SCHIFFBAUTECHNISCHE GESELLSCHAFT.
XX. ORDENTLICHE HAUPTVERSAMMLUNG.
BERLIN, DEN 21.–23. NOVEMBER 1918.

Die Grundlagen der Ähnlichkeitsmechanik und ihre Verwertung bei Modellversuchen, unter besonderer Berücksichtigung schiffbautechnischer Anwendungen.

Vorgetragen

von

Professor M. Weber,
Charlottenburg.

SCHIFFBAUTECHNISCHE GESELLSCHAFT.

XX. ORDENTLICHE HAUPTVERSAMMLUNG.

BERLIN, DEN 21.–23. NOVEMBER 1918.

Die Grundlagen der Ähnlichkeitsmechanik und ihre Verwertung bei Modellversuchen, unter besonderer Berücksichtigung schiffbautechnischer Anwendungen.

Vorgetragen

von

Professor M. Weber,

Charlottenburg.

ISBN 978-3-662-42255-7 ISBN 978-3-662-42524-4 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-42524-4

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

Die Grundlagen der Ähnlichkeitsmechanik und ihre Verwertung bei Modellversuchen, unter besonderer Berücksichtigung schiffbautechnischer Anwendungen.

Vorgetragen von Professor M. Weber, Charlottenburg.

Inhaltsübersicht.

I. Die Grundlagen der Ähnlichkeitsmechanik.

1. Aufgabestellung.
2. Verwendungszweck der Ähnlichkeitsmechanik. Bedeutung der Modellgesetze.
3. Entsprechende Größen. Kinematische Ähnlichkeit.
4. Abhängigkeit des Zeitmaßstabs vom Längenmaßstab bei dynamischen Modellvorgängen.
5. Der Begriff „mechanische Ähnlichkeit".
6. Geschichtliche Entwicklung der Ähnlichkeitsmechanik.
7. Die Bertrandsche Bedingungsgleichung zwischen den vier Ähnlichkeitsmaßstäben der dynamischen Grundgleichung.
8. Erfüllung der Anfangs- und Grenzbedingungen.
9. Einheitlichkeit des Kräftemaßstabs bei mechanisch ähnlichen Vorgängen.
10. Widersprechende Bedingungen und Grenzen der Anwendbarkeit der Ähnlichkeitsmechanik.
11. Sonderstellung der Normal- und Tangentialkräfte starrer Körper, der Druckkräfte unzusammendrückbarer Körper und der reinen Dämpfungswiderstände. Der Begriff „physikalische Kräfte".
12. Ausschließliche Verwendung des technischen Maßsystems. Die drei technischen Grundmaßstäbe λ, τ, $\varkappa$ der Ähnlichkeitsmechanik.
13. Abgeleitete Übertragungsmaßstäbe. Die Maßstabregel.
14. Die erweiterte Maßstabregel.
15. Das allgemeine Ähnlichkeitsgesetz Newtons als Folge der Trägheit der beschleunigten Massen.
16. Gültigkeit des allgemeinen Ähnlichkeitsgesetzes für alle entsprechenden Kräfte an Massenteilchen.
17. Gültigkeit des allgemeinen Ähnlichkeitsgesetzes für Gesamtwiderstände und andere Mittelkräfte.
18. Andere Formen des allgemeinen Ähnlichkeitsgesetzes.
19. Das natürliche Verfahren zur Aufsuchung des jeweils geltenden Modellgesetzes.
20. Andere Wege zur Aufsuchung der Modellgesetze.
21. „Unvollständige" und „angenäherte" mechanische Ähnlichkeit.

II. Die Modellgesetze.

22. Das Froudesche Modellgesetz für Bewegungen unter der Wirkung der Schwerkraft.
23. Andere Ableitungen des Froudeschen Modellgesetzes.
24. Dimensionslose Darstellung der Modellergebnisse bei Gültigkeit des Froudeschen Modellgesetzes.
25. Das Thomsonsche Modellgesetz für Bewegungen unter der Wirkung der allgemeinen Schwere.
26. Das Reynoldssche Modellgesetz für Bewegungen unter der Wirkung der Flüssigkeitsreibung.

27. Dimensionslose Darstellung der Modellergebnisse bei Gültigkeit des Reynoldsschen Modellgesetzes.
28. Das Cauchysche Modellgesetz für Bewegungsvorgänge unter der Wirkung elastischer Kräfte.
29. Das Modellgesetz für Wellenbewegungen unter der Wirkung von Kapillarkräften.
30. Überblick über die Modellgesetze.
31. Die Modellgesetze für Bewegungen unter der gleichzeitigen Wirkung zweier Kräftearten.
32. Der Fall allgemeiner mechanischer Ähnlichkeit ohne Bestehen eines besonderen Modellgesetzes.

III. Anwendungen der Ähnlichkeitsmechanik.

33. Die Widerstände quergestellter, ganz oder teilweise eingetauchter Platten in unbegrenztem Wasser (Anwendung 1).
34. Ähnlichkeitsbeziehungen bei Pendeln (Anwendung 2).
35. Mechanische Ähnlichkeit der freien Gerstnerschen Trochoidenwellen (Anwendung 3).
36. Der Helmholtzsche Fall mechanischer Ähnlichkeit von Wasser- und Luftwogen (Anwendung 4).
37. Stehende Schwingungen in Behältern. Seiches (Anwendung 5).
38. Ermittlung des Schiffswiderstandes nach dem Froudeschen Modellverfahren (Anwendung 6).
39. Modellversuche zum Studium der Rollschwingungen von Schiffen ohne und mit Dämpfungsvorrichtungen (Anwendung 7).
40. Modellversuche mit Schaufelrädern (Anwendung 8).
41. Mechanische Ähnlichkeit des Systems „Schiff und Schraube" (Anwendung 9).
42. Combessche Ähnlichkeit bei Reihenmaschinen verschiedener Größe unter Schwerkraftwirkung (Anwendung 10).
43. Mechanische Ähnlichkeit in der Dynamik der Flugzeuge (Anwendung 11).
44. Ähnlichkeitsschlüsse in der Mechanik der Himmelskörper (Anwendung 12).
45. Ähnlichkeitsbeziehungen für den Fall der Oberflächenreibung an dünnen Platten (Anwendung 13).
46. Ähnlichkeitsbeziehungen betreffend den Druckverlust in zylindrischen Rohren (Anwendung 14).
47. Modellversuche zur Ermittlung des Fahrtwiderstandes der Luftschiffe und Unterseeboote. (Anwendung 15).
48. Ähnlichkeitsbeziehungen bei formgleichen Dampfturbinenrädern (Anwendung 16).
49. Normandsche Ähnlichkeit bei Reihen-Dampfmaschinen verschiedener Größe unter Voraussetzung gleicher Festigkeit (Anwendung 17).
50. Strenge mechanische Ähnlichkeit bei gleichzeitigem Wirken zweier Kräfte, erläutert an dem Beispiel eines über eine Brücke fahrenden Zuges (Anwendung 18).
51. Mechanische Ähnlichkeit im Strömungsfelde reibungsfreier Flüssigkeiten (Anwendung 19).
52. Das Newtonsche allgemeine Ähnlichkeitsgesetz bei formgleichen Antriebsschrauben und flügelartig gekrümmten Flächen (Anwendung 20).

IV. Fälle unvollständiger mechanischer Ähnlichkeit.

53. Erklärung der „unvollständigen" mechanischen Ähnlichkeit.
54. Ähnlichkeitsfolgerungen für die Querschwingungen gespannter Saiten (Anwendung 21).
55. Ermittlung der kritischen Drehzahlen bei Verdrehungsschwingungen von Wellen aus Modellversuchen (Anwendung 22).
56. Ähnlichkeitsfolgerungen für die Biegungsschwingungen von Schiffen, Treibstangen und anderen Körpern (Anwendung 23).
57. Unvollständige mechanische Ähnlichkeit bei dem Modell einer von einer Lokomotive befahrenen Brücke (Anwendung 24).
58. Ähnlichkeitsbeziehungen bei formähnlichen Dampfturbinenrädern (Anwendung 25).
59. Das allgemeine Ähnlichkeitsgesetz bei formähnlichen Antriebsschrauben verschiedener Steigung (Anwendung 26).

I. Die Grundlagen der Ähnlichkeitsmechanik.

1. Aufgabestellung. Die Hilfsmittel der Ähnlichkeitsmechanik werden zur Lösung wichtiger dynamischer Aufgaben in denjenigen Fällen herangezogen, in denen der übliche mathematisch-deduktive Weg nicht zum Ziele führt, für die aber die Praxis eine Voraussage der zu erwartenden zahlenmäßigen Ergebnisse fordert. So können zum Beispiel die Widerstände der Schiffe, die an den Antriebsschrauben wirkenden Kräfte und Drehmomente, die Druckverluste in Rohrleitungen, ferner zahlreiche Wellen- und Schwingungserscheinungen der verschiedensten Art sowie andere technische oder physikalische Vorgänge mit Hilfe der Ähnlichkeitsmechanik oft in überaus befriedigender Weise zahlenmäßig festgestellt werden.

Während der Geltungsbereich der allgemeinen Mechanik, soweit es sich um rein dynamische Erscheinungen handelt, praktisch unbeschränkt ist, sind der Anwendungsmöglichkeit der Ähnlichkeitsmechanik Grenzen gesetzt. Nicht alle Bewegungsvorgänge lassen sich mittels eines Modells nachahmen, und daher können auch nicht alle dynamischen Aufgaben, welche die Praxis stellt, durch die Hilfsmittel der Ähnlichkeitsmechanik einer Lösung zugeführt werden. Hierbei ist noch zu unterscheiden, ob der betreffende Bewegungsvorgang sich streng den Forderungen der Ähnlichkeitsmechanik unterordnen läßt, oder ob er ihnen von Natur widerstrebt und sich dann nur näherungsweise den Ähnlichkeitsgesetzen — je nach Art des Falles mehr oder weniger befriedigend — fügt.

Die Gesetze der Ähnlichkeitsmechanik werden von dem Ingenieur, vornehmlich von dem des Schiffbaus und des Luftfahrzeugbaus, mangels anderer Lösungsmittel oft benutzt, und es ist daher sehr erwünscht, daß er über die Grundlagen der Ähnlichkeitsmechanik genügende Kenntnis besitzt, um bei der Anwendung und Handhabung dieses wichtigen Hilfsmittels der Technik seine Folgerungen mit Sicherheit ziehen zu können.

Volle Vertrautheit mit den grundlegenden Fragen der Ähnlichkeitsmechanik ist häufig bei den Mathematikern oder Physikern zu finden, seltener bei den Ingenieuren, die doch gerade wegen der Möglichkeit vielseitiger technischer Anwendungen vornehmlich berufen sein sollten, dieses wichtige Sondergebiet der Mechanik zu pflegen. Dies ist im wesentlichen darin begründet, daß die Ähnlichkeitsmechanik nur selten Vortragsgegenstand an den Technischen Hochschulen ist. Der Ingenieur ist im Bedarfsfalle auf die verstreuten Abhandlungen über dieses Gebiet angewiesen oder er stellt mangels Kenntnis derselben eigene Überlegungen an, ohne sich den schon vorliegenden Wissensstoff nutzbar zu machen. Erschwerend wirkt hierbei der Umstand, daß es — nach meiner Kenntnis — keine den Bedürfnissen der Technik angepaßte einheitliche und übersichtliche Darstellung der Ähnlichkeitsmechanik gibt. Wenn es für den praktischen Ingenieur zunächst auch nicht auf die Herleitung der Beweise dieses Wissenszweiges ankommt, sondern in erster Linie auf das Endergebnis, das ist das für den betreffenden Fall geltende „Modellgesetz“, so wird er sich doch über die Eigenart und über die vorteilhafte Verwendung von Modellversuchen nur dann vollkommene Klarheit verschaffen und die Ähnlichkeitsmechanik richtig anwenden können, wenn er mit den Grundvorstellungen dieses Wissensgebietes völlig vertraut ist.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, diese Grundvorstellungen der Ähnlichkeitsmechanik in einem einheitlichen Bilde und in einer der Auffassung des Ingenieurs und dem technischen Maßsystem angepaßten Form darzubieten, sowie zugleich einen Überblick über den Anwendungsbereich und die Grenzen dieses Zweiges der Mechanik zu entwerfen. Zugleich möchte ich durch diese Untersuchungen erreichen, daß die Mechanik der Modelle, welche gerade dem Schiffbau, in den vielen noch ungelösten hydrodynamischen Fragen so reichlichen Nutzen durch zahlenmäßige Aufklärung bringt, Gemeingut aller derjenigen Männer werde, welche als Ingenieure den deutschen Schiffbau betreuen. Und so habe ich in den folgenden Betrachtungen vor allem Wert darauf gelegt, daß die in der Technik heute oft schematisch angewandten Modellgesetze auf ihre wahre Bedeutung hinsichtlich der Nachahmung mechanischer Bewegungsvorgänge untersucht werden.

2. Verwendungszweck der Ähnlichkeitsmechanik. Bedeutung der Modellgesetze. Um einen Überblick über das Wesen und die Bedeutung der Ähnlichkeitsmechanik zu gewinnen, sollen die grundlegenden Vorstellungen an einem Beispiel erläutert werden: Eine große ebene rechteckige Platte wird in ruhendem Wasser, das nach den Seiten und nach der Tiefe hin praktisch als unendlich ausgedehnt zu betrachten ist, rechtwinklig zu ihrer Ebene mit vorgeschriebener Geschwindigkeit gleichförmig bewegt. Die Platte soll dabei bis zu solcher Tiefe untergetaucht sein, daß ihre Oberkante sich um die Plattenhöhe unter dem Wasserspiegel befindet.

Beim Vorwärtsbewegen der Platte wird sich der ursprünglich ebene

Wasserspiegel verändern. Vorn staut sich ein Wellenberg auf, hinten senkt sich ein Tal ab, an welches sich dann weitere immer niedrigere Wellen anschließen. Auch die Umkehrung des Vorganges wäre zulässig, indem die Platte in lotrechter Stellung fest verankert wäre und das Wasser gegen sie gleichmäßig und ohne Durchwirbelung, also geschichtet, anströme; doch soll dieser zweite Fall der jetzigen Betrachtung nicht zu Grunde gelegt werden. Gefragt ist nach dem Widerstand der Platte, also nach dem Gesamtdruck, den das Wasser auf die Vorder- und Rückseite ausübt.

Die strenge mathematische Behandlung dieses Vorgangs nach den hydrodynamischen Grundsätzen führt auf Differentialgleichungen, deren Integration den Mathematikern bisher nicht gelungen ist. Auch die Bemühungen, die Aufgabe mit Hilfe vereinfachender Voraussetzungen wenigstens näherungsweise auf deduktivem Wege zu lösen, sind insofern gescheitert, als sie Rechnungsergebnisse lieferten, die mit wirklich durchgeführten Messungen keine für praktische Anwendungen genügende Übereinstimmung zeigten. Der natürliche Weg, den Wasserwiderstand großer Platten oder anderer ausgedehnter Körper, z. B. von Schiffen, zu messen, ist wegen deren Größe entweder überhaupt nicht gangbar oder kann nur mit ganz außerordentlichem Aufwand an Versuchsgerät und Meßarbeit durchgeführt werden.

Hier kommt eben die Ähnlichkeitsmechanik zu Hilfe und führt auf Grund eines Versuchs an einem der Kostenersparnis wegen verkleinerten Modell zu einer Lösung der der Analysis unzugänglichen Aufgabe in allen den Fällen, in denen es gelingt, an einer geometrisch ähnlichen, verkleinerten Ausführung die Bewegungsvorgänge „mechanisch ähnlich“ denen der meist großen Hauptausführung nachzuahmen und die Messung an dem Modellvorgang statt an der großen Anordnung vorzunehmen. Der an dem Modell gemessene Wert, wie z. B. der Wasserwiderstand oder die Leistung desselben oder der Druck auf die Flächeneinheit an einer Stelle der Platte, läßt sich alsdann mittels bestimmter Übertragungsmaßstäbe auf die große Ausführung umrechnen.

Grundbedingung für die Anwendbarkeit des Verfahrens ist stets, daß die Bewegungsvorgänge an den beiden geometrisch ähnlichen Ausführungen auch mechanisch ähnlich verlaufen. Diese Forderung führt im Falle ihrer Erfüllung auf eine von der Art der wirkenden Kräfte abhängige Beziehung zwischen den linearen und zeitlichen Größen der beiden Vergleichsvorgänge. Diese Beziehung ist bei Anstellung des Modellversuchs genau einzuhalten und wird das „Modellgesetz“ des betreffenden Falles genannt. Die Aufsuchung der für verschiedene Fälle verschiedenen Modellgesetze, durch welche der zeitliche Verlauf der Modellbewegung in Abhängigkeit von den linearen Abmessungen festgelegt wird, bildet die Hauptaufgabe der Ähnlichkeitsmechanik.

Die Anwendung der Ähnlichkeitsmechanik auf die vollständige zahlenmäßige Lösung einer praktischen Aufgabe erfordert die Ausführung folgender 6 Schritte:

1. Eine auf Grund der Mechanik anzustellende Voruntersuchung zur Prüfung der Frage: Kann die vorgelegte Aufgabe überhaupt nach dem Ähnlichkeitsverfahren behandelt werden?
2. Die Aufsuchung des für den betreffenden Fall einzuhaltenden Modellgesetzes.
3. Durchführung des Modellversuchs unter Beachtung des gefundenen Modellgesetzes.
4. Die Umrechnung des am Modell gemessenen Wertes auf die Hauptausführung unter Benutzung eines besonders zu bestimmenden Übertragungsmaßstabes.
5. Die Anstellung eines Versuches an der großen Ausführung zur unmittelbaren Messung der in Rede stehenden Größe.
6. Der Vergleich der nach dem Modellverfahren und nach der unmittelbaren Messung gefundenen Werte für die große Ausführung und Abschätzung des Genauigkeitsgrads .des Modellverfahrens

In der Regel beschränkt sich die technische Praxis in gewohnheitsmäßiger Übung auf die Ausführung der Schritte 3 und 4. Es ist aber dringend zu fordern, daß sowohl die grundlegende Seite der Aufgabe — soweit sie die Anwendbarkeit der benutzten Ähnlichkeitszusammenhänge betrifft — als auch der sorgfältige Vergleich zwischen dem Ergebnis der Modelluntersuchungen und der Messungen an der großen Ausführung, ein Vergleich, der doch allein über den praktischen Wert des betreffenden Modellverfahrens entscheidet, größere Würdigung findet wie bisher. Denn nur bei scharfer kritischer Durchdringung des Einzelfalls werden Mittel und Wege zur Verbesserung des jeweiligen Verfahrens und zur Vervollkommnung der untersuchten Konstruktionen erschlossen.

Für das herangezogene Beispiel der im Wasser bewegten Platte ergibt die besondere Voruntersuchung, daß der Modellvorgang dem Hauptvorgang mechanisch ähnlich nachgebildet werden kann, und daß die an der

Wellenbildung beteiligte Schwerkraft den maßgebenden Einfluß auf das hier einzuhaltende Modellgesetz ausübt, dem bei vierfacher linearer Verkleinerung des Modells dadurch Rechnung getragen wird, daß die Geschwindigkeit der Modellplatte nur halb so groß wie die der großen Platte bemessen wird. Bei der Durchführung des Modellversuchs möge ein Widerstand der kleinen Platte $w = 28{,}01$ kg gemessen werden. Da der Übertragungsmaßstab für die Kräfte unter Berücksichtigung der verschiedenen Einheitsgewichte der beiden Flüssigkeiten zu 65,6 bestimmt wird, so ergibt die Umrechnung auf die Hauptausführung einen Widerstand von $W = w \,.\, 65{,}6 = 1837{,}5$ kg auf die große Platte.

Wegen weiterer Einzelheiten dieses Beispiels sei auf die Anwendungen im Teil III (Abschnitt 33) hingewiesen. Hier kam es weniger auf das Zahlenmäßige des Falles an als vielmehr auf die Art der Handhabung des Modellverfahrens bei praktischen Anwendungen.

3. Entsprechende Größen. Kinematische Ähnlichkeit. Die Forderung ähnlicher Bewegungsvorgänge für Hauptausführung und Modell ist in dem Beispiel der Wechselwirkung zwischen Platte und Wasser in folgender Weise zu erfüllen: Erstens ist eine geometrisch ähnlich verkleinerte Platte herzustellen, so daß die Abmessungen der großen Ausführung das λ-fache der entsprechenden kleinen Platte sind. Ferner soll bei dem Vorgang im Großen auch die Bahn jedes Einzelteilchens sowohl der Platte als der Flüssigkeit geometrisch ähnlich der Bahn der entsprechenden Teilchen des Modells und zwar ebenfalls λ mal so groß wie diese werden.

Weiter ist dafür zu sorgen, daß ein beliebiger Zeitabschnitt bei der Bewegung eines Teilchens des Hauptvorgangs das τ fache, des zugehörigen Zeitabschnitts der Modellbewegung wird, wobei τ eine in dem betreffenden Fall feste Zahl für alle Teilchen und für alle entsprechenden Zeiten ist.

Durch die so vorgeschriebene Zuordnung sind die Begriffe „entsprechende Längen“ und „entsprechende Zeiten“ festgelegt. Handelt es sich bei Ähnlichkeitsvorgängen nur um die Zuordnung der linearen und der zeitlichen Größen ohne Rücksicht auf die Massen und die bewegenden Kräfte, so spricht man von kinematischer Ähnlichkeit.

Betreffs unseres Beispiels ist ersichtlich, daß mit der Erfüllung der Ähnlichkeit aller linearen und zeitlichen Größen für Modell und Hauptausführung auch die Wellen an der Oberfläche des Wassers und die gesamten inneren Strömungslinien in beiden Arten ähnlich verlaufen müssen.

Weiter sollen bei beiden Ausführungen entsprechende Raumteilchen dadurch einander paarweise zugeordnet werden, daß der Raum der Hauptausführung und des Modells je durch drei Scharen beliebiger Flächen geometrisch ähnlich in unendlich kleine Teile zerlegt wird.

4. Abhängigkeit des Zeitmaßstabes vom Längenmaßstab bei dynamischen Modellvorgängen. Als notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung dafür, daß zwei Vorgänge mechanisch ähnlich verlaufen, gilt das Bestehen kinematischer Ähnlichkeit zwischen den beiden Vorgängen: es wird also gefordert, daß jeder linearen Abmessung des Modellvorgangs eine λ mal so große lineare Abmessung des Hauptvorgangs und jedem Zeitabschnitt des Modellvorgangs ein τ mal so großer Zeitabschnitt des Hauptvorgangs entsprechen muß. λ und τ, welche für alle entsprechenden Längen und Zeiten der beiden mechanisch ähnlichen Vorgänge unveränderliche Zahlen sind, sollen kurz als „Längenmaßstab" und „Zeitmaßstab" bezeichnet werden.

Im allgemeinen wird erklärlicherweise der Längenmaßstab größer als 1 und zwar beliebig frei z. B. $\lambda = 4$ gewählt. Dann darf über den Zeitmaßstab τ nicht mehr frei verfügt werden, da andernfalls die Vorgänge nicht mechanisch ähnlich verlaufen würden. Z. B. würden im Fall der Vorwärtsbewegung der Modellplatte bei einem beliebig angenommenen τ — oder gleichbedeutend damit bei beliebig gewählter Fortschrittsgeschwindigkeit der Platte — die Wellen an der Oberfläche und die gesamte innere Strömung nicht ähnlich der großen Ausführung nachgeahmt. Der Zeitmaßstab τ ist, wie aus den späteren Untersuchungen hervorgeht, bei dynamischen Vorgängen abhängig von λ und von den Eigenschaften der beschleunigten Stoffe, das sind in unserm Beispiel die beiden beschleunigten Flüssigkeiten. Der Zahlenwert von τ wird durch das jeweils geltende, noch zu bestimmende „Modellgesetz" festgelegt. Je nach der Art der wirkenden Kräfte wird τ größer oder kleiner als 1 ausfallen. Ist in dem gewählten Beispiel der Längenmaßstab $\lambda = 4$, so finden wir später aus dem in diesem Fall geltenden Modellgesetz, daß zur Erfüllung mechanischer Ähnlichkeit $\tau = 2$ als Zeitmaßstab eingehalten werden muß. Wenn also bei dem Modellvorgang unseres Beispiels alle Längen auf das 4fache verkleinert werden, so sind sämtliche Zeiten auf die Hälfte zu kürzen, andernfalls ist ein ähnlicher Strömungsverlauf nicht zu erzielen.

5. Der Begriff „mechanische Ähnlichkeit". Man könnte sich vorstellen, daß die eben genannte Abhängigkeit zwischen den linearen

und den zeitlichen Größen durch zwei kinematische Vorrichtungen, eine große und eine kleine — vielleicht nach Art der in der Physik zur Veranschaulichung benutzten Wellenapparate — verwirklicht werden, so daß jeder einzelne Punkt zwangläufig die vorgeschriebene Bahn durchliefe. Man würde es dann nur mit „kinematischer" Ähnlichkeit zu tun haben.

Wenn dagegen zwei Vorgänge „mechanisch ähnlich" verlaufen sollen, so wird damit gefordert: Die einzelnen Punkte sollen sich nicht unter kinematischem Zwang bewegen, sondern alle Massenteilchen sollen ihre Bewegungen frei unter der Wirkung der natürlichen Kräfte ausführen.

Die beiden ähnlichen Bewegungen der Hauptausführung und des Modells sollen also in allen Teilen selbsttätig nach dem dynamischen Grundgesetz: „Beschleunigungskraft ist gleich Masse mal Beschleunigung" vor sich gehen, und es sind daher zwei entsprechende Beschleunigungskräfte der Hauptausführung und des Modells nicht nur verhältnisgleich den entsprechenden Beschleunigungen der beiden Massenteilchen, also durch Längen- und Zeitgrößen bestimmt, sondern auch verhältnisgleich den Massen und damit den Dichten der beschleunigten Massen. So fallen z. B. alle Kräfte in dem oben behandelten Fall einer in der Flüssigkeit bewegten Platte um so kleiner aus, je kleiner die Dichte der zu beschleunigenden Flüssigkeit ist.

Aus diesen Betrachtungen ist ersichtlich, daß sowohl die physikalische Art der die Beschleunigung hervorrufenden Kräfte wie auch die Eigenschaften der beschleunigten Massen einen bestimmenden Einfluß auf die Ähnlichkeitsbeziehungen der beiden Vorgänge haben.

Da die dynamische Grundgleichung die beiden mechanisch ähnlichen Bewegungen beherrscht, so müßten die Vorgänge treffender „dynamisch ähnlich" genannt werden. Jedoch soll die einmal eingebürgerte Bezeichnung „mechanisch ähnlich" beibehalten werden.

In dem Beispiel der bewegten Platte wird der Modellvorgang ähnlich nachgeahmt durch Einhalten der richtig bemessenen Fortschrittsgeschwindigkeit der Modellplatte, also dadurch, daß der Modellversuch unter sorgfältiger Einhaltung eines Modellgesetzes durchgeführt wird. Es gibt aber viele Fälle, in welchen der Modellvorgang vollständig selbsttätig verläuft und in welchen sich das Modellgesetz ohne äußeres Zutun allein durch das Wirken der Kräfte vollzieht. Als Beispiel sei das physische Pendel genannt: hier wird ein Modell nach Ablenkung aus der Gleichgewichtslage selbsttätig seine

Bewegungen mechanisch ähnlich denen der großen Pendelanordnung ausführen (vgl. Abschnitt 34).

6. Geschichtliche Entwicklung der Ähnlichkeitsmechanik. Schon Aristoteles*) hat Untersuchungen über das statische Verhalten geometrisch ähnlicher Holzstäbe gegen Biegung angestellt. Galilei**) beschäftigte sich mit Betrachtungen statischer Art über Ähnlichkeit von Maschinen und fand, daß der Festigkeitswiderstand eines Konstruktionsgliedes nicht im Verhältnis seiner linearen Abmessungen wächst.

Jedoch erst Isaac Newton***) hat in seinen 1687 veröffentlichten „Principien" den Begriff der „mechanischen Ähnlichkeit" klar ausgesprochen, indem er die Frage aufwirft, unter welchen Bedingungen verlaufen zwei geometrisch ähnliche Vorgänge auch mechanisch ähnlich? Er fordert für zwei mechanisch ähnliche Vorgänge, daß die Längen, Zeiten, Kräfte und Massen je ein unveränderliches Verhältnis zu den entsprechenden Elementen des andern Vorgangs haben und stellt die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Bestehen mechanischer Ähnlichkeit, sowie ferner ein allgemeines Ähnlichkeitsgesetz für alle dynamischen Fälle auf. Dieses letztere verwertet er mit Vorteil bei der Behandlung von Aufgaben über die Bewegung von Körpern in widerstehenden Mitteln. Von Newton stammt jedoch nicht das häufig mit seinem Namen belegte Gesetz der entsprechenden Geschwindigkeiten, welches z. B. bei Modellversuchen zur Ermittlung des Schiffswiderstandes angewandt wird. Auch hat er die für die praktischen Anwendungen entscheidende Frage, ob und unter welchen Umständen das von ihm aufgestellte allgemeine Ähnlichkeitsgesetz verwirklicht werden kann, nicht aufgeworfen.

Cauchy hat 1829 in einer der Pariser Akademie der Wissenschaften vorgelegten Abhandlung eine Verallgemeinerung eines von Savart†) experimentell gefundenen Satzes über die Schwingungen ähnlicher elastischer Gefäße gegeben††): Er beweist dort, daß die Differentialgleichungen der Bewegung eines großen elastischen Körpers in vollkommene Übereinstimmung mit denen eines geometrisch ähnlichen Modells gebracht werden können und zeigt ferner, daß — als Folge des Wirkens elastischer Kräfte — die

*) Aristoteles, Mechanica problemata.

**) Galilei, Discorsi 1638. deutsch Ostwalds Klassiker Heft 11 S. 106—109.

***) Newton, Principia 1687, liber II sectio VII propositio 32.

†) Savart, Annales de Chimie, Paris. 1825, Bd. 29.

††) Cauchys Beweisgang ist in der Dynamik von Routh, deutsch von Schepp, Leipzig. 1898, Bd. 1, S. 331, im Auszug wiedergegeben.

Schwingungszeiten verhältnisgleich mit den linearen Abmessungen der Ausführung wachsen müssen.

Bertrand*) hat dann im Jahre 1847 in Anlehnung an die Cauchysche Beweisführung die Gesetze der mechanischen Ähnlichkeit in voller Strenge ausgesprochen und das Newtonsche allgemeine Ähnlichkeitsgesetz in die Form einer Bedingungsgleichung gekleidet, der die vier Vergleichsmaßstäbe der Längen, Zeiten, Kräfte und Massen genügen müssen. Weiter hat er die Wichtigkeit der Ähnlichkeitsbeziehungen für praktische Zwecke betont und in den Anwendungen einige besondere Modellgesetze entwickelt. So ist unter seinen Beispielen auch eins, in welchem die Schwerkraft die Bewegungsvorgänge beeinflußt, und er findet als Modellgesetz dieses Falles, daß entsprechende Zeiten des Haupt- und des Modellvorgangs in geradem Verhältnis der Wurzeln aus entsprechenden Längen und in umgekehrtem Verhältnis der Wurzeln aus den beiden Erdbeschleunigungen stehen müssen. Der ganzen Herleitung nach haben wir in diesen 1847 veröffentlichten Erkenntnissen den Keim des beim Wirken der Schwere gültigen „Modellgesetzes der entsprechenden Geschwindigkeiten" zu erblicken.

In der Technik hat William Froude**) 1869 der Ähnlichkeitsmechanik Heimatrecht verschafft, indem er der englischen Admiralität vorschlug, den Schiffswiderstand nach einem Verfahren zu bestimmen, bei welchem ein Schiffsmodell mit solcher Geschwindigkeit geschleppt wird, daß die von ihm erzeugten Wellen — an Bug und Heck und an den Seitenwänden — denen des großen Schiffes mechanisch ähnlich werden und so die Beziehungen mechanischer Ähnlichkeit für die beiden Vorgänge Geltung erhalten. Dieses von Froude benutzte Modellgesetz ist nur anwendbar in dem Fall, daß allein die Schwerkraft auf die Beschleunigungsvorgänge bestimmend einwirkt.

Weiter hat H. v. Helmholtz***) die Ähnlichkeitsmechanik in mehreren fruchtbringenden Untersuchungen gefördert.

---

*) Bertrand, Comptes Rendus (25) 1847, S. 163 und Journal de l'école polyt. 1848, cahier 32 S. 189.

**) William Froude, Transactions of the Inst. of Nav. Arch. XI, 1870, S. 80—93, und Report of the British Association 1872, sowie Verh. d. Vereins z. Bef. d. Gewerbfleißes. 1876, S. 333.

***) Helmholtz, Über ein Theorem, geometrisch ähnliche Bewegungen flüssiger Körper betreffend, nebst Anwendung auf das Problem, Luftballons zu lenken, Monatsberichte der Akad. d. Wiss., Berlin 1873 S. 501 und Zur Theorie von Wind und Wellen, Sitzungsberichte der Akad. d. Wiss. Berlin 1889 Bd. 2 S. 761, ferner Verh. d. phys. Ges. Berlin 1889 S. 61.

Für Bewegungsvorgänge in Flüssigkeiten, bei denen die Zähigkeit maßgebenden Einfluß besitzt, hat O. Reynolds*) dem in solchen Fällen geltenden Modellgesetz eine besonders geschickte Form gegeben.**)

7. **Die Bertrandsche Bedingungsgleichung zwischen den vier Ähnlichkeitsmaßstäben der dynamischen Grundgleichung.** Bertrand erkannte, daß im Falle mechanischer Ähnlichkeit die dynamischen Grundgleichungen der Bewegung für zwei entsprechende Vorgänge zu vollkommener Übereinstimmung zu bringen sind. Zur Durchführung dieses Vergleichs benutzte er den Satz von den virtuellen Arbeiten in der Gestalt der Lagrangeschen Grundgleichung. Wir wählen einen anderen, dem Ingenieur geläufigeren Weg und gehen von den gewöhnlichen Differentialgleichungen der Bewegung aus. Sie mögen für eine beliebig gewählte Richtung die Form haben:

Für die Hauptausführung . . . . $M \frac{d^2 X}{d T^2} = K$ . . . . (1)

Für das Modell . . . . $m \frac{d^2 x}{d t^2} = k$, ... (2)

wobei die großen und weiter unten auch die eingeklammerten Formelzeichen stets für den Hauptvorgang, die kleinen für den Modellvorgang gelten sollen. Es bedeuten in den beiden mechanisch ähnlichen Vorgängen:

X	und	x	entsprechende	Längen oder Koordinaten,
T	„	t	„	Zeiten,
K	„	k	„	Kräfte,
M	„	m	„	Massenteilchen.

Es bezeichne ferner:

λ den Längenmaßstab, also das Verhältnis $\frac{X}{x}$

τ den Zeitmaßstab, also das Verhältnis . . $\frac{T}{t}$

$\varkappa$ den Kräftemaßstab, also das Verhältnis . $\frac{K}{k}$

μ den Massenmaßstab, also das Verhältnis $\frac{M}{m}$,

*) Reynolds, Phil. Transactions of the Royal Soc. of London Bd. 174, 1883 S. 935 u. 973.

**) Weitere geschichtliche Quellen, vor allem der Gegenwart, sind bei der späteren ausführlichen Behandlung des Gegenstandes in Teil II und III zu finden.

für letzteres kann geschrieben werden:

$$\frac{M}{m} = \frac{(\varrho)\,\mathrm{Vol}}{\varrho\,\mathrm{vol}} = \frac{\frac{(\gamma)}{(g)}\,\mathrm{Vol}}{\frac{\gamma}{g}\,\mathrm{vol}},$$

worin $(\varrho) = \frac{(\gamma)}{(g)}$ und $\varrho = \frac{\gamma}{g}$ die Dichten der beiden bewegten Stoffe, Vol und vol entsprechende Rauminhalte sind.

Es bestehen also die Gleichungen:

$$X = x\,\lambda \qquad T = t\,\tau \qquad K = k\,\varkappa \qquad M = m\,\mu \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Im Abschnitt 13 wird gezeigt, daß für zwei entsprechende Geschwindigkeiten der Hauptausführung und des Modells $V_x = \frac{d\,X}{d\,T}$ und $v_x = \frac{d\,x}{d\,t}$ die Ähnlichkeitsbeziehung $V_x = v_x \frac{\lambda}{\tau}$ und für zwei entsprechende Beschleunigungen

$$B_x = \frac{d\,V_x}{d\,T} = \frac{d^2\,X}{d\,T^2} \text{ und } b_x = \frac{d\,v_x}{d\,t} = \frac{d^2\,x}{d\,t^2}$$

die Ähnlichkeitsbeziehung $B_x = b_x \frac{\lambda}{\tau^2}$ gilt.

Wird dies in Gl. 1 eingesetzt, so geht sie über in:

$$m\,\mu\,\frac{d^2\,x}{d\,t^2}\,\frac{\lambda}{\tau^2} = k\,\varkappa \quad \ldots\ldots \quad (1\,a)$$

Soll diese den Hauptvorgang beschreibende Differentialgleichung vollkommen übereinstimmen mit der den Modellvorgang betreffenden Gl. 2, so muß die Gleichung

$$\mu\,\frac{\lambda}{\tau^2} = \varkappa, \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

die „B e r t r a n d s c h e B e d i n g u n g s g l e i c h u n g z w i s c h e n d e n v i e r Ä h n l i c h k e i t s m a ß s t ä b e n λ, τ, $\varkappa$, μ“, erfüllt sein. Dies Ergebnis läßt sich so zusammenfassen: Sollen zwei Bewegungsvorgänge mechanisch ähnlich verlaufen, so ist eine notwendige Bedingung, daß die für den ersten Vorgang geltenden Bewegungsgleichungen vollständig mit den für den ähnlichen Vorgang geltenden zur Übereinstimmung gebracht werden können. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn zwischen den vier Ähnlichkeitsmaßstäben λ, τ, $\varkappa$, μ die Bedingungsgleichung 4 — also $\varkappa = \mu\,\frac{\lambda}{\tau^2}$ — besteht.

Aus dieser Gleichung ist weiter zu ersehen, daß erstens der Kräftemaßstab $\varkappa$ abhängt von dem Massenmaßstab μ, also auch von den Eigenschaften der beschleunigten Stoffe, und daß zweitens in jedem Einzelfall bei unveränderlichem λ und ι nur dann μ eine feste Zahl sein kann, wenn $\varkappa$ eine solche ist.

Dabei ist folgendes als wesentlich zu beachten: Die Verwirklichung der Nachahmung eines Hauptvorgangs durch einen Modellvorgang ist, wie weiter unten noch näher erörtert wird, praktisch nur dann erreichbar, wenn der Kräftemaßstab $\varkappa$ für alle Paare entsprechender Kräfte des behandelten Falls denselben unveränderlichen Wert besitzt. Mit der Unveränderlichkeit von $\varkappa$ ist sofort die Unveränderlichkeit von μ verbunden. Da die Masse eines Teilchens gleich dem Produkt aus Dichte und Rauminhalt ist, so folgt aus dem unveränderlichen Verhältnis der Massen auch ein unveränderliches Verhältnis der Dichten (ϱ) und ϱ aller entsprechenden Massenteilchen.

8. Erfüllung der Anfangs- und Grenzbedingungen. Soll die Integration der Differentialgleichungen der Bewegung auf mechanisch ähnliche endliche Bewegungsvorgänge führen, so müssen in beiden Ausführungen schon anfangs die Koordinaten entsprechender Teilchen einander geometrisch ähnlich sein, die Dichten entsprechender Teilchen in einem festen Verhältnis stehen und die entsprechenden Massen sich in parallelen Richtungen und im richtigen Zeitverhältnis ähnlich bewegen. Sind diese Anfangsbedingungen auf Grund fester Maßstäbe λ, τ und μ erfüllt, so werden beide Massengruppen fortfahren, sich ähnlich zu bewegen, wenn sie unter der Wirkung solcher Kräfte stehen, die sich einem einheitlichen Kräftemaßstab $\varkappa$ unterordnen. Dieser muß dann die Bertrandsche Bedingungsgleichung zwischen den vier Ähnlichkeitsmaßstäben $\varkappa = \mu \frac{\lambda}{\tau^2}$ erfüllen.

Besondere Aufmerksamkeit ist ferner darauf zu richten, daß die Ähnlichkeit auch an den äußeren Grenzen der bewegten Körper wirklich gewahrt wird. So muß in dem hier zur Erläuterung herangezogenen Beispiel der in einer Flüssigkeit bewegten Platte bei dem Modellversuch sorgfältig darauf geachtet werden, daß die Modellflüssigkeit nach den Seiten und nach der Tiefe entsprechend den für die große Ausführung gestellten Bedingungen praktisch als unbegrenzt angesehen werden kann, damit die Begrenzungswände auf die Ähnlichkeit der Nachahmung des Strömungsvorgangs keinen merkbar störenden Einfluß ausüben können. Ganz allgemein muß die geometrische Ähnlichkeit für alle Teile der Hauptausführung und des Modells gewahrt sein.

Gegen diese Bedingungen wird in den praktischen Anwendungen recht häufig verstoßen.

9. **Einheitlichkeit des Kräftemaßstabs bei mechanisch ähnlichen Vorgängen.** Der Wert des Kräftemaßstabs $\varkappa = \mu \frac{\lambda}{\tau^2}$ stellt nach den Ausführungen des Abschnitts 7 zugleich

das Verhältnis $\varkappa = \frac{K}{k} = \frac{M \frac{d^2 X}{d T^2}}{m \frac{d^2 x}{d t^2}}$, das ist das Verhältnis der resultierenden Massenbeschleunigungskräfte zweier entsprechender Massenteilchen, dar. Die resultierende Beschleunigungskraft setzt sich im allgemeinen aus verschiedenartigen Kräften zusammen. Für letztere können in Frage kommen: Irdische Schwerkräfte, die allgemeine Schwere, die Flüssigkeitsreibung, elastische Kräfte, Kapillarkräfte, Normal- und Tangentialkräfte starrer Körper, Druckkräfte in Flüssigkeiten, Dämpfungswiderstände und andere mehr. Jede einzelne dieser Kräftearten muß, wenn sie an dem betreffenden Fall überhaupt beteiligt ist, an den Massen der beiden mechanisch ähnlichen Vorgänge derart wirksam sein, daß je einer Einzelkraft des Modells eine $\varkappa$ mal so große Einzelkraft der Hauptausführung entspricht.

Werden für eine bestimmte Richtung, die als x-Richtung bezeichnet wird, die einzelnen Kräftearten des Hauptvorgangs mit K_1, K_2, K_3 usw., die des Modellvorgangs mit k_1, k_2, k_3 usw. bezeichnet, in dem Sinne, daß in den Gln. 1 und 2 für K und k gesetzt werden kann:

$$K = K_1 + K_2 + K_3 + \ldots\ldots$$

$$k = k_1 + k_2 + k_3 + \ldots\ldots,$$

so lauten Gln. 1 und 2 jetzt:

$$M \frac{d^2 X}{d T^2} = K_1 + K_2 + K_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$m \frac{d^2 x}{d t^2} = k_1 + k_2 + k_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Bertrand hat klar erkannt, daß die beiden Vorgänge nur dann mechanisch ähnlich verlaufen können, wenn die entsprechenden Paare K_1, k_1 und K_2, k_2 usw. der verschiedenen Kräftearten, welche an den betreffenden Vorgängen mitwirken, den gleichen Kräftemaßstab $\varkappa$ wie die Beschleunigungskräfte aufweisen. Der Vergleich der letzteren hat auf die Bedingungsgleichung zwischen den vier Ähnlichkeitsmaßstäben $\varkappa = \mu \frac{\lambda}{\tau^2}$ geführt; der

Vergleich der Glieder der rechten Seiten liefert für jede einzelne der an dem Bewegungsvorgang beteiligten Kräftearten eine neue Gleichung für $\varkappa$, entsprechend den Verhältnissen

$$\varkappa = \frac{K_1}{k_1}, \quad \varkappa = \frac{K_2}{k_1} \quad \text{usw.}$$

10. Widersprechende Bedingungen und Grenzen der Anwendbarkeit der Ähnlichkeitsmechanik. Bei der Anwendung der Ähnlichkeitsmechanik auf einen praktischen Fall wird der Längenmaßstab λ beliebig passend gewählt. Außerdem ist μ, das Verhältnis entsprechender Massen durch die Dichten $(\gamma)/(g)$ und γ/g der beiden beschleunigten Stoffe der Hauptausführung und des Modells und durch das Verhältnis entsprechender Rauminhalte, also durch λ^3, gegeben. So sind in der Bertrandschen Bedingungsgleichung der vier Ähnlichkeitsmaßstäbe $\varkappa = \mu \frac{\lambda}{\tau^2}$ nur $\varkappa$ und τ noch Unbekannte.

Sofern zu dieser Gleichung noch eine weitere Beziehung hinzutritt, die $\varkappa$ aus λ und τ zu berechnen gestattet, werden alle vier Maßstäbe λ, τ, $\varkappa$ und μ und damit auch das für den Fall in Frage kommende Modellgesetz bekannt. Eine solche zweite Beziehung ist durch die obige Gleichung $\varkappa = \frac{K_1}{k_1}$ gegeben. Aus dieser Betrachtung ist daher der folgende wichtige Schluß zu ziehen: Die an sich noch unbekannten Werte des Zeitmaßstabs τ und des Kräftemaßstabs $\varkappa$ werden durch zwei unabhängige Beziehungen eindeutig bestimmt, nämlich durch den Vergleich der entsprechenden Massenbeschleunigungskräfte MB und mb, der auf die Bertrandsche Bedingungsgleichung der vier Ähnlichkeitsmaßstäbe führt, und zweitens durch den Vergleich zweier entsprechender Kräfte, die die physikalische Ursache der Massenbeschleunigung sind, wie z. B. die Schwerkraft.

Eine dritte Gleichung $\varkappa = K_2/k_2$, welche einer zweiten beteiligten Kräfteart entspringt, führt bei dieser Aufgabestellung, wie wir später sehen werden, zu Widersprüchen für den Fall, daß sie eine weitere unabhängige Beziehung liefert. Wie die Anwendungen zeigen, stellen sich einem Ausweg aus dem Widerstreit der Beziehungen in der Regel unüberwindliche Schwierigkeiten entgegen. Das Anwendungsgebiet der Ähnlichkeitsmechanik ist demnach beschränkt: Mechanisch ähnliche Vorgänge lassen sich im allgemeinen nur in denjenigen Fällen erzeugen, bei denen entweder nur eine Kräfteart, wie z. B. nur die Schwerkräfte oder nur elastische Kräfte oder nur innere Reibungskräfte usw., maßgebenden Einfluß haben.

oder bei denen es gelingt, verschiedene Kräftearten zu gemeinsamer Wirkung mit sich nicht widersprechenden Beziehungen zu bringen.

11. Sonderstellung der Normal- und Tangentialkräfte starrer Körper, der Druckkräfte unzusammendrückbarer Körper und der reinen Dämpfungswiderstände. Der Begriff „physikalische Kräfte". Die an der Oberfläche und im Innern starrer Körper wirkenden Normalkräfte, ferner die im Innern starrer Körper angreifenden Tangentialkräfte, sowie die im Innern oder an den äußeren Begrenzungswänden auftretenden Normalkräfte unzusammendrückbarer Flüssigkeiten nehmen in der Ähnlichkeitsmechanik eine Sonderstellung unter den Kräften ein. Während die übrigen Kräfte durch physikalische Beiwerte, zum Beispiel die Schwerkraft eines Körpers durch den Beiwert des Einheitsgewichtes oder die Flüssigkeitsreibung durch den Beiwert der Zähigkeit usw., erklärt werden, ist dies bei der eben genannten Gruppe von Kräften nicht möglich. Die letzteren liefern aus diesem Grunde auch keine Beziehungen zwischen $\varkappa$ und den anderen Maßstäben. Hieran ändert natürlich nichts, wenn man sie in der Form schreibt: Kraft gleich Spannung mal zugehörige Fläche, wobei die Spannung als Kraft durch zugehörige Fläche erklärt wird.

Zu dieser Sondergruppe gehören auch die reinen Dämpfungswiderstände, die, sofern sie lediglich eine Folge der Massenbeschleunigung von Flüssigkeitsteilchen sind. in der reinen Form $W = \alpha\ (\varrho)\ F\, V^2$ mit α als Zahlenbeiwert auftreten.

Bei den einzelnen Anwendungen der Ähnlichkeitsmechanik fällt diese Sonderstellung der physikalisch nicht erklärten Kräfte dadurch besonders auf, daß jede der übrigen mit einem physikalischen Beiwert behafteten Kräfte bei der Untersuchung eine besondere Beziehung zwischen $\varkappa$ und den anderen Maßstäben liefert, die zusammen mit der Bertrandschen Bedingungsgleichung zwischen den vier Ähnlichkeitsmaßstäben auf das für den betreffenden Fall giltige Modellgesetz führt. Als physikalisch erklärte Kräfte treten im Teil II bei Aufstellung der Modellgesetze folgende fünf Kräftearten auf: Irdische Schwerkräfte, allgemeine Schwerkräfte. innere Flüssigkeitsreibung, elastische Kräfte und Kapillarkräfte.

Zu diesen durch physikalische Beiwerte erklärten Kräften, die kurz „physikalische Kräfte" heißen sollen, gehören also weder die oben aufgeführten Normal- und Tangentialkräfte, noch die reinen Dämpfungskräfte: Sie begründen kein besonderes Modellgesetz wie die physikalischen Kräfte und können daher auch nicht zu widersprechenden Beziehungen führen. Ihr Kräftemaßstab nimmt von selbst — das heißt auf Grund der natürlichen Beschleunigungsvorgänge — den durch die resultierende Beschleunigungskraft und, wenn eine physikalische Kraft mitwirkt, den zugleich auch durch diese bestimmten Wert $\varkappa$ an.

Sofern Tangentialkräfte durch physikalische Beiwerte wie im Falle gleitender Reibung erklärt werden, sind sie zu den physikalischen Kräften zu zählen. Nur wenn etwa die Reibungskräfte, wie es oft schematisch geschieht, mit den Normalkräften gleichmäßig wachsend — also mit unveränderlichem Beiwert — angenommen werden, gehören sie in die Sondergruppe von Kräften, die kein Modellgesetz begründen.

12. Ausschließliche Verwendung des technischen Maßsystems. Die drei technischen Grundmaßstäbe λ, τ, $\varkappa$ der Ähnlichkeitsmechanik. Während Mathematiker und Physiker bei der Behandlung mechanisch ähnlicher Vorgänge das physikalische Maßsystem mit den Grundeinheiten, Länge, Zeit und Masse bevorzugen, ist es bei technischen Anwendungen geboten, das technische Maßsystem zu benutzen. In den folgenden Untersuchungen werden daher überall das Meter als Längeneinheit, die Sekunde als Zeiteinheit und das Kilogramm als Krafteinheit verwandt. Von diesen drei Grundeinheiten werden alle weiteren Maßeinheiten abgeleitet.

Entsprechend den untereinander nicht vergleichbaren Ausmaßen der technischen Mechanik gibt es in der technischen Ähnlichkeitsmechanik auch nur drei „Grundmaßstäbe", den Längenmaßstab λ, den Zeitmaßstab τ und den Kräftemaßstab $\varkappa$ mit den im Abschnitt 7 festgesetzten Bedeutungen. Bei ähnlichen Vorgängen sind daher entsprechende Längen L, l, entsprechende Zeiten T, t, sowie entsprechende Kräfte K, k durch die Gln. $L = l\lambda$, $T = t\tau$, $K = k\varkappa$ . . . . einander zugeordnet. λ, τ, $\varkappa$ sind für jeden Einzelfall unveränderliche Zahlenwerte.

Der Massenmaßstab μ scheidet bei Wahl dieses Maßsystems als Grundmaßstab aus. Er läßt sich sofort aus λ, τ, $\varkappa$ mittels der Bertrandschen Bedingungsgleichung zwischen den vier Ähnlichkeitsmaßstäben zu $\mu = \varkappa \frac{\tau^2}{\lambda}$ ableiten.

Im physikalischen Maßsystem würden sich die Ähnlichkeitsbeziehungen bei Wahl von λ, τ und μ als Grundmaßstäbe am einfachsten gestalten. Dieser letztere Weg ist von den Physikern nicht immer beschritten worden.

So hat Helmholtz in seiner Abhandlung „Über ein Theorem, geometrisch ähnliche Bewegungen flüssiger Körper betreffend, nebst Anwendung auf das Problem, Luftballons zu lenken"*) andere Grundmaßstäbe, darunter auch den Geschwindigkeitsmaßstab $n = V/v$ seinen Ähnlichkeitsbetrachtungen zugrunde gelegt. Die von ihm entwickelten Ähnlichkeitszusammenhänge haben jedoch dadurch eine wenig übersichtliche Form erhalten.

13. Abgeleitete Übertragungsmaßstäbe. Die Maßstabregel. Mit der Festlegung der Maßstäbe für die Grundgrößen der Längen, Zeiten und Kräfte sind auch die Übertragungsmaßstäbe für die abgeleiteten Größen der Geschwindigkeiten, Flächen, Rauminhalte, Beschleunigungen usw. gegeben.

Es bezeichnen V und v zwei entsprechende Geschwindigkeiten der Hauptausführung und des Modells in m/sk; dann ist $V = \frac{dS}{dT}$ und $v = \frac{ds}{dt}$. Für die entsprechenden Bahnelemente dS und ds gilt $dS = ds\,\lambda$, für die entsprechenden Zeitelemente dT und dt gilt $dT = dt\,\tau$. Mithin ist: $V = \frac{dS}{dT} = \frac{ds}{dt}\frac{\lambda}{\tau} = v\frac{\lambda}{\tau}$ und der Übertragungsmaßstab für entsprechende Geschwindigkeiten wird:

$$\frac{V}{v} = \frac{\lambda}{\tau} \quad \text{(8)}$$

Für Geschwindigkeitskomponenten gilt das Gleiche, also

$$\frac{V_x}{v_x} = \frac{\lambda}{\tau}.$$

Sind daher bei zwei mechanisch ähnlichen Vorgängen die linearen Abmessungen an den Längenmaßstab λ und die zeitlichen Größen an den Zeitmaßstab τ gebunden, so sind die Geschwindigkeiten der Hauptausführung und des Modells mittels des festen Übertragsmaßstabes $\frac{\lambda}{\tau}$ paarweise einander als „entsprechende Geschwindigkeiten" zugeordnet.

Auf Grund gleicher Überlegungen ergibt sich für den Übertragungsmaßstab entsprechender Beschleunigungen B und b, gemessen in m/sk², das in dem betreffenden Ähnlichkeitsfall feste Verhältnis

$$\frac{B}{b} = \frac{\lambda}{\tau^2} \quad \text{(9)}$$

Für Beschleunigungskomponenten gilt das Gleiche, also

$$\frac{B_x}{b_x} = \frac{\lambda}{\tau^2}.$$

*) Helmholtz, Monatsberichte der Kgl. preuß. Ak. d. Wiss. Berlin 1873 S. 501.

Für entsprechende Arbeiten A und a, gemessen in m/kg, wird der feste Übertragungsmaßstab

$$\frac{A}{a} = \lambda \varkappa \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 10)$$

Hieraus ist ersichtlich, daß bei zwei mechanisch ähnlichen Vorgängen je zwei beliebige, einander entsprechende mechanische Größen allgemein derart einander zugeordnet sind, daß für jede Größenart ein besonderer fester Übertragungsmaßstab besteht, der aus den drei Grundmaßstäben λ, τ, $\varkappa$ gebildet werden kann.

Vergleicht man bei den Geschwindigkeiten die Maßeinheit $\frac{m}{sk}$ mit dem Übertragungsmaßstab $\frac{\lambda}{\tau}$, und stellt man ferner der Maßeinheit der Beschleunigung $\frac{m}{sk^2}$ den Übertragungsmaßstab $\frac{\lambda}{\tau^2}$ gegenüber, so erkennt man, daß Maßeinheit und Übertragungsmaßstab je dasselbe Bildungsgesetz zeigen. Dieser Zusammenhang besteht bei mechanisch ähnlichen Vorgängen für alle Größenarten.

In der folgenden Tafel sind in Spalte 1 die wichtigsten mechanischen Größen zusammengestellt worden; Spalte 2 enthält die technischen Maßeinheiten, Spalte 3 die Übertragungsmaßstäbe und Spalte 4 die zugehörigen Ähnlichkeitsbeziehungen. Unbenannte Zahlengrößen wie Winkel, Dehnungen, Schiebungen usw. sind in Hauptausführung und Modell gleich groß. Ihre Maßeinheiten und Übertragungsmaßstäbe sind gleich 1.

Ein Vergleich der Spalten 2 und 3 läßt die Richtigkeit folgender „Maßstabregel" erkennen: Bei mechanisch ähnlichen Vorgängen ist der Übertragungsmaßstab für eine beliebige abgeleitete Größe aus den Grundmaßstäben λ, τ, $\varkappa$ in der gleichen Weise zu bilden, wie die zugehörige Maßeinheit aus den Grundmaßen m, sk, kg.

14. Die erweiterte Maßstabregel. Zwei Vorgänge seien mechanisch ähnlich. L_1, L_2 seien zwei beliebige Längen des Hauptvorgangs, l_1, l_2 die entsprechenden Längen des Modellvorgangs. Dann gilt für den Längenmaßstab:

$$\lambda = \frac{L_1}{l_1} = \frac{L_2}{l_2} = \frac{L_2 + L_1}{l_2 + l_1} = \frac{L_2 - L_1}{l_2 - l_1} = \frac{\Delta L}{\Delta l} = \frac{dL}{dl}.$$

Die gleiche Erweiterung gilt für andere Größenarten. Daraus entspringt der Satz: Entsprechende Summen oder Differenzen oder Differentiale einer

1	Formelzeichen für Hauptausführung	und Modell	2 Technische Maßeinheit	3 Uebertragungsmaßstab	4 Ähnlichkeitsbeziehung
Länge	L	l	m	λ	$L = l\,\lambda$
Zeit	T	t	sk	τ	$T = t\,\tau$
Kraft	K	k	kg	κ	$K = k\,\kappa$
Fläche	F	f	m^2	λ^2	$F = f\,\lambda^2$
Rauminhalt	Vol	vol	m^3	λ^3	$Vol = vol\,\lambda^3$
Geschwindigkeit	V	v	$\frac{m}{sk}$	$\frac{\lambda}{\tau}$	$V = v\,\frac{\lambda}{\tau}$
Beschleunigung	B	b	$\frac{m}{sk^2}$	$\frac{\lambda}{\tau^2}$	$B = b\,\frac{\lambda}{\tau^2}$
Sekundliche Drehzahl	N	n	$\frac{1}{sk}$	$\frac{1}{\tau}$	$N = n\,\frac{1}{\tau}$
Winkelgeschwindigkeit	(ω)	ω	$\frac{1}{sk}$	$\frac{1}{\tau}$	$(\omega) = \omega\,\frac{1}{\tau}$
Winkelbeschleunigung	(ε)	ε	$\frac{1}{sk^2}$	$\frac{1}{\tau^2}$	$(\varepsilon) = \varepsilon\,\frac{1}{\tau^2}$
Masse	M	m	$\frac{kg\,sk^2}{m}$	$\frac{\kappa\tau^2}{\lambda}$	$M = m\,\frac{\kappa\tau^2}{\lambda}$
Drehmoment	$\mathfrak{M}$	$\mathfrak{m}$	m kg	$\lambda\kappa$	$\mathfrak{M} = \mathfrak{m}\,\lambda\kappa$
Arbeit	A	a	m kg	$\lambda\kappa$	$A = a\,\lambda\kappa$
Leistung	E	e	$\frac{m\,kg}{sk}$	$\frac{\lambda\kappa}{\tau}$	$E = e\,\frac{\lambda\kappa}{\tau}$
Druck auf Flächeneinheit	P	p	$\frac{kg}{m^2}$	$\frac{\kappa}{\lambda^2}$	$P = p\,\frac{\kappa}{\lambda^2}$
Dichte $= \frac{\text{Einheitsgewicht}}{\text{Erdbeschleunigung}}$	(ϱ)	ϱ	$\frac{kg\,sk^2}{m^4}$	$\frac{\kappa\tau^2}{\lambda^4}$	$(\varrho) = \varrho\,\frac{\kappa\tau^2}{\lambda^4}$
Einheitsgewicht	(γ)	γ	$\frac{kg}{m^3}$	$\frac{\kappa}{\lambda^3}$	$(\gamma) = \gamma\,\frac{\kappa}{\lambda^3}$
Technischer Zähigkeitsbeiwert	(η)	η	$\frac{kg\,sk}{m^2}$	$\frac{\kappa\tau}{\lambda^2}$	$(\eta) = \eta\,\frac{\kappa\tau}{\lambda^2}$
Zähigkeitsmaß	(ν)	ν	$\frac{m^2}{sk}$	$\frac{\lambda^2}{\tau}$	$(\nu) = \nu\,\frac{\lambda^2}{\tau}$
Elastizitätsmodul	E	e	$\frac{kg}{m^2}$	$\frac{\kappa}{\lambda^2}$	$E = e\,\frac{\kappa}{\lambda^2}$
Schubmodul	G	g	$\frac{kg}{m^2}$	$\frac{\kappa}{\lambda^2}$	$G = g\,\frac{\kappa}{\lambda^2}$
Winkel	(α)	α	1	1	$(\alpha) = \alpha$
Dehnung	(ε)	ε	1	1	$(\varepsilon) = \varepsilon$
Schiebung	(γ)	γ	1	1	$(\gamma) = \gamma$

beliebigen Größenart haben bei mechanisch ähnlichen Vorgängen denselben Übertragungsmaßstab wie die zugehörigen einfachen Größen.

Es seien ferner F und f zwei beliebige einander entsprechende Flächen. Dann ist der zugehörige Übertragungsmaßstab:

$$\lambda^2 = \frac{F}{f} = \frac{L^2}{l^2} = \frac{L_1^2}{l_1^2} = \frac{L_2^2}{l_2^2} = \frac{L_1\, L_2}{l_1\, l_2} = \frac{L_1\,(L_1+L_2)}{l_1\,(l_1+l_2)} = \frac{L_1\,(L_1-L_2)}{l_1\,(l_1-l_2)} \text{ usw.} \quad (11)$$

Ebenso gilt für das Quadrat einer Größe z. B. der Geschwindigkeit:

$$\frac{\lambda^2}{\tau^2} = \frac{V^2}{v^2} = \frac{V_1\,V_2}{v_1\,v_2} = \frac{V_2\,(V_2-V_1)}{v_2\,(v_2-v_1)} \text{ usw.} \quad (12)$$

Weiter kann man den Übertragungsmaßstab z. B. für zwei entsprechende Beschleunigungen B und b in folgender Weise ausdrücken:

$$\frac{\lambda}{\tau^2} = \frac{B}{b} = \frac{\lambda^2}{\tau^2}\,\frac{1}{\lambda} = \frac{V^2\,l}{v^2\,L} = \frac{V^2}{L} : \frac{v^2}{l} \quad (13)$$

Alle diese Umformungen lassen sich in folgende „erweiterte Maßstabregel" zusammenfassen: Bei zwei mechanisch ähnlichen Vorgängen läßt sich der Übertragungsmaßstab zwischen zwei entsprechenden Größen ersetzen durch den Übertragungsmaßstab zweier beliebiger anderer entsprechender Größen, sofern sie gleiche Maßeinheit wie die ersteren haben.

15. **Das allgemeine Ähnlichkeitsgesetz Newtons als Folge der Trägheit der beschleunigten Massen.** In zwei mechanisch ähnlichen Vorgängen, Hauptausführung und Modell, erfahren zwei entsprechende Massenteilchen M und m entsprechende Beschleunigungen B und b. Die zur Überwindung der Trägheit der Massen erforderlichen beiden Beschleunigungskräfte sind M B und m b. Aus ihnen soll der Kräftemaßstab $\varkappa$ abgeleitet werden. Die Dichte von M sei $(\varrho) = \frac{(\gamma)}{(g)}$, die von m $\varrho = \frac{\gamma}{g}$. Das Verhältnis der entsprechenden Rauminhalte von M und m ist Vol/vol $= \lambda^3$. Der Übertragungsmaßstab der zwei entsprechenden Beschleunigungen ist nach der Maßstabregel des Abschnitts 13: $\frac{B}{b} = \frac{\lambda}{\tau^2}$. Aus dem Vergleich der Massenbeschleunigungskräfte ergibt sich als allgemeine Gleichung für den Kräftemaßstab $\varkappa$:

$$\varkappa = \frac{M\,B}{m\,b} = \frac{(\varrho)\,\mathrm{Vol}\,B}{\varrho\,\mathrm{vol}\,b} = \frac{(\varrho)}{\varrho}\,\lambda^3\,\frac{\lambda}{\tau^2},$$

also

$$\varkappa = \frac{(\varrho)}{\varrho}\,\frac{\lambda^4}{\tau^2} \quad (14)$$

oder wenn λ und τ je durch das Verhältnis zweier entsprechender Längen L/l und zweier entsprechender Zeiten T/t der Hauptausführung und des Modells ersetzt werden:

$$\varkappa = \frac{(\varrho)}{\varrho} \frac{L^4}{l^4} \frac{t^2}{T^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (15),$$

Gl. 14 läßt sich unter Heranziehung der erweiterten Maßstabregel des Abschnittes 14 auch in der Form schreiben:

$$\varkappa = \frac{M\,B}{m\,b} = \frac{(\varrho)}{\varrho} \lambda^2 \frac{\lambda^2}{\tau^2} = \frac{(\varrho)}{\varrho} \frac{F}{f} \frac{V^2}{v^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 16)$$

Gl. 15 ist im Hinblick auf das technische Maßsystem am zweckmäßigsten gestaltet, insofern in ihr außer den Dichten der beiden Vergleichsstoffe nur noch Beziehungen zwischen den Grundgrößen der Längen und Zeiten auftreten. Bei den Anwendungen wird jedoch fast nur Gl. 16 benutzt, die sich auf den abgeleiteten Größen der Flächen und Geschwindigkeiten aufbaut. In der Form einer Verhältnisgleichung lautet 16:

$$M\,B : m\,b = (\varrho)\,F\,V^2 : \varrho\,f\,v^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 17)$$

Hieraus folgt, daß, wenn α eine unveränderliche Zahl ist, die Trägheitskräfte auch in der Form geschrieben werden können:

$$\left.\begin{aligned} M\,B &= \alpha\,(\varrho)\,F\,V^2 \\ m\,b &= \alpha\,\varrho\,f\,v^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 18)$$

Die beiden nicht voneinander zu trennenden Gln. 18 bilden das von Newton aufgestellte „allgemeine Ähnlichkeitsgesetz“. Inhaltlich sagen sie dasselbe aus wie die im Abschnitt 7 entwickelte Bertrandsche Bedingungsgleichung 4 zwischen den vier Ähnlichkeitsmaßstäben: $\varkappa = \mu \frac{\lambda}{\tau^2}$; nur die Form ist eine andere.

Die Gln. 18 sind eine unmittelbare Folge der Trägheit; denn sie sind aus der dynamischen Grundgleichung „Kraft gleich Masse mal Beschleunigung“ lediglich auf Grund der Bedingung, daß Haupt- und Modellvorgang zueinander mechanisch ähnlich verlaufen sollen, *ohne Zuhilfenahme irgend welcher besonderen Voraussetzungen oder Annahmen* abgeleitet worden. *Sie gelten stets in voller Strenge für alle dynamischen Vorgänge vollkommener mechanischer Ähnlichkeit.* In Worte gekleidet lautet das, lediglich eine Folgerung aus der Wirkung der Massenträgheit darstellende, „*allgemeine Ähnlichkeitsgesetz Newtons*“: Bei zwei mechanisch ähnlichen Vorgängen, für welche (ϱ), ϱ die entsprechenden Dichten, F, f zwei entsprechende Flächen, V, v zwei entsprechende Geschwindigkeiten sind und α eine feste Zahl ist, können je zwei entsprechende Trägheitskräfte in der Form: $MB = \alpha(\varrho) F V^2$ und $mb = \alpha\varrho f v^2$ geschrieben werden. Wenn daher die Trägheitskraft m b des Modells bekannt ist, so ist die entsprechende des Hauptvorgangs zu berechnen aus:

$$\frac{MB}{mb} = \frac{(\varrho) F V^2}{\varrho f v^2} \qquad (19)$$

Diese Gesetzmäßigkeit gilt, wie sogleich bewiesen wird, sinngemäß auch für je zwei entsprechende Einzelkräfte einer beliebigen anderen an den mechanisch ähnlichen Bewegungsvorgängen beteiligten Kräfteart, wobei zu beachten ist, daß die Zahl α nur für ein einzelnes Paar entsprechender Kräfte gleich ist, für ein anderes aber immer einen anderen Wert hat.

Auch Gl. 14, welche später oft benutzt wird, stellt wie die Gln. 18 das Newtonsche allgemeine Ähnlichkeitsgesetz dar, aber in Form einer Bedingungsgleichung zwischen den drei technischen Grundmaßstäben λ, τ, $\varkappa$. Mit $\mu = \frac{(\varrho)}{\varrho}\lambda^3$ geht 14 in die Bertrandsche Bedingungsgleichung zwischen den vier Ähnlichkeitsmaßstäben über, welche sich also als eine dritte Form des allgemeinen Ähnlichkeitsgesetzes erweist.

16. G ü l t i g k e i t d e s a l l g e m e i n e n Ä h n l i c h k e i t s g e s e t z e s f ü r a l l e e n t s p r e c h e n d e n K r ä f t e a n M a s s e n t e i l c h e n. Zwei mechanisch ähnliche Vorgänge mögen unter der Wirkung einer bestimmten Kräfteart z. B. der Schwere stehen, deren an entsprechenden Massenteilchen M und m angreifende Kräfte K_1 und k_1 sein. Ihr Übertragungsmaßstab ist $\varkappa = \frac{K_1}{k_1}$. Nach den Ausführungen der Abschnitte 9 und 10 besteht wegen der Einhaltung des Kräftemaßstabes das gleiche $\varkappa$ auch für die Trägheitskräfte M B und m b, das heißt, es gilt unter Benutzung des soeben abgeleiteten allgemeinen Ähnlichkeitsgesetzes die Gl.

$$\varkappa = \frac{K_1}{k_1} = \frac{MB}{mb} = \frac{(\varrho) F V^2}{\varrho f v^2}$$

und daher für K_1 und k_1 auch die Gln. 18, also:

$$\left| \begin{array}{l} K_1 = \alpha(\varrho) F V^2 \\ k_1 = \alpha\varrho f v^2 \end{array} \right\} \qquad (20)$$

Da an die Stelle der Schwere jede andere Art von Kräften treten kann, so ist aus Gln. 20 die Folgerung zu ziehen: B e i B e s t e h e n m e c h a n i s c h e r Ä h n l i c h k e i t e n g i l t d a s a l l g e m e i n e Ä h n lichkeitsgesetz nicht nur für entsprechende Beschleunigungskräfte, sondern auch für jedes Paar entsprechender Einzelkräfte einer anderen an der Bewegung von M und m beteiligten Kräfteart, also z. B. für Schwerkräfte, innere Reibungskräfte zäher Flüssigkeiten, elastische Kräfte, Normalkräfte usw.

17. Gültigkeit des allgemeinen Ähnlichkeitsgesetzes für Gesamtwiderstände und andere Mittelkräfte. Bei zwei mechanisch ähnlichen Vorgängen möge je eine entsprechende Gruppe einander zugeordneter Kräfte zu je einer Mittelkraft im Sinne der Statik vereinigt werden. In dem Falle der in einer Flüssigkeit vorwärts bewegten Platte seien z. B. alle wagerechten, auf die Platte hinten und vorn wirkenden Kräfte zu einem Gesamtwiderstande W an der Hauptausführung und w am Modell zusammengefaßt. Die einzelnen Teilkräfte von W und w sind nach dem Wechselwirkungssatz von gleicher Größe wie die entgegengesetzt gerichteten wagerechten Druckkräfte D_1, D_2, D_3 ..... und d_1, d_2, d_3 ....., welche auf die mit der Platte in Berührung tretenden Massenteilchen der Flüssigkeit wirken, so daß man schreiben kann:

$$W = D_1 + D_2 + D_3 + \ldots\ldots$$

und

$$w = d_1 + d_2 + d_3 + \ldots\ldots$$

Unter Heranziehung des allgemeinen Ähnlichkeitsgesetzes der Abschnitte 15 und 16 können W und w geschrieben werden in der Form:

$$W = \alpha_1 (\varrho) F V^2 + \alpha_2 (\varrho) F V^2 + \alpha_3 (\varrho) F V^2 + \ldots = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots) (\varrho) F V^2$$
$$w = \alpha_1 \varrho f v^2 + \alpha_2 \varrho f v^2 + \alpha_3 \varrho f v^2 + \ldots = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots) \varrho f v^2$$

oder

$$\left.\begin{aligned} W &= \alpha (\varrho) F V^2 \\ w &= \alpha \varrho f v^2 \end{aligned}\right\} ; \quad \ldots \ldots \quad (21)$$

hierin bedeuten (ϱ), ϱ die entsprechenden Dichten, F, f zwei beliebig entsprechende Flächen und V, v zwei beliebig entsprechende Geschwindigkeiten. Die Gln. 21 sind von derselben Bauart wie die Gln. 18. Sie lassen sich auf jede Art entsprechender Mittelkräfte anwenden, so daß allgemein der Satz ausgesprochen werden kann: Im Fall mechanischer Ähnlichkeit gilt für alle paarweise einander zugeordneten Mittelkräfte, die sich auf entsprechende Körper oder entsprechend abgegrenzte Körperteile beziehen ebenfalls das allgemeine Ähnlichkeitsgesetz, wie es in den Abschnitten 15 und 16 für die an entsprechenden Massenteilchen wirkenden Kräfte bewiesen worden ist.

Die Richtigkeit der Gln. 21 ist nicht daran gebunden, daß jeder der Körper unveränderliche Dichte hat. Die Dichte kann von Punkt zu Punkt andere Werte annehmen; doch muß der Massenmaßstab μ des Abschnittes 7 eine feste Zahl sein.

18. Andere Formen des allgemeinen Ähnlichkeitsgesetzes. In den vorhergehenden Abschnitten ist unter Voraussetzung mechanisch ähnlicher Vorgänge die Gültigkeit des allgemeinen Ähnlichkeitsgesetzes für alle Arten von Kräften bewiesen worden, so daß für zwei beliebige Einzel- oder Mittelkräfte der Hauptausführung und des Modells stets die beiden Gln. bestehen:

$$\left.\begin{aligned} K &= \alpha\,(\varrho)\,F\,V^2 \\ k &= \alpha\,\varrho\,f\,v^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (22)$$

Unter Benutzung der erweiterten Maßstabregel des Abschnitts 14 können die Gln. 22 übergeführt werden in:

$$\left.\begin{aligned} K &= \alpha'\,(\varrho)\,F\,V_1\,V_2 \\ k &= \alpha'\,\varrho\,f\,v_1\,v_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (23)$$

oder in

$$\left.\begin{aligned} K &= \alpha''\,(\varrho)\,F\,V_2\,(V_2 - V_1) \\ k &= \alpha''\,\varrho\,f\,v_2\,(v_2 - v_1) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (24)$$

oder in

$$\left.\begin{aligned} K &= \alpha'''\,(\varrho)\,L^3\,\frac{V^2}{L} \\ k &= \alpha'''\,\varrho\,l^3\,\frac{v^2}{l} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (25)$$

oder in

$$\left.\begin{aligned} K &= \alpha''''\,(\varrho)\,L^3\,B \\ k &= \alpha''''\,\varrho\,l^3\,b \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (26)$$

oder in noch andere Formen. Es kommt nur darauf an, daß das Verhältnis $K/k = \varkappa$ auf den durch die Gl. 14 gegebenen Wert $\varkappa = \frac{(\varrho)}{\varrho}\,\frac{\lambda^4}{\tau^2}$ führt; diese Forderung ist aber im Hinblick auf die Maßstabregel des Abschnitts 13 bei sämtlichen vorstehenden Formen erfüllt. In den obigen Gleichungen bedeuten L und l, V_1 und v_1 oder V_2 und v_2 und B und b der Reihe nach je zwei beliebige einander entsprechende Längen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Hauptausführung und des Modells.

19. Das natürliche Verfahren zur Aufsuchung des jeweils gültigen Modellgesetzes. Der Weg zur Auffindung des für eine vorgelegte Ähnlichkeitsaufgabe geltenden Modellgesetzes ist bereits in allgemeinen Zügen angedeutet worden. Es erscheint angebracht, hier an dieser Stelle das allgemeine Verfahren nach Festlegung der wichtigsten Grundbegriffe noch einmal kurz im Zusammenhang zu erörtern.

Zunächst ist vor Anstellung des im Abschnitt 2 erläuterten Modellversuchs mit großer Sorgfalt zu prüfen, ob die vorgelegte Aufgabe überhaupt nach dem Ähnlichkeitsverfahren behandelt werden kann und weiter, ob sie sich streng oder nur näherungsweise fügt. Zur Beantwortung dieser äußerst wichtigen Frage ist festzustellen, ob eine oder mehrere Kräftearten auf den vorgelegten, nach den Lehren der Ähnlichkeitsmechanik zu behandelnden Fall maßgebenden Einfluß ausüben. Sind mehrere Arten physikalischer Kräfte im Sinne des Abschnitts 11 beteiligt, so liegt nicht der einfache Fall vor, und für die Prüfung auf Ähnlichkeit kommen die Darlegungen des Abschnitts 31 — je nach Art des Einzelfalles mit mehr oder weniger Erfolg — zur Verwendung. Stehen dagegen die Bewegungen der Hauptausführung und des Modells nur unter der Wirkung einer einzigen Art physikalischer Kräfte, so kann der Modellvorgang dem Hauptvorgang mechanisch ähnlich nachgebildet werden und es ist nun zweitens das für den Fall maßgebende Modellgesetz aufzusuchen. Dies ist im Teil II durchgeführt worden für folgende fünf Arten physikalischer Kräfte: Irdische Schwerkräfte, allgemeine Schwerkräfte, innere Flüssigkeitsreibung, elastische Kräfte und Kapillarkräfte.

Es sei hier daran erinnert, daß die im Abschnitt 11 wegen ihrer Sonderstellung aufgeführten Kräfte keine physikalischen Kräfte sind und daß sie daher, ohne einen Einfluß auf die Ermittlung des Modellgesetzes auszuüben, an den Bewegungsvorgängen stets mitbeteiligt sein dürfen. Der besondere Fall, daß diese letzteren Kräfte allein beschleunigt auftreten, wird im Abschnitt 32 behandelt.

Das zur Erzielung mechanischer Ähnlichkeit einzuhaltende Modellgesetz kann aus verschiedenen Ansätzen gewonnen werden. In der technischen Mechanik ist es am natürlichsten, in jedem Einzelfalle von den Differentialgleichungen der Bewegung für den Haupt- und Modellvorgang auszugehen und die einzelnen — Kräfte darstellenden — Glieder derselben zu vergleichen. Man erhält so zunächst aus den Trägheits- oder Massenbeschleunigungsgliedern das in Gleichung 14 aufgestellte allgemeine Ähnlichkeitsgesetz Newtons in Form einer Bedingungsgleichung zwischen den Grundmaßstäben λ, τ, $\varkappa$:

$$\varkappa = \frac{\mathrm{Mb}}{\mathrm{m\,b}} = \frac{(\varrho)}{\varrho}\,\lambda^3\,\frac{\lambda}{\tau^2} = \frac{(\varrho)}{\varrho}\,\frac{\lambda^4}{\tau^2} = \mathrm{f}_1(\lambda, \tau) \quad \ldots\ldots \quad 27\,\mathrm{a})$$

und ferner eine zweite Gleichung:

$$\varkappa = \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{k}},$$

in welcher K und k sich je nach Art der wirkenden physikalischen Kraft durch einen physikalischen Beiwert, sowie durch mechanische Größen, wie Länge, Zeiten, Geschwindigkeiten usw. ausdrücken lassen, wodurch schließlich eine zweite Bedingungsgleichung in der Form

$$\varkappa = \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{k}} = \mathrm{f}_2(\lambda, \tau) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27\,\mathrm{b})$$

entsteht. Aus Gln. 27 a und 27 b geht dann durch Ausschaltung von $\varkappa$ das gesuchte Modellgesetz in der Grundform

$$\tau = \mathrm{F}(\lambda), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

hervor, welches bei willkürlich gewähltem Längenmaßstab den zur Erreichung mechanischer Ähnlichkeit einzuhaltenden Zeitmaßstab τ zu berechnen gestattet.

Sind so die Grundmaßstäbe λ und τ festgelegt, so ist auch sofort der dritte Grundmaßstab $\varkappa$ aus 27 a oder 27 b zu ermitteln. Ebenso können jetzt, nachdem λ, τ und $\varkappa$ bekannt sind, sämtliche Übertragungsmaßstäbe für die abgeleiteten Größen nach Maßgabe der Spalte 3 in der Zusammenstellung des Abschnitts 13 berechnet werden. Zum Beispiel erhält man als Geschwindigkeitsmaßstab $\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{v}} = \frac{\lambda}{\tau}$, als Beschleunigungsmaßstab $\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{b}} = \frac{\lambda}{\tau^2}$ usw., Beziehungen, welche gestatten, der Grundform $\tau = \mathrm{F}(\lambda)$ des Modellgesetzes verschiedene Gestalten zu geben, ohne dessen eigentlichen Inhalt zu beeinflussen. Nähere Einzelheiten über dieses natürliche Verfahren zur Aufstellung des jeweiligen Modellgesetzes und dessen Umformungen für den praktischen Bedarf sind im Teil II enthalten.

Im folgenden Abschnitt 20 werden noch andere Wege zur Ermittlung des Modellgesetzes genannt, die manchmal schneller zum Ziele führen können als die oben geschilderten. Dennoch erscheint das hier erörterte Verfahren insofern als das zweckmäßigste, als es den Untersuchenden zwingt, sich über die natürlichen Ursachen der beiden ähnlichen Bewegungsvorgänge, das sind die Kräfte, volle Rechenschaft abzulegen. Es ist aber nicht nötig, die Differentialgleichungen der Bewegung voll hinzuschreiben; denn es kommt nur auf die allgemeine Bauart der einzelnen Glieder dieser Gleichungen an. Ist man in einzelnen Fällen angewiesen, von den Momentengleichungen statt von den Kräftegleichungen auszugehen, so ist zu beachten, daß der Vergleich der entsprechenden Glieder nicht auf $\varkappa$ sondern auf das Verhältnis zweier Momente, also auf $\lambda\,\varkappa$, führt.

20. Andere Wege zur Aufsuchung der Modellgesetze. Es leuchtet ohne weiteres ein, daß die im Abschnitt 7 ausgesprochene notwendige Bedingung der vollständigen Übereinstimmung der Differentialgleichungen der Bewegung für zwei mechanisch ähnlich zu gestaltende Vorgänge auch für alle analytischen Folgerungen gelten muß, die aus den Differentialgleichungen der Bewegung gezogen werden, gleichgültig ob die Form der neuen Beziehungen eine endliche oder differentielle ist. Zieht man zum Vergleich, z. B. bei einer Strömungsaufgabe, eine Energiegleichung über den hydrodynamischen Druck heran, so läßt sie sich — aufgestellt für die Hauptausführung — nach dem Vorbilde des Beweisverfahrens im Abschnitt 7 zur vollen Übereinstimmung mit der für das Modell geltenden Energiegleichung bringen, sofern im übrigen die Bedingungen für den mechanisch ähnlichen Verlauf der beiden Vorgänge erfüllt sind. Durch den Vergleich der entsprechenden Glieder entstehen dann aus den beiden Energiegleichungen genau dasselbe Modellgesetz und dieselben anderen Ähnlichkeitsbeziehungen wie aus den Differentialgleichungen der Bewegung. Einzelheiten der Durchführung sind bei Besprechung des durch die Schwerkraft bedingten Ähnlichkeitsfalles zu finden.

In diesem Sinne kann die Herleitung des jeweils geltenden Modellgesetzes auch aus dem Prinzip der virtuellen Arbeiten oder aus dem einfachen Arbeitssatz oder aus dem Antriebssatz erfolgen; es kann hierzu ein erstes Integral der Differentialgleichungen der Bewegungen $v = f'(t)$ oder ein zweites Integral $x = f(t)$ usw. herangezogen werden. Alle Ansätze führen auf das für den vorgelegten Fall zu beachtende Modellgesetz $\varepsilon = F(\lambda)$ oder deren gleichwertige Nebenformen.

Wie die späteren Untersuchungen des Teils II zeigen, kommen in dem einzelnen Modellgesetz, sofern es noch allgemein für die betreffende Kräfteart gilt, zwei Eigenschaften der beiden sich ähnlich bewegenden Massengruppen zum Ausdruck: erstens die durch die Massenbeschleunigungskraft in die Untersuchung eingehende Dichte der beiden Körper und als zweite Eigenschaft diejenige, welche durch den besonderen „physikalischer Beiwert“ der für das Modellgesetz maßgebenden Kraft erklärt wird. Mit Rücksicht hierauf wird man die Richtigkeit folgenden abgekürzten Verfahrens für alle physikalischen Kräfte mit Ausnahme der allgemeinen Schwere bestätigt finden: Die Anwendung der Maßstabregel des Abschnitts 13 auf das Verhältnis*) „physikalischer Beiwert : Dichte“ führt unter der allgemeinen Annahme, daß beide Größen je für Hauptausführung und Modell verschieden sind, sofort auf die gesuchte Modellregel $\tau = F(\lambda)$ Auch dieser von Bader**) empfohlene abgekürzte Ansatz wird später bei Behandlung der Einzelfälle Berücksichtigung finden. In der Tat kommt es bei Aufsuchung des Modellgesetzes lediglich darauf an, die drei Grundmaßstäbe λ, τ und $\varkappa$ festzulegen. Spielen nun wie in den einfachen Fällen der Ähnlichkeitsmechanik in die Vorgänge nur zwei Eigenschaften der beteiligten Stoffe, ausgedrückt durch die zwei entsprechenden Beiwerte z. B. Dichte und Einheitsgewicht, hinein, so genügen zwei Gleichungen zur Bestimmung von τ und $\varkappa$, wenn λ willkürlich festgesetzt wird. Sind jedoch drei Eigenschaften zu berücksichtigen, z. B. außer obigen noch die Zähigkeit, so bestimmen drei Gleichungen die Werte von λ, τ, $\varkappa$, ein Fall, der im Abschnitt 31 besonders behandelt wird.

Von diesem Standpunkte aus finden wir auch die in Abschnitt 11 erörterte Sonderstellung gewisser Kräfte wie z. B. der Normalkräfte unzusammendrückbarer Flüssigkeiten bestätigt: Jene Kräfte können nicht durch einen physikalischen Beiwert erklärt werden, der die Aufstellung einer besonderen Gleichung zwischen λ, τ und $\varkappa$ ermöglichte, so daß sie auf die Ähnlichkeitsansätze und die daraus abzuleitenden Beziehungen keinen Einfluß haben. Sie begründen, wie wir schon früher feststellten, kein besonderes Modellgesetz.

21. „Unvollständige“ und „angenäherte“ mechanische Ähnlichkeit. In den bisherigen Betrachtungen wurde mechanische Ähnlichkeit der beiden Vergleichsvorgänge in aller Strenge vorausgesetzt, die Ähnlichkeit sollte in jeder Beziehung vollkommen sein. Es bestanden also für entsprechende Längen, Zeiten und Kräfte je ein fester

*) Im Fall des Wirkens der allgemeinen Schwere kommt das Produkt „physikalischer Beiwert mal Dichte“ in Betracht. Vergleiche die Ausführungen am Schluß des Abschnitts 25.

**) Bader, Einführung in die Dynamik der Flugzeuge mit besonderer Berücksichtigung der mechanischen Ähnlichkeit. Forschungsarbeiten Heft 189 u. 190. Berlin 1916.

Maßstab λ, τ, $\varkappa$; außerdem war das Verhältnis der Dichten entsprechender Massen ebenfalls unveränderlich und der Bertrandschen Bedingungsgleichung 4 als Ausdruck des Newtonschen allgemeinen Ähnlichkeitsgesetzes Genüge geleistet. Man kann aber häufig die Ergebnisse von Modellversuchen mit Vorteil auch dann zur Lösung praktischer Aufgaben benutzen, wenn die Ähnlichkeit nicht in allen Teilen der beiden Vergleichs-Ausführungen und -Vorgänge gewahrt ist. Zur näheren Erläuterung diene folgendes einfache Beispiel: Ein scheibenförmiger Körper sei an dem Ende eines eingespannten Stabes befestigt und führe Verdrehungsschwingungen aus. Von dieser Hauptausführung denke man sich zunächst ein in allen Teilen drei mal so kleines Modell aus demselben Stoff hergestellt. Dessen Schwingungszeit wird dann dreimal so klein ausfallen wie die der großen Ausführung.

Der Zweck des Modellversuchs soll aber hier nur der Vergleich der Bewegungsvorgänge der beiden Scheiben sein; auf die Verdrehungserscheinungen des elastischen Stabes komme es gar nicht an. Dieses Ziel kann auch durch ein geändertes Modell erreicht werden: Man ersetze den elastischen Modellstab durch einen anderen, dessen Länge dreimal so groß wie die der Hauptausführung ist und dessen Querschnittsfläche neunmal so klein wie der des großen Vorbildes ist. Der elastische Stoff sei der gleiche. Auch in diesem veränderten Modell mit unähnlich ausgebildetem elastischen Konstruktionsgliede bewegt sich die Scheibe mechanisch ähnlich zu der der Hauptausführung, indem sowohl ihre Wege wie ihre Zeiten ebenfalls auf ein Drittel verkleinert sind, genau wie bei dem ersten Modell. Die Differentialgleichungen der Bewegung lassen sich auch hier für die beiden Scheiben zur Übereinstimmung bringen.

Solche Vorgänge, bei denen nicht die gesamte Anordnung die Züge mechanischer Ähnlichkeit aufweist, bei denen sich aber ein maßgeblicher Teil der Massen unter der Wirkung von Kräften, die in beiden Ausführungen gleichwertig sind, mechanisch ähnlich bewegt, sollen als „unvollständig mechanisch ähnlich" bezeichnet werden.

Die Abweichungen von vollständiger mechanischer Ähnlichkeit können sehr weit getrieben werden, ohne daß die mathematische Übereinstimmung in der Form der Bewegungsgleichungen verloren geht. Schließlich kann man auch noch die mechanische oder physikalische Gleichartigkeit der beiden Vorgänge aufgeben und langt dann bei rein „mathematischer Ähnlichkeit" an, bei der zwei Erscheinungen ganz verschiedener physikalischer Art auf Grund übereinstimmender Formen der Differentialgleichungen mit Vorteil verglichen werden können.

Wohl zu unterscheiden von der eben geschilderten unvollständigen Ähnlichkeit ist die „angenäherte mechanische Ähnlichkeit". Letztere liegt vor, wenn nicht nur eine physikalische Kräfteart, sondern zwei oder mehr an den Vergleichsvorgängen beteiligt sind. Überwiegt dann der Einfluß der einen Kräfteart, so können meist die für diese allein gültigen Ähnlichkeitsbeziehungen in Modellversuchen ausgenutzt werden, doch ist dabei unerläßlich, die Größe desjenigen Fehlers festzustellen oder abzuschätzen, der in der Vernachlässigung der die mechanische Ähnlichkeit beeinträchtigenden störenden Nebeneinflüsse begründet ist. Der Fall angenäherter mechanischer Ähnlichkeit liegt in der Regel bei den praktischen Anwendungen vor und für diese besitzt er einen hohen Wert wegen der oft weitgehenden Annäherung, wenngleich die mechanische Ähnlichkeit nicht in mathematischer Strenge besteht.

In den Teilen II und III werden die Modellgesetze und die Anwendungsgebiete der vollständigen einschließlich der angenäherten mechanischen Ähnlichkeiten behandelt; im Teil IV schließen sich einige Fälle unvollständiger mechanischer Ähnlichkeit an. Die „statische" Ähnlichkeit, welche die Festigkeitsbeziehungen geometrisch ähnlicher Körper aufzusuchen hat, wird, als den Rahmen der Arbeit überschreitend, hier nicht in den Bereich der Betrachtungen gezogen.

II. Die Modellgesetze.

22. **Das Froudesche Modellgesetz für Bewegungen unter der Wirkung der Schwerkraft.** Die beiden Bewegungsvorgänge der Hauptausführung und des Modells sollen unter der Wirkung der Schwerkraft mechanisch ähnlich verlaufen. Die Schwerkraft greife als einzige physikalische Kraft im Sinne des Abschnitts 11 an allen Massenteilchen der als unzusammendrückbar vorausgesetzten festen oder flüssigen Körper an. Störende Nebenerscheinungen irgendwelcher Art sollen ausgeschlossen sein. Die Normal- und Tangentialkräfte im Innern oder an der Oberfläche fester Körper und die Normalkräfte an flüssigen Körpern

üben nach den Ausführungen des Abschnitts 11 keinen Einfluß auf das Modellgesetz aus. Tangentialkräfte an den Teilchen flüssiger Körper sind wegen des Ausschlusses der Zähigkeit nicht vorhanden. Zu vergleichen sind dann nur die Massenbeschleunigungkräfte MB und mb, kurz Trägheitskräfte genannt, und die Schwerkräfte Q und q, wobei sich wie immer die großen und die eingeklammerten Buchstaben auf die Hauptausführung, die kleinen auf das Modell beziehen.

Die hier zu lösende Aufgabe lautet: Es ist nach willkürlicher Wahl des Längenmaßstabs λ derjenige Zeitmaßstab τ zu berechnen, dessen Anwendung mechanische Ähnlichkeit zwischen Haupt- und Modellvorgang gewährleistet. Bezeichnet $\varkappa$ den Kräftemaßstab, $(\varrho) = \frac{(\gamma)}{(g)}$ und $\varrho = \frac{\gamma}{g}$ die Dichten, (γ) und γ die Einheitsgewichte der beiden Körper, ferner $(g) = \frac{(\gamma)}{(\varrho)}$ und $g = \frac{\gamma}{\varrho}$ die entsprechenden Erdbeschleunigungen, so erhält man die beiden Bestimmungsgleichungen 27 a und 27 b

$$\varkappa = f_1(\lambda, \tau) \quad \text{und} \quad \varkappa = f_2(\lambda, \tau)$$

gemäß Abschnitt 19 durch folgende Ansätze:

$$\varkappa = \frac{M\,B}{m\,b} = \frac{(\varrho)}{\varrho}\lambda^3\frac{\lambda}{\tau^2} = \frac{(\varrho)}{\varrho}\frac{\lambda^4}{\tau^2} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (28)$$

und

$$\varkappa = \frac{Q}{q} = \frac{(\gamma)\,\text{Vol}}{\gamma\,\text{vol}} = \frac{(\gamma)}{\gamma}\lambda^3 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (29)$$

Durch Gleichsetzung der beiden Ausdrücke für $\varkappa$ entsteht:

$$\frac{(\gamma)}{\gamma}\lambda^3 = \frac{(\varrho)}{\varrho}\frac{\lambda^4}{\tau^2} \quad \text{oder} \quad \tau = \sqrt{\lambda\frac{(\varrho)\,(\gamma)}{\varrho\,\gamma}}$$

und daher das Modellgesetz:

$$\text{A)} \qquad \tau = \sqrt{\lambda\frac{g}{(g)}}, \quad \dots\dots\dots\dots \quad (30)$$

eine Beziehung, mittels welcher der Zeitmaßstab τ aus dem Längenmaßstab berechnet werden kann und die wir nach dem Förderer dieses Teils der Ähnlichkeitsmechanik **das Froudesche Modellgesetz für den Zeitmaßstab** nennen wollen.

Sind T und t zwei entsprechende Zeiten, L und l zwei entsprechende Längen, so gilt weiter

$$\text{B)} \qquad T : t = \sqrt{\frac{L}{(g)}} : \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (31)$$

Da die Erdbeschleunigung bei den meisten Anwendungen praktisch als unveränderlich anzusehen ist, so können Gleichungen A und B auch in der Form geschrieben werden:

$$\tau = \sqrt{\lambda} \quad \ldots\ldots \quad (32)$$

und

$$T : t = \sqrt{L} : \sqrt{l} \quad \ldots\ldots \quad (33)$$

Die letzte Beziehung, die wir als Froudes Modellgesetz für entsprechende Zeiten bezeichnen wollen, lautet in Worten: Sollen an der Erdoberfläche zwei Vorgänge unter der alleinigen Wirkung der Schwerkraft mechanisch ähnlich verlaufen, so ist dafür zu sorgen, daß das Verhältnis entsprechender Zeiten gleich der Wurzel aus dem Verhältnis entsprechender linearer Größen ist.

Für die allgemeine Darstellung der Modellgesetze ist es nicht zweckmäßig, die beiden Erdbeschleunigungen im Zähler und Nenner der Gl. A wegzuheben; man würde sich sonst eines besonderen Vorteils der Ähnlichkeitsmechanik berauben, der bei der weiter unten erörterten dimensionslosen Darstellung der Modellergebnisse im Abschnitt 24 noch eingehend zur Sprache kommt.

Zwecks Aufsuchung des Geschwindigkeitsverhältnisses V/v ersetze man λ/τ in Gl. 30 nach der Maßstabregel durch V/v und schreibe:

$$\frac{\lambda}{\tau^2} = \frac{(g)}{g} \quad \ldots\ldots \quad (34)$$

oder

$$\frac{\lambda^2}{\tau^2}\,\frac{1}{\lambda} = \frac{(g)}{g} \quad \text{und} \quad \frac{V^2}{v^2} = \lambda\,\frac{(g)}{g}\,.$$

Mithin wird:

$$\text{C)} \qquad V : v = \sqrt{\lambda\,\frac{(g)}{g}} = \sqrt{L\,(g)} : \sqrt{l\,g} \quad \ldots\ldots \quad (35)$$

und mit Gleichsetzung der beiden Erdbeschleunigungen (g) und g, sowie unter Einführung entsprechender Rauminhalte $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{v}$, z. B. der Wasserverdrängungen, wird:

$$V : v = \sqrt{\lambda} = \sqrt{L} : \sqrt{l} = \sqrt[6]{\mathfrak{V}} : \sqrt[6]{\mathfrak{v}}\,, \quad \ldots\ldots \quad (36)$$

eine Beziehung, die das Froudesche Modellgesetz der entsprechenden Geschwindigkeiten heißt und in Worten lautet: Sollen an der Erdoberfläche zwei Vorgänge unter der alleinigen Wirkung der Schwerkraft mechanisch ähnlich verlaufen, so müssen sich entsprechende Geschwindigkeiten der Hauptausführung und des Modells wie die Wurzeln aus entsprechenden Längen verhalten. Diese Form des Froudeschen

Modellgesetzes ist ihrem Inhalte nach völlig gleichbedeutend mit den oben gegebenen Formen A und B: Alle drei Gleichungen legen den zeitlichen Verlauf des mechanisch ähnlich nachzubildenden Modellvorgangs in Abhängigkeit von den linearen Verhältnissen fest. Ist z. B. $\tau = \sqrt{\lambda}$ erfüllt, so befolgen die Geschwindigkeiten ohne weiteres die zuletzt in Gl. 36 geforderte Gesetzmäßigkeit und umgekehrt.

Für das Beispiel der im Wasser bewegten Platte kommen die Froudeschen Modellgesetze in Betracht, solange die Schwerkraft allein maßgebenden Einfluß auf die Ähnlichkeitsbewegungen hat. Als wesentlich für das Verständnis des Vergleichs der beiden Vorgänge ist wohl zu beachten, daß das Froudesche Gesetz der entsprechenden Geschwindigkeiten nicht allein für die beiden Platten der Hauptausführung und des Modells, sondern, wenn beide Vorgänge wirklich mechanisch ähnlich verlaufen, gleicherweise auch für alle einander entsprechenden Massenteilchen der beiden Flüssigkeiten erfüllt ist.

Weiter ergibt sich für das Verhältnis entsprechender Beschleunigungen folgendes: Nach der Maßstabregel ist $B/b = \lambda/\tau^2$, so daß die Gl. 34

$$\frac{\lambda}{\tau^2} = \frac{(g)}{g}$$

in die Gleichung:

$$\text{D} \qquad \frac{B}{b} = \frac{(g)}{g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

übergeht, aus welcher mit $(g) = g$ die Beziehung

$$\frac{B}{b} = 1 \quad \text{oder} \quad B = b = \text{unv.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

hervorgeht. Die letzte Gleichung stellt das **Froudesche Modellgesetz für entsprechende Beschleunigungen** dar und lautet in Worten: Verlaufen an der Erdoberfläche zwei Vorgänge unter der alleinigen Wirkung der Schwerkraft mechanisch ähnlich, so sind entsprechende Beschleunigungen der Hauptausführung und des Modells gleich groß.

Das Modellgesetz C läßt sich noch auf eine andere wichtige Form bringen: Man schreibe die Verhältnisgleichung:

$$V^2 : v^2 = L\,(g) : l\,g$$

in der Form:

$$\text{E} \qquad \frac{V^2}{L\,(g)} = \frac{v^2}{l\,g} = \varphi\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

worin φ eine unbenannte Größe ist, da Zähler wie Nenner der beiden Brüche benannte Größen der gleichen Maßeinheit m^2/sk^2 sind. φ soll im folgenden als „Froudesche Zahl" bezeichnet werden. Die Gleichung E, die das Froudesche Modellgesetz für dimensionslose Darstellung heißt, läßt sich so in Worte kleiden: Verlaufen an der Erdoberfläche zwei Vorgänge unter der alleinigen Wirkung der Schwerkraft mechanisch ähnlich, so ergeben die entsprechenden Ausdrücke $\frac{V^2}{L\,(g)}$ und $\frac{v^2}{l\,g}$ in der Hauptausführung und im Modell dieselbe Froudesche Zahl φ.

Als dimensionslose Zahl ist φ von den angewandten Maßeinheiten gänzlich unabhängig, so daß sich bei Berechnung von φ — immer unter der Voraussetzung mechanisch ähnlicher Vorgänge — der gleiche Wert ergibt, unabhängig davon, ob die Längen in Meter, in Zentimeter, in Zoll usw. und ob die Zeiten in Sekunden, in Minuten, in Stunden oder in anderen Einheiten gemessen werden.

Dies läßt sich auch so aussprechen: Das Kennzeichen dafür, daß Vorgänge der hier behandelten Art — also solche unter der Wirkung der Schwerkraft — mechanisch ähnlich verlaufen, ist die Übereinstimmung der Froudeschen Zahl φ; nicht ähnliche Vorgänge ergeben verschiedenes φ. Gerade die Unbenanntheit der Größe φ ermöglicht es, diese im Abschnitt 24 als unabhängige Veränderliche bei der dimensionslosen Darstellung der Modellergebnisse zu benutzen.

Würde man in der Gleichung E die Erdbeschleunigung (g) gegen g weggehoben haben, so würden die verbleibenden Ausdrücke V^2/L und v^2/l keine unbenannten Zahlen und ihre Werte abhängig vom Maßsystem sein. Die später erörterten Vorteile einer dimensionslosen Behandlung mechanisch ähnlicher Vorgänge wären mit diesen gekürzten Ausdrücken nicht zu erzielen.

Alle fünf Modellgesetze A bis E haben bei verschiedener Form denselben Inhalt, insofern sie offen oder verdeckt eine Aussage über den Zeitmaßstab darstellen, der zur Erzielung mechanischer Ähnlichkeit des Haupt- und des Modellvorgangs nach erfolgter Wahl von λ einzuhalten ist.

Für den Kräftemaßstab $\varkappa$ gilt nach Gl. 29

$$\varkappa = \frac{(\gamma)}{\gamma}\,\lambda^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (40)$$

Diese Beziehung kann in der Form:

$$K : k = (\gamma)\,L^3 : \gamma\,l^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (40\,a)$$

geschrieben werden. In Worten heißt dies: Wenn zwei Vorgänge, die unter der alleinigen Wirkung der Schwere verlaufen, mechanisch ähnlich sind, verhalten sich je zwei entsprechende Kräfte wie zwei entsprechende Produkte aus Einheitsgewicht und dritter Potenz einer linearen Größe. Bei übereinstimmendem Einheitsgewicht der zu beschleunigenden Körper gehen die letzten Gleichungen über in:

$$\varkappa = \lambda^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (41)$$

und in:

$$K : k = L^3 : l^3 = \mathfrak{V} : \mathfrak{v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

wenn $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{v}$ zwei entsprechende Rauminhalte, z. B. die Wasserverdrängungen, sind. Gl. 42 sagt aus, daß sich unter den aufgestellten Voraussetzungen zwei entsprechende Kräfte wie die dritten Potenzen entsprechender linearer Größen verhalten.

Werden entsprechende Leistungen von Hauptausführung und Modell mit E und e bezeichnet, so gilt nach der Maßstabregel des Abschnitts 13:

$$E = e\,\frac{\lambda\,\varkappa}{\tau} = e\,\frac{V}{v}\,\varkappa\,,$$

woraus mit Gl. 40 und $V/v = \sqrt{\lambda}$

$$E = e\sqrt{\lambda}\,\frac{(\gamma)}{\gamma}\,\lambda^3$$

hervorgeht. Als Übertragungsmaßstab für zwei Leistungen erhält man somit:

$$\frac{E}{e} = \frac{(\gamma)}{\gamma}\,\lambda^{\frac{7}{2}}$$

oder

$$E : e = (\gamma)\,L^{\frac{7}{2}} : \gamma\,l^{\frac{7}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

und bei übereinstimmendem Einheitsgewicht der beschleunigten Körper:

$$E : e = L^{\frac{7}{2}} : l^{\frac{7}{2}} = \mathfrak{V}^{\frac{7}{6}} : \mathfrak{v}^{\frac{7}{6}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (43\,a)$$

in Worten: Entsprechende Leistungen verhalten sich bei gleichem Einheitsgewicht der beiden beschleunigten Massen wie die $\frac{7}{2}$ te Potenz entsprechender linearer Größen.

Handelt es sich, wie zumeist bei den praktischen Anwendungen des Froudeschen Modellgesetzes, um die Nachahmung der Strömung einer unzusammendrückbaren Flüssigkeit mittels eines Modells wie z. B. bei der im Wasser nahe der Oberfläche bewegten Platte, so kommt auch das Verhältnis der auf die Flächeneinheit bezogenen Drücke P und p der Hauptausführung und des Modells in Betracht. Aus den Differentialgleichungen der Bewegung ist zu ersehen, daß nicht die Drücke beschleunigend auf die Flüssigkeitsteilchen wirken, sondern die Druckunterschiede an je zwei parallelen Seitenflächen der Teilchen, also die Differentiale d P und d p. Für den Ähnlichkeitsvergleich kommen die Kräfte dP . dF und dp . df in Betracht, worin dF und df zwei ensprechende Flächenelemente sind. Somit wird:

$$\varkappa = \frac{d\,P}{d\,p}\frac{d\,F}{d\,f} = \frac{d\,P}{d\,p}\,\lambda^2$$

und der Übertragungsmaßstab für die Druckunterschiede berechnet sich zu:

$$\frac{d\,P}{d\,p} = \frac{\varkappa}{\lambda^2}, \qquad (44)$$

eine Gleichung, deren Richtigkeit ohne weiteres aus der Maßstabregel erkannt wird, da die Maßeinheit von P und p kg/m² ist. Sie kann auch in der endlichen Form:

$$\frac{\Delta P}{\Delta p} = \frac{\varkappa}{\lambda^2} \qquad (44\,a)$$

oder mit $\varkappa = (\gamma)/\gamma \,.\, \lambda^3$

$$\frac{\Delta P}{\Delta p} = \frac{(\gamma)}{\gamma}\,\lambda \qquad (45)$$

geschrieben werden. Bei Gleichheit der beiden Einheitsgewichte lautet sie:

$$\frac{\Delta P}{\Delta p} = \lambda, \qquad (46)$$

worin ΔP und Δp entweder zwei entsprechende Druckunterschiede oder zwei entsprechende Überdrücke über die Atmosphäre bedeuten. Denn offensichtlich bildet ein gleichmäßiger, über die gesamte Flüssigkeit ausgedehnter Zusatzdruck im Hinblick auf die Unzusammendrückbarkeit derselben keine Beschleunigungsursache; und es ist daher zulässig, den Außendruck bei dem Modellvorgang beliebig, also nicht mechanisch ähnlich, sondern z. B. gleich dem des Hauptvorgangs zu wählen. Gleichheit des Außendrucks bei Haupt- und Modelvorgang hat allerdings mechanisch unähnliche absolute Flüssigkeitsdrücke, aber trotzdem — und das ist das Wesentliche — mechanisch ähnliche Druckunterschiede und mechanisch ähnliche Überdrücke über die Atmosphäre zur Folge.

Bei starren Körpern haben die Normal- und Tangentialspannungen ebenfalls den durch die Gln. 45 und 46 gegebenen Übertragungsmaßstab.

23. Andere Ableitungen des Froudeschen Modellgesetzes. Das natürliche Verfahren zur Aufsuchung des Modellgesetzes besteht in dem Vergleichen der in den Bewegungsgleichungen auftretenden Trägheitskräfte und physikalischen Kräfte. Statt dieser können auch entsprechende Glieder anderer die ähnlichen Vorgänge beschreibender Gleichungen herangezogen werden.

Wählt man hierzu in dem Falle der in der Flüssigkeit bewegten Platte die Druckgleichung aus, so lautet sie für zwei entsprechende Massenteilchen der Hauptausführung und des Modells

$$H = Z + \frac{P}{(\gamma)} + \frac{V^2}{2(g)}$$

$$h = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g},$$

zwei Gleichungen, in denen H und h die Gesamtenergien zweier entsprechender Flüssigkeitsteilchen bezogen auf die Gewichtseinheit sowie Z und z die zwei entsprechenden Höhenordinaten der Teilchen über einer angenommenen wagerechten Bezugsebene sind. Man erhält aus dem Vergleich zweier Glieder der obigen Gleichungen

$$\frac{Z}{z} = \frac{V^2\, g}{(g)\, v^2}$$

oder wenn Z:z gleich λ und die Erdbeschleunigungen einander gleich gesetzt werden:

$$\lambda = \frac{V^2}{v^2};$$

daher wie in Abschnitt 22:

$$V : v = \sqrt{\lambda} = \sqrt{L} : \sqrt{l}.$$

Folgender Weg — mit Benutzung der Glieder des Arbeitssatzes — ist mit dem vorigen verwandt; er ist für jeden Ähnlichkeitsfall gangbar. in dem allein die Schwerkraft bestimmend ist: Man bilde das Verhältnis der einander entsprechenden Glieder der Lageenergie und das der entsprechenden Glieder der Bewegungsenergie. Man erhält dann:

$$\frac{M(g)Z}{m\,g\,z} = \frac{M V^2 2}{2\, m\, v^2}$$

oder

$$\frac{(g)}{g}\lambda = \frac{V^2}{v^2}$$

und mit Gleichsetzung von (g) und g wieder:

$$V : v = \sqrt{\lambda} = \sqrt{L} : \sqrt{l}.$$

Ein einfacher und überzeugender Beweis des Froudeschen Modellgesetzes kann auch aus dem Vergleich der Beschleunigungen zweier entsprechender Massenteilchen M und m erbracht werden. Da unter den in Abschnitt 22 aufgestellten Voraussetzungen die Trägheitskraft, die Schwerkaft und die resultierende Oberflächenkraft an jedem einzelnen Massenpunkte nach den Grundsätzen der Dynamik ein geschlossenes Kräftedreieck bilden, so gilt ein Gleiches für die Beschleunigungsgrößen. Das heißt: Die negativ genommene resultierende Beschleunigung b, die Erdbeschleunigung g und die der resultierenden Oberflächenkraft entsprechende Beschleunigung ergeben für jeden Massenpunkt m des Modells ein geschlossenes Beschleunigungsdreieck. Soll mechanische Ähnlichkeit bestehen, so muß das entsprechende Beschleunigungsdreieck für das Massenteilchen M des Hauptvorgangs jenem für m des Modells ähnlich sein. Da die eine Dreieckseite, die der Erdbeschleunigung, in beiden Fällen gleich groß ist, so müssen auch die andern Seiten je übereinstimmen; es muß somit die resultierende Beschleunigung B der Hauptausführung gleich der entsprechenden b des Modells, also

$$B = b$$

sein. Bei mechnisch ähnlichen Vorgängen ist aber nach der Maßstabregel stets

$$B = b \frac{\lambda}{\tau^2}$$

Hieraus folgt weiter:

$$\frac{\lambda}{\tau^2} = 1 \quad \text{oder} \quad \frac{\lambda^2}{\tau^2} \frac{1}{\lambda} = 1$$

also

$$\frac{V^2}{v^2} = \lambda = L:l.$$

Auch der im Abschnitt 20 besprochene abgekürzte Ansatz soll hier versucht werden. Er lautet: Die Anwendung der Maßstabregel auf das Verhältnis „physikalischer Beiwert geteilt durch Dichte“ führt sofort auf das gesuchte Modellgesetz $\tau = F(\lambda)$. Die Eigenschaft der Schwere wird im technischen Maßsystem durch das Einheitsgewicht ausgedrückt; der physikalische Beiwert der Schwere ist also (γ) und γ; die beiden Dichten sind $(\varrho) = \frac{(\gamma)}{(g)}$ und $\varrho = \frac{\gamma}{g}$. Daher lautet der Ansatz mit den Angaben des

Abschnitts 13 über die Ähnlichkeitsbeziehungen für Einheitsgewicht und Dichte:

$$\frac{(\gamma)}{(\varrho)} = \frac{\gamma}{\varrho} \frac{\lambda^3}{\frac{\varkappa \iota^2}{\lambda^1}}$$

oder

$$(g) = g \frac{\lambda}{\tau^2}$$

und bei Gleichheit der Erdbeschleunigungen (g) und g

$$\frac{\lambda}{\tau^2} = 1,$$

was sogleich, wie eben durchgeführt, das Froudesche Modellgesetz

$$V : v = \sqrt{\lambda} = \sqrt{L} : \sqrt{l}$$

ergibt.

Weiter werde noch der eigenartige Beweis erwähnt, den Tullinger*) für das durch Gleichung 36 dargestellte Gesetz der entsprechenden Geschwindigkeiten erbringt, welches erfüllt werden muß, wenn die von Schiff und Modell erzeugten Wellen ähnlich verlaufen sollen. Er stellt nach längeren analytischen Vorbereitungen die Differentialgleichungen der relativ vom Schiff aus stationär verlaufenden Stromlinien auf, für welche er geometrische Ähnlichkeit in Hauptausführung und Modell verlangt. Diese Forderung führt ihn schließlich auf die Beziehung:

$$\frac{Z}{z} = \frac{V^2}{(g)} \frac{g}{v^2},$$

ein Ansatz, den wir im Abschnitt 23 ohne weiteres aus der Druckgleichung ableiten konnten.

24. **Dimensionslose Darstellung der Modellergebnisse bei Gültigkeit des Froudeschen Modellgesetzes.** Nach den Ausführungen der Abschnitte 15—17 gilt bei Voraussetzung mechanisch ähnlicher Vorgänge für zwei beliebige entsprechende Kräfte K und k der Hauptausführung und des Modells stets das allgemeine Kräftegesetz des Newtonschen Ähnlichkeitsprinzips, welches nach Gln. 18 und 20 die Form hat

$$\left.\begin{aligned} K &= \alpha\,(\varrho)\,F\,V^2 \\ k &= \alpha\,\varrho\,f\,v^2 \end{aligned}\right\} \qquad (47)$$

*) Tullinger, k. k. Schiffbau-Ingenieur, Beweis des Gesetzes der korrespondierenden Geschwindigkeiten für die durch Wellenbildung entstehenden Schiffswiderstände, Mitt. aus dem Geb. des Seewesens, Pola 1881, S. 230.

und wofür auch geschrieben werden kann

$$\left.\begin{array}{l} K = \varepsilon\,(\varrho)\,L^2\,V^2 \\ k = \varepsilon\,\varrho\,l^2\,v^2 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (48)$$

Hierin bedeuten (ϱ) und ϱ die entsprechenden Dichten der beiden beschleunigten Massen, F und f zwei beliebige entsprechende Flächen, L und l zwei beliebige entsprechende lineare Größen, V und v zwei beliebige entsprechende Geschwindigkeiten und die Kennziffern α und ε reine Zahlenwerte.

Wirken nur Schwerkräfte auf die ähnlichen Vorgänge bestimmend ein, so kann das Froudesche Modellgesetz, z. B. in der Form E,

$$\frac{V^2}{L\,(g)} = \frac{v^2}{l\,g} = \varphi$$

herangezogen werden. Es gilt also: $V^2 = \varphi\ L(g)$ und nach Gl. 48

$$K = \varepsilon\,(\varrho)\,L^2 \,.\, \varphi\,L\,(g) = \varepsilon\,\varphi\,(\varrho)\,(g)\,L^3$$

Hieraus geht mit $\varepsilon\varphi = \zeta$ und $(\varrho)\,(g) = (\gamma)$ das **Sondergesetz entsprechender Kräfte für den durch die Schwerkraft bedingten Ähnlichkeitsfall**

$$\left.\begin{array}{l} K = \zeta\,(\gamma)\,L^3 \\ k = \zeta\,\gamma\,l^3 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (49)$$

hervor. In den Gln. 49 sind L und l zwei beliebige entsprechende lineare Größen, (γ) und γ die beiden Einheitsgewichte und ζ ein Zahlenwert, die „Kennziffer" des Sondergesetzes entsprechender Kräfte.

Ermittelt man durch ein Modellversuch den wahren Wert einer Kraft, also die Größe k in kg, so berechnet sich aus Gl. 47 die Kennziffer α des allgemeinen Kräftegesetzes zu

$$\alpha = \frac{k}{\varrho\,f\,v^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (50)$$

Die entsprechende Kraft K der Hauptausführung ist dann mit gleicher Kennziffer α

$$K = \alpha\,(\varrho)\,F\,V^2.$$

In diesen Gleichungen bedeuten F und f zwei beliebige entsprechende Flächen, V und v zwei beliebige nach dem Froudeschen Modellgesetz einander entsprechende Geschwindigkeiten.

Unter Umständen ist es zweckmäßiger, K nicht mittels des allgemeinen Kräftegesetzes, sondern aus dem Sondergesetz der Kräfte zu er-

mitteln. Es kommt dann nicht α, sondern die zweite Kennziffer ζ in Betracht. Nach Gl. 49 hat man:

$$\zeta = \frac{k}{\gamma\, l^3}, \qquad (51)$$

und die entsprechende Kraft K der Hauptausführung wird:

$$K = \zeta(\gamma)\, L^3,$$

eine Beziehung, die dieselbe Anzahl kg wie die obige Gleichung $K = \alpha(\varrho) F V^2$ liefert, sofern beim Modellversuch wieder das Gesetz der entsprechenden Geschwindigkeiten befolgt wird.

Von dem gegenwärtigen Standpunkte aus ist es leicht, die großen Vorteile der dimensionslosen Darstellung der Modellergebnisse zu erkennen. In dem hier vorliegenden Fall, in welchem allein die Schwerkraft wirkt, ist diese eigenartige Behandlung der Modellergebnisse so durchzuführen: Vorgänge, welche mechanisch ähnlich verlaufen, haben nach Abschnitt 22 dieselbe Froudesche Zahl $\varphi = \frac{v^2}{l g}$ — oder $\frac{V^2}{L(g)}$ — und nach den eben angestellten Betrachtungen auch dieselbe Kennziffer ζ in dem Sondergesetz der Kräfte $k = \zeta \gamma l^3$. Jeder neue, unter veränderten zeitlichen und Geschwindigkeitsbedingungen an dem Modell zustandekommende Vorgang liefert ein neues φ und ein neues ζ, so daß jedem Werte φ ein bestimmter Wert ζ zugeordnet ist. Es besteht also eine Beziehung:

$$\zeta = f(\varphi), \qquad (52)$$

die wir das „Zahlengesetz der betreffenden Größe" — hier der Kraft k oder K — nennen wollen, und das durch Auftragung in einem rechtwinkligen Achsenkreuz als „Kurve der Kennziffern ζ" oder „Eigenschaftskurve" am übersichtlichsten zum Ausdruck gebracht wird. Jeder einzelne Modellversuch liefert eine bestimmte Froudesche Zahl $\varphi = \frac{v^2}{l g}$ als Abszisse und eine bestimmte Kennziffer $\zeta = \frac{k}{\gamma\, l^3}$ — ebenfalls eine reine Zahl — als Ordinate, ein Wertepaar, das für alle mechanisch ähnlichen Vorgänge, also auch für den Hauptvorgang, unveränderlich ist. Der einzelne Punkt der Kurve $\zeta = f(\varphi)$ bestimmt in seinem Abszissenwert die Gesetzmäßigkeit zwischen den linearen und den zeitlichen oder den Geschwindigkeitsverhältnissen und in seinem Ordinatenwert die gemeinsame Kennziffer der einander entsprechenden Kräfte $k = \zeta \gamma l^3$ und $K = \zeta(\gamma) L^3$ für alle mechanisch ähnlichen Ausführungen, gleichgültig welche Dichte die beschleunigten Körper haben.

Das oben geschilderte Verfahren bietet daher einen vorzüglichen Überblick darüber, welche Werte eine Größe der Ähnlichkeitsmechanik bei dem verschiedenartigsten Wechsel der Bewegungsverhältnisse und der Dichten der beschleunigten Massen annehmen kann. Vor anderen Darstellungsarten kann es den besonderen Vorzug für sich in Anspruch nehmen, daß es die Modellergebnisse als reine Zahlenwerte maßfrei — also in dimensionsloser Form — für jedes Maßsystem sofort verwendbar zum Ausdruck bringt und so jede Umrechnung bei Benutzung anderer Maßeinheiten erspart*).

Die ausgezeichneten Eigenschaften, welche der dimensionslosen Darstellung zukommen, bleiben erhalten, wenn statt der Froudeschen Zahl φ die Zahlen $\sqrt{\varphi}$, φ^2, $\log\varphi$ usw. als Abszissen und statt der Kennziffer ζ die Zahlen $\sqrt{\zeta}$, ζ^2, $\log\zeta$ usw. als Ordinaten oder irgend eine andere algebraische Form von φ und ζ aufgetragen werden.

Zieht man es vor, die Kräfte K und k in der Form 47 des allgemeinen Kräftegesetzes zu schreiben, so ist aus den Modellversuchen mittels Gl. 50 eine Beziehung zwischen der Kennziffer α und der Froudeschen Zahl φ,

$$\alpha = F(\varphi) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (53)$$

aufzustellen, welche, ebenso wie $\zeta = f(\varphi)$ eine Abhängigkeit zwischen zwei unbenannten Zahlen ausspricht und daher dimensionslos dargestellt werden kann. Bei äußerlich veränderter Form bietet $\alpha = F(\varphi)$ dasselbe wie $\zeta = f(\varphi)$.

25. **Das Thomsonsche Modellgesetz für Bewegungen unter der Wirkung der allgemeinen Schwere.** Die Bewegungsvorgänge der Hauptausführung und des Modells sollen unter alleiniger Wirkung der allgemeinen Massenanziehung zustandekommen. Als Masse wird je eine unzusammendrückbare Flüssigkeit vorausgesetzt. Zur Bildung des Ansatzes für das Modellgesetz sind somit zu vergleichen die Trägheitskräfte MB und mb und die Anziehungskräfte $K = (a)\,\frac{M\,M_1}{R^2}$ und $k = a\,\frac{m\,m_1}{r^2}$, worin $(a) = a = 648.10^{-12}\,\frac{m^4}{sk^4\,kg}$ die Unveränderliche der allgemeinen Massenanziehung ist.

Man erhält hierfür den Kräftemaßstab $\varkappa$:

$$\varkappa = \frac{M\,B}{m\,b} = \frac{(a)\,M\,M_1}{R^2}\,\frac{r^2}{a\,m\,m_1}$$

und daraus

$$\frac{B}{b} = \frac{M_1}{m_1}\,\frac{r^2}{R^2}\,.$$

Bezeichnen (ϱ) und ϱ die entsprechenden Dichten der sich ähnlich bewe-

---

*) Gümbel, Über eine internationale Sprache im Schiffbau, Zeitschrift Schiffbau 1912/13, S. 413.

genden Massen, so geht die letzte Gleichung mit $M_1 = (\varrho)\,\mathrm{Vol}$ und $m_1 = \varrho\,\mathrm{vol}$ und unter Benutzung der Maßstabregel des Abschnitts 13 über in:

$$\frac{\lambda}{\tau^2} = \frac{(\varrho)}{\varrho}\lambda^3\frac{1}{\lambda^2}.$$

Das Modellgesetz lautet also:

$$\tau^2 = \frac{\varrho}{(\varrho)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (54)$$

oder

$$\mathrm{T}:\mathrm{t} = \sqrt{\frac{1}{(\varrho)}}:\sqrt{\frac{1}{\varrho}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (54\,\mathrm{a})$$

und bei Verwendung gleicher Dichten für Hauptausführung und Modell:

$$\tau = 1 \quad \text{oder} \quad \mathrm{T} = \mathrm{t}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (54\,\mathrm{b})$$

Dies heißt in Worten: Bewegen sich zwei unzusammendrückbare Flüssigkeiten unter alleiniger Wirkung der allgemeinen Schwere mechanisch ähnlich, so verhalten sich entsprechende Zeiten — unabhängig von den linearen Abmessungen — umgekehrt wie die Wurzeln aus den Dichten der beiden Flüssigkeiten. Bei gleicher Dichte verlaufen die Vorgänge vollkommen synchron. Die Gln. 54 sollen das Thomsonsche Modellgesetz genannt werden, da William Thomson in der Abhandlung „Dynamical Problems regarding Elastic Spheroidal Shells and Spheroids of Incompressible Liquid", Phil. Trans. 1863 (Math. and Phys. Papers Bd. III S. 384) — bei Untersuchung der Schwingungen von Flüssigkeitsmassen überall gleicher Dichte unter alleiniger Wirkung der allgemeinen Schwere — diese Gesetzmäßigkeit nachweist.

Als Modellgesetz für entsprechende Geschwindigkeiten erhält man in diesem letzten Fall aus: $\mathrm{V}:\mathrm{v} = \lambda/\tau$ mit $\tau = 1$:

$$\mathrm{V}:\mathrm{v} = \mathrm{L}:\mathrm{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (55)$$

In Worten: Die Geschwindigkeiten verhalten sich wie die linearen Abmessungen.

Der Kräftemaßstab ist:

$$\varkappa = \frac{\mathrm{M}\,\mathrm{B}}{\mathrm{m}\,\mathrm{b}} = \frac{(\varrho)}{\varrho}\lambda^3\frac{\lambda}{\tau^2}$$

und unter Verwendung des Modellgesetzes der Gl. 54

$$\varkappa = \frac{1}{\tau^2}\frac{\lambda}{\tau^2} = \left(\frac{\lambda}{\tau}\right)^4 = \left(\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{v}}\right)^4.$$

Bei gleicher Dichte wird mit $\tau = 1$:

$$\varkappa = \lambda^4. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (56)$$

Das Verhältnis entsprechender Drücke P und p auf die Flächeneinheit ergibt sich hieraus zu:

$$\frac{P}{p} = \frac{\varkappa}{\lambda^2} = \lambda^2 \text{. . . . .} \quad (57)$$

Der abgekürzte Ansatz ist in diesem Falle, wie im Abschnitt 20 besonders hervorgehoben wurde, in folgender Weise unter Benutzung der Maßstabregel durchzuführen:

$$(a)\,(\varrho) = a\,\frac{\lambda^4}{\tau^4\,\varkappa}\,\varrho\,\frac{\varkappa\,\tau^2}{\lambda^4}$$

$$(a)\,(\varrho) = a\,\varrho\,\frac{1}{\tau^2}\,.$$

Diese Beziehung liefert sofort Gl. 54 und lehrt, daß bei einer dimensionslosen Darstellung die unbenannte Zahl $\eta = (a)\,(\varrho)\,T^2$ oder $a\,\varrho\,t^2$ in Betracht zu ziehen wäre.

26. Das Reynoldssche Modellgesetz für Bewegungen unter der Wirkung der Flüssigkeitsreibung. Zwei unzusammendrückbare Flüssigkeiten sollen sich unter der alleinigen Wirkung innerer Reibungskräfte mechanisch ähnlich bewegen. Störende Nebenerscheinungen irgend welcher Art sollen ausgeschlossen sein. Die Normalkräfte im Innern oder an der Oberfläche der beiden Flüssigkeiten üben nach Abschnitt 11 keinen Einfluß auf das zu suchende Modellgesetz aus. Die zu lösende Aufgabe lautet: Es ist nach willkürlicher Wahl des Längenmaßstabs λ derjenige Zeitmaßstab τ zu berechnen, dessen Anwendung beim Modellversuch die mechanische Ähnlichkeit des Haupt- und Modellvorgangs gewährleistet.

Die vollständigen Differentialgleichungen anzuschreiben, ist nicht erforderlich; es genügt vielmehr, die Trägheitskräfte MB und mb sowie die Reibungskräfte K und k zu vergleichen und ihre Verhältnisse einander gleich zu setzen.

Die inneren Reibungskräfte an entsprechenden Flächen F und f eines Flüssigkeitsteilchens sind: $K = (\eta)\,\frac{\partial V}{\partial N}\,F$ und $k = \eta\,\frac{\partial v}{\partial n}\,f$. Darin bedeuten (η) und η die technischen Zähigkeitsbeiwerte der beiden Flüssigkeiten, im technischen Maßsystem in kg sk/m² zu messen, ferner $\frac{\partial V}{\partial n}$ und $\frac{\partial v}{\partial n}$ die Änderungsgrade der Geschwindigkeit bei Fortschreiten in Richtung der Flächennormalen N und n. $(\eta)\,\frac{\partial V}{\partial N}$ und $\eta\,\frac{\partial v}{\partial n}$ sind die durch die Zähigkeit hervorgerufenen Schubspannungen an den Flächen F und f.

Bezeichnet $\varkappa$ den Kräftemaßstab, ferner (ϱ) und ϱ die Dichten, so erhält man die beiden Bestimmungsgleichungen 27 a und 27 b, also

$$\varkappa = f_1(\lambda, \tau) \quad \text{und} \quad \varkappa = f_2(\lambda, \tau),$$

gemäß Abschnitt 19 durch folgende Ansätze:

$$\varkappa = \frac{M\,B}{m\,b} = \frac{(\varrho)}{\varrho} \lambda^3 \frac{\lambda}{\tau^2} = \frac{(\varrho)}{\varrho} \frac{\lambda^4}{\tau^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (58)$$

und

$$\varkappa = \frac{K}{k} = \frac{(\eta) \frac{\partial V}{\partial N} F}{\eta \frac{\partial v}{\partial n} f} = \frac{(\eta)}{\eta} \frac{\lambda}{\tau \lambda} \lambda^2 = \frac{(\eta)}{\eta} \frac{\lambda^2}{\tau} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (59)$$

Durch Gleichsetzung der beiden Ausdrücke für $\varkappa$ entsteht:

$$\frac{(\eta)}{\eta} \frac{\lambda^2}{\tau} = \frac{(\varrho)}{\varrho} \frac{\lambda^4}{\tau^2}$$

oder

$$\tau = \lambda^2 \frac{\eta/\varrho}{(\eta)/(\varrho)}.$$

Beim Zusammenwirken von Trägheit und Flüssigkeitsreibung empfiehlt es sich, das Verhältnis „technischer Zähigkeitsbeiwert : Dichte“ nach dem Vorschlage von Maxwell als maßgebende Größe einzuführen. Dies Verhältnis, welches als „dynamisches Zähigkeitsmaß“ (ν) und ν für Hauptausführung und Modell bezeichnet und bei technischen Untersuchungen in m^2/sk gemessen wird, ist somit:

$$(\nu) = \frac{(\eta)}{(\varrho)} \quad \text{und} \quad \nu = \frac{\eta}{\varrho} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (60)$$

Dies in die obige Gleichung für τ eingesetzt, ergibt:

$$\text{A)} \qquad \tau = \lambda^2 \frac{\nu}{(\nu)}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (61)$$

eine Beziehung, mittels welcher der Zeitmaßstab τ aus dem Längenmaßstab λ berechnet werden kann und die nach dem Förderer dieses Teils der Ähnlichkeitsmechanik das Reynoldssche Modellgesetz für den Zeitmaßstab genannt werden soll.

Sind T und t zwei entsprechende Zeiten und L und l zwei entsprechende Längen, so gilt:

$$\text{B)} \qquad T : t = \frac{L^2}{(\nu)} : \frac{l^2}{\nu}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (62)$$

eine Gleichung, die als Reynoldssches Modellgesetz für entsprechende Zeiten bezeichnet werden soll. Für den Fall gleicher Flüssigkeiten im Haupt- und Modellvorgang vereinfacht es sich zu:

$$T : t = L^2 : l^2. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (63)$$

In Worten lautet das Reynoldssche Modellgesetz der Gln. 62 und 63: Sollen zwei Strömungsvorgänge in unzusammendrückbaren Flüssigkeiten unter der alleinigen Wirkung der inneren Reibung mechanisch ähnlich verlaufen, so müssen sich entsprechende Zeiten wie die Quadrate entsprechender linearer Abmessungen und umgekehrt wie die dynamischen Zähigkeitsmaße der beiden Flüssigkeiten verhalten.

Zwecks Aufsuchung des Geschwindigkeitsverhältnisses schreibe man Gl. 61 in der Form:

$$\frac{\lambda}{\tau}\lambda\frac{\nu}{(\nu)}=1$$

oder

$$\frac{V}{v}\frac{L}{l}\frac{\nu}{(\nu)}=1$$

oder

$$\text{C)}\qquad V:v=\frac{(\nu)}{L}:\frac{\nu}{l}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(64)$$

Bei Gleichheit der beiden Flüssigkeiten vereinfacht sich dies zu:

$$V:v=\frac{1}{L}:\frac{1}{l}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(65)$$

Gln. 64 und 65 sprechen das Reynoldsche Modellgesetz für entsprechende Geschwindigkeiten aus und lauten in Worten: Sollen in unzusammendrückbaren Flüssigkeiten zwei Strömungsvorgänge unter alleiniger Wirkung der inneren Reibung mechanisch ähnlich verlaufen, so müssen entsprechende Geschwindigkeiten im umgekehrten Verhältnis entsprechender linearer Abmessungen und im geraden Verhältnis der dynamischen Zähigkeitsmaße der beiden Flüssigkeiten stehen.

Weiter läßt sich aus Gl. 61 das Modellgesetz für entsprechende Beschleunigungen ableiten. Man schreibe

$$\frac{\lambda^2}{\tau^4}\tau^3\frac{\nu}{(\nu)}=1$$

oder mit $B:b=\lambda/\tau^2$

$$\text{D)}\qquad B^2:b^2=\frac{(\nu)}{T^3}:\frac{\nu}{t^3}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(66)$$

Das Modellgesetz C läßt sich noch auf folgende wichtige Form bringen:

$$\text{E)}\qquad \frac{V\,L}{(\nu)}=\frac{v\,l}{\nu}=\psi,\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(67)$$

worin ψ eine unbenannte Größe ist, da Zähler und Nenner die gleiche Maßeinheit m²/sk haben. ψ wird nach dem Entdecker dieser Beziehung als „Reynoldssche Zahl" bezeichnet. Die Gleichung E, die das Reynoldssche Modellgesetz für dimensionslose Darstellung genannt werden soll, läßt sich so in Worte kleiden: Verlaufen zwei Bewegungsvorgänge in unzusammendrückbaren Flüssigkeiten unter alleiniger Wirkung der inneren Reibung mechanisch ähnlich, so ergeben die entsprechenden Ausdrücke $\frac{V\,L}{(\nu)}$ und $\frac{v\,l}{\nu}$ in der Hauptausführung und im Modell dieselbe Reynoldssche Zahl ψ. Als dimensionslose Zahl ist ψ von den angewandten Maßeinheiten unabhängig, so daß sich bei Berechnung von ψ — immer unter der Voraussetzung mechanisch ähnlicher Vorgänge — in verschiedenen Maßsystemen der gleiche Wert ergibt. Das Kennzeichen dafür, daß Strömungsvorgänge der hier behandelten Art mechanisch ähnlich verlaufen, ist somit die Übereinstimmung der Reynoldsschen Zahl ψ; nicht ähnliche Vorgänge ergeben verschiedenes ψ.

Alle fünf Modellgesetze A bis E haben bei verschiedener Form denselben Inhalt, insofern sie offen oder verdeckt eine Aussage über den Zeitmaßstab τ darstellen, der bei mechanischer Ähnlichkeit des Haupt- und Modellvorgangs einzuhalten ist.

Für den Kräftemaßstab $\varkappa$ war oben in Gl. 59

$$\varkappa = \frac{(\eta)}{\eta} \frac{\lambda^2}{\tau}$$

ermittelt worden. Dies läßt sich auf Grund der Maßstabregel und des Modellgesetzes E in der Form schreiben:

$$\varkappa = \frac{(\eta)}{\eta} \frac{V\,L}{v\,l} = \frac{(\eta)\,(\nu)}{\eta\,\nu} = \frac{(\varrho)\,(\nu)^2}{\varrho\,\nu^2} = \frac{(\eta)^2/(\varrho)}{\eta^2/\varrho} \quad \ldots\ldots \quad (68)$$

Dies heißt in Worten: Je zwei entsprechende Kräfte stehen unter den vorliegenden Umständen im geraden Verhältnis der Quadrate der technischen Zähigkeitsbeiwerte und im umgekherten Verhältnis der Dichten der beiden Flüssigkeiten. Bei Gleichheit der Flüssigkeiten wird $\varkappa = 1$, d. h. die Kräfte an der Hauptausführung und am Modell sind je gleich groß.

Über das Verhältnis entsprechender auf die Flächeneinheit bezogener Drücke P und p der Hauptausführung und des Modells gilt folgendes: Beschleunigend auf die Flüssigkeitsteilchen wirken die Kräfte dP . dF und dp . df, wenn dF und df zwei entsprechende Flächenelemente und dP und dp je die Druckunterschiede an zwei gegenüberliegenden Flächen der rechtwinkligen Teilchen sind. Alsdann gilt:

$$\varkappa = \frac{d\,P\,d\,F}{d\,p\,d\,f} = \frac{d\,P}{d\,p}\,\lambda^2$$

oder

$$\frac{d\,P}{d\,p} = \frac{\varkappa}{\lambda^2}$$

oder in der endlichen Form und unter Benutzung von Gl. 59

$$\frac{\varDelta P}{\varDelta p} = \frac{\varkappa}{\lambda^2} = \frac{(\eta)}{\eta} \frac{1}{\tau} = \frac{(\eta)\, V/L}{\eta\, v/l}\,, \qquad (69)$$

woraus bei Gleichheit der beiden Flüssigkeiten

$$\frac{\varDelta P}{\varDelta p} = \frac{1}{\tau} = \frac{t}{T} = \frac{l^2}{L^2} \qquad (70)$$

entsteht. Hierin bedeuten $\varDelta$ P und $\varDelta$ p entweder zwei entsprechende endliche Druckunterschiede oder zwei entsprechende Überdrücke über die Drücke des ungestörten Zustandes. Die absoluten Drücke brauchen, ganz wie im Falle des Abschnitts 22, nicht mechanisch ähnlich zu sein.

Für die Unterschiede und die Absolutwerte der tangentialen Zähigkeitsspannungen gelten ebenfalls die Übertragungsmaßstäbe der Gln. 69 und 70.

Mittels des abgekürzten Ansatzes nach Abschnitt 20 und auf Grund der Maßstabregel des Abschnitts 13 erhält man die Gleichung:

$$\frac{\text{physikal. Beiwert}}{\text{Dichte}} = \frac{(\eta)}{(\varrho)} = \frac{\eta}{\varrho} \frac{\frac{\varkappa\tau}{\lambda^2}}{\frac{\varkappa\tau^2}{\lambda^4}} = \frac{\eta}{\varrho} \frac{\lambda^2}{\tau}$$

und daraus sofort das Reynoldssche Modellgesetz für den Zeitmaßstab:

$$\tau = \lambda^2 \frac{\eta/\varrho}{(\eta)/(\varrho)} = \lambda^2 \frac{\nu}{(\nu)}\,,$$

in Übereinstimmung mit Gl. 61.

27. **D i m e n s i o n s l o s e D a r s t e l l u n g d e r M o d e l l e r g e b n i s s e b e i G ü l t i g k e i t d e s R e y n o l d s s c h e n M o d e l l g e s e t z e s.** Die Ausführungen des Abschnitts 24, in welchen die Schwerkraft als maßgebend für das Modellgesetz vorausgesetzt wurde, lassen sich sinngemäß auf die mechanisch ähnlichen Bewegungsvorgänge zäher, unzusammendrückbarer Flüssigkeiten übertragen. Unter Benutzung der dort erläuterten Bezeichnungen gilt zunächst das allgemeine Kräftegesetz des Newtonschen Ähnlichkeitsprinzips:

$$\left.\begin{aligned} K &= \alpha\,(\varrho)\, F\, V^2 \\ k &= \alpha\, \varrho\, f\, v^2 \end{aligned}\right\} \qquad (71)$$

oder auch

$$\left.\begin{aligned} K &= \varepsilon\,(\varrho)\, L^2\, V^2 \\ k &= \varepsilon\, \varrho\, l^2\, v^2 \end{aligned}\right\} \qquad (72)$$

worin die Kennziffern α und ε reine Zahlenwerte sind.

Wirken nur innere Reibungskräfte auf mechanisch ähnliche Vorgänge bestimmend ein, so kann das Reynoldssche Modellgesetz, z. B. in der Form E,

$$\frac{\mathrm{V\,L}}{(\nu)} = \frac{\mathrm{v\,l}}{\nu} = \psi$$

herangezogen werden. Es ist also $\mathrm{V}^2\,\mathrm{L}^2 = \psi^2\,(\nu)^2$ und $\mathrm{v}^2\,\mathrm{l}^2 = \psi^2\,\nu^2$.

Aus Gl. 72 entsteht dann:

$$\mathrm{K} = \varepsilon\,(\varrho)\,\psi^2\,(\nu)^2$$

und mit $\varepsilon\,\psi^2 = \zeta$ das Sondergesetz entsprechender Kräfte für den durch die inneren Reibungskräfte bedingten Ähnlichkeitsfall:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{K} &= \zeta\,(\varrho)\,(\nu)^2 \\ \mathrm{k} &= \zeta\,\varrho\,\nu^2 \end{aligned}\right\}, \qquad (73)$$

hervor, worin (ϱ) und ϱ die Dichten, (ν) und ν die dynamischen Zähigkeitsmaße und ζ ein reiner Zahlenwert, die „Kennziffer" des Sondergesetzes entsprechender Kräfte, ist.

Die Kennziffern α und ζ sind aus den Beziehungen:

$$\alpha = \frac{\mathrm{k}}{\varrho\,\mathrm{f}\,\mathrm{v}^2} \qquad (74)$$

und

$$\zeta = \frac{\mathrm{k}}{\varrho\,\nu^2} \qquad (75)$$

zu berechnen, wobei der wahre Wert von k aus einem Modellversuch ermittelt wird.

Alle weiteren Einzelheiten sind sinngemäß aus Abschnitt 24 zu übernehmen; auch die dimensionslose Darstellung der Modellergebnisse ist nach den dortigen Angaben — jedoch unter Beachtung des Reynoldsschen Modellgesetzes — durchzuführen. Man erhält hier, für ähnliche Bewegungsvorgänge mit Flüssigkeitsreibung, eine Beziehung

$$\zeta = \mathrm{f}\,(\psi), \qquad (76)$$

„das Zahlengesetz der in Betracht kommenden Größe", also hier der Kraft k oder K. In diesem Gesetz ist die unabhängige Veränderliche ψ die Reynoldssche Zahl und ζ die Kennziffer des Sondergesetzes der Kräfte. Die Auftragung in einem rechtwinkligen Achsenkreuz ergibt wieder die übersichtliche „Kurve der Kennziffern ζ" oder „Eigenschaftskurve".

Jeder einzelne Modellversuch liefert eine bestimmte Reynoldssche Zahl $\psi = \frac{\mathrm{v\,l}}{\nu}$ als Abszisse und eine bestimmte Kennziffer $\zeta = \frac{\mathrm{k}}{\varrho\,\nu^2}$ — ebenfalls eine reine Zahl — als Ordinate, ein Wertepaar, das für alle einander mechanisch ähnliche Vorgänge, also auch für den Hauptvorgang, unveränderlich ist.

Die so gegebene Kurve bietet einen vorzüglichen Überblick über die Kennziffern ζ der betreffenden Vorgänge und ist gültig für alle Arten zäher Flüssigkeiten und unabhängig von der Wahl des Maßsystems. Es ist sonach möglich, die Ergebnisse von Modellmessungen, die im Wasser vorgenommen werden, ohne weiteres auf die Vorgänge in anderen Flüssigkeiten oder in Luft, von deren Zusammendrückbarkeit man häufig absehen kann, zu übertragen, sofern der betreffende Fall den Forderungen Reynoldsscher Ähnlichkeit genügt.

Blasius*) weist darauf hin, daß es vorteilhaft erscheint, Modellversuche für Luft (z. B. für Luftschiffe) in Wasser vorzunehmen. Denn sind die Abmessungen des Modells gleich ein Zehntel der Wirklichkeit gewählt, so ist bei Verwendung gleicher Flüssigkeit $v\,l = V\,L$ zu machen, also die Modellgeschwindigkeit $v = V\,.\,L/l = 10\,V$, d. i. gleich der zehnfachen der in Wirklichkeit vorhandenen Geschwindigkeit zu bemessen; während bei Verwendung von Wasser an Stelle Luft der gleiche Wert von ψ schon bei mäßigen Geschwindigkeiten erreicht wird, da ν für Wasser nur $^1/_{10}$ bis $^1/_{20}$ von dem für Luft ist. Als Flüssigkeiten mit noch geringerem ν nennt er für Modellversuche mit Zähigkeitserscheinungen: Quecksilber, Schwefelkohlenstoff, Äther, Methylalkohol.

Zieht man es vor, die Modellkraft in der Form des allgemeinen Ähnlichkeitsgesetzes, also $k = \alpha\,\varrho\,f\,v^2$, zu schreiben, so hat man an Stelle von $\zeta = f(\psi)$ eine Beziehung zwischen der Kennziffer α und der Reynoldsschen Zahl ψ, also:

$$\alpha = F(\psi) \qquad (77)$$

zu setzen, die eine entsprechende Darstellung und Verwendung wie $\zeta = f(\psi)$ gestattet, ohne jedoch inhaltlich etwas Neues zu bieten.

28. Das Cauchysche Modellgesetz für Bewegungsvorgänge unter der Wirkung elastischer Kräfte. Die Untersuchungen gelten für geometrisch ähnliche, homogene Körper, die sich nach allen Richtungen gleichartig verhalten. Es wird vorausgesetzt, daß nur „elastische Kräfte" wirken, das sind solche, welche in gleichem Verhältnis wie die durch sie erzeugten Formänderungen stehen. Andere physikalische Kräfte sollen ausgeschlossen sein. Bei sehr schnellen Schwingungsvorgängen müssen in einzelnen Fällen noch Verbesserungsglieder**) in den Differentialgleichungen der Bewegung in Betracht gezogen werden.

---

*) Blasius, Mitteilungen über Forschungsarbeiten des Vereins deutscher Ingenieure, Heft 131, S. 8.

**) Love-Timpe, Lehrbuch der Elastizität 1907, § 277 u. f.

Die Bezeichnungen sind die der früheren Abschnitte. Das gemeinsame Merkmal der unter a bis h entwickelten Modellgesetze besteht darin, daß entsprechende Zeiten in dem gleichen Verhältnis wie entsprechende lineare Abmessungen von Hauptausführung und Modell stehen. Diese Gesetzmäßigkeit soll nach Absatz d als das Cauchysche Modellgesetz bezeichnet werden.

a) Dehnungsschwingungen im Innern von Drähten, Seilen und Stäben. Die elastischen Kräfte in Hauptausführung und Modell sind $K = (\sigma) F$ und $k = \sigma f$, worin (σ) und σ die Normalspannungen bezeichnen. Nach Hookes Gesetz ist, wenn E und e die entsprechenden Elastizitätsmoduln sind und (ε) und ε die für ähnliche Vorgänge gleich große Dehnung ist:

$$(\sigma) = (\varepsilon) E \quad \text{und} \quad \sigma = \varepsilon e$$

und daher:

$$K = (\varepsilon) E F \quad \text{und} \quad k = \varepsilon e f \qquad (78)$$

Aus dem Vergleich der Trägheits- und elastischen Kräfte entspringt:

$$\varkappa = \frac{M B}{m b} = \frac{(\varepsilon) E F}{\varepsilon e f} = \frac{E}{e} \lambda^2$$

oder

$$\frac{(\varrho)}{\varrho} \lambda^3 \frac{\lambda}{\tau^2} = \frac{E}{e} \lambda^2,$$

woraus, wenn

$$(\nu) = \frac{E}{(\varrho)} \quad \text{und} \quad \nu = \frac{e}{\varrho} \qquad (79)$$

als „dynamische Elastizitätsmaße" der beiden Körper bezeichnet werden — zu messen in m^2/sk^2 — folgende Modellgesetze hervorgehen:

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{A)} & \tau = \lambda \sqrt{\dfrac{\nu}{(\nu)}} \\[2ex]
\text{B)} & T : t = \dfrac{L}{\sqrt{(\nu)}} : \dfrac{l}{\sqrt{\nu}} \\[2ex]
\text{C)} & V : v = \sqrt{(\nu)} : \sqrt{\nu} \\[2ex]
\text{D)} & B : b = \dfrac{(\nu)}{L} : \dfrac{\nu}{l} \\[2ex]
\text{E)} & \dfrac{V^2}{(\nu)} = \dfrac{v^2}{\nu} = \chi = \text{unv. Zahl.}
\end{array}\right\} \qquad (80)$$

Die Geschwindigkeiten, z. B. der Fortpflanzung der Erscheinungen, verhalten sich somit wie die Wurzeln aus den dynamischen Elastizitätsmaßen und sind unabhängig von den linearen Abmessungen. Für den Fall gleicher Stoffe bei beiden Körpern wird $V = v$, und das Modellgesetz der Zeiten lautet:

$$T : t = L : l \qquad (80\,a)$$

In Worten: Entsprechende Zeiten verhalten sich wie entsprechende lineare Abmessungen.

Der Kräftemaßstab $\varkappa$ wird aus dem Verhältnis der entsprechenden Kräfte mittels Gl. 78 ermittelt zu:

$$\varkappa = \frac{(\varepsilon)\,E\,F}{\varepsilon\,e\,f} = \lambda^2 \frac{E}{e} \qquad (80\,b)$$

oder bei gleichem Stoff zu:

$$\varkappa = \lambda^2 \qquad (80\,c)$$

Als unabhängige Veränderliche wäre bei dimensionsloser Darstellung unter Benutzung der Form E die Zahl $\chi = \frac{v^2}{\nu}$ oder auch $\frac{v}{\sqrt{\nu}}$ zu wählen.

b) D e h n u n g s s c h w i n g u n g e n i n u n b e g r e n z t e n f e s t e n K ö r p e r n. Die Elastizitätslehre zeigt, daß das elastische Verhalten homogener, nach allen Richtungen gleichartiger Stoffe durch zwei der drei Festwerte: Elastizitätsmodul, Schubmodul und Poissonsche Verhältnisziffer $\frac{1}{(m)}$ und $\frac{1}{m}$ der Querzusammenziehung bestimmt wird. Die Differentialgleichungen der Dehnungsschwingungen in unbegrenzten Körpern führen auf Modellgesetze derselben Form wie oben unter a, wenn die beiden Vergleichskörper aus gleichem Stoff bestehen, also $E\,(\varrho) = e/\varrho$ und $\frac{1}{(m)} = \frac{1}{m}$ ist. Es gilt hier also das Modellgesetz $V = v$, d. h.: Die Geschwindigkeiten, z. B. der Ausbreitung von Dehnungsschwingungen, sind unabhängig von linearen Größen, z. B. von den Wellenlängen; Dehnungswellen pflanzen sich mit unveränderlicher Geschwindigkeit in einem unbegrenzten Stoffe fort. Eine andere Form dieses Modellgesetzes ist:

$$T : t = L : l.$$

Es stehen also entsprechende Zeiten in dem gleichen Verhältnis wie entsprechende lineare Abmessungen.

Bei verschiedenen Stoffen in beiden Anordnungen treten in den Bewegungsgleichungen hier die drei Größen: Elastizitätsmodul, Poissonsche Verhältnisziffer und Dichte auf, und die Ähnlichkeitsverhältnisse müssen einer besonderen Prüfung unterzogen werden. Man findet auch hier dieselbe Gesetzmäßigkeit wie unter a, doch ist jetzt für (ν) und ν zu setzen:

$$(\nu) = \frac{E}{(\varrho)} \cdot \frac{1 - \frac{1}{(m)}}{\left(1 + \frac{1}{(m)}\right)\left(1 - \frac{2}{(m)}\right)} \quad \text{und} \quad \nu = \frac{e}{\varrho} \cdot \frac{1 - \frac{1}{m}}{\left(1 + \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)} \text{*)} \quad . \quad (81)$$

Dehnungswellen dieser Art breiten sich in Kugelform aus.

c) B i e g u n g s s c h w i n g u n g e n s t a b f ö r m i g e r K ö r p e r. Die einzelnen Teilchen stehen unter Wirkung elastischer Kräfte (σ) dF und σ df. Aus dem Vergleich der Trägheits- und der elastischen Kräfte folgen wieder die gleichen Modellgesetze wie unter a, so daß z. B. der Satz gilt: Die Schwingungsdauer ähnlicher stabförmiger Körper gleichen Stoffes wächst im Verhältnis der linearen Abmessungen, die Schwingungszahl also im umgekehrten Verhältnis.

d) B i e g u n g s v o r g ä n g e i n P l a t t e n, G e f ä ß e n u n d a n d e r e n K ö r p e r n. Für geometrisch ähnliche Platten und Gefäße desselben Stoffes hat Cauchy 1829 in einer der Pariser Akademie der Wissenschaften eingereichten Abhandlung folgende Verallgemeinerung eines von Savart 1825 aufgestellten Gesetzes abgeleitet**): „Wenn wir die Höhe des von einem Körper, einer Platte oder einem elastischen Stab ausgehenden Tones durch die Anzahl der in der Zeiteinheit hervorgebrachten Schwingungen messen, so steht die Höhe im umgekehrten Verhältnis wie die linearen Abmessungen des Körpers, der Platte oder des Stabes, vorausgesetzt, daß seine sämtlichen Abmessungen in einem gegebenen Verhältnis geändert werden.“ Entsprechende Zeiten stehen also im geraden Verhältnis der linearen Abmessungen, und die Modellgesetze sind die gleichen wie unter a, b, c.

Ob für geometrisch ähnliche Körper, deren Stoffe verschieden sind, einfache Ähnlichkeitsbeziehungen gelten, bedarf einer besonderen Prüfung.

e) L ä n g s s c h w i n g u n g e n i n u n b e g r e n z t e n e l a s t i s c h e n F l ü s s i g k e i t e n. Vermöge der Volumelastizität einer Flüssigkeit breitet sich eine örtliche Zusammendrückung in ihr als Welle in Kugelanordnung aus. Auf die einzelnen Teilchen der beiden mechanisch ähnlichen Vorgänge wirken dabei die entsprechenden Druckkräfte $K = P\,F$ und $k = p\,f$.

---

*) Riecke, Lehrbuch der Physik, 1. Bd., 1912, S. 255 u. 259.

**) Routh, Dynamik, deutsch von Schepp, 1. Bd. 1898, S. 331. Hier ist der Cauchysche Beweis in gekürzter Form wiedergegeben

Für die Drücke P und p gelten die Gleichungen:

$$P = C \frac{\varDelta \,\mathrm{Vol}}{\mathrm{Vol}}$$

$$p = c \frac{\varDelta \,\mathrm{vol}}{\mathrm{vol}},$$

worin C und c die Volum-Elastizitätsmoduln der beiden Körper, gemessen in kg/m², sind. Aus dem Vergleich der Trägheits- und der Druckkräfte ergibt sich der Kräftemaßstab K zu:

$$\varkappa = \frac{M\,B}{m\,b} = \frac{C \dfrac{\varDelta \,\mathrm{Vol}}{\mathrm{Vol}} F}{c \dfrac{\varDelta \,\mathrm{vol}}{\mathrm{vol}} f}$$

oder da $\varDelta$ Vol/Vol und $\varDelta$ vol/vol bei mechanisch ähnlichen Vorgängen gleiche Zahlen sind:

$$\frac{(\varrho)}{\varrho} \lambda^3 \frac{\lambda}{\tau^2} = \frac{C}{c} \lambda^2$$

also

$$\tau = \lambda \sqrt{\frac{c/\varrho}{C/(\varrho)}}$$

oder

$$\left.\begin{array}{l} \tau = \lambda \sqrt{\dfrac{c/\varrho}{C/(\varrho)}} \\[2ex] \tau = \lambda \sqrt{\dfrac{\nu}{(\nu)}} \end{array}\right\}, \qquad (82)$$

worin $(\nu) = C/(\varrho)$ und $\nu = c/\varrho$ die „dynamischen Kompressionsmaße" der beiden Flüssigkeiten — zu messen in m²/sk² — sind. Die äußere Form der Modellgesetze ist also die gleiche wie unter a, und es gelten daher sinngemäß die entsprechenden Beziehungen.

f) Schiebungsschwingungen in unbegrenzten elastisch festen Körpern. Außer den unter b behandelten Dehnungsschwingungen kommen in unbegrenzten festen Körpern noch Querschwingungen auf Grund der Schubelastizität zustande. Die Voraussetzungen sind die gleichen wie früher. Die in Hauptausführung und Modell auftretenden Schubkräfte sind $K = (\tau)\, d\,F$ und $k = \tau\, d\,f$, worin (τ) und τ hier nicht den Zeitmaßstab, sondern Schubspannungen bedeuten. Nach dem Hookeschen Elastizitätsgesetz ist, wenn (γ) und γ die bei mechanisch ähnlichen Vorgängen gleich großen Schiebungswinkel in Bogenmaß, und G und g die entsprechenden Schubmoduln der beiden Stoffe sind: $(\tau) = (\gamma)\, G$ und $\tau = \gamma\, g$ und daher:

$$K = (\gamma)\, G\, d\,F \quad \text{und} \quad k = \gamma\, g\, d\,f. \qquad (83)$$

Aus dem Vergleich der Trägheits- und Schubkräfte erhält man für den Kräftemaßstab:

$$\varkappa = \frac{\mathrm{M\,B}}{\mathrm{m\,b}} = \frac{(\gamma)\,\mathrm{G\,d\,F}}{\gamma\,\mathrm{g\,d\,f}}$$

oder mit $(\gamma) = \gamma$

$$\frac{(\varrho)}{\varrho}\lambda^3\frac{\lambda}{\tau^2} = \frac{\mathrm{G}}{\mathrm{g}}\lambda^2.$$

Führt man

$$(\nu) = \frac{\mathrm{G}}{(\varrho)} \quad \text{und} \quad \nu = \frac{\mathrm{g}}{\varrho} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (84)$$

als „dynamische Schiebungsmaße" der beiden Körper — zu messen in $\mathrm{m^2/sk^2}$ — ein, so entstehen wieder dieselben Formen der Modellgesetze wie unter a, jedoch mit dem Unterschiede, daß an Stelle von E und e die Schubmoduln G und g treten und die Schiebungswellen sich wie die Wellen unter b und e in Kugelanordnung ausbreiten.

g) Verdrehungsschwingungen stabförmiger Körper. Zu vergleichen sind wie unter f die Schubkräfte und die Trägheitskräfte der Hauptausführung und des Modells. Es gelten daher hier die gleichen Ansätze wie dort; doch entfällt eine Ausbreitung der Erscheinungen in Kugelform. Das Modellgesetz für den Zeitmaßstab lautet also wieder:

$$\tau = \lambda\sqrt{\frac{\nu}{(\nu)}}$$

und das für entsprechende Zeiten:

$$\mathrm{T:t} = \frac{\mathrm{L}}{\sqrt{(\nu)}} : \frac{\mathrm{l}}{\sqrt{\nu}}$$

oder bei gleichem Stoff:

$$\mathrm{T:t = L:l},$$

also in Worten wieder: Die Schwingungszeiten stehen bei mechanisch ähnlichen Vorgängen im geraden Verhältnis der linearen Abmessungen, die Schwingungszahlen somit im umgekehrten.

h) Zusammengesetzte Festigkeitsvorgänge in Körpern gleichen Stoffes. Im allgemeinsten Beanspruchungsfalle werden die elastischen Kräfte der beiden mechanisch ähnlichen Vorgänge der Hauptausführung und des Modells aus Dehnungskräften (σ) F, σ f und Schiebungskräften (τ) F, τ f gebildet, worin (σ), σ entsprechende Normalspannungen und (τ), τ entsprechende Schubspannungen sind. Beide Kräftearten ergeben unter Hinweis auf Gl. 80c - bei Voraussetzung des gleichen Stoffes — denselben Kräftemaßstab $\varkappa = \lambda^2$. Dies geht auch schon daraus hervor, daß nach dem Hookeschen Gesetze $(\sigma) = (\varepsilon)\,\mathrm{E} = \varepsilon\,\mathrm{e} = \sigma$ und $(\tau) = (\gamma)\,\mathrm{G} = \gamma\,\mathrm{g} = \tau$ ist und sich daher entsprechende Kräfte wie entsprechende Flächen verhalten. Entsprechende Spannungen sind gleich groß.

Wie in den eben behandelten Fällen gilt also als Modellgesetz für den Zeitmaßstab bei gleichem Stoff der beschleunigten Massen:

$$\tau = \lambda$$

und daher:

$$T : t = L : l$$

und:

$$\frac{V}{v} = \frac{\lambda}{\tau} = 1$$

also:

$$V = v = \text{unv.},$$

woraus sich folgende Verallgemeinerung des Cauchyschen Modellgesetzes ergibt: Wenn sich zwei geometrisch ähnliche Körper gleichen Stoffes unter der Wirkung entsprechender, aber sonst beliebiger elastischer Kräfte mechanisch ähnlich bewegen, verhalten sich entsprechende Zeiten wie die linearen Abmessungen und entsprechende Kräfte wie die Quadrate der linearen Abmessungen. Entsprechende Spannungen und entsprechende Geschwindigkeiten sind je gleich groß.

29. Das Modellgesetz für Wellenbewegungen unter der Wirkung von Kapillarkräften. An der Oberfläche von Flüssigkeiten können Bewegungen beobachtet werden, bei denen die Kapillarkraft in der oberen Schicht die Schwere bedeutend an Einfluß überwiegt. Ein solcher Fall liegt z. B. bei den leichten, durch einen sanften Wind hervorgerufenen Kräuselungen des Wasserspiegels vor und soll der folgenden Betrachtung zugrunde gelegt werden. Die durch die Kapillarität des Wassers bedingten Wellen heißen Kapillarwellen oder nach Lord Kelvins Vorschlag „Riffeln". Sie befolgen wesentlich andere Gesetze wie die langen, durch die Schwere hervorgerufenen Wellen.

Kapillarkräfte erzeugen an der Grenze zweier Flüssigkeiten oder an der hier vorausgesetzten freien Wasseroberfläche in einer sehr dünnen Grenzschicht eine von der Temperatur abhängige, sonst unveränderliche Zugspannung, die Oberflächenspannung S oder s, die in einem an Luft angrenzenden Wasserspiegel etwa $74 \,.\, 10^{-4}$ kg/m beträgt und deren Wirkung auf die Druckverhältnisse in der oberen Grenzschicht der einer elastischen Haut gleichkommt, die über die Oberfläche der Flüssigkeit gespannt ist.

Zur Untersuchung der mechanisch ähnlichen Erscheinung dieser Art vergleiche man je miteinander die Trägheitskräfte MB und mb und die Kapillarkräfte

$$K = S\,L \quad \text{und} \quad k = s\,l, \qquad \qquad (85)$$

worin S und s die Oberflächenspannungen der Hauptausführung und des Modells und L, l zwei entsprechende Längen sind. Man erhält dann für den Kräftemaßstab $\varkappa$:

$$\varkappa = \frac{\mathrm{M\,B}}{\mathrm{m\,b}} = \frac{\mathrm{S\,L}}{\mathrm{s\,l}} = \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{s}}\lambda$$

und hieraus, wenn (ϱ) und ϱ die Dichten der beiden Flüssigkeiten sind,

$$\frac{(\varrho)}{\varrho}\lambda^3\frac{\lambda}{\tau^2} = \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{s}}\lambda$$

oder

$$\tau^2 = \lambda^3\frac{\mathrm{s}/\varrho}{\mathrm{S}/(\varrho)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (86)$$

Bezeichnet man noch $(\omega) = \mathrm{S}/(\varrho)$ und $\omega = \mathrm{s}/\varrho$ als „dynamische Kapillaritätsmaße" der beiden Flüssigkeiten — zu messen in $\mathrm{m}^3/\mathrm{sk}^2$ —, so gelten folgende Modellgesetze entsprechend dem Vorgehen in den früheren Untersuchungen:

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{A)} & \tau^2 = \lambda^3\dfrac{\omega}{(\omega)} \\[2ex]
\text{B)} & \mathrm{T}^2:\mathrm{t}^2 = \dfrac{\mathrm{L}^3}{(\omega)}:\dfrac{\mathrm{l}^3}{\omega} \\[2ex]
\text{C)} & \mathrm{V}:\mathrm{v} = \sqrt{\dfrac{(\omega)}{\mathrm{L}}}:\sqrt{\dfrac{\omega}{\mathrm{l}}} \\[2ex]
\text{D)} & \mathrm{B}:\mathrm{b} = \dfrac{(\omega)}{\mathrm{L}^2}:\dfrac{\omega}{\mathrm{l}^2} \\[2ex]
\text{E)} & \dfrac{\mathrm{V}^2\mathrm{L}}{(\omega)} = \dfrac{\mathrm{v}^2\mathrm{l}}{\omega} = \xi
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (87)$$

worin ξ eine unbenannte Zahl, also unabhängig von der Wahl des Maßsystems ist.

Bei Gleichheit der Flüssigkeiten in Haupt- und Modellvorgang geht C über in:

$$\mathrm{V}:\mathrm{v} = \sqrt{\frac{1}{\mathrm{L}}}:\sqrt{\frac{1}{\mathrm{l}}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (88)$$

eine Gleichung, aus der folgender Schluß gezogen werden kann: Die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten von Kapillarwellen stehen im umgekehrten Verhältnis der Wurzeln aus den Wellenlängen*), im Gegensatze zu den durch die Schwere bedingten Trochoidenwellen, deren Geschwindigkeiten im geraden Verhältnis der Wurzeln aus den Längen wachsen. Bei den Trochoidenwellen nimmt die Geschwindigkeit mit der Länge zu, bei den Riffelwellen dagegen ab.

*) Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik, deutsch von Friedel, 1907 § 263.

Aus dem Vergleich der Wellenlängen dieser Kapillarerscheinungen hat Grunmach*) die Oberflächenspannung S verschiedener Flüssigkeiten bestimmt.

30. Überblick über die Modellgesetze. In den Abschnitten 22—29 sind die verschiedenen Modellgesetze aufgestellt worden, welche zu beachten sind, je nachdem irdische Schwerkräfte oder die allgemeine Schwere oder innere Flüssigkeitsreibung oder elastische oder Kapillarkräfte als einzige physikalische Kräfteart auf die mechanisch ähnlich zu gestaltenden Vorgänge bestimmenden Einfluß ausüben. Wie verschieden der zeitliche Verlauf und damit die sonstigen Umstände im Modell nachzuahmen sind, wenn mechanische Ähnlichkeit verbürgt sein soll, geht aus folgendem Überblick über die bisher abgeleiteten Modellgesetze hervor, welche hier nur für die Fälle gleichen Stoffes für Hauptausführung und Modell zusammengestellt sind.

	Es gilt unter der Wirkung von				
	Schwerkräften: . . . . Froudes Modellgesetz	Allgemeiner Schwere: . . . . Thomsons Modellgesetz	Flüssigkeitsreibung: . . . . Reynolds' Modellgesetz	Elastischen Kräften: . . . . Cauchys Modellgesetz	Kapillarkräften: . . . . Nachstehendes Modellgesetz
Zeitmaßstab	$\tau = \lambda^{\frac{1}{2}}$	$\tau = 1$	$\tau = \lambda^2$	$\tau = \lambda$	$\tau = \lambda^{\frac{3}{2}}$
Zeiten . . .	$T : t = L^{\frac{1}{2}} : l^{\frac{1}{2}}$	$T = t$	$T : t = L^2 : l^2$	$T : t = L : l$	$T : t = L^{\frac{3}{2}} : l^{\frac{3}{2}}$
Geschwindigkeiten	$V : v = L^{\frac{1}{2}} : l^{\frac{1}{2}}$	$V : v = L : l$	$V : v = L^{-1} : l^{-1}$	$V = v$	$V : v = L^{-\frac{1}{2}} : l^{-\frac{1}{2}}$
Beschleunigungen	$B = b$	$B : b = L : l$	$B : b = L^{-3} : l^{-3}$	$B : b = L^{-1} : l^{-1}$	$B : b = L^{-2} : l^{-2}$
Für dimensionslose Darstellungen	$\frac{V^2}{L(g)} = \frac{v^2}{lg} = \varphi$	$T^2(a)(\varrho) = t^2 a \varrho = \eta$	$\frac{VL}{(\nu)} = \frac{vl}{\nu} = \psi$	$\frac{V^2}{(\nu)} = \frac{v^2}{\nu} = \chi$	$\frac{V^2L}{(\omega)} = \frac{v^2l}{\omega} = \xi$
Kräftemaßstab . . .	$\varkappa = \lambda^3$	$\varkappa = \lambda^4$	$\varkappa = 1$	$\varkappa = \lambda^2$	$K = \lambda$
Kräfte . . .	$K : k = L^3 : l^3$	$K : k = L^4 : l^4$	$K = k$	$K : k = L^2 : l^2$	$K : k = L : l$
Spannungen = Kräfte auf Fl.-Einh.	$P : p = L : l$	$P : p = L^2 : l^2$	$P : p = L^{-2} : l^{-2}$	$P = p$	$P : p = L^{-1} : l^{-1}$

*) Grunmach, Annalen der Physik, 1900 Bd. 3 S. 660.

31. **Die Modellgesetze für Bewegung unter der gleichzeitigen Wirkung zweier Kräftearten.** Im Abschnitt 19 ist ausgesprochen worden, daß der einfache Fall der Ähnlichkeitsmechanik nicht vorliegt, wenn an den Beschleunigungsvorgängen der Hauptausführung und des Modells mehrere Arten physikalischer Kräfte im Sinne des Abschnitts 11 beteiligt sind. Dieser Fall werde jetzt untersucht: Es wirke z. B. außer der Schwerkraft noch die innere Flüssigkeitsreibung.

Nach den Betrachtungen des Abschnitts 19 erhält man dann für die drei Maßstäbe λ, τ, $\varkappa$ eine erste Beziehung aus dem Vergleich entsprechender Trägheitskräfte, eine zweite aus dem Vergleich entsprechender Schwerkräfte und eine dritte aus dem Vergleich der inneren Reibungskräfte der Flüssigkeit, also drei Gleichungen der folgenden Form:

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \varkappa = f_1(\lambda, \tau) \\ &\text{b)} \quad \varkappa = f_2(\lambda, \tau) \\ &\text{c)} \quad \varkappa = f_3(\lambda, \tau). \end{aligned}$$

Aus dem Bestehen dieser drei Gleichungen mit den drei Unbekannten λ, τ, $\varkappa$ geht hervor, daß jetzt auch der Wert von λ zu berechnen ist, also nicht wie in den früheren einfachen Fällen frei gewählt werden darf.

Gln. a und b führen durch Gleichsetzung auf das Froudesche Modellgesetz $\tau = F_1(\lambda)$, welches nach Gl. 30 lautet:

$$\tau = \sqrt{\lambda \frac{g}{(g)}} \qquad (89)$$

Gln. b und c liefern ein zweites, hier gleichzeitig geltendes Modellgesetz $\tau = F_2(\lambda)$, das Reynoldssche, das nach Gl. 61 lautet:

$$\tau = \lambda^2 \frac{\nu}{(\nu)} \qquad (90)$$

In Gln. 89 und 90 bedeuten (g) und g die Erdbeschleunigungen, sowie $(\nu) = (\eta)/(\varrho)$ und $\nu = \eta/\varrho$ die „dynamischen Zähigkeitsmaße“ der beiden Flüssigkeiten. Damit beiden Gesetzen zugleich Genüge geleistet wird, muß gelten:

$$\lambda^2 \frac{\nu}{(\nu)} = \sqrt{\lambda \frac{g}{(g)}}$$

oder unter Gleichsetzung von (g) und g:

$$\lambda^4 \frac{\nu^2}{(\nu)^2} = \lambda$$

also:

$$\lambda^3 = \left(\frac{(\nu)}{\nu}\right)^2$$

oder:

$$\lambda = \left(\frac{(\nu)}{\nu}\right)^{\frac{2}{3}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (91)$$

und bei gleichem Stoff für Hauptausführung und Modell:

$$\lambda = 1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (91\,\mathbf{a})$$

zwei Gleichungen, die ein Modellgesetz für den Längenmaßstab λ darstellen und so ausgesprochen werden können: Stehen zwei mechanisch ähnlich zu gestaltende Vorgänge unter der Wirkung der Schwerkraft und der Flüssigkeitsreibung, so ist der Längenmaßstab λ nicht mehr frei wählbar, sondern nach Gl. 91 durch die Eigenschaften der beiden Flüssigkeiten bestimmt. Bei gleichem Stoff läßt sich der Hauptvorgang n i c h t durch ein Modell nachahmen.

Aus Gl. 90 und 91 folgt weiter als Modellgesetz für den Zeitmaßstab:

$$\tau = \left(\frac{(\nu)}{\nu}\right)^{\frac{4}{3}} \frac{\nu}{(\nu)} = \left(\frac{(\nu)}{\nu}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (92)$$

Ferner ergibt sich aus Gln. 90 und 91 als Modellgesetz für entsprechende Geschwindigkeiten:

$$\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{v}} = \frac{\lambda}{\tau} = \left(\frac{(\nu)}{\nu}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (93)$$

Der Kräftemaßstab $\varkappa$ ist aus

$$\varkappa = \frac{(\gamma)}{\gamma} \lambda^3 = \frac{(\gamma)}{\gamma} \frac{(\nu)^2}{\nu^2}$$

zu berechnen.

In den meisten Fällen, in denen Schwere und Zähigkeit vereint wirken, wird es nicht möglich sein, diese Gesetze bei den Modellversuchen praktisch zu verwirklichen, so daß auf eine vollständige Nachahmung der Vorgänge der Hauptausführung in einem Modell verzichtet werden muß. Es ist dann in jedem Einzelfall besonders zu prüfen, ob nicht der Einfluß einer der Kräfte, z. B. der inneren Reibung so geringfügig ist, daß er ohne nennenswerten Schaden für den Vergleich außer acht gelassen werden kann. Es liegt somit der Fall angenäherter mechanischer Ähnlichkeit vor, der in Abschnitt 21 vornehmlich wegen der Notwendigkeit der Fehlerabschätzung erörtert worden ist.

Die hier für die Schwerkraft und die Zähigkeit angestellten Betrachtungen lassen sich für je zwei andere physikalische Kräftearten unter entsprechender Anpassung verwenden. Bei gleichzeitiger Wirkung von irdischer

Schwere*) und elastischen Kräften bestehen gleichzeitig das Froudesche und das Cauchysche Modellgesetz der Gln. 30 und 80, also

$$\tau = \sqrt{\lambda \frac{g}{(g)}}$$

und

$$\tau = \lambda \sqrt{\frac{\nu}{(\nu)}},$$

aus deren Vereinigung und mit $(g) = g$ folgende Modellgesetze hervorgehen:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = \dfrac{(\nu)}{\nu} \qquad \tau = \sqrt{\lambda} = \sqrt{\dfrac{(\nu)}{\nu}} \qquad \dfrac{V}{v} = \dfrac{\lambda}{\tau} = \sqrt{\lambda} = \sqrt{\dfrac{(\nu)}{\nu}} \\ \varkappa = \dfrac{(\gamma)}{\gamma}\lambda^3 = \dfrac{(\gamma)(\nu)^3}{\gamma\,\nu^3}. \end{array}\right| \qquad 94$$

hierin haben (ν), ν je nach Art der elastischen Kräfte die aus den Einzelfällen des Abschnitts 28 zu entnehmende Bedeutung.

32. **Der Fall allgemeiner mechanischer Ähnlichkeit ohne Bestehen eines besonderen Modellgesetzes.** Es wird hier vorausgesetzt, daß physikalische Kräfte im Sinne des Abschnitts 11 nicht wirken. An den beiden mechanisch ähnlich verlaufenden Vorgängen sollen nur beteiligt sein: Die Massenbeschleunigungs- oder Trägheitskräfte und Kräfte aus jener Sondergruppe des Abschnitts 11, deren Vertreter insofern kein Modellgesetz begründen konnten, als sie sich nicht durch physikalische Beiwerte erklären ließen. Als Beispiel möge folgender, praktisch allerdings nicht zu verwirklichender Idealfall dienen: Eine unbegrenzt ausgedehnte Flüssigkeit ströme gegen einen in ihr ruhenden Körper. Die Flüssigkeit sei unzusammendrückbar und reibungsfrei: auch Reibungskräfte an der Oberfläche des Körpers seien ausgeschlossen.

Der Vergleich der Trägheitskräfte liefert wie immer die dem allgemeinen Newtonschen Ähnlichkeitsgesetz gleichwertige Beziehung:

$$\varkappa = \frac{M\,B}{m\,b} = \frac{(\varrho)}{\varrho}\,\frac{\lambda^4}{\tau^2} \qquad 95$$

Dies ist die einzige Gleichung, die zwischen den drei Grundmaßstäben λ, τ, $\varkappa$ in diesem Falle aufgestellt werden kann, da die Druckkräfte unzusammendrückbare Flüssigkeiten auf keine Ähnlichkeitsbeziehung führen. Daraus folgt, daß nicht nur λ, wie in den früheren einfachen Ähnlichkeitsfällen,

*) Der Fall gleichzeitigen Wirkens von allgemeiner Schwere und Elastizität kommt in der Astrophysik vor; er ist in ähnlicher Weise wie die oben besprochenen Fälle zu behandeln. Hierzu siehe Bromwich, Proc. Lond. Math. Soc. Bd. 30 1898 S. 98.

sondern auch frei gewählt werden darf, worauf dann $\varkappa$ durch Gl. 95 bestimmt ist. Da λ und τ willkürlich angenommen werden können, so ergibt sich für die beiden Vergleichsvorgänge kein Modellgesetz der entsprechenden Geschwindigkeiten: Die Geschwindigkeiten der Hauptausführung und des Modells können frei gewählt werden. Für die Kräfte gilt nur das durch Gl. 95 ausgedrückte allgemeine Ähnlichkeitsgesetz Newtons, das für zwei beliebige einander entsprechende Kräfte nach den Ausführungen der Abschnitte 15 und 16 in der Form der Gln 20 geschrieben werden kann:

$$\left|\begin{array}{l} K = \alpha\,(\varrho)\,F\,V^2 \\ k = \alpha\,\varrho\,f\,v^2 \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (95\,a)$$

worin die Kennziffer α für beide Kräfte denselben Zahlenwert hat.

III. Anwendungen der Ähnlichkeitsmechanik.

33. **Die Widerstände quergestellter, ganz oder teilweise eingetauchter Platten in unbegrenztem Wasser.** (Anwendung 1.) Das im Teil I und II wiederholt zur Erläuterung herangezogene Beispiel des Abschnitts 2 werde jetzt nach den Vorschriften der Ähnlichkeitsmechanik zu Ende geführt.

Für die Hauptausführung ist gegeben: Plattenfläche F = 0,8 . 0,8 = 0,64 m²; Tauchtiefe 0,8 m, gemessen vom Spiegel bis Plattenoberkante; Fortschrittsgeschwindigkeit der Platte in Richtung der Flächennormalen V = 5 m/sk. Die Aufgabe lautet: Der Widerstand dieser großen Platte in Seewasser vom Einheitsgewicht (γ) = 1025 kg/m³ ist mittels des Modellverfahrens zu bestimmen.

Das Modell, das in gewöhnlichem Wasser mit $\lambda = 1000$ kg/m³ geschleppt werden soll, werde im Maßstabe 1 : 4 hergestellt; also ist der Längenmaßstab $\lambda = 4$. Da die Bewegungsvorgänge sich nahe der Flüssigkeitsoberfläche abspielen, treten die in Abschnitt 2 geschilderten Wellenerscheinungen auf. Damit der Hauptvorgang im Modell mechanisch ähnlich nachgebildet werden kann, sind die Arten der an der Beschleunigung beteiligten Kräfte festzustellen: In Frage kommen die Schwerkräfte und die an der Flüssigkeit wirkenden äußern und innern Normaldrücke. Da die Flüssigkeit sich hier praktisch als unzusammendrückbar erweist, so begründen nach Abschnitt 11 die Normaldrücke kein Modellgesetz, und die Schwerkräfte allein haben maßgebenden Einfluß auf den zeitlichen Verlauf, so daß zur Erzielung mechanischer Ähnlichkeit nach Abschnitt 22 das Froudesche Modellgesetz einzuhalten ist. Für den Zeitmaßstab gilt also Gl. 32:

$$\sqrt{\lambda} = \sqrt{4} = 2;$$

d. h.: Wenn die Oberflächenwellen mechanisch ähnlich verlaufen sollen, so müssen alle Zeiten der großen Ausführung gleich dem zweifachen der entsprechenden Modellzeiten sein — unter Modell hier die kleine Platte und die umgebende Flüssigkeit verstanden.

Die so vorgeschriebenen Zeitverhältnisse werden durch richtige Bemessung der Modellplattengeschwindigkeit v erzwungen, die das Froudesche Modellgesetz für entsprechende Geschwindigkeiten (Gl. 36), also:

$$V : v = \sqrt{\lambda} = \sqrt{4} = 2,$$

erfüllen muß. Es sind daher alle bei dem Modell auftretenden Geschwindigkeiten auf die Hälfte der entsprechenden Geschwindigkeiten der großen Ausführung zu verkleinern, das Modell ist mit $v = \frac{V}{2} = 2{,}5$ m/sk zu schleppen. Sein Widerstand wird hierbei zu $w = 28.01$ kg gemessen*).

Der Kräftemaßstab wird nach Gl. 40 bestimmt zu:

$$\varkappa = \lambda^3 \frac{(\gamma)}{\gamma} = 4^3 \cdot \frac{1025}{1000} = 65{,}6,$$

und daher ist der gesuchte Widerstand der großen Platte:

$$W = w\,\varkappa = 28.01 \cdot 65{,}6 = 1837.5 \text{ kg}.$$

Die Überdrücke (über die Atmosphäre) ΔP und Δp, sowohl auf die Platten wie innerhalb der Flüssigkeiten, haben nach Gl. 45 den Übertragungsmaßstab

$$\frac{\Delta P}{\Delta p} = \frac{(\gamma)}{\gamma}\,\lambda = \frac{1025}{1000} \cdot 4 = 4.1\,,$$

so daß z. B. jedem an beliebiger Stelle der Modellplatte gemessenen Überdruck ein 4,1 mal so großer Wert an der großen Platte entspricht.

*) H. Engels und Fr. Gebers, Der Beiwert k in der Formel $W = k\,\gamma\,F\,\frac{v^2}{2g}$ für den Wasserwiderstand bewegter plattenförmiger und prismatischer Körper. Schiffbau IX. Jahrg. Nr. 6 und 7. Ferner Engels, Handbuch des Wasserbaus 1914 II. Bd. S. 882.

Bei dimensionsloser Vorstellung, nach Abschnitt 24, würde der oben benutzte Modellversuch folgenden Punkt der Eigenschaftskurve $\alpha = F(\varphi)$ liefern: Die Abszisse $\varphi = \frac{v^2}{g\,l}$ wird mit $l = 0{,}2$ m:

$$\varphi = \frac{2{,}5^2}{9{,}81 \,.\, 02} = 3{,}19.$$

Die Ordinate, welche durch die Kennziffer α in der Gl. $k = \alpha\,\varrho\,f\,v^2$ erklärt wird, berechnet sich mit $f = 0{,}2^2 = 0{,}04$ m² zu

$$\alpha = \frac{k}{\varrho \,.\, f\,v^2} = \frac{28{,}01}{1000/g \,.\, 0{,}04 \,.\, 2{,}5^2} = 1{,}10.$$

Das Kennzeichen mechanischer Ähnlichkeit liegt in der Übereinstimmung des Wertepaars φ, α; die Hauptausführung muß daher das gleiche φ und α wie das Modell ergeben: In der Tat erhält man:

$$\varphi = \frac{5^2}{9{,}81 \,.\, 0{,}8} = 3{,}19\,.$$

$$\alpha = \frac{K}{(\varrho)\,F\,V^2} = \frac{1837{,}5}{1025/g \,.\, 0{,}64 \,.\, 5^2} = 1{,}10.$$

Die Zulässigkeit des Verfahrens für beliebig geformte, aus- und eintauchende Platten bei beliebiger Tauchtiefe — zunächst innerhalb eines abgegrenzten Bereichs — haben Engels und Gebers in den Jahren 1906 und 1907 durch sorgfältige in der Übigauer Versuchsanstalt durchgeführte Versuche nachgewiesen. Die inneren Reibungskräfte, welche bei Flüssigkeitsbewegungen stets auftreten, haben auf das hier durch Versuche festgestellte Modellgesetz so gut wie keinen Einfluß.

34. Ähnlichkeitsbeziehungen bei Pendeln. (Anwendung 2.) Zwei geometrisch ähnliche Pendel mögen sich bei Annahme gleichen Ausschlagwinkels unter alleiniger Wirkung der Schwere bewegen. Die linearen Abmessungen der Hauptausführung sind λ mal so groß wie die entsprechenden des Modells. Die Auflagerwiderstände starrer Körper haben nach Abschnitt 11 keinen Einfluß auf das Modellgesetz, die Schwere ist allein bestimmend. Es muß also das Froudesche Modellgesetz bestehen.

Nach Abschnitt 22 wird daher der Zeitmaßstab:

$$\tau = \sqrt{\lambda \frac{g}{(g)}} = \sqrt{\lambda}\,.$$

Ferner gilt für entsprechende Zeiten:

$$T : t = \sqrt{\frac{L}{(g)}} : \sqrt{\frac{l}{g}}\,.$$

und für entsprechende Geschwindigkeiten:

$$V : v = \sqrt{\lambda}\,.$$

sowie für entsprechende Beschleunigungen:

$$B = b.$$

Der Kräftemaßstab z wird, wenn (γ) und γ die beiden Einheitsgewichte sind:

$$z = K : k = (\gamma) L^3 : \gamma l^3.$$

Es sind also alle an mechanische Ähnlichkeit zu stellenden Forderungen erfüllt, und es gilt der Satz: Geometrisch ähnliche Pendel bewegen sich bei gleichem Ausschlag selbsttätig mechanisch ähnlich.

35. Mechanische Ähnlichkeit der freien Gerstnerschen Trochoidenwellen. (Anwendung 3.) Die zuerst von Gerstner 1802 und dann erneut von Rankine 1862 wieder untersuchten Trochoidenwellen sind freie an der Meeresoberfläche zu beobachtende Wellen, deren Entstehungsursache, der Wind, an der betreffenden Stelle nicht mehr anhält. Sie treten am vollkommensten auf hoher See als „Dünungswellen" auf, welche als Folge des Windes nach dessen Abflauen unter der Wirkung der Schwere noch lange hinterbleiben.

Die einzelnen Flüssigkeitsteilchen durchlaufen bei reinen Trochoidenwellen sämtlich in der gleichen Zeit, der Schwingungszeit, Kreisbahnen, deren Durchmesser mit der Tiefe nach einem Exponentialgesetz abnimmt, um erst in unendlicher Tiefe gleich Null zu werden. Die freie Oberfläche ist im Querschnitt eine Linie unveränderlichen Druckes und hat die Form einer durch Abrollen eines Kreises entstehenden Trochoide. Die im Innern der Flüssigkeit liegenden Linien unveränderlichen Druckes sind ebenfalls Trochoiden von gleicher Wellenlänge wie die oberste, aber mit nach unten immer kleiner werdenden Höhen. Die Höhe jeder einzelnen Trochoide, gemessen vom Talpunkt bis zum Scheitel des Kammes, ist gleich dem Durchmesser der von den Flüssigkeitsteilchen einer Trochoide durchlaufenen Kreisbahnen. Jede der übereinanderliegenden Trochoiden kann als mögliche freie Oberfläche in der Natur vorkommen und als solche betrachtet werden, wobei als äußere oben gelegene Trochoide die Zykloide, das ist die mit Spitzen in den Kämmen verlaufende Trochoide gelten soll. Die unterste, in unendlicher Tiefe darunter befindliche Trochoide ist eine wagerechte Gerade. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle ist abhängig von der Länge und unabhängig von der Höhe der Welle. Handelt es sich in einem praktischen Fall um eine Trochoidenkurve von gegebener Wellenlänge und Höhe, so empfiehlt es sich bei Ähnlichkeitsbetrachtungen, die Schar der Trochoiden in Gedanken nach oben bis zur Zykloidenkurve als idealer Grenze zu ergänzen, so daß als „vollständige Trochoidenschar" die Gesamtheit aller Trochoiden von der in unendlicher Tiefe wagerecht verlaufenden bis zur Zykloide oben gelten soll. Der Begriff der „vollständigen Trochoidenwelle befreit die Ähnlichkeitsuntersuchungen von störenden Betrachtungen über den Einfluß der verschiedenen Wellenhöhen und führt auf ein besonders einfaches und allgemeines Endergebnis. Bei Bezugnahme auf den jeweils vorliegenden praktischen Fall sind dann die oberen Trochoiden bis zur wirklichen Wellenoberfläche wieder wegzudenken.

Mit irgend einer solchen vollständigen Trochoidenwelle werde jetzt eine kürzere geometrisch ähnliche „Modellwelle" verglichen. Der Längenmaßstab sei λ. Da die reine Trochoidenform nur durch die Schwere — unter Ausschaltung einer Flüssigkeitsreibung — bedingt wird, so kommt für die Ähnlichkeitsbeziehungen wieder das Froudesche Modellgesetz in Frage. Es ist also $\tau = \sqrt{\lambda}$ oder $T : t = \sqrt{L} : \sqrt{l}$; in Worten: Entsprechende Zeiten, z. B. die Schwingungszeiten oder die Umlaufszeiten entsprechender Teilchen wachsen wie die Wurzeln aus den Wellenlängen. Für entsprechende Geschwindigkeiten gilt weiter:

$$V : v = \sqrt{L} : \sqrt{l};$$

also auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der Trochoidenwellen und die Kreisgeschwindigkeiten entsprechender Flüssigkeitsteilchen wachsen mit den Wurzeln aus den Wellenlängen.

Aus Vorstehendem geht die Richtigkeit folgender allgemeiner Sätze über die Ähnlichkeit von Trochoidenwellen hervor:

1. Die zeichnerische Darstellung der „vollständigen Trochoidenschar einer einzigen Dünungswelle mit beliebig gewählter Länge liefert bei geometrisch ähnlicher Verkleinerung oder Vergrößerung alle für Trochoidenwellen überhaupt in Frage kommenden Formen. Es würde einen guten Überblick bieten, wenn die im Schiffbau vielfach verwendeten Trochoidenwellen als „vollständige Trochoidenschar in einer einzigen Tafel dargestellt würden, aus der unter Benutzung eines passenden Maßstabes die erforderlichen Angaben entnommen werden könnten.
2. Vollständige Trochoidenwellen sind nicht nur geometrisch ähnlich untereinander, sondern verlaufen selbsttätig auch mechanisch ähnlich. Ist der Längenmaßstab gleich λ, so ist der Zeitmaßstab $\tau = \sqrt{\lambda}$, und der Kräftemaßstab bei gleichen Einheitsgewichten nach Gl. 41: $\varkappa = \lambda^3$.

36. **Der Helmholtzsche Fall mechanischer Ähnlichkeit von Wasser- und Luftwogen.** (Anwendung 4.) Helmholtz*) hat in den Jahren 1888 bis 1890 grundlegende Untersuchungen über die Enstehungsursache von Wellen angestellt und auch die Frage nach geometrisch und mechanisch ähnlichen Wellenerscheinungen aufgeworfen. Hierbei leitet er die Ähnlichkeitsbeziehungen aus dem Vergleiche entsprechender Glieder der hydrodynamischen Gleichungen ab. Ohne auf Einzelheiten einzugehen, die in den angegebenen Quellen zu finden sind, folgen wir hier dem Helmholtzschen Gedankengang nur so weit, als er für die Aufstellung der Modellgesetze maßgebend ist.

Strömen zwei Flüssigkeiten verschiedener Dichte, z. B. Luft und Wasser, mit scharfer Grenze gleichmäßig übereinander, so sind nach Helmholtz die Bedingungen für das Entstehen von Wellenerscheinungen gegeben, die sich in unveränderter Form und mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortpflanzen, ähnlich der Art, wie wir sie an der Wasseroberfläche kennen. Solche Wellen an den Grenzflächen verschieden schwerer, mit verschiedener Geschwindigkeit strömender Flüssigkeiten kommen sehr häufig vor, nicht nur in dem erörterten Fall, sondern auch im Innern des Meeres und der atmosphärischen Luft. In der Atmosphäre werden sie sichtbar, wenn eine untere kältere Luftschicht so weit mit Wasserdampf gesättigt ist, daß die Wellenberge, in denen der Druck geringer ist, Nebel zu bilden, anfangen. Dann erscheinen die bekannten Lämmerwolken als streifige, sehr regelmäßig gebildete Wolkenzüge. Aber auch in der Ozeanographie sind sie als interne oder unterseeische Wellen**) bekannt und in verschiedenen Formen auf See beobachtet worden.

Alle diese Erscheinungen faßt Helmholtz unter dem Namen „Stationäre Wogen“ — wir wollen kurz „Wogen“ sagen — zusammen. Er nennt sie deshalb stationär, weil er sie vom relativen Standpunkt aus betrachtet, indem er mit den Wogen fortrückt. Durch diesen Kunstgriff sieht er die Wellenflächen unbeweglich; innerhalb derselben strömt die Flüssigkeit in gewundenen unbeweglichen, also stationären Linien. In Wirklichkeit sind es fortschreitende Wellen, die sich ganz nach Art der Trochoidenwellen (Ab-

---

*) Helmholtz, Sitzungsberichte d. Akad. d. Wiss. Berlin 1889 S. 761 u. 1890 S. 853. Kritische Bemerkungen hierzu von W. Wien, Lehrbuch der Hydrodynamik 1900 S. 169 und Rudzki, Physik der Erde 1911 S. 323.

**) Krümmel, Ozeanographie Bd. II 1911 S. 185.

schnitt 35) verhalten und wie diese durch das alleinige Wirken der Schwere, ohne daß auf Flüssigkeitsreibung Rücksicht zu nehmen ist, erklärt werden können. Sie unterscheiden sich von jenen nur dadurch, daß zwei verschiedene Dichten, die der oberen Flüssigkeit und die der unteren schwereren in die Untersuchung eingehen.

Nach Helmholtz Vorgehen sollen die Bedingungen mechanischer Ähnlichkeit für zwei mechanisch ähnlich verlaufende Wogenvorgänge aufgesucht werden: Den Hauptvorgang stellen für uns die Luftwogen am Himmel, den Modellvorgang die gewöhnlichen Wind-Wasserwogen dar. Auf erstere beziehen sich die großen und eingeklammerten, auf letztere die kleinen Buchstaben. Bezeichnen V_1, v_1 die entsprechenden Geschwindigkeiten der beiden oberen Flüssigkeiten und V_2, v_2 die der beiden unteren Flüssigkeiten — sämtlich relativ zu den ruhend zu denkenden Wogenflächen zu verstehen —, sind ferner $(\varrho_1) = (\gamma_1)/(g)$, $\varrho_1 = \gamma_1/g$ die entsprechenden Dichten der beiden oberen Flüssigkeiten und $(\varrho_2) = (\gamma_2)/(g)$, $\varrho_2 = \gamma_2/g$ die der beiden unteren, so können die Bernoullischen Druckgleichungen (vgl. Abschnitt 23) an den Grenzflächen des Haupt- und Modellvorgangs geschrieben werden:

$$C_1 = Z_1 + \frac{P_1}{(\gamma_1)} + \frac{V_1^2}{2(g)} \quad \text{und} \quad C_2 = Z_2 + \frac{P_2}{(\gamma_2)} + \frac{V_2^2}{2(g)}$$

$$c_1 = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} \quad \text{und} \quad c_2 = z_2 + \frac{p_2}{\gamma_2} + \frac{v_2^2}{2g}\,.$$

Hieraus entstehen mit $Z_1 = Z_2 = Z$ und $z_1 = z_2 = z$ sowie wegen $P_1 = P_2$ und $p_1 = p_2$ für Stellen der Grenzfläche:

$$\big((\varrho_1) - (\varrho_2)\big) Z + \frac{(\varrho_1) V_1^2}{2(g)} - \frac{(\varrho_2) V_2^2}{2(g)} = C$$

$$(\varrho_1 - \varrho_2) z + \frac{\varrho_1 v_1^2}{2g} - \frac{\varrho_2 v_2^2}{2g} = c$$

und daraus

$$Z - \frac{V_1^2}{2(g)} \frac{(\varrho_1)}{(\varrho_2) - (\varrho_1)} + \frac{V_2^2}{2(g)} \frac{(\varrho_2)}{(\varrho_2) - (\varrho_1)} = \text{Unv.} \quad \ldots \ldots \quad \text{a)}$$

$$z - \frac{v_1^2}{2g} \frac{\varrho_1}{\varrho_2 - \varrho_1} + \frac{v_2^2}{2g} \frac{\varrho_2}{\varrho_2 - \varrho_1} = \text{unv.} \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{b)}$$

Ist $\lambda = \frac{Z}{z} = \frac{L}{l}$ der Längenmaßstab der beiden mechanisch ähnlich zu gestaltenden Vorgänge, so können die Gln. a und b zur Übereinstimmung gebracht werden, wenn alle Glieder derselben in demselben Verhältnis λ stehen, wenn also die Bedingungen erfüllt sind:

$$\lambda = \frac{\dfrac{V_1^2}{2(g)} \cdot \dfrac{(\varrho_1)}{(\varrho_2)-(\varrho_2)}}{\dfrac{v_1^2}{2g} \cdot \dfrac{\varrho_1}{\varrho_2-\varrho_1}} = \frac{\dfrac{V_2^2}{2(g)} \cdot \dfrac{(\varrho_2)}{(\varrho_2)-(\varrho_1)}}{\dfrac{v_2^2}{2g} \cdot \dfrac{\varrho_2}{\varrho_2-\varrho_1}},$$

woraus mit $(\varepsilon) = \frac{(\varrho_1)}{(\varrho_2)}$ und $\varepsilon = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}$ als Dichteverhältnisse in den Haupt- und in den Modellwogen, entsteht:

$$\lambda = \frac{L}{l} = \frac{\dfrac{V_1^2}{(g)}\left(\dfrac{1}{\varepsilon}-1\right)}{\dfrac{v_1^2}{g}\left(\dfrac{1}{(\varepsilon)}-1\right)} = \frac{\dfrac{V_2^2}{(g)}(1-\varepsilon)}{\dfrac{v_2^2}{g}(1-(\varepsilon))} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{c)}$$

Aus Gl. c ist mit $(g) = g$ zu folgern: Wird das Verhältnis der Dichten nicht geändert, so lauten die Modellgesetze:

$$\lambda = \frac{V^2}{v^2} = \frac{\lambda^2}{\tau^2} \quad \text{oder}$$

$$\tau = \sqrt{\lambda} \quad \text{und}$$

$$\frac{V}{v} = \sqrt{\lambda} = \sqrt{L} : \sqrt{l}\,.$$

Es besteht also, wie nicht anders zu erwarten war, das Froudesche Modellgesetz, das hier in die Worte gekleidet werden kann: Bei unverändertem Dichteverhältnis verhalten sich entsprechende Geschwindigkeiten ähnlicher Wogen, z. B. deren Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, wie die Wurzeln aus den linearen Abmessungen. Ferner gilt unter dieser Voraussetzung $V_1^2/v_1^2 = V_2^2/v_2^2$, d. h. die Geschwindigkeiten beider Medien wachsen in gleichem Verhältnis. Bei doppelter Windgeschwindigkeit werden sich also mechanisch ähnliche Wogen von vierfachen Linearabmessungen bilden können.

Sind bei den Ähnlichkeitsschlüssen die Dichteverhältnisse verschieden, so führen die Gln. c, in ihrer Allgemeinheit geltend, auf ein erweitertes Froudesches Modellgesetz folgender Form:

$$\left.\begin{aligned} \frac{V_1^2}{L\,(g)} \cdot \frac{1}{\dfrac{1}{(\varepsilon)}-1} &= \frac{v_1^2}{l\,g} \cdot \frac{1}{\dfrac{1}{\varepsilon}-1} = \text{unv. Zahl} \\ \frac{V_2^2}{L\,(g)} \cdot \frac{1}{1-(\varepsilon)} &= \frac{v_2^2}{l\,g} \cdot \frac{1}{1-\varepsilon} = \text{unv. Zahl} \end{aligned}\right| \quad \text{d)}$$

Hieraus geht mit $(g) = g$ die Beziehung

$$\frac{L}{l} = \frac{V_1^2 \frac{1}{\varepsilon} - 1}{v_1^2 \frac{1}{(\varepsilon)} - 1} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad e)$$

hervor.

Helmholtz gibt folgendes Zahlenbeispiel hierzu an: Für die Wind Wasserwogen des Modellvorgangs ist:

$$\varepsilon = \frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{1{,}29}{1000} = \frac{1}{773{,}4}\,;$$

für die Wogen zwischen zwei benachbarten Luftströmungen von oben 10 und unten 0° C ist

$$(\varepsilon) = \frac{(\varrho_1)}{(\varrho_2)} = \frac{273}{283}\,.$$

Die Wogen können in beiden Fällen kongruent verlaufen. Ist dies der Fall, liegt also gleiche Wellenlänge vor, so ist $\lambda = L/l = 1$ und es wird für die beiden oberen Strömungen:

$$\left.\begin{aligned} V_1 : v_1 &= \sqrt{\frac{1}{(\varepsilon)} - 1} : \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} = 1 \\ V_1 : v_1 &= \frac{1}{145} : 1 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad f)$$

Entsprechend erhält man für die beiden unteren Schichten

$$\left.\begin{aligned} V_2 : v_2 &= \sqrt{1 - (\varepsilon)} : \sqrt{1 - \varepsilon} \\ V_2 : v_2 &= \frac{1}{5{,}3} : 1 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad g)$$

d. h. in Worten: Sollen Wind-Wasserwogen und atmosphärische Luftwogen kongruente Form haben, so müssen die Geschwindigkeiten der beiden atmosphärischen Luftschichten, bezogen auf die Wogenflächen, und damit auch ihre Strömungsgeschwindigkeiten gegeneinander nach Maßgabe der Gln. f und g erheblich vermindert werden. Bei starker Herabsetzung des Dichteunterschiedes können große, viele Kilometer lange Wogen schon auf Grund sehr kleiner Strömungsunterschiede entstehen.

37. **Stehende Schwingungen in Behältern Seiches (Anwendung 5).** Die Schwingungen einer Flüssigkeit, die sich in einem beliebig geformten, offenen Gefäße hin- und herbewegt, sollen in einem geometrisch ähnlichen, verkleinerten Modell nachgeahmt werden. Reibungskräfte sollen nicht vorhanden sein. Bei Aufsuchung des Modellgesetzes kommt

als einzige physikalische Kraft die Schwere in Frage. Es gilt daher das Froudesche Modellgesetz. Bezeichnet λ den Längenmaßstab zwischen Hauptausführung und Modell, so wird der Zeitmaßstab $\tau = \sqrt{\lambda}$ und für entsprechende Zeiten, z. B. die Schwingungszeiten, gilt bei mechanisch ähnlich verlaufenden Vorgängen: $T : t = \sqrt{L} : \sqrt{l}$. In einem linear auf $^1/_{100}$ verkleinerten Modell wird die Schwingungszeit auf den 10. Teil vermindert.

Diese Gesetze finden Anwendung, wenn es sich darum handelt, aus Modellversuchen die Schwingungsdauer der in Behältern schwingenden Flüssigkeiten zu bestimmen, z. B. in den Schlingerbehältern der Schiffe, in den Tendern der Lokomotiven und in den vielen verwandten technischen Fällen, in denen es unmöglich ist, die Aufgabe auf streng mathematischem Wege zu lösen. Für Hydrologen und Ozeanographen bilden die freien Schwingungen geschlossener Seen oder teilweise offener Buchten und Meeresteile häufig den Gegenstand schwieriger Untersuchungen. Der Japaner Honda* und seine Mitarbeiter haben die Schwingungen der Seen durch Modellversuche nachgeahmt, so daß ein Vergleich mit den größtenteils von Chrystal** gelieferten theoretischen Näherungsergebnissen ermöglicht war. Die stehenden Schwingungen der Seen heißen „Seiches", ein von den Anwohnern des Genfer Sees zuerst gebrauchter Name. In Genf erreichen die Seiches auf Grund der eigentümlichen Form der Bodengestaltung des Sees große Höhen, ausnahmsweise bis zu 2 m bei einer Dauer von 73 Minuten für die Grundschwingung, so daß sie hier früher als an anderen Seen auffielen.

Auch zwei- und mehrknotige Schwingungen lassen sich an Modellen verfolgen.

Rudzki ***) bemerkt, daß die Schwingungen einer gespannten Saite, deren Massen im umgekehrten Verhältnis zu den Tiefen der Flüssigkeit stehen, auf dieselbe Form der Differentialgleichung führen und daß auch mit einem solchen Saitenmodell die Schwingungszeiten aufgesucht werden können. Hier besteht dann aber nicht mechanische, sondern nur mathematische Ähnlichkeit (vgl. Abschnitt 21).

38. Ermittlung des Schiffswiderstandes nach dem Froudeschen Modellverfahren (Anwendung 6). William

---

*) Honda, Terada, Yoshida und Isitani, Secondary Undulations of oceanic Tides, Journ. of the Coll. of Sc. Tokyo 1908 Bd. 24 S. 76.

**) Chrystal, On the hydrodynamical Theory of Seiches, Trans. Soc. Edinb. 1905 Bd. 41 S. 599.

***) Rudzki, Physik der Erde, 1911 S. 372.

Froude schlug im Jahre 1869 der englischen Admiralität vor, den Widerstand der Schiffe nach einem neuen, von ihm erdachten Verfahren zu ermitteln, welches sich auf die Lehren der Newtonschen Ähnlichkeitsmechanik gründete. Es war ihm in der Tat gelungen, ein für den vorliegenden Fall geeignetes Modellgesetz, das wir oben in der allgemeinen Behandlung (Abschnitt 22) das Froudesche Modellgesetz nannten, aufzustellen und die große Aufgabe der Schiffswiderstandsbestimmung mit meisterhaftem Geschick zu einer für den praktischen Schiffbau befriedigenden Lösung zu bringen.

Die Schiffbauer und Hydrodynamiker hatten damals längst eingesehen, daß die zahlreichen Fragen über den Widerstand der Schiffe nicht auf dem Wege der Theorie allein beantwortet werden konnten, und hatten zur Aufklärung der Erscheinungen und zwecks zahlenmäßiger Bestimmung des Schiffswiderstandes die verschiedenartigsten Versuche angestellt; aber es war keinem geglückt, dem Schiffbau wirklich Brauchbares zu liefern.

Über die geschichtliche Seite und die Einzelheiten der praktischen Durchführung des Froudeschen Verfahrens, das später von seinem Sohne R. E. Froude und andern Bearbeitern dieses Gegenstandes in mancher Hinsicht verbessert worden ist, geben die Berichte von Vater und Sohn*) sowie viele weitere Veröffentlichungen**) Auskunft. In diesem Abschnitt wird darauf nicht eingegangen; es sollen hier lediglich die Leistungen W. Froudes um die Förderung der Ähnlichkeitsmechanik einer kritischen Betrachtung unterzogen werden.

W. Froude teilt zunächst den Gesamtwiderstand eines an der Wasseroberfläche bewegten Schiffes nach dem Vorgehen Rankines in folgende drei Teile: Oberflächenwiderstand, Heckwirbelwiderstand und Wellenwiderstand. Der erste setzt sich aus den tangentialen, in unmittelbarer Nähe der Schiffshaut auftretenden Widerständen zusammen. Der zweite Teil rührt daher, daß sich die am Schiff vorbeiziehende Strömung hinter dem Heck nicht in einfacher Weise zusammenschließt, sondern eine ausgedehnte, mit der Form des

*) Quellen vgl.: 1. Johow-Krieger, Hilfsbuch für den Schiffbau. — 2. Kriloff und C. H. Müller, Die Theorie des Schiffes, Enz. d. math. Wiss. Bd. IV Teil 3 S. 576 u. f. — 3. Wegen der praktischen Ausgestaltung des Verfahrens siehe: R. E. Froude, The Constant system of notation of results of experiments on models, used at the admiralty experiment works, Trans. of the Inst. of Nav. Arch. 1888, Bd. 29 S. 304.

**) Schütte, Jahrbuch der Schiffbautechn. Ges. 1901 S. 331. Untersuchungen über Hinterschiffsformen, mit einem Anhang S. 353: Die Froudesche Schiffswiderstandstheorie in ihrer Anwendung auf Schiffsmodelle. — Ferner Taylor, Resistance of ships and screw propulsion und Rothe, Das Froudesche Gesetz, Diss. Techn. Hochsch. Berlin 1911.

Hinterschiffs stark veränderliche Schleppe unruhigen, lebhaft durchwirbelten „Kielwassers“ bildet. Würde eine Einschränkung oder gar Beseitigung der Heckwirbel gelingen, so würde unter sonst gleichen Umständen eine Erhöhung der auf das Heck ausgeübten normalen Wasserdrücke und damit eine Verminderung des Gesamtwiderstandes des Schiffs zu erwarten sein. Der dritte Teil berücksichtigt den Umstand, daß das Schiff nicht tief unter dem Wasser, sondern an dessen Oberfläche fährt und unter ständiger Erzeugung sich ausbreitender Wellen die umgebende Wasserfläche wesentlich umformt. Hiermit verbunden ist eine vollständige Umänderung der Normaldrücke des Wassers auf das Schiff, sowohl an Bug und Heck wie an den Längsseiten.

Sorgfältige Versuche und theoretische Überlegungen brachten Froude zu der Erkenntnis, daß es möglich ist, die Wellenerscheinungen am Schiff mittels eines Modells mechanisch ähnlich nachzubilden, wobei unter dem Modell nicht sowohl die geometrisch verkleinerte Schiffsnachbildung als besonders die Flüssigkeit und ihre Wellenerscheinungen zu verstehen ist. Weiter fand er, daß der Oberflächenwiderstand bei Ähnlichgestaltung der Wellen nicht die von der Ähnlichkeitsmechanik gestellten Bedingungen erfüllte. Er sah sich daher veranlaßt, aus eigens zu diesem Zweck angestellten Versuchen Rechnungsgrundlagen*) für die zahlenmäßige Bestimmung der Oberflächenwiderstände getrennt für Modelle und für Schiffe und abgestuft nach Länge und Art der benetzten Oberfläche zu schaffen. Die von ihm aufgestellte Formel lautet: $w_r = \zeta_M \gamma f v^x$ und $W_r = \zeta_S \gamma F V^x$, wobei für den Geschwindigkeitsexponenten x häufig 1,825 gesetzt wird. Die Froudeschen Formeln für die Berechnung des Oberflächenwiderstandes sind von anderen später verbessert worden. Ferner lehrte ihn die Erfahrung, daß der Heckwirbelwiderstand im Verhältnis zu den beiden anderen Widerstandsarten nur geringen Einfluß hat, und er fand es für die praktische Handhabung seines Modellverfahrens zweckmäßig, ihn mit dem Wellenwiderstand zu vereinigen. Er arbeitete so im Gegensatz zu Rankine nur mit einer Zweiteilung des Gesamtwiderstandes.

Die entscheidende Leistung Froudes geht aus einer längeren Erörterung über die Frage des Schiffswiderstandes auf der Versammlung der Institution of Naval Architects vom 7. April 1870**) hervor, bei welcher Gelegenheit er vor einem größeren Kreise Scott Russel mit den Worten entgegentrat, daß die Modellversuche anderer dadurch fehlgeschlagen seien, daß die Modell-

*) Vgl. die Quellenangaben und den Überblick in Johow-Krieger.

**) Trans. of the Inst. of Nav. Arch. 1870 Bd. XI S. 80—93.

geschwindigkeit zur Schiffsgeschwindigkeit nicht in richtigem Verhältnis gestanden hätte. Zugleich nannte er damals sein „Modellgesetz", welches so ausgesprochen werden kann: „Die Wellenerscheinungen von Schiff und Modell werden nur dann einander mechanisch ähnlich, wenn sich die Fahrtgeschwindigkeiten wie die Wurzeln aus den linearen Abmessungen verhalten." Im Abschnitt 6 haben wir hervorgehoben, daß Bertrand schon im Jahre 1847 für zwei Vorgänge, die unter Wirkung der Schwerkräfte mechanisch ähnlich verlaufen, wie z. B. die Bewegungen zweier Pendel, als Modellgesetz angab: Entsprechende Zeiten verhalten sich wie die Wurzeln aus entsprechenden linearen Abmessungen; und es ist kein Zweifel, daß Bertrand vermöge seiner Kenntnis der Ähnlichkeitsmechanik auch betreffs der Geschwindigkeiten zu der gleichen Schlußfolgerung wie bezüglich der Zeiten gekommen ist.

Auf Newton konnte sich Froude nur insoweit stützen, als der Begriff der mechanischen Ähnlichkeit und das allgemeine Ähnlichkeitsgesetz in Frage kam, wonach bei mechanisch ähnlichen Vorgängen entsprechende Kräfte sich wie die Quadrate entsprechender Geschwindigkeiten, ferner wie entsprechende Flächen und wie die Dichten verhalten müssen. Dagegen gibt Newton nicht die Mittel und Wege an, wie die Verwirklichung der mechanischen Ähnlichkeit beim Wirken der Schwere praktisch erreicht werden kann.

Strenge mechanische Ähnlichkeit zwischen der Strömung beim Modell und beim Schiff ist nicht möglich, da die beim Wellenwiderstand in Rechnung zu stellende Schwerkraft auf das Froudesche Modellgesetz des Abschnitts 22 führt, während die innere Flüssigkeitsreibung, welche in die Erscheinungen des Heckwirbelwiderstandes und der Oberflächenreibung einspielt, die Erfüllung des Reynoldsschen Modellgesetzes des Abschnitts 26 verlangt, zwei gleichzeitig zu befriedigende Forderungen, die sich bei Wahl gleicher Flüssigkeit für Modell und Schiff widersprechen. Gerade dem Umstande aber, daß Froude den Hauptstörenfried, die Oberflächenreibung, aus dem Ähnlichkeitsvergleiche ausschied, ist es zu danken, daß die Modellergebnisse dennoch mit großem praktischen Nutzen in folgender Weise zu Ähnlichkeitsschlüssen herangezogen werden können.

Nach Froudes Verfahren wird zuerst das Modell bei verschiedenen Geschwindigkeiten v unter möglichst weitgehender Beseitigung aller störenden Nebeneinflüsse — besonders müssen die Boden- und Seitenwände des Versuchsbeckens genügend weit entfernt sein — geschleppt, dabei die Gesamtwiderstände w gemessen und als Kurve $w = f(v)$ aufgetragen. Dann wird der Reibungswiderstand w_r der Modelloberfläche nach bestimmten Erfahtungsformeln für verschiedene v berechnet und ebenfalls als Kurve, die unterhalb der ersten verläuft, dargestellt. Der „Rest- oder Formwiderstand" $w_f = w - w_r$ umfaßt den Wellen- und Heckwirbelwiderstand. Auf diese Restwiderstände allein wendet er zur Übertragung auf das Schiff „das durch die Schwere bedingte Sondergesetz der Kräfte" an, welches hier so ausgesprochen werden kann: „Die Restwiderstände ähnlich geformter und mit entsprechenden Geschwindigkeiten bewegter Modelle oder Schiffe verhalten sich bei Verwendung gleicher Flüssigkeiten wie die 3. Potenzen der linearen Abmessungen, d. h. wie die Verdrängungen." Damit wird der Formwiderstand W_f des Schiffs für jede Geschwindigkeit bekannt. Da der Oberflächenwiderstand des Schiffs W_r aus der oben genannten Erfahrungsformel berechnet werden kann, so ist der Gesamtwiderstand durch $W = W_f + W_r$ gegeben.

Einen Beweis für die Richtigkeit seines Modellgesetzes finde ich bei Froude nicht. Die von ihm zur Erläuterung der Schiffswiderstandserscheinungen benützte Stromlinientheorie soll zeigen, wie die Stromlinien einer reibungsfreien Flüssigkeit bei Ausschluß von Wellenbildung in einfacher Schichtung verlaufen und sich am Heck geordnet zusammenschließen, derart, daß die Drücke am Hinterschiff den gleichen Betrag für die Richtung nach vorn liefern wie die gesamten Pressungen am Vorderschiff für die entgegengesetzte Richtung, beide Wirkungen also in diesem Idealfall den Gesamtwiderstand Null ergeben.

Zur Erprobung des Verfahrens wurde unter Leitung Froudes die Korvette Greyhound von der Korvette Active geschleppt und die Zugkraft im Schlepptau gemessen. Froude spricht in seinem Berichte* vom Jahre 1874 aus, daß die Richtigkeit des von ihm vorgeschlagenen Modellverfahrens durch die Versuche am Greyhound bestätigt worden sei, und die Kurvendarstellung zeigt, daß eine Übereinstimmung bis auf wenige Hundertteile erreicht worden ist.

Die Verdienste Froudes auf dem Gebiete der Schiffswiderstandsbestimmung sind hiernach im wesentlichen dreifacher Art:

1. Er zerlegte den Gesamtwiderstand der Schiffe für sein Modellverfahren nur in zwei Teile: in den Oberflächenwiderstand, für den er die Bedingungen mechanischer Ähnlichkeit nicht erfüllen konnte, und in den Rest- oder Formwiderstand, der eine Behandlung nach den Lehren der Ähnlichkeitsmechanik in einfacher Weise zuläßt.

*) W. Froude, Trans. of the Inst. of Nav. Arch. 1874 Bd. 15 S. 36.

2. Er erkannte, daß der Oberflächenwiderstand, als ein wesentlicher Teil des Gesamtwiderstandes, für sich allein ohne nennenswerte Beeinträchtigung des Schlußergebnisses bestimmt werden kann, und stellte auf Grund umfassender Versuche die ersten brauchbaren Erfahrungsformen für die rechnerische Ermittlung desselben auf.

3. Er gab zur Aufsuchung des Formwiderstandes das bei Schwerewirkung zu beachtende Modellgesetz an, nachdem er erkannt hatte, daß nur bei Einhaltung dieses Modellgesetzes die Wellen, die — der Schwere unterworfen — den weitaus größten Teil des Formwiderstandes verursachen, mechanisch ähnlich nachgebildet werden können. Im Zusammenhang hiermit benützte er das richtige bei Schwerewirkung geltende Übertragungsgesetz für die Kräfte.

Froudes Verfahren ist nicht streng richtig und daher auch nicht streng beweisbar: Aus Teil I und II ist uns bekannt, daß eine einzige physikalische Kraft, z. B. die Schwere, ein Modellgesetz liefert und daß das Hinzutreten einer zweiten physikalischen Kraft, wie der inneren Flüssigkeitsreibung, für die praktische Ausführung zu widersprechenden Bedingungen führt, derart, daß bei gemeinsamem Wirken beider Kräfte vollkommene mechanische Ähnlichkeit nicht erreicht werden kann. Bei Froudes Modellverfahren liegt also nur weitgehende Annäherung an mechanische Ähnlichkeit vor, und es sind Fälle denkbar, in denen größere Abweichungen auftreten. Daher ist es erwünscht, den Annäherungsgrad des Verfahrens bei der einen oder anderen neuen Schiffsform und den heute üblichen hohen Geschwindigkeiten gelegentlich erneut festzustellen, wenn auch damit große Kosten verknüpft sind.

Daß trotz aller dieser Schwierigkeiten Froude sein Ziel mit so durchschlagendem Erfolge erreichen konnte, liegt einmal in seinem Genie begründet, das alle praktischen und theoretischen Einzelheiten der Widerstandserscheinungen so zu ordnen und ihrem Werte nach abzuschätzen verstand, daß er ein klares Endbild der verworrenen Vorgänge entwerfen konnte, andererseits aber in folgenden beiden seinem Vorhaben günstigen Umständen:

1. Der Oberflächenwiderstand hat keinen nennenswerten Einfluß auf den Wellenwiderstand. Dies läßt sich so verständlich machen: Der Oberflächenwiderstand besteht aus tangential am Schiffsrumpf liegenden Kräften, der Wellenwiderstand dagegen wird fast ausschließlich durch die normal zur Schiffsoberfläche wirkenden Druckkräfte erzeugt — und zwar so gut wie unabhängig von dem Oberflächenwiderstande. Ein rauhes Schiff wird nach Froudes Auffassung im wesentlichen dieselben Wellen hervorrufen wie ein glattes

2. Die Heckwirbelwiderstände befriedigen nach der Schätzung der Schiffbauer im großen und ganzen bei den Schleppversuchen das allgemeine Newtonsche Ähnlichkeitsgesetz, verhalten sich somit bei Schiff und Modell angenähert wie $(\varrho)\,F\,V^2 : \varrho\,f\,v^2$. Aber selbst Abweichungen hiervon haben für die Praxis des Modellverfahrens keine große Bedeutung, da der Heckwirbelwiderstand gegen die beiden anderen Teile des Gesamtwiderstandes zurücktritt.

Pollard und Dudebout*) machen darauf aufmerksam, daß durch geeignete Wahl des Schiffsbeschlags und Modellüberzugs auch die Oberflächenwiderstände $W_r = \zeta_S\,(\gamma)\,F\,V^x$ und $w_r = \zeta_M\,\gamma\,f\,v^x$ in das richtige, durch die Schwerewirkung gebotene Verhältnis $\varkappa = \lambda^3 = W_r : w_r$ gesetzt werden können. Dies ergibt für die Reibungsbeiwerte von Modell und Schiff ζ_M und ζ_S die Bedingungsgleichung:

$$\zeta_M = \zeta_S\,\lambda^{\frac{x}{2}-1}.$$

Da das ζ_S des Schiffsbeschlags gegeben ist, so kann ζ_M hieraus berechnet und der Modellüberzug danach eingerichtet werden. Die Berechnung des Oberflächenwiderstandes würde alsdann ganz entfallen und der am Modell gemessene Gesamtwiderstand w könnte unter Beachtung des Froudeschen Modellgesetzes ohne weiteres auf den Gesamtwiderstand W des Schiffes zu $W = w\,\lambda^3$ übertragen werden. Aber auch bei diesen Vorkehrungsmaßnahmen ist vollkommene Ähnlichkeit keineswegs erreicht, da das durch die innere Flüssigkeitsreibung bedingte Modellgesetz nicht beachtet worden ist. Wie weit die Oberflächenreibung hinsichtlich ihres Ähnlichkeitsverhaltens erforscht ist, geht aus den späteren Anwendungen über Reynoldssche Ähnlichkeit hervor, von der noch mancherlei Aufklärung und Förderung des Modellverfahrens für die Bestimmung des Schiffswiderstandes zu erwarten ist.

Bei Verwendung verschiedener Flüssigkeiten wären die Gleichungen des vorstehenden Abschnitts durch Einführung der verschiedenen Einheitsgewichte zu ergänzen.

39. Modellversuche zum Studium der Rollschwingungen von Schiffen ohne und mit Dämpfungsvorrichtungen (Anwendung 7). Nimmt man zunächst als Idealfall an, daß die Rollbewegungen von Schiff und Modell im ruhigen, reibungsfreien Wasser vor sich gehen, so kommt als einzige physikalische Kraft sowohl am schwingenden Körper wie am Wasser die Schwere in Frage. Es gilt also das

*) Théorie du navire, Bd. III 1892 S. 488.

Froudesche Modellgesetz: $\tau = \sqrt{\lambda}$ oder $T : t = \sqrt{L} : \sqrt{l}$ oder $V : v = \sqrt{L} : \sqrt{l}$. Bei Verwirklichung dieser Voraussetzung ist vollkommene mechanische Ähnlichkeit zu erreichen. Die Dauer der ungedämpften Schwingungen wird bei gleicher Höchstneigung im Verhältnis der Wurzeln aus den linearen Abmessungen wachsen. Auch jede weitere, lediglich von Schwerkräften ausgehende Beeinflussung, wie z. B. mittels reibungsfreier Frahmscher Schlingerbehälter, würde bei richtiger Bemessung des Verkleinerungsmaßstabes die mechanische Ähnlichkeit nicht stören. Das gilt in gleicher Weise für Schiffskreisel, doch müßten sich bei ihnen entsprechende Bremskräfte der großen und der kleinen Ausführung wie die 3. Potenzen der linearen Abmessungen verhalten.

Schiff und Modell führen jedoch ihre Rollschwingungen in wirklicher Flüssigkeit aus und unterliegen dabei dem dämpfenden Einfluß der Oberflächenwiderstände W und w. Bestände für diese das allgemeine Newtonsche Ähnlichkeitsgesetz $W = \alpha\ (\varrho)\ F\ V^2$ und $w = \alpha\ \varrho\ f\ v^2$ so würden auch die Dämpfungskräfte die Bertrandsche Bedingungsgleichung, also die Grundforderung mechanischer Ähnlichkeit, erfüllen, wie der Vergleich $\varkappa = W : w$ sofort ergibt.

In Wirklichkeit weichen die Dämpfungskräfte aber hiervon etwas ab, insofern nicht ein rein quadratisches Widerstandsgesetz besteht, und es liegt nicht vollkommene mechanische Ähnlichkeit vor. Durch geeignete Ausbildung des Modellüberzugs ließe sich auch hier in gleicher Weise, wie am Ende des Abschnitts 38 beschrieben, eine weitgehende mechanische Ähnlichkeit erzwingen.

Das Vorhandensein von Schlingerkielen hat auf das Streben nach Verbesserung der mechanischen Ähnlichkeit ebenfalls einen günstigen Einfluß. Denn deren physikalische Wirkung auf das Wasser ist eine andere als die der Schiffshaut, insofern als die Schlingerkiele vornehmlich normale Beschleunigungskräfte auf die Wassermassen, dagegen die rauhen Oberflächen tangentiale Kräfte ausüben. Solche lediglich auf Beschleunigung hinwirkenden Normaldrücke fügen sich aber nach Abschnitt 11 willig den Ähnlichkeitsbedingungen und auch die von den Schlingerkielen erzeugten Oberflächenwellen werden von der Schwere beherrscht, führen somit ebenfalls auf das Froudesche Modellgesetz.

Die von Froude*) und anderen Bearbeitern des Gegenstandes mit Modellen und großen Schiffen angestellten Rollversuche haben ergeben, daß

*) White, Handbuch für Schiffbau S. 130.

es praktisch zulässig ist, die am Modell gefundenen Verhältnisse auf ein Schiff gleicher Form nach den durch die Schwere bedingten Modellgesetzen zu übertragen.

Für das Modell ist die Ähnlichkeit natürlich nur soweit durchzuführen, daß einerseits die benetzte Oberfläche und die Lage des Gewichtsschwerpunktes geometrisch ähnlich der des Schiffes ist, sowie ferner daß das Gewicht im Verhältnis von $1 : \lambda^3$ und das Trägheitsmoment bezüglich des Schwerpunktes im Verhältnis von $1 : \lambda^5$ verkleinert wird*).

40. Modellversuche mit Schaufelrädern (Anwendung 8). Im Gegensatz zu dem so gut wie stationär verlaufenden Strömungsvorgang bei der geradlinig im Wasser bewegten Platte (Anwendung 1) liegt bei Schaufelrädern eine ausgesprochen periodische und krummlinige Bewegung dünner, ebener oder gekrümmter Flächen vor, deren Neigungswinkel und Tiefgang sich beim Durchgang durchs Wasser ständig ändern. Da aber in den Bewegungsgleichungen neben den Trägheits- und Druckgliedern wieder die Schwerkräfte auftreten, so ist zur Erzielung mechanischer Ähnlichkeit das Froudesche Modellgesetz in der Form: $\iota = \sqrt{\lambda}$ oder $T : t = \sqrt{L} : \sqrt{l}$ oder $V : v = \sqrt{L} : \sqrt{l}$ einzuhalten. Allerdings ist es möglich, daß die durch die innere Flüssigkeitsreibung bedingten Wirbel vornehmlich auf der Saugseite der Schaufeln die mechanische Ähnlichkeit beeinträchtigen; doch dürfte sich diese Störung nicht als erheblich herausstellen, nachdem das Froudesche Modellgesetz sich als maßgebend für die ebenfalls mit einer Sogwirbelschleppe arbeitende Platte erwiesen hat. Wie groß bei Nichtbeachtung des Froudeschen Gesetzes die Abweichung der nach dem allgemeinen Newtonschen Ähnlichkeitsgesetz berechneten mittleren Schaufelradkraft von dem wirklichen Werte ist, kann nur durch Vergleich der Versuche am Modell, wie sie von Schaffran**) durchgeführt sind, und an der großen Ausführung festgestellt werden.

41. Mechanische Ähnlichkeit des Systems „Schiff und Schraube" (Anwendung 9). Im Abschnitt 52 wird der Fall geometrisch ähnlicher Schiffsschrauben besonders behandelt: Wenn Schwere- und Reibungswirkungen vernachlässigt werden können, so ist für die Schraube ohne Schiff kein besonderes Modellgesetz, sondern nur die allgemeine Newtonsche Ähnlichkeit zu beachten.

---

*) Schütte, Einfluß der Schlingerkiele auf den Widerstand und die Rollbewegung der Schiffe in ruhigem Wasser, Jahrbuch der Schiffbaut. Ges 1903 S 342.

**) Schaffran, Modellversuche mit Schaufelradpropellern, Jahrbuch der Schiffbaut. Ges. 1918 S. 475.

Sind Schiff und Schraube in gleichem linearen Maße verkleinert, so sind für beide die Gesetze Froudescher Ähnlichkeit zu erfüllen; denn an beiden wirkt die Schraubenschubkraft, für welche vom Schiffe herrührend nach Gl. 40 der Kräftemaßstab $\varkappa = (\gamma)/\gamma\,\lambda^3$ sein muß. Es gilt dann also sowohl für das Schiff wie für die Schraube $\tau = \sqrt{\lambda}$ oder $T : t = \sqrt{L} : \sqrt{l}$ oder $V : v = \sqrt{L} : \sqrt{l}$, wobei allerdings Voraussetzung ist, daß auch die Oberflächenwiderstände mittels des am Schluß von Abschnitt 38 angeführten Kunstgriffes in das gleiche Verhältnis λ^3 wie die Schwerkräfte und Wellenwiderstände gebracht werden.

Aus obigen Gleichungen geht hervor, daß die Umlaufszeit der großen und der Modellschraube in geradem Verhältnis der Wurzeln auf den linearen Abmessungen, die sekundlichen Umlaufszahlen also im umgekehrten Verhältnis dieser Wurzeln stehen müssen. Die letzte Gleichung gilt für je zwei beliebig einander entsprechende Geschwindigkeiten, z. B. für entsprechende Fahrtgeschwindigkeiten oder entsprechende Umfangsgeschwindigkeiten der Schrauben. Daraus folgt die bekannte Beziehung: Das Verhältnis Fahrtgeschwindigkeit : Umfangsgeschwindigkeit muß bei mechanisch ähnlichen Strömungsvorgängen übereinstimmen.

42. Combessche Ähnlichkeit bei Reihenmaschinen verschiedener Größe unter Schwerkraftwirkung (Anwendung 10). Bertrand bespricht unter seinen Ähnlichkeitsbeispielen den von Combes *) zuerst behandelten Fall zweier geometrisch ähnlich gebauter Wasserturbinen. Wir erweitern die Untersuchung sogleich auf alle geometrisch ähnlich geformten Maschinen, die allein unter der Wirkung der Schwere arbeiten. Dieser Gruppe gehören z. B. an: Wasserräder, Wasserturbinen. Kolben- und Kreiselpumpen. Der Längenmaßstab sei λ. Die mechanische Ähnlichkeit einer derartigen Maschine und des zugehörigen Modells oder einer Reihe geometrisch ähnlicher Maschinen soll sich auch darauf erstrecken, daß die Gefällhöhen in dem Verhältnis λ stehen und daß die Nutzarbeiten dem Anheben von Lasten entsprechen, für welche wie bei allen Schwerkräften der Kräftemaßstab $(\gamma)/\gamma\,\lambda^3$ ist und deren Hubhöhen das Verhältnis λ aufweisen.

Unter der Voraussetzung, daß die Nebenerscheinungen keine Ähnlichkeitsstörungen verursachen, gilt bei alleiniger Wirkung der Schwere das Froudesche Modellgesetz in der Form: $\tau = \sqrt{\lambda}$ oder $T : t = \sqrt{L} : \sqrt{l}$ oder

*) Combes, Recherches théoriques et expérimentales sur les roues à réaction ou à tuyaux, Paris 1843.

$V : v = \sqrt{L} : \sqrt{l}$ oder $B = b$. Die Umlaufszeiten dieser Reihenmaschinen wachsen also wie die Wurzeln aus den linearen Abmessungen, die Umlaufszahl somit umgekehrt wie diese Wurzeln. Bei Verwendung gleicher Stoffe gilt für die Kräfte: $\varkappa = K : k = L^3 : l^3$, für die Flüssigkeitsdrücke: $P : p = L : l$, für die Arbeiten: $A : a = \varkappa\lambda = L^4 : l^4$, für die Nutzleistungen und Gesamtleistungen: $E : e = \varkappa \frac{\lambda}{\tau} = L^{\frac{7}{2}} : l^{\frac{7}{2}}$, für die sekundlichen Durchflußmengen: $Q : q = \frac{\lambda^3}{\tau} = \lambda^{\frac{5}{2}}$. Beschleunigungen und Wirkungsgrade sind die gleichen. Einer praktischen Durchführung werden sich allerdings Schwierigkeiten entgegenstellen.

Die mechanische Ähnlichkeit bezieht sich hier auf die beschleunigten Flüssigkeitsmassen. Die Spannkräfte in den festen Teilen sind nur Folgeerscheinungen, die keinen Einfluß auf den Beschleunigungsvorgang haben. Würden auch die Dickenabmessungen der Maschinenteile geometrisch ähnlich vergrößert werden, so würden die Spannungen wie die Flüssigkeitsdrücke mit den linearen Abmessungen wachsen; kleine Ausführungen würden an Stoffverschwendung, große an Überanstrengung leiden. Wirtschaftlicher wäre es, die Konstruktionen mit gleichen Spannungen an entsprechenden Stellen durchzubilden. Sollen bei den Pumpen auch die antreibenden Kolbendampfmaschinen in die geometrische Ähnlichkeit einbezogen werden, so müssen die mittleren Dampfdrücke im Verhältnis der linearen Abmessungen zunehmen.

43. Mechanische Ähnlichkeit in der Dynamik der Flugzeuge (Anwendung 11). Stellt man sich die Aufgabe, die dynamischen Vorgänge von Flugzeugen, z. B. deren Längsstabilität, durch Versuche am fliegenden Modell zu studieren, so ist folgendes zu beachten: Wegen der Forderung geometrisch ähnlicher Flugbahnen und damit auch ähnlicher Fallhöhen ist die Schwere als eine wesentlich bestimmende Kraft anzusehen. Es ist also das Froudesche Modellgesetz: $V : v = \sqrt{L} : \sqrt{l}$ zu erfüllen. Aber auch die inneren Reibungskräfte der Luft sind von Einfluß auf den Strömungsverlauf und somit kommt bei vollkommener mechanischer Ähnlichkeit auch noch das Reynoldssche Modellgesetz: $V : v = 1/L : 1/l$ in Betracht.

Beide Gesetze sind — bei Verwendung gleicher Flüssigkeit — gleichzeitig nicht zu erfüllen. Aus der Schwierigkeit führen zwei Auswege heraus: Entweder man führt den Modellversuch in einer anderen Flüssigkeit, z. B. in Wasser, aus, was sehr viel Mühe erfordert, oder man begnügt sich damit, den Modellvorgang nur angenähert nachzuahmen, indem man die weniger einflußreiche Zähigkeit außer acht läßt. Bader *) weist theoretisch und experimentell nach, daß man imstande ist, den allgemeinen Charakter der Bewegungen eines Flugzeugs mit guter Annäherung nach dem Flug eines geometrisch ähnlichen Modells zu beurteilen: Er kommt zu folgendem Ergebnis: „Gelingt es, die geometrische Ähnlichkeit eines Modells auf die Trägheitshalbmesser und auf die Fallhöhe ($h = v^2/2g$), die der Fluggeschwindigkeit entspricht, auszudehnen, so ist das Modell auch mechanisch ähnlich.“ Weitere Einzelheiten sind in der genannten Arbeit zu finden.

44. Ähnlichkeitsschlüsse in der Mechanik der Himmelskörper (Anwendung 12). Es wird vorausgesetzt, daß die zu vergleichenden flüssigen, unzusammendrückbaren, homogenen Körper allein unter der Wirkung allgemeiner Massenanziehung stehen. Dann gilt das Thomsonsche Modellgesetz des Abschnitts 25, z. B. in der Form der Gleichung 54 a:

$$T : t = \sqrt{\frac{1}{(\varrho)}} : \sqrt{\frac{1}{\varrho}},$$

die bei Verwendung gleicher Dichten, also für $(\varrho) = \varrho$, übergeht in die Gleichung $T = t$.

Fälle, in denen zwei geometrisch ähnliche Flüssigkeitsmassen der beschriebenen Art der Betrachtung zugrunde gelegt werden, haben für die Technik keinen Wert, dagegen sind sie von hoher Bedeutung für die Physik der Erde und der Himmelskörper. Anwendungen solcher Ähnlichkeitsbeziehungen finden sich mehrfach bei G. H. Darwin **). Es sollen nur kurz folgende vier Anwendungsfälle hervorgehoben werden:

a) Eine homogene, flüssige, unter ihrer eigenen Massenanziehung stehende Kugel ist ein in stabilem Zustand befindliches System. Kleine Störungen geben daher Anlaß zu Schwingungen. Nach obigem ist die Dauer dieser Schwingungen für alle Kugeln beliebiger Größe und gleicher Dichte unveränderlich. Sie beträgt für einen von W. Thomson zuerst behandelten, in Lambs Hydrodynamik 1907 S. 527 wiedergegebenen Fall, in welchem die flüssige Kugel die Größe und Masse der Erde, also ein Einheitsgewicht von 5500 kg/m³ besitzt, 94,4 Minuten. Daher haben alle flüssigen, homogenen Kugeln, deren Dichte 5½mal so groß wie die des Wassers ist, bei ähnlicher

*) Bader, Einführung in die Dynamik der Flugzeuge mit besonderer Berücksichtigung der mechanischen Ähnlichkeit, Forschungsarbeiten des V. d. I. Heft 189 und 190.

**) G. H. Darwin, Ebbe und Flut; deutsch von A. Pockels, 2. Aufl. 1911.

Formänderung dieselbe Schwingungsdauer wie in dem Thomsonschen Beispiel.

b) In der Lehre von den Gezeiten wird der Fall eines Ozeans behandelt, der mit überall gleicher Tiefe einen kugelförmigen Kern bedeckt. Auch hier treten um die Gleichgewichtslage Schwingungen auf, die für geometrisch ähnliche Systeme und gleiche Stoffe nach dem Thomsonschen Modellgesetz dieselbe Dauer haben müssen.

c) Bei der Untersuchung der relativen Gleichgewichtsformen umlaufender Flüssigkeitsmassen gelten für geometrisch ähnliche Fälle ebenfalls die Thomsonschen Gesetze, wenn die allgemeine Schwere und die Trägheitskräfte der Zentrifugalwirkung allein in Rechnung zu stellen sind. Hierher gehören die den Astrophysikern bekannten Fälle der umlaufenden Maclaurinschen und Jacobischen Ellipsoide, der birnenförmigen Flüssigkeitsgestalten mit ihren Ausartungen in Doppelsterne, der ringförmigen dem Saturn ähnlichen Gebilde, sowie viele aus der gegenseitigen Einwirkung zweier Himmelskörper hervorgehende Gezeitenerscheinungen.

d) Werden die unter c genannten Formen umlaufender Flüssigkeiten gestört, so entstehen wieder Schwingungen um die Gleichgewichtslage, und es sind dieselben Ähnlichkeitsschlüsse wie unter a und b berechtigt.

45. Ähnlichkeitsbeziehungen für den Fall der Oberflächenreibung an dünnen Platten. (Anwendung 13.) Die Frage nach dem Oberflächenwiderstand dünner, in der Längsrichtung durch die Flüssigkeit bewegter, ebener Platten ist mit dem Streben nach Aufklärung der Schiffswiderstandserscheinungen aufs engste verknüpft. Über ältere Versuche berichtet Bourgois*); doch wurden erst die Plattenversuche Froudes**) für den Schiffbau brauchbar. Mit großer Sorgfalt führte dann unter anderen Gebers***) die Versuche weiter.

Einen wesentlichen Fortschritt in der Erforschung der Plattenreibung verdanken wir Blasius†), dem es gelungen ist, mit Hilfe der Reynoldsschen

---

*) Bourgois, Mémoire sur la résistance de l'eau au mouvement des corps et particulièrement des bâtiments de mer. Paris 1857.

**) W. Froude, Experiments on the surface-friction, Brit. Ass. Rep. 1872 S. 118; und Report to the Lords Commissioners of the Admiralty on experiments for the determination of the frictional resistance of water on a surface, performed at Chelston Cross, Brit. Ass. Rep. 1874 S. 249.

***) Gebers, Ein Beitrag zur experimentellen Ermittlung des Widerstandes gegen bewegte Körper, Verlag des „Schiffbau" 1908.

†) Blasius, Das Ähnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten, Mitt. über Forschungsarbeiten des V. d. I. Heft 131.

Ähnlichkeitssätze über zähe Flüssigkeiten einiges Licht in das dunkle Gebiet hineinzutragen und den Oberflächenwiderstand als eine Folge der inneren Flüssigkeitsreibung zu deuten.

Blasius hat mit Erfolg zunächst den Reibungswiderstand „glatter", mit geschliffenem Lackfarbenanstrich versehener Platten in Wasser unter Zugrundelegung der Gebersschen Versuche einer Prüfung auf mechanische Ähnlichkeit unterzogen und zwar in dem Gebiet der Turbulenz, welcher Fall bei praktischen Anwendungen in der Regel vorliegt. Unter Berücksichtigung der großen Veränderlichkeit des dynamischen Zähigkeitsmaßes ν der Gl. 60 mit der Temperatur hat er den Nachweis für das Bestehen mechanischer Ähnlichkeit für den fraglichen Fall erbracht.

Der von ihm durchgeführte Vergleich ergibt, daß die Messungen an Platten verschiedener Größe bei verschiedenen Geschwindigkeiten und bei Veränderungen der Temperatur, d. h. also von ν, eine einzige Eigenschaftskurve $\alpha = F(\psi)$ nach Gl. 77 bilden, worin α die Kennziffer in der Gleichung des Widerstandes $w = \alpha \varrho f v^2$, der Form des allgemeinen Newtonschen Ähnlichkeitsgesetzes, und $\psi = \frac{v\,l}{\nu}$ die Reynoldssche Zahl ist. Die untersuchten glatten Platten führen im Turbulenzbereich für α auf die Potenzformel $\alpha = 0{,}0123\,\psi^{-0{,}136}$, woraus ein Widerstandsgesetz entspringt, das die Faktoren $v^{1{,}864}$ und $l^{-0{,}136}$ aufweist. Zu beachten ist, daß Blasius $w = \varkappa \gamma f v^2/2g$ schreibt und daher $\varkappa = 2\alpha$ als Ordinate seiner Kurve erhält. Weitere Einzelheiten sind in der genannten Arbeit zu finden. Es ist zu wünschen, daß die entsprechenden Versuche auch für andere Flüssigkeiten fortgeführt werden.

Auch auf rauhe Platten sind die Gesetze mechanischer Ähnlichkeit angewandt worden; doch sind die hier geltenden Beziehungen viel verwickelter, da außer der Zähigkeit der Flüssigkeit noch der Rauhigkeitsgrad der Flächen in Betracht kommt. Die wesentlichen Einzelheiten dieses Gebietes sind in der Arbeit Gümbels: Das Problem des Oberflächenwiderstandes beliebiger Flüssigkeiten*) und bei Blasius zu finden.

46. Ähnlichkeitsbeziehungen betreffend den Druckverlust in zylindrischen Rohren. (Anwendung 14.) Der Druckverlust zäher Flüssigkeiten in Rohren ist vom Standpunkt der Ähnlichkeitsmechanik auf Grund der Frage zu beurteilen: Unter welchen Umständen strömen zähe Flüssigkeiten mechanisch ähnlich? — Ist es

*) Jahrbuch der Schiffbautechn. Ges. 1913 S. 393.

sicher, daß nur die innere Reibung die Vorgänge beeinflußt, so ist das Reynoldssche Modellgesetz der Abschnitte 26 und 27 maßgebend, das am übersichtlichsten in der Form auszusprechen ist: Das entscheidende Kennzeichen dafür, daß zwei Strömungsvorgänge unter alleiniger Wirkung der inneren Reibung mechanisch ähnlich verlaufen, ist die Übereinstimmung des dimensionslosen Beiwertes der betreffenden in Rede stehenden Vergleichgrößen bei gleicher Reynoldsscher Zahl $\psi = v\,l/\nu$. Die Flüssigkeiten können dabei verschieden sein.

Im folgenden werden die großen und eingeklammerten Buchstaben wieder auf den Hauptvorgang, die kleinen auf den Modellvorgang bezogen. Als Maßeinheiten gelten m, sk, kg. Wie immer bei mechanischer Ähnlichkeit gilt auch hier das allgemeine Newtonsche Ähnlichkeitsgesetz:

$$W = \alpha\,(\varrho)\,F\,V^2 \quad \text{und} \quad w = \alpha\,\varrho\,f\,v^2, \qquad \text{(a)}$$

wobei unter W und w zwei entsprechende Kräfte, also bei Untersuchung der Druckverluste $P_2 - P_1$ und $p_2 - p_1$ z. B. die Widerstandskräfte $W = (P_2 - P_1)\,F$ und $w = (p_2 - p_1)\,f$ zu verstehen sind, die sich auf zwei entsprechende Massen M und m beziehen. M und m müssen geometrisch ähnliche Rauminhalte haben, für welche zwei entsprechende Zylinderabschnitte des Flüssigkeitsstranges angenommen werden.

Die an den Enden von M und m in Metern gemessenen Druckhöhenverluste Z und z heißen „entsprechende". Für sie gilt mit $(\varrho)/(\gamma) = 1/g$ und $\varrho/\gamma = 1/g$:

$$Z = \frac{P_2 - P_1}{(\gamma)} = \frac{W}{(\gamma)\,F} = \frac{\alpha\,(\varrho)\,F\,V^2}{(\gamma)\,F} = \frac{\alpha\,V^2}{g}$$

$$z = \frac{p_2 - p_1}{\gamma} = \frac{w}{\gamma\,f} = \frac{\alpha\,\varrho\,f\,v^2}{\gamma\,f} = \frac{\alpha\,v^2}{g}$$

oder mit $\alpha/g = \beta/2$

$$Z = \beta\,\frac{V^2}{2\,g} \quad \text{und} \quad z = \beta\,\frac{v^2}{2\,g}. \qquad \text{(b)}$$

Bei ähnlichen Vorgängen haben die beiden Zahlen β denselben Wert $\beta = Z\,.\,2\,g/V^2 = z\,.\,2\,g/v^2$; im übrigen ist β eine Funktion der Reynoldsschen Zahl $\psi = v\,l/\nu$ oder $V\,L/(\nu)$ (vgl. die Betrachtungen über dimensionslose Darstellung im Abschnitt 27), wobei V und v zwei beliebige entsprechende Geschwindigkeiten und L und l zwei beliebige entsprechende lineare Abmessungen sind. Als Geschwindigkeiten empfiehlt es sich hier, die Mittelwerte der Strömung und als Vergleichslängen die beiden Rohrdurchmesser D und d zu wählen, so daß ψ im folgenden stets die Bedeutung $v\,d/\nu$ oder $V\,D/(\nu)$ haben wird.

Die Vorgänge der hier beschriebenen Art sind mechanisch ähnlich, wenn ihre Eigenschaftskurven $\beta = f(\psi)$ sich decken. Der Vergleich der Eigenschaftskurven liefert also das entscheidende Erkennungsmittel mechanischer Ähnlichkeit.

Die eben gegebene Darstellung ist die natürliche: Sie entspringt der Bedingung vollständiger geometrischer Ähnlichkeit. Die technische Praxis schlägt aber folgenden etwas abweichenden, zum gleichen Ziele führenden Weg ein: In Erkenntnis der Tatsache, daß der Druckhöhenverlust einer Rohrleitung im geraden Verhältnis zu ihrer Länge wächst, wünscht sie, daß dieser Umstand in der Gleichung für den Druckhöhenverlust zum Ausdruck gebracht wird. Zu diesem Zwecke darf aber nicht ohne weiteres die betreffende Rohrlänge in den Zähler der Gln. b gesetzt werden, da diese dann gegen die Grundforderung der Dimensionsgleichheit für beide Seiten der Gleichung verstoßen würden. Wohl aber ist folgender Weg gangbar:

Für entsprechende Massen M und m gilt, wenn S, s zwei entsprechende Rohrlängen, D, d die beiden Durchmesser und ζ eine reine Zahl ist:

$$\frac{S}{D} = \frac{s}{d} = \zeta, \quad \text{also} \quad \frac{S}{\zeta D} = \frac{s}{\zeta d} = 1 \quad \text{(c)}$$

Daher lassen sich die Gln. b auch in der erweiterten Form:

$$Z = \beta \frac{V^2}{2g} \frac{S}{\zeta D} \quad \text{und} \quad z = \beta \frac{v^2}{2g} \frac{s}{\zeta d}$$

oder

$$Z = \lambda \frac{S}{D} \frac{V^2}{2g} \quad \text{und} \quad z = \lambda \frac{s}{d} \frac{v^2}{2g} \quad \text{(d)}$$

schreiben, worin λ der dimensionslose Beiwert des Druckhöhenverlustes (nicht wie sonst der Längenmaßstab) ist. Auch hier liefert die Darstellung der dimensionslosen Größen

$$\lambda = \frac{Z\,D\,2g}{S\,V^2} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{z\,d\,2g}{s\,v^2} \quad \text{(e)}$$

als Funktion von ψ für den Fall mechanischer Ähnlichkeit der Strömungsvorgänge ein und dieselbe Eigenschaftskurve $\lambda = f(\psi)$, deren Ordinaten aber $D/S = d/s$ mal so groß sind wie die der Kurven $\beta = f(\psi)$.

In den Gln. e kommt das Verhältnis $Z/S = z/s$ vor. Beachtet man, daß der Druckhöhenverlust verhältnisgleich mit der Länge wächst, so kann auch $Z/S = H/L$ und $z/s = h/l$ geschrieben werden, wenn L eine ganz beliebige Rohrlänge des Hauptvorgangs mit zugehörigem Druckhöhenverlust H und l eine ebenfalls beliebige Rohrlänge des Modellvorgangs mit dem Druckhöhenverlust h ist. Statt der Gln. d und e können daher auch folgende Beziehungen bei dem Ähnlichkeitsvergleich benutzt werden:

$$H = \lambda \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \quad \text{und} \quad h = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \qquad \text{f)}$$

oder

$$\lambda = \frac{H D 2g}{L V^2} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{h d 2g}{l v^2} \qquad \text{g}$$

in denen sich aber L und l sowie H und h nicht mehr auf „entsprechende" Rohrabschnitte, sondern auf ganz beliebige Längen nebst den zugehörigen Druckhöhen beziehen. In diesem Sinne sind die Ähnlichkeitsbetrachtungen über Rohrleitungsverluste der Technik zu verstehen. Die sich bei dieser Auffassung der Rohrverluste ergebende Kurve $\lambda = f(\psi)$ deckt sich natürlich vollkommen mit der soeben besprochenen.

Auch auf dem Gebiete der Rohrleitungsverluste haben Gümbel und Blasius — wie in dem Fall des Oberflächenwiderstandes von Platten (vgl. Abschnitt 45) — die mechanische Ähnlichkeit der Vorgänge auf Grund des Reynoldsschen Modellgesetzes mit Erfolg erprobt. Wegen des Studiums dieser Erscheinungen sei auf jene Arbeiten sowie auf die Untersuchungen Brabbées*) verwiesen. Hier soll nur folgendes hervorgehoben werden:

Nach Blasius ergeben — auf Grund eigener Versuche sowie derjenigen von Saph-Schoder und Nusselt — alle „glatten" Rohre, z. B. gezogene Messing-, Kupfer- und Bleirohre, praktisch dasselbe Gesetz der Beiwerte $\lambda = f(\psi)$ für die untersuchten Flüssigkeiten Kaltwasser und Druckluft, wobei die starke Veränderlichkeit des dynamischen Zähigkeitsmaßes ν mit der Temperatur und bei Luft auch noch mit dem Druck zu beachten ist. Und zwar besteht für kleine Werte von ψ eine andere Gesetzmäßigkeit wie für große: Unterhalb einer kritischen Geschwindigkeit, die sich aus $\psi = \frac{v d}{\nu} \sim 2000$ berechnen läßt, strömt die Flüssigkeit in regelmäßigen Schichten: Das heißt, es gilt das bekannte Poiseuillesche Gesetz, das in dimensionsloser Darstellung die einfache Form $\lambda = 64/\psi$ hat. Aus der Erfüllung dieses Gesetzes, das gleichbedeutend einem mit v wachsenden Widerstandsgesetz ist, schließt Blasius auf das Haften der Flüssigkeit an der glatten Wand. Zwischen $\psi = 2000$ bis 3000 etwa tritt ein unsicherer Übergangszustand auf, jenseits dessen sich die Flüssigkeit in turbulenter Strömung nach dem Erfahrungsgesetz $\lambda = 0{,}3164\,\psi^{-\frac{1}{4}}$ bewegt.

*) Brabbée, Die Berechnung verschiedener Rohrnetze auf einheitlicher Grundlage. Z. d. V. d. I. 1916 S. 441.

Sind die Rohrwände rauh, und zwar in verschiedenem Grade, so entsteht je eine neue Eigenschaftskurve: Der Beiwert λ in der Gleichung des Druckhöhenverlustes ist dann nicht nur abhängig von der Reynoldsschen Zahl ψ, sondern auch noch von dem Rauhigkeitsgrade der Rohrwand, der bei der zeichnerischen Darstellung als wechselnder Parameter erscheint. Decken sich für zwei verschiedene Fälle die Kurven $\lambda = f(\psi)$, so haben die beiden Rohre nach Blasius den gleichen Rauhigkeitsgrad.

47. Modellversuche zur Ermittlung des Fahrtwiderstandes der Luftschiffe und Unterseeboote. (Anwendung 15.) In diesem Abschnitt wird vorausgesetzt, daß die zu betrachtenden Körper, Luftschiffe und tief unter dem Spiegel fahrende Unterseeboote, sich in zähen, praktisch als unendlich ausgedehnt geltenden Flüssigkeiten bewegen. Oberflächenwellen sollen ausgeschlossen sein. Bei beiden Fahrzeugen tritt der Reibungswiderstand gegenüber dem aus den Normaldrücken bestehenden Formwiderstand stärker hervor als bei gewöhnlichen Schiffen. Ja, bei Luftschiffen strebt man danach, den Rumpf als Körper kleinsten Formwiderstandes auszubilden, während bei Unterwasserschiffen dem gleichen Vorhaben mit Rücksicht auf eine günstige Form für die Überwasserfahrt Grenzen gesetzt sind.

Gegenüber den Reibungserscheinungen an Platten und in Röhren (Abschnitt 45 und 46) sind jetzt die hinter dem Körper sich bildenden Heckwirbel an der Erzeugung von Widerstand wesentlich mitbeteiligt. Sie lassen zurzeit eine rein mathematische Behandlung der Aufgabe als undurchführbar erscheinen. Wie immer in solchen Fällen, sucht man Hilfe bei der Ähnlichkeitsmechanik und beim Modellversuch. Wegen des Auftretens der innern Flüssigkeitsreibung kann bei mechanisch ähnlichen Vorgängen nur das Reynoldssche Modellgesetz in Betracht kommen, dessen einfachste Form nach Gl. 67 $\frac{V\,L}{(\nu)} = \frac{v\,l}{\nu} = \text{unv.} = \psi$ ist. Da die Schwere als beschleunigende Kraft nicht wirkt, so braucht man das Froudesche Modellgesetz nicht zu beachten.

Leider ist selbst bei glatten Oberflächen bisher eine Zusammenfassung der Vorgänge unter Ähnlichkeitsbeziehungen noch nicht gelungen. Die Form der Körper beeinflußt in beträchtlichem Maße die Oberflächenreibung wie auch den Heckwirbelwiderstand, welch letzterer wesentlich wieder von den Reibungsvorgängen in der Nähe der Körperwände abhängt.

Bei den Oberflächen praktischer Konstruktionen sind noch zwei weitere Umstände zu berücksichtigen, nämlich erstens die Rauhigkeit der Fläche und zweitens die beulen- oder wellenförmigen Gebilde in der Stoffhaut oder die Unstetigkeiten der Eisenbeplattung zufolge Niet und Naht.

Versuche unter strenger Einhaltung mechanischer Ähnlichkeit konnten angesichts dieser erschwerenden Umstände bisher nicht durchgeführt werden. Jedoch liegen vielverheißende theoretische und experimentelle Untersuchungen Prandtls*) — allerdings ohne Bezugnahme auf Ähnlichkeitsvorgänge — vor: Prandtl geht davon aus, daß die an sich nur geringe Reibung besitzende Flüssigkeit zwar da, wo keine Wände sind, sich so gut wie eine reibungslose Flüssigkeit verhält, „daß sich aber an den Wänden unter dem Einfluß der Reibung eine dünne Grenzschicht ausbildet, in der die Geschwindigkeit von dem Wert, der der reibungsfreien Bewegung entspricht, auf denjenigen übergeht, den das Haften an der Wand erfordert". Die grundlegende Bedeutung dieser Auffassung liegt für Luftschiffe, U-Boote und andere in unbegrenzten Flüssigkeiten bewegte Körper darin, daß sie eine Erklärung über das Zustandekommen der Heckwirbel ermöglicht. Prandtl schließt aus seinen Untersuchungen, daß sich — meistens nahe dem Heck — Teile der Grenzschicht von der Wand in die Flüssigkeit hinausschieben und so zur „Ablösung" der Strömung von der Wand und zur Erzeugung von Heckwirbeln Anlaß geben. Fischartige Körper mit schlank auslaufendem Hinterteil ergeben nur geringe Heckwirbelwiderstände. Die Form des Vorderteils ist weniger wichtig; sie braucht nur gerundet aber nicht spitz zu sein.

Da die strenge Modellmechanik versagt, so behilft sich die Praxis zur Bestimmung der in Rede stehenden Widerstände in folgender Weise: Der Gesamtwiderstand wird in zwei Teile zerlegt, in den aus den Druckkräften zusammenzusetzenden Formwiderstand und in den aus den Tangentialkräften zu bildenden Oberflächenwiderstand.

Der erstere ist in der Göttinger Versuchsanstalt für verschiedene Modellformen ermittelt worden, indem die Druckverteilung um den Körper beobachtet wurde. Der Gesamtwiderstand des Modells wurde unmittelbar gemessen. Der Unterschied der beiden, der Restwiderstand, ist gleich dem Reibungswiderstand. Ohne Benutzung des Reynoldsschen Modellgesetzes wird nun der Formwiderstand unter Annahme mechanischer Ähnlichkeit nach dem Newtonschen Gesetz auf die große Ausführung mittels der Gleichung $W_f = \alpha(\varrho) F V^2$ übertragen, wobei für α die durch den Modellversuch be-

*) Einen vorzüglichen Überblick bietet die Darstellung Prandtls im Handwörterbuch der Naturwissenschaften 4. Bd. 1913 S. 117.

stimmte Kennziffer $\alpha = \frac{w_f}{\varrho f v^2}$ benutzt wird. Die Versuche sind für Luft durchgeführt worden; es ist sehr erwünscht, daß sie auch für Wasser fortgesetzt werden.

Für den Reibungswiderstand der U-Boote gelten ähnliche Erfahrungsformeln wie für die entsprechenden Widerstände bei gewöhnlichen Schiffen. Bezüglich der Hautreibung der Luftschiffe ist man mangels geeigneter Versuchsunterlagen gegenwärtig noch auf Schätzungen angewiesen, doch werden unmittelbare Messungen des Schraubenschubs der Luftschiffe bald Klarheit über den Gesamtwiderstand verbreiten. Allerdings wird auch dann noch insofern eine Unsicherheit bestehen bleiben, als es fraglich ist, ob eine Abtrennung des Formwiderstandes in der oben beschriebenen Weise berechtigt ist, und ob die Übertragung des aus Druckmessungen am Modell errechneten Formwiderstandes auf die große Ausführung mittels des allgemeinen Newtonschen Ähnlichkeitsgesetzes nicht erhebliche Abweichungen gegenüber der Wirklichkeit mit sich bringt. Das gleiche gilt für die U-Boote.

Die Erklärung dafür, daß bei den Überwasserschiffen das Froudesche Verfahren zu praktisch so befriedigenden Ergebnissen führt, ist im wesentlichen darin zu erblicken, daß bei ihnen der Wellenwiderstand fast den gesamten Formwiderstand ausmacht und zugleich eine Behandlung nach den Lehren mechanischer Ähnlichkeit in einfacher Weise zuläßt.

Sehr beachtenswert erscheint die aus Göttinger und Eiffelschen Versuchen hervorgehende Tatsache, daß die Gleichung zur Berechnung des Gesamtwiderstandes mit wachsender Geschwindigkeit eine beständigere, einer Grenze sich immer mehr nähernde Form erhält. Man darf es also wohl als Regel ansehen, daß bei größeren Geschwindigkeiten der Luft- und Unterwasserschiffe die mechanische Ähnlichkeit im praktischen Sinne eine vollkommenere wird.

Über Drähte, Stangen und andere Körper, die strömenden Flüssigkeiten — Wasser oder Luft — ausgesetzt werden, liegen ebenfalls aus der genannten Versuchsanstalt Mitteilungen vor, die erkennen lassen, daß bei jenen Strömungen eine Reynoldssche Ähnlichkeit als Folge der Zähigkeit der verwendeten Flüssigkeiten vorliegt.

48. Ähnlichkeitsbeziehungen bei formgleichen Dampfturbinenrädern. (Anwendung 16.) Stodola*) vergleicht zwei in allen Teilen geometrisch ähnliche Scheibenräder beliebiger

*) Stodola, Die Dampfturbinen, 4. Aufl. 1910 S. 261.

Form, wie sie vornehmlich bei Dampfturbinen vorkommen. Der Stoff ist der gleiche. Gefragt wird: Unter welchen Umständen werden die Umlaufsbewegungen mechanisch ähnlich? — Als physikalische Kräfte kommen allein die elastischen Kräfte Hookescher Art in Betracht; denn die Zentrifugalkräfte sind nur die der Massenbeschleunigung entsprechenden Trägheitskräfte. Es muß also das Cauchysche Modellgesetz erfüllt sein, d. h. es gelten die Gleichungen des Abschnitts 28 in der Form: $\tau = \lambda$ oder $T : t = L : l$ oder $V = v$; in Worten: Die Umlaufszeiten müssen sich wie die Durchmesser, die Umlaufszahlen also umgekehrt wie diese verhalten; oder: die Umfangsgeschwindigkeiten müssen gleich sein. Nach Abschnitt 28, Absatz h, sind die Spannungen in entsprechenden Punkten ebenfalls gleich groß.

Eine Erweiterung dieser Ähnlichkeitssätze auf formähnliche Scheibenräder wird im Teil IV, Abschnitt 58, gegeben.

49. Normandsche Ähnlichkeit bei Reihen-Dampfmaschinen verschiedener Größe unter Voraussetzung gleicher Festigkeit. (Anwendung 17.) Normand*) hat im Jahre 1894 eine Reihe von Sätzen über geometrisch ähnliche, aus gleichen Stoffen erbaute Kolbendampfmaschinen aufgestellt, die vom Standpunkte der Ähnlichkeitsmechanik aus als eine Anwendung des Cauchyschen Modellgesetzes erscheinen. Seine Frage: Unter welchen Umständen arbeiten diese Reihenmaschinen auch mechanisch ähnlich? können wir sofort in folgender Weise beantworten. Wenn — bei Außerachtlassung des Einflusses der Schwerkräfte und etwaiger störender Nebenerscheinungen — außer den Dampfkräften allein die inneren Spannkräfte Hookescher Art, kurz elastische Kräfte genannt, auf die Bewegungsvorgänge beschleunigend einwirken, so kommt das Cauchysche Modellgesetz in Betracht, wenn dafür gesorgt wird, daß die Dampfkräfte denselben Kräftemaßstab $\varkappa$ erhalten wie die elastischen Kräfte. Nach Gl. 80 c ist für letztere: $\varkappa = \lambda^2$. Mithin müssen die Dampfkräfte D und d ebenfalls $\varkappa = \frac{D}{d} = \frac{P\,F}{p\,f} = \lambda^2$ ergeben, woraus hervorgeht, daß die mittleren Dampfspannungen P und p gleich groß sein müssen. Dies Ergebnis ist in Übereinstimmung damit, daß bei Cauchyscher Ähnlichkeit entsprechende Spannungen den gleichen Wert haben. $\varkappa = \lambda^2$ gilt auch für innere Spannkräfte, die mit vernachlässigbar kleinen Formänderungen verbunden sind, sofern nur die Bedingung gleicher Spannung beibehalten wird, und aus dieser Forderung ist bei Normand die Gleichung $\varkappa = \lambda^2$ ent-

*) Jauch et Masméjean, Cours de machines marines, 2. Teil Paris-Toulon 1910 S. 570.

standen. Wegen dieser Übereinstimmung in den Ähnlichkeitsbeziehungen kann auch der Normandsche Fall nach den Cauchyschen Modellgesetzen behandelt werden; allerdings läßt N. die beschleunigenden Schwerkräfte außer Ansatz.

Die Cauchyschen Modellgesetze lauten nach Abschnitt 28, Absatz h, oder nach den Gleichungen 80: $\tau = \lambda$ oder $T : t = L : l$ sowie $V = v$, und $B : b = 1/L : 1/l$, das heißt in Worten: Die Umlaufzeiten dieser Reihen-Dampfmaschinen stehen in geradem Verhältnis der linearen Abmessungen oder die Umlaufszahlen im umgekehrten Verhältnis derselben. Weiter gilt für entsprechende Leistungen: $E : e = K\,V : k\,v = \lambda^2$, für die auf eine Pferdestärke bezogenen Maschinengewichte Q_1 und q_1: $Q_1 : q_1 = G/E : g/e = \lambda^3/\lambda^2 = \lambda$ und für entsprechende Massenbeschleunigungskräfte: $M\,b : m\,b = \lambda^3 . 1/\lambda = \lambda^2$ in Übereinstimmung mit dem Verhältnis der übrigen Kräfte.

Da alle Konstruktionsglieder geometrisch ähnlich durchgebildet werden, so gilt auch für etwaige aus den elastischen Kräften entspringende Störungsbewegungen, wie z. B. für Biegungs- oder Torsionsschwingungen usw., das Cauchysche Modellgesetz: $T : t = L : l$.

Weitere Einzelheiten und Angaben über die praktische Durchführung dieser Ähnlichkeitsbeziehungen bei geometrisch ähnlichen Reihen-Dampfmaschinen sind in der genannten Quelle zu finden.

50. Strenge mechanische Ähnlichkeit bei gleichzeitigem Wirken zweier Kräfte, erläutert an dem Beispiel eines über eine Brücke fahrenden Zuges. (Anwendung 18.) Routh stellt in seiner Dynamik der Systeme starrer Körper, deutsch von Schepp, Bd. I, S. 330, die Aufgabe, die Bewegungen einer über eine Brücke fahrenden Lokomotive mittels eines Modells nachzuahmen und die Fahrtgeschwindigkeit für das Modell anzugeben. Wenn dem Beispiel zunächst auch nur akademische Bedeutung zukommt, so ist der dabei einzuschlagende Weg doch vorbildlich für verwandte Fälle mechanischer Ähnlichkeit, und das Beispiel soll daher kurz erörtert werden.

Allerdings wollen wir hier nicht das von Routh mit Zahlen näher umschriebene Einzelbeispiel besprechen, sondern die Frage rein formell vom Standpunkt strenger mechanischer Ähnlichkeit untersuchen.

Wir denken uns von der eisernen Brücke ein geometrisch ähnliches Modell aus einem andern Stoff, z. B. aus Aluminium im Maßstab $1 : \lambda$ hergestellt und von einer ebenfalls aus Aluminium gefertigten Modellokomotive befahren. Die Brücken seien einfache prismatische Balkenträger. Da die

Schwere zweifellos an den lotrechten Beschleunigungen der Lokomotive und der Träger beteiligt ist, so ist das Froudesche Modellgesetz des Abschnitts 22: $\tau : \sqrt{\lambda}$ oder $V/v = \sqrt{\lambda}$ und

$$\varkappa = \frac{(\gamma)}{\gamma} \lambda^3 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (a)$$

zu beachten. Dann aber steht der Vorgang auch unter den elastischen, das Hookesche Gesetz befolgenden Kräften der Träger: Es kommt daher gleichzeitig auch das Cauchysche Gesetz des Abschnitts 28 a und c: $\tau = \lambda \sqrt{\frac{\nu}{(\nu)}}$ oder $V = v\sqrt{\frac{(\nu)}{\nu}}$ und

$$\varkappa = \frac{E}{e} \lambda^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (b)$$

in Betracht, worin $(\nu) = E/(\varrho)$, $\nu = e/\varrho$ die dynamischen Elastizitätsmaße und E, e die Elastizitätsmoduln der beiden Stoffe der Träger sind. Aus (a) und (b) folgt $\frac{(\gamma)}{\gamma}\lambda^3 = \frac{E}{e}\lambda^2$ oder:

$$\lambda = \frac{(\nu)}{\nu} = \frac{E\,(\varrho)}{e/\varrho} = \frac{E/(\gamma)}{e/\gamma} = \frac{E/e}{(\gamma)/\gamma} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (c)$$

Aus Gl. (c) ziehen wir den Schluß: Bei gleichzeitiger Wirkung von Schwere und elastischen Kräften ist der Längenmaßstab λ nicht frei wählbar, sondern aus den Eigenschaften der benutzten Stoffe zu berechnen. Bei Verwendung gleichen Stoffes ist $\lambda = 1$; d. h. es gibt kein geometrisch ähnliches Modell, das zugleich auch mechanisch ähnlich arbeiten würde.

Für das Eisen der Brücke ist $E = 2\,050\,000$ kg/cm² $= 2050.10^7$ kg/m² und $(\gamma) = 7850$ kg/m³, für das Aluminium des Modellträgers ist: $e = 683\,000$ kg/cm² $= 683.10^7$ kg/m² und $\gamma = 2560$ kg/m³. Daraus ergibt sich $\frac{E}{e} = 3$ und ebenso $\frac{(\gamma)}{\gamma} = 3$. Aus Gl. c finden wir zu unserer Überraschung infolge zufälliger, durch die Stoffwahl begründeter Umstände auch hier wieder $\lambda = 1$, d. h. das Aluminiummodell wäre in allen Teilen gerade so groß wie die Brücke selbst auszuführen. Eine andere Aluminiumsorte würde nahezu 1 ergeben, und bei Verwendung eines gänzlich andern Modellstoffes würde sich für λ vielleicht ein Verhältnis erzwingen lassen, das in der Nähe von 2 liegt. Als eine brauchbare Lösung der Aufgabe könnte aber auch dies nicht angesehen werden.

Ein ganz anderer Weg der Modellmechanik führt jedoch ans Ziel, und dieser Weg ist auch bei Stellung der Aufgabe von Routh angedeutet worden, insofern dort gar nicht eine strenge mechanisch ähnliche Nachbildung angestrebt, sondern ein Modellverfahren beschritten wird, das wir im Teil IV bei Besprechung der „unvollständigen“ mechanischen Ähnlichkeit kennen lernen werden. Dort wird die Aufgabe dann im Abschnitt 57 auch wirklich gelöst und zwar nicht etwa nach einem Näherungsverfahren, sondern streng, allerdings nicht mit den Hilfsmitteln der vollkommenen, sondern eben mit denen „unvollständiger“ mechanischer Ähnlichkeit, deren allgemeine Grundzüge im Abschnitt 21 schon besprochen wurden. Dort wird auch auf einen weiteren Fall hingewiesen, in welchem die Schwere zugleich mit elastischen Kräften wirkt, nämlich auf die Vorgänge in Förderseilen.

51. Mechanische Ähnlichkeit im Strömungsfelde reibungsfreier Flüssigkeiten. (Anwendung 19.) In diesem Abschnitt wird vorausgesetzt, daß eine reibungsfreie, unzusammendrückbare Flüssigkeit ein Hindernis beliebiger Form, z. B. einen ellipsoidisch oder flügelförmig gestalteten Körper umströme. Weiter sei die Flüssigkeit nach allen Richtungen als unendlich ausgedehnt zu denken, so daß also Wellen an der Flüssigkeitsoberfläche nicht in Frage kommen. Auch Hohlraumbildung soll ausgeschlossen sein. Die hierdurch bestimmten Strömungen können in wirklichen Flüssigkeiten nicht auftreten. Der Fall wird aber häufig zum Vergleich herangezogen und findet auch als mathematisches Gleichnis bei anderen physikalischen Vorgängen Anwendung.

Gefragt wird danach, welche Ähnlichkeitsbeziehungen bestehen, wenn zwei verschiedene Flüssigkeiten mit verschiedenen Geschwindigkeiten geometrisch ähnliche Körper umfließen. Wir stellen uns wieder einen Haupt- und einen Modellvorgang unter Beibehaltung der üblichen Bezeichnungen vor und setzen voraus, daß auch an den Grenzen, also hier in weiter Ferne, mechanische Ähnlichkeit besteht: z. B. mögen die beiden Flüssigkeiten im Unendlichen geradlinige und gleichförmige Verschiebungsbewegungen mit den entsprechenden Geschwindigkeiten V und v ausführen.

Als Kräfte kommen nur die Massenbeschleunigungskräfte M B und m b sowie die Druckkräfte $D = P\,F$ und $d = p\,f$ in Betracht. Letztere haben nach Abschnitt 11 keinen Einfluß auf die Form der Ähnlichkeitsbeziehungen. Wegen des Fehlens einer physikalischen Kraft im Sinne des eben genannten Abschnitts besteht hier kein besonderes Modellgesetz, und es kann daher nicht nur frei über den Längenmaßstab λ, sondern — mangels einer zweiten Gleichung für den Kräftemaßstab $\varkappa$ — auch frei über den Zeitmaßstab τ verfügt werden. Aus der Trägheit der Massen folgt als einzige Ähnlichkeitsbeziehung für die Kräfte:

$$\varkappa = \frac{M\,B}{m\,b} = \frac{(\varrho)}{\varrho}\,\lambda^3\,\frac{\lambda}{\tau^2}$$

oder, da die auf entsprechende, beliebig abgegrenzte Flächenteile wirkenden Druckkräfte D und d ebenfalls im Verhältnis $\varkappa$ stehen müssen, auch:

$$\varkappa = \frac{D}{d} = \frac{P\,F}{p\,f} = \frac{(\varrho)}{\varrho}\,\frac{F}{f}\,\frac{V^2}{v^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{(a)}$$

Sämtliche in den Vorgang einspielenden Kräfte oder entsprechende Teilkräfte befolgen daher das Newtonsche allgemeine Ähnlichkeitsgesetz:

$$\left.\begin{aligned} K &= \alpha\,(\varrho)\,F\,V^2 \\ k &= \alpha\,\varrho\,f\,v^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{(b)}$$

worin α für je zwei entsprechende Kräfte dieselbe unbenannte Zahl ist.

Aus Gl. a folgt das Verhältnis entsprechender Drücke auf die Flächeneinheit zu:

$$P : p = (\varrho)\,V^2 : \varrho\,v^2\,, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{(c)}$$

eine Gleichung, die auch in den Formen geschrieben werden kann:

$$P = \alpha\,(\varrho)\,V^2 \quad \text{und} \quad p = \alpha\,\varrho\,v^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{(d)}$$

oder:

$$P = \alpha\,\frac{(\gamma)\,V^2}{2\,g} \quad \text{und} \quad p = \alpha\,\frac{\gamma\,v^2}{2\,g} \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{(e)}$$

oder wenn die entsprechenden Druckhöhen $H = P/(\gamma)$ und $h = h/\gamma$ eingeführt werden:

$$H = \alpha\,\frac{V^2}{2\,g} \quad \text{und} \quad h = \alpha\,\frac{v^2}{2\,g} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{(f)}$$

Gleichbedeutend mit der freien Verfügbarkeit über λ und τ ist die beliebige Wahl des Geschwindigkeitsverhältnisses $V/v = \lambda/\tau$. V und v können frei gewählt werden, ohne daß in diesem Idealfalle die mechanische Ähnlichkeit der Strömungsvorgänge um das geometrisch ähnliche Hindernis beeinträchtigt wird. Bei beliebiger anderer Wahl der Strömungsgeschwindigkeiten bleibt das Stromlinienfeld um ein und dasselbe Hindernis also kongruent erhalten.

Für technische Anwendungen kommen diese Ergebnisse auch nicht angenähert in Betracht, da die mathematische Behandlung Gesamtwiderstände $W = 0$ und $w = 0$ ergibt: Das Auftreten von Reibungskräften im Innern und an den Grenzflächen ist die Ursache dafür, daß bei wirklichen Flüssigkeiten sowohl der Strömungsverlauf wie die Kräfte gänzlich andere Gesetze als die hier erörterten befolgen (vgl. Abschnitte 47 und 52).

52. **Das Newtonsche allgemeine Ähnlichkeitsgesetz bei formgleichen Antriebsschrauben und flügelartig gekrümmten Flächen (Anwendung 20).** Die

hier zu betrachtenden Schrauben oder Flügel seien in ihrer Flüssigkeit. Wasser oder Luft, vollständig eingetaucht. Eine Erzeugung von Schwerewellen, z. B. bei Schrauben, die nahe der Wasseroberfläche arbeiten, ist entweder zu verhindern, da sie mehr oder weniger zu einer Bindung an das Froudesche Modellgesetz Anlaß geben würde, oder darf nur in sehr geringfügigem Maße vorliegen. Schwerewirkungen sollen also ausgeschlossen sein. Dem Vergleiche zugrundegelegt werden zwei geometrisch ähnliche, also formgleiche Schrauben oder Tragflügel, die sich in zwei verschiedenen Flüssigkeiten bewegen. Für den Hauptvorgang gelten im folgenden wieder die großen und eingeklammerten Buchstaben, für den Modellvorgang die kleinen. Das Verhältnis entsprechender linearer Abmessungen wird durch den Längenmaßstab λ festgelegt.

Zur Beurteilung von Ähnlichkeitsbeziehungen kommen dieselben Kräfte in Frage wie in Abschnitt 47 bei der Behandlung der Luft- und Unterwasserschiffe, also innere Flüssigkeitsreibung, Oberflächenreibung, Wirbelwiderstände und wie immer bei Massenbeschleunigungsvorgängen die Trägheitskräfte M B und m b. Vollkommene mechanische Ähnlichkeit würde mit Rücksicht auf die Zähigkeitserscheinungen die Einhaltung des Reynoldsschen Gesetzes bei den Modellversuchen erfordern. Man müßte also nach Abschnitt 26 die Geschwindigkeiten des Modells nach der Gl.: $vd/\nu = VD/(\nu) = \psi =$ unveränderliche Reynoldssche Zahl bemessen, worin z. B. bei Schrauben D und d die beiden Durchmesser sind. Doch liegen die Verhältnisse hier wesentlich anders als bei Luft- und Unterwasserschiffen und die Praxis ist berechtigt. von der Erfüllung des Reynoldsschen Modellgesetzes aus den im folgenden angegebenen Gründen abzusehen:

Die Form der beiden genannten Schiffsarten wird im wesentlichen bestimmt durch das Bestreben, den Fahrtwiderstand klein zu halten; überall ist der Wunsch maßgebend, Beschleunigungen der Flüssigkeitsmassen in der Fahrtrichtung nach Möglichkeit zu verhindern.

Anders bei Schrauben und Flügeln: Bei Schrauben will man möglichst große Kräfte in Richtung der Achse erzeugen und muß daher die Flüssigkeitsmassen in der entgegengesetzten Richtung in hohem Maße beschleunigen. Auch die Tragflügel sollen die Luftmassen beschleunigen, aber die Beschleunigungen müssen hier lotrecht nach unten erfolgen zwecks Erzielung großer Auftriebskräfte.

1. Schrauben: Besonders bei den Schrauben, die hier zunächst allein weiter verfolgt werden sollen, kommen verhältnismäßig sehr große Be-

schleunigungskräfte in Betracht. Sie überragen die inneren und äußeren Reibungskräfte so weit, daß letztere in vielen Fällen vom Standpunkte mechanischer Ähnlichkeit aus als geringfügig bezeichnet werden können. Weiter wirkt bei Schrauben noch ein anderer Umstand äußerst günstig auf die Ähnlichkeitsbeziehungen ein. Aus den bisherigen Versuchsergebnissen ist zu schließen, daß die auf der Minderdruck- oder Saugseite und an der Austrittskante geometrisch ähnlicher Schrauben sich abspielenden Vorgänge bei den großen relativen Strömungsgeschwindigkeiten entweder ein so gut wie unveränderliches Gefüge haben oder doch wenigstens — im Verein mit den am Kopf auftretenden Kräften oder sonstigen Normaldrücken — einen Formwiderstand ergeben, der das allgemeine Newtonsche Ähnlichkeitsgesetz $K = \alpha(\varrho)\, FV^2$ und $k = \alpha\, \varrho\, fv^2$ für den Haupt- und Modellvorgang praktisch gut befriedigt. In welcher Weise die Vorgänge auf der Saugseite verlaufen, ist für Schrauben experimentell noch nicht festgestellt. Es ist möglich, daß die Ablösung der Strömung von der Wandung im Sinne der Prandtlschen Grenzschichtentheorie (vgl. Abschnitt 47) bei den hohen Geschwindigkeiten schon sehr nahe der Einheitsstelle beginnt und so auf der Saugseite Anlaß zur Ausbildung einer Wirbelzone gibt. Man hätte es dann nicht nur mit Heck- oder Austrittswirbeln zu tun.

Zusammenfassend kann man sagen: Die von den Antriebsschrauben auf die Flüssigkeit ausgeübten Kräfte bestehen in weit überwiegendem Maße aus normal zur Oberfläche stehenden Druckkräften, deren Wirkung auf die Flüssigkeit sich in Erteilung von Beschleunigungen äußert. Die Beschleunigungen sind zum großen Teile achsial rückwärts gerichtet und daher dem beabsichtigten Zwecke förderlich, zum kleinen Teile sind sie peripherisch und radial und beeinträchtigen dann den Wirkungsgrad der Schraube. Alle diese Massenbeschleunigungskräfte befolgen das allgemeine Newtonsche Ähnlichkeitsgesetz praktisch in weiten Grenzen, und man braucht somit wegen des überragenden Vorherrschens dieser Trägheitserscheinungen bei Schraubenähnlichkeitsversuchen kein besonderes Modellgesetz zu beachten. Daher kann der Längenmaßstab λ und der Zeitmaßstab τ oder, was auf dasselbe hinauskommt, das Verhältnis entsprechender Geschwindigkeiten, frei gewählt werden, ohne daß die mechanische Ähnlichkeit der Strömungen nennenswert gestört wird.

Natürlich ist darauf zu achten, daß alle Paare entsprechender Geschwindigkeiten denselben Wert ergeben. Bezeichnet man die Fahrtgeschwindigkeit der beiden formgleichen Schrauben mit V und v, ihre größten Umfangsgeschwindigkeiten mit U und u, so muß, wenn die Strömungsvorgänge mechanisch ähnlich verlaufen sollen, V/v = U/u oder V/U = v/u = einer unveränderlichen Zahl = χ sein. In der neueren Ähnlichkeitsmechanik wird die Zahl χ die „Fahrtsteigung“ der Schraube genannt und mit λ bezeichnet, doch wird λ bei uns hier schon für den Längenmaßstab gebraucht. Die Übereinstimmung der Fahrtsteigung χ wird bei formgleichen Schrauben als das entscheidende Merkmal mechanischer Ähnlichkeit angesehen, eine Folgerung, die auch so ausgesprochen werden kann: Formgleiche Schrauben arbeiten bei gleicher Fahrtsteigung χ in beliebigen Flüssigkeiten vom praktischen Standpunkt der Technik aus auch mechanisch ähnlich, sofern die allgemeinen Voraussetzungen der Ähnlichkeitsmechanik erfüllt sind; die Größe der Geschwindigkeit kann beliebig gewählt werden.

Aus obigen Betrachtungen geht hervor, daß auch für die Schubkräfte S und s der Hauptausführung und des Modells das Newtonsche Ähnlichkeitsgesetz

$$\left.\begin{array}{l} S = \alpha(\varrho)\, F\, V^2 \\ s = \alpha\, \varrho\, f\, v^2 \end{array}\right. \quad \text{oder} \quad \left.\begin{array}{l} S = \sigma(\varrho)\, D^2\, V^2 \\ s = \sigma\, \varrho\, d^2\, v^2 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{a,}$$

gilt, worin die Kennziffern α und σ bei gleicher Fahrtsteigung unveränderliche Zahlen sind.

Für einen anderen Wert der Fahrtsteigung χ erhält man auch einen andern Wert der Kennziffer α; α ist also abhängig von χ. Von diesem Standpunkte aus ergibt sich wieder eine sehr übersichtliche und bequeme dimensionslose Darstellung sämtlicher Schubkräfte formgleicher Schrauben, indem man die Funktion $\alpha = F(\chi)$ als Eigenschaftskurve der Schubkräfte in einem rechtwinkligen Achsenkreuz aufträgt. Ist die mechanische Ähnlichkeit der Strömungsvorgänge bei formgleichen Schrauben im Sinne dieser Untersuchungen tatsächlich erfüllt, so zeigt sich dies darin, daß für alle geometrisch ähnlichen Schrauben und für beliebige Flüssigkeiten sämtliche Wertepaare χ, α nur eine einzige Eigenschaftskurve ergeben. Alle weiteren Einzelheiten über die dimensionslose Darstellung und die praktische Handhabung des Modellverfahrens für Schrauben sind sinngemäß aus Abschnitt 24 zu entnehmen.

Die Gültigkeit der Gln. a für Schrauben ist eine notwendige Folge der Voraussetzung mechanischer Ähnlichkeit. Daß die Kennziffer α nur in ganz geringem Maße von der Reynoldsschen Zahl ψ, praktisch also so gut wie ausschließlich von der Fahrtsteigung χ abhängt, beweist, daß die Zähigkeit auf die Ähnlichkeitsbeziehungen nur von untergeordneter Bedeutung ist.

Damit soll nicht gesagt sein, daß die Zähigkeit überhaupt keinen Einfluß hat. Nein, die Flüssigkeitsreibung ist so wesentlich an dem ganzen Vorgang beteiligt, daß ihr Fehlen auf eine Schubkraft vom Betrage Null führen müßte.

Die Gln. a, gültig für zwei entsprechende Schubkräfte formgleicher Schrauben, lassen nach der erweiterten Maßstabregel (Abschnitt 14) ohne Zuhilfenahme irgendwelcher Voraussetzungen folgende Umformungen zu:

$$\left.\begin{aligned} S &= \alpha' (\varrho)\, D^4\, T^{-2} \\ s &= \alpha' \varrho\, d^4\, t^{-2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad b)$$

oder

$$\left.\begin{aligned} S &= \alpha' (\varrho)\, D^4\, N^2 \\ s &= \alpha' \varrho\, d^4\, n^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad c)$$

oder

$$\left.\begin{aligned} S &= \alpha'' (\varrho)\, F\, V_1^2 \\ s &= \alpha'' \varrho\, f\, v_1^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad d)$$

oder

$$\left.\begin{aligned} S &= \alpha''' (\varrho)\, F\, V_2 (V_2 - V_1) \\ s &= \alpha''' \varrho\, f\, v_2 (v_2 - v_1) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad e)$$

Hierin sind α', α'', α''' drei unbenannte Zahlen, die bei gleicher Fahrtsteigung χ je in den beiden Gleichungen denselben Wert haben; T, t sind entsprechende Zeiten, N, n entsprechende Umlaufszahlen, V_1, v_1 und V_2, v_2 je zwei entsprechende, im übrigen ganz beliebige Geschwindigkeiten der Hauptausführung und des Modells. Natürlich sagen alle fünf Gleichungspaare a—e dasselbe aus, so daß man sich auf eine Form, z. B. a, beschränken kann.

Bei Darstellung der Modellversuche wird leider als Ordinate nicht immer eine dimensionslose Größe, wie z. B. $\alpha = \frac{s}{\varrho f v^2}$, aufgetragen. Das ist sehr zu bedauern, da alsdann beim Vergleichen von Schraubenergebnissen verschiedener Beobachter erst langwierige Umrechnungen erforderlich werden. Die von Gümbel*) ausgesprochene Forderung, soweit angängig alle Versuchsunterlagen dimensionslos darzustellen, sollte allgemein beherzigt werden.

Offenbar ist aus der Aussage, daß formgleiche Schrauben das allgemeine Newtonsche Ähnlichkeitsgesetz der Gln. a befriedigen, in Übereinstimmung mit den Darlegungen des Abschnitts 51 die Folgerung zu ziehen: Ein Körper von der Form eines Schraubenflügels werde einem kräftigen Flüssigkeitsstrom ausgesetzt, dessen Richtung — in unendlicher Ferne vom Flügel — einen verhältnismäßig kleinen Anströmwinkel gegen die

*) Vgl. die Anmerkung im Abschnitt 24.

Wölbungssehne hat. Ändert man die Größe der Zuflußgeschwindigkeit unter Beibehaltung ihrer Richtung, so bleibt das Stromlinienfeld im wesentlichen das gleiche und der Widerstand ändert sich bis auf geringfügige Abweichungen nach dem rein quadratischen Widerstandsgesetz.

Für die technischen Anwendungen genügt es bei Schrauben, außer der Eigenschaftskurve der Schubkräfte noch diejenige der Gesamtleistungen (Leistungsaufnahmen) E und e, gemessen in kg m/sk, zu kennen. Man erhält für diese auf Grund ähnlicher Überlegungen wie für die Schubkräfte bei gleicher Fahrtsteigung χ:

$$\left.\begin{array}{l} E = \varepsilon\,(\varrho)\,F\,V^3 \\ e = \varepsilon\,\varrho\,f\,v^3 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f)$$

oder

$$\left.\begin{array}{l} E = \varepsilon'\,(\varrho)\,D^5\,N^3 \\ e = \varepsilon'\,\varrho\,d^5\,n^3 \end{array}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (g)$$

worin ε und ε' zwei unbenannte Kennziffern sind. Aus Modellversuchen ist ε mittels der Gl. $\varepsilon = \frac{e}{\varrho\,d^5\,n^3}$ zu berechnen und als Funktion von χ als zweite für alle formgleichen Schrauben geltende Eigenschaftskurve darzustellen. Als zweite Eigenschaftskurve wird häufig an Stelle derjenigen der Leistungen eine solche der Drehmomente gewählt.

Der Wirkungsgrad berechnet sich, wenn V und v die Fahrtgeschwindigkeiten sind, zu

$$\eta = \frac{S\,V}{E} = \frac{s\,v}{e} = \frac{\alpha}{\varepsilon}$$

und kann ebenfalls als Funktion von χ aufgetragen werden.

Es sei hier ausdrücklich noch einmal darauf hingewiesen, daß mechanische Ähnlichkeit nur dann bestehen kann, wenn nicht Nebenerscheinungen die Vorgänge stören. Als störende Ursachen kommen bei Schrauben in Betracht: Ungleichförmigkeit der Strömung, Ungleichheit der Durchwirbelung, Verstöße gegen die geometrische Ähnlichkeit an den Begrenzungswänden des Flüssigkeitsstroms, Schwerewellen, Zähigkeit, Oberflächenreibung, Hohlraumbildung, Zusammendrückbarkeit der Flüssigkeit, elastische Formänderungen und Schwingungen der Schraubenflügel.

Zur scharfen Hervorkehrung des Übereinstimmenden und des Unterschiedlichen seien hier kurz die Froudesche, die Reynoldssche und die Schraubenähnlichkeit einander gegenübergestellt:

a) Die Froudesche Ähnlichkeit besteht bei alleinigem Wirken der Schwere. Es gilt hier $k = \alpha \varrho f v^2$, worin die Kennziffer α nur von der Froudeschen Zahl $\varphi = v^2/g\,l$ abhängt, also $\alpha = F(v^2/g\,l)$ ist.

b) Die Reynoldssche Ähnlichkeit besteht bei alleinigem Wirken der inneren Flüssigkeitsreibung. Es gilt hier $k = \alpha \varrho f v^2$, worin die Kennziffer α nur von der Reynoldsschen Zahl $\psi = v\,l/\nu$ abhängt, also $\alpha = F(v\,l/\nu)$ ist.

c) Die Schraubenähnlichkeit entspricht nur der allgemeinen Newtonschen Ähnlichkeit und besteht unabhängig von der Größe der Geschwindigkeit. Es gilt hier $k = \alpha \varrho f v^2$, worin die Kennziffer α nur von der Fahrtsteigung, d. i. der Zahl $\chi = v/u$ abhängt, also $\alpha = F(v/u)$ ist.

φ, ψ, χ sind reine Zahlen, also unabhängig davon, in welchen Maßen Längen, Zeiten und Kräfte gemessen werden.

Die Schraubenähnlichkeit wird von einem anderen Standpunkte aus noch einmal im Teil IV Abschnitt 59 behandelt.

2. Tragflügel: Bei Tragflügeln liegen die Verhältnisse etwas anders: Erstens weichen ihre Profile von denen der Schrauben ab und zweitens sind die relativen Stromgeschwindigkeiten und damit die Oberflächendrücke kleiner. Dennoch zeigen die Göttinger und Eiffelschen Versuche, daß auch hier in ziemlich weiten Grenzen das allgemeine Newtonsche Ähnlichkeitsgesetz mit genügender, praktisch gut verwertbarer Annäherung benutzt werden kann. Einzelheiten über die hierbei beobachtete Ähnlichkeit der Vorgänge findet man in der im Abschnitt 43 genannten Abhandlung Baders.

IV. Fälle unvollständiger mechanischer Ähnlichkeit.

53. Erklärung der „unvollständigen" mechanischen Ähnlichkeit. In den bisherigen Anwendungen war stets vollkommene mechanische Ähnlichkeit vorausgesetzt worden. Es gibt jedoch auch zahlreiche Fälle unvollständiger mechanischer Ähnlichkeit, in denen absichtlich die Bedingung geometrischer Ähnlichkeit von Hauptausführung und Modell nicht in allen Teilen gewahrt ist, bei denen es aber dennoch gelingt, aus einem Modellversuche alles das in voller Strenge abzulesen, was man zu wissen wünscht. Im Abschnitt 21 haben wir einen solchen Fall unvollständiger Ähnlichkeit

an dem Beispiel „Verdrehungsschwingungen einer an einem elastischen Stab befestigten Masse“ erläutert. Wir verweisen hier ausdrücklich auf das dort ausgesprochene Grundsätzliche und werden jetzt in den nachstehenden Abschnitten noch einige weitere Anwendungen aus dem Gebiete „unvollständiger“, aber dennoch nicht unvollkommener Ähnlichkeit behandeln. Grundbedingung bei den folgenden Beispielen ist immer, daß die Differentialgleichungen des Modellvorgangs sich mit denen des Hauptvorgangs zur Übereinstimmung bringen lassen, oder — bei Weiterbefolgung des von uns eingeschlagenen Verfahrens — daß der durch die Bertrandsche Bedingungsgleichung $\varkappa = \mu\,\lambda/\tau^2$ gegebene Kräftemaßstab $\varkappa$ den gleichen Wert hat wie der aus den jeweils wirkenden physikalischen Kräften sich ergebende (Abschnitte 7 und 11).

54. Ähnlichkeitsfolgerungen für die Querschwingungen gespannter Saiten. (Anwendung 21.) Dieses Beispiel werde zuerst behandelt, da es besonders einfach ist. Die Saite der Hauptausführung sei durch die Kraft K, die des Modells durch k gespannt. Der Kräftemaßstab ist $K/k = \varkappa$. L und l seien die Längen, M und m die Gesamtmassen; ihr Verhältnis sei $M/m = \mu$. Stoff und Dicke der Saiten beider Ausführungen seien ganz beliebig aber homogen. Die Mittelpunkte der einzelnen hin- und herschwingenden Massenteilchen sollen sich vollkommen mechanisch ähnlich bewegen. Aus dem Vergleich der Trägheitskräfte ergibt sich:

$$\varkappa = \frac{M\,B}{m\,b} = \mu\,\frac{\lambda}{\tau^2} = \frac{M}{m}\,\frac{\lambda}{\tau^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Als physikalische Kraft tritt an den einzelnen Teilchen eine aus den Spannkräften K und k zu bestimmende quergerichtete Mittelkraft εK und $\varepsilon\,k$ auf, so daß als zweite Gleichung für $\varkappa$ nur

$$\varkappa = \frac{\varepsilon\,K}{\varepsilon\,k} = \frac{K}{k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

in Betracht kommt. Aus (a) und (b) folgt

$$\frac{K}{k} = \frac{M}{m}\,\frac{\lambda}{\tau^2}.$$

Mithin wird der Zeitmaßstab τ:

$$\tau = \sqrt{\lambda\,\frac{M}{m}\,\frac{k}{K}} = \sqrt{\frac{L}{l}\,\frac{M}{m}\,\frac{k}{K}}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

das Modellgesetz für entsprechende Zeiten lautet also:

$$T:t=\sqrt{\frac{L\,M}{K}}:\sqrt{\frac{l\,m}{k}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (d)$$

und das für entsprechende Schwingungszahlen:

$$N:n=\sqrt{\frac{K}{L\,M}}:\sqrt{\frac{k}{l\,m}}; \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (e)$$

d. h. in Worten: Die Schwingungszahlen von Saiten verhalten sich wie die Wurzeln aus den Spannkräften und umgekehrt wie die Wurzeln aus den Längen und den Massen.

Für entsprechende Geschwindigkeiten folgt:

$$V:v=\sqrt{\frac{L\,K}{M}}:\sqrt{\frac{l\,k}{m}}=\sqrt{\frac{(\sigma)}{(\varrho)}}:\sqrt{\frac{\sigma}{\varrho}}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (f)$$

worin (σ), σ die Spannungen und (ϱ), ϱ die Dichten der beiden Saiten sind.

55. **Ermittlung der kritischen Drehzahlen bei Verdrehungsschwingungen von Wellen aus Modellversuchen.** (Anwendung 22.) Vor Behandlung des allgemeinen Falles einer mit beliebigen Massen besetzten Welle sollen für den einfachen eingespannten, eine Endmasse tragenden zylindrischen Stab die Differentialgleichungen der Verdrehungsschwingungen der Hauptausführung und des Modells einander gegenübergestellt werden. Sie lauten, wenn für erstere wieder die großen Buchstaben und für das Modell die kleinen benutzt werden und die Massen des Stabes vernachlässigt werden können:

$$J\,\frac{d^2\varphi}{d\,T^2}+C\,\varphi=0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (a)$$

$$i\,\frac{d^2\varphi}{d\,t^2}+c\,\varphi=0, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (b)$$

worin φ die für beide Vorgänge gleichen Verdrehungswinkel, J, i die Trägheitsmomente der beiden Massen und C, c die elastischen Wellenkonstanten bedeuten. Diese sind bei Kreisquerschnitt der Wellen:

$$C=\frac{G\,J_p}{L} \quad \text{und} \quad c=\frac{g\,i_p}{l}; \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (c)$$

hierin sind G, g die beiden Schubmoduln und J_p, i_p die polaren Trägheitsmomente der Wellenquerschnitte.

Aus dem Vergleich der einzelnen die Bedeutung von Drehmomenten besitzenden Glieder von a und b geht hervor:

$$\varkappa \lambda = \frac{J}{i} \cdot \frac{1}{\tau^2} = \frac{C}{c}.$$

Daher wird der Zeitmaßstab:

$$\tau = \sqrt{\frac{J}{i} \frac{c}{C}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (d)$$

und das Modellgesetz für entsprechende Zeiten:

$$T : t = \sqrt{\frac{J}{C}} : \sqrt{\frac{i}{c}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (e)$$

Dies läßt sich auch schreiben:

$$T = \alpha \sqrt{\frac{J}{C}} \qquad t = \alpha \sqrt{\frac{i}{c}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (f)$$

Für entsprechende Umlaufszahlen ist dann:

$$N : n = \sqrt{\frac{C}{J}} : \sqrt{\frac{c}{i}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (g)$$

oder

$$\left.\begin{aligned} N &= \varepsilon \sqrt{\frac{C}{J}} = \varepsilon \sqrt{\frac{G\,J_p}{L\,J}} \\ n &= \varepsilon \sqrt{\frac{c}{i}} = \varepsilon \sqrt{\frac{g\,i_p}{l\,i}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (h)$$

Das Modell möge nach folgenden Angaben gebaut werden: Gewählt wird als Maßstab für die Wellenlängen: $L/l = \lambda_1 = 10$, für die Wellendurchmesser: $D/d = \lambda_2 = 100$, also für die Trägheitsmomente der Querschnitte: $J_p/i_p = \lambda_2^4 = 10^8$. Weiter wird gewählt für die Massenträgheitsmomente: $J/i = 10^5$, indem die Massen z. B. 10 mal so kleine lineare Abmessungen bei gleichem Stoff und 10 mal so kleine Trägheitsarme erhalten oder indem das Verhältnis 10^5 auf irgend eine andere Weise eingehalten wird. Die Schubmoduln G und g sind gleich groß. Man erhält dann:

$$\frac{C}{c} = \frac{G\,J_p\,l}{g\,i_p\,L} = \frac{\lambda_2^4}{\lambda_1} = 10^8 \cdot 10^{-1} = 10^7$$

und nach Gl (d) für τ:

$$\tau = \sqrt{\frac{J}{i} \frac{c}{C}} = \sqrt{10^5 \cdot 10^{-7}} = \frac{1}{10}.$$

Mithin wird

$$T = \frac{t}{10}$$

und

$$N = 10\,n,$$

d. h. in Worten: Die Schwingungszahlen der Hauptausführung sind 10 mal so groß wie des beschriebenen Modells.

Nach diesen Vorbereitungen werde der allgemeine Fall behandelt: Es soll zu einer mit beliebig vielen Einzelmassen besetzten und Verdrehungsschwingungen ausführenden Welle, der Hauptausführung, ein Modell konstruiert worden, mit dessen Hilfe es möglich ist, die kritischen Schwingungen in bestimmtem Zeitmaßstabe nachzuahmen.

Die gegebene große Welle wird im allgemeinen aus verschieden starken zylindrischen Teilen bestehen; sie soll der Bequemlichkeit wegen ersetzt werden durch eine elastisch gleichwertige Welle von unveränderlichem Trägheitsmoment J_p'. Der einzelne Wellenabschnitt zwischen je zwei benachbarten Einzelmassen erhält dann die neue Länge $L' = J_p' \sum \frac{L}{J_p}$, wobei die Summierung sich nur auf die Zylinderstücke des gerade betrachteten Abschnitts bezieht. Die Wellenkonstante C wird dann für diesen Abschnitt $C = \frac{G\,J_p'}{L'}$. Zu der so gewonnenen, der Hauptausführung elastisch gleichwertigen großen Welle werde nun ein Modell mit denselben Verkleinerungsmaßstäben durchgeführt wie in dem oben behandelten Zahlenbeispiel. Wenn jetzt bei Vorhandensein mehrerer Verdrehungsmassen gleichzeitig mehrere Differentialgleichungen nebeneinander bestehen, so weisen deren einzelne Glieder noch dieselbe Bauart auf, wie sie die Glieder des obigen einfachen Beispiels besitzen, und es gelten daher auf Grund des Kräftevergleichs auch dieselben Modellgesetze wie vorhin. Wir erhalten daher für den Zeitmaßstab wieder Gl. d:

$$\tau = \sqrt{\frac{J}{i}\,\frac{c}{C}}\,, \qquad \text{(i)}$$

worin J, i zwei beliebige, entsprechende Trägheitsmomente der Einzelmassen und C, c zwei beliebige entsprechende Wellenkonstanten mit der Bedeutung

$$C = \frac{G\,J_p'}{L'} \quad \text{und} \quad c = \frac{g\,i_p}{l}$$

sind. Da die Maßstäbe genau gleich denen des ersten Zahlenbeispiels gewählt sind, so berechnet sich τ aus Gl. i in derselben Weise zu:

$$\tau = \sqrt{10^5 \cdot 10^{-7}} = \frac{1}{10}\,,$$

so daß auch dieses Mal

$$N = 10\,n$$

wird; d. h. die Schwingungszahl der großen Ausführung ist 10 mal so groß wie die des Modells.

Um das Modell in wenigen Minuten für den jeweiligen Anwendungsfall gebrauchsfertig herzurichten, empfiehlt es sich — unter Abänderung der obigen Maßstäbe —, ein Stahlband als Modellwelle zu benutzen und die Massen, für welche eine große Reihe gut abgestufter Gewichtssätze bereitzuhalten ist, mit genau passendem rechteckigen Schlitz zu versehen, so daß ein schnelles Auf- und Abbringen ermöglicht wird. Das Stahlband wird am besten lotrecht aufgehängt und das System an beliebiger Stelle durch rythmische Verdrehungsimpulse zum Schwingen gebracht. Unter ganz allmähligem Steigen der Impulszahl können der Reihe nach sämtliche kritischen Drehzahlen des Modells durch Beobachten der Resonanzen festgestellt werden. Die kritischen Drehzahlen der Hauptwelle sind dann ein aus den Konstruktionsunterlagen sofort angebbares Vielfaches der am Modell beobachteten.

Durch das Vorstehende ist ein Verfahren gegeben, welches gestattet, mittels eines Modells — also auf instrumentellem Wege — die kritischen Drehzahlen der Verdrehungsschwingungen von Wellen zu ermitteln und welches daher als dritte Lösungsart neben die beiden bekannten analytischen und zeichnerischen Verfahren tritt.

56. Ähnlichkeitsfolgerungen für die Biegungsschwingungen von Schiffen, Treibstangen und anderen Körpern. (Anwendung 23.) Ein beliebiger homogener, stabförmiger Körper führe unter seinen Eigengewichten und Zusatzlasten Biegungsschwingungen aus. Man soll aus einem andern Stoff ein Modell fertigen, welches der Hauptausführung nicht geometrisch ähnlich ist. Jedoch sollen die beiden Biegungslinien in jedem Augenblick die Forderung geometrischer Ähnlichkeit auf Grund des Maßstabes λ erfüllen und außerdem soll für entsprechende Zeiten der beiden Bewegungsvorgänge ein fester Zeitmaßstab τ und daher mechanische Ähnlichkeit für die Bewegung der Querschnittsschwerpunkte bestehen.

Im übrigen kann die Querschnittsausbildung des Modells beliebig — ohne Bindung an die Hauptausführung — vorgenommen werden: z. B. steht nichts im Wege, die ganze Form des Modellstabes affinähnlich zu dem des großen Stabes zu halten, derart, daß für die Übertragung der Längen-, Breiten- und Höhenabmessungen je ein anderer fester Maßstab λ, λ', λ'' gewählt wird. Jedoch besteht bezüglich der drei Maßstäbe nicht vollkommene Freiheit; es ist erforderlich, daß das Massenverhältnis $M/m = \mu$ für alle entsprechenden Teile einen unveränderlichen Wert hat, woraus für homogene Stoffe auf Grund der Gleichung

$$\mu = \frac{(\varrho)\,F\,L}{\varrho\,f\,l} = \text{unv.}$$

ein festes angebbares Verhältnis F/f für alle Querschnitte folgt. Etwaige Zusatzlasten müssen dasselbe Verhältnis μ haben.

Zur Aufsuchung des Modellgesetzes sind die Trägheitskräfte und die elastischen Kräfte untereinander zu vergleichen. Die Schwerkräfte haben keinen Einfluß auf die zeitlichen Vorgänge, werden vielmehr durch die statische Formänderung ausgeglichen. Aus dem Vergleich der Trägheitskräfte ergibt sich:

$$\varkappa = \frac{M\,B}{m\,b} = \mu\,\frac{\lambda}{\tau^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (a)$$

eine Beziehung, die auch von etwaigen Zusatzlasten erfüllt werden muß. Für den Vergleich der elastischen Kräfte werden am einfachsten die Querkräfte S und s der Stäbe herangezogen, so daß man weiter mit Beachtung der Ausführungen des Abschnitts 14 die Gleichung:

$$\varkappa = \frac{S}{s} = \frac{\dfrac{d\,\mathfrak{M}}{d\,X}}{\dfrac{d\,\mathfrak{m}}{d\,x}} = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{m}}\cdot\frac{1}{\lambda}$$

erhält. Bezeichnen 1/R und 1/r zwei entsprechende Krümmungen, E, e die Elastizitätsmoduln und J, i die äquatorialen Trägheitsmomente zweier entsprechender Querschnitte, so ist:

$$\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{m}} = \frac{E\,J/R}{e\,i/r} = \frac{E\,J}{e\,i}\,\frac{1}{\lambda}\,.$$

Dies in die vorhergehende Gleichung eingesetzt ergibt:

$$\varkappa = \frac{E\,J}{e\,i}\,\frac{1}{\lambda^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (b)$$

Aus a und b folgt weiter:

$$\tau^2 = \mu\,\frac{\lambda}{\varkappa} = \mu\,\lambda^3\,\frac{e\,i}{E\,J}$$

und daher wird der Zeitmaßstab:

$$\tau = \sqrt{\mu\,\lambda^3\,\frac{e\,i}{E\,J}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (c)$$

Für entsprechende Zeiten, z. B. die Schwingungszeiten, gilt somit das Modellgesetz:

$$T : t = \sqrt{\frac{M L^3}{E J}} : \sqrt{\frac{m l^3}{e i}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (d)$$

Dies kann unter Einführung der Stabgewichte Q und q auch in der Form:

$$T = \alpha \sqrt{\frac{Q L^3}{g E J}} \quad \text{und} \quad t = \alpha \sqrt{\frac{q l^3}{g e i}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (e)$$

geschrieben werden; hierin ist bei mechanisch ähnlichen Biegungsschwingungen α eine feste Zahl; g ist die Erdbeschleunigung. Für die beiden Schwingungszahlen gilt dann:

$$N = \beta \sqrt{\frac{g E J}{Q L^3}} \quad \text{und} \quad n = \beta \sqrt{\frac{g e i}{q l^3}}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (f)$$

worin β für beide Biegungsvorgänge die gleiche Zahl ist.

Die Formeln unter f können zum Vergleich der Eigenschwingungszahlen geometrisch ähnlich oder nach obigem Verfahren affin gebauter Schiffe, Treibstangen und anderer stabförmiger Körper benutzt werden.

57. **Unvollständige mechanische Ähnlichkeit bei gleichzeitigem Wirken zweier Kräfte, erläutert an dem Modell einer von einer Lokomotive befahrenen Brücke (Anwendung 24).** Im Abschnitt 50 ist der Fall eines über eine Brücke fahrenden Zuges nach den Vorschriften strenger mechanischer Ähnlichkeit untersucht worden, ohne daß ein befriedigendes Ergebnis erzielt werden konnte. Die dort verlangte Vollkommenheit ist aber zur Lösung der Aufgabe gar nicht nötig, es genügt als Brückenmodell vielmehr ein kleiner Träger, der wohl gewisse elastische Bedingungen, aber nicht geometrische Ähnlichkeit zu erfüllen hat. Unter diesen veränderten Umständen soll das Beispiel noch einmal behandelt werden.

Die von Routh in der Dynamik der Systeme starrer Körper Bd. I gestellte Aufgabe lautet: „Man soll die Durchbiegung einer Brücke von 15 m Länge und 100 t (à 1000 kg) Gewicht, wenn eine Maschine, die 20 t wiegt, mit der Geschwindigkeit von 64 km in der Stunde über sie fährt, durch Experimente feststellen, welche an einem Modell der Brücke gemacht werden, das 1,5 m lang ist und 2,8 kg wiegt. Man finde das Gewicht des Modells der Maschine und nehme an, das Modell der Brücke sei so steif, daß die statische Durchbiegung in der Mitte unter dem Modell der Maschine ein Zehntel derjenigen der Brücke unter der Maschine selbst beträgt und zeige, daß dann die Geschwindigkeit des Modells der Maschine etwa 5,6 m in der Sekunde sein muß."

Zunächst muß offenbar mit Rücksicht auf die Beteiligung der Schwere das Froudesche Modellgesetz erfüllt werden. Da das Verhältnis der Längen $\lambda = 10$ ist, so muß $\tau = \sqrt{10}$ und $V/v = \sqrt{10}$ eingehalten werden. Aus $V = 64 : 3{,}6 = 17{,}75$ m/sk ergibt sich damit die Geschwindigkeit des Lokomotivmodells zu $v = 5.6$ m/sk.

Eine weitere Abweichung von strenger Ähnlichkeit besteht bezüglich der Gewichte. Für diese gilt hier nicht $\varkappa = (\gamma)/\gamma \cdot \lambda^3$, wie bei vollkommener Ähnlichkeit, sondern für die Eigengewichte ergibt sich aus den Zahlen der Aufgabe ein Übertragungsmaßstab $\varkappa = 100\,000 : 2{,}8 = 35\,750$. Das gleiche $\varkappa$ müssen die Maschinengewichte haben, so daß das Lokomotivmodell $20\,000 \cdot \frac{2{,}8}{100\,000} = 0{,}56$ kg wiegt. Natürlich muß auch für die in Betracht kommenden elastischen Kräfte der beiden Träger der Kräftemaßstab $\varkappa = 35\,750$ eingehalten werden, eine Bedingung, die in folgender Weise zu erfüllen ist.

Föppl geht bei Behandlung dieses Teils der Aufgabe unter sehr beachtenswerten Erläuterungen auf die Differentialgleichung des schwingenden Trägers zurück. Wir schlagen folgenden Weg ein: Für zwei entsprechende Krümmungen 1/R und 1/r der geometrisch ähnlichen Bahnen der fahrenden Körper oder, was dasselbe ist, der geometrisch ähnlichen Biegungslinie der beiden Träger gelten wieder wie im vorigen Abschnitt die Gleichungen:

$$\frac{1}{R} = \frac{\mathfrak{M}}{EZ} \quad \text{und} \quad \frac{1}{r} = \frac{m}{e\,i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(a)}$$

und

$$\varkappa = \frac{E\,J}{e\,i}\,\lambda^2\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(b)}$$

worin jetzt aber $\varkappa$ durch die Schwerkräfte bereits zu 35 750 gegeben ist.

Bei einer sich auch über das Brückenmodell erstreckenden geometrischen Ähnlichkeit geht Gl. b mit $J\,i = \lambda^4$ über in: $E/e \cdot \lambda^2 = \varkappa$, eine Beziehung, die wir in Abschnitt 28 aus der elastischen Kraft unmittelbar ableiten. Jetzt, wo es lediglich auf die geometrische Ähnlichkeit der Bahnen der beiden bewegten Körper ankommt und an Stelle der geometrisch ähnlichen ein elastisch gleichwertiger, im übrigen beliebig geformter Modellträger gesetzt worden ist, tritt an die Stelle jener Beziehung die allgemeine Gl. b.

Für das zu entwerfende Trägermodell ist daher die Gleichung:

$$\frac{E\,J}{e\,i} = \varkappa\,\lambda^2 = 35\,750 . 100 = 3\,575\,000 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

maßgebend. Außerdem ist, wie im vorigen Abschnitt hervorgehoben wurde, zu beachten, daß entsprechende Querschnitte in einem festen Verhältnis zu einander stehen müssen. Bei Erfüllung dieser Forderungen für alle Querschnitte der beiden homogenen Träger werden deren Biegungslinien unter den Wirkungen der fahrenden Lasten in jedem Augenblick geometrisch ähnlich zu einander, so daß entsprechende Biegungsordinaten in dem Verhältnis $Y : y = L : l = \lambda = 10$ stehen.

Routh gibt diese Bedingungen für den Entwurf des kleinen Trägers nicht an, geht vielmehr von dem fertigen Modell aus und stellt durch einen besonderen Versuch fest, daß die statische Durchbiegung y der Mitte gleich $^1/_{10}$ der entsprechenden Durchbiegung Y der Brücke ist. Nach einem Satz der elementaren Festigkeitslehre erhalten wir für diese statischen Durchbiegungen:

$$Y : y = \varepsilon \frac{K\,L^3}{E\,J} : \varepsilon \frac{k\,l^3}{e\,i}$$

oder

$$Y : y = \varkappa\,\lambda^3 . \frac{e\,i}{E\,J}$$

oder unter Benutzung von Gl. b ebenfalls:

$$Y : y = \lambda = 10.$$

Die Erfüllung dieser statischen Bedingung für die Trägermitten ist im allgemeinen Fall nicht hinreichend für das richtige elastische Verhalten des Modellträgers. Die erforderliche geometrische Ähnlichkeit der Biegungslinien wird allgemein erst dadurch gewährleistet, daß die Beziehung c für alle Querschnitte der beiden Träger eingehalten wird. Wird allerdings die zusätzliche Forderung erfüllt daß die beiden Träger affin ähnlich sein sollen, so genügt die Routhsche Feststellung.

Eine praktische Bedeutung kommt dieser Aufgabe nicht zu; das Beispiel ist aber höchst lehrreich insofern es allgemein die Wege zeigt, wie man mittels der Beziehungen unvollständiger Ähnlichkeit für derartige Fälle Lösungen finden kann, die mit vollkommener mechanischer Ähnlichkeit nicht zu erzielen sind.

Ich erlaube mir vorzuschlagen, die Vorgänge in Förderseilen, die ebenfalls durch Schwere und elastische Kräfte bedingt sind, in einem Modell im Sinne unvollständiger mechanischer Ähnlichkeit unter Beachtung der vorstehenden Ausführungen und der des Abschnitts 55 nachzuahmen.

58. Ähnlichkeitsbeziehungen bei formähnlichen Dampfturbinenrädern (Anwendung 25). Der im Abschnitt 48 behandelte, von Stodola untersuchte Fall geometrisch ähnlicher Scheibenräder läßt sich, wie ebenfalls in dessen Dampfturbinen gezeigt wird, auch auf formähnliche, also nicht geometrisch ähnliche Scheibenräder ausdehnen. Spaltet man eine symmetrisch gedachte Scheibe in zwei gleiche Scheiben, so bleiben die durch die Fliehkräfte erzeugten Spannungen die gleichen. Formt man jede Hälfte durch Verschiebungen parallel zur Achse wieder zu einem symmetrischen Rade um, so erkennt man, daß die achsialen Abmessungen in einem beliebigen festen Verhältnis geändert werden können, ohne daß sich die Spannungen bei gleichbleibender Umfangsgeschwindigkeit ändern.

Nach Abschnitt 48 bleiben bei geometrischer Vergrößerung und gleicher Umfangsgeschwindigkeit die Spannungen in entsprechenden Punkten ebenfalls erhalten. Verdoppelt man nun ein Rad in allen linearen Abmessungen und spaltet es dann wieder in seiner zur Achse winkelrechten Symmetrieebene in zwei Teile, so ändern sich die Spannungen in ähnlich gelegenen Punkten wiederum nicht. Die affine Umformung des Meridianschnitts der Scheibenräder sowohl in achsialer wie in radialer Richtung hat also bei gleichbleibender Umfangsgeschwindigkeit keinen Einfluß auf den Spannungszustand, ein Ergebnis, das Stodola in die Worte kleidet: „Bei gleichbleibender Umfangsgeschwindigkeit dürfen wir sowohl die axial als auch radial genommenen Abmessungen eines Rades in beliebigem von einander unabhängigen Verhältnis vergrößern oder verkleinern, ohne an den spezifischen Beanspruchungen in ähnlich gelegenen Punkten etwas zu ändern.“

59. Das allgemeine Ähnlichkeitsgesetz bei formähnlichen Antriebsschrauben verschiedener Steigung (Anwendung 26). Zwei Schrauben sind „geometrisch ähnlich“, wenn entsprechende lineare Abmessungen in achsialer, radialer und peripherischer Richtung in demselben festen Verhältnis λ stehen. Die für sie geltenden Ähnlichkeitsgesetze sind in Abschnitt 52 untersucht worden.

Dagegen sollen zwei Schrauben „formähnlich“ oder „formverwandt“ heißen, wenn entsprechende Längen in Richtung der Schraubenachse, welche als x-Achse angesehen werden soll, in einem andern festen Verhältnis zueinander stehen als entsprechende radiale und tangentiale Abmessungen. Bei formähnlichen Schrauben gibt es also zwei feste Verhältnisse: λ_x für die Längen in der x-Richtung und $\lambda_y = \lambda_z$ für die radialen und tangentialen Abmessungen, so daß die eine von zwei formähnlichen Schrauben bei gegebenem λ_x und λ_y durch eine affine Umformung aus der andern erzeugt werden kann. Solche formähnlichen Schrauben sollen der folgenden Betrachtung zugrundegelegt werden.

Die Versuche zeigen, daß die formgleichen und die aus ihnen erzeugten formähnlichen Schrauben zusammen eine Familie bilden, deren Verhalten sich mit guter Annäherung durch die gleichen Eigenschaftskurven darstellen läßt. Innere und äußere Reibungskräfte treten auch hier in gleicher Weise wie bei den formgleichen Schrauben gegenüber den großen auf die umgebende Flüssigkeit ausgeübten Massenbeschleunigungskräften zurück. Wir müssen hieraus schließen, daß dann auch das Stromlinienbild der einen Schraube durch die gleiche affine Umformung — mittels λ_x und λ_y — aus der andern erzeugt werden kann, eine Auffassung, die die theoretische Untersuchung bestätigt.

Wir können uns die Aufgabe wesentlich vereinfachen, wenn wir zu einer gegebenen ersten Schraube (große Buchstaben) eine formähnliche zweite Schraube (große gestrichene Buchstaben) gleichen Durchmessers D aufsuchen und beide in gleicher Flüssigkeit von der Dichte (ϱ) arbeiten lassen; dann ist $\lambda_y = \lambda_z = 1$ und weiter sei z. B. $\lambda_x = 2$. Es ist hiernach möglich, sowohl die Flügelform wie das Stromlinienbild der zweiten Schraube durch eine Streckung aus der ersten — unter Beibehaltung der Querabmessungen — zu gewinnen. Da über den Zeitmaßstab wie bei den formgleichen Schrauben frei verfügt werden kann, so werde $\tau = 1$ gewählt, was Gleichheit der Umlaufszahlen bedeutet. Es gilt dann für entsprechende Längen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der x-Richtung:

$$X' = X \lambda_x \qquad V'_x = V_x \lambda_x, \qquad B'_x = B_x \lambda_x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

und für entsprechende Massen:

$$M' = M \lambda_x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

Ist unsere Auffassung von der Verwandtschaft der beiden Strömungsfelder richtig, so muß der Vergleich der Trägheits- und Druckkräfte der Flüssigkeiten für die beiden formähnlichen Schrauben die gleichen Kennziffern α im allgemeinen Newtonschen Gesetz ergeben. Dies führen wir in folgender Weise durch:

Der Übertragungsmaßstab für die Drücke P′ und P auf die Flächeneinheit kann aus dem Vergleich der Druck- und Beschleunigungsglieder der hydrodynamischen Grundgleichungen ermittelt werden. Man erhält:

$$\frac{\frac{1}{(\varrho)}\frac{\partial P'}{\partial X'}}{\frac{1}{(\varrho)}\frac{\partial P}{\partial X}} = \frac{B_x'}{B_x}$$

oder

$$\frac{\partial P'}{\partial P} = \frac{\lambda_x}{\tau^2}\,\lambda_x$$

und mit $\tau = 1$

$$\frac{\partial P'}{\partial P} = \lambda_x^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{c)}$$

in Worten: Die Druckunterschiede in achsialer Richtung sind bei der zweiten Schraube λ_x^2 mal so groß wie bei der ersten.

Eine entsprechende Behandlung der hydrodynamischen Gleichungen für die beiden andern Richtungen und der Kontinuitätsgleichung zeigt, daß auch diese Gleichungen in Einklang mit dem eben Abgeleiteten stehen.

Daher gilt für die Schubkräfte der beiden Vergleichsschrauben folgende Verhältnisgleichung:

$$S' : S = \partial P' F' : \partial P F = \lambda_x^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(d)}$$

worin F′ = F entweder die beiden Schraubenkreisflächen oder die Projektionen der Flügelflächen auf die Kreisflächen sind.

Die Schraubenkraft S der gegebenen ersten Schraube werde nun in der Form geschrieben, wie es nach dem allgemeinen Newtonschen Ähnlichkeitsgesetze üblich ist, wobei sie wie immer mit einer geometrisch ähnlichen, im Längenverhältnis λ verkleinerten Schraube, die hier als dritte bezeichnet werden soll, verglichen wird. Für die Beweisführung sollen dabei in den Formeln nicht zwei beliebige entsprechende Geschwindigkeiten, sondern zwei entsprechende achsiale Geschwindigkeiten V_x und v_x verwandt werden. Wir schreiben also:

$$\left.\begin{aligned} S &= \alpha\,(\varrho)\,F\,V_x^2 \\ s &= \alpha\,\varrho\,f\,v_x^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(e)}$$

Nunmehr kann die Kennziffer von S′ bestimmt werden. Aus Gln. d und e folgt:

$$S' = S\,\lambda_x^2 = \alpha\,(\varrho)\,F\,V_x^2\,\lambda_x^2$$

und weiter mittels $V_x' = V_x\,\lambda_x$:

$$S' = \alpha\,(\varrho)\,F\,V_x'^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(f)}$$

eine Gleichung, welche zeigt, daß die zweite Schraube, obgleich sie der ersten nicht geometrisch, sondern nur formähnlich ist, ebenfalls das Newtonsche Ähnlichkeitsgesetz mit der gleichen Kennziffer α befolgt. Würde man die Kennziffer α für S', in gleicher Weise wie es in Abschnitt 52 für S und s geschehen ist, in Form einer Eigenschaftskurve als Funktion der Fahrtsteigung $\chi' = V'/U' = V'/U$ darstellen, so würde diese Kurve nicht mit der für S und s zusammenfallen. Man erreicht jedoch Deckung, wenn man als Abszisse statt χ' den Zahlenwert $\chi'/\lambda_x = \chi$ aufträgt.

Bezeichnet man die Steigungen der ersten, zweiten und dritten Schraube mit H, H' und h, so gilt für sie:

$$H' = H\lambda_x \qquad H = h\lambda$$

oder unter Beachtung von Gl. a und wegen der Gleichheit der Umlaufszahlen N' und N:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_x &= \frac{H'}{H} = \frac{H'N'}{HN} = \frac{V_x'}{V_x} \\ \text{und} \qquad \frac{\lambda}{\tau} &= \frac{Ht}{hT} = \frac{HN}{hn} = \frac{V_x}{v_x} \end{aligned}\right| \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (g)$$

woraus durch Multiplikation

$$\frac{H'N'}{hn} = \frac{V_x'}{v_x} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (h)$$

folgt. An Stelle der Schraubensteigungen H, H' und h können beliebige andere entsprechende achsiale Abmessungen, z. B. entsprechende Flügeldicken gemessen in der Achsenrichtung in die Rechnung eingeführt werden.

Für das Verhältnis der drei Schubkräfte ergibt sich alsdann aus e, f, g und h die Verhältnisgleichung:

$$S ; S' : s = (\varrho)\, F\, H^2 N^2 : (\varrho)\, F\, H'^2 N'^2 : \varrho\, f\, h^2 n^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (i)$$

In der Form des Newtonschen allgemeinen Ähnlichkeitsgesetzes läßt sich dies auch schreiben:

$$\left.\begin{array}{llll} 1. & S = \alpha\, (\varrho)\, F\, H^2 N^2 \ldots & \text{für die Fahrtsteigung} & \chi \\ 2. & S' = \alpha\, (\varrho)\, F\, H'^2 N'^2 \ldots & \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} & \chi' = \chi \cdot \lambda_x \\ 3. & s = \alpha\, \varrho\, f\, h^2 n^2 \ldots & \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} & \chi \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (k)$$

wobei die angegebenen Fahrtsteigungen auf die Forderung affinen Stromlinienverlaufs hinweisen. Da die zweite Schraube aus der ihr formähnlichen dritten mittels des Maßstabs $\lambda \cdot \lambda_x$ für die achsialen und mittels des Maßstabes λ

für die radialen und peripherischen Abmessungen abgeleitet werden kann, so läßt sich das Ergebnis dieser Untersuchungen in den Satz vereinigen: Die Schubkräfte formähnlicher, affin arbeitender Schrauben stehen im Verhältnis der Flüssigkeitsdichten, der Quadrate der Durchmesser, der Quadrate der Steigungen und der Quadrate der Umlaufzahlen. Eine solche Schraubenfamilie hat ein und dieselbe Eigenschaftskurve der Schubkräfte.

Aus den oben gegebenen Vorschriften für die Erzeugung formähnlicher Schrauben geht hervor, in welcher Weise sowohl Druck- wie Saugseite der Schraubenflügel affin umzuformen ist, und daß Fehler entstehen werden, wenn nur eine Seite richtig umgestaltet und im übrigen über die Dicke des Flügels willkürlich verfügt wird.

In entsprechender Weise erhält man die Gesamtleistungen (Leistungsaufnahmen) E, E′ und e:

$$\left.\begin{array}{lll} 1.\ \ \mathrm{E} = \varepsilon(\varrho)\,\mathrm{F}\,\mathrm{H}^3\,\mathrm{N}^3 \ldots & \text{für die Fahrtsteigung} & \chi \\ 2.\ \ \mathrm{E}' = \varepsilon(\varrho)\,\mathrm{F}\,\mathrm{H}'^3\,\mathrm{N}'^3 \ldots & \text{„ „ „} & \chi' = \chi \cdot \lambda_x \\ 3.\ \ \mathrm{e} = \varepsilon\,\varrho\,\mathrm{f}\,\mathrm{h}^3\,\mathrm{n}^3 \ldots & \text{„ „ „} & \chi \end{array}\right\} \ldots \quad (1)$$

worin die Kennziffer ε für alle drei denselben Wert hat. Das Ergebnis dieser Untersuchungen kann daher in folgenden Satz zusammengefaßt werden: Die Gesamtleistungen formähnlicher, affin arbeitender Schrauben stehen im Verhältnis der Flüssigkeitsdichten, der Quadrate der Durchmesser, der dritten Potenzen der Steigungen und der dritten Potenzen der Umlaufzahlen. Diese Schraubenfamilie hat ein und dieselbe Eigenschaftskurve der Leistungen.

Die bisherigen Versuchsergebnisse stehen in befriedigender Übereinstimmung mit diesen Ähnlichkeitsbeziehungen.