R. Rompe und W. Weizel

Über die Bedeutung des Steenbeckschen Minimumprinzips

Mitteilung der Studiengesellschaft für elektrische Beleuchtung
und aus dem Institut für theoretische Physik der Universität Bonn a. Rh.

Erschienen in der Zeitschrift für Physik

Band 120 (1942), Heft 1/2, Seiten 31 bis 46

ISBN 978-3-662-28107-9 ISBN 978-3-662-29615-8 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-29615-8

Sonderabdruck
*aus der „Zeitschrift für Physik" **120**, 31, 1942.*
Springer-Verlag, Berlin W 9.

Über die Bedeutung des Steenbeckschen Minimumprinzips.

Von **R. Rompe** in Berlin und **W. Weizel** in Bonn.

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 14. August 1942.)

Das Steenbecksche Minimumprinzip sagt aus, daß der Durchmesser eines Lichtbogens sich so einstellt, daß bei konstantem Strom die Brennspannung einen Minimumswert annimmt. Es wird in der vorliegenden Arbeit untersucht, ob es sich bei diesem Prinzip um ein echtes Minimumprinzip handelt, oder ob es nur eine empirisch begründete Regel ist. Die Diskussion der radialen thermischen und elektrischen Verhältnisse einer Bogenentladung zeigt, daß ein Bestreben des Bogens vorhanden ist, sich zu verkürzen; dieses führt zu Ergebnissen, die dem Minimumprinzip weitgehend entsprechen. Man kann also dem Minimumprinzip jedenfalls die Bedeutung einer praktisch bewährten Regel zuweisen, die es ermöglicht, ohne die komplizierte Diskussion der radialen Verhältnisse zu brauchbaren Resultaten zu gelangen. Andererseits läßt sich zeigen, daß in allgemeiner Form das Minimumprinzip nur dann gilt, wenn die Leitfähigkeit eine reine Ortsfunktion ist, also z. B. bei Leitern, die dem Ohmschen Gesetz gehorchen. Hängt die Leitfähigkeit z. B. von der Temperatur ab, so liefert das Minimumprinzip nicht das richtige Ergebnis. Man kann ferner zeigen, daß die den Bogen beschreibende Elenbaas-Hellersche Differentialgleichung nicht die Eulersche Gleichung des Minimumprinzips ist. — Das Minimumprinzip gilt also nicht allgemein für Entladungen, sondern stellt eine allerdings praktisch sehr bequeme und brauchbare Erfahrungsregel dar.

Steenbeck hat das Postulat aufgestellt, daß der Entladungskanal eines Lichtbogens einen solchen Durchmesser annehmen soll, daß bei konstant gehaltenem Strom die Brennspannung möglichst klein wird [1]). Diese einleuchtende Forderung ist als *Steenbecksches Minimumprinzip* bekanntgeworden. Ähnliche Überlegungen sind auch schon früher angestellt, wenn auch nicht so präzis formuliert worden. Seit man Entladungen mit fallender Charakteristik kennt, pflegt man die Notwendigkeit eines Vorschaltwiderstandes damit zu begründen, daß sonst der Strom immer weiter wächst und die Spannung sinkt, d. h. daß ohne Widerstand die Entladung nicht stabil ist. Engel und Steenbeck haben die konstante Stromdichte des normalen Kathodenfalls auch aus der Forderung abgeleitet, daß der Kathodenfall ein Minimum sein soll und dies durch eine Stabilitätsbetrachtung begründet [2]). Vor einiger Zeit konnten wir zusammen mit Schön die Brennfleckbildung an den Elektroden eines Lichtbogens darauf zurückführen, daß

---

[1]) M. Steenbeck, Phys. ZS. **33**, 809, 1932; s. auch A. v. Engel u. M. Steenbeck, Elektrische Gasentladungen, Bd. II. Berlin 1934. — [2]) A. v. Engel u. M. Steenbeck, l. c.

die Querkontraktion des Entladungskanals den Spannungsbedarf des Raumladungsgebietes vor der Elektrode vermindert, bis ein Minimum erreicht ist [1]. Obwohl es zunächst sehr plausibel erschien, daß der Entladungsmechanismus sich immer so einstellt, daß möglichst wenig Spannung nötig ist, haben wir doch das Bedürfnis gefühlt, diesen Vorgang bei der Brennfleckbildung im einzelnen zu verfolgen und ähnlich wie Engel und Steenbeck beim normalen Kathodenfall durch eine Stabilitätsbetrachtung zu sichern [2].

Wenn auch die Minimumforderung ohne weiteres einleuchtet, ist gerade die Steenbecksche Anwendung auf den Durchmesser des Lichtbogenkanals auf Widerspruch gestoßen, trotzdem sie mit experimentellen Beobachtungen gut in Einklang steht. Wie von verschiedenen Seiten, insbesondere von Seeliger [3], festgestellt worden ist, kann die Bedeutung der Minimumforderung verschieden aufgefaßt werden. Einmal kann sie eine rein empirisch begründete Regel sein, die die Berücksichtigung gewisser Eigenschaften der Entladung ersetzt. Sodann ist aber nicht von der Hand zu weisen, daß es sich um ein Minimumprinzip im echten Sinne handelt, ähnlich wie die mechanischen oder thermodynamischen Extremalprinzipien.

Wir sind uns darüber klar, und wir glauben uns auch mit Steenbeck darüber einig, daß die Bedeutung des Minimumprinzips nicht an dem speziellen Fall des Bogenkanals klargestellt werden muß, für welchen es ursprünglich ausgesprochen wurde. Man muß vielmehr das Problem ganz allgemein diskutieren, ob sich eine Entladung so ausbildet, daß eine möglichst kleine Brennspannung benötigt wird bzw. unter welchen Umständen dies geschieht.

Der Zweck dieser Arbeit ist, die Anwendbarkeit des Minimumpostulats auf verschiedenartige Entladungen zu untersuchen und die Diskussion darüber auf eine breitere Basis zu stellen.

Stabilität von Lichtbogenentladungen und das Prinzip der minimalen Brennspannung.

Wir beginnen damit, zu zeigen, daß Diskussionen der radialen Verhältnisse zylindersymmetrischer Entladungen, wie wir selbst sie für die Bogenkathode und v. Engel und Steenbeck für den normalen Kathodenfall gegeben haben, weitgehend in der Lage sind, die Stabilisierung von Entladungen zu erklären und zu Resultaten führen, die dem Minimumprinzip weitgehend entsprechen.

---

[1] W. Weizel, R. Rompe u. M. Schön, ZS. f. Phys. **115**, 179, 1940. — [2] W. Weizel u. R. Rompe, ebenda **119**, 366, 1942. — [3] R. Seeliger, ebenda **116**, 207, 1940.

Wir denken uns eine Bogenentladung zwischen sehr ausgedehnten ebenen Elektroden, die etwas gegeneinander geneigt werden können. Die Entladung werde bei paralleler Stellung der Elektroden zwischen zwei solchen Punkten gezündet, daß die Stromlinien auf den Elektroden senkrecht stehen. Es wird sich dann ein Entladungskanal ausbilden, in dem die Temperatur von der Mitte nach außen abnimmt. Der Temperaturabfall wird durch die Wärmeleitung zusammen mit der Ausstrahlung bestimmt. Am Rande des Kanals soll die Temperatur so niedrig sein, daß keine Ionisation und deshalb keine elektrische Leitfähigkeit mehr besteht. Wir machen die Annahme, daß hier die Temperatur den Wert $T = T_0$ hat. Dieser Wert kann natürlich nicht durch die Wärmeleitung allein hergestellt werden, da ohne Ionisation und Ausstrahlung einfach die Formel:

$$\frac{1}{r}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right) = 0 \tag{1}$$

gilt, die die Lösung

$$T = A + \ln r \tag{2}$$

ergibt. Wir helfen uns durch die Annahme, daß durch die Konvektion in einem Radius R von der Entladungsmitte die Temperatur $T = T_0$ erzielt werde. Wir werden in einer anderen Arbeit zeigen, wie man sich von dieser doch etwas gekünstelten und mit der Erfahrung nicht ohne weiteres in Übereinstimmung stehenden Annahme frei machen kann[1]). Hier wollen wir modellmäßig die Entladung durch ein Rohr vom Radius R ersetzen, in dem sich der Bogenkanal ausbildet, wobei die Rohrwand durch eine Konvektion definiert wird. Würde sich die Entladung seitlich verschieben, so würde das Rohr mitgeführt werden.

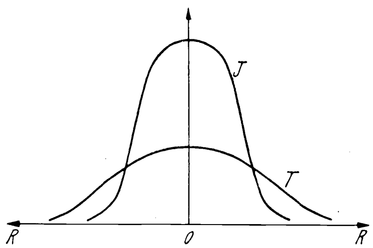

Fig. 1. Verteilung von Stromdichte J und Temperatur T senkrecht zur Achse einer Bogenentladung in Abhängigkeit vom Radius R (schematisch).

Jetzt betrachten wir die Verteilung der Temperatur und der Stromdichte über den Entladungsquerschnitt. Beide Verteilungen werden zylindersymmetrisch sein, wie etwa in Fig. 1 dargestellt. Würden wir jetzt die Elektroden gegeneinander neigen, so würde das Minimumprinzip verlangen, daß die Entladung in der Richtung zu wandern beginnt, in der der Elektrodenabstand sich verkleinert, da bei konstantem Strom, Stromdichte und Temperaturverteilung die Spannung abnehmen oder bei konstanter Spannung

[1]) R. Rompe, W. Thouret u. W. Weizel, ZS. f. Phys. im Druck.

die Stromstärke zunehmen müßte. Es besteht kein Zweifel, daß die Entladung wirklich bei Neigung der Elektroden diesen Verlauf nimmt, wenn man von dem Einfluß magnetischer Kräfte absehen kann.

Diese Entwicklung können wir im einzelnen verfolgen. Verkleinert sich beim Neigen der Elektrodenabstand nach rechts (s. Fig. 1), so wird die Feldstärke auf der rechten Seite des Entladungsquerschnittes größer, auf der linken kleiner. Auch wenn die Temperaturverteilung noch zunächst dieselbe wie bei parallelen Elektroden bliebe, wird dadurch die Stromdichte rechts größer und links kleiner. Dasselbe gilt für die Dichte der Stromleistung $E \cdot i$. Durch die Unsymmetrie der Leistungsdichte wird aber auch eine unsymmetrische Temperaturverteilung herbeigeführt. In der rechten Entladungshälfte wird die Temperatur höher als in der linken, und die ganze Entladung verlagert sich somit nach rechts.

Befindet sich die Entladung wirklich in einem Rohr, so würde sie sich bei schiefen Elektroden der einen Rohrwand nähern, wenn der Elektrodenabstand nicht zu klein ist und sich bei einer gewissen Annäherung stabilisieren. Da unser Rohr in Wirklichkeit nur ein Bild für die Wirkung der Konvektion ist, folgt es der Entladung und diese wandert an den Rand der Elektroden.

Die Ursache für die Verlagerung in dem Sinne, daß dabei die Stromstärke anwächst, besteht darin, daß mit der Feldstärke schon bei konstantem Leitvermögen die Stromdichte, mit der Stromdichte die Leistungsdichte, mit ihr die Temperatur und das Leitvermögen steigt und daß auf diese Weise sich die Stromlinien immer mehr verlagern.

Als nächstes Beispiel betrachten wir einen Entladungsschlauch von kreisförmigem Querschnitt, der aber selbst wieder aus irgendwelchen Gründen zu einem Kreis gebogen sei, so daß also der Entladungskanal ein Stück eines Kreisringes bildet. Liegt an den beiden Stirnflächen eine feste Spannung, so ist die Feldstärke an der Außenseite am kleinsten und auf der Innenseite am größten. Nach den soeben angestellten Überlegungen bringt dies in der Entladung eine Tendenz hervor den Ring zu verrücken, was bei festen Elektroden als Stirnflächen zu einer nahezu geradlinigen Überbrückung führen muß. Ganz allgemein sucht sich ein gekrümmter Entladungsschlauch in Richtung auf den Krümmungsmittelpunkt hin zu verschieben.

Jetzt beschäftigen wir uns mit einem Bogen, der zwischen zwei sehr ausgedehnten Elektroden brennt, aber den Abstand nicht auf dem kürzesten Weg überbrückt. Stellt er eine Schlangenlinie dar, so wird er sich zunächst strecken. Da an den Elektroden die Feldstärke im wesentlichen auf deren

Oberfläche senkrecht steht, wird kurz vor den Brennflecken eine Krümmung des Schlauches bestehen, durch die an den Elektroden eine Verschiebung, wie in der Fig. 2 durch Pfeile bezeichnet, einsetzt. Sie führt eine Überbrückung des Elektrodenzwischenraumes durch die Entladung auf kürzestem Wege herbei.

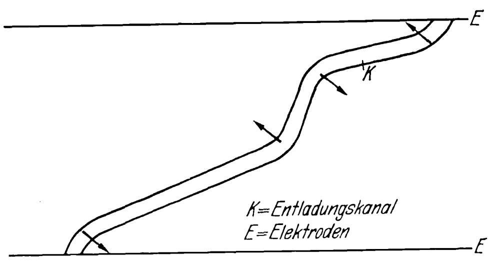

Fig. 2. Schematische Darstellung eines mehrfach gekrümmten Entladungskanals K zwischen zwei Elektroden E. Die Pfeile geben die Richtung an, in der sich der Kanal verschiebt.

Die Tendenz der Bewegung in der Richtung des Krümmungsmittelpunktes hat in mancher Hinsicht dieselben Wirkungen wie der von Steenbeck angenommene Längszug. Eine Schwierigkeit wird aber dabei vermieden. Es ist bekannt, daß ein Lichtbogen auf die Elektroden keinen Zug, sondern einen Druck ausübt, und dies wäre ein Widerspruch gegen den Längszug in der Säule.

Die Diskussion dieser Beispiele zeigt uns, daß sich offenbar aus dem thermisch-elektrischen Verhalten des Bogens ein ähnliches Resultat wie aus dem Steenbeckschen Minimumprinzip ergibt, wenn der Spannungsbedarf mit der Länge der Entladung monoton zunimmt. Denn dann führt jede Verkürzung der Entladungsstrecke auch zu einer Spannungseinsparung im Sinne des Minimumprinzips.

Wir haben durch diese Stabilitätsüberlegungen allerdings noch nichts über die grundsätzliche Bedeutung des Minimumprinzips erfahren. Die Diskussion der Temperatur-, Träger- und Leistungsdichteverteilung über den Querschnitt läßt die Verhältnisse im Bogen überblicken. Es stellt sich dabei heraus, daß der Bogen so lange nicht stabil brennt, als noch eine wesentliche Verringerung der Brennspannung durch seine Veränderung erreicht werden kann. Man kommt also durch die detaillierte Betrachtung zu der Aussage des Minimumprinzips, ohne dieses selbst als Postulat verwenden zu müssen. Ersetzt man den Bogen durch das Modell eines Entladungskanals von bestimmtem Querschnitt und konstanter Temperatur, so kann man die Diskussion der Temperaturverteilung über den Querschnitt durch das Minimumprinzip ersetzen und mit ihm im wesentlichen zu den gleichen Aussagen gelangen. In den oben betrachteten speziellen Fällen ist also das Minimumprinzip einfach eine Regel, mit der man näherungsweise richtige Resultate erhalten kann.

Das Minimumprin ip und die Elen aassche Differentialgleichung.

Unter diesem Gesichtspunkt wollen wir kurz auf eine Diskussion eingehen, die vor längerer Zeit zwischen Elenbaas und Kesselring[1]) über die prinzipielle Berechtigung der Anwendung des Minimumprinzips auf Hochdrucksäulen stattgefunden hat. Elenbaas stellte sich auf den Standpunkt, daß die Beschreibung der Hochdruckentladung durch eine Differentialgleichung[2]) (Elenbaas-Hellersche Differentialgleichung) keinen Raum für die Anwendung eines Minimumprinzips mehr offenlasse, während Kesselring von vornherein das Modell eines Kanaldurchmessers konstanter Temperatur zugrunde legte und die Benutzung des Minimumprinzips für unerläßlich hielt. Beide konnten ins Feld führen, daß die von ihnen bevorzugte Art der Beschreibung gewisse Züge der Entladung richtig wiedergibt.

Hierzu wäre nach unserer Ansicht folgendes zu sagen. Die Elenbaas-Hellersche Differentialgleichung beschreibt die radiale Temperaturverteilung im Bogen mit gewissen Vereinfachungen. Z. B. wird die ambipolare Trägerdiffusion von der Bogenmitte zum Rand[3]) und die Radialkomponente der elektrischen Feldstärke nicht berücksichtigt. Würde man diese Vereinfachungen nicht vornehmen, so hätte man statt der klassischen Wärmeleitung eine verwickeltere Funktion der Temperatur einzusetzen und hätte dann eine etwas abgeänderte Differentialgleichung. Zusammen mit den Randbedingungen, die auf der Rohrwand eine bestimmte Temperatur und ein Temperaturmaximum in der Rohrachse vorschreiben, wird hierdurch die Temperaturverteilung über den Querschnitt festgelegt und es besteht weder eine Notwendigkeit noch die Möglichkeit, außerdem ein Minimumprinzip zu verwenden. Selbst wenn man die Konvektion am Energietransport in irgendeiner Form beteiligen würde, könnte sich nichts Grundsätzliches an dieser Situation ändern, so daß also der Elenbaassche Standpunkt durchaus berechtigt ist, daß neben der Differentialgleichung ein Minimumprinzip überflüssig ist.

Eine Frage, die aber trotzdem noch gestellt werden kann, ist die, ob nicht dieselbe Differentialgleichung aus einem Minimumprinzip hergeleitet werden kann, etwa aus der Forderung, daß die radiale Temperatur- und Stromdichteverteilung so beschaffen sei, daß die Brennspannung so klein als möglich wäre, wenn der Gesamtstrom vorgeschrieben ist. Bei näherer Untersuchung dürfte sich allerdings ergeben, daß man diese Frage verneinen muß. Es kann aber nun sinnvoll weitergefragt werden, ob man aus der

[1]) W. Elenbaas u. F. Kesselring, Elektrot. ZS. **57**, 1497, 1936. — [2]) G. Heller, Physics **6**, 389, 1935. — [3]) R. Rompe u. P. Schulz, ZS. f. Phys. **113**, 10, 1939.

Minimumforderung eine Temperaturverteilung ableiten könne, die mit der wirklichen nicht gerade übereinstimmt, ihr aber doch so ähnlich ist, daß sie praktisch an deren Stelle treten könne. Wenn auch dies nicht zutrifft, kann man endlich noch die Frage untersuchen, ob nicht eine Temperatur- und Stromdichteverteilung, die eine wesentlich größere als die minimale Brennspannung liefert, notwendig ziemlich weit von der wirklichen Verteilung entfernt sein müsse. Es ist nämlich möglich, daß die wirkliche Temperaturverteilung zu einer Brennspannung gehört, die sehr nahe bei der Minimalspannung liegt und daß alle Temperaturverteilungen, die eine wesentlich größere Brennspannung ergeben, von der wirklichen weit abweichen. Dies hat noch nicht zur Folge, daß die wirkliche Temperaturverteilung der minimalen ähnlich ist. In diesem Falle würde das Minimumprinzip zwar die ungefähr richtige Spannung bestimmen, ohne sie jedoch genau zu treffen, während man die Temperaturverteilung auch nicht annähernd aus ihm gewinnen könnte.

Wenn man mit dem viel gröberen Modell des Entladungskanals konstanter Temperatur arbeitet, stellt sich die Sache ganz anders dar. Für den Kanal gilt die Gleichung

$$J = \pi R^2 F(T) \cdot E, \tag{3}$$

wo J die Stromstärke, R den Kanalradius, T die Temperatur, $F(T)$ die Leitfähigkeitsfunktion und E die Feldstärke ist. R und T sind hierbei „Modellgrößen". Die Energiebilanz liefert noch eine zweite Gleichung, z. B. wenn der Energietransport nur durch nichtreabsorbierte Strahlung erfolgt

$$EJ = \pi R^2 S(T), \tag{4}$$

wo $S(T)$ eine Funktion ist, die die Ausstrahlung beschreibt. Kommt noch Wärmeableitung hinzu, so verändert sich die Gestalt der Gleichung, was aber nichts an der Tatsache ändert, daß zur Bestimmung von R, T und E bei vorgegebener Stromstärke nur zwei Gleichungen zur Verfügung stehen. Um also alle drei Größen festzulegen, bedarf es einer weiteren Beziehung und an dieser Stelle wird das Steenbecksche Minimumprinzip eingesetzt.

Nun wird, wie vor einiger Zeit der eine von uns zusammen mit Schulz gezeigt hat[1]), in diesem Modell mit Größen gearbeitet, die einer direkten Messung nicht zugänglich sind. Denn die Temperatur im Modell ist ja nicht diejenige, die man als lokale Temperatur an irgendeiner Stelle der Entladung durch direkte Temperaturmessung finden kann, sondern eine solche, daß sie mit dem Kanaldurchmesser kombiniert die richtigen Werte

[1]) R. Rompe u. P. Schulz, ZS. f. Phys. **112**, 691, 1939.

von Leitfähigkeit und Ausstrahlung liefert. Der Kanaldurchmesser ist an sich weitgehend willkürlich und hängt von der experimentellen Art seiner Feststellung ab.

Angesichts dieser Sachlage ist es klar, daß man nicht behaupten kann, daß das Minimumprinzip überflüssig sei; allenfalls könnte man folgende Einwände vorbringen. 1. Das Modell des Kanals konstanter Temperatur ist überhaupt unbrauchbar. 2. Das Minimumprinzip mit diesem Modell kombiniert liefert unbrauchbare Resultate. Beide Einwände wären wohl unberechtigt. Es ist nämlich bekannt, daß dieses einfache Modell eine zwar grobe, aber erstaunlich gute Beschreibung vieler Lichtbogeneigenschaften gibt und sich als sehr nützlich erweist, wenn man die Ansprüche nicht überspannt. Besonders überzeugend konnte Steenbeck kürzlich zeigen, daß man durch Kombination des Kanalmodells mit dem Minimumprinzip zu Resultaten gelangt, die mit der Beobachtung in gutem Einvernehmen stehen[1]). Gerade diese Übereinstimmung erfordert eine Erklärung, die auch inzwischen von Seeliger gegeben worden ist[2]). Er zeigte, daß das Ergebnis der Anwendung des Minimumprinzips auf das Kanalmodell praktisch mit demjenigen übereinstimmt, welches man durch unmittelbare Integration der Elenbaas-Hellerschen Differentialgleichung findet, wenn nur die klassische Wärmeleitung den Abtransport der Energie aus der Säule bewirkt und wenn man als Kanalradius denjenigen nimmt, wo in Wirklichkeit der Temperaturabfall am steilsten ist. Bei praktischen Messungen des Kanalradius dürfte man meistens diesen Wert einigermaßen treffen, wie eine Durchsicht des uns zugänglichen Materials zeigte.

Hat man mehrere Arten des Energietransportes, etwa Ausstrahlung und Wärmeleitung gleichzeitig, so wird man letztere zweckmäßig durch einen Ausdruck der Form

$$2\pi\lambda T'$$

berücksichtigen, wo λ der (als konstant angenommene) Wärmeleitungskoeffizient, T' eine mit der Kanaltemperatur T nicht unmittelbar zusammenhängende Größe ist. Denn die sinngemäße Definition der Größen R und T fordert, daß R und T sowohl die elektrische Leitfähigkeit wie die Abstrahlung des Kanals richtig wiedergeben, was dadurch geschehen kann, daß noch über die Größen J und E entsprechend verfügt wird. Damit entfällt aber die Möglichkeit, die Wärmeleitung als ein Glied der angegebenen Form mit R und T darzustellen. Man könnte natürlich allgemein einen

[1]) M. Steenbeck, Wiss. Veröffentl. a. d. Siemens-Konzern XIX, 59, 1940. — [2]) R. Seeliger, ZS. f. Phys. **116**, 207, 1940.

funktionalen Zusammenhang $f(R, T)$ einführen, welcher so gewählt wird, daß der Betrag der durch Wärmeleitung der Säule entzogenen Energie richtig wiedergegeben wird, doch ist dann diese Funktion nicht aus theoretischen Erwägungen heraus angebbar, sondern müßte empirisch bestimmt werden. Mit Einführung von T' erweitert sich die Zahl der zu bestimmenden Größen und es muß außer der Minimumforderung für den Gradienten noch eine weitere Bedingung gefordert werden. So führt z. B. die Bedingung $T =$ Min in einigen Fällen zu praktisch brauchbaren Ergebnissen. Sind nicht zwei, sondern mehrere definiert verschiedene Arten der Energieabgabe möglich, so steigt entsprechend die Zahl der zu fordernden Nebenbedingungen.

Die Minimumforderung als allgemeines Prinzip für elektrische Entladungen.

Das Minimumprinzip kann, wie oben gesagt, in drei verschiedenen Arten aufgefaßt werden. Die anspruchsloseste Formulierung ist folgende: Kann eine Entladung durch Änderung ihrer Stromverteilung (eventuell Temperaturverteilung) ihre Brennspannung wesentlich erniedrigen, so ist sie nicht stabil und entwickelt sich im Laufe der Zeit zu einer Form, deren Brennspannung nicht sehr weit von der minimalen liegt. Eine stabile Entladung besitzt eine Brennspannung, die nicht mehr sehr erheblich durch Abändern der Stromverteilung erniedrigt werden kann, die stabile Stromverteilung hingegen braucht keine Ähnlichkeit mit derjenigen zu haben, bei der die Brennspannung ein Minimum wäre. In dieser Form dürfte das Prinzip wahrscheinlich richtig sein. In einigen Fällen läßt sich dies durch Stabilitätsbetrachtungen im einzelnen dartun, wie dies zu Beginn dieser Untersuchung an einigen Beispielen geschehen ist.

Etwas weitergehend ist die Behauptung, daß die stabile Stromverteilung und Brennspannung sich nicht sehr von derjenigen unterscheide, die zu der minimalen Brennspannung gehört. Wenn diese Behauptung auch in vielen Einzelfällen richtig sein mag, so möchten wir ihr doch keine Allgemeingültigkeit zubilligen. Diese beiden Formulierungen des Minimumprinzips ergeben eine Art von experimentellen Faustregeln, die im Gebrauch sehr nützlich sind, aber vorsichtig gehandhabt werden müssen. Das Resultat ihrer Anwendung sollte, wenn möglich, stets durch andere Gründe noch gesichert werden. Ein Naturgesetz im eigentlichen Sinne ist das Minimumprinzip in dieser Ausdrucksform hingegen nicht.

Eine dritte Formulierung würde behaupten, daß die stabile Stromverteilung einer Entladung stets diejenige wäre, bei der die Brennspannung den kleinsten Wert hätte. Wenn das Minimumprinzip in dieser Form richtig wäre, müßte man seine Bedeutung ungefähr ebenso hoch einschätzen wie die der mechanischen Integralprinzipien, etwa des Hamiltonschen Prinzips. Es müßte dann eine Reihe von mit einer detaillierten Beschreibung der Entladung verträglichen Folgerungen ergeben. Gleichungen wie die Elenbaas-Hellersche sollten sich als zu dem Minimumprinzip gehörige Eulersche Gleichungen erweisen. Leider trifft in dieser Form das Minimumprinzip sicher nicht zu. Dies wollen wir etwas mehr im einzelnen verfolgen.

Wir wollen zunächst die Diskussion auf eine etwas breitere Basis stellen. Zwei Flächenstücke F_1 und F_2 mögen sich auf dem Potential V_1 und V_2 befinden. Durch F_1 möge der Strom J zugeführt und durch F_2 wieder abgeführt werden. Die Elektroden F_1 und F_2 sollen also durch eine Strombahn überbrückt werden, die sich entweder in einem Gas oder in einer Flüssigkeit oder in einem festen Leiter ausbilden kann. Wir wollen jetzt die Richtigkeit folgender Behauptungen untersuchen: Die Stromlinien zwischen F_1 und F_2 und die Feldverteilung sind so beschaffen, daß bei vorgegebenem Gesamtstrom die an den Elektroden liegende Potentialdifferenz $V_1 - V_2$ ein Minimum, bei vorgegebener Spannung $V_1 - V_2$ der Strom J ein Maximum ist. Diese Behauptung ist offenbar eine Verallgemeinerung des Steenbeckschen Prinzips und man ist geneigt ihr ebenso wie diesem eine gewisse Plausibilität zuzubilligen. Wir werden aber im folgenden leicht zeigen können, daß der Satz wenigstens in dieser Allgemeinheit falsch ist.

Die Elektroden F_1 und F_2 seien durch ein beliebig geformtes Medium überbrückt, dessen Leitvermögen eine beliebige Funktion des Ortes sei, aber auch nur davon abhänge. Insbesondere soll das Leitvermögen $\varkappa$ weder direkt noch indirekt von der Stromdichte etwa auf dem Umwege über die Temperatur abhängen. Es soll also zwischen Stromdichte und Feldstärke in jedem Punkt des Raumes der lineare Zusammenhang

$$\mathfrak{i} = \varkappa \cdot \mathfrak{E} \tag{5}$$

gelten, wo $\varkappa(x, y, z)$ eine reine Ortsfunktion ist.

Nun denken wir uns die Schar der Äquipotentialflächen $V =$ konstant bezeichnet und den ganzen Raum in Volumenelemente $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}f \cdot \mathrm{d}r$ zerlegt, wo $\mathrm{d}f$ in einer Äquipotentialfläche liegt und $\mathrm{d}\mathfrak{r}$ zu einer Stromlinie parallel ist. Wir bilden dann das Integral

$$\iiint (\mathfrak{i}\,\mathfrak{E})\,\mathrm{d}\tau = \int \mathfrak{i}\,\mathrm{d}f \int (\mathfrak{E}\,\mathrm{d}\mathfrak{r}) = J\,(V_1 - V_2). \tag{6}$$

Soll bei konstant gehaltenem Strom

$$V_1 - V_2 = \int \mathfrak{E}\,\mathrm{d}\mathfrak{r} \tag{7}$$

ein Minimum sein, so bedeutet dies, daß unter den gleichen Umständen der Energieumsatz $J\,(V_1 - V_2)$ ein Minimum ist. Soll bei konstanter Spannung der Strom $J = \int i\,\mathrm{d}f$ ein Maximum sein, so muß der Energieumsatz ein Maximum werden, wenn $V_1 - V_2$ vorgegeben ist. Auf jeden Fall soll also

$$\iiint (i\mathfrak{E})\,\mathrm{d}\tau = \iiint (\varkappa\mathfrak{E}^2)\,\mathrm{d}\tau \tag{8}$$

einen stationären Wert besitzen, d. h.

$$\delta \iiint \varkappa\,\mathfrak{E}^2\,\mathrm{d}\,\tau = \delta \iiint \varkappa \left\{\left(\frac{\mathrm{d}\,V}{\mathrm{d}\,x}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}\,V}{\mathrm{d}\,y}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}\,V}{\mathrm{d}\,z}\right)\right\} \mathrm{d}\,\tau = 0 \tag{9}$$

gelten. Ist die Spannung vorgegeben und wird das Strommaximum gesucht, so besteht keine Nebenbedingung und nach den Gesetzen der Variationsrechnung folgt hieraus sofort

$$2\left\{\frac{\partial}{\partial x}\varkappa\frac{\mathrm{d}\,V}{\mathrm{d}\,x} + \frac{\partial}{\partial y}\varkappa\frac{\mathrm{d}\,V}{\mathrm{d}\,y} + \frac{\partial}{\partial z}\varkappa\frac{\mathrm{d}\,V}{\mathrm{d}\,z}\right\} = 2\operatorname{div}\varkappa\,\mathfrak{E} = 2\operatorname{div} i = 0. \tag{10}$$

Dies ist nichts anderes als die bekannte Stationaritätsbedingung

$$\operatorname{div} i = 0$$

der Elektrodynamik.

Befindet sich zwischen zwei Elektroden ein Medium von nur ortsabhängigem Leitvermögen, so bildet sich tatsächlich eine solche Stromverteilung heraus, daß bei vorgegebener Spannung zwischen den Elektroden der Strom ein Maximum ist. Bei festem Strom wird in diesem Falle naturgemäß die Spannung ein Minimum. Man geht wohl nicht zu weit mit der Meinung, daß gewisse Erfahrungen, die man an solchen Fällen gesammelt hat, dazu verleiten, das Minimumprinzip allgemein für richtig zu halten.

Wir zeigen jetzt aber leicht, daß Forderung (9) zu unrichtigen Konsequenzen führt, wenn die Leitfähigkeit nicht eine Funktion des Ortes allein ist, sondern außerdem z. B. noch von der Feldstärke abhängt. In diesem Falle enthält $\varkappa$ auch noch $\partial V/\partial x$; $\partial V/\partial y$; $\partial V/\partial z$ und statt (10) gilt

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \mathfrak{E}_x}(\varkappa\,\mathfrak{E}^2) + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \mathfrak{E}_y}(\varkappa\,\mathfrak{E}^2) + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \mathfrak{E}_z}(\varkappa\,\mathfrak{E}^2) = 0, \tag{11}$$

wenn man

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial x} = \mathfrak{E}_x; \quad -\frac{\partial V}{\partial y} = \mathfrak{E}_y; \quad -\frac{\partial V}{\partial z} = \mathfrak{E}_z; \\ \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = \mathfrak{E}^2 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

einsetzt. Hieraus erhält man leicht

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{\partial}{\partial x}\varkappa\,\mathfrak{E}_x + \frac{\partial}{\partial y}\varkappa\,\mathfrak{E}_y + \frac{\partial}{\partial z}\varkappa\,\mathfrak{E}_z\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{E}^2\frac{\partial\varkappa}{\partial\mathfrak{E}_x} + \frac{\partial}{\partial y}\mathfrak{E}^2\frac{\partial\varkappa}{\partial\mathfrak{E}_y} + \frac{\partial}{\partial z}\mathfrak{E}^2\frac{\partial\varkappa}{\partial\mathfrak{E}_z} = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Da nun $\varkappa$ sicher nur vom Betrage $|\mathfrak{E}|$ der Feldstärke, nicht aber von ihrer Richtung, also nicht von den Komponenten $\mathfrak{E}_x$, $\mathfrak{E}_y$, $\mathfrak{E}_z$ einzeln abhängt, ist

$$\frac{\partial \varkappa}{\partial \mathfrak{E}_x} = \frac{\partial \varkappa}{\partial |\mathfrak{E}|} \cdot \frac{\partial |\mathfrak{E}|}{\partial \mathfrak{E}_x} = \frac{\mathfrak{E}_x}{|\mathfrak{E}|} \cdot \frac{\partial \varkappa}{\partial |\mathfrak{E}|} \tag{14}$$

und (13) geht in

$$2 \operatorname{div} \varkappa \mathfrak{E} + \frac{\partial}{\partial x} |\mathfrak{E}| \mathfrak{E}_x \frac{\partial \varkappa}{\partial |\mathfrak{E}|} + \frac{\partial}{\partial y} |\mathfrak{E}| \mathfrak{E}_y \frac{\partial \varkappa}{\partial |\mathfrak{E}|} + \\ + \frac{\partial}{\partial z} |\mathfrak{E}| \mathfrak{E}_z \frac{\partial \varkappa}{\partial |\mathfrak{E}|} = 2 \operatorname{div} i + \operatorname{div} \mathfrak{E} |\mathfrak{E}| \frac{\partial \varkappa}{\partial |\mathfrak{E}|} \tag{15}$$

über. Soll dies mit der Stationaritätsbedingung $\operatorname{div} i = 0$ verträglich sein, so findet man

$$\operatorname{div} \left\{ \mathfrak{E} |\mathfrak{E}| \frac{\partial \varkappa}{\partial |\mathfrak{E}|} \right\} = 0.$$

Hierfür kann man auch

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div} \left\{ \mathfrak{E} |\mathfrak{E}| \frac{\partial \varkappa}{\partial |\mathfrak{E}|} \right\} &= \operatorname{div} \left\{ \varkappa \mathfrak{E} \frac{|\mathfrak{E}|}{\varkappa} \cdot \frac{\partial \varkappa}{\partial |\mathfrak{E}|} \right\} \\ = \operatorname{div} \left\{ \varkappa \mathfrak{E} \frac{\partial \ln \varkappa}{\partial \ln |\mathfrak{E}|} \right\} &= \operatorname{div} \left\{ i \frac{\partial \ln \varkappa}{\partial \ln |\mathfrak{E}|} \right\} \\ = \frac{\partial \ln \varkappa}{\partial \ln |\mathfrak{E}|} \cdot \operatorname{div} i + \left(i \operatorname{grad} \frac{\partial \ln \varkappa}{\partial \ln |\mathfrak{E}|} \right) &= \left(i \operatorname{grad} \frac{\partial \ln \varkappa}{\partial \ln |\mathfrak{E}|} \right) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

schreiben. Diese Bedingung wird im allgemeinen nicht erfüllt sein, sondern kann nur zufällig richtig sein.

Wir diskutieren noch einen Spezialfall genauer. Wenn $\varkappa$ vom Ort nicht explizit abhängt, sondern von Ort zu Ort nur deshalb veränderlich ist, weil an verschiedenen Orten verschiedene Feldstärken herrschen, ist

$$\frac{d \ln \varkappa}{d \ln |\mathfrak{E}|} = F(|\mathfrak{E}|) = f(\mathfrak{E}^2) \tag{17}$$

eine Funktion von $\mathfrak{E}^2$ allein und (16) geht über in

$$\left(i \frac{d f}{d \mathfrak{E}^2} \operatorname{grad} \mathfrak{E}^2 \right) = 0, \tag{18}$$

woraus

$$i \operatorname{grad} \mathfrak{E}^2 = 0 \tag{19}$$

folgt. Die Minimumbedingung verlangt also jetzt, daß die Stromdichte senkrecht auf der Richtung steht, in der sich der Beitrag der Feldstärke am schnellsten ändert. Nun ist aber

$$\operatorname{grad} \mathfrak{E}^2 = 2 \left[\mathfrak{E} [\operatorname{rot} \mathfrak{E}] \right] + 2 (\mathfrak{E} \operatorname{grad}) \mathfrak{E} \tag{20}$$

und wegen

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0$$

$$\operatorname{grad} \mathfrak{E}^2 = 2 (\mathfrak{E} \operatorname{grad}) \mathfrak{E},$$

womit die Minimumforderung in

$$i\,(\mathfrak{E}\,\mathrm{grad})\,\mathfrak{E} = 0 \tag{21}$$

übergeht. Bilden wir also den Vektor $(\mathfrak{E}\,\mathrm{grad})\,\mathfrak{E}$, so muß seine Komponente in Richtung der Stromlinien verschwinden. Dies bedeutet aber nichts anderes, als daß der Betrag der Feldstärke längs einer Stromlinie konstant sein muß.

Für die Entladung gelten also dann die Beziehungen:

$$i\,(\mathfrak{E}\,\mathrm{grad})\,\mathfrak{E} = 0$$

und

$$\mathrm{div}\, i = \mathrm{div}\,(\varkappa\,\mathfrak{E}) = \mathfrak{E}\,\mathrm{grad}\,\varkappa + \varkappa\,\mathrm{div}\,\mathfrak{E}.$$

Unter den gemachten Voraussetzungen ist ferner

$$\mathrm{grad}\,\varkappa = \frac{\mathrm{d}\varkappa}{\mathrm{d}\,\mathfrak{E}^2}\,\mathrm{grad}\,\mathfrak{E}^2 = 2\,\frac{\mathrm{d}\varkappa}{\mathrm{d}\,\mathfrak{E}^2}\,(\mathfrak{E}\,\mathrm{grad})\,\mathfrak{E} \tag{22}$$

und wir finden

$$2\,\frac{\mathrm{d}\varkappa}{\mathrm{d}\,\mathfrak{E}^2}\,\frac{1}{\varkappa}\,i\,(\mathfrak{E}\,\mathrm{grad})\,\mathfrak{E} + \varkappa\,\mathrm{div}\,\mathfrak{E} = 0, \tag{23}$$

so daß aus (21)

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{E} = 0$$

folgt. Die Extremalbedingung verlangt also eine raumladungsfreie Entladung, falls das Leitvermögen nur von dem Betrage der Feldstärke abhängt.

Leider hängt bei fast allen Entladungen die Leitfähigkeit nicht nur von der Feldstärke ab. Viel häufiger, in Lichtbögen z. B., ist $\varkappa$ eine Funktion der Temperatur. Nur in dem speziellen Fall, daß die Stromwärme, die in einem Volumenelement entwickelt wird, nur durch Ausstrahlung abgegeben und die Wärmeableitung überhaupt nicht am Energietransport beteiligt ist, treffen die eben gemachten Überlegungen zu. In diesem besonderen Falle also müßte die Entladung von einem völlig neutralen Plasma getragen werden. Die Minimumforderung würde Raumladungen nur in dem Maße erlauben, als sich auch Wärmeableitung an der Beseitigung der Energie beteiligt.

In einer Entladung von Zylindersymmetrie würde $\mathrm{div}\,\mathfrak{E} = 0$ die Poissonsche Gleichung

$$\Delta V = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\,r\,\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = 0$$

liefern, worauf sich bei konstanter Längsfeldstärke $-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z} = \mathfrak{E}_z$,

$$\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\,r\,\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = 0$$

mit der allgemeinen Lösung

$$V = z \cdot \mathfrak{E}_z + C \ln r \tag{24}$$

ergeben würde. Hier muß natürlich $C = 0$ sein, da sonst für $r = 0$ das Potential unendlich würde, d. h. das Minimumprinzip läßt keine radiale Feldstärke zu. Umgekehrt müßte in einer Entladung ohne radiale Komponente des Feldes die Längskomponente der Feldstärke konstant sein.

Sehr viel schwieriger ist eine Entladung zu behandeln, bei der die Stromwärme durch Wärmeleitung beseitigt wird. Für die Wärmeableitung gilt die Differentialgleichung

$$-\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) = \varkappa \mathfrak{E}^2, \tag{25}$$

die bei konstantem Wärmeleitungskoeffizienten λ

$$-\operatorname{div} \operatorname{grad} T = \frac{\varkappa}{\lambda} \cdot \mathfrak{E}^2$$

ergibt. Setzt man in die Minimumbedingung

$$\delta \int \varkappa \mathfrak{E}^2 \, d\tau = 0 \tag{26}$$

die Temperatur ein, so erhält man

$$\delta \int \operatorname{div} \operatorname{grad} T \, d T = 0. \tag{27}$$

Führt man zunächst mit dem Gaußschen Satz die Integration über das Volumen aus und führt den Wärmestrom

$$j = -\lambda \operatorname{grad} T$$

ein, so geht dies in

$$\delta \oint j \, d f = \delta Q = 0 \tag{28}$$

über. Das Minimumprinzip verlangt jetzt, daß die aus der Entladung abgeleitete Wärmeleistung extremal sei. Eine Forderung, die ziemlich trivial erscheint.

Der Durchrechnung der Minimumaufgabe stellen sich aber jetzt formale Schwierigkeiten in den Weg. Hängt $\varkappa$ nur vom Potential, der Feldstärke, dem Ort und von höheren Ableitungen des Potentials ab, so liegt eine Minimumaufgabe ohne Nebenbedingung vor, bei der die gesamte Funktion des Potentials auf dem Rande des Bereichs vorgegeben ist. Diese Aufgabe wird durch die Eulersche Gleichung gelöst. Führen wir dagegen die Temperatur ein, und betrachten wir sie als die zu bestimmende Ortsfunktion, so sind ihre Werte auf dem Rande des Bereiches auch vorgegeben, außerdem sind aber auch die Werte des Potentials auf dem Rande vorgeschrieben. Da Temperatur und Potential über die Differentialgleichung

$$-\lambda \operatorname{div} \operatorname{grad} T = \varkappa (\operatorname{grad} V)^2 \tag{29}$$

zusammenhängen, hängt V nicht nur von der Temperatur an derselben Stelle, sondern von der Temperaturverteilung im Raum ab und die Festlegung von V auf dem Rande trägt den Charakter einer Nebenbedingung. Man kann sie durch

$$\delta \int (\operatorname{grad} V \, d\mathfrak{s}) = 0 \tag{30}$$

formulieren, wo die Integration über eine Stromlinie auszuführen ist.

In besonders günstigen Fällen jedoch, z. B. wenn die Entladung zylindrisch ist, kann man die Rechnung doch ausführen. In diesem Falle ist die Stromstärke

$$J = \int \varkappa \mathfrak{E} \, d f = 2 \pi \mathfrak{E}_z \int_0^R \varkappa r \, d r. \tag{31}$$

Die Leitfähigkeit sei allein von der Temperatur abhängig. Der Energieabtransport geschehe durch Strahlung und Wärmeleitung. Dann gilt

$$\varkappa \mathfrak{E}_z^2 = - \operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad} T) + S(T). \tag{32}$$

Soll bei konstantem Strom der Gradient $\mathfrak{E}_z$ ein Minimum sein, so muß

$$\begin{aligned} J \mathfrak{E}_z &= \int_0^R \left\{ S(T) - \frac{1}{r} \frac{d}{d r} r \lambda \frac{d T}{d r} \right\} r \, d r \\ &= \int_0^R \left\{ S \cdot r - \lambda r \frac{d^2 T}{d r^2} - \lambda \frac{d T}{d r} - r \frac{d \lambda}{d T} \left(\frac{d T}{d r} \right)^2 \right\} d r \end{aligned} \tag{33}$$

ein Minimum werden. Diesmal ist auf dem Rand R des Bereiches T vorgeschrieben, und wir können einfach die Eulerschen Gleichungen bilden. Bei konstantem λ lauten sie:

$$r \frac{\partial S}{\partial T} - \frac{d^2}{d r} \lambda r = 0, \tag{34}$$

woraus

$$\frac{\partial S}{\partial T} = 0 \tag{35}$$

folgt.

Bei konstantem Wärmeleitvermögen gibt es also ein Minimum des Gradienten überhaupt nicht, da die Ausstrahlung mit der Temperatur monoton ansteigt. Ist λ eine Funktion von T, so erhalten wir eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, die aber mit der Elenbaas-Hellerschen nicht identisch ist, da sie ja gar nicht die Feldstärke E enthält.

Hiermit wäre zunächst festgestellt, daß die Elenbaas-Hellersche Differentialgleichung nicht als Eulersche Gleichung aus dem Prinzip der minimalen Brennspannung abgeleitet werden kann. Dieses Prinzip ist kein echtes Minimumprinzip, das die wahre Stromverteilung einer Entladung festlegt. Seine Brauchbarkeit ist vielmehr auf besonders günstige Fälle beschränkt, wo es als eine Art Faustregel benutzt werden kann. Den Grund für das Versagen des Minimumprinzips kann man darin erblicken, daß die Entladung keine rein elektrische Erscheinung ist, da sich an ihr auch thermische Prozesse (Wärmeleitung) unter starker Mitwirkung der Materieeigenschaften abspielen. Für einen rein elektrischen Entladungsvorgang, bei dem das Leitvermögen nur Ortsfunktion wäre, würde das Minimumprinzip die richtige stationäre Stromverteilung liefern.

In diesem Zusammenhang möchten wir bemerken, daß auch z. B. das Hamiltonsche Prinzip der Mechanik seine Gültigkeit einbüßt, wenn bei der Bewegung nicht konservative Kräfte beteiligt sind, d. h. wenn die Bewegung mit Umwandlung von Energie in Wärme verbunden ist. In ähnlicher Weise wird das rein elektrische Prinzip vom Minimum der Brennspannung unanwendbar, wenn die Vorgänge nicht mehr rein elektrisch sind. Dieser ziemlich einleuchtende Umstand nimmt aber diesem Prinzip für die Gasentladungen die allgemeine Bedeutung.

Bonn, Institut f. theor. Physik.

Berlin, Studienges. f. elektr. Beleuchtung m. b. H.