

GRUNDZÜGE  
DER BRILLENLEHRE  
FÜR AUGENÄRZTE

VON

A. BRÜCKNER

O. Ö. PROFESSOR DER AUGENHEILKUNDE  
AN DER UNIVERSITÄT BASEL

ERSTER BAND

DIE BRILLE UND DAS RUHENDE AUGE

MIT 83 ABBILDUNGEN



BERLIN  
VERLAG VON JULIUS SPRINGER

1924

ISBN-13:978-3-642-89579-1  
DOI: 10.1007/978-3-642-91435-5

e-ISBN-13:978-3-642-91435-5

ALLE RECHTE, INSBESONDERE DAS DER ÜBERSETZUNG  
IN FREMDE SPRACHEN, VORBEHALTEN.

COPYRIGHT 1924 BY JULIUS SPRINGER IN BERLIN.

MORITZ VON ROHR

GEWIDMET

## Vorwort.

Die erste Anregung zur Abfassung des vorliegenden Buches gewann ich durch Vorlesungen von Herrn M. VON ROHR, die ich während meiner Tätigkeit an der Jenaer Klinik gemeinsam mit meinen Assistenten hörte. Vielfache Unterredungen mit dem Genannten bestärkten mich in meiner Ansicht, daß eine leicht faßliche, aber doch streng wissenschaftliche Darstellung der neueren Brillenlehre für den Augenarzt mit nicht eingehender mathematischer Vorbildung eine Lücke ausfüllen würde. Die nähere Begründung hierfür findet der Leser in den ersten Seiten der Einleitung.

In dem Hauptteil des Buches ist der Versuch gemacht, nach Möglichkeit in anschaulicher Weise das Notwendigste aus der allgemeinen Dioptrik und im Anschluß daran die Beziehungen zwischen Brille und unbewegtem Auge zu behandeln. Hierbei war die Entwicklung mathematischer Formeln unerläßlich. Eine Zusammenstellung dieser Formeln und der im Text gebrauchten Ausdrücke und Zeichen schien zu Nachschlagezwecken erwünscht. Zu einem tieferen Verständnis wird es unbedingt notwendig sein, daß der Leser auch die im dritten Teil gegebenen Ziffernbeispiele selbst nachrechnet.

Bei der Abfassung des Buches bin ich von Herrn VON ROHR in steter Bereitwilligkeit mit Rat und Tat unterstützt worden. Ich möchte ihm auch an dieser Stelle hierfür meinen herzlichsten Dank aussprechen.

Es wird wesentlich von der Aufnahme abhängen, die das Werk unter den Fachgenossen findet, ob ein zweites Band, der sich mit der Behandlung der Brille in Verbindung mit dem bewegten Auge befassen würde, folgen soll.

Basel, im April 1924.

**A. Brückner.**

# Inhaltsverzeichnis.

## Einleitung.

§ 1. Die Bedeutung der Brillenkunde für den Augenarzt . . . . .	1
§ 2. Der Einfluß der Brille auf die Leistungen des Auges . . . . .	3
§ 3. Die Begrenzung der Aufgabe . . . . .	4

## I. Teil: Allgemeine Dioptrik.

§ 4. Das Brechungsgesetz . . . . .	6
§ 5. Zur Geometrie der geraden Linie . . . . .	7
<b>Die Grundpunkte (Kardinalpunkte) . . . . .</b>	<b>8</b>
§ 6. Die Brennpunkte . . . . .	8
§ 7. Der Dioptrienwert und die Brechkraft . . . . .	10
§ 8. Die Hauptpunkte . . . . .	13
§ 9. Allgemeines zur Dioptrienlehre . . . . .	16
<b>Die Abbildungsleichungen . . . . .</b>	<b>18</b>
1. Eine dünne Linse in Luft (1. Fall von GAUSS) . . . . .	18
§ 10. Die Formel für die Bildlage (die Lagenformel) . . . . .	18
§ 11. Die Formel für die Bildgröße . . . . .	20
§ 12. Eine andere Ableitung der Formel für die Bildgröße . . . . .	21
§ 13. Die Knotenpunkteigenschaften der Hauptpunkte . . . . .	23
2. Die Brechung an einer einzigen trennenden Kugelfläche (2. Fall von GAUSS) . . . . .	23
§ 14. Die Formel für die Bildlage . . . . .	23
§ 15. Die Formel für die Bildgröße . . . . .	29
§ 16. Wichtige Sonderfälle der Formeln . . . . .	30
§ 17. Die Formel für die Bildgröße bei sehr weit entfernten Gegenständen . . . . .	31
3. Die Zusammensetzung zweier oder mehrerer Abbildungen. . . . .	33
§ 18. Die Brechkraft $D_{12}$ bei einer Linse endlicher Dicke . . . . .	33
§ 19. Der bild- und der dingsseitige Hauptpunktverschub bei einer Linse endlicher Dicke . . . . .	41
§ 20. Die Zusammensetzung von Abbildungen, entworfen durch zwei Linsen von endlicher Dicke oder durch eine Folge mehrerer Flächen . . . . .	45

## II. Teil: Das Auge und die Brille.

<b>Das nicht akkommodierende Auge . . . . .</b>	<b>48</b>
§ 21. Der Hauptpunktsbrechwert (die axiale Refraktion) des Auges . . . . .	48
§ 22. Die Aufgabe des korrigierenden oder des Fernbrillenglases . . . . .	51
§ 23. Die Schnittweite und die Scheitelrefraktion des Brillenglases . . . . .	57
§ 24. Die Bestimmung der Achsenlänge am schematischen Auge . . . . .	59

Die Normalstellung des Brillenglases. . . . .	63
§ 25. Die Berechnung der Netzhautbildgröße . . . . .	63
§ 26. Der Bildort im Auge und die Achsenlängenveränderung. . . . .	64
§ 27. Der Vorschub der Hauptpunkte . . . . .	66
Die Brille in einem anderen als dem Normalabstande. . . . .	67
§ 28. Die Maßstabsänderung durch die Brille . . . . .	67
§ 29. Die beiden Möglichkeiten der Abweichung . . . . .	68
§ 30. Die Brille in einem zu nahen Abstände: $\delta < f''$ . . . . .	68
§ 31. Die Brille in einem zu weiten Abstände: $\delta > f''$ . . . . .	70
§ 32. Der Fall eines sehr großen $\delta$ -Werts . . . . .	72
§ 33. Die Maßstabsänderung in ihrer Abhängigkeit von $\delta$ und $A$ . . . . .	74
§ 34. Die Brille für das linsenlose (aphakische) Auge . . . . .	79
<b>Die Brille und die Akkommodation . . . . .</b>	<b>81</b>
§ 35. Allgemeines über die Akkommodation . . . . .	81
§ 36. Der Einfluß der Brille auf die Akkommodationsbreite. . . . .	84
§ 37. Der äußere Akkommodationserfolg bei dem Fernbrillenglas . . . . .	88
<b>Die Sehschärfe und die Brille . . . . .</b>	<b>93</b>
§ 38. Allgemeines zur Sehschärfe . . . . .	93
§ 39. Die absolute Sehschärfe $S$ . . . . .	93
§ 40. Die relative Sehschärfe $S_r$ . . . . .	97
§ 41. Die natürliche Sehschärfe $S_n$ . . . . .	103
§ 42. Das Vergrößerungsvermögen . . . . .	106
§ 43. Die geometrische Bedeutung der Formel für das Vergrößerungs- vermögen . . . . .	113
§ 44. Die Vergrößerungszahl . . . . .	116
<b>Der Astigmatismus . . . . .</b>	<b>118</b>
§ 45. Allgemeines über die astigmatische Abbildung . . . . .	118
§ 46. Die stärkste Einengung des gebrochenen Strahlenbündels. (Der Kreis geringster Verwirrung) . . . . .	121
§ 47. GULLSTRANDS abbildbare Linien . . . . .	123
§ 48. Das astigmatische Auge und das Brillenglas . . . . .	124

III. Teil: Ziffernbeispiele.

I. Die Berechnung der Bildlage und Bildgröße . . . . .	128
1. Der erste GAUSSISCHE Fall . . . . .	128
2. Der zweite GAUSSISCHE Fall . . . . .	129
II. Rechnungen an einer symmetrischen Sammellinse endlicher Dicke . . . . .	130
1. Die Berechnung der Brechkraft und der Hauptpunktverschiebe . . . . .	130
2. Die Berechnung der Bildlage und -größe mit den Formeln für die Nullstrahlen . . . . .	131
3. Die Berechnung der Bildlage und -größe unter Benutzung von 1. . . . .	131
III. Die Berechnung der Vergrößerung aus $A$ und $D$ . . . . .	132
IV. Die Bildgröße ferner Gegenstände . . . . .	132
V. Die Berechnung der Grundpunkte für die Flächenfolge des Auges . . . . .	133
1. Das Hornhautsystem . . . . .	133
2. Das Linsensystem . . . . .	133
3. Das Vollaue . . . . .	135
VI. Die Bestimmung von $D$ , aus $A$ und $\delta$ . . . . .	136
VII. Die Bestimmung von $A_\infty$ aus $A$ und $\delta$ . . . . .	136
VIII. Die Berechnung der Achsenverlängerung $\Delta$ . . . . .	137

IX. Die Berechnung der Grundpunkte für die Verbindung Brille + Auge	137
1. Zu nahe Stellung	137
Anhang: Andere Formel für die Vergrößerung	138
2. Zu ferne Stellung	139
3. Anhang: Vorgeschriebene Vergrößerung $V$ bei großem $\delta$ -Wert	140
X. Rechnungen an der Fernrohrbrille	140
1. Die Berechnung ihrer Grundpunkte	140
2. Ihre Verbindung mit dem Auge	142
Anhang: Andere Formel für die Vergrößerung	143
XI. Das Starglas	143
XII. Der äußere Akkommodationserfolg	144
1. Die Einwirkung einer stärkeren Lupe	144
2. Der Fall dünner Brillengläser	145
3. Der Fall der Fernrohrbrillen	145
XIII. Rechnungen zur Sehschärfe	146
1. Die Bestimmung von $\omega_f$ , $\omega_h$ und $\omega_h/\omega_f$	146
2. Sehschärfenbestimmungen für Brillengläser	147
Anhang: Grenzen für den Unterschied zwischen $S$ und $S_n$	148
XIV. Die Berechnung der Vergrößerung einer Lupe	148
Dreistellige Logarithmen und Antilogarithmen der natürlichen Zahlen	149
Die wichtigsten Formeln	150
Sachverzeichnis und Stichwörterklärungen	152
Namen- und Quellenverzeichnis	158

## Einleitung.

§ 1. *Die Bedeutung der Brillenkunde für den Augenarzt.* Von einer wissenschaftlichen Brillenkunde sind die ersten Spuren bei J. KEPLER um 1611 mit dem Beginn einer Berücksichtigung des blickenden Auges zu finden, und gegen das Ende des Jahrhunderts hat CHR. HUYGHENS, jene Ansätze unbeachtet lassend, die Wirkung des Brillenglases auf den achsennahen Raum durch Gleichungen darzustellen gesucht. Auf dieser Grundlage wurde im 18. Jahrhundert weitergebaut, und man kann namentlich bei C. A. A. MÄRTENS um 1824 eine gute Verwendung des ihm auf dem vorliegenden Gebiete bekannten sowie seine eigene, recht bemerkenswerte Weiterbildung finden. Einen ganz großen Anstoß gab auch hier die berühmte Arbeit von C. F. GAUSS (I) um 1840. Sie wirkte namentlich auf J. B. LISTING, der danach seine Lehre von den Knotenpunkten entwickelte und sie auch auf die Abbildung im Auge anwandte. Seine Auffassung galt für ganz mustergültig und hat anscheinend bei der Entwicklung einer wissenschaftlichen Brillenlehre in den 60er Jahren zunächst die älteren Hauptpunkte hinter die Knotenpunkte zurücktreten lassen.

Die Aufstellung einer Brillenlehre mußte sich etwa gleichzeitig mit der Abgliederung der Ophthalmologie von der Chirurgie entwickeln. Es haben in der Tat mehrere Freunde und Schüler A. v. GRAEFES ein großes Gewicht auf diese der Ophthalmologie allein zugehörige Anwendung einfacher physikalischer Gesetze gelegt. Nach der Reihenfolge der Anfangsbuchstaben kann man BUROW, DONDERS, HELMHOLTZ, NAGEL, v. ZEHENDER (aus etwas späterer Zeit ist ihnen MAUTHNER anzureihen) nennen, die eben die Anwendung ziemlich einfacher Rechnungen auf das Auge allein und auf die Verbindung von Auge und Brillenglas pflegten. Namentlich DONDERS (I) machte für uns im deutschen Sprachgebiete sicherlich bis in die 70er Jahre hinein Schule. Es scheint aber, daß sich der jüngere Nachwuchs mehr den klinischen Aufgaben zuwandte. Dafür lassen sich einige Beobachtungen anführen: einmal die in das Jahr 1888 fallende unveränderte Herausgabe des schon 22 Jahre in deutscher Sprache bestehenden, von DONDERS verfaßten Lehrgangs, und dann die recht geringe Vertrautheit mit den hierher gehörigen Teilen des Handbuchs der physiologischen Optik von HELMHOLTZ (I).



Der Umschwung zu neuer Wertung der geometrischen Grundlagen geht hauptsächlich auf GULLSTRAND (1) zurück, als er, auf eine eingehende Kenntnis und erfolgreiche Weiterbildung flächentheoretischer Gesetze gestützt, der Lehre vom Auge neue und viel weitere Ziele steckte. Für die Anfangsstufen seiner Lehre, die sich auch der Durchschnitts-Augenarzt aneignen sollte, stellte er (1, 239—247) einen sehr einfachen Formelschatz zusammen, der von den in Dioptrien gemessenen, auf Luft gebrachten *Brechwerten* (Konvergenzen) ausgeht und Lage und Größe der Bilder hinter der Brille und im schematischen Auge leicht anzugeben gestattet. Es handelt sich dabei um den einfachsten Fall der Abbildung im achsennahen Raum, wenn man von den Haupt- und den Brennpunkten ausgeht.

Der große Aufstieg, welchen die Dioptrik durch die grundlegenden Arbeiten von GULLSTRAND im letzten Vierteljahrhundert genommen hat, ist aber nur einem kleinen Teil der Augenärzte in vollem Umfang bewußt geworden. Dies liegt vielleicht zum Teil daran, daß die Ophthalmologen der Ansicht waren, daß mit der Stufe, welche die Dioptrik durch die Untersuchungen von DONDERS erreicht hatte, auch ein gewisser Abschluß erzielt sei. Sodann aber ist diese Tatsache vor allem wohl darin begründet, daß das ganze Gebiet den vorwiegend auf klinisch-pathologische und biologische Fragen eingestellten Augenärzten als zu abstrakt und unanschaulich gilt, so daß die hier zweifellos gegebenen Schwierigkeiten überschätzt werden und von einer Beschäftigung mit diesem Thema abschrecken. Die GULLSTRANDSchen Abhandlungen sind freilich für den nicht eingehend mathematisch geschulten Leser unverständlich. In seiner Bearbeitung im Handbuch der gesamten Augenheilkunde hat C. v. HESS (1) viel dazu beigetragen, die Vorstudien zu GULLSTRANDS Arbeiten zu erleichtern. Das Bestreben M. v. ROHRs (1—4), neuerdings auch O. HENKERS (1), in allgemeinverständlichen schriftlichen und mündlichen Darlegungen die neu gewonnenen Kenntnisse zu verbreiten, sind vielfach schon von Erfolg gewesen und haben namentlich auch die modernen sog. durchgebogenen Brillenformen in ihrer praktischen Bedeutung betont, wenn auch hier bei sonst urteilsfähigen Vertretern gelegentlich wohl eine sachlich nicht berechnete Gleichgültigkeit oder gar Ablehnung zu bemerken sein mag. Trotzdem ist nicht zu leugnen, daß das tatsächlich vorhandene Wissen auf diesem Gebiet noch nicht als fest begründet bezeichnet werden kann, da, von einzelnen Ausnahmen abgesehen, sich die Kenntnisse auch des wissenschaftlich arbeitenden Ophthalmologen hier überwiegend nicht mit denjenigen z. B. auf histologischem Gebiet zu messen vermögen. Der Grund liegt wohl darin, daß auch die allgemeinverständlichen Darlegungen vorwiegend vom Standpunkt des Physikers aus gegeben worden sind, dem die anschauliche Denkweise des ophthalmologischen Klinikers fremd ist. Jenem ist es darum nicht immer gegenwärtig, daß eine dem Mathematiker auf den

ersten Blick in ihren bedeutsamen Beziehungen durchsichtige Formel nur ein unverständliches Symbol sein kann, das der Erläuterung und Umsetzung in anschauliche Form und Worte bedarf. Selbst dann wird für die Mehrzahl der Augenärzte der Stoff noch spröde genug sein. Gleichwohl *muß* hier Wandel geschaffen werden. Wenn unsere Hochschullehrer die Dioptrik meist noch von einem so elementaren Standpunkt aus behandeln, wie er nicht einmal für den Studierenden erlaubt scheint, so muß dieses noch mehr bedauert werden, weil dadurch auch der Augenarzt gegenüber dem meistens theoretisch gut vorgebildeten Optiker in eine Lage gedrängt wird, die seiner nicht würdig ist.

In Amerika erwachsen, in England sorgsam und einsichtig gepflegt, mußten die Fortbildungsbestrebungen der Optiker in Deutschland von den unter mathematischer Leitung stehenden Brillenwerken gefördert werden, damit ihre neuen Brillenformen nach ihrem Werte gewürdigt und dem Gesichte des Trägers zweckentsprechend angepaßt werden konnten. Die in Jena bereits seit 10 Jahren bestehende Optikerschule, in deren Ausschuß Ophthalmologen und Brillenoptiker sitzen, hat schon beachtenswerte Anfänge mit der Verbreitung dieser für die neuen Hilfsmittel unumgänglich notwendigen Kenntnisse gemacht und setzt sie stetig fort. Es wird nicht wohl bestritten werden können, daß es ein unhaltbarer Zustand wäre, wollten Augenärzte mit ungenügender Kenntnis der vorliegenden Aufgaben an Brillenoptiker verfehlte Weisungen geben oder an berechtigten Maßnahmen jener unberechtigten Tadel üben. Man mag über den Wert der theoretischen Ausbildung der Optiker denken, wie man will, der Drang nach Vertiefung ihrer Fachbildung ist nicht aufzuhalten. Es bleibt deshalb dem Augenarzt nur der einzige Ausweg, sich auch seinerseits mit den einschlägigen Fragen so weit bekannt zu machen, daß er ihnen mit Verständnis gegenübersteht. Sonst wird sein Ansehen nicht nur beim Optiker, sondern bald auch bei seinen Kranken Gefahr laufen.

Wenn es ein dauerndes Verdienst von DONDERS (1) ist, die Ophthalmologen seiner Zeit den Gewerbsleuten überlegen vorgebildet zu haben, so wird man es nicht verurteilen können, wenn hier für die heutige Zeit eine Hilfe zur Erreichung des gleichen Zieles gegeben werden soll. Die Kenntnis von der Brille, wie sie M. v. ROHR (4) in seinem Beiträge zum Handbuch der gesamten Augenheilkunde niedergelegt hat, darf den jüngeren Augenärzten nicht fremd bleiben, und als eine erste Einführung in ihr Verständnis mögen die nachfolgenden Seiten angesehen werden.

§ 2. *Der Einfluß der Brille auf die Leistungen des Auges.* Beim Sehen mit bewaffnetem Auge, als dessen Sonderfall das Sehen mit der Brille gelten kann, ergeben sich verschiedene Unterfragen. Sie betreffen streng genommen alle Leistungen des Auges, da diese sämtlich durch optische Hilfsmittel beeinflußt werden können. Es handelt sich hierbei um das Sehen einerseits mit einem, andererseits mit beiden Augen, und jeweils

dabei um die Verhältnisse bei ruhendem und bei bewegtem Auge. Hierbei kommen namentlich in Betracht: das räumliche Sehen und vor allem die zentrale Sehschärfe, das exzentrische Formensehen, die Änderung der Perspektive, die Beeinflussung der Gesichtsfeldgrenzen und des Akkommodationserfolges. Beim zweiäugigen Sehen ist im besonderen noch das stereoskopische (beidäugige) Sehen zu beachten. Diese funktionelle Seite des Brillenproblems ist nicht immer ausreichend in ihren Einzelheiten berücksichtigt, jedenfalls nicht allgemein aufgenommen worden.

Wir haben es bei der Zusammensetzung von Brille und Auge mit der Verbindung zweier optischer Systeme zu tun, müssen also die Gesetze, die hierbei gelten, kennen. Dabei muß bedacht werden, daß das Auge an sich schon ein sehr verwickeltes optisches System ist, überdies einen bildauffangenden Schirm besitzt, dessen Lage individuell schwankt, aber im Einzelfalle nicht geändert werden kann. Eine Schwankungsbreite besteht ferner für die bei der Strahlenbrechung mitwirkenden Teile des Auges (das brechende System bzw. die einzelnen brechenden Flächen). Wir haben also eine Variabilität aller in Betracht kommenden Größen, d. h. der Brechkraft als Ganzes, der Achsenlänge des Auges und der Wirkung der einzelnen brechenden Teile. Als das Ergebnis dieser Veränderlichkeit ergeben sich die bekannten verschiedenen Refraktions- (Brechungs-) Fehler des Auges. Außerdem kommen aber auch noch Abweichungen von der Symmetrie des Augenbaues in Betracht (regulärer und irregulärer Astigmatismus).

Von einer ausreichenden Kenntnis der vorkommenden Schwankungsbreite sind wir noch weit entfernt, wenn sich auch Ansätze zu deren Kenntnis finden, so neuerdings Untersuchungen von ERGGELET (2) über die Hornhautkrümmung. Näher sind wir nur unterrichtet über die Streuung der Brechungsfehler. Dabei ist aber im gegebenen Falle die Stärke der Einzelflächen (abgesehen von der Hornhaut), ihr gegenseitiger Abstand und die Länge der Augenachse unbekannt. Man ist daher bei Rechnungen allgemein auf die Maße des sog. schematischen (oder Übersichts-) Auges angewiesen, wie sie von LISTING, HELMHOLTZ, TSCHERNING und neuerdings von GULLSTRAND angegeben worden sind. Dabei muß man sich aber immer klar sein, daß es sich hier um eine vereinfachende Fiktion handelt, auf der die rechnerische Behandlung des Brillenproblems aufgebaut ist, sind wir doch noch nicht einmal in der Lage, zuverlässig anzugeben, wie groß die Fehler im Höchstfalle sind, wenn wir die Werte des schematischen Auges zugrunde legen. Im folgenden wird stets auf die „exakten“ Werte des GULLSTRANDSchen Auges zurückgegangen.

§ 3. *Die Begrenzung der Aufgabe.* Bei dem Brillenproblem haben wir, ganz allgemein gesprochen, die Ermittlung der gegenseitigen mathematischen Beziehungen zwischen Auge und Brille zur Aufgabe. Das ist der leitende Gesichtspunkt in der ganzen Frage. Will man sie behandeln, so ist es unerläßlich, Vorfragen zu erledigen, die sich auf die Abbildung

zum Teil durch optische Systeme im allgemeinen, zum Teil durch das Auge im besonderen beziehen. Dabei gehen wir von bestimmten festgelegten Grundpunkten aus und entwickeln die Gesetze der Abbildung, soweit sie die Lage und die Größe des Bildes betreffen. Der Ort des Bildes ist wichtig, weil es ja im Auge auf die Netzhaut fallen muß, und seine Größe, weil von ihr die Leistung (Sehschärfe) des Auges wesentlich abhängt. Wir beschränken uns in den nachfolgenden Darlegungen dabei durchweg auf die Abbildung im GAUSSISCHEN (achsennahen oder paraxialen) fadenförmigen Raum. Damit wird der Einfluß, den die verschiedene Größe der Blende eines optischen Systems auf die Abbildung hat, hier unwesentlich und nicht weiter besprochen. Ebenso wird von der Behandlung die Abbildung bei schiefem Einfall der Strahlenbündel (Astigmatismus schiefer Bündel) und (zunächst wenigstens) bei nicht allseitig symmetrischem Bau des Auges (Astigmatismus) ausgeschlossen. Von den obenerwähnten Leistungen des Auges, die durch optische Hilfsmittel beeinflußt werden können, kommen also hier nur in Frage das zentrale Sehen bei akkommodationslosem und bei akkommodierendem unbewegtem Auge. Es wird demnach nur das Sehen mit der Brille entlang der Achse (zentrische Benutzung des Brillenglases) und bei ruhendem Auge unter Beschränkung auf das einäugige Sehen behandelt werden.

Wir werden uns einleitend einige Grundtatsachen der Geometrie und der Dioptrik ins Gedächtnis zurückrufen oder in einer Form entwickeln, wie wir ihrer nachher bei der Bearbeitung unserer eigentlichen Aufgabe bedürfen. Das sind das Brechungsgesetz, einiges aus der Geometrie der geraden Linie, die GULLSTRANDSche Dioptrienlehre, die Abbildungsgleichungen bei sphärischen Systemen und die Lehre von der Refraktion (dem Hauptpunktsbrechwert) des Auges.

## Erster Teil.

# Allgemeine Dioptrik.

§ 4. *Das Brechungsgesetz.* Das Brechungsgesetz besagt: Tritt ein Lichtstrahl aus einem Mittel (Medium) in ein zweites Mittel von anderer optischer Dichte, so erleidet er in der Grenzfläche zwischen beiden eine Ablenkung in dem Sinne, daß beim Übertritt von einem optisch dünneren zu einem dichteren Mittel der Strahl nach dem Einfallslot zu, im umgekehrten Falle von ihm fort gebrochen wird. Die Ablenkung erfolgt für alle Einfallswinkel in demselben Verhältnis, und zwar in der all-

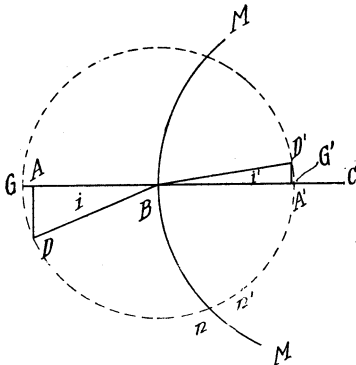


Abb. 1. Zur Brechung an einer Kugelfläche. Da um  $B$  ein Kreis mit dem Radius  $r$  beschrieben ist, so gilt

$$\sin i = \frac{AD}{r}; \quad \sin i' = \frac{A'D'}{r};$$

$$i = \widehat{GD}; \quad i' = \widehat{G'D'}.$$

gemeinsten Form nach der Beziehung  $n \sin i = n' \sin i'$ . Sie besagt, daß das Produkt aus *Brechungsvermögen* (der *optischen Dichte*, der *Brechzahl* oder dem *Brechungsindex*)  $n$  und dem Sinus des *Eintrittswinkels*  $i$  im ersten Mittel gleich ist dem entsprechenden Produkt aus dem Brechungsvermögen des zweiten Mittels  $n'$  und dem Sinus des *Austrittswinkels*  $i'$ . (Eine derartige Beziehung stellt nach *ABBE* eine optische Invariante dar).

In Abb. 1 ist  $MM$  die sphärisch angenommene Trennungsfäche zwischen den beiden Mitteln mit dem Krümmungsmittelpunkt in  $C$ . In  $B$  sei der Einfallspunkt des Strahles  $DB$ , der nach der Brechung in der Richtung  $BD'$

weiterläuft. Um  $B$  ist ein Kreis mit dem Radius  $r = DB = D'B = r$  beschrieben. Es ist dann also der Eintrittswinkel  $i = \sphericalangle ABD$ , der Austrittswinkel  $i' = \sphericalangle A'BD'$ , wenn die Gerade  $ABA'C$  das Einfallslot darstellt, das senkrecht zur Trennungsfäche in  $B$  errichtet ist. Es ist dann  $\sin i = \frac{AD}{r}$  und  $\sin i' = \frac{A'D'}{r}$ . Das Verhältnis der beiden Sinus ist gegeben durch

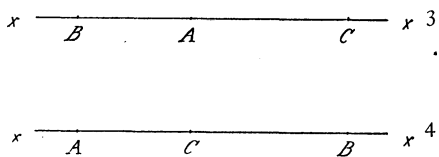
$$\frac{\sin i}{\sin i'} = \frac{AD}{r} \cdot \frac{r}{A'D'},$$

da  $DB = D'B = r$ , ist also

$$\frac{\sin i}{\sin i'} = \frac{AD}{A'D'}$$

d. h., es verhalten sich die Sinus von Eintrittswinkel und Austrittswinkel wie die auf das Einfallslot ( $AA'$ ) von  $D$  bzw.  $D'$  gefällten Senkrechten. Bei sehr kleinen Winkeln, mit denen wir es bei Beschränkung auf den achsennahen Raum allein zu tun haben, werden die Punkte  $D$  und  $D'$  sehr nahe an das Einfallslot heranrücken. Deshalb ist es in diesem Falle erlaubt, statt der Sinus (d. h. der geradlinigen Strecken  $AD$  und  $A'D'$ ) die zu den Winkeln  $i$  und  $i'$  gehörigen *Kreisbögen*  $i = \widehat{GD}$ ,  $i' = \widehat{G'D'}$  des um  $B$  beschriebenen Kreises zu setzen. Diese sind den Winkeln genau proportional. Deshalb lautet für kleine Einfallswinkel das Brechungsgesetz (die *ABBESche Invariante*):  $ni = n'i'$ .

§ 5. *Zur Geometrie der geraden Linie.* Bei der *geraden Linie* als *ein-dimensionalem* Gebilde sind nur Längsrichtungen, also beispielsweise die links rechts ( $\rightarrow$ ) von der  $x$   $\xrightarrow{\quad A \quad B \quad C \quad} x^2$  rechts links ( $\leftarrow$ ), zu unterscheiden. So, wie unsere Maßstäbe von links nach rechts gezählt werden, werden auch bei der Messung von Strecken die Richtungen von *links* nach *rechts* bevorzugt und *positiv*, die von *rechts* nach *links negativ* bezeichnet. Auf der geraden Linie  $xx$  seien drei Punkte angenommen



$A, B, C$  (Abb. 2). Um von  $A$  nach  $C$  zu gelangen, wird die Strecke von  $A$  über  $B$  nach  $C$  durchlaufen. Man kann also schreiben:  $AB + BC = AC$ . Ist der Abstand zwischen  $AB = 25$  cm, der zwischen  $BC = 40$  cm, so würde bei Einsetzung der Ziffernwerte — die Maßeinheit, hier das Zentimeter, wollen wir weglassen — die Gleichung lauten:  $25 + 40 = 65$ . Es kann aber der Punkt  $C$  auch erreicht werden, wenn der Punkt  $B$  nach links von  $A$  liegt (Abb. 3), also zunächst die Strecke von  $A$  nach  $B$  und dann die von  $B$  nach  $C$  durchlaufen wird. Es gilt dabei wieder die Gleichung:  $AB + BC = AC$ . Da aber  $AB$  von rechts nach links durchlaufen wird, also in der Richtung, die als negativ bezeichnet wurde, so muß der Ziffernwert negativ genommen werden, und wir erhalten die Gleichung:  $-25 + 65 = 40$ . Der dritte mögliche Fall (Abb. 4), daß der Punkt  $B$  rechts von  $C$  liegt, ergibt wieder die Gleichung:  $AB + BC = AC$ . Da hier aber die Strecke  $BC$  von rechts nach links durchlaufen wird, ist der Ziffernwert dieser Strecke für die Richtung  $BC$  negativ zu setzen, und wir erhalten  $65 - 40 = 25$ .

Wie man sieht, kann also die Richtung, in der eine Strecke durchlaufen wird, eindeutig durch die Reihenfolge der Buchstaben ausgedrückt werden.

Will man in dem Punkte  $A$  bleiben, so kann man auch sagen  $AB + BA = 0$ . Daraus ergibt sich  $AB = -BA$ . Für linkshin durchlaufene Strecken gilt also der negative Wert gleich langer rechtshin durchlaufener. Setzen wir den Ziffernwert ein, wie er in Abb. 2 angenommen wurde, so würde das also heißen  $+25 = -(-25)$  oder  $+25 = +25$ , womit die Gültigkeit der allgemeinen Gleichung  $AB = -BA$  vor Augen geführt wird.

Die endgültige Bewegung von einem nach einem anderen Punkte der geraden Linie ist demnach unabhängig von der Lage der zwischendurch berührten Punkte. Ganz allgemein kann also in Zeichnungen die Richtung durch das Vorzeichen bestimmt werden. Dieses gilt aber nur für die eindimensionale Gerade, nicht für die Ebene, ein zweidimensionales Gebilde.

Die *Lichtrichtung*, d. h. die Richtung, in der das Licht fortschreitet, wird in den Abbildungen ebenfalls dem Vorhergehenden entsprechend von *links* nach *rechts* angenommen. Demgemäß wird in allen hier gegebenen Abbildungen das Auge, in welches das Licht einfallen soll, stets auf der rechten, das wirkliche (reelle) Objekt, von dem das Licht ausgeht, stets auf der linken Seite zu zeichnen sein. Alle Richtungen, die dieser Lichtrichtung entgegengesetzt verlaufen, sind deshalb negativ anzusetzen. Es wird sich bald erweisen, wie sehr sich die Ableitung der dioptrischen Formeln vereinfacht, wenn man sich bei der Bestimmung des Vorzeichens von Strecken stets an diese Regel hält.

## Die Grundpunkte (Kardinalpunkte).

§ 6. *Die Brennpunkte.* An jedem ausgerichteten (zentrierten) optischen System und daher auch an einer Linse in Luft werden bestimmte *Grundpunkte* festgelegt, auf die alle bei dem Abbildungsvorgang in Betracht kommenden Strecken bezogen werden. Allgemein bekannt sind die *Brennpunkte*. In dem *bildseitigen* (*hinteren*) Brennpunkt  $F'$  vereinigen sich die aus der Unendlichkeit kommenden, also im Dingraum achsenparallel<sup>1)</sup> verlaufenden Strahlen<sup>2)</sup>, während von dem *vorderen* oder

<sup>1)</sup> Unter Achse verstehen wir die Linie durch die Mittelpunkte der ausgerichteten brechenden Flächen.

<sup>2)</sup> Ein leuchtender Punkt sendet elektromagnetische Schwingungen konzentrisch in den Raum hinaus. Solange sie sich in dem optisch gleichen Mittel fortbewegen, erfährt ihre Geschwindigkeit keine Änderung. Die auf diese Kugelwellen gedachten senkrechten Linien (Normalen) werden als Lichtstrahlen bezeichnet. Ihnen kommt also keine reelle Bedeutung zu; sie sind eine Gedankenschöpfung. Zur einfachen Darstellung der Verhältnisse bedient man sich ihrer aber allgemein. — Strenggenommen gibt es keine parallelen Strahlen; aber hier

dingseitigen Brennpunkt  $\mathcal{F}$  ausgehende oder auf ihn gerichtete Strahlen nach der Brechung im Bildraum achsenparallel verlaufen (Abb. 5 a, 5 b). Da die Abbildung bzw. der Strahlengang *umkehrbar* ist, läßt sich auch sagen, daß parallele, von rechts nach links einfallende Strahlen im vordern Brennpunkt  $\mathcal{F}$  vereinigt werden.

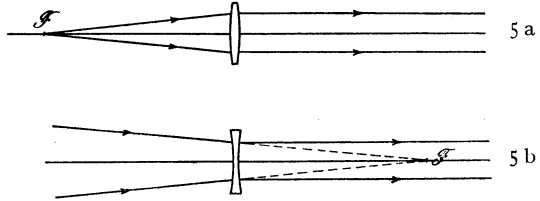


Abb. 5 a. Der vordere Brennpunkt  $\mathcal{F}$  einer sammelnden Linse.  
Abb. 5 b. Der vordere Brennpunkt  $\mathcal{F}$  einer zerstreulenden Linse.

Einander *als Bild und Gegenstand zugeordnet* oder *konjugiert* sind also jeweils der Brennpunkt und der Punkt in  $-$  bzw.  $+$  unendlich ( $\infty$ ).

Der bildseitige oder hintere Brennpunkt einer der Einfachheit wegen zunächst als gleichseitig angenommenen, dünnen Linse in Luft

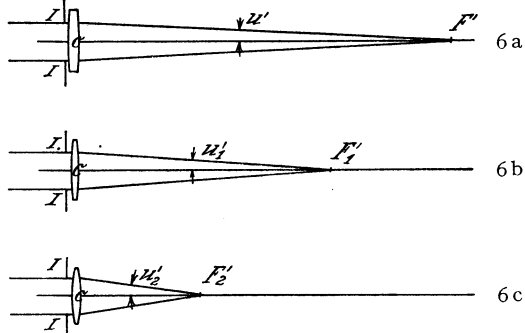


Abb. 6 a. Eine Sammellinse mit langer Brennweite  $CF'$  und kleiner Konvergenz  $u'$ .  
Abb. 6 b. Eine Sammellinse mit mittlerer Brennweite  $CF'_1$  und mittlerer Konvergenz  $u'_1$ .  
Abb. 6 c. Eine Sammellinse mit kurzer Brennweite  $CF'_2$  und großer Konvergenz  $u'_2$ .

ist also der Punkt auf der Achse, in dem sich die aus dem fernen Dingachsenpunkt kommenden Strahlen vereinigen (s. Abb. 6 a). Er wird wie alle im Bildraum gelegenen Punkte *gestrichen* bezeichnet, also mit  $F'$ . Die Strecke  $CF'$ , hier der Einfachheit halber von der Mitte  $C$  der dünnen Linse aus gemessen, wird als *hintere Brennweite*  $f'$  eingeführt. Entsprechend wird die Strecke  $C\mathcal{F}$  (Abb. 7) als *vordere Brennweite*  $f$  bezeichnet.

Da sie in entgegengesetzter Richtung wie  $f'$  gemessen wird, können wir hier auch sagen  $-f = f'$  oder  $-f' = f$ . Es sei übrigens vorausgreifend bemerkt, daß auch bei beliebig gestalteten Linsen in Luft die Beziehung  $f' = -f$  gilt.

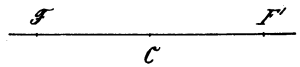


Abb. 7. Vordere und hintere Brennweite bei einer dünnen Sammellinse.  
 $C\mathcal{F} = -CF'$ .

besteht eine praktisch allerdings ausreichende Annäherung an den Parallelismus, wenn die punktförmige Lichtquelle weit entfernt ist, und deshalb bei endlicher Blendenöffnung des optischen Systems nur so nahe nebeneinander aus der Lichtquelle austretende Strahlen in das System einfallen können, daß der Winkel, welchen sie miteinander bilden, annähernd  $0^\circ$  wird bzw. genügend klein ist.



Linsen von stärkerer Krümmung der brechenden Flächen besitzen aus Gründen geometrischer Ähnlichkeit eine kleinere Brennweite, so daß in Abb. 6 die Linse  $a$  die längste,  $c$  die kürzeste Brennweite hat. Die entsprechende Überlegung für Zerstreuungslinsen ist an Abb. 8 a u. b auf S. 12 leicht durchzuführen. Zur Charakterisierung der Linsenwirkung läßt sich also die Länge der Brennweite benutzen. In dieser Weise wurden die Linsen auch wirklich früher beziffert.

§ 7. *Der Dioptrienwert und die Brechkraft.* Es gibt aber noch eine andere Möglichkeit, um eine Bezifferung durchzuführen. Nehmen wir die Öffnung (Blende) der Linsen als übereinstimmend an, so wird sich der Winkel, unter dem die äußersten durch die Blende noch eingelassenen Strahlen in dem Brennpunkt  $F'$  die Achse schneiden, in einer bestimmten Abhängigkeit von der Brennweite ändern. In Abb. 6a ist bei der *Sammellinse* die Öffnung (Blende), die noch Strahlen durchläßt, durch  $II$  bezeichnet.  $CF'$  entspricht der Achse. Es entsteht dann in  $F'$  ein Winkel  $2u'$ , dessen halber Wert als *Öffnungswinkel*  $u'$  (*Konvergenz*) des Strahlenbündels bezeichnet wird. Dieser Winkel  $u'$  ist bestimmt durch seine trigonometrische Tangente, die ja durch das Verhältnis der gegenüberliegenden zur anliegenden Kathete im Dreieck  $CIF'$  gemessen wird<sup>1)</sup>.

Also ist  $\operatorname{tg} u' = \frac{CI}{CF'}$ . (Die Strecken für die trigonometrischen Tangenten seien immer vom *rechten Winkel aus* gemessen.) Setzen wir  $CI = h$  und  $CF' = f'$ , so ist  $\operatorname{tg} u' = \frac{h}{f'}$ . Haben wir in Abb. 6b eine zweite Linse,

bei der die Brennweite kürzer ist, der Brennpunkt sich beispielsweise in  $F'_1$  befindet, so werden die parallelen Strahlen nach der Brechung in  $F'_1$  unter einem Winkel vereinigt werden, den wir mit  $2u'_1$  bezeichnen. Wie aus der Abb. 6b zu ersehen, ist die Konvergenz der Strahlen in dem zweiten Falle größer als in dem ersten. Der Winkel  $2u'_1$  bzw.  $u'_1$  wird auch hier wieder bestimmt durch die trigonometrische Tangente, also  $\operatorname{tg} u'_1 = \frac{CI}{CF'_1}$ . Setzen wir  $CF'_1$  nunmehr gleich  $f'_1$ , so erhalten wir  $\operatorname{tg} u'_1 = \frac{h}{f'_1}$ , und so entsprechend bei der dritten Linse (Abb. 6c)  $\operatorname{tg} u'_2 = \frac{h}{f'_2}$ .

Wir gehen auf unserer Stufe der Betrachtung davon aus, daß nur die Abbildung in dem *achsennahen* (GAUSSISCHEN) Raum behandelt wird, d. h. daß die Öffnung der Blende ( $II$ ) sehr klein ist, und dementsprechend natürlich auch die Winkel  $u'$ ,  $u'_1$  und  $u'_2$  sehr klein werden. In solchen Fällen ist es (ganz wie auf S. 7 für die Sinus ausgeführt) erlaubt, statt der trigonometrischen Tangente des Winkels den Winkel selbst zu setzen. Unter dieser Voraussetzung können wir deshalb die Proportion

<sup>1)</sup> Bei den dünnen Linsen der Abb. 6 kann man annehmen, daß sich  $C$  in der Mitte der durch  $II$  angedeuteten Blendenöffnung befindet.

aufstellen  $u' : u'_1 = \frac{h}{f'} : \frac{h}{f_1}$ . Da wir die Blendenweite ausgedrückt durch  $h$  in beiden Fällen als gleich angenommen haben, erhalten wir daraus  $u' : u'_1 = \frac{1}{f'} : \frac{1}{f_1}$ . Man sieht, daß sich die Winkel  $u'$  und  $u'_1$ , die ein Maß für die Konvergenz des gebrochenen Strahlenbündels, also für die Linsenwirkung, abgeben, verhalten wie die *Kehrwerte (reziproken Werte)* der entsprechenden Brennweiten. Deshalb können wir zur Bezifferung der Linsen auch statt der Brennweiten selbst ihre Kehrwerte benutzen. In der Tat geschieht das jetzt auch allgemein in der Brillenlehre. Da wir in der Konvergenz des gebrochenen Strahlenbündels ein Maß für die Kraft haben, mit der die Linse parallel auffallende Strahlen aus ihrer Richtung ablenkt, gibt uns also diese Art der Bezifferung unmittelbar einen Anhalt dafür, wie *stark* die Linse ist.

Nach GULLSTRAND bezeichnet man die *Brechkraft* einer Linse, die durch den Kehrwert der Brennweite  $f'$  gemessen wird, mit  $D = \frac{1}{f'}$ . Ihre Einheit ist die *Dioptrie*, abgekürzt dptr<sup>1)</sup>. Der Dioptrien- oder *Brechwert* wird also ermittelt als Kehrwert einer Strecke, und zwar hier der in Metern gemessenen Brennweite, also  $1 \text{ dptr} = \frac{1}{1 \text{ m}}$ . Eine Linse von 50 cm = 0,5 m Brennweite würde also eine Brechkraft  $D = \frac{1}{0,5 \text{ m}} \hat{=} 2 \text{ dptr}$  haben.

Bei den *Zerstreuungslinsen* liegt der hintere Brennpunkt  $F'$  *entgegengesetzt* der Lichtrichtung, d. h. links, vor der Linse  $C$ . Nehmen wir in Abb. 8a eine Zerstreuungslinse mit derselben Blendenöffnung an wie die Sammellinse in Abb. 6a, so liegt der bildseitige Brennpunkt nach links hin, beispielsweise in  $F'$ . Die parallelen Strahlen werden also durch die Linse so zerstreut, daß sich ihre rückwärtigen Verlängerungen in  $F'$  schneiden. Auch hier können wir sehr wohl durch die Größe der Strecke  $CF'$ , d. h. der Brennweite, die Wirkung der Linse kennzeichnen. Da wir bei unseren Messungen immer von der Linsenmitte zum Brennpunkt auf der Achse fortzuschreiten haben, so wird hier nach den Ausführungen in § 5 die Strecke entgegengesetzt der Lichtrichtung durchlaufen. Sie hat deshalb einen negativen Zifferwert.

Wollen wir auch hier wieder den Konvergenzwert, d. h. den durch den Winkel  $u'$  des gebrochenen Strahlenbündels bestimmbar Grad der Konvergenz als Maßstab einführen, so gilt genau die gleiche Ableitung

<sup>1)</sup> Diese Bezeichnungsweise weicht von der sonst für den Augenarzt üblichen ab, der mit  $D$  die Dioptrie abkürzt, während GULLSTRAND das mit dptr (entsprechend m, g, l) tut. Es würde sich dringend empfehlen, zur Vereinheitlichung der Schreibweise und zur Verhinderung von Mißverständnissen allgemein die GULLSTRANDSche Bezeichnung anzuwenden.

wie in dem ersterwähnten Fall der Sammellinse. Es ist  $\operatorname{tg} u' = \frac{CI}{CF'}$ , oder, wenn wir  $CF' = f'$  und  $CI = h$  setzen,  $\operatorname{tg} u' = \frac{h}{f'}$ . Da aber, wie gesagt, die Strecke  $CF'$  der Lichtrichtung entgegengesetzt durchlaufen wird, so daß  $f'$  hier einen negativen Wert hat, werden wir bei einer Ausführung in Ziffernwerten einen negativen Wert auf der rechten Seite erhalten, und wir haben zu schreiben  $\operatorname{tg} u' = \frac{h}{-|f'|}$ , wo  $|f'|$  den absoluten oder Ziffernwert bedeutet. Für eine stärkere Negativlinse (Abb. 8b), deren bildseitiger Brennpunkt beispielsweise in  $F'_1$  liegt, würde sein  $\operatorname{tg} u'_1 = \frac{CI}{CF'_1} = \frac{h}{-|f'_1|}$ . Wir können dann wieder, unter Berücksichti-

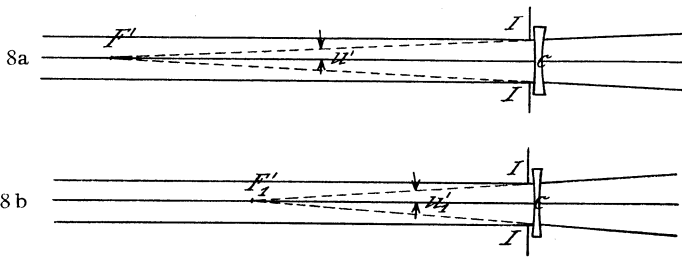


Abb. 8a. Eine Zerstreuungslinse mit langer Brennweite  $CF'$  und kleiner Konvergenz  $u'$ .

Abb. 8b. Eine Zerstreuungslinse mit kurzer Brennweite  $CF'_1$  und großer Konvergenz  $u'_1$ .

gung, daß wir es hier nur mit sehr kleinen Winkeln zu tun haben, die gleiche Proportion ansetzen wie oben, nämlich:

$$u' : u'_1 = \frac{h}{-|f'|} : \frac{h}{-|f'_1|};$$

die rechte Seite durch  $h$  dividiert, ergibt:

$$u' : u'_1 = \frac{1}{-|f'|} : \frac{1}{-|f'_1|}.$$

Wie man sieht, sind hier die Kehrwerte negativ. Es handelt sich also nicht um positive Werte der Konvergenz, sondern um negative. Dem entspricht, daß im Hinblick auf die von links nach rechts angenommene Richtung des Lichtes die gebrochenen Strahlen nicht zusammen-, sondern auseinanderlaufen. Sie haben also eine negative Konvergenz (*Divergenz*), und auch die Winkel  $u'$  und  $u'_1$  haben hier die entgegengesetzten Zeichen wie bei der Sammellinse. Im übrigen sind aber die Verhältnisse genau dieselben wie dort und können daher durch die gleiche Formel wiedergegeben werden. Auch hier können wir die Stärke der Linse (Breckkraft) bestimmen durch den Kehrwert der (hier nega-

tiven) Brennweite. Es handelt sich um Linsen mit negativer Brechkraft (zerstreuender Wirkung), beispielsweise bei einer Linse von  $f' = -0,5$  m Brennweite um eine Linse von  $D = -2$  dptr Brechkraft.

Wir haben hier immer die Annahme gemacht, daß es sich bei der Abbildung nur um Strahlenbündel handelt, die eine außerordentlich geringe Öffnung haben, also um sehr enge Bündel. Trotzdem ist es erlaubt, wie es oben geschehen ist, dem Strahlenbündel je nach dem Abstand von der brechenden Fläche einen verschiedenen Grad der Konvergenz zuzuschreiben, denn unter kleinen Winkeln gibt es verständlicherweise noch Abstufungen.

§ 8. *Die Hauptpunkte.* Der unendlich ferne leuchtende Achsenpunkt und sein im Brennpunkt  $F'$  entworfenen Bild sind einander zugeordnet (konjugiert), ebenso der im vorderen Brennpunkt  $\mathcal{F}$  befindliche leuchtende Punkt und sein in der Unendlichkeit entworfenen Bild. Wenn wir statt eines leuchtenden Punktes als Gegenstand in unendlicher Ferne ein ausgedehntes Objekt auf der Achse annehmen, so wird von diesem am bildseitigen Brennpunkt ein Bild entworfen werden, das, da der Gegenstand eine Seitenausdehnung besitzt, ebenfalls eine Seitenausdehnung hat. Es wird nämlich in einer Ebene, der Brennebene, liegen, die wir uns achsensenkrecht durch den Brennpunkt gelegt denken können. Rückt der unendlich ferne Gegenstand näher heran, so wird sein Bild nicht mehr am Brennpunkt, sondern hinter ihm entworfen werden. (*Rechtläufige* Abbildung, d. h. der Gegenstand und sein Bild bewegen sich in der *gleichen* Richtung, nämlich entweder beide in gleicher oder beide in entgegengesetzter Richtung wie das Licht.) Die nähere Betrachtung der zugeordneten Lagen von Gegenstand und Bild zeigt, daß hier bezüglich der Größe und Lage alle Möglichkeiten vorliegen. Das Bild kann größer oder kleiner als der Gegenstand sein, es kann umgekehrt, es kann aufrecht sein<sup>1)</sup>. Diese verschiedenen Möglichkeiten, die hier im einzelnen nicht erörtert werden sollen, lassen erkennen, daß es eine bestimmte Lage von Gegenstand und Bild geben muß, wo beide *gleich groß* und *gleich gerichtet* sind. In diesen beiden einander zugeordneten Achsenpunkten bzw. in den achsensenkrechten Ebenen durch diese Achsenpunkte besteht demnach die Vergrößerung  $+1$ . Setzt man zu größerer Deutlichkeit statt *Vergrößerung* das Verhältnis *Bild : Gegenstand*, so bedeutet bei dem Werte  $+1$  das  $+$ -Zeichen, daß Bild und Gegenstand die gleiche Richtung haben (wenn der Gegenstand aufrecht steht, so steht auch das Bild aufrecht), und die Ziffer 1 bedeutet, daß die Länge des Bildes gleich ist der des Gegenstandes.

Diese beiden ausgezeichneten Punkte der Achse heißen die *Hauptpunkte*, die senkrecht zur Achse durch sie gelegten Ebenen die *Haupt-*

<sup>1)</sup> Vgl. hierzu den Aufsatz von M. v. ROHR (3, 21).

*ebenen.* In einer gewöhnlichen dicken Bikonvexlinse liegen die Hauptpunkte jeweils um etwas ( $\frac{1}{3}$  der Linsendicke) nach innen von den Scheiteln der Linsenflächen<sup>1)</sup>. Bei durchgebogenen Linsen können auch beide außerhalb der Linse liegen. Von diesen Hauptpunkten aus werden in der modernen Dioptrik alle Strecken auf der Achse gemessen, und man kann weiterhin sagen, daß ihre Kehrwerte, die Konvergenzen oder Brechwerte, auf diese Hauptpunkte bezogen sind (*Hauptpunktsbrechwerte*). Die Brennweite wird deshalb auch von dem zugehörigen Hauptpunkte aus gemessen: die bildseitige von dem bildseitigen oder hinteren Hauptpunkt  $H'$ , die dingseitige von dem dingseitigen oder vorderen Hauptpunkt  $H$ . Ebenso werden Gegenstands- und Bildentfernung von den zugehörigen Hauptpunkten aus gemessen. Bezeichnet man, was eigentlich selbstverständlich ist, als *Flächenscheitel* den Durchstoßpunkt der Achse mit der brechenden Fläche, so kann man sagen: Bei dünnen

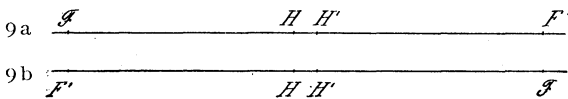


Abb. 9. Die Lage der Grundpunkte (Haupt- und Brennpunkte  $H$ ,  $H'$ ,  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{F}'$ ).

- a) bei einer sammelnden Linse geringer Dicke.  
 b) bei einer zerstreulenden Linse geringer Dicke.

Linsen, das sind besonders zerstreulende (Negativ-) Linsen, ist der Fehler freilich sehr gering, wenn man diese Strecken nicht von den Hauptpunkten, sondern von den

zugehörigen Flächenscheiteln mißt. Denn diese Punkte fallen bei *dünnen* Linsen fast zusammen. In Abb. 9 sind durch die Punkte  $H$ ,  $H'$ ,  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{F}'$  die eben besprochenen Grundpunkte in ihrer Lage auf der Achse für eine gewöhnliche, beiderseits erhabene Sammellinse (a) und eine gewöhnliche, beiderseits hohle Zerstreuungslinse (b) angeben<sup>2)</sup>.

Besteht nur eine einzelne trennende Fläche zwischen zwei verschiedenen Mitteln, so z. B. eine sphärisch geschliffene Glasfläche gegen Luft, so fallen die beiden Hauptpunkte in einen zusammen, und zwar in dem Scheitel der Fläche (s. § 16, 1). Eine gewöhnliche Linse endlicher Dicke in Luft stellt schon ein zusammengesetztes System dar, d. h. ein System mit mehr als einer trennenden Fläche. In einem solchen fallen, wie vorausgreifend bemerkt sei, die Hauptpunkte und damit die Hauptebenen im allgemeinen nicht zusammen, sondern sind durch einen endlichen Abstand  $H H'$  voneinander getrennt. Jedes auch

<sup>1)</sup> Sie sind also hier beide *unwirklich* (virtuell), d. h. *nicht greifbar* (im Gegenstandsraum) und *nicht auffangbar* (im Bildraum).

<sup>2)</sup> Statt von den Hauptpunkten könnte man die Strecken auf der Achse auch von den beiden Brennpunkten aus messen, was namentlich von ABBE geschehen ist, der viel mit einer auf NEWTON zurückgehenden Formel arbeitete. GULLSTRAND aber hat diese Bestimmung zugunsten der Hauptpunkte fast vollständig fallen lassen, so daß wir im allgemeinen auch auf diese Abstandsmessung von den Brennpunkten aus verzichten werden (s. aber § 39, 40).

aus noch so vielen trennenden Flächen zusammengesetzte System, wie z. B. das Auge eines darstellt, besitzt im allgemeinen zwei getrennte Hauptpunkte, die, wie eben ausgeführt, maßgebend sind für die Abmessung wichtiger Strecken, also auch für ihre Kehrwerte.

Die Bedeutung der Grundpunkte liegt in folgendem: Ist uns in einem brechenden System ihre Lage gegeben, so brauchen wir zur Auffindung der Endwerte, d. h. für die Lage und die Größe des Bildes, den tatsächlichen Strahlengang gar nicht zu kennen. Wir dürfen, da ja die beiden Hauptebenen dadurch charakterisiert sind, daß in ihnen die Vergrößerung  $+1$  herrscht, bei der Zeichnung stets die Tatsache benutzen, daß der die erste Hauptebene treffende Strahl die zweite Hauptebene in dem *gleichen* Abstand von der Achse wieder verläßt (s. Abb. 12 bei  $K, K'$  und bei  $L, L'$ ). Wir können also bei dem Zeichenverfahren zur Bildfindung im achsennahen Raum so verfahren, daß wir stets den Durchstoßpunkt der Strahlen in der vorderen Hauptebene durch eine (gestrichelte) *achsenparallele* Gerade mit dem Durchstoßpunkt in der hinteren Hauptebene verbinden. Über die Richtung des ausfahrenden Strahls nach seinem Austritt aus der zweiten Hauptebene ist dabei aber noch nichts ausgesagt.

Es sei ausdrücklich hervorgehoben, daß die hier gegebenen Ausführungen über die Abbildung in den Hauptebenen nur für den achsennahen GAUSSISCHEN Raum gültig sind.

Wir haben damit die vier Grundpunkte, welche in jedem optischen System bekannt sein müssen, wenn man durch sie (auf der ersten Stufe) Lage und Größe des Bildes zu einem gegebenen Gegenstand finden will, besprochen. Wie wir auch noch an Rechenbeispielen (s. S. 130 f.) sehen werden, bedarf es zu schneller Kennzeichnung der Abbildungswirkung zusammengesetzter optischer Systeme, wie es z. B. nicht nur das Auge allein, sondern die uns hier vor allem beschäftigende Verbindung von Auge und Brille darstellt, stets der Kenntnis der Lage der Hauptpunkte und der Brennpunkte. Diese können von vornherein gegeben sein oder müssen mit Hilfe besonderer Formeln, deren Ableitung weiter unten mitgeteilt wird, aus den bekannten Daten (Krümmungsradien der einzelnen Flächen und Brechzahlen der einzelnen Mittel) errechnet werden.

Eine genaue mathematische Ableitung der Hauptpunkte bzw. der Abbildung in den Hauptebenen würde uns hier aber zu weit führen. Es genügt, darauf hinzuweisen, daß sie sich mit Hilfe der HELMHOLTZ-LAGRANGESCHEN Formel:  $n y u = n' y' u'$  geben läßt. Diese besagt, daß bei der Brechung an einer Fläche das Produkt aus Brechzahl  $n$ , Größe  $y$  und Öffnungswinkel  $u$  auf der Gegenstands- und auf der Bildseite unveränderlich (eine optische Invariante) ist. Da nun das Bild der ersten Fläche für die zweite den Gegenstand abgibt und die Bildwinkel der ersten von selbst die Dingwinkel der zweiten werden, so erkennt man leicht, daß die obige Beziehung für eine Folge ausgerichteter Flächen von beliebiger Zahl gilt. Ist z. B. wie bei der Linse in Luft erstes und letztes Mittel gleich, also  $n = n' = 1$ , so ergibt sich die Folgerung, daß  $y u = y' u'$  ist. Kann

man hier nun, was mit einfachen geometrischen Überlegungen zu machen ist, die Knotenpunkteigenschaft der Hauptpunkte (s. S. 23)  $u_h = u'_h$  beweisen, so folgt aus der Beziehung  $y_H u_H = y'_H u'_H$ , wo der Zeiger  $H$  andeutet, daß es sich um Punkte in den Hauptebenen handelt, ohne weiteres:

$$y_H = y'_H \quad \text{und} \quad \frac{y'_H}{y_H} = +1,$$

d. h. die oben zur Kennzeichnung der Hauptebenen benötigte Eigenschaft, daß, da der gegenstands- und der bildseitige Hauptpunktswinkel gleich sind ( $u_H = u'_H$ ), dann auch  $y$  und  $y'$  gleich sein müssen (s. M. v. ROHR [3, 34] zu dieser ganzen Überlegung).

§ 9. *Allgemeines zur Dioptrienlehre.* Die in § 7 gegebene Darstellung für das gebrochene Strahlenbündel bei Vereinigung der Strahlen im Brennpunkt läßt sich unschwer erweitern. Wir haben bisher angenommen, daß durch die Linse parallele Strahlen vereinigt werden, der Gegenstand sich also in unendlicher Entfernung befindet. Nehmen wir jetzt an, daß der abzubildende Punkt  $O$  nicht in unendlicher, sondern in *endlicher* Entfernung gelegen ist. Wenn die Abbildung des opti-



Abb. 10. Die Abbildung wirklicher Punkte  $O$  und  $O_1$  durch eine Sammellinse  $C$  in  $O'$  (auffangbares Bild) und  $O'_1$  (nichtauffangbares Bild);  $a = CO$ ;  $a_1 = CO_1$ ;

$$A = \frac{1}{a}; \quad A_1 = \frac{1}{a_1}; \quad b = CO'; \quad b_1 = CO'_1; \quad B = \frac{1}{b}; \quad B_1 = \frac{1}{b_1}.$$

schen Systems (in der Abb. 10 einer Sammellinse von  $D = +20$  dptr) die gleiche bleibt, so werden jetzt nicht mehr parallele Strahlen, d. h. Strahlen mit der Konvergenz  $= 0$ , auf die Linse fallen, sondern das einfallende Strahlenbündel soll beispielsweise eine gewisse *Divergenz* oder eine negative Konvergenz haben: die Strahlen laufen in der Lichtrichtung nicht zusammen, sondern auseinander. Bei der Brechung wird die Linse je nach dem Grade der Divergenz, d. h. je nach dem Abstand des leuchtenden Punktes von der Linse, verschieden wirken, und es wird durch die gegebene konstante Brechkraft  $D$  der Linse nach der Brechung ein konvergentes, ein paralleles (sofern sich der leuchtende Punkt im vorderen Brennpunkt  $\mathcal{F}$  befindet) oder (bei noch geringerem Abstand des Gegenstandspunktes) ein noch divergentes Strahlenbündel entstehen. Es leuchtet schon aus der Rechtläufigkeit der Abbildung (S. 13) ein, daß *bei geringer Divergenz* des einfallenden Strahlenbündels der Vereinigungspunkt  $O'$  in größerer Entfernung von der Linse liegen muß als der Brennpunkt, weil, wie wir auch sagen können, die Aufgabe, die der Linse erwächst, größer ist als bei parallel auffallenden Strahlen.

Ist schließlich das Strahlenbündel schon vor der Brechung *konvergent*, was nur bei Anwendung einer Hilfslinse denkbar ist (Abb. 11),

da in der freien Natur bei greifbaren (wirklichen) Gegenständen solche Strahlenbündel nicht vorkommen, so wird der Vereinigungspunkt  $O'$  sogar näher an der Linse liegen als der hintere Brennpunkt  $F'$ . Es läßt sich also allgemein vermuten, daß die beliebige Konvergenz des Strahlenbündels vor der Brechung durch die konstante Brechkraft  $D$  der Linse einen konstanten, bei Sammellinsen positiven, bei Zerstreuungslinsen negativen Zuwachs erfährt.

Demnach können wir die Betrachtung, die wir zunächst auf den besonderen Fall der Vereinigung paralleler Strahlen im hinteren Brennpunkt  $F'$  angestellt haben, auch auf jedes beliebige Strahlenbündel im achsennahen Raum anwenden. In Abb. 10 und 11 sei  $O$  der Gegenstand, der durch die Linse  $C$  in  $O'$  auf der Achse abgebildet wird. Die von  $O$  bei konstanter Blendenweite auf die Linse auffallenden Strahlen besitzen einen gewissen Grad der Divergenz (Abb. 10), die in  $O'$  vereinigten Strahlen haben eine bestimmte Konvergenz. Der Ort von

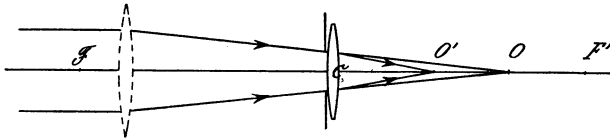


Abb. 11. Die Abbildung eines unwirklichen (durch die gestrichelte Hilfslinse erzeugten) Punktes  $O$  durch eine Sammellinse  $C$  in  $O'$  (auffangbares Bild);

$$a = CO; \quad A = \frac{1}{a}; \quad b = CO'; \quad B = \frac{1}{b}.$$

Gegenstand  $O$  und Bild  $O'$  auf der Achse muß durch die Länge der Strecken  $CO$  bzw.  $CO'$  bestimmt werden. Die ältere Dioptrik rechnete tatsächlich mit diesen Längen oder *Abständen*, während jetzt ihr Kehrwert, d. h. der Konvergenz- oder *Brechwert* (s. die Auseinandersetzungen im § 7), in die Rechenformel eingeht. Diese Kehrwerte werden nach GULLSTRAND allgemein mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnet, so daß, wenn wir den Objektabstand mit  $a$ , den Bildabstand mit  $b$  bezeichnen, die Kehrwerte  $\frac{1}{a} = A$  und  $\frac{1}{b} = B$  sind<sup>1)</sup>. In ihrer Beziehung zur Linse oder Linsenfolge werden wir diese Kehrwerte als Brechwerte (dingseitigen, bildseitigen Brechwert) bezeichnen.

Die Rechnung vereinfacht sich durch dieses ganz allgemein anwendbare Hilfsmittel außerordentlich und ist in dieser Form charakteristisch für die GULLSTRANDSche Methodik.

<sup>1)</sup> Nach der sonst in der deutschen geometrischen Optik üblichen Bezeichnungsweise würde man sagen  $a'$  und nicht  $b$  und dementsprechend den Kehrwert mit  $A'$  und nicht mit  $B$  bezeichnen, wie GULLSTRAND es getan hat. Aus Gründen der einheitlichen Bezeichnung, wie sie in GULLSTRANDSchen Schriften und z. T. auch sonst schon üblich ist, wird die GULLSTRANDSche Bezeichnung aber hier beibehalten werden.



## Die Abbildungsgleichungen.

### 1. Eine dünne Linse in Luft (1. Fall von GAUSS).

§ 10. *Die Formel für die Bildlage (die Lagenformel).* Nach den oben gegebenen Ausführungen ist der Zuwachs, den die Konvergenz  $A$  des dingsseitigen Brechwertes durch die konstante Brechkraft der Linse für den Bildraum erfährt, gegeben durch  $D$ . Wir erhalten damit die Formel für den bildseitigen Brechwert  $B = A + D$ . Dadurch kann, wenn man wieder die Strecken einsetzt  $\left(\frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{f'}\right)$ , ohne weiteres die Lage des Bildes, gemessen von dem hinteren Hauptpunkte, aus ermittelt werden.

Diese Beziehung zwischen der Lage von Gegenstand und Bild bei gegebenem brechendem System läßt sich in folgender Weise mit geometrischen Überlegungen ableiten, die sich auf das LISTINGSche (1) Zeichenverfahren stützen. In der Abb. 12 soll ein kleiner achsenenk-

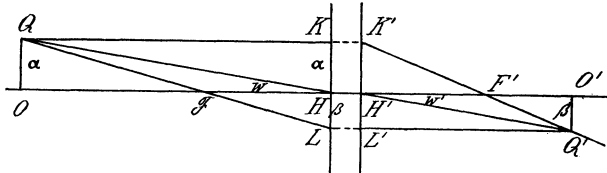


Abb. 12. Das LISTINGSche Zeichenverfahren.

$\alpha = OQ = HK = H'K'$  der Gegenstand,  $\beta = O'Q' = H'L' = HL$  das Bild,  $w = OHQ$ ,  $w' = O'H'Q'$  die Hauptpunktwinkel.

rechter Gegenstand  $OQ$  durch die Linse, die durch ihre beiden Hauptpunkte  $H$  und  $H'$  angedeutet ist, abgebildet werden.

Der Achsenpunkt  $O$  muß wieder auf der Achse, etwa in  $O'$ , liegen. Gehen wir nun von dem seitlichen Punkte  $Q$  aus, dessen Bild wir aufsuchen. Dazu benutzen wir zwei Strahlen, deren Schnitt uns den Bildpunkt  $Q'$  bestimmen wird. Den *ersten* ziehen wir von  $Q$  zur Achse parallel bis zu  $K$  in der ersten Hauptebe; dann ist, wenn wir das Objekt mit  $\alpha$  bezeichnen, von selbst  $\alpha = OQ = HK$ . Nach dem Früheren (S. 15) muß aber auch  $K'$  in der bildseitigen Hauptebe in dem gleichen Achsenabstand liegen, also gelten  $\alpha = HK = H'K'$ . Vor der Brechung achsenparallele Strahlen müssen im Bildraum durch den bildseitigen Brennpunkt  $F'$  gehen, also ist  $K'F'$  die Richtung (oder ein *geometrischer Ort*) für den Bildpunkt  $Q'$ . Den *zweiten* Strahl ziehen wir von  $Q$  nach  $F$  und verlängern ihn, bis er die erste Hauptebe trifft. Da nach den S. 15 gegebenen Ausführungen die zweite Hauptebe in demselben Abstand von der Achse von dem Strahl geschnitten werden muß wie die erste, so gilt für die Lage von  $L'$ :  $HL = H'L'$ . Vor der Brechung vom vorderen Brennpunkt  $F$  ausgehende (oder ihn ent-

haltende) Strahlen verlaufen im Bildraum achsenparallel, womit (als zweiter geometrischer Ort für  $Q'$ ) die Richtung des bildseitigen Strahles nach Durchstoßung der zweiten Hauptebene in  $L'$  gegeben ist. Ziehen wir diese Parallele durch  $L'$ , so schneidet sie auf  $K'F'$  den Punkt  $Q'$  aus. Wir brauchen dann nur noch eine Senkrechte auf die Achse zu fallen, um in  $O'Q' = \beta$  das Bild von  $\alpha = OQ$  zu erhalten. Selbstverständlich gilt  $\beta = O'Q' = H'L' = HL$ . Dieselbe Zeichnung ließe sich für jeden Punkt von  $OQ$  in beliebigem Abstand von der Achse innerhalb des GAUSSISCHEN RAUMES ausführen und ergäbe dann die einzelnen Punkte des achsensenkrechten Bildes  $O'Q'$ .

Drückt man die bei dieser Zeichnung beobachteten Regeln analytisch aus, so erhält man die Formeln für die Bildlage und die Bildgröße in sehr einfacher Weise:

Berücksichtigt man die Ähnlichkeit der Dreiecke  $O\mathcal{F}Q$  und  $H\mathcal{F}L$  (Abb. 12), so findet man, wenn man sich der soeben abgeleiteten Beziehungen für  $\alpha$  und  $\beta$  erinnert:

$$OQ : HL = O\mathcal{F} : H\mathcal{F} \quad \text{d. h.} \quad \alpha : \beta = O\mathcal{F} : H\mathcal{F}.$$

Für die ähnlichen Dreiecke  $H'F'K'$  und  $O'F'Q'$  gilt ganz entsprechend:

$$H'K' : O'Q' = H'F' : O'F' \quad \text{d. h.} \quad \alpha : \beta = H'F' : O'F',$$

woraus für die rechten Seiten der beiden Proportionen folgt:

$$O\mathcal{F} : H\mathcal{F} = H'F' : O'F' \quad \text{oder} \quad \frac{O\mathcal{F}}{H\mathcal{F}} = \frac{H'F'}{O'F'}.$$

Man fügt jetzt auf beiden Seiten  $-1$  hinzu:

$$\frac{O\mathcal{F}}{H\mathcal{F}} - 1 = \frac{H'F'}{O'F'} - 1;$$

auf gemeinsamen Nenner gebracht:

$$\frac{O\mathcal{F} - H\mathcal{F}}{H\mathcal{F}} = \frac{H'F' - O'F'}{O'F'}.$$

Beachtet man, daß nach der Geometrie der geraden Linie (§ 5) gilt  $-H\mathcal{F} = \mathcal{F}H$  und  $-O'F' = F'O'$ , so ergibt sich:

$$\frac{O\mathcal{F} + \mathcal{F}H}{H\mathcal{F}} = \frac{H'F' + F'O'}{O'F'},$$

wo man — wieder nach der Geometrie der geraden Linie — die Zähler zusammenziehen und den Nenner der rechten Seite zerlegen kann:

$$\frac{OH}{H\mathcal{F}} = \frac{H'O'}{O'H' + H'F'}.$$

Setzt man nun für die *Hauptpunktabstände* von Ding und Bild

$HO = a$ ;  $-a = OH$ ;  $H'O' = b$ ;  $-b = O'H'$ ; ferner  $H\mathcal{F} = f$ ;  $H'F' = f'$

ein, so erhält man:

$$\frac{-a}{f} = \frac{b}{-b + f'}$$

Da es sich hier um eine Linse in Luft handelt, so ist nach S. 9  $-f = f'$ , womit die letzte Gleichung wird zu:

$$\frac{a}{f'} = \frac{b}{-b + f'};$$

oder beiderseits den Kehrwert genommen:

$$\frac{f'}{a} = \frac{-b + f'}{b}, \quad \text{woraus} \quad \frac{f'}{a} = -1 + \frac{f'}{b}.$$

Dividiert man nun beide Seiten durch  $f'$ , so erhält man:

$$\frac{1}{a} = -\frac{1}{f'} + \frac{1}{b} \quad \text{und} \quad \frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{f'},$$

was, in der GULLSTRANDSchen Weise geschrieben (nach S. 16 u. S. 17), wird zu der bereits auf S. 17 anschaulich vorbereiteten *Lagenformel* des Bildes:

$$B = A + D, \quad (1)$$

wo  $A$  und  $B$  die *Hauptpunktsbrechwerte* (S. 17) sind (Ziffernbeispiel I, 1, s. S. 128).

§ 11. *Die Formel für die Bildgröße.* Zur Ermittlung der Formel für die *Bildgröße* gehen wir wieder von der Abb. 12 aus. In ihr ist  $\triangle H'F'K' \sim \triangle O'F'Q'$ . Bezeichnen wir wieder das Objekt  $OQ$  mit  $\alpha$  und berücksichtigen, daß nach der Konstruktion ist  $OQ = H'K' = \alpha$  und  $O'Q' = \beta$ , so erhalten wir die Proportion  $\beta : \alpha = O'F' : H'F'$ , oder anders geschrieben:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{O'F'}{H'F'}.$$

Wenn wir die Strecke  $O'F'$  nach der Geometrie der geraden Linie anders schreiben, erhalten wir:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{O'H' + H'F'}{H'F'}.$$

Für  $O'H'$  gilt aber:  $O'H' = -H'O' = -b$ . Setzen wir unsere Streckenbezeichnungen ein, so ergibt sich:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{-b + f'}{f'}.$$

Ersetzen wir nun die Bezeichnungen der Strecken wieder durch die Kehrwerte, d. h. die Konvergenzen für

$$b = \frac{1}{B} \quad \text{und} \quad f' = \frac{1}{D}, \quad \text{so erhalten wir} \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{-\frac{1}{B} + \frac{1}{D}}{\frac{1}{D}}.$$

Der Bruch in dem Zähler auf denselben Nenner gebracht ergibt:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\frac{-D+B}{BD}}{\frac{1}{D}}$$

und ausdividiert:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{(-D+B)D}{BD}, \quad \text{woraus} \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{-D+B}{B}.$$

Da aber, wie oben abgeleitet (1),  $B = A + D$ , ist  $A = -D + B$ ; also eingesetzt:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{A}{B} \quad \text{oder} \quad \beta B = \alpha A \quad (2)$$

(Ziffernbeispiel I, 1, s. S. 128).

Diese Formel besagt, daß das Produkt aus Bildgröße und bildseitigem Hauptpunktsbrechwert gleich ist dem Produkt aus Dinggröße und dingseitigem Hauptpunktsbrechwert, oder anders ausgedrückt: Bildgröße und Dinggröße sind den zugehörigen Hauptpunktsbrechwerten umgekehrt proportional und den zugehörigen Hauptpunktsabständen direkt proportional:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{b}{a}.$$

§ 12. *Eine andere Ableitung der Formel für die Bildgröße.* Ein anderer und noch einfacherer Weg, um die Formel für die Bildgröße zu gewinnen, ist der über die *Hauptpunktswinkel*  $w$ ,  $w'$ . Wir verstehen unter diesen die Winkel, unter denen Ding und Bild von den zugehörigen Hauptpunkten aus erscheinen. In der Abb. 12 sind von den Hauptpunkten  $H$  bzw.  $H'$  aus Geraden nach  $Q$  bzw.  $Q'$  gezogen, die auf der Ding- und Bildseite mit der Achse den Winkel  $w$  bzw.  $w'$  einschließen. Aus der Zeichnung ist ohne weiteres die Beziehung abzuleiten:  $\text{tg } w = \frac{OQ}{OH}$  und  $\text{tg } w' = \frac{O'Q'}{O'H'}$ . Unter Berücksichtigung des Umstandes, daß die Größe von Ding und Bild in dem hier allein behandelten fadenförmigen Raum nur klein sein kann, dürfen wir statt der Tangenten der Winkel die Winkel selbst einsetzen (s. § 7). Wenn wir ferner die Strecken (Hauptpunktsabstände) und die oben eingeführte Bezeichnung für Ding ( $\alpha$ ) und Bild ( $\beta$ ) einführen, so erhalten wir die Beziehung:

$$w = \frac{OQ}{OH} = \frac{\alpha}{-a} \quad (a)$$

und

$$w' = \frac{O'Q'}{O'H'} = \frac{\beta}{-b}. \quad (b)$$

Das Verhältnis von  $w$  zu  $w'$  ist dann: \*

$$\frac{w'}{w} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{a}{b}. \quad (c)$$

Der Wert von  $\frac{a}{b}$  kann aber aus der Lagenformel  $\left(\frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{f'}\right)$  ohne weiteres abgeleitet werden, da man ja nur beide Seiten dieser Gleichung mit  $a$  zu multiplizieren hat, und wir erhalten:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{a} + \frac{a}{f'}.$$

Unter Berücksichtigung, daß  $f' = -f$  ist, ergibt sich:

$$\frac{a}{b} = 1 + \frac{a}{-f}. \quad (d)$$

Mit Hilfe der Abb. 12 läßt sich  $\frac{a}{-f}$  unschwer anders ausdrücken:

$$\frac{a}{-f} = \frac{HO}{\mathcal{F}H} = \frac{H\mathcal{F} + \mathcal{F}O}{\mathcal{F}H} = -1 + \frac{\mathcal{F}O}{\mathcal{F}H} \quad \left(\text{da } \frac{H\mathcal{F}}{\mathcal{F}H} = \frac{H\mathcal{F}}{-H\mathcal{F}} \text{ ist}\right).$$

Wir haben schon oben (S. 19) gesehen, daß für  $\frac{\mathcal{F}O}{\mathcal{F}H}$  oder  $\frac{O\mathcal{F}}{H\mathcal{F}}$  die Beziehung bestand  $\frac{O\mathcal{F}}{H\mathcal{F}} = \frac{\alpha}{\beta}$ . Setzen wir diesen Ausdruck in die Gleichung ein, so erhalten wir:

$$\frac{a}{-f} = -1 + \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{oder} \quad 0 = -1 - \frac{a}{-f} + \frac{\alpha}{\beta}.$$

Wir addieren hierzu die oben abgeleitete Gleichung (d)

$$\frac{a}{b} = 1 + \frac{a}{-f} \quad \text{und erhalten} \quad \frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta} \text{ 1) }.$$

Setzt man wieder die GULLSTRANDSchen Bezeichnungen (Kehrwerte von  $a$  und  $b$ ) ein, so kann man diesen Ausdruck auch schreiben:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\frac{1}{B}}{\frac{1}{A}}, \quad \text{woraus} \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{A}{B} \quad \text{oder} \quad \alpha A = \beta B. \quad (2)$$

Wir haben damit in der GULLSTRANDSchen Ausdrucksweise die Formel für die Bildgröße, von der wir wiederholt Gebrauch machen werden.

1) Die Ableitung läßt sich auch kürzer geben: Beachten wir, daß nach § 13 die zugeordneten Hauptpunktswinkel  $w$ ,  $w'$  einander gleich sind, so erhalten wir unmittelbar durch Division der beiden Gleichungen (a) und (b)  $\frac{w'}{w} = 1 = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{a}{b}$  und daraus, wie es auch sein muß:  $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{b}{a}$ .

Auch sie ist bezogen auf die Hauptpunkte, da in ihr die Größen  $A$  und  $B$  vorkommen.

Es sei nochmals betont, daß diese Formel zunächst nur Gültigkeit für dünne Linsen in Luft hat und sich nur auf den fadenförmigen GAUSSISCHEN Raum bezieht.

§ 13. *Die Knotenpunkteigenschaft der Hauptpunkte.* Setzt man  $\frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta}$  in den oben entwickelten Ausdruck [§ 12 (c)] für das Verhältnis des Einfallswinkels  $\frac{w'}{w} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{a}{b}$  ein, so erhält man den Wert  $\frac{w'}{w} = 1$ , da  $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{b}{a}$ . Daraus ergibt sich die wichtige Beziehung, daß  $w' = w$  ist. Drückt man die Tatsache  $w' = w$  in Worten aus, so heißt das: Bei einer Linse in Luft erscheint der Gegenstand vom vorderen Hauptpunkt unter demselben Winkel  $w$  wie das Bild vom hinteren Hauptpunkt. Der unter dem Strahl-Achsenwinkel  $w$  nach dem Hauptpunkt  $H$  gezogene Strahl läuft von  $H'$  aus unter dem gleichen Winkel  $w$  weiter: man nennt das die *Knotenpunkteigenschaft der Hauptpunkte*.

Die von LISTING eingeführten Knotenpunkte werden in der modernen Dioptrik im allgemeinen nur noch selten verwendet. Bei dem brechenden System in Luft besitzen aber die Hauptpunkte die Eigenschaften der Knotenpunkte, die, wie oben entwickelt, dahin gehen, daß ein- und ausfallender Strahl nur eine Parallelverschiebung um den Betrag des Abstandes  $i$  der Knoten- (Haupt-) Punkte erfahren, aber die gleiche Richtung behalten.

## 2. Die Brechung an einer einzigen trennenden Kugelfläche (2. Fall von GAUSS).

Die soeben abgeleiteten Formeln für die Lage und Größe des Bildes gelten zunächst nur für dünne Linsen in Luft (1. Fall von GAUSS). Handelt es sich aber, wie z. B. beim linsenlosen Auge, um eine einzige Brechung, bei der das erste und letzte Mittel nicht gleich, sondern verschieden sind, so lassen sich die eben abgeleiteten Formeln zunächst nicht anwenden, es müssen erst andere entwickelt werden (2. Fall von GAUSS).

§ 14. *Die Formel für die Bildlage.* Wir nehmen an, daß die Strahlen mit der Achse nicht nur sehr kleine Winkel (sog. 0-Strahlen) bilden, sondern daß es sich um endliche Winkel handelt. In der Abb. 13 bedeuten

- $S$  = Scheitel der brechenden Fläche,
- $B$  = Einfallspunkt des Strahles  $BO$ ,
- $O$  = Schnittpunkt des einfallenden Strahles  $BO$  mit der Achse,
- $C$  = Krümmungsmittelpunkt der brechenden Kugelfläche,

- $n$  = Brechzahl des ersten Mittels,  
 $n'$  = Brechzahl des zweiten Mittels, wobei  $n < n'$ ,  
 $i$  = Einfallswinkel, d. h. Winkel zwischen einfallendem Strahl  $BO$   
 und Lot (Radius)  $BC$  im Einfallspunkt,  
 $u$  = Neigungswinkel des Strahles  $BO$ ,  
 $i'$  = Brechungswinkel, d. h. Winkel zwischen gebrochenem Strahl  
 $BO'$  und Lot  $BC$  im Einfallspunkt,  
 $u'$  = Neigungswinkel des gebrochenen Strahles  $BO'$ ,

$\left. \begin{array}{l} SC \\ BC \end{array} \right\} = r$ , Krümmungsradius der brechenden Fläche, stets gemessen  
 vom Scheitel oder einem beliebigen Flächenpunkt zum Mittel-  
 punkt.

Die Größen  $r$ ,  $n$ ,  $n'$ ,  $u$  sowie  $O$  sind als gegeben anzusehen.

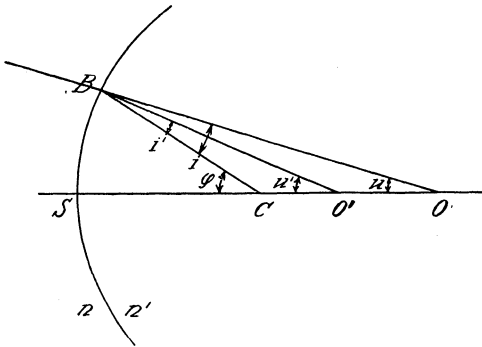


Abb. 13. Die Brechung eines unter endlicher Neigung  $u$  gegen die Achse auf eine Kugelfläche fallenden Strahls.

$$SO = s; \quad SO' = s'; \quad SC = BC = r;$$

$$\sphericalangle BCS = \varphi; \quad \sphericalangle BOS = u; \quad \sphericalangle BO'S = u'.$$

Der einfallende Strahl ist in seiner Lage eindeutig bestimmt durch den Schnittpunkt auf der Achse ( $O$ ) und den Neigungswinkel  $u$ , woraus sich die Lage von  $B$  und die Größe des Einfallswinkels  $i$  bestimmen läßt. In der Abb. 13, wo es sich um einen mit der Achse konvergent einfallenden Strahl handelt, ist der Punkt  $O$  unwirklich, weil ja der einfallende Strahl den Punkt  $O$  nicht erreicht, sondern vorher durch die Brechung in  $B$  in eine andere Richtung abgelenkt wird. Der Strahl  $BO$  wäre also durch die Strecke  $SO = s$  und den

Winkel  $u$  mit der Achse eindeutig bestimmt; man könnte mithin  $s$  und  $u$  seine *Koordinaten* nennen; umgekehrt müssen zu seiner Bestimmung  $s$  und  $u$  gegeben sein, was nach unserer Voraussetzung auch zutrifft. Ebenso wird der Bildpunkt  $O'$  auf der Achse durch den  $BO$  zugeordneten (konjugierten) Strahl  $BO'$  ausgeschnitten werden. Wir kennen ihn, wenn es gelingt, die Strecke  $SO' = s'$ , d. h. seinen Abstand von dem Scheitel  $S$  der Fläche, und den Winkel  $u'$  des gebrochenen Strahls mit der Achse, also die bildseitigen Koordinaten des gebrochenen Strahls, zu ermitteln.

Wir gehen aus von dem Dreieck  $BCO$ . Nach dem Sinussatz verhalten sich in jedem Dreieck die Seiten zueinander wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel. Demnach ist im Dreieck  $BCO$ :

$$\frac{\sin i}{\sin u} = \frac{CO}{BC}.$$

$CO$  nach der Geometrie der geraden Linie zerlegt, ergibt:

$$\frac{\sin i}{\sin u} = \frac{CS + SO}{BC}.$$

Setzt man die oben eingeführten Streckenbezeichnungen ein, so wird:

$$\frac{\sin i}{\sin u} = \frac{-r + s}{r} \quad \text{oder} \quad \frac{\sin i}{\sin u} = \frac{s - r}{r}. \quad (\text{a})$$

Hieraus ist  $i$ , der Einfallswinkel des Strahles  $BO$ , zu ermitteln, da  $s$ ,  $r$  und  $u$  gegeben sind.

Nach dem Brechungsgesetz (s. § 4) ist  $n \sin i = n' \sin i'$ . Winkel  $i'$ , der Brechungswinkel, der in dem Dreieck  $BCO'$  vorkommt, läßt sich also aus dem Brechungsgesetz berechnen, da jetzt  $i$ ,  $n$  und  $n'$  gegeben sind.

Die ganz entsprechende Ableitung aus dem Dreieck  $BCO'$  ergibt:

$$\frac{\sin i'}{\sin u'} = \frac{CO'}{BC}.$$

$CO'$  wieder nach der Geometrie der geraden Linie zerlegt, ergibt:

$$\frac{\sin i'}{\sin u'} = \frac{CS + SO'}{BC}.$$

Setzt man den Bildabstand vom Flächenscheitel  $SO' = s'$  und  $r$  ein, so erhält man:

$$\frac{\sin i'}{\sin u'} = \frac{-r + s'}{r}, \quad \frac{\sin i'}{\sin u'} = \frac{s' - r}{r}. \quad (\text{b})$$

Der zunächst noch unbekannte Winkel  $u'$  ergibt sich aus folgendem. Der Winkel  $\varphi$  an dem Dreieck  $BCO$  ist Außenwinkel zu den beiden Dreiecken  $BCO$  und  $BCO'$ . Da der Außenwinkel gleich der Summe der beiden gegenüberliegenden Innenwinkel eines Dreiecks ist, so gilt:

$$\varphi = u + i \quad \text{und auch} \quad \varphi = u' + i', \quad \text{also} \quad u' + i' = u + i; \\ \text{daraus} \quad u' = u + i - i' \quad (\text{und auch} \quad u' - u = i - i'). \quad (\text{c})$$

$i'$  wurde oben schon aus dem Brechungsgesetz berechnet. Auch  $i$  und  $u$  sind gegeben, also kann jetzt auch  $u'$  berechnet werden und weiterhin aus der oben abgeleiteten Formel (b) der Wert für  $s'$  und damit die Lage von  $O'$  auf der Achse. Wir haben damit den gebrochenen Strahl vollkommen bestimmt. Alles bisher abgeleitete gilt streng und ist nicht auf den achsennahen Raum beschränkt.

Gehen wir jetzt zu dem besonderen Fall über, daß es sich um 0-Strahlen handelt (d. h. um den achsennahen Raum), wo also die Winkel  $i$  und  $i'$  sehr klein sind, so ist es erlaubt (s. § 4), die Winkel für ihre



Sinus einzusetzen. Wir können deshalb die eben entwickelten beiden Formeln (a) und (b):

$$\frac{\sin i}{\sin u} = \frac{s-r}{r} \quad \text{und} \quad \frac{\sin i'}{\sin u'} = \frac{s'-r}{r}$$

auch schreiben:

$$\frac{i}{u} = \frac{s-r}{r} \quad \text{und} \quad \frac{i'}{u'} = \frac{s'-r}{r}.$$

Es ergibt sich also:

$$u = \frac{ri}{s-r} \quad (d)$$

und

$$u' = \frac{ri'}{s'-r}. \quad (e)$$

Subtrahiert man die erste Gleichung (d) von der zweiten (e), so ergibt sich:

$$u' - u = \frac{ri'}{s'-r} - \frac{ri}{s-r}.$$

Es war aber  $u' - u = i - i'$  (c), also

$$\frac{ri'}{s'-r} - \frac{ri}{s-r} = i - i', \quad \text{woraus} \quad \frac{ri'}{s'-r} + i' = \frac{ri}{s-r} + i;$$

auf gemeinsamen Nenner gebracht:

$$\frac{ri' + s'i' - ri'}{s'-r} = \frac{ri + si - ri}{s-r}, \quad \text{woraus} \quad \frac{s'i'}{s'-r} = \frac{si}{s-r}.$$

Man erweitert jetzt die linke Seite durch  $n'$ , die rechte Seite durch  $n$ :

$$\frac{n's'i'}{n'(s'-r)} = \frac{nsi}{n(s-r)}.$$

Für kleine Winkel lautet das Brechungsgesetz  $ni = n'i'$  (§ 4). Man kann also auf der linken Seite  $n'i'$ , auf der rechten  $ni$  weglassen. Es ergibt sich dann:

$$\frac{s'}{n'(s'-r)} = \frac{s}{n(s-r)}.$$

Die Kehrwerte genommen und beide Seiten durch  $r$  dividiert:

$$\frac{n'(s'-r)}{s'r} = \frac{n(s-r)}{sr}; \quad (f)$$

ausmultipliziert:

$$\frac{n's'}{s'r} - \frac{n'r}{s'r} = \frac{ns}{sr} - \frac{nr}{s'r};$$

beide Seiten mit  $-1$  multipliziert und die einzelnen Brüche durch Hebung auf die einfachste Form gebracht:

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n'}{r} = \frac{n}{s} - \frac{n}{r}, \quad \text{woraus} \quad \frac{n'}{s'} = \frac{n}{s} + \frac{n'}{r} - \frac{n}{r}$$

und endlich

$$\frac{n'}{s'} = \frac{n}{s} + \frac{n' - n}{r}. \quad (3)$$

Damit haben wir die Formel für die Bildlage bei Abbildung durch eine brechende Fläche im achsennahen Raum entwickelt, denn mit ihrer Hilfe kann  $s'$ , d. h. der Bildabstand vom Flächenscheitel, berechnet werden, wenn  $n$ ,  $n'$ ,  $r$  und  $s$  (der Abstand des Objekts vom Flächenscheitel) gegeben sind (Ziffernbeispiel II, 2, S. 134).

Es muß hervorgehoben werden, daß diese Ableitung zunächst nur für den Fall *konvergent* auffallender Strahlen gegeben worden ist. Derartige Strahlen kommen bei reellen Gegenständen aber nicht vor. Es handelt sich hier um ein *virtuelles* Objekt, was daraus hervorgeht, daß das Objekt  $O$  rechts von der brechenden Fläche gelegen ist. Die Ableitung für ein *reelles* Objekt kann Punkt für Punkt wiederholt werden und führt, da bei unserer Ableitung die Geometrie der geraden Linie benutzt wurde, natürlich zu dem gleichen Ergebnis, nur wäre größere Aufmerksamkeit bei der Zeichenbestimmung der Winkel notwendig gewesen.

*Erörterung.* Diese Lagenformel (3) für das Bild ist schon sehr alt, sie hat aber durch GULLSTRAND eine neue Bedeutung gewonnen. Setzen wir  $b$  statt  $s'$  und  $a$  statt  $s$ , d. h. den Bildabstand und den Objektabstand in der Bezeichnung, wie er auf S. 19 bei der Ableitung der Formel für eine dünne Linse in Luft angenommen wurde, so wird die Gleichung sehr ähnlich der dort ermittelten  $\left(\frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{f'}\right)$ , nur daß hier die Kehrwerte von  $a$  und  $b$  jeweils noch mit der Brechzahl des Gegenstands- bzw. Bildraums multipliziert sind. Dementsprechend müssen dann die Strecken  $a$  und  $b$  durch die zugehörige Brechzahl dividiert werden. Damit sind aber diese Strecken *auf Luft* zurückgeführt (die SCHOENSchen *Luftwerte*). Es kann eben  $\frac{n'}{s'} = B$ ;  $\frac{n}{s} = A$  gesetzt werden, und man kommt dann genau auf die von der dünnen Linse in Luft her bekannte Formel (s. S. 20).

Die mit der zugehörigen Brechzahl multiplizierten Kehrwerte sind die *Brechwerte in Luft* oder die *reduzierten Konvergenzen*<sup>1)</sup>.

1) Zur Veranschaulichung des eben Ausgeführten dient es vielleicht, wenn wir uns daran erinnern, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes der Brechzahl (dem Brechungsvermögen) des Mittels, in dem die Fortpflanzung erfolgt, umgekehrt proportional ist. Wir können also, wenn wir in zwei verschiedenen Mitteln

Näherer Erläuterung bedarf noch der Ausdruck  $\frac{n' - n}{r}$ . GULLSTRAND setzt ihn  $= \frac{1}{f'} = D$ . Er bedeutet also die Brechkraft der Fläche. Daß die Flächenbrechkraft  $D$  dem Radius der Fläche umgekehrt und dem Unterschiede der Brechzahlen der beiden durch die Fläche getrennten Mittel direkt proportional ist, bedarf keiner näheren Erörterung. Der Ausdruck ist von selbst auf Luft bezogen, denn man sieht aus der aus (3) unmittelbar folgenden Beziehung  $\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = D$ , daß er den Unterschied des bildseitigen und des dingseitigen Brechwerths in Luft (der beiden reduzierten Konvergenzen) angibt. Dem entspricht die aus (1)  $B = A + D$  abzuleitende Gleichung  $B - A = D$ . Damit ist also auch die hintere Brennweite  $f'$  einer einzelnen Fläche auf Luft bezogen. Wollte man die wirkliche Länge der Brennweite ( $\bar{f}$  <sup>1)</sup>) in dem Mittel mit  $n'$  kennen, so müßte man  $f'$  mit der Brechzahl  $n'$  dieses Mittels multiplizieren, also  $n'f'$  bilden, was später bei einzelnen Rechnungen vorkommen wird.

Wie man sieht, ergibt so auch der zweite Fall von GAUSS (eine trennende Fläche) dieselbe Lagengleichung  $B = A + D$  wie der erste (für dünne Linsen in Luft), wenn man sich dieser GULLSTRANDSchen Schreibweise bedient und die in Betracht kommenden Werte durch Multiplikation (der Brechwerthe) bzw. Division (der Abstände) mit der zugehörigen Brechzahl der Mittel, in denen sich die Strecken (z. B.  $s$ ,  $s'$ ) befinden, behandelt.

In gleicher Weise geht man vor, wenn bei einer ganzen Flächenfolge (etwa der des Auges) die Grenzmittel verschieden sind. Beim Auge ist die Brechzahl des Glaskörpers  $n' = 1,336$ . Dann müssen alle auf den Glaskörper bezogenen Strecken durch Division mit  $n' = 1,336$  auf Luft gebracht werden (Rechenbeispiel I, 2, S. 129).

$n_1$  und  $n_2$  die zugehörige Lichtgeschwindigkeit  $v_1$  und  $v_2$  haben, sagen, es verhält sich  $v_1 : v_2 = n_2 : n_1$ . Daraus ergibt sich  $n_2 \cdot v_2 = n_1 \cdot v_1$ . Nehmen wir den Fall, daß für das eine Mittel  $n_1 = 1$  (Luft) wird, so erhalten wir die Beziehung  $n_2 \cdot v_2 = v_1$ , d. h. es muß die Geschwindigkeit des Lichtes im zweiten Mittel mit dem Brechungsvermögen dieses Mittels multipliziert werden, um die gleiche Lichtgeschwindigkeit wie in Luft zu erhalten. Das ist aber genau das gleiche, was wir oben für die Reduktion der Konvergenzen oder Brechwerthe auf Luft ausgeführt haben. Bezeichnen wir den Konvergenzwert im ersten Mittel mit  $C_1$ , den im zweiten Mittel mit  $C_2$ , so erhalten wir die Beziehung  $C_2 n_2 = C_1$ . Setzen wir statt der Brechwerthe die Kehrwerte der Strecken, also  $C_2 = \frac{1}{c_2}$  und  $C_1 = \frac{1}{c_1}$ , so wird die letzte Gleichung zu:

$$\frac{1}{c_2} \cdot n_2 = \frac{1}{c_1}, \text{ woraus } c_1 \cdot n_2 = c_2 \text{ oder } c_1 = \frac{c_2}{n_2},$$

was eben bedeutet, daß die Strecke  $c_2$  im zweiten Mittel, sobald es von Luft verschieden ist, mit der Brechzahl des zugehörigen Mittels dividiert werden muß.

<sup>1)</sup> Mit der Überstreichung soll angedeutet werden, daß es sich um die wirklichen Längen in einem Mittel handelt, dessen Brechzahl von 1 abweicht.

§ 15. *Die Formel für die Bildgröße.* Wir gehen wieder (s. Abb. 14) davon aus, daß sich auf der Achse der Kugelfläche (durch  $S$ ) ein kleines, senkrecht stehendes Objekt  $OO_1 = \alpha$  befindet.  $O'O'_1 = \beta$  sei sein achsensenkrecht umgekehrtes Bild. Wir benutzen zur Konstruktion des Bildes den von  $O_1$  auf die brechende Fläche senkrecht auffallenden Strahl  $O_1C$ , der als solcher ungebrochen hindurchgehen muß und auf der Senkrechten in  $O'$  den Bildpunkt von  $O_1$ , nämlich  $O'_1$ , ausschneidet. Die Lage von  $O'$  ist durch die Gleichung für die Bildentfernung  $B = A + D$  bestimmt (bzw.  $\frac{n'}{s'} = \frac{n}{s} + \frac{n' - n}{r}$ ). Die Bildgröße ist bereits mit  $\beta$  bezeichnet worden.

Im übrigen ist die Bezeichnungsweise dieselbe wie in der Abb. 13. Nur ist hier zu beachten, daß es sich um einen wirklichen Gegenstand handelt, während dort ein unwirkliches Ding angenommen worden war.

In der Abb. 14 ist  $\triangle COO_1 \sim \triangle CO'O'_1$ . Es gilt also die Proportion:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{CO'}{CO};$$

$CO'$  bzw.  $CO$  wieder zerlegt nach der Geometrie der geraden Linie:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{CS + SO'}{CS + SO}.$$

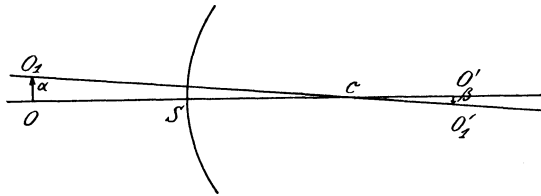


Abb. 14. Die Vergrößerung bei der Abbildung durch eine einzelne Kugelfläche.

Setzt man die Bezeichnungen  $r$ ,  $s$  und  $s'$  ein, so erhält man:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{-r + s'}{-r + s} \quad \text{oder} \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{s' - r}{s - r}. \quad (a)$$

Wir hatten oben S. 26 (f) gefunden:

$$\frac{n'(s' - r)}{s'r} = \frac{n(s - r)}{sr}, \quad \text{gibt} \quad \frac{s' - r}{s - r} = \frac{ns'r}{n'sr}.$$

woraus:

$$\frac{s' - r}{s - r} = \frac{n}{s} \cdot \frac{s'}{n'}.$$

Diesen Ausdruck für  $\frac{s' - r}{s - r}$  in (a) eingesetzt, ergibt:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{n}{s} \cdot \frac{s'}{n'} \quad \text{oder} \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\frac{n}{s}}{\frac{n'}{s'}}.$$

Es war aber  $\frac{n}{s} = A$  (s. S. 27) und  $\frac{n'}{s'} = B$  gesetzt worden. Diese Bezeichnungen verwendet, ergibt:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{A}{B} \quad \text{oder} \quad \beta B = \alpha A. \quad (2)$$

Wie man sieht, ist auch diese Formel, da wir die Werte für die Strecken und ihre Kehrwerte (Konvergenzen) auf Luft bezogen (reduziert) haben, identisch mit der Formel für die Bildgröße, die wir für dünne Linsen in Luft gefunden haben. Diese Formel gilt also ebenfalls ganz allgemein.

Das Verhältnis  $\beta : \alpha$ , der Vergrößerungskoeffizient, ist mit  $\varkappa$  bezeichnet worden. Es läßt sich deshalb diese Formel auch schreiben:

$$\varkappa = \frac{A}{B} \quad \text{oder} \quad A = \varkappa \cdot B.$$

Nun ist nach der Lagengleichung (1)  $B = A + D$ . Setzt man diesen Wert für  $B$  ein, so erhält man:

$$\varkappa = \frac{A}{A + D};$$

Zähler und Nenner durch  $A$  dividiert, gibt:

$$\varkappa = \frac{1}{1 + \frac{D}{A}}. \quad (4)$$

Damit haben wir die Formel für den Vergrößerungskoeffizienten in seiner Abhängigkeit von  $A$  und  $D$  abgeleitet, und zwar ganz allgemein für beide GAUSSISCHE Grundfälle (Ziffernbeispiel III, S. 132).

§ 16. *Die Erörterung der Formeln (1), (2) und (4) für wichtige Sonderfälle.*

1. Für den Fall, daß  $\varkappa = +1$  werden soll, wie bei den Hauptpunkten, wo Bild und Objekt gleich groß und gleichgerichtet sind, ist die Forderung zu erheben, daß  $\frac{D}{A} = 0$  wird, denn nur dann kann  $\varkappa$  den Wert  $+1$  annehmen. Da  $D$  immer einen endlichen Wert besitzen muß, sonst wäre ja eine Brechungswirkung überhaupt nicht möglich, so muß für diesen Fall  $A = \frac{1}{a} = \infty$  werden. Das kann nur dann eintreten, wenn  $a = 0$ , d. h. der Gegenstandsabstand gleich 0 wird. Es muß sich also der Gegenstand bei *einer* brechenden Fläche im Flächenscheitel, von dem ja (siehe die obigen Ableitungen) Gegenstand und Bildabstand gemessen wurden, befinden oder bei der Linse in Luft in der vorderen Hauptebene, weil hier die Entfernung von den Hauptpunkten aus gemessen wird. Da nun nach der Lagengleichung  $B = A + D$  ist, so muß, wenn  $A = \infty$  wird, auch  $A + D = \infty$  sein, da ja der Zuwachs von  $D$  an dem Wert  $\infty$  nichts mehr ändert. Infolgedessen ist auch  $B$  in diesem Fall  $\infty$  und demgemäß der Kehrwert  $b = 0$ . Es muß also auch hier der Bildabstand gleich 0 werden, d. h. bei *einer* trennenden Fläche fällt auch der bildseitige Hauptpunkt in den Flächenscheitel oder bei der Linse in Luft in die hintere Hauptebene. Bei einer

einzelnen trennenden Fläche fallen demnach die beiden Hauptpunkte in dem Flächenscheitel zusammen.

2. Wird  $a = \infty$ , d. h. befindet sich das Objekt in unendlicher Entfernung, so ist:

$$\frac{1}{a} = A = 0.$$

Es verwandelt sich dann die Formel  $B = A + D$  in die Gleichung

$$B_{(A=0)} = D^1) \quad \text{oder} \quad \frac{1}{b_{(A=0)}} = \frac{1}{f'} \quad \left( \text{da ja } D = \frac{1}{f'} \text{ ist} \right).$$

Es wird also  $b_{(A=0)} = f'$ , d. h. für parallele Strahlen ist die Bildweite gleich der Brennweite.

3. Für den Fall, daß der Bildabstand  $b = \infty$  wird, die Strahlen also im Bildraum parallel verlaufen, mithin  $\frac{1}{b} = B = 0$  wird, verwandelt sich die Lagengleichung  $B = A + D$  in die Formel:

$$0 = A_{(B=0)} + D \quad \text{oder} \quad A_{(B=0)} = -D$$

oder

$$\frac{1}{a_{(B=0)}} = -\frac{1}{f'} \quad \text{und somit} \quad a_{(B=0)} = -f',$$

d. h. für parallele Strahlen im Bildraum liegt der dingseitige Brennpunkt um  $f'$  nach links vom vorderen Hauptpunkt  $H$ . Bei einer einzelnen trennenden Fläche wird dabei der Abstand vom Scheitel, bei dünnen Linsen in Luft von dem auch im Linsenscheitel anzunehmenden Hauptpunkt aus gemessen. Wie man sieht, sind so in beiden Fällen, sofern die Abstände auf Luft bezogen sind, die vordere und hintere Brennweite der absoluten Größe nach *gleich*, haben aber *entgegengesetztes* Vorzeichen, d. h.  $f = -f'$ . Bei einer einzelnen trennenden Fläche muß ihr Luftwert noch mit der Brechzahl  $n'$  dieses Mittels multipliziert werden ( $n' \cdot f'$ ), um den tatsächlichen Wert der Brennweite  $\bar{f}$  im dichteren Mittel festzustellen (s. auch S. 28).

§ 17. *Die Formel für die Bildgröße bei sehr weit entfernten Gegenständen.* Die Ermittlung der Bildgröße aus der Formel  $\alpha A = \beta B$  wird unmöglich, wenn sich das Ding in sehr großer oder unendlicher Entfernung befindet, wie z. B. der Mond. Hier wird  $a = \frac{1}{A} = \infty$ . In diesem Fall wird dann  $A = 0$ . Da wir die Größe von  $\alpha$ , dem Objekt, in diesem Fall nicht kennen, sein Durchmesser aber ebenfalls außerordentlich groß ist, so daß wir ihn praktisch im Vergleich zu den Entfernungen im Bildraum bzw. den Abmessungen des brechenden Systems

<sup>1)</sup> Der Ausdruck  $B_{(A=0)}$  soll bedeuten: der Wert von  $B$  für den Fall, daß  $A = 0$  ist.

unendlich setzen können, so ergibt sich, daß  $\alpha \cdot A = \infty \cdot 0$  wird. Bekanntlich wird aber durch diese Form kein bestimmter Wert angegeben. In diesem Falle muß man, wenn man die Bildgröße ermitteln will, in anderer Weise vorgehen. Man bestimmt den Winkel, unter welchem vom vorderen Hauptpunkt des Systems aus der Gegenstand, also die Mondscheibe, erscheint. Dies läßt sich mit Hilfe von Winkelmeßgeräten unschwer erreichen. Der Mondrand erscheint unter  $17'$ , wenn die Achse des Instruments auf die Mondmitte eingestellt ist. Dieser Winkel ist aber dann gegeben, wenn das Verhältnis (s. Abb. 15) von  $OQ : OH = 1 : 200$ .  $\frac{1}{200}$  ist nämlich der Wert für  $\text{tg } 17'$ , d. h. der Mondhalbmesser erscheint unter einem Winkel von  $17'$ .

In der Abb. 15 ist also  $\text{tg } w = \frac{OQ}{OH}$ . Um Vorzeichenfehler zu vermeiden, gehen wir, wie schon auf S. 10 bemerkt, bei dem Durchlaufen der Strecken für die trigonometrische Tangente immer vom rechten Winkel aus und erhalten dann für  $w$  ein Vorzeichen, wie es in der deutschen rechnenden Optik üblich ist.  $OQ$ , den fernen Gegenstand, bezeichnen wir mit

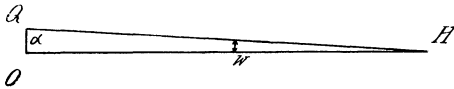


Abb. 15. Die scheinbare Größe.

$$\text{tg } w = \frac{OQ}{OH} = -\frac{\alpha}{a}.$$

$\alpha$ , demnach ist  $\text{tg } w = \frac{\alpha}{OH}$ ,

mithin bei dieser Lage des

Gegenstandes, da  $\alpha$  aufrecht vorausgesetzt ist, eine positive Größe. Nach der Geometrie der geraden Linie ist aber  $OH = -HO$ . Da wir  $HO$ , den Abstand des Gegenstandes vom vorderen Hauptpunkte, mit  $a$  bezeichnen, ist  $OH = -a$ , und wir erhalten:

$$\text{tg } w = \frac{\alpha}{-a}.$$

Da nun gilt

$$\frac{1}{-a} = -A,$$

so ist

$$\text{tg } w = -\alpha \cdot A. \quad (\text{a})$$

Multipliziert man beide Seiten mit  $-1$ , so erhält man:

$$\alpha \cdot A = -\text{tg } w.$$

Berücksichtigt man, daß es bei kleinen Winkeln (bei unserer Genauigkeit bis zu etwa  $5^\circ$ ) erlaubt ist, statt der Tangente das Bogenmaß des Winkels selbst einzusetzen, so erhalten wir:

$$\alpha \cdot A = -w.$$

Nun ist aber nach der zweiten GULLSTRANDSchen Gleichung auch:

$$\alpha A = \beta B,$$

so daß auch

$$-w = \beta B. \quad (b)$$

Aus der Lagengleichung ( $B = A + D$ ) ergab sich, wie § 16, 2 erwähnt, für den Fall, daß  $a = \infty$  wird, also der Gegenstand unendlich fern ist, mithin  $A = 0$  wird, die Gleichung:

$$B_{(A=0)} = 0 + D, \quad \text{also} \quad B_{(A=0)} = D.$$

Infolgedessen nimmt für ein unendlich fernes Objekt die Vergrößerungsformel die Form an:

$$-w = \beta D \quad (5)$$

und daraus

$$\beta = -\frac{w}{D}.$$

Da  $D = \frac{1}{f}$  ist, so erhalten wir:

$$\beta = -w \cdot f. \quad (5a)$$

Das —-Zeichen vor dem Produkt der beiden positiven Größen deutet an, daß es sich bei  $f > 0$ , d. h. bei Sammellinsen, um ein *umgekehrtes* Bild, bei  $f < 0$ , also bei Zerstreuungslinsen, um ein *aufrechtes* Bild handelt, denn im ersten Fall wird das Produkt  $-w \cdot f$  negativ, im zweiten positiv.

Diese Formel ermöglicht es, wenn man den Winkel  $w$  kennt, unter dem ein unendlich ferner Gegenstand erscheint, aus der Brennweite des brechenden Systems die Bildgröße zu ermitteln. In dem oben angenommenen Beispiel des Mondes, dessen Halbmesser im Mittel unter einem Gesichtswinkel von  $17'$ , dessen Durchmesser also unter  $34'$  erscheint, erhalten wir die Bildgröße des Monddurchmessers zu  $\frac{1}{100}$  der Brennweite der abbildenden Linse (entsprechend  $\text{tg } 34' = \frac{1}{100}$ ); es würde sich also ergeben, daß, wenn das brechende System, wie die Objektivlinsen der großen amerikanischen Fernrohre, eine Brennweite von  $17$  m hat, die Bildgröße des Mondes  $\frac{1}{100}$  von  $1700 \text{ cm} = 17 \text{ cm}$  sein würde (Ziffernbeispiel IV, S. 132).

### 3. Die Zusammensetzung zweier oder mehrerer Abbildungen.

§ 18. Die Brechkraft  $D_{12}$  bei einer Linse endlicher Dicke. Alle bisherigen Ausführungen bezogen sich auf eine dünne Linse in Luft, bei der die Dicke vernachlässigt und der gemeinsame Hauptpunkt im Linsenscheitel angenommen werden konnte, oder auf die Brechung an einer einzelnen Fläche. Praktisch haben wir es aber meist mit Systemen zu tun, bei denen zwei oder mehrere brechende Flächen in endlichem Abstand voneinander gegeben sind. Man spricht dann von einer *Flächenfolge* oder einem brechenden System. In diesen Fällen könnte man zwar



durch mehrfache Anwendung der Formel für  $\frac{n'}{s}$  (§ 14) die Lage des bildseitigen Brennpunktes  $F'$  zum letzten Flächenscheitel feststellen; um aber die Brechkraft zu bestimmen, müßte man für die vorliegende Verbindung noch die Lage des hinteren Hauptpunktes  $H'$  zum letzten Flächenscheitel auffinden und daraus die Brennweite der Verbindung  $H'F' = f' = \frac{1}{D}$  ermitteln. Das geschieht mit Hilfe besonderer Formeln, die jetzt für die Einzellinse endlicher Dicke abgeleitet werden sollen. Vorausgesetzt wird dabei die Brechkraft jeder Einzelfläche, bestimmt nach der Formel  $D = \frac{n' - n}{r}$ , d. h. es muß von jeder Fläche der Krümmungsradius und die Brechzahl des ersten Mittels  $n$  und des zweiten Mittels  $n'$  gegeben sein (s. S. 27f.).

Es bedarf hier der Einführung eines neuen Begriffes, des *Achsenabstandes*  $d$  zwischen zwei Flächen, der schon in diesem einfachsten Beispiel auftritt. Die Scheitel der vorderen und hinteren Fläche seien also um einen gewissen Betrag  $d$  entfernt<sup>1)</sup>. Für jede Einzelfläche, sofern sie allein wirkt, fielen, wie in § 16, 1 dargestellt, die beiden Hauptpunkte in den Flächenscheitel zusammen. Die folgende Ableitung wird zeigen, daß bei der Zusammensetzung mehrerer Flächen, einer *Flächenfolge*, die neuen Hauptpunkte nicht mehr in den Flächenscheitel fallen. Man wird also feststellen müssen, wo die Hauptpunkte bei der Verbindung der zwei brechenden Flächen zu einer Linse endlicher Dicke liegen.

Die Aufgabe besteht somit darin, die für ein bequemes Arbeiten mit einem solchen brechenden System notwendigen Werte durch Formeln zu ermitteln, und zwar zunächst für seine Brechkraft und damit selbstverständlich auch für seine Brennweite. Deren Wert ist, wie nochmals betont sei, bei Zurückführung aller Werte auf Luft, für den Ding- und den Bildraum durchaus derselbe, nur von entgegengesetztem Vorzeichen (s. § 16, 3). Sodann muß man die Formeln für die Lage des vorderen und des hinteren Hauptpunktes der Verbindung ableiten, da auf diese Punkte alle Strecken und Brechwerte zu beziehen, also von den Hauptpunkten aus auch die Brennweiten abzutragen sind. Die hier für zwei Flächen gegebene Berechnung ist, wenn es sich nicht nur um Zusammensetzung von zwei, sondern von mehreren brechenden Flächen handelt, mehrfach anzuwenden. Man bezeichnet dies als eine *Durchrechnung* eines optischen Systems (Ziffernbeispiel II, V, S. 131, 133).

Der einfachste Fall ist der einer Verbindung zweier brechender Kugelflächen mit einem endlichen Abstände wie in Abb. 16; es sei dafür zu-

<sup>1)</sup> Diese Strecke  $d$  ist verständlicherweise in dem die beiden Flächen trennenden Mittel, in unserem Falle also in Glas, zu messen (s. unten S. 37).

nächst angenommen, daß das erste und das letzte Mittel Luft sei, also gelten:

$$n_1 = n'_2 = 1, \quad n'_1 = n_2 = n \text{ } ^1).$$

Eine solche Verbindung zweier Flächen nennt man eine Linse aus dem Mittel  $n$ .

Hält man sich in der nachfolgenden Darstellung gegenwärtig, was Gegenstand und was Bild für die Abbildung durch die erste und durch die zweite Fläche ist, so wird das Verständnis der etwas verwickelten Ableitungen, deren einzelne Schritte zunächst nicht immer einleuchtend scheinen dürften, wesentlich erleichtert. Alle Angaben, die sich auf die Abbildungen durch die erste Fläche beziehen, werden mit dem Zeiger (Index) 1, die auf die zweite Fläche bezüglichen mit dem Zeiger 2, alles, was sich auf die Abbildung durch beide Flächen bezieht, mit dem Zeiger 12 bezeichnet.

Da die beiden Krümmungsmittelpunkte  $C_1$  und  $C_2$  in jedem Falle durch die Gerade  $C_1C_2$  verbunden werden können, so nennt man  $C_1C_2$  die *Achse* der Linse und bezieht Ding und Bild auf diese Achse. Mit anderen Worten: Ist der Gegenstand  $\alpha_1$  der ersten Fläche achsensenkrecht zur gemeinsamen Achse, so ist es auch sein Bild  $\beta_1$ . Dieses Bild  $\beta_1$  wird dann von selbst zum Gegenstand  $\alpha_2$  der zweiten Fläche, und es ist daher auch dessen Bild  $\beta_2$  wieder senkrecht zur gemeinsamen Achse.

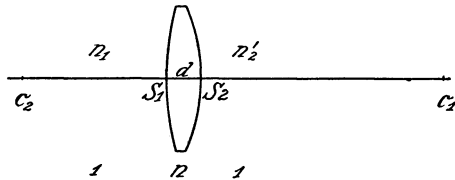


Abb. 16. Die Linse endlicher Dicke  $d$  in Luft.

$$d = S_1S_2; \quad r_1 = S_1C_1; \quad r_2 = S_2C_2.$$

Wenn wir bei der Abbildung eine Linse mit zwei Sammelflächen voraussetzen, so wissen wir, daß das Ergebnis auch für Flächen anderen Zeichens (zerstreuende) ohne weiteres gilt, da wir beim Einsetzen der Krümmungsradien der brechenden Flächen, die wir mit  $r_1 = S_1C_1$  und  $r_2 = S_2C_2$  bezeichnen, keine Voraussetzung der Vorzeichen machen. Nach der überall angewandten Geometrie der geraden Linie ist es dann für das Ergebnis der Rechnung ganz gleichgültig, ob  $r_1$  und  $r_2$  positives oder negatives Vorzeichen haben. Es ergibt sich bei Einsetzung der Ziffernwerte von selbst immer der richtige Wert.

Wir haben, da es sich hier um zwei brechende Flächen (Abb. 16) handelt, die für eine einzelne Fläche gültige GULLSTRANDSche Vergrößerungsformel (2)  $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{A}{B}$  zweimal anzuwenden. Bezeichnet man das

<sup>1)</sup> In bezug auf die erste Fläche ist  $n'_1$ , in bezug auf die zweite  $n'_2$  das Bildmittel; da es sich hier aber um eine einfache Linse in Luft handelt, so kann man die obigen Vereinfachungen eintreten lassen.

Vergrößerungsverhältnis  $\frac{\beta}{\alpha}$  mit  $\varkappa$ , so würde die Vergrößerung durch die erste Fläche ausgedrückt sein durch:

$$\varkappa_1 = \frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{A_1}{B_1}, \tag{a}$$

die Vergrößerung infolge der Brechung an der zweiten Fläche durch:

$$\varkappa_2 = \frac{\beta_2}{\alpha_2} = \frac{A_2}{B_2}, \tag{b}$$

oder, wenn man berücksichtigt, daß ja  $\beta_1$  für die zweite Brechung zum Gegenstand  $\alpha_2$  wird, so können wir auch sagen;

$$\varkappa_2 = \frac{\beta_2}{\beta_1}.$$

Etwas anders geschrieben, lauten also die Formeln für die Bildgröße:

$$\beta_1 = \alpha_1 \cdot \varkappa_1 \quad \text{und} \quad \beta_2 = \beta_1 \cdot \varkappa_2. \tag{c}$$

Setzt man den Wert für  $\beta_1$  in die zweite Gleichung ein, so erhalten wir:

$$\beta_2 = \alpha_1 \cdot \varkappa_1 \cdot \varkappa_2 \quad \left[ \text{oder} \quad \frac{\beta_2}{\alpha_1} = \varkappa_1 \cdot \varkappa_2 \right].$$

Man ermittelt also die Größe  $\beta_2$  des letzten Bildes, indem man die Vergrößerung durch die beiden Flächen hintereinander wirken läßt, d. h. die beiden Ausdrücke für die Vergrößerung mit der Größe  $\alpha_1$  des Gegenstandes multipliziert (Ziffernbeispiel II, 2, S. 131). Da wir alles, was sich auf die Abbildung durch *beide* Flächen bezieht, mit dem Zeiger 1 2 bezeichnen, so können wir die letzte Formel auch schreiben:

$$\beta_{12} = \alpha_{12} \cdot \varkappa_1 \cdot \varkappa_2 \quad \text{oder} \quad \beta_{12} = \alpha_{12} \cdot \frac{A_1}{B_1} \cdot \frac{A_2}{B_2},$$

denn der Gegenstand für die erste Fläche ist ja auch Gegenstand für die Abbildung durch die ganze Linse und das Bild der zweiten Fläche entsprechend das Bild für die ganze Linse.

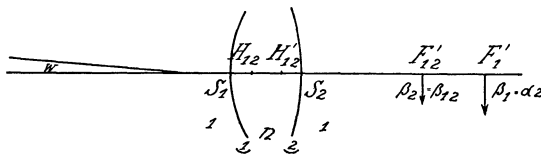


Abb. 17. Zur Ableitung der Grundpunkte bei einer Linse endlicher Dicke in Luft.

Bei der Ableitung der Formeln für die Zusammensetzung der beiden Abbildungen werden wir ferner von dem in § 17 bewiesenen

Zusammenhang  $-w = \beta \cdot D$  (5) für ferne Gegenstände ausgehen.

Wir setzen also einen fernen, unter dem Winkel  $w$  erscheinenden Gegenstand voraus (s. Abb. 17) und machen weiterhin die an sich sehr

wahrscheinliche Annahme, ohne sie hier zu beweisen, daß ähnliche Gleichungen wie für *eine* Fläche auch für die Linse endlicher Dicke mit *zwei*-maliger Brechung, eine an der ersten und eine an der zweiten Fläche, gelten, nämlich  $-w = \beta_{12} \cdot D_{12}$ . Durch die Brechung an der ersten Fläche wird das unendlich ferne Objekt sicher in endlicher Entfernung abgebildet werden. Dieses Bild  $\beta_1$  der ersten Fläche dient, wie gesagt, als Objekt  $\alpha_2$  für die zweite Fläche. Da es nun nicht mehr in unendlicher Ferne liegt, können wir für die Abbildung durch die zweite Fläche die gewöhnliche GULLSTRANDSche Gleichung (2) für die Vergrößerung des Bildes  $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{A}{B}$  anwenden, was ja nach den oben in § 17 gegebenen Ausführungen für das unendlich ferne Objekt bei der ersten Fläche nicht in Betracht kommt.

Für die erste Fläche gilt sicher die Beziehung (in Luftwerten):

$$-w = \beta_1 \cdot D_1 \quad \text{und} \quad D_1 = \frac{n-1}{r_1}.$$

Wir bezeichnen den Abstand des Bildes  $\beta_1$  von dem Scheitel  $S_1$  mit  $\bar{b}_1$  <sup>1)</sup>. Da sich der Gegenstand in unendlicher Ferne befindet, muß das Bild  $\beta_1$  aber in dem Brennpunkt der ersten Fläche entworfen werden,  $\bar{b}_1 = \bar{f}'_1$  <sup>2)</sup> sein. Die Brennweite ist aber gleich dem Kehrwert der Brechkraft ( $D_1 = \frac{n-1}{r_1}$ ), also  $f'_1 = \frac{r_1}{n-1}$ . Dieser Wert muß jedoch, da  $D$  stets auf Luft bezogen ist, noch mit dem Brechungsvermögen  $n$  multipliziert werden, wenn die Strecke, wie hier, in Glas gemessen ist. Wir ermitteln also die Beziehung:

$$\bar{b}_1 = \bar{f}'_1 = S_1 F'_1 = \frac{n \cdot r_1}{n-1} = n \cdot f'_1 = \frac{n^3}{D_1}.$$

Wir können nun die Strecke  $S_1 F'_1 = \bar{f}'_1$  nach der Geometrie der geraden Linie zerlegen in:

$$\bar{f}'_1 = S_1 S_2 + S_2 F'_1,$$

d. h. in den Abstand der beiden brechenden Flächen und die Entfernung des Bildes der ersten Fläche von dem Scheitel der zweiten Fläche. Für die Strecke  $S_1 S_2$  hatten wir die Bezeichnung  $d$  eingeführt<sup>4)</sup>, die zweite

1) Mit dem Strich über dem kleinen Buchstaben wollen wir andeuten, daß es sich um Werte handelt, die in Glas gemessen, also nicht auf Luft zurückgeführt sind. Der Überstrich ist schon auf S. 28 vorgekommen.

2)  $\bar{f}'_1 = S_1 F'_1$  ist die in Glas gemessene Brennweite, weil wir ja zunächst noch bei der Brechung an der ersten Fläche (Glas gegen Luft) sind.

3)  $f'_1$  ist also wie stets die auf Luft bezogene Brennweite (s. § 14, Erörterung).

4) Unter  $d$  wird nach S. 34 der Abstand, gemessen in dem betreffenden Mittel, verstanden. Nach dem Vorbild von  $\bar{b}_1$  könnte man daran denken,  $d$  durch  $\bar{d}$  wiederzugeben. Doch da der Luftwert von  $d$  durchweg mit  $\delta$  bezeichnet wird, so ist die Überstreichung von  $d$  unnötig.

Strecke  $S_2F'_1$  ist aber gleich dem Gegenstandsabstand  $\bar{a}_2$  für die Brechung an der zweiten Fläche, da ja das Bild  $\beta_1$  der ersten Fläche Gegenstand  $\alpha_2$  für die zweite Fläche wird. Wir erhalten also die Beziehung:

$$\bar{b}_1 = d + \bar{a}_2 \quad \text{oder} \quad \bar{a}_2 = \bar{b}_1 - d.$$

(Wir behalten bei dieser Rechnung das allgemeinere  $\bar{b}_1$  bei, obwohl es sich hier um  $\bar{b}_1 = \bar{f}'_1$  handelt.)

Wir haben nun zur Ermittlung des Dioptrienwertes, d. h. des Kehrwertes vom Abstände  $\bar{a}_2$  des Gegenstandes  $\alpha_2 = \beta_1$  für die zweite Fläche die Größenformel anzuwenden, und zwar dürfen wir hier, da es sich um ein endlich entferntes Objekt handelt, die gewöhnliche GULLSTRANDSche Gleichung (2) verwenden, also  $\frac{\beta_2}{\alpha_2} = \frac{A_2}{B_2} = \kappa_2$ . Wir müssen hierfür aber zunächst, da diese Gleichung sich nur auf die Luftwerte bezieht, diese Werte bilden, also  $\bar{b}_1$  und  $\bar{a}_2$  durch das Brechungsvermögen  $n$  dividieren. Dann erhalten wir aus der Gleichung  $\bar{a}_2 = \bar{b}_1 - d$  die auf Luft bezogene Gleichung:

$$\frac{\bar{a}_2}{n} = \frac{\bar{b}_1}{n} - \frac{d}{n}.$$

Wir bezeichnen nun ein für allemal den auf Luft zurückgeführten Wert des Abstandes zweier brechender Flächen (oder Flächenfolgen), hier also die Glasdicke  $\frac{d}{n}$ , mit dem griechischen Buchstaben  $\delta^1$ ), so daß wir die Beziehung erhalten:

$$a_2 = b_1 - \delta.$$

In dem vorliegenden Falle ist aber, wie oben entwickelt,  $b_1$  gleich der auf Luft zurückgeführten Brennweite der ersten Fläche  $f'_1$ . Wir erhalten also:

$$a_2 = f'_1 - \delta \quad \text{oder, da} \quad f'_1 = \frac{1}{D_1}: \quad a_2 = \frac{1}{D_1} - \delta.$$

Den Ausdruck der rechten Seite auf den gemeinschaftlichen Nenner gebracht, ergibt:

$$a_2 = \frac{1 - \delta \cdot D_1}{D_1}.$$

Als Kehrwert von  $a_2$  nämlich  $\frac{1}{a_2} = A_2$  erhalten wir also:

$$A_2 = \frac{D_1}{1 - \delta \cdot D_1}. \quad (d)$$

<sup>1)</sup> Bei zwei Flächenfolgen wird  $\delta$  gemessen vom 2. Hauptpunkt der ersten Folge bis zum 1. Hauptpunkt der zweiten.

Wenn wir jetzt für die zweite Fläche die erste GULLSTRANDSche Lagengleichung (1) aufstellen ( $B = A + D$ ), so erhalten wir :

$$B_2 = A_2 + D_2.$$

Setzen wir den eben gefundenen Wert (d) von  $A_2 = \frac{D_1}{1 - \delta \cdot D_1}$  ein, so ergibt sich :

$$B_2 = \frac{D_1}{1 - \delta \cdot D_1} + D_2.$$

Die rechte Seite auf gemeinschaftlichen Nenner gebracht führt auf :

$$B_2 = \frac{D_1 + D_2 - \delta \cdot D_1 \cdot D_2}{1 - \delta \cdot D_1}. \quad (e)$$

Da der durch die ganze Linse abgebildete Gegenstand in unendlicher Ferne liegt, wird das Bild nach der Brechung an beiden Flächen im Brennpunkt des Gesamtsystems entworfen werden, d. h. in  $F'_{12}$ .  $B_2$  stellt dann den Brechwert dar für die Strecke  $S_2 F'_{12}$ , da ja  $F'_{12}$  von dem Scheitel  $S_2$  der zweiten Fläche aus gemessen ist<sup>1)</sup>. Wollen wir also den Abstand des Brennpunktes des Gesamtsystems von  $S_2$ , d. h. die Strecke  $S_2 F'_{12}$ , ermitteln (s. Abb. 17), so ist sie durch den Kehrwert von  $B_2 = \frac{1}{b_2}$  gegeben, also :

$$b_2 = \frac{1 - \delta \cdot D_1}{D_1 + D_2 - \delta \cdot D_1 \cdot D_2}. \quad (f)$$

Setzen wir jetzt in die GULLSTRANDSche Vergrößerungsformel (b) (aufgestellt für die zweite Fläche)  $\kappa_2 = \frac{\beta_2}{\alpha_2} = \frac{A_2}{B_2}$  die bereits ermittelten Werte (d) und (e) für  $A_2$  und  $B_2$  ein, so erhalten wir :

$$\kappa_2 = \frac{D_1}{(1 - \delta \cdot D_1)} \cdot \frac{(1 - \delta \cdot D_1)}{(D_1 + D_2 - \delta \cdot D_1 \cdot D_2)}.$$

Wie man sieht, hebt sich im Zähler und Nenner der Faktor  $(1 - \delta \cdot D_1)$  weg, und es bleibt für  $\kappa_2 = \frac{A_2}{B_2}$  der Ausdruck übrig :

$$\kappa_2 = \frac{D_1}{D_1 + D_2 - \delta \cdot D_1 \cdot D_2}. \quad (g)$$

Dadurch ist die Vergrößerung an der zweiten Fläche, d. h. das Verhältnis der Größe des von der ersten Fläche entworfenen Bildes  $\beta_1$  zu

1) Man nennt in der rechnenden Optik diese Größe die bildseitige Schnittweite der Nullstrahlen (s. unten S. 131) für die Linse mit der endlichen Dicke  $d$ .

2) Da nach der Brechung an der zweiten Linsenfläche das Bild in Luft (mit der Brechzahl 1) liegt, ist eine Umrechnung auf Luft wie nach der Brechung an der ersten Fläche hier unnötig.

der des Bildes  $\beta_2$  nach der zweiten Fläche festgestellt. Nach den S. 36 gegebenen Ausführungen ist aber zur Ermittlung der Vergrößerung durch *beide* brechende Flächen  $\kappa_2$  noch mit  $\beta_1 (= \alpha_1 \cdot \kappa_1)$  zu multiplizieren. Erst dann ermitteln wir die Bildgröße  $\beta_{12}$  für das ganze System. Es war eben nach S. 36 (c) und da  $\beta_2 = \beta_{12}$ :

$$\beta_{12} = \beta_1 \cdot \kappa_2.$$

$\beta_1$  ist aber (nach der Formel  $-w = \beta_1 \cdot D_1 = \frac{-w}{D_1}$ , so daß wir erhalten [s. o. (g)])

$$\beta_{12} = \frac{-w \cdot D_1}{(D_1 + D_2 - \delta \cdot D_1 \cdot D_2) \cdot D_1} = \frac{-w}{D_1 + D_2 - \delta \cdot D_1 \cdot D_2}$$

Wir hatten vor der Ableitung der letzten Formeln angenommen, daß auch für die Linse endlicher Dicke bei der Abbildung eines unendlich fernen Objekts die Beziehung gilt  $-w = \beta_{12} \cdot D_{12}$  (S. 37), woraus sich ableiten läßt  $\beta_{12} = \frac{-w}{D_{12}}$ . Setzen wir diesen Ausdruck statt  $\beta_{12}$  in die letzte Gleichung ein, so erhalten wir:

$$\frac{-w}{D_{12}} = \frac{-w}{D_1 + D_2 - \delta \cdot D_1 \cdot D_2} \quad \text{oder} \quad D_{12} = D_1 + D_2 - \delta \cdot D_1 \cdot D_2. \quad (6)$$

Damit hätten wir die Brechkraft der Verbindung beider Flächen einer Linse endlicher Dicke, d. h. die *Gesamtbrechkraft* der Linse, festgestellt. Wie man sieht, ist sie nicht gleich der Summe der Brechkraften der Einzelflächen  $D_1$  und  $D_2$ , wie man vielfach annimmt, sondern ihre Größe ist noch abhängig von dem Gliede  $-\delta \cdot D_1 \cdot D_2$  (Ziffernbeispiel II, 1, S. 130).

Aus der Brechkraft  $D_{12}$  ergibt sich die hintere Brennweite  $f'_{12}$  einfach als ihr Kehrwert, also:

$$f'_{12} = \frac{1}{D_{12}} = \frac{1}{D_1 + D_2 - \delta \cdot D_1 \cdot D_2}.$$

Zur Ermittlung der vorderen Brennweite könnte man die ganze Ableitung — nur in umgekehrter Richtung — wiederholen, indem man sich die Linse umgekehrt denkt und von rechts aus durchrechnet. Dabei würde sich dann in genau derselben Weise ergeben:

$$D_{21} = D_2 + D_1 - \delta \cdot D_2 \cdot D_1.$$

Es hätte sich dann nur der Sinn der Richtung des Lichtes geändert. Beziehen wir dagegen alles auf die Richtung des Lichtes von links nach rechts, so würden sämtliche Vorzeichen auf der rechten Seite der Gleichung negativ sein, und wir erhalten dann

$$D_{21} = -D_2 - D_1 - (-\delta \cdot -D_2 \cdot -D_1).$$

Es ist klar, daß das  $= -D_{12}$  ist. Daraus ergibt sich, daß der Kehrwert, d. h. die vordere Brennweite  $H_{12}\mathcal{F}_{12}^{-1}$ , in diesem Fall ebenfalls gleich ist der negativen hinteren Brennweite oder  $f'_{12} = -f_{12}$ .

Wir werden also auf die Folgerung geführt, daß auch bei einem zusammengesetzten System die vordere Brennweite gleich der negativ genommenen hinteren Brennweite ist.

§ 19. *Der bild- und der dingseitige Hauptpunktverschub bei einer Linse endlicher Dicke.* Wir haben mit dem Vorstehenden einen Teil der zu bequemer Rechnung mit einer Linse endlicher Dicke notwendigen Ausdrücke bereits abgeleitet. Es ist aber noch notwendig, für sie den Anfangspunkt der hinteren und der vorderen Brennweite zu bestimmen, d. h. ihren hinteren Hauptpunkt  $H'_{12}$  und ihren vorderen Hauptpunkt  $H_{12}$ , da ja von diesen aus alle bezüglichen Strecken zu messen sind.

Gehen wir (Abb. 17) von dem hinteren Brennpunkt  $F'_{12}$  nach dem *hinteren Hauptpunkt*, den wir in  $H'_{12}$  und links von  $S_2$  annehmen wollen, also gegen die Lichtrichtung bei der Messung der Strecke vor, so hätten wir  $F'_{12}H'_{12} = -f'_{12}$ . Nach Abb. 17 läßt sich aber die Strecke  $H'_{12}F'_{12} = -F'_{12}H'_{12}$  zerlegen in  $H'_{12}F'_{12} = H'_{12}S_2 + S_2F'_{12}$ , d. h. in den Abstand des hinteren Hauptpunktes vom zweiten Flächenscheitel und in den Abstand des hinteren Brennpunktes von ihm.  $H'_{12}F'_{12}$  ist aber gleich der Brennweite, die vom hinteren Hauptpunkt aus zu messen ist, also:

$$H'_{12}F'_{12} = f'_{12} = \frac{1}{D_{12}}. \quad (a)$$

Der Wert für  $S_2F'_{12} = b_2$  ist oben bereits ermittelt worden [§ 18 (f)]. Er hieß:

$$S_2F'_{12} = \frac{1 - \delta \cdot D_1}{D_1 + D_2 - \delta \cdot D_1 \cdot D_2}$$

oder, da der Nenner gleich  $D_{12}$  ist (6):

$$S_2F'_{12} = \frac{1 - \delta \cdot D_1}{D_{12}}. \quad (b)$$

Den Abstand  $S_2H'_{12}$  des zweiten Hauptpunktes der ganzen Linse vom Scheitel der zweiten Fläche nennen wir den *Hauptpunktverschub* (von dem letzten Teilhauptpunkt  $S_2$ )<sup>2)</sup> und bezeichnen ihn mit  $h'_{12}$ . Da  $H'_{12}S_2 = -S_2H'_{12}$ , so ist auch

$$H'_{12}S_2 = -h'_{12}. \quad (c)$$

Setzt man nun diese Werte für  $H'_{12}S_2$  und  $S_2F'_{12}$  in die Gleichung  $H'_{12}F'_{12} = H'_{12}S_2 + S_2F'_{12}$  ein, so erhält man aus (a), (b) und (c):

$$\frac{1}{D_{12}} = -h'_{12} + \frac{1 - \delta \cdot D_1}{D_{12}} \quad \text{oder} \quad h'_{12} = \frac{1 - \delta \cdot D_1 - 1}{D_{12}},$$

<sup>1)</sup>  $\mathcal{F}_{12}$  ist in Abb. 17 nicht angegeben.

<sup>2)</sup> Die Hauptpunkte der zweiten Fläche für sich fallen ja in den Flächenscheitel (s. § 16, 1).



schließlich

$$h'_{12} = -\frac{\delta \cdot D_1}{D_{12}}, \quad (8)$$

als den gesuchten Ausdruck für den *bildseitigen Hauptpunktverschub* (Ziffernbeispiel II, 1). D. h., es muß wegen des Minuszeichens der so ermittelte hier positive Wert des Bruchs vom hinteren Flächenscheitel  $S_2$  nach links hin abgetragen werden, damit man zum hinteren Hauptpunkt  $H'_{12}$  der ganzen Linse gelangt (Abb. 17). Wo dann der hintere Brennpunkt liegt, hängt von dem Vorzeichen der Brechkraft  $D_{12}$  der Verbindung ab. In dem angenommenen Fall der Sammellinse, wo  $D_{12}$  positiv ist, liegt der Brennpunkt  $F'_{12}$  also in der Lichtrichtung, d. h. rechts von  $H'_{12}$ ; bei einer zerstreuen Linse würde er, da  $D_{12}$  negativ ist, vom zweiten Hauptpunkte  $H'_{12}$  nach links abzutragen sein.

Der *Vorschub* des *vorderen Hauptpunktes* (von dem ersten Teilhauptpunkt  $S_1$ ) wäre in genau entsprechender Weise zu berechnen, doch läßt sich der Anfangspunkt  $H_{12}$  für die vordere Brennweite in einfacherer Weise auf Grund folgender Überlegung ermitteln. Bezeichnen wir (Abb. 17) die Entfernung  $S_1H_{12}$  des vorderen Hauptpunktes vom Scheitel  $S_1$  der ersten Fläche mit  $h_{12}$  und denken wir uns die Linse, wie bei der Ermittlung der Formel für die vordere Brennweite, umgekehrt (s. S. 40), so ist unter Berücksichtigung, daß das Licht jetzt in entgegengesetzter Richtung auf die Linse fällt, also alles ein negatives Vorzeichen erhalten muß und statt  $D_1$  daher auch  $D_2$  zu setzen ist, notwendigerweise entsprechend der Formel für den hinteren Hauptpunkt:

$$h_{12} = -\frac{(-\delta \cdot -D_2)}{-D_{12}} \quad \text{oder} \quad h_{12} = \frac{\delta \cdot D_2}{D_{12}}. \quad (7)$$

Damit ist der Vorschub des vorderen Hauptpunktes vom ersten Flächenscheitel gegeben.

Es soll nun noch der Beweis geführt werden, daß die so berechneten Punkte  $H_{12}$  und  $H'_{12}$  auch wirklich die Hauptpunkte sind, d. h. sie müssen sich nach S. 13 für eine durch beide Flächen vermittelte Abbildung als Gegenstand und Bild entsprechen, und in den Ebenen durch sie soll die Vergrößerung  $+1$  bestehen. Wir müssen also davon ausgehen, daß  $S_1H_{12}$  der Gegenstandsabstand für die erste Fläche ist, d. h., der Gegenstand befindet sich im vorderen Hauptpunkt  $H_{12}$ , und es fragt sich, ob er nun im zweiten Hauptpunkte  $H'_{12}$  aufrecht abgebildet werde<sup>1)</sup>.

Bezeichnen wir (Abb. 17) den Abstand  $S_1H_{12}$  mit  $a_1$ , so ist seine Lage vom ersten Scheitel bestimmt durch die eben erhaltene Beziehung (7)

$h_{12} = \frac{\delta \cdot D_2}{D_{12}}$ . Zunächst müssen wir jetzt feststellen, wo das durch die erste Fläche entworfene Bild des im ersten Hauptpunkte  $H_{12}$  befindlichen Gegenstandes liegt. Wir benutzen dazu, da es sich ja nicht um

1) Die Ableitung wird gleich für die auf Luft bezogenen Werte durchgeführt.

einen in unendlicher Ferne gelegenen Gegenstand handelt, die GULLSTRANDSche Lagengleichung (1)  $B = A + D$ , die hier wegen der Brechung an der ersten Fläche die Form annimmt  $B_1 = A_1 + D_1$ . Der Wert für  $A_1$ , der hier durch den Kehrwert von  $k_{12}$  gebildet wird, ist

$$A_1 = \frac{D_{12}}{\delta \cdot D_2}. \quad (d)$$

Setzen wir statt  $D_{12}$  den vollen Ausdruck (6)  $D_1 + D_2 - \delta \cdot D_1 \cdot D_2$ , so erhalten wir dann für  $B_1$  den Wert  $B_1 = \frac{D_1 + D_2 - \delta \cdot D_1 \cdot D_2}{\delta \cdot D_2} + D_1$ ; auf gemeinsamen Nenner gebracht ergibt das:

$$B_1 = \frac{D_1 + D_2 - \delta \cdot D_1 \cdot D_2 + \delta \cdot D_1 \cdot D_2}{\delta \cdot D_2} \quad \text{oder} \quad B_1 = \frac{D_1 + D_2}{\delta \cdot D_2}. \quad (e)$$

Aus diesem Dioptrienwert  $B_1$  ergibt sich für den Bildabstand nach der Brechung an der ersten Fläche  $b_1 = \frac{\delta \cdot D_2}{D_1 + D_2}$ .

Zur Ermittlung des Hauptpunktabstandes des Bildes für die zweite Fläche, für die ja das Bild der ersten das Objekt abgibt, haben wir noch den Luftwert von  $d$ , d. h. den (auf Luft bezogenen) Abstand der beiden brechenden Flächen  $= \delta$ , von  $b_1$  zu subtrahieren, da ja  $b_1$  den (auf Luft bezogenen) Abstand des Bildes  $\beta_1 (= \alpha_2)$  von der ersten Fläche bedeutet, die zweite Fläche selbst aber von der ersten um den Luftabstand  $\delta$  entfernt ist. Wir erhalten dann:

$$b_1 - \delta = a_2 = \frac{\delta \cdot D_2}{D_1 + D_2} - \delta = \frac{\delta \cdot D_2 - \delta \cdot D_1 - \delta \cdot D_2}{D_1 + D_2}$$

oder

$$a_2 = -\frac{\delta \cdot D_1}{D_1 + D_2} \quad \text{und daraus} \quad A_2 = \frac{1}{a_2} = -\frac{D_1 + D_2}{\delta \cdot D_1}. \quad (f)$$

Bilden wir wieder zur Ermittlung des Bildortes nach der Brechung an der zweiten Fläche aus der GULLSTRANDSchen Lagengleichung ( $B = A + D$ ) den Wert von  $B_2 = A_2 + D_2$ , so erhalten wir, wenn wir den soeben für  $A_2$  gefundenen Ausdruck (f) einsetzen:

$$B_2 = -\frac{D_1 + D_2}{\delta \cdot D_1} + D_2 \quad \text{oder} \quad B_2 = \frac{-D_1 - D_2 + \delta \cdot D_1 \cdot D_2}{\delta \cdot D_1}.$$

Der Zähler entspricht aber dem negativen Wert (6) der Brechkraft  $D_{12}$  der Verbindung, ist also  $= -D_{12}$ , und wir erhalten für  $B_2$ :

$$B_2 = -\frac{D_{12}}{\delta \cdot D_1}. \quad (g)$$

Der Kehrwert von  $B_2$ , nämlich  $\frac{1}{B_2} = b_2$ , gibt den Abstand des Bildes von dem zweiten Flächenscheitel. Wir erhalten also die Beziehung

$$S_2 H'_{12} = b_2 = -\frac{\delta D_1}{D_{12}}.$$

Dieser Ausdruck ist aber gleich dem unter (8) für den Ort des auf den zweiten Flächenscheitel bezogenen zweiten Hauptpunktes ermittelten. Wenn bei Linsen endlicher Dicke also die Entfernung des Gegenstandes vom ersten Flächenscheitel bestimmt ist durch  $a_1 = \frac{\delta \cdot D_2}{D_{12}}$ , was dem Wert für den Vorschub des vorderen Linsenhauptpunktes entspricht, so liegt sein Bild wirklich im zweiten Hauptpunkt der Linse.

Es bleibt jetzt noch übrig, den Nachweis zu führen, daß die Vergrößerung in den Hauptebenen der Linse  $= +1$  ist.

Um die Vergrößerung durch die erste Fläche zu finden, benutzen wir die Formel [§ 18 (a)]:

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{A_1}{B_1} = \kappa_1.$$

Setzen wir die eben gefundenen Werte (d) und (e) für  $A_1$  und  $B_1$  ein, so erhalten wir:

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{D_{12}}{\delta \cdot D_2} \cdot \frac{\delta \cdot D_2}{D_1 + D_2} \quad \text{oder} \quad \frac{A_1}{B_1} = \frac{D_{12}}{D_1 + D_2}. \quad (\text{h})$$

Bilden wir wieder das Vergrößerungsverhältnis zwischen dem Gegenstand der zweiten Fläche ( $\alpha_2 = \beta_1$ ) und dem von der zweiten Fläche entworfenen Bild  $\beta_2$ , also  $\frac{\beta_2}{\alpha_2} = \frac{A_2}{B_2} = \kappa_2$  [§ 18 (b)] und setzen die oben gefundenen Werte (f) und (g) von  $A_2$  und  $B_2$  ein, so erhalten wir:

$$\frac{A_2}{B_2} = -\frac{D_1 + D_2}{\delta \cdot D_1} \cdot -\frac{\delta \cdot D_1}{D_{12}}, \quad \text{also} \quad \frac{A_2}{B_2} = \frac{D_1 + D_2}{D_{12}} \quad (\text{i})$$

Nach der oben (S. 36) gegebenen Formel ist aber das endgültige Größenverhältnis von Gegenstandsgröße vor der ersten Brechung zur Bildgröße nach der zweiten Brechung gegeben durch die Formel:

$$\frac{\beta_2}{\alpha_1} = \kappa_1 \cdot \kappa_2 \quad \text{oder} \quad \frac{\beta_2}{\alpha_1} = \frac{A_1}{B_1} \cdot \frac{A_2}{B_2}.$$

Setzen wir die ermittelten Ausdrücke (h) und (i) für  $\frac{A_1}{B_1}$  und  $\frac{A_2}{B_2}$  ein, so erhalten wir:

$$\frac{\beta_2}{\alpha_1} = \frac{A_1}{B_1} \cdot \frac{A_2}{B_2} = \frac{D_{12}}{D_1 + D_2} \cdot \frac{D_1 + D_2}{D_{12}},$$

woraus sich der Wert  $+1$  ergibt. Damit ist auch die zweite Forderung, die für die Linsenauptpunkte erhoben werden muß, erfüllt.

Durch die für  $h_{12}$  und  $h'_{12}$  erhaltenen Formeln (7, 8) ermittelt man also tatsächlich Punkte der Achse mit einem Größenverhältnis von Gegenstand und Bild  $= +1$ , und man sieht mithin, das damit die Forderung erfüllt ist, die wir an die Hauptpunkte stellen.

Wir können also sagen, daß die Abbildung durch eine Linse endlicher Dicke genau so auf die vier Grundpunkte  $H_{12}$ ,  $H'_{12}$ ,  $\mathcal{F}_{12}$ ,  $\mathcal{F}'_{12}$  bezogen werden kann, wie bei der dünnen Linse in Luft oder der Einzelfläche. Damit wird die Berechnung von Bildlage und -größe sehr erleichtert (Ziffernbeispiel II, 3, S. 131).

§ 20. Die Zusammensetzung von Abbildungen, entworfen durch zwei Linsen endlicher Dicke oder durch eine Folge mehrerer Flächen. Man kann hierbei natürlich genau denselben Weg zurücklegen, wie er soeben bei der Ableitung der Formeln für die Linse endlicher Dicke gegeben worden ist. Nur muß man für den jeweils in Betracht kommenden Gegenstandsraum den ungestrichenen, für den Bildraum den gestrichenen Hauptpunkt eintreten lassen, da ja alle Messungen in diesen Räumen von den zugehörigen Hauptpunkten aus gemacht werden (Ziffernbeispiel V, 1 u. 3, S. 133 u. 135).

Als Beispiel nehmen wir der Einfachheit der Zeichnung (Abb. 18) halber an, daß es sich um die Verbindung von zwei Sammelfolgen handelt.

Man kann aber bei ständiger Anwendung der Geometrie der geraden Linie das so gewonnene Ergebnis stets auch für eine Verbindung von zwei Flächenfolgen beliebigen Zeichens als richtig erkennen. In der Abb. 18 sei das eine System durch die beiden Hauptpunkte  $H_1$  und  $H'_1$ ,

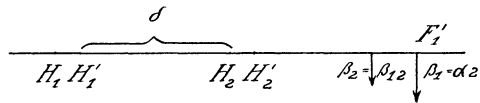


Abb. 18. Zur Zusammensetzung zweier Linsenfolgen:

$\beta_1$  das von der Sammellinse  $H_1H'_1$  in  $F'_1$  entworfene Bild eines unendlich fernen Dinges ist (nicht wirklicher) Gegenstand  $\alpha_2$  für die zweite Sammelfolge  $H_2H'_2$ , deren Bild  $\beta_2$  zugleich Bild  $\beta_{12}$  beider Sammelfolgen ist.

das zweite System durch die beiden Hauptpunkte  $H_2$  und  $H'_2$  angedeutet. Der Abstand der beiden Folgen — die Entfernung zwischen dem 2. Hauptpunkt der ersten und dem 1. Hauptpunkt der zweiten Folge — wird hier genau so wie bei der Linse endlicher Dicke in Luft mit  $d$  bezeichnet, wenn es sich um seinen linearen Wert handelt. Dieser muß aber stets noch auf Luft reduziert, d. h. durch die Brechzahl des Mittels, in dem sich  $d$  etwa befindet, dividiert werden, also  $\frac{d}{n} = \delta$ .

$d = H'_1H_2$  ist demnach gemessen in dem Bildmittel der ersten oder im Gegenstandsmittel der zweiten Abbildung. Wir können dann, wenn wir diese Voraussetzung machen, genau die gleichen Formeln wie vorhin

ableiten. Voraussetzung ist nur, daß es sich um ausgerichtete (zentrierte) Flächenfolgen handelt (Ziffernbeispiel V, 3, S. 135).

Wenn man solch eine Verbindung (etwa ein Okular aus zwei in Luft stehenden Einzellinsen endlicher Dicke) vor sich hat, so wird man gut tun, stets die Brennweite und die Hauptpunkte der beiden Einzellinsen aus den Flächenkrümmungen, dem Flächenabstand und der Brechzahl zu ermitteln und dann mit Hilfe der Formeln für die zusammengesetzte Abbildung —  $\delta$  ist hier schon in Luft gemessen —

$$\frac{1}{f'_{12}} = D_{12} = D_1 + D_2 - \delta \cdot D_1 \cdot D_2;$$

$$h_{12} = \frac{\delta \cdot D_2}{D_{12}}; \quad h'_{12} = -\frac{\delta \cdot D_1}{D_{12}}$$

die Brechkraft (bzw. die Brennweite) und die Hauptpunktverschiebe der Verbindung bestimmen.

Liegt dagegen, wie etwa bei der Flächenfolge im Auge, eine Reihe von ausgerichteten Flächen vor, deren jede zwischen zwei Mitteln von verschiedenem Brechungsverhältnis angeordnet ist, so wird es sich empfehlen, die Abbildungen in den beiden ersten Flächen zusammenzusetzen, d. h. erst deren Brechkraft und Hauptpunkte zu bestimmen, dann die dritte Abbildung hinzuzunehmen; zu der so ermittelten Abbildung kommt die an der vierten Fläche usw.

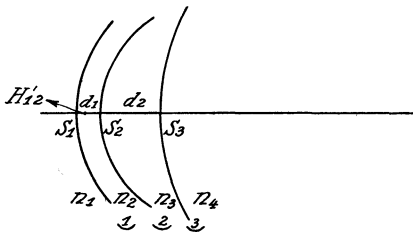


Abb. 19. Zur Aneinandersetzung von Flächen.

Auf diese Weise kann man die Einzelabbildungen bei jedem beliebigen zentrierten System zusammensetzen. Man muß nur beachten, daß man bei der Verbindung der Brechkraft  $D_3$  der neuen Fläche mit dem bereits ermittelten System  $D_{12}$  den auf Luft zurückgeführten Abstand  $\delta$  des zweiten Hauptpunkts des zusammengesetzten Systems von

dem ersten des neu hinzutretenden richtig bestimmt. Dabei ist stets zu berücksichtigen, in welchem Mittel sich dieser Abstand  $d$  tatsächlich befindet, mit welcher Brechzahl er also zu dividieren ist, um den Luftwert  $\delta$  zu ermitteln. Man muß sich dabei immer klar werden, daß, wenn auch nach der Zeichnung  $d$  nicht durchweg in demselben Mittel zu liegen scheint, doch angenommen werden muß, daß  $d$  ganz diesem Mittel angehört (s. Abb. 19).

Wir erhalten also für  $\delta_{12}$ , den (Luft-) Abstand des 2. Hauptpunkts der ersten Flächenfolge vom Scheitel der dritten Fläche, wegen:

$$H'_{12}S_3 = H'_{12}S_2 + S_2S_3 \quad \text{zu} \quad \delta_{12} = -h'_{12} + \delta_2.$$

Es muß der Hauptpunktverschub  $h'_{12}$  negativ genommen werden, weil die Strecke  $H'_{12}S_2$  in der Richtung von  $H'_{12}$  nach  $S_2$  durchlaufen wird, während der Hauptpunktverschub in der Richtung  $S_2H'_{12}$  durchlaufen werden muß. Daraus ergibt sich [s. (8) auf S. 42] dann  $\delta_{12} = \delta_2 + \frac{\delta_1 \cdot D_1}{D_{12}}$ .

Die übrigen Formeln entsprechen genau den vorher mitgeteilten:

$$D_{13} = D_{12} + D_3 - \delta_{12} \cdot D_{12} \cdot D_3$$

$$h_{13} = \frac{\delta_{12} \cdot D_3}{D_{13}}; \quad h'_{13} = -\frac{\delta_{12} \cdot D_{12}}{D_{13}}$$

und bei weiterer Zusammensetzung mit der vierten Fläche:

$$\delta_{13} = \delta_3 + \frac{\delta_{12} \cdot D_{12}}{D_{13}}$$

usw. (Ziffernbeispiel V, 2, S. 134).

## Zweiter Teil.

# Das Auge und die Brille.

### Das nicht akkommodierende Auge.

§ 21. *Der Hauptpunktsbrechwert (die axiale Refraktion) des Auges.* Das *rechtsichtige (emmetropische)* Auge entwirft in der hier zunächst festgehaltenen Annahme von einem unendlich fernen Gegenstand, d. h. mittels paralleler Strahlen, ein umgekehrtes Bild auf der Netzhautgrube. Die Abbildung erfolgt also für das zentrale Sehen entlang der optischen Achse des Auges (daher „*axiale*“ *Refraktion*). Wenn auch die Blende des Systems, die *Pupille*, häufig keinen so geringen Durchmesser besitzt, daß wir berechtigt wären, von einer Abbildung ausschließlich im achsennahen Raum zu sprechen, so ist doch das dingseitige Öffnungsverhältnis der abbildenden Strahlen nicht allzu groß. Beachten wir überdies die GULLSTRANDSchen Anschauungen (I, 228) von der besten Einstellung einer mit Kugelabweichung behafteten Linsenfolge, so sehen wir ein, daß unsere bisher nur für den achsennahen Raum gültigen Ableitungen auch für die Abbildung im Auge einen großen Wert behalten.

Die Fehler der optischen Abbildung, die hier nicht nur durch die größere Blendenweite gegeben sind, sondern auch auf den Unvollkommenheiten der aus lebendem Gewebe bestehenden brechenden Mittel und Flächen beruhen, werden zudem durch physiologische Korrekturen (Kontrast) so weit ausgeglichen, daß sie auf die Deutlichkeit des Sehens im allgemeinen einen Einfluß nicht ausüben, wenn nur der Ort, in dem das Bild entworfen wird, in der Netzhaut liegt. Stimmt der Ort der Netzhaut nicht genau zu der bei den Einzelaugen schwankenden Vereinigungs- oder Schnittweite [s. § 23<sup>1)</sup>] des Sammelsystems des Auges, so muß es notwendigerweise zu Zerstreuungskreisen auf der Netzhaut kommen. Diese sind für ein deutliches Sehen störend, wenn sie etwas größer werden und die physiologische Korrektur nicht mehr ausreicht.

Es fragt sich, wie wir den Begriff des Brechungszustandes oder der axialen Refraktion des Auges zu definieren haben, d. h. die gegenseitige Beziehung von Achsenlänge und Schnittweite (Breckkraft des Systems).

---

<sup>1)</sup> Für gewöhnlich spricht man hier von der Brennweite, was aber nicht allgemein gültig ist.

Während sich beim rechtsichtigen Auge der Gegenstand, dessen Strahlen in dem Bild auf der Netzhaut vereinigt werden, in der Unendlichkeit befindet, muß der Gegenstand für das *kurzsichtige* Auge, bei dem die Achsenlänge größer ist als die Schnittweite für das Bild des unendlich fernen Achsenpunktes, wie man aus der Rechtläufigkeit der Abbildung (§ 8) schließen kann, *näher* ans Auge herangeführt werden; er muß also in endlicher Entfernung *vor* dem Auge liegen. Je nach dem Grade der Fehlsichtigkeit wird dieser Punkt verschieden weit vom Auge entfernt sein müssen. Es werden also bei dem kurzsichtigen Auge unter einer gewissen Divergenz auffallende Strahlen durch das brechende System so gesammelt, daß sie bei Akkommodationsruhe auf der Netzhaut vereinigt werden.

Bei dem *übersichtigen* Auge liegt der Gegenstandspunkt *hinter* dem Auge, d. h. je nach dem Unterschied zwischen der Achsenlänge und der Schnittweite der Flächenfolge des Auges wird die Netzhautgrube einem mehr oder minder weit *hinter* dem Auge liegenden Punkt zugeordnet sein. Die aus der Unendlichkeit kommenden parallelen Strahlen müssen also durch eine Sammellinse auf ihn hin gerichtet werden, werden aber nicht in ihm wirklich vereinigt, da sie bereits beim Durchtritt durch die erste Hornhautfläche abgelenkt werden. Dieser Gegenstand ist also bei dem übersichtigen Auge *virtuell (unwirklich)*, wenn er auf der Netzhaut abgebildet werden soll.

Den Gegenstandspunkt, der den ins Auge tretenden Strahlen gemeinsam ist, wenn diese bei Akkommodationsruhe auf der Netzhaut vereinigt werden sollen, nennen wir den *Fernpunkt R*. Er liegt beim rechtsichtigen (emmetropischen) Auge in der Unendlichkeit, beim kurzsichtigen in endlicher Entfernung vor, beim übersichtigen in endlicher Entfernung hinter dem Auge. Früher bestimmte man den Fernpunkt und damit die Refraktion des Auges durch seinen Abstand allgemein vom Auge, während jetzt genauer der *Hauptpunktsabstand a* des Fernpunkts bestimmt und vom vorderen Augenhauptpunkt *H* aus gemessen wird. Für die Rechnungen nach der Dioptrienlehre wird der Kehrwert von *a* also  $\frac{1}{a} = A$  verwendet, und man erhält damit den *Hauptpunktsbrechwert* oder die Angabe des Refraktionszustandes des Auges. Es leuchtet ein, da für das emmetropische Auge  $a = \infty$  ist, daß die Konvergenz *A* des einfallenden Strahlenbündels hier = 0, d. h. die Strahlen parallel sind; für das kurzsichtige Auge erhält *a* einen negativen Wert, d. h.  $HR = a < 0$  (s. Abb. 20), es besteht ein bestimmter Grad von Divergenz der Strahlen vor der Brechung im Auge:  $A < 0$ . Für das übersichtige Auge, wo *a* positiv wird, gilt  $HR$  also  $> 0$ , und das einfallende Strahlenbündel besitzt eine gewisse Konvergenz, also  $A > 0$ . *Die Refraktion des Auges ist also zu definieren als Hauptpunktsbrechwert, d. h. als Kehrwert der Entfernung des Fernpunkts vom vorderen Augenhauptpunkt.*



Es muß alles, was den Gegenstandsraum (hier können wir sagen den *Augenraum*) betrifft, vom vorderen Augenhauptpunkt **H**, alles, was den Bildraum anlangt, vom hinteren Hauptpunkt **H'** (die, wie die Rechnung auf S. 136 im Anhang zeigt, vom Hornhautscheitel 1,35 mm in Luft bzw. 1,60 mm in Glaskörper entfernt sind) gemessen werden.

Kennen wir die Lage des Fernpunkts **R**, d. h. den Wert  $A = \frac{1}{a} = \frac{1}{\mathbf{HR}}$  für das Auge, die Brechkraft des Gesamtsystems  $D$  [für das Auge mit  $D_{//}$  bezeichnet<sup>1)</sup>], so läßt sich dazu nach der allgemein für den achsennahen Raum geltenden, auf die Hauptpunkte bezogenen Lagenformel (1)  $B = A + D$  ohne weiteres der Wert von  $B$  nach der Formel  $B = A + D_{//}$  bestimmen.  $B$  ist aber der Kehrwert der Strecke **H'F'**, d. h. des Abstandes der Fovea **F'** vom hinteren Augenhauptpunkt **H'**. Die Strecke **HR**

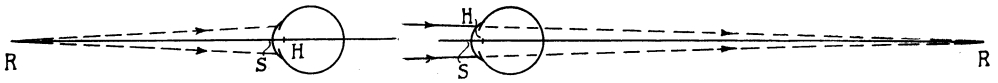


Abb. 20.  
kurzsichtigen

Der Fernpunktsabstand beim  
Auge.

Abb. 21.  
übersichtigen

$$a = \mathbf{HR}; \quad A = \frac{1}{a} = \frac{1}{\mathbf{HR}}.$$

wird beim kurzsichtigen Auge mit reellem Fernpunkt *gegen* das Licht, beim übersichtigen Auge mit virtuellem Fernpunkt *mit* dem Licht gemessen. Bei der Vorzeichenbestimmung haben wir uns daran zu erinnern, daß alle Strecken von dem zugehörigen Hauptpunkte aus zu messen sind, also muß der Fernpunktsabstand bei Beziehung auf das brechende System des Auges von dem vorderen Hauptpunkt **H** aus gemessen werden, d. h.  $a = \mathbf{HR}$  (s. Abb. 20), also  $\frac{1}{a} = A = \frac{1}{\mathbf{HR}}$ .

Das Licht läuft zwar beim Einfall in das kurzsichtige Auge von dem vor dem Auge befindlichen Fernpunkt **R** nach dem Hauptpunkt **H** in positiver Richtung. Wir haben aber den Fernpunktsabstand von **H** aus gemessen, also ihn mit **HR** bezeichnet. Diese Strecke wird deshalb bei der Messung entgegengesetzt der Lichtrichtung durchlaufen. Sie muß also einen negativen Wert annehmen. Dementsprechend ist auch der Kehrwert  $\frac{1}{a} = A = \frac{1}{\mathbf{HR}}$  negativ. Wir erhalten also beim kurzsichtigen Auge für den Fernpunkt einen Dioptrienwert mit negativem Vorzeichen. Dem entspricht die übliche Bezeichnung des myopischen Brechungs- zustandes.

<sup>1)</sup> Ganz entsprechend wird die hintere Brennweite des Auges mit  $f'' = \frac{1}{D_{//}}$  bezeichnet.

Beim übersichtigen Auge ist der Fernpunktsabstand ebenfalls gegeben durch die Strecke  $\mathbf{HR}$ , die aber, wie leicht ersichtlich (Abb. 21), hier bei der Messung mit der Lichtrichtung durchlaufen wird; infolgedessen ist der Hauptpunktsbrechwert  $\frac{1}{a} = A = \frac{1}{\mathbf{HR}}$  des übersichtigen Auges positiv.

Für das rechtsichtige (emmetropische) Auge kann man den Hauptpunktsabstand des Fernpunkts beliebig mit positiv oder negativ  $\infty$  ansetzen. In beiden Fällen führt der Kehrwert  $\frac{1}{a} = A$  auf den Wert 0.

§ 22. Die Aufgabe des korrigierenden Brillenglases oder des Fernbrillenglases. Soll ein *fehlsichtiges* (*ametropisches*) Auge bei Akkommodationsruhe unendlich ferne Gegenstände deutlich auf der Netzhaut abbilden, so bedarf es hierzu des passenden Brillenglases. Man bezeichnet das

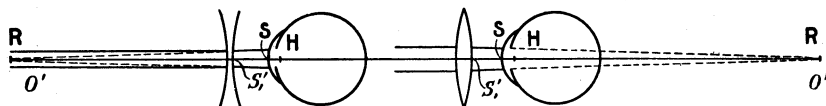


Abb. 22.

Abb. 23.

Das Bild  $O'$  des unendlich fernen Gegenstandes wird durch das Fernbrillenglas im Fernpunkt  $\mathbf{R}$  des kurzsichtigen  
 Auges entworfen. übersichtigen  
 Auges entworfen.

geeignete Glas als das *korrigierende*. Zweckmäßiger ist der viel ältere Ausdruck *Fernbrille* oder *Fernbrillenglas*.

Worin besteht seine Aufgabe? Da wir voraussetzen, daß sich an dem dioptrischen System des Auges ebensowenig etwas ändern soll, wie sich an der Achsenlänge etwas ändern kann, so ist die Aufgabe der Fernbrille offenbar darin gegeben, die von dem unendlich fernen Gegenstände kommenden parallelen Strahlen im Fernpunkt des fehlsichtigen Auges zu vereinen. Geschieht das, so wird das im Fernpunkt von der Fernbrille entworfene Bild  $\beta$ , des unendlich fernen Gegenstandes  $\alpha$ , zum Gegenstand  $\alpha^1$ ) für das fehlsichtige Auge, das damit in die Lage versetzt ist, es auf der Netzhaut abzubilden (s. Abb. 22 u. 23). Jedes Brillenglas, gleichgültig, ob es sich um eines mit sammelnder oder zerstreuer Wirkung handelt, wird aber, wie wir auf S. 9, 11 gesehen haben, einen unendlich fernen Gegenstand in seinem Brennpunkt  $F'$ , 2) abbilden. Daraus ergibt sich die Forderung, daß bildseitiger Brennpunkt  $F'$ , des Fernbrillenglases und Fernpunkt  $\mathbf{R}$  des fehlsichtigen Auges zusammenfallen,

1) Es wird allgemein bei der Abbildung durch das Auge Gegenstand  $\alpha$  und Bild  $\beta$  ohne Zeiger angegeben.

2) Alle Bezeichnungen, die sich auf das Brillenglas beziehen, werden von nun an mit dem Zeiger  $\prime$ , versehen, also  $D'$ ,  $f'$ ,  $f$ , usw.

denn dann wird der unendlich ferne Gegenstand auch im fehlsichtigen Auge auf der Fovea deutlich abgebildet werden.

Da sich das Brillenglas immer in einem gewissen endlichen Abstand vor dem Auge befinden muß, weil für gewöhnlich Gläser, die mit der Hornhaut unmittelbar in Berührung kommen, also angenähert in dem vorderen Hauptpunkt  $\mathbf{H}$  des Auges liegen, nicht getragen werden, so ist für das übersichtige Auge mit positivem Fernpunktsabstand das Brillenglas schwächer, beim kurzsichtigen Auge mit negativem Fernpunktsabstand umgekehrt das Brillenglas stärker als die axiale Refraktion  $A = \frac{1}{a} = \frac{1}{\mathbf{HR}}$ . Auf die näheren Beziehungen, die hier zu berücksichtigen sind, soll im folgenden eingegangen werden.

Wir haben es hier mit der Zusammensetzung zweier Abbildungen zu tun. Es gelten deshalb die gleichen Formeln, wie sie in § 18–20 allgemein abgeleitet wurden. Erinnern wir uns an die einleitend (§ 2) gegebenen Ausführungen, die den Einfluß der Brille auf die Funktion des Auges erwähnen, so werden wir zu untersuchen haben, wie insbesondere die zentrale Sehschärfe durch eine Änderung des Maßstabs, mit andern Worten der Netzhautbildgröße, beim Vorsetzen des Brillenglases beeinflusst wird. Die Vergrößerung ist abhängig von der Brechkraft des abbildenden Systems (s. S. 33 die Formel (5)  $-w = \beta \cdot D$ ). Da diese nicht nur bestimmt wird durch die Brechkraft der Einzelsysteme, sondern auch durch ihren Abstand  $\delta$  [denn es gilt nach (6) auf S. 40  $D_{12} = D_1 + D_2 - \delta \cdot D_1 \cdot D_2$ ], so leuchtet ein, daß bei der Verbindung von Brille und Auge der Wert von  $D_{12}$  notwendigerweise bekannt sein muß, um festzustellen, welchen Einfluß er auf die Bildvergrößerung gewinnt.

Ehe wir uns dieser Frage zuwenden, haben wir aber noch die Vorfrage zu erledigen, in welcher Beziehung der Hauptpunktsbrechwert (die axiale Refraktion)  $A$  bei wechselndem  $\delta$ -Wert, d. h. bei verschiedenem Abstände des Brillenglases vom Auge, zu der Stärke des Fernbrillenglases  $D$ , steht.

Wir gehen davon aus, daß es sich um sehr dünne Brillengläser handelt, bei denen die beiden Scheitel und die beiden Hauptpunkte praktisch in einem Punkte, und zwar im Scheitel der Brille, zusammenfallend angesehen werden dürfen. Unter Berücksichtigung der Geometrie der geraden Linie gilt sowohl für das kurzsichtige (Abb. 24) wie für das übersichtige (Abb. 25) Auge die Beziehung:

$$H'F' = H' \mathbf{H} + \mathbf{HR}, \quad (\text{a})$$

wobei wir uns daran zu erinnern haben, daß  $F'$ , der hintere oder augenseitige Brennpunkt der Brille, mit dem Fernpunkt des Auges  $\mathbf{R}$  zusammenfallen muß.  $\mathbf{HR}$  ist aber  $= a$ , d. h. der Fernpunktsabstand des Auges;  $H' \mathbf{H} = \delta$ ;  $H'F' = f'$ . Diese Bezeichnungen in (a) eingesetzt ergibt:

$$f' = \delta + a. \quad (\text{9})$$

Setzen wir die Kehrwerte ein, so erhalten wir nach  $D$ , auflösend:

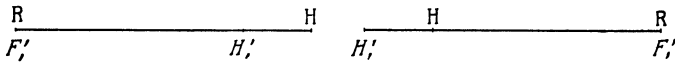
$$\frac{1}{D_1} = \delta + \frac{1}{A} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{D_1} = \frac{1 + \delta \cdot A}{A}$$

und reziprok genommen:

$$D_1 = \frac{A}{1 + \delta \cdot A}. \tag{10}$$

Wir haben damit die Beziehung, um bei gegebener axialer Refraktion  $A$  die Stärke des Brillenglases  $D_1$  im Abstände  $\delta$  zu finden.

Diese Aufgabe ist es aber nicht, die dem Augenarzt meist gestellt ist, weil er ja vielfach die axiale Refraktion nicht kennt, sondern sie umgekehrt erst aus der Stärke des ermittelten Brillenglases  $D_1$  und dem



Das Fernbrillenglas für kurzsichtige Augen unter Berücksichtigung der inneren Bezugspunkte  $H_1'$  und  $H$ .

$$H_1'F_1' = H_1'H + HR; \quad f_1' = \delta + a; \quad \frac{1}{D_1} = \delta + \frac{1}{A}.$$

Abstände  $\delta$  berechnen soll. Wenn man deshalb die Gleichung  $\frac{1}{D_1} = \delta + \frac{1}{A}$  nach  $A$  auflöst, so erhält man:

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{D_1} - \delta \quad \text{oder} \quad \frac{1}{A} = \frac{1 - \delta \cdot D_1}{D_1},$$

woraus folgt:

$$A = \frac{D_1}{1 - \delta \cdot D_1}. \tag{11}$$

Diese Formel gibt uns die Möglichkeit, aus der Stärke des Brillenglases  $D_1$  und  $\delta$  den Wert der axialen Refraktion festzustellen. (Ziffernbeispiel VI, S. 136.)

Aus dieser Formel können wir eine Beziehung gleich hier ableiten, von der wir später (S. 90) Gebrauch machen werden. Multiplizieren wir die Gleichung  $A = \frac{D_1}{1 - \delta \cdot D_1}$  aus, so erhalten wir

$$A - \delta \cdot A \cdot D_1 = D_1, \quad \text{woraus} \quad A - \delta \cdot A \cdot D_1 - D_1 = 0.$$

Wenn man beide Seiten jetzt mit  $\delta$  multipliziert, so bleibt auf der rechten der Wert 0 natürlich unverändert bestehen, und wir erhalten

$$\delta(A - \delta \cdot A \cdot D_1 - D_1) = 0.$$

Wenn man jetzt beiderseits +1 addiert, so gibt das unter gleichzeitigem Ausmultiplizieren der Klammer:

$$\delta \cdot A - \delta^2 \cdot A \cdot D_1 - \delta \cdot D_1 + 1 = 1.$$

Setzt man  $\delta \cdot D$ , heraus und ordnet etwas um, so ergibt sich

$$1 + \delta \cdot A - \delta \cdot D, (1 + \delta \cdot A) = 1.$$

Setzt man jetzt wieder  $(1 + \delta \cdot A)$  heraus, so ergibt sich

$$(1 + \delta \cdot A)(1 - \delta \cdot D) = 1. \quad (11a)$$

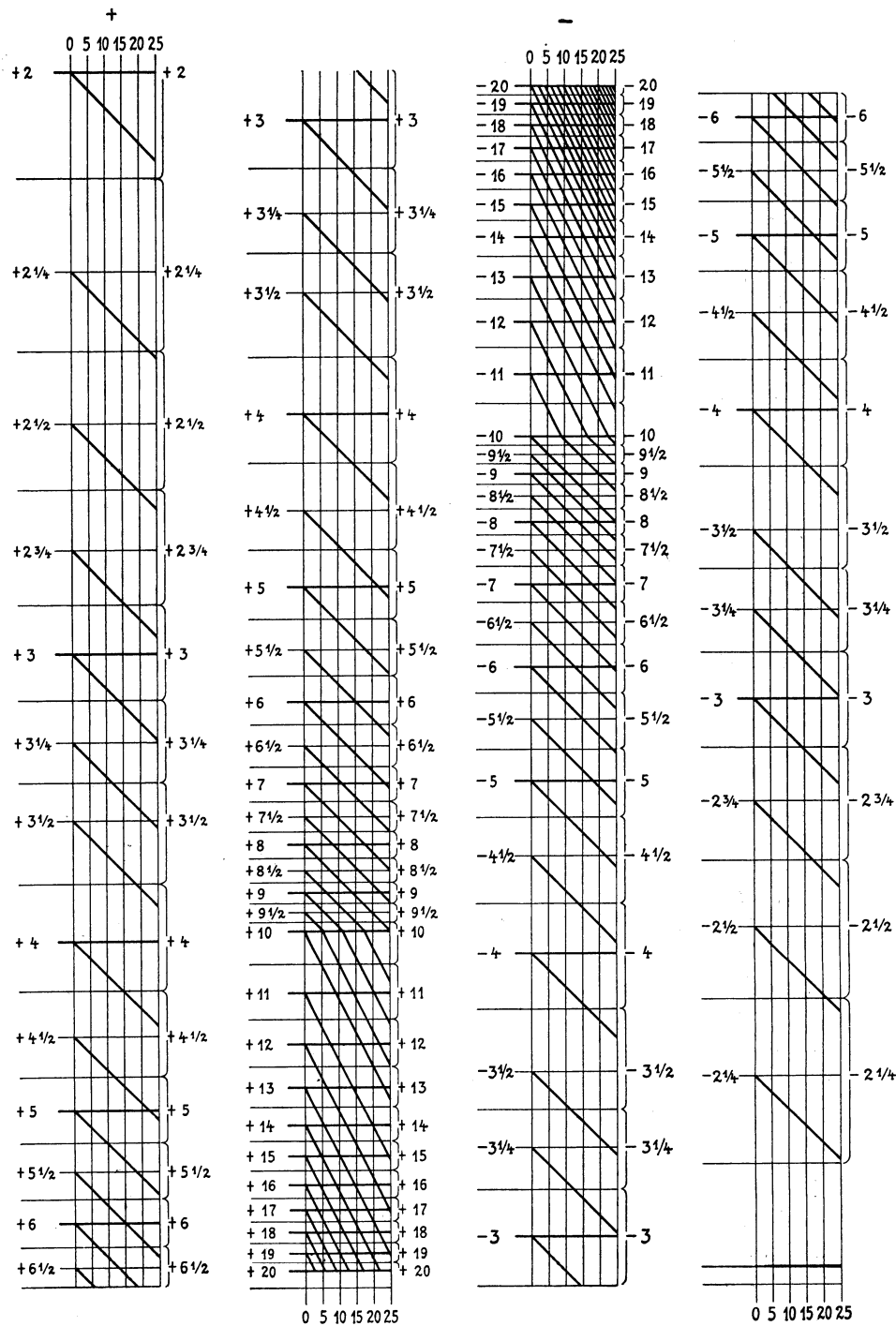
*Erörterung der Formeln (10) und (11).* Bei der Formel (11) erkennen wir, daß der Wert  $A$  (axiale Refraktion) abhängt sowohl von  $D$ , wie von  $\delta$ .  $\delta$  ist in unserem Falle dünner Brillengläser, deren Hauptpunkte in der Nähe des Linsenscheitels liegen, immer positiv: da sich das Brillenglas immer vor dem Auge befindet, wird diese Strecke  $H', H$  stets *in* der Lichtrichtung durchlaufen. Es wird also das Vorzeichen des Produkts  $\delta \cdot D$ , abhängig von dem Vorzeichen von  $D$ ,. Ist  $D$ , negativ, d. h.  $D, < 0$  (wie beim kurzsichtigen Auge), so wird das Produkt  $\delta \cdot D$ , ebenfalls negativ werden,  $-\delta \cdot D$ , also positiv. Der Nenner wird somit größer als 1. Infolgedessen wird  $D$ , durch einen Wert  $> 1$  dividiert werden müssen. Es ergibt sich daraus, daß beim kurzsichtigen Auge  $A < D$ , ist. Dem entspricht, daß die axiale Refraktion bei Myopie einen *niedrigeren* Ziffernwert besitzt als die Brechkraft des vor dem Auge befindlichen Fernbrillenglases.

Das Umgekehrte ist der Fall, wenn es sich um eine Hyperopie handelt,  $D$ , also einen positiven Wert erhält. Denn hier wird der Ausdruck  $\delta \cdot D$ , positiv. Es wird also im Nenner noch eine positive Größe von 1 abgezogen, so daß der Zähler  $D$ , durch eine die Einheit nicht erreichende Größe dividiert wird. Daraus ergibt sich jetzt, daß  $D$ , kleiner sein wird als  $A$  oder daß  $A > D$ , sein muß, d. h. das Brillenglas ist bei Hypermetropie *schwächer*, als der axialen Refraktion entspricht. Genau die gleichen Überlegungen, nur in umgekehrter Weise, ergeben sich bei der Erörterung der Formel (10).

Wie groß die Unterschiede zwischen der axialen Refraktion  $A$  und der Stärke des Brillenglases  $D$ , sind, läßt sich aus den Formeln nicht ohne weiteres ersehen, da die Größe  $A$  von zwei Veränderlichen,  $D$ , und  $\delta$  bzw. umgekehrt  $D$ , von  $A$  und  $\delta$  abhängt. Eine graphische Darstellung in Form eines Schichtenbildes würde die Abhängigkeit anschaulich machen. Sie soll aber hier für  $D$ , und  $A$  nicht gegeben werden, da sie später für die Scheitelrefraktion  $A_\infty$  des Brillenglases (s. § 23) und den Hauptpunktsbrechwert des Auges  $A$  geliefert werden wird (Abb. 31 u. 32).

Man kann auch, was für manche Zwecke übersichtlicher ist, auf die ursprüngliche Beziehung (9)  $f' = \delta + a$  zurückgehen und hier eine anschauliche Darstellung (Abb. 26) geben, wie sie von BRÜCKNER (1) vorgeschlagen worden ist.

Da es sich in dieser Darstellung hier zum ersten Male um ein Schichtenbild handelt, so erscheint es zweckmäßig, darauf hinzuweisen, daß man in diesen Darstellungen ein bequemes Mittel hat, die Abhängigkeit eines



(1) (2) (3) (4)

Abb. 26. Schichtenbild nach A. BRÜCKNER (1) für den Zusammenhang zwischen  $A$  und  $D$ . Die Stücke 1, 2, 3, 4 bilden eigentlich einen zusammenhängenden Streifen, (wobei 1 oben anfängt, 2 ihm (mit starkem Übergreifen) folgt, 3 ihn fortsetzt und 4 (wiederum mit starkem Übergreifen) nach unten hin den Schluß macht. Als Abszissen sind die  $\delta$ -Werte ( $H', H$ ), als Ordinaten die  $A$ -Werte, gemessen in Längen, beziffert nach Dioptrien aufgetragen. Die parallelen schräg von links nach rechts abfallenden Schichtenlinien stellen die  $D$ -Werte dar. Von  $\pm 10$  dptr an ist durch Verdoppelung des Koeffizienten von  $\delta$  ein steilerer Fall der Geraden erzielt. Die Klammern an der rechten Seite mit den beigesetzten Dioptrienzahlen deuten die Größenklassen der axialen Refraktion an.

mathematischen Ausdrucks von zwei unabhängigen Veränderlichen darzustellen. Dabei trifft es sich sehr günstig, daß das für den Augenarzt in Betracht kommende Gebiet in der Regel nur eine geringe Ausdehnung hat. Man kann es daher leicht auf einem einzelnen Schichtenbilde darstellen und bekommt eine rasche und vollständige Übersicht über den Verlauf; bei niedrigeren Anforderungen an die Genauigkeit kann man das Schichtenbild sogar als eine Art Rechenblatt verwerten, was dem mathematischen Ausdruck dann zu einer lebendigeren Wirkung verhilft.

Einen besondern Vorzug dieser Darstellung in Abb. 26 kann man in der geringen Ausdehnung des Bereichs für die  $\delta$ -Werte sehen, infolgedessen das vollständige Schichtenbild eine bandartige Form erhalten würde. Sie wurde zur Wiedergabe auf dem Raume einer einzelnen Seite so in vier Teile zerlegt, daß beim Übergange vom 1. zum 2. und vom 3. zum 4. ein ausreichendes Übergreifgebiet an jedem Ende zustande kam. Dabei sind die Schichtenlinien Geraden, die alle die  $A$ -Achse unter  $45^\circ$  für die mittleren Wirkungen, für die stärkeren sogar unter noch steilerer Neigung schneiden. Ihre Bezifferung ist durch den Schnitt mit der  $A$ -Achse gegeben, ist also am linken Bandrande aufzusuchen. Die Ablesung etwa einzuschaltender Werte wird keine größeren Schwierigkeiten machen.

Verfolgen wir die beiden in VI auf S. 136 durchgeführten Rechenbeispiele, so gehen wir auf dem Streifen 3 oder 4 in die mit  $-5\frac{1}{2}$  bezifferte, schwach ausgezogene Wagrechte ein und verfolgen sie so weit, wie es sich für eine in  $\delta = 13,3$  mm errichtete Lotrechte gebührt. Man erkennt, daß man dann ganz nahe an der geeigneten Schichtlinie für  $D_1 = -6$  dptr ist, was mit der genauen Lösung von  $D_1 = -5,93$  dptr aufs beste stimmt. — Für  $A = +5\frac{1}{2}$  dptr finden wir den Punkt  $\delta = 13,3$  mm näher der Schichtlinie 5, so daß wir etwa  $5\frac{1}{6}$  ablesen, was mit dem Ergebnis der Rechnung von  $5,13$  dptr in guter Übereinstimmung steht.

Natürlich kann man auch aus den auf den schrägen Schichtlinien verfolgten  $D_1$ -Werten und den  $\delta$ -Beträgen die  $A$ -Werte ermitteln, ebenso wie die  $\delta$ -Werte aus den für  $A$ - und  $D_1$ -Beträge geltenden Geraden.

Um noch einmal auf den ursprünglichen Zweck dieses Schichtenbildes zurückzukommen, kann man auch sagen, daß es nach Abb. 26 nur etwa bis zu einer axialen Refraktion von  $\pm 4$  dptr erlaubt ist, den Abstand  $\delta$  nicht zu berücksichtigen. Darüber hinaus ist der Unterschied zwischen  $A$  und  $D_1$ , auch bei einer Schwankung der  $\delta$ -Werte, die für gewöhnlich in Betracht kommt (8–10 mm), nicht mehr zu vernachlässigen. Er erreicht hier bereits einen Wert von etwa  $\frac{1}{4}$ – $\frac{1}{5}$  dptr, überschreitet also die Grenze, die wir als zulässigen Fehler bezeichnen dürfen. Da nämlich unsere Sehprüfungen für gewöhnlich auf etwa 5 m ausgeführt werden, also hier  $a = -5$  m,  $A = -\frac{1}{5}$  m =  $-0,2$  dptr ist, ergibt sich, daß unsere Brillenbestimmungen, die an Sehproben in

dieser Entfernung ausgeführt werden, durchweg mit einem Fehler von etwa  $\frac{1}{5}$  dptr behaftet sind<sup>1)</sup>.

§ 23. *Die Schnittweite und die Scheitelrefraktion des Brillenglases.* Unsere bisherigen Ausführungen bezogen sich auf dünne Linsen, wo die beiden Hauptpunkte mit dem Brillenscheitel zusammenfallend angesehen werden durften. Diese Voraussetzung ist aber durchaus nicht immer gegeben, vielmehr haben wir es bei allen neuzeitlichen durchgebogenen Brillenformen sammelnder Wirkung mit Linsen endlicher Dicke zu tun, d. h. mit Linsen, bei denen die Hauptpunkte an ganz anderer Stelle und oft außerhalb des Brillenglases liegen; ihr Ort ist daher für gewöhnlich nicht bekannt. Deshalb muß für diese Gläser eine andere Bezeichnung eingeführt werden. Das geschieht durch die in den optischen Schriften seit einiger Zeit auftretende *Schnittweite*. Die Brennweite muß ja stets vom hinteren Hauptpunkt  $H'$  bis zum Brennpunkt  $F'$ , gerechnet werden. Unter Schnittweite verstehen wir dagegen nicht diese, wie

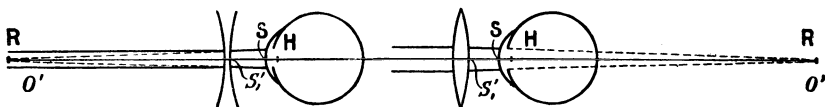


Abb. 27. Das Fernbrillenglas für ein kurzsichtiges Auge unter Berücksichtigung der äußeren Bezugspunkte  $S'O' = S'H + HR$ ;  $s' = \delta + a$ .  
Abb. 28. Das Fernbrillenglas für ein übersichtiges Auge unter Berücksichtigung der äußeren Bezugspunkte  $S'O' = S'H + HR$ ;  $s' = \delta + a$ .

eben ausgeführt, häufig nicht sofort feststellbare Größe, sondern den Abstand zwischen dem Brennpunkt  $F'$  und dem hinteren Brillenscheitel  $S'$  und schreiben  $s' = S'F' = (S'O')$  (Abb. 27 u. 28). Ist sie bekannt, so kann man Formeln aufstellen, die (10) und (11) entsprechen, denn da diese allein davon abhängen, daß  $R$  und  $F'$  zusammenfallen, so ist es ohne weiteres möglich, als Zwischenpunkt des Brillenglases nicht  $H'$ , sondern  $S'$  einzusetzen, was eben auf die neuen Formeln (s. unten) führt.

Die Abstufung der Brillengläser wird dann nach den Kehrwerten der Schnittweiten, den *Scheitelbrechwerten* oder *Scheitelrefraktionen* durchgeführt. Dieses ist für die Anpassung darum sehr bequem, weil man zwei gleich bezeichnete Gläser (etwa  $-6$  dptr einer dünnen Brille und  $-6$  dptr einer Fernrohrbrille) ohne weiteres gegeneinander auswechseln kann, obwohl ihre Brechkräfte  $D$ , ungemein verschieden sein können.

Bei der Anpassung der Brillengläser wird also im allgemeinen nicht der Abstand  $H'H$  bestimmt, sondern der Abstand  $S'H$  des hinteren Brillenscheitels vom vorderen Augenhauptpunkt, bzw. da der vordere Augenhauptpunkt  $H$  ja derartigen Messungen nicht direkt zugänglich

<sup>1)</sup> Man erkennt hieraus, daß Brillenbestimmungen bis auf  $\frac{1}{8}$  dptr, wie in Amerika üblich, bei einer Prüfung auf 5 m zwecklos sind.



ist, vom vorderen Hornhautscheitel  $S$ , also der Abstand  $S'S$ . Diese Entfernung läßt sich z. B. mit Hilfe des WESSELYSchen Keratometers bei der Brillenanpassung ohne weiteres ziemlich sicher ermitteln. Im Gegensatz zu den sog. *inneren* Bezugspunkten  $H'$  und  $H$  nennt man dieses Zurückgehen auf den hinteren Brillenglasscheitel  $S'$  und den vorderen Augenscheitel  $S$  die Beziehung auf die *äußeren* Bezugspunkte. Man bezeichnet den Abstand vom hinteren Brillenscheitel zum vorderen Augenhauptpunkt ( $S'H$ ) mit  $\vartheta$ , und den Abstand vom hinteren Brillenscheitel zum Hornhautscheitel  $S'S$  mit  $\mathfrak{b}$ . Wie man sieht, ist  $\vartheta = \mathfrak{b} + 1,35$  mm oder  $\mathfrak{b} = \vartheta - 1,35$  mm, da ja der erste Augenhauptpunkt  $H$  um 1,35 mm hinter dem Hornhautscheitel liegt (Abb. 29, 30).

Die Beziehung, welche jetzt zwischen Scheitelrefraktion des Brillenglasses [für die Fernbrille mit  $A_\infty$  bezeichnet<sup>1)</sup>] und axialer Refraktion des Auges besteht, läßt sich, wie oben gesagt, in genau derselben Weise

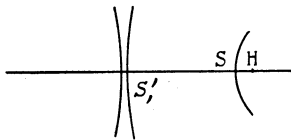


Abb. 29.

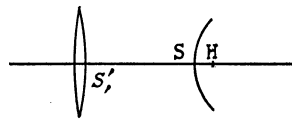


Abb. 30.

Die Lage des Augenhauptpunkts  $H$  zum Hornhautscheitel  $S$  und zum inneren Brillenscheitel  $S'$ .

$$S'S = S'H + HS; \quad \mathfrak{b} = \vartheta - h = \vartheta - 1,35 \text{ mm.}$$

gewinnen wie beim Zurückgehen auf die inneren Bezugspunkte. Es gilt auch hier die Beziehung (s. Abb. 27 u. 28)

$$S'R = S'H + HR.$$

Bezeichnen wir ( $S'O' = S'F' = S'R$ ), d. h. die Schnittweite mit  $s'$  und  $S'H$  mit  $\vartheta$  und den Fernpunktabstand  $HR$  mit  $a$ , so erhalten wir die Beziehung  $s' = \vartheta + a$  (12a) und bei Einsetzung der Kehrwerte  $\frac{1}{A_\infty} = \vartheta + \frac{1}{A}$ .

Wir können hier in genau der gleichen Weise wie bei den inneren Bezugspunkten die Gleichung nach  $A$  und  $A_\infty$  auflösen und erhalten

$$A_\infty = \frac{A}{1 + \vartheta \cdot A} \quad (12b)$$

bzw.

$$A = \frac{A_\infty}{1 - \vartheta \cdot A_\infty} \quad (13)$$

(Ziffernbeispiele VII, S. 136/37).

<sup>1)</sup> Diese Bezeichnung ist einmal eingeführt — der Scheitelbrechwert allgemein für eine bildseitige Schnittweite  $s'$  wurde mit  $A_s$  bezeichnet — und sie soll auch hier gebraucht werden. Sie paßt allerdings zu unserer Bezeichnungsweise nicht besonders, wo im Bildraume des Brillenglasses eigentlich  $B$  stehen sollte.

Die *Erörterung* dieser Formeln führt zu dem gleichen Ergebnis wie die der Formeln [(10) und (11)] für die inneren Bezugspunkte (s. oben S. 54). Man sieht, daß auch hier wieder zwei unabhängige Veränderliche  $\vartheta$  und  $A_\infty$  vorhanden sind und, wie schon oben gesagt, auch in einem genau entsprechenden Zusammenhange stehen.

Eine anschauliche Darstellung ergibt sich in dem von O. HENKER stammenden — später von ihm (1, 72, 95) noch weiter ausgedehnten — Schichtenbild (Abb. 31, 32), das aus  $b$  und  $A$  den Wert  $A_\infty$  (oder irgendeine dieser Größen aus den beiden andern) zu bestimmen gestattet. Da dieser Darstellung die oben für  $A_\infty$  gefundene Formel (12b) zugrunde gelegt wurde statt des einfacheren Zusammenhanges (12a)  $s' = \vartheta + a$ , so sind auch die Schichtenlinien keine so einfachen Gebilde wie die Geraden auf Abb. 26, sondern vielmehr Teile von Hyperbeln. Sie zeigen von  $A = \pm 4$  dptr ab eine allmählich stärker werdende, von links unten etwa nach rechts oben verlaufende Neigung, die erkennen läßt, daß für größere  $b$ -Werte zu höheren  $\left\{ \begin{matrix} \text{positiven} \\ \text{negativen} \end{matrix} \right\}$   $A$ -Werten immer  $\left\{ \begin{matrix} \text{schwächere} \\ \text{stärkere} \end{matrix} \right\}$  Scheitelbrechwerte  $A_\infty$  gehören.

Das Rechenblatt Abb. 26 ist natürlich auch für die Auswertung der Gleichung  $s' = \vartheta + a$  zu verwenden, wenn man die  $\vartheta$ -Werte in Millimetern abliest und die schrägen Schichtlinien für die  $A_\infty$ -Werte stehen läßt. Verfolgen wir die in VII auf S. 136f. gerechneten Beispiele, so erhalten wir

$$\begin{aligned} & \text{für } A = +10 \text{ dptr } \vartheta \left\{ \begin{array}{l} = 5 \text{ mm} \\ = 17 \text{ mm} \end{array} \right. A_\infty \left\{ \begin{array}{l} = 9\frac{1}{2} \text{ dptr} \\ = 8\frac{1}{2} \text{ dptr} \end{array} \right. \\ \text{und} & \text{für } A = -10 \text{ dptr } \vartheta \left\{ \begin{array}{l} = 5 \text{ mm} \\ = 17 \text{ mm} \end{array} \right. A_\infty \left\{ \begin{array}{l} = -10\frac{1}{2} \text{ dptr} \\ = -12 \text{ dptr} \end{array} \right. \end{aligned}$$

was alles, wie es auch sein muß, zu den genauer durchgeführten Rechenbeispielen ausgezeichnet paßt.

Die Ergebnisse bei richtiger Benutzung des Bandes von Abb. 26 — man muß allerdings beachten, daß  $b = \vartheta - 1,35$  mm ist — stimmen natürlich genau mit den durch Abb. 31, 32 erhaltenen überein, und die gleichmäßige Teilung der Achsen in Abb. 31, 32 ist sicherlich eine Annehmlichkeit. Es will mir indessen scheinen, als könnte man dem von mir vorgeschlagenen Verfahren infolge der durchweg größeren Steilheit des Schichtlinienverlaufs eine leichtere Ablesbarkeit beimessen; daß die Anlage von Abb. 26 einfacher und durchsichtiger ist, wird man nicht bestreiten können.

§ 24. *Die Bestimmung der Achsenlänge am schematischen Auge.* In den vorigen Paragraphen hatten wir die Beziehungen ermittelt, um aus dem Wert  $D$ , bzw.  $A_\infty$  des Brillenglases und dem Abstand  $\delta$  bzw.  $\vartheta$  die axiale Refraktion zu ermitteln. Mit der Feststellung von  $A$  ist aber noch nicht bekannt, wie lang das Auge ist, d. h. wo sich die Netzhaut-

grube befindet. Zu diesem Zweck müssen wir auf die Lagengleichung (1)  $B = A + D$  zurückgreifen. In dieser ist zunächst nur  $A$ , der Kehrwert des Fernpunktsabstandes  $HR = a$  bekannt. Wir können entweder den

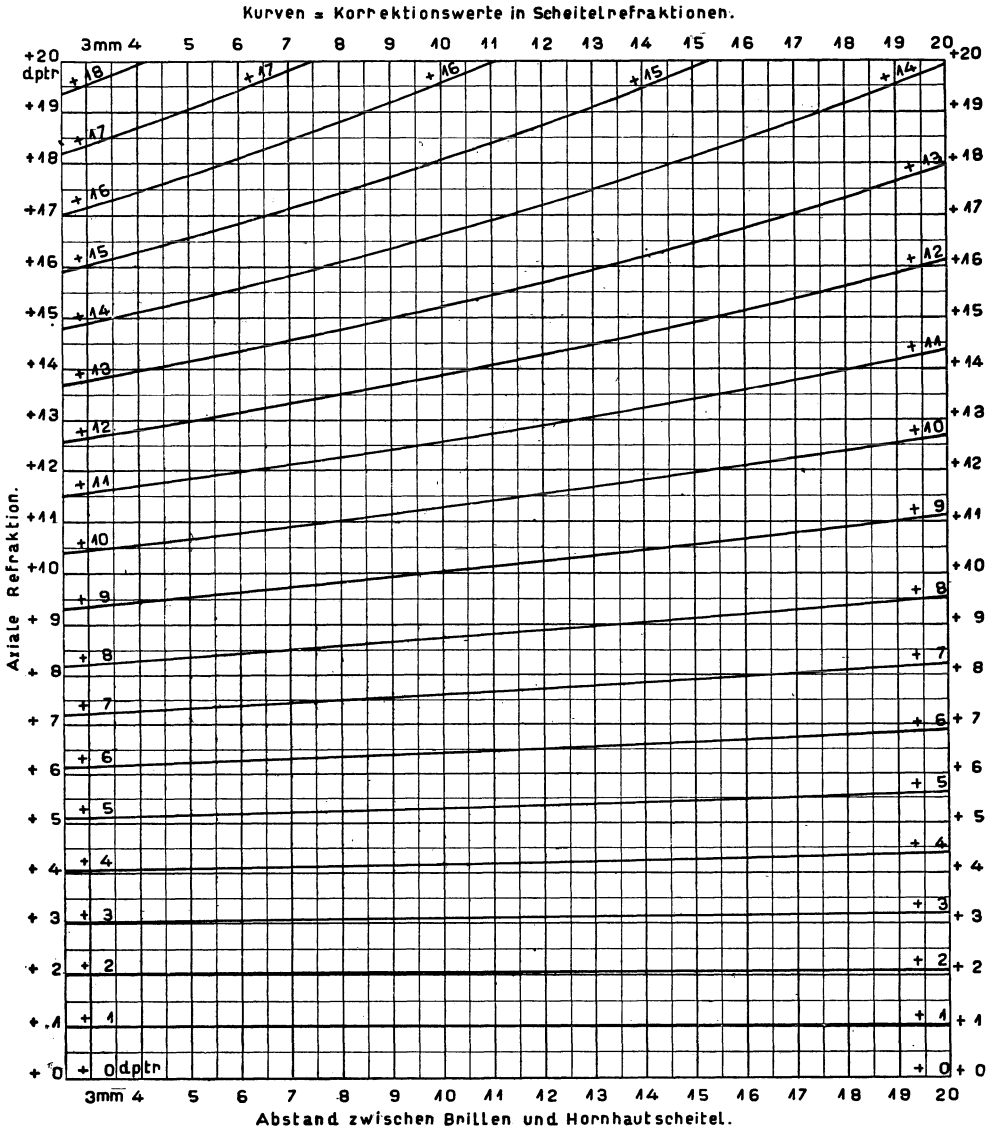


Abb. 31. HENKERSCHES Schichtenbild für die Scheitelbrechwerte  $A_{\infty}$  in ihrer Abhängigkeit von dem Hauptpunktsbrechwert  $A$  übersichtiger Augen und dem Abstand  $b$  zwischen Brillen- und Hornhautscheitel. Der einer bestimmten Schichtlinie zugehörige Scheitelbrechwert ist ihrem Anfang und ihrem Ende beigeschrieben.

Wert  $A$  selbst in die Gleichung einsetzen oder ihn nach der in § 22 erhaltenen Formel (11)  $A = \frac{D_1}{1 - \delta \cdot D_1}$  mit Hilfe von  $D_1$  und  $\delta$  ausdrücken. Zur Ermittlung von  $B$  müssen wir noch die Brechkraft des Vollauges  $D_1$ ,

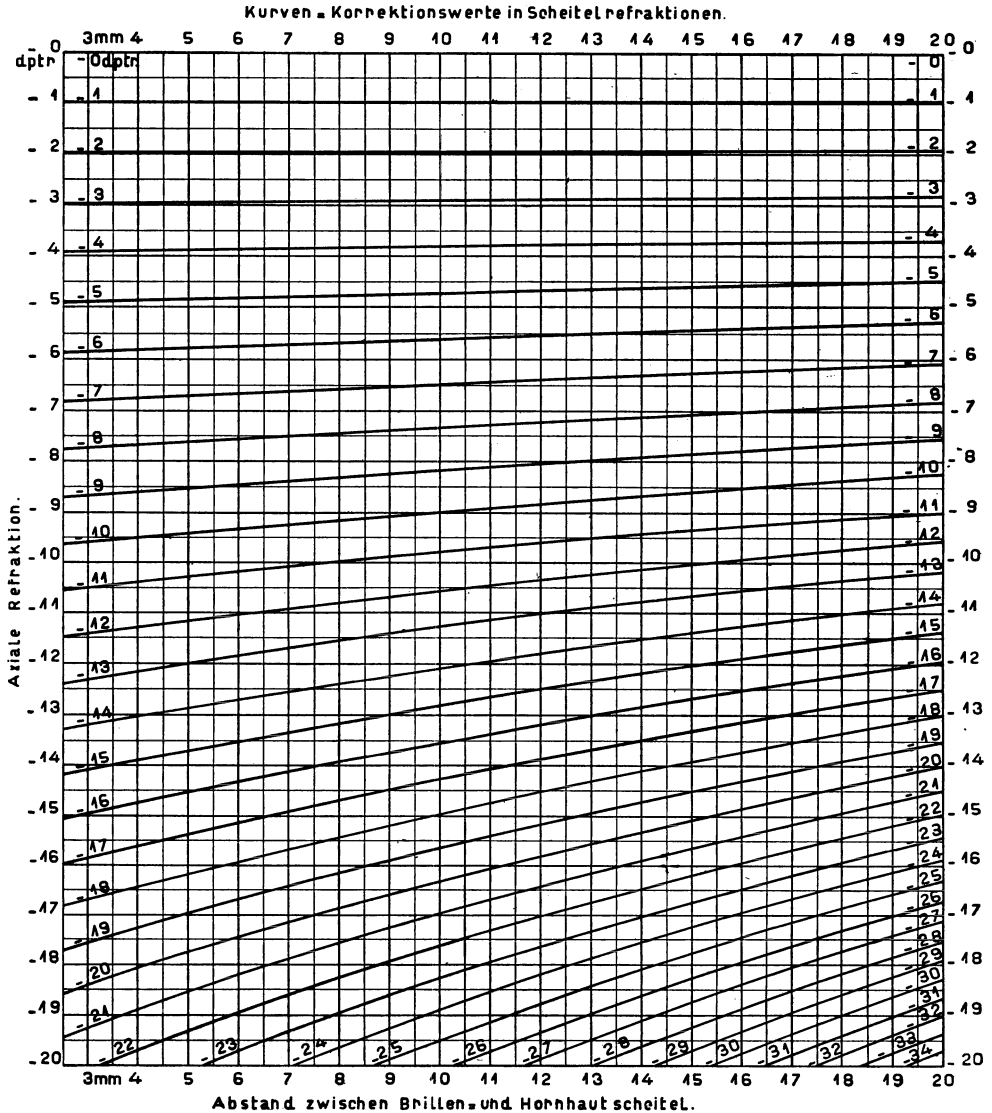


Abb. 32. HENKERSCHES Schichtenbild für die Scheitelbrechwerte  $A_\infty$  in ihrer Abhängigkeit von dem Hauptpunktsbrechwert  $A$  kurzsichtiger Augen und dem Abstand  $b$  zwischen Brillen- und Hornhautscheitel. Der einer bestimmten Schichtlinie zugehörige Scheitelbrechwert ist ihrem Anfang und ihrem Ende beigeschrieben.

kennen. Dieser Wert ist aber im Einzelfalle nicht bekannt und läßt sich meist auch, wenigstens ohne äußerst umständliche Methoden, nicht feststellen. Deshalb muß man hier auf die Werte des schematischen Auges zurückgehen. Nach GULLSTRAND (I, 335) beträgt die Brechkraft des Vollauges  $D_{//} = 58,64 \text{ dptr}^1$ ). Wenn dieser Wert, der für alle späteren Rechnungen, in denen  $D_{//}$  vorkommt, herangezogen werden soll, auch im Einzelfalle nur angenähert gilt, so sind wir doch berechtigt, anzunehmen, daß wir bei seiner Verwendung keinen Fehler begehen, der bei solchen Durchschnittsrechnungen vermieden werden könnte, und der bei der unseren Refraktionsbestimmungen an sich schon anhaftenden Fehlerbreite ins Gewicht fiel.

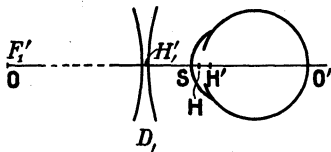


Abb. 33. Zur Feststellung der Achsenlänge  $SO'$  am schematischen Auge.

$$\delta = H'H; \quad a = HO; \quad b = H'O'; \\ \bar{b} = nb.$$

mit dem Brechungsvermögen des Glaskörpers  $n = 1,336$  zu multiplizieren, um den tatsächlichen Abstand  $H'O'$  der Netzhaut vom hinteren Augenhauptpunkt zu ermitteln (Rechenbeispiele V, 3, S. 135/36; IX, 1 u. 2, S. 137/39).

In allen Fällen, wo sich der Fernpunkt nicht direkt durch Messungen bestimmen läßt<sup>2)</sup>, bedarf es zur Ermittlung der Augenlänge einer Ersetzung des Wertes  $A$  durch den Ausdruck (11)  $\frac{D_1}{1 - \delta \cdot D_1}$ . Wir erhalten dann

$$B = \frac{D_1}{1 - \delta \cdot D_1} + D_{//} \quad \text{oder} \quad B = \frac{D_1 + D_{//} - \delta \cdot D_1 \cdot D_{//}}{1 - \delta \cdot D_1}.$$

<sup>1)</sup> Auch M. TSCHERNING gibt nach S. CZAPSKI (I, 264) dafür mit

$$\frac{1}{0,0171 \text{ m}} = 58,48 \text{ dptr}$$

einen übereinstimmenden Wert an.

<sup>2)</sup> Für kurzsichtige Augen läßt sich unter den eben gegebenen Voraussetzungen der Zuwachs  $x'$  der Achsenlänge des Auges unmittelbar aus dem Abstand  $\mathfrak{F}R = x$  des Fernpunktes vom vorderen Augenbrennpunkt  $\mathfrak{F}$  ermitteln. Man kann sich hier der nicht näher zu erörternden NEWTONSchen Formel bedienen:  $x x' = ff'$ , d. h. das Produkt aus Gegenstandsabstand und Bildabstand ist gleich dem Produkt der beiden Brennweiten. Es würde also hier sein  $x' = \frac{f'' f'''}{x}$ , und da bei der Zurückführung auf Luft beide Brennweiten ziffernmäßig gleich sind:  $x' = \frac{-f''^2}{x}$ . Da  $F'$  aber im Glaskörper liegt, muß dieser Ausdruck noch mit der Brechzahl  $n$  des Glaskörpers multipliziert werden, also:  $\bar{x}' = \frac{-n f''^2}{x}$ .

Der Zähler ist aber  $= D_{12}$  [nach (6) auf S. 40], so daß wir erhalten

$$B = \frac{D_{12}}{1 - \delta \cdot D_1}, \quad \text{also} \quad b = \frac{1 - \delta \cdot D_1}{D_{12}}. \quad (14)$$

Daraus kann, wenn  $D_1$  und  $\delta$  bekannt sind, nach Ermittlung der Brechkraft  $D_{12}$  der Verbindung Brille und Auge,

$$\bar{b} = n \cdot \frac{1 - \delta \cdot D_1}{D_{12}}$$

berechnet werden (Zahlenbeispiele für ähnliche Aufgaben IX, 2, am Schluß S. 139; X, 2, S. 142; XI, S. 143).

### Die Normalstellung des Brillenglases.

§ 25. *Die Berechnung der Netzhautbildgröße.* Zur Ermittlung der Bildgröße fehlsichtiger Augen mit dem Hauptpunktsbrechwert  $A$  können wir auf die auf die Augenhauptpunkte bezogene Formel (2) auf S. 21  $\alpha A = \beta B$  zurückgehen. Hier sind  $A$  und  $\alpha$  (z. B. das Sehzeichen) bekannt. Die Feststellung von  $B$  ist im vorigen Paragraphen abgeleitet worden. Daraus kann dann  $\beta$  ermittelt werden.

Für ein rechtsichtiges Auge, wo  $a = \infty$ , also  $A = 0$  wird, muß man auf die Formel (5)  $w = -\beta \cdot D$  oder  $\beta = \frac{-w}{D}$  zurückgehen (s. S. 33). Für das Auge ist also  $\beta = \frac{-w}{D_{12}}$  bzw., da  $D_{12} = \frac{1}{f_{12}}$ ,  $\beta = -w \cdot f_{12}$ , d. h. die Bildgröße ist der Brennweite des schematischen Auges proportional.

Da die Sehschärfe von der Bildgröße auf der Netzhaut abhängt, so haben wir nun zu untersuchen, wie diese durch das Fernbrillenglas beeinflußt wird. Da es sich um Abbildung sehr weit entfernter Gegenstände handelt, muß man auch hier die Formel  $w = -\beta \cdot D_{12}$  benutzen. Daß hier die Brechkraft der Verbindung  $D_{12}$  Brille und Auge zu verwenden ist, ist aus den in § 18 gegebenen Ausführungen ersichtlich. Es bedarf also, da hier der Wert  $D_{12}$  der Brechkraft des zusammengesetzten Systems maßgebend ist, stets des Eingehens auf die inneren Bezugspunkte (Hauptpunkte), da ja die Brechkräfte stets auf diese bezogen sind<sup>1)</sup>. Der Wert von  $D_{12}$  ist dann bekannt, wenn  $D_1$  und  $\delta$  gegeben sind, denn  $D_{12} = D_1 + D_{11} - \delta \cdot D_1 \cdot D_{11}$ .

Wir stellen zunächst die Forderung, daß die Brechkraft  $D_{12}$  der Verbindung gegenüber dem Vollauge mit  $D_{11}$  nicht geändert werden soll. Der Grund hierfür ist leicht ersichtlich: es ändert sich dann auch nicht die Bildgröße auf der Netzhaut (s. S. 33), denn es wird dann  $\beta = -w \cdot f_{12} = -w \cdot f_{11}$ .

<sup>1)</sup> Es ließe sich auch mit Hilfe des Scheitelbrechwertes (s. § 23) eine Formel gewinnen, doch würde sie außerordentlich verwickelt sein.

Es soll also  $D_{12} = D_1 + D_{11} - \delta \cdot D_1 \cdot D_{11}$

ebenso groß sein wie  $D_{11}$ , also:

$$D_{11} = D_1 + D_{11} - \delta \cdot D_1 \cdot D_{11}.$$

Daraus ergibt sich, da wir auf beiden Seiten  $D_{11}$  streichen können:

$$0 = D_1 - \delta \cdot D_1 \cdot D_{11} \quad \text{oder} \quad 0 = D_1 \cdot (1 - \delta \cdot D_{11}).$$

Diese Gleichung kann nur erfüllt sein, wenn einer der beiden Faktoren des Produkts auf der rechten Seite verschwindet, also gleich 0 wird. Für  $D_1$ , die Brechkraft des Brillenglases, hat der 0-Wert keinen Sinn, denn ein Planglas vor das fehlsichtige Auge zu setzen, ist zwecklos. Es muß also der andere Faktor  $1 - \delta \cdot D_{11} = 0$  werden. Daraus ergibt sich  $1 = \delta \cdot D_{11}$  oder  $\frac{1}{D_{11}} = \delta$ ; woraus, da  $\frac{1}{D_{11}} = f'_{11}$ , folgt  $f'_{11} = \delta$ ; d. h.

$\delta$  muß, wenn die Brechkraft der Verbindung die gleiche wie die des Vollauges bleiben soll, den Wert  $f'_{11}$ , den Wert der Brennweite des Vollauges (Abb. 34) annehmen. Es muß also, da  $\delta$  den Abstand des hinteren Brillenhauptpunkts von dem vorderen Augenhauptpunkt bedeutet,  $H'H = f'_{11}$  werden, d. h.,  $H'$ , der hintere Hauptpunkt des Brillenglases, muß mit dem vorderen Augenbrennpunkt  $\mathcal{F}$  zusammenfallen. Da  $\mathcal{F}$  nun 17,05 mm vom vorderen Augenhauptpunkt  $\mathbf{H}$  (also 15,7 mm vom Hornhautscheitel  $\mathbf{S}$ ) entfernt liegt, so muß der hintere Brillenhauptpunkt  $H'$  um diese 15,7 mm vom vorderen

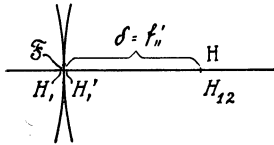


Abb. 34. Die Normalstellung des Brillenglases und die Lage des vorderen Hauptpunkts  $H_{12}$  der Verbindung.

Hornhautscheitel  $\mathbf{S}$  abstehen. Man bezeichnet diese Stellung des Brillenglases als die *Normalstellung*.

In diesem Fall ist die Bildgröße im fehlsichtigen Auge  $\beta_{12} = -w \cdot f'_{12} = \beta_{11} = -w \cdot f'_{11}$ , d. h. also, das Bild auf der Netzhaut des fehlsichtigen Auges ist ebenso groß wie das Bild, das von einem Vollauge mit der Brechkraft  $D_{11}$  entworfen werden würde, sei es, daß es sich um ein rechtsichtiges Auge handelt, wo das Bild auf die Netzhaut fällt, oder um ein kurzsichtiges oder um ein übersichtiges, wo es vor der Netzhaut im Glaskörper entworfen wird bzw. hinter der Netzhaut entworfen werden würde, wenn diese die Strahlen nicht schon vorher auffinge.

§ 26. *Der Bildort im Auge und die Achsenlängen-Veränderung.* Das brechende System des fehlsichtigen Auges von der Brechkraft  $D_{11}$  würde von einem unendlich fernen Gegenstand ein Bild im Brennpunkt, also in dem Abstand  $f'_{11}$  vom hinteren Hauptpunkt entwerfen. Durch die Fernbrille  $D_1$  im Abstand  $\delta$  wird das Bild um eine solche Strecke verlagert, daß es auf die Netzhaut fällt. Der (Luft-) Abstand für die Bildweite  $b$  ist gegeben durch die Formel (14) (§ 24)  $b = \frac{1 - \delta \cdot D_1}{D_{12}}$ . Bei

der Normalstellung wird (s. § 25)  $\delta = f''$  und  $D_{12} = D''$ . Setzen wir diese Werte ein, so erhalten wir

$$b = \frac{1 - f'' \cdot D_1}{D''}.$$

Wollen wir wissen, um welchen Betrag sich die Bildverlagerung vollzogen hat<sup>1)</sup>, so müssen wir von beiden Seiten der Gleichung den Wert der hinteren Brennweite  $f''$  abziehen und erhalten dann

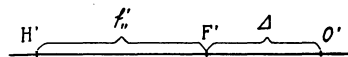
$$b - f'' = \frac{1 - f'' \cdot D_1}{D''} - f''.$$

Setzen wir (Abb. 35) den Luftwert der Achsenveränderung  $b - f'' = \Delta$  und für die Brennweite  $f'' = \frac{1}{D''}$  ein, so erhalten wir

$$\Delta = \frac{1 - f'' \cdot D_1}{D''} - \frac{1}{D''} \quad \text{bezw.} \quad \Delta = \frac{1 - f'' \cdot D_1 - 1}{D''}, \text{ daraus}$$

den Luftwert der Änderung der Achsenlänge

$$\Delta = \frac{-f'' \cdot D_1}{D''} = -f''^2 D_1,$$



da ja gilt

$$\frac{1}{D''} = f''.$$

Abb. 35. Die Veränderung  $\Delta$  der Achsenlänge.

Zur Feststellung der tatsächlichen Länge muß der Ausdruck noch mit  $n = 1,336$  multipliziert werden, also  $\bar{\Delta} = -n f''^2 D_1$ ,<sup>2)</sup>

Damit ist der Wert der Strecke gegeben, um die das Bild durch das Brillenglas  $D_1$  in Normalstellung verschoben wird, und auch, unter Berücksichtigung der Maße des schematischen Auges, die Achsenlänge.

*Erörterung.* Es ergibt sich, daß, wenn  $D_1$  negativ ist (kurzsichtiges Auge), der Wert für  $\Delta$  positiv wird, da  $f''^2$  als Quadrat stets positiv ist, also dann wegen des Minuszeichens der ganze Ausdruck einen positiven Wert annehmen muß, d. h. das Bild von links nach rechts (entsprechend der größeren Achsenlänge des kurzsichtigen Auges) verschoben ist. Umgekehrt ist es beim Hyperopen, wo  $D_1$  positiv wird und  $\bar{\Delta}$  dann einen negativen Wert erhält, d. h. eine Verschiebung entgegengesetzt der Lichtrichtung entsprechend der Achsenverkürzung stattfindet.

Dieser Ausdruck von  $\bar{\Delta}$  für  $\delta = f''$  hat den Vorteil, daß man ihn ohne jede vorausgehende Rechnung bestimmen und also auch für andere

<sup>1)</sup> D. h. die Größe ermitteln, um welche die Netzhautgrube des Auges von dem Brennpunkt entfernt ist.

<sup>2)</sup> Beachtet man, daß  $\frac{1}{D_1} = f' = H'R$  bei der Normalstellung, in der  $H'$  und  $F'$  zusammenfallen, so wird  $f' = \mathcal{F}R = x$ , und man erkennt, daß  $\bar{\Delta} = n \Delta = \bar{x}'$  in dem oben (S. 62 Anm.) angegebenen Ausdruck ist.



$\delta$ -Werte schnell eine angenäherte Bestimmung der zu  $D$ , gehörenden Achsenverlängerung gewinnen kann.

Bilden wir nun auch für Brillengläser allgemeiner Stellung ( $\delta \geq f''$ ) (§ 30, 34)

$$\begin{aligned} A = b - f'' &= \frac{1 - \delta D_1}{D_{12}} - \frac{1}{D''} = \frac{D'' - \delta D_1 D'' - D_1 - D'' + \delta D_1 D''}{D'' D_{12}} \\ &= -\frac{D_1}{D'' D_{12}} = -f'' \frac{D_1}{D_{12}} \end{aligned}$$

und multiplizieren diesen Luftwert mit der Brechzahl  $n = 1,336$  des Glaskörpers, so erhalten wir in

$$\bar{A} = nA = -n f'' \frac{D_1}{D_{12}} \quad (15)$$

einen strengen Ausdruck, der auch nicht umständlicher ausfällt als der vorher angegebene vereinfachte. — Freilich müssen wir zu diesem Zwecke  $D_{12}$  vorher berechnen. Ist das aber geschehen, so ist die Bestimmung von  $\bar{A}$  leicht und kann — wie in unsern Ziffernbeispielen — als bequeme Gegenprobe für die auf anderm Wege gefundene Achsenlängenveränderung dienen (Ziffernbeispiel VIII, S. 137).

§ 27. *Der Vorschub der Hauptpunkte.* Es entsteht weiter die Frage, wo die Hauptpunkte der Verbindung (Brille und Auge) mit der Brechkraft  $D_{12}$  gelegen sind, wenn sich das Brillenglas in der Normalstellung befindet. Wir gehen zurück auf die Hauptpunktverschiebe, deren Ausdrücke [(7) und (8)] hier lauten:  $h_{12} = \frac{\delta D''}{D_{12}}$  für den vorderen und

$h'_{12} = \frac{-\delta \cdot D_1}{D_{12}}$  für den hinteren Hauptpunkt. Setzen wir wieder für  $D_{12}$  ein  $D''$ , wie es für die Normalstellung gültig ist, so erhalten wir

für die Lage des vorderen Hauptpunktes den Wert  $h_{12} = \frac{\delta \cdot D''}{D''} = \delta$ .

Der vordere Hauptpunkt der Verbindung muß von dem ersten Hauptpunkt des ersten Systems aus gemessen werden (s. § 19), und zwar ist er hier um  $= f''$ , (da bei Normalstellung  $\delta = f''$ ) in der Lichtrichtung verschoben. Da nun bei einem dünnen Brillenglas der bildseitige Hauptpunkt  $H'$ , mit dem gegenstandseitigen  $H$ , als zusammenfallend angesehen werden darf, ergibt sich hieraus, daß der Hauptpunkt  $H_{12}$  von  $H$ , um  $\delta$  nach rechts (in der Lichtrichtung) entfernt ist, d. h. er liegt in dem Abstand  $H, H_{12} = \delta$  von jenem entfernt. Er fällt also mit dem vorderen Augenhauptpunkt  $H$  zusammen (Abb. 34).

Der Vorschub des hinteren Hauptpunktes  $H'_{12}$  ist hier  $h'_{12} = \frac{-\delta \cdot D_1}{D_{12}}$ .

Diese Formel wird in der Normalstellung mit  $\delta = f''$  zu  $h'_{12} = \frac{-f'' \cdot D_1}{D''}$  oder (da  $D'' = \frac{1}{f''}$ ):  $h'_{12} = -f''^2 D_1$ , in Luft oder  $n h'_{12} = -n f''^2 D_1$ , im

Glaskörper. Wie man sieht, ist das aber derselbe Wert, den wir S. 65 bei der Normalstellung für den  $\Delta$ -Betrag erhalten hatten, um den das Bild bei der Normalstellung verlagert wurde. Er deckt sich also mit dem Wert von  $\Delta$ , d. h.  $\Delta = h'_{12}$ . Der hintere Hauptpunkt ist also von dem zweiten Augenhauptpunkt aus um den gleichen Betrag verschoben wie das Bild vom Augenbrennpunkt  $F'$ . Da wir aber bei der Dioptrienrechnung die Lage des Bildes stets auf seinen hinteren Hauptpunkt beziehen, so ergibt sich unter Berücksichtigung von Abb. 36 folgendes: *Der Augenfehler wird für die Ferne bei Normalstellung des Brillenglases dadurch ausgeglichen, daß das Brillenglas (bei Normalstellung)*

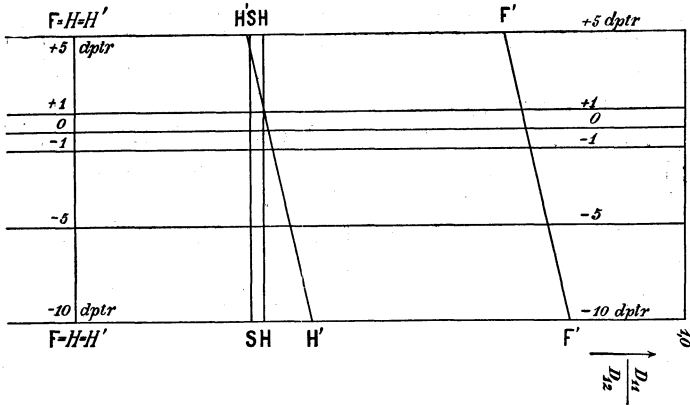


Abb. 36. Eine Darstellung für die Lage der Grundpunkte (angegeben durch die von oben nach unten verlaufenden Linien) der aus Brillenglas (von  $m$  dptr) und Vollaage gebildeten Verbindung bei Normalstellung des Brillenglases.

$$H'S = 15,7 \text{ mm}; 5 \geq m \geq -10.$$

(In dieser und den beiden folgenden, M. v. ROHR (4, 37, 39) entnommenen, Abbildungen beziehen sich die fetten Buchstaben auf die Grundpunkte der Verbindung,  $H$  und  $H'$  auf die Hauptpunkte des Brillenglases.) Die Senkrechte ganz rechts gibt den Wert für  $V = \frac{D_{11}}{D_{12}}$  an, der bei der Normalstellung stets  $= +1$  ist.

den Hauptpunkt  $H'$  um den Betrag  $n \Delta$ , das ist um den Betrag der Änderung der Augenachse, verschiebt. Die Brechkraft und die Brennweite des Auges bleiben bei der Normalstellung des Fernbrillenglases unverändert, es wird nur der zweite Hauptpunkt verlegt.

§ 28. Die Maßstabsänderung durch die Brille. Wir haben oben bereits gesehen, daß bei Normalstellung des Brillenglases eine Maßstabsänderung im Vergleich mit dem emmetropischen Auge, d. h. eine Änderung in der Bildgröße, nicht stattfindet. Allgemein, d. h. für andere Stellungen als die Normalstellung, können wir diese Änderung aber durch die Beziehung (5) (s. § 17) ausdrücken

$$\beta_{11} = \frac{-w}{D_{11}} = -w f'_{11} \quad \text{und} \quad \beta_{12} = \frac{-w}{D_{12}} = -w f'_{12}.$$

Das Verhältnis  $V$  der Größen der beiden Bilder  $\beta_{,,}$  und  $\beta_{12}$ , d. h. die Maßstabsänderung, ist also gegeben durch

$$V = \frac{\beta_{12}}{\beta_{,,}} = \frac{-w}{D_{12}} \cdot \frac{D_{,,}}{-w} = \frac{D_{,,}}{D_{12}} = \frac{f'_{12}}{f''}, \quad (16)$$

d. h. die Bildgröße der Verbindung Brille und Auge verhält sich zu der Bildgröße des Vollauges wie die zugehörigen Brennweiten oder umgekehrt wie die zugehörigen Brechkräfte (Ziffernbeispiele IX, 1 u. 2, S. 137/39; X, 2, S. 142). Bei der Normalstellung wird  $D_{12} = D_{,,}$ ; also  $V = +1$ , d. h. bei der Normalstellung gibt es keine Maßstabsänderung.

§ 29. *Die beiden Möglichkeiten der Abweichung.* Die bisher angenommene Stellung des Brillenglases in der Normalstellung, bei der  $H'$  und  $\mathcal{F}$  zusammenfallen, wird in der Regel nicht einzuhalten sein. Meist wird sich der Abstand von 15,7 mm vom Hornhautscheitel als zu groß erweisen, d. h. das Brillenglas wird sich bequemer näher am Auge tragen lassen; bei der Probierbrille wird in manchen Fällen umgekehrt sogar ein noch größerer Wert vorliegen können.

§ 30. *Die Brille in einem zu nahen Abstände:*  $\delta < f''$ . Wir müssen hier wieder untersuchen, wie sich die Brechkraft der Verbindung  $D_{12}$  und damit die Bildgröße (Maßstabsänderung) und die Hauptpunktlage ändert. Es wird jetzt also  $D_{12}$  nicht zu  $D_{,,}$  und  $\delta$  nicht zu  $f''$ . Wir gehen wieder von der Formel (6) aus

$$D_{12} = D + D_{,,} - \delta \cdot D \cdot D_{,,},$$

die umgeformt lautet

$$D_{12} = D_{,,} + D \cdot (1 - \delta \cdot D_{,,}).$$

Für den vorliegenden Fall, in dem  $\delta$  kleiner als  $f''$  wird, gilt (s. S. 64) die Beziehung  $1 - \delta \cdot D_{,,} = 0$  nicht. Vielmehr wird, da  $\delta D_{,,}$  kleiner als 1 sein wird (im Fall  $\delta = f''$  wurde ja der Ausdruck  $\delta D_{,,} = f'' \cdot \frac{1}{f''} = 1$ ) der Wert in der Klammer größer als 0 sein, weil ja  $\frac{\delta}{f''}$  jetzt kleiner als 1 wird; mit anderen Worten, der Ausdruck in der Klammer wird einen positiven Wert erhalten. Man kann zur Vereinfachung der Schreibweise diesen positiven Wert rein formal dadurch ausdrücken, daß man eine beliebige Größe im Quadrat angibt — etwa  $\omega^2$  —, also für  $1 - \delta \cdot D_{,,}$  schreibt  $= \omega^2$ . Eine andere als eine rein formale Bedeutung zur Kennzeichnung des positiven Betrages hat diese neue Größe  $\omega^2$  nicht. Setzen wir diese Bezeichnung ein, so können wir schreiben

$$D_{12} = D_{,,} + D \cdot \omega^2. \quad (17)$$

*Erörterung.* Ist  $D$ , positiv (d. h. bei Hypermetropen), so wird auch  $D_{12}$  größer als  $D_{,,}$ . Da die Maßstabsänderung ausgedrückt wird durch den Quotienten (16)  $V = \frac{D_{,,}}{D_{12}}$ , wird  $V < 1$  sein, d. h. das Bild wird kleiner

als bei Normalstellung bzw. im emmetropischen Auge. Ist  $D$ , negativ, so wird der Wert von  $D_{12}$  kleiner als  $D''$ , werden, weil ja nach der Gleichung (17) von  $D''$ , noch ein gewisser Betrag abgezogen wird, und infolgedessen wird das Verhältnis  $\frac{D''}{D_{12}} > 1$ . Es findet also in diesem Falle, d. h. bei Myopen, eine Bildvergrößerung statt; man sehe auch die Darstellung auf der rechten Seite von Abb. 37 (Ziffernbeispiel S. 138).

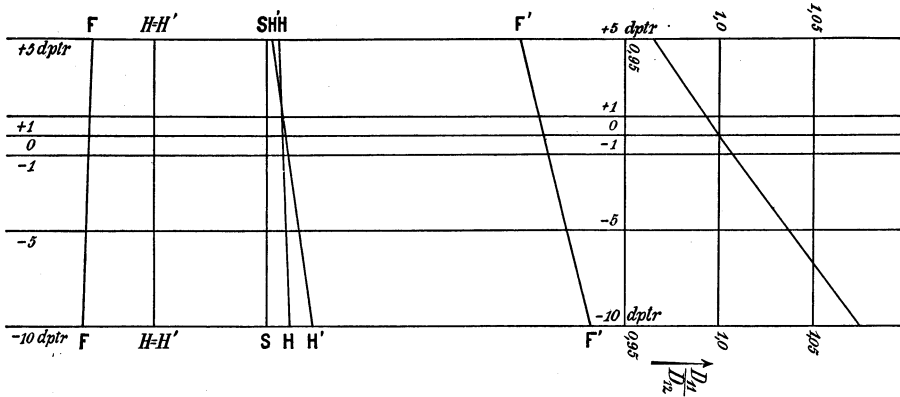


Abb. 37. Eine Darstellung für die Lage der Grundpunkte der aus Brillenglas (von  $m$  dptr) und Vollauge gebildeten Verbindung.  $H'S = 8,65$  mm;  $5 \geq m \geq -10$ . Man sehe die Unterschrift von Abb. 36. Die letzte (rechts auf der Abbildung) schräg von oben nach unten verlaufende Linie gibt das jeweilig gültige Vergrößerungsverhältnis  $V = \frac{D''}{D_{12}}$  an. Es liegt etwa zwischen 0,96 und 1,08.

Der *Hauptpunktverschub* wird wieder bestimmt für den vorderen Hauptpunkt  $H_{12}$  durch die Formel (7)

$$h_{12} = \frac{\delta \cdot D''}{D_{12}}.$$

Den obigen Wert (17) für  $D_{12}$  eingesetzt, wird  $h_{12}$  zu:

$$h_{12} = \frac{\delta \cdot D''}{D'' + D' \cdot \omega^2},$$

Zähler und Nenner durch  $D''$  dividiert, ergibt

$$h_{12} = \frac{\delta}{1 + \frac{D' \cdot \omega^2}{D''}}. \tag{17a}$$

*Erörterung.* Dieser Vorschub des vorderen Hauptpunkts (Abb. 37) der Verbindung Brille und Auge wird für positives  $D$ , (beim Hypermetropen), da  $D$ , im Nenner steht, also der Nenner notwendig größer als 1 werden

muß, weil ja noch etwas zu 1 addiert wird, kleiner als  $\delta$  ( $\delta$  wird ja durch eine Größe über der Einheit dividiert). Umgekehrt wird, wenn  $D$ , negativ ist (beim Myopen), der Wert von  $h_{12}$  größer werden. Beachtet man nun, daß allgemein galt  $\delta = H' \mathbf{H}$ , was bei dünnen Brillen mit zusammenfallenden Hauptpunkten  $H$ , und  $H'$ , auch geschrieben werden kann  $\delta = H \mathbf{H}$ , und erinnert sich, daß  $h_{12}$  von  $H$ , (hier im Sinne der Lichtrichtung) abzutragen war, so kommt man auf die folgende Aussage:  $H_{12}$  wird im ersten Fall etwas vor, im zweiten Fall etwas hinter dem Ort des vorderen Hauptpunktes  $\mathbf{H}$  im Vollauge zu liegen kommen (Ziffernbeispiele S. 138).

Für den hinteren Hauptpunkt  $H'_{12}$  gilt (8) die Gleichung

$$h'_{12} = \frac{-\delta \cdot D}{D_{12}}.$$

*Erörterung.* Ist  $D$ , positiv, so wird dieser Wert negativ bleiben, wird also kleiner als Null, umgekehrt, wenn  $D$ , negativ ist, größer als Null sein. Für den Hypermetropen wird also (s. Abb. 37) der hintere Hauptpunkt des Gesamtsystems vom zweiten Augenhauptpunkt  $\mathbf{H}'$  nach vorn verschoben sein, für den Myopen nach hinten, da ja der hintere Hauptpunkt  $H'_{12}$  der Verbindung vom zweiten Hauptpunkte des zweiten Systems (hier also des Auges)  $\mathbf{H}'$  abzutragen ist (Ziffernbeispiele IX, 1, S. 138).

Die Verschiebung des Bildortes bis zur Netzhaut des fehlsichtigen Auges erfolgt also, verglichen mit dem Falle der Normalstellung des Brillenglases, nur zum Teil durch eine Verschiebung des zweiten Hauptpunkts; außerdem ist, da sich  $D_{12}$  gegenüber  $D_{,,}$  ändert, wenn der Normalabstand nicht eingehalten wird, die Brennweite der Verbindung je nach dem Betrage von  $\delta$  verschieden (Ziffernbeispiel IX, 1, S. 137/38).

§ 31. *Die Brille in einem zu weiten Abstände:  $\delta > f'_{,,}$ .* Auch hier können wir die Formel  $D_{12} = D, + D_{,,} - \delta \cdot D, \cdot D_{,,}$  in der gleichen Weise wie oben (§ 30) umformen und schreiben

$$D_{12} = D_{,,} + D, (1 - \delta \cdot D_{,,}).$$

Da  $\delta$  hier größer als  $f'_{,,}$  ist, wird der Wert in der Klammer  $1 - \delta \cdot D_{,,}$  kleiner werden als 0, denn  $\delta \cdot D_{,,}$  fällt größer als 1 aus, indem  $\frac{1}{f'_{,,}} \cdot \delta$  größer ist als +1. Der Ausdruck  $(1 - \delta \cdot D_{,,})$  wird also einen negativen Wert annehmen. Wollen wir in Übereinstimmung mit der Ableitung bei  $\delta$  kleiner als  $f'_{,,}$  auch jetzt, für den Wert in der Klammer,  $\omega^2$  als eine positive Größe setzen, so müssen wir das Vorzeichen vor der Klammer negativ nehmen, müssen also schreiben

$$D_{12} = D_{,,} - D, \cdot \omega^2. \quad (17)$$

*Erörterung.* Zur Ermittlung, ob  $D_{12}$  größer oder kleiner als  $D_{,,}$  wird, ist folgende Überlegung notwendig: Ist  $D$ , positiv (größer als 0, also

beim Hypermetropen), so wird  $D_{12}$  kleiner als  $D''$  werden, da  $-D_1 \omega^2$  negativ wird. Wird umgekehrt  $D_1$  negativ, so wird der Wert von  $D_{12}$  größer als  $D''$ , (der Fall des Myopen). Die Maßstabsänderung  $\frac{D''}{D_{12}}$  wird also im ersten Falle, beim Hypermetropen, gegenüber dem Emmetropen eine Vergrößerung des Netzhautbildes, im zweiten Fall (für den Myopen) eine Verkleinerung des Netzhautbildes anzeigen. Die Verhältnisse sind demnach hier umgekehrt wie in dem Fall, wo  $\delta$  kleiner als  $f''$  war (siehe den rechten Teil der Abb. 38).

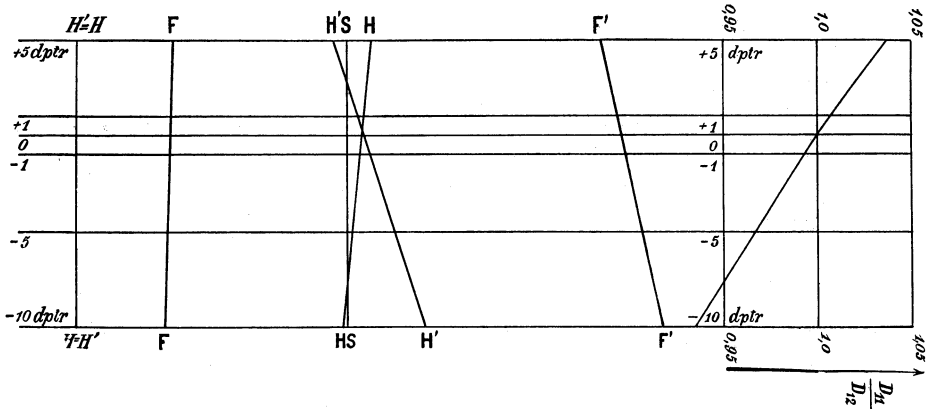


Abb. 38. Eine Darstellung für die Lage der Grundpunkte der aus Brillenglas (von  $m$  dptr) und Vollaue gebildeten Verbindung.  
 $H'S = 22,77$  mm;  $5 \geq m \geq -10$ . (Man sehe die Unterschrift von Abb. 36 u. 37).

Zur Bestimmung der Lage der Hauptpunkte ist folgendes zu sagen: Der vordere Hauptpunkt  $H_{12}$  bestimmt sich durch die Formel (7)

$$h_{12} = \frac{\delta \cdot D''}{D_{12}}.$$

Da hier  $D_{12} = D'' - D_1 \omega^2$  (s. oben), so wird

$$h_{12} = \frac{\delta \cdot D''}{D'' - D_1 \cdot \omega^2}$$

Zähler und Nenner wieder durch  $D''$  dividiert, ergibt

$$h_{12} = \frac{\delta}{1 - \frac{D_1 \cdot \omega^2}{D''}}. \tag{17 a}$$

*Erörterung.* Für einen negativen Wert von  $D_1$  wird der Nenner größer als 1, also der Wert von  $h_{12}$  kleiner als  $\delta$ , d.h. bei dem Myopen wird  $H_{12}$  vor den ersten Hauptpunkt des Auges verlagert sein (Abb. 38); für den Hypermetropen, wo  $D_1$  einen positiven Wert hat, wird der Nenner kleiner

als 1 werden, also  $h_{12}$  größer als  $\delta$  sein. Der erste Hauptpunkt des zusammengesetzten Systems wird also *hinter* den ersten Augenhauptpunkt verschoben sein.

Für den hinteren Hauptpunkt  $h'_{12} = \frac{-\delta \cdot D_1}{D_{12}}$  wird beim Hypermetropen, wo  $D_1$  positiv ist, die Formel einen negativen Wert annehmen, der hintere Hauptpunkt also nach links verschoben sein, während er für den Myopen mit negativem  $D_1$ -Wert umgekehrt nach rechts vom zweiten Hauptpunkt verlagert ist. Die Art und Weise der Vorschubs- und der Maßstabsänderung kann aus der Abb. 38 ersehen werden (Ziffernbeispiele IX, 2, S. 139).

§ 32. *Der Fall eines sehr großen  $\delta$ -Werts.* Wir haben in den §§ 30 und 31 die Fälle besprochen, wo  $H'$  nicht mit **F** zusammenfiel, d. h. das Brillenglas sich nicht in Normalstellung befand. Die Werte von  $\delta$ , die wir dabei stillschweigend angenommen hatten, waren aber nicht sehr groß, praktisch wird auch  $\delta$  kaum jemals bei der gewöhnlichen Probierbrille den Wert von 25 mm überschreiten. Für gewisse Fälle ist aber ein Hinausgehen über diesen Wert von Vorteil, und zwar handelt es sich hier um positive (Sammel-) Gläser.

Ferner kann es für manche Fälle auch zweckmäßig sein, einen negativen Wert von  $\delta$  einzuführen. In diesem Fall liegt also der bildseitige Hauptpunkt der Brille  $H'$  rechts vom Augenhauptpunkt **H** (Fernrohrbrille; Durchrechnung X, 1 u. 2, S. 140/43).

Wir betrachten hier zunächst nur den Fall, daß  $\delta$  einen großen positiven Wert hat, wobei es sich um Sammelgläser handelt. Zur Ableitung von  $\delta$  erinnern wir an die folgenden Beziehungen (s. Abb. 24, 25), wobei  $H'F'$  = Brennweite des Brillenglases:

$$\begin{aligned} H'F' &= H'H + HF'; & H'H &= \delta; & HF' &= HR = a; \\ f' &= \delta + a \text{ [s. (9) auf S. 52];} & \delta &= f' - a \end{aligned}$$

oder, unter Einsetzung der Kehrwerte,

$$\delta = \frac{1}{D_1} - \frac{1}{A}.$$

Aus der allgemeinen Formel (6) der Brechkraft bei Zusammensetzung zweier Systeme  $D_{12} = D_1 + D_{11} - \delta \cdot D_1 \cdot D_{11}$ , ergibt sich, wenn man den eben gefundenen Wert von

$$\delta = \frac{1}{D_1} - \frac{1}{A}$$

einsetzt,

$$D_{12} = D_1 + D_{11} - \left( \frac{1}{D_1} - \frac{1}{A} \right) \cdot D_1 \cdot D_{11};$$

woraus durch Ausmultiplizieren folgt

$$D_{12} = D_1 + D_{11} - D_{11} + \frac{D_1 \cdot D_{11}}{A};$$

( $+D_{\prime\prime}$  und  $-D_{\prime\prime}$  heben sich weg), so daß sich, wenn man  $\frac{D_{\prime}}$  heraussetzt, ergibt:

$$D_{12} = \frac{D_{\prime}}{A} \cdot (A + D_{\prime\prime}).$$

Hieraus läßt sich dann eine andere Formel für die Maßstabsvergrößerung  $V = \frac{D_{\prime\prime}}{D_{12}}$  bilden, wenn man den Wert für  $D_{12}$ , der eben gefunden worden ist, einführt. Man erhält

$$\frac{D_{\prime\prime}}{D_{12}} = \frac{D_{\prime\prime} \cdot A}{D_{\prime} \cdot (A + D_{\prime\prime})} \tag{a}$$

und nach Kürzung mit  $D_{\prime\prime} \cdot A$

$$\frac{D_{\prime\prime}}{D_{12}} = \frac{1}{D_{\prime} \cdot \left( \frac{1}{D_{\prime\prime}} + \frac{1}{A} \right)},$$

woraus, unter Einsetzung der Strecken  $f_{\prime\prime}$  für  $\frac{1}{D_{\prime\prime}}$  und  $a$  für  $\frac{1}{A}$ :

$$\frac{D_{\prime\prime}}{D_{12}} = \frac{1}{D_{\prime} \cdot f_{\prime\prime} + a}. \tag{18}$$

*Erörterung.* Wir gehen hierbei zurück auf die Form (a)

$$V = \frac{D_{\prime\prime}}{D_{12}} = \frac{D_{\prime\prime} \cdot A}{D_{\prime} \cdot (A + D_{\prime\prime})}.$$

Der Wert von  $V$  hat stets das Zeichen von  $A$ , d. h. des Hauptpunktsbrechwertes des Auges, denn  $D_{\prime\prime}$  (Breckkraft des Vollauges) ist positiv, also das Vorzeichen des Zählers nur von demjenigen von  $A$  abhängig. Für den Nenner gilt folgende Überlegung:  $D_{\prime\prime} = 58,64$  dptr wird stets größer sein als  $A$ ; denn selbst, wenn wir  $A = -30$  dptr setzen, wird die Summe  $(A + D_{\prime\prime})$  einen positiven Wert ergeben.

$D_{\prime}$  ist, da es sich in dem vorliegenden Falle ja um eine Sammellinse handelt, ebenfalls positiv. Der Nenner wird also hier stets positiv

ausfallen. Es wird also, wenn  $A$  positiv ist, auch der ganze Ausdruck positiv sein, d. h. der Gegenstand erscheint aufrecht. Durch die Sammellinse wird ja der ferne Gegenstand umgekehrt in  $\beta$ , abgebildet (s. Abb. 39). Dieses Bild ist aber der Gegenstand  $\alpha$  für das Auge, und das jetzt vom übersichtigen Auge ( $A$  positiv) entworfene Netzhautbild ist ebenso gerichtet wie  $\beta$ , d. h. es steht für einen aufrechten Gegenstand auf dem Kopf, wie es für einen aufrechten Eindruck nötig ist.

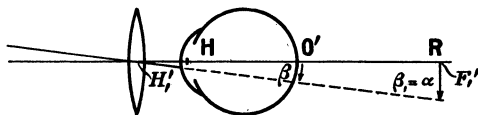


Abb. 39. Eine schwache Sammellinse in großem Abstände s. Erklärung zu Abb. 40.



Ist  $A$  dagegen negativ, so wird das Bild im Auge aufrecht, weil hier zunächst ein reelles umgekehrtes Luftbild entsteht, das von dem beobachtenden kurzsichtigen Auge natürlich umgekehrt wahrgenommen wird. In Abb. 39 ist der Strahlengang für das übersichtige, in Abb. 40 für das kurzsichtige Auge angedeutet (Rechenbeispiele IX, 3, S. 140).

§ 33. Die Maßstabsänderung in ihrer Abhängigkeit von  $\delta$  und  $A$ . In den vorigen Paragraphen hatten wir bereits festgestellt, daß sich bei einer anderen als der Normalstellung des Brillenglases eine Maßstabsänderung vollzieht, das Verhältnis  $\frac{D''}{D_{12}} = V$  nicht mehr den Wert  $+1$  behält. Wir hatten damit  $V$  als abhängig von  $\delta$  und  $D$ , erkannt und entsprechende Werte finden können. Man kann aber auch die Änderung der Bildgröße als abhängig von  $\delta$  und  $A$ , dem Brillenabstand und

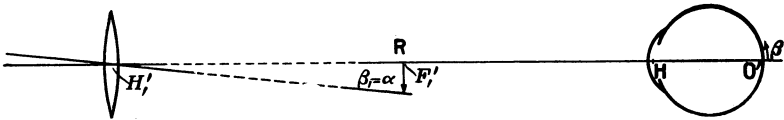


Abb. 40. Zur Verwendung schwacher Sammellinsen mit großem Abstande  $\delta$ . Die Strecke  $H'F'$  ist wegen Raummangels zu kurz gezeichnet; man sollte sie auf etwa 20 cm verlängert denken. Man erkennt, daß es sich in Abb. 39 um den Eindruck eines aufrechten, in Abb. 40 um den eines umgekehrten Gegenstandes handelt.

dem Hauptpunktsbrechwert des Auges, ableiten, weil man dann unmittelbar den Refraktionsfehler  $A$  des Auges und  $\delta$  zueinander in Beziehung setzt. Das geschieht, wenn man  $D$ , mit Hilfe der Formel (10)

$D = \frac{A}{1 + \delta \cdot A}$  hinausschafft (s. § 22). Zu diesem Zweck muß man in der Formel für die Verbindung Auge und Brille

$$D_{12} = D + D'' - \delta \cdot D \cdot D'',$$

$D$ , durch den eben eingeführten Ausdruck ersetzen. Man erhält dann

$$D_{12} = \frac{A}{1 + \delta \cdot A} + D'' - \frac{\delta \cdot A \cdot D''}{1 + \delta \cdot A};$$

auf gemeinsamen Nenner gebracht:

$$D_{12} = \frac{A + D'' + \delta \cdot A \cdot D'' - \delta \cdot A \cdot D''}{1 + \delta \cdot A}, \text{ und daraus } D_{12} = \frac{A + D''}{1 + \delta \cdot A}$$

Beachtet man, daß  $f'' = \frac{1}{D''}$ , so geht diese letzte Form, wenn man  $D''$  heraussetzt, über in

$$D_{12} = D'' \cdot \frac{1 + f'' \cdot A}{1 + \delta \cdot A}, \quad \text{woraus} \quad \frac{D_{12}}{D''} = \frac{1 + f'' \cdot A}{1 + \delta \cdot A}.$$

Diese Formel ergibt durch einfaches Umkehren eine neue Formel für das Vergrößerungsverhältnis  $V$ :

$$\frac{D_{12}}{D_{12}} = \frac{1 + \delta \cdot A}{1 + f'' \cdot A} \quad (19)$$

Wie man sieht, ist also  $V$  hier abhängig von  $\delta$  und  $A$ , d. h. dem Abstand des Brillenglases und dem Hauptpunktsbrechwert des gerade vorliegenden Auges.

Ein Ausdruck für das Vergrößerungsverhältnis läßt sich auch noch in etwas anderer Weise gewinnen, wobei wir zu gleicher Zeit einen neuen Längenwert, den wir später gebrauchen werden, einführen. Wir gehen wieder davon aus, daß  $V = \frac{D_{12}}{D_{12}}$  ist, und schreiben, da

$$D_{12} = D_1 + D_{12} - \delta \cdot D_1 \cdot D_{12}$$

$$\frac{D_{12}}{D_{12}} = \frac{D_{12}}{D_1 + D_{12} - \delta \cdot D_1 \cdot D_{12}} \quad \text{oder} \quad \frac{D_{12}}{D_{12}} = \frac{D_{12}}{D_1 \cdot (1 - \delta \cdot D_{12}) + D_{12}}$$

Zähler und Nenner durch  $D_{12}$  dividiert, gibt:

$$\frac{D_{12}}{D_{12}} = \frac{1}{D_1 \cdot \left( \frac{1}{D_{12}} - \delta \right) + 1}$$

statt  $\frac{1}{D_{12}}$  setzen wir  $f''$ , und erhalten:

$$\frac{D_{12}}{D_{12}} = \frac{1}{D_1 \cdot (f'' - \delta) + 1} \quad (a)$$

Wir führen jetzt den neuen Längenwert ein, nämlich den Abstand des hinteren Brillenhauptpunkts  $H'$  vom vorderen Augenbrennpunkt  $\mathcal{F}$ , den wir jetzt mit  $\delta_f = H'\mathcal{F}$  bezeichnen. Nach Abb. 41 ist nämlich

$$H'\mathbf{H} = H'\mathcal{F} + \mathcal{F}\mathbf{H} \quad \text{oder} \quad \delta = \delta_f + f'' ,$$

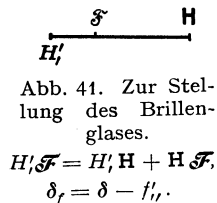
da  $\mathcal{F}\mathbf{H} = -f'' = +f''$ , woraus  $\delta - \delta_f = f''$  (b)

und  $\delta_f = \delta - f''$  oder  $f'' - \delta = -\delta_f$ . (c)

Setzen wir in die obenstehende Formel (a) statt  $f'' - \delta$  den neuen Ausdruck  $\delta_f$  ein, so erhalten wir:

$$\frac{D_{12}}{D_{12}} = \frac{1}{1 - \delta_f \cdot D_1} \quad (20)$$

Dieser Ausdruck muß für die bei Brillengläsern gewöhnlicher Art in Betracht kommenden Größen stets positiv sein, weil  $\delta_f$  immer nur sehr klein sein kann. Seine Größe wird nur wenige Millimeter betragen, da



man bestrebt ist, das Brillenglas einigermaßen in die Normalstellung zu bringen. Es wird deshalb  $\delta_f \cdot D$ , stets viel kleiner sein als 1 (Ziffernbeispiele XIII, 2, S. 147).

Wir wollen aber  $V = \frac{D_{11}}{D_{12}}$  als abhängig von  $\delta$  und  $A$  gewinnen. Dazu bedarf es, um  $D$ , zu entfernen, der Einsetzung des Ausdruckes (10)

$$D, = \frac{A}{1 + \delta \cdot A}$$

(s. S. 53) in die eben gefundene Gleichung (20) für das Vergrößerungsverhältnis. Man erhält dann

$$\frac{D_{11}}{D_{12}} = \frac{1}{1 - \delta_f \cdot \frac{A}{1 + \delta \cdot A}}$$

Nach Erweiterung mit  $1 + \delta \cdot A$  ergibt sich

$$\frac{D_{11}}{D_{12}} = \frac{1 + \delta \cdot A}{1 + \delta \cdot A - \delta_f \cdot A}, \quad \text{woraus} \quad \frac{D_{11}}{D_{12}} = \frac{1 + \delta \cdot A}{1 + (\delta - \delta_f) \cdot A},$$

und da  $\delta - \delta_f = f''$ , gilt (b), erhalten wir

$$V = \frac{D_{11}}{D_{12}} = \frac{1 + \delta \cdot A}{1 + f'' \cdot A}. \quad (19)$$

Man sieht, das ist dieselbe Formel (19), die wir bereits oben auf S. 75 für das Vergrößerungsverhältnis abgeleitet hatten (Ziffernbeispiel IX, 1, Anh. S. 138; X, 2, Anh. S. 143).

*Erörterung.* Aus der Formel ist folgendes im allgemeinen abzulesen. Das Vergrößerungsverhältnis wird von +1 abweichen, d. h. es wird eine Maßstabsänderung dann eintreten, wenn das Glied  $\delta A$  im Zähler nicht gleich ist dem Gliede  $f'' A$  im Nenner. Gleich kann es nur sein, wenn  $\delta = f''$ , d. h. der Abstand  $H; \mathbf{H}$  des Brillenglases vom vorderen Augenhauptpunkt  $\mathbf{H}$  mit der Brennweite des Auges übereinstimmt, wie es bei der Normalstellung des Brillenglases der Fall ist. Hier haben wir ja in der Tat auch keine Maßstabsänderung (s. § 25). Sonst können wir vier Fälle unterscheiden. Es kann sein 1.  $\delta < f''$ , 2.  $\delta > f''$ , und dabei kann  $A$  (die axiale Refraktion des Auges) jeweils entweder positiv oder negativ sein. Ist  $\delta < f''$  und  $A$  positiv, so wird der Zähler kleiner werden als der Nenner, mithin  $V < 1$ , d. h. in diesem Falle wird das Netzhautbild kleiner werden. Ist  $\delta < f''$  und  $A$  negativ, so wird  $\delta \cdot A$  einen kleineren negativen Wert annehmen als  $f'' \cdot A$ . Infolgedessen wird der Zähler größer als der Nenner und  $V > 1$ . Nimmt  $\delta$  in diesem Falle einen negativen Wert an, d. h. liegt der zweite Brillenhauptpunkt in der Lichtrichtung rechts vom vorderen Augenhauptpunkt, so wird der Zähler noch größer als 1 werden, da ja zu 1 (wegen  $-\delta \cdot -A$ ) noch etwas zugezählt wird, während der Nenner kleiner als 1 wird. Es handelt

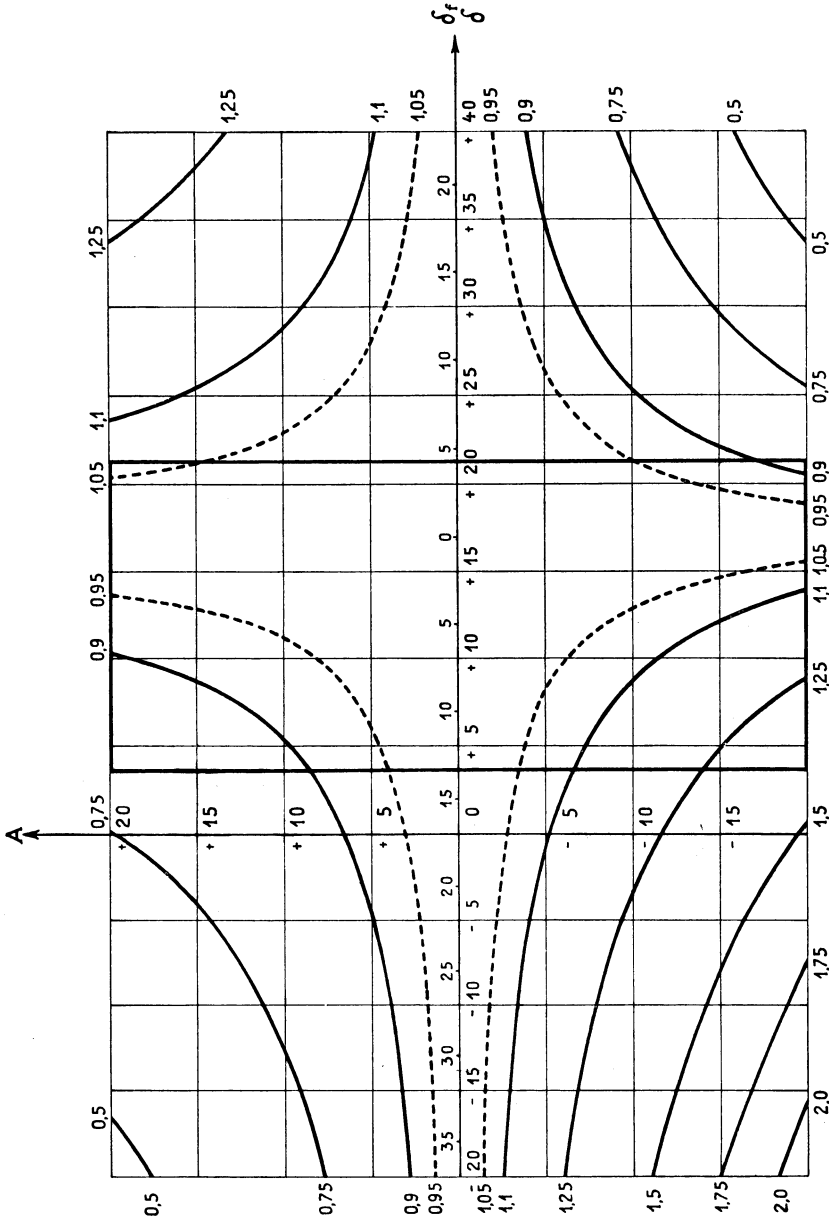


Abb. 42. Schichtenbild nach M. v. ROHR (4, 43) für die Vergrößerung  $V$  des Netzhautbildes in ihrer Abhängigkeit von  $\delta$  und  $A$ . Es sind die inneren Bezugspunkte  $H'$  und  $H$  gewählt. In der Mitte ist durch stärkere Grenzgeraden das HENKERSCHE Gebiet (s. Abb. 31 und 32) herausgehoben.

sich hier um das Gebiet für die Fernrohrbrille bei Kurzsichtigen, was besonders das Schichtenbild Abb. 42 erkennen läßt (Ziffernbeispiel X, 2, Anh. S. 142).

Ist  $\delta > f''$ , und  $A$  positiv, so wird  $V$  größer als 1, da in diesem Falle  $\delta A > f'' A$ . Wir haben also dann  $V > 1$ , d. h. eine Maßstabsvergröße-

zung. Ist endlich  $\delta > f''$ , aber  $A$  negativ, so wird der Zähler kleiner als der Nenner, also  $V < 1$  werden. Diese Ergebnisse stimmen, wie es auch sein muß, mit den Abb. 37 und 38 durchaus überein.

Im einzelnen sind die bei gegebener Refraktion  $A$  vorkommenden Maßstabsveränderungen bei verschiedenem  $\delta$  nicht ohne weiteres zu übersehen. Sie gehen aber klar aus dem beifolgenden Schichtenbild hervor (Abb. 42). Darauf sind an der Abszissenachse nicht nur die  $\delta$ -, sondern auch die  $\delta_f$ -Werte vermerkt (s. oben S. 75). Dies hat seine Berechtigung darin, daß sobald  $\delta_f = 0$  wird, d. h. sobald sich das Brillenglas in der Normalstellung befindet,  $V = 1$  wird, demnach eine Maßstabsänderung nicht eintritt. Hier liegt also ebenfalls ein beachtlicher Nullpunkt.

Wendet man sich nun zu der Besprechung des in Abb. 42 dargestellten Schichtenbildes, so ist es von einer zweifachen Symmetrie nicht allzu weit entfernt, wobei die Symmetrieachsen durch die Werte  $A = 0$  und  $\delta_f = 0$  ( $\delta = 17,05$  mm) bestimmt werden. Die Darstellung würde symmetrisch ausfallen, wenn man die senkrechte Achse nicht nach den  $A$ -, sondern den  $D_f$ -Werten beziffert hätte. Denn man ersieht aus der Formel (20), daß das einzige, die Veränderlichen enthaltende Glied  $\delta_f \cdot D_f = -\delta_f \cdot -D_f$  ist, d. h. durch einen Vorzeichenwechsel beider Veränderlicher keine Änderung erleidet. Hält man also an dem obigen  $D_f$ -,  $\delta_f$ -Achsenkreuz fest, so würde der Nordostquadrant mit  $\delta_f > 0$ ,  $D_f > 0$  das genaue Gegenbild sein von dem Südwestquadranten mit  $\delta_f < 0$ ,  $D_f < 0$ . Das gleiche gegenbildliche Verhalten würde für den Nordwestquadranten mit  $\delta_f < 0$ ,  $D_f > 0$  und den Südostquadranten mit  $\delta_f > 0$ ,  $D_f < 0$  gelten.

Bei der vorliegenden unsymmetrischen Anlage mit den  $A$ - und  $\delta$ -Achsen erkennt man, daß größere Abweichungen der Vergrößerung des Netzhautbildes von der Einheit nur bei einigermaßen beträchtlichen  $\delta_f$ - und  $A$ -Werten auftreten. Der Nordwest- und der Südostquadrant sind für unsern Zweck von geringerer Bedeutung, da sie auf Verkleinerungen des Netzhautbildes führen; dagegen finden sich in den beiden andern Vergrößerungen des Netzhautbildes; ein solcher Fall ist im Rechenbeispiel IX, 3 auf S. 140 wenigstens für ein übersichtiges Auge mit  $V = +2$  durchgeführt worden.

Bei eingehender Betrachtung erkennt man übrigens, daß sich in dem südwestlichen Quadranten des  $\delta_f$ -,  $A$ -Kreuzes die Schichtenlinien mit bestimmter Vergrößerung am meisten dem Nullpunkt ( $A = 0$ ;  $\delta_f = 0$ ,  $\delta = 17,05$  mm) nähern. In diesem Quadranten findet sich auch das Gebiet der Fernrohrbrillen mit negativem  $\delta$ -Wert, und davon gibt der südwestliche Quadrant des  $\delta$ -,  $A$ -Kreuzes in unserer Abb. 42 eine sehr deutliche Anschauung. Man erkennt, daß man für stärkere Kurzsichtigkeiten  $A$ , beispielsweise für  $A = -15,1$  dptr, eine Vergrößerung des Netzhautbildes von 1,75 schon für einen so kleinen  $\delta$ -Wert wie  $-20$  mm

erreicht. Das wird durch das Beispiel Fernrohrbrille X, 1, auf S. 141/42 aufs beste bestätigt, wo sich bei  $A = -14,6 \text{ dptr}$  und  $\delta = -19,2 \text{ mm}$   $V = 1,71$  ergibt.

§ 34. *Die Brille für das linsenlose (aphakische) Auge.* Genau in der gleichen Weise, wie das fehlsichtige Vollauge (d. h. das linsenhaltige Auge) auf den vorhergehenden Seiten besprochen wurde, läßt sich auch das staroperierte im Zusammenhang mit dem Starglas, seiner Fernbrille, abhandeln. Man könnte zunächst aus der Stärke des Starglases einen Schluß auf die axiale Refraktion des linsenlosen Auges ziehen nach der

Formel  $A = \frac{1}{1 - \delta \cdot D_1}$ , wobei allerdings zu berücksichtigen ist, daß

sich der vordere Augenhauptpunkt des linsenlosen Auges nach GULLSTRAND in einer Entfernung von  $-0,05 \text{ mm}$ , d. h.  $0,05 \text{ mm}$  vor dem Hornhautscheitel, befindet (s. Ziffernbeispiel V, 1, S. 133). Dadurch kann man also leicht das Verhältnis, in dem der Hauptpunktsbrechwert  $A^1$ ) des linsenlosen Auges zu der Stärke des Fernbrillenglases steht, kennenlernen. Im allgemeinen wird man sich aber weniger um den Hauptpunktsbrechwert des linsenlosen Auges kümmern, als ermitteln wollen, wie sich  $A$  des Vollauges zu  $D_1$  verhält, und welche Vergrößerung des Netzhautbildes durch das Starglas im linsenlosen Auge erzielt wird.

Daß das System hier weniger zusammengesetzt ist als beim linsenhaltigen Auge, ist zunächst bedeutungslos. Aber auch hier ist die Lage des Bildes auf der Netzhaut und seine Größe von Belang. Die Formeln, nach denen wir die Berechnungen vornehmen, sind die gleichen (6–8)

$$D_{12} = D_1 + D_{11} - \delta \cdot D_1 \cdot D_{11}; \quad h_{12} = \frac{\delta D_{11}}{D_{12}}; \quad h'_{12} = \frac{-\delta D_1}{D_{12}}$$

wie bisher, nur weicht natürlich die Brechkraft des Hornhautsystems  $D_{11}$  von der des Vollauges  $D_{11}$  ab. Man muß sich hier ebenfalls mit einem Durchschnittswert begnügen, der von GULLSTRAND mit  $43,05 \text{ dptr}$  angegeben worden ist, während der hintere Augenhauptpunkt ebenso wie der vordere mit  $-0,05 \text{ mm}$  dicht vor dem Hornhautscheitel angenommen wird. Namentlich der erste Wert ist nicht in allen Fällen als gültig anzusehen, aber auch hier muß man sich, wie das für die Brechkraft des schematischen Vollauges erwähnt worden ist (s. S. 4), zunächst mit mittleren Verhältnissen begnügen. In der Abb. 43 bedeutet  $\underline{H} = \underline{H}'$  den hinteren Hauptpunkt des staroperierten Auges mit der Brechkraft  $\underline{D}_{11}$ ,  $\underline{H}'_{12}$  den hinteren Hauptpunkt des Gesamtsystems  $\underline{D}_{12}$ ;  $\underline{F}'_{12} = \underline{O}'$  den Ort des Bildes im korrigierten aphakischen Auge, d. h. den Ort der Netzhautgrube und zugleich natürlich den hinteren Brennpunkt des zusammengesetzten Systems  $\underline{D}_{12}$  aus dem linsenlosen Auge  $\underline{D}_{11}$  und

<sup>1)</sup> Mit der Unterstreichung soll ausgedrückt werden, daß es sich hier nicht um das Vollauge handelt.

dem korrigierenden Starglas  $\underline{D}_.$ .  $\underline{S}$  = Hornhautscheitel;  $\underline{SF}'_{12} = \underline{SO}'$  ist die Achsenlänge des linsenlosen Auges.

Zuerst wird es darauf ankommen, die Achsenlänge  $\underline{SO}'$  des Auges zu ermitteln und daraus dann die axiale Refraktion  $A$  des Auges vor der Operation, d. h. die des Vollauges, festzustellen. Die Strecke  $\underline{SO}'$  läßt sich unschwer an der Hand der Abb. 43 unter Berücksichtigung der Geometrie der geraden Linie ableiten. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} \underline{SO}' &= \underline{SH}' + \underline{H'H}'_{12} + \underline{H}'_{12}\underline{F}'_{12}, \\ &= \underline{h}' + n\underline{h}'_{12} + n\underline{f}'_{12}. \end{aligned}$$

Zur endgültigen Berechnung muß man berücksichtigen, daß sich  $\underline{f}'_{12}$  und  $\underline{h}'_{12}$  als Strecken auf das letzte brechende Mittel, den Glaskörper, beziehen, ihre Luftwerte also mit  $n = 1,336$  multipliziert werden müssen, da man es bei den GULLSTRANDSchen Formeln zunächst immer mit den Luftlängen zu tun hat.

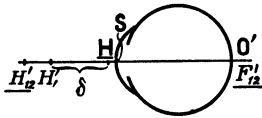


Abb. 43. Die Lage wichtiger Grundpunkte  $\underline{H}'$ ,  $\underline{H} = \underline{H}'$  der Teilabbildungen und  $\underline{H}'_{12}$ ,  $\underline{F}'_{12}$  der zusammengesetzten Abbildung an dem mit seinem Fernbrillenglas versehenen linsenlosen Auge.

$$\underline{H}'\underline{H} = \delta; \quad \underline{h}'_{12} = \underline{H}'\underline{H}'_{12}.$$

Wenn man das Starauge korrigiert hat, so kann man aus der in § 18 angegebenen Formel (6) für die Zusammensetzung zweier Abbildungen

( $\underline{D}_{..}$  und  $\underline{D}_.$ ) den Wert von  $\underline{D}_{12} = \frac{1}{\underline{f}'_{12}}$  berechnen.

Danach ist aus der ebenfalls bekannten Formel für die Hauptpunkte die Lage des hinteren Hauptpunkts  $\underline{h}'_{12} = \frac{-\delta \cdot \underline{D}_.}{\underline{D}_{12}}$  der Verbindung zu ermitteln.

Wenn man dabei berücksichtigt, daß die Brechkraft des Gesamtsystems

$$\underline{D}_{12} = \underline{D}_. + \underline{D}_{..} - \delta \cdot \underline{D}_. \cdot \underline{D}_{..}$$

ist, sich also aus den gegebenen Daten und dem Ergebnis der Brillenbestimmung ( $\underline{D}_.$ ) ohne weiteres berechnen läßt, so braucht man nur den Kehrwert von  $\underline{D}_{12}$  zu bestimmen, um die Luftbrennweite  $\underline{f}'_{12}$  zu erhalten, die man nach Multiplikation mit  $n = 1,336$  von dem Punkt  $\underline{H}'_{12}$  abzutragen hat, um den Ort  $\underline{F}'_{12} = \underline{O}'$  zu gewinnen. Damit ist auch aus der oben angegebenen Gleichung  $\underline{SO}' = \underline{SH}' + \underline{H'H}'_{12} + \underline{H}'_{12}\underline{F}'_{12}$ , da die Lage von  $\underline{H}'_{12}$  bekannt ist, ohne weiteres die Achsenlänge  $\underline{SO}'$  festzustellen. Da die Lage der Hauptpunkte im Vollauge  $\underline{D}_{..}$  nach dem schematischen GULLSTRANDSchen Auge ebenfalls bekannt ist, ist es dann ein leichtes, die Brennweite des Vollauges und damit nach der Formel (1)  $B = A + D$  die axiale Refraktion zu ermitteln, weil ja nun  $B = \frac{1}{b} \left( = \frac{1}{\underline{H}'\underline{O}'} \right)$  und  $\underline{D}_{..} = 58,64$  dptr bekannt sind, und man diese Werte nur in die Gleichung  $A = B - D$  einzusetzen braucht (die Ausführung der Rechnung s. XI, S. 143/44).

Besonders wichtig ist es aber, die Größe des Netzhautbildes bei der Verbindung Fernbrille und linsenloses Auge zu kennen. Wir leiten sie hier genau so ab wie beim Vollaue, indem wir den Wert nach der Formel  $V = \frac{D''}{D_{12}}$  berechnen, die in § 32 (a) ermittelt worden ist, nämlich

$$\frac{D_{12}}{D_{12}} = \frac{D'' \cdot A}{D_1 \cdot (A + D'')}.$$

Nur werden wir für  $D''$ , die Brechkraft des linsenlosen Auges, angedeutet durch  $D''$ , einzusetzen haben (bestimmte Ziffernbeispiele XI, S. 143/4).

Nunmehr kann das wichtige Verhältnis der Bildgröße des korrigierten staroperierten Auges zu der Bildgröße in dem linsenhaltigen Auge von bestimmter Refraktion  $A$  ermittelt werden. Zu diesem Zwecke muß man das Verhältnis zwischen der Brechkraft des linsenhaltigen und der Brechkraft des korrigierten aphakischen Auges, d. h. den Ausdruck  $\frac{D''}{D_{12}} = \frac{58 \cdot 64}{D_{12}}$  kennen. Wie die Ziffernbeispiele lehren (XI, S. 143), ist die Vergrößerung des Bildes um so beträchtlicher, je größer die Achsenlänge des Vollauges gewesen ist, so daß wir z. B. bei einer vorher vorhandenen Kurzsichtigkeit von etwa  $-18$  dptr fast zu der  $1\frac{1}{2}$ fachen Netzhautbildgröße des mit der Fernbrille bewaffneten linsenlosen Auges gelangen. Aus dieser Tatsache erklärt sich die oft überraschende Besserung der Sehschärfe nach Entfernung der Linse namentlich dann, wenn es sich, wie bei der FUKALASCHEN Operation, um stark kurzsichtige Augen handelt.

Wenn man hier ein bestimmtes Vergrößerungsverhältnis (z. B.  $\kappa = 2$ ) haben will, so kann man schreiben  $V = \kappa = \frac{D''}{D_{12}}$  oder [nach 32 (a)]

$$\kappa = \frac{D'' \cdot A}{D_1 \cdot (A + D'')} \quad \text{woraus} \quad \frac{D''}{D_1} = \frac{\kappa \cdot A}{A + D''}.$$

Da man  $A$  aus jeder beliebigen Stellung des Brillenglases  $D_1$  ermitteln kann, so läßt sich auch hier der notwendige Abstand  $\delta$

$$\left( \text{aus } \delta = \frac{1}{D_1} - \frac{1}{A} \right)$$

[s. S. 52 (9)] für das Glas  $D_1$  angeben.

## Die Brille und die Akkommodation.

§ 35. *Allgemeines über die Akkommodation.* Der Einfluß, den das Fernbrillenglas auf den Erfolg des Akkommodationsvorganges hat, ist allgemein wenig bekannt, obwohl er namentlich bei starken Graden der Fehlsichtigkeit und beginnender *Presbyopie* sehr merklich sein kann. Zum näheren Verständnis erscheint eine einleitende Besprechung der Akkommodation ohne Brillenglas notwendig.



Nach den Berechnungen von GULLSTRAND ändert sich die Lage der beiden Augenhauptpunkte  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{H}'$  auch bei sehr ausgiebiger Akkommodation (bis 10,5 dptr) nur um etwa 0,4 mm. Um diesen Betrag werden die beiden Hauptpunkte nach dem hinteren Augenpol zu verschoben. Für gewöhnlich können wir ihre Lage deshalb auch bei der Akkommodation als konstant ansehen

Als Beispiel (Abb. 44) besprechen wir zunächst ein kurzsichtiges Auge, das seinen *Fernpunkt* in  $\mathbf{R}$  haben möge. Bei maximaler Akkommodationsleistung befinde sich sein *Nahpunkt* in  $\mathbf{P}$ . Das *Akkommodationsgebiet* liegt also zwischen  $\mathbf{R}$  und  $\mathbf{P}$ .

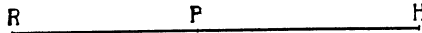


Abb. 44. Die Lage von Fernpunkt  $\mathbf{R}$  und Nahpunkt  $\mathbf{P}$  beim kurzsichtigen Auge.

Wir erhalten nach der Geometrie der geraden Linie für die Strecke  $\mathbf{RP}$  die Gleichung

$$\mathbf{RP} = \mathbf{RH} + \mathbf{HP}.$$

Bezeichnen wir den Abstand des Nahpunktes vom vorderen Augenhauptpunkt  $\mathbf{HP}$  mit  $\phi$ , denjenigen des Fernpunktes  $\mathbf{HR}$  mit  $r$ , dann ist also  $\mathbf{RH} = -r$ . Wenn wir ferner berücksichtigen, daß  $\mathbf{R}$  der Fernpunkt ist, dessen Abstand  $\mathbf{HR}$  von dem Augenhauptpunkt  $\mathbf{H}$  wir bisher immer mit  $a$  bezeichnet haben, so können wir schreiben

$$\mathbf{RP} = -a + \phi. \quad (21 a)$$

Dieser Ausdruck gilt also für die Bestimmung der Strecke des Akkommodationsgebietes.

Genau das gleiche ergibt sich, wenn wir ein übersichtiges Auge betrachten (Abb. 45). Hier liegt der Fernpunkt  $\mathbf{R}$  rechts von  $\mathbf{H}$ , der Nahpunkt je nach der Stärke der Akkommodation ( $\mathbf{P}_I$ ) rechts von  $\mathbf{H}$



Abb. 45. Die Lage des Fernpunktes  $\mathbf{R}$  und die beiden Möglichkeiten  $\mathbf{P}_I$  und  $\mathbf{P}_{II}$  der Lage des Nahpunktes beim übersichtigen Auge.

oder ( $\mathbf{P}_{II}$ ) nach links von  $\mathbf{H}$ . Die Ableitung nach der Geometrie der geraden Linie ist genau dieselbe, wie sie eben für das kurzsichtige Auge geführt worden ist, und ergibt dieselbe Gleichung.

Ist das Auge rechtsichtig, so liegt  $\mathbf{R}$  in der Unendlichkeit und  $\mathbf{P}$  je nach dem Alter in größerer oder geringerer Entfernung vor dem Auge. Das Akkommodationsgebiet wird auch hier durch die Formel  $\mathbf{RP} = -a + \phi$  ausgedrückt oder  $\mathbf{RP} = -\infty + \phi$ , d. h. der Betrag der Verlagerung des Punktes, auf den das Auge durch die Akkommodation eingestellt werden kann, also das Akkommodationsgebiet, ist hier  $= -\infty$ . Wie man aus dem letzten Ergebnis sieht, gibt in diesem Fall die Bestimmung des Akkommodationsgebietes keinen befriedigenden Aufschluß über die Akkommodationsleistung. Infolgedessen muß man

die Akkommodation nicht durch die Strecke des Akkommodationsgebietes selbst messen, sondern durch die *Akkommodationsbreite*, d. h. den Unterschied der entsprechenden Kehrwerte in Dioptrien.

Wir könnten einfach Fernpunkts- und Nahpunktsabstand in Beziehung zum Augenhauptpunkt durch die Kehrwerte der Strecken  $a$  und  $p$  ausdrücken. Optisch anschaulicher ist es aber, wenn wir davon ausgehen, daß durch die Akkommodationsleistung das zunächst auf seinen Fernpunkt eingestellte Auge auf den Nahpunkt eingestellt wird, was so viel bedeutet, als ob eine Zusatzlinse in  $\mathbf{H}$  angebracht würde, die den Fernpunkt  $\mathbf{R}$  nun in  $\mathbf{P}$  abbildet. Unter dieser Voraussetzung ist die GULLSTRANDSche Lagengleichung (1)  $B = A + D$  auch hier anwendbar. Wenn wir den Konvergenzwert  $B$  (für das Bild) mit  $P$  bezeichnen, die als Zusatzlinse bezeichnete durch die Akkommodation bedingte Brechkraftsteigerung mit  $A_k$ , so würden wir die Gleichung schreiben können  $P = A + A_k$ . Es würde also zu der statischen Refraktion (dem Hauptpunktsbrechwert)  $A$  des nicht akkommodierenden Auges noch ein Dioptrienwert von der Größe der Akkommodationsleistung  $A_k$  hinzukommen. Die Summe ergibt dann den Hauptpunktsbrechwert  $P$  für den Nahpunkt. Setzen wir wieder statt der Konvergenzwerte  $P$  und  $A$  die Kehrwerte der Strecken ein  $\left(P = \frac{1}{p}; A = \frac{1}{a}\right)$ , so erhalten wir

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{a} + A_k \quad \text{bzw.} \quad A_k = \frac{1}{p} - \frac{1}{a}. \quad (21 \text{ b})$$

Damit haben wir den Ausdruck, den DONDERS zuerst für die Akkommodationsbreite angegeben hat.

Es fragt sich, was für ein Vorzeichen  $A_k$ , d. h. die Zusatzlinse, durch die wir die Akkommodationsbreite ausdrücken können, haben muß. Der Vorgang ist dahin zu verstehen, daß das Auge bei Akkommodationsruhe auf den Fernpunkt  $\mathbf{R}$ , bei Akkommodationsanspannung auf den Punkt  $\mathbf{P}$  eingestellt ist. Wie aus der Abb. 44 zu ersehen ist, wird also das vorher schon kurzsichtige Auge noch kurzsichtiger. Dem entspricht ein Hauptpunktsbrechwert wie bei einem höheren Grade von Kurzsichtigkeit. Es muß also der Wert von  $A_k$  negativ sein. Genau das Entsprechende gilt für ein übersichtiges oder rechtsichtiges Auge. Hier ist das Auge mit seiner statischen Refraktion (bei Akkommodationsruhe) auf  $\mathbf{R}$  eingestellt (Abb. 45) und dann bei stärkster Akkommodationsanspannung auf  $\mathbf{P}_{II}$ , also einen Punkt, der einem negativen Hauptpunktsbrechwert des Auges entspricht.

Aus der eben gegebenen Darstellung ersieht man, daß die Auffassung, bei der Akkommodation rücke der Nahpunkt auf das Auge zu, keineswegs immer gültig ist, vielmehr wird sich bei übersichtigen Augen und einer nicht zu ausgiebigen Akkommodationsleistung der Nahpunkt mit der Lichtrichtung nach rechts hin vom Auge entfernen, also weiter

von **H** abgelegen sein, als der Fernpunkt. Es ist deshalb richtiger, weil allgemeiner gültig, wenn man sagt, bei der Akkommodation verschiebt sich der Nahpunkt gleichsinnig mit der Lichtrichtung<sup>1)</sup>.

§ 36. *Der Einfluß der Brille auf die Akkommodationsbreite.* Wenn wir den Einfluß, welchen die Brille auf die Akkommodationsbreite und damit auf das Akkommodationsgebiet ausübt, verständlich machen wollen, so müssen wir davon ausgehen, daß der mit einem Auge von gegebenem Hauptpunktsbrechwert als fest verbunden zu betrachtende Fernpunkt und der Nahpunkt beide im Bildraum der Brille liegen, d. h. es werden zwei im Gegenstandsraum der Brille befindliche Punkte, die um einen gewissen Abstand voneinander entfernt sind, in dem Fernpunkt **R** (der für den Bildraum der Brille mit  $R'$  bezeichnet wird) und in dem Nahpunkt **P** des Auges (für den Bildraum der Brille mit  $P'$  bezeichnet) abgebildet. Die dem Gegenstandsraum der Brille entsprechenden Punkte bezeichnen wir mit  $R$ , und  $P$ , (s. Abb. 46). Beziehen wir sie auf unseren Körper, indem wir etwa fragen, ob wir die Orte von  $R$ , und  $P$ , noch

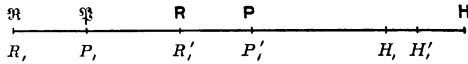


Abb. 46. Die Lage der scheinbaren ( $\mathfrak{R}$ ,  $\mathfrak{P}$ ) und der wahren (**R**, **P**) Grenzpunkte des Akkommodationsgebiets.

oder nicht mehr mit unseren Händen erreichen können, so wollen wir  $R$ , mit  $\mathfrak{R}$  und  $P$ , mit  $\mathfrak{P}$  bezeichnen. Wir können dann sagen, durch Aufsetzen des Brillenglases erhalten wir statt der Abstände **HR** und **HP** die neuen **H $\mathfrak{R}$**  und **H $\mathfrak{P}$** ,

bei denen **R** und  $\mathfrak{R}$  sowie **P** und  $\mathfrak{P}$  einander durch das Brillenglas zugeordnet sind. Berechnet man mit den neuen Abständen **H $\mathfrak{R}$**  und **H $\mathfrak{P}$**  die neue Akkommodationsbreite, so kann man sie nach ERGGELET (**I**) den *äußeren Akkommodationserfolg* nennen. Diese beiden Punkte begrenzen das Gebiet, auf dessen Grenzpunkte das Auge beim Tragen der Brille mit erschlaffter Akkommodation und mit stärkster Anspannung der Akkommodation eingestellt werden kann.

Im allgemeinen wird angenommen, daß sich die Akkommodationsbreite beim Tragen der Brille nicht ändert. Das gilt jedoch nur für schwache Brillengläser. Sonst ist diese Voraussetzung nicht zutreffend. Der äußere Akkommodationserfolg, abgekürzt  $\mathfrak{A}_k$ , beim Tragen der Brille weicht nicht unerheblich von der Akkommodationsbreite  $A_k$  des unbewaffneten Auges ab. Die Ursache hierfür liegt in der Verbindung

<sup>1)</sup> Die Akkommodationsbreite ist infolge zunehmender Sklerose der Linse von dem Alter in bekannter Weise abhängig. Außerdem ist sie aber auch noch eine Funktion der Augenlänge. Dieses beruht darauf, daß die Lage der Augenhauptpunkte sich, wenn auch um einen sehr geringen Betrag, verschiebt (s. oben S. 82). So beträgt z. B. bei einer Achsenlänge von 21 bzw. 36 mm die Akkommodationsbreite 10,15 dp<sub>tr</sub> bzw. 11,38 dp<sub>tr</sub> bei gleichem Alter (berechnet nach den Angaben des GULLSTRANDSchen schematischen Augensystems bei einem Zwanzigjährigen).

der beiden Abbildungen durch Auge und Brille, oder allgemein in der Zusammensetzung des Auges mit jedem beliebigen optischen System, wenn ein endlicher Abstand  $\delta$  zwischen den zugekehrten Hauptpunkten  $H'$  und  $H$  besteht. Wenn es möglich wäre, das Brillenglas im vorderen Augenhauptpunkt  $H$  anzubringen, so würde der äußere Akkommodationserfolg  $\mathfrak{A}_k$  genau gleich der Akkommodationsbreite  $A_k$  sein.

Da es praktisch vor allem von Bedeutung ist, die Lage des Fernpunktes und Nahpunktes beim Tragen der Brille in ihrer Entfernung von dem vorderen Augenhauptpunkt zu kennen, werden wir, wie schon oben angedeutet, bei der Ableitung der Formel für den äußeren Akkommodationserfolg  $\mathfrak{A}_k$ , die Abstände auf den vorderen Augenhauptpunkt  $H$  beziehen und durch bekannte Größen ausdrücken.

Wir gehen bei der Ableitung der Einfachheit halber aus von dem Fall eines kurzsichtigen Auges (s. Abb. 46), bei welchem die Hauptpunkte der Brille von der Brechkraft  $D$ , durch  $H$ , und  $H'$ , bezeichnet sind. Der Fernpunkt des Auges wird, wie bereits oben gesagt, da er im Bildraum der Brille liegt, mit  $R'$ , der Nahpunkt  $P$  entsprechend mit  $P'$ , bezeichnet. Diese beiden Punkte werden durch die Brille im Gegenstandsraum der Brille abgebildet in  $\mathfrak{R} = R$ , bzw. in  $\mathfrak{P} = P$ , oder, was zunächst verständlicher erscheint, es entsprechen zwei im Gegenstandsraum der Brille gelegene Punkte  $R$ , ( $\mathfrak{R}$ ) und  $P$ , ( $\mathfrak{P}$ ) den im Bildraum der Brille gelegenen Punkten  $R'$ , ( $\mathbf{R}$ ) und  $P'$ , ( $\mathbf{P}$ ).  $\mathbf{R}$  und  $\mathbf{P}$  liegen dabei im Gegenstandsraum des Auges. Wir führen nun die Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}\mathbf{R} &= \mathbf{H}\mathbf{R}' = r; & \mathbf{H}\mathbf{R} &= r; & H, R &= r; & H', R' &= r'; \\ \mathbf{H}\mathbf{P} &= \mathbf{H}\mathbf{P}' = p; & \mathbf{H}\mathbf{P} &= p; & H, P &= p; & H', P' &= p'; \\ H, H' &= i \text{ (Abstand der Hauptpunkte des Brillenglases);} \\ H', H &= \delta. \end{aligned}$$

Wir müssen jetzt durch diese Bezeichnungen den äußeren Akkommodationserfolg  $\mathfrak{A}_k$  ausdrücken, den wir in Übereinstimmung mit der Akkommodationsbreite des unbewaffneten Auges kennzeichnen können durch die Differenz der Kehrwerte der Strecken  $p$  und  $r$ , also durch

$$\mathfrak{A}_k = \frac{1}{p} - \frac{1}{r}. \tag{21c}$$

Wir gehen aus von der Abbildung durch die Brille, wobei wir die allgemeine Lagenformel  $B = A + D$  anwenden, die hier wird zu

$$B, = A, + D, ,$$

woraus

$$\frac{1}{b,} = \frac{1}{a,} + D, \quad \text{oder} \quad \frac{1}{a,} = \frac{1}{b,} - D,$$

sich ergibt. Wenden wir diese Formel an, so erhalten wir für die Beziehung von  $R$ , zu  $R'$ , und  $P$ , zu  $P'$ , die Gleichungen:

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r} - D, \quad \text{oder} \quad \frac{1}{r'} = \frac{1 - r' \cdot D}{r},$$

woraus

$$r' = \frac{r}{1 - r' \cdot D}. \quad (\text{a})$$

Genau entsprechend wird die Gleichung für  $\phi$ , und  $\phi'$  gebildet.

$$\frac{1}{\phi'} = \frac{1}{\phi} - D, \quad \text{woraus} \quad \frac{1}{\phi'} = \frac{1 - \phi' \cdot D}{\phi},$$

und

$$\phi' = \frac{\phi}{1 - \phi' \cdot D}. \quad (\text{b})$$

Man kann also jetzt aus der bekannten Brechkraft der Brille ( $D$ ), und der uns ja ebenfalls durch  $r'$ , und  $\phi'$ , gegebenen Lage des Ortes des Fernpunktes  $\mathbf{R}$  ( $R'$ ) und Nahpunktes  $\mathbf{P}$  ( $P'$ ) des nicht korrigierten Auges  $R$ , und  $P$ , d. h. die  $R'$ , und  $P'$ , zugeordneten Punkte im Gegenstandsraum der Brille berechnen. Wir wollen aber diese beiden Punkte  $R$ , ( $= \mathfrak{R}$ ) und  $P$ , ( $= \mathfrak{P}$ ) beziehen auf den vorderen Augenhauptpunkt  $\mathbf{H}$  und nehmen zu diesem Zweck die Geometrie der geraden Linie zu Hilfe (s. Abb. 46). Es ergeben sich folgende Beziehungen:

$$H, R, = H, H', + H', \mathbf{H} + \mathbf{H} R, .$$

Setzen wir die oben für die Strecken eingeführten kleinen Buchstaben ein, so erhalten wir:

$$r' = i + \delta + r. \quad (\text{c})$$

Entsprechend wird der Punkt  $P$ , auf den vorderen Augenhauptpunkt bezogen durch die Gleichung

$$H, P, = H, H', + H', \mathbf{H} + \mathbf{H} P, .$$

Wieder die kleinen Buchstaben für die Strecken eingesetzt, ergibt

$$\phi' = i + \delta + \phi. \quad (\text{d})$$

In gleicher Weise geben wir die Ableitung für  $R'$  ( $\mathbf{R}$ ) und  $P'$  ( $\mathbf{P}$ ). Es ist nämlich

$$H', R', = H', \mathbf{H} + \mathbf{H} R',$$

woraus bei Einsetzung der kleinen Buchstaben für die Strecken folgt

$$r' = \delta + r \quad (\text{e})$$

bzw.  $H', P', = H', \mathbf{H} + \mathbf{H} P' \quad \text{oder} \quad \phi' = \delta + \phi. \quad (\text{f})$

Wir haben nun je zwei Ausdrücke (a) und (c) bzw. (b) und (d) für  $r$ , und  $\phi$ , die wir einander gleichsetzen können, und erhalten

$$i + \delta + r = \frac{r'}{1 - r' \cdot D}, \quad \text{und} \quad i + \delta + \phi = \frac{\phi'}{1 - \phi' \cdot D},$$

woraus sich, wenn man nach (e) für  $r' = \delta + r$ , und nach (f) für  $p' = \delta + p$  einsetzt, schließlich ergibt:

$$\begin{aligned}
 i + \delta + r &= \frac{\delta + r}{1 - D_r(\delta + r)}; & i + \delta + p &= \frac{\delta + p}{1 - D_r(\delta + p)} \\
 r &= \frac{\delta + r}{1 - D_r(\delta + r)} - i - \delta; & p &= \frac{\delta + p}{1 - D_r(\delta + p)} - i - \delta, \\
 r &= \frac{\delta + r - i - \delta + D_r(\delta + r)(\delta + i)}{1 - D_r(\delta + r)}; & p &= \frac{\delta + p - i - \delta + D_r(\delta + p)(\delta + i)}{1 - D_r(\delta + p)}, \\
 r &= \frac{r - i + D_r(\delta + r)(\delta + i)}{1 - D_r(\delta + r)}; & p &= \frac{p - i + D_r(\delta + p)(\delta + i)}{1 - D_r(\delta + p)}.
 \end{aligned}$$

Bilden wir jetzt hieraus den Ausdruck für den äußeren Akkommodationserfolg

$$\mathfrak{A}_k = \frac{1}{p} - \frac{1}{r}$$

(s. 21c), so erhalten wir

$$\mathfrak{A}_k = \frac{1 - D_r(\delta + p)}{p - i + D_r(\delta + p)(\delta + i)} - \frac{1 - D_r(\delta + r)}{r - i + D_r(\delta + r)(\delta + i)},$$

woraus

$$\mathfrak{A}_k = \frac{[1 - D_r(\delta + p)][r - i + D_r(\delta + r)(\delta + i)] - [1 - D_r(\delta + r)][p - i + D_r(\delta + p)(\delta + i)]}{[p - i + D_r(\delta + p)(\delta + i)] \cdot [r - i + D_r(\delta + r)(\delta + i)]}$$

Es wird jetzt zunächst der *Zähler* ausgerechnet. Wir erhalten beim Ausmultiplizieren:

$$\begin{aligned}
 \text{Zähler} &= r - i + D_r(\delta + r)(\delta + i) - (r - i)D_r(\delta + p) - D_r^2(\delta + r)(\delta + p)(\delta + i) \quad \} \\
 &\quad - [p - i + D_r(\delta + p)(\delta + i) - (p - i)D_r(\delta + r) - D_r^2(\delta + r)(\delta + p)(\delta + i)] \quad \}
 \end{aligned}$$

addiert unter Umkehrung der Vorzeichen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 - & + & - & & + & & + \\
 & & & & & & 
 \end{array}$$

$$\text{Zähler} = r - p + D_r(\delta + i)(\delta + r - \delta - p) - D_r[(r - i)(\delta + p) - (p - i)(\delta + r)]$$

gibt

$$\text{Zähler} = r - p + D_r(\delta + i)(r - p) - D_r(r\delta - i\delta + pr - ip - p\delta + ri - pr + i\delta),$$

woraus

$$\text{Zähler} = r - p + D_r(\delta + i)(r - p) - D_r[\delta(r - p) + i(r - p)],$$

$$\text{Zähler} = r - p + D_r(\delta + i)(r - p) - D_r(r - p)(\delta + i) \quad \text{also}$$

$$\text{Zähler} = r - p \quad \text{und demnach}$$

$$\mathfrak{A}_k = \frac{r - p}{[p - i + D_r(\delta + p)(\delta + i)] \cdot [r - i + D_r(\delta + r)(\delta + i)]} \quad (g)$$

Der Einfachheit wegen werden die beiden Klammern im Nenner bezeichnet mit  $[I]$  und  $[II]$ . Also:

$$\mathfrak{A}_k = \frac{r - p}{[I \cdot II]}.$$

Aus dem Zähler wird jetzt der Faktor  $r p$  ausgeklammert:

$$\mathfrak{U}_k = \frac{r p \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{r} \right)}{[I] \cdot [II]}.$$

Es ist nun aber nach (21 b)

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{r} = A_k, \quad \text{also} \quad \mathfrak{U}_k = \frac{r p A_k}{[I] [II]}$$

Zähler und Nenner durch  $r p$  dividiert:

$$\mathfrak{U}_k = \frac{A_k}{\left[ \frac{I}{p} \right] \left[ \frac{II}{r} \right]}.$$

Führt man jetzt der Einfachheit halber ein die Bezeichnung

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{\left[ \frac{I}{p} \right] \left[ \frac{II}{r} \right]}, \quad (\text{h})$$

so erhält man den Ausdruck

$$\mathfrak{U}_k = \mathfrak{R} \cdot A_k. \quad (\text{i})$$

Setzt man in dem Ausdruck

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{\left[ \frac{I}{p} \right] \left[ \frac{II}{r} \right]}$$

zunächst wieder die längeren Formen (g) von S. 87 ein und führt die Division aus, so erhält man

$$\mathfrak{U}_k = \frac{A_k}{\left[ 1 - \frac{i}{p} + D, (\delta + i) \left( 1 + \frac{\delta}{p} \right) \right] \cdot \left[ 1 - \frac{i}{r} + D, (\delta + i) \left( 1 + \frac{\delta}{r} \right) \right]}. \quad (\text{k})$$

Wir haben also jetzt auf der rechten Seite der Gleichung für den äußeren Akkommodationserfolg  $\mathfrak{U}_k$  die Akkommodationsbreite  $A_k$  des unbewaffneten Auges multipliziert mit einer Größe  $\mathfrak{R}$ , die einen Quotienten darstellt, der im Zähler 1, im Nenner einen Ausdruck enthält, der von  $p$ ,  $r$ ,  $\delta$ ,  $i$  und  $D$ , abhängt. Alle diese Größen sind bekannt, so daß der äußere Akkommodationserfolg daraus berechnet werden kann. Diese Formel gilt ganz streng, auch wenn man sich nicht auf die Brille als optisches Hilfsmittel beschränkt, sondern für jede beliebige Bewaffnung des Auges (ein Rechenbeispiel XII, 1, S. 144).

§ 37. *Der äußere Akkommodationserfolg bei dem Fernbrillenglas.* Gehen wir nun zur Brille über, und zwar unter der Voraussetzung, daß es sich um eine Fernbrille handelt. Hier wird also der Punkt  $R$ , in unendliche Entfernung verlegt, d. h.  $H, R, = r, = \infty$ .  $R$ , soll durch die Fernbrille in dem Fernpunkt des Auges  $\mathbf{R}$  abgebildet werden.

Da  $r'$  in diesem Fall  $\infty$  sein soll, wird  $\frac{1}{r'} = 0$ , mithin auch, da  $\frac{1}{r}$  hier  $= \frac{1}{a}$ , nach (1)

$$\frac{1}{r'} - D, = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{r'} = D, \quad ^1).$$

Wir hatten aber oben [§ 36 (e)] gefunden, daß

$$r' = \delta + r$$

ist, also

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r + \delta} = D,,$$

woraus

$$1 = D, \cdot (r + \delta) \quad \text{folgt}$$

oder beide Seiten durch  $r$  dividiert:

$$D, \left(1 + \frac{\delta}{r}\right) = \frac{1}{r}. \quad (\text{a})$$

Damit können wir an die Ausrechnung zunächst des Gliedes  $\left[\frac{II}{r}\right]$  im Nenner [§ 36 (h)] gehen.

Wir hatten oben [§ 36 (k)] festgestellt, daß

$$\left[\frac{II}{r}\right] = 1 - \frac{i}{r} + (\delta + i)D, \left(1 + \frac{\delta}{r}\right) \text{ ist.}$$

Setzen wir statt  $D, \left(1 + \frac{\delta}{r}\right)$  hier  $\frac{1}{r}$  ein, so erhalten wir

$$\left[\frac{II}{r}\right] = 1 - \frac{i}{r} + (\delta + i) \frac{1}{r};$$

ausmultipliziert:

$$\left[\frac{II}{r}\right] = 1 - \frac{i}{r} + \frac{\delta}{r} + \frac{i}{r} \quad \text{und endlich} \quad \left[\frac{II}{r}\right] = 1 + \frac{\delta}{r}.$$

Nun ist aber hier bei der Fernbrille

$$r = a = \frac{1}{A}; \quad (\text{b})$$

also eingesetzt, ergibt:

$$\left[\frac{II}{r}\right] = 1 + \delta \cdot A. \quad (\text{c})$$

Die eine Klammer im Nenner [§ 36 (k)] ist also bei der Fernbrille auf diese einfache Form zurückgeführt.

Jetzt nehmen wir eine entsprechende Umgestaltung des zweiten Faktors [§ 36 (k)] im Nenner  $\left[\frac{I}{\phi}\right]$  vor. Wir müssen dazu an die früher abgeleiteten Formeln (10) und (11a) erinnern:

$$D, = \frac{A}{1 + \delta \cdot A}, \quad \text{woraus} \quad A = D, (1 + \delta A) \quad (\text{d})$$

<sup>1)</sup> Es ist ohne weiteres verständlich, daß  $r'$  hier gleich  $f'$  ist.



und  $1 = (1 + \delta A)(1 - \delta D)$  (s. oben S. 54). Wir haben ferner [nach (21b) und § 37 (b)]

$$A_k = \frac{1}{\phi} - \frac{1}{r} = \frac{1}{\phi} - A, \quad \text{woraus} \quad \frac{1}{\phi} = A + A_k. \quad (\text{e})$$

Es war [nach § 36 (h) (k) und § 37 (c)]

$$\frac{1}{\mathfrak{R}} = \overbrace{\left[1 - \frac{i}{\phi} + (\delta + i)D, \left(1 + \frac{\delta}{\phi}\right)\right]}^{\left[\frac{I}{\phi}\right]} \overbrace{[1 + \delta A]}^{\left[\frac{II}{r}\right]}$$

hierin (e)

$$\frac{1}{\phi} = A + A_k$$

eingesetzt, ergibt:

$$\left[\frac{I}{\phi}\right] = 1 - iA - iA_k + (\delta + i)D, (1 + \delta A + \delta A_k),$$

$$\left[\frac{I}{\phi}\right] = 1 - iA - iA_k + (\delta + i)[D, (1 + \delta A) + \delta D, A_k];$$

Es war aber (d):

$$D, (1 + \delta A) = A;$$

eingesetzt:

$$\left[\frac{I}{\phi}\right] = 1 - iA - iA_k + (\delta + i)[A + \delta D, A_k];$$

ausmultipliziert:

$$\left[\frac{I}{\phi}\right] = 1 - iA - iA_k + \delta A + iA + \delta(\delta + i)D, A_k,$$

$$\left[\frac{I}{\phi}\right] = 1 + \delta A - iA_k + \delta^2 D, A_k + \delta i D, A_k,$$

$$\left[\frac{I}{\phi}\right] = 1 + \delta A + \delta^2 D, A_k - iA_k(1 - \delta D). \quad (\text{f})$$

Damit ist auch  $\left[\frac{I}{\phi}\right]$  ausgerechnet, und es ist [(c) und (f)] demnach:

$$\frac{1}{\mathfrak{R}} = [1 + \delta A + \delta^2 D, A_k - iA_k(1 - \delta D)] \cdot [1 + \delta A],$$

$$\frac{1}{\mathfrak{R}} = (1 + \delta A)^2 + \delta^2 A_k D, (1 + \delta A) - iA_k(1 - \delta D), (1 + \delta A);$$

Da nun nach § 37 (d) bzw. (11a) gilt:

$$D, (1 + \delta A) = A \quad \text{und} \quad (1 - \delta D), (1 + \delta A) = 1,$$

so ergibt sich diese Werte eingesetzt:

$$\frac{1}{\mathfrak{R}} = (1 + \delta A)^2 + \delta^2 A A_k - iA_k; \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\mathfrak{R}} = (1 + \delta A)^2 + A_k(\delta^2 A - i).$$

Also wenn wir diesen Ausdruck  $\frac{1}{\mathfrak{R}}$  in die Formel [§ 36 (i)]  $\mathfrak{U}_k = \mathfrak{R} \cdot A_k$  einsetzen:

$$\mathfrak{U}_k = \frac{A_k}{(1 + \delta A)^2 + A_k(\delta^2 A - i)}. \quad (22)$$

Diese Beziehung wurde also abgeleitet von den inneren Bezugspunkten, d. h. den Hauptpunkten  $H$ , und  $H'$ , des Brillenglases und dem vorderen Augenhauptpunkt  $\mathbf{H}$  und gilt streng ohne Vernachlässigung.

Für dünne Brillengläser, bei denen die beiden Brillenhauptpunkte zusammenfallen, wird

$$i = H, H' = 0,$$

und es verwandelt sich dann der Ausdruck in die einfachere Formel

$$\mathfrak{U}_k = \frac{A_k}{(1 + \delta \cdot A)^2 + A \cdot A_k \cdot \delta^2}. \quad (23)$$

*Erörterung.* Es muß also (23) zur Ermittlung des äußeren Akkommodationserfolges  $\mathfrak{U}_k$  die Akkommodationsbreite  $A_k$  durch eine Größe dividiert werden, die von  $\delta$ ,  $A$  und  $A_k$  abhängt. Die Brechkraft  $D$ , des Brillenglases fehlt hier vollständig. Sie muß nötigenfalls nach der oben

S. 89 benutzten Formel (10)  $D = \frac{A}{1 + \delta \cdot A}$  berechnet werden. Das zweite Glied des Nenners, in dem  $\delta^2$  vorkommt, ist notwendigerweise sehr klein, da bei gewöhnlichen Brillen  $\delta$  niemals große Werte (kaum über  $\delta = 0,02$  m) annehmen wird, und also auch bei höheren Graden der Fehlsichtigkeit ( $A$ ) und größerer Akkommodationsbreite ( $A_k$ ) das Produkt  $A A_k \delta^2$  notwendigerweise klein bleiben muß. Es wird daher der Wert von  $\mathfrak{U}_k$  im wesentlichen durch das erste Glied des Nenners bestimmt, und zwar hier vorwiegend durch die Größe von  $A$ , d. h. den Grad der Fehlsichtigkeit. Das Glied ist als Quadrat immer positiv. Es wird aber für einen negativen  $A$ -Wert kleiner als 1, da hier ja noch etwas von 1 abgezogen wird, für einen positiven größer als 1, d. h. der Wert von  $\mathfrak{U}_k$  wird im ersten Falle insgesamt größer, im zweiten Falle umgekehrt kleiner werden als  $A_k$ , d. h. *für zerstreuende dünne Fernbrillen wird der äußere Akkommodationserfolg  $\mathfrak{U}_k$  größer, für sammelnde kleiner werden als die ursprüngliche Akkommodationsbreite  $A_k$ .* Im Vergleich zu der Akkommodationsbreite  $A_k$  kann die Größe  $\mathfrak{U}_k$ , deren Wachstum sich nicht ohne weiteres übersehen läßt, aus dem beigegeführten Schichtenbild (Abb. 45) entnommen werden (Ziffernbeispiel XII, 2, S. 145).

Man erkennt, daß sich die Linien gleichen äußeren Akkommodationserfolges — es sind Hyperbelstücke — nach rechts, d. h. nach dem Gebiete positiver  $A$ -Werte hin, stark senken, so daß rechts zur Erreichung eines bestimmten äußeren Akkommodationserfolges  $\mathfrak{U}_k$  eine größere Akkommodationsanspannung  $A_k$  geleistet werden muß

als links. Verfolgt man zum Beispiel die Linie für  $\mathfrak{A}_k = -8$  dptr, so ist demnach bei einem Brechungsfehler  $A$  von

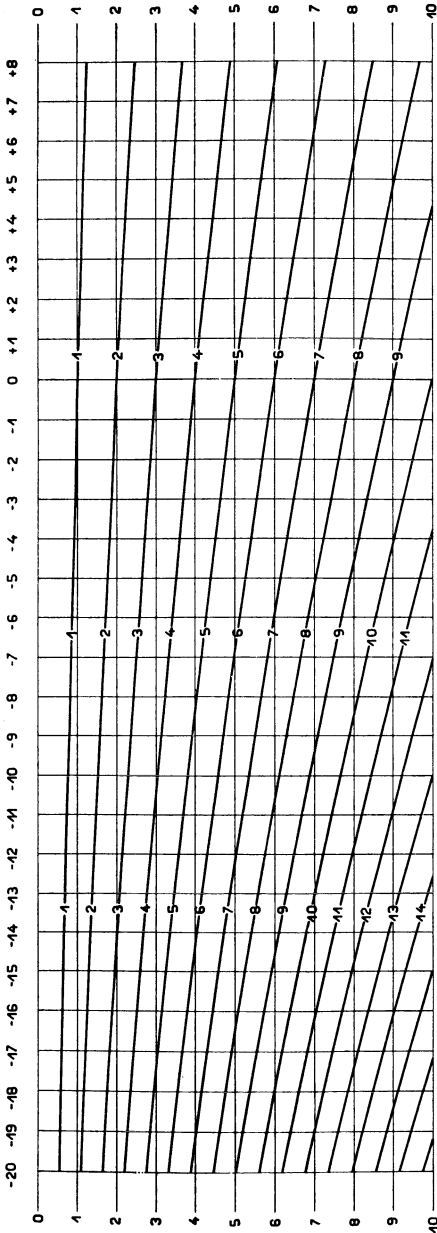


Abb. 47. Schichtenbild des äußeren Akkommodationserfolgs  $\mathfrak{A}_k$ , fortgesetzt bis zu  $0 \leq -A_k \leq 10$  dptr;  $-20$  dptr  $\leq A \leq +8$  dptr. Nach M. v. ROHR (4, 48).

$A = -20 \quad -15 \quad -10 \quad -5$   
 $\quad \mp 0 \quad +5 \quad +8$  dptr  
 nach der Zeichnung aufzuwenden eine Akkommodationsanspannung von bzw.  
 $-A_k = 4,5 \quad 5,3 \quad 6,1 \quad 7$   
 $\quad \quad 8 \quad 9 \quad 9,6$  dptr.

Die Formeln lehren weiter, daß bei einem Wert von  $A_k = 0$  notwendigerweise auch der äußere Akkommodationserfolg  $\mathfrak{A}_k = 0$  wird, d. h. bei vollständiger Aufhebung der Akkommodationsfähigkeit kann diese auch durch eine Brille nicht wieder hergestellt werden.

Wenn man die Dicke  $i$  der Augenhilfe nicht vernachlässigen kann, z. B. bei starken sammelnden Gläsern (wo die Hauptpunkte überdies bei genügender Durchbiegung außerhalb der Brille auf der Dingseite liegen), so muß man auf die strenge Form (22) der Gleichung für  $\mathfrak{A}_k$  zurückgehen. In diesem Falle wird in dem zweiten sammelnden Gliede zwar von  $\delta^2 A$  die Größe  $i$  abgezogen, es wird deshalb anscheinend der Nenner kleiner als bei Vernachlässigung des Hauptpunktabstandes. Da aber in diesem Falle, wo die Hauptpunkte des Brillenglases nach der Gegenstandsseite

verschoben sind,  $\delta$  merklich wächst, so wird das erste Glied des Nenners, da  $A$  positiv ist, größer, mithin auch der ganze Nenner,

und dementsprechend wird der Wert von  $\mathcal{A}_k$  kleiner werden als für dünne Linsen.

Eine besonders erhebliche Abnahme des äußeren Akkommodations-erfolges muß bei der Fernrohrbrille eintreten, da  $\delta$  und  $i$  hier beide negativ ausfallen, wenn es sich um Brillen mit zerstreuer Wirkung handelt. Infolgedessen wird der Nenner viel größer, und  $\mathcal{A}_k$  muß kleiner werden als  $A_k$ . Auch bei sammelnden vergrößernden Fernrohrbrillen wird  $\mathcal{A}_k$  kleiner als  $A_k$ , denn in einem solchen Falle ist  $\delta$  ebenso wie  $i$  positiven Zeichens (Ziffernbeispiel XII, 3, S. 145/6).

### Die Sehschärfe und die Brille.

§ 38. *Allgemeines zur Sehschärfe.* Wir hatten bereits in § 29ff. den Einfluß der Brille auf die Größe des Netzhautbildes besprochen, ohne jedoch näher darauf einzugehen, wie dadurch die *Sehschärfe* verändert wird. Dies soll jetzt geschehen. Wir müssen dazu ebenso wie bei der Akkommodation zunächst die Verhältnisse beim unbewaffneten Auge behandeln. Dabei können wir ganz davon absehen, zu untersuchen, was bei der Sehschärfeprüfung festgestellt werden soll, ob die Feinheit des optischen Raumsinnes, das Auflösungsvermögen oder das Formensehen [s. F. B. HOFMANN (1)]. In allen diesen Fällen handelt es sich ja um Ermittlung von Winkelgrößen. Diese Winkel liegen natürlich im Bildraum des Auges, da z. B. bei der Untersuchung des Auflösungsvermögens die auf die Netzhaut auffallenden Strahlenbündel zwar von zwei leuchtenden Punkten im Gegenstandsraum ausgehen, aber durch die Brechung im Auge auf der Netzhaut in zwei Punkten abgebildet werden sollen. Die Hauptstrahlen dieser Bündel bilden im Auge einen Winkel miteinander, dessen Spitze man früher im zweiten Knotenpunkt des Auges annahm [so z. B. noch ZORN (1)]. Heute wird man andere Punkte für die Spitzen dieser Winkel wählen. Nur müssen sie so gewählt sein, daß im Bildraum wie im Dingraum des Auges die Größe der Winkel leicht ermittelbar ist, und beide aufeinander bezogen werden können. Die Winkel im Augenbildraum sind der Messung nicht zugänglich, weil wir ja im allgemeinen die Augenlänge nicht kennen, wir müssen deshalb die Winkel im Augendingraum feststellen.

Hier bieten sich verschiedene ihrer Lage nach bekannte Punkte dar, von denen aus die Winkel gemessen werden könnten. Bei unbewaffnetem Auge kommen der vordere Augenbrennpunkt und der vordere Augenhauptpunkt in Frage, deren Lage als soweit bekannt angesehen werden darf, daß kleine etwa vorkommende Fehler im Einzelfalle bei den hier in Betracht kommenden Strecken ohne Bedeutung sind.

§ 39. *Die absolute Sehschärfe S.* Wenn es sich darum handelt, die *Sehschärfe verschiedener Augen* miteinander zu vergleichen, so wird zweckmäßig ein solcher Punkt als Hauptstrahlenkreuzungspunkt im Augen-

raum<sup>7</sup> gewählt, daß die Höhe der Durchstoßpunkte der zugeordneten Strahlen auf der Netzhaut von der Länge des zu untersuchenden Auges unabhängig wird. Ein solcher Punkt ist der vordere Brennpunkt des Auges  $\mathcal{F}$ . Wir wissen (s. S. 9), daß Strahlen, die durch ihn gehen, nach Durchstoßung der hinteren Hauptebene des Auges im Bildraum achsenparallel verlaufen. Wenn wir also bei der Winkelmessung vom vorderen Brennpunkt ausgehen, so können wir damit rechnen (s. Abb. 48), daß — gleichgültig, welcher Grad von Fehlsichtigkeit vorliegt — die auf der Netzhaut ausgeschnittene Bildgröße nur von der Größe des Winkels  $\omega_f$ , unter dem der Gegenstand erscheint, abhängen wird. Es ist dabei ganz gleichgültig, in welcher Entfernung die Netzhaut sich von der hinteren Hauptpunktsebene befindet. Will man sich die Verhältnisse veranschau-

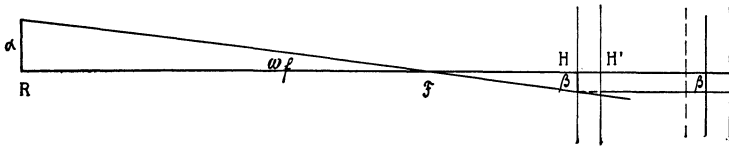


Abb. 48. Die Bestimmung des Brennpunktswinkels  $\omega_f$  zur Ermittlung der absoluten Sehschärfe  $S$ .  $H$  und  $H'$  die Augenhauptpunkte. Die drei senkrechten Linien rechts (—, ----, - - - -) sollen den Ort der Netzhautgrube für das rechtsichtige bzw. je ein fehlsichtiges Auge angeben. Man erkennt, daß hier die Bildgröße  $\beta$  von der Augenlänge unabhängig ist.

lichen, so läßt sich das durch die Anbringung einer engen Blende in dem vorderen Brennpunkt tun. Von dieser aus sind dann die Winkel im Augenraum zu messen.

In Abb. 48 erscheint das im Fernpunkt  $R$  gelegene Objekt  $\alpha$  unter dem kleinen Winkel  $\omega_f$ , dessen Spitze im vorderen Augenbrennpunkt  $\mathcal{F}$  liegt. Da es sich hier um kleine Winkel handelt, dürfen wir  $\text{tg } \omega_f = \omega_f$  setzen (s. S. 12). Wir können dann sagen, wenn wir mit  $\beta$  die Netzhautbildgröße und, nach der Abbildung 48 sofort selbstverständlich, auch den Abstand des Durchstoßpunktes des Strahles in der Hauptebene  $H$  bezeichnen,

$$\text{tg } \omega_f = \frac{\beta}{H\mathcal{F}} = -\frac{\beta}{\mathcal{F}H}.$$

$\mathcal{F}H$  ist aber gleich dem negativen Wert der vorderen Brennweite  $f_{//}$ . Es ist ferner  $-f_{//} = f'_{//}$  (s. S. 9), so daß wir schreiben können

$$\omega_f = \frac{-\beta}{f'_{//}},$$

oder, wenn wir die Brechkraft statt des Kehrwerts der Brennweite einsetzen,  $\omega_f = -\beta \cdot D_{//}$ <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Es handelt sich hier also um dieselbe Formel (5), wie sie in § 17 bereits für die Abbildung eines unendlich fernen Gegenstandes von sehr großer Ausdehnung abgeleitet wurde.

In diesem Falle haben wir ein unbewaffnetes kurzsichtiges Auge angenommen. Es muß aber auch die Sehschärfe bestimmt werden, wenn das Auge durch das Fernbrillenglas auf  $\infty$  eingestellt ist. Die Verhältnisse sind hier nicht anders, wenn sich nur der bildseitige Hauptpunkt  $H'$  des Fernbrillenglases im vorderen Augenbrennpunkt befindet, d. h. bei der Normalstellung des Brillenglases. Bei Konkavgläsern können wir annehmen, daß wegen ihrer geringen Dicke die beiden Brillenhauptpunkte auch wirklich zusammenfallen. Man darf also infolge der Knotenpunkteigenschaft der Hauptpunkte (§ 13) den Hauptstrahl durch

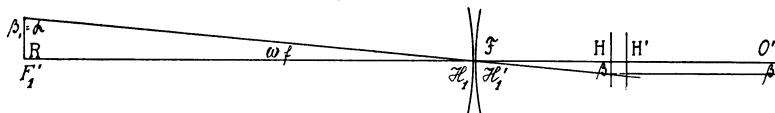


Abb. 49.

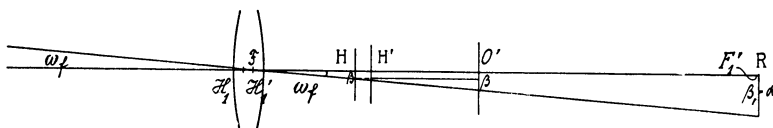


Abb. 50.

Abb. 49 und 50. Die Bestimmung des Brennpunktswinkels  $\omega_f$  bei einem zerstreuen sammelnden Fernbrillenglase.

Die Grundpunkte des Brillenglases ( $H, H', F'$ ) sind hier mit dem Zeiger  $1$  statt wie im Text mit  $,$  versehen.

$\mathcal{F}$  (bzw.  $H$ , und  $H'$ ) wie bei dem unbewaffneten Auge gleich durchziehen (s. Abb. 49). Bei dem Sammelglas fallen zwar die Hauptpunkte nicht zusammen, aber (s. § 13) die Hauptpunkte bilden hier ebenfalls die Knotenpunkte; infolgedessen werden der einfallende und der austretende Strahl einander parallel laufen, d. h. denselben Winkel  $\omega_f$  mit der Achse bilden (s. Abb. 50).

Das Fernbrillenglas hat die Aufgabe, den unendlich fernen Gegenstand im Fernpunkt des Auges abzubilden, d. h. es fallen  $R$  und  $F'$  zusammen. Das Bild des unendlich fernen Gegenstandes  $\beta,$  wird zum Objekt  $\alpha$  für das Auge. Nur auf dieses beziehen sich also die Winkelwerte, die auch beim Tragen der Fernbrille für die Sehschärfe ein Maß abgeben sollen.

An der Hand der Abb. 49 und 50 ergibt sich für das brillenbewaffnete kurz- und übersichtige Auge die gleiche Ableitung, die unter Berücksichtigung der Geometrie der geraden Linie ohne weiteres verständlich ist:

$$\operatorname{tg} \omega_f = \omega_f = \frac{\alpha}{\mathcal{F}R} = \frac{\alpha}{RH + H\mathcal{F}};$$

Zähler und Nenner mit  $-1$  multipliziert, ergibt:

$$\omega_f = \frac{-\alpha}{\mathbf{HR} + \mathcal{F}\mathbf{H}}$$

oder bei Benutzung der kleinen Buchstaben für die Strecken

$$\mathcal{F}\mathbf{H} = -f'', = +f''; \quad \mathbf{HR} = a:$$

$$\omega_f = \frac{-\alpha}{a + f''};$$

nach Einsetzung der Kehrwerte:

$$\omega_f = \frac{-\alpha}{\frac{1}{A} + \frac{1}{D''}};$$

den Nenner auf gemeinsamen Bruchstrich gebracht:

$$\omega_f = \frac{-\alpha}{\frac{D'' + A}{A \cdot D''}},$$

$$\omega_f = \frac{-\alpha \cdot A \cdot D''}{D'' + A} \quad \text{oder} \quad \omega_f = \frac{-\alpha \cdot A}{D'' + A} \cdot D''^1). \quad (24)$$

GULLSTRAND hat diese von F. C. DONDERS stammende Art der Messung der Sehschärfe vom vorderen Brennpunkt aus als die Bestimmung der *absoluten Sehschärfe* bezeichnet. Die absolute Sehschärfe  $S$  ist also auf den vorderen Brennpunkt  $\mathcal{F}$  des Auges bezogen und benutzt den Brennpunktswinkel  $\omega_f$  (Rechenbeispiel XIII, 1, S. 146/7).

Verständlicherweise ist die Sehschärfe eines vorliegenden Auges um so höher, je kleiner  $\omega_f$  ist, mit anderen Worten, je kleinere Sehproben erkannt werden. Um bei verschiedenen Augen das Maß für die absolute Sehschärfe  $S$  zu gewinnen, ist es nötig, sie auf eine bestimmte Einheit zu beziehen. Zu diesem Zweck muß eine Konstante  $c$  in die Formel eingeführt werden, und es leuchtet ein, daß der Wert der ermittelten Sehschärfe sich ausdrücken läßt durch das Verhältnis dieser die Einheit darstellenden Konstante  $c$  zu dem im gegebenen Fall ermittelten Winkel  $\omega_f$ , d. h.  $S = \frac{c}{\omega_f}$ . Durch Übereinkunft ist festgestellt, daß  $S = 1$  dann gegeben sei, wenn  $\text{tg } \omega_f = \text{tg } 1'$ . Es ist also

$$S = 1 = \frac{c}{\text{tg } 1'},$$

<sup>1)</sup> Diese Formel drückt natürlich nichts anderes aus als die S. 94 für das unbewaffnete Auge abgeleitete. Dies wird verständlich, wenn man berücksichtigt, daß nach (2) und (1)  $\alpha A = \beta B$  und  $B = A + D''$ . Setzt man diese Werte ein, so erhält man

$$\omega_f = \frac{-\beta B}{B} \cdot D'' \quad \text{und} \quad \omega_f = -\beta \cdot D''. \quad (5)$$

woraus  $c = \text{tg } 1'$ . Wir erhalten also für  $S$  die Gleichung

$$S = \frac{\text{tg } 1'}{\text{tg } \omega_f} \quad \text{bzw.} \quad S = \frac{1'}{\omega_f}.$$

Der Wert von  $\text{tg } 1'$  ist aber  $= \frac{1}{3438}$  ( $= 0,00291$ ), d. h. es ist der Winkel, unter dem 1 mm auf etwa  $3\frac{1}{2}$  m erscheint.

Will man z. B. zwei Emmetropen in bezug auf ihre absolute Sehschärfe vergleichen, so geht man freilich etwas anders vor, indem man nämlich nicht den Winkel  $\omega_f$  mit der Spitze in  $\mathcal{F}$  mißt, sondern die Höhe des Sehzeichens (z. B. der Lücke im LANDOLTSchen Ring), das auf gegebene Ent-

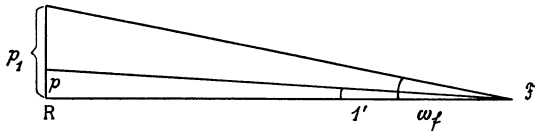


Abb. 51. Zum Vergleich der Sehschärfe zweier verschiedener Augen.

fernung (meist 5 oder 6 m) erkannt wird. In dem Fall des Auges mit voller Sehschärfe sei dessen Höhe  $p$ , in demjenigen des geprüften Auges  $p_1$  (Abb. 51). Wir hätten dann für die Sehschärfe des geprüften Auges zwar die Formel

$$S = \frac{1'}{\omega_f}.$$

Wenn wir aber den Abstand  $\mathcal{F}\mathcal{R}$  des Objektes von  $\mathcal{F}$  mit  $l$  bezeichnen (s. S. 98), so würde die Gleichung lauten:

$$S = \frac{\frac{p}{l}}{\frac{p_1}{l}} = \frac{p \cdot l}{l \cdot p_1} = \frac{p}{p_1}.$$

Es ist also die Sehschärfe hier gegeben durch das Verhältnis der Größen der Sehzeichen.

§ 40. Die relative Sehschärfe  $S_r$ . Die bisher gemachte Annahme, daß sich das Brillenglas in Normalstellung befindet, trifft durchaus nicht immer zu. Es leuchtet ein, daß sich in diesem Fall die Netzhautbildgröße ändern muß (s. S. 68) und dementsprechend auch der Wert der mit dem Brillenglas, das sich nicht in Normalstellung befindet, ermittelten Sehschärfe. Wenn wir aber ein vergleichbares Maß für die tatsächliche Leistung des jeweils untersuchten Auges gewinnen wollen, so ist es notwendig, die Beziehungen zwischen der absoluten Sehschärfe eines unbewaffneten oder eines mit einem in Normalstellung befindlichen Brillenglas versehenen Auges und der Sehschärfe, die bei einer von der Normalstellung abweichenden Lage der Brille festgestellt ist, zu ermitteln. Zu diesem Zweck verlegt GULLSTRAND die Spitze des neuen



Winkels  $\omega_H$  in den hinteren Hauptpunkt  $H'$ , des Brillenglases. Die von diesem Punkt aus gemessene Sehschärfe wird als die *relative Sehschärfe*  $S_r$  bezeichnet. Die Tangente des Winkels  $\omega_H$  läßt sich auch hier, da es sich immer nur um kleine Winkel handelt, mit dem Winkel  $\omega_H$  vertauschen. Wir erhalten also (s. Abb. 52) den Ausdruck

$$\omega_H = \frac{\alpha}{F'H'}$$

und, da  $F'$  mit  $R$  zusammenfällt,

$$\omega_H = \frac{\alpha}{RH'}$$

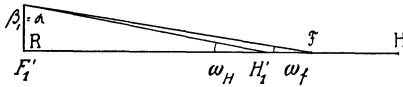


Abb 52.

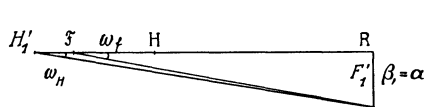


Abb. 53.

Die Bestimmung des Brillenhauptpunktswinkels  $\omega_H$  zur Ermittlung der relativen Sehschärfe  $S_r$  für ein

kurzsichtiges

übersichtiges

Auge.

(Es ist hier:  $H'_1 = H'$ ;  $F'_1 = F'$ .)

Zerlegen wir wieder  $RH'$ , nach der Geometrie der geraden Linie, so erhalten wir:

$$\omega_H = \frac{\alpha}{R\mathcal{F} + \mathcal{F}H'};$$

Zähler und Nenner mit  $-1$  multipliziert, gibt:

$$\omega_H = \frac{-\alpha}{\mathcal{F}R + H'\mathcal{F}}.$$

Bei der Ableitung für die Sammellinsen ergeben sich genau die entsprechenden Formeln (s. Abb. 53).

Im Nenner stehen jetzt zwei Strecken, die beide den vorderen Augenbrennpunkt  $\mathcal{F}$  als ihren einen Grenzpunkt enthalten. Wir hatten bereits oben auf S. 75 für den Abstand des hinteren Brillenhauptpunktes  $H'$  vom vorderen Augenbrennpunkt  $\mathcal{F}$  die Größe  $H'\mathcal{F}$  mit  $\delta_f$  bezeichnet. Es bleibt jetzt noch übrig, den Abstand  $\mathcal{F}R$  des Fernpunktes vom vorderen Augenbrennpunkt zu benennen. GULLSTRAND hat hierfür den Buchstaben  $l$  eingeführt (s. oben S. 97), dem der Kehrwert

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{\mathcal{F}R} = L$$

entspricht.

Wir erhalten dann den Ausdruck für  $\omega_H$  in etwas anderer Form:

$$\omega_H = \frac{-\alpha}{l + \delta_f}. \quad (\text{a})$$

Diese Beziehung interessiert den Augenarzt weniger, weil ja die Stellung des Brillenglases etwas Zufälliges ist. Es kommt vielmehr darauf an, diesen Wert für die relative Sehschärfe in Beziehung zur absoluten Sehschärfe zu setzen. Auf solche Weise gewinnen wir den Faktor, mit dem die relative Sehschärfe  $S_r$  multipliziert werden muß, um sie auf die absolute  $S$  zurückzuführen, die erst einen wirklichen Vergleich der Sehschärfen verschiedener Augen gestattet. Zu diesem Zweck müssen wir die Einheit der relativen Sehschärfe  $S_r$  ebenso ermitteln, wie die der absoluten Sehschärfe  $S$ , d. h. wir werden wieder die Konstante  $c$  feststellen und sie durch den Winkel  $\omega_H$  dividieren. Es ist also im gegebenen Fall

$$S_r = \frac{c}{\omega_H}$$

und, da hier ebenfalls die Winkelminute den Einheitswert ergibt:

$$S_r = \frac{1'}{\omega_H}.$$

Wollen wir den Vergleich zwischen relativer  $S_r$  und absoluter  $S$  durchführen, so müssen wir auch  $\omega_f$  durch  $l$  ausdrücken. Es ist nach Abb. 52 und 53

$$\omega_f = \frac{\alpha}{R \mathcal{F}R} = \frac{-\alpha}{\mathcal{F}R} = \frac{-\alpha}{l}, \quad \text{da } \mathcal{F}R = l \quad (\text{s. o.}). \quad (\text{b})$$

Das Verhältnis  $S_r$  zu  $S$  ist also durch folgende Beziehungen gegeben:

$$\frac{S_r}{S} = \frac{\frac{c}{\omega_H}}{\frac{c}{\omega_f}} = \frac{c}{\omega_H} \cdot \frac{\omega_f}{c} = \frac{\omega_f}{\omega_H}.$$

Setzt man die für  $\omega_f$  und  $\omega_H$  gefundenen Ausdrücke [(a) und (b)] ein, so erhält man:

$$\frac{\omega_f}{\omega_H} = \frac{-\alpha}{l} \cdot \frac{-(l + \delta_f)}{\alpha}; \quad \frac{\omega_f}{\omega_H} = \frac{l + \delta_f}{l}$$

oder

$$\frac{\omega_f}{\omega_H} = 1 + \frac{\delta_f}{l}.$$

Setzt man statt  $\frac{1}{l} = L$  ein, so erhält man:

$$\frac{S_r}{S} = 1 + \delta_f \cdot L. \quad (\text{c})$$

Wollen wir die Größe  $L$  wieder ausschalten, so können wir das auf Grund folgender Ableitung, da  $\mathbf{R}$  und  $F'$  zusammenfallen:

$$l = \mathcal{F}\mathbf{R} = \mathcal{F}H' + H'F' = -\delta_f + f' = \frac{1}{D_f} - \delta_f,$$

$$l = \frac{1 - \delta_f D_f}{D_f},$$

woraus der Kehrwert:

$$L = \frac{D_f}{1 - \delta_f D_f}.$$

Diesen Wert für  $L$  in die Gleichung  $\frac{S_r}{S} = 1 + \delta_f L$  (c) eingesetzt, gibt:

$$\frac{S_r}{S} = 1 + \frac{\delta_f D_f}{1 - \delta_f D_f} = \frac{1 - \delta_f D_f + \delta_f D_f}{1 - \delta_f D_f} = \frac{1}{1 - \delta_f D_f} \quad (25)$$

oder

$$\frac{S}{S_r} = 1 - \delta_f D_f,$$

woraus

$$S = S_r (1 - \delta_f D_f) \quad (25 a)$$

folgt.

Nach dieser Formel können wir also die absolute Sehschärfe  $S$  aus der relativen  $S_r$  ermitteln, wenn uns die Brechkraft  $D_f$  und der Brennweitenabstand  $\delta_f$  des Brillenglases bekannt sind, (Ziffernbeispiel XIII, 2 S. 147/8).

Die Ableitung, die eben für Konkavgläser durchgeführt worden ist, gilt genau entsprechend für Sammelläser. Wie aus Abb. 52 u. 53 zu ersehen ist, ist aber in beiden Fällen der Ziffernwert des Verhältnisses der relativen Sehschärfe  $S_r$  zur absoluten Sehschärfe  $S$  verschieden. Während beim kurzsichtigen Auge der Winkel  $\omega_H$  größer ist als der Winkel  $\omega_f$  — immer vorausgesetzt, daß  $H'$  vor  $\mathcal{F}$  liege —, ist er beim Sammelläser kleiner. Dementsprechend muß unter jener Voraussetzung der Wert der absoluten Sehschärfe  $S$  beim kurzsichtigen Auge kleiner, beim übersichtigen größer sein als der Wert der relativen Sehschärfe  $S_r$ . Die Beziehungen, die sich hier ergeben, sind aus dem nebenstehenden Schichtenbild (Abb. 54) abzulesen.

Wendet man sich zu kurzer Besprechung dieser Darstellung, so hatten wir schon auf S. 78 darauf hingewiesen, daß der Ausdruck  $1 - \delta_f D_f$  ungeändert bleibe, wenn man gleichzeitig  $\delta_f$  durch  $-\delta_f$  und  $D_f$  durch  $-D_f$  ersetze, und daß daher die beiden im Koordinatenanfang nur mit den Spitzen zusammenstoßenden Quadranten zueinander gegenbildlich angeordnet sein müßten. Daß man das auf der Abb. 54 nicht noch deutlicher ersieht, folgt aus der sehr ungleichartigen Verteilung der  $\delta_f$ -Werte an den gewöhnlichen Probierbrillen, wo eben die negativen  $\delta_f$ -Beträge das

Übergewicht über die positiven haben. Beträchtlichere Abweichungen des dargestellten Bruches  $S/S_r$  von der Einheit kommen erst für größere  $D_f$ -Werte vor, also verständlicherweise hauptsächlich für stärkere Zerstreuungslinsen nahe am Auge, wo unter besonders ungünstigen Umständen  $S = 0,71 S_r$  werden kann. Man erkennt leicht, daß das eine Folge der Vergrößerung des Netzhautbildes im südwestlichen Quadranten der Abb. 42 auf S. 77 ist. — Daß weder der obere noch der untere Rand des dargestellten, mit dem von HENKER in Abb. 30/31 behandelten zusammenfallenden Gebiets geradlinig verläuft, ist eine Folge davon, daß hier auf der senkrechten Achse nicht die  $A$ -, sondern die  $D_f$ -Werte aufgetragen wurden.

Man kann natürlich das Verhältnis der relativen Sehschärfe zur absoluten Sehschärfe auch dadurch ausdrücken, daß man die Winkel  $\omega_H$  und  $\omega_f$  mit Hilfe der Geometrie der geraden Linie auf den vorderen Augenhauptpunkt  $H$  bezieht. Es geschieht das in folgender Weise (Abb. 52 u. 53).

$$\begin{aligned} \omega_H &= \frac{\alpha}{RH'} = \frac{\alpha}{RH + HH'} \\ &= \frac{-\alpha}{HR + H'H} = \frac{-\alpha}{a + \delta} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \omega_f &= \frac{\alpha}{R\mathcal{F}} = \frac{\alpha}{RH + H\mathcal{F}} \\ &= \frac{-\alpha}{HR + \mathcal{F}H} = \frac{-\alpha}{a + f''} \end{aligned}$$

Die Einführung der Strecke  $n$ ,  $a$ ,  $\delta$  und  $f''$  ist unter Berücksichtigung der Bezeichnungen in den Abb. 52 u. 53 ohne weiteres verständlich.

Bildet man jetzt das Verhältnis  $\frac{S_r}{S} = \frac{\omega_f}{\omega_H}$  (s. S. 99) und setzt dann die

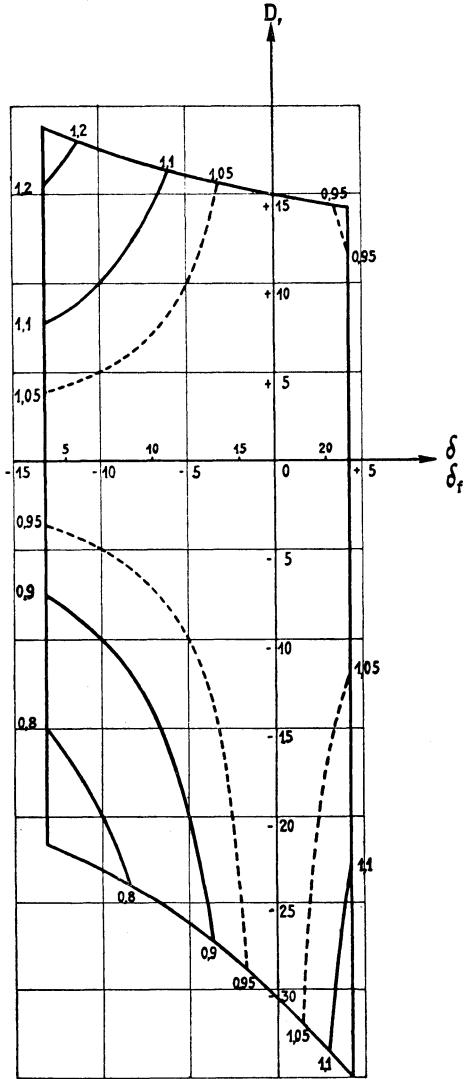


Abb. 54. Schichtenbild für  $\frac{S}{S_r}$  nach M. v. ROHR (4, 55) für das HENKERsche Gebiet, das durch stärkere Umrandung hervorgehoben ist.

entsprechenden eben gefundenen Werte für  $\omega_f$  und  $\omega_H$  ein, so erhält man:

$$\frac{S_r}{S} = \frac{-\alpha}{(a + f'')} \cdot \frac{(a + \delta)}{-\alpha},$$

$$\frac{S_r}{S} = \frac{a + \delta}{a + f''} = \frac{\frac{1}{A} + \delta}{\frac{1}{A} + f''}$$

und nach Erweiterung des ganzen Bruches mit  $A$ :

$$\frac{S_r}{S} = \frac{1 + \delta A}{1 + f'' A}. \quad (19)$$

Wie man sieht, ist dies die gleiche Beziehung (19), wie sie oben (S. 76) für das Verhältnis der Bildgröße im unbewaffneten Auge  $D_{12}$  zu der im korrigierten Auge  $D_{12}$  gewonnen war. Es ist das ja auch verständlich, weil die Sehschärfe sich genau entsprechend der Bildgröße ändern muß.

Auch mit diesem Ausdruck haben wir das gewonnen, was auf S. 97 als das Ziel der Ableitung hingestellt war, d. h. zu ermitteln, wie der bei der Bestimmung mit der Fernbrille gewonnene Wert der Sehschärfe umgerechnet werden muß, um ein mit anderen Fällen vergleichbares Maß abzugeben.

*Erörterung.* So viel ist zunächst klar, daß bei einem rechtsichtigen Auge, wo  $A = 0$  wird, Zähler und Nenner den Wert 1 annehmen, so daß die relative Sehschärfe  $S_r$  gleich der absoluten  $S$  wird. Befindet sich das Brillenglas in Normalstellung, d. h. wird  $\delta = f''$ , so werden ebenfalls Zähler und Nenner einander gleich, und der Bruch  $\frac{S_r}{S}$  erhält den Wert = 1. Die anderen Verhältnisse, die sich mit den oben S. 100/1 näher erörterten decken, sind aus dem Schichtenbild (Abb. 54) abzulesen. Wie man daraus ersieht, können bei starken Graden der Fehlsichtigkeit und bei durchaus möglichen Abweichungen von der Normalstellung die Zahlen für das Verhältnis der relativen zur absoluten Sehschärfe erheblich von 1 verschieden sein, so daß eine auch praktisch nicht zu vernachlässigende Umrechnung der mit dem Brillenglas ermittelten relativen Sehschärfe notwendig wird. (Ziffernbeispiel XIII, 2.)

Voraussetzung zur Ermittlung des Winkels  $\omega_H$  ist, daß man die Lage der Hauptpunkte des Brillenglases kennt. Bei Konkavgläsern ist es auch bei durchgebogenen Formen ohne weiteres erlaubt, die Hauptpunkte in den vorderen Brillenscheitel zu verlegen. Die dabei begangenen Fehler sind zu gering, um in Betracht zu kommen. Bei durchgebogenen Sammelläsern, wo die Hauptpunkte etwas vor dem Brillenscheitel liegen, könnten freilich schon größere Fehler bei Überschlagsrechnungen entstehen; schädlich sind sie aber auch da nicht.

§ 41. *Die natürliche Sehschärfe  $S_n$ .* Handelt es sich nicht um die Vergleichung der Sehschärfe verschiedener Augen, sondern um die Untersuchung der Sehschärfe des *gleichen* Auges, aber bei *verschiedenem Akkommodationszustande*, so wird man zweckmäßig nicht den vorderen Brennpunkt als Spitze für den Winkel wählen, da dieser ja bei der Akkommodation infolge der Brechkraftsteigerung des Systems des Auges seine Lage merklich ändern muß, sondern man wird auf einen Punkt zurückgehen, der bei der Akkommodation seinen Ort nicht verändert. Dieses ist der vordere Augenhauptpunkt **H** (s. S. 82).

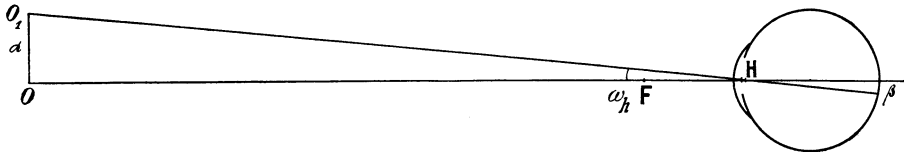


Abb. 55. Der Hauptpunktswinkel  $\omega_h$  zur Bestimmung der natürlichen Sehschärfe.

Den Winkel, unter dem (s. Abb. 55) das je nach dem gerade vorliegenden Grad der Akkommodation verschieden entfernt gelegene Objekt vom vorderen Augenhauptpunkt erscheint, bezeichnen wir mit  $\omega_h$ . Es ist dann

$$\operatorname{tg} \omega_h = \frac{\alpha}{OH} \quad \text{oder} \quad \omega_h = \frac{-\alpha}{HO}.$$

$HO$  ist aber  $= a$ , d. h. der Abstand des Fernpunktes<sup>1)</sup> vom vorderen Augenhauptpunkt. Infolgedessen ergibt sich

$$\omega_h = \frac{-\alpha}{a} = -\alpha \cdot A. \quad (\text{a})$$

Die so ermittelte Sehschärfe wird nach GULLSTRAND als die *natürliche Sehschärfe  $S_n$*  bezeichnet, sie ist also abhängig von dem Hauptpunktsbrechwert  $A$ . Unter diesem ist aber nicht nur, wie in dem § 35, die axiale Refraktion bei Akkommodationsruhe zu verstehen, sondern der Hauptpunktsbrechwert, der sich aus jener und dem zu ihr noch durch die Akkommodation hinzugefügten Betrag zusammensetzt. Bei größtmöglicher Akkommodationsleistung würde er also betragen  $A + A_k$  (§ 35).

Auch hier können wir wieder  $S_n$  ausdrücken in Beziehung auf ein Normalmaß in der Form, wie wir es bereits auf S. 96 für die absolute Sehschärfe  $S$  getan haben, und schreiben  $S_n = \frac{c}{\omega_h}$ . Auch hier wird

<sup>1)</sup> Strenggenommen braucht das hier nicht der Fernpunkt zu sein, sondern derjenige Punkt, auf den das Auge durch seine statische und dynamische Refraktion zusammen eingestellt ist. Bei Akkommodationsruhe ist hierunter natürlich der wirkliche Fernpunkt zu verstehen.

$c = 1'$  zu setzen sein, also im gegebenen Falle wird  $S_n = \frac{1'}{\omega_h}$  sein (Ziffernbeispiel XIII, 1 b, S. 146).

Das Verhältnis der absoluten zur natürlichen Sehschärfe kann berechnet werden unter Benutzung der Beziehungen (24) und (a) (S. 96 und oben) durch die Gleichung

$$\frac{S}{S_n} = \frac{\frac{c}{\omega_f}}{\frac{c}{\omega_h}} = \frac{\omega_h}{\omega_f} = \frac{-\alpha \cdot A \cdot (D_{II} + A)}{-\alpha \cdot A \cdot D_{II}},$$

woraus

$$\frac{S}{S_n} = \frac{D_{II} + A}{D_{II}} \quad \text{oder} \quad \frac{S}{S_n} = 1 + \frac{A}{D_{II}} \quad (26)$$

(Ziffernbeispiel XIII, 1 c, S. 146f.).

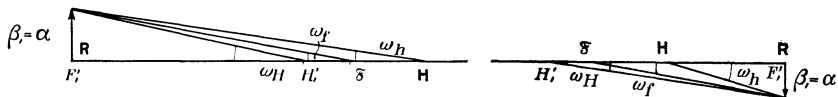


Abb. 56. Eine Zusammenstellung von Brennpunktswinkel  $\omega_f$ , Hauptpunktswinkel  $\omega_h$  und Brillenhauptpunktswinkel  $\omega_H$  für zerstreue und sammelnde Fernbrillengläser.

*Erörterung.* Ist  $A = 0$ , d. h. das Auge rechtsichtig, so fällt  $\frac{A}{D_{II}}$  fort, also haben absolute und natürliche Sehschärfe denselben Wert, weil das Auge dann auf  $\infty$  eingestellt ist, und die Differenz in den Winkeln schon bei einer Entfernung von 5 oder 6 m verschwindet, da ja der Abstand zwischen  $\mathcal{F}$  und  $\mathbf{H}$  nur 17,05 mm beträgt. Ist das Auge kurzsichtig,  $A$  also negativ ( $A < 0$ ), so wird das Verhältnis  $\frac{S}{S_n}$  kleiner, im Falle des Hypermetropen ( $A > 0$ ) wird es größer als 1, weil im ersten Falle das zweite Glied negativ, im zweiten Falle aber positiv wird. Das heißt, im ersten Fall ist die absolute Sehschärfe kleiner, im zweiten größer als die natürliche. An der Abb. 56 kann man den Grund hierfür auch unschwer ablesen. Man sieht, daß für den Kurzsichtigen der Winkel mit der Spitze in  $\mathcal{F}$  größer sein muß als der Winkel mit der Spitze in  $\mathbf{H}$ . Deshalb ist, da sich die Leistung des Auges ja nicht ändert, die absolute Sehschärfe kleiner als die natürliche. Für den Hyperopen liegt das Verhältnis umgekehrt. Für ihn befindet sich der im Fernpunkt gelegene Gegenstand hinter dem Auge. Der Abstand  $\mathbf{HR}$  ist also kleiner als  $\mathcal{F}\mathbf{R}$ , dementsprechend der Winkel  $\omega_h$  größer als  $\omega_f$ . Im ersten Falle wird also der Bruch  $\frac{S}{S_n} = \frac{\omega_h}{\omega_f}$  ein echter, im zweiten Fall ein unechter sein.

Man könnte auch noch die natürliche Sehschärfe zur relativen in Beziehung setzen. Wie aus der Abb. 56 zu ersehen, gelten für die Winkel  $\omega_H$  und  $\omega_h$  folgende Beziehungen:

$$\omega_H = \frac{\alpha}{RH'} = \frac{\alpha}{RH + HH'} = \frac{-\alpha}{HR + H'H} = \frac{-\alpha}{a + \delta}, \quad (b)$$

$$\omega_h = \frac{\alpha}{RH} = \frac{-\alpha}{HR} = \frac{-\alpha}{a}.$$

Es ist ferner:

$$S_r = \frac{c}{\omega_H}, \quad S_n = \frac{c}{\omega_h}; \quad \text{also} \quad \frac{S_r}{S_n} = \frac{c}{\omega_H} \cdot \frac{\omega_h}{c} = \frac{\omega_h}{\omega_H}.$$

Den Ausdruck für  $\omega_H$  [§ 41 (b)] bzw.  $\omega_h$  (a) eingesetzt, ergibt:

$$\frac{S_r}{S_n} = \frac{-\alpha}{a} \cdot \frac{(a + \delta)}{-\alpha} \quad \frac{S_r}{S_n} = \frac{a + \delta}{a} = 1 + \delta A.$$

Wenn man sich jetzt an die Beziehung (11 a) erinnert (s. S. 54), daß  $1 = (1 + \delta A) \cdot (1 - \delta D_r)$  war, so kann man setzen

$$1 + \delta A = \frac{1}{1 - \delta D_r}. \quad (c)$$

Setzt man diesen Ausdruck (c) statt  $1 + \delta A$  ein, so erhält man

$$\frac{S_r}{S_n} = \frac{1}{1 - \delta D_r},$$

bzw. den Kehrwert

$$\frac{S_n}{S_r} = 1 - \delta D_r, \quad (27)$$

oder

$$S_n = (1 - \delta D_r) \cdot S_r.$$

Man kann also die natürliche Sehschärfe  $S_n$  nach dieser Formel ermitteln, wenn man die relative Sehschärfe  $S_r$ , d. h. die mit dem Brillenglas festgestellte, kennt, die Stärke des Brillenglases  $D_r$ , und den Wert von  $\delta$ . Das Schichtenbild (Abb. 57) gibt eine Anschauung von den hier gültigen Beziehungen; man ersieht daraus, daß hier merkbare Unterschiede zwischen  $S_r$  und  $S_n$  bei den verschiedenen Graden der Fehlsichtigkeit vorkommen, die nicht zu vernachlässigen sind (Ziffernbeispiel XIII, 2 b, S. 147/8).

Wir erkennen aus dem Verlauf der Schichtenlinien, daß um so größere Abweichungen von dem für die Koordinatenachsen (wo entweder  $\delta$  oder  $D_r$  verschwindet) von selbst erfüllten Einheitswert bei um so kleineren  $D_r$ -Werten entstehen, je größer  $\delta$  ausfällt. Für höhere Beträge der Brillenbrechkraft  $D_r$ , nimmt bei einigermaßen beträchtlichen  $\delta$ -Werten der Bruch  $\frac{S_n}{S_r}$  einen recht merklichen Wert an. Da solche stärkeren Brillengläser bei kurzsichtigen Augen überwiegen, so ist namentlich in solchen Fällen auf diese Abweichung zu achten. — Die obere und die



untere Begrenzung verlaufen ganz wie in Abb. 54, und die auf S. 101 dazu gemachte Bemerkung läßt sich ohne weiteres auch hier verwenden.

Wir haben also, um es noch einmal zusammenzufassen, für die Beziehungen der verschiedenen Sehschärfen zueinander folgende Ausdrücke:

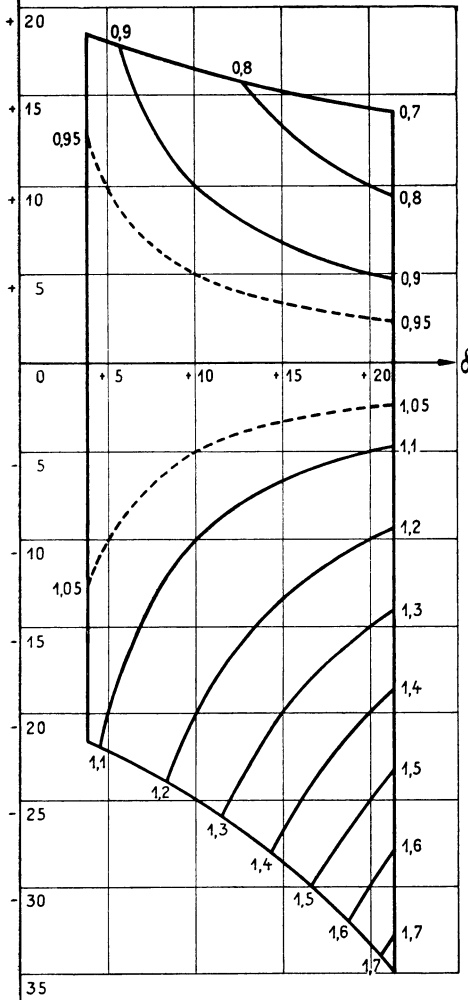


Abb. 57. Schichtenbild für  $\frac{S_n}{S_r}$  nach M. v. ROHR (4, 57) für das HENKERSche Gebiet, das durch stärkere Umrandung hervorgehoben ist.

$$\frac{S}{S_r} = 1 - \delta_f D, \quad (25)$$

und 
$$\frac{S}{S_r} = \frac{1 + f''A}{1 + \delta A}, \quad (19)$$

$$\frac{S}{S_n} = 1 + \frac{A}{D''}, \quad (26)$$

$$\frac{S_n}{S_r} = 1 - \delta D, \quad (27)$$

§ 42. Das Vergrößerungsvermögen. Wir hatten in § 30—33 untersucht, in welcher Weise sich die Netzhautbildgröße beim Tragen der Fernbrille ändert, in § 37 besprochen, wie der äußere Akkommodationserfolg durch die Fernbrille beeinflusst wird. Es bleibt deshalb jetzt noch die Aufgabe zu behandeln, wie sich die Netzhautbildgröße ändert, wenn das Auge mit oder ohne Augenhilfe akkommodiert.

Wenn es sich um die Betrachtung eines nahen Gegenstandes bei akkommodierendem Auge handelt, so bestimmt sich die Bildgröße auf der Netzhaut nach der allgemeinen Gleichung für die Vergrößerung  $\alpha A = \beta B$ , woraus, wenn  $\alpha$  und  $A$  bekannt sind und  $B$  aus der Gleichung  $B = A + D^1$ ) durch Rechnung gefunden worden ist,  $\beta$  ohne weiteres ermittelt werden kann.

Als ein besonderer Fall, der aber hier nicht im einzelnen besprochen werden soll, wäre die Altersbrille zu erwähnen, sofern sie von einem Auge getragen wird, das noch

1)  $D$  steht hier für die Brechkraft des akkommodierenden Auges.

nicht eine Akkommodationsbreite gleich Null hat. Wir können ihn aber hier in dem zu behandelnden allgemeinen Fall als mit eingeschlossen ansehen.

Nehmen wir einen Gegenstand (Abb. 58), der von dem akkommodierenden Auge in einer bestimmten Entfernung wahrgenommen wird, an ( $\alpha$ ). Dieser Gegenstand wird durch eine vor das Auge gebrachte Hilfe mit endlicher Brennweite (Lupe, Mikroskop, Altersbrille od. dgl.), angedeutet durch die beiden Hauptpunkte  $H$ , und  $H'$ , irgendwie abgebildet werden, so daß jetzt nicht mehr der Gegenstand  $\alpha$ , sondern das durch diese Augenhilfe entworfene Bild  $\beta$ , zum Gegenstand für das Auge wird. Es fragt sich nun, in welcher Weise das vorher dem unbewaffneten Auge gebotene Bild durch das Hilfsmittel vergrößert wird. Dabei nehmen wir, um allgemein vorzugehen, den Fall an, daß das

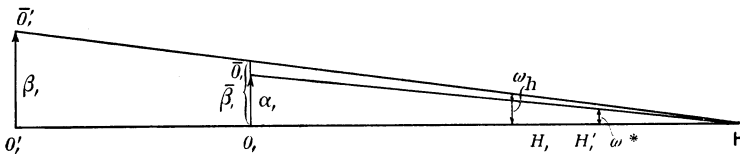


Abb. 58. Zur Ableitung der Bildgröße beim akkommodierenden Auge.

$$a = \mathbf{H}O' = \mathbf{H}H' + H'O' = -\delta + b.$$

Auge, um den Gegenstand  $\alpha$ , ohne Hilfsmittel deutlich zu sehen, eine gewisse Akkommodationsleistung aufbringen muß. Wir müssen deshalb um einen Vergleich der Winkel, unter denen der Gegenstand  $\alpha$ , oder nach Vorsetzen der Brille sein Bild  $\beta$ , dem Auge erscheint, zu ermöglichen, die Spitze des Winkels in einen Punkt legen, der sich bei der Akkommodation nicht ändert. Wie wir in § 41 sahen, ist das der Fall bei dem vorderen Augenhauptpunkt  $\mathbf{H}$ . Es wird also die Aufgabe sein, festzustellen, unter welchem Hauptpunktswinkel  $\omega_h$  der Gegenstand  $\alpha$ , und sein Bild  $\beta$ , erscheinen, also das Verhältnis der zugehörigen Winkel festzustellen. Da wir uns hier nur auf kleine Winkel beschränken, kann man statt der Tangenten die Winkel selbst einsetzen<sup>1)</sup>.

In Abb. 58 nehmen wir als besonderen Fall, wofür die allgemeine Ableitung gegeben werden soll, eine Lupe (ein Sammelglas) an mit den Hauptpunkten in  $H$ , und  $H'$ . Der in  $O$ , befindliche Gegenstand  $\alpha$ , wird dann durch die Lupe, sofern er sich, wie angenommen, innerhalb der Brennweite befindet, als virtuelles Bild  $\beta$ , in  $O'$ , abgebildet. Dieses Bild

<sup>1)</sup> Wenn wir von den Winkeln ausgehen, so erledigt sich auch die Ableitung für unendlich ferne Gegenstände, bei denen mit der linearen Größe des Gegenstandes nichts anzufangen ist, was bei endlich entfernten Gegenständen natürlich möglich wäre (s. § 17).

dient dann für das Auge als Gegenstand  $\alpha$ . Es erscheint vom vorderen Augenhauptpunkt  $\mathbf{H}$  aus unter dem Winkel  $\omega_h$ . Nun ist

$$\operatorname{tg} \omega_h = \omega_h = \frac{\beta_r}{O'_\mathbf{H}}.$$

Bei der Abbildung durch eine Sammellinse gilt aber die allgemeine GULLSTRANDSche Beziehung (2) für die Vergrößerung (hier von der Form)  $\alpha_r \cdot A_r = \beta_r \cdot B_r$ , woraus sich ergibt

$$\beta_r = \frac{\alpha_r \cdot A_r}{B_r}.$$

Diesen Ausdruck für  $\beta_r$  in die obige Beziehung eingesetzt:

$$\omega_h = \frac{\alpha_r \cdot A_r}{B_r \cdot O'_\mathbf{H}}.$$

Zerlegen wir nach der Geometrie der geraden Linie die Strecke  $O'_\mathbf{H}$ , so erhalten wir

$$\omega_h = \frac{\alpha_r \cdot A_r}{B_r (O'_\mathbf{H}' + H'_\mathbf{H})}.$$

$O'_\mathbf{H}'$  ist aber die (umgekehrt durchlaufene) Bildentfernung bei der Abbildung durch die Linse  $= -b_r = \frac{-1}{B_r}$ .  $H'_\mathbf{H}$  ist  $= \delta$ .

Setzen wir diese Bezeichnungen ein, so erhalten wir

$$\omega_h = \frac{\alpha_r \cdot A_r}{B_r \left( \frac{-1}{B_r} + \delta \right)} \quad \text{oder} \quad \omega_h = \frac{\alpha_r \cdot A_r}{-1 + \delta \cdot B_r}. \quad (\text{a})$$

Wir haben damit den Winkel  $\omega_h$  bestimmt unter Beziehung auf die Brechwerte, die für die Linse (bzw. die Linsenfolge) gültig sind, nämlich  $A_r$  und  $B_r$ .

Wenn wir jetzt die Beziehung auf das Auge einführen wollen, so müssen wir  $A_r$  und  $B_r$  durch Größen ausdrücken, die auf den vorderen Augenhauptpunkt bezogen sind. Zu diesem Zweck bedienen wir uns wieder der Geometrie der geraden Linie und setzen die Entfernung des Bildes vom vorderen Augenhauptpunkt

$$\mathbf{HO}' = \mathbf{HH}' + \mathbf{H}'\mathbf{O}'.$$

$\mathbf{HO}'$  ist aber zu setzen  $= a$ , wobei in diesem Fall zu berücksichtigen ist, daß es nicht wie in den § 35, 36 den Fernpunktsabstand bedeutet, sondern den Abstand desjenigen Punktes vom vorderen Augenhauptpunkt, der sich auch bei akkommodierendem Auge auf der Netzhaut gerade deutlich abbildet. Der Kehrwert von  $a$  ist also der Hauptpunktsbrechwert dieses Punktes  $\mathbf{O}'$ , d. h. der durch Dioptrien ausgedrückten Größe der axialen Refraktion einschließlich der Akkommodationsgröße. Wir bezeichnen den Kehrwert auch hier mit  $A$ . Ferner ist der Bildabstand  $b$ , für die

Flächenfolge  $D$ ;  $b, = H'O'$  und  $\mathbf{H}H' = -\delta$ . Setzen wir jetzt die kleinen Buchstaben in die obige Gleichung  $\mathbf{H}O' = \mathbf{H}H' + H'O'$  ein, so erhalten wir

$$a = -\delta + b, \quad \text{oder} \quad \frac{1}{A} = -\delta + \frac{1}{B,}.$$

Nach der Lagengleichung (1) für die Linsenfolge  $B, = A, + D$ , können wir auch schreiben

$$\frac{1}{A} = -\delta + \frac{1}{A, + D,},$$

woraus

$$\frac{1}{A} + \delta = \frac{1}{A, + D,}, \quad \text{oder} \quad \frac{1 + \delta \cdot A}{A} = \frac{1}{A, + D,}.$$

Davon den Kehrwert

$$\begin{aligned} \frac{A}{1 + \delta \cdot A} &= A, + D,, \\ A, &= \frac{A}{1 + \delta \cdot A} - D,; \quad A, = \frac{A - D, - \delta \cdot A \cdot D,}{1 + \delta \cdot A} \\ A, &= \frac{A \cdot (1 - \delta \cdot D,) - D,}{1 + \delta \cdot A}. \end{aligned} \quad (\text{b})$$

Wir haben damit  $A,$  durch Größen ausgedrückt, in denen außer der Brechkraft der Linsenfolge  $D$ , der Hauptpunktsbrechwert  $A$  (im oben dargelegten Sinne) und  $\delta$  vorkommen.

Entsprechend können wir jetzt auch für  $B,$  die Beziehung auf das Auge einführen. Es ist nach Abb. 58

$$b, = H'O' = H'H + \mathbf{H}O'.$$

Setzen wir wieder die kleinen Buchstaben ein, so erhalten wir

$$b, = \delta + a$$

oder, unter Einsetzung der Kehrwerte,

$$\frac{1}{B,} = \delta + \frac{1}{A} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{B,} = \frac{1 + \delta A}{A}.$$

Davon den Kehrwert

$$B, = \frac{A}{1 + \delta \cdot A}. \quad (\text{c})$$

Werden beide Seiten mit  $\delta$  multipliziert und beiderseits  $-1$  addiert, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \delta B, &= \frac{\delta A}{1 + \delta A}, \\ -1 &= -1, \\ \hline -1 + \delta B, &= -1 + \frac{\delta A}{1 + \delta A}, \end{aligned}$$

$$-1 + \delta B, = \frac{-1 - \delta A + \delta A}{1 + \delta A},$$

$$-1 + \delta B, = -\frac{1}{1 + \delta A}.$$

Wir haben damit einen andern Ausdruck für den Nenner in der Gleichung (a). Setzen wir ihn ein, so erhalten wir

$$\omega_h = \frac{\alpha, \cdot A,}{-1} \quad \text{oder} \quad \omega_h = -\alpha, \cdot A, (1 + \delta \cdot A).$$

$$\frac{1}{1 + \delta \cdot A}$$

Setzen wir jetzt für  $A$ , den oben gefundenen Ausdruck (b) ein, so erhalten wir

$$\omega_h = \frac{-\alpha, [A(1 - \delta \cdot D,) - D,](1 + \delta \cdot A)}{1 + \delta \cdot A}.$$

Im Zähler und Nenner hebt sich  $1 + \delta \cdot A$  weg, und es ergibt sich

$$\omega_h = -\alpha, [A(1 - \delta D,) - D,],$$

$-\alpha$ , auf die linke Seite gebracht und beide Seiten mit  $-1$  multipliziert, ergibt

$$\frac{\omega_h}{\alpha,} = D, - A(1 - \delta \cdot D,). \quad (28)$$

Dieser Ausdruck ergibt also den Wert für das Verhältnis des Hauptpunktwinkels  $\omega_h$ , unter welchem bei Unterstützung des Auges durch die Linsenfolge von der Brechkraft  $D$ , der Gegenstand  $\alpha$ , dem Auge erscheint, zu der Gegenstandsgröße  $\alpha$ , (ohne Augenhilfe). Es ist das Verhältnis eines Winkels zu einer Länge.

Dieses Verhältnis ist abhängig von der Brechkraft der Linsenfolge  $D$ , dem Abstand  $\delta$  zwischen den einander zugekehrten Hauptpunkten von Linse ( $H$ ) und Auge ( $H$ ) und  $A$ , dem Hauptpunktbrechwert des Auges (aus axialer Refraktion und Akkommodationszustand). Dieses Verhältnis wird nach **ABBE** als das *Vergrößerungsvermögen* der Linsenfolge bezeichnet.

Zunächst erscheint diese Beziehung zwischen einem Winkel und einer Länge etwas ungewöhnlich, und es fragt sich, um was es sich handelt. Wir dürfen hier  $\omega_h$  nicht als Winkel in Grad gemessen ansehen, sondern als eine unbenannte Zahl, bestimmt durch die Länge des Bogens des zugehörigen Winkels, etwa wie man einen gestreckten Winkel von  $180^\circ$  auch mit der Bogenlänge  $\pi$  bezeichnen kann.

Erinnert man sich des Satzes, daß sich die Zentriwinkel  $\varphi^0$  eines Kreises verhalten wie ihre Bogenlängen  $s$ , so ergibt sich nach Abb. 59 für zwei Winkel  $\varphi_1^0$  und  $\varphi_2^0$  mit den zugehörigen Bogen  $s_1$  und  $s_2$  die Proportion  $s_1 : s_2 = \varphi_1^0 : \varphi_2^0$ . Setzt man jetzt  $\varphi_2^0 = 180^0$ , so wird die zugehörige Bogenlänge  $s_2 = r \cdot \pi^1$ , d. h.

1) Denn der ganze Kreisumfang für  $\varphi^0 = 360^0$  ist gegeben durch  $2 r \pi$ .

$s_1 : r\pi = \varphi_1^0 : 180^0$ . Läßt man jetzt den nunmehr unnötigen Zeiger 1 wieder fort, so ergibt sich

$$s = \frac{r \cdot \pi \varphi^0}{180^0}$$

und man bildet nun

$$\hat{\varphi}^1) = \frac{s}{r} = \frac{\pi \varphi^0}{180^0} = \frac{\varphi^0}{\frac{180^0}{\pi}} = \frac{\varphi^0}{57^{\circ},3}.$$

Dieses  $\hat{\varphi}$  liegt natürlich zwischen 0 und  $2\pi$  für alle Winkel  $\varphi^0$  zwischen  $0^0$  und  $360^0$ . Man kann also sagen, daß man statt der alten babylonischen willkürlichen Gradteilung des ganzen Winkels zwischen 0 und  $4R = 360^0$  eine neue Bezeichnung nach Bogenmaß  $\hat{\varphi}$  eingeführt hat, in der die Maßzahl eine unbenannte Zahl ist und zwischen 0 und  $2\pi$  liegt.

Die Größe des Gegenstandes  $\alpha$ , muß in Metern gemessen werden. Wir haben also hier einen Quotienten oder ein Verhältnis einer unbenannten Zahl zu einer in Metern gemessenen Länge. Das ist aber eine Größe von der Dimension einer Dioptrie, d. h. es ergibt sich eine bestimmte Anzahl von Dioptrien; der Ausdruck  $\frac{\omega_h}{\alpha}$  ist also ein *Dioptrienwert*. Dem entspricht, daß auf der rechten Seite der Gleichung (28) in  $D$ , und  $A$ , das aber noch mit einem bestimmten Zahlenfaktor multipliziert ist, Dioptrienwerte gegeben sind (Ziffernbeispiel XIV, S. 148).

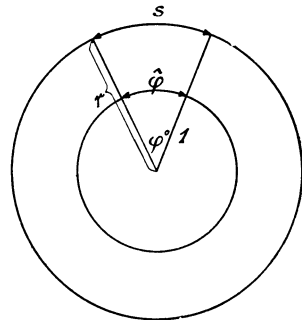


Abb. 59. Zur Ableitung des Bogenmaßes  $\hat{\varphi}$  eines Winkels aus seinem Gradmaß  $\varphi^0$ .

*Erörterung der Formel.* Betrachten wir den besonderen Fall, daß  $A = 0$  wird, d. h. daß es sich um ein rechtsichtiges und nicht akkommodierendes Auge handelt, das eine Augenhilfe von der Brechkraft  $D$ , benutzt, so erhalten wir das sog. *absolute* Vergrößerungsvermögen der Linsenfolge  $D$ , geschrieben  $\left[ \frac{\omega_h}{\alpha} \right]_{\text{abs.}} = D$ , . (29)

Von diesem wird das *individuelle* Vergrößerungsvermögen der Linsenfolge unterschieden, wenn es sich um Fehlsichtigkeiten handelt, bei denen  $A$  größer oder kleiner als 0 ist.  $A$  ist ohne weiteres bestimmbar, wenn man die axiale Refraktion des Auges und seinen Akkommodationszustand durch Ermittlung des Abstandes von  $\alpha$ , festgestellt hat.

Dieser  $A$ -Wert muß dann nach (28) noch mit  $(1 - \delta D)$  multipliziert werden. Es fragt sich, was für eine geometrische Bedeutung dieser letzte Faktor hat. Zu diesem Zweck geben wir folgende kleine Ableitung:

Führen wir statt  $D$ , ein  $\frac{1}{f'}$ , so erhalten wir

$$1 - \delta D, = 1 - \frac{\delta}{f'}.$$

1) Ist  $\hat{\varphi}$  das Bogenmaß von  $\varphi^0$  auf dem Einheitskreise, so kann man  $\hat{\varphi}$  eben auch auffassen als die Bogenlänge eines Kreises vom Radius  $r = 1$  für  $\varphi$  Grade.

Setzen wir wieder (s. Abb. 60 und 61) nach der Geometrie der geraden Linie die durch ihre Endpunkte bezeichneten Strecken ein, so ergibt sich

$$1 - \delta D, = 1 - \frac{H',H}{H',F'}$$

oder auf gemeinsamen Bruchstrich gebracht

$$1 - \delta D, = \frac{H',F' + HH',}{H',F'} = \frac{HH', + H',F',}{H',F'},$$

also

$$1 - \delta D, = \frac{HF',}{H',F'}.$$

Das Zeichen des Faktors  $1 - \delta D,$  hängt demnach erstens ab von dem Zeichen<sup>1)</sup>, das der Nenner  $H',F' = f',$  d. h. die Brennweite der Linsenfolge  $D,$  hat, und zweitens von dem Zeichen von  $HF',$  d. h. dem

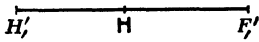


Abb. 60.

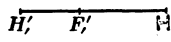


Abb. 61.

Die Lage des Lupenbrennpunkts  $F',$  zum vorderen Augenhauptpunkt  $H$  bei einer mittelstarken Lupe.

Abstand des Brennpunkts der Linsenfolge von dem vorderen Augenhauptpunkt  $H.$

Je nachdem, ob sich der Brennpunkt der Linsenfolge  $F',$  (nach Abb. 60 oder 61) vor oder hinter dem vorderen Augenhauptpunkt befindet,

wird der Zähler negativ oder positiv sein. Liegt  $F',$  hinter dem Hauptpunkt  $H,$  ist also  $HF', > 0,$  so kann es sich nur um verhältnismäßig schwache Lupen handeln, die eine größere Brennweite haben, während umgekehrt, wenn  $HF',$  negativ, also  $< 0$  ist,  $F',$  demnach vor  $H$  zu liegen kommt, es sich bei einigermaßen geringem Abstände der Augenhilfe vom Auge um sehr starke Sammellinsen handeln muß.

Das individuelle Vergrößerungsvermögen  $\frac{\omega_h}{\alpha,}$  wird also davon abhängen, ob die rechte Seite der Gleichung (28) größer oder kleiner als  $D,$  wird, d. h. ob das zweite Glied positiv oder negativ ausfällt. Das wird dadurch bestimmt, ob  $1 - \delta D,$  und  $A$  negativ oder positiv sind. Ist  $A$  negativ (Myopie bzw. Emmetropie und Hyperopie bei entsprechender Akkommodation), so wird das individuelle Vergrößerungsvermögen größer sein als das absolute, wenn  $1 - \delta D,$  positiv (größer als Null) ist, denn jetzt wird das Glied  $A(1 - \delta D,)$  an sich negativ, so daß also bei dem negativen Vorzeichen noch etwas zu  $D,$  addiert wird. Ist dagegen  $1 - \delta D,$  negativ (kleiner als Null), so wird, wenn  $A < 0,$  das Vergrößerungsvermögen kleiner sein als  $D,.$  Genau die umgekehrten Verhältnisse greifen Platz, wenn es sich um ein hypermetropisches Auge handelt,

<sup>1)</sup> Dies kann bei Brillen positiv oder negativ sein, ist aber bei Lupen nur positiv.

$A$  also  $> 0$  ist. Das Ergebnis wird veranschaulicht durch das zugehörige Schichtenbild (Abb. 65 auf S. 117) (Ziffernbeispiel XIV, S. 148).

§ 43. Die geometrische Bedeutung der Formel für das Vergrößerungsvermögen. Zur Veranschaulichung der Formel (28)

$$\frac{\omega_h}{\alpha} = D, - A(1 - \delta D),$$

diene folgende geometrische Betrachtung:

Gehen wir davon aus, daß der Winkel im Augenraum  $\omega_h$  unverändert bleiben soll, so muß ihm im Dingraum der Linsenfolge  $D$ , ein Winkel  $\omega_{\mathfrak{H}}$  entsprechen, der natürlich, da durch die Linsenfolge  $D$ , eine Abbildung erfolgt, seine Spitze  $\mathfrak{H}$  an der,  $\mathbf{H}$  als Gegenstand zugeordneten, Stelle haben muß. Es handelt sich nun darum, festzustellen, wo dieser Punkt liegt, und wie wir ihn auf geometrischem Wege ermitteln können. Es soll also der Punkt  $\mathbf{H}$  durch die Linsenfolge in  $\mathfrak{H}$  abgebildet werden bzw.  $\mathfrak{H}$  in  $\mathbf{H}$ , da ja die Abbildung ohne weiteres umkehrbar ist. Wir gehen wieder zurück auf die Lagengleichung (1)  $B = A + D$  und berücksichtigen, daß hier der dingsseitige Hauptpunktsabstand bei der Abbildung durch die Linsenfolge  $D$ , ist (s. Abb. 63):

$$H, \mathfrak{H} = a = \frac{1}{A}$$

und der bildseitige

$$H', \mathbf{H} = b = \frac{1}{B}.$$

Wir haben dann nach (1) die Gleichung

$$\frac{1}{H', \mathbf{H}} = \frac{1}{H, \mathfrak{H}} + D, \quad \text{oder} \quad \frac{1}{H, \mathfrak{H}} = \frac{1}{H', \mathbf{H}} - D,$$

oder, für  $H', \mathbf{H} = \delta$  eingesetzt:

$$\frac{1}{H, \mathfrak{H}} = \frac{1}{\delta} - D, \quad \text{woraus} \quad \frac{1}{H, \mathfrak{H}} = \frac{1 - \delta D,}{\delta}.$$

Davon den Kehrwert

$$H, \mathfrak{H} = \frac{\delta}{1 - \delta D,}; \quad D, = \frac{1}{f'}$$

eingesetzt, ergibt:

$$H, \mathfrak{H} = \frac{\delta}{1 - \frac{\delta}{f'}} = \frac{\delta f'}{f' - \delta},$$

woraus durch Umkehrung:

$$\frac{f' - \delta}{f'} = \frac{\delta}{H, \mathfrak{H}}.$$

Wir können diese Gleichung auch schreiben:

$$f' - \delta : f' = \delta : H, \mathfrak{H} \quad \text{oder} \quad f' - \delta : \delta = f' : H, \mathfrak{H},$$



da ja die inneren Glieder einer Proportion vertauscht werden können. Wir haben damit eine Proportion zwischen vier Gliedern, von der drei, nämlich  $f'$ ,  $\delta$  und deshalb auch  $f' - \delta$  bekannt sind. Zur geometrischen Auffindung der Strecke  $H, \xi$  dient die beistehende Abb. 62, aus der nach

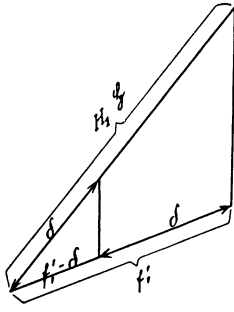


Abb. 62. Geometrische Ableitung des Betrages von  $H, \xi$ .

dem Proportionalitätssatz ohne weiteres die Größe von  $H, \xi$  zu ermitteln ist. Dabei ist zu berücksichtigen, daß  $H, \xi$  positiv wird, wenn  $f' - \delta$  positiv ist, andernfalls ist es negativ. Im ersten Fall der Abb. 63 sind also die Winkel  $\omega_h$  und  $\omega_\xi$  beide positiv. Ist  $f'$  kleiner als  $\delta$ , d. h. handelt es sich um sehr starke Sammelsysteme mit kurzer Brennweite, so ist die geometrische Darstellung an der Abb. 64 ebenfalls ohne weiteres verständlich, nur ist hier der Winkel  $\omega_\xi$  negativ (s. unten).

Wollen wir uns nun veranschaulichen, wie je nach dem Hauptpunktsbrechwert des Auges  $A$  das Vergrößerungsvermögen der Linsenfolge  $D$ , sich ändert, so gehen wir von folgenden Überlegungen aus.

Nehmen wir für einen positiven Wert von  $f' - \delta$ , also Abb. 63, einen Gegenstand  $\alpha$ , in  $\mathcal{F}_1$ , d. h. im vorderen Brennpunkt der Linsenfolge  $D$ , an, so wird er im Unendlichen abgebildet werden. Er wird dann also gerade für ein emmetropisches Auge mit entspannter Akkommodation passen. Wir wählen seine Größe so, daß er diesem emmetropischen Auge

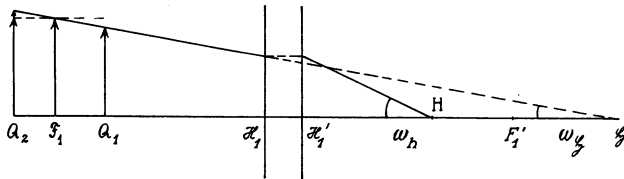


Abb. 63. Der Hauptstrahlenverlauf im Dingraum einer mittelstarken Lupe und seine Folgen.

$H_1, H_1', \mathcal{F}_1, F_1'$  sind im Text nicht mit dem Zeiger 1, sondern mit , bezeichnet.

gerade unter dem Winkel  $\omega_h$  erscheint. Wenn man jetzt den Gegenstand auf den vorderen Hauptpunkt  $H$ , der Linsenfolge  $D$ , zu, etwa bis  $Q_1$ , verschiebt, so wird ein virtuelles Bild in endlicher (und zwar negativer) Entfernung vor dem Auge entstehen, d. h. es wird dieses Bild einem auf einen reellen Punkt eingestellten (myopischen oder stark akkommodierenden) Auge entsprechen. Da wir den Augenhauptpunktswinkel  $\omega_h$  festhalten, so leuchtet es ein, daß, da die neue Spitze des Gegenstandes  $\alpha$ , ja auf dem oberen Schenkel des Winkels  $\omega_\xi$  liegen muß, ein kleinerer Gegenstand unter demselben Winkel  $\omega_h$  dem kurzsichtigen Auge erscheinen muß wie ein größerer dem auf  $\infty$  eingestellten: d. h. das Vergrößerungsvermögen der Linsenfolge  $D$ , ist für das kurzsichtige oder

akkommodierende Auge größer als für das rechtsichtige. Verschiebt man umgekehrt den Gegenstand aus  $\mathcal{F}$ , nach links, also von  $H$ , etwa bis  $Q_2$  fort, so entspricht diesem Gegenstand jetzt nach der Abbildung durch die Linsenfolge  $D$ , ein reelles (umgekehrtes) Bild, und zwar rechts von  $\mathbf{H}$  gelegen, also in positiver Entfernung vom Auge, d. h. dieses Bild paßt für ein übersichtiges Auge. Da der Gegenstand  $\alpha$ , aber entsprechend den eben gegebenen Ausführungen mit seiner Spitze auf dem oberen Schenkel des Winkels  $\omega_{\mathfrak{H}}$  bleiben muß, so wird in diesem Fall ein größerer Gegenstand dem übersichtigen Auge unter dem gleichen Winkel  $\omega_h$  erscheinen. Das Vergrößerungsvermögen der Linsenfolge  $D$ , ist für den Übersichtigen also kleiner als für den Rechtsichtigen. Diese geometrische Deutung mittels der Abb. 63 stimmt demnach überein mit dem Ergebnis der vorhin entwickelten analytischen Ableitung.

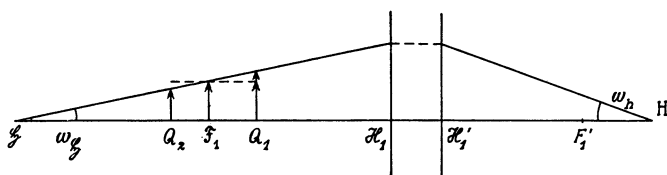


Abb. 64. Der Hauptstrahlenverlauf im Dingraum einer starken Lupe und seine Folgen. (Siehe die Erklärung zu Abb. 63.)

Ist  $f' - \delta$  wie in Abb. 64 negativ, so muß auch das Zeichen von  $H, \mathfrak{H}$  negativ werden. Der scheinbare Augenhauptpunkt  $\mathfrak{H}$  im Dingraum der Linsenfolge  $D$ , liegt also links von  $H$ , (s. Abb. 64). Wenn wir hier wieder davon ausgehen, daß ein Gegenstand sich in  $\mathcal{F}$ , befindet, so werden im Bildraum der Linsenfolge  $D$ , (im Gegenstandsraum des Auges) seine (Öffnungs-) Strahlen parallel sein. Seine Lage wird also für ein emmetropisches Auge passen. Bewegen wir jetzt den Gegenstand in der Lichtrichtung, etwa bis  $Q_1$ , so muß er von dem Grenzstrahl durch  $\mathfrak{H}$  in größerer Höhe geschnitten werden, wird aber deshalb doch im Augenraum unter demselben Winkel  $\omega_h$  und also schwächer vergrößert erscheinen. Was seine Öffnungsstrahlen angeht, so paßt er jetzt für ein myopisches bzw. akkommodierendes Auge, da  $Q_1$  links von  $H'$ , in den virtuellen Bildraum fällt. Umgekehrt liegen die Verhältnisse für das hypermetropische Auge, wo der etwa bis  $Q_2$  verschobene Gegenstand rechts von  $H'$ , umgekehrt abgebildet wird. Hier wird der Gegenstand in einer kleineren Höhe durchstoßen, erscheint also in einer stärkeren Vergrößerung. Es ist also bei negativem Zeichen von  $H, \mathfrak{H}$  das Vergrößerungsvermögen der Linsenfolge  $D$ , für den Hyperopen größer, für den Myopen kleiner als für den Emmetropen.

Nimmt man an, daß  $F'_1$ , der bildseitige Brennpunkt der Linsenfolge  $D$ , mit dem vorderen Augenhauptpunkt  $\mathbf{H}$  zusammenfällt, so ist, wie

aus der Gleichung (S. 113) zu ersehen, der Wert der Strecke  $H, \xi = \infty$ <sup>1)</sup>. Es herrscht deshalb im Dingraum des Auges *telezentrischer* Strahlengang<sup>2)</sup>. Es ist hier das absolute Vergrößerungsvermögen gleich dem individuellen, d. h. stets ist die Vergrößerung dieselbe, gleichgültig, welche Refraktion das beobachtende Auge hat (welche Konvergenz der Öffnungsstrahlen besteht).

§ 44. *Die Vergrößerungszahl.* Das Vergrößerungsvermögen  $\frac{\omega_h}{\alpha_1}$  ist im allgemeinen den Augenärzten noch nicht geläufig. Man gibt in der Regel die Vergrößerung durch die Vergrößerungszahl an, die in folgender Weise ermittelt wird: Betrachten wir einen Gegenstand  $\alpha_1$ , bei entsprechender Akkommodation, z. B. in einer Entfernung  $\mathbf{HO}_1 = -0,25$  m vor dem Auge, so erscheint er unter dem Winkel  $\omega^*$  (Abb. 58). Durch die Linsenfolge werde dieser Gegenstand als  $\beta_1$  in  $O_1'$  abgebildet. Er erscheint jetzt unter dem Winkel  $\omega_h$ . Wenn wir in  $O_1$  eine Senkrechte errichten, so wird die Projektion dieses Bildes  $\beta_1$ , das den Gegenstand für das Auge bildet, in dieser Ebene eine gewisse Größe besitzen, die wir mit  $\bar{\beta}_1$  bezeichnen wollen. Das Verhältnis  $N$  von  $\alpha_1$  zu  $\bar{\beta}_1$ , gibt dann die *Vergrößerungszahl* an. Sie ist gekennzeichnet durch das Größenverhältnis der Projektion von  $\beta_1$  in die Objektebene durch  $O_1$  zum Gegenstand  $\alpha_1$  selbst.

Rechnerisch können wir das Verhältnis in folgender Weise darstellen:

$$\operatorname{tg} \omega^* = \omega^* = \frac{\alpha_1}{O_1 \mathbf{H}} \quad \text{oder} \quad \omega^* = \frac{\alpha_1}{-\mathbf{HO}_1}.$$

Nehmen wir  $\mathbf{HO}_1 = -0,25$  m, so ergibt sich:

$$\omega^* = \frac{\alpha_1}{0,25 \text{ m}} \quad \text{oder} \quad \omega^* = \alpha_1 \cdot 4 \text{ dptr} \quad \text{oder} \quad \frac{\omega^*}{\alpha_1} = 4 \text{ dptr}.$$

Es ist ferner das Vergrößerungsvermögen der Linsenfolge  $D$ , nach (28)

$$\frac{\omega_h}{\alpha_1} = D, - A(1 - \delta \cdot D_1).$$

Wollen wir jetzt den Vergleich der Bildwinkel  $\omega^*$  und  $\omega_h$  bezogen auf die konventionelle Entfernung von 0,25 m gewinnen, so schreiben wir

$$\frac{\omega_h}{\alpha_1} \cdot \frac{\alpha_1}{\omega^*} = [D, - A(1 - \delta \cdot D_1)] \cdot \frac{1}{4 \text{ dptr}}$$

$$\text{oder} \quad N = \frac{\omega_h}{\omega^*} = \frac{D, - A(1 - \delta \cdot D_1)}{4 \text{ dptr}}. \quad (30)$$

<sup>1)</sup> Die Gleichung  $\frac{1}{H_1' \mathbf{H}} = \frac{1}{H, \xi} + D$ , wird dann, da  $\mathbf{H}$  mit  $F_1'$  zusammenfällt, zu  $\frac{1}{H_1' F_1'} = \frac{1}{H, \xi} + D$ . Da  $\frac{1}{H_1' F_1'} = \frac{1}{f_1'} = D_1$ , muß  $\frac{1}{H, \xi} = 0$  werden, was nur möglich ist, wenn  $H, \xi = \infty$ .

<sup>2)</sup> Man versteht darunter einen achsenparallelen Verlauf der Hauptstrahlen im Dingraume.

Man erkennt also, daß man das Vergrößerungsvermögen durch Division mit 4 dptr in die konventionelle Vergrößerung, die auf die übliche bequeme Sehweite von 25 cm bezogen ist, berechnet. Die Verhältnisse, wie sie bei Abweichung der Refraktion gegeben sind, also bei der individuellen Vergrößerungszahl, sind genau die gleichen wie die oben bei dem Vergrößerungsvermögen ermittelten, da zu der alten Formel nur ein konstanter Faktor hinzugekommen ist, nämlich  $\frac{1}{4 \text{ dptr}}$  (Ziffernbeispiel XIV, S. 148).

Auf dem nebenstehenden, für mittelstarke ( $D, \leq 50$  dptr) Lupen entworfenen Schichtenbild (Abb. 65) erhält man auf einen Blick ein Urteil über die Verteilung der Werte der Vergrößerungszahl — das Vergrößerungsvermögen ergibt sich aus der zugehörigen Vergrößerungszahl durch Multiplikation mit 4 dptr — in dem für unsern Zweck besonders wichtigen Gebiet  $-20 \text{ dptr} \leq A \leq +8 \text{ dptr}$ . Selbstverständlich kann man das Schichtenbild auch als Rechentafel für Überschlagsbestimmungen verwenden und findet beispielsweise für ( $A = -12 \text{ dptr}, D = 25 \text{ dptr}$ )  $N = 8,2$  und für ( $A = +7 \text{ dptr}, D = 45 \text{ dptr}$ )  $N = 10,6$  usw. Man kann auch die in dem zugehörigen Rechenbeispiel (S. 148) ermittelten Werte bestätigen: Zu ( $A = +8, \pm 0, -10 \text{ dptr}; D = 40 \text{ dptr}$ ) gehören  $N = 9,07, 10,0, 11,17$ .

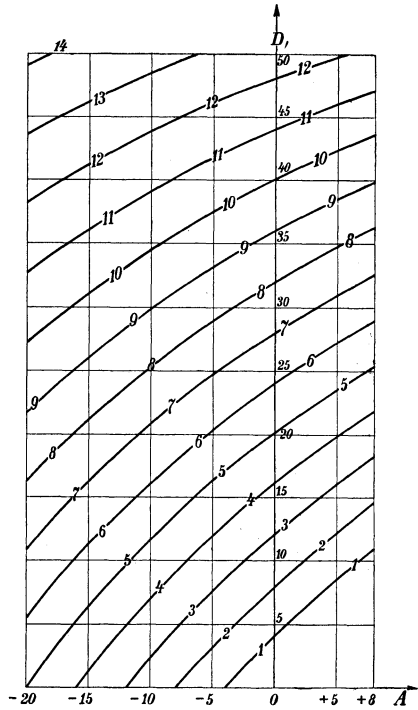


Abb. 65. Schichtenbild für die Vergrößerungszahlen mittelstarker Lupen ( $D$ , unter 50 dptr, also mit einer Vergrößerung unter  $12\frac{1}{2}$ ) für  $-20 \text{ dptr} \leq A \leq +8 \text{ dptr}$ .

Wendet man sich zu einer Besprechung dieses Schichtenbildes, so steigen die Linien gleicher Vergrößerungszahl von links nach rechts an; d. h. eine bestimmte Vergrößerung, etwa  $N = 5$ , wird für negative  $A$ -Werte mit viel kleineren Lupenwirkungen erreicht, als für positive  $A$ -Werte. So ergeben sich an den Grenzen für die Vergrößerungszahlen

	für $A = -20 \text{ dptr}$	$A = +8 \text{ dptr}$
	mit den $D$ ,-Werten: $D$ ,	
5	0	25,3
6	5,45	28,9
7	10,9	32,5
8	16,45	36,1

Man erkennt, daß es aber bei den großen negativen  $A$ -Werten einer viel größeren Zunahme der Lupenbrechkraft (5,45 dptr) bedarf als bei den starken positiven (3,6 dptr), wenn die Vergrößerungszahl um eine Einheit steigen soll. Infolge davon mindert sich bei höheren Vergrößerungszahlen (im oberen Teile der Darstellung) die Schräge der Schichtlinien, und sie rücken an der linken Seite auseinander. Das muß sich auch so verhalten, da für

$$1 - \delta D, = 0 \quad \left( \text{wenn } D, = \frac{1}{0,0133 \text{ m}} = 75 \text{ dptr} \quad \text{und} \quad \delta = 0,0133 \text{ m} \right)$$

die besondere Vergrößerungszahl  $\frac{75 \text{ dptr}}{4 \text{ dptr}} = 18,75$  von  $A$  ganz unabhängig und also die zugehörige Schichtlinie eine zur  $A$ -Achse parallele Gerade wird. Damit stimmt ferner überein, daß mit wachsender Höhe (zunehmendem  $D,$ -Wert) immer weniger Schnittpunkte der Schichtlinien mit einer Wagrechten zustande kommen.

Für  $D, = 0$  dptr umfassen die Linien 2—5 12 dptr auf der  $A$ -Achse; auf 1 Vergrößerungseinheit kommen 4 dptr.

Für  $D, = 25$  dptr umfassen die Linien 5—9 23,8 dptr; auf 1 Vergrößerungseinheit kommen 6 dptr.

Für  $D, = 50$  dptr umfassen die Linien 12—14 24 dptr; auf 1 Vergrößerungseinheit kommen 12 dptr.

## Der Astigmatismus.

### § 45. Allgemeines über die astigmatische Abbildung.

In der bisherigen Darstellung war stillschweigend die Voraussetzung gemacht worden, daß es sich beim Auge und der Brille nur um achsensymmetrische (drehrunde) Flächen und Linsen handelt. Die Gleichungen für die Bildlage und die Vergrößerung gelten deshalb für jede Achsenebene, gleichgültig, ob sie im Raume eine senkrechte, wagrechte oder irgendwelche Richtung dazwischen einnimmt.

Es kann deshalb, wie in Abb. 66 dargestellt, ein in dem achsennahen Raum gelegenes Paar von Zeigern auch wieder ähnlich abgebildet werden.

Anders ist es mit der astigmatischen Abbildung. Zu einer Entwicklung der Theorie würde die Kenntnis der Flächentheorie notwendig sein, die aber auf dieser Stufe der Behandlung nicht gege-

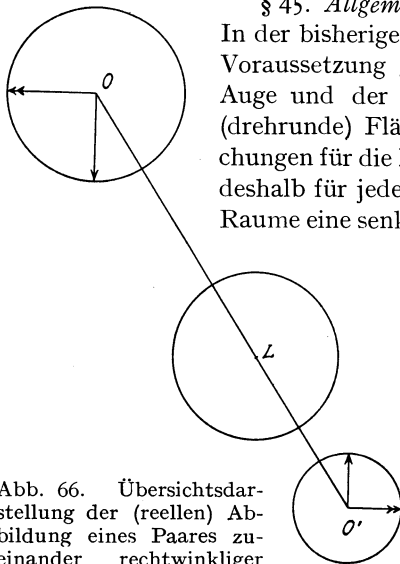


Abb. 66. Übersichtsdarstellung der (reellen) Abbildung eines Paares zueinander rechtwinkliger Zeiger durch die achsensymmetrische Linse  $L$ .

ben werden soll. Nur so viel sei gesagt: Die Abbildung an nicht astigmatischen Flächen läßt sich dahin beschreiben (s. Abb. 67), daß die vor der Brechung konzentrischen Kugelwellen durch die Linse wieder im GAUSSSISCHEN Raume zu einem homozentrischen System von Kugel-

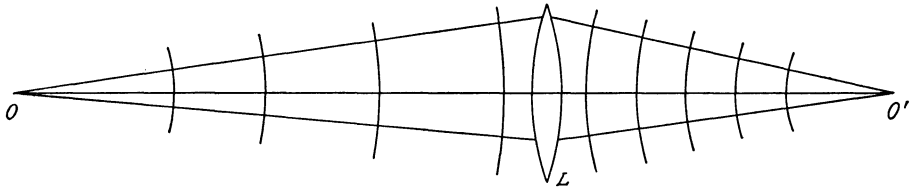


Abb. 67. Stark überhöhtes Übersichtsbild zur Umwandlung der im achsennahen Raum von  $O$  ausgehenden Kugelwellen in andere Kugelwellen mit  $O'$  als gemeinsamem Mittelpunkt.

wellen umgewandelt werden. Die Normalen (Senkrechten) der Kugelflächen, die von dem Zentrum der beiden Kugelwellen nach den Kugeloberflächen gezogen werden, sind die Lichtstrahlen. Sie stehen eben als Normalen (Radien) jeweils senkrecht auf den Flächen.

Bei der Abbildung durch ein astigmatisches System, z. B. durch eine Zylinderlinse, werden aber die vorher homozentrischen Strahlenbündel mit kugligen Wellenflächen umgewandelt in andere Strahlenbündel, deren Wellenflächen nicht mehr Teile von Kugeloberflächen darstellen, sondern die in irgendeiner Weise deformiert sind. Demzufolge werden sich die auf einer gegebenen Wellenfläche liegenden Normalen auch gegenseitig nicht mehr schneiden. Im allgemeinen werden sie vielmehr *windschief* zueinander verlaufen, wenn sich auch gelegentlich einzelne von ihnen schneiden können.

Wir beschränken uns nur auf den Fall zweifach symmetrischer Linsen- oder Flächenfolgen. Hier können wir ganz allgemein infolge der Symmetrie zwei bevorzugte Achsenebenen herausheben, die beiden *Hauptschnitte*<sup>1)</sup>. Sie durchdringen sich längs der Achse unter

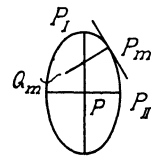
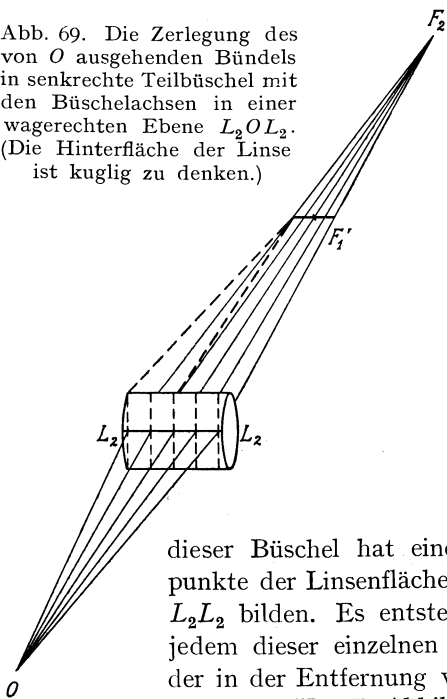


Abb. 68. Zum Beweise des allgemein windschiefen Verlaufs benachbarter Flächennormalen (mit Hilfe des DUPIN'schen Kegelschnitts).

<sup>1)</sup> Denken wir uns an einem bestimmten Punkte einer gewölbten Fläche eine Normale errichtet und an deren Fußpunkt und senkrecht zu ihr die gewölbte Fläche ein wenig weggeschliffen, so entsteht im allgemeinen eine Ellipse (Abb. 68), nur bei der Kugelfläche ein Kreis. Wollen wir ein Urteil über die Lage der Normalen auf der gewölbten Fläche gewinnen, so nimmt man folgende Vorstellung zu Hilfe. Wir betrachten die Lage der ausgewählten benachbarten Normalen auf dem abgeschliffenen Stückchen. Die im Mittelpunkt der Ellipse liegende Normale durch  $P$  sei die Hauptnormale bzw. die Achse des unendlich dünnen Bündels. Die Normalen, welche durch die Peripherie gehen, müssen normal zu den Flächentangenten der zugehörigen Punkte stehen. Nehmen wir den beliebigen Punkt  $P_m$  auf dem Rande des weggeschliffenen Stückchens, so geht sicher eine Flächentangente in

rechten Winkeln. Der Einfachheit halber soll angenommen werden, daß die eine senkrecht, die andere wagrecht steht. In diesen beiden Achsen-ebenen, den Hauptschnitten, denken wir uns nun zwei ebene *Strahlen-*

Abb. 69. Die Zerlegung des von  $O$  ausgehenden Bündels in senkrechte Teilbündel mit den Büschelachsen in einer wagerechten Ebene  $L_2OL_2$ . (Die Hinterfläche der Linse ist kuglig zu denken.)



*büschel* (nicht -bündel) verlaufen. Sie sind eben nur zwei-dimensional im Gegensatz zu den dreidimensionalen *Strahlenbündeln*, die bisher Gegenstand der Betrachtung waren. Sie vereinigen sich an zwei *Fokal- oder Brennpunkten*, die senkrecht verlaufenden in  $F_1'$  und die wagrecht verlaufenden in  $F_2'$ . Man kann nun das ganze von  $O$  ausgehende räumliche Strahlenbündel (Abb. 69), das auf die *Zylinderfläche* auffällt, zuerst in senkrecht nebeneinander gelegene Büschel zerlegt denken. Jedes

dieser Büschel hat eine Nebenachse, deren Durchstoßpunkte der Linsenfläche insgesamt eine wagerechte Linie  $L_2L_2$  bilden. Es entsteht dann nach der Brechung in jedem dieser einzelnen Büschel ein Vereinigungspunkt, der in der Entfernung von  $F_1'$  hinter der Linse gelegen sein wird. Um die Abbildung nicht durch Linien zu über-

laden, ist nur *ein* solches senkrecht Büschel des Bildraumes ausgezogen worden. Die Gesamtheit der nebeneinandergelegenen Vereinigungspunkte

der Zeichenebene durch  $P_m$  und fällt mit der Ellipsentangente in  $P_m$  zusammen. Errichten wir in  $P_m$  auf der Zeichenebene eine zur Tangente senkrechte Ebene, die die Zeichenebene in der Richtung  $Q_mP_m$  schneidet, so muß diese Ebene die Flächennormale in  $P_m$  enthalten. Wenn man sich das räumlich vorstellt, so erkennt man, daß die Hauptnormale und die so auf der Zeichenebene errichteten Ebenen, welche die Normale an einem Punkte der Ellipsenperipherie enthalten, im allgemeinen keinen Schnittpunkt im Endlichen haben, d. h. die Normalen in  $P$  und  $P_m$  verlaufen *windschief* zueinander. Nur die beiden Normalen, die an den symmetrisch liegenden Endpunkten  $P_I$  der langen und  $P_{II}$  der kurzen Achse der Ellipse gezogen sind, schneiden sich paarweise in einem Punkt mit der Achse durch  $P$ . Da nun diese kleine Ellipse an allen erhabenen oder vertieften Flächen entsteht (bei sattelförmigen Flächen bildet sich eine Hyperbel), so geht daraus hervor, daß es bei astigmatischer Brechung *zwei* und *nur zwei* Schnittebenen geben kann, wo die Vereinigung der in diesen Ebenen verlaufenden Strahlen möglich ist, nämlich die *Hauptschnitte*. Damit ist ferner erklärt, daß sich die Hauptschnitte längs der ausgewählten Normalen durch  $P$  senkrecht durchdringen, und daß die astigmatische Abbildung der allgemeine Fall ist und nur in dem einen besonderen Fall einer Kreisfläche eine punktuelle Abbildung entsteht. — Eine solche kleine, der Fläche angeschlossene Ebene bezeichnet man als *Indicatrix* oder als *DUPIN'schen Kegelschnitt*.

bildet also eine in  $F'_1$  liegende wagrechte Brennlinie, während sich die Büschelachsen erst in  $F'_2$  vereinigen. Zerlegt man umgekehrt das ganze von dem Objektpunkt  $O$  ausgehende räumliche Bündel (Abb. 70) entsprechend in unendlichviele wagrechte Büschel, so werden die senkrecht übereinanderliegenden Nebenachsen alle durch den ersten Fokuspunkt  $F'_1$  gehen, und dementsprechend entsteht in dem zweiten Fokuspunkt  $F'_2$  eine senkrechte Brennlinie. Es ist also durch Brechung an der Zylinderfläche das vorher *spitze* (homozentrische) Strahlenbündel doppelschneidenförmig (*astigmatisch*) geworden. Die Brechung in anderen Ebenen, die also schief zu den eben erwähnten, sich gegenseitig senkrecht durchdringenden beiden Hauptschnitten verlaufen, ist äußerst verwickelt und unanschaulich und soll deshalb hier nicht erörtert werden. Dabei verlaufen die gebrochenen Strahlen windschief zur Achse.

§ 46. Die stärkste Einengung des gebrochenen Strahlenbündels. (Der Kreis geringster Verwirrung.) Suchen wir zu einer Vorstellung von dem Strahlenverlauf nach der Brechung (s. Abb. 71 u. 72), also hinter dem Punkt  $P$ ,<sup>1)</sup> zu kommen. Wir denken uns einen senkrechten Schnitt durch  $P$  und  $F'_1$  auf der Achse und einen wagrechten durch  $P$  und  $F'_2$  ge-

legt. Dann werden sich zunächst die Strahlen im senkrechten Büschel der Achse mehr genähert haben als die im wagrechten. Es wird deshalb hinter  $P$  ein Querschnitt durch das ganze Strahlenbündel zu einer wagrechten Ellipse und schließlich in  $F'_1$  zu einem wagrechten Strich, eben der ersten Fokallinie, entartet sein. Unmittelbar hinter  $F'_1$  finden sich auch noch wagrechte Ellipsen, nur ist zu bemerken, daß sich jetzt die auf die untere Linsenhälfte fallenden Strahlen oberhalb der Achse befinden. Denn in  $F'_2$ , dem Ort der hinteren Brennlinie, haben wir eine senkrechte Linie; davor ist sicher eine senkrechte Ellipse vorhanden, ebenso wie dahinter, nur gilt im letzten Fall das Entsprechende für die Bildumkehrung, wie

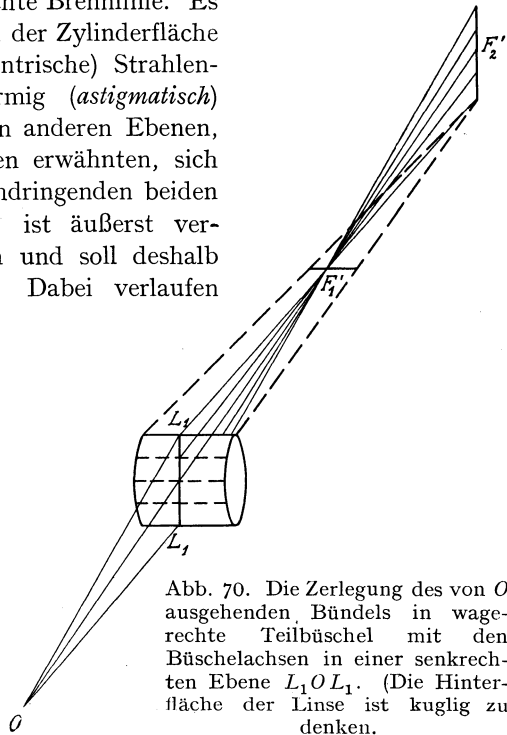


Abb. 70. Die Zerlegung des von  $O$  ausgehenden Bündels in wagrechte Teilbündel mit den Büschelachsen in einer senkrechten Ebene  $L_1 O L_1$ . (Die Hinterfläche der Linse ist kuglig zu denken.)

<sup>1)</sup>  $P$  (s. Abb. 72) sei der Mittelpunkt der dünnen astigmatischen Linse, der wir uns eine kreisförmige Begrenzung mit dem Radius  $r$  gegeben denken.



wir es soeben für die erste Fokallinie auseinandersetzen. Es leuchtet ein, daß zwischen  $F'_1$  und  $F'_2$  die liegende Ellipse in eine stehende übergehen muß. Das kann nur da eintreten, wo die Durchstoßpunkte des gebrochenen Strahlenbündels gerade einen Kreis bilden.

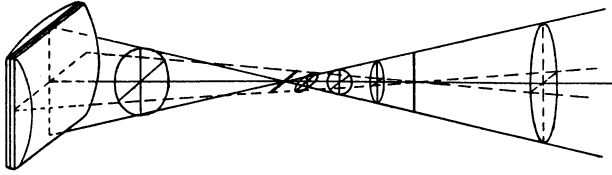


Abb. 71. Eine der Anschaulichkeit halber überhöhte Darstellung eines zweifach symmetrischen, astigmatischen Strahlenbündels. Zwischen der wagrechten und der senkrechten Brennlinie befindet sich zwischen der liegenden und der stehenden Ellipse der Kreis kleinster Verwirrung.

Denkt man sich die senkrechte auf die wagrechte Ebene umgeklappt, so erhält man die untenstehende Abb. 72, in der jeweils nur die eine Hälfte des wagrechten und des senkrechten Strahlenbüschels dargestellt ist. Man erkennt, daß nach rechts von  $F'_1$  die Strahlen bereits die Achse durchschnitten haben, also sozusagen ein umgekehrtes Bild entsteht.

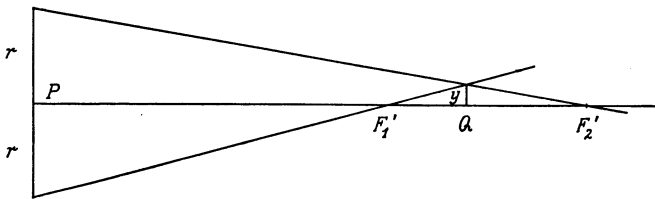


Abb. 72. Zur Ableitung des Abstandes  $F'_1Q$  des Kreises kleinster Verwirrung.

Wollen wir den Ort  $Q$  feststellen, in dem sich ein Kreis findet, so ist er dadurch gegeben, daß hier die durch  $F'_1$  bereits hindurchgegangenen Strahlen genau den gleichen Abstand von der Achse haben wie die noch nicht in  $F'_2$  vereinigten Strahlen des horizontalen Büschels. Man kann an der Abb. 72 folgende Proportionen aufstellen:

$$\frac{y}{QF'_1} = \frac{-r}{PF'_1} \quad \text{und} \quad \frac{y}{QF'_2} = \frac{r}{PF'_2}.$$

Setzt man nun für  $PF'_1 = f'_1$ , für  $PF'_2 = f'_2$  ein, d. h. die Brennweiten der beiden Teilbüschel, und zerlegt den Abstand  $F'_1F'_2$  der beiden Brennpunkte nach der Geometrie der geraden Linie in  $F'_1F'_2 = F'_1P + PF'_2$ , so erhält man unter Einsetzung der kleinen Buchstaben für den Brennweitenabstand  $F'_1F'_2 = -f'_1 + f'_2$ . Aus den oben festgestellten beiden

Gleichungen lassen sich dann folgende Werte für  $\frac{y}{r}$  ableiten:

$$\frac{y}{r} = \frac{-QF'_1}{PF'_1} = \frac{QF'_2}{PF'_2} \quad \text{oder} \quad \frac{-QF'_1}{f'_1} = \frac{QF'_2}{f'_2},$$

woraus nach der Geometrie der geraden Linie

$$\frac{-QF'_1}{f'_1} = \frac{QF'_1 + F'_1F'_2}{f'_2}.$$

Setzt man nun

$$F'_1Q = -QF'_1 = x,$$

so erhält man (da  $F'_1F'_2 = F'_1P + PF'_2$ )

$$\frac{x}{f'_1} = \frac{-x + f'_2 - f'_1}{f'_2}, \quad x f'_2 = -x f'_1 + f'_1(f'_2 - f'_1),$$

$$x(f'_2 + f'_1) = f'_1(f'_2 - f'_1), \quad x = f'_1 \frac{f'_2 - f'_1}{f'_2 + f'_1}.$$

Es ergibt sich also: Sind die Punkte  $P$  (Durchstoßpunkt der Achse auf der brechenden Fläche) sowie  $F'_1$  und  $F'_2$  durch die beiden Brennweiten  $f'_1$  und  $f'_2$  gegeben, so kann man den Punkt  $Q$  leicht finden, an dem die Zerstreuungsscheibe ein Kreis wird<sup>1)</sup>.

Vorstehende Ableitung kann insofern auch von einer gewissen Bedeutung für den Augenarzt sein, als gelegentlich angenommen wird, daß sich im Fall von Astigmatismus das Auge mit Vorliebe auf den eben behandelten sog. *Kreis kleinster Verwirrung* des gebrochenen Strahlenbündels einstellt; wir machen uns allerdings diese Annahme nicht zu eigen.

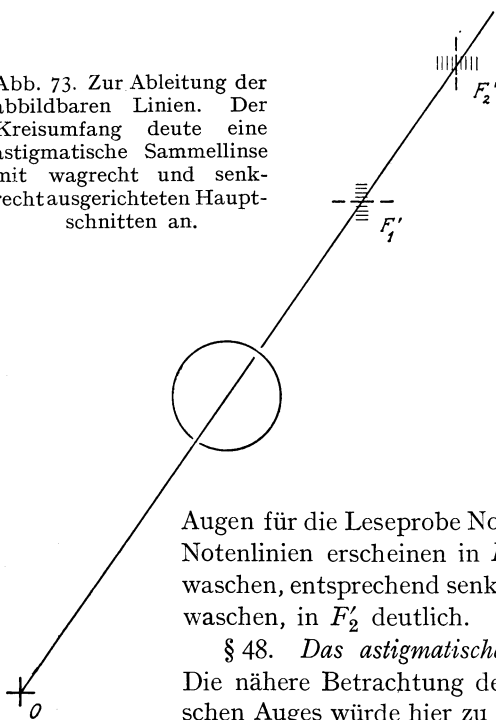
§ 47. GULLSTRANDS *abbildbare Linien*. Wie wir an der Abb. 71 sahen, ist von einer wirklichen Abbildung, z. B. eines leuchtenden Punktes durch eine Zylinderlinse, keine Rede. Gleichwohl können unter gewissen Bedingungen Bilder zustande kommen, die ihrem Gegenstand einigermaßen ähnlich sind. Denken wir uns (Abb. 73) in der Achse als Gegenstand ein Kreuz, dessen Stamm in den senkrechten Hauptschnitt, dessen Arm in den wagrechten fällt. Nehmen wir nun an, daß achsennahe Punkte in den Hauptschnitten in ähnlicher Weise abgebildet werden wie der Achsenpunkt selbst, so sieht man, daß sich in der Ebene durch  $F'_1$  die Brennlinien für den Kreuzarm nebeneinander reihen und sich also eine verhältnismäßig deutliche Linie ergibt, die als Ganzes (aber nicht Punkt für Punkt) dem ganzen Kreuzarm als Bild entspricht. Genau ebenso steht es mit dem Kreuzstamm in  $F'_2$ . Was den Stamm im ersten Hauptschnitt und den Arm im zweiten angeht, so entstehen natürlich ganz ver-

<sup>1)</sup> Eine einfache Überlegung zeigt, daß dieser Punkt  $Q$  der *vierte harmonische Punkt* zu den drei anderen  $P$ ,  $F'_1$ ,  $F'_2$  ist. Wir brauchen nur nach dem Obigen die Gleichung für  $\frac{x}{y}$ , nämlich  $\frac{PF'_1}{F'_1Q} = \frac{PF'_2}{QF'_2}$ .

an der Abb. 72 zu verfolgen und erhalten dann die für die harmonische Teilung gültige Vorschrift: das erste Stück  $PF'_1$  zum zweiten  $F'_1Q$  wie die ganze Strecke  $PF'_2$  zum dritten  $QF'_2$ .

waschene Gebilde. Die dingseitigen Geraden, die in den durch die Brennpunkten gehenden achsensenkrechten Ebenen deutlich abgebildet werden (natürlich nicht Punkt für Punkt, sondern nur Linie für Linie), nennt man nach GULLSTRAND

Abb. 73. Zur Ableitung der abbildbaren Linien. Der Kreisumfang deute eine astigmatische Sammellinse mit wagrecht und senkrecht ausgerichteten Hauptschnitten an.



(I, 233) *abbildbare* Linien. Bei einer astigmatischen Abbildung kann von zwei gekreuzten Geraden nur *eine* auf einmal deutlich sein. Schiefe Kreuze, bei denen also der Arm und der Stamm außerhalb der Hauptschnitte gelegen sind, werden immer mit beiden Richtungen verwaschen abgebildet.

Man erkennt, warum man frühzeitig bei der Untersuchung astigmatischer Augen für die Leseprobe Notenpapier nahm. Wagrechte Notenlinien erscheinen in  $F'_1$  deutlich, in  $F'_2$  ganz verwaschen, entsprechend senkrechte Notenlinien in  $F'_1$  verwaschen, in  $F'_2$  deutlich.

§ 48. *Das astigmatische Auge und das Brillenglas.*

Die nähere Betrachtung der Korrektur des astigmatischen Auges würde hier zu weit führen und Ausführungen bedingen, die, auf das bewegte Auge begründet, hier nicht behandelt werden können. Wir beschränken uns daher auf folgende kurze Darlegungen. Die Abb. 74 erläutert in bekannter Weise und mit den einfachsten Mitteln die verschiedenen Arten von Astigmatismus.

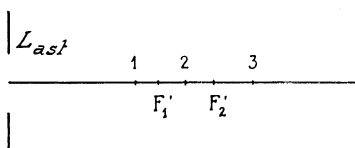


Abb. 74. Zur Einteilung des Augenastigmatismus. 1, 2, 3 sind mögliche Lagen der Netzhautgrube.  $L_{ast}$  steht für Astigmatische Flächenfolge des Auges.

Wenn wir in  $F'_1$  und  $F'_2$  die Brennpunkte annehmen und in  $L_{ast}$  die Pupille, so wird bei 1 *zusammengesetzter übersichtiger*, bei 2 *gemischter* und bei 3 *zusammengesetzter myopischer* Astigmatismus gegeben sein.

Betrachten wir nun als Beispiel den Fall des hyperopischen Astigmatismus im ersten Hauptschnitt (s. Abb. 75). Wir nehmen an, daß sich die Netzhaut in  $O'$  im Augenbildraum befindet. Diesem Punkt muß im Dingraum des Auges, etwa in  $O_I$  gelegen, ein (unwirklicher) Gegenstand entsprechen. Es fragt sich nun, wie man das Fernbrillenglas für diesen Punkt  $O_I$  bestimmt.

Es leuchtet ein, daß hier die gleichen Verhältnisse für die Brillenkorrektur vorliegen, wie sie in den § 23 ff. für das symmetrisch gebaute fehlsichtige übersichtige Auge gegeben worden sind, nur daß sich hier die Korrektur allein auf den einen Hauptschnitt erstreckt. Wir haben auch hier den vorderen Augenhauptpunkt  $\mathbf{H}$  und die Hauptpunkte des Brillenglases, im besonderen den hinteren Hauptpunkt  $H'_{,I}$  zu unter-

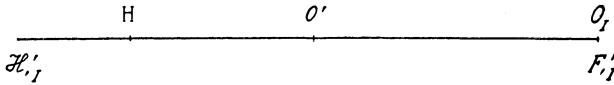


Abb. 75. Zur Bestimmung des Fernbrillenglases in einem einzelnen Hauptschnitt.

scheiden, die durch den Abstand  $\delta$  voneinander getrennt sind. Die Aufgabe des Zylinderglases ist es, den unendlich fernen Gegenstand in dem Fernpunkt  $O_I$  abzubilden. Es muß also  $O_I$  mit  $F'_{,I}$  zusammenfallen. Wir können nach der Geometrie der geraden Linie die Brennweite  $H'_{,I}F'_{,I}$  zerlegen in

$$H'_{,I}F'_{,I} = H'_{,I}H + HO_I.$$

Setzen wir für  $HO_I = a_I$  und für  $H'_{,I}F'_{,I} = f'_{,I}$ , so erhalten wir

$$f'_{,I} = \delta + a_I$$

oder, unter Einsetzung der Kehrwerte,

$$\frac{1}{D_{,I}} = \delta + \frac{1}{A_I}.$$

Man pflegt nun die beiden sich senkrecht durchdringenden Ebenen des astigmatischen Bündels als die *Meridional-* und *Äquatorialebene* zu bezeichnen, abgekürzt  $M$  und  $\check{A}$ . Wir können deshalb auch die letzte Gleichung schreiben

$$\frac{1}{D_{,I}} = \delta + \frac{1}{M}, \quad \text{woraus} \quad \frac{1}{D_{,I}} = \frac{1 + \delta M}{M}$$

und daraus der Kehrwert

$$D_{,I} = \frac{M}{1 + \delta M}.$$

Genau entsprechend wird die Ableitung für den anderen Hauptschnitt gegeben (Äquatorialschnitt) und ergibt

$$D_{,II} = \frac{\check{A}}{1 + \delta \check{A}}.$$

Wir haben hiermit strenggenommen zwei je in einem Hauptschnitt wirkende, also einander kreuzende Zylinderlinsen bestimmt.

Wenn es sich um dünne Linsen handelt, so werden die beiden Hauptpunkte der Zylinderflächen annähernd zusammenfallen, und man kann in diesem für die Vorstellung (nicht für die Ausführung) einfachen Fall

die Zylinderlinse mit gekreuzten Achsen als allgemeinen astigmatischen Fall betrachten. Stellt man sich eine solche gekreuzte Zylinderlinse vor, so habe sie in dem senkrechten (Meridional-) Schnitt die Brechkraft  $M$ , in dem horizontalen (Äquatorial-) Schnitt die Brechkraft  $\bar{A}$ . Es sei ferner die Bezeichnung für den Astigmatismus

$$Ast = M - \bar{A}$$

eingeführt. Ist  $M = \bar{A}$ , also  $Ast = 0$ , so wirken derartig gekreuzte Zylinderlinsen in erster, ganz grober Vorstellung wie eine sphärische Linse<sup>1)</sup>.

Setzen wir jedoch einen Astigmatismus voraus, der von 0 verschieden ist, so benutzt man dazu, da ja vielfach auch noch ein Brechungsfehler (eine sphärische Refraktionsanomalie  $A$ ) vorhanden ist, *sphärozyklindrische* Linsen. Man kann dabei die erste Fläche entweder für die Korrektur des Meridionalschnittes oder des Äquatorialschnittes herstellen und muß dann die zweite Fläche entsprechend dem vorhandenen Grad des Astigmatismus so schleifen, daß die Differenz in den Brechkraften zwischen beiden Flächen dem Astigmatismus entspricht und demgemäß sich im Äquatorialschnitt die richtige Korrektur ergibt. Das kann man schematisch durch folgende zwei kleine Tabellen andeuten:

	Hauptschnitt			Hauptschnitt	
	I	II		I	II
1. Fläche sphär.	$M$	$M$	1. Fläche sphär.	$\bar{A}$	$\bar{A}$
2. „ zylindr.	0	$-(M - \bar{A})$ $= -Ast$	2. „ zylindr.	$M - \bar{A}$ $= +Ast$	0
Ganze Linse = Summe der Wirkungen	$M$	$\bar{A}$	Ganze Linse = Summe der Wirkungen	$M$	$\bar{A}$

Man erkennt also, daß die astigmatische Wirkung mit entgegengesetzten Zeichen im  $\bar{A}$ -Schnitt angebracht werden muß (Zylinderachse im  $M$ -Schnitt), wenn man von einer  $M$ -Kugelfläche ausgeht.

Bei der Anfertigung der Zylinderbrillen, die gleichzeitig auch noch den sphärischen Fehler ausgleichen sollen, bedient man sich jetzt vielfach der *torischen* (*Wulst-*) Flächen; sie sind durch Drehung eines Kreisbogens um eine Achse entstanden, die nicht durch den Krümmungsmittelpunkt des Kreisbogens verläuft (Abb. 76).

Wie man sieht, sind die auf S. 125 gegebenen Formeln entsprechend gebaut wie die für das fehlsichtige Auge (10) mit rein sphärischem Bau (s. S. 53). Nur wird hier die Stärke des korrigierenden Glases jeweils nur für einen Meridian bestimmt. Für die weitere Behandlung der bei der astigmatischen Brillenkorrektur auftretenden Fragen ergibt sich ge-

<sup>1)</sup> Sie stammen von einem französischen Ingenieur P. GALLAND und seinem ausführenden Optiker M. N. J. CHAMBLANT und sind unter dem Namen der CHAMBLANTSCHEN Gläser bekannt; sie wurden bis vor kurzem ziemlich häufig als Lesegläser (angeblich frei von Verzeichnung) benutzt.

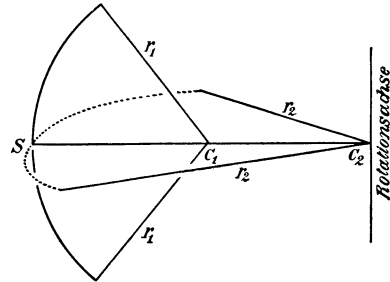
nau das Entsprechende wie für das sphärische, fehlsichtig gebaute Auge. Doch ist hier zu berücksichtigen, daß die Ableitung jeweils immer nur für den Meridian- oder den Äquatorialschnitt gilt. Soweit die Bildlage entsprechend der GULLSTRANDSchen Gleichung (1)  $B = A + D$  in Betracht kommt, bedarf es keiner weiteren Auseinandersetzung, nur sei mit wenigen Worten der Maßstabsänderung gedacht.

Bei dem astigmatischen Auge muß notwendigerweise die Brechkraft des Gesamtsystems in den beiden Hauptschnitten verschieden sein. Für gewöhnlich bricht ja bei senkrecht stehenden Achsen der vertikale Meridian stärker. Die von GULLSTRAND für das schematische Auge angegebene Zahl von 58,64 dptr für die Gesamtbrechkraft kann also unmöglich für die beiden Hauptschnitte Geltung haben. Es spricht sich dieses ja auch darin aus, daß wir es hier mit zwei verschiedenen Brennweiten zu tun haben. Demgemäß müssen auch die Kehrwerte

$$D_{,II} = \frac{1}{f'_{,II}} \quad \text{und} \quad D_{,II} = \frac{1}{f'_{,II}}$$

verschieden ausfallen. Nehmen wir ein Zylinderglas in einer bestimmten Entfernung vom Auge an, so kann sich das Brillenglas höchstens für den einen Hauptschnitt des Auges in Normalstellung befinden, also die Brechkraft  $D_{12}$  sich nicht ändern gegen  $D_{,,}$ ; für den zweiten Hauptschnitt kann  $D_{12}$  nicht mit  $D_{,,}$  zusammenfallen, so daß dann eine Maßstabsänderung für diese zweite Hauptebene durch die Brille zustande kommen muß.

Da schon bei dem nicht korrigierten astigmatischen Auge eine verschiedene Bildgröße in den beiden Hauptschnitten vorhanden ist, werden bei dem Ausgleich des Astigmatismus durch die Zylinderlinse auch bei deutlicher Abbildung auf der Netzhaut Maßstabsänderungen geschaffen, die verwickelt und nicht ohne weiteres übersehbar sind. Im allgemeinen ist diese Maßstabsänderung aber ganz unbedeutend, da der Astigmatismus der Augen meist keinen großen Betrag hat, jedenfalls pflegt sie nach längerem Tragen der Brille nicht mehr aufzufallen. Es ist aber denkbar, daß gelegentlich die unzureichende Sehschärfe, die auch bei exakter Korrektur astigmatischer Augen besteht, mit auf diese Maßstabsänderung zurückzuführen ist.



76. Die Entstehung einer torischen oder Wulstfläche. Der zum Radius  $r_2$  gehörige Umlaufbogen ist zum Unterschied von der Meridiankurve punktiert worden.

### Dritter Teil.

## Ziffernbeispiele.

Die Anordnung der Rechnungen ist mit Rücksicht auf den verfügbaren Raum so getroffen, daß die Logarithmen und die zugehörigen Numeri nebeneinander in eine Zeile gedruckt sind. Beispiele für zwei verschiedene Werte sind jeweils in zwei Spalten nebeneinander gesetzt. Da, wo Subtraktionen ausgeführt werden, ist die nachträgliche Vorzeichenänderung dadurch gekennzeichnet, daß das neue Vorzeichen etwas tiefer gestellt ist. Zur Vereinfachung der Rechnung mit den häufig vorkommenden Kehrwerten ist bei den Logarithmen fast durchweg von der dekadischen Ergänzung Gebrauch gemacht, z. B.:

$$\lg D_{''} = \lg 58,64 = 1,708; \lg \frac{1}{D_{''}} = \lg f_{''} = 0,232 - 2.$$

Dem entspricht:

$$\frac{D_{''}}{D_{''}} = 1; \lg 1 = 0,000 (= 1,708 + 0,232 - 2 = 2,000 - 2).$$

#### I. Die Berechnung der Bildlage und Bildgröße.

Formeln:  $B = A + D$  (1) und  $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{B}{A}$  (2).

##### 1. Der erste Gaußsche Fall.

Die Formeln sollen angewendet werden auf einigermaßen dünne Linsen (etwa Brillengläser), wobei zunächst  $a = -0,25$  m;  $A = -4$  dptr zu setzen sei; wir wählen einmal  $D = +6$  dptr und ferner  $= -6$  dptr.

$D = +6$ dptr	$D = -6$ dptr
$A = -4$ dptr	$= -4$ dptr
$D = +6$ dptr	$= -6$ dptr
$B = A + D = +2$ dptr	$= -10$ dptr
$b = 1/B = \frac{1 \text{ m}}{2} = 0,5$ m	$= \frac{-1 \text{ m}}{10} = -0,1$ m
$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{A}{B} = \frac{-4 \text{ dptr}}{2 \text{ dptr}} = -2$	$= \frac{-4 \text{ dptr}}{-10 \text{ dptr}} = 0,4$

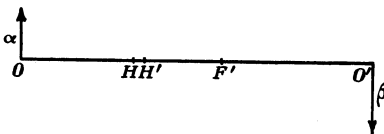


Abb. 77.

Zur Abbildung durch eine  
Sammel-  
linse.

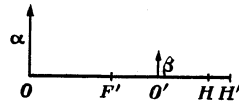


Abb. 78.

Zerstreuungs-

Ergebnis negativ: also Bild umgekehrt gerichtet wie der Gegenstand.

Ergebnis positiv: also Bild gleichgerichtet mit dem Gegenstand.

Ergebnis größer als Eins: also Vergrößerung.

Ergebnis kleiner als Eins: also Verkleinerung.

Um eine deutlichere Vorstellung von den Ergebnissen der Rechnung zu erhalten, stellen wir sie durch Abb. 77—78 (in starker Verkleinerung der Längen) dar.

2. Der zweite Gaußsche Fall.

Die Formeln sollen angewandt werden auf eine Flächenfolge, wo das Bildmittel  $n'$  größer ist als 1; dann sind alle Hauptpunktabstände des Bildraumes durch Division mit  $n'$  auf Luft zu bringen.

Gewählt sei das Auge mit  $n = 1$ ;  $n' = 1,336$ ;  $\lg n' = 0,126$ ;  $D_{11} = 1/f_{11}' = 58,6$  dptr;  $SH' = 1,60$  mm. (Abb. 79 und 80.) Wir wählen die beiden Fälle eines über- und eines kurzsichtigen Auges, je mit den Achsenlängen

$$SO' = 22,3 \text{ mm} \qquad \qquad \qquad = 27,0 \text{ mm}$$

Gefragt wird zunächst nach dem Hauptpunktsbrechwert  $A$ .

$$\begin{array}{r} SO' = 22,3 \text{ mm} \\ - SH' = - 1,6 \text{ mm} \\ \hline \bar{b} = H'O' = 20,7 \text{ mm} \\ \qquad \qquad \qquad = 0,0207 \text{ m} \end{array} \qquad \qquad \begin{array}{r} 27,0 \text{ mm} \\ - 1,6 \text{ mm} \\ \hline = 25,4 \text{ mm} \\ = 0,0254 \text{ m} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \lg \bar{b} = 0,316 - 2 \\ - \lg n' = - 0,126 \\ \hline \lg \bar{b} = 0,190 - 2 \end{array} \qquad \qquad \begin{array}{r} = 0,405 - 2 \\ = - 0,126 \\ \hline = 0,279 - 2 \end{array}$$

Wir erhalten  $\lg B$  durch die Bildung der dekadischen Ergänzung

$$\begin{array}{r} \lg B = 1,810 \\ \qquad \qquad \qquad B = 64,6 \text{ dptr} \\ \qquad \qquad \qquad - D_{11} = - 58,6 \text{ dptr} \\ \hline A = B - D_{11} = + 6,0 \text{ dptr} \\ \qquad \qquad \qquad a = \frac{1 \text{ m}}{6,0} = + 0,167 \text{ m} \end{array} \qquad \qquad \begin{array}{r} = 1,721 \\ = 52,6 \text{ dptr} \\ = - 58,6 \text{ dptr} \\ \hline = - 6,0 \text{ dptr} \\ = - \frac{1 \text{ m}}{6,0} = - 0,167 \text{ m} \end{array}$$

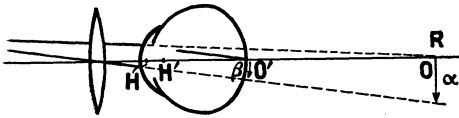


Abb. 79.  
übersichtiges

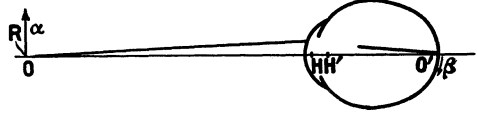


Abb. 80.  
kurzsichtiges

Die Abbildung in einem  
Auge.

Die Linse ist fortgelassen; der Hornhautscheitel S ist nicht bezeichnet; H und H' entsprechen nicht genau ihrer wirklichen Lage.

$\alpha$  positiv: also HO nach rechts von H aus abzutragen.

$\alpha$  negativ: also HO nach links von H aus abzutragen.

Übersichtiges Auge (Abb. 79).

Kurzsichtiges Auge (Abb. 80).

Damit sich die im Auge verlaufenden Strahlen in O' schneiden, müssen sie vor dem Eintritt in die Hornhaut auf O (hinter dem Auge) gerichtet, also konvergent oder schnittstrebig sein. In R ist also ein unwirklicher, von einer Sammellinse entworfenener, also umgekehrter Gegenstand anzunehmen.

Damit sich die im Auge verlaufenden Strahlen in O' schneiden, müssen sie vor dem Eintritt in die Hornhaut von O (vor dem Auge) ausgehen. In R ist also ein wirklicher, aufrechter Gegenstand anzunehmen.

$$\text{Vergrößerung } \frac{\beta}{\alpha} = \frac{A}{B}$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{6,0 \text{ dptr}}{64,6 \text{ dptr}} = \text{rund } \frac{1}{10,8}$$

$$= \frac{-6,0 \text{ dptr}}{52,6 \text{ dptr}} = \text{rund } -\frac{1}{8,8}$$

$$\begin{array}{r} \lg 6 = 0,778 \\ - \lg 64,6 = - 1,810 \\ \hline \lg \frac{\beta}{\alpha} = 0,968 - 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 1 \quad - 1 \\ = 0,778 \\ = - 1,721 \\ \hline 0,057 - 1 \end{array}$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = +0,093$$

$$= -0,114$$



Ergebnis positiv: also Bild gleichgerichtet  
mit dem Gegenstand.  
Ergebnis kleiner als Eins: also starke Ver-  
kleinerung (etwa auf  $\frac{1}{11}$ ).

Ergebnis negativ: also Bild umgekehrt  
gerichtet wie der Gegenstand.  
Ergebnis kleiner als Eins: also merkliche  
Verkleinerung (mit etwa  $\frac{1}{9}$  nicht ganz  
so stark wie im ersten Falle).

Zu der überraschenden Bildrichtung beim übersichtigen Auge ist das Folgende zu bemerken: Da auch Übersichtige ein umgekehrtes Netzhautbild von aufrechten fernen Gegenständen haben, so ist der scheinbare Widerspruch dadurch zu heben, daß der von dem sammelnden Brillengläse entworfene, unwirkliche Gegenstand für das übersichtige Auge ein umgekehrtes Bild des aufrechten fernen Gegenstandes ist (s. Abb. 79).

## II. Rechnungen an einer symmetrischen Sammellinse endlicher Dicke.

Gegeben sind:  $r_1 = 208 \text{ mm} = 0,208 \text{ m}$ ;  $r_2 = -208 \text{ mm} = -0,208 \text{ m}$ ;  $d = 4 \text{ mm} = 0,004 \text{ m}$ ;  $n_1 = n_2' = 1$ ;  $n_1' = n_2 = n = 1,52$ ;  $\lg 1,52 = 0,182$  (Abb. 81).

### 1. Die Berechnung der Brechkraft $D_{12}$ und der Hauptpunktverschiebe $h_{12}$ und $h_{12}'$ nach den Formeln (6) (7) und (8).

Um  $\delta$  zu finden, bilden wir

$$\delta = \frac{d}{n} = \frac{0,004 \text{ m}}{1,52}$$

$$\begin{array}{r} \lg d = 0,602 - 3 \\ - \lg n = -0,182 \\ \hline \lg \delta = 0,420 - 3 \end{array} \quad \delta = 0,00263 \text{ m}$$

Die Flächenbrechkraft sind (s. S. 28, 37)

$$D_1 = \frac{n-1}{r_1} = \frac{1,52-1}{0,208 \text{ m}} = \frac{0,52}{0,208} \text{ dptr}$$

$$D_2 = \frac{1-n}{r_2} = \frac{1-1,52}{-0,208 \text{ m}} = \frac{0,52}{0,208} \text{ dptr}$$

also beide gleich, was bei einer symmetrischen Anlage auch der Fall sein muß.

$$\begin{array}{r} \lg 0,52 = 0,716 - 1 \\ - \lg 0,208 = -0,318 \mp 1 \\ \hline \lg D_1 = \lg D_2 = 0,398 \end{array}$$

$$D_1 = D_2 = 2,5 \text{ dptr.}$$

Will man nun nach (6) auf S. 40 bilden  $D_{12} = D_1 + D_2 - \delta D_1 D_2$ , so berechnet man

$$\begin{array}{r} \lg \delta = 0,420 - 3 \\ \lg D_1 = 0,398 \\ \lg D_2 = 0,398 \\ \hline \lg \delta D_1 D_2 = 0,216 - 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} - \delta D_1 D_2 = -0,016 \text{ dptr} \\ D_1 + D_2 = 5,0 \text{ dptr} \\ \hline D_{12} = 4,984 \text{ dptr} \\ f_{12}' = 0,201 \text{ m} \end{array}$$

Dingseitiger Hauptpunktverschiebe  $h_{12}$  nach (7) auf S. 42  $h_{12} = \frac{\delta D_2}{D_{12}}$

$$\begin{array}{r} \lg \delta = 0,420 - 3 \\ \lg D_2 = 0,398 \\ \lg 1/D_{12} = 0,302 - 1 \\ \hline \lg h_{12} = 0,120 - 3 \end{array} \quad h_{12} = 0,00132 \text{ m} = 1,32 \text{ mm.}$$

Bildseitiger Hauptpunktverschiebe  $h_{12}'$  nach (8) auf S. 42  $h_{12}' = -\frac{\delta D_1}{D_{12}}$  ist also infolge der Symmetrie  $= -h_{12}$

$$h_{12}' = -0,00132 \text{ m} = -1,32 \text{ mm.}$$

Die Hauptpunkte liegen also symmetrisch zwischen den Flächenscheiteln  $S_1$  und  $S_2$ .

Die Brennpunkte liegen um  $f_{12}' = 0,201 \text{ m}$  von den Hauptpunkten entfernt, also in bezug auf die Flächenscheitel (Abb. 81):

$$S_1 \mathcal{F}_{12} = S_1 H_{12} + H_{12} \mathcal{F}_{12} = (1,32 - 201) \text{ mm} = -199,68 \text{ mm}$$

$$S_2 \mathcal{F}_{12}' = S_2 H_{12}' + H_{12}' \mathcal{F}_{12}' = (-1,32 + 201) \text{ mm} = +199,68 \text{ mm}$$

Also liegen auch, wie es ja sein muß, die Brennpunkte in Abb. 81 symmetrisch zu den Flächenscheiteln.

**2. Die Berechnung der Bildlage für  $s_1 = -0,25$  m, wenn man beide Flächen nacheinander wirken läßt.**

Zweimalige Anwendung der Formel (3) auf S. 27. (Die linke Spalte ist vor der rechten zu verfolgen.)

I. Für die erste Fläche nimmt jene Formel (3) die Gestalt an

$$\frac{n}{s_1'} = \frac{1}{s_1} + \frac{n-1}{r_1} = \frac{1}{s_1} + D_1$$

$$\begin{aligned} \lg s_1 &= 0,398 - 1 \\ \lg 1/s_1 &= 0,602 & 1/s_1 &= -4,0 \text{ dptr} \\ & & D_1 &= 2,5 \text{ dptr} \\ -\lg n/s_1' &= -0,176 & n/s_1' &= -1,5 \text{ dptr} \\ \lg n &= 0,182 \\ \lg s_1' &= 0,006 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_1' &= -1,014 \text{ m} \\ -d &= -0,004 \text{ m} \\ s_2 &= -1,018 \text{ m} \end{aligned}$$

II. Für die zweite Fläche nimmt jene Formel (3) die Gestalt an:

$$\frac{1}{s_2'} = \frac{n}{s_2} + \frac{1-n}{r_2} = \frac{n}{s_2} + D_2$$

$$\begin{aligned} -\lg s_2 &= -0,008 \\ \lg n &= 0,182 & n/s_2 &= -1,49 \text{ dptr} \\ \lg n/s_2 &= 0,174 & D_2 &= 2,50 \text{ dptr} \\ & & 1/s_2' &= 1,01 \text{ dptr} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lg 1/s_2' &= 0,004 \\ \lg s_2' &= 0,996 - 1 \end{aligned}$$

$$s_2' = 0,99 \text{ m} = 990 \text{ mm},$$

Das war der Übergang zur zweiten Fläche, die Anbringung von  $d$  an  $s_1'$ . (Siehe jetzt die rechte Spalte.)

wobei infolge der Ungenauigkeit der dreistelligen Tafeln die vollen Millimeter nicht verbürgt werden können.

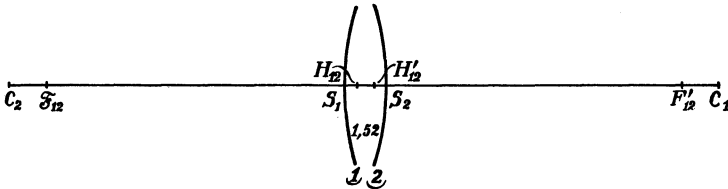


Abb. 81. Die Grundpunkte einer symmetrischen Sammellinse. Zur Ergänzung denke man sich nach links von  $C_2$  noch einen (Gegenstands-)Punkt  $O$  und nach rechts von  $C_1$  noch einen (Bild-)Punkt  $O'$ .

Vergrößerung der ersten Fläche:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{A_1}{B_1} = \frac{1/s_1}{n/s_1'} = \frac{-4 \text{ dptr}}{-1,5 \text{ dptr}} = \frac{4}{1,5} \\ \lg 4 &= 0,602 \\ -\lg 1,5 &= -0,176 \\ \lg \kappa_1 &= 0,426 \end{aligned}$$

Vergrößerung an der zweiten Fläche:

$$\begin{aligned} \kappa_2 &= \frac{A_2}{B_2} = \frac{n/s_2}{1/s_2'} = \frac{-1,49 \text{ dptr}}{1,01 \text{ dptr}} = -1,49 \\ \lg 1,49 &= 0,174 \\ -\lg 1,01 &= -0,004 \\ \lg \kappa_2 &= 0,170 \end{aligned}$$

Nach S. 36 ist  $\frac{\beta_2}{\alpha_1} = \kappa_1 \cdot \kappa_2$

$$\begin{aligned} \lg \kappa_1 &= 0,426 \\ \lg \kappa_2 &= 0,170 \end{aligned}$$

$$\lg \frac{\beta_2}{\alpha_1} = 0,596 \quad \frac{\beta_2}{\alpha_1} = -3,94$$

Also ein umgekehrtes, vergrößertes Bild.

**3. Die Berechnung von Bildlage und Größe unter Benutzung der Zusammensetzung der Abbildungen unter 1 nach (1) und (2).**

Die Rechnung ist alsdann viel kürzer (Abb. 81).

Der Achsenpunkt  $O$  ist hier auf  $H_{12}$  zu beziehen, was durch den folgenden Ansatz geschieht:

$$\begin{aligned} S_1 O &= S_1 H_{12} + H_{12} O \\ s_1 &= h_{12} + a; \quad a = s_1 - h_{12} \\ s_1 &= -0,25 \text{ m} \\ -h_{12} &= -0,0013 \text{ m} \\ a &= -0,2513 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\lg a = 0,400 - 1$$

$$\lg \frac{1}{a} = \lg A = 0,600 \quad A = -3,98 \text{ dptr}$$

$$\begin{aligned} D_{12} &= +4,984 \text{ dptr} \\ B &= +1,004 \text{ dptr} \end{aligned}$$

$$\lg B = 0,002$$

$$\lg \frac{1}{B} = \lg b = 0,998 - 1 \quad b = 0,995 \text{ m} = 995 \text{ mm}.$$

Bezieht man zu besserer Vergleichung den Bildpunkt  $O'$  auf den Flächenscheitel  $S_2$ , so ist

$$\begin{aligned} S_2 O' &= S_2 H_{12}' + H_{12}' O' \\ s_2' &= h_{12}' + b \\ h_{12}' &= -0,0013 \text{ m} \\ b &= 0,995 \text{ m} \\ s_2' &= 0,9937 \text{ m} = 993,7 \text{ mm} \end{aligned}$$

steht also in Übereinstimmung mit dem Ergebnis unter 2.

Die Vergrößerung ist  $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{A}{B}$ ;  $\lg A - \lg B = 0,598$ ;  $\frac{\beta}{\alpha} = -3,96$ , also auch übereinstimmend.

### III. Die Bestimmung der Vergrößerung aus dem Hauptpunktsbrechwert $A$ und der Brechkraft $D$ .

Als Formel kommt in Betracht:  $z = \frac{1}{1 + \frac{D}{A}}$  (4).

Zum Beispiel wählen wir eine Normallinse von  $D = +5$  dptr und betrachten die beiden Fälle von  $A = +10$  dptr  $A = -2,5$  dptr

dem entspricht

$$\begin{aligned} a = \frac{1 \text{ m}}{10} &= +0,1 \text{ m} &= -\frac{1 \text{ m}}{2,5} &= -0,4 \text{ m} \\ &= +100 \text{ mm} & &= -400 \text{ mm}, \end{aligned}$$

es handelt sich also nach S. 16/17 um einen unwirklichen (nicht greifbaren) Gegenstand, der von einer sammelnden Folge hinter der Linse — meistens umgekehrt s. S. 129 — entworfen werden würde.

es handelt sich also um einen wirklichen Gegenstand vor der Linse.

$$\begin{aligned} \frac{D}{A} = \frac{5 \text{ dptr}}{10 \text{ dptr}} &= \frac{1}{2} &= \frac{5 \text{ dptr}}{-2,5 \text{ dptr}} &= -2 \\ z = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} &= +\frac{2}{2+1} = +\frac{2}{3} &= \frac{1}{1-2} = \frac{1}{-1} &= -1 \end{aligned}$$

Ergebnis positiv: also Bild gleichgerichtet mit dem Gegenstand.

Ergebnis negativ: also Bild umgekehrt gerichtet wie der Gegenstand.

Ergebnis kleiner als Eins: also Verkleinerung.

Ergebnis gleich Eins: also Abbildung in gleicher Größe.

### IV. Die Bildgröße ferner Gegenstände.

Formel (5 a) auf S. 33

$$\beta = -w f'$$

Als Beispiel sei gewählt die Netzhautbildgröße eines Buchstaben von  $\alpha = 5$  mm auf der um  $OH = +5$  m entfernten Probetafel für ein rechtsichtiges Auge mit  $D_{\mu} = 58,6$  dptr. Wie auf S. 64 bemerkt, ist dann  $f_{\mu}' = 17,05$  mm.

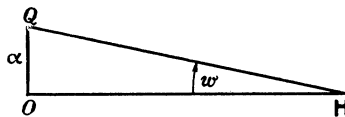


Abb. 82. Zur Bildgröße ferner Gegenstände.

Nach der Zeichnung 82 ist der Gesichtswinkel  $w$  des fernen Gegenstandes gegeben durch

$$\begin{aligned} w &= \frac{OQ}{OH} = \frac{\alpha}{-HO} = -\frac{\alpha}{a} \\ &= \frac{5 \text{ mm}}{5000 \text{ mm}} = \frac{1}{1000} \quad (w \text{ hat also die Größe von einem Zehntel des Vollmondurchmessers, s. S. 33). \end{aligned}$$

Für das Auge wird also

$$\beta = -w f_{\mu}' = -\frac{17,05 \text{ mm}}{1000} = -0,01705 \text{ mm} = -17 \mu$$

Das negative Zeichen deutet die Umkehrung des Netzhautbildes an.

Ist nach M. v. Rohr (2, 17) der mittlere Abstand zweier Empfindungseinheiten der Netzhaut durch  $5 \mu$  gegeben, so übertrifft die soeben berechnete Netzhautbildgröße die Ausdehnung von drei solchen Einheiten.

V. Die Berechnung der Grundpunkte für die Flächenfolge des Auges

nach den GULLSTRANDschen exakten Daten [s. HELMHOLTZ (I, 300) und M. v. ROHR (I, 548/9)].

I. Das Hornhautsystem (zugleich der Fall des linsenlosen Auges). Abb. 83.

Gegeben sind  $r_1$  (der vorderen Hornhautfläche) = +7,7 mm = +0,0077 m;  $r_2$  (der hinteren Hornhautfläche) = +6,8 mm = +0,0068 m;  $d$  (Hornhautdicke) = 0,5 mm = 0,0005 m;  $n_1' = n_2$  (Brechzahl der Hornhaut) = 1,376;  $\lg n_2 = 0,138$ ;  $n_2' = n_3$  (Brechzahl des Kammerwassers und des Glaskörpers) = 1,336;  $\lg n_3 = 0,126$ .

Wir bestimmen zuerst als Ergänzung  $\delta = \frac{d}{n_2}$

$$\begin{array}{r} \lg d = 0,699 - 4 \\ - \lg n_2 = -0,138 \\ \hline \lg \delta = 0,561 - 4 \end{array} \quad \delta = 0,00036 \text{ m.}$$

Nach Formel (6) auf S. 40 gilt  $D_{12} = D_1 + D_2 - \delta D_1 D_2$ , und wir haben zunächst die Einzelbrechkraft zu bestimmen (nach S. 28)

$$\begin{array}{r} D_1 = \frac{n_1' - 1}{r_1} = \frac{1,376 - 1}{0,0077 \text{ m}} = \frac{0,376 \text{ dptr}}{0,0077} ; \quad D_2 = \frac{n_2' - n_2}{r_2} = \frac{1,336 - 1,376}{0,0068 \text{ m}} = -\frac{0,04 \text{ dptr}}{0,0068} \\ \begin{array}{r} +1 \quad -1 \\ \lg 0,376 = 0,575 - 1 \\ \lg 0,0077 = 0,886 - 3 \\ \hline \lg D_1 = 1,689 \end{array} \quad \begin{array}{r} D_1 = 48,9 \text{ dptr} \\ D_2 = -5,88 \text{ dptr} \\ \hline D_1 + D_2 = 43,0 \text{ dptr} \end{array} \quad \begin{array}{r} +1 \quad -1 \\ \lg 0,04 = 0,602 - 2 \\ \lg 0,0068 = 0,833 - 3 \\ \hline \lg D_2 = 0,769 \end{array} \quad D_2 = -5,88 \text{ dptr} \\ \begin{array}{r} \lg \delta = 0,561 - 4 \\ \lg D_2 = 0,769 \\ \hline \lg \delta D_1 D_2 = 0,019 - 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} \delta D_1 D_2 = -0,1 \text{ dptr} \\ \hline D_{12} = 43,1 \text{ dptr} = \text{Breckkraft des Hornhautsystems} \\ \text{(nach GULLSTRAND} = 43,05 \text{ dptr)} \end{array} \\ \begin{array}{r} \lg D_{12} = 1,634 \\ \lg f_{12}' = \lg 1/D_{12} = 0,366 - 2 \\ \lg n_3 = 0,126 \\ \hline \lg f_{12}' = \lg n_3 f_{12}' = 0,492 - 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} f_{12}' = 0,0232 \text{ m} \\ = 23,2 \text{ mm} = -f_{12} \\ \bar{f}_{12}' = 0,0310 \text{ m} \\ = 31,0 \text{ mm ist die hintere Brennweite im Glaskörper.} \end{array} \end{array}$$

Die Berechnung der Hauptpunktverschiebe erfolgt nach den Formeln, (7) und (8) auf S. 42, doch ist der hintere Hauptpunktverschiebe auf das Kammerwasser zu beziehen.

$$\begin{array}{r} h_{12} = \frac{\delta D_2}{D_{12}} \quad n_3 h_{12}' = h_{12}' = -n_3 \frac{\delta D_1}{D_{12}} \\ \begin{array}{r} \lg \delta = 0,561 - 4 \\ \lg D_2 = 0,769 \\ \lg 1/D_{12} = 0,366 - 2 \\ \hline \lg h_{12} = 0,696 - 5 \end{array} \quad \begin{array}{r} h_{12} = -0,00005 \text{ m} \\ = -0,05 \text{ mm} \end{array} \quad \begin{array}{r} \lg n_3 = 0,126 \\ = 0,561 - 4 \\ \lg D_1 = 1,689 \\ = 0,366 - 2 \\ \hline \lg n_3 h_{12}' = 0,742 - 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} \bar{h}_{12}' = -0,000552 \text{ m} \\ = -0,552 \text{ mm} \end{array} \end{array}$$

Will man nun den hinteren Hauptpunkt  $\bar{H}'$  auf den vorderen Hornhautscheitel S beziehen, so setzt man an

$$\begin{aligned} S \bar{H}' &= S S' + S' \bar{H}' \\ &= d + h_{12}' = (0,5 - 0,552) \text{ mm} \\ &= -0,052 \text{ mm} . \end{aligned}$$

Die beiden Hauptpunkte des Hornhautsystems fallen also fast zusammen.

2. Das Linsensystem (im Zustande erschlaffter Akkommodation). Abb. 83.

Die GULLSTRANDsche Augenlinse besteht aus einem von zwei Rindenteilen eingeschlossenen Kern und liegt zwischen Kammerwasser und Glaskörper mit  $n_1 = n_2' = 1,336$ ;  $\lg n_1 = 0,126$ . Gegeben sind  $r_1 = +10 \text{ mm} = +0,01 \text{ m}$ ;  $r_2 = +7,91 \text{ mm} = +0,00791 \text{ m}$ ;  $r_3 = -5,76 \text{ mm} = -0,00576 \text{ m}$ ;  $r_4 = -6,0 \text{ mm} = -0,006 \text{ m}$ .

$$d_1 = 0,546 \text{ m} = 0,000546 \text{ m}; \quad d_2 = 2,419 \text{ mm} = 0,00242 \text{ m}; \quad d_3 = 0,635 \text{ mm} = 0,000635 \text{ m}.$$

$$\text{Brechzahl der Linsenrinden: } n_1' = n_2 = 1,386 = n_3' = n_4; \quad \lg n_2 = 0,142;$$

$$\text{Brechzahl der Kernlinse: } n_2' = n_3 = 1,406; \quad \lg n_3 = 0,148.$$

Wir bestimmen zunächst als Ergänzung  $\delta_1 = \frac{d_1}{n_2}$ ,  $\delta_2 = \frac{d_2}{n_3}$ ,  $\delta_3 = \frac{d_3}{n_4}$ .

$$\begin{array}{r} \lg d_1 = 0,737 - 4 \\ - \lg n_2 = -0,142 \\ \hline \lg \delta_1 = 0,595 - 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} \lg d_2 = 0,384 - 3 \\ - \lg n_3 = -0,148 \\ \hline \lg \delta_2 = 0,236 - 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} \lg d_3 = 0,803 - 4 \\ - \lg n_4 = -0,142 \\ \hline \lg \delta_3 = 0,661 - 4 \end{array} \\ \delta_1 = 0,000394 \text{ m} \quad \delta_2 = 0,00172 \text{ m} \quad \delta_3 = 0,000458 \text{ m}$$

und ferner die vier  $D$ -Werte:

$$D_1 = \frac{n_1' - n_1}{r_1} = \frac{1,386 - 1,336}{0,01 \text{ m}} = 0,05 \text{ dptr} = 5 \text{ dptr}; \quad D_2 = \frac{n_2' - n_2}{r_2} = \frac{1,406 - 1,386}{0,00791 \text{ m}} = \frac{0,02 \text{ dptr}}{0,00791};$$

$$D_3 = \frac{n_3' - n_3}{r_3} = \frac{1,386 - 1,406}{-0,00576 \text{ m}} = -0,02 \text{ dptr}; \quad D_4 = \frac{n_4' - n_4}{r_4} = \frac{1,336 - 1,386}{-0,006 \text{ m}} = \frac{-0,05 \text{ dptr}}{-0,006} = +8,33 \text{ dptr}$$

Jetzt sind noch die Ziffernwerte von  $D_2$  und  $D_3$  zu bestimmen:

$\begin{array}{r} +1 \\ \lg 0,02 = 0,301 - 2 \\ - \\ \lg D_2 = 0,403 \end{array}$	$\begin{array}{r} -1 \\ 0,301 - 2 \\ + \\ \lg D_3 = 0,541 \end{array}$	$\begin{array}{r} +1 \\ \lg 0,02 = 0,301 - 2 \\ - \\ \lg r_3 = 0,760 - 3 \\ - \\ \lg D_3 = 0,541 \end{array}$
$D_2 = +2,53 \text{ dptr}$		$D_3 = +3,47 \text{ dptr}$

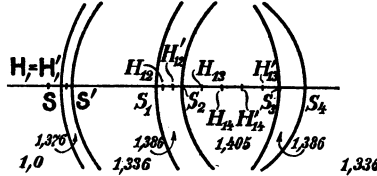


Abb. 83. Übersichtsdarstellung der Augenflächen und der in der Rechnung ermittelten Teilhauptpunkte. Die Orte aller dieser Punkte entsprechen der Wirklichkeit nur dem Zeichen, nicht dem Betrage nach. Für ihre Wahl waren die Rücksichten auf Deutlichkeit und verfügbaren Raum maßgebend. (Die Bruchzahl der Kernlinse ist mit 1,405 statt 1,406 angegeben.)

$S$  und  $S'$  vorderer und hinterer Hornhautscheitel.  
 $H$ , und  $H'$  vorderer und hinterer Hauptpunkt des Hornhautsystems (fallen zusammen).

a) Wir berechnen nunmehr die Bestimmungsstücke der aus den Flächen 1) und 2) bestehenden Abbildung:

$$D_{12} = D_1 + D_2 - \delta_1 D_1 D_2 \qquad h_{12} = \frac{\delta_1 D_2}{D_{12}} \qquad h_{12}' = -\frac{\delta_1 D_1}{D_{12}}$$

$\lg \delta_1 = 0,595 - 4$	$\lg \delta_1 = 0,595 - 4$	$= 0,595 - 4$
$\lg D_1 = 0,699$	$\lg D_2 = 0,403$	$\lg D_1 = 0,699$
$\lg D_2 = 0,403$	$D_1 + D_2 = 7,53 \text{ dptr}$	$\lg 1/D_{12} = 0,124 - 1$
$\lg \delta_1 D_1 D_2 = 0,697 - 3$	$\delta_1 D_1 D_2 = 0,005 \text{ dptr}$	$\lg h_{12} = 0,122 - 4$
$\lg D_{12} = 0,876$	$D_{12} = 7,52 \text{ dptr}$	$h_{12} = 0,000132 \text{ m}$
$\lg f_{12}' = \lg 1/D_{12} = 0,124 - 1$		$= 0,132 \text{ mm}$
		$h_{12}' = -0,000262 \text{ m}$
		$= -0,262 \text{ mm}$

Mithin ist der erste Hauptpunkt  $H_{12}$  vom ersten Flächenscheitel nach rechts, und „zweite“ „  $H_{12}'$  „ zweiten „ „ links abzutragen.

b) Wir verbinden nun die 3. Fläche mit der Zusammensetzung von 1 und 2:

Hierfür ist zunächst nach S. 46 der  $\delta$ -Wert zu bestimmen  $\delta_{12} = \delta_2 - h_{12}' = (0,00172 + 0,00026) \text{ m} = 0,00198 \text{ m}$ .

Nunmehr kann man die an gleicher Stelle angegebene Formelreihe verwerten, nämlich

$$D_{13} = D_{12} + D_3 - \delta_{12} D_{12} D_3; \quad h_{13} = \frac{\delta_{12} D_3}{D_{13}}; \quad h_{13}' = -\frac{\delta_{12} D_{12}}{D_{13}}$$

$\lg \delta_{12} = 0,297 - 3$	$\lg \delta_{12} = 0,297 - 3$	$= 0,297 - 3$
$\lg D_{12} = 0,876$	$\lg D_3 = 0,541$	$\lg D_{12} = 0,876$
$\lg D_3 = 0,541$	$D_{12} + D_3 = 10,99 \text{ dptr}$	$\lg 1/D_{13} = 0,961 - 2$
$\lg \delta_{12} D_{12} D_3 = 0,714 - 2$	$\delta_{12} D_{12} D_3 = 0,052 \text{ dptr}$	$\lg h_{13} = 0,799 - 4$
$\lg D_{13} = 1,039$	$D_{13} = 10,94 \text{ dptr}$	$h_{13} = 0,000630 \text{ m}$
$\lg f_{13}' = \lg 1/D_{13} = 0,961 - 2$		$= 0,630 \text{ mm}$
		$h_{13}' = -0,00136 \text{ m}$
		$= -1,36 \text{ mm}$

Will man den vorderen Hauptpunkt  $H_{13}$  auf den ersten Linsenscheitel  $S_1$  beziehen, so muß man beachten, daß sein Bezugspunkt  $H_{12}$  um  $h_{12}$  von  $S_1$  entfernt liegt:  $S_1 H_{13} = S_1 H_{12} + H_{12} H_{13} = h_{12} + h_{13} = (0,132 + 0,630) \text{ mm} = 0,762 \text{ mm}$ .

c) Ganz entsprechend läßt sich nun die 4. Fläche mit der Zusammensetzung der drei ersten verbinden. Der  $\delta$ -Wert ergibt sich zu  $\delta_{13} = \delta_3 - h_{13}' = (0,000458 + 0,00136) \text{ m} = 0,00182 \text{ m}$ , und man kann die Formelreihe aufstellen  $D_{14} = D_{13} + D_4 - \delta_{13} D_{13} D_4; \quad h_{14} = \frac{\delta_{13} D_4}{D_{14}}; \quad h_{14}' = -\frac{\delta_{13} D_{13}}{D_{14}}$ .

## V. Die Berechnung der Grundpunkte für die Flächenfolge des Auges. 135

$\lg \delta_{13} = 0,260 - 3$	$\lg \delta_{13} = 0,260 - 3$	$= 0,260 - 3$
$\lg D_{13} = 1,039$	$\lg D_4 = 0,921$	$\lg D_{13} = 1,039$
$\lg D_4 = 0,921$	$D_{13} + D_4 = +19,27$	$\lg 1/D_{14} = 0,719 - 2$
$\lg \delta_{13} D_{13} D_4 = 0,220 - 1$	$\delta_{13} D_{13} D_4 = 0,166$	$\lg h_{14}' = 0,018 - 3$
$\lg \delta_{13} D_{13} D_4 = 0,220 - 1$	$\delta_{13} D_{13} D_4 = 0,166$	$\lg h_{14}' = 0,018 - 3$
$\lg D_{14} = 1,281$	$D_{14} = 19,10$	$h_{14} = 0,000794$ m
$\lg f_{14}' = \lg 1/D_{14} = 0,719 - 2$	= Brechkraft der Linse	= 0,794 mm
		$h_{14}' = -0,001043$ m
		= -1,043 mm.

Will man den vorderen Hauptpunkt  $H_{14}$  auf den ersten Linsenscheitel  $S_1$  beziehen, so muß man beachten, daß sein Bezugspunkt  $H_{13}$  um 0,762 mm von  $S_1$  entfernt liegt:  $S_1 H_{14} = S_1 H_{13} + H_{13} H_{14} = (h_{12} + h_{13}) + h_{14} = (0,762 + 0,794) \text{ mm} = 1,556 \text{ mm}$ .

Der hintere Hauptpunkt  $H_{14}'$  liegt 1,043 mm *links* vom Scheitel  $S_4$  der vierten Linsenfläche entfernt.

Da alle bisher berechneten Strecken Luftlängen sind, die Augenlinse sich aber in einem Mittel  $n_2 = n_4' = 1,336$  befindet, so muß man ihre Beträge mit 1,336 vervielfachen, um ihre Werte im Kammerwasser oder Glaskörper zu erhalten.

$\lg S_1 H_{14} = 0,192$	$\lg h_{14}' = 0,018$	
$\lg n_1 = 0,126$	$= 0,126$	
$\lg \bar{S}_1 \bar{H}_{14} = 0,318$	$\bar{S}_1 \bar{H}_{14} = 2,08$ mm	$\lg \bar{h}_{14}' = 0,144$
		$\bar{h}_{14}' = \bar{S}_4 \bar{H}_{14}' = -1,39$ mm.

Um die schließliche Zusammensetzung des Hornhaut- und des Linsensystems zu erleichtern, bezieht man diese Strecken auf den vorderen Hornhautscheitel  $S$  und muß dabei beachten, daß nach den GULLSTRANDSchen Angaben gilt:  $\bar{S} \bar{S}_1 = 3,6$  mm und  $\bar{S} \bar{S}_4 = 7,2$  mm. Man erhält leicht die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \bar{S} \bar{H}_{14} &= \bar{S} \bar{S}_1 + \bar{S}_1 \bar{H}_{14} & \text{und} & & \bar{S} \bar{H}_{14}' &= \bar{S} \bar{S}_4 + \bar{S}_4 \bar{H}_{14}' \\ &= (3,6 + 2,08) \text{ mm} = 5,68 \text{ mm} & & & &= (7,2 - 1,39) \text{ mm} = 5,81 \text{ mm}. \end{aligned}$$

Die beiden Hauptpunkte der Kristalllinse des Auges fallen also fast zusammen. — Die Brennweite im Glaskörper finden wir aus dem Luftwerte durch Multiplikation mit  $n_4'$

$\lg f_{14}' = 0,719 - 2$	
$\lg n_4' = 0,126$	
$\lg \bar{f}_{14}' = 0,845 - 2$	$\bar{f}_{14}' = 0,07$ m = 70 mm; es war (s. o.) $D_{14} = 19,10$ dptr.

(Die Brechkraft wird immer auf Luft bezogen.)

### 3. Die Zusammensetzung von Hornhaut- und Linsensystem zum Vollauge. Abb. 84.

Die beiden Brechkräfte (mit vereinfachter Bezeichnung) sind  $D_1 = 43,1$  dptr und  $D_2 = 19,1$  dptr. Um den Abstand  $d = \bar{H}' \bar{H}_{14}$  (mit einander zugekehrten Hauptpunkte  $\bar{H}'$  und  $\bar{H}_{14}$  zu finden (wobei zu berücksichtigen, daß  $\bar{H}'$  mit  $H$  und  $\bar{H}_{14}$  mit  $\bar{H}_{14}'$  nahezu zusammenfallen), die beide ja schon auf den vorderen Hornhautscheitel  $S$  bezogen worden sind, bilden wir für die auf das Kammerwasser bezogenen Strecken:

$$\begin{aligned} \bar{H}' \bar{H}_{14} &= \bar{H}' \bar{S} + \bar{S} \bar{H}_{14} = -\bar{S} \bar{H}' + \bar{S} \bar{H}_{14} \\ d &= (\mp 0,052 + 5,68) \text{ mm} = 5,73 \text{ mm} = 0,00573 \text{ m}. \end{aligned}$$

$\lg d = 0,758 - 3$	
$\lg n_4' = -0,126$	
$\lg \delta = 0,632 - 3$	
$\lg D_1 = 1,634$	
$\lg D_2 = 1,281$	$D_1 + D_2 = 62,2$ dptr
$\lg \delta D_1 D_2 = 0,547$	$-\delta D_1 D_2 = -3,53$ dptr
	$D_{12} = 58,67$ dptr [bei schärferer Rechnung ergibt sich 58,64 dptr] = Brechkraft des Vollauges.
$\lg D_{12} = 1,768$	
$\lg f_{12}' = \lg 1/D_{12} = 0,232 - 2$	$f_{12}' = 0,0171$ m [bei schärferer Rechnung 0,01705 m]
$\lg n_4' = 0,126$	= 17,1 mm = Brennweite des Vollauges (auf Luft bezogen).
$\lg \bar{f}_{12}' = 0,358 - 2$	$\bar{f}_{12}' = 0,0228$ m
	= 22,8 mm

$\lg \delta = 0,632 - 3$	$\bar{h}_{12} = n_4' \frac{-\delta D_1}{D_{12}}$
$\lg D_2 = 1,281$	$\lg n_4' = 0,126$
$\lg 1/D_{12} = 0,232 - 2$	= 0,632 - 3
$\lg \bar{h}_{12} = 0,145 - 3$	$\lg D_1 = 1,634$
	= 0,232 - 2
$\bar{h}_{12} = 0,00139$ m	$\lg \bar{h}_{12}' = 0,624 - 3$
= 1,39 mm	$\bar{h}_{12}' = -0,00421$ m
	= -4,21 mm.

Diese beiden Vorschübe sind auf den vorderen Hornhautscheitel zu beziehen

$$\begin{aligned} SH = SH_1 + h_{12} &= (-0,05 + 1,39) \text{ mm} & \overline{SH}' &= \overline{SH}_{14}' + \overline{h}_{12}' = (5,81 - 4,21) \text{ mm} \\ &= 1,34 \text{ mm, der Ort} & &= 1,60 \text{ mm, der Ort} \\ \text{des vorderen Augenhauptpunktes H} & & \text{des hinteren Augenhauptpunktes H}' & \end{aligned}$$

Will man nun noch die Abstände der Brennpunkte vom Hornhautscheitel finden, so ist

$$\begin{aligned} S\overline{F} = SH + H\overline{F} &= (1,34 - 17,05) \text{ mm} & \overline{SF}' &= \overline{SH}' + \overline{H}'\overline{F}' = (1,60 + 22,8) \text{ mm} \\ &= -15,71 \text{ mm} & &= 24,4 \text{ mm, die} \\ & & & \text{Achsenlänge des schematischen Auges.} \end{aligned}$$

Man findet, daß alle diese Werte befriedigend mit den GULLSTRANDSchen übereinstimmen, die schärfer d. h. mit Logarithmentafeln von höherer Stellenzahl berechnet worden sind.

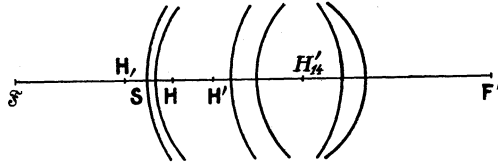


Abb. 84. Übersichtsdarstellung der Lage der Augenrundpunkte des Vollauges  $\overline{S}, H, H', F'$  zu den inneren Bezugspunkten  $H_1$  (des Hornhautsystems) und  $H_1'$  (des Linsensystems) sowie zu dem äußeren Bezugspunkte  $S$  (dem vorderen Hornhautscheitel). Siehe Erklärung zu Abb. 83.

### VI. Die Bestimmung der Brechkraft $D$ , des Fernbrillenglasses aus Hauptpunktsbrechwert $A$ und $d$ -Wert.

Als Formel (9) dient  $f' = \delta + a$ ;  $\delta = 0,0133 \text{ m}$ , der übliche Wert. Berechnung für die beiden Fälle

$A = +5,5 \text{ dptr}$		$A = -5,5 \text{ dptr}$
	$a = \frac{1}{A}; \quad D_1 = \frac{1}{f'}$	
$\lg A = 0,740$		$\lg f_1' = 0,227 - 1$
$\lg a = 0,260 - 1$		$\lg D_1 = 0,773$
	$a = +0,182 \text{ m}$	$a = -0,182 \text{ m}$
	$\delta = +0,0133 \text{ m}$	$\delta = +0,0133 \text{ m}$
	$f_1' = +0,195 \text{ m}$	$f_1' = -0,169 \text{ m}$
$\lg f_1' = 0,290 - 1$		
$\lg D_1 = 0,710$		
	$D_1 = +5,13 \text{ dptr}$	$D_1 = -5,93 \text{ dptr}$
	$D_1 - A = -0,37 \text{ dptr}$	$D_1 - A = -0,43 \text{ dptr}$

Die Brechkraft  $D$ , des Fernbrillenglasses weicht also in diesen Beispielen merklich (um rund 0,4 dptr) von dem Hauptpunktsbrechwert  $A$  des auszugleichenden Auges ab.

Einen guten Aufschluß über diese Beziehungen bei anderen Hauptpunktsbrechwerten für  $\delta = 13,3 \text{ mm}$  gibt die bei M. v. ROHR (2, 34) mitgeteilte Zusammenstellung (in dptr).

$A$	$D_1$	$A$	$D_1$	$A$	$D_1$
+10	+8,83	-2	-2,05	-12	-14,28
+8	+7,23	-4	-4,23	-14	-17,20
+6	+5,56	-6	-6,52	-16	-20,32
+4	+3,80	-8	-8,95	-18	-23,67
+2	+1,95	-10	-11,54	-20	-27,25
$\pm 0$	$\pm 0$				

Man wird also den Einfluß von  $\delta$  (hier = 13,3 mm) nur etwa zwischen  $-4 \leq A \leq +4$  vernachlässigen können.

### VII. Die Bestimmung des Scheitelbrechwertes $A_\infty$ aus Hauptpunktsbrechwert $A$ und $d$ -Wert.

Formel (12 a):  $s_1' = d + a; \quad a = 1/A.$

Die Bestimmungen sollen ausgeführt werden für  $d_1 = 5 \text{ mm}$ ;  $d_{11} = 17 \text{ mm}$  und für  $A = \pm 10 \text{ dptr}$ .

	$A = +10 \text{ dptr}$	$A = -10 \text{ dptr}$
a)	$a = +100 \text{ mm}$	$a = -100 \text{ mm}$
	$\varrho_1 = + 5 \text{ mm}$	$\varrho_1 = + 5 \text{ mm}$
	$s_1' = 105 \text{ mm}$	$s_1' = - 95 \text{ mm}$
	$= 0,105 \text{ m}$	$= -0,095 \text{ m}$
	$A_{1\infty} = 9,52 \text{ dptr}$	$A_{1\infty} = -10,52 \text{ dptr}$
	$\lg s_1' = 0,021 - 1$	$\lg s_1' = 0,978 - 2$
	$\lg 1/s_1' = \lg A_{1\infty} = 0,979$	$\lg A_{1\infty} = 1,022$
b)	$a = +100 \text{ mm}$	$a = -100 \text{ mm}$
	$\varrho_{11} = + 17 \text{ mm}$	$\varrho_{11} = + 17 \text{ mm}$
	$s_{11}' = +117 \text{ mm}$	$s_{11}' = - 83 \text{ mm}$
	$= 0,117 \text{ m}$	$= -0,083 \text{ m}$
	$A_{11\infty} = 8,56 \text{ dptr}$	$A_{11\infty} = -12,05 \text{ dptr}$
	$\lg s_{11}' = 0,068 - 1$	$\lg s_{11}' = 0,919 - 2$
	$\lg 1/s_{11}' = \lg A_{11\infty} = 0,932$	$\lg A_{11\infty} = 1,081$

Der Scheitelbrechwert  $A_{\infty}$  ist also selbst bei kleinen  $\varrho$ -Werten von  $A$  verschieden, erst recht bei größeren. Die Ziffernwerte von  $A_{\infty}$  nehmen mit dem  $\varrho$ -Wert für positive Hauptpunktsbrechwerte  $A$  ab, für negative zu.

### VIII. Die Berechnung der Achsenverlängerung.

Formel (15):  $\bar{A} = -n f_{11}' \frac{D_1}{D_{12}}$ ;  $f_{11}' = \frac{1}{D_{11}} = 17,05 \text{ mm} = 0,01705 \text{ m}$

für die beiden vorhergehenden Beispiele. Wir setzen zunächst an

$\lg n = 0,126$   
 $\lg f_{11}' = 0,232 - 2$   
 $\lg n f_{11}' = 0,358 - 2$ .

Man schreibt nun die entsprechenden Zahlen für die beiden Beispiele der Aufgabe IX, 1, S. 138 und dann für die beiden Beispiele der Aufgabe IX, 2. S. 139 nieder:

$D_1 = +10 \text{ dptr}$	$D_1 = -10 \text{ dptr}$	$D_1 = +9,1 \text{ dptr}$	$D_1 = -11,1 \text{ dptr}$
$\lg \bar{f}_{11}' = 0,358 - 2$	$= 0,358 - 2$	$= 0,358 - 2$	$= 0,358 - 2$
$\lg D_1 = 1,000$	$= 1,000$	$= 0,959$	$= 1,046$
$\lg 1/D_{12} = 0,211 - 2$	$= 0,255 - 2$	$= 0,252 - 2$	$= 0,209 - 2$
$\lg \bar{A} = 0,569 - 3$	$= 0,613 - 3$	$= 0,569 - 3$	$= 0,613 - 3$
$\bar{A} = -0,00371 \text{ m}$	$= +0,00410 \text{ m}$	$= -0,00371 \text{ m}$	$= +0,00410 \text{ m}$
$= -3,71 \text{ mm}$	$= +4,10 \text{ mm}$	$= -3,71 \text{ mm}$	$= +4,10 \text{ mm}$

Man erkennt also, daß die Ergebnisse beider Rechnungen übereinstimmen, denn es handelte sich ja um zwei Augen je mit dem gleichen  $a$ -Wert.

Bildet man nun die Unterschiede der Achsenlängen in IX, 1 und 2 gegen die Achsenlänge von 24,4 mm des schematischen Auges (s. V, 3 am Schluß), so ergibt sich (man vergleiche Abb. 84, auf der auf der Achse nach rechts bzw. links von  $F'$  noch  $O'$  zu denken ist):

$\bar{SO}' = 20,79 \text{ mm}$	$= 28,48 \text{ mm}$	$= 20,72 \text{ mm}$	$= 28,59 \text{ mm}$
$\bar{SF}' = -24,40 \text{ mm}$	$= -24,40 \text{ mm}$	$= -24,40 \text{ mm}$	$= -24,40 \text{ mm}$
$\bar{A} = -3,61 \text{ mm}$	$= +4,08 \text{ mm}$	$= -3,68 \text{ mm}$	$= +4,19 \text{ mm}$

und man erkennt eine, bei Berücksichtigung der geringen Stellenzahl der Tafel, befriedigende Übereinstimmung.

### IX. Brechkraft, Maßstabsänderung, Hauptpunktsverschiebe und Achsenlänge bei anderer als der Normalstellung des Brillenglases.

Formeln (16) und (17); (7) und (8).

1.  $\delta = 12 \text{ mm}$  ( $\delta < f_{11}'$ ).

$= 0,012 \text{ m}$

$D_{12} = D_{11} + D_1 \omega^2$ ;  $\omega^2 = 1 - \delta D_{11}$  (s. S. 68);  $D_{11} = 58,64 \text{ dptr}$ ;  $\lg D_{11} = 1,768$ ;  $n = 1,336$ ;  
 $\lg n = 0,126$ .

Wir berechnen zunächst  $\omega^2$ :

$\lg \delta = 0,079 - 2$   
 $\lg D_{11} = 1,768$   
 $\lg \delta D_{11} = 0,847 - 1$   
 $\lg \omega^2 = 0,473 - 1$

$1 = 1$   
 $-\delta D_{11} = -0,703$   
 $\omega^2 = 0,297$

Es sollen nun für ein übersichtiges ( $D_1 = +10 \text{ dptr}$ ) und für ein kurzsichtiges ( $D_1 = -10 \text{ dptr}$ ) Auge die in der Überschrift angegebenen Bestimmungen gemacht werden.



$D_s = +10$ dptr			$D_s = -10$ dptr			
	+1	-1	$\omega^2 D_s = + 2,97$ dptr		$\omega^2 D_s = - 2,97$ dptr	
			$D_{s'} = + 58,64$ dptr		$D_{s'} = + 58,64$ dptr	
$\lg D_{s'}$	=	1,768	$D_{12} = + 61,61$ dptr	$\lg D_{s'}$	=	1,768
$-\lg D_{12}$	=	- 1,789	$V = \frac{D_{s'}}{D_{12}} = 0,952$	$-\lg D_{12}$	=	- 1,745
$\lg D_{s'}/D_{12}$	=	0,979 - 1	Die Maßstabsänderung ist eine Verkleinerung um fast 5%.	$\lg D_{s'}/D_{12}$	=	0,023
				$V = \frac{D_{s'}}{D_{12}} = 1,055$		
				Die Maßstabsänderung ist eine Vergrößerung um etwa 5%.		
$\lg \delta$	=	0,079 - 2	$h_{12} = 0,01142$ m	$\lg \delta$	=	0,079 - 2
$\lg h_{12} = \lg \delta \frac{D_{s'}}{D_{12}}$	=	0,058 - 2	= 11,42 mm	$\lg h_{12}$	=	0,102 - 2
				$h_{12} = 0,01265$ m		= 12,65 mm.

Die Lage des Hauptpunkts  $H_{12}$  ist also bei beiden Brillengläsern wenig verschieden.

$\lg n$	=	0,126	$\lg n$	=	0,126	
$\lg \delta$	=	0,079 - 2	$\lg \delta$	=	0,079 - 2	
$\lg D_s$	=	1,000	$\lg D_s$	=	1,000	
$\lg 1/D_{12}$	=	0,211 - 2	$\lg 1/D_{12}$	=	0,255 - 2	
$\lg h_{12}' = \lg n \frac{\delta D_s}{D_{12}}$	=	0,416 - 3	$h_{12}' = - 0,00261$ m	$\lg h_{12}'$	=	0,460 - 3
			= - 2,61 mm	$h_{12}' = + 0,00288$ m		= + 2,88 mm.

Bei dem sammelnden Brillengläse ist also der hintere Hauptpunkt  $\bar{H}_{12}'$  der Verbindung von  $H'$  gerechnet aus dem Auge heraus (da  $SH' = 1,6$  mm), bei dem zerstreuenden tiefer in das Auge hinein verlegt worden.

Um die Achsenlänge zu finden, bestimmt man zunächst die Brennweite der Verbindung  $f_{12}' = n f_{12}'$ , und zwar auf den Glaskörper bezogen:

$\lg n$	=	0,126	$\lg n$	=	0,126	
$\lg f_{12}' = \lg 1/D_{12}$	=	0,211 - 2	$\lg f_{12}' = \lg 1/D_{12}$	=	0,255 - 2	
$\lg f_{12}'$	=	0,337 - 2	$\bar{f}_{12}' = 0,0218$ m	$\lg \bar{f}_{12}'$	=	0,381 - 2
			$\bar{f}_{12}' = 21,8$ mm	$\bar{f}_{12}' = 0,0240$ m		= 24,0 mm.

Um die Achsenlänge zu finden, bilden wir, Abb. 43 (auf S. 80) entsprechend:

$$\begin{aligned} \overline{SO'} &= \overline{SH'} + \overline{H'H_{12}'} + \overline{H_{12}'F_{12}'} \\ &= h' + \bar{h}_{12}' + \bar{f}_{12}' \\ \bar{h}_{12}' &= 1,60 \text{ mm} & h' &= 1,60 \text{ mm} \\ \bar{h}_{12}' &= - 2,61 \text{ mm} & \bar{h}_{12}' &= 2,88 \text{ mm} \\ \bar{f}_{12}' &= + 21,80 \text{ mm} & \bar{f}_{12}' &= + 24,00 \text{ mm} \\ \overline{SO'} &= 20,79 \text{ mm} & \overline{SO'} &= 28,48 \text{ mm} \end{aligned}$$

Als Anhang werde die Vergrößerung auch nach dem Ausdruck

(19)  $V = \frac{1 + \delta A}{1 + f_{s'}' A}$  berechnet.

Beachtet man, daß nach Formel (9) geschrieben werden kann

$$a = f_{s'}' - \delta,$$

so können wir leicht zunächst den  $a$ -Wert bestimmen, und zwar für beide Brillengläser.

$D_s = +10$ dptr			$D_s = -10$ dptr		
			$f_{s'}' = + 0,100$ m		= - 0,100 m
			$-\delta = - 0,012$ m		= - 0,012 m
			$a = 0,088$ m		= - 0,112 m
$\lg a$	=	0,944 - 2	$= 0,049 - 1 (-)$		
$\lg A$	=	1,056	$= 0,951 (-)$		
$\lg \delta$	=	0,079 - 2	$= 0,079 - 2$		
$\lg \delta A$	=	0,135 - 1	$= 0,030 - 1 (-)$		
			$\delta A = 0,136$		= - 0,1072
			$1 = 1$		= 1
			$1 + \delta A = 1,136$		= 0,8928
$\lg(1 + \delta A)$	=	0,055	$= 0,950 - 1$		
$\lg A$	=	1,056	$= 0,951 (-)$		
$\lg f_{s'}'$	=	0,232 - 2	$= 0,232 - 2$		
$\lg A f_{s'}'$	=	0,288 - 1	$= 0,183 - 1 (-)$		
			$f_{s'}' A = 0,194$		= - 0,152
			$1 = 1$		= 1
			$1 + f_{s'}' A = 1,194$		= 0,848
$\lg(1 + f_{s'}' A)$	=	0,077	$= 0,928 - 1$		
$\lg 1/(1 + f_{s'}' A)$	=	0,923 - 1	$= 0,072$		
$\lg(1 + \delta A)$	=	0,055	$= 0,950 - 1$		
$\lg V$	=	0,978 - 1	$= 0,022$		
			$V = 0,950$		= 1,053

Die Übereinstimmung mit den oben ermittelten Werten ist also befriedigend.

### 2. $\delta = 22 \text{ mm}$ ( $\delta > f_{12}'$ )

$$= 0,022 \text{ m}$$

$$D_{12} = D_{11} - D_1 \omega^2; \quad \omega^2 = \delta D_{11} - 1 \text{ (s. S. 70); } D_{11} = 58,64 \text{ dptr; } \lg D_{11} = 1,768; \quad n = 1,336; \quad \lg n = 0,126$$

Zunächst berechnen wir  $\omega^2$ .

$$\begin{array}{r} \lg \delta = 0,342 - 2 \\ \lg D_{11} = 1,768 \\ \hline \lg \delta D_{11} = 0,110 \end{array} \quad \begin{array}{r} \delta D_{11} = 1,29 \\ - 1 = -1 \\ \hline \omega^2 = 0,29 \end{array}$$

Es sei nun angenommen, daß es sich hier um die gleichen Augen (d. h. dieselben  $A$ -Werte) handle wie vorher, und es sollen nun die für  $\delta = 22 \text{ mm}$  passenden Fernbrillengläser bestimmt werden. Am besten geht das mit Formel (9)  $f_1' = \delta + a$ , woraus  $a = f_1' - \delta$ . Nach der Rechnung unter 1. muß also sein:

$$a = f_1' - 12 \text{ mm und auch } a = x - 22 \text{ mm,}$$

also die neue Brennweite durch Subtraktion der zweiten Gleichung von der ersten:

$$x = f_1' + 10 \text{ mm.}$$

Bei  $D_1 = \pm 10 \text{ dptr}$  war  $f_1' = \pm 100 \text{ mm}$ , und wir erhalten nunmehr

$$\begin{array}{ll} \text{für das neue Sammelglas } f_1' = +110 \text{ mm} & \text{und für das neue Zerstreuungsglas } f_1' = -90 \text{ mm} \\ & = +0,11 \text{ m} \qquad \qquad \qquad = -0,09 \text{ m} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \lg f_1' = 0,041 - 1 \\ \lg D_1 = 0,959 \\ \hline D_1 = +9,1 \text{ dptr} \end{array} \quad \begin{array}{r} \lg f_1' = 0,954 - 2 \\ \lg D_1 = 1,046 \\ \hline D_1 = -11,1 \text{ dptr} \end{array}$$

Hiermit sind also die Stärken der neuen Brillengläser gegeben, mit denen wir diese Aufgabe der vorigen entsprechend durchführen.

$\begin{array}{r} \lg \omega^2 = 0,462 - 1 \\ \lg D_1 = 0,959 \\ \hline \lg D_1 \omega^2 = 0,421 \end{array}$	$\begin{array}{r} D_1 \omega^2 = 2,64 \text{ dptr} \\ D_{11} = 58,64 \text{ dptr} \\ \hline D_{12} = 56,00 \text{ dptr} \end{array}$	$\begin{array}{r} \lg \omega^2 = 0,462 - 1 \\ \lg D_1 = 1,046 \\ \hline \lg D_1 \omega^2 = 0,508 \end{array}$
$\begin{array}{r} \lg D_{11} = 1,768 \\ \lg D_{12} = 1,748 \\ \hline \lg D_{11}/D_{12} = 0,020 \end{array}$	$\begin{array}{r} D_1 \omega^2 = -3,22 \text{ dptr} \\ + \\ D_{11} = 58,64 \text{ dptr} \\ \hline D_{12} = 61,9 \text{ dptr} \end{array}$	$\begin{array}{r} \lg D_{11} = 1,768 \\ \lg D_{12} = 1,791 \\ \hline \lg D_{11}/D_{12} = 0,977 - 1 \end{array}$
	$V = \frac{D_{11}}{D_{12}} = 1,048$	$V = \frac{D_{11}}{D_{12}} = 0,948$

Die Maßstabsänderung ist eine Vergrößerung um fast 5%.

Die Maßstabsänderung ist eine Verkleinerung um etwa 5%.

$$\begin{array}{r} \lg \delta = 0,342 - 2 \\ \frac{\delta D_{11}}{D_{12}} = \lg h_{12} = 0,362 - 2 \\ \hline h_{12} = 0,023 \text{ m} \end{array} \quad \begin{array}{r} \lg \delta = 0,342 - 2 \\ \lg h_{12} = 0,319 - 2 \\ \hline h_{12} = 0,0209 \text{ m.} \end{array}$$

Die Lage des Hauptpunkts  $H_{12}$  ist also bei beiden Brillengläsern wenig verschieden.

$\begin{array}{r} \lg n = 0,126 \\ \lg \delta = 0,342 - 2 \\ \lg D_1 = 0,959 \\ \hline \lg 1/D_{12} = 0,252 - 2 \end{array}$	$\begin{array}{r} \lg n = 0,126 \\ \lg \delta = 0,342 - 2 \\ \lg D_1 = 1,046 \\ \hline \lg 1/D_{12} = 0,209 - 2 \end{array}$
$\lg n \frac{\delta D_1}{D_{12}} = \lg \bar{h}_{12}' = 0,679 - 3 \quad \bar{h}_{12}' = -0,00478 \text{ m} = -4,78 \text{ mm}$	$\lg \bar{h}_{12}' = 0,723 - 3 \quad \bar{h}_{12}' = +0,00529 \text{ m} = +5,29 \text{ mm.}$

Die Verschiebung des hinteren Hauptpunkts  $\bar{H}_{12}'$  der Verbindung aus dem hinteren Augenhauptpunkt ist viel beträchtlicher als unter 1 ( $\delta = 12 \text{ mm}$ ).

Entsprechend der vorigen Aufgabe 1. bilden wir  $f_{12}'$

$$\begin{array}{r} \lg n = 0,126 \\ \lg 1/D_{12} = \lg f_{12}' = 0,252 - 2 \\ \hline \lg f_{12}' = 0,378 - 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} \bar{f}_{12}' = 0,0239 \text{ m} \\ = 23,9 \text{ mm} \end{array} \quad \begin{array}{r} \lg n = 0,126 \\ \lg f_{12}' = 0,209 - 2 \\ \hline \lg f_{12}' = 0,335 - 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} \bar{f}_{12}' = 0,0217 \text{ m} \\ = 21,7 \text{ mm} \end{array}$$

und auf Grund der dortigen Überlegungen  $\bar{S}O' = \bar{h}' + \bar{h}_{12}' + \bar{f}_{12}'$

$\begin{array}{r} \bar{h}' = 1,60 \text{ mm} \\ \bar{h}_{12}' = -4,78 \text{ mm} \\ \bar{f}_{12}' = 23,90 \text{ mm} \\ \hline \bar{S}O' = 20,72 \text{ mm} \end{array}$	$\begin{array}{r} \bar{h}' = 1,60 \text{ mm} \\ \bar{h}_{12}' = +5,29 \text{ mm} \\ \bar{f}_{12}' = +21,70 \text{ mm} \\ \hline \bar{S}O' = 28,59 \text{ mm.} \end{array}$
--	--

Man sieht also, daß sich, wie es auch sein muß, je die gleichen Achsenlängen wie im vorigen Falle ergeben; man muß nur von den unvermeidlichen Unschärfen der Logarithmentafel mit so wenig Stellen absehen.

**3. Anhang: Ermittlung von  $D_v$  für eine vorgeschriebene Vergrößerung  $V$  des Netzhautbildes bei großem  $\delta$ -Wert.**

Aus Formel (18)  $V = \frac{1}{D_v} \cdot \frac{1}{f_{v'} + a}$  folgt  $D_v = \frac{1}{V} \cdot \frac{1}{f_{v'} + a}$ , wo nach S. 73  $V$  bei kurzsichtigen Augen negativ zu nehmen ist. Als Ziffernwert sei hier 2 vorgeschrieben. Wir berechnen zwei Werte für ein übersichtiges und ein kurzsichtiges Auge

$\begin{array}{r} A = 5 \text{ dptr } (V = +2) \\ a = 0,200 \text{ m} \\ \hline f_{v'} = 0,017 \text{ m} \\ a + f_{v'} = 0,217 \text{ m} \\ V(a + f_{v'}) = 0,434 \text{ m} \end{array}$	$\begin{array}{r} A = -5 \text{ dptr } (V = -2) \\ = -0,200 \text{ m} \\ \hline = 0,017 \text{ m} \\ = -0,183 \text{ m} \\ = +0,366 \text{ m} \end{array}$
$\lg 1/D_v = \lg f_{v'} = \frac{\lg V(a + f_{v'}) = 0,637 - 1}{\lg D_v = 0,363} = \frac{0,563 - 1}{0,437}$	
$D_v = +2,31 \text{ dptr}$	$= +2,73 \text{ dptr}$

Wollen wir jetzt den Abstand  $\delta$  kennenlernen, so haben wir nach S. 72 bzw. Formel (9) zu bilden

$$\delta = \frac{1}{D_v} - \frac{1}{A} = f_{v'} - a$$

$f_{v'} = 0,434 \text{ m}$	$= 0,366 \text{ m}$
$-a = 0,200 \text{ m}$	$= -0,200 \text{ m}$
$\delta = 0,234 \text{ m}$	$= 0,566 \text{ m}$

Beim kurzsichtigen Auge fällt also der Abstand  $\delta$  sehr viel größer aus, weil  $F_v' = R$  zwischen der langbrennweitigen Linse und dem Auge liegen muß (s. Abb. 39/40), oder anders ausgedrückt, weil sich die beiden Größen  $f_{v'}$  und  $-a$  in den Ziffernwerten addieren, während sie sich im ersten Falle subtrahieren.

**X. Rechnungen an der Fernrohrbrille. Abb. 85.**

Gegeben sei  $r_1 = +0,0196 \text{ m}$ ;  $r_2 = \infty$ ;  $r_3 = -0,033 \text{ m}$ ;  $r_4 = +0,0151 \text{ m}$ ;  
 $d_v = 0,0052 \text{ m}$ ;  $d_m = 0,0105 \text{ m}$ ;  $d_h = 0,0005 \text{ m}$ ;  $d_v h = d_v + d_m + d_h = 0,0162 \text{ m}$ ;  
 $n_v = 1,516$ ;  $\lg n_v = 0,180$ ;  $n_h = 1,621$ ;  $\lg n_h = 0,209$ .

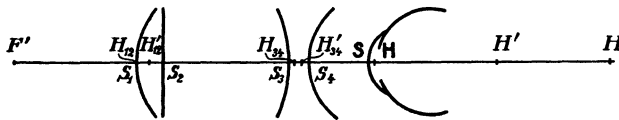


Abb. 85. Übersichtsdarstellung der äußeren und der inneren Bezugspunkte einer zerstreuen Fernrohrbrille und des mit ihr verbundenen Auges. Die Orte aller dieser Punkte entsprechen der Wirklichkeit nur dem Zeichen, nicht dem Betrage nach. Für ihre Wahl waren die Rücksichten auf Deutlichkeit und verfügbaren Raum maßgebend.  $F' = F_v'$  im Text.

$S_1 S_2 = d_v$ ;  $S_2 S_3 = d_m$ ;  $S_3 S_4 = d_h$ ;  $H_{12}' H_{31} = d_v h$ .  $S_4 H = \delta (= 13,3 \text{ mm})$ .

**1. Berechnung der Grundpunkte der Fernrohrbrille.**

a) Berechnung der Vorderlinse mit dem Zeiger  $v$ .  $D_v = D_1 + D_2 - \delta_v D_1 D_2$  (6);  $h_{12}$ ,  $h_{12}'$  (7) und (8).

$\lg d_v = 0,716 - 3$	$D_1 = \frac{n_v - 1}{r_1}$	$n_v = 1,516$	$D_2 = \frac{1 - n_v}{r_2}$
$\lg n_v = 0,180$		$1 = 1$	
$\lg d_v = 0,536 - 3$		$n_v - 1 = 0,516$	
$\delta_v = 0,003 + 4 \text{ m}$	$\lg 0,516 = 0,713 - 1$	$D_1 = \frac{0,516}{+0,0196 \text{ m}}$	$D_2 = \frac{-0,516}{\infty} = 0$
	$\lg r_1 = 0,292 - 2$	$= 26,4 \text{ dptr}$	Da $D_2$ verschwindet, so verschwinden die beiden letzten Glieder von $D_v$ u. es gilt $D_v = D_1$ .
	$\lg D_1 = 1,421$	$= D_v$	
		$h_{12} = \frac{\delta_v D_2}{D_v}$	$h_{12}' = -\delta_v \cdot \frac{D_1}{D_v} = \delta_v$
		$h_{12} = 0$	$h_{12}' = -0,00344 \text{ m}$
			$= -3,44 \text{ mm}$

b) Berechnung der Hinterlinse (mit dem Zeiger  $h$ ).  $D_h = D_3 + D_4 - \delta_h D_3 D_4$  (6);  $h_{34}$ ,  $h_{34}'$  (7) und (8).

$\lg d_h = 0,699-4$	$D_3 = \frac{n_h - 1}{r_3}$	$n_h = 1,621$		$D_4 = \frac{1 - n_h}{r_4} = \frac{-0,621}{r_4}$
$\lg n_h = 0,209$		$1 = 1$		
$\lg \delta_h = 0,490-4$	$\lg 0,621 = 0,793-1$	$n_h - 1 = 0,621$		$\lg 0,621 = 0,793-1 (-)$
$\lg D_3 = 1,274$	$\lg r_3 = 0,519-2 (-)$			$\lg r_4 = 0,179-2$
$\lg D_4 = 1,614$				
$\lg \delta_h D_3 D_4 = 0,378-1$	$\lg D_3 = 1,274$			$\lg D_4 = 1,614$
		$D_3 = -18,8 \text{ dptr}$		$D_4 = -41,1 \text{ dptr}$
		$D_3 + D_4 = -59,9 \text{ dptr}$		
		$\delta_h D_3 D_4 = 0,239$		
		$D_h = -60,1 \text{ dptr}$		
	$\lg D_h = 1,779$			
	$\lg 1/D_h = 0,221-2$			
$h_{12} = \frac{\delta_h D_4}{D_h}$	$\lg \delta_h = 0,490-4$	$h_{12}' = \frac{-\delta_h D_3}{D_h}$	$\lg \delta_h = 0,490-4$	
	$\lg D_4 = 1,614$		$\lg D_3 = 1,274$	
	$\lg 1/D_h = 0,221-2$		$\lg 1/D_h = 0,221-2$	
	$\lg h_{34} = 0,325-4$	$h_{34} = 0,000214 \text{ m}$	$\lg h_{34}' = 0,985-5$	$h_{34}' = -0,000097 \text{ m}$
		$= 0,211 \text{ mm}$		$= -0,097 \text{ mm}$
				$= -0,1 \text{ mm}$

c) Zusammensetzung beider Abbildungen.  $D_{vh} = D_v + D_h - \delta_{vh} D_v D_h$  nach (6);  $h_{vh}$ ,  $h_{vh}'$  nach (7) und (8).

$\delta_{vh} = H_{12}' H_{34} = H_{12}' S_2 + S_2 S_3 + S_3 H_{34}$ (s. Abb. 85)			
$= -h_{12}' + d_m + h_{34}$			
$= (+ 3,44 + 10,50 + 0,21) \text{ mm} = 14,15 \text{ mm}$			
$= 0,0141 \text{ m}$			
$\lg \delta_{vh} = 0,149-2$	$D_v = +26,4 \text{ dptr}$	$h_{vh} = \frac{\delta_{vh} D_h}{D_{vh}}$	$h_{vh}' = -1 \cdot \frac{\delta_{vh} \cdot D_v}{D_{vh}}$
$\lg D_v = 1,421$	$D_h = -60,1 \text{ dptr}$		
$\lg D_h = 1,779$	$D_v + D_h = -33,7 \text{ dptr}$		
$\lg \delta_{vh} D_v D_h = 1,349$	$\delta_{vh} D_v D_h = -22,3 \text{ dptr}$		
	$D_{vh} = -11,4 \text{ dptr}$		
$\lg D_{vh} = 1,057$	$f_{vh}' = -0,0878 \text{ m}$	$\lg 1 = 0,000 (-)$	$\lg 1 = 0,000 (-)$
$\lg f_{vh}' = \lg 1/D_{vh} = 0,943-2$	$= -87,8 \text{ mm}$	$\lg D_v = 0,149-2 (+)$	$\lg D_v = 0,149-2 (+)$
		$\lg D_h = 1,779 (-)$	$\lg D_h = 1,421 (+)$
		$\lg 1/D_{vh} = 0,943-2 (-)$	$\lg 1/D_{vh} = 0,943-2 (-)$
		$\lg h_{vh} = 0,871-2 (+)$	$\lg h_{vh}' = 0,513-2 (+)$
		$h_{vh} = + 0,0743 \text{ m}$	$h_{vh}' = + 0,0326 \text{ m}$
		$= +74,3 \text{ mm}$	$= +32,6 \text{ mm}$

Ganz ähnlich wie in V, 2 bei der Kristalline des Auges sollen die beiden Hauptpunkte  $H$  und  $H'$  der Fernrohrbrille auf den vorderen Flächenscheitel  $S_1$  bezogen werden (s. Abb. 85).

Dabei ist zu beachten für  $H$ : Dieser Punkt steht von  $H_{12}$  um  $h_{vh}$  ab, und  $H_{12}$  ist von  $S_1$  um  $h_{12}$  entfernt; also

$$S_1 H = S_1 H_{12} + H_{12} H = h_{12} + h_{vh} = (0,0 + 74,3) \text{ mm} = +74,3 \text{ mm}$$

Dabei ist zu beachten für  $H'$ : Dieser Punkt steht von  $H_{34}'$  um  $h_{vh}'$  ab, und  $H_{34}'$  ist von  $S_4$  um  $h_{34}'$  entfernt;  $S_4$  liegt aber um  $d = d_v + d_m + d_h$  hinter  $S_1$ ; also

$$S_1 H' = S_1 S_4 + S_4 S_{34}' + H_{34}' H' = d_v + h_{34}' + h_{vh}' = (16,2 - 0,1 + 32,6) \text{ mm} = +48,7 \text{ mm}$$

$$\begin{aligned} \text{Bilden wir nun } HH' &= H S_1 + S_1 H' = -S_1 H + S_1 H' \\ &= (-74,3 + 48,7) \text{ mm} \\ &= -25,6 \text{ mm} \end{aligned}$$

so ergibt sich, daß die Hauptpunkte dieser Fernrohrbrille gekreuzt liegen, d. h. der zweite vor dem ersten.

Die Brennweite  $f_{vh}' = H' F' = -87,8 \text{ mm}$  war schon bestimmt worden; es sei nun noch die Schnittweite  $S_4 F'$  ermittelt.

$$\begin{aligned} S_4 F' &= S_4 S_1 + S_1 H' + H' F' \\ s' &= -d + S_1 H' + f_{vh}' = (-16,2 + 48,7 - 87,8) \text{ mm} = -55,3 \text{ mm} \\ &= -0,0553 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lg s' &= 0,742-2 \\ \lg 1/s' = \lg A_\infty &= 1,258 \quad A_\infty = -13,1 \text{ dptr} \end{aligned}$$

Sucht man den Hauptpunktstand  $a = HR = HF'$  (da nach S. 51  $R$  und  $F'$  zusammenfallen müssen) eines durch diese Fernrohrbrille ausgeglichenen kurzsichtigen Auges, wenn  $\delta = S_1 H = 13,3 \text{ mm}$ , so ergibt sich

$$\begin{aligned} a = HR = HS_4 + S_4 F' &= -\delta + s' = (-13,3 - 55,3) \text{ mm} = -68,6 \text{ mm} \\ &= -0,0686 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\lg a = 0,837 - 2$$

$$\lg \frac{1}{a} = \lg A = 1,163 \quad A = -14,6 \text{ dptr}$$

Man erkennt also, daß nach M. v. ROHR (4, 74) für diese Fernrohrbrille die Werte

$$\begin{aligned} D_v h &= -11,4 \text{ dptr} = \text{Brechkraft der Fernrohrbrille,} \\ A &= -14,6 \text{ dptr} = \text{Hauptpunktsbrechwert des Auges,} \\ A_\infty &= -18,1 \text{ dptr} = \text{Scheitelrefraktion der Fernrohrbrille} \end{aligned}$$

zusammengehören, unter sich aber sehr stark abweichen.

## 2. Die Verbindung der Fernrohrbrille mit dem Auge.

Mit dem Zeiger  $I II$  sei alles auf die Zusammensetzung Auge und Fernrohrbrille bezügliche bezeichnet.

Die Vergrößerung des Netzhautbildes  $V = \frac{D_{II}}{D_{I II}}$  verlangt zunächst eine Feststellung von  $D_{I II} = D_v h + D_{II} - \delta_{I II} D_v h D_{II}$ .

Der  $\delta_{I II}$ -Wert bestimmt sich leicht in der folgenden Weise (s. Abb. 85)

$$\begin{aligned} \delta_{I II} &= H'H = H'S_4 + S_4H \\ &= H'H_{34}' + H_{34}'S_4 + S_4H \\ &= -h_{v h}' - h_{34}' + \vartheta = (-32,6 + 0,1 + 13,3) \text{ mm} = -19,2 \text{ mm} \\ &= -0,0192 \text{ m.} \end{aligned}$$

Wir erhalten also bei der Fernrohrbrille zum erstenmal einen negativen  $\delta$ -Wert (s. auch S. 141).

$\lg \delta_{I II} = 0,283 - 2 (-)$		$\lg D_{II} = 1,768$	
$\lg D_v h = 1,057 (-)$		$D_v h = -11,4 \text{ dptr}$	$-\lg D_{I II} = -1,536$
$\lg D_{II} = 1,768 (+)$		$D_{II} = +58,6 \text{ dptr}$	$\lg V = 0,232 \quad V = 1,71$
$\lg \delta_{I II} D_v h D_{II} = 1,108 (+)$		$D_v h + D_{II} = +47,2 \text{ dptr}$	Es ergibt sich also eine sehr starke Vergrößerung der Fernrohrbrille.
$\lg D_{I II} = 1,536$		$\delta_{I II} D_v h D_{II} = -12,8 \text{ dptr}$	
$\lg 1/D_{I II} = 0,464 - 2$		$D_{I II} = +34,4 \text{ dptr}$	

Die Hauptpunktsverschiebe durch die Fernrohrbrille

$$h_{I II} = \frac{\delta_{I II} \cdot D_{II}}{D_{I II}}; \quad h_{I II}' = \frac{-\delta_{I II} D_v h}{D_{I II}}$$

$\lg \delta_{I II} = 0,283 - 2 (-)$	$\lg n = 0,126 (-)$	$\lg \bar{H}'\bar{H}_{I II}' = -8,5 \text{ mm.}$
$\lg D_{II} = 1,768 (+)$	$\lg \delta_{I II} = 0,283 - 2 (-)$	Den hinteren Hauptpunktsverschiebe beziehen wir durch Multiplikation mit $n = 1,336$ gleich auf den Glaskörper
$\lg 1/D_{I II} = 0,464 - 2 (+)$	$\lg D_v h = 1,057 (-)$	
$\lg h_{I II} = 0,515 - 2$	$\lg 1/D_{I II} = 0,464 - 2 (+)$	$\bar{h}_{I II}' = -0,00851 \text{ m}$
$h_{I II} = -0,0327 \text{ m}$	$\lg \bar{h}_{I II}' = 0,930 - 3 (-)$	$= -8,5 \text{ mm}$
$= -32,7 \text{ mm}$		

Beide Hauptpunkte sind also nach links verschoben, der hintere um  $\bar{H}'\bar{H}_{I II}' = \bar{h}_{I II}' = -8,5 \text{ mm}$ . Er liegt also um 6,9 mm vor  $S$ , da  $\bar{S}\bar{H}' = 1,6 \text{ mm}$ .

Bestimmt man die hintere Brennweite für den Glaskörper, so ergibt sich

$\lg f_{I II}' = 0,464 - 2$	$\bar{H}_{I II}'\bar{F}_{I II}' = 0,0389 \text{ m} = 38,9 \text{ mm}$	
$\lg n = 0,126$	$\bar{H}'\bar{H}_{I II}' = -8,5 \text{ mm}$	
$\lg \bar{f}_{I II}' = 0,590 - 2$	$\bar{H}'\bar{F}_{I II}' = \bar{H}'\bar{O}' = 30,4 \text{ mm;}$	

addiert man hierzu noch  $\bar{S}\bar{H}' = 1,6 \text{ mm}$ , so hat man mit 32,0 mm die Achsenlänge des Auges  $\bar{S}\bar{O}'$ .

Da wir wissen, daß das durch diese Fernrohrbrille ausgeglichene Auge den Hauptpunktsbrechwert  $A = -14,6 \text{ dptr}$  hatte, so kann man zu einer Probe auf die Richtigkeit der Rechnung leicht den  $\bar{b}$ -Wert im Glaskörper feststellen nach Formel (1).

$\lg B = 1,643$	$A = -14,6 \text{ dptr}$	
$\lg \bar{b} = 0,357 - 2$	$D_{II} = +58,6 \text{ dptr}$	
$\lg n = 0,126$	$B = +44,0 \text{ dptr}$	
$\lg \bar{b} = 0,483 - 2$	$\bar{b} = 0,0304 \text{ m}$	
	$\bar{H}'\bar{O}' = 30,4 \text{ mm.}$	

Man erkennt also, daß sich für den  $\bar{b}$ -Wert der gleiche Wert ergab wie vorher, und das ist eine Prüfung auf die Richtigkeit der vorhergehenden Rechnung.

Als Anhang soll auch hier noch die Anwendbarkeit der Formel (19)

$$V = \frac{1 + \delta A}{1 + f''A}$$

nachgewiesen werden.  $\delta$  ist  $\delta_{II} = H' H = -0,0192$  m und  $A = -14,6$  dptr.

$\lg \delta = 0,283 - 2 (-)$	$\lg f'' = 0,232 - 2 (+)$	
$\lg A = 1,164 (-)$	$= 1,164$	
$\lg \delta A = 0,447 - 1 (+)$	$\delta A = 0,280$	$f''A = -0,249$
	$\frac{1}{1 + \delta A} = 1,280$	$\frac{1}{1 + f''A} = 0,751$
$\lg(1 + \delta A) = 0,107$		
$\lg \frac{1}{1 + f''A} = 0,124$		
$\lg V = 0,231$	$V = 1,71$	

und das stimmt genau mit dem oben auf S. 142 abgeleiteten Werte überein.

### XI. Das Starglas.

Wie auf S. 79 durchgeführt wurde, sind für das linsenlose Auge die Punkte, Strecken und Brechwerte durch Unterstreichung hervorgehoben. Im besonderen ist die Achsenlänge des linsenlosen Auges mit  $\overline{SO'} = \overline{SF_{12}'} = \overline{h'} + n \overline{h_{12}'} + n \overline{f_{12}'}$  (S. 80 und Abb. 43) bezeichnet worden.

Wir haben also zunächst  $D_{12} = \frac{1}{f_{12}'}$  nach (6) zu bestimmen; dabei soll  $\delta = 12,05$  mm = 0,01205 m;  $D_{11} = 43,05$  dptr und  $D_1$  einmal mit +15 dptr, dann mit -5 dptr angesetzt worden.

	$D_1 = +15$ dptr	$D_2 = -5$ dptr
$\lg \delta = 0,081 - 2$		$= 0,081 - 2$
$\lg D_1 = 1,176$		$= 0,699$
$\lg \overline{D_{11}} = 1,634$		$= 1,634$
$\lg \delta D_1 = 0,891$	$\delta D_1 = 7,78$ dptr	$= 0,414$
		$= -2,59$ dptr
	$D_1 + D_2 = 58,05$ dptr	$= 38,05$ dptr
	$\frac{D_1}{D_{12}} = 50,27$ dptr	$= 40,64$ dptr
$\lg \overline{D_{12}} = 1,701$		$= 1,609$
$\lg \frac{1}{D_{12}} = \lg f_{12}' = 0,299 - 2$		$= 0,391 - 2$

Wir bestimmen nunmehr  $n \overline{h_{12}'} = -n \frac{\delta D_1}{D_{12}}$  und dann  $n \overline{f_{12}'}$ :

$\lg \delta = 0,081 - 2$		$= 0,081 - 2$
$\lg D_1 = 1,176$		$= 0,699$
$\lg \frac{1}{D_{12}} = 0,299 - 2$		$= 0,391 - 2$
$\lg n = 0,126$		$= 0,126$
$\lg \overline{h_{12}'} = 0,682 - 3$	$\overline{h_{12}'} = -0,00481$ m	$= 0,297 - 3$
	$= -4,81$ mm	$= +0,00199$ mm
		$= +1,99$ mm
$\lg f_{12}' = 0,299 - 2$		$= 0,391 - 2$
$\lg n = 0,126$		$= 0,126$
$\lg \overline{f_{12}'} = 0,425 - 2$	$\overline{f_{12}'} = 0,0266$ m	$= 0,517$
	$= 26,6$ mm	$= 0,0329$ m
		$= 32,9$ mm

Wir sind nunmehr imstande,  $\overline{SO'}$  nach der im Anfang dieses Beispiels wiederholten Formel zu bestimmen und rufen uns dazu nur von S. 133 her ins Gedächtnis, daß  $\overline{h'} = -0,05$  mm zu setzen war.

	$D_1 = +15$ dptr	$D_2 = -5$ dptr
$\overline{h} = \overline{SH} = -0,05$ mm		
$\overline{h_{12}'} = \overline{HH_{12}'} = -4,81$ mm		$= -0,05$ mm
$\overline{f_{12}'} = \overline{H_{12}'F_{12}'} = +26,60$ mm		$= +1,99$ mm
		$= +32,90$ mm
$\overline{SO'} = \overline{SF_{12}'} = +21,74$ mm = Achsenlänge des linsenlosen Auges.		$= +34,84$ mm

Sehr bequem erhalten wir die Länge des  $\overline{b}$ -Werts aus

$$\overline{SO'} = \overline{SH'} + \overline{H'O'} \quad \text{zu} \quad \overline{H'O'} = \overline{SO'} - \overline{SH'}, \quad \text{wobei} \quad \overline{SH'} = 1,6 \text{ mm,}$$

denn den Netzhautpunkt  $F_{12}'$  können wir im Vollaue nunmehr mit  $O'$  bezeichnen.

$\overline{SO'} = 21,74$ mm		$= 34,84$ mm
$\overline{SH'} = 1,60$ mm		$= 1,60$ mm
$\overline{b} = \overline{H'O'} = 20,14$ mm		$= 33,24$ mm
$= 0,0201$ m		$= 0,0332$ m

$$\begin{array}{rcl}
 \lg \bar{b} & = & 0,303 - 2 \\
 \lg n & = & 0,126 \\
 \hline
 \lg b & = & 0,177 - 2 \\
 \lg \frac{1}{b} = \lg B & = & 1,823 \\
 \\ 
 B & = & +66,6 \text{ dptr} \\
 D_{,,} & = & +58,6 \text{ dptr} \\
 \hline
 A & = & + 8,0 \text{ dptr} \\
 \\ 
 & & = + 40,3 \text{ dptr} \\
 & & = + 58,6 \text{ dptr} \\
 \hline
 & & = - 18,3 \text{ dptr}
 \end{array}$$

Unter Berücksichtigung allein der Gaußischen Abbildung ist das (Voll-) Auge im ersten Falle stark übersichtig ( $A = +8$  dptr), im zweiten stark kurzsichtig ( $A = -18,3$  dptr) gewesen.

Bestimmen wir nun noch die Vergrößerung des Netzhautbildes nach dem auf S. 81 angeführten Ausdruck

$$\begin{array}{rcl}
 \frac{D_{,,}}{D_{12}} = \frac{58,64}{D_{12}} : & & \\
 \lg D_{,,} & = & 1,768 \\
 \lg 1/D_{12} & = & 0,299 - 2 \\
 \hline
 \lg D_{,,} / D_{12} & = & 0,067 \\
 \\ 
 D_{,,} / D_{12} & = & 1,16 \\
 \\ 
 & = & 0,159 \\
 & = & 1,45
 \end{array}$$

Die Vergrößerung des Netzhautbildes im linsenlosen Auge wächst also merklich mit der Augenlänge. Sie beträgt für ein vorher rechtssichtiges Auge unter den angenommenen Bedingungen 1,23.

## XII. Der äußere Akkommodationserfolg $\mathfrak{A}_k = \mathfrak{R} A_k$ . (s. S. 88).

### 1. Die Einwirkung einer stärkeren Lupe auf die Akkommodation.

Die Lupe sei mit  $D_r = +80$  dptr als eine 20fache angenommen (s. XIV am Schluß); es sei eine dünne Linse, also  $i = 0$ , vorausgesetzt, so daß für  $\delta + i$  ohne weiteres  $\delta = 0,0133$  m (als üblicher Wert) gesetzt werden kann. Als Beobachter gelte ein Emmetrop mit  $\frac{1}{r} = 0$  und  $\frac{1}{p} = -4$  dptr, d. h. also

$A_k = -4$  dptr. Es ist jetzt der Ausdruck  $\mathfrak{R} = \frac{1}{\left[\frac{I}{p}\right] \left[\frac{II}{r}\right]}$  [S. 88 (h)] auszuwerten.

<p>Auswertung: von <math>\left[\frac{I}{p}\right]</math> [S. 88 (h)]</p> $  \begin{array}{l}  \lg \delta = 0,124 - 2 \\  \lg 1/p = 0,602 \quad (-) \\  \lg \delta/p = 0,726 - 2 \\  \\   \lg \left(1 + \frac{\delta}{p}\right) = 0,976 - 1 \\  \lg(\delta + i) = \lg \delta = 0,124 - 2 \\  \lg D_r = 1,903 \\  \hline  \lg D_r (\delta + i) \left(1 + \frac{\delta}{p}\right) = 0,003 \\  \\   \lg \left[\frac{I}{p}\right] = 0,303 \\  \lg \left[\frac{II}{r}\right] = 0,315 \\  \hline  \lg 1/\mathfrak{R} = 0,618 \\  \lg \mathfrak{R} = 0,382 - 1 \\  \lg A_k = 0,602 \quad (-) \\  \lg \mathfrak{A}_k = 0,984 - 1 \quad (-)  \end{array}  $	$  \begin{array}{l}  \frac{\delta}{p} = -0,0532 \\  \frac{1}{1} = 1 \\  \hline  1 + \frac{\delta}{p} = 0,9468 \\  \\   \frac{\delta}{p} = -0,0532 \\  \frac{1}{1} = 1 \\  \hline  1 + \frac{\delta}{p} = 0,9468 \\  \\   \left[\frac{I}{p}\right] = 2,0075 \\  \\   \left[\frac{II}{r}\right] = 0,315  \end{array}  $	<p>von <math>\left[\frac{II}{r}\right]</math> [S. 88 (h)]</p> $  \begin{array}{l}  \frac{\delta}{r} = 0 \\  \frac{1}{1} = 1 \\  \hline  \left(1 + \frac{\delta}{r}\right) = 1,0 \\  \\   \lg D_r \delta = 0,027 \\  \hline  D_r \delta = +1,065 \\  \frac{1}{1} = 1 \\  \hline  \left[\frac{II}{r}\right] = 2,065  \end{array}  $
$\mathfrak{A}_k = -0,964$ dptr		

Der Akkommodationserfolg ist also durch diese Lupe stark verringert (auf weniger als ein Viertel gebracht) worden.

Man kann sich hiernach vorstellen, daß er bei noch stärkerer, etwa durch ein Mikroskop erzielter Vergrößerung entsprechend weiter heruntergeht und erkennt, daß unter diesen Umständen die Akkommodationsanspannung außerstande ist, in merklichem Maße die Einstellung nicht scharf eingestellter Teile eines vorliegenden Präparats zu ändern.

Die Vorstellung wird noch anschaulicher, wenn man auf die Lage von  $\mathfrak{R}$  und  $\mathfrak{B}$  (S. 84) eingeht. Nach S. 87 galt allgemein

$$i + \delta + r = \frac{\delta + r}{1 - D_r (\delta + r)}$$

und die rechte Seite durch  $r$  im Zähler und Nenner dividiert:

$$= \frac{\frac{\delta}{r} + 1}{\frac{1}{r} - D, \left(\frac{\delta}{r} + 1\right)}$$

Setzt man nun den obigen Angaben entsprechend  $r = \infty$  und  $i = 0$ , so erhält man

$$\delta + r = -\frac{1}{D,}; \quad r = -\delta - \frac{1}{D,} = -0,0133 \text{ m} - \frac{1 \text{ m}}{80} \\ = -0,0133 \text{ m} - 0,0125 \text{ m} \\ = -0,0258 \text{ m} = -25,8 \text{ mm}$$

$$\lg r = 0,412 - 2$$

$$\lg \frac{1}{r} = 1,588$$

Nach Formel (21 c) ist:

$$\mathfrak{U}_k = \frac{1}{p} - \frac{1}{r} = -0,96 \text{ dptr} \quad (\text{s. S. 144})$$

$$\lg \frac{1}{p} = 1,599$$

$$\lg p = 0,401 - 2$$

$$\frac{1}{r} = -38,7 \text{ dptr}$$

$$\frac{1}{p} = -39,7 \text{ dptr}$$

$$p = -0,0252 \text{ mm} \\ = -25,2 \text{ mm}$$

Die Grenzen des Akkommodationsgebiets sind also durch  $r = -25,8$  und  $p = -25,2$  mm gegeben, und wir erhalten für das Gebiet selber

$$\mathfrak{R} \mathfrak{P} = -r + p = (+25,8 - 25,2) \text{ mm} = 0,6 \text{ mm},$$

was zu unserer obigen Aussage aufs beste stimmt.

### 2. Der Fall dünner Brillengläser $\mathfrak{U}_k = \mathfrak{R} \cdot A_k$ .

Hier ist  $i = 0$  zu setzen und die vereinfachte Formel (23), worin

$$\frac{1}{\mathfrak{R}} = (1 + \delta A)^2 + A A_k \delta^2,$$

zu verwenden (s. a. S. 90). Gegeben sei  $A_k = -6$  dptr und  $\delta = 0,0133$  m; dabei sollen die Rechnungen für die beiden Fälle  $A = +8$  dptr und  $A = -16$  dptr durchgeführt werden.

$A = +8$ dptr		$A = -16$ dptr	
$\lg \delta$	$= 0,124 - 2$		$= 0,124 - 2$
$\lg A$	$= 0,903 \quad (+)$		$= 1,204 \quad (-)$
$\lg \delta A$	$= 0,027 - 1 \quad (+)$		$= 0,328 - 1 \quad (-)$
		$\delta A = 0,1065$	
		$\frac{1}{\mathfrak{R}} = 1$	
$\lg(1 + \delta A)$	$= 0,044$	$1 + \delta A = 1,1065$	$= 0,896 - 1$
$\lg(1 + \delta A)^2$	$= 0,088$		$= 0,792 - 1$
		$(1 + \delta A)^2 = 1,225$	
$\lg \delta A$	$= 0,027 - 1 \quad (+)$		$= 0,328 - 1 \quad (-)$
$\lg \delta$	$= 0,124 - 2 \quad (+)$		$= 0,124 - 2 \quad (+)$
$\lg A_k$	$= 0,778 \quad (-)$		$= 0,778 \quad (-)$
$\lg A A_k \delta^2$	$= 0,929 - 3 \quad (-)$	$A A_k \delta^2 = -0,0085$	$= 0,230 - 2 \quad (+)$
$\lg \frac{1}{\mathfrak{R}}$	$= 0,085$	$\frac{1}{\mathfrak{R}} = 1,217$	$= 0,804 - 1$
$\lg \mathfrak{R}$	$= 0,915 - 1$		$= 0,196$
$\lg A_k$	$= 0,778 \quad (-)$		$= 0,778 \quad (-)$
$\lg \mathfrak{U}_k$	$= 0,693 \quad (-)$	$\mathfrak{U}_k = -4,93 \text{ dptr}$	$= 0,974 \quad (-)$
			$= -9,42 \text{ dptr}$

Man erkennt also die Abnahme des äußeren Akkommodationserfolges beim übersichtigen und die Zunahme beim kurzsichtigen Auge.

Man kann auch besonders leicht aus  $D, = \frac{A}{1 + \delta A}$  in beiden Fällen das Fernbrillenglas  $D,$  bestimmen:

$\lg A$	$= 0,903$		$\lg A$	$= 1,204$
$-\lg(1 + \delta A)$	$= -0,044$		$-\lg(1 + \delta A)$	$= -0,896 \mp 1$
$\lg D,$	$= 0,859$	$D, = +7,22 \text{ dptr}$	$\lg D,$	$= 1,308$
				$D, = -20,3 \text{ dptr}$

### 3. Der Fall der Fernrohrbrillen.

Hier muß die Formel (22)  $\frac{1}{\mathfrak{R}} = (1 + \delta A)^2 + A_k(\delta^2 A - i)$  ohne jede Vernachlässigung verwandt werden. Wir führen die Rechnung wieder für zwei verschiedene Brillen durch, deren eine für ein übersichtiges, deren andere für ein kurzsichtiges Auge bestimmt ist. Für die letzte diene die im Rechenbeispiel X behandelte Brille.



	$A = +5 \text{ dptr}$	$A = -14,6 \text{ dptr}$
	$\delta_{IH} = +0,193 \text{ m}$	$= -0,0192 \text{ m}$
	$H, H', i = +0,140 \text{ m}$	$= -0,0256 \text{ m}$
$\lg \delta_{IH} = 0,286 - 1$		$= 0,283 - 2 (-)$
$\lg A = 0,699$		$= 1,163 (-)$
$\lg \delta A = 0,985 - 1$		$= 0,446 - 1 (+)$
	$\delta A = 0,966$	$= 0,279$
	$1 = 1$	$= 1$
$\lg(1 + \delta A) = 0,294$	$1 + \delta A = 1,966$	$= 0,107$
$\lg(1 + \delta A)^2 = 0,588$		$= 0,214$
	$(1 + \delta A)^2 = 3,87$	$= 1,64$
$\lg \delta^2 A = 0,271 - 1$		$0,729 - 3 (-)$
	$\delta^2 A = 0,187 \text{ m}$	$= -0,0054 \text{ m}$
	$-i = -0,140 \text{ m}$	$\mp 0,0256 \text{ m}$
	$\delta^2 A - i = 0,047 \text{ m}$	$= +0,0202 \text{ m}$

In unsern Fällen also lauten die Ausdrücke für  $1/\mathfrak{R}$ .

$$1/\mathfrak{R} = 3,87 + A_k \cdot 0,047 \text{ m}$$

$$= 1,64 + A_k \cdot 0,02 \text{ m};$$

setzen wir jetzt  $A_k = -6 \text{ dptr}$ , so ergeben sich

$$1/\mathfrak{R} = 3,87 - 0,282 = 3,59$$

$$= 1,64 - 0,12 = 1,52$$

$\lg 1/\mathfrak{R} = 0,555$		
$\lg \mathfrak{R} = 0,445 - 1$		$= 0,182$
$\lg A_k = 0,778 (-)$		$= 0,818 - 1$
$\lg \mathfrak{R}_k = 0,223 (-)$		$= 0,778 (-)$
	$\mathfrak{R}_k = -1,67 \text{ dptr}$	$= 0,596 (-)$
		$= -3,94 \text{ dptr}$

Also in beiden Fällen eine sehr starke Einschränkung der Akkommodationsbreite  $A_k$ .

### XIII. Rechnungen zur Sehschärfe.

#### 1. Die Bestimmung der Winkel $\omega_f$ und $\omega_h$ und ihres Verhältnisses.

Wie schon öfter, sollen auch hier zwei Beispiele, eines für ein übersichtiges und ein anderes für ein kuzsichtiges Auge, gegeben werden. Die Länge  $\alpha$  des (nahen) Gegenstandes sei beidemal  $\alpha = 0,1 \text{ mm} = 0,0001 \text{ m}$ . Ferner sei die Tangente oder der Bogen einer Winkelminute gegeben mit  $\lg 1' = 0,464 - 4$ .

$$A = +5 \text{ dptr}$$

$$A = -8,33 \text{ dptr}$$

a) Die Bestimmung von  $\omega_f = \frac{\alpha}{R\mathfrak{F}} = \frac{\alpha}{RH + H\mathfrak{F}} = \frac{\alpha}{-a - f''}$  (s. S. 95 f. und Abb. 52/53).

$\lg \alpha = 0,000 - 4$	$1/A = a = +0,200 \text{ m}$	$= -0,120 \text{ m}$
$\lg(a + f'') = 0,336 - 1$	$f'' = +0,017 \text{ m}$	$= 0,000 - 4$
	$a + f'' = +0,217 \text{ m}$	$= 0,013 - 1$
$\lg \omega_f = 0,664 - 4$		$= -0,103 \text{ m}$

Man hat nun zu bilden:  $S = \frac{1'}{\omega_f}$ :

$\lg 1' = 0,464 - 4$		
$\lg 1'/\omega_f = 3,336$		$= 0,464 - 4$
$\lg S = 0,800 - 1$	$S = 0,631$	$= 3,013$
		$= 0,477 - 1 = 0,3$

b) Die Bestimmung von  $\omega_h = \frac{\alpha}{OH} = \frac{\alpha}{-a} = -\alpha A$  (S. 103), wonach  $S_n = \frac{1}{\omega_h}$  zu bilden ist.

$\lg \alpha = 0,000 - 4$		
$\lg A = 0,699$		$= 0,000 - 4$
$\lg \omega_h = 0,699 - 4$		$= 0,921$
		$= 0,921 - 4$
$\lg 1' = 0,464 - 4$		$= 0,464 - 4$
		$= 0,464 - 4$
$\lg S_n = 0,765 - 1$	$S_n = 0,582$	$= 0,543 - 1 = 0,349$

Wir bilden nun  $\frac{S}{S_n}$ :

$\lg S = 0,800 - 1$		
$\lg \frac{S}{S_n} = 0,035$		$= 0,477 - 1$
	$\frac{S}{S_n} = 1,085$	$= 0,934 - 1$
		$= 0,859$

c) Die Probe durch (26)  $\frac{S}{S_n} = 1 + \frac{A}{D''}$ ;  $\lg 1/D'' = 0,232 - 2$  (s. z. B. S. 149):

$$\begin{aligned} \lg A &= 0,699 \\ \lg 1/D'' &= 0,232 - 2 \\ \lg A/D'' &= 0,931 - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 0,921 \\ &= 0,232 - 2 \\ &= 0,153 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} \frac{A}{D''} = 0,0853 \\ \frac{1}{1} = 1 \\ \hline \frac{S}{S_n} = 1,0853 \end{array} \quad \begin{array}{r} = -0,142 \\ = 1 \\ \hline = 0,858 \end{array}$$

Die Probe ist also befriedigend ausgefallen. Bestimmt man  $S_n$ , so kann man  $S$  erhalten, wenn man den Wert von  $S_n$  im ersten Falle durch Multiplikation mit 1,085 vergrößert, im zweiten durch Multiplikation mit 0,858 verkleinert.

### 2. Sehschärfenbestimmungen für Brillengläser: $S_r$ .

Die hier auftretende Größe  $\delta_f$  ist nach S. 75  $\delta_f = H'_r \mathfrak{F} = H'_r H + H \mathfrak{F} = \delta - f_r'$ . Setzt man sie, wie im folgenden, mit  $-5$  mm an, so folgt  $-5$  mm  $= \delta - 17,05$  mm:  $\delta = 12,05$  mm.

a) Die Bestimmung des Verhältnisses  $\frac{S}{S_r} = 1 - \delta_f D_r$  (25).

$$\begin{array}{r} D_r = +10 \text{ dptr} \qquad \qquad \qquad D_r = -15 \text{ dptr} \\ \delta_f = -0,005 \text{ m} \qquad \qquad \qquad = -0,005 \text{ m} \\ \delta_f D_r = -0,05 \qquad \qquad \qquad = +0,075 \\ - \qquad \qquad \qquad + \\ \hline \frac{1}{1} = 1 \qquad \qquad \qquad = 1 \\ \hline \frac{S}{S_r} = 1,05 \qquad \qquad \qquad = 0,925 \end{array}$$

Man erkennt also, daß unter unsern Voraussetzungen der etwa an der Probetafel bestimmte  $S_r$ -Wert bei dem Sammelglase mit 1,05 zu multiplizieren, also zu vergrößern, bei dem Zerstreuungsglase mit 0,925 zu multiplizieren, also zu verkleinern ist, wenn man den Wert  $S$  der absoluten Sehschärfe erhalten will. Genaueres sehe man aus dem Schichtenbild auf S. 101.

b) Die Bestimmung von  $\frac{S_n}{S_r} = 1 - \delta D_r$  (27) für dieselben beiden Brillengläser.

$$\begin{array}{r} \delta = 0,01205 \text{ m} \\ \delta D_r = 0,1205 \qquad \qquad \qquad = -0,1807 \\ - \qquad \qquad \qquad - \\ \hline \frac{1}{1} = 1 \qquad \qquad \qquad = 1 \\ \hline \frac{S_n}{S_r} = 0,8795 \qquad \qquad \qquad = 1,1807 \end{array}$$

Dividieren wir mit diesen Beträgen die entsprechenden unter a), so erhalten wir  $\frac{S}{S_r} \cdot \frac{S_r}{S_n} = \frac{S}{S_n}$ .

$$\begin{array}{r} +1 \quad -1 \\ \lg \frac{S}{S_r} = 0,021 \\ \lg \frac{S_n}{S_r} = 0,944 - 1 \qquad \qquad \qquad = 0,966 - 1 \\ - \qquad \qquad \qquad - \qquad \qquad \qquad = 0,072 \\ \hline \lg \frac{S}{S_n} = 0,077 \qquad \qquad \qquad \frac{S}{S_n} = 1,193 \qquad \qquad \qquad = 0,894 - 1 \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad = 0,783 \end{array}$$

c) Zur Gegenprobe dieser Rechnung kann man die unter 1. c) soeben benutzte Formel (26) verwenden, doch muß man aus  $D_r$  erst  $A$  ermitteln [aus  $a = f_r' - \delta$  nach (9)].

$$\begin{array}{r} 1/D_r = f_r' = +0,100 \text{ m} \qquad \qquad \qquad = -0,067 \text{ m} \\ \delta = 0,01205 \text{ m} \qquad \qquad \qquad = 0,01205 \text{ m} \\ - \qquad \qquad \qquad - \\ \hline a = 0,088 \text{ m} \qquad \qquad \qquad = -0,079 \text{ m} \\ \lg a = 0,944 - 2 \qquad \qquad \qquad = 0,898 - 2 (-) \\ \lg A = 1,056 \qquad \qquad \qquad = 1,102 (-) \\ \lg 1/D_r = 0,232 - 2 \qquad \qquad \qquad = 0,232 - 2 \\ \hline \lg \frac{A}{D_r} = 0,288 - 1 \qquad \qquad \qquad = 0,334 - 1 (-) \qquad \qquad \qquad = -0,216 \\ \frac{A}{D_r} = 0,194 \qquad \qquad \qquad = 1 \\ \frac{1}{1} = 1 \qquad \qquad \qquad = 1 \\ \hline \frac{S}{S_n} = 1,194 \qquad \qquad \qquad = 0,784 \end{array}$$

Die mehrfach benutzte Gleichung (26)  $\frac{S}{S_n} = 1 + \frac{A}{D_r}$  erlaubt, Grenzen für den Unterschied zwischen  $S$  und  $S_n$  festzusetzen; so erhält man für 10% Unterschied

	für übersichtige Augen	für kurzsichtige Augen
	$1 + \frac{A}{D''} = 1,1$	$1 + \frac{A}{D''} = 0,9$ , woraus
$\lg A = 0,768$	$A = \frac{D''}{10} = 5,86 \text{ dptr}$	$A = -\frac{D''}{10} = -5,86 \text{ dptr}$
$\lg a = 0,232 - 1$	$a = 0,170 \text{ m}$	$= -0,170 \text{ m}$
	Für den gewöhnlichen $\delta$ -Wert = 0,013 m	
	$\delta = 0,013 \text{ m}$	$= 0,013 \text{ m}$
$\lg f' = 0,262 - 1$	$f' = 0,183 \text{ m}$	$= -0,157 \text{ m}$
$\lg D = 0,738$	$D = 5,47 \text{ dptr}$	$= 0,196 - 1$ $= 0,804$
		$= -6,37 \text{ dptr}$

Man muß also schon bei Brillengläsern mittlerer Stärke auf eine nicht zu vernachlässigende Abweichung zwischen  $S$  und  $S_n$  gefaßt sein.

Die Abhängigkeit der Sehschärfe von der Entfernung der Sehproben ist von R. KIRSCH (1) untersucht worden; er stellte fest, daß bei der Akkommodation die Sehschärfe abnimmt. Der Grund dafür ist wahrscheinlich in Formfehlern der Linse bei der Akkommodation zu suchen. Diese Beobachtung kann auch zur Erklärung der geringen Sehschärfe für die Ferne akkommodierender Hyperopen herangezogen werden.

### XIV. Die Berechnung der Vergrößerung einer Lupe.

Auf S. 112 war darauf hingewiesen worden, daß man setzen kann

$$1 - \delta D_s = \frac{HF_s'}{H_s'F_s'} = \frac{HF_s'}{f_s'}; \quad HF_s' = f_s' - \delta,$$

wo  $HF_s'$  der Abstand zwischen Augenhauptpunkt  $H$  und hinterem Lupenbrennpunkt  $F_s'$  ist. Das Vorzeichen von  $1 - \delta D_s$  ist also positiv oder negativ, je nachdem  $H$  oder  $F_s'$  der Lupe näher liegt (s. Abb. 60/61). Bei schwachen oder mittelstarken Lupen wird, wenn man das Auge der Lupe möglichst nähert,  $HF_s'$  positiv ausfallen. — Wir berechnen den Ausdruck für eine Lupe mit  $D_s = +40 \text{ dptr}$ ;  $\delta = 0,0133 \text{ m}$

$\frac{1}{D_s} = \frac{1}{40 \text{ dptr}} = f_s' = 0,025 \text{ m} = 25 \text{ mm};$	$\delta D_s = 0,532$
$\delta = 0,0133 \text{ m}$	$1 = 1$
$\frac{HF_s'}{H_s'F_s'} = 0,0117 \text{ m}$	$1 - \delta D_s = 0,468$

Untersuchen wir nach dem auf S. 110 mitgeteilten Ausdruck (28)  $\frac{\omega_h}{\alpha_s} = D_s - A(1 - \delta D_s)$  das Vergrößerungsvermögen für

$A = + 8 \text{ dptr}$	$A = 0$	$A = -10 \text{ dptr}$
$A(1 - \delta D_s) = 3,74 \text{ dptr}$	$= 0$	$= - 4,68 \text{ dptr}$
$D_s = 40,0 \text{ dptr}$	$= 40,0 \text{ dptr}$	$= 40,0 \text{ dptr}$
$\frac{\omega_h}{\alpha_s} = 36,26 \text{ dptr}$	$= 40,0 \text{ dptr}$	$= 44,68 \text{ dptr}$

Mithin erhalten wir nach GULLSTRAND (1, 310) in der Mitte das absolute Vergrößerungsvermögen und rechts und links zwei individuelle, nämlich das kleinere für  $A = +8 \text{ dptr}$  und das größere für  $A = -10 \text{ dptr}$ . Dividieren wir diese Zahlen nach S. 116 (30) durch 4 dptr, so erhalten wir in

$\frac{\omega_h}{\omega_s^*} = 9,07$	$= 10,0$	$= 11,17$
--------------------------------------	----------	-----------

die drei konventionellen Vergrößerungszahlen, die den meisten Augenärzten vertrauter sein werden. Auch hier erkennt man den merklichen Einfluß des Wertes von  $A$ , mag er nun allein auf den Brechungsfehler oder auch auf den Akkommodationszustand zurückzuführen sein. — Die hier behandelte mittelstarke Lupe nutzt — ebenfalls nach GULLSTRAND (1, 311) — dem Kurzsichtigen mehr als dem Übersichtigen. Bei starken Lupen [ $(1 - \delta D_s) < 0$ ] würde sich dieses Verhältnis gerade umkehren.

## Die dreistelligen Logarithmen und Antilogarithmen der natürlichen Zahlen.

Die dreistelligen Logarithmen von 10 bis 99 und von 100 bis 129.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.
1	000	041	079	114	146	176	204	230	255	279	22
2	301	322	342	362	380	398	415	431	447	462	15
3	477	491	505	519	531	544	556	568	580	591	11
4	602	613	623	633	643	653	663	672	681	690	9
5	699	708	716	724	732	740	748	756	763	771	7
6	778	785	792	799	806	813	820	826	833	839	6
7	845	851	857	863	869	875	881	886	892	898	5
8	903	908	914	919	924	929	934	940	944	949	5
9	954	959	964	968	973	978	982	987	991	996	4
10	000	004	009	013	017	021	025	029	033	037	4
11	041	045	049	053	057	061	064	068	072	076	3
12	079	083	086	090	093	097	100	104	107	111	3

Die Numeri zu 0 bis 99.

L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.
0	100	102	105	107	110	112	115	117	120	123	3
1	126	129	132	135	138	141	145	148	151	155	3
2	158	162	166	170	174	178	182	186	191	195	5
3	200	204	209	214	219	224	229	234	240	245	6
4	251	257	263	269	275	282	288	295	302	309	7
5	316	324	331	339	347	355	363	372	380	389	9
6	398	407	417	427	437	447	457	468	479	490	11
7	501	513	525	537	550	562	575	589	603	617	14
8	631	646	661	676	692	708	724	741	759	776	18
9	794	813	832	851	871	891	912	933	955	977	23

### Häufiger vorkommende Logarithmen.

$$\lg 1,336 = 0,126; \quad \lg D_{//} = 1,768; \quad \lg 1/D_{//} = \lg D'_{//} = 0,232 - 2.$$

## Die wichtigsten Formeln.

- 1-5) Lage und Größe des Bildes.
1. Die Lagengleichung auf die Hauptpunkte bezogen:  $B = A + D$  . . . . . S. 20
  2. Die Vergrößerung " " " " :  $\alpha A = \beta B$  . . . . . S. 21  
 daraus abgeleitet:  $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{A}{B}$ ;  $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{b}{a}$ .
  3. Der Bildort bei einer brechenden Fläche:  $\frac{n'}{s'} = \frac{n}{s} + \frac{n' - n}{r}$  . . . . . S. 27
  4. Die Vergrößerung abhängig von  $D$  und  $A$ :  $\kappa = \frac{1}{1 + \frac{D}{A}}$  . . . . . S. 30
  5. Die Bildgröße für einen fernen, unter dem Hauptpunktswinkel  $w$  erscheinenden Gegenstand:  
 $-w = \beta D$  oder 5 a:  $\beta = -w f'$ . . . . . S. 33
- 6-8) Zur Zusammensetzung zweier Abbildungen.
6. Die Brechkraft:  $D_{12} = D_1 + D_2 - \delta D_1 D_2$  . . . . . S. 40
  7. Der vordere Hauptpunktverschub:  $h_{12} = \frac{\delta D_2}{D_{12}}$  . . . . . S. 42
  8. Der hintere Hauptpunktverschub:  $h_{12}' = -\frac{\delta D_1}{D_{12}}$  . . . . . S. 42
- 9-11) Brechkraft des Fernbrillenglases und Hauptpunktbrechwert des Auges.
9.  $f_r' = \delta + a$  Brennweite des Fernbrillenglases als abhängig von  $a$  und  $\delta$  . . . . . S. 52
  10.  $D_r = \frac{A}{1 + \delta A}$  Umschreibung der vorstehenden Formel . . . . . S. 53
  11.  $A = \frac{D_r}{1 - \delta D_r}$  Umrechnung der vorstehenden Formel . . . . . S. 53
  - 11 a. Ergänzungformel, aus 10 und 11 abgeleitet:  $(1 + \delta A)(1 - \delta D_r) = 1$  . . . . . S. 54
- 12-13) Scheitelbrechwert  $A_\infty$  des Fernbrillenglases und Hauptpunktbrechwert  $A$  des Auges.
- 12 a.  $s_r' = \delta + a$  Zusammenhang zwischen Schnittweite und Fernpunktsabstand . . . . . S. 58
  - 12 b.  $A_\infty = \frac{A}{1 + \delta A}$  Umschreibung der vorstehenden Formel . . . . . S. 58
  13.  $A = \frac{A_\infty}{1 - \delta A_\infty}$  Umrechnung der vorstehenden Formel . . . . . S. 58
- 14-15) Zur Augenlänge fehlsichtiger Augen.
14.  $b = \frac{1 - \delta D_r}{D_{12}}$  Zusammenhang mit der Brechkraft  $D$ , der Fernbrille und  $\delta$ . . . . . S. 63
  15. Die Änderung  $\bar{A}$  der Achsenlänge des Durchschnittsauges:  $\bar{A} = -n f_r' \frac{D_r}{D_{12}}$  . . . . . S. 66
- 16-17) Andere Ergebnisse der Verbindung von Brille und Auge.
16. Maßstabsänderung, Vergrößerung,  $V = \frac{\beta_{12}}{\beta_r} = \frac{D_r}{D_{12}} = \frac{f_{12}'}{f_r'}$  . . . . . S. 68
  17. Gesamtbrechkraft  $D_{12}$  und Hauptpunktverschübe:  
 $D_{12} = D_r \pm D_r \omega^2$ ; 17 a:  $h_{12} = \frac{\delta}{D_r \omega^2}$  17 b:  $h_{12}' = -\frac{n \delta D_r}{D_r \pm D_r \omega^2}$  . . S. 68, 71, 72  
 $(\pm$  je nachdem der Abstand {kleiner} ist als der  $\delta = f_r'$ , {größer})
- 18-20) Maßstabsänderung, Vergrößerung, verglichen mit dem schematischen Auge.
18.  $V = \frac{D_r}{D_{12}} = \frac{1}{D_r} \cdot \frac{1}{f_r' + a}$  Die Abhängigkeit von  $D_r$ . . . . . S. 73
  19.  $V = \frac{D_r}{D_{12}} = \frac{1 + \delta A}{1 + f_r' A}$  Die Abhängigkeit von  $A$  und  $\delta$  . . . . . S. 75
  20.  $V = \frac{D_r}{D_{12}} = \frac{1}{1 - \delta f_r D_r}$  Die Abhängigkeit von  $D_r$  und  $\delta f_r$ . . . . . S. 75

- 21–23) Formeln zur Akkommodation.
- 21 a. Das Akkommodationsgebiet  $RP = -a + p$  . . . . . S. 82
- 21 b. Die Akkommodationsbreite  $A_k = \frac{1}{p} - \frac{1}{a}$  . . . . . S. 83
- 21 c. Der äußere Akkommodationserfolg  $\mathcal{A}_k = \frac{1}{p} - \frac{1}{v}$  . . . . . S. 87
22. Der äußere Akkommodationserfolg für ein Fernbrillenglas:
- $$\mathcal{A}_k = \frac{A_k}{(1 + \delta A)^2 + A_k (\delta^2 A - i)} . . . . . S. 91$$
23. Das gleiche für dünne Brillengläser:  $\mathcal{A}_k = \frac{A_k}{(1 + \delta A)^2 + A A_k \delta^2}$  . . . . . S. 91
- 24–27) Formeln zur Sehschärfe.
24. Absolute Sehschärfe  $S$  abhängig von  $A$  und  $\alpha$ :  $S = \frac{c}{\omega_f}$ ;  $\omega_f = -\frac{\alpha A}{D_r + A} \cdot D_r$  . . . . . S. 96
25. Verhältnis der relativen zur absoluten Sehschärfe:  $\frac{S_r}{S} = \frac{1}{1 - \delta_f D_r}$ ;  $\frac{S_r}{S} = \frac{1 + \delta A}{1 + f_r' A}$  . . . . . S. 100, 102  
(s. Nr. 19)
26. Verhältnis der absoluten zur natürlichen Sehschärfe:  $\frac{S}{S_n} = 1 + \frac{A}{D_r}$  . . . . . S. 104
27. Verhältnis der natürlichen zur relativen Sehschärfe:  $\frac{S_n}{S_r} = 1 - \delta D_r$  . . . . . S. 105
- 28–30) Das Vergrößerungsvermögen optischer Hilfsmittel.
28. Das Vergrößerungsvermögen:  $\frac{\omega_h}{\alpha_r} = D_r - A(1 - \delta D_r)$  . . . . . S. 110
29. Das absolute Vergrößerungsvermögen (für  $A = 0$ ):  $\left[\frac{\omega_h}{\alpha_r}\right]_{\text{abs}} = D_r$  . . . . . S. 111
30. Die Vergrößerungszahl:  $N = \frac{\omega_h}{\omega^*} = \frac{D_r - A(1 - \delta D_r)}{4 \text{ dptr}}$  . . . . . S. 116

## Sachverzeichnis und Stichworterklärungen.

$A$  siehe Hauptpunktsbrechwert. S. 20.

$a$  = dingseitiger Hauptpunktsabstand,  $1/a = A$  = dingseitiger Hauptpunktsbrechwert (axiale Refraktion). S. 17, 19, 49.

$\alpha_1, \beta_1$  = Ding und Bild der ersten Teilabbildung, Vergrößerung  $\kappa_1 = \frac{\beta_1}{\alpha_1}$ . S. 36.

$\alpha_2, \beta_2$  = Ding und Bild der zweiten Teilabbildung, Vergrößerung  $\kappa_2 = \frac{\beta_2}{\alpha_2}$ . S. 36.

Abbildbare Linien. S. 123.

Absolute Sehschärfe s. unter Sehschärfe.

Absolutes Vergrößerungsvermögen. S. 111.

Achse, optische. S. 8.

Achsenlängenveränderung. S. 64–66.

Achsennaher Raum einer Linse oder Linsenfolge: Bezeichnung für einen deren Achse fadenförmig umgebenden Raum; in ihm liegende Punkte endlicher Entfernung haben eine verschwindende Höhe über der Achse und senden angenähert senkrecht auffallende Strahlen auf die einzelnen Flächen der Linse oder Linsenfolge. Andere Bezeichnungen dafür: paraxialer, fadenförmiger, GAUSSISCHER Raum. S. 10, 25.

Äquatorialebene  $\ddot{A}$  bei der astigmatischen Abbildung S. 125. Bei dem Astigmatismus schiefer Bündel durchdringt sie längs dem Hauptstrahl die Achsenebene unter rechtem Winkel.

Akkommodationsbreite  $1/p - 1/a = A_k$ . S. 83.

Akkommodationsgebiet **RP**. S. 82.

Alterssichtigkeit s. unter Presbyopie.

Ametropisch s. unter fehlsichtig.

Aphakisches s. unter linsenloses Auge.

$A_s, A_\infty$  s. Brechwert. S. 58 (Anmerkung).

Astigmatismus (= Entspitzung) Zustand eines ursprünglich spitzen Strahlenbündels nach der Brechung im allgemeinen. Da dann auf der Bündelachse zwei Brennpunkte  $F'_s$  und  $F'_t$ , der äquatorialen (sagittalen) oder  $s$ - und der meridionalen (tangentialen) oder  $t$ -Strahlen, bestehen mit den in ihnen senkrecht zur Achse und zueinander verlaufenden Brennlinien, so würde man deutlicher von einer doppelschneidenförmigen Entstellung eines ursprünglich spitzen Bündels reden. S. 120–122.

Astigmatismus schiefer Bündel: Der Astigmatismus, der bei schiefer (gegen die Achse schiefer) Auffall von Strahlenbündeln auftritt. S. 5.

Aufrechtes Bild. S. 13.

Augenraum = Dingraum des Auges. S. 50.

Äußere Bezugspunkte. S. 58.

Äußerer Akkommodationserfolg =  $\mathfrak{A}_k =$  Unterschied  $\frac{1}{p} - \frac{1}{r}$  der Kehrwerte von  $r = HR$ , und  $p = HP$ , wobei die Grenzpunkte  $R$ , und  $P$ , des Akkommodationsgebietes im Gegenstandsraum auf den Augenhauptpunkt  $H$  im Bildraum bezogen werden. S. 84.

Austrittswinkel  $i'$ . S. 24.

Axiale Refraktion  $A$ . S. 49.

**B** s. Hauptpunktbrechwert. S. 20.

$b$  = bildseitiger Hauptpunktabstand,  $1/b = B$  bildseitiger Hauptpunktbrechwert S. 17, 19; ist  $a = \infty$ ,  $A = 0$ , so wird  $B = D$  und  $b = f'$  S. 31. Betrachtet man den Augen vorgeschaltete Linsen, so hängt man zur Unterscheidung den Zeiger, an:  $a, A, b, B, D$ . S. 51 Anm.

Bildachse: = Achse des Bildraumes. S. 8 Anm.

Bild- und Dingpunkt sind einander bezüglich der abbildenden Fläche oder Flächenfolge zugeordnet (konjugiert). S. 9.

Bildraum: Der dreifach ausgedehnte Raum, in den das Licht bei der Brechung hinein gelangt (Bezeichnungen, die sich auf den Bildraum beziehen, gestrichen, z. B.  $f'$ ). S. 9.

Bogenmaß:  $\hat{\varphi} =$  die am Einheitskreise ( $r = 1$ ) gemessene Länge des  $\varphi^\circ$  Grade betragenden Bogens  $\hat{\varphi} = \varphi^\circ/57,3^\circ$ .  $\hat{\varphi}$  ist also eine unbenannte Zahl. S. 111.

Brechkraft: Der Kehrwert  $D$  der bildseitigen Brennweite in Luft, also  $D = 1/H'F' = 1/f'$ ; ist positiv bei sammelnden, negativ bei zerstreuen Linsen oder Linsenfolgen. S. 11, 33.

Brechungsgesetz  $n \sin i = n' \sin i'$ . S. 6, 25.

Brechungsindex siehe Brechungsverhältnis.

Brechungsverhältnis =  $n$ : Eine unbenannte Zahl eines bestimmten optischen Mittels gibt für eine bestimmte Farbe (Wellenlänge) das Verhältnis der Lichtgeschwindigkeit im luftleeren Raum zur Geschwindigkeit der Lichtbewegung in diesem Mittel an. Andere Ausdrücke dafür: Brechungsindex, Brechungsvermögen, Brechzahl. S. 6.

Brechungsvermögen siehe Brechungsverhältnis.

Brechungswinkel  $i'$ . S. 24.

Brechwert: Der Kehrwert einer Schnittweite oder eines Abstandes. S. 11, 17.

Besonders wichtige Ausgangspunkte sind die Hauptpunkte  $H, H'$ : dann spricht man von Hauptpunktbrechwerten. S. 20; der Brennpunkt  $\mathcal{F}$  des Auges: dann spricht man von Brennpunktbrechwerten. S. 14 Anm., 97; der Brillenscheitel  $S'$ : dann spricht man von Scheitelbrechwerten<sup>1)</sup>. S. 57. Brechwerte mit  $n$  oder  $n'$  multipliziert sind Luftbrechwerte (reduzierte Brechwerte). S. 27.

Brechzahl siehe Brechungsverhältnis.

Brennpunkt: dem unendlich fernen Achsenpunkt zugeordneter Punkt. Liegt jener im Dingraume, so handelt es sich um den bildseitigen Brennpunkt  $F'$ , liegt jener im Bildraume, so hat man es mit dem dingseitigen (vorderen) Brennpunkte  $\mathcal{F}$  zu tun. Die beiden Brennpunkte sind also nicht einander als Ding- oder Bildpunkt zugeordnet. S. 8–13.

Brennweite (siehe auch unter Brennpunkt); dingseitige Brennweite:  $f = H\mathcal{F}$ , bildseitige Brennweite:  $f = H'F'$ . Befindet sich die brechende Linse oder Linsenfolge in demselben Mittel (meistens Luft) oder handelt es sich um die auf Luft bezogenen Brennweiten, so ist stets  $-f = f'$ . S. 9–13.

**D** = Brechkraft einer Linse, =  $1/f' = -1/f$ . S. 11, 45.

$d$  = Mitteldicke einer Linse mit der Brechzahl  $n$  oder Abstand der zugekehrten Hauptpunkte zweier Flächenfolgen. S. 34, 37, 38, 45.

$\delta = \frac{d}{n}$  = Luftwert der Mitteldicke oder des Abstandes zweier Flächenfolgen. S. 38, 45.

$\Delta$  = Achsenlängenänderung. S. 64–66.

<sup>1)</sup> Entspricht der Scheitelbrechwert der dingseitigen Schnittweite  $s$ , so schreibt man ihn  $A_s$ , entspricht er der dingseitigen Schnittweite  $\infty$  (Fernbrille), so schreibt man ihn  $A_\infty$ .



$\varnothing = S'H =$  Abstand des augenseitigen Brillenscheitels vom vorderen Augenhauptpunkt  $H$ . S. 58.

$\delta = S'S =$  Abstand des augenseitigen Brillenscheitels vom Hornhautscheitel  $S$ . S. 58.

$D_{,,} = 1/f_{,,} = 1/0,01706 \text{ m} = 58,64 \text{ dptr}$ , Brechkraft des Auges, S. 62;  $f_{,,} = -f_{,,} = 0,01706 \text{ m} =$  Luftbrennweite des Auges. S. 64, 135.

$D_{12} = 1/H'_{12}F'_{12} = D_1 + D_2 - \delta D_1 D_2 =$  Brechkraft der Verbindung der Teilbrechkraft  $D_1, D_2$  mit der Hauptpunktsentfernung  $\delta$ . S. 40, s. auch  $h_{12}$  und  $h'_{12}$ . S. 42.

Dimension: a) Messungsrichtung eines mathematischen Gebildes: Punkt hat keine Dimension oder die Dimension 0, Linie hat eine Dimension (Dimension 1, Länge), Ebene hat zwei Dimensionen (Dimension 2, Länge und Breite), unser Raum hat 3 Dimensionen (Dimension 3, Länge, Breite und Tiefe). b) Kurze Bezeichnung für den Bau eines mathematischen Ausdrucks: Länge  $l$ , Flächeninhalt  $l^2$ , Rauminhalt  $l^3$ , Dioptrie  $= 1/l = l^{-1}$ , Geschwindigkeit  $=$  Länge/Zeit  $= l \cdot t^{-1}$  usw.

Dingpunkt siehe Bildpunkt.

Dingraum (Gegenstandraum, Objektraum): Der dreifach ausgedehnte Raum, aus dem das Licht bei der Brechung austritt (Bezeichnungen in Dingraum ungestrichen). S. 9.

Dioptrie abgekürzt dptr; dptr  $= 1/m$  Einheit des auf Luft gebrachten (reduzierten) Brechwertes (Brechwertes in Luft). S. 11.

Divergenz entspricht negativen  $u'$ -Werten S. 12.

dptr  $=$  Dioptrie. S. 11.

Durchgebogene Linsen: Ein aus der optischen Rechenkunst stammender Ausdruck; Linsen, deren Außenkrümmungen nach einem gewissen Gesetz verändert sind. Als solches Gesetz gilt bei der Brille meistens, daß bei der Durchbiegung a) die Brechkraft  $D$ , oder b) der augenseitige Scheitelbrechwert  $A_{\infty}$  den gleichen Wert behält. S. 14, 92.

Durchrechnung einer Flächenfolge. S. 34.

Durchstoßpunkt: Der Punkt, wo eine Fläche von einem Strahl durchstoßen wird (wenn man mit ruhig gehaltenem Kopfe durch ein Glasfenster nach dem Sternenhimmel sieht, kann man die Durchstoßpunkte der Richtungen nach den einzelnen Sternen auf der Scheibe angeben). S. 14, 15.

Einfallslot: Das in dem Einfallspunkt auf der Trennungsfäche errichtete Lot; ist die Trennungsfäche eine Kugel, so ist es der nach dem Einfallspunkt gezogene Radius. S. 6.

Einfallswinkel  $i$ . S. 24.

Eintrittswinkel  $i$ . S. 24.

$\mathcal{F}, F'$  siehe Brennpunkt S. 14.

$\overline{\mathcal{F}}, \overline{F}'$ , = Augenbrennpunkte ( $\overline{F}'$  im Glaskörper). S. 50, 64.

$\mathcal{F}_{12}, F'_{12}$  vorderer (dingseitiger), hinterer (bildseitiger) Brennpunkt einer Verbindung zweier Abbildungen. S. 39.

$f = -f'$  s. Brennweite.

$f'_{12} = H'_{12}F'_{12} = -f_{12} = -H_{12}F_{12} =$  (Luft-)brennweite einer Verbindung zweier Abbildungen. S. 41.

Fadenförmiger Raum s. achsennaher Raum.

Fehlsichtig. S. 51.

Fernbrillenglas. S. 51.

Fernpunkt  $R$ . S. 49, 82.

Flächenfolge. S. 34. Siehe optisches System.

Flächenscheitel: Punkt, an dem die Achse eine (Kugel-)Fläche durchstößt. S. 14.

Besonders wichtig innerer Brillenscheitel  $S'$ , Hornhautscheitel  $S$ . S. 58.

Flächentheorie: Zweig der höheren Mathematik, beschäftigt sich mit den Eigenschaften von Flächen; für die erste Stufe der Optik des Auges in erster Linie wichtig wegen der Lage der Hauptschnitte und der in ihnen geltenden bezüglichen Krümmungen bei astigmatischen Augen. S. 118.

GAUSSISCHER RAUM s. achsennaher Raum.

Geometrie der geraden Linie. S. 7.

Geometrischer Ort: Mathematischer Ausdruck für die Gesamtheit aller Punkte, die eine gegebene Bedingung erfüllen (Beispiel: der Kreis um  $O$  mit dem Radius  $r$  ist der geometrische Ort aller Punkte, die in der Ebene von  $O$  die Entfernung  $r$  haben). S. 18.

Grundpunkte s. unter Brenn-, Haupt-, Knotenpunkte. S. 8ff.

$H, H'$  = Hauptpunkte: siehe dort. S. 13ff.

$H, H'$  = Augenhauptpunkte ( $H'$  auf den Glaskörper bezogen). S. 50.

$H_{12}H'_{12}$  = vorderer (dingseitiger), hinterer (bildseitiger) Hauptpunkt einer Verbindung zweier Abbildungen. S. 41 f.

$h_{12} = H_1H_{12} = \frac{\delta D_2}{D_{12}}$  = vorderer (dingseitiger) Hauptpunktverschub bei der Zusammensetzung zweier Abbildungen. S. 42.

$h'_{12} = H'_2H'_{12} = -\frac{\delta D_1}{D_{12}}$  = hinterer (bildseitiger) Hauptpunktverschub bei der Zusammensetzung zweier Abbildungen. S. 42.

Hauptpunkte nach C. F. GAUSS: Zwei ausgezeichnete, einander als Ding- und Bildpunkt zugeordnete Punkte  $H$  und  $H'$  einer optischen Verbindung. Legt man durch sie die achsensenkrechten Hauptebenen, so sind in ihnen Ding und Bild gleich groß und gleichgerichtet. Sie fallen in Linsenfolgen in ein und demselben Mittel (etwa Glaslinsen in Luft) je mit den Knotenpunkten (siehe diese)  $K$  und  $K'$  zusammen. S. 13.

Hauptpunktstrecke:  $a = HO, b = H'O'$ ; sind sie in einem anderen Mittel als Luft, also etwa solchen mit den Brechzahlen  $n, n'$  gemessen, so sind  $a/n$  und  $b/n'$  die Hauptpunktstrecken in Luft (reduzierte Hauptpunktstrecken), siehe auch Brechwert und Konvergenzen. S. 19, 27, 49.

Hauptpunktbrechwert siehe unter Brechwert. Der Hauptpunktbrechwert des Auges liegt zwischen  $A = 1/HR = 1/a$  für den Fern- und  $P = 1/HP = 1/p$  für den Nahpunkt.  $A$  bezeichnet man auch als axiale Refraktion. S. 49.

Hauptpunktverschub. S. 42, 47, 66, 69, 71. S. auch unter  $h_{12}$  und  $h'_{12}$ .

Hauptschnitte bei der astigmatischen Abbildung. S. 119.

Hypermetropisch s. unter übersichtig.

$i = H, H'$  Entfernung (Interstitium) der beiden Hauptpunkte der Linse  $D$ , S. 85.

Indikatrix = kennzeichnende Schnittspur. S. 119.

Individuelles Vergrößerungsvermögen. S. 111.

Innere Bezugspunkte: die Hauptpunkte der Linsenfolge und des Auges. S. 58.

Invariante s. optische Invariante.

$\varkappa$ : siehe Vergrößerung.

$\varkappa_{12} = \varkappa_1 \cdot \varkappa_2 = \frac{\beta_1}{\alpha_1} \cdot \frac{\beta_2}{\alpha_2}$  (da  $\beta_1 = \alpha_2$ ) =  $\frac{\beta_2}{\alpha_1}$ . S. 36.

Kehrwert (auch reziproker Wert einer Größe  $a$ ): wird gegeben durch  $1/a$  und bezeichnet mit  $A = 1/a$ . S. 11, 17.

Knotenpunkte nach J. B. LISTING: Zwei ausgezeichnete einander als Ding- oder Bildpunkt zugeordnete Punkte  $K$  und  $K'$  einer optischen Verbindung, in denen die Strahlachsenwinkel im Ding- und im Bildraum einander gleich sind  $w = w'$ . Sie fallen für Linsenfolgen in ein und demselben Mittel (etwa Glas-

- linsen in Luft) je mit den Hauptpunkten (siehe diese)  $H$  und  $H'$  zusammen. S. 23.
- Konjugierte Punkte s. unter zugeordnete Punkte.
- Konvergente Strahlen, solche mit positiven  $u$ ,  $u'$ . S. 11.
- Konvergenzen: Die ding- und bildseitigen auf Luft bezogenen Brechwerte (siehe diese), meistens auf die Hauptpunkte bezogen. S. 10, 27.
- Koordinaten  $s$ ,  $u$ ;  $s'$ ,  $u'$  eines Strahls. S. 24.
- Korrigierendes Brillenglas s. unter Fernbrillenglas.
- Kreis geringster Verwirrung S. 121–123.
- Kurzsichtig. S. 50.
- Lichtrichtung von links nach rechts S. 8.
- Linienloses Auge. S. 79.
- Luftabstände, -werte s. unter reduzierte Abstände, reduzierte Konvergenzen, umgekehrtes Bild. S. 27.
- Maßstabsänderung  $D_n/D_{12}$ . S. 75, 77.
- Meridionalebene  $M$  bei der astigmatischen Abbildung. S. 125. Bei dem Astigmatismus schiefer Bündel ist es die Achsenebene.
- Myopisch s. unter kurzsichtig.
- $n$  s. Brechungsverhältnis.
- Nahpunkt  $P$ . S. 82.
- Natürliche Sehschärfe s. unter Sehschärfe.
- Normalstellung des Brillenglases  $\delta = f''$ , S. 64.
- $\omega_f$ ,  $\omega_h$ ,  $\omega_H$  s. unter Sehschärfe.
- Öffnung einer Linsenfolge: a) der Durchmesser der Eintritts- oder der Austrittspupille, b) besser als Öffnungsverhältnis einer Linse zu bezeichnen, das Verhältnis  $\frac{\text{Durchmesser der Eintrittspupille}}{\text{bildseitige Brennweite}} = 2 h/f'$ , in Winkelgraden =  $2 u'$ . S. 10.
- Optische Dichte eines Mittels: Anderer Ausdruck für Brechungsvermögen, Brechzahl, Brechungsindex  $n$ . S. 6.
- Optische Invariante: Ein Ausdruck aus Bezugsstücken der Dingseite, dessen Wert sich nicht ändert, wenn man die entsprechenden Bezugsstücke der Bildseite einsetzt. Hauptsächlichstes Beispiel das Brechungsgesetz  $I = n \cdot \sin i = n' \cdot \sin i'$ . S. 7.
- Optisches System: Die Folge hintereinander auf derselben Achse angeordneter Linsen oder Flächen, z. B. optisches System des Auges = Flächenfolge des Auges. S. 34.
- Paraxialer Raum s. achsennaher Raum.
- Presbyopie. S. 81.
- $R = \text{Punctum remotissimum} = \text{Fernpunkt}$ . S. 49, 82.
- Rechtläufigkeit der optischen Abbildung: Ding und Bild bewegen sich beide mit der Lichtrichtung oder beide gegen sie. S. 13.
- Rechtsichtiges Auge = emmetropisches Auge. S. 51.
- Reduzierte Abstände s. Hauptpunktabstände. S. 27.
- Reduzierte Konvergenzen s. Konvergenzen. S. 27.
- Reell: Im Bildraum soviel wie auffangbar, im Gegenstandsraum soviel wie greifbar. S. 27.
- Relative Sehschärfe s. unter Sehschärfe.
- Reziproker Wert s. Kehrwert.
- Sammellinsen, ihre Brennweiten. S. 9, 10.
- Scheinbare Größe. S. 32.

Scheitelbrechwert  $A_{\infty}$ . S. 57 ff.

Schematisches Auge s. Übersichtsauge.

Schnittstreibe = konvergente Strahlen. S. 129.

Schnittweite:  $s$ ,  $s'$ , auf der Achse gemessene Abstände zwischen Flächenscheitel und dem Ort, wo ein bestimmter Strahl die Achse verläßt oder schneidet. S. 24.

Sehschärfe: absolute Sehschärfe  $S = c/\omega_r$ . S. 93.

natürliche „  $S_n = c/\omega_h$ . S. 103.

relative „  $S_r = c/\omega_H$ . S. 97, 98.

Sphäro-zylindrische Linsen. S. 126.

Stärke einer Linse = Brechkraft einer Linse.

Strahlenbündel: Ein kegelförmiger (bei ferner Spitze zylindrischer), aber stets räumlicher, von geradlinigen Strahlen erfüllter Raum. S. 120.

Strahlenbüschel: Ein winkeltartiger, bei ferner Spitze von zwei parallelen Geraden eingeschlossener, aber stets ebener, von geradlinigen Strahlen erfüllter Raum. S. 120.

Telezentrischer Strahlengang S. 116.

Torische Flächen. S. 127.

$u$ ,  $u'$  = Öffnungswinkel s. unter Öffnung b. S. 10.

Übersichtig. S. 50.

Übersichtsauge: Zu leichterer Übersicht vereinfachtes Auge, in dem Hornhaut und Linsenwirkung unterschieden sind. Am vollkommensten das Übersichtsauge GULLSTRANDS mit genau bestimmten Flächenabständen und dreifacher Kristalllinse. S. 62.

Umgekehrtes Bild. S. 13.

Vergrößerung:  $\kappa = \frac{\beta}{\alpha}$ : eine unbenannte Zahl, das Verhältnis der linearen Bild- zur linearen Gegenstandsgröße (nur anwendbar, wenn Bild und Gegenstand im Endlichen liegen). S. 21, 30. Liegt der Gegenstand  $\alpha$  in der unendlichen Entfernung  $a$ , so ist  $w = \frac{\alpha}{a}$  seine scheinbare Größe, und da bei der Abbildung gilt  $\frac{\alpha}{a} = w = \frac{\beta}{b}$ , so gibt  $\beta = w b$  die Möglichkeit, die Bildgröße zu finden. S. 33.

Vergrößerungsvermögen =  $\frac{\omega'}{\alpha}$ : Eine in Dioptrien zu messende Zahl, die das Verhältnis der scheinbaren Größe  $\omega'$  auf der Bildseite zur linearen Gegenstandsgröße  $\alpha$  ausdrückt. S. 110. Da das Vergrößerungsvermögen den meisten Augenärzten noch ungeläufig ist, so rechnet man es durch Multiplikation mit  $l = 0,25 \text{ m} = 1/4 \text{ dptr}$  in die Vergrößerungszahl  $N = \frac{\omega'}{\alpha \cdot 4 \text{ dptr}}$  um. S. 116.

Virtuell: Im Bildraum soviel wie nicht auffangbar, im Gegenstandsraum soviel wie unwirklich. S. 14, 27.

Vollauge: nach F. SCHOEN das vollständige Auge im Gegensatz zum linsenlosen. S. 62, 79.

Windschiefer Verlauf. S. 119.

Wulstfläche s. unter torische Fläche.

Zerstreuungslinsen, ihre Brennweite. S. 11.

Zugeordnete, d. h. als Ding und Bild einander zugeordnete Punkte. S. 9.

Zylinderlinsen S. 125.

## Namen- und Quellenverzeichnis.

- ABBES Invariante S. 7; Beziehung auf die Brennpunkte S. 14.  
 BRÜCKNER, A. (1), Graphisches Rechnen bei der Brillenverordnung (9. VI.) S. 54, 55, Ber. 43. Vers. Deut. ophth. Ges. Jena 1922. S. 97—101 mit 1 Tfl.  
 BUROWS Lehre von der Brille S. 1.  
 CHAMBLANTSche gekreuzte Zylinder S. 126.  
 CZAPSKI, S. (1), Grundzüge der Theorie der optischen Instrumente nach ABBE. 2. Aufl. unter Mitwirkung des Verfassers und mit Beiträgen von M. VON ROHR herausgegeben von O. EPPENSTEIN. S. 62. Leipzig: J. A. Barth 1904. gr. 8°. XVI, 479 S. mit 176 +. — Auch in Bd. 6 in WINKELMANN'S Handbuch der Physik. 1904.  
 DONDERS, F. C. (1), Die Anomalien der Refraction und Accommodation des Auges. Deutsche Originalausgabe unter Mitwirkung des Verfassers herausgegeben von O. BECKER. Wien: W. Braumüller 1866. XII, 544 S. 8° mit 193 + u. 1 Tfl. S. 1, 3. — Zweiter, nur unwesentlich veränderter Abdruck, in den Seitenzahlen übereinstimmend, von demselben Übersetzer. Wien, W. Braumüller, 1888.  
 DONDERS, seine Lehre von der Brille S. 1, 2; Bestimmung der Akkommodationsbreite S. 83; seine absolute Sehschärfe S. 96.  
 DUPINScher Kegelschnitt S. 119, 120.  
 ERGGELET, H. (1), Über den äußeren Erfolg der Akkommodation bei Brillenträgern (5. VII. 1920). S. 84. Zft. f. ophth. Opt. 1920, Bd. 8, S. 161 bis 173, 3 + (6. XI.).  
 ERGGELET, H. (2), Beobachtungen an der Hornhaut. (Vermessung eines Keratokonus mit dem Stereokomparator.) (9. VI.) S.4. Ber. 43. Vers. Deut. ophth. Ges. Jena 1922. S. 106 bis 109, 2 +.  
 FUKALASche Operation S. 81.  
 GALLAND, P., gekreuzte Zylinder S. 126.  
 GAUSS, C. F. (1), Dioptrische Untersuchungen (10. Dez. 1840). S. 1. Abh. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen. 1838—41. Bd. 1, S. 1—34. — GAUSS' Werke. 2. Abdr. Gött. 1877. Bd. 5, S. 243 bis 276.  
 GAUSS, seine Lehre von der Abbildung S. 1; im achsennahen Raum S. 5; sein erster Fall der dünnen Linse in Luft S. 18ff., 128; sein zweiter Fall der Fläche zwischen zwei verschiedenen Mitteln S. 23ff., 129.  
 v. GRAEFES Abgliederung der Ophthalmologie S. 1.  
 GULLSTRAND, A. (1), Der erste Band der HELMHOLTZ'schen (1) physiologischen Optik. S. 2. 48, 62, 148.  
 GULLSTRAND, A. (2), Einführung in die Methoden der Dioptrik des Auges des Menschen. (Aus dem Handbuch der physiologischen Methodik herausg. v. R. TIGERSTEDT.) Leipzig: S. Hirzel, 1911, 180 S. 8°, 20 +.  
 GULLSTRAND'S Übersichtsauge S. 4, 62, 84; Dioptrienlehre S. 5; Bezeichnung der Dioptrie mit  $dp_{tr}$  S. 11; Beziehung auf die Hauptpunkte S. 14; Bezeichnung der Kehrwerte mit  $A, B, S$  S. 17, 20; Gleichungspaar S. 20 und häufig später; Zurückführung von Strecken und Kehrwerten auf Luft S. 27, 80; Bezeichnung der Brechkraft mit  $D$  S. 28; Wert für die Hornhautwirkung S. 79;

- Änderung der Hauptpunkte bei der Akkommodation S. 82; relative Sehschärfe S. 97ff.; Einführung von *l* und *L* S. 98; natürliche Sehschärfe S. 103; abbildbare Linien S. 123ff.
- v. HELMHOLTZ, H. (1), Handbuch der Physiologischen Optik. S. 1. Dritte Aufl. ergänzt u. herausg. in Gemeinschaft mit Prof. Dr. A. GULLSTRAND u. Prof. Dr. J. v. KRIES von Prof. Dr. W. NAGEL. S. 133. Erster Band. Hamburg und Leipzig: L. Voss 1909. XVI, 376 S. Lex. 8° mit 146 +.
- HELMHOLTZ, seine Lehre von der Brille S. 1; sein Übersichtsauge S. 4.
- HELMHOLTZ-LAGRANGESche Formel S. 15.
- HENKER, O. (1), Einführung in die Brillenlehre. S. 2, 59. Jena: Optikerschule 1921. VI, 325 S. gr. 8°, 338 + u. 1 Tfl.
- HENKERSches Schichtenbild S. 60, 61; Gebiet S. 77, 101, 106.
- HESS, C. (1), Die Refraktion und Akkommodation des menschlichen Auges und ihre Anomalien. (Dez. 1908) S. 2. Handb. d. ges. Augenheilkde. 3. Aufl., Bd. 8., Kap. 12. IX, 618 S. gr. 8° mit 105 + u. 4 Tfln.
- HOFMANN, Fr. Br. (1), Die Lehre vom Raumsinn des Auges. I. Teil. S. 93. Handbuch d. ges. Augenheilkunde I. Teil, 13. Kap.; auch als S.-A. Berlin: Julius Springer 1920.
- HUYGHENS, Gleichungen für die Brille S. 1.
- KEPLERS Beginn einer wissenschaftlichen Brillenkunde S. 1.
- KIRSCH, R. (1), Sehschärfenuntersuchungen mit Hilfe des Visometers von Zeiß. (Zugleich ein Beitrag zur Frage der Lesbarkeit von Druckschriften.) S. 148. Graefes Arch. 1920. Bd. 103. S. 253—279, 6 + (23. XII.).
- LANDOLTScher Ring S. 97.
- LISTING, J. B. (1), Beitrag zur physiologischen Optik. S. 18. Göttinger Studien 1845. Auch als S.-A. Göttingen: Vandenhoeck u. Ruprecht 1845. 61 S. 8° m. 2 Tfln.
- LISTINGS Lehre von den Knotenpunkten S. 1, 23. Übersichtsauge S. 4.
- MÄRTENS, Weiterbildung der Brillenlehre S. 1.
- MAUTHNERS Lehre von der Brille S. 1.
- NAGEL, seine Lehre von der Brille S. 1.
- NEWTONS Formel S. 14, 62.
- v. ROHR, M. (1), Zur Dioptrik des Auges. S. 2, 133. Erg. d. Physiol. v. L. ASHER u. K. SPIRO. 1909. Bd. 8, S. 541—592, 22 +.
- v. ROHR, M. (2), Das Auge und die Brille. S. 2, 132, 136. 2. Aufl. ANuGW 372. Leipzig: B. G. Teubner 1918. 106 S. ff. 8°, 84 + u. 1 Tfl.
- v. ROHR, M. (3), Die Abbildung durch brechende Einzelflächen und durch Folgen zentrierter Flächen. S. 2, 13, 16. Centr.-Ztg. f. Opt. u. Mech. 1920, Bd. 41, S. 31—33, 41—45, 53—56, 22 +. Auch als S.-A. unter dem Titel: Zeichen- und Rechenverfahren für die Bildfindung im achsensnahen Raum. HARTINGS Samml. opt. Aufs. Hft. 1—2. Berlin: Verlag der Centr.-Ztg. f. Opt. u. Mech. 1920. In dieser Schrift wurde der Sonderdruck angeführt.
- v. ROHR, M. (4), Die Brille als optisches Instrument. (Jan. 1921). S. 2, 3, 67, 77, 92, 101, 106, 142. Handb. d. ges. Augenheilkde. 3. Aufl. Auch als S.-A. Berlin: Julius Springer 1921. XIV, 254 S. 112 +.
- SCHOENSche Luftwerte S. 27.
- TSCHERNINGS Übersichtsauge S. 4; dessen Brechkraft S. 62.
- WESSELYSches Keratometer S. 58.
- v. ZEHENDER, seine Lehre von der Brille S. 1.
- ZOTH, O. (1), Augenbewegungen und Gesichtswahrnehmungen. S. 93. NAGELS Physiol. d. Menschen III. 283—437 mit Abb. 34—93. Braunschweig: Fr. Vieweg 1904.

# Handbuch der gesamten Augenheilkunde

Dritte, neubearbeitete Auflage

**Entwicklungsgeschichte des menschlichen Auges.** Von Prof. M. Nußbaum in Bonn. Mit 63 Figuren im Text. (VI u. 104 S.) 1912.

3.50 Goldmark; gebunden 5.50 Goldmark / 0.85 Dollar; gebunden 1.35 Dollar

**Organologie des Auges.** Von Professor A. Pütter in Bonn. Mit 220 Figuren im Text und 25 auf 10 Tafeln. (VII u. 424 S.) 1912.

15 Goldmark; gebunden 17 Goldmark / 3.60 Dollar; gebunden 4.05 Dollar

**Pathologie und Therapie des Linsensystems.** Von Professor C. von Heß in München. Mit 115 Figuren im Text und 21 Figuren auf 3 Tafeln. (XII u. 429 S.) 1911.

13 Goldmark; gebunden 15 Goldmark / 3.10 Dollar; gebunden 3.60 Dollar

**Die Refraktion und Akkommodation des menschlichen Auges und ihre Anomalien.** Von Professor C. von Heß in München. Mit 105 Abbildungen im Text und 4 Tafeln. (IX u. 618 S.) 1910.

Gebunden 19 Goldmark / Gebunden 4.55 Dollar

**Verletzungen des Auges mit Berücksichtigung der Unfallversicherung.**

Von A. Wagenmann, Professor in Heidelberg.

I. Band: Mit 62 Figuren im Text. (XII u. S. 1—890.) 1915.

27 Goldmark; gebunden 29 Goldmark / 6.45 Dollar; gebunden 6.95 Dollar

II. Band: Mit 79 Textfiguren und 2 Tafeln. (VII u. S. 891—1634.) 1921.

23 Goldmark; gebunden 25 Goldmark / 5.50 Dollar; gebunden 6 Dollar

III. Band: Mit 59 Textfiguren. (VII u. S. 1635—2220.) 1924.

36 Goldmark; gebunden 38 Goldmark / 8.60 Dollar; gebunden 9.05 Dollar

**Die sympathische Augenerkrankung.** Von Professor A. Peters in Rostock. Mit 13 Figuren im Text und auf 1 Tafel. (IX u. 294 S.) 1919.

11 Goldmark; gebunden 13 Goldmark / 2.65 Dollar; gebunden 3.15 Dollar

**Die Untersuchungsmethoden.**

Erster Band: Bearbeitet von E. Landolt. Unter Mitwirkung von F. Langenhan. Mit 205 Textfiguren und 5 Tafeln. (VII u. 507 S.) 1920.

19 Goldmark; gebunden 21 Goldmark / 4.55 Dollar; gebunden 5 Dollar

Zweiter Band: **Die Lehre von den Pupillenbewegungen.** Von Dr. Carl Behr, o. ö. Professor der Augenheilkunde an der Hamburgischen Universität. Mit 34 Textfiguren. (VIII u. 222 S.) 1924. 16.50 Goldmark / 3.95 Dollar

Gleichzeitig erschien von dem 2. Band unter dem gleichen Titel eine Sonderausgabe zu demselben Preise.

**Beziehungen der Allgemeinleiden und Organerkrankungen zu Veränderungen und Krankheiten des Sehorganes.** Von Prof. A. Groenouw in Breslau. Abteilung IA: Erkrankungen der Atmungs-, Kreislaufs-, Verdauungs-, Harn- und Geschlechtsorgane, der Haut und der Bewegungsorgane. Abschnitt I—VII. Abteilung IB: Konstitutionsanomalien, erbliche Augenkrankheiten und Infektionskrankheiten. Abschnitt VIII—X. Mit 93 Figuren im Text und 12 Tafeln. (XVII u. 1361 S.) 1920.

44 Goldmark; gebunden 47 Goldmark / 10.50 Dollar; gebunden 11.20 Dollar

**Die Krankheiten der Augenlider.** Von Professor L. Schreiber in Heidelberg. Dritte Auflage unter Zugrundelegung der J. v. Michelschen Darstellung. Mit 139 Abbildungen. (624 S.) 1924.

48 Goldmark; gebunden 49 Goldmark / 11.45 Dollar; gebunden 11.80 Dollar

Verlag von Julius Springer in Berlin W 9

---

## Handbuch der gesamten Augenheilkunde Dritte Auflage

Ferner:

### Augenärztliche Operationslehre

Bearbeitet von

Th. Axenfeld-Freiburg i. Br., A. Birch-Hirschfeld-Königsberg i. Pr., R. Cords-Köln,  
A. Elschmig-Prag, B. Fleischer-Erlangen, A. Franke-Hamburg, K. Grunert-Bremen,  
O. Haab-Zürich, L. Heine-Kiel, J. van der Hoeve-Leiden, J. Igersheimer-Göttingen,  
H. Köllner-Würzburg, H. Kuhnt-Bonn, R. Kümmell-Hamburg, G. Lenz-Breslau,  
A. Linck-Königsberg i. Pr., W. Löhlein-Greifswald, A. Löwenstein-Prag, A. Peters-  
Rostock, C. H. Sattler-Königsberg i. Pr., H. Schloffer-Prag, K. Wessely-Würzburg

Herausgegeben von

**A. Elschmig**

Mit 1142 Textfiguren

Zwei Bände. (XIV u. 2241 S.)

1922

80 Goldmark; gebunden 84 Goldmark / 19,10 Dollar; gebunden 20 Dollar

---

## Die Brille als optisches Instrument

Von

Professor Dr. phil. **M. von Rohr**  
wissenschaftlicher Mitarbeiter bei Carl Zeiß in Jena

Mit 112 Textabbildungen

(XIV u. 254 S.) 1921

8 Goldmark; gebunden 10 Goldmark / 1,95 Dollar; gebunden 2,40 Dollar

---

## Die binokularen Instrumente

Nach Quellen und bis zum Ausgang von 1910

bearbeitet von

Dr. phil. **Moritz von Rohr**

wissenschaftlicher Mitarbeiter der Optischen Werkstätte von Carl Zeiß in Jena  
und a. o. Professor an der Universität Jena

Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage

(Zweiter Band der „Naturwissenschaftlichen Monographien und Lehrbücher“.  
Herausgegeben von der Schriftleitung der „Naturwissenschaften“)

Mit 136 Textabbildungen

(XVII und 303 S.) 1920

8 Goldmark; gebunden 11 Goldmark / 1,95 Dollar; gebunden 2,65 Dollar



Verlag von Julius Springer in Berlin W 9

---

**Die Mikroskopie des lebenden Auges.** Von Professor Dr. Leonhard Koepe, Privatdozent für Augenheilkunde an der Universität Halle a. S., Professor h. c. für Augenheilkunde der Universität Madrid.

Erster Band: **Die Mikroskopie des lebenden vorderen Augenabschnittes im natürlichen Lichte.** Mit 62 Textabbildungen, 1 Tafel und 1 Porträt. (IX u. 310 S.) 1920. 23 Goldmark / 5.50 Dollar

Zweiter Band: **Die Mikroskopie der lebenden hinteren Augenhälfte im natürlichen Lichte** nebst Anhang: Die Spektroskopie des lebenden Auges an der Gullstrandschen Spaltlampe. Mit 42 zum Teil farbigen Textabbildungen. (VI u. 122 S.) 1922. 8.40 Goldmark / 2 Dollar

---

**Grundriß der Augenheilkunde für Studierende.** Von Professor Dr. F. Schieck, Geheimer Medizinalrat, Direktor der Universitäts-Augenklinik in Halle a. S. Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 125 zum Teil farbigen Textabbildungen. (IV u. 174 S.) 1922.

Gebunden 6.50 Goldmark / Gebunden 1.55 Dollar

---

**Syphilis und Auge.** Von Professor Dr. Josef Igersheimer, Oberarzt an der Universitätsaugenklinik zu Göttingen. Mit 150 zum Teil farbigen Abbildungen. (XVI u. 625 S.) 1919. 31 Goldmark / 7.40 Dollar

---

**Die Krankheiten des Auges** im Zusammenhang mit der inneren Medizin und Kinderheilkunde. Von Professor Dr. L. Heine, Geheimer Medizinalrat, Direktor der Universitäts-Augenklinik Kiel. Mit 219 zum größten Teil farbigen Textabbildungen. (Aus „Enzyklopädie der klinischen Medizin“. Spezieller Teil.) (XX u. 540 S.) 1921. 21 Goldmark / 5 Dollar

---

**Der Augenhintergrund bei Allgemeinerkrankungen.** Ein Leitfaden für Ärzte und Studierende. Von Dr. med. H. Köllner, a. o. Professor an der Universität Würzburg. Mit 47 größtenteils farbigen Textabbildungen. (VI u. 185 S.) 1920.

11.50 Goldmark; gebunden 13.40 Goldmark / 2.75 Dollar; gebunden 3.20 Dollar

---

**Die augenärztliche Therapie.** Ein Leitfaden für Studierende und Ärzte. Von Dr. Ernst Franke, fr. a. o. Professor der Augenheilkunde und Leiter der 2. Augenklinik an der Universität Hamburg, Augenarzt in Kolberg. (VI u. 139 S.) 1924. 4.80 Goldmark / 1.15 Dollar

---

**Goethes und Schopenhauers Stellung in der Geschichte der Lehre von den Gesichtsempfindungen.** Rektoratsrede anlässlich der 340. Stiftungsfeier der Universität Würzburg gehalten in der Aula am 11. Mai 1922 von Dr. Karl Wessely, Professor der Augenheilkunde. (43 S.) 1922.

1 Goldmark / 0.25 Dollar

---

Verlag von J. F. Bergmann in München

---

**Tafeln zur binokularen Untersuchung des Gesichtsfeldzentrums** vermittelt des Stereoskops. Von Dr. Ernst Haitz, Augenarzt in Mainz. Dritte Auflage. (16 Seiten Text und 7 Tafeln.) 1923. 2 Goldmark / 0.50 Dollar

**Grundzüge der Lehre vom Lichtsinn.** Von Ewald Hering †, Professor in Leipzig. (Sonderabdruck aus „Handbuch der Augenheilkunde“. 2. Auflage. I. Teil. XII. Kapitel.)

1. Lieferung. Mit Figur 1—13 und Tafel I. (Bogen 1—5.) 1905.  
2 Goldmark / 0.50 Dollar
2. Lieferung. Mit Figur 14—33 und Tafel II und III. (Bogen 6—10.)  
1907.  
2 Goldmark / 0.50 Dollar
3. Lieferung. Mit Figur 34—65. (Bogen 11—15.) 1911.  
2 Goldmark / 0.50 Dollar
4. (Schluß-)Lieferung. Mit Figur 66—77 im Text. (Bogen 16—19. V u. S. 241—294.) 1920.  
2.30 Goldmark / 0.55 Dollar

**Die Lehre vom Raumsinn des Auges.** Von Franz Bruno Hofmann, Professor an der Universität Marburg. Erster Teil. Mit 78 Textfiguren und 1 Tafel. (III u. 213 S.) 1920.  
7.50 Goldmark / 1.80 Dollar

**Der vestibuläre Nystagmus** und seine Bedeutung für die neurologische und psychiatrische Diagnostik. Von Professor Dr. M. Rosenfeld, Oberarzt der Psychiatrischen und Nervenkl. zu Straßburg i. E. (III u. 57 S.) 1911.  
2.40 Goldmark; gebunden 3.20 Goldmark / 0.60 Dollar; gebunden 0.75 Dollar

**Dr. W. Hausmanns 26 Stereoskopenbilder** zur Prüfung auf binokulares Sehen und zu Übungen für Schielende. Mit einführenden Bemerkungen. Von Dr. med. A. Bielschowsky, Professor an der Universität Marburg. Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage. 1913.  
2.60 Goldmark / 0.65 Dollar

**Analytische Studien an Buchstaben und Zahlen zum Zweck ihrer Verwertung für Sehschärfe-Prüfungen.** Von San.-Rat Dr. L. Wolffberg, Augenarzt in Breslau. (Sonderabdruck aus v. Graefes Archiv für Ophthalmologie, LXXVII. Band, 3. Heft.) Mit 17 Figuren im Text und 7 Tafeln zur Sehschärfeprüfung. (III u. 67 S.) 1911.  
4 Goldmark / 0.95 Dollar

**Bilderbuch** zur Sehschärfe-Prüfung von Kindern und Analphabeten. Von San.-Rat Dr. L. Wolffberg, Augenarzt in Breslau. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 2 Tafeln. (IV S. u. 11 Bl. mit Figuren.) 1914.  
3 Goldmark / 0.75 Dollar

**Sehproben-Tafeln.** Von Obergeneralarzt Prof. Dr. und Dr. phil. hon. c. Berthold v. Kern. Fünfte, neubearbeitete Auflage. 8 Tafeln und Text. In einer Mappe. 1919.  
5.50 Goldmark / 1.35 Dollar

**Beiträge zum Blindenbildungswesen.** Von Professor Dr. A. Bielschowsky, Direktor der Universitäts-Augenkl. und der Blinden-Studien-Anstalt in Marburg (Lahn). Heft 1. Zugleich erster Jahresbericht der Hochschulbücherei, Studienanstalt und Beratungsstelle für blinde Akademiker e. V. Mit 3 Textabbildungen und 8 Tafeln. (61 S.) 1918.  
2.80 Goldmark / 0.70 Dollar

**Blindenwesen und Kriegsblindenfürsorge.** Ein Vortrag. Von Professor Dr. A. Bielschowsky, Direktor der Universitäts-Augenkl. zu Marburg. Mit 5 Abbildungen. (31 S.) 1916.  
1 Goldmark / 0.25 Dollar

**Tier-Augenheilkunde.** Von Dr. G. Schleich, o. ö. Professor an der Universität Tübingen, früher an der Tierärztlichen Hochschule Stuttgart. (Bildet zugleich Kapitel XXI von Graefe-Saemisch, Handbuch der gesamten Augenheilkunde. Zweite Auflage.) Mit 3 Textfiguren. (VIII u. 239 S.) 1922.  
Gebunden 8.50 Goldmark / 2.05 Dollar