

## Zur Einführung.

Die Werkstattbücher behandeln das Gesamtgebiet der Werkstatttechnik in kurzen selbständigen Einzeldarstellungen; anerkannte Fachleute und tüchtige Praktiker bieten hier das Beste aus ihrem Arbeitsfeld, um ihre Fachgenossen schnell und gründlich in die Betriebspraxis einzuführen.

Die Werkstattbücher stehen wissenschaftlich und betriebstechnisch auf der Höhe, sind dabei aber im besten Sinne gemeinverständlich, so daß alle im Betrieb und auch im Büro Tätigen, vom vorwärtsstrebenden Facharbeiter bis zum leitenden Ingenieur, Nutzen aus ihnen ziehen können.

Indem die Sammlung so den einzelnen zu fördern sucht, wird sie dem Betrieb als Ganzem nutzen und damit auch der deutschen technischen Arbeit im Wettbewerb der Völker.

### Bisher sind erschienen:

- Heft 1: Gewindeschneiden. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. Von Oberingenieur O. M. Müller.
- Heft 2: Meßtechnik. Dritte, verbesserte Auflage. (15.—21. Tausend.) Von Professor Dr. techn. M. Kurrein.
- Heft 3: Das Anreißen in Maschinenbauwerkstätten. Zweite, völlig neubearbeitete Auflage. (13.—18. Tausend.) Von Ing. Fr. Klautke.
- Heft 4: Wechselläderberechnung für Drehbänke. (7.—12. Tausend.) Von Betriebsdirektor G. Knappe.
- Heft 5: Das Schleifen der Metalle. Zweite, verbesserte Auflage. Von Dr.-Ing. B. Buxbaum.
- Heft 6: Teilkopfarbeiten. (7.—12. Tausend.) Von Dr.-Ing. W. Pockrandt.
- Heft 7: Härten und Vergüten. 1. Teil: Stahl und sein Verhalten. Dritte, verbess. u. vermehrte Aufl. (18.—24. Tsd.) Von Dr.-Ing. Eugen Simon.
- Heft 8: Härten und Vergüten. 2. Teil: Praxis der Warmbehandlung. Dritte, verbess. u. vermehrte Aufl. (18.—24. Tsd.) Von Dr.-Ing. Eugen Simon.
- Heft 9: Rezepte für die Werkstatt. 2. verbess. Aufl. (11.—16. Tsd.) Von Dr. Fritz Spitzer.
- Heft 10: Kupolofenbetrieb. 2. verbess. Aufl. Von Gießereidirektor C. Irresberger.
- Heft 11: Freiformschmiede. 1. Teil: Technologie des Schmiedens. — Rohstoffe der Schmiede. Von Direktor P. H. Schweißguth.
- Heft 12: Freiformschmiede. 2. Teil: Einrichtungen und Werkzeuge der Schmiede. Von Direktor P. H. Schweißguth.
- Heft 13: Die neueren Schweißverfahren. Zweite, verbesserte u. vermehrte Auflage. Von Prof. Dr.-Ing. P. Schimpke.
- Heft 14: Modelltschlererei. 1. Teil: Allgemeines. Einfachere Modelle. Von R. Löwer.
- Heft 15: Bohren. Von Ing. J. Dinnebier.
- Heft 16: Reiben und Senken. Von Ing. J. Dinnebier.
- Heft 17: Modelltschlererei. 2. Teil: Beispiele von Modellen und Schablonen zum Formen. Von R. Löwer.
- Heft 18: Technische Winkelmessungen. Von Prof. Dr. G. Berndt. Zweite, verbesserte Aufl. (5.—9. Tausend.)
- Heft 19: Das Gußeisen. Von Ing. Joh. Mehrstens.
- Heft 20: Festigkeit und Formänderung. I: Die einfachen Fälle der Festigkeit. Von Dr.-Ing. Kurt Lachmann.
- Heft 21: Einrichten von Automaten. 1. Teil: Die Systeme Spencer und Brown & Sharpe. Von Ing. Karl Sachse.
- Heft 22: Die Fräser. Von Ing. Paul Zieting.
- Heft 23: Einrichten von Automaten. 2. Teil: Die Automaten System Gridley (Einspindel) u. Cleveland u. die Offenbacher Automaten. Von Ph. Kelle, E. Gothe, A. Kreil.
- Heft 24: Stahl- und Temperguß. Von Prof. Dr. techn. Erdmann Kothny.
- Heft 25: Die Ziehtchnik in der Blechbearbeitung. Von Dr.-Ing. Walter Sellin.
- Heft 26: Räumen. Von Ing. Leonhard Knoll.
- Heft 27: Einrichten von Automaten. 3. Teil: Die Mehrspindel-Automaten. Von E. Gothe, Ph. Kelle, A. Kreil.
- Heft 28: Das Lüten. Von Dr. W. Burstyn.
- Heft 29: Kugel- und Rollenlager (Wälzlager). Von Hans Behr.
- Heft 30: Gesunder Guß. Von Prof. Dr. techn. Erdmann Kothny.
- Heft 31: Gesenkeshmiede. 1. Teil: Arbeitsweise und Konstruktion der Gesenke. Von Ph. Schweißguth.
- Heft 32: Die Brennstoffe. Von Prof. Dr. techn. Erdmann Kothny.
- Heft 33: Der Vorrichtungsbau. I: Einteilung, Einzelheiten u. konstruktive Grundsätze. Von Fritz Grünhagen.
- Heft 34: Werkstoffprüfung (Metalle). Von Prof. Dr.-Ing. P. Riebensahm und Dr.-Ing. L. Traeger.

Fortsetzung des Verzeichnisses der bisher erschienenen sowie Aufstellung der in Vorbereitung befindlichen Hefte siehe 3. Umschlagseite.

Jedes Heft 48—64 Seiten stark, mit zahlreichen Textabbildungen.

**WERKSTATTBÜCHER**  
**FÜR BETRIEBSBEAMTE, VOR- UND FACHARBEITER**  
**HERAUSGEGEBEN VON DR.-ING. EUGEN SIMON, BERLIN**

HEFT 47

# Zahnräder

Erster Teil

Aufzeichnen und Berechnen

Von

Dr.-Ing. Georg Karrass

Mit 106 Abbildungen im Text



**Berlin**  
Verlag von Julius Springer  
1932

**ISBN-13: 978-3-7091-5214-0    e-ISBN-13: 978-3-7091-5362-8**  
**DOI: 10.1007/978-3-7091-5362-8**

## Inhaltsverzeichnis.

|                                                                                 | Seite |
|---------------------------------------------------------------------------------|-------|
| I. Grundbegriffe und Bezeichnungen . . . . .                                    | 3     |
| II. Die Zahnformen . . . . .                                                    | 7     |
| III. Die Zykloidenverzahnung . . . . .                                          | 9     |
| IV. Die Evolventenverzahnung . . . . .                                          | 11    |
| V. Eigenschaften der Evolventenzahnräder . . . . .                              | 13    |
| VI. Zahnradherstellung . . . . .                                                | 13    |
| VII. Grenzzahnezahlen der Evolventenverzahnung . . . . .                        | 15    |
| VIII. Überdeckungsgrad, Zahndruck, Achsdruck . . . . .                          | 21    |
| IX. Die Wahl des Eingriffwinkels . . . . .                                      | 22    |
| X. Stirnräder mit Schraubenzahnen . . . . .                                     | 23    |
| XI. Pfeilzähne, Zahnradumformer . . . . .                                       | 26    |
| XII. Kegelräder (für sich schneidende Achsen) . . . . .                         | 27    |
| XIII. Herstellung der Kegelräder . . . . .                                      | 29    |
| XIV. Zahnräder für sich kreuzende (windschiefe) Achsen . . . . .                | 30    |
| XV. Schneckenverzahnung . . . . .                                               | 32    |
| XVI. Die Kräfte und ihre Aufnahme am Schneckengetriebe . . . . .                | 34    |
| XVII. Wirkungsgrad der Schneckengetriebe . . . . .                              | 36    |
| XVIII. Grundlagen der Festigkeitsberechnung der Stirn- und Kegelräder . . . . . | 38    |
| XIX. Berechnung nach einer Charakteristik . . . . .                             | 42    |
| XX. Teilung und Modul der Schnecken . . . . .                                   | 45    |
| XXI. Konstruktionsangaben der Stirnräder . . . . .                              | 46    |
| XXII. Gewichte und Trägheitsmomente der Stirnräder . . . . .                    | 49    |
| XXIII. Konstruktion der Schneckengetriebe . . . . .                             | 50    |
| XXIV. Sonderverzahnung mit Profilabdruckung . . . . .                           | 52    |
| XXV. Berechnungsbeispiele . . . . .                                             | 55    |

# I. Grundbegriffe und Bezeichnungen.

Zähne sind regelmäßige Vorsprünge an Rädern zur Übertragung der Bewegung. Nach der Lage der Wellen zueinander sind verschiedene Grundformen für die Räder erforderlich.

Grundformen der Zahnräder.

Wenn das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_1$  des treibenden und  $\omega_2$  des getriebenen Rades gleichförmig bleibt, ergeben sich kreisförmige Umdrehungskörper (Kreiszyylinder, Kreiskegel, Rotationshyperboloid). Bei einem periodischen Wechsel der Winkelgeschwindigkeiten ergeben sich elliptische Grundkörper (elliptischer Zylinder, ellipt. Kegel, ellipt. Hyperboloid).

| Lage der Wellen | Grundform   | Ausführung der Zahnräder        |
|-----------------|-------------|---------------------------------|
| parallel        | Zylinder    | Stirnräder                      |
| sich schneidend | Kegel       | Kegelräder                      |
| sich kreuzend   | Zylinder    | zyl. Schraubenräder, Schnecke   |
|                 | Hyperboloid | hyperboloidische Schraubenräder |

Die einfachste Zahnform ist die der Stirnräder mit geraden Zähnen auf einem Kreiszyylinder als Grundform. Die Bedingung ist gleiches Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten, d. h.  $\omega_1 : \omega_2 = \text{const.}$  Wenn die treibende Welle (im folgenden mit dem Index „1“) konstante Winkelgeschwindigkeit hat,

hat auch die getriebene Welle „2“ konstante Winkelgeschwindigkeit. Wenn (entsprechend Abb. 1) im Berührungspunkt  $A$  die Bewegung übertragen wird, sind bei den Entfernungen  $\rho_1$  und  $\rho_2$  von den Mittelpunkten  $M_1$  und  $M_2$  die Geschwindigkeiten in tangentialer Richtung (d. h.  $\perp$  zu  $\rho_1$  und  $\rho_2$ )  $v_1 = \omega_1 \rho_1$  und  $v_2 = \omega_2 \rho_2$ . Im Berührungspunkt haben die beiden Kurven eine gemeinsame Tangente  $TAT$  und senkrecht dazu eine gemeinsame Normale  $N_1AN_2$ . Die Geschwindigkeiten werden zerlegt in Richtung der Tangente und der Normalen. Die Geschwindigkeiten  $c$  in der Richtung der Normalen müssen gleich sein, d. h.  $c_1 = c_2$ . Wäre  $c_1 < c_2$ , würde das Rad „2“ dem Rad „1“ davonlaufen, wäre  $c_1 > c_2$ , müßte Rad „1“ in Rad „2“ eindringen. Im Dreieck  $M_1AN_1$  und dem aus  $c_1$  und  $v_1$  gebildeten stehen die Seiten rechtwinklig aufeinander. Daher sind die Dreiecke ähnlich und es ist:

$$\frac{c_1}{v_1} = \frac{r_1}{\rho_1}; \quad c_1 = v_1 \frac{r_1}{\rho_1} = \omega_1 r_1; \quad \text{ebenso ist im Dreieck}$$

$$M_2AN_2 \text{ und dem aus } c_2 \text{ und } v_2 \text{ gebildeten: } \frac{c_2}{v_2} = \frac{r_2}{\rho_2}; \quad c_2 = v_2 \cdot \frac{r_2}{\rho_2} = \omega_2 \cdot r_2.$$

$$\text{Da nun } c_1 = c_2 \text{ ist, ist auch } \omega_1 \cdot r_1 = \omega_2 \cdot r_2 \text{ und } \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}.$$

Ist  $C$  der Schnittpunkt der gemeinsamen Normalen im Berührungspunkt  $A$  mit der Mittenlinie  $M_1M_2$ , sind die beiden Dreiecke  $CM_1N_1$  und  $CM_2N_2$  ähnlich.

Es ist daher:  $\frac{M_2C}{M_1C} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \text{const} = \frac{R_2}{R_1}$ ; hiermit ist  $\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$  und allgemein  $\omega R = \text{const.}$  Daraus ergibt sich das allgemeine Verzahnungsgesetz: Für jeden beliebigen Berührungspunkt ( $A$ ) muß die ge-

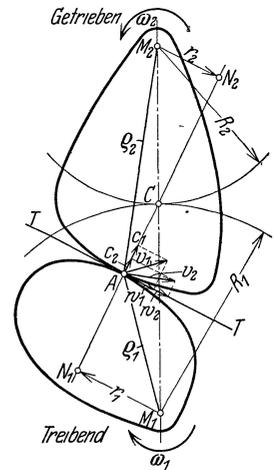


Abb. 1. Übertragung durch Hebelpaar.

meinsame Normale auf beiden Zahnkurven stets durch denselben Punkt der Mittenlinie ( $C$ ) gehen, der entsteht, wenn die Mittenlinie im umgekehrten Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten geteilt wird.

Die durch  $C$  um  $M_1$  und  $M_2$  gelegten Kreise mit den Radien  $R_1$  und  $R_2$ , die sich bei der Drehung stets berühren, heißen „Wälzkreise“. Die Umfangsgeschwindigkeit im Wälzkreis,  $v$  [m/s] =  $\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$ , ist für beide Räder gleich. Die Wälzkreise werden fast immer als „Teilkreise“ für die Herstellung benutzt.

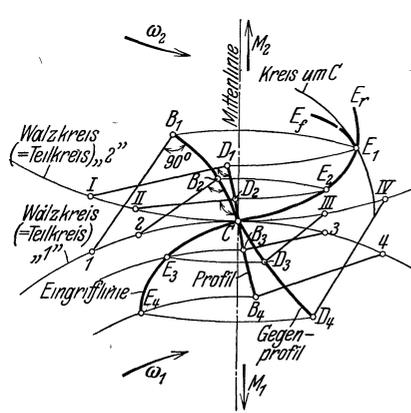


Abb. 2. Eingriffslinie und Gegenprofil eines gegebenen Zahnprofils.

Eine Ausnahme hiervon bildet die Herstellung von Zahnrädern nach dem Wälzverfahren mit Profilabrückung. In der gemeinsamen Tangente  $TAT$  gleiten die Zähne aufeinander. Die Relativgeschwindigkeit des Gleitens  $w_2 - w_1$  gibt ein Maß für die Abnutzung an jeder Stelle des Zahns. Zu einem als gezeichnete Kurve  $B_1 B_2 C B_3 B_4$  gegebenen Zahnprofil (Abb. 2) kann hiernach das Gegenprofil gezeichnet werden: Gegeben sind die durch  $M_1, M_2, C$  festgelegten Wälzkreise, die mit den Teilkreisen zusammenfallen. Der Punkt  $B_1$  bewegt sich auf einem Kreise um  $M_1$ , der senkrechte Abstand der Normalen bis zum Wälzkreis ergibt sich zu  $\overline{B_1 I}$ . Die Normale im Berührungspunkt  $E_1$  muß durch den Punkt  $C$  gehen, daher

st  $\overline{CE_1} = \overline{B_1 I}$ . In diesem Punkte  $E_1$ , der sich aus den Kreisen mit  $\overline{B_1 M_1}$  um  $M_1$  und mit  $\overline{B_1 I}$  um  $C$  ergibt, geht die Berührung des Punktes  $B_1$  mit dem Gegenprofil vor sich. Ebenso sind  $E_2$  mit den Radien  $\overline{B_2 M_1}$  und  $\overline{B_2 I} = \overline{E_2 C}$  und die Punkte  $E_3$  und  $E_4$  zu konstruieren. Die Kurve  $E_1 E_2 C E_3 E_4$ , auf der die Berührung der Profile vor sich geht, heißt „Eingriffslinie“. Der mit  $B_1$  in  $E_1$  zur Berührung kommende Punkt  $D_1$  des Gegenprofils bestimmt sich dadurch, daß  $E_1$  auch ein Punkt des Rades „2“ ist.  $E_1$  hat sich auf einem Kreise durch  $E_1$  um  $M_2$  bewegt. Infolge des Abrollens der Wälzkreise aufeinander ist der Punkt  $C$  auf dem Wälzkreis um  $M_2$  ebenfalls um das Stück  $\widehat{C I}$  gewandert. Als die Punkte  $C$  und  $B_1$  sich noch nicht gedreht hatten, befand sich  $C$  also an der Stelle  $I$  ( $\widehat{C I} = \widehat{C I}$ ). Der Abstand  $\overline{I D_1}$  ist die Normale auf dem Gegenprofil. Es ist um  $I$  ein Kreis mit  $\overline{B_1 I}$  zu schlagen, der  $D_1$  ergibt. Bei der Drehung decken sich dann  $\overline{B_1 I}$  und  $\overline{D_1 I}$  in  $E_1 C$ ; ebenso ist  $D_2$  ( $\widehat{C II} = \widehat{C 2}$ ;  $\overline{D_2 II} = \overline{B_2 2}$ ),  $D_3$  und  $D_4$  zu konstruieren.  $D_1 D_2 C D_3 D_4$  ist das „Gegenprofil“. Das Gegenprofil kann auch ohne Bestimmung der Eingriffslinie konstruiert werden, wenn um  $I, II, III, IV$  Kreise mit  $\overline{B_1 I}, \overline{B_2 2}, \overline{B_3 3}, \overline{B_4 4}$  geschlagen werden. Die Einhüllende dieser Kreise steht senkrecht auf den Radien und ergibt ebenfalls das Gegenprofil.

Damit zwei Räder richtig miteinander kämten (Abb. 3) müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

1. Der Abstand des Punktes  $C$  eines Zahnes bis zum Punkte  $C_1$  des nächsten Zahnes muß in beiden Rädern gleich sein (gleiche Teilung in den Wälzkreisen).
2. Es muß mindestens je ein Zahnpaar stets im Eingriff sein.
3. Die Eingriffslinien beider Zahnprofile ( $E_1 E_2 C E_3 E_4$  in Abb. 2) müssen sich decken. Der beim Abrollen tatsächlich benutzte Teil der Eingriffslinie ist die „Eingriffstrecke“

*ACE*. 4. Der Eingriffpunkt darf nie zurücklaufen. Eine Eingrifflinie, die (wie in Abb. 2) in der Form  $E_1E_f$  hinter dem um  $C$  geschlagenen Kreise zurückläuft, ist als Eingriffstrecke unbrauchbar, während  $E_1E_r$  brauchbar ist. Genügt eine beliebige Anzahl von Zahnrädern allen vier Bedingungen, so sind sie „Satzräder“, die, beliebig miteinander gepaart, richtig käm-  
men. Durch die Endpunkte der Eingriffstrecke  $A$  und  $E$  sind die äußeren Begrenzungen (Kopfpunkte der Zähne)  $K_1$  und  $K_2$  bestimmt. Rückwärtseinschlagen der Kreise um  $M_1$  durch  $A$  und um  $M_2$  durch  $E$  ergibt die Punkte  $F_1$  und  $F_2$ , die mit  $K_2$  und  $K_1$  zusammenarbeiten. Die Stücke  $K_1CF_1$  und  $K_2CF_2$  sind die arbeitenden Teile der Zahnflanken. Die nach den Mittelpunkten zu liegenden Stücke der Zahnflanken bleiben außer Eingriff. Man bezeichnet (Abb. 4) den Abstand der Punkte  $C$  und  $C_1$  zweier benachbarter Zähne als „Teilung  $t$ “, die auf die Teilkreise bezogen wird, die meist mit den Wälzkreisen identisch sind. Es ergeben sich die Teilkreisdurchmesser aus den Zähnezahlen  $Z$  mit:  $D_1\pi = Z_1t$  bzw.  $D_2\pi = Z_2t$ ; allgemein  $D\pi = Zt$  und der entsprechende Teilkreisradius aus:  $R = \frac{Zt}{2\pi}$ .

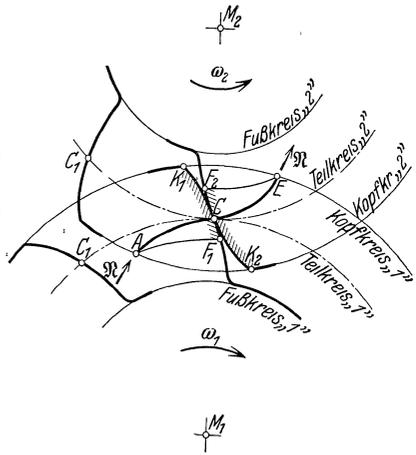


Abb 3. Kopf- und Fußpunkte.

Wenn die Teilung verwendet wird, so ist sie in „Zentimeter“ anzugeben. Damit  $D$  ein rationales Maß wird, wird die Teilung als Vielfaches von  $\pi$  angenommen, (z. B.  $t = 2\pi = 6,28$  cm);  $\frac{t}{\pi}$  wird als Modul  $m$  bezeichnet und in Millimeter angegeben. Es ist:  $t = m \cdot \pi$ ;  $D \cdot \pi = Z \cdot m \cdot \pi$ ;  $D = Z \cdot m$ ;  $m = \frac{D}{Z}$ .

Der Modul ist ein Bezugsmaß für das Zahnrad, aber nicht unmittelbar zu messen. Er wird stets auf einen Normalmodul abgerundet, der aus der Modulreihe DIN 780 entnommen wird.

Tabelle 1. Modulreihe:

|                        |                         |
|------------------------|-------------------------|
| 0,3; 0,4, 0,5 bis 0,9; | 1 steigend um je 0,1 mm |
| 1; 1,25, 1,5 bis 3,75; | 4 „ „ „ 0,25 „          |
| 4; 4,5, 5 bis 6,5;     | 7 „ „ „ 0,5 „           |
| 7; 8; 9; bis 15; 16    | „ „ „ 1 „               |
| 16; 18; 20 bis 22; 24  | „ „ „ 2 „               |
| 24; 27; 30 bis 42; 45  | „ „ „ 3 „               |
| 45; 50; 55 bis 70; 75  | „ „ „ 5 „               |

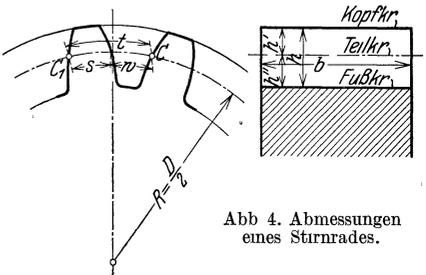


Abb 4. Abmessungen eines Stirnrades.

Der außerhalb des Teilkreises liegende Teil des Zahnes heißt „Zahnkopf“; der innerhalb liegende Teil „Zahnfuß“, der Kreis durch die äußere Begrenzung des Zahnkopfes, der den Außendurchmesser des Rohlings bestimmt, heißt „Kopfkreis“, der Kreis durch die innere Begrenzung des Zahnes „Fußkreis“. Die Zahnhöhe  $h$  setzt sich zusammen aus der Kopfhöhe  $h'$  (zwischen Kopfkreis und Teilkreis) und der Fußhöhe  $h''$  (zwischen Teilkreis und Fußkreis); bezogen auf den Modul ist  $h' = \alpha' \cdot m$ ;  $h'' = \alpha'' \cdot m$ , das radiale Spiel  $h'' - h'$  nimmt am Eingriff nicht teil. Die durch die Profile bestimmten Flächen heißen „Zahn-

flanken“, die Abmessung rechtwinklig zum Profil heißt „Zahnbreite“. Die Zahnbreite wird meist in einem bestimmten Verhältnis zur Teilung angenommen (z. B.  $b = 2t$ ,  $b = 3t$ , allgemein  $b = \psi t$ ) oder zum Modul (z. B.  $b = 10m$ ). Als normal gelten:

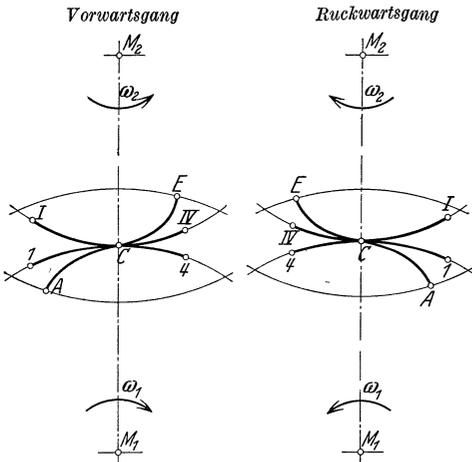
Tabelle 2. Radiale Größen.

|                                 | bei unbearbeiteten gegossenen Zähnen | bei bearbeiteten Zähnen            |                             |
|---------------------------------|--------------------------------------|------------------------------------|-----------------------------|
|                                 |                                      | $m \geq \sim 5 \text{ mm}$         | $m < \sim 5 \text{ mm}$     |
| Kopfhöhe $h'$ .....             | 0,3 $t$                              | $\frac{6}{6}m$                     | 1 $m$                       |
| Fußhöhe $h''$ .....             | 0,4 $t$                              | $\frac{7}{6}m$                     | 1,2 $m$                     |
| Zahnhöhe $h$ .....              | 0,7 $t$                              | $\frac{13}{6}m \approx \sim 0,7 t$ | 2,2 $m \approx \sim 0,7 t$  |
| radiales Spiel $h'' - h'$ ..... | 0,1 $t$                              | $\frac{1}{6}m \approx \sim 0,05 t$ | 0,2 $m \approx \sim 0,06 t$ |

Die Zahnstärke im Teilkreis gemessen, beträgt für unbearbeitete Zähne  $s \approx \frac{19}{40} t$ , die Zahnücke  $w \approx \frac{21}{40} t$ , damit ist das Spiel im Umfang:  $\frac{1}{20} t = \frac{\pi}{20} m \approx 0,16 m$ . Für bearbeitete Zähne ist das Flankenspiel meist  $\approx \frac{1}{20} \text{ mm}$ , bei geschliffenen Zähnen  $\approx \frac{1}{40} \text{ mm}$ , so daß die Zahnstärke  $s \approx \frac{t}{2}$  beträgt. Bei verschiedenem

Baustoff der beiden Zahnräder kann  $s$  auch verschieden sein, z. B. ist üblich bei Weißbuche auf Gußeisen:  $s_1$  (Weißbuche)  $\approx 0,6 t$ ;  $s_2$  (Gußeisen)  $\approx 0,4 t$ . Normale

Kopf- und Fußhöhen sind bei sehr kleinen Zähnezahlen aus Gründen fehlerhaften Eingriffes oft nicht ausführbar, es muß dann auch in den Zahnstärken abgewichen werden. Die während der Übertragung eines Zahn-paares sich berührenden Teile der Walzkreise heißen „Eingriffbogen“. Beim Rückwärtsgang liegen bei gleicher Zahnform beider Profile die Eingriffbogen und die Eingriffstrecke symmetrisch zu denen des Vorwärtsganges (Abb. 5). Gleichheit beider Profile ist fast immer vorhanden, nur in Ausnahmefällen, z. B. bei Bergbahnen, bei denen die Beanspruchung bei der Bergfahrt erheblich größer als bei der Talfahrt ist, kommen trapezförmige Zähne vor, um größere Stärke an der Zahnwurzel zu erreichen.



$ACE$  = Eingriffstrecke,  $IC4$  = Eingriffbogen  $e$  am Rad „1“,  $ICIV$  = Eingriffbogen  $e$  am Rad „2“.

Abb. 5 Vorwärts- und Rückwärtsgang bei gleicher Zahnform beider Profile.

Im Betrieb muß stets mindestens bei einem Zahnpaar Berührung vorhanden sein, d. h. der Eingriffbogen (Abb. 5)  $e$  muß  $\geq t$  sein. Unter Überdeckungsgrad  $\epsilon$  versteht man das Verhältnis des Eingriffbogens zur Teilung oder entsprechend das Verhältnis der Zeit zum Durchlaufen des Eingriffbogens zur Zeit zum Durchlaufen der Teilung. Da  $\epsilon = \frac{e}{t} \geq 1$  sein muß, ist bei  $\epsilon > 1$  (z. B. 1,2) ein Zahnpaar immer im Eingriff, ein zweites während 20% der Zeit; ist  $\epsilon < 1$ , so erfolgt Kanteneingriff: der Kopf des treibenden Zahnes schiebt, schabend auf der Flanke, den getriebenen weiter. Die Folge ist Ungleichförmigkeit des Ganges, Schwingungen, Erzitterungen und starke Abnutzungen, was sich bei größeren Umfangsgeschwindigkeiten störend bemerkbar macht. Ein Überdeckungsgrad 1,2 bis 1,3 ist immer anzustreben und kann durch Wahl entsprechender Zähnezahlen und Verzahnungen erreicht werden, genügt aber auch zum sicheren Ausschluß des

Kanteneingriffs. Ein höherer Überdeckungsgrad hat einen praktischen Wert nur dann, wenn mindestens  $\varepsilon = 2$  erreicht wird, so daß dauernd zwei Zahnepaare im Eingriff stehen und sich dadurch die Beanspruchung und Abnutzung der Zähne bestimmt verringert. Da im Lauf immer Zahn mit Zahn kämmt, ist das Übersetzungsverhältnis  $i = Z_1 : Z_2 = R_1 : R_2 = D_1 : D_2 = \omega_2 : \omega_1 = n_2 : n_1$ , hiernach ist  $n_1 \cdot Z_1 = n_2 \cdot Z_2 = n \cdot Z = \text{const.}$ , wobei  $n$  die Umlaufzahl der Räder bedeutet. In den Ländern mit Zollmaßen wird an Stelle des Modulsystems die Diametral Pitch-Teilung oder Circular Pitch-Teilung benutzt. Bei der Diametral Pitch-Teilung bedeutet  $D_p$  die Anzahl der Zähne auf 1" Durchmesser, ähnlich wie man die Steigung der Schrauben mit der Anzahl der Gänge auf einen Zoll angibt. Im Gegensatz zur Modulteilung wird  $D_p$  desto kleiner, je größer die Teilung ist. Es ist:  $D_p = \frac{1''}{m} = \frac{25,4 \text{ mm}}{m \text{ mm}}$ , z. B. entspricht  $D_p = 1$  einem Modul 25,4 mm,  $D_p = 2$  einem Modul 12,7 mm. Die Circular-Pitch-Teilung ergibt die Länge der Teilung in Zoll. Die Umrechnung erhält man mit  $C_p = \frac{\pi \cdot m}{25,4} = 0,1235 m$ ; z. B. entspricht  $C_p = 1$  einem Modul  $\frac{1}{0,1235} = 8,1$  mm,  $C_p = 2$  einem Modul  $\frac{2}{0,1235} = 16,2$  mm.

## II. Die Zahnformen.

Die Zahnformen können verschieden sein, sie müssen aber dem allgemeinen Verzahnungsgesetz entsprechen. Wenn die Wälzkreise und ein Zahnprofil gegeben sind, ist die Eingriffslinie und das andere Profil zu konstruieren, wie in Abb. 2 angegeben. Davon wird aus Herstellungsgründen nur selten Gebrauch gemacht, z. B. bei den Flügeln von Kapselpumpen und Kapselgebläsen, die ebenfalls dem allgemeinen Verzahnungsgesetz entsprechen müssen, um gleichmäßige Drehung der Wellen zu erreichen.

Wenn die Wälzkreise und die Eingriffslinie gegeben sind, sind beide Profile entsprechend herzustellen. Als Eingriffslinie werden zwei Kreisbogen angenommen, die Profile ergeben sich dann als zyklische Kurven (Radlinien). Wird die Eingriffslinie als Gerade angenommen, so ergeben sich die Zahnprofile als Kreisevolventen, die Radlinien unter bestimmten Voraussetzungen bilden. Bei der Epizykloide (Aufradlinie, kleine Außenzykloide, Abb. 6) rollt auf einem Kreis (Grundkreis um  $M$ ) ein zweiter (Rollkreis um  $M'$ ); der Mittelpunkt  $M'$  des Rollkreises beschreibt einen konzentrischen Kreis um den Mittelpunkt des Grundkreises  $M$ . Beim Abrollen hebt sich der Punkt  $C$  und beschreibt die Kurve  $\widehat{CB}$ , gleichzeitig senkt sich der Punkt  $B'$  und fällt auf  $C'$ , wobei er die Kurve  $\widehat{B'C'}$  beschreibt. Infolge des Abrollens sind die Kreisbogen längengleich ( $\widehat{CC'} = \widehat{CB'} = \widehat{B'C'}$ ). Infolge der Entstehung der Epizykloide steht die Strecke  $\overline{BC}$  senkrecht auf der Kurve  $\widehat{BC}$  im Punkte  $B$  und die Strecke  $\overline{B'C}$  senkrecht auf der Kurve  $\widehat{B'C'}$  im Punkte  $B'$ ; die Kurve  $\widehat{BC}$  kann konstruiert werden als Umhüllende der Kreise mit  $\overline{BC}$  um  $C'$ .  $\overline{B'C'}$  ist der Krümmungsradius der Kurve  $\widehat{BC}$  im Punkte  $B$ . Die Normale in einem beliebigen Punkte ( $B, B'$ ) geht stets durch den Berührungspunkt

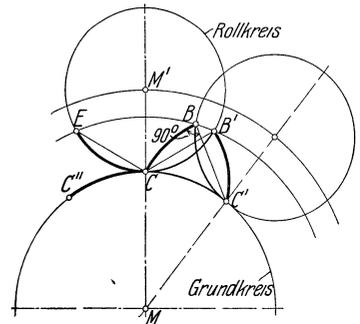


Abb. 6. Epizykloide (Aufradlinie, kleine Außenzykloide).

punkt des Grundkreises und des Rollkreises ( $C', C$ ), so daß die Kurve als Zahnkurve brauchbar ist. Wird um  $C$  mit  $\widehat{CB'} = \widehat{BC'}$  ein Kreis geschlagen, so geht er durch den Schnittpunkt  $E$  des Grundkreises und des Rollkreises (Symmetrie in bezug auf  $M'M$ ). Wird die Kurve  $\widehat{BC}$  als Zahnkurve verwendet, ist  $E$  der Eingriffspunkt des Punktes  $B$ . Da  $E$  ein beliebiger Punkt der Eingriffslinie ist, liegen alle in dieser Weise konstruierten Punkte auf dem Rollkreis, der damit zur Eingriffslinie wird. Wird der Rollkreis nach der andern Seite abgerollt, trifft  $E$  auf  $C''$ ,  $\widehat{CC''}$  ist demnach der Eingriffsbogen, wenn  $B$  die Zahnkante im Kopfkreis

des Zahnrades vorstellt. Der Eingriffsbogen ist langengleich der Eingriffstrecke, aber nicht identisch.

Die gemeine Zykloide (Radlinie, Abb. 7) entsteht, wenn der Radius des Grundkreises =  $\infty$  ist.

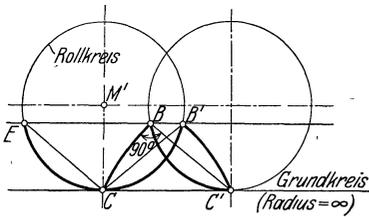


Abb. 7. Gemeine Zykloide (Radlinie).

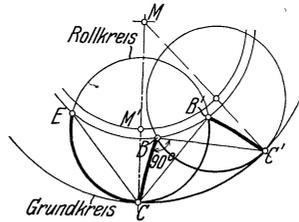


Abb. 8. Hypozykloide (Inradlinie, Innenzykloide).

$M$  bewegt sich demnach auf einer Geraden und entsprechend wird  $BB'$  ebenfalls eine Gerade. Wenn Grundkreis und Rollkreis den gleichen Krümmungssinn haben, entsteht die Hypozykloide (Innenzykloide, Inradlinie, Abb. 8), bei der

sich der Rollkreis innerhalb des Grundkreises bewegt. Wird der Durchmesser des Rollkreises größer als der des Grundkreises ( $M'C > MC$ ) gewählt, entsteht die Perizykloide (große Außenzykloide, Umradlinie, Abb. 9). Die Kreise, auf denen sich  $M'$  bewegt und  $B, B'$  liegen, sind

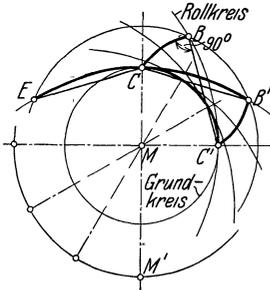


Abb. 9. Perizykloide (Umradlinie, große Außenzykloide).

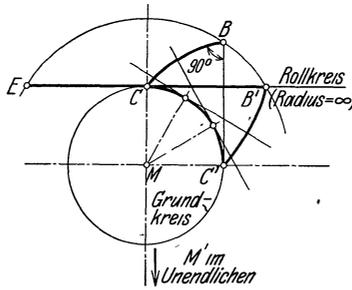


Abb. 10 Kreisevolvente

wieder konzentrisch um  $M$ , liegen aber auf entgegengesetzten Seiten. Zu jedem Grundkreis gehören unendlich viele Zykloiden, da der Rollkreis beliebigen Durchmesser haben kann. Wird der Radius des Rollkreises =  $\infty$  gewählt, so wird der Rollkreis zur Tangente und die Kurve  $CB$  zur Kreisevolvente (Abb.10). Da der Rollkreis, der hier als Erzeugende der Evolvente bezeichnet wird, Eingriffslinie ist, wird die Eingriffslinie eine Gerade. Im Gegensatz zu den Zykloiden gehört zu jedem Grundkreis nur eine Evolvente, von der ein beliebiges Stück als Zahnkurve benutzt werden kann. Die Kreisevolvente kann auch durch Abwickeln des Kreisumfangs erzeugt werden. Zum Zeichnen der Evolvente biegt man eine Reißschiene auf den Umfang des Grundkreises, befestigt eine Schnur und beschreibt mit einem Schreibstift  $S$  die Evolvente durch Abwickeln der Schnur. Die Tangente von  $S$  an den Grundkreis ist der Krümmungsradius der Evolvente in jeder Stellung (Abb. 11). Zur Erzeugung der Evolvente bei der Zahnradherstellung

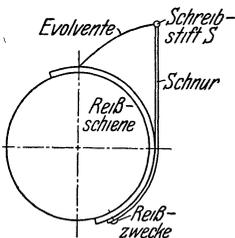


Abb. 11. Zeichnerische Herstellung der Evolvente.

von  $S$  an den Grundkreis ist der Krümmungsradius der Evolvente in jeder Stellung (Abb. 11). Zur Erzeugung der Evolvente bei der Zahnradherstellung

wird an Stelle der gebogenen Schiene ein Kreissegment, an Stelle der Schnur ein Stahlband verwendet.

### III. Die Zykloidenverzahnung.

Die Walzkreise sind durch das Übersetzungsverhältnis gegeben; sie fallen mit den Teilkreisen zusammen. Die Rollkreise sind zunächst beliebig, zweckmäßig wird der Halbmesser des Rollkreises  $M'C = 1/3 MC$  gewählt (Abb. 12). Bei Satzradern müssen alle Räder des Satzes gleichen Rollkreis erhalten, damit sie gleiche Eingriffslinien bekommen. Die Zykloiden werden als Hullkurven mit dem Zirkel konstruiert. Es werden kleine, gleiche Sehnen, die als langengleich den zugehörigen Bogen betrachtet werden können, auf der einen Seite von  $C$  (nach links) auf dem Rollkreis „2“, dem Teilkreis „2“ und dem Teilkreis „1“, auf der andern Seite von  $C$  (nach rechts) ebenfalls auf dem Rollkreis „1“ und beiden Teilkreisen abgetragen. ( $a_1; b_1; c_1 \dots; a_2; b_2; c_2 \dots; a_3; b_3; c_3 \dots$  nach links,  $r_1; s_1; t_1 \dots; r_2; s_2; t_2 \dots; r_3; s_3; t_3$  nach rechts).

Tabelle 3. Aufzeichnung der Zykloiden.

| In den Zirkel                                   | Kreis um       | ergibt                         |
|-------------------------------------------------|----------------|--------------------------------|
| $\overline{Ca_1}$<br>$\overline{Cb_1}$ u. s. f. | $a_2$<br>$b_2$ | Hypozykloide $C\mathfrak{H}_2$ |
| $\overline{Ca_1}$<br>$\overline{Cb_1}$ u. s. f. | $a_3$<br>$b_3$ | Epizykloide $C\mathfrak{E}_1$  |
| $\overline{Cr_1}$<br>$\overline{Cs_1}$ u. s. f. | $r_2$<br>$s_2$ | Hypozykloide $C\mathfrak{H}_1$ |
| $\overline{Cr_1}$<br>$\overline{Cs_1}$ u. s. f. | $r_3$<br>$s_3$ | Epizykloide $C\mathfrak{E}_2$  |

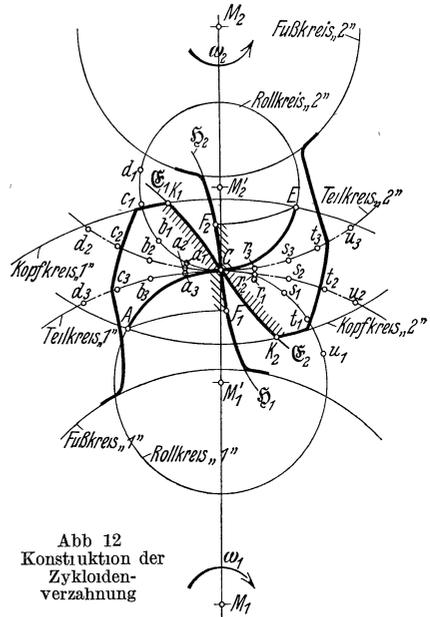


Abb 12  
Konstruktion der  
Zykloiden-  
verzahnung

Durch die Zahnzahlen und die Teilkreisdurchmesser sind (entsprechend Abb. 4) bestimmt: die Teilung  $t$ , der Modul  $m$ , die Kopfhöhe  $h'$ , die Fußhöhe  $h''$ , die Zahnhöhe  $h$ , die Zahnstärke  $s$  und die Lückenweite  $w$ . Die Begrenzung des ruckartigen Profils jedes Zahnes ergibt sich als Spiegelbild des vorderen. Die Schnittpunkte der Kopfkreise mit den Fußkreisen ergeben die Eingriffstrecke  $\widehat{ACE}$ . Die rückwärts eingeschlagenen Kreise durch  $A$  um  $M_1$  und durch  $E$  um  $M_2$  ergeben die Punkte  $F_1$  und  $F_2$ . Es arbeiten zusammen die Strecken  $\widehat{K_1C}$  und  $\widehat{F_2C}$ , sowie  $\widehat{K_2C}$  und  $\widehat{F_1C}$ . Den Überdeckungsgrad erhält man aus  $\varepsilon = \frac{\widehat{ACE}}{t}$ , da die Eingriffstrecke längengleich dem Eingriffbogen ist. Bei der oben angegebenen Wahl der Rollkreisdurchmesser und normalen Zahnhoheiten ist ein Überdeckungsgrad  $\varepsilon \geq 1$  im allgemeinen gesichert. Der Reibungsverlust ergibt sich durch das Gleiten der zusammenarbeitenden Strecken. Der Normaldruck  $\mathfrak{N}$  wechselt etwas, wenn  $\varepsilon > 1$  und damit zeitweise mehr als ein Zahnpaar im Eingriff ist; er liegt aber stets rechtwinklig auf dem Profil, d. h. in der Richtung der Eingriffslinie (Abb. 3). Die Folge des Gleitens und des Normaldruckes ist die Abnutzung der Zahnflanken. Arbeitet eine kürzere Strecke ( $\widehat{F_2C}$ ) mit einer längeren zusammen ( $\widehat{K_1C}$ ), wird

jede der beiden Strecken im umgekehrten Verhältnis der Längen abgenutzt, also die kürzere ( $K_1C : F_2C$ ) mal so viel wie die längere. Teilt man  $K_1C$  in eine Anzahl gleicher Teile (Abb. 13), so wird durch entsprechende Kreise um  $M_1$  auch  $CE$  in einzelne Bogen zerlegt und ebenso  $F_2C$  beim Zurückklappen. Diese Strecken von  $F_2C$  sind fast gleich, die dem Verhältnis der Strecken entsprechende Abnutzungscharakteristik ist fast konstant für die Zahnköpfe und die Zahnfüße, für die Zahnköpfe aber kleiner als für die Zahnfüße.

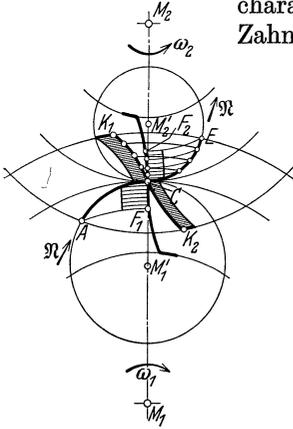


Abb. 13. Abnutzungscharakteristik der Zykloiden.

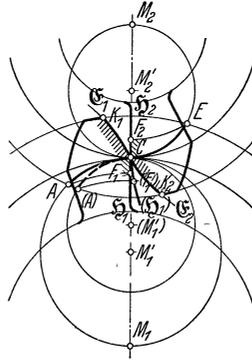


Abb. 14. Rollkreisdurchmesser = Teilkreisradius.

Natürlich kann sich der Zahnkopf im Punkte  $C$  nicht weniger abnutzen als im Zahnfuß; infolgedessen wird er durch Stauung des Punktes  $C$  weiter abgenutzt, wodurch sich Zahnform und Eingriffslinie ändern; die Eingriffslinie streckt sich in der Nähe des Punktes  $C$ , d. h. sie wird allmählich in eine Gerade übergeführt.

Werden die Rollkreisdurchmesser gleich den Teilkreisradien gewählt (Abb. 14), gehen die Hypozykloiden in radial gerichtete Gerade über.

Da die Rollkreise größer geworden sind, rücken die Punkte  $A$  und  $E$  von der Mittellinie weiter ab. Die Eingriffstrecke  $ACE$  wird größer und entsprechend auch der Eingriffsbogen. Der Überdeckungsgrad  $\epsilon$  vergrößert sich, dagegen rücken die Punkte  $F_1$  und  $F_2$  näher an den Zentralpunkt  $C$  heran, womit die Abnutzung der Zahnfüße sich verstärkt.

Bei Satzrädern wird meist der Rollkreisdurchmesser aller Räder des Satzes gleich dem Teilkreisradius des kleinsten Rades gewählt, so daß der Zahnfuß des kleinsten Rades eine radial gerichtete Gerade ist. Hierdurch wird erreicht, daß alle Räder des Satzes, beliebig miteinander gepaart, richtig kämmen. Einzelräder als Satzräder auszuführen, also mit gleichen Rollkreisen an beiden Rädern, ist aber zwecklos, da der Überdeckungsgrad am großen Rad unnütz verkürzt wird. Wird der Rollkreisdurchmesser größer als der Teilkreisradius gewählt, so weicht die Hypozykloide nach innen ab (Abb. 15). Da die Punkte  $A$  und  $E$  sich noch weiter von der Mittellinie entfernen als bei Abb. 14, wird der Überdeckungsgrad noch größer. Die Punkte  $F_1$  und  $F_2$  rücken näher an die Teilkreise heran, so daß sich auch die Abnutzung vergrößert. Vom Punkte  $F_1$  und  $F_2$  bis zur Zahnwurzel braucht die Zahnform die Hypozykloide nicht mehr einzuhalten, der Zahn muß aber noch so stark sein, daß die Kopfpunkte  $K$  nicht in den Gegenzahn eindringen. Konstruiert werden die relativen Kopf-

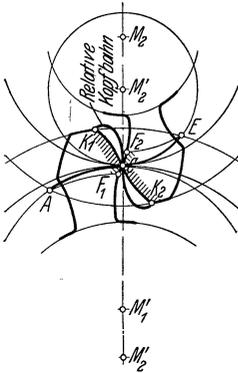


Abb 15. Rollkreisdurchmesser > Teilkreisradius.

Tabelle 4. Aufzeichnung der relativen Kopfbahn.

| In den Zirkel      | Kreis um | ergibt                      |
|--------------------|----------|-----------------------------|
| $K_1 a_3$          | $a_2$    | relative Kopfbahn von $K_1$ |
| $K_1 b_3$ u. s. f. | $b_2$    |                             |
| $K_2 r_3$          | $r_2$    | relative Kopfbahn von $K_2$ |
| $K_2 s_3$ u. s. f. | $s_2$    |                             |

relative Kopfbahn von  $K_2$

bahnen der Kopfpunkte  $K_1$  bzw.  $K_2$ , die entstehen, wenn Rad „1“ auf dem festgehaltenen Rad „2“ rollt (Punkte entsprechend Abb. 12).

Bei der Zahnstange wird aus der Epi- und Hypozykloide eine gemeine Zykloide (entsprechend Abb. 7), da der Radius des Grundkreises unendlich geworden ist. Mit ihr arbeitet die Epi- und Hypozykloide des Zahnrades zusammen. Bei der Innenverzahnung (gleicher Krümmungssinn beider Teil- und Rollkreise) arbeiten die Epizykloiden zusammen und ebenso die Hypozykloiden.

Die Eingriffstrecke wird sehr lang, so daß sich der Überdeckungsgrad stark vergrößert. Wird der Rollkreis gleich dem Teilkreis gewählt, so wird aus der Hypozykloide der Punkt  $C$ , auf dem die Epizykloide des Gegenrades arbeitet (einfache Punktverzahnung). Sind beide Rollkreise gleich den Teilkreisen, kommen die Profile innerhalb der Teilkreise überhaupt nicht mehr zum Eingriff (doppelte Punktverzahnung Abb. 16). Es arbeitet die Epizykloide  $K_2C$  auf dem Punkte  $C$  des Rades „1“, dann die Epizykloide  $K_1C$  auf dem Punkte  $C$  des Rades „2“. Die Folge ist eine sehr starke Abnutzung beider Räder am Punkte  $C$ . Diese Ausbildung ergibt aber die größte, überhaupt mögliche Länge der Eingriffstrecke  $ACE$  und damit den größten Überdeckungsgrad  $\epsilon$ , so daß mit der Zahnzahl bis 4 herunter gegangen werden kann. Diese Konstruktion kann nur für selten benutzte Zahnräder mit kleiner Umfangsgeschwindigkeit verwendet werden, z. B. in Wagenwinden.

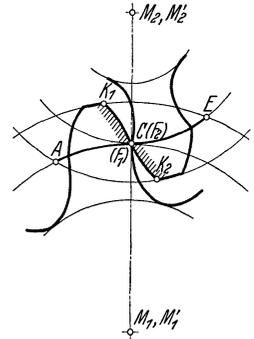


Abb. 16. Doppelte Punktverzahnung.

### IV. Die Evolventenverzahnung.

Jedes Stück der Kreisevolvente ist als Zahnkurve brauchbar; dadurch ist der Eingriffswinkel  $\alpha$  bestimmt, unter dem die gerade Eingriffslinie die Normale auf der Mittellinie  $M_1M_2$  schneidet. Da er für die Herstellung gebraucht wird, wird er der Konstruktion der Evolvente zugrunde gelegt. In den Abbildungen ist der Deutlichkeit halber ein Eingriffswinkel von  $\alpha = 30^\circ$  gewählt.

Durch die beiden Wälzkreise um  $M_1$  und  $M_2$  mit den Radien  $R_1$  und  $R_2$  ist der Zentralpunkt  $C$  bestimmt, durch den beide Zahnprofile gehen. Die Grundkreise, durch deren Abwicklung die Evolventen entstehen, berühren die Eingriffslinie in den Punkten  $N_1$  und  $N_2$ . Aus der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke  $M_1CN_1$  und  $M_2CN_2$  (Abb. 17) ist:

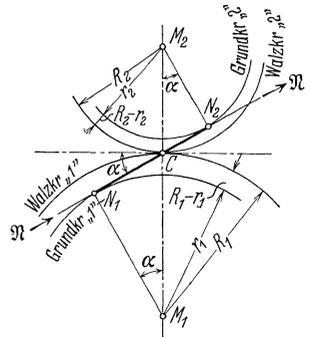


Abb 17 Evolventen für normalen Eingriff

$$\frac{r_1}{R_1} = \frac{r_2}{R_2} = \cos \alpha \text{ und } r = R \cdot \cos \alpha = \frac{Z}{2} \cdot m \cos \alpha.$$

Der Abstand zwischen Wälzkreis und Grundkreis beträgt:

$$R - r = R (1 - \cos \alpha) = \frac{Z}{2} \cdot m (1 - \cos \alpha) = Z \cdot m \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Der Eingriffswinkel  $\alpha$  muß für zwei zusammenkämmende Räder gleich sein, da sich sonst die Eingriffslinien nicht decken. Brauchbar als Eingriffstrecke ist nur der Teil  $N_1N_2$  der Eingriffslinie; die Kopfhöhe ist dadurch begrenzt, daß die Kopfkreise nicht außerhalb von  $N_1$  und  $N_2$  schneiden

Tabelle 5.  
Bestimmung des Grundkreises.

| $\alpha =$ | Grundkreis    | Abstand           |
|------------|---------------|-------------------|
| $15^\circ$ | $r = 0,966 R$ | $R - r = 0,034 R$ |
| $20^\circ$ | 0,940         | 0,06              |
| $25^\circ$ | 0,906         | 0,094             |
| $30^\circ$ | 0,866         | 0,134             |

dürfen. Die Evolvente geht nach dem Mittelpunkt zu nur bis zum Grundkreis; Eingriffstrecken, die über  $N_1$  und  $N_2$  herausgehen, geben grob fehlerhaften Eingriff, da hierzu der in Abb. 18 dargestellte zweite Zweig der Evolvente gehört, der symmetrisch zum ersten Zweig liegt. Liegt der Grundkreis außerhalb des Fußkreises, ist ein radiales Ergänzungsstück notwendig, das nicht am Ein-

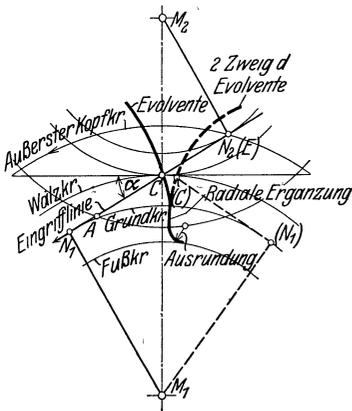


Abb. 18. Begrenzung der Kopfhöhe bei Evolventen.

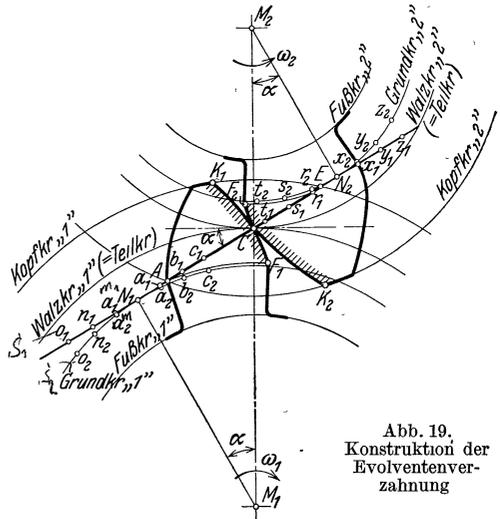


Abb. 19. Konstruktion der Evolventenverzahnung

griff teilnimmt. Der Anschluß an den Fußkreis erfolgt durch einen Kreis, dessen Radius entsprechend dem radialen Spiel anzunehmen ist. Da die radiale Ergänzung und die Ausrundung nicht am Eingriff teilnehmen, können sie auch bis zu der in Abb. 15 angegebenen relativen Kopfbahn verstärkt werden, wenn der Zahn an der Wurzel stärker sein soll. Die Eingriffstrecke  $\overline{AE}$  muß daher  $\overline{N_1 N_2}$  sein. Nach der Wahl des Eingriffswinkels kann die Evolvente konstruiert werden (Abb. 19). Von den Punkten  $N_1$  und  $N_2$  aus werden die Erzeugende und die Grundkreise nach außen und innen in längengleiche Stücke eingeteilt.

Tabelle 6. Einteilung.

| Teilpunkte                | Am Rade „1“           |                       | Am Rade „2“           |                       |
|---------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
|                           | nach innen            | nach außen            | nach innen            | nach außen            |
| Auf der Erzeugenden ..... | $a_1; b_1; c_1 \dots$ | $m_1; n_1; s_1 \dots$ | $r_1; s_1; t_1 \dots$ | $x_1; y_1; z_1 \dots$ |
| Auf dem Grundkreis.....   | $a_2; b_2; c_2 \dots$ | $m_2; n_2; s_2 \dots$ | $r_2; s_2; t_2 \dots$ | $x_2; y_2; z_2 \dots$ |

Entsprechend der Fadenkonstruktion (Abb. 11) wird die Evolvente als Umhüllende konstruiert.

Tabelle 7. Aufzeichnung der Evolvente.

| In den Zirkel                                   | Kreis um       | ergibt                                                  |
|-------------------------------------------------|----------------|---------------------------------------------------------|
| $\overline{Ca_1}$<br>$\overline{Cb_1}$ u. s. f. | $a_2$<br>$b_2$ | Evolvente zwischen Grundkreis und Walzkreis am Rade „1“ |
| $\overline{Cm_1}$<br>$\overline{Cn_1}$ u. s. f. | $m_2$<br>$n_2$ | Evolvente außerhalb des Walzkreises am Rade „1“         |
| $\overline{Cr_1}$<br>$\overline{Cs_1}$ u. s. f. | $r_2$<br>$s_2$ | Evolvente zwischen Grundkreis und Walzkreis am Rade „2“ |
| $\overline{Cx_1}$<br>$\overline{Cy_1}$ u. s. f. | $x_2$<br>$y_2$ | Evolvente außerhalb des Walzkreises am Rade „2“         |

Da die Eingriffstrecke nicht über  $N_1$  und  $N_2$  hinausreichen darf, sind ihre Endpunkte  $A$  und  $E$  innerhalb der Linie  $N_1 N_2$  anzunehmen. Die Kopfkreise durch  $A$  und  $E$  um  $M_1$  und  $M_2$  ergeben die Kopfpunkte  $K_1$  und  $K_2$  und damit die Kopfhöhen. Rückwärts einschlagen ergibt die mit den Kopf-

punkten zusammen arbeitenden Punkte  $F_1$  und  $F_2$ ; die Verwendung normaler Kopfhöhen und ihre Wirkungen ist in Abschnitt VII besonders behandelt. Das Verhältnis der zusammen arbeitenden Stücke ergibt die Abnutzungscharakteristik (Abb. 20), die im Gegensatz zur Zykloidenverzahnung auch nicht annähernd konstant für die Zahnköpfe und Zahnfüße ist. Die Abnutzung ist am stärksten an den Endpunkten, die Kopf- und Fußpunkte  $K$  und  $F$  werden am meisten beansprucht, besonders am kleineren Rad. Durch diese Abnutzung geht bei längerem Betrieb die Eingriffslinie an den Endpunkten allmählich in eine gekrümmte Linie über, so daß sich auch die Zahnkurven an diesen Stellen allmählich Zykloiden nähern.

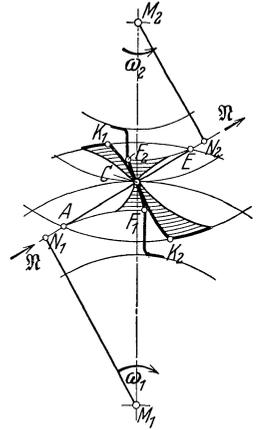


Abb 20 Abnutzungscharakteristik der Evolventen.

## V. Eigenschaften der Evolventenzahnräder.

1. Der Normaldruck  $\mathfrak{N}$  liegt stets in der Eingriffslinie, er ist daher in Größe und Richtung unveränderlich (im Gegensatz zur Zykloidenverzahnung) und greift stets am Radius des Grundkreises als Hebelarm an (Abb. 17).

2. Alle Evolventenrader mit gleicher Teilung und gleichem Eingriffswinkel sind ohne weiteres Satzrader, da die Form der Evolvente (im Gegensatz zur Zykloide) von dem Gegenrad unabhängig ist.

3. Zu jedem Grundkreis gehört nur eine Evolvente. Bei gleichem Grundkreis und verschiedenen Eingriffswinkeln ( $\alpha = 15^\circ, 20^\circ, 25^\circ, 30^\circ$ ) werden nur verschiedene Teile derselben Kurve benutzt.

4. Die Eingriffslinie ist stets die Tangente an beide Grundkreise. Sie bildet mit der Normalen auf der Mittenlinie im Zentralpunkt  $C$  den Eingriffswinkel. Die Lage der für die Herstellung benutzten Teilkreise ist hierfür gleichgültig. Wenn bei der Aufstellung die Teilkreise sich nicht berühren oder sich überschneiden, erfolgt die Abwälzung in den Walzkreisen (siehe Abb. 45). Hieraus ergeben sich für die Aufstellung und Herstellung der Evolventenrader folgende Eigenarten im Gegensatz zu den Zykloidenradern:

1. Solange die Eingriffslinie noch unverändert ist, sind neue Evolventenräder unempfindlich gegen kleine Aufstellungsfehler.

2. Evolventenzähne brauchen nicht mit dem Eingriffswinkel  $\alpha$  in den Walzkreisen, sondern können auch mit einem hiervon abweichenden Schneidwinkel  $\alpha_0$  in den Teilkreisen hergestellt werden (Schneiden mit Profilabdruckung).

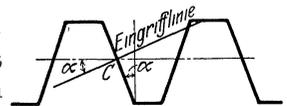


Abb 21. Zahnstange mit Evolventenverzahnung.

3. Bei Innenverzahnung ist die Flanke des großen Rades konkav gekrümmt, woraus sich gute Pressungsverhältnisse und ein großer Überdeckungsgrad ergeben (Abb. 27).

4. Bei der Zahnstange ( $R = \infty$ ) wird die Evolvente zu einer Geraden, die senkrecht auf der Eingriffslinie steht. Sie erhält also ein sehr einfaches Profil, das bei der Herstellung benutzt wird (Abb. 21).

## VI. Zahnradherstellung.

Dieser Abschnitt soll nur einen ganz kurzen Überblick geben, da ein zweites Heft sich im besonderen mit der Herstellung befassen wird.

Die Zähne sollen nach Möglichkeit rein mechanisch hergestellt werden, ohne daß das Zahnprofil vorher aufgezeichnet wird. Wenn die Walzkreise und ein

Zahnprofil gegeben sind, muß im allgemeinen das Gegenprofil aufgezeichnet werden (Abb. 2). Durch das Profil des einen Rades ist das Profil des zweiten eindeutig bestimmt. Bei der Zykloidenverzahnung gehören zu jeder Zahnflanke drei Elemente, (der Teilkreis, der Rollkreis des Zahnrades selbst und der Roll-



Abb. 22. Zykloidenherstellung mit Spitzstichel.

Abb. 23. Evolventenherstellung mit breiter Schneide.

kreis des Gegenrades), eine mechanische Herstellung ist zwar möglich, aber sehr schwierig. Da sich jede Zykloide aus einer konkaven Hypozykloide und einer konvexen Epizykloide zusammensetzt, kann sie nur mit einem Spitzstichel oder einem besonderen Profilwerkzeug hergestellt werden (Abb. 22). Bei Evolventen ist nur ein Element (der Grundkreis) vorgeschrieben. Da bei allen Außenverzahnungen

nur konvexe Flächen zu bearbeiten sind, können sie rein mechanisch durch tangentielle Schnitte mit einer breiten Schneide bearbeitet werden (Abb. 23). Bei der Herstellung unterscheidet man Teil- und Wälzverfahren.

Beim **Teilverfahren** wird mit einem Werkzeug gearbeitet, das als Schneidkante die Zahnflanke aufweist oder an einer entsprechenden Schablone geführt wird. Es wird eine Zahnücke geschnitten, das Rad um eine Teilung gedreht und die nächste Lücke geschnitten. Notwendig ist es, das Zahnprofil mit einem sehr großen Modul ( $m = 50$  oder  $100$ ) aufzuzeichnen und es photographisch oder mechanisch zu verkleinern. Die einmalige Aufzeichnung genügt für alle Zahnräder gleicher Zähnezah für alle Moduln.

Nach dem Werkzeug und der Art seiner Führung unterscheidet man folgende Teilverfahren:

a) **Teilfräsprozeß.** Die Lückenfräser werden als Scheibenfräser (Abb. 24) oder als Fingerfräser hergestellt (Abb. 25). Da Fingerfräser nur wenige Schneidkanten erhalten können, verwendet man sie nur da, wo es unbedingt notwendig ist (Pfeilzähne, Doppelpfeilzähne siehe Abschnitt XI).

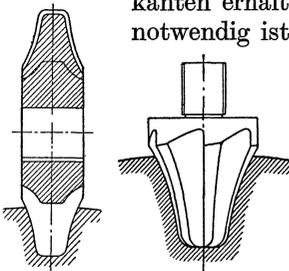


Abb. 24. Scheibenfräser.

Abb. 25. Fingerfräser.

Bei Satzrädern, so bei Zykloidentatzrädern (gleiche Rollkreise für beide Räder) und bei Evolventenzahnrädern ist für jede Teilung und Zähnezah theoretisch ein Fräser erforderlich, glanz geich, mit welchem Gegenrad das Rad gepaart wird. Sind die Räder nicht Satzräder, so ist für jede Teilung ein besonderes Fräserpaar erforderlich.

Die Fräser werden meistens in „Sätzen“ benutzt. Mit einem Satzfräser wird nicht nur eine Zähnezah, sondern ein Zähnezahbereich erzeugt. Die Zahnform des Fräasers entspricht der kleinsten mit dem

Fräser zu erzeugenden Zähnezah.

Bis zum Modul  $m = 10$  mm werden 8teilige, darüber hinaus 15teilige Fräsersätze benutzt. [8teiliger Fräsersatz für Zähnezahlen: 12-13, 14-16, 17-20, 21-25, 26-34, 35-54, 55-134, 135 bis Zahnstange. 15teiliger Fräsersatz für Zähnezahlen: 12, 13, 14, 15-16, 17-18, 19-20, 21-22, 23-25, 26-29, 30-34, 35-41, 42-54, 55-79, 80-134, 135 bis Zahnstange].

Um die Fräser zu schonen, werden die Zähne meist aus dem Vollen und aus nicht zu hartem Werkstoff geschnitten, da die Gußhaut den Fräser am stärksten abnutzt.

b) **Teilhobelprozeß:** Der Hobel wird unter Einschaltung einer Übersetzung an einer Schablone geführt, die das Zahnprofil aufweist. Die Ausführung ist nicht so sauber wie beim Teilfräsprozeß. Benutzt wird der Teilhobelprozeß bei sehr großen Moduln, bei denen der Fräser zu groß ausfällt, und für vorgegossene Zähne.

c) Teilstoßprozeß: Die Zahnücke wird mit entsprechend geformten Messern herausgestoßen.

Beim Wälzverfahren wird das Profil automatisch ohne vorheriges Aufzeichnen durch Abwälzen hergestellt.

a) Wälzfräsprozeß: Das geradlinige Zahnstangenprofil der Evolventenverzahnung (Abb. 21) kämmt richtig mit jedem Zahnrad gleichen Moduls, so daß es zum automatischen Ausschneiden benutzt werden kann. Beim Wälzfräsprozeß wird es als „Frässhnecke“ aufgewickelt (Abb. 26). Für jeden Modul ist nur ein Wälzfräser notwendig, mit dem Zahnrad beliebiger Zähnezahl herstellbar sind. Um gerade Zähne zu erhalten, wird der Fräser schräg angestellt.

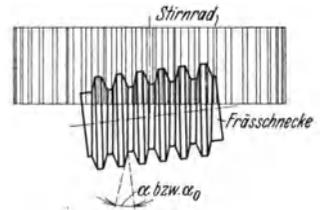


Abb. 26. Frässhnecke mit Zahnstangenprofil (Stirnradwälzfräser) schräg angestellt.

b) Wälzstoßprozeß: Verwandt wird ein Stoßrad (Fellows-Maschine), bei dem jeder Zahn als Werkzeug dient. Das Stoßrad ist ein Sekundärwerkzeug, das eine Evolvente als Zahnflanke aufweist, so daß die Nachprüfung erschwert wird; es ermöglicht allein genaue Innenverzahnungen (Abb. 27). An der Stoßmaschine von Maag wird ein Einzelstahl oder ein Stoßkamm als Werkzeug benutzt. Ein derartiges Werkzeug ist besonders leicht herzustellen,

da es geradlinige Stoßkanten besitzt; es ermöglicht, gleichzeitig eine große Zahl aufeinander geschichteter Zahnrad gleichen Moduls und gleicher Zähnezahl herzustellen.

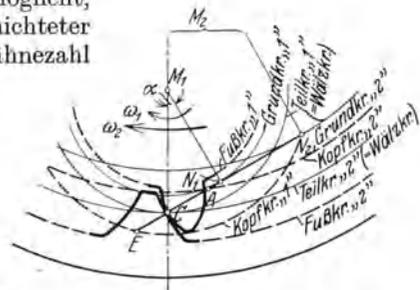


Abb. 27. Innenverzahnung.

Die Genauigkeit, die erforderlich ist, richtet sich nach dem jeweiligen Verwendungszweck. Bei Haushaltungsmaschinen, kleinen Hebezeugen und ähnlichem ist große Genauigkeit nicht erforderlich, so daß vielfach gegossene Zahnrad genügen. Dagegen ist große Genauigkeit notwendig bei großer Geschwindigkeit und großen Leistungen (Zahnradumformer) oder bei genauen Werkzeugmaschinen, bei denen, wie bei Drehbanken zum Gewindeschneiden und bei Schleifmaschinen, die Verzahnungsfehler der Zahnrad am Werkstück „kopiert“ erscheinen (Rattermarken). Die Vorzüge der Evolventen, die zu ihrer fast ausschließlichen Benutzung geführt haben, beruhen alle darauf, daß für jedes Rad nur ein Element (der Grundkreis) vorgeschrieben ist, woraus folgt:

- allgemeine Satzradereigenschaft,
- rein mechanische Herstellung im Wälzverfahren,
- kleine Fräserzahl im Teilfräsverfahren.

## VII. Grenzzähnezahlen der Evolventenverzahnung.

Während die Zykloiden durch Änderung der Rollkreise stark anpassungsfähig sind, ergeben sich bei den Evolventen unter Verwendung normaler Kopf- und Fußhöhen bestimmte Grenzzähnezahlen, bei denen wesentliche Änderungen der Zahnform eintreten. Der Fräser muß bis zum Zahngrund des erzeugten Rades reichen, er hat also die Fußhöhe  $h'' = \kappa'' \cdot m$  als Kopfhöhe. Die Evolvente braucht aber nur so weit ausgeschnitten zu werden, daß die Kopfhöhe des Gegenrades  $h' = \kappa' \cdot m$  richtig kämmt. Von dieser Stelle ab erfolgt eine Abrundung mit dem Radius  $r''$ , so daß sich hieraus die für das Ausschneiden der Evolvente maßgebende Fräserkante ergibt (Abb. 28).

Es ist:  $\sin \alpha = \frac{r'' - (\kappa'' - \kappa') \cdot m}{r''}$ ;  $r'' = \frac{\kappa'' - \kappa'}{1 - \sin \alpha} \cdot m$  und für normale Kopf- und Fußhöhen (siehe Abschnitt I):

Tabelle 8. Kopfabrundung der Fräser.

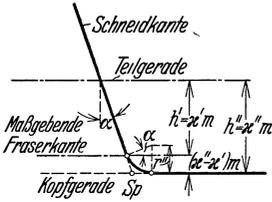


Abb. 28. Kopfabrundung des Fräasers.

|                     | bei unbearbeiteten gegossenen Zähnen | bei bearbeiteten Zähnen |         |
|---------------------|--------------------------------------|-------------------------|---------|
| $\kappa' =$         | $0,3\pi = 0,9425$                    | 1                       | 1       |
| $\kappa'' =$        | $0,4\pi = 1,2566$                    | $7/6 = 1,167$           | 1,2     |
| $\alpha = 15^\circ$ | $r'' = 0,424 m$                      | 0,225 m                 | 0,270 m |
| $20^\circ$          | 0,477 m                              | 0,254 m                 | 0,304 m |
| $25^\circ$          | 0,544 m                              | 0,289 m                 | 0,347 m |
| $30^\circ$          | 0,628 m                              | 0,333 m                 | 0,400 m |

Die I. Grenzzähnezahl entsteht durch den radialen Fußansatz, den alle unterhalb dieser Grenzzähnezahl liegenden Zahnezahlen besitzen. Entsprechend Abb. 29 ist der Fußkreishalbmesser  $R_f = \frac{Z}{2} \cdot m - h''$ , der Grundkreishalbmesser  $r = \frac{Z}{2} \cos \alpha \cdot m$ . Bei Zähnen mit normaler Kopf- und Fußhöhe ohne Fußabrundung ist die Grenzzähnezahl  $Z_I$  vorhanden, wenn  $r = R_f$  oder

$$\frac{Z_I}{2} - \kappa'' = \frac{Z_I}{2} \cdot \cos \alpha \text{ ist, demnach ist } Z_I = \frac{2\kappa''}{1 - \cos \alpha} = \frac{\kappa''}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}$$

Ist die Fußabrundung mit dem Radius  $r''$  vorhanden (Abb. 30), tritt der Radius  $R_f' = \left(\frac{Z}{2} - \kappa'\right) m$  an Stelle des Fußkreishalbmessers, so daß  $Z_I = \frac{\kappa'}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}$

wird. Die Tabelle enthält (wie alle folgenden Tabellen) die errechneten Größen; da alle Zahnezahlen stets ganze Zahlen sind, zeigen alle oberhalb dieser Zahlen liegenden keinen Fußansatz, die darunter liegenden haben ihn.

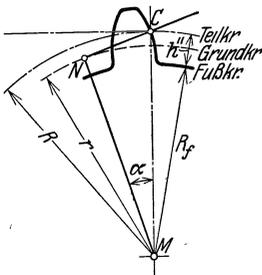


Abb 29 Radialer Fußansatz.

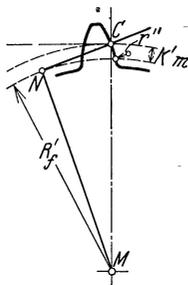


Abb 30. I. Grenzzähnezahl mit Fußansatz.

Tabelle 9. I. Grenzzähnezahl.

| $\alpha =$ | mit Fußabrundung $\kappa' = 1$ | ohne Fußabrundung  |      |
|------------|--------------------------------|--------------------|------|
|            | $\kappa'' = 7/6 m$             | $\kappa'' = 1,2 m$ |      |
| $15^\circ$ | 58,7                           | 68,4               | 70,5 |
| $20^\circ$ | 33,2                           | 38,7               | 39,8 |
| $25^\circ$ | 21,4                           | 24,9               | 25,6 |
| $30^\circ$ | 14,9                           | 17,4               | 17,9 |

Wird der Fußansatz wirklich radial ausgeführt, entsteht ein Unterschnitt erster Art, der Zahn wird an der Wurzel schwächer als am Teilkreis. Wird die Form des Lückenfräasers selbst durch Abwälzen hergestellt, entsteht die Verstärkung bis zur relativen Kopfbahn (Abb. 15). Die Stoßrader des Walzstoßverfahrens liegen meist unterhalb der ersten Grenzzähnezahl und weisen den radialen Fußansatz auf.

Eine II. Grenzzähnezahl, tiefer liegend für Unterschnitt, entsteht bei den Walzverfahren. Zum Schneiden ist der schneckenförmige Fräser nicht nur bis zum Zahnkopf, sondern länger bis zum Zahnfuß ausgebildet. Durch die Kopfabrundung tritt an Stelle der Fräserkopfspitze  $Sp$  die maßgebende Fräserkante (Abb. 28). Sie raumt den Zahnfuß entsprechend ihrer relativen Kopfbahn bis zum Schnittpunkt  $P$  des Zahnprofils mit der maßgebenden Kante des Fräasers (Abb. 31), bzw.

des Stoßrades (Abb. 32) aus. Nur bis zu diesem Punkt  $P$  wird infolgedessen die Evolvente ausgeschnitten, das Stück der Evolvente bis zum Grundkreis fällt fort. Das eingrifffähige Gebiet der Eingriffslinie wird um das Stück  $N'P$  gekürzt. Als

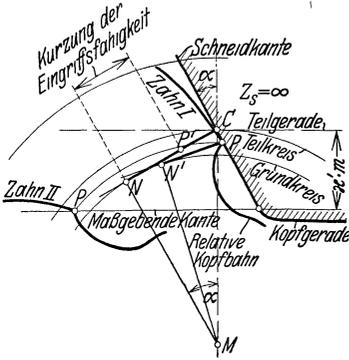


Abb. 31. Schneiden mit Zahnstangenwerkzeug.

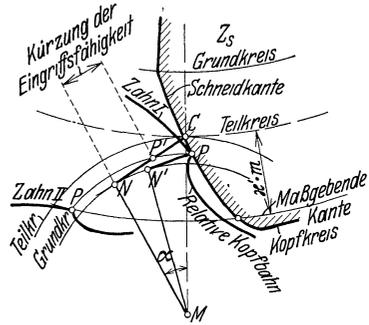


Abb. 32 Schneiden mit Walzstoßrad.

Tangenten am Grundkreis bis zu dem durch  $P$  gehenden Kreis sind die Stücke  $N'P$  und  $N'P'$  längengleich. Dieser Unterschnitt zweiter Art ist größer als der erster Art und mit einer Minderung der Eingriffsfähigkeit verbunden. Die Grenzzahnezahl  $Z_{II}$  ist gegeben, wenn am nächsten Zahn (Zahn II) die Punkte  $N$  und  $P$  zusammenfallen. Für Zahnstangenwerkzeuge (Abwälzfräser, Maagscher Kamm, Abb. 33) ist

$$r = R \cdot \cos \alpha = \frac{Z_{II}}{2} \cdot \cos \alpha \cdot m ;$$

$$\cos \alpha = \frac{R - \kappa' m}{r} = \frac{\frac{Z_{II}}{2} - \kappa'}{\frac{Z_{II}}{2} \cdot \cos \alpha} ,$$

$$\frac{Z_{II}}{2} (1 - \cos^2 \alpha) = \kappa' \quad \text{und} \quad Z_{II} = \frac{2\kappa'}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{2\kappa'}{\sin^2 \alpha} .$$

II. Grenzzahnezahl für Herstellung mit Zahnstangenwerkzeug ( $\kappa' = 1$ ).

|            |      |      |      |     |
|------------|------|------|------|-----|
| $\alpha =$ | 15°  | 20°  | 25°  | 30° |
| $Z_{II} =$ | 29,8 | 17,1 | 11,2 | 8   |

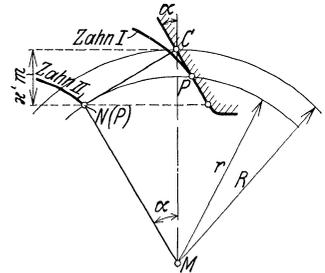


Abb. 33. Grenzfall für II. Grenzzahnezahl bei Zahnstangenwerkzeug

Für Zahnstangenwerkzeug ist die schneidende Zähnezahl  $Z_s = \infty$ . Für Stoßrader ist die Bedingung, Zusammenfallen der Punkte  $N$  und  $P$  am Zahn II, dieselbe. Nach Abb. 34 ist für diesen Grenzfall am Stoßrad bei Außenverzahnung

$$NN_s = \sqrt{(R_s + \kappa' \cdot m)^2 - r_s^2} \quad \text{und mit} \quad R_s = \frac{Z_s}{2} m ,$$

$$r_s = R_s \cdot \cos \alpha = \frac{Z_s}{2} \cdot \cos \alpha \cdot m$$

wird

$$NN_s = m \sqrt{\left(\frac{Z_s}{2} + \kappa'\right)^2 - \frac{Z_s^2}{4} \cos^2 \alpha} = m \sqrt{\frac{Z_s^2}{4} \sin^2 \alpha + \kappa' \cdot Z_s + \kappa'^2} .$$

Es ist die Strecke  $N_s C = R_s \cdot \sin \alpha = \frac{Z_s}{2} \cdot \sin \alpha \cdot m$  und

$$NC = NN_s - N_s C = m \left[ \sqrt{\frac{Z_s^2}{4} \cdot \sin^2 \alpha + \kappa' \cdot Z_s + \kappa'^2} - \frac{Z_s}{2} \cdot \sin \alpha \right] .$$

Andererseits ist am geschnittenen Rad

$$NC = R \cdot \sin \alpha = \frac{Z_{II}}{2} \cdot m \cdot \sin \alpha ,$$

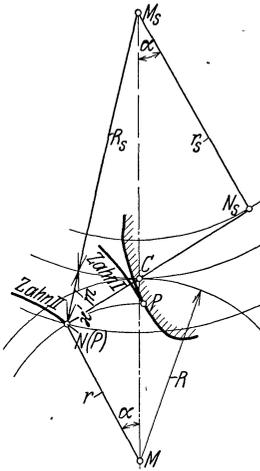


Abb. 34. Grenzfall für II. Grenzzähnezahl bei Walzstoßrad.

so daß

$$\sqrt{\frac{Z_s^2}{4} \cdot \sin^2 \alpha + \kappa' Z_s + \kappa'^2} - \frac{Z_s}{2} \cdot \sin \alpha = \frac{Z_{II}}{2} \cdot \sin \alpha$$

ist, woraus sich ergibt:

$$Z_{II} = \sqrt{Z_s^2 + \frac{4\kappa'}{\sin^2 \alpha} (Z_s + \kappa') - Z_s}.$$

Bei Innenverzahnung tritt ein Unterschnitt am Zahnfuß des geschnittenen Rades nicht ein. Der Zahnkopf darf aber nicht über den Punkt  $N_s$  des Stoßrades (Abb. 34) reichen, da die Evolvente nur bis zum Grundkreis geht. Der Punkt  $A$ , bei dem der Eingriff beginnt, darf höchstens mit dem Punkt  $N_s$  zusammenfallen, der  $N_1$  in Abb. 27 entspricht. Die Eingriffstrecke  $AE$  muß außerhalb der Linie  $NN_s$  liegen, so daß im Grenzfall  $NC = NN_s + N_sC$  ist, und sich entsprechend ergibt:

$$Z_{II} = \sqrt{Z_s^2 + \frac{4\kappa'}{\sin^2 \alpha} (Z_s + \kappa') + Z_s}.$$

Tabelle 10.

II. Grenzzähnezahl für Stoßradherstellung und normale Kopfhöhe ( $\kappa' = 1$ ).

| Zahnezahl des Stoßrades $Z_s$ | Außenverzahnung |      |      |      |      | Innenverzahnung |      |      |      |      |
|-------------------------------|-----------------|------|------|------|------|-----------------|------|------|------|------|
|                               | 4               | 8    | 12   | 16   | 20   | 4               | 8    | 12   | 16   | 20   |
| $\alpha = 15^\circ$           | 13,4            | 16,5 | 18,3 | 19,6 | 20,6 | 21,4            | 32,5 | 42,3 | 51,2 | 60,7 |
| $20^\circ$                    | 9,7             | 11,3 | 12,2 | 12,8 | 13,4 | 17,7            | 27,3 | 36,2 | 44,8 | 53,4 |
| $25^\circ$                    | 7,4             | 8,4  | 8,9  | 9,2  | 9,5  | 15,4            | 24,4 | 32,9 | 41,2 | 49,5 |
| $30^\circ$                    | 5,8             | 6,4  | 6,8  | 7,0  | 7,1  | 13,8            | 22,4 | 30,8 | 39,0 | 47,1 |

Die Bestimmung ergibt sich am einfachsten aus der Auftragung (Abb. 35). Mit Stoßrädern sind Außenverzahnung mit erheblich kleinerer Zähnezahl unterschnittfrei herzustellen als mit Stangenwerkzeugen, Innenverzahnungen sind nur mit Stoßrädern zu erzielen. Größere Zähnezahlen als  $Z_{II}$  sind mit normalen Kopfhöhen immer einwandfrei.

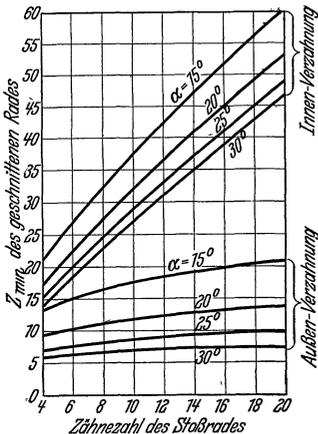


Abb 35 II. Grenzzähnezahl für Stoßradherstellung.

Zwei weitere Grenzzähnezahlen ergeben sich aus der Paarung der geschnittenen Räder im Betrieb.

Die III. Grenzzähnezahl ist die kleinste zulässige Zähnezahl des kleineren Rades einer Paarung für ein gegebenes Übersetzungsverhältnis und gleichem, normalen Kopfeingriff beider Räder. Der geometrische Zusammenhang ist nach Abb. 36 (Außenverzahnung) und Abb. 37 (Innenverzahnung) entsprechend den schraffierten Dreiecken ersichtlich. Es ist

$$N_1C = R_1 \cdot \sin \alpha = \frac{Z_1}{2} \cdot \sin \alpha \cdot m,$$

$$N_2C = R_2 \cdot \sin \alpha = \frac{Z_2}{2} \cdot \sin \alpha \cdot m \quad \text{und}$$

$$N_1E = \sqrt{R_{k_1}^2 - r_1^2} = \sqrt{\left(\frac{Z_1}{2} + \kappa'\right)^2 \cdot m^2 - \frac{Z_1^2}{4} \cdot \cos^2 \alpha \cdot m^2} = m \sqrt{\frac{Z_1^2}{4} \cdot \sin^2 \alpha + \kappa' \cdot Z_1 + \kappa'^2};$$

ebenso

$$N_2A = m \sqrt{\frac{Z_2^2}{4} \cdot \sin^2 \alpha + \kappa' \cdot Z_2 + \kappa'^2}.$$

Da der Kopfkreis des kleineren Rades den Punkt  $N_1$  bestimmt, ist die kleinste zulässige Zahnezahl  $Z_{III1}$  des kleinen Rades dann gegeben, wenn  $N_1$  und  $A$  zusammenfallen.

Für Außenverzahnung (Abb. 36) ist hierfür:  $CA = N_1C = N_2A - N_2C$ , für Innenverzahnung (Abb. 37):  $CA = N_1C = N_2C - N_2A$ , oder allgemein  $CA = \pm (N_2A - N_2C)$ . Unter Forthebung des Moduls  $m$  ist also für die III. Grenzzahnezahl:

$$\frac{Z_{III1}}{2} \cdot \sin \alpha = \pm \left( \sqrt{\frac{Z_{III2}^2}{4} \cdot \sin^2 \alpha + \kappa' \cdot Z_{III2} + \kappa'^2} - \frac{Z_{III2}}{2} \cdot \sin \alpha \right) \text{ und}$$

$$\pm \sqrt{\frac{Z_{III2}^2}{4} \cdot \sin^2 \alpha + \kappa' \cdot Z_{III2} + \kappa'^2} = \frac{1}{2} \cdot \sin \alpha (Z_{III2} \pm Z_{III1}).$$

Quadrieren und Fortheben der gleichen Summanden ergibt:

$$\kappa' \cdot Z_{III2} + \kappa'^2 = \frac{1}{4} \cdot \sin^2 \alpha (Z_{III1}^2 \pm 2Z_{III1} \cdot Z_{III2}).$$

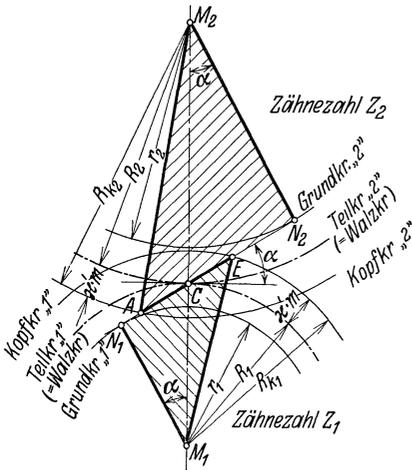


Abb. 36. Geometrischer Zusammenhang für Außenverzahnung.

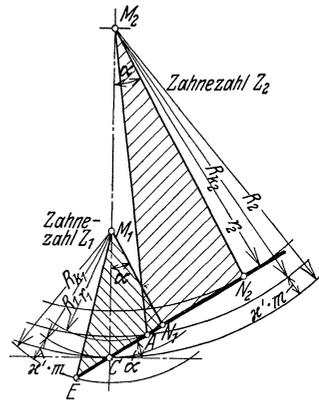


Abb 37. Geometrischer Zusammenhang für Innenverzahnung.

Das Übersetzungsverhältnis ist  $i = \frac{Z_{III1}}{Z_{III2}}$ . Da  $Z_{III1}$  die Zahnezahl des kleinen Rades ist, ist immer  $i < 1$ . Einsetzen führt zu:

$$\kappa' \cdot \frac{Z_{III1}}{i} + \kappa'^2 = \frac{1}{4} \cdot \sin^2 \alpha \left( Z_{III1}^2 \pm \frac{2}{i} \cdot Z_{III1}^2 \right) = Z_{III1}^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \frac{i \pm 2}{4i}$$

und damit zu der quadratischen Gleichung:

$$Z_{III1}^2 - \frac{4\kappa'}{(i \pm 2) \sin^2 \alpha} \cdot Z_{III1} - \frac{4i \cdot \kappa'^2}{(i \pm 2) \sin^2 \alpha} = 0$$

und ihrer Lösung:

$$Z_{III1} = \frac{2\kappa'}{(i \pm 2) \sin^2 \alpha} + \sqrt{\frac{4i\kappa'^2}{(i \pm 2) \sin^2 \alpha} + \frac{4\kappa'^2}{(i \pm 2)^2 \sin^4 \alpha}}$$

$$= \frac{2\kappa'}{(i \pm 2) \sin^2 \alpha} (1 + \sqrt{i(i \pm 2) \sin^2 \alpha + 1}).$$

Das positive Vorzeichen des Ausdrucks  $i \pm 2$  gilt für Außenverzahnung, das negative für Innenverzahnung. Für die Zahnstange ist:  $i = \frac{1}{\infty} = 0$ , also

$$Z_{III1} = \frac{2\kappa'}{2 \sin^2 \alpha} (1 + \sqrt{0 + 1}) = \frac{2\kappa'}{\sin^2 \alpha},$$

übereinstimmend mit der Grenzzähnezahl II für Zahnstangenwerkzeuge, da das Rad und das Werkzeug bereits eine Paarung bilden. Ebenso vertritt bei der Herstellung im Wälzstoßverfahren die Zähnezahl des Stoßrades  $Z_S$  die des kleineren Rades  $Z_{III_1}$ .

Tabelle 11. III. Grenzzähnezahl für normale Kopfhöhen ( $\alpha' = 1$ ).

| $i =$               | Außenverzahnung |                 |               |               |               | Zahnstange<br>$\frac{1}{\infty}$ | Innenverzahnung |               |               |                 |               |
|---------------------|-----------------|-----------------|---------------|---------------|---------------|----------------------------------|-----------------|---------------|---------------|-----------------|---------------|
|                     | $\frac{1}{1}$   | $\frac{1}{1,5}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ |                                  | $\frac{1}{8}$   | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{1,5}$ | $\frac{1}{1}$ |
| $\alpha = 15^\circ$ | 20,8            | 22,4            | 24,4          | 26,7          | 28,3          | 29,8                             | 31,6            | 33,9          | 39,3          | 47,0            | 58,6          |
| $20^\circ$          | 12,3            | 13,2            | 14,2          | 15,5          | 16,4          | 17,1                             | 18,1            | 19,3          | 22,3          | 26,6            | 33,2          |
| $25^\circ$          | 8,4             | 8,8             | 9,5           | 10,2          | 10,8          | 11,2                             | 11,9            | 12,5          | 14,4          | 16,8            | 21,4          |
| $30^\circ$          | 6,2             | 6,6             | 6,9           | 7,4           | 7,8           | 8                                | 8,4             | 8,9           | 10,2          | 12,0            | 15            |

Abb. 38 zeigt die entsprechenden Kurven.

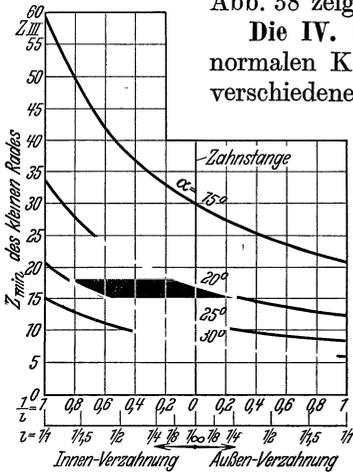


Abb 38. III. Grenzzähnezahl.

Die IV. Grenzzähnezahl entsteht, wenn auf die Bedingung normalen Kopfeingriffs verzichtet wird oder die Zahnköpfe mit verschiedenen, also abnormen Kopfhöhen ausgeführt werden. Die Zahnköpfe werden am kleinen Rad vergrößert, am großen Rad verkleinert, bis die Eingriffstrecke  $AE$  ihre größte, überhaupt eingriffsfähige Länge  $N_1 N_2$  erreicht, es ist also (Abb. 39)

$$AE = N_1 N_2 = \frac{1}{2} \sin \alpha (Z_{IV_1} + Z_{IV_2}) m.$$

Gleichzeitig wird der Überdeckungsgrad  $\epsilon = \frac{e}{t} = \frac{e}{\pi \cdot m}$  auf den kleinsten möglichen Wert  $\epsilon = 1$

verkleinert. Während der wechselnde Eingriffspunkt die Eingriffstrecke  $AE$  mit der Geschwindigkeit  $v'$  zurücklegt, legt der Zentralpunkt  $C$  den Eingriffsbogen  $e$  mit der Umfangsgeschwindigkeit  $v$  zurück. Da die Eingriffslinie die Grundkreise tangiert, ist die Geschwindigkeit  $v'$  gleich der Umfangsgeschwindigkeit in den Grundkreisen.

Es ist  $v' = v \cdot \frac{r}{R} = v \cdot \cos \alpha$ .

Eingriffbogen und Eingriffstrecke werden in der gleichen Zeit zurückgelegt, die sich ergibt aus:  $\frac{e}{v} = \frac{AE}{v'}$ ;

Der Eingriffbogen ist  $e = \frac{AE}{\cos \alpha}$ , der Überdeckungsgrad für den äußersten Grenzfall:

$$\epsilon = 1 = \frac{AE}{\pi \cdot m \cos \alpha} = \frac{\text{tg} \alpha}{2\pi} (Z_{IV_1} + Z_{IV_2})$$

und hieraus die kleinste überhaupt mögliche Zähnezahl:

$$Z_{IV_1} + Z_{IV_2} = \frac{2\pi}{\text{tg} \alpha} = 2\pi \text{ctg} \alpha.$$

IV. Grenzzähnezahl für abnorme Kopfhöhen.

|                              |            |            |            |
|------------------------------|------------|------------|------------|
| $\alpha = 15^\circ$          | $20^\circ$ | $25^\circ$ | $30^\circ$ |
| $Z_{IV_1} + Z_{IV_2} = 23,5$ | 17,3       | 13,5       | 10,9.      |

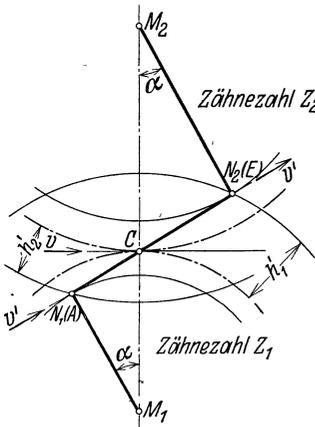


Abb. 39. IV. Grenzzähnezahl für Außenverzahnung.

### VIII. Überdeckungsgrad, Zahndruck, Achsdruck.

Nach den geometrischen Beziehungen (Abb. 36 u. 37) kann der vorhandene Überdeckungsgrad eines Raderpaares ohne Aufzeichnung der Evolventen errechnet werden, wenn das kleine Rad mindestens die der Übersetzung entsprechende Grenzzähnezahl III bei normalen oder Grenzzähnezahl IV bei abnormen Kopfhöhen aufweist. Es ist:

$$\varepsilon = \frac{AE}{\pi m \cos \alpha} = \frac{CE + AC}{\pi m \cos \alpha} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2;$$

für Außenverzahnung ist:  $AC = N_2A - N_2C$ ;  $CE = N_1E - N_1C$ , für Innenverzahnung:  $AC = N_2C - N_2A$ ,  $CE = N_1E - N_1C$ . Durch Einsetzen wird für Außen- und Innenverzahnung:

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{\text{tg}^2 \alpha}{4\pi^2} Z_1^2 + \frac{1}{\pi^2 \cos^2 \alpha} (\kappa' Z_1 + \kappa'^2)} - \frac{\text{tg} \alpha}{2\pi} Z_1 = \sqrt{k_1 \cdot Z_1^2 + k_2 (\kappa' Z_1 + \kappa'^2)} - k_3 Z_1.$$

Ebenso ist:  $\varepsilon_2 = \pm [\sqrt{k_1 Z_2^2 + k_2 (\kappa' Z_2 + \kappa'^2)} - k_3 Z_2].$

Hierin ist  $\varepsilon_1$  der hinter dem Zentralpunkt  $C$  liegende Teil des Überdeckungsgrades, der nur von der Zahnzahl  $Z_1$  abhängig ist,  $\varepsilon_2$  der vor dem Zentralpunkt liegende Teil, der von der Zahnzahl  $Z_2$  des getriebenen Rades abhängig ist, das  $+$ -Zeichen gilt für Außenverzahnung, nach  $-$ -Zeichen für Innenverzahnung. Bei abnormen Kopfhöhen ist  $\kappa'$  in  $\varepsilon_1$  für das Rad „1“,  $\kappa'$  in  $\varepsilon_2$  für das Rad „2“ verschieden. Für die Zahnstange ist statt  $Z_1$  zu setzen  $Z, Z_2$  wird  $\infty$ , so daß  $\varepsilon_2 = \pm (\sqrt{\infty + \infty} - \infty)$  einen unbestimmten Wert ergibt. Den wahren Wert erhält man aus:  $\mp (\varepsilon_2 + k_3 Z_2)^2 = k_1 Z_2^2 + k_2 (\kappa' Z_2 + \kappa'^2).$

Unter Einsetzen der einzelnen Konstanten und Fortheben der gleichen Glieder wird:

$$\varepsilon_2^2 - \frac{\kappa'^2}{\pi^2 \cos^2 \alpha} = Z_2 \left( \frac{\kappa'}{\pi^2 \cos^2 \alpha} - \frac{\text{tg} \alpha}{\pi} \cdot \varepsilon_2 \right) \quad \text{und} \quad \frac{\frac{\kappa'}{\pi^2 \cos^2 \alpha} - \frac{\text{tg} \alpha}{\pi} \cdot \varepsilon_2}{\varepsilon_2^2 - \frac{\kappa'^2}{\pi^2 \cos^2 \alpha}} = \frac{1}{Z_2} = 0.$$

Das ist nur möglich für  $\frac{\text{tg} \alpha}{\pi} \cdot \varepsilon_2 = \frac{\kappa'}{\pi^2 \cos^2 \alpha}$ , womit ist:

$$\varepsilon_2 = \frac{\kappa' \pi}{\pi^2 \cos^2 \alpha \text{tg} \alpha} = \frac{\kappa'}{\pi \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2\kappa'}{\pi \sin 2\alpha} \quad \text{und} \quad \varepsilon = \sqrt{k_1 \cdot Z^2 + k_2 (\kappa' Z + \kappa'^2) - k_3 Z + k_4 \cdot \kappa'}.$$

Tabelle 12. Konstanten zur Errechnung des ] Überdeckungsgrades.

|                     | $k_1$                | $k_2$                 | $k_3$                | $k_4$ |
|---------------------|----------------------|-----------------------|----------------------|-------|
| $\alpha = 15^\circ$ | $1,82 \cdot 10^{-3}$ | $1,087 \cdot 10^{-1}$ | $4,26 \cdot 10^{-2}$ | 1,275 |
| $20^\circ$          | $3,36 \cdot 10^{-3}$ | $1,148 \cdot 10^{-1}$ | $5,78 \cdot 10^{-2}$ | 0,989 |
| $25^\circ$          | $5,51 \cdot 10^{-3}$ | $1,239 \cdot 10^{-1}$ | $7,41 \cdot 10^{-2}$ | 0,831 |
| $30^\circ$          | $8,33 \cdot 10^{-3}$ | $1,357 \cdot 10^{-1}$ | $9,18 \cdot 10^{-2}$ | 0,735 |

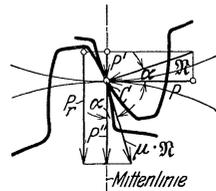


Abb. 40. Zahndruck.

Die Normalkraft  $\mathcal{N}$  und die Umfangskraft  $P$ , die mit der Umfangsgeschwindigkeit die übertragene Leistung  $\frac{P \cdot v}{75}$  PS  $\left(\frac{P \cdot v}{102} \text{ kW}\right)$  ergibt, bilden

den Eingriffswinkel  $\alpha$  (Abb. 40), so daß auf die Welle die radiale Kraft  $P' = P \text{tg} \alpha$  wirkt, die die beiden Räder auseinandergedrückt. Die Reibungskraft  $\mu \cdot \mathcal{N}$  bildet mit der Mittellinie ebenfalls den Winkel  $\alpha$ , ihre radiale Komponente  $P'' = \mu \cdot P$  drückt die Räder ebenfalls auseinander. Die gesamte radiale Komponente des Zahndrucks beträgt also:  $P_r = P(\text{tg} \alpha + \mu)$ . Der Achsdruck des montierten Rades besteht aus der Radialkraft  $P_r$  und der am Hebelarm  $R$  wirkenden Umfangskraft  $P$ , die ersetzt wird durch das nutzbare Drehmoment  $M_d = P \cdot R$

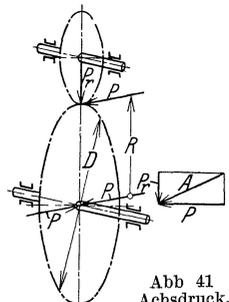


Abb 41 Achsdruck.

und die auf die Welle oder Achse wirkende Einzelkraft  $P$  (Abb. 41). Die Welle wird beansprucht:

auf Verdrehung durch das nutzbare Drehmoment  $M_d$ ,

auf Biegung durch den resultierenden Achsdruck  $A = P \sqrt{1 + (\operatorname{tg} \alpha + \mu)^2}$ .

Tabelle 13.  
Konstanten für Zahn- und Achsdruck.

|                     | $\mu = 0,15$ |       | 0,1   |       | 0,05  |       |
|---------------------|--------------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                     | $k_r$        | $k_a$ | $k_r$ | $k_a$ | $k_r$ | $k_a$ |
| $\alpha = 15^\circ$ | 0,418        | 1,084 | 0,368 | 1,066 | 0,318 | 1,049 |
| 20°                 | 0,514        | 1,124 | 0,464 | 1,102 | 0,414 | 1,082 |
| 25°                 | 0,616        | 1,175 | 0,566 | 1,149 | 0,516 | 1,125 |
| 30°                 | 0,727        | 1,237 | 0,677 | 1,208 | 0,627 | 1,180 |

Als Reibungskoeffizient ist etwa zu rechnen:

- $\mu \approx 0,15$  für unbearbeitete Zähne;
- $\approx 0,1$  für bearbeitete, in Luft umlaufende Triebwerksräder;
- $\approx 0,05$  für Zahnräder mit bester Bearbeitung und dauernder Schmierung durch zuströmendes Öl (Zahnradumformer).

Es ergibt sich also  $P_r = k_r \cdot P$  und  $A = k_a \cdot P$  mit  $k_r$  und  $k_a$  nach obiger Tabelle.

### IX. Die Wahl des Eingriffswinkels.

Mit steigendem Eingriffswinkel  $\alpha$  fallen sämtliche Grenzzähnezahlen. Mit der Grenzzähnezahl I wird die Zahnücke offener, so daß sich eine bessere Herstellung im Teilfräsprozeß mit Lückenfräsern ergibt. Bei kleinerer Grenzzähnezahl II lassen sich im Wälzfräsverfahren kleinere Getriebe ohne Unterschnitt herstellen. Eine kleinere Grenzzähnezahl III ergibt einwandfreie Getriebe bis zu kleineren Zähnezahlen mit normalen Kopfhöhen, d. h. mit normalen Werkzeugen und ohne besondere Maßregeln. Das Gebiet zwischen der III. und IV. Grenzzähnezahl kann durch besondere Maßregeln (korrigierte Verzahnungen) noch erreicht werden; mit größerem Eingriffswinkel wird auch dieses Gebiet nach unten erweitert. Noch kleinere Zähnezahlen als die IV. Grenzzähnezahl sind überhaupt nicht zu erreichen. Mit größerem Eingriffswinkel werden flachere Teile der Evolvente benutzt, die größere Krümmungsradien besitzen und günstig für die sog. Walzenfestigkeit wirken. Diesen Vorteilen stehen folgende Nachteile gegenüber:

- a) Die Zähne werden spitzer.
- b) Der als Eingriffstrecke brauchbare Teil  $AE$  der Eingriffslinie und damit der Überdeckungsgrad  $\varepsilon$  wird kleiner (Abb. 42).
- c) Der Achsdruck wird etwas größer.

Der übliche Winkel war früher  $14\frac{1}{2}^\circ$  oder  $15^\circ$ . Als Begründung für den  $15^\circ$ -Winkel ist nur anzugeben, daß er sich mit dem  $30^\circ$ - und  $45^\circ$ -Dreieck am einfachsten aufzeichnen läßt. Für diese Winkel liegen aber alle 4 Grenzzähnezahlen so hoch, daß die meisten, im laufenden Betrieb erforderlichen Zahngetriebe sich nicht mit normalen Kopfhöhen und Werkzeugen herstellen lassen, sondern eine Zahnkorrektur erfordern. Der in DIN angenommene Wert des Eingriffswinkels ist  $20^\circ$ . Höhere Eingriffswinkel werden gelegentlich ebenfalls verwendet, hauptsächlich bei Zahnradumformern. Eingriffswinkel über  $30^\circ$  dürften wohl kaum vorkommen, da die Nachteile die Vorteile zu stark überwiegen. Die Zahnkorrektur ist zur Herstellung einwandfreier Getriebe notwendig bei Zähnezahlen zwischen der III. und IV. Grenzzähnezahl; sie ist erwünscht zur Vermeidung von Unterschnitt bei Zähnezahlen, die zwischen den Grenzzähnezahlen II und III liegen. Eine geringe Unterschreitung der zweiten Grenzzähnezahl ergibt einen sehr kleinen Unterschnitt, der meist noch als zulässig angesehen werden kann.

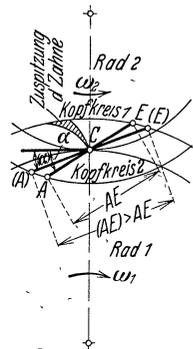


Abb. 42.  
Verkleinerung des Überdeckungsgrades und Zuspitzung der Zähne.

Der Zahn wird durch Verkleinerung der Kopfhöhe korrigiert. Die Stumpfverzahnung (stub teeth), bei der von vornherein kürzere Zähne ausgeführt werden ( $h' = 0,8 m$ ), setzt die Grenzzähnezahlen II und III herunter, ergibt aber stärkere Abnutzung der Zähne. Eine Zahnkorrektur mit verschiedenen Kopfhöhen am kleinen und großen Rad (AEG-Korrektur) verlangt Sonderwerkzeuge, wenn nicht gleichzeitig die Zahnstärken geändert werden. Sie kann aber auch als Sonderfall der allgemeinen Korrektur nach Fölmeyer angesehen werden, deren Zweck die Herstellung von Sonderverzahnungen mit normalen Abwälzfräsern ist. Da zu jedem

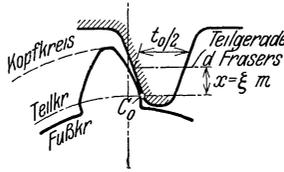


Abb. 43. Kleines Rad einer Zahnpaarung mit positiver Profilabückung.

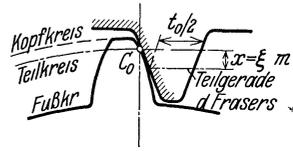


Abb. 44. Großes Rad einer Zahnpaarung mit negativer Profilabückung

Grundkreis nur eine Evolvente gehört, können die Räder mit positiver (Abb. 43) oder mit negativer (Abb. 44) Profilabückung  $x = \xi \cdot m$  geschnitten werden. Durch Veränderung von  $\xi$  ergeben sich für dasselbe Rad verschiedene Zahn- ausbildungen mit verschiedener Fußtiefe und Zahnstärke. Zwei mit Profilabückung geschnittene Räder berühren sich im Betrieb nun nicht mehr in den Teilkreisen, die der Herstellung zugrunde gelegt sind, sondern in zwei davon verschiedenen Wälzkreisen (Abb. 45). Hierbei wird absichtlich der Zustand hergestellt, der bei Evolventenrädern durch kleine Aufstellungsfehler vorkommen kann (siehe Abschn. V). Es ändert sich demgemäß, da die Eingriffslinie die gemeinsame Tangente an beide Grundkreise ist, der Eingriffswinkel  $\alpha$  und der Achsenabstand  $a$ . Die Wälzkreise gehen durch den Zentralpunkt  $C$ , sie können größer oder kleiner als die Teilkreise sein. Nur wenn zwei Räder, von denen das eine mit positiver Profilabückung, das andere mit gleich- großer negativer Profilabückung geschnitten ist, gepaart werden, berühren sich die Wälz- und die Teilkreise. Dieser Fall, die sog.  $V_0$ -Verzahnung ist identisch mit der AEG-Verzahnung und ein Sonderfall der allgemeinen Korrektur. Die Zahnhöhe ist nicht nur von dem Rade selbst, sondern auch von der Profilabückung des Gegenrades abhängig, und wird im allgemeinen kleiner als normal. Nur bei der  $V_0$ -Verzahnung gleichen sich die Wirkungen der negativen und positiven Profilabückung aus, so daß normale Zahnhöhen entstehen. Alle mit Korrektur hergestellten Zahnräder sind Sonderverzahnungen, die allgemeine Satzräder- eigenschaft der Evolventenverzahnung, daß alle Zahnräder gleichen Moduls miteinander gepaart, richtige Eingriffsverhältnisse ergeben, geht durch die Kor- rektur verloren.

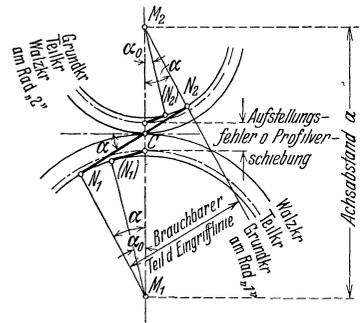


Abb. 45. Evolventen mit Aufstellungs- fehler oder Profilabückung.

## X. Stirnräder mit Schraubenzähnen.

Wenn zwei gleiche Stirnräder um je eine halbe Teilung versetzt werden, so daß die Zähne des einen Rades auf den Lücken des anderen stehen (Abb. 46), überdecken sich die beiden Eingriffsbogen. Werden die beiden Räder als ein Ganzes betrachtet, wird der Eingriff gunstiger, da sich der Eingriffsbogen auf das Doppelte vergrößert und ebenso der Überdeckungsgrad. Die Zahnzahl ist dadurch begrenzt,

daß der Überdeckungsgrad  $\varepsilon \geq 1$  sein muß; die Zähnezahzahl kann daher auf die Hälfte herabgesetzt werden. Denkt man sich das Zahnrad durch unendlich viele, um je den gleichen Betrag im Umfang versetzte, unendlich schmale Zahnräder zusammengesetzt, so entsteht ein Zahnrad mit schraubenförmig aufgesetzten Zähnen. Die Profilfläche des Schraubenzahnes entsteht auch durch axiale Verschiebung und gleichzeitige gleichförmige Drehung. Die Schraubenlinie im Teilkreiszyylinder des Stirnrades hat einen konstanten Steigungswinkel  $\beta$ , zusammenarbeitende Stirnräder mit Schraubenzähnen müssen rechts- und linksgangig sein (Abb. 47). Die im Teilkreiszyylinder (im Bogen) gemessene Verdrehung heißt der Sprung  $t_0$  (Abb. 48), er ist  $t_0 = b \cdot \text{ctg } \beta$ .

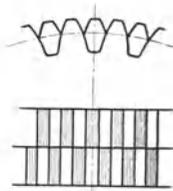


Abb 46. Um eine halbe Teilung versetzte Zähne.

Schließen die beiden Endprofile den Winkel  $\gamma$  ein, ist der Sprung auch  $t_0 = R \cdot \gamma$ . Demnach ergibt sich:

$$b \cdot \text{ctg } \beta = R \cdot \gamma; \quad \text{tg } \beta = \frac{b}{R \cdot \gamma}; \quad \gamma = \frac{b}{R \text{tg } \beta} = \frac{b}{R} \text{ctg } \beta.$$

Wird  $b = \psi t = \psi \pi m$  und  $R = \frac{Zm}{2}$  eingesetzt, ist:  $\gamma = \frac{2\psi\pi}{Z} \cdot \text{ctg } \beta$  und in Gradmaß umgerechnet:  $\gamma^\circ = 360^\circ \frac{\psi}{Z} \cdot \text{ctg } \beta$ .

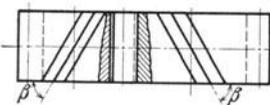


Abb 47. Stirnräder mit Schraubenzahnen und Rechts- und Linksgang.

Bei der Drehung kommt zuerst der Zahnfuß des reibenden Rades mit dem Kopf des getriebenen Rades zum Eingriff; der Eingriff verbreitert sich allmählich in Linienberührungen über die volle Zahnbreite, nimmt dann wieder ab und endet in einem Punkte  $E$  auf der andern Radseite. An Stelle der Eingriffslinie des Zahnrades mit geraden Zähnen entsteht ein Eingriffsfeld mit Linien gleichzeitigen Eingriffs, die bei Evolventenzähnen geradlinig sind. Der Eingriffsbogen verlängert sich um den Sprung  $t_0$  und der gesamte Überdeckungsgrad vergrößert sich auf:

$$\varepsilon = \frac{e + t_0}{t} = \frac{e}{t} + \frac{b}{t} \text{ctg } \beta = \varepsilon_{St} + \psi \cdot \text{ctg } \beta,$$

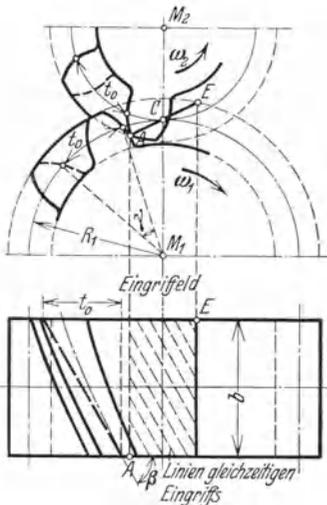


Abb 48. Stirnrad mit Schraubenzahnen.

wobei  $\varepsilon_{St}$  der Überdeckungsgrad eines Stirnrades mit geraden Zähnen bedeutet. Wenn die Zähne unbearbeitet bleiben und gegossen werden müssen, entspricht die Zahnform derjenigen des Stirnrades mit geraden Zähnen und wird im Schnitt senkrecht zur Achse (Stirnschnitt) gezeichnet; die Enden des Schraubenzahnes werden um den Winkel  $\gamma$  versetzt. Bei der Herstellung der Zähne im Teilfräsv erfahren mit Scheibenfräsern muß der Fräser rechtwinklig zur Zahnflanke stehen; er schneidet dann das Profil im Normalschnitt. Da ein normales Profil im Normalschnitt vorhanden sein muß, um normale Fräser benutzen zu können, braucht das Profil im Stirnschnitt nicht normal zu sein; es wird entsprechend bestimmt. Das Profil im Normalschnitt kann nicht vollständig dem Verzahnungsgesetz entsprechen und muß durch

eine Ersatzverzahnung möglichst angenähert werden. Entsprechend Abb. 49 schneidet der Normalschnitt den Teilkreiszyylinder in einer Ellipse, deren große

Halbachse  $a = \frac{R}{\sin \beta}$  und deren kleine Halbachse  $b = R$  ist. Der Krümmungsradius an der kleinen Achse der Ellipse ist:  $R_n = \frac{a^2}{b} = \frac{R}{\sin^2 \beta}$ . Die Normalteilung ist  $t_n = t \cdot \sin \beta$ , der entsprechende Modul des Normalschnittes also  $m_n = m \sin \beta$ . Da mit dem Lückenfräser immer die obere, an diesem Krümmungsradius liegende Verzahnung geschnitten wird, wird als Ersatzverzahnung die Verzahnung für  $R_n$  und  $m_n$  benutzt. Ihre ideale Zahnzahl  $Z_i$  ergibt sich aus:

$$R_n = \frac{Z_i \cdot m_n}{2}; \quad \frac{R}{\sin^2 \beta} = \frac{Z_i \cdot m \cdot \sin \beta}{2};$$

$$R = \frac{Z \cdot m}{2} \quad \text{mit} \quad Z_i = \frac{Z}{\sin^3 \beta}.$$

Dementsprechend ist der Lückenfräser für  $Z_i$  und  $m_n$  zu wählen, wobei  $m_n$  der Modulreihe entspricht, während der Modul der Stirnteilung  $m$  das im allgemeinen nicht tut; jedoch ist ein gewisser Ausgleich durch entsprechende Wahl des Schraubungswinkels  $\beta$  möglich. Auch die ideale Zahnzahl wird nur in Ausnahmefällen eine ganze Zahl. Entsprechend dem Lückenfräser richtet sich die Kopf- und Fußhöhe nach dem Modul  $m_n$  im Normalschnitt, d. h. es ist

$$\kappa' = 1; \quad h' = m_n; \quad \kappa'' = 1,167$$

$$\text{oder} \quad \kappa'' = 1,2.$$

Die Zähne fallen im Stirnschnitt breiter aus als im Normalschnitt. Gleichzeitig wird der Eingriffswinkel im Stirnschnitt größer als im Normalschnitt. Die Eingriffslinie im Stirnschnitt ist die Projektion der Eingriffslinie im Normalschnitt. Die Endpunkte der Eingriffslinien im Stirnschnitt  $N_S$  und im Normalschnitt  $N_n'$  liegen, von der Stirnseite aus gesehen, hintereinander. Es ist daher  $N_n N_n' = N_S N_S'$ . Im Grundriß liegen die Punkte  $N_n$  und  $N_n'$  sowie die Punkte  $N_S$  und  $N_S'$  übereinander. Es ist demnach im Grundriß  $C N_S' = C N_n' \sin \beta$ , im Stirnschnitt  $N_S N_S' = C N_S' \operatorname{tg} \alpha$  und im Normalschnitt  $N_n N_n' = C N_n' \operatorname{tg} \alpha_n$ , hieraus entsteht  $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha_n \cdot \sin \beta$  oder  $\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} \alpha_n \cdot \sin \beta$ . Bei der Berechnung des Überdeckungsgrades  $\varepsilon_{St}$  (nach Abschn. VIII) ist  $\kappa' = \sin \beta = \frac{m_n}{m}$  einzusetzen,

entsprechend ist  $\operatorname{ctg} \beta = \sqrt{\left(\frac{m}{m_n}\right)^2 - 1}$ .

Da die Profilgestaltung sich nach dem Normalschnitt richtet und die vier Grenzzahnezahlen sich auf die Zahnzahlen im Normalschnitt  $Z_i$  beziehen, werden die Grenzzahnezahlen im Stirnschnitt kleiner, da  $Z = Z_i \cdot \sin^3 \beta$  ist. Die zweite Grenzzahnezahl als Grenze für unternormalschnittfreie Zahnrad beträgt also bei Abrundung des Fräasers und normaler Kopfhöhe  $\kappa' = 1$ :

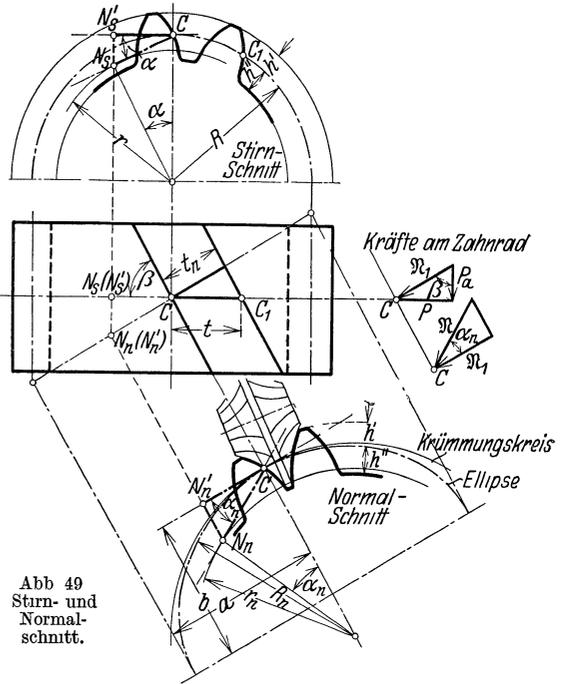


Tabelle 14. II. Grenzzahnezahl für Schraubenzahnräder.

|                    | $\alpha_n = 15^\circ$ | $20^\circ$ | $25^\circ$ | $30^\circ$ |
|--------------------|-----------------------|------------|------------|------------|
| $\beta = 80^\circ$ | 28,5                  | 16,4       | 10,7       | 7,6        |
| $70^\circ$         | 24,8                  | 14,2       | 9,3        | 6,7        |
| $60^\circ$         | 19,4                  | 11,1       | 7,3        | 5,2        |

Bei Herstellung im Wälzfräsverfahren entstehen die Schraubenzähne durch Schräganstellen des Wälzfräasers, so daß nur der Modul im Normalschnitt  $m_n$  zu bestimmen ist.

Der Normaldruck auf den Schraubenzahn  $\mathfrak{N}$  ist windschief, seine Projektion  $\mathfrak{N}_1$  schräg zur Radachse gerichtet. Es ist also  $\mathfrak{N} = \frac{P}{\sin \beta \cos \alpha_n}$  und es entsteht ein axialer Schub  $P_a = P \cdot \operatorname{ctg} \beta$ , wobei  $P$  durch das Drehmoment gegeben ist. Dieser axiale Schub vergrößert die Reibung an den Zahnflanken, verringert dadurch etwas den Wirkungsgrad und muß durch ein besonderes Stützlager aufgenommen werden. Räder mit Schraubenzähnen werden daher meist nur mit Schraubungswinkeln von etwa  $70^\circ$  und darüber ausgeführt.

### XI. Pfeilzähne, Zahnradumformer.

Der Axial Schub läßt sich vermeiden durch Gegeneinandersetzen zweier Räder mit rechts- und linksgängigen Zähnen, die miteinander verschraubt werden oder durch Räder mit Pfeil- oder Doppelpfeilzähnen. Die Räder werden zweckmäßig so angeordnet, daß die Spitze am treibenden Zahnrad vorausseilt, da hierbei die

Festigkeitsbeanspruchung kleiner ausfällt. Das kleine Rad soll sich möglichst selbst frei einstellen können, es erhält keine Stützlager. Die übliche Gesamtbreite der Zähne beträgt bei Pfeilzähnen (Abb. 50)  $B \approx 4t$ , bei Doppelpfeilzähnen (Abb. 51), die hauptsächlich für wechselnde Drehrichtung benutzt werden,  $B \approx 5t$ . Der übliche Schraubungswinkel ist  $\beta \approx 60^\circ$ .

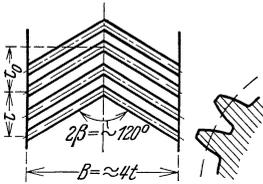


Abb. 50. Pfeilzähne.

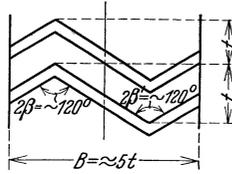


Abb. 51. Doppelpfeilzähne.

Die für die Zahnräder mit Schraubenzähnen entwickelten Formeln gelten auch für die einzelnen Teile, wobei bei Pfeilzähnen an Stelle von

$b$  einzusetzen ist  $\frac{B}{2}$ , bei Doppelpfeilzähnen  $\frac{B}{2}$  bzw.  $\frac{B}{4}$ . Bei

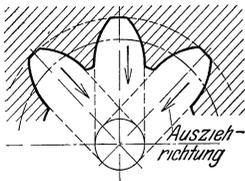


Abb. 52 Unbearbeitete, geformte Pfeilzähne.

gegossenen Zähnen muß jede Lücke einzeln geformt und das Zahnmodell nach innen herausgezogen werden, die Zähnezahlnzahl muß daher oberhalb der ersten Grenzzähnezahlnzahl liegen, wenn die Verzahnung einwandfrei sein soll (Abb. 52). Beim Fräsen der Pfeilzähne ist eine Lücke zum Auslauf des Fräasers erforderlich, da der Scheibenfräser in die Zähne hineinschneiden würde. (Abb. 53). Der Radkörper muß also breiter sein, als der

tragenden Breite  $B$  entspricht. Die Lücke für den Auslauf des Fräasers wird schmaler, wenn die beiden Halften der Zähne etwas gegeneinander versetzt werden (Abb. 54). Fingerfräser ermöglichen das Schneiden der ganzen Zahnbreite in einem Zug; sie erfordern aber eine Nacharbeit, da die Ecke an der Zahnspitze nicht voll ausgeschnitten ist (Abb. 55). Da die Fingerfräser aber nur wenige Schneidkanten besitzen, nutzen sie sich sehr stark ab. Werden bei Pfeil- und Doppelpfeilzähnen größere Eingriffswinkel  $\alpha_n$  im Normalschnitt



Abb. 53. Mit Scheibenfräsern gefräste Pfeilzähne

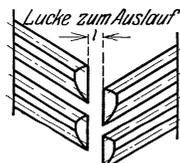


Abb. 54. Mit Scheibenfräsern gefräste, versetzte Pfeilzähne.

benutzt, kann die kleinste Zähnezahlnzahl im Ritzel für Unterschnittfreiheit sehr weit herabgesetzt werden. Als unterste Grenze kann man für  $\alpha_n = 30^\circ$  etwa

$Z = 4$  wählen, das Ritzel wird aus dem Vollen geschnitten, der Restquerschnitt muß für die Verdrehungsbeanspruchung ausreichen. Derartige Ritzel erscheinen als Doppelschnecke, so daß solche Zahnradgetriebe als „Stirnschneckengetriebe“ bezeichnet werden.

Die Stirnschnecke unterscheidet sich von der Schnecke des Schneckengetriebes (Abschn. XV) durch die Zahnform, die bei der Evolventenschnecke geradlinig ist, bei der Evolventen-Stirnschnecke aber gekrümmt. Ganz gekapselte, mit Umlaufkühlung und Umlaufschmierung ausgerüstete Stirnschneckengetriebe werden als „Zahnradumformer“ bezeichnet. Die Zähne werden hierbei im Abwälzverfahren hergestellt und in einem besonderen Wälzverfahren geschliffen. Sie ergeben geringe Reibung und Abnutzung, daher sehr hohe Wirkungsgrade und sind für sehr hohe Geschwindigkeiten und große Leistungen anwendbar.

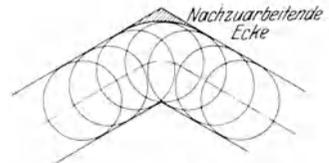


Abb. 55. Mit Fingerfräsern gefräste Pfeilzähne.

## XII. Kegelräder (für sich schneidende Achsen).

Bei Achsen, die sich schneiden, rollen zwei Kegel oder, da nur ein schmales Stück zum Eingriff benutzt wird, zwei Kegelstümpfe aufeinander, die als Grundkegel bezeichnet werden. Die Zähne bilden Teile von Pyramiden, die sämtlich ihre Spitze im Achsenschnittpunkt  $S$  haben. Der eigentliche Eingriff vollzieht sich auf Kugeln um den Schnittpunkt  $S$  mit den Radien  $SC$  und  $SC'$ ; die Verzahnung auf einer Kugel ist aber mit Lineal und Zirkel zeichnerisch nicht richtig darzustellen, also auch mit entsprechenden Mitteln technisch nicht herzustellen.

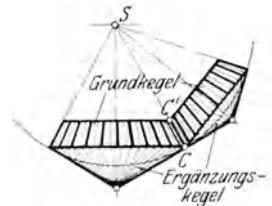


Abb. 56. Grund- und Ergänzungskegel.

Um eine zeichnerisch darzustellende Ersatzverzahnung zu erhalten, wird die Kugel durch zwei Kegel ersetzt, die in den Grundkreisen im Punkte  $C$  und  $C'$  die Kugel berühren und Ergänzungskegel genannt werden. (Abb. 56.) Die Ergänzungskegel mit den äußeren Radien  $\rho_1$  und  $\rho_2$  und den inneren Radien  $\rho_1'$  und  $\rho_2'$  (Abb. 57) können in die Ebene abgerollt werden, die Ersatzverzahnung ist auf ihnen zu zeichnen. Der Modul  $m$ , die Kopf- und die Fußhöhe beziehen sich auf die Teilkreise der Grundkegel mit den Radien  $R_1$  und  $R_2$  bzw.  $R_1'$  und  $R_2'$ . Die mittleren Radien der Grundkreise  $R_{m1}$  und  $R_{m2}$  werden aus der Festigkeitsrechnung ermittelt, ebenso die Zahnbreite  $b$ . Aus den mittleren Teilkreisradien ergeben sich die äußeren Teilkreise mit

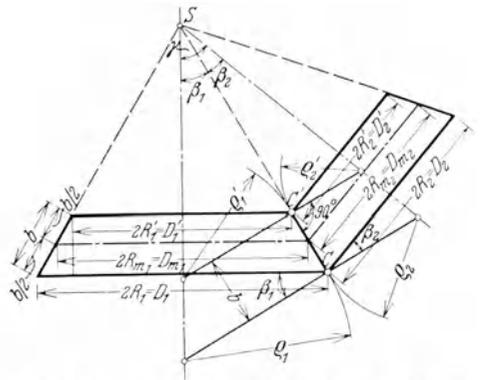


Abb. 57. Bezeichnungen der Kegelradverzahnung.

$$R_1 = R_{m1} + \frac{b}{2} \sin \beta_1;$$

$$D_1 = D_{m1} + b \sin \beta, \text{ und}$$

$$R_2 = R_{m2} + \frac{b}{2} \sin \beta_2, \quad D_2 = D_{m2} + b \sin \beta_2. \quad \text{Die äußeren Teilkreisdurchmesser}$$

$D_1$  und  $D_2$  sind so abzurunden, daß der Modul  $m = \frac{D_1}{Z_1}$  bzw.  $\frac{D_2}{Z_2}$  der Modulreihe entspricht. Nach endgültiger Festlegung der Breite  $b$  ergeben sich die inneren

Teilkreisdurchmesser mit  $D_1' = D_1 - 2b \sin \beta_1$  und  $D_2' = D_2 - 2b \sin \beta_2$ , da sie ebensoviel kleiner als die mittleren, wie die äußeren größer sind. Die Radien der Ergänzungskegel ergeben sich rechnerisch mit

$$\varrho_1 = \frac{R_1}{\cos \beta_1}; \quad \varrho_2 = \frac{R_2}{\cos \beta_2}; \quad \varrho_1' = \frac{R_1'}{\cos \beta_1}; \quad \varrho_2' = \frac{R_2'}{\cos \beta_2}.$$

Da der Modul  $m$  den Grundkegeln zu entnehmen ist, ergeben sich die ideellen Zahnzahlen auf dem abgewinkelten Ergänzungskegel aus:  $2\varrho_1 = Z_{v1} \cdot m$  mit

$$Z_{v1} = \frac{2\varrho_1}{m} = \frac{2R_1}{m \cdot \cos \beta_1} = \frac{D_1}{m} \cdot \frac{1}{\cos \beta_1} = \frac{Z_1}{\cos \beta_1} \quad \text{und ebenso} \quad Z_{v2} = \frac{Z_2}{\cos \beta_2}.$$

Das Übersetzungsverhältnis ist:

$$i = \frac{R_{m1}}{R_{m2}} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{Z_1}{Z_2},$$

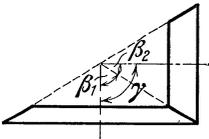
da  $R_1 = SC \sin \beta_1$  und  $R_2 = SC \sin \beta_2$  ist, ist auch:  $i = \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2}$ . Ist  $\gamma$  der Schnittwinkel der beiden Achsen, so ist zur Berechnung von  $\beta_1$  und  $\beta_2$  aus dem Übersetzungsverhältnis:  $\beta_1 = \gamma - \beta_2$  und

$$i = \frac{\sin(\gamma - \beta_2)}{\sin \beta_2} = \frac{\sin \gamma \cdot \cos \beta_2 - \cos \gamma \cdot \sin \beta_2}{\sin \beta_2} = \frac{\sin \gamma}{\text{tg } \beta_2} - \cos \gamma, \quad \text{tg } \beta_2 = \frac{\sin \gamma}{i + \cos \gamma}.$$

Ebenso ist:

$$\beta_2 = \gamma - \beta_1; \quad \frac{1}{i} = \frac{\sin(\gamma - \beta_1)}{\sin \beta_1} = \frac{\sin \gamma}{\text{tg } \beta_1} - \cos \gamma; \quad \text{tg } \beta_1 = \frac{\sin \gamma}{\frac{1}{i} + \cos \gamma}.$$

Die häufigste Anwendung der Kegelräder sind die Winkelräder mit rechtwinklig sich schneidenden Achsen (Abb. 58); hierbei ist  $\gamma = 90^\circ$ ,



$$\text{tg } \beta_1 = \frac{\sin 90^\circ}{\frac{1}{i} + \cos 90^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{i} + 0} = i = \frac{Z_1}{Z_2}.$$

Abb. 58 Winkelrader.

Ebenso ist  $\text{tg } \beta_2 = \frac{Z_2}{Z_1}$ ; die erforderlichen Ergänzungskegel ergeben sich aus  $\cos \beta_1 = \sin \beta_2$  und  $\cos \beta_2 = \sin \beta_1$  mit

$$\varrho_1 = \frac{R_1}{\sin \beta_2}; \quad \varrho_2 = \frac{R_2}{\sin \beta_1}; \quad \varrho_1' = \frac{R_1'}{\sin \beta_2}; \quad \varrho_2' = \frac{R_2'}{\sin \beta_1}.$$

Die Grenzzahnzahlen beziehen sich auf die Ersatzverzahnung; da  $Z = Z_v \cos \beta$  ist, werden die Grenzzahnzahlen entsprechend kleiner. Die wichtigsten 2. Grenzzahnzahlen für unterschneittfreie Herstellung im Abwälzverfahren mit Zahnstangenwerkzeug bei Abrundung des Fräasers und  $\kappa' = 1$  entsprechen nachstehender Tabelle:

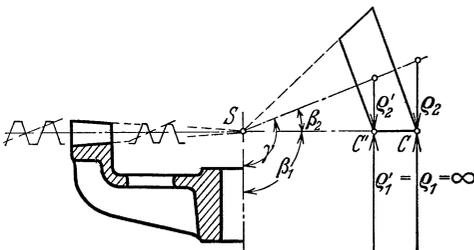


Abb. 59 Plankegelrad.

Tabelle 15. II. Grenzzahnzahl für Kegelrader.

| $\beta =$           | $15^\circ$ | $30^\circ$ | $45^\circ$ | $60^\circ$ | $75^\circ$ |
|---------------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| $\alpha = 15^\circ$ | 28,8       | 25,9       | 21,1       | 14,9       | 7,7        |
| $20^\circ$          | 16,5       | 14,8       | 12,1       | 8,6        | 4,5        |
| $25^\circ$          | 10,8       | 9,7        | 7,9        | 5,6        | 2,9        |
| $30^\circ$          | 7,8        | 7,0        | 5,7        | 4          | 2,1        |

Die Grenzzahnzahlen liegen tiefer als bei Stirnrädern gleicher Zahnzahl. Wird der Winkel des größeren Zahnrades  $\beta_1 = 90^\circ$  gewählt, so entsteht das Planrad (Abb. 59). Der Radius des Ergänzungskegels wird:

$$\varrho_1 = \frac{R_1}{\cos 90^\circ} = \frac{R_1}{0} = \infty.$$

Das Planrad entspricht der Zahnstange der Stirnrader; bei Evolventenverzahnung ist die Flanke geradlinig. Jedes Kegelrad kämmt richtig mit einem Planrad, dessen Mittelpunkt mit der Kegelspitze  $S$  zusammenfällt. In der Form der Zahne

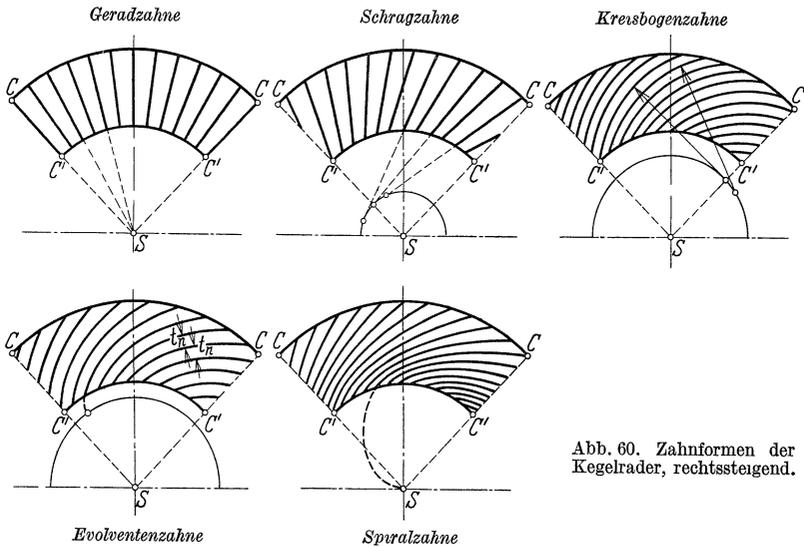


Abb. 60. Zahnformen der Kegelrader, rechtssteigend.

unterscheidet man entsprechend Abb. 60, in der sämtliche Zahnformen rechts steigend auf dem abgewickelten Ergänzungskegel dargestellt sind: Geradzahne, Schragzahne, Kreisbogenzähne, Evolventenzähne und Spiralzähne. Evolventenzähne haben überall den gleichen Abstand  $t_n$  im Normalschnitt.

### XIII. Herstellung der Kegelräder.

Im Teilfräsprozeß wird der Scheibenfräser für den Modul  $m$  und die ideale Zahnzahl  $Z_i$  benutzt und so geführt, daß die Tiefe korrekt geschnitten wird. Eine geringe Nacharbeit an den Flanken ist bei kleinen Kegelrädern mit  $Z \geq 30$  notwendig. Beim Teilhobelprozeß entsteht die Verzahnung durch Führung an einer Schablone nach der Kegelspitze  $S$ ; dieser Prozeß liefert genaue Kegelverzahnungen. Beim Teilstoßprozeß wird das Stoßrad ebenfalls nach der Kegelspitze  $S$  geführt und wird meist auf gleiche Zahnflanken über die ganze Zahnbreite eingestellt. Ebenso wie das Stirnrad auf einer Zahnstange abgewälzt wird, kann das Kegelrad auf einem Plankegelrad abgewälzt werden; benutzt wird hierbei eine, höchstens zwei Schneidkanten des Plankegelrades. Diese können ausgebildet werden als um eine Achse drehbare Fräser (Kegelradfräsmaschine) oder als hin- und hergehende Stichel (Kegelradhobelmaschine). Für beide Maschinen müssen die Rohlinge genau vorgedreht sein, für die die in Abb. 61 angegebenen Maße notwendig sind; besonders ist der äußerste Spitzenwinkel, der größer als der Winkel  $\beta$  ist, erforderlich. Der äußere Teilkreis wird meist angerissen, damit er sich mit dem des Gegenrades bei der Montage berühren kann. Im Gegensatz zu Stirnrädern sind Kegelräder auch bei Evolventenverzahnung sehr empfindlich für Montagefehler, zwei Kegelräder können nur dann richtig kämmen, wenn die

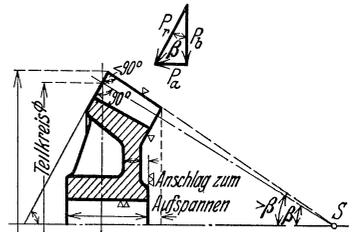


Abb 61 Maße des Rohlings.

Kegelspitzen in  $S$  zusammenfallen. Die Radialkraft  $P_r = R(\operatorname{tg} \alpha + \mu)$  liegt schräg zur Achse. Sie wird zerlegt in eine Komponente senkrecht zur Achse  $P_b = P_r \cos \beta$ , die eine Biegungsbeanspruchung der Welle hervorbringt, und eine Komponente parallel zur Achse  $P_a = P_r \sin \beta = P(\operatorname{tg} \alpha + \mu) \sin \beta$ , die sie verschiebt. Diese Komponente würde die Räder außer Eingriff schieben, sie muß durch ein Lager aufgefangen werden.

### XIV. Zahnräder für sich kreuzende (windschiefe) Achsen.

Ein einschaliges Umdrehungshyperboloid entsteht, wenn eine Hyperbel sich um die Achse dreht, die die Hyperbel nicht schneidet. Das Hyperboloid entsteht auch, wenn eine gerade Erzeugende um eine zu ihr windschief stehende Gerade auf einem Kreise geführt wird (Abb. 62). Infolgedessen sind auf dem Hyperboloid gerade Linien (Erzeugende) vorhanden, obwohl das Hyperboloid selbst eine Raumkurve doppelter Krümmung ist. Steht die Erzeugende senkrecht zur Umdrehungsachse, entsteht ein Kreiszyylinder, schneidet die Erzeugende die Umdrehungsachse, entsteht ein Kreiskegel, die also beide Grenzfälle des Hyperboloids sind. Die Erzeugende eines Hyperboloids kann zugleich Erzeugende eines zweiten Hyperboloids sein, dessen Achse windschief zur Achse des ersten steht. Diese beiden Hyperboloide können die Grundformen für zwei Zahnräder mit gekreuzten oder windschiefen Achsen bilden, die die allgemeinste Form der Zahnräder darstellen (Abb. 63); sie berühren sich in einer Geraden, die die Erzeugende beider Hyperboloide bildet. Wenn sich die Achsen der beiden Zahnräder in kurzem Abstand kreuzen, kann ein beliebiges Stück der Hyperboloide benutzt werden, und es entstehen hyperboloidische Schraubenräder. Ihre Form ist ähnlich derjenigen der Kegelaräder mit etwas gekrümmten Kopfbegrenzungen und, entsprechend der

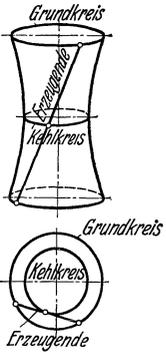


Abb. 62. Einschaliges Rotationshyperboloid.

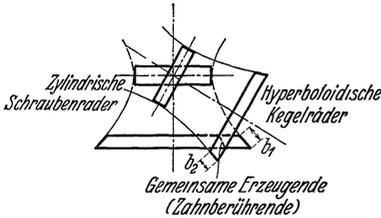


Abb. 63. Schraubenräder an Rotationshyperboloiden.

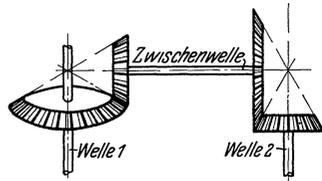


Abb. 64. Ersatz durch Zwischenwelle und Kegelaräder.

Erzeugenden, schraubenförmigen Zähnen. Eine Ersatzverzahnung, d. h. eine durch Fräsen, Hobeln oder Stoßen herzustellende Verzahnung ist sehr schwierig zu bestimmen und auch dann nur näherungsweise richtig. Diese Zahnform wird nur sehr selten ausgeführt, da sie durch Benutzung einer Zwischenwelle stets vermieden werden kann. Wenn die Zwischenwelle beide Achsen schneidet, so erfolgt der Ersatz durch zwei Paar Kegelaräder (Abb. 64). Liegt die Zwischenwelle einer Achse parallel und schneidet die andere, dient als Ersatz ein Paar Stirnräder und ein Paar Kegelaräder (Abb. 65).

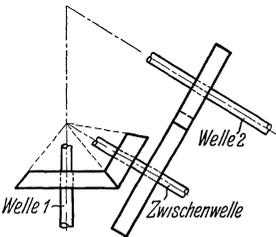


Abb. 65. Ersatz durch Zwischenwelle, Kegel- und Stirnräder

Benutzt man die Hyperbelteile an den Kehlkreisen (Abb. 66) und ersetzt die Hyperbeln in erster Annäherung durch die Tangenten, so entstehen zylindrische Schraubenräder. Zwei Stirnräder mit Schraubenzähnen, die in der Normalteilung  $t_n$  übereinstimmen, lassen

sich so ineinanderschieben, daß Zahn an Zahn liegt. Die Herstellung erfolgt daher wie bei den Stirnrädern mit Schraubenzähnen mit dem Modul der Normalteilung  $m_n = m_1 \sin \beta_1$  bzw.  $m_n = m_2 \cdot \sin \beta_2$  und den ideellen Zähnezahlen

$$Z_{v1} = \frac{Z_1}{\sin^3 \beta_1} \quad \text{bzw.} \quad \left\{ \begin{array}{l} Z_{v2} = \frac{Z_2}{\sin^3 \beta_2} \end{array} \right.$$

Die Winkel  $\beta_1$  und  $\beta_2$  sind an beiden Rädern verschieden. Die Mittellinien beider Räder schneiden sich unter dem Winkel  $\beta_1 + \beta_2$ , die Achsen stehen senkrecht zu den Mittellinien; sie bilden daher den Winkel  $180^\circ - (\beta_1 + \beta_2)$ . Es ist

$$t_1 = \frac{t_n}{\sin \beta_1}; \quad m_1 = \frac{m_n}{\sin \beta_1}; \quad \text{aus der Zähnezahl ist } m_1 = \frac{D_1}{Z_1}, \text{ demnach } \frac{D_1}{Z_1} = \frac{m_n}{\sin \beta_1}$$

$$\text{und } Z_1 = \frac{D_1 \cdot \sin \beta_1}{m_n}; \quad \text{ebenso ist } m_2 = \frac{m_n}{\sin \beta_2} \text{ und } Z_2 = \frac{D_2 \cdot \sin \beta_2}{m_n}.$$

Da immer Zahn an Zahn kämmt, ist das Übersetzungsverhältnis:  $i = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{D_1 \cdot \sin \beta_1}{D_2 \cdot \sin \beta_2}$ ; das Übersetzungsverhältnis ist nicht mehr nur von den Durchmessern abhängig. Ebenso ist die Umfangsgeschwindigkeit beider Räder verschieden, und zwar  $v_1 = \frac{D_1 \pi \cdot n_1}{60}$ ;

$$v_2 = \frac{D_2 \pi \cdot n_2}{60}; \quad \text{das Verhältnis der Umfangsgeschwindigkeiten ist:}$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{m_1 \cdot Z_1 \cdot n_1}{m_2 \cdot Z_2 \cdot n_2}. \quad \text{Da } i = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{n_2}{n_1} \text{ und } Z_1 \cdot n_1 = Z_2 \cdot n_2 \text{ ist,}$$

$$\text{wird } \frac{v_1}{v_2} = \frac{m_1}{m_2}. \quad m_n \text{ muß in der Modulreihe enthalten sein; die}$$

Winkel  $\beta_1$  und  $\beta_2$  sowie die Moduln der Stirnteilung  $m_1$  und  $m_2$  werden nach Wahl bestimmt. Für die Festigkeitsrechnung ist die Geschwindigkeit senkrecht zur Zahnflanke, die für beide Räder gleich ist,  $v = v_1 \sin \beta_1 = v_2 \sin \beta_2$ , maßgebend. Gleichzeitig entsteht eine Gleitgeschwindigkeit; aus dem Geschwindigkeitsriß ist

$$\begin{aligned} v_g &= v_1 \cos \beta_1 + v_2 \cos \beta_2 = \frac{\pi}{60} (n_1 D_1 \cdot \cos \beta_1 + n_2 D_2 \cdot \cos \beta_2) \\ &= v_2 \left( \frac{m_1}{m_2} \cos \beta_1 + \cos \beta_2 \right) = v_1 \left( \cos \beta_1 + \frac{m_2}{m_1} \cos \beta_2 \right). \end{aligned}$$

Außer der Gleitgeschwindigkeit entsteht ein seitlicher Schub an jedem Rade, wie bei Stirnrädern mit Schraubenzähnen, die durch Drucklager abzufangen sind. Der Überdeckungsgrad verlängert sich um den Sprung. Da die Zähne sich infolge des Ersatzes der Hyperbeln durch ihre Tangente nur in einem Punkt berühren und infolge der Gleitgeschwindigkeit sich stark abnutzen, der Wirkungsgrad außerdem durch den seitlichen Schub verringert wird, werden die Schraubengeräder nur für kleine Breiten senkrecht zur Stirnteilung ( $b = t$  bis höchstens  $2t$ ) ausgeführt. Für größere Kräfte kommt nur Stahl auf Phosphorbronze in Frage; die Verwendung läßt sich durch eine Zwischenwelle vermeiden. Häufiger werden zylindrische Schraubengeräder ausgeführt zum Antrieb der Steuerwellen von Viertaktmotoren, wobei die Wellen sich unter

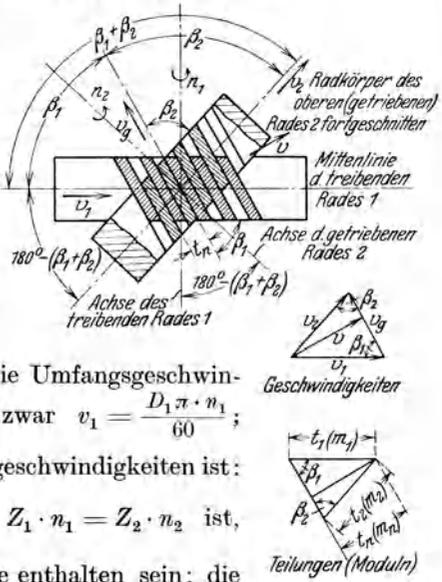


Abb. 66. Zylindrische Schraubengeräder mit windschiefen Achsen.

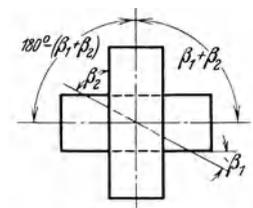


Abb. 67. Achsen unter 90°.

90° kreuzen (Abb. 67). Es ist demnach  $180^\circ - (\beta_1 + \beta_2) = 90^\circ$ ;  $\beta_1 + \beta_2 = 90^\circ$  und  $\beta_2 = 90^\circ - \beta_1$ . Das Übersetzungsverhältnis ist

$$i = \frac{D_1 \sin \beta_1}{D_2 \sin \beta_2} = \frac{D_1 \sin \beta_1}{D_2 \sin(90^\circ - \beta_1)} = \frac{D_1 \sin \beta_1}{D_2 \cos \beta_1} = \frac{D_1}{D_2} \cdot \operatorname{tg} \beta_1$$

$$= \frac{D_1 \sin(90^\circ - \beta_1)}{D_2 \sin \beta_2} = \frac{D_1 \cos \beta_2}{D_2 \sin \beta_2} = \frac{D_1}{D_2 \operatorname{tg} \beta_2},$$

weiter ist

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{m_n / \sin \beta_1}{m_n / \sin \beta_2} = \frac{\sin \beta_2}{\sin \beta_1} = \frac{\sin(90^\circ - \beta_1)}{\sin \beta_1} = \operatorname{ctg} \beta_1 = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta_1} = \operatorname{tg} \beta_2 = \frac{v_1}{v_2},$$

wird gewählt:  $\beta_1 = \beta_2 = 45^\circ$ ;  $\operatorname{tg} \beta_1 = \operatorname{tg} \beta_2 = \operatorname{ctg} \beta_1 = \operatorname{ctg} \beta_2 = 1$ , so ist  $i = \frac{D_1}{D_2}$ , wie bei Stirnrädern. Soll die erforderliche Übersetzung  $i = 1:2$  mit gleichen Durchmessern erreicht werden, also  $D_1 = D_2$ , ist:

$$i = \frac{1}{2} = \frac{D_1}{D_2} \operatorname{tg} \beta_1 = \operatorname{tg} \beta_1 \text{ und } \beta_1 = 26^\circ 34'; \beta_2 = 90^\circ - \beta_1 = 63^\circ 26'.$$

## XV. Schneckenverzahnung.

Wird bei einem von zwei Schraubenrädern der Durchmesser und ebenso der Schraubungswinkel  $\beta$  sehr klein, bilden die Zähne am kleineren Rad geschlossene Gänge; die Zahnzahl kann hierbei bis 1 heruntergehen. Jeder Zahn der Schnecke bildet einen Schraubengang, so daß ein-, zwei-, drei-, vier- und mehrgängige Schnecken entstehen. Der Schräkungswinkel kann, wie bei den zylindrischen Schraubenrädern, beliebig gewählt werden; die Achsenkreuzung hat meist den Winkel  $90^\circ$ . Die Schneckengänge entsprechen den Gängen einer Schraube, die Zähne des Schneckenrades bilden die Mutter dieser Schraube. Da das Schneckenrad aber nicht, wie die Mutter, längsverschiebbar, sondern um einen Punkt drehbar ist, entsprechen die Schneckenradzähne nicht vollständig dem Gewinde einer

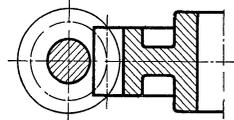


Abb. 68. Ersatz der Hyperbel durch Tangente.

Schraubenmutter. Die Schnecke erhält meist geradlinige Kopfbegrenzung, so daß die Hyperbel durch ihre Tangente ersetzt ist. Wird die Hyperbel des größeren Schraubenrades ebenfalls durch ihre Tangente ersetzt, so entsteht ein Schneckenrad mit schräg aufgesetzten Zähnen (Abb. 68), entspricht also der in Abb. 26 dargestellten Frasschnecke mit Zahnstangenprofil und schräg angestelltem Stirnrad. Bei Schrägstellung des Rades können die

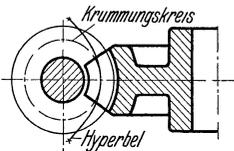


Abb. 69. Ersatz der Hyperbel durch Krümmungskreis.

in zweiter Annäherung ersetzt durch ihren Krümmungskreis (Abb. 69). Wenn die Schnecke eine Umdrehung macht, verschiebt sich der Schneckenradzahn um eine Ganghöhe; die Übersetzung der Schnecke ist daher:

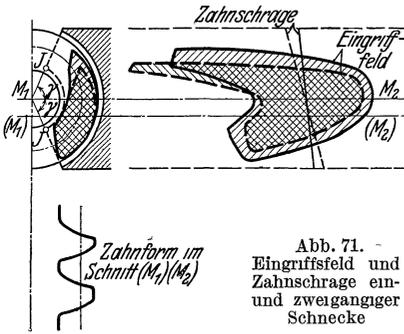
$$i = \frac{\text{Gangzahl der Schnecke}}{\text{Zahnzahl des Schneckenrades}} = \frac{z_s}{Z}.$$

Verwendet werden die Schnecken nur zur Übersetzung ins Langsame, da bei Antrieb am Schneckenrade sehr starke Reibung und dadurch schlechter Wirkungsgrad eintritt. Schnecken mit kleiner Gangzahl sind meist selbsthemmend, so daß sie durch Drehen am Rad überhaupt nicht in Gang gesetzt werden können.



als etwa eine halbe Teilung über den Punkt  $E$  hinausreichen. Als geeigneter Wert für die Schneckenlänge gilt:  $L = (0,15 Z + 7) m$  bis  $(0,15 Z + 8) m$ .

Die Verzahnung der Schnecke ist nur im Mittelschnitt eine genaue Evolvente, so daß genaues Einhalten der Mittentfernung erforderlich ist. Das Eingriffsfeld der Schnecke muß im Grundriß und Aufriß durch Schnitte parallel  $M_1 M_2$  bestimmt werden, wobei die Schneckenzähne stark verzerrt erscheinen und die Bestimmung sehr genaues Zeichnen erfordert. Mit zunehmender Gangzahl  $z_s$  wird das Eingriffsfeld im Grundriß immer länger erstreckt, im Aufriß immer kleiner (Abb. 71). Es ist zwecklos, die Ecken  $J$  hoher zu ziehen, da sie am Eingriff nicht mehr teilnehmen und die Zähne an den Ecken sehr spitz werden. Der Winkel  $\gamma$  ist abhängig von den Schneckenabmessungen und der Zahnzahl des Rades, das Ver-



hältnis  $\psi = \frac{\text{Breite}}{\text{Teilung}} = \frac{b}{t}$  ist vom Winkel  $\gamma$  abhängig.

Die Schnecke kann auf der Drehbank gedreht werden; falls die Gangspindel Zollteilung hat, muß auch die Ganghöhe  $h_s$  bzw.  $t = m \cdot \pi$  der Zollteilung entsprechen. Wird die Schnecke mit einem Scheibenfräser hergestellt, tritt der Schnecken Zahn im Kopf und Fuß etwas gegen das gerade Profil des Scheibenfräasers zurück; der Fehler ist unerheblich und wird noch geringer, wenn die Schnecke mit einem Fingerfräser gefräst wird, wobei der Fingerfräser aber stark abgenutzt wird. Bei unbeeinigtem Schneckenrad ist die Aufzeichnung der Endprofile, besonders aber die Bestimmung der Strecke  $C'D'$ , notwendig; da die Verzahnung nur angenähert ist, sind große Lückenweiten erforderlich. Fräsen mit dem Scheibenfräser wie bei Schraubenzähnen ist ungenau. Bei dem üblichsten Fräsen mit der Frässhnecke muß das Kopfprofil bis zum Grundkreis des Rades

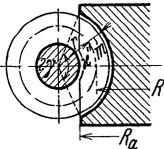
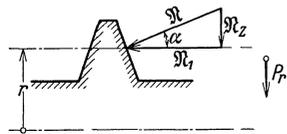


Abb 72 Schneckenrad mit zylindrischer Begrenzung

ergänzt werden; die Frässhnecke muß so lang sein, daß das Profil voll ausgeschnitten wird, also länger als die Betriebsschnecke. Da sich eine genaue Abwälzung ergibt, ist die Zeichnung des Profils nicht notwendig; das Schneckenrad ist oft zylindrisch begrenzt (Abb. 72), so daß die Punkte  $J$  fortgeschnitten sind.



## XVI. Die Kräfte und ihre Aufnahme am Schneckengetriebe.

Der Normaldruck  $\mathfrak{N}$  liegt in der Eingriffslinie unter dem Eingriffswinkel  $\alpha$  schräg gegen die Achse geneigt (Abb. 73). Der Normaldruck wird zerlegt in eine Teilkraft  $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N} \cdot \cos \alpha$  in einer Ebene parallel zur Achse und in eine Teilkraft  $\mathfrak{N}_z = \mathfrak{N} \cdot \sin \alpha$  senkrecht zur Achse. Im Grundriß steht  $\mathfrak{N}_1$  rechtwinklig auf dem Zahn, läuft also windschief zur Achse. Entsprechend dem Schraubungswinkel des Schnecken-

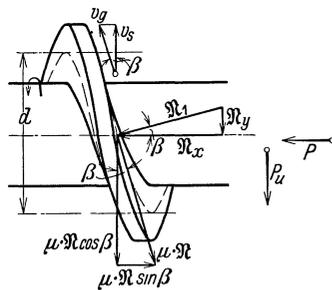


Abb. 73. Kräfte an der Schnecke

zähnes  $\beta$  wird die Kraft  $\mathfrak{N}_1$  zerlegt in eine Kraft  $\mathfrak{N}_x = \mathfrak{N}_1 \cos \alpha = \mathfrak{N} \cos \alpha \cdot \cos \beta$  parallel der Achse und eine Kraft  $\mathfrak{N}_y = \mathfrak{N}_1 \cdot \sin \beta = \mathfrak{N} \cos \alpha \sin \beta$ , die die Achse rechtwinklig kreuzt. Durch das Vorbeigleiten des

Radzahnes am Schnekenzahn entsteht die Reibung  $\mu \cdot \mathfrak{N}$ . Diese wird zerlegt in eine Reibungskraft  $\mu \cdot \mathfrak{N} \cdot \sin \beta$  parallel der Schnekenachse, aber entgegengerichtet der Kraft  $\mathfrak{N}_x$ , und eine Reibungskraft  $\mu \cdot \mathfrak{N} \cos \beta$ .

Durch Addieren entstehen die Axialkraft:  $P = \mathfrak{N}_x - \mu \cdot \mathfrak{N} \cdot \sin \beta = \mathfrak{N} (\cos \alpha \cos \beta - \mu \sin \beta)$ ; die Umfangskraft:  $P_u = \mathfrak{N}_y + \mu \cdot \mathfrak{N} \cdot \cos \beta = \mathfrak{N} (\cos \alpha \sin \beta + \mu \cdot \cos \beta)$  und die Radialkraft:  $P_r = \mathfrak{N}_z = \mathfrak{N} \sin \alpha$ .

Es wird 
$$\frac{P_u}{P} = \frac{\mathfrak{N} (\cos \alpha \sin \beta + \mu \cdot \cos \beta)}{\mathfrak{N} (\cos \alpha \cos \beta - \mu \cdot \sin \beta)} = \frac{\sin \beta + \frac{\mu}{\cos \alpha} \cdot \cos \beta}{\cos \beta - \frac{\mu}{\cos \alpha} \cdot \sin \beta}.$$

Der Reibungskoeffizient  $\mu$  wird ersetzt durch den Reibungswinkel  $\varrho$ ; die Reibung vergrößert sich durch die Keilnutwirkung auf  $\frac{\mu}{\cos \alpha} = \mu' = \text{tg } \varrho'$ . Es ist also:

$$\frac{P_u}{P} = \frac{\sin \beta + \text{tg } \varrho' \cos \beta}{\cos \beta - \text{tg } \varrho' \sin \beta} = \frac{\text{tg } \beta + \text{tg } \varrho'}{1 - \text{tg } \varrho' \text{tg } \beta} = \text{tg } (\beta + \varrho').$$

An den Lagern der Schnecke greift die Kraft  $P$  (Abb. 74) am Hebelarm  $r$  an. Sie wird ersetzt durch ein Drehmoment  $P \cdot r$  und eine Einzelkraft  $P$ , die auf Langsverschieben der Schnecke wirkt und, da die Drehrichtung der Schnecke umkehrbar ist, für jede Richtung durch ein Drucklager aufzunehmen ist. Das Drehmoment  $P \cdot r$  ergibt ein Kippmoment, das durch das Moment der Auflagerkräfte der Schneckenlager aufzunehmen ist. Es ist also  $\frac{Q_1 + Q_1'}{2} \cdot e_1 = P \cdot r$  und bei symmetrischer Anordnung  $Q_1 = Q_1' = P \cdot \frac{r}{e_1}$ . Die

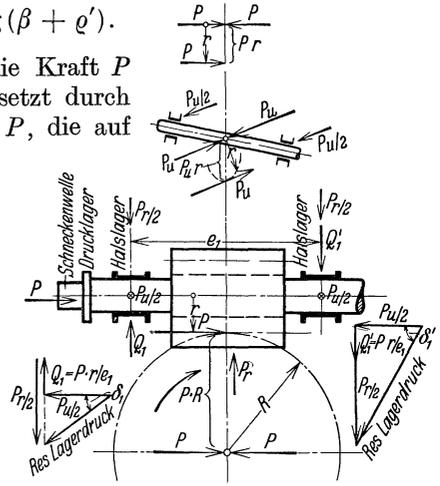


Abb 74. Kräfte an den Lagern der Schnecke.

Umfangskraft  $P_u$  wirkt am Hebelarm  $r$ , sie wird ersetzt durch das eingeleitete Drehmoment  $P_u \cdot r$ , das sich auf das Schneckenrad überträgt, und eine Einzelkraft  $P_u$ , die von beiden Halslagern, von jedem also mit  $\frac{P_u}{2}$ , aufzunehmen ist. Die Radialkraft  $P_r$  drückt die Schnecke vom Schneckenrad ab und ist von den Halslagern mit je  $\frac{P_r}{2}$  aufzunehmen. Demnach ergeben sich an den Lagern der Schnecke folgende Beanspruchungen: das Drucklager muß für die Axialkraft  $P$  der Schnecke berechnet werden, die Halslager der Schnecke werden waagrecht mit je der Hälfte der Umfangskraft  $\frac{P_u}{2}$ , senkrecht mit der Hälfte der Radialkraft  $\frac{P_r}{2}$  und außerdem mit wechselnder Richtung durch  $Q_1$  und  $Q_1'$  beansprucht. Der resultierende Lagerdruck ist bei beiden Lagern verschieden groß und wirkt unter verschiedenen Winkeln  $\delta_1$  und  $\delta_1'$ .

Auf die Lager des Schneckenrades (Abb. 75) wirkt die Axialkraft  $P$  am Hebelarm  $R$ ; sie wird ersetzt durch das Drehmoment  $P \cdot R$ , das als nutzbares Drehmoment abgegeben wird, und durch die Einzelkraft  $P$ , die von den Halslagern des Schneckenrades mit je  $\frac{P}{2}$  aufzunehmen ist. Die Umfangskraft  $P_u$  greift am Hebelarm  $R$  an, sie wird ersetzt durch eine Einzelkraft  $P_u$ , die das Schneckenrad beiseite drückt und von einem Anlauf an der Schneckenradnabe aufgenommen

wird, an dessen Stelle bei großen Schnecken ein besonderes Kugeldrucklager ausgeführt wird, und durch ein Kippmoment, das von den Halslagern aufzunehmen

ist. Es ist also  $\frac{Q_2 + Q_2'}{2} \cdot e_2 = P_u \cdot R$  und bei symmetrischer Ausführung  $Q_2 = Q_2' = P_u \cdot \frac{R}{e_2}$ . Die Halslager

der Schnecke sind daher beansprucht waagrecht mit je  $\frac{P}{2}$ , senkrecht mit je  $\frac{P_r}{2}$  und dazu mit wechselnder Richtung mit  $Q_2 = Q_2'$ .

Die Beanspruchungen an beiden Halslagern sind verschieden und können infolge des Kippmoments an einem der Lager auch von der Schneckenachse her gerichtet sein, d. h. das Lager kann oben anliegen. Da immer die ungünstigsten Verhältnisse zugrunde gelegt werden müssen, werden die Halslager meist ungeteilt ausgeführt.

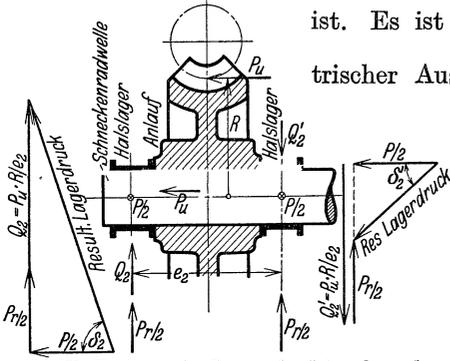


Abb. 75. Kräfte an den Lagern des Schneckenrades.

### XVII. Wirkungsgrad der Schneckengetriebe.

Bei einer Umdrehung der Schnecke legt die Umfangskraft  $P_u$  den Weg  $2\pi r$  zurück; die hineingesteckte Arbeit ist  $P_u \cdot 2\pi r$ . Die Axialkraft  $P$  legt die Ganghöhe  $h_s$  zurück, so daß die herausgeholtete Arbeit  $P \cdot h_s$  beträgt. Der Wirkungsgrad ist herausgeholtete durch hineingesteckte Arbeit, also  $= \frac{P \cdot h_s}{P_u \cdot 2\pi r}$ . Nun ist

$P_u = P \operatorname{tg}(\beta + \varrho')$  und  $\operatorname{tg} \beta = \frac{h_s}{2\pi r}$ ; demnach  $\eta = \frac{P \operatorname{tg} \beta}{P \operatorname{tg}(\beta + \varrho')} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg}(\beta + \varrho')}$ . Betrachtet man das Schneckengetriebe als schiefe Ebene, so tritt Selbsthemmung ein, wenn der Schraubungswinkel  $\beta$  gleich dem Reibungswinkel  $\varrho'$  ist, also für

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \varrho'}{\operatorname{tg} 2\varrho'} = \frac{\operatorname{tg} \varrho' (1 - \operatorname{tg}^2 \varrho')}{2 \operatorname{tg} \varrho'} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \varrho'}{2}$$

Tabelle 16.  $\eta$  für Selbsthemmung.

| Schnecke                    | $\mu$ | $\alpha = 15^\circ$ | $20^\circ$ | $25^\circ$ | $30^\circ$ |
|-----------------------------|-------|---------------------|------------|------------|------------|
| Unbearbeitet .....          | 0,15  | 0,488               | 0,487      | 0,486      | 0,485      |
| Gußeisen in Luft uml. ....  | 0,10  | 0,497               | 0,495      | 0,494      | 0,493      |
| Stahl auf Bronze, in Öl uml | 0,05  | 0,499               | 0,499      | 0,498      | 0,498      |

Der Wirkungsgrad für Selbsthemmung weicht nie stark von 0,5 ab. Der Gesamtwirkungsgrad des Schneckengetriebes ist etwas geringer als  $\eta$ , da

die hineingesteckte Arbeit um einen Zuschlag  $a$  für Lagerreibung zu vergrößern ist.

Es ist der Gesamtwirkungsgrad des Schneckengetriebes  $\eta_s = \frac{\eta}{1+a} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{(1+a) \operatorname{tg}(\beta + \varrho')}$

Da die Lagerreibung ebenfalls hemmend wirkt, wird der Bereich der Selbsthemmung etwas vergrößert. Als selbsthemmend können alle Schnecken mit  $\eta_s < 0,5$  gelten; wegen Unsicherheit des Reibungskoeffizienten bleibt man noch etwas unter diesem Betrag, wenn Selbsthemmung notwendig ist. Der Wirkungsgrad der Schnecke  $\eta$  hat einen Höchstwert; an derselben Stelle hat auch der Gesamtwirkungsgrad  $\eta_s$  ein im Verhältnis  $\frac{1}{1+a}$  kleineren Höchstwert, der berechnet wird durch Nullsetzen des ersten Differentialquotienten. Es ist:

$$d\eta = \frac{d \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg}(\beta + \varrho')} - \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg}^2(\beta + \varrho')} d \operatorname{tg}(\beta + \varrho') = \frac{1}{\operatorname{tg}(\beta + \varrho') \cos^2 \beta} \cdot d\beta - \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg}^2(\beta + \varrho') \cos^2(\beta + \varrho')} d(\beta + \varrho') = \frac{1}{\operatorname{tg}(\beta + \varrho')} \left[ \frac{1}{\cos^2 \beta} - \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg}(\beta + \varrho') \cos^2(\beta + \varrho')} \right] d\beta$$

$$\text{und} \quad \frac{d}{d} \frac{\eta}{\beta} = \frac{1}{\text{tg}(\beta + \varrho')} \left[ \frac{1}{\cos^2 \beta} - \frac{\text{tg} \beta}{\text{tg}(\beta + \varrho') \cos^2(\beta + \varrho')} \right] = 0.$$

Hieraus folgt:  $\text{tg}(\beta + \varrho') \cos^2(\beta + \varrho') = \text{tg} \beta \cdot \cos^2 \beta$  und unter Einsetzung von  $\text{tg} = \frac{\sin}{\cos}$  wird  $\sin(\beta + \varrho') \cos(\beta + \varrho') = \sin \beta \cos \beta$  und  $\sin 2(\beta + \varrho') = \sin 2\beta$ . Diese Gleichung hat zwei Lösungen, die erste Lösung ist:  $2(\beta + \varrho') = 2\beta$ ,  $\beta + \varrho' = \beta$ ; das ist nur möglich, wenn  $\varrho' = 0$  ist. Da der Sinus eines Winkels gleich dem Sinus des Nebenwinkels ist, ergibt sich als zweite Lösung:  $\sin 2(\beta + \varrho') = \sin(180^\circ - 2\beta)$  und daraus:  $\beta + \varrho' = 90^\circ - \beta$ ;  $\beta = 45^\circ - \frac{\varrho'}{2}$ .

Hiermit ist  $\beta + \varrho' = 45^\circ - \frac{\varrho'}{2} + \varrho' = 45^\circ + \frac{\varrho'}{2}$ ; durch Einsetzen wird

$$\eta_{\max} = \frac{\text{tg}\left(45^\circ - \frac{\varrho'}{2}\right)}{\text{tg}\left(45^\circ + \frac{\varrho'}{2}\right)} = \text{tg}\left(45^\circ - \frac{\varrho'}{2}\right) \text{ctg}\left(45^\circ + \frac{\varrho'}{2}\right) = \text{tg}^2\left(45^\circ - \frac{\varrho'}{2}\right) = \text{tg}^2 \beta.$$

Schnecke und Schneckenrad sind durch den Modul bestimmt. Es ist die Ganghöhe der Schnecke:  $h_s = z_s \cdot t = z_s \cdot m \cdot \pi$ , wobei  $t$  die Stirnteilung, nicht aber die Normalteilung bedeutet. Daraus ergibt sich  $\text{tg} \beta = \frac{h_s}{2\pi r} = \frac{h_s}{\pi d} = z_s \left(\frac{m}{d}\right)$ . Dieser Wert ist leichter zu bestimmen als der Schraubungswinkel. Durch Einsetzen ergibt sich:

$$\eta = \frac{z_s \left(\frac{m}{d}\right) \left[1 - \mu' \cdot z_s \left(\frac{m}{d}\right)\right]}{z_s \left(\frac{m}{d}\right) + \mu'} \quad \text{und der Gesamtwirkungsgrad: } \eta_S = \frac{z_s \left(\frac{m}{d}\right) \left[1 - \mu' \cdot z_s \left(\frac{m}{d}\right)\right]}{(1+a) \left[z_s \left(\frac{m}{d}\right) + \mu'\right]}.$$

Der maximale Wirkungsgrad tritt auf, wenn  $\text{tg} \beta = \text{tg}\left(45^\circ - \frac{\varrho'}{2}\right) = z_s \left(\frac{m}{d}\right)$  ist.

Nun ist

$$\begin{aligned} \text{tg} \frac{90^\circ - \varrho'}{2} &= \frac{\sin \frac{90^\circ - \varrho'}{2}}{\cos \frac{90^\circ - \varrho'}{2}} = \frac{2 \sin^2 \frac{90^\circ - \varrho'}{2}}{2 \sin \frac{90^\circ - \varrho'}{2} \cos \frac{90^\circ - \varrho'}{2}} = \frac{1 - \cos(90^\circ - \varrho')}{\sin(90^\circ - \varrho')} \\ &= \frac{1 - \sin \varrho'}{\cos \varrho'} = \frac{1}{\cos \varrho'} - \text{tg} \varrho' = \sqrt{1 + \text{tg}^2 \varrho'} - \text{tg} \varrho', \end{aligned}$$

demnach ist.

$$\left(\frac{m}{d}\right) = \frac{\sqrt{1 + \mu'^2} - \mu'}{z_s}.$$

Der maximale Wirkungsgrad ist  $\eta_{\max} = \text{tg}^2 \beta = 1 + 2\mu'^2 - 2\mu' \sqrt{1 + \mu'^2}$  und der maximale Wirkungsgrad des Getriebes  $\eta_{S\max} = \frac{\eta_{\max}}{1+a}$ . Der maximale Wirkungsgrad ist für alle Gangzahlen  $z_s$  gleich, tritt aber bei verschiedenen Werten von  $\frac{m}{d}$  auf; er ist nur abhängig von der Schnecke selbst, unabhängig vom Schneckenrad. Ist das Getriebe mit Schnecken aus Flußstahl, einem Schneckenrad aus Phosphorbronze und mit Kugellagern ausgeführt, ist etwa  $\mu = 0,05$ ;  $a = 0,05$ ; für Schnecken und Schneckenrad aus Gußeisen und Gleitlager ist  $\mu = 0,10$  und  $a = 0,10$ . Der Einfluß des Eingriffswinkels durch die Keilnutwirkung ist sehr gering. Schnecken, bei denen  $\frac{m}{d}$  kleiner als  $\sim 0,12$ – $0,14$  ist, sind meist besonders auf die Welle aufgekelt, mit größeren Werten  $\frac{m}{d}$  aus dem Vollen geschnitten.

Bei sehr großen Werten  $\left(\frac{m}{d} > 0,26\right)$  reicht der Restquerschnitt der Welle für die Verdrehungsbeanspruchung nicht mehr aus. Der maximale Wirkungsgrad

$\eta_{Smax}$  wird bis  $\frac{m}{d} = 0,26$  und bei 4gangigen, aus dem Vollen geschnittenen Schnecken erreicht, für Stahlschnecken bei  $\left(\frac{m}{d}\right) = 0,237$  mit  $\eta_{Smax} = 0,85$ , bei gußeisernen bei  $\left(\frac{m}{d}\right) = 0,224$  mit  $\eta_{Smax} = 0,74$ . Die zugehörigen Schraubungswinkel sind  $\beta = 43^\circ 27'$  bzw.  $41^\circ 55'$ . Die Grenze der Selbsthemmung ist durch den Wirkungs-

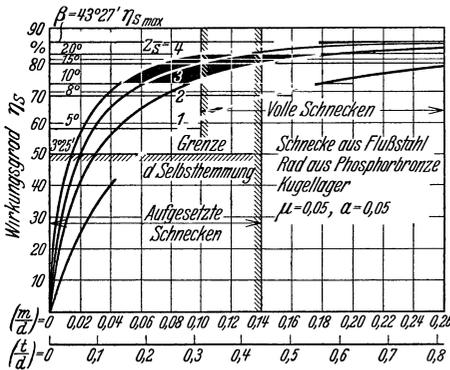


Abb. 76. Wirkungsgrade der Flußstahlschnecke.

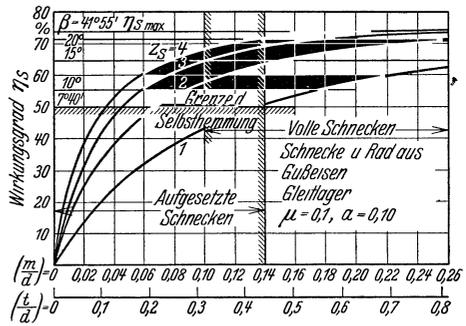


Abb. 77. Wirkungsgrade der Gußstahlschnecke.

grad  $\eta = 0,5$  gegeben. Die entsprechenden Schraubungswinkel sind  $\beta = 3^\circ 25'$  bzw.  $7^\circ 40'$ .

Höhere Gangzahl ( $z_s = 2, 3, 4$ ) und verhältnismäßig kleine Schnecken, d. h. hohe Werte von  $\frac{m}{d}$  ergeben bessere Wirkungsgrade, sind aber nicht selbsthemmend.

Selbsthemmung erfordert kleine Gangzahl ( $z_s = 1$ ) und große, besonders aufgesetzte Schnecken, d. h. kleine Werte von  $\frac{m}{d}$ .

Tabelle 17. Mittelwerte für die erste Rechnung.

|                                                             | $\frac{m}{d}$ | $z_s = 1$       | $= 2$ | $= 3$ | $= 4$ |
|-------------------------------------------------------------|---------------|-----------------|-------|-------|-------|
| Aufgesetzte Schnecke<br>Gußeisen                            | 0,10          | $\eta = 0,48$   | 0,63  | 0,71  | 0,75  |
|                                                             |               | $\eta_s = 0,43$ | 0,58  | 0,65  | 0,68  |
| Aus dem Vollen<br>gedrehte Schnecke<br>Flußstahl auf Bronze | 0,15          | $\eta = 0,73$   | 0,84  | 0,87  | 0,89  |
|                                                             |               | $\eta_s = 0,70$ | 0,80  | 0,83  | 0,85  |

Für andere Werte sind die Wirkungsgrade aus Abb. 76 und 77 abzugreifen.

## XVIII. Grundlagen der Festigkeitsberechnung der Stirn- und Kegelräder.

Die Zähne werden so berechnet, daß ihr Widerstandsmoment dem Biegemoment des Zahndruckes genügt; die zulässige Biegebungsbeanspruchung ist so zu wählen, daß Flächenpressung, Erwärmung, Abnutzung und gegebenenfalls Stöße ausreichend berücksichtigt sind. Bei Beginn des Eingriffs (Punkt A der Eingriffstrecke) greift der Zahndruck am Kopfende des Zahnes an und beansprucht ihn

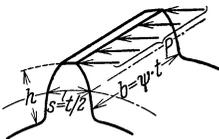


Abb. 78 Zahnbiegung.

auf Biegung. Es ist demgemäß  $P \cdot h = W \cdot \sigma_b = \frac{b \cdot s^2}{6} \cdot \sigma_b$  (Abb. 78); hierin kann (nach Abschnitt I) gesetzt werden die Zahnhöhe  $h = 0,7 t$  und die Stärke des Zahnes  $s \approx 0,5 t$ ; hiermit ist  $P = \frac{0,25}{0,7 \cdot 6} \cdot \sigma_b \cdot b \cdot t = 0,06 \sigma_b \cdot b \cdot t = c \cdot b \cdot t$ .  $c$  wird bezeichnet als Zahndruckkoeffizient.

Bei dieser Ableitung ist nicht berücksichtigt:

1. daß der Überdeckungsgrad  $\varepsilon$  meist  $> 1$  ist, so daß zu Beginn der Übertragung mehrere Zähne an der Übertragung teilnehmen;

2. daß der Zahndruck immer mehr näher an den Zahnfuß herangeleitet, der Hebelarm daher nur bei Beginn des Eingriffs gleich der Zahnhöhe ist;

3. daß der Zahn unter Umständen (z. B. bei der Stumpfverzahnung, Abschnitt IX) oder bei Herstellung mit Profilabdruckung kleiner als  $0,7 t$  ist;

4. daß der Zahn bei Unterschneidung an der Wurzel kleiner als  $0,5 t$  ist.

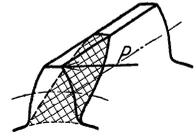


Abb 79 Eckbruch

Diese Einflüsse heben sich in ihrer Wirkung gegenseitig, mindestens teilweise, auf. Wird  $b = \psi t$  eingesetzt, ist  $P = c \cdot \psi \cdot t^2$ . Für die Wahl des Verhältnisses  $\psi$  ist folgendes maßgebend: bei unbearbeiteten Zähnen besteht die Gefahr des Eckbruches, die Kraft  $P$  kann ungünstigstenfalls nur an einem Eckpunkt angreifen und bricht den Zahn nicht an der Wurzel, sondern in einer schrägen Fläche ab (Abb. 79). Der schräge Schnitt liegt unter einem beliebigen Winkel  $\beta$ ; es ergeben sich dann nach Abb. 80 folgende Beziehungen: der Hebelarm ist

$h_x = h \cdot \cos \beta$ , die Breite der abgebrochenen Ecke  $b_x = \frac{h}{\sin \beta}$  und ihre Projektion auf die Zahnbreite  $b_0 = b_x \cdot \cos \beta = h \operatorname{ctg} \beta$ .

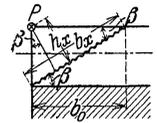


Abb 80 Beziehungen am Eckbruch.

Unter der Annahme, daß  $s$  die mittlere Stärke auch des schrägen Schnittes ist, ist  $P \cdot h_x = \frac{b_x \cdot s^2}{6} \cdot \sigma_b$  und die Biegungsbeanspruchung:

$$\sigma_b = \frac{6P}{s^2} \cdot \frac{h_x}{b_x} = \frac{6P}{s^2} \sin \beta \cos \beta = \frac{3P}{s^2} \sin 2\beta.$$

Die Differentiation ergibt:

$$d(\sigma_b) = \frac{6P}{s^2} \cos 2\beta d\beta, \quad \frac{d(\sigma_b)}{d\beta} = \frac{6P}{s^2} \cdot \cos 2\beta = 0,$$

und entsprechend  $\beta = 45^\circ$ ;  $\sigma_{b \max} = \frac{3P}{s^2}$ .

Greift der Zahndruck aber doch über die ganze Zahnbreite  $b$  verteilt an, so ist die Beanspruchung:  $\sigma_b = \frac{6P}{s^2} \cdot \frac{h}{b}$ .

Die maximale Beanspruchung  $\sigma_{b \max}$  darf die Beanspruchung  $\sigma_b$  nicht überschreiten, demnach ist:  $\frac{3P}{s^2} = \frac{6P}{s^2} \cdot \frac{h}{b}$ ;  $b = 2h = 1,4 t$ .

Solange die Gefahr des Eckbruches besteht, ist eine größere Zahnbreite zwecklos, da sonst größere Beanspruchung auftreten kann. Da der Zahndruck aber selten gerade genau in der Ecke angreift, wird meist gewählt:

$\psi = 2$  für unbearbeitete Zähne;

$\psi = 3$  für bearbeitete Zähne, bei denen die Eckbruchgefahr nur gering ist (als Normalzahnrad wird oft benutzt:  $b = 10 m$ , entsprechend  $\psi = 3,18$ );

$\psi = 4$  bei Stirnrädern mit Pfeilzähnen wegen der günstigen Eingriffsverhältnisse (siehe Abb. 50).

$\psi = 5$  bei Stirnrädern mit Doppelpfeilzähnen (siehe Abb. 51).

Meist ist nicht der Zahndruck, sondern das Drehmoment  $M_d$  gegeben. Es ist also:

$$P = c \psi t^2 = \frac{2\pi}{Z \cdot t} \cdot M_d; \quad M_d = \frac{c \psi Z}{2\pi} \cdot t^3 \quad \text{oder} \quad t = \sqrt[3]{\frac{2\pi}{c \psi Z} \cdot M_d}.$$

Diese Gleichung ist zu verwenden, wenn das Drehmoment  $M_d$  gegeben ist, wie bei Handwinden.  $M_d$  ist einzusetzen in cmkg, da der Zahndruckkoeffizient  $c$  in kg/cm<sup>2</sup> und die Teilung  $t$  in cm benutzt wird. Hieraus ergibt sich die übertragbare Leistung in kW, es ist:

$$M_d = 100 \cdot \frac{60}{2\pi} \cdot \frac{1000}{g} \cdot \frac{N_{kW}}{n} = \frac{c \psi Z}{2\pi} t^3$$

und

$$t [\text{cm}] = \sqrt[3]{\frac{60 \cdot 10^5}{9,81} \cdot \frac{1}{c \psi Z} \cdot \frac{N_{kW}}{n}} = 10 \sqrt[3]{\frac{612}{c \psi Z} \cdot \frac{N_{kW}}{n}}$$

Soll unmittelbar der Modul  $m$  in mm berechnet werden, ist  $m = \frac{10}{\pi} t$ , und es wird

$$m [\text{mm}] = 100 \sqrt[3]{\frac{19,7}{c \psi Z} \cdot \frac{N_{kW}}{n}}$$

Die übertragbare Leistung in PS ergibt sich aus:

$$M_d = 100 \cdot \frac{60 \cdot 75}{2\pi} \cdot \frac{N_{PS}}{n} = \frac{c \psi Z}{2\pi} t^3,$$

damit die Teilung

$$t [\text{cm}] = 10 \sqrt[3]{\frac{450}{c \psi Z} \cdot \frac{N_{PS}}{n}} \quad \text{und der Modul } m [\text{mm}] = 100 \sqrt[3]{\frac{14,5}{c \psi Z} \cdot \frac{N_{PS}}{n}}$$

Diese Formeln sind zu benutzen, wenn, wie meist, Leistung und Umlaufzahl gegeben sind. Für die Wahl der Zahnzahlen gilt folgendes: je weniger Zähne vorhanden sind, desto weniger Lücken sind zu bearbeiten, desto schlechter ist aber der Eingriff und die Abnutzung, je größer die Zahnzahl, desto ruhiger ist der Gang. Üblich sind  $Z \geq 10$  für Winden mit Handbetrieb und seltener Benutzung, häufig bezeichnet als Krafträder;

$Z \geq 24$  für dauernd laufende Räder (Arbeitsräder);

$Z \geq 16$  bis 20 für Antriebe, die in der Benutzungsdauer zwischen beiden liegen (Kranräder).

Mit Rücksicht auf die Herstellung soll die Zahnzahl möglichst gut teilbar und ein Vielfaches der Armzahl sein. ( $Z = 12, 16, 20, 24, 30, 32, 36, 40, 48$  usw.) Die Zahnzahl des großen Rades ergibt sich aus der Übersetzung  $i$ . Wegen des besseren Einarbeitens werden Übersetzungen 1:2, 1:3, 1:4 gewählt, wobei die Zähne des kleinen Rades immer mit denselben Zähnen des Großrades zusammen arbeiten. Nur bei periodischem Wechsel des Zahndruckes innerhalb jeder Umdrehung (verzahnte Schwungräder, Hammerwerke) werden Übersetzungsverhältnisse 2:3, 2:5 oder 3:4, 3:5 angeordnet, damit nicht immer der gleiche Zahn den Höchstdruck erhält. DIN 781 enthält die Zahnzahl für die Wechselrader der Leitspindeldrehbänke, der Universalfräsmaschinen und der Zahnradbearbeitungsmaschinen. Es sollen erhalten: Triebwerksräder (Arbeitsräder) bis  $i = \sim 1:6$ , bei raschem Gang nur bis  $\sim 1:5$ , und bei ungleichmäßigem Zahndruck nur bis  $\sim 1:4$ , Krane und Hebezeuge (Krafträder) bis  $i = 1:7$ , unter Umständen bis 1:10; Zahnradumformer (für Schiffsturbinenbetriebe, Turbolokomotiven, Dieselmotoren u. dgl.) haben Übersetzungsverhältnisse bis  $i = 1:15$  und darüber bis etwa 1:30.

Wird die Übersetzung ins Langsame aufgeteilt, z. B.  $\frac{1}{12} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$  soll die kleinere Übersetzung vorangehen, damit die Zwischenwelle größere Umlaufzahl erhält und kleiner ausfällt. Entsprechend den Reibungskoeffizienten (Abschn. VIII) ist mit folgenden Wirkungsgraden zu rechnen (einschließlich Lagerreibung).

$\eta = 0,85$  bis 0,9 für unbearbeitete Zähne;

$\eta = 0,9$  bis 0,95 für bearbeitete, in Luft frei umlaufende Zähne;

$\eta = 0,95$  bis 0,97 für Zahnradumformer im Ölbad.

Für die Wahl des Werkstoffes und der Bearbeitung ist folgendes maßgebend: Unbearbeitete Zähne dürfen nicht mehr als 2 bis 4 m/s Umfangsgeschwindigkeit  $v$  im Teilkreis erhalten, da sonst zu starkes Geräusch entsteht. Bei bearbeiteten und frei umlaufenden Radern liegt die Grenze bei etwa 7 bis 8 m/s, bei Rohhautzähnen, die das Geräusch teilweise abdampfen, bei ungefähr 15 m/s, während Zahnradumformer mit Ölbad und Ölkühlung bis zu  $v \approx 60$  m/s ausgeführt werden.

Für die Wahl des Zahndruckkoeffizienten  $c$  gilt folgendes: Jeder einzelne Zahn ist nur  $\frac{\varepsilon}{Z}$  Bruchteile jedes Umlaufes belastet, er ist  $\frac{Z-\varepsilon}{Z}$  Bruchteile unbelastet.

Bei ganz langsamem Gang kann, z. B. bei Handbetrieb, die Biegungsbeanspruchung  $\sigma_b$  entsprechend dem Belastungsfall I nach Bach (ruhende Belastung) und  $c = 0,06 \sigma_b$  gewählt werden. Bei größerer Umlaufzahl kommt zur Biegungsbeanspruchung eine kleine Beanspruchung auf Zug durch die Fliehkraft des Zahnes hinzu. Gleichzeitig nähert sich die Belastung dem Fall II nach Bach (wechselnde Belastung). Der Belastungsfall III (hammernde Belastung) wird von Zahnradern nie erreicht, da auch bei wechselnder Drehrichtung die Zähne nicht dauernd hin und her gebogen, sondern stets dazwischen auch längere Zeit entlastet werden. Außer der Beanspruchung ist für den Zahndruckkoeffizienten die Abnutzung maßgebend, die proportional dem Reibungskoeffizienten  $\mu$ , dem Zahndruck  $P$  und der relativen Gleitgeschwindigkeit  $(w_1 - w_2)$  ist.

Nun ist  $P$  proportional dem Zahnradruckkoeffizienten  $c$ , die Gleitgeschwindigkeit proportional der Umfangsgeschwindigkeit  $v$ ; es ist also die Abnutzung proportional  $\mu \cdot c \cdot v$ . Bei Zahnradumformern ist der Reibungskoeffizient  $\mu$  sehr klein; es kann auch bei großer Umfangsgeschwindigkeit  $v$  der Zahndruckkoeffizient  $c$  entsprechend dem Belastungsfall II gewählt werden.

Bei gewöhnlichen, in der Luft umlaufenden, mit Graphit oder Öl geschmierten Radern ist der Reibungskoeffizient erheblich hoher, kann aber für alle Räder gleich gesetzt werden. Es ist also dann die Abnutzung proportional  $c \cdot v$ , für gleiche Abnutzung (gleiche Lebensdauer) für Räder gleicher Abmessungen muß  $c \cdot v = \text{const.}$  sein. (Gleichseitige Hyperbeln Abb. 81.) Eine so starke Absenkung führt zu sehr schweren Radern bei großer Umfangsgeschwindigkeit, so daß auf die Forderung gleicher Lebensdauer verzichtet wird. Nun bestehen eine Reihe von Tabellen, die von den zahnraderausführenden Firmen<sup>1</sup> heraus-

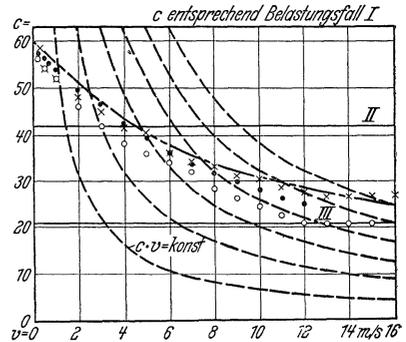


Abb 81 Zahndruckkoeffizienten für Stahlguß.

gegeben sind. In Abb. 81 sind für Stahlguß eingetragen: die Werte des Zahndruckkoeffizienten  $c$ , die den Belastungsfallen I, II, III entsprechen, die Werte  $c$  aus den Tabellen, die gleichseitigen Hyperbeln  $c \cdot v = \text{const.}$ , sowie eine von Reuleaux angegebene Gleichung (für Stahlguß  $c = \frac{600}{v + 10}$ , für Gußeisen  $c = \frac{300}{v + 10}$ ). Es ist ersichtlich, daß der Zahndruckkoeffizient sowohl nach den Tabellen als auch nach Reuleaux bei  $v = 0$  etwa dem Belastungsfall I, bei  $v = 3$  bis 5 m/s etwa dem Belastungsfall II entsprechen. Die Streuung aus den Tabellen und der Formel von

<sup>1</sup> Krupp, F., Grusonwerk — Hilfsbuch von Schuchardt u. Schutte. — Schutte, A.H.: vgl. auch Karrass: Zahnradberechnung nach einer Charakteristik. Masch.-Bau/Gestaltung 1923 Heft 21. — Honnicke, G.: Die Teilung der Zahnrad und ihre einfachste rechnerische Bestimmung. Berlin: Julius Springer 1927.

Reuleaux ist nicht sehr erheblich, zumal die Teilung erst durch  $\sqrt[3]{c}$  beeinflusst wird und noch der Normalmodulreihe angepaßt werden muß. Trägt man die Tabellenwerte als  $f\sqrt{v}$  auf (Abb. 82), lassen sich die Kurven durch gerade Linien annähern,

deren Gleichung durch  $c = c_0 - c' \sqrt{v}$  ausgedrückt ist. Hierin ist  $c_0$  der dem Belastungsfall I entsprechende Wert für Stillstand oder ganz langsamen Gang. Hiermit ergibt sich folgende Tabelle für verschiedene Baustoffe, wobei die Werte von Schuchardt und Schütte benutzt sind.

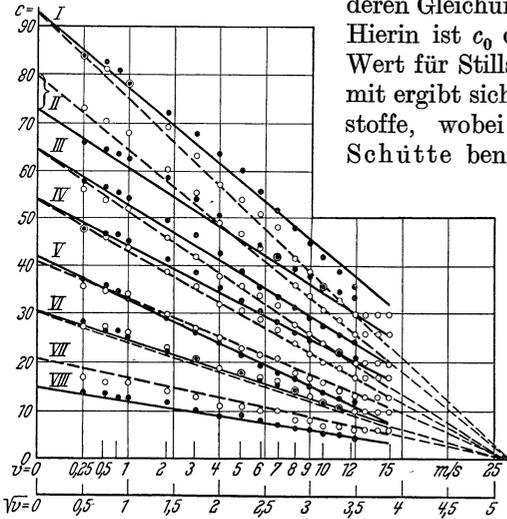


Tabelle 18. Festigkeitskonstanten.

| Baustoff                     | $c_0$ | $c'$ |
|------------------------------|-------|------|
| Chromnickelstahl .....       | 251   | 49   |
| Nickelstahl .....            | 130   | 37   |
| Maschinenstahl .....         | 93    | 18   |
| Stahlbronze (Deltametall) .. | 80    | 15,5 |
| Stahlguß .....               | 64    | 12,5 |
| Phosphorbronze .....         | 54    | 10,7 |
| Rotguß .....                 | 41    | 8    |
| Gußeisen .....               | 31    | 6    |
| Rohhaut und Weißbuche ..     | 20,5  | 4    |

Abb. 82. Zahndruckkoeffizienten nach Tabellen.

— • nach F. Krupp AG. Grusonwerk, — — o nach Schuchardt und Schütte I. Maschinenstahl, II. Stahlbronze (Deltametall), III. Stahlguß, IV. Phosphorbronze, V. Rotguß, VI. Gußeisen, VII. Rohhaut und Weißbuche (n. F. Krupp), VIII. Rohhaut und Weißbuche (n. S. u. S.).

Es wird hierbei  $c = 0$  für  $v = \left(\frac{c_0}{c'}\right)^2 = 26,5$  für alle Baustoffe. Die Abweichung, die sich aus den anderen Tabellen ergibt, ist nur sehr gering.

### XIX. Berechnung nach einer Charakteristik.

Die mathematische Formulierung eines Gesetzes für  $c$  ermöglicht die Berechnung nach einer Charakteristik, wobei sich auch die Umfangsgeschwindigkeit  $v$  sofort ergibt.

Es ist 
$$v \text{ [m/s]} = \frac{\pi D \text{ [m]} \cdot n}{60} = \frac{Z \cdot t \text{ [cm]} \cdot n}{6000}$$

Durch Einsetzen der Gleichung für die Teilung ist:

$$v = \frac{Z \cdot n \cdot 10^3}{6000} \sqrt[3]{612} \sqrt[3]{\frac{1}{c \cdot \psi Z} \cdot \frac{N_{kW}}{n}} = 1,415 \cdot 10^{-2} \cdot Z \cdot n \sqrt[3]{\frac{1}{c \psi Z} \cdot \frac{N_{kW}}{n}}$$

und 
$$v^3 = 2,83 \cdot 10^{-6} \frac{1}{c \cdot \psi} (Z \cdot n \sqrt{N_{kW}})^2$$

Führt man als „Charakteristik des Zahngetriebes“  $\zeta = nZ \sqrt{N_{kW}}$  ein, so ist

$$v^3 = 2,83 \cdot 10^{-6} \frac{1}{c \cdot \psi} \zeta^2 \quad \text{und} \quad \zeta = \frac{1}{\sqrt{2,83}} \cdot 10^3 \sqrt{c \cdot \psi} \cdot \sqrt{v^3} = 594,3 c^{0,5} \psi^{0,5} \cdot v^{1,5},$$

ebenso ist, wenn  $N$  in PS gemessen:  $\zeta = 691 \cdot c^{0,5} \psi^{0,5} \cdot v^{1,5}$ .

Die Charakteristik ist für beide Räder gleich und aus den Unterlagen leicht zu bilden, da die Leistung  $N$  und die Umlaufzahl  $n$  gegeben sind, die Zähnezahl  $Z$  nach den früheren Angaben anzunehmen ist. Setzt man  $c = c_0 - c' \sqrt{v}$  oder  $v = \left(\frac{c_0 - c'}{c'}\right)^2$ , so wird

$$\text{für } N_{kW}: \zeta = 594,3 \psi^{0,5} \left(\frac{c_0 - c'}{c'}\right)^3 c^{0,5}, \quad \text{für } N_{PS}: \zeta = 691 \psi^{0,5} \left(\frac{c_0 - c'}{c'}\right)^3 c^{0,5},$$

oder

$$\zeta = \text{const} \left( \frac{c_0 - c}{c'} \right)^3 \cdot c^{0,5};$$

hierin ist die Konstante:

|                          |              |              |                                                        |
|--------------------------|--------------|--------------|--------------------------------------------------------|
|                          | für $N_{KW}$ | für $N_{PS}$ | Hiernach kann aus angenommenen Werten                  |
| für $\psi = 2$           | const = 841  | = 977        | von $c$ sowohl $v$ als auch die Charakteristik $\zeta$ |
| $\psi = 3$               | 1029         | 1198         | für die verschiedenen Werte von $\psi$ errechnet       |
| $\psi = 4$               | 1189         | 1382         | und als Funktion von $\zeta$ aufgetragen werden.       |
| $\psi = 5$               | 1329         | 1545         | Aus diesen Kurven (Abb. 83—87) kann um-                |
| $b = 10 m (\psi = 3,18)$ | 1061         | 1236         | gekehrt für jede errechnete Charakteristik             |

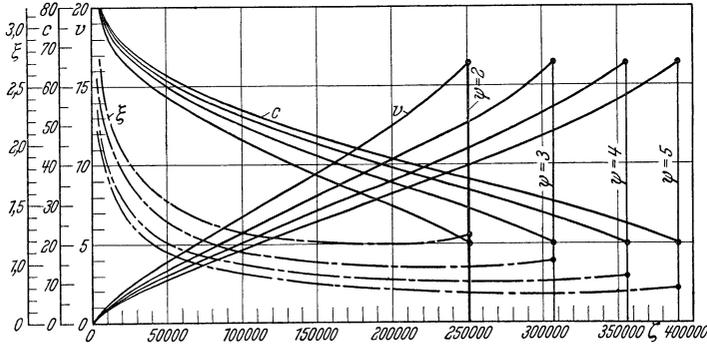


Abb. 83. Maschinenstahl.

und angenommenen Verhältnswert  $\psi$  für jeden Baustoff die Umfangsgeschwindigkeit

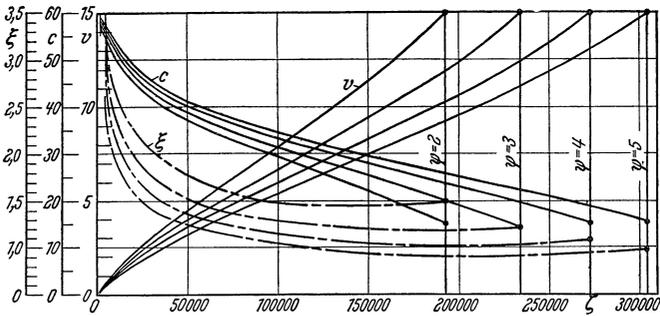


Abb 84 Stahlguß

keit  $v$  abgegriffen und ihre Zulässigkeit in bezug auf Geräusch beurteilt werden.

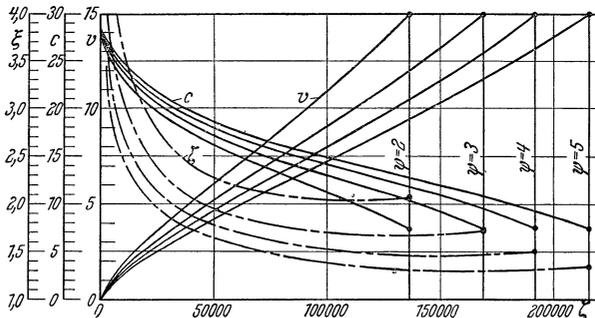


Abb 85 Gußeisen.

Es errechnet sich nun weiter der Zahndruck:  $P = \frac{1000}{g} \frac{N_{KW}}{v} = c \psi t^2 = 75 \frac{N_{PS}}{v}$

und die Teilung

$$t \text{ [cm]} = \sqrt{\frac{P}{c \cdot \psi}} = \sqrt{\frac{1000}{g} \frac{N_{kW}}{c \cdot \psi \cdot v}} = \sqrt{\frac{75 N_{PS}}{c \cdot \psi \cdot v}}$$

wird statt der Teilung der Modul  $m$  (mm) errechnet, so ist:

$$m \text{ [mm]} = \frac{10}{\pi} \sqrt{\frac{1000}{g \cdot \psi}} \sqrt{\frac{1}{c \cdot v}} \sqrt{N_{kW}} = \frac{10}{\pi} \sqrt{\frac{75}{\psi}} \sqrt{\frac{1}{c \cdot v}} \sqrt{N_{PS}}$$

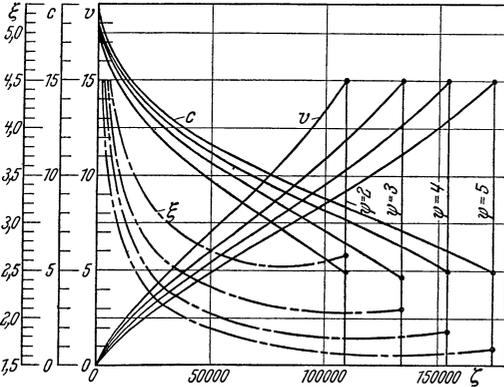


Abb. 86. Rohhaut und Weißbuche

Hierin ist:

$$\sqrt{\frac{1}{c \cdot v}} = \frac{1}{\sqrt{c} \frac{c_0 - c}{c'}} = \frac{c'}{(c_0 - c) c^{0,5}}$$

und es wird:

$$m = \text{const} \frac{c'}{(c_0 - c) c^{0,5}} \sqrt{N_{kW}}$$

$$\text{oder} = \text{const} \frac{c'}{(c_0 - c) c^{0,5}} \sqrt{N_{PS}}$$

Diese Konstante beträgt:

|                          | für $N_{kW}$  | für $N_{PS}$ |
|--------------------------|---------------|--------------|
| für $\psi = 2$           | const = 22,73 | = 19,49      |
| $\psi = 3$               | 18,56         | 15,92        |
| $\psi = 4$               | 16,07         | 13,78        |
| $\psi = 5$               | 14,37         | 12,33        |
| $b = 10 m (\psi = 3,18)$ | 18,01         | 15,45        |

Wird eingeführt  $\xi = \text{const} \frac{c'}{(c_0 - c) c^{0,5}}$ , so ist  $m$  (mm) =  $\xi \sqrt{N_{kW}}$  bzw.  $\xi \sqrt{N_{PS}}$ .

$\xi$  kann aus  $c_0$  und  $c'$  für jeden Baustoff und jeden Wert von  $\psi$  errechnet werden und ebenfalls in Abhängigkeit von der Charakteristik  $\zeta$  aufgetragen und abgegriffen werden. Die Kurven gelten für  $N$  in kW; für  $N$  in PS ist  $\zeta$  mit  $\sqrt{1,36} = 1,165$  zu multiplizieren,  $\xi$  durch  $\sqrt{1,36} = 1,165$  zu dividieren. Diese Kurven können zur Berechnung der Stirnräder und des mittleren Moduls von Kegelrädern (am Durchmesser  $D_m$  in Abb. 57) unmittelbar benutzt werden.

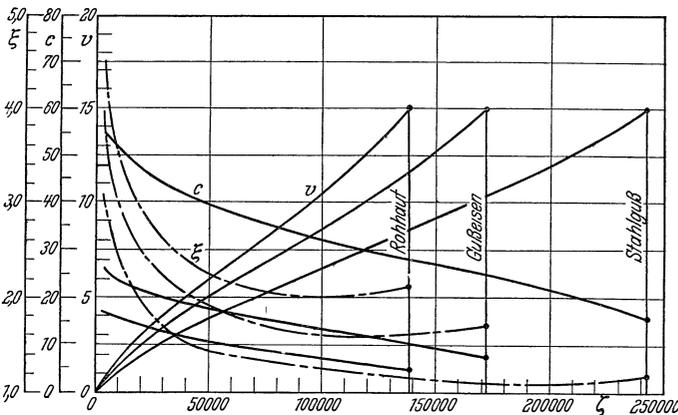


Abb. 87. Normalzahnrad,  $b = 10 \cdot \text{Modul}$ .

Ergibt sich eine zu große Umfangsgeschwindigkeit  $v$  für den zu

nächst gewählten Baustoff und eine gewählte Ausführung ( $\psi$ ), kann zunächst  $\psi$  größer gewählt werden. Reicht dies nicht aus, muß ein festerer Baustoff genommen werden. Bei Maschinen, die mit gleichförmiger Belastung durchlaufen (Pumpen, Kompressoren) ist die Antriebsleistung  $N$  zugrunde zu legen. Bei Maschinen, die infolge Anlaufes, Bremsens usf. periodisch schwankende Leistungen haben, ist die Nennleistung des Motors  $N_n$ , errechnet aus dem quadratischen Mittelwert, zugrunde zu legen. Bei Maschinen mit sehr stoßendem Betrieb (Scheren, Stanzen) erhält die rechnungsmäßige Höchstleistung einen Zuschlag von 30 bis 50%.

Die Rechnungen gelten für einen Überdeckungsgrad  $\varepsilon = 1$ ; größere Überdeckungsgrade können berücksichtigt werden, indem  $\frac{N}{\varepsilon}$  statt  $N$  eingesetzt wird. Das wird man aber, besonders bei Gußeisen, nur dann tun, wenn der Überdeckungsgrad  $\varepsilon$  zuverlässig  $> 2$  ist, was im allgemeinen nur bei Pfeil- und Doppelpfeilzähnen der Fall sein wird.

## XX. Teilung und Modul der Schnecken.

Wie bei den Stirnrädern ist die Axialkraft  $P$  zugrunde gelegt, die am Umfang des Schneckenrades das nutzbare Drehmoment  $M_d = P \cdot R$  ergibt, so daß wie bei den Stirnrädern die Teilung  $t = \sqrt[3]{\frac{2\pi}{c\psi Z} \cdot M_d}$  ist. Der Verhältniswert  $\psi$  ist aber nicht nur durch die Herstellung, sondern in ziemlich engen Grenzen durch den Winkel  $2\gamma$  (Abb. 70) festgelegt, der mit Rücksicht auf die Ecken  $J$  (Abb. 71) nicht zu groß sein darf. Ein meist brauchbarer Wert für den Winkel ist:  $\operatorname{tg} \gamma = \frac{2,2\sqrt{Z}}{\frac{d}{m} + 4}$ . Bei konkaven Zähnen ist die Breite:  $b = \psi \cdot t$  am Zahngrund mit

dem Radius  $r + \kappa'' \cdot m$  zu bemessen, da die Gleichung der Teilung auf der Biegungsformel beruht (Abb. 88). Es ist demnach die Zahnbreite:

$$b = \psi \cdot t = \frac{2\gamma}{360^\circ} 2\pi (r + \kappa'' \cdot m)$$

und der Verhältniswert  $\psi = \frac{\gamma}{180^\circ} \left( \frac{d}{m} + 2\kappa'' \right)$ .

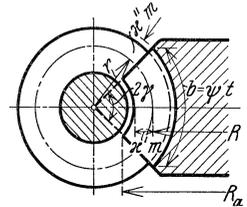


Abb 88 Zahnbreite des Schneckenrades.

Als Mittelwerte können gelten: bei Schneckenrädern mit geraden Zähnen (Abb. 68)  $\psi \approx 1,5$ , mit konkaven Zähnen (Abb. 69)  $\psi \approx 2,5$ , bei geeigneter Ausführung (Abb. 72) oder aufgesetzten Schnecken mit sehr kleinem Wert von  $\frac{m}{d}$  kann  $\psi$  bis  $\sim 3$  steigen. Wird zuerst  $\psi$  angenommen, kann entsprechend der Winkel  $\gamma$  bestimmt werden, er soll aber die vorher angegebene Größe nicht überschreiten. Meist ist nicht das am Rad abgegebene Drehmoment  $M_d$ , sondern das in die Schnecke eingeleitete Drehmoment  $M_{ds}$  gegeben. Im Gegensatz zu den Stirnrädern wird hierbei der Wirkungsgrad berücksichtigt, der besonders bei selbsthemmenden Schnecken unter Umständen sehr niedrig ist (siehe Abb. 76 u. 77). Nach Abschnitt XVI ist das eingeleitete Drehmoment  $M_{ds} = P_u \cdot r$ . An der Schnecke ist die Teilung  $t = \frac{2\pi r}{z_s} \cdot \operatorname{tg} \beta$ , am Schneckenrad  $t = \frac{2\pi R}{Z}$ ; hieraus ist der mittlere Schneckenradius:  $r = R \cdot \frac{z_s}{Z} \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}$  und das eingeleitete Drehmoment:

$$M_{ds} = P_u \cdot r = P \cdot R \cdot \frac{z_s}{Z} \cdot \frac{\operatorname{tg}(\beta + \varrho')}{\operatorname{tg} \beta} = M_d \cdot \frac{z_s}{Z} \cdot \frac{1}{\eta}$$

Durch Einsetzen ist  $t = \sqrt[3]{\frac{2\pi}{c \cdot \psi \cdot z_s} \cdot M_{ds} \cdot \eta}$ .

Wenn Leistung  $N$  und Umlaufzahl  $n$  gegeben sind, wird

$$\text{für } N_{kW}: t[\text{cm}] = 10 \sqrt[3]{\frac{612}{c \cdot \psi \cdot z_s} \cdot \frac{N_{kW}}{n} \cdot \eta}; \quad m[\text{mm}] = 100 \sqrt[3]{\frac{19,7}{c \cdot \psi \cdot z_s} \cdot \frac{N_{kW}}{n} \cdot \eta},$$

$$\text{für } N_{PS}: t[\text{cm}] = 10 \sqrt[3]{\frac{450}{c \cdot \psi \cdot z_s} \cdot \frac{N_{PS}}{n} \cdot \eta}; \quad m[\text{mm}] = 100 \sqrt[3]{\frac{14,5}{c \cdot \psi \cdot z_s} \cdot \frac{N_{PS}}{n} \cdot \eta}.$$

\* Für Modulteilung umgerechnet aus Stribeck: Versuche mit Schneckengetrieben. Zd.VDI 1897 S. 940 Gl. 1.

Eine etwas falsche Abschätzung des Wirkungsgrades bei der ersten Berechnung ist ohne Belang, da der Einfluß von  $\eta$  gering ist und außerdem meist auf normalen Modul abgerundet wird (Angaben für erste Annahme siehe S. 38).

Die zur Berechnung der Lager erforderliche Axialkraft  $P$  ergibt sich aus:

$$M_{ds} [\text{cmkg}] = 100 \cdot \frac{60}{2\pi} \cdot \frac{1000}{g} \cdot \frac{N_{kw}}{n} \text{ mit}$$

$$P [\text{kg}] = \frac{M_d [\text{cmkg}]}{R [\text{cm}]} = \frac{M_{ds} \cdot \frac{Z}{z_s} \cdot \eta}{\frac{Z}{2} \cdot \frac{m}{10}} = 1000 \cdot \frac{60}{\pi} \cdot \frac{1000}{g} \cdot \frac{N_{kw}}{n} \cdot \frac{1}{z_s \cdot m} \cdot \eta$$

$$= 1,95 \cdot 10^6 \cdot \frac{N_{kw}}{n} \cdot \frac{1}{z_s \cdot m} \cdot \eta \text{ bzw. } = 1,43 \cdot 10^6 \frac{N_{PS}}{n} \cdot \frac{1}{z_s \cdot m} \cdot \eta,$$

wobei  $m$  in mm.

Als Baustoffe kommen in Frage: bei kleinen Kräften und Geschwindigkeiten und seltener Benutzung Gußeisen für die Schnecke und das Schneckenrad, gegebenenfalls Schnecke aus Stahl; bei Dauerbetrieb, großen Kräften und Geschwindigkeiten nur Flußstahl für die Schnecke, Phosphorbronze oder geschmiedete Bronze (Sondermessing) von 60—70 kg/mm<sup>2</sup> Festigkeit für das Rad; Stahlguß führt häufig zu Anfressungen. Für die Wahl des Zahndruckkoeffizienten  $c$  ist, weit mehr als bei Stirnrädern, die Abnutzung und damit die voraussichtliche Betriebsdauer maßgebend. Die Abnutzung ist in erster Linie abhängig von der Gleitgeschwindigkeit  $v_g$  zwischen Schnecke und Rad. Es ist die mittlere Umfangsgeschwindigkeit der Schnecke (Abb. 73)  $v_s = \frac{\pi d n}{60}$  und die Gleitgeschwindigkeit  $v_g = \frac{v_s}{\cos \beta}$ . Bei selbsthemmenden Schnecken ist  $\beta$  sehr klein, also  $v_g \approx v_s$ , aber selbst beim besten Wirkungsgrad und viergängigen Schnecken wird nur  $v_g \approx 1,4 v_s$ .

Dementsprechend wird der Zahndruckkoeffizient  $c$  sinkend mit  $v_s$  genommen.

Für Gußeisen ist ausreichend: für  $v_s = 1$  bis 3 m/s  $c = 30 \div 20$  kg/cm<sup>2</sup>, für vergüteten Stahl auf Phosphor- oder geschmiedeter Bronze:

| $v_s$ m/s              | 1       | 2,5     | 4       | 5,5     | 7       |
|------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $c$ kg/cm <sup>2</sup> | 30 ÷ 40 | 25 ÷ 30 | 20 ÷ 24 | 15 ÷ 18 | 10 ÷ 12 |

Je größer die Gangzahl  $z_s$  und die Benutzungsdauer, desto kleiner ist  $c$  zu wählen.

Die Schneckenwelle muß das eingeleitete Drehmoment  $M_{ds}$  übertragen, ihre Durchbiegung darf nur sehr gering sein. Sie wird daher wie Triebwerkswellen mit einer zulässigen Verdrehungsbeanspruchung  $\tau = 120$  kg/cm<sup>2</sup> berechnet.

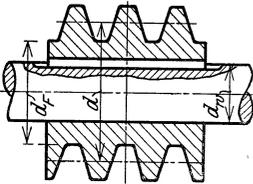


Abb. 89. Aufgesetzte Schnecke.

oder

$$d_w = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi} \cdot \frac{1}{k_a} \cdot M_{ds}} = 0,35 \sqrt[3]{M_{ds}}$$

$$d_w = 16 \sqrt[3]{\frac{N_{kw}}{n}} = 14,4 \sqrt[3]{\frac{N_{PS}}{n}}.$$

Auf diesem Durchmesser können bei aus dem Vollen geschnittenen Schnecken die Gänge aufsitzen, bei aufgesetzten Schnecken richtet sich der Fußdurchmesser  $d_f$  nach Herstellungsgründen, da die Verdrehungsbeanspruchung sehr gering ist. Gußeiserne Schnecken werden wohl immer aufgesetzt (Abb. 89).

## XXI. Konstruktionsangaben der Stirnräder.

Unbearbeitete Zähne werden nur in Grauguß, Stahlguß und gelegentlich Rotguß ausgeführt; Zahnräder aus Flußstahl, Phosphorbronze, geschmiedeter Bronze bzw. Sondermessing, Nickel- und Chromnickelstahl erhalten immer bearbeitete

Zahne, die auch bei gießbaren Stoffen zur Schonung der Werkzeuge stets aus dem Vollen gearbeitet werden, da sonst die harte Gußhaut abgekratzt werden müßte. Nur sehr große Teilungen werden manchmal vorgegossen und fertig gefrast. Hoch beanspruchte Räder, besonders wenn sie rasch laufen müssen, werden im Einsatz gehartet: Räder für Straßenbahnen, für Werkzeugmaschinen (bei  $v > 2,5$  m/s), für Automobile usw. Die Zahnformen verschleiben bei der großen Oberflächenharte wenig und bewahren ihre Form sehr gut.

Bei hohen Anforderungen an Lebensdauer und Genauigkeit werden die Räder aus legiertem Stahl eingesetzt und nach dem Härten geschliffen.

Um geräuschlosen Gang zu erzielen, können in einem Rad Kamme aus elastischem Stoff eingesetzt werden. Kamme aus Weißbuche werden besonders bei den Kegelradabtrieben der Wasserturbinen mit stehender Welle benutzt; hierbei erhält das größere Rad die Holzkamme, da diese leicht zu ersetzen und das kleine Rad aus Gußeisen dann mehrere Sätze von Holzkammen überdauern kann. Die Zähne werden mit Eisensplintn oder mit Holzkeilen (Abb. 90) eingesetzt.

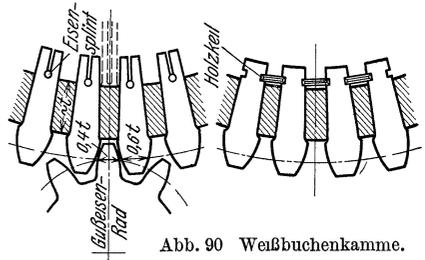


Abb. 90 Weißbuchenkamme.

Die Zahnzahl muß ein Vielfaches der Armzahl betragen. Die Zähne werden erst nach dem Einsetzen ausgesagt, mit Rücksicht auf die geringere Festigkeit des Holzes werden sie stärker als die Eisenzähne ausgeführt. Die Kranzstärke ist etwa gleich der Teilung  $t$ ; Rohhaut — unter hohem Druck mit einem Bindemittel gepreßtes Schweinsleder, das wie Gußeisen bearbeitet wird — wird bei hohen Umgangsgeschwindigkeiten ( $v \geq 8$  m/s bis  $\sim 15$  m/s) ebenfalls zur Vermeidung des Geräusches benutzt. Des Preises wegen erhält hierbei stets das kleine Rad die Rohhautzähne; die Zahnstärke des Rohhautzahnes ist wegen der Bearbeitung mit Teilfrasern oder Abwalzfrasern gleich der Zahnstärke des Gußeisensrades. Die Rohhaut wird als Hohlzylinder auf die Radnabe aufgesetzt und erhält Bordscheiben aus Stahl oder Bronze; zur Verhinderung des Absplitterns der Rohhaut erhält die Bordscheibe eine trapezartige Verzahnung. Das ganze Rad wird durch Nieten oder Schrauben verbunden (Abb. 91). Bei Kegelradern aus Rohhaut ist die Breite des Eisenrades maßgebend, so daß der Rohhautzylinder etwas breiter ausfällt (Abb. 92).

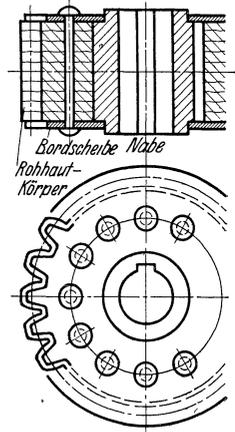


Abb 91 Rohhautritzel

Gußeisen- und Stahlgußräder werden bei durchgehender Welle meist symmetrisch angeordnet; nur bei fliegender Anordnung oder unmittelbarer Verbindung einer Seiltrommel ist die Ausführung unsymmetrisch (Abb. 93). Fliegende Anordnung ergibt starke Druckbiegung, die das Kämmen beeinträchtigt. Bei normalen Radern ist der Außendurchmesser des Rohlings gleich dem Kopfkreisdurchmesser  $(Z + 2) m$  bei bearbeiteten bzw.  $D + 0,6 t$  bei unbearbeiteten oder Holzzähnen; der Fußkreisdurchmesser beträgt  $(Z - 14/6) m$  bzw.  $(Z - 2,4) m$  bzw.  $D - 0,8 t$ . Bei korrigierten Verzahnungen (Schneiden mit Profilabdruckung) wird am kleinen Rad Kopfkreis und Fußkreis größer, am großen Rad kleiner. Die Zahnbreite ist bestimmt durch  $b = \psi \cdot t$ , die Stärke des Zahnkranzes beträgt

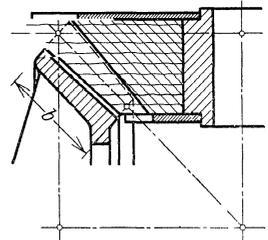


Abb. 92 Rohhaut-Kegelrad.

Die Zahnstärke des Rohhautzahnes ist wegen der Bearbeitung mit Teilfrasern oder Abwalzfrasern gleich der Zahnstärke des Gußeisensrades.

meist  $\sim 0,5 t$  bzw.  $\sim 1,6 m$ ; er wird bei kleiner Armzahl oder großem Durchmesser noch durch eine Tragrippe von gleicher Höhe verstärkt. Der Kranz wird beansprucht:

1. durch die Fliehkraft auf Biegung;
2. durch den Achsdruck  $A = P\sqrt{1 + (\operatorname{tg}\alpha + \mu)^2}$  auf Biegung;
3. durch die Umfangskraft  $P$  auf Zug (siehe Abschnitt VIII, Abb. 40 u. 41).

Die Beanspruchungen 1 und 3 sind sehr gering.

Falls auf der Welle noch andere Maschinenteile sitzen, ist sie auf zusammengesetzte Festigkeit zu berechnen. Im allgemeinen genügt die Berechnung auf Verdrehung wie bei Triebwerkswellen mit einer Verdrehungsbeanspruchung von  $\tau = 120 \text{ kg/cm}^2$ , also

$$d = 16 \sqrt[3]{\frac{N_{kW}}{n}}$$

$$= 14,4 \sqrt[3]{\frac{N_{PS}}{n}}$$

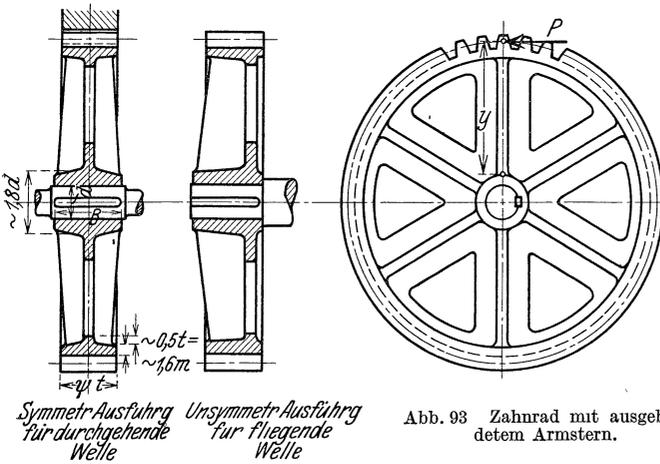


Abb. 93 Zahnrad mit ausgebildetem Armstern.

Die Nabenlänge  $B$  ergibt sich aus der Konstruktion und ist meist etwas größer als die Zahnbreite  $b$ ; um Kanten zu verhindern, ist  $B \approx 1,2 d$  erforderlich. Die Armzahl soll möglichst gut teilbar (4, 6, 8) und ein Bruchteil der Zahnzahl sein. Diese Bedingung muß bei geteilten Rädern und bei Rädern mit Holzkämmen unbedingt eingehalten werden.

Die Mindestarmzahl ist 4, bei größeren Rädern ergibt sich eine brauchbare Armzahl aus  $a = \left(\frac{1}{7} \text{ bis } \frac{1}{8}\right) \sqrt{D}$ , wobei  $D$  der Teilkreisdurchmesser in mm ist. Der Querschnitt der Arme (Abb. 94) ist bei kleinen Rädern, hauptsächlich bei Werkzeugmaschinen, elliptisch oder rechteckig mit Abrundung, bei größeren Rädern kreuz- oder doppel-T-förmig, bei unsymmetrischer Anordnung T- oder U-förmig. Die Arme werden nach dem Radkranz zu auf das etwa 0,8fache der linearen Abmessung an der Nabe verzüngt. Der Arm biegt sich so, daß er an der Nabe und am Kranz radial endet, an beiden Seiten also eingespannt ist. Eine genaue Berechnung seiner Beanspruchung ist nur unter Berücksichtigung der Naben- und Kranzabmessungen möglich.

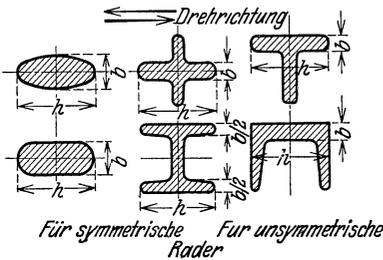


Abb. 94. Armformen.

Meist wird angenommen, daß  $\frac{a}{4}$  Arme tragen, wobei  $a \geq 4$ . Der Zahndruck  $P$  biegt am Hebelarm  $y$  (Abstand Nabe bis Teilkreis, Abb. 93), so daß  $P \cdot y = \frac{a}{4} \cdot W \cdot \sigma_b$ .

Für elliptischen Querschnitt ist das Widerstandsmoment  $W = \frac{\pi}{32} \cdot b h^2$ , bei +-, I-, T-, U-förmigem Querschnitt trägt die senkrecht zur Drehrichtung stehende

Rippe nicht viel mit; wird sie vernachlässigt, ist das Widerstandsmoment:  $W = \frac{b h^2}{6}$  und:  $P \cdot y = \frac{a}{4} \cdot \frac{b h^2}{6} \cdot \sigma_b$ . Mit dem meist brauchbaren Mittelwert:  $b = \frac{1}{5} h$  wird  $P \cdot y = \frac{a}{4} \cdot \frac{h^3}{30} \cdot \sigma_b$ . Entsprechend dem Belastungsfall II ist

$$\text{für Gußeisen } \sigma_b = 300 \text{ kg/cm}^2, \quad h \approx \sqrt[3]{\frac{P \cdot y}{2,5 a}},$$

$$\text{für Stahlguß } \sigma_b = 600 \text{ kg/cm}^2, \quad h \approx \sqrt[3]{\frac{P \cdot y}{5 a}}.$$

Räder mit kleinerer Zahnzahl werden ohne Arme als Scheibenräder (Abb. 95), noch kleinere als Ritzel ausgeführt (Abb. 96). Zur Vermeidung zu starker Gußanhaftung erhalten größere Ritzel eingegossene Löcher (Abb. 95). Bis etwa

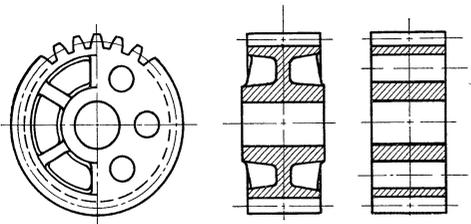


Abb 95 Scheibenrad und Ritzel mit eingegossenen Lochern

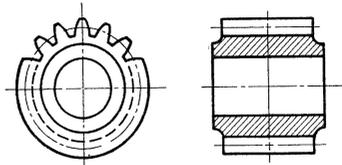


Abb. 96. Ritzel

2000 mm Durchmesser werden Zahnrad aus einem Stück, darüber in zwei Teilen ausgeführt. Geteilt wird in den Armen, nicht zwischen den Armen; es ist erforderlich, weil bei der Abkühlung des Gusses die Gefahr des Abreißen der Arme von der Nabe besteht. Die Verbindungsschrauben müssen das Gewicht einer Hälfte, ihre Fliehkraft und das zu übertragende Moment  $M_d$  aushalten.

## XXII. Gewichte und Tragheitsmomente der Stirnräder<sup>1</sup>.

Die Gewichte und Tragheitsmomente können aus den einzelnen Abmessungen berechnet werden. Das Tragheitsmoment ist die Summe der Produkte aller Einzelmassen des Zahnrades und der Quadrate ihrer Abstände von der Drehachse. Eine wenigstens angenaherte Kenntnis der Gewichte ist notwendig für Festigkeits- und Projektrechnungen, der Tragheitsmomente zur Berechnung des Anlauf- und des Bremsvorganges periodisch laufender Maschinen (Hebe-, Bergwerksforder-, Walzenzugmaschinen). Die Abmessungen können (entsprechend Abschnitt XXI) bezogen werden auf den Modul  $m$  und den Verhältniswert  $\psi$ . Dementsprechend ist das Gewicht:  $G [\text{kg}] = k \cdot \gamma \cdot m^3$ , das Tragheitsmoment:  $J [\text{kg cm s}^2] = K \gamma \cdot m^5$ ; hierin ist  $k$  und  $K$  aus der Tabelle zu entnehmen,  $m$  ist der Modul in mm,  $\gamma$  das spezifische Gewicht in  $\text{kg/dm}^3$ ,  $Z$  die Zahnzahl.

Die Tabelle gilt für Räder mit Armstern, Scheibenräder und Ritzel; geteilte Räder, Räder mit eingesetzten Zähnen (Weißbuche, Rohhaut), Kegelräder und Schneckenräder ergeben ungefähr dieselben Gewichte und Tragheitsmomente.

Tabelle 19.  
Spezifische Gewichte.

|                        | $\gamma =$ |
|------------------------|------------|
| Geschmiedeter Stahl .. | 7,86       |
| Stahlbronze .....      | 8,58       |
| Stahlguß .....         | 7,86       |
| Phosphorbronze .....   | 8,80       |
| Rotguß .....           | 8,40       |
| Gußeisen .....         | 7,25       |
| Nickelstahl .....      | 8,0        |
| Chromnickelstahl ..... | 8,2        |

<sup>1</sup> Ableitungen in: Die Tragheitsmomente von Zahnrädern. Werkzeugmasch. 24. Jahrg. Heft 30/31 S. 465—468, S. 489—492. Tabelle ist umgerechnet in Modulteilung.

Das Tragheitsmoment in  $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2$  ergibt sich aus:  $\frac{1}{100} J [\text{kg} \cdot \text{cm} \cdot \text{s}^2]$ . Das hauptsächlich in der Elektrotechnik benutzte Schwungmoment ist:

$$[GD^2] [\text{kg} \cdot \text{m}^2] = \frac{4g}{100} \cdot J [\text{kg} \cdot \text{cm} \cdot \text{s}^2] = 0,392 J [\text{kg} \cdot \text{cm} \cdot \text{s}^2].$$

Wird ein Tragheitsmoment von einer Welle „2“ auf eine Welle „1“ bezogen, ist es mit  $\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2$  zu multiplizieren.

Tabelle 20. Konstanten für Gewicht und Tragheitsmoment.

| Z   | $\psi = 2$           |                      | $\psi = 3$           |                      | $\psi = 4$           |                      | $\psi = 5$           |                      | $b = 10 m$           |                      |
|-----|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
|     | k                    | K                    | k                    | K                    | k                    | K                    | k                    | K                    | k                    | K                    |
| 10  | $4,65 \cdot 10^{-4}$ | $7,55 \cdot 10^{-8}$ | $5,36 \cdot 10^{-4}$ | $1,04 \cdot 10^{-7}$ | —                    | —                    | —                    | —                    | $5,24 \cdot 10^{-4}$ | $1,07 \cdot 10^{-7}$ |
| 20  | $1,49 \cdot 10^{-3}$ | $8,83 \cdot 10^{-7}$ | $2,33 \cdot 10^{-3}$ | $1,35 \cdot 10^{-6}$ | $3,50 \cdot 10^{-3}$ | $1,97 \cdot 10^{-6}$ | $4,27 \cdot 10^{-3}$ | $2,69 \cdot 10^{-6}$ | $2,50 \cdot 10^{-3}$ | $1,46 \cdot 10^{-6}$ |
| 30  | 2,61 „               | $3,58 \cdot 10^{-6}$ | 3,97                 | 5,31                 | 5,55                 | 7,20                 | 7,56                 | 9,53                 | 4,22                 | 5,65                 |
| 40  | 3,75 „               | 9,38                 | 5,64                 | $1,39 \cdot 10^{-5}$ | 7,77                 | $1,85 \cdot 10^{-5}$ | $1,03 \cdot 10^{-2}$ | $2,25 \cdot 10^{-5}$ | 6,00                 | $1,47 \cdot 10^{-5}$ |
| 50  | 4,87 „               | $1,94 \cdot 10^{-5}$ | 7,32                 | 2,87                 | $1,01 \cdot 10^{-2}$ | 3,81                 | 1,31                 | 4,79                 | 7,78                 | 3,04                 |
| 60  | 5,98 „               | 3,49                 | 8,97                 | 5,15                 | 1,23                 | 6,93                 | 1,59                 | 8,53                 | 9,55                 | 5,46                 |
| 70  | 7,10 „               | 5,70                 | $1,07 \cdot 10^{-2}$ | 8,39                 | 1,45                 | $1,12 \cdot 10^{-4}$ | 1,87                 | $1,39 \cdot 10^{-4}$ | $1,14 \cdot 10^{-2}$ | 8,91                 |
| 80  | 8,21 „               | 8,69                 | 1,24                 | $1,28 \cdot 10^{-4}$ | 1,68                 | 1,70                 | 2,15                 | 2,11                 | 1,32                 | $1,36 \cdot 10^{-4}$ |
| 90  | 9,34 „               | $1,21 \cdot 10^{-4}$ | 1,41                 | 1,85                 | 1,90                 | 2,46                 | 2,43                 | 3,06                 | 1,49                 | 1,96                 |
| 100 | $1,05 \cdot 10^{-2}$ | 1,75                 | 1,57                 | 2,58                 | 2,13                 | 3,40                 | 2,71                 | 4,24                 | 1,58                 | 2,72                 |
| 110 | 1,16 „               | 2,36                 | 1,74                 | 3,47                 | 2,35                 | 4,59                 | 2,98                 | 5,71                 | 1,85                 | 3,67                 |
| 120 | 1,27 „               | 3,08                 | 1,91                 | 4,54                 | 2,57                 | 6,00                 | 3,26                 | 7,45                 | 2,03                 | 4,89                 |
| 130 | 1,38 „               | 3,95                 | 2,08                 | 5,81                 | 2,80                 | 7,68                 | 3,54                 | 9,53                 | 2,21                 | 6,14                 |
| 140 | 1,49 „               | 4,97                 | 2,25                 | 7,31                 | 3,02                 | 9,68                 | 3,82                 | $1,20 \cdot 10^{-3}$ | 2,39                 | 7,73                 |
| 150 | 1,61 „               | 6,15                 | 2,42                 | 9,05                 | 3,24                 | $1,19 \cdot 10^{-3}$ | 4,10                 | 1,49                 | 2,47                 | 9,56                 |
| 160 | 1,73 „               | 7,51                 | 2,58                 | $1,10 \cdot 10^{-3}$ | 3,46                 | 1,46                 | 4,38                 | 1,81                 | 2,75                 | $1,16 \cdot 10^{-3}$ |
| 170 | 1,83 „               | 9,06                 | 2,75                 | 1,33                 | 3,70                 | 1,76                 | 4,66                 | 2,19                 | 2,93                 | 1,42                 |
| 180 | 1,95 „               | $1,08 \cdot 10^{-3}$ | 2,92                 | 1,59                 | 3,91                 | 2,09                 | 4,94                 | 2,60                 | 3,11                 | 1,64                 |
| 190 | 2,05 „               | 1,27                 | 3,09                 | 1,87                 | 4,14                 | 2,28                 | 5,22                 | 3,06                 | 3,29                 | 1,98                 |
| 200 | 2,16 „               | 1,49                 | 3,26                 | 2,19                 | 4,36                 | 2,89                 | 5,50                 | 3,58                 | 3,47                 | 2,31                 |

### XXIII. Konstruktion der Schneckengetriebe.

Das Schneckenrad wird nur bei kleinen Ausföhrungen aus dem Vollen hergestellt. Bei größeren Ausföhrungen besteht nur der Kranz aus Bronze oder dergleichen, die Nabe und die Arme aus Gußeisen. Der Kranz wird aufgeschumpft oder kalt aufgedrückt und durch Paßbolzen oder Schraubenstifte gesichert (Abb. 97); er kann auch einfach angeschraubt werden (Abb. 98). Bei Gußbronze wird er wohl, um an Bearbeitungskosten zu sparen, aufgegossen. Die Nabe erhält einen Anlauf zur Aufnahme der Kraft  $P_u$ ; nur bei sehr großem  $P_u$  wird der Anlauf durch ein Kugeldrucklager ersetzt. Entsprechend der Ausföhrung ergibt sich der Außenradius des Schneckenrades und damit der größte Durchmesser des Rohlings. Bei Ausföhrung nach Abb. 69 und 88

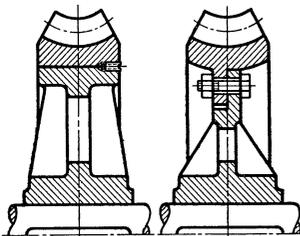


Abb 97 Aufgeschumpfter Radkranz

Abb 98 Radkranz mit Reibungsschluß.

kommt zum Kopfkreisradius  $R + \kappa' \cdot m$  des Mittelschnittes die Bogenhöhe am Radius  $r - \kappa' \cdot m$  und dem Zentriwinkel  $2\gamma$  mit  $2(r - \kappa' \cdot m) \sin^2 \frac{\gamma}{2}$  hinzu, so daß der Außenradius

$$R_u = R + \kappa' \cdot m + 2(r - \kappa' \cdot m) \sin^2 \frac{\gamma}{2} = \left[ \frac{Z}{2} + \kappa' \left( 1 - 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} \right) \right] m + 2r \sin^2 \frac{\gamma}{2}$$

wird. Bei Ausführung mit zylindrischer Begrenzung (Abb. 72) unter Fortfall der Ecken I kommt zum Fußkreisradius  $R - \kappa'' \cdot m$  die Bogenhöhe am Radius  $r + \kappa'' \cdot m$  hinzu, Außenradius:

$$R_a = R - \kappa'' \cdot m + 2(r + \kappa'' \cdot m) \sin^2 \frac{\gamma}{2} = \left[ \frac{Z}{2} + \kappa'' \left( 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} - 1 \right) \right] m + 2r \sin^2 \frac{\gamma}{2}.$$

Im Gegensatz zu Stirnrädern sind die Schnecken sehr empfindlich gegen Aufstellungsfehler, besonders im Abstand Schneckenachse zu Schneckenradachse. Sie werden deshalb in feste Gehäuse eingebaut, um die Lager festzulegen. Um die Durchbiegung zu verringern, werden die Halslager der Schneckenwelle möglichst nahe an die Schnecke herangerückt. Es werden hierfür meist Gleitlager (Ringschmierlager mit ungeteilter Buchse) verwendet, da Kugellager größere Außendurchmesser und damit größere Entfernung von der Mittellinie erfordern. Die Drucklager sind meist Kugellager für beide Drehrichtungen, die auf einer Seite vereinigt werden. Das Gehäuse bietet die Möglichkeit, eine große, wegen der Abnutzung durch die Gleitgeschwindigkeit notwendige Schmierölmenge unterzubringen. Bei stehender Anordnung und waagerechter Radachse ergibt obenliegende Schnecke (Abb. 99) leichtere Montage; sie erfordert zwei waagerechte Teilfugen. Die Anordnung mit untenliegender

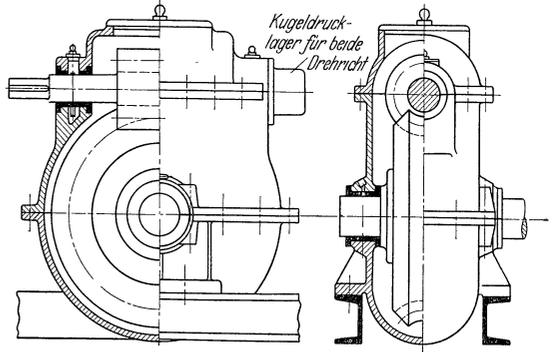


Abb 99 Stehendes Schneckengehäuse mit waagerechter Radachse und obenliegender Schnecke.

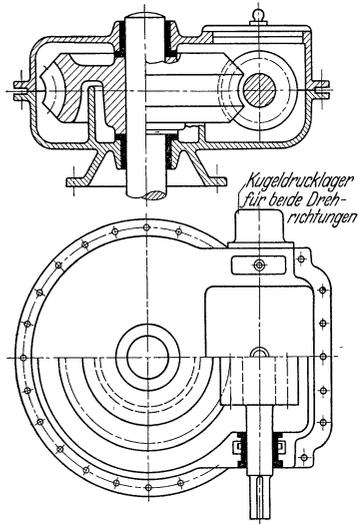


Abb 101 Liegendes Schneckengehäuse mit stehender Radachse.

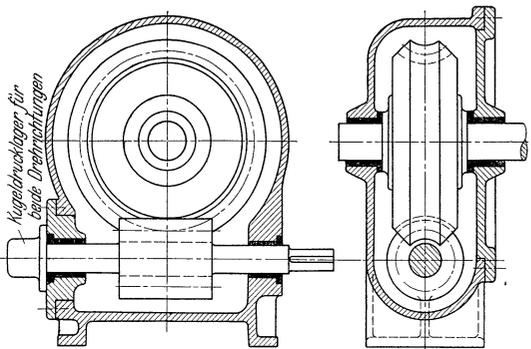


Abb 100 Stehendes Schneckengehäuse mit waagerechter Radachse und untenliegender Schnecke.

Schnecke (Abb. 100) ergibt die bessere Schmierung. Das Schneckenrad kann durch einen Gehäusedeckel herausgenommen werden. Eins der beiden Gleitlager der Schneckenwelle muß mit einer besonderen Buchse eingesetzt werden, so daß Lager und Schnecke seitlich herausziehbar sind. Ein Gehäuse mit senkrechter Radachse, bei dem Schnecke und Schneckenrad liegend sind, ist in Abb. 101 wiedergegeben. Um das Abfließen des Schmieröls durch das untere Schneckenradlager zu verhindern, erhält das Gehäuse einen in das Schneckenrad eingreifenden Rand.

### XXIV. Sonderverzahnung mit Profilabrückung.

Das Profil des Abwälzfrasers oder des Stoßkammes ist festgelegt durch die Teilung  $t_0 = \pi \cdot m$ , die Fraserstärke an der Teilgeraden  $t_{0/2} = \frac{\pi}{2} \cdot m$ , den Eingriffswinkel  $\alpha_0 (= 15^\circ \text{ oder } 20^\circ)$  und die diesem Winkel entsprechende Abrundung des Fraserkopfes (Abschnitt VII, Abb. 28). Der Zentralpunkt  $C_0$  ist verschoben um den Betrag  $x = \xi \cdot m$  (Abb. 102);  $\xi$  ist positiv bei positiver Abrückung (Abb. 43), negativ bei negativer Abrückung (Abb. 44). Im Dreieck  $C_0NM$  ist  $C_0N = r \operatorname{tg} \alpha_0$ . Nach dem Erzeugungsgesetz der Evolvente ist

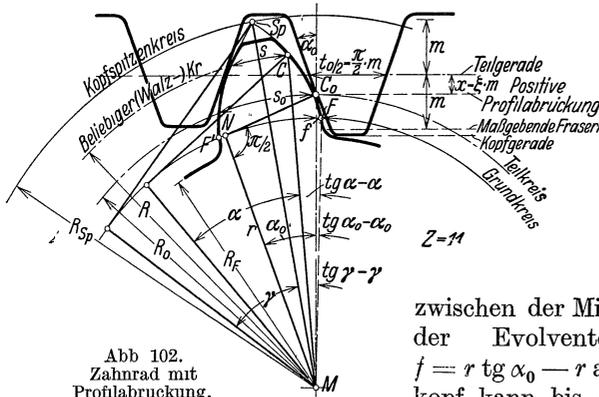


Abb. 102. Zahnrad mit Profilabrückung.

$\overline{C_0N} = NF$ . Die Bogenstrecke  $f$  zwischen der Mittellinie  $MC_0$  und dem Endpunkt  $F$  der Evolvente auf dem Grundkreis ist:  $f = r \operatorname{tg} \alpha_0 - r \operatorname{arc} \alpha_0 = r (\operatorname{tg} \alpha_0 - \alpha_0)$ . Der Zahnkopf kann bis zur Kopfspitze  $Sp$  verlängert werden; das Bogenmaß für die Kopfspitze beträgt  $(\operatorname{tg} \gamma - \gamma)$ . Von der halben Zahnstärke im Teilkreis  $s_{0/2}$  wird das Bogenmaß  $(\operatorname{tg} \gamma - \gamma) - (\operatorname{tg} \alpha_0 - \alpha_0)$  umfaßt. Im Teilkreis ergibt sich die halbe Zahnstärke mit  $s_{0/2} = [(\operatorname{tg} \gamma - \gamma) - (\operatorname{tg} \alpha_0 - \alpha_0)] R_0$  und, mit  $R_0 = \frac{Z}{2} \cdot m$ , die Zahnstärke  $s_0 = [(\operatorname{tg} \gamma - \gamma) - (\operatorname{tg} \alpha_0 - \alpha_0)] Z \cdot m$ . Im Teilkreis ist die Stärke des Frasers um den Betrag  $2x \cdot \operatorname{tg} \alpha_0$  kleiner als an der Teilgeraden, die Zahnstärke ist entsprechend größer:  $s_0 = \frac{t_0}{2} + 2x \operatorname{tg} \alpha_0 = \left(\frac{\pi}{2} + 2\xi \operatorname{tg} \alpha_0\right) m$ .

Durch Gleichsetzen ergibt sich:

$$\left(\frac{\pi}{2} + 2\xi \operatorname{tg} \alpha_0\right) m = [(\operatorname{tg} \gamma - \gamma) - (\operatorname{tg} \alpha_0 - \alpha_0)] \cdot Z \cdot m$$

und 
$$\operatorname{tg} \gamma - \gamma = 2 \operatorname{tg} \alpha_0 \frac{\xi}{Z} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{Z} + (\operatorname{tg} \alpha_0 - \alpha_0).$$

Die Fußstärke  $FF'$  am Grundkreis ist größer als die Zahnstärke  $s_0$  am Teilkreis und durch die Winkelfunktion  $(\operatorname{tg} \gamma - \gamma)$  bestimmt; damit ergibt sich die Fußstärke  $FF' = 2 (\operatorname{tg} \gamma - \gamma) \cdot r = (\operatorname{tg} \gamma - \gamma) \cdot Z \cdot m \cos \alpha_0$ .

Unter Einsetzung der Winkelfunktion wird:

$$FF' = \left[ 2 \operatorname{tg} \alpha_0 \cdot \frac{\xi}{Z} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{Z} + (\operatorname{tg} \alpha_0 - \alpha_0) \right] Z \cdot m \cdot \cos \alpha_0$$

$$= \left[ 2 \sin \alpha_0 \cdot \xi + \frac{\pi}{2} \cos \alpha_0 + (\operatorname{tg} \alpha_0 - \alpha_0) \cos \alpha_0 \cdot Z \right] m.$$

Die entsprechenden Werte können der Tabelle entnommen werden.

Tabelle 21. Winkelfunktionen.

| $\alpha_0$ | $2 \sin \alpha_0$ | $\frac{\pi}{2} \cos \alpha_0$ | $(\operatorname{tg} \alpha_0 - \alpha_0) \cos \alpha_0$ |
|------------|-------------------|-------------------------------|---------------------------------------------------------|
| 15°        | 0,518             | 1,515                         | 0,00594                                                 |
| 20°        | 0,684             | 1,475                         | 0,0140                                                  |
| 25°        | 0,845             | 1,425                         | 0,0272                                                  |
| 30°        | 1,0               | 1,360                         | 0,0466                                                  |

Unterschnitt tritt nicht ein, wenn durch die Profilabrückung der Fraserkopf so verkleinert wird, daß seine Kopfhöhe  $x' : m$  (vgl. Abb. 33) bei Abrundung der Fraserkopfspitze durch  $(1 - \xi) m$ ; ohne Abrundung und bei einer Fußhöhe von  $\frac{7}{6} m$  durch  $\left(\frac{7}{6} - \xi\right) m$

ersetzt wird. Hiermit ist die kleinste unterschneidfreie Zahnzahl:

$$Z_{\min} = \frac{2(1 - \xi)}{\sin^2 \alpha_0} \text{ bzw. } \frac{2(1,167 - \xi)}{\sin^2 \alpha_0}.$$

Für  $\xi = 0$  fällt sie mit der II. Grenzzahnzahl zusammen (Abschnitt VII). Zahnzahlen über der II. Grenzzahnzahl benötigen keine positive Profilabrückung für Unterschneidfreiheit. Sie geben aber die Möglichkeit negativer Profilabrückung (entspr. Abb. 44) und damit die der  $V_0$ -Verzahnung. Abb. 103 gibt die Mindestzahnzahlen für normale Abwalzfräser und Stoßkämme mit und ohne Kopfabrundung abh. von  $\xi$  wieder. Eine positive Vergrößerung von  $\xi$  ist stets auch bei negativer Abrückung möglich, da alle oberhalb der jeweiligen Grenzlinie liegenden Verzahnungen unterschneidfrei sind.

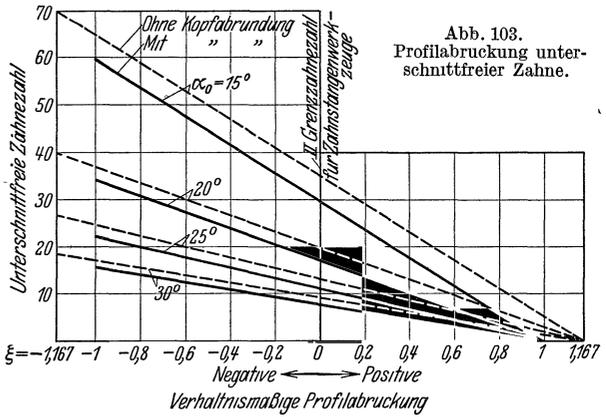


Abb. 103. Profilabrückung unterschneidfreier Zähne.

An einem beliebigen Punkt  $C$  (Abb. 102) mit dem Radius  $R$  und dem Winkel  $\alpha$ , bei der Paarung zweier Räder als Walzkreis und Eingriffswinkel benutzt, ist die halbe Zahnstarke  $\frac{s}{2} = [(tg \gamma - \gamma) - (tg \alpha - \alpha)] \cdot R$ ; der Walzkreisradius beträgt:

$$R = \frac{r}{\cos \alpha} = R_0 \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} = \frac{Z}{2} \cdot m \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha}.$$

Hiermit ist die ganze Zahnstarke:

$$s = [(tg \gamma - \gamma) - (tg \alpha - \alpha)] \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} \cdot Z \cdot m.$$

Unter Einsetzen der Winkelfunktion ist:

$$s = \left\{ 2 \sin \alpha_0 \cdot \xi + \frac{\pi}{2} \cdot \cos \alpha_0 - [(tg \alpha - \alpha) - (tg \alpha_0 - \alpha_0)] \cos \alpha_0 \cdot Z \right\} \frac{m}{\cos \alpha}.$$

Die Winkelfunktion  $tg \gamma - \gamma$  ergibt, in Gradmaß umgerechnet, den ganzen vom Zahn am Grundkreis umfaßten Winkel mit  $2 \cdot \frac{360^\circ}{2\pi} \cdot (tg \gamma - \gamma) = 114,7 (tg \gamma - \gamma)^\circ$ . Aus dem zur Winkelfunktion gehörenden Winkel  $\gamma$  ist der Kopfspitzenkreis zu errechnen mit dem Radius:

$$R_{sp} = R_0 \frac{\cos \alpha_0}{\cos \gamma}.$$

Der Winkel  $\gamma$  kann aus Abb. 104 entnommen werden, in der — der größeren Deutlichkeit halber — als Ordinate  $lg (tg \gamma - \gamma)$  benutzt ist. Der Zahnfuß wird innerhalb des Teilkreises um den Betrag  $x = \xi \cdot m$  kleiner bei positiver, größer bei negativer Abrückung. Demnach beträgt bei normaler Fußtiefe des Frasers,  $\frac{7}{6}m$ , der Fußkreisradius  $R_F = \left(\frac{Z}{2} - \frac{7}{6} + \xi\right)m$ . Der Kopfkreisradius  $R_k$ , und damit der Außendurchmesser des Rohlings, ergibt sich erst aus dem bei der Paarung erforderlichen radialen Spiel, und ist auch von der Profilabrückung des Gegenrades abhängig. Zwei Zahnräder

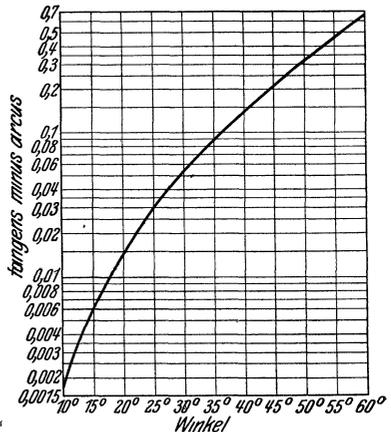


Abb. 104 Winkelfunktion.

mit verschiedenen Zahnzahlen  $Z_1$  und  $Z_2$ , den Profilabrückungen  $\xi_1$  und  $\xi_2$ , aber gleichem Modul  $m$  in den Teilkreisen (Abb. 105) können bis zum spielfreien Gang zusammengeschoben werden, die gemeinsame Tangente an die Grundkreise mit den Radien  $r_1$  und  $r_2$  wird zur Eingriffslinie und ergibt den Eingriffswinkel  $\alpha$  und die Walzkreise mit den Radien  $R_1$  und  $R_2$ . Die Winkelfunktionen  $\text{tg } \gamma_1 - \gamma_1$  und  $\text{tg } \gamma_2 - \gamma_2$  sind für beide Räder verschieden. Die Teilung  $t$  in den Walzkreisen vergrößert sich gegenüber der Teilung  $t_0$  in den Teilkreisen im Verhältnis der Radien  $\frac{R_1}{R_{01}}$  auf  $t = m\pi \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha}$ . Die Teilung in den Walzkreisen entspricht der Summe der Zahnstärken der beiden Räder in den Walzkreisen:

$$t = m\pi \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} = s_1 + s_2$$

$$= [(\text{tg } \gamma_1 - \gamma_1) - (\text{tg } \alpha - \alpha)] Z_1 \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} \cdot m + [(\text{tg } \gamma_2 - \gamma_2) - (\text{tg } \alpha - \alpha)] Z_2 \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} \cdot m.$$

Mit  $\text{tg } \gamma_1 - \gamma_1 = 2 \text{tg } \alpha_0 \frac{\xi_1}{Z_1} + \frac{\pi}{2} \frac{1}{Z_1} + (\text{tg } \alpha_0 - \alpha_0)$

und  $\text{tg } \gamma_2 - \gamma_2 = 2 \text{tg } \alpha_0 \frac{\xi_2}{Z_2} + \frac{\pi}{2} \frac{1}{Z_2} + (\text{tg } \alpha_0 - \alpha_0)$  ergibt sich:

$$(\text{tg } \alpha - \alpha) = 2 \text{tg } \alpha_0 \frac{\xi_1 + \xi_2}{Z_1 + Z_2} + (\text{tg } \alpha_0 - \alpha_0).$$

Hiernach ist der Eingriffswinkel  $\alpha$  in den Walzkreisen zu bestimmen. Die erforderlichen Werte enthält die Tabelle 22.

| $\alpha_0$ | $2 \text{tg } \alpha_0$ | $\text{tg } \alpha_0 - \alpha_0$ |
|------------|-------------------------|----------------------------------|
| 15°        | 0,536                   | 0,00615                          |
| 20°        | 0,728                   | 0,0149                           |
| 25°        | 0,933                   | 0,0300                           |
| 30°        | 1,055                   | 0,0538                           |

Aus Abb. 104 kann dann der zugehörige Winkel  $\alpha$  entnommen werden.

Bei spielfreiem Eingriff ist der Achsenabstand gleich der

Summe der Walzkreisradien  $a = R_1 + R_2$ ; bezogen auf die Grundkreisradien ist:

$$a = (R_{01} + R_{02}) \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} = \frac{Z_1 + Z_2}{2} \cdot \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} \cdot m$$

und der Abstand der beiden Teilkreise (Profilverschiebung)

$$y = a - (R_{01} + R_{02}) = a - \frac{Z_1 + Z_2}{2} \cdot m = \frac{Z_1 + Z_2}{2} \left( \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} - 1 \right) m.$$

Die Kopfhöhe über dem Teilkreis am Rade „1“ beträgt:

$$y + m - x_2 = \left[ \frac{Z_1 + Z_2}{2} \left( \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} - 1 \right) + 1 - \xi_2 \right] \cdot m$$

und der Kopfkreisradius:

$$R_{k1} = \left( \frac{Z_1 + Z_2}{2} \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} - \frac{Z_2}{2} + 1 - \xi_2 \right) m,$$

wenn das radiale Spiel  $\frac{1}{6} m$  bei normaler Fußtiefe  $\frac{7}{6} m$  des Fräsers erhalten werden soll. Ebenso ist am Rade „2“ der Kopfkreisradius:

$$R_{k2} = \left( \frac{Z_1 + Z_2}{2} \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} - \frac{Z_1}{2} + 1 - \xi_1 \right) m.$$

Die gesamte Zahnhöhe ergibt sich aus der Addition der Kopf- und Fußhöhe über und unter dem Teilkreis mit:

$$h = \left[ \frac{Z_1 + Z_2}{2} \left( \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} - 1 \right) + \frac{13}{6} - (\xi_1 + \xi_2) \right] m.$$

Die Eingriffstrecke  $AE$  ist gegeben durch den Schnitt der beiden Kopfkreise mit

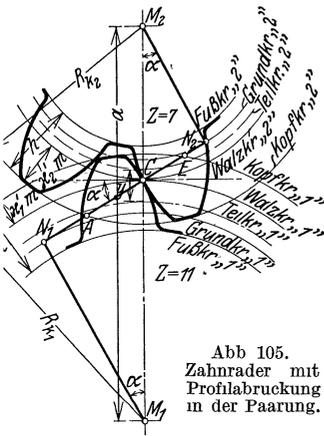


Abb. 105.  
Zahnrad mit  
Profilabrückung  
in der Paarung.

der Eingriffslinie. Zur Errechnung des Überdeckungsgrades  $\varepsilon$  nach Abschnitt VIII sind die Kopfhohen über den Walzkreisen erforderlich. Am Rade „1“ ist:

$$\begin{aligned} R_{k1} - R_1 &= \left( \frac{Z_1 + Z_2}{2} \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} - \frac{Z_2}{2} + 1 - \xi_2 - \frac{Z_1 \cos \alpha_0}{2 \cos \alpha} \right) m \\ &= \left[ \frac{Z_2}{2} \left( \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} - 1 \right) + 1 - \xi_2 \right] m = \kappa_1' \cdot m; \end{aligned}$$

am Rad „2“ entsprechend:  $\left[ \frac{Z_1}{2} \left( \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} - 1 \right) + 1 - \xi_1 \right] m = \kappa_2' \cdot m$ .

Die Zahnhöhen fallen im allgemeinen kleiner aus als bei der Herstellung ohne Profilabrückung. Nur wenn zwei Räder gepaart werden, von denen das eine mit positiver, das andere mit gleichgroßer negativer Profilabrückung hergestellt ist, bleibt die Zahnhohe erhalten. Es ändert sich aber die Verteilung auf die Zahnköpfe und Zahnfüße außerhalb und innerhalb der Teilkreise und der Walzkreise ( $V_0 =$  Verzahnung).

Die Wahl der Profilabrückung  $\xi$  kann von verschiedenen Bedingungen abhängig gemacht werden. Unterschnittfreiheit erfordert mindeste Abrückung nach Abb. 103. Eine zweite Bedingung, die stets eingehalten werden muß, ist ein Überdeckungsgrad  $\varepsilon \geq 1$ .

Zwei spielfreie Zahnräder können auf einen größeren Achsabstand  $a + \Delta a$  auseinandergeschoben werden. Es entstehen hierbei zwei neue Walzkreise und ein neuer Eingriffswinkel  $\alpha_n$ , der größer als bei spielfreiem Gang ist und sich aus

$$\cos \alpha_n = \frac{Z_1 + Z_2}{2} \cdot \frac{\cos \alpha_0}{a + \Delta a} \cdot m \text{ errechnet.}$$

Da die treibenden Zahnflanken in Berührung bleiben, ist das Flankenspiel der sich nicht beruhenden Zahnflanken:  $\Delta f = 2 \Delta a \cdot \sin \alpha_n$ , das Umfangsspiel  $\Delta u = 2 \Delta a \cdot \operatorname{tg} \alpha_n$  (Abb. 106).

Der Abstand vom Kopfkreis des einen und dem Fußkreis des anderen Rades vergrößert sich; unter Aufrechterhaltung des radialen Kopfspieles ( $\frac{1}{6} m$ ) können die Kopfkreise etwas vergrößert werden, die Köpfe werden hierbei spitzer, die äußerste Möglichkeit ist durch den Kopfspitzenkreis gegeben. Der Überdeckungsgrad verkleinert sich durch die Vergrößerung des Eingriffswinkels, vergrößert sich aber etwas wieder durch die neuen Kopfhohen.

Sämtliche Ableitungen gelten auch für die Sonderverzahnung der Räder mit Schraubenzahnen, der Kegelrader und der Schraubenzahnräder, an Stelle der Zahnzahl  $Z$  tritt dann die ideelle Zahnzahl  $Z_i$ .

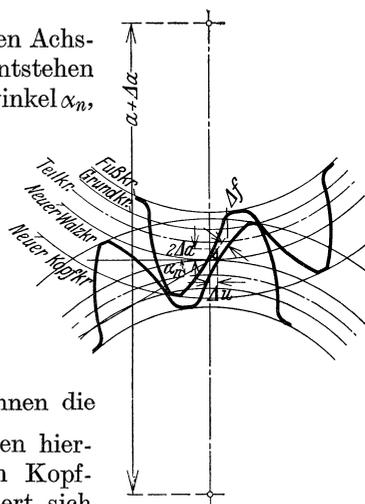


Abb 106 Zahnradpaar mit Flankenspiel.

## XXV. Berechnungsbeispiele.

1. Abtrieb eines Asynchron-Drehstrommotors von 16 kW und 940 Uml. (entspr. 1000 Uml. synchron) auf 47 Uml., Normalzahnrad mit  $b = 10 \cdot$  Modul.

$$\text{Übersetzung: } i = \frac{47}{940} = \frac{1}{20} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{5}.$$

Umlaufzahlen: 940, 235, 47 Uml./min.

1. Vorgelege: Gewählt  $Z_1 = 20$ ;  $Z_2 = 80$ ; Charakteristik  $\zeta = 940 \cdot 20 \sqrt{16} = 75200$ ; entsprechend ist nach Abb. 87 für Gußeisen auf Gußeisen:  $v = 6,9 \text{ m/s}$ ;  $\xi = 1,8$ , damit

$m = 1,8 \cdot 4 = 7,2$  mm, abgerundet auf 7,0;  $b = 70$  mm.

$D_1 = 20 \cdot 7 = 140$  mm,  $D_2 = 80 \cdot 7 = 560$  mm; nachgerechnet

$$v = \frac{\pi \cdot 940}{60} \cdot 0,14 = 6,88 \text{ m/s};$$

für Rohhaut auf Gußeisen:  $v = 8,4$  m/s;  $\xi = 2,1$ , damit

$m = 2,1 \cdot 4 = 8,4$ , abgerundet auf 9 mm,  $b = 90$  mm.

$D_1 = 180$ ;  $D_2 = 720$  mm, nachgerechnet:  $v = \frac{\pi \cdot 940}{60} \cdot 0,18 = 8,8$  m/s.

Bei  $20^\circ$  Schneidwinkel liegt die Zähnezahzahl des Kleinrades oberhalb der II. Grenzzähnezahzahl, Korrektur ist nicht erforderlich; bei  $15^\circ$  Schneidwinkel liegt sie unterhalb, Korrektur nach Abb. 103.

2. Vorgelege: Geschätzt  $\eta = 0,95$ ;  $N = 15,2$  kW; gewählt  $Z_1 = 16$ ;  $Z_2 = 80$ ; Charakteristik  $\zeta = 235 \cdot 16 \sqrt{15,2} = 14650$ ; für Gußeisen auf Gußeisen:  $v = 2,1$  m/s;  $\xi = 2,7$ ;  $m = 2,7 \sqrt{15,2} = 10,6$ , abgerundet auf 10 mm.  $b = 100$  mm,  $D_1 = 160$  mm,  $D_2 = 800$  mm; für Stahlguß auf Stahlguß:  $v = 1,55$  m/s;  $\xi = 2,05$ ;  $m = 2,05 \sqrt{15,2} = 7,9$ , abgerundet auf 8 mm,  $b = 80$  mm,  $D_1 = 128$  mm,  $D_2 = 640$  mm.

Bei  $20^\circ$  Schneidwinkel liegt die Zähnezahzahl des Kleinrades zwischen der II. und III. Grenzzähnezahzahl, Korrektur ist nicht erforderlich, aber zur Vermeidung von Unterschnitt erwünscht. Nach Abb. 103 ist bei Fräsern mit Kopfabrundung  $\xi = 0,065$ , ohne Kopfabrundung  $\xi = 0,23$ .

Das Kleinrad wird mit positiver Profilabrückung (entspr. Abb. 43), das Großrad mit negativer Abrückung (entspr. Abb. 44) geschnitten; bei gleicher Abrückung  $x = 0,65$  bzw. 2,3 mm bei Gußeisen,  $x = 0,52$  bzw. 1,85 mm bei Stahlguß, entsteht die  $V_0$ -Verzahnung, der Rohling-Außendurchmesser des Kleinrades wird größer, des Großrades kleiner, entspr. ändern sich auch die anderen Durchmesser. Bei  $15^\circ$  Schneidwinkel muß die Profilabrückung größer sein. Mit Kopfabrundung ist  $\xi = 0,47$ , ohne Kopfabrundung  $\xi = 0,64$ ; entspr. bei Gußeisen  $x = 4,7$  bzw. 6,4 mm, bei Stahlguß  $x = 3,76$  bzw. 5,12 mm.

2. Die beiden Stirnradvorgelege werden durch eine Schnecke ersetzt, Selbsthemmung ist nicht erforderlich. Schneckenwelle  $d_w = 16 \sqrt[3]{\frac{16}{940}} = 4,14$  cm, ausgeführt 45 mm. Gewählt: Flußstahlschnecke aus dem Vollen, Gangzahl  $z_s = 2$ ; Schneckenrad aus Phosphorbronze, Zähnezahzahl  $Z = 2 \cdot \frac{940}{47} = 40$ . Entsprechend geschätzt:  $\frac{m}{d} = 0,15$ ;  $\eta = 0,84$ ;  $\eta_s = 0,80$ ,  $\psi = 2,5$ , mittlerer Schneckendurchmesser 90 mm, Umfangsgeschwindigkeit der Schnecke:  $v_s = \frac{\pi \cdot 0,09 \cdot 940}{60} = 4,45$  m/s, entsprechend gewählt  $c = 20$ .

$$\text{Modul: } m = 100 \sqrt[3]{\frac{19,7}{20 \cdot 2,5 \cdot 2} \cdot \frac{16}{940} \cdot 0,84} = 100 \sqrt[3]{0,00282} = 14,15,$$

abgerundet auf 14 mm. Dann ist:  $\frac{m}{d} = \frac{14}{90} = 0,156$ ,  $\eta_s = 0,81$  (nach Abb. 76).

Kopfhöhe  $\alpha' \cdot m = 14$  mm, Fußhöhe  $\alpha'' \cdot m = \frac{7}{6} m = 16,4$ ; innerer Schneckendurchmesser  $d_f = 90 - 2 \cdot 16,4 = 57,2$  mm. Der brauchbare Winkel ergibt sich aus:

$$\text{tg } \gamma = \frac{2,2 \sqrt{40}}{90} = \frac{2,2 \cdot 6,325}{6,43 + 4} = 1,335 \text{ mit } 53^\circ 10'.$$

Aus dem Verhältniswert  $\psi = 2,5$  ergibt sich:

$$2,5 = \frac{\gamma}{180^\circ} \left( \frac{90}{14} + 2 \cdot \frac{7}{6} \right); \quad \gamma = 180^\circ \cdot \frac{2,5}{6,43 + 2,33} = 51,4^\circ.$$

Der Teilkreis-Durchmesser des Schneckenrades beträgt:  $40 \cdot 14 = 560$  mm, der Achsabstand  $280 + 45 = 325$  mm. Der Außendurchmesser des Schneckenrades beträgt bei Ausführung nach Abb. 69 und 88:

$$\begin{aligned} R_a &= [20 + 1(1 - 2 \cdot \sin^2 25,7^\circ)] \cdot 14 + 90 \cdot \sin^2 25,7^\circ \\ &= [20 + (1 - 0,374)] \cdot 14 + 90 \cdot 0,187 = 306 \text{ mm.} \end{aligned}$$

Schneckenlänge:  $L = (0,15 \cdot 40 + 7) \cdot 14$  bis  $(0,15 \cdot 40 + 8) \cdot 14 = 13,5 \cdot 14$  bis  $14 \cdot 14 = 190$  bis 196 mm. An der Schneckenwelle abgegebene Leistung:

$16 \cdot 0,84 = 13,5$  kW. Durchmesser der Schneckenradwelle:  $d_w = 16 \sqrt[3]{\frac{13,5}{47}}$   
 $= 16 \sqrt[3]{0,287} = 105$  mm, zur Aufnahme des Keils auf 120 mm verstärkt.

$$\text{Axialkraft: } P = 1,95 \cdot 10^6 \cdot \frac{16}{940} \cdot \frac{1}{2 \cdot 14} \cdot 0,84 = 995 \text{ kg.}$$

$$\text{Annahmen: } \alpha = 20^\circ; \sin \alpha = 0,342; \cos \alpha = 0,940; \mu = 0,05.$$

$$\text{Es ist: } \operatorname{tg} \beta = z_s \left( \frac{m}{d} \right) = 2 \cdot \frac{14}{90} = 0,311; \beta = 17^\circ 15'; \sin \beta = 0,296, \cos \beta = 0,955,$$

damit wird: die Normalkraft:  $\mathcal{N} = \frac{995}{0,94 \cdot 0,955 - 0,05 \cdot 0,296} = \frac{995}{0,88} = 1130$  kg,

die Umfangskraft:  $P_u = 1130 (0,94 \cdot 0,296 + 0,05 \cdot 0,955) = 1130 \cdot 0,326 = 368$  kg,

die Radialkraft:  $P_r = 1130 \cdot 0,342 = 387$  kg.

Annahme der Lagerentfernung  $e_1$  am Halslager der Schnecke: 32 cm. Damit (vgl. Abb. 74) ist:  $Q_1 = Q_1' = 995 \cdot \frac{45}{320} = 139$  kg, der resultierende Lagerdruck  $\sqrt{54,5^2 + 184^2} = 192$  kg oder  $\sqrt{332,5^2 + 184^2} = 380$  kg; die zugehörigen Winkel ergeben sich aus  $\operatorname{tg} \delta_1 = \frac{54,5}{184} = 0,296$  mit  $\delta_1 = 16^\circ 30'$  oder  $\operatorname{tg} \delta_1' = \frac{332,5}{184} = 1,807$  mit  $61^\circ$ .

Annahme  $e_2$  an den Halslagern des Schneckenrades 18 cm, damit  $Q_2 = Q_2' = 368 \cdot \frac{28}{18} = 572$  kg, resultierender Lagerdruck  $\sqrt{756^2 + 497,5^2} = 905$  kg oder  $\sqrt{388^2 + 497,5^2} = 631$  kg. Zugehörige Winkel:

$$\operatorname{tg} \delta_2 = \frac{756}{497,5} = 1,52; \delta_2 = 56^\circ 40'; \operatorname{tg} \delta_2' = \frac{388}{497,5} = 0,78; \delta_2' = 38^\circ,$$

wie in Abb. 75 liegt ein Lager oben an. Die erforderliche Länge der Lagerschale ergibt sich aus der zulässigen Beanspruchung in kg/cm<sup>2</sup> und der größeren Resultierenden, mit  $k = 20$  kg/cm<sup>2</sup> am Halslager der Schnecke  $l = \frac{380}{20 \cdot 4,5} = 4,25$  cm;

am Halslager der Schneckenradwelle  $l = \frac{905}{20 \cdot 10,5} = 4,3$  cm.

3. 450 kW sind von 320 auf 40 Uml./min zu übertragen. Ausführung als Pfeilrader ( $\psi = 4$ ); Antrieb: Drehstromkollektormotor mit übersynchroner Umlaufzahl.

$$\text{Übersetzung: } i = \frac{40}{320} = \frac{1}{8}. \text{ Gewählt } Z_1 = 20; Z_2 = 160.$$

Gußeisen ergibt  $\zeta = 320 \cdot 20 \sqrt{450} = 136000$  und entsprechend Abb. 85  $v = 10,6$  m/s. Die Umfangsgeschwindigkeit wird kleiner bei Stahlguß; da  $\varepsilon > 2$

wird, kann angenommen werden, daß stets zwei Zähne tragen, damit:

$$\zeta = 320 \cdot 20 \sqrt{\frac{450}{2}} = 96000, \text{ entsprechend Abb. 84 ist } v = 5,8 \text{ m/s; } \xi = 1,13$$

und der Modul der Stirnverzahnung  $m = 1,13 \cdot \sqrt{\frac{450}{2}} = 17 \text{ mm}$ .

Modul der Normalteilung  $m_n = 15$  gewählt, ergibt:  $\sin \beta = \frac{15}{17} = 0,883$ ;  $\beta = 62^\circ$ ;

ideelle Zahnzahlen:  $Z_1 = \frac{20}{0,6885} = 29$ ;  $Z_2 = \frac{160}{0,6885} = 232$ .

Teilkreisdurchmesser:  $D_1 = 17 \cdot 20 = 340 \text{ mm}$ ,  $D_2 = 17 \cdot 160 = 2720 \text{ mm}$ .

Krümmungsradien der Ellipsen:  $R_{n1} = \frac{170}{0,7797} = 218 \text{ mm}$ ,  $R_{n2} = \frac{1360}{0,7797} = 1745 \text{ mm}$ .

Kopfhöhe 15 mm, Außendurchmesser der Rohlinge  $340 + 2 \cdot 15 = 370 \text{ mm}$ ,  $2720 + 2 \cdot 15 = 2750 \text{ mm}$ .

Die Verzahnung entspricht zwei Stirnrädern mit Schraubenzähnen (Abschnitt X) mit halber Zahnbreite oder  $\psi = 2$ .

Eingeschlossener Winkel  $\gamma = 360^\circ \cdot \frac{\psi}{Z} \cdot \text{ctg } \beta$ ;  $\text{ctg } \beta = \sqrt{\left(\frac{15}{17}\right)^2 - 1} = 0,534$ ;  
 $\gamma = \left(\frac{384}{Z}\right)^\circ = 19,2^\circ$  bzw.  $2,4^\circ$  Eingriffswinkel der Stirnverzahnung bei  $\alpha_n = 20^\circ$ :  
 $\text{ctg } \alpha = \text{ctg } \alpha_n \cdot \sin \beta = 2,747 \cdot 0,883 = 2,43$ ;  $\alpha = 22^\circ 20'$ . Überdeckungsgrad der  
 Stirnverzahnung zu rechnen mit:  $\alpha = 22^\circ 20'$ ;  $\kappa' = \frac{15}{17} = 0,883$  (nach Abschn. VIII).

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \sqrt{\frac{0,4125^2}{4\pi^2} \cdot 20^2 + \frac{1}{\pi^2} \cdot 0,925^2 (0,883 \cdot 20 + 0,883^2)} - \frac{0,4125}{2\pi} \cdot 20 \\ &= \sqrt{4,31 \cdot 10^{-3} \cdot 400 + 1,185 \cdot 10^{-1} (17,66 + 0,779)} - 6,57 \cdot 10^{-2} \cdot 20 \\ &= \sqrt{1,724 + 2,185} - 1,314 = 0,66, \end{aligned}$$

ebenso

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= \sqrt{4,31 \cdot 10^{-3} \cdot 160^2 + 1,185 \cdot 10^{-1} (0,883 \cdot 160 + 0,779)} - 6,57 \cdot 10^{-2} \cdot 160 \\ &= \sqrt{110,5 + 16,9} - 10,5 = 0,8 \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{ST} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1,46.$$

Vergößerter Überdeckungsgrad:  $\varepsilon = \varepsilon_{ST} + \psi \cdot \text{ctg } \beta = 1,46 + 2 \cdot 0,534 = 2,528$ .

Voraussichtliche Gewichte und Trägheitsmomente (nach Abschnitt XXII):  
 $m = 17 \text{ mm}$ ,  $m^3 = 4913$ ,  $m^5 = 1,42 \cdot 10^6$ ;  $\gamma = 7,86$ .

Ritzel:  $Z = 20$ ;  $k = 3,5 \cdot 10^{-3}$ ;  $G = 7,86 \cdot 3,5 \cdot 10^{-3} \cdot 4913 = 135 \text{ kg}$ ,  
 $K = 1,97 \cdot 10^{-6}$ ;  $J = 7,86 \cdot 1,97 \cdot 10^{-6} \cdot 1,42 \cdot 10^6 = 22 \text{ kg} \cdot \text{cm} \cdot \text{s}^2$ .

Großrad:  $Z = 160$ ;  $k = 3,46 \cdot 10^{-2}$ ;  $G = 7,86 \cdot 3,46 \cdot 10^{-2} \cdot 4913 = 1340 \text{ kg}$ .  
 $K = 1,46 \cdot 10^{-3}$ ;  $J = 7,86 \cdot 1,46 \cdot 10^{-3} \cdot 1,42 \cdot 10^6 = 16300 \text{ kg} \cdot \text{cm} \cdot \text{s}^2$ .

Trägheitsmoment des Ritzels bezogen auf Achse des Großrades:  $22 \cdot 8^2 = 1408 \text{ kg} \cdot \text{cm} \cdot \text{s}^2$ ; Gesamtträgheitsmoment bezogen auf Großrad:  $17708 \text{ kg} \cdot \text{cm} \cdot \text{s}^2 = 177,08 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2$ . Schwungmoment  $[GD^2] = 0,392 \cdot 17708 = 6940 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .

4. Profilabrückung und Abmessungen für ein Getriebe  $Z_1 = 11$ ;  $Z_2 = 7$ ;  
 $\alpha_0 = 20^\circ$ ,  $m = 10 \text{ mm}$  (wiedergegeben in Abb. 105, Herstellung in Abb. 102).

Teilkreisdurchmesser:  $R_{01} = \frac{11}{2} \cdot 10 = 55 \text{ mm}$ ,  $R_{02} = \frac{7}{2} \cdot 10 = 35 \text{ mm}$ .

Übersetzung:  $i = \frac{7}{11} = 0,636$ , nach Abb. 38 ist die III. Grenzzahnezahl 13,6; beide Zahnzahlen sind kleiner, Herstellung erforderlich mit positiver Profilabrückung.  $Z_1 + Z_2 = 18 > 17,3$  (IV. Grenzzahnezahl), daher mit abnormen Hohen noch möglich.

Abrückung mit Kopfabrundung des Frasers (nach Abb. 103)  $\xi_1 = 0,375$ ,  
 $\xi_2 = 0,6$ , entspr.  $x_1 = + 3,75$  mm,  $x_2 = + 6$  mm.

Zahnstarken am Grundkreis  $FF'$  (Werte aus Tabelle 21 für  $\alpha_0 = 20^\circ$ ):

am Rad „1“:  $(0,684 \cdot 0,375 + 1,475 + 0,014 \cdot 11) \cdot 10 = 19,8$  mm,

am Rad „2“:  $(0,684 \cdot 0,6 + 1,475 + 0,014 \cdot 7) \cdot 10 = 20$  mm.

Zahnstarken am Teilkreis:  $\text{tg } \alpha_0 = 0,364$ :

$$s_{01} = (1,5708 + 2 \cdot 0,375 \cdot 0,364) \cdot 10 = 18,5 \text{ mm,}$$

$$s_{02} = (1,5708 + 2 \cdot 0,6 \cdot 0,364) \cdot 10 = 20 \text{ mm.}$$

Zahnwinkel:  $\text{tg } \alpha_0 - \alpha_0 = 0,0149$  (nach Tabelle 22 oder Abb. 104),

$$\text{tg } \gamma_1 - \gamma_1 = 2 \cdot 0,364 \cdot \frac{0,375}{11} + \frac{1,5708}{11} + 0,0149 = 0,1823; \gamma_1 = 43^\circ,$$

$$\text{tg } \gamma_2 - \gamma_2 = 2 \cdot 0,364 \cdot \frac{0,6}{7} + \frac{1,5708}{7} + 0,0149 = 0,3013; \gamma_2 = 49^\circ 20'.$$

Vom Zahn umfaßter Winkel:  $114,7 \cdot 0,1823 = 20,9^\circ = 20^\circ 54'$  bzw.  $114,7 \cdot 0,3013 = 34,6^\circ = 34^\circ 36'$ .

Eingriffswinkel bei spielfreier Paarung:

$$\text{tg } \alpha - \alpha = 2 \cdot 0,364 \frac{0,375 + 0,6}{11 + 7} + 0,0149 = 0,0544,$$

$$\alpha = 30^\circ; \cos \alpha = 0,866; \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} = \frac{0,94}{0,866} = 1,085.$$

Achsabstand:  $a = \frac{11 + 7}{2} \cdot 1,085 \cdot 10 = 97,65$  mm.

Teilkreisabstand:  $y = \frac{11 + 7}{2} (1,085 - 1) \cdot 10 = 7,65$  mm.

Walzkreisradien:  $R_1 = 55 \cdot 1,085 = 59,675$  mm,  $R_2 = 35 \cdot 1,085 = 37,975$  mm.

Zahnstarken in den Walzkreisen:

$$s_1 = [0,684 \cdot 0,375 + 1,475 - (0,0544 - 0,0149) \cdot 11 \cdot 0,94] \cdot \frac{10}{0,866} = 15,25 \text{ mm,}$$

$$s_2 = [0,684 \cdot 0,6 + 1,475 - (0,0544 - 0,0149) \cdot 7 \cdot 0,94] \cdot \frac{10}{0,866} = 18,85 \text{ mm.}$$

Kopfpitzenkreise:  $R_{sp1} = 55 \cdot \frac{0,94}{0,731} = 70,7$  mm,  $R_{sp2} = 35 \cdot \frac{0,94}{0,652} = 50,5$  mm

rel. Kopfhohen über den Walzkreisen:

$$\varkappa_1' = \frac{7}{2} \cdot 0,085 + 1 - 0,6 = 0,698; \varkappa_2' = \frac{11}{2} \cdot 0,085 + 1 - 0,375 = 1,093.$$

Kopfkreisradien:  $R_{k1} = 59,675 + 0,698 \cdot 10 = 66,65$  mm

$$R_{k2} = 37,975 + 1,093 \cdot 10 = 48,9 \text{ mm.}$$

Gesamthöhe der Zähne beider Rader:

$$h = [9 \cdot 0,085 + 2,167 - (0,375 + 0,6)] \cdot 10 = 19,57 \text{ mm.}$$

Überdeckungsgrad (nach Abschn. VIII, Konstanten nach Tabelle 12 entspr.  $\alpha = 30^\circ$ ):

$$\varepsilon_1 = \sqrt{8,33 \cdot 10^{-3} \cdot 11^2 + 1,357 \cdot 10^{-1} (0,698 \cdot 11 + 0,698^2)} - 9,18 \cdot 10^{-2} \cdot 11 \\ = \sqrt{1,009 + 1,109} - 1,01 = 0,47,$$

$$\varepsilon_2 = \sqrt{8,33 \cdot 10^{-3} \cdot 7^2 + 1,357 \cdot 10^{-1} (1,093 \cdot 7 + 1,093^2)} - 9,18 \cdot 10^{-2} \cdot 7 \\ = \sqrt{0,408 + 1,201} - 0,644 = 0,622; \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1,092.$$

5. Vergrößerung des Achsabstandes auf 99 mm;  $\Delta a = 99 - 97,65 = 1,35$  mm.

Neuer Eingriffswinkel:  $\cos \alpha_n = 9 \cdot \frac{0,94}{99} \cdot 10 = 0,855$ ;  $\alpha_n = 31^\circ 20'$ ,

$$\sin \alpha_n = 0,520; \quad \operatorname{tg} \alpha_n = 0,609, \quad \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_n} = \frac{0,94}{0,855} = 1,1.$$

Flankenspiel:  $\Delta f = 2 \cdot 1,35 \cdot 0,520 = 1,405$  mm.

Umfangspiel:  $\Delta u = 2 \cdot 1,35 \cdot 0,609 = 1,65$  mm.

Neue Wälzkreisradien:  $R_1 = 55 \cdot 1,1 = 60,5$ ;  $R_2 = 35 \cdot 1,1 = 38,5$ .

Neue relative Kopfhohen über den Wälzkreisen:

$$\kappa_1' = \frac{7}{2} \cdot 0,1 + 1 - 0,6 = 0,75; \quad \kappa_2' = \frac{11}{2} \cdot 0,1 + 1 - 0,375 = 1,175.$$

Kopfkreisradien:  $R_{k_1} = 60 + 0,75 \cdot 10 = 68$ ;  $R_{k_2} = 38,5 + 1,175 \cdot 10 = 50,25$ ;

Zähne sehr spitz, da Kopfspitzenkreis  $R_{sp_2}$  fast erreicht.

Gesamthöhe der Zahne:  $h = [9 \cdot 0,1 + 2,167 - (0,375 + 6)] \cdot 10 = 20,92$  mm.

Überdeckungsgrad:  $k_1 = \frac{0,609^2}{4 \cdot \pi^2} = 9,35 \cdot 10^{-3}$ ;  $k_2 = \frac{1}{\pi^2 \cdot 0,855^2} = 1,382 \cdot 10^{-1}$ ;

$$k_3 = \frac{0,609}{2\pi} = 9,68 \cdot 10^{-2}.$$

$$\varepsilon_1 = \sqrt{9,35 \cdot 10^{-3} \cdot 11^2 + 1,382 \cdot 10^{-1} (0,75 \cdot 11 + 0,75^2)} - 9,68 \cdot 10^{-2} \cdot 11 \\ = \sqrt{1,13 + 1,22} - 1,065 = 0,46,$$

$$\varepsilon_2 = \sqrt{9,35 \cdot 10^{-3} \cdot 7^2 + 1,382 \cdot 10^{-1} (1,175 \cdot 7 + 1,175^2)} - 9,68 \cdot 10^{-2} \cdot 7 \\ = \sqrt{0,32 + 1,38} - 0,678 = 0,626; \quad \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1,086.$$

6. 9 PS sind von 400 auf 200 Umläufe zu übertragen. Die Wellen schneiden sich unter  $60^\circ$  (Kegelrader). Es ist:  $i = 0,5$ ;  $\gamma = 60$ , damit:

$$\text{am treibenden Rad: } \operatorname{tg} \beta_1 = \frac{0,866}{\frac{1}{0,5} + 0,5} = 0,346; \quad \beta_1 = 19^\circ 10';$$

$$\text{am getriebenen Rad: } \operatorname{tg} \beta_2 = \frac{0,866}{0,5 + 0,5} = 0,866; \quad \beta_2 = 40^\circ 50'$$

und  $\sin \beta_1 = 0,327$ ;  $\cos \beta_1 = 0,945$ ;  $\sin \beta_2 = 0,654$ ;  $\cos \beta_2 = 0,757$ .

Gewählt: Gußeisen  $\psi = 3$ ;  $Z_1 = 16$ ;  $Z_2 = 32$ . Da in Abb. 85 die Charakteristik für  $N$  kW angegeben ist, ist aufzusuchen  $\zeta = \frac{400 \cdot 16}{1,165} \sqrt{9} = 16470$ , es wird

$v = 2,3$  m/s und  $\xi = 2,7$ ; entsprechend ist der mittlere Modul  $m_m = \frac{2,7}{1,165} \sqrt{9} = 6,92$ ,

der mittlere Durchmesser  $D_{m_1} = 111$  mm, die mittlere Teilung 21,7 mm und die Breite 65,2 mm. Der äußere Grundkegel hat den Durchmesser  $D_1 = 111 + 65,2 \cdot 0,327 = 132,3$  mm, der äußere Modul ist entsprechend 8,26 mm, abgerundet auf den Normalmodul 8 mm, Breite aufgerundet auf 70 mm. Damit sind die Teilkreise endgültig:  $D_1 = 16 \cdot 8 = 128$ ;  $D_1' = 128 - 2 \cdot 70 \cdot 0,327 = 82,3$ ;  $D_2 = 32 \cdot 8 = 256$ ;  $D_2' = 256 - 2 \cdot 70 \cdot 0,654 = 164,6$ .

Für Herstellung im Teilverfahren ist:  $Z_{v_1} = \frac{16}{0,945} = 17$ ;  $Z_{v_2} = \frac{32}{0,757} = 42,3$ .

Für Herstellung im Walzverfahren ist der Radius des Plankegelrades  $SC = \frac{64}{0,327} = 196$  mm. Bei  $\alpha = 15^\circ$  ist die II. Grenzzahnezahl  $29,8 \cdot 0,945 = 28,2$ , die III. Grenzzahnezahl  $24,4 \cdot 0,945 = 23,1$  am kleinen Rad, Korrektur ist erforderlich. Bei  $\alpha = 20^\circ$  sind die Grenzzahnezahlen 16,2 bzw. 13,4; Korrektur ist nicht notwendig.

# WERKSTATTBÜCHER

## FÜR BETRIEBSBEAMTE, VOR- UND FACHARBEITER

### HERAUSGEGEBEN VON DR.-ING. EUGEN SIMON, BERLIN

Bisher sind erschienen (Fortsetzung):

- |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>Heft 35: Der Vorrichtungsbau.</b><br/>II: Bearbeitungsbeispiele mit Reihenplanmäßig konstruierter Vorrichtungen. Typische Einzelvorrichtungen.<br/>Von Fritz Grünhagen.</p> <p><b>Heft 36: Das Einrichten von Halbautomaten.</b><br/>Von J. van Himbergen, A. Bleckmann, A. Waßmuth.</p> <p><b>Heft 37: Modell- und Modellplattenherstellung für die Maschinenformerei.</b><br/>Von Fr. und Fe. Brobeck.</p> <p><b>Heft 38: Das Vorzeichnen im Kessel- und Apparatebau.</b><br/>Von Ing. Arno Dorl.</p> <p><b>Heft 39: Die Herstellung roher Schrauben.</b><br/>I. Anstauchen der Köpfe.<br/>Von Ing. Jos. Berger.</p> <p><b>Heft 40: Das Sägen der Metalle.</b><br/>Von Dipl.-Ing. H. Hollaender.</p> <p><b>Heft 41: Das Pressen der Metalle (Nichteisenmetalle).</b><br/>Von Dr.-Ing. A. Peter.</p> | <p><b>Heft 42: Der Vorrichtungsbau.</b><br/>III: Wirtschaftliche Herstellung und Ausnutzung der Vorrichtungen.<br/>Von Fritz Grünhagen.</p> <p><b>Heft 43: Das Lichtbogenschweißen.</b><br/>Von Dipl.-Ing. Ernst Klosse.</p> <p><b>Heft 44: Stanztechnik. I: Schnitttechnik.</b><br/>Von Dipl.-Ing. Erich Krabbe.</p> <p><b>Heft 45: Nichteisenmetalle. I: Kupfer, Messing, Bronze, Rotguß.</b><br/>Von Dr.-Ing. R. Hinzmann.</p> <p><b>Heft 46: Feilen.</b><br/>Von Dr.-Ing. Bertold Buxbaum.</p> <p><b>Heft 47: Zahnräder.</b><br/>I. Aufzeichnen und Berechnen. Von Dr.-Ing. Georg Karrass.</p> <p><b>Heft 48: Öl im Betrieb.</b><br/>Von Dr.-Ing. Karl Krekeler.</p> |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

In Vorbereitung bzw. unter der Presse befinden sich:

- Spritzlackieren.** Von Obering. R. Klose.  
**Die Werkzeugstähle.** Von Ing.-Chem. H. Herbers.  
**Spannen.** Von Dr.-Ing. Fr. Klautke.

---

**\*Zahnräder.** I. Teil: Stirn- und Kegelräder mit geraden Zähnen. Von Dr. A. Schiebel, o. ö. Professor d. Dtsch. Techn. Hochschule in Prag. Dritte, neu bearbeitete Auflage. („Einzelkonstruktionen aus dem Maschinenbau“, Heft 3.) Mit 159 Textabbildungen. VI, 132 Seiten. 1930. RM 10.—

---

**\*Die Teilung der Zahnräder** und ihre einfachste rechnerische Bestimmung. Von Ingenieur G. Hönnicke. Mit 26 Textabbildungen. IV, 115 Seiten. 1927. RM 6.—

---

**\*Evolventenverzahnung.** Von Professor Dipl.-Ing. Hans Friedrich, Chemnitz. („Theoretische Untersuchungen für Maschinenbau und Bearbeitung“, Heft 1.) Mit 67 Abbildungen im Text und 10 Tabellen. VI, 77 Seiten. 1928. RM 7.—

---

**\*Evolventen-Stirnradgetriebe.** Berechnung, Herstellung, Prüfung. Von R. Herrmann, Ingenieur. Mit 77 Abbildungen im Text. V, 112 Seiten. 1929. RM 9.60

---

**\*Die Satzrädernsysteme der Evolventenverzahnung.** Grundlagen und Anleitung zu ihrer Berechnung. Von Dr.-Ing. Paul Krüger. Mit 30 Abbildungen. VI, 88 Seiten. 1926. RM 8.40

---

\* Auf alle vor dem 1. Juli 1931 erschienenen Bücher wird ein Notnachlaß von 10% gewährt.