

# Leitfaden zur Berechnung von Schallvorgängen

Von

Regierungsrat Dr. **Heinrich Stenzel**  
Kiel

Mit 106 Abbildungen im Text



Berlin  
Verlag von Julius Springer  
1939

ISBN-13: 978-3-642-98194-4 e-ISBN-13: 978-3-642-99005-2

DOI: 10.1007/978-3-642-99005-2

Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1939

# Inhaltsverzeichnis.

|   | Seite |
|---|-------|
| Einleitung . . . . .  | 1     |
| Erster Teil.  |       |
| Das Schallfeld in großer Entfernung vom Strahler . . . . .                    | 2     |
| 1. Ungebündelte Strahlung . . . . .   | 2     |
| 2. Gebündelte Strahlung . . . . .   | 6     |
| A. Der Richtfaktor . . . . .  | 6     |
| a) Bei einer bestimmten Frequenz . . . . .                                    | 6     |
| b) Bei einem Geräusch . . . . .   | 27    |
| c) Bei künstlicher Kompensation . . . . .                                     | 31    |
| B. Der Strahlungsfaktor . . . . .   | 37    |
| a) Bei einer bestimmten Frequenz . . . . .                                    | 37    |
| b) Bei künstlicher Kompensation . . . . .                                     | 46    |
| Zweiter Teil.   |       |
| Das Schallfeld in der Nähe des Strahlers . . . . .                            | 51    |
| 3. Die Gruppe von zwei Einzelstrahlern . . . . .                              | 51    |
| 4. Die kreisförmige Kolbenmembran . . . . .                                   | 61    |
| Dritter Teil.   |       |
| Das Schallfeld des Kugelstrahlers . . . . .                                   | 80    |
| 5. Der einfache Kugelstrahler bestimmter Ordnung . . . . .                    | 80    |
| 6. Der zusammengesetzte Kugelstrahler . . . . .                               | 85    |
| 7. Die durch eine starre Kugel verursachte Störung des Schallfeldes . . . . . | 104   |
| a) Die Ableitung der allgemeinen Formel . . . . .                             | 104   |
| b) Die Schallreflexion an einer starren Kugel . . . . .                       | 105   |
| c) Das Schallfeld in der Umgebung der Kugel . . . . .                         | 109   |
| Tabellen . . . . .  | 115   |
| Schrifttum . . . . .  | 121   |
| Sachverzeichnis . . . . .   | 124   |

## Einleitung.

Die vollständige Berechnung und Darstellung von Schallvorgängen macht schon in den Fällen, wo es sich um einfache Strahleranordnungen handelt, nicht unerhebliche Schwierigkeiten. Damit hängt es wohl zusammen, daß eine systematische Behandlung darüber nicht vorliegt. Im folgenden wird der Versuch gemacht, die grundlegenden Formeln und Begriffe zu entwickeln und an einer Reihe von einfachen Beispielen praktisch anzuwenden. Dabei erscheint es wegen der außerordentlichen Vereinfachung naturgemäß, die Berechnung zunächst auf das Gebiet *in großer Entfernung* vom Strahler zu beschränken. Bei dieser Einschränkung ergibt sich der Übergang vom ungerichteten zum gerichteten Strahler sehr einfach, indem die Formeln des ungerichteten Schallsenders durch einen zusätzlichen Faktor, der als *Richtfaktor* bzw. *Strahlungsfaktor* gekennzeichnet ist, ergänzt werden. Auch macht dann die Berechnung des Schallfeldes von Membranen, die im Gegensatz zur Kolbenmembran keine konstante Schwingungsamplitude haben oder Knotenlinien besitzen, keine besonderen Schwierigkeiten.

Der zweite Teil behandelt die Darstellung des in *unmittelbarer Nähe* des Strahlers vorhandenen Schallfeldes. Der zunächst untersuchte Fall von zwei punktförmigen Strahlern zeigt bereits, daß jetzt ganz wesentlich kompliziertere Verhältnisse vorliegen. Man ist daher auch gezwungen, das Schallfeld an jeder Stelle zu beschreiben. Das geschieht am einfachsten, indem man die Kurven zeichnet, für welche die Druckamplitude einen konstanten Wert besitzt. Im Falle der kreisförmigen Kolbenmembran, der praktisch von besonderer Bedeutung ist, ist es wesentlich, daß wenigstens die Werte auf der Mittelachse, auch in unmittelbarer Nähe, sehr einfach angegeben werden können. Aus der Tatsache, daß sich auf der Mittelachse mit im Verhältnis zur Wellenlänge wachsendem Durchmesser eine immer größere Zahl von Nullstellen und Einstellen ergibt, folgt, daß die Kolbenmembran mit wachsendem Radius auch in der Nähe kein Schallfeld erzeugt, wie es einer ebenen Schallwelle entspricht. Im Falle, wo der Durchmesser nicht zu groß im Verhältnis zur Wellenlänge ist, kann die Berechnung des Schallfeldes in der Nähe *allgemein* durchgeführt werden. Die graphische Darstellung der Kurven konstanter Druckamplitude gibt einen einfachen Überblick über derartige Schallfelder.

Eine besondere Bedeutung haben die Kugelstrahler, die im III. Teil behandelt werden. Bei auf der Kugel vorgegebener Schallschnelle kann

das Schallfeld auch für Aufpunkte in der Nähe berechnet werden. An einer Reihe von Beispielen wird gezeigt, daß die zunächst kompliziert erscheinenden Formeln für die praktische Berechnung durchaus brauchbar sind.

Um die Übersicht der Abhandlung nicht zu erschweren, wird die theoretische Ableitung im Text selbst nur so weit angegeben, als es zum Verständnis erforderlich ist, und im übrigen auf das vorhandene Schrifttum hingewiesen. Ferner wird ebenfalls aus Gründen der Einfachheit auf die Berechnung und Darstellung der Schallschnelle verzichtet und stets nur die Schalldruckamplitude zur Kennzeichnung des Schallfeldes benutzt. Dabei kann dann auf die Verwendung des Geschwindigkeitspotentials gänzlich verzichtet werden, da dieser Begriff eine mehr mathematische Bedeutung besitzt und erfahrungsgemäß dem praktischen Physiker keine Freude bereitet.

Bei allen Betrachtungen wird davon ausgegangen, daß eine bestimmte Geschwindigkeitsamplitude der schwingenden Membran oder, was auf dasselbe herauskommt, eine bestimmte Schallschnelle unmittelbar vor der ruhend gedachten Membran, vorgegeben ist.

## Erster Teil.

# Das Schallfeld in großer Entfernung vom Strahler.

## 1. Ungebündelte Strahlung.

Wir gehen aus von Strahlern nullter Ordnung, d. h. von Strahlern, deren strahlende Fläche sich konphas nach außen und nach innen bewegt. Der einfachste Fall wird durch eine atmende oder pulsierende Kugel verwirklicht (Abb. 1a). Hier ist die Geschwindigkeitsamplitude für alle Punkte der strahlenden Fläche dieselbe. Im allgemeinen wird die Bewegung der strahlenden Fläche durch den Verlauf der Geschwindigkeitsamplitude der Membran  $w = w \cdot e^{i\omega t}$  beschrieben. Dabei wird  $w$  im allgemeinen an verschiedenen Punkten der strahlenden Fläche verschieden sein.

Es ist zweckmäßig, die Geschwindigkeitsamplitude  $w$  und nicht die Bewegungsamplitude  $a$  (wobei die Beziehung:  $w = 2\pi n a$  besteht) einzuführen, da der letzteren nur in seltensten Fällen eine besondere Bedeutung zukommt.

Wir betrachten zunächst eine Reihe von Strahlerformen, wie sie in der Abb. I dargestellt sind. Die Strahler 1a bis 1d sind rotationssymmetrisch zu einer durch den Mittelpunkt gehenden vertikalen Achse gedacht. Die Strahler 1e bis 1g sind ebenfalls rotationssymmetrisch oder besitzen rechteckigen Querschnitt wie 1h. Dabei ist die Ruhelage der Membran stark gestrichelt (— — —), die äußere Extremlage der

Membran punktiert (· · · · ·) und die starre Abschlußwand des Strahlers stark liniert (—) gezeichnet. Die Maximalamplituden der periodisch (sinusförmig) sich bewegenden Membranen sind durch Pfeile in starker Vergrößerung angegeben. Die Voraussetzung der Gültigkeit der allgemeinen Wellengleichung verlangt, daß die Druck- und Geschwindigkeitsamplituden des Schallfeldes kleine Werte besitzen. Diese Voraussetzung ist nur bei ungewöhnlich starken Druckschwankungen (z. B. bei Explosionswellen) nicht erfüllt. Ferner soll auch der Abstand der symmetrisch zur Mittelebene schwingenden Membranen (z. B. in Abb. 1e und 1f) als so klein angenommen werden, daß die Nullage praktisch mit dieser Mittelebene zusammenfallend angesehen werden kann.

Es ergibt sich dann, daß das Schallfeld sehr einfach bestimmt werden kann, wenn die beiden folgenden Voraussetzungen erfüllt sind:

A. Die Ausdehnungen des Strahlers sind in jeder Richtung klein zur Wellenlänge.

B. Der Aufpunkt liegt in hinreichend großem Abstand von dem Strahler.

Aus den später noch zu erläuternden allgemeinen Formeln folgt dann, daß der Schalldruckverlauf in der einfachen Form

$$p_0 = p_0 e^{i(\omega t - kr + \pi/2)} \quad (1)$$

dargestellt wird, wobei die Schalldruckamplitude  $p_0$  durch:

$$p_0 = \frac{c \cdot \sigma \cdot F \cdot w_m}{2\lambda r} \quad (2)$$

und die gesamte abgestrahlte Schalleistung  $L_0$  durch:

$$L_0 = p_0^2 / 2c\sigma \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{2} c \cdot \sigma \pi \cdot \frac{F^2 \cdot w_m^2}{\lambda^2} \quad (3)$$

gegeben ist.

Wir sehen, daß die Schalldruckamplitude sich in einfachster Weise durch die maßgebenden Größen darstellt, wobei jede dieser Größen linear auftritt. Und zwar bedeutet:

$\sigma$  die Dichte,  
 $c$  die Schallgeschwindigkeit } des Mediums,  
 $F$  die gesamte strahlende Fläche<sup>1</sup>,

<sup>1</sup> Bei Membranen, die in einer starren Wand schwingen, werden wir die in den Halbraum strahlende Fläche mit  $F$  bezeichnen, so daß dann die 2 im Nenner von (2) fortfällt.

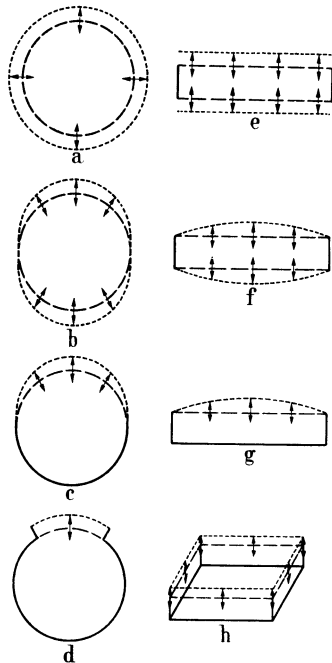


Abb. 1. Einfache Strahler.

$w_m$  die mittlere Geschwindigkeitsamplitude der strahlenden Fläche,

$r$  der Abstand des Aufpunktes vom Mittelpunkt des Strahlers,

$\lambda$  die Wellenlänge,

$k = 2\pi/\lambda$  die Wellenzahl,

$\omega = 2\pi n$  die Kreisfrequenz.

Das Produkt  $c \cdot \sigma$  wird als Schallwiderstand bezeichnet. Seine Größe ist bei ebenen Wellen durch das Verhältnis der Schalldruckamplitude zur Schallschnelle (Schallgeschwindigkeitsamplitude) bestimmt. Für die beiden hauptsächlich in Frage kommenden Werte Luft bzw. Wasser ist  $c \cdot \sigma$  durch 43 bzw. durch  $1,5 \cdot 10^5$  in absoluten CGS-Einheiten gegeben.

Im allgemeinen Fall ist die Geschwindigkeitsamplitude  $w(x, y, z)$  für die einzelnen Punkte  $(x, y, z)$  der Membran verschieden. Dann ist  $w_m$  definiert durch:

$$w_m = \frac{1}{F} \int_F w(x, y, z) dF. \quad (4)$$

Der Einfluß der Membran ist durch das Produkt  $F \cdot w_m$  gegeben. Definieren wir als das Deformationsvolumen des Strahlers das während jeder Halbperiode von der schwingenden Fläche überstrichene Volumen, so haben zwei Strahler gleicher Frequenz gleiches Deformationsvolumen, wenn für beide das Produkt  $F \cdot w_m$  den gleichen Wert hat. Denn die Bewegungsamplitude  $a(x, y, z)$  unterscheidet sich von der Geschwindigkeitsamplitude  $w(x, y, z)$  nur um einen konstanten Faktor ( $w = 2\pi n \cdot a$ ).

Aus der Tatsache, daß die sehr verschiedenen Schwingungsformen der Abb. 1a bis 1h bei gleichem  $F \cdot w_m$  dasselbe Schallfeld ergeben, werden wir ganz allgemein schließen: Bei Strahlern, die klein zur Wellenlänge sind und deren Membranbewegung gleichzeitig nach außen und gleichzeitig nach innen erfolgt, ist das Schallfeld in größerem Abstand allgemein durch die Formeln (1, 2) und (3) bestimmt. Das bedeutet: Unter den Voraussetzungen A und B ergeben zwei Schallstrahler derselben Frequenz dasselbe Schallfeld, wenn bei beiden  $F \cdot w_m$  gleich ist, ohne daß die Bewegungsamplituden und die Form der Membranen einzeln übereinzustimmen brauchen. In der Abb. 2 sind drei verschiedene Strahler entsprechend Abb. 1e, 1f mit gleichem Deformationsvolumen, d. h. gleichem  $F \cdot w_m$  dargestellt.

Die schraffierten Flächen stellen die Maximalamplitude der schwingenden Membran nach einer Seite in zwei zueinander senkrechten Ebenen dar. Dabei ist die der Abb. 2b entsprechende Geschwindigkeits-

amplitude durch  $w = (1 - \varrho^2/\varrho_0^2)^2$  gegeben. Dann ergeben sich in den 3 Fällen der Abb. 2 für  $Fw_m$  die gleichen Werte:

$$\frac{1}{3} \varrho_0^2 \pi, \quad 2\pi \int_0^{\varrho_0} (1 - \varrho^2/\varrho_0^2)^2 \varrho d\varrho = \frac{1}{3} \varrho_0^2 \pi, \quad \frac{a^2 \pi}{6} = \frac{1}{3} \varrho_0^2 \pi.$$

Es ist zweckmäßig, sich ein einfaches Beispiel als Normalform einzuprägen, da daraus infolge des linearen Einflusses sämtlicher Größen der Schalldruck unter sehr allgemeinen Verhältnissen angegeben werden kann. Als eine solche Normalform betrachten wir eine Kolbenmembran in starrer Wand, die in Luft bei 800 Hz auf der Mittelachse in 100 cm Entfernung eine Schalldruckamplitude von 1 dyn/cm<sup>2</sup> erzeugt (das entspricht Schalldruckamplituden, wie sie beim normalen Sprechen unmittelbar vor dem Mund des Sprechers auftreten). Wir finden, daß dazu bei einer Geschwindigkeitsamplitude von 10 cm/sec die in den Halbraum strahlende Fläche 10 cm<sup>2</sup> betragen muß. Es ist besonders zu beachten, daß die Formel (2) für beliebige ebene gebündelte Strahleranordnungen gilt, wenn der Aufpunkt auf der Mittelachse in hinreichendem Abstand liegt. Dies wird im nächsten Kapitel erläutert. Also eine strahlende Fläche von 100 cm<sup>2</sup> ergibt im Aufpunkt auf der Mittelachse, der 10 m entfernt ist, ebenfalls eine Schalldruckamplitude von 1 dyn/cm<sup>2</sup>. Schließlich gilt die Formel auch für den Kugelstrahler nullter Ordnung allgemein bei hinreichendem Abstand des Aufpunktes.

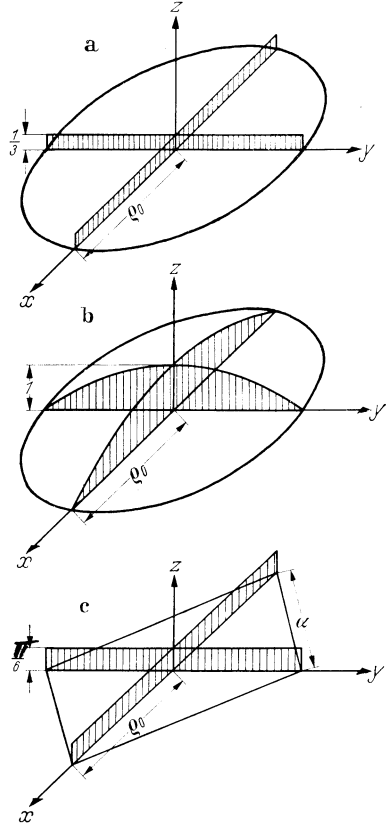


Abb. 2. Strahler mit gleichem Deformationsvolumen.

Die entsprechende Schalleistung pro cm<sup>2</sup> ist für die Normalform [nach (3)]:

$$\frac{L_0}{4\pi r^2} = \frac{1}{2 \cdot 43} = 1,16 \cdot 10^{-2} \text{ erg/sec cm}^2 = 1,16 \cdot 10^{-9} \text{ Watt/cm}^2.$$

Im Wasser ergibt sich unter denselben Voraussetzungen (bei gleicher Frequenz, also anderer Wellenlänge) die Schalldruckamplitude:

$$p_0 = 800 \text{ dyn/cm}^2$$



und die Schalleistung:

$$\frac{L_0}{4\pi r^2} = \frac{8^2 \cdot 10^4}{2 \cdot 1,5 \cdot 10^5} = 2,13 \text{ erg/sec cm}^2 = 2,13 \cdot 10^{-7} \text{ Watt/cm}^2.$$

Man sieht, welch maßgebenden Einfluß der „Schallwiderstand“ besitzt. Um der Membran im Wasser bei gleicher Frequenz dieselbe Geschwindigkeitsamplitude wie in der Luft aufzudrücken, muß die 184fache Leistung aufgebracht werden. Andererseits wird für eine Membran, die in Luft bei gleicher Wellenlänge dieselbe Leistung wie im Wasser abstrahlen soll, folgen:

$$\frac{w_l}{w_w} = \sqrt{\frac{1,5 \cdot 10^5}{43}} \sim 60,$$

d. h. die Geschwindigkeitsamplitude  $w_l$  der Membran in Luft ist dann 60mal so groß wie die Geschwindigkeitsamplitude  $w_w$  im Wasser, während die Bewegungsamplitude der Membran in Luft etwa 13mal so groß wie die in Wasser ist.

## 2. Gebündelte Strahlung.

### A. Der Richtfaktor.

#### a) Bei einer bestimmten Frequenz.

Wir lassen jetzt die Voraussetzung  $A$  fallen, machen aber dafür die Einschränkung, daß die Membran als Doppelmembran konphas nach zwei Seiten schwingt, wobei die Mittelebene in jedem Moment der Schwingung Symmetrieebene ist. Beispiele solcher Membranen sind in den Abb. 1e und 1f dargestellt. Da der ganze Vorgang oberhalb der Symmetrieebene das Spiegelbild des Vorganges unterhalb der Symmetrieebene darstellt, kann an Stelle der Symmetrieebene eine starre Wand eingeführt werden, ohne daß an dem Schallvorgang etwas geändert wird. An Stelle der doppelseitig wirkenden Membran kann man sich dann die eine Hälfte des Schallfeldes ebensogut durch eine einfache, in starrer unendlicher Wand schwingende, Membran erzeugt denken. Dies ist von Bedeutung, weil eine in starrer, großer Wand schwingende Membran in der Praxis häufiger auftritt. Ohne daß dies in jedem Fall noch mal besonders hervorgehoben wird, soll es sich in den folgenden Beispielen stets um solche Doppelmembranen, die symmetrisch zur Mittelebene schwingen, handeln oder um in einer starren Wand schwingende Membranen, wobei nur der eine Halbraum betrachtet wird, der durch die starre Wand abgeschlossen wird und in den die eine Hälfte der Membran mit der Fläche  $F$  strahlt. Stellen wir uns vor, daß die von den einzelnen Elementen des Strahlers herrührenden Elementarwellen im Aufpunkt zusammenwirken, so ist klar, daß für alle Richtungen dieses Zusammenwirken in gleicher Phase im weit entfernten Aufpunkt eintritt, solange die Einzelelemente einen Abstand

$d$  klein gegen  $\lambda$  voneinander besitzen. Diese Kugelsymmetrie (ungebündelte Strahlung) muß aber gestört werden, wenn dies nicht mehr der Fall ist, da dann im Allgemeinen die Elementarwellen mit verschiedenem, nicht mehr vernachlässigbarem Phasenunterschied im Aufpunkt ankommen (Abb. 3). Diesen veränderten Verhältnissen, die ihren Grund darin haben, daß der Strahler nicht mehr klein zur Wellenlänge ist, können wir durch Einführung des Richtfaktors  $\mathfrak{R}$  Rechnung tragen. Und zwar tritt an Stelle von (2) die Formel

$$p = p_0 \cdot \mathfrak{R}, \quad (5)$$

wobei  $p_0$  den durch (2) gegebenen Wert hat, während  $\mathfrak{R}$  durch das Integral über die Fläche  $F$  definiert ist:

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{w_m \cdot F} \int_F w(x, y) \cdot e^{ik(x \cos \alpha + y \cos \beta)} dF. \quad (6)$$

Dabei ist die starre Wand mit der Membran (in der Ruhelage) in der Ebene des Koordinatensystems liegend gedacht. Da die  $XY$ -Ebene Symmetrieebene für das Schallfeld ist, können wir unsere Betrachtung auf den oberhalb der  $XY$ -Ebene liegenden Raum beschränken und daher den symmetrisch nach unten schwingenden Teil der Doppelmembran außer Betracht lassen (Abb. 4).

Es bedeuten  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  die *Richtungswinkel* für die entsprechende Aufpunktsgerade,  $x$ ,  $y$  die Koordinaten des zum Integrationselement  $dF$  gehörenden Punktes,  $w(x, y)$  die entsprechende Geschwindigkeitsamplitude und  $k = 2\pi/\lambda$ . Wir bemerken, daß, wenn die Wellenlänge  $\lambda$  groß gegen  $x$  und  $y$ , d. h. groß gegen die Ausdehnungen der Membran ist, der Exponent unter dem Integral gegen null geht, so daß

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{w_m \cdot F} \int_F w(x, y) dF$$

ist, also wegen (4) gleich 1 wird, wie es zu erwarten war. Wesentlich ist, worauf bereits hingewiesen wurde, daß für großes  $F$  ebenfalls  $\mathfrak{R} = 1$  wird, wenn die Aufpunktsgerade mit der  $Z$ -Achse zusammenfällt (wegen  $\alpha = 90^\circ$  und  $\beta = 90^\circ$ ).

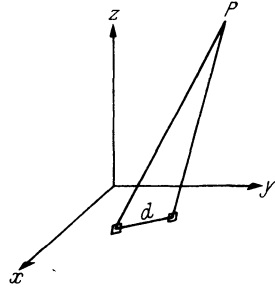


Abb. 3. Ungebündelte Strahlung.

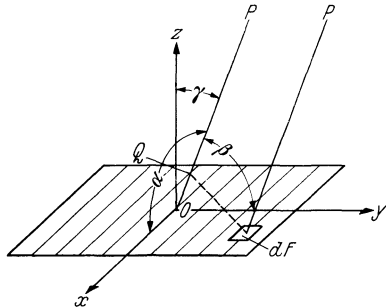


Abb. 4. Gebündelte Strahlung.

Die Gültigkeit von (5) ergibt sich aus der von RAYLEIGH angegebenen grundlegenden allgemeinen Beziehung<sup>1</sup>:

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi} \int_F \frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{e^{-ikr}}{r} dF. \quad (7)$$

Indem wir an Stelle des Geschwindigkeitspotentials  $\varphi$  den Druck

$$p = -\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (8)$$

eingeführen und die Normalgeschwindigkeit  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$  durch

$$w = w(x, y) e^{i\omega t} \quad (9)$$

ersetzen, erhalten wir zunächst:

$$p = \frac{i \cdot c \cdot \sigma}{\lambda} e^{i\omega t} \int_F w(x, y) \frac{e^{-ikr}}{r} dF. \quad (10)$$

Wir wollen nun das Schallfeld nur in großer Entfernung von der strahlenden Fläche betrachten und setzen demgemäß voraus, daß der Aufpunkt  $P$  in *hinreichendem* Abstand  $R$  von  $O$  sich befindet, so daß die Verbindungslinien von ihm zu den einzelnen Strahlerelementen  $dF$  als parallel angesehen werden können (eine genauere Formulierung wird später [S. 53] gegeben). Füllen wir dann von  $dF$ , das durch die Koordinaten  $x, y$  bestimmt ist, das Lot auf  $OP$  mit dem Fußpunkt  $Q$ , so ist  $OQ = x \cos \alpha + y \cos \beta$  und  $r = R - (x \cos \alpha + y \cos \beta)$ .

Da  $R \gg x \cos \alpha + y \cos \beta$  ist, können wir im Nenner  $r$  durch  $R$  ersetzen und erhalten:

$$p = \frac{ic\sigma}{\lambda R} e^{i(\omega t - kR)} \int_F w(x, y) e^{ik(x \cos \alpha + y \cos \beta)} dF \quad (11)$$

und daraus unter Berücksichtigung von (2), (4) und (6) die Formel (5).

Wir wollen für das Weitere voraussetzen, daß die strahlende Fläche bzw. das Strahlersystem einen Mittelpunkt besitzt, der mit dem Koordinatenanfangspunkt zusammenfällt und daß  $w(x, y) = w(-x, -y)$  ist. (Das bedeutet: Zwei spiegelbildlich zum Membranmittelpunkt gelegene Membranpunkte haben gleiche Amplitude und Phase.) Dann läßt sich das Integral (11) in reeller Form schreiben. Es ist:

$$\Re = \frac{1}{w_m F} \int_F w(x, y) \cos [k(x \cos \alpha + y \cos \beta)] dF.$$

Wir wollen ferner die Aufpunktsgerade auf eine bestimmte Ebene (die Peilebene) beschränken, und zwar soll diese Ebene mit der  $ZY$ -

<sup>1</sup> The theory of sound. § 278.

Ebene zusammenfallen. Dann ist wegen  $\alpha = 90^\circ$  und  $\beta + \gamma = 90^\circ$  (Abb. 4):

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{w_m F} \int_F w(x, y) \cos[ky \sin \gamma] dF. \quad (12)$$

In vielen Fällen interessiert der Verlauf von  $\mathfrak{R}$  nicht für die ganze Peilebene, sondern es kommt oft, besonders bei scharf gebündelten Strahlern, nur auf die nächste Umgebung des Hauptmaximums bei  $\gamma = 0^\circ$  an.

Für diesen Bereich kann man  $\cos[ky \sin \gamma]$  durch  $1 - \frac{1}{2} k^2 y^2 \sin^2 \gamma$  ersetzen und findet:

$$\mathfrak{R} = 1 - \frac{k^2 \sin^2 \gamma}{2 w_m F} \int_F w(x, y) y^2 dF.$$

Denken wir uns an Stelle des strahlenden Flächenelementes  $dF$  im Punkte  $x, y$  der Membran ein Massenelement  $dm = \frac{w(x, y)}{w_m F} dF$  angebracht, so bezeichnet:

$$T_x = \frac{1}{w_m \cdot F} \int_F w(x, y) y^2 dF = \int_F y^2 dm$$

das Trägheitsmoment dieser so mit Masse belegten ruhenden Membran (bei der Gesamtmasse 1) in bezug auf die X-Achse, und wir können für kleine  $\gamma$  schreiben:

$$\mathfrak{R} = 1 - \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \gamma \cdot T_x. \quad (13)$$

Diese Formel ist oft geeignet, ohne große Rechnung die Peilschärfe von Strahleranordnungen zu übersehen.

Als Beispiel wollen wir 4 einfache Strahleranordnungen untersuchen (Abb. 5):

1. zwei punktförmige Strahler,
2. die Kreislinie, dicht besetzt mit Strahlern,
3. die rechteckige Kolbenmembran,
4. die kreisförmige Kolbenmembran.

Wir finden die Trägheitsmomente  $T$  und die entsprechenden Annäherungsformeln ohne Schwierigkeit:

$$1. \quad T_1 = r^2, \quad \mathfrak{R}_1 = 1 - \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \gamma \cdot r^2,$$

$$2. \quad T_2 = \frac{r^2}{2}, \quad \mathfrak{R}_2 = 1 - \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \gamma \cdot \frac{r^2}{2},$$

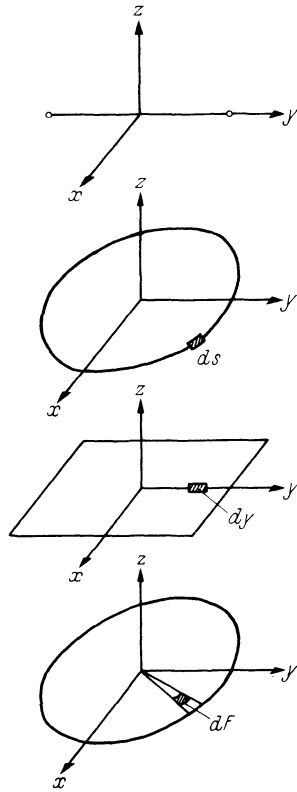


Abb. 5. Berechnung des Richtfaktors.

$$3. \quad T_3 = \frac{r^2}{3}, \quad \mathfrak{R}_3 = 1 - \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \gamma \cdot \frac{r^2}{3},$$

$$4. \quad T_4 = \frac{r^2}{4}, \quad \mathfrak{R}_4 = 1 - \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \gamma \cdot \frac{r^2}{4}.$$

In diesen 4 Fällen lassen sich die Richtfaktoren allgemein durch Ausführung der Integration nach (6) berechnen<sup>1</sup>. Es ist (vgl. Abb. 5):

$$\mathfrak{R}_1 = \frac{e^{ikr \sin \gamma} + e^{-ikr \sin \gamma}}{2} = \cos \left[ \frac{2\pi r}{\lambda} \sin \gamma \right], \quad (14)$$

$$\mathfrak{R}_2 = \frac{2}{2\pi r} \int e^{ik(x \cos \alpha + y \cos \beta)} ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikr \sin \gamma \cos \varphi} d\varphi = J_0 \left( \frac{2\pi r}{\lambda} \sin \gamma \right), \quad (15)$$

$$\mathfrak{R}_3 = \frac{1}{2r} \int_{-r}^{+r} e^{iky \sin \gamma} dy = \frac{\sin \left( \frac{2\pi r}{\lambda} \sin \gamma \right)}{\frac{2\pi r}{\lambda} \sin \gamma}, \quad (16)$$

$$\mathfrak{R}_4 = \frac{1}{r^2 \pi} \int_0^r \rho d\rho \int_0^{2\pi} e^{ik\rho \sin \gamma \cos \varphi} d\varphi = \frac{2}{r^2} \int_0^r \rho d\rho J_0(k\rho \sin \gamma) = 2 \cdot \frac{J_1 \left( \frac{2\pi r}{\lambda} \sin \gamma \right)}{\frac{2\pi r}{\lambda} \sin \gamma}. \quad (17)$$

Mit der Abkürzung:  $\frac{2\pi r}{\lambda} \sin \gamma = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \gamma = x$  ergibt sich:

$$\mathfrak{R}_1 = \cos x, \quad \mathfrak{R}_2 = J_0(x), \quad \mathfrak{R}_3 = \frac{\sin x}{x}, \quad \mathfrak{R}_4 = \frac{2J_1(x)}{x},$$

wobei  $J_0(x)$  bzw.  $J_1(x)$  die BESSELSche Funktion nullter bzw. erster Ordnung bedeutet. Durch die bekannten Reihenentwicklungen läßt sich die Richtigkeit der Annäherungsformeln hier direkt bestätigen. Es ist:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots, \quad J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \dots, \quad \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \dots,$$

$$\frac{2J_1(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{8} + \dots$$

Um ein allgemeines Maß für die Peilschärfe zu bekommen, wollen wir nach dem Winkel  $\varphi$  in der Peilebene ( $ZY$ ) fragen, den die Aufpunktsgerade mit der  $Z$ -Achse bildet, wenn die Schallenergie auf die Hälfte des Maximalwertes abgesunken ist (d. h. die Amplitude von 1 auf  $1/\sqrt{2}$ ) (Abb. 6).

<sup>1</sup> Elektr. Nachr.-Techn. Bd. 4 (1927) S. 239—253.

Wir wollen diesen Winkel als die Halbwertsbreite dieser Peilebene bezeichnen<sup>1</sup>. Eine einfache Rechnung ergibt dann mit praktisch ausreichender Genauigkeit folgende einfache Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= 15^\circ \lambda/d \text{ für zwei punktförmige Strahler,} \\ \varphi_2 &= 20^\circ \lambda/d \text{ für die Kreislinie,} \\ \varphi_3 &= 25^\circ \lambda/d \text{ für die rechteckige Kolbenmembran,} \\ \varphi_4 &= 30^\circ \lambda/d \text{ für die kreisförmige Kolbenmembran.} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Der Fehler ist dabei für  $\lambda = d$  bereits unter  $1^\circ$  und nimmt für kleinere  $\lambda$  proportional ab.

Die Winkel  $15^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $25^\circ$ ,  $30^\circ$  sind dann charakteristisch für die Peilschärfe. Wir wollen dies durch einen besonderen Namen, *das Peilmaß*, hervorheben. Das Peilmaß ist dabei im allgemeinen für jede Peilebene verschieden. Um den Richtfaktor für eine Peilebene *vollständig* zu übersehen, wird man die charakteristische Funktion in Abhängigkeit von  $x$  darstellen und unter der  $X$ -Achse einen veränderlichen Maßstab anbringen, der für jeden Wert von  $d/\lambda$  und für jeden Winkel  $\gamma$  den Wert des Richtfaktors abzulesen gestattet. So kann man aus der umstehenden Abb. 7 ohne weiteres den vollständigen Verlauf des Richtfaktors in Abhängigkeit von  $\gamma$  in den obigen 4 Beispielen für alle Werte von  $d/\lambda$ , die zwischen 0 und 8 liegen, sofort angeben. Will man z. B. den Richtfaktor der dicht besetzten Kreislinie

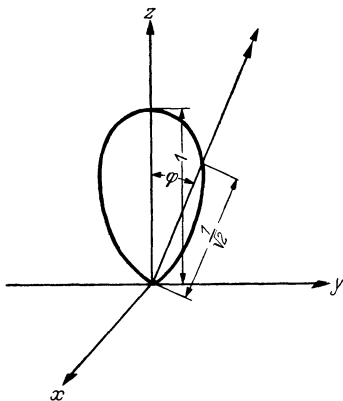


Abb. 6. Definition der Peilschärfe.

Will man z. B. den Richtfaktor der dicht besetzten Kreislinie  $\mathfrak{R} = J_0\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \gamma\right)$  für  $d/\lambda = 3$ ,  $\gamma = 40^\circ$  ablesen, so hat man in Abb. 7 auf der Parallelen  $d/\lambda = 3$  bis zum Schnittpunkt mit der Geraden  $40^\circ$  zu gehen und die entsprechende Ordinate auf der Kurve 2 abzulesen. Man findet dann:  $\mathfrak{R} = +0,15$  (vgl. den punktierten Linienzug in Abb. 7).

Als ein weiteres Beispiel erwähnen wir die gerade Gruppe, die aus einer Anzahl gleicher und in gleichem Abstand auf einer Geraden angeordneter ungerichteter Einzelstrahler besteht. Wegen der besonderen Bedeutung für die Praxis wollen wir diese Anordnung genauer untersuchen. Besitzen die auf der  $Y$ -Achse in gleichem Abstand  $d$  voneinander angeordneten Strahler die Koordinaten:

$$y_p, y_{p-1}, \dots, y_{-(p-1)}, y_{-p},$$

<sup>1</sup> Dabei ist vorausgesetzt, daß es sich um eine einigermaßen wirksame Bündelung handelt, so daß die Halbwertsbreite höchstens  $30^\circ$  beträgt.

wobei der Koordinatenanfangspunkt bei ungerader Anzahl ( $n = 2q - 1$ ) mit dem mittelsten Strahler zusammenfallen soll und bei gerader Anzahl ( $n = 2q$ ) in der Mitte zwischen den mittelsten Strahlern liegen

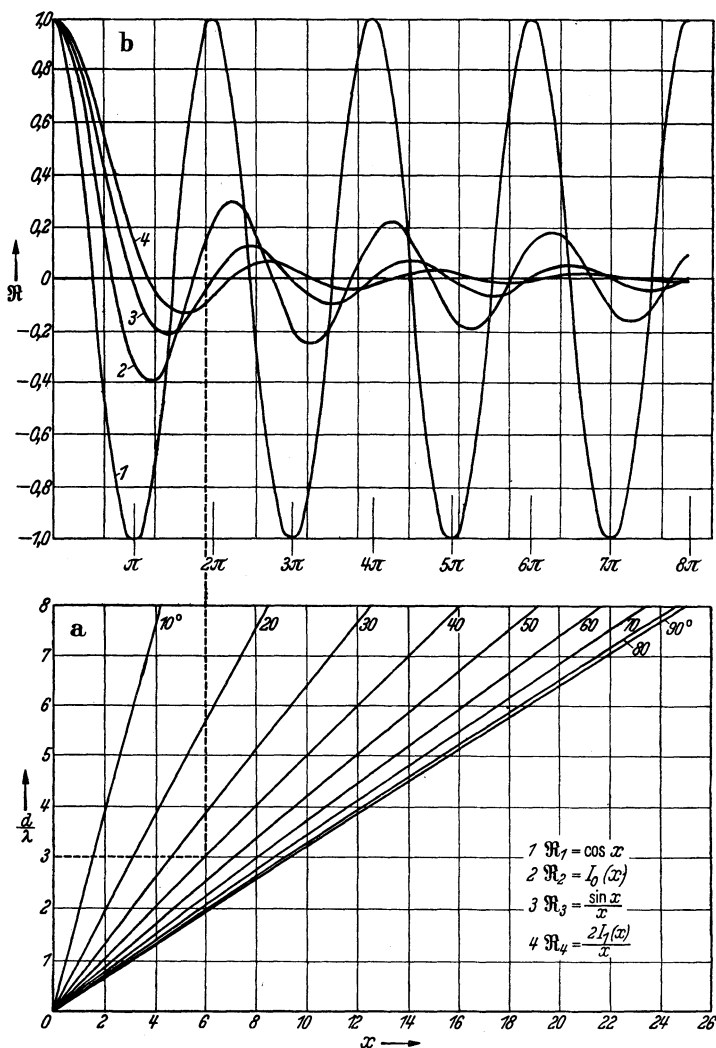


Abb. 7. Allgemeine Darstellung des Richtfaktors. 1. Richtfaktor des aus 2 Strahlern (Abstand  $d$ ) bestehenden Systems. 2. Richtfaktor der dicht besetzten Kreislinie (Durchmesser  $d$ ). 3. Richtfaktor der dicht besetzten rechteckigen Fläche (Länge  $d$ ) in der Symmetrieebene. 4. Richtfaktor der dicht besetzten Kreisfläche (Durchmesser  $d$ ).

soll, so ist im ersten Fall  $p = q - 1$ ,  $p - 1 = q - 2$  usw., im zweiten Fall  $p = q - \frac{1}{2}$ ,  $p - 1 = q - \frac{3}{2}$  usw. zu setzen (Abb. 8).

Allgemein gilt dann für einen beliebigen Index  $l$  die Beziehung  $y_l = ld$ . Setzen wir zur Abkürzung  $e^{ikd \sin \gamma} = z$ , so finden wir den

Richtfaktor aus (6), indem wir das Integral durch das Summenzeichen ersetzen:

$$\Re = \frac{1}{n} \sum_{m=-p}^{m=+p} z^m.$$

Die rechts stehende geometrische Reihe läßt sich leicht summieren und ergibt:

$$\Re = \frac{1}{n} z^{-p} \frac{z^{2p+1} - 1}{z - 1} = \frac{1}{n} \frac{z^{p+\frac{1}{2}} - z^{-(p+\frac{1}{2})}}{z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}}},$$

daraus folgt, wenn wir für  $z$  wieder  $e^{ikd \sin \gamma}$  einführen:

$$\Re = \frac{\sin \left[ \left( p + \frac{1}{2} \right) kd \sin \gamma \right]}{n \sin \left[ \frac{kd}{2} \sin \gamma \right]}.$$

Da wir bei ungerader Anzahl  $p + \frac{1}{2}$  durch  $q - \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$ , bei gerader Anzahl  $p + \frac{1}{2}$  durch  $q = n/2$  zu ersetzen haben, so ergibt sich allgemein (wobei noch  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  eingesetzt ist):

$$\Re = \frac{\sin \left[ \frac{n \pi d}{\lambda} \sin \gamma \right]}{n \sin \left[ \frac{\pi d}{\lambda} \sin \gamma \right]}. \quad (19)$$

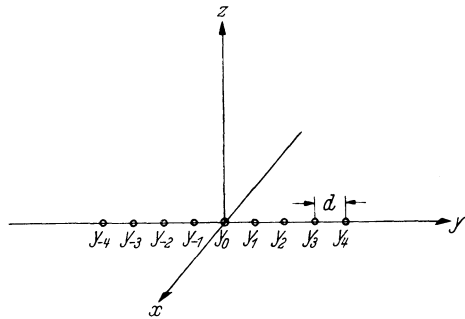


Abb. 8. Zur Berechnung der geraden Gruppe.

Um eine klare Übersicht über den allgemeinen Verlauf des Richtfaktors (19) bei verschiedenen  $d/\lambda$  zu bekommen, betrachten wir zunächst die durch

$$r = \frac{\sin n\varphi}{n \sin \varphi} \quad (20)$$

gegebene Funktion, indem wir in (19)  $\Re$  durch  $r$  und  $\frac{\pi d}{\lambda} \sin \gamma$  durch  $\varphi$  ersetzt haben. Die durch (20) in Polarkoordinaten  $r, \varphi$  gegebene Kurve läßt sich nun leicht übersehen. Das Hauptmaximum ( $r = 1$ ) wird für  $\varphi = 0$  und  $\varphi = \pi$  (und Vielfache von  $\pi$ ) erreicht. Dazwischen liegen  $n - 2$  Nebenmaxima, die durch die Nullstellen  $\varphi = \frac{k\pi}{n}$  ( $k=1, 2, \dots, n-1$ ) getrennt sind.

Zeichnet man parallel zur Ordinatenachse im Abstand  $1/n$  eine Gerade, so berührt diese die Kurve in den  $n$ -Punkten, die den Winkeln

$$\varphi = \frac{\pi}{2n}, \quad \frac{3}{2n}\pi, \quad \dots, \quad \frac{2n-1}{2n}\pi$$

entsprechen. Und man sieht, daß die Lage der Nebenmaxima in guter Annäherung durch die Winkel

$$\varphi = \frac{3}{2n}\pi, \quad \frac{5}{2n}\pi \quad \dots \quad \frac{2n-3}{2n}\pi$$



bestimmt sind. (Wegen der Symmetrie zur Ordinatenachse können wir uns auf die Werte  $\varphi \leq \pi$  beschränken.) Die Abb. 9 veranschaulicht die Verhältnisse für  $n = 6$ , wobei die punktierte Kurve die Ellipse mit den Halbachsen 1 und  $\frac{1}{6}$  darstellt, auf der sämtliche Maximalwerte von  $r = \frac{\sin 6\varphi}{6 \sin \varphi}$  liegen. Die Nebenmaxima (im ersten Quadranten) fallen sehr angenähert mit den Berührungspunkten zwischen Ellipse

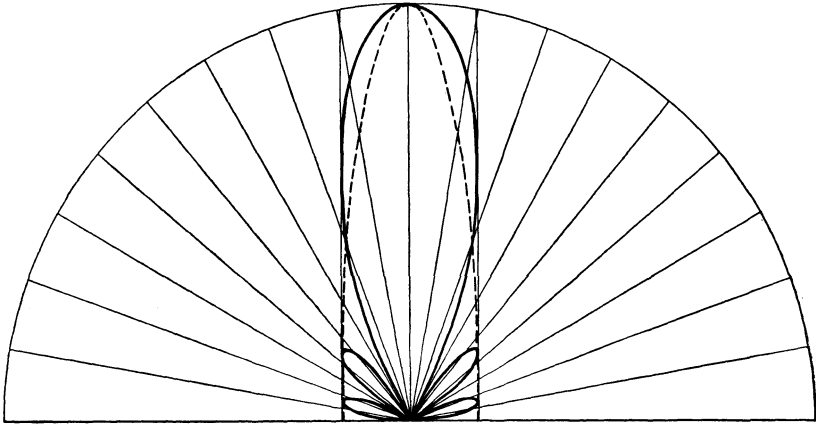


Abb. 9. Kennzeichnung der Lage und Größe der Nebenmaxima des Richtfaktors bei der geraden Gruppe von 6 Strahlern.

und der parallel im Abstand  $\frac{1}{6}$  zur Ordinatenachse gezogenen Geraden zusammen.

Zur genaueren Bestimmung muß man die sich aus  $\frac{dr}{d\varphi} = 0$  ergebende Bedingungsgleichung:

$$n \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} n \varphi \quad (21)$$

lösen. Dies geht einfach, wenn man die Gleichung (21) in der Form schreibt:

$$\varphi = \frac{1}{n} \operatorname{arc} \operatorname{tg}(n \operatorname{tg} \varphi). \quad (22)$$

Der gefundene Näherungswert wird in die rechte Seite von (22) eingesetzt und ergibt eine bessere Annäherung. Diese bessere Annäherung wird wieder in die rechte Seite von (22) eingesetzt usw. Setzt man als erste Annäherung  $\varphi_0 = \frac{2m+1}{2n} \pi$  in die rechte Seite von (22) ein, so ergibt sich als zweite Annäherung  $\varphi_0 - \varepsilon_0$ , wobei  $\varepsilon_0$  durch  $\operatorname{tg} n \varepsilon_0 = \frac{1}{n \operatorname{tg} \varphi_0}$  gegeben ist. Ist z. B.  $n = 6$  und  $m = 1$ , so folgt  $\varphi_0 = 45^\circ$  und aus  $\operatorname{tg} 6 \varepsilon_0 = \frac{1}{6}$ ,  $\varepsilon_0 = 1^\circ 35'$ , also  $\varphi_1 = 43^\circ 25'$ . Die dritte Näherung ergibt  $\varepsilon_1 = 0^\circ 5'$ , also  $\varphi_2 = \varphi_1 - \varepsilon_1 = 43^\circ 20'$ . Und es stimmt  $6 \operatorname{tg} \varphi_2 = 5,66$  mit  $\operatorname{tg} 6 \varphi_2 = 5,67$  bis auf einen Fehler unter 1% überein.

Bezeichne ich die zu den Maximalwerten gehörenden Koordinaten mit  $r_m, \varphi_m$ , so müssen gleichzeitig die Gleichungen (20) und (21) erfüllt sein. Also:

$$r_m^2 n^2 \sin^2 \varphi_m = \sin^2 n \varphi_m. \quad (23)$$

$$\frac{n^2 \operatorname{tg}^2 \varphi_m = \operatorname{tg}^2 n \varphi_m;}{\quad} \quad (24)$$

daraus folgt durch Division:

$$r_m^2 \cos^2 \varphi_m = \cos^2 n \varphi_m$$

und durch Addition von (23):  $r_m^2 [n^2 \sin^2 \varphi_m + \cos^2 \varphi_m] = 1.$

Das heißt: Die Maximalwerte liegen sämtlich auf einer Ellipse mit den Halbachsen 1 und  $1/n$ . Um nun die Abhängigkeit des Richtfaktors von  $d/\lambda$  und  $\gamma$  zu übersehen, haben wir nur zu überlegen, wie die diskutierte  $r, \varphi$ -Kurve durch die Transformation  $\Re = r, \varphi = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \gamma$  in der  $r \gamma$ -Ebene abgebildet wird. Wegen der Symmetrie können wir uns auf den ersten Quadranten  $(0 \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2})$  beschränken und können aus dem entsprechenden Bereich  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi d}{\lambda}$  die Lage und Anzahl der Haupt- und Nebenmaxima angeben. Die Größe ändert sich offenbar bei der Transformation nicht.

Vergleichen wir zwei beliebige gerade Gruppen I und II, wobei I durch  $n_1, d_1, \lambda_1$ , II durch  $n_2, d_2, \lambda_2$  gekennzeichnet ist, so ist:

$$r_1 = \frac{\sin n_1 \varphi_1}{n_1 \sin \varphi_1}, \quad \varphi_1 = \frac{\pi d_1}{\lambda_1} \sin \gamma,$$

$$r_2 = \frac{\sin n_2 \varphi_2}{n_2 \sin \varphi_2}, \quad \varphi_2 = \frac{\pi d_2}{\lambda_2} \sin \gamma.$$

Da für die Beurteilung der Peilschärfe nur kleine Werte von  $\gamma$  in Frage kommen, kann  $\sin \varphi$  durch  $\varphi$  ersetzt werden. Da die Ungleichung

$$\frac{\sin n_1 \varphi_1}{n_1 \varphi_1} > \frac{\sin n_2 \varphi_2}{n_2 \varphi_2}$$

(für kleine  $\varphi$ ) dann und nur dann erfüllt ist, wenn  $n_1 \varphi_1 < n_2 \varphi_2$  ist, so folgt, daß die Peilschärfe von II größer, gleich oder kleiner als die von I ist, je nachdem  $n_2 d_2 / \lambda_2$  größer, gleich oder kleiner als  $n_1 d_1 / \lambda_1$  ist. Bei gleicher Frequenz und gleicher Gesamtlänge hat also die dichter besetzte Gruppe eine geringere Peilschärfe. Und zwei Gruppen von verschiedener Länge und verschiedener Strahleranzahl können gleiche Peilschärfe besitzen. Zum Beispiel haben die Gruppen  $n_1 = 18, d_1 = \lambda/6$  und  $n_2 = 3, d_2 = \lambda$  wegen  $\frac{n_1 d_1}{\lambda_1} = \frac{n_2 d_2}{\lambda_2} = 3$  gleiche Peilschärfe, während ihre Basislängen sich wie 17:12 verhalten.

Handelt es sich um eine aus mehreren Strahlern in starrer Wand strahlende Anordnung, so läßt sich die Berechnung wesentlich vereinfachen, wenn die Anordnung aus gleichen Einzelstrahlern besteht (so daß jeder Einzelstrahler für sich allein den gleichen Richtfaktor

ergeben würde). Denken wir uns nämlich an Stelle jedes gerichteten Einzelstrahlers einen ungerichteten (punktförmigen) Strahler und nennen den Richtfaktor des so aus ungerichteten Einzelstrahlern bestehenden Systems  $\mathfrak{R}_1$ , und den Richtfaktor jedes Einzelstrahlers  $\mathfrak{R}_2$ , so ist der Richtfaktor  $\mathfrak{R}$  der gesamten Anordnung einfach durch das Produkt gegeben. Also:  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \cdot \mathfrak{R}_2$ .

Zum Beispiel ergibt sich der Richtfaktor einer aus zwei gleichen kreisförmigen Kolbenmembranen in starrer Wand bestehenden Anordnung mit dem Radius  $r$  und dem Mittelpunkt Abstand  $a$ :

$$\mathfrak{R} = \cos \left[ \frac{\pi a}{\lambda} \cos \beta \right] \frac{2 J_1(kr \sin \gamma)}{kr \sin \gamma}. \quad (25)$$

Diesen von BRIDGE<sup>1</sup> wohl zuerst ausgesprochenen Satz beweisen wir folgendermaßen:

Gegeben ist in der  $XY$ -Ebene ein System I von  $n$  ungerichteten (punktförmigen) Strahlern mit den Koordinaten:

$$(x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2) \dots (x'_n, y'_n),$$

den Geschwindigkeitsamplituden:

$$w'_1, w'_2 \dots w'_n$$

und den strahlenden Flächen:

$$F'_1, F'_2 \dots F'_n,$$

dabei wird

$$w'_1 F'_1 + w'_2 F'_2 + \dots + w'_n F'_n = A'$$

gesetzt.

Ferner ist ein System II von  $m$  ungerichteten Strahlern entsprechend durch die Größen charakterisiert:

$$(x''_1, y''_1), (x''_2, y''_2), \dots (x''_m, y''_m),$$

$$w''_1, w''_2 \dots w''_m,$$

$$F''_1, F''_2 \dots F''_m,$$

$$w''_1 F''_1 + w''_2 F''_2 + \dots + w''_m F''_m = A''.$$

Jetzt soll an Stelle jedes Strahlers im System II das System I gesetzt werden, so daß das neue System III entsprechend charakterisiert wird durch die Größen:

$$\left. \begin{array}{l} (x''_p + x'_1, y''_p + y'_1), (x''_p + x'_2, y''_p + y'_2) \dots (x''_p + x'_n, y''_p + y'_n) \\ w''_p \cdot w'_1, \quad w''_p w'_2, \quad \dots \quad w''_p w'_n \\ F''_p F'_1, \quad F''_p F'_2, \quad \dots \quad F''_p F'_n \end{array} \right\} p=1, 2, 3 \dots m.$$

<sup>1</sup> Vgl. H. Poincaré, Theorie de la lumière. S. 158.

Der Richtfaktor  $\mathfrak{R}'''$  des Systems III ergibt sich dann aus der allgemeinen Formel (6), wobei das Integral durch das Summenzeichen ersetzt werden muß, durch:

$$\mathfrak{R}''' = \frac{1}{A' A''} \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n w_p'' F_p'' w_q' F_q' e^{ik[(x_p'' + x_q') \cos \alpha + (y_p'' + y_q') \cos \beta]},$$

während der Richtfaktor  $\mathfrak{R}'$  von I durch:

$$\mathfrak{R}' = \frac{1}{A'} \sum_{q=1}^n w_q' F_q' e^{ik[x_q' \cos \alpha + y_q' \cos \beta]}$$

und der Richtfaktor  $\mathfrak{R}''$  von II durch:

$$\mathfrak{R}'' = \frac{1}{A''} \sum_{p=1}^m w_p'' F_p'' e^{ik[x_p'' \cos \alpha + y_p'' \cos \beta]}$$

gegeben ist.

Daraus folgt dann sofort:  $\mathfrak{R}''' = \mathfrak{R}' \cdot \mathfrak{R}''$ . Dieser Satz kann dazu dienen, aus der einfachen geraden Gruppenanordnung andere abzuleiten, deren Richtfaktor eine einfache Form besitzt. Charakterisieren wir den Richtfaktor einer geraden Gruppe, die aus  $n$  ungerichteten Strahlern mit gleicher Fläche in gleichem Abstand auf der  $Y$ -Achse mit den Geschwindigkeitsamplituden  $w_1, w_2, \dots, w_n$  besteht, durch

$$\mathfrak{R} = [w_1, w_2, \dots, w_n],$$

und bezeichnen insbesondere den Richtfaktor von  $n$  Einheitsstrahlern durch

$$\mathfrak{E}_n = [1, 1, \dots, 1] = \frac{\sin n\varphi}{n \sin \varphi}, \quad (26)$$

so ist

$$\mathfrak{E}_2 = [1, 1] = \frac{\sin 2\varphi}{2 \sin \varphi} = \cos \varphi.$$

Ersetzen wir jetzt jeden Strahler dieser aus 2 Elementen (auf der  $Y$ -Achse) bestehenden Gruppe durch die gleiche Gruppe, so wird aus der ursprünglichen Gruppe:

$$\mathfrak{E}_2 = \quad \times \quad \times$$

offenbar die folgende Gruppe:

$$\mathfrak{E}_2^2 = \quad \times \quad \times \times \quad \times$$

Das heißt: Wir bekommen eine Gruppe aus 3 Elementen (1 2 1). Der entsprechende Richtfaktor [1, 2, 1] ist dann nach dem Satz von BRIDGE gleich  $\cos^2 \varphi$ .

Entsprechend folgt:

$$\mathfrak{E}_2^3 = [1, 1][1, 1][1, 1] = [1, 3, 3, 1] = \cos^3 \varphi,$$

$$\mathfrak{E}_2^n = [1, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}] = \cos^n \varphi.$$

Um das symbolische Produkt  $\mathfrak{R}_a \cdot \mathfrak{R}_b = [a_1, a_2, \dots, a_m][b_1, b_2, \dots, b_n]$  zu finden, d. h. um den Richtfaktor der geraden Gruppe zu finden, die entsteht, wenn jeder Einzelstrahler der einen Gruppe durch die gleiche

und gleich gerichtete Gruppe ersetzt wird (so daß die ursprünglichen Strahler und sämtliche Strahler des an ihre Stelle getretenen auf derselben Geraden liegen), bilden wir das folgende rechteckige Schema:

|       |           |           |           |  |           |
|-------|-----------|-----------|-----------|--|-----------|
|       | $b_1$     | $b_2$     | $b_3$     |  | $b_n$     |
| $a_1$ | $a_1 b_1$ | $a_1 b_2$ | $a_1 b_3$ |  |           |
| $a_2$ | $a_2 b_1$ | $a_2 b_2$ | $a_2 b_3$ |  |           |
| $a_3$ | $a_3 b_1$ | $a_3 b_2$ | $a_3 b_3$ |  |           |
|       |           |           |           |  |           |
|       |           |           |           |  |           |
|       |           |           |           |  |           |
| $a_m$ |           |           |           |  | $a_m b_n$ |

Man übersieht dann leicht, daß man zur Bestimmung von  $\mathfrak{R}_a \cdot \mathfrak{R}_b$  die Summen der in den schrägen Diagonalen vorhandenen Produkte zu bilden hat. So ergibt sich:

$$\mathfrak{R}_a \cdot \mathfrak{R}_b = [a_1 b_1, a_2 b_1 + a_1 b_2, a_3 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_3, + \dots \\ + a_m b_{n-1} + a_{m-1} b_n, a_m b_n].$$

Das Ergebnis läßt sich auch in einfacher Weise durch die Betrachtung des Produktes  $(a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m) (b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n) = a_1 b_1 x^2 + (a_2 b_1 + a_1 b_2) x^3 + \dots + a_m b_n x^{m+n}$  erläutern.

Interessanter ist die umgekehrte Frage: Wie man aus einer geraden Gruppe von fest vorgegebener Empfängeranzahl und festem Abstand allein durch Ändern der einzelnen Geschwindigkeitsamplituden, d. h. durch Ändern der Empfindlichkeit, den Richtfaktor ändern kann.

So können wir aus 6 Strahlern, die in gleichem Abstand  $d$  in einer Geraden angeordnet sind, die folgenden 7 Richtfaktoren erhalten:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{R}_1 = \mathfrak{C}_6 = [1, 1, 1, 1, 1, 1] &= \frac{\sin 6\varphi}{6 \sin \varphi}, \\ \mathfrak{R}_2 = \mathfrak{C}_5 \cdot \mathfrak{C}_2 = [1, 2, 2, 2, 2, 1] &= \frac{\sin 5\varphi}{5 \sin \varphi} \cdot \frac{\sin 2\varphi}{2 \sin \varphi}, \\ \mathfrak{R}_3 = \mathfrak{C}_4 \cdot \mathfrak{C}_3 = [1, 2, 3, 3, 2, 1] &= \frac{\sin 4\varphi}{4 \sin \varphi} \cdot \frac{\sin 3\varphi}{3 \sin \varphi}, \\ \mathfrak{R}_4 = \mathfrak{C}_4 \cdot \mathfrak{C}_2^2 = [1, 3, 4, 4, 3, 1] &= \frac{\sin 4\varphi}{4 \sin \varphi} \cdot \left(\frac{\sin 2\varphi}{2 \sin \varphi}\right)^2, \\ \mathfrak{R}_5 = \mathfrak{C}_3^2 \cdot \mathfrak{C}_2 = [1, 3, 5, 5, 3, 1] &= \left(\frac{\sin 3\varphi}{3 \sin \varphi}\right)^2 \cdot \frac{\sin 2\varphi}{2 \sin \varphi}, \\ \mathfrak{R}_6 = \mathfrak{C}_3 \cdot \mathfrak{C}_2^3 = [1, 4, 7, 7, 4, 1] &= \frac{\sin 3\varphi}{3 \sin \varphi} \cdot \left(\frac{\sin 2\varphi}{2 \sin \varphi}\right)^3, \\ \mathfrak{R}_7 = \mathfrak{C}_2^5 = [1, 5, 10, 10, 5, 1] &= \left(\frac{\sin 2\varphi}{2 \sin \varphi}\right)^5 = \cos^5 \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Dabei ist zur Abkürzung  $\varphi = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \gamma$  gesetzt.

Die entsprechenden Richtfaktoren sind in der Abb. 10 dargestellt. Es ist nach dem angegebenen Satz vom Trägheitsmoment ohne weiteres klar, daß die Peilschärfe von  $\mathfrak{R}_1$  am größten ist. Da die Empfindlichkeit der Strahler sich immer mehr in den Mittelpunkt konzentriert, so muß notwendig die Peilschärfe immer mehr abnehmen. Dies zeigt

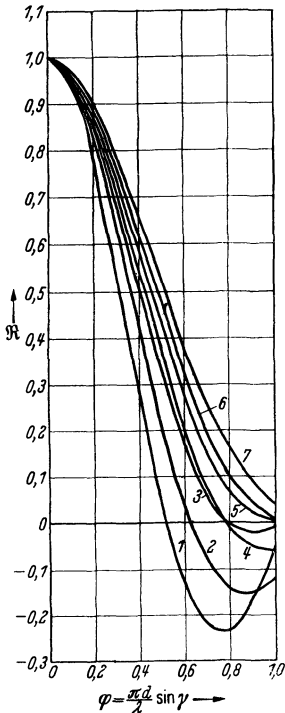


Abb. 10. Peilschärfe der geraden Gruppe von 6 Empfängern mit verschiedener Empfindlichkeit.

Abb. 10. Wichtiger erscheint es, daß in bezug auf die auftretende Größe der Nebenmaxima ein umgekehrter Gang besteht. Der  $\varphi > 1$  entsprechende Teil der Kurve ist in Abb. 11 stark vergrößert dargestellt, um die Größe der Nebenmaxima zur Darstellung zu bringen, und wir erkennen, daß in bezug auf die Größe der Nebenmaxima  $\mathfrak{R}_1$  sehr ungünstig ist.

So bleibt z. B. bei  $\mathfrak{R}_6$  die Größe der Nebenmaxima unter 1%, gegenüber 24% bei  $\mathfrak{R}_1$ . Wir haben somit die Möglichkeit, bei einer festen

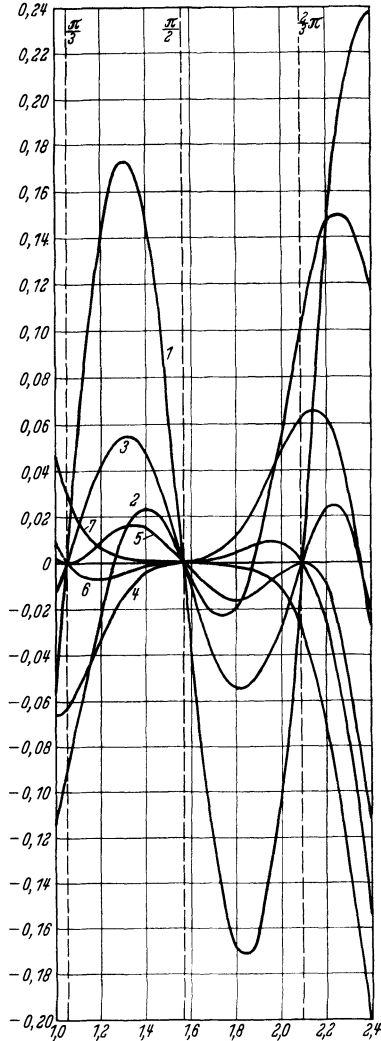


Abb. 11. Nebenmaxima der geraden Gruppe von 6 Empfängern mit verschiedener Empfindlichkeit.

Anordnung von Strahlern lediglich durch Verändern der Empfindlichkeit (d. h. der Verstärkung) je nach Bedarf die Peilschärfe oder die Größe der Nebenmaxima in günstigem Sinne zu beeinflussen.

Um den Richtfaktor für die rechteckige Gruppe abzuleiten, gehen wir aus von dem allgemeinen Richtfaktor der geraden Gruppe. Dabei ersetzen wir in der früheren Formel (19)  $\sin \gamma$  durch  $\cos \beta$ , um zu erreichen, daß die Beziehung, unabhängig von der Peilebene, gilt. Für die Formel (19) war es notwendig, daß die Peilebene mit der  $ZY$ -Ebene zusammenfiel. Wir erhalten dann:

$$\mathfrak{R} = \frac{\sin \left[ \frac{n\pi d}{\lambda} \cos \beta \right]}{n \sin \left[ \frac{\pi d}{\lambda} \cos \beta \right]}. \quad (28)$$

Denken wir uns jetzt jeden Einzelstrahler durch die gleiche aus  $m$  Strahlern zur  $X$ -Achse parallele Gruppe ersetzt, so ergibt sich allgemein der Richtfaktor dieser rechteckigen Gruppe nach der früheren Regel (Abb. 12):

$$\mathfrak{R} = \frac{\sin \left[ \frac{m\pi d_1}{\lambda} \cos \alpha \right] \sin \left[ \frac{n\pi d_2}{\lambda} \cos \beta \right]}{m \sin \left[ \frac{\pi d_1}{\lambda} \cos \alpha \right] \cdot n \sin \left[ \frac{\pi d_2}{\lambda} \cos \beta \right]}. \quad (29)$$

Lassen wir  $d_1$  und  $d_2$  immer kleiner werden und  $m$  und  $n$  beliebig wachsen, so daß in der Grenze  $md_1 = a$  und  $nd_2 = b$  ist, so erhalten

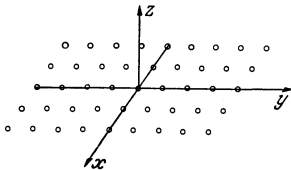


Abb. 12. Rechteckige Gruppe.

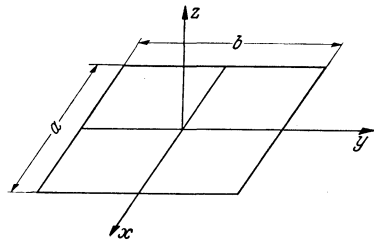


Abb. 13. Rechteckige Kolbenmembran.

wir den allgemeinen Richtfaktor der rechteckigen Kolbenmembran (Abb. 13):

$$\mathfrak{R} = \frac{\sin \left[ \frac{a\pi}{\lambda} \cos \alpha \right] \sin \left[ \frac{b\pi}{\lambda} \cos \beta \right]}{\frac{a\pi}{\lambda} \cos \alpha \cdot \frac{b\pi}{\lambda} \cos \beta}. \quad (30)$$

Dabei hat man sich die Membran als nach beiden Seiten der  $XY$ -Ebene konphas schwingend oder als einfache Kolbenmembran, die in einer unendlichen starren Wand schwingt, vorzustellen.

An Stelle der dichtbesetzten Kreislinie wird in der Praxis häufig eine Kreisgruppe benutzt, die aus einer bestimmten Anzahl ( $n$ ) von Strahlern besteht, die in gleichem Abstand auf einem Kreis vom Durch-

messer  $d$  angeordnet sind<sup>1</sup>. Wählen wir  $n$  als gerade Zahl ( $n = 2m$ ), so läßt sich durch Zusammenfassung von je zwei diametral gegenüberliegenden Strahlern für den Richtfaktor leicht die folgende Beziehung ableiten:

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \cos \left\{ \frac{\pi d}{\lambda} \sin \gamma \left[ \cos \left( \varphi - \frac{\pi k}{m} \right) \right] \right\}. \quad (31)$$

Dabei ist die Aufpunktsgerade durch  $\varphi$  und  $\gamma$  (s. Abb. 14) bestimmt. Insbesondere für größere  $m$  ist die Berechnung nach (31) sehr zeitraubend. Unter Benutzung der BESSELSchen Funktionen läßt sich die Summe in eine unendliche Reihe verwandeln, die für die Rechnung wesentlich bequemer ist. Und zwar ergibt sich:

$$\mathfrak{R} = J_0 \left( \frac{\pi d}{\lambda} \sin \gamma \right) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{pm} J_{2pm} \left( \frac{\pi d}{\lambda} \sin \gamma \right) \cdot \cos 2pm\varphi. \quad (32)$$

Die praktische Bedeutung dieser zunächst umständlich erscheinenden Beziehung erkennt man sofort, wenn man bedenkt, daß die ersten Glieder in der Summe  $J_{2m}$ ,  $J_{4m}$  usw. sehr schnell praktisch vernachlässigbare Werte annehmen, so daß es im allgemeinen genügt, das erste Glied  $J_{2m}$  zu berücksichtigen.

Im übrigen kann man mit Hilfe von (32) auch die oft wichtige Frage entscheiden, wie dicht man die Besetzung der Strahler auf der Kreislinie wählen muß, damit der Richtfaktor sich praktisch von dem der kontinuierlich besetzten Kreislinie nicht mehr unterscheidet. Wählen wir etwa 4 Empfänger, so ist das maßgebende Korrektionsglied absolut kleiner als  $\left| 2J_4 \left( \frac{\pi d}{\lambda} \sin \gamma \right) \right|$ . Bezeichnen wir als Hauptteil der Charakteristik von  $\mathfrak{R} = J_0 \left( \frac{\pi d}{\lambda} \sin \gamma \right)$  den Teil von  $\gamma = 0$  ( $J_0 = 1$ ) bis  $\gamma = \gamma_1$ , wobei  $\gamma_1$  der ersten Nullstelle entspricht, dann ist  $\gamma_1$  durch  $\frac{\pi d}{\lambda} \sin \gamma_1 = 2,4$  bestimmt, und da  $J_4(x) < 0,06$  für  $x < 2,4$ , so ändert sich der Hauptteil der Charakteristik nicht. Das heißt: Die *Peilschärfe* einer Kreisgruppe von 4 Strahlern ist völlig gleichwertig der Peilschärfe einer dicht mit Strahlern besetzten Anordnung, gleichgültig, wie groß der Radius der Anordnung gewählt ist. Ebenso kann man schließen, daß der *gesamte* Verlauf des Richtfaktors der Kreisgruppe hinreichend genau durch  $J_0 \left( \frac{\pi d}{\lambda} \sin \gamma \right)$  wiedergegeben ist, wenn die Anzahl  $n$  so groß ist, daß die Bedingung:

$$n \geq \frac{\pi d}{\lambda} + 2 \quad (33)$$

erfüllt ist.

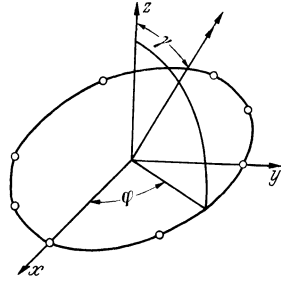


Abb. 14. Berechnung des Richtfaktors der Kreisgruppe.

<sup>1</sup> Elektr. Nachr.-Techn. Bd. 6 (1929) S. 170.



Da der Umfang des Kreises  $\pi d = n \cdot a$  ist, wobei  $a$  der auf dem Bogen gemessene Abstand ist, so können wir die Bedingung (33) so formulieren, daß der auf dem Kreise gemessene Abstand von zwei benachbarten Strahlern etwas kleiner als  $\lambda$  (genauer  $(a/\lambda < 1 - 2/n)$ ) sein muß, damit der Kreisgruppenrichtfaktor durch  $J_0\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \gamma\right)$  gegeben ist.

Mit der *Peilschärfe* einer Anordnung ist die Frage nach der *Trennschärfe* eng verknüpft. Dabei handelt es sich um die Frage, wann eine Empfangseinrichtung in der Lage ist, zwei in großer Entfernung und kleinem Abstand voneinander befindliche Schallquellen getrennt wahrzunehmen. Denken wir uns symmetrisch zur Mittellinie der Empfangseinrichtung in großer Entfernung  $r$  und in der Nähe der Mittellinie je eine Schallquelle (1 und 2) (Ton) und denken wir uns eine Kreisfläche als Empfangseinrichtung und diese um die X-Achse gedreht, so wird das von jedem Strahler herrührende Hauptmaximum getrennt in Erscheinung treten, wenn der Abstand  $a$  der Strahler hinreichend groß ist (Abb. 15).

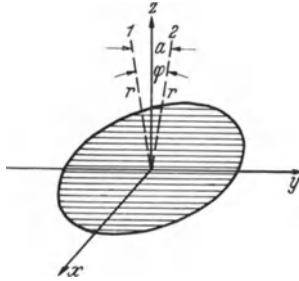


Abb. 15. Trennschärfe der kreisförmigen Kolbenmembran.

Nimmt man mit RAYLEIGH an, daß die Maxima dann getrennt werden können, wenn das Maximum des einen mit dem ersten Minimum des anderen zusammenfällt, so folgt aus der Tatsache, daß die Gleichung:

$$\frac{2J_1\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \varphi\right)}{\frac{\pi d}{\lambda} \sin \varphi} = 0$$

für  $\frac{\pi d}{\lambda} \sin \varphi = 3,83$  erfüllt ist, als notwendige Bedingung:  $\frac{\pi d}{\lambda} \sin \varphi \geq 3,83$ .

Daraus folgt wegen  $\sin \varphi \approx \varphi = a/r$

$$d/\lambda > 1,22 r/a. \quad (34)$$

Um also in großer Entfernung  $r$  und kleinem Abstand  $a$  befindliche Strahler mit einem akustischen Objektiv trennen zu können, muß der in  $\lambda$  gemessene Durchmesser des Objektivs mindestens gleich  $r/a$  sein.

Die bisherige Betrachtung bezog sich ausschließlich auf den Fall, wo alle Teile der strahlenden Membran bzw. des strahlenden Systems sich mit gleicher Amplitude und gleicher Phase bewegen. In der Praxis läßt sich dies durchaus nicht immer erreichen. Im allgemeinen ist die an der Membran angreifende Kraft nicht gleichmäßig über die ganze Fläche verteilt, sondern greift im Mittelpunkt oder längs einer Linie an. Da es absolut starre Membranen nicht gibt (vor allem dann nicht, wenn

für die Membranen in Rücksicht auf einen guten Wirkungsgrad und Frequenzgang außer der Starrheit noch möglichst geringes Gewicht erforderlich ist), so wird die etwa im Mittelpunkt angreifende Kraft infolge der (gedämpften) Ausbreitung der elastischen Transversalwellen mit endlicher Geschwindigkeit weder in gleicher Phase noch in gleicher Amplitude z. B. für die Randelemente wirken können, sobald die Ausdehnung der Membran nicht mehr klein zur Wellenlänge dieser Transversalwelle ist. Ferner ist die Membran durch ihre Halterung am Rande meist in ihrer Bewegung gehemmt. Prinzipiell wird es keine Schwierigkeit machen, der Annahme einer verschiedenen Phase in unseren Formeln Rechnung zu tragen. Wir hätten dazu nötig, die vorgegebene Geschwindigkeitsamplitude  $w(x, y)$  als komplexe Größe anzusetzen. Aus Gründen der Einfachheit wollen wir uns auf eine veränderliche Amplitude beschränken und demgemäß  $w(x, y)$  als reelle Funktion annehmen.

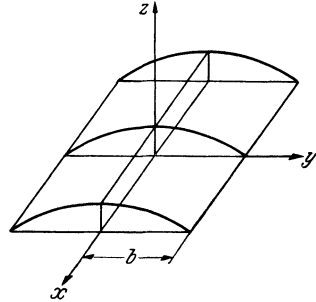


Abb. 16. Schwingungsform der rechteckigen Membran  $w(x, y) = 1 - y^2/b^2$ .

Als einfachstes Beispiel betrachten wir den Richtfaktor in der  $ZY$ -Ebene, der in Abb. 16 dargestellten rechteckigen Membran, wobei die Abbildung die Membran im Moment der größten Ausbiegung darstellt.

Und zwar soll  $w$  durch  $w(y) = 1 - y^2/b^2$  gegeben sein. Wir finden:

$$w_m \cdot F = 2a \int_{-b}^{+b} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dy = 2a \cdot 2b \cdot \frac{2}{3}.$$

Also:  $w_m = \frac{2}{3}.$

Und:  $\Re = \frac{2a}{w_m F} \int_{-b}^{+b} e^{iky} \sin \gamma \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dy,$

$$\Re = \frac{3}{u^2} \left( \frac{\sin u}{u} - \cos u \right), \quad (35)$$

wobei

$$u = \frac{2\pi b}{\lambda} \sin \gamma$$

gesetzt ist.

Um das Peilmaß zu finden, haben wir den Wert von  $u$  zu berechnen, für welchen  $\Re = 0,707$  ist. Daraus folgt  $u = 1,8$ . Dann ist das Peilmaß gleich  $1,8/\pi = 33^\circ$  und die Halbwertsbreite  $\varphi$  durch  $\varphi = 33^\circ \lambda/2b$  gegeben. Mit der Annäherungsformel würden wir finden:

$$\Re = 1 - \left(\frac{2\pi b}{\lambda}\right)^2 \frac{\sin^2 \gamma}{10},$$

und daraus:

$$\varphi = 33,5^\circ \cdot \lambda/2b.$$

Als zweites Beispiel für die rechteckige Membran wählen wir (Abb. 17):

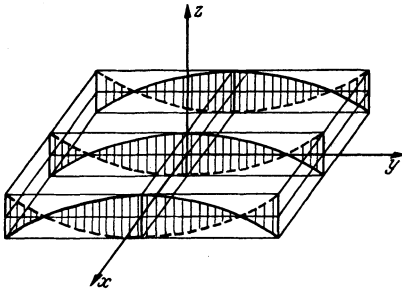


Abb. 17. Schwingungsform der rechteckigen Membran  $w(x, y) = 1 - 2y^2/b^2$ .

$$w(x, y) = 1 - 2y^2/b^2$$

und finden:

$$w_m = \frac{1}{3}.$$

Für den Richtfaktor in der ZY-Ebene ergibt sich:

$$\Re = \frac{12}{u^2} \left( \frac{\sin u}{u} - \cos u \right) - 3 \frac{\sin u}{u}.$$

Bestimmen wir hier das Peilmaß aus:

$$\frac{12}{u^2} \left( \frac{\sin u}{u} - \cos u \right) - 3 \frac{\sin u}{u} = 0,707, \tag{36}$$

so folgt:  $u = 4,4$ , also das Peilmaß gleich  $4,4/\pi = 80^\circ$  und die Halbwertsbreite  $\varphi = 80^\circ \cdot \lambda/2b$ <sup>1</sup>. Hier tritt etwas Neues ein, indem  $\Re$

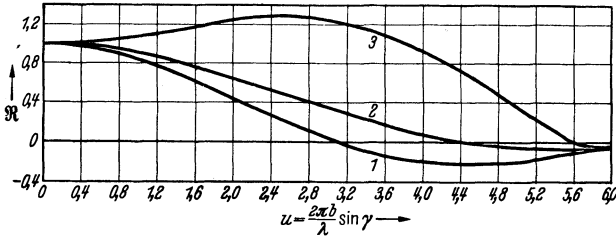


Abb. 18. 1. Richtfaktor der rechteckigen Kolbenmembran  
2. Richtfaktor der rechteckig eingespannten Membran  
3. Richtfaktor der rechteckigen Membran mit Knotenlinie } in der Symmetrieebene.

auf der Z-Achse kein Maximum, sondern ein Minimum besitzt. Die Reihenentwicklung von  $\Re$  ergibt:  $\Re = 1 + \frac{u^2}{10} \dots$

Ein Vergleich der Richtfaktoren der rechteckigen Kolbenmembran mit der Seitenlänge  $2b$  und der beiden letzten Membranen zeigt Abb. 18.

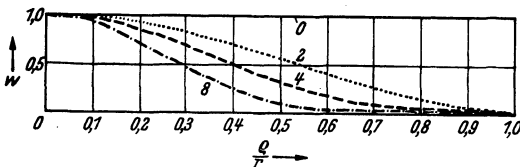


Abb. 19. Schwingungsformen  $v(\rho) = (1 - \rho^2/r^2)^n$  für  $n = 0, 2, 4, 8$ .

Man erkennt, wie wesentlich die Änderung ist, wenn an Stelle der erwünschten Kolbenmembran eine Membran mit Knotenlinien wirksam ist. Andererseits kann die Erkenntnis nutzbar verwertet werden, wenn es sich

darum handelt, bei einer großen Membran (die notwendig ist, um die nötige Energie unterzubringen), eine scharfe Bündelung zu vermeiden.

Als drittes Beispiel wählen wir die am Rande fest eingespannte kreisförmige Membran. Hier können wir die Rechnung allgemein für

<sup>1</sup> S. die Fußnote auf S. 11.

die durch  $w(\varrho) = (1 - \varrho^2/r^2)^n$  gegebenen Kurven (die Abb. 19 stellt die Kurven  $w(\varrho) = (1 - \varrho^2/r^2)^n$  für  $n = 0, 2, 4, 8$  dar) durchführen. Und zwar finden wir<sup>1</sup>:

$$w_m = \frac{1}{n+1} \quad \text{und:} \quad \mathfrak{R}_n = 2^{n+1} \cdot (n+1)! \frac{J_{n+1}(u)}{u^{n+1}}, \quad (37)$$

wobei  $J_{n+1}(u)$  die BESSELSche Funktion  $(n+1)$ ter Ordnung darstellt und  $u = \frac{2\pi r}{\lambda} \sin \gamma$  gesetzt ist.

Aus der mit dem Trägheitsmoment berechneten Annäherungsformel:

$$\mathfrak{R}_n = 1 - \frac{r^2 \pi^2 \sin \gamma}{n+2}$$

finden wir die Halbwertsbreite:

$$\varphi = 15^\circ \cdot \sqrt{n+1} \cdot \lambda/r.$$

Der vollständige Verlauf der den Schwingungsformen der Abb. 19 entsprechenden Richtfaktoren ist in der Abb. 20 für  $n = 0, 2, 4, 8$  dargestellt. Zu erwähnen ist noch, daß durch lineare Kombination der Schwingungsformen ( $w = (1 - \varrho^2/r^2)^n$  eine beliebige rotationssymmetrische Schwingungsform der Membran (auch mit Knotenlinien) mit beliebiger Annäherung dargestellt werden kann.

Und zwar können wir zu einer allgemeinen Schwingung der Membran, die durch

$$w(\varrho) = a_0 + a_1(1 - \varrho^2/r^2) + a_2(1 - \varrho^2/r^2)^2 + \dots + a_n(1 - \varrho^2/r^2)^n \quad (38)$$

gekennzeichnet ist, den zugehörigen Richtfaktor allgemein angeben. Es ist:

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \dots + \frac{1}{n+1}a_n} \left[ 2a_0 \frac{J_1(u)}{u} + 2^2 \cdot 1! a_1 \frac{J_2(u)}{u^2} + \dots + 2^{n+1} \cdot n! \frac{J_{n+1}(u)}{u^{n+1}} \right]. \quad (39)$$

Ein Ausnahmefall tritt ein, wenn der Ausdruck im Nenner:

$$a_0 + \frac{1}{2} a_1 + \dots + \frac{1}{n+1} a_n$$

<sup>1</sup> Ann. d. Phys. Bd. 7 (1930) S. 972.

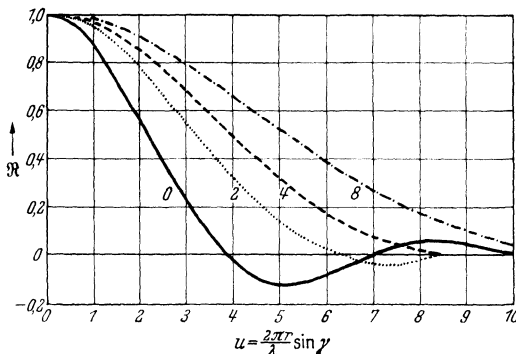


Abb. 20. Richtfaktor der kreisförmigen Membran mit der Schwingungsform  $w(\varrho) = (1 - \varrho^2/r^2)^n$  für  $n = 0, 2, 4, 8$ .

gleich Null wird. Dann wird die Formel (39) für  $\Re$  unbrauchbar. Doch läßt sich die Schwierigkeit ohne weiteres beheben, wenn man die Druckamplitude direkt nach (11) berechnet. Dann folgt:

$$p = \frac{c \cdot \sigma}{\lambda \cdot R} \int_F w(x, y) e^{i k y \sin \gamma} dF$$

und für  $\gamma = 0$  ist:

$$p = \frac{c \cdot \sigma}{\lambda \cdot R} \int_F w(x, y) dF = 0.$$

Das bedeutet also, daß wegen  $w_m = 0$  die Druckamplitude in hinreichender Entfernung auf der Mittelachse gleich Null wird. Und es

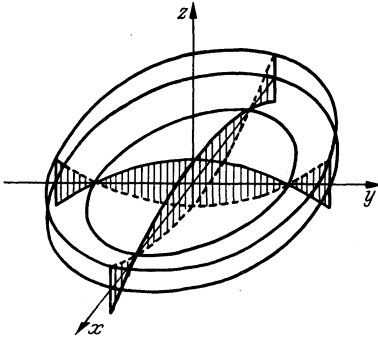


Abb. 21. Kreisförmige Membran mit dem Deformationsvolumen Null.

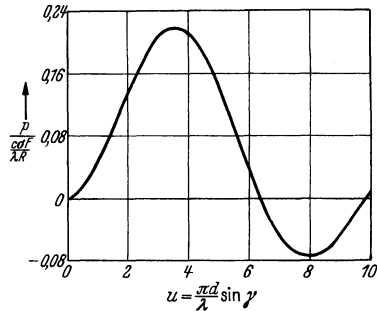


Abb. 22. Relative Schalldruckamplitude einer kreisförmigen Membran mit dem Deformationsvolumen Null.

ist klar, daß der Richtfaktor, der ja das Verhältnis der Druckamplitude in einer beliebigen Richtung zu der Druckamplitude auf der Mittelachse darstellt, seinen Sinn verliert. Im übrigen macht die Berechnung keine Schwierigkeit.

Ein entsprechendes Beispiel ist durch:

$$w = 1 - 2 \varrho^2 / r^2, \quad \text{also} \quad a_1 = -1, \quad a_1 = +2, \quad a_2 = a_3 \dots = 0$$

gegeben (Abb. 21).

Hier ist  $w_m = 0$  und wir finden  $p$  durch:

$$p = \frac{c \cdot \sigma}{\lambda \cdot R} \cdot F [\Re_1(u) - \Re_0(u)], \quad (40)$$

wobei  $u = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \gamma$ ,  $\Re_0(u) = \frac{2J_1(u)}{u}$ ,  $\Re_1(u) = 2^2 \cdot 2 \cdot \frac{J_2(u)}{u^2}$

gesetzt ist.

Für kleine  $u$  erkennt man aus der Reihenentwicklung:

$$\Re_1(u) - \Re_0(u) = \frac{u^2}{2^2 \cdot 0! 3!} - \frac{u^4}{2^4 \cdot 1! 4!} + \frac{u^6}{2^6 \cdot 2! 5!} - \dots, \quad (41)$$

daß auch für Richtungen in der Nachbarschaft der Z-Achse die Wirkung der Membran außerordentlich gering ist. Der vollständige Verlauf von  $\Re_1(u) - \Re_0(u)$  ist in Abb. 22 dargestellt.

### b) Der Richtfaktor bei einem Geräusch.

In der Praxis sind bei den Schallquellen (z. B. unter Wasser), die gepült werden sollen, zwei wesentlich verschiedene Typen zu unterscheiden. Entweder handelt es sich um künstliche Schallquellen, die reine Töne aussenden sollen (Feuerschiffssender, Glocken, Signalsender auf Schiffen), oder um mehr oder weniger natürliche Schallquellen, die geräuschartigen Charakter besitzen und bei denen die Schallerzeugung meist unbeabsichtigt und unerwünscht vor sich geht (Schraubengeräusche, Maschinengeräusche).

Es liegt daher nahe zu untersuchen, wie sich die vorangegangenen Betrachtungen in solchen Fällen anwenden lassen. Dabei wollen wir den praktisch am häufigsten vorkommenden Fall zugrunde legen, wo eine Geräuschquelle vorliegt, aus deren kontinuierlichem Spektrum ein bestimmter, nach oben und unten begrenzter Bereich empfangen wird. Bekanntlich läßt sich dies durch elektrische Siebmittel ohne Schwierigkeiten verwirklichen. Dabei soll weiter vorausgesetzt sein, daß die Empfängeranordnung alle Frequenzen des in Frage kommenden Bereiches in der Hauptrichtung mit gleicher Intensität empfängt, d. h. daß der Sender keine Frequenz bevorzugt und auch im Medium auf dem Wege vom Sender zum Empfänger (Absorption, Reflexion) keine Frequenzabhängigkeit eintritt. Als Richtfaktor werden wir dann zweckmäßig den quadratischen Mittelwert:

$$\mathcal{G} = \sqrt{\frac{1}{n_2 - n_1} \int_{n_1}^{n_2} \mathfrak{R}^2 dn} \quad (42)$$

definieren, wobei  $n_1$  und  $n_2$  die Grenzen des Bereiches und  $\mathfrak{R}$  der früher definierte, von der Frequenz  $n$  abhängige, Richtfaktor bedeutet.

Wählen wir als einfachste Peileinrichtung zwei ungerichtete, im Abstand  $d$  befindliche Empfänger (klein zu allen in Frage kommenden Wellenlängen), so ist:

$$\mathcal{G}_1 = \sqrt{\frac{1}{n_2 - n_1} \int_{n_1}^{n_2} \cos^2\left(\frac{n\pi d}{c} \sin \gamma\right) dn}.$$

Die Ausführung der Integration ergibt:

$$\mathcal{G}_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\sin(x_2 - x_1)}{2(x_2 - x_1)} \cos(x_1 + x_2) \right]}, \quad (43)$$

wobei zur Abkürzung:

$$n_1 \frac{\pi d}{c} \sin \gamma = \frac{\pi d}{\lambda_1} \sin \gamma = x_1,$$

$$n_2 \frac{\pi d}{c} \sin \gamma = \frac{\pi d}{\lambda_2} \sin \gamma = x_2$$

gesetzt ist.

Man sieht, daß für  $x_2 = x_1$  die Formel (43) in den ursprünglichen Richtfaktor  $\mathfrak{R}_1$  in (14) übergeht. Es ist nämlich:

$$\mathfrak{G}_{x_2 = x_1 = x} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x} = \cos x.$$

Wir wollen nun zunächst den Verlauf des Richtfaktors untersuchen, wenn der durchgelassene Frequenzbereich gerade eine Oktave beträgt.

Dazu setzen wir  $x_2 = 2x$ ,  $x_1 = x = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \gamma$  und erhalten:

$$\mathfrak{G}_1 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin x}{x} \cos 3x}. \quad (44)$$

Aus der Abb. 23 sehen wir, daß der Richtfaktor jetzt wesentlich von dem früheren (für einen Ton, Abb. 7, Kurve 1) unterschieden ist. An

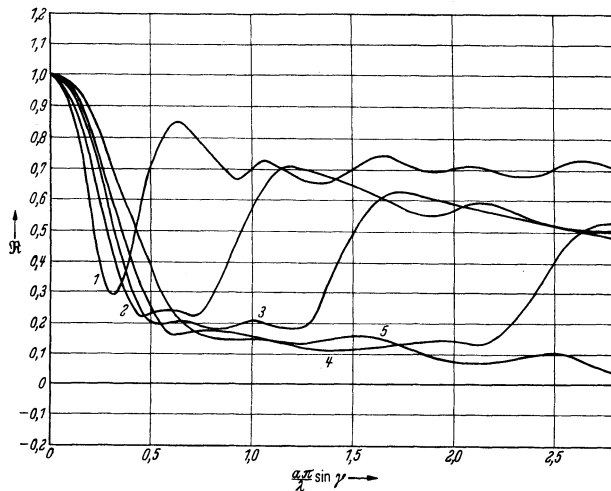


Abb. 23. Richtfaktor einer geraden Gruppe (Länge  $a$ ) bei Oktavenempfang: 1. 2 Empfänger; 2. 3 Empfänger; 3. 4 Empfänger; 4. 6 Empfänger; 5. dicht besetzt.

Stelle der mit wachsendem  $x$  periodisch auftretenden Null- und Einswerte tritt hier nur *ein* Hauptmaximum von der Größe Eins auf. Und mit größeren Werten  $x$  nähert sich die Kurve oszillierend immer mehr dem Wert  $\sqrt{\frac{1}{2}}$ . Um den Einfluß der Empfängerzahl bei Oktavenempfang zu untersuchen, sind in Abb. 23 die Fälle dargestellt, wenn die Empfangseinrichtung aus 2, 3, 4, 6 und sehr vielen Empfängern besteht, wobei die gesamte Länge der Empfängergruppe konstant gleich  $a$  gesetzt ist. Man sieht, wie die Peilschärfe auch hier mit wachsender Empfängerzahl abnimmt, aber gleichzeitig der Pegel, dem mit wachsendem  $\frac{a \cdot \pi}{\lambda} \sin \gamma$  die Kurve zustrebt, immer mehr abnimmt, nämlich entsprechend der Empfängerzahl 2, 3, 4, 6 und sehr vielen auf:

$$\sqrt{\frac{1}{2}}, \quad \sqrt{\frac{1}{3}}, \quad \sqrt{\frac{1}{4}}, \quad \sqrt{\frac{1}{6}} \text{ und } 0.$$

Allgemein ergibt sich für eine gerade Gruppe von  $n$  Empfängern in gleichem Abstand  $d$  für einen Frequenzbereich von  $\nu$  bis  $\nu + p\nu$ :

$$\mathcal{G}_1 = \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \sum_{m=1}^{n-1} (n-m) \frac{\sin m p x}{m p x} \cos[(p+2)m x]}. \quad (45)$$

Um den Einfluß der Größe des durchgelassenen Frequenzbereiches zu erkennen, sind in der Abb. 24 die Fälle  $n = 6$ ,  $p = 0; 0,2; 0,5; 1; 3$  dargestellt. Man erkennt, daß die Größe des Durchlaßbereiches maß-

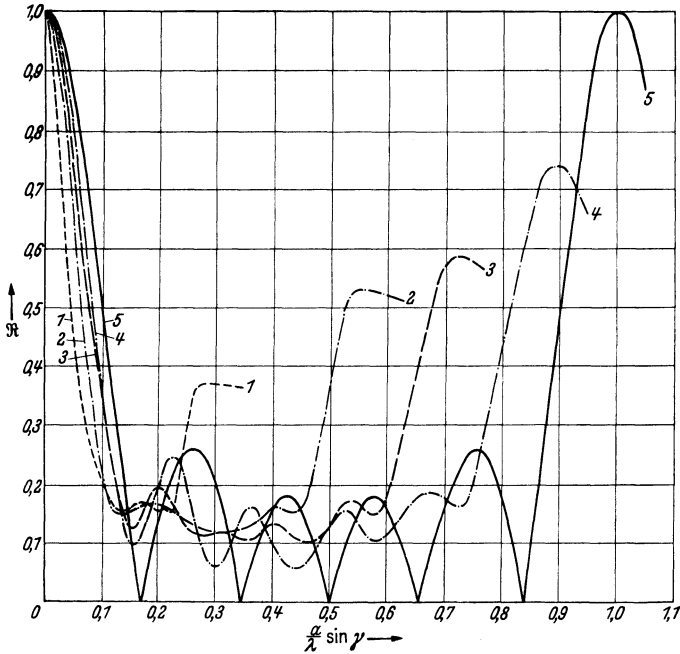


Abb. 24. Einfluß der Größe des Empfangsbereiches auf den Richtfaktor einer geraden Gruppe von 6 Empfängern.

gebend für die Höhe der Schwankung oberhalb  $\sqrt{\frac{1}{6}}$  ist, und zwar je größer der Durchlaßbereich ist, um so geringer ist die Schwankung. In der Abb. 24 entspricht:

- Kurve 1 dem Fall  $n = 6$   $p = 3$ ,
- Kurve 2 dem Fall  $n = 6$   $p = 1$ ,
- Kurve 3 dem Fall  $n = 6$   $p = 0,5$ ,
- Kurve 4 dem Fall  $n = 6$   $p = 0,2$ ,
- Kurve 5 dem Fall  $n = 6$   $p = 0$ .

Auf der Abszissenachse ist  $\frac{a}{\lambda} \sin \gamma$  aufgetragen, wobei  $a = 5d$  die Länge der Basis ist.



Als weitere Beispiele betrachten wir den Geräuschempfang für eine dichte Empfängeranordnung auf der Kreislinie und auf der Kreisfläche. Die entsprechenden Richtfaktoren sind:

$$\mathcal{G}_2 = \sqrt{\frac{1}{n_2 - n_1} \int_{n_1}^{n_2} J_0^2\left(\frac{n\pi d}{c} \sin \gamma\right) dn} = \sqrt{\frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} J_0^2(x) dx}, \quad (46)$$

$$\mathcal{G}_3 = \sqrt{\frac{1}{n_2 - n_1} \int_{n_1}^{n_2} \frac{4J_1^2\left(\frac{n\pi d}{c} \sin \gamma\right) dn}{n^2 \left(\frac{\pi d}{c} \sin \gamma\right)^2}} = \sqrt{\frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \frac{4J_1^2(x) dx}{x^2}}, \quad (47)$$

wobei wieder

$$x_1 = \frac{\pi d}{\lambda_1} \sin \gamma \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{\pi d}{\lambda_2} \sin \gamma$$

gesetzt ist. Für den Oktavempfang ( $x_2 = 2x_1 = 2x$ ;  $x = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \gamma$ ) ist:

$$\mathcal{G}_2 = \sqrt{\frac{1}{x} \int_x^{2x} J_0^2(x) dx} \quad (48)$$

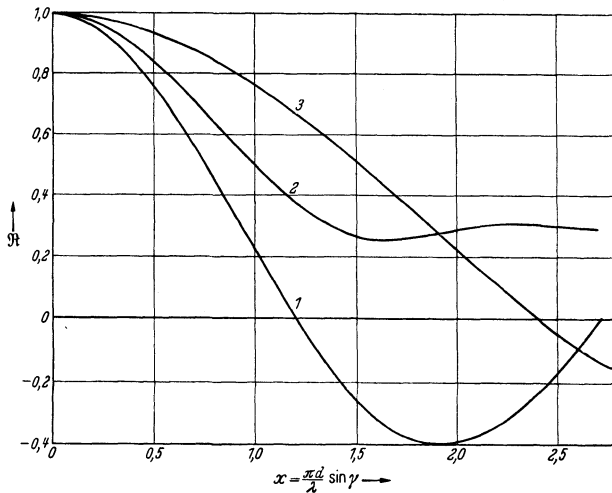


Abb. 25. Richtfaktor der dicht besetzten Kreislinie. 1. Für den Grundton (Wellenlänge  $\lambda$ ). 2. Für die Oktave (Wellenlänge von  $\lambda$  bis  $\lambda/2$ ). 3. Für den Oberton (Wellenlänge  $\lambda/2$ ).

in Abb. 25 dargestellt. Zum Vergleich sind die der oberen und unteren Oktavgrenze entsprechenden gewöhnlichen Richtfaktoren ebenfalls gezeichnet (Kurve 1 und 3).

### c) Bei künstlicher Kompensation.

Wenn es sich um die Aufgabe handelt, mit einer gegebenen Empfangsanordnung den Ort einer Schallquelle festzustellen, so kann dies geschehen, indem die Empfangsanordnung gedreht wird, bis das Maximum der Intensität am Anzeigeelement (Ohr) erreicht wird.

In den betrachteten Fällen, wo die Empfängeranordnung stets in einer Ebene angenommen war, ist dies der Fall, wenn die Empfängerene senkrecht zur Schallrichtung liegt. Dieselbe Gleichphasigkeit kann aber auch durch künstliche Kompensation ohne Drehung der Empfängeranordnung erreicht werden. Das geschieht durch veränderliche elektrische Verzögerungsketten, die zwischen der festen Empfängeranordnung und dem Anzeigeelement eingeschaltet sind. Jeder Stellung dieses Kompensators entspricht eine bestimmte Richtung im Raum (in der Peilebene), für welche die Empfangseinrichtung in Phase ist. Um die Richtung der Schallquelle zu finden, hat man bei festbleibender Empfangsanordnung jetzt nur den Kompensator zu drehen und an diesem den Peilwinkel abzulesen.

Die künstliche Kompensation durch elektrische Verzögerungsketten ist für das gerichtete Empfangen von außerordentlicher Bedeutung. Maßgebend für die Brauchbarkeit ist nicht zum wenigsten die Einfachheit und die Genauigkeit des Arbeitens der elektrischen Ketten. Diese bestehen aus einer Anzahl von im allgemeinen gleich gebauten Gliedern, die Selbstinduktion und Kapazität enthalten und so zusammengesetzt werden, daß die Selbstinduktionsspulen in Reihe, die Kondensatoren parallel geschaltet sind. Ist  $\mathcal{L}$  der Wert der Selbstinduktion und  $\mathcal{C}$  der Wert des Kondensators, so ist die pro Glied der Kette gegebene Verzögerung gleich  $\sqrt{\mathcal{L} \cdot \mathcal{C}}$ . Und zwar kann diese Verzögerung weitgehend frequenzunabhängig gemacht werden, wenn man nur dafür sorgt, daß die durch  $n = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mathcal{L} \cdot \mathcal{C}}}$  definierte Grenzfrequenz genügend weit oberhalb des zu übertragenden Frequenzbereiches liegt. Damit wird dann erreicht, daß ein Geräusch ohne seinen Charakter zu ändern, pro durchlaufenes Glied einfach eine rein zeitliche Verzögerung erleidet.

Haben wir nun eine beliebige im Raum angeordnete Empfängergruppe, so kann für eine vorgeschriebene Peilebene die Kompensationseinrichtung in sehr einfacher Weise durch eine einzige derartige Verzögerungskette erreicht werden. Denken wir uns zunächst die Empfänger auf die Peilebene ( $XY$ -Ebene) projiziert und ihre Koordinaten durch  $(x_1, y_1)$   $(x_2, y_2)$   $\dots$   $(x_n, y_n)$  gegeben, so ist klar, daß es für die Kompensation in der Peilebene nur auf diese Projektionspunkte ankommt. Anders ausgedrückt: Man kann die einzelnen Empfänger senkrecht zur Peilebene beliebig verschieben, ohne an der Wirkungsweise der Kompensation etwas zu ändern. Der natürliche Richtfaktor ist

dann, wenn wir uns der Einfachheit wegen auf 3 Empfänger beschränken, gegeben durch:

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^3 e^{ik(x_n \cos \alpha + y_n \cos \beta)}, \quad (49)$$

wobei  $\alpha$  und  $\beta$  die Richtungswinkel der Aufpunktsgersten bedeuten. Kennzeichnen wir die Kompensationsrichtung in der Peilebene durch die Richtung der Kompensationsgeraden mit den Richtungswinkeln  $\varphi$  und  $\psi$ , so ist durch Anbringen der Verzögerungen der künstliche Richtfaktor gegeben durch:

$$\mathfrak{R}_k = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^3 e^{ik[x_n(\cos \alpha - \cos \varphi) + y_n(\cos \beta - \cos \psi)]}. \quad (50)$$

Lassen wir die Schallquelle, d. h. die Aufpunktsgerade ( $\alpha, \beta$ ), sich ändern, so daß der volle Umkreis beschrieben wird, so bekommt  $\mathfrak{R}_k$

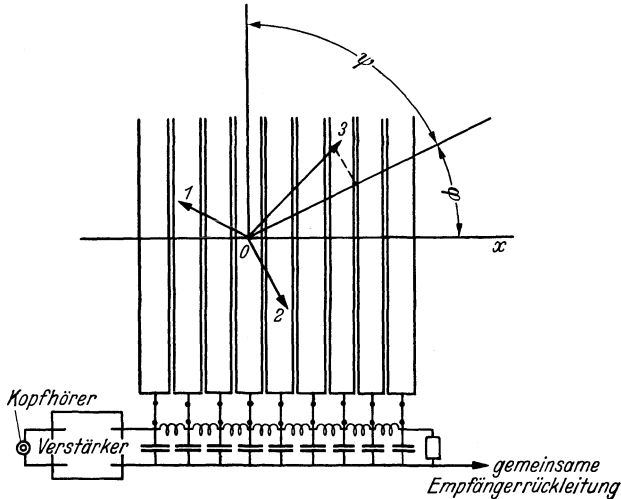


Abb. 26. Kompensationseinrichtung einer Gruppe von Strahlern (1, 2, 3) (klein zur Wellenlänge) bei beliebiger räumlicher Anordnung.

seinen größten Wert, wenn die Schallquelle mit der Kompensationsgeraden zusammenfällt. Genau die gleichen Verhältnisse treten aber auch ein, wenn wir bei feststehender Schallquelle die Kompensationsgerade ( $\varphi, \psi$ ) wandern lassen.

Denken wir uns nun die Abb. 26 als Darstellung einer naturgetreuen Verkleinerung der Empfängerkonfiguration, die um den Anfangspunkt  $O$  gedreht werden kann, so werden beim Drehen die richtigen Verzögerungen  $x_n \cos \varphi + y_n \cos \psi$  einfach als Projektionen auf eine feste Gerade, die wir als  $X$ -Achse annehmen, erreicht. Denken wir uns ferner senkrechte Kontaktschienen, die mit den einzelnen Gliedern der Verzögerungskette leitend verbunden sind (wie es die Abb. 26 zeigt) und in

$(x_1 y_1)$ ,  $(x_2 y_2)$ ,  $(x_3 y_3)$  Gleitkontakte angebracht, die während des Drehens dauernd mit dem einen Pol der entsprechenden Empfänger verbunden bleiben, während die anderen Pole über eine gemeinsame Rückleitung mit dem Anfang der Kette verbunden werden, so erreicht jeder vom Empfänger aufgenommene Impuls den Eingang des am Ende der Kette angebrachten Verstärkers mit der gewünschten Verzögerung. Dabei ist noch durch passende Wahl der Verzögerungsglieder dafür zu sorgen, daß die elektrische Verzögerungszeit der Kette entsprechend der Laufzeit des Schalles gewählt wird.

Bei der unkompensierten Gruppe ist der Richtfaktor unabhängig von der Lage des zu peilenden Objektes. Anders dagegen bei der kompensierten Gruppe. Hier wird die Peilschärfe um so mehr winkelabhängig sein, je mehr die Projektionspunkte der Empfänger in der Peilebene von einer kreisförmigen Anordnung abweichen. Betrachten wir die gerade Gruppe nach Abb. 8, so ist der Richtfaktor  $\mathfrak{R}_k$  für die durch  $\gamma_0$  gekennzeichnete Kompensationsrichtung durch

$$\mathfrak{R}_k = \frac{\sin \left[ \frac{n \pi d}{\lambda} (\sin \gamma - \sin \gamma_0) \right]}{n \sin \left[ \frac{\pi d}{\lambda} (\sin \gamma - \sin \gamma_0) \right]} \quad (51)$$

gegeben.

In der Abb. 27 sind die Richtfaktoren bei einer geraden Gruppe ( $n = 6$ ,  $d = \lambda/2$ ) für die Kompensationsrichtungen  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  und  $90^\circ$  in Polarkoordinaten dargestellt; dabei sind die Nebenmaxima fortgelassen. Bemerkenswert ist dabei, daß die Peilschärfe noch bei  $\gamma_0 = 45^\circ$  sich wenig geändert hat. Dann aber tritt eine starke Verbreiterung des Hauptmaximums ein. Ferner liegt das Hauptmaximum nicht mehr symmetrisch zu der Kompensationsrichtung. Das hat zur Folge, daß man zu große Werte für  $\gamma_0$  findet, wenn man die Peilung in üblicher Weise so vornimmt, daß man mit dem Ohr auf beiden Seiten des Maximums die Kompensatorstellungen gleicher Lautstärke feststellt und daraus das Mittel bildet.

Diese Nachteile der geraden Gruppe werden vermieden, wenn die dicht besetzte Kreisgruppe benutzt wird, so daß die Peilebene mit der Empfängerebene zusammenfällt.

Berechnen wir zunächst den Richtfaktor der für einen beliebigen Winkel  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$ ,  $\gamma_0$  kompensierten Kreisgruppe.

$$\mathfrak{R}_k = \frac{1}{2\pi r} \int e^{ik[x(\cos \alpha - \cos \alpha_0) + y(\cos \beta - \cos \beta_0)]} ds.$$

Führen wir  $x = r \cos \varphi$  und  $y = r \sin \varphi$  ein und setzen

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{\cos \beta - \cos \beta_0}{\cos \alpha - \cos \alpha_0},$$

so folgt:

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikr [\cos \varphi (\cos \alpha - \cos \alpha_0) + \sin \varphi (\cos \beta - \cos \beta_0)]} d\varphi, \\ \mathfrak{R}_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikr \sqrt{(\cos \alpha - \cos \alpha_0)^2 + (\cos \beta - \cos \beta_0)^2} \cos(\varphi - \varphi_0)} d\varphi, \\ \mathfrak{R}_k &= J_0 \left( \frac{2\pi r}{\lambda} \sqrt{(\cos \alpha - \cos \alpha_0)^2 + (\cos \beta - \cos \beta_0)^2} \right). \quad (52)\end{aligned}$$

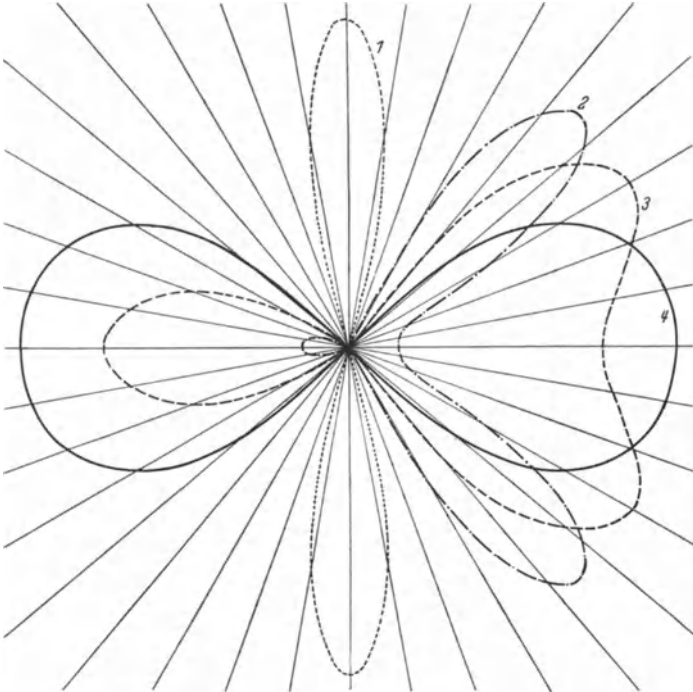


Abb. 27. Der Richtfaktor einer geraden Gruppe von 6 Strahlern bei Kompensation.  
1.  $\gamma_0 = 0^\circ$ , 2.  $\gamma_0 = 45^\circ$ , 3.  $\gamma_0 = 60^\circ$ , 4.  $\gamma_0 = 90^\circ$ .

Für  $\alpha_0 = 90$ ,  $\beta_0 = 90^\circ$  muß  $\mathfrak{R}_k$  in den unkompensierten Richtfaktor nach (15) übergehen; setzen wir  $\cos \alpha_0 = \cos \beta_0 = 0$  in (52) ein, so folgt:  $\mathfrak{R}_k = J_0 \left( \frac{2\pi r}{\lambda} \sin \gamma \right)$ , da

$$\begin{aligned}\sqrt{(\cos \alpha - \cos \alpha_0)^2 + (\cos \beta - \cos \beta_0)^2} &= \sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta} \\ &= \sqrt{1 - \cos^2 \gamma} = \sin \gamma\end{aligned}$$

ist. Liegt die Schallquelle in Richtung der  $X$ -Achse, die Peilebene in der  $XZ$ -Ebene, so folgt, wegen  $\alpha_0 = 0$ ,  $\beta_0 = 90^\circ$ ,  $\beta = 90^\circ$  (vgl. Abb. 28):

$$\mathfrak{R}_k = J_0\left(\frac{\pi d}{\lambda} \cdot 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right). \quad (53)$$

Liegt die Schallquelle in Richtung der  $X$ -Achse, die Peilebene in der  $XY$ -Ebene (Empfängerebene), so folgt wegen  $\alpha_0 = 0$ ,  $\beta_0 = 90^\circ$ ,  $\alpha + \beta = 90^\circ$ :

$$\mathfrak{R}_k = J_0\left(\frac{\pi d}{\lambda} 2 \sin \frac{\alpha}{2}\right). \quad (54)$$

In der Praxis ist besonders dieser letzte Fall von Bedeutung, wo Peilebene und Empfängerebene zusammenfallen. Aus der Formel (54) erkennen wir, daß die Peilschärfe der kompensierten Gruppe mit der Peilschärfe der unkompensierten Gruppe [vgl. Formel (15)] übereinstimmt, so daß wir als Peilmaß ebenfalls den Winkel  $20^\circ$  zu wählen haben. Wird eine bestimmte Peilschärfe gefordert, so ist dadurch das Verhältnis von Kreisdurchmesser zu Wellenlänge bestimmt. Wählen wir als Beispiel eine Halbwertsbreite von  $13^\circ$ , so folgt aus (18)  $\frac{d}{\lambda} = \frac{20}{13} = 1,5$ . Die weitere Frage ist, wieviel Strahler notwendig sind, damit praktisch kein Unterschied mit dem Richtfaktor der dicht besetzten Kreisgruppe besteht. Lassen wir zur Vereinfachung die Kompensationsgerade durch einen Strahler gehen, so finden wir hier eine analoge Darstellung durch BESSELSche Funktionen<sup>1</sup>:

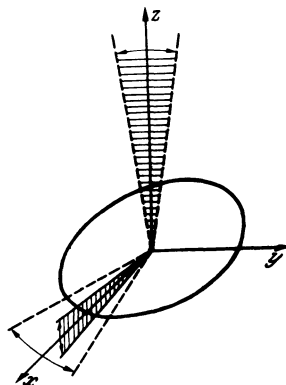


Abb. 28. Verschiedene Lagen der Peilebene bei der kompensierten Kreisgruppe.

$$\mathfrak{R}_k = J_0\left(\frac{2\pi d}{\lambda} \sin \frac{\alpha}{2}\right) + \sum_{p=1}^{\infty} J_{pn}\left(\frac{2\pi d}{\lambda} \sin \frac{\alpha}{2}\right) \cos \frac{\alpha np}{2}. \quad (55)$$

Daraus folgt auch hier, daß die Peilschärfe der kompensierten Kreisgruppe praktisch vollständig mit der Peilschärfe der aus 4 Strahlern bestehenden Gruppe übereinstimmt. Soll die gesamte Charakteristik übereinstimmen, so muß jetzt die Ungleichung  $n \geq \frac{2\pi d}{\lambda} + 2$  erfüllt sein. Oder es muß der Abstand  $a$  zweier benachbarter Strahler etwas kleiner als  $\lambda/2$  sein. Genauer muß  $\frac{a}{\lambda} < \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$  sein. Im übrigen gibt die Formel eine wesentlich einfachere Berechnung des Richtfaktors.

Als Beispiel berechnen wir den Richtfaktor für  $n = 6$ ,  $d = \frac{3}{4} \lambda$  und finden folgende Tabelle nach der Annäherungsformel:

$$\mathfrak{R}_k = J_0(4,71 \sin \alpha/2) + 2J_6(4,71 \sin \alpha/2) \cos 3\alpha.$$

<sup>1</sup> Elektr. Nachr.-Techn. Bd. 6 (1929) S. 176.

| $\alpha$ | $4,71 \sin \alpha/2$ | $J_0(4,71 \sin \alpha/2)$ | $2J_0(4,71 \sin \alpha/2) \cos 3\alpha$ | $\Re_k$ |
|----------|----------------------|---------------------------|---|---------|
| 0        | 0,00                 | 1                         | 0                                       | 1       |
| 10       | 0,42                 | 0,96                      | 0                                       | 0,96    |
| 20       | 0,82                 | 0,84                      | 0                                       | 0,84    |
| 30       | 1,22                 | 0,66                      | 0                                       | 0,66    |
| 40       | 1,66                 | 0,45                      | 0                                       | 0,45    |
| 50       | 1,99                 | 0,23                      | 0                                       | 0,23    |
| 60       | 2,36                 | 0,02                      | 0                                       | 0,02    |
| 70       | 2,70                 | -0,14                     | 0                                       | -0,14   |
| 80       | 3,03                 | -0,27                     | -0,01                                   | -0,28   |
| 90       | 3,33                 | -0,35                     | 0                                       | -0,35   |
| 100      | 3,61                 | -0,39                     | +0,03                                   | -0,36   |
| 110      | 3,86                 | -0,40                     | +0,07                                   | -0,33   |
| 120      | 4,08                 | -0,39                     | +0,10                                   | -0,29   |
| 130      | 4,27                 | -0,37                     | +0,12                                   | -0,25   |
| 140      | 4,43                 | -0,34                     | +0,08                                   | -0,26   |
| 150      | 4,55                 | -0,31                     | +0,00                                   | -0,31   |
| 160      | 4,64                 | -0,29                     | -0,10                                   | -0,39   |
| 170      | 4,69                 | -0,27                     | -0,18                                   | -0,45   |
| 180      | 4,71                 | -0,27                     | -0,21                                   | -0,48   |

während die direkte Rechnung nach der Formel:

$$\Re_k = \frac{1}{3} \{ \cos[\frac{3}{4}\pi(1 - \cos \alpha)] + \cos[\frac{3}{4}\pi(\cos(\alpha + 60^\circ) - \cos 60^\circ)] \\ + \cos[\frac{3}{4}\pi(\cos(\alpha + 120^\circ) - \cos 120^\circ)] \} \quad (56)$$

folgende Tabelle ergibt:

| $\alpha$ | $\varphi_1 = 1 - \cos \alpha$ | $\varphi_2 = \cos(\alpha + 60^\circ) - \cos 60^\circ$ | $\varphi_3 = \cos(\alpha + 120^\circ) - \cos 120^\circ$ | $\cos \frac{3}{4} \pi \varphi_1$ | $\cos \frac{3}{4} \pi \varphi_2$ | $\cos \frac{3}{4} \pi \varphi_3$ | $\Re_k$ |
|----------|-------------------------------|---|---|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|---------|
| 0        | 0,00                          | 0,06  | 0,00  | 1                                | 1                                | 1                                | 1       |
| 10       | 0,02                          | -0,16   | 0,14  | 1                                | 0,93                             | 0,95                             | 0,96    |
| 20       | 0,06                          | -0,33   | 0,26  | 0,99                             | 0,73                             | 0,81                             | 0,84    |
| 30       | 0,13                          | -0,50   | 0,37  | 0,95                             | 0,38                             | 0,64                             | 0,66    |
| 40       | 0,23                          | -0,67   | 0,44  | 0,86                             | 0,00                             | 0,48                             | 0,45    |
| 50       | 0,37                          | -0,84   | 0,48  | 0,67                             | -0,41                            | 0,41                             | 0,22    |
| 60       | 0,50                          | -1,00   | 0,50  | 0,39                             | -0,69                            | 0,37                             | 0,02    |
| 70       | 0,66                          | -1,14   | 0,48  | 0,00                             | -0,90                            | 0,43                             | -0,14   |
| 80       | 0,83                          | -1,27   | 0,44  | -0,37                            | -0,99                            | 0,48                             | -0,29   |
| 90       | 1,00                          | -1,37   | 0,36  | -0,71                            | -1,00                            | 0,66                             | -0,35   |
| 100      | 1,17                          | -1,44   | 0,26  | -0,93                            | -0,97                            | 0,81                             | -0,36   |
| 110      | 1,34                          | -1,48   | 0,14  | -1,00                            | -0,95                            | 0,95                             | -0,33   |
| 120      | 1,5                           | -1,50   | 0,00  | -0,92                            | -0,924                           | 1                                | -0,28   |
| 130      | 1,64                          | -1,48   | -0,16   | -0,76                            | -0,95                            | 0,93                             | -0,25   |
| 140      | 1,77                          | -1,44   | -0,33   | -0,59                            | -0,97                            | 0,73                             | -0,24   |
| 150      | 1,87                          | -1,37   | -0,50   | -0,31                            | -1                               | 0,36                             | -0,32   |
| 160      | 1,94                          | -1,27   | -0,67   | -0,12                            | -0,99                            | 0                                | -0,37   |
| 170      | 1,98                          | -1,14   | -0,84   | -0,06                            | -0,90                            | -0,37                            | -0,44   |
| 180      | 2,00                          | -1,00   | -1,00   | 0                                | -0,69                            | -0,69                            | -0,46   |

In Übereinstimmung mit der allgemeinen Ausführung sieht man, daß das Korrektionsglied  $2J_6$  bis  $\alpha = 60^\circ$  keinen Einfluß hat. Wenn die Forderung  $n \geq \frac{2\pi d}{\lambda} + 2$  nicht erfüllt ist, so können die auftretenden Nebenmaxima erheblich größere Werte als die durch  $J_0(x)$  gegebenen Extremwerte annehmen.

Als Beispiel berechnen wir den Fall  $n = 6$ ,  $d/\lambda = 1,5$  nach der Annäherungsformel (Abb. 30). Als Vergleich ist der Richtfaktor für

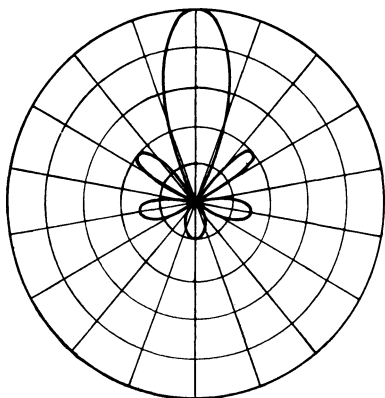


Abb. 29. Richtfaktor der kompensierten Kreisgruppe bei hinreichender Anzahl von Strahlern.

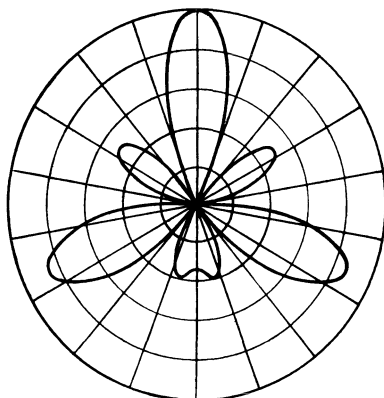


Abb. 30. Richtfaktor der kompensierten Kreisgruppe bei nicht hinreichender Anzahl von Strahlern.

$n = 14$ ,  $d/\lambda = 1,5$  gezeichnet, der einfach durch  $J_0(3\pi \sin \alpha/2)$  gegeben ist (Abb. 29). Beide Richtfaktoren stimmen in ihrem Hauptteil (d. h. bis zum ersten Minimum) vollständig überein, weichen dann aber in der Größe ihrer Nebenmaxima wesentlich voneinander ab.

## B. Der Strahlungsfaktor.

### a) Bei einer bestimmten Frequenz.

Der Richtfaktor hat seine praktische Bedeutung, wenn es sich um die Frage handelt, mit welcher Genauigkeit ein gebündeltes Empfangssystem (das z. B. drehbar angeordnet ist) eine entfernte Schallquelle peilen kann. Auch für die Frage der Störfreiung in bezug auf bestimmte Richtungen wird der Verlauf des Richtfaktors ausschlaggebend sein. Sendeseitig aber handelt es sich, außer der Frage nach der gesamten abgestrahlten Leistung, meist darum, eine bestimmte Richtung (oder Ebene) für die Schallausstrahlung zu bevorzugen, um den Wirkungsgrad der Anordnung zu erhöhen. Hier fragt es sich, wie groß die Schallverdichtung in der bestimmten Richtung im Vergleich zu der ungebündelten Schallausstrahlung ist.

Um zunächst die gesamte abgestrahlte Leistung eines gebündelten Strahlers zu berechnen, verfahren wir ähnlich wie bei der Einführung



des Richtfaktors, indem wir von der Formel (3) für das ungebündelte System ausgehen und dann dem Einfluß der Bündelung durch Hinzufügung eines Faktor  $\mathfrak{S}$ , den wir als *Strahlungsfaktor* bezeichnen, Rechnung tragen. So erhalten wir für die gesamte abgestrahlte Leistung  $L$  die Beziehung:

$$L = L_0 \mathfrak{S} = \frac{1}{2} c \sigma \pi w_m^2 \frac{F^2}{\lambda^2} \mathfrak{S}. \quad (57)$$

Dabei ist  $\mathfrak{S}$  durch das Integral über eine hinreichend große Kugel  $K$  mit dem Radius  $R$  definiert:

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{4\pi R^2} \int_K \mathfrak{R}^2 dK, \quad (58)$$

wobei  $\mathfrak{R}$  der durch (6) definierte Richtfaktor und  $dK$  das Oberflächenelement der Kugel mit großem Radius  $R$  bedeutet. Nun ist bei gerichteter Schallabstrahlung, die durch die Flächeneinheit der Kugeloberfläche mit dem Radius  $R$  in der durch den Richtfaktor  $\mathfrak{R}$  definierten Richtung hindurchgehenden Schallenergie gegeben durch:

$$\frac{p^2}{2c\sigma} = \frac{p_0^2 \mathfrak{R}^2}{2c\sigma} = \frac{1}{2} c \cdot \sigma \cdot \pi \cdot \frac{w_m^2 F^2}{\lambda^2} \cdot \frac{\mathfrak{R}^2}{4\pi R^2}. \quad (59)$$

Wird dagegen die gesamte durch (57) gegebene Schalleistung kugelförmig abgestrahlt, so würde die durch die Flächeneinheit gehende Schallenergie gegeben sein durch:

$$\frac{L}{4\pi R^2} = \frac{1}{2} c \cdot \sigma \cdot \pi \cdot \frac{w_m^2 F^2}{\lambda^2} \cdot \frac{\mathfrak{S}}{4\pi R^2}. \quad (60)$$

Das Verhältnis von  $p^2/2c\sigma$  aus (59) zu  $L/4\pi R^2$  aus (60), nämlich:

$$\frac{p^2}{2c\sigma} : \frac{L}{4\pi R^2} = \frac{\mathfrak{R}^2}{\mathfrak{S}} \quad (61)$$

gibt dann für jede durch den Richtfaktor gekennzeichnete Richtung an, wievielmals so groß die Schallenergie in dieser Richtung gegenüber der bei kugelförmiger Schallausbreitung geworden ist. Meistens kommt es dabei auf die Hauptrichtung, für welche  $\mathfrak{R} = 1$  ist, an. Wir wollen die dann maßgebende Größe  $1/\mathfrak{S}$  als *Verdichtungsfaktor*  $f$  bezeichnen.

Wir wollen die Bedeutung des Strahlungsfaktors an einem einfachen Beispiel erläutern. Wir denken uns zwei gleiche Strahler klein zur Wellenlänge und machen die Annahme, daß die *gesamte* abgestrahlte Leistung des aus den beiden Strahlern bestehenden Systems konstant bleiben soll, während wir den Abstand der beiden Strahler voneinander verändern. Aus Symmetriegründen bleibt dann natürlich auch die von jedem der beiden Strahler ausgestrahlte Leistung konstant. Wir wollen dann die Schalldruckamplitude in großer Entfernung  $R$  auf der Mittelachse des Systems finden (s. Abb. 31). Man könnte dann zu folgendem

Trugschluß verleitet werden: Der Strahler ① gibt die Schalldruckamplitude:

$$p_0^{(1)} = \frac{c \cdot \sigma \cdot w_m}{2 \lambda R} \cdot F;$$

ebenso der Strahler ②:

$$p_0^{(2)} = \frac{c \cdot \sigma \cdot w_m}{2 \lambda R} \cdot F.$$

Da für die Mittelachse Gleichphasigkeit der beiden Einzelstrahler besteht, so müßte in  $P$  die resultierende Schalldruckamplitude gleich dem doppelten Wert der Schalldruckamplitude des Einzelstrahlers sein (unabhängig von dem Abstand der beiden Strahler). Andererseits wissen wir aber doch, daß eine von dem Abstand der beiden Strahler abhängige Richtwirkung, d. h. eine mit dem Abstand der Schallstrahler *veränderliche* Schallverdichtung in der Mittelachse sich ergibt. Der Fehler liegt darin, daß bei konstanter Schallabstrahlung des Einzelstrahlers die Geschwindigkeitsamplitude dieses durchaus nicht unabhängig von dem an seiner Membran durch den zweiten Strahler hervorgerufenen Schalldruck bleibt. Außer der Arbeit, die der Einzelstrahler bei ungestörtem Schallfeld leisten muß, muß er bei Vorhandensein eines zweiten Strahlers noch den von diesem auf seine Membran ausgeübten Druck überwinden. Diese Mehrarbeit wird

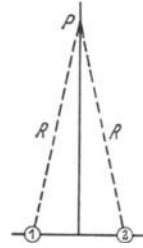


Abb. 31. Zur Erläuterung des Strahlungsfaktors.

verschieden sein, je nach dem Phasenunterschied, d. h. dem Abstand zwischen beiden Strahlern. (Ganz ähnlich liegt der Fall, wenn wir in einem durch eine starre Wand abgeschlossenen Halbraum einen Strahler konstanter Schalleistung der Wand immer mehr nähern.) Um dies rechnerisch zu untersuchen, berechnen wir die gesamte abgestrahlte Leistung  $L$  des aus zwei gleichen Strahlern, ① und ② im Abstand  $d$  bestehenden Systems (Abb. 32).

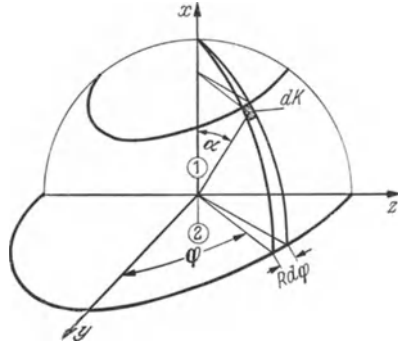


Abb. 32. Zur Berechnung des Strahlungsfaktors.

Es ist nach (57):

$$L = \frac{1}{2} c \cdot \sigma \cdot \pi w_m^2 \frac{(2F)^2}{\lambda^2} \cdot \mathcal{E}, \tag{62}$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{4\pi R^2} \int_K \Re^2 dK = \frac{1}{4\pi R^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\alpha \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda} \cos \alpha\right) \sin \alpha,$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sin 2\pi d/\lambda}{2\pi d/\lambda}\right). \tag{63}$$

Die Abhängigkeit des Strahlungsfaktors von  $d/\lambda$  zeigt Abb. 33, Kurve 1. Würden wir  $w_m$  bei beiden Strahlern konstant halten können, so würde die abgestrahlte Leistung sich nach (62) in derselben Weise

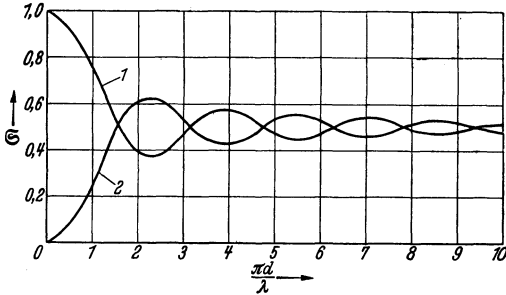


Abb. 33. Strahlungsfaktor des aus 2 Strahlern (Abstand  $d$ ) bestehenden Systems. 1. Bei gleicher Phase. 2. Bei Gegenphase.

wie  $\mathcal{E}$  in Abb. 33 ändern.

Umgekehrt: Wenn wir  $L$  konstant halten und ändern den Abstand, so muß sich  $w_m^2$  mit  $1/\mathcal{E}$  ändern, da  $w_m^2 \mathcal{E}$  bei konstantem  $L$  konstant bleiben muß. Und die Schallstärke erhält in der Symmetrieebene bei konstanter Gesamtausstrahlung ihr Maximum, wenn der Verdichtungsfaktor  $f = 1/\mathcal{E}$  sein Maximum hat. Wir

rechnen leicht aus, daß dies für  $d/\lambda = 0,715$  der Fall ist und daß der maximale Wert von  $f$  hier gleich 2,554 wird. Das bedeutet: Wenn wir eine bestimmte Schalleistung, anstatt durch einen ungebündelten Einzel-

strahler abzustrahlen, durch zwei für sich ungebündelte Einzelstrahler abstrahlen, so kann in der Symmetrieebene im Höchsthalle die 2,55-fach Schallenergie pro Flächeneinheit erreicht werden, gegenüber der ungebündelten Schallabstrahlung. In derselben

Weise können wir bei der Gruppenanordnung von 3, 4, 5 usw. in gleichem Abstand auf einer Geraden angeordneten Schwingern nach dem maximalen Verdichtungsfaktor fragen und finden immer *einen* ganz bestimmten Wert von  $d/\lambda$ , bei dem dies der Fall ist. Und zwar ergibt sich vorstehende Tabelle.

Bezeichnen wir den Strahlungsfaktor bei  $n$  derartig angeordneten Strahlern mit  $\mathcal{E}_n$ , so ergibt sich allgemein<sup>1</sup>:

$$\mathcal{E}_n = \frac{1}{n^2} \left( n + 2 \sum_{m=1}^{n-1} (n-m) \frac{\sin m 2\pi d/\lambda}{m \cdot 2\pi d/\lambda} \right). \quad (64)$$

Für  $n = 2, 3, 4, 5, 6$  Strahler ist  $f = 1/\mathcal{E}_n$  in der Abb. 34 dargestellt.

Ist  $d$  gleich  $\lambda/2$  oder ein ganzzahliges Vielfaches davon, so folgt aus (64):

$$\mathcal{E}_n = 1/n,$$

<sup>1</sup> Ann. d. Phys. Bd. 7 (1930) S. 964.

d. h. dann ist der Verdichtungsfaktor gleich  $n$ . Hierauf hat bereits Lord RAYLEIGH hingewiesen<sup>1</sup>. Von ihm stammt auch die Berechnung der kreisförmigen Kolbenmembran<sup>2</sup>. Und zwar ergibt sich für diese, wenn  $d$  der Durchmesser ist:

$$\mathfrak{E}_0 = \frac{2}{(\pi d/\lambda)^2} \left[ 1 - \frac{2J_1\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\right)}{2\pi d/\lambda} \right], \quad (65)$$

wobei  $J_1$  die BESSELSche Funktion erster Ordnung bezeichnet. Für großes  $d/\lambda$  ergibt sich daraus der Verdichtungsfaktor  $f$  der kreisförmigen Kolbenmembran:

$$f = 2\pi F/\lambda^2, \quad (66)$$

wenn  $F$  die Fläche der Membran bedeutet.

Auch die Strahlungsfaktoren der kreisförmigen Membran, deren Geschwindigkeitsamplitude

$$w = (1 - \varrho^2/r^2)^n$$

ist, lassen sich mit Hilfe der BESSELSchen Funktionen berechnen. Und zwar ergibt sich für  $w_1 = 1 - \varrho^2/r^2$  der Strahlungsfaktor:

$$\mathfrak{E}_1 = 2^2 \cdot 2! \cdot 2! \left( \frac{x^{-4}}{2!} + \frac{x^{-2}}{1! \cdot 3!} - \frac{J_2(2x)}{x^6} - \frac{2J_3(2x)}{x^5} \right), \quad (67)$$

und für  $w_2 = (1 - \varrho^2/r^2)^2$  der Strahlungsfaktor:

$$\mathfrak{E}_2 = 2^3 \cdot 3! \cdot 3! \left( \frac{3x^{-6}}{3!} + \frac{x^{-4}}{1! \cdot 4!} + \frac{3x^{-2}}{2! \cdot 5!} - \frac{3J_3(2x)}{x^9} - \frac{4J_4(2x)}{x^8} - \frac{4J_5(2x)}{x^7} \right). \quad (68)$$

Allgemein ergibt sich durch Reihenentwicklung für  $w_n = (1 - \varrho^2/r^2)^n$

$$\mathfrak{R}_n = 1 - \frac{(x/2)^2}{n+2} + \frac{(x/2)^4}{2! (n+2)(n+3)} - \frac{(x/2)^6}{3! (n+2)(n+3)(n+4)} + \dots,$$

$$\mathfrak{E}_n = 1 - \frac{x^2}{3(n+2)} + \frac{(2n+5)x^4}{2! \cdot 3 \cdot 5 \cdot (n+2)^2 (n+3)} - \frac{(2n+7)x^6}{3! \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 (n+2)^2 \cdot (n+3)(n+4)} + \dots. \quad (69)$$

Die Strahlungsfaktoren  $\mathfrak{E}_0, \mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2$  sind in Abb. 35 dargestellt.

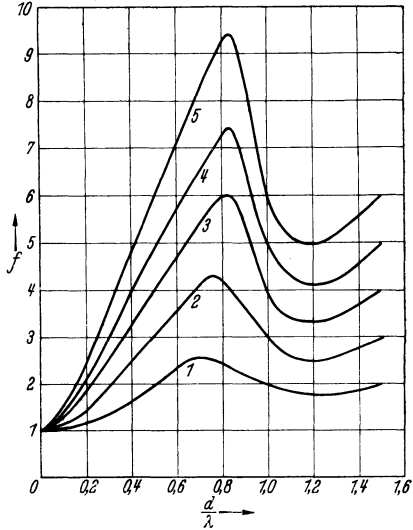


Abb. 34. Verdichtungsfaktor der geraden Gruppe ( $d$  = Abstand zweier Strahler). 1. 2 Strahler; 2. 3 Strahler; 3. 4 Strahler; 4. 5 Strahler; 5. 6 Strahler.

<sup>1</sup> On the production and distribution of sound. Phil. Mag. 1903 S. 289—305.

<sup>2</sup> The theory of sound. § 302.

Für eine rechteckige Kolbenmembran, deren eine Seite ( $b$ ) klein zur Wellenlänge ist, während die andere Seite ( $c$ ) beliebig ist, ergibt sich der Strahlungsfaktor (Abb. 36):

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \frac{c\pi}{\lambda} (\cos \gamma)}{\left(\frac{c\pi}{\lambda}\right)^2 \cos^2 \gamma} \sin \gamma d\gamma = \frac{1}{2c\pi} \int_{-\frac{c\pi}{\lambda}}^{+\frac{c\pi}{\lambda}} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt, \\ \mathcal{E} &= -\frac{\sin^2 c\pi/\lambda}{(c\pi/\lambda)^2} + \frac{1}{c\pi/\lambda} \int_0^{2c\pi/\lambda} \frac{\sin t}{t} dt = -\frac{\sin^2 c\pi/\lambda}{(c\pi/\lambda)^2} + \frac{1}{c\pi/\lambda} \text{Si} \frac{2c\pi}{\lambda}. \quad (70) \end{aligned}$$

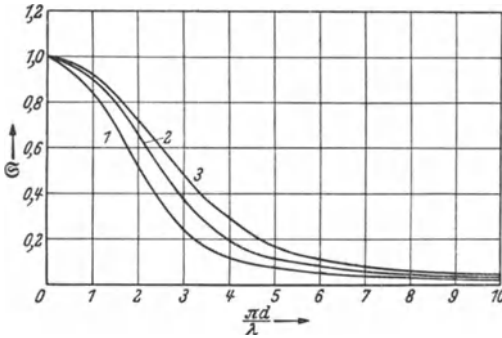


Abb. 35. 1. Strahlungsfaktor der kreisförmigen Kolbenmembran ( $w = 1$ ); 2. Strahlungsfaktor der eingespannten Membran ( $w = 1 - \rho^2/r^2$ ); 3. Strahlungsfaktor der eingespannten Membran [ $w = (1 - \rho^2/r^2)^2$ ].

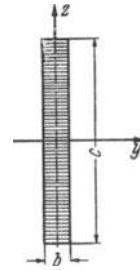


Abb. 36. Zur Berechnung des Strahlungsfaktors der rechteckigen Kolbenmembran.

Ersetzt man den Integralsinus

$$\text{Si } x = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

durch die Annäherung:

$$\text{Si } x = \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x} (1 - 2/x^2) - \frac{\sin x}{x},$$

so folgt:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2x} \left[ \pi - 1/x - \frac{\sin 2x}{2x} + \frac{\cos 2x}{2x^2} \right], \quad x = \frac{c\pi}{\lambda}. \quad (71)$$

Für größere Werte von  $x$  ( $x \geq 2$ ) wird man sich auf die Annäherung:

$$\mathcal{E} = \frac{\pi}{2x} \text{ bzw. } \mathcal{E} = \frac{\pi}{2x} - \frac{1}{2x^2} \text{ beschränken können (vgl. die Tabelle).}$$

Der maximale Verdichtungsfaktor  $f$  ergibt sich dann für große  $c\pi/\lambda$  gleich  $2c/\lambda$ . Das bedeutet also, daß eine rechteckige schmale Kolbenmembran (in starrer Wand) mit einer Seitenlänge von 10 Wellenlängen in der Symmetrieebene ( $XY$ -Ebene) 20mal soviel Schallenergie pro Flächeneinheit aussendet wie bei ungebündelter Schallstrahlung.

| $x$ | $\frac{Si\ 2x}{x} - \frac{\sin^2 x}{x^2}$ | $x$ | $\frac{Si\ 2x}{x} - \frac{\sin^2 x}{x^2}$ | $\frac{\pi}{2x} - \frac{1}{2x^3}$ |
|-----|---|-----|---|-----------------------------------|
| 0   | 1   | 2,5 | 0,563                                     | 0,548                             |
| 0,2 | 0,994                                     | 3   | 0,473                                     | 0,467                             |
| 0,4 | 0,983                                     | 3,5 | 0,406                                     | 0,408                             |
| 0,6 | 0,949                                     | 4   | 0,358                                     | 0,361                             |
| 0,8 | 0,931                                     | 4,5 | 0,323                                     | 0,324                             |
| 1   | 0,897                                     | 5   | 0,295                                     | 0,294                             |
| 1,2 | 0,858                                     | 5,5 | 0,271                                     | 0,269                             |
| 1,4 | 0,813                                     | 6   | 0,249                                     | 0,248                             |
| 1,6 | 0,766                                     | 6,5 | 0,230                                     | 0,230                             |
| 1,8 | 0,719                                     | 7   | 0,214                                     | 0,214                             |
| 2   | 0,673                                     | 7,5 | 0,200                                     | 0,200                             |

Wenn  $b$  nicht klein zur Wellenlänge ist, kann  $\mathcal{E}$  allgemein durch folgende Reihe dargestellt werden<sup>1</sup>:

$$\mathcal{E} = \varphi_0\left(\frac{c\pi}{\lambda}\right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{2^3}{4!} \left(\frac{b\pi}{\lambda}\right)^2 \varphi_1\left(\frac{c\pi}{\lambda}\right) + \frac{1 \cdot 3 \cdot 2^5}{2 \cdot 4 \cdot 6!} \left(\frac{b\pi}{\lambda}\right)^4 \varphi_2\left(\frac{c\pi}{\lambda}\right) - \dots, \quad (72)$$

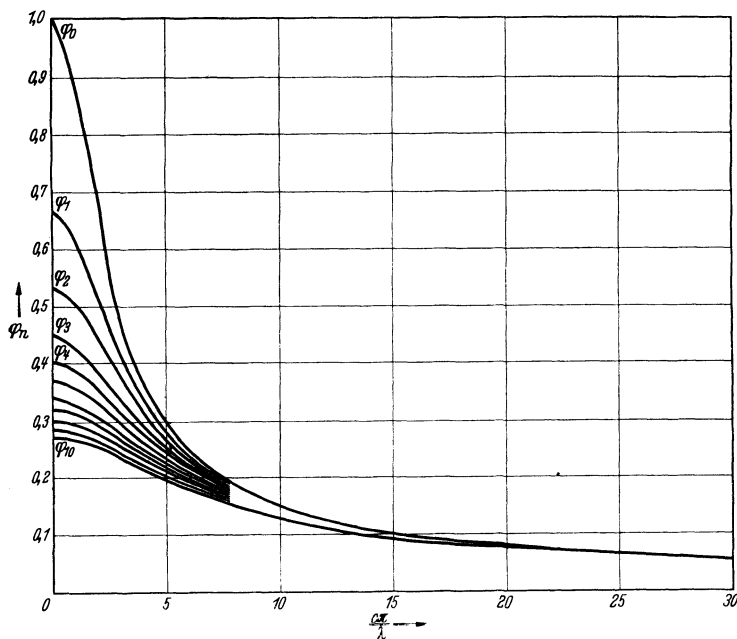


Abb. 37. Funktionen zur Berechnung des Strahlungsfaktors des Rechtecks.

wobei:

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{\sin^2 z}{z^2} \left(1 - \frac{z^2}{x^2}\right)^n dz \quad (73)$$

gesetzt ist.

<sup>1</sup> Ann. d. Phys. Bd. 7 (1930) S. 953—957.

Diese Funktionen sind in Abb. 37 dargestellt. Man erkennt daraus, daß sobald  $c/\lambda > 5$  geworden ist,  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  durch  $\varphi_0$  ersetzt werden können. Dann folgt aus (72):

$$\xi = \varphi_0 \left( \frac{c\pi}{\lambda} \right) \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \left( \frac{b\pi}{\lambda} \cos \varphi \right)}{\left( \frac{b\pi}{\lambda} \cos \varphi \right)^2} d\varphi. \quad (74)$$

Das Integral:

$$\psi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \left( \frac{b\pi}{\lambda} \cos \varphi \right)}{\left( \frac{b\pi}{\lambda} \cos \varphi \right)^2} d\varphi$$

findet man durch Reihenentwicklung:

$$\psi = 1 - \frac{\left( \frac{b\pi}{\lambda} \right)^2}{3 \cdot 1! 2!} + \frac{\left( \frac{b\pi}{\lambda} \right)^4}{5 \cdot 2! 3!} - \frac{\left( \frac{b\pi}{\lambda} \right)^6}{7 \cdot 3! 4!} + \dots \quad (75)$$

oder für größere  $b\pi/\lambda$  besser durch die nach BESELSchen Funktionen fortschreitende Reihe:

$$\psi = \frac{1}{b\pi/\lambda} \left[ J_1 \left( \frac{2\pi b}{\lambda} \right) + 2J_3 \left( \frac{2\pi b}{\lambda} \right) + 2J_5 \left( \frac{2\pi b}{\lambda} \right) + \dots \right]. \quad (76)$$

Diese Reihe ist für größere Werte von  $b\pi/\lambda$  wesentlich bequemer auszuwerten. Und zwar ergibt sich, daß für  $b\pi/\lambda > 3$  der Wert der in der eckigen Klammer stehenden Summe nur um Prozente von Eins abweicht. Der Wert der Funktion

$$x \cdot \psi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(x \cos \varphi)}{x \cos^2 \varphi} d\varphi \quad (77)$$

ist in der Abb. 38 dargestellt.

Nehmen wir also an, daß  $c/\lambda > 5$  und  $b/\lambda > 1$ , so ergibt sich für den Verdichtungsfaktor:

$$f = \frac{c\pi/\lambda \cdot b\pi/\lambda}{\pi/2} = \frac{2\pi F}{\lambda^2}. \quad (78)$$

Für Werte von  $b\pi/\lambda$  und  $c\pi/\lambda$  zwischen 0 und 10 ist der Verdichtungsfaktor in der Abb. 39 allgemein dargestellt. Und zwar sind die Kurven gezeichnet, für welche der Verdichtungsfaktor einen konstanten Wert besitzt. Wir finden z. B. für ein Quadrat, für welches  $b\pi/\lambda = c\pi/\lambda = 3,15$  ist, denselben Verdichtungsfaktor  $f = 7$  wie für das Rechteck  $b\pi/\lambda = 0,5$ ;  $c\pi/\lambda = 10$ , trotzdem die Fläche des Rechtecks nur halb so groß ist. Für  $a\pi/\lambda < 1$  und  $b\pi/\lambda < 1$  ergeben sich (Viertel) Kreise, für  $f > 10$  ergeben sich (im mittleren Teil) Hyperbeln. Das Letztere besagt, daß mit genügender Genauigkeit  $f = 2\pi F/\lambda^2$  geschrieben werden kann.

Wir hatten bei der Berechnung von *Richtfaktoren* bemerkt, daß sobald einzelne Teile der Membran in Gegenphase schwingen, die Richtwirkung wesentlich beeinflußt wird. Dieser Einfluß muß auch bei den *Strahlungsfaktoren* zur Geltung kommen. Als einfachstes Beispiel berechnen wir den Strahlungsfaktor von zwei Strahlern, klein zur Wellenlänge, im Abstand  $d$ , die in Gegenphase schwingen. Eine analoge Rechnung, wie auf S. 39 ergibt:

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\sin 2\pi d/\lambda}{2\pi d/\lambda} \right). \quad (79)$$

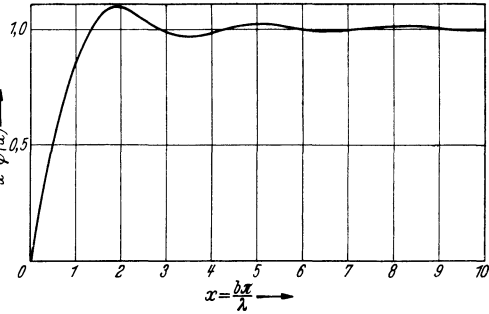


Abb. 38. Hilfsfunktion zur Berechnung des Strahlungsfaktors.

Wir erhalten die entsprechende Kurve durch Spiegelung der Kurve:

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\sin 2\pi d/\lambda}{2\pi d/\lambda} \right),$$

an der horizontalen Geraden:  $y = \frac{1}{2}$  (s. Abb. 33).

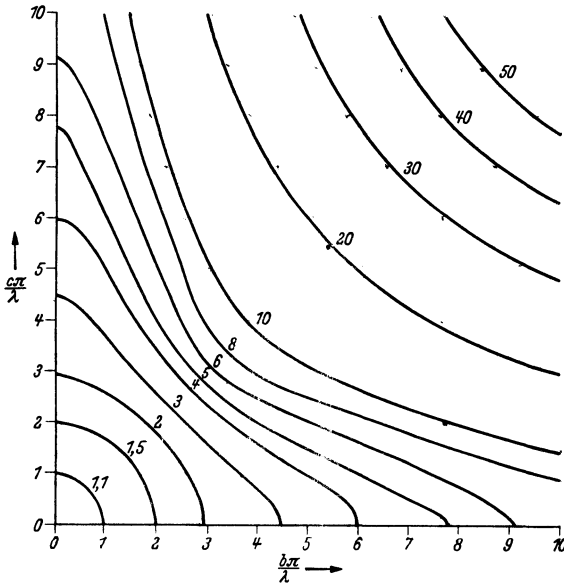


Abb. 39. Verdichtungsfaktor der rechteckigen Kolbenmembran. (Die in der Mitte an die Kurven geschriebenen Zahlenwerte geben den Verdichtungsfaktor an.)

Das Maximum von  $f$  ergibt sich hier für  $\frac{2\pi d}{\lambda} = 7,725$ , d. h. für  $d/\lambda = 1,23$ , und zwar ist der maximale Wert gleich 2,294. Dies ist der Verdichtungsfaktor an der Stelle, wo  $\mathfrak{R} = 1$  ist. Dem entspricht



$\gamma = 24^\circ$ . Während wir bei zwei gleichphasigen Strahlern im besten Falle eine 2,55fache Verdichtung erzielen konnten (für  $\gamma = 0^\circ$ ), ergibt sich bei zwei gegenphasigen Strahlern höchstens eine 2,29fache Verdichtung (für  $\gamma = 24^\circ$ ). Für das Beispiel auf S. 26, wo  $w_m = 0$  war, verliert natürlich auch der Strahlungsfaktor seinen Sinn und wir müssen auch hier die gesamte Leistung  $L_1$  nach der Formel (59) berechnen, dann folgt aus:

$$p = \frac{c \cdot \sigma \cdot F}{\lambda \cdot R} (\Re_1(x) - \Re_0(x)), \quad (80)$$

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{2} \frac{c \cdot \sigma}{\lambda^3 R^2} \cdot F^2 \int_K [\Re_1(x) - \Re_0(x)]^2 dK \\ &= 4\pi c \sigma \frac{F^2}{\lambda^2} \left[ \frac{1}{3x^2} - \frac{J_1(2x)}{x^3} + \frac{4J_3(2x)}{x^5} - \frac{8J_4(2x)}{x^4} \right]. \end{aligned} \quad (81)$$

Ersetzt man die BESSELSchen Funktionen durch ihre Potenzreihen, so folgt:

$$L_1 = 4\pi c \sigma \frac{F^2}{\lambda^2} \left[ \frac{1 \cdot 2 \cdot x^4}{3! 6!} - \frac{2 \cdot 3 x^6}{4! 7!} + \frac{3 \cdot 4 \cdot x^8}{5! 8!} - \dots \right]. \quad (82)$$

Vergleicht man damit die von einer gleichgroßen Kolbenmembran mit der Geschwindigkeitsamplitude  $w = 1$  abgestrahlte Leistung:

$$L_2 = 2\pi \cdot c \cdot \sigma \cdot \frac{F^2}{\lambda^2} \cdot \frac{2}{x^2} \left( 1 - \frac{J_1(2x)}{x} \right). \quad (83)$$

so ist für kleine  $x$ :

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{4x^4}{3! 6!},$$

Das ergibt für:  $x = \frac{\pi d}{\lambda} = \frac{1}{2}$

$$L_1/L_2 = 1/17280.$$

Das bedeutet: Wenn die zu  $L_1$  gehörende Membran dieselbe Leistung abstrahlen soll, wie die zu  $L_2$  gehörende, so muß die Amplitude der ersteren Membran gleich dem  $\sqrt{17280} = 131$ fachen der Amplitude der Letzteren sein.

Für sehr große  $d/\lambda$  dagegen ist [wegen (81) und (83)]:

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{1}{3}.$$

### b) Bei künstlicher Kompensation.

Aus der Abb. 27 ist zu ersehen, daß auch die Strahlungsverteilung sich durch künstliche Kompensation wesentlich ändert. Allgemein ergibt sich der Strahlungsfaktor für die aus 2 Strahlern bestehende kompensierte Gruppe:

$$\mathcal{S}_k = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos^2 \left[ \frac{\pi d}{\lambda} (\sin \gamma - \sin \gamma_k) \right] \cos \gamma d\gamma. \quad (84)$$

Führen wir eine neue Integrationsvariable  $x$  durch

$$x = \frac{\pi d}{\lambda} (\sin \gamma - \sin \gamma_k)$$

ein, so folgt:

$$\mathfrak{S}_k = \frac{\lambda}{2\pi d} \int_{-\frac{\pi d}{\lambda}(1 + \sin \gamma_k)}^{\frac{\pi d}{\lambda}(1 - \sin \gamma_k)} \cos^2 x dx,$$

$$\mathfrak{S}_k = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{\sin \frac{2\pi d}{\lambda}}{2\pi d/\lambda} \left[ \cos \left( \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \gamma_k \right) \right] \right\}. \quad (85)$$

In der Abb. 40 ist  $\mathfrak{S}_k$  für  $\sin \gamma_k = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$  dargestellt. Da  $\sin \gamma_k = 0$  dem unkompensierten Fall entspricht, so erkennt man, daß

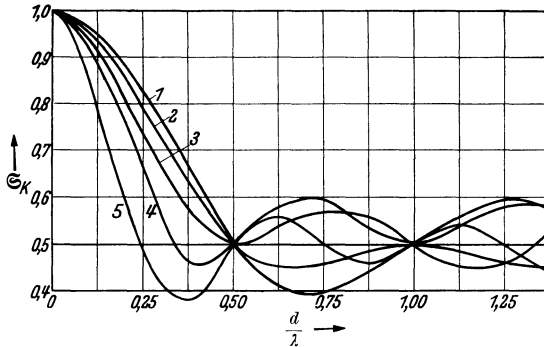


Abb. 40. Strahlungsfaktor bei zwei kompensierten Strahlern. (Abstand  $d$ , Kompensationswinkel  $\gamma_k$ ).  
1.  $\sin \gamma_k = 0$ ; 2.  $\sin \gamma_k = \frac{1}{4}$ ; 3.  $\sin \gamma_k = \frac{1}{2}$ ; 4.  $\sin \gamma_k = \frac{3}{4}$ ; 5.  $\sin \gamma_k = 1$ .

für  $d/\lambda < \frac{1}{2}$  der unkompensierte Fall stets größere Werte liefert; z. B. ist für  $d/\lambda = \frac{1}{4}$   $\mathfrak{S} = 0,83$ ;  $\mathfrak{S}_k = 0,5$ .

Daraus folgt, daß der Verdichtungsfaktor der kompensierten Gruppe in Richtung der Verbindungslinie der Strahler (d. h.  $\gamma_k = 90^\circ$ ) 1,66 mal so groß ist wie der Verdichtungsfaktor der unkompensierten Gruppe in der Maximalrichtung. Will man also mit zwei ungerichteten Strahlern im Abstand  $d < \lambda/2$  für eine bestimmte Richtung eine möglichst große Schallstärke erzielen, so ist es günstiger, mit einer kompensierten Anordnung zu arbeiten.

Allgemein ergibt sich der Strahlungsfaktor für eine kompensierte gerade Gruppe, die aus  $n$  in gleichem Abstand befindlichen Strahlern besteht:

$$\mathfrak{S}_k = \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \sum_{m=1}^{n-1} (n-m) \cdot 2 \frac{\sin(m \cdot 2\pi d/\lambda) \cdot \cos(m \cdot 2\pi d/\lambda \sin \gamma_k)}{m \cdot 4\pi d/\lambda}.$$

Fällt die Richtung der Kompensationsgeraden in die Richtung der Empfängergeraden (d. h.  $\gamma_k = 90^\circ$ ), so ergibt sich:

$$\mathfrak{E}_k = \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \sum_{m=1}^{n-1} (n-m) \frac{\sin(m \cdot 4\pi d/\lambda)}{m \cdot 4\pi d/\lambda}. \quad (86)$$

Aus dem Vergleich mit dem Strahlungsfaktor im unkompensierten Fall (d. h.  $\gamma_k = 0$ ) schließen wir wegen:

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \sum_{m=1}^{n-1} (n-m) \frac{\sin\left(m \cdot \frac{2\pi d}{\lambda}\right)}{m \cdot 2\pi d/\lambda}. \quad (87)$$

Die gerade unkompensierte Gruppe mit dem Empfängerabstand  $d$  hat denselben Strahlungsfaktor wie die in der Empfängerichtung kompensierte Gruppe mit dem Empfängerabstand  $d/2$ . Oder anders ausgedrückt: Die Schallkonzentration der geraden unkompensierten Gruppe in der Mittelachse ist gleich der Schallkonzentration der in der Empfängerichtung kompensierten Gruppe bei halbem Empfängerabstand.

Um den Strahlungsfaktor für die dicht besetzte Kreisgruppe bei einer Kompensationsrichtung ( $\alpha_0 \beta_0 \gamma_0$ ) zu finden, haben wir das Integral:

$$\mathfrak{E}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\gamma \mathfrak{R}^2 \sin \gamma \quad (88)$$

zu berechnen, wobei  $\mathfrak{R}$  nach (52) durch

$$\mathfrak{R} = J_0\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sqrt{(\cos \alpha - \cos \alpha_0)^2 + (\cos \beta - \cos \beta_0)^2}\right)$$

gegeben ist.

Wegen:  $\cos \alpha = \sin \gamma \cos \varphi$ ,  $\cos \beta = \sin \gamma \sin \varphi$  folgt:

$$\mathfrak{R} = J_0(kr \sqrt{\sin^2 \gamma - 2 \sin \gamma \sin \gamma_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \sin^2 \gamma_0}).$$

Setzen wir zur Abkürzung:  $u = kr \sin \gamma$ ,  $v = kr \sin \gamma_0$ , so folgt zunächst nach dem Additionstheorem der BESSELSchen Funktionen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} &= J_0\left(\sqrt{u^2 + v^2 - 2uv \cos(\varphi - \varphi_0)}\right) \\ &= J_0(u)J_0(v) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(u)J_n(v) \cos n(\varphi - \varphi_0). \end{aligned} \quad (89)$$

Bilden wir dann:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathfrak{R}^2 d\varphi,$$

so fallen bei der Integration wegen

$$\int_0^{2\pi} \cos m(\varphi - \varphi_0) \cos n(\varphi - \varphi_0) d\varphi = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ \pi & \text{für } m = n \end{cases}$$

die Faktoren mit ungleichem Index heraus, und es ist:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathfrak{R}^2 d\varphi = J_0^2(u) J_0^2(v) + 2J_1^2(u) J_1^2(v) + \dots \quad (90)$$

Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_k &= J_0^2(kr \sin \gamma_0) \cdot \int_0^{\pi/2} J_0^2(kr \sin \gamma) \sin \gamma d\gamma \\ &+ 2J_1^2(kr \sin \gamma_0) \int_0^{\pi/2} J_1^2(kr \sin \gamma) \sin \gamma d\gamma + \dots \end{aligned} \quad (91)$$

oder wegen:

$$\int_0^{\pi/2} J_n^2(x \sin \gamma) \sin \gamma d\gamma = \frac{1}{x} \int_0^x J_{2n}(\xi) d\xi \quad (92)^1$$

folgt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_k &= J_0^2(kr \sin \gamma_0) \cdot \frac{1}{kr} \int_0^{kr} J_0(2\xi) d\xi + 2J_1^2(kr \sin \gamma_0) \cdot \frac{1}{kr} \int_0^{kr} J_2(2\xi) d\xi \\ &+ 2J_2^2(kr \sin \gamma_0) \cdot \frac{1}{kr} \int_0^{kr} J_4(2\xi) d\xi + \dots \end{aligned} \quad (93)$$

Die Berechnung der Integrale:

$$\varphi_n(x) = \int_0^x J_{2n}(2x) dx$$

läßt sich wegen der Beziehung:

$$\int_0^x J_r(2x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} J_{r+2n+1}(2x) \quad (94)$$

mit Hilfe der Tafeln für die BESSELSchen Funktionen leicht ausführen. Die entsprechenden Funktionen:

$$\varphi_n(x)$$

sind in der Abb. 41 dargestellt.

<sup>1</sup> Der Beweis von (92) ergibt sich, wenn man in der bekannten Gleichung:

$$J_n^2(x \sin \gamma) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} J_{2n}(2x \sin \gamma \cos \varphi) d\varphi$$

beide Seiten mit  $\sin \gamma d\gamma$  multipliziert

und von 0 bis  $\pi/2$  integriert und danach die von NIELSEN (Handb. der Zylinderfunktionen, S. 380, Formel I<sub>3</sub> [ $v=0$ ]) angegebene Beziehung:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} x \sin \omega f(x \sin \omega \sin \varphi) d\omega d\varphi = \frac{\pi}{2} f(x)$$

benutzt.

In der Abb. 42 ist der Strahlungsfaktor (für die Kreisgruppe)  $\mathfrak{S}_k \left( \frac{2\pi r}{\lambda} \right)$  in Abhängigkeit von  $\frac{2\pi r}{\lambda}$  gezeichnet ( $r =$  Radius des Kreises,  $\lambda =$  Wellenlänge). Und zwar gilt:

die Kurve 1 für den unkompensierten Fall (d. h.  $\gamma_k = \gamma_0 = 0^\circ$ ),

die Kurve 2 für den Fall  $\gamma_k = 30^\circ$ ,

die Kurve 3 für den Fall  $\gamma_k = 90^\circ$ .

Außerdem sind noch die aus diesen hervorgehenden Kurven 4, 5, 6:

$$\frac{2\pi r}{\lambda} \mathfrak{S}_k \left( \frac{2\pi r}{\lambda} \right)$$

gezeichnet.

Aus den letzteren erkennt man, daß mit wachsendem  $\frac{2\pi r}{\lambda}$  sich  $\frac{2\pi r}{\lambda} \mathfrak{S}_k \left( \frac{2\pi r}{\lambda} \right)$  immer mehr der Größe  $\frac{1}{2}$  nähert.

Das bedeutet: Der Verdichtungsfaktor  $f = 1/\mathfrak{S}_k$  ist für großes  $r/\lambda$  (d. h. bei scharfer Bündelung) durch  $\frac{2\pi r}{\lambda} \cdot 2$  gegeben. Anders ausgedrückt heißt dies: Die in  $\lambda$  gemessene Länge des Kreisumfangs ergibt, mit 2 multipliziert, die Größe des Verdichtungsfaktors. Im Zusammenhang mit den früheren Betrachtungen über den Verdichtungsfaktor bei unkompensierten Strahleranordnungen, die eine *gerade Linie*, eine *Kreislinie*, eine *Kreisfläche* oder eine *rechteckige Fläche* erfüllen, können wir folgenden allgemeinen Satz formulieren:

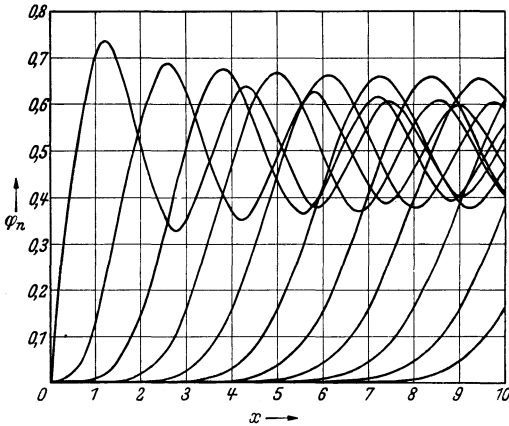


Abb. 41. Hilfsfunktionen zur Berechnung des Strahlungsfaktors.

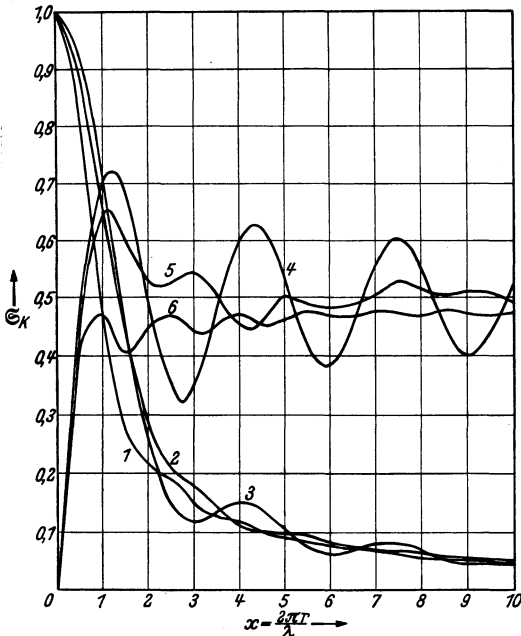


Abb. 42. Strahlungsfaktor der kompensierten Kreisgruppe: 1.  $\mathfrak{S}_k(x)$  für  $\gamma_k = 0^\circ$ ; 2.  $\mathfrak{S}_k(x)$  für  $\gamma_k = 30^\circ$ ; 3.  $\mathfrak{S}_k(x)$  für  $\gamma_k = 90^\circ$ ; 4.  $x \mathfrak{S}_k(x)$  für  $\gamma_k = 0^\circ$ ; 5.  $x \mathfrak{S}_k(x)$  für  $\gamma_k = 30^\circ$ ; 6.  $x \mathfrak{S}_k(x)$  für  $\gamma_k = 90^\circ$ .

Bei scharfer Bündelung ist der Verdichtungsfaktor

1. bei linienförmiger Strahleranordnung durch 2mal der in  $\lambda$  gemessenen Länge der strahlenden Linie,

2. bei flächenhafter Strahleranordnung durch  $2\pi$ mal der in  $\lambda^2$  gemessenen Fläche der strahlenden Anordnung gegeben.

Zweiter Teil.

## Das Schallfeld in der Nähe des Strahlers.

### 3. Die Gruppe von zwei Einzelstrahlern.

Bei den bisherigen Betrachtungen war die Voraussetzung gemacht, daß sich der Aufpunkt in *hinreichendem Abstand* von der strahlenden Fläche befand. Für diesen Teil des Schallfeldes, der für die praktisch vorliegenden Aufgaben meist im Vordergrund steht, ergab sich eine einfache Darstellung, indem zu dem Ausdruck, der die ungerichtete Strahlung kennzeichnet, ein Faktor tritt, der nicht mehr vom *Abstand* des Aufpunktes, sondern nur noch von der *Richtung* der Aufpunktsgeraden abhängt. Und zwar war diese charakteristische Funktion (der Richtfaktor) nur abhängig von einer Größe (zum Beispiel der Form  $x = \frac{2\pi r}{\lambda} \sin \gamma$ ). Durch diese *eine* Funktion war also das Schallfeld im wesentlichen bestimmt, und zwar ganz allgemein bei irgendeiner vorgegebenen Frequenz (Wellenlänge) und bei irgendeiner vorgegebenen Ausdehnung ( $r/\lambda$ ) des strahlenden Systems. Für die Berechnung und Darstellung des *Nahfeldes* sind die Verhältnisse wesentlich schwieriger. Erstens sind wir gezwungen, das Nahfeld in einer so großen Anzahl von Punkten zu berechnen, daß das gesamte Feld durch Interpolation übersehen werden kann, und zweitens ist es erforderlich, diese Darstellung für jeden besonderen Fall, der durch das Verhältnis von geometrischer Ausdehnung zur Wellenlänge gekennzeichnet ist, besonders durchzuführen. Die Mannigfaltigkeit ist jetzt also ganz wesentlich größer geworden. Wir werden daher die Darstellung des Nahfeldes auf spezielle Fälle beschränken müssen. Und zwar werden wir das Schallfeld darstellen, indem wir in der Nachbarschaft des Strahlersystems die Kurven zeichnen, welche einer konstanten Schalldruckamplitude entsprechen.

Zunächst muß klargestellt werden, wann ein Aufpunkt zum Nahfeld gerechnet werden muß und wann dies nicht der Fall ist. Die Bezeichnung „Nahfeld“ könnte die falsche Vorstellung erwecken, als ob dies Nahfeld allein von den geometrischen Strahlerverhältnissen abhängig ist, so daß man etwa sagen könnte, daß bei einer strahlenden kreisförmigen Kolbenmembran vom Radius  $\rho$  alle Aufpunkte nicht mehr

zum Nahfeld rechnen, die z. B. um das Zehnfache des Radius vom Membranmittelpunkt entfernt liegen. Tatsächlich reicht diese Definition nicht aus, sondern es kommt dabei außerdem noch auf die Wellenlänge an. Um dies genauer zu untersuchen, müssen wir von der allgemeinen, für Nah- und Fernfeld geltenden Formel ausgehen und feststellen, unter welchen Bedingungen diese in die für das Fernfeld angegebene Formel (6) übergeht.

Wir setzen voraus, daß die strahlende Fläche der Membran in einer starren unendlichen Wand liegt oder als Doppelmembran wirkt, wobei der eine Teil in jedem Moment symmetrisch zu dem anderen Teil schwingt, wie es in Abb. 1e und 1f dargestellt ist. Dabei darf die strahlende Fläche auch aus mehreren einzelnen in derselben starren Wand liegenden Teilen bestehen oder aus mehreren einzelnen Doppelmembranen, die alle die Symmetrieebene gemeinsam haben. Wir denken uns die strahlende Fläche in der Nulllage in der  $XY$ -Ebene und die Geschwindigkeitsamplitude durch

$$w = w(x, y) e^{i\omega t} \quad (95)$$

gegeben.

Dabei werden wir im allgemeinen  $w(x, y)$  als reelle Funktion voraussetzen. Das bedeutet physikalisch, daß alle schwingenden Membranelemente gleichzeitig durch die Nulllage gehen und gleichzeitig ihre Extremwerte erreichen, so daß nur gleichphasige oder gegenphasige Bewegungen (mit Knotenlinien) der Membranelemente möglich sind. Grundsätzlich bestehen aber keine Schwierigkeiten, die Geschwindigkeitsamplitude in jedem Punkte der Membran nach Amplitude und Phase vorzuschreiben, indem man

$$w(x, y) = u(x, y) + i v(x, y)$$

als komplexe Funktion festsetzt.

Dann ist für einen beliebigen Aufpunkt  $P$  in dem oberen Halbraum (wegen der starren Wand können wir uns auf den Halbraum  $z \geq 0$  beschränken) der Schalldruckverlauf nach RAYLEIGH<sup>1</sup> gegeben durch:

$$p = e^{i(\omega t + \pi/2)} \cdot \frac{c\sigma}{\lambda} \int_F w(x, y) \frac{e^{-ikr}}{r} dF. \quad (96)$$

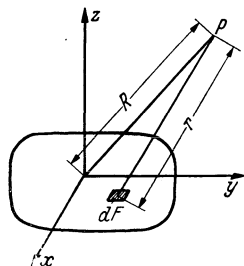


Abb. 43. Zur Definition des Nahfeldes.

Dabei ist die Integration über die in den Halbraum strahlende Fläche  $F$  zu erstrecken, wobei  $r$  den Abstand des Integrationselementes  $dF$  vom Aufpunkt  $P$  und  $R$  die Entfernung des Aufpunktes vom Koordinatenursprung bedeutet (vgl. Abb. 43).

<sup>1</sup> The theory of sound. § 278.

Hat der Aufpunkt  $P$  die Koordinaten  $x_0, y_0, z_0$  und der Mittelpunkt des Flächenelementes  $dF$  die Koordinaten  $x, y$ , so folgt aus:

$$R^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2,$$

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z_0^2$$

die Beziehung:

$$r^2 = R^2 + x^2 + y^2 - 2xx_0 - 2yy_0.$$

Daher ist:

$$\frac{r}{R} = \left[ 1 - \frac{2(x \cos \alpha + y \cos \beta)}{R} + \frac{x^2 + y^2}{R^2} \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{r}{R} = 1 - \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta}{R} + \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2}{R^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta}{R} \right)^2. \quad (97)$$

Dabei sind in der Entwicklung die Glieder höherer als zweiter Ordnung vernachlässigt. An Stelle der früheren Formel (die sich unter der Annahme eines *hinreichenden* Abstandes des Aufpunktes ergab):

$$p = \frac{c \sigma}{\lambda \cdot R} e^{i(\omega t + \pi/2 - kR)} \int_F w(x, y) e^{ik(x \cos \alpha + y \cos \beta)} dF \quad (98)$$

folgt jetzt aus (96) und (97):

$$p = \frac{c \cdot \sigma}{\lambda \cdot R} e^{i(\omega t + \pi/2 - kR)} \int_F w(x, y) \cdot e^{ik(x \cos \alpha + y \cos \beta)}$$

$$\cdot \frac{e^{-\frac{ik}{2} \left[ \frac{x^2 + y^2}{R} - \frac{(x \cos \alpha + y \cos \beta)^2}{R} \right]}}{1 - \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta}{R} + \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2}{R^2} - \frac{(x \cos \alpha + y \cos \beta)^2}{R^2}} dF. \quad (99)$$

Man kann daher (99) dann durch (98) ersetzen, wenn

$$\frac{e^{-\frac{ik}{2} \left[ \frac{x^2 + y^2}{R} - \frac{(x \cos \alpha + y \cos \beta)^2}{R} \right]}}{1 - \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta}{R} + \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2}{R^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta}{R} \right)^2}$$

durch 1 ersetzt werden kann. Da dies für alle  $\alpha$  und  $\beta$  gelten soll, so ist leicht zu sehen, daß dazu wegen des Nenners:

$$\frac{x^2 + y^2}{R^2} \ll 1 \quad (100)$$

und wegen des Zählers:

$$e^{-\frac{ik}{2R} \frac{x^2 + y^2}} \ll 1 \quad (101)$$

sein muß.

Da  $\sqrt{x^2 + y^2} = \varrho_m$  im ungünstigsten Falle gleich dem größten Abstand eines Membranpunktes vom Koordinatenanfangspunkt ist, so besagt (100), daß der Aufpunktsabstand  $R$  groß gegen die größte lineare



Ausdehnung der strahlenden Fläche (in der  $XY$ -Ebene) sein muß. Aus (101) folgt dann, daß weiter

$$\frac{\pi \cdot \varrho_m^2}{\lambda \cdot R} \ll 1 \quad (102)$$

sein muß.

Bei kleinem  $\lambda$ , genauer, wenn  $\lambda \ll \pi R$  ist, ist daher die Bedingung (102) schärfer. Legen wir eine Kolbenmembran von 5 cm Radius zugrunde und setzen einmal eine Wellenlänge von 15 cm, das andere Mal eine Wellenlänge von 1 cm voraus, so würde der hinreichende Abstand  $R$  in einem Fall nach (100) durch:  $R \gg 5$  cm, dagegen im anderen Fall nach (102) durch:  $R \gg 75$  cm gegeben sein.

Bei zwei Strahlern, die klein zur Wellenlänge sind, tritt an Stelle der Integration in Formel (10) eine einfache Addition. Wir erhalten den Schalldruck des resultierenden Feldes in folgender Form:

$$p = e^{i(\omega t + \pi/2)} \frac{c \cdot \sigma}{2 \cdot \lambda} \left[ w_1 F_1 \frac{e^{-i k r_1}}{r_1} + w_2 F_2 \frac{e^{-i k r_2}}{r_2} \right]. \quad (103)$$

Dabei bedeuten:

$w_1, w_2$  die (mittleren) Geschwindigkeitsamplituden von  $F_1$  und  $F_2$ ,

$F_1, F_2$  die strahlenden Flächen,

$r_1, r_2$  die Abstände der Strahler vom Aufpunkt.

Führen wir noch die Abkürzungen ein:

$$\frac{w_1 F_1}{2 \lambda^2} = a, \quad \frac{w_2 F_2}{2 \lambda^2} = b, \quad \frac{r_1}{\lambda} = x, \quad \frac{r_2}{\lambda} = y,$$

so ergibt sich aus (103) für die Schalldruckamplitude  $p$  die Beziehung:

$$\frac{p}{c \cdot \sigma} = \left| \frac{a e^{-i 2 \pi x}}{x} + \frac{b e^{-i 2 \pi y}}{y} \right|. \quad (104)$$

Da wir die Phase außer Betracht lassen, haben wir den rechts stehenden Ausdruck nur seinem Betrage nach zu untersuchen. Wir erhalten durch eine einfache Rechnung:

$$\frac{p}{c \sigma} = \sqrt{\left( \frac{a}{x} + \frac{b}{y} \right)^2 \cos^2 \pi(x - y) + \left( \frac{a}{x} - \frac{b}{y} \right)^2 \sin^2 \pi(x - y)} \quad (105)$$

oder:

$$\frac{p}{c \cdot \sigma} = \sqrt{\left( \frac{a}{x} \right)^2 + \left( \frac{b}{y} \right)^2 + \frac{2 a b}{x y} \cos 2 \pi(x - y)}.$$

Für bestimmte Werte von  $x - y$  nimmt  $\cos 2 \pi(x - y)$  und daher auch  $\frac{p}{c \cdot \sigma}$  einfache Werte an, und zwar ergibt sich nachstehende Tabelle (S. 55).

So kann man für die auf den Hyperbeln  $x - y = \text{konstans}$  liegenden Punkte die zugehörigen Werte von  $p/c\sigma$  einfach berechnen und kann dann durch Interpolation von Zwischenwerten die Kurven gleichen Schalldrucks einzeichnen, wobei  $x$  und  $y$  die in Wellenlängen gemessenen Abstände des Aufpunktes von den beiden Strahlern bedeuten.

Von besonderer Wichtigkeit ist die Festlegung der Stellen, wo die Schalldruckamplitude gleich Null ist. Dazu ist offenbar notwendig, daß  $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$  und  $x - y = \frac{2m + 1}{2}$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) ist. (Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann  $a > b$  vorausgesetzt werden.)

Daraus folgt:

$$x = \frac{a}{a - b} \cdot \frac{2m + 1}{2},$$

$$y = \frac{b}{a - b} \cdot \frac{2m + 1}{2}.$$

Damit die mit  $x$  und  $y$  beschriebenen Kreise einen reellen Schnittpunkt ergeben, muß ferner bei einem Abstand  $d$  der beiden Strahler die Bedingung erfüllt sein:

$$x + y \geq d/\lambda \geq x - y,$$

d. h. es muß:

$$\frac{a + b}{a - b} \cdot \frac{2m + 1}{2} \geq \frac{d}{\lambda} \geq \frac{2m + 1}{2} \tag{106}$$

sein.

Jedem Wert von  $m$ , für den die Ungleichheit (106) erfüllt ist, entspricht eine Nullstelle des Schalldruckes. Im Fall  $d/\lambda < \frac{1}{2}$  gibt es daher überhaupt keine Nullstelle. Im Fall  $a = 2, b = 1, d/\lambda = 4$  ergeben sich aus  $3(2m + 1) \geq 8 \geq 2m + 1$  die Lösungen:  $m = 1, m = 2, m = 3$ . Im Fall  $a = 3, b = 2, d/\lambda = 1$  ergibt sich aus  $5(2m + 1) \geq 2m + 1$  die eine Lösung  $m = 0$ .

Die Abb. 44 stellt die Verhältnisse für  $d/\lambda = 5, a = 3$  und  $b = 2$  dar. Dabei sind die Hyperbeläste:

$$r_1 - r_2 = \lambda/2, 3/2 \lambda, 5/2 \lambda, 7/2 \lambda, 9/2 \lambda$$

und die auf ihnen liegenden Nullstellen

$$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}, \textcircled{4}$$

gezeichnet. Die Nullstellen ergeben sich hier als Schnittpunkte der Kreise, die mit den Radien:

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \frac{3(2m + 1)}{10} \frac{d}{\lambda} \\ r_2 &= \frac{2(2m + 1)}{10} \frac{d}{\lambda} \end{aligned} \right\} (m = 1, 2, 3, 4) \tag{107}$$

um die Strahlerpunkte  $A_1$  und  $A_2$  beschrieben werden. Im übrigen liegen sämtliche Nullstellen (wegen  $r_1/r_2 = a/b$ ) auf *einem* bestimmten Kreise, der die Strecke  $A_1A_2$  harmonisch im Verhältnis  $a:b$  teilt und

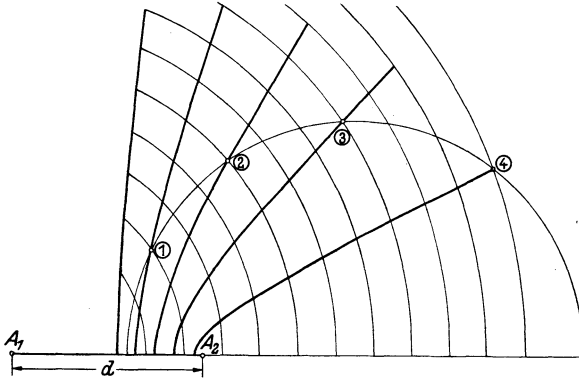


Abb. 44. Die Nullstellen des Schalldruckes von zwei punktförmigen Strahlern im Abstand  $d = 5\lambda$  bei verschiedenem Deformationsvolumen.

dessen Mittelpunkt auf  $A_1A_2$  liegt (s. Abb. 44). Der Radius dieses Kreises ist:

$$r = \frac{ab}{a^2 - b^2} \frac{d}{\lambda}.$$

In allgemeiner Weise läßt sich auf graphischem Wege eine Darstellung der Kurven gleichen Schalldruckes erreichen. Zu dem Zweck zeichnen wir den Verlauf des Vektors

$$r_1 = a \cdot \frac{e^{-i2\pi x}}{x}$$

und des Vektors

$$r_2 = -b \frac{e^{-i2\pi y}}{y}.$$

Das geschieht, indem man  $x$  bzw.  $y$  um 0,05 wachsen läßt, so daß jeder Vektor aus dem vorhergehenden durch eine Drehung von  $2\pi \cdot 0,05$ , d. h.  $18^\circ$ , hervorgeht. Man hat dann nur nötig, durch den Nullpunkt die unter einem Winkel von  $18^\circ$  sich schneidenden Geraden zu zeichnen und auf ihnen die Längen  $a/x$  bzw.  $b/y$  abzutragen. So ergeben sich zwei Spiralen, die den Nullpunkt in immer engeren Windungen umschlingen. Hat man diese Spiralen mit den entsprechenden  $x$  und  $y$ -Werten beziffert, so kann man sämtliche Lösungen  $x, y$  der Gleichung:

$$\left| a \cdot \frac{e^{-i2\pi x}}{x} + b \frac{e^{-i2\pi y}}{y} \right| = c \quad (108)$$

angeben, indem man eine Strecke der Länge  $c$  so bewegt, daß der Anfangspunkt auf der einen ( $x$ ) Spirale der Endpunkt auf der anderen ( $y$ ) Spirale gleitet. Jede Lage der Strecke  $c$  definiert durch ihren Anfangs- und Endpunkt auf der Spirale ein Wertsystem  $x, y$ , das der Gleichung (14) genügt.

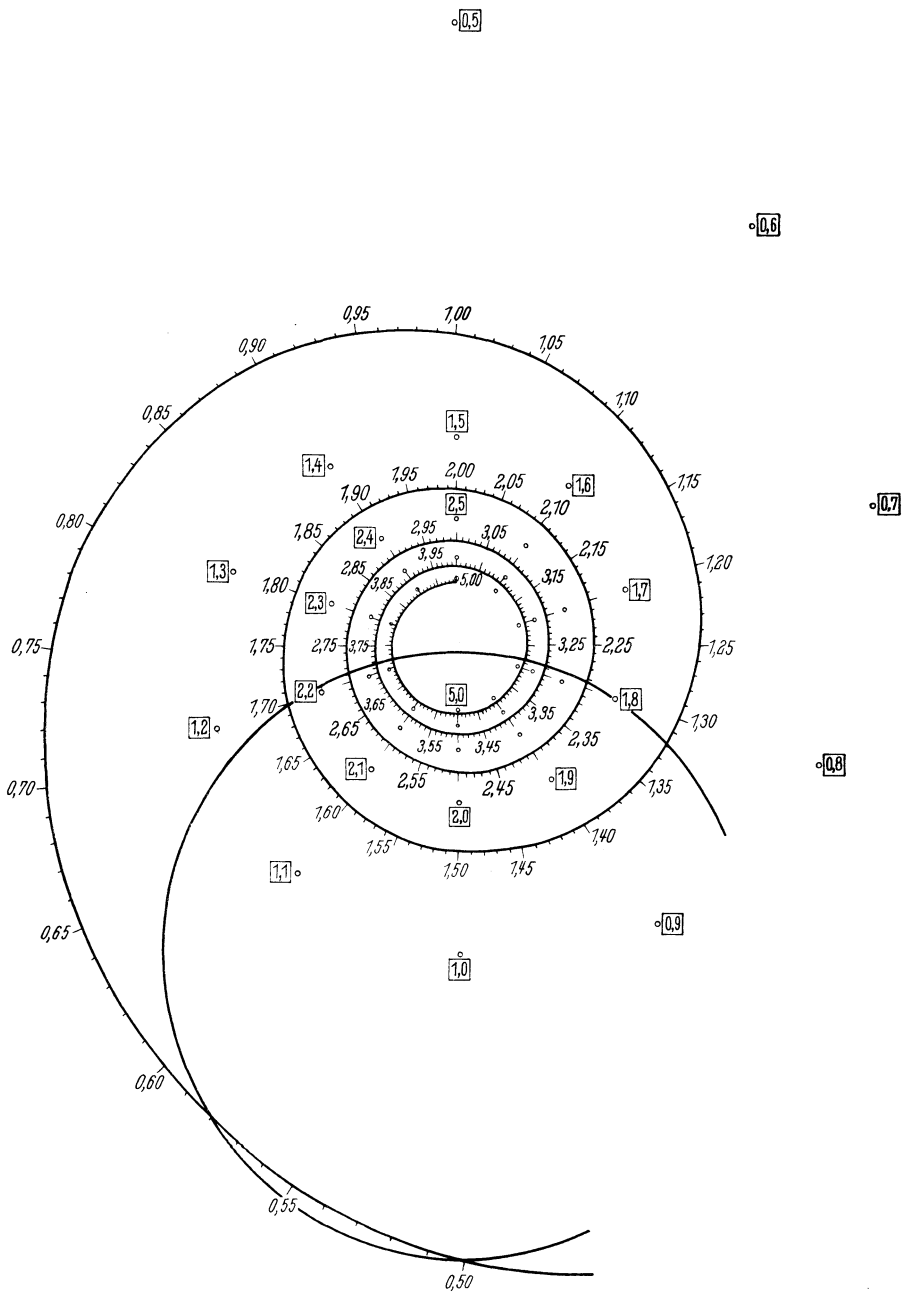


Abb. 45. Spirale zur Berechnung des Nahfeldes von zwei punktförmigen Strahlern.

Als Beispiel wählen wir  $a = b = 1$ , d. h. zwei Schallstrahler gleicher Intensität. In der Abb. 45 ist die Spirale  $r_1 = e^{i2\pi x}/x$  für alle Werte von  $x = 0,5$  bis  $x = 5$  dargestellt. Um die Zeichnung nicht unübersichtlich zu machen, sind von der zweiten Spirale  $r_2 = -e^{-i2\pi y}/y$  nur die den einzelnen Werten  $y = 0,5$ ;  $y = 0,6$ ;  $y = 0,7$  usw. bis  $y = 2,5$  entsprechenden Spiralpunkte dargestellt. Diese ergeben sich sehr einfach durch Spiegelung der entsprechenden Punkte der  $x$ -Spirale am Mittelpunkt. Diese Punkte sind durch kleine runde Kreise, denen die Ziffer in einem Quadrat beige geschrieben ist, gekennzeichnet. Beschreibe ich um einen solchen Punkt der  $y$ -Spirale, z. B. den Punkt  $\boxed{1}$ , einen Kreis mit dem Radius 1, so erhalte ich durch die an den Schnittpunkten mit der  $x$ -Spirale angegebene Bezifferung sämtliche (zwischen 0,5 und 5 liegenden) Werte  $x$  die der Gleichung

$$\left| \frac{e^{-i2\pi x}}{x} + \frac{e^{-i2\pi \cdot 1}}{1} \right| = 1$$

genügen.

Und zwar lesen wir aus der Abb. 45 die Lösungswerte ab:  $x = 0,50$ ;  $0,58$ ;  $1,32$ ;  $1,70$ ;  $2,29$ ;  $2,71$ ;  $3,28$ ;  $3,72$ ;  $4,29$ ;  $4,72$ . Noch übersichtlicher wird der Zusammenhang, wenn wir die durch

$$\left| \frac{e^{-i2\pi x}}{x} + \frac{e^{-i2\pi y}}{y} \right| - 1 = 0$$

definierte Kurve in den rechtwinkligen Koordinaten eintragen. Die eine Hälfte dieser Kurve ist in Abb. 46 dargestellt. Die andere Hälfte entsteht durch Spiegelung an der Geraden  $y - x = 0$ . Außerdem sind noch die Kurven für:

$$\left| \frac{e^{-i2\pi x}}{x} + \frac{e^{-i2\pi y}}{y} \right| - \frac{1}{2} = 0, \quad \left| \frac{e^{-i2\pi x}}{x} + \frac{e^{-i2\pi y}}{y} \right| - \frac{3}{2} = 0 \quad (109)$$

und

$$\left| \frac{e^{-i2\pi x}}{x} + \frac{e^{-i2\pi y}}{y} \right| - 2 = 0$$

in Abb. 46 aufgetragen.

Um aus diesen Kurven, die vom Strahlerabstand unabhängig sind, für einen bestimmten Strahlerabstand (z. B.  $d/\lambda = 3$ ) die entsprechenden Kurven konstanten Schalldruckes zu gewinnen, haben wir zwei Punkte  $A_1$  und  $A_2$  im Abstand  $d/\lambda = 3$  zu zeichnen und um diese Kreise zu beschreiben, deren Radien durch die Koordinaten  $x$  und  $y$  des zu übertragenden Punktes gegeben sind. Dabei spielen aber nur die Koordinaten  $x$ ,  $y$  eine Rolle, die zu reellen Schnittpunkten der beiden Kreise führen. Offenbar hängt dies wesentlich von dem Strahlenabstand ab. Aus der Bedingung für das Schneiden der beiden Kreise:

$$r_1 + r_2 \geq d \geq r_2 - r_1$$

folgt nun:

$$y + x \geq d/\lambda \geq y - x.$$

Zeichnen wir in der Abb. 46 die drei Geraden

$$y + x = d/\lambda, \quad y - x = d/\lambda, \quad y - x = 0$$

(wobei wir wegen der Symmetrie  $r_2 > r_1$  voraussetzen und uns auf einen Quadranten beschränken können), so wird durch diese ein rechteckiger Streifen begrenzt, der alle und nur solche Punkte  $x, y$  enthält, für welche die Bedingung

$$y + x \geq d/\lambda \geq y - x \geq 0$$

erfüllt ist.

In der Abb. 46 ist für  $d/\lambda = 3$  der entsprechende Streifen schraffiert gezeichnet. Man erkennt, daß z. B. von der Kurve:

$$\left| \frac{e^{-i2\pi x}}{x} + \frac{e^{-i2\pi y}}{y} \right| - 1 = 0$$

nur der punktierte Teil in Frage kommt. Übertragen wir die 4 Kurven, soweit sie dem schraffierten Streifen angehören, so erhalten wir die entsprechenden Kurven konstanten Schalldruckes (für einen Quadranten). Dabei ergibt jeder

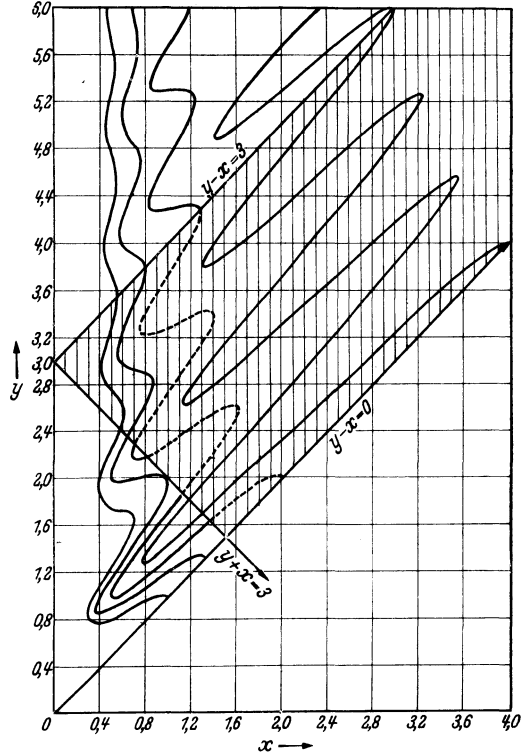


Abb. 46. Die Funktionen:

$$\left| \frac{e^{-i2\pi x}}{x} + \frac{e^{-i2\pi y}}{y} \right| = c \text{ für } c = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2.$$

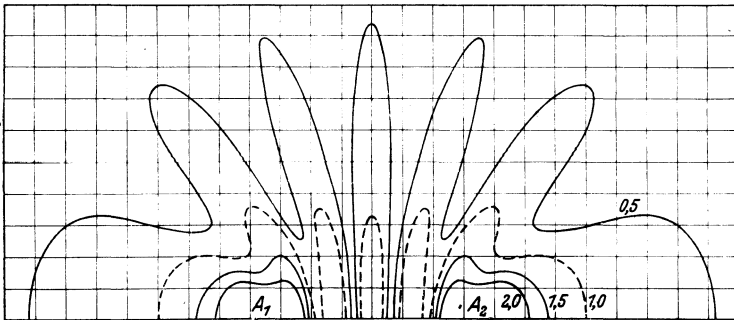


Abb. 47. Kurven konstanter Schalldruckamplitude bei zwei punktförmigen Strahlern im Abstand:  $d = 3\lambda$ .

Punkt der Kurven in Abb. 46 mit den Koordinaten  $(x, y)$  den zugehörigen Punkt in Abb. 47 als Schnittpunkt des um  $A_1$  mit  $x$  und um  $A_2$  mit  $y$  beschriebenen Kreises. Es ist wichtig, daß man bereits aus der

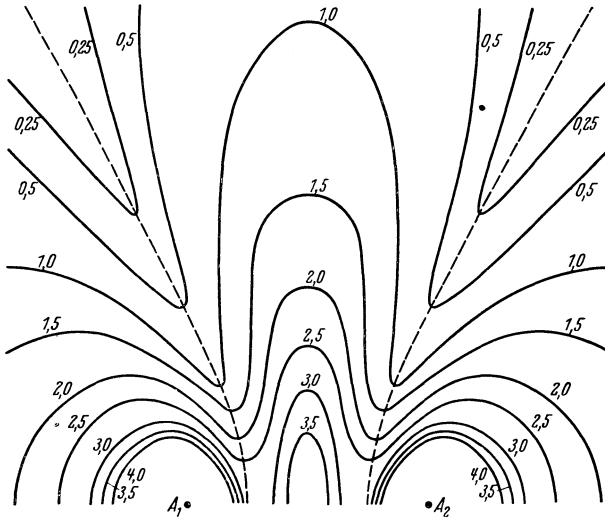


Abb. 48. Kurven konstanter Schalldruckamplitude bei zwei punktförmigen Strahlern mit gleichem Deformationsvolumen.

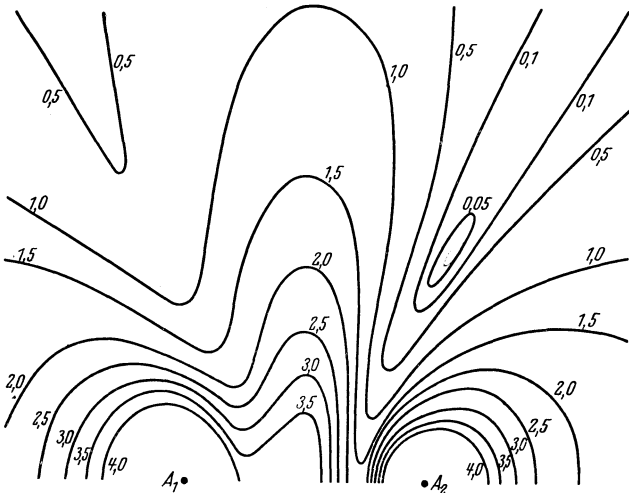


Abb. 49. Kurven konstanter Schalldruckamplitude bei zwei punktförmigen Strahlern mit verschiedenem Deformationsvolumen.

Abb. 46 sofort erkennt, ob die Kurve konstanten Schalldruckes aus einer kontinuierlichen Kurve besteht oder wieviel getrennte Kurvenzüge sich ergeben. So ergeben für  $d/\lambda = 3$  die

$$\left| \frac{e^{-i2\pi x}}{x} + \frac{e^{-i2\pi y}}{y} \right| = c$$

entsprechenden Kurven konstanten Schalldruckes für  $c = 0,5$  zwei getrennte, für  $c = 1$  drei getrennte Kurvenzüge; dagegen für  $c = 1,5$  und  $c = 2$  je einen kontinuierlichen Kurvenzug. In der Abb. 47 sind die entsprechenden Kurven konstanten Schalldruckes dargestellt. Der gesamte räumliche Verlauf entsteht daraus, indem man das ganze Gebilde um  $A_1A_2$  rotieren läßt. Dabei ergeben sich dann für  $c = 0,5$  drei getrennte Flächen, für  $c = 1$  fünf getrennte Flächen und für  $c = 1,5$  und  $c = 2$  je zwei getrennte Flächen. Lassen wir  $d/\lambda$  kleinere Werte annehmen, so wird der entsprechend schraffierte Bereich in Abb. 46 immer schmaler und die Anzahl der Extremwerte nimmt immer mehr ab, bis schließlich für  $d/\lambda \leq \frac{1}{2}$  für alle Kurven nur noch ein Maximum (auf der Mittelachse) übrigbleibt.

In den Abb. 48 und 49 sind die Schallfelder gezeichnet, wenn  $d/\lambda = 1$  ist, und zwar ist in Abb. 48

$$\frac{w_1 F_1}{2 \lambda^2} = \frac{w_2 F_2}{2 \lambda^2} = 1$$

angenommen, während in Abb. 49

$$\frac{w_1 F_1}{2 \lambda^2} = 1,2; \quad \frac{w_2 F_2}{2 \lambda^2} = 0,8$$

gesetzt ist.

Nach den früheren Ausführungen muß sich im zweiten Fall eine Nullstelle ergeben (im räumlichen Schallfeld ein Nullkreis). Man sieht aus der Abb. 49, daß besonders in der Umgebung dieser Nullstelle eine ziemliche Unsymmetrie des Schallfeldes hervorgerufen wird.

#### 4. Die kreisförmige Kolbenmembran.

Die Berechnung des Schallfeldes einer Kolbenmembran macht für beliebige Aufpunkte *in der Nähe* der Membran beträchtliche Schwierigkeiten. Wir untersuchen daher zunächst den Fall, wo der Aufpunkt auf der Mittelachse der Membran liegt; dann läßt sich die Rechnung sehr einfach durchführen<sup>1</sup>. Da  $w(x, y)$  konstant ( $= w_0$ ) sein soll, ist die Berechnung des Integrals:

$$J = \int_{\bar{F}} \frac{e^{-ikr}}{r} dF$$

erforderlich.

Führen wir für das Flächenelement  $dF$  Polarkoordinaten  $\varrho, \varphi$  ein, so ist  $dF = \varrho d\varrho d\varphi$  und wegen  $r^2 = \varrho^2 + z^2$  ist:  $\varrho d\varrho = r dr$ . (Abb. 50.)

Dann folgt:

$$J = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \varrho d\varrho \frac{e^{-ikr}}{r} = 2\pi \int_z^{\sqrt{R^2+z^2}} e^{-ikr} r dr = -\frac{2\pi}{ik} [e^{-ik\sqrt{R^2+z^2}} - e^{-ikz}]. \quad (110)$$

<sup>1</sup> BACKHAUS, H., u. F. TRENDELENBURG: Über die Richtwirkung von Kolbenmembranen. Z. techn. Phys. 7, 630 (1926).



Unter Benutzung der leicht abzuleitenden Beziehung:

$$e^{-i\alpha} - e^{-i\beta} = -2i \sin \frac{\alpha - \beta}{2} e^{-i \frac{\alpha + \beta}{2}}$$

ergibt sich:

$$J = 2\lambda \sin \left\{ \frac{k}{2} [\sqrt{R^2 + z^2} - z] \right\} e^{-i \frac{k}{2} \{ \sqrt{R^2 + z^2} + z \}}$$

Setzt man dies ein, so folgt unter Berücksichtigung von (11):

$$p = 2c \cdot \sigma \cdot w_0 \cdot \sin \left\{ \frac{k}{2} [\sqrt{R^2 + z^2} - z] \right\} \cdot e^{i \left[ \omega t + \frac{\pi}{2} - \frac{k}{2} (\sqrt{R^2 + z^2} + z) \right]}. \quad (111)$$

Die relative Schalldruckamplitude ist also:

$$\frac{p}{c\sigma} = 2 \sin \left\{ \frac{k}{2} [\sqrt{R^2 + z^2} - z] \right\}.$$

Daraus folgt, daß  $p/c\sigma$  den Wert Null für

$$k \sqrt{R^2 + z^2} - kz = 2\pi, 4\pi, \dots$$

den Wert 2 für:

$$k \sqrt{R^2 + z^2} - kz = \pi, 3\pi, \dots$$

erhält.

Bezeichnet man die zu diesen Extremwerten gehörenden  $z$  mit  $z_0$  und  $z_m$ , so sind die Nullstellen  $z_0$  gegeben durch:

$$z_0 = \frac{R^2}{\lambda^2} - n^2 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (112)$$

und die Zweistellen  $z_m$  gegeben durch:

$$z_m = \frac{R^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2}{(2n + 1)\lambda}. \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (113)$$

Mit größer werdendem Radius wächst die Anzahl der Null- und Zweistellen. Für Membranen, deren Radius kleiner als  $\lambda$  ist, kann ein Extremwert auf der Mittelachse nicht eintreten. In der Abb. 51 ist der vollständige Verlauf von  $p/c\sigma$  für Aufpunkte auf der Mittelachse der Kolbenmembran dargestellt. Als Ordinate ist das Verhältnis  $z/R$  aufgetragen. Die 4 Kurven entsprechen den Werten  $kR = 6$ ;  $kR = 10$ ;  $kR = 20$ ;  $kR = 40$ . Für Punkte mit hinreichend großem  $z$  soll nach der früher aufgestellten Behauptung (S. 5) die Formel (111) in (1) übergehen. Nach den Ausführungen auf S. 53 ist  $z$  hinreichend groß, wenn  $\frac{\pi R^2}{\lambda z} \ll 1$  und  $\frac{R}{z} \ll 1$  ist. Dann ist aber:

$$k \sqrt{R^2 + z^2} - kz = kz \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{R^2}{z^2} \right) - kz = \frac{\pi R^2}{\lambda z}$$

und

$$2 \sin \frac{1}{2} \frac{\pi R^2}{\lambda z} = \frac{\pi R^2}{\lambda z} = \frac{F}{\lambda \cdot z},$$

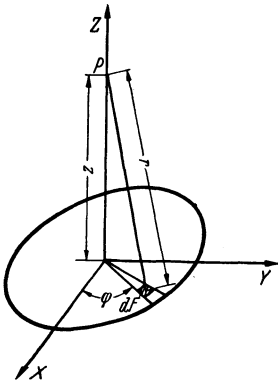


Abb. 50. Zur Berechnung der kreisförmigen Kolbenmembran.

so daß in der Tat (111) in (1) (vgl. die Fußnote auf S. 3) übergeht. Würde man den Aufpunktsabstand  $z$  gleich 6 Radien wählen, so ergäben sich für  $\frac{\pi R^2}{\lambda z}$  (oder für  $\frac{(kR)^2}{2(kz)}$ ) in den Fällen  $kR = 6, 10, 20, 40$  die Werte  $\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{5}{3}, \frac{10}{3}$ , so daß also der Aufpunktsabstand größer als 3 Membrandurchmesser höchstens im Falle  $kR = 6$  als *hinreichend* groß angesehen werden kann. Dies gilt aber keineswegs im Fall  $kR = 20$  oder gar  $kR = 40$ .

Es mag darauf hingewiesen werden, daß die Formel (111) auf den Fall verallgemeinert werden kann, wo die strahlende Fläche anstatt aus einer vollen Kreisfläche aus einem Kreisringsektor mit den Begrenzungsradien  $R_1$  und  $R_2$  und dem Zentriwinkel  $\varphi_0$  besteht. Liegt der Aufpunkt dann senkrecht über dem Mittelpunkt des Kreisringes, so gilt offenbar die zu (111) analoge Formel:

$$p = \frac{\varphi_0}{\pi} \cdot w_0 \cdot c \cdot \sigma \sin \left\{ \frac{k}{2} \left[ \sqrt{z^2 + R_2^2} - \sqrt{z^2 + R_1^2} \right] \right\} e^{i \left( \omega t + \frac{\pi}{2} - \frac{k}{2} \left\{ \sqrt{z^2 + R_2^2} + \sqrt{z^2 + R_1^2} \right\} \right)}. \quad (114)$$

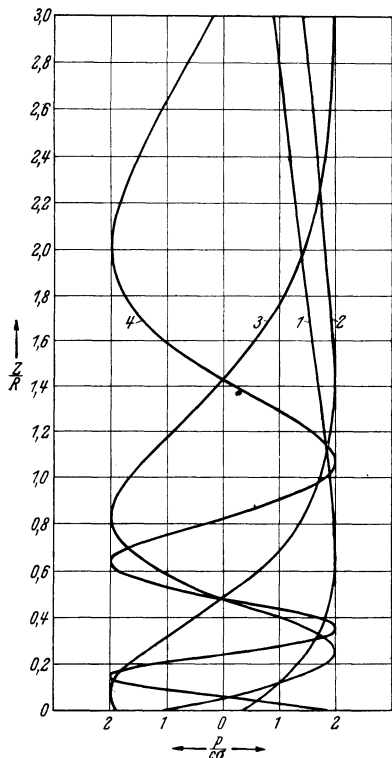


Abb. 51. Druckamplitude ( $p/c\sigma$ ) auf der Mittelachse der kreisförmigen Kolbenmembran vom Radius  $R$ .

1.  $kR = 6$ , 2.  $kR = 10$ , 3.  $kR = 20$ ,
4.  $kR = 40$ .

Wenn es sich darum handelt, bei einer Kolbenmembran mit beliebiger Berandung für *einen* speziellen Aufpunkt den Schalldruck zu finden, so kann man nach Zerlegung der strahlenden Fläche in ent-

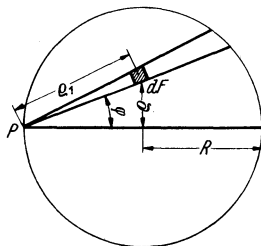


Abb. 52. Zur Berechnung des Schalldruckes am Rande der kreisförmigen Kolbenmembran.

sprechende Teilbereiche diese Formel anwenden, indem man die Wirkungen der einzelnen Teilflächen summiert. Man hat dabei nur darauf zu achten, daß die vernachlässigten Flächenstücke so klein sind, daß sie allein praktisch keinen Beitrag liefern. Die Unterteilung hängt also wesentlich von der Größe der Wellenlänge ab.

Die Berechnung des Integrals läßt sich nun noch einfach durchführen, wenn der Aufpunkt *auf dem Rand* der Membran liegt. Wählen wir den Aufpunkt  $P$  zum Anfangspunkt des Koordinatensystems mit den Polarkoordinaten  $\varrho_1$  und  $\varphi$ , so ist (Abb. 52):

$$\begin{aligned} \int_F \frac{e^{-ikr}}{r} dF &= 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2R \cos \varphi} e^{-ik\varrho_1} d\varrho_1 = \frac{2}{ik} \int_0^{\pi/2} d\varphi [1 - e^{-ik2R \cos \varphi}] \\ &= \frac{\pi}{ik} - \frac{2}{ik} \int_0^{\pi/2} e^{-ik2R \cos \varphi} d\varphi. \end{aligned}$$

Nun ist:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} e^{-ik2R \cos \varphi} d\varphi = J_0(2kR) - iH_0(2kR).$$

Dabei bedeutet  $J_0$  die BESSELSche und  $H_0$  die STRUWESche Funktion nullter Ordnung. Dann folgt<sup>1</sup>:

$$p = c \cdot \sigma e^{i\omega t} \left[ \frac{1 - J_0(2kR)}{2} + \frac{i}{2} H_0(2kR) \right]. \quad (115)$$

Mit Hilfe der vorliegenden Tabellen<sup>2</sup> für  $J_0$  und  $H_0$  können wir den Verlauf der Schalldruckamplitude am Rand der Membran in Abhängigkeit von  $2\pi R/\lambda$  darstellen. In Abb. 53 ist außer dieser Darstellung noch der Verlauf der Schalldruckamplitude im Mittelpunkt eingezeichnet, der aus (111) wegen  $z = 0$  durch

$$\frac{p}{\sigma c} = 2 \sin \frac{\pi R}{\lambda} \quad (116)$$

gegeben ist.

Der Verlauf der beiden Kurven zeigt ein bemerkenswertes verschiedenes Verhalten. Während die relative Schalldruckamplitude  $p/\sigma c$  im Nullpunkt mit wachsendem Membranradius periodisch zwischen den Werten Null und Zwei schwankt, nähert sich  $p/\sigma c$  im Randpunkt der Membran mit wachsendem Radius immer mehr

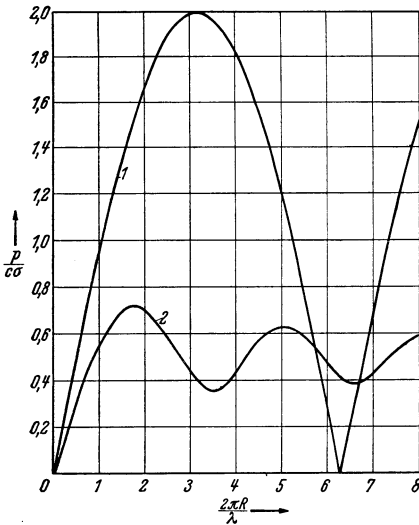


Abb. 53. Druckamplitude ( $p/\sigma c$ ) im Mittelpunkt (1) und am Rande (2) der kreisförmigen Kolbenmembran vom Radius  $R$ .

<sup>1</sup> McLACHLAN, W.: On the Acoustic and Inertia Pressure on a vibrating Circular Disk. Phil. Mag. Ser. 7 1932 S. 1022.

<sup>2</sup> Theory of BESSEL Functions. Cambridge: G. N. Watson 1922.

dem Wert  $\frac{1}{2}$ . Bei oberflächlicher Betrachtung ist man leicht geneigt, anzunehmen, daß bei einer Kolbenmembran sich unmittelbar vor der Membran ein Schallfeld ausbildet, das mit wachsendem Membranradius  $R$  (für  $R \gg \lambda$ ) dem Schallfeld einer ebenen Welle immer mehr entspricht. Das ist nach dem Vorhergesagten keineswegs der Fall. Ein ähnlicher Trugschluß liegt bekanntlich vor, wenn man eine ebene Welle senkrecht auf einen Schirm mit kreisrunder Öffnung fallen läßt und glaubt, daß man durch Verkleinern der Öffnung einen (immer enger begrenzten) akustischen „Strahl“ ausblenden kann, während in Wirklichkeit hinter dem Schirm mit abnehmendem Öffnungsradius  $\varrho$  ( $\varrho \ll \lambda$ ) eine immer mehr (halb)-kugelförmige Ausbreitung stattfindet.

Wir hatten früher gesehen, daß der Schalldruck *in großer Entfernung* einfach berechnet werden kann, wenn die Geschwindigkeitsamplitude  $w(\varrho)$  der kreisförmigen Membran in der Form gegeben ist:

$$w(\varrho) = a_0 + a_1 \left(1 - \frac{\varrho^2}{R^2}\right) + a_2 \left(1 - \frac{\varrho^2}{R^2}\right)^2 + \dots + a_n \left(1 - \frac{\varrho^2}{R^2}\right)^n.$$

Dabei ist  $\varrho$  der Abstand vom Mittelpunkt und  $R$  der Membranradius. Wir wollen nun zeigen, daß in dem einfachen Fall  $n = 1$  für Aufpunkte *auf der Mittelachse* und *am Rand* der Membran ebenfalls eine einfache Berechnung möglich ist. Wir setzen:

$$w(\varrho) = 1 - f \cdot \frac{\varrho^2}{R^2}. \quad (117)$$

Dann ist die entsprechende Druckamplitude  $p_f$  gegeben durch:

$$p_f = \frac{\rho}{c \sigma e^{i\omega t}} = \frac{i}{\lambda} \int_F \left(1 - f \frac{\varrho^2}{R^2}\right) \frac{e^{-ikr}}{r} dF.$$

Es genügt, die Druckamplituden  $p_0$  (für  $f = 0$ ) und  $p_1$  (für  $f = 1$ ) zu berechnen. Denn aus:

$$p_0 = \frac{i}{\lambda} \int_F \frac{e^{-ikr}}{r} dF \quad \text{und} \quad p_1 = \frac{i}{\lambda} \int_F \left(1 - \frac{\varrho^2}{R^2}\right) \frac{e^{-ikr}}{r} dF$$

folgt:

$$p_f = (1 - f) p_0 + f p_1.$$

Liegt der Aufpunkt *auf der Mittelachse* (Abb. 50) im Abstand  $z$  vom Mittelpunkt, so ist  $\varrho^2 = r^2 - z^2$ , und wegen  $dF = r dr d\varphi$  folgt:

$$p_1 = \frac{2\pi i}{\lambda} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \int_z^{\sqrt{R^2+z^2}} e^{-ikr} dr - \frac{2\pi i}{\lambda r^2} \int_z^{\sqrt{R^2+z^2}} r^2 e^{-ikr} dr.$$

Wir finden daher für den Aufpunkt *auf der Mittelachse*:

$$p_1 = e^{-ikz} \left\{ 1 + \frac{2}{k^2 R^2} + \frac{2ikz}{k^2 R^2} \right\} - e^{-ik\sqrt{R^2+z^2}} \frac{2}{k^2 R^2} \left\{ 1 + ik\sqrt{R^2+z^2} \right\} \quad (118)$$

und nach (110):

$$p_0 = e^{-ikz} - e^{-ik\sqrt{R^2+z^2}}.$$

Liegt der Aufpunkt auf dem Rande der Membran, so ist (Abb. 52) wegen

$$\varrho^2 = R^2 + \varrho_1^2 - 2\varrho_1 R \cos \varphi, \quad 1 - \frac{\varrho^2}{R^2} = \frac{2\varrho_1}{R} \cos \varphi - \frac{\varrho_1^2}{R^2},$$

$$p_1^{(r)} = \frac{2i}{\lambda} \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2R \cos \varphi} e^{-ikr} \left[ \frac{2\varrho_1 \cos \varphi}{R} - \frac{\varrho_1^2}{R^2} \right] d\varrho_1.$$

Führen wir die Integration nach  $\varrho_1$  aus, so folgt:

$$p_1^{(r)} = \frac{1}{kR} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left\{ \frac{1}{kR} - i \cos \varphi - e^{-i2kR \cos \varphi} \left( \frac{1}{kR} + i \cos \varphi \right) \right\} d\varphi,$$

$$p_1^{(r)} = \frac{1}{k^2 R^2} - \frac{2i}{\pi kR} - \frac{1}{k^2 R^2} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} e^{-i2kR \cos \varphi} d\varphi - \frac{i}{kR} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \varphi e^{-i2kR \cos \varphi} d\varphi.$$

Unter Benutzung der Beziehungen<sup>1</sup>:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} e^{-ix \cos \theta} d\theta = J_0(x) - iH_0(x),$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \theta e^{-ix \cos \theta} d\theta = \frac{2}{\pi} - H_1(x) - iJ_1(x)$$

folgt dann für den Aufpunkt *am Rande*:

$$p_1^{(r)} = \frac{1 - J_0(2kR)}{k^2 R^2} - \frac{J_1(2kR)}{kR} + i \left[ \frac{H_0(2kR)}{k^2 R^2} + \frac{H_1(2kR)}{kR} - \frac{4}{\pi} \right],$$

$$p_0^{(r)} = \frac{1 - J_0(2kR)}{2} + \frac{i}{2} H_0(2kR). \quad (119)$$

Dabei bedeuten  $J_0$  und  $J_1$  die BESSELSchen Funktionen,  $H_0$  und  $H_1$  die STRUVESchen Funktionen nullter und erster Ordnung. Mit Hilfe der vorliegenden Tabellen für  $J_0$ ,  $J_1$ ,  $H_0$ ,  $H_1$  macht die Berechnung keine Schwierigkeiten.

Der Schalldruckverlauf auf der Mittelachse ist im Fall  $kR = 10$  für  $w = 1 - f \cdot \varrho^2/\lambda^2$ , ( $f = 0, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{2}, \pm 1$ ) in der Abb. 55 und 56 dargestellt. Die entsprechenden Geschwindigkeitsamplituden  $w = 1 - f \cdot \varrho^2/R^2$

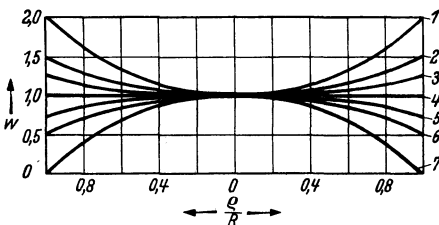


Abb. 54. Die Geschwindigkeitsamplituden  $w = 1 - f \cdot \varrho^2/R^2$  ( $f = 0, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{2}, \pm 1$ ).

( $f = 0, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{2}, \pm 1$ ) sind in Abb. 54 gezeichnet. Ferner ist der Schalldruckverlauf im Mittelpunkt und am Rande für  $w = 1 - \varrho^2/R^2$

<sup>1</sup> MC LACHLAN. W.: BESSEL Functions for Engineers, S. 167.

und  $w = 1 - \frac{1}{2} \rho^2 / R^2$  in Abhängigkeit von  $kR$  in den Abb. 57 und 58 zur Darstellung gebracht.

Diese beiden Fälle: Aufpunkt auf der Mittelsenkrechten und Aufpunkt auf dem Rand der kreisförmigen Kolbenmembran sind die einzigen, bei denen die Auswertung des Integrals allgemein möglich ist, d. h. auf bekannte Funktionen führt, die in Tabellen vorliegen.

Wenden wir uns jetzt der allgemeinen Berechnung des Schallfeldes einer kreisförmigen Kolbenmembran<sup>1</sup> zu, so wollen wir das Integral  $\int_F \frac{e^{-ikr}}{r} dF$  in seinen reellen und imaginären Anteil zerlegen.

Wir erhalten dadurch:

$$p = c \cdot \sigma \cdot w_0 e^{i\omega t} (p_a + i p_m), \quad (120)$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} p_a &= \frac{1}{\lambda} \int_F \frac{\sin kr}{r} dF, \\ p_m &= \frac{1}{\lambda} \int_F \frac{\cos kr}{r} dF \end{aligned} \right\} (121)$$

ist. Das ist deshalb zweckmäßig, weil die relativen Schalldruckkomponenten  $p_a$  und  $p_m$  ein wesentlich verschiedenes Verhalten zeigen. Ist beispielsweise die Wellenlänge so groß, daß  $2\pi r / \lambda \ll 1$ , so geht  $p_a$  gegen Null, d. h. es über-

<sup>1</sup> Elektr. Nachr.-Techn. Bd. 12 (1935) S. 16-30.

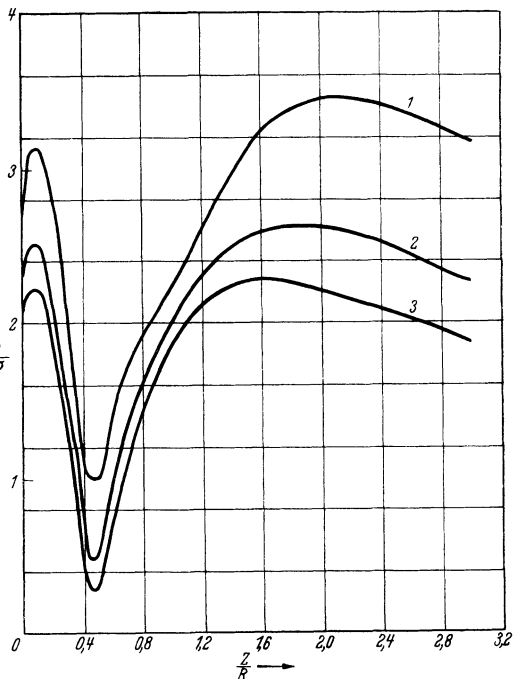


Abb. 55. Druckamplitude ( $p/c\sigma$ ) auf der Mittelachse für die Geschwindigkeitsamplitude  $w = 1 - f \cdot \rho^2 / R^2$   
1.  $f = -1$ ; 2.  $f = -\frac{1}{2}$ ; 3.  $f = -\frac{1}{4}$ .

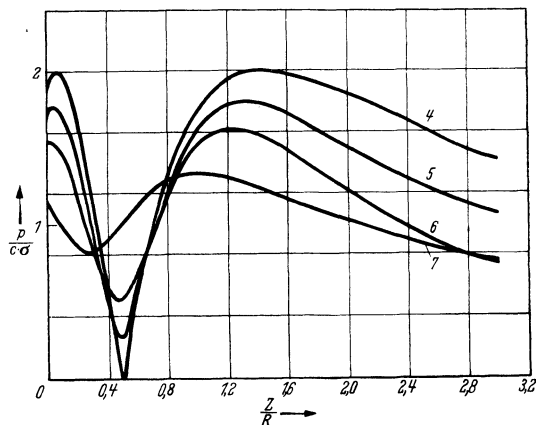


Abb. 56. Druckamplitude ( $p/c\sigma$ ) auf der Mittelachse für die Geschwindigkeitsamplitude  $w = 1 - f \cdot \rho^2 / R^2$ .  
4.  $f = 0$ , 5.  $f = \frac{1}{4}$ , 6.  $f = \frac{1}{2}$ , 7.  $f = 1$ .

wiegt die Komponente  $p_m$ , die mit der Schallgeschwindigkeitsamplitude  $w = w_0 e^{i\omega t}$  eine Phasenverschiebung von  $90^\circ$  besitzt. Physikalisch be-

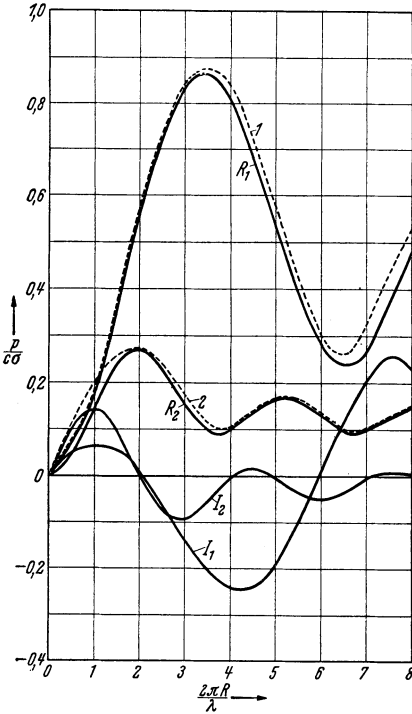


Abb. 57. Druckamplitude im Mittelpunkt (1) und im Randpunkt (2) bei der Schwingungsform  $w = 1 - \rho^2/R^2$  und die entsprechenden Komponenten ( $R_1, J_1$ ), ( $R_2, J_2$ ).

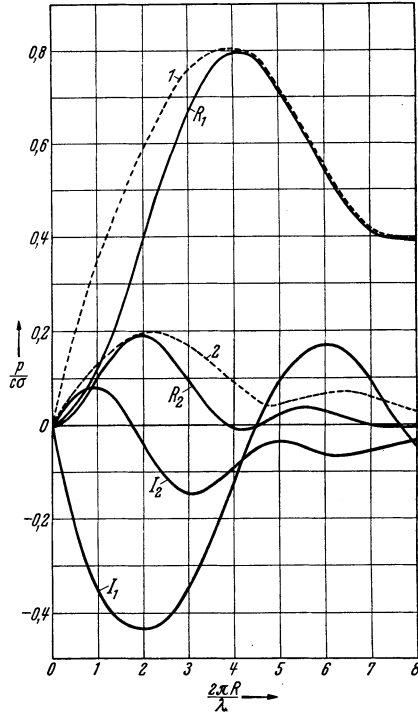


Abb. 58. Druckamplitude im Mittelpunkt (1) und im Randpunkt (2) bei der Schwingungsform  $w = 1 - \frac{1}{2} \rho^2/R^2$  mit den entsprechenden Komponenten ( $R_1, J_1$ ), ( $R_2, J_2$ ).

deutet dies, daß die Membran auf das Schallfeld fast wattlos arbeitet, so daß die Membran eine tote Masse hin und her bewegt, ohne praktisch Schall abzustrahlen.

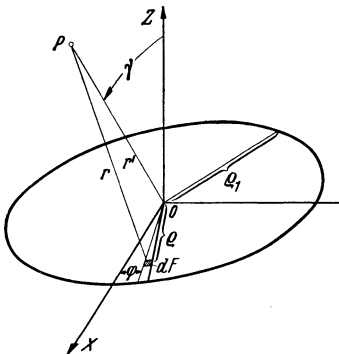


Abb. 59. Zur Berechnung der kreisförmigen Kolbenmembran.

Um die Integrale (121) auswerten zu können, müssen wir zunächst die veränderliche Größe  $r$  mit dem (durch seine Polarkoordinaten  $\varrho, \varphi$  bestimmten) entsprechenden Flächenelement in Beziehung setzen. Bezeichnen wir den Winkel, den die Aufpunktsgerade  $OP$  mit der  $z$ -Achse bildet, durch  $\gamma$ , den Abstand des Aufpunktes  $P$  von  $O$  mit  $r_1$  und von dem Flächenelement  $dF$  mit  $r$ , so ergibt sich:

$$r = \sqrt{r_1^2 + \varrho^2 - 2r_1\varrho \cos\varphi \sin\gamma}. \quad (122)$$

Dabei ist der Aufpunkt  $P$  in der Abb. 59 in der  $XZ$ -Ebene angenommen, was offenbar wegen der Symmetrieverhältnisse keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet. Die Integrale (121) nehmen dann die Form an:

$$p_a = \frac{1}{\lambda} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\varrho_1} \varrho d\varrho \frac{\sin kr}{r}, \quad p_m = \frac{1}{\lambda} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\varrho_1} \varrho d\varrho \frac{\cos kr}{r}, \quad (123)$$

wobei der Wert von  $r$  aus (122) eingesetzt gedacht ist. Da eine Integration in geschlossener Form allgemein nicht möglich erscheint, wird man durch Reihenentwicklung versuchen, den Integranden so umzuformen, daß die Integrationsvariablen getrennt auftreten. Das gelingt durch eine Reihenentwicklung, deren Glieder durch Kugelfunktionen und durch BESSELSche Funktionen gebildet werden. Und zwar gelten folgende Beziehungen<sup>1</sup>:

$$\frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \vartheta}}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \vartheta}} = \frac{1}{x \cdot y} \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) S_n(x) S_n(y) P_n(\cos \vartheta), \quad (124)$$

$$\frac{\cos \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \vartheta}}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \vartheta}} = \begin{cases} \frac{1}{xy} \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) S_n(x) C_n(y) P_n(\cos \vartheta), & (x \leq y) \quad (125) \\ \frac{1}{xy} \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) C_n(x) S_n(y) P_n(\cos \vartheta). & (x \geq y) \quad (126) \end{cases}$$

Dabei ist  $P_n(\cos \vartheta)$  die LEGENDRESche Kugelfunktion und

$$S_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} x J_{n+\frac{1}{2}}(x), \quad C_n(x) = (-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{2}} x J_{-n-\frac{1}{2}}(x), \quad (127)$$

wobei  $J$  die BESSELSchen Funktionen bedeuten. Diese Funktionen lassen sich für kleine  $n$  als rationale Funktionen von  $x$ ,  $\sin x$  und  $\cos x$  verhältnismäßig einfach darstellen. Es ist

$$\left. \begin{aligned} S_0(x) &= \sin x, & C_0(x) &= \cos x, \\ S_1(x) &= \frac{\sin x}{x} - \cos x, & C_1(x) &= \sin x + \frac{\cos x}{x}, \\ S_2(x) &= \left(\frac{3}{x^2} - 1\right) \sin x - \frac{3}{x} \cos x, & C_2(x) &= \frac{3}{x} \sin x + \left(\frac{3}{x^2} - 1\right) \cos x, \\ S_3(x) &= \left(\frac{15}{x^3} - \frac{6}{x}\right) \sin x - \left(\frac{15}{x^2} - 1\right) \cos x, & C_3(x) &= \left(\frac{15}{x^2} - 1\right) \sin x + \left(\frac{15}{x^3} - \frac{6}{x}\right) \cos x, \end{aligned} \right\} (128)$$

<sup>1</sup> WATSON, G. N.: Theory of BESSEL Functions, S. 366. Cambridge 1922.



wobei zwischen den  $S_n(x)$  und  $C_n(x)$  die wichtige Beziehung

$$S_n(x)C_{n+1}(x) - S_{n+1}(x)C_n(x) = 1 \quad (129)$$

besteht<sup>1</sup>.

Unter Verwendung der Reihen in (124, 125) und (126) können wir nun die Integrale (123) berechnen. Wir führen zunächst die Integration nach  $\varphi$  gliedweise aus. Dabei benutzen wir die aus der Theorie der Kugelfunktion bekannte Beziehung:

$$\int_0^{2\pi} P_{2n+1}(\cos\varphi \sin\gamma) d\varphi = 0, \quad \int_0^{2\pi} P_{2n}(\cos\varphi \sin\gamma) d\varphi = 2\pi P_{2n}(0) P_{2n}(\cos\gamma). \quad (130)$$

Daraus folgt, daß alle ungeraden Glieder fortfallen. Und es ergibt sich

$$p_a = \frac{1}{kr_1} \sum_{n=0}^{\infty} (4n+1) P_{2n}(0) P_{2n}(\cos\gamma) S_{2n}(kr_1) \int_0^{k\varrho_1} S_{2n}(x) dx, \quad (131)$$

$$p_m = \frac{1}{kr_1} \sum_{n=0}^{\infty} (4n+1) P_{2n}(0) P_{2n}(\cos\gamma) C_{2n}(kr_1) \int_0^{k\varrho_1} S_{2n}(x) dx. \quad (132)$$

Diese gliedweisen Integrationen sind erlaubt, so lange die Reihen (124) und (125) gleichmäßig konvergent sind. Während dies für (124) stets der Fall ist, gilt dies für (125) nur für  $x \leq y$ . Das heißt: Während die Entwicklung (131) ohne jede Einschränkung, d. h. für beliebige Lagen des Aufpunktes gilt, hat (132) nur Gültigkeit, wenn der *Aufpunktsabstand größer als der Membranradius* ist. Für die in der Nähe der Membran liegenden Aufpunkte müssen wir eine andere Entwicklung für  $p_m$  suchen. Um im Fall  $r_1 < \varrho_1$  die Berechnung durchzuführen, denken wir uns die Membran vom Radius  $\varrho_1$  in eine kleinere kreisförmige vom Radius  $r_1$  und eine kreisringförmige von der Breite  $\varrho_1 - r_1$  zerlegt. Bezeichnen wir die beiden entstandenen Bereiche mit  $F_1$  und  $F_2$ , so zerfällt das Integral über die Fläche  $F$  in zwei Summanden. Für den ersten Summand gilt die Entwicklung (132), nur tritt an Stelle der oberen Integrationsgrenze  $k\varrho_1$  jetzt  $kr_1$ . Für das Gebiet  $F_2$  ist jetzt aber die Formel (126) anzuwenden, so daß für  $p_m$  bei einem *Aufpunktsabstand kleiner als der Membranradius* folgende Entwicklung gültig ist:

$$p_m = \frac{1}{kr_1} \sum_{n=0}^{\infty} (4n+1) P_{2n}(0) P_{2n}(\cos\gamma) \times \left[ C_{2n}(kr_1) \int_0^{kr_1} S_{2n}(x) dx + S_{2n}(kr_1) \int_{kr_1}^{k\varrho_1} C_{2n}(x) dx \right]. \quad (133)$$

Für die praktische Anwendung der Formeln ist die tabellarische Berechnung der Funktionen  $P_n$ ,  $S_n$ ,  $C_n$ ,  $\int_0^x S_{2n}(x) dx$ ,  $\int_0^x C_{2n}(x) dx$  erfor-

<sup>1</sup> NIELSEN, Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen. S. 23.

derlich. Für die Kugelfunktionen  $P_n(\cos\gamma)$  sind die Tabellen für die Werte  $n$  von 0 bis 20 und für  $\gamma = 0^\circ, 5^\circ \dots 90^\circ$  angegeben<sup>1</sup>. Die Funktionen  $S_n(x)$ ,  $C_n(x)$  liegen für die Werte von  $x$  kleiner als  $2^2$  und für die ganzzahligen Werte  $x = 1, 2, 3, \dots 10^3$ , und für die Zwischenwerte  $x = 2,2; 2,4; \dots 9,8^4$  berechnet vor. Die Tabellen für  $\int_0^x S_{2n}(x)dx$ ,  $\int_0^x C_{2n}(x)dx$  sind für  $n = 0, 1, 2, \dots 10$  und  $x = 1,1,25, 1,5 \dots 10$  im Anhang angegeben. Für die Berechnung der letzteren ist für kleine  $x$  die Reihenentwicklung nach  $x$  zweckmäßig. Diese ergibt sich ohne weiteres durch gliedweise Integration der bekannten Reihe für  $S_{2n}(x)$  und  $C_{2n}(x)$ . Und zwar folgt

$$\int_0^x S_{2n}(x)dx = \frac{x^{2n+2}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (4n+1)} \times \left( \frac{1}{2n+2} - \frac{x^2}{2(2n+4)(4n+3)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4 \cdot (2n+6)(4n+3)(4n+5)} - \dots \right), \quad (134)$$

$$\int_0^x C_{2n}(x)dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (4n-1)}{x^{2n-1}} \times \left( \frac{1}{2n-1} + \frac{x^2}{2(2n-3)(4n-1)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4 \cdot (2n-5)(4n-1)(4n-3)} + \dots \right). \quad (135)$$

Für größere  $x$  ist es zweckmäßiger, die Integralfunktionen auf die einfachen Funktionen  $S_n(x)$  und  $C_n(x)$  zurückzuführen. Dazu gehen wir aus von der Gleichung<sup>5</sup>:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^p J_{\nu-p}(x) = \Gamma_{(\nu+1)} \sum_{s=0}^p (-1)^s \frac{\binom{p}{s} \left(\frac{x}{2}\right)^s J_{\nu+s}(x)}{\Gamma_{(\nu+s-p+1)}}. \quad (136)$$

Setzen wir:  $\nu = -n - \frac{1}{2}$ ,  $p = n$ ,  $s = m$ , so erhalten wir:

$$\begin{aligned} (-1)^n x^{\frac{1}{2}} J_{-2n-\frac{1}{2}}(x) &= \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} (2n+1)(2n+3) \dots (4n-2m-1) x^{m-n+\frac{1}{2}} J_{m-n-\frac{1}{2}}(x). \end{aligned}$$

Daraus finden wir durch gliedweises Integrieren unter Berücksichtigung der Beziehung

$$\int x^{p+1} J_p(x) dx = x^{p+1} J_{p+1}(x)$$

<sup>1</sup> Phil. Trans. roy. Soc. Lond. Bd. 203 (1904) S. 100.

<sup>2</sup> Rep. Brit. Assoc. adv. Sci. 1916 S. 97—107; 1922 S. 263—270.

<sup>3</sup> Rep. Brit. Assoc. adv. Sci. 1914 S. 87—102.

<sup>4</sup> Elektr. Nachr.-Techn. Bd. 15 (1938) S. 73.

<sup>5</sup> NIELSEN, N.: Handbuch der Theorie der Zylinderfunktion, S. 269. Leipzig 1904.

die gewünschte Beziehung:

$$\begin{aligned} (-1)^n \int_0^x C_{2n}(x) dx &= S_0(x) + \binom{n}{1} (2n+1) \frac{C_0(x)}{x} \\ &\quad - \binom{n}{2} (2n+1)(2n+3) \frac{C_1(x)}{x^2} + \dots \\ &\quad - (-1)^n \binom{n}{n} (2n+1)(2n+3) \dots (4n-1) \frac{C_{n-1}(x)}{x^n}. \end{aligned} \quad (137)$$

Zur Bestimmung von  $\int_0^x S_{2n}(x) dx$  gehen wir aus von der Formel<sup>1</sup>;

$$\frac{J_\nu(x)}{p!} = \sum_{s=0}^p \frac{(-1)^{p-s}}{(p-s)!} \binom{\nu-p+s-1}{s} \left(\frac{2}{x}\right)^s J_{\nu-2p+s}(x)$$

und erhalten für:  $\nu = 2n + \frac{1}{2}$ ,  $p = n$ ,  $s = m$

$$J_{2n+\frac{1}{2}}(x) = n! \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!} \binom{n+\frac{1}{2}+m-1}{m} \left(\frac{2}{x}\right)^m J_{2m+\frac{1}{2}}(x);$$

daraus finden wir durch gliedweises Integrieren unter Berücksichtigung von:

$$\int_0^x x^{-(\nu+\frac{1}{2})+1} J_{\nu+1}(x) dx = -\frac{J_{\nu-\frac{1}{2}}(x)}{x^{\nu-\frac{1}{2}}}$$

die Beziehung:

$$\begin{aligned} (-1)^n \int_0^x S_{2n}(x) dx &= -C_0(x) + \binom{n}{1} (2n+1) \frac{S_0(x)}{x} \\ &\quad - \binom{n}{2} (2n+1)(2n+3) \frac{S_1(x)}{x^2} + \dots \\ &\quad - (-1)^n \binom{n}{n} (2n+1)(2n+3) \dots \frac{(4n-1) S_{n-1}(x)}{x^n} - K. \end{aligned} \quad (138)$$

Dabei ist die Konstante  $K$  so zu bestimmen, daß die rechte Seite von (138) für  $x = 0$  zur Null wird.

Wir erhalten dann wegen

$$C_0(0) = 1 \quad \text{und} \quad \frac{S_{m-1}(x)}{x^m} = \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2m-1} \quad (\text{für } x = 0)$$

den Wert von  $K$  durch die Gleichung:

$$\begin{aligned} K &= -1 + \binom{n}{1} (2n+1) - \binom{n}{2} \frac{(2n+1)(2n+3)}{1 \cdot 3} + \dots \\ &\quad + (-1)^n \binom{n}{n} \frac{(2n+1)(2n+3) \dots (4n-1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}. \end{aligned} \quad (139)$$

<sup>1</sup> Fußnote 5 auf S. 71.

Für den Ausdruck auf der rechten Seite finden wir den Wert:

$$(-1)^{n-1} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2n-1}.$$

Daher ergibt sich:

$$\begin{aligned} (-1)^n \int_0^x S_{2n}(x) dx &= (-1)^n \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2n-1} \\ &- C_0(x) + \binom{n}{1} (2n+1) \frac{S_0(x)}{x} - \binom{n}{2} (2n+1)(2n+3) \frac{S_1(x)}{x^2} + \cdots \\ &- (-1)^n \binom{n}{n} (2n+1)(2n+3) \cdots (4n-1) \frac{S_{n-1}(x)}{x^n}. \end{aligned} \quad (140)$$

Wir wollen nun zunächst die Formeln anwenden, wenn der Aufpunkt unmittelbar vor der Membran angenommen wird. Dann ist:

$$\cos \vartheta = \vartheta, \quad P_{2n}(1) = 1 \quad \text{und} \quad P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2n-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}$$

einzusetzen; der Membranradius  $\varrho_1$  soll für sechs verschiedene Werte durch:  $k\varrho_1 = 0,5; 2; 4; 6; 8; 10$  vorgegeben sein, während der Aufpunkt kontinuierlich jedesmal alle Werte von  $r_1 = 0$  bis  $r_1 = \varrho_1$  unmittelbar vor der Membran durchläuft. Bei der Berechnung machen wir davon Gebrauch, daß der von den inneren Flächenelementen ( $\varrho \leq r_1$ ) herrührende Anteil einfach nach Formel (115) gefunden wird, so daß wir für  $p_a$  und  $p_m$  nur noch den vom ringförmigen Bereich herrührenden Anteil:

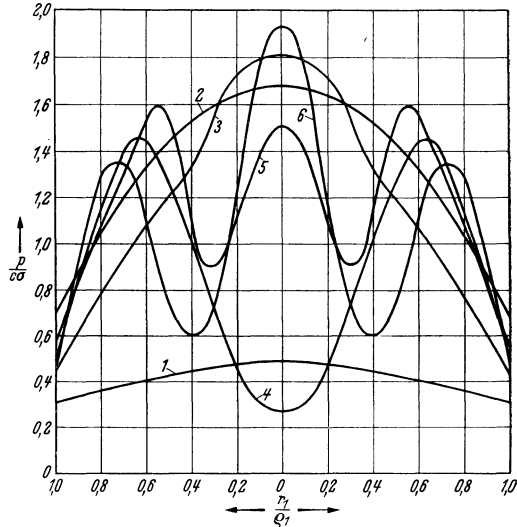


Abb. 60. Schalldruckamplitude ( $p/c\sigma$ ) unmittelbar vor der kreisförmigen Kolbenmembran (Radius  $\varrho_1$ ).  
 1.  $k\varrho_1 = 0,5$ , 2.  $k\varrho_1 = 2$ , 3.  $k\varrho_1 = 4$ , 4.  $k\varrho_1 = 6$   
 5.  $k\varrho_1 = 8$ , 6.  $k\varrho_1 = 10$ .

und 
$$\frac{1}{kr_1} \sum_{n=0}^{\infty} (4n+1) P_{2n}(0) P_{2n}(\vartheta) S_{2n}(kr_1) \int_{kr_1}^{k\varrho_1} S_{2n}(x) dx$$

$$\frac{1}{kr_1} \sum_{n=0}^{\infty} (4n+1) P_{2n}(0) P_{2n}(\vartheta) S_{2n}(kr_1) \int_{kr_1}^{k\varrho_1} C_{2n}(x) dx$$

hinzuzufügen haben.

Aus den beiden so erhaltenen Komponenten  $p_a$  und  $p_m$  ist dann  $p = \sqrt{p_a^2 + p_m^2}$  berechnet und als Kurve aufgetragen. Dabei ist als Abszisse  $r_1/\varrho_1$  gewählt, so daß die Abszisse 1 jedesmal dem Randpunkt der Membran entspricht (Abb. 60).

Man erkennt, daß nur für sehr kleine  $k\rho_1$  ( $k\rho_1 < \frac{1}{2}$ ) die Druckamplitude auf der ganzen Membranfläche einigermaßen konstant ist, daß dagegen mit größeren Werten von  $k\rho_1$  eine immer stärkere Welligkeit auftritt, wobei der Wert im Mittelpunkt kontinuierlich zwischen Null und Zwei hin- und herpendelt, während der Randwert immer weniger um den Wert  $\frac{1}{2}$  hin- und herschwankt.

Als Beispiel für die Berechnung bei beliebiger Lage des Aufpunktes soll der Gang der Rechnung für den Fall  $k\rho = 10$ ,  $kr = 6$  erläutert werden. Zunächst macht es keine Schwierigkeit die Größen

$$a_{2n} = (4n + 1) P_{2n}(0) S_{2n}(kr) \int_0^{k\rho} S_{2n}(x) dx$$

mit Hilfe der Tabellen im Anhang zu berechnen. Und zwar ergibt sich:

| $2n =$     | 0      | 2      | 4      | 6      | 8      | 10     |
|------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $a_{2n} =$ | -0,086 | +0,124 | +1,785 | -1,694 | +0,222 | -0,008 |

Wir finden daraus den Wert auf der Mittelachse ( $\gamma = 0$ ):

$$\sum_{2n=0}^{10} a_{2n} = +0,342.$$

Dieser Wert ist aber nach den früheren Ausführungen (S. 61) durch:  $\cos kr - \cos \sqrt{(kr)^2 + (k\rho)^2}$  gegeben. In der Tat ergibt sich

$$\cos 6 - \cos \sqrt{136} = 0,960 - 0,618 = +0,342.$$

Damit ist eine wichtige Kontrolle für die Richtigkeit der Koeffizienten  $a_{2n}$  gegeben. Ebenso berechnen wir die Koeffizienten  $b_{2n}$  für  $p_m = \sum b_{2n} P_{2n}(\cos \gamma)$  und erhalten folgende Tabelle:

| $2n =$   | 0      | 2      | 4      | 6      | 8      |
|--|--------|--------|--------|--------|--------|
| $(4n + 1) P_{2n}(0) \frac{C_{2n}(kr)}{kr} \int_0^{kr} S_{2n}(x) dx$    | +0,006 | +1,317 | +0,209 | -0,631 | +0,287 |
| $(4n + 1) P_{2n}(0) \frac{S_{2n}(kr)}{kr} \int_0^{k\rho} C_{2n}(x) dx$ | +0,012 | +0,093 | -1,727 | -0,421 | +0,640 |
| $b_{2n} =$   | +0,018 | +1,410 | -1,518 | -1,052 | +0,927 |
| $2n =$   | 10     | 12     | 14     | 16     | 18     |
| $(4n + 1) P_{2n}(0) \frac{C_{2n}(kr)}{kr} \int_0^{kr} S_{2n}(x) dx$    | -0,171 | +0,121 | -0,091 | +0,074 | -0,061 |
| $(4n + 1) P_{2n}(0) \frac{S_{2n}(kr)}{kr} \int_0^{k\rho} C_{2n}(x) dx$ | -0,295 | +0,174 | -0,122 | +0,093 | -0,076 |
| $b_{2n} =$   | -0,466 | +0,295 | -0,213 | +0,167 | -0,137 |

Gegenüber den Koeffizienten  $a_{2n}$  sind hier die letzten Glieder der beiden Reihen etwa um eine Zehnerpotenz größer, so daß wir eine größere Abweichung der Summe  $\sum b_{2n}$  von dem wahren Wert  $p_m$  zu erwarten haben. Um eine bessere Kontrolle mit den direkt zu findenden Werten:

$$\sin \sqrt{2(kr)^2} - \sin kr = \sum_{n=0}^{\infty} (4n+1) P_{2n}(0) \frac{C_{2n}(kr)}{kr} \int_0^{kr} S_{2n}(x) dx$$

und

$$\sin \sqrt{(kr)^2 + (k\rho)^2} - \sin \sqrt{2(kr)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (4n+1) P_{2n}(0) \frac{S_{2n}(kr)}{kr} \int_{kr}^{k\rho} C_{2n}(x) dx$$

zu erhalten, beachten wir, daß die Summanden der beiden Reihen in der Tabelle für größeres  $n$  immer weniger um einen Mittelwert oszillieren. Dem können wir dadurch Rechnung tragen, daß wir in beiden Reihen das letzte Glied durch 2 dividieren, also an Stelle  $-0,061$  den Wert  $-0,031$  und an Stelle  $-0,076$  den Wert  $-0,038$  setzen. Bezeichnen wir die sich so ergebende Summe mit  $\sum_1$  und  $\sum_2$ , so erhalten wir  $\sum_1 = +1,091$  und  $\sum_2 = -1,591$ , während die wahren Werte:

$$\sin \sqrt{72} - \sin 6 = 1,087$$

und

$$\sin \sqrt{136} - \sin \sqrt{72} = -1,595$$

ergeben, so daß sich hier eine ausreichende Übereinstimmung ergibt. Freilich kann dieser Kunstgriff allgemein ( $\gamma \neq 0$ ) für die Berechnung von  $p_m = \sum b_{2n} P_{2n}(\cos \gamma)$  nicht angewandt werden, da hier wegen des Faktors  $P_{2n}(\cos \gamma)$  keine *regelmäßigen* Oszillationen mehr vorliegen. Trotzdem wird man auch hier mit einer Abweichung von höchstens 10% vom wahren Wert rechnen können. Diese Genauigkeit ist aber für akustische Berechnungen im allgemeinen als völlig ausreichend anzusehen. Unter Verwendung der Tafeln für die Kugelfunktionen werden dann die Größen  $a_{2n} \cdot P_{2n}(\cos \gamma)$  und  $b_{2n} \cdot P_{2n}(\cos \gamma)$  für  $\gamma = 0^\circ, 5^\circ, 10^\circ$  usw. gefunden. So ergibt sich die folgende Tabelle. (Dabei rühren die für  $p_a$  und  $p_m$  angegebenen Werte von der ursprünglich auf 4 Dezimalen angestellten Rechnung her. Daher

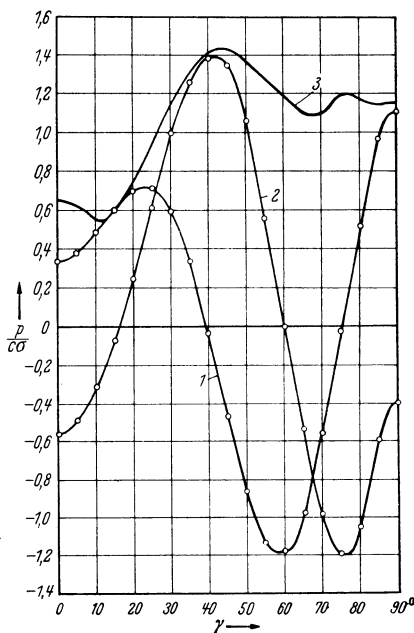


Abb. 61. Schalldruckamplitude ( $p/c\sigma$ ) der kreisförmigen Kolbenmembran bei dem Radius  $\rho_1$  ( $k\rho_1 = 10$ ) und konstantem Aufpunktsabstand  $r$  ( $kr = 6$ ).

| $2n$    | $\gamma = 0^\circ$ | $\gamma = 5^\circ$ | $\gamma = 10^\circ$ | $\gamma = 15^\circ$ | $\gamma = 20^\circ$ | $\gamma = 25^\circ$ | $\gamma = 30^\circ$ | $\gamma = 35^\circ$ | $\gamma = 40^\circ$ | $\gamma = 45^\circ$ |
|---------|--------------------|--------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| 0       | -0,086             | -0,086             | -0,086              | -0,086              | -0,086              | -0,086              | -0,086              | -0,086              | -0,086              | -0,086              |
| 2       | +0,124             | +0,122             | +0,118              | +0,111              | +0,102              | +0,093              | +0,077              | +0,063              | +0,047              | +0,031              |
| 4       | +1,785             | +1,717             | +1,539              | +1,222              | +0,847              | +0,440              | +0,042              | -0,305              | -0,569              | -0,725              |
| 6       | -1,694             | -1,560             | -1,191              | -0,675              | -0,122              | +0,345              | +0,634              | +0,695              | +0,548              | +0,251              |
| 8       | +0,222             | +0,193             | +0,116              | +0,021              | -0,056              | -0,090              | -0,075              | -0,026              | +0,031              | +0,066              |
| 10      | -0,008             | -0,007             | -0,003              | +0,001              | +0,003              | +0,003              | -0,001              | -0,002              | -0,002              | -0,001              |
| $p_a =$ | +0,342             | +0,379             | +0,493              | +0,597              | +0,688              | +0,705              | +0,593              | +0,339              | -0,031              | -0,463              |

| $2n$    | $\gamma = 50^\circ$ | $\gamma = 55^\circ$ | $\gamma = 60^\circ$ | $\gamma = 65^\circ$ | $\gamma = 70^\circ$ | $\gamma = 75^\circ$ | $\gamma = 80^\circ$ | $\gamma = 85^\circ$ | $\gamma = 90^\circ$ |
|---------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| 0       | -0,086              | -0,086              | -0,086              | -0,086              | -0,086              | -0,086              | -0,086              | -0,086              | -0,086              |
| 2       | +0,015              | -0,001              | -0,016              | -0,029              | -0,040              | -0,049              | -0,056              | -0,064              | -0,062              |
| 4       | -0,762              | -0,686              | -0,516              | -0,277              | -0,007              | +0,256              | +0,474              | +0,618              | +0,669              |
| 6       | -0,095              | -0,389              | -0,548              | -0,531              | -0,354              | -0,073              | +0,223              | +0,446              | +0,529              |
| 8       | +0,065              | +0,032              | -0,016              | -0,053              | -0,062              | -0,038              | +0,005              | +0,045              | +0,061              |
| 10      | +0,001              | +0,002              | +0,002              | —                   | -0,002              | -0,002              | -0,001              | +0,001              | +0,002              |
| $p_a =$ | -0,862              | -1,128              | -1,179              | -0,976              | -0,551              | -0,008              | +0,559              | +0,960              | +1,115              |

| $2n$    | $\gamma = 0^\circ$ | $\gamma = 5^\circ$ | $\gamma = 10^\circ$ | $\gamma = 15^\circ$ | $\gamma = 20^\circ$ | $\gamma = 25^\circ$ | $\gamma = 30^\circ$ | $\gamma = 35^\circ$ | $\gamma = 40^\circ$ | $\gamma = 45^\circ$ |
|---------|--------------------|--------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| 0       | +0,019             | +0,019             | +0,019              | +0,019              | +0,019              | +0,019              | +0,019              | +0,019              | +0,019              | +0,019              |
| 2       | +1,410             | +1,393             | +1,345              | +1,265              | +1,160              | +1,030              | +0,880              | +0,714              | +0,535              | +0,355              |
| 4       | -1,518             | +1,460             | -1,293              | -1,038              | -0,721              | -0,375              | -0,035              | +0,270              | +0,484              | +0,616              |
| 6       | -1,052             | -0,968             | -0,740              | -0,418              | -0,075              | +0,214              | +0,393              | +0,432              | +0,340              | +0,156              |
| 8       | +0,927             | +0,804             | +0,484              | +0,089              | -0,234              | -0,376              | -0,314              | -0,107              | +0,129              | +0,276              |
| 10      | -0,466             | -0,373             | -0,149              | +0,077              | +0,187              | +0,142              | +0,003              | -0,118              | -0,138              | -0,054              |
| 12      | +0,295             | +0,213             | +0,035              | -0,100              | -0,104              | -0,007              | +0,080              | +0,074              | -0,006              | -0,073              |
| 14      | -0,214             | -0,137             | +0,014              | +0,086              | +0,034              | -0,050              | -0,055              | +0,012              | +0,055              | +0,022              |
| 16      | +0,167             | +0,091             | -0,036              | -0,060              | +0,013              | +0,056              | +0,001              | -0,043              | -0,011              | +0,036              |
| 18      | -0,137             | -0,061             | +0,045              | +0,031              | -0,035              | -0,021              | +0,031              | +0,016              | -0,028              | -0,012              |
| $p_m =$ | -0,569             | -0,479             | -0,276              | -0,049              | +0,244              | +0,626              | +1,003              | +1,269              | +1,379              | +1,341              |

| $2n$    | $\gamma = 50^\circ$ | $\gamma = 55^\circ$ | $\gamma = 60^\circ$ | $\gamma = 65^\circ$ | $\gamma = 70^\circ$ | $\gamma = 75^\circ$ | $\gamma = 80^\circ$ | $\gamma = 85^\circ$ | $\gamma = 90^\circ$ |
|---------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| 0       | +0,019              | +0,019              | +0,019              | +0,019              | +0,019              | +0,019              | +0,019              | +0,019              | +0,019              |
| 2       | +0,169              | -0,009              | -0,176              | -0,327              | -0,457              | -0,564              | -0,641              | -0,688              | -0,705              |
| 4       | +0,651              | +0,584              | +0,439              | +0,235              | +0,606              | -0,217              | -0,408              | -0,526              | -0,569              |
| 6       | -0,059              | -0,242              | -0,339              | -0,330              | -0,220              | -0,045              | +0,139              | +0,278              | +0,329              |
| 8       | +0,274              | +0,132              | -0,068              | -0,224              | -0,258              | -0,158              | +0,022              | +0,187              | +0,253              |
| 10      | +0,064              | +0,125              | +0,088              | -0,015              | -0,102              | -0,108              | -0,030              | +0,070              | +0,114              |
| 12      | -0,059              | +0,015              | +0,069              | +0,047              | -0,623              | -0,067              | -0,039              | +0,031              | +0,066              |
| 14      | -0,039              | -0,042              | +0,012              | +0,047              | +0,016              | -0,036              | -0,037              | +0,013              | +0,045              |
| 16      | +0,019              | -0,029              | -0,025              | +0,021              | +0,029              | -0,013              | -0,032              | +0,004              | +0,033              |
| 18      | +0,027              | +0,009              | -0,026              | -0,006              | +0,026              | +0,003              | -0,025              | -0,001              | +0,025              |
| $p_m =$ | +1,066              | +0,564              | -0,007              | -0,533              | -0,964              | -1,186              | -1,032              | -0,593              | -0,393              |

weichen an einzelnen Stellen die  $p_a$  und  $p_m$  von den Summe der darüber stehenden Zahlen in der letzten Dezimale ab).

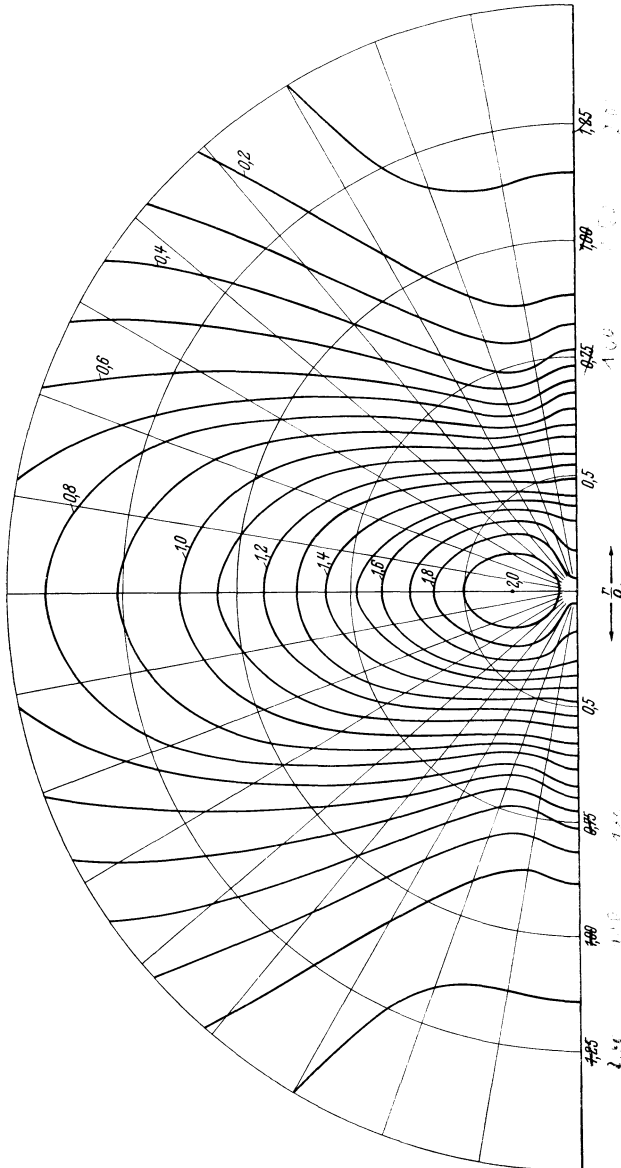


Abb. 62. Schallfeld ( $p/c\sigma$ ) in der Umgebung der kreisförmigen Kolbenmembran ( $\alpha_1 = 4$ ).

In der Abb. 61 sind die beiden Komponenten  $p_a$  und  $p_m$  zunächst einzeln dargestellt, da durch die stetige Aufeinanderfolge der berechneten Werte eine wertvolle Kontrolle für die Richtigkeit der Rechnung



gegeben ist. Schließlich ergibt sich durch geometrische Addition der entsprechenden Werte von  $p_a$  und  $p_m$  der vollständige Verlauf der relativen Schalldruckamplitude  $p = \sqrt{p_a^2 + p_m^2}$  (s. Abb. 61).

Auf diese Weise wurden für 3 Kolbenmembranen, deren Radien durch  $\frac{2\pi a_1}{\lambda} = 4, 6, 10$  gegeben waren, für eine so große Anzahl von Punkten des Nahfeldes die relativen Schalldruckamplituden  $\sqrt{p_a^2 + p_m^2}$

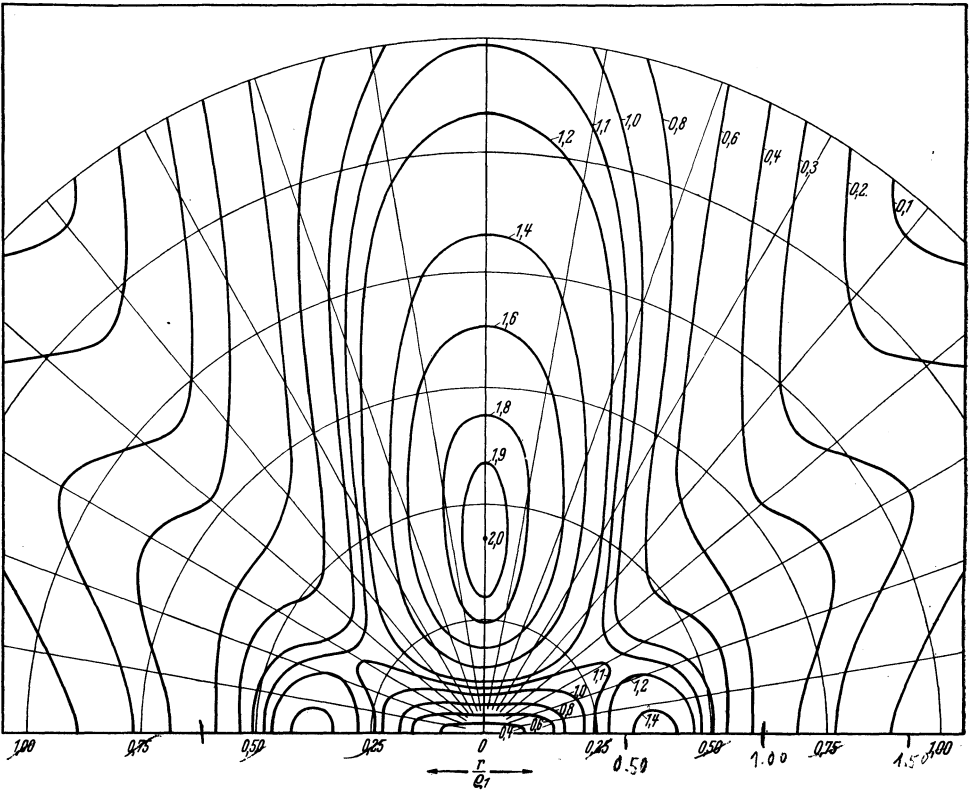


Abb. 63. Schallfeld ( $p/c_0$ ) in der Umgebung der kreisförmigen Kolbenmembran ( $k_{01} = 6$ ).

berechnet, daß durch Interpolation die Kurven konstanter Schalldruckamplituden eingezeichnet werden konnten. Das Ergebnis ist in den Abb. 62 bis 64 dargestellt. Dabei bedeuten die auf der horizontalen Achse angeschriebenen Zahlen die Werte  $r/a_1$ , so daß auf dem Einheitshalbkreis die Punkte liegen, welche um den Membranradius vom Membranzentrum entfernt sind. Man erkennt, daß der wesentliche Charakter des Nahfeldes durch die Lage der Null- und Zweiwerte (die sich nur auf der Mittelachse finden) bestimmt wird. Betrachten wir zunächst den Fall  $k_{01} = 6$ , so sehen wir, daß im Mittelpunkt der Membran die

Amplitude annähernd den Wert Null hat, auf der Mittelachse mit zunehmendem Abstand erst schneller und dann langsamer zum Punkt Zwei ansteigt und von da ab sehr allmählich abfällt. Außerhalb der Mittelachse liegen in der Höhe des Nullpunktes noch zwei Gipfel, die durch die Höhenkreise 1,4 gekennzeichnet sind. Außerhalb dieser Gipfel findet mit größerem Radius ein gleichmäßiger Abfall statt. Be-

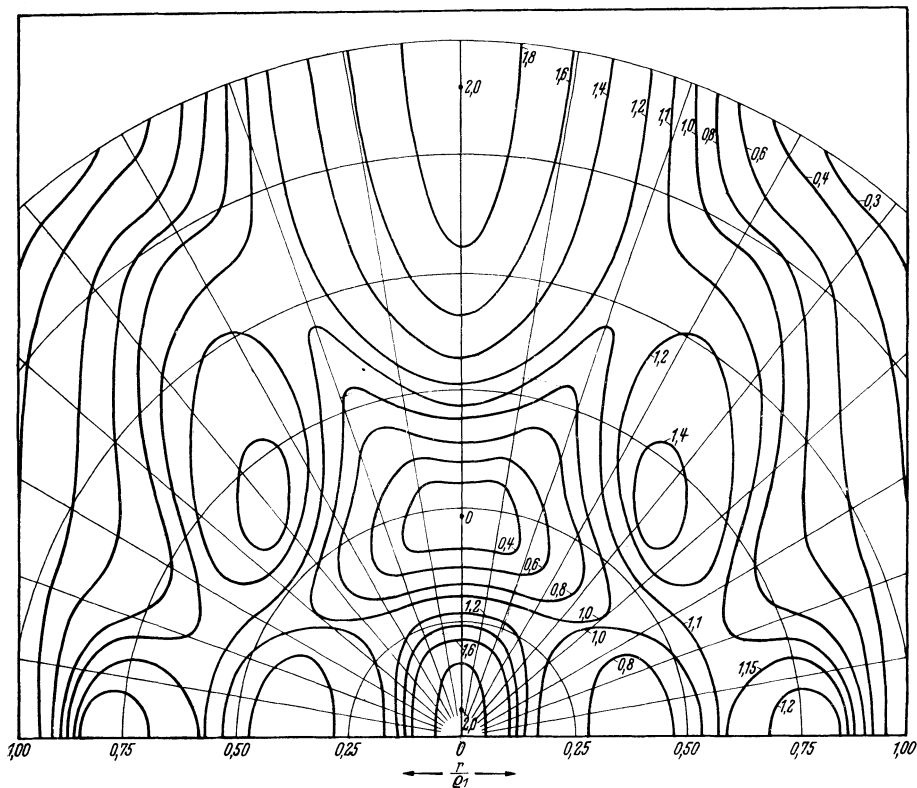


Abb. 64. Schallfeld ( $p/c\sigma$ ) in der Umgebung der kreisförmigen Kolbenmembran ( $k\rho_1 = 10$ ).

trachten wir nun zum Vergleich das Feld für  $k\rho_1 = 10$ , so ergibt sich eine auffallende Ähnlichkeit der Konfiguration des oberen Teiles dieses Schallfeldes mit dem vorigen. Denken wir uns durch den Nullwert auf der Mittelachse eine horizontale Gerade gezogen, so schneidet diese das Feld in zwei Teile, wobei der obere Teil außerordentlich ähnlich dem Gesamtfeld für  $k\rho_1 = 6$  ist, wie es in den Abb. 63 dargestellt ist. Der untere Teil des Feldes  $k\rho_1 = 10$  ist wesentlich verschieden, indem jetzt rechts und links von dem Zweipunkte je ein Minimum und ein Maximum neu in Erscheinung getreten ist.

Lassen wir nun den Radius der Kolbenmembran stetig weiter wachsen, so wissen wir (aus der einfachen Formel für die Punkte der Mittelachse), daß die Zwei- und Nullwerte immer zahlreicher werden und weiter nach oben wandern, wobei immer neue Null- und Zweiwerte im Nullpunkt der Membran entstehen. Nach dem oben Ausgeführten werden wir aber darüber hinaus zu erwarten haben, daß mit den nach oben wandernden Null- und Zweipunkten der Mittelachse auch die rechts und links liegenden Kurven konstanten Schalldruckes einfach mit nach oben wandern, ohne im wesentlichen ihren Charakter zu ändern. Wenn wir eine Membran mit beliebig großem Radius haben und markieren uns auf der Mittelachse die beiden letzten Zweiwerte der Amplitude, so werden wir erwarten können, daß das zugehörige Feld, welches sich zwischen den parallel zur Membran durch diese beiden Zweipunkte gelegten Ebenen befindet, in seinem Charakter mit dem in Abb. 64 dargestellten Feld übereinstimmt. Im übrigen wird man nach der Abb. 64 vermuten, daß wenn man von irgendeinem Zweipunkt der Mittelachse in vertikaler Richtung wandert, man ebenso viele Extremwerte passiert, als wenn man vom selben Zweipunkt in horizontaler Richtung wandert.

### Dritter Teil.

## Das Schallfeld des Kugelstrahlers.

### 5. Der einfache Kugelstrahler bestimmter Ordnung.

Bei den bisher behandelten Strahlern war eine wesentliche Voraussetzung die Existenz einer schallharten, starren, unendlichen, ebenen Wand. In der Nulllage fiel die strahlende Fläche mit dieser Wand zusammen. Die Berechnung des Strahlungsvorganges war dabei durch die Berechnung eines Integrals über die strahlende Fläche gegeben. Bei den in den folgenden Kapiteln behandelten Aufgaben bildet die strahlende Fläche den Teil einer *schallharten, starren Kugel* von bestimmtem Radius. Hier liegt eine allgemeinere Aufgabe vor, da abgesehen von der Amplitude und der Ausdehnung der strahlenden Fläche, auch die Ausdehnung der starren Wand verändert werden kann. Während früher z. B. bei der kreisförmigen Kolbenmembran *eine* charakteristische Funktion  $\left(2 \frac{J_1(x)}{x}, x = \frac{2\pi r}{\lambda} \sin \gamma\right)$  genügte, um das Schallfeld bei beliebiger Aufpunktsglage in großer Entfernung und beliebiger Membrangröße (im Verhältnis zu  $\lambda$ ) vollständig zu übersehen, ist dies jetzt nicht mehr möglich. Andererseits gibt es jetzt ganz bestimmte Verteilungen der Geschwindigkeitsamplitude, für die die Lösung denkbar einfach wird. Dabei ist besonders wichtig, daß auch die Berechnung des Nahfeldes keine Schwierigkeit macht. Diese einfache Lösung liegt nun vor, wenn

die Geschwindigkeitsamplitude durch *eine* Kugelfunktion bestimmter Ordnung vorgegeben ist. Diese zunächst gekünstelt erscheinende Annahme der Geschwindigkeitsverteilung findet dann alsbald ihre Berechtigung in der Tatsache, daß eine beliebig vorgegebene Geschwindigkeitsverteilung allgemein auf die durch eine Kugelfunktion gegebene zurückgeführt werden kann. Bei der Berechnung praktischer Aufgaben werden wir uns auf solche Vorgänge beschränken, die rotationssymmetrisch zu einer durch den Mittelpunkt der Kugel gehenden Achse sind. Die entsprechenden Kugelfunktionen sind dann durch die bekannten LEGENDRE'schen Funktionen

$P_n(\mu)$ ,  $\mu = \cos \gamma$   $\left[ P_0(\mu) = 1, P_1(\mu) = \mu, P_2(\mu) = \frac{1 \cdot 3}{2!} \left( \mu^2 - \frac{1}{3} \right) \text{ usw.} \right]$  gegeben.

Unter einem Kugelstrahler *nullter* Ordnung verstehen wir eine pulsierende Kugel, bei der die einzelnen Elemente der Oberfläche mit konstanten Geschwindigkeitsamplituden komphas nach außen und nach innen schwingen (s. Abb. 1a). Die Geschwindigkeit auf der Kugel ist gegeben durch:

$$w = w_0 e^{i\omega t}.$$

Bei einem Kugelradius  $r_0$  ist dann für einen Aufpunktsabstand  $r$  der Schalldruck vollständig bestimmt durch:

$$p_0 = p^{(0)} w_0 \frac{1 - i k r_0}{1 + k^2 r_0^2} e^{i[\omega t + \pi/2 - k(r - r_0)]}, \quad (141)$$

wobei zur Abkürzung  $p^{(0)} = \frac{c \cdot \sigma \cdot F}{2\lambda r}$  gesetzt ist.

Daraus folgt die Schalldruckamplitude:

$$p_0 = p^{(0)} w_0 \frac{1}{\sqrt{1 + k^2 r_0^2}} = \frac{c \sigma w_0}{k r} \frac{k^2 r_0^2}{\sqrt{1 + k^2 r_0^2}}. \quad (142)$$

Für  $k r_0 \ll 1$  erhalten wir die früher angegebene Formel:

$$p_0 = \frac{c \cdot \sigma \cdot F}{2\lambda \cdot r} w_0.$$

Die relative Schalldruckamplitude  $p_0/c\sigma w_0$  ist dann allgemein gegeben durch:

$$\frac{p_0}{c \sigma w_0} = \frac{1}{k r} \cdot \frac{k^2 r_0^2}{\sqrt{1 + k^2 r_0^2}}$$

und durch die beiden Größen  $k r$  und  $k r_0$  bestimmt. Die Kurven konstanter Schalldruckamplitude werden also im räumlichen Schallfeld sehr einfach durch konzentrische Kugeln dargestellt. Solange  $k r_0 \ll 1$  ist, wächst der Schalldruck quadratisch mit  $k r_0$ , solange  $k r_0 \gg 1$  ist, linear mit  $k r_0$ .

Die einfachen Kugelstrahler höherer ( $n$ ter) Ordnung<sup>1</sup> werden dadurch gekennzeichnet, daß der Verlauf der Geschwindigkeitsamplitude  $w_n$  gegeben ist durch:

$$w_n = w_n \cdot P_n(\mu) e^{i\omega t}.$$

Der Schalldruck  $p_n$  in dem durch die Polarkoordinaten  $r, \gamma$  bestimmten Aufpunkt ist dann allgemein gegeben durch:

$$p_n = p^{(0)} w_n \cdot e^{i[\omega t + \pi/2 - k(r-r_0)]} \cdot \frac{f_n(ikr)}{F_n(ikr_0)} P_n(\mu). \quad (143)$$

Dabei bedeutet:

$$F_n(ix) = (1 + ix)f_n(ix) - ix f'_n(ix) \quad (144)$$

und

$$f_n(ix) = 1 + \frac{n(n+1)}{2ix} + \frac{(n-1)(n)(n+1)(n+2)}{2 \cdot 4 (ix)^2} + \dots + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n (ix)^n}. \quad (145)$$

Es empfiehlt sich an Stelle  $F_n(ix)$  und  $f_n(ix)$  die durch (127) (S. 69) definierten BESSELSchen Funktionen  $S_n(x)$  und  $C_n(x)$  einzuführen. Und zwar bestehen die Beziehungen:

$$i^{n+1} e^{-ix} f_n(ix) = S_n(x) + i C_n(x),$$

$$i^{n+1} e^{-ix} F_n(ix) = x S_{n+1}(x) - n S_n(x) + i[x C_{n+1}(x) - n C_n(x)].$$

Dann erhalten wir:

$$p_n = p^{(0)} \cdot w_n e^{i(\omega t + \pi/2)} \frac{S_n(kr) + i C_n(kr)}{U_n(kr_0) + i V_n(kr_0)} \cdot P_n(\mu). \quad (146)$$

Dabei ist zur Abkürzung gesetzt:

$$U_n(x) = x S_{n+1}(x) - n S_n(x),$$

$$V_n(x) = x C_{n+1}(x) - n C_n(x). \quad (147)$$

Dann ist:

$$U_0(x) = \sin x - x \cos x,$$

$$V_0(x) = \cos x + x \sin x,$$

$$U_1(x) = (2/x - x) \sin x - 2 \cos x, \quad V_1(x) = 2 \sin x + (2/x - x) \cos x \text{ usw.}$$

Für den Kugelstrahler erster Ordnung ist die Geschwindigkeitsamplitude  $w_1$  gegeben durch:

$$w_1 = w_1 P_1(\mu) e^{i\omega t} = w_1 \cos \gamma \cdot e^{i\omega t}.$$

Dies entspricht der Bewegung einer als starres Ganzes hin- und herschwingenden Kugel. Der Schalldruck  $p_1$  ergibt sich hier durch:

$$\frac{p_1}{c \sigma \cdot w_1 \cdot e^{i[\omega t - k(r-r_0)]}} = \frac{k^2 r_0^2}{kr} \frac{i + \frac{1}{kr}}{2 + i\left(kr_0 - \frac{2}{kr_0}\right)} \cdot \cos \gamma$$

und die Schalldruckamplitude  $p_1$  durch:

$$\frac{p_1}{c \sigma w_1} = \frac{k^3 r_0^3}{\sqrt{4 + k^4 r_0^4}} \cdot \frac{1}{k^2 r^2} \sqrt{1 + k^2 r^2} \cos \gamma.$$

<sup>1</sup> RAYLEIGH: Theory of sound, § 323 u. ff.

Solange  $kr_0 \ll 1$  ist, wächst die Druckamplitude proportional mit  $k^3 r_0^3$ , solange  $kr_0 \gg 1$  ist, proportional mit  $kr_0$ . Bezeichnen wir die im Aufpunkt  $r = r_0$ ,  $\gamma = 0$  eintretende maximale Druckamplitude mit  $p_m$  und fragen nach den Kurven konstanter Druckamplitude:

$$p_1 = a p_m \quad (a = 1; 0,9; 0,8 \text{ usw.}),$$

so folgt:

$$\frac{p_1}{p_m} = \cos \gamma \cdot \frac{kr_0}{kr} \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{k^2 r^2}}{1 + \frac{1}{k^2 r_0^2}}} = a.$$

Wählen wir als Beispiel  $kr_0 = 1$ , so folgt für die Aufpunkte auf der Symmetrieachse ( $\gamma = 0$ ):

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{kr} \sqrt{1 + \frac{1}{k^2 r^2}}$$

und daraus:

$$kr = \frac{1}{2a} \sqrt{1 + \sqrt{1 + 8a^2}}.$$

Danach ergeben sich die Werte  $p_1/p_m$  auf der Mittelachse:

|               |      |      |      |      |      |      |      |      |      |   |
|---------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|---|
| $p_1/p_m =$   | 0,1  | 0,2  | 0,3  | 0,4  | 0,5  | 0,6  | 0,7  | 0,8  | 0,9  | 1 |
| für $r/r_0 =$ | 7,14 | 3,67 | 2,53 | 1,98 | 1,65 | 1,44 | 1,28 | 1,17 | 1,07 | 1 |

Denken wir uns dann die Kreise:

$$r = r_0, \quad r = 1,07 r_0, \quad r = 1,17 r_0, \quad r = 1,28 r_0 \text{ usw.}$$

beschrieben, so können wir auf ihnen durch Berechnung der  $\gamma$ -Werte leicht die Punkte für die verlangten Werte  $p_1/p_m$  angeben, z. B. auf dem Kreise  $r = 1,28 r_0$  für die Werte:

|  |     |               |               |               |               |               |               |
|--|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $p_1/p_m =$  | 0,7 | 0,6           | 0,5           | 0,4           | 0,3           | 0,2           | 0,1           |
| die zugehörigen $\gamma$ Werte durch $\cos \gamma =$ | 1   | $\frac{6}{7}$ | $\frac{5}{7}$ | $\frac{4}{7}$ | $\frac{3}{7}$ | $\frac{2}{7}$ | $\frac{1}{7}$ |

Als weiteres Beispiel geben wir die entsprechende Tabelle für  $kr_0 = 5$ :

|             |      |      |      |      |      |      |      |      |      |   |
|-------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|---|
| $p_1/p_m =$ | 0,1  | 0,2  | 0,3  | 0,4  | 0,5  | 0,6  | 0,7  | 0,8  | 0,9  | 1 |
| $r/r_0 =$   | 9,81 | 4,91 | 3,28 | 2,46 | 1,97 | 1,65 | 1,42 | 1,24 | 1,11 | 1 |

Für  $kr_0 \gg 1$  sind die entsprechenden Werte  $r/r_0$  einfach durch  $1/\frac{p_1}{p_m}$  gegeben, also:

|             |     |     |      |      |      |      |      |      |      |   |
|-------------|-----|-----|------|------|------|------|------|------|------|---|
| $p_1/p_m =$ | 0,1 | 0,2 | 0,3  | 0,4  | 0,5  | 0,6  | 0,7  | 0,8  | 0,9  | 1 |
| $r/r_0 =$   | 10  | 5   | 3,33 | 2,50 | 2,00 | 1,67 | 1,43 | 1,25 | 1,11 | 1 |

In der Abb. 65 sind die Kurven konstanten Schalldruckes für den Kugelstrahler erster Ordnung (mit  $kr_0 = 1$ ) gezeichnet. Infolge der zur Äquatorebene vorgegebenen antisymmetrischen Verteilung der Ge-

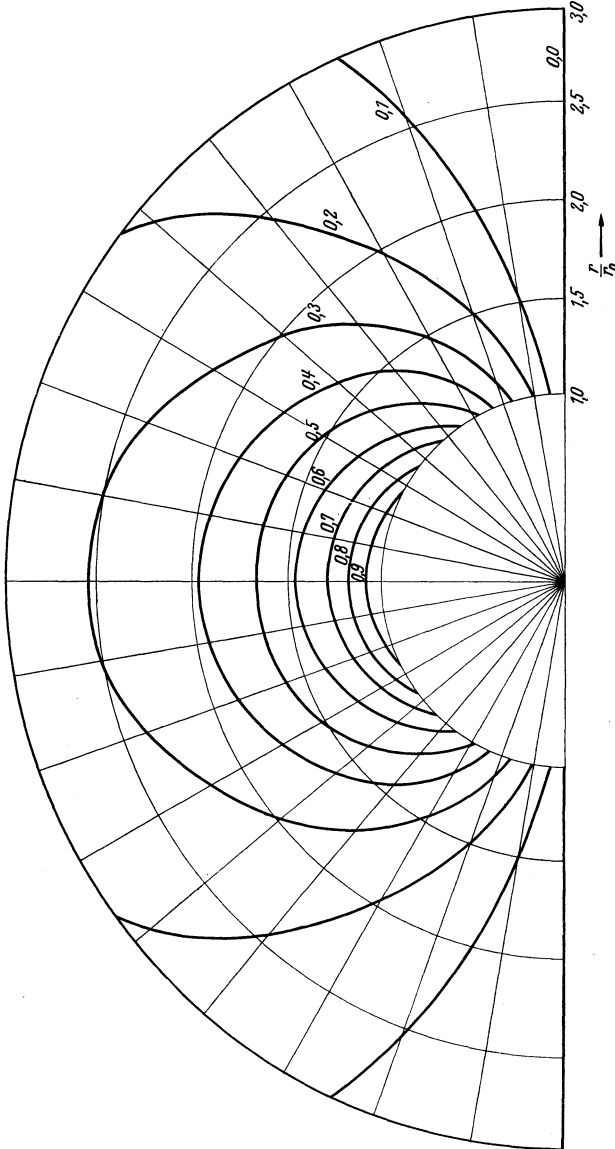


Abb. 65. Kurven konstanten Schalldruckes ( $p_1/p_m$ ) beim Strahler erster Ordnung.

schwindigkeitsamplitude ist der Charakter des Feldes gegenüber dem des Nullstrahlers wesentlich verschieden, da in der Äquatorebene jetzt die Druckamplitude gleich Null ist.

Für den Kugelstrahler  $n$ ter Ordnung ergibt sich aus (143) die Schalldruckamplitude  $p_n$  durch:

$$p_n = p^0 \cdot w_n \sqrt{\frac{S_n^2(kr) + C_n^2(kr)}{U_n^2(kr_0) + V_n^2(kr_0)}} P_n(\cos \gamma),$$

dabei ist:

| $n =$                 | 0         | 1             | 2                             | 3  |
|-----------------------|-----------|---------------|-------------------------------|--|
| $S_n^2(x) + C_n^2(x)$ | 1         | $1/x^2 + 1$   | $(1 - 3/x^2)^2 + (3/x)^2$     | $(1 - 15/x^2)^2 + (6/x + 15/x^3)^2$      |
| $U_n^2(x) + V_n^2(x)$ | $1 + x^2$ | $x^2 + 4/x^2$ | $(4 - 9/x^2)^2 + (x - 9/x)^2$ | $(7 - 60/x^2)^2 + (x - 27/x + 60/x^3)^2$ |

Bemerkenswert ist, daß der Richtungseinfluß, d. h. das Verhältnis der Schalldruckamplitude in einem beliebigen Aufpunkt  $(r, \gamma)$  zu der Druckamplitude im Aufpunkt im gleichen Abstand  $r$  auf der Symmetrieachse  $(r, \gamma = 0)$  unabhängig von  $r$  einfach durch  $P_n(\cos \gamma)$  gegeben ist, so daß der Verlauf des Schallfeldes sich ohne Schwierigkeit aus den Werten auf der Symmetrieachse ergibt. Insbesondere bestimmen die Knotenlinien  $P_n(\cos \gamma) = 0$ , in denen die Geschwindigkeitsamplitude auf der strahlenden Kugel gleich Null ist, ganz allgemein die Kegelflächen im Raum, für welche die Druckamplitude im Raum gleich Null ist.

Von einer Durchführung der Rechnung für Kugelstrahler höherer Ordnung soll abgesehen werden, da praktisch kaum Fälle vorkommen, in denen ein Strahler sich wie *ein* Kugelstrahler höherer Ordnung verhält.

## 6. Der zusammengesetzte Kugelstrahler.

Wichtig für das Folgende ist die Untersuchung des Schallfeldes, das durch eine Kombination einer Reihe von Kugelstrahlern verschiedener Ordnung hervorgerufen wird. Und zwar ergibt sich hier für eine Kugel mit dem Radius  $r_0$ , deren Geschwindigkeitsamplitude  $w$  durch eine Superposition von Kugelfunktionen dargestellt ist,

$$w = [A_0 P_0(\cos \gamma) + A_1 P_1(\cos \gamma) + \dots + A_n P_n(\cos \gamma)] e^{i\omega t} \quad (148)$$

der resultierende Schalldruck einfach durch die entsprechende Superposition des von den einzelnen Kugelstrahlern herrührenden Schalldruckes. Der Schalldruck  $p$  ist dann im Aufpunkt  $(r, \gamma)$  gegeben durch:

$$p = p^{(0)} e^{i(\omega t + \pi/2)} \sum_{m=0}^n \frac{S_m(kr) + iC_m(kr)}{U_m(kr_0) + iV_m(kr_0)} A_m P_m(\cos \gamma). \quad (149)$$

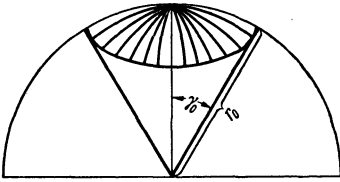
Dabei sind die  $A_m$  konstante Größen, die gegebenenfalls (um verschiedenen Phasen Rechnung zu tragen) komplex sein können. Die Hauptbedeutung dieses Satzes liegt aber in seiner Umkehrung. Im allgemeinen liegt die vorgegebene Geschwindigkeitsverteilung nicht in der Form (148) vor. Und das Wesentliche ist nun, daß nach dem Ent-



wicklungssatz der Kugelfunktionen eine (bis auf allgemeine Stetigkeitsforderungen) willkürliche Funktion auf der Kugeloberfläche in der Form (148) dargestellt werden kann.

Damit ist dann die Berechnung des Schallfeldes bei einer auf der Kugel willkürlich vorgegebenen Geschwindigkeitsamplitude möglich. Wir wollen dies an einem speziellen Beispiel erläutern.

Auf einer starren unbeweglichen Kugel soll für einen Teil (Kugelkappe), der durch  $0 \leq \gamma \leq \gamma_0$  bestimmt ist, eine konstante Geschwindigkeitsamplitude  $w = 1$  vorgeschrieben sein, während für den übrigen Teil  $w = 0$  ist (Abb. 66). Wir haben dann zunächst die Aufgabe, die Koeffizienten  $A_m$  der Funktion



$$w = A_0 P_0(\cos \gamma) + A_1 P_1(\cos \gamma) + \dots \quad (150)$$

zu bestimmen, daß

$$\begin{aligned} w &= 1 \quad \text{für } 0^\circ \leq \gamma \leq \gamma_0, \\ w &= 0 \quad \text{für } \gamma_0 < \gamma \leq 180^\circ \end{aligned}$$

Abb. 66. Die strahlende Kugelkappe.

ist. Dazu dienen die Orthogonalitätsbeziehungen der Kugelfunktionen:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} P_m(\mu) P_n(\mu) d\mu &= 0, & \text{für } m \neq n \\ \int_{-1}^{+1} P_n^2(\mu) d\mu &= \frac{2}{2n+1}. \end{aligned}$$

Indem wir die Gleichung (150) auf beiden Seiten mit  $P_n(\mu)$  multiplizieren und von  $-1$  bis  $+1$  integrieren, erhalten wir sofort:

$$\int_{-1}^{+1} w P_n(\mu) d\mu = A_n \int_{-1}^{+1} P_n^2(\mu) d\mu = A_n \cdot \frac{2}{2n+1}$$

und damit allgemein:

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} w P_n(\mu) d\mu.$$

In unserem Beispiel ist nun  $w$  nur im Bereich  $\cos \gamma_0 \leq \mu \leq 1$  von Null verschieden, so daß:

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \int_{\cos \gamma_0}^1 P_n(\mu) d\mu$$

ist. Wegen der bekannten Beziehung der Kugelfunktionen:

$$(2n+1)P_n(x) = \frac{d}{dx} [P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)] \quad (151)$$

folgt:

$$(2n+1) \int_x^1 P_n(\mu) d\mu = P_{n-1}(x) - P_{n+1}(x), \quad (n \geq 1) \quad (152)$$

$$\int_x^1 P_0(\mu) d\mu = 1 - x.$$

So ergibt sich die gesuchte Darstellung für  $w$ :

$$w = \frac{1 - \cos \gamma_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [P_{n-1}(\cos \gamma_0) - P_{n+1}(\cos \gamma_0)] P_n(\cos \gamma) \quad (153)$$

und damit auch der gesuchte Schalldruck nach (149) durch Einsetzen der gefundenen Werte für  $A_n$ .

Wählen wir als speziellen Fall eine strahlende Halbkugel mit konstanter Geschwindigkeitsamplitude  $w = 1$ , die durch eine starre Halbkugel, auf der  $w = 0$  ist, abgeschlossen ist, so haben wir  $\cos \gamma_0 = \cos 90^\circ = 0$  zu setzen. Wegen

$$P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}$$

und  $P_{2n+1}(0) = 0$  finden wir:

$$w = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} P_1(\cos \gamma) - \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{8} P_3(\cos \gamma) + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{11}{12} P_5(\cos \gamma) + \dots$$

und für eine strahlende Kugelkappe mit  $\gamma_0 = 60^\circ$  ist:

$$w = 0,250 + 0,563 P_1(\cos \gamma) + 0,469 P_2(\cos \gamma) + 0,082 P_3(\cos \gamma) \\ - 0,264 P_4(\cos \gamma) - 0,306 P_5(\cos \gamma) - 0,067 P_6(\cos \gamma) \\ + 0,198 P_7(\cos \gamma) + 0,245 P_8(\cos \gamma) + 0,057 P_9(\cos \gamma) - \dots$$

In den Abb. 67 und 68 sind die entsprechenden Annäherungskurven:

$$w^{(n)} = \sum_{m=0}^{m=n} a_m P_m(\cos \gamma)$$

dargestellt. Für  $\gamma = 0^\circ$  läßt sich die Abweichung der Annäherungsfunktion von dem Sollwert 1 angeben. Da wegen  $P_m(1) = 1$  in  $w^{(n)}$  sich alle Glieder außer den beiden ersten und den beiden letzten wegheben, so ist:

$$w_{(\gamma=0^\circ)}^{(n)} = 1 - \frac{P_{n-1}(\cos \gamma_0) + P_n(\cos \gamma_0)}{2}.$$

Im vorliegenden Fall  $\gamma_0 = 90^\circ$  ergibt sich also der Fehler gleich  $\frac{P_{n-1}(0) + P_n(0)}{2}$ , also für  $n = 0, 1, 2 \dots$  usw. gleich:  $+\frac{1}{2}$ ,  $-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ ,  $+\frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}$  usw.

Um einen besseren Anschluß an die frühere Formel zu bekommen, wollen wir zur Darstellung der durch  $\gamma_0$  bestimmten strahlenden Kugelkappe mit konstanter Geschwindigkeitsamplitude  $w$  die strahlende

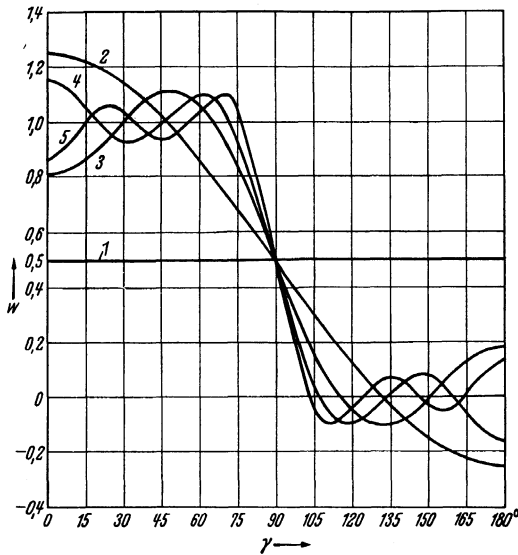


Abb. 67. Annäherung der Funktion  $w = \begin{cases} 1 & (0 \leq \gamma \leq 90^\circ) \\ 0 & (90^\circ < \gamma \leq 180^\circ) \end{cases}$  durch Kugelfunktionen.

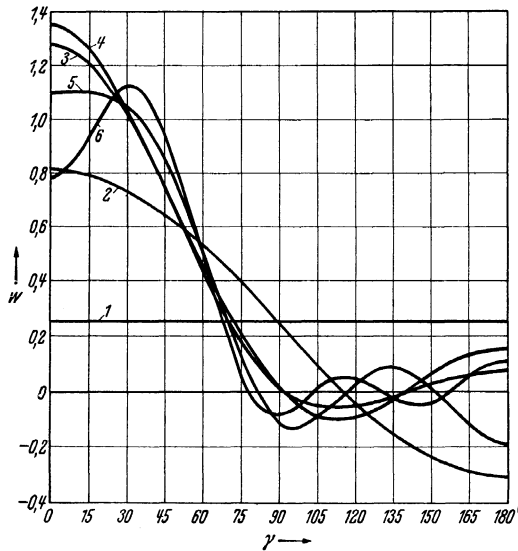


Abb. 68. Annäherung der Funktion  $w = \begin{cases} 1 & (0 \leq \gamma \leq 60^\circ) \\ 0 & (60^\circ < \gamma \leq 180^\circ) \end{cases}$  durch Kugelfunktionen.

Fläche  $F = 2\pi r_0^2(1 - \cos \gamma_0)$  einführen und den Schalldruck  $p$  in der Form schreiben:

$$p = c\sigma e^{i(\omega t + \pi/2)} \frac{F \cdot w}{2\lambda r} \cdot \mathfrak{P}(r, r_0, \mu, \mu_0).$$

Dabei ist:  $p_0 = \frac{c \cdot \sigma F \cdot w}{2\lambda r}$  die Druckamplitude, wenn die Dimensionen des Strahlers klein zur Wellenlänge sind und:

$$\mathfrak{P}(r, r_0, \mu, \mu_0) = \frac{S_0(kr) + iC_0(kr)}{U_0(kr_0) + iV_0(kr_0)} + \frac{1}{1 - \mu_0} \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\mu) [P_{n-1}(\mu_0) - P_{n+1}(\mu_0)] \frac{S_n(kr) + iC_n(kr)}{U_n(kr_0) + iV_n(kr_0)}. \quad (154)$$

Ein praktisch wichtiger Fall, der bereits von RAYLEIGH behandelt wurde, liegt vor, wenn die strahlende Fläche sehr klein ist, so daß  $\mu_0 = \cos \gamma_0$  durch 1 ersetzt werden kann. Dann wird die Formel (154) unbrauchbar. Doch können wir diesen Nachteil leicht beseitigen, wenn wir bedenken, daß wegen (151):

$$\lim_{\mu_0 \rightarrow 1} \left\{ \frac{1}{1 - \mu_0} [P_{n-1}(\mu_0) - P_{n+1}(\mu_0)] \right\} = 2n + 1$$

ist. Wir erhalten dann für einen *punktförmigen* Strahler auf einer starren Kugel

$$p = p_0 \cdot e^{i(\omega t + \pi/2)} \mathfrak{P}(r, r_0, \mu, 1), \quad (155)$$

wobei:

$$\mathfrak{P}(r, r_0, \mu, 1) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) P_n(\mu) \frac{S_n(kr) + iC_n(kr)}{U_n(kr_0) + iV_n(kr_0)}$$

ist. Eine wesentliche Vereinfachung der Formeln tritt ein, wenn der Aufpunkt in so großer Entfernung  $r$  liegt, daß  $f_n(ikr) = 1$  gesetzt werden kann. Wegen  $S_n(x) + iC_n(x) = i^{n+1} e^{-ix} f_n(ix)$  geht dann  $S_n(kr) + iC_n(kr)$  über in  $i^{n+1} e^{-ikr}$ .

Wir erhalten dann:  $p = p_0 \cdot e^{i(\omega t - kr)} f(\gamma, \gamma_0)$ , wobei:

$$f(\gamma, \gamma_0) = \frac{i}{U_0(kr_0) + iV_0(kr_0)} + \frac{1}{1 - \mu_0} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n+1} \frac{P_n(\mu) [P_{n-1}(\mu_0) - P_{n+1}(\mu_0)]}{U_n(kr_0) + iV_n(kr_0)} \quad (156)$$

ist.

Für die praktische Rechnung ist es zweckmäßig, bei der Summation die Glieder mit geradem  $n$  und ungeradem  $n$  zusammenzufassen, indem wir schreiben:

$$f(\gamma, \gamma_0) = \frac{i}{U_0(kr_0) + iV_0(kr_0)} + \frac{1}{1 - \mu_0} \mathfrak{E}_1 + \frac{1}{1 - \mu_0} \mathfrak{E}_2, \quad (157)$$

wobei  $\mathfrak{E}_1$  die Kugelfunktionen  $P_2(\mu), P_4(\mu), \dots$  usw. und  $\mathfrak{E}_2$  die Kugelfunktionen  $P_1(\mu), P_3(\mu), \dots$  usw. enthält. Dann ist wegen  $P_{2n}(-\mu) = P_{2n}(\mu)$  und  $P_{2n+1}(-\mu) = -P_{2n+1}(\mu)$ :

$$f(180^\circ - \gamma, \gamma_0) = \frac{i}{U_0 + iV_0} + \frac{1}{1 - \mu_0} \mathfrak{E}_1 - \frac{1}{1 - \mu_0} \mathfrak{E}_2 \quad (158)$$

und

$$f(\gamma, 180^\circ - \gamma_0) = \frac{i}{U_0 + iV_0} - \frac{1}{1 + \mu_0} \mathfrak{E}_1 + \frac{1}{1 + \mu_0} \mathfrak{E}_2. \quad (159)$$

$$\frac{i^{n+1}}{U_n(10) + i V_n(10)} [P_{n-1}(\cos \gamma_0) - P_{n+1}(\cos \gamma_0)].$$

| $n$                      | $\gamma_0 = 10^\circ$ | $\gamma_0 = 20^\circ$ | $\gamma_0 = 30^\circ$ | $\gamma_0 = 40^\circ$ |
|--------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 0                        | $-0,0009 + 0,0012 i$  | $-0,0037 + 0,0047 i$  | $-0,0083 + 0,0104 i$  | $-0,0145 + 0,0182 i$  |
| 2                        | $-0,0062 + 0,0042 i$  | $-0,0230 + 0,0154 i$  | $-0,0454 + 0,0304 i$  | $-0,0664 + 0,0444 i$  |
| 4                        | $-0,0131 - 0,0018 i$  | $-0,0408 - 0,0057 i$  | $-0,0569 - 0,0080 i$  | $-0,0409 - 0,0058 i$  |
| 6                        | $-0,0043 - 0,0183 i$  | $-0,0097 - 0,0414 i$  | $-0,0048 - 0,0204 i$  | $+0,0082 + 0,0349 i$  |
| 8                        | $+0,0244 - 0,0001 i$  | $+0,0307 - 0,0001 i$  | $-0,0277 + 0,0001 i$  | $-0,0491 + 0,0002 i$  |
| 10                       | $-0,0230 + 0,0086 i$  | $-0,0055 + 0,0020 i$  | $+0,0397 - 0,0149 i$  | $-0,0135 + 0,0051 i$  |
| 12                       | $+0,0071 - 0,0003 i$  | $-0,0048 + 0,0002 i$  | $-0,0053 + 0,0003 i$  | $+0,0131 - 0,0006 i$  |
| 14                       | $-0,0010$             | $+0,0014$             | $-0,0009$             | $-0,0001$             |
| 16                       | $+0,0001$             | $-0,0002$             | $+0,0002$             | $-0,0002$             |
| $\Sigma_1$               | $-0,0171 - 0,0066 i$  | $-0,0557 - 0,0249 i$  | $-0,1095 - 0,0023 i$  | $-0,1634 + 0,0964 i$  |
| 1                        | $-0,0032 - 0,0032 i$  | $-0,0123 + 0,0125 i$  | $-0,0263 + 0,0267 i$  | $-0,0434 + 0,0442 i$  |
| 3                        | $-0,0100 + 0,0029 i$  | $-0,0344 + 0,0099 i$  | $-0,0593 + 0,0170 i$  | $-0,0689 + 0,0198 i$  |
| 5                        | $-0,0125 - 0,0100 i$  | $-0,0339 - 0,0272 i$  | $-0,0335 - 0,0268 i$  | $-0,0004 - 0,0003 i$  |
| 7                        | $+0,0118 - 0,0181 i$  | $+0,0209 - 0,0320 i$  | $-0,0023 + 0,0035 i$  | $-0,0298 + 0,0457 i$  |
| 9                        | $+0,0089 + 0,0249 i$  | $+0,0066 + 0,0186 i$  | $-0,0147 - 0,0423 i$  | $-0,0071 - 0,0197 i$  |
| 11                       | $-0,0026 - 0,0153 i$  | $+0,0006 + 0,0037 i$  | $+0,0037 + 0,0214 i$  | $-0,0042 - 0,0243 i$  |
| 13                       | $+0,0000 + 0,0029 i$  | $-0,0029 i$           | $+0,0002 i$           | $+0,0036 i$           |
| 15                       | $-0,0003 i$           | $+0,0005 i$           | $-0,0005 i$           | $+0,0004 i$           |
| 17                       |                       |                       |                       | $-0,0001 i$           |
| $\Sigma_2$               | $-0,0076 - 0,0098 i$  | $-0,0525 - 0,0171 i$  | $-0,1324 + 0,0003 i$  | $-0,1538 + 0,0694 i$  |
| $\Sigma_1 + \Sigma_2$    | $-0,0247 - 0,0165 i$  | $-0,1083 - 0,0419 i$  | $-0,2419 - 0,0019 i$  | $-0,3172 + 0,1658 i$  |
| $\Sigma_1 - \Sigma_2$    | $-0,0095 + 0,0032 i$  | $-0,0032 - 0,0078 i$  | $+0,0228 - 0,0024 i$  | $-0,0097 + 0,0269 i$  |
| $f(0, \gamma_0)$         | $-1,625 - 1,084 i$    | $-1,795 - 0,695 i$    | $-1,806 - 0,014 i$    | $-1,356 + 0,709 i$    |
| $f(180^\circ, \gamma_0)$ | $-0,623 + 0,212 i$    | $-0,052 - 0,128 i$    | $+0,170 - 0,018 i$    | $-0,041 + 0,115 i$    |

Die entsprechenden Beziehungen gelten offenbar auch für Aufpunkte, die nicht in großem Abstand liegen. Wir haben also nur nötig, die Berechnung für  $0 \leq \gamma \leq 90^\circ$ ,  $0 \leq \gamma_0 \leq 90^\circ$  durchzuführen; die Werte für  $90^\circ \leq \gamma \leq 180^\circ$  und  $90^\circ \leq \gamma_0 \leq 180^\circ$  ergeben sich dann aus (158) (159).

Physikalisch bedeutet (156) und (157), daß man eine beliebige Geschwindigkeitsverteilung auf der Kugeloberfläche durch eine zur Äquatorebene symmetrische und eine zur Äquatorebene antisymmetrische Verteilung ersetzen kann. Die erste enthält die Kugelfunktionen gerader, die zweite die Kugelfunktionen ungerader Ordnung. Man findet nach (158) den Schalldruck in dem Spiegelpunkt eines Aufpunktes, in dem man in der Formel für den Aufpunkt den antisymmetrischen Anteil mit entgegengesetztem Vorzeichen einsetzt. Ferner folgt aus (158) und (159):

$$(1 - \mu_0)f(180^\circ - \gamma, \gamma_0) + (1 + \mu_0)f(\gamma, 180^\circ - \gamma_0) = \frac{2i}{U_0 + iV_0}.$$

Das besagt, daß die zu (158) und (159) gehörende Strahlung zusammen die Strahlung eines Kugelstrahlers nullter Ordnung ergibt.

$$\frac{i^{n+1}}{U_n(10) + i V_n(10)} [P_{n-1}(\cos \gamma_0) - P_{n+1}(\cos \gamma_0)].$$

| $\gamma_0 = 50^\circ$ | $\gamma_0 = 60^\circ$ | $\gamma_0 = 70^\circ$ | $\gamma_0 = 80^\circ$ | $\gamma_0 = 90^\circ$ |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| -0,0222+0,0277 i      | -0,0211+0,0388 i      | -0,0409+0,0511 i      | -0,0514+0,0642 i      | -0,0622+0,0777 i      |
| -0,0791+0,0529 i      | -0,0787+0,0526 i      | -0,0633+0,0424 i      | -0,0353+0,0236 i      | — —                   |
| +0,0047+0,0007 i      | +0,0547+0,0077 i      | +0,0769+0,0108 i      | +0,0548+0,0077 i      | — —                   |
| +0,0139+0,0590 i      | +0,0034+0,0146 i      | -0,0123-0,0521 i      | -0,0145-0,0617 i      | — —                   |
| +0,0228-0,0001 i      | +0,0617-0,0003 i      | -0,0127+0,0001 i      | -0,0683+0,0003 i      | — —                   |
| -0,0417+0,0157 i      | +0,0376-0,0141 i      | +0,0265-0,0099 i      | -0,0538+0,0202 i      | — —                   |
| -0,0095+0,0005 i      | -0,0037+0,0002 i      | +0,0150-0,0007 i      | -0,0135+0,0006 i      | — —                   |
| +0,0013               | -0,0022               | +0,0023               | -0,0014               | — —                   |
| +0,0002               | -0,0002               | +0,0001               | +0,0001               | — —                   |
| -0,1096+0,1564 i      | +0,0416+0,0995 i      | -0,0084+0,0416 i      | -0,1832+0,0550 i      | -0,0622+0,0777 i      |
| -0,0617+0,0628 i      | -0,0788+0,0802 i      | -0,0928+0,0945 i      | -0,1019+0,1037 i      | -0,1051+0,1069 i      |
| -0,0539+0,0155 i      | -0,0161+0,0046 i      | +0,0316-0,0091 i      | +0,0710-0,0204 i      | +0,0862-0,0248 i      |
| +0,0407+0,0327 i      | +0,0516+0,0413 i      | +0,0179+0,0144 i      | -0,0335-0,0268 i      | -0,0579-0,0464 i      |
| -0,0154+0,0236 i      | +0,0256-0,0393 i      | +0,0314-0,0482 i      | -0,0100+0,0154 i      | -0,0378+0,0580 i      |
| +0,0192+0,0538 i      | +0,0051+0,0142 i      | -0,0221-0,0618 i      | -0,0018-0,0051 i      | +0,0231+0,0646 i      |
| -0,0008-0,0046 i      | +0,0055+0,0322 i      | -0,0039-0,0227 i      | -0,0026-0,0149 i      | +0,0062+0,0360 i      |
| -0,0058 i             | +0,0044 i             | -0,0001 i             | +0,0001+0,0046 i      | +0,0001+0,0066 i      |
| -0,0001 i             | -0,0002 i             | +0,0005 i             | -0,0008 i             | +0,0009 i             |
| +0,0001 i             | -0,0001 i             | +0,0001 i             | -0,0001 i             | +0,0001 i             |
| -0,0718+0,1779 i      | -0,0072+0,1376 i      | -0,0379-0,0325 i      | -0,0788+0,0556 i      | -0,0852+0,2019 i      |
| -0,1815+0,3343 i      | +0,0345+0,2371 i      | -0,0463+0,0090 i      | -0,2620+0,1106 i      | -0,1474+0,2797 i      |
| -0,0378-0,0214 i      | +0,0487-0,0380 i      | +0,0295+0,0741 i      | +0,1044-0,0006 i      | +0,0230-0,1243 i      |
| -0,508+0,936 i        | +0,069 +0,474 i       | -0,070 +0,014 i       | -0,317 +0,134 i       | -0,147 +0,280 i       |
| -0,106-0,061 i        | +0,097 -0,076 i       | +0,045 +0,113 i       | +0,126 -0,001 i       | +0,023 -0,124 i       |

Als Beispiel sind in der *Tabelle* die Ausdrücke

$$\frac{i^{n+1}}{U_n(kr_0) + i V_n(kr_0)} [P_n(\cos \gamma_0) - P_{n+1}(\cos \gamma_0)] = A_n + iB_n$$

für  $kr_0 = 10$  und  $\gamma_0 = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, \dots 90^\circ$  ausführlich angegeben und die entsprechenden Werte  $f(\gamma, \gamma_0)$  für  $\gamma = 0^\circ$  und  $\gamma = 180^\circ$  berechnet.

In der Abb. 69 ist  $f(0^\circ, \gamma_0)$  und  $f(180^\circ, \gamma_0)$  dem Betrage nach dargestellt. Diese Kurven geben dann eine Übersicht über die Druckamplituden in der Hauptrichtung ( $\gamma = 0^\circ$ ) und in der Gegenrichtung ( $\gamma = 180^\circ$ ) in Abhängigkeit von der Größe der strahlenden Fläche ( $\gamma_0$ ) bei gleichem Deformationsvolumen ( $F \cdot w$ ). Wir erkennen zunächst, daß bei kleinen  $\gamma_0$  in der Hauptrichtung die doppelte Amplitude vorhanden ist gegenüber der Amplitude bei ungebündelter Strahlung ( $p_0 = \frac{c \cdot \sigma F \cdot w}{2 \lambda r}$ ). Will man eine möglichst große strahlende Fläche, möglichst große Druckamplitude in der Hauptrichtung und gleichzeitig möglichst gute Abschattung für die Gegenrichtung erzielen, so lehrt die Abbildung, daß dies für  $\gamma_0$  etwa gleich  $20^\circ$  erreicht wird.

An Hand der Tabelle für  $A_n + iB_n$  ist dann leicht für jedes  $\gamma_0$  das vollständige Schallfeld (bei großer Entfernung des Aufpunktes) zu berechnen. Man hat nur noch nötig, die Ausdrücke:

$$R + iJ = \frac{1}{1 - \mu_0} \sum (A_n + iB_n) P_n(\cos \gamma)$$

auszurechnen und  $\sqrt{R^2 + J^2}$  in Abhängigkeit von  $\gamma$  aufzutragen. Die den Werten  $\gamma_0 = 10^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 170^\circ$  entsprechenden

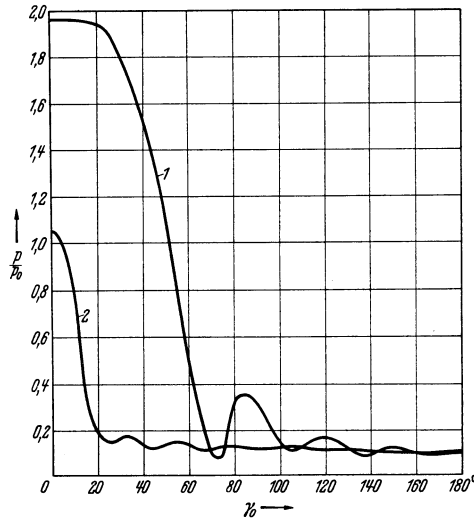


Abb. 69. Druckamplitude in Abhängigkeit von dem zur strahlenden Fläche gehörenden Zentrivinkel  $\gamma_0$  bei konstantem Deformationsvolumen 1, für die Hauptrichtung ( $\gamma = 0$ ), 2. für die Gegenrichtung ( $\gamma = 180^\circ$ ).

Komponenten  $R, J$  sind in den Abb. 70 bis 76 gezeichnet und die daraus erhaltenen relativen Schalldruckamplituden in den Abb. 77 bis 83 zur Darstellung gebracht.

Solange die strahlende Fläche klein ist, wird man mit wachsendem  $\gamma_0$  eine ähnliche Richtwirkung wie bei einer Kolbenmembran erwarten können. Bei größerem  $\gamma_0$  ( $\gamma_0 > 90^\circ$ ) wird sich die Strahlung allmählich der eines ungerichteten Strahlers nähern, um bei  $\gamma_0 = 180^\circ$  mit dem Kugelstrahler nullter Ordnung identisch zu werden. Die Anzahl der Glieder, die berechnet werden müssen, um das Ergebnis mit hinreichender Genauigkeit zu erhalten, wächst etwa proportional mit der Größe von  $kr_0$ . Und zwar ergibt sich, daß die einzelnen Glieder schnell abnehmen, sobald  $n$  größer als  $kr_0$  geworden ist, so daß die notwendige Anzahl zwischen  $kr_0$  und  $2kr_0$  liegt. Das hängt mit einer allgemeinen Eigenschaft der auftretenden BESSELSchen Funktionen zusammen, die ein wesentlich verschiedenes Verhalten zeigen, wenn man die Funktionswerte bei festem Argument in Abhängigkeit vom Index  $n$  aufträgt.

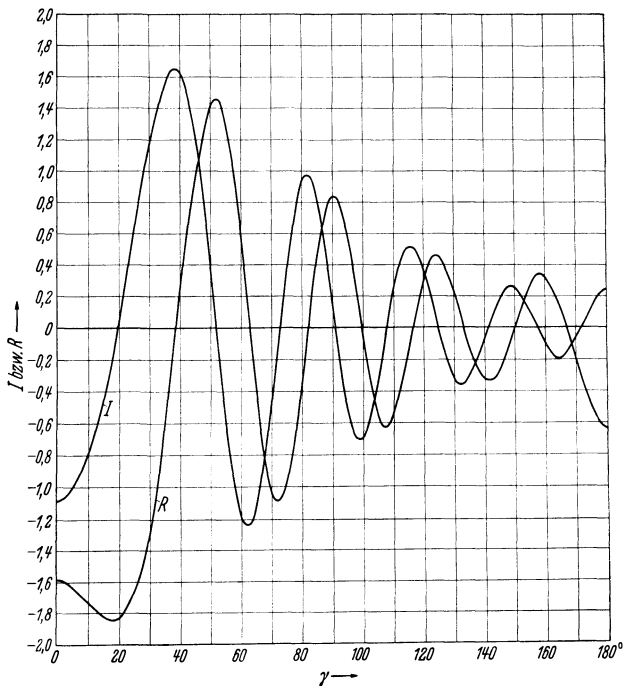


Abb. 70. Die Komponenten des Schalldruckes für  $\gamma_0 = 10^\circ$ .

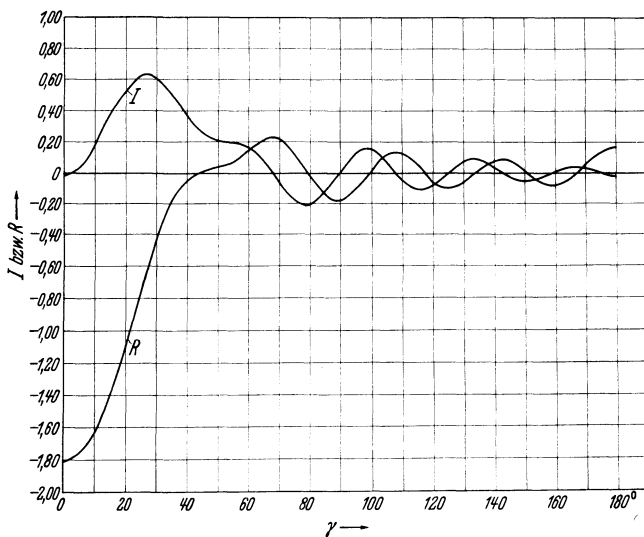


Abb. 71. Die Komponenten des Schalldruckes für  $\gamma_0 = 30^\circ$ .



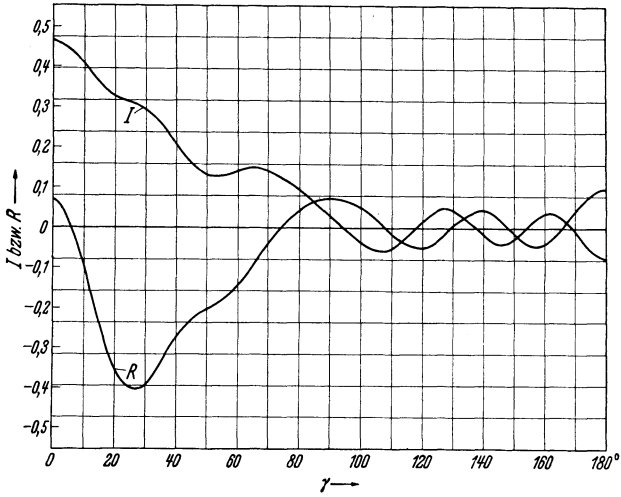


Abb. 72. Die Komponenten des Schalldruckes für  $\gamma_0 = 60^\circ$ .

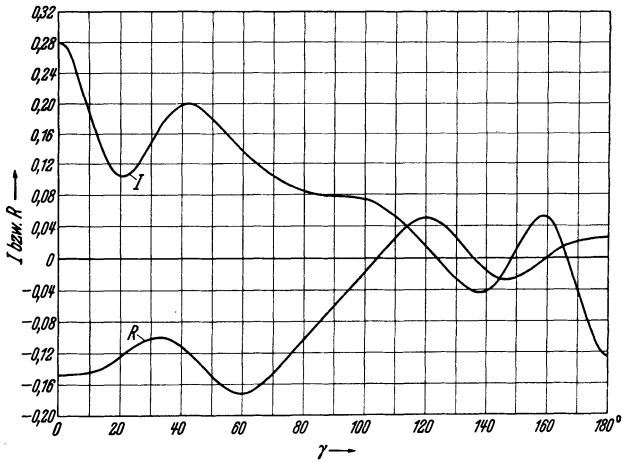


Abb. 73. Die Komponenten des Schalldruckes für  $\gamma_0 = 90^\circ$ .

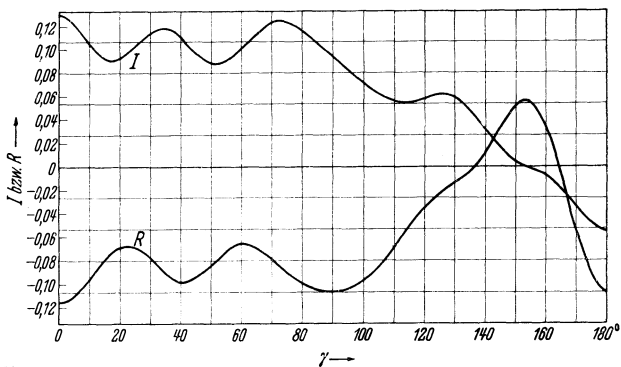


Abb. 74. Die Komponenten des Schalldruckes für  $\gamma_0 = 120^\circ$ .

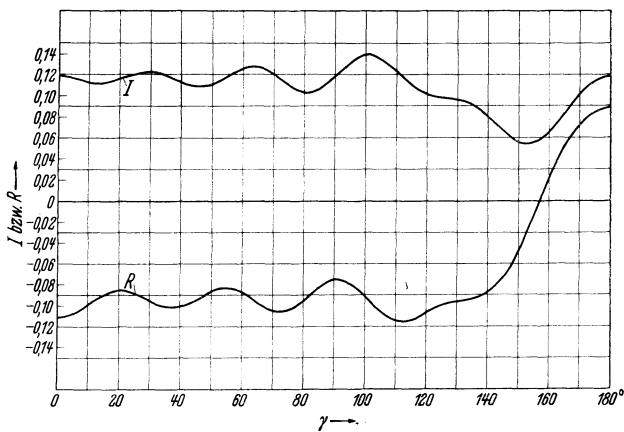


Abb. 75. Die Komponenten des Schalldruckes für  $\gamma_0 = 150^\circ$ .

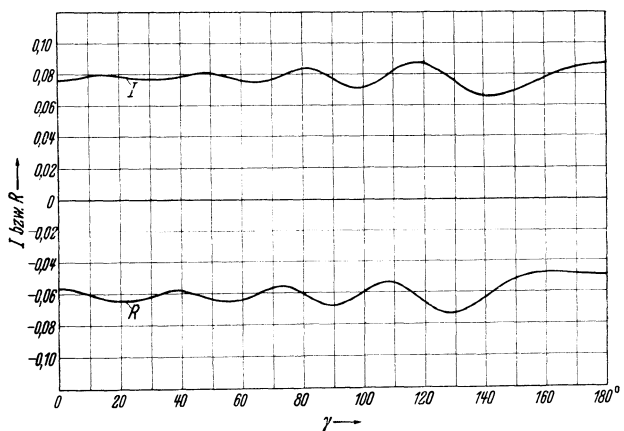


Abb. 76. Die Komponenten des Schalldruckes für  $\gamma_0 = 170^\circ$ .

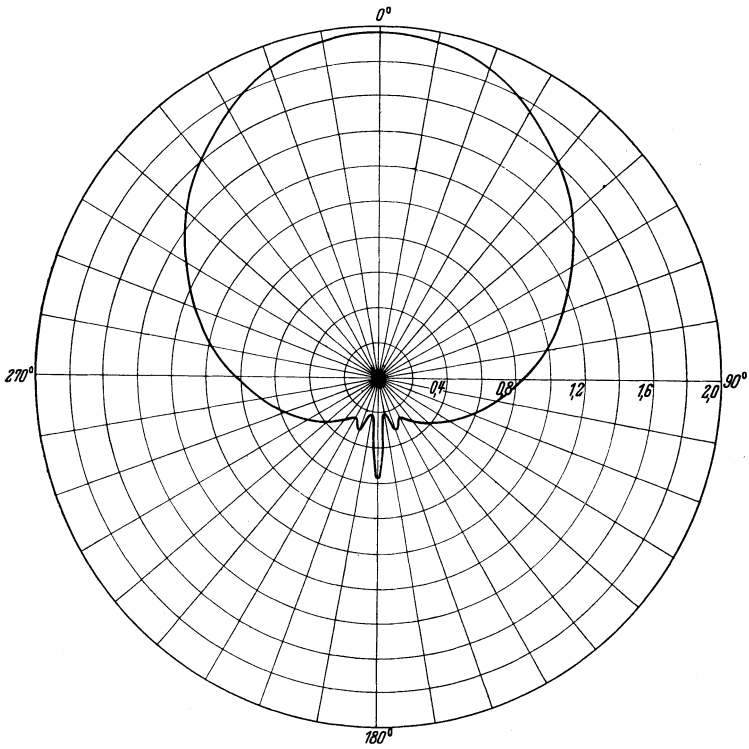


Abb. 77. Schalldruckamplitude  $(p/p_0)$  bei strahlender Kugelkappe ( $\gamma_0 = 10^\circ$ ).

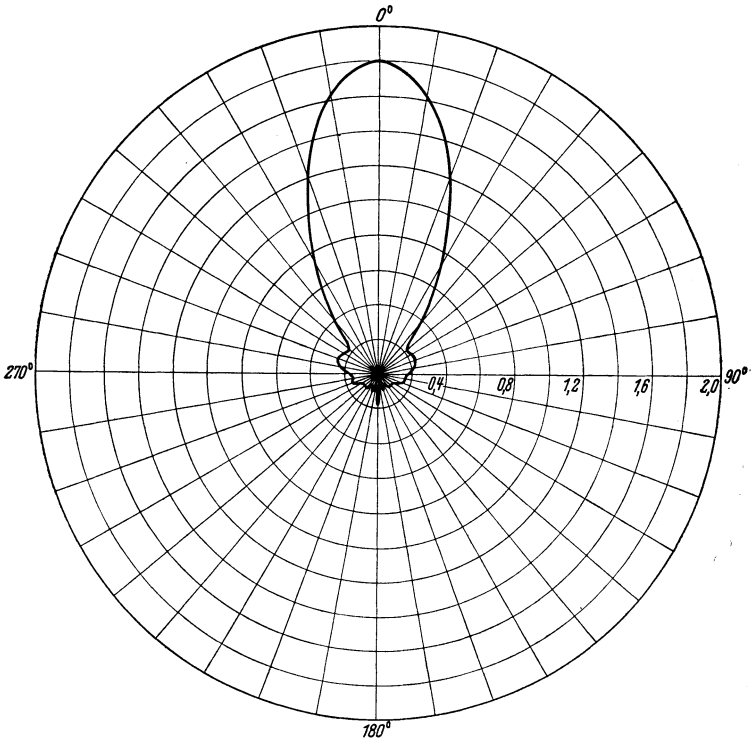


Abb. 78. Schalldruckamplitude  $(p/p_0)$  bei strahlender Kugelkappe ( $\gamma_0 = 30^\circ$ ).

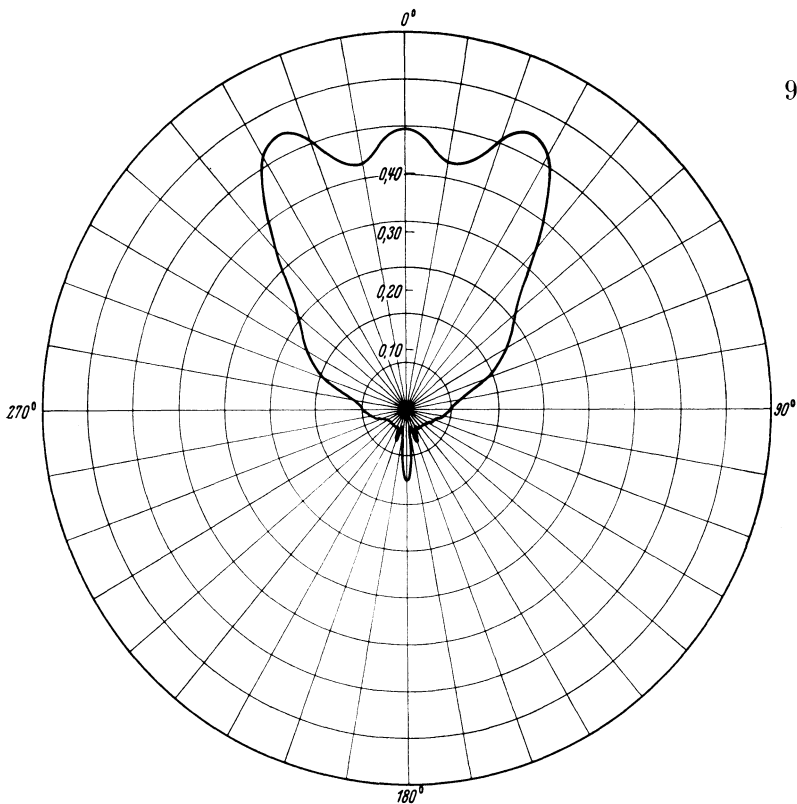


Abb. 79. Schalldruckamplitude  $(p/p_0)$  bei strahlender Kugelkappe ( $\gamma_0 = 60^\circ$ ).

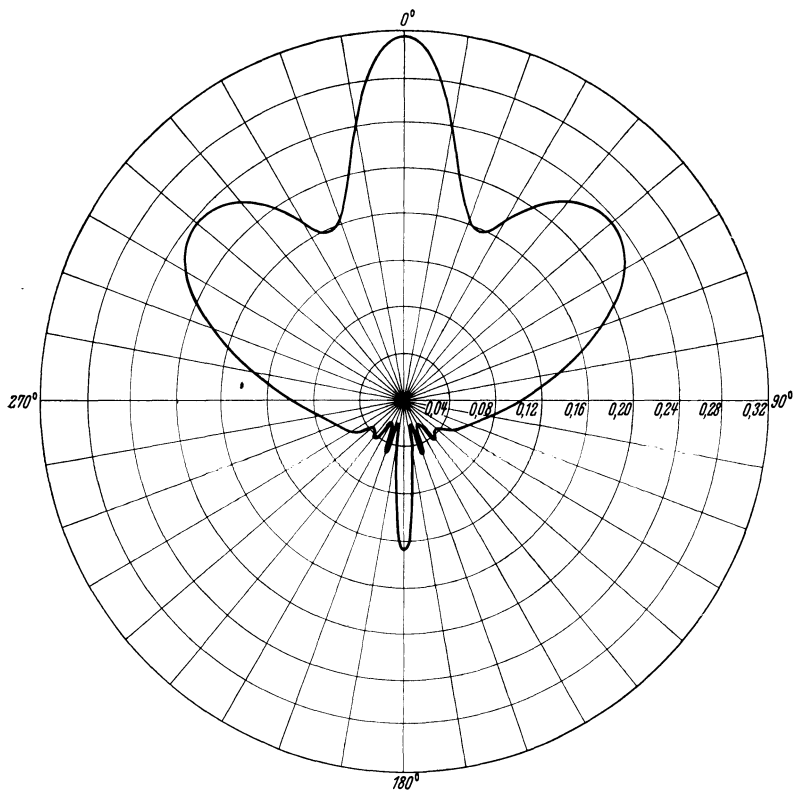


Abb. 80. Schalldruckamplitude  $(p/p_0)$  bei strahlender Kugelkappe ( $\gamma_0 = 90^\circ$ ).

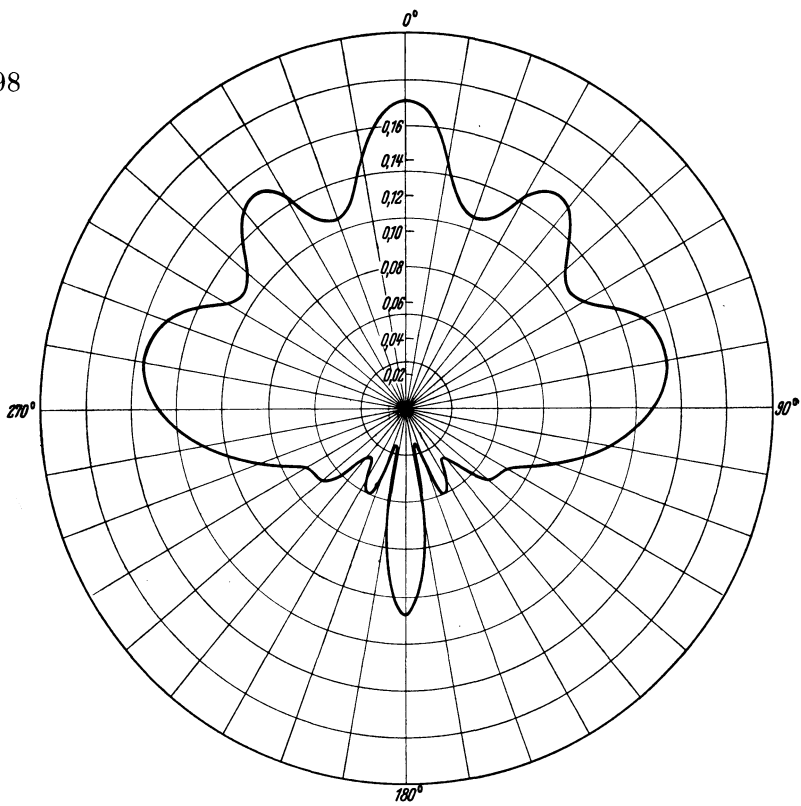


Abb. 81. Schalldruckamplitude  $(p/p_0)$  bei strahlender Kugelkappe ( $\gamma_0 = 120^\circ$ ).

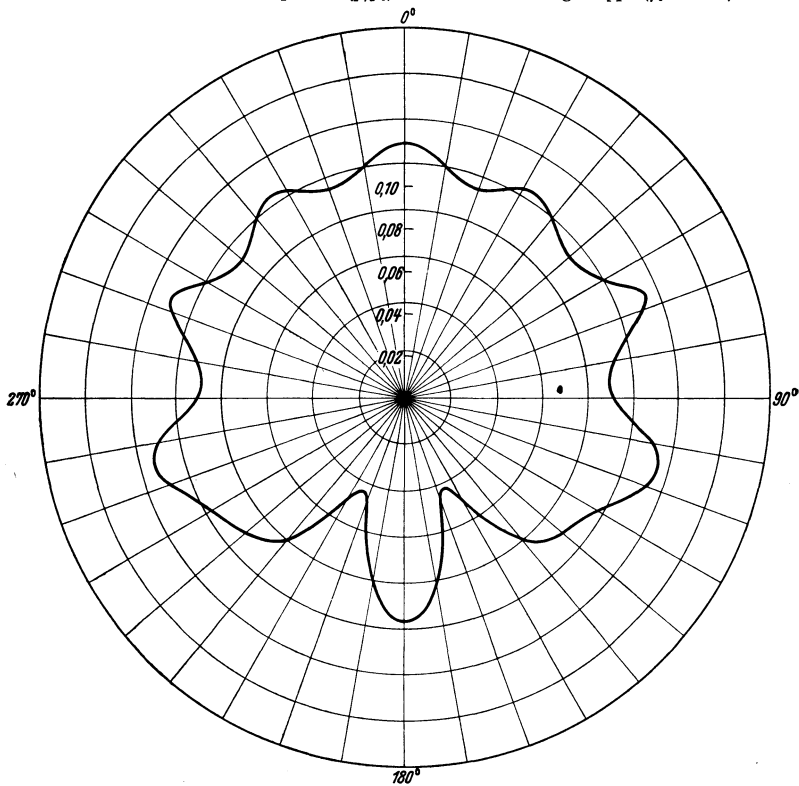


Abb. 82. Schalldruckamplitude  $(p/p_0)$  bei strahlender Kugelkappe ( $\gamma_0 = 150^\circ$ ).

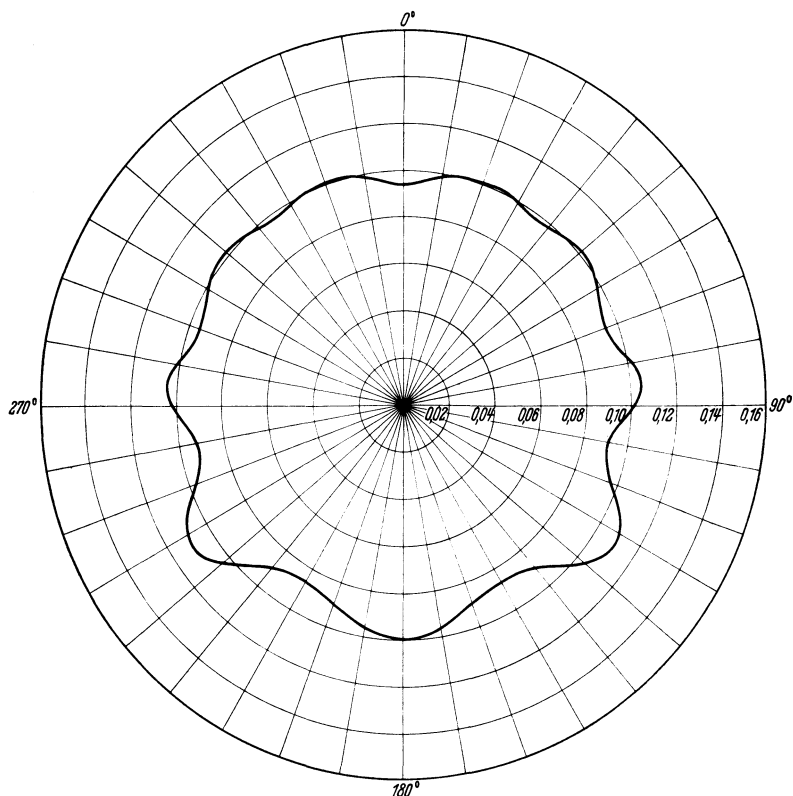


Abb. 83. Schalldruckamplitude ( $p/p_0$ ) bei strahlender Kugelkappe ( $\gamma_0 = 170^\circ$ ).

Solange  $n < x$  ist, schwankt  $S_n(x)$  und  $C_n(x)$  zwischen positiven und negativen Werten; sobald  $n > x$  geworden ist, nimmt  $S_n(x)$  monoton stark ab, während  $C_n(x)$  monoton stark zunimmt. Dasselbe gilt für  $U_n(x)$  und  $V_n(x)$ . In den Abb. 84 bis 86 sind  $U_n(x)$  und  $V_n(x)$  für  $x = 4, 10, 20, 40$  in Abhängigkeit von  $n$  dargestellt.

Als Beispiel für den allgemeinen Fall, wo der Aufpunkt in der Nähe des Strahlers liegt, wählen wir:

$$kr_0 = 5, \quad r = 2r_0 \text{ (d. h. } kr = 10), \quad \gamma_0 = 30^\circ$$

und berechnen die Tabelle (S. 100):

$$a_n = \frac{[P_{n-1}(\cos 30^\circ) - P_{n+1}(\cos 30^\circ)][S_n(10) + iC_n(10)]}{(1 - \cos 30^\circ)[U_n(5) + iV_n(5)]}. \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Für die Schalldruckamplitude  $p$  im Aufpunkt  $r = 2r_0, \gamma = 0$  erhalten wir daraus:

$$p = \frac{c \cdot \sigma F \cdot w}{2r \cdot \lambda} |2,03 + 2,24i| = \frac{c \cdot \sigma F \cdot w}{2r \lambda} \cdot 3,01.$$

| $n$                   | $\frac{[P_{n-1}(\cos 30^\circ) - P_{n+1}(\cos 30^\circ)] [S_n(10) + i C_n(10)]}{(1 - \cos 30^\circ) [U_n(5) + i V_n(5)]}$ |
|-----------------------|---|
| 0                     | +0,1953 - 0,0177 $i$  |
| 2                     | +0,8175 + 0,2193 $i$  |
| 4                     | +0,2525 + 0,9462 $i$  |
| 6                     | -0,1490 - 0,0467 $i$  |
| 8                     | -0,0074 + 0,0228 $i$  |
| 10                    | -0,0035 + 0,0017 $i$  |
| 12                    | -0,0002   |
| $\Sigma_1$            | +1,1052 + 1,1256 $i$  |
| 1                     | +0,5607 + 0,0128 $i$  |
| 3                     | +0,7937 + 0,6199 $i$  |
| 5                     | -0,4259 + 0,4596 $i$  |
| 7                     | +0,0041 + 0,0106 $i$  |
| 9                     | -0,0087 + 0,0073 $i$  |
| 11                    | -0,0009 + 0,0021 $i$  |
| $\Sigma_2$            | +0,9230 + 1,1104 $i$  |
| $\Sigma_1 + \Sigma_2$ | +2,0282 + 2,2360 $i$  |

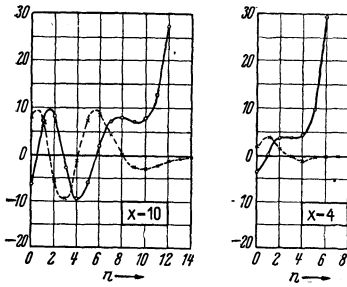


Abb. 84.

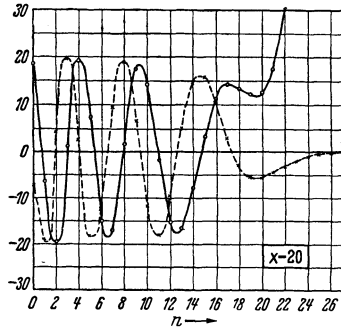


Abb. 85.

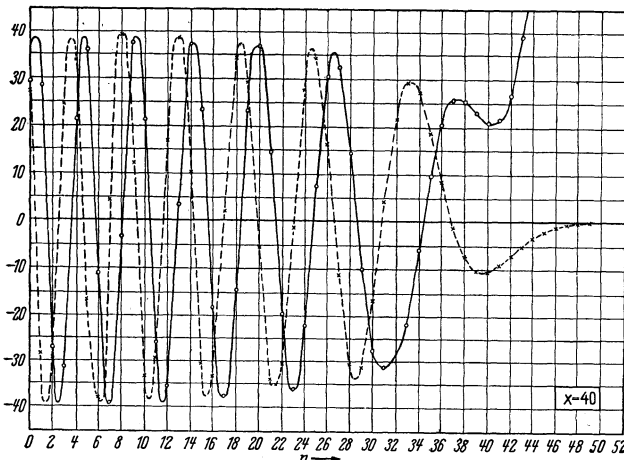


Abb. 86.

Abb. 84—86.  
Die Hilfsfunktionen  $U_n(x)$  (gestrichelt) und  $V_n(x)$  (ausgezogen) für  $x = 4, 10, 20, 40$  in Abhängigkeit von  $n$ .

$$a_n = (2n + 1) \frac{S_n(kr) + iC_n(kr)}{U_n(1) + iY_n(1)}$$

| $n$      | $kr=1,5$           | $kr=2$             | $kr=3$             | $kr=4$             | $kr=5$             |
|----------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| 0        | +0,1991-0,6785 $i$ | -0,1506-0,6909 $i$ | -0,6627-0,2466 $i$ | -0,5656+0,4244 $i$ | +0,0516+0,6997 $i$ |
| 2        | +1,1068-0,1143 $i$ | +0,7754-0,2198 $i$ | +0,4188-0,4800 $i$ | -0,0265-0,5854 $i$ | -0,4416-0,3517 $i$ |
| 4        | +0,4026-0,0001 $i$ | +0,1466-0,0005 $i$ | +0,0453-0,0028 $i$ | +0,0257-0,0082 $i$ | +0,0153-0,0154 $i$ |
| 6        | +0,1750            | +0,0338            | +0,0038            | +0,0010            | +0,0005            |
| 8        | +0,0774            | +0,0082            | +0,0004            |                    |                    |
| 10       | +0,0344            | +0,0020            |                    |                    |                    |
| 12       | +0,0153            | +0,0005            |                    |                    |                    |
| 14       | +0,0068            | +0,0001            |                    |                    |                    |
| 16       | +0,0030            |                    |                    |                    |                    |
| 18       | +0,0013            |                    |                    |                    |                    |
| $\sum_1$ | +1,9844-0,7929 $i$ | +0,8160-0,9112 $i$ | -0,1944-0,7294 $i$ | -0,5654-0,1692 $i$ | -0,3742+0,3326 $i$ |
| 1        | +1,3082-0,9426 $i$ | +0,8104-1,2622 $i$ | -0,4008-1,3563 $i$ | -1,2942-0,4875 $i$ | -1,1353+0,7637 $i$ |
| 3        | +0,6317-0,0050 $i$ | +0,3299-0,0136 $i$ | +0,1694-0,0508 $i$ | +0,0972-0,1019 $i$ | +0,0085-0,1277 $i$ |
| 5        | +0,2643            | +0,0695            | +0,0114-0,0001 $i$ | +0,0050-0,0004 $i$ | +0,0030-0,0010 $i$ |
| 7        | +0,1163            | +0,0166            | +0,0012            | +0,0002            | +0,0001            |
| 9        | +0,0516            | +0,0041            | +0,0001            |                    |                    |
| 11       | +0,0229            | +0,0010            |                    |                    |                    |
| 13       | +0,0102            | +0,0003            |                    |                    |                    |
| 15       | +0,0045            |                    |                    |                    |                    |
| 17       | +0,0020            |                    |                    |                    |                    |
| 19       | +0,0009            |                    |                    |                    |                    |
| $\sum_2$ | +2,4133-0,9476 $i$ | +1,2318-1,2758 $i$ | -0,1917-1,4072 $i$ | -1,1918-0,5898 $i$ | -1,1237+0,6350 $i$ |



Denken wir uns an Stelle der strahlenden Fläche einen kleinen Kugelstrahler mit gleichem  $F \cdot w$  gesetzt, so würde dieser im selben Aufpunkt (d. h. Aufpunktsabstand =  $r/2$ ) bei Abwesenheit der starren Kugel die Druckamplitude:

$$p_0 = \frac{c \cdot \sigma \cdot F \cdot w}{2r\lambda} \cdot 2$$

hervorrufen.

Der vollständige Verlauf der Druckamplitude im Abstand  $r = 2r_0$  ist in Abb. 88 in Abhängigkeit von  $\gamma$  dargestellt. Die zugehörigen Komponenten sind in der Abb. 87 [ $R + iJ = \sum a_n P_n(\cos \gamma)$ ] angegeben.

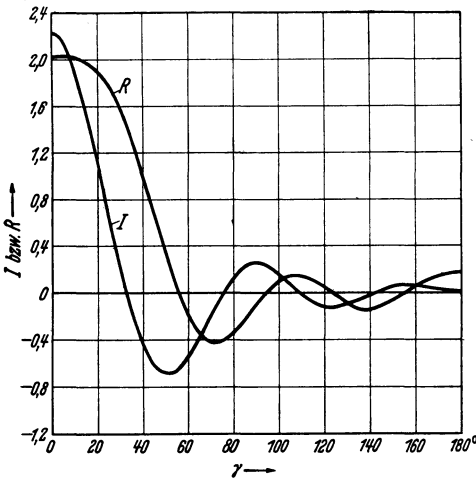


Abb. 87. Schalldruckkomponenten der strahlenden Kugelkappe ( $\gamma_0 = 30^\circ$ ) bei kleinem Aufpunktsabstand ( $r = 2r_0$ ,  $kr_0 = 5$ ).

Schließlich wollen wir das Schallfeld eines auf einer starren Kugel befindlichen punktförmigen Strahlers in der Umgebung der Kugel berechnen und durch

Kurven konstanter Druckamplitude veranschaulichen. Als Beispiel wählen wir  $kr_0 = 1$  und berechnen den Schalldruck für die Aufpunkte, deren Entfernungen  $r$  vom Kugelmittelpunkt durch  $kr = 1,5; 2; 3; 4; 5$  bestimmt sind. Dazu berechnen wir zunächst die Ausdrücke:

$$a_n = (2n + 1) \frac{S_n(kr) + iC_n(kr)}{U_n(1) + iV_n(1)}$$

(Tabelle S. 101) und finden daraus  $\sum_1 = \sum a_{2n}$  und  $\sum_2 = \sum a_{2n+1}$ . Bezeichnen wir die ungestörte (d. h. bei Abwesenheit der starren Kugel vorhandene) Druckamplitude mit  $p_0 = \frac{F \cdot w c \cdot \sigma}{2\lambda r}$ , so ist die relative Schalldruckamplitude  $p/p_0 = |\sum_1 + \sum_2|$ . In derselben Weise wurden aus den Größen  $\sum a_n P_n(\cos \gamma)$  die relativen Amplituden für  $\gamma = 5^\circ, 10^\circ$  usw. berechnet.

Tragen wir die so gefundenen Werte zusammen, indem die berechneten Aufpunkte eingetragen und mit dem zugehörigen Schalldruck beziffert werden, so können wir durch Interpolation die Kurve konstanten Schalldruckes einzeichnen. Man erkennt aus dem Ergebnis in Abb. 89, daß das Schallfeld einen wesentlich anderen Charakter durch die Anwesenheit der starren Kugel bekommt, obgleich die Wellenlänge mehr als das Dreifache des Durchmessers beträgt.

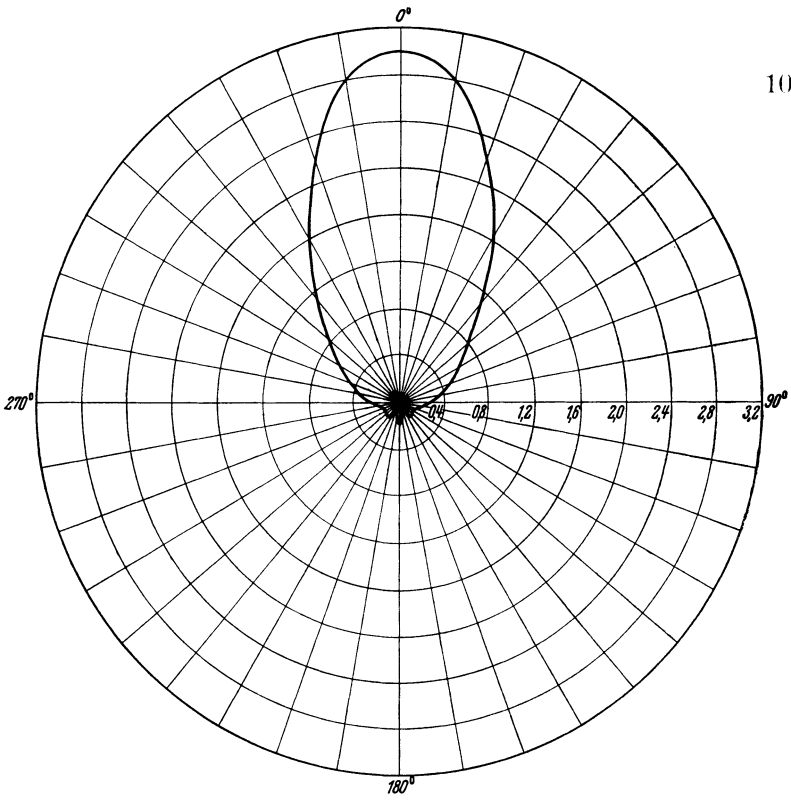


Abb. 88. Schalldruckamplitude  $(p/p_0)$  der strahlenden Kugelkappe ( $\gamma_0 = 30^\circ$ ) bei kleinem Aufpunktsabstand ( $r = 2r_0$ ,  $kr_0 = 5$ ).

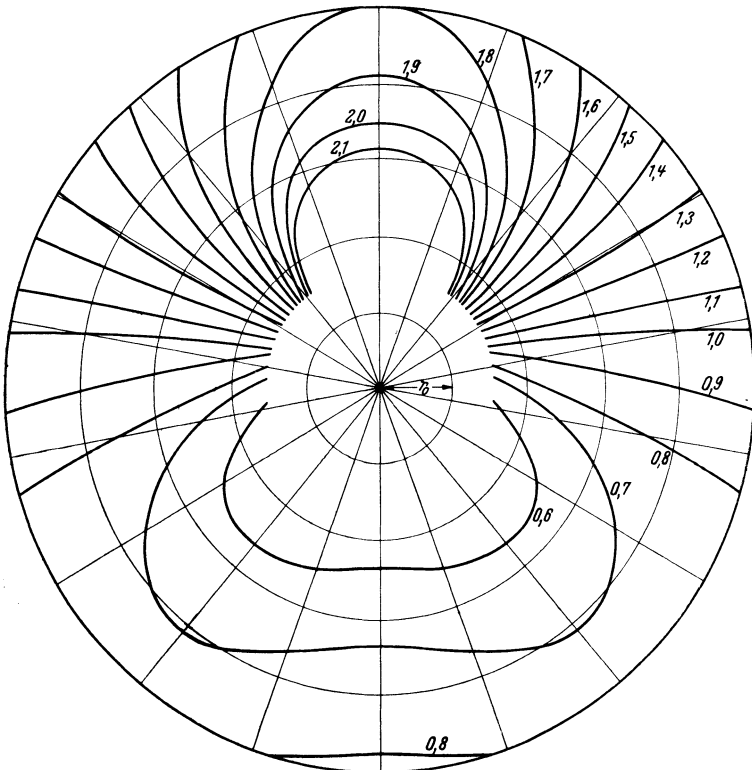


Abb. 89. Schallfeld  $(p/p_0)$  des punktförmigen Strahlers auf einer starren Kugel ( $kr_0 = 1$ )

## 7. Die durch eine starre Kugel verursachte Störung des Schallfeldes.

### a) Die Ableitung der allgemeinen Formel.

Der Einfluß, den eine ebene, starre, unendlich ausgedehnte Wand auf das von einem Strahler hervorgerufene Schallfeld ausübt, läßt sich bekanntlich leicht übersehen, indem man einen zweiten Strahler einführt, der in bezug auf den ursprünglichen spiegelbildlich zu der Wand liegt. Das gesuchte (auf der Seite des ursprünglichen Strahlers liegende) Schallfeld ergibt sich dann einfach durch Überlagerung der beiden von den einzelnen Strahlern hervorgerufenen Schallfeldern. Um dies zu beweisen, haben wir zu zeigen, daß für das Schallfeld die Randbedingung an der starren Wand (nämlich, daß die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Wand gleich Null ist) erfüllt ist. Nun ergibt sich aber ohne weiteres aus der symmetrischen Lage der Strahler, daß der von den beiden Strahlern resultierende Geschwindigkeitsvektor für alle Aufpunkte auf der Wand in der Symmetrieebene liegt, d. h. keine Komponente senkrecht zu der Wand besitzt. Allgemeiner kann man sagen: Wenn in einem beliebigen Schallfeld eine Fläche vorhanden ist, so daß für alle Aufpunkte in dieser Fläche die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zu dieser Fläche gleich null ist, so kann diese Fläche durch eine starre, vollständig reflektierende Fläche ersetzt werden, ohne daß an dem Schallfeld etwas geändert wird. Unsere Aufgabe, den Einfluß einer starren Kugel auf ein vorhandenes Schallfeld zu untersuchen, ist dann gleichbedeutend mit der Aufgabe, dem vorhandenen Schallfeld ein zweites so zu überlagern, daß für die Aufpunkte auf einer vorgegebenen Kugeloberfläche die resultierende Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Kugeloberfläche gleich null ist.

Wir gehen nun aus von dem ungestörten Schallfeld und nehmen an, daß dieses von einem im Punkte  $A$  befindlichen punktförmigen Strahler mit der strahlenden Fläche  $F$  und (konstanter) Geschwindigkeitsamplitude  $w$  erzeugt wird. Dann ist der Schalldruck  $p_1$  für den durch die Polarkoordinaten  $r, \gamma$  gegebenen Aufpunkt gegeben durch:

$$p_1 = \frac{c \cdot \sigma \cdot F \cdot w}{2\lambda R} e^{i(\omega t - kR + \pi/2)} e^{ikr \cos \gamma}. \quad (160)$$

Dabei ist der Abstand  $R$  des Strahlers in  $A$  vom Koordinatenanfang  $O$  als groß im Verhältnis zu  $r$  vorausgesetzt. Aus (160) ergibt sich mit Hilfe der Beziehung:

$$v_r = \frac{i}{c \cdot \sigma k} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (161)$$

die radiale Geschwindigkeitskomponente:

$$v_r = - \frac{F \cdot w}{4\pi R} e^{i(\omega t - kR)} \frac{\partial (e^{ikr \cos \gamma})}{\partial r}.$$

Nach dem oben Ausgeführten haben wir nun ein zusätzliches Schallfeld zu überlagern, dessen radiale Geschwindigkeitsamplitude  $v_r^*$  auf der Kugel  $r = r_0$  entgegengesetzt gleich  $v_r$  ist. Die Aufgabe ist damit prinzipiell auf die frühere Berechnung zurückgeführt, wo die Geschwindigkeitsverteilung auf einer Kugel vorgegeben war. Nach dem früher Ausgeführten kann die Lösung sofort angegeben werden, wenn die Geschwindigkeitsverteilung auf der Kugel durch eine Reihe von Kugelfunktionen dargestellt ist. Um dies zu erreichen, gehen wir von der Beziehung aus<sup>1</sup>:

$$e^{i k r \cos \gamma} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{S_n(kr)}{kr} (2n+1) P_n(\cos \gamma). \quad (162)$$

Dann folgt wegen (161):

$$v_r = -\frac{F \cdot w}{4\pi R} e^{i(\omega t - kR)} \cdot k \sum_{n=0}^{\infty} i^n \left( \frac{S_n(kr)}{kr} \right)' (2n+1) P_n(\cos \gamma),$$

und es ist wegen

$$\left( \frac{S_n(x)}{x} \right)' = -\frac{U_n(x)}{x^2}$$

die gesuchte Geschwindigkeit:

$$v_{r_0}^* = -v_{r_0} = -\frac{F \cdot w}{2\lambda R} e^{i(\omega t - kR)} \cdot \frac{1}{k^2 r_0^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n U_n(kr_0) P_n(\cos \gamma) \quad (163)$$

in der gewünschten Form dargestellt.

Wir können nach (149) das von  $v_{r_0}^*$  hervorgerufene Schallfeld sofort angeben. Es ist der Schalldruck  $p_2$  im Aufpunkt  $r, \gamma$  gegeben durch:

$$p_2 = -\frac{c \cdot \sigma \cdot F \cdot w}{2\lambda R} e^{i(\omega t - kR + \pi/2)} \cdot \frac{1}{kr} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1) i^n U_n(kr_0) \cdot P_n(\cos \gamma)}{U_n(kr_0) + i V_n(kr_0)} [S_n(kr) + i C_n(kr)]. \quad (164)$$

Eine kleine Rechnung ergibt dann das vollständige in der Umgebung der Kugel vorhandene Schallfeld in der Form:

$$p_1 + p_2 = \frac{c \cdot \sigma \cdot F \cdot w}{2\lambda R} e^{i(\omega t - kR + \pi/2)} \cdot \frac{1}{kr} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1) i^{n+1} P_n(\cos \gamma)}{U_n(kr_0) + i V_n(kr_0)} [S_n(kr) V_n(kr_0) - C_n(kr) U_n(kr_0)]. \quad (165)$$

### b) Die Schallreflexion an einer starren Kugel.

Als einfachsten Fall untersuchen wir zunächst die im Aufpunkt  $A$  (d. h. in dem Ort der Schallquelle selbst) durch die Reflexion an der

<sup>1</sup> RAYLEIGH, Theory of sound, § 334.

Kugel hervorgerufene Schalldruckamplitude. Und zwar wollen wir diese vergleichen mit der Schalldruckamplitude, die senkrecht von einer starren Wand im gleichen Abstand (wie von der Kugel) reflektiert wird. Führen wir den Reflexionsfaktor  $Z = |\mathfrak{Z}|$  durch die Beziehung ein:

$$\mathfrak{Z} = \frac{1}{kr_0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1) U_n(kr_0)}{U_n(kr_0) + i V_n(kr_0)}, \quad (166)$$

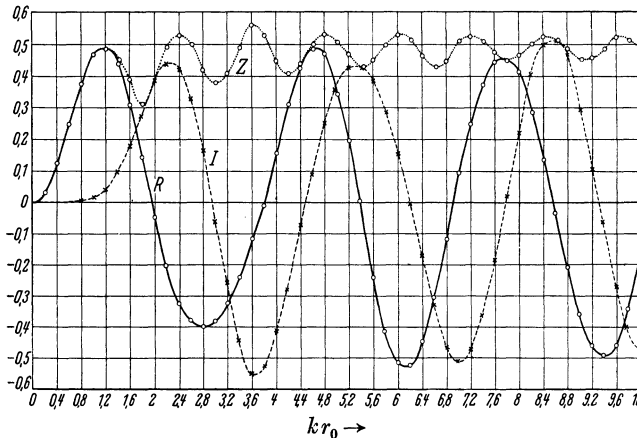


Abb. 90. Reflexionsfaktor  $Z$  einer starren Kugel und seine Komponenten ( $R, J$ ).

so folgt, da wegen  $kr \gg 1$ ,  $S_n(kr) + i C_n(kr)$  in  $i^{n+1} \cdot e^{-ikr}$  übergeht und  $\cos \gamma = 1$  ist, aus (164) für die von der Kugel herrührende Reflexionsamplitude  $p_r$ :

$$p_r = \frac{c \sigma F \cdot w}{2 \lambda R^2} r_0 Z, \quad (167)$$

während die von der starren Wand herrührende Reflexionsamplitude durch:

$$p_r^* = \frac{c \cdot \sigma \cdot F \cdot w}{4 \lambda R} \quad (168)$$

gegeben ist.

Daher ist:

$$\frac{p_r}{p_r^*} = \frac{2r_0}{R} Z. \quad (169)$$

Nun ergibt sich für den Reflexionsfaktor ein sehr einfaches Verhalten. Mit wachsendem  $kr_0$  nähert sich  $Z$  immer mehr der Größe  $\frac{1}{2}$ , so daß man mit guter Annäherung für größere  $kr_0$  den Reflexionsfaktor konstant gleich  $\frac{1}{2}$  setzen kann. Dann besagt also (169):

Die von einer starren Kugel mit dem Radius  $r_0$  in großem Abstand  $R$  reflektierte Schalldruckamplitude ist (für größere  $kr_0$ ) durch  $r_0/R$  gegeben, wenn die von einer im selben Abstand  $R$  befindlichen unendlichen Wand reflektierte Schalldruckamplitude gleich eins gesetzt wird.

Für die Darstellung des Reflexionsfaktors sind die beiden Komponenten  $R$  und  $J$  gesondert berechnet und graphisch aufgetragen. Die dazu notwendigen Funktionen  $U_n(kr)$  und  $V_n(kr)$  sind mit Hilfe der Tabellen für  $S_n(x)$  und  $C(x)$  nach (147) leicht zu finden. Das Ergebnis der Rechnung ist in Abb. 90 dargestellt.

Trägt man ferner  $R + iJ$  als Vektor in den komplexen Zahlenebene auf, so erkennt man daraus den Phasengang  $\chi$  ( $\text{tg } \chi = J/R$ ) in Abhängigkeit von  $kr_0$ . Es zeigt sich, daß die Phase praktisch konstant bleibt, solange der Reflexionsfaktor stark anwächst ( $kr_0 \leq 1,2$ ) und später

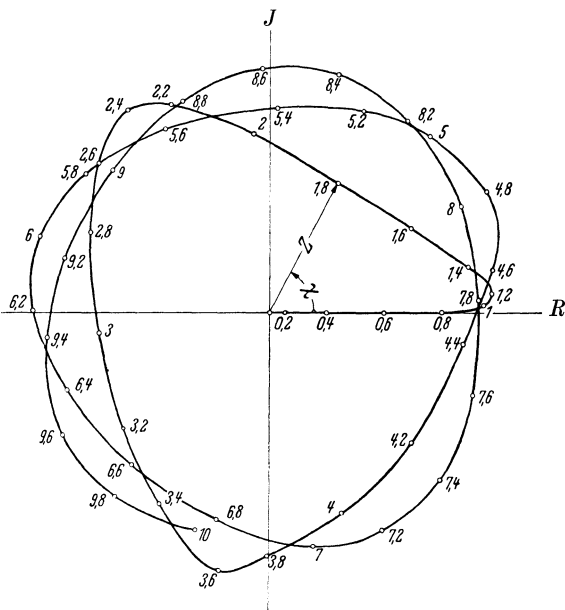


Abb. 91. Die Abhängigkeit der Phase ( $\gamma$ ) des Reflexionsfaktors von  $kr_0$ .

gleichmäßig zunimmt, wenn der Reflexionsfaktor konstant bleibt (Abb. 91). Für den *allgemeinen* Fall ( $\gamma \neq 0$ ) definieren wir den Störfaktor  $|\mathfrak{Z}(kr_0, \gamma)|$  durch:

$$\mathfrak{Z}(kr_0, \gamma) = \frac{1}{kr_0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1) U_n(kr_0)}{U_n(kr_0) + i V_n(kr_0)} P_n(\cos \gamma) \quad (170)$$

und berechnen für  $kr_0 = 1, 2, \dots, 10$  die entsprechenden Komponenten, und können dann für jedes  $kr_0$  den vollständigen Verlauf des Störfaktors in Abhängigkeit von  $\gamma$  darstellen (Abb. 92—99). Dabei ergibt sich, daß für  $\gamma = 180^\circ$  (d. h. die von der Schallquelle abgewandte Richtung)  $|\mathfrak{Z}|$  mit  $kr_0$  immer mehr wächst und für größere  $kr_0$  sehr angenähert durch  $\frac{1}{2} kr_0$  bestimmt ist. Im übrigen bleibt aber auch im abgewandten Aufpunkt die Störamplitude klein gegenüber der des ungestörten Feldes.

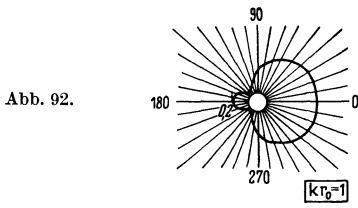


Abb. 92.

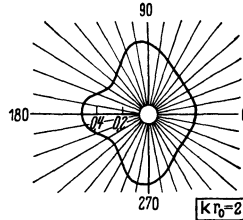


Abb. 93.

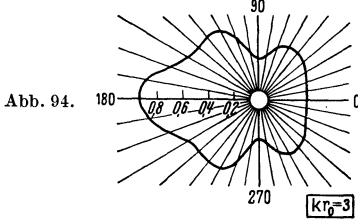


Abb. 94.

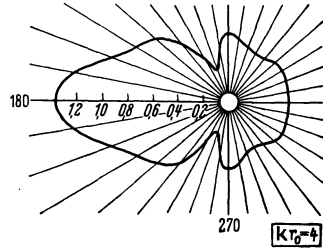


Abb. 95.

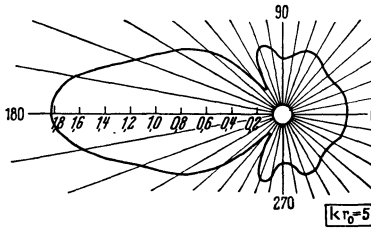


Abb. 96.

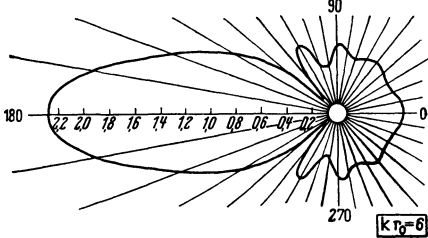


Abb. 97.

Abb. 92—97. Der Störfaktor für  $kr_0 = 1$  bis  $kr_0 = 6$ .

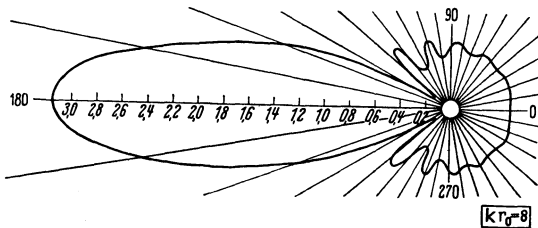


Abb. 98.

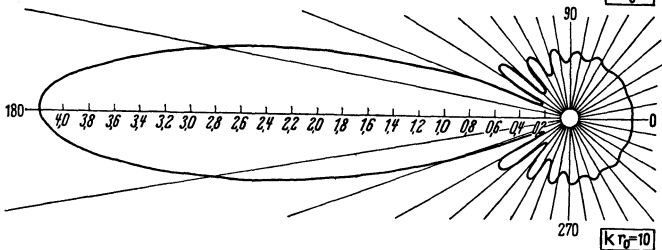


Abb. 99.

Abb. 98 u. 99. Der Störfaktor für  $kr_0 = 8$  und  $kr_0 = 10$ .

**c) Das Schallfeld in der Umgebung der Kugel.**

In unmittelbarer Umgebung der Kugel werden wir eine wesentliche Verzerrung des ungestörten Feldes zu erwarten haben. Fragen wir zunächst nach dem Verlauf der Druckamplitude in der Verbindungslinie Strahler—Kugelmittelpunkt auf der dem Strahler zugewandten Seite, so werden hier, ähnlich wie vor einer starren ebenen Wand, Maxima und Minima eintreten. Als Beispiel wollen wir den Fall  $kr_0 = 2$  untersuchen. Und zwar wollen wir den Schalldruck für die durch  $kr = 2, 3, \dots, 10$  definierten Aufpunkte berechnen. Setzen wir in (165)  $kr = kr_0$  ein, so folgt wegen der Beziehung [nach (129) und (147)]:

$$S_n(kr_0) V_n(kr_0) - C_n(kr_0) U_n(kr_0) = kr_0,$$

$$p = \frac{c \cdot \sigma}{2 R \lambda} F \cdot \omega e^{i(\omega t - kR + \pi/2)} \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) \frac{i^{n+1} P_n(\cos \gamma)}{U_n(kr_0) + i V_n(kr_0)}. \quad (171)$$

Dies steht entsprechend dem Reziprozitätsgesetz in Übereinstimmung mit dem früher besprochenen Fall, wo der Strahler auf der Kugelfläche und der Aufpunkt in großem Abstand angenommen war (156).

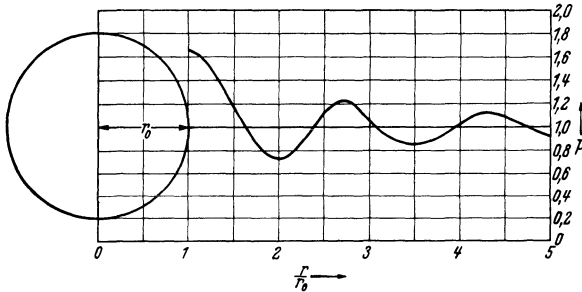


Abb. 100. Reflexion an einer starren Kugel ( $kr_0 = 2$ ).

Aus Konvergenzgründen empfiehlt es sich, das aus dem ursprünglichen (ungestörten) und dem Störfeld zusammengesetzte Feld  $p = p_1 + p_2$  nicht nach (165) zu berechnen, sondern zunächst das gestörte Feld  $p_2$  nach (164) und zu berechnen, und das ungestörte Feld  $p_1$  nach (160) hinzuzufügen.

Wir berechnen also zunächst den Störfaktor nach (164), indem wir  $P_n(\cos \gamma) = 1$  setzen. Dann ist:

$$\mathfrak{Z}(kr_0, kr, 0) = \frac{1}{kr} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n + 1) i^n U_n(kr_0)}{U_n(kr_0) + i V_n(kr_0)} [S_n(kr) + i C_n(kr)]$$

$$= \sum A_n(kr) + i B_n(kr).$$



$$A_n(kr) + iB_n(kr) = \frac{(2n + 1) i^n U_n(2)}{U_n(2) + i V_n(2)} \frac{S_n(kr) + iC_n(kr)}{kr}$$

| $n$                              | $kr=2$             | $kr=3$             | $kr=4$             | $kr=5$             |
|----------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| 0                                | +0,1742-0,3483 $i$ | -0,1327-0,2231 $i$ | -0,1946-0,0067 $i$ | -0,0885+0,1281 $i$ |
| 2                                | +0,6193-0,2959 $i$ | +0,1884-0,3087 $i$ | -0,0581-0,2438 $i$ | -0,1684-0,0927 $i$ |
| 4                                | -0,1060+0,0007 $i$ | -0,0218+0,0014 $i$ | -0,0093+0,0030 $i$ | -0,0044+0,0045 $i$ |
| 6                                | +0,0047            |                    | +0,0001            |                    |
| $\Sigma_1$                       | +0,6916-0,6435 $i$ | +0,0339-0,5304 $i$ | -0,2569-0,2475 $i$ | -0,2613+0,0399 $i$ |
| 1                                | -0,0462-0,0347 $i$ | -0,0355+0,0077 $i$ | -0,0112+0,0242 $i$ | +0,0105+0,0183 $i$ |
| 3                                | +0,0270+0,3571 $i$ | +0,0408+0,1211 $i$ | +0,0571+0,0508 $i$ | +0,0555+0,0018 $i$ |
| 5                                | -0,0246 $i$        | -0,0029 $i$        | -0,0001-0,0009 $i$ | -0,0001-0,0004 $i$ |
| 7                                | +0,0008 $i$        |                    |                    |                    |
| $\Sigma_2$                       | -0,0192+0,2986 $i$ | +0,0053+0,1259 $i$ | +0,0458+0,0741 $i$ | +0,0659+0,0197 $i$ |
| $\Sigma_1 + \Sigma_2$            | +0,6724-0,3449 $i$ | +0,0392-0,4045 $i$ | -0,2111-0,1734 $i$ | +0,1954+0,0596 $i$ |
| $-e^{+ikr}$                      | +0,4162-0,9093 $i$ | +0,9900-0,1411 $i$ | +0,6536+0,7568 $i$ | -0,2837+0,9589 $i$ |
| $\Sigma_1 + \Sigma_2 - e^{+ikr}$ | +1,0886-1,2542 $i$ | +1,0292-0,5456 $i$ | +0,4425+0,5834 $i$ | -0,4791+1,0185 $i$ |
| $\Sigma_1 + \Sigma_2 - e^{-ikr}$ | +1,660             | +1,165             | +0,732             | +1,125             |

Die Größen  $A_n + iB_n$  sind für  $kr_0 = 2$  und  $kr = 2, 3, \dots, 10$  in der Tabelle zusammengestellt. Zur Erleichterung der späteren Berechnung werden die Summen  $\Sigma_1$  für gerades  $n$  und  $\Sigma_2$  für ungerades  $n$  getrennt berechnet.

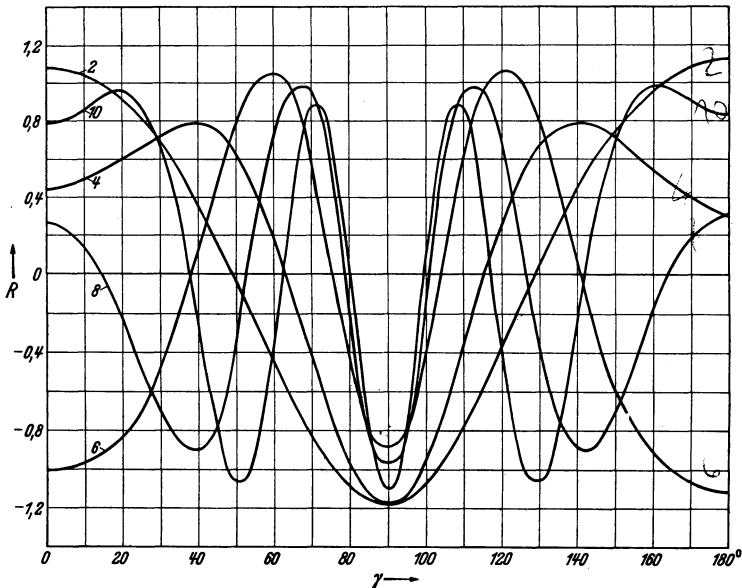


Abb. 101. Die Komponenten  $R$  für  $kr = 2, 4, 6, 8, 10$ .

nung werden die Summen  $\Sigma_1$  für gerades  $n$  und  $\Sigma_2$  für ungerades  $n$  getrennt berechnet.

$$A_n(kr) + iB_n(kr) = \frac{(2n + 1) i^n U_n(2)}{U_n(2) + iV_n(2)} \frac{S_n(kr) + iC_n(kr)}{kr}$$

| $kr=6$  | $kr=7$  | $kr=8$  | $kr=9$  | $kr=10$   |
|---|---|---|---|---|
| +0,0499+0,1198 <i>i</i><br>-0,1448+0,0608 <i>i</i><br>-0,0007+0,0047 <i>i</i> | +0,1096+0,0195 <i>i</i><br>-0,0322+0,1291 <i>i</i><br>+0,0022+0,0032 <i>i</i> | +0,0661-0,0714 <i>i</i><br>+0,0747+0,0882 <i>i</i><br>+0,0032+0,0005 <i>i</i> | -0,0217-0,0838 <i>i</i><br>+0,1018-0,0092 <i>i</i><br>+0,0022-0,0018 <i>i</i> | -0,0740-0,0243 <i>i</i><br>+0,0451-0,0798 <i>i</i><br>-0,0025 <i>i</i>        |
| -0,0956+0,1853 <i>i</i>   | +0,0796+0,1518 <i>i</i>   | +0,1440+0,0173 <i>i</i>   | +0,0823-0,0948 <i>i</i>   | -0,0289-0,1066 <i>i</i>   |
| +0,0174+0,0015 <i>i</i><br>+0,0319-0,0305 <i>i</i><br>-0,0002-0,0002 <i>i</i> | +0,0093-0,0116 <i>i</i><br>-0,0017-0,0368 <i>i</i><br>-0,0002                 | -0,0039-0,0124 <i>i</i><br>-0,0255-0,0188 <i>i</i><br>-0,0062+0,0001 <i>i</i> | -0,0111-0,0032 <i>i</i><br>-0,0268+0,0077 <i>i</i><br>+0,0002 <i>i</i>        | -0,0079+0,0068 <i>i</i><br>-0,0087+0,0233 <i>i</i><br>+0,0001+0,0001 <i>i</i> |
| +0,0491-0,0292 <i>i</i>   | +0,0074-0,0484 <i>i</i>   | -0,0296-0,0311 <i>i</i>   | -0,0379+0,0047 <i>i</i>   | -0,0165+0,0302 <i>i</i>   |
| -0,0465+0,1561 <i>i</i><br>-0,9602+0,2794 <i>i</i>                            | +0,0870+0,1034 <i>i</i><br>-0,7539-0,6570 <i>i</i>                            | +0,1144-0,0138 <i>i</i><br>+0,1455-0,9894 <i>i</i>                            | +0,0444-0,0901 <i>i</i><br>+0,9111-0,4121 <i>i</i>                            | -0,0454-0,0764 <i>i</i><br>+0,8391+0,5440 <i>i</i>                            |
| -1,0067+0,4355 <i>i</i><br>+1,098   | -0,6669-0,5536 <i>i</i><br>+0,867   | +0,2599-1,0032 <i>i</i><br>+1,036   | +0,9555-0,5022 <i>i</i><br>+1,079   | +0,7937+0,4676 <i>i</i><br>+0,926   |

Die Werte  $p = |\sum_1 + \sum_2 - e^{+ikr}|$  geben dann die Druckamplituden vor der starren Kugel in Richtung auf den Strahler an. Dabei ist die

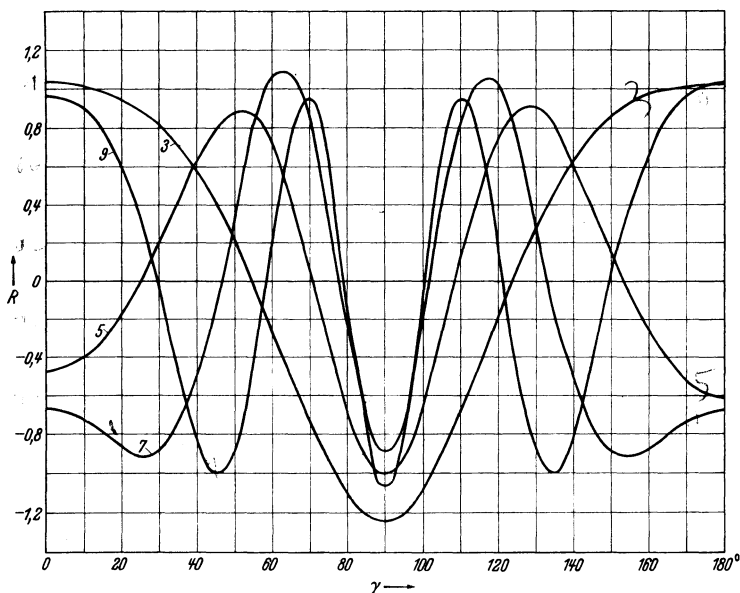
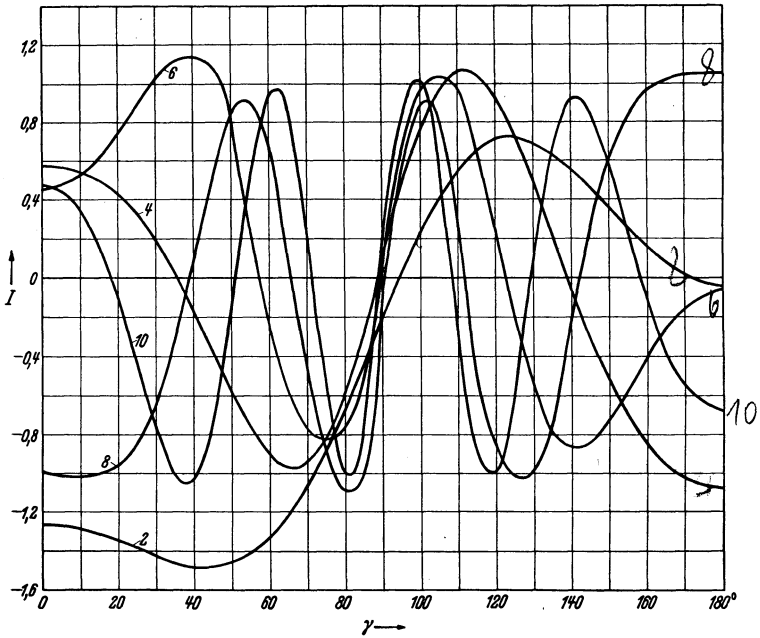
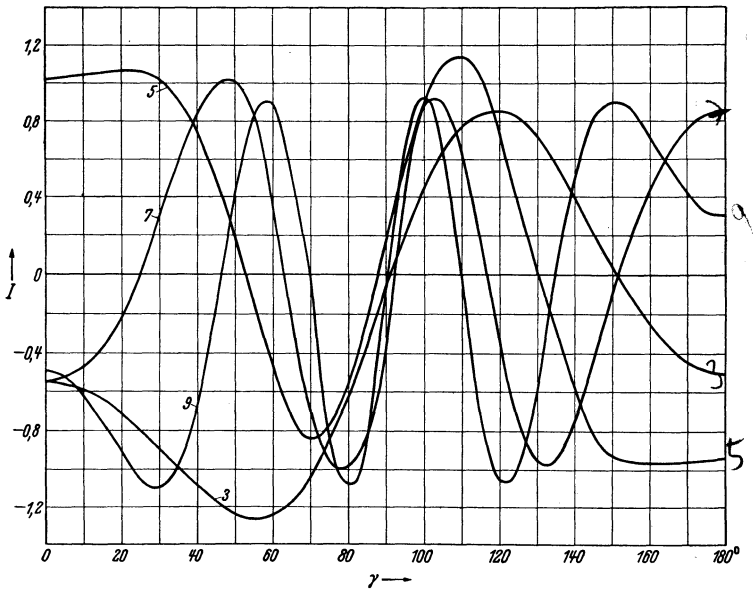


Abb. 102. Die Komponenten  $R$  für  $kr = 3, 5, 7, 9$ .

ungestörte Druckamplitude des Strahlers gleich eins gesetzt. Wir sehen, daß die Druckamplituden vor der starren Kugel in ähnlicher Weise

Abb. 103. Die Komponenten  $J$  für  $kr = 2, 4, 6, 8, 10$ .Abb. 104. Die Komponenten  $J$  für  $kr = 3, 5, 7, 9$ .

wie bei der Reflexion an einer ebenen Wand schwanken; nur nehmen hier die Schwankungen mit größer werdendem Abstand von der Kugel sehr schnell ab (s. Abb. 100).

Die vollständige Berechnung des gestörten Schallfeldes ergibt sich dann mit Hilfe der Tabellen für die Kugelfunktionen aus:

$$\mathfrak{B}(kr_0, kr, \gamma) = e^{-i k r \cos \gamma} = \sum (A_n + i B_n) P_n(\cos \gamma) = R + i J.$$

Zunächst sind die Komponenten  $R$  und  $J$  für  $kr = 2, 3, 4, \dots, 10$  in Abhängigkeit von  $\gamma$  berechnet und in der Abb. 101 bis 104

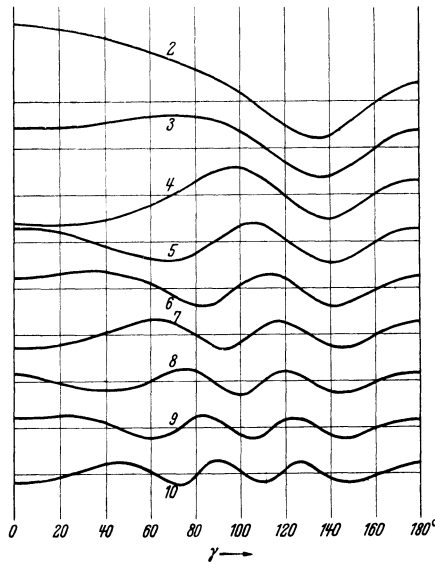


Abb. 105. Die Abweichung der gestörten Druckamplitude in der Umgebung der Kugel (Radius  $r_0$ ) von der ungestörten Amplitude für Aufpunkte  $(r, \gamma)$ .  
 $kr_0 = 2; kr = 2, 3, 4 \dots 10.$

gezeichnet. Daraus sind die Größen  $\sqrt{R^2 + J^2}$  gefunden und die Schwankungen dieser um den ungestörten Wert 1 in Abb. 105 dargestellt. Man erkennt daraus, daß die Größe der Schwankungen mit wachsendem  $kr$  abnimmt, während die Zahl der Schwankungen zunimmt. Beziffert man die durch  $kr = 2, 3, 4, \dots, 10$  gegebenen Aufpunkte entsprechend den Werten der Abb. 105, so kann man durch Interpolation die Kurven konstanten Schalldruckes in der Umgebung der Kugel einzeichnen. Das Ergebnis ist in Abb. 106 dargestellt. Der größte Wert (1,66) liegt auf der Oberfläche der Kugel gegenüber der Schallquelle ( $\gamma = 0$ ). Der kleinste Wert (0,66) liegt ebenfalls auf der Kugel ( $\gamma = 135^\circ$ ). Für Aufpunkte in einem Abstand  $r > 5 r_0$  bleibt der Unterschied zwischen gestörter und ungestörter Amplitude unter 10%.



$$\sigma_{2n}(x) = (-1)^n \int_0^x S_{2n}(x) dx$$

| $x$  | $\sigma_0(x)$          | $\sigma_2(x)$           | $\sigma_4(x)$          | $\sigma_6(x)$           |
|------|------------------------|-------------------------|------------------------|-------------------------|
| 1    | $4,5970 \cdot 10^{-1}$ | $-1,5889 \cdot 10^{-2}$ | $1,7045 \cdot 10^{-4}$ | $-9,0064 \cdot 10^{-7}$ |
| 1,25 | $6,8468 \cdot 10^{-1}$ | $-3,776 \cdot 10^{-2}$  | $6,3780 \cdot 10^{-4}$ | $-5,2881 \cdot 10^{-6}$ |
| 1,5  | $9,2926 \cdot 10^{-1}$ | $-7,575 \cdot 10^{-2}$  | $1,8601 \cdot 10^{-3}$ | $-2,2323 \cdot 10^{-5}$ |
| 1,75 | 1,1782                 | $-1,3492 \cdot 10^{-1}$ | $4,5611 \cdot 10^{-3}$ | $-7,4965 \cdot 10^{-5}$ |
| 2    | 1,4161                 | $-2,1991 \cdot 10^{-1}$ | $9,8396 \cdot 10^{-3}$ | $-2,1274 \cdot 10^{-4}$ |
| 2,25 | 1,6282                 | $3,3440 \cdot 10^{-1}$  | $1,9227 \cdot 10^{-2}$ | $-5,3045 \cdot 10^{-4}$ |
| 2,5  | 1,8011                 | $-4,8070 \cdot 10^{-1}$ | $3,4718 \cdot 10^{-2}$ | $-1,1934 \cdot 10^{-3}$ |
| 2,75 | 1,9243                 | $-6,5934 \cdot 10^{-1}$ | $5,8749 \cdot 10^{-2}$ | $-2,4688 \cdot 10^{-3}$ |
| 3    | 1,9900                 | $-8,6889 \cdot 10^{-1}$ | $9,4155 \cdot 10^{-2}$ | $-4,7627 \cdot 10^{-3}$ |
| 3,25 | 1,9941                 | -1,1057                 | $1,4412 \cdot 10^{-1}$ | $-8,6589 \cdot 10^{-3}$ |
| 3,5  | 1,9365                 | -1,3642                 | $2,1165 \cdot 10^{-1}$ | $-1,4959 \cdot 10^{-3}$ |
| 3,75 | 1,8206                 | -1,6367                 | $3,0013 \cdot 10^{-1}$ | $-2,4716 \cdot 10^{-2}$ |
| 4    | 1,6536                 | 1,9140                  | $4,1236 \cdot 10^{-1}$ | $-3,9266 \cdot 10^{-2}$ |
| 4,25 | 1,4461                 | -2,1857                 | $5,5056 \cdot 10^{-1}$ | $-6,0232 \cdot 10^{-2}$ |
| 4,5  | 1,2108                 | -2,4409                 | $7,1629 \cdot 10^{-1}$ | $-8,9529 \cdot 10^{-2}$ |
| 4,75 | $9,6240 \cdot 10^{-1}$ | -2,6687                 | $9,0998 \cdot 10^{-1}$ | $-1,2933 \cdot 10^{-1}$ |
| 5    | $7,1634 \cdot 10^{-1}$ | -2,8590                 | <u>1,1331</u>          | $-1,8231 \cdot 10^{-1}$ |
| 5,25 | $4,8791 \cdot 10^{-1}$ | -3,0029                 | 1,3765                 | $-2,5010 \cdot 10^{-1}$ |
| 5,5  | $2,9133 \cdot 10^{-1}$ | -3,0935                 | 1,6444                 | $-3,3609 \cdot 10^{-1}$ |
| 5,75 | $1,3881 \cdot 10^{-1}$ | -3,1264                 | 1,9267                 | $-4,4243 \cdot 10^{-1}$ |
| 6    | $3,9829 \cdot 10^{-2}$ | -3,0999                 | 2,2196                 | $-5,7126 \cdot 10^{-1}$ |
| 6,25 | $0,0506 \cdot 10^{-2}$ | 3,0154                  | 2,5144                 | $-7,2433 \cdot 10^{-1}$ |
| 6,5  | $2,3414 \cdot 10^{-2}$ | -2,8873                 | 2,8026                 | $-9,0268 \cdot 10^{-1}$ |
| 6,75 | $1,0700 \cdot 10^{-1}$ | -2,6930                 | 3,0750                 | 1,1068                  |
| 7    | $2,4608 \cdot 10^{-1}$ | <u>2,4580</u>           | 3,3228                 | 1,3360                  |
| 7,25 | $4,3208 \cdot 10^{-1}$ | 2,2273                  | 3,5368                 | 1,5888                  |
| 7,5  | $6,5337 \cdot 10^{-1}$ | -1,9714                 | 3,7089                 | 1,8622                  |
| 7,75 | $8,9621 \cdot 10^{-1}$ | -1,7188                 | 3,8322                 | -2,1526                 |
| 8    | 1,1455                 | -1,4835                 | 3,9019                 | -2,4548                 |
| 8,25 | 1,3858                 | 1,2788                  | 3,9154                 | -2,7624                 |
| 8,5  | 1,6020                 | 1,1162                  | 3,8731                 | -3,0696                 |
| 8,75 | 1,7808                 | -1,0050                 | 3,7732                 | -3,3678                 |
| 9    | 1,9111                 | $-9,5150 \cdot 10^{-1}$ | 3,6256                 | -3,6483                 |
| 9,25 | 1,9848                 | $-9,5884 \cdot 10^{-1}$ | 3,4323                 | -3,9043                 |
| 9,5  | 1,9972                 | -1,0255                 | 3,2048                 | -4,1282                 |
| 9,75 | 1,9476                 | -1,1507                 | 2,9517                 | -4,3118                 |
| 10   | 1,8391                 | -1,3241                 | 2,6878                 | -4,4467                 |

$$\sigma_{2n}(x) = (-1)^n \int_0^x S_{2n}(x) dx$$

| $x$  | $\sigma_8(x)$          | $\sigma_{10}(x)$         | $\sigma_{12}(x)$        | $\sigma_{14}(x)$         |
|------|------------------------|--------------------------|-------------------------|--------------------------|
| 1    | $2,8390 \cdot 10^{-9}$ | $-5,9490 \cdot 10^{-12}$ | $8,8897 \cdot 10^{-15}$ | $-9,9527 \cdot 10^{-18}$ |
| 1,25 | $2,6112 \cdot 10^{-8}$ | $-8,5647 \cdot 10^{-11}$ | $2,0025 \cdot 10^{-13}$ | $-3,5068 \cdot 10^{-16}$ |
| 1,5  | $1,5927 \cdot 10^{-7}$ | $-7,5405 \cdot 10^{-10}$ | $2,5431 \cdot 10^{-12}$ | $-6,4210 \cdot 10^{-15}$ |
| 1,75 | $7,3086 \cdot 10^{-7}$ | $-4,7224 \cdot 10^{-9}$  | $2,1722 \cdot 10^{-11}$ | $-7,4763 \cdot 10^{-14}$ |
| 2    | $2,7213 \cdot 10^{-6}$ | $-2,3039 \cdot 10^{-8}$  | $1,3872 \cdot 10^{-10}$ | $-6,2475 \cdot 10^{-13}$ |
| 2,25 | $8,6320 \cdot 10^{-6}$ | $-9,2821 \cdot 10^{-8}$  | $7,0921 \cdot 10^{-10}$ | $-4,0506 \cdot 10^{-12}$ |
| 2,5  | $2,4115 \cdot 10^{-5}$ | $-3,2141 \cdot 10^{-7}$  | $3,0408 \cdot 10^{-9}$  | $-2,1489 \cdot 10^{-11}$ |
| 2,75 | $6,0754 \cdot 10^{-5}$ | $-9,8416 \cdot 10^{-7}$  | $1,1303 \cdot 10^{-8}$  | $-9,6890 \cdot 10^{-11}$ |
| 3    | $1,4047 \cdot 10^{-4}$ | $-2,7214 \cdot 10^{-6}$  | $3,7328 \cdot 10^{-8}$  | $-3,8185 \cdot 10^{-10}$ |
| 3,25 | $3,0207 \cdot 10^{-4}$ | $-6,9047 \cdot 10^{-6}$  | $1,1159 \cdot 10^{-7}$  | $-1,3437 \cdot 10^{-9}$  |
| 3,5  | $6,1037 \cdot 10^{-4}$ | $-1,6275 \cdot 10^{-5}$  | $3,0635 \cdot 10^{-7}$  | $-4,2920 \cdot 10^{-9}$  |
| 3,75 | $1,1684 \cdot 10^{-3}$ | $-3,5991 \cdot 10^{-5}$  | $7,8125 \cdot 10^{-7}$  | $-1,2609 \cdot 10^{-8}$  |
| 4    | $2,1331 \cdot 10^{-3}$ | $-7,5265 \cdot 10^{-5}$  | $1,8679 \cdot 10^{-6}$  | $-3,4430 \cdot 10^{-8}$  |
| 4,25 | $3,7335 \cdot 10^{-3}$ | $-1,4980 \cdot 10^{-4}$  | $4,2194 \cdot 10^{-6}$  | $-8,8147 \cdot 10^{-8}$  |
| 4,5  | $6,2934 \cdot 10^{-3}$ | $-2,8521 \cdot 10^{-4}$  | $9,0598 \cdot 10^{-6}$  | $-2,1309 \cdot 10^{-7}$  |
| 4,75 | $1,0254 \cdot 10^{-2}$ | $-5,2225 \cdot 10^{-4}$  | $1,8589 \cdot 10^{-5}$  | $-4,8938 \cdot 10^{-7}$  |
| 5    | $1,6171 \cdot 10^{-2}$ | $-9,2237 \cdot 10^{-4}$  | $3,6609 \cdot 10^{-5}$  | $-1,0731 \cdot 10^{-6}$  |
| 5,25 | $2,4890 \cdot 10^{-2}$ | $-1,5769 \cdot 10^{-3}$  | $6,9466 \cdot 10^{-5}$  | $-2,2563 \cdot 10^{-6}$  |
| 5,5  | $3,7260 \cdot 10^{-2}$ | $-2,6166 \cdot 10^{-3}$  | $1,2741 \cdot 10^{-4}$  | $-4,5663 \cdot 10^{-6}$  |
| 5,75 | $5,4464 \cdot 10^{-2}$ | $-4,2244 \cdot 10^{-3}$  | $2,2652 \cdot 10^{-4}$  | $-8,9231 \cdot 10^{-6}$  |
| 6    | $7,7869 \cdot 10^{-2}$ | $-6,6497 \cdot 10^{-3}$  | $3,9134 \cdot 10^{-4}$  | $-1,6886 \cdot 10^{-5}$  |
| 6,25 | $1,0906 \cdot 10^{-1}$ | $-1,0224 \cdot 10^{-2}$  | $6,5836 \cdot 10^{-4}$  | $-3,1017 \cdot 10^{-5}$  |
| 6,5  | $1,4981 \cdot 10^{-1}$ | $-1,5379 \cdot 10^{-2}$  | $1,0805 \cdot 10^{-3}$  | $-5,5423 \cdot 10^{-5}$  |
| 6,75 | $2,0209 \cdot 10^{-1}$ | $-2,2666 \cdot 10^{-2}$  | $1,7332 \cdot 10^{-3}$  | $-9,6522 \cdot 10^{-5}$  |
| 7    | $2,6797 \cdot 10^{-1}$ | $-3,2769 \cdot 10^{-2}$  | $2,7207 \cdot 10^{-3}$  | $-1,6413 \cdot 10^{-4}$  |
| 7,25 | $3,4960 \cdot 10^{-1}$ | $-4,6527 \cdot 10^{-2}$  | $4,1857 \cdot 10^{-3}$  | $-2,7290 \cdot 10^{-4}$  |
| 7,5  | $4,4908 \cdot 10^{-1}$ | $-6,4934 \cdot 10^{-2}$  | $6,3180 \cdot 10^{-3}$  | $-4,4431 \cdot 10^{-4}$  |
| 7,75 | $5,6843 \cdot 10^{-1}$ | $-8,9182 \cdot 10^{-2}$  | $9,3671 \cdot 10^{-3}$  | $-7,0914 \cdot 10^{-4}$  |
| 8    | $7,0942 \cdot 10^{-1}$ | $-1,2077 \cdot 10^{-1}$  | $1,3656 \cdot 10^{-2}$  | $-1,1109 \cdot 10^{-3}$  |
| 8,25 | $8,7332 \cdot 10^{-1}$ | $-1,6073 \cdot 10^{-1}$  | $1,9587 \cdot 10^{-2}$  | $-1,7098 \cdot 10^{-3}$  |
| 8,5  | 1,0613                 | $-2,1123 \cdot 10^{-1}$  | $2,7667 \cdot 10^{-2}$  | $-2,5879 \cdot 10^{-3}$  |
| 8,75 | 1,2735                 | $-2,7391 \cdot 10^{-1}$  | $3,8516 \cdot 10^{-2}$  | $-3,8543 \cdot 10^{-3}$  |
| 9    | 1,5095                 | $-3,5062 \cdot 10^{-1}$  | $5,2873 \cdot 10^{-2}$  | $-5,6537 \cdot 10^{-3}$  |
| 9,25 | 1,7680                 | $-4,4325 \cdot 10^{-1}$  | $7,1618 \cdot 10^{-2}$  | $-8,1741 \cdot 10^{-3}$  |
| 9,5  | 2,0467                 | $-5,5367 \cdot 10^{-1}$  | $9,5779 \cdot 10^{-2}$  | $-1,1658 \cdot 10^{-2}$  |
| 9,75 | 2,3427                 | $-6,8329 \cdot 10^{-1}$  | $1,2649 \cdot 10^{-1}$  | $-1,6405 \cdot 10^{-2}$  |
| 10   | 2,6520                 | $-8,3321 \cdot 10^{-1}$  | $1,6514 \cdot 10^{-1}$  | $-2,2792 \cdot 10^{-2}$  |

$$\sigma_{2n}(x) := (-1)^n \int_0^x S_{2n}(x) dx$$

| $x$  | $\sigma_{16}(x)$        | $\sigma_{18}(x)$         | $\sigma_{20}(x)$        |
|------|-------------------------|--------------------------|-------------------------|
| 1    | $8,6608 \cdot 10^{-21}$ | $-6,0262 \cdot 10^{-24}$ | $3,4296 \cdot 10^{-27}$ |
| 1,25 | $4,7721 \cdot 10^{-19}$ | $-5,1906 \cdot 10^{-22}$ | $4,6183 \cdot 10^{-25}$ |
| 1,5  | $1,2596 \cdot 10^{-17}$ | $-1,9749 \cdot 10^{-20}$ | $2,5326 \cdot 10^{-23}$ |
| 1,75 | $1,9986 \cdot 10^{-16}$ | $-4,2694 \cdot 10^{-19}$ | $7,4565 \cdot 10^{-22}$ |
| 2    | $2,1844 \cdot 10^{-15}$ | $-6,1016 \cdot 10^{-18}$ | $1,3932 \cdot 10^{-20}$ |
| 2,25 | $1,7952 \cdot 10^{-14}$ | $-6,3555 \cdot 10^{-17}$ | $1,8384 \cdot 10^{-19}$ |
| 2,5  | $1,1779 \cdot 10^{-13}$ | $-5,1564 \cdot 10^{-16}$ | $1,8433 \cdot 10^{-18}$ |
| 2,75 | $6,4390 \cdot 10^{-13}$ | $-3,4152 \cdot 10^{-15}$ | $1,4795 \cdot 10^{-17}$ |
| 3    | $3,0264 \cdot 10^{-12}$ | $-1,9138 \cdot 10^{-14}$ | $9,8812 \cdot 10^{-17}$ |
| 3,25 | $1,2528 \cdot 10^{-11}$ | $-9,3150 \cdot 10^{-14}$ | $5,6536 \cdot 10^{-16}$ |
| 3,5  | $4,6530 \cdot 10^{-11}$ | $-4,0206 \cdot 10^{-13}$ | $2,8348 \cdot 10^{-15}$ |
| 3,75 | $1,5735 \cdot 10^{-10}$ | $-1,5643 \cdot 10^{-12}$ | $1,2685 \cdot 10^{-14}$ |
| 4    | $4,9031 \cdot 10^{-10}$ | $-5,5593 \cdot 10^{-12}$ | $5,1385 \cdot 10^{-14}$ |
| 4,25 | $1,4215 \cdot 10^{-9}$  | $-1,8242 \cdot 10^{-11}$ | $1,9075 \cdot 10^{-13}$ |
| 4,5  | $3,8658 \cdot 10^{-9}$  | $-5,5765 \cdot 10^{-11}$ | $6,5529 \cdot 10^{-13}$ |
| 4,75 | $9,9271 \cdot 10^{-9}$  | $-1,6002 \cdot 10^{-10}$ | $2,1000 \cdot 10^{-12}$ |
| 5    | $2,4210 \cdot 10^{-8}$  | $-4,3374 \cdot 10^{-10}$ | $6,3229 \cdot 10^{-12}$ |
| 5,25 | $5,6349 \cdot 10^{-8}$  | $-1,1165 \cdot 10^{-9}$  | $1,7992 \cdot 10^{-11}$ |
| 5,5  | $1,2568 \cdot 10^{-7}$  | $-2,7423 \cdot 10^{-9}$  | $4,8637 \cdot 10^{-11}$ |
| 5,75 | $2,5943 \cdot 10^{-7}$  | $-6,4534 \cdot 10^{-9}$  | $1,2545 \cdot 10^{-10}$ |
| 6    | $5,5812 \cdot 10^{-7}$  | $-1,4601 \cdot 10^{-8}$  | $3,2001 \cdot 10^{-10}$ |
| 6,25 | $1,1178 \cdot 10^{-6}$  | $-3,1849 \cdot 10^{-8}$  | $7,3612 \cdot 10^{-10}$ |
| 6,5  | $2,1713 \cdot 10^{-6}$  | $-6,7192 \cdot 10^{-8}$  | $1,6853 \cdot 10^{-9}$  |
| 6,75 | $4,1000 \cdot 10^{-6}$  | $-1,3741 \cdot 10^{-7}$  | $3,7296 \cdot 10^{-9}$  |
| 7    | $7,5395 \cdot 10^{-6}$  | $-2,7294 \cdot 10^{-7}$  | $7,9970 \cdot 10^{-9}$  |
| 7,25 | $1,3526 \cdot 10^{-5}$  | $-5,2771 \cdot 10^{-7}$  | $1,6648 \cdot 10^{-8}$  |
| 7,5  | $2,3708 \cdot 10^{-5}$  | $-9,9447 \cdot 10^{-7}$  | $3,3716 \cdot 10^{-8}$  |
| 7,75 | $4,0662 \cdot 10^{-5}$  | $-1,8308 \cdot 10^{-6}$  | $6,6530 \cdot 10^{-8}$  |
| 8    | $6,8327 \cdot 10^{-5}$  | $-3,2951 \cdot 10^{-6}$  | $1,2814 \cdot 10^{-7}$  |
| 8,25 | $1,1260 \cdot 10^{-4}$  | $-5,8063 \cdot 10^{-6}$  | $2,4118 \cdot 10^{-7}$  |
| 8,5  | $1,8218 \cdot 10^{-4}$  | $-1,0029 \cdot 10^{-5}$  | $4,4424 \cdot 10^{-7}$  |
| 8,75 | $2,8969 \cdot 10^{-4}$  | $-1,6998 \cdot 10^{-5}$  | $8,0174 \cdot 10^{-7}$  |
| 9    | $4,5303 \cdot 10^{-4}$  | $-2,8298 \cdot 10^{-5}$  | $1,4188 \cdot 10^{-6}$  |
| 9,25 | $6,9741 \cdot 10^{-4}$  | $-4,6307 \cdot 10^{-5}$  | $2,4653 \cdot 10^{-6}$  |
| 9,5  | $1,0577 \cdot 10^{-3}$  | $-7,4567 \cdot 10^{-5}$  | $4,2097 \cdot 10^{-6}$  |
| 9,75 | $1,5810 \cdot 10^{-3}$  | $-1,1825 \cdot 10^{-4}$  | $7,0671 \cdot 10^{-6}$  |
| 10   | $2,3316 \cdot 10^{-3}$  | $-1,8457 \cdot 10^{-4}$  | $1,1674 \cdot 10^{-5}$  |



$$\zeta_{2n}(x) = (-1)^n \int_0^x C_{2n}(x) dx$$

| $x$  | $\zeta_0(x)$               | $\zeta_2(x)$               | $\zeta_4(x)$               | $\zeta_6(x)$               |
|------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 1    | +8,4147 · 10 <sup>-1</sup> | +2,4624                    | -4,2118 · 10 <sup>+1</sup> | +2,2493 · 10 <sup>+3</sup> |
| 1,25 | +9,4899 · 10 <sup>-1</sup> | +1,5168                    | -2,3436 · 10 <sup>+1</sup> | +7,7199 · 10 <sup>+2</sup> |
| 1,5  | +9,9750 · 10 <sup>-1</sup> | +1,1390                    | -1,4781 · 10 <sup>+1</sup> | +3,2872 · 10 <sup>+2</sup> |
| 1,75 | +9,8399 · 10 <sup>-1</sup> | +6,7842 · 10 <sup>-1</sup> | -1,0116 · 10 <sup>+1</sup> | +1,6310 · 10 <sup>+2</sup> |
| 2    | +9,0930 · 10 <sup>-1</sup> | +2,8508 · 10 <sup>-1</sup> | -7,3071                    | +9,0571 · 10 <sup>+1</sup> |
| 2,25 | +7,7807 · 10 <sup>-1</sup> | -5,9492 · 10 <sup>-2</sup> | -5,4629                    | +5,4977 · 10 <sup>+1</sup> |
| 2,5  | +5,9847 · 10 <sup>-1</sup> | -3,6290 · 10 <sup>-1</sup> | -4,1630                    | +3,5791 · 10 <sup>+1</sup> |
| 2,75 | +3,8166 · 10 <sup>-1</sup> | -6,2667 · 10 <sup>-1</sup> | -3,1903                    | +2,4641 · 10 <sup>+1</sup> |
| 3    | +1,4112 · 10 <sup>-1</sup> | -8,4887 · 10 <sup>-1</sup> | -2,4243                    | +1,7740 · 10 <sup>+1</sup> |
| 3,25 | -1,0820 · 10 <sup>-1</sup> | -1,0259                    | -1,7950                    | +1,3230 · 10 <sup>+1</sup> |
| 3,5  | -3,5078 · 10 <sup>-1</sup> | -1,1535                    | -1,2597                    | +1,0140 · 10 <sup>+1</sup> |
| 3,75 | -5,7156 · 10 <sup>-1</sup> | -1,2280                    | -7,9256 · 10 <sup>-1</sup> | +7,9299                    |
| 4    | -7,5680 · 10 <sup>-1</sup> | -1,2470                    | -3,7794 · 10 <sup>-1</sup> | +6,2863                    |
| 4,25 | -8,9499 · 10 <sup>-1</sup> | -1,2099                    | -6,99 · 10 <sup>-3</sup>   | +5,0190                    |
| 4,5  | -9,7753 · 10 <sup>-1</sup> | -1,0181                    | +3,2456 · 10 <sup>-1</sup> | +4,0091                    |
| 4,75 | -9,9929 · 10 <sup>-1</sup> | -9,7554 · 10 <sup>-1</sup> | +6,1775 · 10 <sup>-1</sup> | +3,1796                    |
| 5    | -9,5892 · 10 <sup>-1</sup> | -7,8873 · 10 <sup>-1</sup> | +8,7147 · 10 <sup>-1</sup> | +2,4794                    |
| 5,25 | -8,5893 · 10 <sup>-1</sup> | -5,6631 · 10 <sup>-1</sup> | +1,0833                    | +1,8743                    |
| 5,5  | -7,0554 · 10 <sup>-1</sup> | -3,1899 · 10 <sup>-1</sup> | +1,2502                    | +1,3414                    |
| 5,75 | -5,0828 · 10 <sup>-1</sup> | -1,5896 · 10 <sup>-1</sup> | +1,3690                    | +8,6521 · 10 <sup>-1</sup> |
| 6    | -2,7941 · 10 <sup>-1</sup> | +2,0067 · 10 <sup>-1</sup> | +1,4369                    | +4,3590 · 10 <sup>-1</sup> |
| 6,25 | -3,3177 · 10 <sup>-2</sup> | +4,4655 · 10 <sup>-1</sup> | +1,4524                    | +4,7489 · 10 <sup>-2</sup> |
| 6,5  | +2,1512 · 10 <sup>-1</sup> | +6,6586 · 10 <sup>-1</sup> | +1,4149                    | -3,0500 · 10 <sup>-1</sup> |
| 6,75 | +4,5005 · 10 <sup>-1</sup> | +8,4694 · 10 <sup>-1</sup> | +1,3257                    | -6,1638 · 10 <sup>-1</sup> |
| 7    | +6,5699 · 10 <sup>-1</sup> | +9,8009 · 10 <sup>-1</sup> | +1,1878                    | -8,9189 · 10 <sup>-1</sup> |
| 7,25 | +8,2308 · 10 <sup>-1</sup> | +1,0581                    | +1,0062                    | -1,1276                    |
| 7,5  | +9,3798 · 10 <sup>-1</sup> | +1,0766                    | +7,8777 · 10 <sup>-1</sup> | -1,3211                    |
| 7,75 | +9,9465 · 10 <sup>-1</sup> | +1,0348                    | +5,4163 · 10 <sup>-1</sup> | -1,4697                    |
| 8    | +9,8936 · 10 <sup>-1</sup> | +9,3482 · 10 <sup>-1</sup> | +2,7643 · 10 <sup>-1</sup> | -1,5707                    |
| 8,25 | +9,2260 · 10 <sup>-1</sup> | +7,8233 · 10 <sup>-1</sup> | +4,64 · 10 <sup>-3</sup>   | -1,6223                    |
| 8,5  | +7,9849 · 10 <sup>-1</sup> | +5,8601 · 10 <sup>-1</sup> | -2,6226 · 10 <sup>-1</sup> | -1,6232                    |
| 8,75 | +6,2472 · 10 <sup>-1</sup> | +3,5701 · 10 <sup>-1</sup> | -5,1247 · 10 <sup>-1</sup> | -1,5735                    |
| 9    | +4,1212 · 10 <sup>-1</sup> | +1,0841 · 10 <sup>-1</sup> | -7,3459 · 10 <sup>-1</sup> | -1,4746                    |
| 9,25 | +1,7390 · 10 <sup>-1</sup> | -1,4549 · 10 <sup>-1</sup> | -9,1830 · 10 <sup>-1</sup> | -1,3293                    |
| 9,5  | -7,5151 · 10 <sup>-2</sup> | -3,9003 · 10 <sup>-1</sup> | -1,0550                    | -1,1422                    |
| 9,75 | -3,1952 · 10 <sup>-1</sup> | -6,1109 · 10 <sup>-1</sup> | -1,1380                    | -9,1915 · 10 <sup>-1</sup> |
| 10   | -5,4402 · 10 <sup>-1</sup> | -7,9575 · 10 <sup>-1</sup> | -1,1633                    | -6,6835 · 10 <sup>-1</sup> |

$$\zeta_{2n}(x) = (-1)^n \int_0^x C_{2n}(x) dx$$

| $x$  | $\zeta_8(x)$            | $\zeta_{10}(x)$         | $\zeta_{12}(x)$          | $\zeta_{14}(x)$          |
|------|-------------------------|-------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1    | $-3,0354 \cdot 10^{+5}$ | $+7,5261 \cdot 10^{+7}$ | $-2,9522 \cdot 10^{+10}$ | $+1,6784 \cdot 10^{+13}$ |
| 1,25 | $-6,5399 \cdot 10^{+4}$ | $+1,0297 \cdot 10^{+7}$ | $-2,5745 \cdot 10^{+9}$  | $+9,3415 \cdot 10^{+11}$ |
| 1,5  | $-1,8869 \cdot 10^{+4}$ | $+2,0434 \cdot 10^{+6}$ | $-3,5286 \cdot 10^{+8}$  | $+8,8621 \cdot 10^{+10}$ |
| 1,75 | $-6,6759 \cdot 10^{+3}$ | $+5,2483 \cdot 10^{+5}$ | $-6,6184 \cdot 10^{+7}$  | $+1,2165 \cdot 10^{+10}$ |
| 2    | $-2,7480 \cdot 10^{+3}$ | $+1,6303 \cdot 10^{+5}$ | $-1,5625 \cdot 10^{+7}$  | $+2,1887 \cdot 10^{+9}$  |
| 2,25 | $-1,2724 \cdot 10^{+3}$ | $+5,8628 \cdot 10^{+4}$ | $-4,4020 \cdot 10^{+6}$  | $+4,8465 \cdot 10^{+8}$  |
| 2,5  | $-6,4771 \cdot 10^{+2}$ | $+2,3692 \cdot 10^{+4}$ | $-1,4268 \cdot 10^{+6}$  | $+1,2649 \cdot 10^{+8}$  |
| 2,75 | $-3,5659 \cdot 10^{+2}$ | $+1,0534 \cdot 10^{+4}$ | $-5,1846 \cdot 10^{+5}$  | $+3,7726 \cdot 10^{+7}$  |
| 3    | $-2,0976 \cdot 10^{+2}$ | $+5,0730 \cdot 10^{+3}$ | $-2,0711 \cdot 10^{+5}$  | $+1,2571 \cdot 10^{+7}$  |
| 3,25 | $-1,3062 \cdot 10^{+2}$ | $+2,6156 \cdot 10^{+3}$ | $-8,9675 \cdot 10^{+4}$  | $+4,5995 \cdot 10^{+6}$  |
| 3,5  | $-8,5442 \cdot 10^{+1}$ | $+1,4308 \cdot 10^{+3}$ | $-4,1608 \cdot 10^{+4}$  | $+1,8233 \cdot 10^{+6}$  |
| 3,75 | $-5,8347 \cdot 10^{+1}$ | $+8,2447 \cdot 10^{+2}$ | $-2,0506 \cdot 10^{+4}$  | $+7,7485 \cdot 10^{+5}$  |
| 4    | $-4,1365 \cdot 10^{+1}$ | $+4,9763 \cdot 10^{+2}$ | $-1,0657 \cdot 10^{+4}$  | $+3,4999 \cdot 10^{+5}$  |
| 4,25 | $-3,0295 \cdot 10^{+1}$ | $+3,1312 \cdot 10^{+2}$ | $-5,8075 \cdot 10^{+3}$  | $+1,6687 \cdot 10^{+5}$  |
| 4,5  | $-2,2817 \cdot 10^{+1}$ | $+2,0460 \cdot 10^{+2}$ | $-3,3024 \cdot 10^{+3}$  | $+8,3497 \cdot 10^{+4}$  |
| 4,75 | $-1,7597 \cdot 10^{+1}$ | $+1,3836 \cdot 10^{+2}$ | $-1,9518 \cdot 10^{+3}$  | $+4,3637 \cdot 10^{+4}$  |
| 5    | $-1,3841 \cdot 10^{+1}$ | $+9,6546 \cdot 10^{+1}$ | $-1,1954 \cdot 10^{+3}$  | $+2,3724 \cdot 10^{+4}$  |
| 5,25 | $-1,1061 \cdot 10^{+1}$ | $+6,9320 \cdot 10^{+1}$ | $-7,5630 \cdot 10^{+3}$  | $+1,3371 \cdot 10^{+4}$  |
| 5,5  | $-8,9456$               | $+5,1082 \cdot 10^{+1}$ | $-4,9318 \cdot 10^{+2}$  | $+7,7908 \cdot 10^{+3}$  |
| 5,75 | $-7,2947$               | $+3,8536 \cdot 10^{+1}$ | $-3,3080 \cdot 10^{+2}$  | $+4,6806 \cdot 10^{+3}$  |
| 6    | $-5,9738$               | $+2,9689 \cdot 10^{+1}$ | $-2,2759 \cdot 10^{+2}$  | $+2,8934 \cdot 10^{+3}$  |
| 6,25 | $-4,8918$               | $+2,3299 \cdot 10^{+1}$ | $-1,6079 \cdot 10^{+2}$  | $+1,8370 \cdot 10^{+3}$  |
| 6,5  | $-3,9857$               | $+1,8588 \cdot 10^{+1}$ | $-1,1615 \cdot 10^{+2}$  | $+1,1959 \cdot 10^{+3}$  |
| 6,75 | $-3,2109$               | $+1,5031 \cdot 10^{+1}$ | $-8,5730 \cdot 10^{+1}$  | $+7,9717 \cdot 10^{+2}$  |
| 7    | $-2,5361$               | $+1,2294 \cdot 10^{+1}$ | $-6,4568 \cdot 10^{+1}$  | $+5,4343 \cdot 10^{+2}$  |
| 7,25 | $-1,9390$               | $+1,0143 \cdot 10^{+1}$ | $-4,9548 \cdot 10^{+1}$  | $+3,7843 \cdot 10^{+2}$  |
| 7,5  | $-1,4037$               | $+8,4194$               | $-3,8699 \cdot 10^{+1}$  | $+2,6893 \cdot 10^{+2}$  |
| 7,75 | $-9,1932 \cdot 10^{-1}$ | $+7,0128$               | $-3,0674 \cdot 10^{+1}$  | $+1,9485 \cdot 10^{+2}$  |
| 8    | $-4,7857 \cdot 10^{-1}$ | $+5,8421$               | $-2,4661 \cdot 10^{+1}$  | $+1,4376 \cdot 10^{+2}$  |
| 8,25 | $-7,665 \cdot 10^{-2}$  | $+4,8507$               | $-2,0087 \cdot 10^{+1}$  | $+1,0799 \cdot 10^{+2}$  |
| 8,5  | $+2,8840 \cdot 10^{-1}$ | $+3,9971$               | $-1,6529 \cdot 10^{+1}$  | $+8,2461 \cdot 10^{+1}$  |
| 8,75 | $+6,1739 \cdot 10^{-1}$ | $+3,2503$               | $-1,3726 \cdot 10^{+1}$  | $+6,3961 \cdot 10^{+1}$  |
| 9    | $+9,0970 \cdot 10^{-1}$ | $+2,5877$               | $-1,1479 \cdot 10^{+1}$  | $+5,0346 \cdot 10^{+1}$  |
| 9,25 | $+1,1638$               | $+1,9934$               | $-9,6504$                | $+4,0173 \cdot 10^{+1}$  |
| 9,5  | $+1,3776$               | $+1,4545$               | $-8,1358$                | $+3,2463 \cdot 10^{+1}$  |
| 9,75 | $+1,5487$               | $+9,6266 \cdot 10^{-1}$ | $-6,8648$                | $+2,6533 \cdot 10^{+1}$  |
| 10   | $+1,6747$               | $+5,1225 \cdot 10^{-1}$ | $-5,7808$                | $+2,1910 \cdot 10^{+1}$  |

$$\zeta_{2n}(x) = (-1)^n \int C_{2n}(x) dx$$

| $x$  | $\zeta_{16}(x)$             | $\zeta_{18}(x)$             | $\zeta_{20}(x)$             |
|------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| 1    | -1,3034 · 10 <sup>+16</sup> | +1,3251 · 10 <sup>+19</sup> | -1,7076 · 10 <sup>+22</sup> |
| 1,25 | -4,6343 · 10 <sup>+14</sup> | +3,0111 · 10 <sup>+17</sup> | -2,4809 · 10 <sup>+20</sup> |
| 1,5  | -3,0468 · 10 <sup>+13</sup> | +1,3722 · 10 <sup>+16</sup> | -7,8401 · 10 <sup>+18</sup> |
| 1,75 | -3,0636 · 10 <sup>+12</sup> | +1,0119 · 10 <sup>+15</sup> | -4,2417 · 10 <sup>+17</sup> |
| 2    | -4,2070 · 10 <sup>+11</sup> | +1,0614 · 10 <sup>+14</sup> | -3,4005 · 10 <sup>+16</sup> |
| 2,25 | -7,3339 · 10 <sup>+10</sup> | +1,4582 · 10 <sup>+13</sup> | -3,6836 · 10 <sup>+15</sup> |
| 2,5  | -1,5441 · 10 <sup>+10</sup> | +2,4794 · 10 <sup>+12</sup> | -5,0619 · 10 <sup>+14</sup> |
| 2,75 | -3,7891 · 10 <sup>+9</sup>  | +5,0118 · 10 <sup>+11</sup> | -8,4349 · 10 <sup>+13</sup> |
| 3    | -1,0556 · 10 <sup>+9</sup>  | +1,1690 · 10 <sup>+11</sup> | -1,6486 · 10 <sup>+13</sup> |
| 3,25 | -3,2729 · 10 <sup>+8</sup>  | +3,0759 · 10 <sup>+10</sup> | -3,6852 · 10 <sup>+12</sup> |
| 3,5  | -1,1120 · 10 <sup>+8</sup>  | +8,9712 · 10 <sup>+9</sup>  | -9,2379 · 10 <sup>+11</sup> |
| 3,75 | -4,0893 · 10 <sup>+7</sup>  | +2,8608 · 10 <sup>+9</sup>  | -2,5568 · 10 <sup>+11</sup> |
| 4    | -1,6119 · 10 <sup>+7</sup>  | +9,8604 · 10 <sup>+8</sup>  | -7,7161 · 10 <sup>+10</sup> |
| 4,25 | -6,7547 · 10 <sup>+6</sup>  | +3,6404 · 10 <sup>+8</sup>  | -2,5132 · 10 <sup>+10</sup> |
| 4,5  | -2,9895 · 10 <sup>+6</sup>  | +1,4287 · 10 <sup>+8</sup>  | -8,7587 · 10 <sup>+9</sup>  |
| 4,75 | -1,3895 · 10 <sup>+6</sup>  | +5,9224 · 10 <sup>+7</sup>  | -3,2435 · 10 <sup>+9</sup>  |
| 5    | -6,7511 · 10 <sup>+5</sup>  | +2,5794 · 10 <sup>+7</sup>  | -1,2685 · 10 <sup>+9</sup>  |
| 5,25 | -3,4148 · 10 <sup>+5</sup>  | +1,1749 · 10 <sup>+7</sup>  | -5,2131 · 10 <sup>+8</sup>  |
| 5,5  | -1,7919 · 10 <sup>+5</sup>  | +5,5745 · 10 <sup>+6</sup>  | -2,2411 · 10 <sup>+8</sup>  |
| 5,75 | -9,7272 · 10 <sup>+4</sup>  | +2,7460 · 10 <sup>+6</sup>  | -1,0041 · 10 <sup>+8</sup>  |
| 6    | -5,4483 · 10 <sup>+4</sup>  | +1,4002 · 10 <sup>+6</sup>  | -4,6724 · 10 <sup>+7</sup>  |
| 6,25 | -3,1415 · 10 <sup>+4</sup>  | +7,3712 · 10 <sup>+5</sup>  | -2,2519 · 10 <sup>+7</sup>  |
| 6,5  | -1,8611 · 10 <sup>+4</sup>  | +3,9972 · 10 <sup>+5</sup>  | -1,1211 · 10 <sup>+7</sup>  |
| 6,75 | -1,1309 · 10 <sup>+4</sup>  | +2,2283 · 10 <sup>+5</sup>  | -5,7521 · 10 <sup>+6</sup>  |
| 7    | -7,0377 · 10 <sup>+3</sup>  | +1,2748 · 10 <sup>+5</sup>  | -3,0360 · 10 <sup>+6</sup>  |
| 7,25 | -4,4794 · 10 <sup>+3</sup>  | +7,4719 · 10 <sup>+4</sup>  | -1,6449 · 10 <sup>+6</sup>  |
| 7,5  | -2,9127 · 10 <sup>+3</sup>  | +4,4808 · 10 <sup>+4</sup>  | -9,1369 · 10 <sup>+5</sup>  |
| 7,75 | -1,9327 · 10 <sup>+3</sup>  | +2,7457 · 10 <sup>+4</sup>  | -5,1947 · 10 <sup>+5</sup>  |
| 8    | -1,3073 · 10 <sup>+3</sup>  | +1,7173 · 10 <sup>+4</sup>  | -3,0191 · 10 <sup>+5</sup>  |
| 8,25 | -9,0122 · 10 <sup>+2</sup>  | +1,0952 · 10 <sup>+4</sup>  | -1,7917 · 10 <sup>+5</sup>  |
| 8,5  | -6,3233 · 10 <sup>+2</sup>  | +7,1157 · 10 <sup>+3</sup>  | -1,0844 · 10 <sup>+5</sup>  |
| 8,75 | -4,5133 · 10 <sup>+2</sup>  | +4,7059 · 10 <sup>+3</sup>  | -6,6883 · 10 <sup>+4</sup>  |
| 9    | -3,2751 · 10 <sup>+2</sup>  | +3,1657 · 10 <sup>+3</sup>  | -4,1998 · 10 <sup>+4</sup>  |
| 9,25 | -2,4147 · 10 <sup>+2</sup>  | +2,1647 · 10 <sup>+3</sup>  | -2,6827 · 10 <sup>+4</sup>  |
| 9,5  | -1,8079 · 10 <sup>+2</sup>  | +1,5039 · 10 <sup>+3</sup>  | -1,7421 · 10 <sup>+4</sup>  |
| 9,75 | -1,3737 · 10 <sup>+2</sup>  | +1,0609 · 10 <sup>+3</sup>  | -1,1487 · 10 <sup>+4</sup>  |
| 10   | -1,0588 · 10 <sup>+2</sup>  | +7,5950 · 10 <sup>+2</sup>  | -7,6970 · 10 <sup>+3</sup>  |

- BACKHAUS, H.: Über die Strahlungs- und Richtwirkungseigenschaften von Schallstrahlern. Z. angew. Math. Mech. Bd. 8 (1928) S. 456.
- MCLACHLAN: Sound distribution from vibrating rigid disk. Proc. roy. Soc., Lond. Bd. 122 (1929) S. 604.
- STENZEL, H.: Über die Richtcharakteristik von in einer Ebene angeordneten Strahlern. Elektr. Nachr.-Techn. Bd. 6 (1929) S. 165.
- STENZEL, H.: Interferenzen durch Kolbenmembranen von besonderer Form. Z. techn. Phys. Bd. 10 (1929) S. 567.
- WOLFF, J., u. L. MALTER: Sound radiation from a system of vibrating circular diaphragms. Phys. Rev. (2) Bd. 33 (1929) S. 282.
- STRUTT, M. J. O.: The effect of a finite baffle on the emission of sound by a double source. Phil. Mag. (7) Bd. 7 (1929) S. 537.
- STRUTT, M. J. O.: Die Wirkung einer endlichen Schirmplatte auf die Schallstrahlung eines Dipols. Z. techn. Phys. Bd. 10 (1929) S. 124.
- BACKHAUS, H.: Das Schallfeld der kreisförmigen Kolbenmembran. Ann. Phys., Lpz. (5) Bd. 5 (1930) S. 1.
- STENZEL, H.: Über die Berechnung und Bewertung der Frequenzkurven von Membranen. Elektr.-Nachr.-Techn. Bd. 7 (1930) S. 87.
- STENZEL, H.: Über die akustische Strahlung von Membranen. Ann. Phys., Lpz. (5) Bd. 7 (1930) S. 947.
- FISCHER, F. A.: Über die künstliche Charakteristik der Kugelgruppe. Elektr. Nachr.-Techn. Bd. 7 (1930) S. 369.
- STENZEL, H.: Akustische Strahlung von punktförmigen Systemen und Membranen. Forsch. u. Techn. 1930 S. 349.
- STRUTT, M. J. O.: Über die Schallstrahlung einer mit Knotenlinie schwingenden Kreismembran. Ann. Phys., Lpz. (5) Bd. 11 (1931) S. 129.
- RUEDY: Sound field near quartz oscillators. Canad. J. Res. Bd. 5 (1931) S. 297.
- MCLACHLAN, N. W.: The distribution of sound radiation from a sphere vibrating in various ways; with applications to Loudspeaker diaphragms. Phil. Mag. Bd. 13 (1932) S. 747.
- MCLACHLAN, N. W.: Accession to of flexible disks vibrating in a fluid. Proc. phys. Soc., Lond. Bd. 44 (1932) S. 546.
- MCLACHLAN, N. W.: Sound distribution from disks with nodal lines. Ann. Phys., Lpz. Bd. 15 (1932) S. 422.
- MCLACHLAN, N. W.: Power radiated by disks with nodal lines. Ann. Phys., Lpz. Bd. 15 (1932) S. 440.
- MCLACHLAN, N. W.: Sound pressure at any point on vibrating disk. Phil. Mag. Bd. 14 (1932) S. 1012.
- SIVIAN and O'NEILL: Sound diffraction due to a rigid disk, square plate, and semi-infinite screen. J. acoust. Soc. Amer. Bd. 3 (1932) S. 483.
- FISCHER, F. A.: Über die akustische Strahlungsleistung von Strahlergruppen, insbesondere der Kreis- und Kugelgruppen. Elektr. Nachr.-Techn. Bd. 9 (1932) S. 147.
- MCLACHLAN, N. W.: Accession to inertia of and power radiated by a sphere vibrating in various ways; with applications to hornless loudspeakers. Phil. Mag. Bd. 15 (1933) S. 443.
- MASAAKI SASAO: On the sound emission by a vibrating membrane. Proc. phys.-mat. Soc., Japan 1933 S. 86.
- FISCHER, F. A.: Richtwirkung und Strahlungsleistung von akustischen Strahlern und Strahlergruppen in der Nähe einer reflektierenden ebenen Fläche. Elektr. Nachr.-Techn. Bd. 10 (1933) S. 19.

## Schrifttum.

### 1. Bücher und zusammenfassende Berichte.

- LORD RAYLEIGH: The theory of sound. London 1929.
- HAHNEMANN, W., u. H. HECHT: Schallfelder und Schallantennen I, II. Phys. Z. Bd. 17 (1916) S. 601; Bd. 18 (1917) S. 261.
- HAHNEMANN, W., u. H. HECHT: Schallgeber und Schallempfänger I—IV. Phys. Z. Bd. 20 (1919) S. 104, 245; Bd. 21 (1920) S. 264, 426.
- AIGNER, F.: Unterwasserschalltechnik. Berlin 1922.
- LAMB, H.: The dynamical theory of sound. London 1925.
- CRANDALL, J. B.: Theory of vibrating systems and sound. New York 1926.
- BACKHAUS, H.: Theorie akustischer Schwingungen. Handbuch der Physik von GEIGER-SCHEEL Bd. 8. Berlin 1927.
- SCHOTTKY, W.: Elektroakustik. Die wissenschaftlichen Grundlagen des Rundfunkempfangs von K. W. WAGNER. Berlin 1927.
- KÜPFMÜLLER, K.: Schwachstromtechnik. Handbuch der Experimentalphysik von WIEN-HARMS Bd. 11, 3. Teil. Leipzig 1931.
- TRENDELENBURG, F.: Fortschritte der physikalischen und technischen Akustik. Leipzig 1932.
- MCLACHLAN, N. W.: Bessel functions for engineers. Oxford 1934.
- HECHT, H., u. F. A. FISCHER: Anwendungen der Ausbreitung des Schalles in freien Medien. Handbuch der Experimentalphysik von WIEN-HARMS Bd. 17. Technische Akustik. Leipzig 1934.
- BERGMANN, L.: Der Ultraschall. Berlin 1939.
- HIEDEMANN, E.: Grundlagen und Ergebnisse der Ultraschallforschung. Berlin 1939.

### 2. Einzelveröffentlichungen.

- LORD RAYLEIGH: On the acoustic shadow of a sphere. Phil. Trans. roy. Soc. Lond. Bd. 203 A (1904) S. 87.
- NICHOLSON, J. W.: On the diffraction of short waves by a rigid sphere. Phil. Mag. Bd. 11 (1906) S. 193.
- STEWART, S. W.: The acoustic shadow of a rigid sphere, with certain applications in architectural acoustics and audition. Phys. Rev. 1911 S. 467.
- BACKHAUS, H., u. F. TRENDELENBURG: Über die Richtwirkung von Kolbenmembranen. Z. techn. Phys. Bd. 7 (1926) S. 630.
- STENZEL, H.: Über die Richtwirkung von Schallstrahlern. Elektr. Nachr.-Techn. Bd. 4 (1927) S. 239.
- BALLANTINE, S.: Effect of diffraction around the microphone in sound measurements. Phys. Rev. 1928 S. 988.
- LINDSAY, R. B.: High frequency sound radiation from a diaphragm. Phys. Rev. (2) Bd. 32 (1928) S. 515.
- BACKHAUS, H.: Über die Strahlungs- und Richtwirkungseigenschaften von Schallstrahlern. Z. techn. Phys. Bd. 19 (1928) S. 491.

- KING, L. V.: On the acoustic radiation field of the piezo-electric oscillator and the effect of viscosity on transmission. *Canad. J. Res.* Bd. 11 (1934) S. 484.
- GROSSMANN, E.: Ultraakustik. *Handbuch der Experimentalphysik* von WIEN-HARMS Bd. 17, 1. Teil, Schallbeugungserscheinungen S. 486.
- STENZEL, H.: Über die Berechnung des Schallfeldes einer kreisförmigen Kolbenmembran. *Elektr. Nachr. Techn.* Bd. 12 (1935) S. 16.
- KING, L. V.: On the acoustic radiation pressure on circular discs. Inertia and diffraction corrections. *Proc. roy. Soc., Lond.* Bd. 153 (1935) S. ~~17-40~~
- STENZEL, H.: Über die von einer starren Kugel hervorgerufene Störung des Schallfeldes. *Elektr. Nachr.-Techn.* Bd. 15 (1938) S. 72.

## Sachverzeichnis.

- Annäherungsformel für den Richtfaktor 9.  
 Aufpunktsgerade 7.  
 Bewegungsamplitude 4.  
 BESSELSche Funktion 10, 12, 21, 25, 30, 35, 41, 46, 49, 64, 66, 69ff.  
 Bridge, Satz von 17.  
 Deformationsvolumen 4, 5, 26, 60.  
 Geschwindigkeitsamplitude 2.  
 —, mittlere 4.  
 — in Luft und Wasser 6.  
 Geschwindigkeitspotential 8.  
 Gruppe, Gerade 11ff.  
 —, kompensierte gerade 33.  
 — von zwei Einzelstrahlern 54ff.  
 —, rechteckige 20.  
 —, Kreis- 21.  
 —, kompensierte Kreis- 35.  
 Halbwertsbreite 11.  
 Integralsinus 42.  
 Kompensation 31ff.  
 Kugelfunktionen 81ff.  
 Kugelkappe 86.  
 Kugelstrahler 81ff.  
 Nahfeld 53.  
 Nebenmaxima der geraden Gruppe 14, 19.  
 Normalform der strahlenden Membran 5.  
 Normalgeschwindigkeit 8.  
 Nullstellen bei zwei Einzelstrahlern 55, 56.  
 Oktavempfang 28ff.  
 Peilebene 8.  
 Peilmaß 11.  
 Peilschärfe 10.  
 Reziprozitätsgesetz 109.  
 Reflexion an einer starren Kugel 105ff.  
 Richtfaktor 7ff.  
 — bei einem Geräusch 27.  
 Richtfaktor bei Oktavempfang 28.  
 — bei künstlicher Kompensation 31ff.  
 Richtungswinkel 7.  
 Schalldruckamplitude des einfachen Strahlers 3.  
 — bei gebündelter Strahlung 7.  
 — einer Membran vom Deformationsvolumen Null 26.  
 — auf der Mittelachse der kreisförmigen Kolbenmembran 63.  
 — im Mittelpunkt und am Rande der kreisförmigen Membran 64ff.  
 — unmittelbar vor der kreisförmigen Kolbenmembran 73.  
 — der strahlenden Kugelkappe 91ff.  
 Schallfeld der kreisförmigen Kolbenmembran 61ff., 77—79.  
 — des Kugelstrahlers 81ff.  
 — des Kugelstrahlers erster Ordnung 84.  
 — des punktförmigen Strahlers auf der Kugel 103.  
 — in der Nähe einer starren Kugel 114.  
 — auf der Mittelachse und am Rand der kreisförmigen Membran 62ff.  
 — von zwei punktförmigen Strahlern 60.  
 Schalleistung 5.  
 Schallwiderstand 4, 6.  
 Strahlung, ungebündelte 2ff.  
 —, gebündelte 6ff.  
 Strahlungsfaktor, Definition des 38.  
 — der geraden Gruppe 40.  
 — der kreisförmigen Membran 42.  
 — des Rechtecks 43.  
 — bei Kompensation 46ff.  
 Struves Funktion 64, 66.  
 Trägheitsmoment 9.  
 Trennschärfe 22.  
 Verdichtungsfaktor, Definition 38.  
 — der geraden Gruppe 41.  
 — der rechteckigen Kolbenmembran 45.  
 — allgemein 51.  
 Verzögerungskette 31.