

## Bezugsbedingungen:

Preis des Heftes 1 bis 112 je 1 Mk,

zu beziehen durch Julius Springer, Berlin W. 9, Linkstr. 23/24;

**für Lehrer und Schüler technischer Schulen 50 Pfg,**

zu beziehen gegen Voreinsendung des Betrages vom Verein deutscher Ingenieure, Berlin N.W. 7, Charlottenstraße 43.

Von Heft 113 an sind die Preise entsprechend auf 2 *M* und 1 *M* erhöht.

Eine Zusammenstellung des Inhaltes der Hefte 1 bis 124 der Mitteilungen über Forschungsarbeiten zugleich mit einem Namen- und Sachverzeichnis wird auf Wunsch kostenfrei von der Redaktion der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, Berlin N.W., Charlottenstr. 43, abgegeben.

**Heft 125: Wild,** Die Ursache der zusätzlichen Eisenverluste in umlaufenden glatten Ringankern. Beitrag zur Frage der drehenden Hysterese.

**Heft 126: Preuß,** Versuche über die Spannungsverminderung durch die Ausrundung scharfer Ecken.

**Preuß,** Versuche über die Spannungsverteilung in Kranhaken.

**Preuß,** Versuche über die Spannungsverteilung in gelochten Zugstäben.

### Literarische Unternehmungen d. Vereines deutscher Ingenieure:

# ZEITSCHRIFT DES VEREINES DEUTSCHER INGENIEURE.

Redakteur: D. Meyer.

Berlin N.W., Charlottenstraße 43

Geschäftstunden 9 bis 4 Uhr.

Expedition und Kommissionsverlag: Julius Springer, Berlin W., Linkstr. 23/24.

Die Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure erscheint wöchentlich Sonnabends. Je einmal im Monat liegt ihr die Zeitschrift „Technik und Wirtschaft“ bei. Preis bei Bezug durch Buchhandel und Post 40 *M* jährlich; einzelne Nummern werden gegen Einsendung von je 1.30 *M* — nach dem Ausland von je 1.60 *M* — portofrei geliefert.

#### Anzeigen:

Das Millimeter Höhe einer Spalte kostet 25 Pf. Bei 6, 13, 26, 52 maliger Wiederholung im Laufe eines Jahres: 10, 20, 30, 40 vH Nachlaß. Für Stellengesuche von Vereinsmitgliedern, die unmittelbar bei der Annahmestelle, Linkstraße 23/24 aufgegeben und vorausbezahlt werden, kostet das Millimeter Höhe einer Spalte nur 12 Pf.

#### Beilagen:

Preis und erforderliche Anzahl sind unter Einsendung eines Musters bei der Expedition zu erfragen. Die Beilagen sind frei Berlin zu liefern.

Den Einsendern von Ziffer-Anzeigen wird für Annahme und freie Zusendung einlaufender Angebote mindestens 1 *M* berechnet. Schluß der Anzeigen-Annahme: Montag Vorm.; für Stellengesuche: Montag Abend 7 Uhr.

## TECHNIK UND WIRTSCHAFT.

MONATSSCHRIFT DES VEREINES DEUTSCHER INGENIEURE.

REDAKTEUR D. MEYER.

IN KOMMISSION BEI JULIUS SPRINGER BERLIN.

Die »Technik und Wirtschaft« liegt der ganzen Auflage der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure (Preis des Jahrgangs 40 *M*) allmonatlich bei. Sie ist außerdem für 8 *M* für den Jahrgang durch alle Buchhandlungen und Postanstalten sowie durch die Verlagsbuchhandlung von Julius Springer zu beziehen.

**Anzeigen:** Die ganze Seite 100 *M*,  $\frac{1}{2}$  Seite 50 *M*,  $\frac{1}{4}$  Seite 25 *M*,  $\frac{1}{8}$  Seite 12,50 *M*. Ein kleinerer Raum als  $\frac{1}{8}$  Seite wird nicht abgegeben. Bei 3 6 12 maliger Wiederholung im Jahre. **Beilagen:** Preis und erforderliche Anzahl sind unter Einsendung eines Musters bei der Verlagsbuchhandlung von Julius Springer zu erfragen. Auflage des Blattes 27 000.

**Mitteilungen**  
über  
**Forschungsarbeiten**

auf dem Gebiete des Ingenieurwesens

insbesondere aus den Laboratorien  
der technischen Hochschulen

herausgegeben vom

**Verein deutscher Ingenieure.**

**Heft 127 und 128.**



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

ISBN 978-3-662-01954-2

ISBN 978-3-662-02250-4 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-662-02250-4

# Inhalt.

---

Biegungsversuche mit gußeisernen Stäben. Von Rudolf Schöttler . . . . .	Seite 1
---	------------

---

# Biegungsversuche mit gußeisernen Stäben.

Von **Rudolf Schöttler.**

## Einleitung.

Vor mehr als zwanzig Jahren veröffentlichte Herr v. Bach einen Aufsatz »Die Biegungslehre und das Gußeisen«<sup>1)</sup>, in welchem er eine größere Anzahl von Versuchsergebnissen mitteilte, aus denen hervorgeht, daß die Biegungsfestigkeit  $B$  des Gußeisens viel größer ist als seine Zugfestigkeit  $Z$ , während die Biegungstheorie davon ausgeht, daß beide gleich sind. Als Biegungsfestigkeit ist der Wert  $B = M : \frac{J}{e}$  anzusehen, welcher erhalten wird, wenn das Kraftmoment  $M$  den Bruch veranlaßt.

Bach zeigte, daß das Verhältnis  $B : Z$  von der Querschnittform des zerbrochenen Stabes abhängig und um so größer ist, je näher die Flächenelemente des Querschnitts der Nulllinie liegen. Er fand z. B. für den Kreis den Wert  $\infty 2$  und für das **I** den Wert  $\infty 1,5$ .

Weiterhin schloß er, daß man bei Wahl der zulässigen Biegungsbeanspruchung dieser Erscheinung Rechnung tragen könne, und schlug in dem späteren Aufsätze »Zur Biegungsfestigkeit des Gußeisens«<sup>2)</sup> vor, als solche

$$k_b = \alpha \sqrt{\frac{e}{z_0}} k_z$$

zu nehmen. In dieser Formel bedeutet

$k_z$  die als zulässig erkannte Zugspannung,

$e$  die Entfernung der äußersten Zugfaser von der Nullachse,

$z_0$  die Entfernung des Schwerpunktes der Querschnittfläche auf der Zugseite der Nullachse von dieser,

$\alpha$  einen Zahlenwert, der für Querschnitte, die von zur Nullachse parallelen Linien begrenzt werden, =  $\frac{6}{5}$  bis  $\frac{5}{4}$ , für Kreis und übereck stehendes Quadrat =  $\frac{4}{3}$  ist.

Bach maß ferner mit den bekannten Bauschingerschen Geräten in der Werder-Maschine die Durchbiegungen, welche die an beiden Enden gestützten und in der Mitte gelagerten Stäbe bei verschiedenen Belastungen erlitten, und berechnete aus diesen den Elastizitätsmodul. Er fand, daß dieser nicht, wie die Biegungslehre voraussetzt, unveränderlich ist, sondern daß er mit wachsender

<sup>1)</sup> Z. d. v. d. I. 1888 S. 193, 221.

<sup>2)</sup> Z. d. v. d. I. 1888 S. 1089.

Belastung stark abnimmt. War z. B. für die Spannungsgrenzen 60 bis 185 kg/qcm  $E = 1016$  t/qcm, so entsprach den Spannungsgrenzen 740 bis 920 kg/qcm  $E = 807$  t/qcm. Die früher von Bauschinger und Tetmajer festgestellte Tatsache, daß der aus Zugversuchen gefundene Elastizitätsmodul immer größer ist, als der aus Biegungsversuchen berechnete, erklärt er durch den Einfluß der Schubkraft, die von beiden vernachlässigt wurde, und der um so bedeutender wird, je größer das Verhältnis der Querschnittshöhe zur Stützweite ist; ferner aus dem Einflusse der Auflagerreibung.

Die Bachsche Regel findet sich noch in der fünften Auflage seiner Festigkeitslehre von 1905. Jedoch erläutert Bach hier die Spannungsverteilung über den Querschnitt und folgert, daß die im gebogenen Stab im Augenblicke des Bruches wirklich auftretende Zugspannung nicht wesentlich größer ist, als bei dem unmittelbaren Zugversuche. Damit wird also die größere Bruchfestigkeit als gar nicht wirklich vorhanden, sondern nur als eine Folgerung aus einer unrichtigen Annahme über die Spannungsverteilung hingestellt. Ich hebe das scharf hervor, weil die Nichtbeachtung der letzteren Ausführung zu Mißverständnissen führen kann und geführt hat. Würde also z. B. für eine bestimmte Querschnittform und eine bestimmte Gußeisensorte das Verhältnis  $B:Z = 1,5$  sein und das Gußeisen bei der Spannung 1200 kg/qcm reißen, so wäre der Bruch bei Beanspruchung auf Biegung durch das Kraftmoment  $M = 1,5 \cdot 1200 \frac{J}{e}$  zu erwarten, nicht aber würde behauptet, daß in der Zugfaser des gebogenen Stabes die Spannung 1800 kg/qcm eingetreten sei.

Die Bachschen Untersuchungen haben Veranlassung zu einigen anderen Arbeiten gegeben.

Die erste ist von Ludwik<sup>1)</sup> und beschäftigt sich mit der Untersuchung gekrümmter Stäbe. Ludwik beweist, daß die Bruchspannung bei der Beanspruchung auf Biegung dieselbe ist, wie die Bruchspannung bei der Beanspruchung auf Zug, wenn man für die Dehnungen die Annahme eben bleibender Querschnitte beibehält und bei der Berechnung der Spannungen aus ihnen den abnehmenden Elastizitätsmodul berücksichtigt. Es sind also die von Bach gefundenen Unterschiede beider Bruchspannungen in Wahrheit nicht vorhanden, beide scheinen nur verschieden zu sein, weil die Berechnung der Biegungsspannungen mit unveränderlichem Elastizitätsmodul vorgenommen wurde.

Die zweite Arbeit von Tiraspol'ski ist in russischer Sprache verfaßt und also schwer zugänglich; Hr. von Bach machte mich auf sie aufmerksam. Tiraspol'ski beschäftigte sich mit geraden rechteckigen Stäben; er kommt für diese zum gleichen Ergebnis wie Ludwik. Er geht weiter als dieser, indem er die Durchbiegungen mißt. In der Hauptsache aber ist seine Arbeit darauf gerichtet, den Nachweis zu führen, daß für den Zusammenhang von Spannung und Dehnung die bekannte Formel  $\epsilon = \alpha \sigma^n$  zutreffend ist und daß eine Verschiebung der Nulllinie gegenüber der Schwerlinie stattfinden muß.

Während ich die im Folgenden besprochenen Versuche durchführte, erschien noch eine einschlägige Arbeit von Pinegin »Versuche über den Zusammenhang von Biegungsfestigkeit und Zugfestigkeit bei Gußeisen«<sup>2)</sup> und ein mit dieser im Zusammenhange stehender Aufsatz von Eugen Meyer »Die Berechnung der Durchbiegung von Stäben, deren Material dem Hookeschen Gesetze nicht folgt«<sup>3)</sup>.

<sup>1)</sup> Technische Blätter 1905 S. 1.

<sup>2)</sup> Z. d. V. d. I. 1906 S. 2029 und Mitteilungen über Forschungsarbeiten Heft 48.

<sup>3)</sup> Z. d. V. d. I. 1908 S. 167.

Nachdem meine Versuche abgeschlossen waren, kam endlich noch die Arbeit von Herbert »Ueber den Zusammenhang der Biegeelastizität des Gußeisens mit seiner Zug- und Druckelastizität«<sup>1)</sup> hinzu. Da diese Veröffentlichungen meine Arbeit nicht mehr beeinflussen konnten, so werde ich erst am Schlusse dieses Berichtes auf sie zurückkommen.

Es erschien mir bedenklich, aus den Bachschen Versuchen einen so weitgehenden Schluß zu ziehen, wie es durch die Regel  $k_b = \alpha \sqrt{e : z_0} k_z$  geschieht; denn diese Regel ist aus Bruchversuchen abgeleitet, also aus Beanspruchungen des Stoffes, die weit jenseits der Elastizitätsgrenze liegen. Nun kann man ja allerdings in strenger Auffassung von einer solchen bei Gußeisen in keinem Sinne reden; denn auch bei kleiner Belastung verschwinden die Formänderungen niemals völlig, und ebensowenig besteht bis zu einer gewissen Belastungshöhe Proportionalität zwischen Spannung und Dehnung. Aber immerhin kann das Verhalten des Stoffes bei Beanspruchungen, wie sie mit Rücksicht auf Sicherheit gegen Bruch oder übermäßige Formänderung üblich sind, wesentlich anders sein als bei hohen Belastungen, die der Bruchgrenze nahe kommen.

Wenn für einen bestimmten Querschnitt und eine bestimmte Gußeisensorte die Zugspannung  $Z$  den Stab zerreißt und das Kraftmoment  $M = B \frac{J}{e}$  ihn zerbricht, wobei die auf die äußerste Zugfaser entfallende Spannung tatsächlich auch  $Z$  ist, so muß aus der obigen Regel, wenn sie überhaupt Bedeutung haben soll, folgen, daß wenn ich den Stab auf Zug durch  $k_z = Z : n$  beanspruche, das Kraftmoment  $k_b \frac{J}{e}$  mit  $k_b = B : n$  in ihm auch die Spannung  $k_z$  hervorruft. Beispielsweise: Ich habe für eine Gußeisensorte die Zugfestigkeit  $Z = 1000$  kg/qcm und das Verhältnis  $B : Z = 1,5$  ermittelt. Ich will jetzt einen auf Biegung beanspruchten Stab herstellen und dessen äußerste Zugfaser nur mit 200 kg/qcm beanspruchen. Dann ist derselbe nicht nach  $M = 200 \frac{J}{e}$ , sondern nach  $300 \frac{J}{e}$  zu bemessen.

Um die Zulässigkeit dieser Folgerung zu prüfen, erschien es mir wünschenswert, Biegeversuche mit gußeisernen Stäben bei geringen Beanspruchungen anzustellen und die dabei auftretenden Dehnungen unmittelbar zu messen. Es lag nahe, das letztere mit Spiegeln zu tun, wie sie von Martens nach Bauschingers Vorgänge angegeben sind. Ganz neu ist das Verfahren nicht; Föppl hat es z. B. einmal angewendet, um die Durchbiegung von steinernen Balken zu messen<sup>2)</sup>.

Um die Versuche in größerem Maßstabe durchführen zu können, leistete mir die Jubiläumsstiftung der deutschen Industrie dankenswerte Beihilfe.

Die Arbeit ist infolge einiger Beobachtungen, die weiterer Aufklärung bedurften, umfangreicher und langwieriger geworden, als anfänglich beabsichtigt war. Ich habe sie auch nicht auf Gußeisen beschränkt, sondern Gußstahl, Flußeisen und Mannesmannrohr zum Vergleiche herangezogen.

Ich gebe die einzelnen Versuchsreihen nicht in der Reihenfolge, wie sie gemacht wurden, sondern nach Stoffen geordnet. Für alle Stoffe wurden zunächst Zug- und Druckversuche zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls gemacht, aus deren Ergebnissen die Elastizitätslinie  $\sigma = f(\epsilon)$  abgeleitet und diese Linie der Berechnung der Biegeversuche zugrunde gelegt.

<sup>1)</sup> Z. d. V. d. I. 1910 S. 1387 und Mitteilungen über Forschungsarbeiten Heft 89.

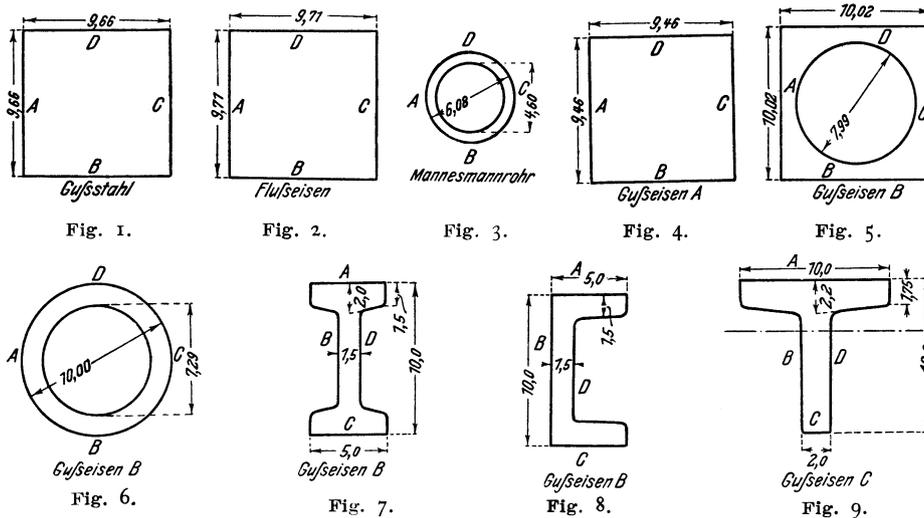
<sup>2)</sup> Mitt. aus dem mech.-techn. Laborat. der Technischen Hochschule München 1896 S. 1.

Letztere wurden mit verschiedenen Stoffen und verschiedenen Querschnittformen zunächst für drei Stützweiten: 120, 80 und 40 cm und drei Belastungsstufen durchgeführt, weiterhin wurde noch eine Anzahl ergänzender Versuche gemacht.

Leider sind nicht alle gußeisernen Stäbe aus demselben Gußeisen gefertigt. Die beiden □-Stäbe wurden gegossen, bevor der Versuchsplan feststand; die anderen sollten alle aus einer Pfanne gegossen werden; es wurden dabei aber die T-Stäbe ungenutz, sie mußten später nochmals angefertigt werden. Es handelt sich also um drei Sorten Gußeisen. Absichtlich wurde kein Eisen besonderer Güte gewählt, sondern gewöhnliche Handelsware, wie sie eine hiesige kleinere Gießerei zur Anfertigung von Dampfzylindern verwendet. Die Stäbe sind in Masse geformt und liegend mit besonders hohen Steigern gegossen.

Sämtliche Versuche sind mit der 100 t-Werder-Maschine des mechanischen Laboratoriums der Techn. Hochschule Braunschweig durchgeführt. Dabei wie bei der Ausrechnung der Ergebnisse, leisteten mir die Diplomingenieure Karl A. E. Müller, Brüser, Dr. Zacharias, Strombeck und Stud. Tiemann wesentliche Hilfe.

Die Querschnitte sämtlicher Stäbe sind in den Fig. 1 bis 9 dargestellt und ihre Konstanten in Zahlentafel 1 eingetragen.



Zahlentafel 1. Profilkonstanten.

Stoff	Querschnittform	Querschnittfläche $f$	Trägheitsmoment $J$	Querschnittmodulus $\frac{J}{e}$	Querschnittfunktion $F$
		cm <sup>2</sup>	cm <sup>4</sup>	cm <sup>2</sup>	cm <sup>2</sup>
Stahl . . . . .	□	93,3	725	151	77,8
Flußeisen . . . . .	□	94,3	741	153	78,6
Mannesmannrohr . . . . .	⊙	12,4	45,2	14,9	8,28
Gußeisen	□	89,5	666	141	74,6
	□	50,3	634	127	30
	⊙	36,7	352	70,3	24,5
	I	27,3	338	67,6	13,8
	T	26,2	325	65,0	13,4
	T	35,9	313	Zug 97,4 Druck 46,2	18,6

**Ableitung der Formeln für die Biegeversuche.**

Gibt man dem Stabe Fig. 10 die Anfangsbelastung  $P_0$ , so ist das Kraftmoment für den gefährlichen Querschnitt

$$M_0 = 1/4 P_0 l;$$

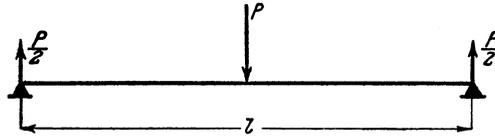


Fig. 10.

es entsteht in ihm in der äußersten Faser des gefährlichen Querschnitts die Spannung

$$k_0 = M_0 : \frac{J}{e},$$

und die Durchbiegung ist

$$s_0 = 1/48 \frac{P_0 l^3}{EJ}.$$

Erhöht man die Belastung bis  $P$ , so ändern sich die Werte  $M$ ,  $k$  und  $s$  entsprechend. Es ist also für die Belastungsstufe  $P - P_0$

$$M - M_0 = 1/4 (P - P_0) l$$

$$k - k_0 = 1/4 (P - P_0) l : \frac{J}{e} \dots \dots \dots (I)$$

$$s - s_0 = 1/48 \frac{(P - P_0) l^3}{EJ} \dots \dots \dots (II).$$

Als Elastizitätsmodul  $E$  ist derjenige Wert einzusetzen, welcher für die Spannungsstufe  $k - k_0$  durch Zug- und Druckversuche gefunden wurde. Da aber diese Versuche im allgemeinen für Zug und Druck nicht dieselben Werte liefern, so ist das Ergebnis  $s - s_0$  unsicher. Man wird notgedrungen mit dem Mittel beider Werte rechnen. Aus der das Verhältnis der Spannungen und Dehnungen darstellenden Linie  $\sigma = f(\epsilon)$  entnimmt man also gemäß Fig. 11

$$E = 1/2 \left[ \frac{k' - k_0'}{\epsilon' - \epsilon_0'} + \frac{k'' - k_0''}{\epsilon'' - \epsilon_0''} \right] \dots \dots \dots (III).$$

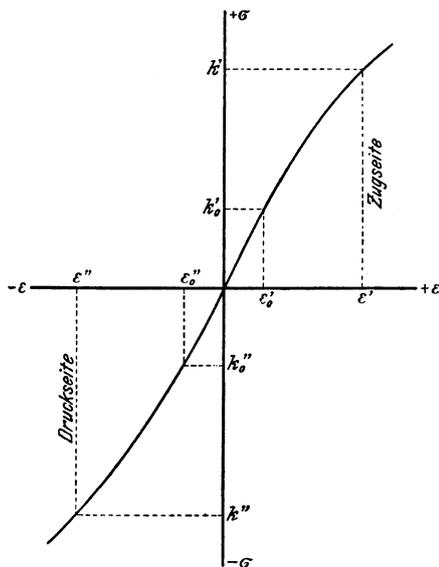


Fig. 11. Linie für Spannungen und Dehnungen.

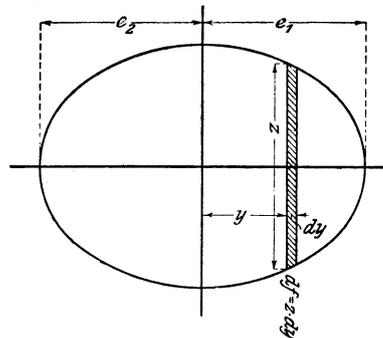


Fig. 12.

Aus den Beobachtungen an den Bauschinger-Geräten kann man folgern

$$k - k_0 = 12 \frac{e}{l^2} E (s - s_0) \dots \dots \dots (IV),$$

$$E = 1/48 \frac{l^3 P - P_0}{J s - s_0} \dots \dots \dots (V)$$

und diese Werte mit denen der Theorie (I) und der Beobachtung (III) vergleichen. Man muß aber, genau genommen, dabei beachten, daß die beobachteten Werte  $s - s_0$  mit den theoretischen nicht vergleichbar sind, weil sie den Einfluß der Schubkraft enthalten. Diese vergrößert die dem Kraftmoment entsprechende Durchbiegung um

$$\Delta s = \frac{M}{GF},$$

wo die Querschnittsfunktion  $F$  gemäß Fig. 12 durch die Beziehung

$$\frac{1}{F} = \int_{-e_2}^{+e_1} \left( \frac{y}{zJ} \right)^2 df$$

bestimmt ist.

Man hat also von den Beobachtungswerten  $s - s_0$  den Betrag

$$\Delta s - \Delta s_0 = \frac{M - M_0}{GF}$$

abzusetzen, wenn man die aus der Durchbiegung folgende Spannung oder den Elastizitätsmodul ausrechnen will.

Man kann auch aus der beobachteten Durchbiegung auf die Gestalt der elastischen Linie schließen:

$$\begin{aligned} M &= -1/2 P_x \\ \frac{dy}{dx} &= 1/4 \frac{P}{EJ} (l^2 - x^2) \propto \alpha \\ \alpha EJ &= 1/4 P \left( \frac{l^2}{4} - x^2 \right) \\ s EJ &= 1/48 P l^3 \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 12 \frac{l^2 - x^2}{l^3} s. \end{array} \right.$$

Den theoretischen Wert

$$\alpha - \alpha_0 = 1/4 \frac{P - P_0}{EJ} \left( \frac{l^2}{4} - x^2 \right) \dots \dots \dots (VI)$$

kann man mit dem aus der beobachteten Durchbiegung abgeleiteten

$$\alpha - \alpha_0 = 12 \frac{l^2 - x^2}{l^3} (s - s_0) \dots \dots \dots (VII)$$

vergleichen, wenn man ihn mit den wegen des Einflusses der Schubkraft verbesserten Beobachtungswerten  $s - s_0$  berechnet.

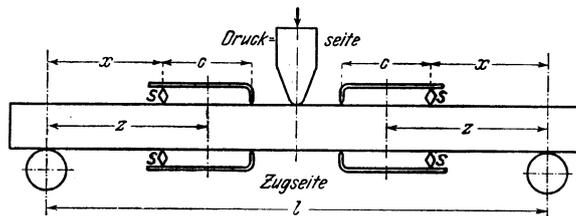


Fig. 13.

Die Spiegelgeräte wurden so angesetzt, wie Fig. 13 zeigt. Die Spiegel drehen sich nun aus zwei Gründen; einmal wegen der Krümmung der elastischen

Linie und das andere Mal wegen der Dehnung. Die Gesamtdrehung  $\gamma$  setzt sich also aus den Einzeldrehungen  $\alpha$  und  $\beta$  zusammen. Wie die Fig. 14 bis 17 zeigen,

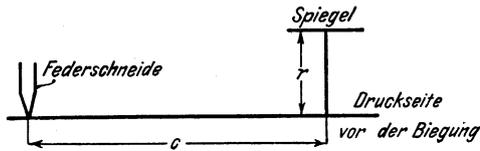


Fig. 14.

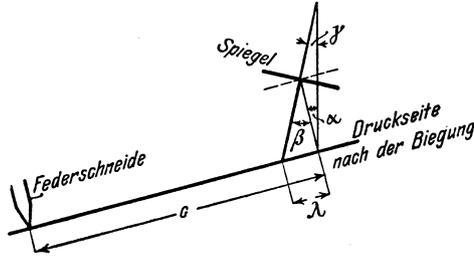


Fig. 15.

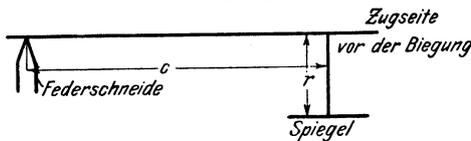


Fig. 16.

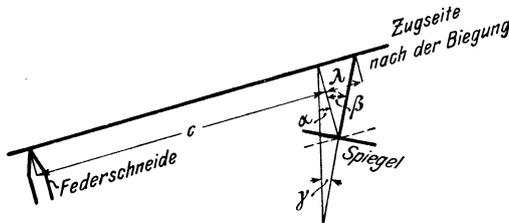


Fig. 17.

ist, falls die Spiegel gemäß Fig. 13 angesetzt sind, sowohl auf der Zug- wie auf der Druckseite die Spiegel-drehung infolge der Dehnung

$$\beta = \gamma + \alpha.$$

Die Verlängerung der Meßstrecke  $c$  ist

$$\lambda = r(\gamma + \alpha).$$

Ist  $a$  die Spiegelablesung und  $b$  die Entfernung zwischen Maßstab und Spiegel, so ist nach Fig. 18 genau genug

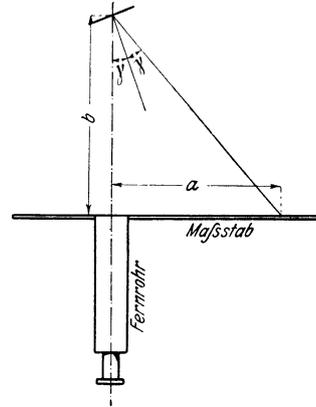


Fig. 18.

$$\gamma = a : 2b \dots \lambda = r \left( \frac{a}{2b} + \alpha \right).$$

Die Dehnung verteilt sich nicht gleichmäßig über die Länge  $c$ . Wegen

$$\varepsilon = \frac{k}{E} = \frac{M}{J \cdot E} = -\frac{1}{2} \frac{Pl}{EJ} x = Cx \text{ und } \varepsilon_z = Cz$$

$$\lambda = \int_{z - \frac{1}{2}c}^{z + \frac{1}{2}c} x dx = Ccz,$$

$$\varepsilon_m = \frac{\lambda}{c} = Cz = \varepsilon_z$$

ist aber die Dehnung in der Mitte gleich der mittleren Dehnung der Meßstrecke. Also bezieht sich der beobachtete Wert

$$\varepsilon_z = \frac{\lambda}{c}$$

auf die Entfernung  $z$  vom Auflager. Im gefährlichen Querschnitte hat sie den Wert

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{c} \frac{l}{2z},$$

und es entspricht demnach der Belastungszunahme  $P - P_0$  die Dehnungszunahme

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = \frac{1}{c} \frac{l}{2z} \frac{r}{2b} \{(a - a_0) + 2b(\alpha - \alpha_0)\}.$$

Da nun bei allen Versuchen  $\frac{r}{2b} = \frac{1}{1000}$  war, und da das zweite Glied verhältnismäßig klein ist, so kann bei diesem von der nicht ganz genauen Uebereinstimmung der Werte  $r$  der verschiedenen Spiegel abgesehen werden. Mit hinreichender Genauigkeit ist  $r = 0,44$  cm, also  $2b = 440$  cm, und damit

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = \frac{1}{1000c} \frac{l}{2z} \{(a - a_0) + 440(\alpha - \alpha_0)\} \dots \dots \dots \text{(VIII)}.$$

Den zugehörigen Spannungsunterschied  $k - k_0$  ermittelt man am besten unmittelbar aus der Elastizitätslinie  $\sigma = f(\varepsilon)$ , indem man zunächst zu dem aus  $P_0$  folgenden Werte  $k_0 = \frac{1/4 P_0 l}{J}$  die zugehörige Dehnung  $\varepsilon_0$  mißt, diese zu dem Werte  $\varepsilon - \varepsilon_0$  addiert, den zu dem so gefundenen  $\varepsilon$  gehörigen Wert  $k$  mißt und  $k_0$  davon abzieht.

In die Formel (VIII) dürften am besten die aus der Durchbiegung folgenden Werte  $\alpha - \alpha_0$  der Formel (VII) eingesetzt werden.

Der gefundene Wert  $k - k_0$  ist dann mit dem theoretischen der Formel (I) und dem aus der Durchbiegung gefolgerten der Formel (IV) vergleichbar.

### Bestimmung des Elastizitätsmoduls.

Die Versuche zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls wurden so ange-  
stellt, wie es die beiden als Beispiele angefügten Protokolle, Zahlentafel 2 und 3

Zahlentafel 2.

Zugversuch. Mannesmannrohr, Stab Z 13. Meßfedern 150 mm lang.  
äußerer Dmr.  $D = 61,39$  mm }  $f = 12,97$  qem. Uebersetzung 1:500.  
innerer Dmr.  $d = 46,02$  » }

Belastung					Entlastung					Elastizitätsmoduls $\varepsilon = 0,150 (\sigma - \sigma_0) : \lambda$	
Last $P$	Spannung $\sigma = P : f$	Ableseung Spiegel		gesamte Form- änderung $\lambda_g$ $\lambda_g = a_1 + a_2$	Last $P_0$	Spannung $\sigma_0 = P_0 : f$	Ableseung Spiegel		bleibende Formänderung $\lambda_b = a_1 + a_2$		federnde Formänderung $\lambda = \lambda_g - \lambda_b$
		Nr. 1 $a_1$	Nr. 2 $a_2$				Nr. 1 $a_1$	Nr. 2 $a_2$			
kg	kg/qcm	mm	mm	mm 1000	kg	kg/qcm	mm	mm	mm 1000	mm 1000	t/qem
4 500	347	10,7	11,2	21,9	500	38,5	0,0	0,2	0,2	21,7	2132
»	»	10,7	11,2	21,9	»	»	0,0	0,2	0,2	21,7	
»	»	10,7	11,2	21,9	»	»	0,0	0,2	0,2	21,7	
8 500	656	21,8	22,1	43,9	»	»	0,0	0,2	0,2	43,7	2119
»	»	21,8	22,1	43,9	»	»	0,0	0,2	0,2	43,7	
»	»	21,8	22,1	43,9	»	»	0,0	0,2	0,2	43,7	
12 500	963	32,8	33,1	65,9	»	»	0,1	0,1	0,2	65,7	2112
»	»	32,9	33,1	66,0	»	»	0,1	0,1	0,2	65,8	
»	»	32,9	33,0	65,9	»	»	0,1	0,1	0,2	65,7	
16 500	1271	44,0	44,0	88,0	»	»	0,2	0,1	0,3	87,7	2112
»	»	44,0	43,9	87,9	»	»	0,2	0,2	0,4	87,5	
»	»	44,0	43,8	87,8	»	»	0,1	0,1	0,2	87,6	
»	»	44,0	43,8	87,8	»	»	0,1	0,0	0,1	87,7	
»	»	43,9	43,8	87,7	»	»	0,1	-0,1	0,0	87,7	
»	»	43,9	43,8	87,7	»	»	0,0	-0,2	-0,2	87,9	
»	»	43,8	43,7	87,5	»	»	0,0	-0,2	-0,2	87,7	
»	»	43,8	43,7	87,5	»	»	0,0	-0,2	-0,2	87,7	
20 500	1580	55,0	54,7	109,7	»	»	0,0	-0,2	-0,2	109,9	2110
»	»	55,0	54,7	109,7	»	»	0,0	-0,2	-0,2	109,9	
»	»	55,0	54,7	109,7	»	»	0,0	-0,2	-0,2	109,9	

Zahlentafel 3.  
 Druckversuch. Gußeisen B, Stab D 31. Meßfedern 150 mm lang.  
 $D = 60,10$  mm;  $f = 28,37$  qcm. Uebersetzung 1 : 500.

Belastung					Entlastung					federnde Formänderung $\lambda = \lambda_g - \lambda_b$ mm 1000	Elastizitätsmoduls $E = 0,150 (\sigma - \sigma_0) : \lambda$ t/qcm
Last $P$ kg	Spannung $\sigma = P : f$ kg/qcm	Ablesung Spiegel		gesamte Formänderung $\lambda_g = a_1 + a_2$ mm 1000	Last $P_0$ kg	Spannung $\sigma_0 = P_0 : f$ kg/qcm	Ablesung Spiegel		bleibende Formänderung $\lambda_b = a_1 + a_2$ mm 1000		
		Nr. 1 $a_1$ mm	Nr. 2 $a_2$ mm				Nr. 1 $a_1$ mm	Nr. 2 $a_2$ mm			
3 000	106	5,8	4,9	10,7	1000	35	0,0	0,0	0,0	10,7	997
»	»	5,8	4,9	10,7	»	»	0,0	0,1	0,1	10,6	
»	»	5,8	4,9	10,7	»	»	0,0	0,2	0,2	10,5	
»	»	5,8	5,1	10,9	»	»	0,0	0,2	0,2	10,7	
5 000	176	12,1	9,9	22,0	»	»	0,1	0,2	0,3	21,7	970
»	»	12,1	9,9	22,0	»	»	0,1	0,2	0,3	21,7	
»	»	12,1	10,0	22,1	»	»	0,1	0,2	0,3	21,8	
»	»	12,1	10,0	22,1	»	»	0,1	0,2	0,3	21,8	
7 000	247	18,2	15,3	33,5	»	»	0,1	0,2	0,3	33,2	960
»	»	18,2	15,2	33,4	»	»	0,1	0,2	0,3	33,1	
»	»	18,2	15,2	33,4	»	»	0,1	0,2	0,3	33,1	
»	»	18,2	15,2	33,4	»	»	0,1	0,2	0,3	33,1	
9 000	317	24,1	20,7	44,8	»	»	0,1	0,2	0,3	44,5	950
»	»	24,2	20,8	45,0	»	»	0,1	0,2	0,3	44,7	
»	»	24,1	20,7	44,8	»	»	0,1	0,1	0,2	44,6	
»	»	24,1	20,7	44,8	»	»	0,1	0,1	0,2	44,6	
11 000	388	30,1	26,3	56,4	»	»	0,1	0,2	0,3	56,1	944
»	»	30,1	26,3	56,4	»	»	0,1	0,2	0,3	56,1	
»	»	30,1	26,3	56,4	»	»	0,1	0,2	0,3	56,1	
»	»	30,1	26,3	56,4	»	»	0,1	0,2	0,3	56,1	

zeigen<sup>1)</sup>. Die Belastung wurde für jede Laststufe so oft aufgebracht, daß die federnde Formänderung schließlich gleich blieb, oder wenn sich das nicht erzielen ließ, daß die Werte um ein Mittel schwankten.

Die Erscheinung, daß sich ein Stab bei der Entlastung gelegentlich mehr verkürzte, als er sich bei der Belastung verlängert hatte, also negative bleibende Formänderung zeigte, ließ sich durchaus nicht beseitigen. Ich lasse dahingestellt, ob das Folge von Spannungen im Stoffe ist, die von der Herstellung abstammen, oder ob geringe Spiegelrutschungen stattfanden. Da es sich nur um die federnde Formänderung handelt, so ist die Erscheinung für das Ergebnis bedeutungslos und macht nur häufigeren Belastungswechsel nötig.

Das Verfahren, den Stab nach jeder Belastung wieder zu entlasten, ist sehr zeitraubend. Man macht deshalb die Versuche häufig so, daß man, von der Anfangslast ausgehend, diese stufenweise steigert, ohne wieder auf die Anfangslast zurückzugehen. Es liegt eine Reihe von Vergleichsversuchen vor, bei denen derselbe Stab nach beiden Verfahren behandelt wurde.

Zunächst ist eine Reihe von Druckversuchen mit Mannesmannrohr in Zahlentafel 4 zusammengestellt. Da die Stäbe nicht genau gleiche Querschnitte

<sup>1)</sup> Die Versuchstäbe sind so bezeichnet: Z bedeutet Zugstab, D Druckstab, B Biegestab, Z 22 B 5 den aus dem Biegestab 5 gefertigten Zugstab 22, Z 24 D 21 B 5 den aus dem Druckstab 21, welcher aus dem Biegestab 5 stammt, gefertigten Zugstab 24.



hatten, so konnten die Stufen nur durch die für alle Stäbe gleichen Belastungen, nicht aber durch die Spannungen angegeben werden. Die Verlängerungen für die verschiedenen Stabnummern sind deshalb nicht genau vergleichbar.

Bei fortschreitender Belastung erhält man, wenn die Fig. 19 die Elastizitätslinie darstellt, die Elastizitätsmodel für die Spannungsgebiete 01, 12, 23 . . . , bei rückspringender aber für die Gebiete 01, 02, 03 . . . . Beide sind nur vergleichbar, wenn man aus dem Teile *a* der Zahlentafel den Teil *b* bildet. Dann aber stimmen *b* und *c* so gut überein, daß man danach keiner Prüfungsweise den Vorzug geben kann. Bei einzelnen Stäben zeigen sich zwar größere Ab-

Zahlentafel 5.

Zugversuche.

Mannesmannrohr, Stab Z 14.

$D = 61,3 \text{ mm}$ ;  $d = 46,0 \text{ mm}$ ;  $f = 12,89 \text{ qem}$ .      Meßlänge 150 mm.

Formänderungen in $\frac{\text{mm}}{1000}$										Elastizitätsmodul in t/qem					
a fortschreitende Belastung			Spannungs- stufe	b fortschreitende Belastung			c rückspringende Belastung			a fortschreitende Belastung		Spannungs- stufe	b fortschreitende Belastung		c rückspringende Belastung
Spannungs- stufe kg/qem	Versuchs- nummer			Versuchsnummer									Spannungs- stufe kg/qem	Mittel	
	1	2	Mittel	1	2	Mittel	1	2	Mittel	1	2	Mittel			
40	21,6	21,2	21,4	40	21,6	21,2	21,4	21,4	21,2	21,3	40	2170	40	2170	2180
350				350							350		350		
350	21,6	21,8	21,7	40	43,2	43,0	43,1	42,8	43,0	42,9	350	2140	40	2160	2170
660				660							660		660		
660	21,6	21,9	21,7	40	64,8	64,9	64,8	64,3	64,9	64,6	660	2140	40	2150	2160
970				970							970		970		
970	21,5	22,0	21,7	40	86,3	86,9	86,6	86,1	86,9	86,5	970	2140	40	2150	2150
1280				1280							1280		1280		
1280	21,6	21,8	21,7	40	107,9	108,7	108,3	107,8	108,8	108,3	1280	2140	40	2150	2150
1590				1590							1590		1590		

Zahlentafel 6.

Spannungs- stufe kg/qem	Formänderung in $\frac{\text{mm}}{1000}$			
	Belastung:			
	steigend		fallend	
	Versuchsnummer			
	1	2	1	2
40				
1590	109,7	109,1	109,4	109,8
1590				
1900	21,9	22,2	21,7	21,9
1900				
2210	22,0	22,6	21,9	21,9
2210				
2520	22,0	22,5	21,7	21,9
	175,6	176,4	174,7	175,5

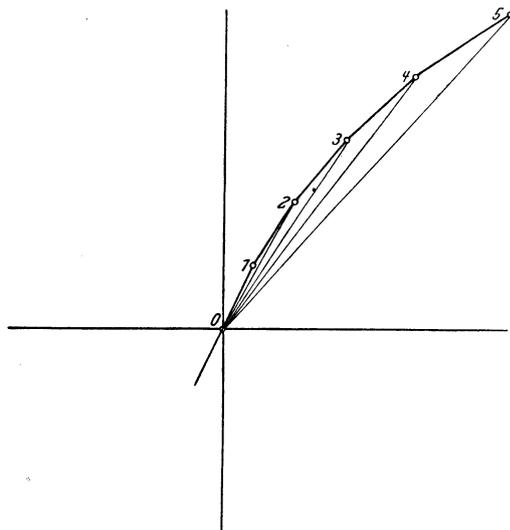


Fig. 19.

weichungen, aber die doch wohl maßgebenden Mittel aus allen Stäben zeigen solche nicht.

Zwei Zugversuche sind in Zahlentafel 5 zusammengestellt. Derselbe Stab wurde zweimal hintereinander so behandelt, wie oben beschrieben. Das Ergebnis war das gleiche: auch hier stimmen die Mittel der Reihen *b* und *c* so gut überein, daß für den Wert der Prüfungsverfahren nichts daraus zu folgern ist.

Daß die bleibende Formänderung immerhin eine Rolle spielen kann, geht aus zwei Versuchen hervor, welche wieder mit demselben Stabe vorgenommen wurden, bei denen aber die Belastung höher getrieben ist. Sie ist gemäß Zahlentafel 6 stufenweise fortschreitend aufgebracht, stufenweise rückschreitend wieder entfernt. Bei beiden Versuchen war die Verlängerung größer als die Verkürzung; es blieb nach Fortnahme der Last eine Verlängerung von etwa 0,5 vH der ganzen zurück. Jeder Versuch dauerte ungefähr eine Viertelstunde.

Ferner liegen drei Versuchsreihen mit Gußeisen *A* vor. Es wurde jeder Stab sechsmal hintereinander stufenweise fortschreitend belastet. Zur Mittelbildung wurden nur die vier letzten Belastungsfolgen verwendet, um anfänglich auftretende Unregelmäßigkeiten zu beseitigen. Aus den in Zahlentafel 7 bis 9 unter *a* wiedergegebenen Ergebnissen wurde Zahlentafel *b* gebildet. Ein weiterer mit höheren Belastungen, aber rückspringend angestellter Versuch ist unter *c* wiedergegeben. *b* und *c* lassen sich nun von 159 bis 318 kg/qcm vergleichen, wenn man die Formänderung zwischen diesen Grenzen aus *b* interpoliert. Es ergibt sich so Zahlentafel 10. Das sind ganz beachtenswerte Unterschiede. Als zuerst Gußeisen *A* behandelt wurde, habe ich, um Zeit zu sparen, mit stufenweise fortschreitender Belastung gearbeitet. Da mir aber das einmalige Durchlaufen der Stufen doch unsicher erschien, so ging ich zu sechsmaliger Wiederholung über, wie oben beschrieben. Das kostete aber etwa

Zahlentafel 7.

Zugversuche.

Gußeisen *A*. Stab *Z* 19.

*d* = 20,00 mm; *f* = 3,14 qcm. Länge der Meßfedern 100 mm. Uebersetzung 1:500.

a

Spannungsstufe $\sigma_{n+1} - \sigma_n$ kg/qcm	Formänderung $\lambda$ in $\frac{\text{mm}}{1000}$						Mittel aus Nr. 3 bis 6	Elastizitätsmodul t/qcm
	Versuchsnummer							
	1	2	3	4	5	6		
32-112	9,8	9,9	9,8	9,9	10,0	9,9	9,9	808
112-192	10,8	10,6	10,8	10,6	10,9	10,8	10,8	740
192-272	11,3	11,1	11,2	11,2	11,1	11,4	11,2	714
272-352	11,8	11,7	11,7	11,7	11,6	11,4	11,6	690
	43,7	43,3	43,5	43,4	43,6	43,5	43,5	

Aus fortschreitender Belastung.

Aus rückspringender Belastung.

b

Spannungsstufe $\sigma - \sigma_0$ kg/qcm	Formänderung $\lambda$ mm : 1000	Elastizitätsmodul t/qcm
32-112	9,9	808
32-192	20,7	773
32-272	31,9	752
32-352	43,5	736

c

Spannungsstufe $\sigma - \sigma_0$ kg/qcm	Formänderung $\lambda$ mm : 1000	Elastizitätsmodul t/qcm
159-318	20,9	761
159-477	46,3	687
159-636	77,0	620

Zahlentafel 8.

Zugversuche.

Gußeisen A. Stab Z 20.

$d = 19,98 \text{ mm}; f = 3,14 \text{ qcm}$ . Länge der Meßfedern 100 mm. Uebersetzung 1:500.

a

Spannungsstufe $\sigma_{n+1} - \sigma_n$	Formänderung $\lambda$ in $\frac{\text{mm}}{1000}$						Mittel aus Nr. 3 bis 6	Elastizitätsmodul
	Versuchsnummer							
kg/qcm	1	2	3	4	5	6		t/qcm
32-112	9,1	9,2	9,3	9,2	9,1	8,9	9,1	879
112-192	9,9	10,0	10,0	10,0	10,2	10,4	10,1	792
192-272	10,4	10,5	10,3	10,2	10,1	10,3	10,2	784
272-352	11,4	10,7	10,9	11,0	11,2	11,1	11,0	728
	40,8	40,5	40,5	40,4	40,6	40,7		

Aus fortschreitender Belastung.

Aus rückspringender Belastung.

b

Spannungsstufe $\sigma - \sigma_0$	Formänderung $\lambda$	Elastizitätsmodul
kg/qcm	mm : 1000	t/qcm
32-112	9,1	879
32-192	19,2	834
32-272	29,4	817
32-352	40,4	792

c

Spannungsstufe $\sigma - \sigma_0$	Formänderung $\lambda$	Elastizitätsmodul
kg/qcm	mm : 1000	t/qcm
159-318	20,5	776
159-477	45,3	702
159-636	74,6	639

Zahlentafel 9.

Zugversuche.

Gußeisen A. Stab Z 21.

$d = 20,00 \text{ mm}; f = 3,14 \text{ qcm}$ . Länge der Meßfedern 100 mm. Uebersetzung 1:500.

a

Spannungsstufe $\sigma_{n+1} - \sigma_n$	Formänderung $\lambda$ in $\frac{\text{mm}}{1000}$						Mittel aus Nr. 3 bis 6	Elastizitätsmodul
	Versuchsnummer							
kg/qcm	1	2	3	4	5	6		t/qcm
32-112	9,8	9,9	10,1	9,9	9,9	9,7	9,9	804
112-192	10,4	10,5	10,5	10,5	10,8	10,6	10,6	755
192-272	11,1	11,0	11,1	11,6	10,8	11,2	11,2	714
272-352	11,7	11,8	11,4	11,4	11,4	11,6	11,4	702
	43,0	43,2	43,1	43,4	42,9	43,1		

Aus fortschreitender Belastung.

Aus rückspringender Belastung.

b

Spannungsstufe $\sigma - \sigma_0$	Formänderung $\lambda$	Elastizitätsmodul
kg/qcm	mm : 1000	t/qcm
32-112	9,9	804
32-192	20,5	781
32-272	31,7	754
32-352	43,1	743

c

Spannungsstufe $\sigma - \sigma_0$	Formänderung $\lambda$	Elastizitätsmodul
kg/qcm	mm : 1000	t/qcm
159-318	21,1	754
159-477	47,1	676
159-636	78,3	609

**Zahlentafel 10.**  
Zugversuche. Gußeisenstäbe Z 19-21.

Spannungs- stufe	Formänderung $\lambda$ in mm : 100					
	Stab Z 19		Stab Z 20		Stab Z 21	
	aus b	aus c	aus b.	aus c	aus b	aus c
32-159	$20,7 \frac{159-32}{192-32} = 16,4$		$19,2 \frac{159-32}{192-32} = 15,2$		$20,5 \frac{159-32}{192-32} = 16,3$	
32-319	$43,5 \frac{319-32}{352-32} = 39,0$		$40,4 \frac{319-32}{352-32} = 36,2$		$43,1 \frac{319-32}{352-32} = 38,7$	
159-319	22,6	20,9	21,0	20,5	22,4	21,1

ebensoviel Zeit als die rückspringende Belastung, und so wurde weiterhin diese immer angewendet.

Die Bestimmung des Elastizitätsmoduls für die zähen Stoffe bot keine besonderen Schwierigkeiten. Bei Stahl und Flußeisen wurden aus einer Stange je 1 Biegungsstab von den Querschnitten Fig. 1 und 2 und 1500 mm Länge, 4 Normalstäbe für Zugversuche von rd. 20 mm Dmr. und 4 Stäbe von rd. 40 bis 45 mm Dmr. und 180 bis 200 mm Länge für Druckversuche gefertigt. Die Zug- und Druckstäbe wurden in gewöhnlicher Weise mit Spiegeln untersucht; die Beanspruchung ist bei Stahl bis rd. 1400 kg/qcm, bei Flußeisen bis rd. 1200 kg/qcm getrieben. Von einer Länge Mannesmannrohr wurden 2 Biegungsstäbe vom Querschnitte Fig. 3 und 1500 mm Länge, 6 Stäbe zu Zugversuchen von 500 und 6 zu Druckversuchen von 200 mm Länge abgeschnitten. Die Zugstäbe erhielten Köpfe nach Fig. 20. Die Beanspruchung stieg bis 1600 kg/qcm. Die Ergebnisse der Versuche sind in den Zahlentafeln 11 bis 13 zusammengestellt.

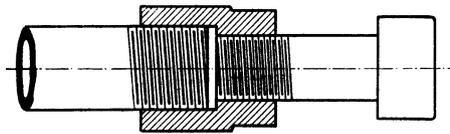


Fig. 20.

**Zahlentafel 11.**  
Gußstahl. Elastizitätsmodul aus Zugversuchen in t/qcm.

Belastungs- stufe	Spannung für 3,14 qcm Querschnitt	Stabnummer				Mittel	Größte Abwei- chung vom Mittel in vH
		Z 1	Z 2	Z 3	Z 4		
		Querschnitt in qcm					
kg	kg/qcm	3,14	3,14	3,14	3,14		
400	125						
1200	380	2160	2100	2120	2160	2140	-1,9
400	125						
2000	640	2140	2120	2120	2130	2130	±0,5
400	125						
2800	890	2130	2110	2120	2120	2120	±0,5
400	125						
3600	1150	2120	2120	2110	2120	2120	-0,5
400	125						
4400	1400	2120	2110	2120	2120	2120	-0,5

Zahlentafel 11 (Fortsetzung).  
Elastizitätsmodul aus Druckversuchen in t/qcm.

Belastungs- stufe	Spannung für 15 qcm Querschnitt	Stabnummer				Mittel	größte Abwei- chung vom Mittel in vH
		D 1	D 2	D 3	D 4		
		Querschnitt in qcm					
kg	kg/qcm	15,19	15,18	15,19	14,39		
1000	65	2100	2140	2160	2150	2140	-1,9
6000	400						
1000	65	2120	2170	2160	2160	2150	-1,4
11000	730						
1000	65	2120	2170	2160	2160	2150	-1,4
16000	1060						
1000	65	2140	2160	2170	2160	2160	-0,9
21000	1400						

Zahlentafel 12.  
Flußeisen. Elastizitätsmodul aus Zugversuchen in t/qcm.

Belastungs- stufe	Spannung für 3,14 qcm Querschnitt	Stabnummer				Mittel	größte Abwei- chung vom Mittel in vH
		Z 5	Z 6	Z 7	Z 8		
		Querschnitt in qcm					
kg	kg/qcm	3,11	3,14	3,14	3,11		
400	125	2090	2090	2090	2130	2100	+1,4
1200	380						
400	125	2090	2070	2080	2100	2080	+1,0
2000	640						
400	125	2070	2090	2080	2070	2080	±0,5
2800	890						
400	125	2070	2080	2090	2070	2080	±0,4
3600	1150						

Elastizitätsmodul aus Druckversuchen in t/qcm.

Belastungs- stufe	Spannung für 13,20 qcm Querschnitt	Stabnummer				Mittel	größte Abwei- chung vom Mittel in vH
		D 5	D 6	D 7	D 8		
		Querschnitt in qcm					
kg	kg/qcm	13,19	13,19	13,19	13,17		
1000	75	2070	2050	2040	2070	2060	-1,0
4000	300						
1000	75	2070	2030	2070	2070	2060	-1,5
8000	610						
1000	75	2080	2040	2070	2080	2070	-1,5
12000	910						
1000	75	2080	2050	2070	2080	2070	-1,0
16000	1210						

Zahlentafel 13.  
Mannesmannrohr. Elastizitätsmodul aus Zugversuchen in t/qcm.

Belastungs- stufe	Spannung für 13 qcm Querschnitt	Stabnummer						Mittel	größte Abwei- chung vom Mittel in vH
		Z 9	Z 10	Z 11	Z 12	Z 13	Z 14		
		Querschnitt in qcm							
kg	kg/qcm	13,05	12,24	12,84	12,81	12,97	13,61		
500	40	2090	2200	2150	2160	2130	2190	2150	-2,8
4500	345								
500	40	2090	2200	2130	2160	2120	2160	2140	+2,8
8500	655								
500	40	2100	2190	2130	2140	2110	2150	2140	+2,3
12500	965								
500	40	2100	2180	2120	2150	2110	2140	2130	+2,3
16500	1275								
500	40	2100	2180	2110	2140	2110	2140	2130	+2,3
20500	1585								

Elastizitätsmodul aus Druckversuchen in t/qcm.

Belastungs- stufe	Spannung für 13 qcm Querschnitt	Stabnummer						Mittel	größte Abwei- chung vom Mittel in vH
		D 9	D 10	D 11	D 12	D 13	D 14		
		Querschnitt in qcm							
kg	kg/qcm	13,61	13,65	13,65	12,86	13,44	12,94		
1000	75	2410	2360	2550	2450	2420	2380	2430	+5,3
5000	385								
1000	75	2340	2250	2390	2340	2320	2330	2330	-3,4
9000	690								
1000	75	2280	2220	2340	2300	2280	2270	2280	+2,6
13000	1000								
1000	75	2250	2150	2300	2260	2240	2250	2240	-4,0
17000	1310								
1000	75	2240	2220	2270	2240	2220	2230	2240	+1,3
21000	1620								

Weil man bei der Werder-Maschine mit einer Anfangsspannung beginnen muß, sehen die Schaulinien  $\sigma = f(\epsilon)$  so aus, wie Fig. 21 zeigt; sie bestehen aus 2 Ästen  $A_1 B_1$  und  $A_2 B_2$ . Der Bequemlichkeit wegen sind diese dann so weit parallel zur  $\sigma$ -Achse verschoben, daß ihre Tangenten in  $A$  durch den Koordinatenursprung  $O$  gehen; das Stück  $AOA$  ist also ohne versuchsmäßige Begründung.

Die drei Schaulinien, Fig. 22 bis 24, lassen wie die Zahlentafeln 11 bis 13 erkennen, daß sich die Elastizitätslinie nur wenig von einer Geraden unterscheidet. Auffallend ist, daß bei der Beanspruchung auf Zug die Dehnungen aller drei Stoffe ein wenig schneller als die Spannungen wachsen, während sich Stahl und Flußeisen bei der Beanspruchung auf Druck umgekehrt verhalten, Mannesmannrohr aber in diesem Fall ein stärkeres Wachsen der Dehnungen zeigt. Indessen ist die Abweichung von der Proportionalität nur im letzten Falle so groß, daß sie überhaupt Beachtung verdient, aber doch wieder

auch hier so gering, daß sie bei Beurteilung der Biegungsversuche unberücksichtigt bleiben kann. Auffällig ist bei Mannesmannrohr auch der Knick im Nullpunkte, der bei Stahl gar nicht, bei Flußeisen in ganz geringem Maße, aber in umgekehrtem Sinne zu bemerken ist. Die Mittelwerte des Elastizitätsmoduls sind in Zahlentafel 14 zusammengestellt.

Zahlentafel 15 gibt noch die Zugfestigkeiten für diese Stoffe an. Das Mannesmannrohr mußte, um sie bestimmen zu können, in der Mitte bis etwas

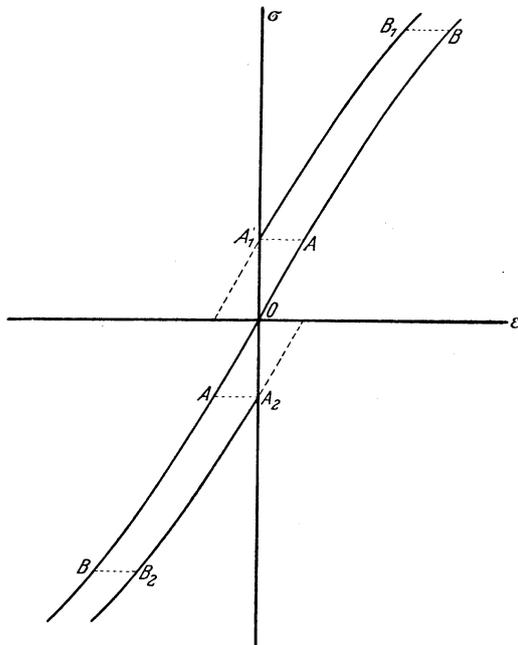


Fig. 21.

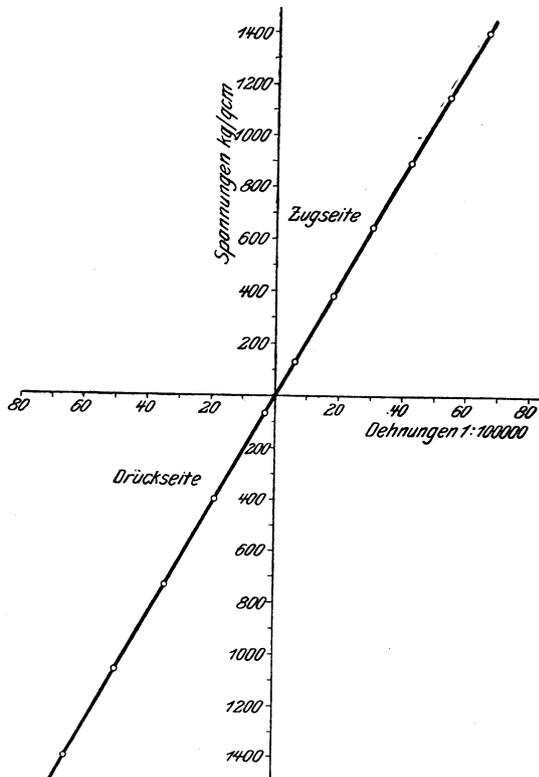


Fig. 22. Elastizitätslinie für Gußstahl.

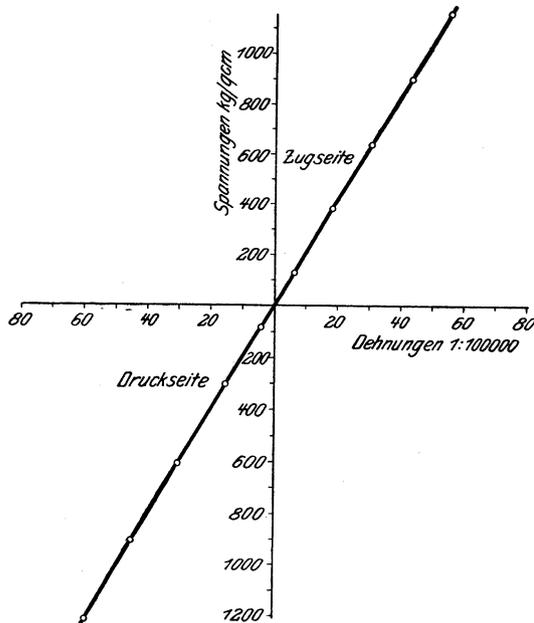


Fig. 23. Elastizitätslinie für Flußeisen.

Mitteilungen. Heft 127 u. 128.

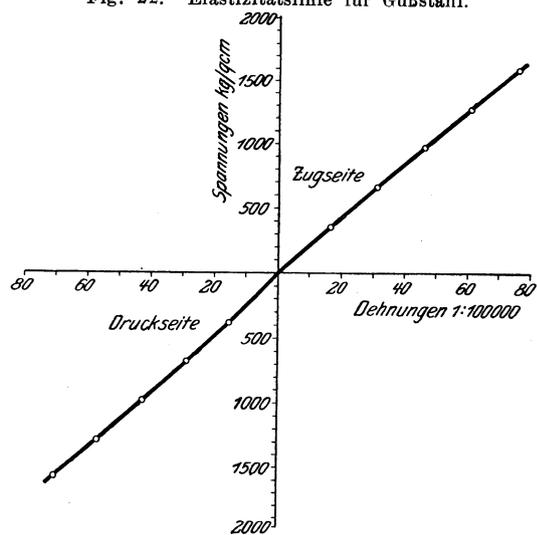


Fig. 24. Elastizitätslinie für Mannesmannrohr.

unter den Kerndurchmesser des aufgeschnittenen Gewindes, Fig. 20, abgedreht werden — selbstverständlich nach einer ganz flachen Kurve.

Die Druckfestigkeit ist nicht ermittelt, weil sie bekanntlich von der Länge der Probestäbe stark abhängt, und, wenn man diese ganz kurz nimmt, der Beginn der Zerstörung schwer erkennbar ist.

Zahlentafel 14.  
Gußstahl, Flußeisen und Mannesmannrohr.  
Mittlere Werte des Elastizitätsmoduls.

Gußstahl		Flußeisen		Mannesmannrohr	
Zugseite Spannung 125—1400 kg/qcm	Druckseite Spannung 65—1400 kg/qcm	Zugseite Spannung 125—1150 kg/qcm	Druckseite Spannung 75—1210 kg/qcm	Zugseite Spannung 40—1585 kg/qcm	Druckseite Spannung 75—1620 kg/qcm
2140	2150	2085	2065	2140	2303
2140		2075		2220	
aus der Elastizitätslinie zeichnerisch ermittelt					
2140		2080		2210 <sup>1)</sup>	
stärkste Abweichung eines Einzelwertes von diesem Mittel in vH					
-1,9	-1,9	+2,4	-1,9	-5,5	+15,3

<sup>1)</sup> Mit der sich am besten der Elastizitätslinie anschließenden, durch den Nullpunkt gehenden Geraden folgt  $E = 2185$  t/qcm. Die geometrische Bestimmung der mittleren Ordinate der Elastizitätslinie ergab aber 2210 t/qcm, und es erscheint doch wohl richtiger, diese Zahl, welche mit dem Mittelwerte der Zahlentafel übereinstimmt, als wirklichen Mittelwert in Rechnung zu stellen.

Zahlentafel 15.  
Zusammenstellung der Zugfestigkeiten zäher Stoffe in kg/qcm.  
Gußstahl.

Stabnummer			
Z 1	Z 2	Z 3	Z 4
6215	6120	6090	6090

Mittel 6130; größte Abweichung von diesem + 1,3 vH.

Flußeisen.

Stabnummer			
Z 5	Z 6	Z 7	Z 8
3890	3950	3890	3920

Mittel 3905; größte Abweichung von diesem + 1,2 vH.

Mannesmannrohr.

Stabnummer					
Z 9	Z 10	Z 11	Z 12	Z 13	Z 14
5550	5770	5680	5660	5560	5740

Mittel 5660; größte Abweichung von diesem  $\pm 1,9$  vH.

Große Schwierigkeiten machte die Bestimmung des Elastizitätsmoduls für Gußeisen. Es war ursprünglich beabsichtigt, ebenso wie bei den zähen Stoffen zu verfahren, und bei den Quadratstäben aus Gußeisen A ist das auch geschehen.

Hier ist von zwei Stäben vom Querschnitte Fig. 4, die in Masse geformt und aus einer Pfanne gegossen sind, je ein Biegestab von 1500 mm Länge abgeschnitten, der Rest aber zur Anfertigung von 7 Normalzugstäben von 20 mm Dmr. und 6 Druckstäben von rd. 45 mm Dmr. und 200 mm Länge verwendet. Leider wurde verabsäumt, zu bemerken, von welcher Stange die einzelnen Zug- und Druckstäbe stammen. Da sich nämlich bei den späteren Versuchen starke Schwankungen im elastischen Verhalten der einzelnen Stäbe zeigten, so würde es möglicherweise zur Klärung dieser Erscheinungen beitragen, wenn man sich den Ursprung jedes Probestabes genau vermerkt hätte.

Die Zahlentafel 16, wie die Elastizitätslinie Fig. 25, zeigen nichts besonders Auffälliges. Die Dehnungen wachsen viel schneller als die Spannungen; von einem unveränderlichen Elastizitätsmodul ist nicht mehr die Rede. Daß Gußeisen ein ungleichmäßiger Stoff ist, geht aus den Zusammenstellungen der

Zahlentafel 16.  
Gußeisen A.  
Elastizitätsmodul aus Zugversuchen.

Belastungs- stufe	Spannung für 3,14 qem Querschnitt	Stabnummer							Mittel
		Z 15	Z 16	Z 17	Z 18	Z 19	Z 20	Z 21	
		Querschnitt in qem							
kg	kg/qem	3,14	3,14	3,14	3,14	3,14	3,14	3,14	
100	30								
350	110	908	830	823	850	788	868	798	838
100	30								
600	190	811	768	772	807	768	829	775	790
100	30								
850	270	792	743	761	784	749	814	754	771
100	30								
1100	350	767	711	730	760	735	788	741	747

Elastizitätsmodul aus Druckversuchen.

Belastungs- stufe	Spannung für 15,0 qem Querschnitt	Stabnummer						Mittel
		D 15	D 16	D 17	D 18	D 19	D 20	
		Querschnitt in qem						
kg	kg/qem	16,20	15,83	15,61	14,20	14,20	14,40	
1000	65							
3500	235	928	868	865	885	917	931	899
1000	65							
6000	400	893	843	831	859	888	900	869
1000	65							
8500	565	880	827	822	849	884	891	859
1000	65							
11000	735	874	821	816	842	880	886	850

Zahlentafel 17 deutlich hervor; die erstere zeigt die bekannte Erscheinung der Abnahme des Elastizitätsmoduls mit wachsender Beanspruchung sehr deutlich.

Ganz wunderbarlich berühren aber die Zahlen für Gußeisen B. Es wurden aus diesem 10 Biegungsstäbe in 5 verschiedenen Profilen und daneben vier Stäbe gegossen, aus denen die Zug- und Druckproben entnommen wurden. Alle diese Stäbe sind in nur zwei Kästen in Masse geformt und aus einer

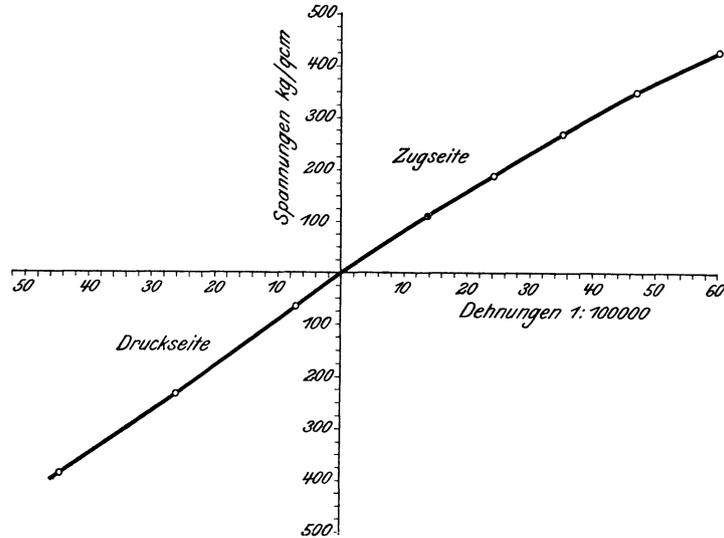


Fig. 25. Elastizitätslinie für Gußeisen A aus Probestäben.

Zahlentafel 17.  
Gußeisen A.

Abnahme des Elastizitätsmoduls mit wachsender Belastung.

Span- nungs- stufe kg/qcm	Zugseite							Mittel	Span- nungs- stufe kg/qcm	Druckseite						Mittel	
	Stabnummer									Stabnummer							
	Z 15	Z 16	Z 17	Z 18	Z 19	Z 20	Z 21			D 15	D 16	D 17	D 18	D 19	D 20		
30 110	100	100	100	100	100	100	100	100	65 235	100	100	100	100	100	100	100	100
30 190	89	93	94	95	97	95	97	94	65 400	96	97	96	97	97	97	97	97
30 270	87	90	92	92	95	94	94	92	65 565	95	95	95	96	96	96	96	96
30 350	84	86	89	89	93	91	93	89	65 735	94	95	94	95	96	95	95	95

Abweichungen vom Mittel in vH des letzteren.

30 110	+8,4	-1,0	-1,8	+1,4	-6,0	+3,6	-4,8		65 235	+3,2	-3,4	-3,8	-1,6	+2,0	+3,6	
30 190	+2,7	-2,8	-2,3	+2,2	-2,8	+4,9	-1,9		65 400	+2,8	-3,0	-4,4	-1,1	+2,2	+3,6	
30 270	+2,7	-3,6	-1,3	+1,7	-2,9	+5,6	-2,2		65 565	+2,4	-3,7	-4,3	-1,2	+2,9	+3,7	
30 350	+2,7	-4,8	-2,3	+1,7	-1,6	+5,5	-0,8		65 735	+2,8	-3,4	-4,0	-0,9	+3,5	+4,2	

Größte Abweichung vom Mittel auf der Zugseite 6,0 vH, auf der Druckseite 4,4 vH.

Pfanne gegossen. Das Profil der Stäbe für die Zugproben war ein Rechteck von 100 × 40 mm, das für die Druckproben ein Kreis von 63 mm Dmr. Die Zugproben selbst waren Normalstäbe von 25 mm, die Druckproben Stäbe von rd. 60 mm Dmr. und 200 mm Länge. Die Schwankungen sind hier bei den Zugversuchen so groß, daß durchaus Zweifel an der Richtigkeit der Messung gehegt werden mußten. Es wurde daher die ganze Untersuchung wiederholt. Dabei ergaben sich gegenüber der ersten Messung Abweichungen, die zwar nicht immer verschwindend gering waren, aber das Bild nicht veränderten; die Abweichungen der einzelnen Stäbe untereinander blieben gerade so groß. Deshalb mußten beide Messungen als gleichwertig erachtet werden; in Zahlentafel 18 sind also auch die Mittel eingetragen. Die größte Abweichung beider Versuchsreihen von ihrem Mittel beträgt 0,8 vH, die größte Abweichung zweier Einzelversuche von ihrem Mittel 3,3 vH. Beachtenswert ist, daß mit der Spannung die Uebereinstimmung wächst; für die höchste Belastungsstufe ist sie durchaus

Zahlentafel 18.

Gußeisen B.

Elastizitätsmodul aus Zugversuchen.

Belastungs- stufe	Spannung für 28,4 qcm Querschnitt	Stabnummer						Mittel							
		Z 32	Z 33	Z 34	Z 35	Z 36	Z 37								
		Querschnitt in qcm													
		4,91	4,91	4,91	4,91	4,95	4,91								
kg	kg/qcm														
250	50	977	957	951	938	810	784	951	964	814	814	783	801	881	876
600	120	937		926		759		977		814		820		872	
250	50	938		926		728		914		791		771		845	
950	195	914	926	897	911	736	732	914	914	774	782	760	765	832	838
250	50	918		903		706		884		768		723		817	
1300	265	900	909	869	886	706	706	884	884	756	762	743	733	810	813
250	50	889				689		872		743		713		795	
1650	335	878	883		860	688	688	872	872	748	745	717	715	794	794

Elastizitätsmodul aus Druckversuchen.

Belastungs- stufe	Spannung für 4,91 qcm Querschnitt	Stabnummer						Mittel	
		D 31	D 32	D 33	D 34	D 35	D 36		
		Querschnitt in qcm							
		28,4	28,4	28,4	28,4	28,4	28,4		
kg	kg/qcm								
1000	35	997							
3000	105		1006	987		1025		1006	1016
1000	35	970							
5000	175		974	958		989		989	975
1000	35	960							
7000	245		960	953		972		960	900
1000	35	950							
9000	315		955	934		960		952	947
1000	35	944							
11000	385		944	927		950		940	935

gut; man findet für diese im Mittel 0,06 vH, im einzelnen höchstens 0,7 vH. Die Untersuchung von 4 weiteren Zugstäben ist nicht viel besser ausgefallen, auch hier zeigten sich Schwankungen bis 12 vH; ich verzichte auf Mitteilung der Ergebnisse, doch sind sie bei Bildung der Elastizitätslinie in Fig. 26 berücksichtigt.

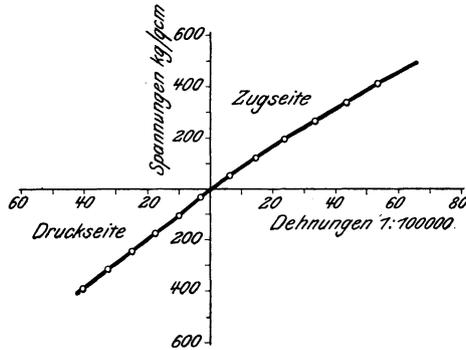


Fig. 26. Elastizitätslinie für Gußeisen B aus Probestäben.

Im Gegensatz zu den Zugversuchen ergeben die Druckversuche befriedigendere Übereinstimmung der sechs Versuchstäbe untereinander, wie aus den Zahlentafeln 18 und 19 zu entnehmen ist.

Zahlentafel 19.

Gußeisen B.

Abnahme des Elastizitätsmoduls mit wachsender Belastung.

Belastungs- stufe kg/qcm	Zugseite						Belastungs- stufe kg/qcm	Druckseite					
	Stabnummer							Stabnummer					
	Z 32	Z 33	Z 34	Z 35	Z 36	Z 37		D 31	D 32	D 33	D 34	D 35	D 36
50							35						
120	100	100	100	100	100	100	105	100	100	100	100	100	100
50							35						
195	97	97	93	95	96	96	175	98	97	97	97	97	96
50							35						
265	95	95	90	92	94	92	245	96	96	97	95	95	95
50							35						
335	92	92	88	91	92	90	315	95	95	95	94	94	93
							35						
							385	95	94	94	93	93	92

Abweichung vom Mittel in vH des letzteren.

50	+ 9,3	+7,1	-10,5	+10,0	-7,1	-8,6	35	-0,9	±0	-1,9	+1,9	±0	+1,0
120							105						
50	+10,5	+8,7	-12,7	+ 9,1	-6,7	-8,7	35	-0,6	-0,2	-1,8	+1,3	+1,3	-0,1
195							175						
50	+11,8	+9,0	-13,2	+ 8,7	-6,3	-9,8	35	-0,1	-0,1	-0,8	+1,1	-0,1	-0,1
265							245						
50	+11,1	+8,3	-13,4	+ 9,8	-6,2	-9,9	35	±0	+0,5	-1,7	+1,1	+0,2	-0,3
335							315						
							35	+0,4	+0,4	-1,4	+1,1	±0	-0,5
							385						

Größte Abweichung vom Mittel auf der Zugseite 13,4 vH, auf der Druckseite 1,9 vH.

Zahlentafel 20.  
Gußeisen C.  
Elastizitätsmodul aus Zugversuchen.

Belastungs- stufe	Spannung für 4,86 qcm Querschnitt	Stabnummer						Mittel
		Z 55	Z 56	Z 57	Z 58	Z 59	Z 60	
		Querschnitt in qcm						
kg	kg/qcm	4,75	4,91	4,91	4,83	4,91	4,87	
250 600	51 124	774	819	759	732	792	758	772
250 950	51 196	726	763	709	685	751	708	724
250 1300	51 268	693	730	675	651	714	687	692
250 1650	51 340	665	706	643	638	690	661	667
250 2000	51 412	606	671	606	599	659	635	629
250 2700	51 556	543	609	546	547	593	581	570
250 3400	51 700	496	557	496	496	540	525	518

Elastizitätsmodul aus Druckversuchen.

Belastungsstufe		Spannung für Querschnitt		Stabnummer						Mittel
				D 49	D 50	D 51	D 52	D 53	D 54	
		19,70 qcm	23,82 qcm	Querschnitt in qcm						
D 49—50	D 51—54	D 49—50	D 51—54	19,71	19,69	23,83	23,82	23,83	23,80	
1000 2000	1000 3000	51 101	42 126	873	919	905	894	892	934	903
1000 3500	1000 4500	51 178	42 189	869	882	896	874	881	911	885
1000 5000	1000 6000	51 254	42 252	852	854	865	856	855	882	861
1000 6500	1000 7500	51 330	42 315	838	834	851	842	847	870	847
1000 8000	1000 9000	51 416	42 378	830	824	838	830	833	859	836
1000 10000	1000 11000	51 508	42 402	820	814	824	818	824	838	823
1000 13000	1000 15000	51 660	42 630	799	797	805	812	805	821	806
1000 17000	1000 20000	51 863	42 840	792	782	794	795	802	803	795

Es lag nahe, dies auf die Form der Stangen zurückzuführen, aus denen die Versuchstäbe angefertigt waren; bei dem Rechteckprofile von  $100 \times 40$  mm konnte die ungleichmäßige Abkühlung nach dem Guß eine weit größere Rolle spielen als bei dem Kreisprofile von 65 mm Dmr. Deshalb wurden aus einem verbliebenen Materialreste von letzterem noch zwei Zugstäbe gefertigt und untersucht.

Auch diese Untersuchung wurde zweimal vorgenommen; beide Ergebnisse stimmen ziemlich gut überein: die Schwankung beträgt höchstens 2,1 vH und im Mittel für alle Stufen 1,4 vH. Aber die beiden Stäbe unterscheiden sich wieder wesentlich voneinander; die Schwankung ist höchstens 7,1 vH und im Mittel 4,3 vH. Immerhin ist das Ergebnis besser als bei den Zugstäben aus dem Rechteckprofile.

Zahlentafel 21.

Gußeisen C.

Abnahme des Elastizitätsmoduls mit wachsender Belastung.

Spannungsstufe kg/qcm	Zugseite						Spannungsstufe kg/qcm	Druckseite		Spannungsstufe kg/qcm	Druckseite					
	Stabnummer							Spannungsstufe	Stabnummer		Spannungsstufe	Stabnummer				
	Z 55	Z 56	Z 57	Z 58	Z 59	Z 60			D 49			D 50	D 51	D 52	D 53	D 54
50	100	100	100	100	100	100	50	100	100	40	100	100	100	100		
125							100			125						
50	94	93	94	94	95	94	50	100	96	40	99	98	99	98		
195							180			190						
50	90	89	89	89	90	91	50	98	93	40	96	96	96	94		
270							255			250						
50	86	86	85	87	87	87	50	96	91	40	94	94	95	93		
340							330			315						
50	78	82	80	82	83	84	50	95	90	40	93	93	94	92		
410							415			380						
50	70	74	72	75	75	77	50	94	89	40	91	92	92	90		
555							510			460						
50	64	68	65	68	68	69	50	92	87	40	89	91	90	88		
700							660			630						
							50	90	85	40	88	89	90	86		
							860			840						

Abweichung vom Mittel in vH des letzteren.

50	+0,3	+6,1	-1,7	-5,2	+2,6	-1,8	50	-3,3	+1,8	40	+0,2	-1,0	-1,2	+3,4
125							100			125				
50	+0,3	+5,4	-2,1	-5,4	+3,7	-2,2	50	-1,8	-0,3	40	+1,2	-1,2	-0,5	+2,9
195							180			190				
50	+0,1	+5,5	-2,5	-5,9	+3,2	-0,7	50	-1,0	-0,8	40	+0,5	-0,6	-0,7	+2,4
270							255			250				
50	-0,3	+5,8	-3,6	-4,3	+3,5	-0,9	50	-1,1	-1,5	40	+0,2	-0,6	±0	+2,7
340							330			315				
50	-3,7	+6,7	-3,7	-4,8	+4,8	+1,0	50	-0,7	-1,4	40	+0,1	-0,7	-0,4	+2,8
410							415			380				
50	-4,7	+6,8	-4,2	-4,0	+4,0	+1,9	50	-0,4	-1,1	40	+0,1	-0,6	+0,1	+1,8
555							510			460				
50	-4,2	+7,5	-4,2	-4,2	+4,2	+1,4	50	-0,9	-1,1	40	-0,1	-0,7	-0,1	+1,9
700							660			630				
							50	-0,4	-1,6	40	-0,1	±0	+0,9	+1,0
							860			840				

Deshalb sind, als sich die Biegungsstäbe **T** mit Gußfehlern behaftet zeigten und neue gegossen werden mußten, hier auch für die zugehörigen Zugversuche die Probestäbe aus dem Kreisprofile gearbeitet. Wie die Zahlentafeln 20 und 21 und die Elastizitätslinie Fig. 27, zeigen, stimmen in der Tat die Werte für Gußeisen *C* besser als die für *B*, immerhin aber noch schlecht genug.

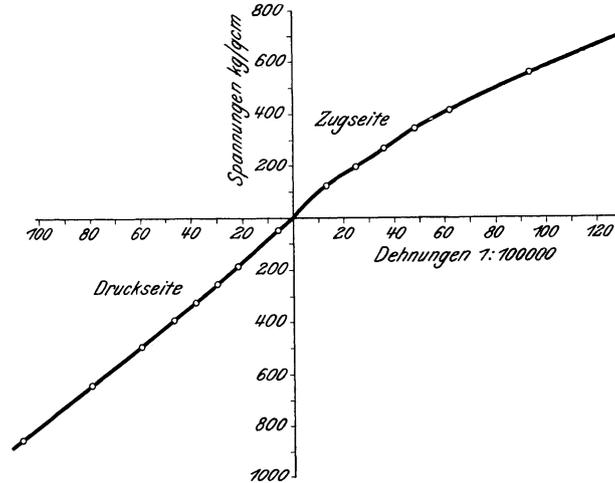


Fig. 27. Elastizitätslinie für Gußeisen *C* aus Probestäben.

Um nun einmal zu sehen, ob die Unterschiede der einzelnen Stäbe auch bei größerer Belastung erhalten bleiben, ist noch eine weitere Untersuchung mit Gußeisen *B* auf Zug gemacht, und zwar mit allen vorhandenen Stäben, mit Ausnahme eines, der bereits zerrissen war. Bei dieser Untersuchung wurde die Spannung bis 815 kg/qcm getrieben. Ferner wurden, um das Ergebnis möglichst zu sichern und um festzustellen, ob die Stäbe an sich gleichmäßig seien, zwei Spiegelpaare angesetzt, wie Fig. 28 zeigt. Die Ergebnisse sind aus

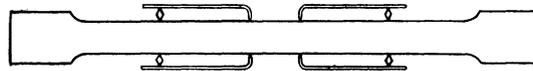


Fig. 28.

Zahlentafel 22.  
Gußeisen *B*. Elastizitätsmodul aus Zugversuchen.

Be- lastungs- stufe  kg	Span- nung für 4,91 qcm Quer- schnitt kg/qcm	Spiegel- nummer	Stabnummer										Mittel	
			Z 33	Z 34	Z 35	Z 36	Z 37	Z 38	Z 39	Z 40	Z 41	Z 42		Z 43
			Querschnitt in qcm											
			4,91	4,91	4,91	4,95	4,91	4,91	4,91	4,91	4,91	4,91	4,91	4,91
1000 bis 2000	205	I u. 2	830	686	856	715	707	673	640	757	734	687	720	728
	bis	3 » 4	840	677	840	697	693	707	653	764	744	683	757	733
	410	Mittel	835	681	848	706	700	690	646	760	739	685	738	730
1000 bis 3000	205	I u. 2	752	635	759	635	622	589	567	665	653	609	643	648
	bis	3 » 4	776	615	752	610	612	623	560	687	653	603	677	652
	610	Mittel	764	625	755	622	617	606	563	676	653	606	660	650
1000 bis 4000	205	I u. 2	684	571	690	570	561	525	504	622	590	545	584	586
	bis	3 » 4	704	555	682	548	549	562	500	600	589	538	613	585
	815	Mittel	694	563	686	559	555	543	502	611	589	541	598	585

Schwankungen: Belastungsstufe I 848 - 646 = 202; 202 : 730 = 0,277,  
 » II 764 - 563 = 201; 201 : 650 = 0,310,  
 » III 694 - 502 = 192; 192 : 585 = 0,328.

Zahlentafel 23.  
Zugversuche. Gußeisen A. Stäbe Z 19—21.  
d = 20,0 mm; f = 3,14 qcm. Meßlänge 100 mm.

Spannungstufe $\sigma - \sigma_0$ kg/qcm	Formänderung mm : 1000		Elastizitätsmodul t/qcm			
	gemessen mit Spiegel		gemessen mit Spiegel		Mittel	
	1 und 2	3 und 4	1 und 2	3 und 4		
Stab Z 19.						
159-318	20,9	21,1	761	754	757	
159-477	46,3	46,5	687	684	685	
159-636	77,0	77,8	620	613	616	
Stab Z 20.						
159-318	20,5	20,0	776	795	785	
159-477	45,3	43,8	702	726	714	
159-636	74,6	73,0	639	653	646	
Stab Z 21.						
159-318	21,1	20,8	754	765	759	
159-477	47,1	46,5	676	684	680	
159-636	78,3	76,7	609	623	616	

Zahlentafel 24.  
Zugfestigkeit des Gußeisens A.

Herkunft der Stäbe	aus denselben Stangen wie die Biegestäbe B 5 u. B 6							aus den aus B 5 gefertigten Druckstäben									
	Z 16	Z 17	Z 18	Z 19	Z 20	Z 21	Mittel	Z 23 D 21	Z 24 D 21	Z 25 D 22	Z 26 D 23	Z 27 D 23	Z 28 D 30	Z 29 D 30	Z 30 D 30	Z 31 D 30	Mittel
Zugfestigkeit in kg/qcm	1128	1083	1115	1098	1019	1113	<b>1093</b>	1138	1131	1122	1132	1138	1108	1122	1031	1059	<b>1109</b>

Gesamtmittel für Gußeisen A **1102** kg/qcm; größte Abweichung 7,5 vH.

Zugfestigkeit des Gußeisens B.

Herkunft der Stäbe	aus einer besonders gegossenen Stange von <input type="checkbox"/> Querschnitt										
Stabnummer . . . .	Z 32	Z 33	Z 34	Z 35	Z 36	Z 37	Z 40	Z 41	Z 42	Z 43	Mittel
Zugfestigkeit in kg/qcm	1385	1230	1238	1325	1233	1223	1383	1280	1260	1250	<b>1287</b>

desgleichen von  Querschnitt | aus dem Bildungsstabe B 7 gefertigte Flachstäbe

Z 38	Z 39	Mittel	Z 49 B 7	Z 50 B 7	Z 51 B 7	Z 52 B 7	Z 53 B 7	Z 54 B 7	Mittel
1105	1065	<b>1085</b>	1620	1100	1740	1630	1630	1680	<b>1567</b>

Gesamtmittel für Gußeisen B **1358** kg/qcm; größte Abweichung 22,0 vH.

Zugfestigkeit des Gußeisens C.

Herkunft der Stäbe	aus besonders gegossener Stange						
Stabnummer . . . .	Z 55	Z 56	Z 57	Z 58	Z 59	Z 60	Mittel
Zugfestigkeit in kg/qcm	802	1023	979	782	866	961	<b>902</b>

Gesamtmittel für Gußeisen C **902** kg/qcm; größte Abweichung 13,4 vH.

Zahlentafel 22 zu entnehmen. Die beiden Spiegelablesungen für denselben Stab zeigen Unterschiede bis zu 6,8 vH des Mittels; die einzelnen Stäbe unterscheiden sich stark voneinander; die Schwankung steigt bis 32,8 vH. Bei den 3 Stäben Z 19 bis Z 21 aus Gußeisen A, die auch nochmals bei höherer Beanspruchung geprüft wurden, ist der Unterschied der Angaben beider Spiegelpaare viel geringer; die Schwankung höchstens 3,3 vH des Mittels, siehe Zahlentafel 23.

Es ist also nicht anders: die Proben aus demselben Stabe sind sehr verschieden untereinander und nicht einmal in sich gleichmäßig. Es ist also höchst bedenklich, ja wohl unzulässig, gußeiserne Konstruktionen nach besonders hergestellten Proben zu beurteilen, auch wenn diese mit dem zu beurteilenden Stücke aus einer Pfanne gegossen sind. Es mag ja Gußeisen geben, welches ein gleichmäßigeres elastisches Verhalten zeigt; das vorliegende war ganz gewöhnlicher Maschinenguß. Auf solchen ist aber meist nur zu rechnen.

Auch die Festigkeitsuntersuchung, Zahlentafel 24, bestätigt die Ungleichmäßigkeit. Die Schwankung beträgt hier für Gußeisen B, Stäbe Z 32 bis Z 37,

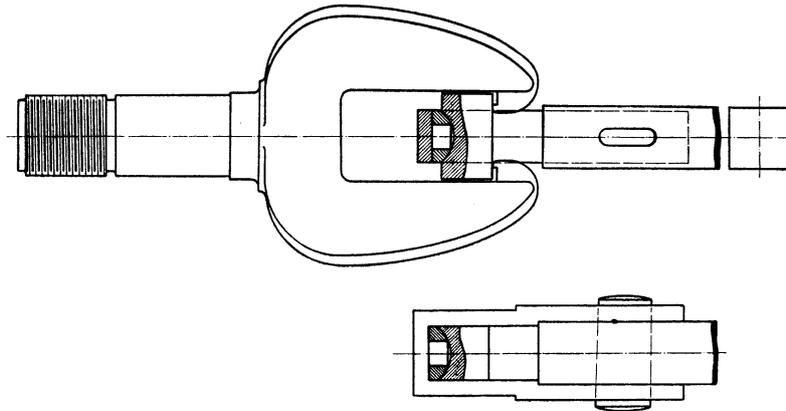


Fig. 29.

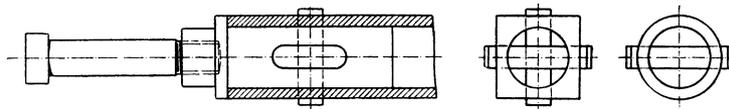


Fig. 30.

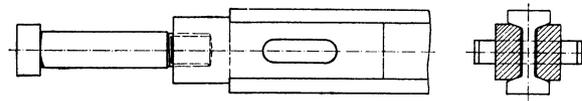


Fig. 31.

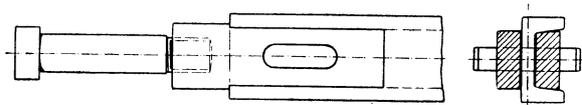


Fig. 32.

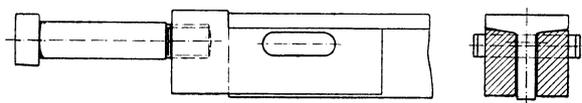


Fig. 33.

welche zuerst geprüft wurden, nicht weniger als 25,6 vH vom Mittel; für Gußeisen C, Stäbe Z 55 bis Z 60, gar 26,7 vH.

Es wurde deshalb, nachdem die Biegungsversuche bei geringeren Spannungen durchgemacht waren, von jedem Profil ein Biegungsstab geopfert und zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls benutzt. Er wurde mit passenden Köpfen versehen, im ganzen eingespannt und auf Zug untersucht, siehe Fig. 29 bis 33. Bei den Köpfen nach Fig. 30 war zunächst der Stift fortgelassen, er wurde aber später eingezogen, um zu sehen, ob dadurch die Verteilung der Spannungen über den Querschnitt verändert würde. Das war nicht der Fall; die Spannungen verteilten sich schon infolge der Keilverbindung gleichmäßig über den Querschnitt, wenigstens in der Mitte der Stablänge. Später wurden dann drei Stücke von 200 mm Länge abgetrennt und gedrückt. Die Ergebnisse zeigen die Zahlentafeln 25 bis 30 und die Fig. 34 bis 39. Bei den Zugversuchen wurden immer gemäß Fig. 28 beide Spiegelpaare angesetzt, und zwar an den Stellen, an denen sie bei den Biegeversuchen gesessen hatten; bei den Druckversuchen konnte nur ein Spiegelpaar angebracht werden, das auf der Mitte des Stabes saß.

Zahlentafel 25.

Elastizitätsmodul aus Versuchen mit Gußeisen A, Stab B 5 □.

Belastungs- stufe	Spannungs- stufe	Elastizitätsmodul in t/qcm						Mittel für Zug und Druck
		Zug	Druck				Mittel	
		Stabnummer				Mittel		
		Z 22 B 5	D 21 B 5	D 22 B 5	D 23 B 5			
kg	kg/qcm							
6000	70							
13000	145	877	988	964	975	976	926	
6000	70							
20000	225	858	963	952	957	957	907	
6000	70							
27000	300	822	937	926	942	935	878	
6000	70							
34000	375	785	924	909	918	917	851	

Zahlentafel 26.

Elastizitätsmodul aus Versuchen mit Gußeisen B, Stab B 7 □.

Belastungs- stufe	Spannungs- stufe	Elastizitätsmodul in t/qcm						Mittel für Zug und Druck
		Zug	Druck				Mittel	
		Stabnummer				Mittel		
		Z 44 B 7	D 37 B 7	D 38 B 7	D 39 B 7			
kg	kg/qcm							
3000	60							
6000	120	1144	1390	1390	1360	1380	1262	
3000	60							
9000	180	1110	1310	1280	1330	1307	1208	
3000	60							
12000	240	1088	1270	1280	1260	1270	1179	
3000	60							
15000	300	1073	1250	1250	1230	1243	1158	

Zahlentafel 27.  
Elastizitätsmodul aus Versuchen mit Gußeisen B, Stab B<sub>9</sub> ⊙.

Belastungs- stufe	Spannungs- stufe	Elastizitätsmodul in t/qcm						Mittel für Zug und Druck
		Zug	Druck				Mittel	
		Stabnummer				Mittel		
		Z 46 B 9	D 40 B 9	D 41 B 9	D 42 B 9			
kg	kg/qcm							
2000	55	920	948	1130	1100	1059	989	
4000	110							
2000	55	895	964	1090	1050	1035	965	
6000	165							
2000	55	880	953	1040	995	996	938	
8000	220							
2000	55	850	926	985	957	956	903	
11000	300							

Zahlentafel 28.  
Elastizitätsmodul aus Versuchen mit Gußeisen B, Stab B<sub>11</sub> I.

Belastungs- stufe	Spannungs- stufe	Elastizitätsmodul in t/qcm						Mittel für Zug und Druck
		Zug	Druck				Mittel	
		Stabnummer				Mittel		
		Z 47 B 11	D 43 B 11	D 44 B 11	D 45 B 11			
kg	kg/qcm							
1500	55	970	965	1000	982	982	976	
3000	110							
1500	55	916	957	992	924	958	937	
4500	165							
1500	55	894	938	970	907	938	916	
6000	220							
1500	55	873	929	952	905	929	901	
17500	275							
1500	55	842	918	934	900	917	879	
9500 <sup>1)</sup>	350 <sup>2)</sup>							

<sup>1)</sup> für Druck 10000 kg.    <sup>2)</sup> für Druck 370 kg/qcm.

Zahlentafel 29.  
Elastizitätsmodul aus Versuchen mit Gußeisen B, Stab B<sub>13</sub> L.

Belastungs- stufe	Spannungs- stufe	Elastizitätsmodul in t/qcm						Mittel für Zug und Druck
		Zug	Druck				Mittel	
		Stabnummer				Mittel		
		Z 48 B 13	D 46 B 13	D 47 B 13	D 48 B 13			
kg	kg/qcm							
1500	60	940	940	957	907	935	937	
3500	135							
1500	60	880	922	911	911	915	897	
5500	210							
1500	60	848	913	898	902	904	876	
7500	285							
1500	60	817	911	891	902	901	859	
10000	380							



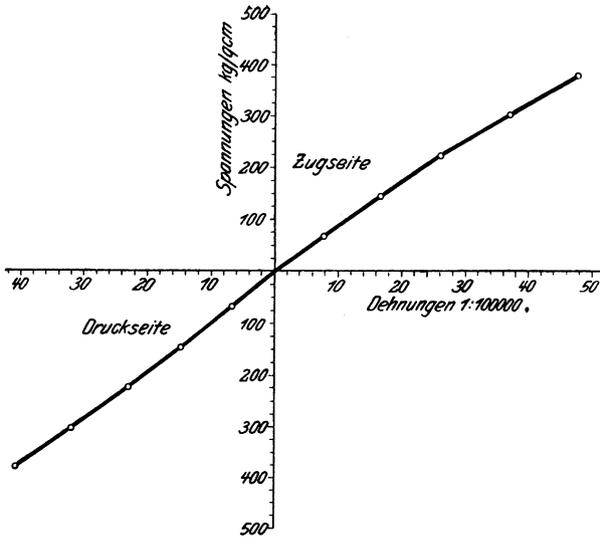


Fig. 34. Elastizitätslinie für den Stab B 5 aus Gußeisen A.

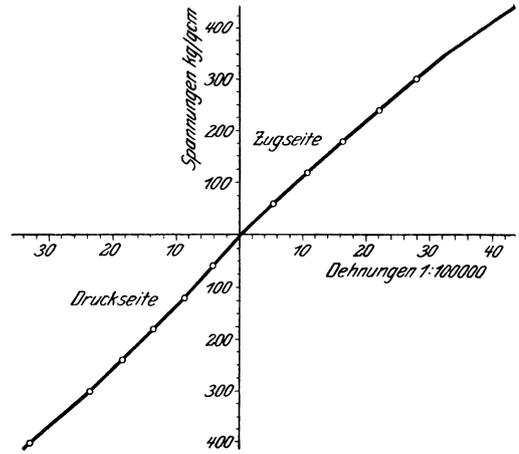


Fig. 35. Elastizitätslinie für den Stab B 7 aus Gußeisen B.

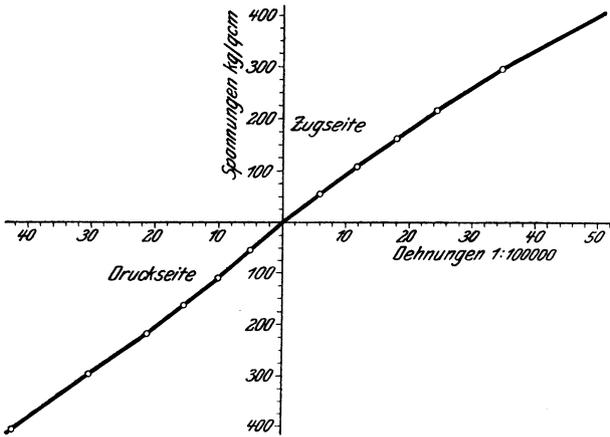


Fig. 36. Elastizitätslinie für den Stab B 9 aus Gußeisen B.

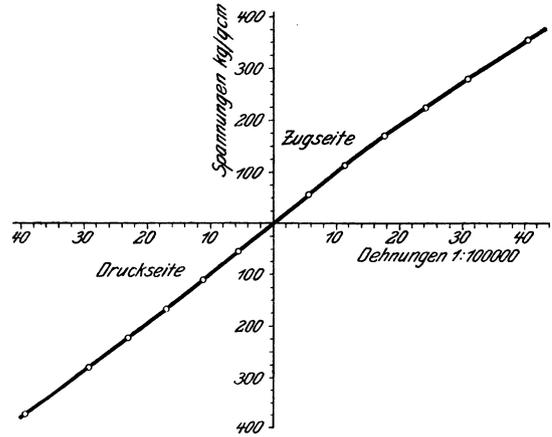


Fig. 37. Elastizitätslinie für den Stab B 11 aus Gußeisen B.

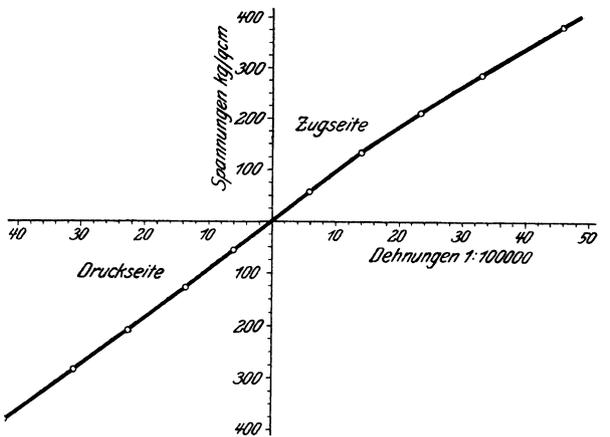


Fig. 38. Elastizitätslinie für den Stab B 13 aus Gußeisen B.

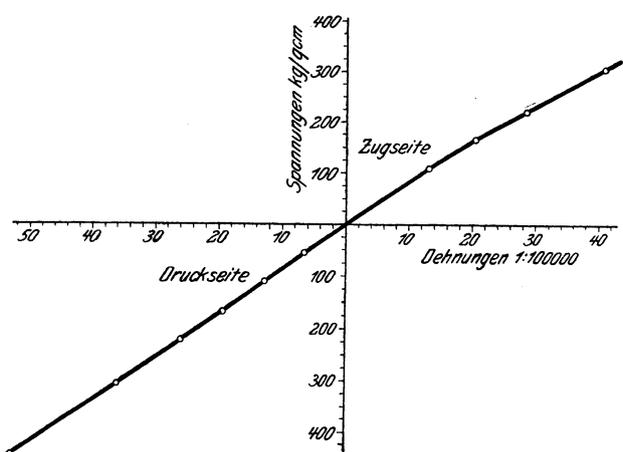


Fig. 39. Elastizitätslinie für den Stab B 15 aus Gußeisen C.

Zahlentafel 32. Gußeisen A.  
Elastizitätsmodul aus Zugversuchen in t/qem.

Belastungsstufe	Spannung für 3,14 qem Querschnitt	Stabnummer					Mittel	größte Abweichung vom Mittel in vH	
		Z23 D21 B5	Z24 D21 B5	Z25 D22 B5	Z26 D23 B5	Z27 D23 B5			
		Querschnitt in qem							
kg	kg/qem	3,12	3,14	3,12	3,09	3,12			
100	30								
400	130	794	786	794	786	770	786	-2,0	
100	30								
700	225	756	744	766	786	768	764	+2,9	
100	30								
1000	320	728	722	741	754	744	738	-2,2	
100	30								
1300	415	706	701	712	722	714	711	+1,6	
100	30								
1600	515	666	670	660	684	669	670	+2,1	
100	30								
1900	610	626	631	640	650	639	637	+2,0	

Elastizitätsmodul aus Druckversuchen in t/qem.

Belastungsstufe	Spannung für 12,57 qem Querschnitt	Stabnummer						Mittel	größte Abweichung vom Mittel in vH
		D24 D21 B5	D25 D21 B5	D26 D22 B5	D27 D22 B5	D28 D23 B5	D29 D23 B5		
		Querschnitt in qem							
kg	kg/qem	12,57	12,41	12,38	12,55	12,58	12,32		
400	30								
1600	125	888	924	874	905	896	924	902	-3,1
400	30								
2100	225	881	862	874	884	872	903	879	+2,7
400	30								
4000	320	864	890	858	865	852	885	869	+2,4
400	30								
5200	415	854	885	853	861	848	876	863	+2,6
400	30								
6400	510	842	869	839	850	842	860	850	+2,2
400	30								
7600	605	825	866	835	847	835	857	844	+2,6

Elastizitätsmodul aus Zugversuchen in t/qem.

Belastungs- stufe	Spannung für 3,14 qem Querschnitt	Stabnummer			Mittel	größte Abweichung vom Mittel in vH
		Z28 D30 B5	Z29 D30 B5	Z30 D30 B5		
		Querschnitt in qem				
kg	kg/qem	3,16	3,06	3,15		
100	30					
400	130	828	830	758	805	-5,8
100	30					
700	225	796	789	749	778	-3,7
100	30					
1000	320	769	754	701	741	-5,4
100	30					
1300	415	735	725	676	712	-5,0
100	30					
1600	515	700	686	633	673	-5,9
100	30					
1900	610	660	640	592	631	-6,2

Von Gußeisen *A* wurden, wie bereits oben gesagt, zwei Stangen gegossen und die Probestäbe aus Abschnitten dieser Stangen gefertigt. Es ist bedauerlich, daß nicht bemerkt wurde, aus welcher der beiden Stangen jeder einzelne Probestab stammt; man könnte dann den Vergleich weiter treiben. Immerhin bemerkt man, daß die Zahlen für das □-Profil größer sind, als die für die Rundstäbe, und zwar findet sich unter den letzteren kein einziger, welcher größere Werte als der Quadratstab zeigte. Also kann durch den erwähnten Mangel kein Zweifel an der Richtigkeit der Beobachtung begründet werden, nur ist die Größe des Unterschiedes nicht erkennbar. Um nun diesem Mangel abzuhelpfen, wurden aus den drei Druckstäben, welche aus Stab *B* 5 stammen, nochmals 6 Zug- und 6 Druckstäbe gefertigt und untersucht; allerdings hatten die ersteren nun nicht mehr die normale Länge. Die Ergebnisse sind in Zahlentafel 32 vermerkt, ebenso die von 4 weiteren Zugstäben etwas größerer Länge, welche aus einem verbleibenden Reste vom Stabe *B* 6 angefertigt wurden. Keiner dieser Stäbe erreicht die Zahlen des Stabes *B* 5, aus dem sie stammen. Ob der Grund hierfür im größeren Querschnitt liegt, oder darin, daß bei der Bearbeitung die äußeren Teile des Querschnittes des Stabes *B* 5 entfernt wurden, oder was sonst für eine Ursache vorliegt, mag dahingestellt bleiben. Die Tatsache steht unzweifelhaft fest, und der Unterschied ist erheblich. Deshalb dürfte es gerechtfertigt sein, für die Biegeversuche immer die Elastizitätslinie zu benutzen, welche am Biegestabe selbst ermittelt wurde.

Bei den vier Profilstäben, Zahlentafel 31, aus Gußeisen *B* fällt auf, daß sehr große Unterschiede zwischen ihnen bestehen. Zahlentafel 33, zusammengestellt aus 31, zeigt das sehr deutlich. Die Mittelwerte folgen bei allen Belastungen in der Reihe □, I, ⊙, L, und ebenso ist es mit den Werten für die Zugseite, nur daß die beiden letzten etwa gleich sind, während die für die Druckseite die Reihenfolge □, ⊙, I, L aufweisen. Weshalb der Unterschied besteht, ist aber ganz undeutlich, keinesfalls kann man ihn, wie vielleicht vermutet werden könnte, auf das Verhältnis Inhalt:Umfang zurückführen. Dieses Verhältnis ist in der Zahlentafel angegeben, die Reihenfolge ist I, □, L, ⊙. Es ist aber sehr wohl möglich, daß die Abkühlung nach dem Gusse ganz anders

Zahlentafel 33.  
Gußeisen *B*.  
Vergleich der Elastizitätsmodel in t/qcm, welche an den vier Profilstäben gewonnen sind.

Spannungsstufe kg/qcm	Art der Beanspruchung	□	I	⊙	L	Mittel	größte Abweichung vom Mittel in vH
50 bis 150	Zug	1112	949	896	910	967	15,0
	Druck	1340	998	1050	930	1079	24,1
	Mittel	1226	973	973	920	1023	19,8
50 bis 250	Zug	1083	903	865	859	927	16,8
	Druck	1270	958	979	914	1030	23,3
	Mittel	1176	930	922	886	978	20,2
50 bis 350	Zug	1074	864	814	823	894	20,1
	Druck	1226	946	946	904	1005	22,0
	Mittel	1150	905	880	863	949	21,1
Inhalt in qcm		50,3	27,3	36,7	26,2		
Umfang in qcm		65,2	35,0	54,3	37,0		
Verhältnis Inhalt : Umfang		0,77	0,78	0,68	0,71		



Um auch festzustellen, inwieweit zwei gleiche Stäbe gleichmäßig ausgefallen sind, wurden die beiden Stäbe © Z 45 B 10 und Z 46 B 9 auf Zug geprüft. Da die Belastungsstufen nicht die gleichen waren, so ist die Zusammenstellung in Zahlentafel 35 aus den Elastizitätslinien entnommen. Man sieht: Stab Z 46 B 9 zeigt kleinere *E*-Werte als Z 45 B 10, der Unterschied ist nicht unerheblich.

Um zu sehen, ob sich gewöhnliche Probestäbe ebenso wie die Profilstäbe verhalten, eine Frage die bei dem Gußeisen *A*, wie erwähnt, nachträglich geklärt werden konnte, wurden aus Stab Z 44 B 7 □, Gußeisen *B*, noch sechs Flachstäbe gefertigt und auf Zug untersucht. Die Ergebnisse sind aus Zahlentafel 36 zu entnehmen. Man sieht, die Werte für das volle Profil sind entschieden höher als die für die Probestäbe, wie das auch schon für Gußeisen *A* bemerkt wurde.

Zugversuch.

Zahlentafel 35.

Elastizitätsmodul aus Versuchen mit Gußeisen *B*,  
Stab Z 45 B 10 und Z 46 B 9.

Spannungsstufe kg/qcm	Stabnummer		Mittel	Abweichung vom Mittel in vH
	Z 45 B 10	Z 45 B 9		
50 100	934	883	908	2,9
50 150	900	862	881	2,1
50 200	889	827	858	3,6
50 250	865	814	839	3,0
50 300	846	807	826	2,4
50 350	814	771	792	2,7

Zahlentafel 36.

Gußeisen *B*.

Elastizitätsmodul aus Zugversuchen mit Flachstäben aus Stab B 7 □.

Belastungsstufe kg	Spannung für 2,8 qcm Querschnitt kg/qcm	Stabnummer						Mittel	Werte aus den Ver- suchen mit Z 44 B 7 selbst, gemäß Elasti- zitätslinie, Fig. 35
		Z 49 B 7	Z 50 B 7	Z 51 B 7	Z 52 B 7	Z 53 B 7	Z 54 B 7		
		Querschnitt in qcm							
		2,75	2,81	2,76	2,82	2,83	2,83		
150 350	55 125	1090	1060	1180	1015	1130	1110	1097	1130
150 550	55 195	1030	1050	1115	1000	1015	1040	1042	1098
150 750	55 270	1020	1020	1095	1020	1040	1040	1039	1077
150 950	55 340	1010	1010	1070	987	1005	1020	1017	1074

Die Abweichungen, welche sich bei den aus den Profilstäben entnommenen Abschnitten ergaben, die auf Druck beansprucht wurden, sind zum Teil recht erheblich. Man vergleiche z. B. Zahlentafel 27 Stab *D*<sub>40</sub> *B*<sub>9</sub> und *D*<sub>41</sub> *B*<sub>9</sub> ⊙. Das Material desselben Stabes muß also in seinen einzelnen Teilen verschieden sein. Allerdings kann es auch an der Druckverteilung über den Querschnitt liegen, wenn man verschiedene Werte findet; denn diese ist bei den Druckstäben längst nicht so sicher wie bei den langen Zugstäben. Ein Beweis dafür liegt schon in dem Umstande, daß derselbe Stab, wenn man die Spiegel nahe dem Ende ansetzt, ganz andere *E*-Werte ergibt, als wenn die Spiegel in der Mitte sitzen. Die in Zahlentafel 37 mitgeteilten Ergebnisse lassen das deutlich erkennen. Auch hier unterscheidet sich Stab *D*<sub>41</sub> *B*<sub>9</sub> beträchtlich von den beiden anderen.

Diese Beobachtung gab Veranlassung, einen aus Gußeisen *A* Stab *B*<sub>5</sub> verbliebenen Abschnitt, Stab *D*<sub>30</sub> *B*<sub>5</sub>, ausführlich in dieser Richtung zu prüfen. Es wurde die Dehnung in drei Querschnitten, nämlich in der Mitte und (bei 330 mm Stablänge) um 65 mm aus der Mitte nach beiden Enden zu gemessen. In allen drei Querschnitten wurde sie für beide Seitenpaare ermittelt, und zwar wurden die Spiegel jedesmal sowohl nahe der Kante als auch in der Mitte der Seite angesetzt. Es waren also 18 Meßstellen vorhanden, an jeder Stelle wurden zwei Belastungsstufen angewendet. Die Ergebnisse finden sich in Zahlentafel 38

Zahlentafel 37.

Gußeisen *B*.

Elastizitätsmodul aus Druckversuchen mit Stäben aus Stab *B*<sub>7</sub>.

Belastungsstufe kg	Spannung für 36,80 qcm Querschnitt kg/qcm	Spiegelsitz								
		nahe dem Ende				in der Mitte				
		Stabnummer				Mittel	Stabnummer			Mittel
		<i>D</i> <sub>40</sub> <i>B</i> <sub>9</sub>	<i>D</i> <sub>41</sub> <i>B</i> <sub>9</sub>	<i>D</i> <sub>42</sub> <i>B</i> <sub>9</sub>			<i>D</i> <sub>40</sub> <i>B</i> <sub>9</sub>	<i>D</i> <sub>41</sub> <i>B</i> <sub>9</sub>	<i>D</i> <sub>42</sub> <i>B</i> <sub>9</sub>	
2 000	55	1170	1540	1010	1240	948	1130	1100	1059	
4 000	110									
2 000	55	1100	1400	970	1157	964	1090	1050	1035	
6 000	165									
2 000	55	1060	1270	970	1100	953	1040	995	996	
8 000	220									
2 000	55	1010	1140	949	1033	926	985	957	956	
11 000	300									

Zahlentafel 38.

Gußeisen *A*.

Elastizitätsmodul aus Druckversuchen mit Stab *D*<sub>30</sub> *B*<sub>5</sub>.

Querschnitt . . . . .			I			II			III													
obere Seite . . . . .			<i>A</i>		<i>B</i>	<i>A</i>		<i>B</i>	<i>A</i>		<i>B</i>											
Spiegelsitz . . . . .			<i>o</i>	<i>m</i>	<i>u</i>																	
Be- lastungs- stufe kg	6000	Span- nungs- stufe kg/qcm	75	894	950	864	874	950	883	844	905	863	905	938	854	800	950	826	905	927	808	
	12000		150																			
	30000		375	883	896	834	887	898	885	854	878	832	893	878	860	821	886	813	877	885	825	

und werden aus der Fig. 43 besonders deutlich; in dieser sind die Dehnungen stark vergrößert eingetragen, so daß man die Formänderung der Querschnitte erkennt. Die Unregelmäßigkeiten sind sehr erheblich. Wie bei dem ©-Profil, Zahlentafel 37, ist der Elastizitätsmodul in der Stabmitte (Querschnitt II) erheblich kleiner als an den Enden, übrigens in allen Querschnitten in der Seitenmitte größer als an den Kanten.

Diese Beobachtung wird ferner durch Versuche mit verschiedenen Meßlängen bestätigt, die an den Stäben *D 37 B 7* bis *D 39 B 7* aus Gußeisen *B* durchgeführt wurden. Die Zusammenstellungen, Zahlentafel 39, zeigen, daß die Zusammendrückung in der Stabmitte sehr viel größer sein muß als an den Enden.

Man ersieht aus all diesen Versuchen, daß Gußeisen ein Material von sehr ungleichem elastischem Verhalten ist. Es erscheint zweifelhaft, ob es überhaupt zulässig ist, bei den Biegeversuchen mit so unsicheren Zahlen zu rechnen. Da aber die Biegeversuche bereits gemacht waren, bevor die Zug- und Druck-

Zahlentafel 39.  
Elastizitätsmodul für Gußeisen *B*, Druck.

Stab- nummer	Belastung <i>P</i> kg	Spannung $\sigma$ kg/qcm	Meßlänge 150 mm		Meßlänge 100 mm	
			Dehnung $\epsilon$ 1 : 1 000 000	Elastizitäts- modul t/qcm	Dehnung $\epsilon$ 1 : 1 000 000	Elastizitäts- modul t/qcm
<i>D 37 B 7</i>	3000	60	39	1550	44	1390
	6000	121				
	3000	60	82	1480	92	1310
	9000	181				
	3000	60	127	1420	142	1270
	12000	241				
3000	60	178	1360	194	1250	
15000	302					
<i>D 38 B 7</i>	3000	60	37	1660	44	1390
	6000	121				
	3000	60	80	1510	94	1280
	9000	181				
	3000	60	123	1470	141	1280
	12000	241				
3000	60	173	1400	194	1250	
15000	302					
<i>D 39 B 7</i>	3000	60	38	1600	45	1360
	6000	121				
	3000	60	79	1520	91	1330
	9000	181				
	3000	60	124	1460	144	1260
	12000	241				
3000	60	171	1410	196	1230	
15000	302					
Mittel	3000	60	38	1600	44	1380
	6000	121				
	3000	60	80	1500	92	1310
	9000	181				
	3000	60	125	1450	142	1270
	12000	241				
3000	60	174	1390	195	1240	
15000	302					

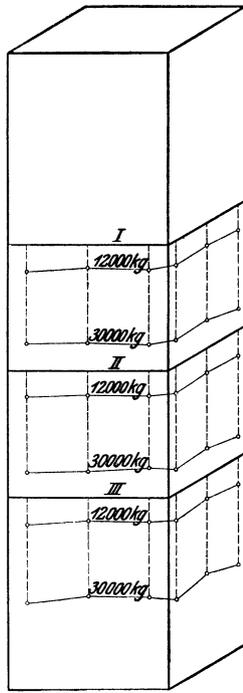


Fig. 43.

versuche so eingehend durchgeführt wurden — sie gaben ja erst die Veranlassung dazu —, so wäre es schade um die große Arbeit, sie nicht auszurechnen. Das ist nun durchweg mit den Werten des Elastizitätsmoduls geschehen, welche an den Profilstäben selbst

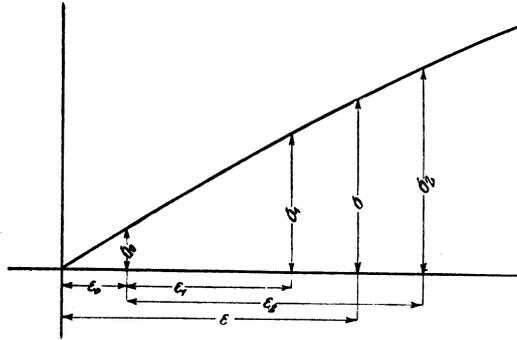


Fig. 44.

gewonnen wurden; und da wenigstens bei den Zugversuchen die Dehnungen an denselben Stellen gemessen wurden wie bei den Biegeversuchen, so verschwindet glücklicherweise damit ein großer Teil der Unsicherheit, welchen die Zug- und Druckversuche hervorrufen. Schließlich sind in den Zahlentafeln 40 bis 42

Zahlen-  
Guß-  
Spannungen in kg/qcm;  
(Aus den ursprünglichen

Spannung kg/qcm	Zug; Stabnummer																Mittel											
	Z 15	Z 16	Z 17	Z 18	Z 19	Z 20	Z 21	Z 22 B 5	Z 23 B 5	D 21 B 5	Z 24 B 5	D 21 B 5	Z 25 B 5	D 22 B 5	Z 26 B 5	D 23 B 5		Z 27 B 5	D 23 B 5	Z 28 B 5	D 30 B 5	Z 29 B 5	D 30 B 5	Z 30 B 5	D 30 B 5	Z 31 B 5	D 30 B 5	
100	110	120	122	118	125	115	125	114	126	128	126	120	121	121	121	121	121	121	121	121	121	121	121	121	121	121	121	122
200	243	258	257	247	260	240	258	230	261	266	258	249	256	249	250	273	279	255	255	255	255	255	255	255	255	255	255	255
300	378	406	398	385	401	371	398	359	406	410	402	390	398	397	391	423	432	397	397	397	397	397	397	397	397	397	397	397
400	528	564	556	530	546	508	511	504	559	564	553	542	551	539	542	585	596	546	546	546	546	546	546	546	546	546	546	546
500									738	739	733	717	733	706	713	778	778	737	737	737	737	737	737	737	737	737	737	737
600									943	938	924	907	925	899	914	1003	928	931	931	931	931	931	931	931	931	931	931	931

Zahlen-  
Guß-  
Spannungen in kg/qcm;  
(Aus den ursprünglichen

Spannung kg/qcm	Zug																								Mittel
	Stabnummer																								
	Z 32	Z 33	Z 34	Z 35	Z 36	Z 37	Z 38	Z 39	Z 40	Z 41	Z 42	Z 43	Z 44 B 7	Z 45 B 10	Z 46 B 9	Z 47 B 11	Z 48 B 13	Z 49 B 7	Z 50 B 7	Z 51 B 7	Z 52 B 7	Z 53 B 7	Z 54 B 7		
100	104	107	128	104	121	125	124	134	116	116	124	112	88	113	109	104	107	91	94	85	98	89	90	108	
200	214	218	269	216	253	259	261	273	241	241	260	234	180	235	224	218	223	191	190	177	199	192	190	224	
300	331	341	423	337	393	409	410	426	380	378	411	336	277	365	349	342	350	291	293	274	299	289	288	347	
400	459	477	587	469	563	569	577	616	525	539	583	538	372	524	467	469	482	400	411	388	411	412	430	490	
500	592	624	759	616	743	750	762	818	688	710	765	707						516	536	503	526	532	552	650	
600	735	771	932	763	925	931	949	1019	853	881	949	875						633	662	616	645	654	673	804	

nochmals die zu den Spannungen 100 bis 600 kg/qcm, oder so weit die Belastung sonst getrieben wurde, gehörigen Dehnungen zusammengestellt. Diese Spannungen sind aus den Originalprotokollen durch Interpolation gemäß Fig. 44 gefunden. Gemessen sind die Spannungen  $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 \dots$  und die Dehnungsunterschiede  $\epsilon_1, \epsilon_2 \dots$ . Es folgt zunächst

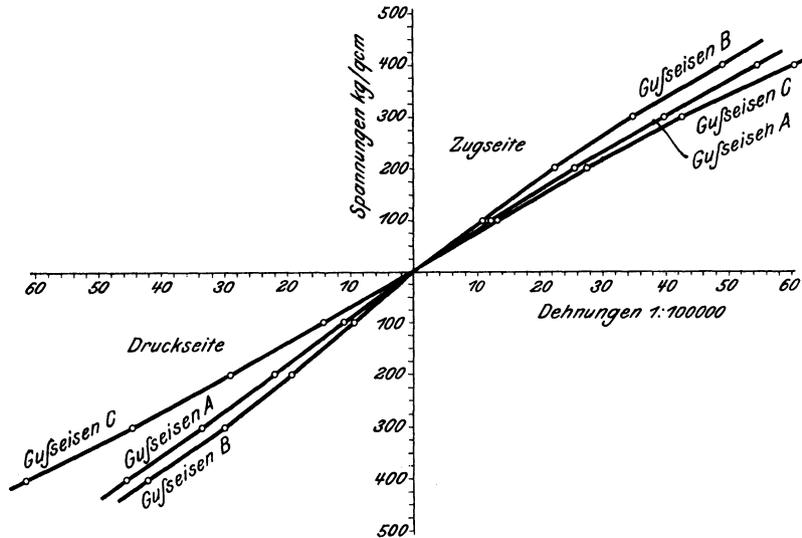


Fig. 45. Elastizitätslinien für Gußeisen. Aus allen Versuchen.

tafel 40.  
eisen A.  
Dehnungen in 1 : 1000000.  
Beobachtungsreihen interpoliert.)

Druck; Stabnummer															Mittel				
D15	D16	D17	D18	D19	D20	D21 B 5	D22 B 5	D23 B 5	D24 B 5	D21 B 5	D25 B 5	D21 B 5	D22 B 5	D27 B 5		D22 B 5	D28 B 5	D23 B 5	D29 B 5
108	115	116	113	109	107	101	104	103	113	109	115	110	112	109	110	112	109	109	110
216	231	231	226	218	215	206	209	207	227	227	229	225	229	220	221	229	220	220	221
330	351	354	343	330	327	317	313	317	337	338	348	344	350	336	336	344	350	336	336
447	474	479	462	446	442	430	439	433	466	450	468	463	469	454	455	463	469	454	455
564	600	603	583	561	556				591	572	594	584	592	578	582	584	592	578	582
681	724	729	704	675	671				714	690	717	706	716	698	702	706	716	698	702

tafel 41.  
eisen B.  
Dehnungen in 1 : 1000000.  
Beobachtungsreihen interpoliert.)

Druck																	Mittel	
Stabnummer																		
D31	D32	D33	D34	D35	D36	D37 B 7	D38 B 7	D39 B 7	D40 B 9	D41 B 9	D42 B 9	D43 B 11	D44 B 11	D45 B 11	D46 B 13	D47 B 13	D48 B 13	
100	99	100	97	99	97	62	60	64	105	89	91	104	100	102	107	103	110	94
205	206	208	202	206	205	130	130	134	210	186	194	211	204	215	216	216	220	194
314	313	318	310	314	313	206	207	214	322	298	306	322	314	327	328	330	333	299
422	422	428	419	424	426	280	283	291	437	409	418	434	426	440	439	445	444	421

Zahlentafel 42.  
 Gußeisen C.  
 Spannungen in kg/qem; Dehnungen in 1:1000000.  
 (Aus den ursprünglichen Beobachtungsreihen interpoliert.)

Spannung kg/qem	Zug								Druck									
	Stabnummer							Mittel	Stabnummer							Mittel		
	Z 55	Z 56	Z 57	Z 58	Z 59	Z 60	Z 61 B 15		D 49	D 50	D 51	D 52	D 53	D 54	D 55 B 15		D 56 B 15	D 57 B 15
100	130	122	132	137	127	132	118	128	116	163	165	167	168	160	116	123	107	143
200	272	259	277	289	263	278	252	270	232	340	336	342	341	329	232	244	220	291
300	432	410	447	456	420	436	382	426	355	528	524	526	511	351	368	337	447	
400	630	580	642	639	593	613	543	606	480	729	792	717	713	696	475	492	459	617
500	862	781	863	863	802	819	—	832	606	910	905	909	904	889	601	616	582	769
600	1103	998	1114	1108	1028	1048	—	1066	736	1111	1105	1099	1105	1083	—	—	—	1040

$$\epsilon_0 = \epsilon_1 \frac{\sigma_0}{\sigma_1 - \sigma_0}$$

und damit

$$\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_1 + (\epsilon_2 - \epsilon_1) \frac{\sigma - \sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1}$$

Bis 400 kg/qem sind die Zahlentafeln in Fig. 45 zeichnerisch dargestellt. Die mittleren Dehnungen aus den Zahlentafeln 40 bis 42 sind in Zahlentafel 43 nochmals eingetragen; daneben stehen die daraus folgenden Werte der Elastizitätsmodel.

Aus diesen ist dann wieder das Mittel für das ganze Spannungsgebiet 0 bis 400 kg/qem gebildet; in der Zahlentafel 43 durch einfache Addition der Einzelwerte. In der Zahlentafel 44 sind diese Mittelwerte nochmals zusammengestellt, aber so gebildet, wie es die Fig. 46 und 47 erläutern. Nach Fig. 46 ist für die Zugseite oder Druckseite die Elastizitätslinie durch eine Gerade gemäß der Beziehung

Zahlentafel 43.  
 Mittlere Elastizitätsmodel für Gußeisen aus den Zahlentafeln 40 bis 42.

Spannung $\sigma$	A						B						C					
	Zug		Druck		Mittel	E	Zug		Druck		Mittel	E	Zug		Druck		Mittel	E
	$\epsilon_1$	$E_1$	$\epsilon_2$	$E_2$			$\epsilon_1$	$E_1$	$\epsilon_2$	$E_2$			$\epsilon_1$	$E_1$	$\epsilon_2$	$E_2$		
100	122	820	110	909	864	108	926	94	1063	994	128	781	143	700	740			
200	255	784	221	906	845	224	893	194	1031	962	270	741	291	687	714			
300	397	756	336	894	825	347	865	299	1003	934	426	705	447	671	688			
400	546	733	455	879	806	490	816	421	950	883	606	660	617	649	654			
Mittel	—	773	—	897	<b>835</b>	—	875	—	1012	<b>943</b>	—	722	—	677	<b>699</b>			

Zahlentafel 44.  
 Mittlerer Elastizitätsmodul für Gußeisen gemäß Fig. 46 und 47.

	A	B	C
$E_1$	763	864	707
$E_2$	895	1000	672
$E$	824	936	688

$$\frac{1}{2} \sigma \varepsilon_1 = \frac{\sigma_4 + \sigma_3}{2} (\varepsilon_4 - \varepsilon_3) + \frac{\sigma_3 + \sigma_2}{2} (\varepsilon_3 - \varepsilon_2) + \frac{\sigma_2 + \sigma_1}{2} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + \frac{\sigma_1}{2} \varepsilon_1,$$

$$\sigma = 100 \left\{ 7 - 2 \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{\varepsilon_4} \right\}$$

ersetzt. Nach Fig. 47 aber gilt für das ganze Gebiet von  $-400 \text{ kg/qcm}$  bis  $+400 \text{ kg/qcm}$ :

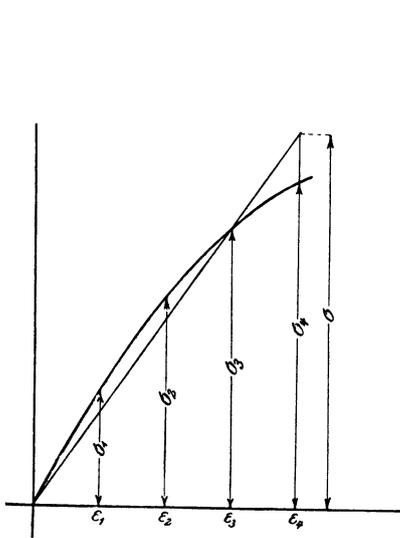


Fig. 46.

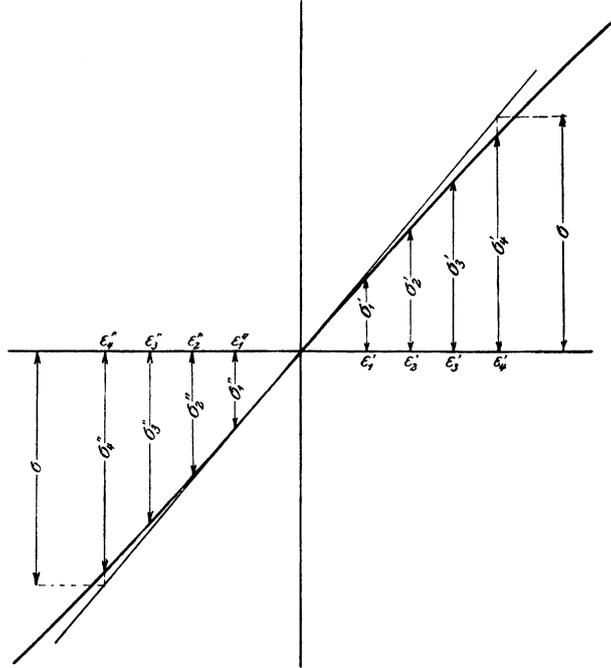


Fig. 47.

$$\sigma \frac{\varepsilon_4' + \varepsilon_4''}{2} = \frac{\sigma_4 + \sigma_3}{2} (\varepsilon_1' + \varepsilon_4'' - \varepsilon_3' - \varepsilon_3'') + \frac{\sigma_3 + \sigma_2}{2} (\varepsilon_3' + \varepsilon_3'' - \varepsilon_2' - \varepsilon_2'')$$

$$+ \frac{\sigma_2 + \sigma_1}{2} (\varepsilon_2' + \varepsilon_2'' - \varepsilon_1' - \varepsilon_1'') + \frac{\sigma_1}{2} (\varepsilon_1' + \varepsilon_1'')$$

$$\sigma = 100 \left\{ 7 - 2 \frac{\varepsilon_3' + \varepsilon_3'' + \varepsilon_2' + \varepsilon_2'' + \varepsilon_1' + \varepsilon_1''}{\varepsilon_4' + \varepsilon_4''} \right\}.$$

Diese Mittelwerte von  $\varepsilon$  unterscheiden sich selbstredend etwas von denen der vorigen Zahlentafel und sind wohl richtiger; eine noch genauere Mittelbildung, etwa mit Hülfe der Methode der kleinsten Quadrate, ist aber mit Rücksicht auf die Genauigkeit der Beobachtungen und den Zweck der Arbeit überflüssig.

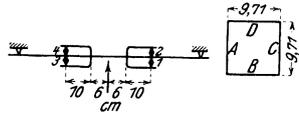
### Die Biegeversuche.

Die Biegeversuche wurden zunächst für Stahl und Flußeisen an je einem Stabe, für Mannesmannrohr und Gußeisen an je zwei Stäben durchgeführt. Die Spannungen wurden in mäßigen Grenzen gehalten, bei Stahl und Flußeisen  $800 \text{ kg/qcm}$ , bei Mannesmannrohr  $1200$ , bei Gußeisen  $300$  nicht überschritten. Durchbiegung und Dehnung wurden bei drei Belastungsstufen gemessen. Es ergaben sich so zwei Versuchsreihen

Bg I mit den 9 Stäben B 1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15  
 und Bg II » » 7 » B 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16.



als Kopfindex. Es wurden auch wohl die Spiegel gemäß den Fig. 40 bis 42, S. 34, oben, in der Mitte und unten am Querschnitt angesetzt; die Versuche sind dann mit dem Fußindex 1 bis 3 versehen. Es bedeutet also z. B. *Bg I b<sub>2</sub>* einen Biegeversuch mit dem betreffenden Stabe der Neunerreihe bei 80 cm Stützweite;



Uebersetzung 1 : 500.

Uebersetzung 1 : 500.

Spiegel in der Mitte, Ablesungen in mm.

Spiegelgeräte							
Zugseite				Druckseite			
links Spiegel 4		rechts Spiegel 2		links Spiegel 3		rechts Spiegel 1	
0		0		0		0	
8,8	8,8	9,0	9,0	8,6	8,6	8,9	8,9
0	8,8	0	9,0	0	8,6	0	8,9
8,9	8,9	9,0	9,0	8,7	8,7	8,9	8,9
0	8,9	0	9,0	0	8,7	0	8,9
8,9	8,9	9,0	9,0	8,6	8,6	8,9	8,9
0	8,9	0	9,0	0	8,6	0	8,9
8,8	8,8	9,0	9,0	8,4	8,4	8,8	8,8
0	8,8	0	9,0	0	8,4	0	8,8
8,9	8,9	9,0	9,0	8,6	8,6	8,9	8,9
0	8,9	0	9,0	0	8,6	0	8,9
	<b>8,9</b>		<b>9,0</b>		<b>8,6</b>		<b>8,9</b>
17,3	17,3	18,0	18,0	17,0	17,0	17,8	17,8
0	17,3	0	18,0	0	17,0	0	17,8
17,3	17,3	18,0	18,0	17,0	17,0	17,8	17,8
0	17,3	0	18,0	0	17,0	0	17,8
17,3	17,3	18,0	18,0	17,0	17,0	17,8	17,8
0	17,3	0	18,0	0	17,0	0	17,8
17,3	17,3	18,0	18,0	17,0	17,0	17,8	17,8
0	17,3	0	18,0	0	17,0	0	17,8
	<b>17,3</b>		<b>18,0</b>		<b>17,0</b>		<b>17,8</b>
26,0	26,0	26,8	26,8	25,5	25,5	26,2	26,2
0	26,0	0	26,8	0	25,5	0	26,2
26,0	26,0	27,0	27,0	25,8	25,8	26,2	26,2
0	26,0	0	27,0	0	25,8	0	26,2
26,0	26,0	26,9	26,9	25,6	25,6	26,2	26,2
0	26,0	0	26,9	0	25,6	0	26,2
26,0	26,0	26,9	26,9	25,8	25,8	26,2	26,2
0	26,0	0	26,9	0	25,8	0	26,2
	<b>26,0</b>		<b>26,9</b>		<b>25,7</b>		<b>26,2</b>
43,4	43,4	44,8	44,8	43,0	43,0	43,9	43,9
0	43,4	0	44,8	0,1	42,9	0	43,9
43,3	43,3	44,8	44,8	43,0	42,9	43,8	43,8
0,1	43,2	0	44,8	0,1	42,9	0	43,8
43,4	43,3	44,8	44,8	43,0	42,9	43,8	43,8
0,1	43,3	0	44,8	0,1	42,9	0	43,8
43,4	43,3	44,8	44,8	43,0	42,9	43,8	43,8
0,1	43,3	0	44,8	0	43,0	0	43,8
	<b>43,3</b>		<b>44,8</b>		<b>42,9</b>		<b>43,8</b>
60,9	60,8	62,1	62,1	60,1	60,1	60,9	60,9
0,3	60,6	0	62,1	0,2	59,9	0	60,9
60,9	60,6	62,0	62,0	60,1	59,9	61,0	61,0
0,2	60,7	0	62,0	0,2	59,9	0	61,0
60,9	60,7	62,0	62,0	60,1	59,9	61,0	61,0
0,4	60,5	0,1	61,9	0,3	59,8	0	61,0
60,9	60,5	62,0	62,1	60,3	60,0	61,0	61,0
0,3	60,6	0	62,2	0,4	59,9	0	61,0
	<b>60,6</b>		<b>62,1</b>		<b>59,9</b>		<b>61,0</b>

Zahlentafel 46.

Versuchsnummer *Bg I c'*.

Flußeisen, Stab *B II*.

Stützweite 120 cm, Seite *A* liegt an, *B* unten,

Belastung <i>P</i> kg	Bauschinger-Geräte							
	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$\frac{a_1 + a_2}{2}$	$\frac{b = a_1 + a_2}{2} - 200$	$\frac{c = a_0 - 100 - b}{}$	0,02 <i>c</i>	$s - s_0$
600	100	200	200	200	0	0	0	
1200	102,7	202,4	201,2	201,8	1,8	0,9	0,018	0,018
600	100,1	201,4	200,2	200,8	0,8	-0,7	-0,014	0,032
1200	102,8	203,2	201,4	202,3	2,3	0,5	0,010	0,024
600	100,1	202,0	200,3	201,1	1,1	-1,0	-0,020	0,030
1200	102,7	203,5	201,4	202,4	2,4	0,3	0,006	0,026 $\lambda$
600	100,1	202,3	200,4	201,3	1,3	-1,2	-0,024	0,030
1200	102,5	203,8	201,4	202,6	2,6	-0,1	-0,002	0,022
600	99,9	202,4	200,4	201,4	1,4	-1,5	-0,030	0,028 $\gamma$
<b>600</b>								<b>0,026</b>
1800	104,8	204,6	202,3	203,4	3,4	1,4	0,028	0,058
600	100,0	202,3	200,3	201,3	1,3	-1,3	-0,026	0,054
1800	105,0	204,7	202,4	203,5	3,5	1,5	0,030	0,056
600	100,0	202,3	200,3	201,3	1,3	-1,3	-0,026	0,056
1800	105,0	204,8	202,4	203,6	3,6	1,4	0,028	0,054 $\lambda$
600	100,0	202,3	200,3	201,3	1,3	-1,3	-0,026	0,054
1800	104,8	204,8	202,4	203,6	3,6	1,2	0,024	0,050
600	99,9	202,4	200,3	201,3	1,3	-1,4	-0,028	0,052 $\gamma$
<b>1200</b>								<b>0,052</b>
2400	107,1	205,7	203,3	204,5	4,5	2,6	0,052	0,080
600	99,8	202,7	200,5	201,6	1,6	-1,8	-0,036	0,088
2400	107,0	205,8	203,4	204,6	4,6	2,4	0,048	0,084
600	99,6	202,7	200,6	201,6	1,6	-2,0	-0,040	0,088
2400	106,9	206,0	203,6	204,8	4,8	2,1	0,042	0,082 $\lambda$
600	99,7	202,9	200,6	201,7	1,7	-2,0	-0,040	0,082
2400	107,0	206,2	203,8	205,0	5,0	2,0	0,040	0,080
600	99,4	202,8	200,6	201,7	1,7	-2,3	-0,046	0,086 $\gamma$
<b>1800</b>								<b>0,082</b>

die zweite Seite lag an, und die Spiegel saßen, wie gewöhnlich, in der Mitte des Querschnittes.

Die Stäbe der Reihe *Bg II* sind, wie früher erwähnt, später zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls benutzt und dabei zerschnitten; mit denen der Reihe *Bg I* ist noch eine weitere kleinere Versuchsreihe *Bg III* bei 120 und 40 cm Stützweite durchgeführt. Diese sollte einerseits zur Kontrolle dienen, andererseits aber wurden bei 120 cm Stützweite die Beobachtungen bei erhöhter Spannung fortgesetzt und schließlich die Stäbe zerbrochen. Stets folgte der Belastung die Entlastung bis auf die mit Rücksicht auf festen Sitz gewählte Ausgangsspannung.

Einige weitere Versuche dienten besonderen Zwecken; sie sind durchweg nur mit dem Stabe *B 5* aus Gußeisen *A* angestellt. Diese Reihen werden später behandelt werden; sie sind mit *Bg IV* bis *VI* bezeichnet.

Bei den zuerst angestellten Versuchen saßen die Federschneiden der Spiegel, siehe Fig. 13, S. 6, 6 cm aus der Mitte der Stäbe; diese Entfernung wurde später auf 5 cm verringert; anfänglich wurde mit Federn von 15, später 10 cm Länge gearbeitet.



die Größe  $0,02 c$ ; sie ist mit Rücksicht auf die Anfangslast wie in den Formeln des 2. Abschnittes mit  $s - s_0$  bezeichnet.

Aus den Spiegelablesungen ist gemäß Fig. 13 sowohl für die Zugseite wie für die Druckseite das Mittel aus rechts und links genommen und damit die Dehnung nach Gl. (VIII) berechnet.

Die Bauschinger-Geräte haben mancherlei Fehlerquellen, aber wenn man auch von diesen ganz absieht, so kann die Genauigkeit der Messung doch nicht sehr weit getrieben werden, weil sie durch die Genauigkeit der Ablesung beschränkt wird. Nimmt man an, daß man auf einer Millimeterteilung  $1/5$  mm durch Schätzung sicher abliest, so würde man also statt der richtigen Durchbiegung

$$s = 0,02 \left[ a_0 - \frac{a_1 + a_2}{2} \right]$$

die falsche

$$s = 0,02 \left[ a_0 + 0,02 - \frac{a_1 + a_2}{2} + 0,02 \right]$$

erhalten können, also einen Fehler von

$$\Delta s = 0,0008 \text{ cm}$$

machen können. Nun beträgt aber gelegentlich bei kleiner Belastung und kleiner Stützweite die berechnete Durchbiegung nach Abzug des von der Scherkraft herrührenden Teiles überhaupt nur  $0,0016$  cm. Es ist also nicht auffällig, wenn sich bei Wiederholung desselben Versuches große Abweichungen in den Ergebnissen zeigen, und es ist gefährlich, aus solchen Abweichungen Schlüsse zu ziehen, wenn sie sich nicht vielfach und regelmäßig wiederholen. Bei großer Spannweite und hoher Belastung arbeitet man selbstverständlich viel sicherer; hat man Durchbiegungen von  $0,08$  cm, so kann die Ablesung nicht wohl mehr als 1 vH Fehler verursachen.

Bei der Berechnung der Dehnungen gemäß den Beziehungen

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = \frac{1}{1000 c} \cdot \frac{l}{2 z} \{ a - a_0 + 440 (a - a_0) \},$$

$$a - a_0 = 12 \frac{l^2 - x^2}{z^3} (s - s_0)$$

erhält man für das zweite Glied der oberen Gleichung bei Annahme des vorhin berechneten Fehlers von  $0,0008$  cm die Abweichung:

$$\text{für } l = 120 \text{ cm} \dots x = 45 \text{ cm} \dots 440 \cdot 12 \cdot \frac{3600 - 2015}{1728000} \cdot 0,0008 = 0,00386,$$

$$\text{» } l = 40 \text{ »} \dots x = 5 \text{ »} \dots 440 \cdot 12 \cdot \frac{400 - 25}{64000} \cdot 0,0008 = 0,0248,$$

also mit dem Ablesungsfehler  $0,2$  mm den Dehnungsfehler:

$$\text{für } l = 120 \text{ cm} \dots z = 50 \text{ cm} \dots \Delta \varepsilon = \frac{120}{1000 \cdot 10 \cdot 100} (0,020 + 0,004) = 3 \cdot 10^{-6},$$

$$\text{» } l = 40 \text{ »} \dots z = 10 \text{ »} \dots \Delta \varepsilon = \frac{40}{1000 \cdot 10 \cdot 20} (0,020 + 0,025) = 9 \cdot 10^{-6}.$$

Da die Dehnungen bei kleiner Belastung etwa  $100 \cdot 10^{-6}$  betragen, so macht das bei großer Spannweite 3, bei kleiner 9 vH aus. Bei starker Belastung kommt man im ersten Falle also auch auf etwa 1 vH.

Ein Fehler in der Einstellung der Längen  $l$ ,  $x$  und  $z$  äußert sich erheblich nur in dem Faktor  $l : 2 z$ . Nimmt man nun  $0,5$  mm als falsche Einstellung an, so kann man als Abweichung

für  $l = 120 \text{ cm} \dots z = 50 \text{ cm} \dots \frac{120,5}{100-1} - \frac{120}{100} = 0,017$  oder  $\frac{0,017}{1,2} \cdot 100 = 1,4 \text{ vH}$ ,  
 »  $l = 40 \text{ » } \dots z = 10 \text{ » } \dots \frac{40,5}{20-1} - \frac{40}{20} = 0,132$  »  $\frac{0,132}{2} \cdot 100 = 6,6 \text{ »}$

erhalten.

Die Dehnungsmessung ist also auch nicht sehr genau. Selbstverständlich werden die Ergebnisse besser, wenn man die Ablesungen, wie geschehen, mehrfach macht. Man erreicht dann bei Wiederholungsversuchen bei großer Stützweite schöne Uebereinstimmung; bei kleiner aber ist solche nicht zu erzielen.

Es mag auch vorkommen, daß die Spiegel etwas rutschen. Das macht aber nichts, wenn man, wie geschehen, die Belastungen so oft wieder aufbringt, bis die Ablesungen stimmen.

Ein anderer Fehler liegt in der Kraftanzeige der Werder-Maschine. Da sich die Versuche über mehrere Jahre erstreckten, so ist dieser Fehler für die einzelnen Versuche verschieden groß. Selbstverständlich wurde die Maschine während dieser Zeit mehrfach in üblicher Weise geeicht; dabei betrug der Fehler nie mehr als 1 vH. Er blieb unberücksichtigt, ebenso der Fehler, der von der Auflagerreibung herrührt, die möglichst klein gehalten wurde.

### Die Biegungsversuche mit zähen Stoffen.

Gußstahl. Zahlentafel 47.

Zunächst fällt auf, daß Versuchswiederholungen nicht genau übereinstimmen. Die Bauschinger-Geräte dürften, wie oben erörtert, infolge von un-

Zahlentafel 47.

Stab B I. Ergebnisse der Biegeversuche mit Gußstahl  
 berechnet mit  $E = 2140 \text{ t/qcm}$ .

Versuchsnummer	Belastung $P - P_0$ kg	Kraftmoment $M - M_0$ emkg	Durchbiegung $s - s_0$ in cm				Elastizitätsmodul $E$ in t/qcm		Dehnung $\epsilon - \epsilon_0$ aus den Spiegeln in 1:1000000		Spannung $k - k_0$ in kg/qcm				
			berechnet $s_1$	beobachtet $s$	wegen der Scherkraft $s_1$	wegen des Kraftmomentes $s_2$	beobachtet $E$	aus der Durchbiegung $E$	Zug- seite	Druck- seite	berechnet	aus den Spiegelablesungen			
												aus der Durchbiegung	Zug- seite	Druck- seite	Mittel
Stützweite 120 cm															
Bg Ia	1300	39000	0,0302	0,0307	0,0006	0,0301	2140	2145	130	127	260	259	278	272	275
	2600	78000	0,0603	0,0623	0,0013	0,0610		2117	258	256	520	525	554	548	551
	3900	117000	0,0905	0,0931	0,0019	0,0912		2124	392	384	780	785	839	821	830
Bg IIIa	1300	39000	0,0302	0,0307	0,0006	0,0301	2140	2145	126	126	260	259	270	270	270
	2600	78000	0,0603	0,0608	0,0013	0,0595		2170	254	251	520	512	544	537	540
	3900	117000	0,0905	0,0911	0,0019	0,0892		2171	379	374	780	768	810	802	806
	7800	234000	0,1810	0,1819	0,0038	0,1781		2175	758	750	1560	1534	1622	1605	1613
15600	468000	0,3619	0,3656	0,0075	0,3581	2163	1511	1500	3120	3082	3237	3210	3223		
Stützweite 80 cm															
Bg Ib	1950	39000	0,0134	0,0129	0,0006	0,0123	2140	2332	127	125	260	238	272	267	269
	3900	78000	0,0268	0,0271	0,0013	0,0258		2223	257	251	520	500	550	537	543
	5850	117000	0,0402	0,0414	0,0019	0,0395		2181	389	380	780	765	832	817	824
Stützweite 40 cm															
Bg Ic	3900	39000	0,0034	0,0044	0,0006	0,0038	2140	1888	134	126	260	294	286	270	278
	7800	78000	0,0068	0,0074	0,0013	0,0061		2351	258	240	520	473	552	516	534
	11700	117000	0,0101	0,0108	0,0019	0,0089		2418	384	360	780	690	821	770	795
Bg IIIc* Bg IIIc	3900	39000	0,0034	0,0030	0,0006	0,0024	2140	2988	124	110	260	186	265	235	250
	7800	78000	0,0068	0,0072	0,0013	0,0059		2432	250	228	520	455	535	488	511
	11700	117000	0,0101	0,0121	0,0019	0,0102		2110	386	350	780	790	826	749	787
Bg IIIc* Bg IIIc	3900	39000	0,0034	0,0030	0,0006	0,0024	2140	2988	122	112	260	186	261	240	250
	7800	78000	0,0068	0,0069	0,0013	0,0056		2563	244	234	520	434	522	501	511
	11700	117000	0,0101	0,0112	0,0019	0,0093		2312	374	354	780	721	800	757	778

\* Versuch IIIc\* ist eine Wiederholung von IIIc.

vermeidlichen Ablesungsfehlern nicht mehr als  $8 \cdot 10^{-4}$  cm Unterschied in der Durchbiegung ergeben. Die Versuchsreihen Ia und IIIa zeigen aber solche bis zu  $20 \cdot 10^{-4}$  cm. Also sind die Bauschinger-Geräte nicht vollkommen zuverlässig, was ja auch wohl erklärlich ist. Doch sind die Abweichungen nicht sehr groß, die Einzelwerte der Durchbiegungen weichen höchstens um 1,3 vH vom Mittel beider Versuche ab. Daß bei kleiner Spannweite, wo die Durchbiegungen sehr klein sind, Wiederholungsversuche stark voneinander abweichen, ist zu erwarten. Bildet man die Mittel für die Versuche *Bg* Ic, *Bg* IIIc und *Bg* IIIc\*, so findet man, daß Abweichungen der Einzelwerte vom Mittel bis zu 31 vH vorkommen.

Aehnlich ist es bei den Spiegelversuchen. Bei großer Spannweite beträgt die Abweichung eines Einzelwertes der Dehnung 1,7 vH vom Mittel der beiden, bei kleiner 8,0 vH vom Mittel der drei vorliegenden Versuche. Der Ablesungsfehler erklärt hier nur Unterschiede bis  $2,4 \cdot 10^{-6}$  bei großer, bis  $8 \cdot 10^{-6}$  bei kleiner Spannweite, es finden sich  $13 \cdot 10^{-6}$  bei großer und  $16 \cdot 10^{-6}$  bei kleiner Spannweite. Also sind die Spiegelgeräte auch nicht völlig zuverlässig.

Der Theorie nach sollen die Durchbiegungen der Belastung proportional sein.

Versuchsreihe *Bg* III a liefert als Mittel aus allen Belastungen, bezogen auf die größte Belastung 468000 emkg, die Durchbiegung

$$\frac{3581 + 1781 \cdot 2 + 892 \cdot 4 + 595 \cdot 6 + 301 \cdot 12}{5 \cdot 10000} = 3579 \cdot 10^{-4} \text{ cm.}$$

An Stelle der Reihe

$$301 \quad 595 \quad 892 \quad 1781 \quad 3581$$

müßte also, wenn die Proportionalität vollkommen sein sollte, die Reihe

$$298 \quad 596 \quad 895 \quad 1789 \quad 3579$$

treten.

Die Mittel aus den Reihen Ia und IIIa liefern für die Belastung 117000 emkg die Durchbiegung

$$\frac{902 + 602 \cdot 1,5 + 301 \cdot 3}{3 \cdot 10000} = 903 \cdot 10^{-4} \text{ cm.}$$

Die Proportionalität ist also vollkommen.

Die Mittel aus den Reihen *Bg* Ic, IIIc und IIIc\* liefern für die Belastung 117000 emkg die Durchbiegung

$$\frac{95 + 59 \cdot 1,5 + 29 \cdot 3}{3 \cdot 10000} = 90 \cdot 10^{-4} \text{ cm.}$$

An Stelle der Reihe

$$29 \quad 59 \quad 95$$

müßte also die Reihe

$$30 \quad 60 \quad 90$$

treten, wenn die Proportionalität vollkommen sein sollte.

Damit kann man den Nachweis, daß die Durchbiegungen den Belastungen proportional sind, als geführt erachten.

Die beobachteten Durchbiegungen unterscheiden sich bei den Versuchsreihen *Bg* Ia und IIIa so wenig von den berechneten, daß mit Rücksicht auf die Beobachtungsgenauigkeit kein Wert auf diese Unterschiede gelegt werden kann.

Nimmt man die Mittel aus den Versuchen IIIc, so ergibt sich Zahlen-tafel 48.

Zahlentafel 48.  
Mittlere Durchbiegungen für 40 cm Spannweite.

Belastung cmkg	Durchbiegung			
	$s'$	$s$	$s_1$	$s_2$
39 000	0,0034	0,0035	0,0006	0,0029
78 000	0,0068	0,0072	0,0013	0,0059
117 000	0,0101	0,0114	0,0019	0,0095

Sehr genaue Uebereinstimmung ist ja nicht zu erwarten. Beachtet man aber, daß immer  $s > s' > s_2$  ist, so scheint es fast, als ob der Einfluß der Scherkraft überschätzt wäre. Möglich ist das immerhin; denn einmal ist die theoretische Formel für denselben nie geprüft, weiter aber der Gleitmodul nicht durch Versuche ermittelt, sondern als  $\frac{2}{3}$  des Elastizitätsmoduls angenommen.

Mit Rücksicht darauf, daß die Versuche bei kleiner Spannweite doch recht unsichere Ergebnisse liefern, in erster Linie also nur Wert auf die mit großer Spannweite gelegt werden kann, darf man wohl sagen, daß die theoretische Berechnung der Durchbiegungen durch die Versuche als ziemlich richtig bestätigt ist.

Für die Spannweiten 120, 80, 40 cm sollen sich die Durchbiegungen der Theorie nach verhalten wie 9 : 4 : 1. Nimmt man für 120 cm die Mittel aus den beiden, für 40 cm die aus den drei vorliegenden Versuchen, so ergibt sich Zahlentafel 49.

Zahlentafel 49.  
Mittlere Durchbiegungen bei verschiedenen Spannweiten.

Belastung cmkg	Stützweite in cm		
	120	80	40
39 000	301 <b>9</b>	123 <b>3,7</b>	29 <b>0,87</b>
78 000	602 <b>9</b>	258 <b>3,9</b>	59 <b>0,88</b>
117 000	907 <b>9</b>	395 <b>3,9</b>	95 <b>0,95</b>

Die Durchbiegung nimmt also mit der Stützweite nicht nur absolut, sondern auch relativ ab; diese Abnahme vermindert sich aber mit wachsender Belastung. Das deutet wieder auf Ueberschätzung des Einflusses der Scherkraft, daneben aber auf Reibung an den Auflagern hin.

Berechnet man den Elastizitätsmodul aus den Biegeversuchen Ia und III a, so erhält man als Durchschnitt aus den acht vorliegenden Versuchen 2151 t/qcm gegenüber dem aus Zug- und Druckversuchen folgenden Werte 2140 t/qcm. Die Versuche bei kleiner Stützweite ergeben aber viel höhere Zahlen und können also zu seiner Bestimmung nicht benutzt werden.

Der Theorie nach sollen die Dehnungen den Belastungen proportional sein. Als mittlere Dehnung für alle Belastungsstufen liefert die Versuchsreihe Bg III a, bezogen auf die Belastung 468 000 cmkg,

$$\begin{aligned} \text{Zugseite} & \quad \frac{1511 + 758 \cdot 2 + 379 \cdot 4 + 254 \cdot 6 + 126 \cdot 12}{5 \cdot 1000000} = 1516 \cdot 10^{-6}, \\ \text{Druckseite} & \quad \frac{1500 + 750 \cdot 2 + 374 \cdot 4 + 251 \cdot 6 + 126 \cdot 12}{5 \cdot 1000000} = 1503 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

An Stelle der Reihe

Zug 126 254 379 758 1511,      Druck 126 251 374 750 1500  
 müßte also, wenn die Proportionalität vollkommen sein sollte, die Reihe

Zug 126 253 379 758 1516,      Druck 125 250 376 751 1503  
 treten.

Die Mittel aus den Versuchsreihen *Bg* I a und III a liefern für die Belastung 117000 emkg die Dehnung

$$\text{Zugseite} \quad \frac{385 + 256 \cdot 1,5 + 128 \cdot 3}{3 \cdot 1000000} = 384 \cdot 10^{-6},$$

$$\text{Druckseite} \quad \frac{379 + 253 \cdot 1,5 + 126 \cdot 3}{3 \cdot 1000000} = 379 \cdot 10^{-6}.$$

Die Proportionalität ist also vollkommen.

Die Mittel aus den Reihen *Bg* I c, III c und III c\* geben

$$\text{Zugseite} \quad \frac{381 + 251 \cdot 1,5 + 127 \cdot 3}{3 \cdot 1000000} = 379 \cdot 10^{-6},$$

$$\text{Druckseite} \quad \frac{355 + 234 \cdot 1,5 + 116 \cdot 3}{3 \cdot 1000000} = 351 \cdot 10^{-6}.$$

An Stelle der Reihen

Zug 127 251 381,      Druck 116 234 355  
 müßte also die Reihe

Zug 126 253 379,      Druck 117 234 351  
 treten, wenn die Proportionalität vollkommen sein sollte.

Die Abweichungen sind so gering, daß man, ohne zu weit zu gehen, völlige Übereinstimmung mit der Theorie als festgestellt ansehen kann.

Der Theorie nach müßte die Dehnung unabhängig von der Spannweite sein. Die Zahlentafel 50 zeigt, daß dies auch zutrifft; nur die etwas geringeren Dehnungen auf der Druckseite bei 40 cm Spannweite fallen auf und bleiben ohne Aufklärung.

Zahlentafel 50.

Mittlere Dehnungen bei verschiedener Spannweite und Belastung, bezogen auf 39000 emkg.

Belastung emkg	Zugseite			Druckseite		
	Stützweite in cm					
	120	80	40	120	80	40
39 000	128	127	127	126	125	116
78 000	128	128	125	126	125	117
117 000	128	130	127	126	127	118

Die Theorie unterscheidet auch Zug- und Druckseite nicht. Wenn nun, und das ist offenbar der Fall, die Dehnung auf der Druckseite etwas kleiner als auf der Zugseite ist, so kann das daher rühren, daß die Nulllinie des Querschnittes etwas nach der Druckmitte verschoben ist. Wäre dem so, so würde die Verschiebung bei kleiner Stützweite beträchtlich größer als bei großer sein, die Nulllinie müßte die Querschnittshöhe, die etwa 100 mm ist, im Verhältnisse 126:117 teilen, die Verschiebung also etwa 2 mm betragen.

Des unveränderlichen Elastizitätsmoduls wegen gilt für die Spannungen dasselbe wie für die Dehnungen.

Vergleicht man die Spannungen, welche sich nach der Theorie ergeben sollen, mit denen, die aus der beobachteten Durchbiegung abgeleitet werden können, so kann das wegen der Unsicherheit der letzteren bei kleiner Spannweite nur mit den Mittelwerten aus den vorliegenden Versuchsreihen geschehen. Ist nun auch die Uebereinstimmung der Spiegelbeobachtungen besser, so wird auch hier vorgezogen, auf die Mittelbildung zurückzugreifen, Zahlentafel 51.

Zahlentafel 51.  
Vergleich der mittleren Spannungen.

Belastung cmkg	Spannung				
	berechnet	aus der Durchbiegung		aus den Spiegelablesungen, Mittel für Zug und Druck	
		120	40	120	40
39 000		259	222	272	259
78 000	260	259	227	273	259
117 000		259	244	273	262

Man sieht, daß die aus der Durchbiegung gefolgerten Spannungen bei 120 cm Stützweite mit den berechneten stimmen, daß man aber bei 40 cm viel kleinere Werte erhält. Die Spiegelablesungen ergeben aber bei 120 cm Stützweite größere Werte als die Rechnung und stimmen bei 40 cm Stützweite überein.

Da nun die Zugspannungen größer als die mittleren, also erst recht größer als die berechneten sind, so kann man wohl behaupten, daß der Stab stärker beansprucht ist, als es der Theorie nach scheint. Bezogen auf die Belastung 39000 cmkg, ergeben die Versuche I a und III a die Zugspannung 274 kg/qcm statt der berechneten 260 kg/qcm. Die wirkliche Beanspruchung ist also  $\infty 5$  vH größer als die angenommene.

Flußeisen. Zahlentafel 52.

Die beiden Versuchsreihen I a und III a zeigen größere Unterschiede in der Durchbiegung als bei Stahl; diese wachsen bis  $34 \cdot 10^{-4}$  cm oder 1,9 vH Abweichung vom Mittelwert; dagegen stimmen die Versuche mit kleiner Stützweite, I c, III c', III c'', viel besser untereinander; hier weicht kein Einzelwert um mehr als 15 vH vom Mittel ab.

Bei großer Spannweite beträgt die Abweichung der Dehnung vom Mittel beider Versuche 1,5 vH, bei kleiner vom Mittel der drei vorliegenden Versuche nur 3,3 vH — diese Uebereinstimmung ist besser als bei Stahl.

Versuchsreihe III a liefert als Mittel aus allen Belastungen, bezogen auf die größte Belastung

$$\frac{2050 + 1464 \cdot 7:5 + 875 \cdot 7:3 + 584 \cdot 7:2 + 293 \cdot 7}{5 \cdot 10000} = 2047 \cdot 10^{-4} \text{ cm;}$$

an Stelle der Reihe

293    584    875    1464    2050

müßte also bei vollkommener Proportionalität die Reihe

292    585    877    1462    2047

treten.

Zahlentafel 52.

Stab B 2. Ergebnisse der Biegeversuche mit Flußeisen  
berechnet mit  $E = 2080 \text{ t/qcm}$ .

Versuchsnummer	Belastung $P - /_0$ kg	Kraft moment $M - M_0$ cmkg	Durchbiegung $s - s_0$ in cm				Elastizitätsmodul in t/qcm		Dehnung $\varepsilon - \varepsilon_0$ aus den Spiegeln in 1:1000000		Spannung $k - k_0$ in kg/qcm					
			berechnet $s'$	beobachtet $s$	wegen der Scher- kraft $s_1$	wegen des Kraft- momentes $s_2$	berechnet	aus der Durch- bie- gung	Zug- seite	Druck- seite	berechnet	aus der Durch- bie- gung		aus den Spiegel- ablesungen		Mittel
												Zug- seite	Druck- seite	Zug- seite	Druck- seite	
			Stützweite 120 cm													
Bg Ia	1300	39000	0,0303	0,0310	0,0006	0,0304	2080	2077	133	132	255	256	277	275	276	
	2600	78000	0,0607	0,0620	0,0013	0,0607		2080	2080	267	264	510	511	555	549	552
	3900	117000	0,0910	0,0928	0,0019	0,0909		2080	2084	400	395	764	765	832	821	856
Bg IIIa	1300	39000	0,0303	0,0299	0,0006	0,0293	2080	2153	132	129	255	247	274	268	271	
	2600	78000	0,0607	0,0597	0,0013	0,0584		2161	262	259	510	493	545	539	542	
	3900	117000	0,0910	0,0894	0,0019	0,0875		2163	391	385	764	737	813	800	806	
	6500	195000	0,1516	0,1496	0,0032	0,1464		2154	653	644	1273	1233	1359	1340	1301	
	9100	273000	0,2123	0,2096	0,0044	0,2052		2150	911	900	1782	1724	1895	1873	1879	
Stützweite 80 cm																
Bg Ib	1950	39000	0,0135	0,0144	0,0006	0,0138	2080	2033	130	128	255	261	270	266	268	
	3900	78000	0,0269	0,0282	0,0013	0,0269		2086	257	253	510	509	534	526	530	
	5850	117000	0,0404	0,0422	0,0019	0,0403		2088	387	378	764	764	804	786	795	
Stützweite 40 cm																
Bg Ic	3900	39000	0,0034	0,0040	0,0006	0,0034	2080	2062	131	120	255	258	273	249	261	
	7800	78000	0,0067	0,0066	0,0013	0,0053		2068	246	231	510	402	512	481	496	
	11700	117000	0,0101	0,0110	0,0019	0,0091		2312	380	354	764	689	791	736	763	
Bg IIIc	3900	39000	0,0034	0,0040	0,0006	0,0034	2080	2062	127	122	255	258	264	254	259	
	7800	78000	0,0067	0,0080	0,0013	0,0067		2093	255	240	510	508	531	499	515	
	11700	117000	0,0101	0,0118	0,0019	0,0099		2125	380	357	764	750	790	742	766	
Bg IIIc*	3900	39000	0,0034	0,0036	0,0006	0,0030	2080	2337	124	115	255	227	258	239	248	
	7800	78000	0,0067	0,0079	0,0013	0,0066		2125	258	244	510	500	536	508	522	
	11700	117000	0,0101	0,0126	0,0019	0,0107		1967	389	365	764	811	808	758	783	

Versuch Bg IIIc\* ist eine Wiederholung Bg IIIc.

Die Mittel aus den Reihen Bg Ic, IIIc und IIIc\* liefern, bezogen auf die Belastung 117000 cmkg, die mittlere Durchbiegung

$$\frac{892 + 595 \cdot 1,5 + 298 \cdot 3}{3 \cdot 10000} = 893 \cdot 10^{-4} \text{ cm,}$$

was fast genauer Proportionalität entspricht.

Für 40 cm Spannweite erhält man die mittlere Durchbiegung aus den drei vorliegenden Versuchen, bezogen auf 117000 cmkg, als

$$\frac{99 + 62 \cdot 1,5 + 33 \cdot 3}{3 \cdot 10000} = 97 \cdot 10^{-4} \text{ cm,}$$

die auch ganz befriedigend stimmt.

Die beobachteten Durchbiegungen  $s_2$  unterscheiden sich bei Versuch Ia und IIIc fast gar nicht von den berechneten  $s'$ , so daß die etwas größeren Abweichungen der anderen Versuche auf unvermeidliche Ungenauigkeiten der Versuchsanordnungen und Ablesungen zurückgeführt werden können. Bildet man die Mittel, wie oben, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{für } l = 120 \text{ cm} \quad s' &= 910 \cdot 10^{-4} \text{ cm} & s_2 &= 892 \cdot 10^{-4} \text{ cm,} \\ l = 40 \text{ »} \quad s' &= 110 \cdot 10^{-4} \text{ »} & s_2 &= 99 \cdot 10^{-4} \text{ » ,} \end{aligned}$$

also eine ganz leidliche Uebereinstimmung, die noch besser sein würde, wenn etwa der Einfluß der Scherkraft überschätzt wäre.

Die Abhängigkeit der Durchbiegung von der Spannweite geht aus der gemäß S. 49 zusammengestellten Zahlentafel 53 hervor.

Zahlentafel 53.  
Mittlere Durchbiegungen bei verschiedenen Spannweiten.

Belastung cmkg	Stützweite in cm		
	120	80	40
39 000	289 <b>9</b>	138 <b>4,2</b>	33 <b>1,0</b>
78 000	595 <b>9</b>	269 <b>4,1</b>	62 <b>0,94</b>
117 000	892 <b>9</b>	403 <b>4,1</b>	99 <b>1,0</b>

Diese bestätigt also die bei Stahl gefundenen Beziehungen nicht, schließt sich vielmehr der theoretischen Reihe 9:4:1 an.

Die Berechnung des Elastizitätsmoduls aus den Biegeversuchen I und IIIa ergibt als Durchschnitt aus den acht vorliegenden Versuchen 2128 t/qcm gegenüber dem aus Zug- und Druckversuchen folgenden Werte 2080 t/qcm. Das kann man zur Not noch gelten lassen; die Versuche bei kleiner Stützweite ergeben aber wie bei Stahl wenigstens durchschnittlich viel höhere Zahlen und können also zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls nicht benutzt werden.

Die Spiegelablesungen stimmen bei Wiederholungsversuchen sehr schön, die größte Abweichung bei großer Spannweite ist  $10 \cdot 10^{-6}$  bzw. 1,3 vH vom Mittel, bei kleiner Spannweite  $13 \cdot 10^{-6}$  bzw. 3,3 vH vom Mittel.

Versuchsreihe Bg III a liefert als mittlere Dehnung, bezogen auf die Belastung 273 000 cmkg,

$$\text{Zugseite} \quad \frac{911 + 653 \cdot 7 : 5 + 391 \cdot 7 : 3 + 262 \cdot 7 : 2 + 132 \cdot 7}{5 \cdot 1000000} = 916 \cdot 10^{-6},$$

$$\text{Druckseite} \quad \frac{900 + 644 \cdot 7 : 5 + 385 \cdot 7 : 3 + 259 \cdot 7 : 2 + 129 \cdot 7}{5 \cdot 1000000} = 902 \cdot 10^{-6}.$$

An Stelle der Reihe

Zug 132 262 391 653 911, Druck 129 259 385 644 900  
müßte bei vollkommener Proportionalität die Reihe

Zug 131 262 392 654 916, Druck 129 258 386 644 902  
treten.

Die Mittel aus den Versuchsreihen Bg Ia und IIIa liefern für die Belastung 117 000 cmkg die Dehnung

$$\text{Zugseite} \quad \frac{395 + 264 \cdot 1,5 + 132 \cdot 3}{3 \cdot 1000000} = 396 \cdot 10^{-6},$$

$$\text{Druckseite} \quad \frac{390 + 261 \cdot 1,5 + 130 \cdot 3}{3 \cdot 1000000} = 390 \cdot 10^{-6}.$$

Die Proportionalität ist fast vollkommen.

Die Mittel aus den Versuchsreihen Bg Ic, III c' und III c'' liefern für 117 000 cmkg die mittlere Durchbiegung

$$\text{Zugseite} \quad \frac{383 + 253 \cdot 1,5 + 127 \cdot 3}{3 \cdot 1000000} = 381 \cdot 10^{-6},$$

$$\text{Druckseite} \quad \frac{359 + 238 \cdot 1,5 + 119 \cdot 3}{3 \cdot 1000000} = 358 \cdot 10^{-6}.$$

An Stelle der Reihe

Zug 127 253 383, Druck 119 238 359

müßte bei vollkommener Proportionalität also die Reihe

Zug 127 254 381, Druck 119 239 358

treten.

Völlige Uebereinstimmung mit der Theorie ist damit festgestellt.

Zahlentafel 54.

Mittlere Dehnungen bei verschiedener Spannweite und Belastung,  
bezogen auf 39000 cmkg.

Belastung cmkg	Zugseite			Druckseite		
	Stützweite in cm					
	120	80	40	120	80	40
39 000	132	130	127	130	128	119
78 000	132	128	126	130	126	119
117 000	132	129	128	130	126	120

Zahlentafel 54 zeigt dieselbe Erscheinung wie 50 für Stahl; die Dehnungen sind fast unabhängig von der Spannweite, nur die bei 40 cm Stützweite auf der Druckseite fallen etwas ab.

Auch hier, wie bei Stahl, ist die Dehnung auf der Druckseite durchweg etwas kleiner als auf der Zugseite.

In Zahlentafel 55 sind die Spannungen für Flußeisen ebenso wie die für Stahl in Zahlentafel 51 zusammengestellt.

Zahlentafel 55.

Vergleich der mittleren Spannungen.

Belastung cmkg	berechnet	aus der Durchbiegung		aus den Spiegelablesungen, Mittel für Zug und Druck	
		120	40	120	40
39 000		251	248	273	256
78 000	255	251	235	273	255
117 000		250	250	272	257

Die Zahlen stimmen recht schön, mit Ausnahme des einen Wertes 235, der, wie aus Zahlentafel 52 zu ersehen, von einer stark aus der Reihe fallenden Durchbiegungsbeobachtung beeinflusst ist. Uebrigens stimmen die aus der Durchbiegung abgeleiteten Spannungen gut mit den berechneten, während die Spiegelablesungen, besonders bei 120 cm Stützweite, größere Werte als die Rechnung ergeben. Das war bei Stahl ebenso.

Auch hier sind die Zugspannungen größer als die Druckspannungen, also erst recht größer als die berechneten; der Stab wird also wieder stärker beansprucht, als es der Theorie nach erscheint. Bezogen auf die Belastung 39000 cmkg, ergeben die Versuche Ia und III a die Zugspannung 273 kg/qcm statt der berechneten 255, also  $\infty 7$  vH mehr.

Mannesmannrohr. Zahlentafel 56.

Das schwache Profil der Mannesmannrohre, dessen Querschnittsmodul nur gleich dem zehnten Teil desjenigen der Stäbe aus Stahl und Flußeisen ist, hat zur Folge, daß die anzuwendenden Belastungen recht klein werden; sie beginnen mit 200 kg. Es erschien zweifelhaft, ob die 100 t-Werder-Maschine für so kleine Belastungen noch genau genug arbeitet. Deshalb wurden zwei aus derselben Rohrlänge stammende Biegestäbe untersucht, und zwar jeder zweimal; bei der zweiten Untersuchung wurde der Stab um 90° gedreht. Die Versuche mit dem Stabe *B*<sub>3</sub> sind mit *Bg* I a' b' c' und *Bg* I a'' b'' c'', die mit dem Stabe *B*<sub>4</sub> entsprechend *Bg* II a' b' c' und *Bg* II a'' b'' c'' bezeichnet. Die Beobachtungen sind in Zahlentafel 57 zusammengestellt. Da, wie früher bereits erwähnt, bei den Versuchen zwei Spiegelpaare rechts und links vom Kraftangriff ange- setzt wurden, so ergeben sich also für die Berechnung der Dehnungen jedesmal 8 Beobachtungen, deren Mittel weiter verwendet sind. Die Uebereinstimmung der Wiederholungsversuche ist um so besser, je größer die Stützweite und je größer die Belastung ist. Bei kleinster Belastung beträgt die größte Abwei- chung vom Mittel

für 120 cm Stützweite 1,5 vH auf der Zug-, 1,6 vH auf der Druckseite,  
 » 80 » » 3,3 » » » » , 4,4 » » » ,  
 » 40 » » 4,8 » » » » , 4,9 » » » » .

Stäbe *B*<sub>3</sub> u. 4. Zahlentafel 56.  
 Ergebnisse der Biegeversuche mit Mannesmannrohr  
 berechnet mit  $E = 2215 \text{ t/qcm}$ .

Versuchsnummer	Stabnummer	Belastung $P - P_0$ kg	Kraftmoment $M - M_0$ cmkg	Durchbiegung $\varepsilon - \varepsilon_0$ in cm				Elastizitäts- modul $E$ in t/qcm		Dehnung $\varepsilon - \varepsilon_0$ aus den Spiegeln in 1:1000000		Spannung $k - k_0$ in kg/qcm				
				berechnet	beobachtet	wegen der Scherkraft	wegen des Kraft- mo- mentes	beob- achtet	aus der Durch- bie- gung	Zug- seite	Druck- seite	berechnet	aus der Durch- bie- gung	aus den Spiegel- ablesungen		Mittel
														Zug-	Druck-	
Stützweite 120 cm																
<i>Bg</i> (I u. II) a	<i>B</i> <sub>3</sub> u. <i>B</i> <sub>4</sub>	200	6000	0,0721	0,0750	0,0009	0,0741	2210	2150	202	195	403	412	447	431	439
		400	12000	0,1442	0,1504	0,0017	0,1487		2141	404	393	805	827	893	868	880
		600	18000	0,2162	0,2270	0,0026	0,2244		2129	609	594	1208	1254	1346	1314	1330
<i>Bg</i> III c	<i>B</i> <sub>3</sub>	200	6000	0,0721	0,0763	0,0009	0,0754	2210	2112	205	199	403	421	453	440	446
		400	12000	0,1442	0,1506	0,0017	0,1489		2138	408	395	805	833	902	874	888
		600	18000	0,2162	0,2269	0,0026	0,2243		2129	604	598	1208	1255	1335	1320	1327
		1000	30000	0,3604	0,3787	0,0044	0,3743		2129	1027	990	2013	2092	2270	2188	2229
		1400	42000	0,5046	0,5315	0,0061	0,5254		2124	1439	1388	2818	2940	3180	2967	3073
Stützweite 80 cm																
<i>Bg</i> (I u. II) b	<i>B</i> <sub>3</sub> u. <i>B</i> <sub>4</sub>	300	6000	0,0320	0,0341	0,0009	0,0332	2210	2138	203	194	403	418	449	429	439
		600	12000	0,0641	0,0680	0,0017	0,0663		2140	407	391	805	835	900	864	882
		900	18000	0,0961	0,1023	0,0026	0,0997		2134	613	586	1208	1257	1355	1295	1325
Stützweite 40 cm																
<i>Bg</i> (I u. II) c	<i>B</i> <sub>3</sub> u. <i>B</i> <sub>4</sub>	600	6000	0,0080	0,0087	0,0009	0,0078	2210	2274	212	168	403	392	467	371	419
		1200	12000	0,0160	0,0181	0,0017	0,0164		2163	432	344	805	825	955	760	857
		1800	18000	0,0239	0,0275	0,0026	0,0249		2137	654	520	1208	1253	1445	1149	1297
<i>Bg</i> III c	<i>B</i> <sub>3</sub>	600	6000	0,0080	0,0092	0,0009	0,0083	2210	2140	220	174	403	418	486	385	435
		1200	12000	0,0160	0,0193	0,0017	0,0176		2018	442	354	805	886	977	782	879
		1800	18000	0,0239	0,0288	0,0026	0,0262		2033	662	528	1208	1318	1458	1167	1312

Bei den mit *B*<sub>3</sub> und *B*<sub>4</sub> bezeichneten Versuchen handelt es sich um das Mittel aus vier Versuchen; jeder der beiden Stäbe wurde zweimal geprüft.



Auch die Durchbiegungen stimmen gut. Bei kleinster Belastung beträgt die größte Abweichung vom Mittel

für 120 cm Stützweite 1,3 vH,  
 » 80 » » 2,3 » ,  
 » 40 » » 5,7 » .

Später wurden noch zwei Versuchsreihen mit Stab *B*<sub>3</sub> durchgeführt, die Reihen *Bg* III a und c der Zahrentafel 56. Die erste stimmt in bezug auf die Durchbiegung sehr gut mit den früheren, die letztere zwar weniger gut, aber doch immer noch viel besser, als bei Stahl und Flußeisen. Das ist wohl Folge der größeren Durchbiegung infolge des schwächeren Profils und dieses deshalb hier im Vorteile.

Die mittlere Durchbiegung ist für die Versuchsreihe *Bg* III a, bezogen auf 42000 emkg,

$$\frac{5254 + 3743 \cdot 7:5 + 2243 \cdot 7:3 + 1489 \cdot 7:2 + 754 \cdot 7}{5 \cdot 10000} = 5243 \cdot 10^{-4} \text{ cm,}$$

so daß also an Stelle der Reihe

754 1489 2243 3743 5254

bei vollkommener Proportionalität die Reihe

749 1498 2247 3745 5243

treten müßte.

Für die anderen Versuchsreihen ergibt sich, wenn man berücksichtigt, daß der Durchschnitt von I und II bei Verbindung mit III vierfach gezählt werden muß,

für	120 cm			80 cm			40 cm		
statt	744	1487	2244	332	663	997	79	166	252
	745	1490	2236	332	664	996	82	164	246

bei vollkommener Proportionalität.

In dieser Richtung wird also die Theorie voll bestätigt. Auch die Uebereinstimmung der berechneten Durchbiegungen mit den gemessenen ist leidlich, die letzteren sind durchweg etwas größer; man findet für die Belastungseinheit 6000 emkg aus den Versuchen *Bg* (I und II) a bis c für die Stützweiten

		120	80	40 cm
gemessen	. . . . .	744	332	81 · 10 <sup>-4</sup> cm,
berechnet	. . . . .	721	320	80 » ,

auch die gemessenen stehen im Verhältnisse . . . 9 : 4 : 1.

Der Elastizitätsmodul aus der Durchbiegung ist immer etwas zu klein, was ja aus dem Verhältnisse der berechneten zu den gemessenen Durchbiegungen ohne weiteres folgt; er ist

für 120 cm Stützweite	2140	} im Mittel 2156 statt 2210.
» 80 »	2137	
» 40 »	2191	

Die Proportionalität der Dehnungen ist selbst bei der kleinen Stützweite 40 cm nicht schlecht. Auffällig ist, daß sie auf der Zugseite mit abnehmender Stützweite wachsen und auf der Druckseite abnehmen; immer aber sind sie auf der Zugseite größer als auf der Druckseite. Für die Belastungseinheit 6000 emkg

ergibt sich als Mittel für alle Belastungsstufen für die Versuchsreihen *Bg* (I und II) a bis c als Mittel

für 120 cm Stützweite, Zugseite 202, Druckseite  $196 \cdot 10^{-6}$ ,  
 » 80 » » , » 204, » 195 » ,  
 » 40 » » , » 216, » 171 » .

Zahlentafel 58 ist aus allen Versuchsreihen zusammengestellt.

Zahlentafel 58.

Mittlere Dehnungen bei verschiedener Spannweite und Belastung, bezogen auf 6000 cmkg.

Belastung	Zugseite			Druckseite		
	Stützweite in cm					
	120	80	40	120	80	40
6000	203	203	214	196	194	169
12000	202	203	217	196	195	173
18000	203	204	219	198	195	174
Mittel	203	203	217	197	195	172

Auch bei Stahl und Flußeisen ist die Dehnung auf der Zugseite größer als auf der Druckseite, die Abhängigkeit von der Stützweite aber nicht erkennbar; sie scheint also eine Folge der Querschnittform zu sein und ist vielleicht der Formänderung zuzuschreiben. Diese ist ja bei so geringen Belastungen noch nicht nachweisbar, wohl aber trat sie später bei großen dauernden Durchbiegungen hervor; der mittlere Querschnitt wurde ellipsenähnlich.

Die aus der Durchbiegung gefolgerten Spannungen sind durchweg etwas höher, als die berechneten; die mit den Spiegeln bestimmten sind es noch mehr. Der größte Unterschied beträgt nicht weniger als 21 vH; im Mittel aus allen Versuchen findet man für die Belastungseinheit 6000 cmkg statt der berechneten Spannung 403 kg/qcm auf der Zugseite 459, auf der Druckseite 415 kg/qcm, d. i. auf der ersteren 14 vH mehr! Dieser Umstand dürfte bemerkenswert sein; man muß demgemäß die Sicherheit, welche man anzuwenden wünscht, für die Rechnung um 14 vH, ja bei geringer Stützweite noch um mehr erhöhen, um sie wirklich zu erhalten. Der Unterschied gegenüber den 5 vH, welche für Stahl, 7 vH, welche für Flußeisen gefunden wurden, dürfte auf die Querschnittform zurückzuführen sein. Weitere Versuche hierüber wären am Platze, wengleich Querschnitte, bei denen die Breite in der äußersten Schicht null ist, für die Beanspruchung auf Biegung weniger häufig angewendet werden.

#### Zähe Stoffe.

Zusammenfassend kann man aus den Versuchen mit zähen Stoffen schließen: »die elastischen Verhältnisse für diese stimmen mit den Annahmen der Biegungstheorie überein; sie liefert aber die Beanspruchung zu klein; diese ist um so höher, je schmaler der Querschnitt in der äußersten Schicht ist. Man hat zu den berechneten Beanspruchungen 5 bis 20 vH zuzuschlagen, um die wirklichen zu erhalten«. Doch bedarf dieser Ausspruch, um als Gesetz anerkannt zu werden, noch weiterer Bestätigung durch Versuche.

### Die Biegungsversuche mit Gußeisen.

Gußeisen A. Zahlentafel 59.

Von diesen Versuchen sind die bei 120 cm Stützweite vorgenommenen die ersten, welche überhaupt gemacht wurden. Das Laboratorium besaß damals nur ein Spiegelpaar; jeder Versuch wurde zweimal gemacht, die Spiegel saßen gemäß Fig. 13, S. 6, einmal rechts, einmal links von der Mitte. Ferner wurden, um zu sehen, ob sich die Dehnung in den Querschnittecken anders ergibt, als in der Stabmitte, die Spiegel nacheinander oben, in der Mitte und unten gemäß Fig. 40 bis 42, S. 34, angesetzt; im letzteren Falle wurde, um nicht zu lange Spiegelstiele zu bekommen und besser ablesen zu können, der Stab herumgedreht, so daß die Spiegel wirklich auch oben saßen. Endlich wurde dieselbe Versuchsreihe — es wird darauf zurückzukommen sein — nochmals durchgeführt, die Spiegel aber wurden nicht nahe der Mitte, sondern nahe den Auflagern angesetzt.

Da nun die Bauschinger-Geräte bei allen Versuchen angewendet wurden, so wurde auf diese Weise dieselbe Durchbiegung zwölfmal gemessen und also nebenher ein gutes Bild von der Genauigkeit der Messung gewonnen. In Zahlentafel 60 sind diese zwölf Messungen für drei Belastungsstufen zusammengestellt. Man sieht, die Bauschinger-Geräte arbeiten für die große Stützweite von 120 cm ganz leidlich — die größte Abweichung vom Mittel ist 3,6 vH.

Zahlentafel 60.

Durchbiegungen  $s$  des Stabes  $B_5$  aus Gußeisen A bei 120 cm Stützweite in cm.

Belastungsstufe kg	Versuchsnummer												Mittel	Größte Abweichung vom Mittel in vH.
	I						II							
	$a'$		$a''$		$a'''$		$a'$		$a''$		$a'''$			
	rechts	links	rechts	links	rechts	links	rechts	links	rechts	links	rechts	links		
500 900	0,0232	0,0226	0,0217	0,0230	0,0224	0,0224	0,0225	0,0221	0,0221	0,0226	0,0227	0,0230	0,0225	3,6
500 1300	0,0463	0,0467	0,0452	0,0465	0,0457	0,0462	0,0463	0,0463	0,0460	0,0463	0,0463	0,0469	0,0462	2,2
500 1700	0,0710	0,0707	0,0691	0,0710	0,0708	0,0718	0,0706	0,0707	0,0725	0,0710	0,0708	0,0707	0,0709	2,5

Während bei den zähen Baustoffen die Durchbiegungen den Belastungen proportional waren, ist das hier nicht der Fall, sondern wegen des stark abnehmenden Elastizitätsmoduls wachsen jene schneller als diese.

Die beobachteten Durchbiegungen  $s_2$  sind immer kleiner als die berechneten  $s'$ , ja schon  $s$  ist es, aber ihr Wachsen mit der Belastung ist dasselbe.

Versuch  $Bg$  III  $a$  ergibt für

die Belastungen . . . . .	I	2	3	4,5	6
» berechneten Durchbiegungen . . . . .	I	2,07	3,20	4,81	6,43
» beobachteten » . . . . .	I	2,05	3,13	4,87	6,68

Die Mittel aus allen Versuchen sind in Zahlentafel 61 zusammengestellt, wobei beachtet ist, daß in Zahlentafel 59 bei Versuch  $Bg$  I  $a$  die Mittel aus den sechs Beobachtungen der Zahlentafel 60 unter I eingetragen sind, und daß es sich bei Versuch  $Bg$  II  $a$  um die Mittel aus zwei Beobachtungen handelt.

Zahlentafel 59.  
Ergebnisse der Biegeversuche mit Gußeisen A, berechnet mit Hilfe der Elastizitätslinie des Stabes B 5.

Stabnummer	Versuchsnummer	Belastung $P - P_0$ kg	Kraftmoment cmkg	Durchbiegung $s - s_0$ in cm			Elastizitätsmodul in t/qcm			Dehnung $\epsilon - \epsilon_0$ aus den Spiegeln in 1 : 1 000 000		Spannung $k - k_0$ in kg/qcm				
				be- rechnet $s'$	be- obachtet $s$	wegen der Scher- kraft $s_1$	wegen des Kraft- momentes $s_2$	beobachtet	berechnet	Zug- seite	Druck- seite	berechnet	Durch- bie- gung	Zug- seite	Druck- seite	Mittel
B 5	Bg Ia	400	12000	0,0239	0,0223	0,0005	0,0218	903	903	94	93	85	78	80	89	84
		800	24000	0,0495	0,0458	0,0010	0,0448	873	873	190	186	170	155	155	176	165
		1200	36000	0,0765	0,0700	0,0015	0,0685	848	848	291	284	255	229	229	260	244
	Bg IIa	400	12000	0,0239	0,0217	0,0005	0,0212	903	903	94	93	85	75	80	89	84
		800	24000	0,0495	0,0457	0,0010	0,0447	873	873	195	190	170	155	159	179	169
		1200	36000	0,0765	0,0705	0,0015	0,0690	848	848	298	290	255	231	234	265	249
B 6	Bg III a	400	12000	0,0239	0,0227	0,0005	0,0222	903	903	92	91	85	79	79	87	83
		800	24000	0,0495	0,0464	0,0010	0,0454	873	873	192	189	170	156	157	178	167
	1200	36000	0,0765	0,0709	0,0015	0,0694	848	848	294	288	255	231	231	263	247	
	1800	54000	0,1151	0,1104	0,0023	0,1081	844	844	457	443	383	358	354	405	379	
2400	72000	0,1537	0,1514	0,0031	0,1483	844	844	633	603	511	493	491	552	521		
B 5	Bg I b	600	12000	0,0106	0,0101	0,0005	0,0096	903	903	94	96	85	77	80	91	85
		1200	24000	0,0220	0,0204	0,0010	0,0194	873	873	186	182	170	152	152	172	162
		1800	36000	0,0340	0,0324	0,0015	0,0309	848	848	291	284	255	233	228	260	244
B 6	Bg II b	600	12000	0,0106	0,0097	0,0005	0,0092	903	903	92	92	85	74	78	88	83
		1200	24000	0,0220	0,0207	0,0010	0,0197	873	873	188	188	170	154	153	178	165
		1800	36000	0,0340	0,0314	0,0015	0,0299	848	848	289	284	255	225	227	260	243
B 5	Bg I c	1200	12000	0,0027	0,0026	0,0005	0,0021	903	903	84	84	85	68	72	80	76
		2400	24000	0,0055	0,0048	0,0010	0,0038	873	873	171	165	170	118	139	154	146
		3600	36000	0,0085	0,0076	0,0015	0,0061	848	848	267	253	255	184	208	219	219
B 6	Bg II c	1200	12000	0,0027	0,0024	0,0005	0,0019	903	903	84	82	85	61	72	78	75
		2400	24000	0,0055	0,0049	0,0010	0,0039	873	873	180	166	170	121	146	155	150
		3600	36000	0,0085	0,0074	0,0015	0,0059	848	848	276	258	255	178	215	236	225
B 6	Bg III c	1200	12000	0,0027	0,0024	0,0005	0,0019	903	903	90	82	85	61	77	78	77
		2400	24000	0,0055	0,0056	0,0010	0,0046	873	873	190	174	170	143	154	163	158
		3600	36000	0,0085	0,0087	0,0015	0,0072	848	848	285	267	255	217	223	244	233

Die Elastizitätsmodel sind die Mittel aus zwei Messungen an der Elastizitätslinie.

Zahlentafel 6r.  
Zunahme der Durchbiegung mit der Belastung.

Belastung	$s'$	$s_2$			
		120	80	40	Mittel
1	1	1	1	1	1
2	2,07	2,06	2,08	2,05	2,06
3	3,20	3,17	3,24	3,20	3,20

Da sich hier der Unterschied  $s_1 - s_2$  durch falsche Einschätzung der Scherkraft nicht erklären läßt, so deutet er darauf hin, daß die benutzten Elastizitätsmodelle zu klein sind, während aus Zahlentafel 60 vermutet werden kann, daß der Charakter der Elastizitätslinie richtig ist.

Bei gleicher Belastung sollen sich die Durchbiegungen bei verschiedener Stützweite verhalten wie 9:4:1. Die Versuche ergaben bei zähen Stoffen im Mittel:

Gußstahl . . . . .	9 : 3,8 : 0,90
Flußeisen . . . . .	9 : 4,1 : 0,98
Mannesmannrohr . . . . .	9 : 4,0 : 1,00

Hier findet man

Belastung 1 . . . . .	9 : 3,9 : 0,83
» 2 . . . . .	9 : 3,9 : 0,82
» 3 . . . . .	9 : 4,0 : 0,84
im Mittel . . . . .	9 : 3,9 : 0,83

Das deutet wieder wie bei Stahl auf einen Einfluß der Lagerung hin, der sich aber bei Flußeisen und Mannesmannrohr nicht zeigt. Daß sich aber die Lager bei den verschiedenen Versuchsreihen in stark verschiedenem Zustande befunden hätten, ist nicht anzunehmen.

Daß es hoffnungslos ist, den Elastizitätsmodul durch Biegeversuche zu bestimmen, ist bei dem durch Abschnitt 3 nachgewiesenen unzuverlässigen elastischen Verhalten des Gußeisens zu erwarten. Die in Zahlentafel 59 eingetragenen Ergebnisse geben ihn auch bei großer Spannweite viel zu groß, lassen aber ein Sinken mit der Belastung gut erkennen.

Während bei zähen Stoffen die Dehnungen den Belastungen proportional sind, wachsen sie hier, wie das dem abnehmenden Elastizitätsmodul entspricht, viel schneller als die Belastungen. Versuch *Bg III a* ergibt die Verhältniszahlen:

Belastung . . . . .	1	2	3	4,5	6	
Dehnung {	Zugseite . . . . .	1	2,09	3,20	4,97	6,88
	Druckseite . . . . .	1	2,08	3,17	4,87	6,66
	Mittel . . . . .	1	2,08	3,18	4,92	6,77

Teilt man die berechneten Spannungen durch die beobachteten Dehnungen, so erhält man für den Elastizitätsmodul eine Reihe, welche mit der, die die Zug- und Druckversuche ergeben haben, leidlich übereinstimmt. Große Genauigkeit ist hier selbstverständlich nicht zu erwarten.

Spannungen . . . . .	85	170	255	383	511
mittlere Dehnungen . . . . .	91	190	291	450	618
Elastizitätsmodul . . . . .	935	896	877	851	827
Zug- und Druckversuche ergaben	903	873	848	844	844

Wiederholt man die Rechnung für die Mittel aus allen Versuchen, so erhält man Zahlentafel 62 und 63.

Zahlentafel 62.  
Wachsen der Dehnungen mit der Belastung.

Stützweite in cm . . .	120			80			40			Mittel			
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	
Belastung . . . . .													
Dehnung {	Zugseite	1	2,06	3,16	1	2,01	3,12	1	2,09	3,21	1	2,05	3,16
	Druckseite	1	2,04	3,12	1	1,97	3,02	1	2,02	3,12	1	2,01	3,08
	Mittel	1	2,05	3,14	1	1,99	3,07	1	2,05	3,16	1	2,03	3,12

Zahlentafel 63.  
Elastizitätsmodul in t/qcm aus berechneter Spannung in kg/qcm und gemessener Dehnung in 1:1000000.

Stützweite in cm	120						80						40					
	Zug			Druck			Zug			Druck			Zug			Druck		
Spannungen . . . . .	85	170	255	85	170	255	85	170	255	85	170	255	85	70	255	85	170	255
mittl. Dehnungen . . .	83	192	294	92	188	287	93	187	290	94	185	284	86	180	276	83	168	259
Elastizitätsmodul . . .	915	885	868	924	905	889	915	910	880	905	919	898	989	945	925	1025	1012	985
Zug- u. Druckversuche ergaben . . . . .	854	810	781	953	937	915	854	810	781	953	937	915	854	810	781	953	937	915

Sicher ist also, daß die Dehnungen schneller zunehmen als die Belastungen, die einzelnen Versuchszahlen aber stimmen nicht gerade gut überein, die Abweichung einer Einzelzahl vom Gesamtmittel beträgt bis 3 1/2 vH. Daß die Elastizitätslinie des Stabes B 5 ohne weiteres auf B 6 übertragen ist, kann nicht viel ausmachen, weil die mit beiden Stäben angestellten Versuchsreihen B 7 I ac und II ac weniger von einander abweichen als die an demselben Stab angestellten Reihen II ac und III ac.

Bei 40 cm Spannweite sind die Dehnungen auf beiden Seiten kleiner als bei größerer Spannweite; die betreffenden Werte sind in Zahlentafel 64 zusammengestellt. Es deutet das wieder auf einen Einfluß der Lager hin.

Zahlentafel 64.  
Mittlere Dehnungen bei verschiedenen Stützweiten und Belastungen in 1:1000000.

Belastung cmkg	Zugseite			Druckseite		
	Stützweite in cm					
	120	80	40	120	80	40
12 000	93	93	86	92	94	83
24 000	192	187	180	188	185	168
36 000	294	290	276	287	284	259

Die Dehnungen auf der Zugseite sind durchweg größer als auf der Druckseite, der Unterschied ist aber so gering, daß er bei kleiner Belastung nicht deutlich erkennbar ist; er ist bei kleiner Spannweite am größten und steigt bis zu 7 vH.

Während die Dehnungen dasselbe Verhalten zeigen, wie bei zähen Stoffen, ist das der Spannungen das entgegengesetzte: sie sind auf der Druckseite immer größer als auf der Zugseite. Das rührt selbstverständlich von der großen Verschiedenheit der Elastizitätsmodel für Zug und Druck her. Uebrigens entspricht der Abnahme der Dehnungen mit der Stützweite eine Abnahme der Spannungen. Diese sind nur bei großer Spannweite auf der Druckseite größer als die berechneten, und zwar bis zu  $\infty$  5 vH.

In Zahlentafel 65 sind die mittleren Spannungen zusammengestellt.

Zahlentafel 65.  
Mittlere Spannungen in kg/qcm.

Belastung cmkg	Stützweite									berechnete Spannung
	120			80			40			
	Zug	Druck	Mittel	Zug	Druck	Mittel	Zug	Druck	Mittel	
12 000	80	88	84	79	89	84	74	79	76	85
24 000	157	178	167	152	175	163	146	157	151	170
36 000	231	263	247	227	260	243	215	237	226	255

Es ist bereits erwähnt, daß Versuche gemacht wurden, um zu sehen, ob sich die Spannungen gleichmäßig über die Querschnittsbreite verteilen, indem die Spiegel gemäß den Fig. 40 bis 42, S. 34, angesetzt wurden. Die Spiegelablesungen für diese Versuche sind in die Zahlentafel 66 eingetragen, auch für die bereits

Zahlentafel 66.  
Spiegelablesungen  $a - a_0$  in cm:100 am Stabe B 5, Gußeisen A,  
bei 120 cm Stützweite.

Belastung cmkg	Zugseite									Druckseite											
	Spiegelsitz																				
	oben			unten			Mittel	mitten			Mittel	oben			unten			Mittel	mitten		
l	r	Mittel	l	r	Mittel	l		r	Mittel	l		r	Mittel	l	r	Mittel	l		r	Mittel	
Spiegelsitz nahe den Auflagern																					
12000	54	53	53	52	53	52	<b>53</b>	52	54	<b>53</b>	52	52	52	53	52	52	<b>52</b>	53	52	<b>52</b>	
24000	107	109	108	107	108	107	<b>108</b>	109	108	<b>108</b>	107	109	108	107	106	106	<b>107</b>	107	107	<b>107</b>	
36000	165	165	165	159	160	159	<b>162</b>	166	166	<b>166</b>	164	162	163	160	162	161	<b>162</b>	162	166	<b>164</b>	
Spiegelsitz nahe der Mitte																					
12000	96	94	95	95	96	95	<b>95</b>	93	98	<b>95</b>	87	91	89	90	90	90	<b>89</b>	93	95	<b>94</b>	
24000	198	187	192	197	189	193	<b>193</b>	191	195	<b>193</b>	178	184	181	188	183	185	<b>183</b>	186	190	<b>188</b>	
36000	301	290	295	298	293	295	<b>295</b>	291	298	<b>294</b>	274	283	278	290	285	287	<b>283</b>	285	290	<b>287</b>	

erwähnten später zu besprechenden Versuche mit Spiegelsitz außen. Es geht daraus mit Sicherheit hervor, daß die Annahme, die Spannungen verteilen sich gleichmäßig über die Querschnittsbreite, richtig ist.

Gußeisen B □. Zahlentafel 67.

Ich habe schon im zweiten Abschnitt auf den hohen Wert des Elastizitätsmoduls aufmerksam gemacht, den Stab B 7 zeigte. Wenngleich nun die aus diesem Stabe gefertigten Flachstäbe Z 49 B 7 bis Z 54 B 7 entschieden kleinere Werte aufweisen, so sind doch auch diese noch viel höher als die der aus dem-

Stäbe B 7 u. 8.

Zahlentafel 67.

Ergebnisse der Biegeversuche mit Gußeisen B □, berechnet mit Hilfe der Elastizitätslinie des Stabes B 7.

Stabnummer	Versuchsnummer	Belastung $P - I_0$ kg	Kraftmoment $M - M_0$ cmkg	Durchbiegung $s - s_0$ in cm			Elastizitätsmodal $E$ in t/qcm			Dehnung $\varepsilon - \varepsilon_0$ aus den Spiegeln in 1:1000000		Spannung $k - k_0$ in kg/qcm						
				be- rechnet $s'$	be- obachtet $s$	wegen der Seher- kraft $s_1$	wegen des Kraft- momentes $s_2$	beobachtet	berechnet	Zug- seite	Druck- seite	berechnet	aus der Durch- bie- gung	Zug- seite	Druck- seite	Mittel		
B 7	Bg Ia	400	12000	0,0192	0,0208	0,0009	0,0199	1083	1275	1179	1141	88	84	94	98	96	107	101
		800	24000	0,0395	0,0423	0,0018	0,0405	1064	1228	1146	1121	180	173	189	195	193	213	203
		1200	36000	0,0618	0,0645	0,0029	0,0616	1038	1170	1104	1107	276	264	283	283	284	311	297
	Bg IIa	400	12000	0,0192	0,0248	0,0009	0,0239	1083	1275	1179	951	108	104	94	118	118	133	125
		800	24000	0,0395	0,0523	0,0018	0,0507	1064	1228	1146	900	227	216	189	242	242	267	254
		1200	36000	0,0618	0,0801	0,0029	0,0772	1038	1170	1104	882	349	332	283	355	363	387	375
B 8	Bg IIIa	400	12000	0,0192	0,0262	0,0009	0,0253	1083	1275	1179	899	115	108	94	125	126	138	132
		800	24000	0,0395	0,0542	0,0018	0,0524	1064	1228	1146	867	241	221	189	250	258	273	265
	1200	36000	0,0618	0,0834	0,0029	0,0805	1038	1170	1104	847	371	335	283	372	382	395	388	
	2000	60000	0,1030	0,1440	0,0048	0,1392	1038	1170	1104	815	507	453	378	550	522	530	526	670
B 7	Bg Ib	600	12000	0,0086	0,0090	0,0009	0,0081	1083	1275	1179	1250	88	83	94	90	96	105	100
		1200	24000	0,0176	0,0190	0,0018	0,0172	1064	1228	1146	1177	180	169	189	186	193	209	201
	Bg IIb	1800	36000	0,0275	0,0294	0,0029	0,0265	1038	1170	1104	1146	276	257	283	274	284	303	293
		600	12000	0,0086	0,0113	0,0009	0,0104	1083	1275	1179	974	112	103	94	115	121	131	126
B 8	Bg IIc	1200	24000	0,0176	0,0245	0,0018	0,0227	1064	1228	1146	892	236	216	189	245	252	267	259
		1800	36000	0,0275	0,0381	0,0029	0,0352	1038	1170	1104	863	361	328	283	363	374	384	379
B 7	Bg Ie	1200	12000	0,0021	0,0022	0,0009	0,0013	1083	1275	1179	1941	88	66	94	58	96	84	90
		2400	24000	0,0041	0,0047	0,0018	0,0029	1064	1228	1146	1740	182	136	189	125	195	168	181
		3600	36000	0,0069	0,0078	0,0029	0,0049	1038	1170	1104	1546	278	206	283	203	286	241	263
B 8	Bg IIe	1200	12000	0,0021	0,0029	0,0009	0,0020	1083	1275	1179	1262	110	84	94	89	120	107	113
		2400	24000	0,0044	0,0063	0,0018	0,0045	1064	1228	1146	1122	236	176	189	194	251	216	233
		3600	36000	0,0069	0,0105	0,0029	0,0076	1038	1170	1104	996	366	272	283	315	377	320	348
B 8	Bg IIIe	1200	12000	0,0021	0,0034	0,0009	0,0025	1083	1275	1179	1010	116	88	94	111	127	112	119
		2400	24000	0,0044	0,0075	0,0018	0,0057	1064	1228	1146	885	244	184	189	246	261	228	244
		3600	36000	0,0069	0,0121	0,0029	0,0092	1038	1170	1104	823	378	284	283	381	392	332	362

selben Gußeisen gefertigten Stäbe B 9, 11 und 13. Aber es handelt sich hier auch nur um Stab B 7; das elastische Verhalten des zugehörigen Zwillinges B 8 ähnelt offenbar dem der anderen viel mehr. Das geht aus den beobachteten Durchbiegungen und Dehnungen hervor, die hier viel größer sind, als bei B 7.

Zahlentafel 68.  
Beobachtungen am Stabe B 7 aus Gußeisen B, Profil □.

Stützweite in cm	120					80					40					
	A	B	C	D	Mittel	A	B	C	D	Mittel	A	B	C	D	Mittel	
Durchbiegungen $s-s_0$ in cm : 10 000.																
12 000	211	207	208	208	<b>208</b>	94	90	87	90	<b>90</b>	22	21	26	21	<b>22</b>	
24 000	425	421	424	423	<b>423</b>	194	191	188	188	<b>190</b>	47	48	52	46	<b>47</b>	
36 000	647	642	645	645	<b>645</b>	295	295	292	293	<b>294</b>	78	81	83	72	<b>78</b>	
Spiegelbeobachtungen $a-a_0$ auf der Zugseite in cm : 100.																
Moment in cmkg	12 000	64	61	63	64	<b>63</b>	58	57	57	58	<b>58</b>	41	38	39	39	<b>40</b>
		64	63	64	64		59	59	58	59		42	43	44	41	
	24 000	132	130	129	131	<b>131</b>	116	118	115	118	<b>118</b>	80	79	80	79	<b>82</b>
	132	132	138	132		119	120	119	119		84	85	86	86		
36 000	201	198	199	200	<b>200</b>	178	178	177	179	<b>180</b>	119	119	120	119	<b>124</b>	
	202	201	202	203		181	183	182	181		125	130	131	130		
Spiegelbeobachtungen $a-a_0$ auf der Druckseite in cm : 100.																
Moment in cmkg	12 000	60	62	61	61	<b>61</b>	51	54	53	53	<b>54</b>	30	29	28	29	<b>29</b>
		62	62	62	63		56	56	53	54		29	31	30	29	
	24 000	124	125	124	124	<b>126</b>	109	111	107	109	<b>110</b>	59	59	56	59	<b>59</b>
	126	127	127	128		111	112	110	110		60	62	61	58		
36 000	187	191	189	187	<b>190</b>	162	167	164	166	<b>166</b>	88	88	84	88	<b>89</b>	
	190	194	194	195		168	169	168	168		90	93	92	89		

Die oberen Zahlen gehören zum links, die unteren zum rechts angebrachten Spiegelpaare.

Zahlentafel 69.  
Beobachtungen am Stabe B 8 aus Gußeisen B, Profil □.

Stützweite in cm	120					80					40					
	A	B	C	D	Mittel	A	B	C	D	Mittel	A	B	C	D	Mittel	
Durchbiegungen $s-s_0$ in cm : 10 000.																
12 000	243	240	249	261	<b>248</b>	113	120	107	114	<b>113</b>	26	31	29	30	<b>29</b>	
24 000	516	520	524	533	<b>523</b>	240	251	240	250	<b>245</b>	57	68	61	66	<b>63</b>	
36 000	796	802	801	809	<b>801</b>	377	379	379	389	<b>381</b>	101	109	104	106	<b>105</b>	
Spiegelbeobachtungen $a-a_0$ auf der Zugseite in cm : 100.																
Moment in cmkg	12 000	78	80	79	81	<b>80</b>	72	75	73	73	<b>74</b>	49	50	47	48	<b>49</b>
		79	80	81	84		75	75	76	76		51	51	51	53	
	24 000	163	168	166	166	<b>168</b>	148	154	150	157	<b>154</b>	100	102	100	99	<b>104</b>
	167	168	170	174		151	158	157	161		107	105	108	111		
36 000	253	258	259	257	<b>260</b>	228	231	231	237	<b>236</b>	151	156	152	152	<b>159</b>	
	257	260	265	269		237	239	242	247		165	163	164	171		
Spiegelbeobachtungen $a-a_0$ auf der Druckseite in cm : 100.																
Moment in cmkg	12 000	75	73	73	76	<b>76</b>	67	67	65	66	<b>67</b>	36	36	34	36	<b>36</b>
		76	78	76	79		69	69	69	69		37	37	39	39	
	24 000	153	152	152	155	<b>156</b>	137	139	133	138	<b>139</b>	72	73	71	74	<b>74</b>
	159	162	160	160		141	143	140	143		75	76	78	79		
36 000	234	234	233	238	<b>240</b>	207	206	203	207	<b>211</b>	109	110	107	111	<b>112</b>	
	242	246	245	245		216	216	215	219		112	117	117	120		

Die oberen Zahlen gehören zum links, die unteren zum rechts angebrachten Spiegelpaare.  
Mitteilungen. Heft 127 u. 128.

Deshalb ist die Berechnung der Werte für *B 8*, bei denen der Elastizitätsmodul aus *B 7* benutzt werden mußte, wertlos.

An sich sind die Beobachtungen recht sicher. Sie wurden bei den Versuchsreihen *Bg I* und *II* für alle Spannweiten viermal gemacht, und zwar stützte sich jedesmal eine andere Profilseite gegen die Auflager. Sie sind in den Zahlentafeln 68 und 69 zusammengestellt; diese lassen die schöne Uebereinstimmung der zusammengehörigen vier Versuche, wie auch den Unterschied zwischen den beiden Stäben deutlich erkennen. In Zahlentafel 67 erscheinen die Versuchsergebnisse für *Bg Iabc* als Mittel aus diesen vier Versuchen. Ein unmittelbarer Vergleich der Stäbe *B 7* und *8* ist danach nicht zulässig, insbesondere kann man für *B 8* weder die beobachtete mit der berechneten Durchbiegung noch der Spannung vergleichen, während der falsche Elastizitätsmodul auf die Dehnungen fast keinen Einfluß hat.

Die Durchbiegungen wachsen auch hier, wie selbstverständlich ist, schneller als die Belastungen. Für Stab *B 7* ergibt sich als Mittel aus vier Versuchen die Zahlentafel 70. Auffällig ist, was bei Gußeisen *A* nicht beobachtet werden konnte, das zunehmende Wachsen mit abnehmender Stützweite.

Zahlentafel 70.  
Aenderung der Durchbiegung mit Belastung und Stützweite.  
Gußeisen *B* □.

Stabnummer . . . . .			<i>B 7</i>			<i>B 8</i>		
Belastungsstufe . . . . .			1	2	3	1	2	3
Durchbiegung in cm	Stützweite in cm	120	0,0199	0,0405	0,0616	0,0239	0,0505	0,0772
		80	0,0081	0,0172	0,0265	0,0104	0,0227	0,0352
		40	0,0013	0,0029	0,0049	0,0020	0,0045	0,0076
Verhältnis- zahlen	Stützweite in cm	120	1	2,03	3,10	1	2,11	3,23
		80	1	2,12	3,27	1	2,18	3,38
		40	1	2,23	3,77	1	2,25	3,80
im Mittel . . . . .			1	2,13	3,38	1	2,18	3,47
Verhältnis der berechneten Durchbiegungen			1	2,06	3,22	1	2,06	3,22

Auch für Stab *B 8* liegen vier Wiederholungen der Versuche vor. Hier stimmen diese ja, besonders in bezug auf die Durchbiegungen, nicht so gut überein, wie bei Stab *B 7*, aber das kann sehr wohl an Ungleichmäßigkeit des Eisens liegen. Die Zahlen finden sich in Zahlentafel 69. Wir erhalten mit ihren aus Zahlentafel 67 zu entnehmenden Mitteln die auch in Zahlentafel 70 eingetragenen Werte, also ganz ähnliche Zahlen wie für Stab *B 7*. Allerdings ist hier ein Umstand zu erwähnen. Bevor die ersten Versuche mit 80 und 40 cm Stützweite gemacht wurden, aber nachdem die ersten mit 120 cm fertig waren, erhielt der Stab versehentlich eine Belastung unbekannter Größe. Es ist also sehr wohl möglich, daß er überlastet gewesen ist. Der Vergleich der Versuche *Bg IIa*, ausgeführt vor diesem Ereignis, und *Bg IIIa*, nachher ausgeführt, spricht dafür. Sowohl die Durchbiegungen wie die Dehnungen sind bei *Bg IIIa* größer als bei *Bg IIa*. Da der Unterschied aber nicht gerade bedeutend ist, so habe ich die Versuche nicht gänzlich verworfen; sie sind aber jedenfalls nur mit Vorsicht benutzbar. Unter dieser Einschränkung stelle ich die Zahlen auch noch für *Bg IIIa* zusammen:

Belastung . . . . .	1	2	3	4	5
Durchbiegung . . . . .	1	2,07	3,18	4,33	5,50.

Bei gleicher Beanspruchung sollen sich die Durchbiegungen für die drei Stützweiten wie 9:4:1 verhalten. Wirklich findet man für

		Stab B 7			Stab B 8		
Stützweite . . . .		120	80	40	120	80	40
Beanspruchung	1	9	3,7	0,59	9	3,9	0,75
	2	9	3,8	0,64	9	4,1	0,80
	3	9	3,9	0,72	9	4,1	0,99.

Das sind arge Abweichungen. Nimmt man an, der Einfluß der Scherkraft sei überschätzt, so erhält man ohne jede Rücksicht auf diese

		Stab B 7			Stab B 8		
Stützweite . . . .		120	80	40	120	80	40
Beanspruchung	1	9	3,9	0,95	9	4,1	1,05
	2	9	4,0	1,00	9	4,2	1,08
	3	9	4,1	1,09	9	4,3	1,18.

Jetzt liegen also, wie zu erwarten, die Abweichungen gegenüber der theoretischen Reihe nach der anderen Seite. Es ist also wohl möglich, daß der Einfluß der Scherkraft überschätzt ist; deuteten doch schon einige andere Beobachtungen darauf hin.

Während bei Gußeisen A die beobachtete Durchbiegung  $s_2$  hinter der berechneten  $s'$  zurückblieb, ist das jetzt nur bei kleinerer Stützweite der Fall, bei großer aber ist  $s_2 > s'$ . Läßt man aber die Scherkraft außer acht, so ist immer  $s > s'$ , während bei Gußeisen A das Gegenteil der Fall ist.

Daß die Dehnungen hier stärker wachsen als die Belastungen, ist zu erwarten. Versuch Bg III a ergibt die Verhältniszahlen

Belastung . . . . .	1	2	3	4	5	
Dehnung	Zugseite . . . . .	1	2,10	3,23	4,41	5,66
	Druckseite . . . . .	1	2,05	3,10	4,19	5,28
	Mittel . . . . .	1	2,07	3,16	4,30	5,47.

Diese Reihe stimmt mit der für Gußeisen A vorzüglich überein. Teilt man die berechneten Spannungen durch die mittleren beobachteten Dehnungen, so erhält man als Elastizitätsmodul

Spannungen . . . . .	94	189	283	378	473
mittlere Dehnungen . . . . .	111	231	353	480	610
Elastizitätsmodul . . . . .	847	819	801	788	775.

Nimmt man an, daß sich unter übrigens gleichen Umständen die Elastizitätsmodul umgekehrt verhalten wie die Durchbiegungen, so erhält man aus der Elastizitätslinie des Stabes B 7 gemäß Bg I a für B 8

Belastung in cmkg . . . . .	12 000	24 000	36 000
Elastizitätsmodul . . . . .	927	887	844 .

also gar keine Uebereinstimmung. Macht man dieselbe Voraussetzung für die mittleren Dehnungen, so erhält man

Belastung in cmkg . . . . .	12 000	24 000	36 000
Elastizitätsmodul . . . . .	914	823	817 .

also ein auch nicht gerade befriedigendes Ergebnis. Doch kann der Mangel von der erwähnten Ueberlastung herrühren.

Für Stab B 7 folgt aus den Versuchen Bg I a b c und für B 8 aus Bg II a b c die Zahlentafel 71. Diese Werte stimmen ziemlich gut mit denen überein, welche für Gußeisen A gefunden wurden.

Zahlentafel 71.  
Wachsen der Dehnung mit der Belastung bei Gußeisen B □.

Stützweite in cm . . .	120			80			40			
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	
Belastung . . . . .	1	2	3	1	2	3	1	2	3	
Stab B 7.										
Dehnung in 1 : 1 000 000	Zugseite	1	2,04	3,14	1	2,04	3,14	1	2,07	3,16
	Druckseite	1	2,06	3,14	1	2,04	3,10	1	2,06	3,12
	Mittel	1	2,05	3,14	1	2,04	3,12	1	2,06	3,14
Stab B 8.										
Dehnung in 1 : 1 000 000	Zugseite	1	2,10	3,23	1	2,11	3,22	1	2,14	3,33
	Druckseite	1	2,08	3,19	1	2,10	3,18	1	2,10	3,24
	Mittel	1	2,09	3,21	1	2,10	3,20	1	2,12	3,28

Auch hier sind, wie aus Zahlentafel 67 unmittelbar entnommen werden kann, die Dehnungen bei 40 cm auf der Druckseite viel kleiner als bei 120 cm Stützweite; bei Gußeisen A trat dieser Unterschied allerdings auch auf der Zugseite hervor, wenn auch in geringerem Grade.

Ebenfalls sind auch hier die Spannungen auf der Druckseite größer als auf der Zugseite, aber bei 40 cm Stützweite ist das Gegenteil der Fall. Die Mittel aus beiden sind größer als die berechnete Spannung, nur bei Stützweite 40 cm kleiner, wie bei Gußeisen A allgemein gefunden wurde. Stab B 8 kann selbstverständlich wegen mangelnder Kenntnis des Elastizitätsmodulus für diese Betrachtung nicht herangezogen werden. Für Stab B 7 sind die Spannungen für die Versuche Bg I abc in Zahlentafel 72 nochmals zusammengestellt.

Zahlentafel 72.  
Spannungen im Stabe B 7.

Belastung cmkg	Stützweite									berechnete Spannung
	120			80			40			
	Zug	Druck	Mittel	Zug	Druck	Mittel	Zug	Druck	Mittel	
12 000	96	107	101	96	105	100	96	84	90	94
24 000	193	213	203	193	209	201	195	168	181	189
36 000	284	311	297	284	303	293	286	241	263	283

Gußeisen B ○. Zahlentafel 73.

Die Stäbe B 9 und 10 wurden gelegentlich der Versuchsreihen Bg I und II je zweimal untersucht, nach der ersten Untersuchung wurde der Stab um 90° gedreht, so daß eine andere Erzeugende anlag. Die Durchbiegungen wie die Spiegelablesungen sind ja nun, wie die Zusammenstellungen in den Zahlentafeln 74 und 75 zeigen, für Stab B 10 etwas größer als für Stab B 9. Da aber die Versuche Bg III mit Stab B 10 sich von Bg II mit demselben Stabe, wie Zahlentafel 73 zeigt, um mehr unterscheiden, als Bg I und II, so hat es kein Bedenken, die Elastizitätslinie des Stabes B 9 auch auf B 10 anzuwenden. Der Zugelastizitätsmodul ist übrigens für beide Stäbe ermittelt, Zahlentafel 35, S. 35, zeigt, daß die Werte sich nicht allzusehr von einander unterscheiden.

Bei Versuch III a entspricht der Belastungsreihe

	1	2	3	4,25	5,5
die Durchbiegungsreihe					
	1	1,97	3,01	4,43	5,82.

Zahlentafel 73.  
 Ergebnisse der Biegungsversuche mit Gußeisen B ©, berechnet mit Hilfe der Elastizitätslinie des Stabes B 9.

Stabnummer	Versuchsnummer	Belastung $P - P_0$ kg	Kraftmoment emkg	Durchbiegung $s - \epsilon_0$ in cm			Elastizitätsmodul in $t/qcm$			Dehnung $\epsilon - \epsilon_0$ aus den Spiegeln in 1:1000000			Spannung $k - k_0$ in $kg/qcm$			
				be-rechnet $s'$	be-obachtet $s$	wegen der Scher-kraft $s_1$	wegen des Kraft-momentes $s_2$	beobachtet	berechnet	Zug-seite	Druck-seite	berechnet	Durch-bie-gung	aus der Zug-Druck-seite	aus den Spiegellablesungen	
				Stützweite 120 cm												
	Bg Ia	200	6000	0,0220	0,0220	0,0007	0,0213	865	992	928	961	85	85	82	85	84
		400	12000	0,0474	0,0450	0,0015	0,0435	819	910	864	941	175	171	157	165	159
		600	18000	0,0730	0,0683	0,0023	0,0660	769	912	840	931	268	256	231	238	231
	Bg IIa	200	6000	0,0220	0,0220	0,0007	0,0213	865	992	928	961	89	85	82	86	88
		400	12000	0,0474	0,0466	0,0015	0,0451	819	910	864	908	185	171	162	171	168
		600	18000	0,0730	0,0714	0,0023	0,0691	769	912	840	889	283	256	242	248	258
	Bg III a	200	6000	0,0220	0,0247	0,0007	0,0240	865	992	928	853	95	85	93	98	94
		400	12000	0,0474	0,0489	0,0015	0,0474	819	910	864	863	192	171	170	187	175
		600	18000	0,0730	0,0745	0,0023	0,0722	769	912	840	850	288	256	253	263	262
		850	25500	0,1035	0,1097	0,0033	0,1064	769	912	840	817	422	363	373	388	384
		1100	33000	0,1340	0,1439	0,0043	0,1396	769	912	840	805	548	469	489	511	500
				Stützweite 80 cm												
	Bg Ib	300	6000	0,0098	0,0097	0,0007	0,0030	865	992	928	1010	83	85	78	90	82
		600	12000	0,0210	0,0200	0,0015	0,0185	819	910	864	983	168	171	150	168	153
		900	18000	0,0325	0,0309	0,0023	0,0286	769	912	840	955	256	256	235	241	234
	Bg IIb	300	6000	0,0098	0,0102	0,0007	0,0095	865	992	928	958	87	85	83	93	86
		600	12000	0,0210	0,0213	0,0015	0,0198	819	910	864	918	176	171	160	174	160
		900	18000	0,0325	0,0329	0,0023	0,0306	769	912	840	892	273	256	241	249	249
				Stützweite 40 cm												
	Bg Ic	600	6000	0,0025	0,0020	0,0007	0,0013	865	992	928	1748	52	85	45	93	52
		1200	12000	0,0053	0,0045	0,0015	0,0030	819	910	864	1515	108	171	97	183	98
		1800	18000	0,0081	0,0075	0,0023	0,0052	769	912	840	1312	170	256	164	266	155
	Bg IIc	600	6000	0,0025	0,0023	0,0007	0,0016	865	992	928	1420	56	85	56	99	55
		1200	12000	0,0053	0,0051	0,0015	0,0036	819	910	864	1262	120	171	117	191	109
		1800	18000	0,0081	0,0083	0,0023	0,0060	769	912	840	1136	186	256	189	280	170
	Bg IIIc	600	6000	0,0025	0,0025	0,0007	0,0018	865	992	928	1262	60	85	63	99	59
		1200	12000	0,0053	0,0060	0,0015	0,0045	819	910	864	1010	126	171	146	193	115
		1800	18000	0,0081	0,0096	0,0023	0,0073	769	912	840	933	202	256	230	286	184

Zahlentafel 74. Durchbiegungen  $s-s_0$  der Stäbe  $B_9$  und  $B_{10}$ , Gußeisen  $B \odot$ , in cm: 10000.

Kraftmoment in cmkg	120 cm						80 cm						40 cm								
	$B_9$			$B_{10}$			Mittel	$B_9$			$B_{10}$			Mittel	$B_9$			$B_{10}$			Mittel
	Seite		Mittel	Seite		Mittel		Seite		Mittel	Seite		Mittel		Seite		Mittel	Seite		Mittel	
	A	B		A	B			A	B		A	B			A	B		A	B		
6000	227	213	220	223	218	220	<b>220</b>	97	97	97	109	96	102	<b>100</b>	20	21	20	25	22	23	<b>22</b>
12000	458	443	450	478	455	466	<b>458</b>	201	199	200	222	205	213	<b>207</b>	49	42	45	54	49	51	<b>48</b>
18000	693	674	683	727	701	714	<b>699</b>	308	310	309	334	324	329	<b>319</b>	78	73	75	87	80	83	<b>79</b>

Zahlentafel 75.  
Spiegelablesungen  $a-a_0$  an den Stäben  $B_9$  und  $B_{10}$ , Gußeisen  $B \odot$ , in cm: 100.

	Zugseite.												Druckseite.											
	$B_9$			$B_{10}$			Mittel	$B_9$			$B_{10}$			Mittel	$B_9$			$B_{10}$			Mittel			
A	B	Mittel	A	B	Mittel	A		B	Mittel	A	B	Mittel	A		B	Mittel	A	B	Mittel					
6000	73	70	72	76	71	74	<b>73</b>	68	66	67	70	64	67	<b>67</b>	49	49	50	50	53	52	<b>51</b>			
12000	151	142	148	160	146	153	<b>150</b>	139	131	135	148	132	140	<b>138</b>	102	100	103	105	106	106	<b>105</b>			
18000	233	218	227	245	225	235	<b>231</b>	211	202	207	220	206	213	<b>210</b>	152	153	157	161	163	163	<b>160</b>			
	75	71		75	73			69	66		69	67			53	49		53	53					
	155	143		156	149			141	131		144	136			111	101		110	105					
	237	219		241	230			215	202		214	211			170	184		168	160					
6000	60	62	61	64	64	64	<b>63</b>	52	55	53	56	54	55	<b>54</b>	22	22	22	23	23	23	<b>23</b>			
12000	124	126	125	136	126	132	<b>129</b>	105	108	107	112	112	112	<b>110</b>	45	47	45	50	49	49	<b>47</b>			
18000	189	191	192	206	199	203	<b>197</b>	161	166	164	170	173	172	<b>168</b>	68	71	69	75	73	74	<b>72</b>			
	60	62		63	66			52	55		54	56			22	22		25	22					
	125	127		132	134			106	110		111	115			45	45		49	49					
	191	196		203	205			160	168		169	176			71	68		75	74					

Die obere Ziffer entspricht dem Spiegelsitz links, die untere dem rechts.

Die Mittel aus allen Versuchen, wobei die Versuche I und II doppelt gerechnet sind, ergeben

Stützweite 120 cm	I	2,06	3,14
» 80 »	I	2,08	3,22
» 40 »	I	2,33	3,93
Mittel	I	2,16	3,41

Verhältnis der berechneten Durchbiegungen I 2,15 3,32.

Die Verhältnisse liegen hier also ähnlich wie bei dem □- und ⊠-Profile. Wie bei diesen, so sind auch hier die beobachteten Durchbiegungen  $s_2$  durchweg beträchtlich kleiner als die berechneten  $s'$ .

Für die drei Stützweiten findet man das Verhältnis der Durchbiegungen statt 9 : 4 : 1

Stützweite	120	80	40
Belastung	1	9	0,62
	2	9	0,70
	3	9	0,78.

Das sind die früher beobachteten Erscheinungen, stärker als bei □, etwa gleich stark wie bei ⊠ hervortretend. Ohne Berücksichtigung der Scherkraft erhält man

Stützweite	120	80	40
Belastung	1	9	0,88
	2	9	0,98
	3	9	1,04.

Die Abweichungen von der theoretischen Reihe liegen jetzt nur noch bei größerer Belastung nach der anderen Seite; etwaige Ueberschätzung der Scherkraft erklärt also den Unterschied nicht genügend.

Die beobachtete Durchbiegung  $s_2$  bleibt hinter der berechneten  $s'$  zurück, und zwar um so mehr, je kleiner die Stützweite ist.

Nur Versuch *Bg III a* macht eine Ausnahme, hier ist  $s_2 > s'$ . Weshalb aber bei diesem Versuch  $s_2$  durchweg entschieden größer ist als bei dem Parallelversuch *Bg II a* am selben Stabe, ist nicht einzusehen. Der Unterschied wiederholt sich zwischen Versuch III c und II c. Man ist versucht zu glauben, daß der Stab bei Versuch II überlastet gewesen ist, doch ist das ganz ausgeschlossen.

Für das Wachsen der Dehnungen mit der Belastung liefert Versuch *Bg III a* die Verhältniszahlen

Belastung . . . . .	1	2	3	4,25	5,5	
Dehnung {	Zugseite . . . . .	1	2,02	3,03	4,48	5,89
	Druckseite . . . . .	1	2,02	3,03	4,44	5,77
	Mittel . . . . .	1	2,02	3,03	4,46	5,83.

Die Reihe steigt etwas langsamer als diejenige für Gußeisen *B □*, stimmt aber übrigens mit ihr überein. Teilt man die berechneten Spannungen durch die mittleren beobachteten Dehnungen, so erhält man als Elastizitätsmodul

Spannungen . . . . .	85	171	256	363	469
mittlere Dehnungen . . . . .	104	210	315	464	606
Elastizitätsmodul . . . . .	817	814	813	782	774.

Diese Zahlen stimmen auffällig gut mit denen für Gußeisen *B □*. Nimmt man an, daß sich die Elastizitätsmodul unter übrigens gleichen Umständen umgekehrt wie die Durchbiegungen verhalten, so erhält man aus der Elastizitätslinie des Stabes *B 9* gemäß *Bg I a*

Elastizitätsmodul . . . . .	824	792	768.
-----------------------------	-----	-----	------

also keine befriedigende Uebereinstimmung mit vorstehender Reihe.

Im Mittel erhält man für beide Stäbe unter Berücksichtigung doppelter Anrechnung der Versuchsreihen *Bg I* und II die Zahlentafeln 76 und 77.

Zahlentafel 76.  
Mittlere Dehnungen in 1:1000000.

Belastung	Zugseite			Druckseite			
	1	2	3	1	2	3	
Stützweite {	120	102	210	321	89	182	278
	80	105	209	318	85	172	264
	40	112	230	358	55	116	183

Zahlentafel 77.  
Wachsen der Dehnungen mit den Belastungen.

Stützweite . . . . .	120			80			40			
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	
Dehnung 1:1000000 {	Zugseite	1	2,06	3,15	1	1,99	3,03	1	2,06	3,20
	Druckseite	1	2,05	3,12	1	2,02	3,11	1	2,11	3,33
	Mittel	1	2,05	3,13	1	2,00	3,07	1	2,08	3,26

Man erkennt deutlich, daß die Dehnungen auf der Zugseite durchweg größer sind als auf der Druckseite (bis über doppelt so groß), daß sie schneller als die Belastung zunehmen und daß sie auf der Zugseite mit abnehmender Stützweite wachsen, auf der Druckseite abnehmen.

Die Zusammenstellung der mittleren Spannungen in Zahlentafel 78

Zahlentafel 78.

Belastung cmkg	Stützweite in cm									berechnete Spannung
	120			80			40			
	Zug	Druck	Mittel	Zug	Druck	Mittel	Zug	Druck	Mittel	
6 000	88	88	88	91	84	87	97	55	76	85
12 000	172	166	169	171	156	163	188	106	147	171
18 000	247	246	246	245	241	243	276	167	221	256

zeigt, daß Zug- und Druckspannungen bei großer Stützweite etwa gleich sind und mit der berechneten Spannung gut übereinstimmen, daß aber bei kleiner Stützweite die Zugspannung, obwohl sie nicht viel über die berechnete hinausgeht, viel größer wird als die Druckspannung. Diese wird so klein, daß selbst die mittlere noch beträchtlich unter der berechneten bleibt. Immerhin wird man wegen der wachsenden Zugspannung bei kleiner Stützweite mit größerer Sicherheit konstruieren müssen als bei großer.

Gußeisen *B I*. Zahlentafel 79.

Alle Versuche der Reihen *Bg I* und *II* mit diesem Stabe sind doppelt ausgeführt, einmal lag der eine, das anderemal der andere Flansch an den Auflagern. Die Versuche mit 120 cm Stützweite sind außerdem für Stab *B 12* so wiederholt, daß die Spiegel nach Fig. 40 bis 42, S. 34, in der Mitte und an beiden Kanten des Flansches angesetzt wurden. Es wurde also die Durchbiegung bei diesen Versuchen bei gleicher Belastung sechsmal gemessen; die gefundenen Werte sind in Zahlentafel 80 zusammengestellt.

Zahlentafel 80.

Durchbiegung  $s - s_0$  in cm: 10000.

Belastung cmkg	Versuchsnummer						Mittel
	<i>Bg II a<sub>1</sub>'</i>	<i>Bg II a<sub>2</sub>'</i>	<i>Bg II a<sub>3</sub>'</i>	<i>Bg II a<sub>1</sub>''</i>	<i>Bg II a<sub>2</sub>''</i>	<i>Bg II a<sub>3</sub>''</i>	
6 000	238	236	235	236	233	237	236
12 000	483	482	484	486	489	489	485
18 000	746	744	740	749	741	744	744

Die Uebereinstimmung ist also sehr gut, trotzdem die Belastungen nur klein sein konnten. Weniger gut stimmen die Spiegelablesungen, die sich in Zahlentafel 81 finden.

Das deutet auf Unregelmäßigkeiten im Eisen; jedenfalls kann man nicht folgern, daß die Dehnungen an den Flanschrändern anders als in der Mitte sind, was ja leicht möglich sein könnte. Allerdings findet man ja, wenn man die Mittel aus *Bg II a<sub>2</sub>'* und *a<sub>2</sub>''* mit denen aus *Bg II a<sub>1</sub>'*, *a<sub>3</sub>'*, *a<sub>1</sub>''* und *a<sub>3</sub>''* vergleicht, siehe Zahlentafel 82, etwas größere Werte für die letzteren; aber der

Zahlentafel 79.

Ergebnisse der Biegeversuche mit Gußeisen **BI**, berechnet mit Hülfe der Elastizitätslinie des Stabes **B II**.

Stabnummer	Versuchsnummer	Belastung $P - F_0$ kg	Kraftmoment $M - M_0$ cmkg	Durchbiegung $s - s_0$ in cm				Elastizitätsmodul $E$ in $t/qcm$				Dehnung $\epsilon - \epsilon_0$ aus den Spiegeln in 1:1000000		Spannung $k - k_0$ in $kg/qcm$			
				be-rechnet $s'$	be-obachtet $s$	wegen der Scher-kraft $s_1$	wegen des Kraft-momentes $s_2$	beobachtet	berechnet	Zug-seite	Druck-seite	berechnet	Durch-bie-gung	Zug-seite	Druck-seite	Mittel	
B II	Bg Ia	200	6000	0,0226	0,0216	0,0012	0,0204	917	973	945	1046	94	90	80	86	88	
		400	12000	0,0469	0,0452	0,0026	0,0426	879	941	910	1000	192	180	162	169	175	
		600	18000	0,0718	0,0694	0,0039	0,0655	846	937	891	976	297	270	245	251	268	
		200	6000	0,0226	0,0234	0,0012	0,0222	917	973	945	961	103	90	87	94	94	
		400	12000	0,0469	0,0485	0,0026	0,0459	879	941	910	928	210	180	174	185	190	
		600	18000	0,0718	0,0742	0,0039	0,0703	846	937	891	909	323	270	262	273	288	
	B 12	Bg III a	200	6000	0,0226	0,0251	0,0012	0,0239	917	973	945	892	107	90	94	98	97
			400	12000	0,0469	0,0505	0,0026	0,0479	879	941	910	890	215	180	189	189	189
			600	18000	0,0718	0,0765	0,0039	0,0726	846	937	891	880	329	270	270	278	288
			900	27000	0,1076	0,1189	0,0052	0,1137	846	937	891	842	521	405	421	441	445
			1200	36000	0,1435	0,1630	0,0078	0,1552	846	937	791	823	729	541	576	617	607
B II	Bg Ib	300	6000	0,0100	0,0095	0,0012	0,0083	917	973	945	1140	91	90	73	83	85	
		600	12000	0,0208	0,0205	0,0026	0,0179	879	941	910	1058	191	180	153	168	170	
		900	18000	0,0319	0,0319	0,0039	0,0280	846	937	891	1014	292	270	234	247	260	
		300	6000	0,0100	0,0099	0,0012	0,0087	917	973	945	1089	99	90	77	91	89	
		600	12000	0,0208	0,0221	0,0026	0,0195	879	941	910	972	208	180	166	183	183	
		900	18000	0,0319	0,0345	0,0039	0,0306	846	937	891	928	320	270	255	270	280	
B II	Bg II c	600	6000	0,0025	0,0025	0,0012	0,0013	917	973	945	1822	88	90	46	81	70	
		1200	12000	0,0052	0,0054	0,0026	0,0028	879	941	910	1690	182	180	95	160	143	
		1800	18000	0,0080	0,0086	0,0039	0,0047	846	937	891	1508	282	270	157	239	229	
		600	6000	0,0025	0,0027	0,0012	0,0015	917	973	945	1577	96	90	53	88	78	
		1200	12000	0,0052	0,0059	0,0026	0,0033	879	941	910	1435	198	180	112	174	156	
		1800	18000	0,0080	0,0095	0,0039	0,0056	846	937	891	1268	304	270	187	257	236	
B 12	B, III c	600	6000	0,0025	0,0035	0,0012	0,0023	917	973	945	1029	98	90	81	90	82	
		1200	12000	0,0052	0,0074	0,0026	0,0048	879	941	910	984	208	180	164	183	171	
		1800	18000	0,0080	0,0113	0,0039	0,0074	846	937	891	957	316	270	247	267	244	
		600	6000	0,0025	0,0035	0,0012	0,0023	917	973	945	1029	98	90	81	90	82	
		1200	12000	0,0052	0,0074	0,0026	0,0048	879	941	910	984	208	180	164	183	171	
		1800	18000	0,0080	0,0113	0,0039	0,0074	846	937	891	957	316	270	247	267	244	

Zahlentafel 81.  
Spiegelablesungen  $a-a_0$  in cm:100.

Be- lastung cmkg	Zugseite						Mittel	Druckseite						Mittel
	Bg II	Bg II	Bg II	Bg II	Bg II	Bg II		Bg II	Bg II	Bg II	Bg II	Bg II	Bg II	
	$a_1'$	$a_2'$	$a_3'$	$a_1''$	$a_2''$	$a_3''$		$a_1'$	$a_2'$	$a_3'$	$a_1''$	$a_2''$	$a_3''$	
6 000	79	76	74	74	74	76	<b>76</b>	69	71	75	70	70	72	<b>72</b>
	79	74	74	76	76	76		73	72	74	72	72	74	
12 000	155	153	153	150	153	153	<b>154</b>	143	144	148	145	145	144	<b>147</b>
	157	152	153	156	155	155		152	147	147	148	150	150	
18 000	240	237	235	229	231	235	<b>236</b>	222	221	221	220	218	217	<b>223</b>
	242	238	236	237	236	236		231	227	222	226	226	227	

Die oberen Zahlen beziehen sich auf den Spiegelsitz links, die unteren auf den Spiegelsitz rechts.

Zahlentafel 82.  
Mittlere Spiegelablesungen in cm:100.

Belastung cmkg	Spiegelsitz			
	Zugseite		Druckseite	
	Mitte	außen	Mitte	außen
6 000	75	76	72	73
12 000	153	154	146	148
18 000	235	236	223	223

Zahlentafel 83.  
Beobachtungen an den Stäben B<sub>11</sub> und 12, Gußeisen B<sub>I</sub>.

Belastung	120 cm						Mittel	80 cm						Mittel	40 cm						Mittel
	B <sub>11</sub>			B <sub>12</sub>				B <sub>11</sub>			B <sub>12</sub>				B <sub>11</sub>			B <sub>12</sub>			
	Bg	Bg	Mittel	Bg	Bg	Mittel		Bg	Bg	Mittel	Bg	Bg	Mittel		Bg	Bg	Mittel	Bg	Bg	Mittel	
	$Ia_1'$	$Ia_1''$		$IIa_2'$	$IIa_2''$			$Ib_1'$	$Ib_1''$		$IIb_2'$	$IIb_2''$			$Ic_1'$	$Ic_1''$		$IIc_2'$	$IIc_2''$		

Durchbiegungen  $s-s_0$  in cm:10 000.

6 000	212	220	216	236	233	234	<b>225</b>	97	94	95	94	105	99	<b>97</b>	26	25	25	23	31	27	<b>26</b>
12 000	446	459	452	482	489	485	<b>469</b>	210	201	205	215	228	221	<b>213</b>	52	56	54	61	58	59	<b>57</b>
18 000	686	703	694	744	741	742	<b>718</b>	324	315	319	336	355	345	<b>332</b>	82	90	86	96	95	95	<b>91</b>

Spiegelablesungen  $a-a_0$  in cm:100, Zugseite.

6 000	68	68	69	76	74	75	<b>72</b>	60	60	60	64	67	66	<b>63</b>	39	41	41	43	44	43	<b>42</b>
	70	69		74	76	60		60	65		68	41			41	42		44			
12 000	138	140	140	153	153	153	<b>147</b>	127	123	125	135	138	136	<b>131</b>	80	82	82	89	87	89	<b>86</b>
	142	142		152	155	128		124	135		138	83			84	90		90			
18 000	215	217	216	237	231	235	<b>225</b>	194	188	191	206	212	209	<b>200</b>	122	126	126	134	134	135	<b>131</b>
	217	217		238	236	195		189	206		213	128			128	137		137			

Spiegelablesungen  $a-a_0$  in cm:100, Druckseite.

6 000	64	67	65	71	70	71	<b>68</b>	57	57	58	58	61	61	<b>59</b>	33	32	32	34	34	35	<b>34</b>
	64	66		72	72	58		59	60		64	32			33	32		36			
12 000	132	135	135	144	145	146	<b>141</b>	119	116	118	120	127	126	<b>122</b>	66	65	68	70	70	72	<b>70</b>
	134	140		147	150	119		120	127		132	68			71	77		73			
18 000	203	204	207	221	218	223	<b>215</b>	183	176	181	183	194	193	<b>187</b>	99	99	102	105	106	109	<b>106</b>
	206	214		227	226	181		183	193		203	104			106	114		112			

Unterschied ist gegenüber den Schwankungen der Einzelwerte zu klein, um einen sicheren Schluß zuzulassen.

Für Zahlentafel 79 sind aber nur die Werte benutzt, welche sich bei dem Spiegelsitz in der Mitte ergeben. Die Versuchsreihen I und II sind also durchweg doppelt, III ist nur einfach gemacht.

Die Zusammenstellung der Beobachtungen für die beiden Stäbe in Zahlentafel 83 zeigt übrigens deutlich, daß die Uebertragung des an  $B_{11}$  gefundenen Elastizitätsmoduls auf  $B_{12}$  nicht zulässig ist; sowohl die Durchbiegungen als auch die Dehnungen sind für  $B_{12}$  entschieden größer. Auf die Beurteilung der letzteren hat das ja aber keinen Einfluß.

Als Beziehung zwischen Kraftmoment und Durchbiegung ergibt sich für Stab  $B_{12}$ , Versuch  $Bg III a$

Kraftmoment . . . .	I	2	3	4,5	6
Durchbiegung . . . .	I	2,00	3,04	4,76	6,50

und für beide Stäbe, Versuch  $BI$  und  $II$ , die Zahlentafel 84.

Zahlentafel 84.  
Wachsen der Durchbiegungen mit den Belastungen.

Stabnummer . . . .	$B_{11}$			$B_{12}$			Mittel			
	I	2	3	I	2	3	I	2	3	
Stützweite {	120 cm	I	2,09	3,21	I	2,07	3,17	I	2,08	3,19
	80 »	I	2,16	3,37	I	2,24	3,53	I	2,20	3,45
	40 »	I	2,15	3,62	I	2,20	3,73	I	2,17	3,67
	Mittel	I	2,13	3,40	I	2,17	3,48	I	2,15	3,44

Zahlentafel 85.  
Abhängigkeit der Durchbiegung von der Stützweite.

Belastung	Stab $B_{11}$			Stab $B_{12}$			Stab $B_{12}$ Versuch $Bg III ac$		
	I	2	3	I	2	3	I	2	3

Durchbiegung  $\epsilon_2$  bei Berücksichtigung der Scherkraft.

Stützweite {	120 cm	9	9	9	9	9	9	9	9
	80 »	3,7	3,8	3,9	3,5	3,8	3,9	0,87	0,90
	40 »	0,57	0,59	0,65	0,61	0,65	0,71	0,87	0,90

Durchbiegung  $s$  ohne Berücksichtigung der Scherkraft.

Stützweite {	120 cm	9	9	9	9	9	9	9	9
	80 »	4,0	4,1	4,1	3,8	4,1	4,2	1,25	1,32
	40 »	1,04	1,08	1,12	1,04	1,10	1,15	1,25	1,33

Die Abhängigkeit der Durchbiegungen von der Stützweite im Vergleich mit der Reihe 9:4:1 erhellt aus Zahlentafel 85. Die ungeheuerlichen Abweichungen des ersten Teiles können ja zum Teil von der Unsicherheit, welche über die Verteilung der Stabspannungen über den Querschnitt besteht, herühren. Nimmt man allerdings, wie es wohl geschieht, an, daß die Querkraft sich nur über die Stegbreite verteilt, so muß, da die Funktion  $F'$  jetzt noch kleiner wird, der Einfluß der Schubkraft noch wachsen. Läßt man ihn aber unberücksichtigt, so liegt, wie der untere Teil der Zahlentafel 85 zeigt, die Abweichung nach der anderen Seite.

Die Dehnungen für Versuch *Bg III a* verhalten sich gegenüber den Kraftmomenten so:

Belastung . . . . .	I	2	3	4,5	6	
Dehnung {	Zugseite .	I	2,01	3,07	4,87	6,82
	Druckseite	I	2,02	3,07	4,75	6,48.

Für die Dehnungen, deren Berechnung die Kenntnis des Elastizitätsmoduls nur sehr nebensächlich bedingt, darf man die Mittel aus allen Versuchen bilden wobei I und II doppelt zu rechnen sind. Man erhält für sie selbst und ihre Abhängigkeit von der Stützweite die Zahlentafel 86.

Zahlentafel 86.  
Mittlere Dehnungen und ihr Verhältnis zur Stützweite.

Stützweite in cm . . . . .	120			80			40		
Belastung . . . . .	I	2	3	I	2	3	I	2	3
Dehnungen in 1 : 1000 000.									
Zugseite . . . . .	100	204	314	95	199	306	93	194	298
Druckseite . . . . .	95	196	299	89	188	288	78	160	246
verhältnismäßige Drehungen									
Zugseite . . . . .	1	2,04	3,14	1	2,09	3,22	1	2,09	3,20
Druckseite . . . . .	1	2,06	3,15	1	2,11	3,24	1	2,05	3,16
Mittel	1	2,05	3,14	1	2,10	3,23	1	2,07	3,18

Die Dehnungen nehmen also auf der Zugseite weniger, auf der Druckseite mehr mit der Stützweite ab; übrigens sind die Zugdehnungen immer erheblich größer als die Druckdehnungen; der Unterschied nimmt mit abnehmender Stützweite zu.

Die Spannungen sind in Zahlentafel 79 nur für Stab *B 11* richtig berechnet. Sie sind auf der Druckseite eher größer als auf der Zugseite, nur bei 40 cm Stützweite ist es umgekehrt. Sie sind durchweg kleiner als die berechneten.

Bedenkt man, daß für Stab *B 12* sicherlich mit zu großem Elastizitätsmodul gerechnet wurde, so bestätigen die an diesem Stabe gefundenen Ergebnisse die von *B 11*.

Gußeisen *B [*. Zahlentafel 87

Mit diesen Stäben wurden nur die Versuchsreihen I und II durchgeführt, da der eine, wie immer, vor der Anstellung der Versuchsreihe III zur Ermittlung des Elastizitätsmoduls verbraucht, der andere aber versehentlich zerbrochen wurde.

Sämtliche Versuche sind doppelt ausgeführt, die anliegende Seite wurde gewechselt. Die Spiegel wurden einmal auf der Stegseite, das anderemal auf der offenen Seite angesetzt, um zu sehen, ob sich Unterschiede in der Dehnung ergeben. Die Durchbiegung ist also für jede Stützweite und Belastungsstufe für jeden Stab viermal gemessen; Zahlentafel 87 gibt die Ergebnisse wieder. Die vier Versuche stimmen gut überein; man erkennt aber deutlich, daß Stab *B 14* elastischer als *B 13* ist. Sind die Unterschiede auch im Mittel nicht allzu groß, so betragen sie im einzelnen doch bis 10 vH, so daß eine Uebertragung der Elastizitätslinie vom Stabe *B 13* auf *B 14* bedenklich erscheint.

Zahlentafel 87.  
Ergebnisse der Biegeversuche mit Gußeisen mit Güßeisen  $B_{13}$ , berechnet mit Hilfe der Elastizitätslinie des Stabes  $B_{13}$ .  
Spiegel auf der Stegseite.

Stabnummer	Versuchsnummer	Belastung $P' - P_0$ kg	Kraftmoment $M - M_0$ cmkg	Durchbiegung $s - s_0$ in cm			Elastizitätsmodul $E$ in $t/qcm$			Dehnung $\epsilon - \epsilon_0$ aus den Spiegeln in 1:1000000			Spannung $k - k_0$ in $kg/qcm$					
				be-rechnet $s'$	be-obachtet $s$	wegen der Scher-kraft $\epsilon_1$	wegen der Kraft-momentes $\epsilon_2$	beobachtet	berechnet	Zug-seite	Druck-seite	berechnet	aus der Durch-bie-gung	aus den Spiegelablesungen	Zug-seite	Druck-seite	Mittel	
Stützweite 120 cm																		
	$Bg\ I a_2$	200	6000	0,0247	0,0242	0,0013	0,0229	877	915	896	968	102	97	92	86	89	89	
		400	12000	0,0513	0,0502	0,0028	0,0474	833	899	866	936	212	201	185	171	177	181	
		600	18000	0,0780	0,0774	0,0042	0,0732	806	898	852	908	325	307	277	259	262	276	269
	$Bg\ II a_2$	200	6000	0,0247	0,0268	0,0013	0,0255	877	915	896	870	110	107	92	95	96	98	97
		400	12000	0,0513	0,0543	0,0028	0,0515	833	899	866	862	227	216	185	186	189	194	191
		600	18000	0,0780	0,0827	0,0042	0,0785	806	898	852	847	347	329	277	278	279	295	287
Stützweite 80 cm																		
	$Bg\ I b_2$	300	6000	0,0110	0,0122	0,0013	0,0109	877	915	896	903	107	103	92	91	94	94	
		600	12000	0,0227	0,0253	0,0028	0,0225	833	899	866	875	220	208	185	183	183	187	185
		900	18000	0,0346	0,0390	0,0042	0,0348	806	898	852	849	339	317	277	277	273	284	278
	$Bg\ II b_2$	300	6000	0,0110	0,0123	0,0013	0,0110	877	915	896	896	112	105	92	92	98	96	97
		600	12000	0,0227	0,0260	0,0028	0,0232	833	899	866	850	231	213	185	187	192	192	192
		900	18000	0,0346	0,0403	0,0042	0,0361	806	898	852	819	356	331	277	288	285	297	291
Stützweite 40 cm																		
	$Bg\ I c_2$	600	6000	0,0027	0,0040	0,0013	0,0027	877	915	896	912	118	94	92	91	103	86	94
		1200	12000	0,0057	0,0086	0,0028	0,0058	833	899	866	849	244	192	185	187	203	173	188
		1800	18000	0,0087	0,0137	0,0042	0,0095	806	898	852	777	378	294	277	303	304	264	284
	$Bg\ II c_2$	600	6000	0,0027	0,0045	0,0013	0,0032	877	915	896	770	126	104	92	107	110	95	102
		1200	12000	0,0057	0,0095	0,0028	0,0067	833	899	866	734	260	208	185	217	217	187	202
		1800	18000	0,0087	0,0150	0,0042	0,0108	806	898	852	684	404	320	277	345	326	287	306

Als Verhältnis zwischen mittlerer Durchbiegung und Belastung folgt aus Zahlentafel 88:

Belastung	. . . . .	1	2	3	
Durchbiegung	} Stützweite	120 cm	1	2,06	3,17
		» 80 »	1	2,10	3,26
		» 40 »	1	2,17	3,48
		Mittel . . . . .	1	2,11	3,30

**Zahlentafel 88.**  
Durchbiegungen der Stäbe  $B_{13}$  und  $B_{14}$  aus Gußeisen  $B$ .

Belastung cmkg	Stab $B_{13}$					Stab $B_{14}$					Mittel	
	Versuchsnummer				Mittel	Versuchsnummer				Mittel	$s'$	$s_2$
	$I_1'$	$I_1''$	$I_2'$	$I_2''$		$II_1'$	$II_1''$	$II_2'$	$II_2''$			
Stützweite 120 cm												
6000	244	244	241	243	<b>243</b>	256	252	267	269	<b>261</b>	252	239
12000	508	504	500	504	<b>504</b>	544	528	541	545	<b>539</b>	521	493
18000	770	778	775	774	<b>774</b>	831	815	822	832	<b>825</b>	799	757
Stützweite 80 cm												
6000	118	124	121	123	<b>121</b>	126	123	126	121	<b>124</b>	122	109
12000	249	252	251	255	<b>252</b>	265	261	261	260	<b>262</b>	257	229
18000	387	388	386	394	<b>389</b>	406	408	402	404	<b>405</b>	397	355
Stützweite 40 cm												
6000	41	42	42	39	<b>41</b>	43	44	47	43	<b>44</b>	42	29
12000	88	88	90	83	<b>87</b>	94	98	97	94	<b>96</b>	91	63
18000	137	140	141	133	<b>138</b>	145	151	149	152	<b>149</b>	143	101

Die Mittel stimmen mit denen der Zahlentafel 87 nicht, weil für diese nur die Versuche  $I_2$  und  $II_2$  benutzt wurden; diese bezieht sich überhaupt nur auf die Versuche, bei denen die Spiegel auf der Stegseite saßen.

An Stelle der Beziehung 9:4:1 zwischen Durchbiegung und Spannweite tritt

Belastung	. . . . .	1	2	3	
Durchbiegung	} Stützweite	120 cm	9	9	9
		» 80 »	4,10	4,09	4,22
		» 40 »	1,09	1,15	1,20.

Wir haben hier also die entgegengesetzte Abweichung wie bei allen anderen Versuchen. Bis dahin nahm die Durchbiegung mit der Stützweite verhältnismäßig ab, hier nimmt sie zu. Das ändert sich auch nicht wesentlich, wenn man annimmt, daß sich die Scherkraft nur über den Steg verteilt.

Die Durchbiegung  $s_2$  ist hier wesentlich kleiner als die berechnete, die beobachtete  $s$  aber ist bei großer Spannweite kleiner, bei kleiner größer als  $s'$ .

In den Zahlentafeln 89 und 90 sind die Spiegelablesungen aller Versuche zusammengestellt, in Zahlentafel 91 die daraus abgeleiteten mittleren Dehnungen für beide Stäbe, die Mittelbildung ist ja hier zulässig.

Was schon die Durchbiegungen besagten, wird durch diese Beobachtungen bestätigt: der Stab  $B_{14}$  ist elastischer als  $B_{13}$ .

Weiter aber sieht man, daß die Beanspruchung an der Stegseite größer als an der offenen Seite ist. An dieser sind Zug- und Druckdehnungen ziemlich gleich groß; an der Stegseite aber sind die Zugdehnungen entschieden größer als die Druckdehnungen, und zwar um so mehr, je kleiner die Stütz-

Zahlentafel 89.  
Spiegelablesungen  $a-a_0$  auf der Zugseite der Stäbe  $B_{13}$  und  $14$   
in cm: 100.

Belastung emkg	Spiegel an der offenen Seite							Spiegel an der Stegseite						
	Stab $B_{13}$			Stab $B_{14}$			Mittel	Stab $B_{13}$			Stab $B_{14}$			Mittel
	$I_1'$	$I_1''$	Mittel	$II_1'$	$II_1''$	Mittel		$I_2'$	$I_2''$	Mittel	$II_2'$	$II_2''$	Mittel	
Stützweite 120 cm														
6000	67 67	65 67	66	67 71	67 69	68	<b>67</b>	73 76	72 77	74	81 80	81 79	80	<b>77</b>
12000	140 139	133 137	137	143 149	139 143	143	<b>140</b>	152 155	152 158	154	166 162	166 162	164	<b>159</b>
18000	212 212	202 207	208	219 228	217 224	222	<b>215</b>	234 239	235 239	237	255 250	254 249	252	<b>244</b>
Stützweite 80 cm														
6000	55 56	52 53	54	58 60	57 57	58	<b>56</b>	70 72	69 69	70	73 74	73 73	73	<b>72</b>
12000	114 114	112 110	113	118 121	114 119	118	<b>115</b>	142 146	142 140	142	150 153	151 150	151	<b>147</b>
18000	172 175	170 166	171	180 186	178 185	182	<b>176</b>	217 222	221 217	219	232 236	234 229	231	<b>226</b>
Stützweite 40 cm														
6000	27 30	26 26	27	28 30	30 30	29	<b>28</b>	55 52	48 52	52	53 55	53 52	53	<b>52</b>
12000	53 58	48 52	53	54 58	58 60	57	<b>55</b>	110 106	98 104	104	110 114	107 109	110	<b>107</b>
18000	81 87	73 78	80	81 85	88 91	86	<b>83</b>	166 162	153 160	160	170 175	165 168	169	<b>165</b>

Zahlentafel 90.  
Spiegelablesungen  $a-a_0$  auf der Druckseite der Stäbe  $B_{13}$  und  $14$   
in cm: 100.

Belastung emkg	Spiegel an der offenen Seite							Spiegel an der Stegseite						
	Stab $B_{13}$			Stab $B_{14}$			Mittel	Stab $B_{13}$			Stab $B_{14}$			Mittel
	$I_1'$	$I_1''$	Mittel	$II_1'$	$II_1''$	Mittel		$I_2'$	$I_2''$	Mittel	$II_2'$	$II_2''$	Mittel	
Stützweite 120 cm														
6000	66 68	67 70	67	71 69	69 68	69	<b>68</b>	69 72	70 72	71	76 78	76 79	77	<b>74</b>
12000	138 140	135 142	139	150 148	146 145	147	<b>143</b>	141 147	144 149	145	151 157	156 158	155	<b>150</b>
18000	210 214	209 217	212	229 228	226 224	227	<b>220</b>	218 226	219 225	222	230 240	237 240	237	<b>229</b>
Stützweite 80 cm														
6000	54 57	53 55	55	59 59	59 58	59	<b>57</b>	64 67	66 67	66	67 69	68 70	68	<b>67</b>
12000	116 117	116 115	116	127 124	124 121	124	<b>120</b>	131 133	135 134	133	136 139	137 142	138	<b>136</b>
18000	178 180	179 179	179	194 191	190 184	190	<b>184</b>	197 204	207 205	203	207 214	210 218	212	<b>207</b>
Stützweite 40 cm														
6000	23 22	27 27	25	27 28	27 26	27	<b>26</b>	39 40	38 42	40	41 43	42 44	42	<b>41</b>
12000	50 50	58 54	53	60 56	61 58	59	<b>56</b>	75 79	76 84	78	82 87	81 86	84	<b>81</b>
18000	82 79	90 84	84	93 91	95 89	92	<b>88</b>	114 120	114 125	118	125 130	123 130	127	<b>123</b>

Zahlentafel 91.

Mittlere Dehnungen der Stäbe  $B_{13}$  und  $14$ , Gußeisen  $B \square$  in 1:1000 000.

Belastung cm/kg	120 cm				80 cm				40 cm			
	offene Seite		Stegseite		offene Seite		Stegseite		offene Seite		Stegseite	
	Zug	Druck	Zug	Druck	Zug	Druck	Zug	Druck	Zug	Druck	Zug	Druck
6 000	94	95	106	102	89	91	111	104	74	70	122	100
12 000	197	200	220	209	184	191	227	212	148	150	252	200
18 000	301	307	336	318	283	293	349	324	228	238	392	308
Mittel aus Zug- und Druckdehnungen.												
6 000	94		104		90		107		72		111	
12 000	198		214		187		219		149		226	
18 000	304		327		288		336		233		350	

weite ist. Eigenartig ist auch, daß auf der offenen Seite die Zug- und Druckdehnungen mit abnehmender Stützweite abnehmen, während auf der Stegseite die Zugdehnungen mit abnehmender Stützweite wachsen, die Druckdehnungen ziemlich gleich bleiben. Die Mittel aus Zug- und Druckdehnungen aber nehmen auf der offenen Seite mit abnehmender Stützweite entschieden ab, während sie auf der Stegseite eher zunehmen. Das deutet auf eine Verteilung der Dehnungen über den Querschnitt hin, die bei kleiner Stützweite vom Geradliniengesetze stark abweicht.

Die Spannungen aber auf der also allein maßgebenden Stegseite, für deren Beurteilung ja nur Stab  $B_{13}$  herangezogen werden kann, stimmen bei großer Stützweite mit der berechneten gut überein. Bei kleiner Stützweite aber ist die Spannung auf der Zugseite etwa 10 vH größer als die berechnete, was von Bedeutung sein kann. Wenn man nun beachtet, daß die Spannungen für Stab  $B_{14}$  sicherlich mit zu großem Elastizitätsmodul berechnet sind, so bestätigen seine Ergebnisse die von Stab  $B_{13}$  durchaus.

Gußeisen  $C \top$ . Zahlentafel 92.

Bei den Versuchsreihen I und II wurden die Spiegel nicht nur am Steg und gegenüber in der Mitte des Flansches angesetzt, sondern auch noch oben und unten an letzterem, gemäß Fig. 40 bis 42, S. 34, um zu ermitteln, ob sich die Zugdehnungen an diesen Stellen von denen in der Mitte unterscheiden. Auf diese Weise ist also dieselbe Durchbiegung dreimal bestimmt, in die Zahlentafel 92 ist aber nicht das Mittel aus den drei Beobachtungen, sondern nur die bei Anbringung der Spiegel in der Flanschmitte eingetragen.

Die drei gleichwertigen Durchbiegungen finden sich in der Zahlentafel 93. Sie stimmen gut überein mit Ausnahme des Versuches mit Stab  $B_{15}$  bei der Stützweite 40 cm, doch sind hier die größeren Abweichungen durch die Kleinheit der Durchbiegung leicht erklärlich. Stab  $B_{16}$  ist offenbar weniger elastisch als  $B_{15}$ , so daß die Uebertragung der Elastizitätslinie des letzteren auf den ersteren bedenklich sein dürfte.

Die Durchbiegungen stehen gemäß Zahlentafel 93 zu den Belastungen in dem mittleren Verhältnis

Belastung . . . .	1	2	3	
Stützweite	120 cm	1	2,07	3,14
	80 »	1	2,06	3,19
	40 »	1	2,00	3,39
	Mittel .	1	2,04	3,24

Zahlentafel 92.

Ergebnisse der Biegeversuche mit Gußeisen B 1, berechnet mit Hilfe der Elastizitätslinie des Stabes B 15.

Stabnummer	Versuchsnummer	Belastung $P - P_0$		Kraftmoment $M - M_0$	Durchbiegung $s - s_0$ in cm			Elastizitätsmodul $E$ in t/qcm			Dehnung $\varepsilon - \varepsilon_0$ aus den Spiegeln in 1:1000000		Spannung $k - k_0$ in kg/qcm						
		kg	cmkg		be-rechnet $s'$	be-obachtet $s$	wegen der Scher-kraft $\varepsilon_1$	wegen der Kraft-momentes $\varepsilon_2$	beobachtet	berechnet	Zug-seite	Druck-seite	berechnet	Durchbiegung	Zug	Druck	Zug	Druck	
B 15	B <sub>g</sub> Ia <sub>2</sub>	150	4500	0,0200	0,0202	0,0007	0,0195	848	872	860	885	50	118	46	98	44	96	42	103
		300	9000	0,0411	0,0424	0,0015	0,0409	825	853	839	844	108	241	93	196	90	197	89	206
		450	13500	0,0642	0,0634	0,0024	0,0610	774	838	806	848	163	362	139	294	126	289	126	303
	B <sub>g</sub> IIa <sub>2</sub>	150	4500	0,0200	0,0183	0,0007	0,0176	848	838	860	980	47	103	46	98	40	87	40	90
		300	9000	0,0411	0,0373	0,0015	0,0358	825	853	839	964	98	209	93	196	79	172	81	178
		450	13500	0,0642	0,0570	0,0024	0,0546	774	872	806	948	150	320	139	294	113	258	116	268
B 16	B <sub>g</sub> IIIa <sub>2</sub>	150	4500	0,0200	0,0191	0,0007	0,0184	848	838	793	938	49	109	46	98	42	91	42	95
		300	9000	0,0411	0,0382	0,0015	0,0367	825	838	839	940	98	209	93	196	81	177	81	178
		450	13500	0,0642	0,0581	0,0024	0,0557	774	838	806	929	151	319	139	294	115	259	117	267
B 15	B <sub>g</sub> Ib <sub>2</sub>	225	4500	0,0090	0,0089	0,0007	0,0082	848	872	860	935	49	112	46	98	42	91	42	98
		450	9000	0,0186	0,0181	0,0015	0,0166	825	853	839	925	103	229	93	196	83	180	85	195
		675	13500	0,0286	0,0285	0,0024	0,0261	774	838	806	882	157	351	139	294	122	278	121	294
B 16	B <sub>g</sub> IIb <sub>2</sub>	225	4500	0,0090	0,0084	0,0007	0,0077	848	872	860	996	48	101	46	98	39	85	41	88
		450	9000	0,0186	0,0169	0,0015	0,0154	825	853	839	996	95	203	93	196	77	167	78	173
		675	13500	0,0286	0,0263	0,0024	0,0239	774	838	806	963	147	312	139	294	112	254	114	262
B 15	B <sub>g</sub> Ic <sub>2</sub>	450	4500	0,0023	0,0022	0,0007	0,0015	848	872	860	1277	46	92	46	98	31	66	39	80
		900	9000	0,0046	0,0039	0,0015	0,0024	825	853	839	1595	82	182	93	196	48	104	68	155
		1250	13500	0,0072	0,0070	0,0024	0,0046	774	838	806	1157	130	282	139	294	86	196	101	236
B 16	B <sub>g</sub> IIc <sub>2</sub>	450	4500	0,0023	0,0016	0,0007	0,0009	848	872	860	2125	40	82	46	98	18	40	34	71
		900	9000	0,0046	0,0030	0,0015	0,0015	825	853	839	2558	76	160	93	196	30	65	63	136
		1250	13500	0,0072	0,0056	0,0024	0,0032	774	838	806	1665	118	250	139	294	60	136	91	210
B 16	B <sub>g</sub> IIIc <sub>2</sub>	450	4500	0,0023	0,0022	0,0007	0,0015	848	872	860	1277	42	86	46	98	31	66	36	75
		900	9000	0,0046	0,0034	0,0015	0,0039	825	853	839	983	86	176	93	196	78	169	71	150
		1250	13500	0,0072	0,0081	0,0024	0,0057	774	838	806	935	132	264	139	294	106	243	102	221

Zahlentafel 93.  
Durchbiegungen der Stäbe *B* 15 und 16 in cm: 10 000.

Belastung cmkg	Stab <i>B</i> 15				Stab <i>B</i> 16				Mittel
	Versuchsnummer			Mittel	Versuchsnummer			Mittel	
	<i>Bg</i> Ia <sub>1</sub>	<i>Bg</i> Ia <sub>2</sub>	<i>Bg</i> Ia <sub>3</sub>		<i>Bg</i> IIa <sub>1</sub>	<i>Bg</i> IIa <sub>2</sub>	<i>Bg</i> IIa <sub>3</sub>		
Stützweite 120 cm									
4 500	206	202	202	<b>203</b>	178	183	177	<b>179</b>	191
9 000	414	424	415	<b>418</b>	369	373	379	<b>374</b>	396
13 500	634	634	623	<b>630</b>	566	570	574	<b>570</b>	600
Stützweite 80 cm									
4 500	91	89	84	<b>88</b>	84	84	84	<b>84</b>	86
9 000	192	181	184	<b>186</b>	168	169	170	<b>169</b>	177
13 500	296	285	287	<b>289</b>	256	263	261	<b>260</b>	274
Stützweite 40 cm									
4 500	22	22	16	<b>20</b>	15	16	15	<b>15</b>	18
9 000	42	39	43	<b>41</b>	33	30	31	<b>31</b>	36
13 500	65	70	68	<b>68</b>	54	56	54	<b>55</b>	61

Das Verhältnis der Durchbiegungen zu den Stützweiten bei gleicher Belastung ist:

Belastung . . . . .	1	2	3
Stützweite } 120 cm	9	9	9
	80 »	4,1	4,0
	40 »	0,85	0,82

Die Versuchsreihe III stimmt mit II nicht gut überein, sowohl bei *a* als *c* sind die Durchbiegungen der ersteren größer und nähern sich denen der Versuchsreihe I des Stabes *B* 15, ohne daß ein Grund dafür erkennbar ist. Versuch III *a* liefert die Reihe:

Belastung . . . . .	1	2	3	4,5	6
Durchbiegung . . . . .	1	1,99	3,03	4,59	6,24.

Bei Stab *B* 15, der hierfür allein in Betracht kommen kann, sind die Durchbiegungen *s*<sub>2</sub> stets kleiner als die berechneten *s*'<sub>2</sub>, und bei 40 cm Stützweite sogar viel kleiner. Läßt man die Scherkraft unberücksichtigt, so stimmt die beobachtete Durchbiegung *s* mit der berechneten *s*' fast überein.

Nach Zahlentafel 92 wachsen die Dehnungen mit den Belastungen bei Versuch *Bg* III *a* folgendermaßen:

Belastung . . . . .	1	2	3	4,5	6
Dehnung } Zugseite .	1	2,00	3,08	4,74	6,39
	1	1,92	2,93	4,47	6,05.

Die Dehnungen auf der Zugseite sollen sich dem Geradliniengesetze gemäß verhalten wie 32,2 : 67,8 = 1 : 2,10; sie verhalten sich aber wirklich so:

Belastung . . . . .	1	2	3	4,5	6
Druckdehnung : Zugdehnung	2,22	2,13	2,11	2,10	2,10.

Für die mittleren Dehnungen aus allen Versuchen, Zahlentafel 94, folgt die Zahlentafel 95.

Zahlentafel 94.

Spiegelablesungen  $a-a_0$  auf der Zugseite der Stäbe 15 und 16  
in cm:100.

Belastung emkg	Stab B 15								Stab B 16									
	Versuchsnummer				Mittel	Versuchsnummer			Mittel	Versuchsnummer				Mittel	Versuchsnummer			Mittel
	I a <sub>1</sub>		I a <sub>3</sub>			I a <sub>2</sub>		II a <sub>1</sub>		II a <sub>3</sub>		I a <sub>2</sub>						
	l	r	l	r	l	r	l	r	l	r	l	r	l	r				
Stützweite 120 cm																		
4 500	31	32	33	34	<b>32</b>	33	34	<b>33</b>	31	31	30	31	<b>31</b>	31	32	<b>31</b>		
9 000	64	66	65	68	<b>66</b>	69	71	<b>70</b>	64	64	62	63	<b>63</b>	64	66	<b>65</b>		
13 500	96	102	99	101	<b>99</b>	104	110	<b>107</b>	96	98	94	96	<b>96</b>	97	102	<b>99</b>		
Stützweite 80 cm																		
4 500	27	27	27	27	<b>27</b>	29	30	<b>29</b>	24	28	27	27	<b>26</b>	28	28	<b>28</b>		
9 000	50	56	52	56	<b>53</b>	59	62	<b>60</b>	52	57	52	53	<b>53</b>	57	56	<b>56</b>		
13 500	80	90	75	86	<b>83</b>	89	95	<b>92</b>	76	87	77	82	<b>80</b>	82	90	<b>86</b>		
Stützweite 40 cm																		
4 500	18	18	16	15	<b>17</b>	18	18	<b>18</b>	17	18	17	18	<b>17</b>	17	18	<b>17</b>		
9 000	35	33	34	32	<b>33</b>	34	34	<b>34</b>	32	33	33	33	<b>33</b>	31	35	<b>33</b>		
13 500	52	50	53	48	<b>51</b>	52	50	<b>51</b>	48	51	50	50	<b>50</b>	49	50	<b>49</b>		

Zahlentafel 95.  
Mittlere Dehnungen in 1:1000000.

Belastung	Zugseite			Druckseite		
	1	2	3	1	2	3
Stützweite { 120 cm	49	101	155	110	220	334
80 »	48	99	152	106	216	331
40 »	43	81	127	87	173	265

Zahlentafel 96.  
Wachsen der Dehnungen mit der Belastung.

Belastung	Dehnungen						Verhältnis Zug : Druckdehnung		
	Zugseite			Druckseite			1	2	3
	1	2	3	1	2	3			
Stützweite { 120 cm	1	2,06	3,16	1	2,00	3,04	2,24	2,18	2,15
80 »	1	2,06	3,17	1	2,04	3,12	2,21	2,18	2,18
40 »	1	1,88	2,96	1	1,99	3,05	2,02	2,14	2,09

Für die Beurteilung der Spannungen ist nur der Stab B 15 maßgebend; Zahlentafel 92, S. 81, zeigt, daß die wirklichen Zugspannungen durchweg kleiner sind als die berechneten, die wirklichen Druckspannungen bei großer Spannweite aber größer als diese.

**Zusammenfassung der Ergebnisse der Biegungsversuche mit Gußeisen.**

Die Durchbiegungen wachsen infolge des abnehmenden Elastizitätsmoduls durchweg schneller als die Belastungen. Daß dies nicht gleichmäßiger geschieht, wie die Zahlentafel 97 unter  $s'$  zeigt, ist eine Folge des unregelmäßigen elastischen Verhaltens des Gußeisens. Im ganzen bestätigen die Beobachtungs-

Zahlentafel 97.

Wachsen der Durchbiegungen mit den Belastungen.

Durchbiegung	berechnet $s'$			beobachtet $s_2$									Stabnummer	Zahlentafel
	—			120			80			40				
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3		
Profil 	I	2,07	3,19	I	2,05	3,14	I	2,02	3,22	I	1,81	2,91	B 5	59
» 	I	2,06	3,20	I	2,03	3,10	I	2,12	3,27	I	2,23	3,77	B 7	67
» 	I	2,15	3,32	I	2,04	3,10	I	2,06	3,18	I	2,31	4,00	B 9	73
» 	I	2,08	3,18	I	2,09	3,21	I	2,16	3,37	I	2,15	3,62	B 11	79
» 	I	2,07	3,15	I	2,07	3,20	I	2,06	3,19	I	2,15	3,52	B 13	87
» 	I	2,05	3,20	I	2,10	3,13	I	2,02	3,18	I	1,60	3,07	B 15	92

werte  $s_2$  die berechneten  $s'$ ; aber die Uebereinstimmung könnte besser sein, insbesondere bei kleiner Stützweite; hier sind die Abweichungen zum Teil recht erheblich. Durchschnittlich ist wohl mit abnehmender Stützweite das Wachsen der Durchbiegung stärker, als es der Rechnung nach sein sollte, aber recht deutlich wird das Gesetz nicht. Auch die Verschiedenheit der Profile äußert sich nicht deutlich; bei großer Stützweite ist überhaupt kein Einfluß der Querschnittform wahrnehmbar. Die Versuchsreihe IIIa, bei der die Belastungen weiter getrieben wurden, läßt gemäß Zahlentafel 98 allerdings einen Einfluß der

Zahlentafel 98.

Wachsen der Durchbiegungen mit den Belastungen.

Stützweite 120 cm.

Durchbiegung	beobachtet $s_2$					berechnet $s'$				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
Profil 	I	2,04	3,13	4,29	5,47	I	2,07	3,19	4,28	5,35
» 	I	2,07	3,18	4,34	5,51	I	2,06	3,20	4,27	5,34
» 	I	1,97	3,01	4,15	5,27	I	2,15	3,32	4,42	5,52
» 	I	2,00	3,04	4,19	5,35	I	2,08	3,18	4,24	5,30
» 	I	1,99	3,03	4,07	5,14	I	2,05	3,20	4,33	5,42

Profilform erkennen: Es scheint, als ob bei den massiven Profilen  und  die Durchbiegungen schneller, bei den weniger massiven , **I**, **T** langsamer wüchsen, als nach dem Verlaufe der Elastizitätslinie zu erwarten steht. Doch ist diese eine Versuchsreihe wohl nicht genügend, um aus ihr Folgerungen zu ziehen, die doch nicht in jeder einzelnen Zahl der Tafel ihre Begründung finden, um so weniger, als hier ja Elastizitätszahlen benutzt wurden, die nicht am Stabe selbst gewonnen sind, sondern an dessen Zwillinge.

Aus Zahlentafel 99 ist zu entnehmen, daß die Durchbiegung mit abnehmender Spannweite weit stärker abnimmt, als es der Theorie nach sein sollte, welche das Verhältnis 9:4:1 erwarten läßt. Der Unterschied ist erheblich; die Zahlen aber schwanken sehr und lassen insbesondere einen Einfluß des Profiles nicht erkennen. Am auffälligsten ist die Abweichung des **I**-Profils. Es ist möglich, daß die Abweichung teils eine Folge der Auflagerreibung, teils eine Ueberschätzung des Einflusses der Scherkraft ist, doch ist sie meist zu bedeutend, um auf diese Umstände allein zurückgeführt werden zu können. Da die Auflagerreibung bei der Werder-Maschine lediglich wälzender Bewegung entspricht, so kann sie nicht groß sein. Die Ueberschätzung des Einflusses der Scherkraft aber

**Zahrentafel 99.**  
Abhängigkeit der Durchbiegung von der Stützweite.

Durchbiegung	wegen des Kraftmomentes, $s_2$									insgesamt, $s$									Stabnummer	Zahrentafel
	1			2			3			1			2			3				
	120	80	40	120	80	40	120	80	40	120	80	40	120	80	40	120	80	40		
Profil 	9	4,0	0,87	9	3,9	0,76	9	4,1	0,80	9	4,1	1,05	9	4,0	0,94	9	4,2	0,98	B 5	59
» 	9	3,7	0,59	9	3,8	0,64	9	3,9	0,72	9	3,9	0,95	9	4,0	1,00	9	4,1	1,09	B 7	67
» 	9	3,8	0,55	9	3,8	0,62	9	3,9	0,71	9	4,0	0,82	9	4,0	0,90	9	4,3	0,99	B 9	73
» 	9	3,7	0,57	9	3,8	0,59	9	3,9	0,65	9	4,0	1,04	9	4,1	1,08	9	4,1	1,12	B 11	79
» 	9	4,3	1,06	9	4,3	1,10	9	4,3	1,17	9	4,5	1,49	9	4,5	1,54	9	4,5	1,59	B 13	87
» 	9	3,8	0,69	9	3,6	0,53	9	3,9	0,68	9	4,0	0,98	9	3,8	0,83	9	4,0	0,99	B 15	92

**Zahrentafel 100.**

Verhältnis der beobachteten zur berechneten Durchbiegung,  $s_2 : s'$ .

Stützweite in cm	120			80			40			Stabnummer	Zahrentafel
	1	2	3	1	2	3	1	2	3		
Profil 	0,91	0,90	0,89	0,90	0,88	0,91	0,78	0,69	0,72	B 5	59
» 	1,04	1,02	0,99	0,94	0,98	0,96	0,62	0,66	0,71	B 7	67
» 	0,97	0,92	0,90	0,92	0,88	0,88	0,52	0,57	0,64	B 9	73
» 	0,90	0,91	0,91	0,83	0,86	0,88	0,52	0,54	0,59	B 11	79
» 	0,93	0,92	0,94	0,99	0,99	1,00	1,00	1,02	1,09	B 13	86
« 	0,98	1,00	0,95	0,91	0,89	0,91	0,65	0,52	0,64	B 15	92

wird wahrscheinlich, wenn man die beobachteten gesamten Durchbiegungen  $s$ , deren Verhältnis ebenfalls in die Zahrentafel eingetragen ist, in Betracht zieht.

Aus Zahrentafel 100 ist zu entnehmen, daß die beobachtete Durchbiegung mit der berechneten bei großer Spannweite leidlich übereinstimmt, aber bei kleiner Spannweite viel kleiner ist. Nur das  $\square$ -Profil macht eine unerklärte Ausnahme.

Aus Zahrentafel 101 ist der Anteil zu ersehen, den die Scherkraft an der Durchbiegung hat. Die Art und Weise, wie sie berücksichtigt wurde, ist keineswegs einwandfrei; man sieht aber, daß selbst ein erheblicher Fehler bei 120 cm Stützweite nicht viel ausmachen kann. Dagegen sind die Versuche mit kleiner Stützweite auch aus diesem Grunde sehr vorsichtig zu behandeln. Unerklärt

**Zahrentafel 101.**

Anteile der Scherkraft und des Kraftmomentes an der gesamten Durchbiegung. Verhältnisse  $s_1 : s$  und  $s_2 : s$  in vH.

Stützweite	120						80						40						Stabnummer	Zahrentafel
	1		2		3		1		2		3		1		2		3			
	$\frac{s_1}{s}$	$\frac{s_2}{s}$																		
Profil 	2,2	97,8	2,2	97,8	2,1	97,9	5,0	95,0	4,9	95,1	4,6	95,6	19	81	21	79	20	80	B 5	59
» 	4,3	95,7	4,2	95,8	4,5	95,5	10	90	9,5	90,5	10	90	41	59	38	62	37	63	B 7	67
» 	3,2	96,8	3,3	96,7	3,4	96,6	7,2	92,8	7,5	92,5	7,5	92,5	35	65	33	67	31	69	B 9	73
» 	5,6	94,4	5,8	94,2	5,6	94,4	13	87	13	87	12	88	48	52	48	52	45	55	B 11	79
» 	5,4	94,6	5,6	94,4	5,4	94,6	11	89	11	89	11	89	33	67	33	67	31	69	B 13	87
» 	3,5	96,5	3,5	96,5	3,8	96,2	7,9	92,1	8,3	91,7	8,4	91,6	32	68	38	62	34	66	B 15	92

bleibt die Schwankung der Werte mit dem Profile; sie ist erheblich, aber eine Gesetzmäßigkeit kann ich nicht erkennen.

Bei Zusammenstellung der Zahlentafeln 97 bis 101 sind nur die Versuche mit den Stäben ungerader Nummer benutzt, weil nur an diesen der Elastizitätsmodul unmittelbar bestimmt ist. Für die Berechnung der Dehnungen aus den Spiegelbeobachtungen aber trägt ein Fehler in der Annahme des Elastizitätsmoduls wenig aus, es sind deshalb für die folgenden Zusammenstellungen alle Versuche benutzt und bei der Mittelbildung ist die Anzahl der gleichwertigen berücksichtigt.

Das Wachsen der Dehnungen mit den Belastungen geht aus den Zahlentafeln 102 und 103 hervor. Es scheint nur vom elastischen Verhalten des Baustoffes abhängig zu sein; ein erheblicher Einfluß der Profilform wird nicht erkennbar. Auch verhält sich die Zugseite nicht viel anders als die Druckseite.

Zahlentafel 102.

Wachsen der Dehnungen mit den Belastungen. Versuchsreihe IIIa.

Belastungsstufe <sup>1)</sup>	Zugseite					Druckseite					Seite
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	
Profil 	1	2,09	3,20	4,38	5,61	1	2,08	3,17	4,30	5,47	61
» 	1	2,10	3,23	4,41	5,66	1	2,05	3,10	4,19	5,28	67
» 	1	2,02	3,03	4,19	5,33	1	2,02	3,03	4,16	5,24	71
» 	1	2,01	3,07	4,27	5,52	1	2,02	3,07	4,19	5,33	76
» 	1	2,00	3,08	4,19	5,29	1	1,92	2,93	3,96	5,00	82

<sup>1)</sup> Die Werte unter 4 und 5 sind durch Interpolation gefunden.

Zahlentafel 103.

Wachsen der Dehnungen mit den Belastungen. Versuchsreihen I u. II.

Stützweite	Zugseite									Druckseite									Zahlentafel
	120			80			40			120			80			40			
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	
Profil 	1	2,06	3,16	1	2,01	3,12	1	2,09	3,21	1	2,04	3,12	1	1,97	3,02	1	2,02	3,12	62
» 	1	2,04	3,14	1	2,04	3,14	1	2,07	3,16	1	2,06	3,14	1	2,04	3,10	1	2,06	3,12	71
» 	1	2,06	3,15	1	1,99	3,03	1	2,06	3,20	1	2,05	3,14	1	2,02	3,11	1	2,11	3,33	77
» 	1	2,04	3,14	1	2,09	3,22	1	2,09	3,20	1	2,06	3,15	1	2,11	3,24	1	2,05	3,16	86
» 	1	2,08	3,17	1	2,05	3,15	1	2,07	3,22	1	2,05	3,12	1	2,04	3,12	1	2,00	3,08	91
» 	1	2,06	3,16	1	2,06	3,17	1	1,88	2,96	1	2,00	3,04	1	2,04	3,12	1	1,99	3,05	95

Da die Dehnungen sowohl stärker als die Belastungen, wie auch stärker als die Spannungen zunehmen, so wird sich das Verhältnis zwischen Spannung und Belastung weniger ändern. Zahlentafel 104 zeigt, daß die Spannungen mit wachsender Belastung im allgemeinen abnehmen. Zieht man aber die weitergehende Versuchsreihe III a mit Zahlentafel 105 heran, was ja wegen der Uebertragung des Elastizitätsmoduls nicht ohne weiteres zulässig ist, so erkennt man das Verhalten deutlicher: Anfangs nimmt die Spannung mit wachsender Belastung ab, später aber wachsen die Spannungen schneller als die Belastungen. Da die Ansätze zu diesem Verhalten bereits in Zahlentafel 104 erkennbar sind, so darf man für diese Erkenntnis auch Zahlentafel 105 benutzen, wenngleich die absoluten Elastizitätsziffern für sie nicht ganz zutreffend sind.

**Zahlfentafel 104.**  
Aenderung der Spannungen mit den Belastungen. Versuchsreihe I.

Stützweite	Zugseite									Druckseite									Stab	Zahlfentafel
	120			80			40			120			80			40				
	I	2	3	I	2	3	I	2	3	I	2	3	I	2	3	I	2	3		
Profil □	I	1,94	2,87	I	1,90	2,86	I	1,93	2,89	I	1,98	2,92	I	1,89	2,85	I	1,92	2,88	B 5	59
» □	I	2,01	2,96	I	2,01	2,96	I	2,03	2,98	I	2,00	2,91	I	1,99	2,87	I	2,00	2,87	B 7	67
» ⊖	I	1,94	2,80	I	1,87	2,68	I	1,97	2,86	I	1,89	2,68	I	1,87	2,86	I	1,89	2,99	B 9	73
» ⊕	I	1,97	2,92	I	2,02	2,98	I	1,98	2,95	I	1,99	3,05	I	2,00	3,06	I	2,04	3,13	B 11	78
» I	I	1,99	2,95	I	1,95	2,91	I	1,98	2,96	I	2,03	3,10	I	2,00	3,03	I	2,01	3,07	B 13	87
» T	I	2,12	3,00	I	2,03	2,88	I	1,75	2,59	I	2,00	2,94	I	2,00	3,00	I	1,94	2,96	B 15	92

**Zahlfentafel 105.**  
Aenderung der Spannung mit der Belastung.  
(Versuchsreihe Bg IIIa.)

Belastung	Zugseite					Druckseite					Mittel				
	I	2	3	4	5	I	2	3	4	5	I	2	3	4	5
Profil □	I	1,99	2,93	3,96	5,06	I	2,05	3,03	4,12	5,22	I	2,02	2,98	4,04	5,14
» □	I	2,05	3,04	4,15	5,35	I	1,98	2,87	3,84	4,84	I	2,01	2,94	4,00	5,07
» ⊖	I	1,91	2,69	3,72	4,72	I	1,86	2,79	3,83	4,83	I	1,89	2,74	3,77	4,78
» ⊕	I	1,93	2,84	3,95	5,10	I	1,96	2,98	4,05	5,15	I	1,95	2,91	4,00	5,12
» I	I	1,93	2,79	3,70	4,63	I	1,87	2,81	3,80	4,80	—	—	—	—	—

**Zahlfentafel 106.**  
Verhältnis zwischen beobachteter und berechneter Spannung  
in vH der letzteren.

Profil	□	⊖	⊕	I	⊔	T									
Stabnummer	B 5	B 7	B 9	B 11	B 13	B 15									
Belastungsstufe	I	2	3	I	2	3	I	2	3	I	2	3	I	2	3

Zugseite																			
Stützweite in cm	120	0,94	0,91	0,90	1,02	1,02	1,00	1,00	0,96	0,93	0,96	0,94	0,93	0,97	0,96	0,95	0,91	0,96	0,91
	80	0,94	0,89	0,89	1,02	1,02	1,00	1,06	0,98	0,94	0,92	0,93	0,91	1,02	0,99	0,99	0,91	0,91	0,87
	40	0,85	0,82	0,82	1,02	1,03	1,01	1,09	1,07	1,04	0,90	0,89	0,89	1,12	1,10	1,10	0,85	0,73	0,73
Druckseite																			
Stützweite in cm	120	1,05	1,03	1,02	1,14	1,12	1,10	0,99	0,93	0,88	0,98	0,97	0,99	0,97	0,98	1,00	1,05	1,05	1,03
	80	1,07	1,01	1,02	1,12	1,10	1,07	0,96	0,89	0,91	0,94	0,94	0,96	1,02	1,01	1,03	1,00	1,00	1,00
	40	0,94	0,90	0,91	0,89	0,89	0,85	0,61	0,57	0,60	0,78	0,79	0,81	0,93	0,94	0,95	0,82	0,79	0,80
Mittel für beide Seiten																			
Stützweite in cm	120	0,99	0,97	0,96	1,07	1,07	1,05	0,99	0,94	0,90	0,97	0,95	0,96	0,97	0,97	0,97	—	—	—
	80	1,00	0,95	0,96	1,06	1,06	1,04	1,01	0,94	0,93	0,93	0,94	0,94	1,02	1,00	1,01	—	—	—
	40	0,89	0,86	0,86	0,96	0,95	0,93	0,85	0,82	0,82	0,83	0,84	0,85	1,02	1,02	1,03	—	—	—

Aus Zahlfentafel 106 sieht man, daß die Spannungen auf der Zugseite bei □, I, T mit der Stützweite abnehmen, bei ⊖ sind sie unabhängig von ihr, bei ⊕ und ⊔ nehmen sie zu. Die Druckspannungen nehmen immer ab.

Die Spannung auf der Druckseite ist bei großer Spannweite bei □, ⊖, I, ⊔, T größer als auf der Zugseite, nur ⊕ zeigt das entgegengesetzte Verhalten. Bei kleiner Spannweite aber ist es bei ⊖, I, ⊔ gerade umgekehrt. Zur Erklä-

nung dieser beachtenswerten Erscheinung reichen die Versuche leider nicht aus. Von praktischer Bedeutung ist besonders, daß bei  $\odot$  und  $\square$  die Zugfaser bei kleiner Stützweite bis 10 vH stärker beansprucht ist, als es der Rechnung nach sein sollte. Höchst auffällig ist die kleine Druckspannung des  $\odot$ -Profiles bei geringer Stützweite. Es ist zu vermuten, daß bei diesem die Verteilung der Spannungen über den Querschnitt beträchtlich von dem angenommenem Geradenliniengesetz der Dehnungen abweicht.

Die Versuchsreihe III a kann zur Bestimmung der Spannungen nicht mit gleicher Sicherheit benutzt werden, weil der Elastizitätsmodul von Reihe I a übertragen werden muß. Da sie aber in den Belastungen weiter geht, so sind die Spannungen nichtsdestoweniger ausgerechnet und in Zahlentafel 107 zusammengestellt. Sind also die absoluten Werte derselben auch anfechtbar, so geht doch

Zahlentafel 107.  
Verhältnis zwischen beobachteter und berechneter Spannung.  
Versuchsreihe Bg III a, 120 cm Stützweite.

Profil	$\square$			$\odot$			$\odot$			I			T			
	B 6			B 8			B 10			B 12			B 16			
Stabnummer	Z	D	Mittel	Z	D	Mittel	Z	D	Mittel	Z	D	Mittel	Z	D	Mittel	
Belastungs- stufe	1	0,93	1,03	0,98	1,34	1,47	1,40	1,15	1,11	1,13	1,09	1,08	1,08	0,91	0,97	—
	2	0,92	1,05	0,98	1,37	1,44	1,40	1,10	1,02	1,06	1,05	1,06	1,05	0,87	0,91	—
	3	0,90	1,03	0,97	1,35	1,40	1,37	1,03	1,02	1,02	1,03	1,07	1,05	0,84	0,91	—
	4	0,93	1,06	0,99	1,38	1,40	1,39	1,07	1,06	1,06	1,09	1,10	1,09	0,83	0,93	—
	5	0,96	1,08	1,02	1,43	1,41	1,42	1,09	1,07	1,08	1,14	1,12	1,13	0,84	0,94	—

deutlich aus ihr hervor, daß auch bei stärkerer, aber immerhin noch weit von der Bruchspannung entfernter Belastung die theoretische Spannung keineswegs soviel größer ist, als das Verhältnis  $B:Z$  bedingt, daß sich vielmehr das Verhältnis mit der Belastung wenig und in unregelmäßiger Weise ändert.

### Ergänzende Versuche.

Die Bruchversuche.

Sämtliche Gußeisenstäbe sind in der Mitte gebrochen und zeigen gesunde Bruchflächen. Die Festigkeiten sind in Zahlentafel 108 eingetragen.

Zahlentafel 108.  
Vergleich der Bruch- und der Zugfestigkeit.

Gußeisensorte . .	A		B		C
Profil . . . .	$\square$	$\odot$	$\odot$	I	T
Bruchfestigkeit .	1850	1840	1710	1930	1920
Zugfestigkeit <sup>1)</sup> .	1100	1360	1360	1360	900
Verhältnis . . .	1,68	1,35	1,26	1,42	2,14

<sup>1)</sup> Nach Zahlentafel 24, S. 26.

Die von v. Bach gefundene Erscheinung, daß die Bruchfestigkeit immer erheblich größer als die Zugfestigkeit ist, ist damit bestätigt. Die weitere Beobachtung aber, daß das Verhältnis beider Festigkeiten um so größer ist, je mehr sich die Querschnittsfläche ihrem Mittelpunkte nähert, konnte nicht ge-

macht werden, obgleich die Versuche mit *A* und *B* ihr auch nicht gerade widersprechen. Aber das Verhalten von Gußeisen *C* ist sehr sonderbar. Es liegt hier wohl wieder eine Bestätigung dafür vor, daß man aus besonders gegessenen Probestäben nicht sicher schließen kann.

Uebrigens ist diese Beziehung zwischen Zug- und Bruchfestigkeit keineswegs eine Eigentümlichkeit des Gußeisens; dieselbe Eigenschaft äußert sich bei zähen Baustoffen, nur anders. Diese sind ja bei den in der Maschine möglichen Durchbiegungen überhaupt nicht zum Bruche zu bringen; aber schon, wenn erhebliche bleibende Formänderungen auftreten, berechnet man nach der Formel  $M = kJ:e$  Spannungen, welche höher als die Zugfestigkeit sind.

So wurde Mannesmannrohr bei 120 cm Stützweite belastet, bis es sich bei 3000 kg um 67 mm durchbog, was, nebenher bemerkt, eine starke Veränderung der Querschnittsform zur Folge hatte. Dieser Belastung würde, wenn die Theorie bis zu ihr richtig wäre, eine Spannung von  $3000 \cdot 30 : 14,9 = 6040$  kg/qcm in der äußersten Faser entsprechen. Von einer Zerstörung dieser ist aber weder auf der Zug- noch auf der Druckseite etwas wahrzunehmen, obwohl die Zugfestigkeit des Mannesmannrohres nur 5660 kg/qcm ist.

Ebenso wurde der Stahlstab bei 120 cm Stützweite mit 40000 kg durchgebogen; nach der Entlastung zeigte sich die bleibende Durchbiegung 77,8 mm. Es müßte also in dem belasteten Stabe eine Spannung von mehr als  $40000 \cdot 30 : 151 = 7950$  kg/qcm geherrscht haben, während der Zugmodul nur 6130 kg/qcm ist.

Flußeisen zeigte bei 120 cm Stützweite und 20000 kg Belastung 32 mm Durchbiegung, von der 27,5 mm blieben; es müßte im belasteten Zustande die Spannung  $20000 \cdot 30 : 150 = 4000$  kg/qcm aufgetreten sein — der Zugmodul ist 3905 kg/qcm.

Den genannten Belastungen müßten der Theorie nach die Durchbiegungen

$$\text{für Stahl } \frac{400000 \cdot 120^3}{48 \cdot 2140000 \cdot 725} = 0,93 \text{ cm statt mehr als } 7,78 \text{ cm,}$$

$$\text{für Flußeisen } \frac{20000 \cdot 120^3}{48 \cdot 2080000 \cdot 741} = 0,47 \text{ cm statt } 3,2 \text{ cm, federnd } 0,45 \text{ cm,}$$

$$\text{für Mannesmannrohr } \frac{3000 \cdot 120^3}{48 \cdot 2210000 \cdot 45,2} = 1,08 \text{ cm statt } 6,7 \text{ cm}$$

entsprechen.

Auch bei zähen Baustoffen muß also nicht nur der Elastizitätsmodul mit wachsender Belastung stark abnehmen, sondern auch eine ganz andere Spannungsverteilung im Querschnitte stattfinden, gerade so, wie bei Gußeisen.

Aus Bruchversuchen können also keinerlei Folgerungen auf das elastische Verhalten der Stoffe oder über die Spannungsverteilung bei üblichen Beanspruchungen gezogen werden.

#### Die Gestalt der elastischen Linie.

Um die wirkliche Gestalt der elastischen Linie mit der theoretischen, die den Rechnungen zugrunde gelegt ist, vergleichen zu können, wurden an dem Gußeisenstab *B* 6 aus Gußeisen *A* die vier Spiegel in gleichen Abständen von der Mitte auf der Zugseite und auf der Druckseite angelötet und aus den Ablesungen die Winkel  $\alpha - \alpha_0 = \frac{a - a_0}{2b}$  bestimmt. Diese Versuche wurden bei der Spannweite 120 cm und für drei Querschnittspaare des Stabes vorgenommen. Das Ergebnis ist in der Zahlentafel 109 und durch die Fig. 48 dargestellt; bei



mit  $\alpha = 21$  cm statt 39 cm,  $z = 13,5$  cm statt 46,5 cm zu rechnen und zu beachten, daß wegen der Umkehrung der gegenseitigen Lage von Federschneide und Spiegel das zweite Glied in Gl. (VII) negativ wird, so daß die Formeln zur Berechnung der Dehnung lauten:

$$\alpha - \alpha_0 = 12 \frac{l^2 - x^2}{l^3} (s - s_0)$$

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = \frac{1}{1000 c z} \frac{l}{z} \left\{ (\alpha - \alpha_0) - 440 (\alpha - \alpha_0) \right\}.$$

Der in Zahlentafel 110 durchgeführte Vergleich zeigt eine so schöne Uebereinstimmung der Dehnungen, wie nur irgend erwartet werden kann.

Zahlentafel 110.  
Vergleich der Versuchsreihen Bg I u. II mit Bg IV.  
Gußeisen A mit den Stäben B 5 und B 6, Stützweite 120 cm.

Belastung cm/kg	beobachtete Durchbiegung $s$ in cm		Dehnung in 1 : 1000 000 aus den Spiegelablesungen			
	Versuchsreihe		Zugseite		Druckseite	
	Bg I,	Bg IV	Bg I	Bg IV	Bg I	Bg IV
	Stab B 5.					
15 000	0,0223	0,0223	94	92	93	89
39 000	0,0458	0,0461	190	187	186	184
51 000	0,0700	0,0717	291	288	284	282
	Stab B 6.					
	Bg II	Bg IV	Bg II	Bg IV	Bg II	Bg IV
15 000	0,0217	0,0213	94	95	93	92
39 000	0,0457	0,0453	195	190	190	184
51 000	0,0705	0,0701	298	285	290	279

### Andere Untersuchungen mit gebogenen gußeisernen Stäben.

Schüle hat ein Verfahren angegeben, wie man mit Hilfe der Elastizitätslinie  $\sigma = f(\varepsilon)$  das zu erwartende Bruchmoment aus der Zugfestigkeit bestimmen kann<sup>1)</sup>.

Ueber den ganzen Querschnitt eines gebogenen Stabes gilt die Beziehung

$$\int \sigma df = 0,$$

welche für rechteckigen Querschnitt

$$\int \sigma dy = 0$$

lautet. Nach der Annahme der eben bleibenden Querschnitte ist die Dehnung einer Faser im Abstände  $y$  von der Nullachse

$$\varepsilon = Cy,$$

also gilt auch

$$\int \sigma d\varepsilon = 0.$$

<sup>1)</sup> Bach, Elastizität und Festigkeit 5. Aufl. S. 260.

Macht man also in Fig. 50 die Ordinate  $A'B' = \sigma_1 = Z$  der Zugfestigkeit, so ist  $\epsilon_1$  die zu  $Z$  gehörige Dehnung, und die Fläche  $A'SB'$  stellt das Integral

$$\int_0^{\epsilon_1} \sigma d\epsilon \text{ dar, wo } \epsilon_1 \text{ die Entfernung der äußersten Zugfaser von der Nullachse ist.}$$

Macht man nun die Fläche  $A''SB'' = A'SB'$ , so stellt  $A''SB''$  das Integral  $\int_0^{-\epsilon_2} \sigma d\epsilon$

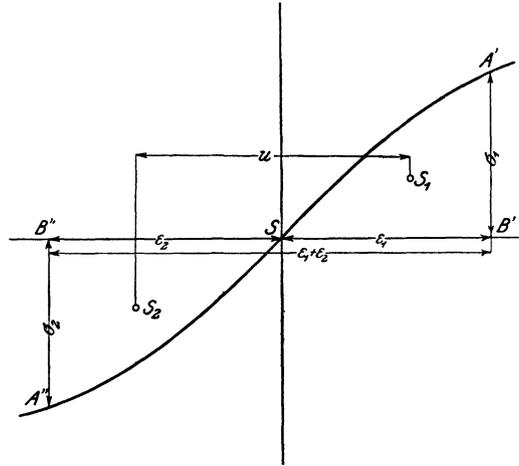


Fig. 50.

dar, welches sich auf die Druckseite des Querschnittes bezieht, und die ganze Fläche  $A'B'SB''A''$  ist das ganze Integral  $\int_{-\epsilon_2}^{+\epsilon_1} \sigma d\epsilon$ .

Da nun andererseits

$$M = \int \sigma y df$$

das äußere Kraftmoment ist, so muß für rechteckigen Querschnitt von der Breite  $b$

$$M = \frac{b}{C^2} \int \sigma \epsilon d\epsilon = b \left( \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1} \right)^2 \int \sigma \epsilon d\epsilon = b \left( \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1} \right)^2 F u$$

sein. Es wird also durch das statische Moment der genannten Fläche in bezug auf die  $\sigma$ -Achse dargestellt. Ist der Maßstab der Spannungen  $1 \text{ cm} = m \text{ kg/qcm}$  und der der Dehnungen  $1 \text{ cm} = n$ , so bedeutet  $1 \text{ qcm}$  der Fläche  $mn \text{ kg/qcm}$ ,  $1 \text{ cm}$  der Länge  $u$  aber die Dehnung  $n$ . Demnach ist

$$M = \frac{b \epsilon_1^2 m n^2 F u}{\epsilon}$$

in mkg das der Zugfestigkeit nach zu erwartende Bruchmoment.

Bach fand nun bei seinen Eingangs erwähnten Versuchen, daß das so berechnete Bruchmoment etwa gleich dem beobachteten war, und durfte also zwanglos schließen, daß die scheinbar größere Bruchfestigkeit des Gußeisens nur eine Folge der falschen Annahme eines unveränderlichen Elastizitätsmoduls sei.

Ähnliche Versuche hat nun neuerdings Pinegin angestellt<sup>1)</sup>. Er fand zwar die Bachsche Beziehung

$$B = \alpha \sqrt{\frac{e}{z_0}} Z$$

<sup>1)</sup> Mitteilungen über Forschungsarbeiten Heft 48; Auszug Z. d. V. d. I. 1906 S. 2029.

(Seite 1) bestätigt, nicht aber die Uebereinstimmung zwischen dem berechneten und dem beobachteten Bruchmoment. Das letztere war vielmehr stets beträchtlich größer. Das bedeutet also, daß der Unterschied zwischen Zug- und scheinbarer Bruchfestigkeit nicht allein auf den Umstand, daß der Elastizitätsmodul des Gußeisens keine Konstante ist, zurückgeführt werden kann.

Pinegin machte seine Versuche nicht allein an rechteckigen, sondern auch an Stäben I-förmigen Querschnittes. Auch auf solche ist das Schülesche Verfahren anwendbar. Denn ist die Breite  $z$  des Querschnittes veränderlich, in der äußersten Faser aber  $b$ , so kann man  $z = \alpha b$  setzen und

$$\int \sigma df = \frac{b}{c} \int \sigma \alpha d\varepsilon = 0; \quad M = \frac{b}{c^2} \int \sigma \alpha \varepsilon d\varepsilon$$

schreiben. Man braucht dann die Kurve  $\sigma = f(\varepsilon)$  nur so umzuzeichnen, daß man anstelle von  $\sigma$  den Wert  $\alpha\sigma$  setzt. Allerdings ist die Durchführung des Verfahrens weit mühsamer; denn da man von vornherein die Lage der Nullachse nicht kennt, so muß man zunächst  $A''B''$  in Fig. 50 beliebig annehmen und gemäß Fig. 51 so lange verschieben, bis man Gleichheit der Flächen  $A'SB'$  und  $A''S B''$  erhält.

Eugen Meyer hat gezeigt, wie man die Durchbiegung mit Rücksicht auf die Veränderlichkeit des Elastizitätsmoduls, gegeben durch die elastische Linie, berechnen kann<sup>1)</sup>:

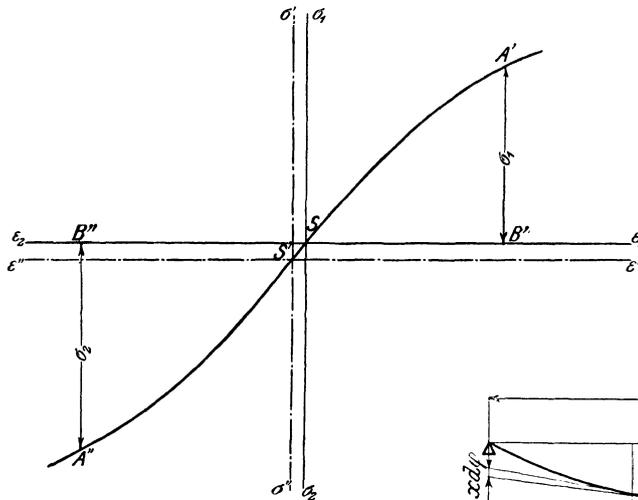


Fig. 51.

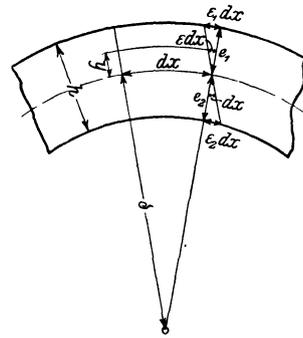


Fig. 52.

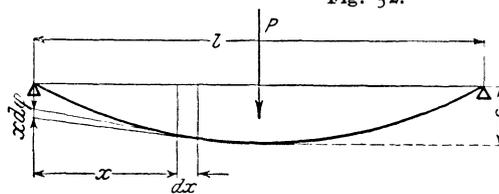


Fig. 53.

Zwei benachbarte Querschnitte, Fig. 52, die den Abstand  $dx$  haben, neigen sich infolge der Biegung um  $d\eta = \varepsilon_1 dx : e_1$ , die Durchbiegung in der Mitte des Stabes ist also gemäß Fig. 53

$$= \int_0^{\frac{l}{2}} x d\eta = \int_0^{\frac{l}{2}} x \frac{\varepsilon_1}{e_1} dx.$$

Da nun wegen  $\varepsilon_1 : \varepsilon_2 = e_1 : e_2 \dots \frac{\varepsilon_1}{e_1} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{e_1 + e_2} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{h}$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \frac{y}{e_1} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{h} y$$

<sup>1)</sup> Z. d. V. d. I. 1908 S. 67.

ist, so lautet die Bedingung, daß der resultierende Elastizitätswiderstand null sein muß, für ein Rechteck von der Höhe  $h$  und der Breite  $b$

$$\int \sigma df = \frac{bh}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \int_{-\varepsilon_2}^{+\varepsilon_1} \sigma d\varepsilon = 0,$$

d. h. also, es muß in Fig. 50 die Fläche

$$A' S B' = A'' S B''$$

sein. Geht man also von der berechneten Zugspannung  $\sigma_1 = M : \frac{J}{e}$  aus, so kann man mit Hilfe der Elastizitätslinie, indem man die beiden Flächen gleich macht,  $\sigma_2$  bestimmen. Dann ist das Moment der äußeren Kräfte

$$M = \int \sigma y df = \frac{bh^2}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2} \int_{-\varepsilon_2}^{+\varepsilon_1} \sigma \varepsilon d\varepsilon = 1/2 P x,$$

also

$$x = \frac{2}{P} \frac{bh^2}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2} \int \sigma \varepsilon d\varepsilon$$

$$s = \frac{1}{h} \int_0^{\frac{l}{2}} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) x dx.$$

Das Integral ermittelt man bequem zeichnerisch als Fläche  $F_s$  gemäß Fig. 54 und erhält damit

$$s = \frac{F_s}{h}.$$

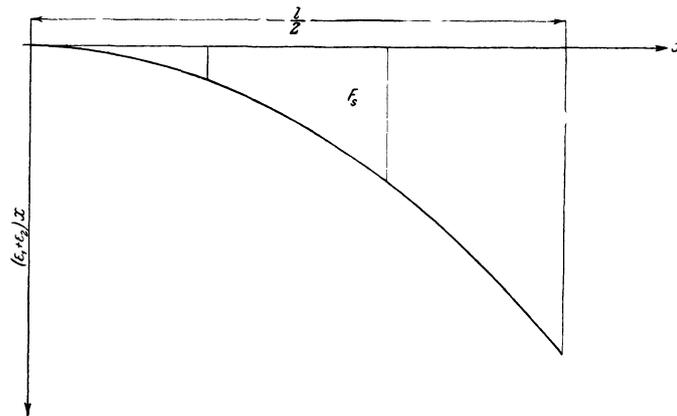


Fig. 54.

Hat der Stab keinen rechteckigen Querschnitt, sondern besitzt dieser die veränderliche Breite  $z$  so ist, wie vorhin erläutert, zu verfahren. Anstelle des Integrals  $\int \sigma d\varepsilon$  tritt  $\int \sigma \frac{z}{b} d\varepsilon$ , also anstelle der Elastizitätslinie  $A' A''$  der Fig. 50 eine andere Kurve, deren Ordinaten die mit  $z : b$  multiplizierten Ordinaten der ersteren sind. Die Breite  $b$  kann dabei ganz beliebig gewählt werden, nur muß man sie nicht gleich null setzen; am besten wird man  $b$  gleich dem größten Werte  $z$  machen oder z. B. bei einem Kreisringe gleich dessen äußeren Durchmesser. Aber das Verfahren wird jetzt allerdings außerordentlich mühsam, weil bei der Bestimmung jedes einzelnen  $x$ -Wertes das vorhin erwähnte Probieren wiederholt werden muß. Es ist deswegen kaum anwendbar.

Der Versuch *BgIa* mit Stab *B 5*, Zahlentafel 59, S. 59, ist in dieser Weise behandelt. Bei Benutzung der Elastizitätslinie in Fig. 34, S. 31, ist zu beachten, daß die Anfangsbelastung  $P_0 = 500$  kg betragen hat und also die drei Belastungsstufen sich auf die Gebiete 900 bis 500, 1300 bis 500 und 1700 bis 500 kg beziehen. Da die Spannungseinheit in dieser Figur in der ursprünglichen Zeichnung  $1 \text{ kg/qcm} = 0,04 \text{ cm}$  und die Dehnungseinheit  $= 0,5 \text{ cm}$  genommen wurde, so ist die Einheit des Integrals  $\int \sigma d\varepsilon$  also  $1 \text{ kg/qcm} = 0,02 \text{ qcm}$  oder  $1 \text{ qcm}$  der Fläche

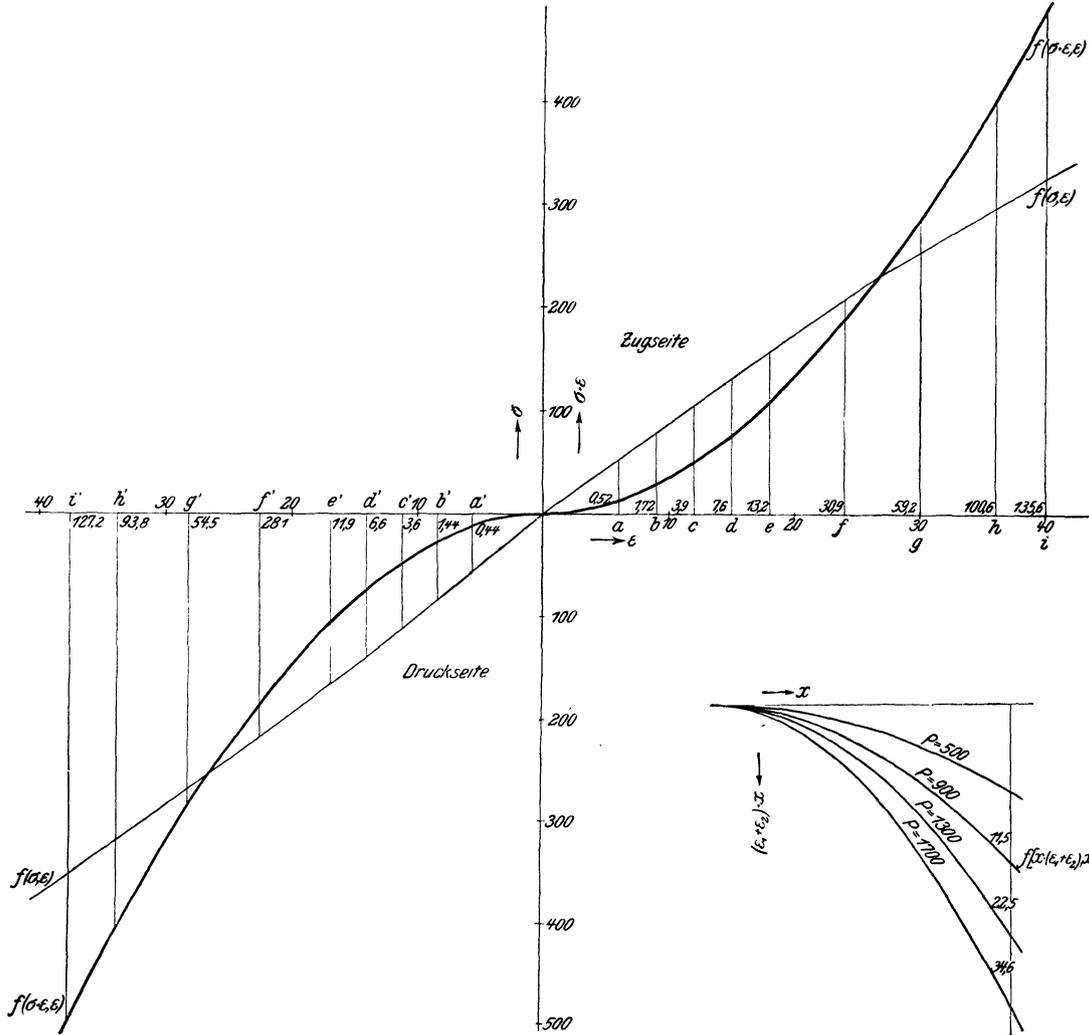


Fig. 55.

Fig. 56.

$= 50$  Einheiten des Produktes  $\sigma \varepsilon$ . Dieses Produkt ist in Fig. 55 als Funktion von  $\varepsilon$  durch die stark ausgezogene Linie dargestellt, und zwar sind  $10000$  Einheiten  $= 15 \text{ cm}$  gemacht, so daß also  $1 \text{ cm} = 667$  Einheiten ist.  $1 \text{ qcm}$  der Fläche unter der letztgenannten Linie bedeutet also  $1333$  Einheiten des Integrals  $\int \sigma \varepsilon d\varepsilon$ . Mißt man nun das Integral in  $\text{qcm}$  und  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$  in  $\text{cm}$ , so ist

$$x = \frac{2 \cdot 9,46^2 \cdot 1333}{4 P} \frac{\int \sigma \varepsilon d\varepsilon}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2} = \frac{564 400}{P} \frac{\int \sigma \varepsilon d\varepsilon}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2}.$$

Damit ist nun Fig. 56 gezeichnet, und zwar ist 0,2 cm als Einheit von  $x$ , 0,0025 cm als Einheit von  $x(\epsilon_1 + \epsilon_2)$  genommen. Demnach ist die Einheit des Produktes 0,0005 qem, oder 1 qem der Fläche stellt 2000 Einheiten des Produktes dar. Das erhaltene Ergebnis für die Durchbiegung  $s$  ist dann noch durch 100000 zu teilen, weil die Dehnungen in Fig. 55 in diesem Maßstabe eingetragen sind. Bei der Planimetrierung ist  $s_0$  gleich abgezogen. Die bei der Untersuchung gebrauchten Zahlenwerte sind in Zahlentafel 111 und 112 eingetragen.

Zahlentafel 111.  
Verzeichnung der Linie  $\sigma\epsilon = f(\epsilon)$ , Fig. 54.

Punkt	$\epsilon_1$ in	$\sigma_1$	$\sigma_1 \epsilon_1$	$\epsilon_2$ in	$\sigma_2$	$\sigma_2 \epsilon_2$	$\epsilon_1 + \epsilon_2$	$\epsilon_1 + \epsilon_2$ in
	1:100000	kg/qem	em	1:100000	kg/qem	em	em	1:100000
a	6	54	0,49	5,6	54	0,45	5,8	11,6
b	9	80	1,08	8,4	85	1,07	8,7	17,4
c	12	105	1,89	11,2	112	1,89	11,6	23,2
d	15	133	2,99	14,0	143	3,00	14,5	29,0
e	18	160	4,33	16,9	168	4,26	17,4	34,8
f	24	208	7,50	22,5	220	7,48	23,3	46,6
g	30	255	11,5	28,2	270	11,4	29,1	58,2
h	36	297	16,0	33,8	320	16,3	34,9	69,8
i	40	327	19,6	37,6	353	19,9	38,8	77,6

Zahlentafel 112.  
Verzeichnung der Linie  $x(\epsilon_1 + \epsilon_2) = f(x)$ , Fig. 55.

Punkt	$\epsilon_1 + \epsilon_2$ em	$\epsilon_1 + \epsilon_2$ in 1:100000	$\int_{-\epsilon_2}^{+\epsilon_1} \sigma\epsilon d\epsilon$ qem <sup>1)</sup>	$P = 1700$ kg		$P = 1300$ kg		$P = 900$ kg		$P = 500$ kg	
				$x$	$x(\epsilon_1 + \epsilon_2)$	$x$	$x(\epsilon_1 + \epsilon_2)$	$x$	$x(\epsilon_1 + \epsilon_2)$	$x$	$x(\epsilon_1 + \epsilon_2)$
				em	em	em	em	em	em		
a	5,8	11,6	0,96	9,5	110	12,4	144	17,9	208	32,3	375
b	8,7	17,4	3,16	13,9	241	18,2	316	26,3	457	47,2	820
c	11,6	23,2	7,50	18,5	429	24,2	562	34,9	810	62,8	1460
d	14,5	29,0	14,2	22,4	649	29,3	850	42,4	1230		
e	17,4	34,8	25,1	27,5	956	36,0	1250	51,9	1810		
f	23,3	46,6	59,0	36,1	1690	47,3	2210	68,2	3180		
g	29,1	58,2	114	44,6	2600	58,2	3380				
h	34,9	69,8	194	53,0	3700	69,4	4840				
i	38,8	77,6	263	58,0	4500						

<sup>1)</sup> s. Fig. 55: 0,44 + 0,52 = 0,96 usw.

In Zahlentafel 113 sind die Schlüßergebnisse mit den in Zahlentafel 59, S. 59, festgelegten verglichen; die Abweichung ist nicht erheblich; bei größerer Belastung stimmen die Werte etwas besser mit den beobachteten als die nach Gl. (II) berechneten.

Zahlentafel 113.

Durchbiegung des Stabes B 5 infolge des Kraftmomentes in cm	Belastung $P - P_0$ in kg		
	400	800	1200
nach Fig. 55 . . . . .	0,0243	0,0472	0,0732
nach Formel II (Zahlentafel 59) .	0,0239	0,0495	0,0765
beobachtet (Zahlentafel 59) . . .	0,0218	0,0448	0,0685

Erst nachdem die Versuche, welche dieser Arbeit zugrunde liegen, beendet waren, wurde die Arbeit von Herbert, »Ueber den Zusammenhang der Biegungeelastizität des Gußeisens mit seiner Zug- und Druckelastizität« veröffentlicht<sup>1)</sup>. Herbert hat, wie ich, die Dehnungen der äußersten Fasern des gebogenen Stabes mit Spiegeln gemessen; seine Versuchsanordnung ist aber besser als die meinige, weil er die Scherkraft, welche die Erkenntnis sehr erschwert, beseitigte, indem er statt des an den Enden gestützten und in der Mitte belasteten Stabes einen solchen anwendete, der durch zwei Kräfte symmetrisch zur Mitte beansprucht wird. Das zwischen den Angriffspunkten der Kräfte liegende Stabstück ist dann auf reine Biegung beansprucht, und zwar durch ein stets gleiches Biegemoment. Den Nachteil seiner Einrichtung, daß sich der ganze Stab etwas dehnen kann, hat Herbert auf eine sinnreiche Weise unschädlich gemacht, indem er mit dem Stab einen festen Spiegel verband, der dem beweglichen parallel gegenüberstand und auf den das Fernrohr gerichtet wurde. Nicht berücksichtigt ist bei seinen Versuchen die Schiefstellung der Spiegel infolge der Krümmung der elastischen Linie. Falls etwa die Spiegel in der Stabmitte angebracht gewesen sein sollten, findet ja auch solche Schiefstellung nicht statt; dann aber ist nicht die Dehnung in der Stabmitte gemessen, sondern die in der Mitte der Meßfederlänge, und es fehlt die Reduktion. Lag aber Mitte Meßfeder neben Mitte Stab, so hätte die Schiefstellung der Spiegel eine Rolle gespielt. Aber sowohl der eine wie der andere Umstand machen selbstverständlich viel weniger aus als bei meinen Versuchen, bei denen des zentrischen Kraftangriffes wegen die Mitte Meßfeder meist um 10 cm aus der Stabmitte lag.

Herbert zeigt nun, wie man aus den beobachteten Dehnungen auf die Spannungen schließen kann, ohne die Dehnungslinie  $\sigma = f(\epsilon)$  zu Hülfe nehmen zu müssen, wenn man nur die Voraussetzung macht, daß die Querschnitte des Stabes während seiner Biegung eben bleiben. Er beschränkt sich auf den rechteckigen Querschnitt. Aus der Fig. 51 folgt

$$\epsilon_1 dx : e_1 = dx : \rho, \quad \epsilon_2 dx : e_2 = dx : \rho,$$

also mit  $\kappa = \frac{1}{\rho}$

$$\epsilon_1 = \kappa e_1 \text{ und } \epsilon_2 = \kappa e_2, \quad \epsilon_1 + \epsilon_2 = \kappa (e_1 + e_2) = \kappa h$$

$$e_1 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} h, \quad e_2 = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} h.$$

Damit liegt die neutrale Schicht fest.

Aus den Gleichgewichtsbedingungen

$$\int \sigma df = 0 \text{ und } \int \sigma y df = M$$

folgt für rechteckigen Querschnitt mit  $df = b dy$

$$\int \sigma dy = 0 \text{ und } \int \sigma y dy = \frac{M}{b},$$

und wegen  $\epsilon' = \epsilon_1 \frac{y'}{e_1} = \kappa y'$  und  $\epsilon'' = \epsilon_2 \frac{y''}{e_2} = \kappa y''$

$$\int_{-\epsilon_2}^{\epsilon_1} \sigma d\epsilon = 0 \text{ und } \int_{-\epsilon_2}^{\epsilon_1} \sigma \epsilon d\epsilon = \frac{M \kappa^2}{b}.$$

<sup>1)</sup> Mitteilungen über Forschungsarbeiten Heft 89, Auszug Z. d. V. d. I. 1910 S. 1387.  
Mitteilungen. Heft 127 u. 128.

Aendert sich das Kraftmoment  $M$  um  $dM$ , so ändern sich auch die Krümmung  $\kappa$  und die Integrationsgrenzen  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$ . Die Integrale von der Form

$$W = \int_a^b f(x, r) dx$$

sind also Funktionen von  $a$ ,  $b$  und  $r$ ; also ist

$$dW = \frac{\partial W}{\partial a} da + \frac{\partial W}{\partial b} db + \frac{\partial W}{\partial r} dr,$$

$$\frac{\partial W}{\partial r} = f(a, r) \frac{da}{dr} + f(b, r) \frac{db}{dr} + \int_a^b \frac{\partial f(x, r)}{\partial r} dx.$$

Da nun aber bei festen Grenzen  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  eine Aenderung weder von  $\sigma = f(y, x)$  noch von  $\sigma\varepsilon = f(y, x)$  stattfindet, so ist das letzte Integral gleich null, und wir erhalten durch Differentiation der beiden Gleichgewichtsbedingungen

Zahlen-  
Ergebnisse der Biegungsversuche mit

Stabnummer	Versuch	Kraftmoment $M$ cmkg	Dehnungen in 1 : 1 000 000			Aenderungen				Quotienten		
			Zug- seite $\varepsilon_1$	Druck- seite $\varepsilon_2$	$\kappa h =$ $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$	$\Delta M$	$\Delta \varepsilon_1$	$\Delta \varepsilon_2$	$\Delta \kappa h$	$\frac{\Delta M}{\Delta \kappa h}$	$\frac{\Delta \varepsilon_1}{\Delta \kappa h}$	$\frac{\Delta \varepsilon_2}{\Delta \kappa h}$
	B <sub>g</sub> I a	0	0	0	0	12000	94	93	187	64,2	0,503	0,497
		12000	94	93	187	12000	96	93	189	63,5	0,508	0,492
		24000	190	186	376	12000	101	98	199	60,3	0,508	0,492
	B <sub>g</sub> II a	0	0	0	0	12000	94	93	187	64,2	0,503	0,497
		12000	94	93	187	12000	101	97	198	60,5	0,510	0,490
		24000	195	190	385	12000	103	100	203	59,1	0,507	0,493
B 6	B <sub>g</sub> III a	0	0	0	0	12000	92	91	183	65,6	0,503	0,497
		12000	92	91	183	12000	100	98	198	60,7	0,505	0,495
		24000	192	189	381	12000	102	99	201	59,7	0,507	0,493
		36000	294	288	582	18000	163	155	318	56,6	0,513	0,487
		54000	457	443	900	18000	176	160	336	53,6	0,524	0,476
	B <sub>g</sub> I b	0	0	0	0	12000	94	96	190	63,1	0,495	0,505
		12000	94	96	190	12000	92	86	178	67,4	0,517	0,483
		24000	186	182	368	12000	105	102	207	58,0	0,507	0,493
	B <sub>g</sub> II b	0	0	0	0	12000	92	92	184	65,2	0,500	0,500
		12000	92	92	184	12000	96	96	192	62,5	0,500	0,500
		24000	188	188	376	12000	101	96	197	61,0	0,513	0,487
	B <sub>g</sub> I c	0	0	0	0	12000	84	84	168	71,4	0,500	0,500
		12000	84	84	168	12000	87	81	168	71,4	0,518	0,482
		24000	171	165	336	12000	96	88	184	65,2	0,522	0,478
	B <sub>g</sub> II c	0	0	0	0	12000	84	82	166	72,3	0,506	0,494
		12000	84	82	166	12000	96	84	180	66,7	0,533	0,467
		24000	180	166	346	12000	96	92	188	63,8	0,510	0,490
	B <sub>g</sub> III c	0	0	0	0	12000	90	82	172	69,8	0,523	0,477
		12000	90	82	172	12000	100	92	192	62,5	0,521	0,479
		24000	190	174	364	12000	95	93	188	63,8	0,505	0,495
36000	285	267	552									

$$\sigma_1 \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x} - \sigma_2 \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x} = 0$$

und

$$\sigma_1 \varepsilon_1 \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \kappa} + \sigma_2 \varepsilon_2 \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \kappa} = \frac{1}{b} \left\{ 2 M \kappa + \kappa^2 \frac{\partial M}{\partial \kappa} \right\}$$

oder

$$\sigma_1 \varepsilon_1 \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \kappa} + \sigma_2 \varepsilon_2 \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \kappa} = \frac{1}{b} \left\{ 2 M + \kappa \frac{\partial M}{\partial \kappa} \right\},$$

wo das Zeichen  $\partial$  statt  $d$  andeuten soll, daß die Differentiation sich nur über den Querschnitt und nicht über die Länge des Stabes erstreckt. Mit den beiden letzten Gleichungen wird gefunden

$$\sigma_1 = \frac{2 M + \kappa \frac{\partial M}{\partial \kappa}}{b h \cdot \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \kappa}}; \quad \sigma_2 = \frac{2 M + \kappa \frac{\partial M}{\partial \kappa}}{b h \cdot \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \kappa}}$$

Die in Zahlentafel 59, S. 59, berechneten Versuche sind nun in Zahlentafel 114 nochmals und zwar nach den Herbertschen Gleichungen berechnet. Man sieht:

tafel 114.

Gußeisen A. Berechnet nach Herbert.

Differentialquotienten			$Z = 2 M + \kappa \frac{\partial M}{\partial \kappa}$	$N_1 = b h \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \kappa}$	$N_2 = b h \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \kappa}$	Spannungen in kg/qcm	
$\frac{\partial M}{\partial \kappa h}$	$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \kappa h}$	$\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \kappa h}$				Zugseite	Druckseite
63,8 61,9	0,505 0,508	0,495 0,492	35950 71270	4280 4300	4190 4170	84 166	86 171
62,3 59,8	0,506 0,508	0,494 0,492	35650 71050	4285 4300	4185 4170	83 165	85 170
63,1 60,2 58,1 55,1	0,504 0,506 0,510 0,518	0,496 0,494 0,490 0,482	35550 70950 105800 157600	4270 4285 4320 4390	4200 4185 4150 4080	83 166 245 359	85 169 255 387
65,2 62,7	0,506 0,512	0,494 0,488	36380 71080	4285 4340	4185 4130	85 164	87 172
63,8 61,7	0,500 0,506	0,500 0,494	35740 71200	4235 4285	4235 4185	84 167	84 170
71,4 68,3	0,509 0,520	0,491 0,480	36000 70950	4310 4405	4160 4065	84 161	87 175
69,5 65,2	0,519 0,521	0,481 0,479	35530 70540	4395 4410	4075 4060	81 160	87 174
66,1 63,1	0,522 0,513	0,478 0,487	35370 70840	4420 4345	4050 4125	80 163	87 172

die letzteren Spannungen sind durchweg etwas höher als die ersteren, aber der Unterschied ist gering, ja bei 120 cm Spannweite verschwindend. Die Zahlentafel 115 erleichtert den Vergleich. Es folgt also, daß meine Messungen richtig

Zahlentafel 115.  
Mittlere Spannungen in kg/qcm.

Belastung cmkg	Stützweite in cm									berechnete Spannung
	120			80			40			
	Zug	Druck	Mittel	Zug	Druck	Mittel	Zug	Druck	Mittel	
nach Herbert										
12 000	83	85	84	84	85	85	82	87	84	85
24 000	166	170	168	165	171	168	162	174	168	170
nach Zahlentafel 59										
12 000	80	88	84	79	89	84	74	79	76	85
24 000	157	178	167	152	175	163	146	157	151	170

gewesen sind, denn wenn die Annahme, daß die Querschnitte eben bleiben, dasselbe Ergebnis wie die durch Versuche ermittelte Elastizitätslinie  $\sigma = f(\epsilon)$  liefert, so kann das nicht wohl auf einen anderen Zusammenhang zurückgeführt werden.

Herbert ließ bei dreien seiner Bruchversuche die Spiegel bis zum Bruche sitzen, konnte also aus der letzten Dehnungsbeobachtung die Bruchspannung nach seiner Rechnungsweise ermitteln. Die Zug- und Druckfestigkeit bestimmte er aus Stäben, die den Bruchstücken in der Nähe der neutralen Schicht entnommen wurden, Zahlentafel 116.

Zahlentafel 116.  
Vergleich zwischen Bruch- und Zugfestigkeit nach Herbert.

Stabnummer . . . . .		1	3	4	5
berechnete Bruchfestigkeit . . . . .		3074	3248	3004	3197
beobachtete { Zugseite . . . . .		1952		1562	2053
Bruchfestigkeit { Druckseite . . . . .		2770		3925	2955
Zugfestigkeit . . . . .		1616	1818	1515	1464
Verhältnis zwischen Bruch- und Zugfestigkeit {	berechnet	1,91	1,79	1,98	2,19
	beobachtet	1,21		1,03	1,40

Wieder wird die Bachsche Beobachtung bestätigt; doch zugleich ist erkennbar, daß der Unterschied zwischen Zugfestigkeit und Bruchfestigkeit nicht lediglich auf der Abweichung vom Hookschen Gesetze beruht. Doch sind die Zahlen zu unregelmäßig, um weitere Schlüsse zuzulassen.

### Schluß.

Die Tatsache, daß die scheinbare Bruchfestigkeit des Gußeisens viel größer als dessen Zugfestigkeit ist, ist keine Eigentümlichkeit dieses Stoffes. Auch in zähen Stoffen entstehen bei der Biegung bereits vor dem Eintreten des Bruches scheinbar Spannungen, welche größer als die Zugfestigkeit sind.

Gußeisen zeigt ein sehr unregelmäßiges elastisches Verhalten, das wahrscheinlich auf unregelmäßige Abkühlung zurückzuführen ist. Dieses Verhalten verdunkelt die Versuchsergebnisse so, daß sichere Schlüsse nur selten gezogen

werden können; insbesondere nicht, wenn die Stützweite und die Belastung klein sind.

Die Anwendung der an besonders gegossenen Probestäben gefundenen Elastizitätszahlen auf Konstruktionen ist ganz unzulässig.

Die Spannungen, welche in gebogenen Stäben auftreten, die nur in zulässiger Höhe beansprucht sind, unterscheiden sich von den in üblicher Weise berechneten allerdings, stehen zu ihnen aber keineswegs in gleichem Verhältnisse wie die Zugfestigkeit zur scheinbaren Bruchfestigkeit.

Es ist deshalb nicht angängig, als zulässige Beanspruchungen bei der üblichen Berechnungsweise gebogener Stäbe aus Gußeisen Werte anzunehmen, die diesem Verhältnisse entsprechend höher als die für Zugbeanspruchung als zulässig erkannten sind.

Die Untersuchung gußeiserner Konstruktionsteile durch Bruchversuche ist irreführend; man soll statt ihrer, wo es angängig ist, Dehnungsmessungen vornehmen und aus diesen mit Hilfe möglichst einwandfrei ermittelter Werte des Elastizitätsmoduls auf die entstehenden Spannungen schließen.

---

