514
Д 79

Проф. Я. С. ДУБНОВ

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИТИЧЕСКУЮ ГЕОМЕТРИЮ

Цена 70 коп., перепл. 25 коп.

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА — 1934

РК 514 ~~5183~~ 2-79

Проф. Я. С. ДУБНОВ

Гор. Петропавловск

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИТИЧЕСКУЮ ГЕОМЕТРИЮ

Семипалатинский педагогический институт Библиотека

Допущено Наркомпросом РСФСР

5815

Инвентаризация 195 г. №

7488

ПРОВЕРЕНО 1958 г.

БИБЛИОТЕКА Павлодарского педагогического института

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА — 1934

514.12(075)

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Эта небольшая книжка ставит себе целью ввести учащегося[1]) в новый для него метод геометрического исследования. Рядом с этой задачей отступает на второй план другая — ознакомление с новыми геометрическими образами (эллипс, гипербола и т. п.) и фактами. Вот почему на страницах этой книги учащийся чаще всего будет встречаться с теми же линиями — прямой и окружностью, какими он занимался в школьной геометрии. И если учащийся еще неокончательно окреп в элементарной математике, то изучение такого курса не отвлечет его внимания в совершенно новую область, а, наоборот, освежит и упрочит ранее полученные знания.

За счет объема сообщаемых сведений автор имел возможность изложить основные понятия аналитической геометрии с большей полнотой и строгостью, чем это иногда делается даже в курсах, предназначенных для высшей школы. К числу деталей, которые могут быть опущены при первом изучении без ущерба для понимания остального текста, можно отнести § 8, 20, 23, 25, 26 и все, напечатанное мелким шрифтом.

Из методических принципов, которые хотелось бы видеть соблюденными при работе над этой книгой, автор склонен настаивать только на одном: решение задач, которое по общему замыслу не отделимо от изучения текста, должно всякий раз сопровождаться чертежом — точным или схематическим, выполняемым до выкладки или после нее.

Я. Дубнов.

Москва, июль 1934 г.

446598

НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА ИМ. С. БЕЙСЕМБАЕВА

[1]) У которого предполагаются только сведения из элементарной математики в объеме 9 классов средней школы. В этот объем уже входит понятие о координатах, в связи с графическим изображением функций.

ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ ТОЧКИ.

§ 1. Введение. При решении геометрических задач мы часто пользуемся средствами алгебры, в первую очередь — составлением и решением уравнений. Положим, например, что перед нами следующая задача.

В данный треугольник ABC (черт. 1) *вписать прямоугольник $MNPQ$ с заданной диагональю d.* Остальные детали условия легко понятны из чертежа.

Решение. Обозначим через x и y стороны MQ и QP прямоугольника. Применяя к треугольнику MPQ теорему Пифагора, имеем:

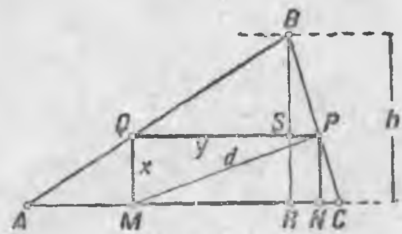
$$x^2 + y^2 = d^2. \tag{a}$$

Чтобы получить второе уравнение, заметим, что раз треугольник ABC нам дан, то мы можем считать в нем известными основание и высоту. Пусть $AC = b$, $BR = h$. Из подобия треугольников ABC и QBP находим:

$$\frac{QP}{AC} = \frac{BS}{BR},$$

или, переходя на наши обозначения,

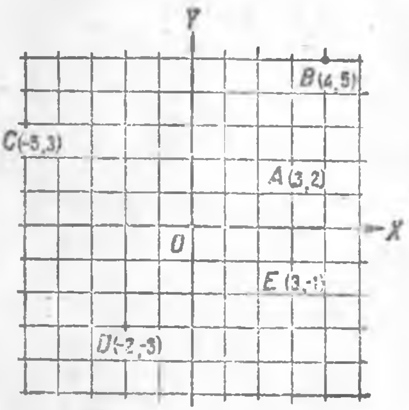
$$\frac{y}{b} = \frac{h-x}{h}. \tag{b}$$



Черт. 1.

Теперь задача сведена к решению двух уравнений (a) и (b) с двумя неизвестными x, y. Остальное — дело алгебры (выражаем y через x из уравнения (b) подставляем в уравнение (a) и т. д.), и мы им заниматься не будем. Заметим только, что, получив окончательные выражения для x и y, мы будем иметь возможность не только найти числовые значения сторон прямоугольника по данным числовым значениям d, b и h, но также и *построить* отрезки x, y, если d, b и h заданы как отрезки (графически). Попутно, исследуя квадратное уравнение, мы можем выяснить, при каких условиях задача имеет одно решение, два или вовсе не допускает решений.

В приведенном примере мы встречаемся с методом, которым издавна пользуются и называют *„приложением алгебры к геометрии“*. Возможность его применения основана на том, что мы в ряде случаев умеем выражать взаимоотношения между геометрическими объектами (отрезками, углами, площадями и т. п.) с помощью алгебраических формул. Так, в нашем примере наличие прямого угла в треугольнике MQP выражено на основании теоремы Пифагора равенством (a); подобие треугольников с помощью пропорции (b). Другими словами, мы переводим задачу с языка геометрического на язык алгебраический и, таким образом, получаем возможность использовать алгебру с ее хорошо разработанным буквенным аппаратом (в частности — с ее методами решения уравнений). Мы поступаем здесь так же, как при переводе с одного языка на другой (одна и та же мысль может быть выражена, скажем, по-немецки и по-русски). Впрочем, переводя геометрические факты на язык алгебры, мы не добиваемся лучшего понимания этих фактов, а делаем это в расчете получить из них необходимые выводы, опираясь на хорошо известные способы преобразования алгебраических выражений. Но для того, чтобы этот перевод можно было осуществлять систематически, необходимо иметь достаточно полный „словарь"; такой именно словарь дает нам *аналитическая геометрия*, точнее — лежащий в ее основе *„метод координат"*. Таким образом, аналитическая геометрия представляет собою систематизированное приложение алгебры к геометрии на основе метода координат [1]).



Черт. 2.

Что такое „координаты точки на плоскости", учащийся сразу вспомнит при взгляде на чертеж 2 (точное определение этого важного для нас понятия будет дано дальше, — сейчас в этом нет надобности). Координатами мы в свое время широко пользовались *при графическом изображении функций*, например при построении графиков функций:

$$y = kx,\ y = \frac{k}{x},\ y = ax^2 \text{ и др.}$$

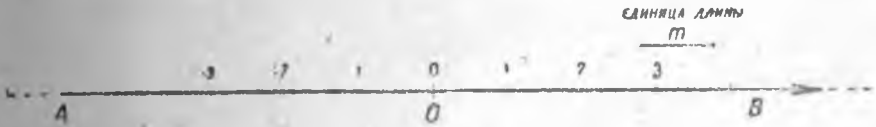
Идея координат принадлежит к числу древнейших достижений человеческой мысли. Астрономы и географы издавна пользовались сферическими координатами (широта и долгота) для того, чтобы описывать положения различных точек на шаровой поверхности. Еще ближе к современной аналитической геометрии подошел французский математик О р е с м (XIV в.), который в применении к плоскости употреблял термины „широта и долгота" в том же смысле, в каком теперь говорят „абсцисса и ордината". Оресм пользовался координатами для графического изобра-

---

[1]) Самое название „аналитическая геометрия", хотя и удерживается по традиции, но не является удачным. Ученые прежних времен стремились классифицировать математические науки не только по их содержанию, но также и по методу. Считали (без достаточного основания), что из двух методов формально-логического рассуждения — „анализ" (разложение) и „синтез" (соединение) — первый лежит в основе науки о числе, а второй — науки о пространстве. Таким образом, названием „аналитическая геометрия" хотели сказать то, что лучше могло быть выражено словами „алгебраическая геометрия". Однако и последнее название не характеризует предмет с достаточной полнотой. Например, задача, с которой мы начали (черт. 1), решена „приложением алгебры к геометрии", но не средствами аналитической геометрии (такое решение будет дано впоследствии, см. зад. 207, стр. 94). Для аналитической геометрии характерным является именно применение метода координат, и в этом смысле ее следовало бы называть „координатной геометрией".

жения физических законов. Если мы, однако, приписываем аналитической геометрии более позднее происхождение, то это потому, что во времена Оресма приложение алгебры к геометрии на основе координатного метода не могло еще широко развернуться из-за несовершенства буквенной символики. Начавшийся в XVI в. подъем науки и техники ознаменовался крупными успехами в области алгебры, опираясь на которые французские математики Ферма и Декарт (XVII в.) смогли заложить основы современной аналитической геометрии. Создание этой дисциплины связывают обычно с именем Декарта („декартова система координат") который опубликовал свою „Геометрию" в 1637 г., между тем как одновременно написанное сочинение Ферма появилось в свет лишь после его смерти — в 1679 г. (лишний пример того, насколько условным является связывание крупного научного события с именем отдельного ученого).

Хотя исторически метод координат был сначала применен к плоскости (два измерения), однако в интересах более систематического изложения мы начнем с понятия о координатах на прямой линии (одно измерение).



Черт. 3.

§ 2. Координата точки на прямой. Подобно тому как дома вдоль улицы отмечаются номерами, точно так же могут быть с помощью чисел („координат") размечены точки вдоль одной прямой линии. Но в то время как для нумерации домов можно ограничиться *целыми* числами, нумерация всех точек, составляющих прямую линию, требует привлечения *всех чисел* — целых, дробных, иррациональных, положительных и отрицательных. Делается это так: желая разметить с помощью чисел все точки бесконечной прямой AB (черт. 3), выбираем:

1) *одно из двух направлений на прямой AB за „положительное"* — отмечаем его стрелкой;

2) *одну из точек* (пусть это будет O) *нашей прямой за — „начало координат"*;

3) *определенный прямолинейный отрезок m* (например отрезок длиной в 1 *см*) — *за единицу длины* („масштаб"), с помощью которой мы будем измерять отрезки на прямой AB.

Теперь мы в состоянии установить соответствие между: всеми точками прямой AB и 2) всеми (вещественными) числами, руководясь следующими правилами: точке O, началу координат, присвоим координату 0 (нуль); точкам луча OB, идущего от O в положительном направлении, будем приписывать положительные координаты, а точкам другого луча OA — отрицательные координаты; за абсолютную же величину координат будем каждый раз брать расстояние рассматриваемой точки от O, измеренное выбранной единицей m. На чертеже 3 точки, лежащие справа от O, имеют положительные координаты, а точки, лежащие слева, — отрицательные координаты.

Прямую, на которой установлены: 1) положительное направление, 2) начало и 3) масштаб, называют *осью координат*, или просто *осью*. Ось чаще всего обозначают двумя буквами, из которых первая относится к началу координат, а вторая — к какой-нибудь точке на положительной полуоси (обычно эта буква ставится около стрелки); например, ось, изображенная на чертеже 4, обозначается OX. Мы можем теперь сказать, что *координатой точки P на оси OX называется расстояние OP* (измеренное принятым масштабом), *взятое со знаком плюс, если направление от O к P совпадает с положительным направлением OX, и со знаком минус, если эти направления противоположны*. Координаты различных точек на оси OX мы будем почти всегда обозначать одной и той же буквой x, но со значками при ней, числовыми (например x_1, x_2, ...) или буквенными (например x_P, x_Q — в этом случае буква непосредственно указывает, к какой точке чертежа относится координата). Таким образом, на чертеже 4

$$x_P = OP; \quad x_Q = -OQ; \quad x_O = 0^{1)}.$$

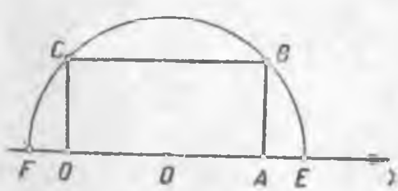
Черт. 4.

Учащийся должен обратить внимание на разницу между „координатой точки“ и ее „расстоянием от начала“: первая есть число относительное (положительное или отрицательное), второе всегда рассматривается нами как число абсолютное. В связи с этим координата всегда выражается числом *отвлеченным*, например 5, —3 и т. п.; расстояние же — числом *именованным*, например 5 *см*, 3 *см* (если мы иногда говорим для краткости, что „расстояние... равно 5“, то при этом подразумевается „равно 5 единицам длины“).

Задачи.

1. Начертить прямую, отметить на ней начало, положительное направление, выбрать масштаб и затем построить точки с координатами $1, -1, 4, \frac{2}{3}, -\frac{5}{2}$.

2. В полукруг с центром O вписан прямоугольник $ABCD$, у которого $BC = 2AB$ (черт. 5). Принимая на оси OX точку O за начало, отрезок OA за единицу длины, найти координаты точек O, A, E, D, F.



Черт. 5.

§ 3. Сдвиг начала координат.

Всякий раз, как на прямой линии выбраны начало координат, положительное направление и масштаб, говорят, что на этой прямой установлена определенная „система координат“. На одной и той же прямой можно установить сколько угодно систем координат. Так, например, при измерении температур пользуются (только

[1]) С большей полнотой можно было бы писать:

$$x_P = \frac{OP}{m}, \quad x_Q = -\frac{OQ}{m}.$$

не на бесконечной прямой, а на ограниченном ее отрезке) четырьмя системами, или, как говорят, четырьмя *шкалами*: 1) Цельсия, 2) Реомюра, 3) Фаренгейта, 4) абсолютной шкалой. Шкалы Реомюра, Цельсия имеют общее начало, но различные масштабы; шкала Фаренгейта отличается от остальных выбором и начала и масштаба.

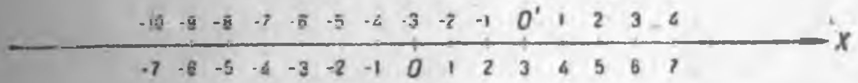
Когда мы переходим от одной системы координат к другой, возникает вопрос, как отразится этот переход на координатах всех точек? Вопрос может быт расчленен на три: какое влияние оказывают в отдельности:

1) сдвиг начала координат,

2) перемена положительного направления на противоположное,

3) изменение масштаба.

Мы займемся подробно только первым из этих вопросов. Итак, пусть начало координат (черт. 6) сдвинуто вдоль прямой из положения O в положение O' (на чертеже этот сдвиг произведен вправо на 3 единицы, причем ни положительное направление, ни масштаб не подвергались



Черт. 6.

изменению. Если говорить сначала о координатах точек, лежащих правее нового начала O', то ясно, что с этими координатами произойдет: они уменьшатся на величину сдвига OO', т. е. в нашем случае на 3. Например, точка, имевшая раньше координату 7, получит теперь координату 4 и т. п. (на чертеже 6 старые координаты помечены *ниже* прямой OX, а новые координаты *выше* этой прямой). То же правило подтверждается и при рассмотрении других точек: старая координата $+2$ перейдет в новую -1, а старая -5 в новую -8 в соответствии с равенствами:

$$2-3=-1; \quad -5-3=-8.$$

Покажем, что справедливо следующее *общее правило преобразования координат при сдвиге начала*:

Новая координата всякой точки равна старой ее координате минус координата, которую имеет новое начало в старой системе. Если обозначим через x старую координату (относительно начала O) какой-нибудь точки A, через x' — новую координату (относительно начала O') той же точки и, наконец, через h — координату точки O' в старой системе[1]), то правило это может быть записано формулой:

$$\boxed{x' = x - h.} \qquad (1)$$

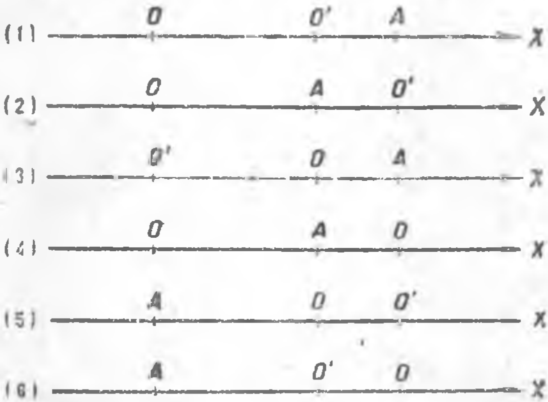
Отсюда

$$\boxed{x = x' + h,} \qquad (2)$$

[1]) Координата точки O' в новой системе будет, конечно, нуль.

т. е. *старая координата всякой точки равна новой ее координате плюс координата нового начала в старой системе.*

Желая проверить общность правил, мы должны рассмотреть все возможные случаи взаимного расположения трех точек O, O' и A. Если условимся перечислять эти точки в порядке их следования в положительном направлении оси, то будем иметь дело с шестью случаями (вспомним, что из трех элементов можно составить только шесть перестановок), изображенными на чертеже 7.



Черт. 7.

Разберем здесь для примера только два из шести случаев, предлагая учащемуся по этому образцу рассмотреть остальные.

Случай 1-й:

$$x = OA, \quad x' = O'A;$$
$$h = OO'.$$

Записывая, что больший из трех отрезков между точками O, O', A равен сумме двух меньших, имеем:

$$OA = OO' + O'A,$$

или, переходя на координаты,

$$x = x' + h; \quad x' = x - h.$$

Случай 4-й:

$$x = -AO; \quad x' = O'A; \quad h = -O'O;$$
$$O'O = O'A + AO;$$
$$-h = x' - x; \quad x = x' + h; \quad x' = x - h.$$

Те же результаты получатся в остальных четырех случаях, после чего утверждение будет доказано [1]).

Задачи.

3. Начало координат перенесено в точку, координата которой равна 5. Каковы будут новые координаты точек, которые в старой системе имели координат 8, 3, 0, -2? Сделать чертеж.

4. Решить задачу, отличающуюся от предыдущей только тем, что координата нового начала равна не 5, а -5.

5. Начало перенесено в точку с координатой 4. Каковы были старые координаты точек, новые координаты которых выражаются числами 2, 0, -6?

6. Куда надо перенести начало, чтобы точка с координатой 5 получила координату 7?

7. Начало координат и масштаб остаются без изменения, но положительное направление оси меняется на противоположное. Каковы будут новые координаты точек, имевших в старой системе координаты 6, 1, 0, -4, -7? Обозначая

---

[1]) Строго говоря, следует еще рассмотреть особо случаи, когда точка A совпадает с O или с O'.

старую координату какой-либудь точки через x, а новую координату той же точки через x', выразить формулой зависимость между x и x'.

8. Для перехода от температуры t по Цельсию к абсолютной температуре T и обратно служат формулы:

$$T = t + 273, \quad t = T - 273.$$

Установить их связь с формулами (1) и (2).

§ 4. Расстояние между двумя точками на прямой. Из самого определения координаты следует, что *расстояние любой точки от начала равно координате этой точки, взятой по абсолютной величине.* Если x есть координата точки A в системе с началом O, то

$$OA = |x|\text{[1]}. \tag{3}$$

Более общей является следующая задача: *по данным координатам x_A и x_B двух точек A и B найти расстояние между этими точками.*

Черт. 8.

В каждом отдельном случае, когда координаты точек A и B даны числами, задача легко решается на основании чертежа. Например, по чертежу 8 легко проверить справедливость результатов, помещенных в последней строке следующей таблицы:

Координата точки A	8	3	-4	-4	-1
Координата точки B	3	-1	3	-1	8
Расстояние AB	5	4	7	3	9

Все эти случаи подчиняются общему правилу: *расстояние между двумя точками равно разности их координат, взятой по абсолютной величине:*

$$\boxed{AB = |x_B - x_A| = |x_A - x_B|.} \tag{4}$$

Для того чтобы доказать общность этого правила при любом расположении точек O, A и B, воспользуемся установленным в предыдущем параграфе правилом преобразования координат при сдвиге начала. Именно, перенесем временно начало координат в одну из данных точек, например в A; тогда новая координата точки A будет нуль, а новую координату точки B обозначим через x'_B. В силу равенства (3) можем написать:

$$AB = |x'_B|;$$

[1] Абсолютную величину числа принято обозначать, заключая символ этого числа в вертикальные черты: например $|5| = 5$, $|-3| = 3$.

но из равенства (1) § 3 следует, что (независимо от расположения точек O, A и B)

$$x'_B = x_B - x_A.$$

Сопоставление двух последних равенств и приводит к формуле (4).

Примечание. При определении расстояния между двумя точками нас интересует только *абсолютная величина* разности координат. В других вопросах может пригодиться и знак этой разности. Легко видеть, что разность $x_B - x_A$ будет положительной или отрицательной, смотря по тому, совпадает или нет направление, идущее от A к B, с положительным направлением оси.

Задачи.

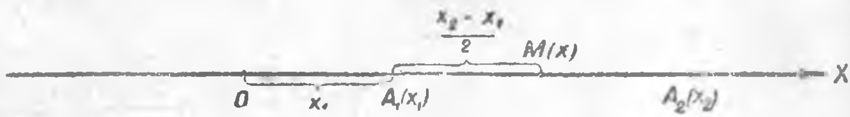
9[1]. Даны точки A (10), B (— 2), C (— 6), D (— 4). Найти вычислением и проверить по чертежу взаимные расстояния между ними.

10. Дана точка A (4); расстояние $AB = 6$. Найти координату точки B.

11. Даны точки A (— 4), B (1), C (— 8), D (10), E (6). Сначала вычислением, а затем по чертежу определить, какие из этих точек наиболее удалены друг от друга и насколько.

12. При данных предыдущей задачи определить, какие из следующих направлений: 1) от A к B, 2) от B к C, 3) от C к D, 4) от D к E совпадают с положительным направлением оси, а какие ему противоположны.

§ 5. Деление отрезка в данном отношении. Задача 1. *На оси даны две точки $A_1(x_1)$ и $A_2(x_2)$. Зная координаты концов отрезка A_1A_2, найти координату его середины M.*



Черт. 9.

1-е решение. Допустим сначала, что точки A_1 и A_2 лежат на положительной полуоси, причем $x_1 < x_2$. Обозначая искомую координату точки M через x, имеем (черт. 9):

$$x = OM = OA_1 + A_1M = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Хотя мы исходили из особого расположения точек A_1 и A_2 на оси, но полученный результат, как увидим, верен при любом их расположении.

В дальнейшем, при выводе формул аналитической геометрии, мы не раз будем облегчать себе работу тем, что чертеж будем делать наиболее удобный для решения задачи. Конечно, при этом у нас не будет уверенности в том, что полученный результат справедлив для любого другого чертежа. В таких случаях *доказательство общности* найденной формулы будет даваться либо непосредственно вслед за первым ее выводом, либо в отдельном приложении, помещенном в конце книги.

[1]) Здесь и в дальнейшем, вместо того чтобы писать, например, „точка A с координатой 5", мы будем пользоваться сокращенным обозначением: „точка A (5)".

В интересующей нас сейчас задаче общность результата может быть легко проверена; с этой целью рассмотрим:

2-е решение, в котором точки A_1 и A_2 предполагаются расположенными как угодно (и даже рассуждение можно проводить без чертежа). Запишем в координатах условие $A_1M = MA_2$. Так как $A_1M = |x - x_1|$ и $MA_2 = |x_2 - x|$, то имеем:

$$|x - x_1| = |x_2 - x|. \tag{5}$$

Но так как точка M лежит между A_1 и A_2, то разности $x - x_1$ и $x_2 - x$ либо обе положительны, либо обе отрицательны. Поэтому в последнем равенстве можно отбросить вертикальные черточки, поставленные для обозначения абсолютных величин, и написать просто:

$$x - x_1 = x_2 - x.$$

Решая это уравнение относительно неизвестного, снова найдем:

$$\boxed{x = \frac{x_1 + x_2}{2},} \tag{6}$$

т. е. *координата середины отрезка равна полусумме координат его концов* (иначе — равна среднему арифметическому координат его концов).

В только что решенной задаче отрезок A_1A_2 был разделен пополам. Поставим теперь перед собой более общую задачу, в которой отрезок A_1A_2 будет разделен на части, вообще говоря, неравные, но находящиеся между собой в определенном, известном нам отношении.

Черт. 10.

Задача 2. *Отрезок, заключенный между точками $A_1(x_1)$ и $A_2(x_2)$, разделен точкой N на две части, длины которых относятся, как $n_1 : n_2$ (именно: $A_1N : NA_2 = n_1 : n_2$). Найти координату делящей точки N.*

1-е решение. Обозначая через x искомую координату точки N, имеем (черт. 10):

$$x = ON = OA_1 + A_1N.$$

Но $OA_1 = x_1$, а отрезок A_1N составляет часть отрезка A_1A_2, выражаемую дробью $\frac{n_1}{n_1 + n_2}$, т. е.:

$$A_1N = \frac{n_1}{n_1 + n_2} A_1A_2 = \frac{n_1}{n_1 + n_2}(x_2 - x_1).$$

Таким образом,

$$x = x_1 + \frac{n_1(x_2 - x_1)}{n_1 + n_2} = \frac{n_2x_1 + n_1x_2}{n_1 + n_2}.$$

2-е решение. Как бы ни были расположены точки A_1 и A_2 на оси, имеем $A_1N = |x - x_1|$, $NA_2 = |x_2 - x|$. Поэтому пропорция $A_1N : NA_2 = n_1 : n_2$ может быть записана сначала в виде

$$\frac{|x - x_1|}{|x_2 - x|} = \frac{n_1}{n_2},$$

а затем (по соображениям, примененным во втором решении предыдущей задачи) в более простом виде:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Решая это уравнение относительно неизвестного x, снова придем (но на этот раз уже с гарантией общности) к формуле:

$$\boxed{x = \frac{n_2x_1 + n_1x_2}{n_1 + n_2}.} \tag{7}$$

Примечание 1. Формула (6), разумеется, должна содержаться в формуле (7) как частный случай. Действительно, если точка N делит отрезок A_1A_2 пополам, то можно считать $n_1 = n_2 = 1$, и тогда уравнение (7) превращается в уравнение (6).

Примечание 2. Рассматривая числитель дроби в формуле (7), учащийся, конечно, обратит внимание на сочетание индексов при буквах n и x. Для того чтобы легче выразить результат этого наблюдения словами, представим себе на время, что числа n_1 и n_2 — целые (хотя условие задачи этого вовсе не предполагает). Тогда можно считать, что отрезок A_1A_2 разделен на $(n_1 + n_2)$ равных частей, из коих n_1 частей содержится в отрезке A_1N и n_2 частей — в отрезке NA_2. В этом предположении содержание равенства (7) может быть выражено в следующей легко запоминаемой форме: координата делящей точки равна координате левого конца, умноженной на число частей в правом отрезке, плюс координата правого конца, умноженная на число частей в левом отрезке, — все это деленное на сумму частей, заключенных в обоих отрезках.

Задачи.

13. Найти координату середины отрезка, заключенного между точками $A(3)$ и $B(10)$.

14. На оси даны точки $A(-6)$, $B(-1)$, $C(6)$. Найти координаты середин отрезков AB, BC, AC.

15. Середина отрезка AB находится в точке $C(2)$. Зная, что $x_B = 9$, найти x_A.

16. Можно ли равенство (5) писать в виде $|x_1 - x| = |x_2 - x|$? Можно ли и здесь отбросить вертикальные черты, как мы это делали по отношению к равенству (5)?

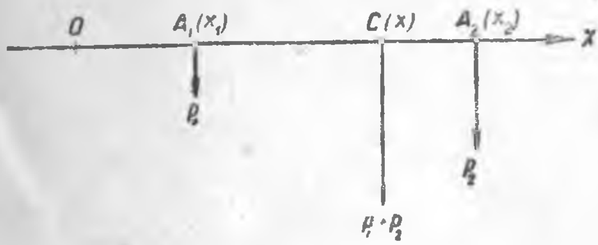
17. Отрезок AB разделен точкой C так, что $AC : CB = 2:5$. Зная, что $x_A = 3$, $x_B = 17$, найти x_C.

18. Точки M и N делят отрезок, заключенный между точками $A(-5)$ и $B($[illegible]$)$, на три части так, что $AM : MN : NB = 3:6:1$. Найти координаты точек M и N.

19. Отрезок между точками $A(-8)$ и $B(7)$ разделен на 5 равных частей. Найти координаты точек деления.

20. Точка $C(3)$ делит отрезок между точками $A(x)$ и $B(9)$ в отношении 5:3. Найти x.

§ 6. **Центр параллельных сил.** Полученный в предыдущем параграфе результат мы приложим сейчас к решению важной для механики (статики) задачи. Известно, что если в точках A и B твердого тела приложены две параллельные и направленные в одну сторону силы, то равнодействующая (равная сумме этих сил и направленная в ту же сторону) делит отрезок AB на части, обратно пропорциональные силам, приложенным в A и B. Та точка, в которой направление равнодействующей пересекает отрезок AB, называется *центром двух параллельных сил*, приложенных в A и B (напомним еще, что положение этого центра не зависит от общего направления составляющих сил, т. е. центр останется на месте, если обе силы повернуть на один и тот же угол, сохраняя их параллельность и одинаковую направленность).



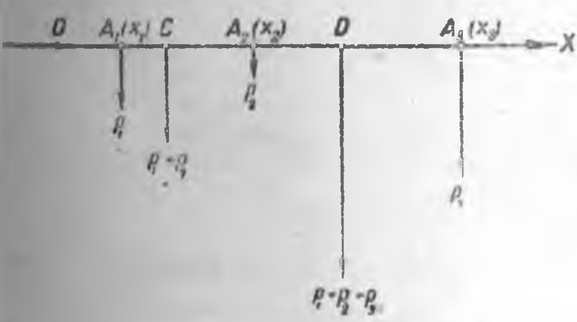
Черт. 11.

Задача 1. *В точках $A_1(x_1)$ и $A_2(x_2)$ приложены две параллельные одинаково направленные силы, величины которых соответственно p_1 и p_2. Найти центр этих двух сил* (черт. 11).

Решение. Если $C(x)$ — искомый центр, то согласно упомянутому закону статики $A_1C:CA_2=p_2:p_1$.

Но в таком случае формула (7) (см. также примечание 2, § 5) сразу дает:

$$x=\frac{p_1x_1+p_2x_2}{p_1+p_2}; \qquad (8)$$



Черт. 12.

обратить внимание на сочетание индексов при буквах p и x в числителе дроби; сравнить с сочетанием индексов при буквах n и x в формуле (7).

Теперь мы в состоянии перейти к решению более сложной задачи — к нахождению центра *трех* (а в дальнейшем и большего числа) параллельных сил. Как известно, центр трех параллельных и одинаково направленных сил может быть найден следующим построением: заменяем две из данных сил их равнодействующей, приложенной в центре этих двух сил; затем строим центр для этой равнодействующей и третьей силы.

Задача 2. *В точках $A_1(x_1)$, $A_2(x_2)$, $A_3(x_3)$ приложены силы p_1, p_2, p_3, параллельные и одинаково направленные. Найти координату центра системы, составленной из этих трех сил* (черт. 12).

Решение. Равнодействующая сил p_1 и p_2 имеет величину p_1+p_2 и направление, одинаковое с направлением всех трех сил; за точку приложения этой равнодействующей возьмем центр сил p_1 и p_2, т. е. точку C с координатой [см. уравнение (8)]

$$x_C = \frac{p_1x_1 + p_2x_2}{p_1 + p_2}.$$

Найдем теперь равнодействующую двух сил $(p_1 + p_2)$ и p_3; центр D этих сил (который и будет центром всей системы) должен делить отрезок CA_3 в отношении $p_3 : (p_1 + p_2)$:

$$CD : DA_3 = p_3 : (p_1 + p_2).$$

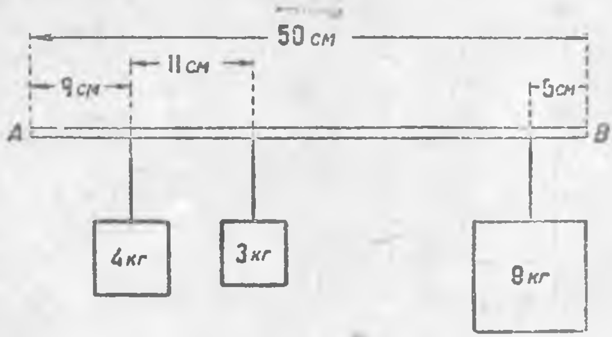
Применяя снова формулу (7), получим

$$x_D = \frac{(p_1 + p_2)\ x_C + p_3x_3}{p_1 + p_2 + p_3}.$$

Остается подставить сюда ранее полученное выражение для x_C, чтобы притти к окончательному результату:

$$x_D = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3}{p_1 + p_2 + p_3}, \tag{9}$$

т. е. координата центра трех параллельных, одинаково направленных сил получится, если величину каждой силы умножим на координату точки ее приложения и сумму полученных произведений разделим на сумму величин всех трех сил (т. е. на величину равнодействующей). Формулы (8) и (9) (в особенности — их обобщение, см. ниже задачу 24) имеют важное значение в статике твердого тела.



Черт. 13.

Задачи.

21. Найти координату центра двух параллельных и одинаково направленных сил, величины которых суть 5 и 3, а точки приложения соответственно $A(-2)$ и $B(7)$.

22. Из двух параллельных одинаково направленных сил одна, равная 4, приложена в начале координат, другая, равная 5, приложена в точке $A(6)$. Найти координату центра.

23. К прямоугольному стержню AB (черт. 13) подвешены 3 груза, размеры которых и точки приложения показаны на чертеже. За какую точку надо подвесить стержень для того, чтобы система находилась в равновесии (весом стержня пренебрегаем)?

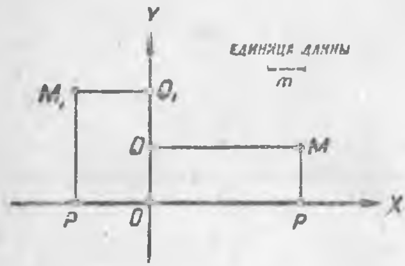
24. В обобщение формул (8) и (9) найти координату центра системы, состоящей из n параллельных одинаково направленных сил $p_1, p_2, \ldots, p_n$, приложенных соответственно в точках $A_1(x_1), A_2(x_2), \ldots, A_n(x_n)$.

Указание. Применить рассуждение „от n к $n + 1$".

§ 7. Координаты точки на плоскости. Теперь обратимся к главной нашей задаче — к изучению метода координат на плоскости. Подобно тому как для координации точек на прямой линии мы выбирали за основные элементы начало, положительное направление и масштаб, так и здесь прежде всего должна быть установлена некоторая „система координат", по отношению к которой будет определяться положение каждой точки. В качестве такой системы (черт. 14):

1) возьмем две взаимно перпендикулярные прямые — OX („ось иксов", или „ось абсцисс") и OY („ось игреков", или „ось ординат");

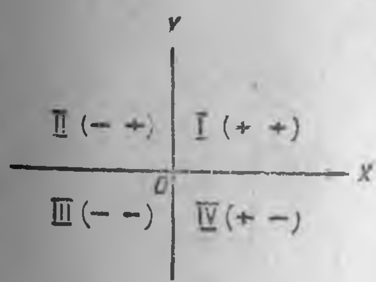
2) на каждой из этих прямых выберем положительное направление, отмечаемое стрелкой;



Черт. 14.

3) выберем определенный отрезок m за единицу длины (масштаб), с помощью которой будем измерять все отрезки. Это и есть „декартова прямоугольная[1]) система координат"; точка O называется в этой системе *началом координат* (короче — началом). Всякий раз как на плоскости выбрана определенная система координат, тем самым устанавливается и система координат и на каждой из прямых OX, OY (если рассматривать точку O как начало на OX и на OY).

Теперь, для того чтобы определить положение какой-нибудь точки M с помощью чисел, спроектируем[2]) эту точку на оси OX и OY, т. е. опустим перпендикуляры (черт. 14) MP и MQ на эти оси. Точка P имеет на оси OX определенную координату x, — ее мы и примем за *первую координату (абсциссу)* точки M. Точно так же точка Q имеет на оси OY определенную координату y, — ее мы примем за *вторую координату (ординату)* точки M. В зависимости от положения точки M, координаты ее проекций P и Q могут получаться как положительными, так и отрицательными, следовательно две координаты x и y точки M могут представлять различные комбинации знаков (например, на черт. 14 точка M_1 имеет отрицательную абсциссу и положительную ординату). Эти комбинации показаны на схематическом чертеже 15, где римские цифры показывают номера четвертей, на которые разбивается плоскость осями координат, а из двух знаков, помещенных в скобках, первый относится к абсциссе, второй — к ординате.



Черт. 15.

Итак, координатами какой-нибудь точки M в данной декартовой прямоугольной системе называются два числа (положительные,

---

[1]) Иногда берут оси координат пересекающимися не под прямым углом, — такая система координат называется *косоугольной*.

[2]) Проекцией (прямоугольной, или ортогональной) точки на прямую называется основание перпендикуляра, опущенного из точки на прямую.

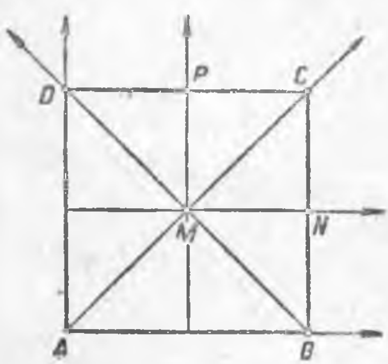
отрицательные или равные нулю), определяемые этой точкой по следующему правилу:

1-я координата, или абсцисса x, есть та координата, которую имеет на оси OX проекция точки M на эту ось;

2-я координата, или ордината y, есть та координата, которую имеет на оси OY проекция точки M на эту ось.

Вместо слов „точка A с абсциссой 3 и ординатой 5", говорят и пишут короче: „точка $A(3, 5)$" (на первом месте абсцисса, на втором ордината). Если координаты точки обозначаются буквами, то почти всегда пользуются буквой x для абсциссы и буквой y для ординаты, сопровождая, если нужно, эти буквы значками: $A(x, y)$, $B(x', y')$, $C(x_1, y_1)$ и т. п.

До сих пор мы говорили о том, как по заданной точке определяются ее координаты. Но и обратно — по заданным координатам вполне определяется точка. Действительно, абсолютная величина координат покажет, на каких расстояниях находится точка от осей OX и OY (именно, расстояние от оси OX равно $|y|$, а расстояние от оси OY равно $|x|$), а знаки координат покажут, в какой четверти находится точка. Если, например, нужно построить точку $(-5, 3)$, то откладываем от точки O по оси X-ов влево 5 единиц, по оси Y-ов вверх 3 единицы и через концы отложенных отрезков проводим параллели к осям координат (на пересечении этих параллелей и получится искомая точка). Вместо этого можно вести построение еще так: отложив по оси X-ов влево 5 единиц, из конца полученного отрезка восставляем перпендикуляр к этой оси и на нем откладываем вверх 3 единицы — приходим в искомую точку.



Черт. 16.

Примечание. Относительно выбора системы координат заметим, что в тех случаях, когда этот выбор является безразличным, предпочитают ось OX брать горизонтальной и давать ей направление слева направо, а ось OY — вертикальной с направлением снизу вверх [1]). Что касается выбора масштаба, то в геометрических вопросах обыкновенно пользуются *единым масштабом* для всех направлений (в то время как, например, при построении графиков функции нередко предпочитают разные масштабы для осей OX и OY).

Задачи.

25. Построить точки $A(3, 6)$, $B(5, -1)$, $C(-4, -4)$, $D(-2, 7)$, $E(-3, 0)$, $F(0, 4)$.
26. Где лежат точки, у которых ордината равна 3? равна -5?
27. Где лежат точки, у которых абсцисса равна 2? равна -3?
28. Где лежат точки, у которых ордината равна 0? абсцисса равна 0?
29. Где лежат точки, у которых абсцисса равна ординате? абсцисса и ордината равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку?

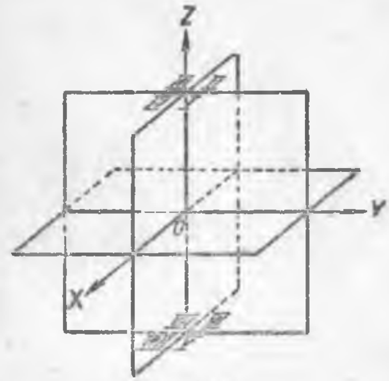
---

[1]) Впрочем, в задачах механики, имеющих дело с силой тяжести, часто дают вертикальной оси OY направление вниз.

30. Дана точка A (6, 4). Найти координаты каждой из точек, симметричных с A относительно: 1) оси OX, 2) оси OY, 3) начала O.

31. Дан квадрат $ABCD$, сторона которого равна единице (черт. 16). Найти координаты вершин, принимая за оси X-ов и Y-ов соответственно прямые: 1) AB и AD, 2) AC и BD, 3) MN и MP, при условии, что M — центр квадрата, N — середина отрезка BC, P — середина CD. Направления осей указаны на чертеже 16 стрелками (сделать для каждого вопроса отдельный чертеж).

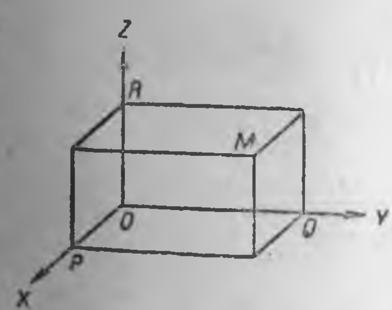
§ 8. Понятие о координатах в пространстве. Метод координат распространяется и на геометрию пространства (стереометрию). Так как в этой книге мы будем заниматься исключительно аналитической геометрией на плоскости, то по отношению к координатам в пространстве ограничимся здесь самыми общими указаниями.



Черт. 17.

Система координат в пространстве состоит из трех попарно-перпендикулярных плоскостей (*координатные плоскости*), пересекающихся в точке O (*начало координат*) и разбивающих все пространство на 8 трехгранных углов (8 октантов, отмеченных на чертеже 17 римскими цифрами). Линии пересечения координатных плоскостей называются *осями координат* (OX, OY, OZ), и на каждой из них выбирается положительное направление, отмечаемое стрелкой. Если еще выбран масштаб для измерения длин, то система координат установлена полностью.

Теперь мы можем определить положение любой точки M пространства (см. чертеж 18, где для простоты изображен только первый октант) с помощью трех чисел, трех *координат*, абсолютные величины которых покажут нам расстояния точки M от каждой из трех координатных плоскостей, а знаки (координат) покажут, в каком именно из 8 октантов лежит точка. Точнее говоря, мы проектируем точку M на три оси координат, для чего проводим через M три плоскости, параллельные координатным (все 6 плоскостей образуют параллелепипед). В результате этого построения получаются три точки P, Q, R — проекции точки M соответственно на осях OX, OY, OZ (например R есть основание перпендикуляра, опущенного из M на OZ). Каждая из точек P, Q, R имеет *на своей оси* определенную координату (положительную, отрицательную или нуль; на чертеже 18 все три координаты положительны). Вот эти три числа и принимаются за координаты точки M в пространстве. Таким образом, для точки M:



Черт. 18.

первая *координата, или абсцисса x*, есть та координата, которую имеет на оси OX проекция точки M на эту ось;

БИБЛИОТЕКА Павлодарского педагогического института
46598

2-я координата, или ордината y, есть та координата, которую имеет на оси OY проекция точки M на эту ось;

3-я координата, или апликата z, есть та координата, которую имеет на оси OZ проекция точки M на эту ось.

Теперь легко понять следующую схему распределения знаков координат по октантам (нумерацию октантов см. на чертеже 17):

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	—	—	+	+	—	—	+
y	+	+	—	—	+	+	—	—
z	+	+	+	+	—	—	—	—

Точка M с абсциссой x, ординатой y и апликатой z обозначается $M(x, y, z)$.

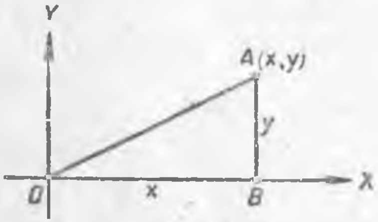
Задача.

32. Начертить три оси координат (продолжая каждую из них по обе стороны от начала), выбрать масштаб и построить точки $A(5, 6, 4)$, $B(2, -5, 1)$, $C(-3, 4, -6)$, $D(0, 5, 2)$, $E(6, 0, 0)$.

Указание. В параллельной перспективе, которой мы пользуемся для наших стереометрических чертежей, равные, но непараллельные отрезки не должны на чертеже казаться равными. Принято в направлениях осей OY и OZ брать масштаб неискаженным, а в направлении оси OX — укороченным.

§ 9. Расстояние между двумя точками (на плоскости). Если известны координаты точки $A(x, y)$, то расстояние ее от начала O может быть легко найдено: опустим перпендикуляр AB на OX (черт. 19), получится прямоугольный треугольник OAB с катетами x и y, следовательно

$$\boxed{OA = \sqrt{x^2 + y^2},} \tag{10}$$



Черт. 19.

т. е. *расстояние точки от начала координат равно корню квадратному из суммы квадратов координат этой точки.*

Это верно не только для того случая, когда точка A лежит в первой четверти, как и на чертеже 19, но и при любом другом положении точки. Действительно, в какой бы четверти ни лежала точка A (учащийся сделает чертеж), мы, опустив из нее перпендикуляр AB на ось X-ов, получим прямоугольный треугольник, в котором горизонтальный катет будет равен $|x|$, а вертикальный $|y|$; но ведь $|x|^2 = x^2$ и $|y|^2 = y^2$, следовательно $OA^2 = x^2 + y^2$.

Примечание. Единственный случай, когда предыдущее рассуждение неприменимо, это тот, когда точка A лежит на одной из координатных осей. Но и тогда формула (10) справедлива, так как для точки A, лежащей на оси X-ов, она дает $OA = \sqrt{x^2 + 0^2} = |x|$, для точки, лежащей на оси Y-ов, $OA = \sqrt{0^2 + y^2} = |y|$.

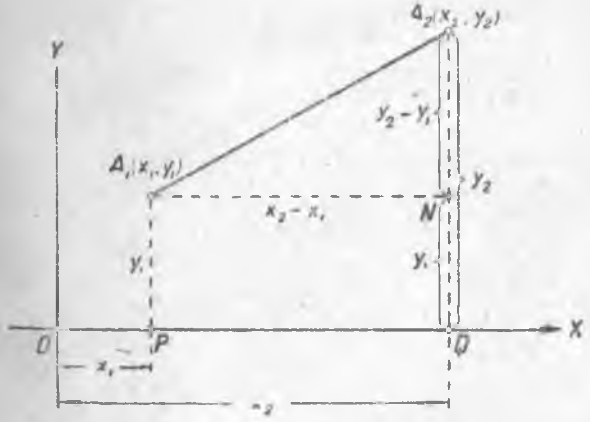
Обратимся теперь к более общей задаче.

Задача. *Найти расстояние между двумя точками $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$, координаты которых известны.*

Решение. Из точки A_1 (черт. 20) проведем прямую, параллельную оси X-ов, а из точки A_2 — прямую, параллельую оси Y-ов до пересечения с первой прямой в точке N. В прямоугольном треугольнике A_1NA_2 катет $A_1N = x_2 - x_1$, катет $A_2N = y_2 - y_1$, как это станет совершенно очевидным, если спроектировать точки A_1 и A_2 на ось X-ов (на чертеже P — проекция точки A_1, Q — проекция точки A_2). Отсюда заключаем, что:

$$\boxed{A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},} \tag{11}$$

т. е. *расстояние между двумя точками равно корню квадратном из квадрата разности их абсцисс плюс квадрат разности их ординат.* При этом совершенно безразлично, брать ли, например, разность $x_2 - x_1$ или $x_1 - x_2$, так как имеющееся между этими двумя числами различие в знаке исчезает после возведения их в квадрат. Само собою разумеется, что формула (10) содержится в формуле (11) как частный случай, соответствующий предположению, что у одной из точек A_1, A_2 обе координаты равны нулю.



Черт. 20.

Если бы точки A_1 и A_2 имели не то расположение, какое показано на чертеже 20, а любое другое, то и тогда формула (11) осталась бы верной. Действительно (учащийся сделает чертеж, беря, например, точку A_1 в IV четверти, а точку A_2 — во II), проведя из точек A_1 и A_2 параллели к осям координат до взаимного пересечения, мы всегда получим прямоугольный треугольник, у которого один из катетов (горизонтальный) будет равен расстоянию между проекциями точек A_1 и A_2 на ось X-ов, т. е. равен $|x_2 - x_1|$ [см. формулу (4)], а другой катет (вертикальный) — расстоянию между проекциями тех же точек на ось Y-ов, т. е. равен $|y_2 - y_1|$; но ведь $|x_2 - x_1|^2 = (x_2 - x_1)^2$ и $|y_2 - y_1|^2 = (y_2 - y_1)^2$.

Пример. *Найти расстояние между точками $A(-3, -1)$ и $B(-7, 6)$.*

Решение. Разность абсцисс равна $(-3)-(-7)=4$; разность ординат равна $6-(-1)=7$; $AB=\sqrt{49+16}=\sqrt{65}\approx 8{,}1$ (учащийся сделает чертеж на клетчатой бумаге и проверит результат вычисления, измеряя расстояние AB с помощью бумажной полоски, вырезанной из той же клетчатой бумаги).

Задачи.

33. Найти расстояние каждой из точек $A(8, 6)$, $B(3, -5)$, $C(-4, -2)$ $D(0; -3{,}82)$[1]) от начала координат.

34. Найти расстояния между парами точек: 1) $(-7, 8)$ и $(5, 3)$; 2) $(4, 0)$ и $(1, 6)$; 3) $(-2, -5)$ и $(-7, -1)$; 4) $(12{,}1; 8{,}7)$ и $(-7{,}4; 8{,}7)$.

35. Найти расстояние между точками (a, b) и (b, a).

36. Найти длины сторон треугольника, вершины которого находятся в точках $A(5, -4)$, $B(-1, 4)$, $C(3, -3)$.

37. Показать, что треугольник с вершинами $A(-5, 2)$, $B(3, 6)$, $C(4, -6)$ — равнобедренный.

38. Показать, что треугольник с вершинами $A(7, 3)$, $B(11, -3)$, $C(10, 5)$ — прямоугольный.

Указание. Воспользоваться теоремой, обратной теореме Пифагора

39. На оси X-ов найти точку, равноотстоящую от точек $A(-4, -1)$ и $B(7, 3)$.

40. Найти точку, расстояния которой от точек $A(7, 3)$ и $B(-1, 5)$ соответственно выражаются числами 13 и 5.

§ 10. Деление отрезка в данном отношении (на плоскости).

Задача 1. *На плоскости даны две точки $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$. Зная координаты концов отрезка A_1A_2, найти координаты (x, y) его середины M.*

1-е решение. Спроектируем точки A_1, M, A_2 на ось X-ов и на ось Y-ов (черт. 21); получим в первом случае точки A_1', M', A_2', во втором — точки A_1'', M'', A_2''.

В трапеции $A_1A_2A_2'A_1'$ отрезок MM' служит средней линией и, следовательно, равен полусумме параллельных сторон:

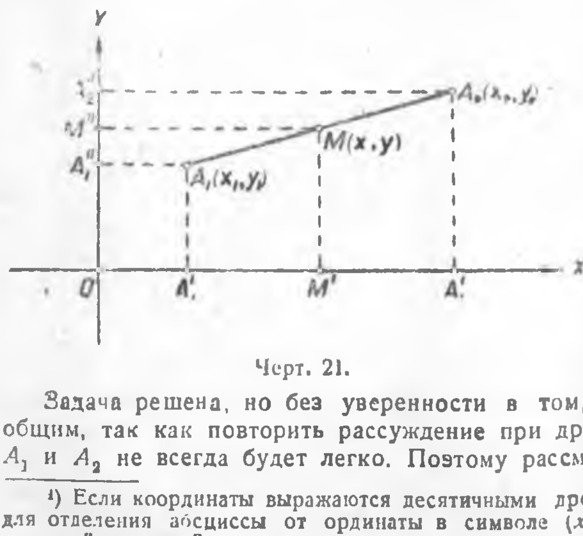
$$MM'=\frac{A_1A_1'+A_2A_2'}{2},$$

или, переходя к координатам,

$$y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Точно так же из рассмотрения трапеции $A_1A_2A_2''A_1''$ найдем, что

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}.$$



Черт. 21.

Задача решена, но без уверенности в том, что решение является общим, так как повторить рассуждение при другом расположении точек A_1 и A_2 не всегда будет легко. Поэтому рассмотрим:

1) Если координаты выражаются десятичными дробями, то в качестве знака для отделения абсциссы от ординаты в символе (x, y) пользуются не запятой, а точкой с запятой.

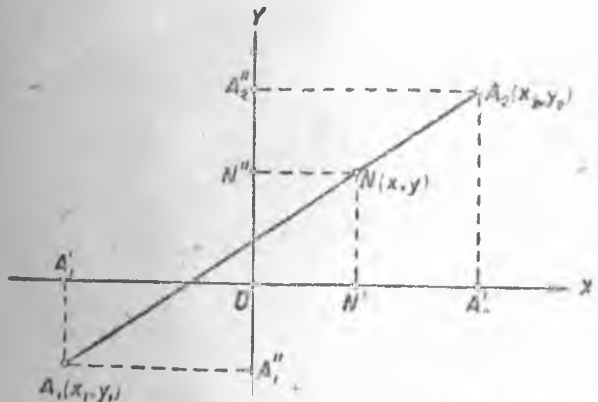
2-е решение. Так как точка M есть середина отрезка A_1A_2, то точка M' будет серединой отрезка $A_1'A_2'$, а точка M'' — серединой отрезка $A_1''A_2''$. Но абсциссы точек A_1, M, A_2 являются в то же время координатами их проекций A_1', M', A_2' на ось OX; равным образом ординаты точек A_1, M, A_2 можно рассматривать как координаты их проекции A_1'', M'', A_2'' на ось OY. Следовательно, применима формула (6) § 5, которая (теперь уже при любом расположении точек) дает:

$$\boxed{x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}}. \tag{12}$$

т. е. *абсцисса середины отрезка равна полусумме абсцисс его концов; ордината середины отрезка равна полусумме ординат его концов.*

Так же, как и в § 5, обратимся теперь к более общей задаче.

Задача 2. *Отрезок, заключенный между точками $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$, разделен точкой N на две части, длины которых относятся, как $n_1 : n_2$ (именно: $A_1N : NA_2 = n_1 : n_2$). Найти координаты делящей точки N.*



Черт. 22.

Решение. Спроектируем точки A_1, N, A_2 на ось X-ов и на ось Y-ов (черт. 2) и сохраним обозначения предыдущей задачи, с той только разницей, что вместо буквы M будет теперь N. Согласно известной теореме о ряде параллельных прямых, пересеченных двумя секущими [1]), можем написать:

$$A_1'N' : N'A_2' = A_1N : NA_2 = n_1 : n_2;$$

$$A_1''N'' : N''A_2'' = A_1N : NA_2 = n_1 : n_2.$$

Если теперь возьмем отдельно ось OX (а в другой раз ось OY) и вспомним, что координаты точек A_1', N', A_2' (точек A'', N'', A_2'') на этой

[1]) Если три (или большее число) параллельные прямые пересечены двумя секущими, то отрезки первой секущей, заключенные между прямыми параллельных прямых, пропорциональны соответствующим отрезкам второй секущей.

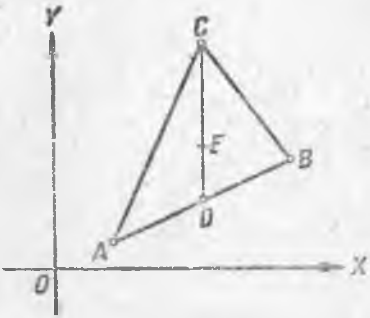
оси являются в то же время абсциссами (ординатами) точек A_1, A_2, A_3, то применение формулы (7) § 5 сразу дает решение задачи:

$$x = \frac{n_2 x_1 + n_1 x_2}{n_1 + n_2}, \quad y = \frac{n_2 y_1 + n_1 y_2}{n_1 + n_2}. \tag{13}$$

Пример. *Зная координаты вершин* $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ *треугольника, найти координаты его центра тяжести* (центром тяжести треугольника служит, как известно, точка пересечения медиан).

Решение. Известно, что точка пересечения медиан делит каждую из этих медиан в отношении 2:1. Поэтому для построения центра тяжести треугольника ABC можно поступить так: делим сторону AB пополам точкой D (черт. 23); проводим медиану CD и делим ее точкой E так, чтобы

$$CE:ED = 2:1;$$



Черт. 23.

точка E и будет центром тяжести. Так как мы знаем, в каком отношении делит точка E отрезок CD, то координаты этой точки можно будет найти, если знать координаты точек C и D. Но координаты точки C даны в условии задачи, а координаты точки D легко найдутся по формулам для координат середины отрезка. Осуществление этого плана дает согласно формуле (12)

$$x_D = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_D = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

а согласно формуле (13)

$$x_E = \frac{2x_D + x_3}{3}, \quad y_E = \frac{2y_D + y_3}{3},$$

откуда

$$x_E = \frac{2\frac{x_1 + x_2}{2} + x_3}{3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3},$$

и аналогично

$$y_E = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Итак, абсцисса (ордината) центра тяжести треугольника равна среднему арифметическому абсцисс (ординат) вершин этого треугольника.

Задачи

41. Зная вершины треугольника: $A(5, -2)$, $B(6, 4)$, $C(-6, 8)$, найти середины сторон [1].

[1]) В аналитической геометрии часто пользуются сокращенными выражениями: вместо „даны координаты точки" — „дана точка"; вместо „найти координаты точки" — „найти точку" и т. д.

42. В треугольнике с вершинами $A(3, 7)$, $B(-4, 0)$, $C(1, -4)$ найти длину медианы FD.

43. Середина отрезка AB находится в точке $C(2; -1,5)$. Зная точку $A(7, 2)$, найти точку B.

44. На отрезке, соединяющем точки $A(-2, 1)$ и $B\left(8\frac{2}{5}, 9\right)$, взята точка C так, что $AC:CB = 3:5$. Найти координаты точки C.

45. Отрезок, заключенный между точками $(1, 2)$ и $(7, -1)$, разделен на 5 равных частей. Найти точки деления.

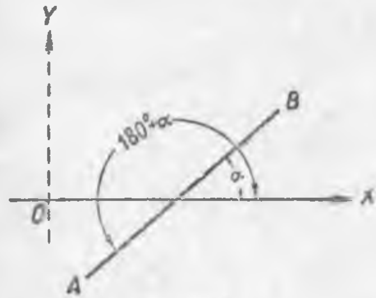
Указание. Кроме решения с помощью формулы (13) можно дать другое, основанное на том, что абсциссы (ординаты) крайних точек, взятых вместе с точками деления, образуют арифметическую прогрессию.

46. Зная вершины $A(-4, -3)$, $B(2, 5)$, $C(8; 0,5)$ треугольника, найти длину биссектрисы BD.

Указание. Воспользоваться теоремой: биссектриса внутреннего угла треугольника делит противолежащую сторону на части, пропорциональные двум другим сторонам.

§ 11. Подъем (угловой коэфициент) прямой линии.

Подобно тому как положение точки на прямой можно фиксировать с помощью одного числа (координаты), точно так же одним числом может быть охарактеризовано *двойное направление* [1]) прямой линии на плоскости. Для этой цели возьмем обычную систему координат, но используем не все ее составные части, а только одну из осей, например ось X-ов (выбор оси Y-ов, а значит и начала координат и масштаба, не будет играть роли). Если теперь на плоскости дана какая-нибудь прямая AB (черт. 24), то каждое из двух возможных для нее направлений можно охарактеризовать углом α или $180° + \alpha$ между этим направлением и положительным направлением оси X-ов.



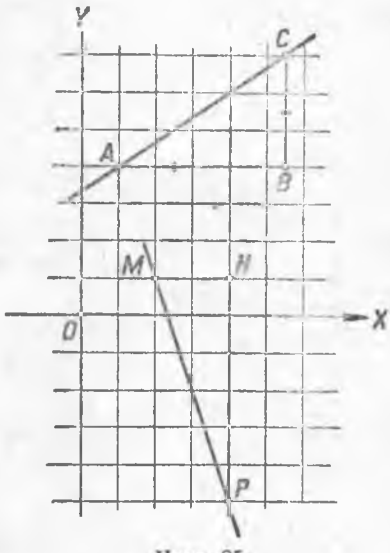
Черт. 24.

Можно также, как это часто делают (например при оценке уклона железнодорожного пути), заменить угол какой-нибудь из его тригонометрических функций. Если в качестве таковой мы остановимся на тангенсе, то будем иметь то преимущество, что обоим углам α и $180° + \alpha$ будет соответствовать один и тот же тангенс, характеризующий, таким образом, оба направления прямой AB одновременно; из шести тригонометрических функций этим свойством обладают только тангенс и котангенс. Итак, установим следующее определение: **подъемом** (или угловым коэфициентом) *прямой линии будем называть тангенс угла, составляемого этой прямой с положительным направлением оси X-ов*; точнее, тангенс того угла, на который должна быть повернута против часовой стрелки *положительная* полуось X-ов для того, чтобы ее направление совпало с одним из направлений данной прямой. Например, подъем прямой, делящей

[1]) Говоря о „двойном направлении", мы имеем в виду совокупность тех двух направлений, которые могут быть установлены на каждой прямой. Таким образом, двойное направление одинаково у всех параллельных между собою прямых, независимо от того, как мы будем выбирать „стрелки направления" на каждой из этих прямых (и будем ли мы их выбирать вообще).

пополам угол XOY, есть $\operatorname{tg} 45° = 1$; подъем самой оси OY, или любой прямой, параллельной ей, есть $\operatorname{tg} 90° = \infty$ в обычном условном смысле этого равенства [1]).

Итак, если задана прямая, то тем самым определяется ее подъем. Обратно, если задано какое угодно число, то всегда можно построить прямую, имеющую это число своим подъемом (вспомним, что тангенс изменяется от $-\infty$ до $+\infty$). Более того, можно даже потребовать, чтобы искомая прямая проходила через наперед заданную точку. Пусть, например, требуется через точку $A(1, 4)$ провести прямую с подъемом $m = \frac{2}{3}$. Для *приближенного* построения можно найти по тригонометрическим таблицам угол, тангенс которого равен $\frac{2}{3}$ (приближенно 33°40′), и построить с помощью транспортира этот угол при точке A так, чтобы одна сторона угла шла горизонтально вправо, а другая сторона располагалась бы кверху от первой; эта вторая сторона и даст искомую прямую. Но здесь возможно также построение циркулем и линейкой без обращения к таблицам и транспортиру.



Черт. 25.

Через точку A (черт. 25) проводим прямую, параллельную оси X-ов, и откладываем на ней вправо 3 $\left(\text{знаменатель дроби } \frac{2}{3}\right)$ раза какой-нибудь отрезок (необязательно, чтобы это был принятый нами масштаб); из конца B третьего отрезка восставляем к нему перпендикуляр и откладываем вверх 2 $\left(\text{числитель дроби } \frac{2}{3}\right)$ таких же отрезка; приходим в точку C; прямая AC и будет искомой. Другой пример (чертеж 25): через точку M (2,1) провести прямую с подъемом (—3). Построение: через точку M проводим прямую, параллельную оси X-ов, и откладываем на ней вправо 1 раз $\left(\text{знаменатель дроби } \frac{3}{1}\right)$ какой-нибудь отрезок MN; из точки N восставляем к MN перпендикуляр и откладываем на нем вниз (подъем — отрицательный) 3 $\left(\text{числитель дроби } \frac{3}{1}\right)$ таких же отрезка, как MN; приходим в точку P; прямая MP и будет искомой.

П р и м е ч а н и е. Следуя житейскому смыслу слова, хотелось бы сказать, что прямая AC чертежа 25 имеет относительно оси OX „подъем", а прямая MP — „спуск". Однако математическое определение термина заставляет в обоих случаях говорить о подъеме, один раз — положительном, другой раз — отрицательном.

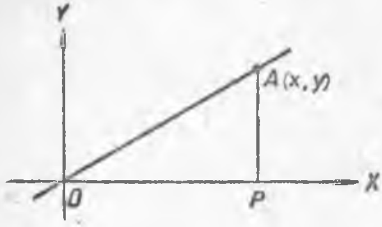
---

[1]) Запись $\operatorname{tg} x = \infty$ всегда можно заменить одним из соотношений:

$$\operatorname{tg} \alpha \to \infty \text{ при } \alpha \to 90°; \quad \operatorname{ctg}(90° - \alpha) = 0 \text{ при } \alpha = 0.$$

Условимся в дальнейшем обозначать подъем прямой — буквой m. Если в рассуждении будут участвовать подъемы нескольких прямых, то будем различать эти подъемы значками при букве m, например будем писать: m_1, m_2 и т. д. Если хотят обозначить подъем прямой AB, то нередко пишут m_{AB}.

Задача. *Найти подъем прямой OA, соединяющей начало координат с точкой $A(x, y)$.*



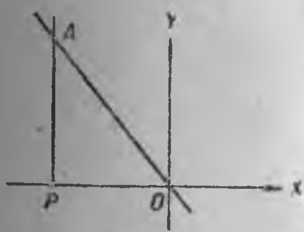
Черт. 26.

Решение. Будем сначала предполагать (черт. 26), что точка лежит в I четверти. Опустив перпендикуляр AP на ось OX, из чертежа видим что:

$$m_{OA} = \operatorname{tg} \angle AOP = \frac{AP}{OP} = \frac{y}{x},$$

т. е. *подъем прямой, соединяющей точку с началом координат, равен ординате этой точки, деленной на ее абсциссу.*

Если точка A лежит во II четверти, то рассуждение несколько изменяется, однако результат остается тот же самый. Действительно, теперь (черт. 27):



Черт. 27.

$$m_{OA} = \operatorname{tg} AOX = -\operatorname{tg} AOP = \frac{AP}{-OP},$$

но $AP = y$, $OP = -x$ (так как в рассматриваемом случае $x = -OP$), следовательно снова имеем:

$$\boxed{m_{OA} = \frac{y}{x}}. \qquad (14)$$

Предоставляем учащимся проверить справедливость этой формулы для случаев, когда точка A лежит в III и в IV четвертях.

Задачи.

47. Одна из сторон равностороннего треугольника лежит на оси X-ов. Найти подъем каждой из сторон.

48. Основание равнобедренного треугольника лежит на оси Y-ов. Зная, что угол при вершине треугольника равен 40°, найти подъемы сторон.

49. Найти подъем прямой, соединяющей начало координат с точками: 1) (2, 5), 2) (6, —3), 3) (—8, —8).

50. Через точку (4, 2) провести прямую, имеющую подъем:

$$1)\ \frac{5}{3},\quad 2)\ -\frac{5}{8},\quad 3)\ \sqrt{3},\quad 4)\ -\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

51. Как связаны между собой подъемы двух прямых, симметрично расположенных относительно 1) оси X-ов, 2) оси Y-ов.

52. Найти подъем прямой, соединяющей точки $A(3, 1)$ и $B(5, 8)$.

§ 12. Подъем прямой, соединяющей две данные точки. Последнюю из только что предложенных задач решим теперь в общем виде.

Задача. *Найти подъем прямой, соединяющей точки $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$.*

Решение. Желая облегчить себе вывод, будем предполагать сначала точки A_1 и A_2 расположенными так, как на чертеже 20 (обе точки в I четверти: $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$). В качестве угла между прямой A_1A_2 и положительным направлением оси OX можно взять $\angle NA_1A_2$, после чего из прямоугольного треугольника NA_1A_2 сразу находим:

$$\boxed{m_{A_1A_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}. \tag{15}$$

С таким же правом можно, очевидно, написать (умножая на —1 числитель и знаменатель дроби):

$$m_{A_1A_2} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}. \tag{15'}$$

Итак, подъем прямой, соединяющей две точки, равен разности их ординат, деленной на разность их абсцис. Впрочем, эта словесная формулировка не является исчерпывающей, так как из нее не видно, какая координата в каждой разности должна быть взята за уменьшаемое, а какая за вычитаемое. Внимательное рассмотрение формул (15) и (15′) дает ответ и на этот вопрос: *в обеих разностях уменьшаемые должны быть координатами одной точки, а вычитаемые— другой* (в этом отношении формула для подъема отличается от формулы (11) § 9 для расстояния, где участвуют те же две разности, но где порядок вычитания вовсе не должен быть согласованным) Несоблюдение этого правила дает для подъема неправильный знак, который, ведь, играет существенную роль.

Формула (15), хотя и выведена из благоприятного чертежа, однако справедлива во всех случаях, как в этом убедят нас рассуждения следующего параграфа. В ближайших упражнениях мы будем поэтому применять нашу формулу к точкам, как угодно расположенным (к тому же правильность каждого отдельного результата может быть проверена и по чертежу).

Задача.

53. Найти подъем прямой, соединяющей точки $(-2, 7)$ и $(6, 3)$.

54. Вершины треугольника находятся в точках $A(-4, -3)$, $B(6, 0)$, $C(5, 2)$. Найти подъемы сторон.

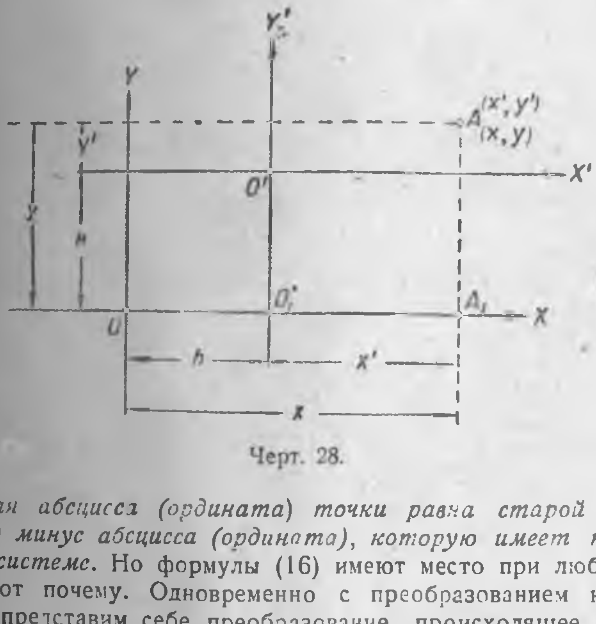
55. Даны точки $A(-7, 6)$, $B(5, -2)$, $C(9, -2)$, $D(-6, 8)$. Показать, что $AB \parallel CD$.

56. Даны точки $A(-1, 3)$, $B(5, 6)$, $C(-3, -2)$, $D(0, 2)$. Показать, что прямая AB составляет с положительным направлением оси OX вдвое меньший угол, чем прямая CD.

§ 13. Перенос начала координат. Для доказательства общности формулы (15) мы воспользуемся одним приемом, который окажется полезным не только в этом, но и в ряде других вопросов аналитической геометрии. Мы имеем в виду переход от одной системы координат на плоскости к другой (так называемое „преобразование координат") — задача, аналогичная той, какую мы решали для прямой линии в § 3. Из различных возможных здесь вариантов ограничимся тем, при котором ни направления осей, ни масштаб не меняются, а только начало координат переходит из положения O в новое положение O' (черт. 28).

Итак, пусть начало координат перенесено из точки O в точку $O'(h, k)$ (разумеется, h и k — старые координаты точки O', так как новые обе равны нулю), причем новая ось абсцисс ($O'X'$) параллельна и одинаково направлена со старой (OX) равно как и новая ось ординат ($O'Y'$) — со старой (OY). Теперь каждая точка A имеет две пары координат: x, y в старой системе и x', y' — в новой. Как связаны старые координаты с новыми? При той конфигурации, какая изображена на чертеже 28 (точка O' внутри угла XOY, точка A — внутри угла $X'O'Y'$), — ответ получается сразу:

$$\boxed{x' = x - h, \quad y' = y - k.} \tag{16}$$



Черт. 28.

т. е. *новая абсцисса (ордината) точки равна старой ее абсциссе (ординате) минус абсцисса (ордината), которую имеет новое начало в старой системе.* Но формулы (16) имеют место при любой конфигурации и вот почему. Одновременно с преобразованием координат на плоскости представим себе преобразование, происходящее на отдельно взятой оси OX и состоящее в сдвиге начала (§ 3) из точки O в точку O'_1 (проекция точки O' на ось OX). Если A_1 есть проекция точки A на ось OX, то:

x' есть координата точки A_1 на оси OX относительно начала O'_1
x " " " A_1 " " OX " " O
h " " " O_1 " " OX " " O

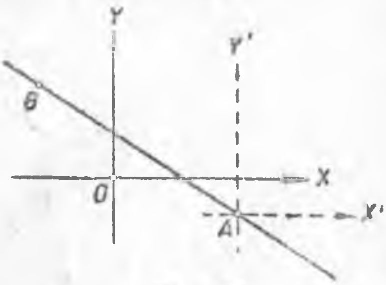
А так как при любом расположении точек O, O'_1, A имеет место формула (1) § 3, то и совпадающая с ней первая формула (16) справедлива независимо от чертежа. Рассуждая совершенно так же относительно оси OY, докажем общность и второй формулы (16).

Из формулы (16) уже чисто алгебраическим путем получаем:

$$\boxed{x = x' + h, \quad y = y' + k,} \tag{17}$$

т. е. *старая абсцисса (ордината) точки равна новой ее абсциссе (ординате) плюс абсцисса (ордината), которую имеет новое начало в старой системе.*

Возвращаясь к формуле (15) для подъема прямой, соединяющей две данные точки A и B, и желая доказать общность этой формулы, перенесем временно начало координат в одну из данных точек, например в A (черт. 29). Так как новая и старая оси абсцисс параллельны и одинаково направлены, то подъем прямой AB будет один и тот же относительно обеих осей. Но в новой системе мы имеем дело с подъемом прямой, соединяющей начало (новое) с точкой B, следовательно для всех случаев применима формула (14), которая здесь дает:



Черт. 29.

$$m_{AB} = \frac{y'_B}{x'_B}$$

(штрихами (') отмечаются новые координаты точки B в отличие от старых). Остается заметить, что в силу соотношения (16)

$$x'_B = x_B - x_A, \quad y'_B = y_B - y_A,$$

чтобы притти к равенству

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A},$$

которое отличается от формулы (15) только обозначениями. Вместе с тем доказано, что равенство (15) имеет место **при любом расположении точек A и B.**

Задачи.

57. Начало координат перенесено в точку $O'(5, -2)$, направления осей и масштаб — прежние. Найти новые координаты точек $A(6, 3)$, $B(-2, 4)$, $C(3, 0)$, $D(5, -4)$, $O(0, 0)$.

58. Начало координат перенесено в точку $O'(-4, 1)$, после чего новые координаты точки A оказались $(6, -6)$. Каковы были старые координаты точки A?

59. В какую точку надо перенести начало координат, чтобы абсциссы всех точек увеличились на 4, а ординаты уменьшились на 3?

§ 14. Угол между двумя прямыми. Рассмотрим две прямые AB и CD, пересекающие ось X-ов и образующие с положительным направлением этой оси: одна — угол α, другая — угол β. Если известны эти углы или вместо них подъемы прямых:

$$m = \operatorname{tg} \alpha; \quad m_1 = \operatorname{tg} \beta,$$

то мы можем, очевидно, ответить на вопрос о взаимном наклоне наших прямых (параллельны ли они, перпендикулярны ли и, вообще, какой угол друг с другом образуют). В следующих рассуждениях будем считать для определенности, что прямые AB и CD направлены кверху, значит углы α, β заключены между 0 и 180°.

Начнем с частных случаев. Если $AB \parallel CD$ (черт. 30), то углы α и β равны (как „соответственные“), и обратно: если $\alpha = \beta$, то $AB \parallel CD$, следовательно *признак параллельности двух прямых состоит в равенстве их подъемов*:

$$\boxed{m = m_1.}\ ^{1)} \tag{18}$$

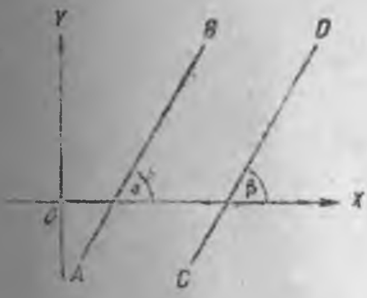
Другой частный случай: пусть $AB \perp CD$ (черт. 31). Обозначая через α меньший из двух углов α, β, имеем (свойство внешнего угла треугольника):

$$\beta = 90^\circ + \alpha,$$

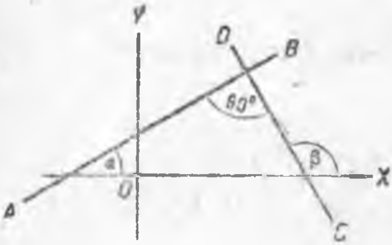
следовательно: $\operatorname{tg} \beta = -\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$, т. е.

$$\boxed{m_1 = -\frac{1}{m}.} \tag{19}$$

Таким образом, если, например, подъем одной прямой равен $\frac{2}{3}$, то подъем второй выразится числом, обратным по абсолютной величине и по знаку, т. е. будет равен $\left(-\frac{3}{2}\right)$.



Черт. 30.



Черт. 31.

Справедливо и обратное утверждение: если подъемы двух прямых обратны по абсолютной величине и по знаку, то отсюда следует, что: 1) одна из прямых образует с положительным направлением оси X-ов острый угол, а другая — тупой, 2) последний больше первого на 90° (ибо из $\operatorname{tg} \beta = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ следует $\operatorname{tg} \beta = -\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha)$, а при остром угле α и тупом β это возможно только в том случае, когда $\beta = 90^\circ + \alpha$. Итак, *признак перпендикулярности двух прямых состоит в том, что подъемы этих прямых обратны по абсолютной величине и по знаку*. Заметим еще, что равенство (19) можно заменить таким:

$$mm_1 = -1, \tag{19'}$$

т. е. произведение подъемов двух взаимно перпендикулярных прямых равно -1.

1) Это верно и тогда, когда прямые не пересекают ось X-ов, а параллельны ей. В этом случае оба подъема равны нулю.

Примечание. Из нашего рассмотрения выпал случай, когда одна из прямых параллельна оси OX (горизонтальна), а другая перпендикулярна к ней (вертикальна) — мы исходим из предположения, что обе прямые пересекают ось OX. Тем не менее равенство (19) и здесь сохраняет смысл, принимая вид:

$$0 = -\frac{1}{\infty}, \text{ или } -\infty = -\frac{1}{0}.$$

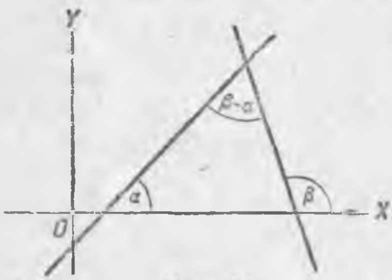
Только смысл этот теперь уже не прямой, а заключается в том, что

$$\text{пред.}_{m \to \infty} \frac{1}{m} = 0 \text{ и } \quad \text{пред.}_{m \to 0} \frac{1}{m} = \infty.$$

Другая форма условия перпендикулярности — уравнение (19') — здесь неприменима, так как выражение $0 \cdot \infty$ лишено смысла.

Обратимся к более общей задаче.

Зная подъемы m и m_1 двух пересекающихся прямых, определить угол между ними.



Черт. 32.

Решение. Заметим прежде всего, что задача должна иметь два решения, так как две прямые, пересекаясь, образуют два различных по величине угла: острый и тупой (если исключить случай взаимной перпендикулярности прямых). Сохраняя прежние обозначения (черт. 32), видим, что один из углов между прямыми равен $\beta - \alpha$, а другой, смежный с ним, $180° - (\beta - \alpha)$. Так как нам даны не сами углы α и β, а их тангенсы, то естественно, что и для углов между прямыми мы будем искать какие-нибудь их тригонометрические функции. Перебирая в памяти формулы тригонометрии, относящиеся к разности двух углов, мы, конечно, предпочтем ту, которая содержит только тангенсы этих углов:

$$\operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} = \frac{m_1 - m}{1 + mm_1}$$

(вместо этого можно было еще воспользоваться формулой для котангенса разности). Для угла, смежного с $(\beta - \alpha)$, тангенс будет отличаться от полученного только знаком. Итак, обозначая через φ тот или другой угол между прямыми, можем объединить оба результата в формуле:

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \pm \frac{m_1 - m}{1 + mm_1}.} \tag{20}$$

Присутствие здесь двойного знака ($\pm$) не может показаться неожиданным (как и в известной формуле для решения квадратного уравнения), — ведь под φ можно подразумевать как острый, так и тупой углы между прямыми.

Пример. *Даны точки* $A(-3, 1)$, $B(5, 4)$, $C(1, 6)$, $D(7, 2)$; *найти угол между прямыми* AB и CD.

Решение. Сначала определяем подъемы прямых:

$$m_{AB}=\frac{4-1}{5+3}=\frac{3}{8},\quad m_{CD}=\frac{6-2}{1-7}=-\frac{4}{6}=-\frac{2}{3}.$$

Теперь по формуле (20):

$$\operatorname{tg}\varphi=\pm\frac{\frac{3}{8}-\left(-\frac{2}{3}\right)}{1+\frac{3}{8}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}=\pm\frac{9+16}{24-6}=\pm\frac{25}{18}=\pm 1{,}3888\ldots$$

Если хотим определить угол в градусах, то обращаемся к таблицам, из которых найдем: острый угол между прямыми равен $54°10'$ (с точностью до $10'$) и, значит, тупой равен $125°50'$ (с той же точностью).

Примечание 1. Если бы в предыдущем решении мы вычли не $\left(-\frac{2}{3}\right)$ из $\frac{3}{8}$, а, наоборот, $\frac{3}{8}$ из $\left(-\frac{2}{3}\right)$, то благодаря двойному знаку $(\pm)$ получили бы тот же результат.

Примечание 2. Условия параллельности и перпендикулярности формул (18) и (19) заключаются в формуле (20) как предельные случаи. Действительно: 1) если в формуле (20) $m_1 \to m$, то $\operatorname{tg}\varphi \to 0$, т. е. $\varphi \to 0$ (или $\to 180°$) — случай параллельности; 2) если в формуле (20) $m_1 \to -\frac{1}{m}$, или, что то же, $mm_1 \to -1$, то $\operatorname{tg}\varphi \to \infty$, следовательно $\varphi \to 90°$ — случай перпендикулярности.

Задачи.

60. Даны точки $A(-5, 6)$, $B(7, 2)$, $C(5, 1)$, $D(-4, 7)$; показать, что $AB \parallel CD$.

61. Показать, что четыреугольник $ABCD$ с вершинами $A(2, 6)$, $B(5, 1)$, $C(-1, -6)$, $D(-4, -1)$ есть параллелограм.

62. Даны точки $A(-5, 3)$, $B(-8, 2)$, $C(4, -7)$, $D(3, -3)$. Показать, что прямая, соединяющая середину отрезка AB с серединой отрезка CD, параллельна прямым AD и BC.

63. Проверить, что треугольник с вершинами $A(-7, 4)$, $B(3, 8)$, $C(9, -7)$ — прямоугольный.

64. Проверить, что в четыреугольнике $ABCD$ с вершинами $A(2, -5)$, $B(7, -2)$, $C(6, 1)$, $D(-2, 3)$ диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны.

65. Вершины треугольника находятся в точках $A(-4, 1)$, $B(2, 4)$, $C(6, 2)$. Найти подъем каждой из высот треугольника.

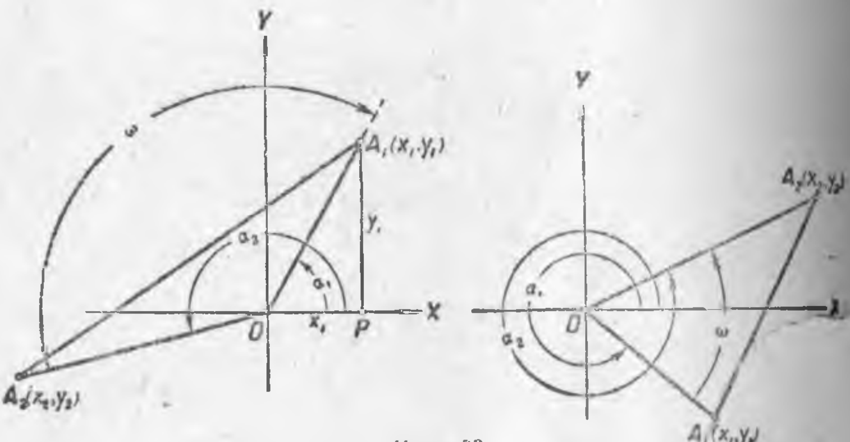
66. Для параллелограма задачи 61 найти угол между диагоналями AC и BD.

67. Найти внутренние углы треугольника с вершинами $A(-7, 1)$, $B(2, 3)$, $C(4, -1)$.

68. В треугольнике с вершинами $A(-4, -2)$, $B(-2, 3)$, $C(1, -1)$ найти угол между высотами AD и CE.

§ 15. Площадь треугольника и многоугольника. Если вершины треугольника даны (своими координатами), то этим форма и размеры его вполне определяются, следовательно существует принципиальная возможность вычислять любые элементы этого треугольника. И действительно, мы уже умеем по координатам вершин вычислять длины сторон, углы треугольника и некоторые второстепенные элементы: длины медиан (задача 42), биссектрис (задача 46) и т. п. Чтобы завершить цикл относящихся сюда основных задач, мы займемся еще вычислением *площади треугольника по координатам его вершин.*

Начнем с частного случая, когда одна из вершин треугольника находится в начале координат. Итак, пусть имеем треугольник OA_1A_2 (черт. 33) с вершинами $O(0,0)$, $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$. Так как от нас зависит, при какой вершине поставить букву A_1, а при какой A_2, то мы будем для определенности производить эту расстановку так, чтобы луч OA_1 переходил в луч OA_2 *положительным* (т. е. против час вой стрелки) вращением на угол ω, меньший чем $180°$ (см. обе фигуры чертежа 33). Если теперь через α_1 обозначим, как это делается в тригонометрии, угол, на который надо повернуть в положительном вращении луч OX для того, чтобы он совпал с лучом OA_1, то угол $\alpha_2 = \alpha_1 + \omega$ даст нам величину положительного поворота, приводящего OX в совпадение с OA_2 (при этом угол α_2 может оказаться и больше $180°$, см. правую фигуру чертежа 33).



Черт. 33.

Интересующая нас площадь может быть выражена по известной из тригонометрии формуле:

$$\text{пл. } OA_1A_2 = \frac{1}{2} OA_1 \cdot OA_2 \sin\omega,$$

а так как $\omega = \alpha_2 - \alpha_1$, то

$$\text{пл. } OA_1A_2 = \frac{1}{2} OA_1 \cdot OA_2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) =$$

$$= \frac{1}{2} OA_1 \cdot OA_2 (\sin\alpha_2 \cos\alpha_1 - \cos\alpha_2 \sin\alpha_1).$$

Но синусы и косинусы углов α_1 и α_2 могут быть легко выражены через координаты точек A_1, A_2 и отрезки OA_1, OA_2. Именно, по самому определению этих тригонометрических функций имеем (см. левую фигуру чертежа 33, где из вершины опущен перпендикуляр A_1P на ось OX; учащийся сам дополнит чертеж аналогичными перпендикулярами для остальных вершин левой и правой фигур):

$$\sin\alpha_1 = \frac{y_1}{OA_1}, \quad \cos\alpha_1 = \frac{x_1}{OA_1}, \quad \sin\alpha_2 = \frac{y_2}{OA_2}, \quad \cos\alpha_2 = \frac{x_2}{OA_2}.$$

Подставляя эти значения в последнее полученное для площади выражение, по сокращении будем иметь окончательно:

$$\boxed{\text{пл. } OA_1A_2 = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1).} \qquad (21)$$

Пример. *Определить площадь треугольника, одна из вершин которого находится в начале координат, а две другие — в точках (5,1) и (—2,6).*

Решение. Принимая точку (5,1) за первую (A_1), а точку **(—2,6)** за вторую (A_2), имеем:

$$\text{пл. } OA_1A_2 = \frac{1}{2}[5\cdot 6 - (-2)\cdot 1] = 16 \text{ (кв. ед.)}^{1)}.$$

Примечание 1. Если бы мы пренебрегли нашим правилом нумерации вершин, то в правой части равенства (21) получили бы то же самое число, но только со знаком минус. Действительно, выражения

$$x_1y_2 - x_2y_1 \quad \text{и} \quad x_2y_1 - x_1y_2$$

отличаются одно от другого только знаком. Например, в проделанном только что вычислении мы получили бы:

$$\frac{1}{2}[(-2)\cdot 1 - 5\cdot 6] = -16.$$

Таким образом, можно освободить себя от заботы о нумерации вершин (и не думать о чертеже), но только тогда надо быть готовым к получению отрицательного числа, абсолютная величина которого дает, однако, правильный размер площади. Другими словами, если писать вместо (21)

$$\text{пл. } OA_1A_2 = \frac{1}{2}\,|x_1y_2 - x_2y_1|,$$

то формула будет верна при любой нумерации вершин.

Обратимся теперь к общей задаче: *найти площадь треугольника, зная координаты его вершин.*

Решение. Так как нумерация вершин снова зависит от нас, то буквы A_1, A_2, A_3 при вершинах мы расставим следующим образом (черт. 34): если K — какая-нибудь внутренняя точка треугольника, то луч KA_1, описывая полный оборот в положительном направлении, пусть сначала приходит в положение KA_2, затем в положение KA_3 и, наконец, возвращается в положение KA_1 (очевидно, что при этом каждый из углов A_1KA_2, A_2KA_3, A_3KA_1 будет меньше 180°[2]). Такую нумерацию вершин можно описать еще с помощью „правила пловца“: пловец, движущийся (лицом вниз, если предполагать плоскость горизонтальной)

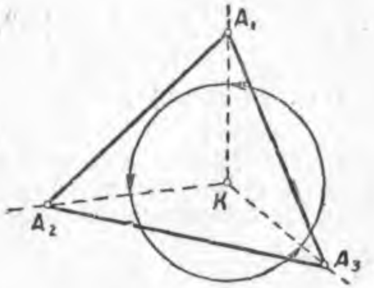
[1]) Если чертеж делается на клетчатой бумаге и сторона квадратной клетки принимается за единицу длины, то квадратной единицей будет служить площадь одной клетки. Учащийся может тогда проверить (приближенно) результат вычисления по чертежу, подсчитывая, сколько полных клеток заключено внутри треугольника, и оценивая на-глаз сумму неполных пограничных клеток.

[2]) Легко понять, что если это требование осуществлено при некотором выборе внутренней точки K, то оно будет автоматически выполняться и при любом другом выборе (пока точка K будет оставаться внутри треугольника).

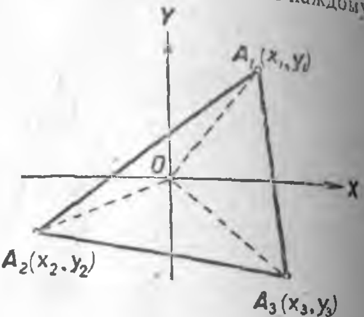
вдоль контура треугольника по маршруту $A_1 \to A_2 \to A_3 \to A_1$, будет все время видеть внутренние точки треугольника по левую руку от себя.

При выводе формулы для площади мы будем предполагать, что начало координат O находится внутри треугольника (черт. 35).

Пусть $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$ — вершины треугольника, перенумерованные так, как только-что описано. Разобьем треугольник $A_1A_2A_3$ на треугольники OA_1A_2, OA_2A_3, OA_3A_1 и применим к каждому



Черт. 34.



Черт. 35.

из них формулу (21), следя при этом за соблюдением того порядка вершин, который этой формулой предполагается:

$$\text{пл. } OA_1A_2 = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1);$$

$$\text{пл. } OA_2A_3 = \frac{1}{2}(x_2y_3 - x_3y_2);$$

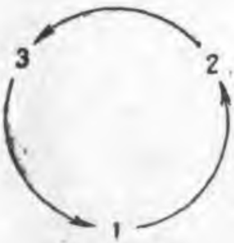
$$\text{пл. } OA_3A_1 = \frac{1}{2}(x_3y_1 - x_1y_3).$$

Складывая, получим:

$$\text{пл. } A_1A_2A_3 = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3),$$

т. е. равенство, которое решает нашу задачу. Путем перегруппировки членов можно придать этому выражению вид, более удобный для запоминания:

$$\boxed{\text{пл. } A_1A_2A_3 = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)].} \qquad (22)$$



Черт. 36.

Мнемоническое правило здесь следующее: в каждом из членов типа $x_*(y_* - y_*)$ значки следуют друг за другом в „круговом порядке“, определяемом схемой чертежа 36.

Хотя формула (22) выведена в предположении, что начало координат лежит внутри треугольника $A_1A_2A_3$, однако она справедлива при любом положении начала, лишь бы только вершины были перенумерованы так, как это указано выше. Доказательство общности формулы (22) дано в приложении (стр. 95—96).

Примечание 2. Если не следовать нашему правилу нумерации вершин, то подстановка чисел вместо букв в правую часть равенства (22) может привести к отрицательному числу, абсолютная величина которого дает все-таки правильный размер площади. Действительно, такие выражения, как, например,

$$x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)$$

и

$$x_3(y_2-y_1)+x_2(y_1-y_3)+x_1(y_3-y_2)$$

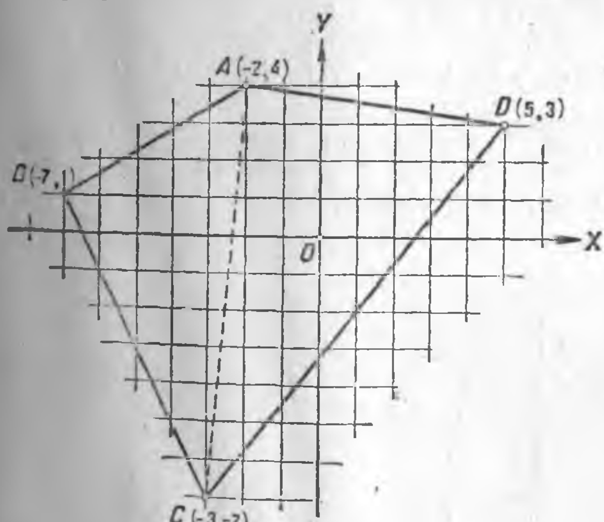
(второе из первого получается перестановкой индексов 1 и 3), отличаются друг от друга только знаком. Если поэтому писать вместо уравнения (22):

$$\text{пл. } A_1A_2A_3=\frac{1}{2}\,|\,x_3(y_2-y_1)+x_2(y_1-y_3)+x_1(y_3-y_2)\,|, \qquad (22)'$$

то эта формула будет справедлива при **любой** нумерации вершин (ср. примечание 1).

Примечание 3. Может ли случиться, чтобы правая часть формулы (2) обратилась в нуль, т. е. возможно ли, чтобы при некоторых числовых значениях координат было:

$$x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)=0? \qquad (23)$$



Черт. 37.

Очевидно, для этого необходимо, чтобы отрезки A_1A_2, A_2A_3, A_1A_3 не составляли треугольника, т. е. чтобы точки A_1, A_2, A_3 лежали на одной прямой. Но этого и достаточно, потому что при прямолинейном расположении точек A_1, A_2, A_3 подъем прямой A_1A_2 совпадает с подъемом прямой A_1A_3:

3*

$$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{y_1-y_3}{x_1-x_3},$$

а это равенство после некоторых преобразований приводится к уравнению (23). Итак, равенство (23) можно рассматривать как *признак прямолинейного расположения трех точек.*

Пример. *Найти площадь четыреугольника* $ABCD$ *с вершинами* $A(-2,4)$, $B(-7,1)$ $C(-3,-7)$, $D(5,3)$ (черт. 37).

Решение. Разобьем четыреугольник диагональю AC на два треугольника ABC, ACD и будем вычислять площадь каждого по формуле (22) [или (22')]:

$$\text{пл. } ABC = \frac{1}{2}[-2(1+7)-7(-7-4)-3(4-1)] = 26 \text{ (кв. ед.)}$$

$$\text{пл. } ACD = \frac{1}{2}[-2(-7-3)-3(3-4)+5(4+7)] = 39 \text{ (кв. ед.)}$$

$$\text{пл. } ABCD = 26 + 39 = 65 \text{ (кв. ед.)}$$

Подобные вычисления часто производятся в землемерной и топографической практике при определении площади многоугольных земельных участков. Достаточно знать координаты вершин многоугольника для того, чтобы, разбив его на треугольники (из одной вершины диагоналями или из какой-нибудь внутренней точки, которую затем удобно принять за начало координат), определить площадь.

Задачи.

69. Как получить формулу (21) из (22)?

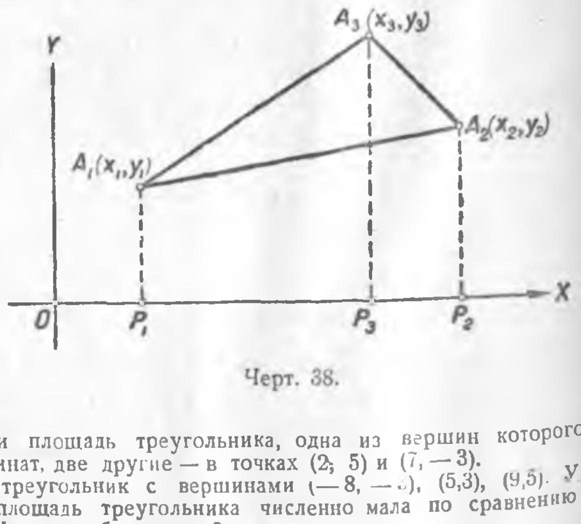
70. Преобразовать формулу (22) к виду:

$$\text{пл. } A_1A_2A_3 = \frac{1}{2}[y_1(x_3-x_2)+y_2(x_1-x_3)+y_3(x_2-x_1)].$$

Каков теперь закон расстановки значков?

71. Вывести заново формулу (22) из чертежа 38 (где A_1P_1, A_2P_2, A_3P_3 — перпендикуляры, опущенные на ось OX), пользуясь тем, что

$$\text{пл. } A_1A_2A_3 = \text{пл. } A_1P_1P_3A_3 + \text{пл. } A_3P_3P_2A_2 - \text{пл. } A_1P_1P_2A_2.$$



Черт. 38.

72. Найти площадь треугольника, одна из вершин которого находится в начале координат, две другие — в точках (2; 5) и (7, —3).

73. Дан треугольник с вершинами (—8, —3), (5,3), (9,5). Удостовериться в том, что площадь треугольника численно мала по сравнению с размерами его сторон. Чем это объясняется?

74. Найти площадь треугольника с вершинами $(-3, 5)$, $(5, -1)$, $(-6, -4)$. Решить задачу двумя способами: 1) по формуле (22) [или (22')]; 2) вычисляя длины сторон и применяя формулу Герона

$$\left(S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\right).$$

75. Доказать, что точки $(5, -2)$, $(-4, 10)$, $(11, -10)$ лежат на одной прямой.

76. Найти площадь четырехугольника с вершинами $(1, -5)$, $(4, -4)$, $(6, 2)$, $(2,3)$.

77. Вершины треугольника находятся в точках $(4, -5)$, $(7, -1)$, $(-5, 4)$. Определить длины трех высот.

Задачи к главе первой.

78. Найти координаты вершин правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной a, принимая следующую систему координат: начало — в вершине A; положительное направление оси X-ов от A к B; положительная полуось Y-ов по ту же сторону от AB, по какую лежит шестиугольник.

79. Показать, что прямая, соединяющая точки $A(-9, 15)$ и $B(6, -10)$, проходит через начало координат.

80. Показать, что точки $A(-5, 3)$, $B(-1, 4)$, $C(11, 7)$ лежат на одной прямой. Решить задачу тремя способами: 1) определяя длины отрезков AB, BC, AC; 2) вычисляя подъемы двух из прямых AB, AC, BC; 3) допуская, что точки не лежат на одной прямой, и применяя формулу для площади треугольника.

81. Лежат ли точки $(-11, -9)$, $\left(2, \frac{5}{4}\right)$, $(9, 6)$ на одной прямой? Сначала попытаться ответить на вопрос с помощью чертежа, а затем вычислением.

82. Вершины треугольника находятся в точках $A(1, 3)$, $B(6, -1)$, $C(4; -3{,}5)$. Двумя способами показать, что треугольник — прямоугольный, вычисляя: 1) длины сторон, 2) подъемы сторон.

83. Показать, что четыреугольник с вершинами $A(1, -3)$, $B(5, 4)$, $C(-2, 8)$, $D(-6, 1)$ есть квадрат.

84. Даны три последовательные вершины параллелограма $A(-3, -4)$, $B(4, -1)$, $C(5, 3)$. Найти четвертую вершину (противолежащую вершине B).

85. Две силы, приложенные к точке $(-5, 2)$, изображаются векторами (направленными отрезками), концы которых находятся в точках $(-2, 6)$ и $(3, 0)$. Найти величину и направление (подъем) равнодействующей.

86. Найти длину высоты AD треугольника с вершинами $A(-1, 4)$, $B(1, 1)$, $C(7,3)$.

87. Найти расстояние точки $(0,2)$ от прямой, соединяющей точки $(9, 1)$ и $(-3, -8)$.

88. Показать, что точки $A(-5, 2)$ и $B(2, -5)$ симметрично расположены относительно биссектрисы угла XOY. Решить задачу двумя способами: 1) определяя подъем прямой AB и середину отрезка AB; 2) определяя расстояния произвольной точки, взятой на биссектрисе, от A и от B.

89. Отрезок между точками $(-7, 2)$ и $(3,5)$ разделен на три равные части, и точки деления соединены прямыми с точкой $(-1,0)$. Найти подъемы этих прямых.

90. Стороны треугольника имеют подъемы $\frac{2}{5}$, 1 и $\frac{5}{2}$. Показать, что треугольник — равнобедренный.

91. Найти центр трех параллельных и одинаково направленных сил, величины которых суть 5, 8, 3, а точки приложения соответственно $(-3,2)$, $(2,7)$, $(8, 0)$.

92. Найти центр тяжести однородной четыреугольной пластинки, вершины которой находятся в точках $A(3, 6)$, $B(8, 4)$, $C(5, -4)$, $D(-6, 0)$.

Указание. Разбить четыреугольник на два треугольника и считать массу каждого треугольника сосредоточенной в его центре тяжести.

93. На прямой, соединяющей точки $A(3, 7)$ и $B(13, 13)$, найти точку C с абсциссой 6 и точку D с абсциссой -7.

94. Вершины четыреугольника $ABCD$ находятся в точках $A(1, -6)$, $B(6, 6)$, $C(5, 1)$, $D(4, -2)$. Показать, что диагональ AC делит пополам угол A четыреугольника.

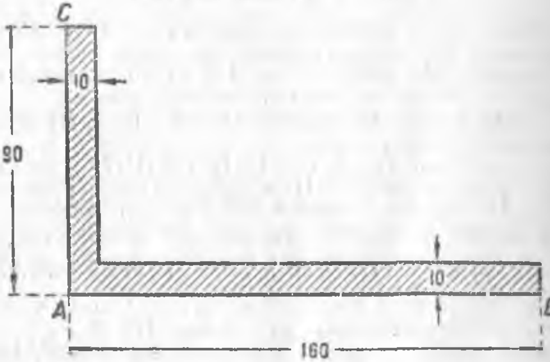
95. Вершины треугольника находятся в точках $(6,2)$, $(-3,5)$ и $(2,0)$. Найти расстояния центра тяжести треугольника от его вершин.

96. Даны две пары точек: $A(-3,1)$, $B(1,3)$ и $C(2,5)$, $D(5,-1)$. Найти точку, в которой пересекается ось симметрии точек A и B с осью симметрии точек C и D.

97. Найти центр и радиус круга, описанного около треугольника с вершинами $(3,-1)$, $(2,0)$ $(1;\ 2,6)$.

98. Даны точки $A(-7,1)$, $B(3,6)$, $C(5,3)$, $D(-5,8)$. В каком отношении делится каждый из отрезков AB, CD точкой их пересечения?

99. Найти центр тяжести фигуры, изображенной с указанием размеров на чертеже 39 (упрощенный профиль так называемого „углового железа"). За оси координат принять AB и AC.



Черт. 39.

100. Показать, что четыре точки, $A(6,4)$, $B(-2,8)$, $C(5,7)$, $D(1,-1)$, лежат на одной окружности.

101. В треугольнике с вершинами $A(-6,2)$, $B(-3,4)$, $C(1,-2)$ найти угол между биссектрисами углов A и C.

УРАВНЕНИЯ ЛИНИЙ.

§ 16. Геометрические места. Уже первый шаг аналитической геометрии — замена точки парой чисел (координат) — позволил решить алгебраическими средствами ряд геометрических задач, относящихся к расстояниям, углам и площадям. Нам предстоит теперь значительно расширить сферу действия координатного метода. Это удастся благодаря тому, что мы научимся выражать с помощью чисел и числовых соотношений не только простейшие геометрические объекты, какими являются точка и направление, но также более сложные — именно всевозможные линии (прямые и кривые). Чтобы лучше понять, как это происходит, вспомним, что мы уже проделывали в отдельных случаях переход от алгебраической формулы к линии, и именно тогда, когда строили *графики* простейших функций, вроде $y=2x$, $y=3x-4$ (графики — прямые линии), $y=x^2$ (график — парабола) и т. п. Но построение графиков есть „приложение геометрии к алгебре", а нас теперь интересует обратная задача — изучение линий посредством уравнений. Для установления взаимной связи между линиями и уравнениями понадобится возобновить в памяти и уточнить понятие о *геометрическом месте точек*, обладающих тем или иным свойством.

Начнем с хорошо известных примеров [1]).

1. Геометрическое место точек, равноотстоящих от двух данных точек (A и B), есть ось симметрии этих точек, т. е. прямая, перпендикулярная к отрезку AB и проходящая через его середину.

2. Геометрическое место точек, равноотстоящих от сторон данного угла, есть биссектриса этого угла.

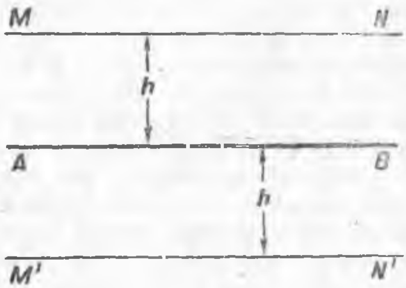
3. Геометрическое место точек, находящихся на данном расстоянии R от данной точки O, есть окружность (с центром O и радиусом R).

Какое же содержание вкладывается, например, в последнюю из перечисленных формулировок? Во-первых, то, что все точки нашей окружности объединены общим свойством — находятся на расстоянии R от точки O. Но ведь то же самое можно было бы повторить, если бы вместо окружности мы взяли какую-нибудь ее часть, например полуокружность, и, однако, было бы неправильно рассматривать полуокружность как геометрическое место точек, находящихся на расстоянии R от O. Здесь выступает вторая сторона понятия „геометрическое место": последнее должно быть *исчерпывающим*, т. е. охватывающим *все без исключения точки*, которые данным свойством обладают. С этой точки зрения, в первом из наших примеров „прямая, перпендикулярная к отрезку

[1]) Все время речь будет итти только о геометрических местах *на плоскости*.

AB, и т. д". должна быть понимаема непременно как *бесконечная*, т. е. неограниченно продолженная в обе стороны прямая; во втором примере *под биссектрисой* следует понимать *бесконечный* луч, неограниченно продолженный в одну сторону.

Уяснив это, мы сумеем правильно ответить на такой, например, вопрос: каково геометрическое место точек, находящихся на данном расстоянии h от данной прямой AB? Мы впали бы в ошибку, если бы сказали, что таким геометрическим местом будет только прямая MN (черт. 40), параллельная AB и отстоящая от нее на расстоянии h. Действительно, ведь и по другую сторону от AB найдутся точки, расстояния которых от этой прямой равны h, так что одной прямой MN такие точки не исчерпываются. Правильный ответ: геометрическое место точек, находящихся на расстоянии h от прямой AB, есть *совокупность двух прямых*, параллельных AB и лежащих по разные стороны от нее, на расстоянии h каждая. Пример этот поучителен в следующем отношении: из него видно, что геометрическое место точек не всегда выражается одной сплошной линией. Именно потому, что мы требуем от геометрического места исчерпывающего охвата всех точек, обладающих данным свойством, надо быть готовым к тому, что в качестве решения задачи появится фигура, состоящая не из одной, а из нескольких линий.



Черт. 40

Можно, если угодно, дать этой фигуре одно название, как это, например, будет сделано в дальнейшем по отношению к геометрическому месту, называемому „гиперболой" и состоящему из двух отдельных кривых.

Дадим теперь точное определение: *геометрическим местом точек, обладающих данным свойством, называется фигура* (состоящая из одной или нескольких линий), *все точки которой этим свойством и обладают, но вне которой уже нет точек, обладающих тем же свойством.* Сообразно с этим доказательство того, что данная фигура есть геометрическое место точек, обладающих данным свойством, может быть всегда разбито на две части: 1) доказывается, что произвольно взятая точка нашей фигуры рассматриваемым свойством обладает; 2) доказывается что никакая точка вне фигуры этим свойством не обладает.

Заметим еще, что задача о разыскании геометрического места всегда может быть сформулирована так: по какой линии (или по каким линиям) должна двигаться точка для того, чтобы за ней во всех положениях сохранялось данное свойство?

Задача.

102. Каково геометрическое место точек, равноотстоящих от двух пересекающихся (бесконечных) прямых?

103. Какую линию должна описывать точка M для того, чтобы данный отрезок AB был все время виден из M под данным углом?

§ 17. График уравнения; уравнение линии. Уточним теперь понятие о графике функции. Вспомним, как строится график функции, выражаемой, например, уравнением:

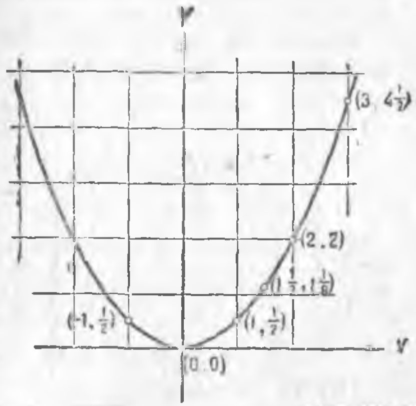
$$y=\frac{1}{2}x^2. \tag{24}$$

Дают независимому переменному x произвольные значения, например — -1, 0, 1, $1\frac{1}{2}$, 2, 3..., и каждый раз вычисляют по формуле (24) соответствующее значение зависимого переменного y. Результаты вычислений можно записать в виде таблицы совместного изменения переменных x и y:

x	...	-1	0	1	$1\frac{1}{2}$	2	3	...
y	...	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{8}$	2	$4\frac{1}{2}$	...

(25)

Каждую пару соответствующих значений x и y рассматривают как координаты точки, для которой значение x служит абсциссой, а значение y — ординатой. Нанося на чертеж 41 эти точки [у нас — точки $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$, $(0,0)$, $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ и т. д.], получают сначала *приближенное* представление о ходе графика на некотором его участке. Полный и точный график надо представить себе как линию (в данном случае это будет парабола), состоящую из *всех* без исключения точек, какие только может дать таблица (25). То общее свойство, которым объединяются все точки нашего графика (параболы), состоит в следующем: координаты любой точки, лежащей на параболе, удовлетворяют уравнению (24), если в него подставить абсциссу точки вместо x и ординату вместо y.



Черт. 41.

Сопоставляя этот пример с другими аналогичными и обобщая, установим следующее определение: *графиком уравнения, связывающего две переменных x и y, называется геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению*, если вместо x подставлять абсциссу, а вместо y ординату точки. При этом, говоря об уравнении, связывающем x и y, мы не должны обязательно предполагать его решенным относительно y, как это имеет место в случае уравнения (24). Любое уравнение с двумя переменными, например:

$$x^2+4y^2=36, \tag{26}$$

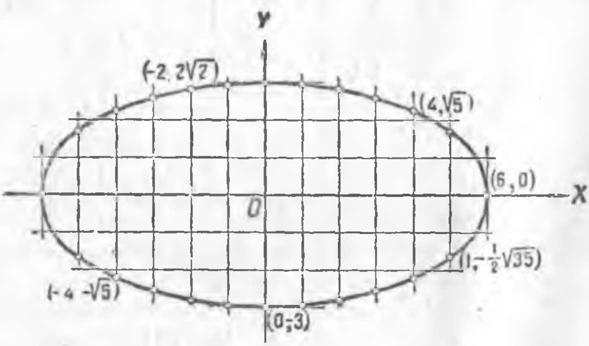
является *неопределенным* в том смысле, что оно допускает бесчисленное множество решений. Конечно, уравнение (26) может быть решено относительно x или y, т. е. заменено одной из формул:

$$x=\pm 2\sqrt{9-y^2}, \quad y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{36-x^2}, \tag{27}$$

но не всегда мы сумеем и не всегда пожелаем такой переход выполнить. Существенным здесь является только то, что мы можем одному из переменных x, y (безразлично, какому) давать произвольные значения и каждый раз вычислять соответствующие значения второго переменного (например при $y=1$ уравнение (26) дает $x=\pm 4\sqrt{2}$ и т. п.). Впрочем, относительно *произвольного выбора* значений для одного из переменных здесь и в ряде других случаев необходимо сделать оговорку. Если бы, например, в уравнении (26) мы положили $y=10$, то для x получилось бы *мнимое* значение (квадратный корень из отрицательного числа). Однако легко видеть [с особенной ясностью из формулы (27)], что, меняя x — и теперь уже действительно произвольным образом — в пределах от -6 до $+6$, мы будем получать для y вещественные значения; точно так же, меняя y в пределах от -3 до $+3$, будем получать вещественные значения для x. Во всяком случае, мы можем и здесь составить такую, например, таблицу:

x	0	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5	± 6
y	± 3	$\pm\frac{1}{2}\sqrt{35}$	$\pm 2\sqrt{2}$	$\pm\frac{3}{2}\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\pm\frac{1}{2}\sqrt{11}$	0

Нанеся на чертеж точки, содержащиеся в этой таблице, получим приближенное представление о графике (черт. 42). Полный и точный график — геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению (26), — представляет собою замкнутую овальную кривую, так называемый *эллипс*, с которым нам еще предстоит познакомиться ближе.



Черт. 42.

Пойдем теперь в обратном направлении. Если по отношению к некоторой системе координат задана линия — прямая или кривая, — то всегда можно найти такое уравнение, для которого эта линия служит графиком. Это уравнение называется „уравнением данной линии“, о нем говорят также, что оно „выражает линию“ или „принадлежит линии“. Например, парабола (черт. 41) выражается уравнением $y=\frac{1}{2}x^2$; в дальнейшем мы встретим много других примеров. Итак, *уравнением данной линии называется такое уравнение, связывающее x и y, для которого эта линия служит графиком.* Другими словами, уравнение линии должно удовлетворяться координатами *любой* точки, лежащей на этой линии, и не должно удовлетворяться координатами никаких других точек. Или иначе: уравнение линии должно выражать такую связь между координатами (x и y) точки, которая сохраняется, как бы ни перемещалась точка вдоль этой линии, и которая нарушается всякий раз, как точка сходит с линии. Когда хотят подчеркнуть, что точка M рассматривается как движущаяся вдоль некоторой линии, то координаты этой точки называют „текущими", в противоположность координатам неподвижных точек. Уравнение линии выражает связь, постоянно существующую между текущими координатами точки, которая описывает эту линию. Различие между текущими и постоянными координатами стараются отразить и в обозначениях: при выводе уравнения какой-либо линии текущие координаты обыкновенно обозначают через x и y *без индексов*, между тем как для неподвижных точек пользуются теми же буквами с индексами внизу (например x_1, y_1) или другими буквами (например h, k).

Аналитическая геометрия имеет дело с задачами двоякого рода.

1. *Дано уравнение линии — изучить ее* (геометрические) *свойства.* Это могут быть свойства линии, взятой сама по себе; или же взаимоотношения с другими линиями, в частности — с осями координат. Во всяком случае, можно не сомневаться, что все особенности нашей линии, вплоть до мельчайших деталей, находят себе отражение в ее уравнении.

2. *Линия определена своими* (геометрическими) *свойствами — найти ее уравнение.* При этом в одних случаях заранее предписывается определенная система координат, в других — выбор этой системы предоставляется нам.

Остальная часть этой главы посвящена преимущественно решению задач в т о р о г о рода: по мере того как возрастает запас уравнений, принадлежащих знакомым нам линиям, появляется все более широкая возможность решать задачи п е р в о г о рода и, раньше всего, определять тип линии (будет ли это прямая, окружность и т. п.) по ее уравнению.

Прежде чем заняться решением отдельных задач, полезно наметить себе общий план такого решения, естественным образом вытекающий из самой постановки задачи: найти (составить) уравнение данной линии (данного геометрического места).

1. *Выбираем определенную систему координат*, если только она не дана уже в условии задачи. Само собою разумеется, что пока нет системы координат, не может быть речи о составлении уравнения. От удачного выбора осей (масштаб обычно не играет роли) немало зависит успех в решении задачи.

2. *Берем на данной линии произвольную точку и обозначаем ее координаты (текущие) через x и y.* Важно подчеркнуть, что точка на линии должна быть взята *совершенно произвольным образом* (например не годится для наших целей точка пересечения линии с одной из осей координат), так, чтобы последующее рассуждение можно было повторить относительно любой другой точки той же линии.

3. *Исходя из чертежа*[1]), *стараемся связать x и y с величинами, данными в условии задачи, уравнением*, которое и является целью наших усилий. Это — наиболее трудная и ответственная часть решения. Средствами служат теоремы элементарной геометрии (например пропорции, вытекающие из подобия треугольников, теорема Пифагора) и

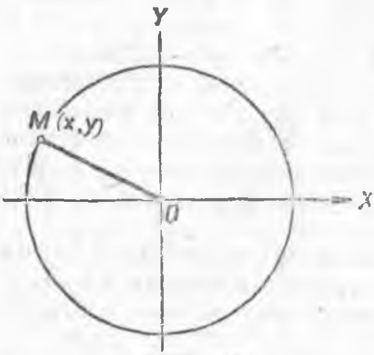
---

[1]) Который в этой стадии работы не должен быть обязательно точным. Мы можем даже не иметь сначала ясного представления о ходе линии.

известные уже формулы аналитической геометрии (формулы для расстояний, углов и т. п.).

4. *Полученное уравнение по возможности упрощаем* (освобождаем от дробей, радикалов и т. п.).

5. *Проверяем, не будет ли уравнение в его окончательном виде удовлетворяться координатами каких-нибудь посторонних* (т. е. не принадлежащих нашей линии или нашему геометрическому месту) *точек*. Эту часть решения мы будем в дальнейшем часто опускать: в простейших случаях достаточно бывает внимательно просмотреть вывод уравнения для того, чтобы убедиться в отсутствии посторонних решений.



Черт. 43.

Задачи.

104. Возобновить в памяти графики функций:

1) $y = kx$, 2) $y = \frac{k}{x}$,

3) $y = ax^2$, 4) $y = 2x$.

105. Найти график уравнения $x^2 + y^2 = 100$.

§ 18. Уравнение окружности.

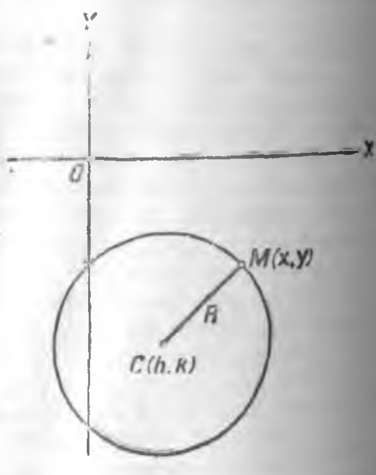
Задача 1. *Написать уравнение окружности, центр которой лежит в начале координат, а радиус равен R.*

Решение. Берем на окружности (черт. 43) произвольную точку M и обозначаем ее координаты (текущие) через x и y. Основное свойство окружности как геометрического места состоит в том, что при всех положениях точки M

$$OM = R.$$

Стоит только записать это соотношение в координатах, замечая, что $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$, и мы получим требуемое уравнение:

$$\boxed{x^2 + y^2 = R^2.} \qquad (28)$$



Черт. 44.

Остается еще выяснить, не может ли уравнение удовлетворяться координатами точки, не лежащей на нашей окружности. Но если точка M займет какое-нибудь положение внутри или вне окружности, то в первом случае будет $OM < R$, т. е. $x^2 + y^2 < R^2$, во втором $OM > R$, т. е. $x^2 + y^2 > R^2$, так что уравнение (28) не будет удовлетворено.

Задача 2. *Написать уравнение окружности, центр которой лежит в точке C (h, k), а радиус равен R.* Числовой пример: $C\ (2, -5)$, $R = 3$.

1-е решение. Если $M\ (x,\ y)$ — произвольная точка окружности (черт. 44), то $CM = R$. Чтобы перейти к координатам, воспользуемся формулой для расстояния между двумя точками: $CM^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$, так что в нашем случае

$$\boxed{(x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2.} \tag{29}$$

Это и есть искомое уравнение. Само собой понятно, что уравнение (28) получается отсюда как частный случай, при $h = k = 0$. В числовом примере уравнение окружности имеет вид:

$$(x-2)^2 + (y+5)^2 = 9,$$

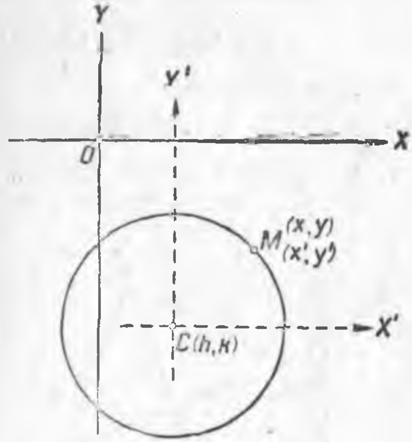
или, после упрощений,

$$x^2 + y^2 - 4x + 10y + 20 = 0.$$

2-е решение. Так как мы уже умеем писать уравнение окружности для случая, когда центр ее совпадает с началом, то сделаем преобразование координат, перенеся начало в точку C (черт. 45). В новых координатах (x', y') уравнение окружности будет иметь вид:

$$x'^2 + y'^2 = R^2.$$

Чтобы вернуться к прежним координатам x, y, достаточно воспользоваться формулами (16) § 13 (стр. 27), а это снова приведет нас к уравнению (29).



Черт. 45.

Задачи.

106. Написать уравнение окружности с центром C (1, 3) и радиусом $R = 4$. Из уравнения найти точки пересечения окружности с осями координат. Сделать с помощью циркуля аккуратный чертеж и сверить с ним результаты вычисления.

107. Написать уравнения окружностей по данным их центрам и радиусам.

1) $C(-4, 2)$, $R = 3$; 2) $C(-3, -5)$, $R = 7$;

3) $C(4, 0)$, $R = 5$; 4) $C\left(\frac{3}{2}, -2\right)$, $R = \frac{5}{2}$.

108. Написать уравнение окружности, зная, что радиус ее равен 4 и что окружность касается отрицательной полуоси X-ов и положительной полуоси Y-ов.

109. Показать, что уравнение $x^2 + y^2 + Mx + P = 0$ принадлежит окружности с центром $C\left(-\frac{M}{2}, 0\right)$ и радиусом $R = \sqrt{\frac{M^2}{4} - P}$.

§ 19. Ось симметрии двух точек и ее уравнение. Задача. *Даны две точки $M(a, b)$ и $N(a_1, b_1)$. Выразить уравнением ось симметрии этих точек.* Числовой пример: $M(1, 4)$, $N(7, 2)$.

Решение. Начнем с числового примера (черт. 46). Возьмем на оси симметрии произвольную точку $P(x, y)$ и запишем то свойство, которым эта ось характеризуется:

$$MP = NP.$$

Переходя к координатам, мы предпочтем (чтобы не иметь дела с радикалами) заменить последнее равенство таким: $MP^2 = NP^2$ [1]), которое дает

$$(x-1)^2 + (y-4)^2 = (x-7)^2 + (y-2)^2.$$

Это и есть искомое уравнение; оно только на первый взгляд кажется уравнением второй степени, на самом же деле после очевидных упрощений принимает вид:

$$3x - y - 9 = 0.$$

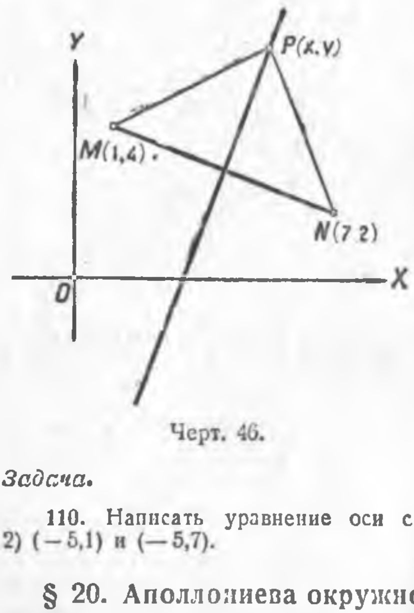
В общем случае получаем для оси симметрии сначала уравнение:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2,$$

а после упрощений:

$$2(a_1 - a)x + 2(b_1 - b)y + (a^2 + b^2 - a_1^2 - b_1^2) = 0, \qquad (30)$$

т. е. уравнение первой степени. Последнее обстоятельство не является случайным. Дело в том, что **всякая прямая может быть выражена уравнением первой степени**, и мы уже сейчас в состоянии это доказать. Действительно, любую прямую можно рассматривать (и даже — бесчисленным множеством способов) как ось симметрии двух точек. Для этого достаточно: 1) вне прямой взять какую-нибудь точку M и 2) построить точку N — зеркальное отражение точки M от нашей прямой (опустить из M перпендикуляр на прямую и продолжать его на расстояние, равное длине этого перпендикуляра). Тогда прямая окажется осью симметрии для точек M, N и, следовательно, выразится уравнением первой степени типа (30).



Черт. 46.

Задача.

110. Написать уравнение оси симметрии точек: 1) $(4, -2)$ и $(-3, -4)$; 2) $(-5, 1)$ и $(-5, 7)$.

§ 20. Аполлониева окружность. Задачу, решенную в предыдущем пункте, можно было формулировать так: выразить уравнением геометрическое место точек, равноотстоящих от двух данных точек. При этом нам было заранее известно (хотя и не понадобилось для решения задачи), что этим геометрическим местом является прямая линия. Однако во многих задачах, относящихся к геометрическим местам, форма линии, которая представляет исследуемое геометрическое место, сначала

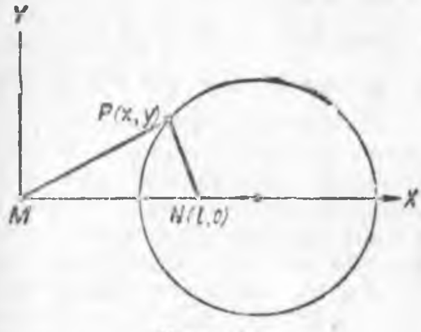
[1]) Заметим, что при положительных значениях чисел m и n равенства $m = n$ и $m^2 = n^2$ равносильны, т. е. не только из первого вытекает второе, но и из второго вытекает первое. Действительно, из $m^2 = n^2$ вытекает либо $m = n$, либо $m = -n$; вторая возможность отпадает, если (как в разбираемом нами случае) оба числа m и n положительны.

неизвестна. Это, однако, не является препятствием к тому, чтобы составить уравнение искомой линии; и тогда можно рассчитывать на то, что структура уравнения раскроет перед нами геометрическую природу линии. Пример этого рода мы сейчас приведем. Именно, поставим перед собой задачу более общую, чем только что рассмотренная: каково *геометрическое место точек, для которых расстояния от двух данных точек находятся в данном отношении* (в частности, если это отношение равно 1, т. е. если расстояния одинаковы, то возвращаемся к прежней задаче)?

Задача. *Даны две точки M и N, расстояние между которыми равно l. Найти геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние от M относится к расстоянию от N, как $m:n$.*

Числовой пример: $l=6$, $m:n=2:1$. Иначе: по какой линии должна двигаться точка P для того, чтобы во все время движения сохранялось равенство

$$\frac{MP}{NP}=\frac{m}{n}.$$



Черт. 47.

Решение. Особенностью задачи является то, что система координат нам не дана, мы сами должны ее выбрать, если только хотим пользоваться средствами аналитической геометрии. Естественно за начало координат принять одну из данных точек, например M (черт. 46); за ось X-ов — прямую MN, считая направление от M к N за положительное. В этой системе точка N будет иметь координаты $(l,0)$. Вывод уравнения проведем сначала на числовом примере.

Итак, по какой линии должна двигаться точка P, чтобы расстояние MP было все время вдвое больше, чем расстояние PN, т. е. $MP=2PN$?

Обозначая координаты точки P через (x,y), имеем:

$$MP^2=x^2+y^2$$

и (вспомним, что теперь $l=6$)

$$PN^2=(x-6)^2+y^2;$$

равенство $MP^2=4\,PN^2$ переходит в уравнение искомой линии:

$$x^2+y^2=4\,[(x-6)^2+y^2],$$

а после упрощений

$$x^2+y^2-16\,x+48=0. \tag{31}$$

Теперь, когда уравнение геометрического места получено, можем ли мы ответить на вопрос, что это за линия? Нетрудно заметить, что уравнение (31) принадлежит к типу тех, какие получались для окружностей в § 18. Точнее, уравнение (31) может быть приведено к виду (29) последовательными преобразованиями:

$$(x^2-16\,x)+y^2=-48;$$
$$(x^2-16\,x+64)+y^2=-48+64;$$
$$(x-8)^2+(y-0)^2=16,$$

Впрочем, решение задачи 109 дает прямой ответ на вопрос: в нашем числовом примере *искомое геометрическое место есть окружность с центром* (8,0) *и радиусом 4.*

Обращаясь к общему случаю, получим уравнение:

$$\frac{x^2+y^2}{(x-l)^2+y^2}=\frac{m^2}{n^2},$$

которое после упрощений примет вид:

$$(m^2-n^2)\,x^2+(m^2-n^2)y^2-2l\,m^2\,x+l^2\,m^2=0$$

или

$$x^2+y^2-\frac{2lm^2}{m^2-n^2}\,x+\frac{l^2m^2}{m^2-n^2}=0;$$

снова заключаем (см. задачу 109), что это уравнение принадлежит *окружности* с центром $\left(\frac{lm^2}{m^2-n^2},\ 0\right)$ (откуда видно, что центр лежит на прямой MN) и радиусом $\frac{lmn}{|m^2-n^2|}$.

Полученный нами результат может быть установлен и средствами элементарной геометрии, но путем более сложных и искусственных рассуждений. Что интересующее нас геометрическое место представляет собою окружность, было известно уже геометрам Древней Греции, во всяком случае — Аполлонию, жившему в III — II вв. до нашей эры (отсюда название — „аполлониева окружность“).

Для нас решенная только что задача представляет интерес как образец геометрического исследования, проведенного координатным методом. Анализируя решение, можно заметить, что задача была расчленена на две, характерные для аналитической геометрии (см. § 17): сначала по описанию геометрического места было составлено его уравнение; затем по виду уравнения был установлен тип искомой линии (окружность).

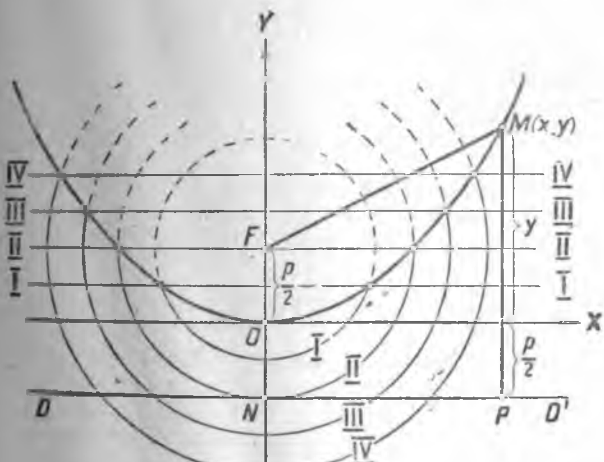
Задачи.

111. Даны точки $A\,(2,0)$ и $B\,(9,0)$; написать уравнение окружности, для каждой точки K которой $AK:KB=2:3$. По уравнению окружности найти точку пересечения ее с отрезком AK и для проверки ту же точку найти по формуле (7) § 5.

112. Даны точки $M(-1,2)$ и $N\,(3,-6)$. Найти геометрическое место точек P, для которых $MP:NP=5:3$.

§ 21. Парабола. Задача. *Дана прямая DD' и вне ее точка F. Определить геометрическое место точек, находящихся на одинаковом расстоянии от точки F и от прямой DD'.* Само собою разумеется, что для какой-нибудь точки M первое расстояние будет измеряться длиной прямолинейного отрезка FM, а второе — длиной перпендикуляра MP, опущенного из M на прямую DD' (черт. 48). Другая формулировка вопроса: по какой линии должна двигаться точка M, чтобы ее расстояния от точки F и от прямой DD' все время оставались равными между собою?

Прежде чем приступить к систематическому решению задачи, попытаемся отдать себе отчет в том, как геометрически могут быть построены точки, обладающие требуемым свойством. Одна из таких точек сразу бросается в глаза — это середина O перпендикуляра FN, опущенного из F на прямую DD'. Дальнейшие точки могут быть получены следующим построением: 1) Из точки F как из центра опишем окружность (на чертеже окружность I) радиусом, несколько большим, чем FO; к прямой DD' проведем параллель (на чертеже — прямая I), отстоящую от этой прямой на расстоянии, равном радиусу только что описанной окружности (и лежащую по ту же сторону от DD', что и точка F). 2) Каждая из двух точек пересечения окружности с параллелью, очевидно, находится на одинаковых расстояниях от точки F и от прямой DD', следовательно принадлежит нашему геометрическому месту. Если теперь станем увеличивать радиус окружности и всякий раз отодвигать параллель на отрезок, равный увеличению радиуса, то сможем получить еще сколько угодно пар точек, принадлежащих тому же геометрическому месту (на чертеже соответствующие друг другу окружности и параллели обозначены одинаковыми римскими цифрами). 3) Соединяя построенные точки плавной линией, получим приближенное представление об исследуемом геометрическом месте.



Черт. 48.

Уже из хода построения становятся очевидными некоторые свойства этой линии: 1) она состоит из точек, попарно симметричных относительно оси OF (продолженной за точку F); 2) она имеет точки, сколь угодно далекие, так как ничто не мешает нам неограниченно увеличивать радиус окружности, которая всякий раз будет пересекаться с соответствующей параллелью (ведь расстояние последней от прямой DD' будет *равно* радиусу окружности, значит расстояние этой параллели от центра F будет *меньше* радиуса).

Обратимся теперь к более полному решению задачи и прежде всего постараемся составить уравнение интересующего нас геометрического места. Здесь, как и в предыдущем § 20, выбор системы координат зависит от нас. Осуществим его так, что за начало примем O (т. е. середину перпендикуляра FN, опущенного из F на DD' — чертеж 48);

4 П. С. Дубнов.

ось X-ов направим параллельно прямой DD', а ось Y-ов перпендикулярно к ней (положительное направление — от O к F). Если расстояние точки F от прямой DD' — которое, разумеется, надо считать известным — обозначим через p, то в нашей системе координат: 1) точка F будет иметь координаты $\left(0, \frac{p}{2}\right)$, 2) прямая DD' будет проходить ниже оси OX, на расстоянии $\frac{p}{2}$ от нее.

Возьмем теперь *произвольную* точку $M(x, y)$ нашего геометрического места; проведем отрезки $MP \perp DD'$ и MF. Желая записать в координатах равенство $MF = MP$, которым характеризуется это геометрическое место, или лучше — равенство $MF^2 = MP^2$, заметим, что по формуле расстояния между двумя точками

$$MF^2 = x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2,$$

а из чертежа [1])

$$MP = y + \frac{p}{2}.$$

Получаем уравнение:

$$x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(y + \frac{p}{2}\right)^2,$$

а после упрощений:

$$\boxed{x^2 = 2py.} \tag{32}$$

Отсюда видим, что при движении точки M по нашей линии ордината этой точки изменяется пропорционально квадрату ее абсциссы, как это станет особенно ясным, если придадим уравнению вид:

$$y = \frac{1}{2p} x^2. \tag{33}$$

С функциональной зависимостью этого рода мы уже встречались (в курсе алгебры) и график ее называли **параболой**. Итак, искомое геометрическое место есть парабола. Обратно — график всякого уравнения вида $y = ax^2$ можно рассматривать как геометрическое место точек, равноотстоящих от некоторой точки F и некоторой прямой DD'. Действительно, если a — положительное число, например $a = \frac{3}{8}$, то достаточно взять точку F на таком расстоянии p от DD', чтобы [см. уравнение (33)] $\frac{1}{2p} = \frac{3}{8}$, т. е. $p = \frac{4}{3}$; геометрическое место точек, равноотстоящих от точки $\left(0, \frac{4}{3}\right)$ и от прямой, проведенной ниже оси OX на расстоянии $\frac{4}{3}$ от нее, выразится как раз уравнением $y = \frac{3}{8} x^2$.

Если a — отрицательное число, то следует только взять точку F ниже начала координат, а прямую DD' — на таком же расстоянии выше его.

Итак, для нашей кривой могут быть даны два равносильных между собою определения:

---

[1]) Легко убедиться, что все точки, равноотстоящие от F и от DD', должны лежать выше прямой OX, так что y не может быть отрицательным.

1) параболой называется кривая, которая (при особом выборе системы координат) выражается уравнением $y=ax^2$;

2) параболой называется геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки (F) и данной прямой (DD').

Точка F, участвующая в последнем определении, называется *фокусом*[1]) параболы, а прямая DD' — ее *директрисой* („направляющей").

Какие же выводы дает нам уравнение параболы в деле изучения геометрических свойств последней? Рассмотрим в качестве примеров простейшие следствия, вытекающие из уравнения (32).

1. Решая это уравнение относительно x, находим:

$$x=\pm\sqrt{2py},$$

т. е. каждому (положительному) значению y соответствуют два равнопротивоположных значения x. А так как две точки, имеющие общую ординату и равнопротивоположные абсциссы, симметрично расположены относительно оси Y-ов, то последнее равенство геометрически означает, что парабола симметрична относительно OY, т. е. относительно прямой, проведенной через фокус перпендикулярно к директрисе.

2. Из уравнения (32) видно, что при неограниченном возрастании абсциссы ордината также будет неограниченно возрастать. Это означает, что кривая простирается в бесконечность, причем точка M может так перемещаться вдоль кривой, чтобы расстояния ее от оси X-ов и от оси Y-ов неограниченно возрастали.

Правда, оба эти свойства были замечены уже при геометрическом построении точек кривой (см. выше), но теперь мы „вычитали" их из уравнения. Последнее ценно как раз тем, что позволяет, не прибегая к чертежу, вскрывать свойства линии, вплоть до наиболее глубоко заложенных (вроде свойства параболы, приведенного в подстрочном примечании).

Задачи.

113. Написать уравнение параболы, у которой расстояние фокуса от директрисы равно 2,7. Оси координат выбрать так, как это было сделано при выводе уравнения (32).

114. Показать, что уравнением $3x^2=8y$ определяется парабола, и найти координаты ее фокуса.

115. Составить уравнение параболы, фокус которой находится в точке (2, 6), а директриса проходит параллельно оси OX на расстоянии: 1) 3 единицы ниже, 2) 2 единицы выше, 3) 8 единиц выше этой оси.

116. Составить уравнение параболы, фокус которой находится в точке (4, —1), а директриса параллельна оси Y-ов и находится слева от нее на расстоянии 3 единиц.

§ 22. Эллипс. Когда садовник хочет очертить на земле клумбу правильной, „эллиптической", формы, он вбивает в землю два колышка (черт. 49), привязывает к ним концы веревки и, натягивая веревку острием палки, вычерчивает на земле в два приема (сначала по одну

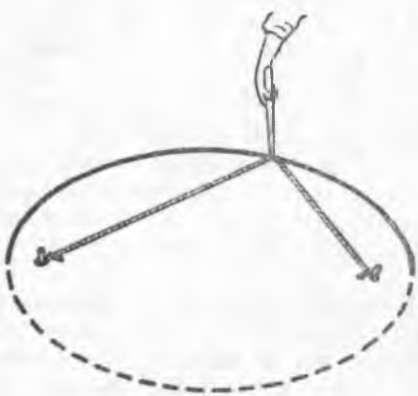
---

[1]) Слово „фокус" означает по-латыни „очаг" (место, где сосредоточивается свет и тепло) и перешло в геометрию из физики. Наименование точки F фокусом связано с следующим оптическим свойством параболы, которое мы приводим без доказательства: лучи, падающие на параболическое зеркало параллельно его оси симметрии, после отражения собираются в фокусе (той параболы, вращением которой образована поверхность зеркала).

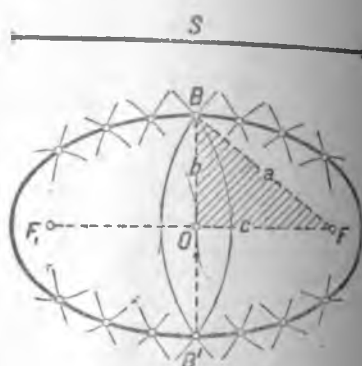
4*

сторону от колышков, потом по другую) замкнутую кривую овальной формы. К тому же способу прибегает чертежник, заменяя колышки кнопками или булавками, а веревку — нитью. Получаемая при этом кривая называется *эллипсом* и, очевидно, характеризуется тем свойством, что *для точки, движущейся по эллипсу, сумма ее расстояний от двух неподвижных точек остается постоянной* (в нашем примере эта сумма равна длине веревки); упомянутые только что неподвижные точки называются *фокусами*[1]) эллипса. Иначе: *эллипс есть геометрическое место точек, для которых сумма расстояний от двух данных точек есть величина постоянная.*

Для вычерчивания (приближенного) нашей кривой, кроме только-что описанного способа, можно пользоваться еще *построением по точкам.*



Черт. 49.



Черт. 50.

Пусть заданы фокусы F и F_1, а также отрезок S, показывающий ту самую сумму расстояний, которая должна быть одной и той же для всех точек эллипса (очевидно, надо потребовать, чтобы $S > FF_1$, так как сумма двух сторон треугольника должна быть больше третьей). Всякий раз, как нам удается построить треугольник с основанием FF_1 и боковыми сторонами, составляющими в сумме отрезок S, — вершина этого треугольника даст одну из точек эллипса. Такие треугольники легко строить и притом бесчисленным множеством способов; стоит только разбить отрезок S произвольным образом на две части и на отрезке FF_1 как на основании построить треугольник с боковыми сторонами, равными этим частям. Построение можно вести в таком порядке. Сначала строим те две точки B и B' (черт. 50) эллипса, которые находятся на одинаковом расстоянии от обоих фокусов: с этой целью описываем из точек F и F_1 окружности радиусом $\frac{S}{2}$. Если теперь радиус одной из этих окружностей несколько уменьшить, а радиус другой на столько же увеличить (так что сумма обоих радиусов останется попрежнему равной S), то в пересечении получим еще

[1]) Название это того же происхождения, что и в случае параболы (см. предыдущее подстрочное примечание): если поместить светящуюся точку в одном из фокусов эллиптического зеркала, то изображение ее получится в другом фокусе.

две точки эллипса, симметрично расположенные относительно линии FF_1. Повторяя этот прием несколько раз, получим ряд точек эллипса, которые затем останется соединить плавной кривой.

Займемся теперь выводом уравнения этой кривой, что даст возможность вскрыть дальнейшие ее свойства. Введем особые названия и обозначения для некоторых отрезков, связанных с эллипсом:

1) половину расстояния между фокусами будем называть **линейным эксцентриситетом** [1]) эллипса и обозначать буквой c:

$$c = OF = OF_1 = \frac{FF_1}{2};$$

2) расстояние точки B (или B') от фокуса (F или F_1) будем называть большой полуосью эллипса (смысл названия выяснится дальше) и обозначать буквой a:

$$a = BF = BF_1 = \frac{S}{2};$$

3) расстояние точки B от O будем называть *малой полуосью* эллипса и обозначать буквой b. Из треугольника OBF (черт. 50) находим:

$$c < a; \tag{34}$$

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2.} \tag{35}$$

Заданием величин a и c форма и размеры эллипса, конечно, вполне определяются; равенство (35) обнаруживает, что вместо a и c достаточно знать a и b или b и c.

Приступая к выводу уравнения эллипса, мы будем предполагать две из величин a, b, c (а значит и все три) известными; при этом расстояние FF_1 между фокусами будет $2c$, а сумма расстояний любой точки эллипса от фокусов будет $2a$ (так как $a = \frac{S}{2}$).

За начало координат примем середину O (черт. 51) отрезка FF_1, заключенного между фокусами; луч OF примем за положительную полуось X-ов. То обстоятельство, что точка M (x, y) лежит на эллипсе, можно выразить равенством:

$$FM + F_1M = 2a \tag{36}$$

Для того чтобы перейти к координатам, достаточно заметить, что F имеет в нашей системе координаты $(c, 0)$, а F_1 — координаты $(-c, 0)$, так что

$$FM = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Подстановка этих выражений в равенство (36) и дает уравнение эллипса:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a. \tag{37}$$

---

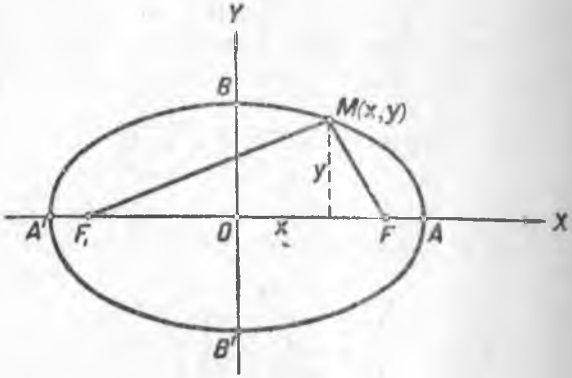
[1]) Слово „эксцентриситет" означает „отклонение от центра". В данном случае речь идет об отклонении фокуса от середины O отрезка FF_1, которая, как увидим дальше, является центром симметрии эллипса.

Постараемся упростить это уравнение и прежде всего освободить его от радикалов; уединяем один из радикалов:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2+y^2},$$

возводим обе части равенства в квадрат, снова уединяем оставшийся радикал и после легких преобразований (в рациональной части уравнения раскрываем скобки, делаем приведение подобных членов и затем сокращаем на 4) находим:

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2} = a^2 + cx.$$



Черт. 51.

Чтобы довести до конца освобождение от радикалов, возводим обе части в квадрат; затем переносим переменные члены в одну сторону, постоянные — в другую:

$$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2,$$
$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Но в силу (35) $a^2 - c^2 = b^2$, следовательно уравнению можно придать вид:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

или, что удобнее для запоминания (делим обе части равенства на a^2b^2):

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.}\ [1] \qquad (38)$$

Посмотрим теперь, какие выводы относительно эллипса можно сделать, исходя из его уравнения (38).

---

[1]) То обстоятельство, что для освобождения от радикалов нам приходилось дважды возводить уравнение в квадрат, должно вселить в нас сомнение, — является ли окончательное уравнение (38) равносильным первоначальному (37), т. е. не удовлетворяются ли уравнение (38) какими-нибудь значениями x и y сверх тех, которые удовлетворяли уравнению (37). Для того чтобы убедиться в равносильности уравнений (37) и (38), нужны некоторые дополнительные рассуждения, которых мы, однако, приводить не будем.

1. Спросим себя, в каких точках пересекается эллипс с осями координат. Для того чтобы найти точки пересечения с осью X-ов, полагаем в уравнении (38) $y=0$ и находим $x=\pm a$. Таким образом, пересечение с осью OX происходит в точках $A(a, 0)$ и $A'(-a, 0)$, лежащих по обе стороны от начала O. Отрезок AA' называется *большой осью* эллипса; теперь понятно, почему величину a мы называли „большой полуосью". Из того же уравнения (38) можно найти точки пересечения эллипса с осью OY: полагая $x=0$, получаем $y=\pm b$, т. е. пересечение происходит в точках $B(0, b)$ и $B'(0, -b)$ (это мы уже знали раньше). Точки A, A', B, B' называются *вершинами* эллипса; отрезок BB' — *малой осью* эллипса.

2. Уже предварительное знакомство с эллипсом создает у нас представление об этой кривой как о лежащей в ограниченной части плоскости (в противоположность, например, параболе, которая уходит в бесконечность). Анализом уравнения (38) это представление подтверждается: так как две положительные (точнее — не отрицательные) дроби $\frac{x^2}{a^2}$ и $\frac{y^2}{b^2}$ в сумме дают единицу, следовательно каждая из этих дробей не может быть больше 1, т. е.

$$\frac{x^2}{a^2}\leqslant 1, \quad \frac{y^2}{b^2}\leqslant 1,$$

или

$$x^2\leqslant a^2, \quad y^2\leqslant b^2.$$

Таким образом, для любой точки эллипса x по абсолютной величине не превосходит a, а y по абсолютной величине не превосходит b, что можно записать неравенствами:

$$|x|\leqslant a, \quad |y|\leqslant b$$

или

$$-a\leqslant x\leqslant a, \quad -b\leqslant y\leqslant b.$$

Мы уже видели, что крайние из допустимых для x и y значений достигаются в вершинах эллипса; поэтому вся кривая заключена внутри прямоугольника (можно сказать также — вписана в прямоугольник), две стороны которого проходят через вершины A и A' параллельно малой оси, а две другие стороны — через вершины B и B' параллельно большой оси (учащийся сделает чертеж).

3. Из того, что координаты x и y входят в уравнение эллипса только в квадратах, можно сделать следующий вывод. Если уравнение вида (38) удовлетворяется, например, при $x=2$, $y=3$ (что возможно при некоторых значениях a и b, скажем, при $a=4$ и $b=2\sqrt{3}$), то оно будет удовлетворяться также при: 1) $x=-2$, $y=3$, 2) $x=2$, $y=-3$, 3) $x=-2$, $y=-3$. Геометрически это означает, что если эллипс, выражаемый уравнением (38), проходит через точку $P(2, 3)$, то он будет проходить также через точки: 1) $P'(-2, 3)$, симметричную с P относительно оси OY, 2) $P''(2, -3)$, симметричную с P относительно оси OX, 3) $P'''(-2, -3)$, симметричную с P относительно начала координат. Достаточно повторить это рассуждение в общем виде (заменяя числа буквами) для того, чтобы притти к выводам: эллипс имеет две оси симметрии (большая и малая оси) и центр симметрии (точка их

пересечения). Что эллипс, выражаемый уравнением (38), симметрично расположен как относительно оси X-ов, так и относительно оси Y-ов, видно еще из следующих соображений. Если решить уравнение (38) один раз относительно y, другой раз — относительно x, то получится:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}; \quad x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}.$$

Первая из этих формул говорит о том, что каждому значению абсциссы x (разумеется, при условии $|x| \leqslant a$) соответствуют два равнопротивоположных значения ординаты y. Другими словами, всякая вертикальная (параллельная оси OY) прямая, пересекающая эллипс, встречает его в двух точках, симметрично расположенных относительно оси OX. Совершенно так же вторая формула убедит нас в том, что эллипс симметричен относительно оси Y-ов. Поэтому достаточно построить часть кривой, лежащей в I четверти, для того, чтобы простыми перегибаниями чертежа по осям симметрии получить остальные части.

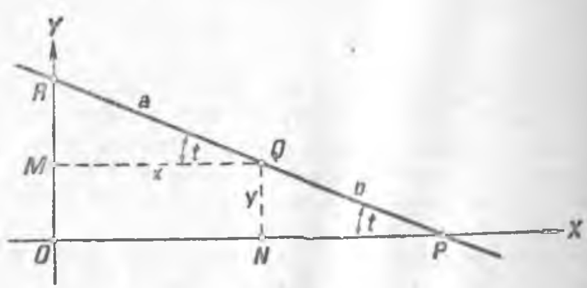
Задачи.

117. Написать уравнение эллипса, зная, что 1) большая ось его равна 12, малая ось равна 7; 2) большая ось равна 5, расстояние между фокусами равно 1; 3) малая ось равна 8, расстояние между фокусами равно 20. Оси координат взять, как на чертеже 51.

118. Найти уравнение эллипса, у которого фокусами служат точки (0, 3) и (0, — 3), а сумма расстояний любой точки кривой от фокусов равна 14.

119. Составить уравнение эллипса, у которого фокусы находятся в точках (2, 3), (8, 3), а большая ось равна 16. Решить задачу двумя способами: 1) беря на эллипсе произвольную точку $M(x,y)$ и рассуждая так же, как при выводе уравнения (38); 2) преобразованием координат (перенос начала).

120. Для эллипса предыдущей задачи найти точки пересечения с осями координат. Сделать чертеж и сверить с ним результаты вычисления.



Черт 52.

§ 23. Эллиптический циркуль. Задача. *Прямая, на которой отмечены три определенные точки P, Q, R* (черт. 52), *движется так, что точка P все время перемещается по неподвижной прямой OX, а точка R — по неподвижной прямой OY, причем $OX \perp OY$. Какую линию описывает при этом точка Q, если известно, что $RQ = a$, $QP = b$?*

Решение. Примем прямые OX, OY за оси координат и обозначим через x, y координаты точки Q. В дальнейшем мы воспользуемся приемом, который часто бывает полезен при решении подобных задач: вместо того чтобы искать непосредственную зависимость между текущими координатами x и y, введем сначала вспомогательное переменное и постараемся выразить через него обе координаты x, y; затем остается исключить из двух уравнений это вспомогательное переменное. В нашем случае удобно взять за вспомогательное переменное угол OPR, который мы обозначим через t. Действительно, опустив перпендикуляры QN, QM на оси координат и замечая, что $\angle MQR = \angle OPR = t$, мы из треугольников PNQ и QMR легко найдем:

$$x = a\cos t; \qquad y = b\sin t. \tag{39}$$

Желая исключить отсюда t, напишем:

$$\cos t = \frac{x}{a}, \qquad \sin t = \frac{y}{b}$$

и воспользуемся соотношением $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, откуда сразу получаем уравнение искомой линии:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Теперь можем ответить на вопрос задачи [ср. уравнение (38)]: точка Q описывает эллипс с полуосями a и b.

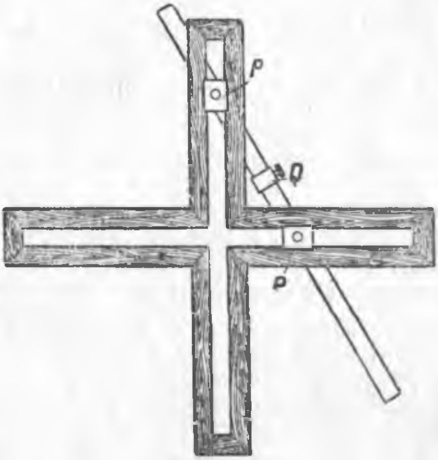
Примечание 1. Мы вели рассуждение в предположении, что точка Q лежит между P и R. Учащийся без труда проверит, что полученный результат останется в силе и тогда, когда точка Q лежит на продолжении отрезка PR в ту или другую сторону.

Примечание 2. После того как получены выражения текущих координат x и y через вспомогательное переменное (у нас t), не всегда удается исключить это переменное. Но даже в тех случаях, когда такое исключение возможно, нередко отказываются от него и считают, что линия уже определена *двумя* полученными формулами. Дело в том, что два уравнения типа (39) обычно не хуже (а иногда лучше) приспособлены для изучения линии, чем одно уравнение, связывающее x с y. Так, например, в нашем случае, исходя из уравнений (39), легко: 1) найти точки пересечения эллипса с осями координат; 2) установить пределы, в которых могут изменяться координаты точки, описывающей эллипс; 3) вскрыть свойства симметрии эллипса; 4) строить эллипс по точкам — одним словом, получать все то, что нам давало уравнение (38). В частности, построение эллипса по точкам может быть осуществлено следующим образом. Даем переменному t произвольные значения (предпочитая такие, для которых легко определяются синус и косинус; в случае надобности прибегаем к тригонометрическим таблицам) и каждый раз вычисляем по формулам (39) соответствующие значения x и y. Получается таблица из трех рядов, вроде следующей:

t	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	a	$\frac{1}{2}a\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}a\sqrt{2}$	0	$-a$	0	a
y	0	$\frac{1}{2}b$	$\frac{1}{2}b\sqrt{2}$	b	0	$-b$	0

Отсюда получаем ряд точек эллипса: $(a, 0)$, $\left(\frac{1}{2}a\sqrt{3}, \frac{1}{2}b\right)$ и т. д.

Решенная только что задача объяснит нам устройство прибора (*эллиптический циркуль, эллипсограф*), которым пользуются для точного вычерчивания эллипсов. В крестовине (черт. 53) сделаны два взаимно перпендикулярных прореза, по которым ходят ползунки P и R. К последним шарнирами прикреплена линейка (обычно — с делениями). Муфта Q с зажимным винтом и вставкой для карандаша может быть закреплена в любой точке линейки. Если закрепить муфту так, чтобы $RQ = a$ и $QP = b$, а затем привести линейку в движение, то карандаш Q будет вычерчивать эллипс с полуосями a и b (черт. 52); муфта может быть помещена внутри отрезка PR или же на его продолжении (см. выше примечание 1).



Черт. 53.

§ 24. Гипербола. Так называется *геометрическое место точек, для которых разность расстояний от двух данных точек („фокусов") есть величина постоянная.* Другими словами, когда точка движется по гиперболе, то расстояния ее от двух неподвижных фокусов либо одновременно увеличиваются, либо одновременно уменьшаются, но всякий раз на одинаковую величину, так что разность между этими расстояниями не меняется.

Сразу бросается в глаза словесное сходство между определениями эллипса и гиперболы; вся разница сводится к тому, что слово „сумма", участвующее в определении эллипса, заменено теперь словом „разность". В этом источник многочисленных аналогий между свойствами эллипса и гиперболы, — аналогий, с которыми мы встретимся уже в ближайшем будущем, начиная с вывода уравнения гиперболы. С другой стороны, существуют и значительные различия, и прежде всего — в форме обеих линий: эллипс есть кривая ограниченная, в то время как гипербола уходит в бесконечность. Что это именно так, нетрудно понять из следующих предварительных соображений: если сумма двух расстояний остается постоянной, то ни одно из слагаемых не может возрастать неограниченно; между тем разность может оставаться постоянной при сколь угодно больших уменьшаемом и вычитаемом (пример: 5—4, 6—5, 7—6 и т. д.).

Приступая к составлению уравнения для гиперболы, примем следующие обозначения: если F и F_1 — фокусы, M — какая-нибудь из точек гиперболы (черт. 54), то положим:

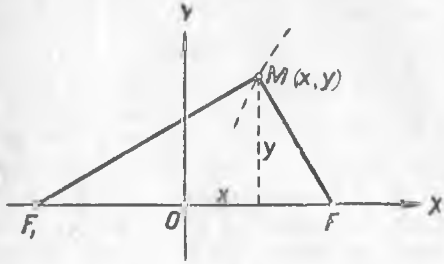
$$FF_1 = 2c; \; |F_1M - FM| = 2a\,^{1)}$$

1) Знак абсолютной величины здесь необходим, так как возможны два случая: $F_1M > FM$ (изображенный на чертеже 54) и $F_1M < FM$.

(обозначения подобраны так, чтобы подчеркнуть аналогию с эллипсом). Величины a (полуразность расстояний) и c (половина расстояния между фокусами) будем считать данными. Вспоминая, что одна сторона треугольника всегда больше разности двух других, мы должны с самого начала предположить, что $2c > 2a$, т. е.

$$a < c. \qquad (40)$$

Если точка O — середина отрезка FF_1, то в системе координат, показанной на чертеже 54, точки F, F_1 и M будут иметь соответственно координаты $(c, 0)$, $(-c, 0)$ и (x, y). Поэтому, совершенно так же, как в случае эллипса, имеем:



Черт. 54.

$$FM = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}; \quad F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Основное свойство гиперболы выразится равенством:

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a,$$

или

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

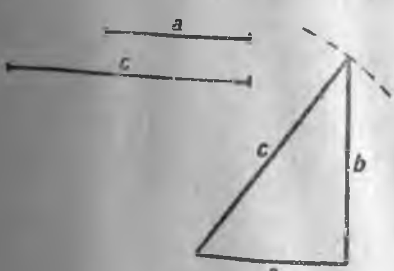
Это и есть искомое уравнение, которое мы только постараемся упростить (освободить от радикалов). Выкладка будет протекать почти так же, как для эллипса (уравнение 37), и поэтому мы предоставим ее учащемуся. После освобождения от радикалов получим:

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Повторяющаяся здесь дважды разность $c^2 - a^2$ есть величина положительная [см. неравенство (40)], которую мы можем считать известной, так как a и c даны. Для того чтобы продолжить аналогию с уравнением эллипса, обозначим эту разность не просто одной буквой, а положим:

$$c^2 - a^2 = b^2;$$

другими словами, обозначим $\sqrt{c^2 - a^2}$ через b. Величина b будет при этом действительная (а не мнимая, как получилось бы, если бы мы имели $c < a$). Удобство такого обозначения заключается еще в следующем: если a и c заданы как отрезки (графически), то мы можем *построить* отрезок b, равный $\sqrt{c^2 - a^2}$; достаточно построить прямоугольный треугольник с катетом a и гипотенузой c, как показано на чертеже 55.



Черт. 55.

Теперь уравнение гиперболы принимает вид:

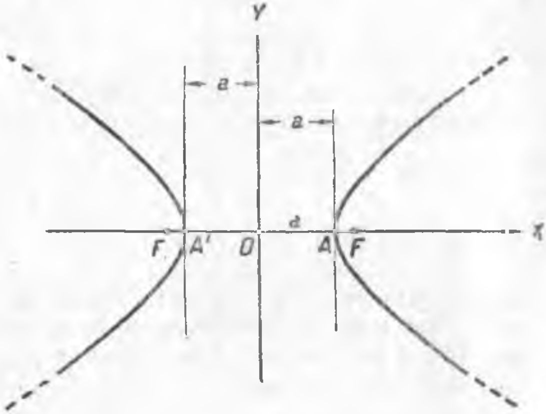
$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2,$$

или [ср. уравнение (38)]

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.} \tag{41}$$

Имея уравнение гиперболы, мы получаем возможность уяснить себе вид этой линии. Ближайшие рассуждения будут во многом напоминать исследование формы эллипса по его уравнению (38). Поэтому в некоторых местах мы не будем повторяться, отсылая за подробностями к § 22.

1. В каких точках пересекается гипербола с осями координат? Полагая в уравнении (41) $y = 0$, найдем $x = \pm a$. Отсюда заключаем, что гипербола пересекается с осью X-ов (черт. 56) в двух точках, $A\ (a, 0)$ и $A'\ (-a, 0)$ (называемых „вершинами гиперболы"). Если же подставим в уравнение (41) $x = 0$, то получим для определения y уравнение:



Черт. 56.

$$-\frac{y^2}{b^2} = 1,$$

которое не удовлетворяется никакими действительными значениями y (корни этого уравнения мнимые: $y = \pm b\sqrt{-1}$). Геометрически это означает, что с осью OY гипербола вовсе не встречается.

2. *В каких пределах могут изменяться координаты x и y, когда точка (x, y) движется по гиперболе?* Решая уравнение (41) относительно x, находим:

$$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + y^2}\,. \tag{42}$$

Отсюда видим, что координата y может принимать какие угодно значения, т. е. может изменяться от $-\infty$ до $+\infty$, причем для x никогда не будет получаться мнимых значений. В противоположность этому формула

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}, \tag{43}$$

которую получим, решая уравнение (41) относительно y, может давать для y и мнимые значения. Именно, это будет происходить всякий раз, как x ~~по~~ абсолютной величине будет меньше, чем a. Другими словами, на гиперболе не может быть действительных точек, абсциссы которых заключались бы между $-a$ и $+a$. Это означает, что гипербола не только не пересекается (как мы уже видели) с осью OY, но не имеет вовсе точек в целой (вертикальной) полосе, которая получится, если через вершины A и A' проведем параллели к оси OY. Зато справа и слева от этой полосы гипербола имеет на каждой вертикали по две точки, как это видно из формулы (43). При этом, если $|x| \to \infty$, то и $|y| \to \infty$, т. е. точка может удаляться по гиперболе так, что ее расстояния от осей OX и OY неограниченно возрастают.

3. Так же, как и в случае эллипса, мы из того обстоятельства, что уравнение (41) содержит x и y только в квадратах, сделаем следующие выводы: гипербола симметрично расположена относительно 1) оси X-ов, т. е. прямой, соединяющей фокусы [к тому же заключению приводит формула (43)]; 2) оси Y-ов, т. е. перпендикуляра, проведенного к отрезку FF_1 через его середину [см. также уравнение (42)]; 3) начала координат O, т. е. середины отрезка FF_1. Поэтому подробное изучение гиперболы достаточно провести для одной четверти, а в остальные четверти перенести эти результаты по симметрии.

Резюмируя те сведения, которые мы получили о гиперболе из ее уравнения, можем сказать, что это — кривая, распадающаяся на две отдельные части („ветви“, как их называют), причем каждая ветвь простирается по двум направлениям в бесконечность и одна ветвь служит зеркальным отражением другой. То обстоятельство, что геометрическое место точек оказалось состоящим из двух отдельных линий, не должно быть для нас неожиданным после примеров, приведенных в § 16[1]).

Задачи.

121. Написать уравнение гиперболы, зная, что: 1) расстояние между фокусами равно 11, а разность расстояний одной из точек гиперболы от фокусов равна 7; 2) центр (симметрии) находится на расстоянии 5 от вершины гиперболы и на расстоянии 8 от ее фокуса. Оси координат взять, как на чертеже 56.

122. Написать уравнение гиперболы, у которой фокусы находятся в точках $(0, 6)$ и $(0, -6)$, а разность расстояний любой точки кривой от фокусов равна 8. Найти точки пересечения гиперболы с осями координат.

§ 25. Задача из „Геометрии“ Декарта.

Следующая задача была одной из первых, на которых Декарт демонстрировал силу своего метода (в книге „Геометрия“, 1637 г.). Приводим условие и решение задачи в несколько измененной форме[2]).

Линейка CD вращается на шарнире около точки C, находящейся на расстоянии $CA = h$ от неподвижной прямой AB (черт. 57). *Треугольник MNP (с катетами m и n) скользит катетом PM вдоль прямой AB так, что вершина P все время находится на линейке CD. Какую линию описывает при этом точка Q, в которой пересекается прямая CD с продолжением гипотенузы MN треугольника?*

Решение. Возьмем оси координат так, как показано на чертеже 57, и пусть x, y будут координаты переменной точки Q; проведя $QS \perp AC$

[1]) Человеческая мысль не сразу примирилась с этим представлением. Греческий геометр Аполлоний (упоминавшийся в § 20) называл гиперболой одну ее ветвь. Впервые французский математик архитектор Дезарг (XVIв.) описывает эту кривую как состоящую из двух ветвей, обращенных „dos à dos“, т. е. спиной друг к другу.

[2]) Русский перевод точного текста можно найти в книге Вилейтнер, Хрестоматия по истории математики, вып. III, стр. 24—25, ГТТИ, 1932 г.

и $QR \perp AB$, имеем $QS = x$, $QR = y$. Введем в качестве вспомогательного переменного отрезок $RP = t$. Из подобия треугольников QRM и NPM находим:

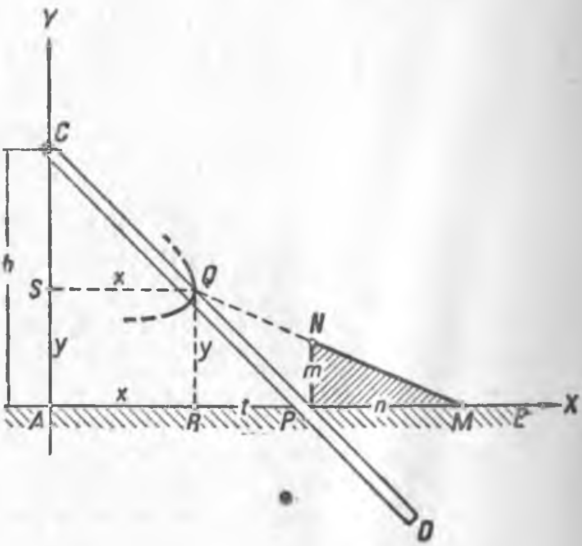
$$\frac{y}{m} = \frac{t+n}{n},$$

а из подобия треугольников CAP и QRP:

$$\frac{h}{y} = \frac{t+x}{t}.$$

Остается исключить из этих двух равенств переменное t, что может быть сделано, например, так: решаем каждое из уравнений относительно t и полученные выражения приравниваем одно другому. После преобразований получим:

$$mxy + ny^2 - n(h+m)y + mnh = 0, \tag{44}$$



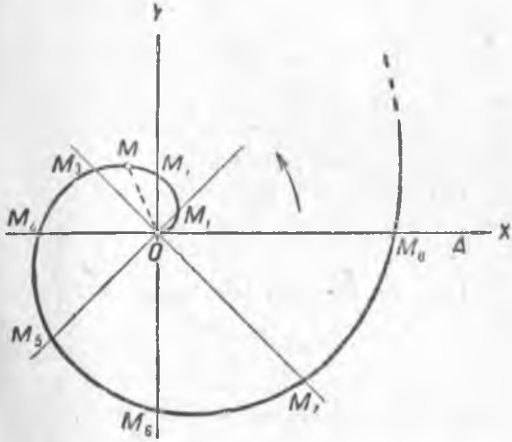
Черт. 57.

это и есть уравнение той линии, по которой движется точка Q. Правда, получив уравнение (44), мы еще не в состоянии сказать, какую линию оно представляет. Однако аналитическая геометрия дает средства (выходящие за рамки нашего курса) ответить и на этот вопрос: график уравнения (44) есть гипербола, как на это указывает и Декарт. То обстоятельство, что уравнение (44) не похоже на (41), полученное раньше для гиперболы, не должно нас смущать: там за оси координат были приняты оси симметрии гиперболы, между тем как прямые AB и AC (черт. 57) таковыми отнюдь не являются. Различием в расположении кривой относительно координатных осей и объясняется различие в форме уравнений.

Задача.

123. В каких точках кривая, определяемая уравнением (44), пересекается с осью Y-ов?

§ 26. **Архимедова спираль. Полярные координаты.** Архимедова спираль, как показывает ее название, принадлежит к числу кривых, известных уже в древности [1]). И неудивительно, так как эта кривая появляется в одном из часто встречающихся движений, именно — в сложении равномерного прямолинейного движения с равномерным вращательным. В самом деле, представим себе луч, который вращается равномерно вокруг своего начала O (чертеж 58, где направление вращения показано кривой стрелкой). „Равномерно“ — это значит: в каждую единицу времени (например в 1 секунду) луч поворачивается на один и тот же угол; назовем его ω. Пусть в то же время вдоль вращающегося луча движется точка M, также *равномерно*, т. е. в каждую единицу времени точка перемещается вдоль луча на одно и то же расстояние a. Таким образом, точка M участвует одновременно в двух движениях или, как говорят, совершает „сложное движение“, слагающееся из прямолинейного и вращательного. В подобных случаях всегда уместен вопрос о том, какую линию описывает точка M на той неподвижной плоскости, в которой происходят оба движения? Нетрудно представить себе прибор, вычерчивающий эту линию. Достаточно взять длинный стержень с надетой на него муфтой, имеющей отверстие для вставки карандаша; если один конец стержня укрепить на чертежном столе и затем сообщить стержню равномерное вращательное движение с заданной (угловой) скоростью, а муфте — равномерное прямолинейное движение с заданной (линейной) скоростью, то карандаш будет вычерчивать требуемую линию.



Черт. 58.

Можно также составить себе представление об этой линии, вычерчивая ее по точкам, как сделано на чертеже 58: пусть OA — начальное положение вращающегося луча, O — начальное положение движущейся точки; вокруг точки O построим несколько равных углов (на чертеже — 8 углов по 45°); когда угол, описанный лучом, увеличивается в 2,3 ... раза, то во столько же раз увеличивается расстояние точки M от O, поэтому $OM_2 = 2OM_1$, $OM_3 = 3OM_1, \ldots, OM_8 = 8OM_1$ и т. д. Получается спиральная линия, состоящая из бесчисленного множества завитков; это и есть архимедова спираль, часть которой изображена на чертеже. Наконец, можно применить к изучению архимедовой спирали координатный метод и с этой целью составить ее уравнение. Примем за положительную полуось X-ов луч OA, а текущие координаты точки M в этой системе обозначим через x, y. Введем в качестве вспомогательного переменного время t, отсчитываемое от начала движения. Так как вращение

[1]) Греческий математик Архимед жил в III в. до нашей эры.

луча происходит равномерно, с угловой скоростью ω, то по истечении t единиц времени луч OM отклонится от своего первоначального направления на угол

$$\angle AOM = \omega t.$$

А так как движение точки вдоль луча также происходит равномерно, с линейной скоростью a, то за тот же промежуток времени точка удалится от своего первоначального положения на расстояние

$$OM = at.$$

Уже сейчас мы можем исключить из этих равенств величину t:

$$OM = \frac{a}{\omega} \angle AOM,$$

или

$$OM = c \angle AOM, \tag{45}$$

где $c = \frac{a}{\omega}$ есть величина постоянная. Смысл равенства (45) прост: так как и угол $\angle AOM$ и расстояние OM изменяются пропорционально времени, то эти величины пропорциональны друг другу; c есть коэфициент этой пропорциональности.

Перейдем к координатам:

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \sin \angle AOM = \frac{y}{OM} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Подставляя сюда [см. уравнение (45)]

$$\angle AOM = \frac{OM}{c} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{c}$$

получим уравнение архимедовой спирали:

$$\sin \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{c} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{46}$$

Уравнение это существенно отличается от получавшихся до сих пор и прежде всего тем, что текущие координаты участвуют здесь не только в алгебраических комбинациях, но также и под знаком синуса. Этому соответствует и иная геометрическая природа кривой, например та ее особенность, что с каждой из осей координат спираль пересекается бесчисленное множество раз.

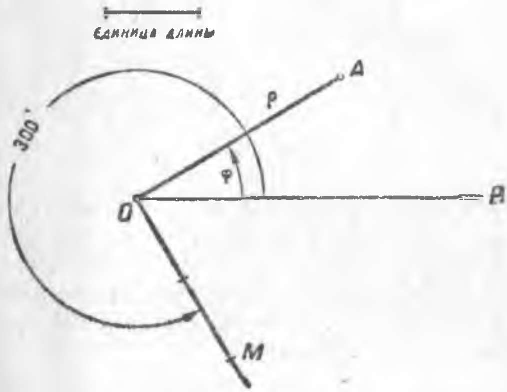
Исследование кривых вроде только-что рассмотренной спирали привело математиков к мысли о создании других систем координат, которые могут быть иногда лучше, чем декартова система, приспособлены к аналитическому изучению тех или иных классов линий. В самом деле, самое существенное, что содержится в идее координат, — это возможность определять положение точки с помощью двух (а в пространстве — трех) чисел. Но эти два числа можно связывать с точкой не только тем способом, каким мы пользовались до сих пор, но и бесчисленным множеством других способов. Так возникают различные системы координат, с одной из которых — так называемой „полярной системой", наиболее употребительной после декартовой, — мы сейчас познакомимся в самых общих чертах.

И здесь в основу кладется некоторая неподвижная фигура, по отношению к которой определяются положения всех точек. Фигура эта состоит теперь из (черт. 59)

1) точки O, называемой „полюс“;

2) луча OP, выходящего из полюса и называемого „полярная ось“.

Кроме того, как и раньше, выбираем определенный отрезок за единицу длины. Теперь положение каждой точки A на плоскости можно определить заданием двух ее „полярных координат“: 1) расстояние точки A от полюса, измеренное принятой единицей длины; эта координата называется „радиус-вектор“ точки и часто обозначается буквой ρ; 2) угол, на который надо повернуть вокруг полюса в положительном направлении полярную ось для того, чтобы она проходила через точку A; этот угол, измеренный в градусах или радианах, дает вторую координату точки A и называется „полярный угол“ (иначе — „фаза“) этой точки. Легко видеть, что точка вполне определяется своими полярными координатами. Например, чтобы построить точку M с радиусом-вектором $\rho = 2$ и полярным углом $\varphi = 300°$ (чертеж 59), строим при полярной оси угол в $300°$ и, таким образом, получаем луч, на котором должна лежать искомая точка; остается отложить на этом луче от полюса отрезок, равный 2 единицам длины, чтобы притти в точку M.



Черт. 59.

Пусть точка M движется в плоскости, описывая некоторую линию; если удалось выразить уравнением такую зависимость между полярными координатами ρ и φ, которая имеет место при всевозможных положениях точки M на кривой (и нарушается, когда точка сходит с кривой), то говорят, что мы имеем *уравнение кривой в полярных координатах*. Например, архимедова спираль выражается в полярных координатах очень простым уравнением [см. уравнение (45)]:

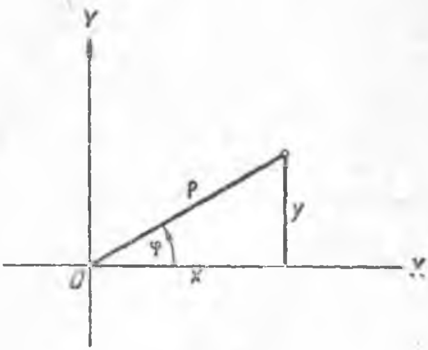
$$\rho = c\varphi,$$

содержащим запись того факта, что при движении точки по этой спирали радиус-вектор изменяется прямо пропорционально полярному углу [1]. Сравнивая это уравнение с уравнением (46), мы должны признать, что полярная система координат значительно лучше, чем декартова, подходит для изучения архимедовой спирали (то же имеет место и для ряда других линий).

[1] Полезно заметить, насколько зависит график той или иной функциональной связи от применяемой системы координат. Графиком прямой пропорциональности служат: 1) в декартовых координатах — прямая линия (проходящая через начало), 2) в полярных координатах — архимедова спираль.

Для перехода от декартовых координат к полярным служат формулы, которые имеют особенно простой вид в том случае, когда полюс совпадает с началом координат, а полярная ось — с положительной полуосью X-ов (черт. 60):

$$x = \rho\cos\varphi;\quad y = \rho\sin\varphi. \qquad (47)$$



Черт. 60.

Если поэтому составлено уравнение линии в декартовых координатах, то переход к полярному ее уравнению может быть выполнен автоматически. Например, для эллипса с декартовым уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

полярное будет иметь вид:

$$\rho^2\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right) = 1$$

В противоположность тому, что мы видели в случае архимедовой спирали, переход этот приносит не упрощение, а усложнение. Если, однако, перенести начало координат из центра эллипса в один из его фокусов и затем перейти к полярным координатам, то снова получается простое уравнение (см. ниже задачу 141), которым особенно охотно пользуются астрономы и физики.

Задачи.

124. Показать, что уравнение архимедовой спирали в декартовых координатах может быть также записано в виде:

$$1)\ \cos\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{c} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};\qquad 2)\ \operatorname{tg}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{c} = \frac{y}{x}.$$

125. Построить на чертеже следующие точки по данным их полярным координатам: 1) $\rho = 5$, $\varphi = 40°$; 2) $\rho = 3$, $\varphi = 270°$; 3) $\rho = 1$, $\varphi = 100°$; 4) $\rho = 4$, $\varphi = 180°$; 5) $\rho = 6$, $\varphi = 0$.

126. Сторона правильного шестиугольника $ABCDEF$ равна a. Найти полярные координаты всех вершин, принимая A за полюс, луч AB — за полярную ось.

127. Найти расстояние между двумя точками A и B, заданными своими полярными координатами (ρ_1, φ_1) и (ρ_2, φ_2). Решим задачу двумя способами: 1) исходя из треугольника OAB (O — полюс) и 2) пользуясь формулой (11) § 9 (стр. 19) и затем переходя от декартовых координат к полярным по формулам (47).

§ 27. Пересечение линий. До сих пор мы применяли метод координат к изучению отдельных линий. Между тем аналитическая геометрия дает также средство для решения задач, касающихся взаимоотношений двух или нескольких линий. Например, относительно двух линий можно поставить вопрос о том, пересекаются ли эти линии; если пересекаются, то в скольких и каких точках. Если уравнения обеих линий известны, то задача сводится к чисто алгебраической. Действительно, общая точка двух линий должна лежать одновременно на обеих линиях, т. е. должна иметь координаты, удовлетворяющие как одному, так и другому уравнению. Отсюда следует, что все общие точки двух линий мы найдем, *решая совместно уравнения* этих линий *как систему из двух уравнений с двумя неизвестными* (x и y). Каждому вещественному (немнимому) решению системы будет соответствовать общая точка — пересечения или касания — наших линий. Мнимые решения должны быть отброшены; если все решения окажутся мнимыми, то это означает, что линии вовсе не имеют общих точек.

Пример. *Найти общие точки эллипса, заданного уравнением* $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, *и окружности, имеющей центр в точке* (0; 4,4) *и радиус 4.*

Решение. Уравнение окружности (см. § 18):

$$x^2+(y-4,4)^2=16$$

решаем совместно с уравнением эллипса:

$$4x^2+9y^2=36.$$

Из первого уравнения имеем:

$$x^2=-y^2+8,8y-3,36;$$

подставляем во второе и после упрощений находим:

$$5y^2+35,2y-49,44=0.$$

Отсюда получаем для y два значения:

$$1)\ y=1,2,\quad 2)\ y=-8,24.$$

Подставляя $y=1,2$ в одно из первоначальных уравнений, находим $x=\pm 2,4$; подстановка же $y=-8,24$ приводит к мнимым значениям для x. Итак, наша система уравнений имеет два вещественных решения.

$$1)\ x=2,4,\quad y=1,2;\qquad 2)\ x=-2,4,\quad y=1,2$$

и два мнимых, которые по смыслу задачи должны быть отброшены. Геометрически это означает, что эллипс с окружностью пересекается в двух точках (— 2,4; 1,2) и (+ 2,4; 1,2), как в этом легко удостовериться на чертеже.

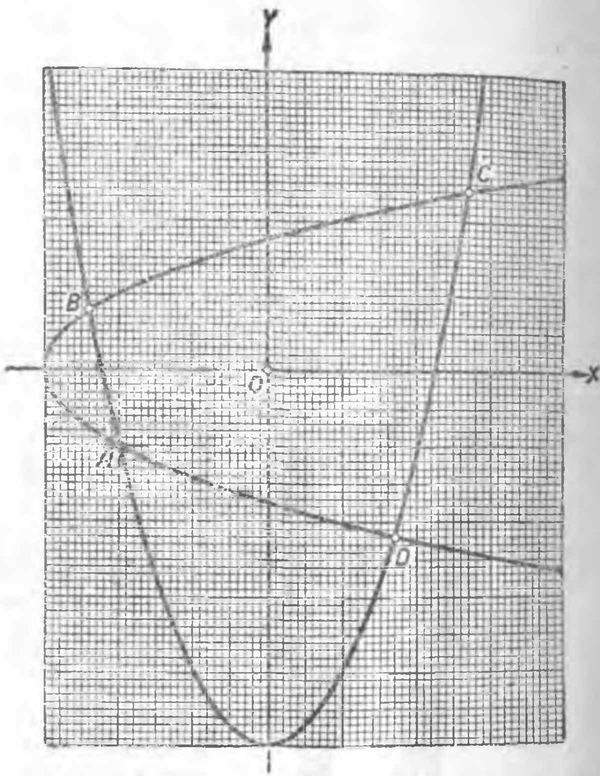
Сближение двух задач — о пересечении линий и о решении системы уравнений — оказывается полезным не только для геометрии, но и для алгебры. Действительно, мы всегда можем смотреть на решение двух уравнений с двумя неизвестными как на задачу разыскания общих точек двух линий (графиков этих уравнений). Конечно, такой „графический способ" позволяет находить только приближенные решения, которые, однако, могут быть ценны либо сами по себе, либо как отправной пункт для более точных вычислений (высшая алгебра дает методы для такого уточнения). Например, решение системы уравнений:

$$x^2-y=5,\qquad y^2-x=3,$$

несмотря на их внешнюю простоту, представляет алгебраические трудности и выходит за рамки элементарной алгебры. Между тем графически задача сводится к построению точек пересечения двух парабол, к тому же совершенно одинаковых по форме и отличающихся только положением [1]).

Сделав тщательный чертеж (на миллиметровой бумаге), обнаруживаем 4 точки пересечения (черт. 61), координаты которых определяются на-глаз:

$$A(-2, -1), \quad B(-2{,}4;\ 0{,}8), \quad C(2{,}7;\ 2{,}4), \quad D(1{,}7;\ -2{,}2).$$



Черт. 61.

Это дает для рассматриваемой системы следующие (приближенные) решения:

$$1)\ x=-2,\quad y=-1;\qquad 2)\ x=-2{,}4,\quad y=0{,}8;$$
$$3)\ x=2{,}7,\quad y=2{,}4;\qquad 4)\ x=1{,}7,\quad y=-2{,}2.$$

Подстановкой в уравнения убеждаемся, что первое из этих решений является совершенно точным, а остальные представляют собою более или менее грубые приближения.

---

[1]) Если отвлечься от положения парабол на чертеже, то обе они совпадают с графиком функции $y=x^2$. В тех случаях, когда приходится часто пользоваться этим графиком (например при графическом решении квадратных уравнений), удобно раз навсегда изготовить его на прозрачной бумаге или кальке с тем, чтобы в дальнейшем переводить эту параболу или накладывать ее на различные чертежи.

Задача

28. Центры двух окружностей находятся в точках $(-3, 4)$ и $(3, 7)$, а радиусы их равны соответственно 2 и 5. Найти точки пересечения окружностей (ответ сверить с чертежом).

§ 28. Парабола, эллипс, гипербола в природе и технике.

Кривыми перечисленными в заголовке, занимались уже в древности (Аполлоний, II в. до нашей эры). С ними встречались, изучая сечения прямого кругового конуса плоскостями, проводимыми под различными наклонами (эллипс получается также как наклонное сечение прямого кругового цилиндра, например на стыке двух цилиндрических труб). Отсюда название — „конические сечения", которым часто объединяют все три кривые. После создания аналитической геометрии эти кривые стали называть также „кривыми 2-го порядка" именно в связи с тем, что в декартовой системе координат парабола, эллипс и гипербола выражаются уравнениями второй степени. Можно доказать, что никаких других кривых 2-го порядка не существует, т. е. всякая кривая, выражаемая уравнением второй степени, есть либо парабола, либо эллипс, либо гипербола [1]).

Особенное значение приобрели конические сечения после того, как астроном Кеплер (XVI—XVII вв.) из наблюдений открыл, а Ньютон (XVII—XVIII вв.) теоретически обосновал законы движения планет, один из которых гласит, что планеты (и кометы) солнечной системы движутся именно по этим кривым. Совершенно новое и неожиданное применение получила эта теория в современной физике, когда обнаружилось, что атом имеет строение солнечной системы, с электронами, обращающимися вокруг „ядра", подобно тому, как планеты обращаются вокруг солнца. Но и помимо того, в более простых, окружающих нас явлениях природы и человеческой деятельности мы нередко сталкиваемся с теми же кривыми.

Параболу описывает камень или снаряд, брошенный наклонно к горизонту (правильная форма кривой несколько искажается сопротивлением воздуха). Ту же форму имеет струя, бьющая наклонно из фонтана или из отверстия в стенке сосуда. Гибкая нерастяжимая нить, например цепь висячего моста, под действием равномерной горизонтальной нагрузки провисает в виде параболы. Несколько иную форму принимает нить или цепь под действием собственного веса (например — провисающий телефонный провод); однако и здесь форма нити настолько близка к параболической, что для практических расчетов часто пользуются уравнением параболы. Арке моста нередко придают форму параболы. Для устройства прожекторов (автомобильных, военных) пользуются параболическими зеркалами, которые лучше, чем сферические, приспособлены к отражению лучей слаборасходящимся пучком (источник света помещают в фокусе параболы). Если цилиндрический сосуд с налитой в него жидкостью подвергнуть быстрому вращению вокруг его оси, то поверхность жидкости становится вогнутой вниз и притом так, что в вертикальном разрезе дает параболу. На этом основано устройство одного из приборов, позволяющих измерять скорость вращения стационарного мотора.

[1]) А окружность,— спросит читатель,— ведь она тоже выражается уравнением второй степени? Ответ заключается в том, что уравнение окружности содержится как частный случай в уравнении эллипса, если положить там $a = b$. Равным образом окружность получается и в сечении конуса (плоскостью, перпендикулярной к оси).

Эллипс имеет важное значение в расчетах строительной механики („эллипс инерции"). Достаточно назвать такие термины, как „эллипсоид [1]) упругости", „эллипсоид напряжений", для того, чтобы дать указания на другие области применения. В некоторых механизмах пользуются зубчатыми колесами эллиптической формы („эллиптическая зубчатка"). Для обтачивания эллипсов служит особый станок („патрон Леонардо-да-Винчи"[2]), который построен на том же принципе, что и эллиптический циркуль (см. § 23).

Гипербола служит графиком простой функциональной зависимости — обратной пропорциональности, часто наблюдающейся в природе (вспомним из физики закон Бойля — Мариотта). Вращая гиперболу около ее мнимой оси, получаем кривую поверхность — „гиперболоид вращения",— замечательную тем, что (подобно цилиндру и конусу) она может быть также образована движением прямой линии. Таким образом, модель гиперболоида может быть изготовлена из прямолинейных стержней. Такими гиперболоидами пользуются в некоторых механизмах для передачи вращения между двумя скрещивающимися (т. е. непараллельными и непересекающимися) осями („гиперболоидные колеса"). Та же поверхность используется иногда в сооружениях: одна из московских радиобашен сконструирована в форме гиперболоида.

Задачи к главе второй.

129. Какие из точек $A(2, 2)$, $B(3, -1)$, $C(-2, 5)$, $D(-1, -7)$, $O(0, 0)$ лежат на линии, выражаемой уравнением:

$$4x^2 - 2xy - 3x - y = 0?$$

130. Какие из линий, выражаемых следующими уравнениями:

1) $4x^4y - 7x^3 + x^3y + 10xy^3 - 3y^2 + 8xy - 11x = 0;$
2) $3x^2 - 2x - 5y + 1 = 0;$
3) $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 29;$
4) $y = \cos x;$ 5) $3y^2 + 5 = \dfrac{2x-5}{x-1}$

проходят через начало координат? Сформулировать общее правило, с помощью которого можно было бы по уравнению линии узнавать, проходит ли она через начало координат.

131. Даны уравнения трех линий:

$$4x - 3y = 4;\quad 6x + y = 17;\quad 4x + 19y = 48.$$

Показать, что эти линии проходят через одну и ту же точку, и найти ее.

132. Даны две точки:

$$A(3, -5) \text{ и } B(-1, 2).$$

Написать уравнение геометрического места точек, для которых квадрат расстояния от A на 11 больше, чем квадрат расстояния от B.

133. Расстояние между точками A и B равно 10. Найти геометрическое место точек, для которых сумма квадратов расстояний от A и от B равна 60.

134. Геометрическое место точек, для которых произведение расстояний от двух данных точек F и F_1 есть величина постоянная, называется „овалом Кассини". Принимая середину отрезка FF_1 за начало координат, а прямую FF_1 за

---

[1]) **Эллипсоидом** называется овальная поверхность, все плоские сечения которой суть эллипсы. К числу эллипсоидов принадлежит поверхность, образуемая вращением эллипса около одной из его осей симметрии.

[2]) **Леонардо-да-Винчи** — известный итальянский художник и ученый, живший в XV—XVI вв.

оси X-ов, написать уравнение овала Кассини, если известно, что $FF_1 = 8$, а упомянутое постоянное произведение равно: 1) 33; 2) 16; 3) 7. Для каждого из трех случаев сделать набросок геометрического места.

135. Написать уравнение окружности, проходящей через точку (5, 1) и имеющей центр в точке (—1, 3). В каких точках пересекается эта окружность с осями координат?

136. Большая ось эллипса равна 20, малая 12. Найти расстояние между фокусами.

137. Найти точку пересечения эллипса, заданного уравнением $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$, с окружностью, для которой отрезок между центром эллипса и правым его фокусом служит диаметром.

138. Стрелок, находящийся в точке A, стреляет в мишень, помещенную в точке B. В какой точке (M) должен поместиться наблюдатель для того, чтобы одновременно услышать звук от выстрела и от удара пули в мишень? (Скорость пули больше, чем скорость звука в воздухе.)

139. Через точку $P(2, 3)$ проведена прямая, пересекающая ось OX в точке A и ось OY в точке B. В точках A и B восставлены к осям OX и OY перпендикуляры, пересекающиеся в точке C. Найти уравнение линии, описываемой точкой C, когда прямая AB вращается вокруг P.

140. Написать уравнение параболы, зная, что ее фокус находится в точке (2, 1), а директриса проходит через точки $A(3, -2)$ и $B(-4, 5)$.

Указание. Расстояние точки, взятой на параболе, от прямой AB может быть выражено с помощью приема, примененного при решении задачи 87.

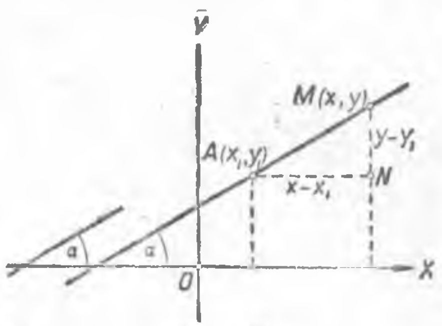
141. Эллипс дан уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, в котором $a > b$. Найти уравнение этого эллипса:

1) в новой системе координат, полученной перенесением начала в фокус $F(c, 0)$ эллипса ($c = \sqrt{a^2 - b^2}$);

2) в полярной системе координат с полюсом в точке F и полярной осью, направленной по оси X-ов.

ПРЯМАЯ ЛИНИЯ. ОКРУЖНОСТЬ.

§ 29. Уравнения прямой по различным ее заданиям. В этой главе нам предстоит иметь дело с теми же линиями — прямой и окружностью, — какими занимается элементарная геометрия. Однако способы задания этих линий и методы решения относящихся к ним задач будут теперь иные. В некоторых случаях задача будет с самого начала сформулирована в координатах; в других — задача будет иметь чисто геометрическое содержание, но решать ее мы предпочтем аналитическими средствами, вводя для этого по своему усмотрению систему координат, по возможности удобную. Начнем с прямой линии, определяемой теми или иными заданиями.



Черт. 62.

1. Уравнение по точке и подъему. Положение прямой относительно осей координат будет вполне определено, если известны: 1) точка A (x_1, y_1), через которую прямая проходит; 2) подъем m прямой, т. е. тангенс того угла α, который эта прямая составляет с положительным направлением оси X-ов. Действительно, чтобы *построить* прямую по этим данным, достаточно при какой-нибудь точке оси X-ов построить угол α (по данному его тангенсу) и затем через точку A провести прямую, параллельную стороне этого угла. Убедившись в том, что наши данные вполне определяют прямую, займемся составлением ее уравнения. С этой целью возьмем на прямой совершенно произвольную точку $M(x, y)$ и запишем, что прямая, проходящая через точки A и M, имеет подъем m: согласно формуле (15) § 12 (см. также доказательство ее общности в § 13), имеем:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=m\ ^{1)}. \tag{48}$$

Это и есть уравнение нашей прямой. Действительно: 1) равенство (48) остается в силе, как бы ни перемещалась точка M вдоль прямой; 2) оно нарушается, как только точка M сходит с прямой, ибо через A нельзя

[1]) Для лучшего усвоения полезно еще раз вывести себе эту формулу из чертежа 62, пользуясь сделанными там надписями. Следует, однако, заметить, что такой вывод не может считаться исчерпывающим, так как он основан на некоторых особенностях чертежа.

провести другой прямой с тем же подъемом m. Более удобная форма уравнения:

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}. \tag{49}$$

Пример 1. Уравнение прямой, проходящей через точку $(5, -2)$ и имеющей подъем $\frac{2}{3}$, имеет вид:

$$y + 2 = \frac{2}{3}(x - 5),$$

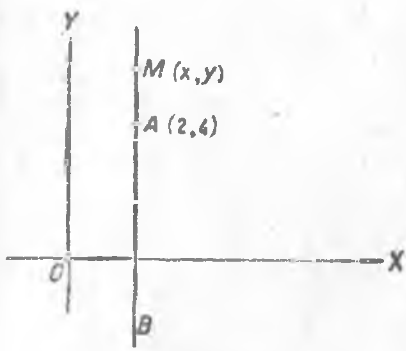
или, после упрощений:

$$2x - 3y = 16.$$

Пример 2. Уравнение прямой, проходящей через точку $(-4, 1)$ и составляющей угол $120°$ с положительным направлением оси X-ов, мы получим по формуле (49), замечая, что $\operatorname{tg} 120° = -\sqrt{3}$:

$$y - 1 = -\sqrt{3}(x + 4).$$

Примечание. Заметим, что в задаче, приведшей нас к уравнению (49), участвует не угол α, а его тангенс m. Эти данные можно считать равносильными во всех случаях, кроме одного: если прямая, уравнение которой мы ищем, перпендикулярна к оси X-ов (вертикальна — при обычном расположении чертежа), то угол α существует (равен $90°$), но тангенс его не может быть выражен никаким числом. В состоянии ли мы и здесь выразить прямую уравнением? Для большей ясности рассмотрим числовой пример: пусть (черт. 63) через точку $A(2, 4)$ проведена прямая AB, перпендикулярная к оси X-ов. Возьмем на этой прямой произвольную точку $M(x, y)$; как бы ни перемещалась точка M вдоль AB, всегда



Черт. 63

$$x = 2. \tag{50}$$

Это равенство и принимают за уравнение прямой AB. Действительно, на этой прямой имеется бесчисленное множество точек, например

$$(2, 5), \quad (2, 8), \quad (2, -3) \ldots$$

и для всех имеет место равенство (50). Если же взять точку вне прямой AB, то у такой точки абсцисса будет во всяком случае отлична от 2, и, значит, равенство (50) не будет выполняться.

По поводу этих рассуждений может возникнуть следующее сомнение: когда мы определяли (§ 17), что надо понимать под графиком уравнения, то одно из требований заключалось в том, чтобы уравнение это удовлетворялось координатами любой точки, лежащей на графике, если подставлять абсциссу точки вместо x, а ординату вместо y. Между тем в уравнение (50) не входит y, и, значит, ординату „некуда подставлять". Мы должны поэтому расширить некоторые из прежних формулировок: 1) наряду с уравнениями, содержащими x и y, будем рассматривать и такие („неполные"), которые содержат только x или только y; 2) естественно, что подстановку координат какой-нибудь точки в „неполное" уравнение мы будем понимать так, что в уравнение, не содержащее y, надо подставлять только абсциссу точки вместо x, в уравнение, не содержащее x, — только ординату точки вместо y[1]). Например, в этом смысле уравнение (неполное) $2y = 5$ удовлетворяется координатами точек $\left(3, \frac{5}{2}\right)$, $\left(-6, \frac{5}{2}\right)$, $\left(1000, \frac{5}{2}\right)$ и т. п.

Следовательно, все эти точки лежат на графике рассматриваемого уравнения, который представляет собой прямую, параллельную оси X-ов (горизонтальную), лежащую выше этой оси на расстоянии $\frac{5}{2}$.

Вообще, прямая, проведенная через точку (x_1, y_1) параллельно оси X-ов, будет иметь своим уравнением

$$y = y_1, \tag{51}$$

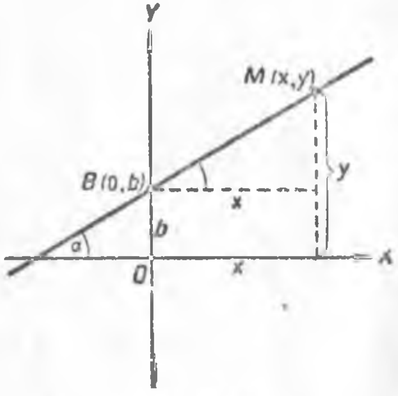
а прямая, проведенная через ту же точку параллельно оси Y-ов, —

$$x = x_1. \tag{52}$$

В частности ось X-ов выражается уравнением $y = 0$, а ось Y-ов — уравнением $x = 0$.

Уравнение (51) содержится в уравнении (49) как частный случай. Действительно, если прямая параллельна оси X-ов, то $m = 0$ и уравнение (49) принимает вид $y - y_1 = 0$, а это равносильно уравнению (51).

Уравнение (52) также можно считать содержащимся в уравнении (49), но в качестве предельного случая. Действительно: напишем уравнение (49) в виде



Черт. 64.

$$\frac{1}{m}(y - y_1) = x - x_1. \tag{49'}$$

Если теперь прямая вращается около точки (x_1, y_1), стремясь стать перпендикулярной к оси X-ов (и, значит, параллельной оси Y-ов), то $m \to \infty$, следовательно $\frac{1}{m} \to 0$; но при $\frac{1}{m} = 0$ уравнение (49') превращается в уравнение $x - x_1 = 0$, т. е. в уравнение (52).

[1]) Отметим, что неполное уравнение всегда можно, не изменяя его смысла, заменить таким, которое по внешнему виду будет содержать оба переменных x и y. Например, уравнение (50) равносильно такому: $x = 2(y^2 + 1)^0$, (ибо $(y^2 + 1)^0$ есть не что иное, как единица). В уравнение, так написанное, можно, конечно, подставлять значение обеих координат (например, оно удовлетворяется при $x = 2$, $y = 5$ или при $x = 2$, $y = -3$ и т. п.), но заранее очевидно, что подстановка различных чисел вместо y излишня.

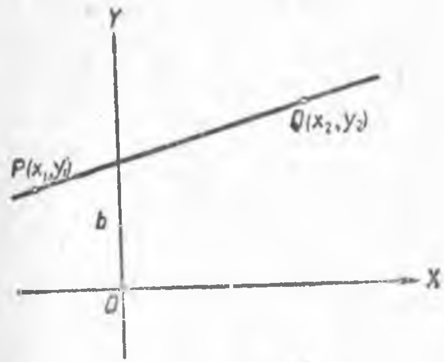
2. Уравнение по начальной ординате и подъему. Под начальной ординатой понимают ординату той точки, в которой прямая пересекает ось Y-ов. Эта ордината, которую мы будем обозначать буквой b, может быть положительной (как на чертеже 64), или отрицательной (если прямая пересекает ось Y-ов ниже начала), или равной нулю (если прямая проходит через начало)[1]). Легко понять, что заданием начальной ординаты b и подъема m прямая вполне определяется.

Желая составить по этим данным уравнение прямой, заметим, что задача сводится к предыдущей: теперь ведь также дана точка на прямой, именно — точка $B(0, b)$, в которой эта прямая пересекается с осью Y-ов. Остается в уравнении (49') положить $x_1 = 0$, $y_1 = b$, чтобы получить сначала

$$y - b = m(x - 0)$$

а затем:

$$\boxed{y = mx + b,} \tag{53}$$



Черт. 65.

т. е. уравнение, решающее задачу. Как и раньше, рекомендуем учащемуся вывести еще раз это уравнение из чертежа 64. В частном случае когда прямая проходит через начало координат ($b = 0$), имеем:

$$y = mx,$$

т. е. хорошо известное уравнение прямой пропорциональности.

3. Уравнение по двум точкам. Как известно, прямая вполне определяется двумя своими точками. Если поэтому известны координаты двух точек $P(x_1, y_1)$ и $Q(x_2, y_2)$, лежащих на прямой (черт. 65), то эти данные, очевидно, достаточны для того, чтобы составить ее уравнение. Мы сейчас же сведем задачу к уже решенной, если вспомним, что по двум точкам можно определить подъем прямой (§ 12):

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Достаточно подставить это выражение для m в уравнение (49'), чтобы получить искомое уравнение:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1),$$

или, в более симметричном виде:

$$\boxed{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}} \tag{54}$$

[1]) Иногда называют величину b „отрезком, отсекаемым прямою на оси Y-ов", или, короче, „отрезком на оси Y-ов". Мы не можем пользоваться этой терминологией, так как в этой книге длины отрезков никогда не рассматриваются как отрицательные.

(левая часть составлена из y-ов, так же, как правая из x-ов; в каждой из двух дробей вторые члены в числителе и знаменателе одинаковы по абсолютной величине и по знаку).

Пример 1. Уравнение прямой, соединяющей точки $P(-2, 5)$ и $Q(4, 1)$, получается сначала в виде:

$$\frac{y-5}{1-5}=\frac{x+2}{4+2};$$

выполняем действия в знаменателях:

$$\frac{y-5}{-4}=\frac{x+2}{6};$$

освобождаемся от дробей (общий знаменатель 12) и после других очевидных преобразований находим:

$$2x+3y-11=0. \qquad (55)$$

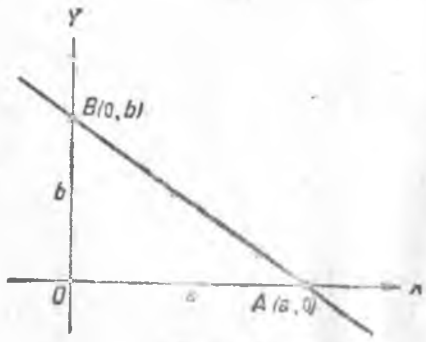
Проверка: подставляя сюда один раз $x=-2$, $y=5$, другой раз $x=4$, $y=1$, убеждаемся, что линия, выражаемая уравнением (55), действительно проходит через обе точки. Если бы, применяя формулу (54), мы приняли точку $Q(4, 1)$ за первую, а $P(-2, 5)$ за вторую, то получили бы:

$$\frac{y-1}{5-1}=\frac{x-4}{-2-4},$$

а это уравнение после упрощений снова привело бы нас к уравнению (55).

Пример 2. Формула (54) становится неприменимой, если у двух данных точек равны абсциссы ($x_2=x_1$) или же равны ординаты ($y_2=y_1$). Пусть, например, требуется написать уравнение прямой, проходящей через точки $P(4, 3)$ и $Q(9, 3)$. При непосредственной подстановке в формулу (54) появилась бы дробь с нулевым знаменателем, следовательно — лишенная смысла. Однако достаточно преобразовать уравнение (54) для того, чтобы подстановка стала не только возможной, но и привела бы к правильному результату. Именно, освободим сначала уравнение (54) от дробей:

$$(y-y_1)(x_2-x_1)=(x-x_1)(y_2-y_1).$$



Черт. 66.

Теперь подстановка дает:

$$(y-3)(9-4)=(x-4)(3-3),$$

т. е. $y=3$.

Так и должно быть, потому что прямая, которая соединяет две точки, лежащие на одинаковом расстоянии (равном 3) и по одну сторону от оси X-ов, параллельна этой оси [см. уравнение (51)].

4. Уравнение по начальной абсциссе и начальной ординате. Рассмотрим прямую, которая пересекает обе оси координат, но не проходит через начало.

Пусть пересечение прямой с OX происходит в точке A, имеющей абсциссу a (будем называть ее „начальной абсциссой"; $a\neq 0$), а пересечение с OY — в точке B, имеющей ординату b (начальная ордината — см. предыдущий параграф — и $b\neq 0$)[1]. Предложим себе написать уравнение прямой по данным a и b. Но эта задача представляет собой частный случай предыдущей: здесь даны две точки, лежащие на прямой, именно точки пересечения ее с осями координат: $A(a, 0)$ и $B(0, b)$.

Подставляя в уравнение (54) $x_1=a$, $y_1=0$, $x_2=0$, $y_2=b$, найдем:

$$\frac{y-0}{b-0}=\frac{x-a}{0-a}, \quad \frac{y}{b}=\frac{x-a}{-a}=-\frac{x}{a}+1$$

и окончательно:

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.} \qquad (56)$$

Мы здесь сознательно не освобождаемся от дробей, так как именно в этой форме уравнение легко запоминается и, кроме того, самим внешним видом своим говорит о геометрическом значении величин a и b. Действительно, если бы мы даже и не знали о происхождении уравнения (56), то, разыскивая точки пересечения линии (56) с осями координат, сразу получили бы: при $y=0$ (пересечение с OX) $x=a$; при $x=0$ (пересечение с OY) $y=b$ [ср. с уравнением (38) для эллипса].

Пример. *Написать уравнение прямой, зная, что она пересекает ось Y-ов на расстоянии 3 от начала, выше его, а ось X-ов на расстоянии 5 от начала, слева от него.*

Решение. Здесь $a=-5$, $b=3$, следовательно уравнение прямой

$$\frac{x}{-5}+\frac{y}{3}=1,$$

или, после упрощений:

$$3x-5y+15=0.$$

Задачи[2].

142. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $(4, -2)$ и образующей с положительным направлением оси X-ов угол в: 1) 30°, 2) 45°, 3) 90° 4) 135°.

143. Вершина равностороннего треугольника находится в точке $(2, 6)$, а основание его лежит на оси X-ов. Найти: 1) уравнения трех сторон, 2) координаты двух других вершин.

144. Даны 3 точки: $A(-3, 4)$, $B(5, 9)$ и $C(2, 3)$. Написать уравнение прямой, проведенной через точку C параллельно прямой AB.

Указание. Воспользоваться формулами (15) и (18)

[1] Иногда называют величины a и b „отрезками, отсекаемыми прямою на осях", короче — „отрезками на осях". Для нас эти названия приемлемы только в том случае, когда $a>0$ и $b>0$ (см. предыдущее подстрочное примечание), как это, например, имеет место на чертеже 65.

[2] При решении задач всякий раз, как получено уравнение новой прямой, полезно делать сверку с чертежом, например так: находим точки пересечения прямой с осями один раз по чертежу, другой раз — из уравнения (для чего полагаем в последнем один раз $y=0$, другой раз $x=0$; вычисление большей частью можно произвести в уме.) Результаты построения и вычисления могут неточно совпадать даже при правильном выполнении того и другого из-за неизбежных погрешностей чертежа, однако грубого расхождения не должно быть.

145. Даны две точки: $A(-3, -1)$ и $B(5, 2)$. Написать уравнение прямой, проведенной через середину отрезка AB, перпендикулярно к нему.

Указание. Воспользоваться формулами (15) и (19).

146. Написать уравнение прямой, составляющей с положительным направлением оси X-ов угол в $60°$ и 1) пересекающей положительную полуось Y-ов на расстоянии 5 от начала; 2) проходящей через начало координат; 3) пересекающей отрицательную полуось Y-ов на расстоянии 4 от начала.

147. Даны две точки: $A(-4, 2)$ и $B(3, 1)$. Написать уравнение прямой, параллельной AB и пересекающей отрицательную полуось Y-ов на расстоянии 2 от начала.

148. Написать уравнение прямой, зная ее начальную абсциссу a и подъем m.

149. Написать уравнение прямой, соединяющей 2 точки: 1) $(-1, 4)$ и $(4, -2)$; 2) $(-5, -3)$ и $(1, 1)$; 3) $(2; 7{,}3)$ и $(2; -3{,}8)$.

150. Вершины треугольника находятся в точках $A(4, 3)$, $B(-5, 0)$, $C(6, -2)$. Написать уравнения трех сторон.

151. При данных предыдущей задачи написать уравнения трех медиан треугольника.

152. Показать, что прямая, соединяющая точки $(-3, 6)$ и $(2, -4)$, проходит через начало координат.

153. Три последовательные вершины параллелограма $ABCD$ находятся в точках $A(0, 3)$, $B(-5, -1)$, $C(-3, -2)$. Найти уравнения сторон BC, CD и диагонали BD.

154. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $(4, 2)$ и пересекающей отрицательную полуось X-ов на расстоянии 3 от начала.

155. Диагонали ромба равны 14 и 8. Принимая большую диагональ за ось X-ов, а меньшую за ось Y-ов, написать уравнения сторон.

156. Через точку $(5, 2)$ провести прямую так, чтобы она отсекала от осей координат равнобедренный треугольник.

157. Написать уравнение прямой, зная, что перпендикуляр, опущенный на нее из начала координат, имеет длину 4 и составляет с положительным направлением оси X-ов угол в $50°$.

Указание. Найти отрезки, отсекаемые прямой на положительных полуосях координат.

§ 30. График уравнения первой степени. Во всех без исключения случаях, когда нам приходилось составлять уравнение прямой по тем или иным данным, результат представлялся в виде уравнения первой степени (относительно x и y). Более того, мы еще в предыдущей главе (§ 19) установили, что всякая прямая может быть выражена уравнением первой степени. Справедливо ли обратное утверждение: всякое ли уравнение первой степени выражает некоторую прямую? Не может ли встретиться такое уравнение первой степени (относительно x и y), которое имело бы своим графиком не прямую, а кривую? Чтобы лучше понять законность постановки этого вопроса, вспомним, например, следующие факты: всякая окружность может быть выражена уравнением второй степени (§ 18); однако не всякое уравнение второй степени имеет своим графиком окружность (таковым может оказаться и парабола, и гипербола, и любой эллипс).

Поставленный выше вопрос о графике общего уравнения первой степени будем решать следующим путем. Если удастся доказать, что *всякое* уравнение первой степени может быть приведено к одному из тех видов [уравнения (49), (52), (53) и т. д.], которые у нас получались в качестве уравнений прямых, то этим самым будет дан утвердительный ответ на интересующий нас вопрос

Начнем с численного примера; рассмотрим уравнение первой степени:

$$2x + 5y - 12 = 0. \qquad (57)$$

Перебирая в памяти те уравнения прямой, которые получались в предыдущем параграфе, мы остановимся на уравнении (53) как наиболее простом. И действительно, уравнение (57) может быть легко приведено к виду (53); стоит только решить (57) относительно y:

$$y = -\frac{2}{5}x + \frac{12}{5}.$$

Теперь мы не только в праве утверждать, что уравнение (57) имеет своим графиком прямую линию, но даже можем определенно указать, какую именно прямую: ту, которая имеет начальную ординату $\frac{12}{5}$ и подъем $-\frac{2}{5}$ (эту прямую легко построить). Рассуждение, очевидно, имеет общий характер и может быть повторено для буквенного уравнения. Итак, возьмем уравнение первой степени в самом общем виде:

$$Ax + By + C = 0, \qquad (58)$$

где A, B, C — какие угодно числа — положительные, отрицательные или нули [1]). Предположим сначала, что коэфициент B не равен нулю; тогда можно повторить предыдущее рассуждение, т. е. решить уравнение (58) относительно y:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}. \qquad (58')$$

Это есть уравнение вида (53), т. е. уравнение прямой с начальной ординатой $-\frac{C}{B}$ и подъемом $-\frac{A}{B}$. Займемся теперь оставленным в стороне случаем, когда $B = 0$; уравнение сводится к неполному:

$$Ax + C = 0,$$

где $A \neq 0$; оно может быть поэтому представлено в виде:

$$x = -\frac{C}{A},$$

и следовательно [ср. уравнение (52)] также выражает прямую, но только теперь прямую, параллельную оси Y-ов (например уравнение $3x + 7 = 0$ выражает прямую, параллельную оси Y-ов и отстоящую от нее на расстояние $\frac{7}{3}$ влево). Итак, мы приходим к важному выводу:

Всякое уравнение первой степени (полное или неполное) имеет своим графиком прямую линию.

---

[1]) Исключенным будем считать только тот случай, когда $A = B = 0$, так как тогда уравнение либо вовсе не имеет решений (как, например, $0 \cdot x + 0 \cdot y + 5 = 0$), либо превращается в тождество $(0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 = 0)$.

Попутно получен еще один результат, который найдет себе применение в дальнейшем: если прямая задана уравнением (58), то *подъем ее равен взятому с обратным знаком отношению коэфициента при x к коэфициенту при y*.

$$\boxed{m = -\frac{A}{B}.} \tag{59}$$

Например, подъем прямой $6x + 11y - 18 = 0$ равен $\left(-\frac{6}{11}\right)$; подъем прямой $5x - 2y - 10 = 0$ равен $\frac{5}{2}$ и т. п.

Теперь, когда установлено, что всякое уравнение первой степени изображается прямой линией, спросим себя, как наилучшим образом построить эту линию по данному ее уравнению. Всякую линию мы можем (приближенно) строить по точкам, если только известно ее уравнение [§ 17, табл. (25) и относящийся сюда текст]. Но для прямой линии задача упрощается, и построение может быть сделано точным благодаря тому обстоятельству, что прямая вполне определяется уже двумя своими точками. В качестве таких двух точек можно, например, брать (и в большинстве случаев этот прием наиболее практичен) точки пересечения прямой с осями OX и OY. Координаты этих точек легко определяются из уравнения, как мы это видели раньше и как еще раз покажут следующие примеры.

Пример 1. *Построить прямую, выражаемую уравнением*

$$5x - 8y - 28 = 0.$$

Решение. Чтобы найти точку пересечения с осью X-ов, подставляем в уравнение $y = 0$ и находим $x = 5{,}6$. С другой стороны, при $x = 0$ имеем $y = -3{,}5$.

Строим точки $(5{,}6; 0)$, $(0; -3{,}5)$ и соединяем их прямой.

Этот способ построения оказывается неприменимым только в том случае, когда среди коэфициентов A, B, C в уравнении (58) имеются равные нулю. Но тогда задача упрощается, так как прямая либо параллельна одной из координатных осей (при $A = 0$ или $B = 0$), либо проходит через начало (при $C = 0$). К этому последнему случаю относится:

Пример 2. *Построить прямую по уравнению*

$$4x + 9y = 0.$$

Решение. Одна из точек прямой известна, — это начало координат. Остается найти вторую точку, координаты которой мы получим из уравнения, полагая в нем, например, $y = 2$, откуда $x = -4{,}5$. Проводим прямую через точки $(0, 0)$ и $(-4{,}5; 2)$.

Наконец, построение прямой по точкам пересечения ее с осями может оказаться, хотя и выполнимым, но технически затруднительным вследствие того, что эти точки обе будут слишком близкими к началу координат (например в случае уравнения $45x - 38y = 1$, при некрупном масштабе). Здесь также выход будет заключаться в том, чтобы вычислить из уравнения координаты двух точек, более удаленных от начала.

Задачи[1]

158. Вычислить (устно) подъемы следующих прямых: 1) $2x + y - 3 = 0$; 2) $8x - 3y - 2 = 0$; 3) $9x + 6y + 11 = 0$; 4) $x - 7y + 20 = 0$; 5) $3x - 8y = 0$; 6) $11y - 18 = 0$; 7) $4x + 3 = 0$; 8) $6x = 5y - 8$.

159. Найти начальную абсциссу и начальную ординату прямой $10x - 9y = 33$.

160. Построить прямые: 1) $12x + 5y - 24 = 0$; 2) $3x + 4y + 24 = 0$; 3) $2x - 3y - 11 = 0$; 4) $5x = 2y$; 5) $2x + 7 = 0$; 6) $22x - 35y = 2$; 7) $x + 12y = 46$.

161. Показать, что прямые $8x - 12y + 35 = 0$ и $15y - 10x + 24 = 0$ параллельны (сверить с чертежом).

162. Показать, что прямые $4x + 14y - 15 = 0$ и $21x - 6y + 20 = 0$ взаимно перпендикулярны (сверить с чертежом).

163. Показать, что прямые $7x - 9y + 15 = 0$ и $13x + 12y - 20 = 0$ пересекаются на оси Y-ов.

164. Привести уравнение (58) к виду (56). Всегда ли возможно это сделать?

§ 31. Методы, применяемые при составлении уравнений. То обстоятельство, что нам заранее известна общая форма уравнения всякой прямой, открывает еще одну возможность решать задачи, в которых требуется составить уравнение прямой по тем или иным данным. Речь идет о так называемом „методе неопределенных коэфициентов", который применялся уже Декартом в его „Геометрии". Мы дадим понятие об этом методе на примере, относящемся к прямой линии, но заметим, что наибольшую пользу он приносит при изучении кривых. Здесь сделаем обзор тех методов, какими мы уже пользовались в задачах на составление уравнений. В качестве примера возьмем задачу, уже решенную

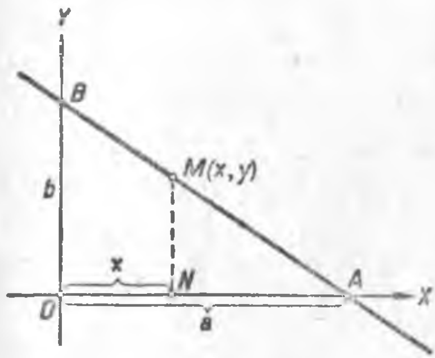
Составить уравнение прямой по ее начальной абсциссе a и начальной ординате b (предполагаем, что $a \neq 0$ и $b \neq 0$)

1-е решение (вывод уравнения из чертежа). Берем на прямой произвольную точку M (на чертеже 67 она взята в первой четверти) и обозначаем ее координаты (x, y). Опускаем из M перпендикуляр MN на OX и пользуемся подобием треугольников AOB и ANM для того, чтобы установить зависимость между текущими координатами x, y и данными величинами a, b:

$$\frac{NA}{OA} = \frac{NM}{OB},$$

или, переходя к координатам:

$$\frac{a - x}{a} = \frac{y}{b},$$



Черт. 67.

Это и есть требуемое уравнение, которое без труда может быть приведено к виду (56). Хотя примененный здесь способ решения быстро привел к цели, однако слабым его местом является использование специфических особенностей чертежа. Если изменить чертеж, то изменится несколько и рассуждение, однако можно было бы убедиться в том, что окончательный результат останется прежним (предлагаем учащемуся провести вывод для того, например, случая, когда точка M лежит на прямой AB ниже оси OX).

2-е решение (сведение задачи к ранее решенной). Так именно мы поступили при выводе уравнения (56) в § 29, когда свели задачу к составлению уравнения прямой по двум точкам.

3-е решение (метод неопределенных коэфициентов). Искомое уравнение должно иметь вид:

$$Ax + By + C = 0. \tag{60}$$

[1]) Отныне мы будем часто пользоваться следующим упрощением речи: вместо „прямая, определяемая уравнением $2x + 5y + 7 = 0$", будем говорить просто „прямая $2x + 5y + 7 = 0$" и т. п.

Задача наша состоит в том, чтобы подобрать такие значения коэфициентов A, B, C, при которых уравнение (60) выражало бы прямую с заданными начальной абсциссой a и начальной ординатой b. Важно уяснить себе с самого начала, что неизвестными в нашей задаче являются именно коэфициенты A, B, C (а отнюдь не x и y!) — отсюда и название „метод неопределенных коэфициентов". Для того чтобы получить уравнения, которым подчиняются неизвестные A, B, C, запишем требования, чтобы прямая уравнения (60) 1) проходила через точку $(a, 0)$, 2) проходила через точку $(0, b)$:

$$Aa + B\cdot 0 + C = 0, \quad A\cdot 0 + Bb + C = 0,$$

короче:

$$Aa + C = 0, \quad Bb + C = 0.$$

Мы получили два уравнения для трех неизвестных A, B, C. Благодаря *однородности* этих уравнений отсюда можно определить отношения двух неизвестных к третьему, например:

$$\frac{A}{C} = -\frac{1}{a}, \quad \frac{B}{C} = -\frac{1}{b}\ ^{1)}.$$

Большего нам и не требуется, так как уравнение (60) также может быть преобразовано к такому виду, при котором оно будет содержать только $\frac{A}{C}$ и $\frac{B}{C}$:

$$\frac{A}{C}x + \frac{B}{C}y + 1 = 0$$

Подставляя сюда найденные для $\frac{A}{C}$ и $\frac{B}{C}$ значения, получим:

$$-\frac{x}{a} - \frac{y}{b} + 1 = 0, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

т. е. снова уравнение (56).

Задача.

163. Найти методом неопределенных коэфициентов уравнение прямой, соединяющей точки $(5, -2)$ и $(3, 4)$.

§ 32. Задачи, в которых прямые задаются своими уравнениями. 1. Угол между двумя прямыми.

Если известны уравнения двух прямых:

$$Ax + By + C = 0 \tag{61}$$
$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

то отсюда легко могут быть определены их подъемы m и m_1 [см. формулу (59)]:

$$m = -\frac{A}{B}, \quad m_1 = -\frac{A_1}{B_1}. \tag{62}$$

А так как, зная подъем двух прямых, мы можем определить угол между ними (§ 14), в частности выяснить, будут ли эти прямые параллельны или перпендикулярны, то теперь открывается возможность решать вопросы этого рода на основании уравнений (61).

---

1) Мы без оговорок делим здесь на C, так как из условия задачи следует, что $C \neq 0$ (прямая не проходит через начало координат). В других аналогичных задачах возможность $C = 0$ должна быть предметом дополнительного исследования.

Начнем с условия параллельности [формула (18)]; подставляя сюда значения m и m_1 из (62), найдем:

$$\frac{A}{B}=\frac{A_1}{B_1}$$

или в несколько измененной форме:

$$\boxed{\frac{A}{A_1}=\frac{B}{B_1}} \quad \text{(условие параллельности).} \qquad (63)$$

Итак, *признаком параллельности двух прямых, заданных своими уравнениями, является пропорциональность коэфициентов при текущих координатах*. Например, без долгих вычислений заключаем, что прямые

$$3x+5y-12=0 \quad \text{и} \quad 30x+50y+63=0$$

параллельны (ср. с задачей 161).

Примечание. Строго говоря, условием (63), как и прежним (18), характеризуется „параллельность в широком смысле слова", т. е. одинаковость направлений двух прямых, причем не исключается возможность слияния этих прямых в одну. Например, уравнения

$$3x+5y-12=0 \quad \text{и} \quad 30x+50y-120=0$$

удовлетворяют условию (63); но нетрудно заметить, что эти уравнения выражают попросту одну и ту же прямую, как это станет очевидным, если сократить второе уравнение на 10. Легко видеть, что так будет всякий раз, как в уравнениях (61)

$$\frac{A}{A_1}=\frac{B}{B_1}=\frac{C}{C_1}. \qquad (64)$$

Если поэтому мы хотим охарактеризовать „параллельность в узком смысле слова" (т. е. исключить возможность слияния прямых), то должны вместо условия (63) написать:

$$\frac{A}{A_1}=\frac{B}{B_1}\neq\frac{C}{C_1}. \qquad (65)$$

Обращаясь к условию перпендикулярности двух прямых, подставим в уравнения (19) или (19'), стр. 29, значения m и m_1 из (62). После легких преобразований получим:

$$\boxed{AA_1+BB_1=0} \quad \text{(условие перпендикулярности),} \qquad (66)$$

т. е. *сумма (алгебраическая) произведений соответствующих коэфициентов при текущих координатах равна нулю*. Например, прямые

$$8x-12y+15=0 \quad \text{и} \quad 15x+10y-26=0$$

взаимно перпендикулярны, так как $8\cdot15+(-12)\cdot10=0$ (ср. с задачей 162).

6*

Наконец, займемся более общим вопросом — о нахождении угла между двумя прямыми, заданными уравнениями (61). И здесь решение подготовлено формулой (20): подставляя в нее значения m и m_1 из (62), найдем сначала

$$\operatorname{tg}\varphi = \pm \frac{-\frac{A_1}{B_1} + \frac{A}{B}}{1 + \frac{AA_1}{BB_1}},$$

а после упрощений:

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \pm \frac{AB_1 - A_1B}{AA_1 + BB_1}.} \qquad (67)$$

Пример. *Под каким углом пересекаются прямые*

$$3y - 2x - 12 = 0 \quad \text{и} \quad 5x + 4y - 15 = 0?$$

Решение:

$$\operatorname{tg}\varphi = \pm \frac{-2\cdot 4 - 5\cdot 3}{-2\cdot 5 + 3\cdot 4} = \mp 11{,}5.$$

Теперь можно по таблицам найти (приближенно).

$$\varphi = 85° \text{ (или } 180° - 85° = 95°).$$

Примечание. Заметим, что в формулах (63), (66), (67) вовсе не участвуют свободные члены C и C_1 уравнений (61). Это понятно, так как изменение свободного члена никак не влияет на направление прямой [а только на ее начальную ординату; см. уравнение (58')].

2. **Пересечение прямых.** Как мы уже видели (§ 27), для любых двух линий разыскание их общих точек становится чисто алгебраической задачей с того момента, как известны уравнения этих линий. В частности, чтобы найти точки пересечения двух прямых, надо решить систему из двух уравнений (61) первой степени с двумя неизвестными. Решение и исследование такой системы относятся к курсу алгебры. Поэтому здесь мы ограничимся тем, что дадим геометрическое истолкование трех основных случаев, какие могут представиться при решении системы (61), (чтобы не усложнять исследования, предполагаем коэфициенты A, B отличными от нуля).

a) Коэфициенты при неизвестных непропорциональны:

$$\frac{A}{A_1} \neq \frac{B}{B_1}.$$

Подъемы прямых различны, т. е. прямые непараллельны и не сливаются, значит имеют одну общую точку. Система (61) имеет вполне определенное решение.

b) Все три коэфициента первого уравнения пропорциональны соответствующим коэфициентам второго:

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}.$$

Прямые сливаются, т. е. имеют бесчисленное множество общих точек. В системе (61) одно уравнение есть следствие другого; таким образом, мы фактически имеем только одно уравнение с двумя неизвестными. Система оказывается неопределенной, т. е. имеет бесчисленное множество решений.

с) Коэфициенты при неизвестных пропорциональны, но отношение свободных членов не равно отношению соответствующих коэфициентов:

$$\frac{A}{A_1}=\frac{B}{B_1}\neq\frac{C}{C_1}$$

[см. (65)]. Прямые параллельны в узком смысле слова (не сливаются), а значит не имеют ни одной общей точки. Система (61) не имеет ни одного решения; уравнения, составляющие эту систему, несовместимы.

Числовые примеры, иллюстрирующие два последних случая, даны выше.

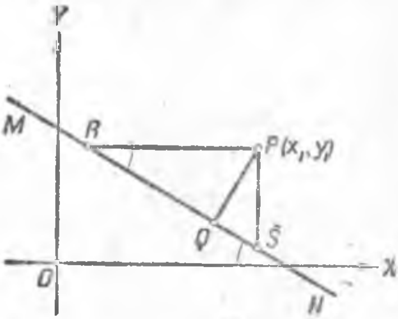
3. **Расстояние точки от прямой.** *Дана* (черт. 68) *точка P (x_1, y_1) и прямая MN, определяемая уравнением:*

$$Ax+By+C=0. \tag{68}$$

Найти расстояние точки от прямой, отсчитывая его: 1) по прямой, параллельной оси X-ов, 2) по прямой, параллельной оси Y-ов, 3) по перпендикуляру PQ, опущенному на прямую MN.

Решение. 1) Проведем через точку P прямую, параллельную оси X-ов, до пересечения с MN в точке R. Желая определить расстояние PR, будем искать координаты точки R. Ордината этой точки будет та же, что и у точки P, т. е. y_1. Зная ординату точки R, легко найти ее абсциссу из уравнения (68); подставляя в это уравнение y_1 вместо y, получим:

$$x_R=-\frac{By_1+C}{A}.$$



Черт. 68.

Теперь расстояние PR можно определить просто по формуле (4) § 4 (мысленно заменяем точки P и R их проекциями на ось X-ов):

$$PR=|x_P-x_R|=\left|x_1-\left(-\frac{By_1+C}{A}\right)\right|=\left|\frac{Ax_1+By_1+C}{A}\right|. \tag{69}$$

Итак, чтобы найти расстояние PR, достаточно подставить в левую часть уравнения (68) прямой координаты точки P вместо текущих, результат подстановки разделить на коэфициент при x и полученное частное взять по абсолютной величине.

2) Совершенно аналогичным образом найдем расстояние PS ($\parallel OY$). Подставляя в уравнение (68) x_1 вместо x, будем иметь:

$$y_S=-\frac{Ax_1+C}{B}.$$

Отсюда

$$PS=|y_P-y_S|=\left|y_1-\left(-\frac{Ax_1+C}{B}\right)\right|=\left|\frac{Ax_1+By_1+C}{B}\right|. \tag{70}$$

Сформулировать этот результат словами предоставляем читателю.

3) Обратимся теперь к вычислению длины перпендикуляра PQ (эту именно длину имеют в виду, когда говорят без дополнительных указаний о расстоянии

точки от прямой). С этой целью заметим, что угол QRP мы можем считать известным: это — острый угол между прямыми MN и OX, так что его тангенс равен взятому по абсолютной величине подъему прямой MN:

$$\operatorname{tg} \angle QRP = |m_{MN}| = \left|\frac{A}{B}\right|.$$

Из треугольника PQR, в котором гипотенуза PR уже известна, имеем:

$$PQ = PR \sin \angle QRP.$$

Но, зная тангенс угла, легко найти его синус:

$$\sin \angle QRP = \left|\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|.$$

Итак [см. равенство (69)]:

$$PQ = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + C}{A}\right| \left|\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right| = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|; \tag{71}$$

словами: чтобы найти расстояние (в обычном смысле, т. е. по перпендикуляру) точки от прямой, достаточно в левую часть уравнения прямой подставить координаты этой точки вместо текущих, результат подстановки разделить на корень квадратный из суммы квадратов коэфициентов при x, y и полученное частное взять по абсолютной величине.

Задачи.

166. Уравнения сторон AB, BC, CA треугольника соответственно:

$$x + 2y - 2 = 0, \quad 2x + y - 13 = 0, \quad x - 2y + 6 = 0.$$

Показать, что этот треугольник прямоугольный.

167. Показать, что прямая $8x + 5y = 20$ при пересечении с прямыми $21x - 15y = 40$ и $25y - 35x = 49$ образует равные внутренние накрестлежащие углы.

168. Найти угол α между прямыми $5x - 8y + 10 = 0$ и $4x + y - 6 = 0$.

169. Найти внутренние углы треугольника ABC, зная, что уравнения сторон AB, BC, CA соответственно:

$$3x - 4y + 12 = 0; \quad x + 2y - 4 = 0; \quad x - 3y - 3 = 0.$$

170. Найти точку пересечения прямых $10x - 7y - 32 = 0$ и $6x - 5y - 20 = 0$.

171. Для треугольника задачи **166** найти координаты вершин.

172. Показать, что прямые $3x + 8y - 2 = 0$, $19x + 9y + 29 = 0$ и $2x - 3y + 7 = 0$ проходят через одну точку.

173. Найти длины сторон треугольника, образованного прямыми

$$3x + 4y - 14 = 0; \quad 12x + 5y - 1 = 0; \quad 5x + 3y + 6 = 0.$$

174. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $(0, 4)$ и перпендикулярной к прямой $2x - 5y = 10$.

175. Написать уравнения высот треугольника, образованного прямыми

$$5x - 3y + 8 = 0; \quad 3x + 2y - 18 = 0; \quad 2x - 5y + 7 = 0.$$

Пользуясь уравнениями высот, показать, что они пересекаются в одной точке.

176. Найти проекцию точки $\left(1\frac{5}{6},\ 2\frac{1}{4}\right)$ на прямую $6x - 4y = 15$.

177. Найти расстояние точки $A(2, -5)$ от прямой $6x - 8y = 17$.

178. Формула (69) теряет смысл при $A = 0$, а формула (70) — при $B = 0$. Выяснить геометрическое значение этих случаев.

§ 33. Уравнение окружности; признаки, выделяющие его среди других уравнений второй степени. Мы уже видели (§ 18), что окружность с центром $C(h, k)$ и радиусом R может быть выражена уравнением:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=R^2. \tag{72}$$

После раскрытия скобок и объединения подобных членов это уравнение принимает вид:

$$x^2+y^2+mx+ny+p=0, \tag{73}$$

где каждое из чисел m, n, p может быть положительным, или отрицательным, или нулем. Наконец, мы можем еще (например с целью освобождения от дробей) умножить наше уравнение на какое-нибудь число $A(\neq 0)$, после чего оно представится в виде:

$$Ax^2+Ay^2+Mx+Ny+P=0. \tag{74}$$

Пример. Окружность с центром $\left(-\frac{5}{2},\ 4\right)$ и радиусом 6 выражается уравнением:

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+(y-4)^2=36,$$

или

$$x^2+y^2+5x-8y-\frac{75}{4}=0,$$

или

$$4x^2+4y^2+20x-32y-75=0.$$

Каждое из уравнений (72), (73), (74) может быть названо *„общим уравнением окружности"* в том смысле, что любую окружность мы можем представить уравнением одного (и притом любого) из этих трех видов. С другой стороны, мы знаем, что существуют еще другие кривые (эллипс, парабола, гипербола), которые также выражаются уравнениями второй степени. Возникает вопрос, как узнать по внешнему виду уравнения второй степени, принадлежит ли оно окружности или какой-нибудь другой линии.

Самое общее уравнение второй степени относительно x и y может быть написано в виде:

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Mx+Ny+P=0 \tag{75}$$

(три члена второго измерения, два — первого и один — нулевого). Конечно, не всякое уравнение второй степени будет содержать все шесть членов: оно может оказаться „неполным" — это означает, что некоторые из коэфициентов A, B, ... равны нулю [1]).

Сравнивая уравнение (74) с (75), мы видим, что уравнение (74) окружности есть неполное уравнение типа (75) и именно со следующими особенностями: 1) $B=0$, т. е. член, содержащий xy, отсутствует; 2) $C=A$, т. е. коэфициенты при квадратах координат одинаковы

[1]) До сих пор нам встречались только неполные уравнения второй степени. Например, в уравнении (74) отсутствует xy, в уравнении, полученном при решении задачи из „Геометрии" Декарта (§ 25), отсутствовал x^2.

(вполне — по абсолютной величине и по знаку). Докажем теперь обратное: *если в уравнении второй степени 1) отсутствует член с произведением координат, 2) коэфициенты при квадратах координат одинаковы, — то это уравнение выражает некоторую окружность* (с одной оговоркой, которая будет сделана позже). Доказательство будет состоять в следующем: мы обнаружим, что всякое уравнение второй степени с описанными особенностями может быть преобразовано к виду (72). Этим не только будет доказано, что наше уравнение выражает окружность, но даже будут найдены центр и радиус этой окружности. Начнем с числовых примеров.

Пример 1. Уравнение:

$$x^2+y^2-8x-14y+61=0.$$

Желая приблизить это уравнение к типу (72), 1) перенесем свободный член в правую часть, 2) в левой части выделим (скобками) члены, содержащие x, и отдельно — члены, содержащие y. При этом внутри каждой пары скобок оставим одно место пустым — для вставки добавочных членов:

$$(x^2-8x\qquad)+(y^2-14y\qquad)=-61.$$

Заполним теперь пустые места числами, подбирая их так, чтобы внутри каждой пары скобок получился точный квадрат двучлена; при этом, чтобы уравнение сохранило прежний смысл, мы должны к правой его части добавить те же числа, что и к левой:

$$(x^2-8x+16)+(y^2-14y+49)=-61+16+49.$$

Цель достигнута, так как последнее уравнение можно записать в виде:

$$(x-4)^2+(y-7)^2=2^2.$$

Сравнивая с выражением (72), видим, что полученное уравнение принадлежит окружности с центром в точке $(4, 7)$ и радиусом 2. Важно уяснить себе, что последнее уравнение отличается от первоначального только по внешнему виду: если в последнем уравнении раскрыть скобки и сделать приведение, то вернемся к первому.

Пример 2. Уравнение:

$$x^2+y^2-10x+3y-2=0.$$

Последовательные преобразования:

$$(x^2-10x\qquad)+(y^2+3y\qquad)=2;$$

$$(x^2-10x+25)+\left(y^2+3y+\frac{9}{4}\right)=2+25+\frac{9}{4};$$

$$(x-5)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=29\frac{1}{4}.$$

Окружность с центром $\left(5, -\frac{3}{2}\right)$ и радиусом $\sqrt{29\frac{1}{4}}$.

Пример 3. Уравнение:

$$3x^2+3y^2+18x-5y-4=0.$$

Сначала делим уравнение на 3 (общий коэфициент при x^2 и y^2):

$$x^2+y^2+6x-\frac{5}{3}y-\frac{4}{3}=0.$$

Далее:

$$(x^2+6x \qquad)+\left(y^2-\frac{5}{3}y \qquad\right)=\frac{4}{3};$$

$$(x^2+6y+9)+\left(y^2-\frac{5}{3}y+\frac{25}{36}\right)=\frac{4}{3}+9+\frac{25}{36};$$

$$(x+3)^2+\left(y-\frac{5}{6}\right)^2=\frac{397}{36}.$$

Окружность с центром $\left(-3,\frac{5}{6}\right)$ и радиусом $\frac{1}{6}\sqrt{397}$.

Пример 4. Уравнение:

$$x^2+y^2+2x-4y+9=0.$$

Преобразования:

$$(x^2+2x \qquad)+(y^2-4y \qquad)=-9,$$

$$(x^2+2x+1)+(y^2-4y+4)=-9+1+4,$$

$$(x+1)^2+(y-2)^2=-4.$$

Затруднение, с которым мы здесь сталкиваемся, заключается в том, что радиусу ожидаемой окружности мы должны были бы приписать *мнимое значение* $\sqrt{-4}$, — это не имеет геометрического смысла. Однако, всматриваясь в последнее полученное нами уравнение, мы замечаем, что оно (а значит и первоначальное уравнение) не только не представляет окружности, но и вообще — никакой другой линии. Действительно, какие бы (вещественные) значения мы ни подставляли в это уравнение вместо x и y, оно никогда не удовлетворится, так как сумма квадратов двух чисел (даже отрицательных) не может дать отрицательного числа (-4). Перед нами новое явление, заключающееся в том, что *существуют уравнения, не выражающие никакой линии*, ибо они не удовлетворяются никакими (вещественными) значениями координат.

Возвращаясь к общему уравнению (74), мы могли бы на буквах повторить те же преобразования, какие применялись в числовых примерах, и пришли бы к окончательному выводу, включающему в себя и ту оговорку, о которой упоминалось выше: *уравнение типа (74) всегда имеет своим графиком окружность, если только оно вообще имеет график.* В случае, когда уравнение типа (74) не имеет графика, говорят иногда, что оно выражает мнимую окружность; будем пока смотреть на это как на особый оборот речи.

Примечание 1. Если в уравнении (73) свободный член P отрицателен, то можно сразу сказать, что это уравнение представляет действительную окружность (почему?).

Примечание 2. Выполняя приведение уравнения (73) к виду (72) на буквах, можно заметить (впрочем, это хорошо видно и из числовых примеров), что *абсцисса и ордината центра суть не что иное, как взятые с обратными знаками половины коэфициентов соответственно при x и при y.*

Это указание приносит пользу при решении тех задач, где нас интересуют только координаты центра (а не радиус) окружности, заданной уравнением типа (73) или типа (74) [последний без труда приводится к типу (73)]; вычисление этих координат легко выполнить устно.

Задачи.

179. Найти координаты центра (C) и радиус каждой из следующих окружностей:

1) $x^2+y^2+6x-2y+7=0$; 2) $x^2+y^2+3x+y+1{,}5=0$;
3) $x^2+y^2+6y-10=0$, 4) $x^2+y^2-x+8y+20=0$;
5) $2x^2+2y^2-5x+4y-2=0$; 6) $4x^2+4y^2-7x+3y+9=0$;
7) $9x^2+9y^2-25=0$.

180. Найти центры окружностей:

1) $x^2+y^2+37x-42y-3=0$;
2) $5x^2+5y^2-114x+23y=0$.

181. Найти расстояние между центрами окружностей: $x^2+y^2+12x+2y=0$ и $x^2+y^2-3x+y-2=0$.

182 Выяснить относительное положение каждых двух из трех окружностей (пересекаются ли они, касаются ли):

1) $x^2+y^2-6x+2y+1=0$;
2) $x^2+y^2+2x+8y+13=0$;
3) $x^2+y^2-10y=0$.

Указание. Вычислить расстояния между центрами и радиусы.

183. Показать, что окружность $x^2+y^2-12x+12y+36=0$ касается обеих осей координат.

184. Дана окружность $x^2+y^2-11x-12y-3=0$. Написать уравнение концентрической окружности с радиусом 6.

§ 34. Прямая и окружность. Касательная. Разыскание общих точек прямой и окружности в том случае, когда обе эти линии заданы своими уравнениями, сводится, конечно, к решению системы двух уравнений с двумя неизвестными. Из этих уравнений одно — первой степени, другое — второй; исключая обычными способами одно неизвестное, получаем для второго квадратное уравнение (см. ниже примеры). Здесь могут представиться три случая: квадратное уравнение может иметь: 1) два вещественных различных корня, 2) равные (вещественные) корни, 3) мнимые корни.

Этому соответствуют три геометрических возможности: прямая и окружность 1) пересекаются в двух точках, 2) касаются (одна общая точка), 3) не имеют общих точек.

Пример. *Найти общие точки окружности $x^2+y^2=100$ с каждой из прямых:*

1) $3x-2y-34=0$; 2) $3x+4y-50=0$; 3) $x-2y+23=0$.

Решение. 1) Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=100, \\ 3x-2y-34=0 \end{cases}$$

по способу подстановки: из уравнения первой степени выражаем y через x:

$$y = \frac{3}{2}x - 17;$$

подставляем в уравнение второй степени и последовательно находим

$$x^2 + \left(\frac{3}{2}x - 17\right)^2 = 100, \quad x^2 + \frac{9}{4}x^2 - 51x + 289 = 100,$$

$$13x^2 - 204x + 756 = 0,$$

$$x = \frac{102 \pm \sqrt{102^2 - 13 \cdot 756}}{13} = \frac{102 \pm 24}{13};$$

квадратное уравнение имеет вещественные различные корни:

$$x_1 = \frac{102 + 24}{13} = \frac{126}{13} = 9\frac{9}{13}, \quad x_2 = \frac{102 - 24}{13} = 6.$$

Чтобы найти соответствующие значения y, воспользуемся снова формулой подстановки $y = \frac{3}{2}x - 17$ и получим:

$$y_1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{126}{13} - 17 = -\frac{32}{13} = -2\frac{6}{13}, \quad y_2 = \frac{3}{2} \cdot 6 - 17 = -8.$$

Итак, мы получили два решения:

$$1)\ x_1 = 9\frac{9}{13}, \quad y_1 = -2\frac{6}{13}; \qquad 2)\ x_2 = 6, \quad y_2 = -8;$$

это означает, что окружность с прямой пересекается в двух точках $\left(9\frac{9}{13}, -2\frac{6}{13}\right)$ и $(6, -8)$ (учащийся сделает чертеж).

2) Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ 3x + 4y - 50 = 0; \end{cases}$$

$$x = \frac{50 - 4y}{3}; \quad \left(\frac{50 - 4y}{3}\right)^2 + y^2 = 100;$$

$$25y^2 - 400y + 1600 = 0; \quad y^2 - 16y + 64 = 0; \quad y_1 = y_2 = 8.$$

Квадратное уравнение дает два равных корня. Из формулы $x = \frac{50 - 4y}{3}$ при $y = 8$ находим $x = 6$.

Система уравнений имеет только одно решение (можно сказать, два совпадающих решения):

$$x = 6, \quad y = 8,$$

т. е. прямая касается окружности в точке $(6, 8)$.

3) Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ x - 2y + 23 = 0; \end{cases}$$

$$x = 2y - 23; \quad (2y - 23)^2 + y^2 = 100; \quad 5y^2 - 92y + 42y = 0;$$

$$y = \frac{46 \pm \sqrt{46^2 - 5 \cdot 429}}{5} = \frac{46 \pm \sqrt{-29}}{5}.$$

Вычисление незачем продолжать: для y получились мнимые значения, это означает, что окружность и прямая не имеют общих точек. Прямая проходит вне окружности, не задевая ее, как в этом можно убедиться и из чертежа (достаточно точного.)

Остановимся подробнее на задачах, относящихся к касанию прямой линии с окружностью.

1. *На окружности $x^2 + y^2 = R^2$ дана точка $P(x_1, y_1)$. Написать уравнение прямой, которая касается окружности в этой точке.* Числовой пример: $R = 5$, $x = 4$, $y = 3$.

Решение проведем сначала на числовом примере. Прежде всего проверим, действительно ли точка $P(4, 3)$ лежит на окружности $x^2 + y^2 = 25$: подстановка $x = 4$, $y = 3$ в это уравнение дает утвердительный ответ.

Пусть (черт. 69) PQ — касательная; чтобы составить ее уравнение, заметим, что нам известна точка — именно $P(4, 3)$, — через которую эта прямая проходит. Кроме того нетрудно найти и подъем прямой PQ на основании того свойства касательной, что она перпендикулярна к радиусу OP, проведенному в точку касания.

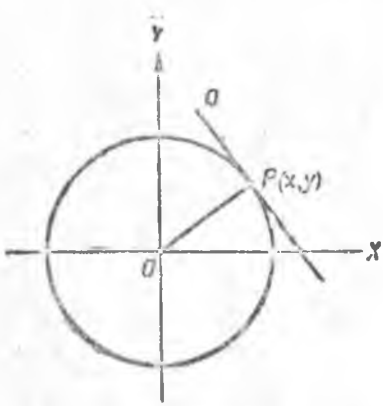
Действительно [см. формулу (14)],

$$m_{OP} = \frac{3}{4},$$

следовательно [см. (19)]

$$m_{PQ} = -\frac{4}{3}.$$

Теперь можем написать уравнение касательной PQ по точке и подъему:



Черт. 69.

$$y - 3 = -\frac{4}{3}(x - 4),$$

в упрощенном виде:

$$4x + 3y = 25.$$

Повторим этот вывод на буквах:

$$m_{OP} = \frac{y_1}{x_1},$$

следовательно

$$m_{PQ} = -\frac{x_1}{y_1}.$$

Уравнение прямой PQ:

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1); \quad y_1 y - y_1^2 = -x_1 x + x_1^2.$$

Перенося переменные члены в одну сторону, а постоянные — в другую, будем иметь:

$$x_1 x + y_1 y = x_1^2 + y_1^2.$$

На этом можно было бы остановиться; однако сделаем еще один шаг. Неслучайно в числовом примере свободный член в окончательном уравнении касательной совпал со свободным членом в уравнении окружности: так как точка (x_1, y_1) лежит на окружности, то ее координаты удовлетворяют уравнению окружности, т. е. $x_1^2 + y_1^2 = R^2$. Поэтому уравнение касательной может еще быть записано в виде

$$\boxed{x_1 x + y_1 y = R^2,} \tag{76}$$

удобном для запоминания благодаря своему родству с уравнением окружности (мнемоническое правило: если в уравнении (76) касательной стереть значки при x и y, отличающие координаты точки касания от текущих, то получится уравнение окружности).

2. *На окружности $(x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2$ дана точка $P(x_1, y_1)$. Написать уравнение прямой, которая касается окружности в этой точке.*

Решение немногим отличается от предыдущего. Пусть $C(h, k)$ — центр окружности, PQ — касательная. Имеем [см. (15)]:

$$m_{CP} = \frac{y_1 - k}{x_1 - h},$$

следовательно

$$m_{PQ} = -\frac{x_1 - h}{y_1 - k}.$$

Уравнение касательной (по точке и подъему):

$$y - y_1 = -\frac{x_1 - h}{y_1 - k}(x - x_1),$$

или:

$$(x_1 - h)(x - x_1) + (y_1 - k)(y - y_1) = 0. \tag{77}$$

Примечание. Если бы в только что решенной задаче окружность была задана не уравнением (72), а уравнением (73), то мы прежде всего определили бы из уравнения (73) координаты центра $\left(h = -\frac{m}{2},\ k = -\frac{n}{2}\right)$, зная которые, уже можно написать уравнение (77).

Задачи.

185. Найти общие точки окружности $x^2 + y^2 = 20$ и прямой $2x + y + C = 0$, полагая: 1) $C = 5$, 2) $C = 10$, 3) $C = 12$.

186. Показать, что прямая [illegible]$x + y = 13$ касается окружности $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$, и найти точку касания.

187. Дана окружность $x^2 + y^2 = 125$. Написать уравнения касательных, проведенных в точках $(11, -2)$, $(5, 10)$, $(-5, -10)$.

188. Найти уравнение касательной, проведенной к окружности $4x^2 + 4y^2 - 48x + 12y + 145 = 0$ в точке $\left(5, -\frac{1}{2}\right)$.

189. Показать, что уравнение (77) может быть преобразовано к виду:

$$(x_1 - h)(x - h) + (y_1 - k)(y - k) = R^2.$$

Указание: 1) воспользоваться равенством $(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 = R^2$, выражающим, что точка (x_1, y_1) лежит на окружности; 2) вместо этого можно исходить из уравнения (76) и формул (16).

190. Найти площадь треугольника, ограниченного осями координат и прямой $6x + 10y = 45$.

191. Вершины четыреугольника $ABCD$ находятся в точках $A(-2, -3)$, $B(-5, 8)$, $C(7, 1)$, $D(5, -4)$. Найти: 1) точку пересечения диагоналей AC и BD, 2) угол α между диагоналями.

192. Написать уравнение окружности, имеющей центр в точке $(39, -22)$ и проходящей через начало координат.

193. Написать уравнение окружности, проходящей через точку $(10, 8)$ и касающейся оси Y-ов в точке $(0, 3)$.

194. На окружности даны две диаметрально-противоположные точки $(-1, -2)$ и $(6, 1)$. Найти уравнение окружности.

195. Даны точки $A(-7, 2)$ и $B(1, 6)$. Написать уравнение прямой, перпендикулярной к прямой $4x - 7y = 14$ и делящей отрезок AB пополам.

196. Написать уравнение прямой, проходящей через центр окружности $2x^2 + 2y^2 - 14x + 8y - 113 = 0$ и пересекающей отрицательную полуось X-ов на расстоянии 5 от начала координат.

197. Найти уравнение окружности, проходящей через точку $\left(4, \frac{1}{2}\right)$ и касающейся обеих координатных осей.

198. Вершины треугольника находятся в точках $A(-1, 1)$, $B(4, 3)$ и $C(2, 6)$. Написать уравнения трех прямых, проведенных через каждую из вершин параллельно противоположной стороне.

199. Найти площадь треугольника, ограниченного прямыми $2x + 11y + 3 = 0$, $2x + y = 7$, $2x - 9y + 23 = 0$.

200. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $(5, 3)$ и пересекающей прямую $3x + 2y = 7$ под углом $45°$.

201. Две противоположные вершины квадрата $ABCD$ находятся в точках $A(3, -1)$ и $C(6, 4)$. Найти: 1) уравнения диагоналей AC и BD, 2) координаты вершин B и D, 3) уравнение круга, описанного около этого квадрата.

202. Показать, что прямые $3x - 4y + 9 = 0$ и $6x - 8y = 25$ параллельны, и найти расстояние между ними.

203. Показать, что окружности $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 107 = 0$ и $x^2 + y^2 - 1\,x - 12y - 15 = 0$, касаются друг друга. Решить задачу двумя способами: 1) отыскивая общие точки окружностей, 2) вычисляя радиусы и расстояния между центрами.

204. Найти уравнение окружности, описанной около треугольника с вершинами $A(3, 4)$, $B(2, 2)$, $C(5, 3)$. Решить задачу двумя способами: 1) методом неопределенных коэфициентов, подставляя координаты точек A, B, C в уравнение (72); 2) отыскивая центр как точку пересечения перпендикуляров, восставленных к сторонам треугольника в их серединах.

205. Дан прямоугольник со сторонами a и b. По какой линии должна двигаться точка для того, чтобы сумма квадратов ее расстояний от четырех сторон прямоугольника была все время равна квадрату диагонали последнего?

206. В круге радиуса R проведены диаметр AB и хорда AC. На продолжении хорды отложен отрезок $CD = BC$. По какой линии движется точка D, когда хорда AC вращается около точки A?

207. Решить задачу § 1 (черт. 1), следуя такому плану: принимаем RC и RB за положительные полуоси X-ов и Y-ов; считая известными $AR = m$ и $RC = n$, пишем уравнения прямых AB и BC; полагая $MQ = u$ (неизвестное), выражаем через u координаты точек P, N, Q; записывая, что $QN = d$, получаем квадратное уравнение для u.

208. В треугольник ABC вписываются всевозможные прямоугольники $MNPQ$, у которых сторона MN лежит на AC (черт. 1 § 1). Найти геометрическое место центров (симметрии) этих прямоугольников.

О ДОКАЗАТЕЛЬСТВАХ ОБЩНОСТИ НЕКОТОРЫХ ФОРМУЛ.

При выводе формул аналитической геометрии из чертежа часто возникает законное сомнение относительно общности этих формул: сохранят ли они свою силу, если предположим не такое, а иное расположение изучаемой фигуры относительно осей координат? Мы укажем сейчас прием, который позволяет во многих случаях разрешить это сомнение. Основная мысль заключается в следующем. Те формулы, которые действительно обладают общностью, должны иметь специальную алгебраическую структуру: они не должны нарушаться при переходе [по формулам (17) § 13] от координат x, y к любым новым координатам x', y'. Обратно, если наличие такой алгебраической структуры непосредственной проверкой установлено, то достаточно представить себе начало координат перенесенным в такую точку, чтобы изучаемая фигура по отношению к новым осям расположилась так, как в нашем выводе она предполагалась расположенной относительно старых осей. Тогда в новой системе координат формула во всяком случае будет справедлива (в силу доказанного); а переход от новой системы к старой не должен нарушить нашей формулы (это уже — в силу ее алгебраической структуры), следовательно она справедлива и в старой системе. Поясним эти общие рассуждения примерами.

Пример 1. Допустим, что формула для расстояния между двумя точками [§ 9, формула (11)]

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad \text{(I)}$$

была бы нами выведена только из чертежа, предполагающего, что обе точки A_1 и A_2 лежат в I четверти. Желая распространить этот вывод на случай любого расположения точек, убедимся прежде всего в том, что формула (I) имеет описанную выше алгебраическую структуру. Действительно, так как формула эта содержит только разности координат, то она не нарушится, если к обеим абсциссам (к обеим ординатам) прибавить или от них отнять одну и ту же величину [как это происходит при преобразовании координат по формулам (16), (17) § 13]. Пусть теперь точки A_1 и A_2 будут расположены как угодно относительно осей OX и OY (черт. 70; точка A_1 лежит во II, точка A_2 — в IV четверти). Всегда можно представить себе оси координат так перенесенными, *чтобы по отношению к новой системе* (x', y') точки оказались лежащими в I четверти. Если штрихами (') будем отличать новые координаты от старых, то в новых координатах во всяком случае имеем право написать

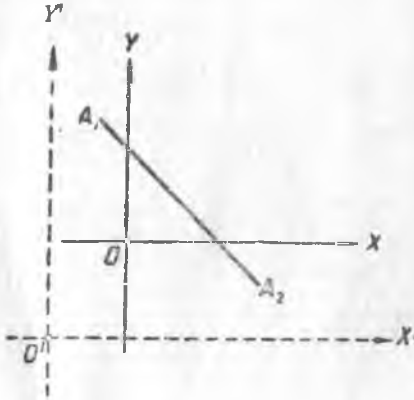
$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1)^2}, \qquad \text{(II)}$$

потому что для I четверти мы предположили формулу установленной.

Вернемся теперь к старой системе, для чего достаточно сделать подстановки:

$$x_1' = x_1 - h, \quad y_1' = y_1 - k,$$
$$x_2' = x_2 - h, \quad y_2' = y_2 - k.$$

В силу проверенных уже нами структурных особенностей формулы для расстояния, дело сведется к тому, что штрихи в формуле (II) отпадут и мы вернемся к формуле (I), справедливость которой, таким образом, будет доказана для самого общего случая.



Черт. 70.

Пример 2. Допустим, что формулы „деления отрезка в данном отношении“ [§ 10, формула (13)]

$$x = \frac{n_2x_1 + n_1x_2}{n_1 + n_2}, \qquad y = \frac{n_2y_1 + n_1y_2}{n_1 + n_2} \qquad \text{(III)}$$

были бы нами выведены только из чертежа, притом в предположении, что обе точки $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$ лежат в I четверти. Пусть теперь точки A_1 и A_2 расположены как угодно. Перенесем оси координат так, чтобы обе точки очутились в I четверти новой системы. В новых координатах мы имеем право написать:

$$x' = \frac{n_2 x'_1 + n_1 x'_2}{n_1 + n_2}$$

(опускаем вторую из формул (III), так как она отличается от первой только заменой буквы x на букву y). Вернемся теперь к старой системе по формулам:

$$x' = x - h, \quad x'_1 = x_1 - h, \quad x'_2 = x_2 - h;$$

получим [и здесь скажется особая алгебраическая структура соотношений (III)]:

$$x - h = \frac{n_2(x_1 - h) + n_1(x_2 - h)}{n_1 + n_2} = \frac{n_2 x_1 + n_1 x_2 - h(n_1 + n_2)}{n_1 + n_2} = \frac{n_2 x_1 + n_1 x_2}{n_1 + n_2} - h,$$

и окончательно

$$x = \frac{n_2 x_1 + n_1 x_2}{n_1 + n_2}.$$

Общность формул (III) доказана.

Пример 3. При выводе формул для площади треугольника [§ 15, формула (22) и задача 7б]:

$$\text{пл. } A_1A_2A_3 = \frac{1}{2}\left[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right],$$
$$\text{пл. } A_1A_2A_3 = \frac{1}{2}\left[y_1(x_3 - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_1)\right], \qquad \text{(IV)}$$

мы предполагали, что начало координат O лежит **внутри** треугольника. Пусть теперь треугольник расположен как угодно относительно начала O. Перенесем начало координат в новую точку O' так, чтобы последняя оказалась **внутри** треугольника. Для новой системы (x', y') согласно доказательству § 15 имеют силу формулы:

$$\text{пл. } A_1A_2A_3 = \frac{1}{2}\left[x'_1(y'_2 - y'_3) + x'_2(y'_3 - y'_1) + x'_3(y'_1 - y'_2)\right]; \qquad \text{(V)}$$
$$\text{пл. } A_1A_2A_3 = \frac{1}{2}\left[y'_1(x'_3 - x'_2) + y'_2(x'_1 - x'_3) + y'_3(x'_2 - x'_1)\right].$$

Вернемся теперь к старой системе по формулам:

$$x'_1 = x_1 - h, \quad x'_2 = x_2 - h, \quad x'_3 = x_3 - h,$$
$$y'_1 = y_1 - k, \quad y'_2 = y_2 - k, \quad y'_3 = y_3 - k.$$

Переход удобнее выполнить в два этапа: сначала преобразовать только абсциссы и при этом пользоваться второй из формул (V), а затем — ординаты, пользуясь первой формулой, в которой штрихи при x можно теперь стереть (специфическая особенность формул (IV), которая при этом используется, состоит снова в том, что первая содержит только разности ординат, а вторая — только разности абсцисс). Мы убедимся, что возвратились снова к формулам (IV), однако получающим теперь расширенное и уже совершенно общее значение.

2. 0, 1, $\sqrt{2}, -1, -\sqrt{2}$.
3. 3, $-2, -5, -7$.
4. 13, 8, 5, 3.
5. 6, 4, -2.
6. В точку с координатой (-2).
7. 1) $-6, -1, 0, 4, 7$;
2) $x' = -x$.
9. $AB = 12$, $AC = 16$, $AD = 6$, $BC = 4$, $BD = 6$, $CD = 10$.
10. 10 или -2.
11. $CD = 18$.
12.) Совпад., 2) против., 3) совпад., 4) против.
13. 6,5.
14. $-3,5$; 2,5; 0.
15. $x_A = -5$.
16. 1) Можно; 2) нельзя.
17. 7.
18. $-0,8$; 7,6.
19. $-5, -2, 1, 4$.
20. -7.
21. $1\frac{3}{8}$.
22. $3\frac{1}{3}$.
23. 33,4 *см* от точки A.
24. $x = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}$.
26. 1) На прямой, параллельной оси OX и отстоящей от нее на 3 ед. кверху;
2) на прямой, параллельной оси OX и отстоящей от нее на 5 ед. книзу.
27. 1) На прямой, параллельной оси OY и отстоящей от нее на 2 ед. вправо.
28. 1) На оси OX;
2) на оси OY.
29. 1) В I и III четвертях на биссектрисе угла между осями;
2) во II и IV четвертях на (другой) биссектрисе угла между осями.
30. 1) $(6, -4)$;
2) $(-6, 4)$;
3) $(-6, -4)$.
31. 1) $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$;
2) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, $\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;
3) $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
33. 10; $\sqrt{34}$; $\sqrt{20}$; 3,82.
34. 1) 13;
2) $3\sqrt{5}$;
3) $\sqrt{41}$;
4) 19,5.
35. $|a - b|\sqrt{2}$.
36. 10; $\sqrt{130}$; $\sqrt{10}$.
37. $AC = BC = \sqrt{145}$.
38. $A\ {}^2 = 52$, $BC^2 = 65$, $AC^2 = 13$; $52 + 13 = 65$.
39. $\left(1\frac{19}{22}, 0\right)$.
40. (2, 9) или $(-5, 2)$.
41. $\left(5\frac{1}{2}, 1\right)$; $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$; (0, 6).
42. $\frac{1}{2}\sqrt{153}$.
43. $(-3, -5)$.
44. 2, 4).
45. (2,2; 1,4); (3,4; 0,8); (4,6; 0,2); (5,8; $-0,6$).
46. $\frac{30\sqrt{2}}{7}$.
47. 0; $\sqrt{3}$; $-\sqrt{3}$.
48. ∞; tg 20°; $-$tg 20°.
49. 2,5; $-\frac{1}{2}$; 1.
51. В обоих случаях подъемы равны по абсолютной величине и противоположны по знаку.
52. 3 5.
53. $-0,5$.
54. 0,3; $\frac{5}{9}$; -2.
55. $m_{AB} = m_{CD} = -\frac{2}{3}$.

56. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{4}{3}$;

$\operatorname{tg}\ 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{4}{3}$.

57. $A(1, 5)$; $B(-7, 6)$; $C(-2, 2)$; $D(0, -2)$; $O(-5, 2)$.

58. $(2, -5)$.

59. В точку $(-4, 3)$.

60. $m_{AB}=m_{CD}=-\frac{2}{3}$.

61. $m_{AB}=m_{CD}=-\frac{5}{3}$;

$m_{AD}=m_{BC}=\frac{7}{6}$.

62. Середина AB — в точке $M\left(-\frac{13}{2}, \frac{5}{2}\right)$; середина CD — в точке $N\left(\frac{7}{2}, -5\right)$; $m_{MN}=-\frac{3}{4}=m_{AD}=m_{BC}$. Впрочем, достаточно убедиться в том, что $AD \parallel BC$, и затем сослаться на свойства средней линии трапеции.

63. $m_{AB}\cdot m_{BC}=\frac{5}{2}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)=-1$.

64. $m_{AC}\cdot m_{BD}=\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=-1$.

65. -2; $-0,1$; 2.

66. $\operatorname{tg}\varphi=\pm 2$; $\varphi=63°30'$ или $116°30'$ (прибл.).

67. Прибл. $A=22°50'$, $B=104°$, $C=53°10'$.

Указание. Первоначально для каждого из углов получается по два возможных значения (для угла A, например, $22°50'$ или $157°10'$ и т. д.). Окончательный выбор должен быть сделан с таким расчетом, чтобы $A+B+C=180°$, точнее — чтобы сумма $A+B+C$ отличалась от $180°$ не больше, чем это допускается точностью таблиц и наших вычислений.

68. Прибл. $58°40'$ или $121°20'$.

69. Положить $x_3=y_3=0$.

70. Круговой порядок, обратный тому, который изображен на схеме черт. 35.

71. Трапеция $A_1P_1P_3A_3$ имеет основаниями y_1 и y_3, высотой (x_3-x_1), следовательно

пл. $A_1P_1P_3A_3=\frac{1}{2}(y_1+y_3)(x_3-x_1)$

и т. д.

72. 20,5 (кв. ед.).

73. 45 (кв. ед.).

74. Площадь $=1$ кв. ед. Точки лежат почти на одной прямой.

75. Подстановка в выражение для площади треугольника дает нуль.

76. 24,5 (кв. ед.).

77. $4\frac{11}{13}$; 12,6; $\frac{7}{2}\sqrt{2}\approx 4{,}95$.

Указание. Предварительно найти площадь (лучше — удвоенную) треугольника.

78. $A(0,0)$; $B(a, 0)$; $C\left(\frac{3}{2}a, a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $D(a, a\sqrt{3})$, $E(0, a\sqrt{3})$, $F\left(-\frac{a}{2}, a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

79. Указание. Убедиться в том, что прямые OA и OB имеют одинаковый подъем.

80. 1) $AB=\sqrt{17}$ и т. д.; получается $AB+BC=AC$;

2) $m_{AB}=m_{AC}=\frac{1}{4}$;

3) подстановка в формулу (22) даст для площади величину 0.

81. Не лежат.

82. 1) Вычисление обнаруживает, что $AC^2=AB^2+BC^2$; применяем теорему, обратную пифагоровой; 2) $m_{AB}\cdot m_{BC}=-1$.

84. $(-2, 0)$.

Указание. Воспользоваться теоремой: середины диагоналей параллелограма совпадают. Другой способ: если $D(x, y)$ — искомая вершина, то запись требований, чтобы $CD \parallel AB$ и $BC \parallel AD$, дает два уравнения с двумя неизвестными.

85. $\sqrt{125}$; $m=\frac{2}{11}$.

Указание. Четвертая вершина параллелограма сил может быть найдена, как в предыдущей задаче.

86. $1{,}1\sqrt{10}$.

87. 6,2.

88. 1) $m_{AB}=-1$, в то время как подъем биссектрисы равен 1; середина отрезка AB — в точке $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$, т. е. на биссектрисе. 2) Если $M(x, x)$ — произвольная точка на биссектрисе, то

$$AM=\sqrt{(x+5)^2+(x-2)^2},$$

$$BM=\sqrt{(x-2)^2+(x+5)^2},$$

т. е.

$$AM=BM.$$

89. 6; $-1\frac{1}{8}$.

90. Указание. Найти углы треугольника.

91. $\left(1\frac{9}{16};\ 4\frac{1}{8}\right)$.

92. $\left(2\frac{13}{111},\ 1\frac{3}{37}\right)$.

93. 1) $C(6; 8{,}8)$.

Указание. Искомая точка $C(6, y)$; записать, что подъемы прямых AC и BC равны. 2) $D(-7, 1)$.

94. $\operatorname{tg}\angle DAC = \operatorname{tg}\angle CAB = \frac{1}{8}$.

95. $\frac{1}{3}\sqrt{170}$; $\frac{1}{3}\sqrt{200}$; $\frac{1}{3}\sqrt{50}$.

96. $(-0{,}1; 0{,}2)$.

Указание. Если $M(x, y)$ — искомая точка, то $MA=MB$ и $MC=MD$. Записать эти равенства в координатах и решить два уравнения с двумя неизвестными.

97. Центр (6,05; 3,05); радиус $=\sqrt{25{,}705}\approx 5{,}07$.

Указание. Решить систему уравнений:
$(x-3)^2+(y+1)^2=(x-2)^2+y^2=(x-1)^2+(y-2{,}6)^2$.

98. AB — в отношении 2:3, CD — в отношении 4:1.

Указание. Всякое отношение можно представить в виде $\lambda:1$; решить систему уравнений:

$$\frac{-7+3\lambda}{1+\lambda}=\frac{5-5\mu}{1+\mu},$$
$$\frac{1+16\lambda}{1+\lambda}=\frac{3+8\mu}{1+\mu}.$$

99. (55, 20).

Указание. Разбить фигуру на два прямоугольника (для проверки сделать эту разбивку вторым способом).

100. 1-й способ: показать, что можно найти точку, равноотстоящую от всех четырех (ср. с задачей 98); 2-й способ (лучший): показать, что, например, отрезок AC виден из точек B и D под одним и тем же углом (или под углами, дающими в сумме 180°).

101. 45° или 135°.

Указание. Найти точку пересечения каждой биссектрисы со стороной треугольника (ср. с задачей 46).

102. Пара прямых, делящих пополам 4 угла между данными прямыми.

103. Дуги двух сегментов, вмещающих угол α и имеющих отрезок AB общей хордой (фигура имеет форму восьмерки, если угол α острый).

104. 1) Прямая; 2) гипербола (равносторонняя); 3) парабола (см. Киселев, Алгебра, часть II, 1933 г., § 33, 38, 50, 90).

105. Окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 10.

106. $x^2+y^2-2x-6y-6=0$. Пересечение с осью OX в точках с абсциссами $x_1=1+\sqrt{7}\approx 3{,}6$, $x_2=1-\sqrt{8}\approx -1{,}6$; с осью OY — в точках с ординатами $y_3=3+\sqrt{15}\approx 6{,}9$, $y_4=3-\sqrt{15}\approx -0{,}9$.

Указание. Желая найти точки пересечения с осью OX, полагаем в уравнении окружности $y=0$.

107. 1) $x^2+y^2-8x-4y+11=0$;
2) $x^2+y^2+6x+10y-15=0$;
3) $x^2+y^2-8x-9=0$;
4) $x^2+y^2-3x+4y=0$.

108. $x^2+y^2+8x-8y+16=0$.

109. Уравнение $\left(x+\frac{M}{2}\right)^2+y^2=\frac{M^2}{4}-P$ после преобразований переходит в $x^2+y^2+Mx+P=0$.

110. 1) $14x+4y+5=0$; 2) $y=4$.

111. 1) $x^2+y^2+7{,}2x-57{,}6=0$ — окружность с центром $(-3{,}6;\ 0)$ и радиусом 8,4; 2) полагая в уравнении $y=0$, находим для x квадратное уравнение, положительный корень которого дает точку пересечения (4,8; 0).

112. $x^2+y^2-\frac{21}{2}x+21y+\frac{135}{2}=0$ — окружность с центром $\left(\frac{21}{4}, -\frac{21}{2}\right)$ и радиусом $\frac{15}{4}\sqrt{5}$.

Указание. Для определения центра и радиуса привести уравнение окружности к виду (29).

113. $x^2=5{,}4y$.

114. $\left(0, \frac{2}{3}\right)$.

115. 1) $x^2-4x-18y+31=0$;
2) $x^2-4x-8y+36=0$;
3) $x^2-4x+4y-24=0$.

116. $y^2-14x+2y+8=0$.

117. 1) $\frac{x^2}{36}+\frac{4y^2}{49}=1$;
2) $\frac{4x^2}{25}+\frac{y^2}{6}=1$;
3) $\frac{x^2}{116}+\frac{y^2}{16}=1$.

118. $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{49}=1$.

119. $55x^2+64y^2-550x-384y-1269=0$ или

$$\frac{(x-5)^2}{64}+\frac{(y-3)^2}{55}=1.$$

120. $\left(5+\frac{8}{55}\sqrt{2530}, 0\right)$;
$\left(5-\frac{8}{55}\sqrt{2530}, 0\right)$;

$\left(0,3+\frac{1}{8}\sqrt{2145}\right)$; $\left(0,3-\frac{1}{8}\sqrt{2145}\right)$.

121. 1) $\frac{4x^2}{49}-\frac{y^2}{18}=1$;

2) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{39}=1$.

122. 1) $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{40}=1$;

2) с осью OX не пересекается; с осью OY — в точках $(0, 4)$ и $(0, -4)$.

123. Точка C чертежа 56 и проекция точки N на прямую AC.

126.

	A	B	C	D	E	F
ρ	0	a	$a\sqrt{3}$	$2a$	$a\sqrt{3}$	a
φ	неопред.	0	30°	60°	90°	120°

127. $AB=\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$.

128. $(-1, 4)$ и $(-1{,}8; 5{,}6)$.

129. Точки A, D, O.

130. 1-я, 3-я, 5-я. Для того чтобы линия проходила через начало координат, необходимо и достаточно, чтобы ее уравнение удовлетворялось при $x=0, y=0$.

П р и м е ч а н и е. В этой книге значительное большинство уравнений состоит из членов вида Ax^my^n, где A — числовой коэфициент, m и n — положительные или равные нулю показатели. Для этого случая можно дать особенно простой признак того, что линия проходит через начало координат; в у р а в н е н и и с в о б о д н ы й (от x и y) ч л е н р а в е н нулю.

131. $\left(2\frac{1}{2}, 2\right)$.

132. $4x-7y=9$.

133. Если за начало координат взять середину отрезка AB, а ось X-ов направить по AB, то уравнение геометрического места $x^2+y^2=5$. Это — окружность, описанная из начала координат радиусом $\sqrt{5}$.

134. $x^4+2x^2y^2+y^4-32x^2+$ $+32y^2=A$, где A равно 1) 833, 2) 0, 3) -207.

135. 1) $(x+1)^2+(y-3)^2=40$; 2) $(-1\pm\sqrt{31}; 0)$ и $(0; 3\pm\sqrt{39})$.

136. 16.

137. Четыре точки

$$\left(\frac{5+\sqrt{5}}{4}, \pm\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}\right),$$
$$\left(\frac{5-\sqrt{5}}{4}, \pm\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\right).$$

138. На одной из ветвей гиперболы, имеющей фокусы в A и B ($MA-MB=$ расстоянию, на которое успевает распространиться звук за время, затрачиваемое пулей на полет из A в B).

139. $xy-2x-3y=0$.

140. $x^2-2xy+y^2-6x-2y+9=0$.

141. 1) $\frac{(x'+c)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;

2) $\rho=\frac{b^2}{a+c\cos\varphi}$.

У к а з а н и е. Преобразовать предыдущее уравнение по формулам (47); из полученного уравнения, квадратного относительно ρ, выразить ρ через φ (отбросить отрицательный корень), пользуясь для упрощения выкладок равенством $b^2+c^2=a^2$.

142. 1) $y+2=\frac{1}{\sqrt{3}}(x-4)$;
2) $x-y=6$;
3) $x=4$;
4) $x+y=2$.

143. 1) $y-6=\sqrt{3}(x-2)$;
$y-6=-\sqrt{3}(x-2)$;
2) $(2-2\sqrt{3}, 0)$; $(2+2\sqrt{3}, 0)$.

144. $5x-8y+14=0$.

145. $16x+6y=19$.

146. 1) $y=x\sqrt{3}+5$; 2) $y=x\sqrt{3}$; 3) $y=x\sqrt{3}-4$.

147. $3x+7y+14=0$.

148. $y=m(x-a)$.

149. 1) $6x+5y=14$;
2) $2x-3y+1=0$;
3) $x=2$.

150. Уравнение AC: $5x+2y=26$.

151. Уравнение медианы, проведенной из B. $x-20y+5=0$.

152. $y=-2x$.

153. 1) $x+2y+7=0$;
2) $4x-5y+2=0$;
3) $3x-7y+8=0$.

У к а з а н и е. Для вывода уравнения BD найти середину диагонали AC.

154. $2x-7y+6=0$.

155. $\frac{x}{7}+\frac{y}{4}=1$; $-\frac{x}{7}+\frac{y}{4}=1$ и т. д.

156. $x+y=7$ или $x-y=3$.

157. $x\cos 50^\circ+y\sin 50^\circ-4=0$.

158. 1) -2; 2) $\frac{8}{3}$;

3) $-\frac{3}{2}$; 4) $\frac{1}{7}$;

5) $\frac{3}{8}$; 6) 0;

7) ∞; 8) 1,2.

159. 3,3 и $-3\frac{2}{3}$.

161. $m = m_1 = \frac{2}{3}$.

162. $m = -\frac{2}{7}$, $m_1 = \frac{7}{2}$.

163. Общая начальная ордината, равная $\frac{5}{3}$.

164. $\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1$; возможно только при $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$.

165. $3x + y - 13 = 0$.

166. $BC \perp CA$.

167. Это следует из того, что 2-я и 3-я прямые параллельны $\left(\frac{21}{-35} = \frac{-15}{25}\right)$. Уравнение 1-й прямой — лишнее.

168. $\operatorname{tg}\alpha = 3\frac{1}{12}$.

169. $\operatorname{tg} A = \frac{1}{3}$, $\operatorname{tg} B = -2$, $\operatorname{tg} C = 1$.

170. $(2,5;\ -1)$.

171. $A(-2, 2)$, $B(8, -3)$, $C(4, 5)$.

172. Решая совместно два из уравнений, находим общую точку $(-2, 1)$ двух прямых; подстановкой в 3-е уравнение убеждаемся, что эта точка лежит и на третьей прямой.

173. 5, 13, $\sqrt{306}$.

174. $5x + 2y - 8 = 0$.

175. 1) $2x - 3y + 5 = 0$;
$3x + 5y - 27 = 0$;
$5x + 2y - 21 = 0$;
2) см. задачу 172.

176. $\left(3\frac{1}{3},\ 1\frac{1}{4}\right)$.

177. 3,5.

Указание. Сначала найти проекцию точки A на прямую (см предыдущую задачу). Можно также воспользоваться готовой формулой (71).

178. При $A = 0$ прямая MN чертежа 66 параллельна OX; точки R не существует.

179. 1) $C(-3, 1)$; $R = \sqrt{3}$;
2) $C\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$; $R = 1$;
3) $C(0, -3)$, $R = \sqrt{19}$;
4) мнимая окружность;
5) $C\left(\frac{5}{4},\ -1\right)$, $R = \frac{1}{4}\sqrt{57}$;
6) мнимая окружность;
7) $C(0, 0)$; $R = \frac{5}{3}$.

180. 1) $\left(-18\frac{1}{2},\ 21\right)$;
2) $(11,4;\ -2,3)$.

181. $\frac{1}{2}\sqrt{226}$.

182. 1-я и 2-я касаются друг друга; 1-я и 3-я пересекаются; 2-я и 3-я не имеют общих точек.

184. $4x^2 + 4y^2 - 44x - 43y + 121 = 0$.

185. 1) $(-2 + \sqrt{3}, -1 - 2\sqrt{3})$ и $(-2 - \sqrt{3},\ -1 + 2\sqrt{3})$;
2) касание в точке $(-4,\ -2)$;
3) нет общих точек.

186. $(5,\ -2)$.

187. 1) $11x - 2y = 125$;
2) $x + 2y = 25$;
3) $x + 2y + 25 = 0$.

188. $2x - 2y - 11 = 0$.

190. $16\frac{7}{8}$ (кв. ед.).

191. 1) $\left(2\frac{1}{2}, -1\right)$;
2) $\operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{74}{21}$.

192. $x^2 + y^2 - 78x + 44y = 0$.

193. $2x^2 + 2y^2 - 25x - 12y + 18 = 0$.

194. $x^2 + y^2 - 5x + y - 8 = 0$.

195. $7x + 4y + 5 = 0$.

196. $4x + 17y + 20 = 0$.

197. $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$.

198. $3x + 2y + 1 = 0$, $5x - 3y - 11 = 0$; $2x - 5y + 26 = 0$.

199. 20 (кв. ед.).

200. $x + 5y = 20$ и $5x - y = 22$.

201. 1) $5x - 3y = 18$, $3x + 5y = 21$
2) $(2, 3)$ и $(7, 0)$;
3) $x^2 + y^2 - 9x - 3y + 14 = 0$.

202. 4,3.

Указание. Найти расстояние между точками пересечения данных прямых с прямой, перпендикулярной к ним (проведенной, скажем, через начало координат).

203. Касание (внутреннее) в точке $(12, 5)$.

204. $x^2 + y^2 - 7x - 5y + 16 = 0$.

205. По окружности, описанной около прямоугольника. Если две стороны последнего принять за оси координат, то уравнение окружности: $x^2+y^2-ax-by=0$.

206. По дуге окружности, проходящей через A и B и имеющей центр на первой окружности.

Указание. Принимая AB за ось X-ов, а середину отрезка AB за начало координат, выразить координаты точки D через вспомогательное переменное — угол $\alpha=\angle CAD$. Исключив угол α, получим уравнение x^2+ $+y^2-2Ry=R^2$.

207. Уравнения прямых BC и AB суть соответственно $\frac{x}{n}+\frac{y}{h}=1$ и $-\frac{x}{m}+\frac{y}{h}=1$; координаты точек

$$P\left[n\left(1-\frac{u}{h}\right),\ u\right],\quad N\left[n\left(1-\frac{u}{h}\right),\ 0\right],$$

$$Q\left[-m\left(1-\frac{u}{h}\right),\ u\right];$$

$$QN^2=(m+n)^2\left(1-\frac{u}{h}\right)^2+u^2$$

(можно заменить здесь $m+n$ через $AC=b$); квадратное уравнение

$$b^2\left(1-\frac{u}{h}\right)^2+u^2=d^2$$

отличается только буквой u вместо x от того, которое получилось бы из уравнений (a), (b) § 1 в результате исключения y.

208. Прямолинейный отрезок, соединяющий середину стороны AC с серединой высоты BK.

Указание. Пользуясь системой координат и обозначениями, примененными при решении предыдущей задачи, находим координаты середины отрезка

$$NQ: x=\frac{n-m}{2}\left(1-\frac{u}{h}\right),\quad y=\frac{u}{2}$$

Исключая отсюда u, находим уравнение первой степени, связывающее x с y.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ ТОЧКИ.

ГЛАВА ВТОРАЯ.

УРАВНЕНИЯ ЛИНИЙ.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

ПРЯМАЯ ЛИНИЯ. ОКРУЖНОСТЬ.

Приложение.

Ответственные редактора *В. Н. Молодший* и *С. Ю. Калецкий*
Технический редактор *И. И. Кутин*
Чертежник *Н. А. Меделяновский*

Сдано в набор 8/VI 1934 г. Подписано к печ. 23/VII 1934 г.

Формат бумаги 62×94 1/16. Бумага № 2 с фабрики «Герой труда»
Тираж 25 000 экз.
Изд. листов 6½. Бум. листов 3¼. Авторск. листов 8¾.
109 344 печ. зн. в 1 бум. листе.

У-21. Учпедгиз № 6202. Заказ № 2749.
Уполн. Главлита № Б-38378

Набрано 1-я Образцовая типография Огиза РСФСР треста «Полиграфкнига», Москва, Валовая 28.
Печатано с матриц в 17 ф-ке Национальной книги треста «Полиграфкнига», Москва, Шлюзовая набережная, 10.