Über die Erweiterung des Definitionsbereiches differenzierbarer Funktionen

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Ludwig-Maximilians-Universität
München

Eingereicht am 7. Oktober 1938

von

Karl Seebach, Studienassessor
aus München

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH 1939

Über die Erweiterung des Definitionsbereiches differenzierbarer Funktionen

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Ludwig-Maximilians-Universität
München

Eingereicht am 7. Oktober 1938

von

Karl Seebach, Studienassessor
aus München

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH 1939

Berichterstatter: Geheimrat Prof. Dr. H. Tietze

Tag der mündlichen Prüfung: 10. November 1938

ISBN 978-3-662-28093-5 ISBN 978-3-662-29601-1 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-29601-1

Sonderabdruck aus „Mathematische Annalen", Band 116, Heft 5

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH 1939

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

1. Das Problem der Erweiterung des Definitionsbereiches stetiger Funktionen ist bereits in mehreren Arbeiten untersucht worden [1]). Es handelt sich dabei um folgendes: Im n-dimensionalen Raum $\mathfrak{R}_n$ sei eine abgeschlossene Punktmenge gegeben und eine reelle Funktion, die auf dieser Menge erklärt und stetig ist. Es läßt sich zeigen, daß man immer eine im ganzen $\mathfrak{R}_n$ definierte und stetige Funktion angeben kann, die auf der gegebenen Menge mit der gegebenen Funktion übereinstimmt.

In der folgenden Arbeit soll nun das analoge Problem für differenzierbare Funktionen einer Veränderlichen behandelt werden [2]). Wir gehen aus

[1]) H. Tietze, Journ. f. Math. **145** (1915), S. 9; C. Carathéodory (nach H. Bohr), Vorl. üb. reelle Funkt. (1918), S. 617; L. E. J. Brouwer, Math. Annalen **79** (1918), S. 209; F. Hausdorff, Math. Zeitschr. **5** (1919), S. 296; Rado, Sitzber. math. nat. Abt. Bayer. Akad. Wiss. (1931), S. 81—84.

[2]) Wie ich von Herrn Prof. Tietze erfahre, von dem ich die Anregung zur vorliegenden Arbeit erhielt, hat er in einem Vortrag im Münchener Mathematischen Kolloquium am 7. 7. 1925 „Über Erweiterung des Definitionsbereiches differenzierbarer Funktionen" auf dieses Problem der Erweiterung (ein oder mehrmals) differenzierbarer Funktionen von einer oder mehreren Veränderlichen hingewiesen; vgl. Jahresber. D. M. V. **36** (1927), Abt. 2, S. 95.

von einer linearen abgeschlossenen Menge $\mathfrak{M}$, auf der eine reelle Funktion $f(x)$ gegeben und differenzierbar sei; d. h. in jedem Häufungspunkt x_0 von $\mathfrak{M}$ möge die Limesrelation bestehen

$$\text{(E)} \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0); \quad x \in \mathfrak{M}.$$

Gefragt wird nach der Existenz einer Funktion $F(x)$, die für den ganzen $\mathfrak{R}_1$ erklärt, differenzierbar und auf $\mathfrak{M}$ mit $f(x)$ identisch ist.

Diese Frage bleibt in jener allgemeinen Fassung nach wie vor noch ungelöst. Allerdings werden wir eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Möglichkeit einer solchen Erweiterung des Definitionsbereiches aufstellen. Es wird sich zeigen, daß es dabei einerseits auf die Verteilung der Stetigkeits- bzw. Unstetigkeitspunkte von $f'(x)$, andererseits auf gewisse, damit zusammenhängende Struktureigenschaften der gegebenen Menge ankommt. In manchen Fällen werden wir sehen, daß die genannte Bedingung erfüllt werden kann. Letzteres tritt z. B. immer dann ein, wenn die Ableitung $f'(x)$ auf $\mathfrak{M}$ stetig ist [3]) oder wenn ihre Unstetigkeitspunkte eine höchstens abzählbare Menge bilden (vgl. § 3). Man hat sogar noch die Möglichkeit, in den isolierten Punkten von $\mathfrak{M}$, für die ja eine Ableitung zunächst gar nicht definiert ist, den Wert von $f'(x)$ willkürlich vorzuschreiben, ohne daß dies für die Fortsetzbarkeit oder Nichtfortsetzbarkeit von Einfluß wäre (vgl. § 4). Hingegen ist es noch ungeklärt, ob die oben erwähnte Bedingung sich vielleicht immer erfüllen läßt oder nicht.

§ 1.

Die Funktion $f(x)$ wird ein Stück weit linear in die Lückenintervalle, für die sie zunächst nicht definiert ist, fortgesetzt.

2. Für die folgende Untersuchung sei also gegeben eine beliebige lineare, abgeschlossene Menge $\mathfrak{M}$; diese möge Definitionsbereich sein für eine reelle Funktion $f(x)$, die im Sinne von (E) auf $\mathfrak{M}$ differenzierbar ist. Wir werden in Zukunft anstatt (E) immer die gleichwertige, aber etwas bequemere Form schreiben:

$$\text{(1; 1)} \qquad \begin{gathered} f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0) + (x - x_0) \cdot \varepsilon(x; x_0) \\ \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x; x_0) = 0; \quad x \in \mathfrak{M}. \end{gathered}$$

[3]) In bestimmten Fällen, in denen außer der Stetigkeit von $f'(x)$ auf $\mathfrak{M}$ noch gewisse weitere Voraussetzungen gelten, ist die Erweiterung des Definitionsbereiches von $f(x)$ bereits von H. Whitney, Transact. of the Am. Math. Soc. **36** (1934), S. 63 und 369 nachgewiesen worden. Es wird nämlich dabei eine gewisse Gleichmäßigkeitsbedingung als erfüllt angenommen, die dafür sorgt, daß die Ableitung auch nach der Fortsetzung noch stetig ist. H. Whitney behandelt dann a. a. O. auch entsprechende Probleme für Funktionen von mehreren Veränderlichen [vgl. auch H. Whitney, Transact. of the Am. Math. Soc. **40** (1936), S. 309].

Zur Vereinfachung wollen wir $\mathfrak{M}$ als beschränkt voraussetzen. Das bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit; denn sonst zerlegen wir die Menge $\mathfrak{M}$ in abzählbar viele abgeschlossene Komponenten mit jeweils gemeinsamen Anfangs- und Endpunkten, und zwar so, daß sich diese Teilmengen im Endlichen nirgends häufen. Gelingt es dann, für jede solche beschränkte Teilmenge eine Funktion $F(x)$ zu konstruieren, die das Verlangte leistet, so erhält man daraus auch ohne weiteres eine Lösung für die Gesamtmenge $\mathfrak{M}$; denn die Differenzierbarkeit, die ja nach Annahme für jedes Teilintervall gesichert ist, kann im Gesamtbereich nicht verlorengehen, da sich ja die Teilintervalle nirgends häufen und die Werte von $f'(x)$ in den Anschlußstellen übereinstimmen sollten.

3. Sei nun $\mathfrak{J}$ das kleinste abgeschlossene Intervall, das $\mathfrak{M}$ enthält; die Komplementärmenge $\mathfrak{J} - \mathfrak{M}$ ist dann, falls wir vom trivialen Falle $\mathfrak{J} = \mathfrak{M}$ absehen, offen und läßt sich darstellen als Vereinigungsmenge von höchstens abzählbar vielen offenen, getrennten Intervallen $\mathfrak{i}_\nu$ — wir werden sie im folgenden häufig *Lückenintervalle* nennen:

$$\mathfrak{J} - \mathfrak{M} = \sum_\nu \mathfrak{i}_\nu. \tag{1; 2}$$

Die Funktion $f'(x)$ ist nach (1; 1) zunächst nur in den Häufungspunkten von $\mathfrak{M}$, deren Gesamtheit wir üblicherweise mit $\mathfrak{M}'$ bezeichnen, gegeben. Der Gleichmäßigkeit halber wollen wir den Definitionsbereich von $f'(x)$ auf die ganze Menge $\mathfrak{M}$ ausdehnen, indem wir die Funktionswerte in den isolierten Punkten ganz willkürlich ergänzen. Die Funktion $f'(x)$ ist also von jetzt ab, genau wie $f(x)$, auf $\mathfrak{M}$ definiert.

Nach diesen Vorbereitungen wollen wir unsere Fragestellung etwas genauer so formulieren: Gibt es eine Funktion $g(x)$ auf der Menge $\mathfrak{J} - \mathfrak{M}$ von der Eigenschaft, daß die durch (1; 3a) und (1; 3b) definierte Funktion $F(x)$

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad F(x) = f(x); && x \,\varepsilon\, \mathfrak{M}, \\ &\text{b)} \quad F(x) = g(x); && x \,\varepsilon\, \mathfrak{J} - \mathfrak{M}, \\ &\text{c)} \quad F'(x) = f'(x); && x \,\varepsilon\, \mathfrak{M} \end{aligned} \tag{1; 3}$$

der Forderung (1; 3c) genügt und auf $\mathfrak{J}$ differenzierbar ist [4]? $F(x)$ werden wir häufig kurz als „Fortsetzung" von $f(x)$ bezeichnen; entsprechend werden wir von „Fortsetzbarkeit" oder „Nichtfortsetzbarkeit" sprechen, je nachdem sich (1; 3) erfüllen läßt oder nicht.

4. Die oben eingeführte Funktion $g(x)$ muß jedenfalls in jedem Lückenintervall $\mathfrak{i}_\nu$ differenzierbar sein und stetig mit der vorgeschriebenen Steigung an die Randwerte in den Eckpunkten des Intervalls anschließen. Gleich-

[4]) Diese Forderung (1; 3c) folgt nicht schon aus a), da ja die Werte von $f'(x)$ auf $\mathfrak{M} - \mathfrak{M}'$ willkürlich festgesetzt wurden.

zeitig muß man aber, und darin liegt die einzige Schwierigkeit, auf die Häufungspunkte solcher Intervalle Rücksicht nehmen, damit in diesen die Differenzierbarkeit gewahrt bleibt. In dieser letzteren Hinsicht gilt: Füllen wir die einzelnen Zwischenintervalle linear aus, so strebt, wie wir jetzt zeigen werden, der Wert des Differenzenquotienten, wenigstens von der Häufungsseite her, gegen den im Häufungspunkt vorgeschriebenen Differentialquotienten. Allerdings hat man damit im allgemeinen noch keine Lösung des Problems; denn die Funktion $F(x)$ würde bei dieser Konstruktion in den Intervallendpunkten noch Ecken aufweisen, wenn nicht die Steigung des Intervalls gerade zufällig mit der vorgeschriebenen Tangentenrichtung in seinen Endpunkten übereinstimmen sollte. Diese letztere Schwierigkeit wird uns aber erst später (Nr. 5) beschäftigen.

Sei also x_0 irgendein Häufungspunkt von Intervallen $\mathfrak{i}_\nu$. Die Endpunkte der Lückenintervalle bezeichnen wir im folgenden immer mit $\underline{x}$, $\bar{x}$ $(\underline{x} < \bar{x})$, wobei wir den Index ν als unwesentlich weglassen. Die oben erwähnte, für jedes $\mathfrak{i}_\nu$ zu erklärende, lineare Funktion $l(x)$ läßt sich dann, falls wir die Randwerte $f(\underline{x})$, $f(\bar{x})$ der Kürze halber mit $\underline{l}$ und $\bar{l}$ bezeichnen, so darstellen:

$$l(x) = \frac{\bar{x}-x}{\bar{x}-\underline{x}}\cdot \underline{l} + \frac{x-\underline{x}}{\bar{x}-\underline{x}}\cdot \bar{l}, \tag{1;4}$$

woraus, wenn

$$\alpha = \frac{(\underline{x}-x_0)(\bar{x}-x)}{(x-x_0)(\bar{x}-\underline{x})}, \qquad \beta = \frac{(\bar{x}-x_0)(x-\underline{x})}{(x-x_0)(\bar{x}-\underline{x})}$$

gesetzt wird,

$$\frac{l(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \alpha\cdot\frac{\underline{l}-f(x_0)}{\underline{x}-x_0} + \beta\cdot\frac{\bar{l}-f(x_0)}{\bar{x}-x_0} \tag{1;5}$$

folgt. Nun ist wegen $\underline{x} < x < \bar{x}$:

$$\alpha > 0; \quad \beta > 0; \quad \alpha + \beta = 1,$$

laso liegt $\frac{l(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ zwischen $\frac{\underline{l}-f(x_0)}{\underline{x}-x_0}$ und $\frac{\bar{l}-f(x_0)}{\bar{x}-x_0}$ (bzw. ist bei Gleichheit der letzteren Ausdrücke diesen gleich).

Aus (1;5) und (E) folgt also:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\,\varepsilon\,\mathfrak{Z}-\mathfrak{M}}} \frac{l(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0), \tag{1;6}$$

womit unsere obige Behauptung bewiesen ist.

5. Diese lineare Ausfüllung der Lückenintervalle stellt, wie wir schon in der vorigen Nummer kurz angedeutet haben, im allgemeinen noch keine Lösung unseres Problems dar. In den Intervallendpunkten würden noch Ecken vorhanden sein. Um nun die Differenzierbarkeit auch in den Intervallendpunkten zu erzwingen, werden wir zunächst linear mit der durch $f'(\underline{x})$ bzw. $f'(\bar{x})$ gegebenen Richtung von beiden Seiten ein Stück weit ins Innere des Intervalls weitergehen und den Rest des Intervalls ebenfalls linear ausfüllen. Die dabei im Inneren des Intervalls auftretenden Ecken lassen sich später (Nr. 8) leicht abrunden. Zu überlegen bleibt nur, *wie weit* man in der angegebenen Weise ins Innere des Intervalls vordringen darf, um nicht durch zu große Abweichung von der oben erwähnten linearen Ausfüllung des Gesamtintervalls die Differenzierbarkeit in den Häufungspunkten der $\mathfrak{i}_\nu$ wieder zu zerstören.

6. Nach diesen Überlegungen liegt folgender Ansatz sehr nahe: Wir teilen jedes Lückenintervall $(\underline{x}; \bar{x})$ in drei gleiche Teile [5]). $\underline{\xi}$ sei irgendein Punkt im ersten der drei entstehenden offenen Teilintervalle, $\bar{\xi}$ ein Punkt im letzten derselben. Jedem dieser Zwischenpunkte, über deren genauere Wahl wir vorläufig nichts festsetzen, ordnen wir einen Funktionswert zu, und zwar den, der sich bei linearer Fortsetzung mit der in dem nächstgelegenen Intervallendpunkt gegebenen Steigung ergibt; also:

$$(1;7) \qquad \begin{aligned} f(\underline{\xi}) &= f(\underline{x}) + (\underline{\xi} - \underline{x}) \cdot f'(\underline{x}), \\ f(\bar{\xi}) &= f(\bar{x}) + (\bar{\xi} - \bar{x}) \cdot f'(\bar{x}). \end{aligned}$$

Alle diese Zwischenpunkte $\underline{\xi}$, $\bar{\xi}$, die wir uns in den einzelnen Intervallen irgendwie fest gewählt denken, fassen wir zu einer Gesamtheit zusammen und fügen sie zur gegebenen Menge $\mathfrak{M}$ hinzu. Die Vereinigungsmenge sei $\mathfrak{M}^*$; sie ist ebenfalls abgeschlossen und wegen (1; 7) neuer Definitionsbereich für die Funktion $f(x)$. Ist nun diese Funktion $f(x)$ auch auf $\mathfrak{M}^*$ differenzierbar, so können wir auf Grund unserer früheren Überlegungen (Nr. 4) folgendes schließen:

Setzt man $f(x)$ bezüglich der Lückenintervalle von $\mathfrak{M}^*$ linear fort, so ist die so entstehende Funktion $F(x)$ im ganzen Intervall $\mathfrak{J}$ erklärt und nach Konstruktion überall differenzierbar mit der vorgeschriebenen Ableitung, höchstens mit Ausnahme der Zwischenpunkte $\underline{\xi}$, $\bar{\xi}$, also der Punkte von $\mathfrak{M}^* - \mathfrak{M}$. Wie schon erwähnt wurde (Nr. 5) und später gezeigt werden soll

[5]) Diese Gleichheit der Teile wurde nur aus Bequemlichkeitsgründen gewählt. Wesentlich ist, daß die, wie aus dem folgenden hervorgeht, in diesen Teilintervallen zu wählenden Zwischenwerte $\underline{\xi}$, $\bar{\xi}$ gewisse Bedingungen erfüllen: und zwar genügt bis einschließlich Satz I die Bedingung $\underline{x} < \underline{\xi} < \bar{\xi} < \bar{x}$; später müssen wir außerdem noch verlangen, daß die Ausdrücke $\dfrac{\underline{\xi} - \underline{x}}{\bar{x} - \underline{\xi}}$, $\dfrac{\bar{x} - \bar{\xi}}{\bar{\xi} - \underline{x}}$ unter festen positiven Zahlen liegen. Da diese etwas schwächeren Bedingungen auch keine größere Allgemeinheit der Ergebnisse zeitigen würden, wollen wir uns gleich von Anfang an auf die obige Teilung in drei gleiche Teile festlegen.

(Nr. 8), lassen sich aber die dort auftretenden Ecken leicht abrunden, da an diesen Stellen durch das Problem selbst kein bestimmter Funktionswert vorgeschrieben ist. Damit haben wir bereits eine *hinreichende Bedingung* für die Existenz von $F(x)$ gewonnen:

Satz I. *Sei* $\underline{\xi}$ *ein Punkt im ersten Drittel,* $\bar{\xi}$ *ein Punkt im letzten Drittel jedes Lückenintervalls* $\mathfrak{i}_\nu$ *(gegeben durch* $\underline{x} < x < \bar{x}$*) und seien* $f(\underline{\xi})$ *bzw.* $f(\bar{\xi})$ *definiert durch*

$$f(\underline{\xi}) = f(\underline{x}) + (\underline{\xi} - \underline{x}) \cdot f'(\underline{x}); \quad f(\bar{\xi}) = f(\bar{x}) + (\bar{\xi} - \bar{x}) \cdot f'(\bar{x}).$$

$\mathfrak{M}^*$ *sei die Vereinigungsmenge der Menge* $\mathfrak{M}$ *(des ursprünglichen Definitionsbereiches von* $f(x)$*) mit der Menge dieser Zwischenpunkte* $\underline{\xi}$, $\bar{\xi}$. *Für die Existenz einer Funktion* $F(x)$, *die als „Fortsetzung von* $f(x)$*" im Sinne von* (1; 3) *angesehen werden kann, ist es dann hinreichend, wenn sich diese Punkte* $\underline{\xi}$, $\bar{\xi}$ *so wählen lassen, daß* $f(x)$ *auch auf* $\mathfrak{M}^*$ *differenzierbar ist.*

7. Jetzt wollen wir zeigen, daß diese Bedingung auch notwendig ist. Wir setzen also voraus, daß es eine Funktion $F(x)$ gibt, die (1; 3) erfüllt. Sei dann $\underline{\xi}$ ein Punkt im ersten Drittel, $\bar{\xi}$ ein Punkt im letzten Drittel irgendeines Lückenintervalls, dann können wir schreiben:

$$(1;8)\qquad \begin{aligned} F(\underline{\xi}) &= f(\underline{x}) + (\underline{\xi} - \underline{x}) \cdot f'(\underline{x}) + (\underline{\xi} - \underline{x}) \cdot \varepsilon(\underline{\xi}, \underline{x}); \quad \lim_{\underline{\xi} \to \underline{x}} \varepsilon(\underline{\xi}, \underline{x}) = 0, \\ F(\bar{\xi}) &= f(\bar{x}) + (\bar{\xi} - \bar{x}) \cdot f'(\bar{x}) + (\bar{\xi} - \bar{x}) \cdot \varepsilon(\bar{\xi}, \bar{x}); \quad \lim_{\bar{\xi} \to \bar{x}} \varepsilon(\bar{\xi}, \bar{x}) = 0. \end{aligned}$$

Durch Vergleich mit (1; 7) erhalten wir daraus:

$$(1;9)\qquad \begin{aligned} f(\underline{\xi}) &= F(\underline{\xi}) - (\underline{\xi} - \underline{x}) \cdot \varepsilon(\underline{\xi}, \underline{x}); \quad \lim_{\underline{\xi} \to \underline{x}} \varepsilon(\underline{\xi}, \underline{x}) = 0, \\ f(\bar{\xi}) &= F(\bar{\xi}) - (\bar{\xi} - \bar{x}) \cdot \varepsilon(\bar{\xi}, \bar{x}); \quad \lim_{\bar{\xi} \to \bar{x}} \varepsilon(\bar{\xi}, \bar{x}) = 0. \end{aligned}$$

Wir treffen jetzt die Wahl der Punkte $\underline{\xi}$, $\bar{\xi}$ speziell so, daß für jedes Lückenintervall $(x, \bar{x})$ die Ungleichungen bestehen:

$$(1;10)\qquad |\varepsilon(\underline{\xi}, \underline{x})| < (\bar{x} - \underline{x}); \quad |\varepsilon(\bar{\xi}, \bar{x})| < (\bar{x} - \underline{x}),$$

was wegen

$$\lim_{\underline{\xi} \to \underline{x}} \varepsilon(\underline{\xi}, x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\bar{\xi} \to \bar{x}} \varepsilon(\bar{\xi}, \bar{x}) = 0$$

stets möglich ist. Sei nun x_0 irgendein Häufungspunkt von Intervallen $\mathfrak{i}_\nu$, so gilt für diesen wegen der vorausgesetzten Differenzierbarkeit von $F(x)$:

$$(1;11)\qquad \begin{aligned} \lim_{\underline{\xi} \to x_0} \frac{f(\underline{\xi}) - f(x_0)}{\underline{\xi} - x_0} &= f'(x_0) - \lim_{\underline{\xi} \to x_0} \frac{\underline{\xi} - \underline{x}}{\underline{\xi} - x_0} \cdot \varepsilon(\underline{\xi}, \underline{x}), \\ \lim_{\bar{\xi} \to x_0} \frac{f(\bar{\xi}) - f(x_0)}{\bar{\xi} - x_0} &= f'(x_0) - \lim_{\bar{\xi} \to x_0} \frac{\bar{\xi} - \bar{x}}{\bar{\xi} - x_0} \cdot \varepsilon(\bar{\xi}, \bar{x}). \end{aligned}$$

Aus

$$(1;12) \qquad \left|\frac{\underline{\xi}-\underline{x}}{\underline{\xi}-x_0}\right| < 1; \qquad \left|\frac{\bar{\xi}-\bar{x}}{\bar{\xi}-x_0}\right| < 1$$

und (1; 10) folgt aber, daß die in (1; 11) rechts stehenden Grenzwerte beide den Wert Null haben; denn bei Annäherung an einen Häufungspunkt muß die Intervallänge $(\bar{x}-\underline{x})$ gegen Null konvergieren; die Gleichungen (1; 11) lauten daher:

$$(1;13) \qquad \lim_{\underline{\xi}\to x_0} \frac{f(\underline{\xi})-f(x_0)}{\underline{\xi}-x_0} = \lim_{\bar{\xi}\to x_0} \frac{f(\bar{\xi})-f(x_0)}{\bar{\xi}-x_0} = f'(x_0).$$

Somit haben wir gezeigt, daß bei obiger Wahl der Zwischenpunkte $\underline{\xi}$, $\bar{\xi}$ die Funktion $f(x)$ auch auf $\mathfrak{M}^*$ differenzierbar ist. Unsere Bedingung für die Fortsetzbarkeit, die wir als hinreichend erkannt haben, ist damit also auch als notwendig nachgewiesen. Wir erhalten also den Satz:

Satz II. *Die nach Satz I für die „Fortsetzbarkeit von $f(x)$“ im Sinne von* (1; 3) *als hinreichend aufgestellte Bedingung ist auch notwendig.*

8. Zum Beweis von Satz I haben wir noch einen Nachtrag zu bringen, nämlich die schon erwähnte Abrundung der Ecken, die bei obiger Konstruktion in den Zwischenpunkten $\underline{\xi}$, $\bar{\xi}$ im allgemeinen auftreten werden. Sei also die Bedingung von Satz I erfüllt. Denken wir uns dann die Funktionswerte von $f(x)$ in üblicher Weise in einer (x, y)-Ebene dargestellt, so haben die kritischen Punkte die Koordinaten: $(\underline{\xi};\ f(\underline{\xi}))$; $(\bar{\xi};\ f(\bar{\xi}))$; um jeden dieser Punkte als Mittelpunkt wollen wir einen Kreis beschreiben, der ganz im Inneren des durch das zugehörige Intervall definierten Vertikalstreifens liegt. Außerdem mögen sich von diesen Kreisen keine zwei überdecken. Den Radius wählen wir zu diesem Zweck und aus Gründen einer späteren Konvergenzbetrachtung in jedem Intervall, wie folgt:

$$(1;14) \qquad r = \operatorname{Min}\left[(\underline{\xi}-\underline{x})^2;\ (\bar{\xi}-\bar{x})^2;\ \frac{1}{9}\right].$$

Ist nämlich $\underline{\xi}-\underline{x} \leqq \bar{x}-\bar{\xi}$, so gilt

für $\underline{\xi}-\underline{x} \leqq \frac{1}{3}$:

$$r = (\underline{\xi}-\underline{x})^2 \leqq \frac{\underline{\xi}-\underline{x}}{3} \leqq \frac{\bar{x}-\bar{\xi}}{3} \leqq \frac{\bar{x}-\underline{x}}{9},$$

für $\underline{\xi}-\underline{x} > \frac{1}{3}$:

$$r = \frac{1}{9} < \frac{\underline{\xi}-\underline{x}}{3} \leqq \frac{\bar{x}-\bar{\xi}}{3} \leqq \frac{\bar{x}-\underline{x}}{9}.$$

Aus analogen Ungleichungen für den Fall $\underline{\xi} - \underline{x} > \bar{x} - \bar{\xi}$ ergibt sich zusammenfassend:

$$r \leqq \operatorname{Min}\left(\frac{\underline{\xi}-\underline{x}}{3}; \frac{\bar{x}-\bar{\xi}}{3}\right) \leqq \frac{\bar{x}-\underline{x}}{9}. \tag{1;15}$$

Man sieht sofort, daß bei dieser Wahl von r die Kreise so ausfallen, wie wir sie haben wollten: Die zu einem festen Intervall gehörigen Kreise greifen nicht über den durch das Intervall definierten Vertikalstreifen hinaus. Außerdem können sich auch die beiden zu ein und demselben Intervall gehörigen Kreise nicht überdecken, da der Abstand der Kreismittelpunkte mindestens ein Drittel der Intervallänge, der Radius dagegen höchstens den neunten Teil derselben beträgt.

Das Innere eines solchen Kreises können wir darstellen in der Form:

$$\mathfrak{K}: \quad \begin{array}{ll} x = \underline{\xi} + \varrho \cdot \cos \varphi; & 0 \leqq \varrho < r, \\ y = f(\underline{\xi}) + \varrho \cdot \sin \varphi; & 0 \leqq \varphi < 2\pi. \end{array} \tag{1;16}$$

Genau das Entsprechende gilt natürlich für $\bar{\xi}$, $f(\bar{\xi})$, möge aber der Kürze halber für die folgende Rechnung unterdrückt werden. Wir wollen jetzt zeigen, daß für alle Punkte $(x; y)$ aus $\mathfrak{K}$ folgende Relation besteht:

$$\lim_{\underline{\xi} \to x_0} \frac{y - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0); \qquad (x; y) \in \mathfrak{K}. \tag{1;17}$$

Das bedeutet: Wir können innerhalb $\mathfrak{K}$ die Funktionswerte in passender Weise abändern, ohne dadurch die vorausgesetzte Differenzierbarkeit in den Punkten von $\mathfrak{M}$ zu gefährden. Da das Funktionsbild vorher aus zwei im Mittelpunkt von $\mathfrak{K}$ zusammenlaufenden Geradenstücken bestand, läßt sich die hier möglicherweise auftretende Ecke leicht durch einen ganz im Inneren des Kreises verlaufenden, differenzierbaren Kurvenbogen überbrücken, womit dann alles gemacht ist.

Zum Beweis von (1; 17) setzen wir x und y aus (1; 16) ein:

$$\frac{f(\underline{\xi}) - f(x_0) + \varrho \cdot \sin \varphi}{\underline{\xi} - x_0 + \varrho \cdot \cos \varphi} = \frac{f(\underline{\xi}) - f(x_0)}{\underline{\xi} - x_0} : \left\{1 + \frac{\varrho \cdot \cos \varphi}{\underline{\xi} - x_0}\right\}$$
$$+ \frac{\varrho \cdot \sin \varphi}{\underline{\xi} - x_0} : \left\{1 + \frac{\varrho \cdot \cos \varphi}{\underline{\xi} - x_0}\right\}.$$

Aus (1; 14) entnehmen wir:

$$\left| \frac{\varrho \cdot \begin{Bmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{Bmatrix}}{\underline{\xi} - x_0} \right| < \frac{r}{\underline{\xi} - \underline{x}} < (\underline{\xi} - \underline{x}) < \frac{\bar{x} - \underline{x}}{3},$$

woraus sofort die Behauptung folgt, da $(\bar{x} - \underline{x})$ bei Annäherung an einen Häufungspunkt x_0 gegen Null konvergiert.

§ 2.

Die „Fortsetzbarkeit" von $f(x)$ hängt von der Möglichkeit ab, den Lückenintervallen gewisse Zahlen λ zuzuordnen, die eine bestimmte Bedingung erfüllen müssen.

9. Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Fortsetzbarkeit, die wir in Satz II aufgestellt haben, ist noch unbefriedigend. Die Entscheidung, ob es in jedem Lückenintervall Zwischenpunkte der verlangten Eigenschaft gibt, dürfte im allgemeinen schwer sein. Wir wollen daher im folgenden diese Bedingung auf eine andere Form bringen, bei der von vornherein gegebene Eigenschaften der Funktion $f(x)$, ihrer Ableitung $f'(x)$ und der Menge $\mathfrak{M}$ herangezogen werden.

Wir denken uns die Zwischenpunkte $\underline{\xi}$, $\bar{\xi}$ in den einzelnen Lückenintervallen irgendwie gewählt und bilden für einen beliebigen Häufungspunkt x_0 solcher Intervalle die Ausdrücke:

$$(2;1)\qquad \begin{aligned} \underline{D} &= \frac{1}{\underline{\xi} - x_0} \cdot \{f(\underline{\xi}) - f(x_0) - (\underline{\xi} - x_0) \cdot f'(x_0)\}, \\ \bar{D} &= \frac{1}{\bar{\xi} - x_0} \cdot \{f(\bar{\xi}) - f(x_0) - (\bar{\xi} - x_0) \cdot f'(x_0)\}. \end{aligned}$$

Die Bedingung von Satz II können wir dann so schreiben:

$$(2;2)\qquad \lim_{\underline{\xi} \to x_0} \underline{D} = \lim_{\bar{\xi} \to x_0} \bar{D} = 0; \qquad \text{für jedes } x_0.$$

Die rechte Seite von (2; 1) formen wir nun nach (1; 7) und (1; 1) um:

$$(2;3)\qquad \begin{aligned} \underline{D} &= \frac{1}{\underline{\xi} - x_0} \cdot \{f(\underline{x}) - f(x_0) + (\underline{\xi} - \underline{x}) \cdot f'(\underline{x}) - (\underline{\xi} - x_0) \cdot f'(x_0)\} \\ &= \frac{1}{\underline{\xi} - x_0} \cdot \{(\underline{x} - \underline{\xi}) \cdot f'(x_0) + (\underline{x} - x_0) \cdot \varepsilon(\underline{x}; x_0) + (\underline{\xi} - \underline{x}) \cdot f'(\underline{x})\}, \\ \underline{D} &= \frac{\underline{\xi} - \underline{x}}{\underline{\xi} - x_0} \cdot [f'(\underline{x}) - f'(x_0)] + \frac{\underline{x} - x_0}{\underline{\xi} - x_0} \cdot \varepsilon(\underline{x}; x_0). \end{aligned}$$

Analog ergibt sich

$$(2;4)\qquad \bar{D} = \frac{\bar{\xi} - \bar{x}}{\bar{\xi} - x_0} \cdot [f'(\bar{x}) - f'(x_0)] + \frac{\bar{x} - x_0}{\bar{\xi} - x_0} \cdot \varepsilon(\bar{x}; x_0).$$

Wegen

$$\left| \frac{\underline{x} - x_0}{\underline{\xi} - x_0} \right| < \frac{3}{2}; \qquad \left| \frac{\bar{x} - x_0}{\bar{\xi} - x_0} \right| < \frac{3}{2}$$

und

$$\lim_{\underline{x} \to x_0} \varepsilon(\underline{x}; x_0) = \lim_{\bar{x} \to x_0} \varepsilon(\bar{x}; x_0) = 0$$

folgt aus (2; 2), (2; 3) und (2; 4):

$$(2;5)\qquad \begin{aligned} &\text{a)}\ \lim_{\underline{x}\to x_0} \frac{\underline{\xi}-\underline{x}}{\underline{\xi}-x_0}\cdot[f'(\underline{x})-f'(x_0)] = 0 \\ &\text{b)}\ \lim_{\bar{x}\to x_0} \frac{\bar{\xi}-\bar{x}}{\bar{\xi}-x_0}\cdot[f'(\bar{x})-f'(x_0)] = 0 \end{aligned} \qquad \text{für jedes } x_0.$$

Das bedeutet: Notwendig und hinreichend für die Existenz einer Fortsetzung $F(x)$ im Sinne von (1; 3) ist es, wenn man die Punkte $\underline{\xi}$, $\bar{\xi}$ in jedem Lückenintervall so wählen kann, daß die Gleichungen (2; 5) für jeden Häufungspunkt x_0 von Intervallen erfüllt sind.

10. Die Bedingung (2; 5) läßt sich noch weiter vereinfachen. Es wird sich zeigen, daß man die Zwischenpunkte $\underline{\xi}$, $\bar{\xi}$ immer so wählen kann, daß bei beliebigem x_0 jede der beiden Bedingungen (2; 5) wenigstens für eine gewisse Teilmenge von Intervallen erfüllt ist — für welche, das hängt noch von x_0 ab. Wir werden nämlich die $\underline{\xi}$, $\bar{\xi}$ so bestimmen können, daß für jedes x_0 die Bedingung a) für die Intervalle links von x_0, die Bedingung b) für diejenigen rechts von x_0 befriedigt wird. Beweisen wollen wir nur den ersten Teil dieser Aussage, der zweite erledigt sich ganz analog, indem man in den Formeln die unterstrichenen Größen sinngemäß mit den überstrichenen vertauscht und gleichzeitig voraussetzt, daß die betrachteten Intervalle nun rechts von x_0 liegen.

Es sei also $(\underline{x}, \bar{x})$ ein beliebiges Intervall links von x_0. Dann gilt:

$$(2;6)\qquad \left|\frac{\underline{\xi}-\underline{x}}{\underline{\xi}-x_0}\right| < \frac{\underline{\xi}-\underline{x}}{\bar{x}-\underline{\xi}} = \frac{1}{\dfrac{\bar{x}-\underline{x}}{\underline{\xi}-\underline{x}}-1}.$$

In dieser Abschätzung kommt auf der rechten Seite das x_0 nicht mehr vor. Wir versuchen, in jedem Intervall das $\underline{\xi}$ so nahe an das $\underline{x}$ heranzubringen, daß die rechte Seite von (2; 6) bei jeder Annäherung an einen Häufungspunkt x_0 gegen Null geht. Ein von x_0 unabhängiges Kriterium für die Annäherung der Intervalle an einen Häufungspunkt ist das „Gegen Null Gehen" der Intervallänge. Diese Überlegungen führen uns dazu, das $\underline{\xi}$ so zu bestimmen, daß folgende drei Ungleichungen

$$(2;7)\qquad \frac{1}{\dfrac{\bar{x}-\underline{x}}{\underline{\xi}-\underline{x}}-1} < \bar{x}-\underline{x};\quad \frac{|f'(\underline{x})|}{\dfrac{\bar{x}-\underline{x}}{\underline{\xi}-\underline{x}}-1} < \bar{x}-\underline{x};\quad \underline{\xi}-\underline{x} < \frac{\bar{x}-\underline{x}}{3}$$

gleichzeitig gelten [6]; denn dann gilt wegen (2; 6) auch (2; 5a) für alle Intervalle links von x_0. Setzen wir noch zur Abkürzung

$$(2;8)\qquad \bar{x}-\underline{x} = l;\quad \underline{\xi}-\underline{x} = \underline{\Delta l};\quad \bar{x}-\bar{\xi} = \overline{\Delta l},$$

[6]) Die letzte Ungleichung (2; 7) entspricht der Forderung, die wir in (Nr. 6) an die $\underline{\xi}$, $\bar{\xi}$ gestellt haben; vgl. Anm. [5]).

so ist (2; 7) sicher erfüllt, wenn wir $\underline{\Delta l}$ der Bedingung unterwerfen

$$0 < \underline{\Delta l} < \frac{l^2}{l + \operatorname{Max}\{1; 2l; |f'(\underline{x})|\}}. \tag{2;9}$$

Machen wir außerdem

$$0 < \overline{\Delta l} < \frac{l^2}{l + \operatorname{Max}\{1; 2l; |f'(\bar{x})|\}}, \tag{2;10}$$

so ist, wie die analoge Rechnung zeigt, die Bedingung (2; 5b) erfüllt, wenn sich die Intervalle von rechts her gegen die Stelle x_0 häufen.

Das Minimum der beiden Schranken (2; 9) und (2; 10) sei R:

$$R = \frac{l^2}{l + \operatorname{Max}\{1; 2l; |f'(\underline{x})|; |f'(\bar{x})|\}}. \tag{2;11}$$

Dann können wir jedenfalls folgendes sagen: Wählen wir die Punkte $\underline{\xi}$, $\bar{\xi}$ so, daß die Längen der durch sie an beiden Enden jedes Intervalls ausgeschnittenen Teilintervalle $\underline{\Delta l}$ und $\overline{\Delta l}$ kleiner sind als obige Zahl R, so sind die Gleichungen (2; 5) bei jedem festen x_0 für diejenigen Zwischenpunkte erfüllt, die im Intervall auf der dem Häufungspunkt x_0 nicht zugekehrten Seite liegen.

11. Jetzt müssen wir danach trachten, die Teilintervalle $\underline{\Delta l}$, $\overline{\Delta l}$ unter der Einschränkung

$$\underline{\Delta l} < R; \quad \overline{\Delta l} < R \tag{2;12}$$

noch so zu verkleinern, daß die Relationen (2; 5), so dies überhaupt möglich sein sollte, für jedes x_0 und alle Zwischenpunkte gelten. Es ist:

$$\frac{\underline{\xi} - \underline{x}}{\underline{\xi} - x_0} = \frac{1}{1 + \dfrac{\underline{x} - x_0}{\underline{\xi} - \underline{x}}}; \quad \frac{\bar{\xi} - \bar{x}}{\bar{\xi} - x_0} = \frac{1}{1 + \dfrac{x_0 - \bar{x}}{\bar{x} - \bar{\xi}}}. \tag{2;13}$$

Zur Abkürzung führen wir die Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned}
&\text{a)} \quad d(x_0) = \text{Abstand des Intervalls von } x_0, \\
&\text{b)} \quad \operatorname{Min}(\underline{\Delta l}, \overline{\Delta l}) = \Delta l = \frac{1}{\lambda} \cdot l, \\
&\text{c)} \quad z = z_\nu(x_0) = \begin{cases} \underline{x} & \text{falls } x_0 < \underline{x}, \\ \bar{x} & \text{falls } x_0 > \bar{x}. \end{cases}
\end{aligned} \tag{2;14}$$

Sei nun x_0 fest; dann brauchen wir im Falle $\underline{x} > x_0$ nur mehr die erste der Gleichungen (2; 5), im Falle $\bar{x} < x_0$ nur die zweite davon zu berücksichtigen; die andere ist nach den obigen Überlegungen (Nr. 10) von selbst erfüllt. Nach

(2; 13) und (2; 14) können wir daher unsere Bedingungen (2; 5) in die gleichwertige Form setzen:

$$(2;15)\quad \begin{cases} \lim\limits_{z\to x_0} \dfrac{1}{1+\dfrac{d(x_0)}{\underline{\Delta l}}}\cdot[f'(z)-f'(x_0)] = 0; & \underline{\Delta l} < R, \\ \lim\limits_{z\to x_0} \dfrac{1}{1+\dfrac{d(x_0)}{\overline{\Delta l}}}\cdot[f'(z)-f'(x_0)] = 0; & \overline{\Delta l} < R. \end{cases}$$

Diese beiden Gleichungen lassen sich mit der Bezeichnung (2; 14b) noch in die eine, wie man leicht sieht, äquivalente Bedingung zusammenfassen, daß es möglich ist, den Lückenintervallen $\mathfrak{i}_\nu$ solche Zahlen $\lambda > \frac{l}{R}$ zuzuordnen, daß gilt:

$$(2;16)\qquad \lim_{z\to x_0} \frac{1}{1+\lambda\cdot\dfrac{d(x_0)}{l}}\cdot[f'(z)-f'(x_0)] = 0$$

für jedes x_0.

Hat man nun überhaupt λ-Werte gefunden, die (2; 16) erfüllen (aber vielleicht nicht durchwegs $> \frac{l}{R}$ sind), so genügen natürlich irgendwelche vergrößerten λ erst recht der Ungleichung (2; 16). Wir können daher in der Formulierung der Bedingung den Zusatz $\lambda > \frac{l}{R}$ unterdrücken, da dieser Forderung nachträglich durch geeignete Vergrößerung der λ immer genügt werden kann. Wir erhalten also das Resultat:

Satz III. *Sei x_0 ein beliebiger Häufungspunkt von Lückenintervallen $\mathfrak{i}_\nu$, l die Länge eines solchen Intervalls, $d(x_0)$ sein Abstand von x_0 und z der dem Häufungspunkt x_0 zugekehrte Endpunkt des Intervalls $\mathfrak{i}_\nu$. Für die „Fortsetzbarkeit" von $f(x)$ im Sinne von (1; 3) ist es dann notwendig und hinreichend, daß man zu jedem Lückenintervall $\mathfrak{i}_\nu$ eine positive Zahl $\lambda = \lambda(\mathfrak{i}_\nu)$ so bestimmen kann, daß für alle Häufungspunkte x_0 dieser Intervalle folgende Relation gilt:*

$$\lim_{z\to x_0} \frac{1}{1+\lambda\cdot\dfrac{d(x_0)}{l}}\cdot[f'(z)-f'(x_0)] = 0.$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so haben wir für die Konstruktion einer Fortsetzung folgende Vorschrift:

Der jedem Lückenintervall $\mathfrak{i}_\nu$ vermöge Satz III zugeordnete λ-Wert ist eventuell noch so zu vergrößern, daß außerdem gilt:

$$\lambda > \frac{l+\operatorname{Max}\{1;\ 2l;\ |f'(x)|;\ |f'(\bar{x})|\}}{l}.$$

An den beiden Enden jedes Intervalls $\mathfrak{i}_\nu$ *grenze man dann Teilintervalle von der Länge* $\frac{l}{\lambda}$ *ab und gebe den so entstehenden Teilpunkten* $\underline{\xi}$, $\bar{\xi}$ *die Funktionswerte:*

$$f(\underline{\xi}) = f(\underline{x}) + (\underline{\xi} - \underline{x}) \cdot f'(\underline{x}),$$
$$f(\bar{\xi}) = f(\bar{x}) + (\bar{\xi} - \bar{x}) \cdot f'(\bar{x}).$$

Die Fortsetzung ergibt sich daraus durch lineare Ausfüllung der drei Teilintervalle $(\underline{x}, \underline{\xi})$, $(\underline{\xi}, \bar{\xi})$, $(\bar{\xi}, \bar{x})$ *und geeignete Abrundung der in den* $\underline{\xi}$, $\bar{\xi}$ *auftretenden Ecken (z. B. nach der Methode* (Nr. 8)).

§ 3.

Fälle, in denen eine Fortsetzung möglich ist.

12. Satz III bietet uns jetzt die Möglichkeit, mehrere Fälle anzugeben, in denen eine Fortsetzung möglich ist. Der erste Faktor der Limesgleichung (2; 16) hängt nämlich in den gegebenen Größen nur von der Struktur der Menge $\mathfrak{M}$ ab, während der zweite Faktor die auf $\mathfrak{M}$ definierte Funktion $f'(x)$ enthält. Wegen

$$\frac{1}{1 + \lambda \cdot \frac{d(x_0)}{l}} < 1 \tag{3; 1}$$

gilt (2; 16) sicher in jedem Punkt x_0, in dem $f'(x)$ stetig ist; denn für solche x_0 hat der Klammerausdruck den Grenzwert Null. Bezeichnen wir die Menge aller x_0, also die Menge aller Häufungspunkte von Lückenintervallen mit $\mathfrak{M}'_0$, so entnehmen wir aus obigem:

Satz IV. *Hinreichend für die „Fortsetzbarkeit" von* $f(x)$ *im Sinne von* (1; 3) *ist es, wenn die Ableitung* $f'(x)$ *auf* $\mathfrak{M}'_0$ *(Menge aller Häufungspunkte von Lückenintervallen) stetig ist* [7]. *Die Zahl* λ *kann man für jedes Intervall beliebig* $\geqq 3$ *wählen* [8].

13. Im folgenden brauchen wir uns also nur mehr um die Punkte aus $\mathfrak{M}'_0$ zu kümmern, in denen $f'(x)$ unstetig ist. Die Gesamtheit dieser Unstetigkeitspunkte nennen wir $\mathfrak{M}'_u$. Wir werden zeigen, daß (2; 16) erfüllt werden kann, wenn $\mathfrak{M}'_u$ höchstens abzählbar ist. Es sei also [9])

$$\mathfrak{M}'_u = \{x_0^1;\ x_0^2;\ \ldots;\ x_0^p;\ \ldots\}, \tag{3; 2}$$

[7]) Vgl. Anm. [3]). In diesem Satz soll auch der triviale Fall enthalten sein, daß $\mathfrak{M}'_0$ die Nullmenge ist.

[8]) Folgt am einfachsten direkt aus (2; 5); die $\underline{\xi}$, $\bar{\xi}$ unterliegen nur der schon am Anfang gemachten Voraussetzung, im ersten bzw. letzten Drittel des Intervalls zu sein; vgl. Anm. [5]).

[9]) Den Stellenindex der Punkte x_0 schreiben wir hier oben, da eine Verwechslung mit Exponenten im folgenden nicht zu befürchten ist.

wobei wir es dahingestellt sein lassen, ob $\mathfrak{M}'_u$ endlich oder abzählbar unendlich ist. Jedem Lückenintervall $\mathfrak{i}_\nu$ versuchen wir nun eine positive Zahl $\lambda(\mathfrak{i}_\nu)$ so zuzuordnen, daß für alle $x_0^p \varepsilon \mathfrak{M}'_u$ die Gleichungen gelten:

$$(3;3) \qquad \lim_{z \to x_0^p} \frac{f'(z)}{1 + \lambda(\mathfrak{i}_\nu) \cdot \frac{d(x_0^p)}{l}} = 0; \qquad \lim_{z \to x_0^p} \frac{1}{1 + \lambda(\mathfrak{i}_\nu) \cdot \frac{d(x_0^p)}{l}} = 0$$

$$\text{für jedes } x_0^p \varepsilon \mathfrak{M}'_u.$$

Diesen beiden Relationen und damit auch (2; 16) wird jedenfalls genügt, wenn wir die Intervallfunktion $\lambda(\mathfrak{i}_\nu)$ so bestimmen können, daß die eine Gleichung besteht:

$$(3;4) \qquad \lim_{z \to x_0^p} \frac{1}{\lambda(\mathfrak{i}_\nu)} \cdot \frac{l \cdot \{|f'(z)| + 1\}}{d(x_0^p)} = 0$$

$$\text{für jedes } x_0^p \varepsilon \mathfrak{M}'_u.$$

14. Dazu greifen wir ein beliebiges $x_0^p \varepsilon \mathfrak{M}'_u$ heraus, das für die weitere Rechnung festgehalten werde. Zu diesem x_0^p wollen wir eine Funktion $\varphi_p(t)$ definieren, die für das Verhalten des zweiten Faktors in (3; 4) charakteristisch ist, wenn sich das Intervall $\mathfrak{i}_\nu$ der Stelle x_0^p nähert. Da es nämlich jeweils nur endlich viele Intervalle $\mathfrak{i}_\nu$ gibt, deren Länge l größer ist als eine feste positive Zahl [10]), andererseits beliebig kleine $\mathfrak{i}_\nu$ vorhanden sein müssen, hat folgende Definition immer einen Sinn [11]):

$$(3;5) \qquad \begin{aligned} \varphi_p(t) &\begin{cases} = \varphi_p\left(\tfrac{1}{2}\right), \text{ falls kein } \mathfrak{i}_\nu \text{ existiert mit } l \geqq 1, \\ \qquad \text{andernfalls} \\ = \underset{\mathfrak{i}_\nu,\, l \geqq 1}{\operatorname{Max}} \dfrac{l \cdot \{|f'(z)| + 1\}}{d(x_0^p)} \end{cases} \quad \text{für } t \geqq 1, \\ \varphi_p(t) &\begin{cases} = \varphi_p\left(\dfrac{1}{n+1}\right), \text{ falls kein } \mathfrak{i}_\nu \text{ existiert mit } l \geqq \dfrac{1}{n}, \\ \qquad \text{andernfalls} \\ = \underset{\mathfrak{i}_\nu,\, l \geqq \frac{1}{n}}{\operatorname{Max}} \dfrac{l \cdot \{|f'(z)| + 1\}}{d(x_0^p)} \end{cases} \quad \text{für } \frac{1}{n} \leqq t < \frac{1}{n-1},\ n \geqq 2. \end{aligned}$$

Nach dieser Festsetzung ist $\varphi_p(t)$ im Bereich $t > 0$ erklärt und stets positiv. Außerdem gelten, wie man aus (3; 5) sofort entnimmt, die Monotoniebeziehungen:

$$(3;6) \qquad \varphi_p(t_1) \geqq \varphi_p(t_2), \quad \text{falls} \quad t_1 < t_2.$$

Dies berechtigt uns, von einem Wachstum der Funktionen $\varphi_p(t)$ für gegen Null abnehmendes t zu sprechen. Da jedem $x_0^p \varepsilon \mathfrak{M}'_u$ ein solches $\varphi_p(t)$ zuge-

---

[10]) Die gegebene Menge wurde ja als beschränkt vorausgesetzt (Nr. 2).

[11]) Hierin soll $\underset{\mathfrak{i}_\nu,\, l \geqq a}{\operatorname{Max}} \frac{l \cdot \{|f'(z)| + 1\}}{d(x_0^p)}$ bedeuten: Maximum dieses Ausdrucks für alle $\mathfrak{i}_\nu$, deren Länge $l \geqq a$ ist.

ordnet ist, definiert (3; 5) eine ganze Klasse von höchstens abzählbar vielen Funktionen, die mit gegen Null abnehmendem t monoton nicht abnehmen. Nach bekannten Sätzen gibt es nun immer eine Funktion $\Phi(t)$, die für gegen Null abnehmendes t stärker wächst als jede Funktion obiger Klasse, seien es endlich oder abzählbar unendlich viele [12]). Für dieses $\Phi(t)$ gilt also:

$$(3;\,7) \qquad \lim_{t \to 0} \frac{\varphi_p(t)}{\Phi(t)} = 0; \qquad p = 1;\ 2;\ 3;\ \ldots.$$

Nach diesen Vorbereitungen kehren wir wieder zu unserem Ausgangspunkt zurück. Jedem Intervall $\mathfrak{i}_\nu$ sollte eine Zahl $\lambda(\mathfrak{i}_\nu)$ so zugeordnet werden, daß (3; 4) erfüllt ist. Dazu haben wir jetzt nur zu schreiben:

$$(3;\,8) \qquad \lambda(\mathfrak{i}_\nu) = \Phi(l),$$

wobei l wie früher die Intervallänge bedeutet. Zum Beweis werden wir zeigen, daß bei dieser Wahl von λ für jedes $x_0^p \,\varepsilon\, \mathfrak{M}_u'$ die Gleichung (3; 4) besteht, d. h. also:

$$(3;\,9) \qquad \lim_{z \to x_0^p} \frac{1}{\Phi(l)} \cdot \frac{l \cdot \{|f'(z)| + 1\}}{d(x_0^p)} = 0.$$

Nun bewirkt der Grenzübergang $z \to x_0^p$, daß die Intervallänge l gleichzeitig gegen Null konvergiert. Für den zweiten Faktor in (3; 9) gilt aber nach (3; 5) die Abschätzung:

$$0 < \frac{l \cdot \{|f'(z)| + 1\}}{d(x_0^p)} < \varphi_p(l),$$

woraus wegen (3; 7) die Behauptung (3; 9) folgt. Wir erhalten also:

Satz V. *Hinreichend für die „Fortsetzbarkeit" von $f(x)$ im Sinne von* (1; 3) *ist es, wenn in der Menge $\mathfrak{M}_0'$ (Menge der Häufungspunkte der Lückenintervalle) nur höchstens abzählbar viele Unstetigkeitspunkte von $f'(x)$ vorkommen.*

§ 4.

Die Möglichkeit oder Unmöglichkeit der Erweiterung des Definitionsbereiches ist unabhängig von den Werten der Ableitung in den isolierten Punkten des Definitionsbereiches.

15. Alle bisher aufgestellten Sätze sind in einer Beziehung noch unvollständig. Wir hatten ja ganz am Anfang die Funktionswerte von $f'(x)$ in den isolierten Punkten von $\mathfrak{M}$ willkürlich vorgegeben und die so für die ganze Menge $\mathfrak{M}$ erklärte Funktion $f'(x)$ als Basis für unsere Untersuchungen ge-

[12]) Im Falle endlich vieler $\varphi_p(t)$ braucht man nur zu setzen: $\Phi(t) = \frac{1}{t} \cdot \operatorname{Max}_p \varphi_p(t)$; im Falle unendlich vieler gelingt die Konstruktion nach dem Diagonalverfahren; siehe E. Borel, La croissance, Paris 1910, p. 27.

wählt. Auf diese schon vorher willkürlich ergänzte Funktion $f'(x)$ beziehen sich nun alle bis jetzt gefundenen Ergebnisse. Damit erhebt sich natürlich die Frage, inwieweit diese anfangs gemachte Zusatzdefinition für die Möglichkeit der Fortsetzung selbst von Einfluß ist. Es könnte ja sein, daß bei einer gewissen Festsetzung für $f'(x)$ die Bedingung (2; 16) erfüllbar ist, bei einer anderen hingegen nicht. Wir werden zeigen, daß in Wahrheit die Fortsetzbarkeit von dieser Willkür unabhängig ist; gleichzeitig werden wir die Bedingung (2; 16) auf eine solche Form bringen, daß sie nur mehr von vornherein gegebene Bedingungsstücke enthält, also in ihr keine Größen mehr auftreten, von denen sie — wie wir zeigen werden — nicht abhängt.

16. Wir schränken also den Definitionsbereich von $f'(x)$ vorübergehend wieder auf den ursprünglichen, durch das Problem selbst gegebenen Bereich $\mathfrak{M}'$ ein. Dann hat der in der Bedingung (2; 16) auftretende Ausdruck nur einen Sinn, wenn der dem Häufungspunkt x_0 zugekehrte Intervallendpunkt z zu $\mathfrak{M}'$ gehört. Durch die Forderung $z \varepsilon \mathfrak{M}'$ wird aus der Gesamtheit der Lückenintervalle eine Teilmenge ausgesondert, nämlich die Teilmenge solcher Intervalle, von denen wenigstens ein Endpunkt zu $\mathfrak{M}'$ gehört und dieser gleichzeitig irgendeinem x_0 zugekehrt ist. Die Gesamtheit dieser letzteren Intervalle bezeichnen wir mit $\mathfrak{G}$. Nun ist nach (2; 16) für die Fortsetzbarkeit von $f(x)$ jedenfalls folgende Bedingung notwendig: Jedem *zur Gesamtheit* $\mathfrak{G}$ *gehörenden* $\mathfrak{i}_\nu$ muß sich eine Zahl $\lambda_1 = \lambda_1(\mathfrak{i}_\nu)$ so zuordnen lassen, daß für jedes x_0 gilt:

$$(4;1) \qquad \lim_{z \to x_0} \frac{1}{1 + \lambda_1(\mathfrak{i}_\nu) \cdot \frac{d(x_0)}{l}} \cdot [f'(z) - f'(x_0)] = 0,$$

für alle $\mathfrak{i}_\nu \varepsilon \mathfrak{G}$, für die gleichzeitig z zu $\mathfrak{M}'$ gehört.

17. Wir werden jetzt zeigen, daß diese Bedingung (4; 1) auch schon hinreichend ist, gleichgültig, wie wir die Werte von $f'(x)$ für die isolierten Punkte von $\mathfrak{M}$ ergänzen. Der Beweis ist erbracht, wenn wir zeigen: Sobald sich den Lückenintervallen aus $\mathfrak{G}$ Zahlen λ_1 zuordnen lassen, die (4; 1) erfüllen, dann lassen sich zu *allen* Lückenintervallen Zahlen λ bestimmen, so daß (2; 16) gilt.

Um dies zu beweisen, gehen wir aus von der Menge $\mathfrak{M}'_0$ der Intervallhäufungspunkte. Diese Menge ist jedenfalls abgeschlossen und nirgends dicht; sie kann also dargestellt werden durch die Endpunkte gewisser getrennt liegender offener Intervalle — wir nennen diese Intervalle $\mathfrak{g}_\mu$ — und deren Häufungspunkte. Nennen wir die Menge der Intervallendpunkte $\mathfrak{E}'_0$, deren bezüglich $\mathfrak{M}'_0$ komplementäre Menge $\mathfrak{H}'_0$, so erhält man die eindeutige Zerlegung

$$(4;2) \qquad \mathfrak{M}'_0 = \mathfrak{E}'_0 + \mathfrak{H}'_0; \qquad \mathfrak{E}'_0 \cdot \mathfrak{H}'_0 = 0.$$

$\mathfrak{E}_0'$ ist höchstens abzählbar. Daher können wir nach demselben Verfahren wie in § 3 (Nr. 14) eine für alle $\mathfrak{i}_\nu$ definierte Intervallfunktion $\lambda\,(\mathfrak{i}_\nu)$, wir wollen sie $\lambda_2\,(\mathfrak{i}_\nu)$ nennen, so bestimmen, daß für jedes $x_0\,\varepsilon\,\mathfrak{E}_0'$ gilt:

$$(4;3)\qquad \lim_{l\to 0}\frac{f'(z)}{1+\lambda_2(\mathfrak{i}_\nu)\cdot\frac{d\,(x_0)}{l}}=0;\qquad \lim_{l\to 0}\frac{1}{1+\lambda_2(\mathfrak{i}_\nu)\cdot\frac{d\,(x_0)}{l}}=0.$$
$$x_0\,\varepsilon\,\mathfrak{E}_0'.$$

Ist nun $\mathfrak{H}_0'$ die Nullmenge, so sind wir fertig, da alle x_0 schon in $\mathfrak{E}_0'$ vorkommen. Andernfalls greifen wir ein beliebiges $x_0\,\varepsilon\,\mathfrak{H}_0'$ heraus, das wir für das Folgende festhalten. x_0 ist also Häufungspunkt von Intervallen $\mathfrak{g}_\mu$, aber kein Endpunkt eines solchen. Durch x_0 wird die Gesamtheit der Intervalle $\mathfrak{i}_\nu$ in zwei Klassen geschieden, solche, die rechts von x_0 liegen, und solche, die links von x_0 liegen. Im folgenden beschränken wir uns der Kürze halber auf die ersteren; für die links liegenden geht alles ganz analog.

18. Irgendein $\mathfrak{i}_\nu$ sei also rechts von x_0, und x_0 sei auch Häufungspunkt solcher rechts liegender $\mathfrak{i}_\nu$. Das zugehörige z ist dann der linke Intervallendpunkt. Da kein $\mathfrak{i}_\nu$ irgendeinen Punkt der nirgends dichten Menge $\mathfrak{M}_0'$ im Inneren enthalten darf, müssen die Intervalle $\mathfrak{i}_\nu$ in den Intervallen $\mathfrak{g}_\mu$ enthalten sein. Dabei kann man zwei Arten von Intervallen $\mathfrak{i}_\nu$ unterscheiden; bei den Intervallen $\mathfrak{i}_\nu$ der ersten Art ist z gleichzeitig Endpunkt eines $\mathfrak{g}_\mu$-Intervalls: $\mathfrak{i}_\nu$ gehört dann zu $\mathfrak{G}$ und z zu $\mathfrak{M}'$; bei den Intervallen $\mathfrak{i}_\nu$ der zweiten Art liegt z ganz im Inneren eines $\mathfrak{g}_\mu$-Intervalls; für alle $\mathfrak{i}_\nu$ der ersten Art ist aber (2; 16) identisch mit (4; 1), daher nach Voraussetzung erfüllt. Wir brauchen uns also nur mehr mit den Intervallen $\mathfrak{i}_\nu$ der zweiten Art zu befassen (siehe Fig. 1; dabei ist $\bar{x}<\bar{u}$ genommen; natürlich könnte auch $\bar{x}=\bar{u}$ sein).

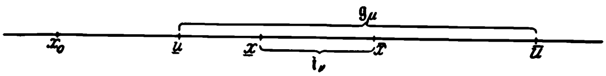

Fig. 1.

Bezeichnen wir die Endpunkte eines $\mathfrak{g}_\mu$-Intervalls mit $\underline{u}$, $\bar{u}$ $(\underline{u}<\bar{u})$, so gilt für jedes $\mathfrak{i}_\nu$ der obigen zweiten Art: $\underline{u}<\underline{x}$. Daher gelten bei beliebigem $\lambda>0$ die Ungleichungen:

$$(4;4)\qquad \begin{aligned} &0<\frac{|f'(z)|}{1+\lambda\cdot\frac{d\,(x_0)}{l}}<\frac{|f'(z)|}{1+\lambda\frac{\underline{x}-\underline{u}}{l}}=\frac{|f'(\underline{x})|}{1+\lambda\frac{\underline{x}-\underline{u}}{l}},\\ &0<\frac{1}{1+\lambda\cdot\frac{d\,(x_0)}{l}}<\frac{1}{1+\lambda\frac{\underline{x}-\underline{u}}{l}};\ \ \underline{x}>x_0,\ \ \underline{x}\text{ nicht in }\mathfrak{E}_0'.\end{aligned}$$

Nun ist $\underline{u}$ ein Punkt aus $\mathfrak{E}_0'$. Wählt man daher in (4; 3) für x_0 speziell $\underline{u}$, so stimmen für $\lambda=\lambda_2\,(\mathfrak{i}_\nu)$ die in (4; 4) rechts stehenden Quotienten mit den zu limitierenden Ausdrücken in (4; 3) überein, konvergieren also mit $l\to 0$

gegen Null. Eine analoge Abschätzung gilt natürlich für die Intervalle links von x_0, deren rechter Endpunkt nicht zu $\mathfrak{E}_0'$ gehört. Für alle $\mathfrak{i}_\nu$ der obengenannten zweiten Art, gleichgültig ob rechts oder links von x_0, ergibt sich also bei beliebigem festen x_0:

$$(4;5)\qquad \begin{aligned} &\lim_{l\to 0} \frac{f'(z)}{1+\lambda_2(\mathfrak{i}_\nu)\cdot\frac{d(x_0)}{l}} = 0, \\ &\lim_{l\to 0} \frac{1}{1+\lambda_2(\mathfrak{i}_\nu)\cdot\frac{d(x_0)}{l}} = 0, \end{aligned} \qquad z \text{ nicht in } \mathfrak{E}_0'.$$

Da die Intervallänge l bei Annäherung an einen Häufungspunkt x_0 gegen Null konvergiert, folgt für die letztgenannte Klasse von Intervallen aus (4; 5) unmittelbar (2; 16).

Ordnen wir daher jedem Intervall $\mathfrak{i}_\nu$ eine Zahl

$$\lambda_3(\mathfrak{i}_\nu) = \operatorname{Max}\,[\lambda_1(\mathfrak{i}_\nu);\ \lambda_2(\mathfrak{i}_\nu)]$$

zu[13]), so ist mit dieser Intervallfunktion $\lambda_3(\mathfrak{i}_\nu)$ wegen (4; 1) und (4; 5) die Bedingung (2; 16) für alle $\mathfrak{i}_\nu$ und jedes x_0 erfüllt. Wir entnehmen daraus den *Hauptsatz*:

Satz VI. *Sei x_0 ein beliebiger Häufungspunkt von Lückenintervallen $\mathfrak{i}_\nu$, l die Länge eines solchen Intervalls, $d(x_0)$ sein Abstand von x_0 und z der dem Häufungspunkt x_0 zugekehrte Endpunkt des Intervalls $\mathfrak{i}_\nu$. Die Gesamtheit der Lückenintervalle, von denen mindestens ein Endpunkt zu $\mathfrak{M}'$ gehört und dieser gleichzeitig irgendeinem Intervallhäufungspunkt x_0 zugekehrt ist, sei $\mathfrak{G}$. Für die „Fortsetzbarkeit" von $f(x)$ im Sinne von* (1; 3) *ist dann folgende Bedingung notwendig und hinreichend:*

Jedem $\mathfrak{i}_\nu$ aus $\mathfrak{G}$ muß man eine positive Zahl $\lambda_1 = \lambda_1(\mathfrak{i}_\nu)$ so zuordnen können, daß bei beliebigem festen x_0 gilt:

$$\lim_{z\to x_0} \frac{1}{1+\lambda_1(\mathfrak{i}_\nu)\,\frac{d(x_0)}{l}}\,[f'(z) - f'(x_0)] = 0,$$

wobei bei dieser Grenzwertbildung nur diejenigen Intervalle $\mathfrak{i}_\nu$ aus $\mathfrak{G}$ in Betracht zu ziehen sind, deren z zu $\mathfrak{M}'$ gehört (was im allgemeinen von x_0 abhängen wird).

Aus Satz VI folgt, nachdem in der dort auftretenden Bedingung die Werte von $f'(x)$ in den isolierten Punkten von $\mathfrak{M}$ nicht mehr vorkommen,

Satz VII. *Die Fortsetzbarkeit bzw. Nichtfortsetzbarkeit von $f(x)$ ist unabhängig davon, wie die Werte von $f'(x)$ in den isolierten Punkten von $\mathfrak{M}$ vorgeschrieben werden.*

---

[13]) Wenn $\lambda_1(\mathfrak{i}_\nu)$ für ein $\mathfrak{i}_\nu$ nicht definiert ist, sei $\lambda_3(\mathfrak{i}_\nu) = \lambda_2(\mathfrak{i}_\nu)$.

Lebenslauf

Am 28. Juni 1912 wurde ich als Sohn des Bankbeamten Karl Seebach und seiner Frau, Auguste geb. Pfalner, zu München geboren. Nach vierjährigem Besuch der Volksschule und neunjährigem Besuch des Wittelsbacher-Realgymnasiums zu München legte ich daselbst im Frühjahr 1931 die Reifeprüfung ab. Hierauf wandte ich mich an der Universität München dem Studium der Mathematik und Physik zu. Im März 1935 legte ich den ersten Teil der Lehramtsprüfung für Mathematik und Physik ab, ein Jahr später die pädagogische Prüfung. Vom 1. November 1935 bis 1. August 1937 war ich wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Seminar der Universität München. Seit 1. August 1937 bin ich Hilfsassistent am Mathematischen Institut der Technischen Hochschule München.

Die Anregung zu vorliegender Arbeit erhielt ich während meiner Assistentenzeit an der Universität München von Herrn Geheimrat Prof. Dr. Tietze, dem ich an dieser Stelle herzlichst danken möchte für all die Förderung, die er meiner Arbeit zuteil werden ließ.