	0,014523	37,5	50'	0,037537	73,9
13° 0'	0,003975	15,3	20° 0'	0,014904	38,2	27° 0'	0,038286	75,0
10'	0,004132	15,7	10'	0,015293	38,9	10'	0,039047	76,1
20'	0,004293	16,1	20'	0,015689	39,6	20'	0,039819	77,2
30'	0,004459	16,5	30'	0,016092	40,3	30'	0,040602	78,3
40'	0,004629	17,0	40'	0,016502	41,0	40'	0,041396	79,4
50'	0,004804	17,4	50'	0,016920	41,7	50'	0,042201	80,5
14° 0'	0,004982	17,8	21° 0'	0,017345	42,5	28° 0'	0,043017	81,6
10'	0,005165	18,3	10'	0,017777	43,2	10'	0,043845	82,8
20'	0,005353	18,7	20'	0,018217	44,0	20'	0,044685	84,0
30'	0,005545	19,2	30'	0,018665	44,8	30'	0,045537	85,2
40'	0,005742	19,7	40'	0,019120	45,6	40'	0,046401	86,4
50'	0,005944	20,2	50'	0,019584	46,3	50'	0,047277	87,6
15° 0'	0,006150	20,6	22° 0'	0,020054	47,1	29° 0'	0,048165	88,8
10'	0,006361	21,1	10'	0,020533	47,9	10'	0,049065	90,0
20'	0,006577	21,6	20'	0,021020	48,7	20'	0,049977	91,2
30'	0,006798	22,1	30'	0,021515	49,5	30'	0,050901	92,4
40'	0,007025	22,6	40'	0,022018	50,3	40'	0,051838	93,7
50'	0,007256	23,1	50'	0,022530	51,1	50'	0,052788	95,0
		23,7			51,9			96,3

Damit sind für den Evolventenpunkt p der zugehörige Winkel δ aus der Beziehung

$$\varphi = \operatorname{tg} \delta \dots \dots \dots (9)$$

und der zugehörige Halbmesser

$$\overline{Op} = \frac{r}{\cos \delta}$$

bestimmt. Es beträgt daher die halbe Fußstärke

$$\frac{f}{2} = \left[(\operatorname{tg} \gamma - \gamma) - (\operatorname{tg} \delta - \delta) \right] \frac{r}{\cos \delta} = \left[(\operatorname{tg} \gamma - \gamma) - (\operatorname{tg} \delta - \delta) \right] \frac{\cos \alpha_0}{\cos \delta} \cdot \frac{z}{2} \left(\frac{t_0}{\pi} \right) \quad (10)$$

Zwei Räder vom gleichen Modul $\left(\frac{t_0}{\pi} \right)$ mit den Zähnezahlen z_1 und z_2 ,

deren Zähne die Profilabückung ξ_1 und ξ_2 aufweisen, lassen sich auf eine Achsenentfernung a (Fig. 32) so weit nähern, daß die Zähne spielfrei ineinander liegen. In dieser Lage bewahrt das Getriebe auch beim Lauf die Eingriffsfähigkeit mit spielfreiem Gang. Der Eingriff verläuft dann längs einer Geraden, welche beide Grundkreise r_1 und r_2 tangiert; der Schnittpunkt C dieser Eingriffsgeraden mit der Rädermitte legt die Größe der Teilkreise fest. Allgemein wird der Eingriffswinkel α , der die Neigung der Eingriffsgeraden ausdrückt, vom Satzradwinkel α_0 verschieden sein. Die Folge hiervon ist, daß die Teilkreise des Getriebes nicht mehr mit den Modulkreisen R_1 und R_2 der Radzähne zusammenfallen.

Aus dem spielfreien Gang ergibt sich die Forderung, daß die Summe der Zahnstärken in den beiden Teilkreisen gleich der Teilung ist:

$$s_1 + s_2 = t = t_0 \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha}.$$

Dieser Ausdruck wird durch das Einführen der Zahnstärke nach Gl. 7 umgeformt in

$$(\operatorname{tg} \gamma_1 - \gamma_1) z_1 + (\operatorname{tg} \gamma_2 - \gamma_2) z_2 - (\operatorname{tg} \alpha - \alpha) (z_1 + z_2) = \pi.$$

Das Einsetzen der Fußstärken aus Gl. 8 führt zur Gleichung des Eingriffswinkels

$$(\operatorname{tg} \alpha - \alpha) = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha_0}{z_1 + z_2} (\xi_1 + \xi_2) + (\operatorname{tg} \alpha_0 - \alpha_0) \dots \dots \dots (11)$$

Der Abstand y der Modulkreise ist die Summe der Radienunterschiede zwischen Teil- und Modulkreisen

$$y = R_1 \left(\frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} - 1 \right) + R_2 \left(\frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} - 1 \right) = \frac{z_1 + z_2}{2} \left(\frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} - 1 \right) \frac{t_0}{\pi} = \eta \cdot \frac{t_0}{\pi}.$$

Es ist demnach der auf den Modul bezogene Verhältniswert der Radabückung

$$\eta = \frac{z_1 + z_2}{2} \left(\frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} - 1 \right) \dots \dots \dots (12)$$

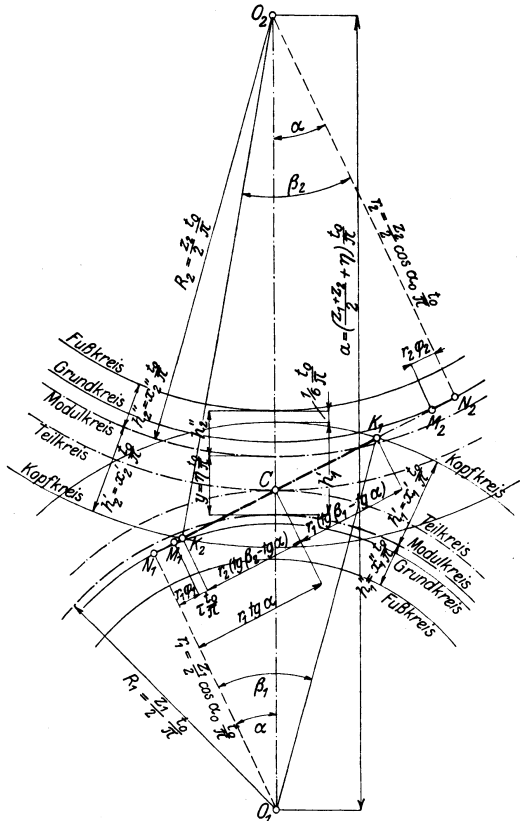


Fig. 32. Eingriffsbild der Sonderverzahnung.

Ist der Eingriffswinkel α größer als der Satzräderwinkel α_0 , so ist η positiv und es rücken die Modulkreise voneinander ab; bei kleinerem Winkel α ist η negativ und es greifen die Modulkreise übereinander.

Die Achsenentfernung des Getriebes beträgt

$$a = R_1 + R_2 + y = \left(\frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2} + \eta \right) \frac{t_0}{\pi} \dots \dots \dots (13)$$

Die Kopfhöhe der Zähne, die bisher unbestimmt blieb, erfährt erst bei der Getriebepaarung ihre Festlegung. Aus den Profilabrückungen ξ_1 und ξ_2 sind nach Gl. 5 die Fußtiefen innerhalb der Modulkreise bekannt:

$$h''_1 = z''_1 \left(\frac{t_0}{\pi} \right) = (\tau/6 - \xi_1) \frac{t_0}{\pi}, \quad h''_2 = z''_2 \left(\frac{t_0}{\pi} \right) = (\tau/6 - \xi_2) \frac{t_0}{\pi} \dots (14)$$

Die Kopfhöhen h'_1 und h'_2 werden so groß gehalten, daß zwischen Kopf- und Fußkreis der normale Spielraum von $1/6 \left(\frac{t_0}{\pi} \right)$ besteht:

$$h'_1 = y + h''_2 - 1/6 \left(\frac{t_0}{\pi} \right), \quad h'_2 = y + h''_1 - 1/6 \frac{t_0}{\pi}.$$

Durch Einführen der Beziehungen für die Fußtiefen und die Radabrückung erhält man die Kopfhöhen über den Modulkreisen:

$$h'_1 = z'_1 \left(\frac{t_0}{\pi} \right) = (\eta + 1 - \xi_2) \left(\frac{t_0}{\pi} \right), \quad h'_2 = z'_2 \left(\frac{t_0}{\pi} \right) = (\eta + 1 - \xi_1) \left(\frac{t_0}{\pi} \right) \dots (15)$$

Die Gesamtzahnhöhe fällt allgemein niedriger als die normale Zahnhöhe $2 1/6 \frac{t_0}{\pi}$ aus; nur im Sonderfalle $\alpha = \alpha_0$ bleibt die normale Höhe erhalten.

Damit sind alle Ausführungsgrößen eines Getriebes festgelegt, dessen Räder mit den Profilabrückungen ξ_1 und ξ_2 geschnitten sind. Bei der Ermittlung rechnet man zuerst aus Gl. 11 die nur als Zwischenwert benötigte Größe $(\text{tg } \alpha - \alpha)$ und bestimmt aus der Zahlentafel 2 der Funktionswerte den zugehörigen Eingriffswinkel α . Dann werden die Radabrückung η und die Zahnhöhen berechnet.

Für die weitere Untersuchung ist noch die Bestimmung der Zahnkopfwinkel β_1 und β_2 und der Zahnfußwinkel δ_1 und δ_2 notwendig. Aus der Fig. 31 ergibt sich für den Kopfpunkt K des Profils vom kleinen Rade z_1 die Beziehung.

$$R_0 + h'_1 = \frac{r}{\cos \beta_1} = R_0 \frac{\cos \alpha_0}{\cos \beta_1}.$$

Das Einführen des Moduls und die Anwendung der Gleichung auf das zweite Rad liefern die Größen für die Zahnkopfwinkel

$$\cos \beta_1 = \frac{\cos \alpha_0}{\frac{2}{z_1} z'_1 + 1}, \quad \cos \beta_2 = \frac{\cos \alpha_0}{\frac{2}{z_2} z'_2 + 1} \dots \dots \dots (16)$$

Die Zahnfußwinkel berechnet man nach Gl. 9

$$\text{tg } \delta_1 = \varphi_1, \quad \text{tg } \delta_2 = \varphi_2, \dots \dots \dots (17)$$

wobei die Eingriffsminderungen φ_1 und φ_2 aus den Zahnstangenabschnitten (gemäß Gl. 4)

$$\lambda_1 = \frac{8}{z_1} z''_1 - 0,26795, \quad \lambda_2 = \frac{8}{z_2} z''_2 - 0,26795 \dots \dots \dots (18)$$

zu bestimmen sind.

Die Eingriffsdauer ε des Getriebes wird aus der Länge der Eingriffsstrecke $K_1 K_2$ (Fig. 32) ermittelt; es ist

$$\varepsilon = \frac{(\text{tg } \beta_1 - \text{tg } \alpha) r_1 + (\text{tg } \beta_2 - \text{tg } \alpha) r_2}{t_0 \cdot \cos \alpha_0} = \left[(\text{tg } \beta_1 - \text{tg } \alpha) \frac{z_1}{2} + (\text{tg } \beta_2 - \text{tg } \alpha) \frac{z_2}{2} \right] \frac{1}{\pi} (19)$$

Durch Wahl verschiedener Profilabrückungen läßt sich eine Getriebeausführung beliebig ändern. Eine Beschränkung in dieser Wahl gibt aber die Forderung, daß der Kopfkreis des größeren Rades z_2 das eingriffsfähige Gebiet der Eingriffslinie nicht überschneidet. Für den Kopfkreis des kleineren Rades z_1 besteht bei den in Betracht kommenden Ausführungen keine Gefahr des Überschneidens.

Aus dem Umstande, daß die Evolvente nicht bis zu ihrem Fußpunkte ausgeschnitten oder der Zahn unterschritten ist, erfährt das sonst bis zum Punkte N_1 (Fig. 32) reichende Eingriffsgebiet der Eingriffslinie (siehe Abschnitt IC) eine Minderung im Betrage von

$$\overline{N_1 M_1} = r_1 \varphi_1.$$

Verbleibt der Kopfabchnitt $\overline{K_2 C}$ im eingriffsfähigen Gebiet, so besteht ein unbenützter Teil der Eingriffslinie im Betrage von

$$\overline{M_1 K_2} = \tau \left(\frac{t_0}{\pi} \right) = r_1 \operatorname{tg} \alpha - r_1 \varphi_1 - r_2 (\operatorname{tg} \beta_2 - \operatorname{tg} \alpha).$$

Der auf den Modul bezogene Verhältniswert dieser Größe ist

$$\tau = \left[(\operatorname{tg} \alpha - \varphi_1) \frac{z_1}{2} - (\operatorname{tg} \beta_2 - \operatorname{tg} \alpha) \frac{z_2}{2} \right] \cos \alpha_0 \dots \dots (20)$$

Die Forderung des Nichtüberschneidens ist erfüllt, wenn

$$\tau \geq 0.$$

Bei frei gewählten Profilabrückungen ξ_1 und ξ_2 werden im allgemeinen die Fußstärken der Zähne eines Getriebes ungleich groß ausfallen. Aus der Beziehung der Gl. 10 berechnet sich der Unterschied der halben Fußstärken im Verhältniswerte

$$\sigma = \left[(\operatorname{tg} \gamma_1 - \gamma_1) - (\operatorname{tg} \delta_1 - \delta_1) \right] \frac{\cos \alpha_0}{\cos \delta_1} \cdot \frac{z_1}{2} - \left[(\operatorname{tg} \gamma_2 - \gamma_2) - (\operatorname{tg} \delta_2 - \delta_2) \right] \frac{\cos \alpha_0}{\cos \delta_2} \cdot \frac{z_2}{2}. (21)$$

Eine günstige Getriebeausführung soll gleiche Fußstärken aufweisen, was durch die Bedingung erfüllt ist:

$$\sigma = 0.$$

Das gleichzeitige Einhalten der Forderungen

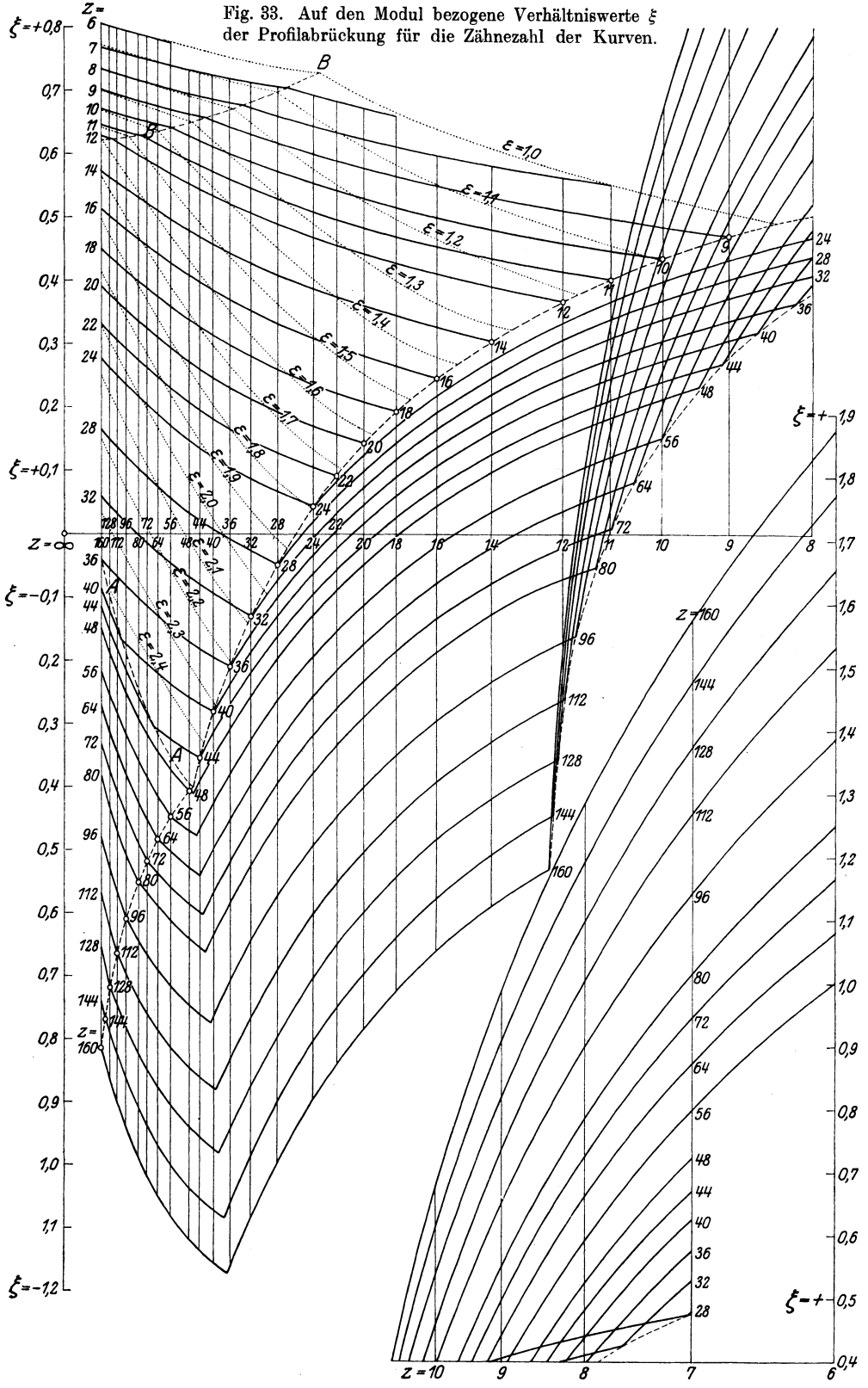
$$\sigma = 0 \quad \text{und} \quad \tau = 0$$

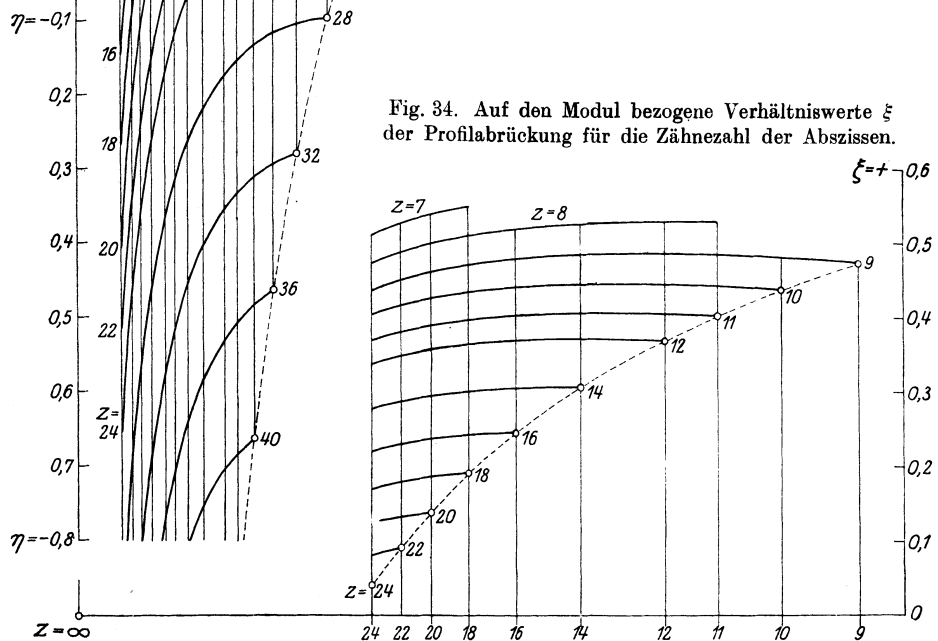
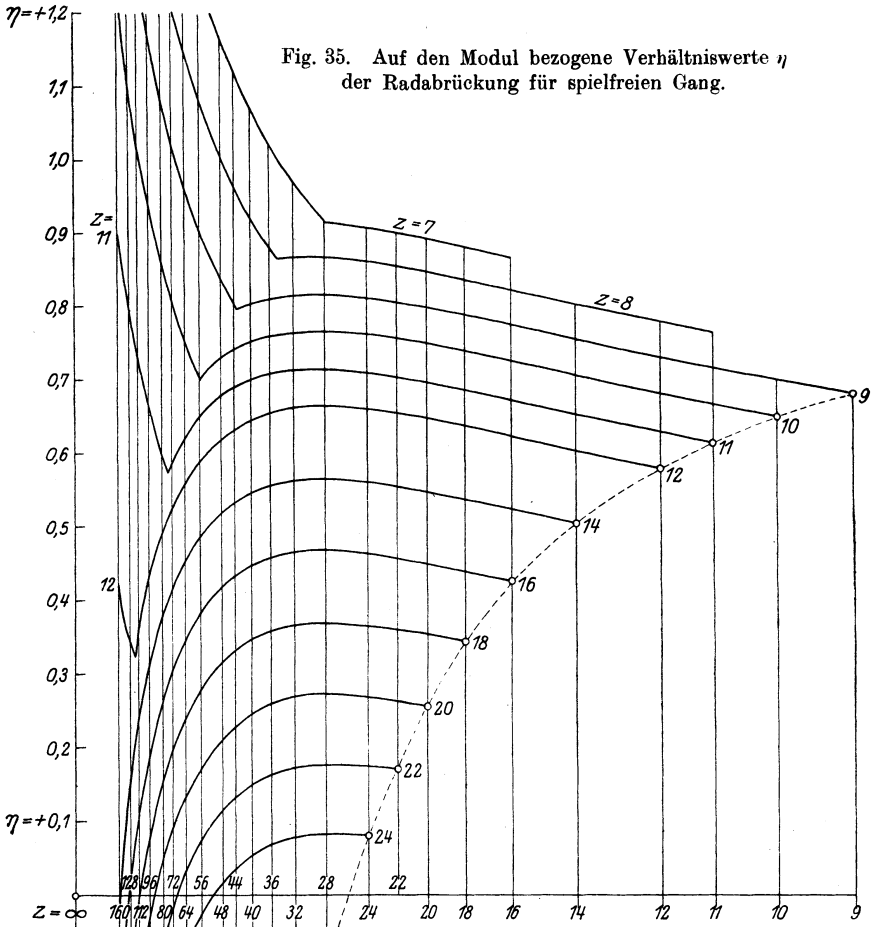
führt zu einer Grenzausführung, die man als den günstigsten Fall bezeichnen kann. Eine Reihe von Vorteilen ist mit dieser Ausführung verknüpft. Die Profilabrückungen fallen am kleinsten aus, welcher Umstand dadurch an Bedeutung gewinnt, als größere Abrückungen beim Schneiden mit Schneckenfräser Bearbeitungsfehler zeitigen. Diese kleinsten Profilabrückungen bedingen kleinsten Achsenabstand und kleinsten Eingriffswinkel α des Getriebes, so daß die Schräge des Zahndruckes nicht unnötig groß ausfällt. Vom kleinen Rade gelangt das ausgeschnittene Evolventenprofil in ganzer Länge zum Eingriff und die Eingriffsdauer nimmt einen Höchstwert an. Ferner entfallen außer Eingriff die unmittelbar an den Evolventenfußpunkt anschließenden Zahnteile, die ungünstigen Abnutzungsverhältnissen ausgesetzt sind.

Durch das Nullsetzen der Werte τ und σ sind die Profilabrückungen ξ_1 und ξ_2 eines Getriebes eindeutig festgelegt und lassen sich wegen des transzendenten Charakters der Bestimmungsgleichungen durch eine Näherungsrechnung ermitteln.

Die zusammenfassende Darstellung der Rechnungsergebnisse in der Fig. 33 gibt eine einfache Unterlage für die Größenbemessung und einen klaren Überblick über die Veränderlichkeit der Profilabrückungen ξ . Die Abhängigkeit der Profilabrückung von Zähnezahln und Übersetzung wird durch eine Kurvenschar in voll ausgezogenen Linien ausgedrückt. Die Übersetzung ist in der Figur durch die Abszissen gekennzeichnet; um das ganze Ausführungsgebiet einzubeziehen, sind die

Fig. 83. Auf den Modul bezogene Verhältniswerte ξ der Profilabrückung für die Zahnzahl der Kurven.





reziproken Werte $1:z$ der Zähnezahls vom gepaarten Rade als Abszissen eingetragen. Die einer bestimmten Zähnezahls angehörenden Profilabrückungen sind die Ordinaten einer Kurve, die die Bezeichnung der Zähnezahls trägt. Aus dem Verlauf der Kurven ersieht man deutlich die Veränderlichkeit der Abrückung bei verschiedenen Übersetzungen. Die kleinste Abrückung besteht bei Paarungen mit gleicher Zähnezahls; ihre Größen sind durch Punktandeutung besonders hervorgehoben. Die Verbindungslinie dieser Punkte teilt das Darstellungsgebiet in zwei Zonen. Die links gelegene Zone schließt die Profilabrückungen für das kleine Rad im Getriebe ein; rechts liegen die Profilabrückungen für das größere Rad im Getriebe. Je größer die Übersetzung wird, desto mehr nimmt die Abrückung zu.

Aus dem Umstande, daß die Eingriffsminderung φ bei positiven Zahnstangenabschnitten λ einem anderen Gesetze folgt als bei negativen, ergibt sich auch ein verschiedener Kurvenverlauf der Profilabrückung. Die Grenzlinie AA scheidet das obere Gebiet der unterschrittenen Zähne im kleineren Rade des Getriebes vom dem unteren Gebiete der nicht unterschrittenen Zähne.

In der rechten Zone drängen sich die Kurven für Zähnezahlen unter 24 sehr nahe aneinander; der Deutlichkeit wegen unterblieb ihre Eintragung. Eine Ergänzung dieses fehlenden Gebietes ist in Fig. 34 enthalten, in der durch Wahl einer anderen Eintragung der Abrückung eine deutlichere Darstellung erzielt ist. Die Ordinaten der Profilabrückungen gehören hier den Zähnezahlen der Abszissen an; die Zahlbezeichnung der Kurven entspricht der Zähnezahls des eingreifenden Rades. Hier sind auch die in der Fig. 33 fehlenden Profilabrückungen für die Räder aufgenommen, die mit einem 7 zähligen Trieblied zusammenarbeiten.

In der linken Zone der Fig. 33 ist eine zweite Kurvenschar in punktierten Linien eingetragen. Die Zahlenbezeichnung dieser Linien drückt die Eingriffsdauer ε der Paarungen aus, entsprechend der Beziehung in Gl. 19. Aus der Lage eines Kurvenpunktes der Profilabrückung gegenüber zweier benachbarten ε -Linien läßt sich die Eingriffsdauer der zugehörigen Räderpaarung ohne weiteres einschätzen. Die Linie der Eingriffsdauer $\varepsilon=1$ begrenzt nach unten das ausführbare Gebiet. Die kleinsten Getriebausführungen sind bei den Zähnezahlen 9/9, 8/11, 7/18 erreicht.

Eine weitere Beschränkung der Ausführbarkeit verursacht das Spitzwerden des Zahnkopfes im kleinen Rade des Getriebes bei kleinen Zähnezahlen. Die Ausführung der Zahnprofile bis zu ihrem Schnittpunkt S (Fig. 31) ist unzulässig. Als Mindestmaß der notwendigen Abstumpfung kann ungefähr der Betrag

$$\Delta h = \frac{1}{6} \left(\frac{t_0}{\pi} \right)$$

angesetzt werden. Aus den Beziehungen der Fig. 31 berechnet sich die Abstumpfung mit

$$\Delta h = \frac{r}{\cos \gamma} - \frac{r}{\cos \beta_1} = \left(\frac{1}{\cos \gamma} - \frac{1}{\cos \beta_1} \right) \cos \alpha_0 \frac{z}{2} \left(\frac{t_0}{\pi} \right).$$

Der Unterschied zwischen der bestehenden Abstumpfung des Zahnes im kleineren Rade z_1 des Getriebes und dem zulässigen Mindestmaß ist im Verhältniswert zum Modul ausgedrückt durch

$$\sigma = \frac{\Delta h}{\left(\frac{t_0}{\pi} \right)} - \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{\cos \gamma_1} - \frac{1}{\cos \beta_1} \right) \cos \alpha_0 \frac{z_1}{2} - \frac{1}{6} \dots \dots \dots (22)$$

Wird $\sigma=0$, so ist die Grenze der Ausführbarkeit erreicht. Dieser Bedingung entspricht die Kurve BB in Fig. 33; sie begrenzt das Ausführungsgebiet der gleichstarken Zähne.

Getriebeausführungen außerhalb dieser Abgrenzung sind nur dann möglich, wenn die Bedingung für die Gleichheit der Zahnstärken fallen gelassen wird. An ihre Stelle tritt die Bedingung des Mindestmaßes der Zahnabstumpfung $\sigma = 0$ entsprechend Gl. 22. Das gleichzeitige Einhalten der Bedingung $\tau = 0$ in Gl. 20 bestimmt nun eindeutig die Profilabrückungen ξ_1 und ξ_2 im Gebiete der spitzen Zähne; ihre Werte wurden aus den Bestimmungsgleichungen berechnet und in die Kurventafel der Abrückungen (Fig. 33) eingetragen.

Der Verlauf der Profilabrückungen im Gebiete der spitzen Zähne, das sich an das Gebiet der gleichstarken Zähne anschließt, zeigt unwesentliche Änderungen in der Abrückung vom kleineren Rade des Getriebes, dagegen aber ein beträchtliches Anwachsen der Abrückung im größeren Rade bei zunehmender Übersetzung. Der Abschnitt dieser großen Abrückungen, deren Kurven aus dem Bilde der Figur heraustreten, ist in der unteren rechten Ecke als Ergänzung eingefügt. Die Ausführung in spitzen Zähnen ermöglicht das Heruntergehen in der Zähnezahl bis auf 7, bei hohen Übersetzungen sogar bis auf 6. Noch kleinere Zähnezahlen läßt die Forderung der Eingriffsdauer $\varepsilon > 1$ nicht zu.

Für das Bereich der praktisch in Betracht kommenden Ausführungen ist in Fig. 35 eine umfassende Darstellung der Verhältniswerte η der Radabrückung für spielfreien Gang gegeben, die die Profilabrückungen ξ der Fig. 33 u. 34 erfordern. Die Zähnezahlen des Getriebes sind in der Figur festgelegt durch die Zahlenbezeichnung der Kurven und die Zahlenbezeichnung der Abszissen, deren Längen gleichfalls im reziproken Werte eingetragen sind. Abszisse und Kurvenpunkt bestimmen in der Ordinate die Radabrückung des Getriebes für die zugehörigen Zähnezahlen.

Die positiven Radabrückungen entsprechen durchwegs Vergrößerungen des Eingriffswinkels über 15° ; den größten Eingriffswinkel im Betrage von $\alpha = 26^\circ 37' 52''$ hat das Getriebe 8/11. Diese Vergrößerungen sind eben das entscheidende Mittel für die Besserung des Eingriffes bei kleinen Zähnezahlen und schaffen erst die Ausführungsmöglichkeit bei den kleinsten Zähnezahlen, bei welchen die Satzräderverzahnung bereits versagt. Die Einflußnahme des Eingriffswinkels auf die Güte des Eingriffes erstreckt sich jedoch auch auf das Gebiet der größeren Zähnezahlen; hier führen Verkleinerungen des Eingriffswinkels bis auf $\alpha = 10^\circ$ zu günstigen Verhältnissen, wobei negative Werte von η , also Radannäherungen sich ergeben. Eine ausgesprochene Notwendigkeit für solche Sonderausführungen liegt aber nicht vor, da die Satzräderbemessung einen hinreichend günstigen Eingriff liefert.

Ungenauigkeiten der Ausführung nötigen zur Belassung eines Flankenspiels Δs , das durch Vergrößerung der Achsenentfernung a um den Betrag Δa erreicht wird. Hierbei rücken die Teilkreise um die Beträge ΔR_1 und ΔR_2 weiter nach außen. Dieser Abrückung (Fig. 31)

$$\Delta R_1 = \overline{c'C}$$

entspricht eine Minderung der halben Zahnstärke im neuen Teilkreis in der Größe $c'C$, wodurch senkrecht zur Zahnfläche gemessen ein Spiel frei wird im Betrage von

$$\overline{c'C} = \Delta R_1 \sin \alpha.$$

Der ganze Zahn gibt den doppelten Betrag frei. Die Summe der Beträge von beiden Rädern ist das Flankenspiel, gemessen in der Richtung der Eingriffsgeraden:

$$\Delta s = 2(\Delta R_1 + \Delta R_2) \sin \alpha = 2 \Delta a \sin \alpha. \quad (23)$$

Das tangentielle Spiel in den Teilkreisen beträgt dann

$$\frac{\Delta s}{\cos \alpha} = 2 \Delta a \operatorname{tg} \alpha.$$

Für Eingriffswinkel in der Nähe von 15° ist angenähert

$$\Delta s = \frac{\Delta a}{2}.$$

Aus dieser Abhängigkeit läßt sich für ein bestimmtes Flankenspiel die Zugabe Δa zur Achsenentfernung a berechnen. Es ist die Achsenentfernung a' des mit Spiel laufenden Getriebes

$$a' = a + \Delta a = \left(\frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2} + \eta \right) \frac{t_0}{\pi} + \Delta a \dots \dots \dots (24)$$

Die Profilabrückungen ξ der Fig. 33 und 34, sowie die abhängigen Radabrückungen η der Fig. 35 sind Grenzwerte des Mindestmasses, die unbedenklich überschritten werden können, wobei allerdings die Eingriffsdauer abfällt. Kleine Zugaben $\Delta \xi_1$ und $\Delta \xi_2$ zu den Tafelwerten verändern das Ausführungsbild eines Getriebes nur unwesentlich; hiervon macht man Gebrauch bei der Abrundung des Achsenabstandes und beim Einbau verschiedener Übersetzungen in gleichen Achsenabstand. Die Bedingung $\tau = 0$ wird sicher erfüllt, wenn beide Änderungen positiv gehalten werden. Im Gebiete der gleich starken Zähne behält man die Gleichheit der Zahnstärke bei ungefähr $\Delta \xi_1 = \Delta \xi_2$; im Gebiete der spitzen Zähne bewahrt man die kleinste zulässige Abstumpfung bei ungefähr $\Delta \xi_2 = 2 \Delta \xi_1$.

Über die Profilabrückung ξ_1 eines Rades z_1 , das in eine normale Zahnstange $z_2 = \infty$ eingreift, gibt die Tafel der Profilabrückungen keine Auskunft. Für Zahnstangengetriebe muß man nämlich eine Umstellung der Forderungen, welche zur Größenbestimmung der Abrückung führen, vornehmen. Die Forderung der Gleichheit in der Zahnstärke $\sigma = 0$ fällt; an ihre Stelle tritt die Notwendigkeit, auch im Eingriffsbild des Getriebes den normalen Eingriffswinkel $\alpha = 15^\circ$ zu behalten. Die Forderung $\tau = 0$ bleibt aufrecht; man läßt die Kopfgerade der Zahnstange (Fig. 36) durch den Punkt M_1 gehen, bis zu welchem Punkte die Schmälerung des

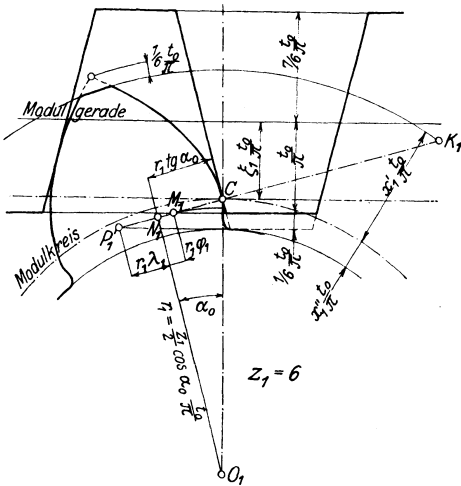


Fig. 36. Zahnstangengetriebe.

Eingriffes, herrührend von der Zahnunterschneidung durch den verlängerten Kopf der Fräszahnstange, reicht. Aus den Beziehungen der Fig. 36 ergeben sich die beiden Gleichungen

$$\lambda_1 + \varphi_1 = \frac{1}{6} \frac{4}{z_1 \sin 2\alpha_0}$$

und

$$\xi_1 = \frac{7}{6} - \frac{1}{6} \frac{\lambda_1 + \operatorname{tg} \alpha_0}{\lambda_1 + \varphi_1},$$

die unter Zuhilfenahme der Werte φ aus Zahlentafel 1 zur Ermittlung der Profilabrückung führen. In Fig. 37 sind die Profilabrückungen der Räder, die für Zahnstangeneingriff bestimmt sind, eingetragen; für Zähnezahlen über $z_1 = 32$ entfallen die Abrückungen ($\xi_1 = 0$). Die Zähne behalten bis zur Zähnezahl 13 die normale Zahnhöhe $2 \frac{1}{6} \frac{t_0}{\pi}$. Von 12 Zähnen abwärts verringert sich die Zahnhöhe wegen der notwendigen Abstumpfung der Zahnspitzen, die im radialen Betrage von $\frac{1}{6} \frac{t_0}{\pi}$ zu halten ist (Fig. 36). Die verbleibenden Kopfhöhen κ_1' über dem Modulkreise sind gleichfalls in der Fig. 37 aufgenommen. Die verminderten Zahnhöhen haben ein größeres Spiel zwischen Kopfkreis und Fußgerade der Zahnstange zur Folge. Um die Eingriffsdauer ε eines Zahnstangengetriebes einschätzen

zu können, sind abgestufte Werte von ε in Punktandeutung auf der Linie der Profilabrückung eingetragen.

Das Anwendungsgebiet der Profilabrückungen in Fig. 37 beschränkt sich nicht allein auf Zahnstangeneingriff, sondern auf alle Ausführungen, bei denen die Zähnezahzahl im großen Rade des Getriebes sehr hoch ausfällt. Dadurch wird die Lücke ausgefüllt, die in der Gesamtdarstellung der Abrückungen (Fig. 33) für Zähnezahlen über 160 besteht. Aus dieser Darstellung ist zu entnehmen, daß beim Ansteigen der Zähnezahzahl sich unangenehm große Profilabrückungen einstellen, die beim Zahn-schneiden mit der Frässhnecke nicht eingehalten werden können, weil die Bearbeitung zu ungenau ausfallen und die gewöhnliche Längenausführung der Frässhnecke nicht ausreichen würde.

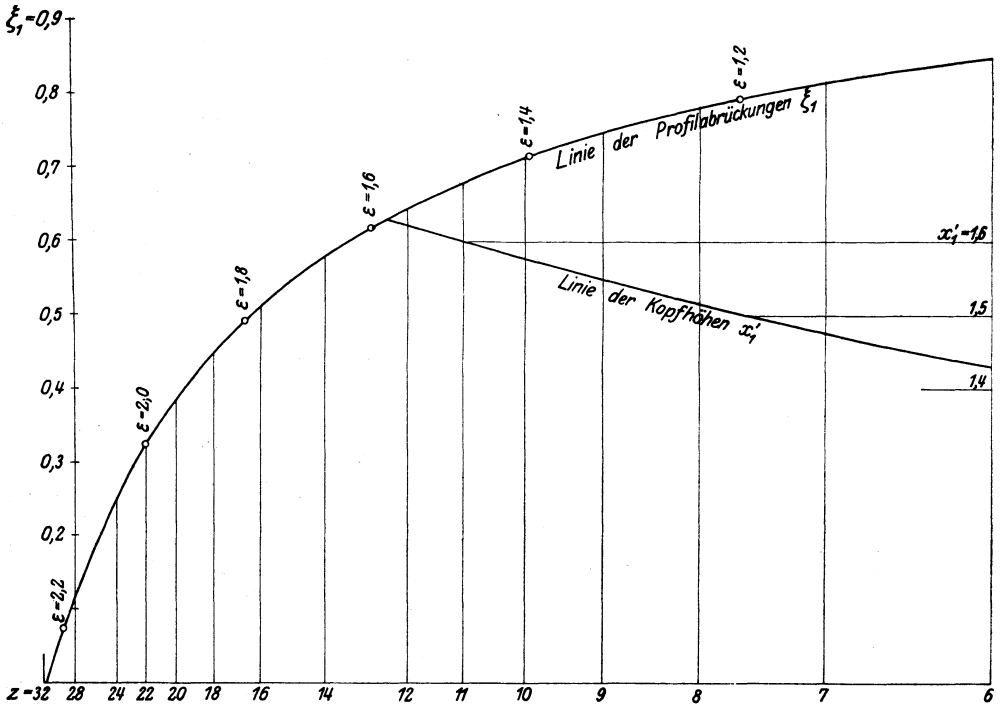


Fig. 37. Auf den Modul bezogene Verhältniszahlen ξ_1 der Profilabrückung für Zahnstangengetriebe.

Ergibt sich somit eine übermäßige Profilabrückung im großen Rade des Getriebes, welcher Umstand bei hoher Zähnezahzahl stets eintritt, so hat man für dieses Rad

$$\xi_2 = 0$$

zu setzen und die Profilabrückung ξ_1 des kleineren Rades nach der Fig. 37, einem Zahnstangeneingriff entsprechend, zu bemessen. Aus diesen beiden Abrückungen sind dann die einzelnen Getriebeabmessungen nach den Gleichungen 11 bis 15 zu berechnen. Nur bei Zähnezahlen unter 12 ist eine Abänderung notwendig. Es gilt dann für die Kopfhöhe h_1' des kleinen Rades nicht mehr der sich aus Gl. 15 ergebende Rechnungswert, sondern der in Fig. 37 eingetragene Verhältniszwert x_1' . Aus diesem kleineren Werte, bedingt durch das Spitzwerden des Zahnes, folgt ein größeres Spiel zwischen Kopfkreis des kleinen und Fußkreis des großen Rades.

Als Beispiel einer Sonderverzahnung ist die Durchrechnung eines Getriebes aus dem Gebiete der gleich starken Zähne für den Modul $\frac{t_0}{\pi} = 10$ mm und für die

Zähnezahlen $z_1 = 16$, $z_2 = 80$ angeführt; das Eingriffsbild dieses Getriebes zeigt Fig. 38. Gefordert wird ein Flankenspiel von

$$\Delta s = 0,4 \text{ mm.}$$

Die Radien der Modul- und Grundkreise sind:

$$R_1 = \frac{z_1 t_0}{2 \pi} = 80 \text{ mm,} \quad r_1 = R_1 \cos \alpha_0 = 77,3 \text{ mm,}$$

$$R_2 = \frac{z_2 t_0}{2 \pi} = 400 \text{ mm,} \quad r_2 = R_2 \cos \alpha_0 = 386,4 \text{ mm.}$$

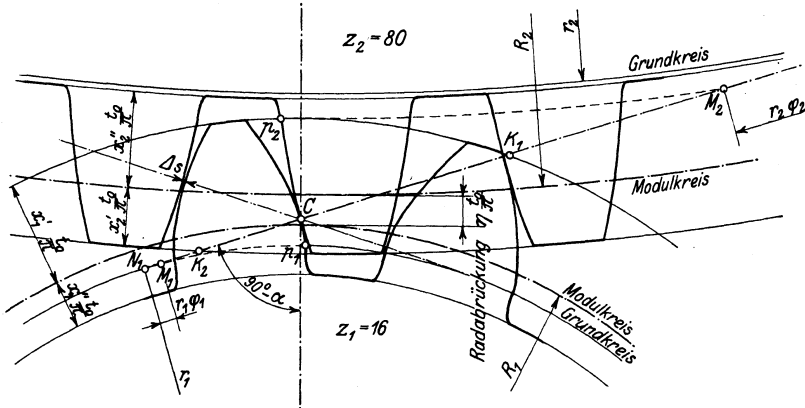


Fig. 38. Sonderverzahnung mit Flankenspiel.

Zunächst entnimmt man aus der Fig. 33 die Verhältniswerte der Profilabrückungen. Die Kurve $z = 16$ hat auf der Abszisse $z = 80$ eine Ordinate von

$$\xi_1 = +0,462.$$

Die Kurve $z = 80$ hat auf der Abszisse $z = 16$ eine Ordinate von

$$\xi_2 = -0,186.$$

Ihre Summe ist

$$\xi_1 + \xi_2 = 0,462 - 0,186 = 0,276.$$

Diese Profilabrückungen bedingen nach Gl. 11 einen Eingriffswinkel von

$$\operatorname{tg} \alpha - \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha_0}{z_1 + z_2} (\xi_1 + \xi_2) + (\operatorname{tg} \alpha_0 - \alpha_0) = \frac{0,26795}{48} \cdot 0,276 + 0,006150 = 0,007691.$$

Diesem Funktionswert entspricht in der Zahlentafel 2 (S. 28) ein Winkel von $\alpha = 16^\circ 8' 12''$.

Der Verhältniswert der Radabrückung ist nach Gl. 12:

$$\eta = \frac{z_1 + z_2}{2} \left(\frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} - 1 \right) = 48 \cdot 0,00554 = 0,266.$$

Diesen Wert hätte man übrigens unmittelbar aus der Fig. 35 ablesen können. Für spielfreien Gang ergibt sich somit eine Achsenentfernung

$$a = R_1 + R_2 + \eta \frac{t_0}{\pi} = 80 + 400 + 0,266 \cdot 10 = 482,66 \text{ mm.}$$

Das Flankenspiel erfordert nach Gl. 23 eine Zugabe

$$\Delta a = \frac{\Delta s}{2 \sin \alpha} = \frac{0,4}{2 \cdot 0,278} = 0,72 \text{ mm,}$$

also einen Achsenabstand

$$a' = a + \Delta a = 482,66 + 0,72 = 483,38 \text{ mm.}$$

Das Abrunden dieses Wertes auf das etwaige Ausführungsmaß

$$a' = 484 \text{ mm}$$

ändert die Profilabrückungen. Zu ihrer Ermittlung ist der eben befolgte Rechnungsgang in umgekehrter Folge zu wiederholen, also:

$$a = a' - \Delta a = 484 - 0,72 = 483,28 \text{ mm},$$

$$\eta \frac{t_0}{\pi} = a - R_1 - R_2 = 483,28 - 480 = 3,28 \text{ mm} \quad \text{und} \quad \eta = 0,328,$$

$$\cos \alpha = \frac{\cos \alpha_0}{\eta \frac{z_1 + z_2}{2} + 1} = 0,95936 \quad \text{und} \quad \alpha = 16^\circ 23' 30''.$$

Nach Zahlentafel 2 ist

$$\operatorname{tg} \alpha - \alpha = 0,007981 + 0,0000253 \cdot 3,5 = 0,008070$$

$$\xi_1 + \xi_2 = \frac{(\operatorname{tg} \alpha - \alpha) - (\operatorname{tg} \alpha_0 - \alpha_0) \cdot \frac{z_1 + z_2}{2}}{\operatorname{tg} \alpha_0} = \frac{0,008070 - 0,006150}{0,26795} \cdot 48 = 0,344.$$

Der Unterschied dieser Summe gegen den ursprünglichen Wert der Figurenablesung ist

$$\Delta \xi_1 + \Delta \xi_2 = 0,344 - 0,276 = 0,068.$$

Um gleiche Zahnstärken zu bewahren, ist diese Größe in gleichen Teilen auf die Verhältnismerte der Profilabrückungen aufzuteilen.

$$\xi_1 = +0,462 + 0,034 = +0,496, \quad \xi_2 = -0,186 + 0,034 = -0,152.$$

Die Verhältnismerte der Zahnhöhen werden aus den Gl. 14, 15 berechnet:

$$\text{Kopfhöhe} \quad \kappa_1' = \eta + 1 - \xi_2 = 1,480, \quad \kappa_2' = \eta + 1 - \xi_1 = 0,832;$$

$$\text{Fußtiefe} \quad \kappa_1'' = \frac{7}{6} - \xi_1 = 0,671, \quad \kappa_2'' = \frac{7}{6} - \xi_2 = 1,319;$$

$$\text{Gesamtzahnhöhe} \quad \kappa = 2,151, \quad \kappa = 2,151.$$

Damit sind alle Ausführungsgrößen des Getriebes festgelegt; die Räder erhalten Außendurchmesser

$$D_1 = 2 \left(R_1 + \kappa_1' \frac{t_0}{\pi} \right) = 189,6 \text{ mm}, \quad D_2 = 2 \left(R_2 + \kappa_2' \frac{t_0}{\pi} \right) = 816,6 \text{ mm}$$

und sind mit den Profilabrückungen

$$x_1 = \xi_1 \frac{t_0}{\pi} = +4,96 \text{ mm} \quad \text{und} \quad x_2 = \xi_2 \frac{t_0}{\pi} = -1,52 \text{ mm}$$

zu schneiden. Einzubauen sind die Räder im Achsenabstand

$$a' = 484 \text{ mm}.$$

Die Länge der ausgeschnittenen Evolventenprofile bestimmt man nach Gl. 4 aus den Verhältnismerten der Zahnstangenabschnitte

$$\lambda_1 = \frac{8}{z_1} \cdot \kappa_1'' - 0,26795 = +0,06755, \quad \lambda_2 = \frac{8}{z_2} \cdot \kappa_2'' - 0,26795 = -0,13605.$$

Das positive λ_1 bringt eine Unterschneidung; der zugehörige Verhältnismert der Eingriffsminderung ist nach Zahlentafel 1 (S. 21)

$$\varphi_1 = 0,02765 + 0,755 \cdot 0,00429 = 0,03088$$

Nicht unterschritten sind die Zähne des größeren Rades zufolge des negativen λ_2 , dessen Eingriffsminderung

$$\varphi_2 = -\lambda_2 = 0,13605$$

beträgt.

Die wirklichen Größen der Minderungen

$N_1 M_1 = r_1 \varphi_1 = 77,3 \cdot 0,03088 = 2,4 \text{ mm}$, $N_2 M_2 = r_2 \varphi_2 = 386,4 \cdot 0,13605 = 52,5 \text{ mm}$
sind in der Fig. 38 auf der Eingriffsgerechten von den Punkten N_1 und N_2 , die

den Radmittelpunkten zunächst liegen, aufgetragen. Das Eindrehen der Punkte M_1 und M_2 liefert dann die inneren Begrenzungspunkte p_1 und p_2 der reinen Evolventenprofile. Der Punkt M_1 liegt außerhalb des Kopfkreises vom großen Rade, so daß ein unzulässiges Überschneiden nicht besteht.

Im Anschluß sei noch die Größe der Eingriffsdauer ε berechnet. Nach der Gl. 16 sind die Zahnkopfwinkel

$$\cos \beta_1 = \frac{\cos \alpha_0}{z_1' \frac{2}{z_1} + 1} = \frac{0,96593}{\frac{1,480}{8} + 1} = 0,81512, \quad \beta_1 = 35^\circ 24' 7'';$$

$$\cos \beta_2 = \frac{\cos \alpha_0}{z_2' \frac{2}{z_2} + 1} = \frac{0,96593}{\frac{0,832}{40} + 1} = 0,94624, \quad \beta_2 = 18^\circ 52' 24''.$$

Zufolge des Abrückens der Räder zur Herbeiführung eines Flankenspiels vergrößert sich der Eingriffswinkel auf

$$\cos \alpha = \frac{r_1 + r_2}{a'} = \frac{77,3 + 386,4}{484} = 0,95805, \quad \alpha = 16^\circ 39' 15''.$$

Aus diesen drei Winkelgrößen rechnet man nach Gl. 19 die Eingriffsdauer

$$\varepsilon = \left[(\operatorname{tg} \beta_1 - \operatorname{tg} \alpha) \frac{z_1}{2} + (\operatorname{tg} \beta_2 - \operatorname{tg} \alpha) \frac{z_2}{2} \right] \frac{1}{\pi} = 1,59.$$

Dieser Wert zeigt eine Abnahme gegenüber dem Werte $\varepsilon = 1,70$ der spielfreien Grenzausführung in Fig. 33. Wegen der sich einstellenden Eingriffskürzung ist daher eine Vergrößerung des Achsenabstandes bei Getrieben, die nahe dem Grenzwerte $\varepsilon = 1$ liegen, ausgeschlossen.

Aus der vorstehenden Rechnung ist zu ersehen, daß geringfügige Änderungen der Profilabrückungen bereits merkliche Änderungen der Getriebeausführung zeitigen; Ausführung und Rechnung, die wegen der Winkelgrößen zweckmäßig logarithmisch zu erfolgen hat, erheischen deshalb einen hohen Genauigkeitsgrad.

Aus den Tafeln der Profilabrückungen sind die Unvollkommenheiten einer Satzausführung der Räder zu überblicken, bei denen eine unveränderliche Abrückung¹⁾, nur von der eigenen Zähnezahle abhängig, eingehalten wird. Auch der Vorschlag, durch gleiche aber entgegengesetzte Abrückung in beiden Rädern den normalen Eingriffswinkel und den normalen Achsenabstand aufrechtzuerhalten, läßt sich mit Vorteil nur bei wenigen Getriebeausführungen verwirklichen.

Dem aufgestellten System der günstigsten Sonderverzahnungen kommt eine allgemeine Bedeutung zu. Es ist zwar aus dem Entstehen des Zahnes beim Wälzverfahren abgeleitet, doch lassen sich die Angaben ohne weiteres auch auf formgefäste Zähne anwenden. Die Profilierung des Formfräasers erfolgt dann nach dem Zahnprofil, das durch die bloße Angabe der Profilabrückung ξ vollständig gekennzeichnet ist. Nur ist eine etwaige Unterschneidung durch einen tangierend anschließenden Fußübergang nach dem bei den Satzrädern geschilderten Verfahren zu ersetzen.

Das Geltungsbereich des Systems erstreckt sich auf die Verzahnung der Kegelhäder und der Räder mit Schraubenzähnen. Hier kommt dem System eine größere Bedeutung zu, da diese Getriebe einer Satzrädernormung nicht zugänglich sind und eigentlich nur Sonderausführungen zulassen.

¹⁾ Fölmer schlägt für Zähnezahlen unter $z < 25$ eine Profilabrückung vor von

$$\xi = \frac{53 - 2z \cot \alpha_0}{100 \cdot 2}.$$

II. Die Verzahnung der Kegelräder.

Räder, die bei sich schneidender Achsenlage die Bewegung im unveränderlichen Übersetzungsverhältnis übertragen, weisen zwei Kegelflächen auf, Teilrißkegel genannt, die bei der Drehung ohne Gleiten aufeinander abrollen. Jeder Punkt der gemeinsamen Berührungskante OC (Fig. 39) hat in beiden Rädern gleiche Umfangsgeschwindigkeit.

$$R_1 \omega_1 = R_2 \omega_2.$$

Es ist üblich, als Teilkreisradius R_1 und R_2 die Radien der größten Kreise zu bezeichnen; die Zahnbreite b wird längs der Kegelkante gemessen.

Die Kantenwinkel der Teilrißkegel stehen im Verhältnis

$$i = \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \dots \dots \dots (25)$$

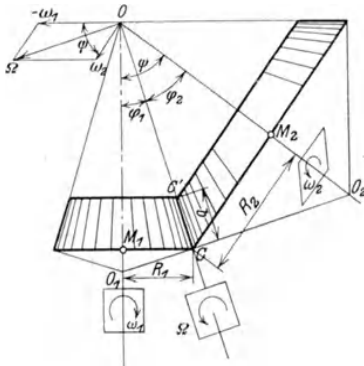


Fig. 39.

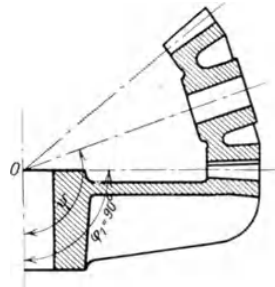


Fig. 40. Planrad.

woraus unter Einführung des Achsenwinkels $\psi = \varphi_1 + \varphi_2$

$$\cot \varphi_1 = \frac{z_2 + \cos \psi}{\sin \psi}, \quad \cot \varphi_2 = \frac{z_1 + \cos \psi}{\sin \psi} \dots \dots \dots (26)$$

Die relative Bewegung der beiden drehenden Systeme entspricht einer Drehung um die Momentanachse OC mit einer Winkelgeschwindigkeit Ω . Diese bestimmt sich aus den Geschwindigkeiten eines über O liegenden Punktes, der in der Entfernung l von der Ebene der beiden Drehachsen absteht, mit

$$\Omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2 \omega_1 \omega_2 \cos \psi}.$$

In einem Eingriffspunkte, dessen Entfernung von der Momentanachse ξ ist, besteht somit eine Gleitgeschwindigkeit

$$v_g = \xi \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2 \omega_1 \omega_2 \cos \psi} \dots \dots \dots (27)$$

Für den gewöhnlichen Fall der rechtwinklig sich schneidenden Achsen $\psi = 90^\circ$ vereinfachen sich die Gleichungen:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{z_1}{z_2}, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{z_2}{z_1}, \quad \Omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}.$$

Ein besonderer Fall besteht für $\varphi_1 = 90^\circ$, der Teilrißkegel geht in eine ebene Fläche über (Fig. 40). Die zugehörige Radausbildung bezeichnet man als Planrad; bei paralleler Achsenlage entspricht diesem Sonderfalle die Zahnstange.

Die Zahnflächen sind Geradenflächen, deren Erzeugende durch die gemeinsame Kegelspitze O hindurchgehen (Fig. 41). Gleiche Forderungen wie bei den

Stirnrädern führen auch hier zu Zykloiden- und Evolventenverzahnungen. Die seitliche Abgrenzung der Zähne erfolgt durch die Mantelfläche des Ergänzungskegels, dessen Erzeugende O_1C senkrecht auf der Momentanachse steht.

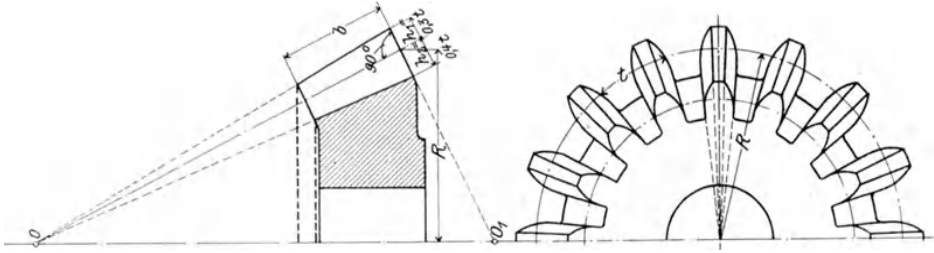


Fig. 41.

A. Zykloidenverzahnung.

Die Gleitgeschwindigkeit v_g eines Punktes P steht senkrecht zu PC (Fig. 42); ihre Richtung entspricht der Tangentenlage Po_2 für zwei sich in P berührende Zahnprofile. Stellt man nun die Bedingung, daß für die Eingriffspunkte der in C auf der Momentanachse senkrecht stehenden Ebene alle Tangenten durch den nämlichen Punkt o_2 hindurchgehen, so ergibt sich als Eingriffslinie ein Kreis mit dem Durchmesser Co_2 . Um gerade Zahnkanten zu erhalten, müssen die Tangentendrehpunkte in den anderen Ebenen auf einer Geraden Oo_2 liegen, die im weiteren als Hilfsachse bezeichnet wird und deren Stellung zur Momentanachse durch den Winkel χ_2 gekennzeichnet sei. Dadurch kommt man zu einer orthogonalen Kegelfläche als Eingriffsfläche; außer Kreisschnitten in den zur Momentanachse OC senkrecht stehenden Ebenen weist sie noch solche auch in den Ebenen auf, die senkrecht zur Hilfsachse Oo_2 stehen. Die Tangierungsebene der Zahnflächen dreht sich beim Fortschreiten des Eingriffes mit einer Winkelgeschwindigkeit ω_2' um die Hilfsachse Oo_2 ; ω_2' ist nach Gl. (25) bestimmt durch

um die Hilfsachse Oo_2 ; ω_2' ist nach Gl. (25) bestimmt durch

$$\omega_2' \sin \chi_2 = \omega_1 \sin \varphi_1 = \omega_2 \sin \varphi_2.$$

Die Geschwindigkeit, mit welcher der Eingriff im Kreisschnitte Cm_2 des Eingriffskegels fortschreitet, entspricht der Umfangsgeschwindigkeit im Teilkreis M_1C , analog den Stirnrädern. Dieser Umstand ermöglicht eine einfache Konstruktion der Zahnprofile in einer zur Drehachse senkrechten Radebene (Fig. 43). Man trägt auf dem Teilkreis R_1 und dem in die Radebene umgeklappten Kreis der Eingriffsfläche vom Durchmesser Cm_2 eine Anzahl gleicher Bogenteile $C1, 12, 23, C1', 1'2', 2'3'$ usw. auf, da wegen der daselbst bestehenden gleichen Geschwindigkeiten

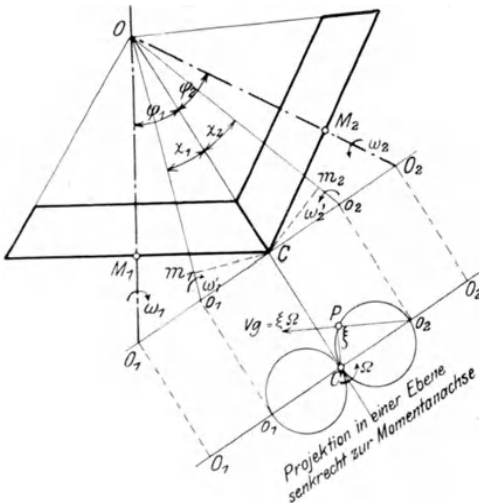


Fig. 42.

auch gleiche Wege zurückgelegt werden. Die Durchstoßpunkte der Kegelkanten vom Eingriffskegel mit der Radebene erhält man nun durch Kollineation. Die Kollineationsachse ist in C und steht senkrecht auf M_1C . Das Kollineationszentrum K_2 erhält man durch das Ziehen einer Senkrechten K_2N_2 auf die Hilfsachse im Abstände $ON_2 = OM_1$. Zwei zusammengehörige Punkte des umgeklappten Schnittes Cm_2

und des Schnittes mit der Radebene $C\mu_2$ hat man in den Punkten m_2 und μ_2 der Hilfsachse.

Die Bestimmung der Eingriffspunkte E geschieht nun in folgender Weise. Erfolgte z. B. eine Raddrehung von C nach 2, so findet der Eingriff in einer durch 2' hindurchgehenden Kegelkante statt. Die Gerade $m_2 2'$ schneidet die Kollineationsachse in II ; die Verbindung von II mit μ_2 gibt die Tangente an das Zahnprofil für die Radlage 2. Deren Tangierungspunkt als Eingriffspunkt des Zahnes erhält man nun durch Einschneiden der aus dem Kollineationszentrum K_2 gezogenen Geraden $K_2 2'$ in E . Auf diese Weise läßt sich für jede Drehstellung

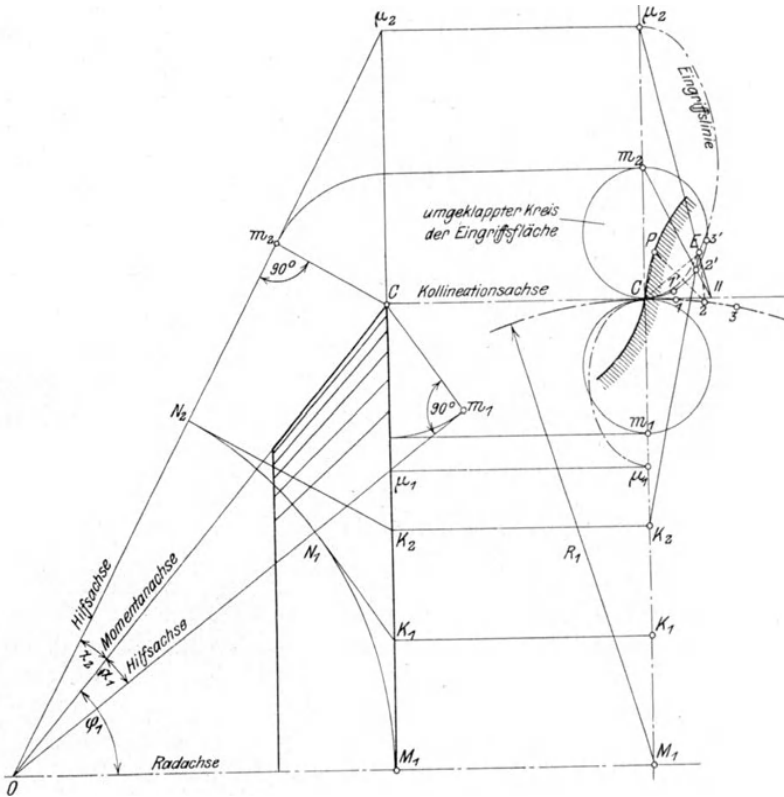


Fig. 43. Genaue Ermittlung der sphärischen Zykloide.

der zugehörige Eingriffspunkt des Zahnes ermitteln. Die Eingriffslinie ist eine Ellipse, hervorgegangen aus dem Schnitt des orthogonalen Eingriffskegels mit der Radebene.

Das Zurückführen der einzelnen Eingriffspunkte E in die Mittelstellung C liefert dann die Punkte P der Zahnflanke; es erfolgt dies am einfachsten durch symmetrisches Übertragen der Dreiecke, also $CE = 2\bar{P}$ und $2\bar{E} = CP$.

Die Zykloidenzähne der Kegelhäder sind durch die Wahl eines außen- und eines innenliegenden orthogonalen Kegels als Eingriffsfläche festgelegt. Die Gestalt der Zahnfüße ist von der Größe des innenliegenden Eingriffskegels abhängig. Ist $\chi_1 = \varphi_1$, läßt man also die Hilfsachse mit der Radachse zusammenfallen, so ist die Zahnfußfläche identisch mit der um die Hilfsachse drehenden Tangentialebene der Zähne; die Zahnfüße werden dann durch ebene Flächen gebildet, welche durch die Radachse hindurchgehen. Wird χ_1 noch größer gehalten, so ergeben sich unterschrittene Zähne. Das Verhalten der Zykloidenverzahnung ist demnach ein gleiches wie bei den Stirnrädern.

B. Evolventenverzahnung.

Wird für den Eingriffsverlauf in den zur Momentanachse OC senkrecht stehenden Ebenen die Forderung erhoben, daß eine parallele Tangentenverschiebung in den Berührungsstellen sich einstellt, so erhält man gerade Eingriffslinien (Fig. 44) und die Verzahnung wird zur Evolventenverzahnung. Die Eingriffsfläche ist eine durch die Momentanachse gehende Ebene, die unter dem Winkel $(90^\circ - \alpha)$ gegen die Ebene der beiden Radachsen geneigt ist. Sie tangiert innerhalb der beiden Teilrißkegel zwei Kegelflächen, Grundkegel genannt, deren Spitzenwinkel χ_1 und χ_2 sich aus dem sphärischen Dreieck in der Kugelfläche vom Radius OC ergeben mit

$$\sin \chi_1 = \sin \varphi_1 \cos \alpha \quad \text{und analog} \quad \sin \chi_2 = \sin \varphi_2 \cos \alpha \dots (28)$$

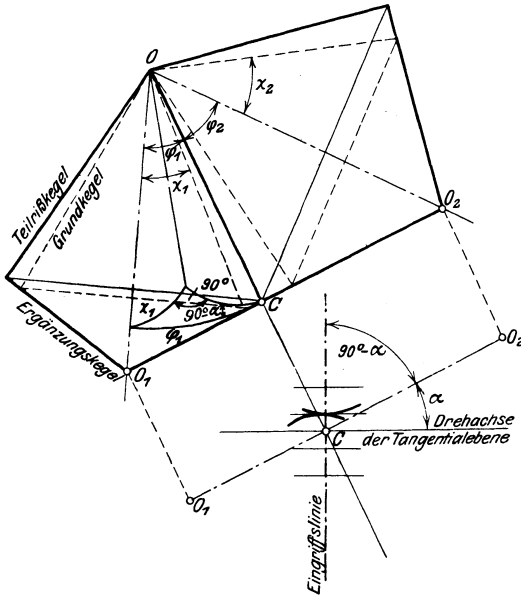


Fig. 44.

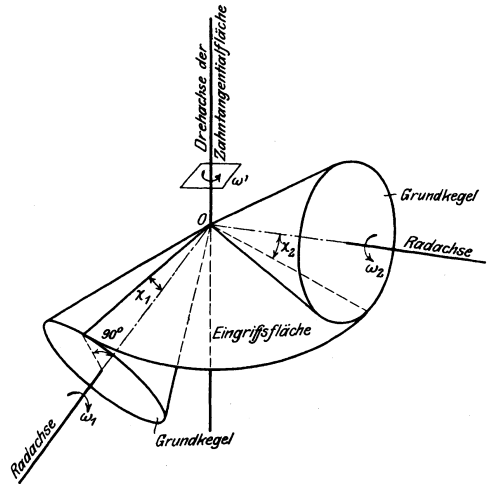


Fig. 45.

Die Winkelgeschwindigkeit ω' , mit der die Eingriffsgerade in der Eingriffsfläche den Ort wechselt, ist aus Fig. 45 zu entnehmen:

$$\omega' = \omega_1 \sin \chi_1 = \omega_2 \sin \chi_2.$$

Die Eingriffsgeschwindigkeit entspricht nämlich den Umfangsgeschwindigkeiten der Grundkegel in der zugehörigen Entfernung. Man kann sich deshalb die Zahnflächen erzeugt denken durch das Abrollen der Eingriffsebene auf den Mantelflächen der Grundkegel.

Bei der Bewegung der Räder dreht sich die Tangentialebene an die jeweilige Berührungskante der beiden Zahnflächen mit der Winkelgeschwindigkeit ω' um eine in der Kegelspitze O auf der Momentanachse senkrecht stehenden Drehachse, die im Winkel α gegen die Ebene der beiden Radachsen geneigt ist (Fig. 44).

Die genaue Konstruktion des Zahnprofils läßt sich auf Grund der vorstehenden Angaben gleich in der abgewickelten Mantelfläche des Ergänzungskegels durchführen. In Fig. 46 tangiere die Eingriffsebene den Grundkegel χ_1 in der Kegelskante Og . Ein Kreis vom Radius mp des Ergänzungskegels schneidet die Eingriffsfläche im Punkte E , dessen Höhe EE' über der Mittelebene durch Umklappung um mp erhalten wird. Die Übertragung der Bogenlänge $\widehat{pE'} = \widehat{pE}$ in

die Abwicklung auf den zugehörigen Mantelkreis vom Halbmesser $O_1 p$ liefert den Eingriffspunkt E . Die Eingriffslinie ist demnach eine abgewinkelte Kegelschnittlinie.

Der am Grundkreis liegende Eingriffspunkt ist g . Die Drehung gq am Grundkreise, die das Rad während des Fortschreitens des Eingriffs von g nach E ausführt, entspricht dem Bogen am Kreisradius Og , den die Eingriffsgerade OE mit der Anfangslage Og einschließt. In der Umklappung um Og ist die Eingriffsgerade OE'' durch $EE'' = EE'$ festgelegt und damit auch der Bogen gq'' , der am Grundkreis längengleich nach gq aufgetragen wird. Die symmetrische Überführung des Dreiecks gqE nach ggP liefert den Punkt P des Zahnprofils.

Beim Planrad (Fig. 47) hat der Grundkegel Og einen Kantenwinkel $\chi_1 = (90^\circ - \alpha)$, da $\varphi_1 = 90^\circ$ ist. Der Ergänzungskegel wird zum Zylinder vom Radius OC . Die Konstruktion der Zahnflanke in der aufgerollten Zylinderfläche nach dem vorstehenden Verfahren liefert eine doppelt gekrümmte Kurve mit verkehrt symmetrischem Verlauf zum Teilrißpunkt C , in dem die Profiltangente im Winkel $(90^\circ - \alpha)$ gegen die Teilrißgerade geneigt ist.

Der Kurvenast der Evolvente ist durch die beiden Fußpunkte gg' begrenzt.

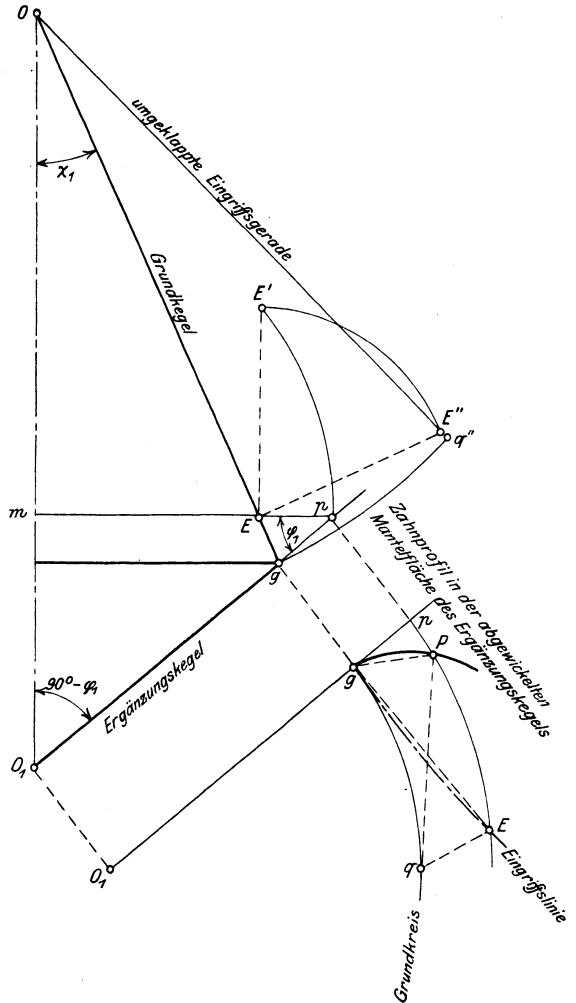


Fig. 46. Genaue Ermittlung der sphärischen Evolvente.

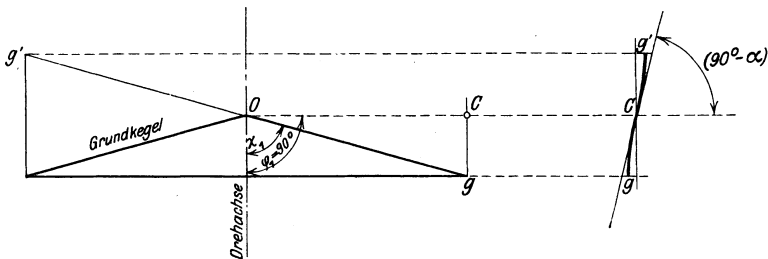


Fig. 47. Sphärische Evolvente des Planrades.

C. Angenäherte Verzahnung.

Die theoretisch genaue Profilierung läßt sich zugunsten einer vereinfachten zeichnerischen Ermittlung durch eine angenäherte Zahngestaltung ersetzen, die man aus der Stirnradverzahnung ableitet. Die Ermittlung der Zahnprofile erfolgt hierbei in einer Ebene senkrecht zur Teilrißgeraden OC (Fig. 48). Der Durchstoßpunkt

der Radachse in dieser Ebene wird als der Drehmittelpunkt O_1 und die Länge der Ergänzungskegelkante O_1C als Teilkreishalbmesser R_1' angesehen.

$$R_1' = \frac{R_1}{\cos \varphi_1}.$$

Auf Grund dieser Annahmen wird die Verzahnung als Stirnradverzahnung durchgeführt. Die Teilung entspricht der Umfangsteilung t des Teilkreises R_1 und

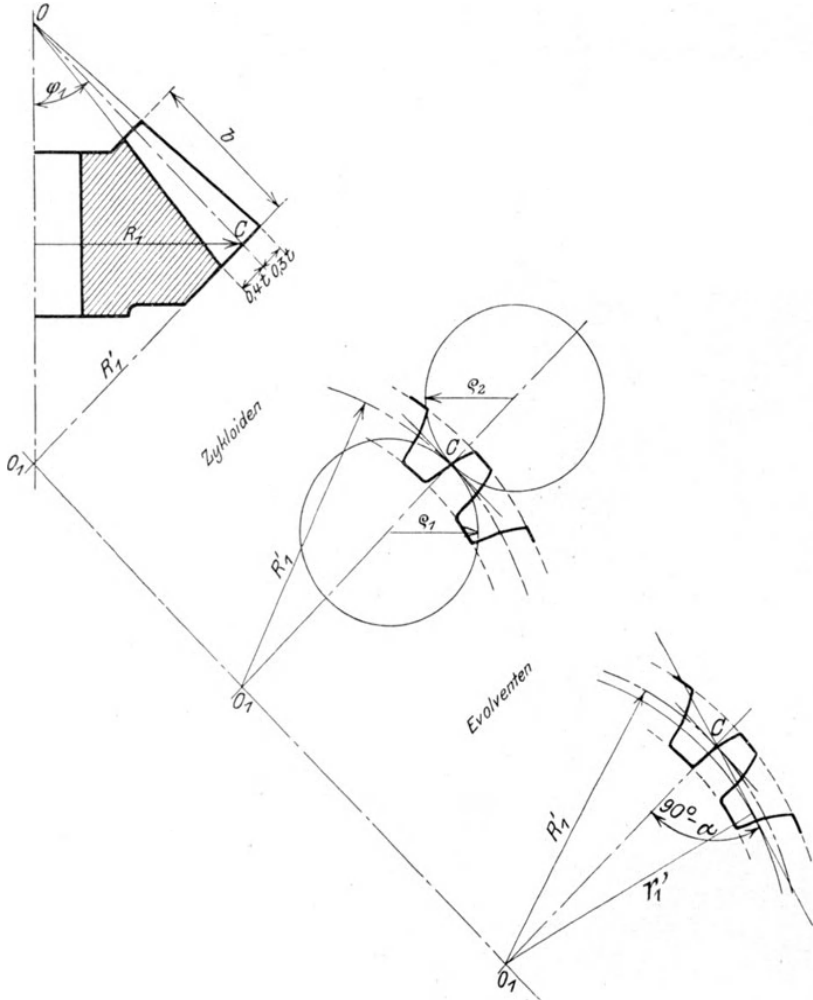


Fig. 48. Angenäherte Verzahnung des Kegelrades.

die Zahnhöhenbemessung erfolgt nach der Satzräderangabe. Das Abwälzen zweier Rollkreise φ_1 und φ_2 auf dem Teilkreise führt zu Zyklidenzähnen. Evolventenzähne erhält man durch Abwälzen der unter dem normalen Winkel $\alpha = 15^\circ$ geneigten Eingriffsgeraden auf dem Grundkreise vom Halbmesser

$$r_1' = R_1' \cos \alpha.$$

Die Zahnprofile, die auf diese Weise in der Ebene ermittelt werden, überträgt man in der Ausführung auf die Mantelfläche des Ergänzungskegels. Die Zahnausbildung eines Kegelrades von der Zähnezah z_1 und dem Kegelwinkel φ_1 entspricht somit der Zahnprofilierung eines Stirnrades von gleicher Teilung und der Zähnezah

$$z_1' = \frac{z_1}{\cos \varphi_1} = \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + 2z_1z_2 \cos \psi}}{\frac{z_2}{z_1} + \cos \psi} \dots \dots \dots (29)$$

Ein Getriebe von rechtwinkliger Achsenstellung $\psi = 90^\circ$ ist somit zu verzahnen mit den Ersatzzähnezahlen

$$z_1' = z_1 \sqrt{1 + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2} \quad \text{und} \quad z_2' = z_2 \sqrt{1 + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2} \dots \dots \dots (30)$$

Im Eingriffsbild des Getriebes zeigt sich ein Übersetzungsverhältnis im quadratischen Wert der eigenen Übersetzung

$$\frac{z_2'}{z_1'} = \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2.$$

Der Genauigkeitsgrad in der Annäherung der Ersatzverzahnung an die theoretisch genaue Profilierung ist aus dem Vergleich der Zahnevolventen in Fig. 49

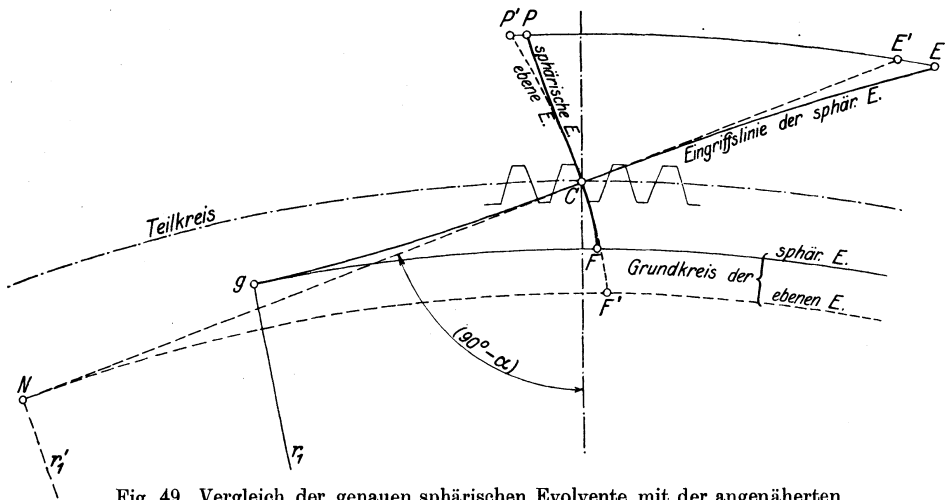


Fig. 49. Vergleich der genauen sphärischen Evolvente mit der angenäherten ebenen Evolvente in der abgewickelten Mantelfläche des Ergänzungskegels.

zu entnehmen. Die strichliert eingetragene Evolvente $F'P'$ der ebenen Ersatzverzahnung steht im Fußpunkt F' auf einem Grundkreis auf, dessen Halbmesser r_1' aus den Verhältnissen der Fig. 48 bestimmt ist mit

$$r_1' = R_1' \cos \alpha = \overline{OO_1} \sin \varphi_1 \cos \alpha.$$

Für den gleichen Neigungswinkel α der Eingriffsebene ergibt sich aus dem Dreieck OO_1g der Fig. 46 (unter Benützung der Gl. 28) für den Grundkreishalbmesser r_1 der sphärischen Evolvente der größere Wert von

$$\overline{O_1g} = r_1 = \overline{OO_1} \frac{\sin \chi_1}{\cos(\varphi_1 - \chi_1)} = \overline{OO_1} \frac{\sin \varphi_1 \cos \alpha}{\cos(\varphi_1 - \chi_1)}.$$

Beide Halbmesser stehen im Verhältnis

$$r_1 = \frac{r_1'}{\cos(\varphi_1 - \chi_1)}.$$

Die sphärische Evolvente FP ist nach dem Vorgang der Fig. 46 ermittelt; ihre gekrümmte Eingriffslinie \widehat{gCE} zeigt als abgewickelte Kegelschnittlinie einen Wendepunkt im Teilrißpunkt C . Dieser Krümmungswechsel zeitigt eine Verschiedenheit im gegenseitigen Verlauf der Zahnlinien. Im Kopfteil steht die sphärische Evolvente vor der ebenen Evolvente, im Fußteil tritt sie zurück, wodurch

sich ein teilweiser Ausgleich im Eingriffsbild eines Getriebes bei der Annäherungsausführung ergibt. Eine vollständige Übereinstimmung besteht im Teilrißpunkt C , weil N der gemeinsame Krümmungsmittelpunkt für beide Zahnkurven ist. Die ausgeführte Zahnhöhe tritt selbst bei den ungünstigsten Anordnungen nur unbedeutend aus dem theoretisch genauen Teilrißgebiete heraus. Dieser Umstand ist in Fig. 49 durch das eingezeichnete Zahnbild ersichtlich gemacht, dem sehr ungünstige Annahmen (Teilrißkegel $\varphi = 80^\circ 32'$, Eingriffswinkel $\alpha = 20^\circ$ und Zähnezahzahl $z = 36$) zugrunde gelegt sind. Wegen des nahezu vollständigen Verbleibens der Zahnprofile in der gemeinsamen Krümmungszone wird die Annäherung so vollkommen, daß im ganzen praktischen Ausführungsbereich der Kegelhäder ein meßbarer Unterschied von der genauen Ausführung, der eine genaue zeichnerische Ermittlung rechtfertigen würde, nicht nachweisbar ist¹⁾.

Die größte Abweichung besteht beim Planrade. Der ebenen Eingriffsfläche ist eine sphärische Evolventenfläche in gekrümmten Verlauf (Fig. 47) zugeordnet. Entsprechend den geraden Zahnstangenflanken ergibt die Annäherung für das Planrad ebene Zahnflächen, die eine gekrümmte Eingriffsfläche bedingen. Diese Eingriffsfläche zeigt zu beiden Seiten der Planfläche des Teilrisses gleiche Krümmungsverhältnisse, da in der Anordnung eine vollkommene Symmetrie herrscht. Dieser Umstand ist von Bedeutung für die Bearbeitung der Zahnflächen.

Das Zurückführen auf die Stirnradverzahnung ermöglicht es nun, alle Verzahnungseinzelheiten der Stirnräder sinngemäß auf die Kegelhäder zu übertragen. Eine eigentliche Satzräderausführung gibt es hier nicht, da die Zahngestaltung auch vom Übersetzungsverhältnis abhängig wird. Da weiters die Bearbeitung das Einhalten normaler Zahnhöhen nicht verlangt, so wird man sich bei der Verzahnung der Kegelhäder von den beengten Satzräderrangaben unabhängig machen und günstige Ausführungsverhältnisse für kleine Zähnezahlen durch Sonderverzahnung herbeiführen. Die Mängel der Zykloidenzähne sprechen auch hier für die Anwendung der einfacheren Evolventenausgestaltung.

Bei den Evolventenzähnen der Stirnräder verursacht eine Änderung des Achsenabstandes keine Beeinträchtigung des Eingriffes. Ein ähnliches Verhalten zeigen die Evolventenzähne der Kegelhäder. Bleibt die gemeinsame Kegelspitze der beiden Räder erhalten, so führt eine Änderung des Achsenwinkels ψ keine Störung des Eingriffes herbei; die tangierende Eingriffsebene folgt den geänderten Lagen der Grundkegel. Beim Abrücken der Räder eines spielfrei eingreifenden Getriebes um die Winkelvergrößerung $\Delta\psi$ stellt sich ein Flankenspiel ein, dessen Größe durch Gl. 44 bestimmt ist.

D. Sonderverzahnung nach Evolventen.

In Übereinstimmung mit den Verhältnissen der Stirnräder wird bei der Sonderverzahnung der Kegelhäder die Zahnausgestaltung nicht mehr auf die Teilrißflächen, sondern auf eigene Modulkegel mit den Kegelwinkeln φ_1 und φ_2 (Fig. 50) bezogen, für die die Beziehung gilt:

$$R_1 = \frac{z_1}{2} \left(\frac{t_0}{\pi} \right) \quad \text{und} \quad R_2 = \frac{z_2}{2} \left(\frac{t_0}{\pi} \right).$$

Die Kanten der Modulkegel stehen im Getriebeinbau um die Winkelgröße η der Radabrückung voneinander ab. Es ist der Achsenwinkel

$$\psi = \varphi_1 + \varphi_2 + \eta.$$

¹⁾ Damit sei die geläufige Anschauung berichtigt, die dem angenäherten Profil im Kopfteil des Zahnes ein Vortreten über das theoretisch genaue Profil zuspricht. Die groben Fehler der Ersatzverzahnung, welche Barth in der Veröffentlichung „Die Grundlagen der Zahradbearbeitung“, Verlag Springer, 1911, herausrechnet, sind falsch ermittelt. Der begangene Irrtum liegt in der unrichtigen Voraussetzung, daß die Grundkreise beider Profile zusammenfallen.

Die Zahngestaltung leitet man aus dem Eingriff mit den Zahnflächen eines Planrades (Fig. 51) ab, dessen Eingriffsebene unter dem Satzräderwinkel $\alpha_0 = 15^\circ$ geneigt ist. Die Abmessungen des Planradzahnes entsprechen dem normalen Zahnstangenprofil. Am Modulkreis vom Halbmesser R_0 , auf dem die Modulteilung t_0 besteht, ist die Zahnstärke in der Planfläche gleich $0,5 t_0$ und die Kopfhöhe über der Planfläche gleich $7/8 \frac{t_0}{\pi}$. Dem Planrade kommt eine Zähnezah z_0 zu von

$$\frac{z_0}{2} = \frac{R_0}{\left(\frac{t_0}{\pi}\right)}$$

Die günstigere Zahnausbildung erlangt man durch eine entsprechende Profilabrückung. Die Möglichkeit hierzu bietet die Eigenschaft der Evolventenzähne, die Richtigkeit des Zahneingriffes bei Änderung des Getriebeachsenwinkels ψ zu bewahren. Man dreht die Kegelkante OC_1 des Modulkegels um den Winkel ξ_1 der Profilabrückung von der Planfläche des

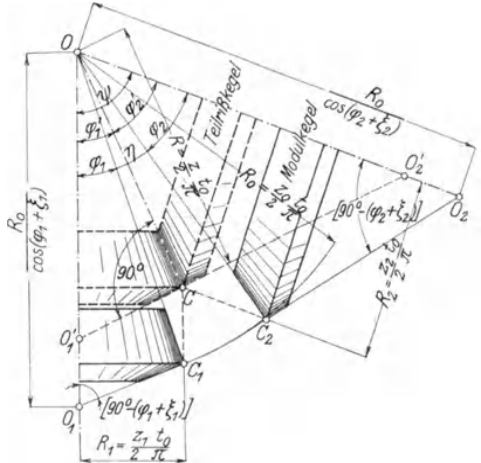


Fig. 50. Modulkegel der Sonderverzahnung.

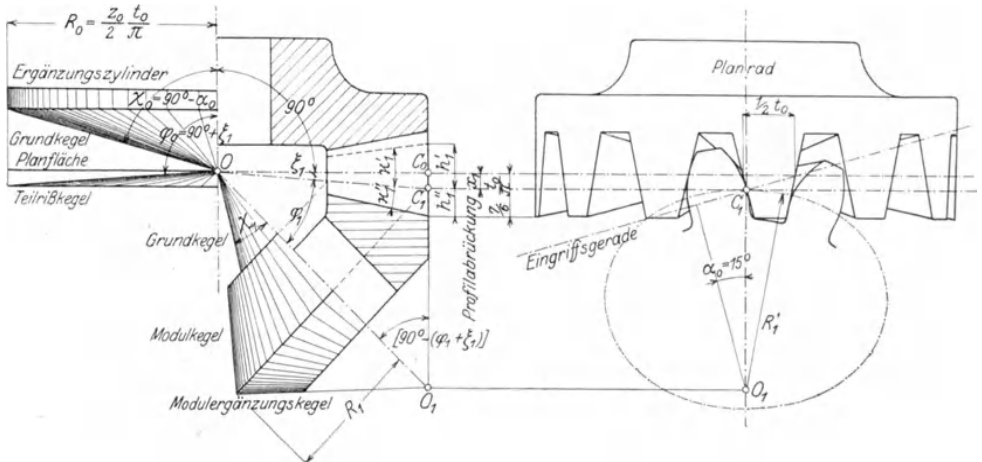


Fig. 51. Kegelradzahn mit Profilabrückung.

Planrades weg. In dieser geänderten Anstellung ist die Teilrißfläche des Planrades eine Kegelfläche mit dem Kantenwinkel

$$\varphi_0 = 90 + \xi_1,$$

die sich tangierend an den Modulkegel anlegt, der gleichzeitig Teilrißkegel des Kegelrades ist.

Für die Grundkegel dieser Getriebeanstellung gilt die Beziehung der Gl. 28:

$$\frac{\sin \chi_1}{\sin \varphi_1} = \frac{\sin \chi_0}{\sin \varphi_0}$$

Aus dem Grundkegel des Planrades

$$\chi_0 = 90^\circ - \alpha_0$$

ergibt sich demnach der Grundkegel des Kegelrades mit

$$\sin \chi_1 = \sin \varphi_1 \frac{\cos \alpha_0}{\cos \xi_1} \dots \dots \dots (31)$$

In diesem Sonderfalle der Getriebeabrückung erfolgt die Zurückführung des Eingriffes auf die Stirnradverzahnung am zweckmäßigsten in einer durch den Teilrißpunkt C_1 gelegten Ebene, die senkrecht auf der Radachsebene und senkrecht auf der Planfläche steht. Die Spur C_0O_1 dieser Ebene in der Radachsebene liefert die Kanten C_1C_0 und C_1O_1 der Ergänzungsflächen, auf deren Mantelflächen die Zahnprofile übertragen werden. In der abgewickelten zylindrischen Ergänzungsfläche des Planrades kommt dann das normale Zahnstangenprofil mit dem Eingriffswinkel $\alpha_0 = 15^\circ$ zur Geltung, und es liegen die in das Zahnstangenprofil eingreifenden Zahnprofile des Kegelrades auf der Mantelfläche eines Modulergänzungskegels vom Kantenwinkel $= [90 - (\varphi_1 + \xi_1)]$. Die Kanten des Modulkegels und seines Ergänzungskegels nehmen keine senkrechte Lage gegeneinander ein; die Entfernung ihrer Kegelspitzen ist

$$\overline{OO_1} = \frac{R_0}{\cos(\varphi_1 + \xi_1)} \dots \dots \dots (32)$$

Für das Aufzeichnen des Zahnprofiles in der abgewickelten Mantelfläche des Modulergänzungskegels dienen folgende, aus der Fig. 51 entnommene Angaben:

Halbmesser des Modulkreises	$R_1' = \frac{R_1}{\cos(\varphi_1 + \xi_1)}$	}	(33)
Abrückung des Zahnstangenprofiles	$x_1 = R_0 \operatorname{tg} \xi_1$		
Kopfhöhe über dem Modulkreis	$h_1' = x_1 + R_0 \operatorname{tg}(\alpha_1' - \xi_1)$,		
wobei α_1' der Kopfwinkel des Zahnes ist, und Fußtiefe innerhalb des Modulkreises	$h_1'' = \frac{t_0}{\pi} - x_1$.		

Den Fußwinkel α_1'' des Zahnes bestimmt man aus der Beziehung

$$\operatorname{tg}(\xi_1 + \alpha_1'') = \frac{t_0}{\pi R_0} = \frac{2}{z_0} \dots \dots \dots (34)$$

Über die Größe der Profilabrückungen entscheidet das auf die Stirnradverzahnung zurückgeführte Eingriffsbild in einer Ebene $O_1'O_2'$, senkrecht zur gemeinsamen Teilrißgeraden OC (Fig. 50). Vereinfacht wird die Größenermittlung in dieser Ebene durch die Einführung der Zähnezah z eines idealen Planrades, das im Getriebeeingriff der beiden Kegelräder gleichzeitig mitkämmt. Dieses Planrad hat den Halbmesser

$$\overline{OC} = R = \frac{z}{2} \cdot \frac{t_0}{\pi}$$

Unter Verwendung der Gl. 26 erhält man für die Planradzähnezah des Teilrißeingriffes den Ausdruck

$$z = \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + 2 z_1 z_2 \cos \psi}}{\sin \psi} \dots \dots \dots (35)$$

und für die Teilrißwinkel φ_1' und φ_2' die Beziehungen:

$$\sin \varphi_1' = \frac{z_1}{z} \quad \text{und} \quad \sin \varphi_2' = \frac{z_2}{z} \dots \dots \dots (36)$$

Die Zähnezahlen der Ersatzverzahnung betragen dann entsprechend Gl. 29

$$z_1' = \frac{z \cdot \sin \psi}{\frac{z_2}{z_1} + \cos \psi} \quad \text{und} \quad z_2' = \frac{z \cdot \sin \psi}{\frac{z_1}{z_2} + \cos \psi} \dots \dots \dots (37)$$

Für diese Zähnezahlen sind die zugehörigen Verhältnisswerte der Profilabrückungen ξ_1' und ξ_2' in der Fig. 33 aufzusuchen. Es sei hier nochmals betont, daß die eingetragenen Abrückungen Mindestwerte sind, die bei größerer Eingriffsdauer überschritten werden können.

Die Profilabrückungen bestimmen den Eingriffswinkel α für spielfreien Gang; seine Größe erhält man aus der sinngemäßen Übertragung der Gl. 11:

$$(\operatorname{tg} \alpha - \alpha) = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha_0 (\xi_1' + \xi_2')}{z_1' + z_2'} + (\operatorname{tg} \alpha_0 - \alpha_0) \dots \dots \dots (38)$$

Aus den ebenen Abrückungen ξ_1' und ξ_2' ergeben sich die Winkelgrößen ξ_1 und ξ_2 der Profilabrückungen, die für das Anstellen der Räder bei der Zahnbearbeitung maßgebend sind, mit

$$\operatorname{tg} \xi_1 = \frac{\xi_1'}{OC} \cdot \frac{t^0}{\pi} = \frac{2}{z} \xi_1' \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \xi_2 = \frac{2}{z} \xi_2' \dots \dots \dots (39)$$

Der Neigungswinkel α der Eingriffsebene ergibt im Teilrißkegel φ_1' nach Gl. 28 einen Grundkegel vom Kegelwinkel

$$\sin \chi_1 = \sin \varphi_1' \cdot \cos \alpha,$$

welcher Wert durch die Beziehung in Gl. 36 umgewandelt wird in

$$\sin \chi_1 = \frac{z_1}{z} \cos \alpha.$$

Den gleichen Grundkegel muß der Eingriff des Modulkegels mit dem Modulplanrade der Fig. 51 ergeben; die Winkelgröße für diese Paarung legt Gl. 31 fest. Die Vereinigung beider Gleichungen

$$\sin \chi_1 = \frac{z_1}{z} \cos \alpha = \sin \varphi_1 \frac{\cos \alpha_0}{\cos \xi_1}$$

liefert den Kantenwinkel des Modulkegels

$$\sin \varphi_1 = \frac{z_1}{z} \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_0} \cos \xi_1.$$

Das Modulplanrad hat nach Fig. 51 einen Halbmesser von

$$R_0 = \frac{R_1}{\sin \varphi_1} \cos \xi_1,$$

bzw. eine Zähnezah von

$$z_0 = \frac{z_1}{\sin \varphi_1} \cos \xi_1.$$

Durch Einführung der vorstehenden Winkelbeziehung gelangt man zu einem einfachen Ausdruck für die Zähnezah des Modulplanrades, gültig für beide Räder eines Getriebes:

$$z_0 = z \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} \dots \dots \dots (40)$$

Die Benützung dieser Zähnezah formt die Gleichung für die Kantenwinkel der Modulkegel um:

$$\sin \varphi_1 = \frac{z_1}{z_0} \cos \xi_1 \quad \text{und} \quad \sin \varphi_2 = \frac{z_2}{z_0} \cos \xi_2 \dots \dots \dots (41)$$

Die Radabrückung η ist aus den Winkeln der Modulkegel festgelegt durch

$$\eta = \psi - (\varphi_1 + \varphi_2) \dots \dots \dots (42)$$

Die Winkelgrößen der Kopfhöhe über den Modulkegeln betragen bei dem normalen radialen Spiel $\frac{1}{6} \frac{t_0}{\pi}$:

$$z_1' = \eta + z_2'' - \frac{1}{6} \frac{2}{z_0} \quad \text{und} \quad z_2' = \eta + z_1'' - \frac{1}{6} \frac{2}{z_0} \dots \dots \dots (43)$$

Wird der Achsenwinkel ψ eines spielfrei eingreifenden Getriebes um den Winkel $\Delta \psi$ vergrößert, so stellt sich ein Flankenspiel ein, dessen Größe, gemessen in der Eingriffsebene senkrecht zu den Zahnflächen, nach Gl. 23 berechnet wird mit

$$\Delta s = \Delta \psi \cdot z \sin \alpha \cdot \frac{t_0}{\pi} \dots \dots \dots (44)$$

Für Eingriffswinkel in der Nähe von 15° ist ungefähr

$$\Delta s = \Delta \psi \frac{z}{4} \frac{t_0}{\pi}.$$

Zahnprofile in den abgewickelten Mantelflächen der Modulergänzungskegel.

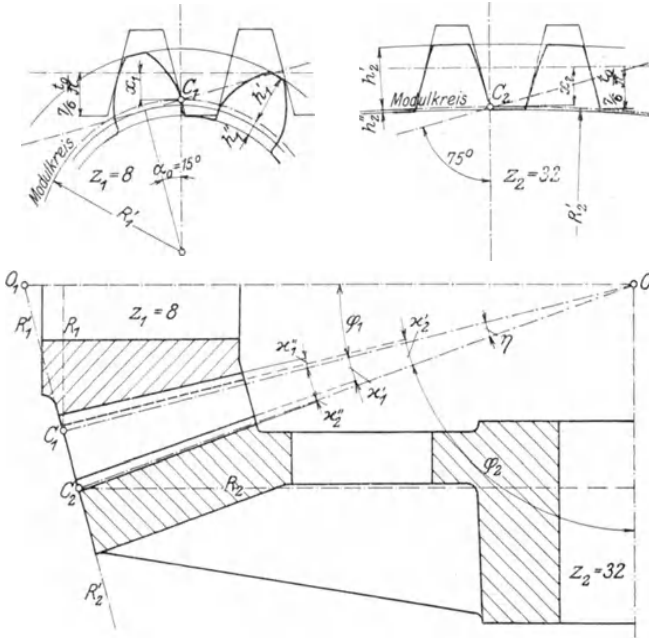


Fig. 52. Sonderverzahnung eines Kegelradgetriebes.

Damit sind alle Größen festgelegt, die die Ausführung der Sonderverzahnung kennzeichnen. Zur Erleichterung der Anwendung sei die Berechnung eines Kegelradtriebes angeschlossen, dessen Zahnausbildung in das Gebiet der spitzen Zähne fällt.

Für den Achsenwinkel von 90° sei das in Fig. 52 dargestellte Getriebe auszuführen mit den Zähnezahlen

$$z_1 = 8 \text{ und } z_2 = 32$$

Ein gefordertes Flankenspiel von etwa

$$\Delta s = 0,05 \frac{t_0}{\pi}$$

wird nach dem angenäherten Wert der Gl. 44 erreicht durch eine Winkeländerung

$$\Delta \psi = \frac{\Delta s}{\frac{t_0}{\pi}} \cdot \frac{4}{z} = 0,05 \frac{4}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}} = 0,00606 = 0^\circ 20' 50''.$$

Die Getriebeabmessungen sind deshalb festzulegen für den Achsenwinkel des spielfreien Eingriffes

$$\psi = 90^\circ - 0^\circ 20' 50'' = 89^\circ 39' 10''.$$

Aus der Planradzähnezahl des Teilrißeingriffes der Gl. 35

$$z = \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + 2z_1z_2 \cos \psi}}{\sin \psi} = 33,032$$

ermittelt man zunächst die Zähnezahlen der Ersatzverzahnung nach Gl. 37

$$z_1' = \frac{z \sin \psi}{\frac{z_2}{z_1} + \cos \psi} = 8,245 \quad \text{und} \quad z_2' = \frac{z \sin \psi}{\frac{z_1}{z_2} + \cos \psi} = 128,997,$$

und entnimmt aus der Fig. 33 die zugehörigen Verhältniszahlen der Profilabbrückungen

$$\xi_1' = +0,72 \quad \text{und} \quad \xi_2' = +1,06,$$

die nach Gl. 38 zu einem Eingriffswinkel führen von

$$(\operatorname{tg} \alpha - \alpha) = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha_0 (\xi_1' + \xi_2')}{z_1' + z_2'} + (\operatorname{tg} \alpha_0 - \alpha_0) = 0,006950 + 0,006150 = 0,013100.$$

In der Zahlentafel 2 der Funktionswerte $(\operatorname{tg} \alpha - \alpha)$ auf S. 28 sucht man den zugehörigen Winkelwert auf von $\alpha = 19^\circ 11' 4''.$

Für diesen Eingriffswinkel beträgt nach Gl. 40 die Zähnezahl des gemeinsamen Modulplanrades

$$z_0 = z \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} = 33,782.$$

Den ebenen Abrückungen ξ_1' und ξ_2' entsprechen nach den Gl. 39

$$\operatorname{tg} \xi_1 = \frac{2}{z} \xi_1' = 0,043593 \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \xi_2 = \frac{2}{z} \xi_2' = 0,064180$$

die Winkelgrößen der Profilabrückungen

$$\xi_1 = 2^\circ 29' 46'' \quad \text{und} \quad \xi_2 = 3^\circ 40' 20''.$$

Die Gl. 41

$$\sin \varphi_1 = \frac{z_1}{z_0} \cos \xi_1 = 0,23659 \quad \text{und} \quad \sin \varphi_2 = \frac{z_2}{z_0} \cos \xi_2 = 0,94530$$

ergeben die Kantenwinkel der Modulkegel

$$\varphi_1 = 13^\circ 41' 7'' \quad \text{und} \quad \varphi_2 = 70^\circ 57' 45''.$$

Aus ihrer Summe

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 84^\circ 38' 52''$$

folgt die Radabrückung

$$\eta = \psi - (\varphi_1 + \varphi_2) = 89^\circ 39' 10'' - 84^\circ 38' 52'' = 5^\circ 0' 18'' = 0,087354.$$

Aus der Gl. 34

$$\operatorname{tg}(\xi_1 + \kappa_1'') = \frac{7}{6} \cdot \frac{2}{z_0} = 0,06907$$

bestimmt der beiden Rädern gemeinsame Winkelwert

$$\xi_1 + \kappa_1'' = \xi_2 + \kappa_2'' = 3^\circ 57' 4''$$

die Fußwinkel der Zähne innerhalb der Modulkegel

$$\kappa_1'' = 3^\circ 57' 4'' - 2^\circ 29' 46'' = 1^\circ 27' 18'' = 0,025394,$$

$$\kappa_2'' = 3^\circ 57' 4'' - 3^\circ 40' 20'' = 0^\circ 16' 44'' = 0,004867.$$

Die Kopfwinkel der Zähne außerhalb der Modulkegel betragen nach den Gl. 43

$$\kappa_1' = \eta + \kappa_2'' - \frac{1}{6} \frac{2}{z_0} = 0,087354 + 0,004867 - 0,009867 = 0,082354 = 4^\circ 43' 7'',$$

$$\kappa_2' = \eta + \kappa_1'' - \frac{1}{6} \frac{2}{z_0} = 0,087354 + 0,025394 - 0,009867 = 0,102881 = 5^\circ 53' 41''.$$

Die Außenbegrenzung der Räder erfolgt daher in den Kegelkanten

$$\varphi_1 + \kappa_1' = 13^\circ 41' 7'' + 4^\circ 43' 7'' = 18^\circ 24' 14'',$$

$$\varphi_2 + \kappa_2' = 70^\circ 57' 45'' + 5^\circ 53' 41'' = 76^\circ 51' 26''.$$

Das gemeinsame Modulplanrad hat die Größe von

$$R_0 = \frac{z_0 t_0}{2 \pi} = 16,891 \frac{t_0}{\pi}.$$

Die Kantenwinkel der Modulergänzungskegel betragen

$$[90^\circ - (\varphi_1 + \xi_1)] = 90^\circ - 16^\circ 10' 53'' = 73^\circ 49' 7'',$$

$$[90^\circ - (\varphi_2 + \xi_2)] = 90^\circ - 74^\circ 38' 5'' = 15^\circ 21' 55'',$$

ihre Kegelspitzen sind vom Achsenschnittpunkt entfernt nach Gl. 32 um die Beträge

$$\overline{OO}_1 = \frac{R_0}{\cos(\varphi_1 + \xi_1)} = 17,588 \frac{t_0}{\pi},$$

$$\overline{OO}_2 = \frac{R_0}{\cos(\varphi_2 + \xi_2)} = 63,746 \frac{t_0}{\pi}.$$

Für das Aufzeichnen der Verzahnungen in den abgewickelten Mantelflächen der Modulergänzungskegel entsprechend der Durchführung in Fig. 52 ergeben die Gl. 33 die nötigen Angaben.

Halbmesser der Modulkreise:

$$R_1' = 4,165 \frac{t_0}{\pi}, \quad R_2' = 60,384 \frac{t_0}{\pi}.$$

Abrückung der Zahnstangenprofile:

$$x_1 = 0,736 \frac{t_0}{\pi} \quad x_2 = 1,084 \frac{t_0}{\pi}.$$

Fußtiefen innerhalb der Modulkreise:

$$h_1'' = 0,431 \frac{t_0}{\pi}, \quad h_2'' = 0,083 \frac{t_0}{\pi}.$$

Kopfhöhen außerhalb der Modulkreise:

$$h_1' = 1,392 \frac{t_0}{\pi}, \quad h_2' = 1,740 \frac{t_0}{\pi}.$$

Die Zahnstärken ergeben sich aus dem spielreifen Eingriff mit dem normalen Zahnstangenprofil.

Da die Übersetzung eines Kegelradtriebes im Eingriffsbild auf den quadratischen Wert (bei $\psi = 90^\circ$) ansteigt, so gelangt man schon bei mittleren Übersetzungen zu einer sehr hohen Ersatzzähnezahl z_2' des großen Rades. In diesem Falle hat man die Profilabrückung

$$\xi_2' = 0$$

zu bemessen und die Abrückung des kleinen Rades aus den Werten der Zahnstangengetriebe in Fig. 37 zu entnehmen. Auf Grund dieser Werte ist die Berechnung durchzuführen. Bei Zähnezahlen z_1' unter 12 ist aus der Fig. 37 auch der auf den Modul bezogene Verhältniswert (α_1') der Kopfhöhe abzulesen und in den Winkelwert nach Gleichung

$$\operatorname{tg} \alpha_1' = \frac{2}{z} (\alpha_1')$$

zu überführen. Der größere Rechnungswert der Gl. 43 ist dann ungültig. Es verbleibt zwischen Kopfkreis des kleinen Rades und Fußkreis des großen Rades ein übernormales Spiel, da die Zahnhöhe wegen des Spitzwerdens der Zähne kleiner ausfällt.

III. Die Zahnreibung.

A. Stirnräder.

Unter der Voraussetzung, daß nur ein Flankenpaar im Eingriffe steht, stellt sich bei einer Kraftäußerung von P am Teilkreise des treibenden Rades im Berührungspunkte E (Fig. 53) ein Zahndruck $\frac{P}{\cos \alpha}$ ein, der eine Reibung von $\mu \frac{P}{\cos \alpha}$ hervorruft. Die Gleitgeschwindigkeit in E beträgt nach Gl. 2

$$\xi (\omega_1 + \omega_2).$$

Die während des Zeiteilchens dt verbrauchte Reibungsarbeit ist somit

$$dA_r = \mu \frac{P}{\cos \alpha} \cdot \xi (\omega_1 + \omega_2) dt \dots \dots \dots (45)$$

Darin ist für die einzelnen Eingriffsstellungen nur der Wert $\frac{\xi}{\cos \alpha}$ veränderlich, der bei der Evolventenverzahnung streng der Teilkreisentfernung x des Profils vom Zentralpunkt C , bei den übrigen Verzahnungen in hinreichend genauer Annäherung diesem Werte entspricht. Da also

$$\frac{\xi}{\cos \alpha} = x$$

und ferner

$$dt = \frac{dx}{R_1 \omega_1},$$

so ist

$$dA_r = \mu P \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) x dx = P_r \cdot dx.$$

Das mit x proportional wachsende P_r ist der am Teilkreisradius reduzierte Reibungswiderstand. Trägt man seine Größe auf den Ordinaten eines Diagramms (Fig. 54) ein, dessen Abszissen die Teilkreisentfernungen x sind, so wird der Verlauf innerhalb des ganzen Eingriffsbogens ($e_1 + e_2$) durch den Geradenzug ACE wiedergegeben.

Berücksichtigt man aber den Umstand¹⁾, daß beim gleichzeitigen Eingriff zweier Flankenpaare auf einen Zahn ungefähr die Hälfte der Umfangskraft entfällt, so erfährt das Diagramm insofern eine Änderung, als in den Zonen ab und de des gleichzeitigen Eingriffes die Ordinaten nur in halber Größe eingetragen werden dürfen.

Entsprechend der vorstehenden Gleichung stellt die schraffierte Diagrammfläche jene Reibungsarbeit vor, die beim vollständigen Eingriff eines Zahnes verloren geht; sie berechnet sich mit

$$A_r = \mu P \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{1}{2} [e_1^2 + e_2^2 - t(e_1 + e_2) + t^2].$$

Dabei wird vom treibenden Rade eine Arbeit abgegeben von

$$A = P \cdot t.$$

Beim Einführen der Zähnezahlen z_1, z_2

und den Teilwerten der Eingriffsdauer $\varepsilon_1 = \frac{e_1}{t}$,

$\varepsilon_2 = \frac{e_2}{t}$ ergibt sich der verhältnismäßige

Arbeitsverlust, herrührend von der Zahnreibung, mit

$$\mathfrak{B} = \frac{A_r}{A} = \mu \pi \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) [\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + 1]. \quad (46)$$

¹⁾ Vgl. Kohn, „Zahnreibung“. Ztschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1895, S. 459.

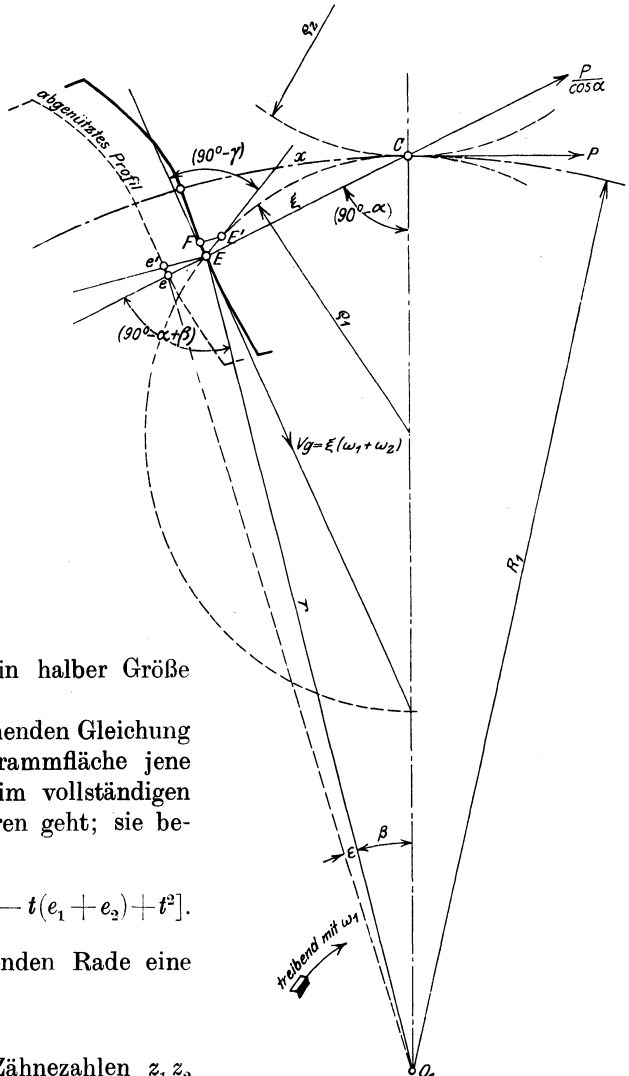


Fig. 53.

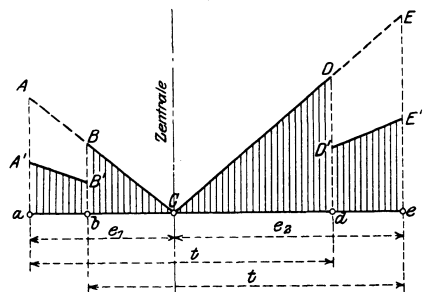


Fig. 54.

Für Innenradverzahnung ist statt der Summe die Differenz $\left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}\right)$ einzusetzen. Je nach der Schmierung, dem Werkstoff und der Oberflächenbeschaffenheit der Zähne stellt sich ein Reibungskoeffizient von etwa $\mu = 0.1$ bis 0.25 ein.

Die Einführung der Gesamteingriffsdauer $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ in vorstehender Formel und der angenäherten Gleichsetzung der Größen

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 1 \approx \frac{3}{2} \varepsilon$$

liefert einen zwar ungenaueren, aber für die weitere Untersuchung bequemerem Ausdruck für den Arbeitsverlust

$$\mathfrak{B} = \mu \cdot \pi \left(\frac{1}{z_1} \pm \frac{1}{z_2}\right) \cdot \frac{\varepsilon}{2} \dots \dots \dots (47)$$

Dieser aus dem Gleiteingriff der Flanken sich ergebende Reibungsverlust ist bei genauer Zahnausführung sehr gering; seine Werte liegen bei reichlicher Schmierung unter 0,5 v. H. Zu diesem verhältnismäßig geringfügigen Verluste gesellt sich bei abgenützten und unbearbeiteten Zähnen noch ein wesentlich größerer Arbeitsverlust, herrührend aus dem schabenden Kanteneingriff der Zahnköpfe (siehe Abschnitt VII), dessen Größe sich jedoch einer rechnerischen Ermittlung entzieht.

Bestimmend für den Durchschnittswert der Flankenabnutzung ist die auf 1 cm^2 eingreifende Zahnfläche entfallende Sekundenreibungsarbeit a_r . Insgesamt wird in der Sekunde eine Reibungsarbeit aufgebraucht von

$$\mathfrak{B} \cdot P \cdot v.$$

Bei einem Eingriffswinkel α der Evolventenzähne gelangt ungefähr eine Zahnlänge von

$$e \sin \alpha = \varepsilon \cdot t \cdot \sin \alpha$$

zum Eingriff; es beträgt demnach bei einer Zahnbreite b die gesamte am Eingriff beteiligte Zahnfläche des Rades:

$$\varepsilon \cdot t \cdot \sin \alpha \cdot b \cdot z_1.$$

Die Division der vorstehenden Ausdrücke

$$a_r = \frac{\mathfrak{B} \cdot P \cdot v}{\varepsilon \cdot t \cdot \sin \alpha \cdot b \cdot z_1}$$

liefert bei Einführung der Gl. 47 den auf einen cm^2 eingreifende Zahnfläche und eine Sekunde bezogenen Verhältniswert der Zahnreibungsarbeit in mkg/sek :

$$a_r = \frac{\mu \cdot \pi}{2 \sin \alpha} \cdot \left(1 \pm \frac{z_1}{z_2}\right) \cdot \frac{1}{z_1^2} \cdot \frac{P}{b \cdot t} \cdot v \dots \dots \dots (48)$$

Aus dieser Beziehung überblickt man klar den Einfluß der Ausführungsgrößen. Die Reibungsarbeit wächst proportional der Umfangsgeschwindigkeit v und der Zahnbelastung $\left(\frac{P}{b \cdot t}\right)$; eine wirksame Verminderung im quadratischen Verhältnis veranlaßt eine erhöhte Zähnezahl.

Durch das Einsetzen der Umlaufzahl n_1 aus

$$v = \frac{z \cdot t \cdot n_1}{60 \cdot 100}$$

erhält man eine Umformung der Gleichung:

$$a_r = \frac{\mu \cdot \pi}{12000 \cdot \sin \alpha} \cdot \left(1 \pm \frac{z_1}{z_2}\right) \frac{1}{z_1} \cdot \frac{P \cdot n_1}{b} \dots \dots \dots (49)$$

Danach wird der Einfluß, den die Radanordnung auf die Reibungsarbeit ausübt, durch die Größe $\left(\frac{P n_1}{b}\right)$ ausgedrückt. Diese Größe wird oft als Vergleichungswert¹⁾ der Getriebeausführung benützt.

Eine weitere Umformung der Gl. 48 durch Einführung der zu übertragenden Leistung N in PS. und der Radgröße aus

$$75 N = P \cdot v \quad \text{und} \quad \pi \cdot D_1 = z_1 \cdot t$$

ergibt eine bemerkenswerte Beziehung:

$$a_r = \frac{75 \cdot \mu}{2 \cdot \sin \alpha} \left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right) \cdot \frac{N}{z_1 \cdot b \cdot D_1} \dots \dots \dots (50)$$

Die bei der Übertragung einer bestimmten Arbeitsleistung N auftretende spezifische Reibungsarbeit ist lediglich vom Raddurchmesser, von der Zahnbreite und der Zähnezahl abhängig; eine Beeinflussung durch die Umlaufgeschwindigkeit findet nicht statt. Der Ausdruck $\left(\frac{N}{z \cdot b \cdot D}\right)$ hat den größten Anspruch auf die Verwendung als Vergleichswert der Getriebeausführungen, da er die unmittelbar bekannten Hauptgrößen des Rades einschließt.

Zum Arbeitsverlust einer Getriebeanordnung tragen die Zahnreibung im Flankeneingriff, die Lagerreibung des Zahndruckes und bei Ungenauigkeiten auch das Schaben der Kopfkanten bei, von denen die beiden letzteren Einwirkungen die Zahnreibung beträchtlich überragen. Da die Größe der einzelnen Verluste schwer festzustellen ist, so begnügt man sich gewöhnlich mit der Angabe eines Gesamtwirkungsgrades η , der alle Verluste umfaßt. Für minder sorgfältige Ausführungen mit unbearbeiteten Zähnen beträgt der Mittelwert ungefähr $\eta = 0.92$; bei bearbeiteten Zähnen und zureichender Schmierung kann man durchschnittlich mit einem $\eta = 0.95$ rechnen. Doch lassen sich noch günstigere Werte bei reichlicher Schmierung und sorgfältiger Ausführung erzielen.

Messungen der Allgemeinen Elektrizitätsgesellschaft, Berlin²⁾, haben bei einfachen Stirnradübersetzungen mit Rädern von reichlich bemessenen, auf der Maschine geschnittenen Zähnen einen Wirkungsgrad bis 97 v. H., bei doppelten Übersetzungen bis 90 v. H. ergeben; Räder mit unbearbeiteten Zähnen wiesen einen beträchtlich kleineren Wirkungsgrad auf, und zwar etwa 90 v. H. bei einfachem und nur 70 v. H. bei zweifachem Vorgelege.

Auch Wilson³⁾ führte Versuche an zwei gußeisernen Zahntrieben mit unbearbeiteten Zähnen durch ($z_1 = z_2 = 20$ und $z_1 = 16$, $z_2 = 50$, gleiche Teilung $t = 1\frac{1}{2}$ Zoll). Der Wirkungsgrad (Zahn- und Lagerreibung der getriebenen Welle einbezogen) hielt sich innerhalb 90 und 95 v. H.; seine Beeinflussung durch die Größe der Belastung ist geringfügig. Die Schmierung der Zähne mit einem dicken Schmieröl verbesserte den Wirkungsgrad im Durchschnitt um 1,7 v. H.

B. Kegelräder.

Da der Eingriff bei den Kegelrädern auf jenen der Stirnräder zurückgeführt werden kann, so gilt vorstehende Entwicklung auch hier mit dem einzigen

¹⁾ Unzutreffend und auch umständlicher ist die Verwendung des Ausdruckes $\frac{P \cdot n}{\varepsilon \cdot b}$ zum gleichen Zwecke. Der Minderung der mittleren Kantenpressung $\frac{P}{\varepsilon b}$ durch die Eingriffsdauer ε entspricht nämlich eine gleichwertige Zunahme der mittleren Gleitgeschwindigkeit. Auf die Größe der spezifischen Reibungsarbeit hat somit die Eingriffsdauer keinen Einfluß.

²⁾ Siehe Hartmann, „Anwendung elektrischer Kraftübertragung“. Z. Ver. deutsch. Ing. 1892, S. 1116.

³⁾ Siehe Wilson, „Test of Rough Gray-Iron Spur Gears“. American Machinist 1905, S. 41.

Unterschiede, daß für die Gleitgeschwindigkeit nicht mehr $\xi(\omega_1 + \omega_2)$, sondern nach Gl. 27

$$v_g = \xi \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2 \cos \psi}$$

einzusetzen ist.

In die Endformel des Arbeitsverlustes \mathfrak{B} der Gl. 46 ist somit statt $\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right)$ der Faktor

$$\sqrt{\frac{1}{z_1^2} + \frac{1}{z_2^2} + \frac{2 \cos \psi}{z_1 z_2}}$$

einzuführen.

IV. Die Abnützung der Zähne.

Schreitet der Eingriff von E nach E' (Fig. 53) im Zeiteilchen dt weiter, so ist die verbrauchte Reibungsarbeit gemäß Gl. 45

$$dA_r = \mu \frac{P}{\cos \alpha} \xi (\omega_1 + \omega_2) dt.$$

In Berührung tritt während dt das Profilelement $EF = d\sigma$, das sich aus dem Dreieck $EE'F$ mit den in die Figur eingetragenen Winkelbezeichnungen α , β , γ berechnet aus

$$d\sigma = FE' \cdot \frac{\sin(\alpha - \beta + \gamma)}{\cos \gamma}.$$

Aus den weiteren Beziehungen

$$FE' = r \omega_1 dt, \quad \frac{R_1}{r} = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha}, \quad \frac{R_1}{\xi} = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin \beta}$$

erhält man durch Eliminierung von r und β

$$d\sigma = \left[R_1 \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\cos \gamma} - \xi \right] \omega_1 dt.$$

Maßgebend für die Abnützung ist nun die auf die Längeneinheit des Profils entfallende Reibungsarbeit

$$\frac{dA_r}{d\sigma} = \frac{\mu P \left(1 + \frac{\omega_2}{\omega_1}\right)}{\cos \alpha \left[\frac{R_1 \sin(\alpha + \gamma)}{\xi \cos \gamma} - 1 \right]}.$$

Die Abnützungstiefe \overline{Ee} , senkrecht zur Profiltangente gemessen, ist proportional diesem Verhältnis:

$$\overline{Ee} = \text{konst.} \cdot \frac{dA_r}{d\sigma}.$$

Sie hat zur Folge eine Verschiebung des Profilpunktes im Winkel

$$\varepsilon = \frac{\overline{Ee}'}{r} = \frac{\overline{Ee}}{r \cos(\alpha - \beta)} = \frac{\overline{Ee}}{R_1 \cos \alpha} = \text{konst.} \cdot \frac{dA_r}{d\sigma} \cdot \frac{1}{R_1 \cos \alpha}$$

$$\varepsilon = \text{konst.} \cdot \frac{\mu P \left(1 + \frac{\omega_2}{\omega_1}\right)}{R_1} \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha \left[\frac{R_1 \sin(\alpha + \gamma)}{\xi \cos \gamma} - 1 \right]}.$$

Bei der Voraussetzung, daß der Reibungskoeffizient μ und die Umfangskraft P für alle Berührungsstellen des Profils eine beständige Größe beibehalten, ist in vorstehender Gleichung veränderlich nur der Wert

$$A = \frac{1}{\cos^2 \alpha \left[\frac{R_1 \sin(\alpha + \gamma)}{\xi \cos \gamma} - 1 \right]}.$$

Δ ist die kennzeichnende Größe für die Profiländerung, die durch die Abnützung veranlaßt wird¹⁾. Behält Δ für alle Profilpunkte einen gleichen Wert, so verschieben sich alle Punkte im gleichen Winkel ε , und das Profil ändert sich nicht durch die Abnützung. Je größer aber die Unterschiede von Δ für die einzelnen Punkte ausfallen, desto größer ist die zu erwartende Profilveränderung.

Wie aus Fig. 53 ersichtlich, ist bei der Zykloidenverzahnung $\gamma = \alpha$ und $\xi = 2 \varrho_1 \sin \alpha$; somit wird

$$\text{für den Zahnfuß} \quad \Delta = \frac{1}{\cos^2 \alpha \left(\frac{R_1}{\varrho_1} - 1 \right)}.$$

Eine ähnliche Abhängigkeit liefert

$$\text{für den Zahnkopf} \quad \Delta = \frac{1}{\cos^2 \alpha \left(\frac{R_1}{\varrho_2} + 1 \right)}.$$

Bei der Evolventenverzahnung ist $\alpha = \text{konst.}$ und $\gamma = 0^\circ$, deshalb

$$\Delta = \frac{1}{\cos^2 \alpha \left(\frac{R_1}{\xi} \sin \alpha - 1 \right)}.$$

Eine übersichtliche Darstellung des Verlaufes von Δ erhält man durch Auftragen dieser Werte auf den Kreisbögen, die von den zugehörigen Profilpunkten ausgehen. In dieser Art ist der Verlauf von Δ über die ganze Eingriffslänge in Fig. 55 für einen Zykloidenzahn und in Fig. 56 für einen Evolventenzahn von

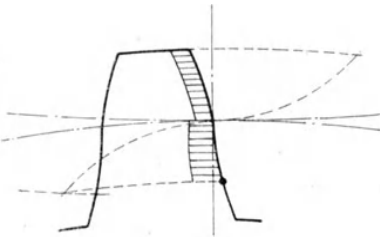


Fig. 55.
Zykloidenzahn
 $z_1 = 36$
(gepaart mit $z_2 = 72$)
 $\varrho_1 = \varrho_2 = \frac{11}{4} t$

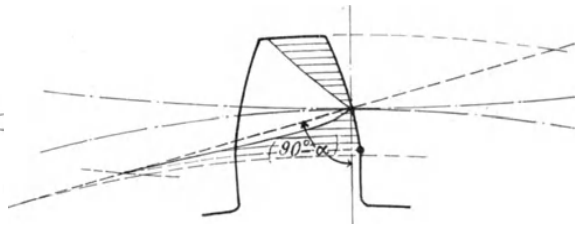


Fig. 56.
Evolventenzahn
 $z_1 = 36$
(gepaart mit $z_2 = 72$)
 $\alpha = 15^\circ$

gleichen Abmessungen eingezeichnet. Die Figuren lassen erkennen, daß keine der gebräuchlichen Verzahnungen durch die Abnützung ungeändert bleibt. Günstiger liegen die Verhältnisse für die Zykloidenzähne. Bei den Evolventenzähnen nimmt am Zahnfuß der Wert Δ sehr rasch gegen den Fußpunkt der Evolvente zu und erreicht daselbst den Wert ∞ , da $R_1 \sin \alpha = \xi$ wird. Dieses rasche Anwachsen von Δ hat zur Folge, daß die konvexe Seite des Fußes durch die Abnützung konkav wird; der abgenützte Evolventenzahn nähert sich in der Form dem Zykloidenzahn, wie es Fig. 57 zeigt.

Durch Δ wird eigentlich nur der Einfluß der Flankenform auf ihre Veränderlichkeit durch die Abnützung gekennzeichnet. Für die wirkliche Abnützung kommt noch eine Reihe weiterer Einflüsse in Betracht, deren Wirkungen jedoch nur einer vergleichweisen Schätzung zugänglich sind.

¹⁾ Vgl. Goebel, „Die Reibung der Zahnräder“. Z. Ver. deutsch. Ing. 1896, S. 459.

Die Verschiedenheit im Anschmiegen der Flanken bedingt eine mehr oder minder große Abplattung der Flächen durch den Zahndruck (siehe Fig. 58). Je schmaler die Abplattung ausfällt, desto größere Pressungen stellen sich ein, und es ist auch eine größere Abnützung zu erwarten. Ungünstig in dieser Hinsicht verhalten sich die Flankenteile in der Nähe der Fußpunkte der Zykloiden- und Evolventenkurven wegen der kleinen Krümmungsradien. Die innigere Auflage von konkav auf konvex stellt die Zykloidenzähne in Vorteil gegenüber den Evolventenzähnen.

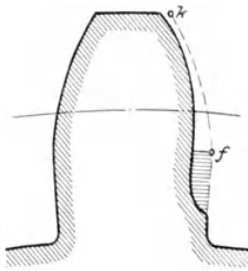


Fig. 57.

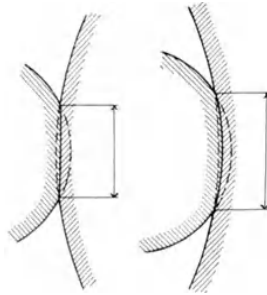


Fig. 58.



Fig. 59.

Die Gleitrichtung des getriebenen Zahnes ist am Fuße des treibenden Zahnes nach innen, am Kopfe nach außen gerichtet (siehe Fig. 59); in entgegengesetzter Gleitrichtung bewegt sich der treibende Zahn am getriebenen. Im Teilkreisepunkt der Flanken findet somit ein Richtungswechsel des Abgleitens statt. Bei gut eingelaufenen Trieben kann man

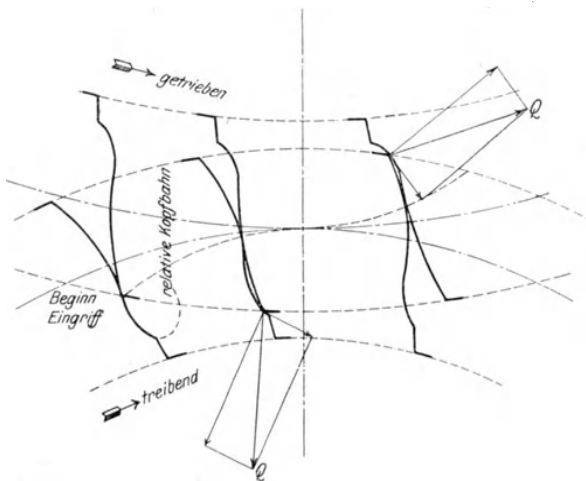


Fig. 60.

eine scharfe Grenzlinie zwischen den nach entgegengesetzten Richtungen hin abgeschliffenen Kopf- und Fußflächen beobachten; bei geschmierten Rädern verbleibt daselbst ein Fettfaden¹⁾. Das Gleiten gegen die Zahnwurzel verursacht zufolge des Stemmens verhältnismäßig größere Abnützungen als das Abstreichen des Zahnes in entgegengesetzter Richtung. Der treibende Zahnfuß und der getriebene Zahnkopf unterliegen deshalb größeren Abnützungen als die übrigen Zahn-teile.

Die Profiländerung, hervorgerufen durch die Abnützung, hängt im weiteren von der Widerstandsfähigkeit der Zahnmaterialien, vom Übersetzungsverhältnis und auch von der Eingriffsdauer ab. Unter günstigen Umständen kann gleichzeitiges Zusammenarbeiten mehrerer Zahnpaare die Abnützung der ihr zumeist ausgesetzten Flankenteile verringern.

Neben der durch das Gleiten der Flanken hervorgerufenen Abnützung längs des in Berührung kommenden Profiltails kf (Fig. 57) stellt sich noch eine weitere

¹⁾ Siehe Lasche, „Elektrischer Antrieb mittels Zahnradübertragung“. Z. Ver. deutsch. Ing. 1899, S. 1489.

Ausnehmung des Zahnfußes ein. Die vorbeiziehende äußerste Kante des eingreifenden Zahnes findet die Bahn nicht mehr frei und ist genötigt, den Auslauf sich selbst herauszuschaben. Dieses Verhalten ist in Fig. 60 dargestellt. Die Fräserwirkung der Kopfkante ist verknüpft mit dem Auftreten einer stark von der tangentiellen Richtung abweichenden Kraft Q , die einen großen Seitendruck gegen die Achsen ausübt und die Ursache von Erzitterungen der Räder und von Kranzbrüchen werden kann¹⁾.

Der Umstand, daß die Abnutzung eine Profiländerung nach sich zieht, führt zu einer Störung des richtigen Eingriffes. Es treten dann die im Abschn. VII besprochenen Erscheinungen ein. Zum Eingriff, der für ein Flankenpaar nur eine Teilungslänge lang andauern kann, kommen die am weitesten vorstehenden Teile der Flanken, nach deren Abnutzung treten andere Teile an ihre Stelle, so daß die wirklich durchlaufene Eingriffslinie in stetiger Änderung begriffen ist. Die Abnutzung der im Teilkreis liegenden Flankenpunkte erfolgt an Stellen, wo eine Gleitgeschwindigkeit besteht, also in Eingriffen außerhalb des Zentralpunktes C . Die Stöße beim Überspringen des Eingriffes von Zahn zu Zahn machen den Gang von Rädern mit stark abgenutzten Zähnen unruhig.

V. Die Bearbeitung der Stirnräder.

Das früher beliebte Nacharbeiten der in größerer Stärke gegossenen Zähne mit Feile und Meißel oder auch mit der Maschine nach unvollkommenen Methoden ist gegenwärtig stark zurückgegangen. Bei Verwendung von gut ausgebildeten Formmaschinen und sorgfältiger Arbeit erzielt man nämlich Erzeugnisse, die in ihrer Genauigkeit durchaus nicht den nachgearbeiteten Zähnen nachstehen; auch kann man eine genügende Glätte der roh belassenen Zahnflächen erhalten. Dieser Herstellungsvorgang verursacht nicht nur geringere Kosten, sondern er bietet auch den weiteren Vorteil, daß die Zahnflächen die härtere Gußhaut beibehalten.

Doch ist bei der Herstellung der Zahnflächen in der Gußform eine volle Genauigkeit nicht zu erwarten. Der verhältnismäßig rohe Vorgang des Formens und Eingießens, sowie das Verziehen des erkaltenden Gußstückes bringen Fehler mit sich, die auch bei größter Sorgfalt nicht zu vermeiden sind. Ein rascherer Lauf von Rädern mit gegossenen Zähnen selbst der besten Ausführung ist deshalb immer noch mit Lärm und Erzitterungen verbunden.

Schon bei einer Umfangsgeschwindigkeit von 2 m läßt sich ein ruhiger, geräuschloser Gang nur dann erzielen, wenn die Zahnflächen mit der Maschine in genau theoretischer Form ausgearbeitet werden. Es werden dabei die Zahnlücken aus dem genau vorgedrehten, vollen Zahnkranz herausgeschnitten. Ein genügend steifer Bau der kraftbeanspruchten Teile in der Arbeitsmaschine ist natürlich die Vorbedingung für eine genaue Arbeit. Da die Abnutzung der Schneidkanten und die sich einstellende Erwärmung zu Ungenauigkeiten Veranlassung geben, wird bei besonders genauer Ausführung das Material der Zahnücke zum größten Teile zunächst durch Vorschruppen entfernt und erst dann die Fertigstellung mit einem genauen Schneidwerkzeug unter präziser Einstellung beendet. Neuestens kommt sogar das Schleifen²⁾ bei gehärteten Rädern in Anwendung; man beseitigt damit nicht nur die vom Bearbeiten und Härten herrührenden Fehler, sondern erzielt auch eine größere Glätte der Zahnfläche.

¹⁾ Siehe Stribeck, „Die Abnutzung der Zahnräder und ihre Folgen“. Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1894, S. 168.

²⁾ Siehe „Werkstattstechnik“ 1907, S. 625.

Notwendig ist die Erzeugung einer genauen Zykloiden- oder Evolventenflanke. Bearbeitungen nach Kreisbögen, die sich den Flanken noch so innig anschmiegen, sind zu verwerfen, da sie Schwankungen des Übersetzungsverhältnisses zur Folge haben.

Die Bearbeitung erfolgt entweder durch Hobeln bzw. Stoßen der Zahnflächen längs der geraden Zahnkanten oder auch durch Fräsen. Die zahlreichen in Anwendung stehenden Verfahren sind in den drei folgenden Gruppen systematisch geordnet geschildert.

A. Das Formfräsen.

Für das Formfräsen der Zähne wird ein Scheibenfräser benützt, dessen Profil der Zahnücke des zu schneidenden Rades entspricht. Der Fräser wird mit seiner Mittelebene genau auf Radmittelpunkt eingestellt und dann auf einem Schlitten parallel zur Radachse bewegt, so daß die Zahnücke in einem Schnittgang fertiggestellt wird (Fig. 61).

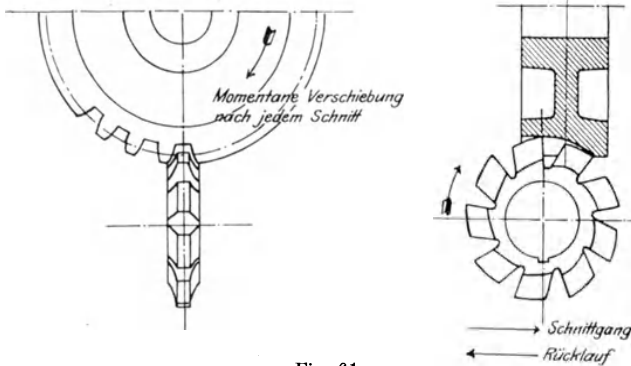


Fig. 61.

Bearbeitung in dieser Art kann auf jeder Universalfräsmaschine durchgeführt werden; besonders eingerichtet dazu sind die automatischen Zahnradfräsmaschinen, die alle Arbeiten des Fräsen und Teilens automatisch besorgen.

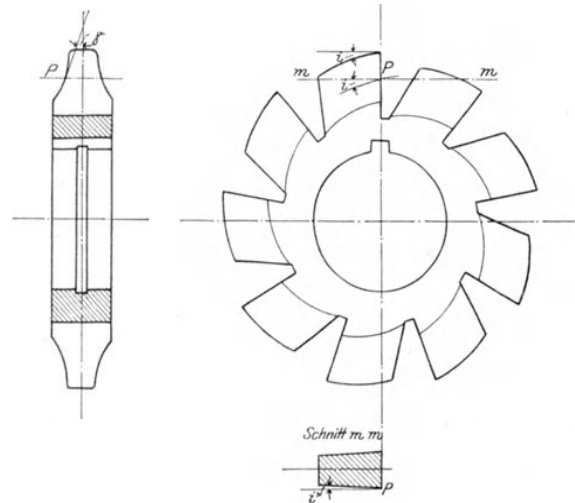


Fig. 62. Formfräser.

Nach dem Rücklauf des Fräseschlittens erfolgt eine Verdrehung des Werkstückes um eine Zahnteilung mit Hilfe eines genau arbeitenden Teilmechanismus, worauf ein neuerlicher Vorschub des Fräses zum Schneiden der benachbarten Lücke einsetzt. Die

Die Genauigkeit der Arbeit hängt in erster Reihe von der richtigen Gestaltung des Formfräses ab. In den vorgedrehten Fräser werden zunächst mit einem Winkelfräser (Fig. 62) die Spannuten derart eingeschnitten, daß sich radiale ebene Brustflächen der Schneidzähne ergeben. Eine große Sorgfalt muß der Herstellung der Lehren und der profilierten Schneide des Drehstahles gewidmet werden, mit dem das Fräserprofil fertiggedreht und auch gleichzeitig die Schneidzähne behufs Erreichung günstiger Schneidwinkel

hinterdreht werden. Das Hinterdrehen erfolgt derart nach einer Spirale, daß alle Radialschnitte des Schneidzahnes das Fräserprofil aufweisen. Diese Bedingung bezweckt die Aufrechterhaltung des richtigen Schnittprofils beim Schärfe von abgenutzten Schneidkanten; man schleift dann in einfachster Weise den Schneidzähnen neue radiale Brustflächen mittels der ebenen Fläche einer Schleifscheibe auf.

Die Zahnform beeinflußt die Güte der Fräsarbeit, indem sie die Größe der Ansatzwinkel i' für die einzelnen Punkte der Profilschneide festlegt. Fallen dieselben zu klein aus, so ist der Schnitt ein ungünstiger, weil die Seitenflächen der Schneidzähne zu stark an die geschnittenen Flächen pressen. Der Ansatzwinkel i des Zahnrückens entspricht ungefähr auch dem Winkel, unter den die Spirale eines andern Profilpunktes P verläuft (Fig. 62). Der Schnitt mm zeigt den Ansatzwinkel i' ; seine Größe ist abhängig von dem Winkel γ , den die Profiltangente des Punktes P mit der Lückenmittellinie einschließt. Es besteht die Beziehung

$$\operatorname{tg} i' = \operatorname{tg} i \cdot \operatorname{tg} \gamma.$$

Ungünstige Schnittprofile weisen die Zykloiden in der Nähe des Teilkreises auf, weil daselbst sich kleine γ und somit auch kleine Ansatzwinkel i' ergeben. Bessere Verhältnisse bestehen bei der Evolventenprofilierung. Kleine Winkel γ und i' sind zwar auch im radialen Fußansatz vorhanden; da aber der von ihm bearbeitete Teil der Zahnfläche nicht zum Eingriffe gelangt, kommt diesem Umstande weniger Bedeutung zu. Aus diesem Grunde und auch ihrer größeren Einfachheit wegen wird die Evolventenprofilierung in der Praxis bevorzugt.

Der Übelstand dieses einfachen Bearbeitungsverfahrens liegt in der notwendigen Anpassung des Fräasers an eine bestimmte Teilung und eine bestimmte Zähnezahl. Wird dieser Fräser zum Ausschneiden von Rädern mit größeren Zähnezahlen verwendet, wie dies in der Praxis notgedrungen aus Ersparnisrücksichten gehandhabt wird, so liefert er fehlerhafte Erzeugnisse, deren Ungenauigkeitsgrad gar nicht so geringfügig ist, als er gewöhnlich eingeschätzt wird. (Nähere Angaben siehe Abschnitt VII, 4.)

Die gebräuchlichen Fräsersätze weisen durchwegs Evolventenprofilierung (Eingriffswinkel $\alpha = 15^\circ$ oder $14\frac{1}{2}^\circ$ nach amerikanischem Muster) mit radialem Fußansatz der Flanke auf. Zweckmäßiger wäre eine Profilierung mit verstärktem Fußanschluß, wodurch sich auch günstigere Schnittverhältnisse zufolge der größeren Ansatzwinkel i' einstellen. Bei Zähnezahlen unter 16 wäre auch das Fräserprofil außen so weit zu kürzen, daß nicht unnötig tiefe Zahnlücken ausgearbeitet werden. Solche Änderungen setzen natürlich eine richtige Getriebeanordnung voraus, bei der die Kopfkreise im eingriffsfähigen Gebiet der Eingriffslinie verbleiben. Wegen der fehlenden Unterschneidung würden vorstehende Köpfe grobe Fehler zeitigen, die mit der sonst durchgeführten Genauigkeit der Herstellung nicht im Einklang stünden.

Trotz der angeführten Mängel hat die Einfachheit und Billigkeit des Formfräasers dem Verfahren eine weitgehende Anwendung verschafft; es ist am Platze bei der Massenherstellung von Rädern gleicher Größe, weil dann die Anschaffungskosten des zugehörigen richtigen Fräasers außer Betracht fallen. Entschließt man sich bei mittleren und kleinen Zähnezahlen zur Ausführung eines Spezialfräserpaares zugunsten eines befriedigenden Getriebeingriffes, dann sind die Schneidprofile nach der Sonderverzahnung zu gestalten.

B. Das Hobeln und Stoßen mit Spitzstichel.

Zur Fertigstellung der Zahnlücken wird bei diesem Verfahren ein Hobelstahl verwendet, der parallel zur Radachse schneidet. Nach jedem Schnitt erfolgt eine Verschiebung der Schnittlinie längs der Zahnflanke. Da sich dabei auch die Lage des Schneidstahles gegen die Profiltangente der Schnittstelle ändert, so kann für die Bearbeitung nur ein Spitzstichel verwendet werden. Dies ist ein Nachteil des Verfahrens; es liefert riefige Zahnflächen (Fig. 63), die bei größerer Rauigkeit durch Feilen oder Schleifen nachgearbeitet werden müssen, wodurch sich die Be-

arbeitungskosten erhöhen und unter Umständen auch die Genauigkeit des Erzeugnisses verschlechtert wird.

Die richtige Führung des Stichels gegenüber dem Werkstück wird in einfachster Weise von einer Lehre abhängig gemacht, die die Form der zu bearbeitenden Zähne trägt. Eine Zahnradhobelmaschine dieser Art in einer guten konstruktiven Ausbildung rührt von Renk¹⁾ her und wird von der Zahnradfabrik Augsburg gebaut. Das Aufspannen und Teilen des Rades erfolgt auf einem Spindelstock. Mittels zweier hintereinander gehender Messer werden die beiden Profile einer Zahnücke gleichzeitig ausgehobelt. Zur Führung der Messer dienen Wangen, die mit Gleitbacken an einer Zahnückenschablone entlang gleiten.



Fig. 63. Zahnückenschablone entlang gleiten.

Die Fehlerquellen, die das Aufzeichnen und Ausarbeiten der Lehren von Hand aus mit sich bringt, sucht man neustens durch Verwendung von Lehren zu beseitigen, die nach dem Wälzverfahren vollständig genau geschnitten sind.

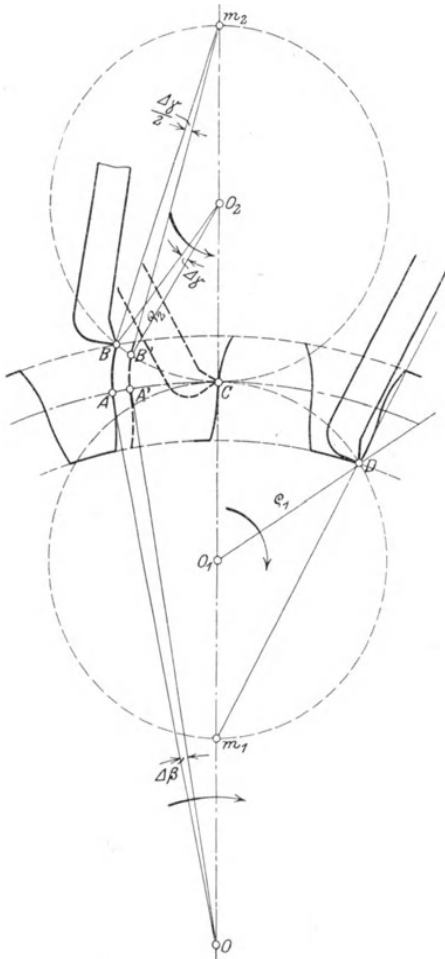


Fig. 64.

Doch kann man auch die notwendige Führung des Stahles aus dem Bewegungsverlauf in der Eingriffslinie des Profils ableiten. Ihre einfache kreisförmige oder gerade Gestalt bei den üblichen Verzahnungen, sowie das gleichförmige Fortschreiten des Eingriffs in der Eingriffslinie ermöglichen verhältnismäßig einfache Bewegungen. Es wird nach jedem Schnitt der Vorschub so eingerichtet, daß das zu bearbeitende Rad in kleinem Betrage vorwärts gedreht und gleichzeitig die Stichelspitze um einen dieser Drehung entsprechenden Betrag in der Eingriffslinie vorgerückt wird.

Demnach muß bei Zykloidenzähnen, deren Eingriffslinie die beiden Kreisabschnitte BC und CD umfaßt (Fig. 64), für die Bearbeitung des Zahnkopfes die Schlittenführung des Stichels absatzweise um den Mittelpunkt O_2 des außen liegenden Rollkreises gedreht werden; von der Mittellage C ab wird für das Aushobeln des Zahnfußes die Schaltdrehung fortgesetzt um den Mittelpunkt O_1 des innen liegenden Rollkreises. Die im Teilkreis und in der Eingriffslinie zurückgelegten Wege sind gleich groß, also z. B.: $AA' = BB'$; es gilt deshalb für die Schaltwinkel $\Delta\beta$ und $\Delta\gamma$ von Rad und Stichelträger die Beziehung

$$R\Delta\beta = e_2\Delta\gamma.$$

Wesentlich einfacher ist die gerade Verschiebung des Stahles längs der Eingriffsgaden beim Aushobeln von Evolventenflanken (Fig. 65); der Schaltweg BB' des Stichels entspricht seiner Größe nach der gleichzeitigen Drehung AA' des Rades im Grundkreise.

¹⁾ Siehe „Diagonal-Räderhobelmaschine von Joh. Renk in Augsburg“, Dingers Polytechn. Journal 1880, Band 238, S. 280.

Auf dieser Grundlage arbeiten die Maschinen von Hermann¹⁾; eine Abänderung ist zugunsten eines zweckmäßigen Aufbaues der Maschine nur insofern getroffen, als die hin und her gehende Bewegung des Stichelschlittens einer ortsfesten Führung zugewiesen ist. Die unterbleibende Schaltbewegung des Stichels übernimmt dann das Rad im entgegengesetzten Sinne; neben seiner Eigenschaltung im Winkel $\Delta\beta$ erhält es noch bei Zykloidenzähnen eine Rückdrehung in Winkel $\Delta\gamma$ um den Mittelpunkt der Rollkreise und bei Evolventenzähnen einen Rückgang in der Eingriffsgeraden im Betrage von $BB' = AA'$. Die Gesamtbewegung des Werkstückes bei der Schaltung entspricht somit hier seinem Abrollen auf der Eingriffslinie.

Der sonst notwendige Spitzstichel kann bei der Bearbeitung von Evolventenzähnen nach dem geschilderten Verfahren durch einen Flachstichel ersetzt werden, nachdem hier der Schneidstahl eine unveränderliche Stellung gegen die Profiltangente der Schnittstelle einhält (siehe Fig. 65). Die Zahnfläche fällt dabei glatter aus, weil sie aus der Aufeinanderfolge von tangierenden Schnittflächen hervorgeht.

Nach dem Vorschlage von Fischer²⁾ läßt sich dieser Vorteil auch bei der Bearbeitung von Zykloidenzähnen durch Hinzufügen einer weiteren Schaltbewegung erreichen. Alle Tangenten der in der Eingriffslinie liegenden Profilmomente gehen nämlich durch die festen Punkte m_2 bzw. m_1 der Rollkreise hindurch (Fig. 64). Bei einer Schaltdrehung von $\Delta\gamma$ dreht sich somit die Tangentenrichtung um einen Winkel im Betrage von $\frac{\Delta\gamma}{2}$. Überträgt man nun letz-

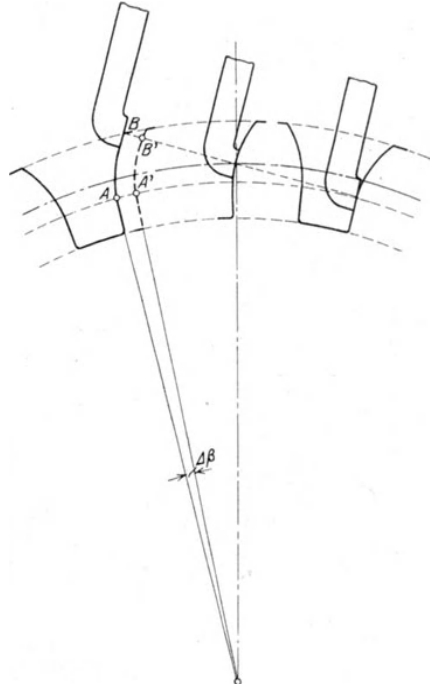


Fig. 65.

tere Winkelbewegung in entgegengesetztem Sinne auf den Stichel um seine Schneidkante B , so ändert derselbe seine Stellung gegenüber der Profiltangente nicht, und es kann ein Stichel mit breiter Schneide verwendet werden. Gerade darf sie allerdings nicht sein; sie muß so weit zurückgekrümmt werden, daß sie in den konkaven Fuß nicht einschneidet. Die kleinen, theoretisch bis auf Null herabgehenden Krümmungsradien des unmittelbar am Teilkreis liegenden Fußteils der Flanke drängen sich so eng aneinander, daß die Verwendung einer Schneide von größerem Krümmungsradius praktisch ohne weiteres statthaft ist.

Die Genauigkeit der Zahnform und Teilung beim Hobeln wird beeinträchtigt durch die Abnutzung der Schneide, die öfteres Nachschleifen und Neueinstellen notwendig macht. Da durch die Fräsarbeit eine größere Güte erzielt wird, findet die Hobelarbeit in der Praxis keine große Verwendung. Nur Räder mit großen Zahnteilungen pflegt man auf Zahnradhobelmaschinen zu bearbeiten, die gewöhnlich auch zum Aushobeln von Kegelradzähnen eingerichtet sind.

¹⁾ Siehe Hermann, „Die Zahnflächen und ihre automatische Erzeugung“. Verhandlungen des Vereins z. Beförd. d. Gewerbfließes, 1877. S. 61.

²⁾ Siehe Fischer, „Das Erzeugen der Zahnformen für Räder“. Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1898, S. 13.

C. Das Abwälzverfahren.

Hier erhält das Schneidwerkzeug eine profilierte Schneide, die als Zahnflanke einer bestimmten Radgröße vom Teilkreise r ausgebildet ist. In die einzelnen Schnittlagen wird das Werkzeug in der Weise gebracht, daß man es gegenüber dem zu bearbeitenden Rade vom Teilkreise R einer relativen Bewegung unterwirft, die dem Abrollen des Kreises r auf R gleichkommt, weshalb diese Art der Bearbeitung als Wälzverfahren bezeichnet wird. Das Zahnprofil geht dabei aus der Aufeinanderfolge der einhüllenden Lagen der Profilschneide hervor (Fig. 69); die Erzeugnisse des Wälzverfahrens weisen somit glatte Zahnflächen auf. Haben Kopf und Fuß des Schneidprofils identische Eingriffslinien (Satzräderbedingung), so können alle damit geschnittenen Radgrößen, sofern sie gleiche Teilung haben, im richtigen Eingriff miteinander gepaart werden.

Für eine genaue Herstellung der Schneide ist deren möglichst einfache Gestaltung erwünscht. Die einfachste Profilform der Zykloidenverzahnung ist die

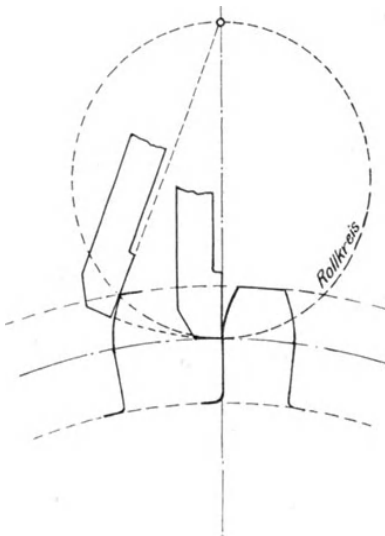


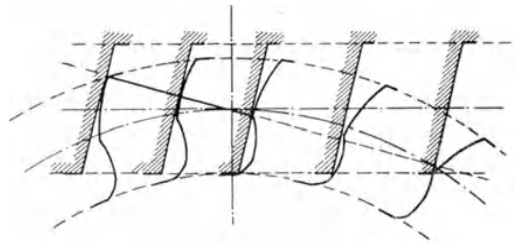
Fig. 66.

gerade radiale Hypozykloide eines Rollkreises, dessen Durchmesser gleich dem Radius des Teilkreises ist. Mit einer dieser Form nachgebildeten geraden Schneide, die den Fußteil des Schneidzahnes bildet, lassen sich aber nur die epizykloidischen Zahnköpfe schneiden (Fig. 66); die Bearbeitung der konkaven Zahnfüße in gleicher Weise ist ausgeschlossen, da die Schneide in den Zahn einschneiden würde. Es bleibt somit nichts anderes übrig, als die Zahnfüße nach radialen geraden Flanken auszuarbeiten, und die Schneidkante für die Bearbeitung der Zahnköpfe in einem Kreise zu drehen, der dem Teilkreise jenes Rades entspricht, mit dem das zu bearbeitende Rad gepaart wird.

Bei der Evolventenverzahnung finden sich gerade Flanken bei der Zahnstange vor. Die ihnen nachgebildete Schneidkante wird in entsprechender Relativbewegung am Werkstücke vorbeigeführt, wobei durch die Schnitte nicht nur das Zahnprofil in Kopf und Fuß vollkommen fertiggestellt, sondern auch bei kleinen Zähnezahlen des Werkstückes die erforderliche Unterschneidung des Fußes ausgearbeitet wird (Fig. 67). Die Bearbeitung der Evolventenzähne auf dieser Grundlage ist bedeutend einfacher als jene der Zykloidenzähne, überdies liefert sie Satzräder bei gleicher Neigung der Schneidkante gegen ihre Verschiebungsrichtung. Dies ist die Ursache, weshalb alle Verfahren dieser Gruppe, die sich in die Praxis eingeführt haben, ausnahmslos Evolventenzähne erzeugen.

Hat das Werkzeug nur eine Schneide, so sind zwei Durchgänge für die Fertigstellung der beiden Zahnflächen an den Zähnen notwendig. Dieser zeitraubende

Werkzeug als Zahnstangenschneide.



Werkstück.

Fig. 67.

Vorgang wird beschleunigt durch die Anwendung eines Schneidzahnes, bei dem außer den Profilen auch die Außenkontur schneidend ausgeführt ist. Fig. 69 zeigt die Spuren der aufeinanderfolgenden Schnitte beim Ausschneiden der Zahnücke aus dem Vollen. Ein kontinuierliches Schneiden ohne Zurückführung des Werkzeuges erzielt man schließlich durch die Ausbildung eines vollständigen Schneidrades, das sich zufolge des Heranziehens zahlreicher Schneiden zur Arbeitsleistung länger arbeitsfähig erhält; die geringere Abnutzung führt auch zu genauerer Arbeit.

Das Schneiden der Zähne erfolgt beim Wälzverfahren sowohl durch Hobeln bzw. Stoßen als auch durch Fräsen. Die Ausführbarkeit der letzteren Bearbeitung kann auch für das Schleifen gehärteter Zähne Verwendung finden; die Schleifscheibe bearbeitet mit ihrer ebenen Stirnfläche die Zahnfläche, während sie in relativ abwälzender Bewegung gegenüber dem Werkstücke verschoben wird.

Von den einzelnen möglichen Durchführungen des Wälzverfahrens haben für die Bearbeitung von Stirnrädern nur drei Verfahren Eingang in die Praxis gefunden, die nachstehend einer eingehenderen Besprechung unterzogen sind.

1. Die Bearbeitung auf der Stirnradstoßmaschine der Fellows Gear Shaper Co., Springfield¹⁾.

Als Werkzeug wird ein 24 zähniges, nach Evolventen geformtes Stoßrad benutzt, das aus dem sorgfältig unterstützten Werkstücke die Zahnücken ausschneidet (Fig. 68). Nach jedem Rückgang des Werkzeugeschlittens erfolgt gleichzeitig eine drehende Schaltbewegung von Stoßrad und Werkstück im entsprechenden Übersetzungsverhältnisse.

Das Stoßrad wird aus einer schwächeren Stahlscheibe auf der Maschine selbst in etwas größerer Zahnstärke geschnitten und nach dem Härten durch Schleifen nach dem früher geschilderten Verfahren auf die genaue Zahnform gebracht. Den Profilschneiden werden durch Hinterschleifen die Ansatzwinkel gegeben. Das Schärfen der abgenützten Schneidkanten wird durch Nachschleifen der Brustfläche vorgenommen; die sich dabei einstellende Profیلänderung ist in ihrer Kleinheit praktisch belanglos.

Dem Verfahren haftet eine Unzukömmlichkeit an, deren Ursache in dem ungünstigen Verhalten der Evolventenverzahnung bei kleinen Zähnezahlen zu suchen ist. Das 24 zähnige Stoßrad erhält radiale Fußansätze, die die äußersten Kopf flankenteile nb (Fig. 69) von Rädern über 48 Zähnen nach Epizykloiden abschneiden, wodurch diese Teile nb eingriffsunfähig gemacht werden. Dieser Umstand bietet aber insofern auch eine günstige Seite, als die zurückgesetzten Kopf kanten b beim Eingriff in Räder geringer Zähnezahl nicht in die Unterschneidungen der Zahnfüße eindringen.

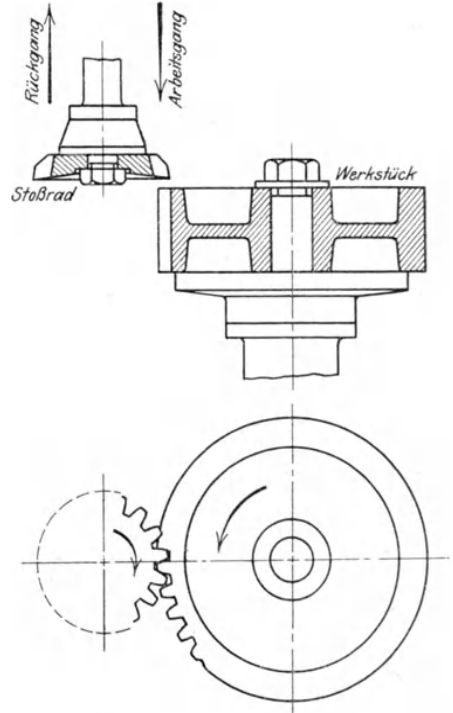


Fig. 68.

¹⁾ Die Beschreibung der Maschine siehe Fischer, „Werkzeugmaschinen auf der Weltausstellung in Paris 1900“. Z. Ver. deutsch. Ing. 1900, S. 1016.

Die Verwendung eines kleinen Stoßrades von 24 Zähnen hat gegenüber der Zahnstange den Vorteil, daß die Unterschneidung der Zähne von Rädern kleiner Zähnezahl wesentlich geringer ausfällt, aber dennoch nach vorigem genügend

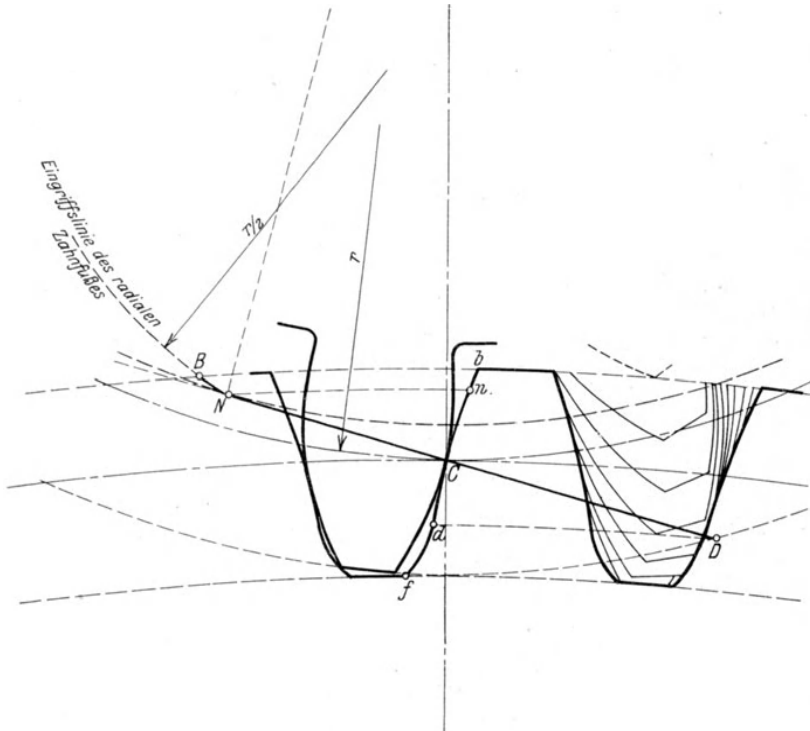


Fig. 69.

groß ist. Nach diesem Verfahren bearbeitete Räder können noch bei einer Minimalzähnesumme von 30 (Eingriffsdauer = 1) gepaart werden, wobei aber das kleine Rad mindestens 12 Zähne besitzen muß.

2. Die Bearbeitung mit Schneckenfräser.

Das Fräsen nach dem Wälzverfahren läßt sich mit einem oder einer Reihe in der Teilung voneinander abstehender Formfräser durchführen, die in einfachster Gestaltung das gerade Profil der Evolventenzahnstange tragen und in geradliniger Richtung unter gleichzeitiger Drehung des Werkstückes verschoben werden. Die erforderliche Rückführung des Fräasers behufs neuen Schnittansatzes macht jedoch den Bewegungsmechanismus umständlich, so daß derartige Ausführungsformen¹⁾ der Bearbeitung trotz der Einfachheit der Fräsergestalt sich in der Praxis nicht eingebürgert haben.

Durch eine umständlichere Gestaltung des Fräasers als Schneckenfräser läßt sich der Bewegungsvorgang in der Arbeitsmaschine bedeutend vereinfachen. Die Fräserachse wird unter dem Steigungswinkel β der mittleren Schraubengänge in die Richtung der zu schneidenden Zahnluken hineinfallen. Zwangsläufig werden dem Fräser und Werkstück gleichförmige Drehungen erteilt; soll das zu schneidende Rad z Zähne erhalten, so kommen auf eine Umdrehung des Werkstückes z Umdrehungen des ein-

¹⁾ U. a. von Swasey, siehe Hartmann, „Werkzeugmaschinen auf der Weltausstellung in Chicago 1893“. Z. Ver. deutsch. Ing. 1894, S. 556.

gängigen Fräasers. Für das Durchschneiden der ganzen Radbreite erhält der Fräser noch eine Vorschubbewegung in der Richtung der Radachse.

In praktisch zureichender Annäherung entspricht das Schneidprofil eines Schneckenfräasers seiner Form und Bewegung nach einem Zahnstangenprofil, das aus dem Normalschnitt der Schnecke hervorgeht, d. i. einem Schnitte senkrecht zur Schraubenlinie des Teilrisses im Radius r_0 . Der Normalschnitt ist zum Mittelschnitte der Schnecke im Steigungswinkel β geneigt. Hat die Eingriffslinie des Schneckenprofils gegen die Zentrale einen Neigungswinkel $(90^\circ - \alpha)$, so liegt die Eingriffslinie der geschnittenen Radzähne demgemäß im größeren Winkel $(90 - \alpha')$, bestimmt durch

$$\operatorname{tg} \alpha' = \operatorname{tg} \alpha \cos \beta.$$

Weiter besteht zwischen Teilung t des geschnittenen Rades und der Ganghöhe h der eingängigen Fräaserschnecke (Fig. 71) folgende Beziehung

$$t = h \cos \beta.$$

Eine Umformung dieser Gleichung durch Einführen von

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{h}{2 r_0 \pi}$$

führt zu

$$2 r_0 \sin \beta = \frac{t}{\pi} = \text{Modul.}$$

Dieser Bedingung müssen die Abmessungen des Schneckenfräasers genügen, wenn er zum Schneiden einer Zahnteilung von $t = m \pi$ dienen soll.

Die Fräserachse ist nach Fig. 70 in der Entfernung $(R + r_0)$ von der Radachse einzustellen. Sind jedoch Zähne auf einem Modulkreise R_1 mit der Profilabrückung x_1 zu schneiden, so beträgt der Achsenabstand zwischen Fräser und Werkrad $= (R_1 + x_1 + r_0)$.

Die Gleichwertigkeit des Fräaserschnittprofils mit einer Zahnstangenflanke trifft in zureichendem Maße nur bei kleinen Steigungswinkeln β zu (siehe Abschnitt VII,5); größere β führen zu merkbareren Ungenauigkeiten. Aus diesem Grunde wird die Frässhnecke immer eingängig gehalten; die Ausführungen zeigen einen Winkel von ungefähr 5° .

Eine volle Übereinstimmung mit dem genauen Profil zeigt die geschnittene Zahnflanke nur im Teilriß, während die weiter abliegenden Flankenteile zurücktreten. Dadurch geht den Zähnen der Evolventencharakter und damit auch die Fähigkeit verloren, bei geändertem Achsenabstand richtig einzugreifen. Dieser Umstand bringt es mit sich, daß mit Profilabrückung geschnittene Zähne im Getriebeeingriff Mängel aufweisen; doch ist der Einfluß dieses Fehlers bei geringen Abrückungen bis etwa $\xi = 0,5$ praktisch nahezu belanglos.

Der Schneckenfräser muß so lang sein, daß auf der Seite des Eindringens in das Rad das äußerste Schneidprofil außerhalb des Radumfangs steht und das äußerste Profil der Gegenseite über das Eingriffsgebiet der Zähne hinausreicht, um volles Ausschneiden der Zahnflanken zu gewährleisten. Unter Beachtung dieser

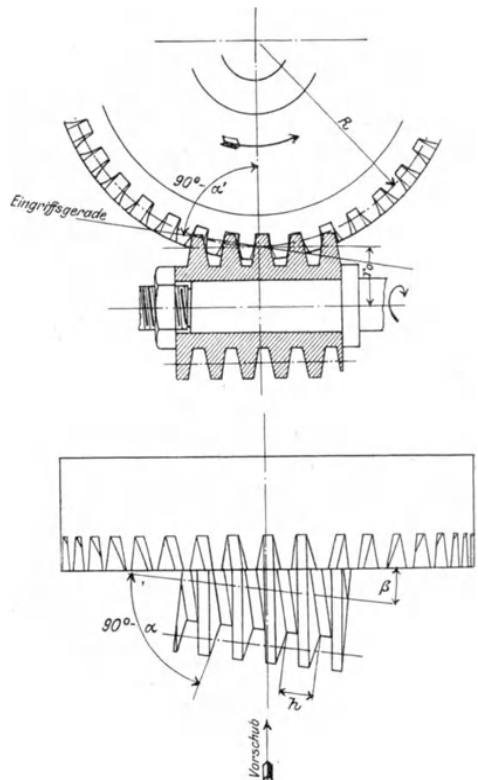


Fig. 70.

Forderung lassen sich Räder bis zu 70 Zähnen mit einem Schneckenfräser von 5 Schraubengängen, bis zu 100 Zähnen mit 6 Gängen schneiden.

Für die Herstellung¹⁾ des Fräasers (Fig. 72) wird zunächst eine Schnecke mit trapezförmigem Drehstahl ausgedreht. Alsdann werden die Spannuten mit einem Winkelfräser nach einer Schraubenlinie ausgearbeitet, die senkrecht zur mittleren

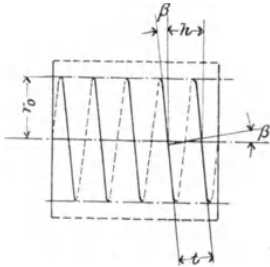


Fig. 71.

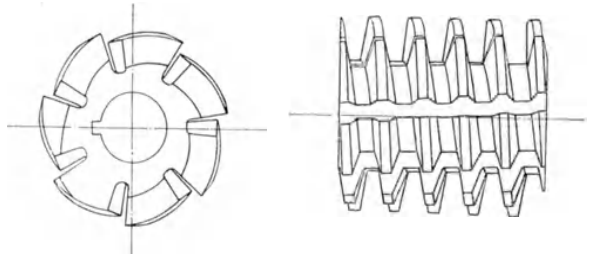


Fig. 72. Schneckenfräser.

Schraubenlinie der Schneckengänge verläuft, um auf beiden Zahnseiten gleiche Schnittwinkel zu erlangen. Damit das Schärfen der Zähne möglichst einfach durchgeführt werden kann, wird die Brustfläche der Zähne als Schraubenfläche mit radialen Erzeugenden, senkrecht zur Achse stehend, ausgebildet. Den Schnitt erhalten die Zähne durch Hinderdrehen; dessen richtige Ausführung muß in der Weise erfolgen, daß eine Profiländerung der Brustfläche beim Nachschleifen nicht eintritt. Zur Fertigstellung des gehärteten Fräasers werden die Brustflächen der Schneidzähne geschliffen. Man besorgt dies mit einer kegelförmigen Schleiffläche, die auch zum Nachschleifen abgenutzter Schneidkanten in Verwendung kommt.

Durch das Nachschleifen gelangen die Schneidprofile auf kleinere Halbmesser; es hat dies eine Vergrößerung des Steigungswinkels β zur Folge. Die Genauigkeit der Bearbeitung leidet dadurch, wie man rechnerisch nachweisen kann, nur in einem ganz geringfügigen Betrage, der vom praktischen Standpunkt aus übersehen werden kann. Durch die Abänderung des Schrägstellungswinkels vom abgenutzten Fräser schafft man keine Abhilfe, weil damit eine Änderung der Normalteilung $t = h \cos \beta$ verknüpft ist.

Der Schneckenfräser ist dem scheibenförmigen Formfräser in mancher Hinsicht weit überlegen. In genauer Ausführung und Anstellung liefert er im ganzen Zähnezahlgebiet genaue Erzeugnisse, während bei Verwendung eines 15 teiligen Formfräsersatzes immer noch Ungenauigkeitsgrade bis 2 v. H. in Kauf genommen werden müssen. Da die Zahnflächen beim Abwälzverfahren aus tangentiellen Schnitten der einzelnen Schneidkanten hervorgehen, ist behufs Erzielung glatter Flächen nur ein kleinerer Vorschub zulässig, als er bei der Bearbeitung der Formfräser genommen werden kann. Dieser Zeitverlust wird aber durch das kontinuierliche Schneiden wettgemacht.

Der Scheibenfräser ist in der Form jedenfalls viel schwieriger genau herzustellen, nachdem die Profilierung des Schneidstahles und sein darauf folgendes Härten und Schleifen eine Reihe von Fehlerquellen in sich einschließt. Andererseits verursacht aber das Härten des größeren Körpers vom Schneckenfräser mehr Schwierigkeiten; es sind größere Härtefehler zu erwarten, so daß die erreichbare Genauigkeit für beide Fräserformen bei gleicher Sorgfalt der Herstellung keinen Unterschied aufweisen wird. Nachdem das Härten eine Verkürzung hervorruft, empfiehlt es sich, diesen Fehler durch Ausdrehen der Schnecke in entsprechend größerer Steigung auszugleichen.

¹⁾ Siehe Barth, „Die Bearbeitung der Stirnräder nach dem Wälzverfahren“. Werkstattstechnik 1908, S. 295.

3. Das Hobeln mit mehrzähliger Zahnstange.

Die Unzulänglichkeit des Schneckenfräasers, die sich insbesondere beim Schneiden mit Profilabrückung fühlbar macht, hat zur Einführung des Wälzhobelverfahrens Veranlassung gegeben. Als Werkzeug werden der Zahnstange nachgebildete Schneidstähle verwendet, die nach absatzweise vorgenommenen Radwälzungen die Zahn-lücken aushobeln. Die Einfachheit des Profils ermöglicht eine mathematisch genaue Herstellung; die Schneidzähne werden nach dem Härten genau zugeschliffen. Da alle Vorbedingungen für eine genaue Evolventenerzeugung auch bei beliebig großen Abrückungen erfüllt sind, ist diese Bearbeitung als die vollkommenste anzusehen. Eine gut durchgebildete Räderhobelmaschine von hoher Leistungsfähigkeit rührt von Maag¹⁾ her.

VI. Die Bearbeitung der Kegelräder.

Die Bearbeitungsverfahren der Stirnräder können zum größten Teile auch zum Ausschneiden der Kegelradzähne angewendet werden mit dem einzigen Unterschied, daß die Schnitttrichtung des Werkzeugs durch die Kegelspitze des Rades hindurchgeht.

Der wegen ihrer Einfachheit häufig durchgeführten Bearbeitung mit profiliertem Scheibenfräser kommt keine größere Genauigkeit zu. Der Vorschub des Fräasers, der nur einseitig eine Zahnfläche schneidet, erfolgt parallel zur Fußkante des Zahnes. Die Fehlerhaftigkeit liegt in dem unveränderlichen Schnittprofil, das von den gleichmäßig sich verjüngenden, genauen Zahnprofilen (Fig. 73) abweicht. Um den Fehler möglichst klein zu halten, formt man den Fräser nach dem größten Zahnprofil und setzt das Werkstück derart an, daß die Zähne am schmälern Ende die richtige Zahnstärke im Teilkreise erhalten. Dabei fallen aber die Zahnköpfe am schmälern Ende zu stark aus, ein Zurückfeilen der Zahnsitzen daselbst ist deshalb empfehlenswert.

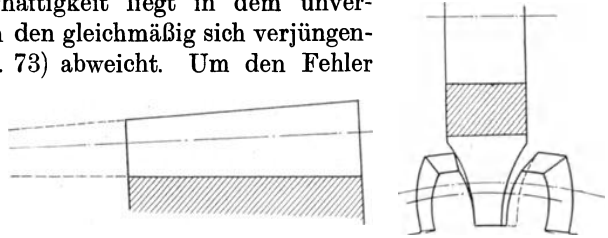


Fig. 73.

Die Ungenauigkeit der Profilfräserei führte zur Bevorzugung der Hobelarbeit mit Spitzstichel. Kegelradhobelmaschinen, bei denen die Stichführung durch Lehren gelenkt wird, bauen u. a. die Zahnradfabrik Augsburg und die Maschinenfabrik Oerlikon; einen besonderen Hobelapparat zum Anbringen an Shapingmaschinen führt die Akt.-Ges. für Schmirgel- und Maschinenfabrikation in Bockenheim²⁾ aus. Der Bau von Maschinen mit einer Stichführung, die der geometrischen Erzeugung der Zahnflächen nachgebildet ist, hat sich nicht eingebürgert.

Die Bearbeitung nach dem Wälzverfahren erfolgt mit einem Schneidwerkzeug, das den nahezu ebenen Evolventenzähnen eines Planrades entspricht. Der Ersatz der gekrümmten Fläche durch eine Ebene beeinträchtigt nicht die Genauigkeit des Eingriffes von derartig geschnittenen Rädern, nachdem die Eingriffsfläche der Zähne einen zu beiden Seiten der Teilrißgeraden gleichen Verlauf zeigt (siehe Abschnitt II C).

Das Wälzverfahren wurde zuerst von Bilgram zur Ausführung gebracht. Ein auf fester Führung hin und her gehender Stahl mit ebener Schneidkante hobelt die Zähne der Reihe nach aus. Haben alle Zähne den gleichen Schnitt

¹⁾ Siehe Schweizerische Bauzeitung 1917, Heft 12.

²⁾ Siehe Hülle, „Werkzeugmaschinen“, Verlag von Julius Springer, Berlin 1920.

erhalten, so findet eine Schaltbewegung des Werkstückes um die Achse AA des Planrades statt (Fig. 74), das dem Arbeitsvorgang zugrunde gelegt ist. Bei der Schaltung wälzt sich eine mit dem Teilrißkegel des Rades übereinstimmende Kegel­fläche auf der ebenen Fläche des Planrades ab, und es kommen die Zähne dadurch in die nächst richtige Schnittlage gegenüber dem Hobelstahl.

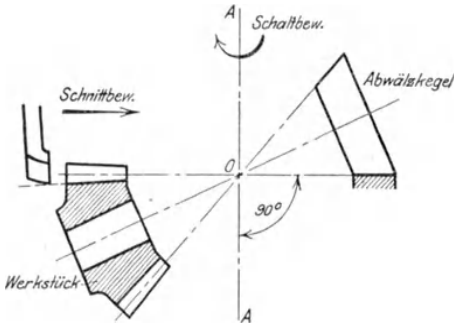


Fig. 74.

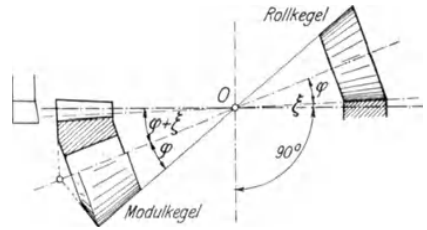


Fig. 75.

Die Bilgrammaschine wird in vervollkommneter Ausführung von J. E. Reinecker in Chemnitz gebaut. Auf gleicher Grundlage arbeitet die Kegelradhobelmaschine der Werkstätte vorm. Ducommun in Mülhausen i. E.; das Abrollen des Werkstückes wird hier in angenäherter Weise durch Lenker besorgt¹⁾. Eine raschere Bearbeitung ist durch die Anordnung zweier Stähle vorgesehen, die gleichzeitig beide Flächen eines Zahnes hobeln.

Bei der Maschine von Gleason²⁾ hobeln zwei Schneidstähle gleichzeitig die beiden Flanken eines Zahnes bis zur Fertigstellung; nach erfolgter Drehung des Werkrades um eine Zahnteilung wird alsdann die Bearbeitung des folgenden Zahnes aufgenommen. Das Werkstück und die das Planrad ersetzenden Schneidstähle sind durch einen Zahnstangeneingriff vom gleichen Übersetzungsverhältnis gekuppelt, so daß bei einer eingeleiteten Bewegung Werkstück und Schneidstähle Drehungen ausführen, die einem Abwälzen gleichkommen.

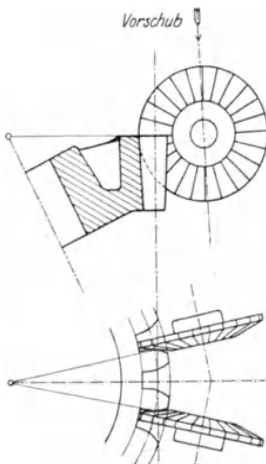


Fig. 76. Fräseranordnung der Warrenmaschine.

Sind auf den genannten Maschinen Zähne mit Profilabrückung zu schneiden, so ist die Drehachse des Rades im Winkel $(\varphi + \xi)$ gegen die Planfläche der Maschine anzustellen (Fig. 75) und ein Rollkegel in der Winkelgröße φ des Modulkegels anzuwenden. Die Wälzfläche des Rollkegels ist im Winkel ξ der Profilabrückung aus der Planfläche zu verschieben.

Die Maschinen sind mit einem Satz von Wälzmechanismen ausgerüstet, die abgestuften Winkelgrößen der Rollkegel entsprechen. Beim Schneiden eines Rades, dessen Teilriß- bzw. Modulkegelwinkel einen Zwischenwert aufweist, wird der nächst kleinere Rollkegel eingebaut. Die Drehachse des Werkrades wird im richtigen Winkel an­gestellt und die Wälzfläche aus der richtigen Lage so weit herausgerückt, daß sie an der Mantelfläche des kleineren Rollkegels anliegt. Fig. 75 stellt eine solche Anordnung dar für den Fall, daß einem Werkrade vom Teilrißwinkel $(\varphi + \xi)$

¹⁾ Siehe Hermann Fischer, „Die Kegelradhobelmaschine der Werkstätte für Maschinenbau vorm. Ducommun in Mülhausen i. E.“ Z. Ver. deutsch. Ing. 1906, S. 400.

²⁾ Eine eingehende Beschreibung und Würdigung der Bearbeitungsmaschinen für Kegelräder gibt Barth, „Grundlagen der Zahnradbearbeitung“, Verlag von Julius Springer, Berlin 1911.

ein kleinerer Rollkegel φ zugeordnet ist und daß die Zähne ohne Profilabrückung geschnitten werden. Die gleiche Figur gilt aber für das richtige Ausschneiden profilabgerückter Zähne am kleineren Modulkegel φ . Daraus ergibt sich der Umstand der Fehlerhaftigkeit in der Bearbeitung, sobald kleinere Rollkegel benützt

Fig. 77. Fräsanordnung.

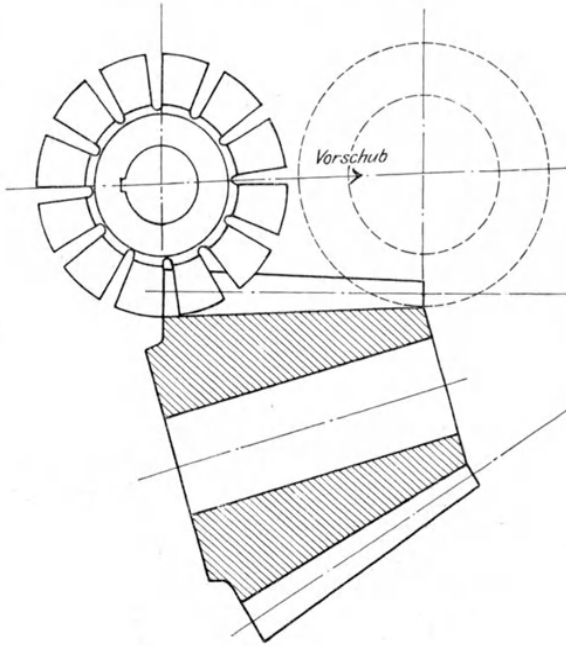


Fig. 80. Fräser.

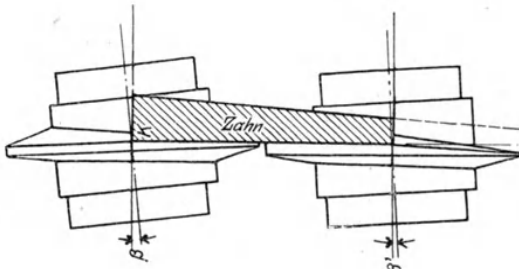
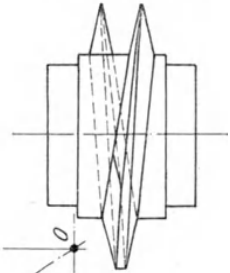


Fig. 78.

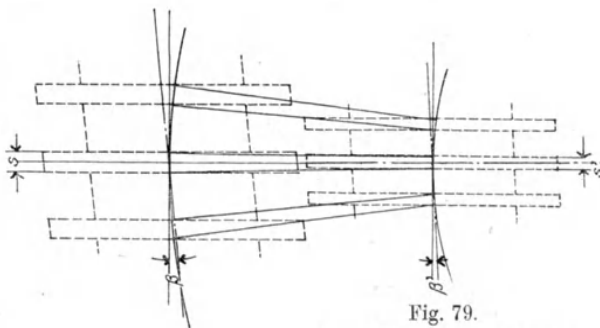


Fig. 79.

Ersatz des Planradzahnes durch Schnecken.

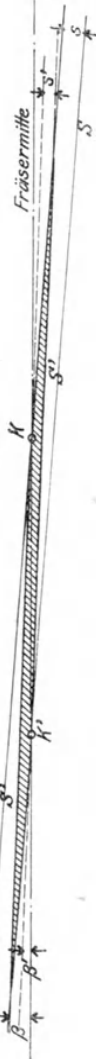


Fig. 81. Abwicklung der Fräterschraubenwindung am äußeren Durchmesser.

werden. Die ausgeschnittene Zahngestalt entspricht eigentlich einer kleineren Radgröße; die Zahnflanke tritt gegen den genauen Verlauf etwas zurück. Es ist dies der gleiche Fehler, der sich beim Schneiden eines Stirnradzahnes mit einem Formfräser von kleinerer Zähnezahzahl zeigt.

Anstatt der Hobelstähle werden neustens auch Scheibenfräser mit geraden Schneidkanten verwendet. Eine Maschine dieser Art wird von Ludwig Loewe, Berlin, nach System Warren gebaut. Zwei Fräser bearbeiten gleichzeitig die Außenflächen zweier Nachbarzähne (Fig. 76); sie werden mit langsamer Vorschubbewegung entlang der Fußkante durch die ganze Radbreite geführt. Senkrecht zu dieser Bewegung wird ihnen eine hin und her schwingende Wälzbewegung erteilt, so daß nach erfolgtem Durchgange des Fräasers die zwei Zahnflächen fertiggestellt sind. Durch eine besondere Einstellung der Wälzanordnung wird es möglich, für jeden beliebigen Kegelwinkel eine genaue Wälzbewegung zu erzielen. Fehler, herrührend aus falscher Abwälzung, lassen sich daher bei dieser Maschine vermeiden.

Vor dem eigentlichen Zahnschnitt muß bei allen angeführten Maschinen eine grobe Ausarbeitung der Zahnücken vorgenommen werden; zweckmäßig werden zu dieser Vorarbeit Universalfräsmaschinen herangezogen.

Eine besondere Ausführung des Schneckenfräasers zum Ausschneiden von Kegelaradzähnen rührt von M. Chambon¹⁾ in Lyon her (Fig. 77, 78). Ersetzt man den Planradzahn angenähert durch eine Schnecke (Fig. 79), so fallen bei unveränderlicher Schneckengröße die Steigungswinkel β in den einzelnen Zahnstellen ungleich groß aus, da die Zahnstärke gegen die Kegelspitze O abnimmt. Die Gestalt der Fräderschnecke (Fig. 80) wird nun begrenzt durch die Schraubenfläche der äußersten und innersten Ersatzschnecke. Fig. 81 zeigt die Abwicklung des äußeren Umfanges vom Fräserzahne; seine Umgrenzung geben einerseits die Schraubenlinien S der äußeren Schnecke mit dem Steigungswinkel β und der Zahnstärke s , andererseits die Schraubenlinie S' der inneren Schnecke mit den entsprechenden Größen β' und s' . Eine derartige Form der Frässchnecke weist nur zwei Kanten K und K' auf, die längs der ganzen Zahnbreite mit den Zahnkanten des Planrades übereinstimmen. Es wird deshalb beim Fräsen jede Zahnfläche nur von einer dieser Kanten in richtiger Form fertiggestellt, während die übrigen Schneidkanten bloß vorschruppen.

Umständliche Bewegungen werden bei diesem Fräsverfahren in der Maschine notwendig. Jeder Fräserumdrehung muß eine Verdrehung des zu bearbeitenden Rades um eine Teilung entsprechen. Der Fräservorschub längs der Zahnbreite erfordert eine gleichzeitige Änderung des Anstellungswinkels β . Da nur eine Schneidkante K vorhanden ist, die in einer einzigen Stellung den zu bearbeitenden Zahn richtig trifft, muß schließlich noch eine Abwälzbewegung eingeleitet werden durch Ausschwingen des Fräasers um O nach beiden Seiten seiner Mittelstellung, so daß das Zahnprofil durch mehrere Schnitte in verschiedenen Stellungen der richtigen Schneidkante zur Gänze fertiggestellt wird.

VII. Die Unregelmäßigkeiten des Ganges fehlerhafter Zahntriebe.

Die Zahnräder sind hinsichtlich der Ruhe des Ganges sehr empfindlich. Ganz geringe Fehler in der Aufstellung und in der Ausführung der Räder zeitigen bereits unerwartet große Unregelmäßigkeiten des Ganges. Die folgenden Ausführungen

¹⁾ Siehe Eude, „A French Machine for Cutting Bevel Gears“, American Machinist, September 1907, S. 319.

enthalten eine Untersuchung über die Natur und den Verlauf der störenden Erscheinungen, wobei eine Handhabe zur Feststellung der Fehlergrößen in Zahlenwerten geboten wird. Damit ist aber auch eine feste Grundlage gegeben für eine vergleichende Untersuchung und Beurteilung der einzelnen Methoden der Zahnflächenbearbeitung.

Eine der störendsten Erscheinungen ist die Verlängerung der Einwirkung der Zähne aufeinander über die eigentliche Eingriffslinie K_2K_1 (Fig. 82) hinaus, welcher verlängerte Eingriff kurz als „Kanteneingriff“ im Gegensatz zum normalen „Flächeneingriff“ im eigentlichen Eingriffsgebiete bezeichnet werden soll. Es erfaßt hierbei der treibende Zahnfuß die Zahnkopfkante des zweiten Rades schon vor Beginn des eigentlichen Eingriffes, während darüber hinaus noch die Auflage der treibenden Kopfkante auf der Zahnfläche des getriebenen Rades den Eingriff verlängert. Die vollständige Eingriffslinie der Zahnflanken ist in diesem Falle der Linienzug $k_2K_2K_1k_1$, in dem sich die Bogenstücke k_2K_2 und k_1K_1 , die während der Kanteneingriffe durchlaufen werden, an die eigentliche Eingriffslinie angliedern.

Beim Kanteneingriff hat man es nicht mehr mit einer abgleitenden Flächenberührung zu tun, sondern mit einer schabenden Bewegung der Kopfkantenschneiden auf den anliegenden Zahnflächen. Diese unerwünschte Art der Einwirkung verursacht nicht nur größere, lokal beschränkte Abnutzungen, sondern auch erhebliche Schwankungen

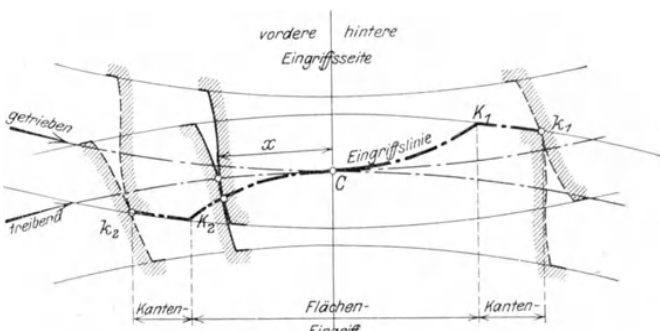


Fig. 82.

des Übersetzungsverhältnisses. Es ist eine der notwendigsten Bedingungen für die Ruhe des Ganges, die Möglichkeit eines solchen Eingriffes auszuschließen.

Der Kanteneingriff stellt sich als notwendige Erscheinung überall dort ein, wo etwaige Unregelmäßigkeiten im eigentlichen Flächeneingriff der Zähne zu einem Zurückbleiben oder Vorgehen des getriebenen Rades Veranlassung geben; ihm fällt die Rolle einer ausgleichenden Betätigung zu. Beim Zurückbleiben des Rades bewerkstelligt der vordere Kanteneingriff die erforderliche Vordrehung, im entgegengesetzten Falle besorgt der hintere Kanteneingriff die entsprechende Verzögerung; mitunter stellen sich jedoch auch diese Eingriffe vorn und hinten gleichzeitig ein.

Das Übersetzungsverhältnis i zweier Räder mit den Teilkreisradien R_1, R_2 und den Zähnezahlen z_1, z_2

$$i = \frac{R_1}{R_2} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

wird bei fehlerhafter Anordnung und Ausführung in den einzelnen Eingriffslagen nicht eingehalten, es erfährt ständige Änderungen Δi . Eine gleichförmige Winkelgeschwindigkeit ω_1 des treibenden Rades wird in eine ungleichförmige $\omega_2 + \Delta \omega_2$ umgesetzt. Als Bestimmungsgröße dieses Verhaltens eignet sich vorteilhaft das Verhältnis der Änderung zum Mittelwerte, das im weiteren der „Übersetzungsfehler“ genannt wird.

$$\varepsilon = \frac{\Delta i}{i} = \frac{\Delta \omega_2}{\omega_2} \dots \dots \dots (51)$$

In Fig. 83 ist eine fehlerhafte Eingriffslage dargestellt. Die Profilmnormale im Eingriffspunkt P geht nicht mehr durch den Berührungspunkt der Teilkreise, den

Zentralpunkt C . Ihre kürzesten Entfernungen R_1', R_2' von den Radmittelpunkten O_1, O_2 bestimmen das Übersetzungsverhältnis

$$i + \Delta i = \frac{R_1'}{R_2'}$$

welcher Ausdruck die Gl. 51 umformt in

$$\epsilon = \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{R_1'}{R_2'} - 1 \dots \dots \dots (52)$$

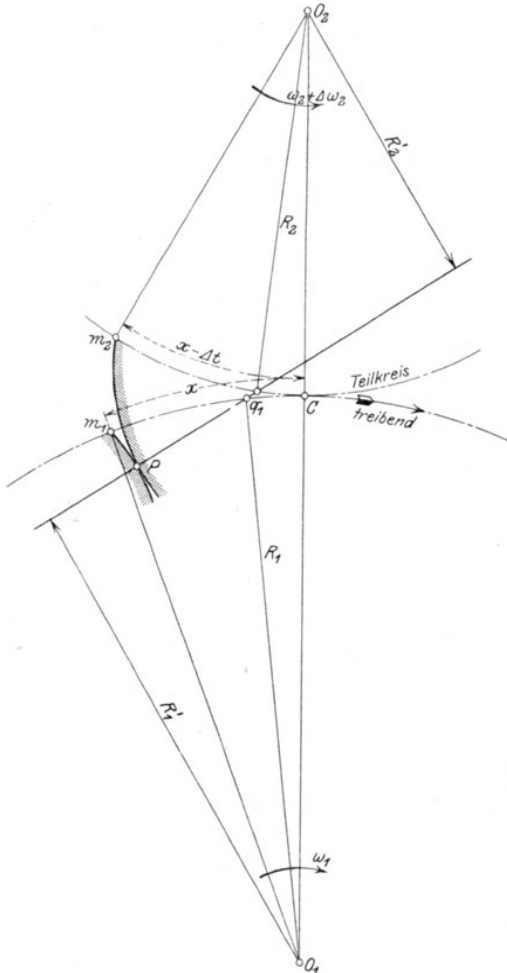


Fig. 83.

Der Übersetzungsfehler läßt sich darnach durch Feststellung der Eingriffslage, Ziehen der Normalen im Berührungspunkt und Abmessen der Radien R_1', R_2' auf zeichnerischem Wege bestimmen, ein Vorgang, der aber bei der Kleinheit der Fehler große Maßstäbe und peinliche Genauigkeit erfordert. Liegt eine Gesetzmäßigkeit der Fehlerquelle vor, so ist eine rechnerische Ermittlung vorzuziehen.

Fig. 84 zeigt die Evolventenverzahnung einer Räderpaarung $z_1 = 16$, $z_2 = 26$, bei der die Zähne des treibenden Rades z_1 , mit einem für 17 Zähne richtig profilierten Formfräser ausgeschnitten sind. Obzwar eine derartige Verwendung des Fräasers in der Praxis nicht üblich ist, wurde dennoch die sich daraus ergebende fehlerhafte Zahnflanke zum Gegenstande der allgemeinen Untersuchung gewählt, um bedeutendere Unregelmäßigkeiten zur Darstellung zu bringen. Die Übersetzungsfehler dieser Anordnung wurden nach Gl. 52 rechnerisch ermittelt und in Fig. 85 als Linienzug eingetragen. Der Verlauf während des eigentlichen Flächeneingriffs liegt innerhalb $K_2 K_1$, die stark abfallenden Äste an den Enden drücken die Fehler der Kanteneingriffe aus. In $K_2 L$ findet ein vorzeitiger Eingriff des radialen Fußansatzes statt.

Bei wechselnden Übersetzungsverhältnissen erleidet das getriebene Rad Verdrehungen gegenüber einem Laufe mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit ω_2 . Befindet sich das treibende Profil in einem Teilkreisbogen x von der Rädermitte (Fig. 83), so steht gleichzeitig die getriebene Flanke in einer Entfernung $(x - \Delta t)$, wobei positive Werte die lineare Vordrehung, negative Werte das lineare Zurückbleiben gegenüber der Eingriffslage in der Mitte C bedeuten. Während einer Elementardrehung des treibenden Rades um $(-dx)$ wird das getriebene Rad im eigenen Teilkreis um den Betrag $d(\Delta t)$ weiter vorgedreht, als es dem mittleren Übersetzungsverhältnisse entsprechen würde. Das Verhältnis der Geschwindigkeiten zu den zurückgelegten Wegen

$$\frac{d(\Delta t)}{-dx} = \frac{\Delta\omega_2}{\omega_2} = \epsilon$$

Fig. 84.
Eingriffsbild.

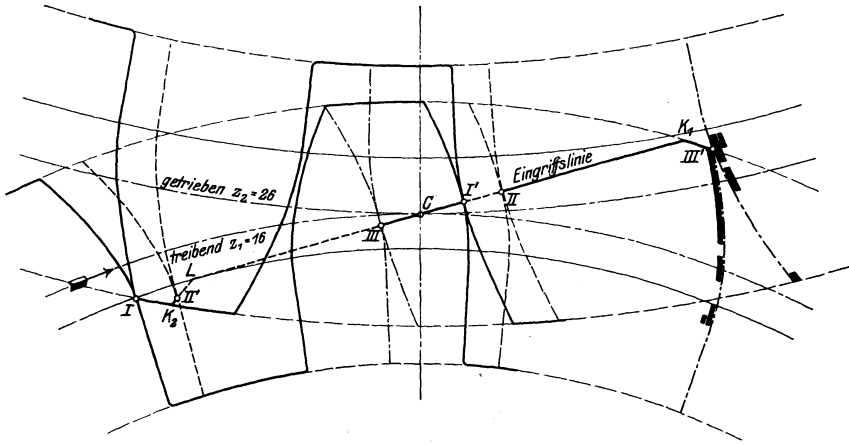


Fig. 87.
Geschwindigkeitsdiagramm
des getriebenen Rades.

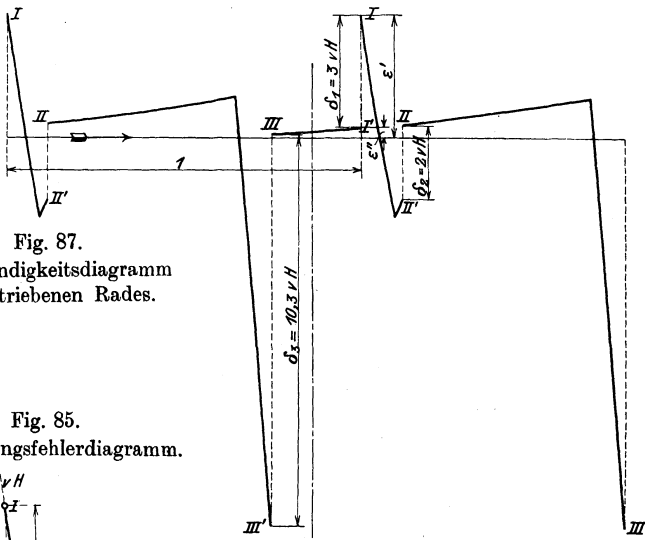


Fig. 85.
Übersetzungsfehlerdiagramm.

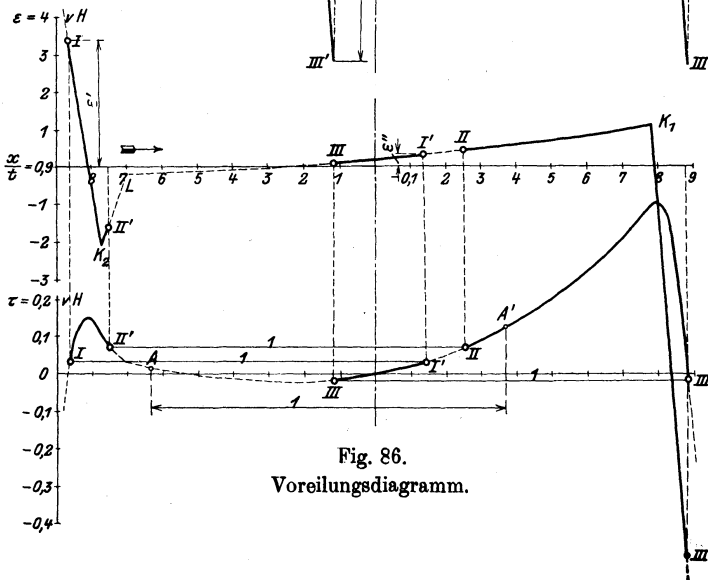
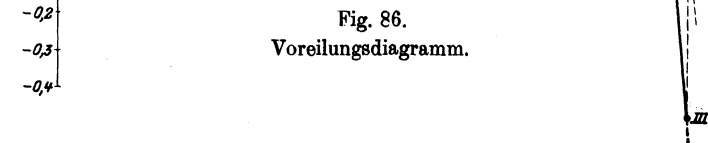


Fig. 86.
Voreilungsdiagramm.



ermöglicht durch Integration die Bestimmung der linearen Vordrehung gegenüber der Mittellage

$$\Delta t = - \int_0^x d(\Delta t) = - \int_0^x \varepsilon dx \dots \dots \dots (53)$$

Als Vergleichswert wird im weiteren das Verhältnis dieser Größe zur Teilung t verwendet und als „Voreilung“ τ bezeichnet.

$$\tau = \frac{\Delta t}{t} = - \int_0^x \varepsilon d\left(\frac{x}{t}\right) \dots \dots \dots (54)$$

Die Gleichung läßt erkennen, daß die durch sie dargestellte Voreilungskurve die Integralkurve der Übersetzungsfehlerlinie ist. Ihre Aufzeichnung erfolgt einfach durch Unterteilung der zwischen Abszissenachse und Übersetzungsfehlerlinie liegenden Fläche in Streifen von $\frac{x}{t} = 0,1$ Länge, Umwandlung der Streifen in flächengleiche Rechtecke von gleicher Länge und Übertragen der Rechteckshöhe als Ordinatenzuwachs der Voreilungskurve, deren Ordinate in der Mitte C null ist.

Hinreichend genau arbeitet man in Maßstäben

$$\text{für } \frac{x}{t} \text{ von } 10 \text{ mm} = 0,1$$

$$\text{für } \varepsilon \text{ von } 10 \text{ mm} = 0,01.$$

dann erhält man bei genanntem Verfahren einen Maßstab

$$\text{für } \tau \text{ von } 10 \text{ mm} = 0,01 \cdot 0,1 = 0,001.$$

Die Voreilungskurve, für den vorliegenden Fall in Fig. 86 eingezeichnet, gibt nun eingehende Aufschlüsse über den Eingriffsverlauf fehlerhafter Zähne. Im Eingriffsfelde, inbegriffen der beiden Zonen des Kanteneingriffs, stehen bei irgendeiner Stellung des Rades gewöhnlich mehrere treibende Flanken im Abstand der Teilung voneinander. Die Voreilungen des getriebenen Rades, die diesen gleichzeitigen Profilstellungen entsprechen, sind im allgemeinen aber ungleich groß, weshalb nur ein einziges Profil, und zwar jenes, das die größte Voreilung erlangt hat, sich im wirklichen Eingriffe befinden kann, während die übrigen Profile im Spielraum der Voreilungsdifferenzen von den treibenden Flanken abstehen. A und A' seien in Fig. 86 die gleichzeitigen Stellungen zweier benachbarter Profile; entsprechend den Verhältniswerten $\frac{x}{t}$ der Abszissen ist ihre Entfernung gleich der Einheit (bei Gebrauch des früher empfohlenen Maßstabes = 100 mm). Die Stellung in A' weist die größere Voreilung auf, demzufolge dort der Eingriff stattfindet, während in A die Profile außer Berührung sind.

Erstreckt man eine derartige Untersuchung auf das ganze Eingriffsgebiet, so kommt man zu dem Ergebnis, daß nur in gewissen Teilen desselben, die in den Fig. 85 und 86 durch vollen Linienzug der Kurven angedeutet sind, ein Eingriff tatsächlich erfolgt. Je zwei Abgrenzungen dieser Teile liegen in der Einheit entsprechend der Teilungslänge voneinander ab, und es sind die zugehörigen Voreilungen gleich groß. In diesen Stellungen stehen daher zwei Flankenpaare gleichzeitig im Eingriff, welcher Zustand aber nur momentan andauert. Es sind dies die Übergangslagen, in denen der Eingriff von einem Zahn auf den anderen überspringt. Im vorliegenden Fall gibt es drei Lagen $I I'$, $II II'$, $III III'$, in denen die Einheitslänge der Voreilungskurve in gleicher Höhe schneidet. Der Eingriff eines Zahnes, der in I beginnt, wird in II' unterbrochen, weil der weitere Eingriff vom vorhergehenden Zahn übernommen wird. Erst wenn dieser ausläßt, nimmt der Zahn in III den Eingriff neuerdings auf, gibt ihn aber in I' bis II an

den folgenden Zahn ab und beendet ihn schließlich nach dieser zweiten Unterbrechung im letzten Eingriffsteil *II III'*.

Die Voreilungskurve bietet somit die Möglichkeit, durch bloßes Einschneiden mit der Einheitslänge die Begrenzungen des Eingriffes herauszufinden. Mit Hilfe der erhaltenen Abszissen $\frac{x}{t}$ kann man ohne weitere Schwierigkeiten die Lagen der Zahnprofile beim Eingriffwechsel in das Verzahnungsbild einzeichnen und damit jenen Teil der Eingriffslinie feststellen (in Fig. 84 durch volle Linienstärke hervorgehoben), in dem tatsächlich eine Einwirkung der Zähne aufeinander erfolgt. Im übrigen Teil besteht eine solche nicht mehr, eine Folge des Umstandes, daß mehrere Zähne gleichzeitig im Eingriffsgebiete stehen, von denen jedoch nur einer wegen der fehlerhaften Anordnung den Eingriff aufnehmen kann. Aus der abgegrenzten Eingriffslinie ergeben sich die in wirkliche Berührung kommenden Teile der beiden Zahnflanken; sie sind in Fig. 84 durch an die Profile gelegte Streifen gekennzeichnet, verdoppelt für jene Teile der Zahnwurzeln, die vermöge des Kanteneingriffes zweimal zur Einwirkung gelangen.

Um die Geschwindigkeitsschwankungen des getriebenen Rades, die bereits die Ordinaten der Übersetzungsfehlerlinie in Verhältniswerten $\frac{\Delta \omega_2}{\omega_2}$ darstellen, besser zu veranschaulichen, wurden deren Eingriffsteile *II II'*, *II III'* und *III I'* in zeitlich richtiger Folge in einem eigenen Geschwindigkeitsdiagramm (Fig. 87) aneinandergereiht. Der periodische Wechsel der Ungleichförmigkeiten wiederholt sich natürlich beim Durchlaufen einer Teilung. Innerhalb dieser findet im vorliegenden Falle ein dreimaliges Überspringen des Eingriffes zwischen den benachbarten Zähnen statt.

Von besonderer Wichtigkeit ist es nun, daß sich bei jedem Eingriffwechsel eine plötzliche Erhöhung der Geschwindigkeit des getriebenen Rades einstellt, nachdem, wie es aus Fig. 87 ersichtlich ist, der Übersetzungsfehler ε'' des außer Eingriff kommenden Flankenpaares immer kleiner ist als der Fehler ε' , mit dem ein anderes Paar den Eingriff weiterführt. Der Verhältniswert δ des momentanen Geschwindigkeitszuwachses ($\omega_2' - \omega_2''$) beim Eingriffwechsel zur mittleren Geschwindigkeit ω_2 ist durch die Differenz der Übersetzungsfehler bestimmt.

$$\delta = \frac{\omega_2' - \omega_2''}{\omega_2} = \varepsilon' - \varepsilon'' \dots \dots \dots (55)$$

Durch diese Größe ist die Unruhe des Ganges in einem Zahlenwert ausgedrückt. Die plötzliche Geschwindigkeitserhöhung beim Überspringen des Eingriffes kann sich nämlich nur unter einer Stoßwirkung vollziehen, welche Erscheinung eben zur Unruhe des Ganges Veranlassung gibt. Die Heftigkeit des Stoßes hängt von dieser Verhältnisgröße ab; es ist δ der charakteristische Wert für die Fehlerhaftigkeit der Anordnung, deren Beurteilung nun auf die sichere Grundlage bestimmbarer Zahlenwerte gerückt ist, ein Umstand, der für vergleichende Abschätzungen besonders wertvoll ist.

Die der Untersuchung zugrunde gelegte Verzahnung zeigt in Fig. 87 bei ihrem dreimaligen Eingriffwechsel während des Durchlaufens einer Teilung Werte von $\delta_1 = 0,030$, $\delta_2 = 0,020$, $\delta_3 = 0,105$,

die erhebliche Unregelmäßigkeiten zur Folge haben müssen, da die größte momentane Geschwindigkeitserhöhung des getriebenen Rades 10,5 v. H. der mittleren Geschwindigkeit beträgt.

Die Linie der Übersetzungsfehler legt somit im Verein mit ihrer Integralkurve den Eingriffsvorgang vollständig klar und gibt über alle Erscheinungen, die

die Ruhe des Ganges beeinträchtigen, Aufschluß. Bei Fehlerhaftigkeit steht immer nur ein Flankenpaar im Eingriff. Der Eingriffsbereich erstreckt sich nur auf einen Eingriffsbogen gleich der Teilungslänge, der nicht ununterbrochen durchlaufen zu werden braucht, nachdem der Eingriff auch zwischen benachbarten Zähnen hin und her springen kann. Der Übergang des Eingriffes von Zahn zu Zahn ist mit einer plötzlichen Geschwindigkeitserhöhung verknüpft. Die dabei sich einstellende Stoßwirkung wird zwar durch die elastische Nachgiebigkeit der Zähne etwas abgeschwächt, doch ist sie die folgenschwerste Erscheinung aller Gangunregelmäßigkeiten.

Die plötzlichen Geschwindigkeitserhöhungen beim Eingriffswechsel sind gar nicht so gering als man es erwarten sollte, denn schon bei kleinen, kaum meßbaren Abweichungen von der richtigen Profilierung ergeben sich erheblichere Änderungen des Übersetzungsverhältnisses. Auf letztere Tatsache hat bereits Hartmann durch einen Aufsatz¹⁾ aufmerksam gemacht, in dem er den Genauigkeitsgrad des Ersatzes der Evolventenflanken durch Kreisbögen feststellt.

Besonders große Stoßwerte sind mit dem Kanteneingriff verbunden. Wenn daher aus irgendeinem Grunde eine falsche Ausführung mit in den Kauf genommen werden muß, so ist das Bestreben geltend zu machen, den Kanteneingriff zu vermeiden. Erreicht wird dies durch ein Zurücksetzen der Kopfflanke gegen die theoretisch richtige Form; es beschränkt sich dann zumeist der Eingriff auf die Zone der Flächenberührung. Vorstehende Kopfflanken geraten stets in den Kanteneingriff hinein. Dieses Verhalten ist in der Praxis längst erkannt worden, man sucht den Gang lärmender Räder durch Zurückfeilen der Zahnköpfe zu beruhigen; dieses Mittel hilft jedoch aus anderen Gründen nicht immer ab.

In der Folge sind nun für einzelne nahe liegende Fälle fehlerhafter Ausführungen die Rechnungsergebnisse²⁾ angeführt, aus denen unter Einführung der bezüglichen Größen die plötzliche Geschwindigkeitsänderung δ ausgerechnet werden kann. Es bezeichnen z die Zähnezahl, h die Höhe des Zahnkopfes, t die Teilung, $\alpha = 15^\circ$ den Eingriffswinkel bei der Evolventenverzahnung, $\rho = m \frac{t}{\pi}$ den Radius des innerhalb des Teilkreises liegenden Rollkreises bei der Zykloidenverzahnung. Die Buchstabenbezeichnungen tragen den Index 1 für das treibende und 2 für das getriebene Rad.

1. Fehler der Evolventenflanken mit radialem Fußansatz bei kleinen Zähnezahlen.

Der radiale Fußansatz tritt in vorzeitige Berührung mit dem überflüssigen Kopfteile, der zum richtigen Eingriff unfähig ist. Diese fehlerhafte Berührung fängt mit Kanteneingriff an und geht dann in Flächeneingriff über.

Die Größe der plötzlichen Geschwindigkeitserhöhung ist

$$\delta = \frac{\left(2 + \frac{h_2 2\pi}{t z_2}\right) \frac{h_2 2\pi}{t z_2} - \left(2 + \frac{z_1}{z_2}\right) \frac{z_1}{z_2} \sin^2 \alpha}{\left(2 + \frac{z_1}{z_2} \sin^2 \alpha\right) \frac{z_1}{z_2} - \left(2 + \frac{h_2 2\pi}{t z_2}\right) \frac{h_2 2\pi}{t z_2}}$$

Für eine Räderpaarung z. B. von $z_1 = 16$, $z_2 = 30$ berechnet sich δ in einem Betrage von 4 v. H. der mittleren Geschwindigkeit.

¹⁾ „Genauigkeitsgrad und Geschwindigkeitsverhältnis bei Verzahnungen“, Z. Ver. deutsch. Ing. 1905, S. 163.

²⁾ Nähere Angaben finden sich vor in dem Aufsatz des Verfassers „Die Unregelmäßigkeiten des Ganges fehlerhafter Zahntriebe“. Verlag Calve, Prag.

2. Teilungsfehler.

Ungleich große Teilungsfehler zweier zusammenarbeitender Flankenpaare werden durch verspätete oder verfrühte Eingriffe, die die notwendige Verdrehung des getriebenen Rades herbeiführen, überwunden. Ist der Teilungsabstand des treibenden Flankenpaares um den Betrag Δt größer als jener des getriebenen, so verlängern die vorangehenden Flanken den Eingriff so lange, bis das getriebene Rad um die Teilungsdifferenz zurückgeblieben ist, worauf das folgende Paar erst den Eingriff übernimmt. Bei kleinerer Teilung des treibenden Rades greift das zurückstehende Paar vorzeitig ein, um die erforderliche Verdrehung einzuleiten.

Bei sonst richtiger Ausgestaltung der Räder besorgen somit die an das fehlerfreie Eingriffsgebiet sich unmittelbar anreihenden Kanteneingriffe die Ausgleichung der Teilungsunterschiede. Bei Zykloidenverzahnung beträgt die hierbei hervorgerufene plötzliche Geschwindigkeitsänderung im vorderen Kanteneingriff

$$\delta_v = \sqrt{\frac{\Delta t \pi \left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right)}{t \frac{z_1}{2} - m_1} \sqrt{\left(\frac{2}{z_2} + \frac{1}{m_1}\right) \left(2 + \frac{h_2}{t} \frac{2\pi}{z_2}\right) \frac{h_2}{t} \pi.}$$

Die Geschwindigkeitserhöhung δ_h , die ein rückwärtiger Kanteneingriff zur Folge hat, berechnet man aus dem gleichen Ausdruck durch Vertauschen der Zähnezahlen und gleichzeitiges Einführen von m_3 und h_1 anstatt m_1 und h_3 .

Als Beispiel seien hier die Rechnungswerte einer Räderpaarung $z_1 = 36$, $z_2 = 72$ angeführt, deren Zähne die übliche Satzräderbemessung aufweisen ($h_1 = h_2 = 0,3 t$, $\rho_1 = \rho_2 = \frac{11 t}{4 \pi}$). Es ergibt sich

$$\delta_v = 0,52 \sqrt{\frac{\Delta t}{t}}, \quad \delta_h = 0,51 \sqrt{\frac{\Delta t}{t}}.$$

Eine kaum meßbare Teilungsverschiedenheit in der Verhältnisgröße $\frac{\Delta t}{t} = 0,0009$ führt bereits zu $\delta_v = 0,023$, d. h. der Eingriffswechsel vollzieht sich unter einer momentanen Geschwindigkeitserhöhung von 2,3 v. H. der mittleren Umfangsgeschwindigkeit.

Das angeführte Beispiel zeigt die große Empfindlichkeit der Räder hinsichtlich der Richtigkeit ihrer Teilungen. Ein äußerst genau arbeitender Teilmechanismus ist deshalb die notwendige Vorbedingung für die Bearbeitung ruhig laufender Räder. Profilfehler üben vielfach lange keinen so nachteiligen Einfluß auf die Ruhe des Ganges aus als Teilungsungenauigkeiten.

Zykloidenzähne sind gegen Teilungsfehler weniger empfindlich als Evolventenzähne, welches ungleiche Verhalten bei kleineren Zähnezahlen ausgeprägter zum Vorschein kommt.

Bemerkenswert ist die erheblich verringerte Einflußnahme der Teilungsfehler auf bereits fehlerhafte Ausführungen, die frei vom Kanteneingriff sind, wie es die gegen die theoretisch richtige Form etwas zurückstehenden Profilierungen sind. Die Ursache liegt in der Möglichkeit des Ausgleiches in der Flächeneingriffszone selbst. Bei der längeren Dauer des Flächeneingriffs gegenüber jener des Kanteneingriffs vermögen eben kleinere Übersetzungsfehler schon die genügende Verdrehung herbeizuführen. Herrscht aber bei einer unrichtigen Ausführung an und für sich schon Kanteneingriff vor, so bewirken Teilungsverschiedenheiten natürlich weitergehende Verschlimmerungen.

Die geläufige Anschauung, daß eine längere Eingriffsdauer für die Ruhe des Ganges vorteilhaft ist, trifft nicht allgemein zu; ausschlaggebend ist die Art der

Flankenungenauigkeit. Bei Zähnen, deren Flanken über die richtige Form vorstehen, steigert eine längere Eingriffsdauer die Unruhe des Ganges, weil die hierdurch vermehrten Unregelmäßigkeiten des Flächeneingriffsgebietes sich nur durch verlängerte Kanteneingriffe ausgleichen können. Bei zurückgesetzten Profilen bietet dagegen eine längere Eingriffsdauer die Gewähr dafür, daß die innerhalb einer Teilungslänge sich vollziehende Berührung selbst bei einer Verschiebung noch in der Zone des Flächeneingriffs verbleibt, und auch größere Teilungsfehler zufolge der länger andauernden, größeren Verdrehungen ohne Kanteneingriff überwunden werden.

Das Verhalten bei Teilungsungenauigkeiten gewinnt um so mehr an Bedeutung, als man es stets mit Durchbiegungen der Zähne zu tun hat, deren Einwirkung mit jener der Teilungsverschiedenheiten übereinstimmt. Der Einfluß der Deformation bringt es mit sich, daß Räder mit vollständig richtigen Zahnflächen bei schwerer Belastung Unregelmäßigkeiten aufweisen. Das getriebene Rad bleibt zufolge der Durchbiegungen der Zähne etwas zurück, der Beginn der Einwirkung geht vorzeitig mit Kanteneingriff vor sich.

3. Fehler von Zykloidenverzahnungen bei unrichtiger Achsenentfernung.

Beim Auseinanderrücken der Achsen um den Betrag Δa tritt auf der vorderen Seite des Eingriffs ein Voreilen, rückwärts ein Zurückbleiben des getriebenen Rades ein; es gleichen sich die Unregelmäßigkeiten im Flächeneingriff selbst aus, ohne daß es zum Kanteneingriff kommt. Der Eingriff geht in drei Abschnitten vor sich; in den äußeren liegt Zahnkopf auf Zahnfuß, während in der Mitte beide Kopfflanken mit den an den Teilkreis sich anschließenden Teilen aufeinander einwirken. Der Übergang dieser einzelnen Eingriffe erfolgt unvermittelt durch ein Überklatschen der Kopfflanke des einen Rades vom Zahnfuß auf den Kopf des anliegenden Zahnes; es stellen sich dabei momentane Geschwindigkeitserhöhungen ein, die aber im Verhältnis zu der Geschwindigkeitserhöhung δ beim Eingriffswechsel geringfügig sind. Es ist

$$\delta = \frac{\Delta a}{2 \frac{t}{\pi}} \left[\frac{1}{m_1 \cos^2 \frac{\pi}{4 m_1}} + \frac{1}{m_2 \cos^2 \frac{\pi}{4 m_2}} \right].$$

So führt z. B. eine um $\Delta a = 1$ mm größere Achsenentfernung beim Teilungsmodul $\frac{t}{\pi} = 10$ und $m_1 = m_2 = \frac{11}{4}$ bereits zu einer Geschwindigkeitserhöhung von 4 v. H.

Bedeutend größere Ungenauigkeiten verursacht eine Achsennäherung, weil sich Kanteneingriff ergibt. Es kommt zu 4 Stoßwirkungen innerhalb des Eingriffs einer Teilungslänge.

4. Fehler der formgefrästen Stirnradzähne.

Die Fehlerquelle bei den mit Profilfräsern ausgearbeiteten Radzähnen liegt in dem Umstande, daß das Verwendungsbereich eines Fräasers, der für eine bestimmte Zähnezahl z genau profiliert ist, insofern erweitert wird, als mit ihm auch Räder von größeren Zähnezahlen $z + \Delta z$ geschnitten werden.

Für Evolventenzähne berechnet sich die momentane Geschwindigkeitsänderung beim Eingriffswechsel aus

$$\delta = \operatorname{tg} \alpha (\zeta_1 + \zeta_2) + \pi \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) \frac{\zeta_1 \zeta_2}{\zeta_1 + \zeta_2},$$

wobei

$$\zeta_1 = \frac{\Delta z_1}{z_1 + \Delta z_1} \cdot \frac{2\pi}{z_1} \quad \text{und} \quad \zeta_2 = \frac{\Delta z_2}{z_2 + \Delta z_2} \cdot \frac{2\pi}{z_2}.$$

Diese Formel ist für kleine Zähnezahlen nicht verwendbar, weil der Kanteneingriff des radialen Fußansatzes größere Fehler bedingt.

Gebräuchlich für die Bearbeitung der Zähne ist ein 8teiliger Formfräsersatz in folgender Abstufung:

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8
z	12—13	14—16	17—20	21—25	26—34	35—54	55—134	135— ∞

Für größere Teilungen werden auch Zwischennummern geliefert, so daß der Satz dann 15 Fräser enthält.

Die größten Ungenauigkeiten, abgesehen von den Kanteneingriffen bei kleinen Zähnezahlen, ergeben sich bei der Paarung von Rädern, deren Zähnezahlen am weitesten von jenen den Fräserprofilen zugehörigen abliegen. Bei diesen ungünstigsten Paarungen, hervorgegangen aus der Bearbeitung mit Fräsern eines 8teiligen Satzes, vollzieht sich der Eingriffsübergang von Zahn auf Zahn unter Stoß mit einer Geschwindigkeitsschwankung von ungefähr 4 v. H. der mittleren Geschwindigkeit. Beim 15teiligen Satze erniedrigt sich dieser Wert auf 2 v. H.

5. Fehler der mit Schneckenfräser bearbeiteten Stirnradzähne.

Das Schneidprofil, mit dem die Zähne geschnitten werden, entspricht der Außenkontur der Schraubenfläche des Fräsers, gesehen in der Richtung der Tangente an die im Teilriß der Schnecke verlaufende Schraubenlinie vom Steigungs-

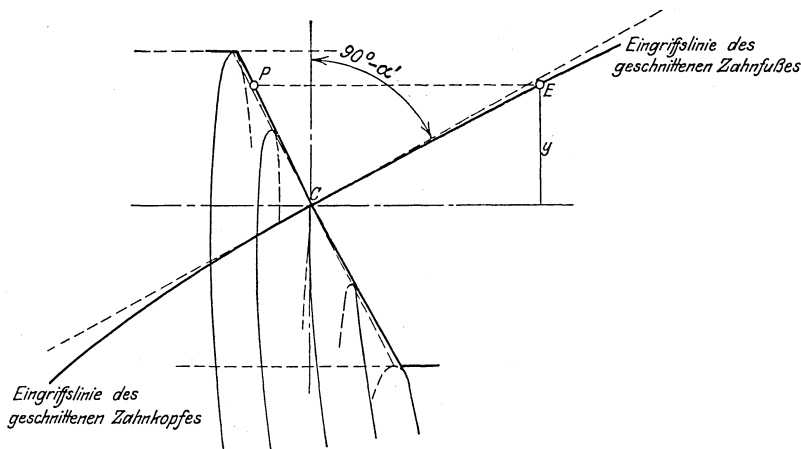


Fig. 88.

winkel β . Die Außenkontur ist die Einhüllende aller Schraubenlinien der Fläche; sie hat die Gestalt einer konkaven Zahnform, weicht also von der geraden Schneidkante ab, die zur Herstellung eines theoretisch richtigen Profils notwendig ist (Fig. 88).

Die Eingriffslinie ist eine gekrümmte Linie, die mit der hohlen Seite der Fräserachse zugewendet ist; sie weicht von der zu erstrebenden geraden Eingriffslinie (geneigt unter dem Winkel $90^\circ - \alpha'$, siehe Fig. 70) ab, die die Herstellung genauer Profile sichern würde. Der gekrümmte Verlauf der Eingriffslinie hat zur Folge, daß die mit Schneckenfräser geschnittenen Zahnflanken in Kopf und Fuß gegen das theoretisch richtige Profil etwas zurückstehen.

Bei der Paarung zweier derartig hergestellter Räder decken sich somit die Eingriffslinien nicht, und es stellen sich deshalb Übersetzungsfehler ein. Die

Größe der plötzlichen Geschwindigkeitserhöhung beim Eingriffswechsel ist der Hauptsache nach nur vom mittleren Steigungswinkel β abhängig; ihre Rechnungswerte sind bei dem gebräuchlichen Winkel $\alpha = 15^\circ$ der Evolventenschnecken für die Steigungswinkel

$\beta = 5^\circ$	7°	10°
$\delta = 0,2$	$0,6$	$1,6 \text{ v. H.}$

Die Ausführungen der Schneckenfräser weisen ungefähr einen mittleren Steigungswinkel $\beta = 5^\circ$ auf. Der Ungenauigkeitsgrad der mit ihnen geschnittenen Räder ist mit dem Werte von $0,2 \text{ v. H.}$ äußerst gering; er entspricht ungefähr dem Fehler, der einer Paarung von 2 Rädern mit je 41 Zähnen zukommt, die mit einem für 40 Zähne hergerichteten Formfräser bearbeitet sind. Praktisch kann man daher die Erzeugnisse der Schneckenfräselei als nahezu richtig ansehen.

VIII. Die Berechnung der Stirnräder.

A. Rücksichtnahme auf Festigkeit (Krafträder).

Die ungünstigste Biegungsanspruchnahme erfährt der Zahn, wenn die äußerste Kopfkante bei voller Belastung im Eingriff steht. Eine Verminderung dieser Belastung durch gleichzeitigen Eingriff eines zweiten Zahnpaares wird vorsichtshalber außer acht gelassen, da dies schon bei geringfügigen Ungenauigkeiten in Teilung und Profilierung nicht mehr zutrifft. Setzt man weiter eine leidlich gute Berührung längs der ganzen Zahnbreite b , also eine halbwegs gleichmäßige Verteilung des Zahndruckes voraus, dessen Biegungskomponente man der Einfachheit halber durch die Umfangskraft P ausdrückt, so lautet entsprechend den Bezeichnungen der Fig. 89 die Festigkeitsgleichung

$$Ph = k_b \cdot \frac{b s^2}{6} \dots \dots \dots (56)$$

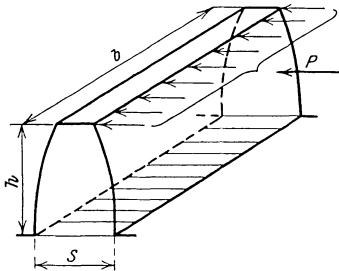


Fig. 89.

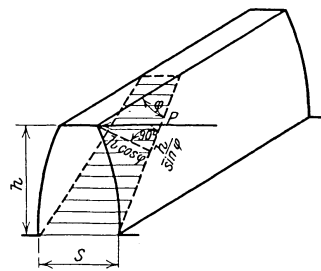


Fig. 90.

Bei normalen Ausführungen ist $h = 0,7 t$ und $s \cong 0,53 t$; die Einführung dieser Werte vereinfacht die Gleichung in

$$P = \frac{k_b}{15} \cdot b t \dots \dots \dots (57)$$

oder allgemein

$$P = k \cdot b t \dots \dots \dots (58)$$

Für das zumeist verwendete Material Gußeisen ist einem $k_b = 300 \text{ kg/cm}^2$ entsprechend der Koeffizient

$$k = 20.$$

Dieser Wert von k ist für Zähne aus anderem Material im Verhältnis der Festigkeitsziffern zu ändern, und zwar beträgt dieses bei Gußstahl = 3,0 bis 3,3, Stahlguß = 2, Deltametall = 2,5, Phosphorbronze = 1,7, Rotguß = 1,3, Rohhaut = 0,4, Holz = 0,35.

Für Räder, die nur selten voll belastet sind, kann k bis 28 gehalten werden. Ist eine ständige gleichzeitige Berührung zweier Zahnpaare zu erwarten, was bei gut eingelaufenen Rädern und bei den nachgiebigeren Holz- und Rohhautzähnen der Fall ist, so kann der Wert von k bis zum doppelten Betrage erhöht werden.

Verteilt sich der Zahndruck nicht über die ganze Zahnbreite, so besteht die Gefahr, daß der Zahn über Eck abbricht. Den ungünstigsten Fall, die bloße Auflage der Zahnecke im Punkte A (Fig. 90), liefert die Biegungsgleichung

$$P \cdot h \cos \varphi = \sigma_b \cdot \frac{h}{\sin \varphi} \cdot \frac{s^2}{6},$$

woraus

$$\sigma_b = \frac{3 P \sin 2 \varphi}{s^2}.$$

Die größte Biegungsspannung σ_b stellt sich in einem Bruchquerschnitt ein, der in einem Winkel von $\varphi = 45^\circ$ liegt, weil dann $\sin 2 \varphi = 1$ ist; sie beträgt

$$\sigma_b = \frac{3 P}{s^2} \dots \dots \dots (59)$$

Die Gleichsetzung dieser Spannung mit der zulässigen Beanspruchung k_b in Gl. 56 liefert die Beziehung

$$b = 1,4 t.$$

Da aber eine derartige ungünstige Zahnberührung nur auf Eck bei einiger Genauigkeit nicht zu erwarten ist, so bemißt man die Zähne gewöhnlich mit

$$b = 2 t.$$

Größere Zahnbreiten führt man bei unbearbeiteten Zähnen und ungenaueren Aufstellungen wegen der Gefahr des Abbrechens über Eck nicht aus.

Bei der Berechnung von Rädern, die mit ganz geringen Geschwindigkeiten laufen (Krafträder), bei denen also die Abnutzung der Zähne keine Rolle spielt, ist die Rücksichtnahme auf Festigkeit allein maßgebend. Für die Übertragung eines Drehmomentes M_d bestimmt sich aus den Gleichungen

$$M_d = P \cdot \frac{D}{2},$$

$$P = k \cdot b t,$$

$$D x = z t,$$

der Teilungsmodul mit

$$\frac{t}{\pi} = \sqrt[3]{\frac{0,2 M_d}{k \cdot z \cdot \left(\frac{b}{t}\right)}} \dots \dots \dots (60)$$

Das Breitenverhältnis ist nach früherem mit $b:t=2$ einzuführen; die Zähnezahl wird nur so groß gewählt, daß ein gesicherter Eingriff zustande kommt. Für leichte Getriebeausführungen kann man bei Satzräderverzahnung auf eine kleinste Zähnesumme von 28 bei einer Mindestzähnezahl von 10 und bei Sonderverzahnung auf eine kleinste Zähnesumme von 20 bei einer Mindestzähnezahl von 8 herabgehen.

B. Rücksichtnahme auf Geschwindigkeit (Arbeitsräder).

Bei größerer Umlaufgeschwindigkeit machen sich dynamische Einwirkungen und die Folgewirkungen der Zahnreibung in gesteigertem Maße geltend. Im allgemeinen genügt die Größenausführung der Krafträder nicht mehr für raschlaufende Getriebe, denen man die Bezeichnung Arbeitsräder beilegt. Eine Vergrößerung der Rad- und Zahnabmessung muß vorgenommen werden, um den erhöhten Ansprüchen Rechnung zu tragen. Je größer die Getriebeabmessung gehalten wird, desto größer ist die Gewähr für anstandslosen Lauf und längere Betriebszeit. An-

dererseits wird aber die Ausführungsgröße durch die Kosten und die Aufstellungsmöglichkeit eingeschränkt.

Der Einfluß, den dynamische Einwirkung und Zahnreibung auf die Ausführungsgröße ausüben, entzieht sich rechnerischer Ermittlung und kann nur durch Einschätzen berücksichtigt werden. Da ferner große Verschiedenheiten in den Anforderungen an die Getriebeausführung und die Betriebsverhältnisse bestehen, so fällt es schwer, für die Berechnung der Arbeitsräder Formeln und Zahlenwerte aufzustellen, die sich wirksam den mannigfachen Beeinflussungen anpassen. In dieser Hinsicht besteht zurzeit noch eine Unsicherheit und Willkür, da es an zusammenfassenden Versuchen und Erfahrungen auf diesem Gebiete mangelt. Die folgenden Angaben haben keine allgemeine Bedeutung, sondern beziehen sich nur auf besondere Ausführungsgruppen der Räder.

Die Ungenauigkeit der unbearbeiteten Zähne verursacht Stoßwirkungen, die nicht nur eine erhöhte Festigkeitsanspruchnahme bedingen, sondern auch den Gang lärmend gestalten. Bei etwa 3 m Umlaufgeschwindigkeit ist die Grenze der Ausführbarkeit von gegossenen Rädern erreicht. Genaue Zahngestaltungen, wie sie sich beim Schneiden auf der Maschine ergeben, vertragen anstandslos höhere Umfangsgeschwindigkeiten; doch wird bei den größten Geschwindigkeiten von 10 bis 20 m ein hoher Genauigkeitsgrad in Zahnausführung und Getriebeaufstellung erforderlich, um jegliche dynamische Einwirkung fernzuhalten.

Maßgebend für die Beurteilung der Einwirkung, welche die Zahnreibung ausübt, ist die auf 1 cm² eingreifende Zahnfläche entfallende Sekundenreibrungsarbeit, deren Abhängigkeit die Gl. 48 und 50 im Abschnitt III festlegen:

$$\alpha_r = \frac{\mu \cdot \pi}{2 \sin \alpha} \left(1 + \frac{z_1}{z_2} \right) \frac{1}{z_1^2} \frac{P}{b \cdot t} \cdot v = \frac{75 \mu}{2 \sin \alpha} \left(1 + \frac{z_1}{z_2} \right) \frac{N}{z_1 \cdot b \cdot D_1}.$$

Die Abnutzung der Zähne, die diese Reibrungsarbeit im eigentlichen Flanken-eingriff zeitigt, ist verhältnismäßig unbedeutend gegenüber dem Verschleiß, her-rührend aus dem Kanteneingriff bei Ungenauigkeiten. Die schabende Wirkung der Kopfkanten kann schon bei kurzer Betriebsdauer arge Zahnschwächungen herbeiführen, wobei unnütz viel Arbeit aufgezehrt wird. Die Ursache eines un-gewöhnlich raschen Verschleißes liegt oft weniger in der Belastungsgröße des Triebes, als vielmehr in der Unrichtigkeit des Zahneingriffes. Die Rücksichtnahme auf den Verschleiß führt deshalb gleichfalls zur Forderung genau geschnittener Zähne für Getriebe mit hoher Umlaufgeschwindigkeit.

Die aus dem Flankeneingriff sich ergebende Abnutzung der genauen Zähne ist auf ein Mindestmaß zu beschränken, weil bei abgenutzten Zähnen auch Kanten-eingriff und somit gesteigerter Verschleiß auftreten. Herabsetzen läßt sich die Abnutzung durch eine Vergrößerung von Raddurchmesser, Zahnbreite und Zähne-zahl, entsprechend der Einflußnahme dieser Größen auf den Verhältniswert α_r der Reibrungsarbeit. Durch die Anwendung eines Baustoffes, der eine erhöhte Wider-standsfähigkeit der Abnutzung entgegengesetzt, werden gleichfalls günstigere Verhält-nisse geschaffen; Gußeisen, Stahlguß, geschmiedeter Stahl und Nickelstahl zeigen der Reihenfolge nach aufsteigende Widerstandswerte der Naturhärte. Bei den außer-gewöhnlich hoch beanspruchten Rädern des Kraftwagen- und Flugzeugbaues wird Chromnickelstahl benützt; die Räder werden im Einsatz vergütet oder gehärtet. Die aus dem Härten sich ergebenden Fehler beseitigt man durch Nachschleifen der Zähne, wodurch auch die Glätte der Zahnflächen vervollkommenet wird. Durch Härten und Schleifen wird den weitgehendsten Anforderungen hinsichtlich Klein-heit der Abnutzung entsprochen.

Schließlich wird die Abnutzung durch reichliche Schmierung verringert. Das Tauchen der Zähne in einen aufgefüllten Ölvorrat ist bei Umlaufgeschwindigkeiten

über 12 m nicht mehr zureichend, da die Fliehkraft das Öl abschleudert. Es ist dann eine durch eine Ölpumpe betriebene Umlaufschmierung erforderlich, bei welcher ein reichlicher Ölstrahl unmittelbar in den Getriebeeingriff eingeführt wird.

Zufolge der Kleinheit der Zahnreibung ist, sofern nicht etwa ein Versagen der Schmierung vorliegt, eine unzulässige Erwärmung der Räder nicht zu besorgen. Nur bei eingekapselten Getrieben von gedrängter Ausführung und hoher Inanspruchnahme kommt es mitunter durch die Wärmezufuhr der wesentlich größeren Lagerreibung zu einer unerlaubten Temperaturerhöhung. Übersteigt die Temperatur den zulässigen Wert von etwa 80° C, so ist durch eine wirksame Belüftung Abhilfe zu schaffen.

Als Grundlage der Zahnbemessung dient der Verhältniswert der Zahnbelastung

$$k = \frac{P}{b \cdot t} \dots \dots \dots (61)$$

Dieser Wert drückt nicht allein nach früherem die Biegungsbeanspruchung des Zahnes aus, sondern gibt auch ein genügend zutreffendes Vergleichsmaß für die Kantenpressung in der Zahnauflage, deren Berücksichtigung zweierlei Umstände notwendig machen. Die Druckbeanspruchung darf nämlich weder das Zahnmaterial über die Elastizitätsgrenze belasten, noch den Schmierzustand der Zahnflächen durch Verdrängen der Ölschichte beeinträchtigen. Bei übermäßiger Druckbeanspruchung tritt ein Fressen der Zähne ein, das eine rasche Zerstörung der Zahnflächen zur Folge hat.

Für die Übertragung einer Leistung von N -Pferdestärken bei n Umdrehungen in der Minute folgt aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} 75 n &= P \cdot v, \\ P &= k \cdot b \cdot t, \\ v &= \frac{D \cdot \pi \cdot n}{60 \cdot 100}, \\ D \cdot \pi &= z \cdot t \end{aligned}$$

die Umfangsteilung

$$t = 10 \sqrt[3]{\frac{450}{k \cdot z \left(\frac{b}{t}\right)} \cdot \frac{N}{n}} \dots \dots \dots (62)$$

Diese Beziehung macht die Größe der Getriebeausführung abhängig von der Zähnezahl und den Verhältniswerten der Zahnbreite und Zahnbelastung. Die Freiheit, die in der Wahl dieser drei Größen besteht, nützt man aus, in Anlehnung an die Gleichung der Reibungsarbeit günstige Abnutzungsverhältnisse zu schaffen. Über eine zweckmäßige Wahl der Zahlengrößen geben die folgenden Ausführungen hinreichende Auskunft.

Die zulässigen Werte k der Zahnbelastung sind in erster Reihe von dem Genauigkeitsgrad der Zahnausführung abhängig. Die ungünstigen Verhältnisse der unbearbeiteten Zähne erfordern eine mit der Geschwindigkeitsgröße zunehmende merkliche Herabsetzung des Festigkeitswertes vom Krafrade. Nach Bach¹⁾ wird die Minderung abhängig gemacht von der Umdrehungszahl n jenes Rades, das die größere Abnutzung erleidet; es ist für Gußeisen auf Gußeisen

$$k = 20 - \sqrt{n} \dots \dots \dots (63)$$

Für Stahlguß ist etwa der doppelte, für Räder mit Holzzähnen der halbe Betrag zu nehmen.

Bei genau geschnittenen Zähnen kann mit der gleichzeitigen Zahnauflage zweier Flankenpaare, also einer verringerten Biegungsanspruchnahme und einer

¹⁾ Siehe Bach, „Maschinen-Elemente“.

verminderten Kantenpressung der Zähne gerechnet werden. Im Hinblick auf die Festigkeit und Kantenpressung allein vertragen deshalb bearbeitete Zähne bei einer größeren Eingriffsdauer $\varepsilon=2$ ungefähr den anderthalbfachen Betrag der Zahnbelastung vom Kraftrade. Es ist jedoch empfehlenswert, die Vergrößerung der Reibungsarbeit bei erhöhter Umfangsgeschwindigkeit wenigstens zum Teil durch das Ansetzen eines ermäßigten Wertes für die Zahnbelastung auszugleichen. Von Reuleaux¹⁾ rührt eine Beziehung her, die heute in geänderten Zahlengrößen vielfach angewendet wird. Darnach wird die Abhängigkeit der Zahnbelastung von der Umfangsgeschwindigkeit ausgedrückt durch

$$k = \frac{300}{v + 10} \dots \dots \dots (64)$$

für Gußeisenzähne. Der Betrag ist zu ändern im Verhältniswert 0'6 für Rohhaut und Buchenholz, 1'3 für Rotguß, 1'7 für Phosphorbronze, 2 für Stahlguß, 2'5 für Deltametall, 3 für geschmiedeten Stahl und je nach Güte bis 6 für Nickelstahl naturhart. Eine außerordentlich hohe Belastungsmöglichkeit bietet gehärteter Chromnickelstahl; die Räder des Kraftwagen- und Flugzeugbaues²⁾ laufen durchschnittlich mit 10 bis 15 m Umfangsgeschwindigkeit und weisen Zahnbelastungen k von 120 bis 200 auf.

Die angeführten Größen der zulässigen Zahnbelastung sind als Höchstwerte nur anwendbar bei Ausführungen, die den strengsten Anforderungen hinsichtlich Genauigkeit genügen. Bei minderer Sorgfalt in der Herstellung und im Zusammenbau der Räder, sowie bei voraussichtlich unvollkommener Wartung sind die Werte entsprechend zu ermäßigen. Ein Herabsetzen der Werte wird auch notwendig bei nicht stoßfreien Getrieben und bei schwankenden Kraftäußerungen, sobald mit dem Durchschnittswerte der übertragenen Kraft gerechnet wird.

Die Bemessung der Zahnbreite ist von dem Umstande abhängig, inwieweit eine gleichmäßige Breitenauflage der Zähne zu gewärtigen ist. Bei unbearbeiteten Zähnen bringt eine Vergrößerung des Breitenverhältnisses $b:t$ von dem Werte 2 der Krafträder auf etwa 3 nicht viel Gewinn; da hier ein einseitiges Aufsetzen der Zähne nicht ausgeschlossen ist, so muß die zulässige Zahnbelastung innerhalb des Wertes

$$k = 20 \left(\frac{b}{t} \right)$$

bei Gußeisenzähnen verbleiben.

Bearbeitete Zähne werden im Breitenverhältnisse von 3 bis 5 ausgeführt. Die größeren Breitenwerte, die bei größeren Arbeitsübertragungen in Anwendung kommen, erfordern ein sorgfältiges Aufsetzen der Räder auf die Wellen unter Ausschluß jeglichen Verziehens und beiderseitige Lagerung, um Störungen der Zahnauflage, herrührend von Wellendurchbiegungen, hintanzuhalten. Aus dem gleichen Grunde sind fliegende Anordnungen der Getriebe möglichst zu vermeiden.

Bei großer Breite verliert der gerade Zahn seine Zweckmäßigkeit. Ein Vergleich des Eingriffs- und Belastungsbildes fällt schon bei Zahnbreiten von $4t$ zugunsten des Schraubenzahnes aus. Bei der Durchführung großer Kraftübertragungen mit hoher Geschwindigkeit ist man aber gezwungen, durch Anordnung großer Radbreiten zur Minderung der Abnutzung beizutragen; für dieses Anwendungsgebiet scheiden daher Räder mit geraden Zähnen aus.

Das wirksamste Mittel zur Herabsetzung der Abnutzung ist die Vergrößerung der Zähnezahl z . Dabei stellt sich jedoch eine Zunahme des Raddurchmessers

¹⁾ Siehe Reuleaux, „Konstrukteur“.

²⁾ Eine übersichtliche Zusammenstellung der Ausführungsgrößen nebst den zugehörigen Beanspruchungswerten gibt Noack, „Flugzeuggetriebe“, Z. Ver. deutsch. Ing. 1920, Seite 318.

im Faktorwerte $\sqrt[3]{z^3}$ bei sonst ungeänderten Belastungsverhältnissen ein. Die Wahl der Zähnezahzahl wird daher in erster Reihe durch die Ausführungskosten und die Größe des für die Getriebeaufstellung verfügbaren Raumes beeinflusst. Liegt in dieser Hinsicht keine wesentliche Einschränkung vor, so erhält das kleinere Rad des Getriebes Zähnezahlen von 30 aufwärts, die befriedigende Eingriffsverhältnisse für Satzräderausführung verbürgen. Mit der Zähnezahzahl des größeren Rades geht man dabei bis 128, ausnahmsweise bis 160. Gedrängte Anordnungen erfordern kleinere Zähnezahlen, die bei Satzräderausführung bereits Mängel veranlassen, weil die Eingriffsdauer sich fühlbar verringert und der Eingriff im kleineren Rade auch auf den Fußbereich der Evolventenzahnflächen übergeht, welcher am meisten der Abnützung ausgesetzt ist. Bei einem Herabgehen mit der Zähnezahzahl bis auf 16 ist daher bei Satzrädern die Zahnbelastung zumindest auf die Hälfte der sonst zulässigen Größe zu vermindern. Vorausgesetzt wird dabei noch eine hinreichende Kürzung der Zahnköpfe vom großen Rade, die außerhalb des Fußanschlusses im kleineren Rade verbleiben müssen. Wesentlich günstigere Verhältnisse liegen bei der Sonderverzahnung vor; die Eingriffsdauer vermindert sich weniger und der Fußteil bleibt stets vom Eingriff ausgeschlossen. Bei der Ermäßigung der zulässigen Zahnbelastung k für Sonderausführungen hat man deshalb nur die Minderung der Eingriffsdauer zu berücksichtigen und man kann die Zähnezahzahl bis auf 12 herabsetzen.

Auch die Übersetzung beeinflusst die Wahl der Zähnezahzahl. Bei größeren Übersetzungen ist man gezwungen, dem kleineren Rade im Getriebe weniger Zähne zu geben, weil sonst das größere Rad zu schwer ausfallen würde. Man geht bei großen Leistungen mit der Übersetzung höchstens bis auf 1:4 herauf; größere Übersetzungen bis 1:6 kommen nur bei leichteren Übertragungen vor.

Da sich die Ausführungsgenauigkeiten beim Einlaufen der Räder (gleichmäßige Belastung vorausgesetzt) um so eher beheben, mit je weniger Zähnen des größeren Rades ein Zahn des kleineren Rades zusammentrifft, so wird man glatten Übersetzungsverhältnissen den Vorzug geben. Am günstigsten sind die Verhältnisse 1:1, 1:2, 1:3 usw., weniger gut 2:3, 2:5, 2:7 usw. Verhältnisse mit noch größeren Zählerwerten eignen sich dagegen für Getriebe mit periodischer Veränderlichkeit des Zahndruckes (wie z. B. bei Pumpenantrieb), da sie eine gleichmäßige Verteilung der Zahnabnützung herbeiführen.

Die Zähnezahzahl muß ein Vielfaches sein von der Teilungszahl bei geteilten Rädern und von der Armzahl bei Rädern mit Holzkämmen.

IX. Die Berechnung der Kegelräder.

Sowohl die Durchbiegung der Zähne, als auch deren Abnützung¹⁾ bedingt eine Verteilung des Zahndruckes längs der Berührungskante, bei der die Kantenpressung auf die Längeneinheit proportional dem Durchmesser d ist.

$$p = \text{Konst. } d.$$

Dieser Umstand führt in der ganzen Zahnbreite zu einer gleichmäßigen Biegungsbeanspruchung der Zahnwurzel.

¹⁾ Die Abnützung ist abhängig von der Kantenpressung p und der Gleitgeschwindigkeit, die mit d zunimmt. Andererseits wächst aber die Abnützunggröße quadratisch mit d , da sowohl die sich abnützende Profillänge als auch die Abnützungstiefe dem Durchmesser d proportional sind.

$$p d = \text{Konst. } d^2$$

also

$$p = \text{Konst. } d.$$

Diese Bemerkung soll die Unhaltbarkeit der in der Literatur aufgetauchten Behauptung dartun, p sei konstant; davon ausgehende Folgerungen entbehren jeglicher Richtigkeit.

Hinreichend genau fällt die Berechnung aus, wenn man die Rechnungsgrundlagen der Stirnräder in gleicher Handhabung auch auf die Kegelräder überträgt, dabei jedoch für die Teilung ihren mittleren Wert t_m im mittleren Raddurchmesser D_m einführt.

Wie aus Fig. 91 ersichtlich, ist der die Radgröße kennzeichnende größte Teilkreisdurchmesser

$$D = D_m + b \sin \varphi,$$

deshalb die Teilung außen

$$t = t_m + \frac{\pi}{z} b \sin \varphi.$$

Dieser Rechnungswert der Teilung wird so weit abgeändert, daß sich ein runder Zahlenwert für D ergibt, nachdem Kegelrädermodelle nur paarweise miteinander

verwendet werden können und somit jede Rücksichtnahme auf gewisse Normalteilungen entfällt.

Für eine genaue Bearbeitung des Kegelradkörpers am äußeren Umfange sind der Durchmesser D_a des größten Kopfkreises und die Kantenwinkel φ' und $(90 - \varphi)$ genau rechnerisch zu ermitteln.

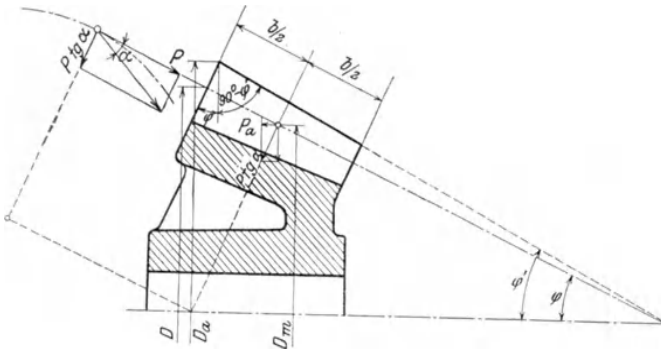


Fig. 91.

Das Abweichen des Zahndruckes im Winkel α von der tangentiellen Richtung ruft in der Ebene der beiden Wellenachsen eine Kraftäußerung von $P \operatorname{tg} \alpha$ hervor, die schräg gegen die Wellenachse gerichtet ist. Mit der Komponentenwirkung

$$P_a = P \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \varphi$$

tritt ein axialer Schub auf, der das Rad aus dem Eingriff herauszuschieben trachtet; dabei ist P die am mittleren Durchmesser D_m reduzierte Umfangskraft. Bei Evolventenverzahnung behält der Axial Schub P_a eine beständige Größe, bei Zykloidenverzahnung schwankt er entsprechend den veränderlichen Winkelwerten α für die einzelnen Punkte der kreisförmigen Eingriffslinie; bei genügend großen Rollkreisen ist sein Mittelwert erheblich kleiner als bei der Evolventenverzahnung.

Der Axial Schub wird entweder durch unmittelbare Auflage der Nabenstirnfläche am Schalenbund des Lagers abgestützt oder auch auf die Welle übertragen, die dann in geeigneter Weise den Druck in der Lagerung absetzt. Der bloße Reibungshalt der Verkeilung genügt zur Überleitung der Axialkraft nur bei kleinen Rädern; größere Ausführungen erfordern eine kleine Wellenverstärkung für die axiale Auflage der Nabe, wodurch auch die genaue Aufstellung des Triebes erleichtert wird.

X. Die Befestigung der Räder.

Bei den kleinsten Zähnezahlen werden die Zähne aus der Welle herausgefräst; ein Beispiel bietet die in Fig. 92 dargestellte gezahnte Welle einer Zahnstangenwinde. Aber auch bei größeren Zähnezahlen werden Rad und Welle aus einem Schmiedestück gefertigt, sobald bei erheblichen Stoßwirkungen Verbindungen, die

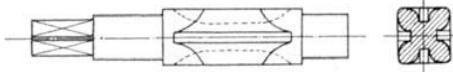


Fig. 92.

bei den kleinsten Zähnezahlen werden die Zähne aus der Welle herausgefräst; ein Beispiel bietet die in Fig. 92 dargestellte gezahnte Welle einer Zahnstangenwinde. Aber auch bei größeren Zähnezahlen werden Rad und Welle aus einem Schmiedestück gefertigt, sobald bei erheblichen Stoßwirkungen Verbindungen, die

stets zur Lockerung neigen, ausgeschlossen sein sollen. Die Kammwalzen der Walzantriebe werden aus Siemens-Martinstahl massiv geschmiedet und die Zähne gefräst (Fig. 93); das Versetzen der Zähne in den beiden Radkränzen um die halbe Teilung führt zu ruhigerem Gang.

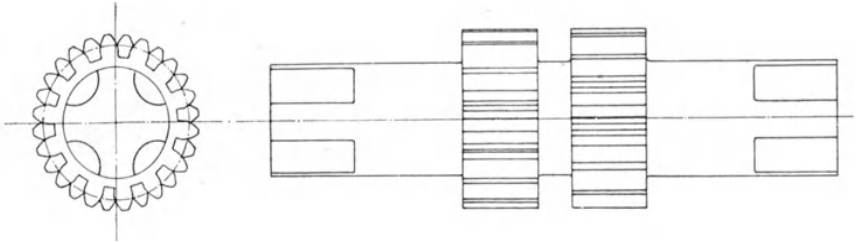


Fig. 93. Kammwalze.

Mit radialen Preßschrauben (Fig. 94) lassen sich nur kleine, wenig beanspruchte Räder, die stoßfreie Bewegungen übertragen, genügend sicher befestigen.

Eine Verbindung durch Flächenauflage führt das Einlegen einer Feder (Fig. 95) herbei, die auch durch versenkte Kopfschrauben an die Welle befestigt werden kann. Die Übertragung des Drehmomentes M_d erfolgt in der Weise, daß die Welle an dem inneren Teil der Längsfläche der Feder mit einer Kraft

$$P = \frac{2 M_d}{d}$$

drückt, und die Feder diesen Druck in dem äußeren Teile der gegenüberliegenden Fläche an die Radnabe weiter abgibt. In der Druckfläche der Feder von der Länge l und einer Höhe von ungefähr $\frac{d}{20}$ tritt eine Flächenpressung auf

$$k = \frac{P}{l \cdot \frac{d}{20}},$$

deren Verhältnis zur Torsionsspannung der Welle

$$k_a = \frac{M_d}{0,2 d^3}$$

durch die aufgestellten Gleichungen bestimmt ist mit

$$\frac{k}{k_a} = 8 \frac{d}{l}.$$

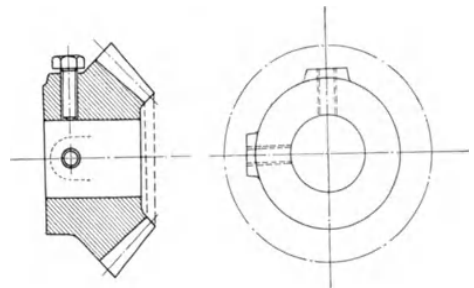


Fig. 94.

Das Verhältnis $\frac{l}{d}$ ist praktisch ungefähr 1,5 bis 2. Die Gleichung zeigt, daß bei vollständiger Ausnützung der Übertragungsfähigkeit der Welle sich recht erhebliche Pressungen einstellen, die beim Auftreten von Stößen ein Verdrücken der Auflagefläche zur Folge haben. Aus diesem Grunde ist die Feder kein besonders geeignetes Verbindungsmittel; ihre Verwendung bleibt auf gering beanspruchte Räder und auf solche Fälle beschränkt, bei denen unter Wahrung der Drehübertragung eine axiale Verschiebung des Rades möglich sein soll.

Eine vollkommener Befestigung wird durch den Längskeil erreicht, weil durch ihn eine Verspannung in die Verbindung hineingebracht wird. Die normale Ausbildung ist der in die Welle versenkte Nutenkeil (Fig. 96) mit einem Anzug von 1:80 bis 1:100. Beim Eintreiben des Keiles wird jener Teil der Nabe, der dem Keile gegenüberliegt, an die Welle angedrückt und daselbst ein Reibungsschluß bewirkt. Ein Teil des Drehmomentes wird unmittelbar, ohne Vermittlung des Keiles

übertragen, es geht nicht mehr die ganze Kraft durch den Keil selbst hindurch, wie es bei der Feder der Fall ist. Ein Verdrücken der Seitenflächen ist weniger zu befürchten und die Verbindung ist gegenüber wechselnden Krafrichtungen, Stößen

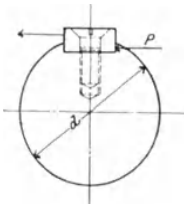


Fig. 95. Feder.

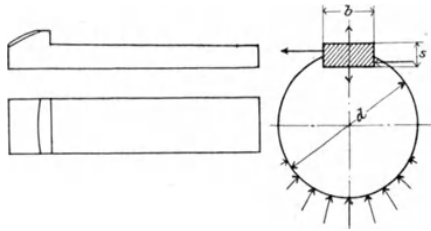


Fig. 96. Nutenkeil.

und Erschütterungen viel widerstandsfähiger. Ferner verhindert die Reibung in der Keilnut und am Umfange der Welle eine axiale Verschiebung des Rades.

Die Bemessung des rechteckigen Keilquerschnittes fußt auf praktischer Erfahrung. Die für die Feder aufgestellten Gleichungen lassen erkennen, daß bei voller Ausnützung der Übertragungsfähigkeit der Welle die notwendige Stärke s proportional dem Wellendurchmesser d ist; eine solche Abhängigkeit würde aber bei schwachen Wellen zu kleine Keilstärken ergeben, weshalb dem Verhältnis noch eine Konstante hinzugefügt wird. Die von Reuleaux gegebene Formel

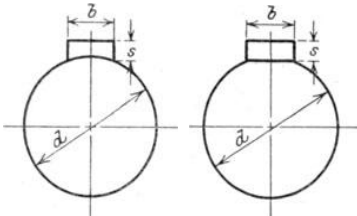


Fig. 97. Hohlkeil. Fig. 98. Flachkeil.

$$s = \frac{d}{10} + 4 \text{ mm}$$

paßt sich den praktischen Ausführungen ganz gut an. Bei einer Breite des Keiles von

$$b = 1,8s \text{ bis } 2s$$

fällt die Scherbeanspruchung des Keiles nicht viel größer als die Torsionsspannung der Welle aus. Die Nutentiefe in der Welle wird entweder in der Mitte $0,5s$ oder an der Seite $0,4s$ gehalten. Ist die Verbindung Stößen unterworfen, so ordnet man bei stärkeren Wellen zwei Keile an, die unter 90° versetzt sind. Eine diametrale Anbringung unter 180° wäre prinzipiell verfehlt, weil damit die Anpressung der Nabe an die Welle aufgehoben wird. Bei geteilten Rädern muß der Keil in die Teilungsfuge gesetzt werden. Ein sauberes Einpassen des Keiles ist die Vorbedingung für einen sicheren Halt der Verbindung.

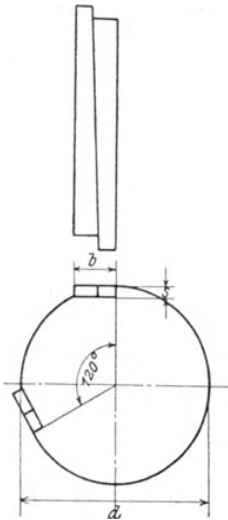


Fig. 99. Tangentialkeil.

Nur durch Reibung hält der Hohlkeil (Fig. 97), der aber nur für stoßfreie Übertragungen geringerer Kräfte zu gebrauchen ist, weil die Gefahr eines Rutschens der Nabe besteht. Eine etwas größere Sicherheit bietet der Flachkeil (Fig. 98). Die Keilstärke dieser Ausführungen wird etwas kleiner als jene des Nutenkeils gehalten.

Eine außerordentlich feste Verbindung wird mit Tangentialkeilen (Fig. 99) erreicht. Einer Keilstärke von

$$s = \frac{d}{10}$$

entspricht eine Nutenbreite von

$$b = \sqrt{(d - s)s} = 3s.$$

In jede Nute werden zwei mit dem Anzug gegeneinander gelegte Keile ein-

geführt, die eine tangentielle Verspannung herbeiführen. Die Nuten liegen in einem Zentriwinkel von 120° , so daß sich die beim Eintreiben der Keile auftretenden Tangentialdrücke zu einer resultierenden Pressung vereinigen, die Nabe und Welle in der den Keilen gegenüberliegenden Auflagefläche fest zusammenhält. Der Vorteil dieser Anordnung liegt in der Ausnützung der vollen Keilseitenfläche als Druckfläche; auch eine Lockerung der Verbindung, verursacht durch ein Verdücken der Seitenflächen, läßt sich ohne weiteres durch Nachziehen der Keile beseitigen, was beim radialziehenden Nutenkeil ausgeschlossen ist. Die Befestigung mit Tangentialkeilen ist demnach für solche Räder empfehlenswert, die in der Drehrichtung wechselnden Belastungen und Stoßeinwirkungen ausgesetzt sind.

Beim Verkeilen stellt sich ein Verziehen des Rades ein. Da zur Erzielung eines geräuschlosen Ganges ein genaues Rundlaufen notwendig ist, nimmt man für empfindliche Ausführungen Abstand von einer Verkeilung. Es wird nur eine Feder eingelegt, und der Reibungsschluß zwischen Nabe und Welle in anderer Weise herbeigeführt.

Die Nabe wird geschlitzt und mit Schrumpfringen aufgezwängt (Fig. 126). In anderer Ausführung wird sie konisch ausgebohrt und mittels einer Verschraubung entweder unmittelbar auf einen konischen Wellenansatz (Fig. 110) oder unter Einlage einer geschlitzten oder mehrteiligen Büchse (Fig. 125) aufgeklemmt. Zum Anpressen dient entweder eine Kopschraube oder eine an der Welle oder der Büchse angeschraubte Mutter. Diese Art der Befestigung gestattet ein leichtes Abnehmen des Rades und ermöglicht auch ein genaues zentrisches Wieder aufsetzen.

XI. Die Konstruktion der Räder.

Nimmt ein Rad die ganze Übertragungsfähigkeit einer vollen Welle vom Durchmesser d auf, so ist die Nabenstärke

$$\begin{aligned} \text{für Gußeisen } \delta &= 0,4d + 1 \text{ cm,} \\ \text{Stahlguß } \delta &= 0,3d + 1 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Für hohle Wellen wird die Nabenstärke geringer bemessen. Schwache Naben werden mitunter an der Keilnutstelle örtlich verstärkt (Fig. 104).

Die Nabelänge wird gewöhnlich um einen kleinen Betrag größer als die Radbreite gemacht; sie soll jedoch mindestens $1,5d$ betragen, damit das Rad beim Aufkeilen nicht schief gezogen wird. Lange Naben werden oft in der Mitte ausgenommen (Fig. 109); für die Auflage muß eine Länge von mindestens

$$l_1 \geq 0,5d$$

auf jeder Seite verbleiben.

Bei Rädern mit kleinen Zähnezahlen sitzen die Zähne unmittelbar auf der Nabe. Fällt diese zu schwach aus, so kann man das Rad durch zwei angegossene Seitenscheiben verstärken (Fig. 102), sofern die Zähne nicht zu bearbeiten sind. Die Zahnbreite muß dann etwas größer sein, als jene des eingreifenden Rades.

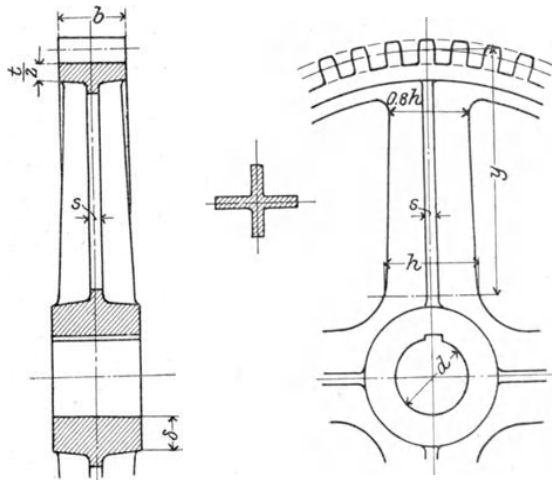


Fig. 100.

Die Seitenverstärkung bei beiden Rädern bis zu den Teilkreisen (Fig. 103) führt man aus, um die Zähne vor seitlichem Ausbrechen zu bewahren.

Räder von größerem Durchmesser erhalten einen eigenen Zahnkranz in der Stärke von $0,5t$, der meistens durch ein bis zwei Kranzrippen verstärkt wird. Bei Kegelrädern wird der Kranz zweckmäßig über die ganze Breite gleich stark

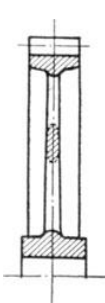


Fig. 101.

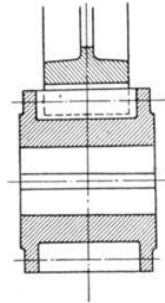


Fig. 102.

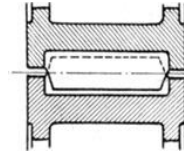


Fig. 103.

in der Hälfte der größten Zahnteilung gehalten (Fig. 104), da eine gegen die Kegelspitze verjüngte Ausführung mit der Kraftüberführung auf die Arme nicht im Einklang steht.

Die Verbindung des Kranzes mit der Nabe erfolgt bei kleineren Rädern durch eine Scheibe, die durch Rippen versteift und durch kreisrunde Ausnehmungen (Fig. 106) leichter gemacht werden kann. Bei größeren Durchmessern werden 4 bis 8 Arme angeordnet. Für die Zahl der Arme ist die Bedingung maßgebend, daß der Kranz unter dem Druck der radialen Komponente des Zahndruckes (Fig. 105), deren normale Größe durch eventuelle Fräswirkung der Zahnspitzen sich erheblich steigern kann, eine genügende Festigkeit und Steifigkeit aufweist.

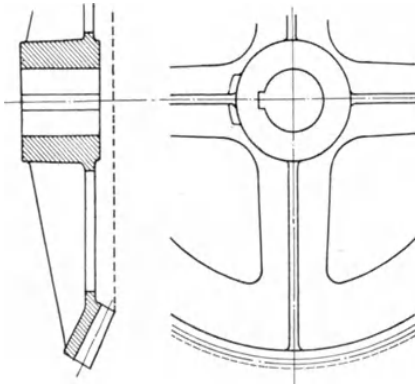


Fig. 104.

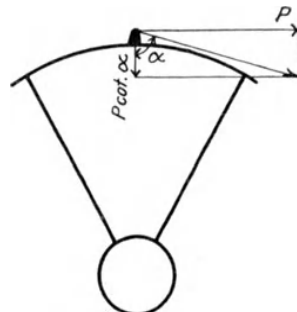


Fig. 105.

Diesem Umstande trägt man dadurch Rechnung, daß man ungefähr zu je 15 Zähnen einen Arm ausführt, sobald die Zähne auf die volle Festigkeit beansprucht sind.

Ein elliptischer Armquerschnitt wird nur bei kleinen Rädern von schmaler Zahnbreite ausgeführt (Fig. 101). Eine zweckmäßige Verbindung erzielt man durch Armquerschnitte, die in voller Breite an den Radkranz ansetzen. Üblich sind der \perp (Fig. 100) und bei größeren Breiten der \perp Rippenquerschnitt (Fig. 107), der auch in verdrehter Lage \perp (Fig. 126) für besonders steife Arme Verwendung findet. Die Arme werden gewöhnlich gerade gehalten, gekrümmte Ausführungen

(Fig. 119) sind notwendig, sobald die Befestigungsstelle der Nabe außerhalb der Zahnbreite liegt. Die Hauptrippen der Arme werden bei unveränderter Stärke gegen den Umfang auf 0,8 der inneren Breite verjüngt (Fig. 100).

Eine genaue Feststellung der Beanspruchung des Armquerschnittes stößt auf Schwierigkeiten, weil die Belastungsgröße eines Armes von der elastischen Formänderung des Kranzes und der Arme abhängt und außerdem auch der Einfluß von Gußspannungen zu berücksichtigen wäre. Bei der Bestimmung der Größe des Armquerschnittes behilft man sich mit der vereinfachten Anschauung, den Arm als einen in der Nabe eingespannten Träger anzusehen, der mit einem Teile der Umfangskraft P im Betrage von $\frac{1}{4}$ der Armzahl i belastet ist (Fig. 100).

$$\frac{P}{0,25 i} \cdot y = k_b \cdot W.$$

Eine gleiche Aufteilung der Umfangskraft auf alle Arme findet nicht statt. Für Gußeisenarme ist der übliche Wert $k_b = 300$. Das Widerstandsmoment W berechnet man unter Weglassung des geringfügigen Anteils, der von dem in der neutralen Achse liegenden Rippenquerschnitt herrührt. Die Rippenstärke s wird ungefähr gleich der Zahnstärke gehalten; die Armhöhe h beträgt beiläufig 5 s bis 7 s .

Räder für hohe Geschwindigkeiten erhalten zugunsten eines ruhigeren Ganges zweckmäßig eine steifere Kranz- und Armkonstruktion (Fig. 126), um die Beeinträchtigung des richtigen Zahneingriffs durch die elastischen Formänderungen herabzusetzen.

Reicht die Festigkeit des Gußeisens nicht aus, so werden die Räder aus Stahlguß und die Trieblinge aus Siemens-Martinstahl hergestellt. Mitunter werden auch die Trieblinge zur Verlängerung ihrer Lebensdauer in den Zähnen gehärtet.

Das Tönen der Räder wird durch einen Bleieinguß in den Radkörper vernichtet; ein Beispiel bietet in Fig. 110 das Kegelrad eines Steuerwellenantriebes. Denselben Zweck verfolgt auch ein Zementausguß des kastenförmigen Zahnkranzes der Fig. 126. Die Allgemeine Elektrizitäts-Gesellschaft, Berlin, dämpft das Tönen durch Filzlagen ab, die an beiden Seiten des Rades mit einer Blechverschalung abgedeckt werden.

Der Einbau raschlaufender Triebe in besondere Ölgehäuse wird nicht nur zwecks ausgiebiger Schmierung, sondern auch zur Abdämpfung des Geräusches durchgeführt.

XII. Geteilte Räder.

Sobald ein Rad nicht axial auf der Welle zur Befestigungsstelle geschoben werden kann, ist eine diametrale Teilung des Rades in 2 Hälften vorzunehmen; auch Guß- und Transportschwierigkeiten machen eine solche Teilung notwendig.

Das Auftreten von Gußspannungen läßt sich zum großen Teile durch bloße Teilung der Nabe beseitigen, die durch das Einlegen schmiedeiserner Platten mit Lehm- oder Graphitüberzug in die Gußform erreicht wird. Die Teilungsfuge wird mit Zinkausguß gefüllt und die Nabe mit warm aufgezoogenen Schrupfringen zusammengehalten.

Die Fortschritte der Gießereitechnik machen es jedoch heute schon möglich, selbst große Räder aus einem Stück zu fertigen, ohne daß die Gußstücke durch die Gußspannungen gefährdet würden. Diesem Umstande ist es zuzuschreiben, daß die Konstruktion von Rädern, die aus mehreren Einzelteilen zusammengesetzt sind, gegenwärtig an Bedeutung verloren hat. Der Entfall jeglicher Einpassung und Verbindung macht die Ausführung nicht nur billiger, sondern auch zuverlässiger.

Das Rad wird zweckmäßig im Armmittel geteilt, zugunsten einer größeren Steifheit der Verbindung. Die Teilungsfuge im Kranze muß durch die Zahnücke hindurchgehen, um einer Zahnschwächung vorzubeugen.

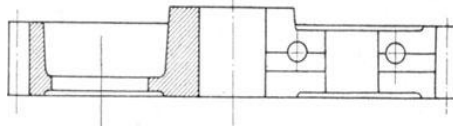
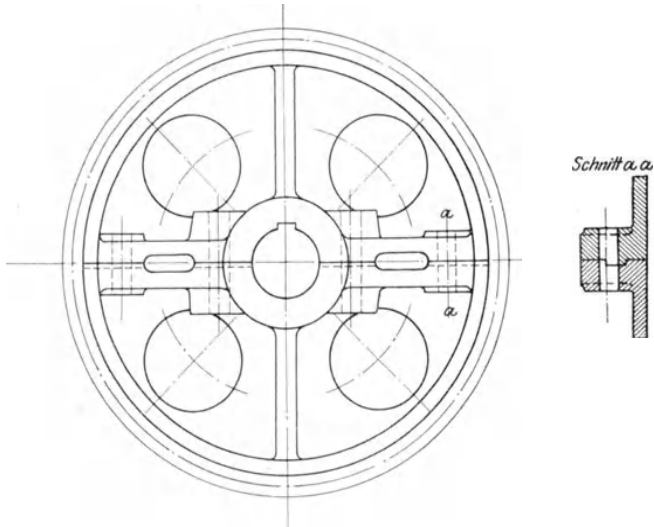


Fig. 106.

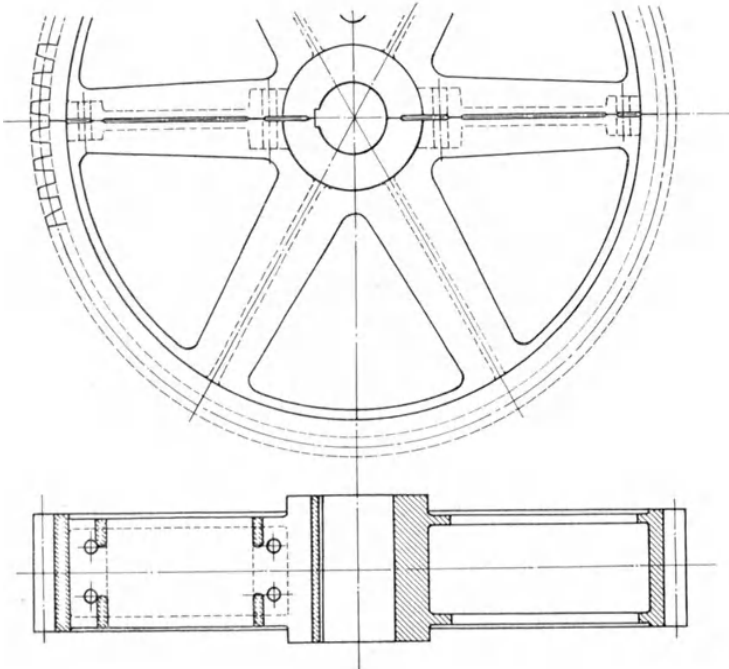


Fig. 107.

Werden die Radhälften einzeln gegossen, so wird eine Bearbeitung in den Auflagflächen notwendig; auch eine Verschneidung der beiden Hälften (Fig. 106) kann erfolgen. Einfacher und bei großen Rädern zweckmäßiger ist das Einformen

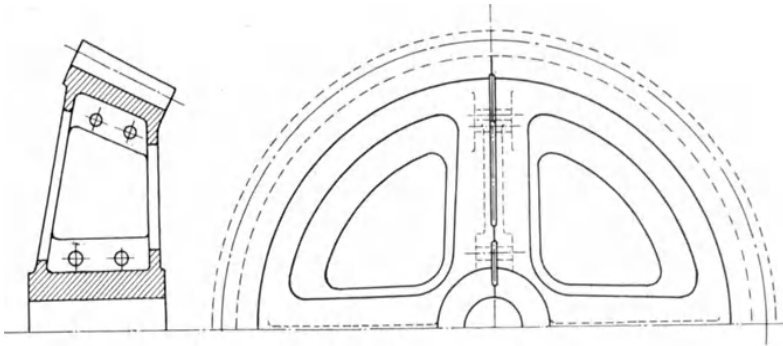


Fig. 108.

des Rades im vollen Stücke. Die Trennung wird durch Einlegen von schmiedeisernen Platten in die Gußform vorbereitet; man beschränkt den Zusammenhang der beiden Teile nur auf einige schmale Leisten, so daß das Aufsprengen leicht bewerkstelligt werden kann.

Die Verbindung der Radhälften erfolgt durch Schrauben (Fig. 107), die möglichst nahe an Kranz und Welle heranzudrängen sind; aus diesem Grunde werden die Kranzschrauben gewöhnlich beiderseits mit Muttern ausgestattet. Zu beiden Seiten der Schrauben sind Auflageleisten anzuordnen, um Durchbiegungen und unnötige Mehrbeanspruchungen hintanzuhalten. Bei großen Rädern sind Schrauben auch in die Armmittle einzulegen (Fig. 109). Ist im Radkörper kein Platz zum Unterbringen der Schrauben vorhanden, so verlegt man diese in die verlängerte Nabe (Fig. 110). Auch kann man die Muttern entfallen lassen und die eingeschraubten Verbindungsbolzen durch Querkeile festhalten (Fig. 111).

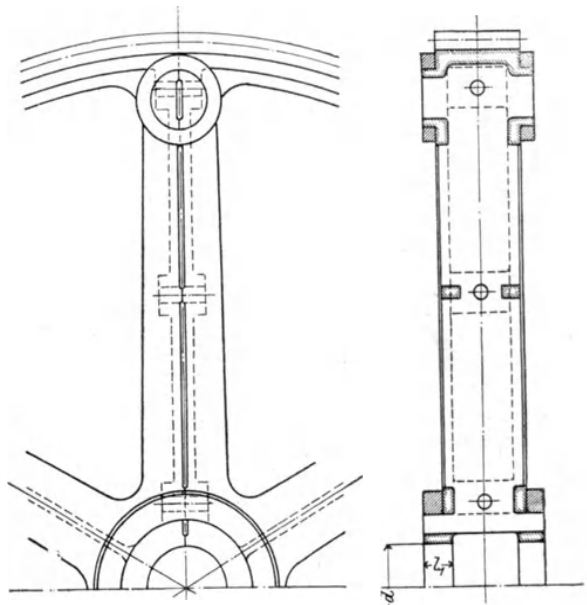


Fig. 109.

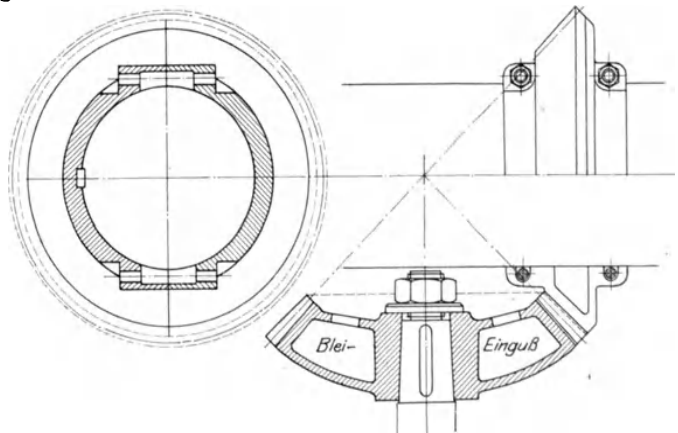


Fig. 110.

Eine besonders widerstandsfähige Verbindung erzielt man unter Belassung der Schrauben durch Aufziehen von Schrumpfringen auf angegossene Zapfen, die an den Seitenflächen des Rades heraustreten (Fig. 109). Die Verstärkung der Nabe durch zentrale Schrumpfringe setzt natürlich die Möglichkeit ihres Aufbringens voraus.

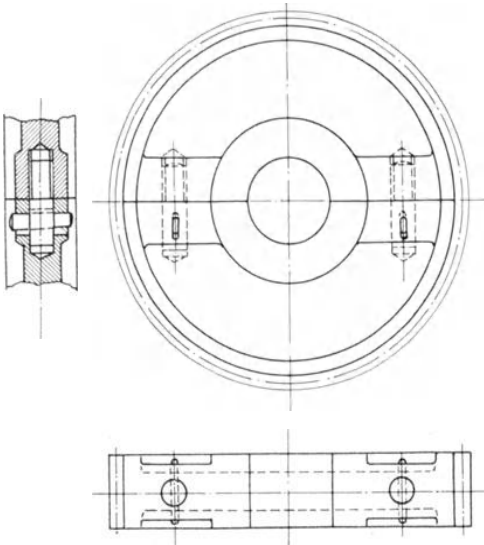


Fig. 111.

Ausführung von F. Stolzenberg & Co., Reinickendorf.

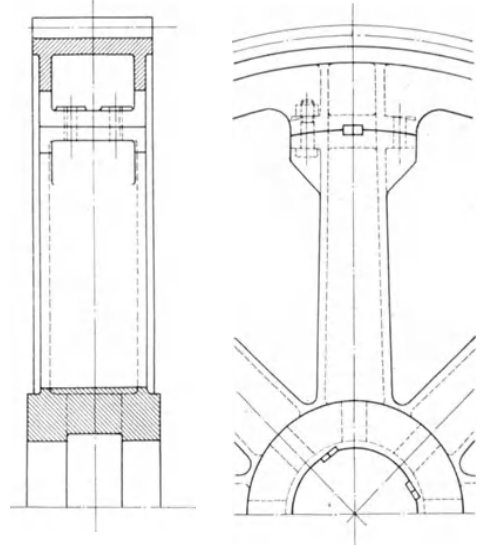


Fig. 112.

Die Teilung von großen Rädern in Kranz und Nabe mit Armstern (Fig. 112) verfolgt den Zweck, unter Beibehaltung des inneren gußeisernen Teiles die Festigkeit der Zähne durch Ausführung des Kranzes in Stahlguß zu erhöhen und auch die Gußschwierigkeiten herabzumindern. Kranz und Armstern werden in zylindrischer Fläche eingepaßt und durch Schrauben zusammengehalten. Der Tangentialschub wird durch das Einschlagen von je zwei mit dem Anzug gegeneinandergekehrten Keilen behoben.

XIII. Räder mit Holzzähnen.

Durch das Einsetzen von Holzzähnen (Kämme) in das eine Rad einer Paarung wird bei größeren Ausführungen der Lärm gedämpft, den das Aufschlagen der

metallischen Zahnflächen bei Unregelmäßigkeiten hervorruft. Nachdem die Holzzähne einer rascheren Abnützung ausgesetzt sind, ist in der Regel das größere Rad der Paarung mit Holzzähnen auszustatten. Zur Schonung der Kämme und Erzielung eines ruhigen

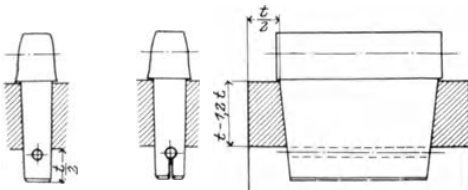


Fig. 113.

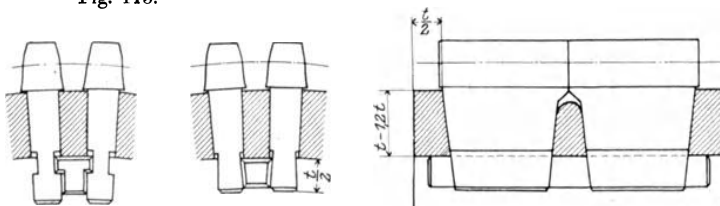


Fig. 114.

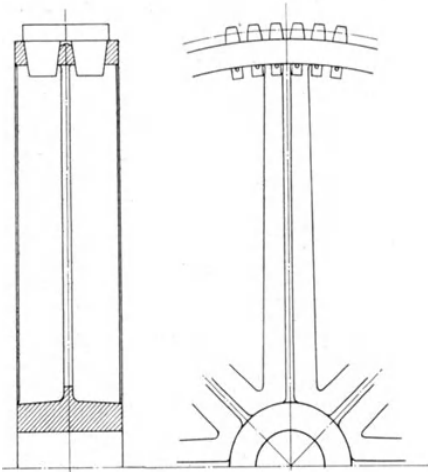


Fig. 115.

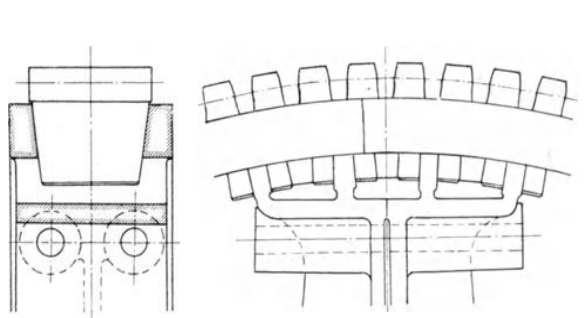


Fig. 116.

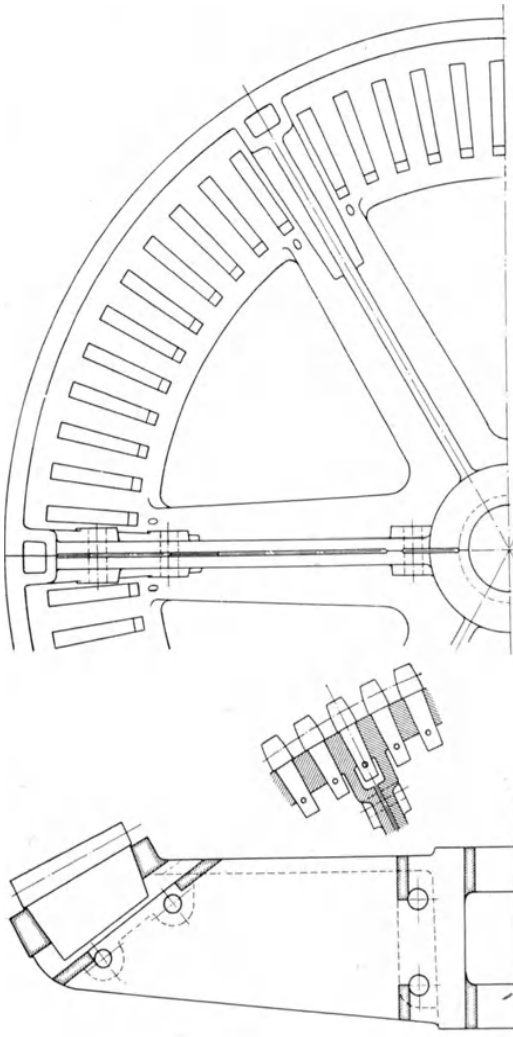


Fig. 117.

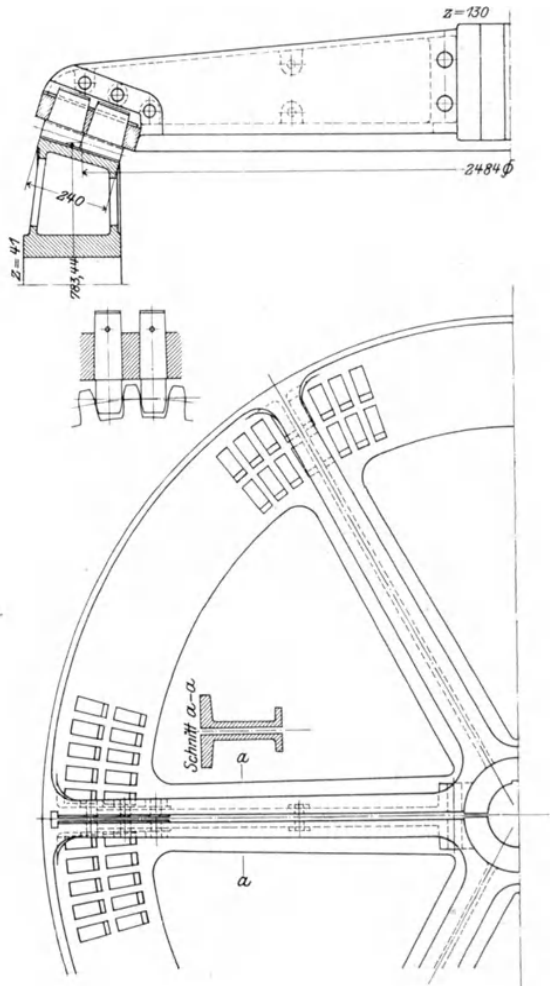


Fig. 118.

Ausführung der E. A. G. vorm. Kolben & Co., Prag.
 Kegelhäder für einen Turbinenbetrieb.
 100 PS normal bei 36 Umdr./min.
 220 PS max. " 60 " "

Ganges empfiehlt es sich, die eisernen Zähne des eingreifenden Rades zu bearbeiten.

Wegen der geringen Festigkeit des Holzes ist eine ungleiche Bemessung der Zahnstärken vorteilhaft, etwa $0,4t$ für den Eisenzahn und $0,6t$ für den Holzzahn unter Einhalten eines von der Genauigkeit der Herstellung abhängigen Flankenspielraums. Um bei vorgeschrittener Abnutzung das Stehenbleiben von Seitengraten am Holzzahne zu hindern, die zu Absplitterungen des Zahnes Veranlassung geben können, ist der Eisenzahn etwas breiter zu halten als der Holzzahn. Die

Kämme werden aus trockenem Weißbuchenholz so zugeschnitten, daß die Faserrichtung in die Zahnlänge fällt, um die Festigkeit besser auszunützen.

Die Stiele der Kämme mit den schwach geneigten Seitenflächen werden in die rechteckigen Löcher des Kranzes eingetrieben und der Halt mit Stiften (Fig. 113) oder Holz-

keilen (Fig. 114) an den um $\frac{t}{2}$ frei

heraustretenden Stielenden gesichert; mitunter kommen beide Sicherungen gleichzeitig zur Anwendung. Die Holzkämme werden in einer Breite von höchstens 200 mm ausgeführt; bei größeren Zahnbreiten werden 2 bis 3 Kämme nebeneinander eingesetzt (Fig. 114).

Eine genügend große Stielabstützung erreicht man bei einer Kranzstärke von t bis $\frac{5}{4}t$; der Seitenrand im Kranzquerschnitt wird in der Breite ungefähr mit $\frac{t}{2}$ bemessen.

Wegen der Sicherungen muß der Kranz an der Innenfläche glatt gehalten sein; eine innere Kranzversteifung bei Kegelrädern durch eine Umfangsrippe darf das Einbringen und Hinausschlagen der Sicherungen nicht hindern.

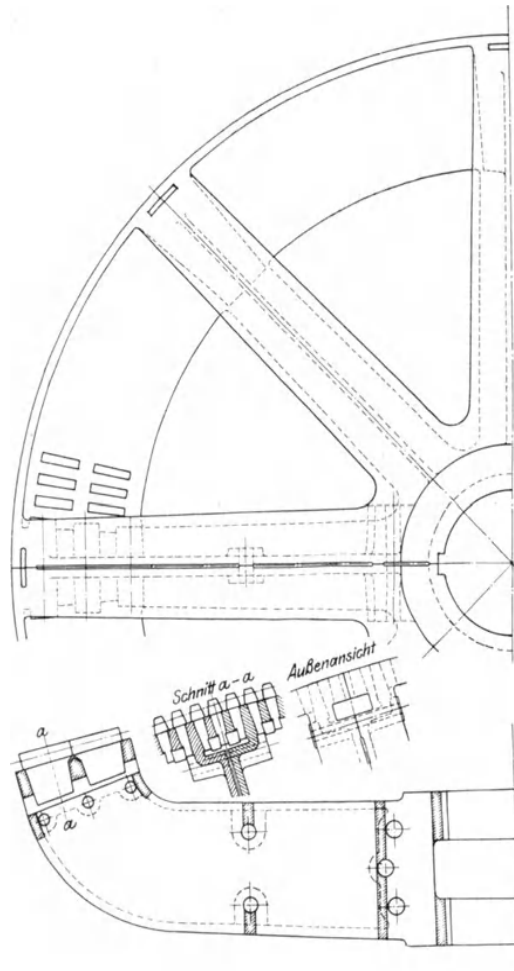


Fig. 119.

Um gleiche Armschlüsse zu erhalten, muß die Zahnzahl ein Vielfaches der Armzahl sein. Die Breitrippe des Armes läuft zwischen 2 Zähnen an den Radkranz an, während die senkrechten Rippen an die Seitenränder (Fig. 117) oder bei der Anordnung von geteilten Kämmen an den Mittelrand (Fig. 115) anschließen. Für das Durchbringen der Sicherungen sind Öffnungen in diesen Rippen vorzusehen. Die dadurch hervorgerufene Verschwächung des Armquerschnittes läßt sich durch eine Gabelung der Breitrippe beseitigen. Bei Stiftsicherung umschließt diese Gabelung einen Zahn (Fig. 117), bei Keilsicherung wegen des einzubringenden Keiles mindestens zwei Zähne (Fig. 116).

Bei geteilten Rädern wird die Teilungsfuge im Zahnkranz durch eine Ausnehmung, also auf Mitte Zahn hindurchgeführt. In den Fig. 116 bis 119 sind die Einzelheiten der konstruktiven Ausbildung geteilter Räder ersichtlich. Um mit den Verbindungsschrauben möglichst nahe an den Zahnkranz heranzukommen, werden mitunter an der Verbindungsstelle die vorstehenden Stielenden fortgelassen und die Sicherungstifte durch den Kranz hindurchgeschlagen.

XIV. Rohhauträder.

Um das Geräusch von Rädern, die mit hohen Umlaufzahlen laufen, abzumildern, wird der Radkranz des kleineren Rades aus einem weichen Material hergestellt. Von den zur Ausführung gekommenen Rädern aus Vulkanfaser, Papierstoff und Rohhaut haben sich die letzteren am besten bewährt. Rohhaut ist zwar

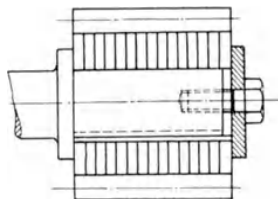


Fig. 120.

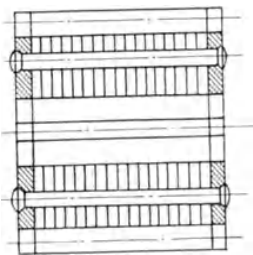


Fig. 121.

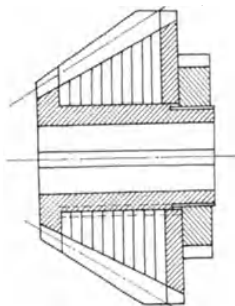


Fig. 122.

im Preise höher, bietet aber weniger Bearbeitungsschwierigkeiten und ist auch widerstandsfähiger und elastischer.

Die nach besonderen Verfahren imprägnierten Rohhautscheiben werden unter Einführung eines Bindemittels durch hohen Druck zu einem Körper vereinigt, aus dem das Rad herausgearbeitet wird. Die Zahnlücken werden erst nach erfolgter Armierung ausgefräst.

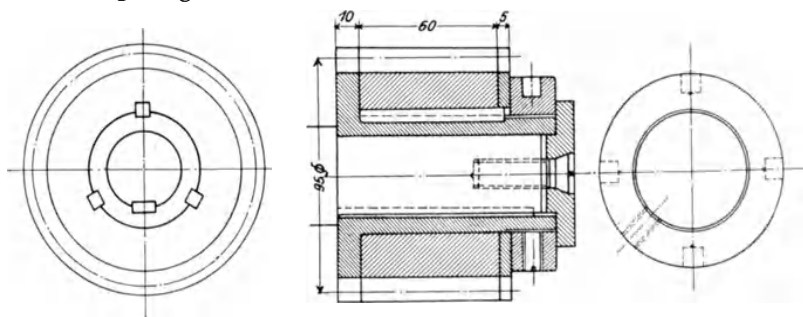


Fig. 123.

Ausführung der E. A. G. vorm. Kolben & Co., Prag.

$N = 6$ PS. $n = 540$. $z = 19$.

Kleine Rohhautritzeln können unmittelbar auf die Welle aufgesetzt werden (Fig. 120); die Mitnahme bewirkt eine eingelegte Feder, der axiale Halt erfolgt zwischen einem Bunde und einer aufgeschraubten Scheibe. Beide Einzelheiten sind unzureichend; die Ritzelnute weitet sich aus, der Rohhautkörper kann an den Seiten abblättern. Eine Abhilfe bietet das Einschließen des Radkörpers zwischen zwei Bronzescheiben durch Vernieten mit Kupferbolzen (Fig. 121). Diese Anordnung

ist insofern für wechselnde Drehrichtungen vorteilhaft, als sich die Seitenscheiben durch die Auflage an der Feder und in den Zähnen an der Kraftübertragung beteiligen.

Eine tadellose Befestigung an der Welle wird aber erst möglich durch die Ausführung einer Metallbüchse, auf die der Rohhautkörper unter Einlage einer Schluß-

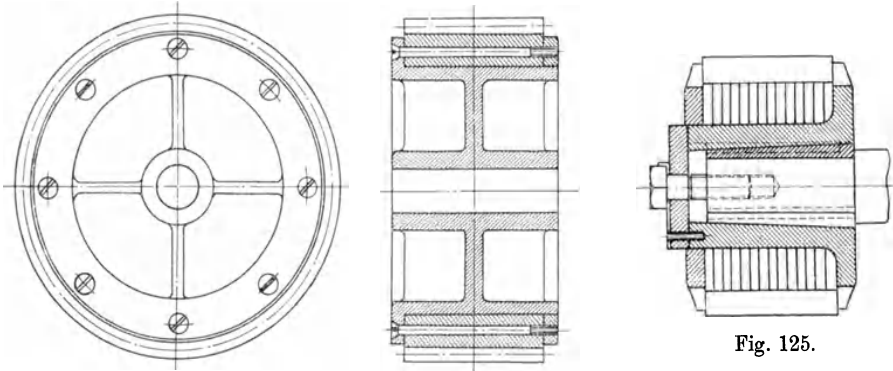


Fig. 124.

Ausführung von F. Stolzenberg & Co., Reinickendorf.
60 Zähne. 665 mm Teilkreisdurchm. 300 mm Zahnbreite.

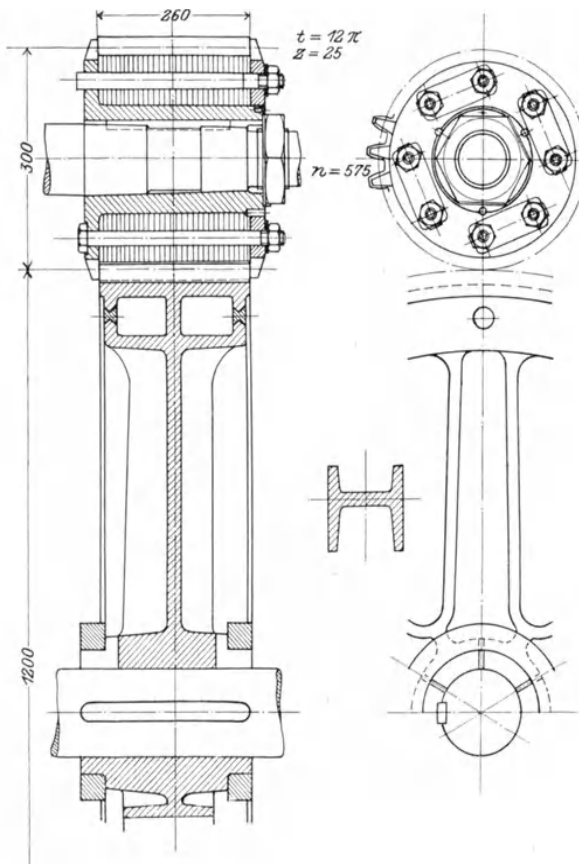


Fig. 126.

Ausführung der Allg. Elektr.-Gesellschaft, Berlin.
 $N = 75$ PS. Umfangsgeschw. = 9 m.

scheibe aus Schmiedeeisen, Stahl oder Rotguß mit einer Mutter (Fig. 122) oder mehreren durchgehenden Schrauben aufgeklemmt wird (Fig. 124). Eingelegte Federn oder versenkte

Kopfschrauben verbinden Schlußscheibe und Rohhautkörper mit der Büchse. Große Durchmesser erfordern die Ausbildung eines gußeisernen Radkörpers (Fig. 124). Eine sorgfältige konstruktive Durchbildung zeigen die Rohhauttriebe der Allgemeinen Elektrizitäts-Gesellschaft, Berlin (Fig. 125, 126). Die Büchse wird auf einem Konus befestigt, und der Rohhautkörper durch eingepaßte Bolzen mit den Seitenscheiben verbunden, die mit zurücktretenden Zähnen die Seitenflächen der Radzähne abstützen; alle Muttern sind gesichert.

Mit der Zähnezahl geht man nicht unter 12 und mit der Teilung nicht unter 3π herunter. Die größten Ausführungen reichen bis 800 mm Durchmesser; ihre Anschaffungskosten fallen hoch aus.

Für die Herstellung des in Fig. 124 abgebildeten Rohhautkörpers verbrauchte die Firma F. Stolzenberg & Co., Reinickendorf, 40 Rinderhäute.

Um dem Rohhautritzel eine längere Lebensdauer zu sichern, soll die Belastung nicht über $P = 6bt$ hinausgehen. Bei beschränkten Abmessungen, wie sie z. B. bei den Straßenbahnmotoren notwendig sind, finden sich Ausführungen bis $P = 16bt$ vor, doch sind diese einem raschen Verschleiß ausgesetzt. Für eine längere Erhaltung des Ritzels ist es geboten, die Zähne des eingreifenden Rades sauber auszuführen; roh gegossene Zähne nützen die Rohhaut außerordentlich rasch ab.

Rohhauträder müssen gegen Hitze und Nässe geschützt werden. Das Austrocknen führt zu einem Schrumpfen und Abreißen der einzelnen Lagen und die Nässe zu einem derartigen Aufquellen des Körpers, daß mitunter die Armatur gesprengt wird. Öfteres Reinigen und Eintränken mit Leinöl ist für die Erhaltung der Räder vorteilhaft. Falls eine Schmierung durchgeführt wird, empfiehlt sich hierzu ein Gemisch von Talg, Graphit und Harz, das die Haut auch gegen die schädlichen Einwirkungen der Feuchtigkeit schützt.

Bei elektromotorischen Antrieben haben die Rohhauträder einen großen Verwendungsbereich erlangt. Sorgfältige Ausführungen weisen bei Umlaufzahlen bis 1000 und Geschwindigkeiten bis 12 m noch einen befriedigend ruhigen Gang auf. Vom Standpunkte der Abnutzung sind die Rohhauttriebe verfehlte Konstruktionen, weil der an und für sich größere Verschleiß des Ritzels noch durch die Herstellung in weichem Material vermehrt wird. Diese große Abnutzung und die geringe Festigkeit nötigen ferner zur Ausführung größerer Durchmesser, wodurch wieder höhere Umfangsgeschwindigkeiten sich ergeben. Diese Umstände haben dazu geführt, daß neuestens für elektromotorische Antriebe Räder mit genau gefrästen Winkelzähnen in erfolgreichen Wettbewerb getreten sind.

XV. Die Triebstockverzahnung.

Bei der Triebstockverzahnung werden die Zähne des einen Rades durch zylindrische Bolzen ersetzt, deren Mittel im Teilkreise angeordnet sind (Fig. 127). Die Eingriffslinie des kreisförmigen Profils ergibt sich aus dem allgemeinen Verzahnungsgesetze. Steht der Bolzen z. B. in e_3 , so ist e_3C die Profilmnormale der Eingriffsstelle E . Man erhält somit durch Abschneiden des Bolzenradius auf den Kreissehnen die einzelnen Punkte der Eingriffslinie. Sie liegt im eingriffsfähigen Teil der Hauptsache nach auf einer Seite der Zentralen und reicht nur mit einem kleinen Stückchen CA über diese hinaus. Der weitere Verlauf kommt für den Eingriff nicht mehr in Betracht, da sich die Eingriffslinie vom Radmittelpunkt O_1 entfernt.

Die Konstruktion des eingreifenden Zahnprofils erfolgt entweder durch Zurückführen der Eingriffspunkte in den zugehörigen Bögen $e_3\widehat{C} = \widehat{C}O_1$, oder durch Abrollen des Triebstockrades auf dem Teilkreise des eingreifenden Rades, wobei der Bolzenmittelpunkt eine Epizykloide beschreibt und die einzelnen Bolzenkonturen das Profil einhüllen. Der Fuß der Zahnücke wird durch einen Halbkreis begrenzt und die Kopfhöhe so groß bemessen, daß der Eingriffsbogen größer als die Teilung wird.

Wegen des kurzen Eingriffs und der raschen Abnutzung der Bolzen bleibt die Anwendung dieser Verzahnung nur auf untergeordnete Fälle beschränkt. Belieb ist sie bei den Zahnstangen der Schützensaufzüge (Fig. 128) zufolge ihrer Einfachheit und der kräftigen Ausgestaltung der Zahnstange, bestehend aus zwei Flacheisen mit eingeneteten Bolzen. Bei der Zahnstange beginnt der Eingriff genau im

Zentralpunkte C , die eingreifenden Zahnprofile sind Evolventen. Die kleinste ausführbare Zähnezahzahl ist 8 bei der üblichen Bolzenstärke

$$d = \frac{19}{40} t.$$

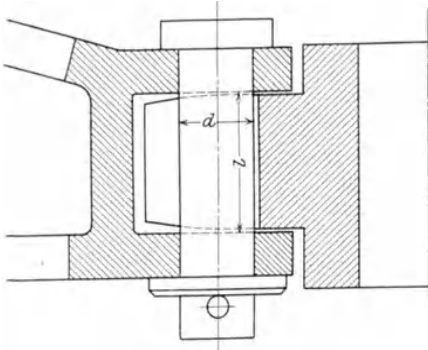


Fig. 127.

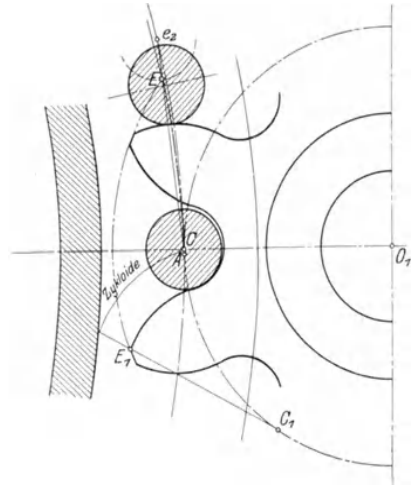
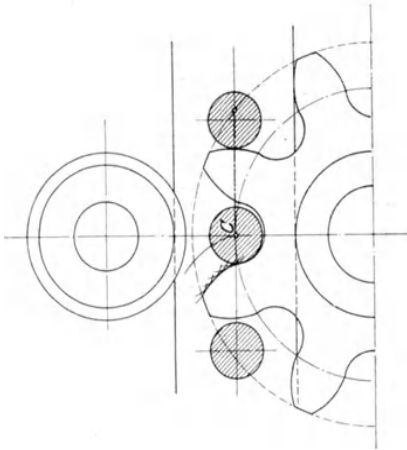


Fig. 128.



Die Länge l der auf Biegung beanspruchten Bolzen wird zweckmäßig bemessen mit

$$l = 3,6 d \text{ bei gußeisernen Zähnen,}$$

$$l = 1,8 d \text{ bei schmiedeeisernen und Stahlgußzähnen.}$$

XVI. Das Grissongetriebe.

Aus dem Bestreben, Getriebe mit hohen Übersetzungen zu schaffen, ist ein besonderer Fall der Triebstockverzahnung, das nach seinem Erfinder benannte Grissongetriebe (D. R. P.) hervorgegangen. Die denkbar kleinste Zähnezahzahl von eins kommt hier zur Ausführung; die beiden Flanken des eines Zahnes umspannen den ganzen Radumfang, das kleine Rad wird zum Daumen. Nachdem aber mit einem Daumen nicht die erforderliche Eingriffslänge zu erreichen ist, müssen im gleichen Radkörper zwei Verzahnungen nebeneinander angeordnet werden, die um die halbe Teilung zu versetzen sind. Es ist deshalb das Daumenrad mit zwei um 180° versetzten Daumen ausgestattet (Fig. 129).

Die nachteilige einseitige Abnutzung der festen Bolzen bei der Triebstockverzahnung ist durch die Anordnung von Rollen umgangen. Diese sitzen frei

drehbar auf Bolzen, die in den 3 Scheiben des gußeisernen Rollenrades befestigt sind. Im Eingriff werden die Rollen durch die Reibung in Drehung versetzt, wodurch das Abgleiten des Daumens auf einem längeren Rollenumfang erfolgt. Dieser Umstand sichert dem Getriebe bei guter Schmierung von Bolzen- und Zahnflächen einen höheren Wirkungsgrad.

Die günstigsten Verzahnungsverhältnisse werden erreicht, sobald die Rollenumfänge tangierend an den Teilkreis gelegt werden. In einer Stellung e der Rolle kommt der auf der Geraden eC liegende Punkt E des Rollenumfangs zum Eingriff (Fig. 130). Die Rückführung der Profilnormalen EC nach E_1C_1 um den Teilkreisbogen $\widehat{CC_1} = \widehat{C_2C}$ ergibt den in E zum Eingriff gelangenden Punkt E_1 des Daumens. Im Zentralpunkt C beginnend, hält sich die Eingriffslinie des treibenden Daumenprofils nur auf einer Seite der Zentralen; auf der anderen Seite er-

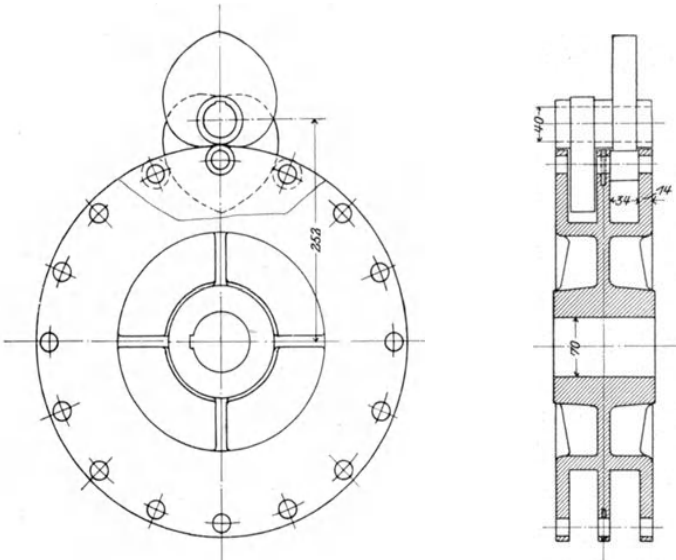


Fig. 129.

Ausführung der E. A. G. vorm. Kolben & Co., Prag.
12 PS. 950 Umdr./min.

reicht man eine spielfreie Auflage des Gegenprofils auf der Rolle durch symmetrische Ausgestaltung der Daumenkontur.

In den Eingriffsstellungen unmittelbar neben der Zentralen weicht der Zahndruck stark von der tangentiellen Richtung ab. Es empfiehlt sich, diese Zone des ungünstigen Eingriffs dadurch auszuschalten, daß die Daumenkontur in der Nähe des Punktes C etwas zurückgesetzt wird. Doch darf das Eingriffsgebiet nur so weit geschmälert werden, daß ein Eingriffsbogen größer als die halbe Teilung verbleibt.

Mit der Größe des Rollendurchmessers verschlimmert sich die Schrägstellung des Zahndruckes in der ungünstigen Eingriffszone an der Zentralen. Da außerdem noch die Daumenlänge und Eingriffsdauer sich verringern, ist das Maß der Rolle möglichst klein zu halten. Bestimmend hierfür sind die Abmessungen der Stahlbolzen, die mit einer Biegungsbeanspruchung von 600 kg/cm^2 und einer Flächenpressung

$$k = \frac{P}{d \cdot l}$$

von höchstens 80 kg/cm^2 bei höheren Umlaufzahlen belastet werden können. Die Firma Grisson & Co. bemißt den Rollenkreis derart, daß die Sehne im Zentri-

winkel von 90° um den Betrag von 2 mm außerhalb der Bolzenkontur verbleibt (Fig. 131).

Zur Verminderung der Achsenentfernung ist das Daumenrad möglichst klein zu halten; man läßt den Daumenteilkreis mit dem Nabenkreis zusammenfallen. Die Welle wird beiderseitig gelagert und auf Torsion ungefähr mit 100 bis 200 kg/cm² (abnehmend mit höherer Umlaufzahl) beansprucht. Die aus Stahl geschmiedeten Daumenräder zeigen in den Ausführungen eine Nabenstärke s von nur

$$s = \frac{d_1}{20} + 6 \text{ mm.}$$

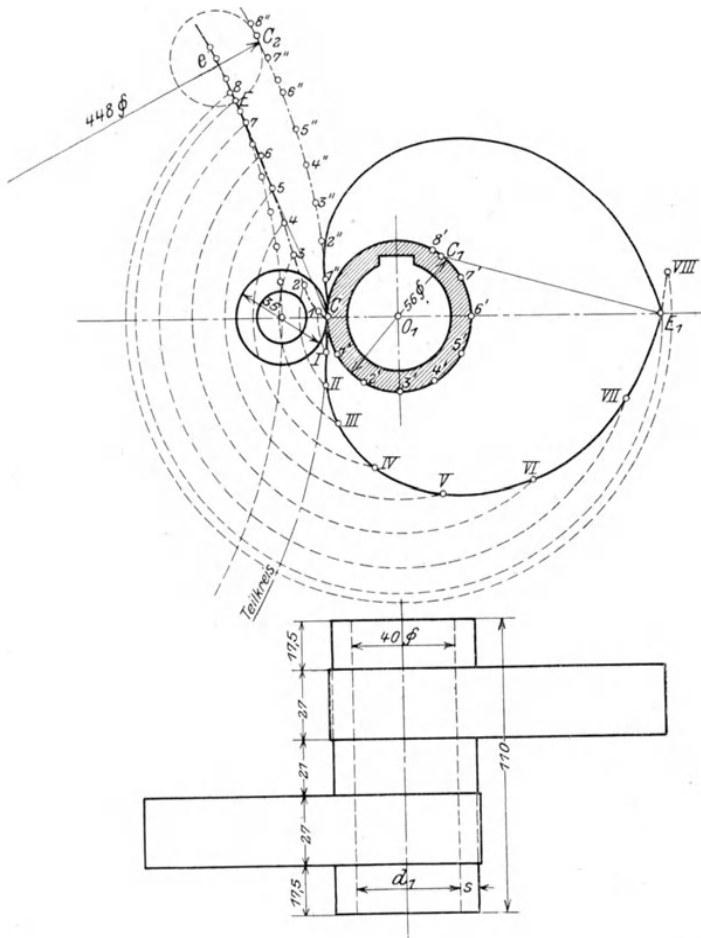


Fig. 130.

Übersetzung 1 : 8.

Um die Abnutzung zu verringern, werden Daumen, Rollen und Bolzen an der Lauffläche gehärtet. Bei Überlastungen stellen sich bald seitliche Grate auf den Daumen ein, die etwas schmaler als die Rollen sind. Roser¹⁾ fand aus einer Reihe von Versuchen, daß diese Erscheinung bei einer Belastung eintritt von

$$Pn = 274000.$$

¹⁾ E. Roser, „Untersuchung des Grissongetriebes“. Stuttgart 1901.

Das Produkt aus Umfangskraft und Umdrehungszahl der Daumenwelle soll daher nach Bach für Ausführungen mit Dauerbetrieb den Wert von 200000 nicht übersteigen.

Besondere Sorgfalt muß der Lagerung und der Schmierung zugewendet werden. Getriebe für Umfangsgeschwindigkeiten über 1 m werden in eigene Kästen eingebaut, die eine Ölfüllung erhalten. Fig. 132 zeigt ein gußeisernes Gehäuse, das an den Seitenwänden 4 Ringschmierlager aufnimmt. Der obere Teil ist durch eine Blechklappe abgeschlossen. Die Drehrichtung des Getriebes ist zweckmäßig derart zu wählen, daß der Lagerdruck der Daumenwelle gegen den Lagerfuß gerichtet ist.

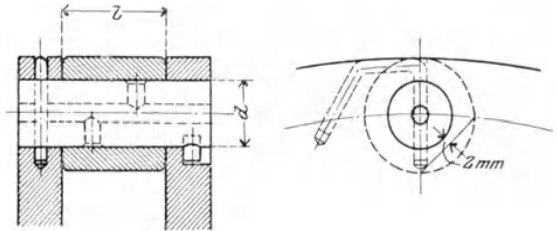


Fig. 131.

Das Öl tritt in einer durchgehenden axialen Bohrung und 2 radialen Löchern zur Bolzenlauf­fläche (Fig. 131); Spiralnuten in der inneren Rollenlauf­fläche erwiesen sich als wenig wirkungsvoll. Die Bolzen, die durch Stifte an der Drehung

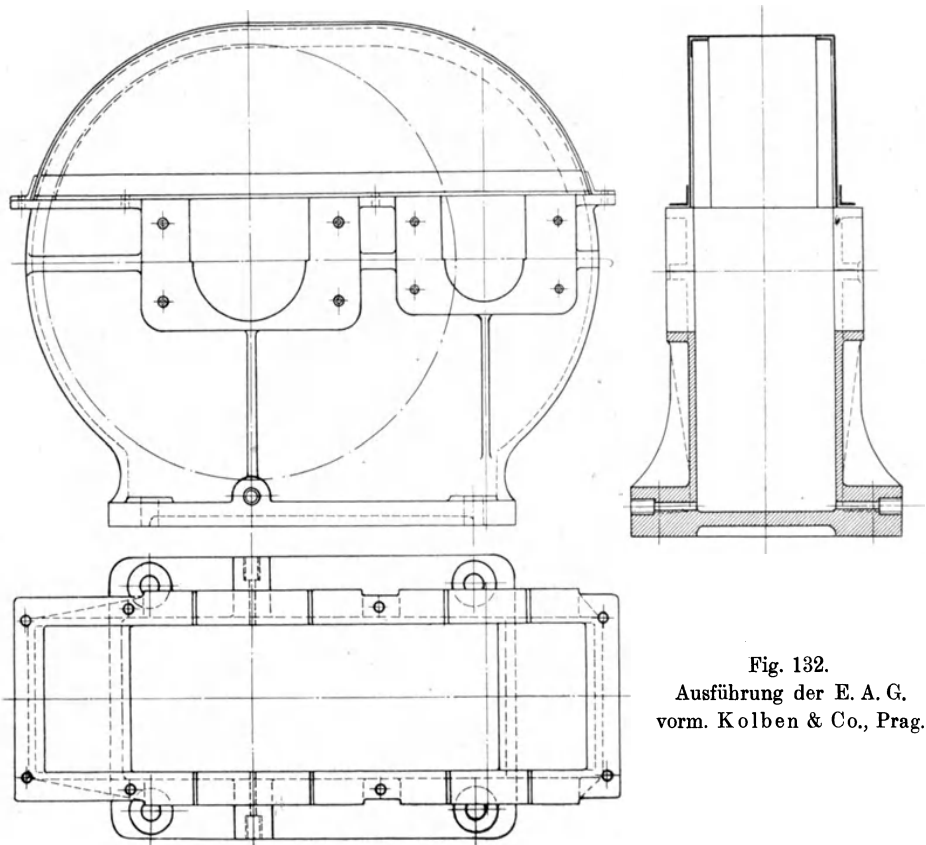


Fig. 132.

Ausführung der E. A. G.
vorm. Kolben & Co., Prag.

gehindert sind, werden mit einer besonderen Splintsicherung (D.R.P.) in der Mittelscheibe festgehalten. Beim Herausnehmen des Bolzens schlägt man den Splint durch und zieht die beiden Teile heraus.

Die Grissongetriebe werden in Übersetzungen von 1:5 bis 1:50 geliefert. Die Übersetzung kann ins Langsame oder ins Schnelle erfolgen. Letztere Ausführung zeigt ein ungünstigeres Verhalten, da hier die ruhende Rolle den Eingriff mit dem größten Wert der Gleitgeschwindigkeit an der Daumenspitze beginnt, während bei der Übersetzung ins Langsame sich mit dem Wachsen der Gleitgeschwindigkeit von Null aus auch die Drehbewegung der Rolle beschleunigt.

Durch eingehende Versuche von Bach¹⁾ und Roser wurde die Größe und die Abhängigkeit des Wirkungsgrades festgestellt. Er ist günstiger bei kleineren Rollendurchmessern; der Grund dafür ist in den vorteilhafteren Eingriffsverhältnissen zu suchen. Bei gleicher Umdrehungszahl steigt der Wirkungsgrad mit zunehmender Belastung bis zu einer bestimmten Grenze, über die hinaus er abnimmt. Die Steigerung der Umdrehungszahl bei unverändertem Umfangsdrucke verursacht ein Herabgehen des Wirkungsgrades. Bei der Übersetzung ins Langsame schwankt der Wirkungsgrad zwischen 0,85 bis 0,95, in welchen Wert die Reibungsverluste der 4 Lager von Daumen- und Rollenradwelle einbezogen sind. Ausgesprochen kleiner, und zwar in Werten von 0,70 bis 0,90 ist er für Triebe, die ins Schnelle übersetzen.

Bei den Grissongetrieben wird von den sonst als zulässig angesehenen Verhältnissen hinsichtlich Zahnausbildung und Eingriff weit abgegangen; die Folge davon ist notwendigerweise eine große Empfindlichkeit dieser Triebe. Geringfügige Fehler in der Ausführung und Aufstellung, die sonst bei normalen Rädern nahezu belanglos sind, ergeben bereits solche Anstände, daß der Betrieb in Frage gestellt wird. Nur bei peinlich genauer Herstellung und sachgemäßem Einbau in einem besonderen Ölgehäuse läßt sich für höhere Geschwindigkeiten ein ruhiger Gang dieser Triebe erzielen. Ihre Anwendung als Ersatz für mehrere Stirnräder-vorgelege und die kraftverzehrenden Schneckentriebe ist in der letzten Zeit durch die Entwicklung der Räder mit gefrästen Winkelzähnen zurückgedrängt worden, mit denen sich ebenfalls große Übersetzungen und hohe Wirkungsgrade erreichen lassen.

¹⁾ Bach, „Maschinenelemente“.

Einzelkonstruktionen aus dem Maschinenbau. Herausgegeben von
Ing. C. Volk, Berlin.

Erstes Heft: **Die Zylinder ortsfester Dampfmaschinen.** Von H. Frey, Berlin.
Mit 109 Textfiguren. 1911. Preis M. 2,40.

Zweites Heft: **Kolben.** I. Dampfmaschinen- und Gebläsekolben. Von C. Volk,
Berlin. II. Gasmaschinen- und Pumpenkolben. Von A. Eckardt, Deutz. Mit
247 Textfiguren. 1911. Preis M. 4,—.

Viertes Heft: **Kugellager.** Von Ing. W. Ahrens, Winterthur. Mit 134 Text-
figuren. 1913. Preis M. 4,40.

Fünftes Heft: **Zahnräder.** II. Teil. Räder mit schrägen Zähnen. Von Prof. Dr.
A. Schiebel, Prag. Zweite Auflage. Mit etwa 116 Textfiguren. In Vorbereitung

Sechstes Heft: **Schubstangen und Kreuzköpfe.** Von Oberingenieur H. Frey, Berlin.
Mit 117 Textfiguren. 1913. Preis M. 1,60.

Das Maschinenzeichnen des Konstrukteurs. Von Ing. C. Volk, Berlin.
Mit 214 Abbildungen. 1921. Preis M. 15,—.

Das Skizzieren von Maschinenteilen in Perspektive. Von Ingenieur
C. Volk, Direktor der Benth-Schule, Privatdozent an der Technischen Hochschule
Berlin. Vierte, erweiterte Auflage. Zweiter Abdruck. Mit 72 in den Text ge-
druckten Skizzen. 1919. Preis M. 2,80.

Entwerfen und Herstellen. Eine Anleitung zum graphischen Berechnen der
Bearbeitungszeit von Maschinenteilen. Von Ing. C. Volk. Zweite Auflage.
In Vorbereitung.

Der praktische Maschinenzeichner. Leitfaden für die Ausführung moderner
maschinentechnischer Zeichnungen. Von W. Apel und A. Fröhlich, Konstruktions-
Ingenieure. Mit 96 Figuren. 1921. Preis M. 7,20.

Freies Skizzieren ohne und nach Modell für Maschinenbauer.
Ein Lehr- und Aufgabenbuch für den Unterricht. Von K. Keiser, Oberlehrer an
der Städtischen Maschinenbau- und Gewerbeschule in Leipzig. Dritte, erweiterte
Auflage. Mit 22 Einzelfiguren und 24 Figurengruppen. 1921. Preis M. 10,—.

Das Maschinen-Zeichnen. Begründung und Veranschaulichung der sachlich not-
wendigen zeichnerischen Darstellungen und ihres Zusammenhanges mit der prak-
tischen Ausführung. Von A. Riedler, Professor an der Technischen Hochschule
in Berlin. Zweite, neubearbeitete Auflage. Mit 436 Textfiguren. Unveränderter
Neudruck. 1919. Gebunden Preis M. 20,—.

Die Grundzüge der Werkzeugmaschinen und der Metallbearbeitung. Von Prof. Fr. W. Hülle, Dortmund.

Erster Band: Der Bau der Werkzeugmaschinen. Dritte, vermehrte Auflage.
Mit 240 Textabbildungen. 1921. Preis M. 27,—.

Zweiter Band, Die wirtschaftliche Ausnutzung der Werkzeugmaschinen in der
Metallbearbeitung. In Vorbereitung.

Die Werkzeugmaschinen, ihre neuzeitliche Durchbildung für wirtschaftliche
Metallbearbeitung. Ein Lehrbuch. Von Prof. Fr. W. Hülle, Oberlehrer an den
Staatl. vereinigten Maschinenbauschulen in Dortmund. Vierte, verbesserte Auf-
lage. Mit 1020 Abbildungen im Text und auf Textblättern, sowie 15 Tafeln.
Unveränderter Neudruck. 1920. Gebunden Preis M. 102,—.

Werkstattstechnik. Zeitschrift für Fabrikbetrieb und Herstellungsverfahren.
Herausgegeben von Professor Dr.-Ing. G. Schlesinger, Charlottenburg. Jährlich
24 Hefte. Vierteljährlich Preis M. 15,—.

Werkstattbücher. Für Betriebsbeamte, Vor- und Facharbeiter. Herausgegeben
von Eugen Simon, Berlin.

Heft 1. Gewindeschneiden. Von Oberingenieur Otto Müller. Mit 151 Text-
figuren. 1921. Preis M. 5,—

Heft 2. Meßtechnik. Von Betriebsingenieur Privatdozent Dr. Max Kurrein, Berlin.
Mit 143 Textfiguren. 1921. Preis M. 6,—.

Heft 3. Das Anreißen in Maschinenbau-Werkstätten. Von Ingenieur H. Frangen-
heim. Mit 105 Textfiguren. 1921. Preis M. 6,—.

Heft 4. Wechselräderberechnung für Drehbänke unter Berücksichtigung der
schwierigen Steigungen. Von Georg Knappe. Mit 13 Textfiguren und 6 Zahlen-
tafeln. 1921. Preis M. 7,—.

Heft 5. Das Schleifen der Metalle. Von Dr.-Ing. B. Buxbaum. Mit 71 Text-
figuren. 1921. Preis M. 6,60.

Heft 6. Teilkopfarbeiten. Von Dr.-Ing. W. Pockrandt. Mit 23 Textfiguren.
1921. Preis M. 6,—.

Heft 7. Härten und Vergüten. Teil I: Stahl und sein Verhalten. Von
Eugen Simon. Mit 52 Figuren und 6 Zahlentafeln im Text. 1921.
Preis M. 7,—.

Heft 8. Härten und Vergüten. Teil II: Die Praxis der Warmbehandlung.
Von Eugen Simon. Mit 92 Figuren und 10 Zahlentafeln im Text. 1921.
Preis M. 6,60.

Weitere Hefte befinden sich in Vorbereitung bezw. unter der Presse.
