

Ferdinant Wittenbauer *Hrsg.*

Graphische Dynamik.  
Ein Lehrbuch  
für Studierende  
und Ingenieure.  
Mit zahlreichen  
Anwendungen und  
Aufgaben

# Graphische Dynamik

Ein Lehrbuch für Studierende und Ingenieure

Mit zahlreichen Anwendungen und Aufgaben

von

**Ferdinand Wittenbauer †**

Professor an der Technischen Hochschule in Graz

Mit 745 Textfiguren



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

1923

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung  
in fremde Sprachen, vorbehalten.

ISBN 978-3-642-52554-4      ISBN 978-3-642-52608-4 (eBook)  
DOI 10.1007/978-3-642-52608-4

Copyright 1923 by Springer-Verlag Berlin Heidelberg  
Ursprünglich erschienen bei Julius Springer in Berlin 1923

## Vorwort.

Das vorliegende Buch ist die Frucht langjähriger Forschung. Veranlaßt wurde diese durch die Erkenntnis, daß die analytische Mechanik, so vollendet auch ihr klassisches Gebäude vor uns stehen mag, nicht die Mittel besitzt, um eine Reihe von Fragen, mit denen sich der Maschinen-Ingenieur zu beschäftigen hat, bis in ihre letzten Folgen zu beantworten. Zu diesen Fragen gehören vornehmlich die Bewegungserscheinungen der Getriebe, ihre Geschwindigkeiten und Beschleunigungen, wenn sie bekannten, gegebenen Kräften ausgesetzt sind und wenn man ihre Massenverteilung ohne Vernachlässigung berücksichtigen soll; ferner die Berechnung der hierbei auftretenden Drucke in den Führungen und Lagern, sowie der Spannungen in den einzelnen Teilen der Maschinen.

Es ist nicht richtig, wenn behauptet wird, daß sich das Interesse der Ingenieure auf die Kenntnis der Geschwindigkeiten beschränkt und die Beschleunigungen nur eine untergeordnete Rolle spielen. Wie wichtig tatsächlich die Ermittlung der Beschleunigungen und der infolge davon auftretenden Massendrucke werden kann, ergibt sich aus dem Umstande, daß z. B. bei Nockensteuerungen Beschleunigungen von  $2000 \text{ m/sek}^2$  auftreten können (Dinglers Journal 1909, S. 264). Die Beschleunigungen spielen nur deshalb diese untergeordnete Rolle, weil man meistens keinen einwandfreien Weg gekannt hat, sie zu finden, denn die Ermittlung der Beschleunigungen aus den Massen und Kräften muß auf den Lehren der Dynamik aufgebaut sein, und diese für Getriebe einwandfrei anzuwenden, besaß man eben keine Möglichkeit. Die analytische Dynamik lieferte wohl mehr oder weniger verwickelte Gleichungen, ließ aber den Ingenieur in dem Augenblicke im Stich, in dem die rechnerische Ausbeutung dieser Gleichungen beginnen sollte. Dem Ingenieur ist mit solchen oft unlösbaren Gleichungen nicht gedient, er darf nicht unterwegs stehen bleiben und die weitere Lösung dadurch erzwingen, daß er unbequeme Glieder in den Gleichungen vernachlässigt. Er muß schließlich das Resultat seiner Untersuchung in gebrauchsfertigen Zahlen erhalten, nicht in Differentialgleichungen und er muß für diesen Weg eine Methode besitzen, die ihm gestattet, alle Bedingungen der gestellten Aufgabe zu erfüllen und nichts zu vernachlässigen.

Daß diese Anforderungen nicht durch reine Rechnung befriedigt werden können, ist jedem schmerzlich bewußt geworden, der nur einmal



in der Lage war, eine auf diesem Gebiete liegende Aufgabe zu lösen. Man hat ja dieselbe Erfahrung schon längst in der Kinematik gemacht. Auch hier versagt die Rechnung meist vollkommen und führt zu derart verwickelten Formeln, daß man gerne auf sie verzichtet. Man versuche nur z. B. die Geschwindigkeit und Beschleunigung der geschränkten Schubkurbel, also gewiß von einem der einfachsten Getriebe, zu berechnen, wenn der Umlauf der Kurbel nicht gleichförmig erfolgt, und wird von der Umständlichkeit dieser Rechnung sehr unangenehm überrascht sein. Dieser Mangel steigert sich noch bedeutend, wenn man etwa die Geschwindigkeit und Beschleunigung eines verwickelteren Mechanismus rechnerisch bestimmen wollte. Dies hat in der Kinematik schon längst dazu geführt, den Weg der Rechnung zu verlassen und die graphischen Methoden zu bevorzugen, die in überraschender Einfachheit und Übersichtlichkeit die gestellten Aufgaben selbst in den verwickeltsten Fällen lösen.

Dieses Verhältnis der rechnerischen und zeichnerischen Methoden steigert sich nun in erhöhtem Maße, wenn man von der kinematischen Frage zur dynamischen übergeht, und nicht nur die Bewegung als solche, sondern mit Rücksicht auf die vorhandenen Kräfte und Massen zu untersuchen hat. Die für unseren Zweck grundlegende Aufgabe lautet nämlich so:

Von einem Getriebe allgemeinsten Art sind die treibenden Kräfte und hindernden Widerstände, sowie die gesamte Massenverteilung gegeben; es ist der Gang des Getriebes, also die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen seiner Punkte zu ermitteln.

Bei Lösung dieser Aufgabe versagt die Rechnung vollkommen, wenn man nicht etwa die Aufstellung einer Unzahl verwickelter Gleichungen als Lösung ansehen will; die graphische Methode führt jedoch auch hier zum Ziel und liefert schließlich Zahlen, die allein imstande sind, die gestellten Fragen restlos zu beantworten.

Die Grundlage der Dynamik ist die Kinematik, diese nicht etwa als Maschinen-Kinematik im Reuleauxschen Sinn aufgefaßt, sondern als Getriebelehre, d. h. als Lehre von der Bewegung der kinematischen Ketten.

Diese Kinematik hat ihre Entwicklung am Ende des 19. Jahrhunderts erfahren und hat eine Reihe schöner und vorbildlicher Werke gezeitigt; ich verweise hier nur auf das fundamentale Werk L. Burmesters: „Lehrbuch der Kinematik“ (I., Leipzig 1888, Text und Atlas); sie wurde als Ersatz verwickelter Rechnungen von den Ingenieuren lebhaft begrüßt und gefördert. Allein es wurden Anforderungen an sie gestellt, die ihrem Wesen fremd waren und die sie nicht befriedigen konnte; die Kinematik kann nicht Fragen beantworten, die auf dynamischem Gebiete liegen, man müßte denn den Einfluß der bewegten Massen vernachlässigen, oder sich doch damit begnügen,

diesen Einfluß als etwas Unveränderliches einzuführen. Dieser Umstand hat mit der Zeit zu einer Art Enttäuschung geführt und war offenbar der Anlaß, daß das Interesse für die Kinematik erkaltete.

Dies war jedoch nicht gerechtfertigt, denn wenn auch die Kinematik dynamische Fragen nicht lösen kann und will, so ist sie doch unzweifelhaft die Grundlage der Dynamik: ohne Kinematik gibt es keine Dynamik. Nur darf man bei ihr nicht stehen bleiben; und das hat man bisher zumeist getan. K. Heun gibt in seinem ausgezeichneten Berichte: „Die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik“ (Jahresb. d. deutsch. Math.-Ver. Bd. 9, 1900) auf S. 56 eine lehrreiche Schilderung der oft vorkommenden Verwechslung von kinematischen und dynamischen Lösungen. Man bedurfte, um dynamische Aufgaben des Maschinenbaues bis zur Lösung durchzuführen und die fertigen Zahlen dem Ingenieur zu überliefern, eines systematischen Lehrgebäudes, das, von den einfachsten Grundsätzen der Mechanik ausgehend, bis zu den kompliziertesten Fragen der Maschinen-Dynamik fortschreitet.

Von dieser Absicht geleitet, wurde das vorliegende Buch geschrieben. Es will die graphische Dynamik in derselben Weise in die Ingenieurkreise einbürgern, wie es der graphischen Statik seit geraumer Zeit gelungen ist. Wie diese die Berechnung statischer Bauwerke größtenteils verdrängt und durch die zeichnerische Behandlung ersetzt hat, so will die graphische Dynamik etwas Ähnliches auf ihrem Gebiete leisten. Aber sie will noch weiter gehen; sie soll nicht nur für die Zwecke der Maschineningenieure verfaßt sein, sie soll überhaupt die ebene Bewegung in zeichnerischer Behandlung vorführen und zeigen, wie man auch auf dem Gebiete der theoretischen Dynamik auf einfache Weise und fast ohne jede Rechnung gestellte Aufgaben lösen kann. Dies ist auch der Grund, weshalb ich begründete Hoffnung hege, daß die graphische Dynamik innerhalb weniger Jahre an den technischen Hochschulen gelehrt werden wird.

An Vorarbeiten für die Aufrichtung dieses Lehrgebäudes hat es nicht gefehlt; scheinbar hat der 1874 erschienene „Versuch einer graphischen Dynamik“ von R. Proell sich eine gleiche Aufgabe gestellt. Aber dieser „Versuch“ ist vorwiegend kinematischen Charakters; denn wo die Masse in Betracht gezogen wird, wird ihr Einfluß als konstant angesehen.

Auch die verdienstvollen Versuche G. Hermann's, die graphischen Methoden in die Dynamik einzuführen (vgl. „Die graphische Theorie der Turbinen und Kreiselpumpen“, 1887 und „Graphische Untersuchung der Zentrifugalregulatoren“, Z. d. V. d. Ing. 1886) sind rein kinematischen oder statischen Charakters.

Eine mächtige Anregung in dynamischem Sinne hat die Radinger'sche Methode der Schwungradberechnung gegeben (vgl. J. Radinger, Über Dampfmaschinen mit hoher Kolbengeschwindigkeit, 3. Aufl. Wien 1892), da sie den Einfluß der bewegten Massen insoferne

berücksichtigte, als sie wenigstens die Beschleunigungsdrücke der hin- und hergehenden Massen des Schubkurbelgetriebes in Rechnung stellte; freilich ist auch diese Lösung keine dynamische, sondern vorwiegend eine kinematische gewesen, da sie von der Voraussetzung einer konstanten Kurbelgeschwindigkeit ausging — von der man doch wußte, daß sie nicht konstant sein kann — und die gänzlich umgestaltet werden mußte, um zu einer wirklich dynamischen Lösung der Frage zu kommen. Aber die rasche Anerkennung und Verbreitung der Radingerschen Methode war ein deutlicher Beweis dafür, wie sehr der Ingenieur das Bedürfnis nach einer Dynamik empfand, die mit dem veränderlichen Einfluß der Masse zu arbeiten versuchte. In dieser Hinsicht war die Methode Radingers eine nicht genug zu schätzende Tat.

Um jedoch zu einer wirklich einwandfreien Lösung dieses und ähnlicher Probleme der Maschinentechnik zu gelangen, mußte das Lehrgebäude der Dynamik einer grundsätzlichen Umgestaltung unterzogen werden, die mit den Grundbegriffen der Mechanik einzusetzen und die reich gestalteten Getriebe der Maschinentechnik — eines nach dem andern, vom einfachsten bis zum verwickeltesten — einer systematischen dynamischen Untersuchung zu unterziehen hatte. Hier waren durch die ausgezeichneten Arbeiten O. Mohr's seit geraumer Zeit die notwendigen Grundlagen gegeben, von denen auch in diesem Buche der ausgiebigste Gebrauch gemacht wurde.

Auch sonst lagen in der technischen Literatur in einzelnen, in Zeitschriften zerstreuten Abhandlungen manche dankenswerte Versuche und Anregungen vor; aber ihre Anzahl ist nicht groß, und es mußte, um ein organisches Lehrgebäude zu schaffen, das Meiste aus eigenem beigesteuert werden. Man hat gelegentlich den Einwand erhoben, daß es verspätete Mühe sei, die Bewegung der Getriebe einer genauen dynamischen Untersuchung zu unterziehen; denn es herrsche auch in unserer Zeit das Bestreben, alle Maschinen auf ausschließlich rotierende Bewegungen zurückzuführen, und alle übrigen Bewegungsmöglichkeiten, wie z. B. hin- und hergehende oder schwingende Bewegungen, oder gar die komplizierten Bewegungen der Steuerungen vollkommen auszuschalten. Dieser Einwand konnte mich, wenn er auch einen Schein von Berechtigung hat, nicht irre machen; denn erstens wissen wir heute nicht, was für komplizierte Maschinen die Zukunft bauen wird; und dann ist doch zu bedenken, daß die Mechanik nicht ausschließlich für Maschinen-Ingenieure gemacht wurde und daß es ein Wissen der Mechanik geben wird, auch wenn keine Maschine mehr läuft — ein Zukunftsbild, dem freilich niemand Realität beimessen wird.

So wird auch die Graphische Dynamik noch bestehen bleiben, auch wenn alle Anwendungen, die man heute von ihr macht und machen kann, ihre Bedeutung eingebüßt haben; es werden ihr dann andere Aufgaben blühen, von denen wir uns heute vielleicht noch keine Vor-

stellung machen. Um Kleines mit Großem zu vergleichen: auch die Keplerschen Gesetze haben heute in der Welt der kleinsten Teile, in der Atomtheorie, eine Anwendung gefunden, an die vor wenigen Jahren noch niemand gedacht hatte.

Was den Inhalt des vorliegenden Buches betrifft, war der Verfasser bestrebt, so wenig wie möglich vorauszusetzen und alle Begriffe und Lehrsätze selbst kurz zu entwickeln. Was von den klassischen Sätzen der Mechanik benutzt wird, wie die „Prinzipien“ derselben, das Prinzip der Bewegung des Schwerpunktes, das Arbeitsprinzip und insbesondere das grundlegende Prinzip d'Alemberts, das wurde an Ort und Stelle eingefügt, wo es zum erstenmal verwendet wurde, und zwar in einer Art, die besondere Vorkenntnisse unnötig macht. Auf diese Weise hoffte ich, das Studium auch demjenigen zu erleichtern, der die Hochschule schon lange Zeit verlassen hat. Da das Buch jedoch kein Lehrbuch der Mechanik sein will, möge man darin nicht Sätze suchen, die in der graphischen Dynamik nichts zu tun haben.

Das Buch zerfällt in zwei ungleich große Teile; der erste, größere Teil schaltet die Zeit der Bewegung vollständig aus, beschäftigt sich also nur mit den augenblicklichen Bewegungszuständen, während der zweite Teil den zeitlichen Verlauf der Bewegung studiert. Bei allen Problemen wurde die Kinematik, die zum Verständnis der Dynamik unerlässlich ist, dieser vorangeschickt. An die Kinematik und Dynamik des einzelnen Systems schließt sich eine gründliche Analyse der kinematischen Kette, worauf in die Kinematik der Ketten und Getriebe eingegangen wird. Hier erwies sich das Mittel der statischen und dynamischen Ersatzpunkte als sehr fruchtbar, um den Einfluß der Massen jederzeit ohne Vernachlässigung untersuchen zu können. — Im zweiten Teil, in dem der zeitliche Verlauf der Bewegung studiert wird, erwies sich die Einführung der veränderlichen Masse als zweckdienliches Mittel, um den veränderlichen Einfluß der Masse auf die Bewegung zu untersuchen.

Die Grundlehren dieses Buches wurden bereits im Jahre 1904 in der Abhandlung: „Graphische Dynamik der Getriebe“, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 50, veröffentlicht; nur bedurfte es einer durchgreifenden Ausgestaltung und Verarbeitung, um die graphische Dynamik zur Einführung in Schule und Praxis geeignet zu machen. Was ich hiervon meinen Mitarbeitern und Vorgängern zu verdanken hatte, wurde gewissenhaft angeführt.

Großen Wert legte ich auf die durchgeführten Beispiele und Aufgaben; von diesen findet man am Ende der meisten Kapitel eine reiche Auswahl; sie sind, wo es anging, der ausführenden Maschinenteknik und den Patentschriften entnommen.

Unter den Beispielen wurden die fundamentalen und viel angewandten Getriebe, so das Gelenkviereck, die einfache und geschränkte Schubkurbel und der Kreuzschieber an verschiedenen Stellen und

wiederholt herangezogen. Bei einigen hier behandelten Getrieben, wie z. B. beim Indikator, beim Atkinsonschen Gasmotor u. a. wird man vielleicht bemängeln, daß die Massen ihrer Glieder zu klein sind, um sie überhaupt in Betracht zu ziehen. Hierauf sei erwidert, daß es sich in allen diesen Fällen nur darum handelte, die Methode vorzuführen und daß diese die gleiche ist, ob die Masse nun klein oder so groß ist, daß sie nicht mehr vernachlässigt werden darf.

Bei den komplizierteren Steuerungen wurde auf zahlenmäßige Angabe der Längen und Massen verzichtet, da sonst viele der auftretenden Massenkräfte so klein ausgefallen wären, daß die Abbildungen undeutlich geworden wären. Es kam für die Zeichnung dieser komplizierteren Kraftpläne nur auf die deutliche Anordnung der Kräfte, nicht auf ihre wirkliche Größe an, die sich ohne Schwierigkeit ermitteln läßt, sobald die Angaben ziffernmäßig vorliegen. —

Ich kann den Leser nur bitten, sich nicht mit dem Lesen des Textes und Anblicken der Figuren zu begnügen, sondern alles selbst noch einmal zu zeichnen und auch die Lösungen der Aufgaben durch eigenes Nachsinnen zu ergünden. Nur auf diese Weise wird er die anfänglich nicht geringen Schwierigkeiten überwinden; nach Überwindung dieser ersten Schwierigkeiten wird er jedoch, wie ich zu wissen glaube, Geschmack an dem Gegenstande finden und die notwendigen Konstruktionen mit Leichtigkeit durchführen können.

Der Einwurf, den man vielleicht machen könnte, daß die vorgetragenen Methoden zu kompliziert seien, um sie bei der Untersuchung von Getrieben anzuwenden, erledigt sich durch die Vorsicht, daß ich nur die Absicht hatte, zu zeigen, wie man die gestellte und oftmals reichlich verwickelte Frage einwandfrei dynamisch und ohne jede Vernachlässigung, weder durch Vereinfachung der Gleichungen, noch durch Änderungen der Massen und Kräfte, überhaupt lösen kann. Es verschlägt nichts, wenn der Konstrukteur während der Arbeit alles das wegläßt, von dem er sich überzeugt hat, daß es zu vernachlässigen ist; er wird durch die genaue Methode wenigstens die Möglichkeit besitzen, die Erlaubtheit der Vernachlässigungen prüfen zu können, und wird von dem unbehaglichen Gefühl befreit, Vernachlässigungen nach Willkür vornehmen zu müssen.

Zum Schlusse seien die Einschränkungen aufgezählt, die der Verfasser sich auferlegen mußte. Die vorliegende graphische Dynamik beschränkt sich auf die Untersuchung ebener Getriebe und Ketten, also der zumeist vorkommenden. Sie mußte ferner auf die Einführung des Reibungswiderstandes verzichten, um den Umfang nicht noch mehr zu vergrößern. Aus diesem Grunde mußte auch ein wichtiges Kapitel der Dynamik ausgelassen werden, nämlich die Lehre vom Massenausgleich. Da aber über diesen Gegenstand eine Reihe von ausgezeichneten Arbeiten vorliegt, konnte davon Abstand genommen werden, Bekanntes zu wiederholen.

Eines Umstandes muß noch Erwähnung getan werden, der die Dynamik der Maschine, sei sie graphisch oder rechnerisch, an ihrer Anwendbarkeit hindert, das ist das geringe Interesse, das man bisher für die Eigengewichte und Trägheitsmomente der Glieder der Getriebe aufbrachte. Wie selten begegnet man in der Literatur zahlenmäßigen Angaben über diese wichtigen Dinge! Und doch ist ihre Kenntnis unbedingt notwendig, wenn man eine dynamische Aufgabe zahlenmäßig zu Ende führen will. Es wäre sehr wertvoll, wenn man wenigstens für eine Reihe von vielfach ausgeführten Gliedern die Gewichte und Trägheitsmomente zusammenstellen würde, damit man in die Lage käme, wenigstens angenähert auf die Massen und Massenverteilung eines vorliegenden Gliedes schließen zu können. —

Es bleibt mir noch die angenehme Pflicht, jenen Herren Dank zu sagen, welche mich bei meiner Arbeit selbstlos unterstützten; dies war besonders mein ehemaliger Assistent, gegenwärtig Ingenieur der holländischen Regierung in Java, Herr Dr. K. Kriso, der mir bei der Konstruktion der Geschwindigkeits- und Beschleunigungspläne, sowie bei der Ableitung der Bewegungsgleichungen einer kinematischen Kette wertvolle Dienste leistete; ferner der Professor an der Landes-Berg- und Hütten-Schule in Leoben, Herrn R. Canaval, der als erster die ganze Handschrift mit allen Zeichnungen durchsah; endlich Herr Ing. J. Schreiner, mein gegenwärtiger Assistent, der die Korrekturen mit großer Gewissenhaftigkeit las.

Dem Verlage Julius Springer sage ich meinen herzlichsten Dank für das Entgegenkommen, das er mir jederzeit erwiesen und für die in jeder Richtung vorbildliche Ausstattung des Buches.

Graz, im Februar 1922.

**F. Wittenbauer.**

Zusatz: Kurz vor Abschluß des Druckes des vorliegenden Werkes, an dem er fast zwei Jahrzehnte gearbeitet, schied Professor Ferdinand Wittenbauer in Graz am 16. Februar 1922 nach kurzer Krankheit aus dem Leben. Mit der Fertigstellung seines Werkes im Falle seines vorzeitigen Todes letztwillig beauftragt, oblag es mir, die Korrekturen vom 19. Bogen an nochmals durchzusehen; die Änderungen, die ich anzubringen hatte, waren durchaus unwesentlicher Natur. Auch für das Vorwort fand sich der Entwurf unter den nachgelassenen Papieren vor.

Prag, im Juli 1922.

**T. Pöschl.**

# Inhaltsverzeichnis.

## A. Der augenblickliche Bewegungszustand.

	Seite
<b>I. Der Bewegungszustand eines Punktes.</b> 1. Die Geschwindigkeit. 2. Dimension und Maßstab der Geschwindigkeit. 3. Die Beschleunigung. 4. Normalbeschleunigung und Tangentialbeschleunigung. 5. Dimension und Maßstab der Beschleunigung . . .	1—5
<b>II. Der Bewegungszustand des freien Systems.</b>	
a) Der Geschwindigkeitszustand. 6. Drehung um einen Punkt. 7. Die Winkelgeschwindigkeit. 8. Geschwindigkeitsplan der Drehung. 9. Allgemeine Verschiebung. Relative Geschwindigkeit. 10. Der Ähnlichkeitssatz von Burmester. 11. Der Geschwindigkeitsplan. 12. Der Ähnlichkeitssatz von Mehmke. 13. Der Drehpol. 14. Veränderung des Geschwindigkeitsplanes. 15. Die gedrehten Geschwindigkeiten. 16. Der Geschwindigkeitszustand einer Geraden.	
b) Der Beschleunigungszustand. 17. Drehung des Systems. 18. Die Winkelbeschleunigung. 19. Konstruktion der Normalbeschleunigung aus der Geschwindigkeit. 20. Der Normalfall. 21. Konstruktion der Geschwindigkeit aus der Beschleunigung. 22. Die Beschleunigungsfigur eines sich drehenden Systems. 23. Beschleunigungsplan eines drehenden Systems. 24. Die Beschleunigungsfigur eines allgemein bewegten Systems. 25. Der Beschleunigungsplan eines allgemein bewegten Systems. 26. Die Lage des Beschleunigungsplanes. 27. Die Punktreihen der Beschleunigungspunkte. 28. Der Beschleunigungszustand einer Geraden. 29. Der Beschleunigungspol. 30. Die gedrehten Beschleunigungen. 31. Der Wendekreis und der Wendepol. 32. Der Tangentialkreis. 33. Die Anordnung der Beschleunigungen um den Beschleunigungspol. 34. Ermittlung des Beschleunigungspoles. 35. Ermittlung der Beschleunigungsrichtung eines Punktes aus den drei Punkten O, J und P. 36. Zerlegung der Beschleunigung. 37. Aufgaben . . . . .	6—40
<b>III. Kinematische Geometrie.</b> 38. Wesen und Inhalt der kinematischen Geometrie. 39. Die Wechselgeschwindigkeit des Drehpols. 40. Der Krümmungsmittelpunkt. 41. Der Rückkehrkreis. 42. Der Satz von Bobillier. 43. Die Anwendung des Satzes von Bobillier. 44. Hüllbahnen. 45. Die Sätze von Aronhold. 46. Umkehrung der Bewegung. 47. Aufgaben . . . . .	41—51
<b>IV. Dynamik des freien Systems.</b> 48. Scheibe, kinematische Kette, Glied. 49. Die Masse. 50. Augenblickliche Bewegung der Scheibe. 51. Der Schwerpunkt. 52. Das Prinzip der Bewegung des Schwerpunktes. 53. Das D'Alembertsche Prinzip. 54. Beispiel. Spannung in einer Kolbenstange. 55. Die Drehung um den Schwerpunkt. 56. Konstruktion der Beschleunigung aus der Kraft. 57. Der Beschleunigungspol einer Kraft. 58. Die Pöschlschen Kreise. 59. Die zu gegebenem Beschleunigungszustand gehörenden Kräfte. 60. Die Wendepolgeraden. 61. Die Tangentialpolgeraden. 62. Aufgaben	52—66

	Seite
<b>V. Das geführte System.</b> 63. Führungen. 64. Freiheitsgrade. Flächenlauf, Zwangslauf . . . . .	67—69
<b>VI. Das flächenläufige System.</b> 65. Punktführung und Kurvenführung. 66. Geschwindigkeitszustand der Einpunktführung. 67. Beschleunigungszustand der Einpunktführung. 68. Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustand der Einkurvenführung. 69. Beispiel. Rollen und Gleiten einer Kreisscheibe auf einem Kreise	70—75
<b>VII. Das flächenläufige System. Dynamik.</b> 70. Dynamik der Einpunktführung. 71. Dynamik der Einkurvenführung. 72. Beispiel. Rollen und Gleiten einer schweren Kreisscheibe auf einem Kreise . .	76—81
<b>VIII. Das zwangsläufige System. Kinematik.</b> 73. Übersicht der Führungen. 74. Umkehrung der Bewegung. 75. Die Dauerdrehung um einen Punkt. 76. Geschwindigkeitszustand der Zweipunktführung (Führung im Gelenkviereck). 77. Beschleunigungszustand der Zweipunktführung. 78. Kinematische Geometrie der Zweipunktführung. 79. Führung der Schubkurbel. 80. Führung des Kreuzschiebers. 81. Punkt- und Kurvenführung. Der Wälzhebel. 82. Kulissenführung. 83. Konchoidenführung. 84. Führung der schwingenden Kurbelschleife. 85. Die Zweikurvenführung. 86. Sonderfälle der Zweikurvenführung. 87. Führung eines Achsenkreuzes in zwei Punkten. 88. Die Rollung. 89. Aufgaben . .	82—123
<b>IX. Das zwangsläufige System. Dynamik.</b> 90. Dynamik der sich drehenden Scheibe. 91. Dynamik der Zweipunktführung. 92. Dynamik des Kreuzschiebers. 93. Dynamik der rollenden Scheibe. 94. Literatur	124—138
<b>X. Theorie der Ersatzpunkte.</b> 95. Einleitung. 96. Definition der Ersatzpunkte eines Systems. 97. Die statischen Ersatzpunkte. 98. Die dynamischen Ersatzpunkte. 99. Ersatz der Masse durch zwei dynamisch gleichwertige Punktmassen. 100. Der Stoßmittelpunkt einer Scheibe. 101. Beschleunigungsdruck einer sich drehenden Scheibe. 102. Beispiele. 103. Aufgaben. 104. Ersatz der Masse durch drei dynamisch gleichwertige Punktmassen. 105. Die drei dynamischen Ersatzpunkte liegen auf einer Geraden. 106. Beispiele. 107. Ersatz der Masse durch vier dynamisch gleichwertige Punktmassen. 108. Beispiele. 109. Aufgabe. 110. Ersatzpunkte mit gleichen Massen. 111. Zwei Ersatzpunkte mit gleichen Massen. 112. Drei Ersatzpunkte mit gleichen Massen. 113. Beispiele. 114. Vier Ersatzpunkte mit gleichen Massen. 115. Beispiele. 116. Wahl eines Ersatzpunktes im Schwerpunkt. 117. Aufgaben	139—164
<b>XI. Schwerpunkt und Trägheitsmoment.</b> 118. Bestimmung des Schwerpunktes durch Versuch. 119. Trägheitsmomente von Flächen. 120. Trägheitsmomente von homogenen Scheiben. 121. Bestimmung der Trägheitsmomente aus Schwingungen. 122. Bestimmung der Trägheitsmomente durch Wägung . . . . .	165—176
<b>XII. Die Beschleunigungsdrücke eines Systems.</b> 123. Die Resultante der Beschleunigungsdrücke. 124. Die Beschleunigungsdrücke der statischen Ersatzpunkte. 125. Die Beschleunigungsdrücke der dynamischen Ersatzpunkte. 126. Beispiele. 127. Die Beschleunigungsdrücke von zwei statischen Ersatzpunkten. 128. Beispiele. 129. Die Beschleunigungsdrücke von drei statischen Ersatzpunkten. 130. Die drei statischen Ersatzpunkte liegen in einer Geraden . . . . .	177—192
<b>XIII. Kraftreduktion eines geführten Systems.</b> 131. Gleichgewichtskraft und reduzierte Kraft. 132. Kraftreduktion der sich drehenden Scheibe. 133. Kraftreduktion bei der Zweipunktführung.	



134. Kraftreduktion bei der Punkt- und Kurvenführung. 135. Kraftreduktion bei der Zweikurvenführung. 136. Führung eines rechten Winkels an zwei Kurven. 137. Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen. 138. Aufgaben . . . . . 193—199
- XIV. Dynamik des geführten Systems.** 139. Die beiden grundlegenden Aufgaben. 140. Die erste grundlegende Aufgabe. Ermittlung der Kraft aus dem Beschleunigungszustand. 141. Beschleunigungskraft einer Schubstange. 142. Beschleunigungskraft einer Schubschiebers. 144. Beschleunigungskraft der Zweipunktführung. 145. Der Beschleunigungsdruck bei Anfangsbewegungen des Systems. 146. Die zweite grundlegende Aufgabe. Ermittlung des Beschleunigungszustandes aus den gegebenen Kräften. 147. Ermittlung des Beschleunigungszustandes beim Kreuzschieber. 148. Ermittlung des Beschleunigungszustandes einer allgemeinen Zweipunktführung. 149. Aufgaben . . . . . 200—220
- XV. Die kinematische Kette, ihre Beweglichkeit und ihr Zwanglauf.** 150. Zusammenhang mehrerer Systeme. 151. Die kinematische Kette. 152. Die Gelenkketten, ihr Beweglichkeitsgrad und Zwanglauf. 153. Die fehlenden Stäbe. 154. Aufgaben. 155. Kinematische Ketten mit gekrümmten Schiebern. 156. Kinematische Ketten mit geraden Schiebern. 157. Kinematische Ketten mit Scheiben. 158. Überkreuzung von Stäben. 159. Schubketten. 160. Die Gleichung für den Beweglichkeitsgrad. 161. Das Kennzeichen des Zwanglaufes von M. Grübler. 162. Beispiele. 163. Aufgaben 221—244
- XVI. Die Relativbewegung mehrerer Systeme.** 164. Zwei Scheiben mit gleichgerichteten Drehungen. 165. Zwei Scheiben mit entgegengesetzten Drehungen. 166. Zwei Scheiben mit gleichen entgegengesetzten Drehungen. 167. Die relativen Drehpole dreier Systeme. 168. Die gegenseitigen Bewegungen mehrerer Systeme. 169. Die Anordnung der Drehpole. 170. Anwendungen. 171. Die Drehpole in bezug auf die ruhende Ebene. 172. Aufgaben . . . . . 245—261
- XVII. Der Geschwindigkeitszustand der kinematischen Kette.** 173. Stellung der Aufgabe.
- A. Freie kinematische Ketten. 174. Grundaufgabe. 175. Das Gelenkviereck. 176. Regeln für die Konstruktion der Geschwindigkeitspläne. 177. Geschwindigkeitsplan einer achtgliedrigen Kette. 178. Offene kinematische Ketten. 179. Geschwindigkeitsplan einer zehngliedrigen, nicht zwangsläufigen Kette.
- B. Getriebe. 180. Das Kurbelgetriebe. 181. Geschwindigkeitsplan eines sechsgliedrigen Getriebes. 182. Geschwindigkeitsplan eines zehngliedrigen Getriebes. 183. Anwendungen.
- C. Kinematische Ketten mit Schiebern. 184. Gekrümmte Schieber. 185. Gerade Schieber. 186. Literatur. 187. Aufgaben 262—292
- XVIII. Der Beschleunigungszustand der Gelenkketten.** 188. Bestimmtheit des Beschleunigungszustandes einer kinematischen Kette. 189. Grundaufgabe. 190. Beschränkung bei Annahme der Beschleunigungen. 191. Das Gelenkviereck. 192. Viergliedrige offene kinematische Kette. 193. Sechsgliedrige geschlossene kinematische Kette. 194. Das Gelenkviereck mit angehängten Dreiecken. 195. Beschleunigungspläne von Getrieben. 196. Das Getriebe der Balancier-Dampfmaschine. 197. Beschleunigungsplan eines acht-

gliedrigen Getriebes. 198. Beschleunigungsplan eines zehngliedrigen Getriebes. 199. Literatur. 200. Kinematische Geometrie der Gelenkketten. 201. Aufgaben . . . . . 293—315

**XIX. Der Beschleunigungszustand von kinematischen Ketten mit Schiebern.** 202. Kulissenführung. 203. Der Satz von Coriolis. 204. Die gerade Kulisse. 205. Die rotierende Kurbelschleife. 206. Die schwingende Kurbelschleife. 207. Die Winkelschleife. 208. Die Kreuzschieberkurbel. 209. Anwendungen. 210. Viergliedrige Kette mit gerader Kulisse. 211. Fünfgliedrige Kette mit gerader Kulisse. 212. Achtgliedriges Getriebe mit drei geraden Kulissen. 213. Aufgaben . . . . . 316—344

**XX. Der Beschleunigungszustand von kinematischen Ketten mit Kurvenführungen.** 214. Das Schleifkurvengetriebe. 215. Schleifkurvengetriebe mit Punktführung. 216. Anwendungen. 217. Einfluß der plötzlichen Krümmungsänderung auf die Beschleunigungen des Schleifkurvengetriebes. 218. Das Schubkurvengetriebe. 219. Das Schubkurvengetriebe mit Punktführung. 220. Anwendung. Ventiltrieb durch unrunde Scheiben (Steuernocken). 221. Das Schleifkurvengetriebe mit gerader Führung. 222. Anwendungen. 223. Aufgaben . . . . . 345—370

**XXI. Die Bewegung des Schwerpunkts.** 224. Sätze über den Schwerpunkt. 225. Der Schwerpunkt zweier gelenkig verbundener Scheiben. Hauptpunkte und Hauptstrecken. 226. Der Schwerpunkt dreier gelenkig verbundener Scheiben. Die Schwerpunktskette. 227. Der Schwerpunkt und die Schwerpunktskette von vier gelenkig verbundenen Scheiben. 228. Der Schwerpunkt einer offenen kinematischen Kette. 229. Der Schwerpunkt einer geschlossenen kinematischen Kette. 230. Der Schwerpunkt eines Getriebes. Das Schwerpunktsgetriebe. 231. Anwendung. Die Kniehebelpresse von G. W. Greenwood. 232. Kinematische Ketten mit Schiebern. 233. Getriebe mit Schiebern. 234. Die Bewegungspläne eines gelenkigen Parallelogrammes. 235. Die Geschwindigkeit und Beschleunigung des Schwerpunktes eines Getriebes. 236. Die Geschwindigkeit und Beschleunigung des Schwerpunktes einer kinematischen Kette . . . . . 371—392

**XXII. Das Gleichgewicht der kinematischen Kette.** 237. Anzahl der wählbaren Kräfte, 238. Spannungen. 239. Gleichgewicht eines gelenkigen Fünfecks. 240. Gleichgewicht einer sechsgliedrigen Kette. 241. Gleichgewicht einer achtgliedrigen Kette. 242. Gleichgewicht eines Gelenkvierecks mit angehängten Dreiecken. 243. Gleichgewicht einer zehngliedrigen Kette. 244. Das Gleichgewicht des Getriebes. 245. Gleichgewicht des Kurbelgetriebes. 246. Die Energie des Pröllschen Regulators. 247. Gleichgewicht eines achtgliedrigen Getriebes. 248. Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen. 249. Aufgaben . . . . . 393—411

**XXIII. Die reduzierte Kraft des Getriebes.** 250. Größe und Wirkungslinie der reduzierten Kraft. 251. Methoden zur Bestimmung der reduzierten Kraft. 252. Kraftreduktion an der Doppelkurbel. 253. Kraftreduktion an der Schubkurbel. 254. Kraftreduktion an einem sechsgliedrigen Getriebe. 255. Anwendung. 256. Kraftreduktion an einem zehngliedrigen Getriebe. 257. Anwendung. 258. Aufgaben . . . . . 412—426

<b>XXIV. Die Ersatzpunkte und Beschleunigungsdrücke einer kinematischen Kette.</b> 259. Die Ersatzpunkte. 260. Das Problem von Glocke und Klöppel. 261. Die dynamischen Ersatzpunkte zweier Systeme. 262. Beispiel. 263. Die dynamischen Ersatzpunkte dreier Systeme. 264. Die statischen Ersatzpunkte der kinematischen Kette. 265. Beispiele. 266. Die Beschleunigungsdrücke . . . . .	427—434
<b>XXV. Dynamik der freien kinematischen Kette.</b> 267. Stellung des Problems. 268. Dynamik zweier gelenkig verbundener Stäbe ohne äußere Kräfte. Analytische Lösung. 269. Graphische Lösung. 270. Direkte Lösung der vorigen Aufgabe. 271. Dynamik zweier gelenkig verbundener Stäbe unter dem Einflusse von Kräften. Analytische Lösung. 272. Graphische Lösung. 273. Aufgabe. 274. Dynamik des flächenläufigen Gelenkviereckes. 275. Dynamik des frei beweglichen Gelenkviereckes. 276. Aufgaben . . . . .	435—454
<b>XXVI. Dynamik des Getriebes.</b> 277. Ruhe und Gleichgewicht. 278. Die reduzierte Trägheitskraft. 279. Die beiden grundlegenden Aufgaben. 280. Die erste grundlegende Aufgabe: Ermittlung der Kraft aus dem Beschleunigungszustande. 281. Beschleunigungsdruck der Kreuzschieberkurbel. 282. Beschleunigungsdruck der schwingenden Kurbelschleife. 283. Beschleunigungsdruck eines sechsgliedrigen Getriebes mit zwei Dreiecksgliedern. 284. Beschleunigungsdruck bei Anfangsbewegungen des Getriebes. 285. Die zweite grundlegende Aufgabe: Ermittlung des Beschleunigungszustandes aus den gegebenen äußeren Kräften. 286. Dynamische Bestimmung des Beschleunigungszustandes der geschränkten Schubkurbel. 287. Dynamische Bestimmung des Beschleunigungszustandes der gekuppelten gleichschenkligen Schubkurbel. 288. Dynamische Bestimmung des Beschleunigungszustandes eines sechsgliedrigen Getriebes mit einem Dreiecksgliede. 289. Literatur. 290. Aufgaben . . . . .	455—478
<b>XXVII. Die Ermittlung der Spannungen und Gelenkdrücke in einer bewegten kinematischen Kette.</b> 291. Die Methode. 292. Spannungen und Gelenkdrücke im frei bewegten Gelenkviereck. 293. Korrektur der Spannungen. 294. Spannungen und Gelenkdrücke im allgemeinen Kurbelgetriebe. 295. Spannungen und Gelenkdrücke der geschränkten Schubkurbel. 296. Spannungen und Gelenkdrücke in der Kurbelschleife. 297. Spannungen und Gelenkdrücke in einem sechsgliedrigen Getriebe mit zwei Dreiecksgliedern. 298. Die Wichtigkeit von Zahlenbeispielen. 299. Zahlenmäßige Bestimmung der Spannungen und Gelenkdrücke einer geschränkten Schubkurbel. 300. Aufgabe . . . . .	479—504
<b>XXVIII. Steuerungen.</b> 301. Einführung. 302. Die Klug-Steuerung. 303. Steuerung von E. Frikart. 304. Die Heusinger-Joy-Steuerung. 305. Die Allan-Steuerung. 306. Die Steuerung von Bonjour-Lachaussée. 307. Aufgaben . . . . .	505—545

## B. Die Bewegung in der Zeit.

<b>XXIX. Die zeitliche Bewegung eines Punktes.</b> 308. Die Bahn. 309. Freie und gezwungene Bewegung. 310. Größe des Zwanges. 311. Das Wesen der Diagramme. 312. Bewegungsdiagramme. 313. Die Hodographen. 314. Konstruktion der Beschleunigung. 315. Beispiele. 316. Der lokale Hodograph mit gedrehten Geschwindigkeiten . . . . .	546—557
--	---------

<b>XXX. Eigenschaften der Differential- und Integralkurven.</b>	317. Die Differentialkurve. 318. Die Integralkurve. 319. Aufgaben . . . . .	558—562
<b>XXXI. Kinematische Diagramme.</b>	320. Das Weg-Zeit-Diagramm. 321. Das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm. 322. Der Weg im Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm. 323. Das Beschleunigung-Zeit-Diagramm. 324. Die Maßstäbe. 325. Zusammenhang der Diagramme. 326. Das Geschwindigkeit-Weg- (v-s-) Diagramm und das Beschleunigung-Weg- (b-s-) Diagramm. 327. Diagramme mit Geschwindigkeitshöhen. 328. Das Diagramm aus dem Weg und der Geschwindigkeitshöhe. 329. Ermittlung der Zeit. 330. Beispiele. 331. Anwendungen der kinematischen Diagramme. 332. Die mittlere Geschwindigkeit. 333. Der Ungleichförmigkeitsgrad der Bewegung . . . . .	563—598
<b>XXXII. Dynamische Diagramme.</b>	334. Einleitung. 335. Das Kraft-Weg-Diagramm. 336. Das Arbeit-Weg-Diagramm. 337. Das Energie-Weg-Diagramm. 338. Zusammenhang der dynamischen Diagramme. 339. Übergang von den dynamischen zu den kinematischen Diagrammen. 340. Ermittlung und Maßstab der Masse. 341. Das Kraft-Geschwindigkeit-Diagramm. 342. Das Kraft-Zeit-Diagramm. 343. Das Leistung-Zeit-Diagramm. 344. Anwendungen . . . . .	599—612
<b>XXXIII. Das Zeichnen von Diagrammen.</b>	345. Die Aufnahme von Diagrammen. 346. Zeichnerische Ausführung der Diagramme. 347. Das Zeichnen der Integralkurven. 348. Das Zeichnen der Differentialkurven mittels Tangenten. 349. Das Zeichnen der Differentialkurven ohne Tangenten . . . . .	613—623
<b>XXXIV. Die Translation des Systems.</b>	350. Kinematik der Translation. 351. Anwendungen. 352. Dynamik der Translation. 353. Anwendung. 354. Aufgabe . . . . .	624—628
<b>XXXV. Die Dauerdrehung des Systems.</b>	355. Kinematik der Drehung. 356. Die kinematischen Diagramme. Pendelweg und Ungleichförmigkeitsgrad der Drehung. 357. Dynamik der Drehung. 358. Beispiele. 359. Anfahrt, Beharrungszustand und Endlauf. 360. Die Periode des Beharrungszustandes, bezogen auf die Zeit. 361. Die Periode des Beharrungszustandes, bezogen auf den Weg. 362. Beispiel. 363. Literatur. 364. Die Anfahrt . . . . .	629—647
<b>XXXVI. Bewegungsdiagramme des geführten Systems.</b>	365. Die Rollkurven. 366. Bewegungsdiagramme der Schubkurbel. 367. Konstruktion der Geschwindigkeit und Beschleunigung der Schubkurbel ohne Benützung der Schubstange. 368. Bewegungsdiagramme des Kreuzkopfes der geschränkten Schubkurbel. 369. Bewegungsdiagramme der Doppelkurbel. 370. Aufgaben . . . . .	648—658
<b>XXXVII. Bewegungsgesetze der veränderlichen Masse eines Punktes.</b>	371. Die veränderliche Masse in der Astronomie und Relativitätstheorie. 372. Die veränderliche Masse in der technischen Mechanik. 373. Wirkliche Änderung der bewegten Masse. Der Satz vom Antrieb. 374. Das dynamische Grundgesetz. 375. Anwendungen. 376. Gedachte Veränderung der bewegten Masse. 377. Das Arbeitsprinzip bei veränderlicher Masse. 378. Das dynamische Grundgesetz bei veränderlicher Masse. 379. Das veränderliche Massengewicht. 380. Die Geschwindigkeitshöhe. 381. Die Diagramme der Bewegung . . . . .	659—672

<b>XXXVIII. Dynamik des Systems.</b> 382. Das System als Punkt von veränderlicher Masse. 383. Reduktion der Kräfte. 384. Reduktion der Massen. 385. Massenreduktion mit Hilfe der dynamischen Ersatzpunkte. 386. Durchführung der graphischen Massenreduktion. 387. Massenreduktion nach Art der Kraftreduktion. 388. Beispiele. 389. Dynamik des geführten Systems. 390. Dynamik der Konchoidenführung. 391. Dynamik der Schubkurbelführung. Analytische Lösung eines Sonderfalles. 392. Dynamik der Schubkurbelbewegung. Graphische Lösung des allgemeinen Falles. 393. Aufgaben . . . . .	673—695
<b>XXXIX. Kinematische Diagramme der Getriebe.</b> 394. Stellung der Aufgabe. 395. Diagramme der rotierenden Kurbelschleife. 396. Der Kompressor der Hartford-Machine-Screw Co. 397. Das Dampfmaschinengetriebe von Williams. 398. Aufgaben . . .	696—707
<b>XI. Dynamik des Getriebes.</b> 399. Einführung. 400. Die Kräfte des Getriebes. 401. Reihenfolge der auszuführenden Arbeiten. 402. Die reduzierte Masse des Getriebes. 403. Massenreduktion der Schubkurbel. 404. Massenreduktion beim Bucherer-Motor. 405. Massenreduktion beim Gnôme-Motor. 406. Ersatzpunkte des Getriebes. 407. Anzahl der dynamischen Ersatzpunkte einer kinematischen Kette. 408. Anzahl der dynamischen Ersatzpunkte eines Getriebes. 409. Die kleinste Anzahl von Ersatzpunkten. 410. Aufgaben. 411. Massenreduktion des Schreibzeuges eines Indikators. 412. Kraft und Massenreduktion bei der Atkinson'schen Gasmachine. 413. Aufgabe. 414. Untersuchung der Bewegung des Reduktionspunktes. 415. Schwingende Bewegung eines schweren Getriebes. 416. Die Reduktion der Trägheitskräfte. 417. Rückdruck einer Balancierkolbenmaschine. 418. Aufgabe. 419. Das Massenwuchtdiagramm. 420. Räumliche Bewegungsdiagramme. 421. Beispiel. Bewegung zweier schwerer Ellipsenräder. 422. Leitsätze . . . . .	708—742
<b>C. Anwendungen auf die Praxis.</b>	
<b>XII. Einlaßsteuerung einer Zweitakt-Großgasmachine, Bauart Körting.</b> 423. Anordnung. 424. Geschwindigkeiten. 425. Beschleunigungen. 426. Ventilgeschwindigkeit. 427. Ventilbeschleunigung. 428. Spannung und Gelenkdruck . . . . .	743—758
<b>XIII. Dynamische Ermittlung des Schwungradgewichtes.</b> 429. Vorgeschichte. 430. Die Methode. 431. Bestimmung des Schwungradgewichtes für eine Einzylinder-Expansionsmaschine. 432. Bestimmung des Schwungradgewichtes für eine Einzylinder-Expansionsmaschine mit geschränkter Schubkurbel in Verbindung mit einer Doppelkurbel. 433. Literatur . . . . .	759—775
Die wichtigsten Gleichungen . . . . .	776—785
Bezeichnungen . . . . .	786—790
Namensverzeichnis . . . . .	791—792
Sachverzeichnis . . . . .	793—797

## A. Der augenblickliche Bewegungszustand.

In vielen wichtigen Untersuchungen der technischen Mechanik läßt sich die Dauer der Bewegung vollkommen ausschalten; dies trifft zu bei Augenblickszuständen, für welche die Dauer der Bewegung keine Bedeutung hat. Es genügt, auf den augenblicklichen Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustand der Teile einer Maschine zu verweisen; oder auf das Gleichgewicht ihrer Kräfte und Trägheitskräfte in jedem Augenblicke ihrer Bewegung; oder auf ihre Bewegungsenergie. Auch die wichtige Ermittlung der Spannungen in den einzelnen Teilen einer laufenden Maschine, wie auch der Drücke in den Gelenken kann durchgeführt werden, ohne die Zeit heranzuziehen.

Dabei ist aber nicht aus dem Auge zu verlieren, daß wir den augenblicklichen Bewegungszustand als jenen ansehen, wie er sich während eines sehr kleinen Zeiteilchens darstellt; ja wir müssen sogar die Vorgänge in zwei aufeinanderfolgenden, sehr kleinen Zeiteilchen untersuchen, wenn wir nicht nur den Geschwindigkeitszustand, sondern auch den Beschleunigungszustand feststellen wollen.

Aber die endliche Zeit kann in einer Reihe von Fragen außer Betracht bleiben und aus diesem Grunde wollen wir alle Untersuchungen, die von der endlichen Zeit keinen Gebrauch machen, an den Beginn dieses Buches stellen.

## I. Der Bewegungszustand eines Punktes.

Wenn wir den augenblicklichen Bewegungszustand eines Punktes beschreiben wollen, müssen wir uns entscheiden, ob wir uns mit der Beschreibung auf ein sehr kleines Zeitteilchen beschränken, oder ob wir sie auf die Aufeinanderfolge von zwei sehr kleinen Zeitteilchen ausdehnen wollen.

Im ersten Falle können wir nur die Geschwindigkeit des Punktes feststellen; im zweiten Falle kann außerdem noch die Beschleunigung, das ist die Veränderung der Geschwindigkeit, angegeben werden.

**1. Die Geschwindigkeit.** Nehmen wir an, der bewegte Punkt wäre in  $A$  (Fig. 1) und würde in dem sehr kleinen Zeitteilchen  $\Delta t$  den sehr kleinen Weg  $\Delta s$  in irgend einer Richtung zurücklegen und nach  $A'$  gelangen, dann

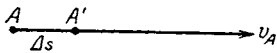


Fig. 1.

pflegt man das Verhältnis  $\frac{\Delta s}{\Delta t}$  die mittlere

Geschwindigkeit des Punktes in der Zeit  $\Delta t$  zu nennen. Bei unbegrenzter Abnahme von  $\Delta t$  und damit auch von  $\Delta s$  strebt dieses Verhältnis einem Grenzwerte  $\frac{ds}{dt}$  zu, den man den ersten Differentialquotienten des Weges nach der Zeit nennt. Er ist ein Maß der Geschwindigkeit des Punktes in der unendlich kleinen Zeit  $dt$ ; der augenblickliche Geschwindigkeitszustand des Punktes in  $A$  ist dann durch den Ausdruck gegeben

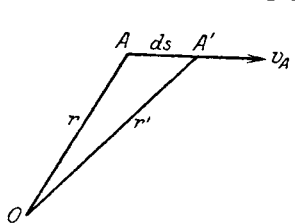


Fig. 2.

$$v_A = \frac{ds}{dt} \dots \dots \dots 1)$$

Bezieht man die Bewegung des Punktes auf einen beliebigen in Ruhe befindlichen Punkt  $O$  (Fig. 2), so wird sich die anfängliche Entfernung  $\overline{OA} \equiv r$  im Zeitteilchen  $dt$  in  $\overline{OA'} \equiv r'$  verändern. Stellt man diesen Übergang in Form einer geometrischen Summe, d. h. einer Aneinanderfügung nach Größe und

Richtung dar, wobei jetzt und später das Zeichen  $\equiv$  die geometrische Gleichheit bedeuten soll, so ist

$$r' \equiv r + ds$$

und die Geschwindigkeit in  $A$ :

$$v_A \equiv \frac{r' - r}{dt} \equiv \frac{ds}{dt};$$

$ds$  ist die geometrische Zunahme von  $r$  im Zeiteilchen  $dt$ .

**2. Dimension und Maßstab der Geschwindigkeit.** Bezeichnet man Länge und Zeit durch die Symbole  $\mathbf{L}$  und  $\mathbf{T}$ , so ist die Dimension der Geschwindigkeit durch das Symbol  $\mathbf{L T}^{-1}$  ausgedrückt. Sie ist also keine Länge und darf nicht etwa nach dem Längen-Maßstab gemessen werden, sondern bedarf eines eigenen, im übrigen willkürlichen Geschwindigkeits-Maßstabes. Wählt man z. B. den Maßstab 1 cm Zeichnung = 5 met/sek Geschwindigkeit, so würde eine Geschwindigkeit von der Größe  $v = 50$  met/sek durch eine Strecke von 10 cm darzustellen sein.

Die Geschwindigkeit wird also in der Zeichnung, in einem Geschwindigkeitsplan durch eine gerade Strecke versinnlicht, die eine gewisse maßstäbliche Länge und die Richtung von  $ds$ , die Geschwindigkeits-Richtung besitzt.

**3. Die Beschleunigung.** Wir wollen jetzt zwei aufeinanderfolgende Zeiteilchen von gleicher Größe verfolgen und annehmen, daß sie durch fortwährendes Abnehmen von  $\Delta t$  den unendlich kleinen Wert  $dt$  erreicht hätten.

Im ersten Zeiteilchen käme der Punkt von  $A$  nach  $A'$  (Fig. 3); seine Geschwindigkeit hierbei ist

$$v_A = \frac{\overline{AA'}}{dt} = \frac{ds}{dt}.$$

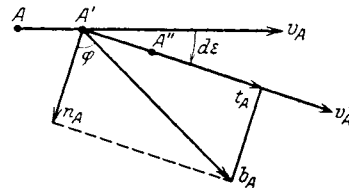


Fig. 3.

Fände keine Störung dieser Geschwindigkeit statt, so würde der Punkt seine Bewegung in der einmal angenommenen Richtung  $AA'$  mit der gleichen Geschwindigkeit  $v_A$  fortsetzen.

Tritt jedoch eine Störung dieser Geschwindigkeit auf, so kann sie sowohl die Richtung wie die Größe der Geschwindigkeit ändern; der Punkt wird, statt seinen Weg in der Richtung  $AA'$  fortzusetzen, eine etwas geänderte Richtung einschlagen und im zweiten Zeiteilchen nach  $A''$  kommen. Hierbei kann der Weg  $ds' \equiv \overline{A'A''}$  vom früheren Wege  $ds = \overline{AA'}$  auch der Größe nach verschieden, also ebenso die Geschwindigkeit in der neuen Richtung

$$v_{A'} = \frac{\overline{A'A''}}{dt} = \frac{ds'}{dt}$$

von der bisherigen  $v_A$  auch der Größe nach verschieden sein.

Die drei Lagen  $AA'A''$  des Punktes werden dann nicht in einer Geraden liegen; es läßt sich jedoch ein Kreis durch diese drei Punkte legen, den man den Krümmungskreis der Bahn des bewegten Punktes



nennt; der Halbmesser  $\rho$  dieses Kreises wird als Krümmungshalbmesser der Bahn in  $A$  bezeichnet. Nennt man  $d\varepsilon$  den unendlich kleinen Ablenkungswinkel der Geschwindigkeit  $v_A$ , so ist  $d\varepsilon$  auch der Winkel, den die beiden Bahn-Normalen in  $A$  und  $A'$  miteinander einschließen. Es ist dann

$$\overline{AA'} = ds = \rho \cdot d\varepsilon \text{ und } v_A = \frac{ds}{dt} = \rho \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} \quad . . . \quad 1a)$$

**4. Normalbeschleunigung und Tangentialbeschleunigung.** Zieht man in Fig. 3a von einem beliebig angenommenen Punkte  $o$  die Strecken

$$\overline{oa} \equiv v_A, \quad \overline{oa'} \equiv v_{A'},$$

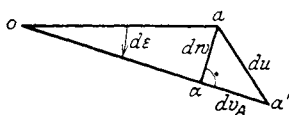


Fig. 3a.

so wird die Veränderung von  $v_A$  in  $v_{A'}$  derart stattfinden können, daß zunächst  $v_A$ , seine Richtung verändert, indem  $oa$  um  $d\varepsilon$  nach  $oa$  gedreht wird, ohne seine Größe zu ändern; diese Veränderung von  $v_A$  ist dann durch die Strecke

$$\overline{dw} \equiv \overline{aa} = \overline{oa} \cdot d\varepsilon = v_A \cdot d\varepsilon \quad . . . \quad 2)$$

dargestellt. Sodann kann die Änderung von  $v_A$  in der neuen Richtung sich dadurch vervollständigen, daß  $oa$  in  $oa'$  übergeht oder  $v_A$  sich um  $\overline{aa'} \equiv dv_A$  verändert.

Die Gesamtänderung der Geschwindigkeit  $v_A$  ist dann

$$\overline{aa'} \equiv du \equiv dw + dv_A,$$

wobei das Zeichen  $\equiv$  wieder andeuten soll, daß die Strecken  $dw$  und  $dv_A$  geometrisch zu addieren sind, also ihrer Größe und Richtung nach aneinander gefügt werden. Dies alles sind Vorgänge während des zweiten Zeiteilchens. Bezieht man sie auf die Zeiteinheit, so erhält man den Begriff der Beschleunigung  $b_A$  des bewegten Punktes in  $A$  als zeitliche Veränderung der Geschwindigkeit oder

$$b_A = \frac{du}{dt} \equiv \frac{dw}{dt} + \frac{dv_A}{dt} \quad . . . \quad 3)$$

Diese Beschleunigung setzt in  $A'$  zu Beginn des zweiten Zeiteilchens ein, tritt mit der Größe  $du = b_A dt$  zu  $v_A$  hinzu und verändert es während des zweiten Zeiteilchens zu  $v_{A'}$ . Es ist also

$$v_{A'} \equiv v_A + b_A dt \quad . . . \quad 3a)$$

oder

$$b_A \equiv \frac{v_{A'} - v_A}{dt} \equiv \frac{du}{dt}$$

Die beiden Teile, in die  $b_A$  nach Gleichung 3 zerfällt, müssen Dinge derselben Art wie  $b_A$  sein, also auch Beschleunigungen. Die erste,  $\frac{dw}{dt}$ , hat die Richtung von  $dw$ , also der Bahnnormale in  $A'$ ; wir nennen sie

deshalb die Normalbeschleunigung  $n_A$  des Punktes; sie ist nach Gleichung 2:

$$n_A = \frac{dw}{dt} = v_A \frac{d\varepsilon}{dt}$$

und mit Benützung von Gleichung 1a:

$$n_A = \frac{v_A^2}{\rho} \dots \dots \dots 4)$$

Die zweite,  $\frac{dv_A}{dt}$ , hat die Richtung der Tangente an die Bahn des Punktes in  $A'$ ; wir nennen sie die Tangentialbeschleunigung des Punktes und bezeichnen sie

$$t_A = \frac{dv_A}{dt} \dots \dots \dots 5)$$

Die gesamte Beschleunigung  $b_A$  setzt sich aus diesen beiden Teilen geometrisch zusammen (Fig. 3); es ist

$$b_A = n_A + t_A, \quad n_A = b_A \cos \varphi, \quad t_A = b_A \sin \varphi \dots \dots 6)$$

worin  $\varphi$  der Winkel zwischen der Beschleunigung  $b_A$  und der Bahn-Normale ist.

Für die geradlinige Bewegung des Punktes ist  $\rho = \infty$  zu setzen; dann wird nach Gleichung 4:  $n_A = 0$  und es bleibt:

$$b_A = t_A = \frac{dv_A}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \dots \dots \dots 5a)$$

**5. Dimension und Maßstab der Beschleunigung.** Da die Strecke  $du$  eine Geschwindigkeit ist, so ist ihre Dimension durch das Symbol  $\mathbf{LT}^{-1}$  gegeben und jene der Beschleunigung  $b = \frac{du}{dt}$  durch das Symbol  $\mathbf{LT}^{-2}$ . Sie darf also nicht nach dem Geschwindigkeits-Maßstab gemessen werden, sondern bedarf eines eigenen Beschleunigungs-Maßstabes, über dessen Zusammenhang mit dem Geschwindigkeitsmaßstab später gesprochen werden soll. Wählt man z. B. den Beschleunigungs-Maßstab 1 cm Zeichnung = 8 met/sek<sup>2</sup> Beschleunigung, so würde eine Beschleunigung  $b = 32$  met/sek<sup>2</sup> durch eine Strecke von 4 cm Länge darzustellen sein.

## II. Der Bewegungszustand des freien Systems.

### a) Der Geschwindigkeitszustand.

**6. Drehung um einen Punkt.** Unter einem freien, ebenen System verstehen wir ein beliebig umgrenztes Stück einer Ebene, etwa eine Scheibe, unveränderlich nach Größe und Gestalt, das durch nichts an seiner Bewegung in seiner eigenen Ebene behindert wird.

Dieses System möge sich in seiner Ebene auf irgend eine Weise verschieben; wir begnügen uns vorläufig damit, diese Verschiebung in einer unendlich kleinen Zeit zu betrachten; sie möge dann auch unendlich klein sein.

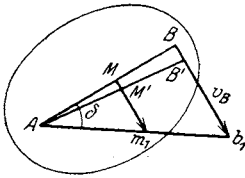


Fig. 4.

Eine besondere Art dieser Verschiebung wäre die, wenn wir irgend einen Punkt  $A$  des Systems festhalten würden. Dann könnte sich ein beliebiger anderer Punkt von  $B$  nur derart nach  $B'$  verschieben, daß seine Verschiebungsrichtung senkrecht zu  $BA$  steht, da die Entfernung  $\overline{BA}$  sich nicht ändern kann, wenn die Scheibe starr ist (Fig. 4).

Da  $\frac{\overline{BB'}}{dt} = v_B$  die Geschwindigkeit des Punktes  $B$  ist, so kann man auch sagen, daß die Geschwindigkeit  $v_B$  senkrecht zu  $BA$  sein muß. Hingegen ist ihre Größe und der Pfeil der Richtung noch beliebig wählbar.

Man nennt in diesem Falle die augenblickliche Bewegung des Systems eine Drehung um den Punkt  $A$ .

**7. Die Winkelgeschwindigkeit.** Untersucht man die augenblickliche Bewegung eines dritten Systempunktes  $M$ , der auf  $BA$  liegt, so werden die drei Punkte  $A, M, B$  auch während der Bewegung des starren Systems auf einer Geraden bleiben; es wird also  $M'$  auf  $B'A$  liegen und  $MM' \perp MA$  sein müssen; darin ist  $\overline{MM'}$  die unendlich kleine Verschiebung des

Punktes  $M$  und  $v_M = \frac{\overline{MM'}}{dt}$  seine Geschwindigkeit. Es ist somit

$$\overline{BB'} : \overline{MM'} = v_B : v_M;$$

konstruiert man nach einem beliebig gewählten Geschwindigkeits-

Maßstabe die Strecke  $\overline{Bb_1} \equiv v_B$  und verbindet  $b_1$  mit  $A$ , zieht die Strecke  $Mm_1 \parallel Bb_1$  bis zum Schnitte  $m_1$  mit  $Ab_1$ , so ist

$$\overline{Mm_1} \equiv v_M$$

die Geschwindigkeit des Punktes  $M$  nach dem gleichen Maßstabe.

Das Verhältnis 
$$\frac{v_B}{BA} = \frac{v_M}{MA} = \omega$$

nennt man die Winkelgeschwindigkeit des Systems um den Punkt  $A$ . Ihre Dimension hat das Symbol  $\frac{L T^{-1}}{L}$  oder  $T^{-1}$ .

Nennt man  $\delta$  den Winkel zwischen  $AB$  und  $Ab_1$ , so ist auch

$$\omega = \operatorname{tg} \delta \dots \dots \dots 7)$$

von dieser Darstellung der Winkelgeschwindigkeit durch einen Winkel werden wir im Folgenden häufig Gebrauch machen.

Die Geschwindigkeiten der Punkte  $B$  und  $M$  sind dann:

$$v_B = \overline{BA} \cdot \omega, \quad v_M = \overline{MA} \cdot \omega \dots \dots \dots 8)$$

d. h. die Geschwindigkeiten der Systempunkte wachsen im Verhältnis zu den Abständen vom Mittelpunkte  $A$  der Drehung.

Wäre z. B.  $\overline{MA}$  gleich der Längeneinheit 1 met, so müßte

$$v_M = 1 \text{ met} \cdot \omega \text{ 1/sek} = \omega \text{ met/sek}$$

sein. Die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  gibt also die Geschwindigkeit jenes Systempunktes an, der vom Mittelpunkte der Drehung um die Längeneinheit entfernt ist.

**8. Geschwindigkeitsplan der Drehung.** Nimmt man noch einen vierten Punkt  $C$  des Systems an (Fig. 5), der nicht in der Geraden  $BA$  liegt, jedoch derart gewählt wird, daß  $\overline{CA} = \overline{MA}$  ist, dann haben  $C$  und  $M$  die gleiche Geschwindigkeit bei der Drehung um  $A$  und es ist

$$v_C = \overline{Cc_1} = \overline{Mm_1} = v_M$$

sowie auch

$$Cc_1 \perp CA, \quad \sphericalangle CAc_1 = \sphericalangle BAb_1 = \delta.$$

Da  $v_A = 0$  ist, fällt der Punkt  $a_1$  mit  $A$  zusammen. Dann ist aber

$$\triangle a_1 b_1 c_1 \sim \triangle ABC,$$

denn es ist  $\sphericalangle BAC = \sphericalangle b_1 a_1 c_1$  und es besteht die Proportion

$$BA : a_1 b_1 = CA : a_1 c_1.$$

Demnach kann man die Geschwindigkeit  $v_C = \overline{Cc_1}$  des Punktes  $C$  konstruieren, indem man  $\sphericalangle BAb_1 = \sphericalangle CAc_1$  macht und das rechtwinklige Dreieck  $ACc_1$  zeichnet; oder indem man das Dreieck  $a_1 b_1 c_1$  ähnlich zu  $ABC$  macht.

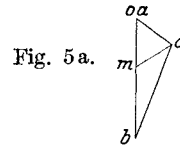


Fig. 5a.

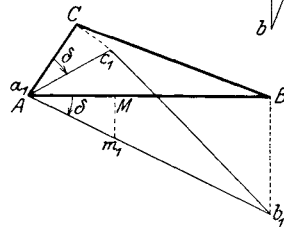


Fig. 5.

Noch einfacher gelangt man zum Ziele, wenn man sämtliche Geschwindigkeiten  $v_B, v_M, v_C$  von einem beliebigen Punkte  $o$  aus nach Größe und Richtung aufträgt. In Fig. 5a wurde gezeichnet:

$$v_B \equiv \overline{ob} \# Bb_1, \quad v_M \equiv \overline{om} \# Mm_1, \quad v_C \equiv \overline{oc} \# Cc_1.$$

Da  $A$  in Ruhe,  $v_A = o$  ist, fällt der Punkt  $a$  mit  $o$  zusammen.

Es ist nach Gleichung 8

$$\overline{ob} \equiv v_B = \overline{BA} \cdot \omega, \quad \overline{om} \equiv v_M = \overline{MA} \cdot \omega,$$

und ebenso

$$\overline{oc} \equiv v_C = \overline{CA} \cdot \omega,$$

ferner

$$ob \perp BA, \quad om \perp MA, \quad oc \perp CA,$$

somit

$$\triangle abc \sim ABC$$

und deshalb auch:

$$\overline{bc} = \overline{BC} \cdot \omega \quad \text{und} \quad bc \perp BC,$$

$$\overline{mc} = \overline{MC} \cdot \omega \quad \text{und} \quad mc \perp MC.$$

Ebenso also, wie  $ob$  die Geschwindigkeit des Punktes  $B$  in bezug auf den ruhenden Punkt  $A$ ,  $oc$  die Geschwindigkeit des Punktes  $C$  in bezug auf den ruhenden Punkt  $A$  ist, bedeutet  $\overline{bc}$  die Geschwindigkeit des Punktes  $C$  in bezug auf  $B$ , hingegen  $\overline{cb}$  die Geschwindigkeit des Punktes  $B$  in bezug auf  $C$ ; wir schreiben dies

$$\overline{bc} = v_{CB}, \quad \overline{cb} = v_{BC}.$$

**9. Allgemeine Verschiebung. Relative Geschwindigkeit.** Lassen wir jetzt die Voraussetzung fallen, daß ein Punkt  $A$  des Systems festgehalten

wird, sich infolgedessen an der Verschiebung nicht beteiligt, und betrachten wir eine allgemeine, unendlich kleine Verschiebung der Geraden des Systems von  $AB$  nach  $A'B'$  (Fig. 6). Die Verschiebung  $\overline{BB'}$  des Punktes  $B$  können wir dann so entstanden denken, daß sich  $B$  zunächst um den als ruhenden angenommenen Punkt  $A$

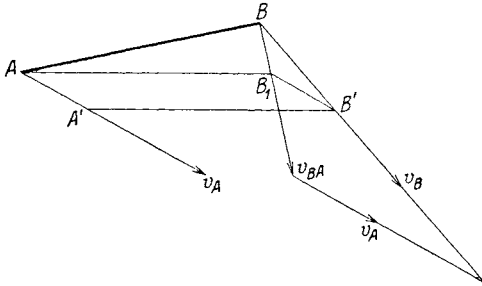


Fig. 6.

nach  $B_1$  dreht und sodann von  $B_1$  aus die gleiche Verschiebung  $\overline{B_1B'}$  unternimmt wie  $A$ . Die Bewegung des Systems ist dann eine Drehung um  $A$  mit darauffolgender Parallelverschiebung und es ist

$$\overline{BB'} \equiv \overline{BB_1} + \overline{B_1B'}$$

die unendlich kleine Verschiebung von  $B$ .

Ist  $v_A = \frac{\overline{AA'}}{dt}$  die Geschwindigkeit des Punktes  $A$ , so ist  $v_B = \frac{\overline{BB'}}{dt}$

die Geschwindigkeit des Punktes  $B$ , und weil

$$\overline{BB'} \equiv \overline{BB_1} + \overline{AA'},$$

so ist auch 
$$v_B = \frac{\overline{BB_1}}{dt} + v_A;$$

bezeichnet man mit 
$$v_{BA} = \frac{\overline{BB_1}}{dt}$$

die Geschwindigkeit des Punktes  $B$  in bezug auf den ruhenden Punkt  $A$  oder die relative Geschwindigkeit von  $B$  gegen  $A$ , so ist 
$$v_B = v_{BA} + v_A.$$

Es kann auch gesetzt werden:  $v_{BA} = \overline{BA} \cdot \omega_{BA}$ , worin  $\omega_{BA}$  die Winkelgeschwindigkeit der Drehung von  $B$  um  $A$  ist.

In Fig. 7 wurde die Rolle der Punkte  $A$  und  $B$  vertauscht, was gestattet ist. Der Punkt  $A$  macht zuerst um  $B$  die Drehung  $AA_1$ , wobei  $B$  ruht; sodann das ganze System die Parallelverschiebung  $\overline{BB'} = \overline{A_1A'}$ . Dann ist

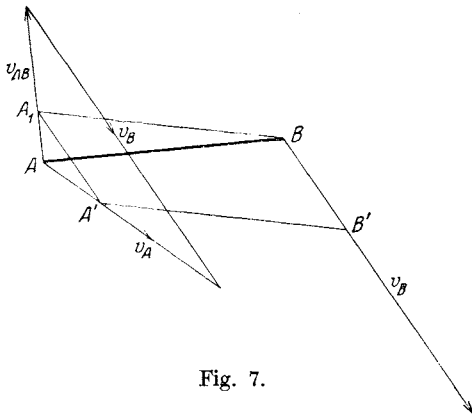


Fig. 7.

$$\overline{AA'} = \overline{AA_1} + \overline{A_1A'}$$

oder

$$\overline{AA'} = \overline{AA_1} + \overline{BB'}$$

und nach Division durch  $dt$ :

$$v_A = v_{AB} + v_B,$$

worin  $v_{AB}$  die relative Geschwindigkeit von  $A$  gegen  $B$  ist. Es wird also

$$\text{sein } v_{AB} = -v_{BA}.$$

**10. Der Ähnlichkeitssatz von Burmester.** Denkt man sich das starre System, von dem das Dreieck  $ABC$  ein Teil ist (Fig. 8), mit der Geraden  $AB$  mitbewegt, so hat man die in 9 für den Punkt  $B$  angestellte Betrachtung nur für andere Punkte des Systems zu wiederholen. Man kann sich demnach die unendlich kleine Verschiebung des Dreiecks  $ABC$  derart vorstellen, daß zunächst eine Drehung um den Punkt  $A$  in die Lage  $AB_1C_1$  stattfindet, worauf eine Parallelverschiebung nach  $A'B'C'$  einsetzt. Dann sind die unendlich kleinen Drehverschiebungen

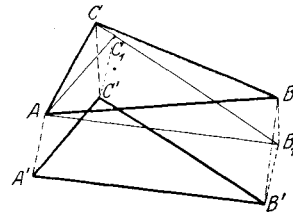


Fig. 8.

$$BB_1 \perp BA, CC_1 \perp CA,$$

während die ganzen Verschiebungen der Punkte  $B$  und  $C$ :

$$\overline{BB'} = \overline{BB_1} + \overline{B_1B'}, \quad \overline{CC'} = \overline{CC_1} + \overline{C_1C'}$$

sind. Setzt man noch  $\overline{AA'} = \overline{B_1B'} = \overline{C_1C'}$  und dividiert durch das Zeiteilchen  $dt$ , so wird

$$v_B = v_{BA} + v_A, \quad v_C = v_{CA} + v_A,$$

worin die ersten Teile  $v_{BA}$  und  $v_{CA}$  die relativen Geschwindigkeiten der Punkte  $B$  und  $C$  in bezug auf  $A$  sind.

Fig. 9 stellt diese geometrische Summierung der Geschwindigkeiten dar. Es sind wie in Fig. 5 die Geschwindigkeiten  $Bb_1 \perp BA$ ,  $Cc_1 \perp CA$  gezogen worden, welche  $B$  und  $C$  besitzen, wenn sie sich um  $A$  drehen; sodann wurde dem System die Parallelverschiebung mit der Geschwindigkeit  $\overline{a_1 a_2} \equiv \overline{b_1 b_2} \equiv \overline{c_1 c_2}$  erteilt; die Geschwindigkeiten der Punkte  $A, B, C$  sind schließlich

$$v_A \equiv \overline{A a_2}, \quad v_B \equiv \overline{B b_2}, \quad v_C \equiv \overline{C c_2}.$$

Da, wie früher gezeigt wurde,  $\triangle a_1 b_1 c_1 \sim ABC$  ist, und überdies  $\triangle a_1 b_1 c_1 \sim \triangle a_2 b_2 c_2$  ist, so folgt  $\triangle a_2 b_2 c_2 \sim ABC$ , d. h. die Endpunkte der Geschwindigkeiten eines starren Systems bilden eine diesem ähnliche Figur.

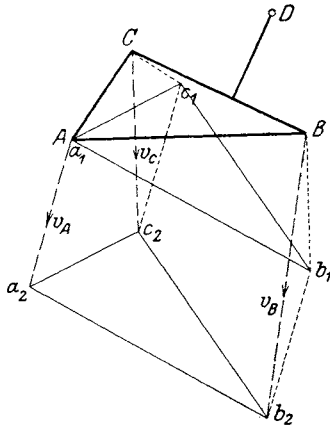


Fig. 9.

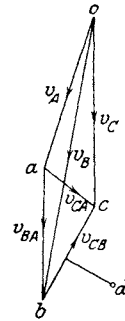


Fig. 9a.

In L. Burmester's Abhandlung: „Über den Beschleunigungszustand ähnlich veränderlicher und starrer ebener Systeme“, Civil-Ingenieur 1878 S. 150 wird dieser Satz nicht nur für starre, sondern auch für ähnlich veränderliche Systeme nachgewiesen.

**11. Der Geschwindigkeitsplan.** Führt man die oben erwähnte geometrische Summierung in der Nebenzeichnung 9a durch, so erhält man eine Figur, die man Geschwindigkeitsplan nennt. Man wählt einen beliebigen Ausgangspunkt  $o$ , den Geschwindigkeitsnullpunkt, trägt nach dem angenommenen Geschwindigkeitsmaßstab die Geschwindigkeit  $\overline{oa} \equiv v_A$  auf, zieht sodann durch  $o$  die Parallele  $ob$  zur gegebenen Geschwindigkeitsrichtung  $v_B$  und durch  $a$  die Senkrechte  $ab$  zu  $AB$ ; dann ist  $\overline{ob} \equiv v_B$  und  $\overline{ab} \equiv v_{BA}$ . Man entnimmt daraus, daß eine der beiden Geschwindigkeiten,  $v_A$ , nach Größe und Richtung, die andere,  $v_B$ , nur der Richtung nach angenommen werden darf.

Die Geschwindigkeit jedes anderen Systempunktes ist dann bestimmt. Um z. B. die Geschwindigkeit  $v_C$  zu finden, ziehe man im Geschwindigkeitsplan  $ac \perp AC$ ; dies ist dann die Richtung der relativen Geschwindigkeit  $v_{CA}$  von  $C$  gegen  $A$ ; ebenso ist  $bc \perp BC$  die Richtung der relativen Geschwindigkeit  $v_{CB}$  von  $C$  gegen  $B$ . Die beiden Geraden  $ac$  und  $bc$  schneiden sich in  $c$  und es ist dann  $\overline{oc} \equiv v_C$  die gesuchte Geschwindigkeit des Punktes  $C$ . Denn es ist

$$\overline{oc} \equiv \overline{oa} + \overline{ac} \equiv \overline{ob} + \overline{bc}$$

oder

$$v_C \equiv v_A + v_{CA} \equiv v_B + v_{CB}.$$

Es muß sich  $v_C$  im Geschwindigkeitsplan parallel und gleich mit  $v_C$  im Lageplan (Fig. 9) ergeben.

Man bemerke, daß in  $\overline{ac} \equiv v_{CA}$ ,  $\overline{bc} \equiv v_{CB}$  die Reihenfolge der großen und der kleinen Buchstaben vertauscht ist. Wir nennen  $a, b, c$  die Geschwindigkeitspunkte, die zu  $A, B, C$  gehören.

Name und Gedanke des Geschwindigkeitsplanes stammt von O. Mohr; sie wurden zuerst zur Konstruktion der Verschiebungspläne von Fachwerken, also für nicht dynamische Zwecke benützt. Die in kinematischer Hinsicht grundlegende Abhandlung O. Mohr's führt den Titel: „Über Geschwindigkeitspläne und Beschleunigungspläne. Ein Beitrag zur graphischen Kinematik“, Civil-Ingenieur, 1887.

**12. Der Ähnlichkeitssatz von Mehmke.** Im Geschwindigkeitsplan Fig. 9a ist das Dreieck  $abc$  dem Systemdreieck  $ABC$  ähnlich, da die Seiten aufeinander senkrecht stehen. Der Geschwindigkeitsplan ist eine dem gegebenen starren System ähnliche und ähnlich gelegene Figur.

Dies gilt für alle Punkte des Systems oder überhaupt der unendlichen Ebene, die an das Dreieck  $ABC$  angeheftet ist und dessen Bewegung mitmacht.

Nimmt man z. B. im gegebenen System noch einen vierten Punkt  $D$  an, so erhält man nach 11 die Geschwindigkeit dieses Punktes, wenn man im Geschwindigkeitsplan die Linien  $bd \perp BD$ ,  $cd \perp CD$  zieht; ihr Schnittpunkt ist der Geschwindigkeitspunkt  $d$  und die Strecke  $od$  ist die gesuchte Geschwindigkeit  $v_D$  des Punktes  $D$ ; es ist

$$\triangle bcd \sim BCD.$$

Die Ähnlichkeit des Geschwindigkeitsplanes mit dem gegebenen System hat R. Mehmke in seiner Abhandlung: „Über die Geschwindigkeiten beliebiger Ordnung eines in seiner Ebene bewegten ähnlich veränderlichen ebenen Systems“, Civil-Ingenieur, 1883, in allgemeiner Weise nicht nur für das starre, sondern auch für das ähnlich veränderliche System bewiesen.

**13. Der Drehpol.** Da sich die Geschwindigkeiten aller Punkte des starren Systems somit als Strecken darstellen, die von dem Punkt  $o$  ausgehen, so muß es im System auch einen Punkt  $O$  geben, dessen Geschwindigkeitspunkt  $o$  ist, dessen Geschwindigkeit also verschwindet.



Dann ist  $\triangle abo \sim ABO$ . Konstruiert man (Fig. 10) das Dreieck  $ABO$ , indem man  $OA \perp oa$ ,  $OB \perp ob$  errichtet oder, was dasselbe ist, indem man in  $A$  und  $B$  die Senkrechten zu den Bewegungsrichtungen  $v_A$  und

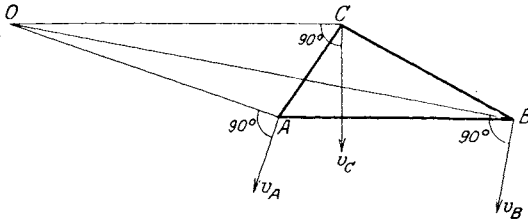


Fig. 10.

$v_B$  zieht, so schneiden sich diese Senkrechten in  $O$ , dem Systempunkt ohne Geschwindigkeit. Man nennt ihn den Geschwindigkeitspol, auch Drehpol oder das Momentanzentrum des starren

Systems. Er ist der einzige Punkt, der bei der Bewegung der Figur in Ruhe bleibt; diese Bewegung ist also eine, wenn auch unendlich kurz dauernde Drehung um  $O$ ; ihre Winkelgeschwindigkeit ist

$$\omega = \frac{v_A}{AO} = \frac{v_B}{BO}.$$

Betrachtet man noch einen dritten Punkt  $C$  des Systems, so wird, da die Bewegung der Figur eine Drehung um  $O$  ist, die Geschwindigkeit  $v_C$  des Punktes  $C$  senkrecht stehen auf  $CO$  und es ist

$$v_A : v_B : v_C = \overline{AO} : \overline{BO} : \overline{CO}.$$

Da diese Geschwindigkeitsrichtungen gleichzeitig die Tangenten der Bahnen sind, die von den Punkten  $A, B, C$  beschrieben werden, so folgt, daß die Normalen aller Punktbahnen des Systems in jedem Augenblicke der Bewegung durch einen bestimmten Punkt, den Drehpol  $O$ , hindurchgehen.

**14. Veränderung des Geschwindigkeitsplanes.** Es sei (Fig. 11)  $ABC$  ein in seiner Ebene verschiebbares Dreieck; nach 12 ist sein Geschwindigkeitsplan ein ähnliches und ähnlich gelegenes, um  $90^\circ$  verdrehtes Dreieck  $abc$  (Fig. 11a).

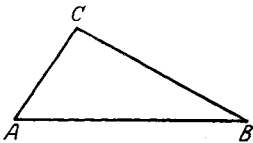


Fig. 11.

Jedes Dreieck  $abc$ , das in dieser Art angenommen wird, kann als Geschwindigkeitsplan des Dreiecks  $ABC$  angesehen werden. Die Seiten des Dreiecks  $abc$  bedeuten die relativen Geschwindigkeiten der Punkte  $A, B, C$

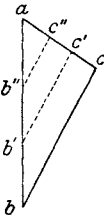


Fig. 11a.

gegeneinander. Dabei ist der Geschwindigkeitsnullpunkt  $o$  ganz unwesentlich; seine Annahme kann noch irgendwie getroffen werden, wie ja auch der zu  $o$  gehörige Punkt  $O$  des Systems  $ABC$ , dessen Drehpol, irgendwie angenommen werden kann.

Nimmt man, ohne  $a$  zu ändern, auf  $ab$  einen anderen Geschwindigkeitspunkt  $b'$  an, so muß sich auch der Geschwindigkeitspunkt  $c$  ändern; er geht in  $c'$  über, wobei

$b'c' \parallel bc$  ist. Dasselbe gilt von  $b'', c''$ . Beschreibt also ein Geschwindigkeitspunkt des Systems eine Punktreihe  $bb'b'' \dots$ , so beschreibt jeder andere Geschwindigkeitspunkt eine ähnliche Punktreihe  $cc'c'' \dots$ .

Erst mit der Annahme von  $o$  sind die absoluten, die wirklichen Geschwindigkeiten der Punkte  $A, B, C$  bestimmt. Nimmt man  $o$  z. B. in einem der Punkte  $a, b, c$  an, so liegt der Drehpol  $O$  im entsprechenden Punkt  $A, B$  oder  $C$ ; nimmt man  $o$  in einer der Seiten  $ab, bc, ca$  an, so liegt der Drehpol auf der entsprechenden Seite  $AB, BC$  oder  $CA$  und zwar ähnlich; nimmt man  $o$  in unendlicher Entfernung an, so liegt  $O$  ebenfalls unendlich fern; die Bewegung des Systems ist dann eine Parallelverschiebung.

**15. Die gedrehten Geschwindigkeiten.** Die Benützung des Drehpols ermöglicht eine Konstruktion der Geschwindigkeiten, die von jener mit Hilfe des Geschwindigkeitsplanes verschieden ist.

Ist z. B.  $O$  der Drehpol der ebenen Figur  $ABC$  (Fig. 12) und  $v_A$  die Geschwindigkeit des Punktes  $A$ , so kann man die Geschwindigkeiten  $v_B$  und  $v_C$  der Punkte  $B$  und  $C$  finden, wenn man  $v_A$  um  $90^\circ$  nach  $Aa$  in beliebigem Sinne verdreht, sodann das zu  $ABC$  ähnliche Paralleldreieck  $abc$  verzeichnet, dessen Ecken  $b$  und  $c$  auf  $OB$  und  $OC$  liegen und endlich die Strecken  $Bb$  und  $Cc$  um  $90^\circ$  verdreht, in entgegengesetztem Sinne der Drehung von  $v_A$  nach  $Aa$ ; dann sind die soeben gedrehten Strecken  $v_B$  und  $v_C$  nach Größe und Richtung. Denn es verhält sich nach dieser Konstruktion:

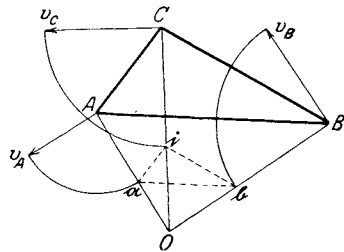


Fig. 12.

$$\overline{Aa} : \overline{Bb} : \overline{Cc} = \overline{AO} : \overline{BO} : \overline{CO};$$

in 13 wurde aber gezeigt, daß

$$v_A : v_B : v_C = \overline{AO} : \overline{BO} : \overline{CO}$$

ist; es bleibt also wegen  $v_A = \overline{Aa}$  auch  $v_B = \overline{Bb}$  und  $v_C = \overline{Cc}$ .

Führt man diese Konstruktion der gedrehten Geschwindigkeiten für andere Systempunkte durch, so erhält man eine Figur  $abcd \dots$ , die dem System der Punkte  $ABCD \dots$  ähnlich ist, wie der Geschwindigkeitsplan; nur ist dieser um  $90^\circ$  verdreht.

Die gedrehten Geschwindigkeiten wurden bereits von R. Proell in seiner Graphischen Dynamik, 1874, S. 158, Fig. 63 benützt. Die Ähnlichkeit des Systems der gedrehten Punkte  $abcd \dots$  mit dem starren System  $ABCD \dots$  beweist L. Burmester in seiner Abhandlung „Über die momentane Bewegung ebener kinematischer Ketten“, Civil-Ingenieur 1880, S. 250.

**16. Der Geschwindigkeitszustand einer Geraden.** In Fig. 4 fanden wir den Geschwindigkeitszustand einer Geraden  $AMB$ , die sich um

einen ihrer Punkte  $A$  dreht. Die Geschwindigkeiten  $v_B$  und  $v_M$  der Punkte  $B$  und  $M$  waren senkrecht zur Geraden und standen im Verhältnis der Abstände von  $A$ . Ihre Endpunkte  $b_1$  und  $m_1$  liegen mit  $a_1$  wieder in einer Geraden; wir wollen von jetzt an die Geschwindigkeiten der Punkte  $B$  und  $M$  in bezug auf  $A$  mit  $v_{BA}$  und  $v_{MA}$  bezeichnen (vgl. Fig. 13).

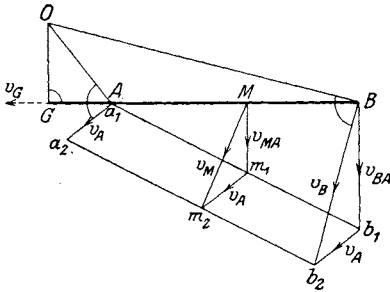


Fig. 13.

$$v_A \equiv \overline{A a_2},$$

$$v_B \equiv v_{BA} + v_A \equiv \overline{B b_1} + \overline{b_1 b_2} \equiv \overline{B b_2},$$

$$v_M \equiv v_{MA} + v_A \equiv \overline{M m_1} + \overline{m_1 m_2} \equiv \overline{M m_2}.$$

Die Endpunkte der Geschwindigkeiten  $a_2 m_2 b_2$  liegen also wieder in einer Geraden und es ist

$$a_2 m_2 b_2 \sim A M B$$

in Übereinstimmung mit dem Satze in 10.

Zeichnet man in Fig. 13a den Geschwindigkeitsplan, indem man von  $o$  aus die Geschwindigkeiten  $oa \equiv v_A$ ,  $ob \equiv v_B$ ,  $om \equiv v_M$  aufträgt, so muß nach dem Ähnlichkeitssatze auch

$$a m b \sim A M B$$

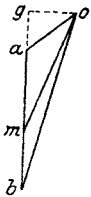


Fig. 13a.

sein. Die Geschwindigkeitspunkte einer Geraden erfüllen also wieder eine Gerade und bilden eine der ursprünglichen ähnliche Punktreihe. Fällt man von  $o$  die Senkrechte auf  $ab$ , so ist der Fußpunkt  $g$  wieder ein Geschwindigkeitspunkt der Geraden; er entspricht dem Punkte  $G$  der Geraden, für den die Ähnlichkeit

$$G A B \sim g a b$$

besteht. Die Geschwindigkeit  $v_G$  dieses Punktes liegt, weil parallel zu  $og$ , in der Geraden selbst; man nennt ihn deshalb den Gleitpunkt der Geraden.

Der Gleitpunkt einer Geraden  $AB$  kann konstruiert werden, wenn man auf die Bewegungsrichtungen zweier Punkte  $A$  und  $B$  der Geraden in  $A$  und  $B$  die Senkrechten errichtet und im Schnitte dieser Senkrechten den Drehpol  $O$  bestimmt; der Fußpunkt der Senkrechten von  $O$  auf  $AB$  ist der Gleitpunkt  $G$  dieser Geraden.

Aus dem Geschwindigkeitsplan entnehmen wir, daß die Projektionen der Geschwindigkeiten aller Punkte der Geraden  $AB$  auf diese selbst gleiche Größe haben und zwar gleich der Geschwindigkeit  $v_G$  des Gleit-

punktes. Werden also von zwei Punkten der Geraden  $A$  und  $B$  die Geschwindigkeiten  $v_A$  und  $v_B$  angenommen, so muß bei der Annahme auf diese Erkenntnis Rücksicht genommen werden.

Man kann also z. B. die eine Geschwindigkeit  $v_A$  der Größe und Richtung nach beliebig annehmen; dann ist  $v_G$  bestimmt und damit auch die Projektion der anderen Geschwindigkeit  $v_B$  auf die Gerade  $AB$ .

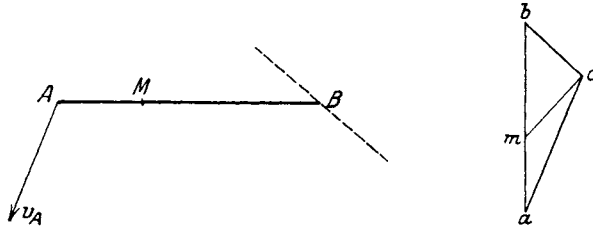


Fig. 14.

Fig. 14a.

Ist z. B. in Fig. 14  $v_A$  der Richtung und Größe nach gegeben, von  $v_B$  nur die Richtung, so kann die Größe dadurch bestimmt werden, daß man in Fig. 14a  $oa \equiv v_A$  macht, sodann durch  $o$  eine Parallele zur Richtung von  $v_B$  und sodann  $ab \perp AB$  zieht; der Schnittpunkt beider Geraden ist der Geschwindigkeitspunkt  $b$  und somit  $ob \equiv v_B$ .

Um die Geschwindigkeit  $v_M$  eines beliebigen Punktes  $M$  der Geraden zu finden, genügt es,

$$amb \sim AMB$$

zu machen; dann ist  $om \equiv v_M$ .

Dies kann zweckmäßig in folgender Weise durchgeführt werden. Zieht man im Geschwindigkeitsplan Fig. 15a  $mm_1 \parallel bo$ ,  $mm_2 \parallel ao$ , so ist

$$v_M \equiv om \equiv om_1 + m_1m.$$

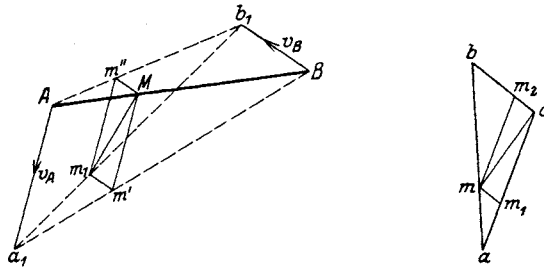


Fig. 15.

Fig. 15a.

Verbindet man (Fig. 15) den Endpunkt  $a_1$  von  $v_A$  mit  $B$  und zieht  $Mm' \parallel Aa_1$ , so ist

$$\overline{Mm'} : \overline{Aa_1} = \overline{BM} : \overline{BA} = \overline{bm} : \overline{ba} = \overline{om_1} : \overline{oa},$$

also wegen  $\overline{Aa_1} \equiv \overline{oa}$  auch  $\overline{Mm'} \equiv \overline{om_1}$ . Ebenso ist  $\overline{Mm''} \equiv \overline{om_2}$ .

Bildet man sodann über  $\overline{Mm'}$  und  $\overline{Mm''}$  das Parallelogramm, so ist dessen Diagonale  $\overline{Mm_1}$  die gesuchte Geschwindigkeit  $v_M$ .

Um demnach ohne Geschwindigkeitsplan  $v_M$  zu finden, zieht man die Linien  $a_1B$  und  $Ab_1$ , ferner  $Mm' \parallel Aa_1$ ,  $Mm'' \parallel Bb_1$ , dann ist

$$v_M = \overline{Mm'} + \overline{Mm''}.$$

Diese Konstruktion wurde unter anderer Begründung mitgeteilt von M. Tolle (Die Regelung der Kraftmaschinen, 3. Aufl. S. 19).

### b) Der Beschleunigungszustand.

**17. Drehung des Systems.** Um den Beschleunigungszustand eines freien, ebenen Systems zu studieren, das sich in seiner Ebene durch zwei unendlich kleine, aufeinanderfolgende Zeitteilchen verschiebt, wollen wir wie in 6 damit beginnen, die besondere Art der Verschiebung zu betrachten, bei welcher ein Punkt  $A$  des Systems durch diese beiden Zeitteilchen in Ruhe verharrt, also weder Geschwindigkeit noch Beschleunigung besitzt.

Der Geschwindigkeitszustand bei ruhendem Punkt  $A$  wurde bereits in 6 untersucht.

Ein beliebiger Punkt  $B$  des Systems besitzt dann nach Gleichung 8 die Geschwindigkeit  $v_B = \overline{BA} \cdot \omega$  senkrecht zu  $BA$  (Fig. 16) und legt im ersten Zeitteilchen den Weg  $\overline{BB'} = v_B \cdot dt$  zurück. Da die Entfernung  $\overline{BA}$  unveränderlich ist und die Geschwindigkeit des Punktes  $B$  senkrecht zum Abstände von  $A$  bleiben muß, wird sich in  $B'$  die Bewegungsrichtung um den unendlich kleinen Winkel  $d\varepsilon = \angle BAB'$  ändern; in dieser neuen Richtung wird der Punkt während des zweiten Zeitteilchens von  $B'$  nach  $B''$  gelangen (vgl. 3) und die neue Geschwindigkeit  $v_{B'}$  annehmen.

Wie wir in 4 gesehen haben, wird die Störung, welche die Geschwindigkeit bei dem Übergange von  $v_B$  nach  $v_{B'}$  erleidet, durch eine Beschleunigung  $b_B$  hervorgerufen, die in  $B'$  einsetzt. Diese Beschleunigung zerfällt nach Gleichung 6 in zwei Teile  $n_B$  und  $t_B$ . Der erste Teil, die Normalbeschleunigung, veranlaßt die Richtungsänderung der Geschwindigkeit um den Winkel  $d\varepsilon$ ; sie ist von  $B'$  nach  $A$  gerichtet, da  $A$  der Mittelpunkt des Krümmungskreises ist, den man durch  $B, B', B''$  legen kann und ist nach Gleichung 4

$$n_B = \frac{v_B^2}{\overline{BA}}$$

und da  $v_B = \overline{BA} \cdot \omega$  ist, auch

$$n_B = \overline{BA} \cdot \omega^2 = v_B \cdot \omega \dots \dots \dots 9)$$

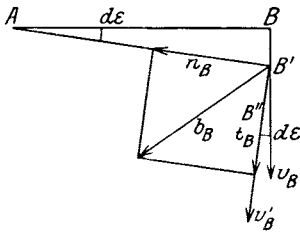


Fig. 16.

Der zweite Teil, die Tangentialbeschleunigung, ändert die Größe der Geschwindigkeit, fällt in die Tangente des Krümmungskreises und hat nach Gleichung 5 die Größe

$$t_B = \frac{dv_B}{dt} = \overline{BA} \cdot \frac{d\omega}{dt} \quad \dots \quad 10)$$

Die ganze Beschleunigung ist dann

$$b_B \equiv n_B + t_B.$$

**18. Die Winkelbeschleunigung.** Da die Punkte  $B, B', B''$  einander unendlich nahe sind, sieht schließlich der Beschleunigungszustand des Punktes  $B$  wie in Fig. 17 aus. Wird auf der Geraden  $AB$  ein beliebiger dritter Punkt  $M$  angenommen und sucht man die Beschleunigung  $b_M$  dieses Punktes und seine Teile  $n_M$  und  $t_M$  in gleicher Weise wie bei  $B$ , so erkennt man sofort, daß sich an den Winkeln nichts verändert und nur sämtliche Strecken im Verhältnis  $\overline{AM}:\overline{AB}$  kleiner werden. Es ist dann zunächst nach Gleichung 8:

$$v_M = \overline{MA} \cdot \omega,$$

ferner wie in den Gleichungen 9 und 10:

$$n_M = MA \cdot \omega^2 = v_M \cdot \omega, \quad t_M = \frac{dv_M}{dt} = \overline{MA} \cdot \frac{d\omega}{dt} = \overline{MA} \cdot \lambda.$$

Es bestehen somit die Proportionen

$$n_M:n_B = t_M:t_B = \overline{MA}:\overline{BA}$$

(vgl. Fig. 17).

Man nennt das Verhältnis

$$\frac{t_M}{MA} = \frac{t_B}{BA} = \lambda$$

die Winkelbeschleunigung des Systems; sie hängt nicht ab von der Wahl des Punktes  $M$  oder  $B$ , hat vielmehr für alle Systempunkte den gleichen Wert. Es ist dann

$$t_M = \overline{MA} \cdot \lambda, \quad t_B = \overline{BA} \cdot \lambda \quad \dots \quad 11)$$

Aus Fig. 17 geht hervor: Nennt man  $\alpha$  den Winkel zwischen  $AB$  und  $A\tau$ , so ist die Winkelbeschleunigung

$$\lambda = tg \alpha \quad \dots \quad 12)$$

Der Pfeil von  $t_B$  oder  $t_M$  ist maßgebend für den Drehungssinn von  $\lambda$ ; auch von dieser Darstellung werden wir später vielfach Gebrauch machen (vgl. Gleichung 7).

Die ganze Beschleunigung des Punktes  $B$  ist dann

$$b_B = \sqrt{n_B^2 + t_B^2} = \overline{BA} \sqrt{\omega^4 + \lambda^2} \quad \dots \quad 13)$$

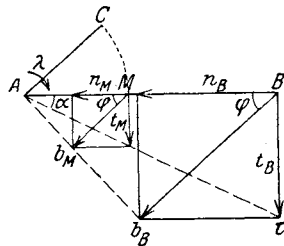


Fig. 17.

und ebenso die ganze Beschleunigung des Punktes  $M$

$$b_M = \sqrt{n_M^2 + t_M^2} = \overline{MA} \sqrt{\omega^4 + \lambda^2};$$

es besteht also auch die Proportion

$$b_M : b_B = \overline{MA} : \overline{BA}$$

wie übrigens aus Fig. 17 hervorgeht.

Für den Beschleunigungswinkel  $\varphi$ , den die Beschleunigung  $b_B$  mit der Normalbeschleunigung  $n_B$  einschließt, erhält man

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{t_B}{n_B} = \frac{t_M}{n_M} = \frac{\lambda}{\omega^2} \dots \dots \dots 14)$$

Die Größe dieses Winkels hat für alle Punkte des Systems den gleichen Wert.

**19. Konstruktion der Normalbeschleunigung aus der Geschwindigkeit.**

Die Normalbeschleunigung  $n_B$  des Punktes  $B$  hat mit der Veränderung der Größe der Geschwindigkeit  $v_B$  nichts zu tun; sie ist nur von der Krümmung der Bahn des Punktes  $B$  abhängig, kann also stets konstruiert werden, wenn man außer der Geschwindigkeit  $v_B$  noch die Lage des Krümmungsmittelpunktes kennt.

Im Falle der Drehung um  $A$  ist dieser Punkt der Krümmungsmittelpunkt und es ist

$$n_B = \frac{v_B^2}{\overline{BA}}$$

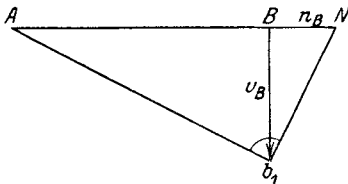


Fig. 18.

Trägt man demnach (Fig. 18) die Geschwindigkeit  $v_B = \overline{Bb_1}$  in ihrer Richtung auf; verbindet  $A$  mit  $b_1$  und zieht  $b_1N \perp Ab_1$ , so ist

$$\overline{BA} : \overline{Bb_1} = \overline{Bb_1} : \overline{NB}$$

$$\text{oder } \overline{NB} = \frac{\overline{Bb_1}^2}{\overline{BA}} = \frac{v_B^2}{\overline{BA}} = n_B$$

Ist der Längen-Maßstab der Zeichnung, in dem  $\overline{BA}$  aufgetragen wurde:

$$1 \text{ cm Zeichnung} = \alpha \text{ met Länge,}$$

jener der Geschwindigkeit, in dem  $v_B$  aufgetragen wurde:

$$1 \text{ cm Zeichnung} = \beta \text{ met/sek Geschwindigkeit,}$$

$$\text{so ist } n_B = \frac{(Bb_1)^2}{(BA)} \cdot \frac{\beta^2}{\alpha} \text{ met/sek}^2 = (NB) \frac{\beta^2}{\alpha} \text{ met/sek}^2,$$

wenn  $(Bb_1)$ ,  $(BA)$ ,  $(NB)$  unbenannte Zahlen bedeuten, nämlich die Anzahl der Zentimeter in der Zeichnung. Für

$$(NB) = 1 \text{ ist } n_B = \frac{\beta^2}{\alpha} \text{ met/sek}^2;$$

damit ist aber der Beschleunigungs-Maßstab gegeben, nämlich

$$1 \text{ cm Zeichnung} = \frac{\beta^2}{\alpha} \text{ met/sek}^2 \text{ Beschleunigung.}$$

Ist z. B. die Zeichnung im Längen-Maßstabe 1:10 entworfen worden und werden die Geschwindigkeiten im Maßstabe 1 cm = 2 met/sek gezeichnet, so ist  $\alpha = 1/10$ ,  $\beta = 2$  und  $\frac{\beta^2}{\alpha} = 40$ , d. h. der Beschleunigungs-Maßstab ist

$$1 \text{ cm Zeichnung} = 40 \text{ met/sek}^2.$$

**20. Der Normalfall.** Sehr zweckmäßig ist es, den Geschwindigkeits-Maßstab derart zu wählen, daß  $v_B$  durch die Länge  $\overline{BA}$  dargestellt wird. Dann ist nämlich

$$n_B = \frac{v_B^2}{BA} = \overline{BA} \text{ met/sek}^2;$$

und die Konstruktion von  $n_B$  wird unnötig, da die Länge  $\overline{BA}$  bereits ein Maß der Normalbeschleunigung ist. Hier ist dann

$$n_B = (BA) \cdot \frac{\beta^2}{\alpha} \text{ met/sek}^2,$$

worin  $(BA)$  eine reine Zahl, die Anzahl der Zentimeter ist, die  $\overline{BA}$  in der Zeichnung mißt.

**21. Konstruktion der Geschwindigkeit aus der Beschleunigung.** Ist nicht die Geschwindigkeit, sondern die Beschleunigung des Punktes  $B$  gegeben, so kann auf umgekehrtem Wege die Geschwindigkeit konstruiert werden.

Man projiziert zunächst (Fig. 19) die gegebene Beschleunigung  $b_B$  auf die Gerade  $BA$  und erhält die Normalbeschleunigung

$$n_B = b_B \cdot \cos \varphi = \frac{v_B^2}{BA}.$$

Daraus kann man die Geschwindigkeit  $v_B$  auf zweifache Weise finden. Entweder man macht  $\overline{N'B} = n_B$  und zeichnet über  $\overline{N'A}$  als Durchmesser

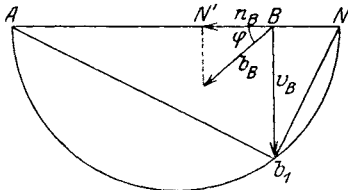


Fig. 19.

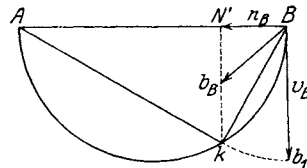


Fig. 20.

einen Halbkreis, der die Geschwindigkeitsrichtung von  $B$  in  $b_1$  schneidet; dann ist  $\overline{Bb_1} = v_B$  die gesuchte Geschwindigkeit.

Oder (Fig. 20) man zeichnet über  $\overline{BA}$  als Durchmesser einen Halbkreis, der die Projektionssenkrechte von  $b_B$  in  $k$  schneidet; dann folgt aus dem rechtwinkligen Dreieck  $AkB$

$$BA : Bk = \overline{Bk} : n_B$$

oder 
$$v_B^2 = Bk^2 = \overline{BA} \cdot n_B \quad \text{und} \quad v_B = \overline{Bk} = \overline{Bb_1}.$$



Ist der Längen-Maßstab der Zeichnung wie früher

$$1 \text{ cm Zeichnung} = a \text{ met},$$

jener der Beschleunigung, in dem  $b_B$  aufgetragen wurde,

$$1 \text{ cm Zeichnung} = \gamma \text{ met/sek}^2 \text{ Beschleunigung},$$

$$\text{so ist } v_B^2 = (BA) \cdot (BN') a \gamma \text{ met}^2/\text{sek}^2 = (Bb_1)^2 a \gamma \text{ met}^2/\text{sek}^2,$$

worin  $(BA)$ ,  $(BN')$ ,  $(Bb_1)$  reine Zahlen sind, nämlich die Anzahl der Zentimeter von  $BA$ ,  $BN'$ ,  $Bb_1$  in der Zeichnung. Für  $(Bb_1) = 1$  ist

$$v_B = \sqrt{a\gamma} \cdot \text{met/sek}.$$

Damit ist der Geschwindigkeits-Maßstab gegeben, nämlich

$$1 \text{ cm Zeichnung} = \sqrt{a\gamma} \text{ met/sek Geschwindigkeit}.$$

Beachtet man, daß wir in 19 den Beschleunigungsmaßstab fanden:

1 cm Zeichnung =  $\frac{\beta^2}{a}$  met/sek<sup>2</sup>, so wird  $\gamma = \frac{\beta^2}{a}$  und der Geschwindigkeits-Maßstab:

$$1 \text{ cm Zeichnung} = \beta \text{ met/sek Geschwindigkeit}$$

wie in 19.

Ist z. B. wie dort der Längen-Maßstab 1:10, der Beschleunigungs-Maßstab 1 cm Zeichnung = 40 met/sek<sup>2</sup>, so ist  $a = 1/10$ ,  $\gamma = 40$  und  $\beta = \sqrt{a\gamma} = 2$ , also der Geschwindigkeits-Maßstab

$$1 \text{ cm Zeichnung} = 2 \text{ met/sek Geschwindigkeit}.$$

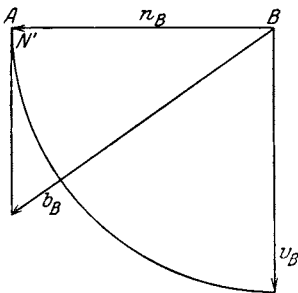


Fig. 21.

Von der unter 20, Normalfall, erwähnten vereinfachenden Annahme können wir auch hier Gebrauch machen. Wir werden nämlich mit Vorteil den Beschleunigungs-Maßstab derart wählen, daß der Punkt  $N'$  nach  $A$  fällt (Fig. 21); dann wird die Geschwindigkeit  $v_B$  der Größe nach bereits durch die Länge  $BA$  gemessen und es entfällt das Zeichnen des Halbkreises.

**22. Die Beschleunigungsfigur eines sich drehenden Systems.** Wir kehren nochmals zur Fig. 17 zurück. Wird ein Systempunkt  $C$  außerhalb der Geraden  $AB$  angenommen, derart, daß  $\overline{CA} = \overline{MA}$  ist (Fig. 22) so ändert sich an der Größe der Beschleunigung nichts; es ist  $b_C = b_M$ ,  $n_C = n_M$ ,  $t_C = t_M$ ; nur die Richtung dieser drei Beschleunigungen wird um den Winkel  $BAC$  verdreht. Es besteht also wie in 18 die Proportion  $b_C : b_B = n_C : n_B = t_C : t_B = \overline{CA} : \overline{BA}$ .

Bezeichnet man die Endpunkte der Beschleunigungen  $b_C$  und  $b_B$  mit  $\gamma_1$  und  $\beta_1$ , läßt  $\alpha_1$  nach  $A$  fallen, da die Beschleunigung dieses Punktes null ist und verbindet die Punkte  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  und  $\gamma_1$ , so erhält man ein Dreieck, das dem Dreiecke  $ABC$  ähnlich ist. Denn da die Beschleunigungswinkel  $\varphi$

bei  $C$  und  $B$  die gleiche Größe haben, so ist wegen der obenstehenden

Proportion  $\triangle A B \beta_1 \sim A C \gamma_1$ ,  $a_1 \beta_1 : a_1 \gamma_1 = \overline{B A} : \overline{C A}$ ,

ferner  $\sphericalangle \beta_1 A B = \gamma_1 A C$ , also auch  $\sphericalangle \beta_1 a_1 \gamma_1 = B A C$ ,

somit  $\triangle a_1 \beta_1 \gamma_1 \sim A B C$ .

Daraus folgt der Satz: Die Endpunkte der Beschleunigungen eines sich drehenden Systems bilden eine Figur, die dem System ähnlich ist (Beschleunigungsfigur). Wir werden bald sehen, daß dieser Satz auch für den Fall gilt, daß das System keine Drehung um einen festgehaltenen Punkt macht, sondern sich irgendwie in seiner Ebene bewegt.

**23. Beschleunigungsplan eines sich drehenden Systems.** Wir wollen es nun wie beim Geschwindigkeitszustand des starren Systems machen

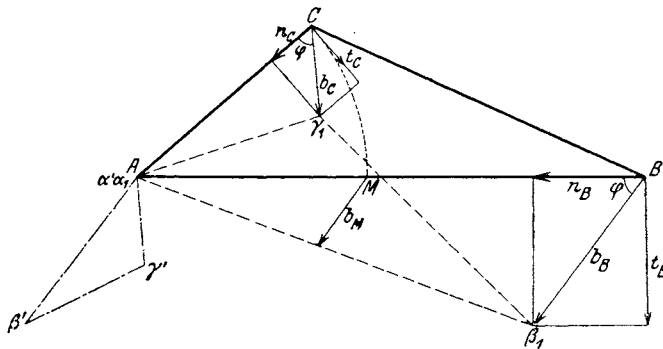


Fig. 22.

und alle Beschleunigungen von einem beliebigen Punkt aus auftragen (vgl. 10).

Wählen wir diesen Punkt in  $A$  (Fig. 22), so machen wir

$$\overline{A \beta'} \equiv \overline{B \beta_1} \equiv b_B, \quad \overline{A \gamma'} \equiv \overline{C \gamma_1} \equiv b_C;$$

der Punkt  $a'$  liegt in  $A$ , da  $b_A = 0$  ist. Das Dreieck  $a' \beta' \gamma'$  ist ähnlich dem Dreiecke  $A B C$ ; denn die Seiten  $a' \beta'$  und  $a' \gamma'$  schließen miteinander den gleichen Winkel ein wie  $B A$  und  $C A$ ; überdies besteht die Proportion

$$b_C : b_B = \overline{a' \gamma'} : \overline{a' \beta'} = \overline{C A} : \overline{B A}.$$

Es ist also nicht nur die Beschleunigungsfigur  $a_1 \beta_1 \gamma_1$ , wie früher gezeigt wurde, sondern auch die Figur  $a' \beta' \gamma'$  dem System  $A B C$  ähnlich — ein Satz, der ebenfalls verallgemeinert werden wird für den Fall, daß der Punkt  $A$  nicht in Ruhe bleibt.

Wir tragen jetzt die Beschleunigungen nicht von  $A$ , sondern von einem beliebig gewählten Punkt  $\pi$ , dem Beschleunigungsnullpunkt, aus auf (Fig. 22a). Es sei  $\overline{\pi \beta} \equiv b_B$ ,  $\overline{\pi \gamma} \equiv b_C$ ; ebenso kann es mit sämtlichen übrigen Punkten des Systems gemacht werden. Man nennt eine solche Zeichnung den Beschleunigungsplan des gegebenen Systems. Jedem

Punkt  $M$  des Systems entspricht ein Punkt  $\mu$  des Beschleunigungsplanes derart, daß die Strecke  $\pi\mu$  nach Größe wie Richtung die Beschleunigung des Punktes  $M$  ist. Da der Punkt  $A$  keine Beschleunigung hat, fällt der zu  $A$  gehörende Beschleunigungspunkt  $a$  mit dem Beschleunigungsnullpunkt  $\pi$  zusammen.

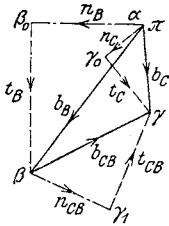


Fig. 22a.

Wir wollen die Punkte  $a, \beta, \gamma, \dots$  die Beschleunigungspunkte von  $A, B, C, \dots$  nennen.

Zum Beschleunigungspunkt  $\beta$  könnte man im Plan derart gelangen, daß man zunächst die Normalbeschleunigung von  $B$ :

$$n_B \equiv \pi\beta_0 = \frac{v_B^2}{BA}$$

in der Richtung von  $BA$  aufträgt, sodann in  $\beta_0$  die Senkrechte auf  $\pi\beta_0$  errichtet und auf ihr die Tangentialbeschleunigung  $t_B \equiv \overline{\beta_0\beta} = \overline{BA} \cdot \lambda$  abschneidet.

Ebenso könnte man den Beschleunigungspunkt  $\gamma$  finden, indem man die Normalbeschleunigung

$$n_C \equiv \pi\gamma_0 = \frac{v_C^2}{CA}$$

in Richtung von  $CA$  aufträgt, sodann in  $\gamma_0$  die Senkrechte auf  $\pi\gamma_0$  errichtet und auf ihr die Tangentialbeschleunigung  $t_C \equiv \overline{\gamma_0\gamma} = \overline{CA} \cdot \lambda$  abschneidet. Allein man könnte den Beschleunigungspunkt  $\gamma$  auch auf anderem Wege finden. Der Punkt  $C$  hat von  $B$  die Entfernung  $\overline{CB}$  und relativ zu  $B$  die Geschwindigkeit  $v_{CB}$  senkrecht zu  $CB$ , die aus dem Geschwindigkeitsplan bekannt ist ( $bc$  in Fig. 9a). Da nun  $C$  bei der Bewegung der Figur immer in gleicher Entfernung von  $B$  bleibt, dreht sich  $C$  um  $B$ , hat somit bei dieser Drehung sowohl eine Normal-, wie auch eine Tangentialbeschleunigung in bezug auf  $B$ . Man kann sich den Beschleunigungszustand des Punktes  $C$  etwa in der Weise vorstellen, daß zunächst  $C$  dieselbe Beschleunigung wie  $B$  besitzt und sodann noch jene Beschleunigung dazu erhält, die  $C$  bei einer Drehung um  $B$  besitzen muß. In Zeichen angeschrieben lautet dies:

$$b_C \equiv b_B + n_{CB} + t_{CB}.$$

Wir nennen  $n_{CB}$  die relative Normalbeschleunigung von  $C$  gegen  $B$ ,  $t_{CB}$  die relative Tangentialbeschleunigung von  $C$  gegen  $B$ .

Um also den Beschleunigungspunkt  $\gamma$  zu erhalten, wird man

$$n_{CB} \equiv \overline{\beta\gamma_1} = \frac{v_{CB}^2}{CB} \dots \dots \dots 15)$$

in Richtung  $CB$  von  $\beta$  aus auftragen (Fig. 22a), in  $\gamma_1$  die Senkrechte auf  $\beta\gamma_1$  errichten und auf ihr

$$t_{CB} \equiv \overline{\gamma_1\gamma} = \overline{CB} \cdot \lambda$$

abschneiden, wodurch man zu  $\gamma$  gelangen muß. Diese Ermittlung eines Beschleunigungspunktes aus einem andern werden wir später vielfach benützen; sie hat den Vorteil, daß die Tangentialbeschleunigungen  $t_C$  und  $t_{CB}$  nicht bekannt sein müssen, denn man findet den Beschleunigungspunkt  $\gamma$  im Schnitte der beiden Senkrechten  $\gamma_0\gamma$  und  $\gamma_1\gamma$ , wodurch nachträglich erst die beiden Tangentialbeschleunigungen  $t_C = \overline{\gamma_0\gamma}$  und  $t_{CB} = \overline{\gamma_1\gamma}$  gefunden werden.

Sowohl die Beschleunigungsfigur wie auch der Beschleunigungsplan eines sich drehenden Systems ist durch die Angabe der Beschleunigung eines einzigen Punktes  $B$  bestimmt.

**24. Die Beschleunigungsfigur eines allgemein bewegten Systems.** Betrachten wir noch einmal das starre Dreieck  $ABC$  der früheren Fig. 22, das uns das ebene System ersetzt und von dem wir annahmen, daß der Punkt  $A$  keinerlei Beschleunigung besitzt. Verzeichnen wir nochmals die Beschleunigungen  $b_B$  und  $b_C$  der Punkte  $B$  und  $C$  bei ihrer Drehung um  $A$ ; die Endpunkte dieser Beschleunigungsstrecken sind mit  $\beta_1$  und  $\gamma_1$  bezeichnet, während der Punkt  $\alpha_1$  nach  $A$  fällt.

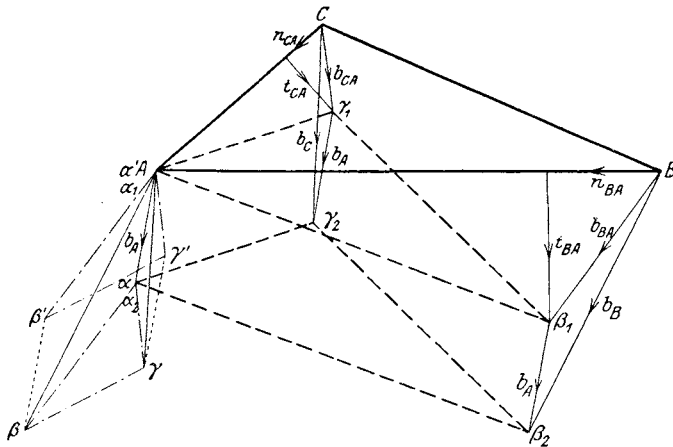


Fig. 23.

Erteilt man dem System eine Parallelverschiebung in beliebiger Richtung und mit beliebiger Beschleunigung  $b_A \equiv \overline{A a_2}$ , eine Verschiebung, die bei einem freien System offenbar immer möglich ist, so fügt sich in allen Punkten  $A, B, C$  zu den bisher innegehabten Beschleunigungen null,  $B\beta_1, C\gamma_1$  noch die neue Beschleunigung  $A a_2$  geometrisch hinzu und es ist  $\overline{\alpha_1 a_2} \equiv \overline{\beta_1 \beta_2} \equiv \overline{\gamma_1 \gamma_2}$  (Fig. 23).

Die Beschleunigung des Punktes  $B$  ist dann

$$b_B \equiv \overline{B \beta_1} + \overline{\beta_1 \beta_2} \equiv \overline{B \beta_2},$$

die des Punktes  $C$   $b_C \equiv \overline{C \gamma_1} + \overline{\gamma_1 \gamma_2} \equiv \overline{C \gamma_2}$

und die des Punktes  $A$   $b_A \equiv \overline{A a_2}$ .

Da früher gezeigt wurde, daß

$$\triangle a_1 \beta_1 \gamma_1 \sim A B C$$

ist und da offenbar  $\triangle a_1 \beta_1 \gamma_1 \sim \triangle a_2 \beta_2 \gamma_2$

ist, so wird auch  $\triangle a_2 \beta_2 \gamma_2 \sim A B C$ ,

d. h. die Endpunkte der Beschleunigungen einer starren Figur bilden eine dieser ähnliche Figur.

Dieser Satz wurde nicht nur für starre, sondern auch für ähnlich veränderliche Systeme von L. Burmester in seiner bereits erwähnten Abhandlung: „Über den Beschleunigungszustand ähnlich veränderlicher und starrer ebener Systeme“, Civil-Ingenieur 1878, S. 152 bewiesen.

Vgl. auch T. Rittershaus: „Kinematisch geometrische Theorie der Beschleunigung für die ebene Bewegung“, Civil-Ingenieur 1878, S. 11.

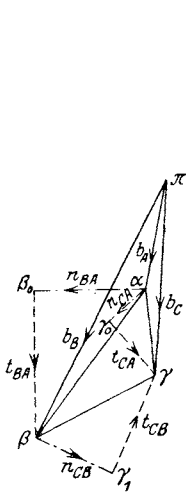


Fig. 23a.

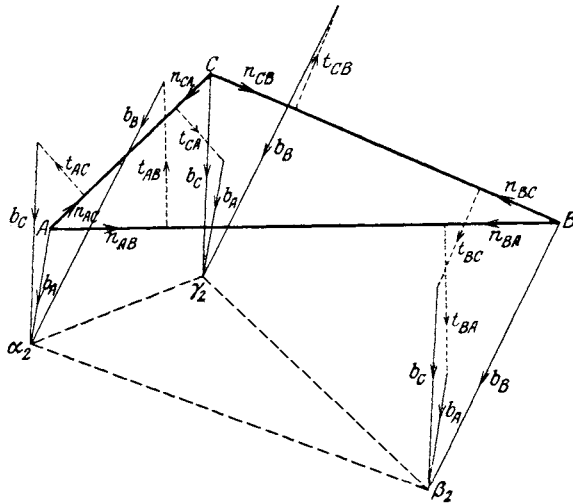


Fig. 24.

Erinnern wir uns, daß die Beschleunigung des Punktes  $B$  bei der Drehung um  $A$  aus den beiden Teilen  $n_B$  und  $t_B$  bestand (Gleichung 6); da dies die Normal- und die Tangentialbeschleunigung des Punktes  $B$  in bezug auf den ruhenden Punkt  $A$  sind, wollen wir sie nun genauer mit  $n_{BA}$  und  $t_{BA}$  bezeichnen; es ist dann in Fig. 23

$$b_B = n_{BA} + t_{BA} + b_A \quad \dots \dots \dots 16)$$

und ebenso

$$b_C = n_{CA} + t_{CA} + b_A.$$

Von dem Augenblicke an, da  $A$  nicht mehr fest liegt, sondern Beschleunigung besitzt wie jeder andere Punkt des Systems, fällt auch seine Ausnahmstellung weg und man kann obige Gleichungen in analoge für die Beschleunigung des Punktes  $A$  verwandeln, und zwar (Fig. 24 mit Benützung von Fig. 23a)

$$\overline{b_A} \equiv n_{AB} + t_{AB} + b_B$$

und

$$\overline{b_A} \equiv n_{AC} + t_{AC} + b_C;$$

endlich kann auch geschrieben werden:

$$\overline{b_B} \equiv n_{BC} + t_{BC} + b_C$$

und

$$\overline{b_C} \equiv n_{CB} + t_{CB} + b_B.$$

Die Veränderung in der Reihe der Stellenzeiger bringt eine Umkehrung der Richtung mit sich; es ist z. B.

$$n_{BC} = -n_{CB}, \quad t_{BC} = -t_{CB}.$$

**25. Der Beschleunigungsplan eines allgemein bewegten Systems.**

Wir wollen wie in 23, wo der Punkt  $A$  des Systems in Ruhe war, den Beschleunigungsplan entwickeln, indem wir von einem beliebigen Punkte aus, den wir z. B. in  $A$  wählen, die Beschleunigungen von  $A, B, C$  nach Größe und Richtung auftragen. Es ist also (Fig. 23)  $\overline{Aa} \equiv b_A, \overline{A\beta} \equiv \overline{B\beta_2} \equiv b_B, \overline{A\gamma} \equiv \overline{C\gamma_2} \equiv b_C$ . Verbinden wir die drei Punkte  $a, \beta, \gamma$  und verschieben wir dieses Dreieck um die Strecke  $aA$  derart parallel, daß  $a$  nach  $a'$  (in  $A$ ) kommt, dann gelangt das Dreieck  $a\beta\gamma$  in die Lage  $a'\beta'\gamma'$ , die wir von früher kennen (23). Dort wurde gezeigt, daß  $\triangle a'\beta'\gamma' \sim ABC$  ist; weil nun  $\triangle a'\beta'\gamma' \cong a\beta\gamma$  ist, so wird auch

$$\triangle a\beta\gamma \sim ABC$$

d. h. der Beschleunigungsplan einer starren Figur ist dieser selbst ähnlich.

Dieser Satz wurde in der bereits erwähnten Abhandlung von R. Mehmke: „Über die Geschwindigkeiten beliebiger Ordnung eines in seiner Ebene bewegten ähnlich veränderlichen ebenen Systems“, Civil-Ingenieur 1883, nicht nur für starre, sondern auch für ähnlich veränderliche Systeme bewiesen. In dieser Arbeit wird auch der Gedanke eines Beschleunigungsplanes zum ersten Male ausgesprochen (S. 494).

Der Name, sowie die grundlegenden Beziehungen stammen von O. Mohr; sie finden sich in seiner bereits erwähnten Abhandlung: „Über Geschwindigkeitspläne und Beschleunigungspläne“, Civil-Ingenieur 1887.

Vgl. auch R. Land: „Der Geschwindigkeits- und der Beschleunigungsplan für Mechanismen“, Zeitschr. d. Vereins deutscher Ingenieure 1896.

Von nun an wollen wir den Beschleunigungsnullpunkt  $\pi$ , von dem aus die Beschleunigungen aufgetragen werden, nicht mehr in  $A$ , sondern beliebig in der Zeichnung wählen (Fig. 23a), die Beschleunigungen auftragen und dabei die Zerlegung jeder Beschleunigung in ihren normalen und tangentiellen Teil mit in die Zeichnung herübernehmen.

Es ist demnach in Fig. 23a gezeichnet worden

$$\overline{\pi a} \equiv b_A, \quad \overline{\pi \beta} \equiv b_B, \quad \overline{\pi \gamma} \equiv b_C,$$

ferner

$$\overline{a\beta_0} \equiv n_{BA}, \quad \overline{\beta_0\beta} \equiv t_{BA};$$

$$\overline{a\gamma_0} \equiv n_{CA}, \quad \overline{\gamma_0\gamma} \equiv t_{CA};$$

dann ist wie früher

$$b_B \equiv b_A + n_{BA} + t_{BA},$$

$$b_C \equiv b_A + n_{CA} + t_{CA};$$

es ist aber auch

$$b_C \equiv b_B + n_{CB} + t_{CB}.$$

Überhaupt möge beachtet werden, daß sich jeder Beschleunigungs-  
punkt  $\nu$  eines starren Systems aus jedem anderen  $\mu$  durch Hinzufügung  
der relativen Beschleunigungen  $n_{NM}$  und  $t_{NM}$  auffinden läßt. Dabei  
werden die relativen Normalbeschleunigungen  $n_{NM}$  aus den relativen  
Geschwindigkeiten  $v_{NM}$  der Punkte  $M$  und  $N$ , die aus dem Geschwindig-  
keitsplan zu entnehmen sind, und aus den Entfernungen  $MN$  mit Hilfe  
der Gleichung 15

$$n_{NM} = \frac{v_{NM}^2}{NM}$$

zu ermitteln sein; dies kann entweder durch Rechnung geschehen oder  
man bedient sich der in 19 mitgeteilten Konstruktion.

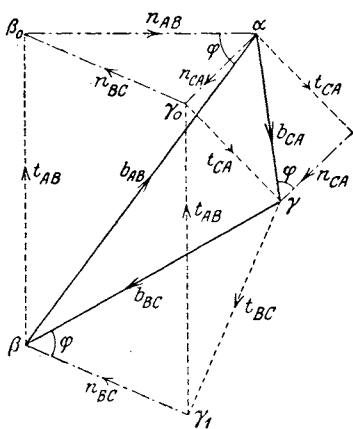


Fig. 23 b.

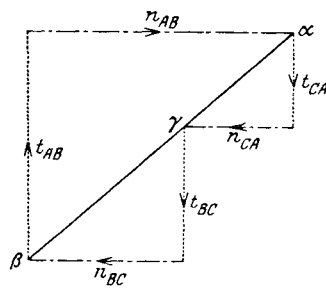


Fig. 23 c.

In Fig. 23 b wurde der Beschleunigungsplan ohne Nullpunkt  $\pi$   
noch einmal größer gezeichnet. Durch das Fehlen dieses Punktes können  
nur jene Beschleunigungen beurteilt werden, welche die Punkte  $A$ ,  
 $B$ ,  $C$  relativ zueinander haben, und zwar ist:

$$\overline{\beta\alpha} \equiv b_{AB}, \quad \overline{\gamma\beta} \equiv b_{BC}, \quad \overline{\alpha\gamma} \equiv b_{CA};$$

aus der Abbildung ist ersichtlich, daß für eine geschlossene Figur  $ABC$   
die Beziehung gilt

$$b_{AB} + b_{BC} + b_{CA} = 0 \dots\dots\dots 17)$$

Da der Beschleunigungswinkel  $\varphi$  für alle Punkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$  der gleiche  
ist, so bestehen die Proportionen

$$n_{AB} : n_{BC} : n_{CA} = t_{AB} : t_{BC} : t_{CA} = b_{AB} : b_{BC} : b_{CA}.$$

Schiebt man demnach die Normalbeschleunigungen derart zusammen, daß sie aneinander stoßen, so bilden sie eine geschlossene Figur  $\alpha\beta_0\gamma_0$ , die der Figur  $\alpha\beta\gamma$  und auch dem System  $ABC$  ähnlich ist. Das gleiche gilt von den Tangentialbeschleunigungen, wie man aus der Fig. 23b entnehmen kann. Man hat somit außer der Gleichung 17 auch noch die zwei anderen:

$$n_{AB} + n_{BC} + n_{CA} = 0 \quad \dots \quad 18)$$

und 
$$t_{AB} + t_{BC} + t_{CA} = 0 \quad \dots \quad 19)$$

Die drei Gleichungen 17, 18, 19 gelten auch dann, wenn die drei Punkte  $A, B, C$  in einer Geraden liegen (Fig. 23c).

**26. Die Lage des Beschleunigungsplanes.** Aus der Fig. 23a des Beschleunigungsplanes läßt sich leicht ein direkter Beweis des in 25 angeführten Satzes erbringen, daß das gegebene System und sein Beschleunigungsplan gleichartig ähnliche Figuren bilden müssen.

Zeichnen wir die Beschleunigungspunkte  $\alpha$  und  $\beta$  mit ihren relativen Beschleunigungen  $n_{BA}$  und  $t_{BA}$  besonders heraus (Fig. 25), so ist nach Gleichung 14 für den Beschleunigungswinkel  $\varphi$  des Systems

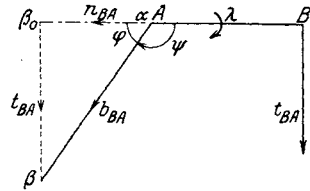


Fig. 25.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{t_{BA}}{n_{BA}} = \frac{\lambda}{\omega^2} \quad \dots \quad 20)$$

also  $\varphi$  konstant für alle Punkte des Systems. Zieht man durch  $\alpha$  die parallele Richtung zu  $AB$ , so ist  $\psi = 180^\circ - \varphi$  der Winkel, um den  $AB$  nach  $\alpha\beta$  verdreht wird. Da aber der Winkel  $\varphi$  für alle Punkte des Systems den gleichen Wert hat, so gilt dies auch für den Winkel  $\psi$ , d. h. das Dreieck  $\alpha\beta\gamma$  entsteht aus dem Dreiecke  $ABC$  durch Verdrehung um den Winkel  $\psi$  und proportionale Veränderung seiner Seitenlängen.

Um die Richtung dieser Verdrehung festzustellen, beachte man in Fig. 25 die Richtung von  $t_{BA}$  d. i. der relativen Tangentialbeschleunigung von  $B$  gegen  $A$ . Zeichnet man sie dort, wo sie hingehört, nämlich in  $B$ , so bemerkt man, daß die Beschleunigung den Punkt  $B$  um  $A$  im Sinne des Winkels  $\psi$  dreht; die Verdrehung um den Winkel  $\psi$  erfolgt also im Sinne der Winkelbeschleunigung  $\lambda$ .

Die Seiten der beiden gleichartig ähnlichen Dreiecke  $ABC$  und  $\alpha\beta\gamma$  in Fig. 24 und 23a sind nicht senkrecht zueinander, wie dies bei den Dreiecken  $ABC$  und  $abc$  im Geschwindigkeitsplane der Fall war (vgl. 11). Der Winkel  $\psi$ , um den die beiden Dreiecke  $ABC$  und  $\alpha\beta\gamma$  gegeneinander verdreht sind, kann nur innerhalb gewisser Grenzen liegen. Betrachten wir z. B. in Fig. 24 und 23a die entsprechenden Seiten  $AB$  und  $\alpha\beta$ , so sehen wir, daß  $\beta$  aus  $\alpha$  entsteht, wenn wir zunächst  $n_{BA}$  in ent-



gegengesetzter Richtung von  $AB$  auftragen; infolgedessen können  $AB$  und  $\alpha\beta$  nur einen Winkel

$$\psi > 90^\circ$$

$$\psi < 270^\circ$$

miteinander einschließen. Gleiches gilt auch von den übrigen Seiten des Dreiecks und überhaupt von allen Geraden des Systems.

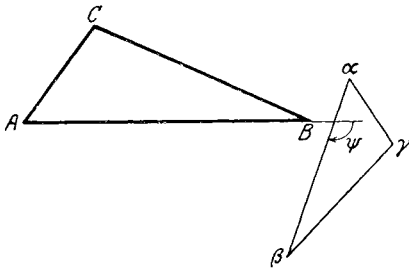


Fig. 26.

Zeichnet man also (Fig. 26) ein beliebiges Dreieck  $\alpha\beta\gamma$ , das zu  $ABC$  gleichartig ähnlich ist und dessen Seitenrichtungen durch eine Verdrehung von  $ABC$  um einen Winkel  $\psi$  entstehen, der obiger Bedingung genügt, so kann dieses Dreieck  $\alpha\beta\gamma$  als Beschleunigungsplan von  $ABC$  angesehen werden. Der Beschleunigungsnullpunkt  $\pi$  ist dann noch immer beliebig wählbar.

Würde man etwa  $\psi = 90^\circ$  oder  $\psi = 270^\circ$  wählen, so wäre nach Fig. 25:  $n_{BA} = 0$  und aus dem gleichen Grunde wären auch die übrigen Normalbeschleunigungen  $n_{CA}$  und  $n_{CB}$  gleich null; da nach Gleichung 9:  $n_B = v_B \cdot \omega$  ist, so würde dies entweder dem Zustande  $v_B = 0$ , also der Anfangsbewegung des Systems oder  $\omega = 0$  entsprechen.

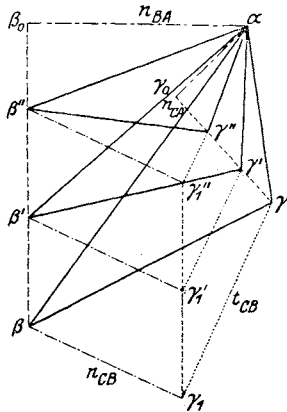


Fig. 27.

Der Zustand  $\omega = 0$  entspricht einer Parallelverschiebung des Systems, für die der Beschleunigungsplan in einen Punkt ausartet, da alle relativen Beschleunigungen verschwinden.

Würde man hingegen  $\psi = 180^\circ$  wählen, so wäre nach Gleichung 20:  $t_{BA} = 0$ , was auch für die übrigen  $t_{CA}$  und  $t_{CB}$  gilt; in diesem Falle würde die Winkelgeschwindigkeit des Systems durch zwei Zeiteilchen hindurch unverändert bleiben.

**27. Die Punktreihen der Beschleunigungspunkte.** Wir wollen nun den Beschleunigungsplan  $\alpha\beta\gamma$  des Dreiecks  $ABC$  nochmals in vergrößertem Maßstabe herauszeichnen (Fig. 27), ohne den Beschleunigungsnullpunkt  $\pi$  zu wählen. Wir wollen ferner eine Veränderung

des Beschleunigungszustandes des Systems  $ABC$  vornehmen, ohne an seinem Geschwindigkeitszustand etwas zu ändern; dann ändern sich auch die relativen Normalbeschleunigungen

$$n_{BA} = \frac{v_{BA}^2}{BA}, \quad n_{CA} = \frac{v_{CA}^2}{CA}$$

nicht; hingegen können sich die relativen Tangentialbeschleunigungen  $t_{BA}$  und  $t_{CA}$  ändern. Wir wollen demnach  $\beta$  auf  $\beta_0\beta$  nach  $\beta'$  verschieben. Dann wird sich auch der Beschleunigungspunkt  $\gamma$  verändern; um seine neue Lage zu finden, machen wir  $\overline{\beta'\gamma_1} \# \overline{\beta\gamma_1} \equiv n_{CB}$  und  $\gamma_1'\gamma' \perp \beta'\gamma_1'$ ; da sich  $n_{CA}$  nicht verändert, finden wir  $\gamma'$  im Schnitte von  $\gamma_1'\gamma'$  mit  $\gamma_0\gamma$ . Verschieben wir  $\beta$  nach  $\beta''$ , so erhalten wir auf gleiche Weise den entsprechenden Beschleunigungspunkt  $\gamma''$ . Die Punktreihen  $\beta\beta'\beta'' \dots$  und  $\gamma\gamma'\gamma'' \dots$  sind ähnlich; auch die Dreiecke  $\alpha\beta\gamma$ ,  $\alpha\beta'\gamma'$ ,  $\alpha\beta''\gamma''$  müssen untereinander ähnlich sein, da sie Beschleunigungspläne des Dreiecks  $ABC$  sind. Man erhält also den Satz:

Für einen bestimmten Geschwindigkeitszustand des starren Systems bilden die Beschleunigungspunkte aller möglichen Beschleunigungszustände ähnliche Punktreihen.

Den Wert dieser Überlegung werden wir erst später kennen lernen; die Ähnlichkeit der Punktreihen der Beschleunigungspunkte wird uns eine reiche Anzahl von Anwendungen ermöglichen.

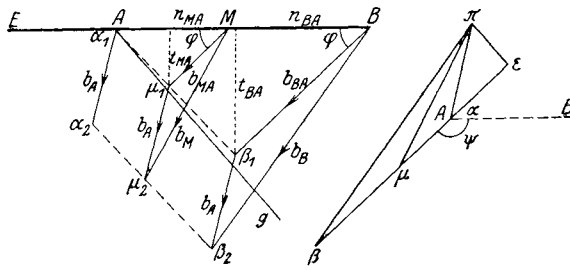


Fig. 28.

Fig. 28 a.

**28. Der Beschleunigungszustand einer Geraden.** In Fig. 17 hatten wir den Beschleunigungszustand der Geraden  $AMB$  untersucht, die sich um den festgehaltenen Punkt  $A$  dreht. Wir fanden die Beschleunigung  $b_M$  irgend eines Punktes  $M$  der Geraden parallel zur Beschleunigung  $b_B$  des Punktes  $B$ ; die Größen der Beschleunigungen  $b_M$  und  $b_B$  standen im Verhältnis der Abstände  $MA$  und  $BA$  (Fig. 28). Bezeichnen wir die Beschleunigungen von nun an mit  $b_{MA}$  und  $b_{BA}$ , da sie die relativen Beschleunigungen der Punkte  $M$  und  $B$  in bezug auf den Punkt  $A$  sind, und nennen wir ihre Endpunkte  $\mu_1$  und  $\beta_1$ , lassen bei der Drehung um  $A$   $\alpha_1$  nach  $A$  fallen, so liegen  $\alpha_1$ ,  $\mu_1$  und  $\beta_1$  in einer Geraden und es ist

$$\alpha_1 \mu_1 \beta_1 \sim AMB.$$

Fügen wir nun eine Parallelverschiebung des Systems hinzu, bei der alle Punkte die gleiche Beschleunigung  $b_A$  erhalten, so werden die Beschleunigungen der drei Punkte  $A$ ,  $M$ ,  $B$ :

$$\begin{aligned} b_A &\equiv \overline{Aa_2}, \\ b_M &\equiv b_{MA} + b_A \equiv \overline{M\mu_1} + \overline{\mu_1\mu_2} \equiv \overline{M\mu_2}, \\ b_B &\equiv b_{BA} + b_A \equiv \overline{B\beta_1} + \overline{\beta_1\beta_2} \equiv \overline{B\beta_2}. \end{aligned}$$

Die Endpunkte  $a_2, \mu_2, \beta_2$  der drei Beschleunigungen liegen wieder in einer Geraden und es ist

$$a_2 \mu_2 \beta_2 \sim A M B,$$

in Übereinstimmung mit dem in 24 besprochenen Ähnlichkeitsgesetze.

Zeichnen wir nebenan den Beschleunigungsplan der Geraden (Fig. 28a), indem wir von einem beliebigen Punkte  $\pi$  aus die Beschleunigungen auftragen:

$$\overline{\pi a} \equiv b_A, \quad \overline{\pi \mu} \equiv b_M, \quad \overline{\pi \beta} \equiv b_B,$$

so muß nach dem Ähnlichkeitsgesetze in 25 auch

$$a \mu \beta \sim A M B$$

sein; die Beschleunigungspunkte einer Geraden erfüllen also wieder eine Gerade und bilden auf ihr eine ähnliche Punktreihe.

Nennen wir wie früher

$$\sphericalangle A B \beta_1 = A M \mu_1 = \varphi$$

den Beschleunigungswinkel der relativen Drehung, so erhält man die Richtung der Geraden  $a\beta$  des Beschleunigungsplanes durch Verdrehen der Geraden  $AB$  um den Winkel  $\psi = 180^\circ - \varphi$  (vgl. Fig. 26).

Fällt man von  $\pi$  eine Senkrechte auf  $a\beta$ , so ist deren Fußpunkt  $\varepsilon$  wieder ein Beschleunigungspunkt der Geraden; er entspricht dem Punkt  $E$  derselben, wenn

$$E A B \sim \varepsilon a \beta$$

gemacht wird. Dieser Punkt  $E$  ist jener Punkt der Geraden, der die kleinste Beschleunigung hat.

Zeichnet man durch  $A$  eine Gerade  $g$ , die mit  $AB$  den Winkel  $90^\circ - \varphi$  einschließt, also zu  $a\beta$  senkrecht steht und projiziert man die Beschleunigungen aller Punkte der Geraden  $AB$  auf  $g$ , so haben diese Projektionen gleiche Größe.

Sind von zwei Punkten  $A$  und  $B$  einer Geraden die Beschleunigungen nach Größe und Richtung gegeben, so kann die Beschleunigung eines dritten Punktes  $M$  auf folgende Weise gefunden werden. Man zeichnet (Fig. 28a)

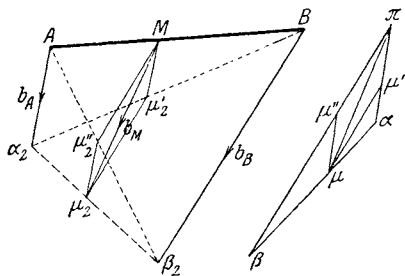


Fig. 29.

Fig. 29 a.

$$\overline{\pi a} \equiv b_A \quad \text{und} \quad \overline{\pi \beta} \equiv b_B,$$

verbindet  $a$  mit  $\beta$  und macht

$$a \mu \beta \sim A M B;$$

dann ist  $\pi \mu$  die gesuchte Beschleunigung  $b_M$ .

Dies läßt sich auch in folgender Weise durchführen. Zieht man im Beschleunigungsplan Fig. 29 a

$$\mu \mu' \parallel \beta \pi, \quad \mu \mu'' \parallel \alpha \pi,$$

so ist

$$\pi \mu = \pi \mu' + \mu' \mu \equiv \pi \mu'' + \mu'' \mu.$$

Verbindet man (Fig. 29)  $B$  mit  $a_2$  und zieht  $M\mu'_2 \parallel Aa_2$ , so ist

$$\overline{M\mu'_2} : \overline{Aa_2} = \overline{BM} : \overline{BA} = \beta\mu : \beta a = \mu''\mu : \pi a,$$

also wegen  $\overline{Aa_2} \equiv \pi a$  auch  $\overline{M\mu'_2} \equiv \mu''\mu \equiv \pi\mu'$ . Ebenso ergibt sich  $\overline{M\mu''_2} \equiv \pi\mu''$ . Bildet man somit das Parallelogramm über  $\overline{M\mu'_2}$  und  $\overline{M\mu''_2}$ , so ist dessen Diagonale  $\overline{M\mu_2}$  die gesuchte Beschleunigung  $b_M$ .

Um also ohne Benützung des Beschleunigungsplanes die Beschleunigung  $b_M$  zu finden, ziehe man die Linien  $A\beta_2, B\alpha_2$ , ferner  $M\mu'_2 \parallel Aa_2, M\mu''_2 \parallel B\beta_2$ , dann ist

$$b_M \equiv \overline{M\mu'_2} + \overline{M\mu''_2} \equiv \overline{M\mu_2}.$$

Diese Konstruktion wurde mit anderer Begründung mitgeteilt von M. Tolle (Die Regelung der Kraftmaschinen, 3. Auflage, S. 30).

**29. Der Beschleunigungspol.** In Fig. 23a und 24 wurde gezeigt, daß das System der Beschleunigungspunkte  $\alpha\beta\gamma\dots$  dem gegebenen System  $ABC\dots$

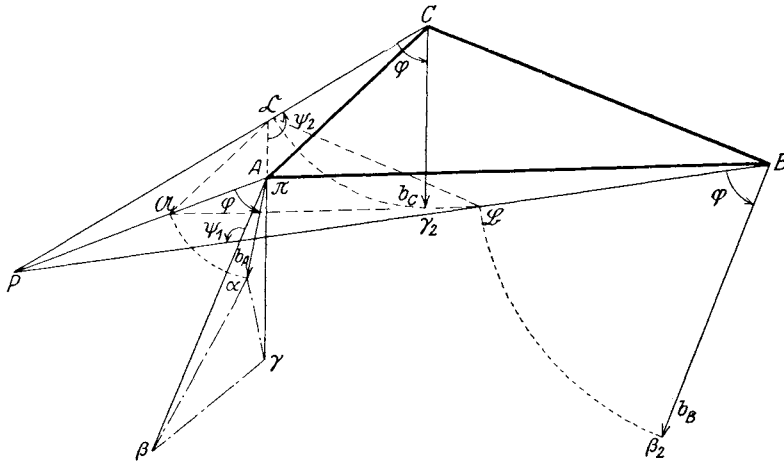


Fig. 30.

gleichartig ähnlich ist, daß somit jedem Punkte des einen Systems ein ähnlich gelegener Punkt des zweiten entspricht. Nun kann man im System  $ABC$  den Punkt  $P$  aufsuchen (Fig. 30), der dem Nullpunkt  $\pi$  des Beschleunigungsplanes entspricht, indem man die Figur  $ABCP$  der Figur  $\alpha\beta\gamma\pi$  ähnlich zeichnet. Dann fällt aber der zu  $P$  gehörige Beschleunigungspunkt in den Nullpunkt  $\pi$  des Beschleunigungsplanes, d. h. die Beschleunigung des Punktes  $P$  ist null. Es ist jener Punkt des gegebenen Systems  $ABC$ , der zwar eine Geschwindigkeit hat, aber augenblicklich keine Beschleunigung besitzt. Er wird der Beschleunigungspol des Systems genannt.

Dieser Beschleunigungspol hat eine Reihe interessanter Eigenschaften, von denen einige Erwähnung finden sollen.

Verbindet man  $P$  mit  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , so entsprechen diesen Strecken im Beschleunigungsplan die Strecken  $\pi a$ ,  $\pi\beta$ ,  $\pi\gamma$ .

Dreht man die Strecke  $\pi\beta$  um den Winkel  $\psi_1$  gegen den Uhrzeiger, so wird sie zu  $PB$  parallel; dreht man die Strecke  $\pi\gamma$  ebenso um den Winkel  $\psi_2$ , so wird sie zu  $PC$  parallel; da aber  $\pi\beta\gamma$  und  $PBC$  gleichartig ähnlich sind, müssen beide Drehungswinkel gleich sein, also  $\psi_1 = \psi_2 = \psi$ ; somit ist auch

$$\sphericalangle P B \beta_2 = \sphericalangle P C \gamma_2 = 180 - \psi = \varphi,$$

d. h. die nach dem Beschleunigungspol gezogenen Strecken  $BP$ ,  $CP$  schließen mit den zugehörigen Beschleunigungen  $b_B$ ,  $b_C$  denselben Winkel ein (Beschleunigungswinkel  $\varphi$ ). Dies gilt ebenso für  $A$  und für alle übrigen Punkte des Systems.

Ferner folgt aus der Ähnlichkeit von  $\beta\pi\gamma$  mit  $BPC$  und von  $\alpha\pi\beta$  mit  $APB$ :

$$b_A : b_B : b_C = \overline{\alpha\pi} : \overline{\beta\pi} : \overline{\gamma\pi} = \overline{AP} : \overline{BP} : \overline{CP},$$

d. h. die Beschleunigungen der Systempunkte sind ihren Abständen vom Beschleunigungspol proportional.

Der Beschleunigungspol (centre instantané des accélérations) wurde zuerst von Bresse gefunden (Journal de l'école impériale polytechnique 1853, Tome XX, p. 95).

**30. Die gedrehten Beschleunigungen.** Da der Beschleunigungspol  $P$  keine Beschleunigung hat, spielt er im System die gleiche Rolle wie in Fig. 17 der festgehaltene Punkt  $A$ . Es ist also wie in 18 nach Gleichung 14

$$tg \varphi = \frac{\lambda}{\omega^2},$$

worin  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit,  $\lambda$  die Winkelbeschleunigung des Systems ist.

Dreht man die Beschleunigungen  $b_A$ ,  $b_B$ ,  $b_C$  um den gleichen Winkel  $\varphi$  in die Richtungen  $AP$ ,  $BP$ ,  $CP$  hinein, so erhält man die Punkte  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{C}$ ; sie bilden ein System, das dem gegebenen System  $ABC$  ebenfalls ähnlich ist.  $P$  ist ihr Ähnlichkeitspunkt. Analoges konnten wir in 15. von den gedrehten Geschwindigkeiten aussagen; nur war der Drehungswinkel dort durchaus  $90^\circ$  und der Ähnlichkeitspunkt der Drehpol  $O$ .

**31. Der Wendekreis und der Wendepol.** Es sei  $O$  der Drehpol und  $P$  der Beschleunigungspol eines Systems (Fig. 31),  $A$  ein beliebiger Punkt desselben,  $v_A$  seine Geschwindigkeit,  $b_A$  seine Beschleunigung. Der Drehpol  $O$  ist zwar augenblicklich in Ruhe, aber er wird dennoch eine Beschleunigung  $b_O$  besitzen; der Beschleunigungspol  $P$  hat zwar augenblicklich keine Beschleunigung, aber er wird dennoch eine Geschwindigkeit  $v_P$  besitzen.

Aus  $b_A$  kann  $b_O$  konstruiert werden; denn es ist nach 29:

$$\sphericalangle P A b_A = P O b_O = \varphi$$

und

$$b_A : b_O = \overline{AP} : \overline{OP}.$$

Ebenso kann aus  $v_A$  die Geschwindigkeit  $v_P$  gefunden werden; es ist  $v_P \perp PO$  und

$$v_A : v_P = \overline{AO} : \overline{PO}.$$

Den Schnittpunkt von  $b_O$  mit  $v_P$  nennen wir  $J$ . Wir errichten über  $O, P, J$  einen Kreis  $k_1$ , dessen Durchmesser  $OJ$  sein wird und wählen auf diesem Kreise einen beliebigen Punkt  $M$  des Systems; seine Geschwindigkeit  $v_M$  hat die Richtung  $JM$ . Um die Beschleunigung  $b_M$  zu finden, machen wir  $\sphericalangle PM b_M = \varphi$ ; dann geht aber die Richtung

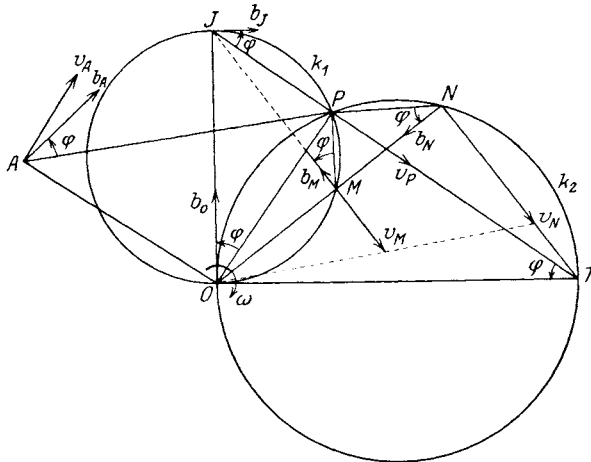


Fig. 31.

von  $b_M$  durch  $J$ ,  $v_M$  und  $b_M$  fallen in dieselbe Gerade d. h. die Normalbeschleunigung des Punktes  $M$  ist null.

Dies trifft aber für jeden Punkt  $M$  des Kreises  $k_1$  zu; der Kreis  $k_1$  ist somit der Ort aller Systempunkte ohne Normalbeschleunigung. Nun ist aber nach Gleichung 4:

$$n_M = \frac{v_M^2}{\varrho} = 0,$$

d. h. für jeden Punkt  $M$  des Kreises  $k_1$  ist der Krümmungshalbmesser seiner Bahn augenblicklich unendlich groß oder:

Der Kreis  $k_1$  ist der Ort jener Systempunkte, die im betreffenden Augenblicke Wendepunkte ihrer Bahnen beschreiben.

Aus diesem Grunde nennt man  $k_1$  den Wendekreis, den Punkt  $J$  den Wendepol des Systems.

Nur der Drehpol  $O$ , der auch ein Punkt dieses Kreises ist, macht eine Ausnahme; er beschreibt keinen Wendepunkt seiner Bahn, sondern eine Spitze. In diesem Punkt ist nämlich  $v_O = 0$  und wegen  $n_O \varrho = v_O^2$ , auch  $n_O = 0$ ,  $\varrho = 0$ .

Alle Punkte des Systems, deren Bahnen unendlich großen Krümmungshalbmesser haben, senden ihre Bewegungsrichtungen durch den Wendepol. Beschreibt ein Systempunkt dauernd eine gerade Linie, so liegt der Wendepol stets auf ihr.

Der Wendekreis wurde von De La Hire gefunden (Traité des roulettes, 1706).

**32. Der Tangentialkreis.** Zieht man in Fig. 31 die Gerade  $OT \perp OJ$  und bringt sie in  $T$  zum Schnitte mit  $JP$ , beschreibt sodann über  $OPT$  den Kreis  $k_2$ , dessen Durchmesser  $OT$  ist und wählt auf  $k_2$  einen beliebigen Punkt  $N$ , so ist

$$\sphericalangle PNO = PTO = POJ = \varphi;$$

die Beschleunigung  $b_N$  des Punktes  $N$  geht also durch  $O$ . Allein  $NO$  ist die Normale der von  $N$  beschriebenen Bahn; demnach fällt die Beschleunigung von  $N$  vollständig in die Normale und die Tangentialbeschleunigung  $t_N$  ist null.

Da dies von allen Punkten des Kreises  $k_2$  gesagt werden kann, finden wir den Satz:

Der Kreis  $k_2$  ist der Ort der Systempunkte ohne Tangentialbeschleunigung.

Die Kreise  $k_1$  und  $k_2$  schneiden sich in  $O$  und  $P$  rechtwinklig. Der Beschleunigungspol  $P$  hat weder Normal-, noch Tangentialbeschleunigung; seine ganze Beschleunigung ist null.

Auch hier macht der Drehpol  $O$  eine Ausnahme. Da seine Geschwindigkeit null ist, wird auch  $n_O = 0$  und seine ganze Beschleunigung  $b_O$  ist Tangentialbeschleunigung.

Der Tangentialkreis wurde von Bresse gefunden (Mémoire sur un théorème nouveau etc. 1853, Journal de l'école impériale polytechnique, p. 89).

**33. Die Anordnung der Beschleunigungen um den Beschleunigungspol.** Ist in Fig. 32  $M$  wieder ein beliebiger Punkt des Wendekreises, so geht

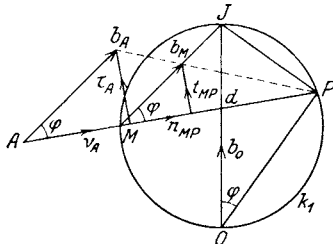


Fig. 32.

nach 31 seine Beschleunigung  $b_M$  durch den Wendepol  $J$ . Nun kann nach Gleichung 16 gesetzt werden:

$$b_M = b_P + n_{MP} + t_{MP}$$

und da  $b_P = 0$  ist, muß

$$b_M = n_{MP} + t_{MP}$$

sein. Da jedoch  $n_{MP} = \overline{MP} \cdot \omega^2$  und

nach Gleichung 20:  $tg \varphi = \frac{\lambda}{\omega^2}$  ist, wird

$$t_{MP} = n_{MP} \cdot tg \varphi = \overline{MP} \cdot \lambda$$

und

$$b_M = \sqrt{n_{MP}^2 + t_{MP}^2} = \overline{MP} \sqrt{\omega^4 + \lambda^2}$$

Ist ferner  $A$  ein beliebiger Punkt auf  $MP$ , und benützen wir die beiden Sätze in 29, so wird die Beschleunigung  $b_A$  parallel zu  $b_M$  sein und außerdem die Proportion bestehen:

$$b_A : b_M = \overline{AP} : \overline{MP}.$$

Damit werden aber die beiden Teile der Beschleunigung  $b_A$  (Fig. 33):

$$v_A = b_A \cos \varphi = AP \cdot \omega^2 \quad \dots \quad 21)$$

$$\tau_A = b_A \sin \varphi = AP \cdot \lambda \quad \dots \quad 22)$$

und 
$$b_A = \sqrt{v_A^2 + \tau_A^2} = AP \sqrt{\omega^4 + \lambda^2} \quad \dots \quad 23)$$

Vergleicht man diese Resultate mit den Gleichungen 9, 10 und 13 in 17 und 18, so erkennt man, daß der Beschleunigungspol  $P$  für das all-

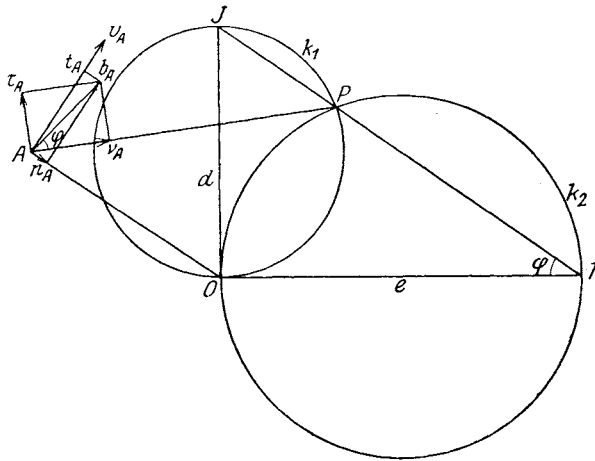


Fig. 33.

gemein bewegte System eine ähnliche Rolle spielt, wie der Mittelpunkt einer Drehung. Die Beschleunigungen aller Punkte wachsen proportional mit den Abständen von  $P$ , der Beschleunigungswinkel  $\varphi$  jedoch ist für alle Punkte der gleiche.

Die Beschleunigungen aller Systempunkte ordnen sich hinsichtlich ihrer Größe um  $P$  wie die Geschwindigkeiten dieser Punkte um  $O$ . Nur ist der Geschwindigkeitswinkel immer  $90^\circ$ , während der Beschleunigungswinkel  $\varphi$  alle Werte zwischen  $+90^\circ$  und  $-90^\circ$  annehmen kann.

Alle Systempunkte, die auf einer durch  $P$  gehenden Geraden liegen, haben parallele Beschleunigungen. Kennt man den Beschleunigungspol  $P$ , so genügt die Kenntnis der Beschleunigung eines einzigen Punktes  $A$  des Systems, um die Beschleunigung jedes anderen Punktes anzugeben.

Fällt der Punkt  $A$  in den Drehpol  $O$ , so hat die Beschleunigung  $b_O$  die Richtung  $OJ$  und die Größe

$$b_O = OP \sqrt{\omega^4 + \lambda^2} = OJ \cos \varphi \sqrt{\omega^4 + \lambda^2}$$



und mit Rücksicht auf  $tg \varphi = \frac{\lambda}{\omega^2}$ :

$$b_O = d \omega^2 \dots \dots \dots 24)$$

Den Durchmesser  $d = \overline{OJ}$  des Wendekreises  $k_1$  nennt man Wendedurchmesser.

Bezeichnet man noch mit  $e$  den Durchmesser des Tangentialkreises  $k_2$ , so ist wegen  $tg \varphi = \frac{\lambda}{\omega^2} = \frac{d}{e}$  auch

$$b_O = e \lambda \dots \dots \dots 24a)$$

Ist die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  konstant, so wird  $\lambda = 0$ ; dann fällt der Beschleunigungspol  $P$  mit dem Wendepol  $J$  zusammen und es ist

$$b_A = \overline{AJ} \cdot \omega^2 \dots \dots \dots 25)$$

**34. Ermittlung des Beschleunigungspoles.** Es seien  $b_A$  und  $b_B$  die Beschleunigungen der Systempunkte  $A$  und  $B$ ,  $G$  ihr Schnittpunkt

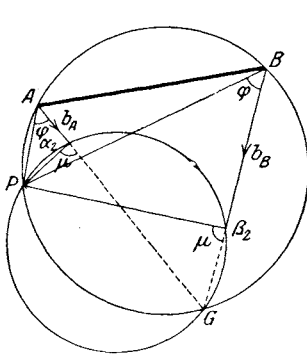


Fig. 34.

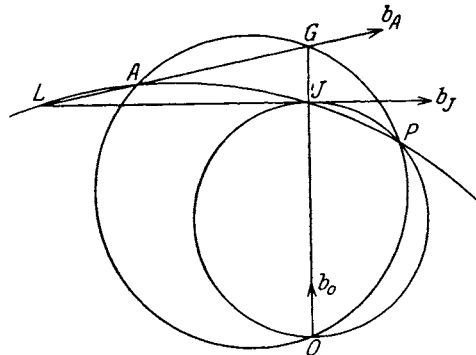


Fig. 35.

(Fig. 34); dann liegt der Beschleunigungspol  $P$  auf einem Kreise, der durch die drei Punkte  $A, B, G$  geht. Dies folgt aus der Gleichheit der Peripheriewinkel

$$\sphericalangle PAG = PBG = \varphi.$$

Nennt man wieder  $\alpha_2$  und  $\beta_2$  die Endpunkte der Beschleunigungen  $b_A$  und  $b_B$ , so ist

$$\triangle PA\alpha_2 \sim PB\beta_2,$$

da die Winkel bei  $A$  und  $B$  gleich sind und nach 29 die Proportion besteht

$$b_A : b_B = \overline{AP} : \overline{BP};$$

es ist also auch

$$\sphericalangle P\alpha_2 G = P\beta_2 G = \mu;$$

$P$  liegt also auch auf dem Kreise, der durch die drei Punkte  $\alpha_2, \beta_2, G$  gelegt wird.

In Fig. 35 sind der Drehpol  $O$  und der Wendepol  $J$  des Systems, sowie die Beschleunigung  $b_A$  eines Systempunktes  $A$  gegeben. Es ist der Beschleunigungspol  $P$  zu finden.

Die Richtung der Beschleunigung  $b_O$  ist  $OJ$ , wie in 31 gezeigt wurde;  $b_O$  und  $b_A$  schneiden sich im Punkt  $G$ ; der Kreis über  $A, O, G$  enthält nach Fig. 34 den Beschleunigungspol  $P$ .

Die Richtung der Beschleunigung  $b_J$  ist senkrecht zu  $OJ$  (vgl. Fig. 31), ihr Schnitt mit  $b_A$  ist der Punkt  $L$ ; der Kreis über  $A, J, L$  enthält nach Fig. 34 ebenfalls den Beschleunigungspol, der damit gefunden ist.

Man kann jedoch aus der Angabe von  $O$  und  $J$  und der Beschleunigung  $b_A$  den Beschleunigungspol auch ohne Benützung der Kreise auf linearem Wege finden (vgl. F. Wittenbauer, Der Beschleunigungszustand kinematischer Ketten und seine konstruktive Ermittlung. Civil-Ingenieur 1896). Fällt man (Fig. 36) von  $O$  eine Senkrechte auf die gegebene Beschleunigungsrichtung  $b_A$  und zieht durch  $J$  die Parallele zu  $b_A$ , so

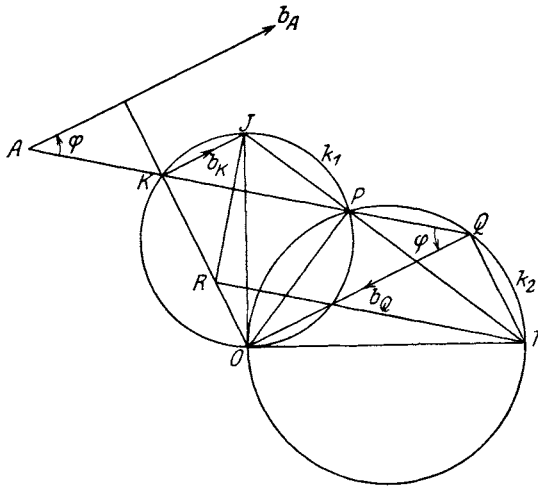


Fig. 36.

schneiden sich die beiden in einem Punkte  $K$  des Wendekreises und  $KJ$  ist die Richtung der Beschleunigung  $b_K$ . Da die Punkte  $A$  und  $K$  parallele Beschleunigungen haben, liegen sie auf einer durch  $P$  gehenden Geraden. Zieht man nun  $OQ \parallel b_A$  und bringt  $OQ$  zum Schnitte  $Q$  mit  $AK$ , so hat  $Q$  eine Beschleunigung  $b_Q$ , die ebenfalls parallel zu  $b_A$  ist; da aber  $QO$  die Normale der Punktbahn in  $Q$  ist, so ist  $b_Q$  ausschließlich Normalbeschleunigung, somit liegt  $Q$  auf dem Tangentialkreise  $k_2$ . Zieht man also

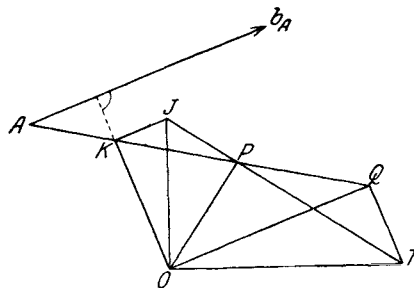


Fig. 37.

$$QT \perp OQ, \quad OT \perp JO,$$

so ist der Schnitt dieser beiden Senkrechten der Tangentialpol  $T$  und die Verbindung von  $T$  mit  $J$  gibt eine zweite Gerade, die durch den Beschleunigungspol geht.

Man erhält somit folgende Ermittlung des Beschleunigungspoles  $P$  (Fig. 37): Man zieht  $JK \parallel OQ \parallel b_A$ ,  $OK \perp b_A$ , dann  $AK$  bis  $Q$ ,  $QT \parallel KO$ ,  $OT \perp JO$ , dann ist  $P$  der Schnitt von  $AQ$  mit  $JT$ . Überdies muß  $OP \perp JT$  sein.

Liegt der Punkt  $A$  nicht auf dem Wendekreise und ist  $b_A \perp AO$ , so fallen  $Q$  und  $T$  nach  $O$  und ebenso der Beschleunigungspol  $P$ .

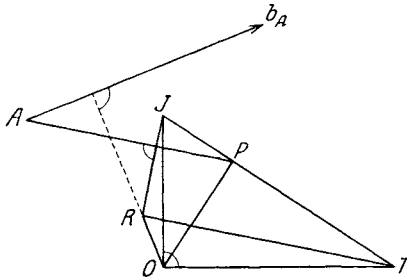


Fig. 38.

richtung  $b_A$  (Fig. 38): Man verbindet den Punkt  $A$  mit  $P$ , zeichnet den Tangentialpol  $T$  im Schnitte von  $JP$  mit  $OT \perp JO$ , zieht  $TR \parallel PA$ ,  $JR \perp PA$  und verbindet den Schnittpunkt  $R$  der beiden letzten Geraden mit  $O$ ; dann ist  $b_A \perp OR$ .

**36. Zerlegungen der Beschleunigung.** Außer der in Fig. 33 vor-

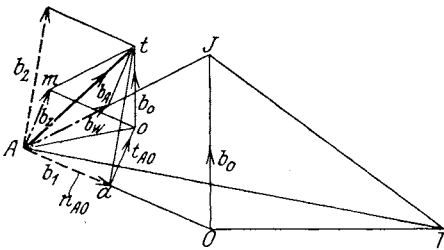


Fig. 39.

geführten Zerlegung der Beschleunigung  $b_A$  in die beiden auf den Beschleunigungspol  $P$  bezogenen Teile  $v_A$  und  $\tau_A$  können manchmal auch andere Arten der Zerlegung von Nutzen sein.

In Fig. 39 wurden zwei dieser Zerlegungen vorgeführt. Die eine ist durch die Gleichung gekennzeichnet:

$$b_A = b_1 + b_2, \dots \dots \dots 26)$$

worin  $b_1 = \overline{AO} \cdot \omega^2$  in Richtung von  $AO$ ,  $\dots \dots \dots 27)$

$$b_2 = \overline{AT} \cdot \lambda \text{ senkrecht zu } AT \dots \dots \dots 28)$$

ist. Denn mit Benützung von Gleichung 16 ist:

$$b_A = n_{AO} + t_{AO} + b_0.$$

Darin ist  $n_{AO} = \overline{AO} \cdot \omega^2 = \overline{Aa}$ ,  $t_{AO} = \overline{AO} \cdot \lambda = \overline{ao}$  und nach Gleichung 25:  $b_0 = e\lambda = \overline{OT} \cdot \lambda$ .

Dann ist  $\triangle aot \sim AOT$ ; denn es besteht die Proportion

$$\overline{ao} : \overline{ot} = t_{AO} : b_0 = \overline{AO} : \overline{OT}$$

und es ist  $ao \perp AO$ ,  $ot \perp OT$ . Dann ist auch  $at \perp AT$  und

$$at \equiv \overline{ao} + \overline{ot} \equiv t_{AO} + b_O \equiv \overline{AO} \cdot \lambda + \overline{OT} \cdot \lambda \equiv \overline{AT} \cdot \lambda.$$

Eine andere Zerlegung von  $b_A$  wurde von M. Grübler angegeben; sie ist durch den Ausdruck gegeben (Fig. 39):

$$b_A \equiv b_W + b_Z, \quad \dots \quad 29)$$

worin  $b_W = \overline{AJ} \cdot \omega^2$  in Richtung von  $AJ$ ,  $\dots \quad 30)$

$$b_Z = \overline{AO} \cdot \lambda \text{ senkrecht zu } AO \quad \dots \quad 31)$$

ist. Die erste wurde als Wendebeschleunigung, die zweite als Triebbeschleunigung bezeichnet. Geht man von der früheren Zerlegung aus, so ist

$$b_A \equiv b_1 + b_2 \equiv \overline{Aa} + \overline{ao} + \overline{ot}.$$

Dies kann auch in der Form geschrieben werden:

$$b_A \equiv \overline{Am} + \overline{mt}, \text{ worin } \overline{Am} \equiv \overline{ao} = \overline{AO} \cdot \lambda \text{ ist.}$$

Nun ist  $\triangle mot \sim AOJ$ , weil  $mo \equiv \overline{Aa} = b_1 = \overline{AO} \cdot \omega^2$ ,  $ot \equiv b_O = \overline{OJ} \cdot \omega^2$ , also  $\overline{mo} : \overline{ot} = \overline{AO} : \overline{OJ}$  und  $mo \parallel AO$ ,  $ot \parallel OJ$  ist. Somit wird  $\overline{mt} = \overline{AJ} \cdot \omega^2$  parallel zu  $AJ$  sein und es wird

$$b_A \equiv \overline{Am} + \overline{mt} \equiv b_Z + b_W.$$

**37. Aufgaben.**

1. Von zwei Punkten  $A$  und  $B$  einer Geraden seien die Beschleunigungen gegeben. Man suche jenen Punkt der Geraden, dessen Beschleunigung in die Gerade hineinfällt.
2. Welche Kurve umhüllt sämtliche Beschleunigungsrichtungen der Punkte einer Geraden?
3. Von zwei Punkten  $A$  und  $B$  eines Kreises seien die Beschleunigungen gegeben. Man suche jene Punkte des Kreises, welche die kleinste und größte Beschleunigung haben und konstruiere diese beiden Beschleunigungen.
4. Wo liegen alle Punkte eines Systems, deren Beschleunigungen durch einen bestimmten Punkt  $M$  gehen?
5. Ist  $A$  ein beliebiger Punkt des Systems (Fig. 40),  $O$  der Drehpol,  $k_1$  der Wendekreis, so kann gezeigt werden, daß die Normalbeschleunigung des Punktes  $A$ :  $n_A = \overline{AW} \cdot \omega^2$  ist.

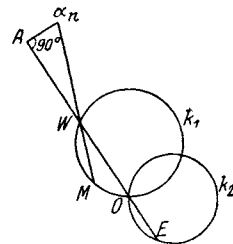


Fig. 40.

6. Ist in Fig. 40  $k_2$  der Tangentialkreis, so ist die Tangentialbeschleunigung des Punktes  $A$ :  $t_A = \overline{AE} \cdot \lambda$ . Man suche dies zu beweisen.

7. Man zeichne die Schaulinie der Tangentialbeschleunigungen  $t_A$  für alle Punkte des Normalstrahles  $AO$  (Fig. 40).
  8. Macht man in Fig. 40:  $A a_n = n_A \perp AO$  (gedrehte Normalbeschleunigung) und verbindet  $a_n$  mit  $W$ , so schneidet diese Gerade den Wendekreis in einem Punkte  $M$ , der für alle Punkte  $A$  der gleiche ist. Wie wird dies bewiesen?
  9. Man suche den Ort aller Punkte  $A$ , die gleiche Normalbeschleunigung  $n_A$  haben.
  10. Man suche den Ort aller Punkte  $A$ , die gleiche Tangentialbeschleunigung  $t_A$  haben.
-

### III. Kinematische Geometrie.

**38. Wesen und Inhalt der kinematischen Geometrie.** Die kinematische Geometrie oder Bewegungsgeometrie ist jener, durch die Untersuchungen der Mechanik angeregte und ihnen verwandte Teil der Geometrie, der die geometrischen Gebilde der Ebene und des Raumes durch Bewegung entstanden denkt, ohne jedoch, wie dies in der Mechanik nötig ist, die Dauer dieser Bewegung in Betracht zu ziehen. Der wesentliche Inhalt der kinematischen Geometrie der Ebene, mit der wir es hier allein zu tun haben werden, besteht in Tangenten- und Normalenkonstruktionen an Kurven, die durch die Bewegung eines Punktes oder durch Umhüllung einer bewegten Kurve entstanden sind, ferner in der Ermittlung der Krümmungsmittelpunkte dieser Bahnen und Umhüllungen.

Von den Gesetzen der kinematischen Geometrie wird in der graphischen Dynamik nur sehr wenig Gebrauch gemacht; nur in gewissen Ausnahmefällen ist man genötigt, zu ihr zurückzugreifen. Im allgemeinen jedoch empfiehlt es sich, in der graphischen Dynamik nur solche Konstruktionen zu benutzen, die von den Krümmungsmittelpunkten der Punkt- und Hüllbahnen unabhängig sind, wodurch die Wichtigkeit der kinematischen Geometrie für die graphische Dynamik eine wesentliche Einschränkung erfährt.

Trotzdem ist die eingehende Beschäftigung mit kinematischer Geometrie sowohl dem Studierenden wie dem Ingenieur wärmstens zu empfehlen, da sie in überraschender Weise und oft in sehr eleganter Form Einblicke in die Bewegungsverhältnisse gestattet.

Hier soll nur ein kurzer Abriß der kinematischen Geometrie mit jenen Sätzen mitgeteilt werden, die in den späteren Ausführungen benützt worden sind.

Für das Selbststudium sind folgende Werke geeignet:

Aronhold, Grundzüge der kinematischen Geometrie, Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfließes in Preußen, 1872. Eine wertvolle Abhandlung, in der zum erstenmal die Anfangsgründe dieser Wissenschaft vorgetragen wurden.

L. Burmester, Lehrbuch der Kinematik, 1888. Ein umfassendes, grundlegendes Werk von größter Klarheit und Strenge, leicht faßlich geschrieben, mit überaus zahlreichen und interessanten Anwendungen auf Gegenstände der Praxis.

A. Mannheim, Géométrie cinématique, 1894. Ein groß angelegtes Werk in vorwiegend synthetischer Behandlung, hauptsächlich Geometrie des Raumes; der Geometrie der Ebene ist nur ein kleiner Teil gewidmet. Das Werk enthält keine Anwendungen auf technische Gegenstände.

G. Koenigs, Leçons de cinématique, 1897. In analytischer Behandlung.

**39. Die Wechselgeschwindigkeit des Drehpols.** Wir haben gesehen, daß der Drehpol  $O$  zwar augenblicklich in Ruhe verharrt, im darauffolgenden Zeiteilchen aber nicht mehr in Ruhe bleiben wird, da er in Richtung des Wendedurchmessers  $d = \overline{OJ}$  die Beschleunigung  $b_O = d\omega^2$  besitzt und somit im nächsten Zeiteilchen einen kleinen Weg zurücklegen wird.

Da  $O$  die Geschwindigkeit  $b_O \cdot \partial t$  in der Richtung nach  $J$  erhält, wird der nächste Drehpol  $O'$  in einer auf  $OJ$  Senkrechten durch  $O$  liegen müssen (Fig. 41). Ist  $\omega + \partial\omega$  die Winkelgeschwindigkeit, die das System um  $O'$  besitzen wird, so muß

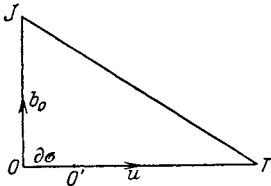


Fig. 41.

$$b_O \cdot \partial t = \overline{OO'} \cdot (\omega + \partial\omega)$$

sein oder wenn die kleine Entfernung  $OO'$  mit  $\partial\sigma$  bezeichnet wird:

$$d\omega^2 \cdot \partial t = \partial\sigma (\omega + \partial\omega);$$

mit Vernachlässigung von  $\partial\omega$  gegen  $\omega$  ist

$$\partial\sigma = d\omega \cdot \partial t$$

und die Geschwindigkeit, mit welcher der Drehpol  $O$  seine Eigenschaft an den Nachbarpunkt  $O'$  abgibt:

$$u = \frac{\partial\sigma}{\partial t} = d \cdot \omega \dots \dots \dots 32)$$

Man nennt diese Geschwindigkeit die Wechselgeschwindigkeit des Drehpols. Sie ist, was wohl zu beachten ist, nicht die Geschwindigkeit eines Punktes, sondern nur die Geschwindigkeit eines Rollenwechsels; die wirkliche Geschwindigkeit von  $O$  muß seiner Beschleunigung folgen, also senkrecht zu  $u$  gerichtet sein.

Die Gerade  $OT$ , in welcher die Wechselgeschwindigkeit liegt, führt die Bezeichnung Poltangente.

**40. Der Krümmungsmittelpunkt.** Durch die Angabe des Drehpols  $O$  und der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  ist der Bewegungszustand des Systems im nächsten Zeiteilchen vollständig bestimmt; durch die weitere Angabe des Beschleunigungspoles  $P$  und der Winkelbeschleunigung  $\lambda$  ist auch der Bewegungszustand im zweitnächsten Zeiteilchen vollständig bestimmt.

Die erste Angabe wird also genügen, die Bewegungsrichtung jedes Systempunktes  $A$  festzulegen; die zweite Angabe wird Aufschluß über

dei darauffolgende Bewegungsrichtung des Punktes  $A$  geben und damit über die Bahnkrümmung des Punktes  $A$ ; denn die Normalen auf die Bewegungsrichtungen in zwei aufeinanderfolgenden Punktlagen schneiden sich im Krümmungsmittelpunkt der von  $A$  beschriebenen Bahn. Bezeichnen wir diesen mit  $\mathfrak{U}$  (Fig. 42), setzen  $\overline{AO} = r$ ,  $\overline{A\mathfrak{U}} = \varrho$ , so ist nach Gleichung 4 die Normalbeschleunigung des Punktes  $A$ :

$$n_A = \frac{v_A^2}{\varrho} = \frac{r^2 \omega^2}{\varrho}.$$

Sie ist die Projektion der Beschleunigung  $b_A$  auf die Normale  $AO$ ; machen wir von der in 36 mitgeteilten Zerlegung der Beschleunigung in die beiden Teile  $b_1$  und  $b_2$  Gebrauch, so ist

$$n_A = b_1 - b_2 \sin \mu,$$

und mit Benützung der Gleichungen 24, 27, 28:

$$\begin{aligned} n_A &= \overline{AO} \cdot \omega^2 - \overline{AT} \cdot \lambda \sin \mu \\ &= r \omega^2 - e \lambda \cos \alpha = \omega^2 (r - d \cos \alpha), \end{aligned}$$

also 
$$\frac{r^2}{\varrho} = r - d \cos \alpha$$

und 
$$\varrho = \frac{r^2}{r - d \cos \alpha} \dots \dots \dots 33)$$

Hierin ist  $\alpha$  der Winkel zwischen der Normale  $AO$  und dem Wendedurchmesser  $d$ . Projiziert man den Wendepol  $J$  auf die Normale  $AO$  nach  $W$ , so ist  $\overline{AW} = r - d \cos \alpha$

und Gleichung 33 kann in der Form geschrieben werden:

$$\overline{AW} : r = r : \varrho \dots \dots \dots 34)$$

Daraus ergibt sich folgende einfache Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes  $\mathfrak{U}$  (Fig. 43): Man errichte in  $O$  die Senkrechte auf die Normale  $AO$  bis zum Schnitte  $Q$  mit  $AJ$  und ziehe  $Q\mathfrak{U} \parallel JO$ ; dann ist der Schnittpunkt  $\mathfrak{U}$  mit  $AO$  der gesuchte Krümmungsmittelpunkt. Diese Konstruktion wurde von W. Schell angegeben (Theorie der Bewegung und der Kräfte, 1879, 2. Aufl., I. Bd., S. 463). Eine andere Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes, die nur die Kenntnis des Punktes  $W$  voraussetzt und vom Wendepol  $J$  unabhängig ist, stammt von M. Grübler (Zur Konstruktion der Wendepunkte, Zeitschr. f. Math. u. Physik, 1884). Wenn der Punkt  $W$  auf dem Normalstrahl  $AO$  gegeben

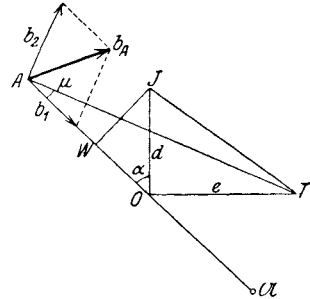


Fig. 42.

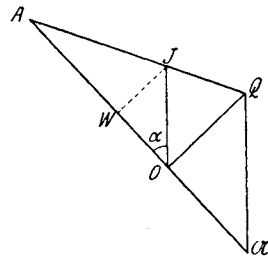


Fig. 43.



ist, ziehe man durch  $A$  und  $O$  zwei beliebige Gerade, die sich in  $H$  schneiden (Fig. 44). Zeichnet man dann  $OG \parallel WH$  und  $G\mathfrak{A} \parallel HO$ , so ist der Schnitt von  $G\mathfrak{A}$  mit  $AO$  der gesuchte Krümmungsmittelpunkt  $\mathfrak{A}$ .

Diese Konstruktion ist die unmittelbare Folge der Gleichung 33.

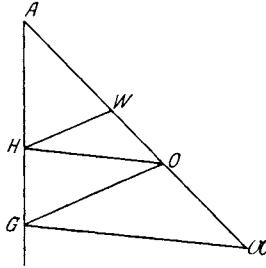


Fig. 44.

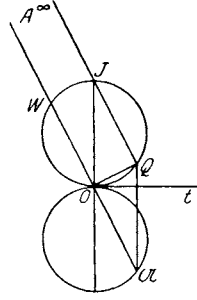


Fig. 45.

**41. Der Rückkehrkreis.** Liegt der Punkt  $A$  in unendlicher Entfernung, so wird sein Krümmungsmittelpunkt gefunden (Fig. 45), indem man durch  $J$  die Parallele zu  $OA^\infty$  zieht bis zum Schnitte  $Q$  mit der Geraden  $OQ \perp OA^\infty$ . Durch den Punkt  $Q$ , der auf dem Wendekreis liegt, wird dann  $Q\mathfrak{A} \parallel JO$  gezogen. Dann ist der Schnitt von  $Q\mathfrak{A}$  mit  $OA^\infty$  der zu  $A^\infty$  gehörende Krümmungsmittelpunkt  $\mathfrak{A}$ .

Da  $\overline{O\mathfrak{A}} = \overline{WO}$  ist, liegt  $\mathfrak{A}$  auf einem Kreise, der das Spiegelbild des Wendekreises in bezug auf die Poltangente  $Ot$  ist. Man nennt diesen Kreis Rückkehrkreis; auf ihm liegen die Krümmungsmittelpunkte, die zu allen unendlich fernen Punkten des Systems gehören.

Die Begründung des Namens wird in 44 gegeben werden.

**42. Der Satz von Bobillier.** Von zwei Punkten  $A$  und  $B$  des Systems seien die Krümmungsmittelpunkte  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  ihrer Bahnen gegeben (Fig. 46); es ist der Wendepol und die Poltangente zu ermitteln.

Der Drehpol  $O$  liegt im Schnitte der beiden Krümmungshalbmesser

$$\overline{A\mathfrak{A}} = \varrho_1 \text{ und } \overline{B\mathfrak{B}} = \varrho_2.$$

Bezeichnet man ferner  $\overline{AO} = r_1$ ,  $\overline{BO} = r_2$ , ferner die noch unbekannt Winkel  $\sphericalangle AOJ = a_1$ ,  $\sphericalangle BOJ = a_2$ ,

so ist nach Gleichung 34:

$$r_1^2 = \overline{AW_1} \cdot \varrho_1, \quad r_2^2 = \overline{BW_2} \cdot \varrho_2,$$

worin  $W_1$  und  $W_2$  die Schnitte der Normalen  $AO$  und  $BO$  mit dem noch unbekanntem Wendekreise sind. Bringen wir die Geraden  $AB$  und  $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$  in  $G$  zum Schnitte, ziehen  $OH \parallel \mathfrak{A}G$  und  $HW_1W_2 \parallel GO$ , so schneidet die Gerade  $HW_1W_2$  die Normalen  $AO$  und  $BO$  in den Punkten  $W_1$  und  $W_2$ ; denn es besteht die Proportion

$$\overline{AW_1} : \overline{AO} = \overline{AH} : \overline{AG} = \overline{AO} : \overline{A\mathfrak{A}},$$

somit  $\overline{AW_1} : r_1 = r_1 : \varrho_1$ .  
 Ebenso ist  $\overline{BW_2} : r_2 = r_2 : \varrho_2$ .

Errichtet man dann  $W_1J \perp AO$  und  $W_2J \perp BO$ , so ist der Schnittpunkt dieser beiden Senkrechten der Wendepol  $J$ . Die Poltangente  $Ot$  steht in  $O$  senkrecht auf  $OJ$ ; es ist nun aus Fig. 46 zu entnehmen, daß

$$\sphericalangle AOG = W_2W_1O = W_2JO = W_2Ot.$$

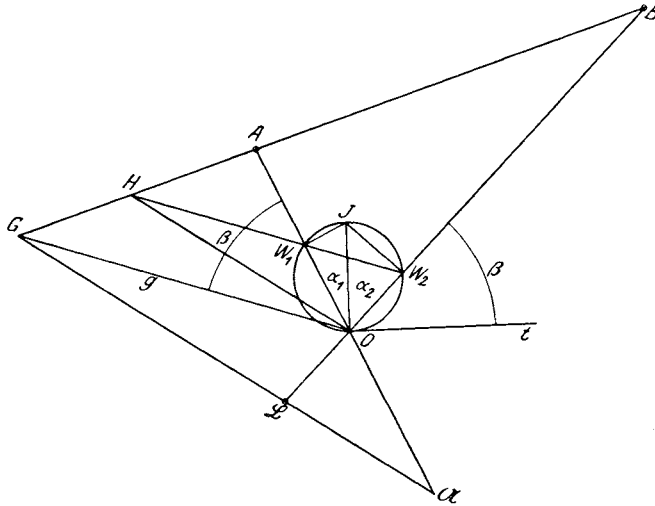


Fig. 46.

Daraus folgt:

Die Gerade  $OG$  muß um denselben Winkel  $\beta$  nach der Normale  $OA$  gedreht werden, wie die Normale  $OB$  nach der Poltangente  $Ot$ .

Dieses Resultat stammt von E. E. Bobillier (Cours de géométrie, 1870, p. 232).

Sind also von zwei Punkten  $A$  und  $B$  des Systems die Krümmungsmittelpunkte  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  ihrer Bahnen gegeben, so genügt das Übertragen des Winkels  $\beta$ , um die Poltangente  $Ot$  zu finden.

**43. Anwendung des Satzes von Bobillier.** In einem starren System seien die Krümmungsmittelpunkte  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  der Bahnen zweier Punkte  $A$  und  $B$  gegeben. Es ist der Krümmungsmittelpunkt  $\mathfrak{C}$  eines dritten Systempunktes  $C$  zu finden (Fig. 47).

Wir wollen diese Konstruktion zunächst auf dem Umwege über die Poltangente ausführen. Wir bringen  $A\mathfrak{A}$  und  $B\mathfrak{B}$  zum Schnitte in  $O$ ,  $AB$  und  $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$  zum Schnitte in  $G$  und übertragen mit Benützung des Bobillierschen Satzes den Winkel  $GOA = \beta$  nach  $BOt$ , so haben wir die Poltangente  $Ot$  gefunden.

Überträgt man jetzt den Winkel  $tOC = \gamma$  nach  $AOG'' = \gamma$ , so erhält man die Gerade  $g''$ ; ihr Schnittpunkt  $G''$  mit  $AC$  wird mit  $\mathfrak{A}$  verbunden; diese Verbindungslinie schneidet die Normale  $CO$  im gesuchten Krümmungsmittelpunkt  $\mathfrak{C}$ . Dies ist nichts anderes wie eine Wiederholung der Bobillierschen Konstruktion für die Punkte  $A$  und  $C$ .

Man entnimmt aber daraus, daß die Benützung der Poltangente eigentlich überflüssig war; denn es ist  $\sphericalangle BOC = GOG''$ . Man wird sich also, ohne  $Ot$  zu konstruieren, damit begnügen, die Gerade  $g$  um den

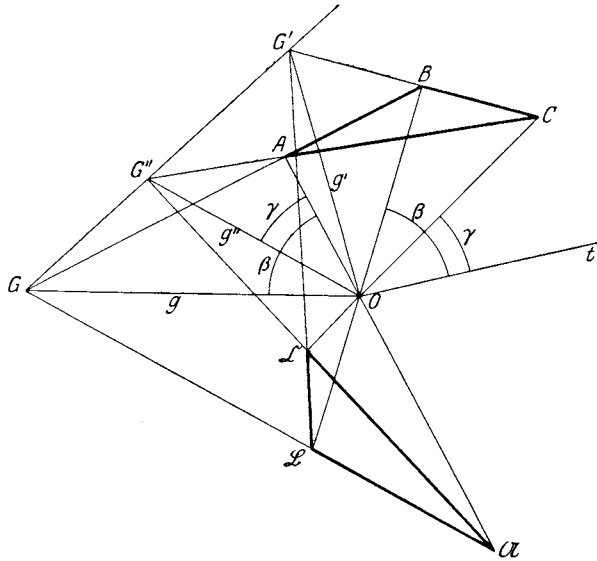


Fig. 47.

Winkel  $BOC$  nach  $g''$  zu drehen, zum Schnitte  $G''$  mit  $AC$  zu bringen und sodann  $G''$  mit  $\mathfrak{A}$  verbinden.

Ebenso könnte man  $g$  um den Winkel  $AOC$  nach  $g'$  drehen, den Schnitt  $G'$  von  $g'$  mit  $BC$  suchen und  $G'$  mit  $\mathfrak{B}$  verbinden; auch diese Linie liefert den Punkt  $\mathfrak{C}$  im Schnitte mit  $CO$ .

**44. Hüllbahnen.** Bisher haben wir nur einzelne Punkte des bewegten Systems während ihrer Bewegung durch zwei aufeinanderfolgende Zeiteilchen behandelt und die Krümmungsmittelpunkte ihrer Bahnen aufgesucht.

Allein auch eine starre Kurve, welche die Bewegung des Systems mitmacht, kann bei dieser Bewegung ein geometrisches Gebilde erzeugen; es ist dies die Umhüllungslinie aller ihrer aufeinanderfolgenden Lagen, die wir ihre Hüllbahn nennen.

Die Kurve  $a$  (Abb. 48), die dem starren System angehört, möge sich in ihrer Ebene nach irgend einem Gesetze bewegen; die Hüllbahn ihrer

aufeinanderfolgenden Lagen sei  $\alpha$ . Der Berührungspunkt  $M$  der beiden Kurven  $a$  und  $\alpha$  kann sich im Augenblicke nur in der gemeinsamen Tangente von  $a$  und  $\alpha$  bewegen; die gemeinsame Normale in  $M$  wird also nicht nur die Krümmungsmittelpunkte  $A$  und  $A$  von  $a$  und  $\alpha$  enthalten, sondern auch den Drehpol  $O$ . Liegt  $O$  in  $M$ , so rollt  $a$  auf  $\alpha$ , ohne zu gleiten; liegt  $O$  außerhalb  $M$ , so muß ein Gleiten der Kurve  $a$  auf  $\alpha$  eintreten.

Es seien (Fig. 49)  $a$  und  $b$  zwei fest miteinander verbundene Kurven des starren Systems,  $\alpha$  und  $\beta$  ihre Hüllbahnen,  $M$  und  $N$  ihre Berührungs-

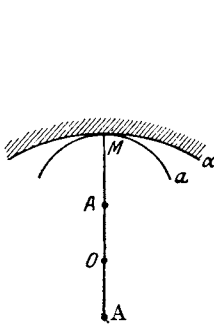


Fig. 48.

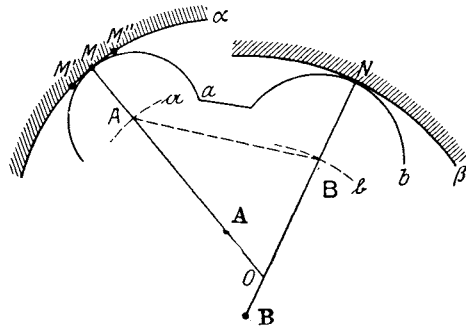


Fig. 49.

punkte. Die Normalen in  $M$  und  $N$  schneiden sich im Drehpol  $O$  des Systems.

Sind  $M'$  und  $M''$  zwei Punkte der Hüllbahn  $\alpha$ , die dem Punkt  $M$  unendlich nahe sind, so kann durch  $M'$ ,  $M$ ,  $M''$  ein Kreis gelegt werden, der sich der Kurve  $\alpha$  von allen möglichen Kreisen am besten anschmiegt. Sein Mittelpunkt  $A$  ist der Krümmungsmittelpunkt der Kurve  $\alpha$  in  $M$ . Genau dasselbe kann man von der Kurve  $a$  und ihrem Krümmungsmittelpunkt  $A$  aussagen. Die Krümmungshalbmesser  $MA$  und  $MA$  werden also durch zwei aufeinanderfolgende Zeiteilchen ihren Wert beibehalten und somit wird auch die Strecke  $AA$  ihren Wert in diesen beiden Zeiteilchen nicht ändern, d. h.  $A$  ist der Krümmungsmittelpunkt der von  $A$  beschriebenen Bahn  $a$ . Aus denselben Gründen ist  $B$  der Krümmungsmittelpunkt der von  $B$  beschriebenen Bahn  $b$ .

Verbinden wir also die Systempunkte  $A$  und  $B$  durch eine starre Gerade, so gleitet diese mit ihren Endpunkten  $A$  und  $B$  auf den Kurven  $a$  und  $b$ , eine Bewegung, welche die gegebene der beiden Kurven  $a$  und  $b$  für den Augenblick zu ersetzen geeignet ist.

**45. Die Sätze von Aronhold.** Ist die Hüllbahn  $\alpha$  eine Gerade (Fig. 50), so liegt der Krümmungsmittelpunkt  $A$  im Unendlichen; der Krümmungshalbmesser  $AA$  der Bahn  $a$  von  $A$  ist unendlich groß und  $A$  liegt somit auf dem Wendekreise. Daraus folgt der Satz:

Alle Kurven, die bei ihrer Bewegung Gerade als Hüllbahnen erzeugen, haben ihre Krümmungsmittelpunkte auf dem Wendekreise.

Ist hingegen die beschreibende Kurve  $a$  eine Gerade (Fig. 51), so liegt der Krümmungsmittelpunkt  $A$  unendlich ferne, es wird  $AA$  wieder unendlich groß und  $A$  ist der Krümmungsmittelpunkt eines unendlich fernen Punktes  $A$ ;  $A$  liegt somit auf dem Spiegelbilde des Wendekreises, auf dem Rückkehrkreise (vgl. 41). Daraus folgt:

Alle Hüllbahnen, die von Geraden des bewegten Systems beschrieben werden, haben ihre Krümmungsmittelpunkte auf dem Rückkehrkreise.

Dies gilt auch für jene Gerade, die durch den Punkt  $R$  des Rückkehrkreises, den Rückkehrpol, hindurchgehen (Fig. 52). Dann liegt der

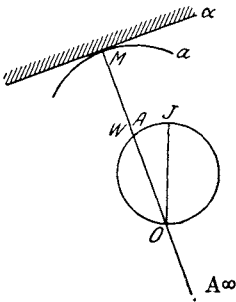


Fig. 50.

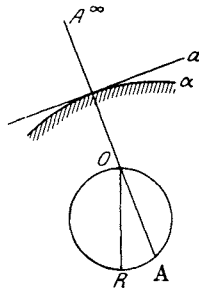


Fig. 51.

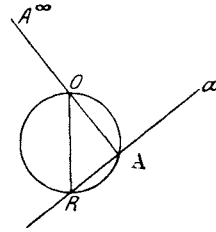


Fig. 52.

Krümmungsmittelpunkt  $A$  der Hüllbahn im Schnitte der Geraden  $a$  mit dem Rückkehrkreise; der Krümmungshalbmesser ihrer Hüllbahn ist null, die Gerade  $a$  dreht sich augenblicklich um  $A$ , beschreibt also eine Spitze oder einen Rückkehrpunkt ihrer Hüllbahn.

Daraus folgt:

Der Rückkehrkreis ist der Ort aller Rückkehrpunkte, die von den Geraden des bewegten Systems beschrieben werden.

Diese drei Sätze stammen von Aronhold (Grundzüge der kinematischen Geometrie, Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbflusses in Preußen, 1872, S. 153). Der letzte dieser Sätze ist die Ergänzung zu dem schon in 31 gefundenen Satze:

Der Wendekreis ist der Ort aller Wendepunkte, die von den Punkten des bewegten Systems beschrieben werden.

Ohne weiteren Nachweis ergeben sich jetzt die beiden folgenden Sätze, die ebenfalls von Aronhold stammen:

Bewegt sich ein Systempunkt auf einer Geraden, so liegt er auf dem Wendekreise.

Dreht sich eine Gerade um einen Punkt, so liegt dieser auf dem Rückkehrkreise. (Siehe Punkt  $A$ , Fig. 52.)

**46. Umkehrung der Bewegung.** Denkt man sich die bewegte Scheibe festgehalten, hingegen die bisher ruhende Ebene bewegt, ohne an der Gegenseitigkeit der beiden Systeme etwas zu ändern, so entsteht eine andere Art von Bewegung, die man die Umkehrung der früheren nennt. Hat früher ein Punkt  $A$  eine Kurve  $a$  beschrieben, so ist jetzt  $A$  fest und  $a$  schleift durch  $A$  hindurch. Hat sich früher eine Kurve  $a$  auf einer festen Kurve  $a$  abgewälzt, so vertauschen sie jetzt ihre Rollen:  $a$  bleibt fest und  $a$  wälzt sich auf  $a$  ab. Was früher Hüllkurve war, wird jetzt Hüllbahn und umgekehrt. Der Drehpol  $O$  ändert sich durch die Umkehrung nicht. Der Wendekreis und der Rückkehrkreis vertauschen ihre Rollen, der Wendepol wird zum Rückkehrpol und umgekehrt.

**47. Aufgaben.**

11. Man beweise, daß die Geschwindigkeit des Wendepols ebenso groß ist wie die Wechselgeschwindigkeit des Drehpols.
12. In Fig. 53 ist  $a$  eine bewegliche Kurve,  $a$  ihre Hüllbahn,  $A$  und  $A$  ihre Krümmungsmittelpunkte,  $v_A$  die Geschwindigkeit von  $A$ .

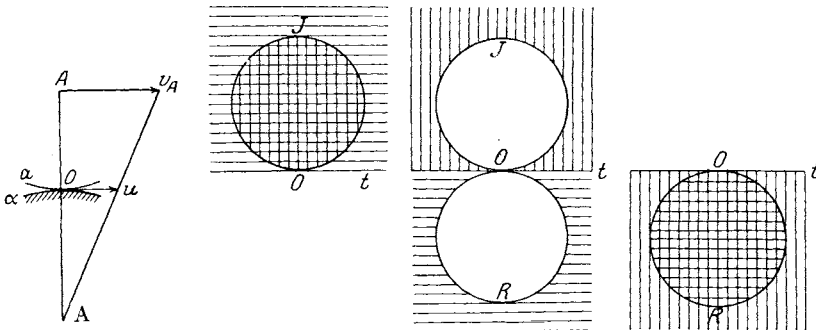


Fig. 53.

Fig. 54 a.

Fig. 54 b.

Fig. 54 c.

Verbindet man  $A$  mit der Spitze von  $v_A$  und zieht im Berührungspunkt die Tangente, so ist ihr Stück zwischen  $O$  und  $A$   $v_A$  die Wechselgeschwindigkeit  $u$  des Punktes  $O$ . Wie ist das einfach zu beweisen?

13. Man beweise, daß alle Punkte der Poltangente ihre Krümmungsmittelpunkte im Drehpol haben.
14. Man soll folgende Sätze beweisen: In den drei Fig. 54 a, b, c ist der Wendekreis, die Poltangente und der Rückkehrkreis gezeichnet. Befindet sich der Systempunkt  $A$  in dem vertikal schraffierten Gebiete, so liegt der zugehörige Krümmungsmittelpunkt  $\mathcal{A}$  der Bahn des Punktes  $A$  in dem horizontal schraffierten Gebiete.
15. Zeichnet man in Fig. 43 einen Punkt  $O'$  derart, daß  $A$  die Strecke  $OO'$  halbiert, so liegen die vier Punkte  $\mathcal{A}OWO'$  harmonisch.

16. Wie ist in Fig. 47 die Konstruktion von  $\mathfrak{C}$  durchzuführen, wenn die drei Punkte  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  und  $B$  auf einer Geraden liegen?
17. Wie ist in Fig. 47 die Konstruktion von  $\mathfrak{C}$  durchzuführen, wenn  $A\mathfrak{A}$  und  $B\mathfrak{B}$  parallel sind?

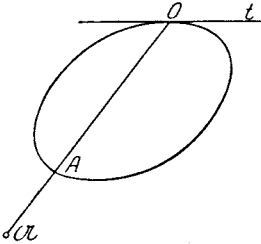


Fig. 55.

18. Wie ist in Fig. 47 die Konstruktion von  $\mathfrak{C}$  durchzuführen, wenn  $C$  auf  $B\mathfrak{B}$  liegt?

19. In Fig. 55 ist eine Ellipse gegeben, welche die Poltangente  $Ot$  im Drehpol  $O$  berührt. Von einem Punkte  $A$  der Ellipse ist der Krümmungsmittelpunkt  $\mathfrak{A}$  der Bahn des Punktes  $A$  gegeben. Welches ist der Ort der Krümmungsmittelpunkte aller Ellipsenpunkte?

Resultat: Eine Ellipse, die  $Ot$  in  $O$  berührt.

20. Gegeben sei der Drehpol  $O$ , der Wendepol  $J$  und eine beliebige Gerade  $g$ . Man suche den Ort der Krümmungsmittelpunkte aller Punkte von  $g$ .

Resultat: Ein Kegelschnitt, der die Poltangente in  $O$  berührt.

21. Man beweise in voriger Aufgabe, daß der Rückkehrkreis der Krümmungskreis des Kegelschnittes in  $O$  ist.
22. Wie sieht der Kegelschnitt der Aufgabe 20 aus, wenn die Gerade  $g$  durch den Drehpol geht?

Resultat: Der Kegelschnitt zerfällt in die Geraden  $g$  und Poltangente.

23. In welchen Fällen ist der Kegelschnitt der Aufgabe 20 eine Ellipse, eine Parabel oder eine Hyperbel?

Anleitung: Man beachte die Schnittpunkte von  $g$  mit dem Wendekreise.

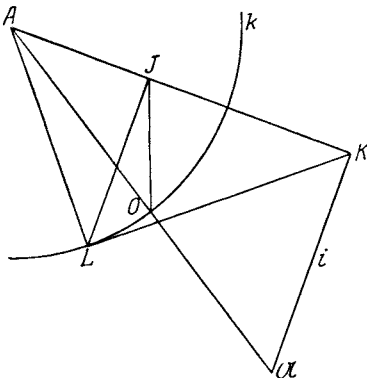


Fig. 56.

24. Man suche zu beweisen: Ist  $O$  der Drehpol,  $J$  der Wendepol und  $A$  ein beliebiger Punkt des Systems (Fig. 56) und man zeichnet den Kreis  $k$  mit dem Mittelpunkt  $A$  und dem Halbmesser  $OA$ , sucht ferner die zu  $J$  gehörige Polare  $i$  des Kreises  $k$ , so geht  $i$  durch den zu  $A$  gehörenden Krümmungsmittelpunkt  $\mathfrak{A}$ . Daraus ergibt sich folgende Konstruktion von  $\mathfrak{A}$ :

Man verbindet  $A$  mit  $J$ , zieht  $JL \perp AJ$  bis zum Schnitte  $L$  mit dem Kreise  $k$ , macht  $LK \perp AL$  und  $K\mathfrak{A} \perp AK$ ; dann

schneidet  $K\mathfrak{U}$  die Gerade  $AO$  in  $\mathfrak{U}$  (Massot, Étude du mouvement d'une bielle, Rev. Méc. 1912, p. 346).

25. Besitzt ein System eine beliebige Anzahl gleichzeitiger Bewegungen mit den Drehpolen  $O_1, O_2, \dots, O_n$  und den Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ , so ist der Drehpol  $O$  der resultierenden Bewegung der Schwerpunkt der Drehpole  $O_n$ , wenn in diesen die Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_n$  als Gewichte angebracht werden. Die Winkelgeschwindigkeit der resultierenden Bewegung ist

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n.$$

26. Sind in voriger Aufgabe überdies  $d_1 = \overline{O_1 J_1}$ ,  $d_2 = \overline{O_2 J_2}$ ,  $\dots$ ,  $d_n = \overline{O_n J_n}$  die Wendedurchmesser der gleichzeitigen Bewegungen,  $d = \overline{O J}$  der Wendedurchmesser der resultierenden Bewegung, so ist  $d\omega^2$  gleich der Streckensumme von  $d_1\omega_1^2$ ,  $d_2\omega_2^2$ ,  $\dots$ ,  $d_n\omega_n^2$ , oder

$$\overline{O J} \cdot \omega^2 = \overline{O_1 J_1} \cdot \omega_1^2 + \overline{O_2 J_2} \cdot \omega_2^2 + \dots + \overline{O_n J_n} \cdot \omega_n^2.$$

(F. Wittenbauer, Zeitschr. f. Math. u. Physik, 33. Band. S. 195).



## IV. Dynamik des freien Systems.

**48. Scheibe, kinematische Kette, Glied.** Bisher hatten wir uns das ebene System ohne Masse und von solcher Ausdehnung gedacht, daß jeder, selbst in beliebig weiter Entfernung gelegene Punkt durch starre Stäbe mit den übrigen Systempunkten verbunden und als zum System gehörig betrachtet werden konnte.

Mit solchen rein mathematischen Gebilden beschäftigt sich die früher genannte kinematische Geometrie.

Geht man aber zur Bewegung realer Körper über, so hat man zunächst nach ihrer Masse zu fragen. Da diese nicht unendlich sein kann, darf man auch dem System nicht jene unendliche Ausdehnung zusprechen, die der Geometer seinen Gebilden zu geben gewöhnt ist; das ebene starre System der Dynamik ist eine begrenzte ebene Fläche, in beliebiger Weise mit Masse belegt.

Wir wollen ein derart irgendwie mit Masse ausgestattetes, ebenes System eine Scheibe nennen, wenn es in seiner Bewegung in der Ebene entweder überhaupt nicht behindert oder doch nur durch feststehende Hindernisse geführt wird; im ersten Falle sprechen wir von einer freien, im zweiten Falle von einer geführten Scheibe. Wird jedoch das System in seiner freien Bewegung durch andere, mit ihm verbundene und ebenfalls bewegliche Systeme behindert, so nennen wir eine solche Verbindung von Systemen eine kinematische Kette und jedes System ein Glied dieser Kette.

**49. Die Masse.** Unter Masse eines Systems wollen wir nicht die Menge an Materie verstehen, die das System enthält, da wir kein Mittel besitzen, diese Menge zu messen. Wir grenzen den Begriff Masse deshalb dahin ein, daß wir darunter die mechanische Masse verstehen, die aus dem Gewichte des Systems abgeleitet werden kann. Nach dem dynamischen Grundgesetze Newton's ist die mechanische Masse eines Körpers, dessen Gewicht mit  $G$  bezeichnet wird:

$$M = \frac{G}{g}, \dots \dots \dots 35)$$

worin  $g$  die Beschleunigung der Schwere ist.

**50. Augenblickliche Bewegung der Scheibe.** Jede augenblickliche Bewegung einer Scheibe in ihrer Ebene kann man in der Art beschreiben,

daß man zunächst die augenblickliche Bewegung eines beliebigen ihrer Punkte *A* feststellt und sodann noch schildert, um wieviel sich die Scheibe um diesen Punkt gedreht hat. Man zerlegt also in Gedanken die augenblickliche Bewegung der Scheibe in zwei andere: 1. in eine fortschreitende, bei welcher alle Punkte der Scheibe die gleiche Bewegung vollführen wie der Punkt *A*; und 2. in eine Drehung der Scheibe, bei welcher der Punkt *A* in Ruhe verharrt. Für *A* kann jeder Punkt des Systems gewählt werden; mit Vorteil pflegt man hierfür den Schwerpunkt des Systems anzunehmen.

**51. Der Schwerpunkt.** Eine wichtige Rolle spielt in allen dynamischen Untersuchungen der Schwerpunkt des Systems. Es ist dies jener Punkt, der immer auf der Mittelkraft aller Schwerkkräfte der Systempunkte liegt, wie man auch die Lage des Systems verändert. Es ist zu beachten, daß der Schwerpunkt nur ein gedachter Punkt ist, dem als Punkt des Systems keine besonderen materiellen Eigenschaften zukommen; er dient nur als bequemes Mittel der Zusammenfassung aller Schwerkkräfte.

Bezieht man die Punkte des Systems auf ein beliebiges Koordinatenkreuz *XY* (Fig. 57), nennt *x* und *y* die Koordinaten irgend eines Systempunktes *A* von der mechanischen Masse *m*, *mg* sein Gewicht, *M* =  $\Sigma m$  die Masse des Systems und *x<sub>S</sub>*, *y<sub>S</sub>* die Koordinaten des Schwerpunkts, so ist bekanntlich

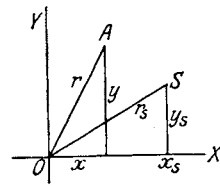


Fig. 57.

$$x_S = \frac{\Sigma (mg x)}{\Sigma (mg)}, \quad y_S = \frac{\Sigma (mg y)}{\Sigma (mg)}$$

oder

$$x_S = \frac{\Sigma (m x)}{M}, \quad y_S = \frac{\Sigma (m y)}{M} \dots \dots \dots 36)$$

Da in diesen Gleichungen nur mehr die Massen, nicht aber die Gewichte vorkommen, pflegt man statt Schwerpunkt auch Massenmittelpunkt zu sagen. Vorausgesetzt ist hierbei die Konstanz der Beschleunigung *g* der Schwere.

Schreibt man die Gleichungen 36 in der Form an

$$M x_S = \Sigma (m x), \quad M y_S = \Sigma (m y)$$

und addiert sie geometrisch, d. h. mit Berücksichtigung der Richtungen von *x* und *y*, so ist die Summe

$$M (x_S + y_S) = \Sigma [m (x + y)].$$

Nach Fig. 57 ist aber

$$x_S + y_S = r_S, \quad x + y = r,$$

wenn *r<sub>S</sub>* und *r* die Abstände der Punkte *S* und *A* vom Anfangspunkte *O* des Koordinatenkreuzes sind. Es wird dann also

$$M r_S = \Sigma (m r)$$

oder auch

$$r_S = \frac{\Sigma (m r)}{M} \dots \dots \dots 37)$$

Letztere Gleichung ist den Gleichungen 36 entsprechend gebaut und sagt auch dasselbe in anderer Form aus. Multipliziert man demnach jeden Abstand  $r$  mit der Masse  $m$  seines Endpunktes  $A$ , fügt alle diese Strecken  $mr$  nach Größe und Richtung aneinander und dividiert die Schlußlinie dieses Polygons durch  $M = \Sigma m$ , so erhält man den Abstand  $r_S$  des Schwerpunktes  $S$  von  $O$  (Fig. 58).

Nach Verlauf eines Zeitteilchens, in dem sich alle Punkte des Systems um kleine Strecken bewegt haben, kommt  $A$  nach  $A'$ ,  $S$  nach  $S'$ ; die Entfernungen  $r$  und  $r_S$  werden  $r'$  und  $r'_S$  und Gleichung 37 wird nun lauten:  

$$M r'_S \equiv \Sigma (m r').$$

Zieht man von dieser Gleichung die Gleichung 37 ab, so bleibt

$$M (r'_S - r_S) \equiv \Sigma [m (r' - r)].$$

Nennen wir wieder  $\overline{AA'} = ds$ ,  $\overline{SS'} = dS$ , so ist wie in 1:

$$r'_S \equiv r_S + dS, \quad r' \equiv r + ds$$

und es bleibt

$$M \cdot dS \equiv \Sigma (m \cdot ds).$$

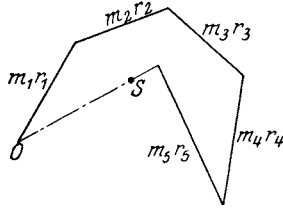


Fig. 58.

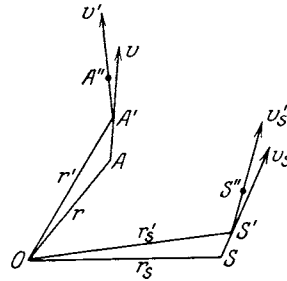


Fig. 59.

Dividiert man jetzt durch das Zeitteilchen  $dt$ , so wird

$$M \cdot \frac{dS}{dt} \equiv \Sigma \left( m \frac{ds}{dt} \right)$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung 1:

$$M v_S \equiv \Sigma (m v) \quad . . . . . 38$$

Kommt nach Verlauf des zweiten Zeitteilchens  $A'$  nach  $A''$ ,  $S'$  nach  $S''$  (Fig. 59), so wird  $v$  in  $v'$ ,  $v_S$  in  $v'_S$  übergehen und es ist wie in voriger Gleichung  

$$M v'_S \equiv \Sigma (m v').$$

Zieht man beide Gleichungen voneinander ab, so bleibt

$$M (v'_S - v_S) \equiv \Sigma [m (v' - v)];$$

nach Gleichung 3a ist  $v' \equiv v + bdt$ , worin  $b$  die Beschleunigung des Punktes  $A$  ist; ebenso kann aber gesetzt werden:

$$v'_S \equiv v_S + b_S dt,$$

wenn  $b_S$  die Beschleunigung des Schwerpunktes ist. Dann wird also

$$M b_S dt \equiv \Sigma (m b dt)$$

und somit

$$M b_S \equiv \Sigma (m b) \quad . . . . . 39$$

Man hat das Produkt  $mb$  den Beschleunigungsdruck des Punktes  $m$  genannt. F. Jung hat hierfür das kurze und treffliche Wort: Drang vorgeschlagen („Eine einfache Darstellung des Schwung- und Drangmomentes beim starren Körper“, Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1917).

**52. Das Prinzip der Bewegung des Schwerpunkts.** Ist  $m$  ein beliebiger Massenpunkt der bewegten Scheibe,  $P$  die auf ihn wirkende äußere Kraft (Fig. 60), so würde, wenn keine andere Wirkung auf  $m$  ausgeübt würde, die Beschleunigung dieses Punktes die Richtung der Kraft annehmen; sie wäre

$$b_1 = \frac{P}{m} \text{ (vgl. Gleichung 179).}$$

Diese freie Bewegung des Punktes wird aber gestört durch Einflüsse der Umgebung des Punktes d.h. durch seinen Zusammenhang mit der Scheibe. Diese Umgebung wird Kräfte irgendwelcher Art auf den Punkt  $m$  ausüben (innere Kräfte, Spannungen), deren Resultante  $S$  sei; sie ruft in ihrer Richtung die Beschleunigung

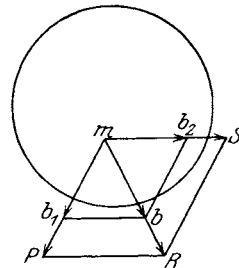


Fig. 60.

$$b_2 = \frac{S}{m}$$

hervor. Dadurch wird die Beschleunigung  $b_1$  der freien Bewegung aus ihrer Richtung gedrängt; sie ist jetzt die Resultante  $b$  aus der Beschleunigung  $b_1$  der äußeren Kraft und jener  $b_2$  der inneren Kraft, oder es ist

$$b = b_1 + b_2.$$

Die Resultante aus der äußeren und inneren Kraft ist dann

$$R = mb = mb_1 + mb_2 = P + S;$$

in der Richtung von  $R$  wird sich die wirkliche Beschleunigung  $b$  des Punktes  $m$  einstellen; diese Resultante  $R$  ist der Beschleunigungsdruck des Punktes.

Bildet man die geometrische Summe aller Beschleunigungsdrücke der Scheibe, so wird sie

$$\Sigma R = \Sigma mb = \Sigma P + \Sigma S.$$

Die inneren Kräfte  $S$  der Scheibe sind Anziehungs- oder Abstoßungskräfte zwischen je zwei Punkten, treten nur paarweise auf und haben in jedem dieser Paare gleiche Größe und entgegengesetzte Richtung; sie tilgen sich also und es ist  $\Sigma S = 0$ . Damit bleibt aber

$$\Sigma (mb) = \Sigma P \quad \dots \quad 40)$$

Diese Gleichung sagt aus: Die äußeren Kräfte eines Systems und dessen Beschleunigungsdrücke sind gleichwertig.

Unter gleichwertigen oder äquivalenten Kraftsystemen versteht man solche, deren resultierende Wirkung die gleiche ist.

Verbindet man die Gleichungen 39 und 40, so bleibt  $Mb_S \equiv \Sigma P$  oder

$$b_S = \frac{\Sigma P}{M} \dots \dots \dots 41)$$

Obwohl also der Schwerpunkt nur ein gedachter Punkt ist, der seine Lage im Körper so lange nicht ändert, als sich dieser selbst nicht ändert, können wir vom Schwerpunkt doch so sprechen, als ob er ein wirklich vorhandener Punkt wäre, der die ganze Masse  $M = \Sigma m$  des Körpers enthielte und Träger aller Kräfte desselben wäre.

Das Prinzip der Schwerpunktbewegung, das durch Gleichung 41 dargestellt ist, sagt aus: Der Schwerpunkt eines Körpers nimmt genau dieselbe Beschleunigung an, als ob sämtliche Massen des Körpers in ihm vereinigt wären und sämtliche Kräfte an ihm angreifen würden.

Die inneren Kräfte  $S$  haben demnach keinen Einfluß auf die Beschleunigung des Schwerpunkts, da sie sich paarweise tilgen.

**53. Das D'Alembert'sche Prinzip.** Eine Kraft  $T$ , die gleich und entgegengesetzt dem Beschleunigungsdruck  $mb$  des Punktes  $m$  wäre, müßte mit  $P$  und  $S$  Gleichgewicht halten (Fig. 61) oder es wäre

$$P + S + T \equiv 0 \dots \dots 42)$$

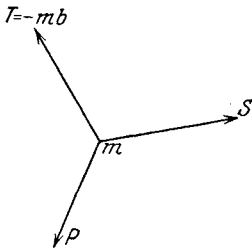


Fig. 61.

Wir nennen  $T = -mb$  die Trägheitskraft des Punktes  $m$ .

Beschleunigungsdruck und Trägheitskraft sind also einander gleich, aber entgegengesetzt; ersterer hat die Richtung der Beschleunigung, letztere ist der Beschleunigung der Bewegung entgegengesetzt.

Die Gleichung 42 gilt für jeden Punkt der Scheibe; stellen wir sie für alle Punkte auf und addieren die Gleichungen, so erhalten wir

$$\Sigma P + \Sigma S + \Sigma T = 0$$

oder, da nach früher  $\Sigma S = 0$  ist:

$$\Sigma P + \Sigma T = 0 \dots \dots \dots 43)$$

d. h. die äußeren Kräfte und die Trägheitskräfte bilden ein Gleichgewichtssystem.

Dies ist das nach dem französischen Mathematiker D'Alembert benannte Prinzip (1743) in der von Poisson gegebenen Fassung.

Es gestattet, eine Aufgabe der Dynamik durch Anbringung der Trägheitskräfte auf eine Gleichgewichtsfrage zurückzuführen.

Schreiben wir Gleichung 42 in der Form

$$S = -(P + T) \dots \dots \dots 42a)$$

so kann sie benützt werden, die innere Kraft oder Spannung an irgend einer Stelle der Scheibe zu bestimmen.

**54. Beispiel. Spannung in einer Kolbenstange.** Ein Kolben, der die Masse  $M_1$  und die Beschleunigung  $b$  besitzt, wird in einem Zylinder geführt und dabei der Kraft  $P$  ausgesetzt (Fig. 62). Der Kolben ist mit einer zylindrischen Kolbenstange von der Masse  $M_2$  und der Länge  $l$  in fester Verbindung. Wie groß ist die Spannung dieser Stange an einer beliebigen Stelle  $X$ ? An welcher Stelle wird die Spannung in der Kolbenstange null?

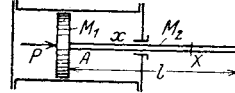


Fig. 62.

Die Masse der Kolbenstange von  $A$  bis  $X$  ist, wenn  $\overline{AX} = x$  gesetzt wird:  $\frac{M_2}{l} x$  und die Trägheitskraft des Kolbens samt dem Stücke  $\overline{AX}$  der Kolbenstange:

$$T = - \left( M_1 + \frac{M_2}{l} x \right) b.$$

Dann wird die Spannung an der Stelle  $X$  nach Gleichung 42a:

$$S = -P + \left( M_1 + \frac{M_2}{l} x \right) b$$

und die Stelle, an welcher die Spannung null wird:

$$x_1 = l \frac{P/b - M_1}{M_2}.$$

**55. Die Drehung um den Schwerpunkt.** Nachdem die Beschleunigung des Schwerpunkts ermittelt ist, hat man noch nötig festzustellen, welche Beschleunigung die Scheibe bei ihrer Drehung um den Schwerpunkt annimmt.

Für diesen Teil der Untersuchung kann man den Schwerpunkt der Scheibe als ruhend ansehen, und wir haben dann die Betrachtung, die wir in 17 für den ruhenden Systempunkt  $A$  anstellten, auf den Schwerpunkt  $S$  zu übertragen.

In Fig. 63 sei  $S$  der ruhende Punkt,  $P$  eine der äußeren Kräfte,  $p$  ihr Arm in bezug auf  $S$ ,  $Pp$  das Moment dieser Kraft und  $\Sigma(Pp)$  die Summe oder Resultante der Momente aller äußeren Kräfte der Scheibe in bezug auf  $S$ .

Ist ferner  $A$  ein beliebiger Punkt in ihr,  $m$  seine Masse,  $b$  seine Beschleunigung,  $\rho$  sein Abstand von  $S$  und  $\varphi$  der Winkel zwischen  $b$  und  $\rho$  (Beschleunigungswinkel), so ist das Moment des Beschleunigungsdruckes um  $S$ :

$$mb\rho \sin \varphi.$$

Nun ist aber nach Gleichung 6 und 11:  $b \sin \varphi$  die Tangentialbeschleunigung  $\rho \lambda$  des Punktes, also das Moment des Beschleunigungsdruckes  $m \lambda \rho^2$  und für die ganze Scheibe

$$\Sigma(m \lambda \rho^2) = \lambda \Sigma(m \rho^2).$$

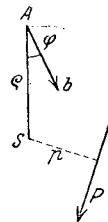


Fig. 63.

Man nennt  $\mathbf{T}_S = \Sigma (m \rho^2) \dots \dots \dots 44)$  das Trägheitsmoment der Scheibe für den Schwerpunkt; es ist eine von der Bewegung ganz unabhängige Größe, die sich ermitteln läßt, wenn die Abmessungen und die Massenverteilung des Systems bekannt sind. Da nun nach 52 die äußeren Kräfte und die Beschleunigungsdrücke gleichwertig sind, müssen auch ihre Momente um  $S$  den gleichen Wert haben; somit ist  $\Sigma (P p) = \Sigma (m \lambda \rho^2) = \lambda \mathbf{T}_S$  und die Winkelbeschleunigung der Scheibe um  $S$

$$\lambda = \frac{\Sigma (P p)}{\mathbf{T}_S} \dots \dots \dots 45)$$

Man pflegt das Trägheitsmoment  $\mathbf{T}$  eines Körpers, das die Dimension  $\mathbf{ML}^2$  besitzt, in der Form darzustellen

$$\mathbf{T} = M i^2,$$

worin wieder  $M$  die Masse des Körpers ist. Man nennt dann  $i$  den Trägheitshalbmesser des Körpers für die Achse, auf welche  $\mathbf{T}$  bezogen

wurde; es ist somit  $i = \sqrt{\frac{\mathbf{T}}{M}} \dots \dots \dots 46)$

Setzen wir also  $\mathbf{T}_S = M i_S^2$ , worin  $i_S$  der Trägheitshalbmesser für die durch  $S$  gehende Drehungsachse ist, so wird

$$\lambda = \frac{\Sigma (P p)}{M i_S^2} \dots \dots \dots 47)$$

Ebenso wird gezeigt, daß die Winkelbeschleunigung für die Drehung um eine beliebige Achse  $O$  die Größe hat

$$\lambda = \frac{\Sigma (P p)}{M i_O^2} \dots \dots \dots 47a)$$

**56. Konstruktion der Beschleunigung aus der Kraft.** Eine frei in ihrer Ebene bewegliche Scheibe werde einer beliebigen Kraft  $P$  ausgesetzt (Fig. 64); man konstruiere die Beschleunigung eines beliebigen Punktes  $A$  der Scheibe, wenn deren Geschwindigkeitszustand bekannt ist.

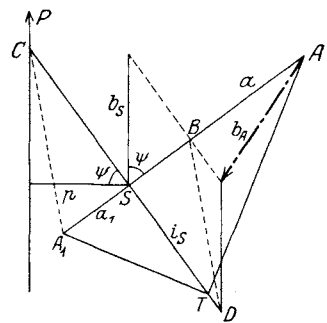


Fig. 64.

Nach dem Prinzip der Schwerpunktsbewegung (52) erhält der Schwerpunkt  $S$  der Scheibe die Beschleunigung  $b_S = \frac{P}{M}$  parallel zu  $P$ ; sie wurde von  $S$  aus im Sinne von  $P$  aufgetragen. Außerdem erhält die Scheibe eine Winkelbeschleunigung um  $S$ , für welche nach Gleichung 47

$$\lambda = \frac{P p}{M i_S^2}$$

wenn  $i_S$  der Trägheitshalbmesser für den Schwerpunkt  $S$  der Scheibe ist. Daraus wird

$$\lambda = \frac{p b_S}{i_S^2}.$$

Jeder Punkt  $A$  der Scheibe erhält eine Beschleunigung  $b_A$ , die sich nach dem Beschleunigungsplan (Fig. 64a) aus folgenden drei Teilen zusammensetzt: 1. der Schwerpunktsbeschleunigung  $\pi\sigma = b_S$ ; 2. der relativen Normalbeschleunigung  $n_{AS}$  des Punktes  $A$  in bezug auf  $S$ ; sie ist  $a\omega^2$ , wenn  $AS = a$  und  $\omega$  die gegebene Winkelgeschwindigkeit der Scheibe ist; wird der Geschwindigkeitsmaßstab derart gewählt, daß die relative Geschwindigkeit  $v_{AS} = a\omega$  des Punktes  $A$  in bezug auf den Schwerpunkt durch die Länge  $a$  gemessen wird, so ist  $\omega = 1$  und  $n_{AS}$  ebenfalls gleich  $a$  (vgl. 20); 3. der relativen Tangentialbeschleunigung  $t_{AS}$  des Punktes  $A$  in bezug auf  $S$ , im Sinne von  $P$  um  $S$  drehend. Sie ist  $a\lambda$ .

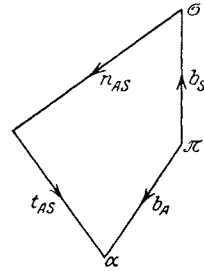


Fig. 64a.

Nachdem  $b_S$  und  $n_{AS}$  bekannt sind, bleibt noch übrig die Tangentialbeschleunigung

$$t_{AS} = a \frac{p b_S}{i_S^2}$$

zu konstruieren; mit  $i_S^2 = a a_1$  wird sie

$$t_{AS} = \frac{p b_S}{\cancel{a} a_1}.$$

Nennt man  $\psi$  den Winkel zwischen  $SA$  und  $b_S$ , so kann diese Gleichung in der Form geschrieben werden:

$$a_1 : b_S \cos \psi = \frac{p}{\cos \psi} : t_{AS}.$$

Errichtet man in  $S$  die Senkrechte  $\overline{ST} = i_S$  auf  $SA$  und zieht  $T A_1 \perp A T$ , so ist  $\overline{S A_1} = \frac{i_S^2}{a} = a_1$ ; projiziert man  $b_S$  orthogonal auf  $SA$ ,

so ist  $S B = b_S \cos \psi$ ; endlich ist  $\overline{S C} = \frac{p}{\cos \psi}$ .

Verbindet man also  $A_1$  mit  $C$  und zieht  $B D \parallel C A_1$  bis zum Schnitte  $D$  mit  $ST$ , so ist  $\overline{S D} = t_{AS}$ . Addiert man sie im Beschleunigungsplan (Fig. 64a) zu  $b_S$  und  $n_{AS}$ , so bleibt  $\overline{\pi \alpha} = b_A$  die gesuchte Beschleunigung.

In Fig. 65 wird gezeigt, wie sich diese Konstruktion vereinfacht, wenn der Punkt  $A$  im Endpunkte  $s$  von  $b_S$  angenommen wird. Dann fällt  $B$  mit  $A$  zusammen,  $\psi$  ist null; man sucht  $A_1$  wie früher und zieht  $A D \parallel C A_1$ ; dann ist  $\overline{S D} = t_{AS} = b_A$ , da  $b_S$  und  $n_{AS}$  sich tilgen.



Fig. 66 zeigt noch eine bemerkenswerte Vereinfachung der Konstruktion von  $b_A$ . Schreibt man  $i_S^2 = p p_1$ , so ist auch

$$t_{AS} = a \cdot \frac{p b_S}{i_S^2} = \frac{a b_S}{p_1}.$$

Macht man  $\overline{S\bar{J}} = i_S$  und  $J C_1 \perp C J$ , so ist  $\overline{S\bar{C}_1} = p_1 = \frac{i_S^2}{p}$ ; verbindet man  $C_1$  mit  $A$ , macht  $\overline{s\bar{S}} = b_S$  und zieht durch  $s$  eine Senkrechte

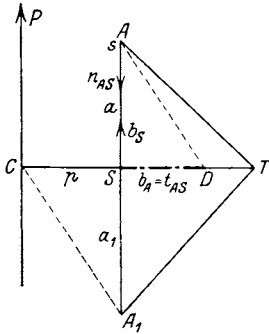


Fig. 65.

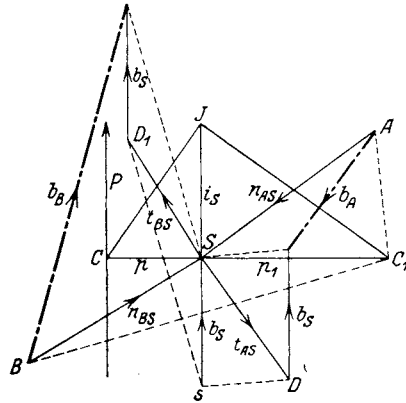


Fig. 66.

auf  $C_1A$  bis zum Schnitte  $D$  mit  $SD \perp AS$ , so sind die Dreiecke  $ASC_1$  und  $DSs$  ähnlich; es ist also

$$\overline{AS} : \overline{C_1S} = \overline{SD} : \overline{sS}$$

oder

$$a : p_1 = \overline{SD} : b_S$$

und

$$\overline{SD} = t_{AS}.$$

Fügt man in  $D$  die Beschleunigung  $b_S$  an, so bleibt die gesuchte Beschleunigung

$$b_A \equiv n_{AS} + t_{AS} + b_S.$$

Dieselbe Konstruktion wurde für die Beschleunigung  $b_B$  des Punktes  $B$  durchgeführt; der Punkt  $C_1$  kann wieder benützt werden und es ist  $sD_1 \perp BC_1$ ,  $\overline{SD_1} = t_{BS}$  und

$$b_B \equiv n_{BS} + t_{BS} + b_S.$$

**57. Der Beschleunigungspol einer Kraft.** Es sei  $S$  der Schwerpunkt einer Scheibe,  $P$  eine in der Entfernung  $p$  vom Schwerpunkt wirkende Kraft,  $\mathbf{T}_S = M i_S^2$  das Trägheitsmoment der Scheibe für den Schwerpunkt. Der Geschwindigkeitszustand der Scheibe sei bekannt. Durch die Wirkung der Kraft entsteht ein bestimmter Beschleunigungszustand der Scheibe; es soll der Beschleunigungspol dieses Zustandes gesucht werden.

Die augenblickliche Bewegung der Scheibe ist nach 50 eine zweifache: eine allen Punkten gemeinsame mit der Beschleunigung  $b_S$  des

Schwerpunkts und eine Drehung um diesen mit der Winkelbeschleunigung  $\lambda$ .

Nach dem Prinzip der Schwerpunktsbewegung (52) erfährt der Schwerpunkt  $S$  durch die Kraft  $P$  eine Beschleunigung

$$b_S = \frac{P}{M}.$$

Jeder Punkt der Scheibe, also auch der Beschleunigungspol  $P$  (Fig. 67) erhält bei der erstgenannten Bewegung diese Beschleunigung  $b' \neq b_S$  in Richtung der Kraft  $P$ .

Da der Geschwindigkeitszustand der Scheibe bekannt ist, kennt man auch ihre Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ . Der Punkt  $P$  muß eine solche Lage haben, daß er durch die zweitgenannte Bewegung der Scheibe, die Drehung um  $S$ , eine Beschleunigung  $b''$  erhält, die  $b'$  gleich und entgegengesetzt ist.

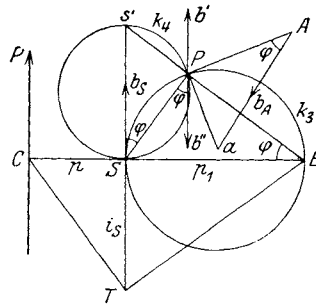


Fig. 67.

Macht man  $\overline{Ss'} = \frac{b_S}{\omega^2}$ , ferner  $ST = i_S$  und zieht  $TE \perp CT$ , so ist  $\overline{SE} = p_1 = \frac{i_S^2}{p}$ ; verbindet man  $s'$  mit  $E$  und zieht  $SP \perp s'E$ , so ist  $P$  der gesuchte Beschleunigungspol. Denn nach Gleichung 47 ist die Winkelbeschleunigung der Scheibe

$$\lambda = \frac{Pp}{M i_S^2} = \frac{b_S}{p_1}$$

und 
$$tg(SEs') = \frac{\overline{Ss'}}{\overline{SE}} = \frac{b_S}{p_1 \omega^2} = \frac{\lambda}{\omega^2} = tg \varphi,$$

worin  $\varphi$  der Beschleunigungswinkel für die Drehung der Scheibe um den ruhenden Schwerpunkt ist (vgl. 18). Bei dieser Bewegung hat der Punkt  $P$  die Beschleunigung  $b''$ , die mit  $SP$  den Winkel  $\varphi$  einschließt; also ist  $b''$  entgegengesetzt von  $b'$ . Die Größe von  $b''$  ist nach Gleichung 21:

$$b'' = \frac{\overline{SP} \cdot \omega^2}{\cos \varphi} = \overline{Ss'} \cdot \omega^2 = b_S = b'.$$

Die beiden Beschleunigungen  $b''$  und  $b'$  tilgen sich, der Punkt  $P$  ist somit Beschleunigungspol.

**58. Die Pöschl'schen Kreise.** Gibt man in Fig. 67 der Kraft  $P$  alle möglichen Werte von null bis unendlich, ohne an ihrer Lage und Richtung etwas zu ändern, so ändert der Punkt  $E$  seine Lage nicht, während  $b_S$  von null bis unendlich zunimmt und damit auch die Strecke  $Ss'$ . Alle Beschleunigungspole, die der veränderlichen Kraft  $P$  entsprechen,

liegen dann auf dem Kreise  $k_3$ , der den Durchmesser  $\overline{SE}$  hat. Ist  $P = 0$ , so liegt der Pol  $P$  in  $S$ ; ist  $P = \infty$ , so liegt der Pol  $P$  in  $E$ .

Der Punkt  $E$  ist aus der Lehre vom Stoß bekannt; wenn in  $C$  die Scheibe den Stoß  $P$  erfährt, ist  $E$  Mittelpunkt des Stoßes d. h. er wird durch den Stoß in seiner Bewegung nicht gestört.

Eine Kraft, die in unendlich kleiner Zeit der Masse  $M$  eine endliche Geschwindigkeit  $v$  geben soll, müßte unendlich groß sein. Da weder diese unendlich große Kraft, noch die unendlich kleine Zeit meßbar ist, pflegt man die Gesamtwirkung einer solchen Momentankraft durch das Produkt aus Masse und erzeugter Geschwindigkeit darzustellen und nennt diese Wirkung den Impuls  $Mv$ . F. Jung hat hierfür das gute Wort Schwung vorgeschlagen. („Eine einfache Darstellung des Schwung- und Drangmomentes beim starren Körper“, vgl. S. 55.)  $E$  ist also der Beschleunigungspol, der einem Stoß oder Impuls in  $C$  von irgend einer endlichen Größe entspricht; nach dem Vorschlage Th. Pöschl's, von dem diese Untersuchung stammt („Beitrag zur graphischen Dynamik des starren ebenen Systems“, Zeitschr. f. Math. u. Physik, 58. Bd., 1910), wollen wir  $E$  als Impulspol bezeichnen.

Lassen wir jedoch die Größe der Kraft  $P$  unverändert und ändern wir nur ihre Wirkung durch Parallelverschiebung, so ändert die Beschleunigung  $b_S$  ihre Größe nicht und auch der Punkt  $s'$  bleibt an derselben Stelle; hingegen beschreibt der Impulspol  $E$  die Gerade  $SE$ , wobei  $pp_1 = i_S^2$  bleiben muß. Dann beschreibt der Beschleunigungspol  $P$  den Kreis  $k_4$ ; dieser Kreis ist also der Ort der Beschleunigungspole für die parallelen Kräfte von gleicher Größe  $P$ . Rückt die Kraft nach  $S$ , so wird  $p = 0$  und  $p_1 = \infty$  d. h. der Kreis  $k_3$  geht in die Gerade  $Ss'$  über und der Beschleunigungspol  $P$  liegt in  $s'$ . Rückt die Kraft in unendliche Entfernung, so ist  $p = \infty$  und  $p_1 = 0$  d. h. der Kreis  $k_3$  schrumpft in  $S$  zusammen und auch der Beschleunigungspol fällt nach  $S$ .

**59. Die zu gegebenem Beschleunigungszustand gehörenden Kräfte.** Ist umgekehrt wie in 57 der Schwerpunkt  $S$ , der Beschleunigungspol  $P$  einer Scheibe, sowie deren Beschleunigungszustand, also die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  und die Winkelbeschleunigung  $\lambda$  gegeben, so kann die Kraft  $P$ , welche diesen Zustand herbeiführt, in folgender Weise gefunden werden (Fig. 67).

Aus  $\omega$  und  $\lambda$  ist der Beschleunigungswinkel  $tg\varphi \doteq \frac{\lambda}{\omega^2}$  bekannt, die Richtung  $Ss'$  kann also gezogen werden und gibt die Richtung der Kraft  $P$ . Damit ist auch die Richtung von  $SE$  und aus  $PE \perp PS$  der Impulspol  $E$  und der Punkt  $s'$  bekannt. Aus  $pp_1 = i_S^2$  ist dann der Punkt  $C$  zu finden. Endlich ergibt sich aus  $Ss' = \frac{b_S}{\omega^2}$  die Größe der Kraft

$$P = Mb_S = M \cdot Ss' \cdot \omega^2.$$

Ebenso kann die Aufgabe gelöst werden:

Gegeben sei der Schwerpunkt, die Winkelgeschwindigkeit und der Beschleunigungspol einer Scheibe. In welcher Weise sind die Kräfte angeordnet, die diesen Beschleunigungspol erzeugen?

Zieht man in Fig. 68 durch den Beschleunigungspol  $P$  die Senkrechte auf  $SP$ , so enthält sie sämtliche Impulspole  $E$ . Nehmen wir einen derselben beliebig an, ziehen  $ES = p_1$  und errichten  $ST = i_S$  senkrecht zu  $ES$ , ferner  $TC \perp TE$  bis zum Schnitte  $C$  mit  $ES$ , so ist  $\overline{CS} = p$  und die Senkrechte in  $C$  auf  $CS$  gibt die Richtung der zu  $E$  gehörenden Kraft  $P$  an, die den Beschleunigungspol  $P$  erzeugt.

Um ihre Größe festzustellen, verlängern wir  $TS$  bis zum Schnitte  $s'$  mit  $EP$ ; dann ist

$$Ss' = \frac{P}{M\omega^2}.$$

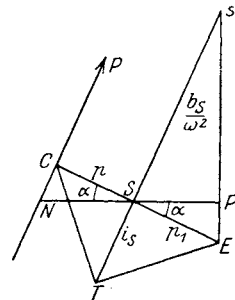


Fig. 68.

Da  $M$  und  $\omega$  gegeben sind, ist der Nenner dieses Ausdruckes konstant und die Kraft  $P$  ist der Entfernung  $Ss'$  proportional. Sie wird also durch die Strecke  $Ss'$  gemessen, wenn wir den Kraftmaßstab entsprechend wählen.

Nennen wir  $N$  den Schnitt der Geraden  $SP$  mit der Richtung der Kraft  $P$ , so ist

$$SN = \frac{p}{\cos \alpha} = \frac{i_S^2}{p_1 \cos \alpha} = \frac{i_S^2}{SP}.$$

Da dieser Ausdruck konstant ist, gehen alle Kraftrichtungen  $P$ , wie man auch den Impulspol  $E$  auf der Geraden  $PE$  annehmen möge, durch  $N$ . Daraus folgt: Die Kräfte  $P$ , die bei Voraussetzung einer bestimmten Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  einen bestimmten Beschleunigungspol erzeugen, bilden ein Kraftbüschel mit dem Mittelpunkte  $N$ . Die Größen der Kräfte dieses Büschels werden bei entsprechender Wahl des Kraftmaßstabes durch die Strecken  $Ss'$  gemessen, die von  $S$  ausgehen und durch die Gerade  $Ps'$  begrenzt sind.

Nach dem Vorschlage Th. Pöschl's nennen wir ein solches Kraftbüschel ein geradlinig begrenztes Kraftbüschel.

Durch Umkehrung erhält man den Satz:

Die Impulspole  $E$ , die zu einem geradlinig begrenzten Kraftbüschel mit dem Mittelpunkte  $N$  gehören, liegen in einer zu  $NS$  senkrechten Geraden.

**60. Die Wendepolgeraden** (Fig. 69). Aus dem Angriffe einer Kraft  $P$  auf eine Scheibe vom Schwerpunkte  $S$  seien der Impulspol  $E$  und der Beschleunigungspol  $P$  bestimmt worden (vgl. Fig. 67). Der Drehpol

der Scheibe liege in  $O$ . Man verbinde  $E$  mit  $O$  und nenne  $F$  den zweiten Schnittpunkt der Geraden  $EO$  mit dem Kreise  $k_3$ .

Da  $\sphericalangle PSs' = \varphi = PFS$  der Beschleunigungswinkel ist, so hat die Beschleunigung  $b_F$  die Richtung  $FS$ ; da aber die Geschwindigkeit  $v_F$  dieselbe Richtung hat, so besitzt der Punkt  $F$  nur Tangentialbeschleunigung und keine Normalbeschleunigung; es ist somit

$$n_{F'} = \frac{v_F^2}{\varrho} = 0$$

und  $\varrho = \infty$  d. h.  $F$  beschreibt einen Wendepunkt seiner Bahn; die Gerade  $i_1$  muß also durch den Wendepol gehen (vgl. 31).

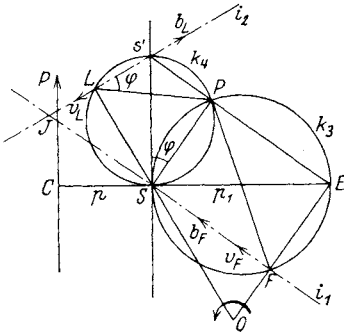


Fig. 69.

Verbindet man ferner  $O$  mit  $S$  und nennt  $L$  den zweiten Schnittpunkt dieser Geraden mit dem Kreise  $k_4$ , so ist  $\sphericalangle PLs'$  ebenfalls der Beschleunigungswinkel  $\varphi$  und die Beschleunigung  $b_L$  hat die Richtung  $Ls'$ , fällt also in die

gleiche Gerade wie  $v_L$ . Auch der Punkt  $L$  besitzt also keine Normalbeschleunigung und die Gerade  $i_2$  wird ebenfalls durch den Wendepol gehen.

Dann ist aber der Schnitt von  $i_1$  und  $i_2$  der Wendepol  $J$ .

Wenn die Kraft  $P$ , ohne ihre Lage zu verändern, alle möglichen Werte annimmt, so ändert sich der Kreis  $k_3$  nicht und der Beschleunigungspol  $P$  wandert auf diesem Kreise. Bleibt dabei  $O$  an derselben Stelle oder wandert der Drehpol auf der Geraden  $OE$ , so ändert sich weder der Punkt  $F$ , noch die Gerade  $i_1$ . Daraus folgt: Die Gerade  $i_1$  ist der geometrische Ort aller Wendepole  $J$  für alle Werte der Kraft  $P$ .

Verschiebt sich hingegen die Kraft  $P$  parallel, ohne ihre Größe zu ändern, so bleibt der Kreis  $k_4$  der gleiche und der Beschleunigungspol  $P$  wandert auf diesem Kreise. Bleibt dabei der Drehpol  $O$  an derselben Stelle oder wandert er auf der Geraden  $OS$ , so ändert sich weder der Punkt  $L$ , noch die Gerade  $i_2$ . Das ergibt den Satz:

Die Gerade  $i_2$  ist der geometrische Ort aller Wendepole  $J$  für alle parallelen Lagen der Kraft  $P$ .

**61. Die Tangentialpolgeraden (Fig. 70).** Hier haben  $P, S, E, O$ , ferner die Kreise  $k_3$  und  $k_4$  dieselbe Bedeutung wie in Fig. 69. Man verbinde  $O$  mit  $S$  und nenne  $Q$  den zweiten Schnittpunkt der Geraden  $OS$  mit dem Kreise  $k_3$ .

Da  $\sphericalangle PQS = PSs' = \varphi$  der Beschleunigungswinkel ist, hat die Beschleunigung  $b_Q$  die Richtung  $QS$ , steht also normal zur Geschwindigkeit  $v_Q$ ; dann ist aber die Tangentialbeschleunigung  $t_Q$  gleich null und

somit liegt  $Q$  auf dem Tangentialkreise  $k_2$  (vgl. Fig. 36); da dieser auch durch  $O$  geht, wird der Tangentialpol  $T$  auf der Geraden  $QE$  oder  $t_1$  liegen müssen.

Verbindet man hingegen  $O$  mit  $s'$  und nennt  $M$  den zweiten Schnittpunkt der Geraden  $Os'$  mit dem Kreise  $k_4$ , dann ist auch

$$\sphericalangle PMs' = PSs' = \varphi,$$

die Beschleunigung  $b_M$  hat die Richtung  $Ms'$  und steht normal zur Geschwindigkeit  $v_M$ . Dann ist aber auch die Tangentialbeschleunigung  $t_M$  gleich null und der Tangentialpol  $T$  wird auf der Geraden  $SM$  oder  $t_2$  liegen müssen; er ist also der Schnitt der Geraden  $t_1$  und  $t_2$ .

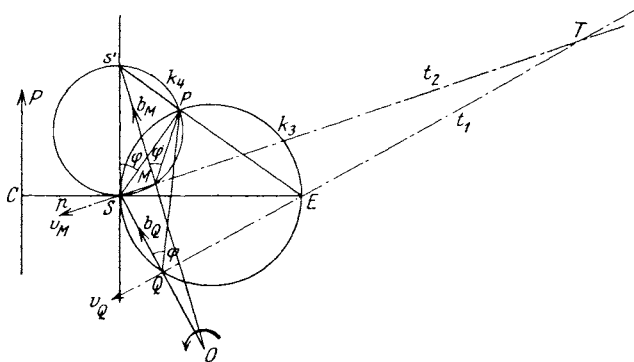


Fig. 70.

Ebenso wie in 60 ergeben sich nun folgende Sätze:

Die Gerade  $t_1$  ist der geometrische Ort aller Tangentialpole  $T$  für alle Werte der Kraft  $P$  und:

Die Gerade  $t_2$  ist der geometrische Ort aller Tangentialpole  $T$  für alle parallelen Lagen der Kraft  $P$ .

Die in 60 und 61 mitgeteilten Resultate stammen ebenfalls von Th. Pöschl und sind in der obengenannten Abhandlung niedergelegt.

### 62. Aufgaben.

27. Zwei materielle Punkte  $m_1$  und  $m_2$  sind durch einen gewichtlosen Stab miteinander verbunden und werden zwei Kräften  $P_1$  und  $P_2$  in verschiedenen Richtungen ausgesetzt. Die Geschwindigkeiten der Punkte sind gegeben; man konstruiere ihre Beschleunigungen.
28. Eine Scheibe werde an drei verschiedenen Stellen  $A, B, C$  von Kräften  $P_1, P_2, P_3$  angetrieben. Der Schwerpunkt der Scheibe und die Geschwindigkeiten  $v_A$  und  $v_B$  seien bekannt. Man suche die Beschleunigungen  $b_A, b_B$  und  $b_C$ .

29. In Th. Pöschl's genannter Abhandlung befindet sich folgender Satz:

Der Wendepol  $J$  des Beschleunigungszustandes, den die Resultante mehrerer Kräfte an dem System erzeugt, ist der Endpunkt der Streckensumme, die durch geometrische Addition der Strecken  $\overline{SJ}_n$  entsteht, wenn  $S$  der Schwerpunkt und  $J_n$  die Wendepole der durch die einzelnen Kräfte erzeugten Beschleunigungszustände sind, also

$$\overline{SJ} \equiv \overline{SJ}_1 + \overline{SJ}_2 + \dots + \overline{SJ}_n.$$

Man suche diesen interessanten Satz zu beweisen (vgl. Abschnitt III, 47, Aufgabe 26).

---

## V. Das geführte System.

**63. Führungen.** In den bisherigen Untersuchungen wurde angenommen, daß das ebene System, die Scheibe, in ihrer Ebene vollkommen frei beweglich und keinerlei Bedingungen unterworfen ist.

So wichtig die Untersuchung einer derartigen Bewegung ohne Hemmung oder Hindernis für die Theorie des Gegenstandes ist, muß doch darauf aufmerksam gemacht werden, daß es derart freie Systeme in Wirklichkeit nur in den seltensten Fällen gibt und daß die Systeme, welche in den Anwendungsgebieten der Technik eine Rolle spielen, alle in ihrer Bewegungsfreiheit mehr oder weniger behindert sind. So sind z. B. die Teile einer Maschine in den verschiedensten Arten in ihrer Freiheit eingeschränkt, teils durch festliegende, mit dem Fundamente verbundene Maschinenteile, teils durch ihnen benachbarte, selbst bewegliche Glieder der Maschine, die mitbestimmend auf ihre Bewegung einwirken. Man nennt solche Beschränkungen oder Bedingungen, die man der Beweglichkeit eines Systems auferlegt, Führungen des Systems.

Hier, wo es sich vorläufig nur um die Bewegung eines einzelnen Systems handelt, soll noch angenommen werden, daß diese Führungen in Ruhe, also Teile der ruhenden Ebene sind; später werden wir die Untersuchung auf Führungen ausdehnen, die sich selbst wieder bewegen (Gelenke und Kulissen).

**64. Freiheitsgrade. Flächenlauf, Zwanglauf.** Bei einem System, das vollständige Bewegungsfreiheit in seiner ruhenden Ebene hat, kann, wenn die Bewegung rein kinematisch angesehen und von der Wirkung der Kräfte abgesehen wird, jeder Punkt sich in die Lage jedes Nachbarpunktes verschieben. Wir konnten infolgedessen die Geschwindigkeit  $v_A$  irgend eines Punktes  $A$  der Scheibe beliebig annehmen und überdies noch die Größe der Geschwindigkeit  $v_B$  eines zweiten Punktes  $B$  der Scheibe (vgl. 11). Da also bei einem freien System über drei Angaben, nämlich Größe von  $v_A$  und  $v_B$ , sowie Richtung von  $v_A$ , frei verfügt werden konnte, sagt man: ein frei bewegliches System der Ebene besitzt drei Freiheitsgrade.

Wenn jedoch das System in der Freiheit seiner Bewegung irgendwie dadurch behindert wird, daß ihm gewisse Bedingungen vorgeschrieben werden, so wird die Anzahl der Angaben, die man über die Geschwindigkeiten machen kann, von drei auf zwei, auf eine oder endlich auf null herabsinken.



Das Vorschreiben von Bedingungen besteht, wenn wir nur solche geometrische Bewegungen voraussetzen, die durch Maschinengetriebe verwirklicht werden können, darin, daß wir einen oder zwei Punkte des Systems nötigen, gegebene Kurven zu beschreiben, oder eine oder zwei Kurven des Systems zwingen, gegebene Kurven zu umhüllen.

Schreibt man z. B. dem System vor, mit einem seiner Punkte  $A$  eine bestimmte Kurve  $a$  zu beschreiben (Fig. 71), so können wir über die Richtung der Geschwindigkeit  $v_A$  nicht mehr verfügen, sie ist durch die Tangente der Kurve  $a$  in  $A$  gegeben; wir können jetzt nur noch die Größe von  $v_A$  beliebig wählen und überdies noch die Größe der Geschwindigkeit  $v_B$  eines zweiten Systempunktes  $B$ , nicht aber deren Richtung beliebig annehmen. Man darf also nur mehr zwei Annahmen über die Geschwindigkeiten der Scheibe machen, statt ihrer drei wie beim freien System. Man sagt dann, das System hat zwei Freiheitsgrade oder es ist flächenläufig. Mit diesem Worte will man andeuten, daß jeder Punkt des Systems alle Punkte innerhalb einer ge-

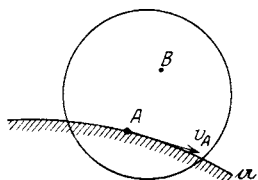


Fig. 71.

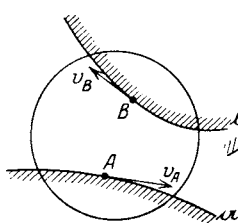


Fig. 72.

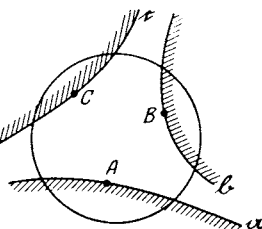


Fig. 73.

wissen begrenzten Fläche erreichen kann; nur der geführte Punkt  $A$  macht eine Ausnahme, da er ja auf einer Kurve laufen muß.

Statt die Größen von  $v_A$  und  $v_B$  anzunehmen, kann auch Größe und Richtung von  $v_B$  angenommen werden; dann ist die Größe von  $v_A$  vollkommen bestimmt.

Schreibt man dem System außerdem noch eine andere Bedingung vor, z. B. daß noch ein zweiter Punkt  $B$  auf einer bestimmten vorgegebenen Kurve  $b$  laufe (Fig. 72), dann schränkt man die Freiheit des Systems noch weiter ein. Da die Richtungen der Geschwindigkeiten  $v_A$  und  $v_B$  in die Tangenten an die Kurven  $a$  und  $b$  in  $A$  und  $B$  fallen, kann über keine der beiden Richtungen mehr verfügt werden; nur eine einzige Annahme bleibt jetzt dem Belieben anheimgestellt, nämlich der Größe von  $v_A$  oder von  $v_B$ . Das System gestattet nur mehr eine einzige Annahme; kein dritter Punkt kann, wie beim Flächenlauf, an alle Stellen innerhalb einer begrenzten Fläche gelangen, sondern nur an alle Stellen einer bestimmten Kurve, die zu beschreiben er gezwungen ist; das System hat nur noch einen Freiheitsgrad oder es ist zwangläufig.

Wir wollen die Bezeichnung einer Führung auf die beiden Kurven  $a$  und  $b$  übertragen.

Folgende Zusammenstellung gibt einen Überblick über die möglichen Annahmen von Geschwindigkeiten bei Systemen vom Freiheitsgrade drei, zwei und eins.

System	Punkte		Geschwindigkeit				Freiheitsgrad
	A	B	$v_A$		$v_B$		
			Richtg.	Größe	Richtg.	Größe	
Frei	frei	frei	1	1	1	—	3
			1	1	—	1	
			1	—	1	1	
			—	1	1	1	
Flächenläufig	geführt	frei	—	1	1	—	2
			—	1	—	1	
			—	—	1	1	
Zwangläufig	geführt	geführt	—	1	—	—	1
			—	—	—	1	

Die möglichen Annahmen sind durch eine 1 bezeichnet. Die Anzahl der 1 in einer Zeile gibt den Freiheitsgrad.

Nötigt man endlich drei Punkte  $A, B, C$  des Systems auf drei festen Kurven  $\alpha, \beta, \gamma$  zu bleiben, oder verlangt man, daß drei Kurven des

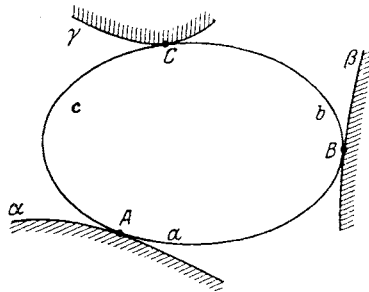


Fig. 74.

Systems  $a, b, c$  mit drei festen Kurven  $\alpha, \beta, \gamma$  in Berührung bleiben, so macht man das System unbeweglich; sein Freiheitsgrad ist null (Fig. 73, 74).

Eine Ausnahme tritt nur dann ein, wenn die Normalen in  $A, B, C$  auf  $a, b, c$  bzw.  $\alpha, \beta, \gamma$  sich in ein und demselben Punkt  $O$  treffen, der dann der Drehpol der Scheibe ist. In diesem Ausnahmefall kann dann die Scheibe eine unendlich kleine Drehung um  $O$  ausführen.

## VI. Das flächenläufige System. Kinematik.

**65. Punktführung und Kurvenführung.** Wir nennen flächenläufige Systeme oder Systeme mit zwei Freiheitsgraden jene, bei welchen jeder Punkt des Systems alle Lagen innerhalb einer bestimmten, begrenzten Fläche einnehmen kann. Fig. 75 zeigt eine Scheibe, von der ein Punkt  $A$  in einem Kreise um  $O$  geführt wird; irgend ein Punkt  $B$  der Scheibe kann dann alle Punkte einer Kreisringfläche erreichen, die zwischen den konzentrischen Kreisen  $k_1$  und  $k_2$  liegt; deren Halbmesser sind  $\overline{OA} - \overline{AB}$  und  $\overline{OA} + \overline{AB}$ . Wählt man jedoch  $B$  in  $A$ , so fallen diese Kreise in einen zusammen, die Kreisringfläche schrumpft in einen Kreis mit dem Halbmesser  $OA$  ein, d. h. der Punkt  $A$  hat keine begrenzte Fläche zur Verfügung, sondern nur die Kurve, auf der er geführt wird.

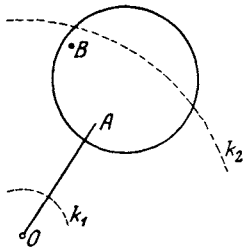


Fig. 75.

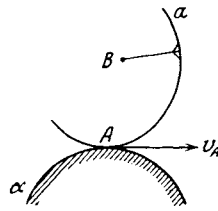


Fig. 76.

Wir wollen die Führung eines flächenläufigen Systems, bei welcher ein Punkt  $A$  in einer bestimmten Kurve  $a$  geführt wird, eine Einpunktführung nennen.

Die Flächenläufigkeit eines Systems kann jedoch auch in anderer Weise erzielt werden, nämlich durch das Schleifen und Rollen einer Kurve des Systems  $a$  auf einer festen Kurve  $\alpha$  (Fig. 76). Dann bewegt sich der Punkt  $A$ , in dem sich beide Kurven berühren, in ihrer gemeinsamen Tangente, aber die Größe der Geschwindigkeit dieser Bewegung ist noch willkürlich; überdies kann sich das System bei der Rollung auf  $\alpha$  um  $A$  drehen, wobei allerdings die relative Bewegung von  $B$  gegen  $A$  senkrecht zu  $AB$  gerichtet sein muß, aber ihre Größe ist ebenfalls willkürlich; es können also sowohl  $v_A$  wie  $v_B$  der Größe nach gewählt werden, es bestehen zwei Freiheitsgrade.

Wir wollen diese Art von Führung eine Einkurvenführung nennen.

Sonderfälle dieser Führung entstehen, wenn die Kurven  $a$  und  $a$  in Gerade oder Punkte ausarten.

66. **Geschwindigkeitszustand der Einpunktführung.** Es seien in Fig. 77  $A, B, C$  drei Punkte einer flächenläufigen Scheibe; der Punkt  $A$  werde auf einer Kurve  $a$  geführt, deren Krümmungsmittelpunkt in dem betrachteten Augenblicke der Bewegung  $\mathcal{U}$  ist. Von den Geschwindigkeiten der Scheibe dürfen nach der Zusammenstellung in 64 zwei Stücke beliebig angenommen werden.

1. Fall (siehe Tabelle). Durch die Führung ist die Richtung von  $v_A$  gegeben; die Größe von  $v_A$  und die Richtung von  $v_B$  darf angenommen

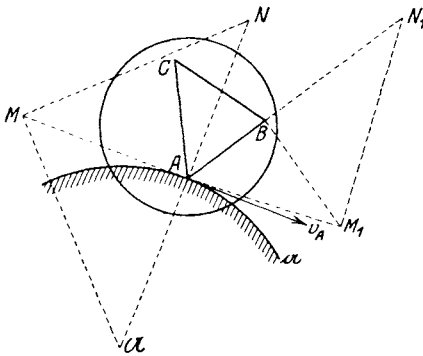


Fig. 77.

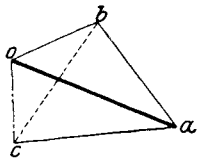


Fig. 77 a.

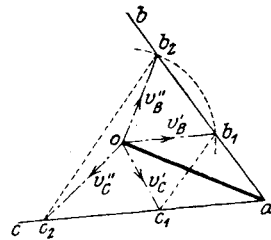


Fig. 78.

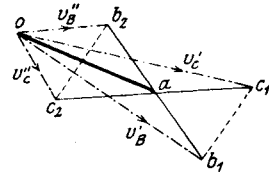


Fig. 79.

werden. Es ist die Größe von  $v_B$ , sowie Größe und Richtung von  $v_C$  zu finden (Fig. 77 a). Man zieht im Geschwindigkeitsplan  $oa \equiv v_A$  und  $ob \parallel v_B$ ,  $ab \perp AB$ ; dann ist  $ob \equiv v_B$ . Sodann macht man  $ac \perp AC$ ,  $bc \perp BC$  und es ist  $oc \equiv v_C$ . Die Aufgabe läßt nur eine Lösung zu.

2. Fall (siehe Tabelle). Durch die Führung ist die Richtung von  $v_A$  gegeben; die Größen von  $v_A$  und  $v_B$  können angenommen werden; dann ist die Richtung von  $v_B$ , sowie Größe und Richtung von  $v_C$  zu bestimmen (Fig. 78).

Im Geschwindigkeitsplan mache man  $oa \equiv v_A$ ,  $ab \perp AB$  und beschreibe aus  $o$  einen Kreisbogen mit dem Halbmesser  $v_B$ , der die Gerade  $b$  in  $b_1$  und  $b_2$  schneidet; dann sind  $ob_1 \equiv v_B'$ ,  $ob_2 = v_B''$  zwei Lösungen

der gestellten Aufgabe. Zieht man noch die Gerade  $ac \perp AC$  und  $b_1c_1 \parallel b_2c_2 \perp BC$ , so erhält man die Schnittpunkte  $c_1$  und  $c_2$ ; es sind dann  $\overline{oc_1} \equiv v_{C'}$ ,  $\overline{oc_2} \equiv v_{C''}$  die beiden Lösungen für die Geschwindigkeit des Punktes  $C$ .

Es könnte die Aufgabe auch so gestellt werden, daß außer  $v_A$  die relative Geschwindigkeit  $v_{BA}$  von  $B$  gegen  $A$  (bei dessen Drehung um  $A$ ) angenommen wird. Dann ist Fig. 79 der Geschwindigkeitsplan. Man zeichnet  $\overline{ab_1} \equiv v_{BA'}$ ,  $\overline{ab_2} \equiv v_{BA''}$  und verfährt im übrigen wie vorher. Die Aufgabe läßt ebenfalls zwei Lösungen zu.

Der 3. Fall der Zusammenstellung auf Seite 69 führt auf die gleiche Lösung wie der 1. Fall.

**67. Beschleunigungszustand der Einpunktführung.** Von der Anzahl der Bestimmungsstücke, die für den Beschleunigungszustand eines

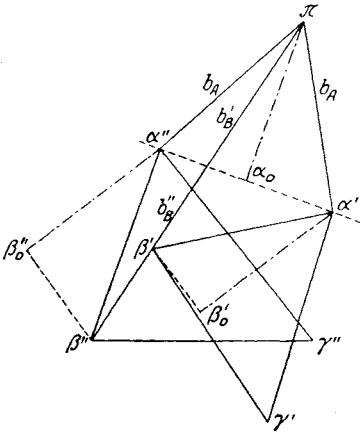


Fig. 77 b.

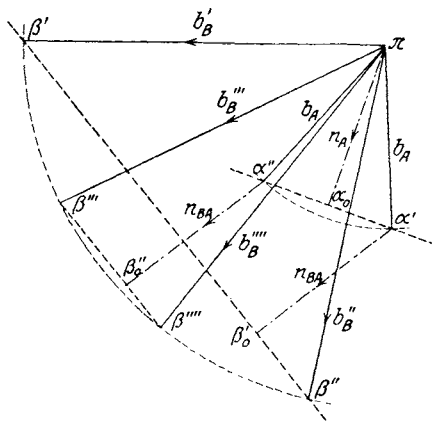


Fig. 77 c.

flächenläufigen Systems angenommen werden dürfen, gilt dasselbe wie für den Geschwindigkeitszustand. Vgl. die Tabelle in 64.

1. Fall. Für das flächenläufige System in Fig. 77 sei der Geschwindigkeitszustand durch Fig. 77 a gegeben; außerdem seien die Größe der Beschleunigung  $b_A$  sowie die Richtung der Beschleunigung  $b_B$  gegeben. Es sind die Beschleunigungen  $b_B$  und  $b_C$  zu suchen.

Man zeichnet im Beschleunigungsplan 77 b

$$\overline{\pi a_0} \cdot n_A = \frac{v_A^2}{A\mathfrak{A}} = \frac{\overline{oa}^2}{A\mathfrak{A}} = \overline{NA} \text{ in Richtung } A\mathfrak{A}$$

und errichtet in  $a_0$  die Senkrechte auf  $\pi a_0$ ; beschreibt man aus  $\pi$  mit der gegebenen Größe von  $b_A$  einen Kreisbogen, so schneidet er die Senkrechte in den Punkten  $a'$  und  $a''$ . Sodann zeichnet man

$$a'\beta_0' \cdot n_{BA} = \frac{v_{BA}^2}{BA} = \frac{ab^2}{BA} = \overline{N_1B} \text{ in Richtung } BA$$

und errichtet in  $\beta_0'$  die Senkrechte auf  $a'\beta_0'$ ; dasselbe macht man in  $a''$ . Zieht man nun durch  $\pi$  die gegebene Richtung von  $b_B$ , so schneidet sie die eben gezogenen Senkrechten in  $\beta'$  und  $\beta''$ ; die Aufgabe hat somit die beiden Lösungen:

$$\overline{b_B'} = \overline{\pi\beta'}, \quad \overline{b_B''} = \overline{\pi\beta''}.$$

Konstruiert man noch die Dreiecke  $a'\beta'\gamma'$  und  $a''\beta''\gamma''$  ähnlich und ähnlich gelegen mit  $ABC$ , so erhält man auch die Punkte  $\gamma'$  und  $\gamma''$ ; damit ist

$$\overline{b_C'} = \overline{\pi\gamma'}, \quad \overline{b_C''} = \overline{\pi\gamma''}.$$

2. Fall. Gegeben sind außer dem Geschwindigkeitszustand die Größen der Beschleunigungen  $b_A$  und  $b_B$ ; es sind ihre Richtungen, sowie Größe und Richtung von  $b_C$  zu finden (Fig. 77c).

Der Anfang der Lösung ist wie früher. Sind die Punkte  $\beta_0'$  und  $\beta_0''$  gefunden und in ihnen wie früher die Senkrechten errichtet, so schneidet man diese mit einem Kreisbogen, der aus  $\pi$  mit dem Halbmesser  $b_B$  beschrieben wird. Man erhält vier Schnittpunkte und somit auch vier Lösungen:

$$\overline{b_B'} = \overline{\pi\beta'}, \quad \overline{b_B''} = \overline{\pi\beta''}, \quad \overline{b_B'''} = \overline{\pi\beta'''}, \quad \overline{b_B''''} = \overline{\pi\beta''''}.$$

Bezüglich der Beschleunigung  $b_C$ , die nicht gezeichnet wurde, gilt dasselbe wie früher.

3. Fall. In Fig. 77 seien die Größe und Richtung der Beschleunigung  $b_B$  sowie der Geschwindigkeitszustand durch Abb. 77a gegeben; es sind die Beschleunigungen  $b_A$  und  $b_C$  zu konstruieren.

Man zeichnet in Fig. 77d  $\overline{\pi\beta} = \overline{b_B}$ , macht wie früher

$$\overline{\pi\alpha_0} = \overline{n_A} = \frac{v_A^2}{A\mathcal{A}} = \frac{\overline{oa}^2}{A\mathcal{A}}$$

in Richtung  $A\mathcal{A}$ ,

ferner

$$\overline{\beta\alpha_1} = \overline{n_{AB}} = \frac{v_{AB}^2}{AB} = \frac{\overline{ba}^2}{AB}$$

in Richtung  $AB$

und zieht  $\alpha_0 a \perp \pi\alpha_0$ ,  $\alpha_1 a \perp \beta\alpha_1$ ; der Schnitt dieser beiden Senkrechten ist der gesuchte Beschleunigungspunkt  $a$  und es ist

$$\overline{\alpha_0 a} = \overline{t_A}, \quad \overline{\alpha_1 a} = \overline{t_{AB}}, \quad \overline{\pi a} = \overline{n_A} + \overline{t_A} = \overline{b_A}$$

und auch  $\overline{\pi a} = \overline{b_B} + \overline{n_{AB}} + \overline{t_{AB}} = \overline{b_A}$ .

Der nicht gezeichnete Beschleunigungspunkt  $\gamma$  des Punktes  $C$  kann auch hier am einfachsten aus der Ähnlichkeit

$$a\beta\gamma \sim ABC$$

gewonnen werden.

Die gestellte Aufgabe läßt nur eine Lösung zu.

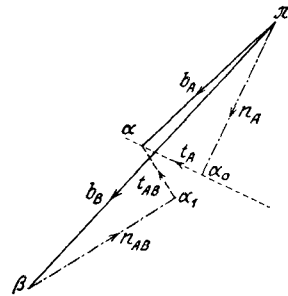


Fig. 77 d.

**68. Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustand der Einkurvenführung.** In Fig. 80 sei  $a$  eine Kurve des bewegten Systems, die auf der festen Kurve  $\alpha$  gleitet und rollt.  $A$  und  $A$  seien die Krümmungsmittelpunkte dieser beiden Kurven,  $k_a$  und  $k_\alpha$  ihre Krümmungskreise für den gemeinsamen Berührungspunkt.

Für zwei aufeinander folgende Zeiteilchen können die beiden Kurven  $a$  und  $a$  durch ihre Krümmungskreise  $k_a$  und  $k_\alpha$  ersetzt werden. Da der Punkt  $A$  fest ist und der bewegliche Punkt  $A$  durch zwei Zeiteilchen hindurch seine Entfernung von  $A$  nicht verändert (denn sie ist die Summe der beiden Krümmungshalbmesser), so wird  $A$  durch diese Zeit auf einem unendlich kleinen Kreisbogen geführt, dessen Mittelpunkt  $A$  ist. Damit ist aber die Kurvenführung auf die früher behandelte Punktführung zurückgeführt und man kann die früher gegebene Ermittlung des Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustandes in derselben Weise auch hier durchführen. Dies soll an einem Beispiel gezeigt werden.

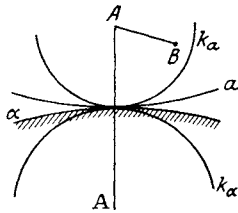


Fig. 80.

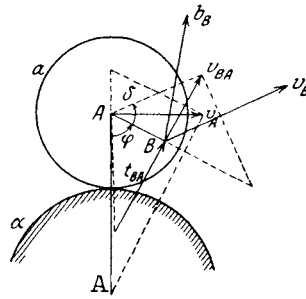


Fig. 81.

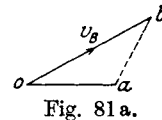


Fig. 81 a.

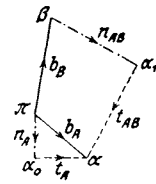


Fig. 81 b.

**69. Beispiel. Rollen und Gleiten einer Kreisscheibe auf einem Kreise** (Fig. 81). Eine Kreisscheibe  $a$  kann auf einem festen Kreise  $\alpha$  rollen und gleiten. Man kennt die Geschwindigkeit  $v_B$  und die Beschleunigung  $b_B$  eines beliebigen Punktes  $B$  der Scheibe. Es soll die Geschwindigkeit  $v_A$  des Scheibenmittelpunktes  $A$ , seine Tangentialbeschleunigung  $t_A$ , sowie die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  und die Winkelbeschleunigung  $\lambda$  der Scheibe ermittelt werden.

Geschwindigkeitsplan (Fig. 81 a). Man ziehe  $\overline{ob} \equiv v_B$ ,  $oa \perp AA$ ,  $ab \perp AB$ ; der Schnitt dieser beiden Senkrechten gibt den Geschwindigkeitspunkt  $o$ ; es ist  $\overline{oa} \equiv v_A$  und die Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega = \operatorname{tg} \delta = \frac{ab}{AB}.$$

Beschleunigungsplan (Fig. 81 b). Es ist  $\pi\beta \equiv b_B$ , ferner konstruiere man wie früher (vgl. Fig. 77)

$$\overline{\pi a_0} \equiv n_A = \frac{v_A^2}{AA} = \frac{\overline{oa}^2}{AA} \text{ in Richtung } AA,$$

$$\overline{\beta a_1} \equiv n_{AB} = \frac{v_{AB}^2}{AB} = \frac{\overline{ba}^2}{AB} \text{ in Richtung } AB,$$

und errichte  $\alpha_0 a \perp \pi a_0$ ,  $\alpha_1 a \perp \beta a_1$ ; der Schnitt dieser beiden Senkrechten ist der Beschleunigungspunkt  $a$  und es ist  $\overline{\pi a} \equiv \overline{ba}$  und  $\overline{\alpha_0 a} \equiv \overline{t_A}$ ,  $\overline{\alpha_1 a} \equiv \overline{t_{AB}}$ .

Die Winkelbeschleunigung der Scheibe ist

$$\lambda = tg \varphi = \frac{\overline{t_{BA}}}{AB} = \frac{\overline{\alpha a_1}}{AB}.$$


---



## VII. Das flächenläufige System. Dynamik.

**70. Dynamik der Einpunktführung (Fig. 82).** Eine Scheibe, deren Schwerpunkt  $S$  ist, wird in einem ihrer Punkte  $A$  geführt. Dieser Punkt beschreibt eine Bahn, deren Krümmungsmittelpunkt  $\mathfrak{A}$  ist. Auf die Scheibe wirke die Kraft  $P$ . Gegeben ist der Geschwindigkeitszustand der Scheibe, also die Größe der Geschwindigkeit  $v_A$  und jene der Geschwindigkeit des Schwerpunkts  $v_S$ . Es ist der Beschleunigungszustand der Scheibe, insbesondere die Beschleunigungen von  $A$  und  $S$ , wie auch der Führungsdruck  $K$ , der von der Führung auf die Scheibe ausgeübt wird, zu finden.

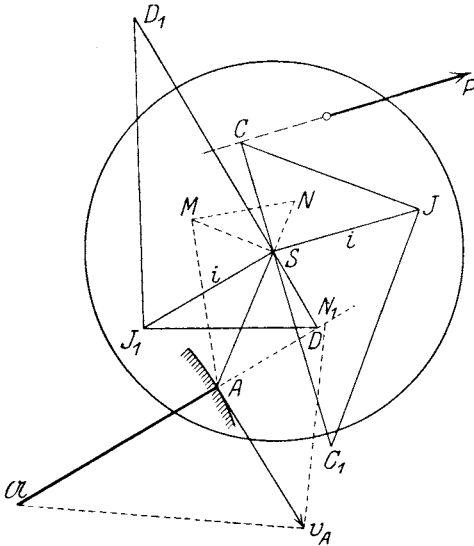


Fig. 82.

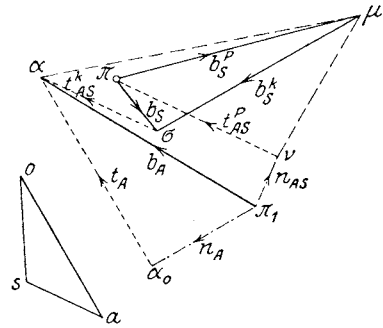


Fig. 82a. Fig. 82b.

**Geschwindigkeitsplan (Fig. 82a).** Man zeichne  $\overline{oa} \equiv v_A$ , ferner  $as \perp AS$  und trage  $\overline{os} \equiv v_S$  auf. Von den beiden möglichen Lösungen wurde nur die eine benützt.

**Beschleunigungsplan (Fig. 82b).** Der Maßstab dieses Planes ist durch den Längen-Maßstab und den Geschwindigkeits-Maßstab vollkommen bestimmt (vgl. 19). Nach dem Prinzip der Schwerpunktbewegung erleidet der Schwerpunkt  $S$  durch die gegebene Kraft  $P$  die Beschleunigung  $b_S^P = \frac{P}{M}$ , wenn  $M$  die Masse der Scheibe ist. Eine zweite

äußere Kraft, der noch unbekannte Führungsdruck  $K$ , wird dem Schwerpunkt die Beschleunigung  $b_S^K = \frac{K}{M}$  erteilen, von der erst die Richtung bekannt ist, nämlich jene der Normale  $A\mathfrak{A}$  der Führung. Im Beschleunigungsplan wird zunächst  $\pi\mu \equiv b_S^P$  gemacht; sodann kann die Tangentialbeschleunigung  $t_{AS}^P$  von  $A$  in bezug auf  $S$ , hervorgerufen durch die Kraft  $P$ , nach Fig. 66 konstruiert werden. Man fällt von  $S$  die Senkrechte  $SC$  auf  $P$ , macht  $SJ$  parallel zu  $P$  und gleich dem Trägheitshalbmesser  $i$  der Scheibe für ihren Schwerpunkt, endlich  $JC_1 \perp CJ$  bis zum Schnitte mit  $CS$ . Nun zieht man  $\mu\nu \perp AC_1$ ,  $\pi\nu \perp AS$ , dann ist  $\pi\nu \equiv t_{AS}^P$ . Sodann zeichnet man

$$\pi_1\nu \equiv n_{AS} = \frac{v_{AS}^2}{AS} = \frac{sa^2}{AS} = \overline{SN}$$

(Fig. 82), wodurch der Punkt  $\pi_1$  gewonnen ist, und

$$\pi_1 a_0 \equiv n_A = \frac{v_A^2}{A\mathfrak{A}} = \overline{N_1A} \text{ in Richtung } A\mathfrak{A},$$

endlich  $a_0 a \perp \pi_1 a_0$ .

Vom Führungsdrucke  $K$  ist nur die Richtung  $A\mathfrak{A}$  bekannt. Man fällt auf diese die Senkrechte  $SD$ , macht  $\overline{SJ_1} = i$  parallel zu  $K$ ,  $J_1 D_1 \perp DJ_1$  und zieht  $\mu\alpha \perp AD_1$  bis zum Schnitte mit  $a_0 a$ ; nun macht man  $\mu\sigma \parallel A\mathfrak{A}$ ,  $\alpha\sigma \perp AS$ , damit ist  $\mu\sigma = b_S^K$  gefunden und auch die Gesamtbeschleunigung des Schwerpunkts

$$b_S \equiv \overline{\pi\sigma} \equiv b_S^P + b_S^K.$$

Der Führungsdruck ist dann

$$K = Mb_S^K$$

und die gesuchte Beschleunigung

$$b_A \equiv \overline{\pi_1 a} \equiv n_{AS} + t_{AS}^P + b_S + t_{AS}^K$$

$$\text{oder } b_A \equiv b_S + n_{AS} + t_{AS}.$$

**71. Dynamik der Einkurvenführung** (Fig. 83). Eine Scheibe von beliebiger Form (ihr Umriß ist nicht gezeichnet worden) rollt und gleitet mit der Kurve  $a$  auf der festen Kurve  $\alpha$ . Die Krümmungsmittelpunkte dieser beiden Kurven sind  $A$  und  $A$ . Gegeben ist die Geschwindigkeit  $v_B$  des Berührungspunktes  $B$ , ferner die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  der Scheibe um  $B$ , endlich die Kraft  $P$ . Gesucht sind die Beschleunigungen von  $A$ ,  $B$  und  $S$ , ferner der Führungsdruck in  $B$ .

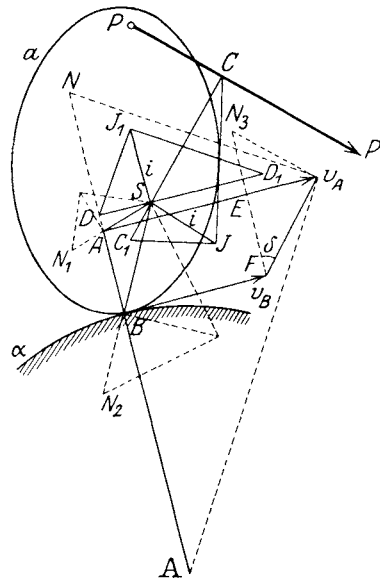


Fig. 83.

Geschwindigkeitsplan (Fig. 83a). Man zeichne  $\overline{ob} \equiv v_B$  und trage in Fig. 83  $tg\delta = \omega$  von  $\overline{FE} \# BA$  im Sinne von  $\omega$  auf. Es ist  $v_A \equiv v_B + v_{AB}$  und  $v_{AB} = \overline{BA} \cdot \omega = \overline{FE} \cdot tg\delta = \overline{ba}$ , wodurch  $v_A \equiv \overline{ob} + \overline{ba} = \overline{oa}$  gewonnen wird. Zieht man  $as \perp AS$ ,  $bs \perp BS$ , so ist auch der Geschwindigkeitspunkt  $s$  des Schwerpunkts  $S$  gefunden.

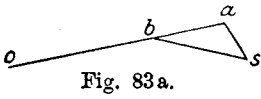


Fig. 83a.

Beschleunigungsplan. Der Maßstab hierfür ist durch den Längenmaßstab der Fig. 83 und den Geschwindigkeits-Maßstab der Fig. 83a gegeben (vgl. 19). Nach diesem Beschleunigungs-Maßstab trägt man in Fig. 83b  $\overline{\pi\mu} \equiv b_S^P = \frac{P}{M}$  auf, worin  $M$  die Masse der Scheibe ist. Nun konstruiert man die Tangentialbeschleunigung  $t_{AS}^P$  des Krümmungsmittelpunktes  $A$  in bezug auf  $S$ , herrührend von der Kraft  $P$ ; man

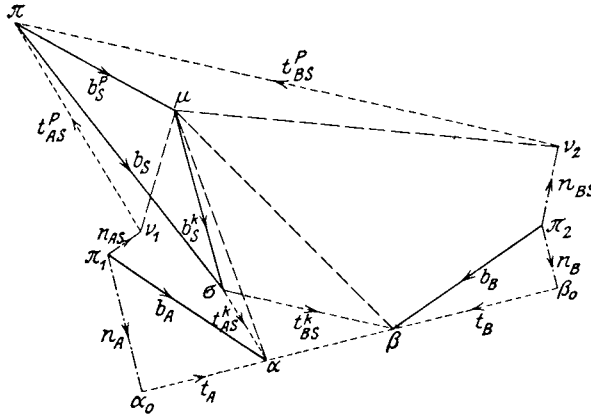


Fig. 83b.

zieht  $SC \perp P$ ,  $\overline{SJ} = i \parallel P$ , worin  $i$  der Trägheitshalbmesser der Scheibe für  $S$  ist, und macht  $JC_1 \perp CJ$ . Sodann zieht man im Beschleunigungsplan  $\mu\nu_1 \perp AC_1$ ,  $\pi\nu_1 \perp AS$ ; der Schnittpunkt  $\nu_1$  dieser beiden Senkrechten ergibt  $\overline{\nu_1\pi} \equiv t_{AS}^P$ . Ebenso liefert  $\mu\nu_2 \perp BC_1$ ,  $\pi\nu_2 \perp BS$  den Punkt  $\nu_2$  und  $\overline{\nu_2\pi} = t_{BS}^P$ .

Jetzt bildet man in Fig. 83 und 83b

$$\overline{\pi_1\nu_1} \equiv n_{AS} = \frac{v_{AS}^2}{AS} = \frac{\overline{sa}^2}{AS} = \overline{N_1A} \text{ in Richtung } AS,$$

$$\overline{\pi_2\nu_2} \equiv n_{BS} = \frac{v_{BS}^2}{BS} = \frac{\overline{sb}^2}{BS} = \overline{N_2B} \text{ in Richtung } BS$$

und trägt beide von  $\nu_1$  bzw.  $\nu_2$  aus auf.

Ferner macht man

$$\overline{\pi_1 a_0} \equiv n_A = \frac{v_A^2}{AA} = \overline{NA} \text{ in Richtung } AA$$

und errichtet  $a_0 a \perp \pi_1 a_0$ ; in dieser Senkrechten muß der Beschleunigungspunkt  $a$  in bezug auf den Nullpunkt  $\pi_1$  liegen.

Um von  $\pi_2$  aus ebenso die Normalbeschleunigung  $n_B$  auftragen zu können, beachte man, daß

$$n_B \equiv n_A + n_{BA}$$

sein muß, da  $A$  und  $B$  in der gemeinsamen Normale ihrer Bewegungsrichtung liegen (nach Fig. 23c); nun ist

$$n_{BA} = \frac{v_{BA}^2}{BA} = \frac{\overline{ab}^2}{BA} = \overline{EN_3} \text{ in Richtung } BA$$

und somit

$$n_B \equiv \overline{NA} + \overline{EN_3},$$

welche Strecke von  $\pi_2$  nach  $\beta_0$  aufgetragen und in  $\beta_0$  die Senkrechte dazu  $\beta_0 \beta$  errichtet wurde; in ihr muß der Beschleunigungspunkt  $\beta$  in bezug auf den Nullpunkt  $\pi_2$  liegen.

Vom Führungsdruck  $K$  ist nur die Richtung, nämlich die Normale  $AA$  bekannt. Man fällt auf sie die Senkrechte  $SD$  und sucht aus  $\overline{SJ_1} = i \parallel AA$ ,  $J_1 D_1 \perp D J_1$  den Punkt  $D_1$ ; dann zieht man  $\mu a \perp A D_1$  bis zum Schnitte  $a$  mit  $a_0 a$ , ebenso  $\mu \beta \perp B D_1$  bis zum Schnitte  $\beta$  mit  $\beta_0 \beta$ , wodurch man  $a$  und  $\beta$  erhält. Macht man jetzt noch

$$a \sigma \perp AS, \beta \sigma \perp BS,$$

so schneiden sich diese beiden Senkrechten im Punkte  $\sigma$  und es ist

$$\overline{\mu \sigma} \equiv b_S^K = \frac{K}{M},$$

die Beschleunigung des Schwerpunkts zufolge des Führungsdruckes  $K$ . Als Probe kann dienen, daß die Zeichnung  $\mu \sigma \parallel AA$  liefern muß.

Ferner ist  $\overline{\sigma a} \equiv t_{AS}^K$ , d. i. die Tangentialbeschleunigung des Punktes  $A$  in bezug auf  $S$  zufolge des Führungsdruckes  $K$ ; und ebenso  $\overline{\sigma \beta} \equiv t_{BS}^K$ .

Damit ist auch der Führungsdruck selbst gefunden:

$$K = M \cdot \overline{\mu \sigma}.$$

Aus dem Beschleunigungsplan ist noch zu entnehmen, daß die ganze Schwerpunktsbeschleunigung

$$b_S \equiv b_S^P + b_S^K \equiv \overline{\pi \sigma},$$

ferner

$$b_A \equiv n_A + t_A \equiv b_S + n_{AS} + t_{AS}, \text{ worin}$$

$$t_{AS} \equiv t_{AS}^P + t_{AS}^K$$

und

$$b_B \equiv n_B + t_B \equiv b_S + n_{BS} + t_{BS}, \text{ worin}$$

$$t_{BS} \equiv t_{BS}^P + t_{BS}^K.$$

Es läßt sich zeigen, daß die Dreiecke  $\sigma\alpha\beta$  und  $SAB$  ähnlich sind, obwohl die Beschleunigungen der Punkte  $S$ ,  $A$ ,  $B$  von verschiedenen Punkten aus gemessen werden. Es ist nämlich nach Gleichung 19:

$$t_{AS}^K + t_{SB}^K + t_{BA}^K = 0,$$

also

$$\alpha\beta \equiv t_{BA}^K \perp AB$$

und somit

$$\triangle \sigma\alpha\beta \sim SAB.$$

**72. Beispiel. Rollen und Gleiten einer schweren Kreisscheibe auf einem Kreise (Fig. 84).** Eine schwere Kreisscheibe, deren Mittelpunkt der Schwerpunkt  $S$  ist, rollt und gleitet auf einem festen Kreise, dessen

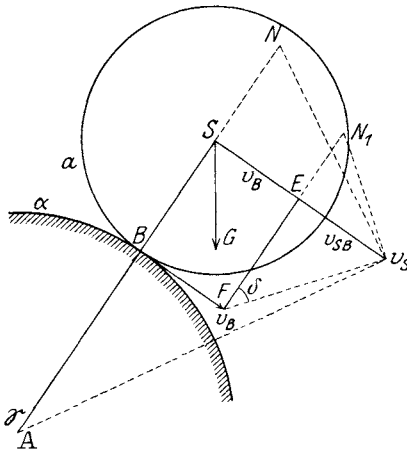


Fig. 84.

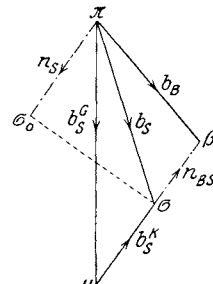


Fig. 84a.

Mittelpunkt  $A$  ist. Gegeben ist die Gleitgeschwindigkeit  $v_B$  des Punktes  $B$  und die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um  $B$ . Gesucht werden die Beschleunigungen  $b_S$  und  $b_B$ , sowie die Größe des Führungsdruckes  $K$ .

Der Geschwindigkeitsplan wurde in Fig. 84 selbst verzeichnet. Es ist  $\overline{BF} \equiv v_B$ ,  $v_{SB} = \overline{SB} \cdot \omega = \overline{EF} \cdot t g \delta$  und  $v_S \equiv v_B + v_{SB}$ .

Beschleunigungsplan. Der Mittelpunkt  $A$  des festen Kreises ist der Krümmungsmittelpunkt  $\mathcal{C}$  der Bahn von  $S$ . Daraus folgt in Fig. 84a

$$\overline{\pi\sigma_o} \equiv n_S = \frac{v_S^2}{S\mathcal{C}} \text{ in Richtung } S\mathcal{C};$$

in der Geraden  $\sigma_o\sigma \perp \pi\sigma_o$  muß dann der Beschleunigungspunkt  $\sigma$  des Schwerpunkts  $S$  liegen.

Nun zeichne man nach dem Beschleunigungsmaßstab

$$\overline{\pi\mu} \equiv b_S^G = \frac{G}{M} = g$$

die Beschleunigung der Schwere. Führt man durch  $\mu$  die Parallele zur Richtung  $\mathcal{C}S$  des Führungsdruckes, so erhält man den Beschleunigungs-

punkt  $\sigma$ , damit die Beschleunigung  $b_S \equiv \overline{\pi\sigma}$  und die Beschleunigung des Schwerpunkts durch den Führungsdruck  $\overline{\mu\sigma} \equiv b_S^K = \frac{K}{M}$ , woraus der Führungsdruck selbst:  $K = M \cdot \overline{\mu\sigma}$ .

Da die äußeren Kräfte der Scheibe  $G$  und  $K$  durch den Schwerpunkt  $S$  gehen, ist die Winkelbeschleunigung  $\lambda$  der Scheibe null; dann hat also  $B$  nur die Normalbeschleunigung in bezug auf  $S$  und keine Tangentialbeschleunigung; es ist  $t_{BS} = 0$  und

$$n_{BS} = \frac{v_{BS}^2}{BS} = \overline{EN}_1 \text{ in Richtung } BS.$$

Trägt man sie von  $\sigma$  aus auf, so erhält man den Beschleunigungspunkt  $\beta$  und es ist  $\overline{\pi\beta} \equiv b_B \equiv b_S + n_{BS}$ .

## VIII. Das zwangläufige System. Kinematik.

**73. Übersicht der Führungen.** Ein System befindet sich im Zwanglauf, es ist zwangläufig, wenn es derart geführt wird, daß jeder Punkt des Systems eine ganz bestimmte Bahn beschreiben muß oder, in einem kleinen Zeitteilchen, nur zwei unendlich nahe, in entgegengesetzter Richtung liegende Nachbarpunkte erreichen kann, nicht aber alle. Das System besitzt dann nur mehr einen Freiheitsgrad.

Dieser Zwanglauf des Systems kann sowohl durch Führung von Punkten, wie auch durch Führung von Kurven des Systems herbeigeführt werden; die Auswahl von Führungen ist hier viel mannigfaltiger als beim flächenläufigen System.

Wir wollen folgende Führungen des zwangläufigen Systems unterscheiden und der Reihe nach auf ihre kinematischen und dynamischen Eigenschaften untersuchen:

A. Die Dauerdrehung um einen Punkt. Hier wird ein Punkt des Systems durch mehr als zwei Zeitteilchen festgehalten.

B. Die Zweipunktführung. Hier werden zwei Punkte  $A$  und  $B$  des Systems auf bestimmten gegebenen Kurven  $a$  und  $b$  geführt (Fig. 85). Diese Führung hat besondere Wichtigkeit mit Rücksicht auf das im Maschinenbau so sehr verbreitete Gelenkviereck.

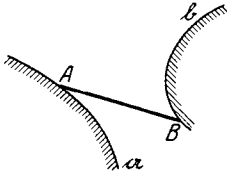


Fig. 85.

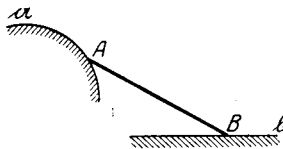


Fig. 86.

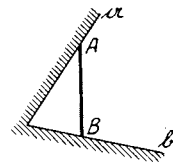


Fig. 87.

Erster Sonderfall. Die Kurve  $a$  ist ein Kreis, die Kurve  $b$  eine Gerade (Fig. 86). Dieser Fall ist noch wichtiger und verbreiteter als der vorige; wir finden ihn beim Getriebe, das den Namen Schubkurbel führt.

Zweiter Sonderfall. Beide Kurven  $a$  und  $b$  sind Gerade (Fig. 87). Wir werden diese Führung ebenfalls bei einem wichtigen Maschinengetriebe, dem Kreuzschieber, wiederfinden.

C. Die Punkt- und Kurvenführung. Ein Punkt  $A$  wird auf einer festen Kurve  $a$  geführt, gleichzeitig wird eine Systemkurve  $b$  an einer festen Kurve  $\beta$  geführt (Fig. 88).

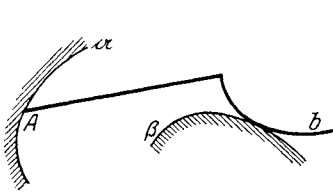


Fig. 88.

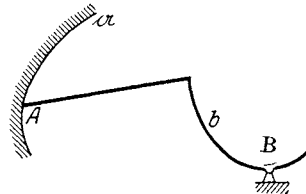


Fig. 89.

Erster Sonderfall. Die Kurve  $\beta$  schrumpft in einen Punkt  $B$  ein, d. h. die bewegliche Kurve  $b$  des Systems gleitet durch einen festen Punkt  $B$  (Fig. 89).

Zweiter Sonderfall. Die bewegliche Kurve  $b$  ist eine Gerade, die an der festen Kurve  $\beta$  gleitet (Fig. 90). (Allgemeine Konchoidenführung.)

Dritter Sonderfall. Der Punkt  $A$  wird auf einem Kreise mit dem Mittelpunkt  $\mathcal{A}$  geführt; die bewegliche Kurve  $b$  ist eine Gerade,

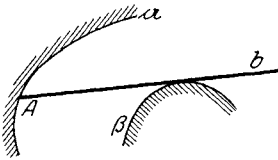


Fig. 90.

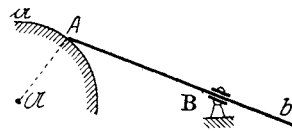


Fig. 91.

die feste Kurve  $\beta$  ein Punkt  $B$ . Die Gerade  $b$  gleitet also durch  $B$  hindurch (Fig. 91). Diesen Fall finden wir bei einem Maschinengetriebe, das den Namen schwingende Kurbelschleife führt.

Vierter Sonderfall. Die Kurve  $a$ , ein Kreisbogen, gleitet durch einen festen Punkt  $A$ ; der bewegliche Punkt  $B$  gleitet auf einer festen Geraden  $b$  (Fig. 92).



Fig. 92.

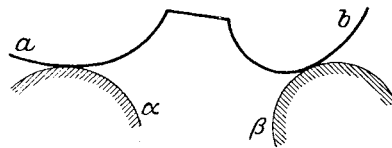


Fig. 93.

D. Die Zweikurvenführung. Zwei Kurven  $a$  und  $b$  des bewegten Systems gleiten an zwei festen Kurven  $a$  und  $\beta$  (Fig. 93).



Erster Sonderfall. Die Kurve  $a$  schrumpft in den Punkt A ein, durch den die bewegliche Kurve  $a$  gleitet (Fig. 94).

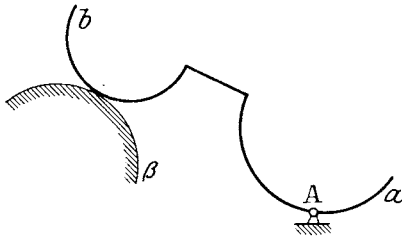


Fig. 94.

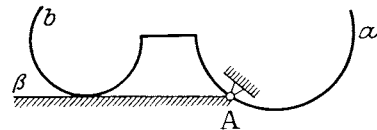


Fig. 95.

Zweiter Sonderfall. Die Kurve  $a$  schrumpft in den Punkt A ein, wie vorher; die Kurve  $\beta$  ist eine Gerade, die durch A geht (Fig. 95).

Dritter Sonderfall. Beide Führungskurven  $a$  und  $\beta$  schrumpfen in die Punkte A und B ein, durch welche die Kurven  $a$  und  $b$  gleiten (Fig. 96).



Fig. 96.

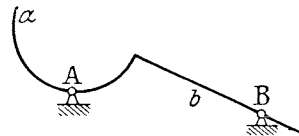


Fig. 97.

Vierter Sonderfall. Beide Führungskurven  $a$  und  $\beta$  schrumpfen in die Punkte A und B ein; die bewegliche Kurve  $a$  ist ein Kreisbogen,  $b$  eine Gerade (Fig. 97).

Fünfter Sonderfall. Die beiden Führungskurven  $a$  und  $\beta$  sind Gerade (Fig. 98).

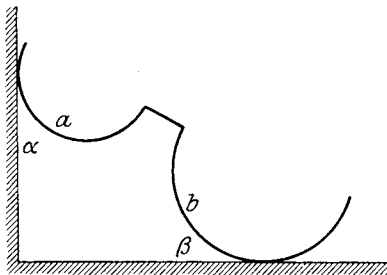


Fig. 98.

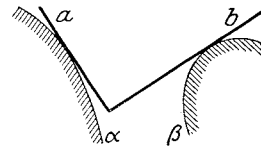


Fig. 99.

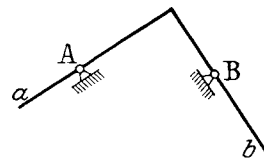


Fig. 100.

Sechster Sonderfall. Die beiden bewegten Kurven  $a$  und  $b$  sind Gerade (Fig. 99).

Siebenter Sonderfall. Die beiden bewegten Kurven  $a$  und  $b$  sind Gerade, die Führungskurven  $a$  und  $\beta$  schrumpfen in Punkte A und B ein (Fig. 100).

E. Die Rollung. Eine Kurve  $a$  des bewegten Systems rollt auf der festen Kurve  $\alpha$ , ohne zu gleiten. Der Berührungspunkt  $B$  hat also keine Geschwindigkeit (Fig. 101).

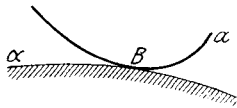


Fig. 101.



Fig. 102.

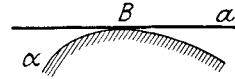


Fig. 103.

Erster Sonderfall. Die feste Kurve  $\alpha$ , auf der sich die Kurve  $a$  abrollt, ist eine Gerade (Fig. 102).

Zweiter Sonderfall. Die bewegte Kurve  $a$  des Systems, die sich auf  $\alpha$  abrollt, ist eine Gerade (Fig. 103).

Alle die hier aufgezählten Bewegungen des Systems mögen vorläufig nur als Momentanbewegungen gedacht werden, derart, daß alle von den Punkten zurückgelegten Wege unendlich klein sind.

**74. Umkehrung der Bewegung.** Bei der Bewegung einer Scheibe in ihrer Ebene sind zwei Ebenen zu unterscheiden, die sich ineinander verschieben: die ruhende Ebene und die bewegte Ebene der Scheibe. Man kann in Gedanken die Rolle dieser beiden Ebenen vertauschen, so wie es unbewußt ein Beobachter tut, der die Bewegung der Scheibe mitmacht und dem die ruhende Ebene als das Bewegte erscheint, während er die Bewegung der Scheibe nicht beobachten kann und sie deshalb als ruhend ansieht.

Von dieser Umkehrung der Bewegung hat man in der Geometrie der Bewegung vielfach Gebrauch gemacht; es ist, um die Vorstellung zu üben, sehr empfehlenswert, jede Systembewegung in Gedanken durch ihre Umkehrung zu ergänzen. Wir wollen dies an einigen Beispielen zeigen, indem wir die Fig. 85—103 zu Hilfe nehmen. Aus jeder dort behandelten Führung entsteht durch Umkehrung eine andere Führung. So entsteht aus Führung Fig. 85 die Führung Fig. 96, aus Fig. 86 entsteht Fig. 97, aus Fig. 87 entsteht Fig. 100, aus Fig. 88 entsteht Fig. 94, aus Fig. 98 entsteht Fig. 99.

Es gibt aber auch Führungen, die ihren Charakter durch Umkehrung nicht verändern; dazu gehören die Führungen Fig. 89, 93 und 101.

Während dieser Umkehr der Bewegung in der kinematischen Geometrie eine gewisse Bedeutung zukommt, da sie manche Resultate auf einfache Weise finden hilft, spielt sie in der Dynamik naturgemäß keine Rolle, da Kräfte und Massen an dieser Umkehrung nicht teilnehmen können.

Wir wollen die im Abschnitt II gegebenen Ausführungen über den Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustand des freien Systems dazu benützen, einige der wichtigsten in 73 erwähnten Führungen auf ihre Geschwindigkeits- und Beschleunigungspläne, sowie auf ihre übrigen kinematischen Verhältnisse hin zu untersuchen.

**75. Die Dauerdrehung um einen Punkt.** Die Bewegung des Systems um einen festgehaltenen Punkt wurde bereits in **6** bis **8** mit Bezug auf die Geschwindigkeiten, in **17** bis **23** mit Bezug auf die Beschleunigungen hinlänglich klargelegt, so daß wir auf diese Ausführungen verweisen dürfen.

**76. Geschwindigkeitszustand der Zweipunktführung (Führung im Gelenkviereck).** Ein starres System  $ABC$  (Fig. 104) bewegt sich derart, daß die Punkte  $A$  und  $B$  zwei gegebene Kurven  $a$  und  $b$  beschreiben; die Geschwindigkeit  $v_A$  ist gegeben; man soll  $v_B$  und  $v_C$  konstruieren.

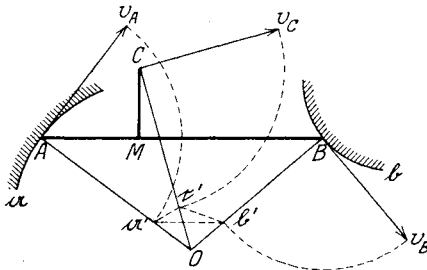


Fig. 104.

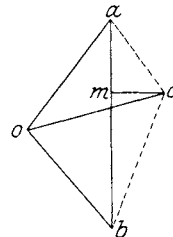


Fig. 104a.

a) Mit Benützung der gedrehten Geschwindigkeiten. Die Bewegungsrichtungen der Punkte  $A$  und  $B$  fallen in die Tangenten der Kurven  $a$  und  $b$ ; errichtet man in  $A$  und  $B$  die Senkrechten zu diesen Bewegungsrichtungen, zieht man also die Normalen der Kurven  $a$  und  $b$ , so ist ihr Schnittpunkt  $O$  der Drehpol des Systems, d. h. das System  $ABC$  dreht sich im nächsten Zeitteilchen um diesen Punkt  $O$ .

Trägt man die gegebene Geschwindigkeit  $v_A$  maßstäblich von  $A$  in ihrer Richtung auf und dreht sie um  $A$  in die Normale nach  $a'$  (gedrehte Geschwindigkeit, vgl. **15**), zieht  $a'b' \parallel AB$ , so ist  $Bb'$  die gedrehte Geschwindigkeit von  $B$ , die noch um  $90^\circ$  in die wahre Richtung  $v_B$  gedreht werden muß; die Richtung von  $v_B$  ist derart anzunehmen, daß sie um  $O$  den gleichen Drehungssinn hat wie  $v_A$ .

Jeder andere Systempunkt  $C$  kann ebenso behandelt werden. Man verbindet  $C$  mit  $O$  und zieht  $a'c' \parallel AC$  oder  $b'c' \parallel BC$ ; dann ist  $Cc'$  die gedrehte Geschwindigkeit von  $C$ , die noch um  $90^\circ$  nach  $v_C$  gedreht werden muß.  $v_C$  muß um  $O$  den gleichen Drehungssinn haben wie  $v_A$ .

Es ist nicht notwendig, daß  $O$  auf der Zeichenfläche liegt, da die gedrehte Geschwindigkeit  $Cc'$  aus  $Bb'$  und  $Aa'$  gefunden werden kann.

An dieser Konstruktion ändert sich nichts, wenn die Kurven  $a$  und  $b$  in Gerade ausarten.

$\beta$ ) Mit Benützung des Geschwindigkeitsplanes. Man zieht in Fig. 104a von dem beliebigen Nullpunkt  $o$  aus  $oa \equiv v_A$ , sodann  $ob \perp OB$ ,  $ab \perp AB$ ; damit ist die Geschwindigkeit  $v_B \equiv ob$  gefunden. Zieht man ferner  $ac \perp AC$ ,  $bc \perp BC$ , so ist der Schnitt  $c$  dieser beiden

Senkrechten der zu  $C$  gehörige Geschwindigkeitspunkt, d. h. es ist  $v_C \equiv oc$ .

Es ist  $abc$  gleichartig ähnlich mit  $ABC$ ; fällt man also z. B.  $CM \perp AB$ ,  $cm \perp ab$ , so ist  $m$  der zu  $M$  gehörige Geschwindigkeitspunkt.

**77. Beschleunigungszustand der Zweipunktführung.** Von einem der beiden geführten Punkte  $A$  sei die Beschleunigung  $b_A$  gegeben; es ist die Beschleunigung  $b_B$  des anderen Punktes  $B$  zu konstruieren (Fig. 105).

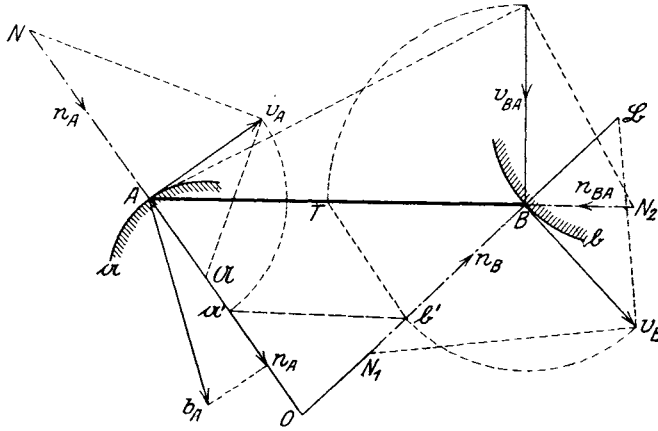


Fig. 105.

Hier müssen zwei aufeinander folgende Bogenelemente der Führungen, also auch ihre Krümmungsmittelpunkte  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  bekannt sein.

Aus der Beschleunigung  $b_A$  wird zunächst die Geschwindigkeit  $v_A$  ermittelt; man sucht  $n_A$ , indem man  $b_A$  auf die Normale  $A\mathfrak{A}$  orthogonal projiziert, sodann  $\overline{N\mathfrak{A}} \equiv n_A$  macht und über  $\overline{N\mathfrak{A}}$  als Durchmesser einen Halbkreis schlägt, der auf der Tangente in  $A$  die Geschwindigkeit  $v_A$  abschneidet (siehe 21). Daraus kann entweder wie früher in 76,  $\beta$ ) der Geschwindigkeitsplan entwickelt oder wie in  $\alpha$ ) die Methode der gedrehten Geschwindigkeiten benutzt werden. Zieht man durch  $b'$  die Parallele zu  $\mathfrak{A}A$ , so schneidet sie auf  $AB$  die gedrehte Geschwindigkeit  $\overline{BT}$  ab, die durch Drehung um  $90^\circ$  in ihre richtige Lage  $v_{BA}$  gebracht wird.

Die Konstruktionen der Normalbeschleunigungen

$$n_B = \frac{v_B^2}{B\mathfrak{B}} = \overline{N_1 B} \text{ in Richtung } B\mathfrak{B},$$

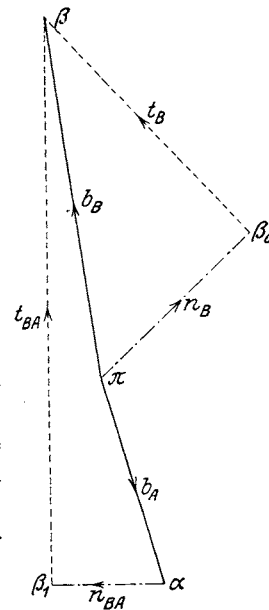


Fig. 105a.

$$n_{BA} = \frac{v_{BA}^2}{BA} = \overline{N_2 B} \text{ in Richtung } BA$$

sind in bekannter Weise vorzunehmen.

Im Beschleunigungsplan (Fig. 105a) trägt man vom beliebigen Nullpunkt  $\pi$  aus die Beschleunigungen  $b_A \equiv \pi\alpha$  und  $n_B \equiv \pi\beta_0$  auf, ferner  $\overline{\alpha\beta_1} \equiv n_{BA}$ ; die Senkrechten  $\beta_0\beta \perp n_B$  und  $\beta_1\beta \perp n_{BA}$  geben im Schnitte den Beschleunigungspunkt  $\beta$  und die Beschleunigung  $b_B \equiv \pi\beta$ . Es ist  $b_B \equiv b_A + n_{BA} + t_{BA} \equiv n_B + t_B$ .

In Fig. 106 soll noch gezeigt werden, wie die Konstruktion der Beschleunigung  $b_B$  in eine übersichtliche Folge gebracht werden kann, ohne einen abgesonderten Beschleunigungsplan entwerfen zu müssen.

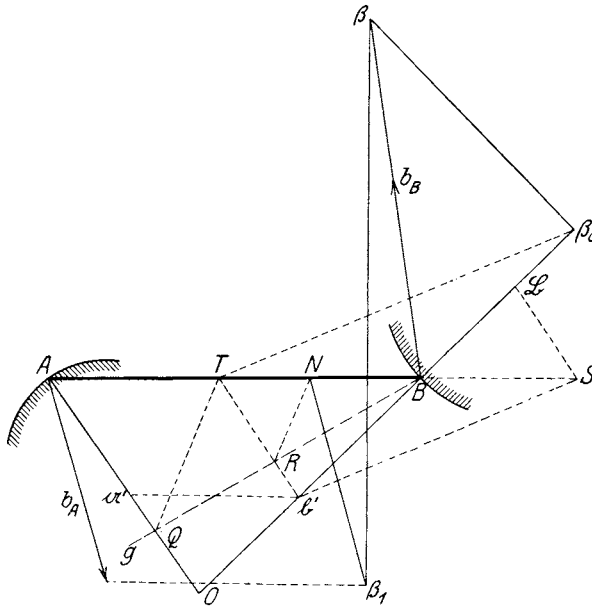


Fig. 106.

Aus  $b_A$  werden zunächst wie früher die Punkte  $\alpha'$ ,  $\beta'$  und  $T$  gefunden; zieht man dann durch  $B$  eine beliebige Gerade  $g$ , die von den Geraden  $AO$  und  $T\beta'$  in  $Q$  und  $R$  getroffen wird, ferner  $RN \parallel QT$ , so besteht die Proportion  $\overline{BA} : \overline{BT} = \overline{BQ} : \overline{BR} = \overline{BT} : \overline{BN}$

oder 
$$\overline{BA} : v_{BA} = v_{BA} : \overline{BN}$$

und 
$$\overline{BN} = \frac{v_{BA}^2}{BA} = n_{BA}.$$

Zieht man ferner  $BS \parallel T\beta'$  bis zum Schnitte  $S$  mit  $AB$  und  $T\beta_0 \parallel \beta'S$  bis zum Schnitt  $\beta_0$  mit  $OB$ , so besteht die Proportion

$$\overline{BS} : \overline{B\beta'} = \overline{BS} : \overline{BT} = \overline{B\beta'} : \overline{B\beta_0}$$

oder

$$\overline{B\mathfrak{B}} : v_B = v_B : \overline{B\beta_0}$$

und

$$\overline{B\beta_0} = \frac{v_B^2}{\overline{B\mathfrak{B}}} = n_B.$$

Macht man noch  $\overline{N\beta_1} = b_A$ ,  $\beta_1\beta \perp AB$ ,  $\beta_0\beta \perp OB$ , und ist  $\beta$  der Schnittpunkt dieser beiden Senkrechten, so ist  $\overline{B\beta} = b_B$  die gesuchte Beschleunigung des Punktes  $B$ . Denn der Linienzug  $N\beta_1\beta\beta_0BN$  stimmt mit dem Linienzug  $\pi\alpha\beta_1\beta\beta_0\pi$  des Beschleunigungsplanes Fig. 105a bis auf die Reihenfolge überein.

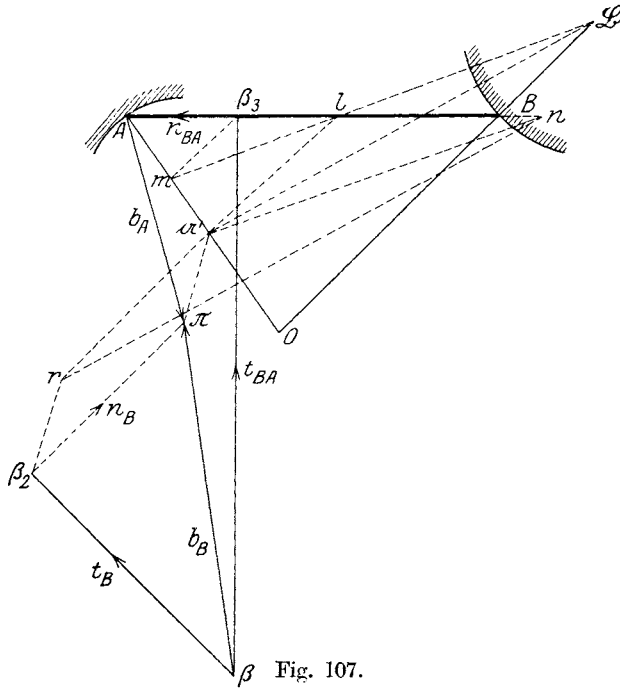


Fig. 107.

Eine andere Anordnung der Konstruktion von  $b_B$  zeigt Fig. 107. Nachdem der Punkt  $\alpha'$  wie früher gefunden wurde, zieht man  $\alpha'l \parallel B\mathfrak{B}$  bis  $AB$ ,  $lm \perp B\alpha'$  bis  $AO$ ,  $m\beta_3 \parallel B\mathfrak{B}$  bis  $AB$ ; dann ist

$$\overline{\beta_3 A} : \overline{lA} = \overline{mA} : \overline{\alpha'A} = \overline{lA} : \overline{BA}$$

und wegen

$$\overline{lA} = v_{BA} : \overline{\beta_3 A} = \frac{v_{BA}^2}{\overline{BA}} = n_{BA}.$$

Errichtet man also in  $\beta_3$  die Senkrechte auf  $AB$ , so muß sie nach dem Beschleunigungsplan 105a den einen Endpunkt  $\beta$  von  $b_B$  enthalten. Sodann ziehe man  $\alpha'n \parallel l\mathfrak{B}$  bis zum Schnitte  $n$  mit  $AB$ ,  $nr \parallel \mathfrak{B}\alpha'$  bis zum Schnitte  $r$  mit  $\alpha'l$  und mache noch  $r\beta_2 \parallel \alpha'\pi$ ,  $\pi\beta_2 \parallel \alpha'r$ , wenn mit  $\pi$  der Endpunkt von  $b_A$  bezeichnet wird; die Gerade  $\beta_2\beta \perp B\mathfrak{B}$  schneidet dann  $\beta_3\beta$  im Anfangspunkt  $\beta$  der Beschleunigung  $b_B$ , deren Endpunkt  $\pi$  ist. Denn es ist

$$\overline{ra'} : \overline{a'l} = \overline{a'n} : \overline{lB} = \overline{a'l} : \overline{B\beta}, \quad \overline{a'l} = v_B$$

und somit

$$\overline{\beta_2 \pi} = \overline{ra'} = \frac{v_B^2}{\overline{B\beta}} = n_B.$$

Auch diese Konstruktion ist nichts anderes als eine andere Anordnung des Beschleunigungsplanes 105a.

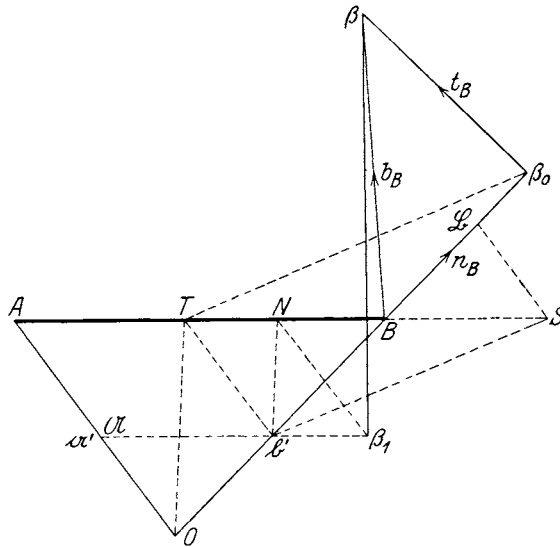


Fig. 108.

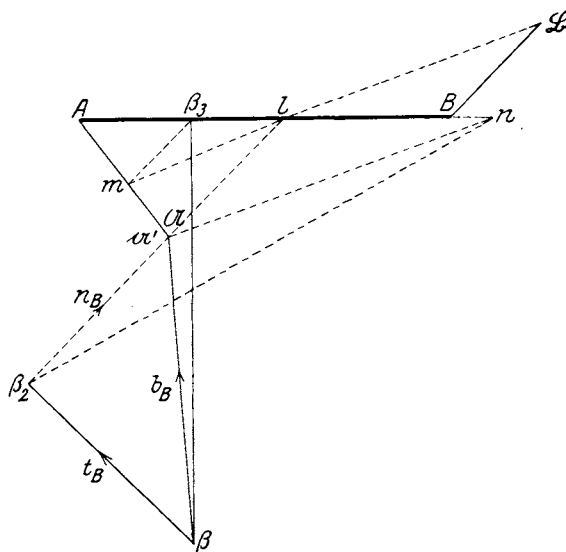


Fig. 109.

Liegt der Drehpol  $O$  auf der Zeichenfläche, so kann  $\beta_3$  einfacher erhalten werden, indem man  $\alpha'\beta_3 \parallel Ol$  zieht.

Für den Normalfall, wenn sowohl  $v_A$  wie  $b_A$  mit  $\overline{Aa'}$  zusammenfällt, vereinfachen sich die in den Fig. 106 und 107 mitgeteilten Konstruktionen von  $b_B$  in folgender Weise:

Fig. 108:  $\alpha'b'\beta_1 \perp AB$ ,  $b'T' \parallel \mathfrak{A}A$ ,  $b'N \parallel OT$ ,  $N\beta_1 \parallel A\mathfrak{A}$ ,  $\beta_1\beta \perp AB$ ; ferner  $\mathfrak{B}S \parallel A\mathfrak{A}$ ,  $T'\beta_0 \parallel b'S$ ,  $\beta_0\beta \perp B\mathfrak{B}$ ;  $B\beta \equiv b_B$ ,  $\overline{B\beta_0} \equiv n_B$ ,  $\overline{\beta_0\beta} \equiv t_B$ .

Fig. 109:  $\alpha'l\beta_2 \parallel B\mathfrak{B}$ ,  $lm \parallel Ba'$ ,  $m\beta_3 \parallel B\mathfrak{B}$ ,  $\beta_3\beta \perp AB$ ; ferner  $\alpha'n \parallel l\mathfrak{B}$ ,  $n\beta_2 \parallel \mathfrak{B}\alpha'$ ,  $\beta_2\beta \perp B\mathfrak{B}$ ;  $\overline{\beta\alpha'} \equiv b_B$ ,  $\overline{\beta\beta_2} \equiv t_B$ ,  $\overline{\beta_2\alpha'} \equiv n_B$ .

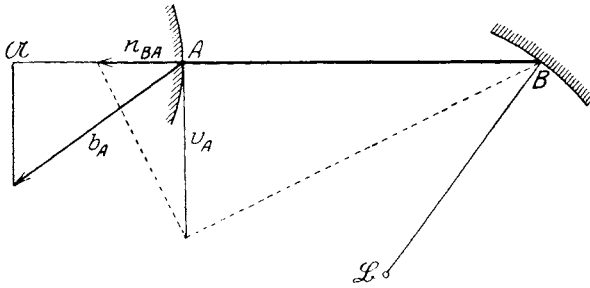


Fig. 110.

Bei gewissen Stellungen des Systems werden die angeführten Konstruktionen versagen, so u.a. in dem Falle, wenn in Fig. 105 der Krümmungsmittelpunkt  $\mathfrak{A}$  in der Geraden  $AB$  liegt; dann ist nämlich  $v_B$  gleich null.

Hingegen kommt man auch in diesen Fällen mit Hilfe des Beschleunigungsplanes zu einer raschen Lösung. In Fig. 110 wurde dieser Fall angenommen und die Maßstäbe derart gewählt, daß die Projektion von  $b_A$  auf  $BA$  in die Strecke  $A\mathfrak{A}$  fällt. (vgl 21, Fig. 21). Dann ist auch  $v_A = \overline{A\mathfrak{A}}$ ; der Geschwindigkeitsplan Fig. 110a klappt in die Gerade  $oab$  zusammen;  $b$  liegt in  $o$ , da  $v_B = o$  ist. Im Beschleunigungsplan Fig. 110b wurde  $\overline{\pi\alpha} \equiv b_A$ ,  $\overline{\alpha\beta_1} \equiv n_{BA}$  gemacht;  $n_B = \frac{v_B^2}{B\mathfrak{B}}$

ist null,  $\beta_0$  fällt daher mit  $\pi$  zusammen. Die Senkrechten  $\pi\beta \perp B\mathfrak{B}$  und  $\beta_1\beta \perp AB$  schneiden sich im Beschleunigungspunkt  $\beta$  und es ist



Fig. 110a.

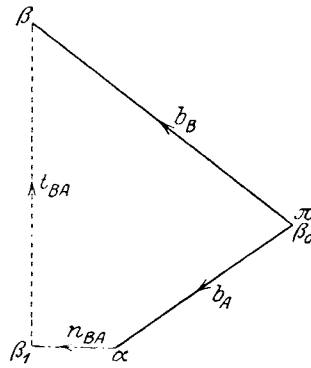


Fig. 110b.

$$\overline{\pi\beta} \equiv b_B.$$





verfährt man wie in Fig. 46. Man bestimmt den Drehpol  $O$  im Schnitte von  $A\mathfrak{A}$  mit  $B\mathfrak{B}$  und den Punkt  $G$  im Schnitte von  $AB$  mit  $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ . Sodann zieht man  $OH \parallel \mathfrak{B}\mathfrak{A}$  bis zum Schnitte  $H$  mit  $AB$ ,  $HW_2W_1 \perp GO$  bis zu den Schnittpunkten  $W_1$  mit  $AO$  und  $W_2$  mit  $BO$ ; dann sind  $W_1$  und  $W_2$  Punkte des Wendekreises. Zieht man noch in diesen Punkten die Senkrechten auf die Polstrahlen  $AO$  und  $BO$ , so ist ihr Schnitt der gesuchte Wendepol  $J$  und  $OJ$  ist der Durchmesser des Wendekreises.

Die Poltangente  $Ot$  ist senkrecht zu  $OJ$ . Um sie direkt ohne Benützung des Wendekreises zu finden, kann man den Satz von Bobillier benützen (42), indem man  $\sphericalangle GOA = \sphericalangle BOt$  macht.

Kehrt man die Bewegung des Systems um, läßt man die Punkte  $A, B$  und  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  ihre Rollen vertauschen, so erhält man den Wendekreis der umgekehrten Bewegung oder den Rückkehrkreis (vgl. 41). Dann zieht man  $O\mathfrak{H} \parallel AB$  bis zum Schnitte  $\mathfrak{H}$  mit  $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{H}\mathfrak{W}_2\mathfrak{W}_1 \parallel OG$  bis zu den Schnittpunkten  $\mathfrak{W}_1$  mit  $\mathfrak{A}O$  und  $\mathfrak{W}_2$  mit  $\mathfrak{B}O$ ; dann sind  $\mathfrak{W}_1$  und  $\mathfrak{W}_2$  bereits Punkte des Rückkehrkreises. Die Senkrechten  $\mathfrak{W}_1R \perp \mathfrak{A}O$ ,  $\mathfrak{W}_2R \perp \mathfrak{B}O$  geben in ihrem Schnitte den Wendepol der umgekehrten Bewegung oder den Rückkehrpol  $R$ .

b) Konstruktion der Krümmungsmittelpunkte. Der Krümmungsmittelpunkt der Bahn eines beliebigen Systempunktes  $C$ , der mit  $A$  und  $B$  starr verbunden ist, kann auf verschiedene Weise gefunden werden.

a) Mit Benützung des Wendepols. Hat man in Fig. 111 den Wendepol  $J$  bereits bestimmt, so wird nach Fig. 43 der zu  $C$  gehörige

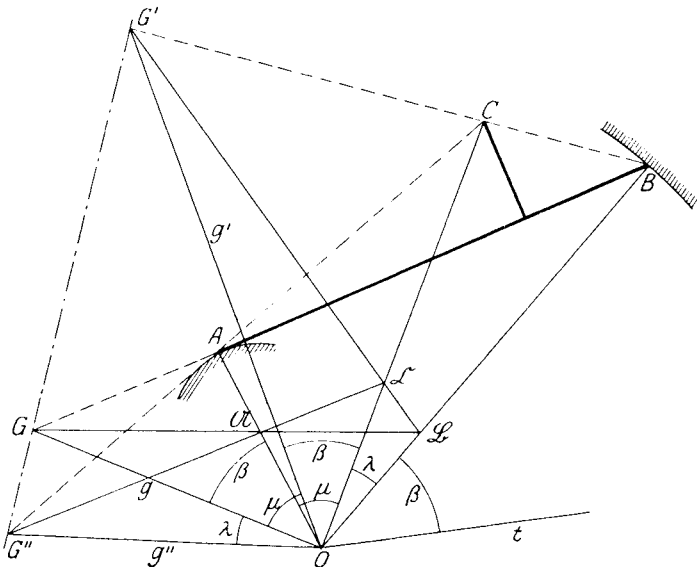


Fig. 112.

Krümmungsmittelpunkt  $\mathcal{C}$  konstruiert, indem man  $C$  mit  $O$  und  $J$  verbindet,  $O\mathcal{C} \perp CO$  errichtet bis zum Schnitte  $\mathcal{C}$  mit  $CJ$  und  $\mathcal{C}\mathcal{E} \parallel JO$  zieht bis zum Schnitte  $\mathcal{E}$  mit  $CO$ .

$\beta$ ) Mit Benützung der Poltangente. Nachdem in Fig. 112 die Poltangente durch Übertragung des Winkels  $\beta$  gefunden ist, überträgt man den Winkel  $tOC$  nach  $AOg''$  und bringt die Gerade  $g''$  zum Schnitte  $G''$  mit  $AC$ ; die Gerade  $G''\mathcal{A}$  geht dann durch den gesuchten Krümmungsmittelpunkt  $\mathcal{C}$ , der auf  $CO$  liegt.

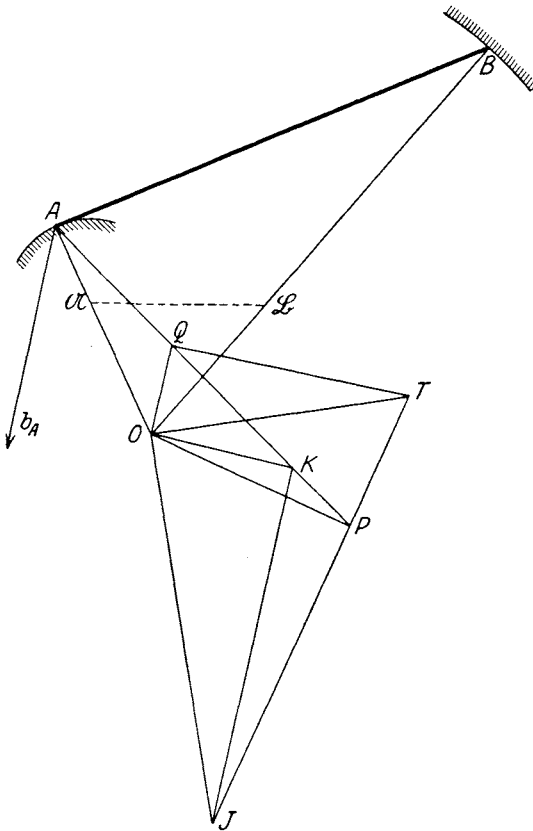


Fig. 113.

der Beschleunigung  $b_A$  als gegeben angenommen; der Wendepol  $J$  wird wie früher gefunden. Dann zieht man wie in Fig. 37. folgende Linien:  $JK \parallel b_A$ ,  $OK \perp b_A$  und verbindet  $A$  mit  $K$ ; diese Gerade geht durch den Beschleunigungspol  $P$ . Ferner  $OQ \parallel b_A$  bis zum Schnitte  $Q$  mit  $AK$ ,  $QT \perp b_A$  bis zum Schnitte  $T$  mit der Poltangente  $OT \perp OJ$ ; dann ist  $T$  der Tangentialpol und es ist  $P$  der Fußpunkt von  $OP \perp JT$ .

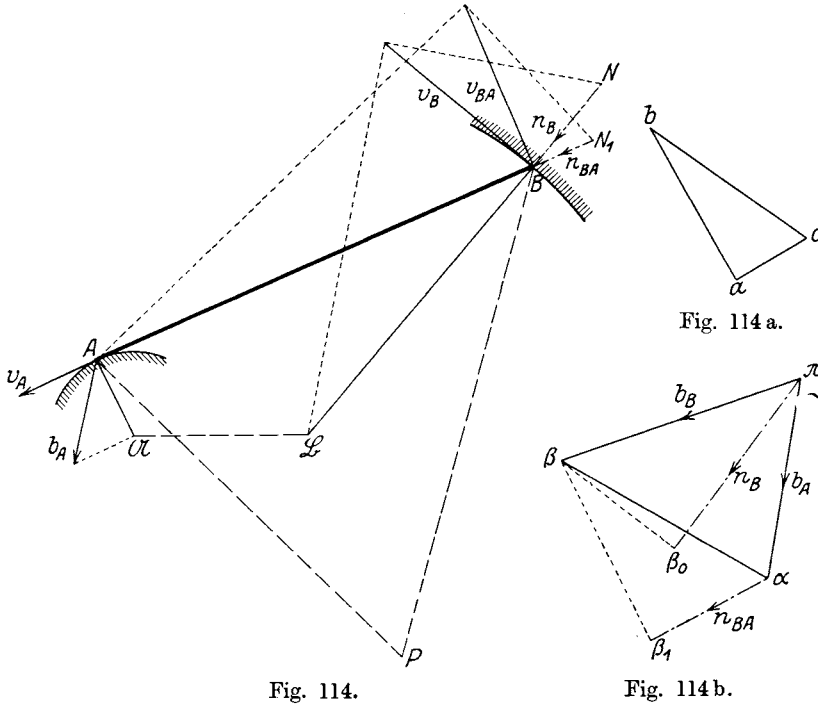
$\beta$ ) Mit Benützung des Beschleunigungsplanes. In Fig. 114 wurde der Geschwindigkeitsplan und der Beschleunigungsplan wie in Fig. 105 gezeichnet. Da die Größe der Beschleunigung keinen Einfluß

Oder man überträgt den Winkel  $tOC$  nach  $BOg'$  und bringt die Gerade  $g'$  zum Schnitte  $G'$  mit  $BC$ ; dann geht die Gerade  $G'\mathcal{B}$  ebenfalls durch  $\mathcal{C}$ . Die Punkte  $GG'G''$  liegen auf einer Geraden.

c) Bestimmung des Beschleunigungspols. Ist die Richtung der Beschleunigung eines der beiden Führungspunkte  $A$  oder  $B$  gegeben oder auch jene der Beschleunigung irgend eines anderen Systempunktes  $C$ , so kann der Beschleunigungspol konstruiert werden.

a) Mit Benützung des Wendepols. In Fig. 113 wurde die Richtung

auf die Lage des Beschleunigungspols hat, wurde  $b_A$  derart angenommen, daß seine Projektion nach  $A\mathfrak{A}$  fällt. Dann ist auch  $v_A = o\bar{a} = A\mathfrak{A}$ . Der Beschleunigungsplan wurde in doppelter Größe gezeichnet. Macht man schließlich  $ABP \sim \alpha\beta\pi$ , so ist  $P$  der gesuchte Beschleunigungspol.



**79. Führung der Schubkurbel.** (Erster Sonderfall der Zweipunktführung.)

a) Der Geschwindigkeitszustand. Ein starres System  $ABC$  (Fig. 115) bewegt sich derart, daß  $A$  einen Kreisbogen mit dem Mittelpunkte  $\mathfrak{A}$ ,  $B$  eine beliebige Gerade beschreibt; die Geschwindigkeit  $v_A$  ist gegeben; es ist  $v_B$  und  $v_C$  zu finden.

Die Konstruktion ist eine Wiederholung der in Fig. 104 und 104a mitgeteilten, soll also nicht näher erläutert werden. Fig. 115 zeigt die Aufsuchung von  $v_B$  und  $v_C$  mit Benützung der gedrehten Geschwindigkeiten, Fig. 115a den Geschwindigkeitsplan.

Auch hier braucht der Drehpol  $O$  nicht auf der Zeichenfläche zu liegen; die Konstruktion von  $v_B$  und  $v_C$  bedarf seiner nicht.

b) Der Beschleunigungszustand. In Fig. 116 ist die Beschleunigung  $b_A$  des geführten Punktes  $A$  gegeben; der Krümmungsmittelpunkt seiner Führung sei  $\mathfrak{A}$ . Da der Punkt  $B$  in einer Geraden geführt wird, liegt der Krümmungsmittelpunkt  $\mathfrak{B}$  in unendlicher Entfernung,

die Normalbeschleunigung des Punktes  $B$  verschwindet und die Beschleunigung  $b_B$  fällt in die Führungsgerade.

Zunächst bestimmt man  $v_A$  aus  $b_A$ , wie bereits bekannt, indem man  $b_A$  auf die Normale  $A\mathfrak{A}$  projiziert, über der Projektion einen Halbkreis zeichnet, den man durch die in  $\mathfrak{A}$  zu  $A\mathfrak{A}$  errichtete Senkrechte schneidet; der Schnittpunkt hat von  $A$  die Entfernung  $v_A$ , die sodann noch nach  $Aa$  gedreht wird.

Zieht man nun  $aM \parallel B\mathfrak{B}^\infty$  und vergleicht das Dreieck  $AaM$  mit den kongruenten Dreiecken  $AaM$  in Fig. 115 und  $oab$  im Geschwindig-

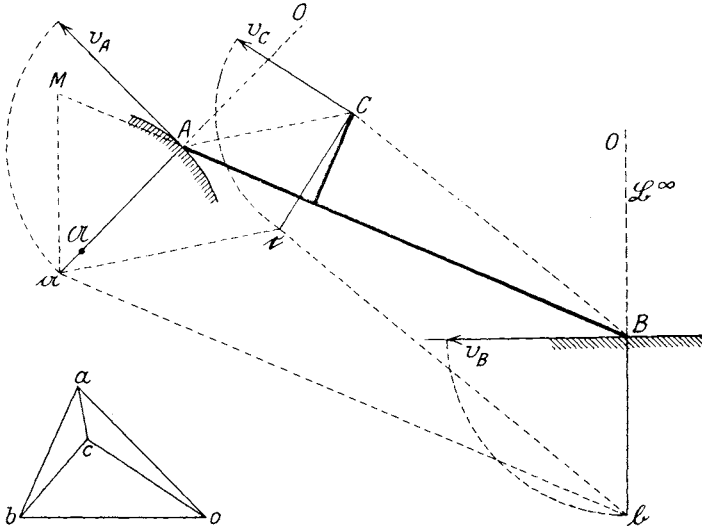


Fig. 115 a.

Fig. 115.

keitsplan 115 a, so entnimmt man, daß  $MA$  die gedrehte Geschwindigkeit  $v_{BA} = a\bar{b}$  ist. Zieht man noch  $MN \parallel aB$  und  $NR \parallel aM$ , so ist

$$\overline{RA} : \overline{MA} = \overline{NA} : \overline{aA} = \overline{MA} : \overline{BA}$$

und somit 
$$\overline{RA} = \frac{\overline{MA}^2}{\overline{BA}} = \frac{v_{BA}^2}{\overline{BA}} = n_{BA}.$$

Im Beschleunigungsplan (Fig. 116 a) wird zuerst  $\overline{\pi a} \equiv b_A$  und  $\pi\beta$  parallel zur Führungsgeraden von  $B$  gezogen; sodann

$$\overline{\alpha\beta_0} \equiv n_{BA} \text{ in Richtung } BA$$

aufgetragen und in  $\beta_0$  die Senkrechte  $\beta_0\beta$  auf  $\overline{\alpha\beta_0}$  errichtet; sie schneidet  $\pi\beta$  im Beschleunigungspunkt  $\beta$  und es ist  $\overline{\pi\beta} = b_B$ .

Man kann auch den Beschleunigungsplan in der Fig. 116 selbst unterbringen, indem man in  $R$  die Senkrechte  $RS$  auf  $BA$  errichtet (sie entspricht  $\beta\beta_0$  im Beschleunigungsplan) und durch den Endpunkt  $\alpha_1$  von  $b_A$  die Parallele zur geraden Führung zieht; dann ist auch  $\overline{S\alpha_1} \equiv b_B$ .

Ist die umgekehrte Aufgabe zu lösen, nämlich aus der Beschleunigung  $b_B$  des geradgeführten Punktes  $B$  die Beschleunigung von  $A$  zu finden, so wird man im Beschleunigungsplan Fig. 116a damit beginnen,  $b_B \equiv \pi\beta$  aufzutragen, dann

$$\overline{\beta\alpha_0'} \equiv n_{AB} = \frac{v_{AB}^2}{AB} \text{ in Richtung } AB$$

auftragen, wobei  $\overline{\beta\alpha_0'} = -\overline{\alpha\beta_0} = \overline{AR}$  wie vorher gewonnen wird. So dann wird

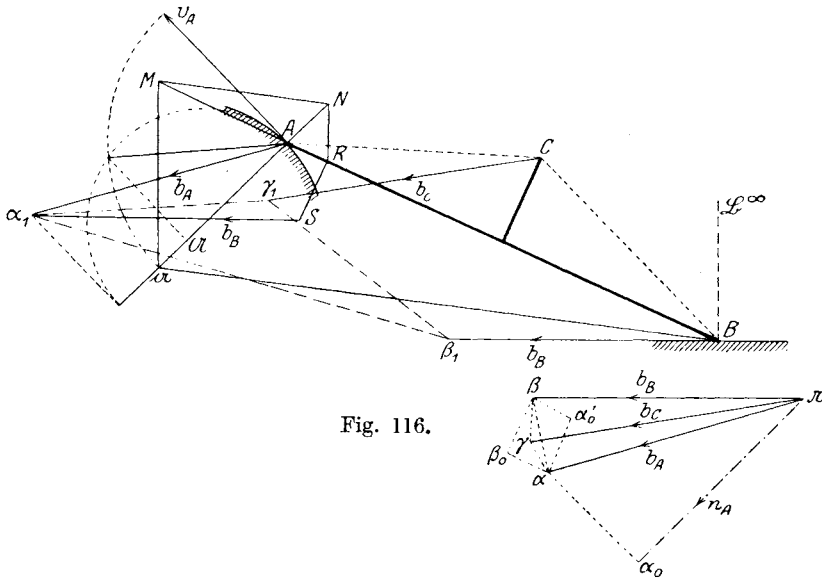


Fig. 116.

Fig. 116a.

$$\overline{\pi\alpha_0} \equiv n_A = \frac{v_A^2}{A\alpha} \text{ in Richtung } A\alpha$$

konstruiert und  $\alpha_0\alpha \perp \pi\alpha_0$  errichtet. Diese Senkrechte gibt im Schnitte mit der zweiten Senkrechten  $\alpha_0'a \perp \beta\alpha_0'$  den Beschleunigungspunkt  $a$ .

Um die Beschleunigung  $b_C$  eines dritten Systempunktes  $C$  zu finden, kann man nun verschiedene Wege einschlagen. Am einfachsten geht man vor, indem man im Beschleunigungsplan Fig. 116a das Dreieck  $\alpha\beta\gamma$  dem Dreiecke  $ABC$  gleichartig ähnlich konstruiert; dann ist  $\overline{\pi\gamma} \equiv b_C$ ; denn die Punkte  $\alpha\beta\gamma \dots$  des Beschleunigungsplanes bilden nach 25 ein dem System  $ABC \dots$  ähnliches System. Oder man macht in Fig. 116  $\overline{B\beta_1} \equiv b_B$  und konstruiert das Dreieck  $\alpha_1\beta_1\gamma_1$  dem Dreiecke  $ABC$  gleichartig ähnlich; dann ist  $\overline{C\gamma_1} \equiv b_C$ . Denn die Endpunkte  $\alpha_1\beta_1\gamma_1 \dots$  der Beschleunigungen bilden nach 24 ein dem System  $ABC \dots$  ebenfalls gleichartig ähnliches System.

In Fig. 117 wurde der Fall angenommen, daß die Beschleunigung des Punktes  $A$  durch den Krümmungshalbmesser  $A\mathfrak{A}$  gemessen wird (vgl. 20). Dann vereinfacht sich die Konstruktion von  $b_B$  und  $b_C$  etwas.

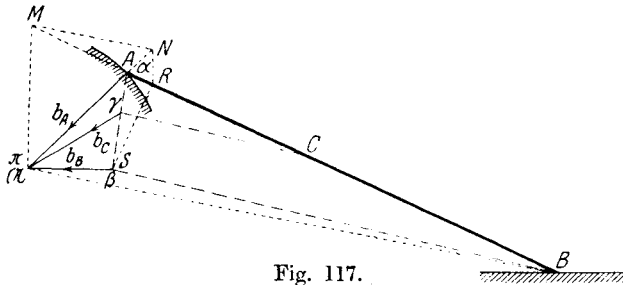


Fig. 117.

Man zieht den Linienzug:  $\mathfrak{A}M$  senkrecht zur Führung von  $B$ ,  $MN \parallel \mathfrak{A}B$ ,  $NR \parallel \mathfrak{A}M$ ,  $RS \perp AB$ ; die zur Führung von  $B$  parallele Gerade  $\mathfrak{A}S$  schneidet dann  $RS$  in  $S$  und es ist  $S\mathfrak{A} \equiv b_B$ . Die Figur enthält gleichzeitig den Beschleunigungsplan mit dem Nullpunkt  $\pi$  in  $\mathfrak{A}$ , nur daß die Beschleunigungen die Richtung nach  $\pi$  haben. Um die Beschleunigung  $b_C$  eines Punktes  $C$  der Geraden  $AB$  zu bestimmen, genügt es,  $C\mathfrak{A} \parallel BS$  zu ziehen; dann ist  $\mathfrak{A}C \equiv b_C$ ; denn es muß  $\alpha\gamma\beta \sim ACB$  sein.

Fig. 118 zeigt noch den meist benützten Fall, daß die Richtung der geraden Führung von  $B$  durch den Krümmungsmittelpunkt  $\mathfrak{A}$  der Führung von  $A$  geht. Die Konstruktion ist die gleiche wie in Fig. 117.

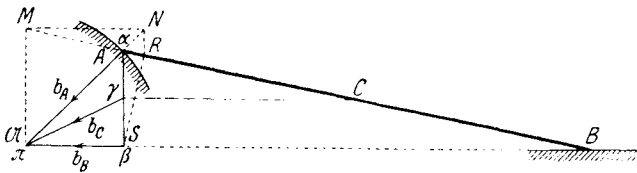


Fig. 118.

Die Konstruktion versagt, wenn  $\mathfrak{A}$ ,  $A$  und  $B$  in einer Geraden liegen (Fig. 119). Hingegen führt der Beschleunigungsplan auch hier zum Ziel. Man macht  $AW \perp \mathfrak{A}A \equiv b_A$  und zieht  $BW$  bis zum Schnitte  $V$  mit  $\mathfrak{A}V \perp \mathfrak{A}A$ ; dann ist  $\mathfrak{A}V$  die Größe von  $b_B$ , bedarf aber noch einer Drehung nach  $\mathfrak{A}R$ . Denn es ist hier

$$b_B \equiv b_A + b_{BA}$$

und

$$b_{BA} \equiv n_{BA} = \frac{v_{BA}^2}{BA};$$

da nun  $B$  augenblicklich in Ruhe ist, so wird

$$v_B \equiv v_A + v_{BA} = 0 \text{ oder } v_{BA} \equiv -v_A$$

und

$$b_{BA} = \frac{v_A^2}{BA} \text{ in Richtung } BA$$

Aus oben mitgeteilter Konstruktion folgt

$$\overline{BA} : \overline{AW} = \overline{B\mathfrak{A}} : \mathfrak{A}\overline{V} = (\overline{BA} + \overline{A\mathfrak{A}}) : \mathfrak{A}\overline{V}$$

woraus 
$$\mathfrak{A}\overline{V} = \overline{AW} + \frac{\overline{AW} \cdot \overline{A\mathfrak{A}}}{\overline{BA}} = b_A + \frac{v_A^2}{\overline{BA}} = b_A + b_{B,A} \equiv b_B.$$

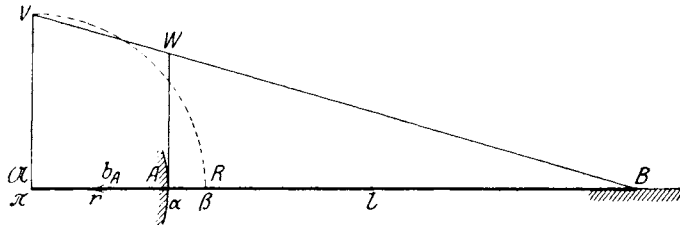


Fig. 119.

Dann ist also in Fig. 119  $\pi\alpha\beta$  der Beschleunigungsplan mit nach  $\pi$  gerichteten Beschleunigungen.

Die Konstruktion der Beschleunigung der Schubkurbel ist vielfältig studiert worden.

Für den Normalfall (Beschleunigung des Punktes  $A$  gemessen durch den Krümmungshalbmesser  $A\mathfrak{A}$ ) wurde die Beschleunigung des Punktes  $B$  zuerst in anderer Weise von Schadwill gefunden (Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbflusses in Preußen, 1876).

Ebenfalls für den Normalfall gelten die von Otto Mohr (Civil-Ingenieur, 1879, S. 617) und von T. Rittershaus (Civil-Ingenieur, 1879, S. 461) stammenden Konstruktionen. Vgl. T. Rittershaus, „Beschleunigungskurve des Kreuzkopfes eines Kurbelmechanismus“, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing., 1883, S. 283.

L. Burmeister behandelt in seinem Lehrbuch der Kinematik, 1888, S. 823 u. f. sowohl den Normal- wie auch den allgemeinen Fall ohne Benützung des Beschleunigungsplanes.

E. Autenrieth gibt in der Abhandlung: „Beitrag zur Bestimmung der Trägheitskräfte einer Schubstange“ (Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing., 1895, S. 716) folgende Konstruktion der Beschleunigung für den in Fig. 118 behandelten Fall an (Fig. 120):

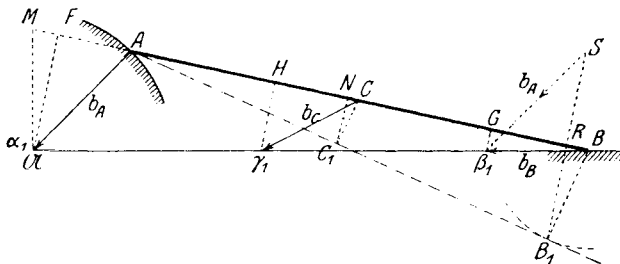


Fig. 120.





Entfernung. Man zeichnet in Fig. 121 den Drehpol  $O$  im Schnitte von  $A\mathfrak{A}$  mit  $B\mathfrak{B}^\infty$  und den Punkt  $G$  im Schnitte von  $AB$  mit  $\mathfrak{A}\mathfrak{B}^\infty$ ; der Punkt  $H$  in Fig. 111 fällt hier mit  $B$  zusammen. Man zieht also  $BW_1 \parallel OG$  bis zum Schnitte  $W_1$  mit  $A\mathfrak{A}$  und errichtet  $W_1J \perp A\mathfrak{A}$ ; der Punkt  $W_2$  fällt mit  $B$  zusammen;  $W_2J$  ist die Führungsgerade von  $B$ . Ihr Schnitt mit  $W_1J$  ist der Wendepol  $J$ . Er liegt also auf der Bewegungsrichtung von  $B$ . Dies geht überdies aus dem Satze in 31 hervor: Beschreibt ein Systempunkt dauernd eine gerade Linie, so liegt der Wendepol auf ihr.

$OJ$  ist der Durchmesser des Wendekreises; die Poltangente  $Ot$  ist senkrecht zu  $OJ$ .

d) Konstruktion der Krümmungsmittelpunkte. Es soll der Krümmungsmittelpunkt der Bahn eines beliebigen Punktes  $C$  gesucht werden, der mit  $A$  und  $B$  starr verbunden ist.

a) Mit Benützung des Wendepols. Wie in Fig. 111 gezeigt wurde, ist in Fig. 121 der Polstrahl  $OC$  zu zeichnen,  $O\mathfrak{C}$  darauf senkrecht zu errichten und  $J\mathfrak{C}$  bis zum Schnitte  $\mathfrak{C}$  zu ziehen; dann ist der Schnittpunkt von  $\mathfrak{C}\mathfrak{C} \parallel OJ$  mit  $OC$  der gesuchte Krümmungsmittelpunkt  $\mathfrak{C}$ .

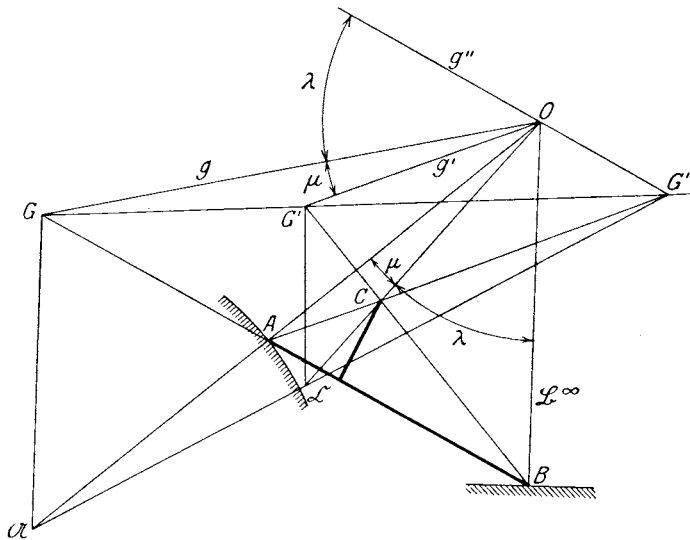


Fig. 122.

beta) Ohne Benützung des Wendepols. Man sucht (Fig. 122) wie vorher den Punkt  $G$  und dreht die Gerade  $g$  um den Winkel  $\mu = AOC$  nach  $g'$ ; sodann bringt man  $g'$  zum Schnitte  $G'$  mit  $BC$  und verbindet  $G'$  mit  $\mathfrak{B}^\infty$ ; der Schnitt von  $G'\mathfrak{B}^\infty$  mit dem Polstrahl  $OC$  ist der gesuchte Krümmungsmittelpunkt  $\mathfrak{C}$ .

Oder man dreht die Gerade  $g$  um den Winkel  $\lambda = BOC$  nach  $g''$ , bringt  $g''$  zum Schnitte  $G''$  mit  $AC$  und verbindet  $G''$  mit  $\mathfrak{A}$ ; auch diese Gerade geht durch  $\mathfrak{C}$ .

Die Konstruktion des Wendepols  $J$  bei der Schubkurbelführung kann auch in folgender Weise vorgenommen werden (Fig. 123):

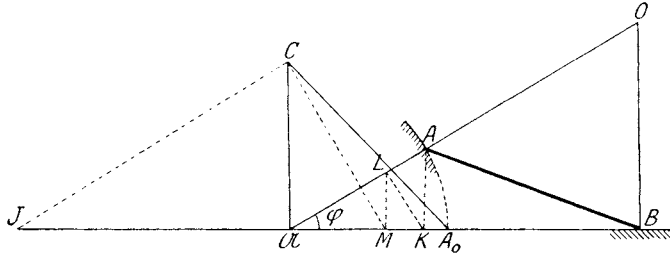


Fig. 123.

Man mache  $r = \overline{A\mathcal{U}} = \overline{A_0\mathcal{U}}$ ,  $l = \overline{AB} = \overline{A_0C}$ ,  $\mathcal{U}C \perp \mathcal{U}B$ ,  $AK \perp \mathcal{U}B$ ,  $KL \perp A\mathcal{U}$ ,  $LM \perp \mathcal{U}B$ ,  $MC \perp CJ$ ; dann ist  $J$  in  $\mathcal{U}B$  der Wendepol.

Die Rechnung der Lage des Wendepols liefert nämlich den Ausdruck:

$$\overline{AJ} = - \frac{l^2 - r^2}{r \cos^2 \varphi},$$

den man zur Übung finden möge (Massot, Étude du mouvement d'une bielle, Rev. Méc. 1912, p. 346).

80. Führung des Kreuzschiebers. (Zweiter Sonderfall der Zweipunktführung.)

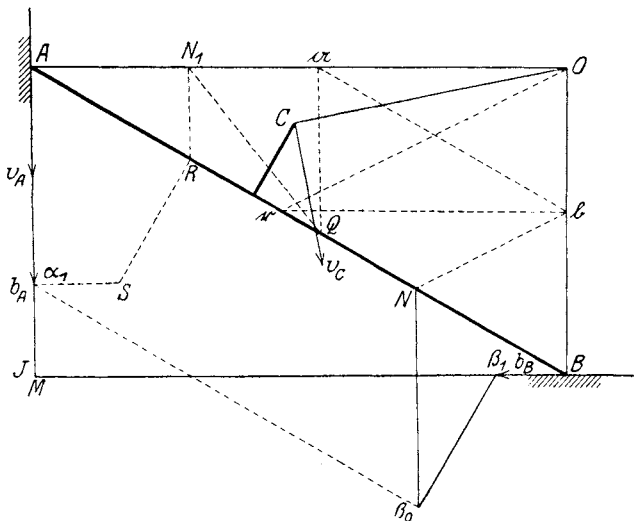


Fig. 124.

a) Der Geschwindigkeitszustand. Ein starres System  $ABC$  (Fig. 124) bewegt sich derart, daß die Punkte  $A$  und  $B$  auf zwei beliebigen Geraden geführt werden. In der Abbildung wurden diese Ge-

raden senkrecht zueinander angenommen; die Änderung der Konstruktion bei einer anderen Lage der Geraden ist unbedeutend. Gegeben ist die Geschwindigkeit  $v_A$ ; es ist  $v_B$  und  $v_C$  zu finden.

Fig. 124a zeigt den Geschwindigkeitsplan; seine Konstruktion geschieht wie früher in Fig. 104 und 104a. Es ist  $\overline{oa} \equiv v_A$ ,  $\overline{ob} \equiv v_B$  und  $oc \equiv v_C$ . Eine Probe kann vorgenommen werden durch Zeichnen des Drehpols  $O$ ; dann muß  $v_C$  senkrecht stehen zu  $OC$ .

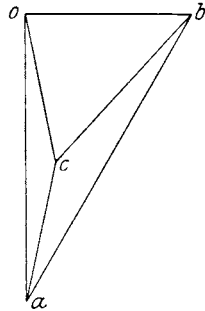


Fig. 124 a.

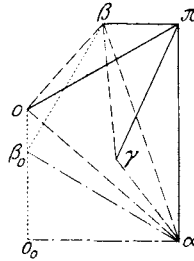


Fig. 124 b.

b) Der Beschleunigungszustand. In Fig. 124 ist die Beschleunigung  $b_A$  gegeben; die Beschleunigungen  $b_B$  und  $b_C$  sind zu zeichnen. Die Krümmungsmittelpunkte  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  fallen in unendliche Entfernung; aus demselben Grunde, der in 79, b erörtert wurde, fallen die Beschleunigungen  $b_A$  und  $b_B$  in die geraden Führungen hinein. Im übrigen ist hier  $b_A$  von  $v_A$  unabhängig und kann beliebig angenommen werden.

Fig. 124b zeigt den Beschleunigungsplan. Es ist  $\overline{\pi a} \equiv b_A$ ,  $\overline{a\beta_0} \equiv n_{BA} = \frac{v_{BA}^2}{BA} = \frac{a b^2}{BA}$  in Richtung von  $BA$ ,  $\beta_0\beta \perp a\beta_0$ ; die Gerade  $\pi\beta$  parallel zur Führung von  $B$  schneidet  $\beta_0\beta$  in  $\beta$  und es ist  $\overline{\pi\beta} \equiv b_B$ .

Man kann den Beschleunigungsplan auch in Fig. 124 selbst unterbringen (vgl. Fig. 106), indem man die gedrehte Geschwindigkeit  $\overline{Aa} = v_A$  zeichnet,  $a\beta \parallel AB$ ,  $\beta r \parallel OA$  und  $\beta N \parallel Or$  zieht, ferner  $\overline{N\beta_0} \equiv b_A$  macht und  $\beta_0\beta_1 \perp AB$  zieht; dann ist  $\overline{B\beta_1} \equiv b_B$ .

Oder man benützt die in Fig. 116 gegebene Konstruktion und zieht in Fig. 124  $aQ \parallel OB$ ,  $QN_1 \parallel aB$ ,  $N_1R \parallel OB$ ,  $RS \perp AB$  und endlich durch den Endpunkt  $\alpha_1$  von  $b_A$  die Parallele zur Führung von  $B$  bis zum Schnittpunkt  $S$ ; dann ist diese Parallele die gesuchte Beschleunigung  $b_B \equiv \overline{S\alpha_1}$ .

Zur Beschleunigung  $b_C$  gelangt man am einfachsten, wenn man

$$a\beta\gamma \sim ABC$$

macht; dann ist  $\overline{\pi\gamma} \equiv b_C$ .

Als Probe kann Folgendes dienen: nach 31 muß der Schnittpunkt  $M$  der beiden Führungsgeraden der Wendepol  $J$  sein, da  $A$  und  $B$  gerade Linien beschreiben; die Beschleunigung des Punktes  $O$  hat aber nach

33 die Richtung  $OJ$ . Zieht man also im Beschleunigungsplan  $\pi o \parallel OJ$  und macht  $\overline{ao_0} \equiv n_{OA} = \frac{v_{OA}^2}{OA} = \frac{a\overline{o}^2}{OA}$  in Richtung  $OA$ , errichtet ferner  $o_0o \perp ao_0$ , so ist  $o$  der Beschleunigungspunkt von  $O$  und da  $a\beta o \sim ABO$  ist, so muß  $\alpha o \beta$  ein rechter Winkel sein.

c) Wendekreis, Krümmungsmittelpunkte, Beschleunigungspol (Fig. 125). Der Wendepol  $J$  wurde bereits in  $M$  gefunden. Der Wendekreis geht durch die vier Punkte  $O, A, J, B$ .

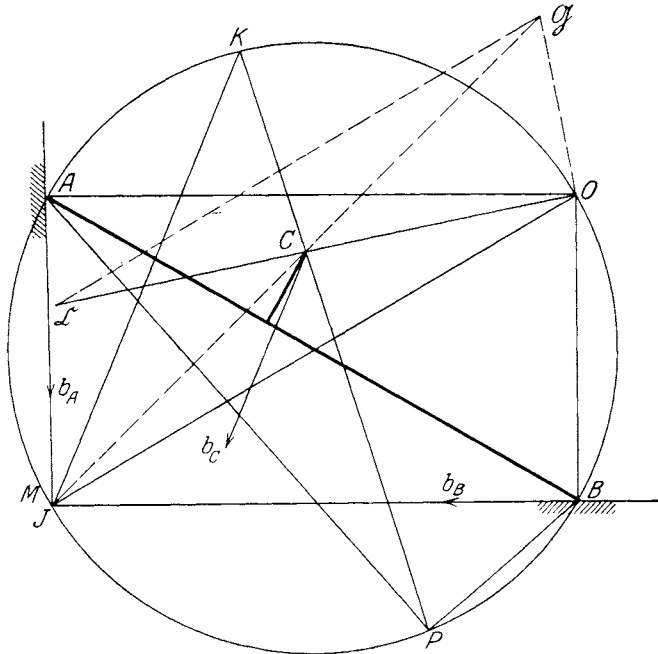


Fig. 125.

Um den Krümmungsmittelpunkt  $\mathcal{C}$  der Bahn eines beliebigen Systempunktes  $C$  zu finden, ziehe man, wie in Fig. 111 erläutert wurde,  $O\mathcal{G} \perp OC$ , suche den Schnitt  $\mathcal{G}$  von  $O\mathcal{G}$  mit  $JC$  und ziehe  $\mathcal{G}\mathcal{C} \parallel OJ$  bis zum Schnitte  $\mathcal{C}$  mit  $OC$ ; dann ist  $\mathcal{C}$  der gesuchte Krümmungsmittelpunkt. Ist ferner die Beschleunigung  $b_C$  eines Punktes  $C$  gegeben, so kann nach Fig. 36 der Beschleunigungspol  $P$  in folgender Weise gefunden werden: man ziehe  $JK \parallel b_C$  bis zum Schnitte mit dem Wendekreis und sodann die Verbindungsgerade  $KC$ ; sie schneidet den Wendekreis im Beschleunigungspol  $P$ . Als Probe kann dienen, daß nach 33 die Winkel

$$PA b_A = PB b_B = PC b_C$$

sein müssen.

**81. Die Punkt- und Kurvenführung. Der Wälzhebel.** In Fig. 126 beschreibt der Punkt  $A$  eine vorgeschriebene Bahn, während die Systemkurve  $b$  sich an der festen Führung  $\beta$  abwälzt.

a) Geschwindigkeitszustand. Es ist die Geschwindigkeit  $v_A$  gegeben; man soll die Geschwindigkeiten der Punkte  $C$  und  $D$  finden.

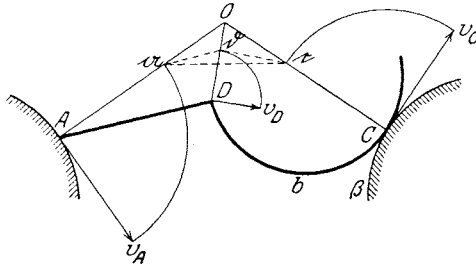


Fig. 126.

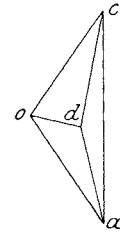


Fig. 126a.

a) Mit Benützung der gedrehten Geschwindigkeiten. Die Normalen in  $A$  und  $C$  schneiden sich im Drehpol  $O$ ; dreht man  $v_A$  um  $90^\circ$  nach  $\overline{A\alpha}$  und zieht  $ac \parallel AC$ , so ist  $\overline{Oc}$  die gedrehte Geschwindigkeit  $v_C$ , die sodann noch um  $90^\circ$  (im Gegensinn der Drehung von  $v_A$ ) gedreht werden muß. Zieht man ferner  $ad \parallel AD$ ,  $cd \parallel CD$ , so ist  $\overline{Dd}$  die gedrehte Geschwindigkeit von  $D$  und die wirkliche ist  $v_D \perp Dd$ . Die Gerade  $Dd$  muß durch den Drehpol  $O$  gehen.

$\beta$ ) Mit Benützung des Geschwindigkeitsplanes. Er wurde in Fig. 126a aus  $\overline{oa} \equiv v_A$  entwickelt; man zieht  $oc$  parallel zur Tangente in  $C$ , sodann  $ac \perp AC$ ; ferner  $ad \perp AD$  und  $cd \perp CD$ ; damit sind die Punkte  $c$  und  $d$  gefunden.

b) Beschleunigungszustand. Diese Führung (Fig. 127) läßt sich auf die Zweipunktführung (77) zurückführen. Wie nämlich schon bei den Hüllbahnen (44) erörtert wurde, beschreibt der Krümmungsmittelpunkt  $B$  der Kurve  $b$  bei ihrer Abwälzung einen kleinen Kreisbogen  $\mathfrak{b}$ , dessen Mittelpunkt der Krümmungsmittelpunkt  $B$  der Kurve  $\beta$  ist. Die augenblickliche Bewegung des Systems kann also durch das Gleiten der Geraden  $AB$  an den Führungen  $\alpha$  und  $\mathfrak{b}$  ersetzt werden; das ist aber nichts anderes als die bereits behandelte Zweipunktführung. Hinsichtlich des Beschleunigungsplanes, des Wendekreises und des Beschleunigungspols kann somit auf jene Führung zurückgegriffen werden.

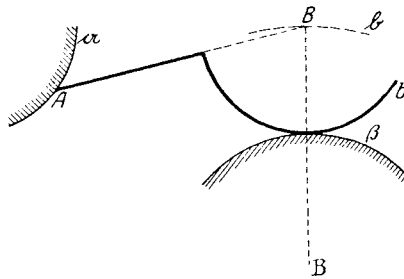


Fig. 127.

Eine spezielle Punkt- und Kurvenführung (Fig. 90) behandelt bereits O. Mohr, Civil-Ingenieur, 1879, S. 617.

Als Anwendung soll der Beschleunigungsplan eines Wälzhebels entwickelt werden, der in Fig. 128 in den Hauptlinien gezeichnet wurde.

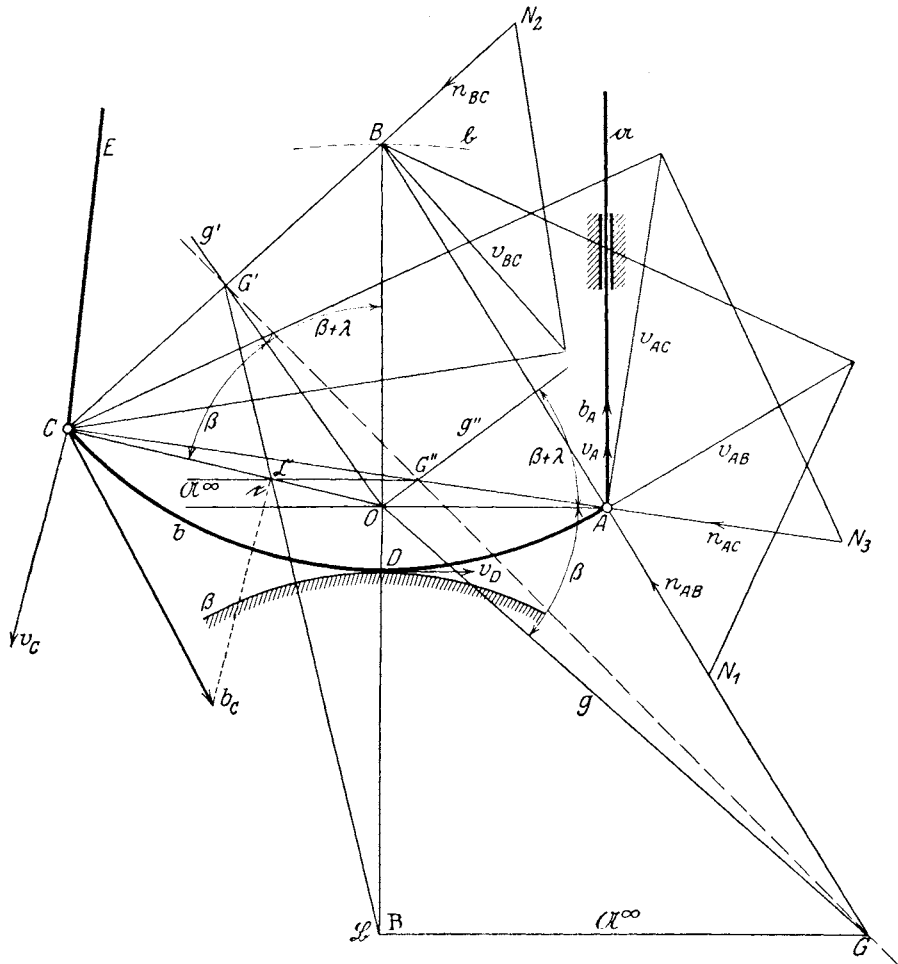


Fig. 128.

Hier ist  $b$  der Wälzhebel, der sich auf der festen Kurve  $\beta$  unter Gleiten abwälzt, und in  $A$  durch die Ventilstange  $a$  gerade geführt wird. Der Antrieb des Wälzhebels erfolgt in  $C$  durch die Exzenterstange  $E$ . Gegeben ist die Beschleunigung  $b_C$ , gesucht sind die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen des Punktes  $A$  und des Berührungspunktes  $D$ .

Die unendlich kleine Bewegung des Krümmungsmittelpunktes  $B$  von  $b$  erfolgt auf dem Kreisbogen  $\beta$ , dessen Mittelpunkt der Krümmungs-





schleunigungsmaßstab derart, daß die orthogonale Projektion von  $b_C$  mit  $C\bar{C}$  zusammenfällt; dann wird auch  $v_C$  durch diesen Krümmungshalbmesser gemessen (vgl. 21).

Mit  $v_C$  wird in Fig. 128a der Geschwindigkeitsplan in bekannter Weise konstruiert, woraus man  $v_A \equiv \overline{oa}$  und  $v_D \equiv \overline{od}$  erhält.

Im Beschleunigungsplan Fig. 128b wird mit  $\overline{\pi\gamma} \equiv b_C$  begonnen und durch  $\pi$  die Parallele zur Führung  $a$  gezogen; auf ihr muß der Beschleunigungspunkt  $a$  liegen.

Ferner wird

$$\overline{\gamma a_0} \equiv n_{AC} = \frac{v_{AC}^2}{AC} = \frac{\overline{ca}^2}{AC} = \overline{N_3 A} \text{ in Richtung } AC$$

und  $a_0 a \perp \gamma a_0$  bis zum Schnitte mit  $\pi a$  gezeichnet, wodurch der Beschleunigungspunkt  $a$  gefunden ist. Da aber dieser Schnitt ziemlich schief ausfallen wird, empfiehlt es sich, einen anderen Weg zur Gewinnung von  $a$  einzuschlagen. Man zeichnet also

$$\overline{\gamma \beta_0} \equiv n_{BC} = \frac{v_{BC}^2}{BC} = \frac{\overline{cb}^2}{BC} = \overline{N_2 B} \text{ in Richtung } BC$$

und  $\beta_0 \beta \perp \gamma \beta_0$ ; auf dieser Senkrechten muß der Beschleunigungspunkt  $\beta$  liegen. Um ihn zu finden, benütze man die Ähnlichkeit der Dreiecke  $a\beta\gamma$  und  $ABC$  (vgl. 25).

Man nimmt auf  $\pi a$  zwei beliebige Punkte  $a'$  und  $a''$  an, zeichnet die Dreiecke  $a'\beta'\gamma$  und  $a''\beta''\gamma$  ähnlich zu  $ABC$  und verbindet die Punkte  $\beta'$  und  $\beta''$  durch eine Gerade, den geometrischen Ort der Punkte  $\beta$ . Im Schnitte von  $\beta'\beta''$  mit  $\beta_0\beta$  findet man den richtigen Beschleunigungspunkt  $\beta$ .

Nun bestimmt man noch

$$\overline{\beta_1 a} \equiv n_{AB} = \frac{v_{AB}^2}{AB} = \frac{\overline{ba}^2}{AB} = \overline{N_1 A} \text{ in Richtung } AB$$

und  $\beta\beta_1 \perp \beta_1 a$ , wodurch der Punkt  $a$  genauer als früher bestimmt ist. Damit ist  $b_A \equiv \pi a$  gefunden.

Macht man endlich  $a\beta\gamma\delta \sim ABCD$ ,

so ist auch der Beschleunigungspunkt  $\delta$  und die Beschleunigung  $b_D = \pi\delta$  des Berührungspunktes  $D$  gewonnen.

**82. Kulissenführung.** (Erster Sonderfall der Punkt- und Kurvenführung.) In Fig. 127a ist der Fall angenommen, daß die

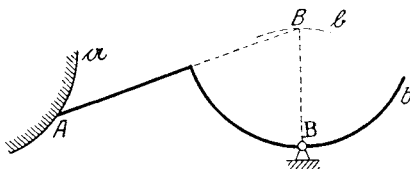


Fig. 127 a.

Führungskurve  $\beta$  in den Punkt B einschrumpft, durch den die Systemkurve  $b$  bei ihrer Bewegung hindurchgleitet. Auch dieser Fall kann auf das Gleiten der Geraden  $AB$  an den Führungen  $a$  und  $b$  zurückgeführt werden. Wir wollen eine

Anwendung auf die Kulissenführung machen. In Fig. 129 gleitet die nach einem Kreisbogen geformte Kulisse  $b$  an einem kurzen, passend geformten Körper, dem Stein, der um den festen Punkt  $B$  drehbar ist. Das eine Ende der Kulisse ist durch eine Stange mit dem Punkt  $A$

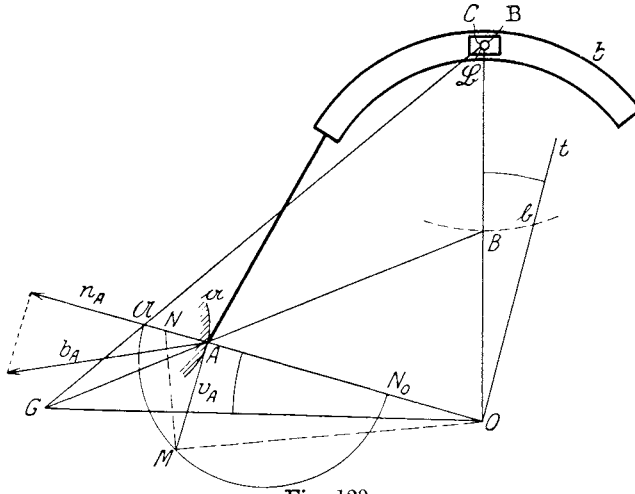


Fig. 129.

verbunden, der auf der Kurve  $a$  geführt wird. Es ist die Beschleunigung  $b_A$  gegeben; man soll die Beschleunigung  $b_C$  jenes Systempunktes  $C$  bestimmen, der augenblicklich mit dem festen Punkt  $B$  zusammenfällt.

Aus  $b_A$  wird zunächst die Geschwindigkeit  $v_A$  in bekannter Weise entwickelt, indem man  $b_A$  auf  $A\mathfrak{A}$  projiziert, die erhaltene Projektion  $n_A$  nach  $\overline{AN_0}$  überträgt, über  $\mathfrak{A}N_0$  den Halbkreis beschreibt, der die Tangente von  $a$  in der Entfernung  $v_A$  von  $A$  schneidet.

Um nun die gestellte Aufgabe zu lösen, kann man sich mehrerer Methoden bedienen.

a) Mit Benützung des Drehpols. Der Mittelpunkt  $B$  der Kulisse ist ein Systempunkt, der einen Kreisbogen  $b$  um den festgehaltenen Punkt  $B$  oder  $\mathfrak{B}$  beschreibt; die Kulissenführung kann also auf die Zweipunktführung an  $a$  und  $b$  zurückgeführt werden. Der Schnitt von  $\mathfrak{A}A$  mit  $\mathfrak{B}B$  gibt den Drehpol  $O$ ; der Schnitt von  $AB$  mit  $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$  wurde wie in Fig. 112 mit  $G$  bezeichnet. Dort wurde auch gezeigt, daß die Übertragung des Winkels  $GOA$  nach  $BOt$  (Bobilliersehe Konstruktion) die Poltangente  $Ot$  liefert. Die Beschleunigung von  $O$  steht aber zu ihr senkrecht (33); man wird also im Beschleunigungsplan Fig. 129 a:

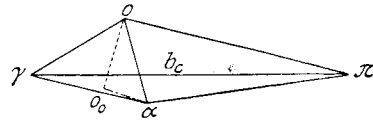


Fig. 129 a.

$\overline{\pi a} \equiv b_A$  machen und durch  $\pi$  die Senkrechte  $\pi o$  auf  $Ot$  ziehen. Verbindet man ferner  $O$  mit  $M$  und zieht  $MN$  dazu senkrecht, so ist

$$\overline{AN} = \frac{v_{OA}^2}{OA} = \frac{v_A^2}{OA} = n_{OA} \text{ in Richtung von } OA,$$

welches Stück von  $a$  aus nach  $o_0$  aufgetragen und in  $o_0$  auf  $ao_0$  die Senkrechte errichtet wurde; sie geht durch den Beschleunigungspunkt  $o$  des Drehpols  $O$ , womit dessen Beschleunigung  $\overline{\pi o} \equiv b_o$  gefunden ist.

Macht man nun

$$\alpha\gamma o \sim ACO,$$

so ist auch die gesuchte Beschleunigung  $b_C \equiv \overline{\pi\gamma}$  gefunden.

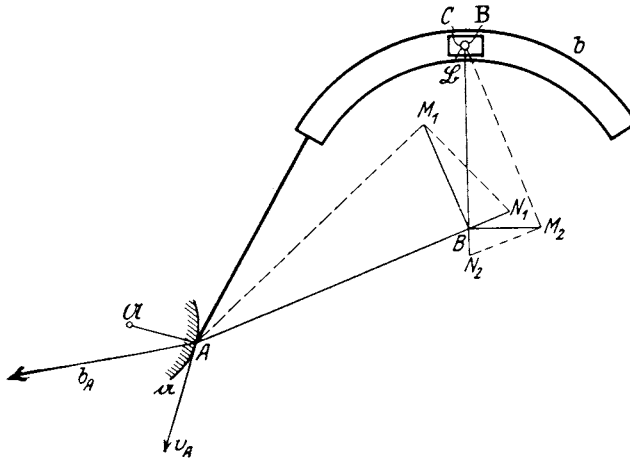


Fig. 130.

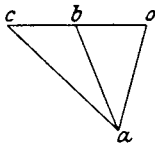


Fig. 130 a.

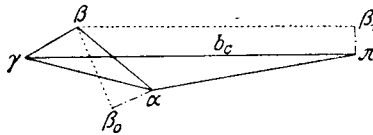


Fig. 130 b.

$\beta$ ) Ohne Benützung des Drehpols. Nachdem in Fig. 130 wie früher die Geschwindigkeit  $v_A$  ermittelt wurde, zeichnet man in Fig. 130a den Geschwindigkeitsplan, indem man  $\overline{oa} \equiv v_A$  macht,  $oc \perp BC$ ,  $ac \perp AC$  und  $ab \perp AB$  zieht. Im Beschleunigungsplan Fig. 130b wird von  $a$  aus

$$\overline{a\beta_0} = n_{BA} = \frac{v_{BA}^2}{BA} = \frac{ab^2}{BA} = \overline{N_1B} \text{ in Richtung } BA$$

aufgetragen, nachdem man diese Strecke früher mit Hilfe von  $AM_1N_1$  konstruiert hat; sodann wird

$$\overline{\pi\beta_1} \equiv n_B = \frac{v_B^2}{B\mathfrak{B}} = \frac{ob^2}{B\mathfrak{B}} = \overline{N_2B} \text{ in Richtung } B\mathfrak{B}$$

aufgetragen, nachdem auch diese Strecke vorher mit Hilfe von  $\mathfrak{B}M_2N_2$  gezeichnet wurde. Die Senkrechten  $\beta_0\beta \perp a\beta_0$  und  $\beta_1\beta \perp \pi\beta_1$  treffen sich im Beschleunigungspunkt  $\beta$ . Macht man dann

$$a\beta\gamma \sim ABC,$$

so ist auch der Beschleunigungspunkt  $\gamma$  und damit  $b_C \equiv \overline{\pi\gamma}$  gefunden.

**83. Konchoidenführung.** (Zweiter Sonderfall der Punkt- und Kurvenführung.) In Fig. 131 schleift eine Gerade  $b$  des Systems

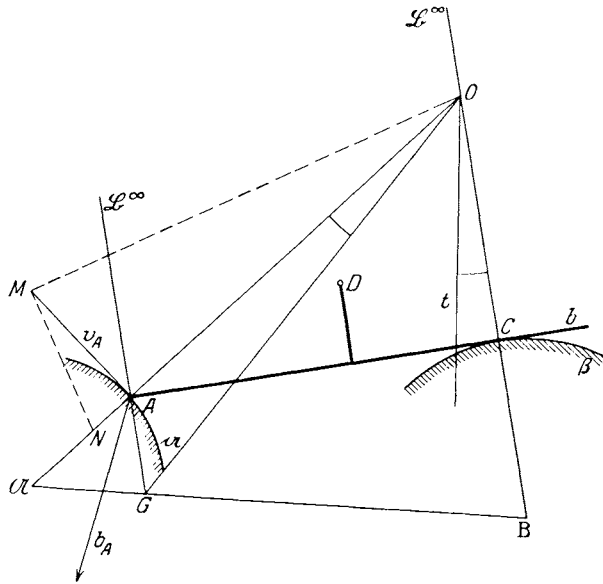


Fig. 131.

an einer festen Kurve  $\beta$ , deren Krümmungsmittelpunkt  $B$  gegeben ist; der Punkt  $A$  wird an einer Kurve  $a$  geführt. Seine Beschleunigung  $b_A$  ist gegeben; es soll die Beschleunigung  $b_D$  eines beliebigen Systempunktes  $D$  und jene des Berührungspunktes  $C$  gefunden werden.

Man beginnt damit, die Beschleunigung  $b_O$  des Drehpols  $O$  zu bestimmen. Der Krümmungsmittelpunkt  $\mathfrak{B}$  von  $b$  liegt unendlich fern; im Schnitte von  $\mathfrak{A}A$  und  $B\mathfrak{B}^\infty$  liegt der Drehpol  $O$  des Systems. Verbindet man  $A$  mit  $\mathfrak{B}^\infty$  und  $\mathfrak{A}$  mit  $B$ , so ist der Schnitt dieser beiden Linien der Punkt  $G$  (vgl. Fig. 112); zieht man  $OG$  und macht nach der Bobillierschen Konstruktion  $\sphericalangle GOA = \mathfrak{B}^\infty Ot$ , so ist  $Ot$  die Poltangente und senkrecht zu ihr die Polnormale, die nach dem Wendepol führt. Sie gibt die Richtung der Beschleunigung von  $O$  an.

Im Beschleunigungsplan (Fig. 131 a) wird  $\overline{\pi\alpha} \equiv \overline{b_A}$  gemacht und  $\pi o \perp Ot$  gezogen.

Aus  $b_A$  kann in bekannter Weise  $v_A$  gewonnen werden und daraus

$$n_{OA} = \frac{v_{OA}^2}{OA} = \frac{v_A^2}{OA} = \overline{AN}$$

in Richtung  $OA$ ;

macht man  $\overline{ao_0} \equiv \overline{AN}$  und errichtet  $o_0 o \perp ao_0$ , so schneidet  $o_0 o$  die Gerade  $\pi o$  im Beschleunigungspunkt  $o$  von  $O$ .

Die Beschleunigungspunkte  $\gamma$  und  $\delta$  können dann aus den Ähnlichkeiten

$$\alpha\gamma o \sim ACO, \alpha\delta o \sim ADO$$

entnommen werden und es ist

$$\overline{\pi\gamma} \equiv \overline{b_C}, \overline{\pi\delta} \equiv \overline{b_D}.$$

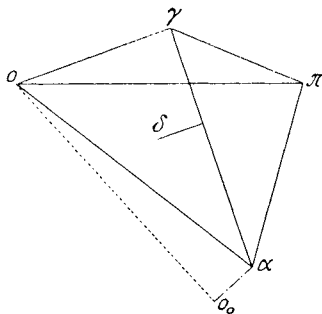


Fig. 131 a.

**84. Führung der schwingenden Kurbelschleife.** (Dritter Sonderfall der Punkt- und Kurvenführung.) In Fig. 132 gleitet der Punkt  $A$  an einer festen Kurve, während die Gerade  $b$  durch einen festen Punkt  $B$  hindurchgeht; die feste Führungskurve  $\beta$  schrumpft also in einen Punkt ein.

a) Geschwindigkeitszustand. Die Geschwindigkeit  $v_A$  sei gegeben; es ist die Geschwindigkeit  $v_C$  des Punktes  $C$  der Geraden  $b$  zu

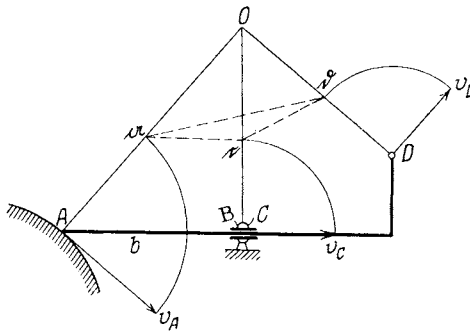


Fig. 132.

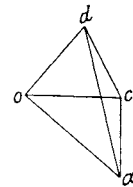


Fig. 132 a.

finden, der augenblicklich mit  $B$  zusammenfällt (Mittelpunkt der Hülse), ferner die Geschwindigkeit  $v_D$  eines beliebigen Systempunktes  $D$ .

a) Mit Benützung der gedrehten Geschwindigkeiten. Da  $C$  der Gleitpunkt der Geraden  $b$  ist, liegt der Drehpol in der Geraden  $CO \perp b$ .

Aus der gedrehten Geschwindigkeit  $\overline{Aa} = v_A$  wird dann  $v_C = \overline{Cc}$  gefunden durch Ziehen von  $ac \parallel AC$ ; ebenso  $v_D = \overline{Dd}$  durch Ziehen von  $ad \parallel AD$ ,  $cd \parallel CD$ ; die Gerade  $Dd$  muß durch  $O$  gehen.

$\beta$ ) Mit Benützung des Geschwindigkeitsplanes. Er wurde in Fig. 132 a aus  $\overline{oa} \equiv v_A$  entwickelt, indem  $oc \parallel b$ ,  $ac \perp b$  gezogen

wurde, um den Geschwindigkeitspunkt  $c$  zu erhalten; sodann  $ad \perp AD$ ,  $cd \perp CD$ , womit auch der Geschwindigkeitspunkt  $d$  gefunden ist.

b) Der Beschleunigungszustand (Fig. 132b). Wir wollen den Normalfall voraussetzen, d. h. sowohl  $v_A$  wie auch  $b_A$  seien durch die

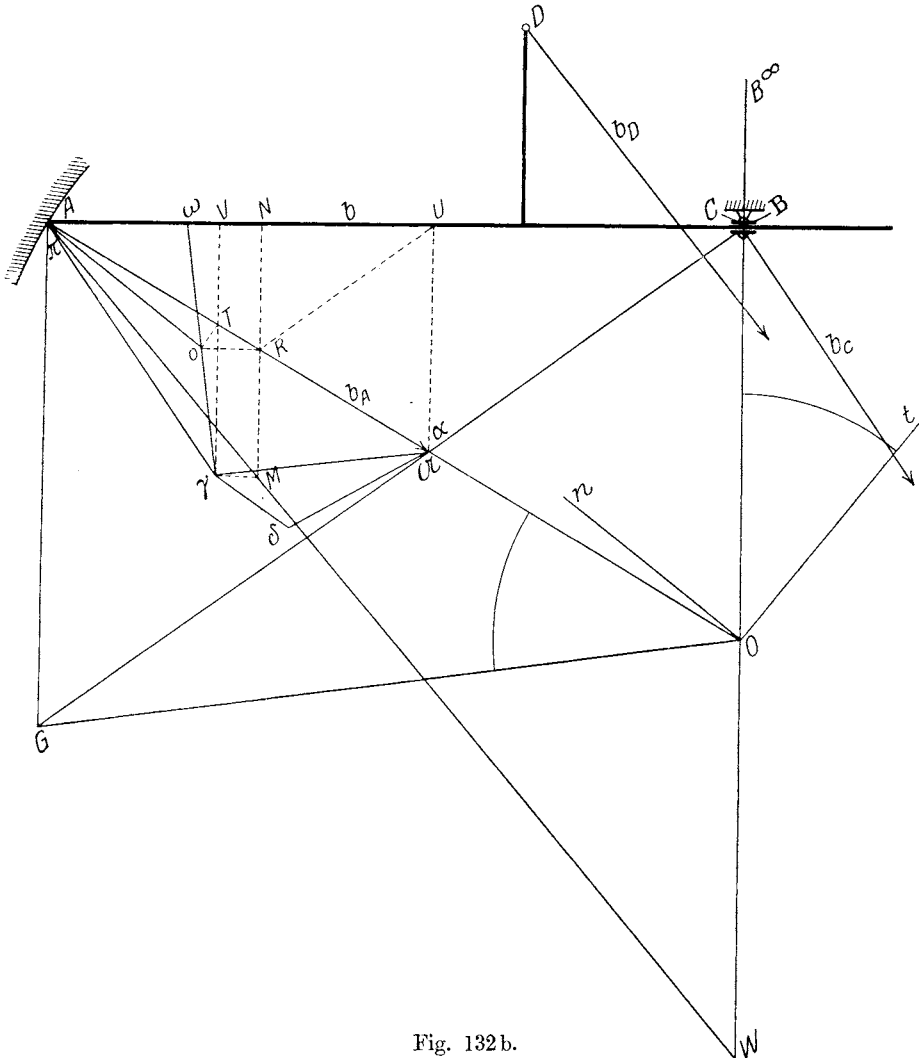


Fig. 132b.

Länge  $A\mathcal{A}$  gegeben, wobei  $\mathcal{A}$  der zu  $A$  gehörende Krümmungsmittelpunkt ist. Es ist die Beschleunigung  $b_D$  irgend eines mit  $b$  festverbundenen Punktes  $D$  zu finden.

Man beginnt damit, die Beschleunigung  $b_C$  jenes Punktes  $C$  der Geraden  $b$  zu ermitteln, der augenblicklich mit dem festen Punkt  $B$  (Mittelpunkt der drehbaren Hülse) zusammenfällt.

Bringt man den Geschwindigkeitsplan in der Abbildung selbst unter, nachdem man ihn um  $90^\circ$  gedreht hat, so ist  $\overline{A\mathfrak{U}} = v_A$ ; zieht man  $\mathfrak{U}U \perp b$ , so ist  $\overline{U\mathfrak{U}} = v_C$  und  $\overline{UA} = v_{CA}$ ;

denn es ist  $v_C = v_A + v_{CA}$ .

Auch der Beschleunigungsplan soll in die Abbildung verlegt und  $A$  als Nullpunkt  $\pi$  gewählt werden. Dann ist

$$\overline{A\mathfrak{U}} = \overline{\pi a} = b_A.$$

Um die Beschleunigung von  $C$  zu finden, suchen wir zuerst die Beschleunigung von  $O$  mit Hilfe von  $b_O = b_A + n_{OA} + t_{OA}$ .

Die Gerade  $b$  umhüllt den festen Punkt  $B$ ; in 45 fanden wir den Satz: Alle Hüllbahnen, die von Geraden des bewegten Systems beschrieben werden, haben ihre Krümmungsmittelpunkte auf dem Rückkehrkreise; es liegt demnach  $B$  und somit auch  $C$  auf dem Rückkehrkreise. Verlängert man  $CO$  und macht  $\overline{CO} = \overline{OW}$ , so liegt der Punkt  $W$  auf dem Wendekreise (vgl. Fig. 45). Da aber  $W$  ein Wendepunkt seiner Bahn ist und augenblicklich eine Gerade beschreibt, die durch den Wendepol  $J$  geht, muß die Richtung der Beschleunigung  $b_W$  ebenfalls durch  $J$  gehen;  $b_W$  ist also senkrecht zu  $OW$ . Der zu  $W$  gehörige Beschleunigungspunkt  $\omega$  muß somit auf der Geraden  $AC$  liegen.

Zieht man  $UR \parallel B\mathfrak{U}$  bis  $A\mathfrak{U}$  und  $RN \perp b$  bis  $b$ , so ist

$$\overline{AR} : \overline{A\mathfrak{U}} = \overline{AU} : \overline{AC} = \overline{A\mathfrak{U}} : \overline{AO}$$

und 
$$\overline{AR} = \frac{\overline{A\mathfrak{U}}^2}{\overline{AO}} = \frac{v_A^2}{AO} = n_{AO}.$$

Macht man  $\overline{AR} = \overline{T\mathfrak{U}}$ , so ist  $\overline{aT} = n_{OA}$ ; wird in  $T$  die Senkrechte auf  $\mathfrak{U}T$  errichtet, so muß in ihr der zu  $O$  gehörige Beschleunigungspunkt  $o$  liegen nach der Gleichung

$$b_O = b_A + n_{OA} + t_{OA} = \overline{\pi a} + \overline{aT} + \overline{T\mathfrak{U}} = \overline{\pi o}.$$

Andererseits sind, da  $C$  und  $W$  von  $O$  gleichweit entfernt sind, die Geschwindigkeiten  $v_C$  und  $v_W$  gleich groß und die Normalbeschleunigung

$$n_{WO} = \frac{v_W^2}{\overline{WO}} = \frac{v_C^2}{\overline{OC}};$$

es ist aber

$$\overline{OC} : v_C = \overline{OC} : \overline{\mathfrak{U}U} = \overline{\mathfrak{U}B} : \overline{RU} = \overline{\mathfrak{U}U} : \overline{RN},$$

somit 
$$\overline{RN} = \frac{\overline{\mathfrak{U}U}^2}{\overline{OC}} = n_{WO}.$$

Da aber der Beschleunigungspunkt  $\omega$  in  $b$  liegen muß, geht  $Ro \parallel b$  durch den Beschleunigungspunkt  $o$  hindurch.  $o$  ist also der Schnitt von  $To$  mit  $Ro$ .

Eine Prüfung der Richtigkeit der Konstruktion kann in gleicher Weise wie bei der Führung in 82 vorgenommen werden. Man verbindet

$A$  mit  $B^\infty$ , d. h. zieht  $AG \perp b$  bis zum Schnitte  $G$  mit  $B\mathfrak{A}$ , verbindet  $G$  mit  $O$  und überträgt den Winkel  $GOA = COt$ ; dann ist  $Ot$  die Poltangente,  $On \perp Ot$  die Polnormale und parallel zu ihr  $\pi o$ , die Beschleunigung von  $O$ .

Um den Beschleunigungspunkt  $\gamma$  von  $C$  zu finden, beachte man, daß  $\omega o\gamma \sim WOC$ , also  $\overline{\omega o} = \overline{o\gamma}$  sein muß; verlängert man also  $NR$  bis zum Schnitte  $M$  mit  $AW$ , so ist  $\overline{NR} = \overline{RM}$ ; zieht man dann  $M\gamma \parallel b$ , so hat man in  $M\gamma$  eine durch  $\gamma$  gehende Gerade. Es ist die Entfernung

$$\overline{\gamma V} = 2 \cdot \overline{RN}.$$

Die Normalbeschleunigung  $n_{CA}$  ist  $\frac{v_{CA}^2}{CA}$ ; nun ist aber  $v_{CA} = \overline{UA}$  und

$$CA : \overline{UA} = \mathfrak{A}A : \overline{RA} = \overline{UA} : \overline{NA}$$

oder 
$$\overline{NA} = \frac{\overline{UA}^2}{CA} = \frac{v_{CA}^2}{CA} = n_{CA}$$

und ferner  $\overline{NA} = \overline{UV}$ ; also muß  $\gamma$  in der Geraden  $VT$  liegen.  $\gamma$  liegt somit im Schnitte von  $M\gamma$  mit  $VT$ .

Als Probe kann dienen, daß die Dreiecke  $\alpha\gamma o$  und  $ACO$  ähnlich sind, also der Winkel  $\alpha\gamma o$  ein Rechter sein muß. Damit ist  $b_C \equiv \overline{\pi\gamma}$  gefunden.

Die Projektion  $\overline{AV}$  dieser Beschleunigung  $b_C$  auf die Gerade  $b$  ist die Beschleunigung  $b_r$ , mit der sich  $b$  bei  $B$  in der Hülse verschiebt (relative Beschleunigung).

Wiederholen wir im Kurzen die Konstruktion von  $b_C$ : Man ziehe in Fig. 132b:  $\mathfrak{A}U \perp b$ ,  $UR \parallel B\mathfrak{A}$ ,  $NRM \perp b$ , mache  $\overline{NR} = \overline{RM}$  und ziehe  $M\gamma \parallel b$ ; mache endlich  $\overline{UV} = \overline{NA}$  und ziehe  $V\gamma \perp b$ . Dann ist  $\overline{\pi\gamma} \equiv b_C$ .

Um die Beschleunigung  $b_D$  eines beliebigen Systempunktes  $D$  zu finden, hat man nur das Dreieck  $\alpha\gamma\delta \sim ACD$  zu übertragen; dann ist  $\overline{\pi\delta} \equiv b_D$ .

Man vergleiche mit dieser Konstruktion die Fig. 398 in 206, wo dieselbe Aufgabe mit Benützung der Zusatzbeschleunigung von Coriolis gelöst wurde.

c) Wendekreis und Beschleunigungspol. In Fig. 133 wurde die Führung nochmals gezeichnet, die Punkte  $O$  und  $W$  wie früher gefunden, ebenso der Punkt  $G$ . Nach der in Fig. 111 mitgeteilten Konstruktion wird man  $OH \parallel \mathfrak{A}\mathfrak{B}$  ziehen bis zum Schnitte  $H$  mit  $AB^\infty$ , sodann  $HW_1 \parallel GO$ , wodurch  $AO$  in  $W_1$  geschnitten wird. Die Geraden  $W_1J \perp OW_1$ ,  $WJ \perp OW$  gehen sodann durch den Wendepol  $J$ .

Man kann diese Konstruktion auch dahin vereinfachen, daß man  $\overline{OA_1} = \overline{AO}$  und  $A_1J \parallel b$  macht, ferner  $\mathfrak{A}U \perp b$ ,  $CW_1 \parallel UO$  zieht bis zum Schnitte  $W_1$  mit  $AO$  und endlich  $W_1J \perp AO$  errichtet; der Schnitt von  $A_1J$  und  $W_1J$  ist dann der Wendepol  $J$ .

Ist die Beschleunigung  $b_A$  gegeben, so kann der Beschleunigungspol  $P$  in folgender Weise bestimmt werden. Man zeichnet über  $\overline{OJ}$



als Durchmesser den Wendekreis, sodann  $JK \parallel b_A$  bis zum Schnitte  $K$  mit dem Wendekreis und verbindet  $K$  mit  $A$ ; der Schnitt der Geraden  $AK$  mit dem Wendekreise ist der Beschleunigungspol  $P$ .

Oder ohne Benützung des Wendekreises: man zieht durch  $O$  die Poltangente  $Ot \perp OJ$ , zieht ferner wie früher  $JK \parallel b_A$ ,  $OK \perp b_A$ , verbindet  $K$  mit  $A$ , zieht  $OQ \parallel b_A$  bis zum Schnitte  $Q$  mit  $AK$ ,  $QT \perp b_A$  bis zum Schnitte  $T$  mit  $Ot$  und verbindet  $T$  mit  $J$ ; der Schnitt von  $TJ$  mit  $AK$  ist der Beschleunigungspol  $P$ .

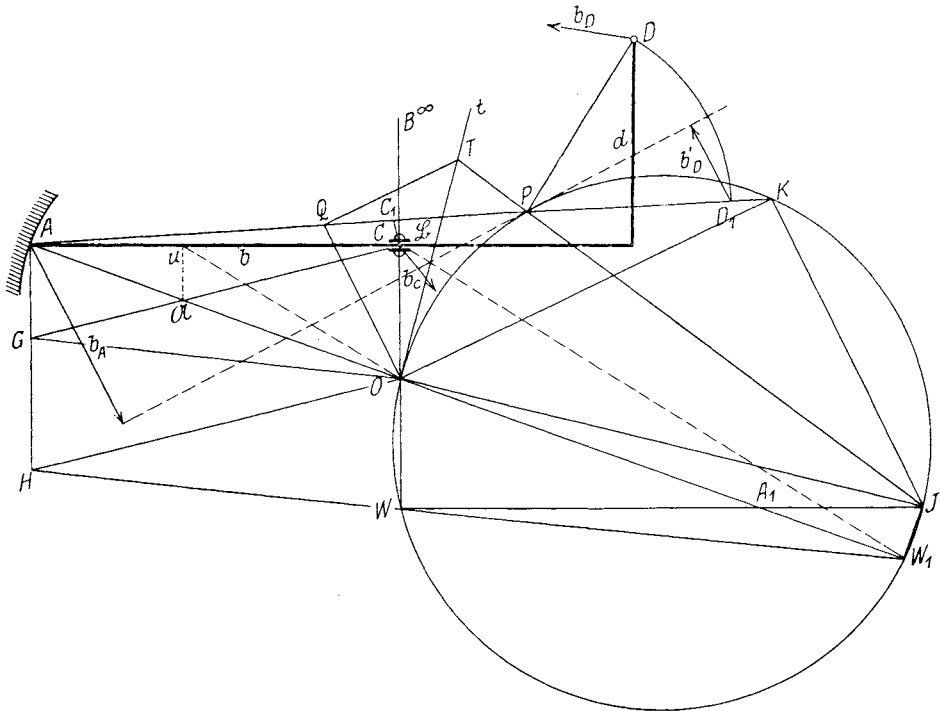


Fig. 133.

Um die Beschleunigung des Punktes  $D$  zu finden, der mit  $b$  durch einen starren Arm  $d$  verbunden ist, kann man statt wie in Fig. 132b den Beschleunigungsplan auch den Beschleunigungspol benützen. Man sucht auf  $AP$  den Punkt  $D_1$  derart auf, daß  $\overline{PD} = \overline{PD_1}$  ist, verbindet die Spitze von  $b_A$  mit  $P$  und zieht  $b_{D'} \parallel b_A$  durch  $D_1$  bis zu dieser Geraden; dann ist  $b_{D'}$  die Beschleunigung von  $D_1$ , die sodann noch um  $P$  bis  $D$  zu drehen ist, um  $b_D$  zu erhalten. Ebenso wurde in Fig. 133 auch die Beschleunigung  $b_C$  aus  $C_1$  ermittelt.

**85. Die Zweikurvenführung.** In Fig. 134 gleiten die beiden Systemkurven  $a$  und  $b$  an den beiden festen Kurven  $\alpha$  und  $\beta$ .

a) Geschwindigkeitszustand. Es ist die Geschwindigkeit des Systempunktes  $C$  gegeben, der augenblicklich der Berührungspunkt

der Kurven  $a$  und  $\alpha$  ist. Man soll die Geschwindigkeit des anderen Berührungspunktes  $D$ , sowie jene eines beliebigen Systempunktes  $E$  konstruieren.

a) Mit Benützung der gedrehten Geschwindigkeiten.  $v_C$  fällt in die Tangente der Kurven  $a$  und  $\alpha$ . Dreht man  $v_C$  um  $90^\circ$  in die

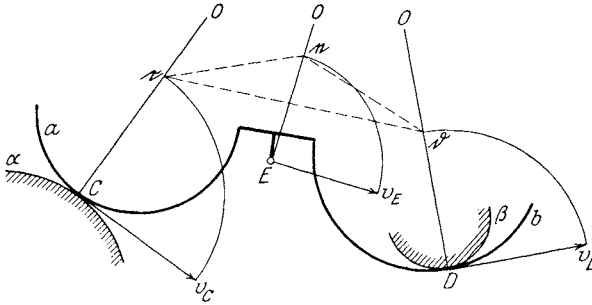


Fig. 134.

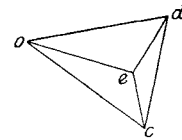


Fig. 134 a.

Normale nach  $Cc$  und zieht  $cd \parallel CD$  bis zur Normalen in  $D$ , so ist  $\overline{Dd} = v_D$ ; dies muß sodann noch in die Tangente nach  $v_D$  gedreht werden und zwar im Gegensinne der Drehung von  $v_C$ .

Zieht man  $ce \parallel CE$ ,  $de \parallel DE$ , so erhält man den Schnittpunkt  $e$  und es ist  $Ee$  die gedrehte Geschwindigkeit  $v_E$ . Die Gerade  $Ee$  muß durch den Schnitt  $O$  der beiden Normalen in  $C$  und  $D$ , dem Drehpol, gehen.

$\beta$ ) Mit Benützung des Geschwindigkeitsplanes. Er wurde in Fig. 134a aus  $\overline{oc} \equiv v_C$  in bekannter Weise entwickelt.

b) Beschleunigungszustand. In Fig. 135 gleiten die beiden Systemkurven  $a$  und  $b$  an den beiden festen Kurven  $\alpha$  und  $\beta$ . Was in

81 von der Führung der Kurve  $b$  an der Hüllbahn  $\beta$  ausgesagt wurde, kann hier auch von der zweiten Führungskurve  $a$  und ihrer Hüllbahn  $\alpha$  behauptet werden. Die Krümmungsmittelpunkte  $A$  und  $B$  der Führungskurven  $a$  und  $b$  beschreiben in den zwei nächsten Zeiteilchen kleine Kreisbögen  $a$  und  $b$  um die festliegenden Krümmungsmittelpunkte  $A$  und  $B$  der Hüllbahnen  $\alpha$  und  $\beta$ ; da-

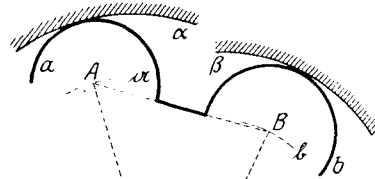


Fig. 135.

durch wird aber die Zweikurvenführung auf eine Zweipunktführung zurückgeleitet, bei der eine starre Strecke  $AB$  mit ihren Endpunkten auf den Bögen  $a$  und  $b$  geführt wird<sup>1)</sup>. Beschleunigungsplan, Weendekreis, Beschleunigungspol und Krümmungsmittelpunkte können dann

<sup>1)</sup> Vgl. L. Burmester, Kinematik, S. 30.

in der gleichen Weise bestimmt werden, wie dies bei der Zweipunktführung (77, 78) ausführlich geschildert wurde.

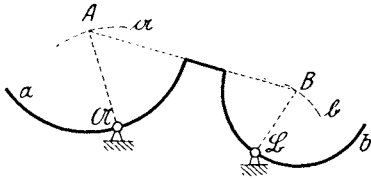


Fig. 136.

**86. Sonderfälle der Zweikurvenführung. Dritter Sonderfall.** In Fig. 136 gleiten die beiden Kurven  $a$  und  $b$  des bewegten Systems durch die festliegenden Punkte  $\mathfrak{U}$  und  $\mathfrak{B}$  hindurch; letztere sind als drehbare Kreisbogenhülsen ausgebildet.

Auch diese Führung läßt sich wie die vorige, allgemeinere auf die Führung der Strecke  $AB$  an den Kurven  $a$  und  $b$ , das sind kleine Kreisbögen mit den Mittelpunkten  $\mathfrak{U}$  und  $\mathfrak{B}$ , zurückleiten.

**Sechster Sonderfall.** In Fig. 137 schleift der rechte Winkel  $a, b$  mit der starren Ecke  $E$  an den beiden festen Kurven  $a, \beta$ . Ihre Krüm-

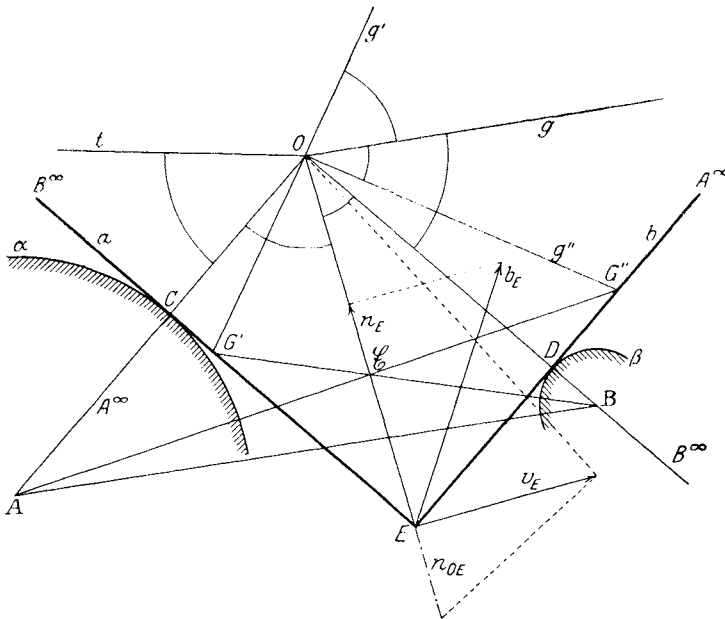


Fig. 137.

mungsmittelpunkte  $A$  und  $B$  sind gegeben; die Krümmungsmittelpunkte  $A$  und  $B$  der schleifenden Kurven  $a$  und  $b$  liegen hier in unendlicher Entfernung.

a) Beschleunigungszustand. Gegeben ist die Beschleunigung  $b_E$ . Es sollen die Beschleunigungen der Berührungspunkte  $C$  und  $D$  gefunden werden.

Zunächst braucht man die Geschwindigkeit  $v_E$  und hierzu den Krümmungshalbmesser von  $E$ . Dabei verfährt man wie in Fig. 47. Der Drehpol  $O$  liegt im Schnitte der Geraden  $AA^\infty$  und  $BB^\infty$ ; da die Gerade  $AB$  unendlich fern ist, ist die Gerade  $Og \parallel AB$ .

Um den Krümmungsmittelpunkt  $\mathfrak{E}$  von  $E$  zu erhalten, überträgt man den Winkel  $A^\infty OE$  nach  $gOg'$ , bringt  $g'$  zum Schnitte  $G'$  mit  $EB^\infty$  und verbindet  $G'$  mit  $B$ ; diese Gerade geht durch den gesuchten Krümmungsmittelpunkt  $\mathfrak{E}$ , der auch auf  $OE$  liegt.

Oder man überträgt den Winkel  $B^\infty OE$  nach  $gOg''$  und bringt  $g''$  zum Schnitte  $G''$  mit  $EA^\infty$ ; dann geht  $AG''$  ebenfalls durch  $\mathfrak{E}$ .

Aus dem Krümmungshalbmesser  $E\mathfrak{E}$  und der Projektion von  $b_E$  auf ihn, der Normalbeschleunigung  $n_E$ , kann dann die Geschwindigkeit  $v_E$  in bekannter Weise gefunden werden (in der Fig. 137 nicht gezeichnet).

Aus  $v_E$  wurde in Fig. 137a der Geschwindigkeitsplan entwickelt.

Im Beschleunigungsplan (Fig. 137b) wurde zunächst aus  $\pi \varepsilon \doteq b_E$  der Beschleunigungspunkt  $o$  von  $O$  gesucht. Die Poltangente  $Ot$  in Fig. 137 findet man durch Übertragung des Winkels

$$gOB^\infty = A^\infty Ot;$$

$\pi o$  hat die Richtung der Polnormale und ist senkrecht zu  $Ot$ .

Ferner wurde konstruiert

$$\varepsilon o_0 \doteq n_{OE} = \frac{v_{OE}^2}{OE} = \frac{eo^2}{OE} \text{ in Richtung } OE$$

(in Fig. 137 angedeutet) und  $o_0 o \perp \varepsilon o_0$  gezogen; im Schnitte von  $\pi o$  mit  $o_0 o$  liegt der Beschleunigungspunkt  $o$ .

Macht man  $o\gamma\varepsilon\delta \simeq OCED$ , so sind auch die Beschleunigungen  $b_C \doteq \pi\gamma$  und  $b_D \doteq \pi\delta$  gefunden.

b) Wendekreis und Beschleunigungspol. In Fig. 138 wurde die Führung noch einmal in etwas geänderten Verhältnissen gezeichnet.

$a$  ist die Hüllbahn der Geraden  $a$ ; nach dem Satze in 45 liegt der Krümmungsmittelpunkt  $A$  dieser Hüllbahn auf dem Rückkehrkreise; das gleiche gilt von  $B$ . Der Mittelpunkt  $\mathfrak{M}$  dieses Kreises, der durch  $O$  gehen muß, liegt in der Mitte von  $AB$ . Verlängert man  $\mathfrak{M}O$  und macht  $\overline{OJ} = 2 \cdot \overline{\mathfrak{M}O}$ , so ist auch der Wendepol  $J$  und damit der Wendekreis gefunden.

Nun kann der Krümmungsmittelpunkt  $\mathfrak{E}$  auf anderem Wege (nach Fig. 43) gefunden werden. Man zieht  $OE$ , sodann  $O\mathfrak{E} \perp OE$ , bringt

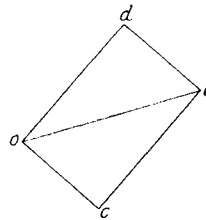


Fig. 137 a,

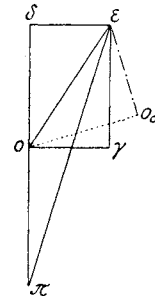


Fig. 137 b.

$O\mathcal{G}$  zum Schnitte  $\mathcal{G}$  mit  $EJ$  und zieht endlich  $\mathcal{G}\mathcal{E} \parallel JO$ ; dann liegt  $\mathcal{E}$  im Schnitte von  $\mathcal{G}\mathcal{E}$  mit  $OE$ .

Ist die Beschleunigung  $b_E$  gegeben und soll der Beschleunigungspol  $P$  gesucht werden, so ziehe man nach Fig. 36  $JK \parallel b_E$  bis zum Schnitte  $K$  mit dem Wendekreis und verbinde  $K$  mit  $E$ ; diese Gerade schneidet den Wendekreis im Beschleunigungspol  $P$ .

Will man den Wendekreis nicht benutzen, so ziehe man  $OK \perp b_E$  bis zum Schnitte  $K$  mit  $JK \parallel b_E$ , ferner  $OQ \parallel b_E$

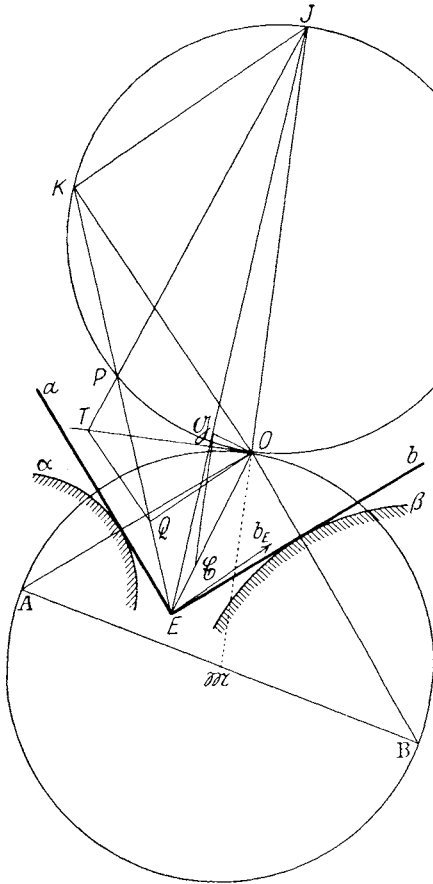


Fig. 138.

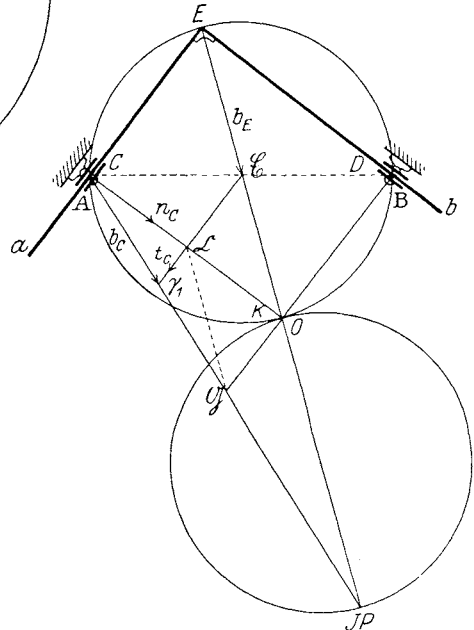


Fig. 139.

bis zum Schnitte  $Q$  mit  $EK$ ,  $QT \perp b_E$  bis zum Schnitte  $T$  mit der Poltangente  $OT \perp O\mathcal{M}$ ; die Geraden  $TJ$  und  $EK$  schneiden sich dann in  $P$ . Überdies muß  $OP \perp TJ$  sein.

**87. Führung eines Achsenkreuzes in zwei Punkten.** (Siebenter Sonderfall Fig. 139). Das rechtwinklige Achsenkreuz  $ab$  schleift durch zwei feste Punkte  $A, B$ ; es geht dabei durch Hülsen, die sich um diese Punkte drehen.

Sind  $C$  und  $D$  jene Punkte der Geraden  $a$  und  $b$ , die augenblicklich mit  $A$  und  $B$  zusammenfallen (Mittelpunkte der Hülsen), so liegen die Bewegungsrichtungen dieser Punkte  $C$  und  $D$  in  $a$  bzw.  $b$  selbst; sie sind

also die Gleitpunkte dieser Geraden (vgl. 16). Die Normalen in  $C$  auf  $a$  und in  $D$  auf  $b$  schneiden sich im Drehpol  $O$ . Da ferner die Gerade  $a$  den Punkt  $A$  umhüllt, ist  $A$  der Krümmungsmittelpunkt der Hüllbahn  $a$  von  $a$ , liegt somit auf dem Rückkehrkreise (vgl. 45); ebenso auch  $B$ . Da  $a \perp b$  ist, geht der Rückkehrkreis auch durch den Scheitel  $E$  des rechten Winkels und überdies durch  $O$ . Es ist also  $AB$  der Durchmesser dieses Kreises.

Verlängert man  $EO$  und macht  $\overline{OJ} = \overline{EO}$ , so ist auch der Wendepol  $J$  und der Wendekreis bestimmt.

Um den zu  $C$  gehörenden Krümmungsmittelpunkt  $\mathfrak{C}$  zu finden, ziehe man  $CJ$ , verlängere  $BO$  bis  $\mathfrak{G}$  und mache  $\mathfrak{G}\mathfrak{C} \parallel JO$ ; dann liegt  $\mathfrak{C}$  im Schnitte dieser Geraden mit  $CO$ . Man erkennt, daß  $\mathfrak{C}$  der Mittelpunkt von  $CO$  ist, denn  $\mathfrak{G}$  ist der Mittelpunkt von  $CJ$ .

Der Krümmungsmittelpunkt  $\mathfrak{C}$  von  $E$  liegt im Mittelpunkt des Rückkehrkreises.

Wird die Beschleunigung des Punktes  $E$  mit  $b_E \equiv \overline{E\mathfrak{C}}$  angenommen, so ist sie gleichzeitig  $n_E$  (Normalfall). Um den Beschleunigungspol  $P$  zu finden, wende man die Konstruktion Fig. 37 an; dann fällt  $K$  nach  $O$  und  $P$  nach  $J$ .

Da  $b_E$  durch  $P$  geht, ist der Beschleunigungswinkel  $\varphi = 0$  und die Beschleunigung  $b_C$  geht ebenfalls durch  $P$ . Um ihre Größe  $C\gamma_1$  zu finden, genügt es,  $\mathfrak{C}\gamma_1 \parallel a$  zu ziehen; dann ist

$$b_C = \overline{C\gamma_1} = \overline{C\mathfrak{C}} + \overline{\mathfrak{C}\gamma_1} = n_C + t_C.$$

Die letztere  $t_C$  ist die Beschleunigung, mit der die Stange  $a$  durch die Hülse gleitet.

**88. Die Rollung.** In Fig. 140 rollt die Kurve  $a$  ohne zu gleiten auf der Kurve  $\alpha$ ;  $A$  und  $A$  seien die Krümmungsmittelpunkte.

Da kein Gleiten stattfindet, ist der Berührungspunkt  $O$  jener Systempunkt, der augenblicklich in Ruhe verharrt, also der Drehpol; die gemeinsame Tangente  $Ot$  ist bereits die Poltangente, da der nächste Drehpol auf  $Ot$  liegen muß.

Um den Krümmungsmittelpunkt  $\mathfrak{B}$  eines beliebigen Systempunktes  $B$  zu finden, wende man den Satz von Bobillier an (vgl. 43); man überträgt  $\sphericalangle tOA = BOg$ ; da dieser Winkel ein rechter ist, genügt es,  $g \perp OB$  zu errichten. Sodann zieht man  $AB$  bis zum

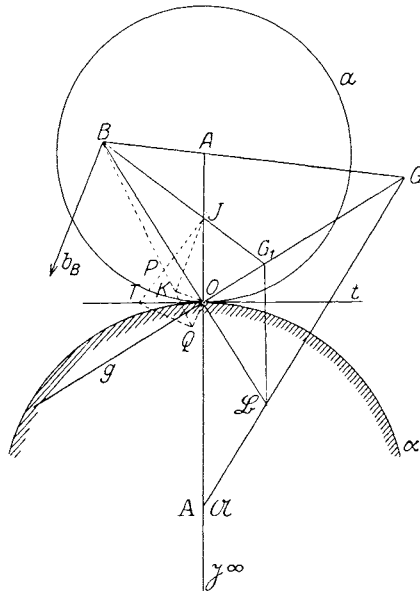


Fig. 140.

Schnitte  $G$  mit  $g$  und  $G\mathfrak{A}$  bis zum Schnitte  $\mathfrak{B}$  mit  $BO$ , wodurch der Krümmungsmittelpunkt  $\mathfrak{B}$  gefunden ist.

Um den Wendepol  $J$  zu finden, beachte man, daß  $J$  Wendepunkt seiner Bahn ist, sein Krümmungsmittelpunkt  $\mathfrak{J}$  also unendlich fern ist. Man verbindet  $\mathfrak{B}$  mit  $\mathfrak{J}^\infty$ , d. h. man zieht  $\mathfrak{B}G_1 \parallel \mathfrak{J}^\infty O$  bis zum Schnitte  $G_1$  mit  $g$  und verbindet  $G_1$  mit  $B$ ; auf dieser Geraden liegt dann der Wendepol  $J$ .

Ist die Beschleunigung  $b_B$  gegeben, so kann dann der Beschleunigungspol  $P$  wie in Fig. 37 gefunden werden.

### 89. Aufgaben.

30. Eine Gerade  $b$  bewegt sich derart, daß sie stets durch den festen Punkt  $B$  geht und einer ihrer Punkte,  $A$ , die Gerade  $a$  beschreibt. Gegeben ist  $b_A$ ; man suche Geschwindigkeit, Beschleunigung und Krümmungsmittelpunkt eines beliebigen Punktes  $C$  der Geraden  $b$  (Fig. 141).

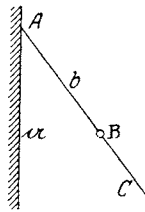


Fig. 141.

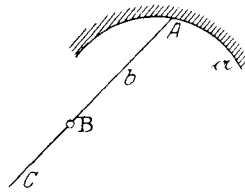


Fig. 142.

31. Man löse dieselbe Aufgabe, wenn  $A$  die Kurve  $a$  beschreibt (Fig. 142).
32. An die Gerade  $b$  der Aufgabe 30 ist die Gerade  $a$  unter rechtem Winkel angeschlossen. Welche Kurve  $a$  umhüllt  $a$  und welches ist der Berührungspunkt von  $a$  mit seiner Hüllbahn  $a$ ? Wo ist der Krümmungsmittelpunkt von  $a$ ? (Fig. 143).

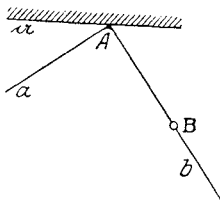


Fig. 143.

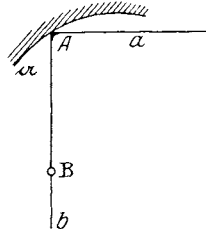


Fig. 144.

33. Dieselbe Aufgabe ist unter der Annahme zu lösen, daß  $A$  die Kurve  $a$  beschreibt (Fig. 144).
34. Ein starrer Winkel  $ab$  bewegt sich derart, daß die Gerade  $a$  die feste Kurve  $a$  berührt und die Gerade  $b$  stets durch den festen

Punkt B geht. Man suche den Krümmungsmittelpunkt von  $C$  (Fig. 145).

35. In voriger Aufgabe ist die Geschwindigkeit und Beschleunigung gegeben, mit denen  $b$  durch B gleitet; man suche Geschwindigkeit und Beschleunigung des Punktes  $C$ .
36. Ein starrer Winkel  $ab$  schleift an zwei Kurven  $\alpha$  und  $\beta$ . Man suche den Krümmungsmittelpunkt des Punktes  $C$  (Fig. 146).

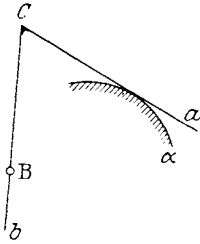


Fig. 145.

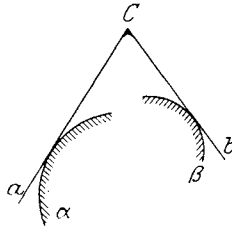


Fig. 146.

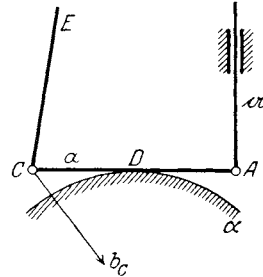


Fig. 147.

37. Fig. 147 stellt einen geraden Wälzhebel für eine Steuerung vor; die Gerade  $a$  wälzt sich unter Gleiten auf der feststehenden Kurve  $\alpha$  ab; der Endpunkt  $A$  der Ventilstange wird gerade geführt; in  $C$  greift die Exzenterstange  $E$  mit bekannter Beschleunigung  $b_C$  an; es ist die Beschleunigung  $b_A$  der Ventilstange und jene  $b_D$  des Berührungspunktes zu bestimmen.



## IX. Das zwangläufige System. Dynamik.

**90. Dynamik der sich drehenden Scheibe.** Eine Scheibe  $OSA$  (Fig. 148) sei in  $O$  drehbar gelagert;  $S$  sei ihr Schwerpunkt,  $A$  der Angriffspunkt der Kraft  $P$ , der Resultanten aller auf die Scheibe wirkenden aktiven

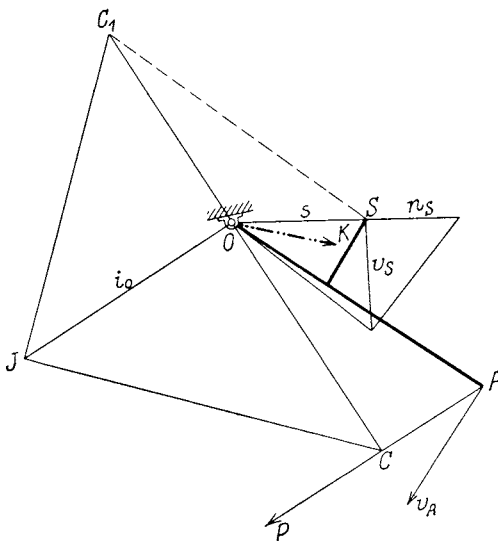


Fig. 148.

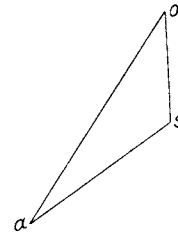


Fig. 148 a.

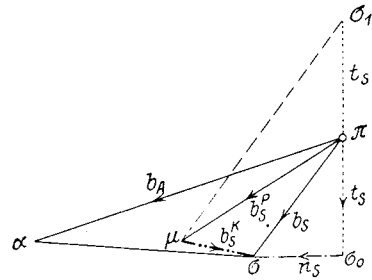


Fig. 148 b.

Kräfte. Gegeben ist ferner das Trägheitsmoment der Scheibe für die Achse  $O$ :  $T_0 = M i_0^2$  und die Geschwindigkeit  $v_A$ . Es sollen die Beschleunigungen  $b_S$  und  $b_A$ , sowie der Führungsdruck  $K$  in  $O$  nach Größe und Richtung bestimmt werden.

Der Geschwindigkeitsplan Fig. 148a wurde aus  $v_A$  in bekannter Weise entwickelt.

Im Beschleunigungsplan Fig. 148b wurde die Beschleunigung, die der Schwerpunkt  $S$  nach dem Prinzip der Schwerpunktsbewegung (vgl. 52) durch die Kraft  $P$  erhält, nämlich

$$b_S^P = \frac{P}{M} \pi \mu$$

nach dem Beschleunigungsmaßstab aufgetragen. Da  $O$  ein fester Punkt ist, kann die Winkelbeschleunigung der Scheibe nach Gleichung 47a:

$$\lambda = \frac{Pp}{T_0} = \frac{Pp}{M i_0^2}$$

bestimmt werden, wobei  $p = OC \perp P$  ist.

Setzt man  $\frac{i_0^2}{p} = p_1$  und  $OS = s$ , so wird  $\lambda = \frac{b_S^P}{p_1}$  und die Tangentialbeschleunigung des Schwerpunkts

$$t_S = s\lambda = b_S^P \cdot \frac{s}{p_1}.$$

Um sie zweckmäßig zu konstruieren, sucht man zunächst den Gegenpunkt  $C_1$  von  $C$ , indem man  $OJ \perp OC$  zieht,  $OJ = i_0$  macht und  $JC_1 \perp CJ$  errichtet. Sodann zieht man im Beschleunigungsplan  $\pi\sigma_1 \perp OS$ ,  $\mu\sigma_1 \perp SC_1$ , dann ist  $\overline{\sigma_1\pi} = t_S$ ; denn die Dreiecke  $C_1OS$  und  $\mu\pi\sigma_1$  sind ähnlich, weil die Seiten wechselweise aufeinander senkrecht stehen und somit die Proportion besteht

$$p_1 : s = b_S^P : t_S.$$

Überträgt man  $\overline{\sigma_1\pi}$  nach  $\overline{\pi\sigma_0}$  und errichtet

$$\overline{\sigma_0\sigma} = n_S = \frac{v_S^2}{SO} = \frac{\overline{os}^2}{SO} \text{ in Richtung } SO,$$

so erhält man den Beschleunigungspunkt  $\sigma$  und es ist

$$\overline{\pi\sigma} = b_S = t_S + n_S.$$

Die Verbindungsstrecke  $\mu\sigma$  liefert die Beschleunigung  $b_S^K$ , die der Schwerpunkt zufolge des Führungsdruckes  $K$  erhält; es ist

$$b_S = b_S^P + b_S^K.$$

Der Führungsdruck  $K$  in  $O$  hat die Richtung von  $b_S^K \equiv \overline{\mu\sigma}$ ; seine Größe ist  $K = M \cdot b_S^K$ .

Der Beschleunigungspunkt  $a$  wird am einfachsten aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $\pi\sigma a$  und  $OSA$  gefunden; dann ist  $\overline{\pi a} = b_A$ .

Im Anschlusse daran löse man folgende

**Aufgabe:**

38. Ein schwerer Stab  $AB$  ist in  $O$  drehbar gelagert; in  $A$  und  $B$  wirken bekannte Kräfte  $P$  und  $Q$ , außerdem in  $S$  das Eigengewicht des Stabes; die Geschwindigkeit  $v_A$  ist gegeben. Man konstruiere die Beschleunigungen  $b_A$  und  $b_B$ , sowie den Gelenkdruck in  $O$  nach Größe und Richtung (Fig. 149).

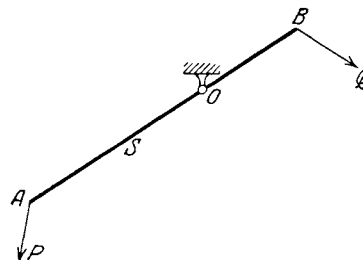


Fig. 149.

**91. Dynamik der Zweipunktführung.** In Fig. 150 wird die Scheibe, deren Schwerpunkt  $S$  ist, mit den Punkten  $A$  und  $B$  an den festen Kurven  $a$  und  $b$  geführt, deren Krümmungsmittelpunkte  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  sind. Der

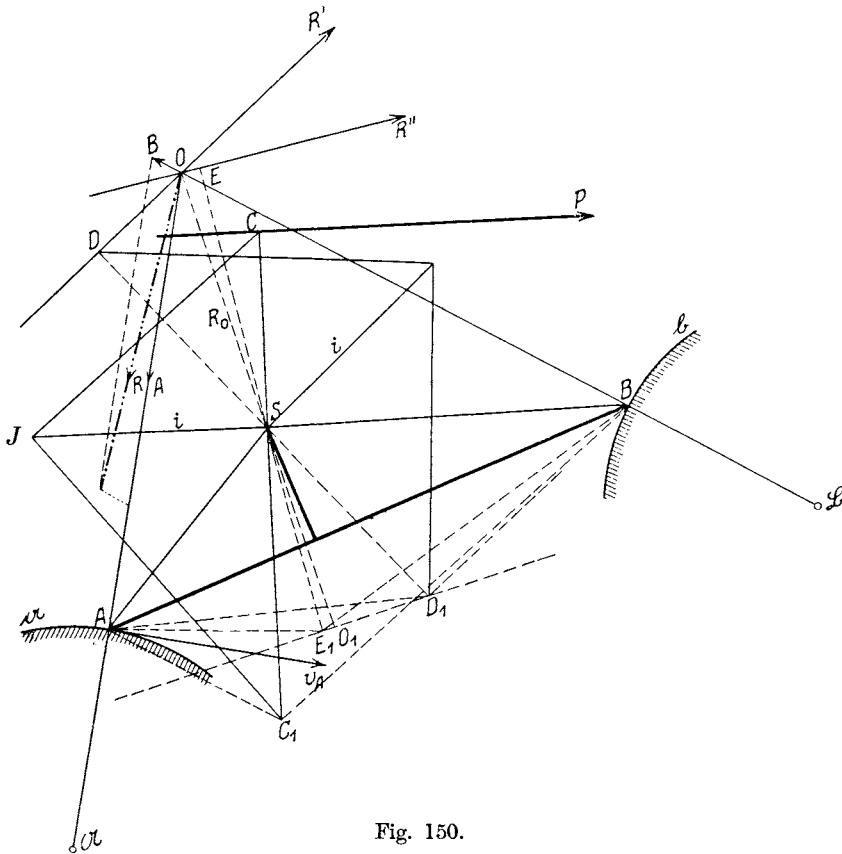


Fig. 150.

Geschwindigkeitszustand der Scheibe ist dadurch gegeben, daß die Geschwindigkeit  $v_A$  bekannt ist. Sie sei maßstäblich durch die Strecke  $A\mathfrak{A}$  gegeben (Normalfall).

Auf die Scheibe wirke eine Kraft  $P$ , die auch als Resultante aller auf die Scheibe wirkenden aktiven Kräfte angesehen werden kann. Man bestimme den Beschleunigungszustand der Scheibe.

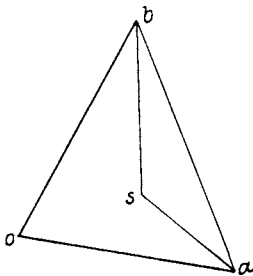


Fig. 150 a.

Zunächst wurde in Fig. 150a aus  $v_A \equiv \overline{oa}$  in bekannter Weise der Geschwindigkeitsplan für die Punkte  $A, B, S$  konstruiert.

Im Beschleunigungsplan Fig. 150b beginnt man mit der Beschleunigung des Schwerpunkts, die er allein durch die Kraft  $P$  erhalten würde; sie ist nach dem Prinzip der Schwerpunktsbewegung (vgl. 52)

$$b_S^P = \frac{P}{M},$$

worin  $M$  die Masse der Scheibe ist.

Der Beschleunigungsmaßstab ist durch die Annahme des Normalfalles gegeben (vgl. 20); nach diesem ist im Beschleunigungsplan die Strecke  $\pi\mu \equiv b_S^P$  aufzutragen. Sodann kann die Tangentialbeschleunigung  $a_1\pi \equiv t_{AS}'$  konstruiert werden, die der Punkt  $A$  in bezug auf den Schwerpunkt  $S$  durch die Kraft  $P$  erhält. Man bedient sich dabei des in Fig. 66 beschriebenen Verfahrens. Man fällt von  $S$  die Senkrechte  $SC$  auf  $P$ , macht  $\overline{SJ} = i$  senkrecht auf  $SC$ , wobei  $i$  der Trägheitshalb-

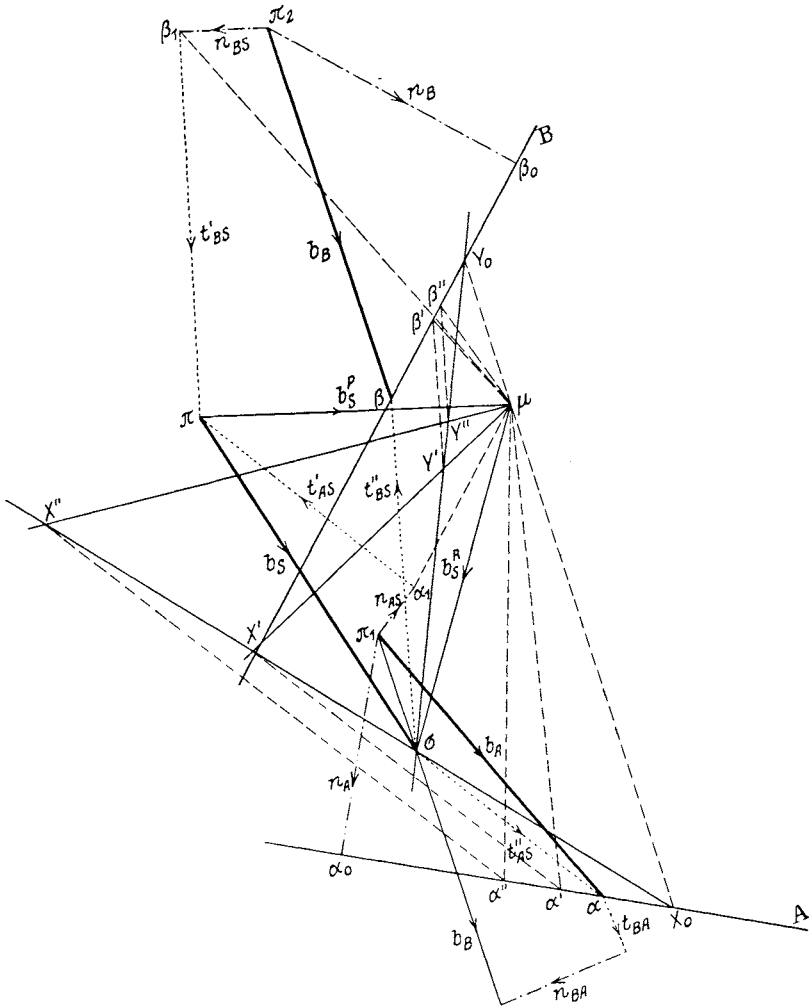


Fig. 150b.

nigung  $a_1\pi \equiv t_{AS}'$  konstruiert werden, die der Punkt  $A$  in bezug auf den Schwerpunkt  $S$  durch die Kraft  $P$  erhält. Man bedient sich dabei des in Fig. 66 beschriebenen Verfahrens. Man fällt von  $S$  die Senkrechte  $SC$  auf  $P$ , macht  $\overline{SJ} = i$  senkrecht auf  $SC$ , wobei  $i$  der Trägheitshalb-

messer der Scheibe für den Schwerpunkt  $S$  ist, und zieht  $J C_1 \perp C J$ ; dann ist  $\overline{S C_1} = \frac{i^2}{C S}$ . Zeichnet man nun durch  $\mu$  die Gerade  $\mu a_1 \perp A C_1$  und durch  $\pi$  die Gerade  $\pi a_1 \perp A S$ , so ist  $\overline{a_1 \pi} = t_{AS}'$  gefunden. Ebenso konstruiert man die Tangentialbeschleunigung  $\overline{\beta_1 \pi} = t_{BS}'$ , die der Punkt  $B$  in bezug auf den Schwerpunkt  $S$  durch die Kraft  $P$  erhält. Man zieht  $\mu \beta_1 \perp B C_1$ ,  $\pi \beta_1 \perp B S$ , so liegt im Schnitte beider der Punkt  $\beta_1$ .

Sodann wird die Normalbeschleunigung  $n_{AS}$  gezeichnet, die der Punkt  $A$  in bezug auf  $S$  hat; sie ist

$$n_{AS} = \frac{v_{AS}^2}{A S} = \frac{s a^2}{A S} = \overline{\pi_1 a_1} \text{ im Sinne von } A S$$

und wurde im Beschleunigungsplan in  $a_1$  an  $t_{AS}'$  angereicht. Die hierbei notwendige relative Geschwindigkeit  $v_{AS} = s a$  wurde aus dem Geschwindigkeitsplan entnommen. Ebenso wurde die Normalbeschleunigung

$$n_{BS} = \frac{v_{BS}^2}{B S} = \frac{s b^2}{B S} = \overline{\pi_2 \beta_1} \text{ im Sinne von } B S$$

konstruiert und in  $\beta_1$  an  $t_{BS}'$  angereicht.

Nun wurden die absoluten Normalbeschleunigungen der Punkte  $A$  und  $B$  gesucht; sie sind

$$n_A = \frac{v_A^2}{A \mathfrak{A}} = \frac{o a^2}{A \mathfrak{A}} \text{ in Richtung } A \mathfrak{A} \text{ und}$$

$$n_B = \frac{v_B^2}{B \mathfrak{B}} = \frac{o b^2}{B \mathfrak{B}} \text{ in Richtung } B \mathfrak{B}$$

und, ausgehend von  $\pi_1$  bzw.  $\pi_2$  nach  $a_0$  bzw.  $\beta_0$  aufgetragen; es ist also  $\overline{\pi_1 a_0} = n_A$ ,  $\overline{\pi_2 \beta_0} = n_B$ .

Die Geraden  $A \perp n_A$ ,  $B \perp n_B$  müssen dann den Beschleunigungspunkt  $\alpha$  bzw.  $\beta$  enthalten, allerdings nicht für den gleichen Nullpunkt, sondern in bezug auf den Nullpunkt  $\pi_1$  bzw.  $\pi_2$ .

Nun fehlen im Beschleunigungsplan des Punktes  $S$ , auf den Nullpunkt  $\pi$  bezogen, noch die Beschleunigungen, die der Punkt  $S$  durch die unbekanntes Führungsdrücke in  $A$  und  $B$  erhält. Von diesen Drücken kennt man zwar die Richtungen, aber nicht die Größen. Sie schneiden sich im Drehpol  $O$  der Scheibe; ihre unbekanntes Resultante  $R$  geht also jedenfalls durch diesen Punkt. Die unbekanntes Beschleunigung des Schwerpunktes durch  $R$  ist dann

$$b_S^R = \frac{R}{M}.$$

Im Beschleunigungsplan der Punkte  $A$  und  $B$  fehlen außer  $b_S^R$ , die sie nach dem Prinzip der Schwerpunktsbewegung gemeinsam mit  $S$  haben müssen, noch die Tangentialbeschleunigungen  $t_{AS}''$  bzw.  $t_{BS}''$ , die sie in bezug auf  $S$  durch  $R$  erhalten.

Um diese Beschleunigungen zu ermitteln, schlagen wir folgenden Weg ein. Nehmen wir die Kraft  $R'$  durch  $O$  beliebig an, zeichnen  $SD \perp R'$  und suchen  $D_1$ , den Gegenpunkt von  $D$  ebenso, wie wir früher  $C_1$  aus  $C$  gesucht haben. Dann ziehen wir  $\mu\alpha' \perp AD_1$  bis zur Geraden A,  $\mu X' \parallel R'$  und  $\alpha' X' \perp AS$  bis zum Schnitte  $X'$  der beiden letzten Linien. Dann ist

$$\mu \bar{X}' = b_S^{R'} \text{ und } X' \alpha' = t_{AS}''$$

für die allerdings noch willkürlich angenommene Richtung von  $R'$ .

Ebenso ziehen wir  $\mu\beta' \perp BD_1$  bis zur Linie B,  $\mu Y' \parallel R'$  (welche Gerade schon mit  $\mu X'$  gezeichnet wurde) und  $\beta' Y' \perp BS$  bis zum Schnitte  $Y'$  der beiden letzten Linien. Dann ist

$$\mu \bar{Y}' = b_S^{R'} \text{ und } Y' \beta' = t_{BS}''$$

wieder für die willkürlich angenommene Richtung von  $R'$ .

Hätte man die Annahme von  $R'$  zufällig richtig getroffen, so müßte jetzt  $\mu \bar{X}' = \mu \bar{Y}'$  sein, was natürlich nicht zutreffen wird. Man wiederholt somit die Konstruktion mit einer anderen durch  $O$  gehenden Kraft-Richtung  $R''$  und erhält zunächst den Fußpunkt  $E$  und seinen Gegenpunkt  $E_1$ . Es ist zu beachten und vereinfacht die Konstruktion, daß die Gegenpunkte  $D_1 E_1 \dots$  aller durch  $O$  gehenden Krafrichtungen auf einer Geraden liegen, die durch den Gegenpunkt  $O_1$  von  $O$  hindurchgeht und zu  $OO_1$  senkrecht steht.

Durch Wiederholung der oben geschilderten Konstruktion erhält man  $\mu\alpha'' \perp AE_1$ ,  $\mu X'' \parallel R''$ ,  $\alpha'' X'' \perp AS$ ; ferner  $\mu\beta'' \perp BE_1$ ,  $\mu Y'' \parallel R''$ ,  $\beta'' Y'' \perp BS$ . Damit sind die Punkte  $X''$ ,  $Y''$  gefunden.

Als durch  $O$  gehende Kräfte können auch die Führungsdrücke  $A$  und  $B$  benützt werden.

Besonders einfach gestaltet sich die Konstruktion der Punkte  $X$  und  $Y$  für jene Kraft  $R_0$ , die durch den Schwerpunkt  $S$  geht. Dann liegt der Fußpunkt  $C$  in  $S$ , sein Gegenpunkt  $C_1$  in unendlicher Entfernung, senkrecht zu  $R_0$ , es wird  $AC_1 \parallel BC_1 \perp R_0$ ; es ist ferner  $t_{AS}'' = 0$  und  $t_{BS}'' = 0$  (denn eine durch  $S$  gehende Kraft erzeugt keine Tangentialbeschleunigungen); die durch  $\mu$  gehende Parallele zu  $OS$  schneidet somit die Geraden A und B bereits in den Punkten  $X_0$  und  $Y_0$ .

Es läßt sich zeigen, daß die Punkte  $X_0 X' X'' \dots$  in einer Geraden liegen. Die Strahlenbüschel  $A(D_1 E_1 \dots)$  und  $\mu(\alpha' \alpha'' \dots)$  sind kongruent, da die entsprechenden Strahlen aufeinander senkrecht stehen; die Strahlenbüschel  $S(D_1 E_1 \dots)$  und  $\mu(X' X'' \dots)$  sind aus demselben Grunde kongruent. Die Strahlenbüschel  $A(D_1 E_1 \dots)$  und  $S(D_1 E_1 \dots)$  sind perspektivisch, da sie sich in der Geraden  $D_1 O_1 E_1 \dots$  durchschneiden; die Strahlenbüschel  $\mu(\alpha' \alpha'' \dots)$  und  $\mu(X' X'' \dots)$  sind projektivisch; ihr Strahl  $\mu X_0$  entspricht sich selbst zweifach, die Büschel sind somit auch perspektivisch; somit ist auch das Parallelbüschel  $\alpha' X'$ ,  $\alpha'' X''$ ,  $\dots$  dem Büschel  $\mu(X' X'' \dots)$  perspektivisch und sie durchschneiden sich in einer Punktreihe  $X_0 X' X'' \dots$ . Ebenso kann

gezeigt werden, daß auch die Punkte  $Y_0 Y' Y'' \dots$  in einer Geraden liegen.

Zwei Punkte werden für jede dieser Geraden genügen. Man wird also zunächst die Punkte  $X_0 Y_0$  ermitteln, die nur das Ziehen der Linie  $X_0 Y_0 = OS$  erfordern; sodann kann noch für irgend eine Kraftrichtung  $R$  das Punktpaar  $X' Y'$  bestimmt werden.

Im Schnitte der beiden Geraden  $X_0 X'$  und  $Y_0 Y'$  liegen die Punkte  $X$  und  $Y$  in  $\sigma$  vereinigt; sie geben, mit  $\mu$  verbunden, die Beschleunigung  $b_S^R$ , die der Schwerpunkt  $S$  zufolge der Kraft  $R$ , der Vereinigung der Führungsdrücke  $A$  und  $B$ , erhält; es ist also

$$\mu \sigma \quad b_S^R = \frac{R}{M}$$

und somit

$$R = M b_S^R.$$

Durch Zerlegung von  $R$  in die Richtungen  $OA$  und  $OB$  sind sodann die Führungsdrücke bestimmt.

Zieht man jetzt  $\sigma a \perp AS$ ,  $\sigma \beta \perp BS$  bis  $A$  bzw.  $B$ , so erhält man die Punkte  $\alpha$  und  $\beta$ ; es ist dann

$$\sigma a = t_{AS}'' \quad \text{und} \quad \sigma \beta = t_{BS}''.$$

Damit ist die gestellte Aufgabe gelöst. Denn es ist die ganze Tangentialbeschleunigung von  $A$  in bezug auf  $S$ :

$$t_{AS} = t_{AS}' + t_{AS}''$$

und ebenso

$$t_{BS} = t_{BS}' + t_{BS}''.$$

Die Beschleunigung des Schwerpunkts  $S$  ist

$$b_S = \pi \mu + \mu \sigma = b_S^P + b_S^R = \pi \sigma;$$

ferner die Beschleunigung des Punktes  $A$ :

$$b_A = \pi_1 a_0 + a_0 a = n_A + t_A$$

oder auch aus folgendem Polygon:

$$b_A = n_{AS} + t_{AS}' + b_S^P + b_S^R + t_{AS}''$$

oder

$$b_A = n_{AS} + t_{AS} + b_S;$$

ebenso ist die Beschleunigung des Punktes  $B$ :

$$b_B = \pi_2 \beta_0 + \beta_0 \beta = n_B + t_B$$

oder auch

$$b_B = n_{BS} + t_{BS}' + b_S^P + b_S^R + t_{BS}'',$$

$$b_B = n_{BS} + t_{BS} + b_S.$$

Als Probe kann schließlich empfohlen werden, von  $\pi_1$  aus die Beschleunigung  $b_B = \pi_2 \beta$  aufzutragen und in folgende drei Teile zu zerlegen:

$$b_B = b_A + t_{BA} + n_{BA}.$$

Dann muß

$$n_{BA} = \frac{v_{BA}^2}{BA} = \frac{ab^2}{BA}$$

sein, wie man sich mit Hilfe des Geschwindigkeitsplanes überzeugen kann.

Es soll noch bemerkt werden, daß, obwohl die Beschleunigungen  $b_S = \pi\sigma$ ,  $b_A = \pi_1\alpha$ ,  $b_B = \pi_2\beta$  von verschiedenen Nullpunkten  $\pi$ ,  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  aus gemessen werden, das Dreieck  $\sigma\alpha\beta$  doch dem Dreieck  $SAB$  ähnlich ist. Denn es ist  $\sigma\alpha = t_{AS}''$ ,  $\sigma\beta = t_{BS}''$ ; nun sind dies die Tangentialbeschleunigungen eines Beschleunigungszustandes, der durch die Kraft  $R$  hervorgerufen wird; es ist also nach Gleichung 19:

$$t_{AS}'' + t_{SB}'' + t_{BA}'' = 0$$

und somit

$$\alpha\beta = t_{BA}'' \perp AB.$$

Dann ist aber das Dreieck  $\sigma\alpha\beta$  der Tangentialbeschleunigungen dem Dreieck  $SAB$  ähnlich.

**92. Dynamik des Kreuzschiebers.** Der Kreuzschieber  $AB$  (Fig. 151), dessen kinematische Eigenschaften in 80 behandelt wurden, besitze den

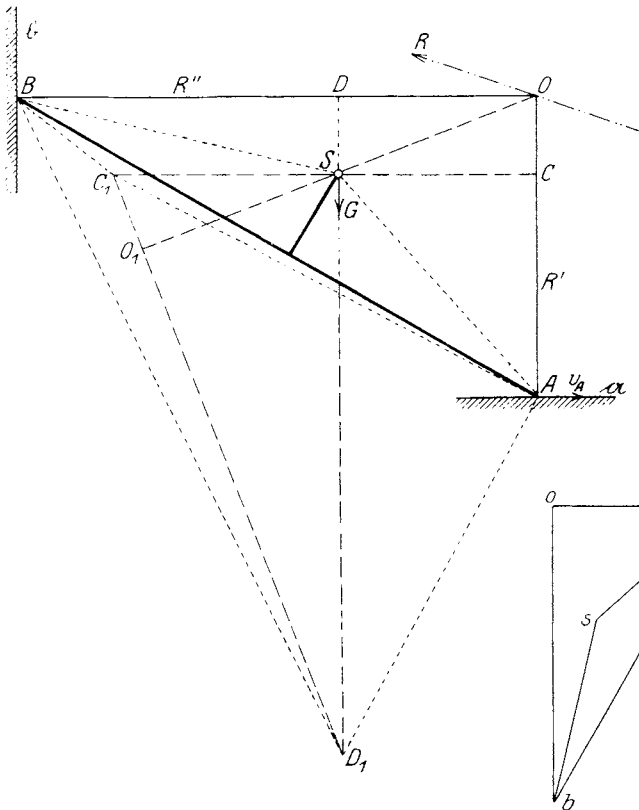


Fig. 151.

Fig. 151 a

Schwerpunkt  $S$ ; die einzige aktive Kraft, die auf diese Scheibe wirkt, sei das Gewicht  $G$ . Die Geschwindigkeit des Punktes  $A$  sei gegeben:



es sind die Beschleunigungen  $b_A$   $b_B$   $b_S$  und die Führungsdrücke in  $A$  und  $B$  zu zeichnen.

Der Geschwindigkeitsplan (Fig. 151 a) wurde aus dem gegebenen  $v_A$   $\pi o a$  in bekannter Weise entwickelt.

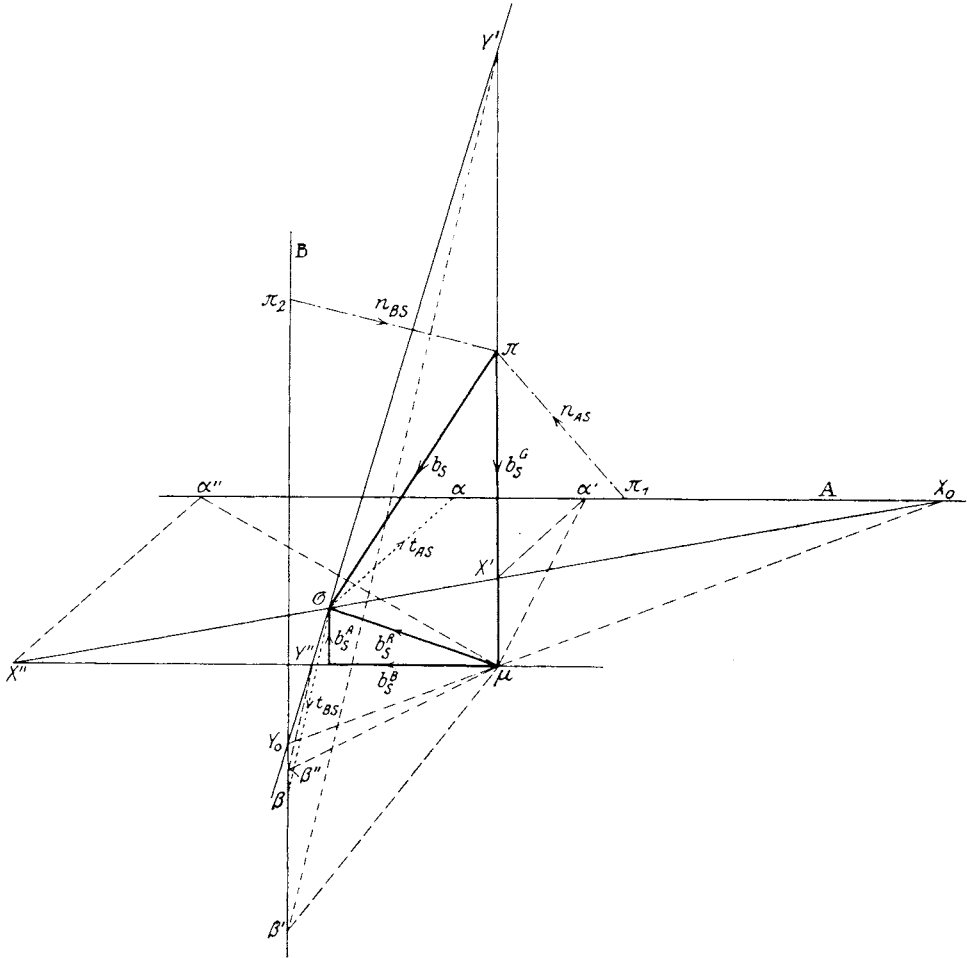


Fig. 151 b.

Der Beschleunigungsplan (Fig. 151 b) kann an Hand der früher behandelten Führung (Fig. 150 b) gezeichnet werden. Man macht zunächst

$$\pi \mu \quad b_S^G = \frac{G}{M} = g,$$

wenn  $M$  die Masse der Scheibe und  $g$  die Beschleunigung der Schwere ist. Da der Angriffspunkt der Kraft  $G$  der Schwerpunkt  $S$  selbst ist, so wird

$$t_{AS}' = 0 \text{ und } t_{BS}' = 0,$$

somit fallen die Punkte  $\alpha_1$  und  $\beta_1$  in Fig. 150b mit  $\pi$  zusammen.  $n_{AS}$  und  $n_{BS}$  werden wie früher gefunden und aufgetragen; es ist

$$\overline{\pi_1\pi} = n_{AS} \quad \text{und} \quad \overline{\pi_2\pi} = n_{BS}.$$

Da die Punkte  $A$  und  $B$  gerade Linien beschreiben, ist

$$n_A = 0 \quad \text{und} \quad n_B = 0;$$

die Geraden  $A$  und  $B$  sind somit durch  $\pi_1$  bzw.  $\pi_2$  parallel zu den Führungsrichtungen  $a$  und  $b$  zu ziehen.

Die Gerade  $X_0\mu Y_0 \parallel OS$  schneidet die Geraden  $A$  und  $B$  in den Punkten  $X_0$  und  $Y_0$ .

Nimmt man als Resultante der beiden Führungsdrücke  $A$  und  $B$  die Kraft  $R'$  an, d. h. setzt man versuchsweise  $B = 0$ , konstruiert den Gegenpunkt  $O_1$  von  $O$  nach der Gleichung

$$\overline{OS} \cdot \overline{SO_1} = i^2,$$

und errichtet in  $O_1$  die Senkrechte auf  $O_1S$ , so ist der Gegenpunkt  $C_1$  von  $C$  im Schnitte mit dieser Senkrechten gelegen. Man zieht dann im Beschleunigungsplan

$$\mu\alpha' \perp AC_1 \text{ bis zum Schnitte } \alpha' \text{ mit } A,$$

$\alpha'X' \perp AS$ , so liegt der Punkt  $X'$  im Schnitte dieser Senkrechten mit der bereits gezogenen Geraden  $\pi\mu \parallel R'$ .

Ebenso zieht man

$$\mu\beta' \perp BC_1 \text{ bis zum Schnitte } \beta' \text{ mit } B,$$

$\beta'Y' \perp BS$  bis zum Schnitte  $Y'$  mit der gleichen Geraden  $\pi\mu$ .

Ersetzt man hingegen  $R'$  durch  $R''$ , d. h. setzt man versuchsweise den Führungsdruck  $A = 0$ , so erhält man in derselben Reihenfolge die Punkte  $D$  und  $D_1$ , im Beschleunigungsplan die Punkte  $\alpha''$  und  $X''$ ,  $\beta''$  und  $Y''$ ; dabei liegen  $X''$  und  $Y''$  in der durch  $\mu$  gehenden Geraden  $\mu X'' \parallel R''$ .

Die Punktreihen  $X_0X'X''$  und  $Y_0Y'Y''$  schneiden sich im Punkte  $\sigma$ . Verbindet man ihn mit  $\mu$  und  $\pi$ , so erhält man in

$$\overline{\mu\sigma} = b_S^R$$

die Richtung des durch  $O$  gehenden resultierenden Führungsdruckes  $R$  und die Größe der Beschleunigung, die der Schwerpunkt durch  $R$  erfährt. Hingegen ist

$$\overline{\pi\sigma} = b_S^A + b_S^B$$

die ganze Beschleunigung des Schwerpunkts.

Zerlegt man  $b_S^R$  in  $b_S^A$  und  $b_S^B$ , so erhält man die Beschleunigungen des Schwerpunkts durch die getrennten Führungsdrücke; diese selbst sind dann

$$A = M \cdot b_S^A, \quad B = M \cdot b_S^B.$$

Zieht man noch

$$\sigma\alpha \perp AS \text{ bis } A \text{ und}$$

$$\sigma\beta \perp BS \text{ bis } B$$

so erhält man die richtigen Beschleunigungspunkte  $\alpha$  und  $\beta$ ; und zwar sind dann

$$\overline{\pi_1 \alpha} = b_A \text{ und } \overline{\pi_2 \beta} = b_B$$

die Beschleunigungen der geführten Punkte  $A$  und  $B$ .

Aus dem Beschleunigungsplan ist zu ersehen, daß

$$\sigma \alpha = t_{AS}, \quad \sigma \beta = t_{BS}$$

ist; ferner erkennt man die Anordnung folgender Beschleunigungspolygone:

$$b_A \equiv \pi_1 \alpha = n_{AS} + b_S + t_{AS},$$

$$b_B \equiv \pi_2 \beta = n_{BS} + b_S + t_{BS}.$$

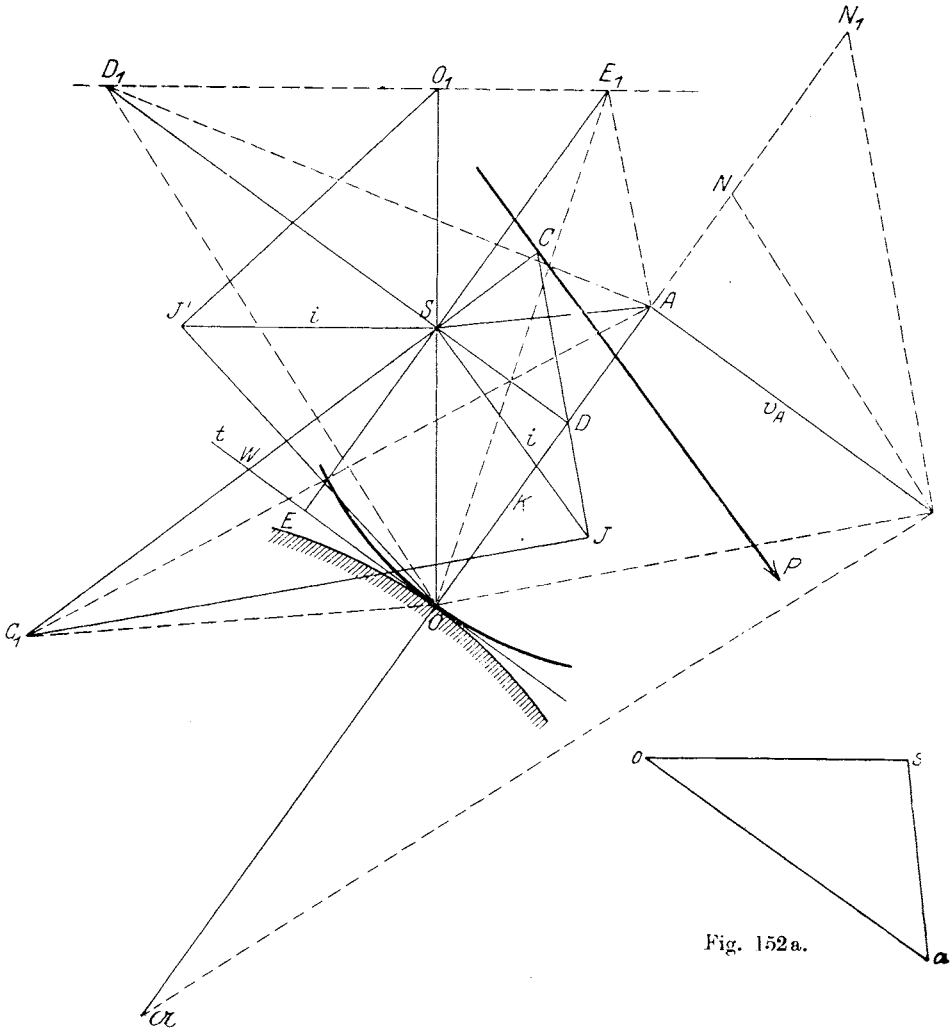


Fig. 152.

Fig. 152a.

Zum Schlusse möge noch daran erinnert werden, daß, wie im vorigen Abschnitte gezeigt wurde,  $\pi \pi_1 \pi_2 \sim \sigma a \beta \sim SAB$  ist.

**93. Dynamik der rollenden Scheibe.** In Fig. 152 rollt die Scheibe mit dem Krümmungsmittelpunkt  $A$  auf der festliegenden Scheibe mit dem Krümmungsmittelpunkt  $\mathcal{A}$ ;  $O$  ist ihr augenblicklicher Berührungspunkt und gleichzeitig der Drehpol der rollenden Scheibe. Sie wird von einer Kraft  $P$  (auch Resultante aller aktiven Kräfte der Scheibe) angegriffen; man soll die Beschleunigungen  $b_A$  und  $b_S$  sowie den augenblicklichen Widerstand der Führung in  $O$  bestimmen.

Die Geschwindigkeit  $v_A$ , der Schwerpunkt  $S$  und der Trägheitshalbmesser  $i$  für diesen sind bekannt.

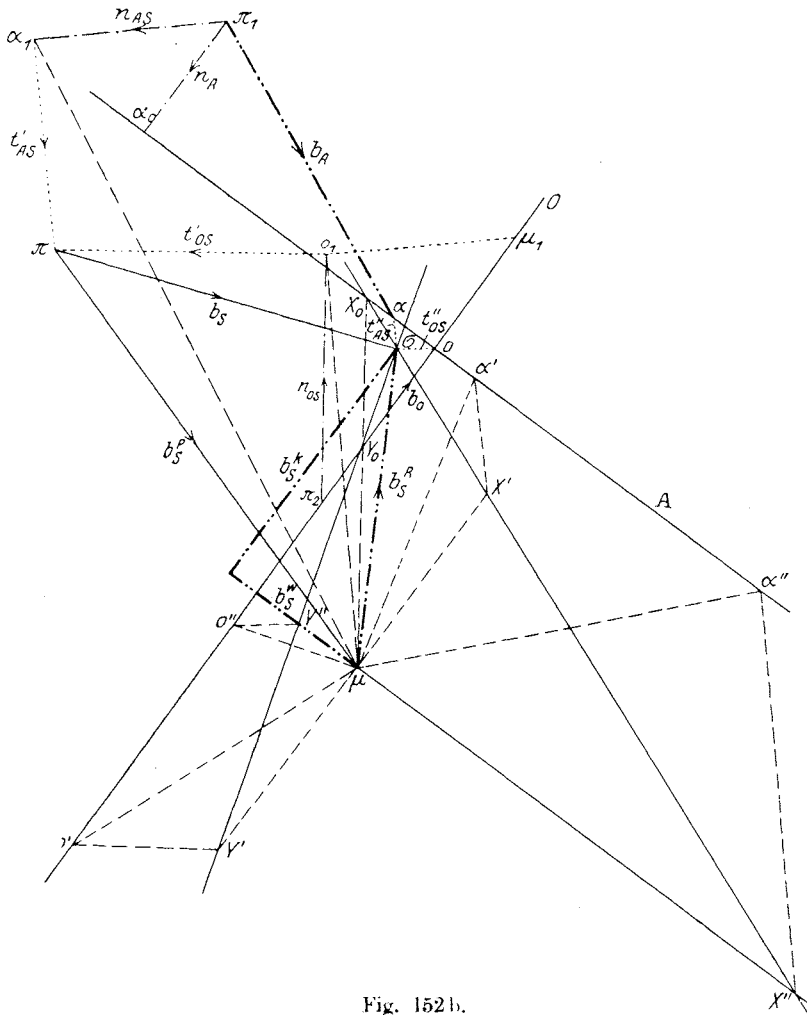


Fig. 152b.

In Fig. 152a wurde aus  $v_A = oa$  der Geschwindigkeitsplan in bekannter Weise gefunden.

Im Beschleunigungsplan 152b wurde zunächst

$$\overline{\pi\mu} = b_S^P = \frac{P}{M}$$

aufgetragen, die Beschleunigung, die der Schwerpunkt  $S$  der Scheibe von der Masse  $M$  durch die Kraft  $P$  erfährt. Sodann in Fig. 152  $SC \perp P$  gemacht und zu  $C$  der Gegenpunkt  $C_1$  aus  $\overline{CS} \cdot \overline{SC}_1 = i^2$  gesucht, ferner im Beschleunigungsplan  $\mu a_1 \perp AC_1$ ,  $\pi a_1 \perp AS$  gezogen; dann ist  $\overline{a_1\pi} = t_{AS}'$  die Tangentialbeschleunigung von  $A$  in bezug auf  $S$  durch die Kraft  $P$ .

Hierauf wird

$$n_{AS} = \frac{v_{AS}^2}{AS} = \frac{sa^2}{AS} = \overline{\pi_1 a_1} \text{ in Richtung } AS$$

konstruiert, dadurch der Punkt  $\pi_1$  gewonnen und von ihm aus

$$n_A = \frac{v_A^2}{A\mathfrak{A}} = \overline{\pi_1 a_0} \text{ in Richtung } A\mathfrak{A}$$

aufgetragen; die Gerade  $A \perp A\mathfrak{A}$  in  $a_0$  enthält dann den Beschleunigungspunkt  $a$ .

Ebenso wurde  $\mu o_1 \perp OC_1$ ,  $\pi o_1 \perp OS$  gezogen; dann ist  $\overline{o_1\pi} = t_{OS}'$  die Tangentialbeschleunigung von  $O$  in bezug auf  $S$  durch die Kraft  $P$ . Die Normalbeschleunigung

$$n_{OS} = \frac{v_{OS}^2}{OS} = \frac{so^2}{OS} = \pi_2 o_1 \text{ in Richtung } OS$$

wurde dann in  $o_1$  angesetzt und damit der Punkt  $\pi_2$  gewonnen. Die Beschleunigung  $b_O$  hat die Richtung der Normale  $OA$ ; die Gerade  $O \parallel AO$  durch  $\pi_2$  enthält also den Beschleunigungspunkt  $o$ . Es ist leicht zu beweisen, daß dieser Punkt im Schnitte der Geraden  $O$  und  $A$  liegt. Denn es ist  $b_O = b_A + b_{OA} = n_A + t_A + n_{OA} + t_{OA}$ ; von diesen Beschleunigungen haben  $b_O$ ,  $n_A$ ,  $n_{OA}$  die Richtung der Geraden  $O$ , hingegen sind  $t_A$  und  $t_{OA}$  senkrecht dazu; also ist  $b_O = n_A + n_{OA}$ ,  $t_A + t_{OA} = 0$ . Nun ist nach Gleichung 18:  $n_{OA} + n_{AS} + n_{SO} = 0$  oder  $n_{OA} = \overline{n_{OS} + n_{SA}}$ . Zieht man also  $o_1\mu_1 \parallel a_1\pi_1$ , so ist  $o_1\mu_1 = \overline{n_{SA}}$  und  $n_{OA} = \overline{\pi_2 o_1 + o_1\mu_1} = \overline{\pi_2\mu_1}$  und somit

$$b_O = n_{OA} + n_A = \overline{\pi_2\mu_1 + \mu_1 o} = \overline{\pi_2 o},$$

also  $o$  im Schnitte der Geraden  $O$  und  $A$ . Da ferner

$$n_A = \frac{v_A^2}{A\mathfrak{A}} = \overline{NA}, n_{OA} = \frac{v_A^2}{OA} = \overline{AN_1}, \text{ wird } b_O = \overline{\pi_2 o} = \overline{NA} + \overline{AN_1} = \overline{NN_1}.$$

Der Führungswiderstand  $R$  in  $O$  wird aus zwei Teilen bestehen: dem Führungsdrucke  $K$  in der Normale  $OA$  und dem Widerstande  $W$  in der Tangente  $Ot$  gegen Gleiten, ohne den ein Rollen der beiden Kurven aufeinander nicht zu denken ist.

Man führt nun mit den beiden Kräften  $K$  und  $W$  dieselben Konstruktionen durch, wie in Fig. 150 mit  $R'$  und  $R''$ . Man sucht zu  $O$  den Gegenpunkt  $O_1$  aus der Beziehung  $\overline{OS} \cdot \overline{SO_1} = i^2 = \overline{SJ}^2$ , zieht in  $O_1$  die Senkrechte auf  $SO_1$  und schneidet sie mit  $DS \perp K$  und  $ES \perp W$  in den Punkten  $D_1$  und  $E_1$ .

Sodann zieht man  $\mu a' \perp AD_1$  bis zum Schnitte  $a'$  mit der Geraden  $A$ ,  $\mu X' \parallel K$  und  $a'X' \perp AS$ ; im Schnitte der beiden letzten Geraden liegt  $X'$ ; ferner  $\mu a'' \perp AE_1$  bis zum Schnitte  $a''$  mit  $A$ ,  $\mu X'' \parallel W$  und  $a''X'' \perp AS$ ; im Schnitte der beiden letzten Geraden liegt  $X''$ .

Ebenso findet man die Punkte  $Y'$  und  $Y''$ , wenn man  $A$  durch  $O$  ersetzt.

Die durch  $\mu$  gezogene Parallele zu  $OS$  schneidet die Geraden  $A$  und  $O$  in den Punkten  $X_0$  und  $Y_0$ . Die Punktreihen  $X_0X'X''$  und  $Y_0Y'Y''$  treffen sich im Beschleunigungspunkte  $\sigma$  des Schwerpunkts  $S$ .

Es ist dann  $b_S \equiv \overline{\pi\sigma}$  und  $b_S^R \equiv \overline{\mu\sigma}$ , letztere die Beschleunigung des Schwerpunkts zufolge des Gesamtwiderstandes  $R$  der Führung in  $O$ .

$b_S^R$  besteht aus den beiden Teilen

$$b_S^W \parallel W \text{ und } b_S^K \perp K,$$

woraus die Führungswiderstände folgen

$$W = Mb_S^W \text{ und } K = Mb_S^K.$$

Der Gesamtwiderstand ist  $R \equiv K + W$ .

Die Tangentialbeschleunigungen, welche die Punkte  $O$  und  $A$  in bezug auf  $S$  durch  $R$  erfahren, sind

$$t_{OS}'' \equiv \sigma o \text{ und } t_{AS}'' \equiv \sigma a;$$

letztere ist senkrecht zu  $AS$ , erstere senkrecht zu  $OS$ , was, da  $o$  bereits bekannt ist, eine Probe für die Richtigkeit der Konstruktion gibt.

Damit ist auch der Beschleunigungspunkt  $a$  gefunden und es ergeben sich folgende Polygone:

$$b_A \equiv \pi_1 a \equiv n_{AS} + t_{AS}' + b_S + t_{AS}''$$

$$\text{und } b_O \equiv \pi_2 o \equiv n_{OS} + t_{OS}' + b_S + t_{OS}''.$$

Auch hier besteht, wie in den vorigen Abschnitten, die Ähnlichkeit

$$\pi \pi_1 \pi_2 \sim \sigma a o \sim SAO.$$

**94. Literatur.** In anderer als der eben vorgetragenen Art wurde die graphische Dynamik der Scheibe von Th. Pöschl behandelt („Beitrag zur Graphischen Dynamik des starren, ebenen Systems“, Zeitschr. f. Math. u. Phys., Bd. 58, 1910 und „Über die zwangläufige Bewegung materieller Systeme in der Ebene. I“, ebenda, Bd. 60, 1911). Pöschl geht von den in Abschnitt IV mitgeteilten Zuordnungen von Drehpol, Wendepol und Beschleunigungspol aus und sucht die Beschleunigungszustände der Scheibe, die jeder äußeren Kraft und jedem Führungsdrucke einzeln entsprechen; durch Übereinanderlagerung dieser Zu-

stände ergibt sich der resultierende Beschleunigungszustand der ganzen Scheibe, wobei von dem Satze auf Seite 66 (Aufgabe 29) Gebrauch gemacht wird. Als Beispiel hierfür diene die Lösung folgender

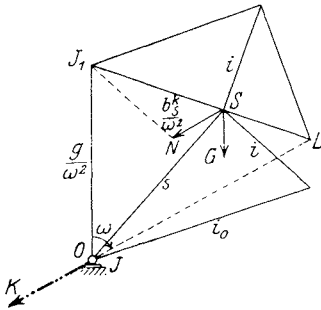


Fig. 153.

**Aufgabe:**

39. Eine schwere Scheibe, deren Gewicht  $G$  und Schwerpunkt  $S$  gegeben sind (Fig. 153), drehe sich mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um den festen Punkt  $O$ . Man suche Richtung und Größe des Gelenkdruckes  $K$  in  $O$ .

Die Konstruktion ist nach Th. Pöschl folgende: Man zeichne von  $O$  aus vertikal

die Strecke  $\overline{OJ_1} = \frac{g}{\omega^2}$ , dann ist nach Seite

66 (Aufgabe 29)  $J_1$  der zur Kraft  $K$  gehörende Wendepol, während der Wendepol  $J$  der resultierenden Bewegung in  $O$  liegt. Macht man  $\overline{J_1S} \cdot \overline{SL} = i^2$  und verbindet  $L$  mit  $O$ , so ist  $LO$  die Richtung von  $K$ . Zieht man noch  $J_1N \perp OS$  und  $SN \parallel LO$ , so ist

$$SN = \frac{b_S^K}{\omega^2} = M\omega^2$$

womit

$$K = M\omega^2 \cdot SN$$

bestimmt ist. Man suche diese Konstruktion zu begründen. (Vgl. damit Fig. 148.)

## X. Theorie der Ersatzpunkte.

**95. Einleitung.** In den vorhergehenden Untersuchungen ist gezeigt worden, auf welche Weise man Fragen, welche die Dynamik eines einzelnen ebenen Systems betreffen, auf graphischem Wege lösen kann. Die Hauptfrage: aus den aktiven Kräften auf die Beschleunigungen der Systempunkte und auf die Drücke in den Führungen zu schließen, wurde dort verhältnismäßig einfach gelöst und es scheint bei erstem Zusehen kein Hindernis zu bestehen, diese Methode auch auf die Verbindungen mehrerer Systeme, auf kinematische Ketten, Getriebe und Maschinen anzuwenden.

Allein da zeigt sich doch sofort, daß dem wesentliche Hindernisse entgegenstehen. Das hauptsächlichste von diesen dürfte wohl darin zu suchen sein, daß die einzelnen Teile einer bewegten kinematischen Kette in einer Weise zusammenhängen, daß über die Richtung der Drücke an diesen Verbindungsstellen von vornherein gar nichts ausgesagt werden kann: diese Gelenkdrücke, die zwischen zwei Maschinenteilen stets doppelt vorkommen (als Aktion und Reaktion), werden sich nämlich nach den Kräften und Beschleunigungsverhältnissen der beiden zusammenhängenden Teile einstellen, und da sich diese Abhängigkeit durch die ganze Maschine fortpflanzt, wird der Druck in jedem Gelenk, sowohl was die Größe als auch die Richtung betrifft, abhängig sein von den Druck-, Kraft- und Beschleunigungsverhältnissen in allen übrigen Gliedern.

Im Gegensatze hierzu konnte in den bisher untersuchten zwangsläufigen Einzelsystemen die Richtung des Führungsdruckes von vornherein als bekannt angesehen werden, wodurch die Lösung der Aufgabe möglich wurde.

Hierzu kommt aber noch folgende Schwierigkeit. Während nämlich von einem zwangsläufig geführten System die Bahnen zweier Punkte oder doch die Hüllbahnen zweier Kurven gegeben sind, kennt man in einem beliebigen Gliede eines Maschinengetriebes im allgemeinen die Bahn keines einzigen Punktes, also auch nicht die Krümmungshalbmesser der Bahnen der Gelenkpunkte, wodurch ja die Beschleunigungen der führenden Punkte mitbestimmt sind.

Es erschiene somit ganz aussichtslos, die Dynamik eines Maschinengetriebes graphisch zu behandeln, wenn es nicht einen sehr zweckmäßigen Ausweg gäbe, mit Hilfe dessen man alle einschlägigen Fragen



leicht beantworten kann. Dies ist die Einführung der Ersatzpunkte, mit denen wir uns in diesem Abschnitte beschäftigen werden. In den nächsten Abschnitten soll dann gezeigt werden, auf welche Weise die bereits behandelte Dynamik des Einzelsystems sich verändert, wenn man die Ersatzpunkte benützt. Der Vorteil dieser Methode wird freilich erst dann einleuchten können, wenn wir sie nicht nur auf einzelne Scheiben, sondern auch auf ganze Reihen von Scheiben, auf kinematische Ketten anwenden werden.

**96. Definition der Ersatzpunkte eines Systems.** Die Masse eines Körpers ist stets ungleichförmig über seinen Raum verteilt. Die gleichförmig verteilte Masse ist eine Annahme, die man zu dem Zwecke macht, um die Rechnung zu vereinfachen; selbst dann, wenn die Masse scheinbar gleichförmig verteilt ist, wird diese Annahme nur eine erlaubte Annäherung an die Wirklichkeit sein.

Sobald es sich um den Einfluß der Masse eines Körpers handelt, den dieser als Ganzes nach außen ausübt, z. B. bei Ermittlung der Drücke, die bewegte Massen auf die Führungen ausüben, kann man sich die Aufgabe stellen, die Masse des Körpers durch einzelne Punktmassen derart zu ersetzen, daß die Wirkung nach außen die gleiche ist.

So gibt es seit alters her einen sehr gebräuchlichen Ersatz der Körpermasse durch die im Schwerpunkt zusammengezogene Masse, die in Fragen des Gleichgewichts die wirkliche Masse des Körpers vollkommen ersetzt. Aber dieser Schwerpunkt wird nicht geeignet sein, die Körpermasse auch in dynamischer Hinsicht vollkommen zu ersetzen.

Man wird also unterscheiden müssen zwischen statischen und dynamischen Ersatzpunkten; die ersten ersetzen die Körpermasse vollständig nur in Fragen des Gleichgewichts, die letzten als die allgemeineren müssen die Körpermasse auch in dynamischen Untersuchungen vollständig ersetzen können.

**97. Die statischen Ersatzpunkte.** Sie werden derart gewählt werden müssen, daß ihre Massen zusammen gleich der Masse des Körpers sind und daß sie auch den gleichen Schwerpunkt wie dieser besitzen. Ihre Anzahl und Lage ist beliebig; wählt man nur einen Ersatzpunkt, so ist dies der Schwerpunkt selbst; wählt man zwei Ersatzpunkte, so muß auf ihrer Verbindungsgeraden der Schwerpunkt liegen. Aber sonst gibt es keine Beschränkung in ihrer Wahl.

Legt man durch den Schwerpunkt  $S$  ein beliebiges Achsenkreuz  $X, Y$ , bezeichnet mit  $M$  die Masse des Körpers, mit  $m_n$  jene eines Ersatzpunktes, mit  $x_n$  und  $y_n$  seine Koordinaten, so werden die oben ausgesprochenen Bedingungen mit Benützung der Gleichungen 36 die Gestalt annehmen:

$$\Sigma m_n = M, \quad \Sigma m_n x_n = 0, \quad \Sigma m_n y_n = 0 \quad . . . . . 48)$$

**98. Die dynamischen Ersatzpunkte.** Sie sind gewissermaßen Ersatzpunkte höherer Ordnung, d. h. sie ersetzen die Körpermasse nicht nur

in Gleichgewichtsfragen, sondern auch in dynamischer Hinsicht. Daraus folgt, daß sie zunächst alle Eigenschaften der statischen Ersatzpunkte haben und daß somit die Gleichungen 48 auch für sie gelten müssen.

Außerdem muß aber von ihnen verlangt werden, daß sie bei gleichem Bewegungszustande der Scheibe zusammengenommen auch die gleiche Bewegungsenergie besitzen wie die wirkliche Masse der Scheibe.

Ist  $P$  ein beliebiger Punkt der Scheibe mit den Koordinaten  $x, y, v$  seine Geschwindigkeit,  $m$  seine wirkliche Masse,  $v_S$  die Geschwindigkeit des Schwerpunkts, deren Richtung zweckmäßig als eine der Koordinatenachsen gewählt wird (Fig. 154), und entwirft man in Fig. 154 a den Geschwindigkeitsplan, so ist

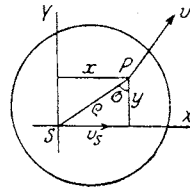


Fig. 154.

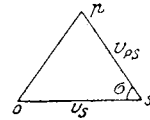


Fig. 154 a.

$$v^2 = v_S^2 + v_{PS}^2 - 2v_S v_{PS} \cos \sigma,$$

worin  $v_{PS}$  die relative Geschwindigkeit des Punktes  $P$  in bezug auf den Schwerpunkt ist.

Nennt man  $\rho$  die Entfernung des Punktes  $P$  vom Schwerpunkt,  $\sigma$  den Winkel zwischen  $\rho$  und  $y$  oder auch zwischen  $v_S$  und  $v_{PS}$ , so ist

$$v^2 = v_S^2 + v_{PS}^2 - 2v_S v_{PS} \cos \sigma$$

oder, da  $v_{PS} = \rho \omega$  und  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit der Scheibe bedeutet,

$$v^2 = v_S^2 + \rho^2 \omega^2 - 2v_S \rho \omega \cos \sigma.$$

Multipliziert man mit der Masse  $m$  des Punktes und bildet die Summe über alle Massenpunkte der Scheibe, so wird

$$\Sigma m v^2 = v_S^2 \Sigma m + \omega^2 \Sigma m \rho^2 - 2v_S \omega \Sigma m \rho \cos \sigma.$$

Hierin ist  $\Sigma m = M$ , ferner nach Gleichung 44:  $\Sigma m \rho^2 = \mathbf{T}_S$ ; das letzte Glied wird, da  $\rho \cos \sigma = y$  ist,  $\Sigma m y$ , und dies verschwindet nach Gleichung 36, da  $y_S = 0$  ist. Nennt man noch

$$L = \frac{1}{2} \Sigma m v^2 \dots \dots \dots 49)$$

die Bewegungsenergie der Scheibe, so wird

$$L = \frac{1}{2} M v_S^2 + \frac{1}{2} \mathbf{T}_S \omega^2 \dots \dots \dots 50)$$

Verlangt man nun, daß die dynamischen Ersatzpunkte zusammengenommen die gleiche Bewegungsenergie besitzen wie die Scheibe selbst, so müssen sie, gleichen Bewegungszustand vorausgesetzt, nicht nur die gleiche Gesamtmasse  $M$ , sondern auch das gleiche Trägheitsmoment besitzen wie die Masse der Scheibe. Zu den Gleichungen 48 tritt also als vierte Bedingungsgleichung hinzu:

$$\Sigma m_n p_n^2 = \mathbf{T}_S = M i^2 \dots \dots \dots 51)$$

wenn  $p_n$  die Abstände der Ersatzpunkte  $m_n$  vom Schwerpunkt und  $i$  den Trägheitshalbmesser der Scheibe für den Schwerpunkt bedeuten. Man kann somit folgenden allgemeinen Satz aufstellen: Verteilt man

die Masse der Scheibe auf dem Trägheitskreise des Schwerpunkts (Fig. 155) derart auf beliebig viele Punkte, daß deren Schwerpunkt mit dem der Scheibe  $S$  zusammenfällt, so ersetzen diese Punkte die Scheibe dynamisch vollkommen oder sie sind ihr dynamisch gleichwertig.

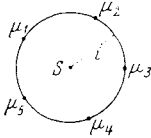


Fig. 155.

Jeder dynamische Ersatzpunkt bedarf zu seiner Feststellung dreier Bestimmungsstücke: seiner Masse  $m_n$  und der beiden Koordinaten  $x_n$  und  $y_n$ . Soll eine Scheibe von der Masse  $M$  durch  $n$  Punkte ersetzt werden, so bedarf es  $3n$  Bestimmungsstücke, zwischen denen die Bedingungsgleichungen 48 und 51 bestehen; dann sind also noch

$$\xi = 3n - 4 \dots \dots \dots 52)$$

Bestimmungsstücke beliebig wählbar.

Wir wollen von nun an die statisch gleichwertigen Massen der Punkte  $A, B, C$  mit  $m_A, m_B, m_C$ , die dynamisch gleichwertigen Massen mit  $\mu_A, \mu_B, \mu_C$  bezeichnen.

**99. Ersatz der Masse durch zwei dynamisch gleichwertige Punktmassen.** Die Masse  $M$  der Scheibe in Fig. 156 soll durch zwei Punkte ersetzt werden. Für  $n = 2$  wird in Gleichung 52:  $\xi = 2$ , d. h. es sind noch zwei Bestimmungsstücke beliebig wählbar. Die Bedingungsgleichungen 48 und 51 lauten hier:

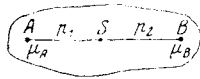


Fig. 156.

$$\mu_A + \mu_B = M,$$

$$\mu_A p_1 + \mu_B p_2 = 0,$$

$$\mu_A p_1^2 + \mu_B p_2^2 = M i^2,$$

wenn  $p_1$  und  $p_2$  die Abstände der Ersatzpunkte vom Schwerpunkt der Scheibe sind.

Wählt man den Punkt  $A$ , so sind dessen Koordinaten die zwei wählbaren Bestimmungsstücke und  $p_1$  ist gegeben. Dann folgt für die Massen der beiden Ersatzpunkte:

$$\mu_A = M \frac{i^2}{p_1^2 + i^2}, \quad \mu_B = M \frac{p_1^2}{p_1^2 + i^2} = M \frac{i^2}{p_2^2 + i^2} \dots \dots 53)$$

und für die Entfernung  $p_2$  des anderen Ersatzpunktes von  $S$ :

$$p_2 = - \frac{i^2}{p_1} \dots \dots \dots 54)$$

Die Punkte  $A$  und  $B$  haben dann zueinander dieselbe Lage, wie der Aufhängungspunkt und der entsprechende Schwingungsmittelpunkt der Scheibe; läßt man z. B. die Scheibe um den festgehaltenen Punkt  $A$  Schwingungen ausführen, so ist  $B$  der Schwingungsmittelpunkt und die Schwingungsdauer ist die gleiche, wenn man die Scheibe um  $B$  statt um  $A$  schwingen läßt. Man nennt die Entfernung  $AB$  die reduzierte Pendellänge. (Vgl. H. Lorenz, Massenwirkungen von Getriebegruppen, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1918.)

**100. Der Stoßmittelpunkt einer Scheibe.** Auf den Ersatz einer eben bewegten Scheibe durch zwei dynamisch gleichwertige Punkte hat Poincot gelegentlich der Aufsuchung des Stoßmittelpunktes aufmerksam gemacht („Sur la percussion des corps“, Journal Liouville 1857, S. 294).

Die ebene Scheibe in Fig. 156 erleide an einer beliebigen Stelle  $A$  eine Stoßkraft oder einen Impuls. Man ersetzt, wie oben gezeigt wurde, die Masse der Scheibe durch die Ersatzmassen  $\mu_A$  und  $\mu_B$  in  $A$  und  $B$ , wobei  $B$  durch die Lage von  $A$  vollkommen bestimmt ist.

Da nun der Stoß nur in  $A$  ausgeübt wird, wird der zweite Ersatzpunkt  $B$  nichts davon erfahren und bleibt somit in Ruhe; er ist der Stoßmittelpunkt der Scheibe.

Um die Geschwindigkeit  $v$  zu berechnen, mit der sich  $A$  nach dem Stoße bewegen wird, genügt es, da von den beiden Ersatzpunkten nur  $A$  bewegt wird, die Gleichung anzusetzen:

$$\text{Stoßkraft} = \mu_A v = M \cdot \frac{i^2}{p_1^2 + i^2} v,$$

woraus  $v$  berechnet werden kann.

**101. Beschleunigungsdruck einer sich drehenden Scheibe.** Eine beliebig geformte Scheibe (Fig. 157) ist im Punkte  $A$  festgelagert und drehe sich um diesen mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  und der Winkelbeschleunigung  $\lambda$ . Man suche Größe und Richtung des Beschleunigungsdruckes.

Zunächst ersetze man die Masse  $M$  der Scheibe durch die zwei dynamischen Ersatzmassen  $\mu_A$  und  $\mu_B$ , Gleichung 53, worin  $A$  der feste Drehpunkt ist und  $B$  auf der Schwerlinie  $AS$  liegt; es ist nach Gleichung 54

$$AB = p_1 + (-p_2) = p_1 + \frac{i^2}{p_1}.$$

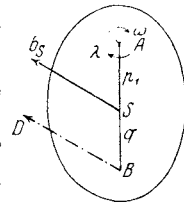


Fig. 157.

Man erkennt in  $B$  den Schwingungsmittelpunkt der Scheibe bei deren Drehung um  $A$ . Da  $b_A = 0$  und  $b_B = \overline{AB} \cdot \sqrt{\omega^4 + \lambda^2}$  ist, bleibt für den Beschleunigungsdruck der Scheibe

$$D = \mu_B b_B = M \frac{p_1^2}{p_1^2 + i^2} \cdot \left( p_1 + \frac{i^2}{p_1} \right) \sqrt{\omega^4 + \lambda^2}$$

oder

$$D = M p_1 \sqrt{\omega^4 + \lambda^2} = M b_S,$$

wenn  $b_S$  die Beschleunigung des Schwerpunkts ist.

Der Beschleunigungsdruck der rotierenden Scheibe ist also ebenso groß wie der Beschleunigungsdruck der im Schwerpunkte vereinigten Masse und ihm parallel; sein Angriffspunkt ist aber der Schwingungsmittelpunkt der Scheibe.

## 102. Beispiele.

1. Beispiel. Ein homogener Stab von der Länge  $l$  ist auf zwei Stützen  $A$  und  $B$  symmetrisch gelagert (Fig. 158). Wenn die Stütze  $B$  plötzlich entfernt wird, soll sich der anfängliche Druck auf die Stütze  $A$  nicht ändern. Wie groß muß die Entfernung  $x$  der Stabmitte vom Auflager gewählt werden?

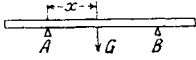


Fig. 158.

Man ersetzt die Masse des Stabes durch zwei Punkte, von denen der eine über dem Auflager  $A$  liegt; die Ermittlung des zweiten Punktes  $C$  ist überflüssig. Setzt man  $p_1 = x$ ,  $i^2 = \frac{l^2}{12}$  in Gleichung 53, so wird

$$\mu_A = M \frac{l^2}{12x^2 + l^2}.$$

Wird die Stütze  $B$  entfernt, so lastet  $\mu_A$  allein auf dem Auflager  $A$ ; wenn der Stützendruck in  $A$  sich nicht ändern soll, muß

$$\mu_A = \frac{M}{2}$$

sein. Durch Vergleich der beiden Werte für  $\mu_A$  folgt

$$x = i = \frac{l}{\sqrt{12}}.$$

2. Beispiel. Ein homogener Stab vom Gewicht  $G$  ist an seinen Enden gelagert. Wenn eine seiner Stützen plötzlich entfernt wird, wie groß wird dann der anfängliche Druck auf die andere Stütze?

Das Beispiel ist wie das frühere zu lösen. Wird die Stütze  $B$  plötzlich entfernt, so wähle man die eine Ersatzmasse in  $A$ . Dann ist  $p_1 = \frac{l}{2}$ ,  $i^2 = \frac{l^2}{12}$  und nach Gleichung 53:

$$\mu_A = M \frac{i^2}{p_1^2 + i^2} = \frac{M}{4}.$$

Da beim Entfernen der Stütze  $B$  in  $A$  nur die Masse  $\frac{M}{4}$  zurückbleibt, ist der anfängliche Druck auf diese Stütze  $\frac{G}{4}$ .

3. Beispiel. Eine homogene elliptische Platte, deren große Achse horizontal ist, wird in ihren Brennpunkten  $A$  und  $B$  gelagert (Fig. 159).

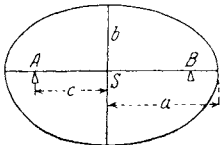


Fig. 159.

Wenn die Stütze in  $B$  plötzlich entfernt wird, muß sich im allgemeinen der Druck auf die übrigbleibende Stütze  $A$  verändern. Welche numerische Exzentrizität muß man der Ellipse geben, damit in  $A$  keine Veränderung des Druckes stattfindet?

Ersetzt man die Masse  $M$  der Platte durch zwei Punkte, von denen der eine in  $A$  angenommen wird, so ist nach Gleichung 53:

$$\mu_A = M \frac{i^2}{p_1^2 + i^2};$$

nun ist hier, wenn  $a$  und  $b$  die Halbachsen der Ellipse,  $c$  ihre Exzentrizität bezeichnet:  $p_1 = c = \sqrt{a^2 - b^2}$ ; ferner ist nach Gleichung 87:

$$i^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2); \text{ man erh\u00e4lt: } \mu_A = M \frac{a^2 + b^2}{5a^2 - 3b^2}.$$

Soll nun der Druck in  $A$  gleich dem halben Gewichte der Platte bleiben, so m\u00fcsste  $\mu_A = \frac{M}{2}$  sein; durch Vergleich erh\u00e4lt man

$$\frac{a^2 + b^2}{5a^2 - 3b^2} = \frac{1}{2}$$

oder die numerische Exzentrizit\u00e4t

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{2}{5}}.$$

4. Beispiel. Eine schwere quadratische Platte ist in zwei Punkten  $B$  und  $D$  ihrer horizontalen Kante an zwei vertikalen F\u00e4den in  $A$  und  $C$  aufgeh\u00e4ngt (Fig. 160). Der Faden  $CD$  wird zerschnitten. Wie gro\u00df ist im ersten Augenblicke die Spannung des Fadens  $AB$ ?

Da auf den Schwerpunkt  $S$  der Platte nur vertikale Kr\u00e4fte wirken, wird nach dem Prinzip der Schwerpunktsbewegung (vgl. 52), die Bewegung des Schwerpunkts im ersten Augenblick vertikal sein. Da ferner  $B$  mit dem festen Punkte  $A$  verbunden bleibt, wird die Anfangsbewegung von  $B$  horizontal sein. Errichtet man auf diese beiden Bewegungsrichtungen in  $B$  und  $S$  die Senkrechten, so schneiden sie sich im anf\u00e4nglichen Drehpol  $O$  der Platte. Ersetzt man ihre Masse  $M$  durch zwei Punkte, von denen man den einen in  $O$  w\u00e4hlt, so ist dessen Ersatzmasse nach Gleichung 53:

$$\mu_O = M \frac{i^2}{p_1^2 + i^2}$$

mit  $p_1 = b$  und  $i^2 = \frac{a^2}{6}$ , wenn  $a$  die Seite der Platte ist (vgl. Gleichung 77).

Die Spannung des Fadens  $AB$  wird im ersten Augenblick nach dem Durchschneiden des Fadens  $CD$  nur von der Masse  $\mu_O$  herr\u00fchren, die in der Verl\u00e4ngerung von  $AB$  liegt; ist  $G = Mg$  das Gewicht der Platte, so ist also die anf\u00e4ngliche Spannung des Fadens  $AB$ :  $G \frac{a^2}{a^2 + 6b^2}$ .

5. Beispiel. Ein Balken  $\overline{AB} = a$  vom Gewicht  $G$  ist an zwei gleichlangen Seilen  $\overline{AC} = \overline{BC} = a$  in  $C$  aufgeh\u00e4ngt. Das eine Seil  $BC$  wird

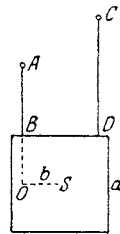


Fig. 160.

durchschnitt; wie groß ist im ersten Augenblick die Spannung  $K$  des anderen Seiles? (Fig. 161.)

Das Seil  $AC$  wird sich im ersten Augenblick um  $C$  drehen, der Balken  $AB$  überdies um  $A$ ; die ganze anfängliche Bewegung des Balkens ist die Resultante dieser beiden Drehungen um  $C$  und  $A$ ; ihr Drehpol  $O$  muß also auf der Geraden  $CA$  liegen (vgl. 167).

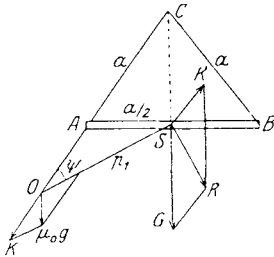


Fig. 161.

Die anfängliche Bewegung des Schwerpunkts  $S$  wird in die Richtung seiner Kraft  $R$  fallen, und diese ist die Resultante aus dem Gewicht  $G$  des Balkens und der Spannung  $K$  des Seiles  $AC$ , die vorläufig noch unbekannt ist. Die Senkrechte in  $S$  auf  $R$  führt zum Drehpol  $O$ .

Man ersetze die Masse  $M$  des Balkens durch zwei Punkte, von denen man den einen in  $O$  annimmt. Dann ist  $p_1 = OS$ . Aus dem Kraftdreieck von  $R, G, K$  folgt:

$$G : K = \sin(90^\circ + \psi) : \sin(60^\circ - \psi),$$

woraus  $tg \psi = \sqrt{3} - 2x \dots \dots \dots a)$

wenn  $x = \frac{K}{G}$  gesetzt wird; ferner ist

$$p_1 : \frac{a}{2} = \sin 120^\circ : \sin \psi,$$

woraus man erhält:  $p_1 = \frac{a \sqrt{3}}{4 \sin \psi}.$

Die Ersatzmasse in  $O$  wird dann nach Gleichung 53 und mit  $i^2 = \frac{a^2}{12}$  (vgl. Gleichung 91):

$$\mu_O = M \frac{i^2}{p_1^2 + i^2} = M \frac{4 \sin^2 \psi}{9 + 4 \sin^2 \psi}.$$

Das Gewicht  $\mu_O g$  dieser Masse erzeugt in  $O$  die Seilspannung  $K$  und es ist  $K : \mu_O g = \sin(\psi + 30^\circ) : \sin \psi$

oder  $K = \frac{\mu_O g}{2} (\sqrt{3} + \cotg \psi)$

und nach Einsetzen von  $\mu_O$  und  $G = Mg$ :

$$x = \frac{K}{G} = \frac{2 \sin^2 \psi (\sqrt{3} + \cotg \psi)}{9 + 4 \sin^2 \psi} \dots \dots \dots b)$$

Verbindet man die Gleichungen a) und b), so bleibt nach Entfernen

von  $x$ :  $tg \psi = \frac{9 \sqrt{3}}{13}$

und schließlich aus Gleichung a):

$$K = G \frac{\sqrt{12}}{13}.$$

6. Beispiel. Eine Kreisscheibe von der Masse  $M$  und dem Halbmesser  $r$  (Fig. 162) dreht sich um ihren Mittelpunkt mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ . Sie wird an einer beliebigen Stelle  $A$  in der Entfernung  $a$  vom Mittelpunkt festgehalten; wie groß ist der in  $A$  ausgeübte Stoß und mit welcher Winkelgeschwindigkeit  $\omega_1$  dreht sich die Scheibe nach dem Stoße weiter?

Man ersetzt die Masse  $M$  durch zwei Punkte, von denen man den einen in  $A$  wählt; seine Masse ist nach Gleichung 53 mit  $p_1 = a$  und  $i^2 = \frac{r^2}{2}$  (vgl. Gl. 84):

$$\mu_A = M \frac{i^2}{p_1^2 + i^2} = M \frac{r^2}{2a^2 + r^2};$$

der andere Ersatzpunkt  $B$  hat dann die Masse

$$\mu_B = M \frac{i^2}{p_1^2 + i^2} = M \frac{2a^2}{2a^2 + r^2}$$

und von  $O$  die Entfernung nach Gleichung 54:

$$p_2 = -\frac{i^2}{p_1} = -\frac{r^2}{2a} = -b.$$

Da  $a\omega$  die Geschwindigkeit von  $A$  ist, nimmt der Stoß in  $A$  die Größe an

$$a\omega\mu_A = M \frac{ar^2\omega}{2a^2 + r^2}$$

und da  $B$  seine Geschwindigkeit beibehält, ist nach dem Stoße

$$(a + b)\omega_1 = b\omega \text{ oder } \omega_1 = \omega \frac{r^2}{2a^2 + r^2}.$$

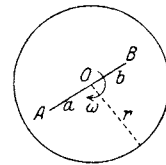


Fig. 162.

### 103. Aufgaben.

40. Eine kreisrunde, horizontale Tischplatte wird in drei Punkten  $A, B, C$  ihres Randes gestützt, die gleichweit voneinander entfernt sind. Wenn eine dieser Stützen plötzlich entfernt wird, wie groß ist der anfängliche Druck auf jede der beiden anderen Stützen?

Resultat: Ein Viertel des Gewichtes der Tischplatte.

41. Eine Kreisscheibe dreht sich um ihren Mittelpunkt mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , während dieser die Geschwindigkeit  $v$  besitzt. Ein beliebiger Punkt der Scheibe wird plötzlich festgehalten; wie groß ist der Stoß, den die Scheibe erleidet und mit welcher Winkelgeschwindigkeit  $\omega_1$  dreht sie sich um den festgehaltenen Punkt? (Nouv. Ann. 3, S. 74).

104. Ersatz der Masse durch drei dynamisch gleichwertige Punktmassen. Mit  $n = 3$  wird in Gleichung 52:  $\xi = 3n - 4 = 5$ . Es können also von den drei Punkten fünf Bestimmungsstücke beliebig gewählt werden. Nennt man die Ersatzpunkte  $A, B, C$ , so nehmen die Bedingungsgleichungen 48 und 51 die Form an:



$$\left. \begin{aligned} \mu_A + \mu_B + \mu_C &= M, \\ \mu_A x_1 + \mu_B x_2 + \mu_C x_3 &= 0, \\ \mu_A y_1 + \mu_B y_2 + \mu_C y_3 &= 0, \\ \mu_A p_1^2 + \mu_B p_2^2 + \mu_C p_3^2 &= M i^2. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 55)$$

Die Lage von  $A$  und  $B$  kann durch Annahme von je zwei Koordinaten beliebig gewählt werden; für den dritten Punkt  $C$  ist dann nur mehr eine Koordinate beliebig, d. h. die möglichen Punkte  $C$  erfüllen eine Kurve.

Um die Gleichung dieser Kurve zu finden, entfernen wir aus den Gleichungen 55 die Massen  $\mu_A, \mu_B, \mu_C$ ; dann lautet das Resultat:

$$(p_1^2 - i^2) (x_2 y_3 - y_2 x_3) + (p_2^2 - i^2) (x_3 y_1 - y_3 x_1) + (p_3^2 - i^2) (x_1 y_2 - y_1 x_2) = 0.$$

Da  $p_3^2 = x_3^2 + y_3^2$  ist, gehört diese Gleichung für den Ort der Punkte  $C (x_3, y_3)$  einem Kreise an. Dieser Kreis geht zunächst durch die Punkte  $A$  und  $B$ , wie man sich durch Einsetzen von

$$\begin{aligned} x_3 &= x_1, y_3 = y_1, p_3 = p_1 \\ x_3 &= x_2, y_3 = y_2, p_3 = p_2 \end{aligned}$$

und

überzeugen kann (Fig. 163).

Zwei andere Punkte  $C_1$  und  $C_2$  dieses Kreises sind durch folgende Überlegung zu finden. Setzt man die Ersatzmasse  $\mu_A$  gleich null, so bleiben nur die Ersatzmassen  $\mu_B$  in  $B$  und  $\mu_C$  in  $C_2$  übrig, die, wie in 99 gezeigt wurde, mit dem Schwerpunkt  $S$  auf derselben Geraden liegen müssen; setzt man  $\overline{SB} = p_2$ , so ist nach Gleichung 54:  $SC_2 = \frac{i^2}{p_2}$ ;

ebenso ist mit  $\overline{SA} = p_1$ :  $SC_1 = \frac{i^2}{p_1}$ .

$C_1$  und  $C_2$ , die Gegenpunkte von  $A$  und  $B$ , sind also ebenfalls Punkte des Kreises; ihre Konstruktion mit Hilfe von  $\overline{SJ} = i$  ist von früher bekannt.

Man hat demnach vier Punkte  $A, B, C_1, C_2$  des Kreises, mit Hilfe welcher er konstruiert werden kann.

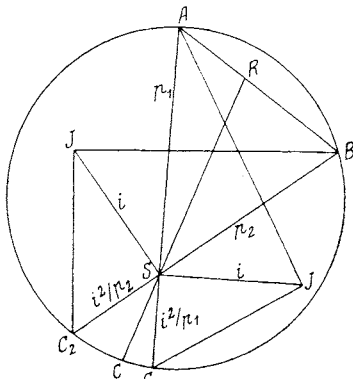


Fig. 163.

Solange man die Massen der Ersatzpunkte nur positiv einzuführen wünscht, muß der Punkt  $R$ , der Schwerpunkt von  $\mu_A$  und  $\mu_B$ , zwischen  $A$  und  $B$ , und der Schwerpunkt  $S$  zwischen  $R$  und  $C$  liegen. Damit ist in Fig. 163 schon das Gebiet abgegrenzt, in dem der Punkt  $C$  liegen kann; es ist der Kreisbogen  $C_1, C_2$ , im Sinne der Uhrzeigerbewegung durchlaufen.

An den Grenzen dieses Gebietes verschwindet die eine der Ersatzmassen; ist  $C$  in  $C_1$ , so wird  $\mu_B = 0$ ;

ist  $C$  in  $C_2$ , so wird  $\mu_A = 0$ . Liegt  $C$  außerhalb dieses Gebietes, so wird  $\mu_A$  oder  $\mu_B$  negativ.

Sobald man die Annahme von  $C$  auf dem Kreise getroffen hat, sind auch die drei Ersatzmassen  $\mu_A$ ,  $\mu_B$  und  $\mu_C$  bestimmt. Aus den ersten drei der Gleichungen 55 erhält man:

$$\left. \begin{aligned} \mu_A &= \frac{M}{D} (y_2 x_3 - x_2 y_3) = M \cdot \frac{f_1}{f}, \\ \mu_B &= \frac{M}{D} (y_3 x_1 - x_3 y_1) = M \cdot \frac{f_2}{f}, \\ \mu_C &= \frac{M}{D} (y_1 x_2 - x_1 y_2) = M \cdot \frac{f_3}{f}, \end{aligned} \right\} 56)$$

$$D = (y_2 x_3 - x_2 y_3) + (y_3 x_1 - x_3 y_1) + (y_1 x_2 - x_1 y_2) = 2f;$$

hierin bedeuten  $f_1, f_2, f_3, f$  folgende Dreiecksflächen (Fig. 164):

$$f_1 = \triangle SBC, \quad f_2 = \triangle SCA, \quad f_3 = \triangle SAB, \quad f = \triangle ABC.$$

Die Massen  $\mu_A, \mu_B, \mu_C$  sind übrigens auch einfach aus der Abbildung selbst zu entnehmen; es ist

$$\mu_A = M \cdot \frac{SR_1}{AR_1}, \quad \mu_B = M \cdot \frac{SR_2}{BR_2}, \quad \mu_C = M \cdot \frac{SR_3}{CR_3}.$$

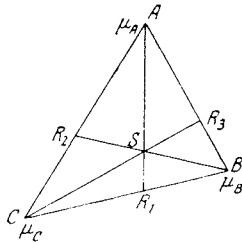


Fig. 164.

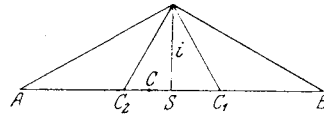


Fig. 165.

### 105. Die drei dynamischen Ersatzpunkte liegen auf einer Geraden.

Es ist auch erlaubt, die beliebig anzunehmenden Punkte  $A$  und  $B$  so zu wählen, daß der Schwerpunkt  $S$  auf ihrer Verbindungsgeraden liegt (Fig. 165). Dann wird der Ort der Punkte  $C$  diese Gerade selbst; die Punkte  $C_1$  und  $C_2$  können wie früher bestimmt werden. Zwischen ihnen kann  $C$  beliebig angenommen werden.

Nimmt man in diesem Falle  $S$  als Koordinatenanfang, die Gerade  $AB$  als  $X$ -Achse an, so gehen die Gleichungen 55 über in

$$\begin{aligned} \mu_A + \mu_B + \mu_C &= M, \\ \mu_A x_1 + \mu_B x_2 + \mu_C x_3 &= 0, \\ \mu_A x_1^2 + \mu_B x_2^2 + \mu_C x_3^2 &= M i^2; \end{aligned}$$

für die Massen der drei Ersatzpunkte findet man dann:

$$\left. \begin{aligned} \mu_A &= \frac{M}{D} (x_3 - x_2) (x_3 x_2 + i^2), \\ \mu_B &= \frac{M}{D} (x_1 - x_3) (x_1 x_3 + i^2), \\ \mu_C &= \frac{M}{D} (x_2 - x_1) (x_2 x_1 + i^2), \end{aligned} \right\} 57)$$

$$D = x_3 x_2 (x_3 - x_2) + x_1 x_3 (x_1 - x_3) + x_2 x_1 (x_2 - x_1).$$

Wird der dritte Ersatzpunkt  $C$  in den Schwerpunkt  $S$  verlegt, was erlaubt ist, so ist  $x_3 = 0$  und die Massen der Ersatzpunkte werden dann:

$$\mu_A = -M \frac{i^2}{x_1(x_2 - x_1)}, \quad \mu_B = M \frac{i^2}{x_2(x_2 - x_1)}, \quad \mu_S = M \left( 1 + \frac{i^2}{x_1 x_2} \right).$$

Setzt man hier:  $x_1 = -a$ ,  $x_2 = +b$ ,  $x_2 - x_1 = a + b = l$  (Fig. 166), so wird

$$\mu_A = M \frac{i^2}{al}, \quad \mu_B = M \frac{i^2}{bl}, \quad \mu_S = M \left( 1 - \frac{i^2}{ab} \right). \quad 58)$$

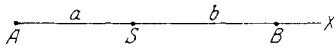


Fig. 166.

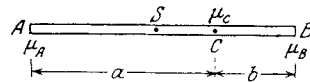


Fig. 167.

106. Beispiele.

1. Beispiel. Ein homogener Stab  $AB$  von der Länge  $l$  (Fig. 167) soll durch drei Punkte ersetzt werden, von denen  $A$  und  $B$  in den Endpunkten des Stabes, der dritte  $C$  in den Abständen  $a$  und  $b$  von ihnen liegt.

Dann ist  $x_1 = -\frac{l}{2}$ ,  $x_2 = \frac{l}{2}$ ,  $x_3 = a - \frac{l}{2}$  und  $i^2 = \frac{l^2}{12}$  (vgl. Gleichung

91); die Gleichungen 57 geben dann die Massen der drei Ersatzpunkte

$$\mu_A = M \frac{2a - b}{6a}, \quad \mu_B = M \frac{2b - a}{6b}, \quad \mu_C = M \frac{l^2}{6ab}$$

2. Beispiel. Ein schwerer homogener Stab  $AB$  ist in  $C$  in einer vertikalen Spindel drehbar gelagert und besitzt um diese eine Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  (Fig. 168). Welchen Winkel  $\varphi$  wird der Stab mit der Spindel während der Drehung bilden?

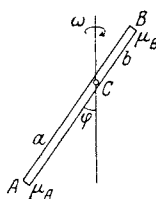


Fig. 168.

Man ersetzt die Masse  $M$  des Stabes durch drei Ersatzpunkte in  $A$ ,  $B$  und  $C$ , wie dies im vorigen Beispiel gezeigt wurde. Die Masse  $\mu_C$  in  $C$  nimmt an der Bewegung nicht teil, bedarf also weiter keiner Berücksichtigung. Sobald der Stab die Gleichgewichtsstellung während der Drehung um die Spindel erreicht hat, müssen die Gewichte der Massen  $\mu_A$  in  $A$  und  $\mu_B$  in  $B$ , die Fliehkräfte dieser Massen und der Gelenkdruck in  $C$  ein Gleichgewichtssystem bilden. Setzen wir die um  $C$  rechtsdrehenden Momente gleich den linksdrehenden, so ist

$\mu_B g \cdot b \sin \varphi + \mu_A a \sin \varphi \cdot \omega^2 \cdot a \cos \varphi + \mu_B b \sin \varphi \cdot \omega^2 \cdot b \cos \varphi = \mu_A g \cdot a \sin \varphi$   
 woraus nach Einsetzen der Massen  $\mu_A$  und  $\mu_B$  folgt:

$$\cos \varphi = \frac{3g}{2\omega^2} \cdot \frac{a-b}{a^2-ab+b^2}$$

**107. Ersatz der Masse durch vier dynamisch gleichwertige Punktmassen.** Setzt man in Gleichung 52:  $n = 4$ , so wird  $\xi = 3n - 4 = 8$ , d. h. es können acht Bestimmungsstücke der vier Punkte beliebig gewählt werden. Nennt man die Punkte  $A, B, C, D$ , so werden die Bedingungsgleichungen 48 und 51 lauten:

$$\left. \begin{aligned} \mu_A + \mu_B + \mu_C + \mu_D &= M, \\ \mu_A x_1 + \mu_B x_2 + \mu_C x_3 + \mu_D x_4 &= 0, \\ \mu_A y_1 + \mu_B y_2 + \mu_C y_3 + \mu_D y_4 &= 0, \\ \mu_A p_1^2 + \mu_B p_2^2 + \mu_C p_3^2 + \mu_D p_4^2 &= M i^2. \end{aligned} \right\} \dots 59)$$

Man könnte z. B. die Lage aller vier Ersatzpunkte, d. h. die Koordinaten  $x_1 y_1, x_2 y_2, x_3 y_3, x_4 y_4$  beliebig annehmen. Dann sind auch die Abstände  $p_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$  usw. bestimmt und die vier Ersatzmassen  $\mu_A, \mu_B, \mu_C, \mu_D$  können aus den Gleichungen 59 leicht ermittelt werden.

Verlegt man den einen der Ersatzpunkte in den Schwerpunkt, so ist  $x_4 = 0, y_4 = 0, p_4 = 0$ ; wird dann  $\mu_S$  statt  $\mu_4$  geschrieben, so nehmen die Gleichungen 59 die Form an:

$$\left. \begin{aligned} \mu_A + \mu_B + \mu_C &= M - \mu_S, \\ \mu_A x_1 + \mu_B x_2 + \mu_C x_3 &= 0, \\ \mu_A y_1 + \mu_B y_2 + \mu_C y_3 &= 0, \\ \mu_A p_1^2 + \mu_B p_2^2 + \mu_C p_3^2 &= M i^2 \end{aligned} \right\} \dots 60)$$

Die ersten drei dieser Gleichungen werden identisch mit den ersten drei Gleichungen 55, wenn  $M$  durch  $M - \mu_S$  ersetzt wird. Man erhält dann in Übereinstimmung mit den Gleichungen 56:

$$\begin{aligned} \mu_A &= (M - \mu_S) \frac{f_1}{f}, \\ \mu_B &= (M - \mu_S) \frac{f_2}{f}, \\ \mu_C &= (M - \mu_S) \frac{f_3}{f}, \end{aligned}$$

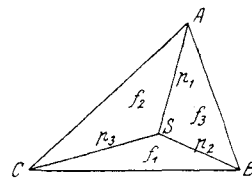


Fig. 169.

wenn  $f$  die Dreiecksfläche  $ABC$  und  $f_1/f_2/f_3$  die Dreiecksflächen  $SBC, SCA, SAB$  sind (Fig. 169). Nimmt man noch die letzte der Gleichungen 60 hinzu, so erhält man die vier Ersatzmassen in folgender Form:

$$\mu_A = M \frac{i^2}{f^4} f_1, \mu_B = M \frac{i^2}{f^4} f_2, \mu_C = M \frac{i^2}{f^4} f_3, \mu_S = M \left( 1 - \frac{i^2}{f^4} f \right)$$

mit

$$f^4 = f_1 p_1^2 + f_2 p_2^2 + f_3 p_3^2.$$

108. Beispiele.

1. Beispiel. Ersatzpunkte eines Stabwerkes. Das starre Stabwerk  $ABCD$  (Fig. 170) besteht aus fünf Stäben in symmetrischer Anordnung. Die vier Randstäbe haben die Länge  $l_1$  und die Masse  $M_1$ , der Mittelstab die Länge  $l_2$  und die Masse  $M_2$ . Die fünf Stäbe sollen durch vier dynamisch gleichwertige Massenpunkte in den vier Ecken ersetzt werden und zwar  $\mu_1$  in  $A$  und  $B$ ,  $\mu_2$  in  $C$  und  $D$ . Es muß somit zunächst die Gleichung bestehen:

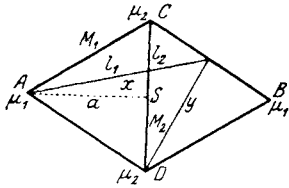


Fig. 170.

$$2\mu_1 + 2\mu_2 = 4M_1 + M_2 \dots \dots \dots a)$$

Bildet man von diesen beiden Massengruppen die Trägheitsmomente für die Punkte  $A$  und  $C$  und setzt sie sowohl für  $A$ , als für  $C$  einander gleich, so erhält man die Gleichungen:

$$4\mu_1 a^2 + 2\mu_2 l_1^2 = \frac{2}{3} M_1 l_1^2 + 2M_1 \left( \frac{l_1^2}{12} + x^2 \right) + M_2 \left( \frac{l_2^2}{12} + a^2 \right),$$

$$2\mu_1 l_1^2 + \mu_2 l_2^2 = \frac{2}{3} M_1 l_1^2 + 2M_1 \left( \frac{l_1^2}{12} + y^2 \right) + \frac{1}{3} M_2 l_2^2,$$

wobei von dem Reduktionssatz der Trägheitsmomente Gebrauch gemacht wurde (Gleichung 92). Hierin ist

$$a^2 = \overline{AS}^2 = l_1^2 - \frac{l_2^2}{4},$$

$$x^2 = \left( \frac{3}{2} a \right)^2 + \left( \frac{l_2}{4} \right)^2,$$

$$y^2 = \left( \frac{a}{2} \right)^2 + \left( \frac{3}{4} l_2 \right)^2.$$

Man erhält für die Ersatzmassen:

$$\mu_1 = \frac{1}{2l_1^2 - l_2^2} \left[ \frac{M_1}{3} (4l_1^2 - 3l_2^2) - \frac{M_2}{6} l_2^2 \right],$$

$$\mu_2 = \frac{1}{2l_1^2 - l_2^2} \left[ \frac{M_1}{3} (8l_1^2 - 3l_2^2) + \frac{M_2}{3} (3l_1^2 - l_2^2) \right]$$

welche Gleichungen die Gleichung a) erfüllen.

2. Beispiel. Ersatzpunkte eines symmetrischen dreistieligen Gliedes. Drei Stangen  $AD, BD, CD$  (Fig. 171), von denen die beiden letzten gleiche Länge  $l_2$  und gleiche Masse  $M_2$  haben, sind in  $D$  starr miteinander verbunden.  $\overline{AD} = l_1$  ist eine Symmetrielinie.

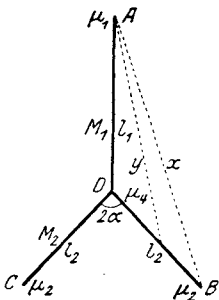


Fig. 171.

Man soll die Masse  $M = M_1 + 2M_2$  des Gliedes durch vier dynamisch gleichwertige Massen, und zwar  $\mu_1$  in  $A$ ,  $\mu_2$  in  $B$  und  $C$ ,  $\mu_4$  in  $D$  ersetzen.

Diese Massen müssen zunächst die Gleichung erfüllen

$$\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_4 = M_1 + 2M_2.$$

Bildet man die Trägheitsmomente dieser beiden Massengruppen für die Punkte *A* und *D* und setzt sie für jeden dieser Punkte gleich, so erhält man die Gleichungen:

$$2\mu_2 x^2 + \mu_4 l_1^2 = \frac{1}{3} M_1 l_1^2 + 2M_2 \left( \frac{l_2^2}{12} + y^2 \right),$$

$$\mu_1 l_1^2 + 2\mu_2 l_2^2 = \frac{1}{3} M_1 l_1^2 + \frac{2}{3} M_2 l_2^2.$$

Bezeichnet man den Winkel *BDC* mit *2a*, so ist

$$x^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos a,$$

$$y^2 = l_1^2 + \frac{l_2^2}{4} + l_1 l_2 \cos a.$$

Man erhält hieraus für die Ersatzmassen folgende Gleichungen, worin  $l = l_2 + l_1 \cos a$  gesetzt wurde:

$$\mu_1 = \frac{1}{6l_1} [M_1 l_1 (3l_2 + 2l_1 \cos a) - 2M_2 l_2^2 \cos a],$$

$$\mu_2 = \frac{1}{12l_2} [-M_1 l_1^2 + 2M_2 l_2 (2l_2 + 3l_1 \cos a)],$$

$$\mu_4 = \frac{1}{6l_1 l_2} [M_1 l_1 (3l_2^2 + 4l_1 l_2 \cos a + l_1^2) + 2M_2 l_2 (4l_1 l_2 + 3l_1^2 \cos a + l_2^2 \cos a)].$$

Zur Kontrolle dieser Gleichungen können überdies noch die Trägheitsmomente für den Punkt *B* gleichgesetzt werden.

Es kann vorkommen, daß Ersatzmassen negativ werden. So kann z. B. die Masse  $\mu_2$  negativ oder null werden, wenn

$$\frac{M_1}{M_2} \geq 2 \frac{l_2}{l_1} \left( 2 \frac{l_2}{l_1} + 3 \cos a \right)$$

ist.

In dem besonderen Falle, wenn  $\alpha = 90^\circ$  wird (Fig. 172), übergehen die Gleichungen für die Ersatzmassen in folgende:

$$\mu_1 = \frac{M_1}{2}, \text{ also unabhängig von den Längen } l_1 \text{ und } l_2,$$

$$\mu_2 = \frac{M_2}{3} - \frac{M_1 l_1^2}{12 l_2^2},$$

$$\mu_4 = \frac{4}{3} M_2 + \frac{M_1}{6} \left( 3 + \frac{l_1^2}{l_2^2} \right).$$

Die Masse  $\mu_2$  wird negativ oder null, wenn

$$\frac{M_1}{M_2} \geq 4 \frac{l_1^2}{l_2^2}$$

ist.

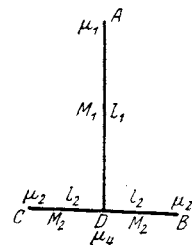


Fig. 172.

In Fig. 173 ist ein dreistieliges Glied gezeichnet, bei dem  $l_1 = l_2$ ,  $M_1 = M_2$ ,  $\alpha = 60^\circ$  ist. Hier werden die Ersatzmassen:

$$\mu_1 = \mu_2 = \frac{M_1}{3}, \mu_4 = 2M_1.$$

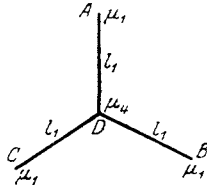


Fig. 173.

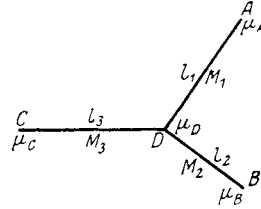


Fig. 174.

3. Beispiel. Ersatzpunkte eines unsymmetrischen dreistieligen Gliedes. Drei Stangen mit den Längen  $l_1 l_2 l_3$  und den Massen  $M_1 M_2 M_3$  sind in  $D$  starr miteinander verbunden (Fig. 174). Man soll die Masse dieses dreistieligen Gliedes durch vier Punktmassen in  $A, B, C, D$  dynamisch ersetzen.

Zunächst muß die Gleichung erfüllt sein:

$$\mu_A + \mu_B + \mu_C + \mu_D = M_1 + M_2 + M_3;$$

bildet man ferner die Trägheitsmomente dieser beiden Massengruppen für den Punkt  $A$  und setzt sie einander gleich, so erhält man (Fig. 174 a)

$$\mu_B c^2 + \mu_C b^2 + \mu_D l_1^2 = \frac{1}{3} M_1 l_1^2 + M_2 \left( \frac{l_2^2}{12} + d^2 \right) + M_3 \left( \frac{l_3^2}{12} + e^2 \right);$$

nun ist  $c^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos \gamma,$

$$d^2 = l_1^2 + \frac{l_2^2}{4} - l_1 l_2 \cos \gamma = \frac{1}{4} (2c^2 + 2l_1^2 - l_2^2),$$

und ebenso  $e^2 = \frac{1}{4} (2b^2 + 2l_1^2 - l_3^2);$

damit wird obige Gleichung:

$$\begin{aligned} \mu_B c^2 + \mu_C b^2 + \mu_D l_1^2 &= \frac{1}{3} M_1 l_1^2 + \frac{1}{6} M_2 (3c^2 + 3l_1^2 - l_2^2) + \\ &+ \frac{1}{6} M_3 (3b^2 + 3l_1^2 - l_3^2) = k_1 \dots a) \end{aligned}$$

Bildet man die Trägheitsmomente für die Punkte  $B$  und  $C$ , so erhält man ebenso:

$$\begin{aligned} \mu_C a^2 + \mu_A c^2 + \mu_D l_2^2 &= \frac{1}{3} M_2 l_2^2 + \frac{1}{6} M_3 (3a^2 + 3l_2^2 - l_3^2) + \\ &+ \frac{1}{6} M_1 (3c^2 + 3l_2^2 - l_1^2) = k_2 \dots b) \end{aligned}$$

$$\mu_A b^2 + \mu_B a^2 + \mu_D l_3^2 = \frac{1}{3} M_3 l_3^2 + \frac{1}{6} M_1 (3b^2 + 3l_3^2 - l_1^2) + \frac{1}{6} M_2 (3a^2 + 3l_3^2 - l_2^2) = k_3 \dots c)$$

Bildet man endlich die Trägheitsmomente für den Punkt *D*, so erhält man:

$$\mu_A l_1^2 + \mu_B l_2^2 + \mu_C l_3^2 = \frac{1}{3} M_1 l_1^2 + \frac{1}{3} M_2 l_2^2 + \frac{1}{3} M_3 l_3^2 = k_4 \dots d)$$

Die rechten Seiten dieser vier Gleichungen a) bis d) können zahlenmäßig ausgewertet werden und wurden mit  $k_1$  bis  $k_4$  bezeichnet. Diese Gleichungen genügen, um die vier Ersatzmassen zu bestimmen. Führt man noch die Bezeichnungen ein:

$$a^2 l_1^2 = p, \quad b^2 l_2^2 = q, \quad c^2 l_3^2 = r, \quad D = (p + q + r)^2 - 2(p^2 + q^2 + r^2),$$

so erhält man:

$$\begin{aligned} D\mu_A &= -2k_1 a^2 l_2^2 l_3^2 + k_2 l_3^2 (q + p - r) + k_3 l_2^2 (p + r - q) + k_4 a^2 (r + q - p), \\ D\mu_B &= -2k_2 b^2 l_3^2 l_1^2 + k_3 l_1^2 (r + q - p) + k_1 l_3^2 (q + p - r) + k_4 b^2 (p + r - q), \\ D\mu_C &= -2k_3 c^2 l_1^2 l_2^2 + k_1 l_2^2 (p + r - q) + k_2 l_1^2 (r + q - p) + k_4 c^2 (q + p - r), \\ D\mu_D &= -2k_4 a^2 b^2 c^2 + k_1 a^2 (q + r - p) + k_2 b^2 (r + p - q) + k_3 c^2 (p + q - r). \end{aligned}$$

4. Beispiel. Ersatzpunkte des dreistieligen Gliedes der Atkinson'schen Gasmachine. Um auch ein Zahlenbeispiel durchzurechnen, möge die Anwendung des vorigen Beispiels auf das in Fig. 175 dargestellte dreistielige Glied des Atkinson'schen Gasmotors gezeigt werden. Wir werden später auf das Getriebe dieses Motors zu sprechen kommen und dann die hier gerechneten Ersatzpunkte benützen (vgl. 412).

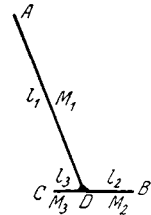


Fig. 175.

Es sind folgende Abmessungen und Gewichte gegeben:

$$\overline{AD} = l_1 = 49,3 \text{ cm}, \quad \overline{BD} = l_2 = 4 \text{ cm}, \quad \overline{CD} = l_3 = 3 \text{ cm};$$

$$\overline{AB} = c = 50 \text{ cm}, \quad \overline{BC} = a = 7 \text{ cm}, \quad \overline{CA} = b = 49 \text{ cm};$$

$$G_1 = 4 \text{ kg}, \quad G_2 = 0,32 \text{ kg}, \quad G_3 = 0,24 \text{ kg},$$

also das Gewicht des ganzen Gliedes:

$$G = G_1 + G_2 + G_3 = 4,56 \text{ kg}.$$

Mit Benützung der Bezeichnungen des vorigen Beispiels erhält man

hier in  $\frac{\text{kg cm}^2}{\text{g}}$ :

$$k_1 = 4609\,332, \quad k_2 = 3420\,192,$$

$$k_3 = 3208\,192, \quad k_4 = 3244\,334.$$



Ferner:

$$\begin{aligned} p &= 119140,07 \text{ cm}^4, \\ q &= 38416 \text{ cm}^4, \\ r &= 22500 \text{ cm}^4, \\ D &= 67397672,64 \text{ cm}^8. \end{aligned}$$

Die vier Ersatzpunkte in  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  haben die Massen in  $\frac{\text{kg}}{\text{g}}$ :

$$\begin{aligned} \mu_A &= 2,000, \mu_B = - 57,774, \\ \mu_C &= - 77,128, \mu_D = 137,462. \end{aligned}$$

Die Summe dieser Massen ist 4,56, also ebenso groß wie  $M$ .

Zwei von diesen Ersatzmassen,  $\mu_B$  in  $B$  und  $\mu_C$  in  $C$ , sind negativ. Dies wirkt anfangs befremdend; allein es wird sich zeigen, daß diese rein rechnerische Einführung negativer Massen von Vorteil ist (vgl. u. a. 268).

**109. Aufgabe:**

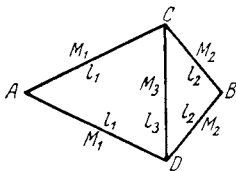


Fig. 176.

42. Das starre Stabwerk  $ABCD$  (Fig. 176) besteht aus fünf Stäben in symmetrischer Anordnung. Die Massen  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  der prismatischen Stäbe sowie ihre Längen  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$  sind gegeben. Man soll die Masse des Stabwerks durch vier dynamisch gleichwertige Ersatzpunkte in den Ecken ersetzen. Wie groß werden deren Massen sein?

**110. Ersatzpunkte mit gleichen Massen.** Soll eine Scheibe von der Masse  $M$  durch  $n$  dynamisch gleichwertige Punkte ersetzt werden, so sind von diesen  $\xi = 3n - 4$

Bestimmungsstücke beliebig wählbar (Gleichung 52): Sollen aber zwischen den Massen der Ersatzpunkte außerdem noch  $m$  Bedingungen erfüllt sein, so sinkt die Anzahl dieser willkürlich wählbaren Bestimmungsstücke auf  $\xi = 3n - m - 4$ .

Sollen z. B. von den  $n$  Ersatzpunkten  $r$  die gleiche Masse haben, so ist  $m = r - 1$  und es wird

$$\xi = 3n - r - 3 \dots \dots \dots 61)$$

Sollen alle Ersatzpunkte dieselbe Masse bekommen, so ist  $r = n$  und es bleibt  $\xi = 2n - 3 \dots \dots \dots 62)$

**111. Zwei Ersatzpunkte mit gleichen Massen.** Hier ist  $n = 2$  und  $\xi = 1$ . Soll also die Masse der Scheibe durch zwei Punkte von gleicher Masse dynamisch ersetzt werden, so ist nur mehr ein Bestimmungsstück beliebig wählbar, also z. B. eine Koordinate eines der beiden Punkte oder eine Kurve, auf der er liegen soll.

In Fig. 177 ist eine durch den Schwerpunkt  $S$  gehende Gerade  $X$  angenommen, auf welcher der Ersatzpunkt  $A$  liegen soll. Dann sind die Massen der beiden Ersatzpunkte  $A$  und  $B$ :

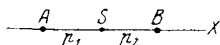


Fig. 177.

$$\mu_A = \mu_B = \frac{M}{2}$$

und ihre Entfernungen von  $S$  nach Gleichung 53:

$$p_1 = p_2 = i.$$

**112. Drei Ersatzpunkte mit gleichen Massen.** Für  $n = 3$  ist nach Gleichung 62:  $\xi = 3$ ; man darf also die Lage eines der drei Ersatzpunkte  $A$  beliebig annehmen; es soll gezeigt werden, daß die beiden anderen  $B$  und  $C$  auf einen Kreis beschränkt bleiben.

Setzt man  $\mu_A = \mu_B = \mu_C = \frac{M}{3}$ , so gehen die Gleichungen 55 über in:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \\ y_1 + y_2 + y_3 &= 0, \\ p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 &= 3i^2. \end{aligned}$$

Außerdem ist

$$p_1^2 = x_1^2 + y_1^2, \quad p_2^2 = x_2^2 + y_2^2, \quad p_3^2 = x_3^2 + y_3^2.$$

Entfernt man aus diesen Gleichungen  $p_1, p_2$  und  $p_3$ , ferner die Koordinaten  $x_3$  und  $y_3$ , so bleibt die Gleichung übrig:

$$\left(x_2 + \frac{x_1}{2}\right)^2 + \left(y_2 + \frac{y_1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}(2i^2 - x_1^2 - y_1^2) \dots 63)$$

Wird die Lage des Punktes  $A (x_1, y_1)$  beliebig angenommen, so gehört diese Gleichung dem geometrischen Ort des Punktes  $B (x_2, y_2)$  an; er ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt  $O$  die Koordinaten

$$\xi = -\frac{x_1}{2}, \quad \eta = -\frac{y_1}{2}$$

hat und dessen Halbmesser

$$\rho = \frac{1}{2} \sqrt{6i^2 - 3p_1^2} \dots 64)$$

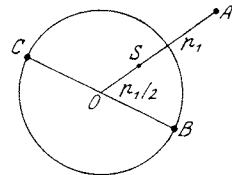


Fig. 178.

ist (Fig. 178).

Entfernt man  $x_2$  und  $y_2$  statt  $x_3$  und  $y_3$  aus obigen drei Gleichungen, so erhält man für den geometrischen Ort des Punktes  $C (x_3, y_3)$  denselben Kreis. Auf ihn bleiben demnach die Punkte  $B$  und  $C$  beschränkt.

Um diesen Kreis zu konstruieren, verbindet man den gewählten Punkt  $A$  mit dem Schwerpunkt  $S$ , macht  $SO = \frac{AS}{2} = \frac{p_1}{2}$  und beschreibt um  $O$  den Kreis mit dem Halbmesser  $\rho$ ; in den Endpunkten  $B$  und  $C$  eines beliebigen Durchmessers dieses Kreises können dann die beiden anderen Ersatzpunkte angenommen werden.

Die Annahme von  $A$  unterliegt der Einschränkung

$$p_1 \leq i\sqrt{2}.$$

Für  $p_1 = i\sqrt{2}$  fallen die Punkte  $B$  und  $C$  in  $O$  zusammen.

113. Beispiele.

1. Beispiel. Ersatzpunkte einer Kreisscheibe. Nimmt man einen der drei gleichen Ersatzpunkte  $A$  auf dem Umfange des Kreises an (Fig. 179), so ist  $p_1 = r$ ; da nach Gleichung 84:  $i^2 = \frac{r^2}{2}$  ist, so wird nach Gleichung 64:  $\rho = 0$ ; die beiden anderen Ersatzpunkte  $B$  und  $C$  fallen dann zusammen und es ist  $\overline{SB} = \overline{SC} = \frac{r}{2}$ .

Sollen hingegen die drei gleichen Ersatzpunkte gleichförmig um  $S$  verteilt sein (Fig. 180), so muß  $\overline{SA} = \overline{SB} = \overline{SC} = \frac{r}{\sqrt{2}}$  und

$$\sphericalangle BSC = \sphericalangle CSA = \sphericalangle ASB = 120^\circ$$

sein.

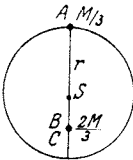


Fig. 179.

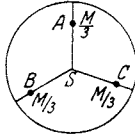


Fig. 180.

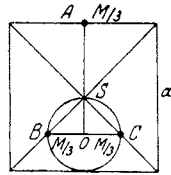


Fig. 181.

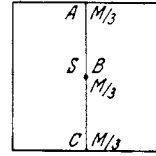


Fig. 182.

2. Beispiel. Ersatzpunkte einer quadratischen Scheibe. Von den drei gleichen Ersatzpunkten  $A, B, C$  kann keiner in einer Ecke des Quadrates angenommen werden; denn dann wäre  $p_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}$ ,  $i^2 = \frac{a^2}{6}$ , wenn  $a$  die Seite des Quadrates ist, und somit

$$p_1 = i\sqrt{3},$$

was nicht sein kann, da  $p \leq i\sqrt{2}$  sein muß.

Nimmt man hingegen  $A$  in der Mitte einer Quadratseite an (Fig. 181), so ist  $p_1 = \frac{a}{2}$  und mit  $i^2 = \frac{a^2}{6}$  nach Gleichung 64:  $\rho = \frac{a}{4}$ . Der in die Abbildung eingezeichnete Kreis ist der geometrische Ort der beiden anderen Ersatzpunkte  $B$  und  $C$ , die an den Enden eines Durchmessers liegen müssen. Man kann z. B.  $B$  und  $C$  in die Viertelpunkte der Diagonalen verlegen oder (Fig. 182)  $B$  in den Mittelpunkt des Quadrates und  $C$  in die Mitte der unteren Quadratseite.

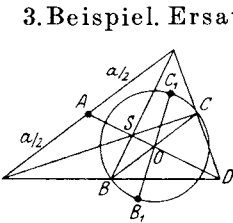


Fig. 183.

3. Beispiel. Ersatzpunkte einer dreieckigen Scheibe. Hier kann die Wahl der drei gleichen Ersatzpunkte zweckmäßig in folgender Weise vorgenommen werden:

a) Der Ersatzpunkt  $A$  werde im Halbierungspunkt der Seite  $a$  gewählt. Dann ist, wenn  $b$  und  $c$  die beiden anderen Seiten sind (Fig. 183):

$$p_1^2 = \overline{SA}^2 = \frac{1}{36} (2b^2 + 2c^2 - a^2),$$

ferner nach Gleichung 82:

$$i^2 = \frac{1}{36} (a^2 + b^2 + c^2),$$

somit der Halbmesser des Kreises, auf dem  $B$  und  $C$  liegen:  $\varrho = \frac{a}{4}$  (nach Gleichung 64).

Macht man also  $\overline{SO} = \frac{1}{2} \overline{AS}$  oder halbiert man  $\overline{AD}$  in  $O$  und zieht den Kreis mit  $O$  als Mittelpunkt und dem Halbmesser  $\frac{a}{4}$ , so können die anderen Ersatzpunkte als Enden eines beliebigen Durchmessers  $B_1C_1$  gewählt werden. Dieser Bedingung entsprechen auch die Halbierungspunkte  $B$  und  $C$  der Seiten  $b$  und  $c$  des Dreiecks,

so daß man sagen kann: die drei Massen  $\frac{M}{3}$  in den Halbierungspunkten der Dreiecksseiten ersetzen die Masse  $M$  der homogenen Dreiecksfläche (Fig. 184, vgl. Routh, Dynamik der Systeme starrer Körper I, S. 26).

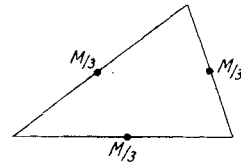


Fig. 184.

b) Der Ersatzpunkt  $A$  werde in einer Ecke des Dreiecks gewählt (Fig. 185). Dann fällt wegen  $\overline{SO} = \frac{1}{2} \overline{AS}$  der Mittelpunkt  $O$  des Kreises in den Halbierungspunkt der Dreiecksseite  $a$ ; ferner ist

$$p_1^2 = \overline{SA}^2 = \frac{1}{9} (2b^2 + 2c^2 - a^2),$$

$$i^2 = \frac{1}{36} (a^2 + b^2 + c^2)$$

und nach Gleichung 64:

$$\begin{aligned} 4\varrho^2 &= 6i^2 - 3p_1^2 = \frac{1}{2} (a^2 - b^2 - c^2) \\ &= -bc \cos \alpha, \end{aligned}$$

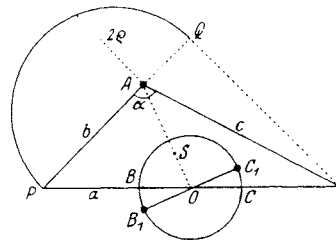


Fig. 185.

wenn  $\alpha$  der Dreieckswinkel bei  $A$  ist. Dies setzt also voraus, daß der Winkel  $\alpha$ , in dessen Scheitel der Ersatzpunkt  $A$  gewählt wird, ein stumpfer ist. Man erhält den Durchmesser  $2\varrho$  des Kreises, wenn man die Dreiecksseite  $c$  auf  $b$  projiziert, über  $\overline{PQ}$  einen Halbkreis beschreibe und in  $A$  die Senkrechte auf  $b$  bis zum Halbkreise errichtet.

Zeichnet man dann aus  $O$  den Kreis mit dem Halbmesser  $\varrho$ , so können die beiden anderen Ersatzpunkte an den Enden eines beliebigen Durchmessers  $B_1C_1$  gewählt werden. Man hat auch die Möglichkeit, die Ersatzpunkte  $B$  und  $C$  auf der Dreiecksseite  $a$  zu wählen (Fig. 185).

Ist das Dreieck bei  $A$  rechtwinklig, so wird  $\varrho = 0$ ; dann fallen  $B$  und  $C$  in  $O$  zusammen (Fig. 186). Die Masse  $M$  eines homogenen recht-

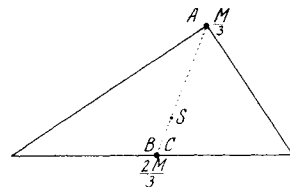


Fig. 186.

winkligen Dreiecks wird also ersetzt, wenn man  $\frac{M}{3}$  in den Scheitel des rechten Winkels und  $\frac{2}{3} M$  in den Halbierungspunkt der Hypotenuse verlegt.

**114. Vier Ersatzpunkte mit gleichen Massen.** Für  $n = 4$  liefert Gleichung 62:  $\xi = 5$ ; man darf also von den vier Ersatzpunkten zwei, z. B.  $A$  und  $B$  beliebig wählen; es kann gezeigt werden, daß die beiden übrigen  $C$  und  $D$  dann auf einen Kreis beschränkt sind. Setzt man

$$\mu_A = \mu_B = \mu_C = \mu_D = \frac{M}{4},$$

so gehen die Gleichungen 59 über in:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0, \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 &= 0, \\ p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 &= 4i^2, \end{aligned}$$

außerdem ist

$$p_1^2 = x_1^2 + y_1^2, \quad p_2^2 = x_2^2 + y_2^2, \quad p_3^2 = x_3^2 + y_3^2, \quad p_4^2 = x_4^2 + y_4^2.$$

Entfernt man aus diesen Gleichungen  $p_3$  und  $p_4$ , ferner die Koordinaten  $x_4$  und  $y_4$ , so bleibt für die Koordinaten  $x_3$  und  $y_3$  des Punktes  $C$  die Gleichung übrig:

$$\begin{aligned} (x_3 - \xi)^2 + (y_3 - \eta)^2 &= \varrho^2, \quad \text{worin} \\ \xi &= -\frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \eta = -\frac{y_1 + y_2}{2}, \quad \varrho^2 = 2i^2 - p_0^2 - \frac{p_1^2 + p_2^2}{2}. \end{aligned}$$

Der geometrische Ort des Punktes  $C$  ist demnach ein Kreis; verbindet man  $A$  mit  $B$  (Fig. 187), zeichnet den Halbierungspunkt  $H$  von  $AB$  und macht  $HS = SO = p_0$ , so ist  $O$  der Mittelpunkt und  $\varrho$  der Halbmesser dieses Kreises.

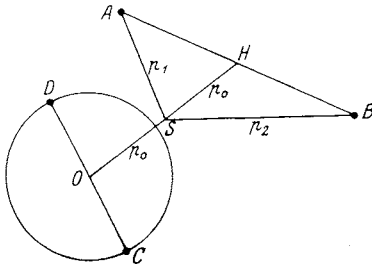


Fig. 187.

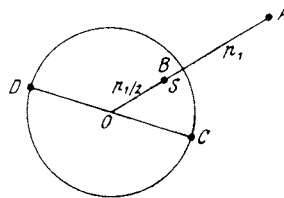


Fig. 188.

Der geometrische Ort des vierten Ersatzpunktes  $D$  ist derselbe Kreis; zeichnet man einen beliebigen Durchmesser des Kreises, so können die Ersatzpunkte  $C$  und  $D$  an dessen Enden gewählt werden.

Wird  $B$  im Schwerpunkt  $S$  angenommen, so wird  $p_2 = 0$ ,  $p_0 = SO = \frac{p_1}{2}$ ,

$$\varrho^2 = 2i^2 - \frac{3}{4} p_1^2;$$

sind  $C$  und  $D$  die Endpunkte eines beliebigen Durchmessers, so wird die Masse  $M$  durch die vier Massen  $\frac{M}{4}$  in  $A, C, D$  und  $S$  ersetzt (Fig. 188).

**115. Beispiele.**

1. Beispiel. Ersatzpunkte einer Kreisscheibe. Wählt man  $A$  auf dem Kreise,  $B$  in dessen Mittelpunkt (Fig. 189),

so ist  $p_1 = r$ ,  $p_0 = \overline{SO} = \frac{r}{2}$ ,  $i^2 = \frac{r^2}{2}$  und  $q = \frac{r}{2}$ ;

zeichnet man den Kreis mit dem Durchmesser  $SD$ , so können die Ersatzpunkte in  $C_1$  und  $D_1$  oder auch in  $S$  und  $D$  gewählt werden. Dann fällt  $C$  mit  $B$  zusammen und der Massenersatz lautet:

$$\frac{M}{4} \text{ in } A \text{ und } D, \frac{M}{2} \text{ in } S.$$

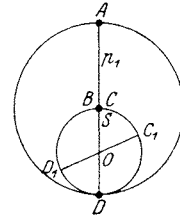


Fig. 189.

2. Beispiel. Ersatzpunkte einer elliptischen Scheibe. Es seien  $r_1 = SP$ ,  $r_2 = SQ$  zwei konjugierte Halbmesser der Ellipse (Fig. 190); wir verbinden die Endpunkte der konjugierten Durchmesser und wählen in den Halbierungspunkten zweier benachbarter Verbindungslinien die Ersatzpunkte  $A$  und  $B$ . Dann ist

$$p_1^2 = \frac{r_1^2}{4} + \frac{r_2^2}{4} - \frac{1}{2} r_1 r_2 \cos \alpha,$$

$$p_2^2 = \frac{r_1^2}{4} + \frac{r_2^2}{4} + \frac{1}{2} r_1 r_2 \cos \alpha,$$

$$p_0 = \frac{r_2}{2}, \quad i^2 = \frac{r_1^2 + r_2^2}{4} \quad (\text{vgl. Gleichung 87 a}).$$

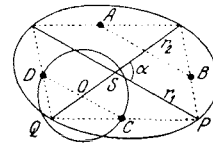


Fig. 190.

Der Mittelpunkt  $O$  des Kreises liegt dann in der Mitte von  $SQ$  und es ist  $q = \frac{r_1}{2}$ . Die beiden anderen Ersatzpunkte  $C$  und  $D$  können also u. a. in den anderen Halbierungspunkten des Sehnvierecks angenommen werden.

Das gleiche gilt natürlich auch von der Kreisscheibe (Fig. 191).

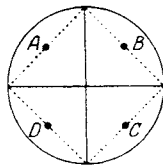


Fig. 191.

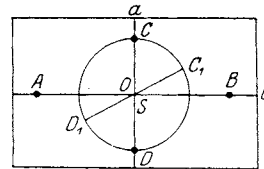


Fig. 192.

3. Beispiel. Ersatzpunkte einer rechteckigen Scheibe (Fig. 192). Sind  $a$  und  $b$  die Abmessungen des Rechtecks, so wollen wir die Ersatzpunkte  $A$  und  $B$  auf der zu  $a$  parallelen Symmetrale in der Entfernung  $\frac{a}{\sqrt{6}}$  von  $S$  annehmen. Dann ist

$$p_1 = p_2 = \frac{a}{\sqrt{6}}, p_0 = 0, i^2 = \frac{a^2 + b^2}{12} \quad (\text{vgl. Gleichung 75});$$

es liegt somit  $O$  in  $S$  und es wird  $\varrho = \frac{b}{\sqrt{6}}$ . Die beiden anderen Ersatzpunkte  $C$  und  $D$  können dann entweder in der anderen Symmetrale in der Entfernung  $\frac{b}{\sqrt{6}}$  von  $S$  oder auch in den Endpunkten eines beliebigen

Durchmessers  $C_1D_1$  angenommen werden (Th. Reye, Einfache Darstellung der Trägheitsmomente ebener Figuren, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1875, S. 401).

4. Beispiel. Ersatzpunkte einer rechtwinkligen Dreieckscheibe (Fig. 193). Wir wollen  $A$  im Scheitel des rechten Winkels,  $B$  im Schwerpunkt  $S$  wählen; dann liegt der Kreismittelpunkt  $O$  im Halbierungspunkt der Hypotenuse. Hier ist  $i^2 = \frac{a^2}{18}$  (vgl. Gl. 82),

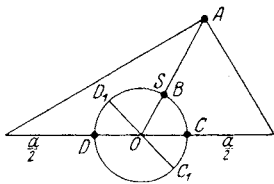


Fig. 193.

$p_1 = \frac{a}{3}, \varrho = \frac{a}{6}$ . Man kann also entweder  $C$  und  $D$  in den Drittelpunkten der Hypotenuse oder in den Endpunkten  $C_1, D_1$  eines beliebigen Durchmessers annehmen.

116. Wahl eines Ersatzpunktes im Schwerpunkt. Endlich möge noch folgender Fall erörtert werden. Von den  $n$  Ersatzpunkten hätten  $n - 1$  die gleiche Masse  $\mu$ ; der letzte Ersatzpunkt würde im Schwerpunkt gewählt werden und die Masse  $\mu_S$  haben.

In Gleichung 61 ist dann  $r = n - 1$  zu setzen und es wird  $\xi = 2n - 2$ ; da jedoch über den Ort des letzten Ersatzpunktes bereits verfügt wurde, fallen noch zwei willkürlich wählbare Größen weg und es bleibt für ihre Anzahl

$$\xi = 2n - 4 \dots \dots \dots 65)$$

a) Drei Ersatzpunkte. Mit  $n = 3$  wird  $\xi = 2$ ; man kann also außer dem Schwerpunkt noch einen Punkt beliebig wählen. Zu bestimmen ist dann die Lage des dritten Ersatzpunktes und die Massen aller drei Punkte (Fig. 194).

Die Gleichungen 55 werden hier:

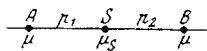


Fig. 194.

$$\begin{aligned} 2\mu + \mu_S &= M, \\ p_1 + p_2 &= 0, \\ \mu(p_1^2 + p_2^2) &= M i^2, \end{aligned}$$

woraus 
$$\mu = M \frac{i^2}{2 p_1^2}, \quad \mu_S = M \left( 1 - \frac{i^2}{p_1^2} \right).$$

1. Beispiel. Ersatzpunkte einer Kreisscheibe. In Fig. 195 wurde der Ersatzpunkt  $A$  auf dem Kreisumfang gewählt. Dann liegt auch  $B$  auf diesem und es ist wegen  $i^2 = \frac{r^2}{2}$  (vgl. Gleichung 84):

$$\mu = \frac{M}{4}, \mu_S = \frac{M}{2} \text{ (vgl. 115, 1. Beispiel).}$$

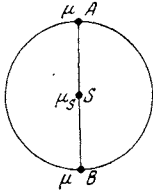


Fig. 195.

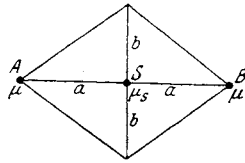


Fig. 196.

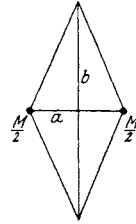


Fig. 197.

2. Beispiel. Ersatzpunkte einer Rhombusscheibe. Hier ist nach Gleichung 83:  $i^2 = \frac{1}{6}(a^2 + b^2)$ . Wählt man  $A$  im Endpunkt der Diagonale  $2a$  (Fig. 196), so ist  $p_1 = a$  und

$$\mu = M \frac{a^2 + b^2}{12a^2}, \mu_S = M \frac{5a^2 - b^2}{6a^2}.$$

Für einen Rhombus von dem Diagonalenverhältnis  $b : a = \sqrt{5}$  ist  $\mu_S = 0$ ; man kann ihn also durch die Massen  $\frac{M}{2}$  in den Endpunkten der kürzeren Diagonale ersetzen (Fig. 197).

b) Vier Ersatzpunkte. Für  $n = 4$  gibt Gleichung 65:  $\xi = 4$ ; es können also zwei Ersatzpunkte  $A$  und  $B$  beliebig angenommen werden. Die Gleichungen 60 gehen dann über in

$$\begin{aligned} 3\mu + \mu_S &= M, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \\ y_1 + y_2 + y_3 &= 0, \\ \mu(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) &= Mi^2, \end{aligned}$$

woraus die Koordinaten  $x_3, y_3$  des dritten Punktes  $C$  und die Massen  $\mu$  und  $\mu_S$  zu berechnen sind. Man erhält

$$x_3 = -(x_1 + x_2), y_3 = -(y_1 + y_2)$$

und sodann mit  $p_3^2 = x_3^2 + y_3^2$ :

$$\mu = M \frac{i^2}{3p_1^2 + 3p_2^2 - c^2}, \mu_S = M - 3\mu,$$

worin  $c = \overline{AB}$  ist.

3. Beispiel. Ersatzpunkte einer homogenen Dreiecksfläche (Fig. 198). Die Punkte  $A$  und  $B$  werden in zwei Eckpunkten

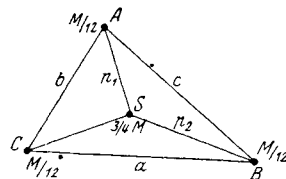


Fig. 198.



gewählt. Dann fällt  $C$  in die dritte Ecke und es ist wegen

$$i^2 = \frac{1}{36} (a^2 + b^2 + c^2) \text{ nach Gleichung 82,}$$

$$p_1^2 = \frac{1}{9} (2b^2 + 2c^2 - a^2),$$

$$p_2^2 = \frac{1}{9} (2c^2 + 2a^2 - b^2):$$

$$\mu = \frac{M}{12} \text{ und } \mu_S = \frac{3}{4} M.$$

c) Fünf Ersatzpunkte. Für  $n = 5$  gibt Gleichung 65:  $\xi = 6$ ; es können also drei Ersatzpunkte  $A, B, C$  beliebig angenommen werden. Die Berechnung des letzten Ersatzpunktes  $D$  und der Massen  $\mu$  und  $\mu_S$  kann wie unter b) erfolgen. Einige dieser Fälle seien als Aufgaben zur Durchrechnung empfohlen.

**117. Aufgaben.**

- 43. Ersatzpunkte einer Parallelogrammscheibe. ( $\frac{1}{3} M$  im Schwerpunkt,  $\frac{1}{6} M$  in jedem Halbierungspunkt der Seiten.)
- 44. Ersatzpunkte einer Parallelogrammscheibe. ( $\frac{2}{3} M$  im Schwerpunkt,  $\frac{1}{12} M$  in jeder Ecke.) (43, 44: Th. Reye, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1875, S. 401.)
- 45. Ersatzpunkte einer Kreisscheibe. ( $\frac{1}{2} M$  im Schwerpunkt,  $\frac{1}{8} M$  in den Endpunkten zweier beliebiger Durchmesser.)
- 46. Ersatzpunkte einer elliptischen Scheibe. ( $\frac{1}{2} M$  im Schwerpunkt,  $\frac{1}{8} M$  in den Endpunkten der beiden Achsen.)
- 47. Ersatzpunkte einer Rhombusfläche ( $\mu_1 = \frac{M}{12} \frac{a^2 - 5b^2}{a^2 - b^2}$  in den Endpunkten der Diagonale  $2a$ ,  $\mu_2 = \frac{M}{12} \frac{5a^2 - b^2}{a^2 - b^2}$  in den Endpunkten der Diagonale  $2b$ .)

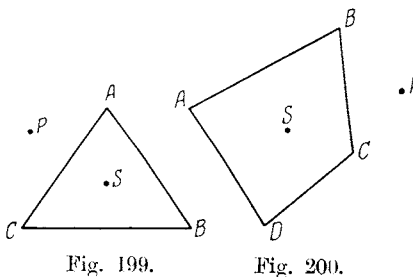


Fig. 199. Fig. 200.

48. Man beweise folgenden Satz (Fig. 199):

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 = AS^2 + BS^2 + CS^2 + 3SP^2,$$

wenn  $S$  der Schwerpunkt der homogenen Dreiecksfläche ist.

49. Man beweise folgenden Satz (Fig. 200):

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2 = AS^2 + BS^2 + CS^2 + DS^2 + 4SP^2,$$

wenn  $S$  der Schwerpunkt der homogenen Vierecksfläche ist. (48, 49: E. Rehfeld, Archiv d. Mathem. u. Physik, 6, S. 237.)

## XI. Schwerpunkt und Trägheitsmoment.

**118. Bestimmung des Schwerpunkts durch Versuch.** In den vorhergehenden Ausführungen wurde fortwährend die Kenntnis des Schwerpunkts des Körpers oder der Scheibe vorausgesetzt. Wenn diese gleichartig mit Masse erfüllt sind und Gestalten von bestimmter mathematischer Gesetzmäßigkeit besitzen, kann die Lage des Schwerpunkts nach den Gleichungen 36 berechnet oder nach den bekannten Methoden der graphischen Statik konstruiert werden. Auf die Ermittlung des Schwerpunkts in diesen einfachen Fällen wollen wir hier nicht eingehen, da sie in jedem Lehrbuche der technischen Mechanik zu finden ist.

Wenn es sich um eine Scheibe handelt, die zwar gleichförmigen Massenbelag, aber unregelmäßige Form besitzt, kann man sich mit Vorteil eines Instrumentes, des Integraphen, bedienen, der die Koordinaten des Schwerpunkts zeichnerisch durch Umfahren der Fläche bestimmt.

Meistens haben aber die Maschinenteile, um deren Bewegung es sich hier vornehmlich handelt, eine derart komplizierte Form, daß die Berechnung oder Zeichnung des Schwerpunkts nur sehr angenähert vollzogen werden kann; auch ist die Voraussetzung der gleichförmigen Massenverteilung nur angenähert oder manchmal gar nicht erfüllt.

In diesen Fällen wird es sich empfehlen, den Schwerpunkt auf dem Wege des Versuches zu finden. Hierzu gelangt man in verschiedener Weise.

a) Bestimmung des Schwerpunkts durch Aufzeichnen von Schwerlinien. Hängt man die Scheibe, deren Schwerpunkt man finden will, in irgend einem Punkte  $O$  auf (Fig. 201), so stellt sich stabiles Gleichgewicht ein, sobald der Schwerpunkt in einer durch  $O$  gehenden Vertikale  $g$  unter  $O$  liegt. Zieht man also durch  $O$  auf der ruhenden Scheibe die Vertikale, so geht sie durch den Schwerpunkt. Wiederholt man den Versuch mit einem anderen Aufhängungspunkt  $O'$ , so erhält man eine zweite Schwerlinie  $g'$ . Der Schnittpunkt der Geraden  $g$  und  $g'$  ist dann der gesuchte Schwerpunkt.

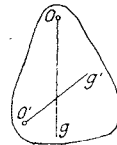


Fig. 201.

b) Bestimmung des Schwerpunkts durch Wägung. Handelt es sich um den Schwerpunkt eines stangenförmigen Körpers, der zwei

besonders ausgezeichnete Punkte  $A$  und  $B$  besitzt (Fig. 202), die etwa als Gelenke ausgebildet sind und in einer Symmetrielinie des Körpers liegen, so lagere man diesen in  $A$ , hänge das Ende in  $B$  an eine Wage und messe dort den Zug in der Aufhängungsvorrichtung; ist dieser  $G_2$ , ferner  $G$  das Gewicht des Körpers, so ist

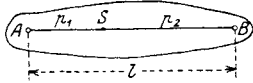


Fig. 202.

$$p_1 = l \frac{G_2}{G}$$

Vertauscht man  $A$  mit  $B$ , lagert den Körper in  $B$  und mißt den Zug  $G_1$ , der in  $A$  auf die Wage ausgeübt wird, so erhält man

$$p_2 = l \frac{G_1}{G}$$

Als Kontrolle dienen dann die Gleichungen

$$p_1 + p_2 = l, \quad G_1 + G_2 = G.$$

Ist der Körper eine Scheibe ohne Symmetrielinie, so wähle man drei irgendwie ausgezeichnete Punkte  $A, B, C$  (Fig. 203), z. B. drei Gelenke, lagere den Körper in der Verbindungsgeraden der beiden Punkte  $A$  und  $B$  und hänge  $C$  an die Wage; wird dort der Zug  $G_3$  gemessen, so ist

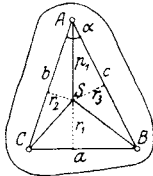


Fig. 203.

$$G_3 b \sin \alpha = G r_3;$$

lagert man dann den Körper in der Verbindungsgeraden von  $A$  und  $C$ , hängt  $B$  an die Wage und mißt daselbst den Zug  $G_2$ , so ist ebenso

$$G_2 c \sin \alpha = G r_2.$$

Sind hieraus  $r_2$  und  $r_3$  berechnet, so kann man den Abstand  $p_1$  durch eine einfache Konstruktion finden oder auch mit Hilfe der Gleichung

$$p_1^2 \sin^2 \alpha = r_2^2 + r_3^2 + 2r_2 r_3 \cos \alpha,$$

aus der sich ergibt:

$$G^2 p_1^2 = (G_2 + G_3) (c^2 G_2 + b^2 G_3) - a^2 G_2 G_3.$$

Ebenso können die Abstände  $p_2$  und  $p_3$  des Schwerpunkts von  $B$  und  $C$  bestimmt werden.

**119. Trägheitsmomente von Flächen.** Um das Trägheitsmoment eines ebenen Systems in bezug auf einen Punkt desselben, das durch Gleichung 44:  $\mathbf{T} = \Sigma (m \rho^2)$  definiert war und in den Ermittlungen der Ersatzmassen fortwährend benützt wurde, bestimmen zu können, müssen wir uns zunächst mit den Trägheitsmomenten von ebenen Flächen ohne Massenbelag beschäftigen.

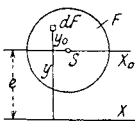


Fig. 204.

Ist  $F$  eine beliebig begrenzte ebene Fläche,  $X$  eine beliebige Gerade in der Ebene (Fig. 204),  $dF$  ein Element der Fläche,  $y$  sein Abstand von  $X$ , so versteht man unter dem Trägheitsmoment der Fläche  $F$  in bezug auf die Achse  $X$  den Ausdruck

$$J_X = \int^F y^2 dF \dots\dots\dots 66)$$

und unter dem Trägheitshalbmesser der Fläche den Ausdruck

$$i_X = \sqrt{\frac{J_X}{F}} \dots\dots\dots 67)$$

Ist  $S$  der Schwerpunkt der Fläche und  $X_0$  eine durch ihn gehende, zu  $X$  parallele Achse, so ist ebenso das Trägheitsmoment für die Schwerlinie  $X_0$ :

$$J_0 = \int^F y_0^2 dF,$$

wenn  $y_0$  der Abstand des Flächenelementes  $dF$  von  $X_0$  ist. Diese Integrale sind über die ganze Fläche auszudehnen.

Es ist  $y = y_0 + e$ , wenn  $e$  der Abstand der parallelen Geraden  $X$  und  $X_0$  genannt wird; somit ist

$$J_X = \int^F (y_0 + e)^2 \cdot dF = \int^F y_0^2 dF + 2e \int^F y_0 dF + e^2 \int^F dF.$$

Da jedoch  $X_0$  eine Schwerlinie ist, so wird

$$\int^F y_0 dF = 0$$

und es bleibt

$$J_X = J_0 + F e^2 \dots\dots\dots 68)$$

eine bei der Berechnung von Trägheitsmomenten vielbenützte Gleichung.

Zeichnet man (Fig. 205) eine zu  $X$  senkrechte, sonst beliebige Achse, so ist ebenso wie  $J_X$ :

$$J_Y = \int^F x^2 dF.$$

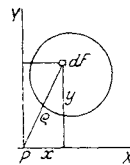


Fig. 205.

Denkt man sich eine dritte Achse  $Z$ , die durch den Schnittpunkt  $P$  der beiden Achsen  $X$  und  $Y$  geht und zu ihnen senkrecht steht, so kann auch das Trägheitsmoment der Fläche für diese dritte Achse oder, was dasselbe ist, für den Punkt  $P$  berechnet werden; es ist

$$J_P = \int^F \rho^2 dF \dots\dots\dots 69)$$

worin  $\rho$  der Abstand des Flächenelementes von  $P$  ist. Man nennt  $J_P$  das polare Trägheitsmoment der Fläche  $F$  in bezug auf den Punkt

$P$  und 
$$i_P = \sqrt{\frac{J_P}{F}} \dots\dots\dots 70)$$

den Trägheitshalbmesser der Fläche  $F$  in bezug auf den Punkt  $P$ .

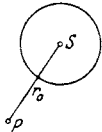
Ist  $J_S$  das polare Trägheitsmoment der Fläche für den Schwerpunkt, so ist der Trägheitshalbmesser

$$i_S = \sqrt{\frac{J_S}{F}};$$

des häufigen Gebrauches halber haben wir in den Anwendungen  $i_S$  durch  $i$  ersetzt.

Da in Fig. 205:  $\rho^2 = x^2 + y^2$  ist, so lehrt ein Vergleich der Gleichungen für  $J_X$ ,  $J_Y$  und  $J_P$ , daß die neue Gleichung besteht:

$$J_P = J_X + J_Y \dots \dots \dots 71)$$



Die Gleichung 68, für die  $Z$  Achse oder den Punkt  $P$  hingeschrieben, lautet (Fig. 206):

$$J_P = J_S + F r_0^2 \dots \dots \dots 72)$$

Fig. 206. Im folgenden sollen die polaren Trägheitsmomente für einige der meistbenützten Flächen abgeleitet werden.

a) Rechteck (Fig. 207). Abmessungen  $a$  und  $b$ . Wählt man den Flächenstreifen  $a dy$  als Flächenelement  $dF$ , so ist nach Gleichung 66:

$$J_X = \int y^2 dF = a \int_{-b/2}^{+b/2} y^2 dy = \frac{1}{12} a b^3 \dots \dots \dots 73)$$

Ebenso wird  $J_Y = \frac{1}{12} a^3 b$

Fig. 207. und nach Gleichung 71:

$$J_S = J_X + J_Y = \frac{1}{12} a b (a^2 + b^2) \dots \dots \dots 74)$$

Dann wird der Trägheitshalbmesser für den Schwerpunkt nach Gleichung 70:

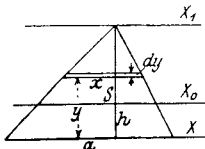
$$i = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{12}} \dots \dots \dots 75)$$

b) Quadrat.  $a = b, J_X = J_Y = \frac{1}{12} a^4 \dots \dots \dots 76)$

$$J_S = \frac{1}{6} a^4, i = \frac{a}{\sqrt{6}} \dots \dots \dots 77)$$

c) Dreieck (Fig. 208). Grundlinie  $a$ , Höhe  $h$ . Als Flächenelement  $dF$  wird der Streifen mit der Länge  $x$  und der Höhe  $dy$  gewählt. Dann ist nach Gleichung 66:

$$J_X = \int y^2 dF = \int x y^2 dy.$$



Es besteht die Proportion:  $a : h = x : h - y$ .  
somit  $x = \frac{a}{h} (h - y)$  und

Fig. 208.

$$J_X = \frac{a}{h} \int_0^h (h - y) y^2 dy = \frac{1}{12} a h^3 \dots \dots \dots 78)$$

Legt man die Achse  $X_0 \parallel X$  durch den Schwerpunkt des Dreiecks, so ist das Trägheitsmoment  $J_0$  für diese Achse nach Gleichung 68:

$$J_0 = J_X - F \left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{1}{36} a h^3 \dots \dots \dots 79)$$

Für die Achse  $X_1 \perp X_0$  durch die Spitze des Dreiecks wird das Trägheitsmoment

$$J_{X_1} = J_0 + F \left(\frac{2h}{3}\right)^2 = \frac{1}{4} a h^3 \dots \dots \dots 80)$$

Für das Dreieck in Fig. 209 wird nach den vorstehenden Gleichungen:

$$J_X = \frac{1}{4} a h^3$$

und

$$J_Y = \frac{1}{12} h (a_1^3 + a_2^3),$$

wenn  $a_1$  und  $a_2$  die Abschnitte von  $a$  sind. Das polare Trägheitsmoment des Dreiecks für die Ecke  $A$  wird

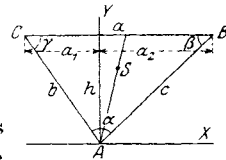


Fig. 209.

$$J_A = J_X + J_Y = \frac{h}{12} (3ah^2 + a_1^3 + a_2^3)$$

oder

$$J_A = \frac{a h}{12} (3h^2 + a_1^2 + a_2^2 - a_1 a_2);$$

setzt man  $F = \frac{1}{2} ah$ ,  $a_1^2 = b^2 - h^2$ ,  $a_2^2 = c^2 - h^2$ , so wird schließlich

$$J_A = \frac{F}{12} (3b^2 + 3c^2 - a^2) \dots \dots \dots 81)$$

Das polare Trägheitsmoment des Dreiecks in bezug auf den Schwerpunkt ist nach Gleichung 72:

$$J_S = J_A - F r_0^2,$$

worin  $r_0^2 = AS^2 = \frac{1}{9} (2b^2 + 2c^2 - a^2)$ . Man erhält

$$J_S = \frac{F}{36} (a^2 + b^2 + c^2) \dots \dots \dots 82)$$

d) Parallelogramm (Fig. 210). Seiten  $a$  und  $b$ . Nennt man  $d_1$  und  $d_2$  die Diagonalen, so hat das Dreieck  $f_1$  nach Gleichung 81 für den Eckpunkt  $S$  das polare Trägheitsmoment:

$$J_1 = \frac{f_1}{12} \left[ \frac{3}{4} d_1^2 + \frac{3}{4} d_2^2 - a^2 \right]$$

und ebenso das Dreieck  $f_2$ :

$$J_2 = \frac{f_2}{12} \left[ \frac{3}{4} d_1^2 + \frac{3}{4} d_2^2 - b^2 \right].$$

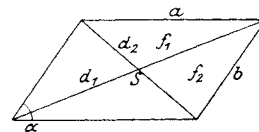


Fig. 210.

Hierin ist

$$d_1^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha,$$

$$d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha.$$

Es wird  $J_S = 2J_1 + 2J_2$  und wegen

$$f_1 = f_2 = \frac{F}{4} ;$$

$$J_S = \frac{F}{12} (a^2 + b^2) \dots \dots \dots 83)$$

e) Kreis (Fig. 211). Halbmesser  $r$ . Hier kann das Flächenelement als konzentrischer Kreisring vom Halbmesser  $\rho$  und der Dicke  $d\rho$  angenommen werden; dann ist  $dF = 2\pi\rho \cdot d\rho$  und für den Mittelpunkt

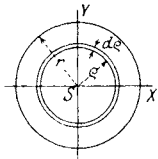


Fig. 211.

und

$$J_S = 2\pi \int_0^r \rho^3 \cdot d\rho = \frac{\pi r^4}{2}$$

$$i = \frac{r}{\sqrt{2}} \dots \dots \dots 84)$$

Da hier  $J_X = J_Y$  ist, so wird nach Gleichung 71:  $J_P = 2J_X$  und

$$J_X = \frac{\pi r^4}{4} \dots \dots \dots 85)$$

f) Ellipse (Fig. 212), Halbachsen  $a$  und  $b$ . Beschreibt man den Kreis über der Achse  $2a$ , nennt  $y$  und  $y_1$  die Koordinaten eines Ellipsen- und eines Kreispunktes mit gleichem  $x$ , so ist

$$y : y_1 = b : a.$$

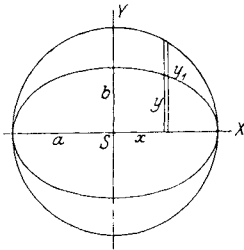


Fig. 212.

Der Flächenstreifen von der Länge  $y$  und der Breite  $dx$  hat in bezug auf die  $X$ -Achse nach Gleichung 66 das Trägheitsmoment  $\frac{1}{3} y^3 dx$ , ebenso der Flächenstreifen von der Länge  $y_1$  und der Breite  $dx$  das Trägheitsmoment  $\frac{1}{3} y_1^3 dx$ : nennen wir  $J_X$  und  $J_{X_1}$  die Trägheitsmomente der Ellipse und des Kreises für die  $X$ -Achse, so ist demnach

$$J_X = \frac{1}{3} \int_0^F y^3 dx \quad \text{und} \quad J_{X_1} = \frac{1}{3} \int_0^F y_1^3 dx = \frac{a^3}{b^3} \int_0^F y^3 dx$$

oder  $J_X = J_{X_1} \cdot \frac{b^3}{a^3};$

nun ist aber nach Gleichung 85:  $J_{X_1} = \frac{\pi}{4} a^4$ , somit wird für die Ellipse:

$$J_X = \frac{\pi}{4} a b^3 \dots \dots \dots 86)$$

Ebenso ist  $J_Y = \frac{\pi}{4} a^3 b.$

Dann wird nach Gleichung 71:

$$J_S = J_X + J_Y = \frac{\pi}{4} ab (a^2 + b^2)$$

und da die Ellipsenfläche  $F = \pi ab$  ist:

$$i = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} \dots \dots \dots 87)$$

Sind  $r_1, r_2$  zwei konjugierte Halbmesser der Ellipse, so ist  $r_1^2 + r_2^2 = a^2 + b^2$ , daher auch

$$i = \frac{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}{2} \dots \dots \dots 87 a)$$

**120. Trägheitsmomente von homogenen Scheiben.** Wenn die Scheibe gleichartig mit Masse belegt ist, so wird ihre Dichte

$$\mu = \frac{M}{F}$$

an allen Stellen die gleiche, also konstant sein. Das Trägheitsmoment der Scheibe für den Punkt  $P$  ist dann nach Gleichung 44 und 69:

$$\mathbf{T}_P = \int \rho^2 \cdot dM = \mu \int \rho^2 \cdot dF = \mu J_P$$

oder

$$\mathbf{T}_P = \frac{M J_P}{F} \dots \dots \dots 88)$$

Der Trägheitshalbmesser ist

$$i_P = \sqrt{\frac{\mathbf{T}_P}{M}} = \sqrt{\frac{J_P}{F}}$$

besitzt also denselben Wert wie bei Flächen (Gleichung 70).

Für die kreisförmige Scheibe vom Halbmesser  $r$  ist nach den Gleichungen 84 und 88 in bezug auf den Mittelpunkt  $O$ :

$$\mathbf{T}_O = \frac{1}{2} M r^2 \dots \dots \dots 88a)$$

Hat die Scheibe stangenförmige Gestalt (Fig. 213), so ist nach Gleichung 74 und 88:

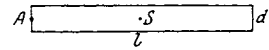


Fig. 213.

$$\mathbf{T}_S = \frac{M}{12} (l^2 + d^2) \dots \dots \dots 89)$$

wenn  $a$  und  $b$  durch  $l$  und  $d$  ersetzt werden.

Ist die Dicke der Stange  $d$  klein gegenüber der Länge, so kann angenähert gesetzt werden:

$$\mathbf{T}_S = \frac{1}{12} M l^2 \dots \dots \dots 90)$$

und der Trägheitshalbmesser für den Schwerpunkt

$$i = \frac{l}{\sqrt{12}} \dots \dots \dots 91)$$



Die Gleichung 72:  $J_P = J_S + F r_0^2$  geht bei homogenen Scheiben mit Benützung von Gleichung 88 über in:

$$T_P = T_S + M \cdot r_0^2 \dots \dots \dots 92)$$

und für den Trägheitshalbmesser

$$i_P^2 = i^2 + r_0^2 \dots \dots \dots 93)$$

So wird für den Endpunkt *A* der homogenen Stange (Fig. 213)  $r_0 = \frac{l}{2}$  und mit Benützung von Gleichung 90:

$$T_A = \frac{1}{3} M l^2 \dots \dots \dots 94)$$

und

$$i_A = \frac{l}{\sqrt{3}} \dots \dots \dots 95)$$

**121. Bestimmung der Trägheitsmomente aus Schwingungen.** Die bisherigen Ermittlungen der Trägheitsmomente haben vorausgesetzt, daß die Scheibe homogen mit Masse bedeckt ist und ihre Fläche einem bestimmten mathematischen Gesetze gehorcht.

Die Teile einer Maschine erfüllen jedoch diese Voraussetzungen nur in seltenen Fällen. Wenn also ihre Trägheitsmomente und Trägheitshalbmesser in dieser Weise bestimmt werden, so ist dies nur als eine ziemlich rohe Annäherung anzusehen. Die genaue Berechnung der Trägheitsmomente von nicht homogenen und nicht einfach geformten Körpern, wie etwa der Teile eines Steuerungsgetriebes, wird meistens auf große Schwierigkeiten stoßen.

Liegen diese Körper jedoch ausgeführt vor, so kann man den Versuch zu Hilfe nehmen, für den man sich verschiedener Methoden bedienen kann.

Um die Trägheitsmomente von Rotationskörpern, wie Räder oder zylindrische Stangen zu finden, kann man eine Vorrichtung benützen, die Ähnlichkeit mit der Atwoodschen Fallmaschine hat (vgl. M. Kohn, Civil-Ingenieur 1890); oder man läßt den Rotationskörper eine schiefe Ebene hinabrollen und beobachtet die Zeit der Bewegung (vgl. A. Lechner, Dinglers Polyt. Journal 1913).

Für Scheiben und Stangen von allgemeiner Gestalt sind diese Methoden nicht geeignet. In diesen Fällen benützt man mit Vorteil die Schwingungsmethode.

Man lagert dann die Scheibe in irgend einer zu ihrer Bewegungsebene senkrechten Achse, läßt den Körper um diese Achse kleine Schwingungen ausführen und beobachtet die Dauer einer solchen Schwingung möglichst genau.

Diese Dauer kann mit großer Annäherung

$$t = \pi \sqrt{\frac{T}{Gp}} \dots \dots \dots 96)$$

gesetzt werden. Hierin ist  $T$  das Trägheitsmoment des Körpers für die Drehungsachse,  $G$  sein Gewicht und  $p$  die Entfernung der Drehungsachse vom Schwerpunkt. Ist  $z$  die Anzahl der einfachen Schwingungen in einer Minute, so wird

$$t = \frac{60}{z} \text{ Sekunden und } T = 365 \frac{Gp}{z^2} \dots \dots \dots 97)$$

a) Stangenförmige Körper (Fig. 214). Der Körper hätte in  $A$  eine Stelle, die leicht mit einer Aufhängungsvorrichtung in Verbindung gebracht werden kann. Kennt man die Lage des Schwerpunkts, ist also  $p_1$  entweder durch Rechnung gefunden oder nach der unter 118 angegebenen Methode durch Versuch bestimmt worden, so genügt es, den Körper um die Achse durch  $A$  kleine Schwingungen vollführen zu lassen; ist  $t_1$  die Dauer einer Schwingung, so wird nach obiger Gleichung

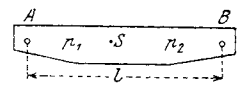


Fig. 214.

$$T_{.A} = \frac{1}{\pi^2} G p_1 t_1^2.$$

Das Trägheitsmoment für die Parallelachse durch den Schwerpunkt ist dann nach Gleichung 92

$$T_S = T_{.A} - M p_1^2$$

und der Trägheitshalbmesser für den Schwerpunkt

$$i^2 = \frac{T_S}{M} = \frac{g}{\pi^2} p_1 t_1^2 - p_1^2 = c p_1 t_1^2 - p_1^2, \text{ worin } c = \frac{g}{\pi^2} = 0,994 \text{ ist.}$$

Setzt man angenähert  $c = 1$ , so wird  $i^2 = p_1 t_1^2 - p_1^2$ , worin  $i$  und  $p_1$  in *met*,  $t_1$  in Sekunden einzuführen sind.

Kennt man hingegen die Schwerpunktslage nicht, ist also  $p_1$  nicht bekannt, so wiederholt man den Schwingungsversuch für eine zweite, z. B. durch  $B$  gehende Achse, welche vom unbekanntem Schwerpunkt die Entfernung  $p_2$  haben möge. Nennt man die beobachtete Zeit dieser Schwingung  $t_2$ , so stehen folgende Gleichungen zur Verfügung:

$$i^2 = c p_1 t_1^2 - p_1^2,$$

$$i^2 = c p_2 t_2^2 - p_2^2$$

und

$$l = p_1 + p_2;$$

daraus wird

$$p_1 = l \frac{c t_2^2 - l}{c (t_1^2 + t_2^2) - 2l}$$

$$p_2 = l \frac{c t_1^2 - l}{c (t_1^2 + t_2^2) - 2l}$$

und

$$i^2 = \frac{l (c t_1^2 - l) (c t_2^2 - l) (c t_1^2 + c t_2^2 - l)}{[c (t_1^2 + t_2^2) - 2l]^2}.$$

Hierin kann wieder in Annäherung  $c = 1$  gesetzt werden.

Diese Gleichungen setzen voraus, daß die Punkte  $A, S, B$  in einer Geraden liegen, sonst müßte der Körper wie im folgenden behandelt werden.

b) Plattenförmige Körper (Fig. 215). Noch weniger als der stangenförmige Körper des Maschinenbaues wird der plattenförmige durch eine homogen mit Masse belegte Scheibe ersetzt werden können. Hier wird man zuerst die Lage des Schwerpunkts festlegen, was nicht durch Rechnung geschehen wird, sondern mit Hilfe der in 118 geschilderten Versuchsmethode.

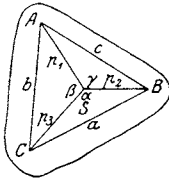


Fig. 215.

Da die plattenförmigen bewegten Teile einer Maschine, die nicht nur drehende Bewegung ausführen, schon durch ihre Form anzeigen, daß sie an mehr als zwei Stellen mit anderen Maschinenteilen in Verbindung stehen, d. h. Gelenke haben werden, so wird man jedenfalls diese Gelenkpunkte  $A, B, C$  wählen, um auf sie die Lage des Schwerpunkts zu beziehen. Ist also z. B. die Entfernung  $p_1$  nach der Versuchsmethode (vgl. 118) bestimmt, so genügt es, die Schwingungsdauer  $t_1$  um die Achse  $A$  zu beobachten; es ist dann wie früher

$$i^2 = c p_1 t_1^2 - p_1^2.$$

Will man sich jedoch von den Entfernungen  $p_1, p_2, p_3$  unabhängig machen, so müßte man außer  $t_1$  auch noch die Schwingungsdauer  $t_2$  und  $t_3$  um die zwei anderen Punkte  $B$  und  $C$  beobachten; es kämen dann zu obiger Gleichung noch die zwei hinzu:

$$i^2 = c p_2 t_2^2 - p_2^2$$

und

$$i^2 = c p_3 t_3^2 - p_3^2.$$

Als vierte Gleichung kann noch eine Beziehung zwischen den unmittelbar zu messenden Seiten  $a, b, c$  des Dreiecks  $ABC$  (Fig. 215) und den Abständen  $p_1, p_2, p_3$  hinzugenommen werden. Zwischen den Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$  besteht nämlich die Gleichung

$$2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma + 1 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma,$$

wie man sich durch Einführung von

$$a + \beta + \gamma = 360^\circ$$

leicht überzeugen kann; diese Gleichung kann aber geschrieben werden:

$$\begin{aligned} & (p_2^2 + p_3^2 - a^2)(p_3^2 + p_1^2 - b^2)(p_1^2 + p_2^2 - c^2) + 4p_1^2 p_2^2 p_3^2 = \\ & = p_1^2 (p_2^2 + p_3^2 - a^2)^2 + p_2^2 (p_3^2 + p_1^2 - b^2)^2 + p_3^2 (p_1^2 + p_2^2 - c^2)^2. \end{aligned}$$

Diese Gleichung in Verbindung mit den drei oben stehenden für  $i^2$  kann dazu benützt werden, um  $i, p_1, p_2, p_3$  zu berechnen.

Diese Methode ist wohl rechnerisch umständlich, hat aber den Vorteil, daß die Lage des Schwerpunkts nicht früher ermittelt werden muß.

Über die zu erreichende Genauigkeit dieser Messung von Trägheitsmomenten findet man Aufschluß in der Abhandlung von O. Herre, „Beobachten und Messen“, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1917, S. 962.

Eine andere Art, das Trägheitsmoment einer nicht homogenen Scheibe zu ermitteln, ist folgende: Man hängt die Scheibe oder Stange an einem Draht von der Länge  $l$  in  $O$  auf, derart, daß sie horizontal im Gleichgewicht verharrt (Fig. 216). Dann wird der Schwerpunkt  $S$  vertikal unter dem Aufhängungspunkt  $O$  liegen. Sodann bringt man die Scheibe um  $OS$  in horizontale Drehschwingungen und mißt die Schwingungsdauer. Sie ist

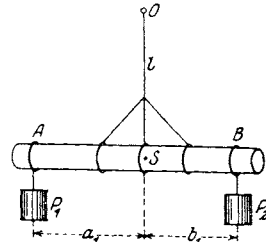


Fig. 216.

$$t = \frac{1}{r^2} \sqrt{\frac{2T_S l \pi}{G}} = k \sqrt{T_S} \quad \dots \text{ a)}$$

worin  $r$  der Halbmesser des Drahtes,  $T_S$  das Trägheitsmoment der Scheibe für die Schwerlinie  $OS$ ,  $G$  die Elastizitätszahl für Schub ist (vgl. F. Wittenbauer, Aufgaben aus der technischen Mechanik, II. Bd., Festigkeitslehre, 3. Auflage, Aufgabe 420).

Sodann wählt man zwei Stellen  $A$  und  $B$  der Scheibe in den Abständen  $a_1$  und  $b_1$  von  $S$  und bringt in ihnen zwei Gewichte  $P_1$  und  $P_2$  derart an, daß die Scheibe wieder im Gleichgewicht ist. Nun bestimmt man neuerlich die Schwingungsdauer um  $OS$ ; sie sei

$$t_1 = k \sqrt{T_{S1}} \quad \dots \dots \dots \text{ b)}$$

Nennt man  $i_1$  und  $i_2$  die Trägheitshalbmesser der Gewichte  $P_1$  und  $P_2$  für ihre vertikalen Schwerlinien, so ist das neue Trägheitsmoment der ganzen Vorrichtung nach Gleichung 92:

$$T_{S1} = T_S + \frac{P_1}{g} (i_1^2 + a_1^2) + \frac{P_2}{g} (i_2^2 + b_1^2) \quad \dots \dots \dots \text{ c)}$$

Wiederholt man den Versuch mit denselben Gewichten, die man in andere Entfernungen  $a_2$  und  $b_2$  von  $S$  gebracht hat, so erhält man die neue Schwingungsdauer

$$t_2 = k \sqrt{T_{S2}} \quad \dots \dots \dots \text{ d)}$$

worin wie oben

$$T_{S2} = T_S + \frac{P_1}{g} (i_1^2 + a_2^2) + \frac{P_2}{g} (i_2^2 + b_2^2) \quad \dots \dots \dots \text{ e)}$$

Entfernt man aus den Gleichungen a) bis e)  $T_S, T_{S1}, T_{S2}, i_1, i_2, k$ , so bleibt für das gesuchte Trägheitsmoment

$$T_S = \frac{t^2}{g (t_2^2 - t_1^2)} [P_1 (a_2^2 - a_1^2) + P_2 (b_2^2 - b_1^2)].$$

Nennt man  $a_1 + b_1 = l_1$ ,  $a_2 + b_2 = l_2$  und beachtet, daß für Gleichgewicht  $P_1 a_1 = P_2 b_1$ ,  $P_1 a_2 = P_2 b_2$  sein muß, so kann obige Gleichung auch geschrieben werden:

$$T_S = \frac{t^2 P_1}{g (t_2^2 - t_1^2)} (a_2 l_2 - a_1 l_1).$$

**122. Bestimmung der Trägheitsmomente durch Wägung.** (Fig. 217.)  
 Der Körper wird an zwei Stellen *A* und *B* aufgehängt; in *A* an eine Federwage, in *B* an zwei Drähten, von denen der eine gespannt, der andere ungespannt ist.

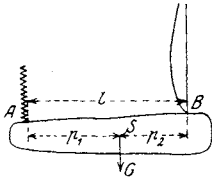


Fig. 217.

Mißt man zunächst den statischen Zug *A* an der Federwage, so ist

$$p_2 = \frac{A}{G} l \dots \dots \dots a)$$

Hierauf wird der gespannte Draht in *B* durchschnitten. Dadurch ändert sich der Zug an der Federwage in *A*<sub>1</sub>; dabei ist zu beachten, daß die Zunahme des Zuges *A*<sub>1</sub>—*A* eine plötzlich auftretende Kraft (keine Stoßkraft) ist, die die gleiche statische Wirkung auslösen wird wie die doppelt so große Kraft *2* (*A*<sub>1</sub>—*A*).

Nennt man also *f*<sub>1</sub> die Verlängerung der Feder in *A* nach dem Durchschneiden des Drahtes, so ist

$$f_1 = k \cdot 2 (A_1 - A) \dots \dots \dots b)$$

worin *k* die Konstante der Federwage ist. Nach 102, 2 ist der geänderte Zug in *A*:

$$A_1 = G \cdot \frac{i^2}{p_1^2 + i^2} \dots \dots \dots c)$$

wenn *i* der Trägheitshalbmesser der Stange für die Schwerlinie senkrecht zur Abbildung ist.

Vertauscht man nun die Aufhängung der Punkte *A* und *B*, und wiederholt den Versuch, so erhält man ebenso die Gleichungen

$$p_1 = \frac{B}{G} l \dots \dots \dots d)$$

$$f_2 = k \cdot 2 (B_1 - B) \dots \dots \dots e)$$

$$B_1 = G \cdot \frac{i^2}{p_2^2 + i^2} \dots \dots \dots f)$$

Aus den Gleichungen a) bis f) bleibt schließlich

$$i = \frac{A l \sqrt{2k B + f_2}}{G \sqrt{2k A - f_2}} = \frac{B l \sqrt{2k A + f_1}}{G \sqrt{2k B - f_1}}$$

Zahlenmäßige Angaben für die Trägheitsmomente von Maschinenteilen sind in der Literatur nur sehr spärlich zu finden. Für Trägheitsmomente von Schubstangen sehe man etwa folgende Zusammenstellungen ein:

R. Mollier, Der Beschleunigungsdruck der Schubstange, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1903, S. 1640.

M. Enßlin, Die Trägheitskräfte einer Schubstange. Dinglers Polyt. Journal 1907, S. 612.

## XII. Die Beschleunigungsdrücke eines Systems.

**123. Die Resultante der Beschleunigungsdrücke.** Unter Beschleunigungsdruck eines Punktes verstehen wir jene Kraft, die imstande wäre, der Masse  $m$  des Punktes die Beschleunigung  $b$  zu erteilen; sie hat also die Größe  $mb$  (vgl. 51).

Die Beschleunigungsdrücke eines Systems oder einer Scheibe haben im allgemeinen in jedem ihrer Punkte eine andere Größe und Richtung. Da es Kräfte sind, kann man nach ihrer Resultanten fragen; man nennt diese den Beschleunigungsdruck des Systems.

Es sei  $M$  die Masse der Scheibe,  $S$  ihr Schwerpunkt,  $m$  die Masse eines beliebigen ihrer Punkte  $P$ ,  $b$  seine Beschleunigung,  $x$  und  $y$  seine Koordinaten (Fig. 218). Nennt man ferner  $b_x$  und  $b_y$  die Teile von  $b$  nach den Achsen des beliebigen Achsenkreuzes  $XOY$ , so werden die Beschleunigungsdrücke der Scheibe nach diesen Achsen die Summen haben

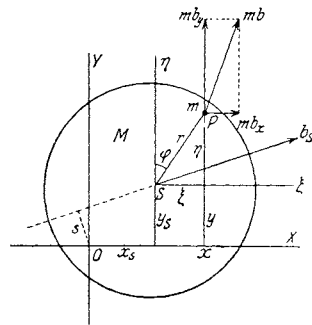


Fig. 218.

$$\Sigma (m b_x) = \Sigma \left( m \frac{d^2 x}{dt^2} \right), \quad \Sigma (m b_y) = \Sigma \left( m \frac{d^2 y}{dt^2} \right).$$

Nun sind nach Gleichung 36 die Koordinaten des Schwerpunkts  $S$

$$x_S = \frac{\Sigma (m x)}{M}, \quad y_S = \frac{\Sigma (m y)}{M}.$$

Differenziert man diese Gleichungen zweimal nach der Zeit, so erhält man

$$\Sigma (m b_x) = M \cdot \frac{d^2 x_S}{dt^2}, \quad \Sigma (m b_y) = M \cdot \frac{d^2 y_S}{dt^2}$$

und wenn  $b_S$  die Beschleunigung des Schwerpunktes,  $b_{Sx}$ ,  $b_{Sy}$  deren Teile nach den Achsen bezeichnen:

$$\Sigma (m b_x) = M b_{Sx}, \quad \Sigma (m b_y) = M b_{Sy};$$

dann ist wegen  $b = b_x + b_y$ ,  $b_S = b_{Sx} + b_{Sy}$ :

$$M b_S = \Sigma (m b)$$

übereinstimmend mit Gleichung 39.

Denkt man sich also die ganze Masse der Scheibe im Schwerpunkt vereinigt, so ist  $Mb_S$  ihr Beschleunigungsdruck; die Größe der Resultanten  $\Sigma mb$  aller Beschleunigungsdrücke der Scheibe wird durch  $Mb_S$ , den Beschleunigungsdruck des Schwerpunkts, gemessen.

Damit ist zwar die Größe, aber noch nicht die Lage des resultierenden Beschleunigungsdruckes gefunden. Um auch die Lage zu bestimmen, bilden wir die Momente sämtlicher Beschleunigungsdrücke um den beliebigen Punkt  $O$ . Das Moment des Beschleunigungsdruckes

$$mb = mb_x + mb_y$$

um  $O$  ist

$$m(b_x y - b_y x) = m \left( \frac{d^2 x}{dt^2} y - \frac{d^2 y}{dt^2} x \right)$$

und die Summe dieser Momente:

$$\Sigma \left[ m \left( \frac{d^2 x}{dt^2} y - \frac{d^2 y}{dt^2} x \right) \right].$$

Setzt man  $x = x_S + \xi$ ,  $y = y_S + \eta$ , so wird diese Summe:

$$\begin{aligned} & \Sigma \left[ m \left( \frac{d^2 x_S}{dt^2} + \frac{d^2 \xi}{dt^2} \right) y - m \left( \frac{d^2 y_S}{dt^2} + \frac{d^2 \eta}{dt^2} \right) x \right] = \\ & = \frac{d^2 x_S}{dt^2} \Sigma (m y) - \frac{d^2 y_S}{dt^2} \Sigma (m x) + \Sigma \left[ m \frac{d^2 \xi}{dt^2} (y_S + \eta) - m \frac{d^2 \eta}{dt^2} (x_S + \xi) \right] \end{aligned}$$

und mit Rücksicht auf die Gleichungen 36:

$$\begin{aligned} M \left( \frac{d^2 x_S}{dt^2} y_S - \frac{d^2 y_S}{dt^2} x_S \right) + y_S \Sigma \left( m \frac{d^2 \xi}{dt^2} \right) - x_S \Sigma \left( m \frac{d^2 \eta}{dt^2} \right) + \\ + \Sigma \left[ m \left( \frac{d^2 \xi}{dt^2} \eta - \frac{d^2 \eta}{dt^2} \xi \right) \right] \dots \dots \dots \text{a)} \end{aligned}$$

Das erste Glied dieses Ausdruckes wird das Moment  $Mb_S$  des Beschleunigungsdruckes  $Mb_S$  im Schwerpunkt um  $O$ ; das zweite und dritte Glied werden null, weil in bezug auf die durch den Schwerpunkt gehenden Achsen  $\xi$  und  $\eta$  die Gleichungen gelten:

$$\Sigma (m \xi) = 0, \quad \Sigma (m \eta) = 0;$$

also ist auch  $\Sigma \left( m \frac{d^2 \xi}{dt^2} \right) = 0$ ,  $\Sigma \left( m \frac{d^2 \eta}{dt^2} \right) = 0$ .

Setzt man endlich  $\overline{SP} = r$ ,  $\xi = r \sin \varphi$ ,  $\eta = r \cos \varphi$ , so wird wegen der Unveränderlichkeit von  $r$

$$\frac{d \xi}{dt} = r \cos \varphi \frac{d \varphi}{dt}, \quad \frac{d \eta}{dt} = -r \sin \varphi \frac{d \varphi}{dt}$$

und somit das letzte Glied des Ausdrucks a):

$$\begin{aligned} \Sigma \left[ m \left( \frac{d^2 \xi}{dt^2} \eta - \frac{d^2 \eta}{dt^2} \xi \right) \right] &= \frac{d}{dt} \Sigma \left[ m \left( \frac{d \xi}{dt} \eta - \frac{d \eta}{dt} \xi \right) \right] = \\ &= \frac{d}{dt} \Sigma \left( m r^2 \frac{d \varphi}{dt} \right) = \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \cdot \Sigma (m r^2). \end{aligned}$$

Nun ist  $\lambda = \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$  die Winkelbeschleunigung der Scheibe und  $T_S = \Sigma (mr^2) = Mi^2$  ihr Trägheitsmoment für den Schwerpunkt; für die gesuchte Summe der Momente der Beschleunigungsdrücke um  $O$  bleibt demnach der Ausdruck übrig:

$$M b_S \cdot s + \lambda T_S = M b_S \cdot s + \lambda M i^2.$$

Hieraus ergibt sich folgender wichtige Satz:

Die Resultante der Beschleunigungsdrücke einer Scheibe besteht aus dem Beschleunigungsdruck der im Schwerpunkt vereinigten Masse der Scheibe und außerdem aus einem Kraftpaar vom Moment  $\lambda M i^2$ , dessen Drehungssinn mit jenem der Winkelbeschleunigung übereinstimmt (Fig. 219).

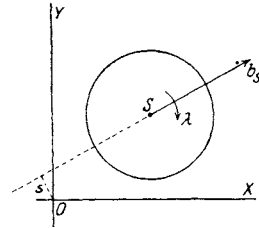


Fig. 219.

124. Die Beschleunigungsdrücke der statischen Ersatzpunkte. Die Masse  $M$  der Scheibe, deren gesamter Beschleunigungsdruck soeben gefunden wurde, werde jetzt ersetzt durch eine beliebige Anzahl statisch gleichwertiger Ersatzpunkte (vgl. 97), also durch Punkte, deren Gesamtheit mit der Scheibe nur die Masse  $M$  und den Schwerpunkt  $S$ , nicht aber das Trägheitsmoment gemein hat. Der Ersatzpunkt  $m_n$ , der mit dem Systempunkt  $P_n$  zusammenfällt (Fig. 220), habe die Beschleunigung  $b_n$  dieses Punktes und außerdem noch eine Beschleunigung  $c_n = k \lambda p_n$ , senkrecht zum Abstände  $p_n = \overline{SP_n}$  und um  $S$  im Gegensinn von  $\lambda$  drehend;  $k$  sei ein noch zu bestimmender konstanter Faktor.

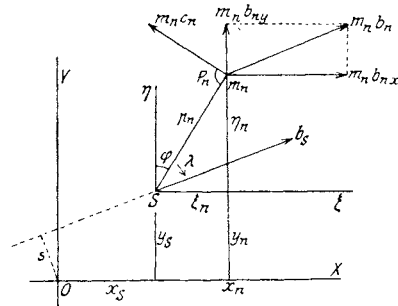


Fig. 220.

Es soll gezeigt werden, daß die Beschleunigungsdrücke der Ersatzmassen  $m_n$ , hervorgerufen durch die Gesamtheit ihrer Beschleunigungen  $b_n$  und  $c_n$ , dem Beschleunigungsdrucke der ganzen Scheibe gleichwertig sind.

Projiziert man die Drücke  $m_n b_n$  und  $m_n c_n$  auf die  $X$ -Achse, so wird die Summe dieser Projektionen:

$$\Sigma (m_n b_{nx}) - \Sigma (m_n c_n \cos \varphi) = \Sigma \left( m_n \frac{d^2 x_n}{dt^2} \right) - \Sigma (m_n k \lambda p_n \cos \varphi).$$

Nun ist nach den Gleichungen 36, da  $S$  auch der Schwerpunkt der Ersatzpunkte  $m_n$  ist:

$$M x_S = \Sigma (m_n x_n), \quad M y_S = \Sigma (m_n y_n)$$



und somit 
$$M \frac{d^2 x_S}{dt^2} = \Sigma \left( m_n \frac{d^2 x_n}{dt^2} \right);$$

ferner ist  $\Sigma (m_n k \lambda p_n \cos \varphi) = k \lambda \Sigma (m_n \eta_n)$

und nach den Gleichungen 48 ist

$$\Sigma (m_n \eta_n) = 0.$$

Die Projektion der Drücke  $m_n b_n$  und  $m_n c_n$  auf die  $X$ -Achse liefert demnach die Summe  $M \frac{d^2 x_S}{dt^2} = M b_{Sx}$ ; ebenso ist die Summe ihrer Projektionen auf die  $Y$ -Achse  $M b_{Sy}$ ; die Resultante der genannten Drücke hat somit die Größe

$$M b_{Sx} + M b_{Sy} = M b_S.$$

Bildet man die Momente der Drücke  $m_n b_n$  und  $m_n c_n$  um den beliebigen Punkt  $O$  der Ebene (Fig. 220), so erhält man

$$\Sigma [m_n (b_{nx} y_n - b_{ny} x_n)] - \Sigma [m_n c_n (p_n + x_S \sin \varphi + y_S \cos \varphi)] \dots a)$$

Setzt man, wie in 123:

$$x_n = x_S + \xi_n, \quad y_n = y_S + \eta_n,$$

so wird der erste Teil des Ausdruckes a), wie bereits gezeigt wurde, übergehen in  $M b_S \cdot s + \lambda \Sigma (m_n p_n^2) \dots b)$

Der zweite Teil von a) wird

$$\Sigma [m_n k \lambda p_n (p_n + x_S \sin \varphi + y_S \cos \varphi)] = k \lambda \Sigma (m_n p_n^2) + k \lambda x_S \Sigma (m_n p_n \sin \varphi) + k \lambda y_S \Sigma (m_n p_n \cos \varphi).$$

Setzt man  $p_n \sin \varphi = \xi_n$ ,  $p_n \cos \varphi = \eta_n$ , und da  $S\xi$ ,  $S\eta$  Schwerlinien sind:  $\Sigma (m_n \xi_n) = 0$ ,  $\Sigma (m_n \eta_n) = 0$ ,

so wird der zweite Teil von a):

$$k \lambda \Sigma (m_n p_n^2) \dots c)$$

Verbindet man b) und c), so bleibt für das Moment der Drücke um  $O$ :

$$M b_S \cdot s + \lambda (1 - k) \Sigma (m_n p_n^2).$$

Die Beschleunigungsdrücke der Scheibe  $M$  haben dann für jeden Punkt  $O$  die gleiche Resultante wie die Drücke  $m_n b_n$  und  $m_n c_n$  der Ersatzpunkte, wenn nach dem Schlußsatze von 123:

$$M i^2 = (1 - k) \Sigma (m_n p_n^2)$$

ist. Daraus ergibt sich die Größe des noch unbekanntenen Faktors  $k$  mit:

$$k = 1 - \frac{M i^2}{\Sigma (m_n p_n^2)} \dots 98)$$

und der Satz:

Wird die Masse  $M$  der Scheibe durch beliebig viele **statisch** gleichwertige Punkte  $m_n$  ersetzt, so haben die Beschleunigungsdrücke der Scheibe die gleiche Resultante wie die Beschleunigungsdrücke der Ersatzpunkte  $A, B, C, \dots$

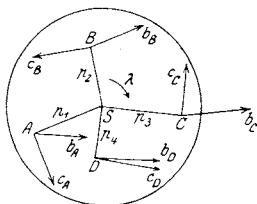


Fig. 221.

(Fig. 221), wenn in jedem derselben außer seiner Beschleunigung  $b_A, b_B, b_C, \dots$  auch noch die Beschleunigung  $c_A, c_B, c_C, \dots$  senkrecht zu den Abständen  $p_1, p_2, p_3, \dots$  und um  $S$  gegen den Sinn von  $\lambda$  drehend angebracht werden; hierin ist  $c_A = k\lambda p_1$  und analog  $c_B, c_C, \dots$ , wobei der Wert von  $k$  aus der Gleichung 98 zu entnehmen ist.

**125. Die Beschleunigungsdrücke der dynamischen Ersatzpunkte.** Werden die Ersatzpunkte  $\mu_n$  derart gewählt, daß sie die Scheibe nicht nur in statischer, sondern auch in dynamischer Hinsicht ersetzen, so muß nach 98 noch die Bedingung hinzukommen, daß auch das Trägheitsmoment der Scheibe für den Schwerpunkt das gleiche ist wie die Summe der Trägheitsmomente aller Ersatzmassen; dann muß also

$$M i^2 = \sum (\mu_n p_n^2)$$

sein und es wird  $k = 0$ .

Daraus folgt der Satz:

Wird die Masse  $M$  einer Scheibe durch beliebig viele dynamisch gleichwertige Ersatzpunkte  $\mu_n$  ersetzt, so haben die Beschleunigungsdrücke der Scheibe die gleiche Resultante wie die Beschleunigungsdrücke der Ersatzpunkte.

Ersetzt man z. B. die Masse  $M$  eines homogenen Dreiecks (Fig. 222) durch die dynamisch gleichwertigen Punktmassen  $\frac{M}{12}$  in den Ecken und  $\frac{3}{4}M$  im Schwerpunkt (vgl. Fig. 198) und sind  $b_A, b_B, b_C, b_S$  die Beschleunigungen dieser vier Punkte, so ersetzen ihre Beschleunigungsdrücke

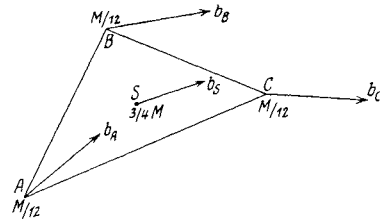


Fig. 222.

$$\frac{M}{12} b_A, \frac{M}{12} b_B, \frac{M}{12} b_C, \frac{3}{4} M b_S$$

die Beschleunigungsdrücke der Dreieckscheibe vollständig.

Ersetzt man ferner die Masse  $M$  einer beliebig geformten Scheibe durch drei dynamisch gleichwertige Ersatzpunkte  $A, B$  und den Schwerpunkt  $S$  mit den Massen

$$\mu_A = M \frac{i^2}{p_1^2}, \mu_B = M \frac{i^2}{p_2^2}, \mu_S = M \left( 1 - \frac{i^2}{p_1 p_2} \right)$$

(Fig. 223, vgl. Gleichung 58), dann haben die Beschleunigungsdrücke der drei Punkte

$$\mu_A b_A, \mu_B b_B, \mu_S b_S$$

die gleiche Resultante wie die Beschleunigungsdrücke der Scheibe.

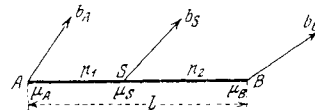


Fig. 223.

Oder ersetzen wir die Masse der Scheibe durch die beiden Punktmassen

$$\mu_A = M \frac{i^2}{p_1^2 + i^2}, \mu_B = M \frac{i^2}{p_2^2 + i^2}$$

(vgl. Gleichung 53) in den Entfernungen  $p_1$  und  $p_2 = -\frac{i^2}{p_1}$  vom Schwerpunkt  $S$  (Fig. 224) und sind  $b_A, b_B$  die Beschleunigungen dieser beiden Punkte, so ersetzen die Beschleunigungsdrücke  $\mu_A b_A, \mu_B b_B$  jene der Scheibe vollständig.

Wählt man hier noch überdies  $p_1 = i, p_2 = -i$  (Fig. 225), so wird  $\mu_A = \mu_B = \frac{M}{2}$ ; dann ersetzen die Beschleunigungsdrücke  $\frac{M}{2} b_A, \frac{M}{2} b_B$

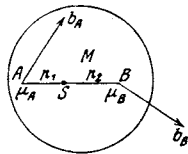


Fig. 224.

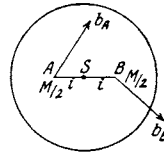


Fig. 225.

der beiden Punkte  $A$  und  $B$ , in der gleichen Entfernung  $i$  von  $S$ , die Beschleunigungsdrücke der Scheibe.

Bezüglich des Beschleunigungsdruckes einer sich drehenden Scheibe sehe man 101.

126. Beispiele.

1. Beispiel. Ein prismatischer schwerer Stab vom Gewicht  $G$  (Fig. 226), der an seinem Ende  $A$  drehbar befestigt ist, hat in seiner anfänglichen Ruhelage die Neigung  $\alpha$  gegen die Vertikale. Der Stab wird seinem Eigengewicht überlassen; man ermittle seine Winkelbeschleunigung und Winkelgeschwindigkeit.

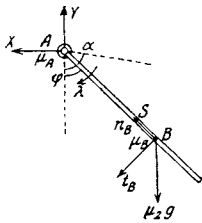


Fig. 226.

Man ersetze die Masse des Stabes durch zwei dynamisch gleichwertige Punkte  $A$  und  $B$ , von denen man den ersten in das drehbare Ende verlegt; dann ist mit  $p_1 = \frac{l}{2}, i^2 = \frac{l^2}{12}$ , wenn  $l$  die Länge

des Stabes ist, die Masse des Ersatzpunktes in  $A$ :

$$\mu_A = M \cdot \frac{i^2}{p_1^2 + i^2} = \frac{M}{4},$$

und 
$$p_2 = -\frac{i^2}{p_1} = -\frac{l}{6}, \mu_B = M \cdot \frac{i^2}{p_2^2 + i^2} = \frac{3}{4} M;$$

der zweite Ersatzpunkt  $B$  hat die Entfernung  $AB = \frac{2}{3} l$ .

Die Masse  $\mu_B$  ist der äußeren Kraft  $\mu_B g$  und der Stabspannung  $S$  ausgesetzt; seine Tangentialbeschleunigung ist  $t_B = \overline{AB} \cdot \lambda$ , seine Normalbeschleunigung  $n_B = \overline{AB} \cdot \omega^2$ .

Da die Beschleunigungsdrücke den äußeren Kräften gleichwertig sind, so folgt durch Projektion auf die Bewegungsrichtung von  $B$

$$\mu_B t_B = \mu_B g \sin \varphi$$

oder  $\frac{2}{3} l \lambda = g \sin \varphi$

und  $\lambda = \frac{3g \sin \varphi}{2l}$ .

Aus der bekannten Beziehung

$$\omega \cdot d\omega = \lambda \cdot (l \cdot d\varphi)$$

folgt dann durch Integration

$$\omega^2 = \frac{3g}{l} (\cos \varphi - \cos \alpha);$$

bei Ermittlung der Integrationskonstanten wurde die Annahme benützt, daß für  $\varphi = \alpha$ ,  $\omega = 0$  ist.

2. Beispiel. Von dem Stabe des vorigen Beispiels soll in  $A$  der Gelenkdruck  $A$  und in  $B$  die Spannung  $S$  des Stabes ermittelt werden.

Die äußeren Kräfte der Ersatzmasse  $\mu_B$  in  $B$  sind das Gewicht  $\mu_B g$  und die Stabspannung  $S$ ; sie müssen den Beschleunigungsdrücken  $\mu_B n_B$  und  $\mu_B t_B$  gleichwertig sein. Ihre Projektion auf die Stabrichtung gibt somit die Gleichung

$$\mu_B n_B = S - \mu_B g \cos \varphi,$$

und 
$$S = \mu_B (n_B + g \cos \varphi) = \frac{3}{4} G \left( \frac{2l\omega^2}{3g} + \cos \varphi \right).$$

Wird hier der früher gefundene Wert von  $\omega^2$  eingesetzt, so bleibt für die gesuchte Spannung

$$S = \frac{3}{4} G (3 \cos \varphi - 2 \cos \alpha).$$

Zu dieser bis  $A$  reichenden Spannung kommt in  $A$  noch das Gewicht des Ersatzpunktes  $\mu_A$  hinzu; die Resultante aus  $S$  und  $\mu_A g$  ist der Gelenkdruck in  $A$ ; er hat die Teile

$$X = S \sin \varphi = \frac{3}{4} G \sin \varphi (3 \cos \varphi - 2 \cos \alpha),$$

$$Y = S \cos \varphi + \mu_A g = \frac{1}{4} G (1 + 9 \cos^2 \varphi - 6 \cos \alpha \cos \varphi).$$

(Vgl. R. Skutsch, Anwendungen der Massenreduktionen nach Reye und Poincot, Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft, 1905, S. 56.)

Am Ende des Beispiels 128, 2 wird eine graphische Lösung dieser Aufgabe angegeben werden.

**127. Die Beschleunigungsdrücke von zwei statischen Ersatzpunkten.**

Es seien  $A$  und  $B$  zwei beliebige Punkte (Fig. 227), deren Verbindungslinie durch den Schwerpunkt  $S$  der Scheibe geht (vgl. 125, Schluß). Dann ist

$$p_1 + p_2 = l, \quad m_A p_1 = m_B p_2$$

und die statischen Ersatzmassen sind

$$m_A = M \cdot \frac{p_2}{l}, \quad m_B = M \cdot \frac{p_1}{l}.$$

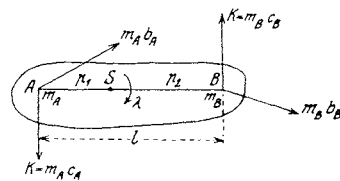


Fig. 227.

Damit wird  $\Sigma (m_n p_n^2) = m_A p_1^2 + m_B p_2^2 = M p_1 p_2$   
 und Gleichung 98 gibt den Faktor

$$k = 1 - \frac{i^2}{p_1 p_2}.$$

Nach 124 sind somit die Beschleunigungsdrücke der Scheibe vollständig ersetzt durch die beiden Beschleunigungsdrücke  $m_A b_A$  und  $m_B b_B$  der beiden Punkte  $A$  und  $B$ , in Richtung ihrer Beschleunigungen  $b_A$  und  $b_B$ , und außerdem durch die beiden Drücke  $m_A c_A$  und  $m_B c_B$ , senkrecht zu  $AB$  und um den Schwerpunkt im Gegensinn von  $\lambda$  drehend. Nun ist aber nach 124:

$$m_A c_A = m_A k \lambda p_1, \quad m_B c_B = m_B k \lambda p_2.$$

also 
$$m_A c_A = m_B c_B = M k \lambda \frac{p_1 p_2}{l}.$$

Die beiden gleichen Drücke

$$K = m_A c_A = m_B c_B$$

bilden demnach ein Kraftpaar vom Moment

$$Kl = M k \lambda p_1 p_2 = M \lambda (p_1 p_2 - i^2) \dots \dots \dots 99)$$

mit dem Gegensinn von  $\lambda$ . (vgl. H. Lorenz, Techn. Mechanik starrer Systeme, 1902, S. 343).

Ist das System z. B. eine prismatische Stange von der Länge  $l$  und wählt man die Punkte  $A$  und  $B$  an ihren Enden, so ist nach Gleichung 91:

$$i^2 = \frac{l^2}{12}, \quad p_1 = p_2 = \frac{l}{2}$$

und das Moment 
$$Kl = \frac{1}{6} M \lambda l^2 \dots \dots \dots 100)$$

Macht das System eine Dauerdrehung um einen seiner Punkte  $A$ , so ist  $b_A = 0$  und der Beschleunigungsdruck des Systems besteht dann aus dem Beschleunigungsdruck  $m_B b_B$  des anderen Ersatzpunktes  $B$  und dem Moment  $M \lambda (p_1 p_2 - i^2)$ .

**128. Beispiele.**

1. Beispiel. Das Beispiel 126, 1 des sich um sein Ende  $A$  drehenden Stabes, das mit Benützung zweier dynamisch gleichwertiger Ersatzpunkte bereits gelöst wurde, soll jetzt unter Zugrundelegung zweier statisch gleichwertiger Ersatzpunkte gelöst werden.

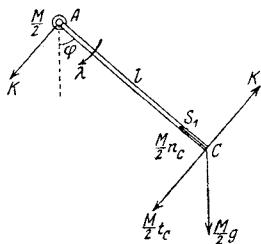


Fig. 228.

Man wähle die Ersatzpunkte mit je  $\frac{M}{2}$  Masse in  $A$  und  $C$  (Fig. 228); der Beschleunigungsdruck der Ersatzmasse  $\frac{M}{2}$  in  $A$  ist null, weil die Beschleunigung null ist; die Beschleunigung der Ersatzmasse  $\frac{M}{2}$  in  $C$  besteht aus der

Normalbeschleunigung  $n_C = l\omega^2$  und der Tangentialbeschleunigung  $t_C = l\lambda$ ; die Beschleunigungsdrücke sind also  $\frac{M}{2} l\omega^2$  und  $\frac{M}{2} l\lambda$ . Dazu kommt noch das Moment der Kräfte  $K : Kl = \frac{1}{6} M \lambda l^2$  nach Gleichung 100, im Gegensinne von  $\lambda$  drehend.

Das Moment der Beschleunigungsdrücke um  $A$  ist demnach

$$\frac{M}{2} l\lambda \cdot l = \frac{1}{6} M \lambda l^2$$

und das Moment der äußeren Kräfte:

$$\frac{M}{2} g \cdot l \sin \varphi;$$

setzt man beide gleich, so bleibt  $\lambda = \frac{3}{2} \cdot \frac{g \sin \varphi}{l}$  wie bei der vorigen Behandlung dieses Beispiels.

2. Beispiel. Es soll in vorigem Beispiel der Gelenkdruck  $A$  des Stabes in  $A$  auf graphischem Wege gefunden werden.

Es sei (Fig. 229)  $AC = l$  der prisma- tische Stab vom Gewicht  $G$ ,  $AC_0$  seine Anfangslage,  $\varphi$  und  $\alpha$  die Winkel mit der Vertikale. Bekannt sind die Winkelbeschleunigung

$$\lambda = \frac{3}{2} \cdot \frac{g \sin \varphi}{l}$$

und die Winkelgeschwindigkeit (vgl. 126, 1)

$$\omega^2 = \frac{3g}{l} (\cos \varphi - \cos \alpha).$$

In  $A$  und  $C$  sind die statischen Ersatz- massen  $m_A = m_C = \frac{M}{2}$  untergebracht.

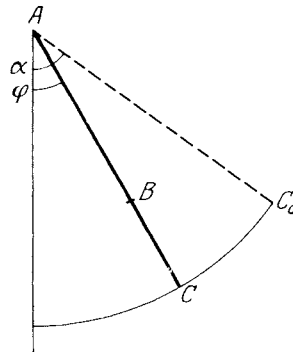


Fig. 229.

Das Gleichgewicht der äußeren Kräfte und der Trägheitskräfte in  $C$  verlangt die Bedingung

$$\frac{G}{2} + T_{Ct} + T_{Cn} + K + S_1 = 0,$$

worin die Trägheitskräfte:

$$T_{Cn} = m_C \cdot n_C = \frac{M}{2} l\omega^2 = \frac{3}{2} G (\cos \varphi - \cos \alpha),$$

$$T_{Ct} = m_C \cdot t_C = \frac{M}{2} l\lambda = \frac{3}{4} G \sin \varphi.$$

und  $K = \frac{1}{6} M \lambda l = \frac{1}{4} G \sin \varphi$

und  $S_1$  die Stabspannung in  $A$  sind.

In Fig. 229a wurde das Polygon der Kräfte gezeichnet. Es ist  $\overline{01} = \overline{12} = \frac{G}{2}$ ,  $\overline{23} = \frac{G}{4}$ ; aus 3 wurde ein Halbkreis mit dem Halbmesser  $\overline{13} = \frac{3}{4} G$  beschrieben und die Parallelen  $\overline{14}$  und  $\overline{15}$  zu den Stablagen  $AC$  und  $AC_0$  gezogen. Der Kreisbogen aus 1 mit dem Halbmesser  $\overline{15}$  schneidet  $\overline{14}$  im Punkte 6 und es ist  $\overline{64} = \frac{3}{2} G (\cos \varphi - \cos \alpha) = T_{Cn}$ . Ferner ist  $\overline{37} = \overline{28} = \frac{3}{4} G \sin \varphi = T_{Ct}$  und  $\overline{89} = \frac{1}{3} T_{Ct} = K$ . Das erwähnte Polygon der Kräfte ist demnach 1, 2, 8, 9, 10, 1, wenn 9,  $\overline{10} = \overline{6}, 4$  gemacht wird. Hierin ist  $\overline{1}, \overline{10} \equiv S_1$ .

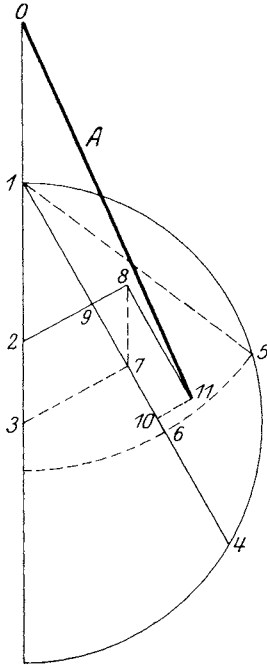


Fig. 229a.

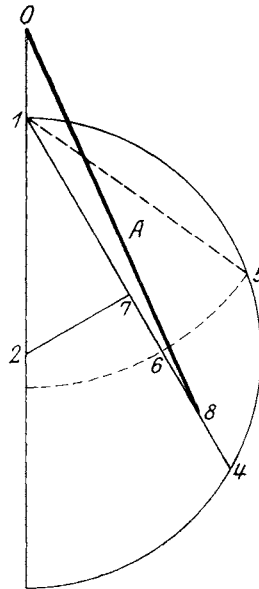


Fig. 229b.

Das Gleichgewicht des Gelenkes  $A$  verlangt die Bedingung

$$\frac{G}{2} + S_1 + K + A = 0;$$

man macht also  $\overline{8,11} = \overline{9,10}$  und  $\overline{10,11} = \overline{9,8} = K$ , dann ist  $\overline{11,0} \equiv A$ .

In Fig. 229b wurde dieselbe Aufgabe mit dynamisch gleichwertigen Ersatzpunkten gelöst (vgl. Beispiel 126, 2). Sie wurden in  $A$  und  $B$  angenommen, wobei  $\overline{AB} = \frac{2}{3} l$  war. Die Ersatzmassen waren  $\frac{1}{4} M$  in  $A$  und  $\frac{3}{4} M$  in  $B$ .

Hier ist das Gleichgewichtspolygon des Punktes  $B$ :

$$\frac{3}{4} G + T_{Bt} + T_{Bn} + S = 0$$

worin die Trägheitskräfte

$$T_{Bn} \equiv -\mu_B \cdot n_B = \frac{3}{4} M \cdot \frac{2}{3} l \omega^2 = \frac{3}{2} G (\cos \varphi - \cos \alpha),$$

$$T_{Bt} \equiv -\mu_B \cdot t_B = \frac{3}{4} M \cdot \frac{2}{3} l \lambda = \frac{3}{4} G \sin \varphi$$

und  $S$  die Stabspannung in  $A$  sind.

Man macht demnach in Fig. 229b:  $\bar{01} = \frac{1}{4} G$ ,  $\bar{12} = \frac{3}{4} G$ , zeichnet aus dem Mittelpunkt 2 den Halbkreis mit dem Halbmesser  $\frac{3}{4} G$  und wie früher die Linien  $14 \parallel AC$ ,  $15 \parallel AC_0$ . Dann ist  $\bar{27} = \frac{3}{4} G \sin \varphi = T_{Bt}$  und  $\bar{78} = \bar{64} = \frac{3}{2} G (\cos \varphi - \cos \alpha) = T_{Bn}$ ; das Polygon wird: 1, 2, 7, 8, 1 und es ist  $\bar{81} \equiv S$ .

Das Gleichgewicht des Gelenkes  $A$  bedingt das Polygon

$$\frac{G}{4} + S + A \equiv 0;$$

es ist also  $\bar{8,0} \quad A$ .

Es soll schon hier betont werden, daß die auf diesem Wege gefundenen Spannungen  $S$  und  $S_1$  nichts zu tun haben mit den wirklichen Spannungen im Körper, da wir die Massenverteilung in diesem durch Wahl der Ersatzpunkte gänzlich verändert haben. Darauf kommen wir später noch zurück. Hingegen geben die Ersatzpunkte durchaus richtige Resultate, wenn wir nach den Beschleunigungen und Gelenkdrücken fragen.

3. Beispiel. Ein prismatischer Stab  $AB$  vom Gewicht  $G$  gleitet an vertikaler Wand und horizontalem Boden ohne Reibung abwärts (Fig. 230). Man soll die Beschleunigungen  $b_A$  und  $b_B$  der Endpunkte des Stabes berechnen.

Die Masse  $M$  des Stabes wird wie in vorigem Beispiel durch die statischen Ersatzmassen  $\frac{M}{2}$  in  $A$  und  $B$  ersetzt.

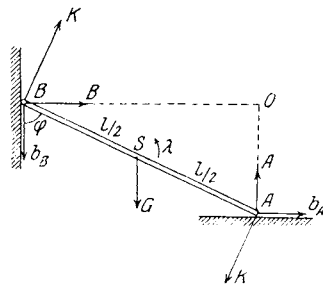


Fig. 230.

Die äußeren Kräfte des Stabes sind außer  $G$  die unbekanntes Führungsdrücke  $A$  und  $B$ , normal zum Boden bzw. zur Wand.

Die Beschleunigungsdrücke sind  $\frac{M}{2} b_A$ ,  $\frac{M}{2} b_B$  in  $A$  bzw.  $B$ , ferner das Kraftpaar  $Kl = \frac{1}{6} M \lambda l^2$  (nach Gleichung 100) im Gegensinne von  $\lambda$ . Das Moment der äußeren Kräfte um  $O$  ist  $G \frac{l}{2} \sin \varphi$ ; das Moment der Beschleunigungsdrücke um  $O$  ist

$$-\frac{M}{2} b_A \cdot l \cos \varphi - \frac{M}{2} b_B \cdot l \sin \varphi + \frac{1}{6} M \lambda l^2;$$

setzt man die Momente gleich, so wird

$$g \sin \varphi = b_A \cos \varphi + b_B \sin \varphi - \frac{1}{3} l \lambda \quad \dots \dots \dots a)$$



Setzt man noch mit  $\overline{B\dot{O}} = x$ ,  $\overline{A\dot{O}} = y$ :

$$b_A = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} (l \sin \varphi),$$

$$b_B = -\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{d^2}{dt^2} (l \cos \varphi),$$

ferner  $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$ ,  $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \lambda$ , so wird

$$\left. \begin{aligned} b_A &= l (\lambda \cos \varphi - \omega^2 \sin \varphi) \\ b_B &= l (\lambda \sin \varphi + \omega^2 \cos \varphi) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \text{b)}$$

und in Gleichung a) eingesetzt:

$$\lambda = \frac{3g \sin \varphi}{2l}.$$

Gebraucht man wieder die bekannte Bewegungsgleichung

$$\omega \cdot d\omega = \lambda \cdot d\varphi$$

so erhält man nach Einsetzen von  $\lambda$  und Integrieren

$$\omega^2 = \frac{3g}{l} (\cos \alpha - \cos \varphi),$$

wobei angenommen wurde, daß die Bewegung des Stabes aus der Ruhelage  $\varphi = \alpha$  beginne.

Durch Einsetzen der Werte von  $\omega^2$  und  $\lambda$  in die Gleichungen b) erhält man schließlich:

$$b_A = \frac{3}{2} g \sin \varphi (3 \cos \varphi - 2 \cos \alpha),$$

$$b_B = \frac{3}{2} g (1 - 3 \cos^2 \varphi + 2 \cos \varphi \cos \alpha).$$

Zu dieser Lösung möge noch bemerkt werden, daß die Berechnung der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  mit Hilfe des Arbeitsprinzipes einfacher erfolgen könnte. Der Punkt  $O$  ist nämlich der Drehpol des Stabes; dessen Trägheitsmoment für  $O$  ist nach den Gleichungen 90 und 92:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_S + M \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} M l^2 + \frac{1}{4} M l^2 = \frac{1}{3} M l^2$$

und die Bewegungsenergie des Stabes nach Gleichung 49a:

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{T} \omega^2 = \frac{1}{6} M l^2 \omega^2.$$

Hingegen ist die Arbeit des fallenden Gewichtes  $G$  des Stabes seit Beginn der Bewegung

$$\mathbf{A} = G \frac{l}{2} (\cos \alpha - \cos \varphi).$$

Setzt man  $L = \mathbf{A}$ , so wird wie oben

$$\omega^2 = \frac{3g}{l} (\cos \alpha - \cos \varphi).$$

Es war auch nicht beabsichtigt, durch die Einführung der Ersatzpunkte eine einfachere Lösung des Beispiels vorzuführen, sondern überhaupt die Anwendung dieser Punkte zu zeigen.

4. Beispiel. Es sollen bei dem Stabe des vorigen Beispiels die Führungsdrücke in  $A$  und  $B$  gesucht werden (Fig. 230).

Setzt man die Projektionen der äußeren Kräfte gleich jenen der Beschleunigungsdrücke, so erhält man die Gleichungen

$$G - A = \frac{M}{2} b_B, \quad B = \frac{M}{2} b_A,$$

woraus nach Einsetzen der oben gefundenen Beschleunigungen

$$A = \frac{1}{4} G (1 + 9 \cos^2 \varphi - 6 \cos \varphi \cos \alpha),$$

$$B = \frac{3}{4} G \sin \varphi (3 \cos \varphi - 2 \cos \alpha).$$

5. Beispiel. In einer horizontalen Ebene befindet sich ein in den Ecken gelenkiger Rhombus, der in den Diagonalen von den vier Kräften  $P, Q, P, Q$  angegriffen wird. Man ermittle die Beschleunigungen  $b_A$  und  $b_B$  (Fig. 231).

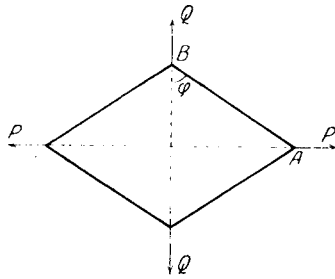


Fig. 231.

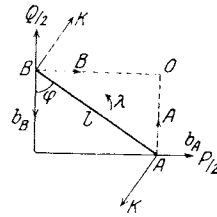


Fig. 231 a.

Dieses Beispiel kann ähnlich gelöst werden wie das vorhergehende. Die Beschleunigungsdrücke einer Seite des Rhombus sind die gleichen wie dort, wenn  $M$  die Masse einer Seite ist. Die äußeren Kräfte sind  $\frac{P}{2}$  in  $A$ ,  $\frac{Q}{2}$  in  $B$ , ferner die Führungsdrücke  $A$  und  $B$ ; das Gewicht des Rhombus kommt als Kraft nicht in Betracht, da die Bewegung in einer horizontalen Ebene vor sich geht (Fig. 231 a).

Bildet man wieder die Momente der äußeren Kräfte und der Beschleunigungsdrücke um  $O$  und setzt sie gleich, so wird

$$\frac{Q}{2} l \sin \varphi - \frac{P}{2} l \cos \varphi = -\frac{M}{2} b_A \cdot l \cos \varphi - \frac{M}{2} b_B \cdot l \sin \varphi + \frac{1}{6} M \lambda l^2.$$

Setzt man hier die Werte von  $b_A$  und  $b_B$  aus den Gleichungen b) des vorigen Beispiels ein, so wird:

$$\lambda = \frac{3 P \cos \varphi - Q \sin \varphi}{2 M l}.$$

Aus der Bewegungsgleichung

$$\omega \cdot d\omega = \dot{\lambda} \cdot d\varphi$$

folgt dann nach Integration:

$$\omega^2 = \frac{3}{Ml} [P (\sin \varphi - \sin \alpha) + Q (\cos \varphi - \cos \alpha)],$$

wobei vorausgesetzt wurde, daß anfangs  $\varphi = \alpha$  und  $\omega = 0$  ist.

Damit sind die Beschleunigungen bestimmt:

$$b_A = \frac{3}{2M} [P (1 - 3 \sin^2 \varphi + 2 \sin \varphi \sin \alpha) - Q \sin \varphi (3 \cos \varphi - 2 \cos \alpha)],$$

$$b_B = \frac{3}{2M} [P \cos \varphi (3 \sin \varphi - 2 \sin \alpha) - Q (1 - 3 \cos^2 \varphi + 2 \cos \varphi \cos \alpha)].$$

**129. Die Beschleunigungsdrücke von drei statischen Ersatzpunkten.**

Es seien  $A, B, C$  drei beliebige Punkte der Scheibe (Fig. 232);  $p_1, p_2, p_3$  ihre Entfernungen vom Schwerpunkt  $S$ ;  $b_A, b_B, b_C$  ihre Beschleunigungen;  $\lambda$  die Winkelbeschleunigung der Scheibe,  $M$  ihre Masse;  $m_A, m_B, m_C$  die in die Punkte  $A, B, C$  nach dem Schwerpunktsgesetz verteilten Massen.

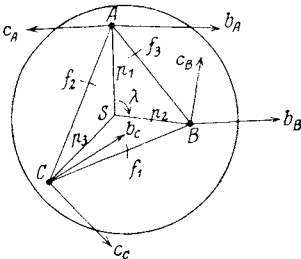


Fig. 232.

Ist  $f$  die Fläche des Dreiecks  $ABC$ , sind ferner  $f_1, f_2, f_3$  die Flächen der Dreiecke  $BSC, CSA, ASB$ , so finden wir für die statischen Ersatzpunkte wie in 104, Gleichung 56 für die dynamischen Ersatzpunkte:

$$m_A = M \cdot \frac{f_1}{f}, \quad m_B = M \cdot \frac{f_2}{f}, \quad m_C = M \cdot \frac{f_3}{f} \quad \dots \dots \dots 101)$$

Mit 
$$\sum (m_n p_n^2) = \frac{M}{f} (f_1 p_1^2 + f_2 p_2^2 + f_3 p_3^2)$$

gibt Gleichung 98 den Wert des Faktors  $k$ :

$$k = 1 - \frac{f_i^2}{f_1 p_1^2 + f_2 p_2^2 + f_3 p_3^2} \dots \dots \dots 102)$$

Nach dem Schlußsatze von 124 haben dann die Beschleunigungsdrücke der Scheibe dieselbe Resultante wie die Beschleunigungsdrücke

$$m_A b_A, \quad m_B b_B, \quad m_C b_C$$

der drei statischen Ersatzpunkte zusammen mit den drei Kräften

$$m_A c_A = m_A k \lambda p_1, \quad m_B c_B = m_B k \lambda p_2, \quad m_C c_C = m_C k \lambda p_3,$$

die in  $A, B, C$  bzw. auf  $p_1, p_2, p_3$  senkrecht stehen und um  $S$  im Gegensinne von  $\lambda$  drehen.

Ist z. B. die Scheibe ein gleichseitiges Dreieck von der Seitenlänge  $a$ , und nimmt man die Punkte  $A, B, C$  in den Ecken des Dreiecks an (Fig. 233)

so wird  $f_1 = f_2 = f_3 = \frac{f}{3}$ ,  $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{a}{\sqrt{3}}$ ,  $i^2 = \frac{a^2}{12}$  (nach Gleichung 32)

und es ist  $k = 1 - \frac{i^2}{p_1^2} = \frac{3}{4}$ .

Hier werden demnach die Beschleunigungsdrücke der Dreieckscheibe vollständig ersetzt durch die Beschleunigungsdrücke

$$\frac{1}{3} M b_A, \frac{1}{3} M b_B, \frac{1}{3} M b_C$$

zusammen mit den drei gleichen Kräften

$$K = \frac{M}{3} k \lambda p_1 = \frac{\sqrt{3}}{12} M a \lambda$$

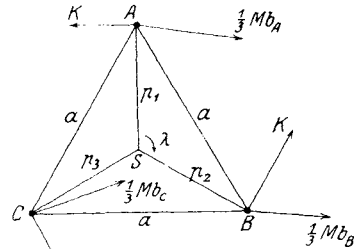


Fig. 233.

die in den Ecken angreifen, senkrecht zu  $SA, SB, SC$  sind und um  $S$  im Gegensinn von  $\lambda$  drehen.

Eine andere und zweckmäßigere Art, die Beschleunigungsdrücke der Scheibe zu ersetzen, ergibt sich aus folgender Betrachtung:

Die drei oben erwähnten hinzuzufügenden Kräfte

$$m_A k \lambda p_1, m_B k \lambda p_2, m_C k \lambda p_3$$

bilden zusammengenommen ein Kraftpaar, denn schon in 124 wurde gezeigt, daß

$$\Sigma(m_n k \lambda p_n \cos \varphi) = 0,$$

also die Summe der Projektionen dieser Kräfte auf jede Achse gleich null ist. Das Moment dieses Kraftpaares ist

$$M = k \lambda (m_A p_1^2 + m_B p_2^2 + m_C p_3^2);$$

setzt man hier die Werte aus den Gleichungen 101 und 102 ein, so bleibt

$$M = \frac{\lambda M}{f} (f_1 p_1^2 + f_2 p_2^2 + f_3 p_3^2 - f i^2).$$

Nennt man  $a, b, c$  die Seiten des Dreiecks  $ABC$ , so kann dieser Ausdruck in folgende Form gebracht werden:

$$M = K_1 a + K_2 b + K_3 c \dots \dots \dots 102a)$$

worin  $K_1, K_2, K_3$  Kräfte bedeuten, und zwar

$$K_1 = m_A \lambda \frac{p_1^2 - i^2}{a}, K_2 = m_B \lambda \frac{p_2^2 - i^2}{b}, K_3 = m_C \lambda \frac{p_3^2 - i^2}{c} \dots \dots \dots 102b)$$

Dann ist also das Moment  $M$  durch drei Kraftpaare  $K_1 a, K_2 b, K_3 c$  herzustellen; die Kräfte  $K_1, K_2, K_3$  greifen in den Punkten  $A, B, C$  paarweise derart an, daß alle drei Kraftpaare im Gegensinne von  $\lambda$  drehen (Fig. 234).

Die Beschleunigungsdrücke der Scheibe können somit durch die drei Kräfte

$$m_A b_A, m_B b_B, m_C b_C$$

und durch die drei Kraftpaare

$$K_1 a, K_2 b, K_3 c$$

ersetzt werden, ein Resultat, von dem wir bei den Beschleunigungsdrücken von Getrieben mit Vorteil Gebrauch machen werden.

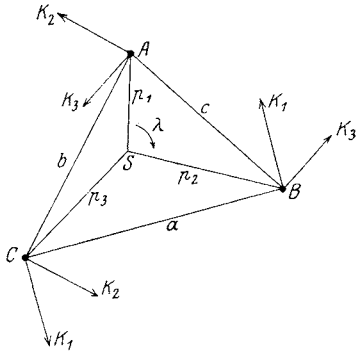


Fig. 234.

**130. Die drei statischen Ersatzpunkte liegen in einer Geraden.** Bei Getrieben kommt es manchmal vor, daß drei Gelenke  $A, B, C$ , die man zweckmäßig als statisch

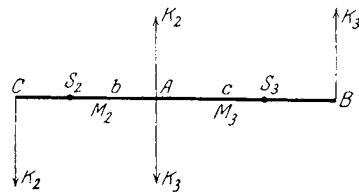


Fig. 235.

gleichwertige Ersatzpunkte wählt, in dieselbe Gerade fallen (Fig. 235). Man behandelt dann jeden der beiden Teile  $CA$  und  $AB$  für sich, als ob er eine eigene Scheibe wäre. Nennt man z. B.  $M_2$  die Masse des Teiles  $CA$ ,  $M_3$  die Masse von  $AB$ , so zerteilt man nach dem Schwerpunkts-gesetz  $M_2$  nach  $C$  und  $A$ ,  $M_3$  nach  $A$  und  $B$ , also

$$M_2 = m_{2C} + m_{2A}, \quad M_3 = m_{3A} + m_{3B};$$

dann sind die Beschleunigungsdrücke der Ersatzpunkte:

$$m_{2C} b_C, \quad (m_{2A} + m_{3A}) b_A, \quad m_{3B} b_B$$

und die Kräfte  $K$  nach Gleichung 99:

$$K_2 = M_2 \lambda \frac{p_1 p_2 - i_2^2}{b}, \quad K_3 = M_3 \lambda \frac{q_1 q_2 - i_3^2}{c} \dots 102c)$$

wenn  $p_1 = \overline{CS_2}$ ,  $p_2 = \overline{S_2A}$ ;  $q_1 = \overline{AS_3}$ ,  $q_2 = \overline{S_3B}$ ,  $S_2$  und  $S_3$  die Schwerpunkte der Teile  $CA = b$  und  $AB = c$ ,  $i_2$  und  $i_3$  die Trägheitshalb-messer dieser Teile für ihre Schwerpunkte sind. Von diesen Beschleunigungsdrücken werden wir später bei den Steuerungen Gebrauch machen.

### XIII. Kraftreduktion eines geführten Systems.

**131. Gleichgewichtskraft und reduzierte Kraft.** Ein starres System, das in einem oder in mehreren Punkten von äußeren Kräften angegriffen wird, erhält eine derartige Führung, daß die Bewegung eine zwangläufige ist. Es soll die Frage aufgeworfen werden: Welche Kraft müßte in einem beliebigen Punkte  $E$  des Systems entgegen dessen Bewegungsrichtung  $v_E$  hinzugefügt werden, um das System im Gleichgewicht zu erhalten?

Wir wollen diese Kraft die Gleichgewichtskraft  $R$  des Punktes  $E$  nennen.

Kehren wir diese Kraft in ihre entgegengesetzte, also in Richtung der Bewegung  $v_E$  wirkende, um, so erhalten wir jene Kraft, welche die Wirkung sämtlicher Kräfte in  $E$  ersetzt. Wir werden sie die nach  $E$  reduzierte Kraft  $\mathfrak{R}$  des Systems nennen.

Die Bedeutung dieser reduzierten Kraft wird erst später klar zutage treten, wenn wir die kinematischen Ketten behandeln werden.

Wir wollen die Starrheit des Systems dadurch zum Ausdruck bringen, daß wir die in Betracht kommenden Punkte, also die Führungspunkte und die Kraftangriffe durch starre Stäbe derart miteinander in Verbindung bringen, daß eine gegenseitige Bewegung dieser Punkte ausgeschlossen ist.

**132. Kraftreduktion der sich drehenden Scheibe.** In Fig. 236 ist die Scheibe durch die in  $O$  drehbare Stange  $OA$  und den durch einen steifen Arm angeschlossenen Punkt  $B$  dargestellt;  $B$  ist gleichzeitig der Angriff der Kraft  $P$ .

Soll die in  $A$  notwendige Gleichgewichtskraft gesucht werden, d. i. jene Kraft  $R$ , die entgegen der Bewegungsrichtung von  $A$  wirkend, die Scheibe im Gleichgewicht erhält, so könnte folgende einfache Lösung zum Ziele führen: Da auf die Scheibe nur drei Kräfte, nämlich  $P$ ,  $R$  und der Gelenkdruck  $K$  in  $O$  wirken, so erfordert das Gleichgewicht, daß sie sich in einem Punkte treffen. Man wird also  $O$  mit dem Schnittpunkt von  $P$

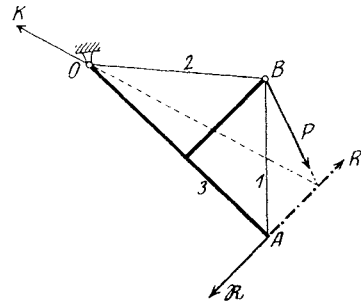


Fig. 236.

und  $R$  verbinden, wodurch man die Richtung von  $K$  erhält. Im

Kraftplan 236a kann sodann das sich schließende Kraftdreieck  $P, R, K$  gezeichnet werden und damit sind die Kräfte  $R$  und  $K$  nach Größe und Richtung bestimmt.

So einfach dieser Weg ist, schlagen wir doch einen zweiten vor, der sich später als der einzig gangbare erweisen wird und den wir deshalb schon hier kennen lernen und üben wollen. Wir verbinden die drei Punkte  $O, A$  und  $B$  durch die drei starren Stäbe 1, 2 und 3 (Fig. 236), zerlegen sodann im Kraftplan (Fig. 236a)  $P$  in die Stabspannungen 1 und 2, sodann 1 in 3 und  $R$ , wodurch sowohl  $R$  wie auch der Gelenkdruck  $K$  gefunden wird.

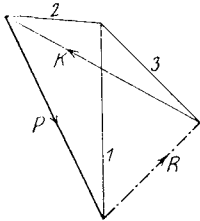


Fig. 236 a.

Keht man  $R$  um, so erhält man die reduzierte Kraft  $\mathfrak{R}$ , die also auf die Scheibe dieselbe Wirkung ausüben wird wie ihre wirkliche Kraft  $P$ .

**133. Kraftreduktion bei der Zweipunktführung.** In Fig. 237 stellt das Dreieck  $ABC$  die Scheibe dar, die in  $A$  und  $B$  an zwei festen Kurven  $a$  und  $b$  geführt wird und in  $C$  die Resultante  $P$  der aktiven Kräfte trägt. Es soll die Gleichgewichtskraft  $R$  in  $B$  gesucht werden.

Auch hier könnte wie unter 132 eine einfache Methode benützt werden. Zu den äußeren Kräften der Scheibe gehören auch die Führungsdrücke

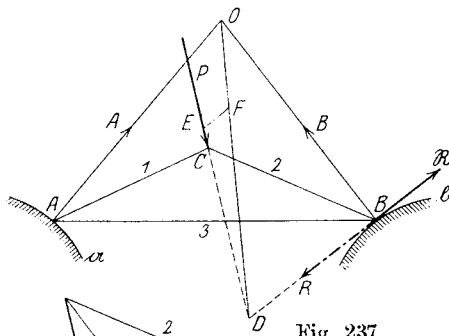


Fig. 237.

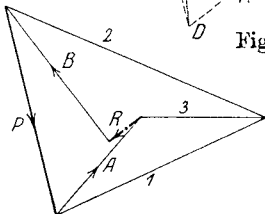


Fig. 237 a.

$A$  und  $B$ , die auf die Führungen  $a$  und  $b$  normal stehen. Ihr Schnittpunkt  $O$  ist der Drehpol der Scheibe. Da die vier Kräfte  $P, R, A$  und  $B$  die Scheibe im Gleichgewicht halten, muß die Resultante von  $A$  und  $B$  gleich und entgegengesetzt sein der Resultante von  $P$  und  $R$ ; verbindet man also  $O$  mit dem Schnittpunkt  $D$  der beiden letzten, so ist dies die Richtung der Resultanten von  $P$  und  $R$ ; macht man sodann  $\overline{ED} = P$ , so ist  $\overline{FE} \cdot R$  bereits die gesuchte Kraft  $R$ .

Die zweite Methode ist in Fig. 237a dargestellt. Hier wurde die Kraft  $P$  maßstäblich gezeichnet und in die beiden Stabspannungen 1 und 2, parallel zu  $AC$  und  $BC$  zerlegt; sodann 1 in 3 und den Führungsdruck  $A$ ; endlich konnte der Kraftplan der äußeren Kräfte durch  $B$  und  $R$  geschlossen werden und damit ist  $R$  gefunden. Seine Umkehrung ist wieder die reduzierte Kraft  $\mathfrak{R}$ .

Ist die reduzierte Kraft  $\mathfrak{R}$  oder die Gleichgewichtskraft  $R$  null, so hält die Kraft  $P$  das System selbst im Gleichgewicht; dies ist der Fall, wenn  $P$  durch den Drehpol  $O$  geht (Fig. 238).

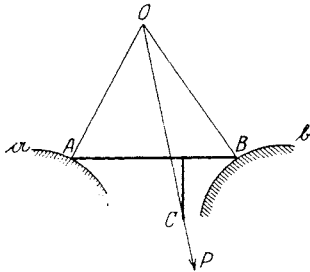


Fig. 238.

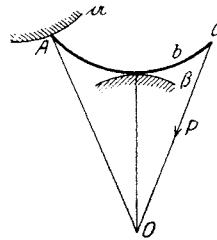


Fig. 240.

**134. Kraftreduktion bei der Punkt- und Kurvenführung.** In Fig. 239 wird der Punkt  $A$  der Scheibe auf der festen Kurve  $\alpha$ , die Systemkurve  $b$  an der festen Hüllbahn  $\beta$  geführt.  $C$  sei der Berührungspunkt der beiden Kurven  $b$  und  $\beta$ . Durch einen steifen Arm sei der Angriffspunkt  $D$  der Kraft  $P$  mit  $Ab$  verbunden.

Um die an die Stelle  $A$  reduzierte Kraft  $R$  zu finden, verbinde man die Scheibenpunkte  $A$ ,  $C$  und  $D$  durch die drei starren Stäbe 1, 2 und 3. Sodann zerlege man im Reduktionsplan (Fig. 239 a) die Kraft  $P$  in die beiden Stabspannungen 1 und 2, parallel zu  $AD$  und  $CD$ , ferner 2 in 3

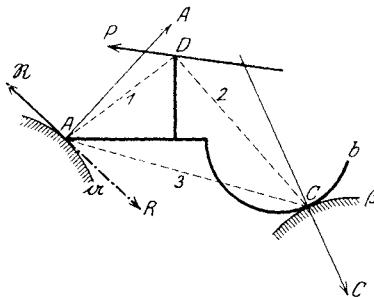


Fig. 239.

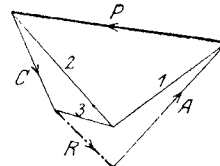


Fig. 239 a.

und den Führungsdruck  $C$ , endlich zeichne man den Kraftzug der vier äußeren Kräfte  $P$ ,  $C$ ,  $R$  und  $A$ , wodurch die Gleichgewichtskraft  $R$  und damit auch ihre Umkehrung, die reduzierte Kraft  $\mathfrak{R}$  gefunden ist.

Ist  $\mathfrak{R} = 0$ , also auch  $R = 0$ , dann ist eine Gleichgewichtskraft nicht erforderlich, da  $P$  das System selbst im Gleichgewicht hält. Dann geht die Richtung von  $P$  wieder durch den Drehpol  $O$  (Fig. 240).

**135. Kraftreduktion bei der Zweikurvenführung.** Die bewegliche Scheibe werde mit zwei Kurven  $a$  und  $b$  an zwei festen Kurven  $\alpha$  und  $\beta$  geführt (Fig. 241),  $C$  und  $D$  seien die Berührungspunkte,  $F$  sei der An-



griffpunkt einer Kraft  $P$ ; man soll die Gleichgewicht haltende Kraft  $R$  im Punkte  $E$  der Scheibe bestimmen.

Auch hier könnte man die Lösung der Frage wie in 132 vornehmen. Die Führungsdrücke  $C$  und  $D$  sind normal zu  $a$ ,  $a$  und  $b$ ,  $\beta$ ; ihr Schnitt  $O$

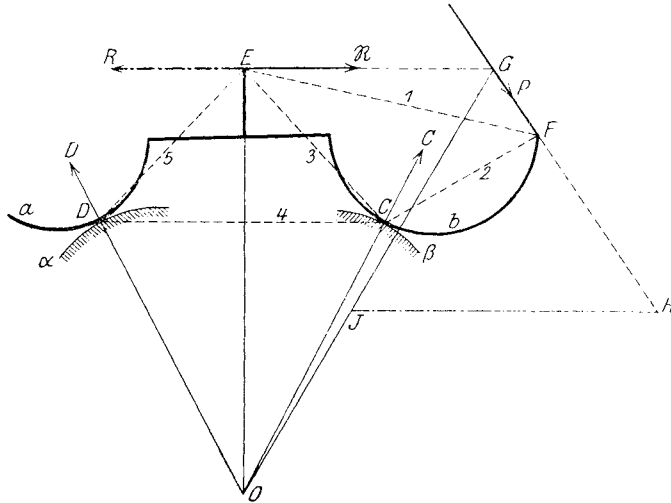


Fig. 241.

ist der Drehpol der Scheibe und die Bewegungsrichtung von  $E$  senkrecht zu  $EO$ ; damit ist die Richtung der Gleichgewichtskraft  $R$  gefunden. Verbindet man den Schnittpunkt  $G$  von  $R$  und  $P$  mit dem Drehpol  $O$ ,

so ist diese Verbindungslinie die Resultante von  $P$  und  $R$ ; macht man  $GH$  maßstäblich gleich  $P$  und zieht  $HJ \parallel R$ , so hat man in  $HJ$  auch die Größe von  $R$  gefunden.

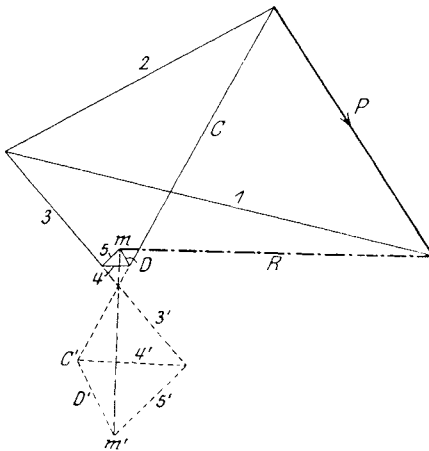


Fig. 241 a.

Mit Hilfe der Stabspannungen gestaltet sich die Lösung folgendermaßen: Zunächst schaltet man in Fig. 241 die starren Stäbe 1 bis 5 ein, zerlegt sodann im Reduktionsplan Fig. 241 a  $P$  in die Stabspannungen 1 und 2 parallel zu  $EF$  und  $FC$ . Durch das Ende von  $P$  wird eine Parallele zur Bewegungsrichtung von  $E$ , durch den Anfang von  $P$

eine Parallele zum Führungsdruck  $C$  gezogen. Auf dieser nimmt man einen beliebigen Punkt  $C'$  an, zieht durch ihn  $4' \parallel DC$  und durch den Schnittpunkt von 1 und 2:  $3' \parallel EC$ ; zeichnet man noch durch

$C':D'$   $DO$  und durch den Schnittpunkt von  $3'$  mit  $4':5'$   $ED$ , so erhält man den Schnittpunkt  $m'$ .

Wandert jetzt der beliebig angenommene Punkt  $C'$  auf der Geraden  $C$ , so wandert  $m'$  auf einer Geraden  $m'm$ , die durch den Schnittpunkt von  $3$  und  $C$  geht und somit gezeichnet werden kann; der Schnittpunkt  $m$  der Geraden  $m'm$  mit  $R$  gibt bereits die Größe dieser Kraft an; die Spannungen  $3, 4, 5$  und der Führungsdruck  $D$  sind dann durch Ziehen von Parallelen leicht zu ermitteln. Damit ist die Gleichgewichtskraft  $R$  und auch ihre Umkehrung, die reduzierte Kraft  $\mathfrak{R}$  gefunden.

**136. Führung eines rechten Winkels an zwei Kurven.** Ein starrer Winkel  $a, b$  gleitet an zwei Kurven  $a$  und  $\beta$  (Fig. 242); mit dem Winkel sind durch steife Arme zwei Punkte  $F$  und  $G$  fest verbunden, in denen die beiden Kräfte  $P$  und  $Q$  angreifen; man soll die Gleichgewichtskraft entgegen der Bewegungsrichtung im Scheitel  $E$  des Winkels bestimmen. Der Schnitt der beiden Führungsdrücke  $C$  und  $D$  gibt den Drehpol  $O$ ; die Bewegungsrichtung von  $E$  ist senkrecht zu  $EO$ . Wir verbinden die Punkte  $C, D, E, F, G$  durch die starren Stäbe 1 bis 7.

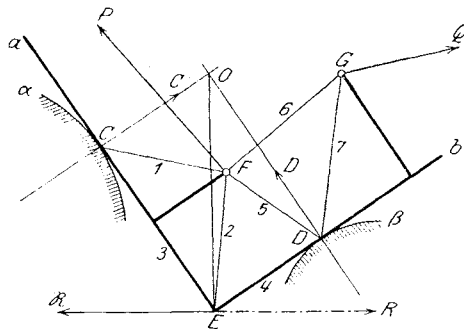


Fig. 242.

Im Reduktionsplan Fig. 242a zeichnet man maßstäblich die Kräfte  $P$  und  $Q$  in Aufeinanderfolge und zerlegt  $Q$  in die Spannungen  $6$  und  $7$ ,

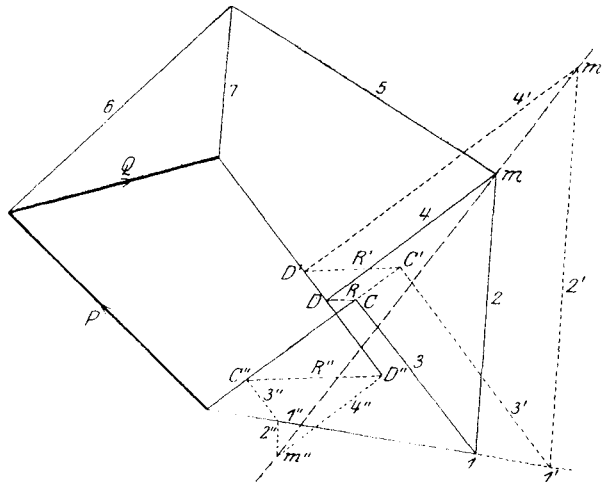


Fig. 242a.

parallel zu  $FG$  und  $GD$ , zieht auch noch durch den Schnittpunkt von 6 und 7 eine Parallele zu  $FD$ . Sodann zieht man durch den Endpunkt von  $Q$  eine Parallele zum Führungsdruck  $D$  und durch den Anfangspunkt von  $P$  eine Parallele zum Führungsdruck  $C$ . Auf der letzten Geraden wählt man vorläufig einen beliebigen Punkt  $C'$ , zieht  $C'D' \parallel R \perp OE$  bis zum Schnitte  $D'$ , ferner  $D'm' \parallel ED$ ,  $C'1' \parallel CE$ , durch den Anfangspunkt von  $P$  eine Parallele zu  $CF$  bis zum Schnitte  $1'$  mit  $C'1'$  und endlich  $1'm' \parallel EF$ ; die Geraden  $D'm'$  und  $1'm'$  schneiden sich im Punkte  $m'$ .

Wählt man jetzt auf der Geraden, die durch den Anfangspunkt von  $P$  parallel zum Führungsdruck  $C$  gezogen wurde, einen zweiten beliebigen Punkt  $C''$  und wiederholt die Konstruktion, so erhält man die Punkte  $D''$ ,  $1''$  und  $m''$ ; wandert  $C$  auf der Geraden  $C'C''$ , so beschreibt  $m$  auf  $m'm''$  eine ähnliche Punktreihe; ihr Schnitt mit der Spannung 5 gibt den richtigen Punkt  $m$ , woraus sich durch Ziehen von Parallelen sofort die richtigen Spannungen 4, 2, 3, 1 und auch die Gleichgewichtskraft  $R$  ergeben. Die Umkehrung von  $R$  ist wieder die nach  $E$  reduzierte Kraft des Systems.

**137. Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen.** An Stelle der bisher verwendeten Methoden, die Gleichgewichtskraft  $R$  oder die reduzierte Kraft  $\mathfrak{R}$  eines Systems zu finden, könnte auch ein Prinzip der Mechanik herangezogen werden, das in seinem Grundgedanken schon Galilei und Huyghens bekannt war und von Lagrange an die Spitze seiner *Mécanique analytique* (1788) gestellt wurde.

Das System sei eine Scheibe, die in den Punkten  $M$  und  $N$  an zwei Kurven  $m$  und  $n$  geführt werde (Zweipunktführung).

In den Punkten  $A, B, E$  würden Kräfte  $P, Q, R$  auf die Scheibe wirken und sie im Gleichgewicht halten. Die Führungsdrücke  $M$  und  $N$  stehen normal zu  $m$  und  $n$ .

Dann bilden die Kräfte  $M, N, P, Q, R$  ein Gleichgewichtssystem.

Erteilt man der Scheibe eine kleine, mit der Führung verträgliche (virtuelle) Verschiebung, so werden die Punkte  $A, B, E, M, N$  kleine Wege  $\delta a, \delta b, \delta e, \delta m, \delta n$  beschreiben und die Kräfte  $A, B, R, M, N$  kleine Arbeiten leisten. Da die Arbeit der Resultanten aller dieser Kräfte gleich der algebraischen Summe der Arbeiten ihrer Teile ist, die Resultante aber null ist, so wird auch die Summe dieser Arbeiten null sein.

Die Arbeiten der Führungsdrücke  $M$  und  $N$  sind aber an sich gleich null, weil  $M \perp \delta m$  und  $N \perp \delta n$  ist; es bleibt also

$$P \cdot \delta p + Q \cdot \delta q + R \cdot \delta r = 0 \dots \dots \dots 103)$$

wenn  $\delta p = \delta a \cdot \cos \alpha, \delta q = \delta b \cdot \cos \beta, \delta r = \delta e \cdot \cos \epsilon$

die Projektionen der Wege  $\delta a, \delta b, \delta e$  auf die Richtungen von  $P, Q, R$  bedeuten.

Wirken mehr als drei Kräfte auf die Scheibe, so nimmt Gleichung 103 die Form an:  $\Sigma (P \cdot \delta p) = 0 \dots \dots \dots 104)$

Erteilt man also einem im Gleichgewicht befindlichen geführten System eine kleine, mit der Führung verträgliche Verschiebung, so ist die algebraische Summe der hierbei geleisteten (virtuellen) Arbeiten gleich null.

Für eine andere Führung des Systems kann der Nachweis des Prinzips in ähnlicher Weise geführt werden.

Eine andere Art, das Prinzip mit Hilfe der inneren Kräfte (Spannungen) zu erklären, werden wir später (vgl. 248) kennen lernen, wenn vom Gleichgewichte der kinematischen Kette die Rede sein wird.

Setzt man  $R = -\mathfrak{R}$ , so kann Gleichung 103 auch in die Form gebracht werden:

$$\mathfrak{R} \cdot \delta r = P \cdot \delta p + Q \cdot \delta q.$$

$$\text{Nun ist aber } \delta a : \delta b : \delta e = \frac{\delta a}{\delta t} : \frac{\delta b}{\delta t} : \frac{\delta e}{\delta t} = v_A : v_B : v_E$$

und somit  $\mathfrak{R} v_E \cos \varepsilon = P v_A \cos \alpha + Q v_B \cos \beta.$

Setzt man  $\mathfrak{R} \cos \varepsilon = \mathfrak{R}'$ ,  $P \cos \alpha = P'$ ,  $Q \cos \beta = Q'$ ,

so wird  $\mathfrak{R}' v_E = P' v_A + Q' v_B$

oder  $\mathfrak{R}' = P' \cdot \frac{v_A}{v_E} + Q' \cdot \frac{v_B}{v_E} \dots \dots \dots 105)$

und wenn man die Kraft  $\mathfrak{R}$  mit der Richtung der Bewegung von  $E$  zusammenfallen läßt, also  $\varepsilon = 0$  setzt:

$$\mathfrak{R} = P' \cdot \frac{v_A}{v_E} + Q' \cdot \frac{v_B}{v_E},$$

ein Ausdruck für die reduzierte Kraft, der auf beliebig viele Kräfte ausgedehnt werden kann:  $\mathfrak{R} = \sum \left[ P \cos (Pv) \cdot \frac{v}{v_E} \right] \dots \dots \dots 106)$

**138. Aufgaben.**

50. Ein Stab  $AB$  wird an den Kurven  $a$  und  $b$  geführt; in  $A$  wirke eine beliebige Kraft  $P$ . Welche Kraft  $R$  muß in  $B$  in bestimmter Richtung hinzugefügt werden, damit der Stab im Gleichgewicht bleibt? (Fig. 243).

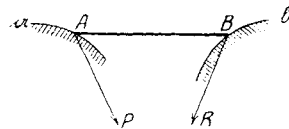


Fig. 243.

51. Vorige Aufgabe kann ohne Benützung des Drehpols in folgender Weise gelöst werden (Fig. 244): Man suche die Projektion  $P'$  der Kraft  $P$  auf die Tangente in  $A$  und trage  $P'$  von  $B$  auf der Normale auf,  $\overline{Bb} = P'$ ; sodann ziehe man  $ba \parallel BA$  bis zur Normale in  $A$ , trage  $\overline{Aa} = R'$  von  $B$  auf der Tangente auf und errichte im Endpunkt von  $R'$  die Senkrechte auf diese Tangente bis zum Schnitt mit der gegebenen Richtung von  $R$ ; dann ist  $\overline{BR} = R$ . Man

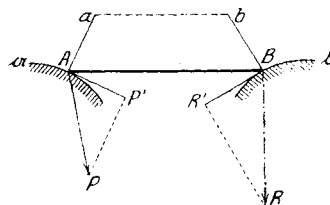


Fig. 244.

suche dies zu beweisen. (50, 51: R. Proell, Graphische Dynamik.)

## XIV. Dynamik des geführten Systems.

**139. Die beiden grundlegenden Aufgaben.** In der Dynamik des geführten Systems unterscheiden wir folgende zwei grundlegende Aufgaben:

I. Ein System wird in irgend einer Weise zwangläufig geführt. Seine Massenverteilung ist bekannt, ebenso sein augenblicklicher Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustand. Es sind die äußeren Kräfte zu ermitteln, welche diesen Beschleunigungszustand herbeiführen.

II. Ein System wird in irgend einer Weise zwangläufig geführt. Seine Massenverteilung ist bekannt, ebenso sein augenblicklicher Geschwindigkeitszustand und die treibenden und widerstehenden Kräfte des Systems. Es ist der Beschleunigungszustand zu ermitteln.

Während die Aufgabe II vollkommen bestimmt ist und nur eine einzige Lösung zuläßt, ist die Aufgabe I unbestimmt und läßt unendlich viele Lösungen zu, je nach den Kraftangriffen des Systems, für die man sich entscheidet.

**140. Die erste grundlegende Aufgabe. Ermittlung der Kraft aus dem Beschleunigungszustand.** Um diese Aufgabe bestimmt zu gestalten, wollen wir sie in folgender Weise aussprechen: Von einem zwangläufigen System sind die Massenverteilung, der Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustand sowie die äußeren Kräfte für einen bestimmten Augenblick gegeben; welche Kraft muß an einer bestimmten Angriffsstelle  $E$  des Systems in bestimmter Richtung hinzugefügt werden, damit der gegebene Beschleunigungszustand erreicht wird?

Nennen wir  $m$  die Masse irgend eines Systempunktes,  $b$  seine Beschleunigung,  $mb$  seinen Beschleunigungsdruck,  $\Sigma mb$  die Resultante aller Beschleunigungsdrücke des Systems,  $\Sigma T = \Sigma (-mb)$  die Resultante aller Trägheitskräfte, ferner  $Q$  die gesuchte Kraft,  $\Sigma P$  die Summe aller übrigen äußeren Kräfte, so gibt das D'Alembertsche Prinzip (Gleichung 43):

$$Q + \Sigma P + \Sigma T = 0,$$

auch 
$$Q + \Sigma P + \Sigma (-mb) = 0$$

oder 
$$Q = \Sigma (mb) - \Sigma P.$$

Diese Kraft  $Q$  ist also in  $E$  in der gegebenen Richtung anzubringen, um bei den gegebenen äußeren Kräften  $\Sigma P$  den gegebenen Beschleunigungszustand herbeizuführen.

Gewöhnlich wird als die gegebene Richtung der Kraft  $Q$  die Bewegungsrichtung von  $E$  angenommen, müßte es aber nicht sein. Wir wollen jedoch künftighin diese Voraussetzung festhalten.

Die graphische Lösung der ersten grundlegenden Aufgabe kann unmittelbar vorgenommen werden und bietet weiter keine Schwierigkeit. Wir wollen sie an einigen Beispielen vornehmen.

Zunächst sei noch der besonders einfache Fall erwähnt, wenn das System der äußeren Kräfte  $\Sigma P$  (zu denen auch die Gewichte gehören) vernachlässigt werden kann und die gesuchte Kraft  $Q$  die einzige äußere der Scheibe ist. Dann wird

$$Q = \Sigma (mb) \dots \dots \dots 107)$$

d. h. die gesuchte Kraft  $Q$  ist gleich dem Beschleunigungsdruck der Scheibe, in die Bewegungsrichtung von  $E$  reduziert.

Diese Aufgabe lautet dann folgendermaßen: Von einer Scheibe sind Massenverteilung, Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustand bekannt; welche Kraft, an bestimmter Stelle in bestimmter Richtung angebracht, kann diesen Beschleunigungszustand herbeiführen?

**141. Beschleunigungskraft einer Schubstange.** In Fig. 245 werde die Stange  $AB$  derart geführt, daß das eine Ende  $B$  eine durch  $\mathcal{A}$  gehende

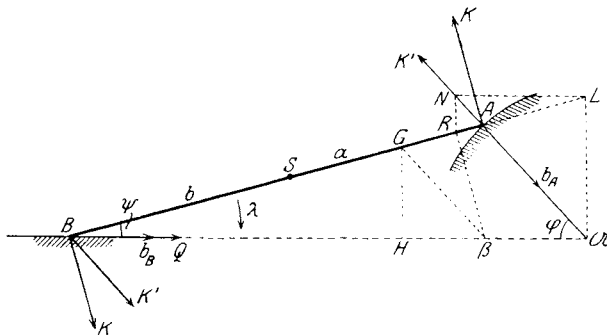


Fig. 245.

Gerade, das andere Ende  $A$  einen um  $\mathcal{A}$  beschriebenen Kreis mit konstanter Geschwindigkeit  $v_A$  beschreibt. Welche Kraft  $Q$  muß in  $B$  in der Bewegungsrichtung  $B\mathcal{A}$  angebracht werden, um den Beschleunigungszustand der Stange  $AB$  herbeizuführen? Oder auch: wie groß ist der nach  $B$  reduzierte Beschleunigungsdruck der Stange?

Ist  $M$  die Masse der Stange,  $l$  ihre Länge,  $S$  ihr Schwerpunkt,  $a$  und  $b$  dessen Abstände von  $A$  und  $B$ , so kann zunächst die Masse nach dem Schwerpunktsesetze nach  $A$  und  $B$  verteilt werden; dann sind die Massen der statischen Ersatzpunkte:

$$m_A = M \cdot \frac{b}{l}, \quad m_B = M \cdot \frac{a}{l}.$$

Ferner sind die Beschleunigungsdrücke der Stange  $AB$ :

1.  $m_B b_B$  in Richtung von  $b_B$ , also in Richtung  $B\mathfrak{A}$ ;
2.  $m_A b_A$  in Richtung von  $b_A$ , also in Richtung  $A\mathfrak{A}$ , da  $v_A$  konstant ist;
3. Das Paar der Kräfte  $K$  in  $A$  und  $B$ :

$$K = M (ab - i^2) \frac{\lambda}{l};$$

hierin ist  $\lambda$  die Winkelbeschleunigung der Schubstange,  $i$  ihr Trägheitshalbmesser für den Schwerpunkt. Der Drehungssinn des Paares  $K$  ist  $\lambda$  entgegengesetzt (vgl. 127).

Dieses Kraftpaar  $K$  kann durch ein anderes  $K'$  ersetzt werden, wobei  $K'$  in  $A$  in die Richtung  $\mathfrak{A}A$  fällt. Dann ist

$$Kl = K'l \sin(\varphi + \psi)$$

oder 
$$K' = \frac{M (ab - i^2) \lambda}{l \sin(\varphi + \psi)}.$$

Der erste Beschleunigungsdruck wirkt bereits in  $B$  in Richtung der Bewegung; um die anderen drei Beschleunigungsdrücke,  $m_A b_A$  und die beiden  $K'$ , nach  $B$  zu reduzieren, schlagen wir den Weg ein, der bei der Reduktion einer Kraft nach einem Punkt gelehrt wurde (vgl. XIII); die beiden Kräfte  $m_A b_A$  und  $K'$  in  $A$  erzeugen in der Schubstange die Spannung null und  $K'$  in  $B$  gibt dort die reduzierte Kraft  $K' \cos \varphi$ ; es bleibt also für den nach  $B$  reduzierten Massendruck

$$Q = m_B b_B + K' \cos \varphi.$$

Hierzu ist zu bemerken: das Nullwerden der Spannung in der Schubstange bei  $A$  ist nur eine Folge der Massenverteilung nach  $A$  und  $B$  und hat nichts zu tun mit der wirklichen Spannung der Schubstange, von der später gesprochen werden soll (vgl. 293).

Obige Gleichung gibt dann

$$Q = M \frac{a}{l} b_B + \frac{M (ab - i^2) \lambda}{l} \cdot \frac{\cos \varphi}{\sin(\varphi + \psi)}.$$

Die Beschleunigung  $b_B$  wurde nach Fig. 118 konstruiert. Wählt man den Beschleunigungsmaßstab derart, daß  $b_A \equiv A\mathfrak{A} = r$  ist (Normalfall, vgl. 20), so ist  $\mathfrak{A}AR\beta$  der Beschleunigungsplan und

$$\beta\mathfrak{A} = \beta R + RA + A\mathfrak{A}$$

oder 
$$b_B \equiv t_{BA} + n_{BA} + b_A.$$

Setzt man  $\beta R \equiv t_{BA} = l\lambda$ , so wird

$$Q = M \frac{a}{l} \cdot \beta\mathfrak{A} + M \frac{ab - i^2}{l^2} \cdot \beta R \frac{\cos \varphi}{\sin(\varphi + \psi)};$$

zieht man  $\beta G \perp \mathfrak{A}A$ ,  $GH \perp B\mathfrak{A}$ , so ist

$$H\beta = \beta \bar{R} \cdot \frac{\cos \varphi}{\sin(\varphi + \psi)}$$

und 
$$Q = M \frac{a}{l} \cdot \beta \mathfrak{A} + M \cdot \frac{ab - i^2}{l^2} \cdot \bar{H}\beta.$$

Bisher sind die Strecken  $\beta \mathfrak{A}$  und  $H\beta$  nach dem Beschleunigungsmaßstab  $b_A = r$  genommen worden; zieht man es vor, sie nach einem anderen Maßstab aufzutragen, so ist obige Gleichung noch mit  $\omega^2$  zu multiplizieren:

$$Q = M \omega^2 \left[ \frac{a}{l} \cdot \beta \mathfrak{A} + \frac{ab - i^2}{l^2} \cdot \bar{H}\beta \right].$$

Will man den Trägheitshalbmesser nicht auf den Schwerpunkt beziehen ( $i$ ), sondern auf den Endpunkt  $B$  ( $k$ ), so wird

$$k^2 = b^2 + i^2$$

und 
$$Q = M \omega^2 \left[ \frac{a}{l} \beta \mathfrak{A} + \left( \frac{b}{l} - \frac{k^2}{l^2} \right) \bar{H}\beta \right].$$

Diesen Ausdruck für die Kraft  $Q$ , welche den Beschleunigungszustand der Stange herbeiführen kann, hat R. Mollier in seinem Aufsatz: „Der Beschleunigungsdruck der Schubstange“, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1903 auf anderem Wege gefunden und hierbei untersucht, in welcher Weise sich die Strecken  $\beta \mathfrak{A}$  und  $H\beta$  während einer Umdrehung von  $A$  verändern.

In anderer Weise gestaltet sich die Lösung ähnlicher Probleme, wenn die Trägheitskräfte (statt der ihnen entgegengesetzten Beschleunigungsdrücke) der Ersatzpunkte und die Spannungen herangezogen werden, wie dies der nächste Abschnitt zeigen soll.

Hierbei ist zu beachten, daß das Paar der Kräfte  $K$  im Gegensinne der Winkelbeschleunigung dreht, wenn es sich um Beschleunigungsdrücke handelt, hingegen im Sinne von  $\lambda$ , wenn statt dessen mit Trägheitskräften gearbeitet wird.

**142. Beschleunigungskraft einer Schubstange. Allgemeiner Fall.** Wir wollen die eben behandelte Aufgabe allgemeiner fassen, die Bewegungsrichtung von  $B$  nicht mehr durch  $\mathfrak{A}$  gehen lassen und die Geschwindigkeit  $v_A$  nicht mehr konstant annehmen (Fig. 246). Dann hat  $b_A$  eine Richtung, die von  $A\mathfrak{A}$  abweicht.

Da alle aktiven Kräfte, auch die Gewichte, außer Betracht gelassen sind, so wird die Gleichung für die Kraft  $Q$  die Form annehmen

$$Q + A + B + \Sigma T = 0;$$

wir werden also sämtliche Trägheitskräfte der Schubstange anbringen und sie mit den unbekanntenen Auflagerdrücken  $A$ ,  $B$  und der gesuchten Kraft  $Q$  ins Gleichgewicht setzen. Die Trägheitskräfte sind:



1.  $T_A = -M_A b_A$  entgegengesetzt  $b_A$ ;
2.  $T_B = -M_B b_B$  entgegengesetzt  $b_B$  und
3. das Paar der Kräfte  $K$  in  $A$  und  $B$ :

$$K = M (ab \dots i^2) \frac{\hat{\lambda}}{l}$$

im Sinne der Winkelbeschleunigung  $\lambda$  der Schubstange.

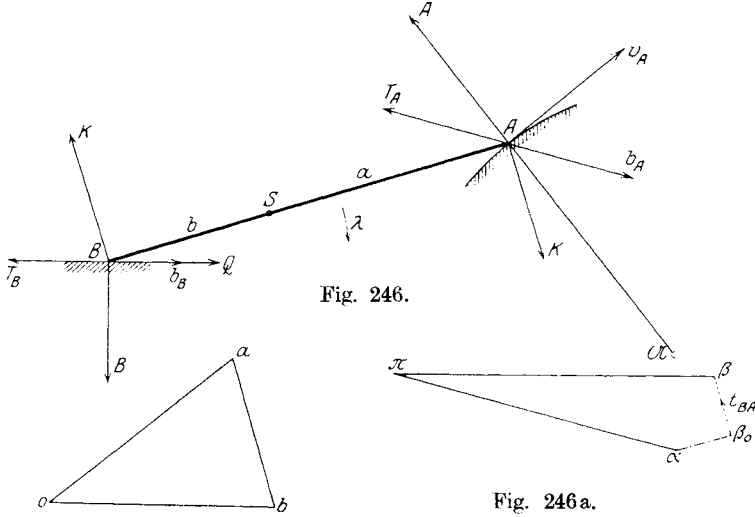


Fig. 246 b.

Fig. 246 a.

Die Konstruktion des Geschwindigkeitsplanes aus  $v_A$  (Fig. 246a) und des Beschleunigungsplanes aus  $b_A$  (Fig. 246b) sind von früher her bekannt (vgl. Fig. 116a).

Die Winkelbeschleunigung ergibt sich aus

$$\lambda = \frac{t_{BA}}{l};$$

der Drehungssinn von  $\lambda$  wird leicht entschieden, indem man  $t_{BA}$  in  $B$  angebracht denkt und überlegt, in welchem Sinne  $B$  um  $A$  dadurch gedreht wird; da die Drehung hier im Sinne der Uhr erfolgt, hat  $\lambda$  positiven Sinn und das Kraftpaar  $K$  ebenfalls.

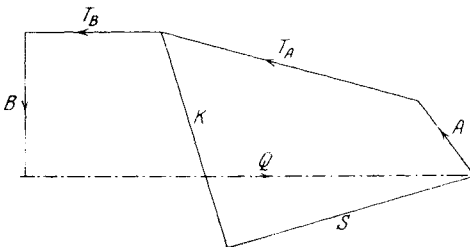


Fig. 246 c.

Nachdem man die Beschleunigungen  $b_A$ ,  $b_B$ ,  $t_{BA}$  aus dem Beschleunigungsplan bestimmt hat, kann der dynamische Kraftplan (Fig. 246c) für das Gleichgewicht der Kräfte gezeichnet werden.

Nennt man  $S$  die Spannung in der Schubstange  $AB$ , so verlangt das Gleichgewicht des Punktes  $A$  die Bedingung

$$T_A + K + S + A = 0;$$

da  $T_A$  und  $K$  bekannt sind, können die Parallelen zu  $A$  und  $S$  gezogen werden und damit sind der Auflagerdruck  $A$  und die Spannung  $S$  aus dem geschlossenen Kraftpolygon bestimmt.

Das Gleichgewicht des Punktes  $B$  verlangt die Bedingung

$$K + T_B + B + Q + S = 0;$$

da  $K$ ,  $T_B$  und  $S$  bekannt sind, genügt es, die Parallelen zu  $B$  und  $Q$  zu ziehen, um auch diese Kräfte aus dem geschlossenen Polygon zu erhalten. Die hierdurch bestimmte Kraft  $Q$  ist gleich der gesuchten Beschleunigungskraft.

**143. Beschleunigungskraft des Kreuzschiebers.** Eine prismatische Stange  $AB$  mit dem Gewicht  $G$  und der Masse  $M = 2$  kg Masse werde mit ihren Enden  $A$  und  $B$  an einer horizontalen bzw. vertikalen Geraden geführt. Es sei  $a = b = \frac{l}{2}$  (Fig. 247).

Die Geschwindigkeit und Beschleunigung des Punktes  $B$  sei gegeben. Welche Kraft  $Q$  muß in  $A$  in der Bewegungsrichtung angebracht werden, damit der gegebene Beschleunigungszustand entsteht?

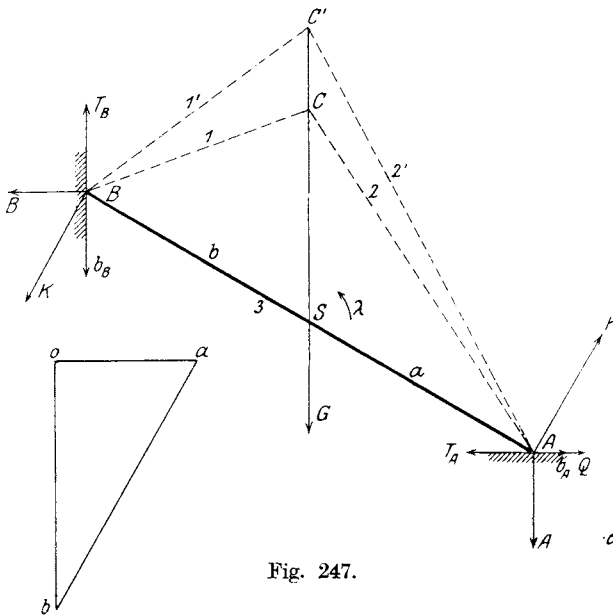


Fig. 247.

Fig. 247 a.

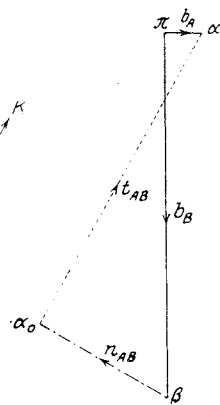


Fig. 247 b.

Wir entwickeln zunächst wieder in bekannter Weise den Geschwindigkeits- und Beschleunigungsplan (Fig. 247 a, b) aus  $v_B \dots o b$  und  $b_B \dots \pi \beta$

(vgl. Fig. 124 a, b). Die Strecke  $a_0 a$  im Beschleunigungsplan gibt die relative Tangentialbeschleunigung  $t_{AB} = \lambda l$  von  $A$  gegen  $B$ . Bringt man sie in  $A$  an, so erkennt man, daß sie die Stange um  $B$  gegen den Uhrzeiger dreht; die Winkelbeschleunigung  $\lambda$  hat demnach negativen Drehungssinn.

Die statisch gleichwertigen Ersatzmassen der Stange

$$m_A = M \cdot \frac{b}{l}, \quad m_B = M \cdot \frac{a}{l}$$

sind hier:  $m_A = m_B = \frac{M}{2} = 1 \text{ kg Masse}$

und ihre Trägheitskräfte

$$T_A = -m_A b_A = -(b_A) \text{ kg}, \quad T_B = -m_B b_B = -(b_B) \text{ kg}.$$

Ferner ist für die prismatische Stange (Gleichung 91)  $i^2 = \frac{l^2}{12}$ , somit  $K = M (ab + i^2) \frac{\lambda}{l} = \frac{1}{6} M l \lambda = \frac{1}{3} (t_{AB}) \text{ kg}$ . Das Kraftpaar  $K$  der Trägheitskräfte hat den gleichen Drehungssinn wie  $\lambda$ .

Die eingeklammerten Werte bedeuten reine Zahlen, und zwar die Werte von  $b_A$ ,  $b_B$  und  $t_{AB}$  in  $\frac{m}{\text{sek}^2}$ .

Nachdem man diese Trägheitskräfte in die Zeichnung, Fig. 247, eingetragen hat, entwickelt man den dynamischen Kraftplan (Fig. 247 c).

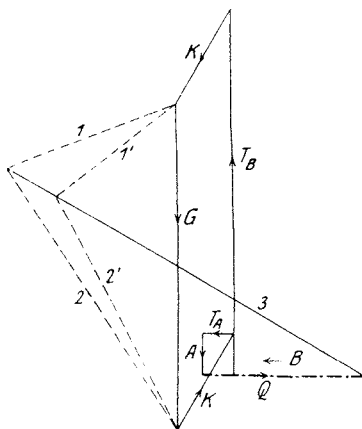


Fig. 247 c.

Man wählt auf  $G$  einen beliebigen, nicht in  $AB$  gelegenen Punkt  $C$  und verbindet ihn durch zwei starre Stäbe 1 und 2 mit  $A$  und  $B$ ; sodann trägt man im Kraftplan  $G$  maßstäblich auf und zieht durch seine Endpunkte die Parallelen zu 1 und 2, wodurch man die Spannungen 1 und 2 in diesen Stäben erhält.

Das Gleichgewicht des Punktes  $B$  verlangt die Bedingung

$$T_B + K + 1 + 3 + B = 0;$$

die ersten drei Kräfte sind bekannt; die Spannung 3 und der Auflagerdruck  $B$  sind aus dem geschlossenen Kraftpolygon zu ermitteln.

Das Gleichgewicht des Punktes  $A$  verlangt die Bedingung

$$3 + 2 + K + T_A + A + Q = 0;$$

die ersten vier Kräfte sind bekannt; die beiden letzten können aus dem geschlossenen Kraftpolygon bestimmt werden. Damit ist aber die Kraft  $Q$ , welche den Beschleunigungszustand der Stange erzeugt, gefunden.

Hätte man statt  $C$  einen anderen Punkt  $C'$  auf  $G$  angenommen, so würden sich im Kraftplan nur die Spannungen 1, 2, 3 ändern, die für die gestellte Frage ohnedies belanglos sind, nicht aber die Kräfte  $A$ ,  $B$  und  $Q$ .

Da nach dem D'Alembertschen Prinzip die äußeren Kräfte und die Trägheitskräfte ein Gleichgewichtssystem bilden, muß auch ihr Kraftzug sich schließen; es ist in Fig. 247c tatsächlich

$$G + K + T_A + A + Q + B + T_B + (-K) = 0.$$

Sollte die Lösung dieser Aufgabe zufällig  $Q = 0$  ergeben haben, so würde dies heißen: der gegebene Beschleunigungszustand und die Auflagerdrücke  $A$  und  $B$  werden durch das Gewicht  $G$  selbst hervorgerufen.

**144. Beschleunigungskraft der Zweipunktführung.** Eine Scheibe von ganz beliebiger Form und Massenverteilung werde in zweien ihrer Punkte  $A$  und  $B$  an zwei Kurven  $a$  und  $b$  geführt, deren Krümmungsmittelpunkte  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  gegeben sind (Fig. 248). Auf die Scheibe wirke in  $C$  die Kraft  $P$ ; außerdem sei die Beschleunigung  $b_A$  des Punktes  $A$  gegeben. Welche Kraft  $Q$  wird in  $B$  in der Bewegungsrichtung dieses Punktes wirken müssen, damit der gegebene Beschleunigungszustand entsteht?

Aus der gegebenen Beschleunigung  $b_A$  wird zunächst wie in 21 die Geschwindigkeit  $v_A$  und aus dieser der Geschwindigkeitsplan Fig. 248a,

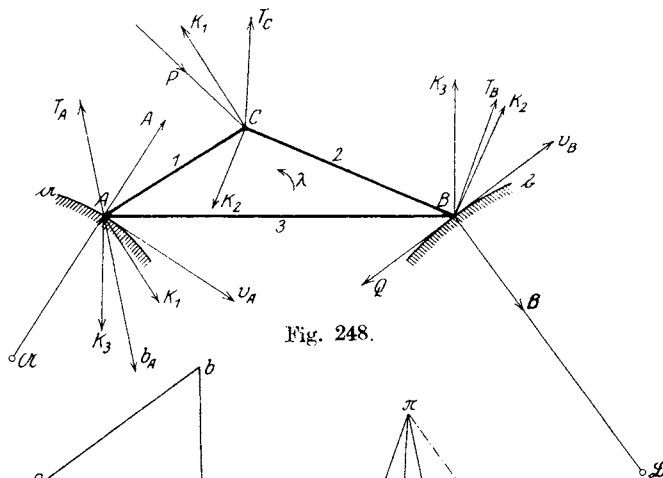


Fig. 248.

Fig. 248 a.

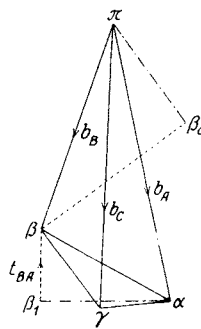


Fig. 248 b.



Das Gleichgewicht der äußeren Kräfte und der Trägheitskräfte wird durch das Polygon dargestellt:

$$P + T_C + T_A + A + T_B + Q + B \equiv 0.$$

Die Kräfte  $K$  können bei dieser Zählung ganz weggelassen werden, da sie nur in Form von Kraftpaaren auftreten. Sie dürfen aber nicht weggelassen werden bei der vorhergehenden Ermittlung von  $Q$ ,  $A$  und  $B$ .

Macht man  $P = 0$ , so ist  $Q$  identisch mit dem gesamten Beschleunigungsdruck der Scheibe, nach  $B$  reduziert.

Ergibt jedoch die Konstruktion zufällig  $Q = 0$ , so ist dies ein Beweis, daß der gegebene Beschleunigungszustand der gegebenen Kraft  $P$  genau entspricht.

Von diesem Nullwerden der Kraft  $Q$  werden wir bei Lösung der zweiten grundlegenden Aufgabe Gebrauch machen.

**145. Der Beschleunigungsdruck bei Anfangsbewegungen des Systems.** Ein besonderer Fall der bisher behandelten Aufgabe entsteht durch die Annahme, daß sich das System in Ruhe befände und durch irgendwelche Kräfte in Bewegung übergeführt werden soll. Es soll also der Beschleunigungsdruck des Systems für dessen Anfangsbewegung ermittelt werden.

Es sei  $A$  der Punkt des Systems, in dem dessen Beschleunigungsdruck  $Q$  studiert werden soll,  $ds_A$  sein unendlich kleiner Weg,  $b_A$  seine Beschleunigung; ferner  $ds$  und  $b$  Weg und Beschleunigung eines beliebigen Systempunktes. Da nach Gleichung 107:

$$Q \equiv \Sigma (mb)$$

ist, so wird die elementare Arbeit von  $Q$  gleich sein der Summe der elementaren Arbeiten der Beschleunigungsdrücke  $mb$ . Dabei ist zu beachten, daß sämtliche Geschwindigkeiten null sind, also die Beschleunigungen  $b$  die Richtungen der kleinen Wege  $ds$  haben. Es ist also

$$Q \cdot ds_A \equiv \Sigma (mb \cdot ds).$$

Im Zeitteilchen  $dt$  kann die Bewegung sämtlicher Punkte als gleichförmig beschleunigt angesehen werden; dann ist

$$ds_A = \frac{1}{2} b_A \cdot \overline{dt}^2, \quad ds = \frac{1}{2} b \cdot \overline{dt}^2$$

und somit 
$$Q = \Sigma \left( mb \cdot \frac{ds}{ds_A} \right)$$

oder 
$$Q = \Sigma \left[ m \cdot \left( \frac{ds}{ds_A} \right)^2 \right] \cdot b_A.$$

Nun ist 
$$\Sigma \left[ m \left( \frac{ds}{ds_A} \right)^2 \right]$$
 oder, was dasselbe ist,

$$\mathfrak{M}_A = \Sigma \left[ m \cdot \left( \frac{v}{v_A} \right)^2 \right]$$

die nach  $A$  reduzierte Masse des Systems (vgl. 382, Gleichung 232), somit wird 
$$Q = \mathfrak{M}_A b_A.$$

Es ist also der Beschleunigungsdruck des Systems an irgend einer Stelle  $A$  bei der Anfangsbewegung gleich der an diese Stelle reduzierten Systemmasse mal der Beschleunigung dieser Stelle.

Für Bewegungen, die keine Anfangsbewegungen sind, gilt dieser Satz nicht, wie wir später sehen werden.

Die Geschwindigkeiten  $v$  eines beliebigen Systempunktes und  $v_A$  des Punktes  $A$  können aus einem beliebigen Geschwindigkeitszustand des geführten Systems entnommen werden, da sie nur im Verhältnis  $v : v_A$  vorkommen, welches von der Größe der Geschwindigkeiten nicht abhängt.

**146. Die zweite grundlegende Aufgabe. Ermittlung des Beschleunigungszustandes aus den gegebenen Kräften.** Von einem zwangsläufig bewegten System sind die Massenverteilung, der Geschwindigkeitszustand und die äußeren Kräfte für einen bestimmten Augenblick gegeben; man ermittle den Beschleunigungszustand des Systems.

Diese Aufgabe ist vollständig bestimmt. Um sie zu lösen, ersetzen wir die Masse des Systems durch statisch gleichwertige Punkte, gewöhnlich zwei oder drei; zweckmäßig wird man diese Punkte in die Führungspunkte des Systems verlegen oder auch in die Angriffstellen der äußeren aktiven Kräfte. Nach Berührungspunkten von Führungen dürfen die Ersatzpunkte nicht verlegt werden, da diese ihre Lage im System nicht ändern dürfen.

Sodann wird ein beliebiger Beschleunigungszustand angenommen, d. h. die Beschleunigung  $b_A$  eines der Ersatzpunkte gewählt und die Beschleunigungen der übrigen Ersatzpunkte daraus bestimmt. Aus den Beschleunigungen  $b_A, b_B, b_C$  und den Massen der statischen Ersatzpunkte  $m_A, m_B, m_C$  werden die Trägheitskräfte

$$T_A = -m_A b_A, \quad T_B = -m_B b_B, \quad T_C = -m_C b_C$$

bestimmt und in den Punkten  $A, B, C$  entgegen ihren Beschleunigungen angebracht; ferner werden die Kraftpaare  $K$  hinzugefügt.

Wäre die Beschleunigung  $b_A$  richtig gewählt, so müßten jetzt nach dem d'Alembertschen Prinzip die gegebenen äußeren Kräfte, die Trägheitskräfte und die Führungsdrücke im Gleichgewicht sein. Dies wird natürlich nicht zutreffen, da ja  $b_A$  beliebig gewählt wurde. Es handelt sich also darum, den gewählten Beschleunigungszustand passend derart zu verändern, bis das genannte Gleichgewicht wirklich erreicht wird. Es soll gezeigt werden, daß die Annahme von zwei beliebigen Beschleunigungszuständen genügt, um daraus den richtigen abzuleiten. Und zwar kann das auf zwei verschiedenen Wegen geschehen, wie an Hand einiger Fälle vorgeführt werden soll.

**147. Ermittlung des Beschleunigungszustandes beim Kreuzschieber.** Der Stab  $AB$  (Fig. 249) vom Gewicht  $G$  gleite in  $A$  an dem horizontalen Boden, in  $B$  an der vertikalen Wand; beide sind glatt.

Die Geschwindigkeit  $v_A$  ist gegeben; es sind die Beschleunigungen der Punkte  $A$  und  $B$  zu konstruieren.

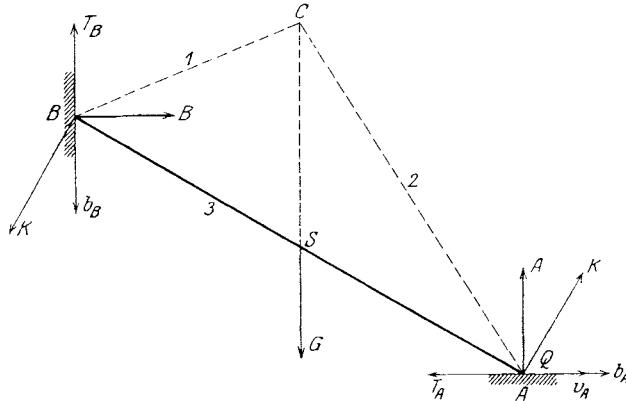


Fig. 249.

Aus  $v_A$  wird zunächst in bekannter Weise der Geschwindigkeitsplan (Fig. 249 a) konstruiert.

Im Beschleunigungsplan (Fig. 249 b) werde die Beschleunigung  $b_B$  zuerst beliebig angenommen; es sei  $b_B' = \pi\beta'$ . Die Normalbeschleunigung

$$n_{AB} = \frac{v_{AB}^2}{AB} = \frac{ba^2}{AB}$$

in Richtung  $AB$

wird in bekannter Weise konstruiert und von  $\beta'$  nach  $\alpha_0'$  aufgetragen; dann ist  $\alpha_0'a' \perp \beta'a_0'$  die zugehörige Tangentialbeschleunigung  $t'_{AB}$  und  $a'$  der zu  $\beta'$  gehörige Beschleunigungspunkt.

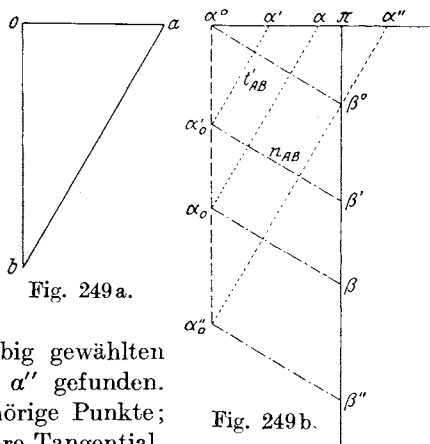


Fig. 249 a.

Fig. 249 b.

Ebenso wurde zu dem beliebig gewählten Punkt  $\beta''$  der zugehörige Punkt  $\alpha''$  gefunden. Auch  $\beta^0$  und  $\alpha^0$  sind zwei zugehörige Punkte; sie haben die Eigenschaft, daß ihre Tangentialbeschleunigung  $t_{AB}$  null ist. Während  $t_{AB}$  seinen Wert verändert, wenn man die Lage des Punktes  $\beta$  verschiebt, bleibt  $n_{AB}$  das gleiche.

Der Angriffspunkt des Gewichtes  $G$  wird, wie schon in Fig. 247, zweckmäßig nicht im Schwerpunkt  $S$ , sondern in einem beliebig anderen Punkt  $C$  von  $G$  angenommen und dieser durch gedachte Stäbe 1 und 2 mit  $B$  und  $A$  starr verbunden.



Die statischen Ersatzpunkte in  $A$  und  $B$  haben jeder die halbe Masse  $\frac{M}{2}$  des Stabes. Wählt man wieder wie in 143:  $M = 2$  kg Masse, so sind die Trägheitskräfte der Ersatzpunkte:

$$T_A = -m_A b_A = -(b_A) \text{ kg}, \quad T_B = -m_B b_B = -(b_B) \text{ kg}$$

(siehe 143). Ferner ist wie dort

$$K = \frac{1}{3} (t_{AB}) \text{ kg.}$$

Das Kraftpaar der Trägheitskräfte  $K$  hat den gleichen Drehungssinn wie  $\lambda$ .

a) Erste Methode. Sie besteht darin, für zwei oder mehrere beliebige angenommene Beschleunigungszustände die Kraft  $Q$  zu suchen, welche zu den gegebenen äußeren Kräften hinzugefügt werden muß, um den angenommenen Beschleunigungszustand zu erzielen (vgl. 139 u. f.).

Dies wurde in Fig. 249c durchgeführt. Aus dem gegebenen und maßstäblich aufgetragenen Gewicht  $G$  wurden die Spannungen der Stäbe 1 und 2 ermittelt. Das Gleichgewicht der äußeren Kräfte und der Trägheitskräfte in  $B$  verlangt das geschlossene Kraftpolygon

$$T_B + 1 + K + 3 + B \equiv 0;$$

beginnt man mit dem Beschleunigungszustand  $a'\beta'$ , so ist dieses Polygon  $a'obc'd'a'$ , worin

$$\begin{aligned} \overline{a'o} &\equiv T_B' = -(b_B') \equiv \beta'\pi, \quad \overline{ob} \equiv 1, \quad \overline{bc'} \equiv K' = \frac{1}{3} (t_{B,A'}) = \frac{1}{3} a'_\alpha', \\ \overline{c'd'} &\equiv 3', \quad \overline{d'a'} \equiv B'. \end{aligned}$$

Ebenso erhält man für den Beschleunigungszustand  $a''\beta''$  das Polygon  $a''obc''d''a''$ .

Das Gleichgewicht des Punktes  $A$  verlangt das Kraftpolygon

$$T_A + A + Q + 3 + K + 2 \equiv 0;$$

beginnt man mit dem Beschleunigungszustand  $a'\beta'$ , so ist dieses Polygon:  $e'f'g'd'c'be$ , worin

$$\overline{e'f'} \equiv T_{A'}' = -(b_{A'}) \equiv \alpha'\pi, \quad \overline{f'g'} \equiv A', \quad \overline{g'd'} \equiv Q', \quad \overline{d'c'} \equiv 3', \quad \overline{c'b} \equiv K', \quad \overline{be} \equiv 2$$

Ebenso erhält man für den Beschleunigungszustand  $a''\beta''$  das Polygon  $e''f''g''d''c''be$ .

Es ist nun leicht ersichtlich, daß jeder der Punkte  $c, d, a, f, g$  auf einer ähnlichen Punktreihe fortschreitet, wenn der Beschleunigungs-

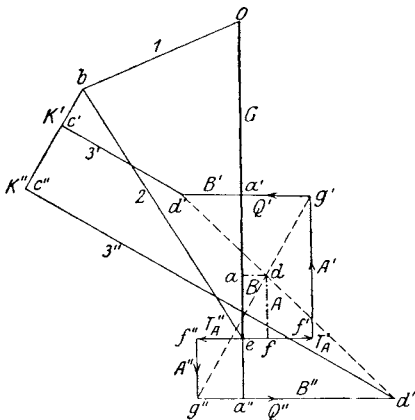


Fig. 249c.

punkt  $\beta$  die Punktreihe  $\beta'\beta'' \dots$  beschreibt. Da das Polygon des Punktes  $A$  die Kraft  $Q' = \overline{g'd'}$  geliefert hat, das zweite die Kraft  $Q'' = \overline{g''d''}$ , so genügt es, die Linien  $d'd''$  und  $g'g''$  zum Schnitte zu bringen; an dieser Stelle ist nämlich  $Q = 0$ , d. h. die äußere Kraft  $G$  bedarf keiner Ergänzung, um diesen Beschleunigungszustand hervorzurufen. Damit ist aber der gesuchte Beschleunigungszustand schon gefunden; denn da die Punktfolgen ähnlich verlaufen, so besteht die Proportion

$$\overline{a'a''} : \overline{a'a'} = \overline{\beta'\beta''} : \overline{\beta'\beta'} = \overline{d'd''} : \overline{d'd'}$$

Sobald aber die Beschleunigungspunkte  $a$  und  $\beta$  im Beschleunigungsplan bekannt sind, kennt man auch die gesuchten Beschleunigungen

$$b_A = \pi a, \quad b_B = \pi \beta.$$

Zieht man noch die Linien  $A = \overline{d'f}$ ,  $B = \overline{d''a''}$  parallel zu den Führungsdriicken  $A$  und  $B$ , so sind auch diese bestimmt.

b) Zweite Methode. Man bestimmt die Gleichgewichtskraft  $R_G$  (vgl. XIII), die in  $A$  angebracht werden muß, um das Gewicht  $G$  des

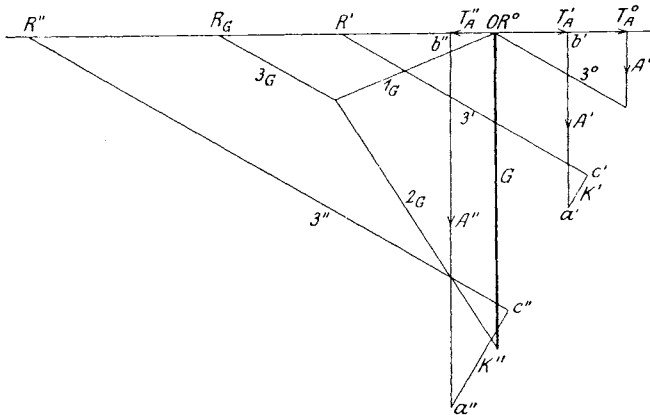


Fig. 249d.

Stabes im Gleichgewicht zu erhalten; sodann sucht man für mehrere beliebig angenommene Beschleunigungszustände  $\beta'\beta'' \dots$  die Gleichgewichtskraft  $R'$ ,  $R'' \dots$ , die in  $A$  angebracht werden müßte, um die Trägheitskräfte des Stabes im Gleichgewicht zu erhalten; findet man hier eine Gleichgewichtskraft  $R$ , die gleich  $-R_G$  ist, so hat man den richtigen Beschleunigungszustand ermittelt.

Dies wurde in Fig. 249d durchgeführt.

Um die Gleichgewichtskraft  $R$  der Trägheitskräfte zu bestimmen, beachte man, daß die Kräfte  $R$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $T_A$ ,  $T_B$  und die beiden  $K$  im Gleichgewicht sein müssen; da letztere die Projektion null haben, folgt

$$A = -T_B \quad \text{und} \quad B = -(T_A + R).$$

Das Kraftpolygon des Punktes  $B$  lautet:

$$T_B + B + 3 + K = 0 \quad \text{oder} \quad -A - T_A - R + 3 + K = 0,$$

d. i. für den Beschleunigungszustand  $\alpha'\beta'$  das Polygon  $a'b'OR'c'a'$ , für den Beschleunigungszustand  $\alpha''\beta''$  das Polygon  $a''b''OR''c''a''$ .

Das Kraftpolygon des Punktes  $A$  lautet:

$$T_A + A + K + 3 + R = 0$$

d. i. für den Beschleunigungszustand  $\alpha'\beta'$  das Polygon  $Ob'a'c'R'O$  und für den Beschleunigungszustand  $\alpha''\beta''$  das Polygon  $Ob''a''c''R''O$ .

Damit sind die beiden Gleichgewichtskräfte  $\overline{OR'}$  und  $\overline{OR''}$  gefunden.

Um hierauf die Gleichgewichtskraft  $R_G$  zu finden, wurde nach XIII das Gewicht  $G$  von  $O$  aus maßstäblich aufgetragen und die Stabspannungen  $1_G, 2_G, 3_G$  parallel zu  $BC, AC, AB$  gezeichnet; dann ist  $R_G = \overline{OR_G}$  die Gleichgewichtskraft des Gewichtes  $G$ .

Nun macht man wieder von der Ähnlichkeit der Punktreihen Gebrauch. Es besteht die Proportion:

$$\overline{\alpha'\alpha'} : \overline{\alpha''\alpha''} = \beta'\beta' : \beta''\beta'' = \overline{R'R_G} : R_G R'',$$

woraus  $\alpha$  und  $\beta$  ermittelt werden können.

Auch der Beschleunigungszustand  $\alpha^0\beta^0$  (ohne Tangentialbeschleunigung  $t_{AB}$ ), von dem früher gesprochen wurde, könnte herangezogen werden; da hier  $K = 0$  ist, hat man nur das Polygon

$$T_A^0 + A^0 + 3^0 + R^0 = 0$$

zu konstruieren; es wird  $R^0 = 0$ , weil  $\alpha^0\pi + \pi\beta^0 + \beta^0\alpha^0 = 0$  ist und man hätte also die Proportion zu benutzen

$$\alpha_0\alpha : \overline{\alpha\alpha''} = \beta_0\beta : \overline{\beta\beta''} = OR_G : R_G R'';$$

dann ist aber der Beschleunigungszustand  $\alpha', \beta'$  überflüssig gewesen und man kommt mit einem einzigen beliebigen Beschleunigungszustand  $\alpha'', \beta''$  aus.

**148. Ermittlung des Beschleunigungszustandes einer allgemeinen Zweipunktführung.** Eine Scheibe von beliebigem Umriß und beliebiger Massenverteilung wird in zwei Punkten  $A$  und  $B$  an Kurven geführt (Fig. 250). In  $C$  wird die Scheibe von einer bekannten Kraft  $P$  angegriffen. Die Geschwindigkeit  $v_A$  ist gegeben. Man ermittle den Beschleunigungszustand der Scheibe.

Der Vorgang bei der Lösung dieser Aufgabe ist im allgemeinen derselbe wie in 147.

Nachdem der Geschwindigkeitsplan (Fig. 250 a) entworfen ist, zeichnet man im Beschleunigungsplan (Fig. 250 b) von  $\pi$  aus die Normalbeschleunigungen  $n_A = \pi\alpha_0$  und  $n_B = \pi\beta_0$ , die in bekannter Weise aus den Geschwindigkeiten  $v_A$  und  $v_B$ , sowie aus den gegebenen Krümmungshalbmessern der Führungen konstruiert werden. Auf den Geraden  $a \perp n_A$  in  $\alpha_0$  und  $b \perp n_B$  in  $\beta_0$  müssen die gesuchten Beschleunigungspunkte  $\alpha$  und  $\beta$  liegen.

Nimmt man nun den Beschleunigungspunkt  $\alpha'$  auf  $a$  beliebig an, macht

$$\alpha' \overline{\beta'_0} - n_{B,A} = \frac{v_{BA}^2}{BA} = \frac{ab^2}{BA} \text{ in Richtung } BA$$

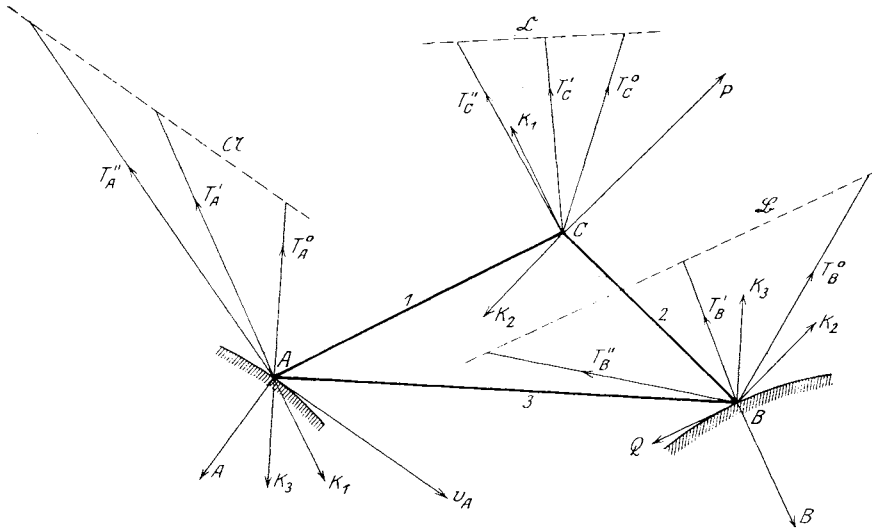


Fig. 250.

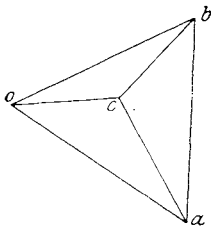


Fig. 250 a.

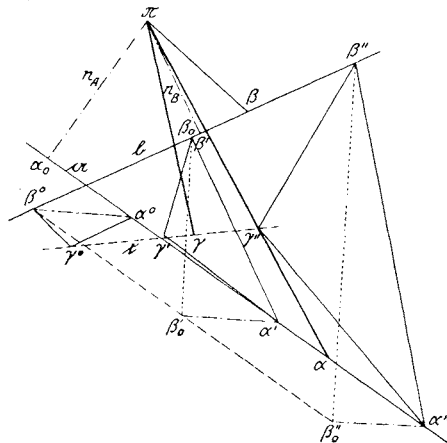


Fig. 250 b.

und errichtet  $\beta'_0\beta' \perp \alpha'\beta'_0$  bis zum Schnitte  $\beta'$  mit  $b$ , so hat man den zu  $\alpha'$  gehörigen Beschleunigungspunkt  $\beta'$  gefunden und es ist  $\overline{\beta'_0\beta'} = t'_{BA}$ .

Dasselbe Verfahren führt aus der Annahme von  $\alpha''$  auf  $a$  zu  $\beta''$  über  $\beta''_0$ . Dabei bleibt  $n_{B,A} = \overline{\alpha'\beta'_0} = \alpha''\beta''_0$  an allen Stellen das gleiche.

Bringt man die Gerade  $\beta'_0\beta''_0$  zum Schnitt  $\beta^0$  mit  $b$  und zieht  $\beta^0\alpha^0 \parallel AB$  bis zum Schnitt  $\alpha^0$  mit  $a$ , so sind auch  $\alpha^0$  und  $\beta^0$  entsprechende Beschleu-

nigungspunkte, und zwar ohne Tangentialbeschleunigung, d. h. es ist  $t_{BA}^0 = 0$ .

Konstruiert man sodann im Beschleunigungsplan

$$\triangle \alpha^0 \beta^0 \gamma^0 \sim \alpha' \beta' \gamma' \sim \alpha'' \beta'' \gamma'' \sim ABC$$

und zwar nicht nur ähnlich, sondern auch ähnlich gelegen, so sind  $\gamma^0, \gamma', \gamma''$  die zu  $\alpha^0, \alpha', \alpha''$  gehörigen Beschleunigungspunkte von  $C$ . Sie müssen auf einer Geraden  $c$  liegen, die zu  $v_C$ , also auch zu  $oc$  im Geschwindigkeitsplan parallel ist, da  $n_C$  allen Beschleunigungen von  $C$  gemeinsam ist.

Die Masse  $M$  der Scheibe wird nach dem Schwerpunktsgesetz in die drei Punkte  $A, B, C$  verteilt; diese statischen Ersatzmassen seien  $m_A, m_B, m_C$ , ihre Trägheitskräfte

$$T_A \equiv -m_A b_A, \quad T_B \equiv -m_B b_B, \quad T_C \equiv -m_C b_C.$$

Da die Beschleunigungen noch nicht bekannt sind, kennt man auch die Trägheitskräfte nicht; jedenfalls kann aber behauptet werden, daß für die drei beliebig gewählten Beschleunigungszustände die Beziehung besteht:]

$$T_A^0 : T_A' : T_A'' = b_A^0 : b_A' : b_A'' = \overline{\pi \alpha^0} : \overline{\pi \alpha'} : \overline{\pi \alpha''},$$

d. h. auch die Trägheitskräfte des Punktes  $A$  werden von einer Geraden  $\mathfrak{A}$  begrenzt sein, die zu  $v_A$  parallel ist (Fig. 250). Das gleiche gilt von den Trägheitskräften  $T_B^0, T_B', T_B''$  und  $T_C^0, T_C', T_C''$ , die von den Geraden  $\mathfrak{B} \parallel v_B, \mathfrak{C} \parallel v_C$  begrenzt sein werden.

Außerdem sind in den Punkten  $A, B, C$  die Kraftpaare  $K_1 \cdot \overline{AC}$ ,  $K_2 \cdot \overline{BC}$ ,  $K_3 \cdot \overline{AB}$  anzubringen. Diese Momente haben die Form (vgl. Gleichung 99)

$$Kl = M \lambda (p_1 p_2 - i^2) \text{ oder } K = k l \lambda = k t,$$

worin  $k = M \frac{p_1 p_2 - i^2}{p^2}$  für die verschiedenen Beschleunigungszustände den gleichen Wert beibehält und somit  $K$  nur der Tangentialbeschleunigung  $t$  proportional ist.

So wird also in Fig. 250 sein:

$$K_1 = k_1 t_{AC}, \quad K_2 = k_2 \cdot t_{BC}, \quad K_3 = k_3 \cdot t_{BA};$$

die Konstanten  $k_1, k_2, k_3$  können aus den Abmessungen und der Massenverteilung der Scheibe bestimmt werden.

Alle drei Kraftpaare sind derart anzubringen, daß sie im Sinne von  $\lambda$  drehen. Der Sinn von  $\lambda$  wird leicht dadurch entschieden, daß man z. B.  $t_{BA}' \equiv \overline{\beta_0' \beta'}$  in  $B$  anbringt und feststellt, in welchem Sinne  $B$  um  $A$  gedreht wird; dies ist hier gegen die Uhrzeigerbewegung.

Die richtigen Beschleunigungspunkte  $\alpha, \beta, \gamma$  werden nun, wie unter 146, auf zweifache Weise gefunden werden können.

a) Erste Methode (Fig. 250c). Nullwerden der Kraft  $Q$ .

Man beginnt mit einem der beliebig gewählten Beschleunigungszustände, z. B.  $\alpha' \beta' \gamma'$  und zeichnet das Gleichgewichtspolygon des Punktes  $C$ ; es ist

$$P + T_{C'} + K_1' + 1' + 2' + K_2' = 0;$$

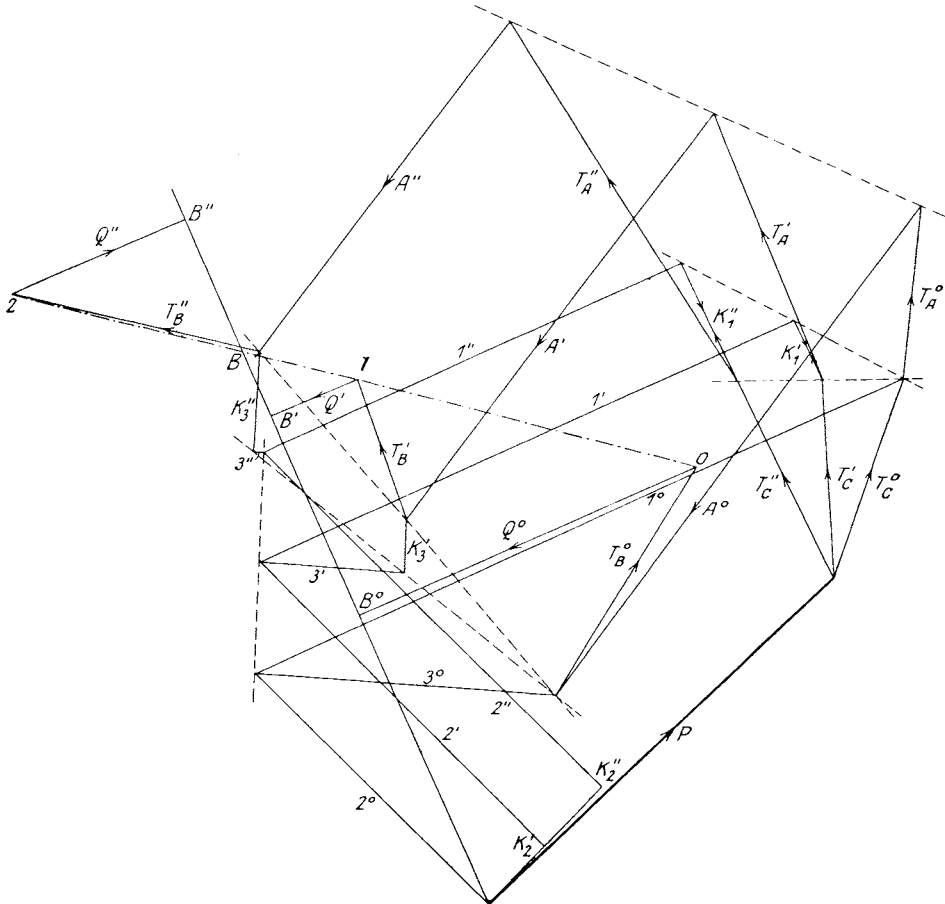


Fig. 250c.

da alle Kräfte bis auf  $1'$  und  $2'$  bekannt sind, lassen sich diese beiden Stabspannungen durch Ziehen der Parallelen zu  $AC$  und  $BC$  ermitteln.

Sodann zeichnet man das Gleichgewichtspolygon des Punktes  $A$ :

$$T_A' + A' + K_3' + 3' + 1' + K_1' = 0;$$

hierdurch wird die Stabspannung  $3'$  und der Führungsdruck  $A'$  bestimmt.

Das Gleichgewichtspolygon des Punktes  $B$  ist endlich:

$$K_2' + 2' + 3' + K_3' + T_B' + Q' + B' = 0,$$

wodurch der Führungsdruck  $B'$  und die Kraft  $Q'$  in  $B$ , parallel zu  $v_B$ , bestimmt ist.

Für den Beschleunigungszustand  $\alpha'' \beta'' \gamma''$  werden sodann die gleichen Polygone konstruiert; sie sind

$$\begin{aligned} P + T_C'' + K_1'' + 1'' + 2'' + K_2'' &= 0, \\ T_A'' + A'' + K_3'' + 3'' + 1'' + K_1'' &= 0, \\ K_2'' + 2'' + 3'' + K_3'' + T_B'' + Q'' + B'' &= 0. \end{aligned}$$

Für den dritten Beschleunigungszustand  $\alpha^0, \beta^0, \gamma^0$  fallen die Tangentialbeschleunigungen fort, somit auch die Kräfte  $K$ ; die Polygone sind dann:

$$\begin{aligned} P + T_C^0 + 1^0 + 2^0 &= 0, \\ T_A^0 + A^0 + 3^0 + 1^0 &= 0, \\ 2^0 + 3^0 + T_B^0 + Q^0 + B^0 &= 0. \end{aligned}$$

Auch hier bewegen sich die Ecken der Polygone in ähnlichen Punktreihen, die auch den Punktreihen im Beschleunigungsplan ähnlich sind.

Verbindet man nun die Anfangspunkte von  $Q^0, Q', Q''$  durch eine Gerade 012, so schneidet diese die Gerade  $B^0, B', B''$  in einem Punkte  $B$ , in dem  $Q = 0$  wird. Dies entspricht aber jenem Beschleunigungszustand, der allein durch die Kraft  $P$  erzeugt wird.

Macht man endlich im Beschleunigungsplan

$$\overline{\alpha\alpha''} = \overline{\beta'\beta''} = \overline{\gamma'\gamma''} = \overline{B'B} : \overline{BB''},$$

so erhält man die richtigen Beschleunigungspunkte  $\alpha, \beta, \gamma$  und damit die gesuchten Beschleunigungen

$$\overline{\pi\alpha} = b_A, \quad \overline{\pi\beta} = b_B, \quad \overline{\pi\gamma} = b_C.$$

Da auch der Punkt  $B^0$  in der  $B$ -Punktreihe den Punkten  $\alpha^0, \beta^0, \gamma^0$  in den ähnlichen Punktreihen des Beschleunigungsplanes entspricht, so hat man eine Kontrolle für die Richtigkeit der Konstruktion.

b) Zweite Methode. Diese besteht darin, daß man zunächst die Gleichgewichtskraft  $R_P$  sucht, die z. B. in  $B$  (Fig. 250) in der Tangente an die Führung angebracht werden müßte, um mit  $P$  das Gleichgewicht herzustellen; hierauf bestimmt man die Gleichgewichtskräfte  $R^0, R', R''$ , die mit den Trägheitskräften der Beschleunigungszustände  $\alpha^0, \alpha', \alpha''$  usw. Gleichgewicht halten; findet man hierbei eine Gleichgewichtskraft  $R$ , die gleich  $-R_P$  ist, so hat man den richtigen Beschleunigungszustand gefunden.

In Fig. 250d wurde zuerst nach dem bekannten Vorgange, um eine Gleichgewichtskraft zu finden (vgl. XIII), von  $O$  aus die Kraft  $P$  aufgetragen, in die Spannungen  $1_P$  und  $2_P$  zerlegt, sodann  $1_P$  in die Spannung  $3_P$  und den Führungsdruck  $A_P$ , endlich  $3_P$  in  $2_P$ , den Führungsdruck  $B_P$ , und die Gleichgewichtskraft  $R_P = \overline{R_P O}$ .

Sodann wurde mit dem Beschleunigungszustand  $\alpha', \beta', \gamma'$  begonnen, von  $O$  aus die Trägheitskräfte  $T_B', T_C', T_A'$  aneinander gefügt und der Reihe nach die Gleichgewichtspolygone gezeichnet:

$$\begin{aligned} T_C' + K_2' + 2' + 1' + K_1' &= 0, \\ T_A' + K_1' + 1' + 3' + K_3' + A' &= 0, \\ T_B' + K' + B' + K_3' + 3' + 2' + K_2' &= 0; \end{aligned}$$

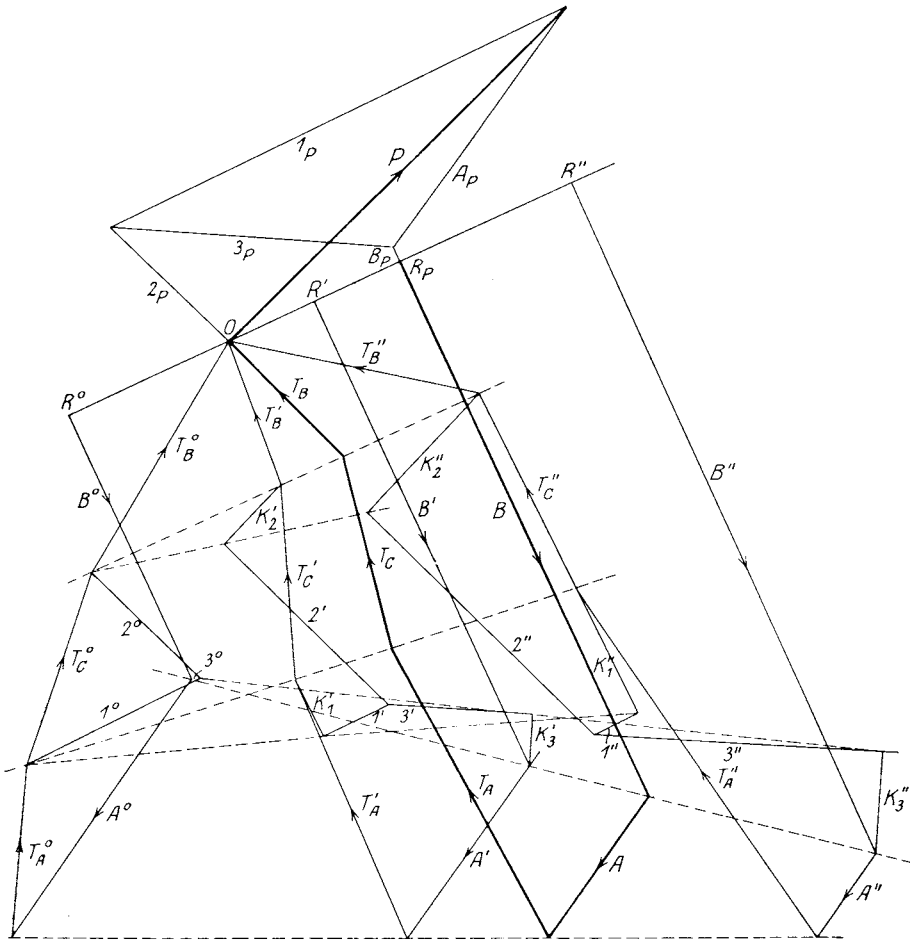


Fig. 250 d.

von jedem dieser Polygone sind nur zwei Seiten unbekannt. Auf diese Weise wurde die Gleichgewichtskraft  $\overline{OR'}$  der Trägheitskräfte gefunden.

Dieselbe Konstruktion, mit den Trägheitskräften  $T_B'', T_C'', T_A''$  durchgeführt, gibt die Gleichgewichtskraft  $\overline{OR''}$ .

Da auch hier die Ecken der Kraftpolygone auf Geraden fortschreiten und Punktreihen bilden, die zu den Punktreihen  $\alpha' \alpha'', \beta' \beta''$  usw. im



Beschleunigungsplan ähnlich sind, so genügt schließlich die Proportion

$$\overline{\alpha\alpha} : \overline{\alpha\alpha''} = \overline{\beta\beta} : \overline{\beta\beta''} = \overline{\gamma\gamma} : \overline{\gamma\gamma''} = \overline{R'R_P} : \overline{R_P R''},$$

um die Beschleunigungspunkte  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  und damit die Beschleunigungen  $b_A$ ,  $b_B$ ,  $b_C$  zu konstruieren.

Am einfachsten ist es übrigens, den Beschleunigungszustand  $\alpha^0$ ,  $\beta^0$ ,  $\gamma^0$  zu benutzen, da hier die Tangentialbeschleunigung wegfällt,  $\lambda = 0$  ist und somit die Kräfte  $K$  verschwinden. Dann sind die zu konstruierenden Kraftpolygone:

$$\begin{aligned} T_C^0 + 2^0 + 1^0 &= 0, \\ T_A^0 + 1^0 + 3^0 + A^0 &= 0, \\ T_B^0 + R^0 + B^0 + 3^0 + 2^0 &= 0. \end{aligned}$$

Der auf diesem Wege gefundene Punkt  $R^0$  kann mit Vorteil benützt werden, um die vorhergehenden Konstruktionen zu kontrollieren, da

$$\alpha^0 \alpha' \alpha'' \sim \beta^0 \beta' \beta'' \sim \gamma^0 \gamma' \gamma'' \sim R^0 R' R_P R''$$

sein muß.

#### 149. Aufgaben.

52. Ein Dreieck  $ABC$  (Fig. 251) von beliebiger Massenverteilung und bekanntem Gewicht  $G$  wird in  $A$  und  $B$  gerade geführt. In  $C$  wirke eine bekannte Kraft  $P$ ; überdies ist  $v_A$  gegeben. Man ermittle die Beschleunigungen der Punkte  $A$  und  $B$  sowie die Führungsdrücke.

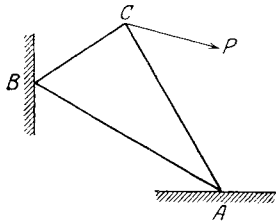


Fig. 251.

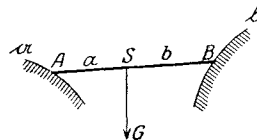


Fig. 252.

53. Ein nicht homogener Stab  $AB$  (Fig. 252) wird in  $A$  und  $B$  an zwei Kurven  $a$  und  $b$  geführt. Das Gewicht  $G$  des Stabes, der Schwerpunkt  $S$  und die Geschwindigkeit  $v_A$  sind bekannt. Man konstruiere die Beschleunigungen  $b_A$  und  $b_B$  sowie die Führungsdrücke in  $A$  und  $B$ .

## XV. Die kinematische Kette, ihre Beweglichkeit und ihr Zwanglauf.

**150. Zusammenhang mehrerer Systeme.** In dem nun abgeschlossenen Teile dieses Buches wurden die kinematischen und dynamischen Zustände eines einzelnen Systems behandelt, das entweder vollständig frei ist oder in irgend einer Weise an bestimmte Bedingungen gebunden, geführt wird.

In dem jetzt folgenden Teile wollen wir einen Schritt weiter gehen und die kinematischen und dynamischen Zustände mehrerer zusammenhängender Systeme behandeln, wie sie sich in einem bestimmten Augenblicke darstellen, also wieder ohne Berücksichtigung der Zeit. Dieser Teil wird von besonderer Wichtigkeit sein, da die Maschinengetriebe aus einer Reihe von Systemen bestehen, die in äußerst mannigfaltiger, oft sehr verwickelter Art untereinander zusammenhängen und sich in ihren gegenseitigen Bewegungen bedingen und beschränken.

Bevor wir jedoch zu den kinematischen Zuständen von zusammenhängenden Systemen übergehen, wollen wir die Art dieser Zusammenhänge selbst näher untersuchen und auch die Bewegungen, die sie gegenseitig zulassen; denn es ist klar, daß sich solche zusammenhängende Systeme ganz anders bewegen werden, als wenn sie vollkommen frei wären.

Wir gewinnen ein übersichtliches Bild der verschiedenen Arten von Zusammenhängen, wenn wir an die Führungen des einzelnen Systems wieder anknüpfen, die wir im Abschnitt 73 für das zwangläufige System, im Abschnitt 65 für das flächenläufige System geschildert haben.

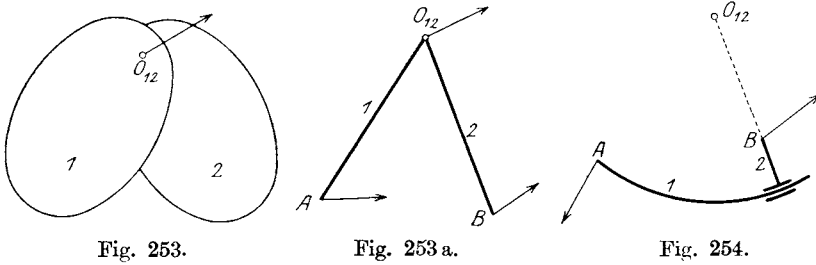
Dort wurde stets vorausgesetzt, daß die Führung der ruhenden Ebene angehöre, sich also selbst im Ruhezustande befände. Wir sprachen von Kurven  $a$  und  $b$ , auf denen Punkte  $A$  und  $B$  geführt werden; von Hüllbahnen  $\alpha$  und  $\beta$ , an denen Kurven  $a$  und  $b$  gleiten. Immer aber waren die Punktbahnen  $a$  und  $b$ , die Hüllbahnen  $\alpha$  und  $\beta$  als ruhend angenommen, also fest verbunden mit der ruhenden Ebene.

Wir wollen nun diese Voraussetzung fallen lassen und annehmen, daß die Ebenen dieser Führungen selbst in Bewegung begriffen seien.

Beginnen wir mit der Dauerdrehung um einen Punkt, bei der sich ein System 2 durch mehr als ein Zeitteilchen um den Punkt  $O$  der festen Ebene 1 dreht.

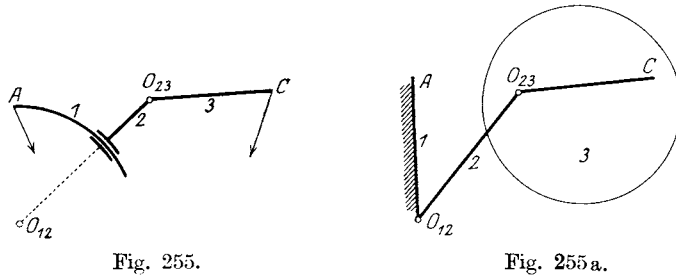
Erteilen wir der bisher ruhenden Ebene 1 irgend eine Bewegung, ohne ihre Verbindung mit der Ebene 2 in  $O$  zu lösen, so haben wir es mit zwei Systemen 1 und 2 zu tun, die sich beide in bezug auf eine dritte, ruhende Ebene Null bewegen mit der Einschränkung, daß sie stets den gleichen Punkt  $O$  miteinander gemein haben. Dann ist die relative Bewegung des Systems 1 in bezug auf 2, und ebenso jene des Systems 2 in bezug auf 1 eine Drehung um diesen Punkt  $O$ , der aber nicht mehr in Ruhe ist, sondern in bezug auf die dritte Ebene Null selbst wieder eine Bewegung vollzieht.

Wir nennen einen derartigen Zusammenhang zweier Systeme gelenkig und  $O_{12}$ , den Punkt ihres Zusammenhanges, ihr Gelenk (Fig. 253). Es wird genügen, wenn wir die beiden Systeme 1 und 2 als zwei in  $O_{12}$  gelenkig verbundene Stäbe darstellen (Fig. 253a). Oder auch, indem wir das System 1 als starren Kreisbogen zeichnen (Fig. 254) und das



System 2 als Hülse, die an diesem Kreisbogen gleitet. Dann ist  $O_{12}$  der Mittelpunkt desselben. Die in den Punkten  $A$  und  $B$  angesetzten Pfeile sollen andeuten, daß jedes der beiden Systeme 1 und 2 eine Eigenbewegung besitzt.

Denken wir uns in  $B$  ein zweites Gelenk  $O_{23}$  angebracht und ein drittes bewegliches System 3 gelenkig angeschlossen, so entsteht Fig. 255. Dieser Zusammenhang entsteht aus der in Fig. 75 gezeichneten flächenläufigen Führung, der Einpunktführung (Fig. 255a), wenn wir eine Bewegung des Systems 1 zulassen.



Da in Fig. 255 die Entfernung  $O_{12}O_{23}$  sich nicht ändert, kann sie als starrer Stab 2 eingefügt werden und man erhält dann folgende Reihe

von in Bewegung begriffenen Systemen (Fig. 255 b). In dem besonderen Falle, wenn der Kreisbogen 1 in Fig. 255 in eine Gerade ausartet, rückt  $O_{12}$  in unendliche Entfernung und es entsteht Fig. 256.

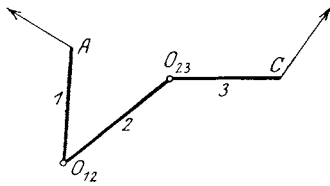


Fig. 255 b.

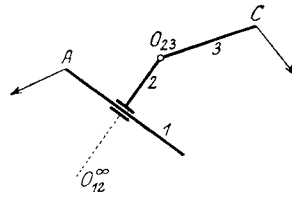


Fig. 256.

Ersetzen wir auch den Punkt  $C$  durch ein neues Gelenk  $O_{34}$  und führen wir es ebenso wie  $O_{23}$ , so entsteht Fig. 257; dann haben wir es mit fünf zusammenhängenden Systemen zu tun. Fig. 257 a gibt denselben Zusammenhang in anderer Form. Halten wir hier die Systeme

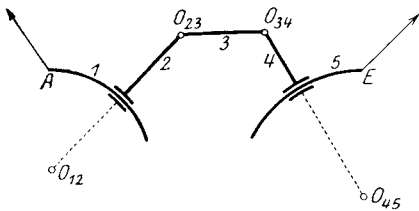


Fig. 257.

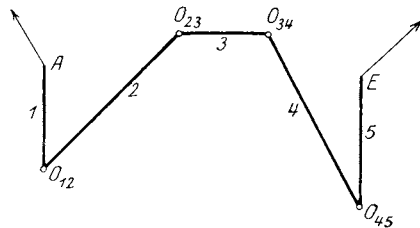


Fig. 257 a.

1 und 5 fest, statt sie wie bisher zu bewegen, so entsteht die bereits bekannte zwangläufige Zweipunktführung (vgl. Fig. 85).

Besondere Abarten von Fig. 257 sind:

1. Fig. 258: Die Kreisbögen 1 und 5 arten in Gerade aus.

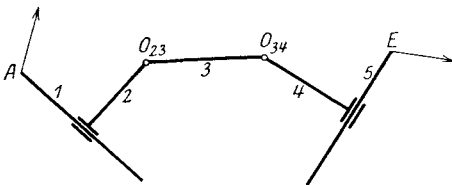


Fig. 258.

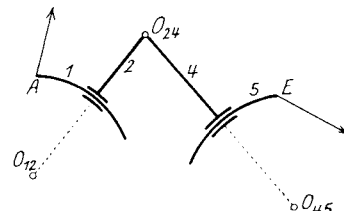


Fig. 259.

2. Fig. 259: die Länge der Stange 3 wird null, die Gelenke  $O_{23}$  und  $O_{34}$  fallen in  $O_{24}$  zusammen; die Fig. 259 a gibt den gleichen Zusammenhang der vier Systeme.

Ein anderer Zusammenhang der Systeme entsteht, wenn wir zwei Kreisbögen 1 und 3 durch zwei gekrümmte Hülsen laufen lassen, die

miteinander zu einem starren System 2 verbunden sind (Fig. 260). Sind die Hülslen unendlich dünn, so werden die Kreise 1 und 3 aufeinander rollen und gleiten, wenn die Punkte *A* und *C* beliebige Bewegungen ausführen.

Halten wir das System 1 fest, so entsteht die bereits bekannte flächenläufige Einkurvenführung (Fig. 261).

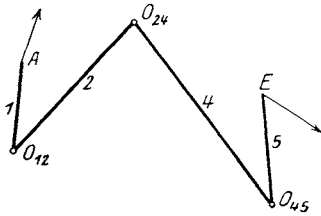


Fig. 259 a.

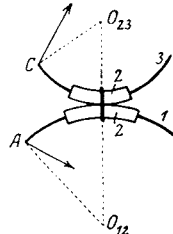


Fig. 260.

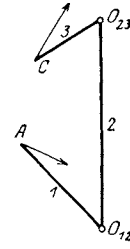


Fig. 260 a.

Sind  $O_{12}$  und  $O_{23}$  die Mittelpunkte von 1 und 3, so bleibt die Strecke  $O_{12}O_{23}$  von unveränderlicher Größe und der Zusammenhang der drei Systeme kann durch Fig. 260a dargestellt werden, die denselben Zusammenhang ergibt wie in Fig. 255b.

Eine Anwendung zeigt Fig. 262. Bei diesem Getriebe ist der Schwingdaumen 1 in dem festen Drehpunkt  $O_{10}$  drehbar gelagert. Das System 0 ist das Fundament. Bei der Drehung wälzt sich 1 an dem Sektor 3 ab, der in  $O_{34}$  mit der Stange 4 gelenkig verbunden ist.  $O_{12}$ ,  $O_{23}$  sind die Krümmungsmittelpunkte der beiden sich berührenden Kurven von 1 und 3; 2 ist die im Augenblicke unveränderliche Entfernung dieser beiden Punkte. Die Stange 4 macht eine Translation parallel ihrer Achse. Das Schema für diesen Zusammenhang von fünf Systemen findet sich in Fig. 271.

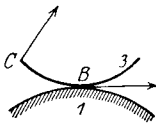


Fig. 261.

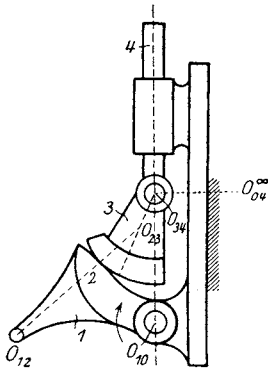


Fig. 262.

Wiederholen wir den Zusammenhang des Systems 3 in Fig. 260 an einer anderen Stelle desselben, so entsteht Fig. 263, in der zwei verschiedene Kreise des Systems 3 an zwei anderen Kreisen 1 und 5 rollen und schleifen. Fig. 263a zeigt eine andere Anordnung des gleichen Zusammenhanges; sie stimmt mit Fig. 257a überein.

Werden in Fig. 263 die Systeme 1 und 5 festgehalten, so entsteht die bereits bekannte zwangläufige Zweikurvenführung (vgl. Fig. 93).

Eine besondere Abart von Fig. 263 zeigt Fig. 264. Hier fallen die Kreise 2 und 4 in einen kleinen Kreis zusammen, der an zwei Kulissen 1 und 5 schleift und rollt.

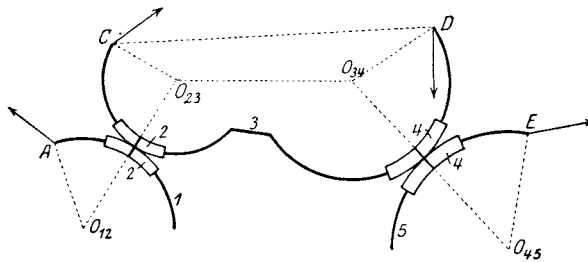


Fig. 263.

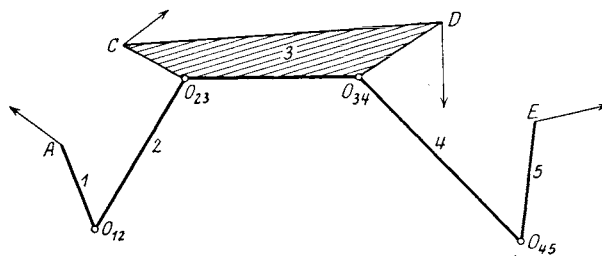


Fig. 263 a.

In ganz ähnlicher Weise ist auch die in 81 behandelte zwangläufige Punkt- und Kurvenführung auf den Zusammenhang ihrer Systeme zu untersuchen.

Wenn eine oder mehrere der Kurven in Gerade ausarten, so rücken deren Mittelpunkte in unendliche Entfernung, was grundsätzlich nichts ändert.

Diese Darlegungen, die nach Belieben fortgesetzt werden könnten, sollen beweisen, daß sich alle Zusammenhänge der Systeme auf Gelenke zurückführen lassen, die entweder im Endlichen oder in unendlicher Entfernung liegen.

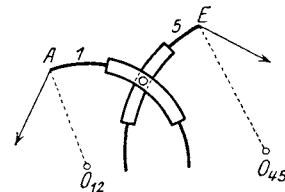


Fig. 264.

Unter den in obigen Abbildungen vorkommenden Kreisen hat man sich die Krümmungskreise der betreffenden krummlinigen Führung zu denken, da wir vorläufig nur die Bewegung während zweier aufeinander folgender Zeiteilchen ins Auge fassen.

**151. Die kinematische Kette.** Die Aneinanderreihung mehrerer Systeme, die in irgend einem Zusammenhange stehen, nennt man eine kinematische Kette; die einzelnen Systeme heißen Glieder der Kette. Die Verbindung der Glieder untereinander erfolgt entweder durch Gelenke und Schieber oder durch Gleitkurven (Hüllbahnen).

Man unterscheidet geschlossene und offene kinematische Ketten.

In den geschlossenen kinematischen Ketten verbindet jedes Glied mindestens zwei Nachbarglieder. In den offenen kinematischen Ketten gibt es Glieder, die Nachbarglieder nicht miteinander verbinden.

Alle früher vorgeführten Zusammenhänge sind demnach offene Ketten; z. B. in Fig. 263a haben die Glieder 1 und 5 jedes nur ein Nachbarglied.

Hingegen sind Fig. 262, ferner 271, 274, 278, 280 u. a. geschlossene Ketten.

Im folgenden wollen wir zuerst die kinematischen Ketten besprechen, die nur Gelenke enthalten, ihre Beweglichkeit untersuchen und insbesondere das Kennzeichen ihrer Zwangläufigkeit feststellen. Sodann wollen wir diese Untersuchung auf Ketten mit gekrümmten und geraden Schiebern ausdehnen.

### 152. Die Gelenk-Ketten, ihr Beweglichkeitsgrad und Zwanglauf.

Mit dem Namen Gelenk-Kette bezeichnen wir eine offene oder geschlossene kinematische Kette, deren Glieder ausschließlich durch Gelenke miteinander verbunden sind. Dabei denken wir uns vorläufig keines der Glieder in Ruhe, sondern alle in Bewegung begriffen. Die Bewegungen der Gelenke werden aber nicht unabhängig voneinander sein; es ist einleuchtend, daß man von einer gewissen Anzahl der Gelenke die Bewegungen willkürlich annehmen dürfen, daß dann aber die Bewegung der übrigen Gelenke nicht mehr willkürlich, sondern bestimmt ist.

Wir nennen die Anzahl der willkürlich wählbaren Bestimmungsstücke (Größe und Richtung der Geschwindigkeiten der Gelenkpunkte) den Beweglichkeitsgrad der Kette.

Es entsteht die Frage: von wievielen Gelenken der Kette darf man die Bewegung nach Größe und Richtung annehmen?

Gehen wir zunächst von der Bewegung eines freien Punktes aus, so ist es ohne weiteres klar, daß man sowohl die Größe, als auch die Richtung der Geschwindigkeit willkürlich annehmen dürfen, oder auch die Teile seiner Geschwindigkeit nach zwei beliebigen Richtungen; jedenfalls dürfen also zwei Bestimmungsstücke willkürlich angenommen werden, der Beweglichkeitsgrad ist 2.

Um die Bewegung einer starren Geraden anzugeben, wird man zunächst die Bewegung eines ihrer Punkte  $A$  angeben müssen, wozu die Wahl zweier Bestimmungsstücke notwendig ist; sodann darf noch die Größe der relativen Geschwindigkeit eines zweiten Punktes  $B$  in bezug auf  $A$  willkürlich gewählt werden, während ihre Richtung nicht mehr willkürlich, sondern senkrecht zu  $AB$  sein wird. Oder man kann auch die Bewegungsrichtungen beider Punkte  $A$  und  $B$  willkürlich wählen und entweder von  $A$  oder von  $B$  die Größe der Geschwindigkeit. Von einer starren Geraden sind demnach drei Bestimmungsstücke willkürlich wählbar, der Beweglichkeitsgrad ist 3.

Denken wir uns mit der starren Strecke  $AB$  eine beliebige Scheibe fest verbunden, so ist ihre Bewegung durch jene der Strecke  $AB$  mitbestimmt; die Scheibe hat also ebenfalls den Beweglichkeitsgrad 3.

Nehmen wir an, die Scheibe bestehe aus einer Anzahl starrer Stäbe, die durch Gelenke miteinander verbunden sind (Stabwerk oder Fachwerk, Fig. 265); es seien gerade so viele Stäbe vorhanden, als zur Starrheit des Stabwerks erforderlich ist. Dann haben wir es mit einer starren kinematischen Kette zu tun, ihr Beweglichkeitsgrad ist ebenfalls 3; man könnte also z. B. von zwei Gelenken  $B, C$  die Bewegungsrichtungen und von einem dritten Gelenk  $A$  die Größe  $v_A$  der Geschwindigkeit annehmen. Die Richtung von  $v_A$  ist hingegen nicht mehr beliebig; denn die Normalen in  $B$  und  $C$  auf deren Bewegungsrichtungen schneiden sich im Drehpol  $O$  der Scheibe und  $v_A$  muß dann senkrecht zu  $AO$  sein.

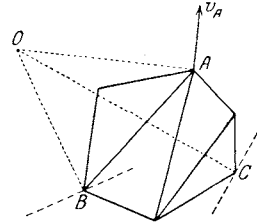


Fig. 265.

Eigentlich sind immer zwei Lösungen möglich, da man auch den Sinn von  $v_A$  in zweifacher Weise annehmen könnte; diese Möglichkeit einer zweifachen Lösung wollen wir jedoch bei der Entscheidung über den Beweglichkeitsgrad außer acht lassen.

Denkt man sich in einer derartigen starren Kette (Fig. 265a) einen der Stäbe, z. B.  $AB$ , entfernt, so wird zwar der Teil  $AC$  der Kette noch starr bleiben, der Teil  $AB$  jedoch kann seine Form verändern; er bildet ein sogenanntes Gelenkviereck. Hält man etwa den Teil  $AC$  fest, so werden die Stäbe 1, 2, 3 in bezug auf den festgehaltenen Teil ganz bestimmte Bewegungen ausführen können; jeder Punkt dieser drei Stäbe wird in bezug auf den Teil  $AC$  eine ganz bestimmte Bahn beschreiben. Ebenso ist es aber, wenn wir statt den Teil  $AC$  den Stab 2 festhalten und alles übrige bewegen; oder wenn wir 1 oder 3 festhalten.

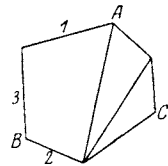


Fig. 265 a.

Eine solche kinematische Kette, bei der jeder Punkt eines Gliedes in bezug auf jedes andere Glied der Kette eine ganz bestimmte Bahn beschreibt, nennt man zwangläufig.

Durch die Wegnahme des Stabes  $AB$  wird es den Punkten  $A$  und  $B$  möglich gemacht, sich einander zu nähern oder sich voneinander zu entfernen; es kommt also zu den drei bisherigen willkürlichen Annahmen über die Bewegung noch eine vierte hinzu; der Beweglichkeitsgrad der zwangläufigen Kette ist gleich 4.

Jeder weitere Stab, der aus der Kette gelöst wird, erhöht den Beweglichkeitsgrad um eins; würde man also aus der anfänglich starren Kette  $f$  Stäbe entfernen, so ist der Beweglichkeitsgrad des übrigbleibenden Restes der Kette

$$x = 3 + f \dots \dots \dots 108)$$



Wir nennen  $f$  die Anzahl der fehlenden Stäbe; dies ist die Anzahl jener Stäbe, die man einer Kette mindestens hinzufügen muß, um sie starr zu machen.

**153. Die fehlenden Stäbe.** Ein Dreieck bedarf zu seiner Starrheit drei Seiten, die ein Polygon umschließen.

Damit ein Viereck starr sei, müssen wir zwei starre Dreiecke an einer Seite aneinander schließen; man bedarf also fünf Seiten, die zwei Polygone umschließen.

Ebenso bedarf ein Fünfeck (Fig. 266) zu seiner Starrheit sieben Seiten, die drei Polygone umschließen usf.

Nennt man allgemein  $p$  die Anzahl der von einer Figur umschlossenen, sich nicht überdeckenden Polygone, so ist die zur Starrheit der Figur erforderliche Anzahl der Seiten

$$s = 2p + 1 \dots \dots \dots 109)$$

Man kann sich leicht überzeugen, daß diese Bedingung der Starrheit auch dann erfüllt ist, wenn die starre Figur nicht nur Dreiecke enthält,

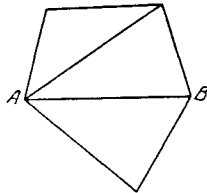


Fig. 266.

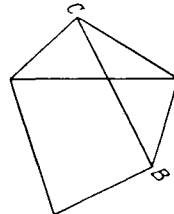


Fig. 266a.

sondern auch andere Polygone. Ersetzt man z. B. in Fig. 266 den Stab  $AB$  des starren Fünfecks durch den Stab  $BC$  (Fig. 266a), so bleibt das Fünfeck starr; auf dem Stab  $BC$  liegen nun zwei Polygonseiten und ebenso liegen auf dem ihn kreuzenden Stab zwei Polygonseiten; durch die Kreuzung der Stäbe hat sich aber auch die Polygonzahl um eins vermehrt; wenn die Figur in Fig. 266  $s$  Seiten und  $p$  Polygone hatte, so hat sie jetzt  $s_1 = s + 2$  Seiten und  $p_1 = p + 1$  Polygone; setzt man  $s = s_1 - 2$  und  $p = p_1 - 1$  in Gleichung 109 ein, so bleibt wieder

$$s_1 = 2p_1 + 1.$$

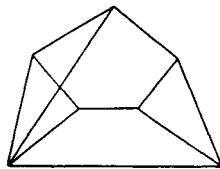


Fig. 267.

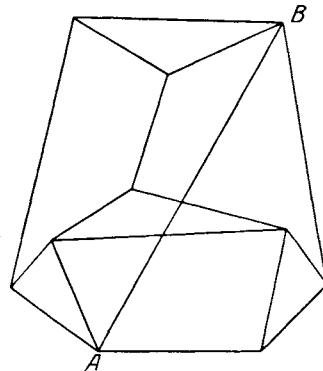


Fig. 268.

Die Kette in Fig. 267 hat 13 Seiten (nicht Stäbe!) und umschließt 6 Polygone; die Gleichung ist erfüllt, also ist die Kette starr.

Die Kette in Fig. 268 hat 21 Seiten (der Stab  $AB$  besteht z. B. aus drei Seiten) und umschließt 10 Polygone; die Kette ist starr.

Da für eine starre Figur die Anzahl der fehlenden Stäbe  $f = 0$  und nach Gleichung 109  $s - 2p - 1$  ebenfalls null ist, so folgt

$$f = s - 2p - 1 \dots\dots\dots 110)$$

und nach Gleichung 108 der Beweglichkeitsgrad:

$$x = s - 2p + 2 \dots\dots\dots 111)$$

Diese  $x$  Annahmen für den augenblicklichen Bewegungszustand der Figur dürfen also beliebig gemacht werden. Im allgemeinen ist es der Willkür überlassen, wie viele von diesen Annahmen man auf die Größen der Geschwindigkeiten, und wie viele man auf deren Richtungen verteilt. Jedenfalls muß aber mindestens von einer Geschwindigkeit die Größe angenommen werden.

Für eine zwangläufige kinematische Kette wurde  $x = 4$  gefunden; es ist somit das Kennzeichen des Zwanglaufes

$$s = 2(p + 1) \dots\dots\dots 112)$$

In Fig. 269 ist  $s = 2$ ,  $p = 0$ , also  $f = 1$ ,  $x = 4$ . Die Figur ist zwangläufig; man kann die Geschwindigkeiten von  $A$  und  $B$  nach Größe und Richtung annehmen.

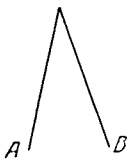


Fig. 269.



Fig. 270.

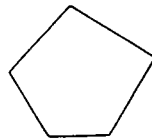


Fig. 271.

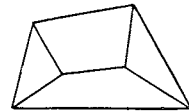


Fig. 272.

In Fig. 270 ist  $s = 3$ ,  $p = 0$ , also  $f = 2$ ,  $x = 5$ ; man kann von allen vier Eckpunkten die Bewegungsrichtungen und von einer Geschwindigkeit die Größe annehmen.

In Fig. 271 ist  $s = 5$ ,  $p = 1$ , also  $f = 2$ ,  $x = 5$  wie vorher (Flächenlauf).

In Fig. 272 ist  $s = 9$ ,  $p = 4$ , also  $f = 0$ ,  $x = 3$ ; die Figur ist starr.

Die Gleichungen 110 bis 112 gelten auch für Figuren mit Überschneidungen von Stäben; nur ist in diesem Falle darauf zu achten, daß sich die Zahl  $s$  auf die Polygonseiten, nicht auf die Stäbe bezieht.

In Fig. 273 ist demnach  $s = 10$ ,  $p = 4$ , also  $f = 1$ ,  $x = 4$ ; die Kette ist zwangläufig.

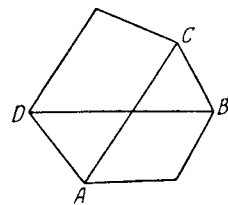


Fig. 273.

Die Kette Fig. 274 wurde von M. Grübler in seiner Abhandlung: „Allgemeine Eigenschaften der zwangläufigen ebenen kinematischen Ketten“, Zivil-Ingenieur 1883, Tafel XXI angegeben; sie hat zwei sich überschneidende Stäbe  $AC$  und  $BD$ . Es ist  $s = 18$ ,  $p = 8$  und wie früher  $f = 1$ ,  $x = 4$ .

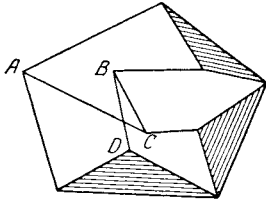


Fig. 274.

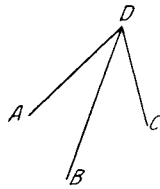


Fig. 275.

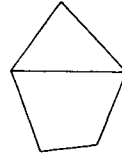


Fig. 276.

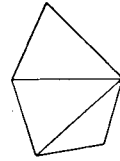


Fig. 277.

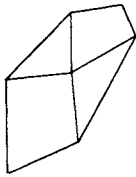


Fig. 278.

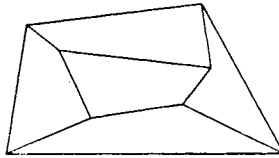


Fig. 279.

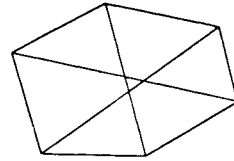


Fig. 280.

#### 154. Aufgaben.

54—59. Von folgenden kinematischen Ketten (Fig. 275 bis 280) soll die Anzahl der fehlenden Stäbe und der Beweglichkeitsgrad angegeben, sowie die Geschwindigkeiten gewählt werden, die zur Angabe des Geschwindigkeitszustandes der Kette notwendig und hinreichend sind.

**155. Kinematische Ketten mit gekrümmten Schiebern.** Die Gleichung für den Beweglichkeitsgrad  $x$  und das Kennzeichen für den Zwangslauf können auch auf Gelenkketten angewendet werden, die gekrümmte Schieber enthalten. Nur muß dann zuerst die Kette mit Hilfe eines Schemas auf eine reine Gelenkkette zurückgeführt werden. So muß die Kette in Fig. 254 durch das Schema Fig. 253a ersetzt werden; die Kette Fig. 255 muß durch das Schema Fig. 255b ersetzt werden, bei dem  $p = 0$ ,  $s = 3$ , also  $x = s - 2p + 2 = 5$  ist.

Die Kette in Fig. 257 muß durch das Schema Fig. 257a ersetzt werden; hier ist  $p = 0$ ,  $s = 5$ ,  $x = 7$ , d. h. es können sieben Bestimmungsstücke des Geschwindigkeitszustandes angenommen werden, z. B. die Geschwindigkeiten von  $A$ ,  $E$  und  $O_{23}$  nach Größe und Richtung, die Geschwindigkeit von  $O_{34}$  nur der Größe nach.

Die Kette in Fig. 260 muß durch Schema Fig. 260a ersetzt werden; es ist  $p = 0$ ,  $s = 3$ ,  $x = 5$ .

In gleicher Weise werden geschlossene und zwangläufige Ketten mit gekrümmten Schiebern zu behandeln sein. Im folgenden sollen einige Beispiele dafür gegeben werden.

Fig. 281 zeigt eine fünfgliedrige geschlossene Kette; die beiden kreisförmig gekrümmten Kulissen 1 und 5 sind durch das Gelenk  $O_{15}$  drehbar verbunden; in ihnen gleiten die Steine 2 und 4, die durch den gelenkig angeschlossenen Stab 3 verbunden sind.

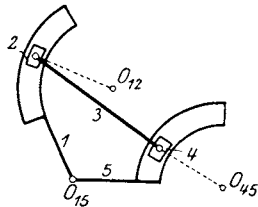


Fig. 281.

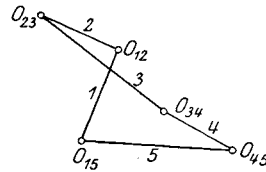


Fig. 281a.

Nennt man  $O_{12}$  und  $O_{45}$  die Krümmungsmittelpunkte der beiden Kulissen,  $O_{23}$  und  $O_{34}$  die Gelenke der beiden Steine, so ist Fig. 281a das Schema dieser Kette. Es ist  $p = 2$ ,  $s = 7$  und der Beweglichkeitsgrad  $x = s - 2p + 2 = 5$ . Die Kette ist flächenläufig.

Fig. 282 stellt eine viergliedrige geschlossene Kette vor: vier nach Kreisbögen gekrümmte Stäbe, deren jeder mit einer Hülse starr verbunden ist, durch die der Nachbarstab gleitet.

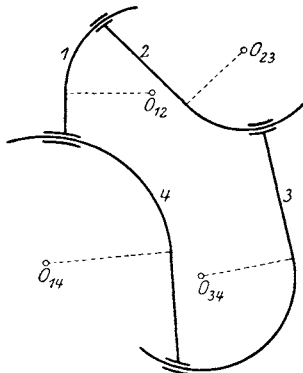


Fig. 282.

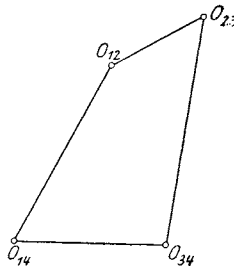


Fig. 282a.

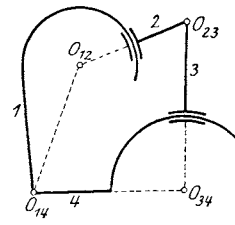


Fig. 283.

Sind  $O_{12}$ ,  $O_{23}$ ,  $O_{34}$ ,  $O_{14}$  die Krümmungsmittelpunkte der Kreisbögen, so ist das Schema dieser Kette Fig. 282a; sie führt auf das zwangläufige Gelenkviereck zurück.

Ebenso Fig. 283.

Die dreigliedrige Schieberkette Fig. 284 führt auf das starre Dreieck  $O_{12}O_{23}O_{13}$  zurück; die Kette ist starr.

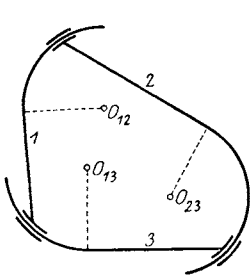


Fig. 284.

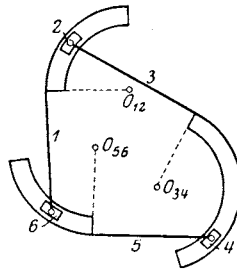


Fig. 285.

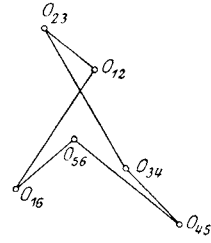


Fig. 285a.

Bei der Kette Fig. 285, die ähnlich der vorigen ist, sind die Stäbe 1, 3, 5 gelenkig mit den Steinen 2, 4, 6 verbunden. Sind  $O_{12}, O_{34}, O_{56}$  die Krümmungsmittelpunkte der drei Kulissen,  $O_{23}, O_{45}, O_{61}$  die Gelenke der drei Steine, so ist Fig. 285a das Schema dieser Kette. Der Beweglichkeitsgrad ist  $x = 6$ .

**156. Kinematische Ketten mit geraden Schiebern.** Auch diese können nach den Regeln für Gelenkketten auf ihren Beweglichkeitsgrad und ihre Zwangsläufigkeit untersucht werden, wenn man die unendlich fernen Krümmungsmittelpunkte als Gelenke einführt. Hiervon sind nur jene Ketten auszuschließen, die nur aus geraden Schiebern zusammengesetzt sind (Schubketten vgl. 159).

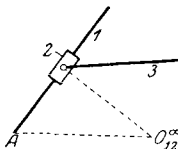


Fig. 286.

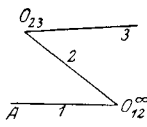


Fig. 286a.

In Fig. 286 gleitet auf der Stange 1 der Schieber 2, an den die Stange 3 gelenkig angeschlossen ist. Die Kette ist identisch mit jener in Fig. 256; Fig. 286a zeigt ihr Schema. Es ist  $s = 3$ ,  $p = 0$  und  $x = 5$ ; die Kette ist flächenläufig.

Fig. 287 zeigt die Wiederholung der früheren Kette; die Stange 3 verbindet die Gelenke der beiden Schieber 2 und 4; Fig. 287a ist das Schema. Es ist  $s = 5$ ,  $p = 0$  und  $x = 7$ .

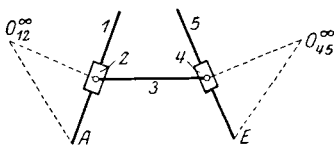


Fig. 287.

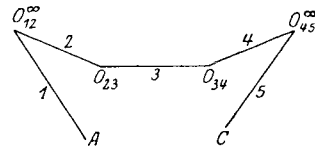


Fig. 287a.

Fig. 288 zeigt eine geschlossene Kette mit zwei Schiebern, die durch die Stange 2 starr miteinander verbunden sind; die Schieber gleiten

auf den Stangen 1 und 3, die durch die Stange 4 gelenkig verbunden sind. Das Schema, Fig. 288a, zeigt das bekannte Gelenkviereck mit zwei unendlich fernen Gelenken.

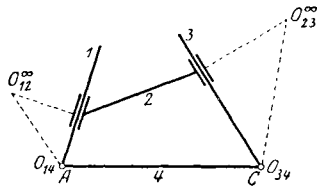


Fig. 288.

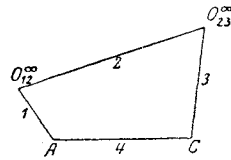


Fig. 288a.

Fig. 289 ist eine Kette mit nur einem unendlich fernen Gelenk; das Schema Fig. 289a ist wieder das Gelenkviereck.

Fig. 290 ist ebenfalls eine viergliedrige Kette, die auf das Gelenkviereck zurückführt; drei seiner Gelenke liegen im Unendlichen. Es ist  $s = 4$ ,  $p = 1$  und  $x = 4$ , die Kette ist zwangläufig.

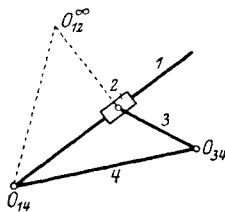


Fig. 289.

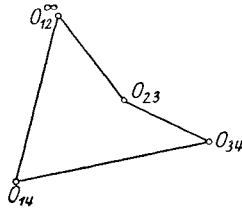


Fig. 289a.

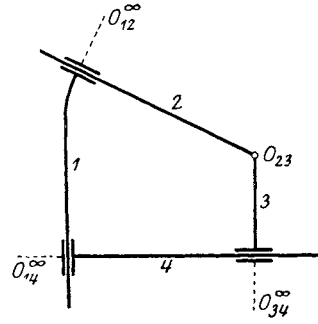


Fig. 290.

Daß die Glieder 2 und 3 zwar gelenkig miteinander verbunden sind, aber keine Drehung gegeneinander vollführen, ändert nichts an der Zwangläufigkeit und dem Charakter der Kette als Gelenkviereck.

**157. Kinematische Ketten mit Scheiben.** Die bisher behandelten Ketten bestanden nur aus Stäben, deren Enden gelenkig miteinander verbunden oder frei waren.

Die meisten Ketten bestehen jedoch aus Stäben und Scheiben. So zeigt Fig. 291 eine Kette, die aus elf Stäben, drei starren Dreiecken, einem starren Viereck und einem starren Fünfeck zusammengesetzt ist. Die übrigen Polygone 1 bis 7 sind veränderlich.

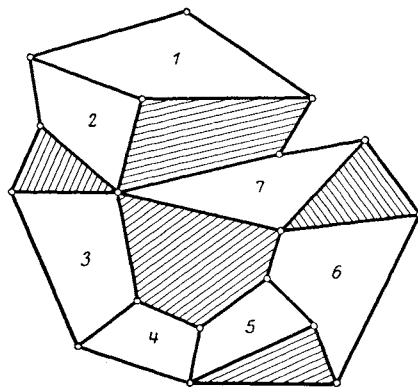


Fig. 291.

In einer solchen Kette gibt es also starre und veränderliche Polygone. Die ersten sind die Scheiben, ihre Anzahl sei  $n_1$ ; die Anzahl der veränderlichen Polygone sei  $\pi$ ; die Anzahl der Stäbe sei endlich  $n_2$ .

Zerlegt man eine Scheibe durch Einziehen der nötigen Stäbe  $s$  in starre Dreiecke, so gilt für jede von ihnen die Gleichung 109:

$$s_1 - 2p_1 = 1$$

und somit für alle  $n_1$ -Scheiben:

$$\Sigma s_1 - 2\Sigma p_1 = n_1.$$

Da die ganze Kette jetzt nur aus Stäben besteht, so gilt Gleichung 111 für den Beweglichkeitsgrad

$$x = s - 2p + 2.$$

Nun ist  $s = \Sigma s_1 + n_2, p = \Sigma p_1 + \pi,$

somit

$$x = n_1 + n_2 - 2\pi + 2$$

und wenn man mit  $n = n_1 + n_2$  die Anzahl aller Glieder der Kette bezeichnet:

$$x = n - 2\pi + 2 \dots \dots \dots 113)$$

und die Anzahl der fehlenden Stäbe

$$f = n - 2\pi - 1 \dots \dots \dots 114)$$

Für Zwanglauf ist  $f = 1$  und somit

$$n = 2(\pi + 1) \dots \dots \dots 115)$$

Hierin bedeutet  $n$  die Anzahl sämtlicher Glieder,  $\pi$  die Anzahl der veränderlichen Polygone.

Anwendungen.

1. Die Kette Fig. 292 hat 6 Glieder (zwei Scheiben und vier Stäbe) und 2 veränderliche Polygone; es ist  $n = 6, \pi = 2$ , die Gleichung 115 für Zwanglauf ist erfüllt.
2. Die Kette Fig. 293 hat vier Scheiben und vier Stäbe; es ist  $n = 8, \pi = 3$ ; die Kette ist ebenfalls zwangläufig.

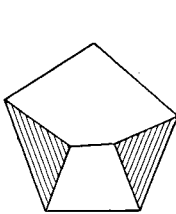


Fig. 292.

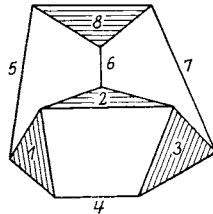


Fig. 293.

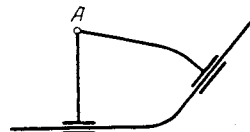


Fig. 294.

3. Die Kette Fig. 294 hat drei Stäbe, von denen zwei ein Gelenk  $A$  mit zwei geraden Schiebern verbinden; es ist  $n = 3, \pi = 1$  und  $x = 3$ ; die Kette ist starr.

Gibt man jedoch nicht zu, daß das Polygon veränderlich ist, dann muß es als starre Scheibe gezählt werden; es ist  $n = 1, \pi = 0$  und wieder  $x = 3$ .

4. Die Kette Fig. 295 hat vier Glieder, die zwei Gelenke mit zwei geraden Schiebern verbinden; es ist  $n = 4$ ,  $\pi = 1$  und  $x = 4$ , die Kette ist zwangläufig.
5. Die Kette Fig. 296 hat ebenfalls vier Glieder, die ein Gelenk mit drei Schiebern verbinden; es ist wie früher  $x = 4$ .

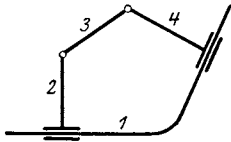


Fig. 295.

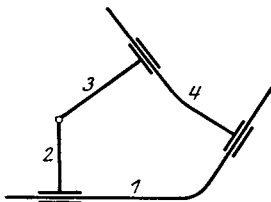


Fig. 296.

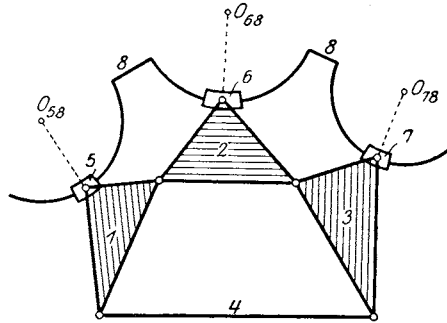


Fig. 297.

6. Die Kette Fig. 297 besteht aus drei gekrümmten Stäben, die zusammen das starre Glied 8 bilden; 5, 6, 7 sind die Hülsen, durch welche sich diese Stäbe schieben. Die Hülsen sind gelenkig mit den Gliedern 1, 2, 3 verbunden. Die Kette hat dasselbe Schema wie Fig. 293; sie ist zwangläufig.
7. Fig. 298 zeigt die gleiche Kette wie die vorige unter der Annahme, daß die Drehpole 15, 26, 37 in die Unendlichkeit fallen. Auch sie ist zwangläufig.

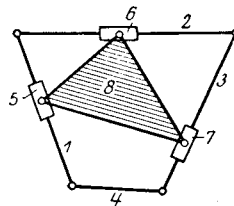


Fig. 298.

8. Fig. 299 zeigt das Getriebe der Stoßmaschine von de Fries & Co. (Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1905, S. 657). Hier sind zwei rotierende Kurbelschleifen mit einer schwingenden gekuppelt. Das Schema dieses Getriebes zeigt Fig. 299a. 0 ist das festgehaltene Grundglied. Die Kette hat  $n = 8$  Glieder (fünf Stäbe und drei Scheiben) und  $\pi = 3$  veränderliche Polygone; die Bedingung 115 für Zwanglauf ist erfüllt.

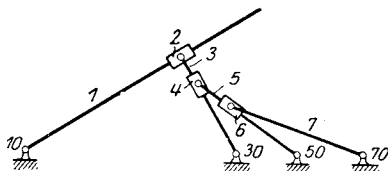


Fig. 299.

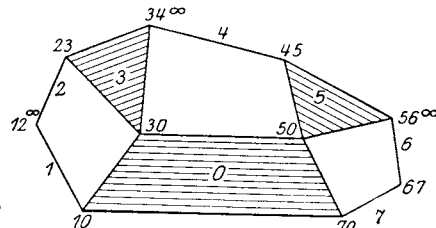


Fig. 299a.



**158. Überkreuzung von Stäben.** Durch das Vorhandensein von Stäben, welche die Kette kreuzen, d. h. zwei Gelenke derart verbinden, daß hierbei andere Stäbe geschnitten werden, wird Gleichung 113 etwas verändert. Tritt nämlich zu einer aus Stäben und Scheiben bestehenden Kette ein kreuzender Stab hinzu, so wird die Anzahl der fehlenden Stäbe um eins vermindert; ist also  $k$  die Anzahl der kreuzenden Stäbe, so ist nach Gleichung 114:

$$f + k = n - 2\pi - 1 \dots\dots\dots 116)$$

und der Beweglichkeitsgrad  $x$ :

$$x + k = n - 2\pi + 2 \dots\dots\dots 117)$$

Für Zwangslauf ist

$$n - k = 2(\pi + 1) \dots\dots\dots 118)$$

Die Ausdrücke auf der rechten Seite dieser drei Gleichungen sind erst nach Wegnahme der kreuzenden Stäbe zu bilden.

So hat z. B. die Kette Fig. 268 einen kreuzenden Stab  $AB$ ; entfernt man ihn, so wird  $n = 8$ ,  $\pi = 3$ ; dann wird Gleichung 116

$$f + 1 = 8 - 6 - 1 \text{ oder } f = 0;$$

die Kette ist starr.

Die bereits besprochene Kette Fig. 274 hat ebenfalls einen kreuzenden Stab  $BD$ ; es ist nach dessen Wegnahme:  $n = 9$ ,  $\pi = 3$  und somit wird Gleichung 116 mit  $k = 1$ :

$$f + 1 = 9 - 6 - 1 \text{ oder } f = 1;$$

die Kette ist zwangsläufig.

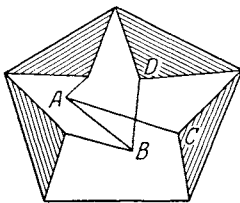


Fig. 300.

Die in Fig. 300 gezeichnete Kette gibt O. Mohr in seiner Abhandlung: „Beiträge zur Geometrie der Bewegung“, Zeitschr. f. Math. u. Physik, 1903, an. Nimmt man hier den kreuzenden

Stab  $BD$  weg, so bleibt  $n = 9$ ,  $\pi = 3$  und es ist mit  $k = 1$  wie in der früheren Kette  $f = 1$ .

**159. Schubketten.** Schubketten haben keine Gelenke, sondern nur geradlinige Schieber. Bei diesen muß die Gleichung für den Beweglichkeitsgrad in anderer Weise abgeleitet werden.

Drei Stäbe, die durch drei Gelenke miteinander verbunden sind, haben den Beweglichkeitsgrad 3, d. h. sie bilden ein starres Fachwerk.

Liegen jedoch die drei Gelenke in einer Geraden (Fig. 301), dann ist die Kette nicht starr, sondern besitzt unendlich kleine Beweglichkeit. Hält man z. B.  $O_{12}O_{13}$  fest, so wird das Gelenk  $O_{23}$  nach oben und unten einen (theoretisch) unendlich kleinen Weg zurücklegen können.

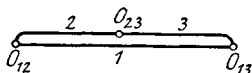


Fig. 301.

Denkt man sich diese drei Gelenke durch drei Schieber ersetzt, so erhält man Fig. 302; sie sind identisch mit drei unendlich fernen Ge-

lenken  $O_{12}^\infty O_{13}^\infty O_{23}^\infty$ , die auf der unendlich fernen Geraden der Ebene liegen; die Fig. 301 gilt also auch hier wieder, nur sind die Abstände  $O_{12}O_{13}$ ,  $O_{12}O_{23}$ ,  $O_{23}O_{13}$  unendlich groß und die unendlich kleine Bewegung, die das Gelenk  $O_{23}$  früher, bei endlichen Entfernungen ausführen konnte, wird jetzt endlich werden, d. h. die Kette der drei Schieber in Fig. 302 wird zwangläufig.

Nennt man also  $n$  die Anzahl der Glieder und  $\pi_S$  die Anzahl der veränderlichen Polygone, die von den Schiebern gebildet werden, so ist für  $n = 3$ ,  $\pi_S = 1$  der Beweglichkeitsgrad  $x = 4$ .

Fügt man der Kette das Glied 4 hinzu, das wieder mit zwei geraden Schiebern an 1 und 2 gleitet, so wird an der Zwangläufigkeit nichts gestört; es ist dann (Fig. 303)

$$n = 4, \pi_S = 2 \text{ und wieder } x = 4.$$

Dasselbe gilt, wenn das Glied 5 mit zwei geraden Schiebern an 3 und 4 angeschlossen wird (Fig. 304); es ist

$$n = 5, \pi_S = 3 \text{ und nochmals } x = 4.$$

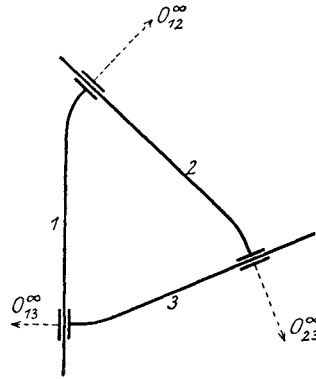


Fig. 302.

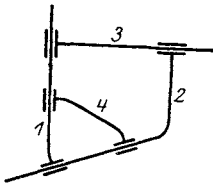


Fig. 303.

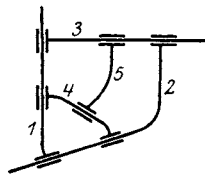


Fig. 304.

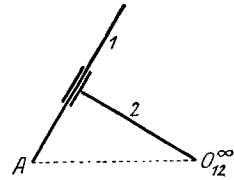


Fig. 305.

Man erhält so allgemein für den Beweglichkeitsgrad einer Schubkette:

$$x = n - \pi_S + 2 \dots \dots \dots 119)$$

und für deren Zwanglauf mit  $x = 4$ :

$$n = \pi_S + 2 \dots \dots \dots 120)$$

In Fig. 305, die eine offene Schubkette darstellt, ist  $n = 2$ ,  $\pi_S = 0$ ,  $x = 4$ ; die Kette ist zwangläufig.

Auch die folgenden Ketten sind offene Schubketten; in Fig. 306 ist  $n = 3$ ,  $\pi_S = 0$ ,  $x = 5$ ; die Kette ist flächenläufig. In Fig. 307 ist  $n = 4$ ,  $\pi_S = 0$ ,  $x = 6$ .

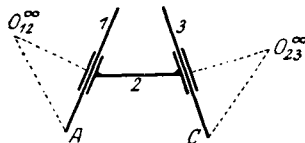


Fig. 306.

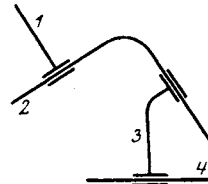


Fig. 307.

In Fig. 308 sind drei Platten oder Stäbe gezeichnet, die sich geradlinig aneinander verschieben können; das Schema ist aus Fig. 308a zu sehen. Es ist  $n = 3$ ,  $\pi_S = 0$ ,  $x = 5$ .

Aus der Ableitung der Gleichung 119 geht hervor, daß man in einer geschlossenen Schubkette jedes Glied, das nur zwei Schieber verbindet, entfernen kann, ohne an dem Beweglichkeitsgrad etwas zu ändern; so kann z. B. in Fig. 302 eines der drei Glieder, in Fig. 303 zuerst 4, und sodann noch eines der drei anderen Glieder entfernt werden.

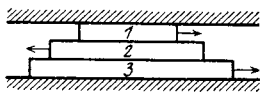


Fig. 308.



Fig. 308 a.

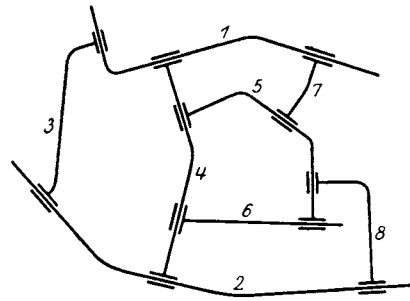


Fig. 309.

In der Schubkette Fig. 309 ist  $n = 8$ ,  $\pi_S = 4$  und  $x = 6$ . Man kann jedoch auch zuerst das Glied 7 entfernen, da hierdurch der Beweglichkeitsgrad nicht geändert wird, sodann das Glied 8, dann 5 und endlich 3; es bleiben somit nur die Glieder 1, 2, 4 und 6; bei dieser Kette ist dann  $n = 4$ ,  $\pi_S = 0$  und  $x = 6$ .

**160. Die Gleichung für den Beweglichkeitsgrad.** Ist eine kinematische Kette aus Gelenkketten und Schubketten zusammengesetzt und hat sie überdies überkreuzende Stäbe, so lautet die Gleichung für ihren Beweglichkeitsgrad:

$$x + k = n - 2\pi - \pi_S + 2 \quad \dots \dots \dots 121)$$

und für Zwanglauf mit  $x = 4$ :

$$n - k = 2\pi + \pi_S + 2 \quad \dots \dots \dots 122)$$

Hierin ist  $k$  die Anzahl der kreuzenden Stäbe; die rechte Seite ist erst zu bilden, nachdem die kreuzenden Stäbe entfernt wurden, d. h. so viele Stäbe entfernt wurden, daß keine Überkreuzung mehr vorkommt;  $n$  ist die Anzahl der Stäbe und Scheiben;  $\pi_S$  die Anzahl der Polygone, die nur von geraden Schiebern gebildet werden;  $\pi$  die Anzahl der übrigen veränderlichen Polygone.

Vor Feststellung von  $k$  und  $\pi_S$  empfiehlt es sich, alle jene Glieder aus der Kette zu entfernen, die einer Schubkette angehören und nur zwei Schieber verbinden.

Bei der Ableitung der Gleichung 121 wurde Verfasser in dankenswerter Weise von seinem ehemaligen Assistenten, Herrn Ingenieur Dr. K. Kriso unterstützt.

In der Kette Fig. 310 ist  $k = 0$ ,  $n = 5$ ,  $\pi = 1$ ,  $\pi_S = 1$  und somit  $x = 4$ ; die Kette ist zwangläufig. Man könnte aber auch vorher das Glied 3 entfernen; denn es gehört der Schubkette 1, 2, 3 an und verbindet zwei Schieber miteinander. Dann wäre  $n = 4$ ,  $\pi = 1$ ,  $\pi_S = 0$  und  $x = 4$ .

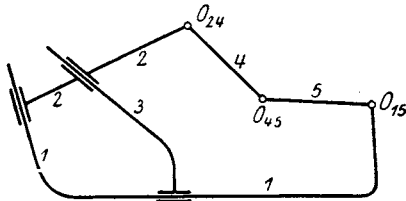


Fig. 310.

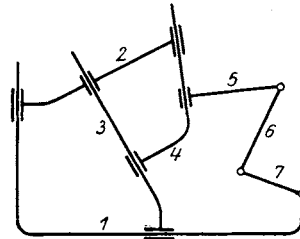


Fig. 311.

In der Kette Fig. 311 ist  $k = 0$ ,  $n = 7$ ,  $\pi = 1$ ,  $\pi_S = 2$  und somit  $x = 5$ ; die Kette ist flächenläufig. Hier darf kein Glied entfernt werden denn das Glied 1 verbindet zwei Schieber und ein Gelenk, das Glied 2 verbindet drei Schieber, ebenso die Glieder 3 und 4.

In der Kette Fig. 312, die aus zehn Gliedern, vier Gelenken und sieben Schiebern besteht, entfernt man zunächst den kreuzenden Stab 9, der ein Gelenk mit einem Schieber verbindet; dann bleibt  $n = 9$ ,  $\pi = 1$ ,  $\pi_S = 1$  und nach Gleichung 121

$$x + 1 = 9 - 2 - 1 + 2$$

oder  $x = 7$ . Man könnte aber auch den Stab 10 ohne weiteres weglassen, da er der Schubkette 1, 2, 3, 4, 5, 10 angehört und nur zwei Schieber

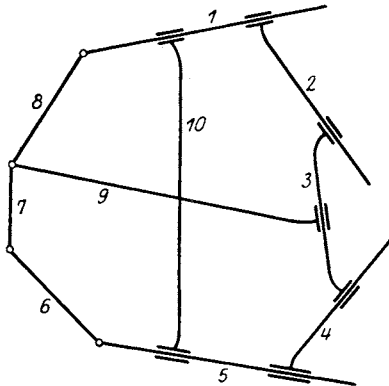


Fig. 312.

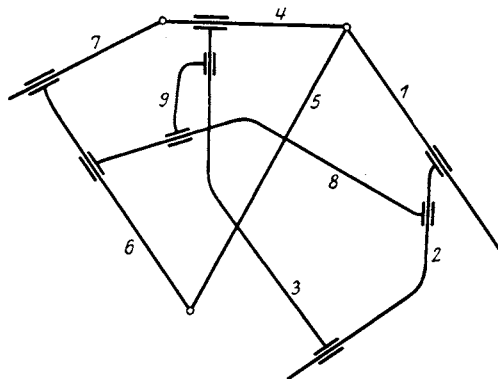


Fig. 313.

verbindet; für die übrige Kette ist dann  $k = 0$ ,  $n = 9$ ,  $\pi = 2$ ,  $\pi_S = 0$  und Gleichung 121 wird  $x + 0 = 9 - 4 + 2$  oder  $x = 7$ .

Fig. 313 zeigt eine Kette, die aus neun Gliedern, drei Gelenken und acht Schiebern besteht. Das Glied 9 gehört der Schubkette 9, 8, 2, 3 an und verbindet zwei Schieber, kann also weggelassen werden; das

Glied 8 gehört sodann keiner Schubkette mehr an und wird als kreuzender Stab weggenommen; ebenso das Glied 3. Die Kette, die schließlich übrig bleibt, ist aus Fig. 313a

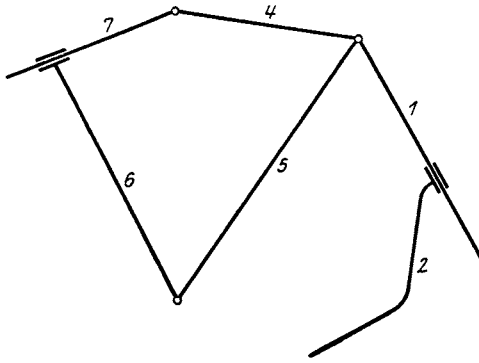


Fig. 313a.

zu ersehen; es ist  $k = 2$ ,  $n = 6$ ,  $\pi = 1$ ,  $\pi_S = 0$  und somit nach Gleichung 121:

$$x + 2 = 6 - 2 - 0 + 2$$

oder  $x = 4$ ; die Kette ist zwangsläufig.

**161. Das Kennzeichen des Zwanglaufes von M. Grübler.**

In einer starren Kette kann kein Glied vorkommen, das nur ein Gelenk enthält. Die Glieder, welche die Gelenke

einer starren Kette miteinander verbinden, haben also mindestens zwei Gelenke. Die starre Kette wird eine Aufeinanderfolge von starren Figuren sein, starren Dreiecken, Vierecken, usw.

Zwei Gelenke bedürfen, um die Starrheit des sie verbindenden Gliedes zu ermöglichen, der Angabe einer einzigen Bedingung, nämlich der unveränderlichen Entfernung der Gelenke. Ein Glied, das drei Gelenke starr miteinander verbindet, bedarf zur Festsetzung seiner Starrheit dreier Bedingungen, der drei unveränderlichen Entfernungen der Gelenke. Ebenso bedarf ein Glied, das vier Gelenke starr verbindet, fünf Bedingungen; allgemein, ein Glied, das  $m$  Gelenke starr verbindet, bedarf der Angabe von  $2m - 3$  Bedingungen.

Nennt man  $n_2, n_3, \dots, n_m$  die Anzahl der Glieder mit 2, 3,  $\dots, m$  starr verbundenen Gelenken, so ist die Anzahl aller Bedingungen, die für die Starrheit der Kette erforderlich ist:

$$n_2 + 3n_3 + 5n_4 + \dots + (2m - 3)n_m$$

oder 
$$\sum_2^m [(2m - 3)n_m].$$

Nun ist die Kette selbst eine starre Figur; hat sie im ganzen  $g$  Gelenke, so erfordert die Starrheit  $(2g - 3)$  Bedingungen; es ist also

$$\sum_2^m [(2m - 3)n_m] = 2g - 3$$

das Kennzeichen der Starrheit der Kette.

Fehlt auf der linken Seite eine Bedingung, so fehlt ein Stab zur Starrheit und die Kette wird zwangsläufig; es ist dann

$$\sum_2^m [(2m - 3)n_m] = 2g - 4$$

oder 
$$x = 2g - \sum_2^m [(2m - 3)n_m] = 4 \dots \dots \dots 123)$$

das Kennzeichen der Zwangläufigkeit. Der Ausdruck für  $x$  bedeutet den Beweglichkeitsgrad der Kette (vgl. 152).

Der Gleichung 123 kann zweckmäßig eine andere Form gegeben werden. Es ist

$$\Sigma [(2m - 3)n_m] = 2 \Sigma (mn_m) - 3 \Sigma n_m.$$

Zunächst ist  $\Sigma n_m = n$

die Anzahl aller Glieder der Kette; ferner ist die Anzahl aller Gelenke der Kette

$$g = \frac{1}{2} \Sigma (mn_m),$$

da in  $\Sigma (mn_m)$  alle Gelenke doppelt gezählt sind. Dann nimmt aber Gleichung 123 die Gestalt an

$$x = 3n - 2g = 4 \dots \dots \dots 124)$$

Hierin ist  $n$  die Anzahl aller Glieder,  $g$  die Anzahl aller Gelenke der kinematischen Kette. Die Gleichungen 123 und 124 für den Zwanglauf stammen von M. Grübler (Getriebelehre S. 15)<sup>1)</sup>. Sie sind für Ketten, die nur Gelenke enthalten, stets zutreffend, wobei allerdings darauf geachtet werden muß, ob die Gelenke einfach oder mehrfach zu zählen sind. So sind z. B. in Fig. 273 die Gelenke  $A, B, C, D$  nicht einfach, sondern doppelt zu zählen; es ist also  $n = 8, g = 10$  und  $x = 4$ .

In Fig. 274 sind die Gelenke  $A, B, C$  doppelt zu zählen, also bei drei Dreiecksgliedern und sieben Stäben  $n = 10, g = 13$  und  $x = 4$ .

Bei der Kette Fig. 300 sind die Gelenke  $A$  und  $B$  doppelt zu zählen, also bei vier Dreiecksgliedern und sechs Stäben  $n = 10, g = 13$  wie oben  $x = 4$ .

Hingegen ist das Kennzeichen Gleichung 124 auf Ketten mit geraden Schiebern nur mit gewissen Einschränkungen anwendbar, die Grübler in seiner Getriebelehre S. 21 u. f. anführt.

**162. Beispiele.** In vielen Fällen wird es auch ohne die mitgeteilten Kennzeichen leicht sein, die Zwangläufigkeit einer kinematischen Kette durch bloße Überlegung festzustellen. Dies trifft besonders bei allen jenen Ketten zu, die aus Gelenkvierecken oder Abarten davon zusammengesetzt sind (vgl. die Fig. 289, 299).

Aber schon bei verhältnismäßig einfachen Ketten läßt sich die Zwangläufigkeit nur mühsam entscheiden (vgl. die Fig. 281, 282, 285, 293, 297, 302, 310) und dann ist es angenehm, ein zutreffendes Kennzeichen zu besitzen.

Geradezu unentbehrlich wird dieses aber, wenn der Beweglichkeitsgrad einer komplizierten Kette entschieden werden soll. Dies soll an einigen Beispielen gezeigt werden.

<sup>1)</sup> Vgl. auch Civil-Ingenieur 1883, S. 167 und Verhandl. d. Vereins zur Beförderung des Gewerbefleißes in Preußen 1885, S. 179.

1. Beispiel. Das Steuerungsgetriebe von Collmann. In Fig. 314, die diese Steuerung darstellt, sind  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{D}$  feste Gelenke; das bewegliche Gelenk  $H$  wird gerade geführt, was durch das unendlich ferne, feste Gelenk  $\mathfrak{J}^\infty$  angedeutet werden kann; das Grundglied ist

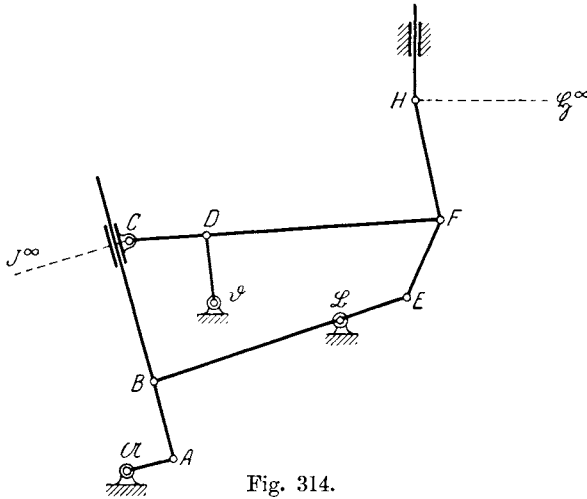


Fig. 314.

also das Viereck  $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{J}^\infty\mathfrak{D}$ , vgl. das Schema Fig. 314a. Der Hebel  $B\mathfrak{B}E$  und die Verbindungsstange  $CDF$  sind Dreiecksglieder. Die Stange  $AB$  verschiebt sich bei  $C$  in einer geraden Hülse; dies ist im Schema durch die Einschaltung des mit  $AB$  fest verbundenen, unendlich fernen Gelenkes  $\mathfrak{J}^\infty$  und des Stabes  $\mathfrak{J}^\infty C$  angedeutet worden.

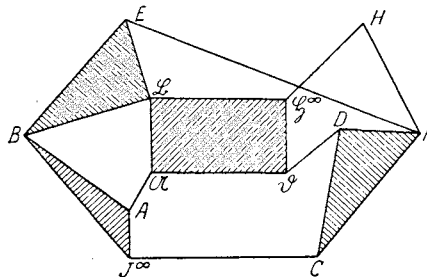


Fig. 314 a.

Das Kennzeichen von M. Grübler, Gleichung 124, auf dieses Getriebe angewendet, gibt wegen  $n = 10$ ,  $g = 13$  ( $F$  ist doppelt zu zählen als zweifaches Gelenk):  $x = 3n - 2g = 4$ .

Das Kennzeichen Gleichung 121 gibt, wenn man den kreuzenden Stab  $EF$  wegnimmt:

$$n = 9, \pi = 3, k = 1 \text{ und } x = (n - 2\pi + 2) - k = 4;$$

das Getriebe ist zwangläufig.

2. Beispiel. Steuerung für Zwillingsdampfmaschinen von H. W. Morley, Bradford und Th. Hohlehouse (Fig. 315). Die Zeichnung des Getriebes wurde etwas verzerrt und auseinander gezogen, um die einzelnen Teile deutlicher zu machen.  $a, a_1$  sind die beiden Kolbenstangen,  $k, k_1$  die Kreuzköpfe,  $r$  und  $r_1$  die beiden (starr miteinander verbundenen) Kurbeln;  $P$  und  $P_1$  sind die Lager der Welle,  $l$  und  $l_1$  die Schubstangen für den Schieberantrieb der beiden Zylinder. Die Schubstange  $l_1$  erhält eine Bewegung, die aus jener der beiden Kreuzköpfe  $k$  und  $k_1$  abgeleitet wird, indem die drehbaren Hülsen  $H_1$  und  $D_1$  die Hebel  $F_1H_1$  mit dem festen Drehpunkt  $E_1$  und  $G_1D_1$  mit dem Dreh-

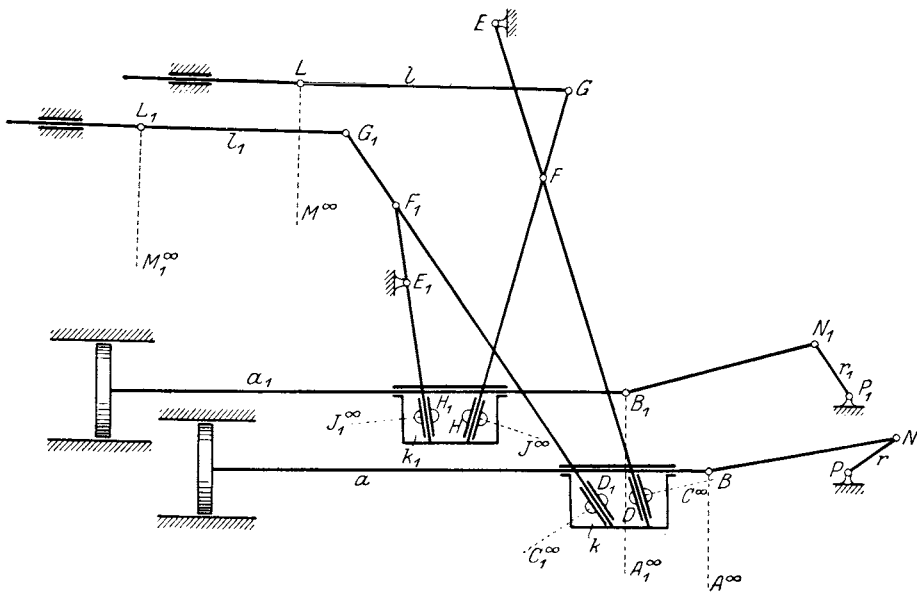


Fig. 315.

punkt  $F_1$  in Schwingungen versetzen, so daß beide Bewegungen sich bei gleichgerichtetem Kolbenhub addieren, bei entgegengesetzt gerichtetem subtrahieren. Dadurch wird der Grundschieber die Dampfwege schnell öffnen und schließen, dann aber nahezu stillstehen.

Eine ähnliche Bewegung erhält die Schubstange  $l$ , nur sind hier die Hebelarme  $EF$  und  $ED$  gleichgerichtet; dadurch wird erreicht, daß sich gleichgerichtete Kolbenbewegungen für  $l$  subtrahieren, entgegengesetzt gerichtete addieren werden.

Das Schema dieses komplizierten Getriebes zeigt Fig. 315a. Die Drehpole  $A, A_1, C, C_1, J, J_1, M, M_1$  liegen unendlich fern. Die Kette hat 10 Stangen, 5 Dreiecksglieder, zwei Vierecksglieder und ein Sieben-ecksglied (Fundament). Außerdem hat die Kette 25 Gelenke.



Wendet man das Kennzeichen Gleichung 124 von M. Grübler an, so ist  $n = 18$ ,  $g = 25$ , also

$$x = 3n - 2g = 4.$$

Wendet man das Kennzeichen Gleichung 121 an und denkt die kreuzenden Stäbe  $DC^\infty$ ,  $H_1J_1^\infty$ ,  $HJ^\infty$ ,  $D_1C_1^\infty$  weggenommen, so bleiben außer

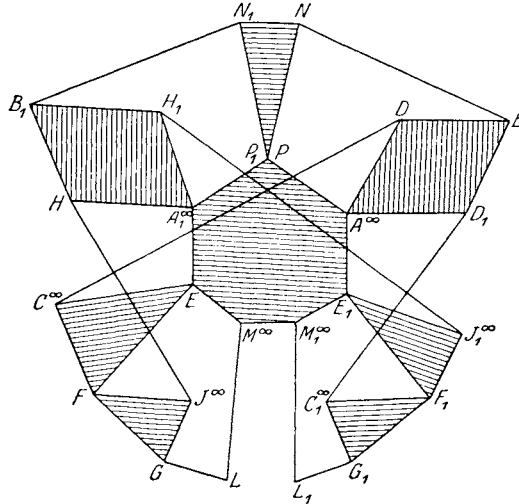


Fig. 315a.

den acht schraffierten Scheiben noch sechs Stäbe übrig, also  $n = 8 + 6 = 14$ ,  $k = 4$ ; die Anzahl der veränderlichen Polygone ist  $\pi = 4$ ,  $\pi_S = 0$ . Somit ist der Beweglichkeitsgrad

$$x = (n - 2\pi + 2) - k = 4;$$

die Kette ist zwangläufig.

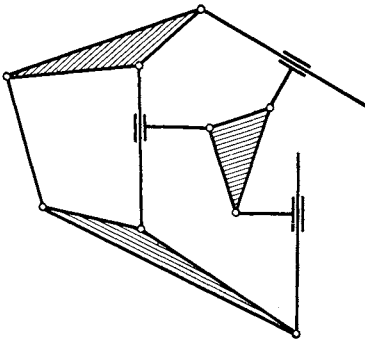


Fig. 316.

### 163. Aufgaben.

60—65. Von den in Fig. 291, 316, 371, 706, 711, 719 dargestellten Ketten ist anzugeben, welchen Beweglichkeitsgrad sie besitzen und ob sie zwangläufig sind.

66—76. Die in den Fig. 361, 367, 369, 370, 372, 373, 374, 375, 687, 688, 689 gezeichneten Ketten sind auf ihre Zwangläufigkeit zu prüfen.

## XVI. Die Relativbewegung mehrerer Systeme.

164. **Zwei Scheiben mit gleichgerichteten Drehungen.** In der festen Ebene der Zeichnung würde sich die Scheibe 1 im Zeitteilchen  $dt$  um den Punkt  $O_1$  der festen Ebene und den Winkel  $d\varphi_1$  verdrehen (Fig. 317).

Um einen anderen Punkt  $O_2$  der Scheibe 1 würde sich während derselben Zeit eine zweite Scheibe 2 um den Winkel  $d\varphi_2$  verdrehen, und zwar im gleichen Sinne. Diese letztere Drehung nennt man die Relativbewegung der Scheibe 2 in bezug auf die Scheibe 1.

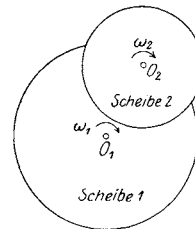


Fig. 317.

Da der Mittelpunkt  $O_2$  ein Punkt der Scheibe 1 ist, wird er deren Drehung um  $O_1$  mitmachen, d. h. die Drehung der Scheibe 1 wird durch  $O_2$  auch auf die Scheibe 2 übertragen; infolgedessen hat die Scheibe 2 eine zweifache Bewegung: die Drehung um  $O_1$  und die Relativbewegung, die Drehung um  $O_2$ . Das Resultat aus diesen beiden gleichzeitig stattfindenden Bewegungen wird eine dritte Bewegung sein, die man auf folgende Weise finden kann.

Untersuchen wir die Bewegung, die ein beliebiger Punkt  $A$  der Geraden  $O_1O_2$  einschlägt (Fig. 317a), wenn er der Scheibe 2 angehört. Durch die Drehung  $d\varphi_1$  um  $O_1$  legt er den kleinen Weg  $a_1 \cdot d\varphi_1$  senkrecht zu  $O_1O_2$  zurück, durch die Drehung  $d\varphi_2$  um  $O_2$  den kleinen Weg  $a_2 \cdot d\varphi_2$ , ebenfalls senkrecht zu  $O_1O_2$ . Liegt  $A$  zwischen  $O_1$  und  $O_2$ , so werden diese beiden kleinen Wege  $a_1 \cdot d\varphi_1$  und  $a_2 \cdot d\varphi_2$  entgegengesetzte Richtung besitzen. Wir können nun den Punkt  $A$  derart wählen, daß

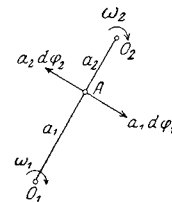


Fig. 317 a.

$$a_1 \cdot d\varphi_1 + a_2 \cdot d\varphi_2 = 0 \dots \dots \dots a)$$

ist; dann bleibt aber  $A$  in Ruhe. Die Scheibe 2 besitzt demnach einen Punkt, der durch die gleichzeitigen Drehungen um  $O_1$  und  $O_2$  nicht bewegt wird, also in Ruhe verharrt in bezug auf die feste Ebene der Zeichnung. Wir nennen diesen Punkt den Drehpol der Scheibe 2 in bezug auf die ruhende Ebene und bezeichnen ihn mit  $O$ .

Fig. 318 wird dieses Resultat noch besser zur Anschauung bringen. Durch die Drehung  $d\varphi_1$



Fig. 318.

um  $O_1$  gelangt der Punkt  $O_2$  nach  $O_2'$ ; durch die darauf folgende Drehung  $d\varphi_2$  um  $O_2'$  kommt  $O_1$  nach  $O_1'$ . Der Schnittpunkt  $O$  der beiden Geraden  $O_1O_2'$  und  $O_1'O_2$  wird in Ruhe bleiben, da er durch die Drehung um  $O_1$  um ebensoviel nach abwärts bewegt wird wie durch die Drehung um  $O_2$  nach aufwärts; es ist wieder  $a_1 \cdot d\varphi_1 + a_2 \cdot d\varphi_2 = 0$ . Gleichzeitig entnimmt man aber aus Fig. 318, daß die Drehung um diesen neuen Drehpol  $O$  die Größe hat:

$$d\varphi = d\varphi_1 + d\varphi_2 \dots \dots \dots b)$$

Man kann dies übrigens auch für einen beliebigen Punkt  $A$  der Scheibe 2 beweisen. Nimmt man diesen Punkt in den beliebigen Abständen  $r_1$  und  $r_2$  von  $O_1$  und  $O_2$  an (Fig. 319), so legt er durch die Drehung um  $O_1$  den kleinen Weg  $AA' = r_1 \cdot d\varphi_1$ , durch die darauffolgende Drehung

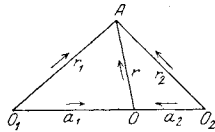


Fig. 319.

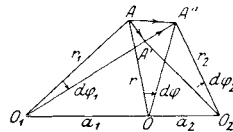


Fig. 319 a.

um  $O_2$  den kleinen Weg  $A'A'' = r_2 \cdot d\varphi_2$  zurück (Fig. 319a); es ist  $AA' \perp r_1$ ,  $A'A'' \perp r_2$ . Der resultierende Weg  $AA''$  müßte dann eine Drehung um den Drehpol  $O$  sein, also

$$\overline{AA''} \equiv \overline{AA'} + \overline{A'A''}$$

oder 
$$r \cdot d\varphi \equiv r_1 \cdot d\varphi_1 + r_2 \cdot d\varphi_2.$$

Nun ist  $r_1 \equiv a_1 + r$ ,  $r_2 \equiv a_2 + r$  (vgl. Fig. 319a),

also 
$$r \cdot d\varphi \equiv (a_1 + r) d\varphi_1 + (a_2 + r) d\varphi_2$$

oder 
$$r \cdot d\varphi \equiv r(d\varphi_1 + d\varphi_2) + (a_1 d\varphi_1 + a_2 d\varphi_2).$$

Mit Benützung von Gleichung a) bleibt

$$d\varphi = d\varphi_1 + d\varphi_2,$$

wie schon früher gezeigt wurde.

Dividiert man diese Gleichung durch das Zeitteilchen  $dt$  und nennt

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt}, \quad \omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt}$$

die Winkelgeschwindigkeiten, so ist

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 \dots \dots \dots 125)$$

darin ist  $\omega_1$  die Winkelgeschwindigkeit der Scheibe 1 in bezug auf die ruhende Zeichenebene (absolute Winkelgeschwindigkeit),  $\omega_2$  die relative Winkelgeschwindigkeit der Scheibe 2 in bezug auf die Scheibe 1 und  $\omega$  die absolute Winkelgeschwindigkeit der Scheibe 2 in bezug auf die ruhende Zeichenebene.

Die Gleichung a) nimmt damit die Form an:

$$a_1 \omega_1 + a_2 \omega_2 = 0 \quad \dots \dots \dots 126)$$

oder

$$a_1 : -a_2 = \omega_2 : \omega_1;$$

das Vorzeichen von  $a_2$  erklärt sich damit, daß  $O_1O$  und  $O_2O$  entgegengesetzte Richtung haben.

Die Gleichungen 125 und 126 erinnern an die Bestimmung des Schwerpunkts zweier schwerer Punkte. Werden nämlich in den Punkten  $O_1$  und  $O_2$  als Gewichte die gleichgerichteten Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_1$  und  $\omega_2$  angebracht, so ist der Schwerpunkt dieser Gewichte der Drehpol  $O$ ; das Gewicht dieses Punktes ist  $\omega_1 + \omega_2$ , also die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um  $O$ .

Man kann demnach den resultierenden Drehpol  $O$  genau so konstruieren, wie man gewohnt ist, den Schwerpunkt zu finden; man zieht durch  $O_1$  (Fig. 320) und  $O_2$  zwei beliebige parallele Gerade, trägt die Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_1$  und  $\omega_2$  nach einem beliebig gewählten Maßstab auf diesen Geraden auf,  $\omega_1$  auf der Geraden durch  $O_2$ ,  $\omega_2$  auf der Geraden durch  $O_1$ , und zwar in entgegengesetzter Richtung und verbindet die so erhaltenen Punkte; dann ist der Schnitt dieser Verbindungslinie mit  $O_1O_2$  der Drehpol  $O$ .

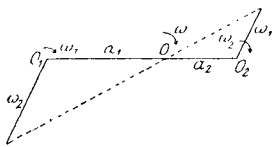


Fig. 320.

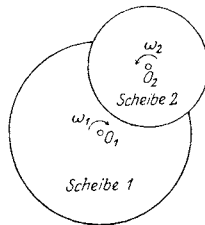


Fig. 321.

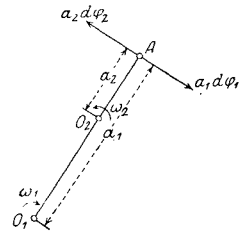


Fig. 321 a.

**165. Zwei Scheiben mit entgegengesetzten Drehungen.** Die Ausführungen des vorigen Abschnittes sind nicht wesentlich abzuändern, wenn der Drehungssinn der beiden Scheiben 1 und 2 nicht gleichgerichtet, sondern entgegengesetzt ist (Fig. 321).

Auch hier wird es auf der Scheibe 2, die auf der Scheibe 1 festgelagert ist und somit deren Bewegung mitmacht, einen Punkt geben (Fig. 321 a), der in bezug auf die ruhende Ebene der Zeichnung stillestehen wird; dies erfordert wie früher die Bedingung a):

$$a_1 \cdot d\varphi_1 + a_2 \cdot d\varphi_2 = 0$$

oder die Gleichung 126:

$$a_1 \omega_1 + a_2 \omega_2 = 0,$$

die zum Unterschiede von früher auch so angeschrieben werden kann:

$$a_1 : a_2 = -\omega_2 : \omega_1;$$

hier haben  $O_1O$  und  $O_2O$  dieselbe Richtung, hingegen hat  $\omega_2$  den entgegengesetzten Drehungssinn von  $\omega_1$ . Die resultierende Drehung der

Scheibe 2 in bezug auf die ruhende Ebene ist also auch hier eine Drehung um einen Punkt  $O$ ; aber dieser resultierende Drehpol liegt nicht mehr zwischen  $O_1$  und  $O_2$ , sondern außerhalb der Strecke  $O_1O_2$ , und zwar auf Seite der größeren Winkelgeschwindigkeit  $\omega_2$ .

Fig. 322 macht dieses Resultat recht deutlich. Läßt man die beiden unendlich kleinen Drehungen  $d\varphi_1$  und  $d\varphi_2$  um  $O_1$  und  $O_2$  nicht gleichzeitig, sondern nacheinander vor sich gehen und beginnt mit  $d\varphi_1$ , so gelangt  $O_2$  nach  $O_2'$ ; fügt man die Drehung  $d\varphi_2$  um  $O_2'$  hinzu, so kommt  $O_1$  nach  $O_1'$ ; die Gerade  $O_1O_2$  hat sich also im ganzen um den Winkel  $d\varphi$  nach  $O_1'O_2'$  gedreht, und zwar ist

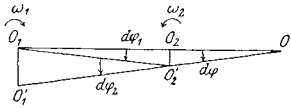


Fig. 322.

$$d\varphi = d\varphi_2 - d\varphi_1 \dots \dots \dots b')$$

Statt diese Aufeinanderfolge der Drehungen an den Punkten  $O_1$  und  $O_2$  vorzuführen, kann man auch wie früher einen beliebigen Punkt  $A$  der Scheibe 2 ins Auge fassen (Fig. 323); durch die Drehung  $d\varphi_1$  um  $O_1$  kommt  $A$  nach  $A'$ , um hierauf durch die entgegengesetzte Drehung  $d\varphi_2$  um  $O_2$  nach  $A''$  zu gelangen; der resultierende Weg  $\overline{AA''} = \overline{AA'} + \overline{A'A''}$  kann dann durch die Drehung  $d\varphi$  um  $O$  hervorgerufen werden. Durch eine ähnliche Betrachtung wie früher erhält man hier für die Größe der resultierenden Drehung denselben Ausdruck wie in b').

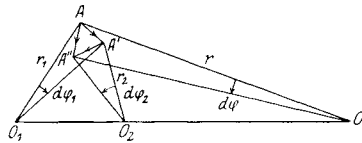


Fig. 323.

Dividiert man Gleichung b' durch  $dt$ , so erhält man

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi_2}{dt} - \frac{d\varphi_1}{dt}$$

oder

$$\omega = \omega_2 - \omega_1 \dots \dots \dots 127)$$

Auch in diesem Falle, in dem die Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_1$  und  $\omega_2$  entgegengesetzten Drehungssinn besitzen, kann der resultierende Drehpol  $O$  mit Hilfe einer Schwerpunktskonstruktion gefunden werden (Fig. 324). Man zieht dann durch  $O_1$  und  $O_2$  zwei beliebige parallele Gerade, trägt  $\omega_1$  von  $O_2$  aus,  $\omega_2$  von  $O_1$  aus auf diesen Geraden auf und zwar in derselben Richtung, verbindet die so erhaltenen Punkte und bringt diese Verbindungslinie zum Schnitt mit  $O_1O_2$ ; der Schnitt ist der gesuchte Drehpol  $O$ . Sein Gewicht ist  $\omega = \omega_2 - \omega_1$ .

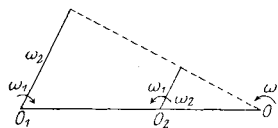


Fig. 324.

**166. Zwei Scheiben mit gleichen entgegengesetzten Drehungen.** Ein Fall verdient noch besondere Erwähnung, nämlich wenn die Scheiben 1 und 2 sich mit gleichen Winkelgeschwindigkeiten  $\omega$  in entgegengesetzter Richtung drehen. In diesem Falle wird aus der Fig. 322 die Fig. 325.

Die beiden Drehungen  $d\varphi_1$  und  $d\varphi_2$  um  $O_1$  und  $O_2$  sind jetzt gleich groß und entgegengesetzt; beginnt man mit der Drehung  $d\varphi_1 = d\varphi$  um  $O_1$ , so gelangt  $O_2$  nach  $O_2'$ ; dreht man jetzt um  $O_2'$  mit dem Drehungswinkel  $d\varphi_2 = -d\varphi$ , so gelangt  $O_1$  nach  $O_1'$ ; setzt man  $\overline{O_1O_2} = a$ , so ist

$$\overline{O_1O_1'} = \overline{O_2O_2'} = a \cdot d\varphi;$$

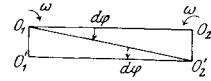


Fig. 325.

die Gerade  $O_1O_2$  rückt demnach parallel zu sich vor mit der Geschwindigkeit

$$a \cdot \frac{d\varphi}{dt} = a\omega;$$

die resultierende Bewegung der Scheibe 2 ist in diesem Falle eine zu  $O_1O_2$  senkrechte Parallelverschiebung oder Translation; deren Geschwindigkeit hat die Größe  $a\omega$ . Der resultierende Drehpol  $O$  fällt in unendliche Entfernung in  $O_1O_2$ , die resultierende Winkelgeschwindigkeit ist  $\omega_1 - \omega_2 = 0$ .

Wenn beispielsweise die Kurbel  $O_1O_2$  (Fig. 326) um den festliegenden Punkt  $O_1$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  im Sinne der Uhrzeigerbewegung, also positiv gedreht wird und gleichzeitig die in  $O_2$  gelenkig angeschlossene Stange  $O_2A$  um  $O_2$  mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit, aber negativ, eine Drehung vollführt, so macht die Scheibe oder Stange  $O_2A$  die resultierende aus beiden Bewegungen, nämlich eine Parallelverschiebung senkrecht zu  $O_1O_2$ .

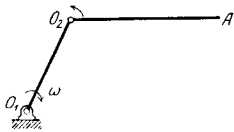


Fig. 326.

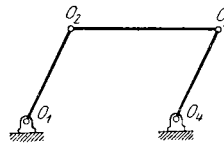


Fig. 326 a.

Diese Bewegung kann auch dadurch erzielt werden, daß man an die Stange eine zweite, gleiche Kurbel  $O_4O_3$  anfügt, die zu  $O_1O_2$  parallel ist (Fig. 326 a). Eine Anwendung hiervon macht man beim Parallelkurbelgetriebe.

**167. Die relativen Drehpole dreier Systeme.** Kehren wir wieder zu dem in 164, 165 behandelten Falle der beiden Scheiben zurück. Wir fanden, daß der resultierende Drehpol  $O$  der Scheibe 2 auf der Verbindungslinie  $O_1O_2$  liegen müsse, ob nun die beiden Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_1$  und  $\omega_2$  gleichen Drehungssinn haben oder nicht.

Man beachte nun, daß eigentlich nicht zwei, sondern drei ebene Systeme vorhanden sind; die stillschweigend vorausgesetzte, nicht weiter beachtete dritte Scheibe ist die ruhende Ebene der Zeichnung, auf die wir die Winkelgeschwindigkeit  $\omega_1$  um  $O_1$  bezogen haben.

Geben wir allem, was mit dieser ruhenden Ebene zusammenhängt, den Stellenzeiger null, so werden wir von nun an  $O_1$  und  $\omega_1$  zu ersetzen

haben durch  $O_{10}$  und  $\omega_{10}$ , d. h. Drehpol und Winkelgeschwindigkeit der Scheibe 1 in bezug auf die feste Ebene 0.

In Übereinstimmung damit schreiben wir von nun an  $O_{21}$  und  $\omega_{21}$  statt  $O_2$  und  $\omega_2$ , d. h. Drehpol und Winkelgeschwindigkeit der Scheibe 2 in bezug auf die Scheibe 1.

Dann ist aber  $O$  und  $\omega$  zu ersetzen durch  $O_{20}$  und  $\omega_{20}$ , denn sie bedeuten den Drehpol und die Winkelgeschwindigkeit der Scheibe 2 in bezug auf die ruhende Ebene 0.

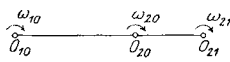


Fig. 327.

Die Punkte  $O_{10}$ ,  $O_{21}$ ,  $O_{20}$  sind also die Drehpole der drei Ebenen 0, 1, 2 gegeneinander; da sie nach früher in einer Geraden liegen, folgt der wichtige Satz (Fig. 327):

Die relativen Drehpole dreier ebener Systeme liegen in einer Geraden.

Von diesem Satze werden in der Kinematik der Maschinengetriebe

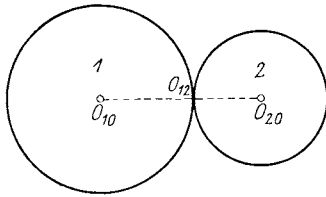


Fig. 328.

zahlreiche Anwendungen gemacht. Wälzen sich z. B. zwei Räder 1 und 2 aufeinander ab (Fig. 328), ohne zu gleiten, so ist für die Relativbewegung das eine Rad die Hüllbahn des anderen und ihr Berührungspunkt der Drehpol  $O_{12}$  ihrer Relativbewegung. Er muß also auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte  $O_{10}$  und  $O_{20}$  liegen.

Dies trifft auch dann zu, wenn die Umfänge der Räder keine kreisförmige Gestalt haben, wie bei den unrunder Rädern (Fig. 329 und 730) oder bei den Wälzhebeln (Fig. 330).

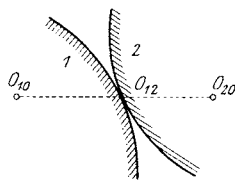


Fig. 329.

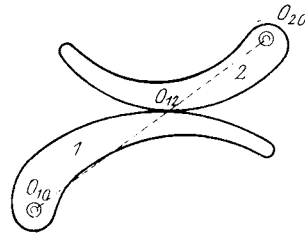


Fig. 330.

Liegt jedoch der Berührungspunkt der beiden Kurven nicht auf der Geraden  $O_{10}O_{20}$ , so kann er nicht mehr der relative Drehpol sein und die Kurven (Räder oder Wälzhebel) werden aneinander gleiten (vgl. Fig. 438). Dies ist besonders bei Wälzhebeln zu beachten, bei denen ein Gleiten tunlichst vermieden werden soll.

Ist die Form des einen Wälzhebels gegeben, so kann auf Grund dieses Satzes der andere derart ermittelt werden, daß die beiden gleitfrei zusammenarbeiten (vgl. J. Magg, Die Steuerungen der Verbrennungskraftmaschinen, S. 120).

Was die Winkelgeschwindigkeiten dreier Systeme 0, 1, 2 in bezug aufeinander betrifft, kann nach den obigen Feststellungen Gleichung 125 in der Form angeschrieben werden

$$\omega_{20} = \omega_{10} + \omega_{21} \dots \dots \dots \text{c)}$$

Die Stellenzeiger der Winkelgeschwindigkeiten dürfen nicht vertauscht werden; denn die Winkelgeschwindigkeit der Scheibe 2 in bezug auf die Scheibe 1 ist entgegengesetzt und gleich groß der Winkelgeschwindigkeit der Scheibe 1 in bezug auf die Scheibe 2; es ist also  $\omega_{21} = -\omega_{12}$ , allgemein:

$$\omega_{mn} = -\omega_{nm} \dots \dots \dots 128)$$

Dann nimmt aber Gleichung c) die Form an:

$$\omega_{01} + \omega_{12} + \omega_{20} = 0 \dots \dots \dots 129)$$

**168. Die gegenseitigen Bewegungen mehrerer Systeme.** Die Verallgemeinerung der Sätze, die im vorigen Abschnitt für zwei Scheiben entwickelt wurden, die sich gegenüber einer dritten, der ruhenden Ebene, bewegen, läßt sich nun ohne weiteres vornehmen.

In Fig. 331 sind vier Scheiben dargestellt, von denen die erste in der festen Ebene 0 gelagert ist und sich mit  $\omega_{10}$  um  $O_{10}$  dreht; jede folgende Scheibe ist auf der vorhergehenden gelagert, dreht sich mit ihr und hat überdies ihre Eigendrehung;

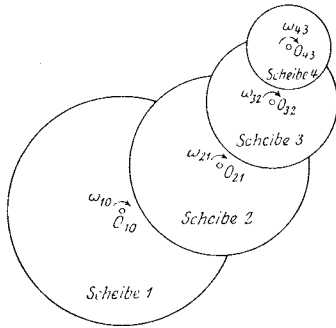


Fig. 331.

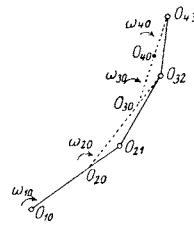


Fig. 331 a.

die letzte Scheibe 4 ist auf der Scheibe 3 gelagert und dreht sich mit  $\omega_{43}$  um  $O_{43}$ . Dann bestehen nach 167 folgende Gleichungen (Fig. 331 a):

$$\begin{aligned} \omega_{20} &= \omega_{21} + \omega_{10}, \\ \omega_{30} &= \omega_{32} + \omega_{20} = \omega_{32} + \omega_{21} + \omega_{10}, \\ \omega_{40} &= \omega_{43} + \omega_{30} = \omega_{43} + \omega_{32} + \omega_{21} + \omega_{10}. \end{aligned}$$

Die Drehpole  $O_{20}$ ,  $O_{30}$ ,  $O_{40}$  können nacheinander als Schwerpunkte konstruiert werden, wie es in den Fig. 320 und 324 mit zwei Drehpolen gezeigt wurde; oder es kann auch jeder von ihnen unmittelbar gefunden werden, z. B.  $O_{10}$  als Schwerpunkt der vier Punkte  $O_{10}$ ,  $O_{21}$ ,  $O_{32}$ ,  $O_{43}$ , wenn in ihnen die Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_{10}$ ,  $\omega_{21}$ ,  $\omega_{32}$ ,  $\omega_{43}$  als Gewichte angebracht werden. Dies kann auf gleiche Weise durchgeführt



werden, wie man in der graphischen Statik den Schwerpunkt einer Gruppe von schweren Punkten findet.

Da nach Gleichung 128  $\omega_{mn} = -\omega_{nm}$  ist, kann die letzte der obigen Gleichungen auch in der Form geschrieben werden:

$$\omega_{01} + \omega_{12} + \omega_{23} + \omega_{34} + \omega_{40} = 0$$

oder allgemein:

$$\omega_{mn} + \omega_{np} + \omega_{pq} + \dots + \omega_{rs} + \omega_{sm} = 0 \quad \dots \quad 130)$$

An diesen Resultaten ändert sich auch dann nichts, wenn das mit Null bezeichnete System, das bisher als in Ruhe befindlich angenommen wurde, selber eine Eigenbewegung besitzt. Denn die Drehpole und Winkelgeschwindigkeiten, z. B.  $O_{32}$  und  $\omega_{32}$ , schildern doch nur die relativen Beziehungen zwischen den Scheiben 2 und 3, ändern sich demnach nicht, wenn beide Scheiben ein und dieselbe dritte Bewegung ausführen. Die Gleichung 130 bleibt also auch dann richtig, wenn alle Systeme  $mnpq \dots rs$  in Bewegung begriffen sind.

Außer von den Drehpolen zweier benachbarter Scheiben, z. B. 3 und 4, kann man aber auch von den Drehpolen zweier nicht benachbarter Scheiben sprechen. So war z. B. in Fig. 331 a  $O_{40}$  der Drehpol der beiden nicht benachbarten Systeme 4 und 0. Auf diese Weise hat jede Scheibe relative Drehpole mit allen übrigen; die fünf Scheiben der Fig. 331 werden demnach  $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$  verschiedene Drehpole besitzen, von denen in der Fig. 331a nur sieben gezeichnet wurden.

**169. Die Anordnung der Drehpole.** In den folgenden Anwendungen sollen die Systeme der Reihe nach mit den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5  $\dots$  bezeichnet werden, da wir uns alle in Bewegung denken wollen. Die relativen Drehpole werden mit Doppelziffern bezeichnet; so ist  $O_{45}$  der Punkt, um den sich die Scheibe 4 gegen die Scheibe 5 dreht; da sich aber die Scheibe 5 gegen die Scheibe 4 um den gleichen Punkt dreht (vgl. 46, Umkehrung der Bewegung), so fällt  $O_{54}$  mit  $O_{45}$  zusammen. Die Reihenfolge der Stellenzeiger von Drehpolen darf also vertauscht werden.

Wenn die gegenseitige Bewegung von sechs Scheiben untersucht werden soll, so werden wir folgende Drehpole zu unterscheiden haben:

$$\begin{array}{c} O_{12} O_{13} O_{14} O_{15} O_{16} \\ O_{23} O_{24} O_{25} O_{26} \\ O_{34} O_{35} O_{36} \\ O_{45} O_{46} \\ O_{56} \end{array}$$

wobei die Drehpole mit vertauschten Stellenzeigern als überflüssig fortgelassen wurden.

Bei  $n$  Systemen gibt es also  $n(n - 1)$  Drehpole; lassen wir jene mit vertauschten Stellenzeigern fort, so bleiben

$$u = \frac{n(n - 1)}{2} \dots \dots \dots 131)$$

Drehpole. Von diesen liegen je drei, z. B.  $O_{12} O_{13} O_{23}$  auf einer Geraden, da nach 167 die relativen Drehpole dreier Scheiben auf einer Geraden liegen. Wenn man die Ziffer 3 bei obigen drei Drehpolen der Reihe nach durch 4, 5 . . . .  $n$  ersetzt, so erhält man  $n - 2$  Gerade, die alle durch  $O_{12}$  gehen. Zeichnet man dieses Büschel von Geraden nicht nur für  $O_{12}$ , sondern auch für alle anderen Drehpole, so erhält man  $u(n - 2)$  solche Gerade. Nun liegen aber auf jeder von ihnen drei Drehpole, es wird also auf diese Weise jede von ihnen dreimal gezählt. Es gibt somit  $\frac{1}{3} u(n - 2)$  solche Gerade, die Träger von Drehpolen sind, oder ihre Anzahl ist

$$v = \frac{n(n - 1)(n - 2)}{2 \cdot 3} \dots \dots \dots 132)$$

Je  $n - 2$  von ihnen gehen durch einen Drehpol hindurch. In Fig. 331a mußten zur Auffindung der Drehpole  $O_{20}, O_{30}, O_{40}$  die Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_{10}, \omega_{20}, \omega_{30}, \omega_{40}$  oder wenigstens ihre Verhältnisse bekannt sein. Dies ist immer notwendig, wenn die Kette der Scheiben eine offene ist; es ist zum Teil auch dann notwendig, wenn die Kette zwar geschlossen, aber nicht zwangläufig ist. So ist z. B. in Fig. 271 das Verhältnis zweier Winkelgeschwindigkeiten nötig, um alle Drehpole zu bestimmen.

Bei einer geschlossenen und zwangläufigen Kette jedoch ist die Kenntnis der Winkelgeschwindigkeiten zur Konstruktion der Drehpole nicht mehr erforderlich. Hier gibt schon die Form der Kette allein die Verhältnisse sämtlicher Winkelgeschwindigkeiten an. Denn läßt man in einer solchen Kette das Glied  $m$  gegen das Glied  $n$  eine beliebige große Drehung um ihren Drehpol  $O_{mn}$  antreten, so ist, dem Wesen der Zwangläufigkeit zufolge, die Bewegung sämtlicher anderen Glieder damit bestimmt; es müssen demnach sämtliche Drehpole bloß aus der Form der Kette heraus zu ermitteln sein, ohne daß man sich um die Winkelgeschwindigkeiten zu kümmern braucht.

Bei den meisten kinematischen Ketten ist es möglich, durch bloßes Ziehen einiger Geraden die unbekanntten Drehpole aus den bekannten zu finden.

Diese schönen Sätze über die Anordnung der Drehpole verdankt man L. Burmester (Civil-Ing. 1880, auch „Kinematik“, S. 430).

**170. Anwendungen.**

1. Das Gelenkviereck (Fig. 332). Vier ebene Systeme in Gestalt von vier Stangen

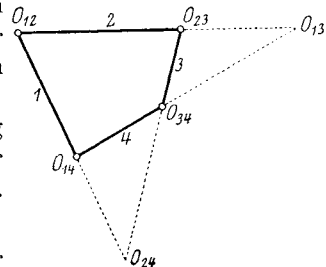


Fig. 332.

1, 2, 3, 4 sind untereinander gelenkig verbunden. Keine der vier Stangen wird festgehalten, alle können sich in der Ebene bewegen. Man soll die relativen Drehpole dieser vier Glieder in bezug aufeinander finden.

Offenbar sind die vier Gelenke bereits die Drehpole  $O_{12}$ ,  $O_{23}$ ,  $O_{34}$ ,  $O_{14}$ . Da hier  $n = 4$ , so wird nach Gleichung 131:  $u = \frac{1}{2} n (n - 1) = 6$ ; es fehlen also noch zwei Drehpole, nämlich  $O_{13}$  und  $O_{24}$ .

Da die relativen Drehpole dreier Systeme auf einer Geraden liegen, so müssen sowohl die Drehpole  $O_{12}$ ,  $O_{23}$ ,  $O_{13}$  wie auch  $O_{14}$ ,  $O_{34}$ ,  $O_{13}$  auf je einer Geraden liegen; denn die ersten drei sind die relativen Drehpole der Systeme 1, 2, 3, die letzten die relativen Drehpole der Systeme 1, 3, 4. Zieht man somit die beiden Geraden  $O_{12}O_{23}$  und  $O_{14}O_{34}$ , so ist ihr Schnittpunkt  $O_{13}$  der relative Drehpol der Stange 1 gegen 3, oder jener der Stange 3 gegen 1. Er ist jedoch kein Punkt, um den sich die Systeme 1 und 3 dauernd gegeneinander drehen, sondern ein augenblicklicher Drehpol, der nur für die gegenwärtige Stellung der vier Stangen Bedeutung hat.

Aus denselben Gründen liefert der Schnitt der Geraden  $O_{12}O_{14}$  und  $O_{23}O_{34}$  den noch fehlenden sechsten Drehpol  $O_{24}$ ; auch er hat als Drehpol nur momentane Bedeutung.

Man kann demnach die Drehpole einer kinematischen Kette unterscheiden in Gelenke oder Dauerpole und in Momentanpole.

Die Anzahl der Polgeraden ist nach Gleichung 132:  $v = \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} = 4$ ; von ihnen gehen je  $n - 2 = 2$  durch jeden der sechs Drehpole.

Eine andere Ausführung des Gelenkvierecks zeigt Fig. 333. Hier ist die Stange 3 ersetzt durch einen Schieber (Stein), der in einer Kreisbogenführung (Kulisse) gleitet. Auch hier sind die Drehpole  $O_{12}$ ,  $O_{23}$ ,  $O_{34}$ ,  $O_{14}$  unmittelbar gegeben;  $O_{34}$ , der Mittelpunkt der Kulisse, ist zwar kein Gelenk im gewöhnlichen Sinne, aber immerhin ein Dauerpol.

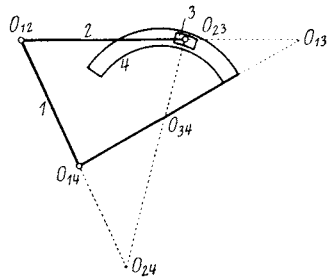


Fig. 333.

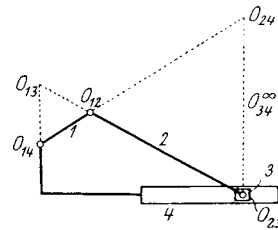


Fig. 334.

Die hier noch fehlenden Drehpole  $O_{13}$  und  $O_{24}$  findet man wie beim allgemeinen Gelenkviereck. Ist die Führung 4 nicht in Form eines Kreisbogens, sondern als gerade Führung gebaut (Fig. 334), so fällt  $O_{34}$

in die Unendlichkeit. Sonst ändert sich nichts an der Konstruktion der Drehpole.

2. Sechsgliedrige Kette mit einem Dreiecksglied. In Fig. 335 sind sechs Glieder zu einer Kette verbunden; fünf davon tragen nur je zwei Gelenke, eines besitzt drei Gelenke. Wir wollen von nun an Gelenke

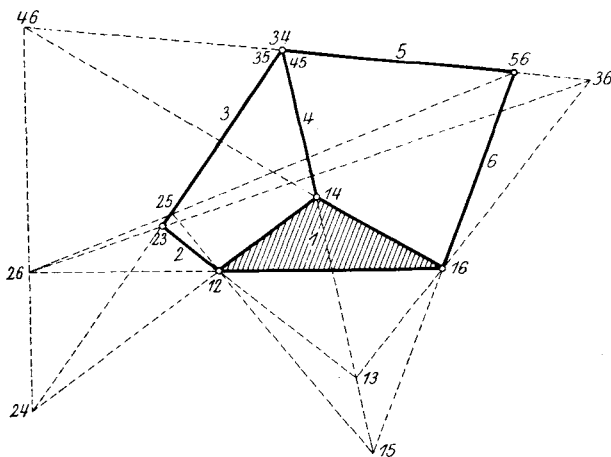


Fig. 335.

und Drehpole nur mit den Ordnungszahlen der zusammenhängenden Glieder bezeichnen und den Buchstaben  $O$  weglassen.

Die Anzahl der Glieder ist  $n = 6$ , die Anzahl der Polygone  $\pi = 2$ ; das Kennzeichen der Zwangsläufigkeit  $n = 2\pi + 2$  ist somit erfüllt.

Ferner gibt es  $u = \frac{n(n-1)}{2} = 15$  Drehpole. Von diesen sind die acht Gelenke 12, 14, 16, 23, 56 und 34, 35, 45 gegeben; die letzten drei besitzen gemeinsame Achse. Um die noch fehlenden sieben Drehpole durch Ziehen von Linien zu ermitteln, beachte man, daß die Glieder 1, 2, 3, 4 ein Gelenkviereck bilden; man kann seine noch fehlenden Drehpole 13 und 24 genau so finden, wie es im vorigen Absatz gezeigt wurde; man wird also die Polgerade 12, 14 zum Schnitte 24 bringen mit der Polgeraden 23, 34; dies soll durch das Schema

$$\begin{array}{l} 12, 14 \\ 23, 34 \end{array} > 24$$

angedeutet werden. Ebenso ist 13 zu finden; sein Schema lautet

$$\begin{array}{l} 12, 23 \\ 14, 34 \end{array} > 13.$$

Die übrigen fünf Drehpole können dann der Reihe nach in folgender Weise gefunden werden:

$$\begin{array}{l} 14, 16 \\ 45, 56 \end{array} > 46, \quad \begin{array}{l} 14, 45 \\ 16, 56 \end{array} > 15, \quad \begin{array}{l} 12, 15 \\ 23, 35 \end{array} > 25, \quad \begin{array}{l} 16, 13 \\ 35, 56 \end{array} > 36, \quad \begin{array}{l} 25, 56 \\ 24, 46 \end{array} > 26.$$

Durch jeden Drehpol müssen  $n - 2 = 4$  Polgerade gehen, z. B. durch 26: 12, 16; 23, 36; 24, 46; 25, 56. Die Anzahl der Polgeraden ist  $v = \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} = 20$ , von denen jedoch bei diesem Beispiel mehrere zusammenfallen, da drei Gelenke in einem Punkt vereinigt sind.

3. Sechsgliedriges Getriebe mit zwei geraden Schiebern. In Fig. 336 finden wir eine besondere Ausführung der soeben behandelten sechsgliedrigen Kette Fig. 335. Das Glied 1 ist festgehalten (Fundament, Grundglied). Die Glieder 2 und 6 machen geradlinige Trans-

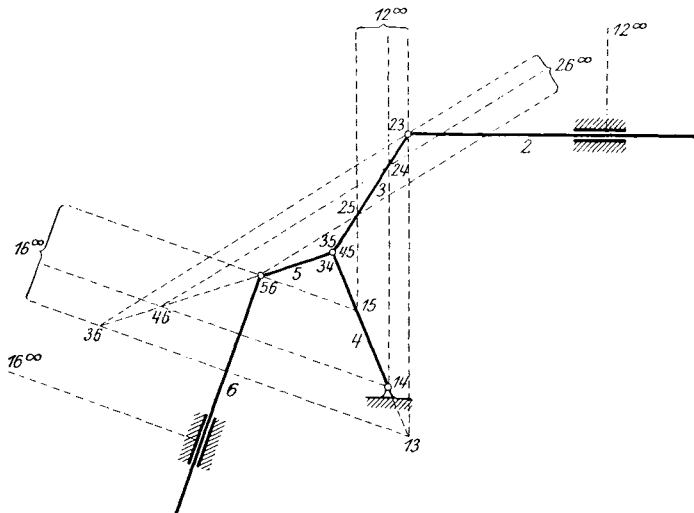


Fig. 336.

lationsbewegungen, sie sind Schieber geworden; ihre Drehpole mit dem Grundglied liegen unendlich fern, in einer Senkrechten zur Bewegungsrichtung, daher  $12^\infty$ ,  $16^\infty$ .

Für die Aufzeichnung der sieben, nicht gegebenen Drehpole bedient man sich desselben Schemas wie in dem vorhergehenden Beispiel.

Der Drehpol 26 ergibt sich hierbei als unendlich fern, was zu erwarten ist, da die Glieder 2 und 6 in bezug aufeinander eine Translationsbewegung ausführen.

4. Sechsgliedrige kinematische Kette mit zwei Dreiecksgliedern. Die in Fig. 337 mitgeteilte Kette besteht aus vier Gliedern mit je zwei Gelenken und zwei Gliedern mit je drei Gelenken.

Die Anzahl der Glieder ist  $n = 6$ , die Anzahl der Polygone  $\pi = 2$ ; das Kennzeichen der Zwangsläufigkeit  $n = 2\pi + 2$  ist erfüllt.

Von den fünfzehn Drehpolen sind sieben Gelenke, und zwar 12, 23, 34, 14, 25, 56, 46 gegeben; die übrigen acht findet man durch Ziehen der Polgeraden nach folgendem Schema:

$$\begin{array}{cccc}
 12, 23 > 13, & 12, 14 > 24, & 24, 25 > 45, & 25, 56 > 26, \\
 14, 34 > 13, & 23, 34 > 24, & 46, 56 > 45, & 24, 46 > 26, \\
 23, 25 > 35, & 12, 25 > 15, & 14, 46 > 16, & 34, 46 > 36. \\
 34, 45 > 35, & 14, 45 > 15, & 15, 56 > 16, & 35, 56 > 36.
 \end{array}$$

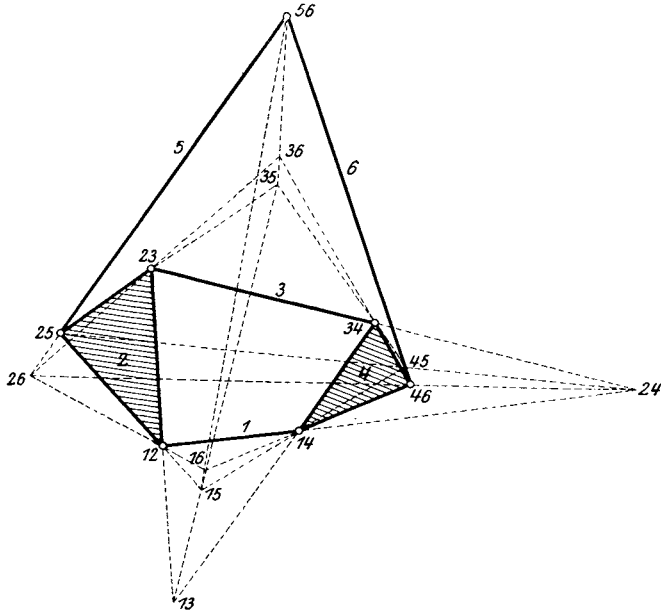


Fig. 337.

Auch hier gehen durch jeden Drehpol vier Polgerade, was mit Vorteil als Kontrolle der Genauigkeit der Konstruktion benützt werden kann.

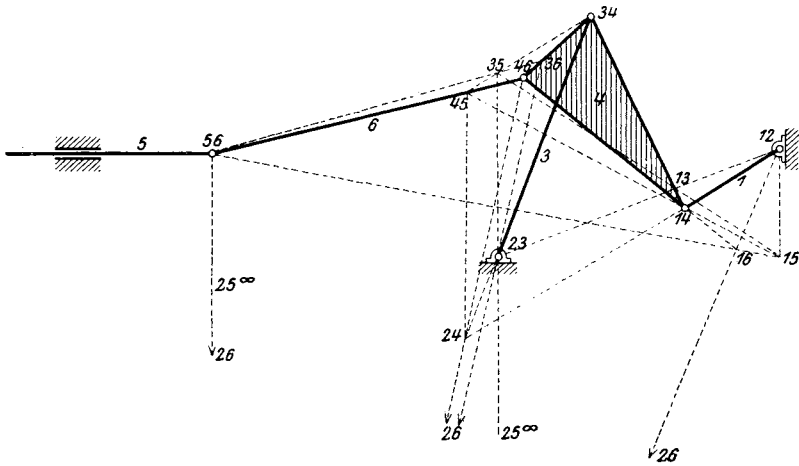


Fig. 338.

5. Kurbelantrieb für Kolbenpumpen von C. P. Holst (Fig. 338). Bei diesem Getriebe ist die Kurbel 1 nicht unmittelbar an den Lenker 6 angeschlossen, sondern ein Zwischenglied in Form eines Dreiecks 4 eingeschaltet, dessen dritter Eckpunkt von einem Gegenlenker 3 geführt wird.

Dieses Getriebe entsteht aus der im vorigen Absatz behandelten Kette, wenn das Dreiecksglied 2 (Fig. 337) festgehalten wird (Grundglied) und das Glied 5 eine geradlinige Translation in bezug auf dieses Grundglied ausführt (Schieber). Dann liegt der Drehpol 25 unendlich fern in einer Senkrechten zum Gliede 5.

Für die Konstruktion der acht unbekanntenen Drehpole kann genau das gleiche Schema benützt werden, wie es im vorigen Beispiel aufgestellt wurde.

6. Getriebe eines Indikators (Fig. 339). Auch dieses Getriebe führt auf die in Fig. 337 behandelte sechsgliedrige Kette zurück. Das

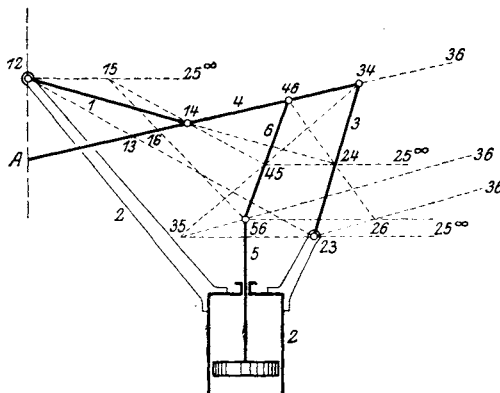


Fig. 339.

Glied 2 ist das Gehäuse des Indikators (Dampfdruckzeichners), das Glied 5 die Kolbenstange mit dem Kolben, der durch den Dampfdruck nach aufwärts geschoben wird. Das Getriebe hat nur den Zweck, den bei A angebrachten Schreibstift möglichst genau in einer Geraden zu führen. Die Stange 4, welche die drei Drehpole 14, 34, 46 starr miteinander verbindet,

tritt an die Stelle des Dreiecksgliedes 4 in Fig. 337.

Das Glied 5 macht wie im vorigen Beispiel in bezug auf das Grundglied 2 (Gehäuse des Indikators) eine geradlinige Translationsbewegung; es ist also der Drehpol 25 wieder unendlich fern. Die übrigen, nicht gegebenen acht Drehpole sind durch Ziehen von Polgeraden nach demselben Schema zu finden, wie es für Fig. 337 angegeben wurde.

**171. Die Drehpole in bezug auf die ruhende Ebene.** Bisher wurden nur die relativen Drehpole der Scheiben gesucht; das sind jene Drehpole, die sie in bezug aufeinander besitzen.

Wir wollen nun die Aufgabe lösen, die Drehpole der Scheiben oder der Glieder einer kinematischen Kette in bezug auf die ruhende Ebene zu suchen. Hierzu dient der Satz:

Sind von einer zwangläufigen kinematischen Kette die Bewegungsrichtungen dreier Punkte gegeben, die ungleichen

Gliedern angehören, so läßt sich die Bewegungsrichtung jedes anderen Punktes der Kette konstruieren.

Denn der Beweglichkeitsgrad der Kette ist  $x = 4$ ; da von einer Bewegung die Größe angenommen werden muß, so bleiben noch drei Annahmen für die Richtung der Bewegungen.

Die Bewegungsrichtung jedes Punktes läßt sich aber angeben, wenn man die Drehpole der Glieder gegen die feste Ebene (die wir wieder mit null bezeichnen wollen) kennt.

Fig. 340 zeigt das bereits früher behandelte Gelenkviereck  $A, B, C, D$ ; von den drei ersten Punkten seien die Bewegungsrichtungen gegen die feste Ebene gegeben; man soll die Bewegungsrichtung von  $D$  suchen.

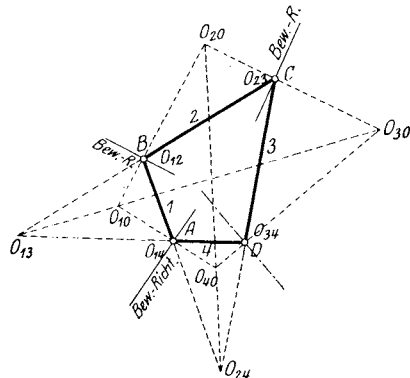


Fig. 340.

Da die Punkte  $A$  und  $B$  dem Gliede 1 angehören, liegt der Drehpol  $O_{10}$  im Schnitte der Normalen, die in  $A$  und  $B$  auf ihre Bewegungen errichtet werden. Ebenso findet man  $O_{20}$  aus den Punkten  $B$  und  $C$ . Nachdem man noch die Drehpole  $O_{13}$  und  $O_{24}$  wie in Fig. 332 gefunden hat, verbindet man  $O_{20}$  mit  $C$  und  $O_{10}$  mit  $O_{13}$ ; im Schnitte dieser Geraden liegt  $O_{30}$ . Ebenso findet man im Schnitte von  $O_{10}A$  mit  $O_{20}O_{24}$  den Drehpol  $O_{40}$ . Die Punkte  $O_{30}, D$  und  $O_{40}$  müssen auf einer Geraden liegen, da sie die relativen Drehpole der Ebenen 0, 3, 4 sind. Die gesuchte Bewegungsrichtung von  $D$  ist dann senkrecht zu dieser Polgeraden.

In Fig. 341 ist abermals ein Gelenkviereck gegeben; die Punkte  $A, B, C, D$  liegen aber nicht mehr in den Gelenken, sondern sind durch steife Arme mit den Stangen 1, 2, 3, 4 verbunden. Von den Punkten  $A, B, C$  sind die Bewegungsrichtungen gegeben; man ermittle die Bewegungsrichtung des Punktes  $D$ .

Zunächst errichte man in  $A, B, C$  die Normalen  $n_1, n_2, n_3$ . Nimmt man den Drehpol  $O_{10}$  vorläufig in einem beliebigen Punkt  $a$  von  $n_1$  an und zieht durch  $O_{13}$  und  $a$  eine Gerade, die  $n_3$  in  $c$  trifft, verbindet  $a$  mit  $O_{12}$ ,  $c$  mit  $O_{23}$ , so schneiden sich diese Verbindungslinien in einem Punkte der Geraden  $g$ . Die Punkte  $a$  auf  $n_1$  und die Punkte  $c$  auf  $n_3$  bilden nämlich perspektivische Punktreihen, die von  $O_{12}$ , bzw.  $O_{23}$  in perspektivischen Strahlenbüscheln projiziert werden, die den Strahl  $O_{13}O_{12}O_{23}$  entsprechend gemein haben; der Schnitt dieser Büschel ist die Gerade  $g$ . Um zweckmäßig Punkte dieser Geraden zu erhalten, nehme man  $a_1$  im unendlich fernen Punkte von  $n_1$  an; zieht man also  $O_{13}c_1 \parallel n_1$ ,  $O_{12}I \parallel n_1$  und verbindet  $c_1$  auf  $n_3$  mit  $O_{23}$ , so wird  $O_{12}I$  im Punkte  $I$  getroffen, der auf  $g$  liegt. Einen zweiten Punkt  $II$  der Geraden  $g$



findet man, wenn man den Punkt  $c_2$  in den unendlich fernen Punkt von  $n_3$  verlegt; dann zieht man  $O_{13}a_2 \parallel n_3$ ,  $O_{23}II \parallel n_3$  und verbindet  $a_2$  mit  $O_{12}$  bis zum Schnitte  $II$  mit  $O_{23}II$ . Ein dritter Punkt  $III$  der Geraden  $g$  ist der Schnitt von  $n_1$  mit  $n_3$ . Die Gerade  $g$  schneidet  $n_2$  im Drehpol  $O_{20}$ ; sodann gibt die Gerade  $O_{20}O_{12}$  im Schnitte mit  $n_1$  den Drehpol  $O_{10}$ , und die Gerade  $O_{20}O_{23}$  im Schnitte mit  $n_3$  den Drehpol  $O_{30}$ . Endlich schneiden sich die Verbindungslinien  $O_{10}O_{14}$  und  $O_{30}O_{34}$  im

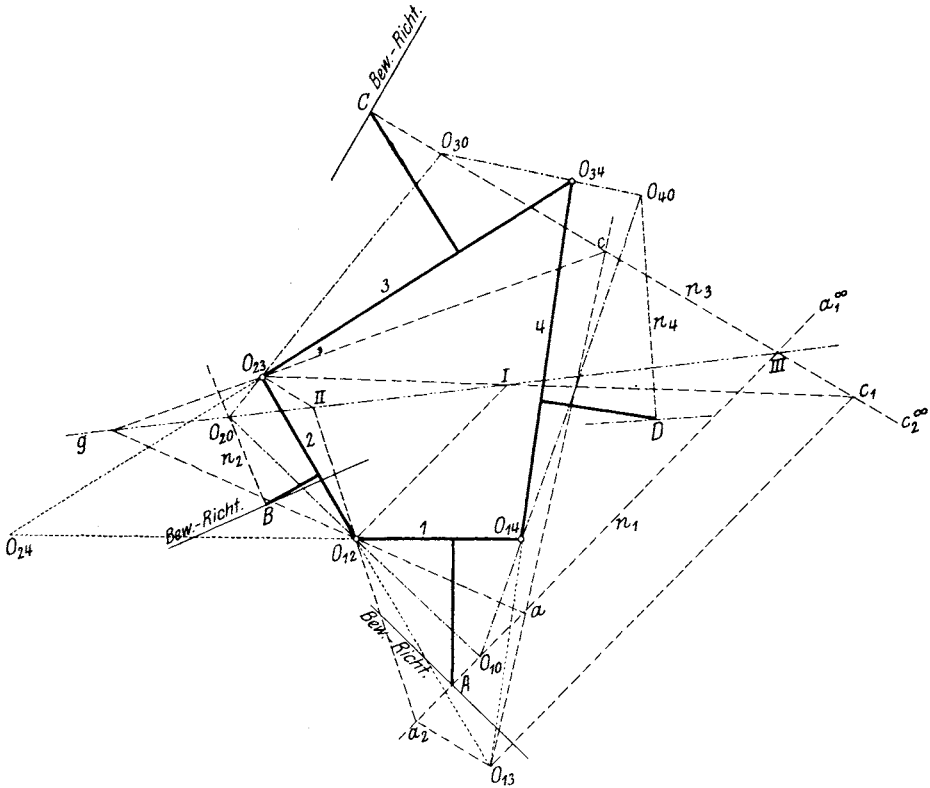


Fig. 341.

Drehpol  $O_{40}$ , wodurch die Normale  $n_4$  des Punktes  $D$  und dessen Bewegungsrichtung bestimmt ist.

Als Kontrolle kann dienen, daß die Punkte  $O_{24}$ ,  $O_{20}$  und  $O_{40}$ , sowie  $O_{13}$ ,  $O_{10}$  und  $O_{30}$  je auf einer Geraden liegen müssen.

In Fig. 342 wurde die bereits in Fig. 337 erwähnte sechsgliedrige Kette nochmals gezeichnet und angenommen, daß von den Punkten  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , die den Gliedern 1, 2, 3 angehören, die Bewegungsrichtungen gegeben seien. Es sollen die Drehpole  $O_{10}$ ,  $O_{20}$ ,  $O_{30}$  dieser Glieder in bezug auf die ruhende Ebene null gesucht werden.

Zunächst wurden die Drehpole  $O_{12}$ ,  $O_{13}$ ,  $O_{23}$ , wie schon in Beispiel 4 gezeigt wurde, nach dem Schema gesucht:

$$14, 24 > 12, \quad 24, 25 > 45, \quad 45, 35 > 34, \quad 24, 34 > 23, \quad 12, 23 > 13.$$

$$15, 25 > 12, \quad 14, 15 > 45, \quad 46, 36 > 34, \quad 25, 35 > 23, \quad 15, 35 > 13.$$

Sodann wurde mit diesen drei Drehpolen und den Punkten  $A$ ,  $B$ ,  $C$  die in Fig. 341 geschilderte Konstruktion der Drehpole  $O_{10}$ ,  $O_{20}$ ,  $O_{30}$  durchgeführt. Da die Bezeichnungen dieselben sind wie dort, sei auf

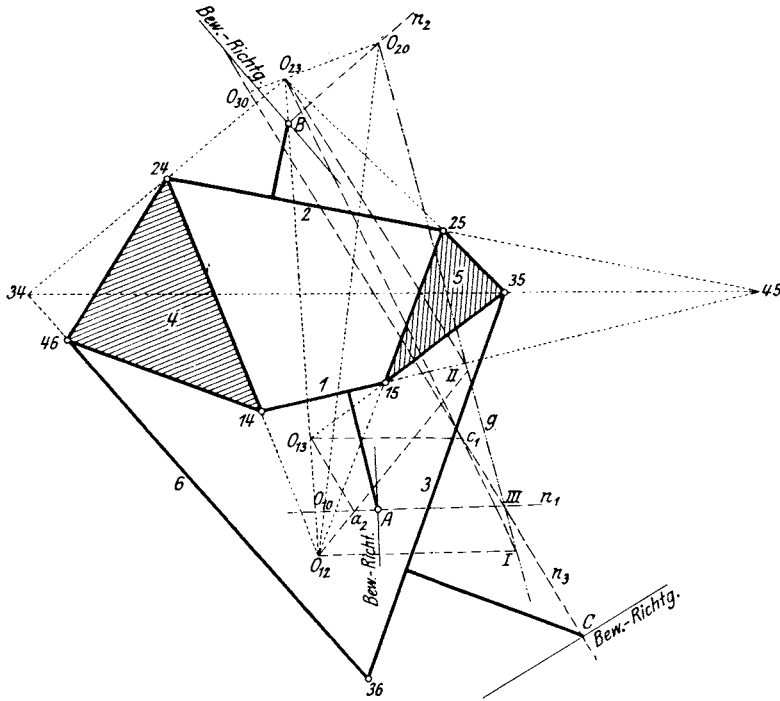


Fig. 342.

die bereits gegebene Erklärung verwiesen. Die noch übrigen Drehpole  $O_{40}$ ,  $O_{50}$ ,  $O_{60}$  gegen die feste Ebene wurden nicht mehr gezeichnet; sie können durch einfaches Ziehen der Polgeraden gefunden werden.

Sind aber sämtliche Drehpole in bezug auf die ruhende Ebene bekannt, so kennt man auch die Bewegungsrichtung jedes Punktes der Kette.

**172. Aufgaben.**

77. Man ermittle die relativen Drehpole der in Fig. 293 dargestellten zwangläufigen Kette. (Sie wurde sowohl von L. Burmester als auch von T. Rittershaus im Civil-Ingenieur 1880 auf ihre Drehpole untersucht.)

78—85. Man ermittle die relativen Drehpole der in den Fig. 274, 297, 298, 300, 310, 313, 314, 315 dargestellten Ketten.

## XVII. Der Geschwindigkeitszustand der kinematischen Kette.

**173. Stellung der Aufgabe.** In der soeben behandelten Relativbewegung mehrerer Systeme in bezug aufeinander oder in bezug auf die festbleibende Ebene handelte es sich nur um die Feststellung der Bewegungs-Richtung bestimmter Punkte.

Es soll nun die Untersuchung dahin ausgedehnt werden, daß nicht nur die Richtung, sondern auch die Größe der Bewegung in einer bestimmten Zeit, also die Geschwindigkeiten der Punkte aufgesucht werden.

Dies erfordert die Annahme der Geschwindigkeiten bestimmter Punkte, um aus ihnen die Geschwindigkeiten der übrigen Punkte ableiten zu können; von wieviel Punkten die Geschwindigkeit angenommen werden darf, entscheidet der Beweglichkeitsgrad (vgl. 160).

Es soll zuerst der Geschwindigkeitszustand von freien Ketten, sodann jener von Getrieben, besprochen werden; zum Schlusse soll der Zustand von Ketten behandelt werden, die krummlinige oder geradlinige bewegliche Führungen (Kulissen) besitzen.

Man kann bei Bestimmung der Geschwindigkeiten einen zweifachen Weg einschlagen, wodurch die Möglichkeit zur Probe der Richtigkeit und Genauigkeit der Zeichnung geboten wird. Diese beiden Arten der Lösung sind:

a) Benützung der Drehpole und der gedrehten Geschwindigkeiten (siehe vorigen Abschnitt);

b) Benützung des Geschwindigkeitsplanes, wie er in den Abschnitten II, VI und VIII für starre Systeme zur Darstellung kam.

Die erste dieser Methoden stammt von L. Burmester und wurde in dessen „Kinematik“ eingehend erörtert und vielfach angewendet.

Die zweite Methode verdankt man O. Mohr (siehe 186, Literatur, am Schlusse dieses Abschnittes).

Wir wollen beide Methoden, solange es tunlich ist, nebeneinander behandeln.

### A. Freie kinematische Ketten.

**174. Grundaufgabe.** Die Kette besteht aus zwei Gliedern 1 und 2, die in  $C$  gelenkig verbunden sind (Fig. 343). Die Kette ist offen, ihr Beweglichkeitsgrad ist nach Gleichung 113:  $x = 4$ ; es können also z. B.

$v_A$  und  $v_B$  nach Größe und Richtung angenommen werden. Es ist die Geschwindigkeit  $v_C$  zu ermitteln.

a) Mit Hilfe der gedrehten Geschwindigkeiten: Man dreht die Geschwindigkeiten  $v_A$  und  $v_B$  um  $90^\circ$  im gleichen Sinne nach  $Aa$  und  $Bb$ ; sodann zieht man  $ac \parallel AC$ ,  $bc \parallel BC$ ; im Schnitte dieser Parallelen erhält man den Endpunkt  $c$  der gedrehten Geschwindigkeit  $Cc$ , die sodann noch um  $90^\circ$  im Gegensinn von früher zu verdrehen ist.

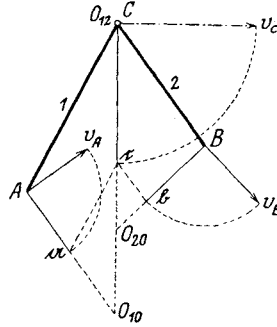


Fig. 343.

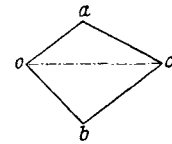


Fig. 343 a.

b) Mit Geschwindigkeitsplan: In Fig. 343 a wird  $oa \equiv v_A$ ,  $ob \equiv v_B$  gemacht, sodann  $ac \perp AC$ ,  $bc \perp BC$  gezogen; der Schnittpunkt  $c$  ist der gesuchte Geschwindigkeitspunkt; es ist  $oc \equiv v_C$ .

175. Das Gelenkviereck. Diese einfache Kette (Fig. 344) hat den Beweglichkeitsgrad  $x = 4$ . Man kann also z. B. die Geschwindigkeit  $v_A$  des einen Gelenkes  $A$  nach Größe und Richtung, von zwei anderen Gelenken  $B$  und  $C$  die Bewegungsrichtungen annehmen. Dann kann

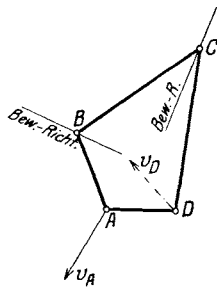


Fig. 344.

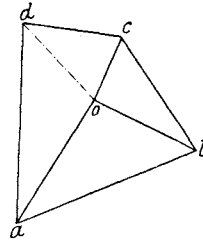


Fig. 344 a.

die Geschwindigkeit  $v_D$  des vierten Gelenkes  $D$  in folgender Weise bestimmt werden (Fig. 344 a): Man mache im Geschwindigkeitsplan  $oa \equiv v_A$  und ziehe  $ob$  und  $oc$  parallel zu den gegebenen Bewegungsrichtungen von  $B$  und  $C$ ; ferner  $ab \perp AB$  bis zum Schnittpunkt  $b$ ,  $bc \perp BC$  bis zum Schnittpunkt  $c$ , endlich  $ad \perp AD$ ,  $cd \perp CD$ ; der Schnitt dieser beiden Senkrechten ist  $d$  und  $od \equiv v_D$ .

In Fig. 345 wurde angenommen, daß ein Glied  $BCE$  des Gelenkvierecks Dreiecksgestalt habe und daß die Geschwindigkeiten  $v_A$  und  $v_E$  gegeben sind. Um dann die Geschwindigkeiten der Punkte  $B, C$  und  $D$

zu finden, wurde im Geschwindigkeitsplan (Fig. 345a)  $\overline{oa} \equiv v_A$ ,  $\overline{oe} \equiv v_B$  gemacht, sodann  $ab \perp AB$ ,  $eb \perp EB$  gezogen, wodurch im Schnitte  $b$  der Geschwindigkeitspunkt von  $B$  bestimmt ist.

Nach dem Ähnlichkeitssatze (vgl. 12), welcher aussagt, daß der Geschwindigkeitsplan eines starren Systems eine diesem ähnliche und

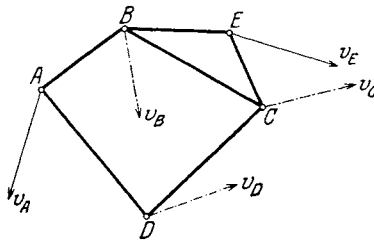


Fig. 345.

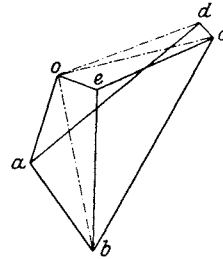


Fig. 345 a.

ähnlich liegende Figur ist, wird  $bec \sim BEC$  sein; aus  $bc \perp BC$ ,  $ec \perp EC$  erhält man im Schnitte  $c$  den Geschwindigkeitspunkt von  $C$  und endlich aus  $ad \perp AD$ ,  $cd \perp CD$  den Punkt  $d$ .

Verbindet man nun  $o$  mit  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , so hat man die Größen und Richtungen der drei gesuchten Geschwindigkeiten.

In Fig. 346 wurden die Geschwindigkeiten  $v_A$  und  $v_C$  angenommen und daraus wie oben die Geschwindigkeitspunkte  $b$ ,  $d$ ,  $e$  im Geschwindigkeitsplan (Fig. 346a) bestimmt. Läßt man  $v_A$  unverändert und ver-

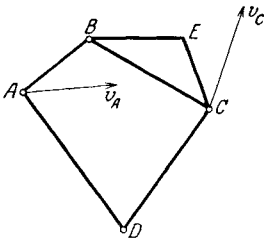


Fig. 346.

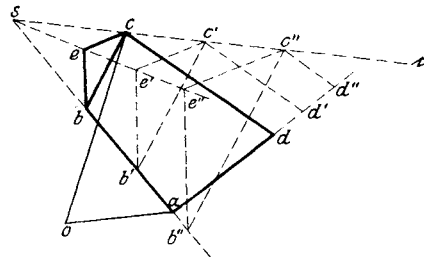


Fig. 346 a.

ändert  $v_C$  derart, daß sich der Punkt  $c$  auf einer beliebigen Geraden  $c$  nach  $c'$ ,  $c''$ , ... bewegt, so findet man die entsprechenden Geschwindigkeitspunkte  $b'$ ,  $b''$ , ...,  $d'$ ,  $d''$ , ...,  $e'$ ,  $e''$ , ... in derselben Weise wie oben. Diese Punktreihen sind alle einander ähnlich. Überdies gehen die Punktreihen  $bb'b''$  ...,  $cc'c''$  ...,  $ee'e''$  ... durch denselben Punkt  $s$ .

Hieraus ergibt sich der Satz:

Wird ein Punkt ( $a$ ) des Geschwindigkeitsplanes einer zwangsläufigen Kette festgehalten und beschreibt ein anderer Punkt ( $c$ ) eine gerade Punktreihe, so beschreiben alle anderen Punkte des Planes ähnliche Punktreihen.

Dieser Satz, der hier nur für ein Gelenkviereck bewiesen wurde, kann für jede andere zwangläufige Kette ausgesprochen werden.

Die Punktreihen, die zu einer starren Scheibe ( $BCE$ ) gehören, gehen durch einen Punkt.

In Fig. 347 wurde die frühere Aufgabe dahin erweitert, daß die Glieder 2, 3 und 4 des Gelenkvierecks als Dreiecke ausgebildet wurden; von deren Eckpunkten  $B$  und  $C$  seien die Geschwindigkeiten  $v_B$  und  $v_C$

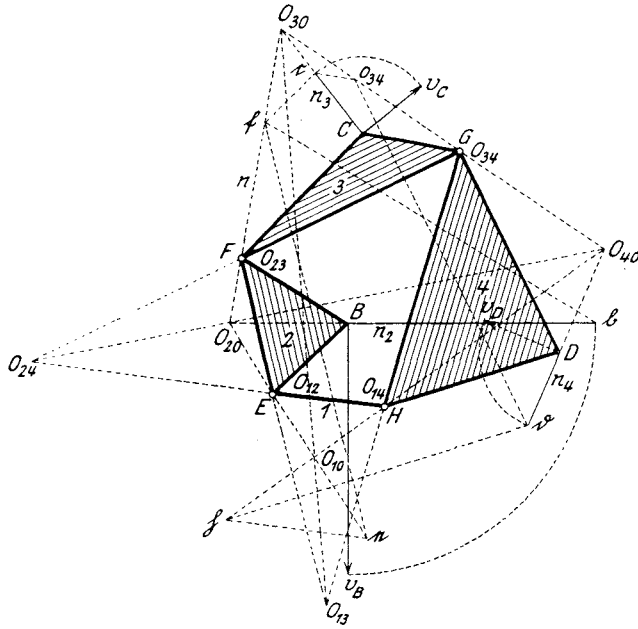


Fig. 347.

nach Größe und Richtung gegeben; es soll die Geschwindigkeit  $v_D$  des dritten Eckpunktes  $D$  konstruiert werden.

a) Mit Hilfe der gedrehten Geschwindigkeiten. Die Geschwindigkeiten  $v_B$  und  $v_C$  wurden um  $90^\circ$  nach  $Bb$  bzw.  $Cc$  gedreht.

Sodann ziehe man  $b\bar{f} \parallel BF$  und  $c\bar{f} \parallel CF$ , dann ist  $f$  der Schnittpunkt dieser Parallelen und  $F\bar{f}$  die gedrehte Geschwindigkeit von  $F$ . Denn  $F$  gehört dem Gliede 2 wie auch dem Gliede 3 an (vgl. Fig. 343). Dann ist aber  $F\bar{f}$  die Normale  $n$  der Bahn von  $F$  und sie enthält die Drehpole  $O_{20}$  und  $O_{30}$  der Glieder 2 und 3 in bezug auf die ruhende Ebene. Die Normalen  $n_2$  von  $B$  und  $n_3$  von  $C$  schneiden dann auf  $n$  diese Drehpole ein. Im Schnitte von  $O_{20}O_{12}$  mit  $O_{30}O_{13}$  erhält man den Drehpol  $O_{10}$  und im Schnitte von  $O_{10}O_{14}$  mit  $O_{30}O_{34}$  den Drehpol  $O_{40}$ , der übrigens auch auf  $O_{24}O_{20}$  liegen muß. Verbindet man  $O_{40}$  mit  $D$ , so erhält man die Normale  $n_4$  dieses Punktes; zieht man dann  $o_{34} \parallel CO_{34}$  bis zum Schnitte  $o_{34}$  mit  $O_{30}O_{40}$  und  $o_{34} \bar{d} \parallel O_{34}D$  bis zum Schnitte  $\bar{d}$  mit  $n_4$  (vgl.

(Fig. 343), so ist  $\overline{D\delta}$  die gedrehte Geschwindigkeit von  $D$ . Oder auch: man ziehe  $f_e \parallel FE$  bis zum Schnitte mit  $O_{10}O_{20}$ , sodann  $e\grave{h} \parallel EH$  bis zum Schnitte mit  $O_{10}O_{40}$ , und endlich  $h\grave{b} \parallel HD$ ; dann schneidet diese Gerade die Normale  $n_4$  ebenfalls in  $\delta$ . Damit ist aber nach einer Rückdrehung von  $D\delta$  die Geschwindigkeit  $v_D$  bekannt.

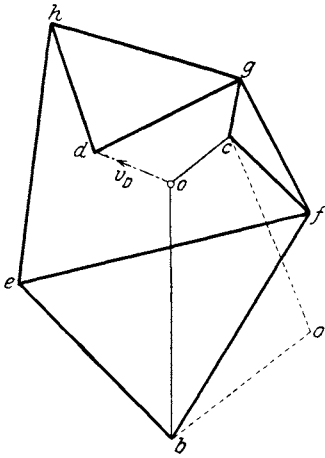


Fig. 347 a.

b) Mit Hilfe des Geschwindigkeitsplanes. In Fig. 347a wurden  $ob \equiv v_B$ ,  $oc \equiv v_C$  gemacht und sodann folgende Linien gezeichnet:  $bf \perp BF$ ,  $cf \perp CF$ ,  $be \perp BE$ ,  $fe \perp FE$ ,  $cg \perp CG$ ,  $fg \perp FG$ ,  $eh \perp EH$ ,  $gh \perp GH$ ,  $gd \perp GD$ ,  $hd \perp HD$ . Damit ist der Geschwindigkeitspunkt  $d$  gefunden und es ist  $od \equiv v_D$ .

In der vorigen Aufgabe waren die Geschwindigkeiten zweier Punkte  $B$  und  $C$  des Gelenkvierecks gegeben, die zwei benachbarten, durch ein Gelenk  $F$  verbundenen Gliedern 2 und 3 angehörten.

In dem Gelenkviereck, das Fig. 348 zeigt, sind die Geschwindigkeiten  $v_A$  und  $v_C$  zweier Punkte  $A$  und  $C$  gegeben, die zwei gegenüber liegenden Gliedern 1 und 3 angehören, die also nicht durch ein Gelenk verbunden

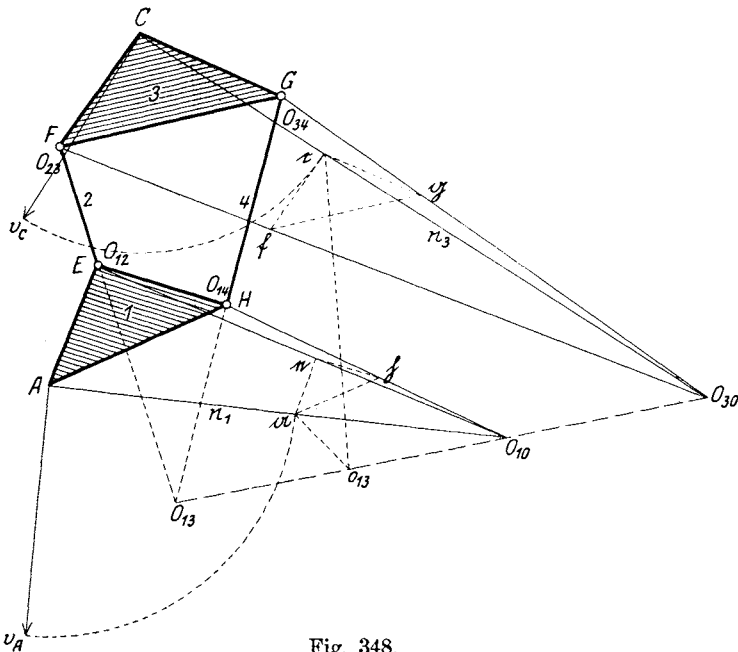


Fig. 348.

sind. Man soll daraus die Geschwindigkeiten der vier Gelenke  $E, F, G, H$  konstruieren.

a) Mit Hilfe der gedrehten Geschwindigkeiten. Zunächst werden wieder  $v_A$  und  $v_C$  um  $90^\circ$  nach  $Aa$  bzw.  $Cc$  gedreht, sodann, da der Drehpol  $O_{13}$  sowohl dem Gliede 1, wie auch 3 angehört,  $ao_{13} \parallel AO_{13}$ ,  $co_{13} \parallel CO_{13}$  gezogen und in  $o_{13}$  zum Schnitt gebracht. Dann ist  $O_{13}o_{13}$  die Normale von  $O_{13}$ ; sie wird von  $n_1$  in  $O_{10}$ , von  $n_3$  in  $O_{30}$  getroffen. Zieht man noch  $cf \parallel CF$ ,  $cg \parallel CG$ , so sind  $Ff$  und  $Gg$  die gedrehten Geschwindigkeiten von  $F$  und  $G$ . Und ebenso werden die gedrehten Geschwindigkeiten  $Ee$  und  $Hh$  von  $E$  und  $H$  gefunden. Die Zurückdrehung der gedrehten Geschwindigkeiten um  $90^\circ$  wurde in der Abbildung nicht durchgeführt.

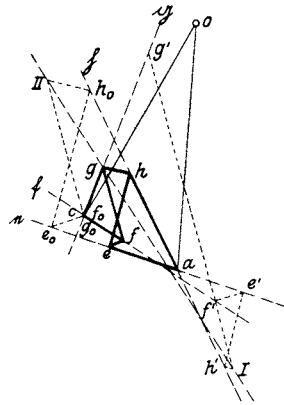


Fig. 348a.

b) Mit Hilfe des Geschwindigkeitsplanes. In Fig. 348a wurde  $oa \equiv v_A$ ,  $oc \equiv v_C$  gemacht, sodann durch  $a$  die Geraden  $e \perp AE$  und  $h \perp AH$ , durch  $c$  die Geraden  $f \perp CF$ ,  $g \perp CG$  gezogen; auf diesen vier Geraden müssen die gesuchten Geschwindigkeitspunkte  $e, h, f$  und  $g$  liegen.

Nimmt man auf  $g$  den Punkt  $g'$  beliebig an, zieht  $g'f' \perp GF$  bis  $f'$  auf  $f$ ,  $f'e' \perp FE$  bis  $e'$  auf  $e$ ,  $e'h' \perp EH$  bis  $h'$  auf  $h$ ,  $h'I \perp HG$  bis  $I$  auf  $f'g'$  und führt dieselbe Konstruktion für beliebige viele Punkte  $g'$  der Geraden  $g$  durch, so sind die Punktreihen  $g', f', e', h'$  einander ähnlich; legt man demnach durch die Punkte der Reihe  $g'$  die Parallelstrahlen  $g'f'$  und durch die Punkte der Reihe  $h'$  die Parallelstrahlen  $h'I$ , so entstehen zwei ähnliche Parallelstrahlenbüschel, deren Schnitt eine gerade Punktreihe ist.  $I$  ist bereits ein Punkt dieses Schnittes; einen zweiten findet man, wenn man  $g'$  in  $c$  annimmt ( $g_0$ ); dann fällt auch  $f_0$  mit  $c$  zusammen und es genügt, die Linien  $f_0e_0 \perp FE$  bis  $e$ ,  $e_0h_0 \perp EH$  bis  $h$ ,  $h_0II \perp HG$  zu ziehen und  $h_0II$  mit  $g_0II \perp GF$  zum Schnitt  $II$  zu bringen. Dann ist  $III$  der Schnitt der beiden Parallelbüschel; wo er die Gerade  $g$  trifft, liegt der richtige Geschwindigkeitspunkt  $g$ , aus dem dann die anderen Punkte  $f, e, h$  durch Ziehen von Parallelen gefunden werden können. Die gesuchten Geschwindigkeiten sind dann  $v_E \equiv \overline{oe}$ ,  $v_F \equiv \overline{of}$ ,  $v_G \equiv \overline{og}$ ,  $v_H \equiv \overline{oh}$ ; sie wurden nicht gezeichnet.

Fig. 349 zeigt noch einen allgemeinen Fall des Gelenkvierecks, dessen Glieder alle Dreiecksgestalt haben. Von den Eckpunkten  $A, B, C$  sind die Bewegungsrichtungen gegeben, von  $A$  überdies die Größe der Geschwindigkeit  $v_A$ ; es ist  $v_D$  zu bestimmen.



Man mache im Geschwindigkeitsplan (Fig. 349a)  $\overline{oa} \equiv v_A$  und ziehe wieder  $e \perp AE$ . Auf  $e$  wird ein beliebiger Punkt  $e_1$  angenommen,  $e_1 b_1 \perp EB$  gezogen bis zum Schnitte  $b_1$  mit der Parallelen  $ob_1$  zur Bewegungsrichtung von  $B$ . Die Geraden  $b_1 f_1 \perp BF$ ,  $e_1 f_1 \perp EF$  schneiden sich dann in  $f_1$  und  $f_1 c_1 \perp FC$  schneidet die Parallele  $oc_1$  zur Bewegungs-

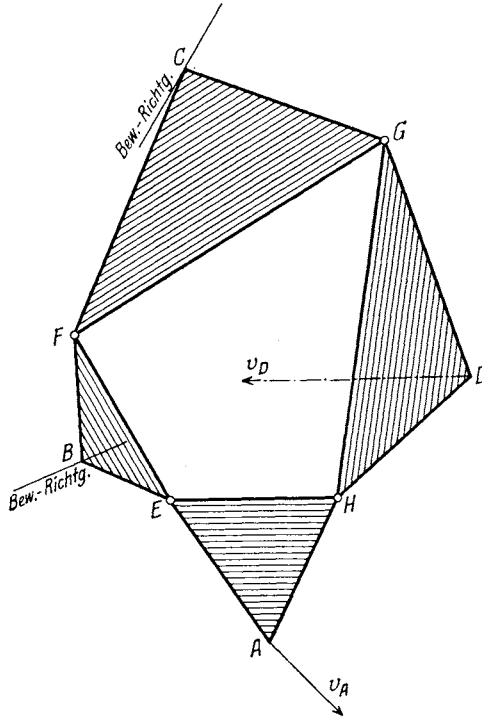


Fig. 349.

richtung von  $C$  in  $c_1$ . Nun gibt  $c_1 g_1 \perp CG$  und  $f_1 g_1 \perp FG$  den Schnittpunkt  $g_1$ .

Wählt man auf der Geraden  $e$  einen zweiten Punkt  $e_2$ , so erhält man in gleicher Weise der Reihe nach die Punkte  $b_2, f_2, c_2$  und  $g_2$ ; die Punkte  $g_1 g_2 \dots, f_1 f_2 \dots, e_1 e_2 \dots$  erfüllen ähnliche Punktreihen.

Geht man jetzt von  $A$  aus, statt nach  $EBFCG$  nach  $HG$ , und zieht  $a h_1 \perp AH$ ,  $e_1 h_1 \perp EH$ , so erhält man den Schnittpunkt  $h_1$  und ebenso aus  $e_2$  den Punkt  $h_2$ ; auch die Punktreihe  $h_1 h_2 \dots$  ist den früheren ähnlich. Zieht man  $h_1 g_1'$  und  $h_2 g_2'$  senkrecht zu  $HG$  bis zum Schnitte mit der Punktreihe  $g_1 g_2 \dots$ , so erhält man die Punktreihe  $g_1' g_2' \dots$ , die ebenfalls zu  $g_1 g_2 \dots$  ähnlich ist. Um den sich selbst entsprechenden Punkt  $g$  dieser beiden ähnlichen Punktreihen zu finden, ziehe man durch  $g_2$  und  $g_2'$  zwei beliebige Parallele, trage auf ihnen die Stücke  $g_1 g_2$  bzw.  $g_1' g_2'$  auf und verbinde die Endpunkte; der Schnitt dieser Verbindungs-

linie mit dem Träger der Punktreihen  $g_1 g_2 \dots$  und  $g_1' g_2'$  ist der sich selbst entsprechende Punkt  $g$ . Von hier ausgehend können nun die übrigen Geschwindigkeitspunkte  $h, f$  usw. durch einfaches Ziehen von Parallelen gefunden werden.

Schließlich zieht man  $gd \perp GD, hd \perp HD$ , wodurch auch der Geschwindigkeitspunkt  $d$  und somit  $\overline{od} \equiv v_D$  gefunden ist.

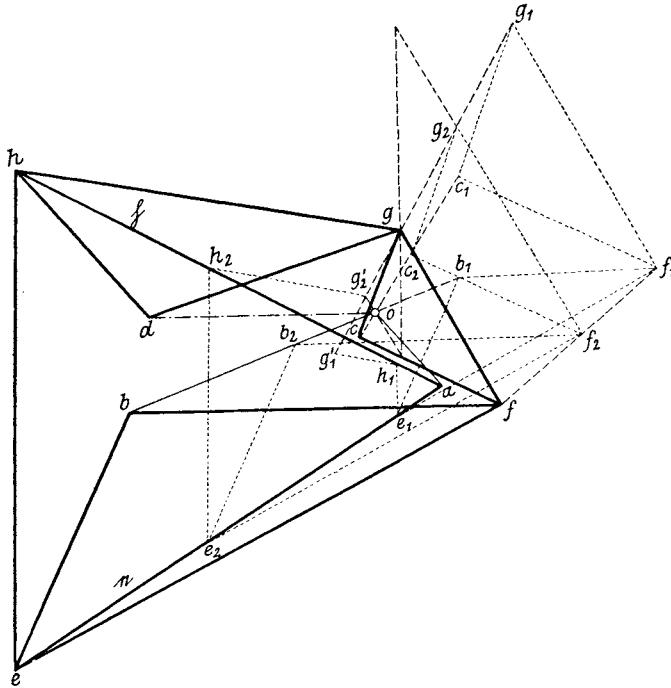


Fig. 349 a.

**176. Regeln für die Konstruktion der Geschwindigkeitspläne.** Aus den soeben behandelten Geschwindigkeitsplänen des freibeweglichen Gelenkvierecks ergeben sich einige Eigenschaften, die für alle zwangläufigen kinematischen Ketten Gültigkeit besitzen.

Wählt man in Fig. 347a statt  $o$  einen anderen Geschwindigkeitsnullpunkt  $o'$ , so daß die gegebenen Geschwindigkeiten  $v_B \equiv \overline{o'b}$ ,  $v_C \equiv \overline{o'c}$  sind, so bleibt der Geschwindigkeitsplan vollkommen unverändert. Ein und derselbe Plan entspricht also unendlich vielen Geschwindigkeitszuständen der kinematischen Kette.

Aus den Fig. 347, 348 entnimmt man ferner folgenden Satz:

Sind in einer freien, zwangläufigen kinematischen Kette die Geschwindigkeiten zweier Punkte bekannt, die verschiedenen Gliedern angehören, so kann die Geschwindigkeit jedes anderen Punktes der Kette bestimmt werden.

Sind die Geschwindigkeiten zweier Gelenke einer kinematischen Kette gegeben, die nicht demselben Gliede angehören, so läßt sich der Geschwindigkeitsplan unmittelbar und ohne Benützung ähnlicher Punktreihen zeichnen, wenn man von jedem Gelenk zu jedem anderen gelangen kann, ohne mehr als ein drittes Gelenk zu überschreiten.

In der sechsgliedrigen Kette Fig. 350 gelangt man von  $A$  nach  $E$  auf dem Wege über  $G$ ; es wird also nur ein Gelenk überschritten. Um von  $B$  nach  $D$  zu gelangen, ist nur  $C$  zu überschreiten. Dies gilt für alle Gelenke der Kette. Man wird also den Geschwindigkeitsplan unmittelbar zeichnen können.

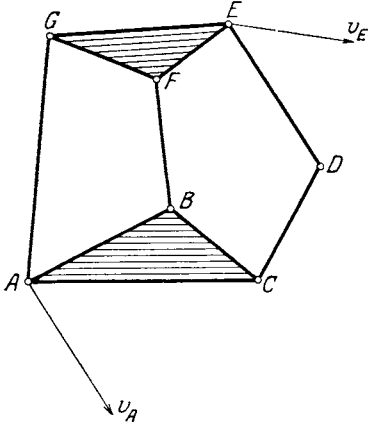


Fig. 350.

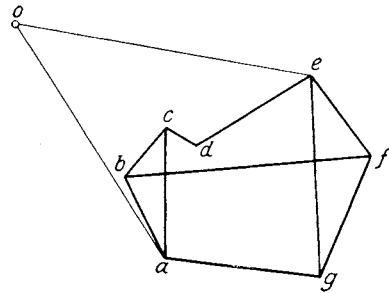


Fig. 350 a.

Gegeben seien  $v_A$  und  $v_E$ . In Fig. 350 a wurden diese Geschwindigkeiten von  $o$  aus aufgetragen und sodann folgende Linien gezogen:

- $ag \perp AG, eg \perp EG \dots g,$
- $ef \perp EF, gf \perp GF \dots f,$
- $ab \perp AB, fb \perp FB \dots b,$
- $bc \perp BC, ac \perp AC \dots c,$
- $cd \perp CD, ed \perp ED \dots d.$

Damit sind die Geschwindigkeitspunkte  $g, f, b, c, d$  gefunden; ihre nicht gezeichneten Verbindungsstrecken mit  $o$  sind die Geschwindigkeiten der Gelenke  $G, F, B, C, D$ .

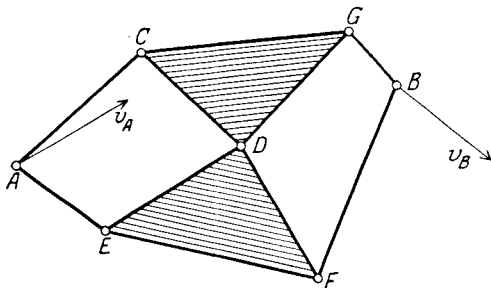


Fig. 351.

In der ebenfalls sechsgliedrigen Kette Fig. 351 muß man, um von  $A$  nach  $B$  zu gelangen,  $C$  und  $G$  oder  $E$  und  $F$  überschreiten; dann ist eine unmittelbare Konstruktion des Geschwindigkeitsplanes (Fig. 351 a) nicht möglich.

Es seien  $v_A$  und  $v_B$  gegeben; sie wurden von  $o$  aus aufgetragen und sodann durch den Geschwindigkeitspunkt  $a$  die Geraden  $c \perp AC$  und  $e \perp AE$ , durch  $b$  die Geraden  $f \perp BF$  und  $g \perp BG$  gezogen.

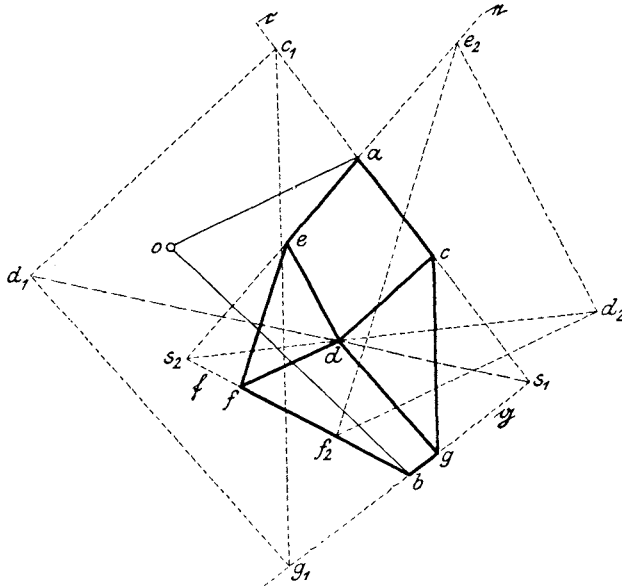


Fig. 351 a.

Nimmt man auf  $c$  den Punkt  $c_1$  beliebig an, zieht sodann  $c_1g_1 \perp CG$  bis  $g$ ,  $c_1d_1 \perp CD$ ,  $g_1d_1 \perp GD$ , so schneiden sich diese beiden Senkrechten in  $d_1$ ; für andere Punkte auf  $c$  die gleiche Konstruktion durchgeführt, werden die Punkte  $d_1$  auf der Geraden  $d_1s_1$  liegen, wobei  $s_1$  der Schnittpunkt von  $c$  und  $g$  ist; auf dieser Geraden  $d_1s_1$  wird der richtige Geschwindigkeitspunkt  $d$  liegen.

Wählt man sodann auf  $e$  einen beliebigen Punkt  $e_2$ , zieht  $e_2f_2 \perp EF$  bis  $f$ , ferner  $e_2d_2 \perp ED$ ,  $f_2d_2 \perp FD$ , so erhält man den Schnittpunkt  $d_2$ ; verbindet man ihn mit dem Schnitte  $s_2$  von  $e$  und  $f$ , so erhält man eine zweite Gerade  $d_2s_2$ , auf der  $d$  liegen muß. Damit ist  $d$  bestimmt und die übrigen Geschwindigkeitspunkte  $c, e, f, g$  können durch einfaches Ziehen von Parallelen gefunden werden.

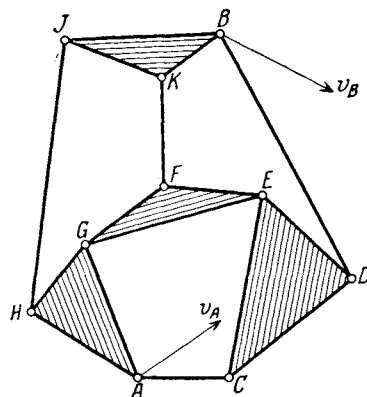


Fig. 352.

**177. Geschwindigkeitsplan einer achtgliedrigen Kette.** In der in Fig. 352 dargestellten zwangläufigen Kette

sind die Geschwindigkeiten  $v_A$  und  $v_B$  gegeben; um von  $A$  nach  $B$  zu gelangen, muß man mindestens zwei Gelenke überschreiten (entweder  $H$  und  $J$  oder  $C$  und  $D$ ); eine unmittelbare Zeichnung des Geschwindigkeitsplanes ist also nicht durchführbar.

In Fig. 352a wurde zunächst  $\overline{oa} \equiv v_A$ ,  $\overline{ob} \equiv v_B$  gemacht und sodann die Geraden  $c \perp AC$ ,  $h \perp AH$ ,  $g \perp AG$  durch  $a$ ,  $b \perp BD$ ,  $i \perp BJ$ ,  $f \perp BK$  durch  $b$  gezogen.

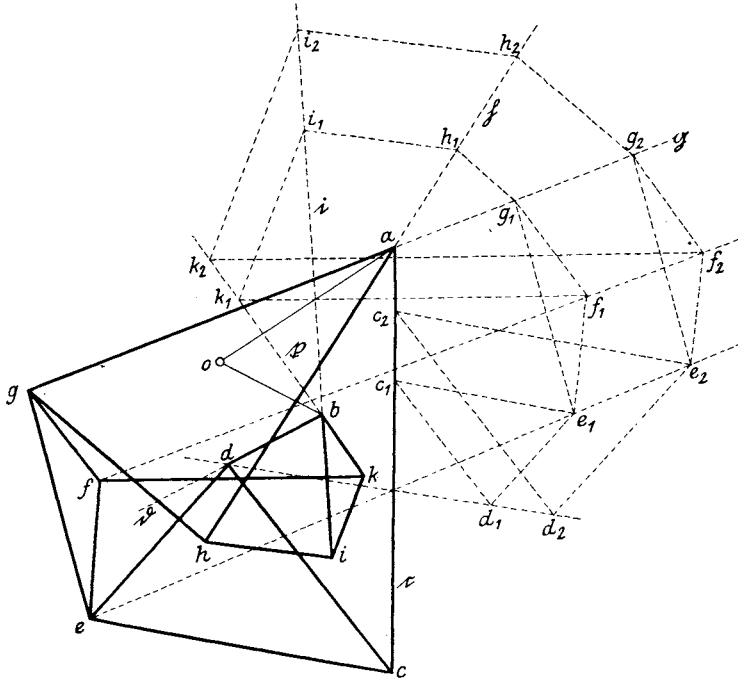


Fig. 352 a.

Hierauf wurde auf  $h$  der Punkt  $h_1$  beliebig gewählt und folgende Senkrechten gezogen:  $h_1g_1 \perp HG$  bis  $g$ ,  $h_1i_1 \perp HJ$  bis  $i$ ,  $i_1k_1 \perp JK$  bis  $f$ ; nun ergeben sich folgende Punkte:

$$\begin{aligned} g_1f_1 &\perp GF, & k_1f_1 &\perp KF \dots f_1, \\ g_1e_1 &\perp GE, & f_1e_1 &\perp FE \dots e_1, \\ e_1c_1 &\perp EC \text{ bis } c & & \dots c_1, \\ c_1d_1 &\perp CD, & e_1d_1 &\perp ED \dots d_1. \end{aligned}$$

Nun wurde auf  $h$  ein zweiter beliebiger Punkt  $h_2$  gewählt und in derselben Weise die Punkte  $g_2, i_2, k_2, f_2, e_2, c_2, d_2$  konstruiert. Die Verbindungslinie  $d_1d_2$  muß den richtigen Geschwindigkeitspunkt  $d$  enthalten, da alle Geschwindigkeitspunkte ähnliche Punktreihen beschreiben; dieser Punkt  $d$  liegt dann im Schnitte von  $d_1d_2$  mit  $b$ .

Aus  $d$  können dann die richtigen Geschwindigkeitspunkte  $c$  auf  $c$ ,  $e$  auf  $e_1e_2$ ,  $f$  auf  $f_1f_2$  usw. durch Ziehen von Parallelen ermittelt werden.

**178. Offene kinematische Ketten.** In der Kette Fig. 353 sind vier Glieder gelenkig aneinander geschlossen; der Beweglichkeitsgrad ist  $x = 6$ . Es können also gewählt werden:  $v_A$  und  $v_D$  nach Größe und Richtung, von  $B$  und  $C$  überdies noch die Bewegungsrichtungen.

Um den Geschwindigkeitsplan (Fig. 353a) zu zeichnen, wurde  $oa = v_A$ ,  $od = v_D$  gemacht und überdies durch  $o$  die Parallelen  $b$  und  $c$  zu den Bewegungsrichtungen von  $B$  und  $C$  gezogen. Durch den beliebig auf  $b$  gewählten Punkt  $b_1$  wurde sodann  $b_1e_1 \perp BE$  bis  $ae_1 \perp AE$  gezogen, ferner  $b_1f_1 \perp BF$ ,  $e_1f_1 \perp EF$ .

Verbindet man den Punkt  $f_1$  mit dem Schnittpunkt  $s_1$  von  $ae_1$  mit  $b$ , so wird  $f_1s_1$  die zu  $b_1 \dots$  ähnliche Punktreihe  $f_1 \dots$  enthalten und somit auch den richtigen Geschwindigkeitspunkt  $f$ . Dieselbe Konstruktion führt man mit dem auf  $c$  willkürlich gewählten Punkt  $c_2$

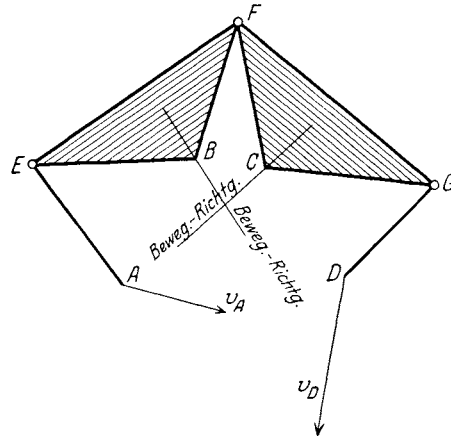


Fig. 353.

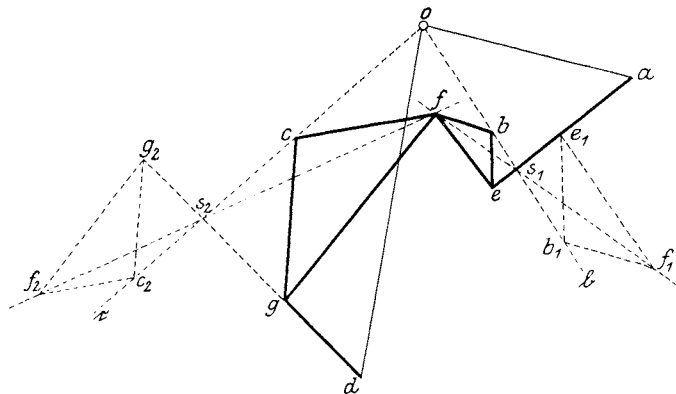


Fig. 353a.

aus. Man erhält die Punkte  $g_2$  und  $f_2$  und die Gerade  $f_2s_2$ , welche die früher gefundene Gerade  $f_1s_1$  im richtigen Geschwindigkeitspunkt  $f$  trifft. Die übrigen Punkte  $b$ ,  $c$ ,  $e$ ,  $g$  werden dann durch einfaches Ziehen von Parallelen gewonnen.

Die kinematische Kette in Fig. 354 besteht aus einem starren Dreieck  $DEL$ , an dessen Ecken drei Glieder  $AD$ ,  $BE$ ,  $CL$  gelenkig angeschlossen

sind. Hier ist also  $n = 4$ ,  $\pi = 0$  und der Beweglichkeitsgrad  $x = n - 2\pi + 2 = 6$ . Man kann demnach sechs Bestimmungsstücke der Bewegung willkürlich wählen. Gewählt wurden die Geschwindigkeiten  $v_A, v_B, v_C$  der Größe und Richtung nach; zu ermitteln sind die Geschwindigkeiten  $v_D, v_E, v_L$ .

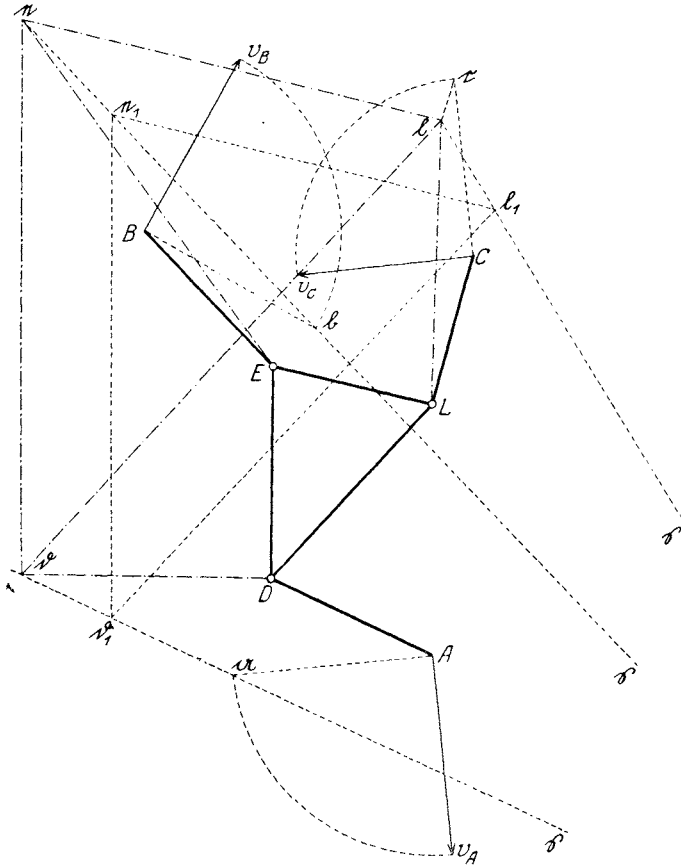


Fig. 354.

a) Mit Hilfe der gedrehten Geschwindigkeiten. Man zeichnet die drei gedrehten Geschwindigkeiten  $Aa, Bb, Cc$  und zieht die Geraden  $ad \parallel AD, be \parallel BE, cl \parallel CL$ . Auf der ersten nimmt man den Punkt  $d_1$  beliebig an, zieht sodann  $d_1e_1 \parallel DE$  bis zum Schnitte  $e_1$  mit  $be$ , ferner  $d_1l_1 \parallel DL$ , und  $e_1l_1 \parallel EL$ , welche Parallelen sich in  $l_1$  schneiden. Würde man statt  $d_1$  einen anderen Punkt  $d_2$  auf  $ad$  wählen, so erhielte man Punkte  $e_2$  und  $l_2$  in gleicher Weise wie früher  $e_1$  und  $l_1$ ; die Punktfolgen  $d_1d_2 \dots, e_1e_2 \dots, l_1l_2 \dots$  sind ähnlich und schneiden sich in einem Punkte  $\xi$ ; man erhält also den Träger der Punktfolge  $l_1l_2 \dots$ , indem man  $l_1$  mit dem Schnitt-

punkt  $s$  von  $ad$  und  $be$  verbindet. Da aber  $l$  auch auf  $cl$  liegen muß, so findet man den Punkt  $l$  im Schnitte von  $l_1s$  mit  $cl$ . Aus  $l$  können dann die Punkte  $d$  und  $e$  durch Ziehen von Parallelen ermittelt werden.  $D\delta$ ,  $Ee$  und  $Ll$  sind aber die gedrehten Geschwindigkeiten der Punkte  $D, E, L$ .

b) Mit Geschwindigkeitsplan (Fig. 354 a). Man zeichne  $oa \equiv v_A$ ,  $ob \equiv v_B$ ,  $oc \equiv v_C$ , ferner die Geraden  $ad \perp AD$ ,  $be \perp BE$ ,  $cl \perp CL$ . Auf der ersten nimmt man den Punkt  $d_1$  beliebig an, zieht  $d_1e_1 \perp DE$  bis zum Schnitte  $e_1$  mit  $be$ , ferner  $d_1l_1 \perp DL$ ,  $e_1l_1 \perp EL$ , welche Senkrechten sich in  $l_1$  treffen. Die zusammengehörenden Punkte  $d_1, e_1, l_1$

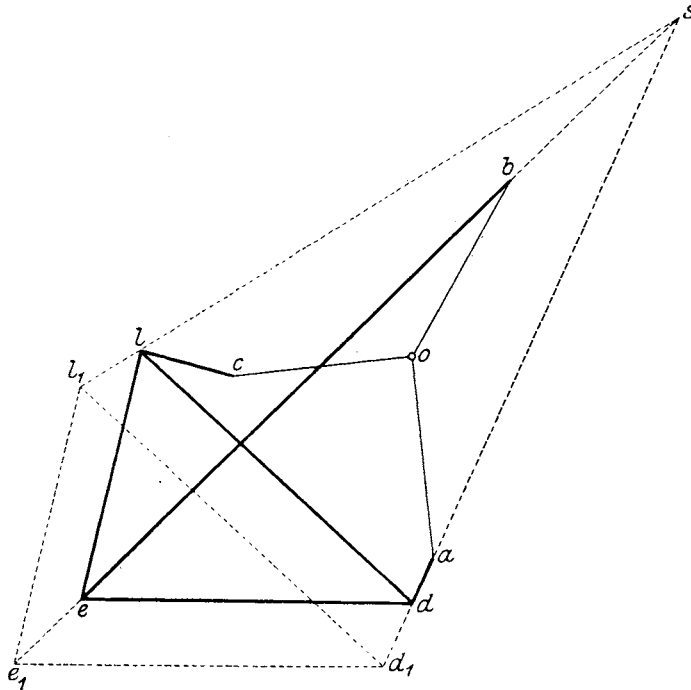


Fig. 354 a.

bilden ähnliche Punktreihen, die sich in  $s$  schneiden; man findet demnach den Träger der Punktreihe  $l_1$ , indem man  $l_1$  mit dem Schnittpunkt  $s$  von  $ad$  und  $be$  verbindet. Da der richtige Geschwindigkeitspunkt  $l$  aber auf  $cl$  liegen muß, so ist er gegeben durch den Schnitt von  $l_1s$  mit  $cl$ .

Sobald man  $l$  kennt, sind die Geschwindigkeitspunkte  $d$  und  $e$  durch Ziehen von Parallelen leicht zu ermitteln. Die Geschwindigkeitsfigur  $abcdel$  entspricht der gegebenen Kette  $ABCDEL$ . Damit sind die Geschwindigkeiten  $v_D \equiv od, v_E \equiv oe, v_L \equiv ol$  gefunden.

Als Kontrolle kann dienen, daß  $od \perp D\delta, oe \perp Ee, ol \perp Ll$  sein muß.

**179. Geschwindigkeitsplan einer zehngliedrigen, nicht zwangläufigen Kette.** In der Kette Fig. 355 ist die Anzahl der Glieder  $n = 10$ , die



Anzahl der veränderlichen Polygone  $\pi = 3$ , somit der Beweglichkeitsgrad

$$x = n - 2\pi + 2 = 6;$$

es wurden von drei Punkten  $A, B, C$  die Geschwindigkeiten nach Größe und Richtung angenommen.

Im Geschwindigkeitsplan (Fig. 355 a) wurden die Geschwindigkeiten  $\overline{oa} \equiv v_A, \overline{ob} \equiv v_B, \overline{oc} \equiv v_C$  von  $o$  aus aufgetragen und sodann die Geraden gezogen:

$\delta \perp AD, e \perp AE, m \perp AM$  durch  $a$ ,

$\bar{f} \perp BF, g \perp BG, \bar{l} \perp BL$  durch  $b$ ,

$\bar{f} \perp CK, \bar{h} \perp CH, \bar{i} \perp CJ$  durch  $c$ .

Sodann wurde auf  $\delta$  ein beliebiger Punkt  $d_1$  angenommen,  $d_1 i_1 \perp DJ$  bis  $i$  gezogen, ferner  $d_1 e_1 \perp DE$  bis  $e$ ,  $e_1 f_1 \perp EF$  bis  $f$ ,  $f_1 g_1 \perp FG$  bis  $g$ , endlich  $g_1 h_1 \perp GH$  und  $i_1 h_1 \perp JH$  gezeichnet, in deren Schnitt sich der Punkt  $h_1$  ergibt.

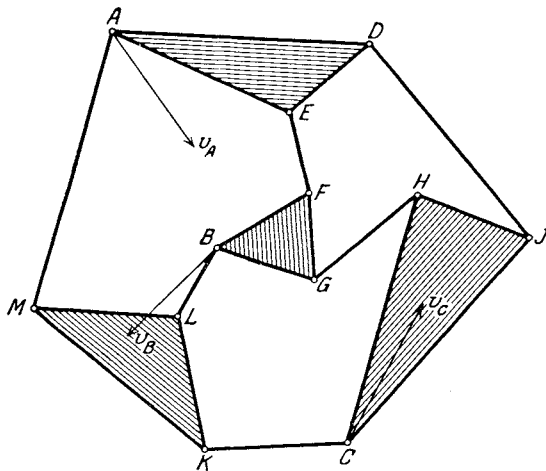


Fig. 355.

Wählt man auf  $\delta$  einen zweiten beliebigen Punkt  $d_2$  und führt dieselben Konstruktionen wie mit  $d_1$  durch, so erhält man den Punkt  $h_2$ ; die Punktreihe  $h_1 h_2$  trifft die Gerade  $\bar{h}$  im richtigen Geschwindigkeitspunkte  $h$ , woraus die Punkte  $i, d, e, f, g$  durch bloßes Ziehen von Parallelen sich ergeben.

Nun nimmt man auf  $m$  den Punkt  $m_1$  beliebig an, zieht  $m_1 l_1 \perp ML$  bis zur Geraden  $\bar{l}$ , ferner  $m_1 k_1 \perp MK, l_1 k_1 \perp LK$ , so erhält man den Punkt  $k_1$ ; aus einem zweiten Punkt  $m_2$  wird in gleicher Weise  $k_2$  abgeleitet. Die Punktreihe  $k_1 k_2$  schneidet die Gerade  $\bar{f}$  im richtigen Geschwindigkeitspunkte  $k$ , woraus noch  $m$  und  $l$  unmittelbar zu entnehmen sind.

## B. Getriebe.

**180. Das Kurbelgetriebe.** Das in Fig. 356 gezeichnete Getriebe geht aus dem Gelenkviereck  $\mathcal{A}CD\mathcal{B}$  hervor, wenn das Glied  $\mathcal{A}\mathcal{B}$  (Grundglied, Fundament) festgehalten wird. Die Glieder 1 und 2 sind zu Dreiecken  $\mathcal{A}AC$  und  $\mathcal{B}BD$  ausgebildet; die Geschwindigkeit  $v_A$  ist gegeben; es ist  $v_B$  zu ermitteln.

a) Mit Benützung der gedrehten Geschwindigkeiten (vgl.

auch Fig. 104). Man drehe  $v_A$  um  $90^\circ$  nach  $\overline{Aa}$ , z. B. gegen die Uhrzeigerbewegung, ziehe  $ac \parallel AC$ ,  $cb \parallel CD$ ,  $db \parallel DB$ ; dann sind  $\overline{Cc}$ ,  $\overline{Dd}$ ,  $\overline{Bb}$  die gedrehten Geschwindigkeiten von  $C$ ,  $D$  und  $B$ . Dreht man sodann  $\overline{Bb}$  um  $90^\circ$ , im Sinne der Uhrzeigerbewegung, so erhält man die gesuchte Geschwindigkeit  $v_B$ .

Soll man z. B. die Geschwindigkeit  $v_{23}$  des Punktes  $B$  in bezug auf das Glied 3 bestimmen, so denke man sich mit dem Punkt  $B$ , der dem

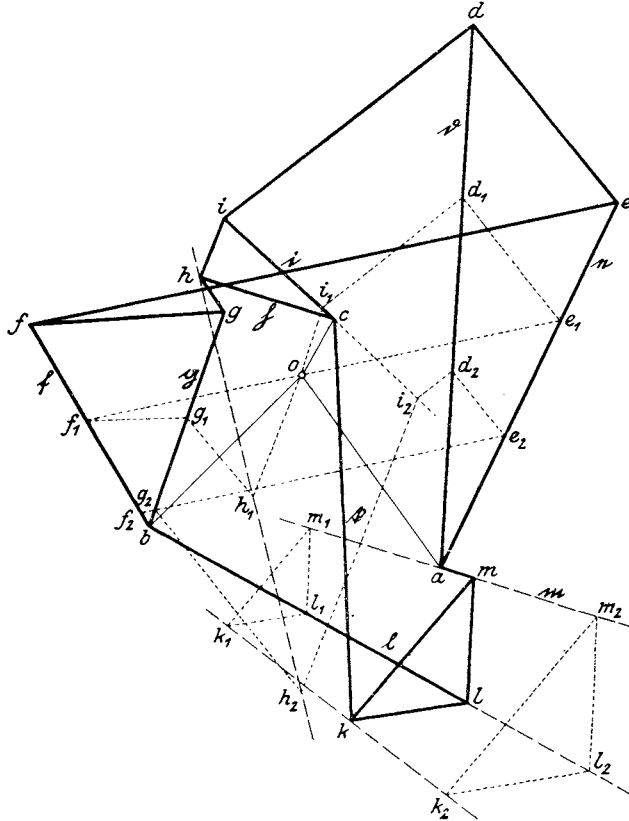


Fig. 355 a.

Gliede 2 angehört, einen Punkt  $B'$  des Gliedes 3 zusammenfallen. Das Glied 3 dreht sich augenblicklich um den Drehpol  $O_{30}$ , den man im Schnitte von  $\mathcal{A}C$  mit  $\mathcal{B}D$  erhält. Da auch  $D$  ein Punkt des Gliedes 3 ist, so braucht man nur  $\overline{Db}$  bis zum Schnitte  $b'$  mit  $B'O_{30}$  zu verlängern; dann ist  $\overline{Bb'}$  die gedrehte Geschwindigkeit von  $B'$ , die um  $90^\circ$  gedreht, im Sinne des Uhrzeigers  $v_{30}$ , gegen den Uhrzeiger  $v_{03}$  ergibt. Nun ist die gesuchte relative Geschwindigkeit des Punktes  $B$  in bezug auf das Glied 3:

$$v_{23} \equiv v_{20} + v_{03},$$

worin  $v_{20}$  identisch ist mit der früher gefundenen Geschwindigkeit  $v_B$ ;

als Probe kann gelten, daß sich  $v_{23} \perp BD$  ergeben muß, da die relative Bewegung des Gliedes 2 gegen 3 eine Drehung um  $D$  ist.

b) Mit Benützung des Geschwindigkeitsplanes. In Fig. 356a wurde  $\overline{oa} \equiv v_A$  in doppeltem Maßstab gemacht, sodann folgende Linien gezogen:  $oc \perp \mathfrak{A}C$ ,  $ac \perp AC$ ,  $od \perp \mathfrak{B}D$ ,  $cd \perp CD$ ,  $db \perp DB$ ,  $ob \perp \mathfrak{B}B$ . Dann ist  $\overline{ob} = v_B$ .

Um die relative Geschwindigkeit  $v_{23}$  von  $B$  in bezug auf das Glied 3 zu finden, ziehe man  $cb' \perp CB'$  bis zum Schnitte  $b'$  mit  $bd$ , dann ist  $b'$  der Geschwindigkeitspunkt von  $B'$ . Denn  $CDB'$  ist ein starres Dreieck, also

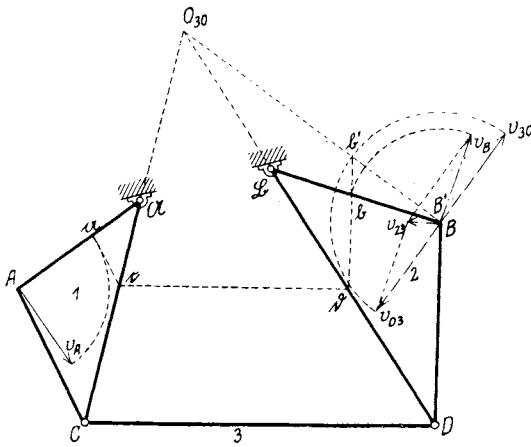
$$cdb' \sim CDB'$$


Fig. 356.

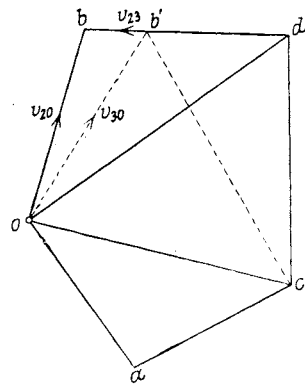


Fig. 356 a.

und  $B$  bewegt sich gegen  $B'$  in einer Richtung senkrecht zu  $BD$ . Dann ist aber  $b'b = v_{23}$  die gesuchte relative Geschwindigkeit und es ist

$$v_{20} = v_{23} + v_{30}$$

oder

$$v_{23} = v_{20} + v_{03}$$

**181. Geschwindigkeitsplan eines sechsgliedrigen Getriebes.** Das in Fig. 357 gezeichnete Getriebe mit dem Grundgliede 0 ist als kinematische Kette bereits in Fig. 337 behandelt worden; seine Drehpole werden, wie dort angegeben, bestimmt. Das Getriebe ist zwangsläufig; gegeben ist die Geschwindigkeit  $v_A$ ; gesucht wird die Geschwindigkeit  $v_B$  des Punktes  $B$ , der durch einen steifen Arm mit dem Gliede 3 verbunden ist; ferner die relative Geschwindigkeit  $v_{32}$  des Punktes  $B$  in bezug auf das Glied 2.

a) Mit Benützung der Drehpole und der gedrehten Geschwindigkeiten. Man führt die Aufgabe auf die in 180 gelöste zurück, indem man aus den Drehpolen ein Kurbelgetriebe zusammenstellt. Da nur die Glieder 0, 1, 2, 3 in Betracht kommen, wählt man das aus

den vier Drehpolen 01, 12, 23, 30 bestehende ideale Getriebe  $\mathcal{ACD}\mathcal{B}$ ; da die Drehpole 12 und 23 veränderlich sind, darf dieses Getriebe nur als augenblicklich bestehend, und zwar nur während eines unendlich kleinen Zeiteilchens, angesehen werden. Nun erfolgt die Konstruktion

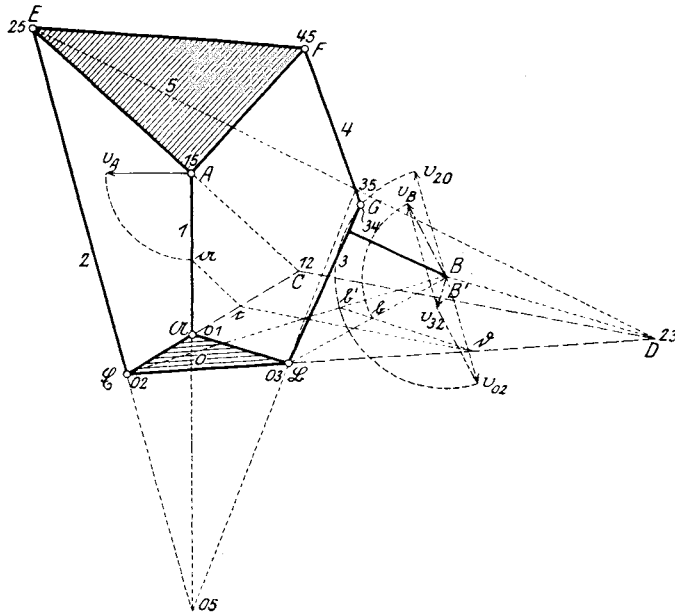


Fig. 357.

von  $v_B$  wie beim Kurbelgetriebe; man dreht  $v_A$  nach  $\overline{Aa}$ , zieht  $ac \parallel AC$ ,  $cd \parallel CD$ ,  $db \parallel DB$  und dreht schließlich  $\overline{Bb}$  nach  $v_B$ .

Um  $v_{32}$  zu finden, nenne man  $B'$  den mit  $B$  zusammenfallenden Punkt des Gliedes 2, verbinde  $B'$  mit  $\mathcal{C}$  und bringe diese Verbindungslinie zum Schnitte  $b'$  mit  $db$ ; dann ist  $\overline{B'b'}$  die gedrehte Geschwindigkeit von  $B'$  in bezug auf das Grundglied 0. Dreht man  $\overline{B'b'}$  um  $90^\circ$  im gleichen Sinne wie früher  $\overline{Bb}$ , so erhält man  $v_{20}$ , entgegengesetzt davon  $v_{02}$ ; da nun  $v_B$  die Bedeutung  $v_{30}$  hat, ferner

$$v_{32} \equiv v_{30} + v_{02}$$

ist, so ist  $v_{32}$  aus dem Parallelogramm der Geschwindigkeiten  $v_B$  und  $v_{02}$  zu bestimmen. Bei genauer Konstruktion muß sich  $v_{32} \perp BD$  ergeben.

Man könnte einwenden, daß das Gelenk  $A$  nicht nur dem Gliede 1, sondern auch 5 angehört, daß also das ideale Getriebe nicht nur aus den Drehpolen 01, 12, 23, 30 gebildet werden kann, sondern auch aus 05, 52, 23, 30.

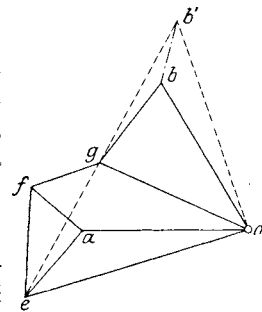


Fig. 357 a.

Dies ist vollkommen zutreffend und muß bei genauer Zeichnung zum gleichen Resultate führen. In Fig. 357 b wurde das ideale Gelenkviereck  $\mathcal{A}, C, D, \mathcal{B}$  zugrunde gelegt, das die oben genannten Drehpole zu Gelenken hat. Man zieht sodann  $ac \parallel AC$ ,  $cd \parallel CD$ ,  $db \parallel DB$  und dreht  $Bb$  um  $90^\circ$  nach  $v_B$ .

b) Mit Benützung des Geschwindigkeitsplanes. In Fig. 357 a wurde aus dem gegebenen  $v_A \equiv \overline{oa}$  durch einfaches Ziehen der Geraden  $oe \perp \mathcal{C}E$ ,  $ae \perp AE$ ,  $af \perp AF$ ,  $ef \perp EF$ ,  $og \perp \mathcal{B}G$ ,  $fg \perp FG$ ,  $gb \perp GB$ ,

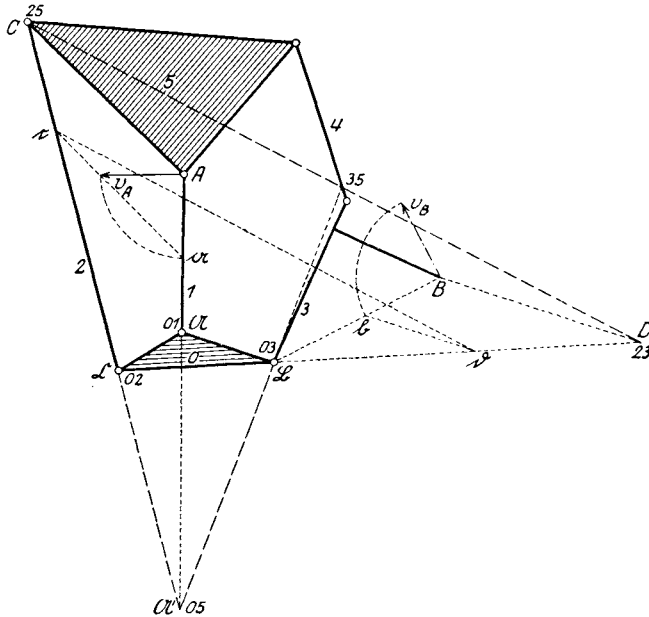


Fig. 357 b.

$ob \perp \mathcal{B}B$  der Geschwindigkeitspunkt  $b$  und damit die gesuchte Geschwindigkeit  $v_B \equiv \overline{ob}$  gefunden.

Der Maßstab der Geschwindigkeiten ist hier doppelt so groß wie in Fig. 357 genommen worden.

Um auch die relative Geschwindigkeit  $v_{32}$  von  $B$  in bezug auf das Glied 2 zu finden, ziehe man, da  $B'$  diesem Gliede angehört, also starr mit  $\mathcal{C}$  und  $E$  verbunden ist, die Linien

$$ob' \perp \mathcal{C}B' \text{ und } eb' \perp EB';$$

der Schnittpunkt  $b'$  ist der Geschwindigkeitspunkt von  $B'$  und  $b'b' \equiv v_{32}$ .

**182. Geschwindigkeitsplan eines zehngliedrigen Getriebes.** Das in Fig. 358 gezeichnete, von O. Mohr angegebene Getriebe, aus vier Dreiecksgliedern und sechs Stäben (einschließlich Grundglied  $\mathcal{A}\mathcal{B}$ ) bestehend, ist zwangläufig. Gegeben ist die Beschleunigung  $b_A$ ; man soll den Geschwindigkeitsplan entwickeln.

Nachdem aus  $b_A$  in bekannter Weise (vgl. 21)  $v_A = \overline{A\mathcal{U}}$  bestimmt wurde, zeichnet man in Fig. 358a  $\overline{o\bar{a}} \equiv v_A$  und sodann  $c$  aus der Ähnlichkeit  $oac \sim \mathcal{U}AC$ . Durch  $c$  zieht man die Senkrechten  $e \perp CE$  und  $f \perp CK$ , und nimmt auf  $e$  den Punkt  $e'$  beliebig an. Hierauf zeichnet man durch  $o$  die Senkrechten  $b \perp \mathfrak{B}B$ ,  $\mathfrak{d} \perp \mathfrak{B}D$ , zieht  $e'd' \perp ED$ ,  $e'l' \perp EL$ ,  $d'l' \perp DL$ , wodurch die Punkte  $d'$  auf  $\mathfrak{d}$  und  $l'$  gewonnen werden; ferner  $d'b' \perp DB$ ,  $b'm' \perp BM$ ,  $e'k' \perp EK$ ,  $k'm' \perp KM$ , wodurch die Punkte  $b'$ ,  $k'$  und  $m'$  gefunden sind; endlich  $l'n' \perp LN$  und  $m'n' \perp MN$ , wodurch auch  $n'$  bekannt ist.

Hierauf wählt man auf  $e$  einen zweiten beliebigen Punkt  $e''$  und führt dieselben Konstruktionen wie mit  $e'$  durch, welche der Reihe nach

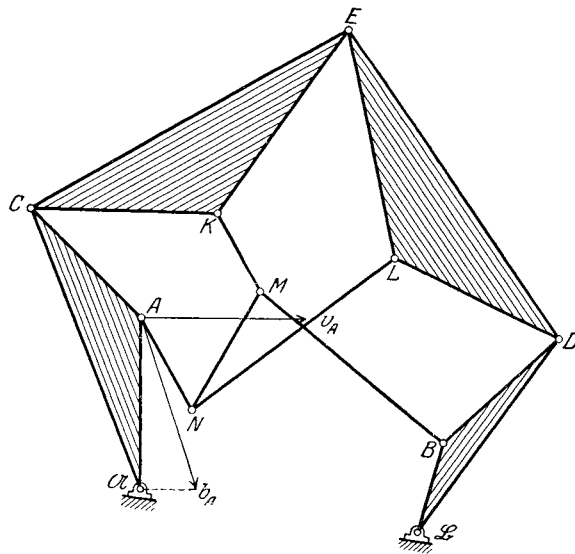


Fig. 358.

die Punkte  $d''$ ,  $l''$ ,  $b''$ ,  $k''$ ,  $m''$ ,  $n''$  liefern. Die Verbindungsgerade  $n$  von  $n'$  und  $n''$  muß sodann durch den richtigen Punkt  $n$  gehen, den man schließlich erhält, wenn man  $an \perp AN$  zeichnet.

Durch Ziehen von Parallelen  $nl \parallel n'l'$  bis zur Verbindungsline  $l'l''$ ,  $nm \parallel n'm'$  bis zur Verbindungsline  $m'm''$  usf. können nun rückschreitend alle übrigen Geschwindigkeitspunkte gefunden werden.

### 183. Anwendungen.

1. Die Kolbenmaschine von F. Th. Goodmann. Das in Fig. 359 dargestellte Getriebe hat Ähnlichkeit mit der gewöhnlichen Schubkurbel; 1 ist die Kurbel, der Lenker 2 ist jedoch als Dreiecksglied ausgebildet mit den Gelenken  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ; in  $B$  ist er an den Zylinder 5 angeschlossen, in  $C$  durch die Stange 3 und das Gelenk  $D$  mit dem Kolben 4

gelenkig verbunden. Der Kolben 4 und der Zylinder 5 machen jeder für sich eine geradlinige Translation.

Dieses Getriebe hat das gleiche Schema wie das in Fig. 357 behandelte;

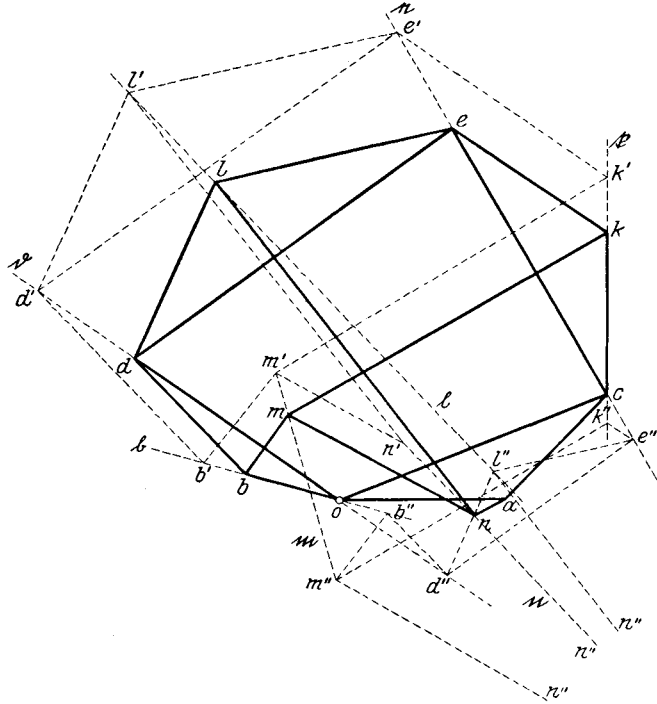


Fig. 358 a.

es hat zwei Dreiecksglieder (2 und Grundglied 0), während die Glieder 1, 3, 4, 5 die vier Stäbe vertreten. Von den drei Gelenken des Grundgledes ist nur der Drehpol  $\mathcal{U} = 10$  im Endlichen gelegen, hingegen 40 und 50 im Unendlichen.

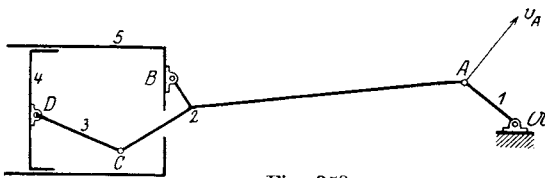


Fig. 359.

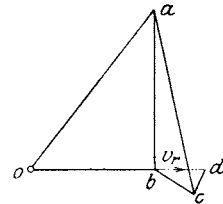


Fig. 359 a.

Gegeben ist die Geschwindigkeit  $v_A$  des Kurbelzapfens A; gesucht wird die relative Geschwindigkeit des Kolbens 4 gegen den Zylinder 5.

Im Geschwindigkeitsplan (Fig. 359 a) wurde  $\overline{oa} \equiv v_A$  gemacht und sodann  $ob$  parallel zur Bewegungsrichtung von B,  $ab \perp AB$  gezogen,

wodurch man  $ob \equiv v_B$  erhält. Ferner  $ac \perp AC$ ,  $bc \perp BC$  und  $cd \perp CD$  gezogen bis zum Schnitte  $d$  mit  $od$ , d. i. die Bewegungsrichtung von  $D$ . Dann ist  $bd$  die relative Geschwindigkeit  $v_r$  von  $D$  gegen  $B$ .

2. Getriebe einer Fächer-Maschine. Bei Fahr- und Flugzeug-Maschinen kommt die Anordnung vor, daß eine Anzahl von Zylindern fächerartig um einen Mittelpunkt  $O$  gestellt und ihre Lenkerstangen an zwei entgegengesetzte Kurbeln mit gemeinsamer Kurbelwelle angeschlossen sind. Fig. 360 zeigt zwei solche Zylinder;  $AB$  oder Glied 1 ist die aus einem starren Stück bestehende Doppelkurbel mit der Welle in  $O$ ,  $AC$  oder Glied 2 und  $BD$  oder Glied 3 sind die Lenkerstangen, 4 und 5 die Kolben, deren Bewegungsrichtungen durch die Lage der feststehenden Zylinder gegeben sind und durch  $O$  gehen. Das Grundglied dieser sechsgliedrigen Kette (Glied

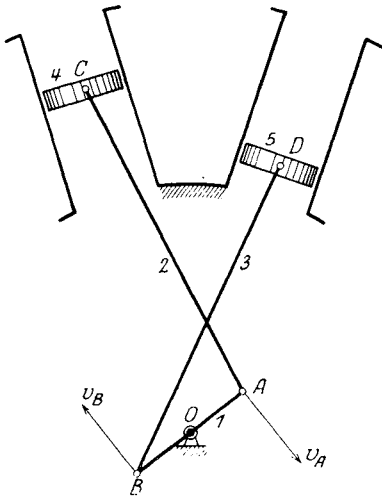


Fig. 360.

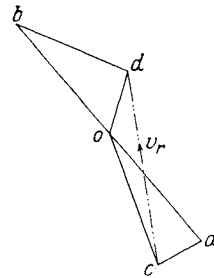


Fig. 360a.

null) ist das Fundament, das das Lager der Welle  $O$  mit der Lagerung der Zylinder verbindet.

Gegeben sei die Geschwindigkeit  $v_A = -v_B$  des Kurbelzapfens  $A$ ; es soll Größe und Richtung der relativen Geschwindigkeit der beiden Kolben gegeneinander konstruiert werden.

Im Geschwindigkeitsplan (Fig. 360a) wird zuerst  $oa \equiv v_A$ ,  $ob \equiv v_B$  gemacht; man zieht  $ac \perp AC$  und  $oc \parallel OC$ , so ist  $oc \equiv v_C$ . Macht man ebenso  $bd \perp BD$  und  $od \parallel OD$ , so ist  $od \equiv v_D$ . Dann ist  $cd = v_r$  die relative Geschwindigkeit von  $D$  gegen  $C$  oder die relative Geschwindigkeit des Kolbens 5 gegen den Kolben 4.

3. Das Wurfgetriebe von H. Marcus. In dem Aufsätze: „Propeller-Rinnen und Wurfgetriebe“, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1902, S. 1813, teilte H. Marcus mehrere Getriebe mit, welche aus einer nahezu gleichförmig umlaufenden Kurbel eine hin- und hergehende Bewegung ableiten, deren Geschwindigkeit nahezu gleichförmig zunimmt, um dann sehr rasch bis auf Null abzunehmen. Diese Getriebe sollen dazu



dienen, die schüttelnde Bewegung von Rinnen hervorzurufen, in denen Fördergut vorwärts gleitet.

Eines dieser Getriebe zeigt Fig. 361. Es besitzt acht Glieder, von denen das Grundglied mit 0 bezeichnet wurde. Die Drehung der Kurbel

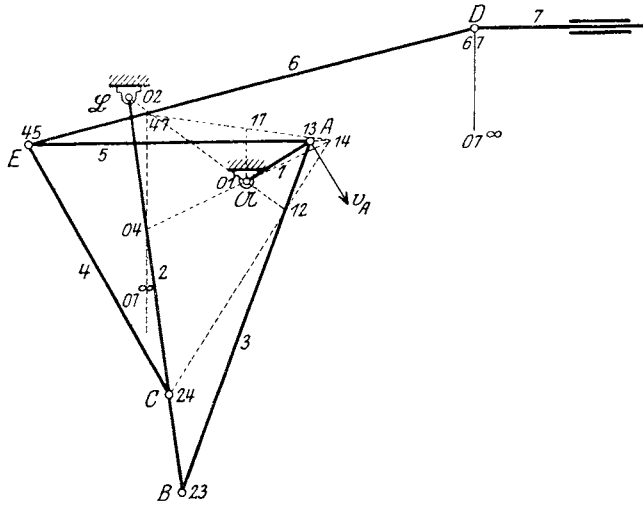


Fig. 361.

$v_A$  wird durch  $AB$  auf die Schwinge  $B\mathfrak{B}$  übertragen, und von Kurbel und Schwinge durch  $AE$  und  $CE$  auf den Lenker  $ED$  und die Schubstange 7.

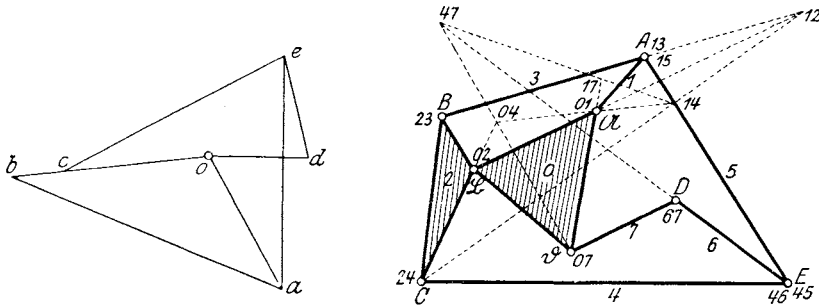


Fig. 361 a.

Fig. 361 b.

Gegeben ist die Geschwindigkeit  $v_A$ ; zu bestimmen ist die Geschwindigkeit  $v_D$ .

a) Mit Benützung der gedrehten Geschwindigkeiten. Um die Drehpole des Getriebes zu bestimmen, bedient man sich des Schemas Fig. 361 b, welches die gleiche kinematische Kette in allgemeiner Anordnung zeigt. Durch einfaches Ziehen von geraden Linien findet man die Drehpole nach folgendem Schema:

13, 23 > 12, 12, 24 > 14, 01, 14 > 04, 04, 07 > 47, 14, 47 > 17.  
 01, 02 > 12, 15, 45 > 14, 02, 24 > 04, 46, 67 > 47, 01, 07 > 17.

Es genügt, diese Drehpole in Fig. 361 zu zeichnen, da, um die Geschwindigkeit von  $D$  festzustellen, das aus den vier Drehpolen 01, 17, 47, 04 bestehende ideale Kurbelgetriebe hinreicht. Ist nämlich  $\overline{A\mathcal{U}}$  die gedrehte Geschwindigkeit  $v_A$ , so ist die Strecke 17,  $\mathcal{U}$  die gedrehte Geschwindigkeit von 17, da dieser Punkt dem Gliede I angehört; da aber

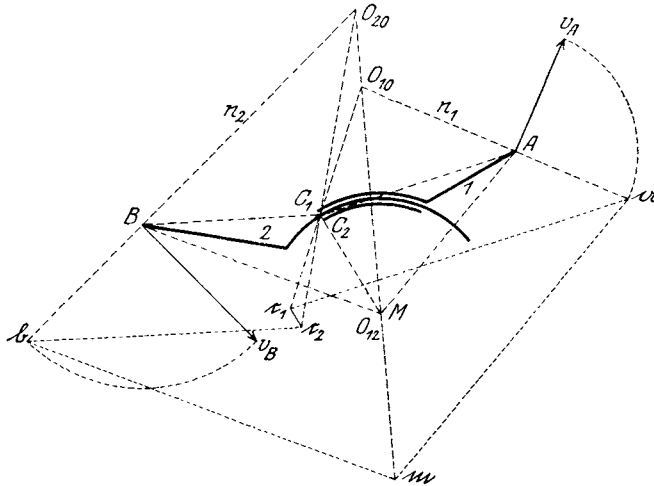


Fig. 362.

17 auch dem Gliede 7 angehört, so ist die Strecke 17,  $\mathcal{U}$  auch schon die gedrehte Geschwindigkeit von  $D$ ; denn 7 macht eine geradlinige Translation, somit hat  $D$  dieselbe Geschwindigkeit wie 17.

b) Mit Benützung des Geschwindigkeitsplanes. In Fig. 361 a wurde  $oa$  (in doppeltem Maßstabe) gleich  $v_A$  gemacht und sodann folgende Linien gezogen:  $ob \perp \mathcal{B}B$ ,  $ab \perp AB$ .

Den Punkt  $c$  findet man aus der Ähnlichkeit

$$ocb \sim \mathcal{B}CB.$$

Endlich ergibt sich aus  $ae \perp AE$ ,  $ce \perp CE$  der Punkt  $e$  und aus  $ed \perp ED$ ,  $od \parallel 7$  der Punkt  $d$ . Es ist dann  $\overline{od} = v_D$  (in doppeltem Maßstabe).

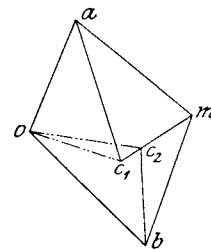


Fig. 362 a.

### C. Kinematische Ketten mit Schiebern.

184. **Gekrümmte Schieber.** In Fig. 362 gleitet das gekrümmte Glied 2, dem der Punkt  $B$  angehört, durch einen gleichgekrümmten Schieber 1, dem der Punkt  $A$  angehört. Die Geschwindigkeiten  $v_A$  und  $v_B$  sind gegeben; man konstruiere die Geschwindigkeiten irgendwelcher Punkte

der beiden Glieder 1 und 2, z. B. der Punkte  $C_1$  und  $C_2$ , die am Ende des Schiebers augenblicklich zusammenfallen.

Der Mittelpunkt  $M$  der beiden gekrümmten Glieder ist ihr relativer Drehpol  $O_{12}$  und gehört beiden Gliedern an; die Kette ist also kinematisch gleichwertig mit zwei Stangen  $AM$  und  $BM$ , die in  $M$  eine gelenkige Verbindung haben; damit ist aber die Aufgabe auf jene in Fig. 343 gelöste zurückgeführt. Die Lösung ist demnach folgende:

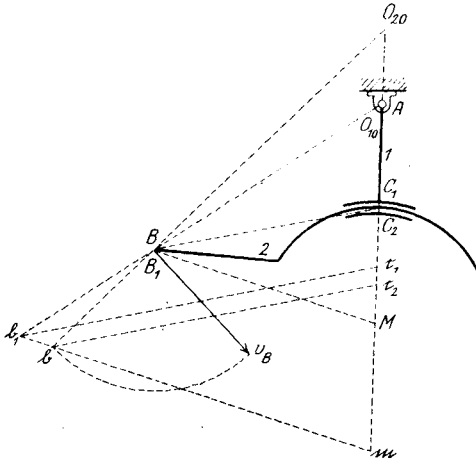


Fig. 363.

a) Mit Hilfe der gedrehten Geschwindigkeiten. Man zeichnet die gedrehten Geschwindigkeiten  $\overline{Aa}$  und  $\overline{Bb}$ , zieht am  $\parallel AM$ ,  $\overline{bm} \parallel BM$ , so ist  $\overline{Mm}$  die gedrehte Geschwindigkeit von  $M$  und ihre Richtung die Normale von  $M$ ; sie schneidet die Normalen  $n_1$  und  $n_2$  von  $A$  und  $B$  in den Drehpolen  $O_{10}$  und  $O_{20}$ . Zieht man sodann  $\overline{ac_1} \parallel AC_1$  bis zum Schnitte  $c_1$  mit der Normale  $O_{10}C_1$ , so ist  $\overline{C_1c_1}$  die gedrehte Geschwindigkeit von  $C_1$ ; ebenso liefert  $\overline{bc_2} \parallel BC_2$  im

Schnitte  $c_2$  mit der Normale  $O_{20}C_2$  die gedrehte Geschwindigkeit  $\overline{C_2c_2}$  von  $C_2$ ; endlich ist  $\overline{c_1c_2}$  die gedrehte relative Geschwindigkeit von  $C_2$  gegen  $C_1$  und muß als solche senkrecht zur Tangente in  $C_1$ , also parallel zu  $C_1M$  sein.

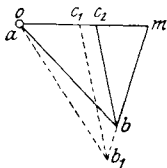


Fig. 363 a.

b) Mit Geschwindigkeitsplan (Fig. 362 a). Man zeichnet  $\overline{oa} \equiv v_A$ ,  $\overline{ob} \equiv v_B$ , zieht  $\overline{am} \perp AM$ ,  $\overline{bm} \perp BM$ , so ist  $m$  der Geschwindigkeitspunkt von  $M$ ; ferner  $\overline{ac_1} \perp AC_1$ ,  $\overline{bc_2} \perp BC_2$  und  $\overline{mc_1c_2} \perp MC_1C_2$ ; dann ist  $\overline{oc_1}$  die Geschwindigkeit von  $C_1$ ,  $\overline{oc_2}$  jene von  $C_2$  und  $\overline{c_1c_2}$  die relative Geschwindigkeit von  $C_2$  gegen  $C_1$ .

In Fig. 363 wurde der besondere Fall behandelt, in dem das Glied 1 eine Dauerdrehung um den festliegenden Punkt  $A$  ausführt. Nennt man hier  $C_1$  und  $C_2$  jene Punkte der Glieder 1 bzw. 2, die augenblicklich im Mittelpunkt der Hülse zusammenfallen, so ist die Bewegungsrichtung sowohl von  $C_1$  als auch von  $C_2$  senkrecht zu  $MA$ ; im Schnitte von  $MA$  mit der Normale  $bB$  der Drehpol  $O_{20}$  und  $\overline{bm} \parallel BM$ ,  $\overline{bc_2} \parallel BC_2$  gibt die gedrehten Geschwindigkeiten  $\overline{Mm}$  und  $\overline{C_2c_2}$  der Punkte  $M$  und  $C_2$ .

Da  $M$  aber  $O_{12}$  ist, also auch dem Gliede 1 angehört und  $A$  mit  $O_{10}$  zusammenfällt, schneidet  $\overline{mb}$  die Gerade  $AB_1$  in dem Punkte  $b_1$ ; es

ist  $B_1$  der mit  $B$  zusammenfallende Punkt des Gliedes 1 und  $\overline{B_1 b_1}$  seine gedrehte Geschwindigkeit. Die Gerade  $b_1 c_1 \parallel B_1 C_1$  gibt dann die gedrehte Geschwindigkeit  $\overline{C_1 c_1}$  des Punktes  $C_1$ .

Im Geschwindigkeitsplan (Fig. 363 a) wird  $\overline{ob} \equiv v_B$  gemacht;  $a$  liegt in  $o$ . Man zieht  $am \perp AM$ ,  $bm \perp BM$  und erhält den Geschwindigkeitspunkt  $m$ ; sodann  $bc_2 \perp BC_2$  bis zum Schnitte mit  $am$  und erhält in  $oc_2$  die Geschwindigkeit von  $C_2$ ; endlich  $ab_1 \perp AB_1$  bis zum Schnitte  $b_1$  mit  $mb$  und  $b_1 c_1 \perp B_1 C_1$ , dann ist  $oc_1$  die Geschwindigkeit von  $C_1$  und die Strecke  $\overline{c_1 c_2}$  die relative Geschwindigkeit von  $C_2$  gegen  $C_1$ .

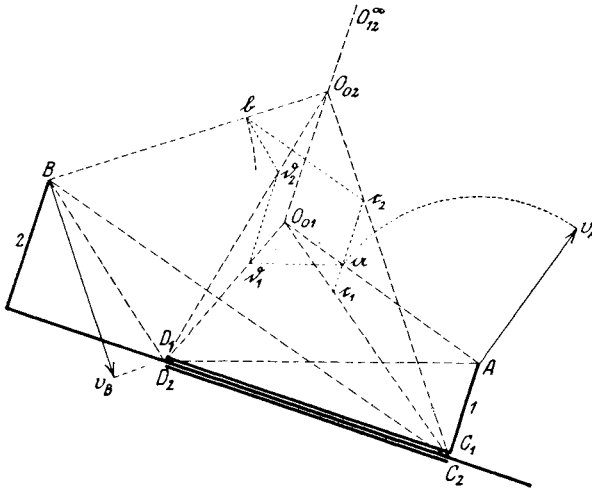


Fig. 364.

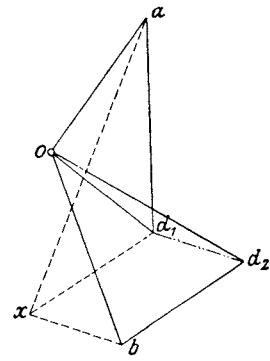


Fig. 364 a.

Verlegt man endlich den festen Drehpunkt  $A$  in den Mittelpunkt  $C_1$  der Hülse, so erhält man jenen Fall wieder, der schon bei dem Geschwindigkeitszustande der geführten Scheibe besprochen wurde (Fig. 130, 130 a).

**185. Gerade Schieber.** Die beiden Glieder 1 und 2 (Fig. 364) machen in bezug aufeinander eine geradlinige Translation; eine gerade Stange des Gliedes 2 verschiebt sich in einer geraden Hülse des Gliedes 1. Die Geschwindigkeiten der Punkte  $A$  und  $B$ ,  $v_A$  und  $v_B$  sind gegeben; man ermittle die Geschwindigkeiten der Punkte  $D_1$  und  $D_2$ , die augenblicklich zusammenfallen und dem Gliede 1 bzw. dem Gliede 2 angehören; insbesondere ist die relative Geschwindigkeit der Stange 2 gegen die Hülse 1 zu bestimmen. Die im vorigen Abschnitt mitgeteilte Konstruktion für gekrümmte Schieber ist hier nicht zu verwenden, da der Krümmungsmittelpunkt  $M$  in die Unendlichkeit fällt.

a) Mit Hilfe der gedrehten Geschwindigkeiten. Betrachten wir zuerst die Punkte  $C_1$  und  $C_2$  der Glieder 1 bzw. 2, die augenblicklich im Fußpunkt der Senkrechten von  $A$  auf die Hülse zusammenfallen. Man zeichnet die gedrehten Geschwindigkeiten  $\overline{Aa} = v_A$ ,  $\overline{Bb} = v_B$ ,

ferner die Gerade  $c_1 a \parallel C_1 A$ , so muß auf dieser Geraden der Endpunkt  $c_1$  der gedrehten Geschwindigkeit von  $C_1$  liegen; da sich aber  $C_2$  gegen  $C_1$  in Richtung der Hülse verschiebt, muß  $c_1 c_2$  senkrecht zur Hülse sein; somit liegt auch  $c_2$  auf der Geraden  $c_1 a$ .

Zieht man  $b c_2 \parallel B C_2$ , so erhält man im Schnitte mit  $c_1 a$  den Punkt  $c_2$  und sodann im Schnitte von  $B b$  mit  $C_2 c_2$  den Drehpol  $O_{02}$  des Gliedes 2 in bezug auf die ruhende Ebene. Der Drehpol  $O_{12}$  liegt in unendlicher Entfernung in der Senkrechten aus  $O_{02}$  auf die Hülse, weil 1 gegen 2 eine Translationsbewegung macht; im Schnitte von  $O_{02} O_{12}^\infty$  mit  $A a$  liegt dann der Drehpol  $O_{01}$ . Verbindet man ihn mit  $C_1$ , so trifft diese

Linie die Gerade  $c_1 a$  in  $c_1$ . Verbindet man endlich  $D_1$  mit  $O_{01}$  und  $D_2$  mit  $O_{02}$  und zieht  $a d_1 \parallel A D_1$ ,  $b d_2 \parallel B D_2$ , so erhält man auch die Punkte  $d_1$  und  $d_2$ ; dann sind  $\overline{D_1 d_1}$  und  $\overline{D_2 d_2}$  die gesuchten Geschwindigkeiten von  $D_1$  und  $D_2$ , um  $90^\circ$  verdreht. Die relative Geschwindigkeit der Stange gegen die Hülse ist ebensowohl  $\overline{d_1 d_2}$  wie auch  $\overline{c_1 c_2}$ ; diese beiden Strecken müssen sich also gleich ergeben.

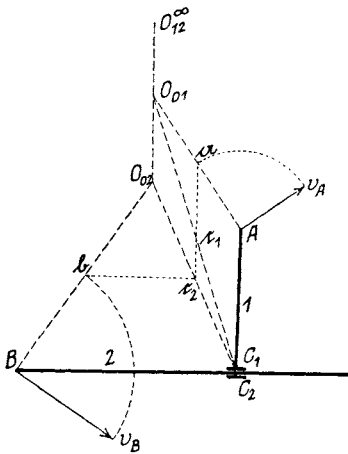


Fig. 365.

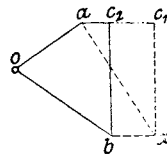


Fig. 365 a.

b) Mit Geschwindigkeitsplan (Fig. 364 a). Man zeichnet  $\overline{oa} \equiv v_A$ ,  $\overline{ob} \equiv v_B$ . Denkt man sich zunächst die Glieder 1 und 2 fest miteinander verbunden, so wäre die Geschwindigkeit von B gegen A:

$$v_B' \equiv v_A + v_{BA}'$$

wobei letztere senkrecht zu  $AB$  wäre; da aber die Punkte A und B überdies noch eine gegenseitige Verschiebung in Richtung der Hülse haben, kommt zu  $v_B'$  noch diese Verschiebungsgeschwindigkeit  $v_r$  hinzu und es ist  $v_B \equiv v_A + v_{BA}' + v_r$ .

Zieht man also  $ax \perp AB$ ,  $xb$  parallel zur Hülse, so ist  $\overline{ax} = v_{BA}'$  und  $\overline{xb} = v_r$ . Damit ist die gewünschte Verschiebungsgeschwindigkeit der Stange 2 in der Hülse 1 schon gefunden; sie muß mit  $\overline{c_1 c_2}$  oder  $\overline{d_1 d_2}$  in Fig. 364 übereinstimmen. Zieht man noch  $ad_1 \perp A D_1$  und  $xd_1 \perp B D_2$ , so erhält man den Geschwindigkeitspunkt  $d_1$ ; denn die Geschwindigkeit von  $D_1$  ist einerseits

$$v_{D_1} \equiv v_A + v_{D_1 A};$$

andererseits ist sie  $v_{D_1} \equiv v_B + v_{D_1 B}' - v_r$ ,

worin  $v_{D_1B'}$  die relative Geschwindigkeit von  $D_1$  gegen  $B$  bedeutet, wenn  $D_1$  fest mit  $B$  verbunden wäre.

Zieht man endlich noch  $bd_2 \perp BD_2$ ,  $d_1d_2 \parallel xb$ , so erhält man den Geschwindigkeitspunkt  $d_2$ ; denn es ist

$$v_{D_1} = v_B + v_{D_2B}$$

und auch

$$v_{D_2} = v_A + v_{D_2A'} + v_r,$$

worin  $v_{D_2A'}$  die Geschwindigkeit von  $D_2$  gegen  $A$  bedeutet, wenn  $D_2$  fest mit  $A$  verbunden wäre.

Die Strecken  $\overline{od_1}$ ,  $\overline{od_2}$  sind die gesuchten Geschwindigkeiten der Punkte  $D_1$  und  $D_2$  nach Größe und Richtung;  $d_1d_2$  die Geschwindigkeit, mit der sich  $D_2$  gegen  $D_1$  verschiebt.

Fig. 365 zeigt eine einfachere Anordnung; der Punkt  $B$  liegt in der Schieberstange selbst; gegeben sind  $v_A$  und  $v_B$ ; es sind die Geschwindigkeiten der zusammenfallenden Punkte  $C_1$  und  $C_2$  der Glieder 1 bzw. 2 zu ermitteln. Die Lösung ist der früheren analog; man zeichnet  $Aa$  und  $Bb$ , zieht  $ac_2 \parallel 1$ ,  $bc_2 \parallel 2$  bis zum Schnitte  $c_2$ ; sodann bringt man  $Bb$  und  $C_2c_2$  zum Schnitte  $O_{02}$ , zieht  $O_{02}O_{01} \perp 2$  und sucht den Schnitt  $O_{01}$  mit  $Aa$ ; dann liegt  $c_1$  im Schnitte von  $ac_2$  mit  $O_{01}C_1$ .  $\overline{C_1c_1}$  und  $\overline{C_2c_2}$  sind die gedrehten Geschwindigkeiten von  $C_1$  und  $C_2$ . (Vgl. L. Burmester, Kinematik, S. 55.)

Im Geschwindigkeitsplan (Fig. 365a) wird  $ax \perp AB$ ,  $bx \parallel 2$  bis zum Schnitte  $x$  gezogen, sodann  $ac_1 \parallel 2$ ,  $bc_2 \parallel xc_1 \perp 2$ ; dann sind  $\overline{oc_1}$  und  $\overline{oc_2}$  die gesuchten Geschwindigkeiten der Punkte  $C_1$  und  $C_2$ ,  $\overline{c_1c_2}$  die relative Geschwindigkeit von  $C_2$  in bezug auf  $C_1$ .

Fig. 366 zeigt den besonderen Fall, wenn  $v_A = 0$  ist. Dann dreht sich das Glied 1 dauernd um  $A$ , während die Stange 2 durch die Hülse des Gliedes 1 schleift. Um hier die Geschwindigkeiten der zusammenfallenden Punkte  $C_1$  und  $C_2$  zu bestimmen, wenn  $v_B$  gegeben ist, suche man den Schnitt  $O_{20}$  der Normale  $Bb$  des Punktes  $B$  mit  $C_2A$ ; denn  $O_{10}$  liegt jetzt in  $A$ .  $bc_2 \parallel 2$  liefert im Schnitte mit  $C_2A$  den Punkt  $c_2$ ; zieht man noch  $b_1b_1 \parallel 1$  bis zum Schnitte  $b_1$  mit  $AB$  und  $b_1c_1 \parallel 2$  bis zum Schnitte mit 1, so sind  $\overline{C_1c_1}$  und  $\overline{C_2c_2}$  die gedrehten Geschwindigkeiten von  $C_1$  und  $C_2$ ; denn  $\overline{B_1b_1}$  ist die gedrehte Geschwindigkeit des Punktes  $B_1$ , der mit  $B$  zusammenfällt und dem Gliede 1 angehört; dann muß aber die Proportion bestehen:

$$\overline{B_1b_1} : \overline{C_1c_1} = \overline{B_1O_{10}} : \overline{C_1O_{10}}.$$

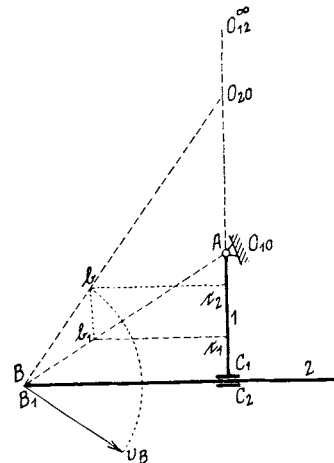


Fig. 366.

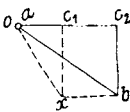


Fig. 366 a.

Die Strecke  $\overline{c_1 c_2}$  ist die gedrehte relative Geschwindigkeit der Stange 2 gegen die Hülse 1.

Die Konstruktion des Geschwindigkeitsplanes (Fig. 366a) ist wie in Fig. 365a durchzuführen.

**186. Literatur.** Der Gedanke der Geschwindigkeitspläne ist aus jenem der Verschiebungspläne von Fachwerken hervorgegangen, wie er von Williot in seiner Abhandlung: „Notations pratiques sur la statique graphique“, Publications scientifiques industrielles, 1877 angewendet wurde, um die Formänderung einfacher, aus Dreiecken zusammengesetzter Fachwerke zu ermitteln.

O. Mohr hat zuerst die Konstruktion der Geschwindigkeitspläne für einfache und verwickelte kinematische Ketten in den Abhandlungen: „Über Geschwindigkeits- und Beschleunigungspläne“, Civilingenieur 1887 und „Beiträge zur Geometrie der Bewegung“, Zeitschr. f. Math. u. Physik 1903 gezeigt. Die Methode, die Mohr bei verwickelten kinematischen Ketten benützt, stimmt nicht überein mit der hier vorgetragenen, die auf der Ähnlichkeit der von den Geschwindigkeitspunkten beschriebenen Punktreihen beruht.

Bei verwickelten kinematischen Ketten nämlich zerlegt Mohr die Bewegung in zwei andere, einfachere Bewegungen, die er übereinander lagert und hieraus die wirkliche Bewegung durch Rechnung ermittelt.

Die im vorliegenden Abschnitte vorgetragene Methode<sup>1)</sup> hat Ähnlichkeit mit der von C. Saviotti gegebenen Ermittlung der Spannungen in Fachwerken, bekannt unter der Bezeichnung: Methode de la fausse position. (Vgl. L. Henneberg, Graphische Statik der starren „Systeme“, S. 496.)

In einzelnen Fällen wurde diese Methode zur Konstruktion von Verschiebungsplänen schon angewendet, und zwar von H. Müller-Breslau, Graphische Statik, Bd. II, 1. Abt., 4. Aufl., S. 85 und G. C. Mehrrens, Vorlesungen über Ingenieur-Wissenschaften, 1. Teil, 1. Bd., 2. Aufl., S. 236.

### 187. Aufgaben.

86. Die Geschwindigkeit des Kolbens der Kolbenmaschine von F. Th. Goodmann (Fig. 359) ist mit Benützung der gedrehten Geschwindigkeiten zu bestimmen.
87. Aus der kinematischen Kette Fig. 352 soll durch Festhalten des Stabes  $HJ$  ein Getriebe entstehen, von dem die Geschwindigkeit  $v_G$  gegeben ist. Man zeichne den Geschwindigkeitsplan.
88. Dieselbe Aufgabe, nur soll statt  $HJ$  das Dreiecksglied  $EFG$  festgehalten werden; die Geschwindigkeit  $v_A$  ist gegeben.

<sup>1)</sup> Die im Jahre 1914 der Zeitschrift für Math. u. Physik eingereicht, aber bisher nicht veröffentlicht wurde.

89. Fig. 367 zeigt die Anordnung des Luftpressers der New Yorker „Airbrake“.

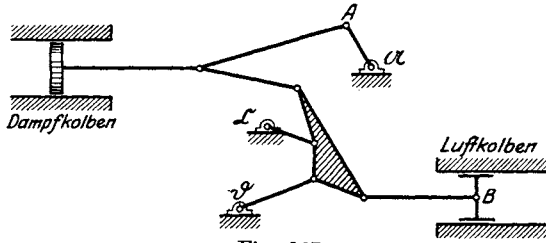


Fig. 367.

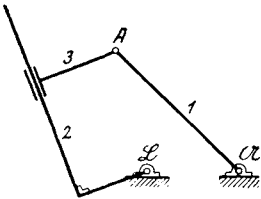


Fig. 368.

Comp.“; A, C und D sind festliegende Gelenke. Gegeben ist die Geschwindigkeit des Kurbelzapfens A; mit welcher Geschwindigkeit wird sich der Luftkolben B bewegen? (Nach zwei Methoden.)

90. Von der in Fig. 368 dargestellten Kurbelschleife ist die Geschwindigkeit des Kurbelzapfens A bekannt. Man konstruiere den Geschwindigkeitsplan und gebe an, mit welcher Geschwindigkeit

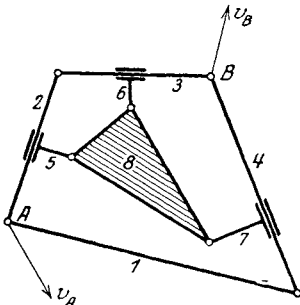


Fig. 370.

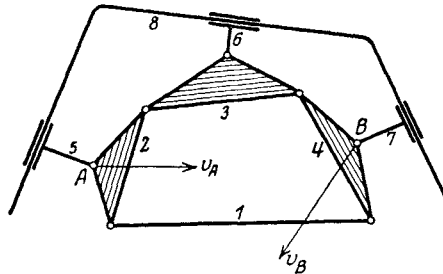


Fig. 369.

die Glieder 2 und 3 aneinander schleifen.

91. In der achtgliedrigen Kette Fig. 369

sind die Geschwindigkeiten  $v_A$  und  $v_B$  gegeben. Mit welchen Geschwindigkeiten schleifen die Glieder 5, 6, 7 am Gliede 8?

92. In der achtgliedrigen Kette Fig. 370 sind die Geschwindigkeiten  $v_A$  und  $v_B$  gegeben. Mit welchen Geschwindigkeiten schleifen die Glieder 2, 3, 4 an den Gliedern 5, 6, 7?

93. Von den Eckpunkten A und B der in Fig. 371

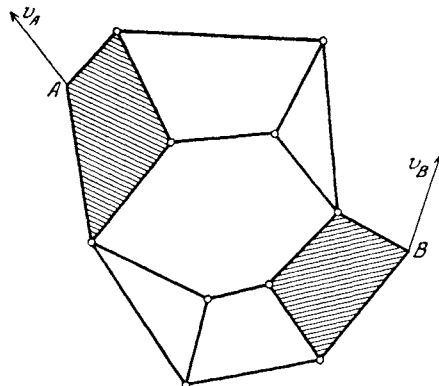


Fig. 371.



dargestellten Kette sind die Geschwindigkeiten gegeben. Man zeichne den Geschwindigkeitsplan der Kette.

94. Von dem Getriebe in Fig. 372 ist die Geschwindigkeit  $v_{15}$  des Punktes  $P$  in bezug auf das Glied 5 gegeben; gesucht wird die Geschwindigkeit  $v_{42}$  des Punktes  $Q$  in bezug auf das Glied 2.

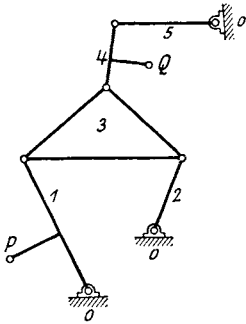


Fig. 372.

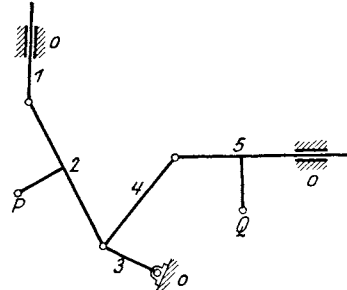


Fig. 373.

95. Von dem Getriebe in Fig. 373 ist die Geschwindigkeit  $v_{25}$  des Punktes  $P$  in bezug auf das Glied 5 gegeben; gesucht wird die Geschwindigkeit  $v_{33}$  des Punktes  $Q$  in bezug auf das Glied 3.
96. Von dem Getriebe in Fig. 374 ist die Geschwindigkeit  $v_{14}$  des Punktes  $P$  in bezug auf das Glied 4 gegeben; gesucht wird die Geschwindigkeit  $v_{10}$  des Punktes  $Q$  in bezug auf das ruhende Glied 0.

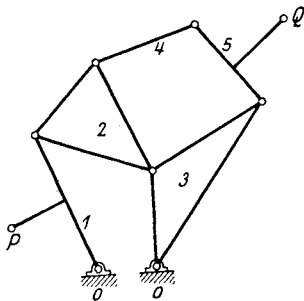


Fig. 374.

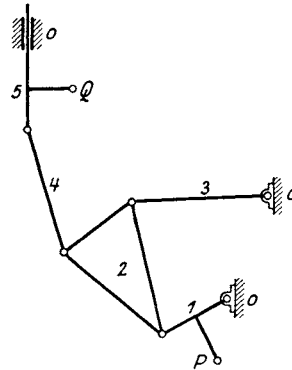


Fig. 375.

97. Von dem Getriebe in Fig. 375 ist die Geschwindigkeit  $v_{14}$  des Punktes  $P$  in bezug auf das Glied 4 gegeben; gesucht wird die Geschwindigkeit  $v_{33}$  des Punktes  $Q$  in bezug auf das Glied 3.

## XVIII. Der Beschleunigungszustand von Gelenkketten.

**188. Bestimmtheit des Beschleunigungszustandes einer kinematischen Kette.** Um den Geschwindigkeitszustand einer Kette ermitteln zu können, bedurfte es der Annahme von

$$x = n - 2\pi + 2 \dots \dots \dots 113)$$

Bestimmungsstücken (vgl. 157).

Hierbei handelte es sich um den Bewegungszustand in einem Zeitteilchen.

Der Beschleunigungszustand setzt aber die Kenntnis des Bewegungszustandes in zwei aufeinander folgenden Zeitteilchen voraus; es wird also, um ihn ermitteln zu können, die doppelte Anzahl von Bestimmungsstücken erforderlich sein, oder

$$y = 2x \dots 133)$$

Denn die Geschwindigkeit eines Punktes, für den der Beweglichkeitsgrad  $x = 2$  war, ändert sich sowohl der Größe wie der Richtung nach, es müssen also noch zwei Bestimmungsstücke hinzukommen, und zwar Richtung und Größe der Beschleunigung des Punktes; dann ist  $y = 4$ .

Eine starre Scheibe bedarf dann  $y = 6$ , eine zwangsläufige kinematische Kette  $y = 8$  Bestimmungsstücke, um deren Beschleunigungszustand zu ermitteln.

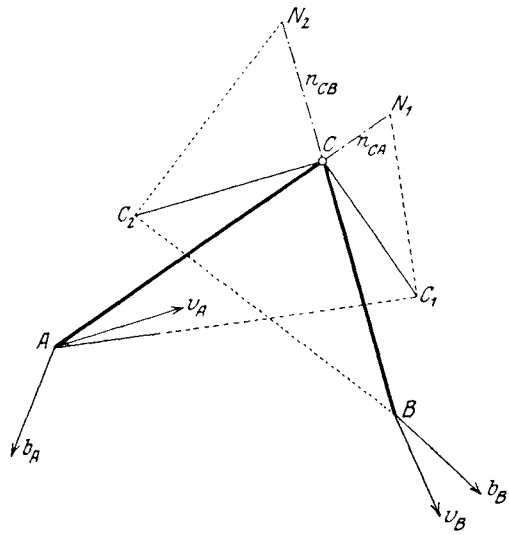


Fig. 376.

Im folgenden sollen zunächst die Beschleunigungspläne einiger freier Ketten, und zwar offener wie geschlossener gezeichnet und sodann die Anwendung auf Getriebe vorgeführt werden.

**189. Grundaufgabe.** Zwei Stäbe  $AC$  und  $BC$  sind in  $C$  gelenkig verbunden (Fig. 376); es ist  $\gamma = 8$ . Gegeben seien die Geschwindigkeiten  $v_A, v_B$  und die Beschleunigungen  $b_A, b_B$ ; es ist die Beschleunigung  $b_C$  zu konstruieren.

Der Geschwindigkeitsplan (Fig. 376a) wurde bereits in Fig. 343a gegeben.

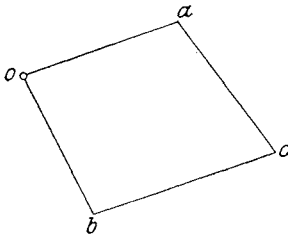


Fig. 376a.

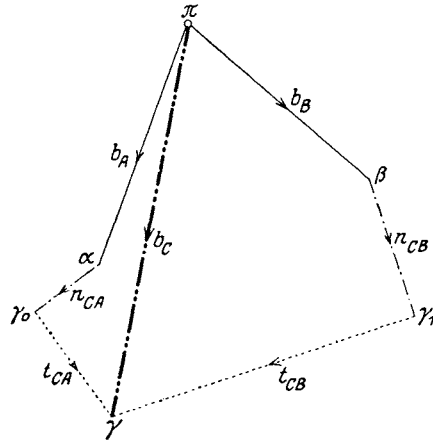


Fig. 376b.

Im Beschleunigungsplan (Fig. 376b) wurde zunächst maßstäblich  $\overline{\pi\alpha} \equiv b_A, \overline{\pi\beta} \equiv b_B$  gemacht und sodann die Beschleunigung  $b_C$  aus  $b_A$  und  $b_B$  durch folgende Gleichungen abgeleitet:

$$b_C \equiv b_A + n_{CA} + t_{CA} \quad \text{und} \quad b_C \equiv b_B + n_{CB} + t_{CB}.$$

Man konstruiert demnach  $n_{CA}$ , indem man  $\overline{CC_1} \equiv \overline{ac}$  macht,  $A$  mit  $C_1$  verbindet und  $C_1N_1 \perp AC_1$  errichtet; dann ist

$$\overline{N_1C} \equiv \overline{a\gamma_0} \equiv n_{CA} = \frac{v_{CA}^2}{CA} = \frac{a^2}{CA}$$

in Richtung  $CA$ ,

worauf  $\gamma_0\gamma \perp a\gamma_0$  gezogen wird.

Ebenso konstruiert man  $n_{CB}$ , indem man  $\overline{CC_2} \equiv \overline{cb}$  macht,  $B$  mit  $C_2$  verbindet und  $C_2N_2 \perp BC_2$  errichtet; dann ist

$$\overline{N_2C} \equiv \overline{\beta\gamma_1} \equiv n_{CB} = \frac{v_{CB}^2}{CB} = \frac{b^2}{CB}$$

in Richtung  $CB$ ,

worauf  $\gamma_1\gamma \perp \beta\gamma_1$  gezogen wird.

Im Schnitte von  $\gamma_0\gamma_1$  mit  $\gamma_1\gamma$  liegt dann der gesuchte Beschleunigungspunkt  $\gamma$  und es ist  $\overline{\pi\gamma} \equiv b_C$ .

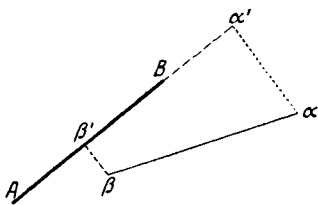


Fig. 377.

**190. Beschränkung bei Annahme der Beschleunigungen.** Bei Annahme der Beschleunigungen zweier Punkte, die einer starren Geraden angehören, darf nicht vollkommen willkürlich vorgegangen werden. Es muß die Bedingung eingehalten werden, die in 26 erwähnt wurde. Ist nämlich (Fig. 377)  $AB$  die starre Verbindung der Punkte  $A$

und  $B$ , sind  $\alpha$  und  $\beta$  die entsprechenden Punkte des Beschleunigungsplanes, so muß

$$\sphericalangle (AB, \alpha\beta) \begin{matrix} > 90^\circ \\ < 270^\circ \end{matrix}$$

sein. Projiziert man  $\alpha\beta$  orthogonal nach  $\alpha'\beta'$  auf  $AB$ , so müssen demnach  $AB$  und  $\alpha'\beta'$  entgegengesetzte Richtungen haben.

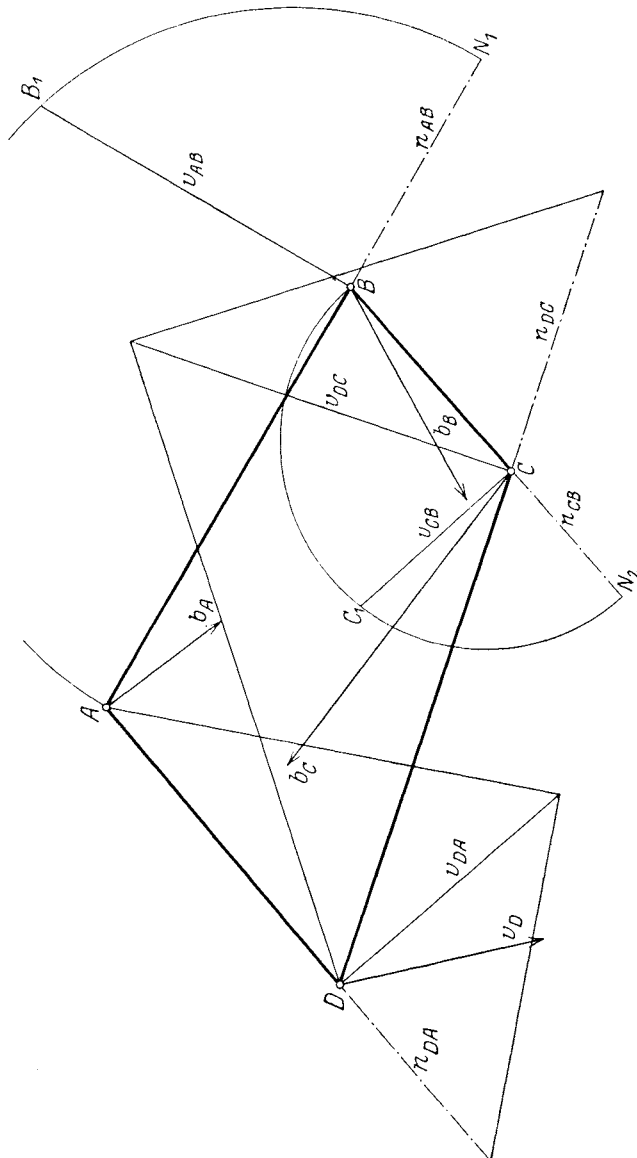


Fig. 378.

191. Das Gelenkviereck. Das in Fig. 378 gezeichnete Gelenkviereck  $ABCD$  ist zwangläufig, bedarf also  $y = 8$  Bestimmungsstücke zur

Ermittlung des Beschleunigungszustandes. Angenommen wurden der Größe und Richtung nach: die Geschwindigkeit  $v_D$  und die Beschleunigungen  $b_A, b_B, b_C$ . Zu konstruieren sind:  $b_D$  und  $v_A, v_B, v_C$ .

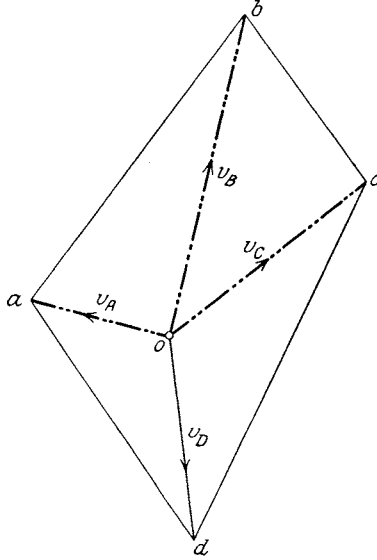


Fig. 378 a.

Bei Annahme der Beschleunigungen ist auf die in 190 erwähnte Beschränkung zu achten. Man beginnt damit, im Beschleunigungsplan Fig. 378b  $\pi\alpha \equiv b_A, \pi\beta \equiv b_B, \pi\gamma \equiv b_C$  aufzutragen und die Teile

$$\begin{aligned} n_{AB} &\parallel AB, t_{AB} \perp AB, \\ n_{CB} &\parallel CB, t_{CB} \perp CB \end{aligned}$$

zu zeichnen. Aus

$v_{AB}^2 = \overline{AB} \cdot n_{AB}, v_{CB}^2 = \overline{CB} \cdot n_{CB}$  ergeben sich mit Hilfe der Halbkreise  $AB_1N_1$  und  $BC_1N_2$  die Geschwindigkeiten  $v_{AB}$  und  $v_{CB}$ , die sodann von einem beliebigen Punkt  $b$  aus (Fig. 378a) nach  $a$  und  $c$  aufgetragen werden. Wenn die Richtungen von  $ba$  und  $bc$  nicht gegeben sind, läßt die Aufgabe vier Lösungen zu.

Zieht man nun  $ad \perp AD, cd \perp CD$ , so erhält man den Geschwindigkeitspunkt  $d$  und kann von da  $\overline{od} \equiv v_D$

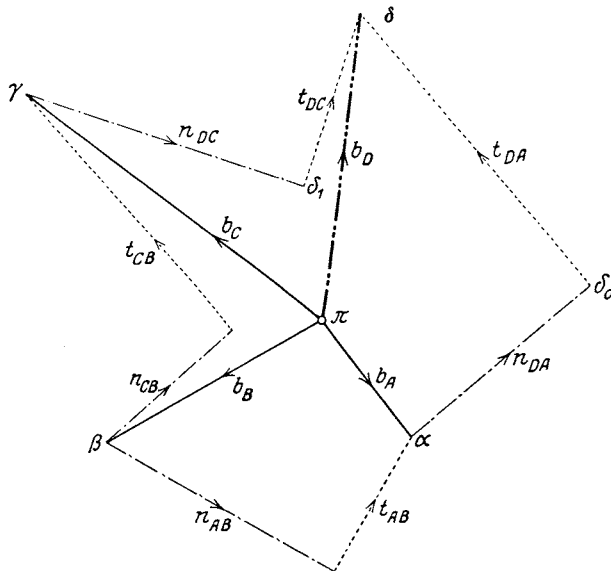


Fig. 378 b.

auftragen, wodurch der Nullpunkt  $o$  und damit die gesuchten Geschwindigkeiten  $v_A, v_B, v_C$  gefunden sind.

Endlich zeichnet man in Fig. 378 b

$$\overline{\alpha\delta_0} \equiv n_{DA} = \frac{v_{DA}^2}{DA} = \frac{\overline{ad}^2}{DA} \text{ in Richtung } DA, \delta_0\delta \perp \alpha\delta_0;$$

$$\overline{\gamma\delta_1} \equiv n_{DC} = \frac{v_{DC}^2}{DC} = \frac{\overline{cd}^2}{DC} \text{ in Richtung } DC, \delta_1\delta \perp \gamma\delta_1;$$

dann ist der Schnitt von  $\delta_0\delta$  und  $\delta_1\delta$  der gesuchte Beschleunigungspunkt  $\delta$  und  $\overline{\pi\delta} \equiv b_D$ .

Sind  $l_1, l_2, l_3, l_4$  die Seiten des Gelenkvierecks,  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$  ihre Winkelgeschwindigkeiten, so ist

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 = 0 \text{ und } l_1 + l_2 + l_3 + l_4 \equiv 0.$$

Die Seiten des Geschwindigkeitsplanes  $abcd$  sind die Geschwindigkeiten  $\overline{ab} \equiv v_{BA}$ , d. h. die Geschwindigkeit von  $B$  in bezug auf  $A$ , und ebenso  $\overline{bc} \equiv v_{CB}$  usw.; sie bilden ein geschlossenes Viereck oder es ist  $l_1\omega_1 + l_2\omega_2 + l_3\omega_3 + l_4\omega_4 \equiv 0$ .

Die Seiten des Beschleunigungsplanes  $\alpha\beta\gamma\delta$  sind die Beschleunigungen  $\overline{\alpha\beta} \equiv b_{BA}$ , d. h. die Beschleunigung von  $B$  in bezug auf  $A$ , und ebenso  $\overline{\beta\gamma} \equiv b_{CB}$  usw.; sie bilden ebenfalls ein geschlossenes Viereck.

Reiht man in Fig. 378 c die vier Normalbeschleunigungen  $n_{AB}, n_{BC}, n_{CD}, n_{DA}$  aneinander, so müssen sie ebenfalls ein geschlossenes Polygon bilden; und dasselbe kann man auch von den vier Tangential-

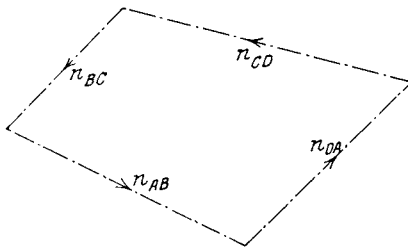


Fig. 378 c.

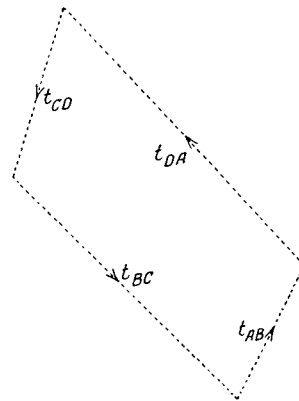


Fig. 378 d.

beschleunigungen  $t_{AB}, t_{BC}, t_{CD}, t_{DA}$  behaupten, wie aus folgender Überlegung hervorgeht.

Betrachtet man  $abcd$  in Fig. 378 a als gelenkiges Viereck, so ist Fig. 378 c sein Geschwindigkeitsplan; denn die Seiten von  $abcd$  der Reihe nach mit den Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4$  multipliziert, sind die Normalbeschleunigungen  $n_1 = l_1\omega_1^2$  usw. Dann ist aber aus dem gleichen Grunde wie früher:  $(l_1\omega_1)\omega_1 + (l_2\omega_2)\omega_2 + (l_3\omega_3)\omega_3 + (l_4\omega_4)\omega_4 \equiv 0$ ; es muß sich also der Zug der Normalbeschleunigungen  $n$  schließen.

Da nun die gesamten Beschleunigungen  $b_{AB}, b_{BC}, \dots$  und auch die Normalbeschleunigungen  $n_{AB}, n_{BC}, \dots$  geschlossene Polygone bilden, muß dies auch von den Tangentialbeschleunigungen  $t_{AB}, t_{BC}, \dots$  gelten, da  $b_{AB} \equiv n_{AB} + t_{AB}, \dots$  ist (Fig. 378d).

In Fig. 378e sind die vier Beschleunigungspunkte  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  des Gelenkvierecks  $ABCD$  noch einmal gezeichnet worden und die Annahme gemacht, daß der Beschleunigungszustand sich derart verändern möge,

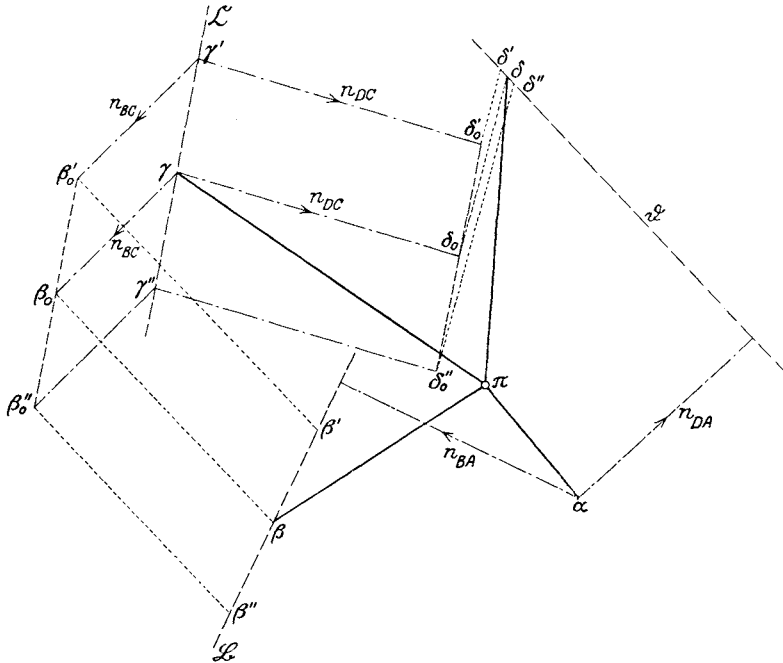


Fig. 378e.

daß  $\alpha$  unverändert bleibt, sein Gegenpunkt  $\gamma$  sich jedoch auf einer beliebigen Geraden  $\mathcal{E}$  verschieben würde.

Nehmen wir z. B.  $\gamma$  in  $\gamma'$  an, so erhält man den zugehörigen Beschleunigungsplan, wenn man  $\overline{\gamma'\beta'_0} \equiv n_{BC}$  aufträgt und  $\beta'_0\beta' \perp \gamma'\beta'_0$  errichtet; da der Beschleunigungspunkt  $\beta'$  auf der Geraden  $\mathcal{B}$  liegen muß, die durch  $\beta$  senkrecht zu  $n_{BA}$  gezogen wird, so erhält man  $\beta'$  im Schnitte von  $\beta'_0\beta'$  mit  $\mathcal{B}$ . Ebenso, trägt man  $\overline{\gamma'\delta'_0} \equiv n_{DC}$  von  $\gamma'$  aus auf und zieht  $\delta'_0\delta' \perp \gamma'\delta'_0$ , so erhält man im Schnitte mit der Geraden  $\mathcal{D}$  durch  $\delta$ , senkrecht auf  $n_{DA}$ , den Beschleunigungspunkt  $\delta'$ .

In der Abbildung sind die gleichen Konstruktionen noch für einen zweiten Punkt  $\gamma''$  durchgeführt, wodurch man die Punkte  $\beta'', \delta''$  erhält.

Man ersieht ohne weiteres, daß die Punktreihen  $\beta'\beta\beta'', \gamma'\gamma\gamma'', \delta'\delta\delta''$  einander ähnlich sind und erhält damit folgenden Lehrsatz:

Wird ein Punkt  $a$  des Beschleunigungsplanes festgehalten und bewegt sich ein anderer  $\gamma$  auf einer beliebigen Geraden, so beschreiben sämtliche Beschleunigungspunkte ähnliche Punktreihen.

Wenn  $a$  festgehalten wird, dürfen die Geraden  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{D}$ , die von  $\beta$  und  $\delta$  beschrieben werden, nicht beliebig angenommen werden, da  $A$  mit  $B$  und  $D$  fest verbunden ist, die Lage der Geraden  $\mathfrak{B} \perp BA$ ,  $\mathfrak{D} \perp DA$  also bestimmt ist.

Dieser Satz wurde hier allerdings nur für das Gelenkviereck gewonnen; er läßt sich jedoch, wieleichtersichtlich ist, auf jede zwangsläufige kinematische Kette ausdehnen.

**192. Viergliedrige offene kinematische Kette.** In Fig. 379 wurde dieselbe Kette, die schon in Fig. 354 auf ihren Geschwindigkeitszustand untersucht wurde, hinsichtlich ihrer Beschleunigungen geprüft. Da der Beweglichkeitsgrad  $x = 6$  war, ist  $y = 12$ ; es dürfen also von den Punkten  $A, B, C$  sowohl die Geschwindigkeiten, wie auch die Beschleunigungen nach Größe und Richtung angenommen werden.

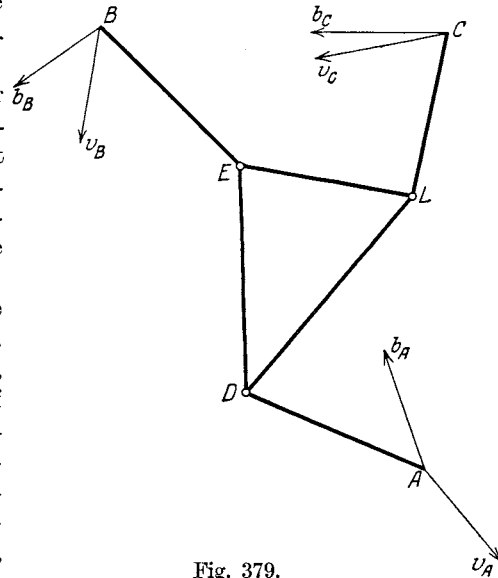


Fig. 379.

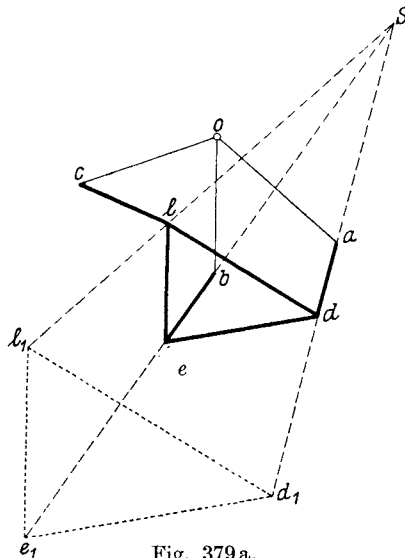


Fig. 379 a.



Die Konstruktion des Geschwindigkeitsplanes Fig. 379a wurde wie in Fig. 354a vorgenommen. Fig. 379b zeigt den Beschleunigungsplan. Es wurden von  $\pi$  aus die Beschleunigungen  $\pi\alpha \equiv b_A$ ,  $\pi\beta \equiv b_B$ ,  $\pi\gamma \equiv b_C$  maßstäblich aufgetragen und sodann die Geraden  $\mathfrak{D}$ ,  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{L}$  in folgender Weise gezeichnet:

$$\overline{\alpha\delta_0} \equiv n_{DA} = \frac{v_{DA}^2}{DA} = \frac{\overline{a}d^2}{DA} \text{ in Richtung } DA,$$

$\mathfrak{D}$  durch  $\delta_0$ , senkrecht zu  $DA$ ;

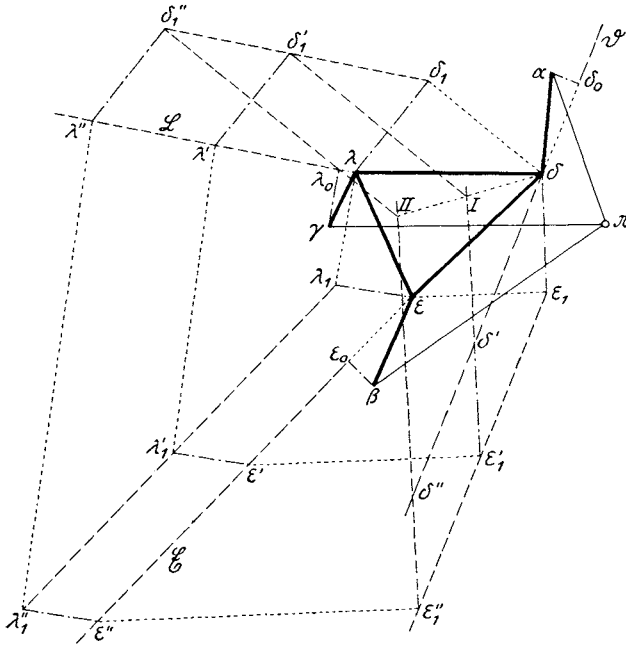


Fig. 379 b.

$$\overline{\beta\epsilon_0} \equiv n_{EB} = \frac{v_{EB}^2}{EB} = \frac{\overline{b}e^2}{EB} \text{ in Richtung } EB,$$

$\mathfrak{E}$  durch  $\epsilon_0$ , senkrecht zu  $EB$ ;

$$\overline{\gamma\lambda_0} \equiv n_{LC} = \frac{v_{LC}^2}{LC} = \frac{\overline{c}l^2}{LC} \text{ in Richtung } LC,$$

$\mathfrak{L}$  durch  $\lambda_0$ , senkrecht zu  $LC$ .

Hierauf wurde auf  $\mathfrak{D}$  ein beliebiger Punkt  $\delta'$  angenommen,

$$\overline{\delta'\epsilon'_1} \equiv n_{ED} = \frac{v_{ED}^2}{ED} = \frac{\overline{d}e^2}{ED} \text{ in Richtung } ED,$$

$\epsilon'_1\epsilon' \perp \delta'\epsilon'_1$  gezogen bis zum Schnitte  $\epsilon'$  mit  $\mathfrak{E}$ ;

$$\overline{\varepsilon' \lambda_1'} = n_{LE} = \frac{v_{LE}^2}{LE} = \frac{\overline{el}^2}{LE} \text{ in Richtung } LE,$$

$\lambda_1' \lambda_1' \perp \varepsilon' \lambda_1'$  gezogen bis zum Schnitte  $\lambda'$  mit  $\mathcal{Q}$ ;

$$\overline{\lambda' \delta_1'} = n_{DL} = \frac{v_{DL}^2}{DL} = \frac{l d^2}{DL} \text{ in Richtung } DL,$$

$\delta_1' I \perp \lambda' \delta_1'$  gezogen bis zum Schnitte  $I$  mit  $\delta' \varepsilon_1'$ .

Sodann wurde auf  $\mathcal{D}$  ein zweiter beliebiger Punkt  $\delta''$  angenommen und die gleichen Konstruktionen wie mit  $\delta'$  durchgeführt; dabei sind die Normalbeschleunigungen  $n_{ED}$ ,  $n_{LE}$  und  $n_{DL}$  ebenso groß wie vorher. Man erhält der Reihe nach die Punkte  $\varepsilon_1''$ ,  $\varepsilon''$ ,  $\lambda_1''$ ,  $\lambda''$ ,  $\delta_1''$  und  $II$ . Die Gerade  $III$  trifft dann  $\mathcal{D}$  im richtigen Beschleunigungspunkte  $\delta$ , worauf die Punkte  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon$  auf  $\mathcal{E}$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda$  auf  $\mathcal{Q}$ ,  $\delta_1$ ,  $\delta$  auf  $\mathcal{D}$  (Probe!) durch Ziehen von Parallelen gefunden werden.

**193. Sechsgliedrige geschlossene kinematische Kette.** Die in Fig. 380 dargestellte Kette ist zwangsläufig; es ist  $x = 4$  und  $y = 8$ . Gewählt

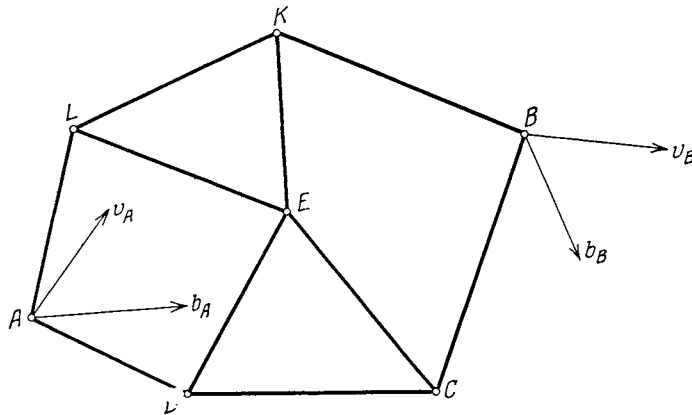


Fig. 380.

wurden die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Gelenke  $A$  und  $B$  nach Größe und Richtung.

Im Geschwindigkeitsplan (Fig. 380 a) wurde  $\overline{oa} \equiv v_A$ ,  $\overline{ob} \equiv v_B$  gemacht und durch  $a$  die Geraden  $\mathfrak{d} \perp AD$ ,  $\mathfrak{l} \perp AL$ , durch  $b$  die Geraden  $\mathfrak{c} \perp BC$ ,  $\mathfrak{k} \perp BK$  gezogen. Sodann wurde auf  $\mathfrak{k}$  der Punkt  $k'$  beliebig angenommen,  $k'l' \perp KL$  bis  $l'$  auf  $\mathfrak{l}$  gezogen, ebenso  $k'e' \perp KE$ ,  $l'e' \perp LE$ . Verbindet man  $e'$  mit dem Schnittpunkte  $S_1$  von  $\mathfrak{k}$  und  $\mathfrak{l}$ , so muß auf dieser Verbindungslinie der richtige Geschwindigkeitspunkt  $e$  liegen.

Nun wurde auf  $\mathfrak{d}$  ein beliebiger Punkt  $d''$  gewählt und sinngemäß dieselbe Konstruktion nochmals durchgeführt; man erhält der Reihe nach die Punkte  $c''$  auf  $\mathfrak{c}$  und  $e''$ , endlich die Gerade  $S_2 e''$ , welche  $S_1 e'$  in  $e$  trifft. Die übrigen Geschwindigkeitspunkte  $k$ ,  $l$ ,  $c$ ,  $d$  ergeben sich nun durch Ziehen von Parallelen.

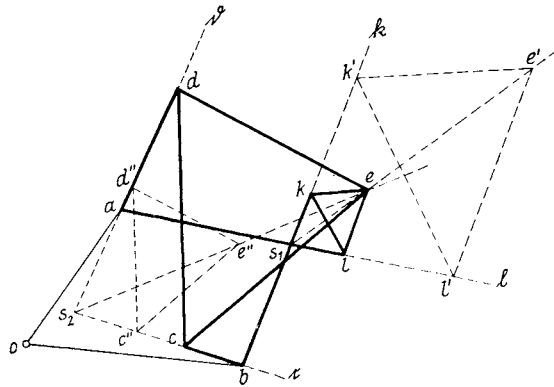


Fig. 380 a.

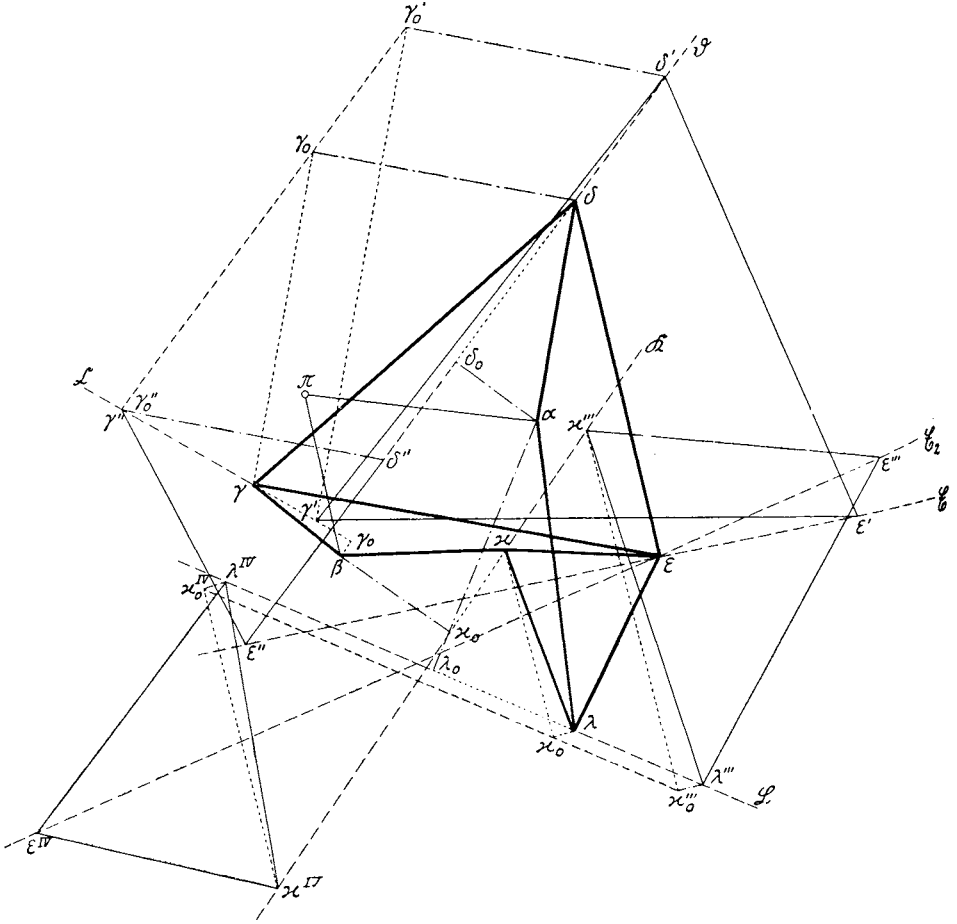


Fig. 380 b.

Im Beschleunigungsplan (Fig. 380 b) wurden  $\overline{\pi a} \equiv b_A$ ,  $\overline{\pi \beta} \equiv b_B$  gemacht und sodann folgende Normalbeschleunigungen konstruiert:

$$\overline{a \delta_0} \equiv n_{DA} = \frac{v_{DA}^2}{DA} = \frac{\overline{a d}^2}{DA} \text{ in Richtung } DA,$$

Gerade  $\mathfrak{D} \perp a \delta_0$  durch  $\delta_0$ ;

$$\overline{a \lambda_0} \equiv n_{LA} = \frac{v_{LA}^2}{LA} = \frac{\overline{a l}^2}{LA} \text{ in Richtung } LA,$$

Gerade  $\mathfrak{L} \perp a \lambda_0$  durch  $\lambda_0$ ;

$$\overline{\beta \gamma_0} \equiv n_{CB} = \frac{v_{CB}^2}{CB} = \frac{\overline{b c}^2}{CB} \text{ in Richtung } CB,$$

Gerade  $\mathfrak{C} \perp \beta \gamma_0$  durch  $\gamma_0$ ;

$$\overline{\beta \kappa_0} \equiv n_{KB} = \frac{v_{KB}^2}{KB} = \frac{\overline{b k}^2}{KB} \text{ in Richtung } KB,$$

Gerade  $\mathfrak{K} \perp \beta \kappa_0$  durch  $\kappa_0$ .

Nun wurde auf  $\mathfrak{D}$  ein beliebiger Punkt  $\delta'$  angenommen, sodann die Normalbeschleunigung

$$\overline{\delta' \gamma_0'} \equiv n_{CD} = \frac{v_{CD}^2}{CD} = \frac{\overline{d c}^2}{CD} \text{ in Richtung } CD$$

und  $\gamma_0' \gamma_0' \perp \delta' \gamma_0'$  bis zum Schnitte  $\gamma_0'$  mit der Geraden  $\mathfrak{C}$  gezogen; ferner das Dreieck

$$\delta' \gamma_0' \varepsilon' \sim DCE$$

gezeichnet. Man könnte nun auf  $\mathfrak{D}$  einen zweiten Punkt  $\delta''$  beliebig annehmen und die Konstruktion wiederholen; statt dessen wurde  $\gamma_0''$  im Schnitte von  $\gamma_0' \gamma_0'' \parallel \mathfrak{D}$  mit  $\mathfrak{C}$  gewählt und  $\gamma_0'' \delta'' \parallel DC$  gezeichnet; dann liegt  $\gamma_0''$  bereits in  $\gamma_0''$  und das Dreieck

$$\delta'' \gamma_0'' \varepsilon'' \sim DCE$$

liefert den Punkt  $\varepsilon''$ ; die Punkte  $\varepsilon' \varepsilon'' \dots$ , die auf diese Weise den Punkten  $\delta' \delta'' \dots$  zugeordnet sind, erfüllen die Punktreihe  $\mathfrak{C}_1$ , auf der auch der richtige Beschleunigungspunkt  $\varepsilon$  liegen muß.

In gleicher Weise wurde nun ein zweiter Ort  $\mathfrak{C}_2$  der Punkt  $\varepsilon$  gesucht. Man nimmt auf  $\mathfrak{L}$  einen beliebigen Punkt  $\lambda'''$  an, konstruiert sodann die Normalbeschleunigung

$$\overline{\lambda''' \kappa_0'''} \equiv n_{KL} = \frac{v_{KL}^2}{KL} = \frac{\overline{l k}^2}{KL} \text{ in Richtung } KL$$

und  $\kappa_0''' \kappa_0''' \perp \lambda''' \kappa_0'''$  bis zum Schnitte  $\kappa_0'''$  mit  $\mathfrak{K}$ , zeichnet ferner das Dreieck

$$\lambda''' \kappa_0''' \varepsilon''' \sim LKE,$$

wodurch man den Punkt  $\varepsilon'''$  erhält. Ein zweiter beliebiger Punkt  $\lambda^{IV}$  auf  $\mathfrak{L}$  liefert mit der gleichen Konstruktion die Punkte  $\kappa_0^{IV}$ ,  $\kappa^{IV}$  und  $\varepsilon^{IV}$ ; die Verbindungslinie  $\varepsilon''' \varepsilon^{IV}$  ist der zweite gesuchte Ort  $\mathfrak{C}_2$  von  $\varepsilon$ .

Der Schnitt von  $\mathfrak{C}_1$  mit  $\mathfrak{C}_2$  ist der richtige Beschleunigungspunkt  $\varepsilon$ .

Da die Punktreihen  $\varepsilon'''\varepsilon\varepsilon^{IV}$ ,  $\lambda'''\lambda\lambda^{IV}$ ,  $\kappa'''\kappa\kappa^{IV}$  ähnlich sind, so können jetzt  $\lambda$  und  $\kappa$  ohne Schwierigkeit gefunden werden; ebenso sind die Punktreihen  $\delta'\delta\delta''$ ,  $\varepsilon'\varepsilon\varepsilon''$ ,  $\gamma'\gamma\gamma''$  ähnlich, woraus sich die Punkte  $\delta$  und  $\gamma$  ergeben.

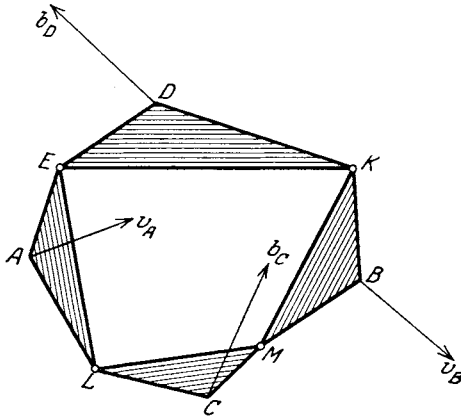


Fig. 381.

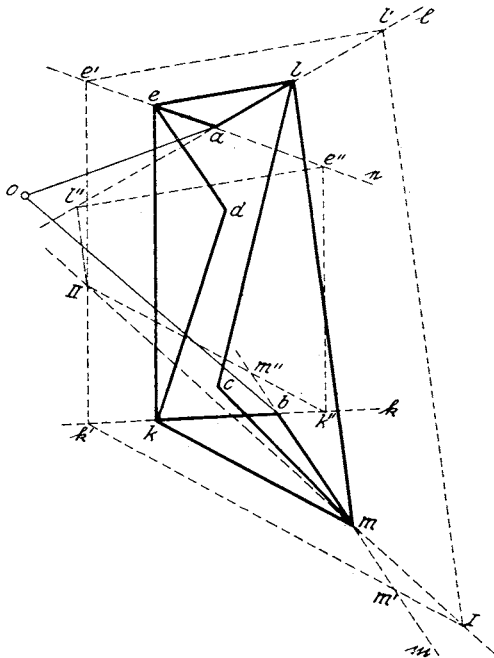


Fig. 381a.

**194. Das Gelenkviereck mit angehängten Dreiecken.** Auch bei dieser kinematischen Kette (Fig. 381) ist  $x = 4$  und  $y = 8$ . Gewählt wurden die Geschwindigkeiten  $v_A$  und  $v_B$ , sowie die Beschleunigungen  $b_C$  und  $b_D$ , alle vier der Größe und Richtung nach.

Der Geschwindigkeitsplan (Fig. 381a) macht nach dem Vorhergehenden keine Schwierigkeit. Durch  $a$  wurden die Geraden  $e \perp A E$  und  $l \perp A L$ , durch  $b$  die Geraden  $k \perp B K$  und  $m \perp B M$  gezogen; sodann wurde  $m'$  auf  $m$  beliebig angenommen und  $m'k' \perp M K$ ,  $k'e' \perp K E$ ,  $e'l' \perp E L$ ,  $l'I \perp L M$  gezogen;  $I$  ist der Schnitt von  $m'k'$  mit der letzten Senkrechten. Ein zweiter Punkt  $m''$  auf  $m$  liefert ebenso die Punkte  $k''$ ,  $e''$ ,  $l''$ ,  $II$ . Die Gerade  $III$  gibt im Schnitte mit  $m$  den Punkt  $m$  des Geschwindigkeitsplanes. Nun sind alle übrigen Punkte durch Ziehen von Parallelen zu ermitteln.

Im Beschleunigungsplan (Fig. 381b) wurde  $\pi\gamma \equiv b_C$

und  $\pi\delta \equiv b_D$  gemacht und hierauf folgende Normalbeschleunigungen konstruiert:  $\gamma\lambda_0 \equiv n_{LC} = \frac{v_{LC}^2}{LC} = \frac{c l^2}{LC}$  in Richtung  $LC$ , Gerade  $\varrho \perp \gamma\lambda_0$  durch  $\lambda_0$ ;

$\overline{\gamma\mu_0} \equiv n_{MC} = \frac{v_{MC}^2}{MC} = \frac{cm^2}{MC}$  in Richtung  $MC$ ,  
 Gerade  $\mathfrak{M} \perp \overline{\gamma\mu_0}$  durch  $\mu_0$ ;  
 $\overline{\delta\varepsilon_0} \equiv n_{ED} = \frac{v_{ED}^2}{ED} = \frac{de^2}{ED}$  in Richtung  $ED$ ,  
 Gerade  $\mathfrak{E} \perp \overline{\delta\varepsilon_0}$  durch  $\varepsilon_0$ ;

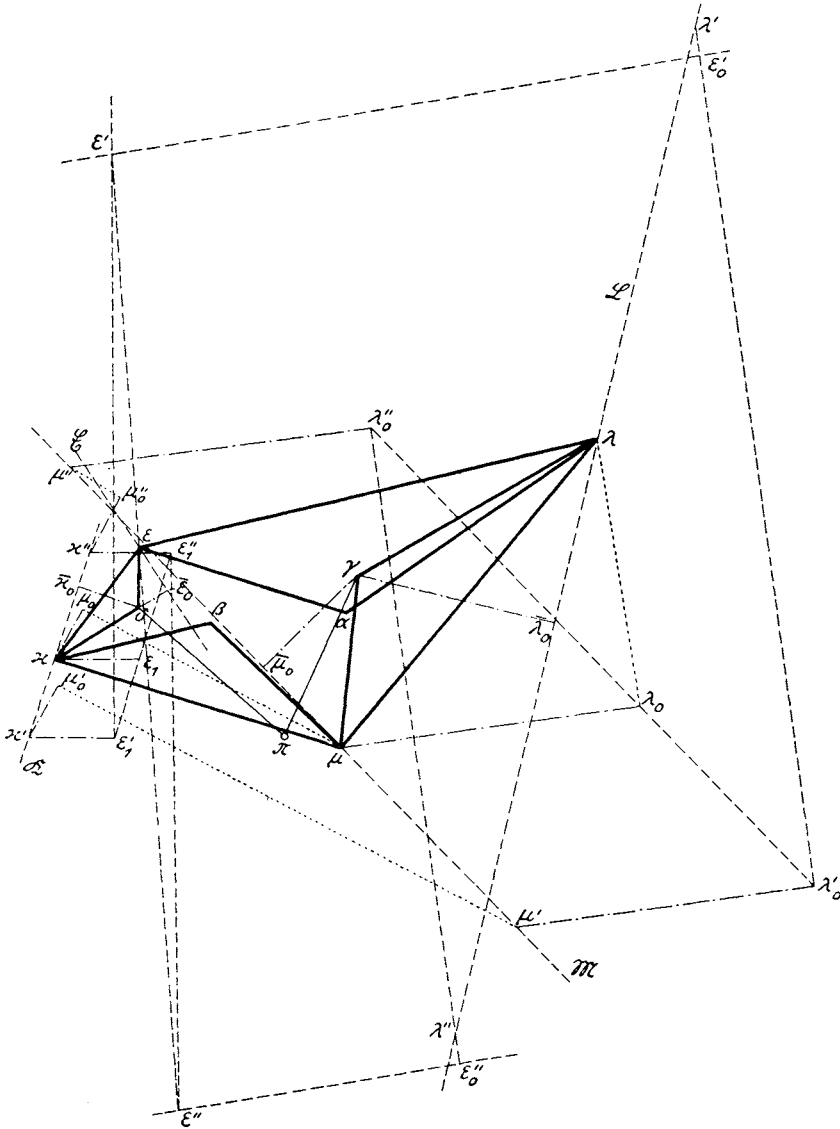


Fig. 381 b.

$$\overline{\delta \kappa_0} \equiv n_{KD} = \frac{v_{KD}^2}{KD} = \frac{\bar{d}k^2}{KD} \text{ in Richtung } KD,$$

Gerade  $\mathfrak{R} \perp \delta \kappa_0$  durch  $\kappa_0$ .

Sodann wurde auf der Geraden  $\mathfrak{R}$  ein Punkt  $\kappa'$  beliebig angenommen und folgender Linienzug gezeichnet:

$$\overline{\mu'_0 \mu'} \equiv n_{MK} = \frac{v_{MK}^2}{MK} = \frac{\bar{k}m^2}{MK} \text{ in Richtung } MK,$$

$\mu'_0 \mu' \perp \kappa' \mu'_0$  bis zum Schnitte  $\mu'$  mit  $\mathfrak{M}$ ;

$$\overline{\mu' \lambda'_0} \equiv n_{LM} = \frac{v_{LM}^2}{LM} = \frac{\bar{m}l^2}{LM} \text{ in Richtung } LM,$$

$\lambda'_0 \lambda' \perp \mu' \lambda'_0$  bis zum Schnitte  $\lambda'$  mit  $\mathfrak{L}$ ;

$$\overline{\lambda' \varepsilon'_0} \equiv n_{EL} = \frac{v_{EL}^2}{EL} = \frac{\bar{l}e^2}{EL} \text{ in Richtung } EL,$$

$\varepsilon'_0 \varepsilon' \perp \lambda' \varepsilon'_0$ ; endlich

$$\overline{\kappa' \varepsilon'_1} \equiv n_{EK} = \frac{v_{EK}^2}{EK} = \frac{\bar{k}e^2}{EK} \text{ in Richtung } EK,$$

$\varepsilon'_1 \varepsilon' \perp \kappa' \varepsilon'_1$  bis zum Schnitte  $\varepsilon'$  mit  $\varepsilon'_0 \varepsilon'$ .

Ein zweiter Punkt  $\kappa''$  auf  $\mathfrak{R}$  liefert der Reihe nach die in gleicher Art gefundenen Punkte  $\mu_0'', \mu'', \lambda_0'', \lambda'', \varepsilon_0'',$  ferner  $\varepsilon_1''$  und  $\varepsilon''$ . Die Verbindungsgerade  $\varepsilon' \varepsilon''$  schneidet  $\mathfrak{E}$  im richtigen Beschleunigungspunkt  $\varepsilon$ .

Jetzt können rückschreitend aus  $\varepsilon$  der Reihe nach die Punkte  $\varepsilon_1, \kappa, \mu_0, \mu, \lambda_0, \lambda$  gefunden werden.

Schließlich ergeben sich die Punkte  $\alpha$  und  $\beta$  aus der Ähnlichkeit

$$\alpha \varepsilon \lambda \sim AEL \text{ und } \beta \mu \kappa \sim BMK.$$

**195. Beschleunigungspläne von Getrieben.** Die Konstruktion dieser Beschleunigungspläne ist etwas einfacher als die vorhergehenden von freien Gelenkketten, weil die Beschleunigungspunkte der festgehaltenen Gelenke in den Beschleunigungsnullpunkt hineinfallen.

Da bei zwangsläufigen Getrieben  $x = 1$  ist, so wird  $y = 2$  sein; man darf also z. B. nur die Beschleunigung eines einzigen Punktes nach Größe und Richtung annehmen, aber keine Geschwindigkeit; oder man darf die Größe der Geschwindigkeit eines Punktes und die Größe oder Richtung der Beschleunigung eines anderen Punktes annehmen, wenn letztere nicht schon durch die Form des Getriebes vorgeschrieben ist.

**196. Das Getriebe der Balancier-Dampfmaschine** (Fig. 382). Hier treibt die vom Dampfzylinder kommende Kolbenstange 5 mittels der Treibstange 4 den Balancier 2 (Dreiecksglied) an, der die Bewegung mit Hilfe des Lenkers 3 an die Kurbel 1 weiterleitet.

Gegeben sei die Beschleunigung  $b_A$  des Kurbelzapfens  $A$ ; es ist die Geschwindigkeit  $v_D$  und die Beschleunigung  $b_D$  der Kolbenstange zu ermitteln.

Nachdem  $v_A$  aus  $b_A$  bestimmt ist, bereitet der Geschwindigkeitsplan (Fig. 382 a, in doppeltem Maßstab gezeichnet) keine Schwierigkeit.  $\overline{od} \equiv v_D$  ist die gesuchte Geschwindigkeit.

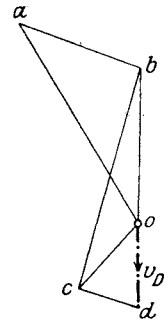
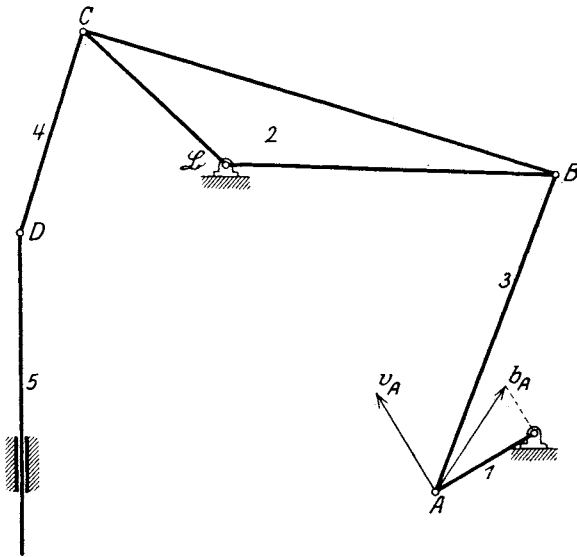


Fig. 382 a.

Fig. 382.

Der Beschleunigungsplan (Fig. 382 b) wurde in vierfachem Maßstab gezeichnet. Es wurde  $\overline{\pi a} \equiv b_A$  gemacht, sodann

$$\overline{\pi \beta_0} \equiv n_B = \frac{v_B^2}{B\mathfrak{B}} = \frac{\overline{ob}^2}{B\mathfrak{B}}$$

in Richtung  $B\mathfrak{B}$ ,

$\beta_0\beta \perp \pi\beta_0$  und

$$\overline{\alpha \beta_1} \equiv n_{BA} = \frac{v_{BA}^2}{BA} = \frac{\overline{ab}^2}{BA}$$

in Richtung  $BA$ ,

$\beta_1\beta \perp \alpha\beta_1$  gezeichnet, wodurch man  $\beta$  erhält. Den Punkt  $\gamma$  erhält man aus der Ähnlichkeit

$$\pi\beta\gamma \sim \mathfrak{B}BC;$$

man könnte auch  $\gamma$  direkt aus  $\beta$  ermitteln, wie vorher  $\beta$  aus  $a$ .

Macht man noch

$$\overline{\gamma \delta_0} \equiv n_{DC} = \frac{v_{DC}^2}{DC} = \frac{\overline{cd}^2}{DC} \text{ in Richtung } DC,$$

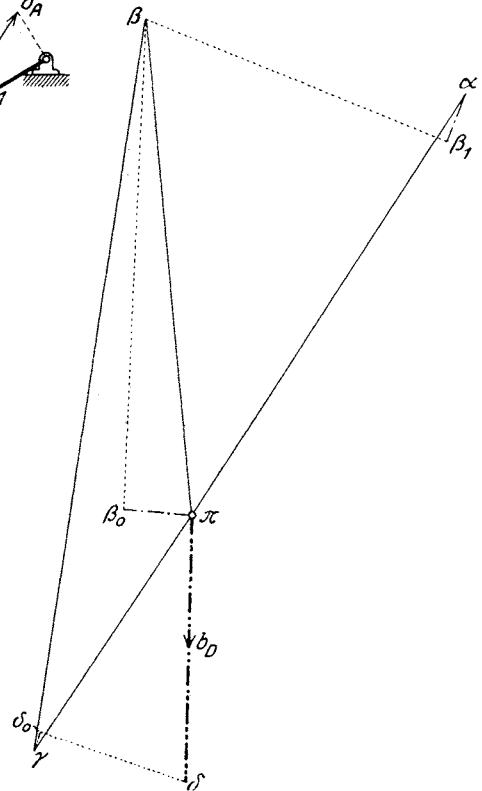


Fig. 382 b.



$\delta_0 \delta \perp \gamma \delta_0$  und  $\pi \delta \parallel 5$ , so ist der Schnitt von  $\delta_0 \delta$  mit  $\pi \delta$  der gesuchte Punkt  $\delta$  und schließlich  $\overline{\pi \delta} \equiv b_D$ .

Würde die Bewegung nicht durch  $A$ , sondern durch  $D$  eingeleitet werden, so müßten die gegebenen Stücke die Größen von  $v_D$  und  $b_D$  sein, denn deren Richtungslinie ist durch die Form des Getriebes gegeben.

**197. Beschleunigungsplan eines achtgliedrigen Getriebes.** Das in Fig. 383 dargestellte Getriebe wurde bereits in 177 als freie Kette be-

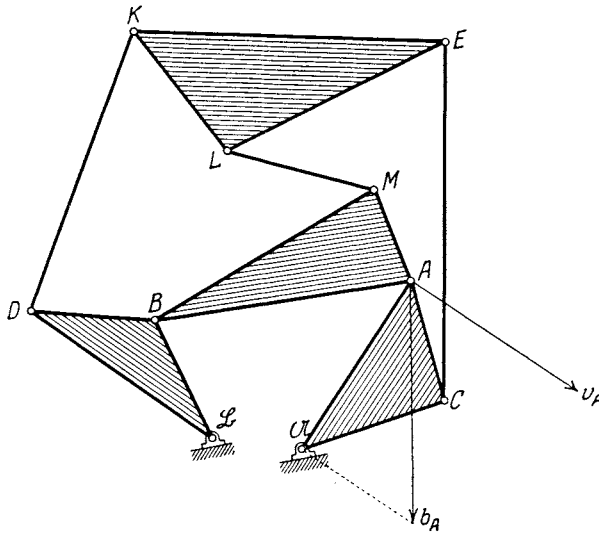


Fig. 383.

handelt und sein Geschwindigkeitsplan in Fig. 352a gezeichnet. Daher kann die Erklärung von Fig. 383a unterbleiben.

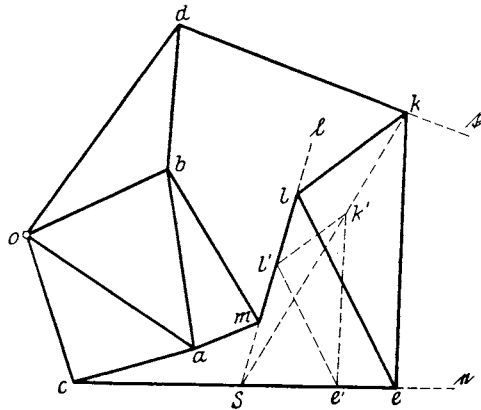


Fig. 383 a.

Wenn die Beschleunigung  $b_A$  gegeben ist, werden im Beschleunigungsplan Fig. 383 b die Punkte  $\alpha, \gamma$  und  $\beta, \delta$  in bereits bekannter Weise gezeichnet; auch  $\mu$  wird aus der Ähnlichkeit  $\alpha\beta\mu \sim ABM$  zu entnehmen sein. Sodann macht man

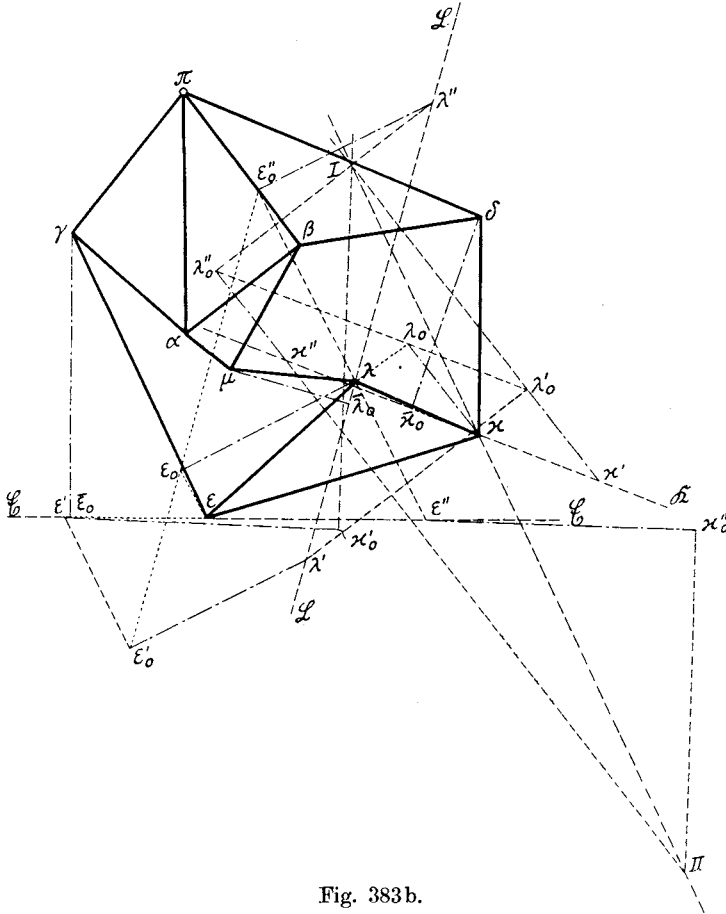


Fig. 383b.

$$\overline{\overline{\overline{\gamma \epsilon_0}}} \equiv n_{EC} = \frac{v_{EC}^2}{EC} = \frac{ce^2}{EC} \text{ in Richtung } EC$$

und die Gerade  $\mathcal{E} \perp \overline{\overline{\overline{\gamma \epsilon_0}}}$  durch  $\epsilon_0$ ;

$$\overline{\overline{\overline{\delta \kappa_0}}} \equiv n_{KD} = \frac{v_{KD}^2}{KD} = \frac{dk^2}{KD} \text{ in Richtung } KD$$

und die Gerade  $\mathcal{K} \perp \overline{\overline{\overline{\delta \kappa_0}}}$  durch  $\kappa_0$ ; endlich

$$\overline{\overline{\overline{\mu \lambda_0}}} \equiv n_{LM} = \frac{v_{LM}^2}{LM} = \frac{ml^2}{LM} \text{ in Richtung } LM$$

und die Gerade  $\mathcal{L} \perp \overline{\overline{\overline{\mu \lambda_0}}}$  durch  $\lambda_0$ .



Fig. 384b zeigt den Beschleunigungsplan, der in halbem Maßstabe entworfen wurde; es wurde also  $\overline{\pi a}$  nicht gleich der gegebenen Beschleunigung  $b_A$ , sondern nur halb so groß aufgetragen.

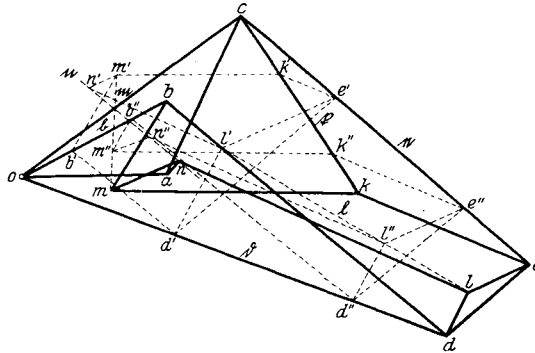


Fig. 384 a.

Aus der Ähnlichkeit  $\pi a \gamma \sim \mathcal{N}AC$  ergab sich  $\gamma$  und

$$\overline{\gamma \varepsilon_0} = n_{EC} = \frac{v_{EC}^2}{EC} = \frac{c e^2}{EC} \text{ in Richtung } EC,$$

und es wird die Gerade  $\mathcal{E} \perp \gamma \varepsilon_0$  gezeichnet.

Sodann wurde auf  $\mathcal{E}$  ein beliebiger Punkt  $\varepsilon'$  angenommen,

$$\overline{\varepsilon' \delta_0'} = n_{DE} = \frac{v_{DE}^2}{DE} = \frac{e d^2}{DE} \text{ in Richtung } DE,$$

$\delta_0' \delta' \perp \varepsilon' \delta_0'$  und

$$\overline{\pi \delta_0} = n_D = \frac{v_D^2}{D\mathcal{B}} = \frac{od^2}{D\mathcal{B}} \text{ in Richtung } D\mathcal{B},$$

die Gerade  $\mathcal{D} \perp \pi \delta_0$  gezeichnet.

Im Schnitte von  $\mathcal{D}$  mit  $\delta_0' \delta'$  liegt der Punkt  $\delta'$ . Aus den Ähnlichkeiten

$$\gamma \varepsilon' \kappa' \sim CEK, \varepsilon' \delta' \lambda' \sim EDL, \pi \beta' \delta' \sim \mathcal{B}BD$$

ergeben sich nun die Punkte  $\kappa'$ ,  $\lambda'$  und  $\beta'$ .

Hierauf zeichnet man

$$\overline{\kappa' \mu_0'} = n_{MK} = \frac{v_{MK}^2}{MK} = \frac{km^2}{MK} \text{ in Richtung } MK,$$

$\mu_0' \mu' \perp \kappa' \mu_0'$ ;

$\overline{\beta' \mu_1'} \equiv n_{MB} = \frac{v_{MB}^2}{MB} = \frac{\overline{b m^2}}{MB}$  in Richtung  $MB$ ,  
 $\mu_1' \mu' \perp \beta' \mu_1'$ ; im Schnitte von  $\mu_0' \mu'$  und  $\mu_1' \mu'$  findet man  $\mu'$ . Hierauf:

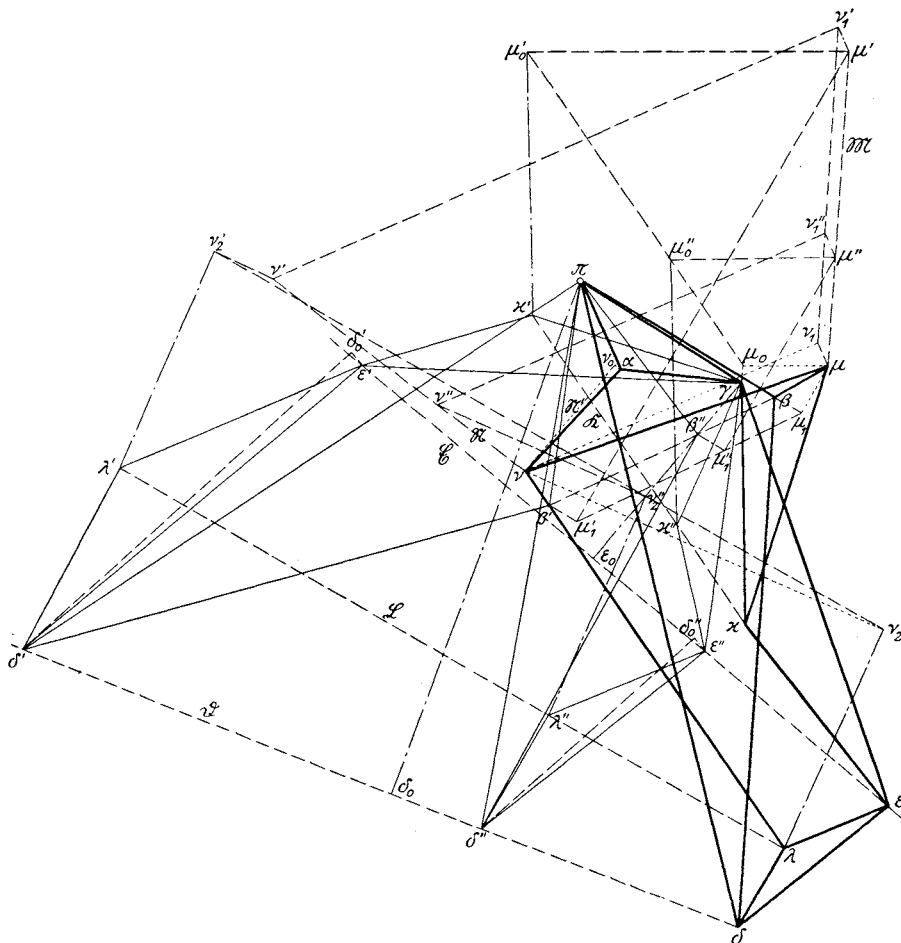


Fig. 384 b.

$\overline{\mu' \nu_1'} \equiv n_{NM} = \frac{v_{NM}^2}{NM} = \frac{\overline{m n^2}}{NM}$  in Richtung  $NM$ ,  
 $\nu_1' \nu' \perp \mu' \nu_1'$ ;  
 $\overline{\lambda' \nu_2'} \equiv n_{NL} = \frac{v_{NL}^2}{NL} = \frac{\overline{l n^2}}{NL}$  in Richtung  $NL$ ,  
 $\nu_2' \nu' \perp \lambda' \nu_2'$ ; im Schnitte von  $\nu_1' \nu'$  und  $\nu_2' \nu'$  ergibt sich  $\nu'$ .

Jetzt nimmt man auf  $\mathfrak{E}$  einen zweiten beliebigen Punkt  $\varepsilon''$  an und führt dieselben Konstruktionen wie mit  $\varepsilon'$  durch; man erhält der Reihe nach die Punkte  $\delta_0''$ ,  $\delta''$  auf  $\mathfrak{D}$ , ferner  $\varkappa''$ ,  $\lambda''$ ,  $\beta''$ , dann  $\mu_0''$ ,  $\mu_1''$ ,  $\mu''$  und  $\nu_1''$ ,  $\nu_2''$ ,  $\nu''$ . Verbindet man  $\nu'$  mit  $\nu''$ , so erhält man die Gerade  $\mathfrak{N}$ , auf welcher der richtige Beschleunigungspunkt  $\nu$  liegen muß.

Jetzt zeichnet man noch

$$\overline{a\nu_0} \equiv n_{NA} = \frac{v_{NA}^2}{NA} = \frac{\overline{an}^2}{NA} \text{ in Richtung } NA,$$

$\nu_0\nu \perp a\nu_0$ ; im Schnitte von  $\nu_0\nu$  mit  $\mathfrak{N}$  liegt  $\nu$ .

Die übrigen Beschleunigungspunkte werden nun rückschreitend gefunden. Man zieht z. B.  $\nu\nu_1 \parallel \nu''\nu_1''$  bis zum Schnitte  $\nu_1$  mit  $\nu_1'\nu_1''$  und  $\nu_1\mu \parallel \nu_1''\mu''$  bis zum Schnitte  $\mu$  mit  $\mathfrak{M}$ ; ferner  $\nu\nu_2 \parallel \nu''\nu_2''$  bis zum Schnitte  $\nu_2$  mit  $\nu_2'\nu_2''$  und  $\nu_2\lambda \parallel \nu_2''\lambda''$  bis zum Schnitte  $\lambda$  mit  $\mathfrak{L}$ .

Oder man kann auch direkt die Ähnlichkeit der Punktreihen benützen, also z. B.  $\beta'\beta''\beta \sim \nu'\nu''\nu$  usw. machen.

**199. Literatur.** Der Gedanke der Beschleunigungspläne von kinematischen Ketten stammt von O. Mohr und wurde mitgeteilt und an Beispielen behandelt in den Abhandlungen:

„Über Geschwindigkeits- und Beschleunigungspläne“, Civilingenieur 1887 und:

„Beiträge zur Geometrie der Bewegung“, Zeitschr. f. Math. u. Physik 1903.

Besonders in der letztgenannten Arbeit behandelt Mohr eine Reihe von einfachen und verwickelten kinematischen Ketten und Getrieben.

Die Methode, die in vorliegendem Abschnitte mitgeteilt wurde<sup>1)</sup>, stimmt bei verwickelteren Ketten nicht mit jener von Mohr überein. Mohr zerlegt nämlich in diesen Fällen die Bewegung des Getriebes in mehrere gleichzeitige, übereinander gelagerte, von denen eine oder zwei Anfangsbewegungen sind, und denen er solche Geschwindigkeiten und Beschleunigungen vorschreibt, daß die Resultierende aus allen diesen übereinander gelagerten Bewegungen den gegebenen Bedingungen entspricht.

Bei Ketten, für welche diese Aufeinanderlagerung zweier oder mehrerer Bewegungen nicht ausreicht, um den Beschleunigungsplan zu ermitteln, wird die Dehnbarkeit eines Stabes angenommen und dessen Dehnungsgeschwindigkeit und Dehnungsbeschleunigung bestimmt, worauf die Bedingung eingeführt wird, daß die Dehnungsgeschwindigkeit für die resultierende Bewegung null wird und die Dehnungsbeschleunigung jene eines starren Stabes ist.

<sup>1)</sup> Sie wurde in einer Abhandlung 1914 der Zeitschr. f. Math. u. Phys. eingereicht, ohne bisher veröffentlicht zu werden.



99. Von der in Fig. 386 dargestellten offenen, dreigliedrigen Kette sind die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Punkte  $A$  und  $B$  gegeben, ferner die Richtung  $c$  von  $v_C$  und die Richtung  $\zeta$  von  $b_C$ . Man zeichne den Beschleunigungsplan.

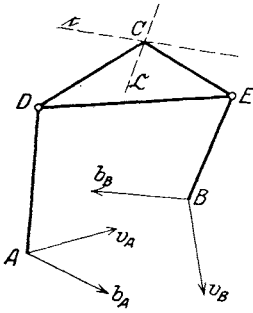


Fig. 386.

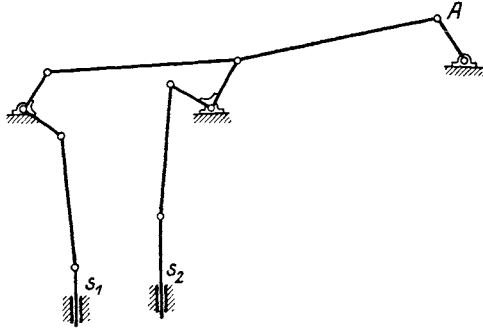


Fig. 387.

100. Von der in Fig. 387 dargestellten Doppelpumpe ist die Beschleunigung des Kurbelzapfens  $A$  gegeben. Man zeichne die Beschleunigungen aller Gelenke und der Pumpengestänge  $s_1$  und  $s_2$ .

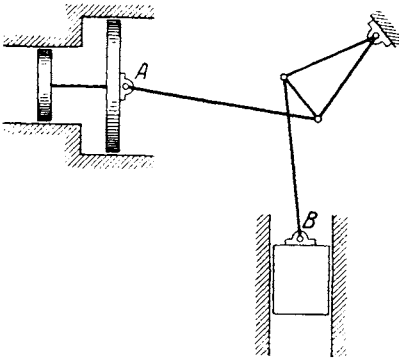


Fig. 388.

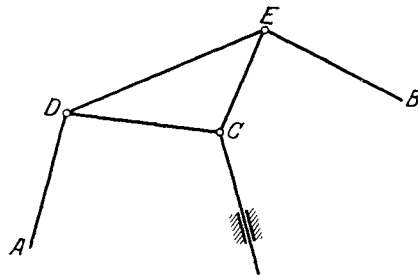


Fig. 389.

101. Fig. 388 zeigt die Anordnung der pneumatischen Nietmaschine von Ch. J. Carney und J. C. Gorton. Gegeben ist die Größe der Geschwindigkeit  $v_A$  und die Größe der Beschleunigung  $b_A$ . Man konstruiere die Geschwindigkeit und Beschleunigung von  $B$ .
102. Von wieviel Punkten der viergliedrigen offenen Kette Fig. 389 darf man die Geschwindigkeit und Beschleunigung annehmen? Man entwickle die Bewegungspläne.



## XIX. Der Beschleunigungszustand von kinematischen Ketten mit Schiebern.

**202. Kulissenführung.** In Fig. 390 wird die nach einem Kreisbogen gekrümmte Kulisse  $DE$  (Glied 1) durch eine Stange starr mit dem

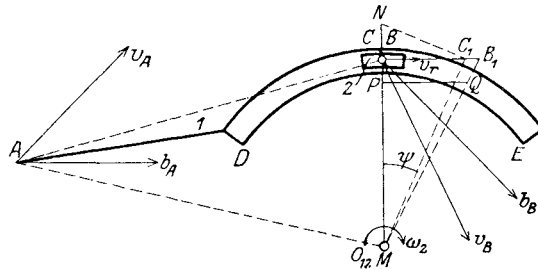


Fig. 390.

Punkte  $A$  verbunden, dessen Geschwindigkeit  $v_A$  und Beschleunigung  $b_A$  gegeben sind. In der Kulisse gleitet ein Schieber (Glied 2), dessen Mittelpunkt  $B$  eine gegebene Geschwindigkeit  $v_B$  und eine gegebene

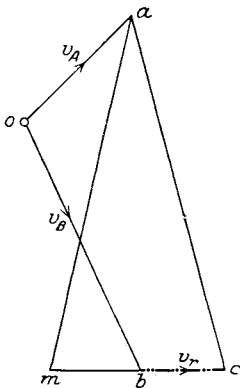


Fig. 390 a.

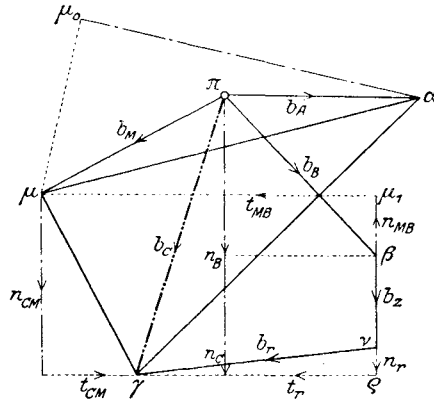


Fig. 390 b.

Beschleunigung  $b_B$  besitzt. Der Punkt des Gliedes 1, der augenblicklich mit  $B$  zusammenfällt, werde mit  $C$  bezeichnet. Es ist die Beschleunigung  $b_C$  dieses Punktes zu konstruieren.

Wir wollen diese Kulissenführung zunächst durch eine gleichwertige kinematische Kette ersetzen, bei welcher die Bewegungsverhältnisse anschaulicher sind. Ist  $M$  der Mittelpunkt der kreisförmigen Kulisse, welcher Punkt gleichzeitig der Drehpol  $O_{12}$  ist, so kann das Glied 1 durch das Dreieck  $AMC$ , das Glied 2 durch die Stange  $MB$  ersetzt werden (Fig. 391). In dieser einfachen kinematischen Kette kann zunächst aus  $b_A$  und  $b_B$  die Beschleunigung  $b_M$  des Punktes  $M$  und sodann  $b_C$  konstruiert werden (vgl. die Grundaufgabe 189).

Fig. 390a ist der Geschwindigkeitsplan, Fig. 390b der Beschleunigungsplan; aus  $a$  und  $\beta$  wurde der Beschleunigungspunkt  $\mu$  in bekannter Weise mit Hilfe der Punkte  $\mu_0$  und  $\mu_1$  gefunden und sodann  $\gamma$  aus der Ähnlichkeit  $a\mu\gamma \sim AMC$ . Dann ist  $\overline{\pi\gamma} \equiv b_C$ .

**203. Der Satz von Coriolis.** Wir wollen jedoch die gleiche Aufgabe, die Beschleunigung  $b_C$  zu finden, auf einem Wege lösen, der den Umweg über die Beschleunigung  $b_M$  des Mittelpunktes entbehrlich macht. Angenommen, die beiden Glieder 1 und 2 (Fig. 391) hätten in bezug auf

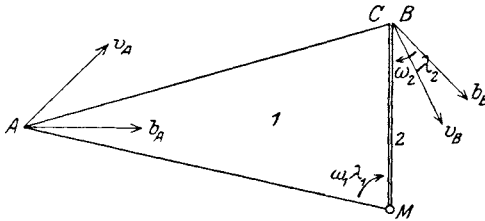


Fig. 391.

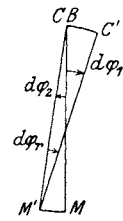


Fig. 392.

die ruhende Ebene die Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_1$  und  $\omega_2$ , die Winkelbeschleunigungen  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ . Man kann sich vorstellen, daß zuerst die beiden Glieder 1 und 2 gemeinsam eine Translation mit der Geschwindigkeit  $v_B$  und der Beschleunigung  $b_B$  ausführen, sodann (Fig. 392) um den gemeinsamen Punkt  $B, C$  eine Drehung  $d\varphi_2$  vollziehen würden, wodurch  $M$  nach  $M'$  käme; hierauf würde das Glied 2 in Ruhe verharren und das Glied 1 um  $M'$  eine relative Drehung  $d\varphi_r$  ausführen, wodurch  $C$  sich von  $B$  trennt und nach  $C'$  gelangt.

Der Verdrehungswinkel des Gliedes 1 ist dann die Summe dieser aufeinander folgenden Drehungen, d. h.

$$d\varphi_1 = d\varphi_2 + d\varphi_r,$$

oder

$$d\varphi_r = d\varphi_1 - d\varphi_2,$$

und die relative Winkelgeschwindigkeit von 1 in bezug auf 2:

$$\omega_r = \frac{d\varphi_r}{dt} = \omega_1 - \omega_2;$$

und ebenso die relative Winkelbeschleunigung von 1 in bezug auf 2

$$\lambda_r = \frac{d\omega_r}{dt} = \lambda_1 - \lambda_2.$$

Die Beschleunigung  $b_C$  kann aus  $b_M$  in folgender Weise abgeleitet werden (Fig. 390b):

$$b_C \equiv b_M + n_{CM} + t_{CM};$$

ebenso kann die Beschleunigung  $b_M$  aus  $b_B$  gebildet werden:

$$b_M \equiv b_B + n_{MB} + t_{MB};$$

es ist also  $b_C \equiv b_B + (n_{MB} + n_{CM}) + (t_{MB} + t_{CM})$ .

Hierin ist  $t_{MB} + t_{CM} \equiv \overline{q\gamma} \equiv \overline{MB} \cdot \lambda_2 + \overline{CM} \cdot \lambda_1$ ,

und  $n_{MB} + n_{CM} \equiv \overline{\beta\varrho} \equiv \overline{MB} \cdot \omega_2^2 + \overline{CM} \cdot \omega_1^2$ ;

setzt man  $\overline{MB} \equiv -\overline{CM}$ , so wird

$$\overline{q\gamma} \equiv \overline{CM} \cdot (\lambda_1 - \lambda_2) \equiv \overline{CM} \cdot \lambda_r \equiv t_r$$

und  $\overline{\beta\varrho} \equiv \overline{CM} (\omega_1^2 - \omega_2^2) \equiv \overline{CM} (\omega_1 - \omega_2) (\omega_1 + \omega_2)$

oder  $\overline{\beta\varrho} \equiv \overline{CM} \cdot \omega_r (\omega_r + 2\omega_2) \equiv \overline{CM} \cdot \omega_r^2 + 2\overline{CM} \cdot \omega_r \omega_2$ .

Setzt man noch  $\overline{CM} \cdot \omega_r = v_r$ ,  $\overline{CM} \cdot \omega_r^2 = n_r$ , so bleibt

$$\overline{\beta\varrho} \equiv n_r + 2v_r \omega_2$$

und somit

$$b_C \equiv b_B + n_r + 2v_r \omega_2 + t_r.$$

Hierin ist  $b_r \equiv n_r + t_r \equiv \overline{v\varrho}$  die relative Beschleunigung von  $C$  gegen das Glied 2 und  $b_z \equiv 2v_r \omega_2 \equiv \overline{\beta\gamma}$  eine neue Beschleunigung, die wir Zusatzbeschleunigung oder Coriolisbeschleunigung nennen wollen. Ihre Richtung erhält man durch Drehung der Richtung von  $v_r$  um  $90^\circ$  im Sinne der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_2$  des Bezugssystems 2.

Es bleibt somit

$$b_C \equiv b_B + b_z + b_r, \quad b_z = 2v_r \omega_2 \dots \dots \dots 134)$$

das von Coriolis in der Abhandlung: „Sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps“, Journal de l'Ecole polytechnique, 1825, nicht nur für die Ebene, sondern auch für den Raum ausgesprochene Gesetz. Es lautet:

Die Beschleunigung eines Punktes  $C$ , der augenblicklich mit dem Punkte  $B$  des Bezugssystemes 2 zusammenfällt, besteht aus drei Teilen:

1. der Beschleunigung des Punktes  $B$ ;
2. der relativen Beschleunigung des Punktes  $C$  in bezug auf das System 2;
3. der Zusatzbeschleunigung  $b_z = 2v_r \omega_2$ , worin  $\omega_2$  die Winkelgeschwindigkeit des Systems 2 und  $v_r$  die relative Geschwindigkeit von  $C$  gegen  $B$  ist. Die Richtung von  $b_z$  erhält man, wenn man die Richtung von  $v_r$  um  $90^\circ$  im Sinne von  $\omega_2$  dreht.

Die Konstruktion von  $b_C$  mit Hilfe dieses Gesetzes gestaltet sich nun auf folgende Weise:

Nachdem in Fig. 390c die Beschleunigung  $b_B \equiv \overline{\pi\beta}$  aufgetragen wurde, konstruiert man die Zusatzbeschleunigung  $b_z$ , indem man die relative Geschwindigkeit  $v_r \equiv v_{CB} \equiv \overline{bc}$  aus dem Geschwindigkeitsplan Fig. 390a entnimmt und in Fig. 390:  $\overline{MP} = 2v_r$  macht. Ebenso zeichnet man daselbst

$$\overline{BB_1} \equiv v_{BM} \equiv \overline{mb}$$

und verbindet  $M$  mit  $B_1$ ; dann ist

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\overline{BB_1}}{\overline{MB}} = \frac{v_{BM}}{\overline{MB}} = \omega_2.$$

Zieht man endlich  $PQ \perp MB$ , so ist

$$\overline{PQ} = \overline{MP} \cdot \operatorname{tg} \psi = 2v_r \omega_2 = b_z,$$

das aus seiner mit  $v_r$  übereinstimmenden Richtung noch um  $90^\circ$  im Sinne von  $\omega_2$ , also im Uhrzeigersinne, gedreht werden muß.

Nachdem in Fig. 390c  $\overline{\beta v} \equiv b_z$  gemacht wurde, fügt man die Normalbeschleunigung der relativen Bewegung  $v \overline{\rho} \equiv n_r$  hinzu, indem man in Fig. 390  $\overline{CC_1} \perp v_r$  macht und  $C_1N \perp MC_1$  errichtet; dann ist  $\overline{NC} = \frac{v_r^2}{\overline{CM}} = n_r$ .

Zieht man endlich  $\rho\gamma \perp \beta\rho$ , so muß diese Senkrechte den Beschleunigungspunkt  $\gamma$  enthalten. Eine zweite Gerade, die ebenfalls  $\gamma$  enthalten wird, erhält man aus dem gegebenen Beschleunigungspunkt  $a$ , indem man

$$\overline{a\gamma_0} \equiv n_{CA} = \frac{v_{CA}^2}{\overline{CA}} = \frac{\overline{ac}^2}{\overline{CA}} \text{ in Richtung } CA$$

und  $\gamma_0\gamma \perp a\gamma_0$  errichtet. Im Schnitte von  $\gamma_0\gamma$  mit  $\rho\gamma$  liegt dann der Beschleunigungspunkt  $\gamma$  und es ist die Tangentialbeschleunigung der relativen Bewegung  $\rho\gamma \equiv t_r$ ,  $v\gamma \equiv n_r + t_r \equiv b_r$  die gesamte relative Beschleunigung und endlich

$$b_C \equiv \overline{\pi\gamma} \equiv \overline{\pi\beta} + \overline{\beta v} + v\gamma \equiv b_B + b_z + b_r.$$

Ist die Kulisse geradlinig, so ist auch die relative Bewegung des Kulissenpunktes  $C$  in bezug auf den Schieber 2 geradlinig; dann sind aber  $v_r$  und  $b_r$  parallel, es ist  $n_r = 0$  und die Zusatzbeschleunigung wird

$$b_z = n_C - n_B \dots \dots \dots 135)$$

wie ein Blick auf Fig. 390b lehrt.

**204. Die gerade Kulisse.** Die im vorigen Abschnitt mitgeteilte Methode, die Beschleunigung des Kulissenpunktes  $C$  ohne Benützung des Kulissenmittelpunktes  $M$  zu finden, ist besonders dann zu verwenden, wenn dieser Mittelpunkt unendlich fern ist, also bei gerader Kulisse (Fig. 393).

Von der Kulisse 1 sei die Geschwindigkeit und die Beschleunigung eines Punktes  $A$  gegeben, ebenso für den Mittelpunkt  $B$  des geradlinigen

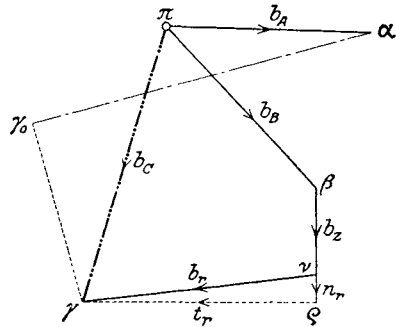


Fig. 390c.

Schiebers 2. Es ist die totale Beschleunigung des Kulissenpunktes  $C$  zu bestimmen, der augenblicklich mit  $B$  zusammenfällt, sowie die relative Geschwindigkeit  $v_r$  und die relative Beschleunigung  $b_r$  der Kulis in bezug auf den Schieber.

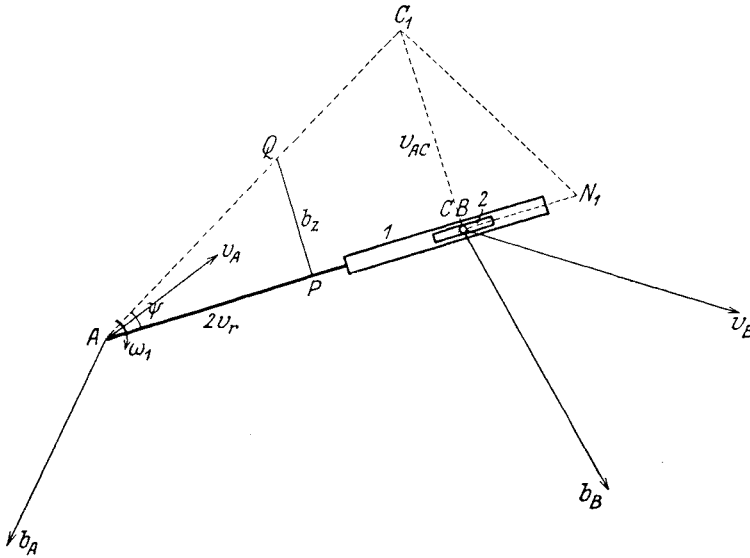


Fig. 393.

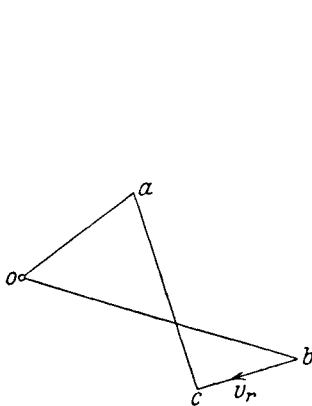


Fig. 393 a.

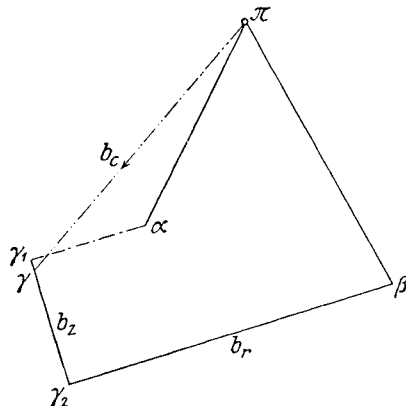


Fig. 393 b.

Im Geschwindigkeitsplan (Fig. 393 a) wurde  $ac \perp AC$  und  $b_c$  parallel zur Kulis gezogen; dann ist  $v_r \equiv \overline{bc}$ .

Im Beschleunigungsplan (Fig. 393 b) wurde

$$\overline{a\gamma_1} \equiv n_{CA} = \frac{v_{CA}^2}{CA} = \frac{\overline{ac}^2}{CA} \equiv \overline{N_1C}$$

und  $\gamma_1\gamma_2 \perp \alpha\gamma_1$  gezogen. Zieht man durch  $\beta$  die Parallele zur Kulisse, so ist  $\beta\gamma_2$  bereits die relative Beschleunigung  $b_r$ , denn die noch fehlende Zusatzbeschleunigung  $b_z = 2v_r\omega_2$  hat die Richtung  $\gamma_2\gamma_1$ , wie man sich in folgender Weise überzeugen kann. Kulisse 1 und Schieber 2 haben die gleiche Winkelgeschwindigkeit, es ist  $\omega_1 = \omega_2$ ; macht man  $\overline{CC_1} = v_{AC} = \overline{ca}$  und verbindet  $A$  mit  $C_1$ , so ist

$$tg\psi = \frac{v_{AC}}{AC} = \omega_1 = \omega_2 \text{ (vgl. Gleichung 7);}$$

trägt man von  $A$  aus auf  $AC$  die Strecke

$$\overline{PA} = 2v_r$$

auf und errichtet in  $P$  die Senkrechte auf  $AC$ , so ist

$$\overline{PQ} = 2v_r tg\psi = 2v_r\omega_2 = b_z;$$

dreht man die Richtung von  $v_r$  um  $90^\circ$  im Sinne von  $\omega_2$ , so erhält man die Richtung von  $b_z$ ; trägt man demnach  $b_z$  von  $\gamma_2$  aus in seiner Richtung auf, so erhält man den Beschleunigungspunkt  $\gamma$ .

Der Beschleunigungsplan erfüllt jetzt die Gleichungen:

$$\overline{\pi\gamma} \equiv \overline{\pi a} + \overline{\alpha\gamma_1} + \overline{\gamma_1\gamma}$$

oder

$$\overline{b_C} \equiv \overline{b_A} + \overline{n_{CA}} + \overline{t_{CA}}$$

und

$$\overline{\pi\gamma} \equiv \overline{\pi\beta} + \overline{\beta\gamma_2} + \overline{\gamma_2\gamma}$$

oder

$$\overline{b_C} \equiv \overline{b_B} + \overline{b_r} + \overline{b_z}.$$

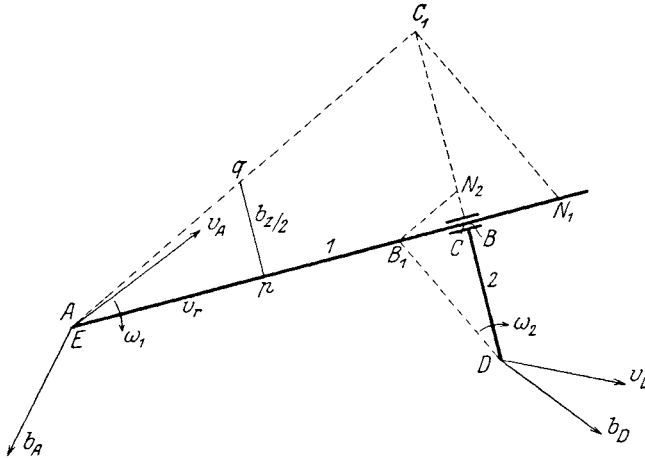


Fig. 394.

In der Fig. 394 wurde die Aufgabe etwas allgemeiner gehalten. Das Glied 2 (Schieber) ist mit dem steifen Arm  $BD$  versehen; gegeben sind nun  $v_D$  und  $b_D$  (statt  $v_B$  und  $b_B$  wie vorher), außerdem  $v_A$  und  $b_A$ .

Im Geschwindigkeitsplan Fig. 394a wird  $ac \perp AC$  und  $dc$  parallel zu 1 gezogen, da die gegenseitige Verschiebung von  $C$  und  $D$  die Richtung

von 1 hat. Bezeichnet man mit  $E$  jenen Punkt von 2, der augenblicklich mit  $A$  zusammenfällt, so verschiebt sich  $A$  gegen  $E$  auch in Richtung von 1; zieht man also  $ae \parallel 1$  und  $de \perp DE$ , so erhält man  $e$  und im Schnitte von  $eb \perp EB$  mit  $cd$  den Punkt  $b$ . Die relative Geschwindigkeit des Gliedes 1 in bezug auf 2 ist dann  $v_r \equiv v_{CB} \equiv \overline{bc}$ .

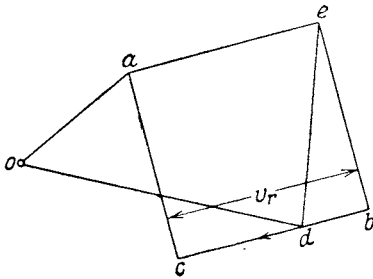


Fig. 394 a.

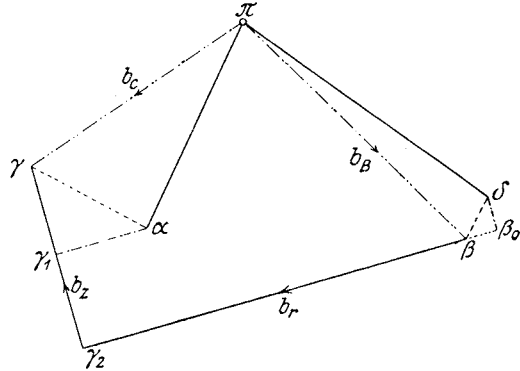


Fig. 394 b.

Im Beschleunigungsplan Fig. 394 b wird  $\overline{\pi\alpha} \equiv b_A$ ,  $\overline{\pi\delta} \equiv b_D$  gemacht, sodann

$$\overline{\alpha\gamma_1} \equiv n_{CA} = \frac{v_{CA}^2}{CA} = \frac{a\overline{c}^2}{CA} \equiv N_1 C$$

und

$$\overline{\delta\beta_0} \equiv n_{BD} = \frac{v_{BD}^2}{BD} = \frac{d\overline{b}^2}{BD} \equiv N_2 B,$$

ferner  $\beta_0\gamma_2 \parallel 1$ ,  $\gamma_1\gamma_2 \parallel 2$  gezogen. Da die Gleichung gilt

$$b_C \equiv b_B + b_r + b_z,$$

worin  $b_z = 2v_r\omega_2$  auf  $v_r$ , also auch auf  $b_r$  senkrecht steht, so ist der Punkt  $\gamma_2$  bereits der Schnittpunkt von  $b_r$  und  $b_z$ .

Macht man  $\overline{pA} = v_r = \overline{bc}$  und  $pq \perp AC$ , so ist  $\overline{pq} = v_r\omega_2 \equiv \frac{1}{2} b_z$ , da  $\omega_1 = \omega_2$  ist.  $\gamma_2\gamma = b_z$  aufgetragen gibt den Beschleunigungspunkt  $\gamma$ . Die Richtung von  $b_z$  ist jene von  $v_r \equiv \overline{bc}$ , um  $90^\circ$  im Sinne von  $\omega_2$ , also hier in jenem der Uhr, gedreht.

Endlich ist

$$tg(\gamma\alpha\gamma_1) = \frac{t_{CA}}{n_{CA}} = \frac{\lambda_1}{\omega_1^2}, \quad tg(\beta\delta\beta_0) = \frac{t_{BD}}{n_{BD}} = \frac{\lambda_2}{\omega_2^2};$$

da nun die Glieder 1 und 2 stets senkrecht zueinander bleiben, müssen ihre Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_1$  und  $\omega_2$  einander gleich sein, und ebenso ihre Winkelbeschleunigungen  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ . Es ist also stets

$$\sphericalangle(\gamma\alpha\gamma_1) = \sphericalangle(\beta\delta\beta_0)$$

oder  $\beta\delta \perp \gamma\alpha$ . Da aber  $\gamma$  bereits gefunden ist, so wird durch Ziehen von  $\delta\beta$  senkrecht zu  $\alpha\gamma$  auch der Beschleunigungspunkt  $\beta$  gefunden, und damit ist  $b_C \equiv \overline{\pi\gamma}$ ,  $b_B \equiv \overline{\pi\beta}$  und auch  $b_r \equiv \overline{\beta\gamma_2}$  bekannt.

205. Die rotierende Kurbelschleife. In Fig. 395 rotiert das Glied 1 um den festen Punkt  $\mathcal{A}$ ; in dem Endpunkt  $A$  dieses Gliedes ist das Glied 3, der Kulissenstein, gelenkig befestigt; dieser Stein gleitet im Gliede 2, der geraden Kulisse, die sich um den festen Punkt  $\mathfrak{B}$  dreht.

Gegeben ist die Beschleunigung  $b_A$ ; es soll die Beschleunigung  $b_B$  jenes Punktes  $B$  des Gliedes 2 gesucht werden, der augenblicklich mit  $A$  zusammenfällt, sowie die relative Beschleunigung  $b_r$  des Steins gegen die Kulisse.

Aus  $b_A$  wurde zunächst in bekannter Weise die gedrehte Geschwindigkeit  $Aa$  des Punktes  $A$  ermittelt und  $ab$  senkrecht zur Kulisse gezogen.

Dann ist  $Bb$  die gedrehte Geschwindigkeit des Punktes  $B$ ; denn  $Aab$  ist der um  $90^\circ$  verdrehte Geschwindigkeitsplan.

Nun besteht die Gleichung

$$b_A \equiv b_B + b_r + b_z,$$

worin  $b_B \equiv n_B + t_B$  ist. Zieht man  $b_p \parallel \mathfrak{B}a$  bis zum Schnitte  $p$

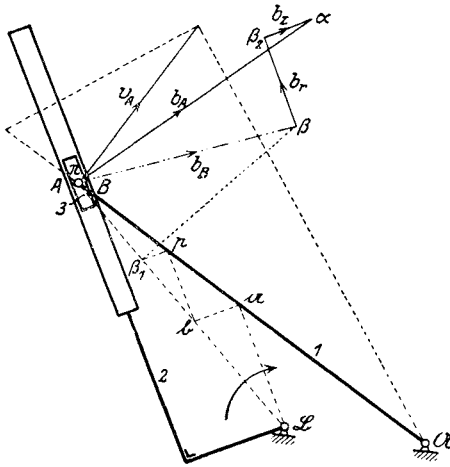


Fig. 395.

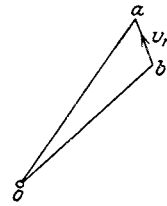


Fig. 395 a.

mit  $A\mathcal{A}$ ,  $p\beta_1 \parallel ab$  bis zum Schnitte  $\beta_1$  mit  $B\mathfrak{B}$ , so ist, wenn wir den Beschleunigungsnullpunkt  $\pi$  nach  $A$  verlegen:

$$\overline{\pi\beta_1} : \overline{Bb} = \overline{\pi p} : \overline{Aa} = \overline{Bb} : \overline{B\mathfrak{B}}$$

oder

$$\overline{\pi\beta_1} = \frac{\overline{Bb}^2}{\overline{B\mathfrak{B}}} = \frac{v_B^2}{\overline{B\mathfrak{B}}} = n_B.$$

Errichtet man also in  $\beta_1$  die Senkrechte auf  $B\mathfrak{B}$ , so muß diese den Beschleunigungspunkt  $\beta$  enthalten.

Die Zusatzbeschleunigung ist  $b_z = 2 v_r \omega_2$ , worin  $v_r \equiv \overline{ba}$  ist;  $\omega_2$  ist die Winkelgeschwindigkeit der Kulisse oder  $\frac{v_B}{\overline{B\mathfrak{B}}}$ ; somit ist wegen

$$\overline{ba} = \overline{b\alpha} : \quad b_z = 2 \frac{\overline{Bb}}{\overline{B\mathfrak{B}}} \cdot \overline{b\alpha}.$$

Nun ergibt sich aber:

$$\overline{\beta_1 p} : \overline{b\alpha} = \overline{Bp} : \overline{B\alpha} = \overline{Bb} : \overline{B\mathfrak{B}},$$

also

$$\overline{\beta_1 p} = \frac{\overline{Bb}}{\overline{B\mathfrak{B}}} \cdot \overline{b\alpha} \text{ und daher } b_z = 2 \overline{\beta_1 p}.$$



Die Richtung von  $b_z$  ist durch Verdrehung von  $v_r$  um  $90^\circ$  im Sinne von  $\omega_2$ , also hier in jenem der Uhr, zu gewinnen. Die relative Beschleunigung  $b_r$  endlich hat die Richtung der Kulisse selbst. Daraus ergibt sich folgende Konstruktion: Man zieht von  $a$  die Senkrechte zur Kulisse und macht  $\overline{\beta_2 a} = b_z = 2\overline{\beta_1 p}$ ; zieht sodann durch  $\beta_2$  die Parallele zur Kulisse bis zum Schnitte  $\beta$  mit der in  $\beta_1$  errichteten Senkrechten; dann ist  $\beta$  der gesuchte Beschleunigungspunkt und  $b_B \equiv \pi\overline{\beta}$ . Damit ist auch die relative Beschleunigung  $b_r \equiv \overline{\beta\beta_2}$  gefunden.

In Fig. 396 ist der besondere Fall der Kurbelschleife behandelt, bei welchem die Richtung der Kulisse 2 durch den festliegenden Punkt  $\mathfrak{B}$  hindurchgeht; für den sich um  $\mathfrak{A}$  drehenden Punkt  $A$  wurde angenommen, daß  $a$  und  $\alpha$  in  $\mathfrak{A}$  zusammenfallen (Normalfall, vgl. 20). Die Konstruktion von  $b_B$  ist dann sehr einfach: man zieht  $a\beta$  senkrecht zur Kulisse,  $b\beta_1$  senkrecht zur Kulisse; sodann macht man

$$\overline{\beta_2 a} = b_z = 2\overline{\beta_1 p}$$

und  $\beta_2\beta \parallel B\mathfrak{B}$ ; im Schnitte von  $\beta_2\beta$  mit  $p\beta_1$  liegt der gesuchte

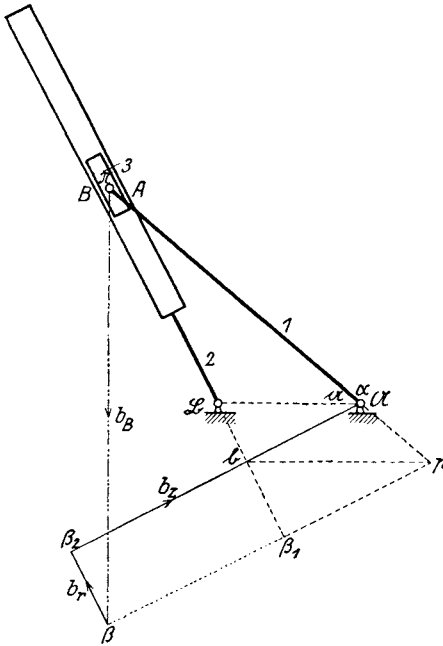


Fig. 396.

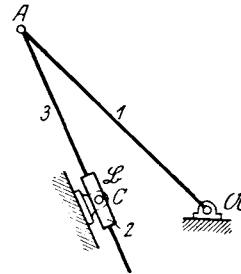


Fig. 397.

Beschleunigungspunkt  $\beta$ . Es ist  $\overline{\pi\beta} \equiv b_B$  und  $\overline{\beta\beta_2} \equiv b_r$ . (Vgl. damit L. Burmester, Kinematik, S. 837.)

Fig. 397 zeigt eine andere Ausführung der in Fig. 396 vorgeführten Kurbelschleife, ohne daß grundsätzlich eine Änderung eingetreten ist. Die Kulisse 2, die sich um  $\mathfrak{B}$  dreht, ist jetzt durch eine Hülse ersetzt, der Kulissenstein durch die Stange 3.

**206. Die schwingende Kurbelschleife.** Dieses in Fig. 398 dargestellte Getriebe ist von Fig. 396 nur dadurch verschieden, daß  $\mathfrak{B}$  außerhalb des von  $A$  beschriebenen Kreises liegt. Die um  $\mathfrak{B}$  drehbare Hülse 2 wird dann keine vollen Umdrehungen, sondern nur Schwingungen ausführen können.

Gegeben ist die Beschleunigung  $b_A$  des Kurbelzapfens  $A$ ; gesucht wird die Beschleunigung jenes Punktes  $C$  der Stange 3, der augenblicklich mit dem Mittelpunkt  $\mathfrak{B}$  der Hülse zusammenfällt.

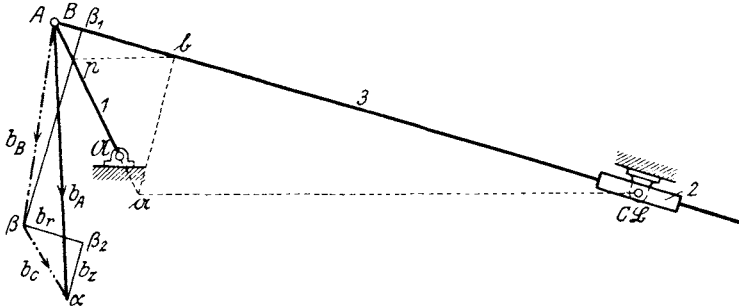


Fig. 398.

Die Konstruktion ist eine Anwendung von Fig. 396 und lässt sich auf diese zurückführen. Man konstruiert zunächst die Beschleunigung jenes Punktes  $B$  der Hülse 2, der augenblicklich mit  $A$  zusammenfällt, indem man in Fig. 398 die Linien zieht:  $\alpha b \perp 3$ ,  $\mathfrak{B}\alpha \parallel b p$ ,  $\beta_1 p \beta \perp 3$ ,  $\overline{\alpha\beta_2} \equiv 2\overline{p\beta_1}$ ,  $\beta_2\beta \parallel 3$ ; dann ist  $b_B \equiv \overline{B\beta}$ .

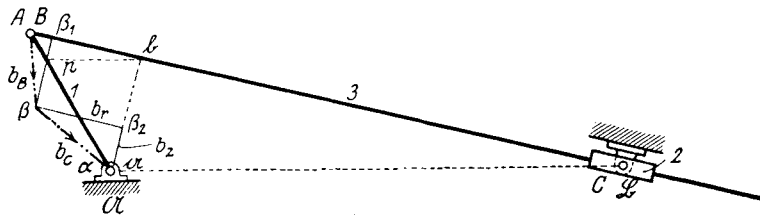


Fig. 399.

Nun ist nach dem Satze von Coriolis (vgl. 203)

$$b_C \equiv b_{\mathfrak{B}} + b_r + b_z,$$

worin  $b_{\mathfrak{B}} = 0$  ist.  $b_r$  und  $b_z$  sind aber die gleichen wie für  $b_B$ , nur haben sie die entgegengesetzte Richtung. Verbindet man also  $\beta$  mit  $\alpha$ , so ist  $b_C \equiv \overline{\beta\alpha}$ .

Fig. 399 zeigt die Vereinfachung der Konstruktion für den Normalfall, wenn  $a$  und  $\alpha$  mit  $\mathfrak{B}$  zusammenfallen. (Man vergleiche damit Fig. 132b.)

**207. Die Winkelschleife.** Sie ist (Fig. 400) ein besonderer Fall der rotierenden Kurbelschleife, in welchem der Punkt  $\mathfrak{A}$  unendlich fern liegt. Dann wird die gerade Stange 1 mit dem Punkt  $A$  in ihrer Richtung verschoben, während der mit  $A$  gelenkig verbundene Schieber 2 durch die sich um  $\mathfrak{C}$  drehende Kulis 3 verschoben wird.

Die Konstruktion der Beschleunigung  $b_A$  der Stange 1 aus der gegebenen Beschleunigung des Kulissenpunktes  $C$ , der augenblicklich mit  $A$  zusammenfällt, wird nach dem Schema vorgenommen

$$b_A \equiv b_C + b_r + b_z, \quad b_z = 2 v_r \omega_3.$$

Aus  $b_C \equiv \overline{\pi\gamma}$  findet man zuerst in bekannter Weise die gedrehte Geschwindigkeit  $\overline{C_1C}$  und aus  $\overline{c\bar{a}}$  senkrecht zur Kulisse die relative Geschwindigkeit  $v_r \equiv \overline{c\bar{a}}$ ;  $C_1c\bar{a}$

ist der um  $90^\circ$  gedrehte Geschwindigkeitsplan Fig. 400a; es ist nicht überflüssig, den mit zu entwerfen, um bei Festsetzung

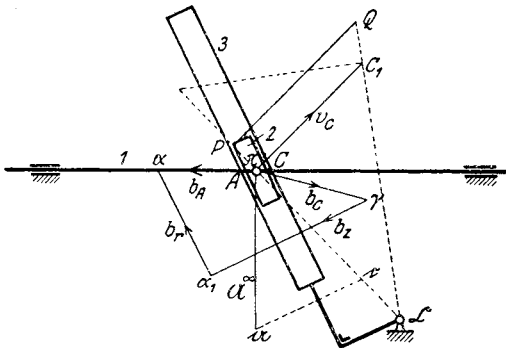


Fig. 400.

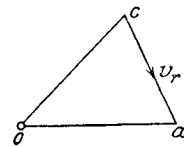


Fig. 400a.

der Richtung von  $b_z$  aus jener von  $v_r$  keinen Irrtum zu begehen, was bei Verwendung der gedrehten Geschwindigkeiten leicht möglich ist.

Macht man  $\overline{CC_1} \equiv v_C$ ,  $\overline{PC} \equiv 2 v_r = 2 \cdot \overline{c\bar{a}}$  und errichtet  $PQ \perp CC_1$  bis zum Schnitte  $Q$  mit  $\overline{CC_1}$ , so ist  $\overline{QP} \equiv 2 v_r \cdot \omega_3 \equiv b_z$ . Dreht man  $v_r$  um  $90^\circ$  im Sinne von  $\omega_3$ , so erhält man die Richtung von  $b_z \equiv \overline{\gamma a_1}$ ; sodann wird in  $a_1$  die Parallele  $a_1 a$  zur Kulisse gezogen; dann ist  $\overline{\pi a} \equiv b_A$  und  $a_1 a \equiv b_r$ .

208. Die Kreuzschieberkurbel. Bei dieser (Fig. 401) wird die Kulisse 3 in gerader Führung gehalten und durch die Kurbel 1 hin und her bewegt,

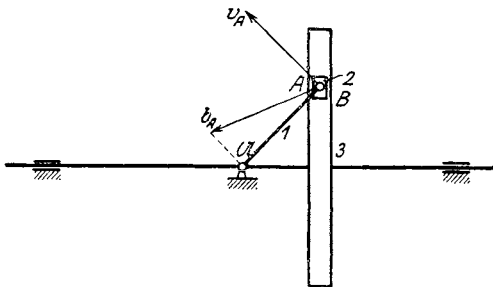


Fig. 401.

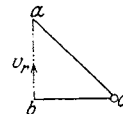


Fig. 401 a.

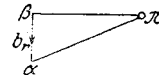


Fig. 401 b.

deren Gelenk  $A$  in dem Schieber 2 gelagert ist. Hier liegen die Bewegungsverhältnisse besonders einfach; das Glied 3 macht keine Drehung, seine Winkelgeschwindigkeit ist null, also auch  $b_z = 0$  und das Gesetz von Coriolis nimmt die einfache Gestalt an

$$b_A \equiv b_B + b_r.$$

In den Fig. 401a, b findet man Geschwindigkeits- und Beschleunigungsplan, zu denen eine Erläuterung wohl überflüssig ist.

**209. Anwendungen.**

1. Fig. 402 zeigt eine Vereinfachung des Getriebes der Stoßmaschine mit schnellem Rückgang des Werkzeuges von de Fries & Co. (mit-

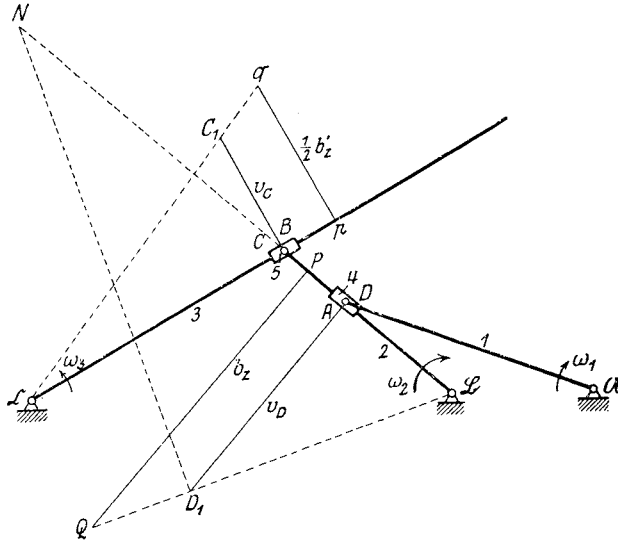


Fig. 402.

geteilt Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1905, S. 657 von Paul Möller). Der nicht gezeichnete Werkzeugschlitten wird von der Schwinde 3 geführt, die wie bei den üblichen Stoßmaschinen durch eine schwingende Kurbelschleife bewegt wird, deren Kurbel 2 sich um  $\mathfrak{B}$  dreht. Sie dreht sich jedoch nicht gleichförmig, sondern erhält ihre Bewegung durch eine rotierende Kurbelschleife, deren Kurbel 1 sich um  $\mathfrak{A}$  dreht. Bei der Stoßmaschine von de Fries dreht sich auch 1 nicht gleichförmig, sondern wird abermals durch eine rotierende Kurbelschleife in Bewegung gesetzt (vgl. Fig. 299).

Gegeben ist die Beschleunigung des Kurbelzapfens  $A$ ; es ist die Beschleunigung des Punktes  $C$  der Schwinde 3 zu konstruieren.

Es wurde der Normalfall angenommen, also  $b_A \equiv \overline{AA}$ . Im Geschwindigkeitsplan Fig. 402a wurde  $v_A \equiv \overline{oa} = A\mathfrak{A}$  und  $\perp A\mathfrak{A}$  gemacht; ist  $D$  der Punkt des Gliedes 2, der augenblicklich mit  $A$  zusammenfällt, so ist  $v_{DA}$  der Stange 2 parallel; es wurde demnach  $ad \parallel 2$  und  $od \perp 2$  gezogen.

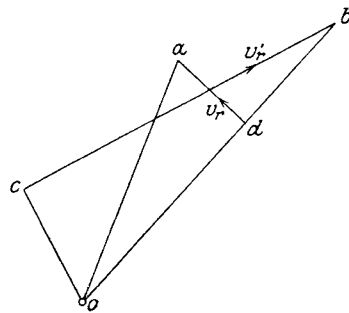
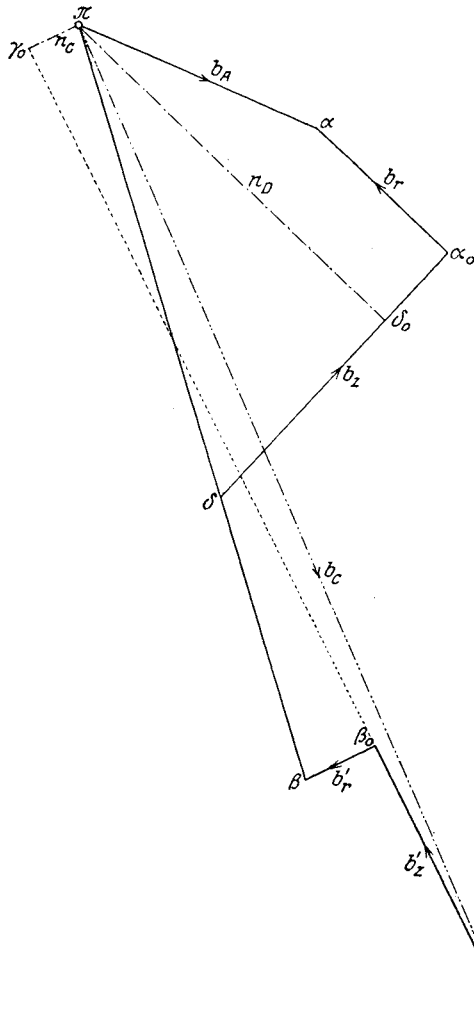


Fig. 402a.

Der Schnittpunkt  $d$  ist der Geschwindigkeitspunkt von  $D$ . Ist  $B$  der Kurbelzapfen von 2, so müssen  $BD\mathfrak{B}$  und  $bdo$  ähnlich sein, woraus  $b$  leicht zu bestimmen ist.

Die Geschwindigkeit  $v_{BC}$  ist zur Stange 3 parallel; zieht man also  $bc \parallel 3$ ,  $oc \perp 3$ , so ist der Schnittpunkt  $c$  der Geschwindigkeitspunkt von  $C$ .



Im Beschleunigungsplan (Fig. 402b) wurde zuerst  $\overline{\pi a} = b_A \equiv \overline{A\mathfrak{A}}$  gezeichnet und sodann

$$\overline{\pi \delta_0} \equiv n_D = \frac{v_D^2}{D\mathfrak{B}} = \frac{o d^2}{D\mathfrak{B}} = \overline{ND}$$

gemacht. Nun ist nach Gleichung 134):

$$b_A \equiv b_D + b_z + b_r,$$

wobei  $b_r$  die Richtung der Stange 2,  $b_z$  die Richtung von  $v_r$  um  $90^\circ$  verdreht, also senkrecht zur Stange 2 besitzt. Man zieht demnach  $\alpha\alpha_0 \parallel 2$ ,  $\delta_0\alpha_0 \perp 2$ , so ist  $\alpha_0\alpha = b_r$ . Um noch den Beschleunigungspunkt  $\delta$  zu finden, beachte man, daß nach Gleichung 134):

$$b_z = 2v_r\omega_2$$

ist. Man macht also

$$\overline{\mathfrak{B}P} \equiv 2v_r \equiv 2\overline{da}$$

und errichtet  $PQ \perp 2$  bis zum Schnitte  $Q$  mit  $\mathfrak{B}D_1$ ; dann ist

$$\overline{QP} = 2v_r \cdot \frac{v_D}{D\mathfrak{B}} = 2v_r\omega_2.$$

Fig. 402b.

Wird nun  $\overline{\delta\alpha_0} \equiv \overline{QP}$  aufgetragen, so ist der Beschleunigungspunkt  $\delta$  gefunden und es ist  $\overline{\pi\delta} \equiv b_D$ . Der Beschleunigungspunkt  $\beta$  ist sodann aus der Ähnlichkeit

$$BD\mathfrak{B} \sim \beta\delta\pi$$

leicht zu bestimmen,

In derselben Weise wurde auch der Beschleunigungspunkt  $\gamma$  aus der Beziehung  $b_B \equiv b_C + b_z' + b_r'$  ermittelt. Man bestimmt zuerst

$$\overline{\pi\gamma_0} = n_C = \frac{v_C^2}{C\mathcal{C}} = \frac{\overline{oc}^2}{C\mathcal{C}} \text{ in Richtung } C\mathcal{C}$$

und zieht  $\gamma_0\gamma \perp 3$ , so geht diese Senkrechte durch  $\gamma$ . Ferner ist nach Gleichung 134:

$$b_z' = 2v_r'\omega_3;$$

man trägt  $\overline{Cp} \equiv v_r' \equiv \overline{cb}$  auf, zieht die Senkrechte  $pq$  auf 3 bis zum Schnitt 2 mit  $C\mathcal{C}_1$ , wodurch man  $\frac{1}{2}b_z'$  erhält; die Richtung von  $b_z'$  erhält man, wenn man  $v_r'$  im Sinne von  $\omega_3$  um  $90^\circ$  verdreht. Sodann zieht man  $\beta\beta_0 \parallel 3$  bis zum Schnitte  $\beta_0$  mit  $\gamma_0\gamma$ , dann ist  $\overline{\beta_0\beta} \equiv b_r'$ ; macht man noch  $\overline{\gamma\beta_0} \equiv b_z'$ , so ist auch der gesuchte Beschleunigungspunkt  $\gamma$  gefunden und es ist  $\overline{\pi\gamma} \equiv b_C$ .

2. Der Buchererer-Motor (vgl. A. Vorreiter, Bericht über die intern. Luftschiff-Ausstellung in Frankfurt a. M., Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1910, S. 411, Fig. 403) für Luftschiffahrt-Zwecke

erbaut, besteht aus vier Zylindern, die sich samt ihrem Gehäuse um dessen Mittelpunkt  $\mathfrak{B}$  drehen, während sich die Doppelkurbel  $AA_1$  um deren Mitte  $\mathfrak{A}$  dreht; es ist  $\overline{A\mathfrak{A}} = \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} = \overline{A_1\mathfrak{A}}$ . Die Kolbenstangen sind ohne Lenkerstange an die Kurbel gelenkig angeschlossen; die Kurbelwelle hat die doppelte Umlaufzahl wie das Zylinder-Gehäuse. Dieses Getriebe ist eine gekoppelte gleichschenklige Kurbelschleife. Auch die Pumpe von L. Taverdon (1879) ist nach dem gleichen Prinzip erbaut.

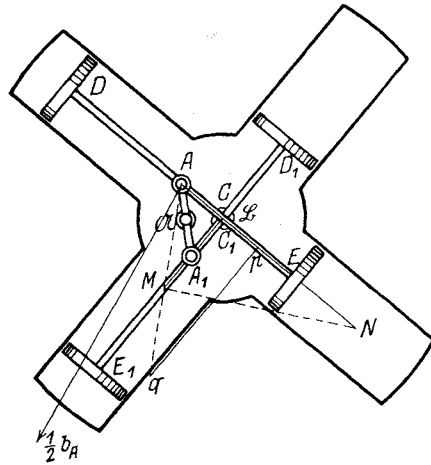


Fig. 403.

Gegeben ist die Beschleunigung  $b_A$  des Kurbelzapfens  $A$ ; zu bestimmen sind die Beschleunigungen der Punkte  $D, E, D_1, E_1$ , sowie die relativen Beschleunigungen  $b_r$  und  $b_r'$  der Kolben in bezug auf ihre Zylinder.

In Fig. 403 stellt  $\frac{1}{2}b_A$  die halbe Beschleunigung des Kurbelzapfens vor; aus ihr wurde  $v_A$  bestimmt und in Fig. 403a gleich  $\overline{oa}$  gemacht. Ist  $C$  jener Punkt der Kolbenstange  $DE$ , der augenblicklich mit dem Mittelpunkt  $\mathfrak{B}$  des Gehäuses zusammenfällt, so fällt seine Bewegungsrichtung in die Richtung dieser Kolbenstange hinein; man zieht also  $oc \parallel DE$  und  $ac \perp AC$ , wodurch  $c$  bestimmt ist. Aus der Ähnlichkeit

$$dace \sim DACE$$

sind dann auch die Geschwindigkeitspunkte  $d$  und  $e$  zu ermitteln. Ebenso werden die Geschwindigkeitspunkte  $a_1 c_1 d_1 e_1$  der zweiten Kolbenstange bestimmt.

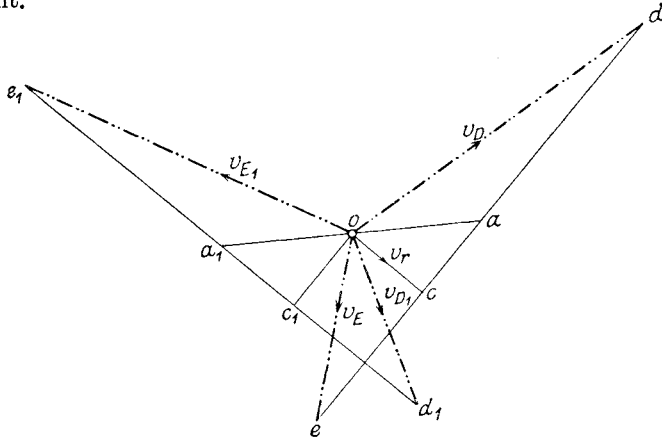


Fig. 403a.

Im Beschleunigungsplan (Fig. 403b), der in halber Größe angelegt wurde, ist  $\overline{\pi a} \equiv \frac{1}{2} b_A$  und

$$\alpha\gamma_0 \equiv \frac{1}{2} n_{CA} = \frac{1}{2} \frac{v_{CA}^2}{CA} = \frac{1}{2} \frac{a\bar{c}^2}{CA} = \frac{1}{2} \overline{NC}, \gamma_0\gamma \perp \alpha\gamma_0.$$

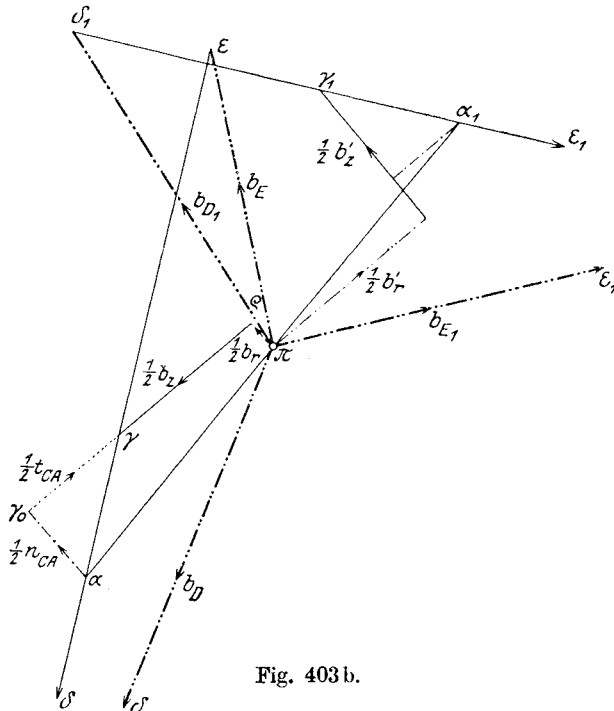


Fig. 403b.

Da der Mittelpunkt des Gehäuses  $\mathfrak{B}$  dauernd in Ruhe ist, also auch keine Beschleunigung besitzt, wird

$$b_C \equiv b_r + b_z;$$

hierin ist  $b_z = 2v_r\omega$ ; die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  des Gehäuses ist aus

$$\omega = \frac{v_{CA}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{ac}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{CA}}$$

zu entnehmen und  $v_r$  ist durch  $\overline{oc}$  dargestellt. Macht man demnach  $\overline{Ap} \equiv v_r \equiv \overline{oc}$ ,  $pq \perp Ap$ , so ist  $\overline{pq} = v_r \omega \equiv \frac{1}{2} b_z$ .

Dabei hat  $b_z$  die Richtung senkrecht zu  $v_r$ , also zur Kolbenstange  $DE$ ; zieht man  $\pi q$  parallel zu  $ED$  bis zum Schnitte mit  $\gamma_0\gamma$ , so hat man bereits die relative Beschleunigung des einen Kolbenpaares

$$\overline{\pi q} \equiv \frac{1}{2} b_r;$$

trägt man noch  $\overline{o\gamma} \equiv \frac{1}{2} b_z \equiv \overline{pq}$  auf, so erhält man auch den Beschleunigungspunkt  $\gamma$ . Die Beschleunigungspunkte  $\delta$  und  $\varepsilon$  erhält man dann aus der Ähnlichkeit

$$\delta\alpha\gamma\varepsilon \sim DACE; \text{ es ist } \overline{\varepsilon\gamma} = \overline{\gamma\delta}.$$

In derselben Weise findet man auch die Beschleunigungspunkte  $\alpha_1, \gamma_1, \delta_1, \varepsilon_1$  der zweiten Kolbenstange und die relative Beschleunigung  $b_r'$ .

3. Die Ventilsteuerung von Collmann.  
 (Vgl. Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1878, S. 342.) Fig. 404 zeigt den wichtigsten Teil dieser Steuerung.  $\mathfrak{A}$  ist die Steuerwelle, die Kurbel  $A\mathfrak{A} = 1$  vertritt das Exzenter, an welche die Stange 2 (Dreiecksglied) gelenkig angeschlossen ist. Auf 2 gleitet der Kullissenstein 3, der an das Dreiecksglied 6 gelenkig angeschlossen ist. 4 und 5 sind Schwingen mit den festen Drehpunkten  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{E}$ . Die Gelenke  $D_1$  und  $K$  sind durch die Koppel 7 verbunden; in  $K$  ist überdies der Lenker 8 gelenkig angeschlossen, der in  $L$  die gerade geführte

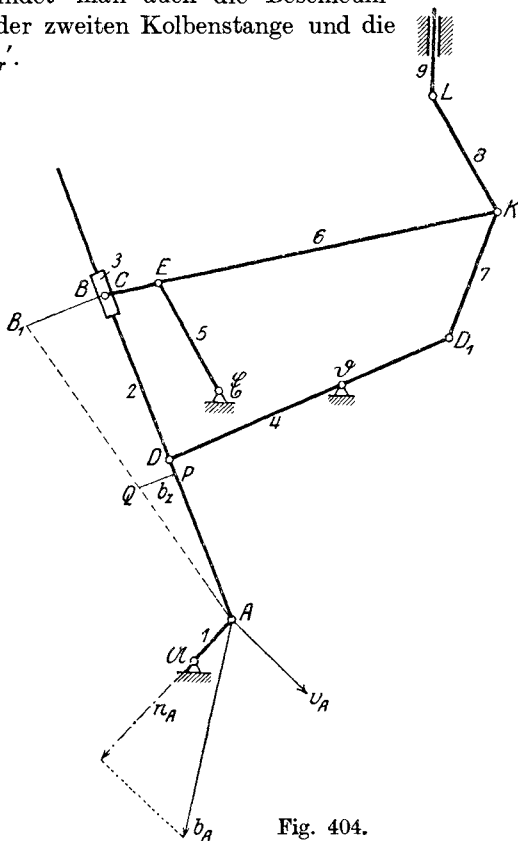


Fig. 404.





bestimmt und es ist  $v_r = \frac{1}{2} \overline{bc}$  die relative Geschwindigkeit des Kulissensteines 3 gegen die Stange 2.

Macht man noch  $ol \parallel 9$  und  $kl \perp KL$ , so ist auch die doppelte Geschwindigkeit  $ol$  der Ventilstange gefunden.

Beschleunigungsplan (Fig. 404b).  $\overline{\pi a} \equiv b_A$ ;  $\delta$  wird in bekannter Weise aus dem Gelenkviereck  $\mathfrak{A}AD\mathfrak{D}$  gefunden. Aus den Ähnlichkeiten  $\alpha\delta\beta \sim ADB$  und  $\delta\pi\delta_1 \sim D\mathfrak{D}D_1$  sind auch  $\beta$  und  $\delta_1$  sofort zu bestimmen.

Um  $\gamma$  zu bestimmen, benütze man das Gesetz von Coriolis:

$$b_C \equiv b_B + b_z + b_r, \quad b_z = 2v_r\omega_2,$$

worin  $\omega_2$  die Winkelgeschwindigkeit des Gliedes 2 ist. Man zieht in Fig. 404  $BB_1 = v_{BA} = \frac{1}{2} \overline{ab}$ , verbindet  $A$  mit  $B_1$ , macht  $\overline{AP} = \overline{bc} = 2v_r$  und zieht  $PQ \perp AP$ ; dann ist  $\overline{PQ} = b_z$  und dies wurde von  $\beta$  aus aufgetragen. Dann enthält die Gerade  $\mathfrak{C} \parallel 2$  den Beschleunigungspunkt  $\gamma$ .

Nun wurde

$$\overline{\pi \varepsilon_0} \equiv n_{E'} = \frac{v_E^2}{E\mathfrak{C}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\overline{oe}^2}{E\mathfrak{C}} \text{ in Richtung } E\mathfrak{C}$$

und die Gerade  $\mathfrak{E} \perp \pi \varepsilon_0$  durch  $\varepsilon_0$  gezogen; ferner

$$\overline{\delta_1 \kappa_0} \equiv n_{KD_1} = \frac{v_{KD_1}^2}{KD_1} = \frac{1}{4} \frac{\overline{d_1 k^2}}{KD_1} \text{ in Richtung } KD_1$$

und die Gerade  $\mathfrak{K} \perp \delta_1 \kappa_0$  durch  $\kappa_0$  gezogen; dann muß  $\varepsilon$  auf  $\mathfrak{E}$ ,  $\kappa$  auf  $\mathfrak{K}$  liegen. Um diese Punkte zu finden, wurde  $\varepsilon'$  auf  $\mathfrak{C}$  beliebig angenommen,

$$\overline{\varepsilon' \kappa'_0} \equiv n_{KE} = \frac{v_{KE}^2}{KE} = \frac{1}{4} \frac{\overline{ek^2}}{KE} \text{ in Richtung } KE$$

und  $\kappa'_0 \kappa' \perp \varepsilon' \kappa'_0$  bis  $\kappa'$  auf  $\mathfrak{K}$  gezogen; sodann  $\kappa'$  mit  $\varepsilon'$  verbunden und  $\kappa' \varepsilon' \gamma' \sim KEC$  gemacht. Hierauf wurde auf  $\mathfrak{C}$  ein zweiter beliebiger Punkt  $\varepsilon''$  gewählt und mit ihm dieselbe Konstruktion wie mit  $\varepsilon'$  wiederholt. Der so gewonnene Punkt  $\gamma''$  wurde mit  $\gamma'$  verbunden; diese Verbindungsgerade  $\mathfrak{C}'$  schneidet  $\mathfrak{C}$  im Beschleunigungspunkte  $\gamma$ . Macht man sodann

$$\gamma' \gamma \gamma'' \sim \varepsilon' \varepsilon \varepsilon'' \sim \kappa' \kappa \kappa'',$$

so sind auch die Punkte  $\varepsilon$  und  $\kappa$  ermittelt; sie müssen mit  $\gamma$  auf derselben Geraden liegen und es muß  $\gamma \varepsilon \kappa \sim CEK$  sein.

Damit ist auch die relative Beschleunigung  $b_r$  gefunden.

Macht man endlich  $\pi \lambda \parallel 9$ , ferner

$$\overline{\kappa \lambda_0} \equiv n_{LK} = \frac{v_{LK}^2}{LK} = \frac{1}{4} \frac{\overline{k l^2}}{LK} \text{ in Richtung } LK$$

und  $\lambda_0 \lambda \perp \kappa \lambda_0$ , so ist auch  $\lambda$  bestimmt und damit die Beschleunigung  $b_L \equiv \pi \lambda$  der Ventilstange.

**210. Viergliedrige Kette mit gerader Kulisse.** Die Kette Fig. 405 enthält außer den Stangen 3 und 4 das dreieckige Glied 2, das bei  $D$  in eine starr verbundene Stange ausläuft, auf der sich das Glied 1 verschieben kann. Hier ist in Gleichung 113):  $n = 4$ ,  $\pi = 0$ , somit der

Beweglichkeitsgrad  $x = n - 2\pi + 2 = 6$ ,  $y = 12$ ; es wurden also von drei Punkten  $A$ ,  $K$  und  $R$  die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen nach Größe und Richtung angenommen. Zu suchen sind die Geschwindig-

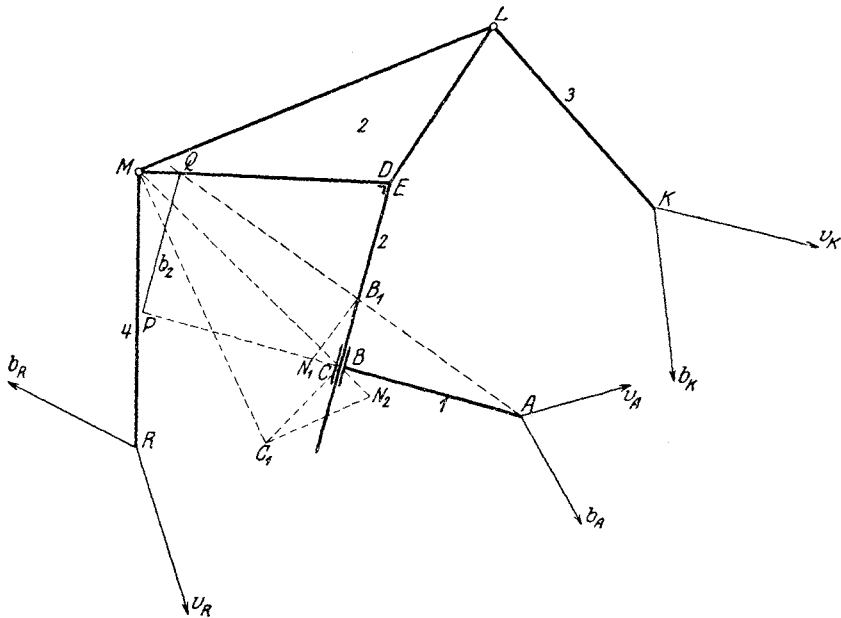


Fig. 405.

keiten und Beschleunigungen aller übrigen Punkte, sowie die relative Geschwindigkeit  $v_r$  und die relative Beschleunigung  $b_r$  des Gliedes 2 in bezug auf 1.

Geschwindigkeitsplan (Fig. 405a).  $\overline{oa} \equiv v_A$ ,  $\overline{ok} \equiv v_K$ ,  $\overline{or} \equiv v_R$ . Durch  $a$  wurde die Gerade  $c' \perp 1$ , ferner durch  $k$  die Gerade  $l \perp 3$ , durch  $r$  die Gerade  $m \perp 4$  gezogen. Sodann wurde auf 1 ein beliebiger Punkt  $l'$  angenommen,  $l'm' \perp LM$  und  $l'c' \perp LC$ ,  $m'c' \perp MC$  gezogen. Dabei ist  $C$  jener Punkt von 2, der augenblicklich mit dem Punkt  $B$  des Gliedes 1 (Mittelpunkt der Hülse) zusammenfällt.

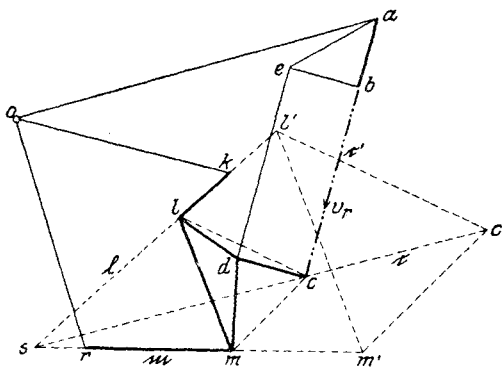


Fig. 405a.

Verbindet man  $c'$  mit dem Schnittpunkt  $s$  der Geraden  $l$  und  $m$ , so er-

hält man die Gerade  $c$ , auf welcher der richtige Geschwindigkeitspunkt  $c$  liegen muß. Er muß aber auch auf  $c'$  liegen, da die Verschiebung von  $A$  gegen  $C$  senkrecht zu  $l$  ist. Damit ist  $c$  im Schnitte von  $c$  und  $c'$  gefunden. Die Punkte  $l$  und  $m$  findet man jetzt aus  $c$  durch Ziehen der Parallelen und  $d$  aus der Bedingung  $cd \perp CD$  und  $md \perp MD$ . Ist ferner  $E$  jener Punkt des Gliedes 1, der augenblicklich mit  $D$  zusammenfällt, so verschiebt sich  $D$  gegen  $E$  ebenfalls senkrecht zu  $l$ ; man zieht

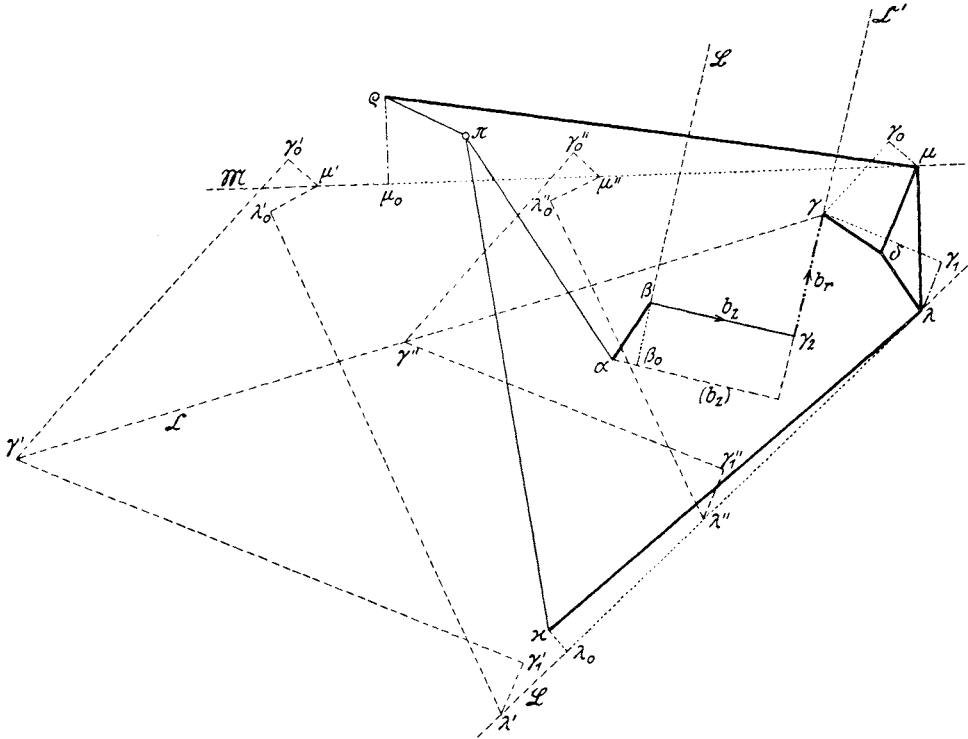


Fig. 405 b.

also  $de \perp l$  und  $ae \perp AE$ , so erhält man  $e$  und sodann aus  $eb \perp EB$  in  $c'$  den Punkt  $b$ . Dann ist schließlich  $v_r \equiv \overline{bc}$ .

Beschleunigungsplan (Fig. 405 b).  $\overline{\pi a} \equiv b_A$ ,  $\overline{\pi x} \equiv b_K$ ,  $\overline{\pi \rho} \equiv b_R$ . Man konstruiert

$$\overline{a\beta_0} \equiv n_{BA} = \frac{v_{BA}^2}{BA} = \frac{\overline{ab}^2}{BA} \equiv \overline{N_1 B}$$

und zieht durch  $\beta_0$  die Gerade  $\mathfrak{B} \perp l$ , auf der der zum Schlusse gefundene Beschleunigungspunkt  $\beta$  liegen muß. Da ferner

$$b_C \equiv b_B + b_z + b_r$$

ist, konstruiert man  $b_z = 2v_r \omega_1$ , indem man  $\overline{AP} = 2 \cdot \overline{bc}$  und  $PQ \perp AP$  bis zum Schnitte  $Q$  mit  $AB_1$  zeichnet, wobei  $\overline{BB_1} \equiv \overline{ba}$  ist.

Dann ist  $\overline{PQ} = b_z$ . Der Drehungssinn der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_1$  des Gliedes 1 ist der Uhr entgegengesetzt; dreht man demnach  $v_r \equiv \overline{bc}$  im Sinne von  $\omega_1$  um  $90^\circ$ , so erhält man die Richtung, in der  $C_z$  von  $\beta_0$  aus aufgetragen wird. Durch seinen Endpunkt wird die Gerade  $\mathfrak{C}'$  parallel zu  $\mathfrak{B}$  gezogen; auf ihr muß der Punkt  $\gamma$  nach obiger Gleichung liegen.

Um eine zweite Gerade  $\mathfrak{C}$  zu finden, zeichnet man

$$\overline{\varrho\mu_0} \equiv n_{MR} = \frac{v_{MR}^2}{MR} = \frac{\overline{rm}^2}{MR} \text{ in Richtung } MR$$

und durch  $\mu_0$  die zu  $MR$  senkrechte Gerade  $\mathfrak{M}$ ; ferner

$$\overline{\varkappa\lambda_0} \equiv n_{LK} = \frac{v_{LK}^2}{LK} = \frac{\overline{kl}^2}{LK} \text{ in Richtung } LK$$

und durch  $\lambda_0$  die zu  $LK$  senkrechte Gerade  $\mathfrak{L}$ .

Sodann wählt man auf  $\mathfrak{M}$  einen beliebigen Punkt  $\mu'$ , zeichnet

$$\overline{\mu'\gamma_0'} \equiv n_{CM} = \frac{v_{CM}^2}{CM} = \frac{\overline{mc}^2}{CM} \text{ in Richtung } CM$$

und  $\gamma_0'\gamma' \perp CM$ , ferner

$$\overline{\mu'\lambda_0'} \equiv n_{LM} = \frac{v_{LM}^2}{LM} = \frac{\overline{ml}^2}{LM} \text{ in Richtung } LM$$

und  $\lambda_0'\lambda' \perp LM$  bis zum Schnitte  $\lambda'$  mit  $\mathfrak{L}$ ; dann

$$\overline{\lambda'\gamma_1'} \equiv n_{CL} = \frac{v_{CL}^2}{CL} = \frac{\overline{lc}^2}{CL} \text{ in Richtung } CL$$

und  $\gamma_1'\gamma' \perp CL$  bis zum Schnitte  $\gamma'$  mit  $\gamma_0'\gamma'$ .

Wählt man nun auf  $\mathfrak{M}$  einen zweiten Punkt  $\mu''$  und führt die gleiche Konstruktion wie mit  $\mu'$  nochmals durch, wobei  $n_{CM}$ ,  $n_{LM}$ ,  $n_{CL}$  dieselben Strecken bleiben wie vorher, so erhält man den Punkt  $\gamma''$ . Die Verbindungsgerade  $\mathfrak{C}$  von  $\gamma'$  und  $\gamma''$  muß den richtigen Beschleunigungspunkt  $\gamma$  enthalten, den man also im Schnitte mit  $\mathfrak{C}'$  findet. Von hier rückwärts schreitend kann man  $\mu$  auf  $\mathfrak{M}$  und  $\lambda$  auf  $\mathfrak{L}$  leicht finden, da  $\overline{\mu\gamma_0} \equiv n_{CM}$  und  $\overline{\lambda\gamma_1} \equiv n_{CL}$  von früher bekannt sind.

Als Kontrolle kann dienen, daß das Beschleunigungsdreieck  $\gamma\lambda\mu$  dem Dreieck  $CLM$  ähnlich sein muß. Aus dieser Ähnlichkeit wird auch der Punkt  $\delta$  leicht zu ermitteln sein, da  $D$  zu ihm ähnlich liegt. Da nun  $AB$  und  $CD$  stets senkrecht zueinander bleiben, ist auch, wie am Schlusse von 204 gezeigt wurde,  $\alpha\beta \perp \gamma\delta$ , woraus  $\beta$  auf  $\mathfrak{B}$  zu ermitteln ist. Sodann wird von  $\beta$  aus  $b_z$  gezogen, womit auch die relative Beschleunigung  $b_r \equiv \overline{\gamma_2\gamma}$  gefunden ist.

**211. Fünfgliedrige Kette mit gerader Kulisse.** Ähnlich der vorigen Untersuchung ist die folgende. Eine Stange 1 (Fig. 406) gleitet in einer geraden Kulisse, die mit dem Arm 2 starr verbunden ist. Dieser ist in  $D$  gelenkig an ein Dreiecksglied 3 angeschlossen, an dessen anderen

Ecken  $L$  und  $M$  zwei Stangen 4 und 5 gelenkig anschließen. Wendet man Gleichung 113 an, so ist mit  $n = 5$ ,  $\pi = 0$  der Beweglichkeitsgrad:  $x = n - 2\pi + 2 = 7$ ,  $y = 14$ ; es können also sowohl für den Geschwindigkeits- wie für den Beschleunigungszustand je sieben Bestimmungsstücke angenommen werden. Angenommen wurden  $v_A$ ,  $v_K$ ,

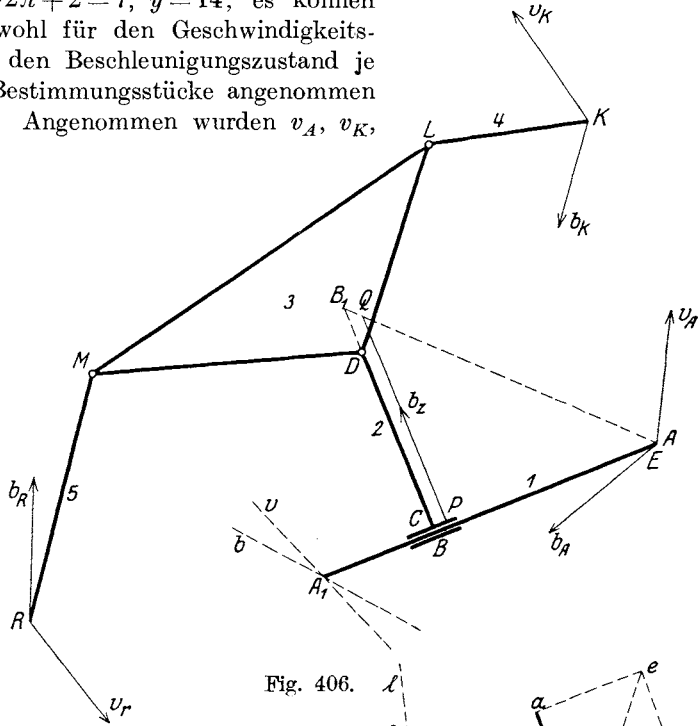


Fig. 406.

$v_R$  nach Größe und Richtung, außerdem von  $A_1$  die Richtung der Geschwindigkeit; die gleichen Annahmen wurden hinsichtlich der Beschleunigungen getroffen. Gesucht wird die relative Geschwindigkeit  $v_r$  und die relative Beschleunigung  $b_r$ , mit denen der Arm 2 an der Stange 1 gleitet.

Geschwindigkeitsplan (Fig. 406a).  $o \dots$  Geschwindigkeitsnullpunkt; die absoluten Geschwindigkeiten wurden nicht gezeichnet; es ist

$$oa = v_A, ok = v_K, or = v_R.$$

Ferner  $oa_1 \parallel v$  in  $A_1$ ,  $aa_1 \perp AA_1$ , womit  $a_1$  gefunden ist.

Ist  $B$  jener Punkt der Stange 1, der augenblicklich mit dem Mittelpunkte  $C$  der Hülse zusammenfällt, so ist  $aba_1 \sim ABA_1$ , wodurch  $b$  be-

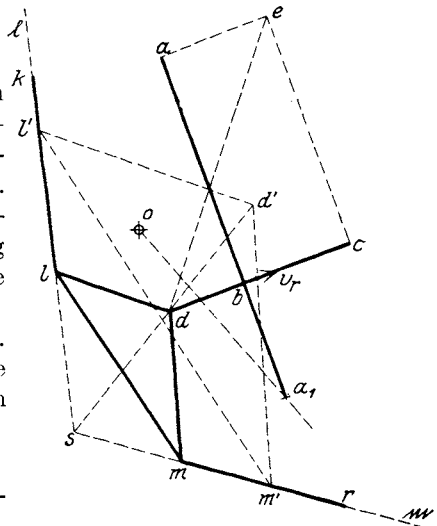


Fig. 406a.

stimmt ist. Zieht man sodann  $cbd \parallel l$ , so müssen auf dieser Parallelen die Punkte  $c$  und  $d$  liegen, da sich  $C$  und  $D$  gegen  $B$  in der Richtung von  $l$  verschieben. Nun zieht man durch  $k$  die Gerade  $l \perp KL$  und durch  $r$  die Gerade  $m \perp RM$ , dann müssen die Geschwindigkeitspunkte  $l$  und  $m$  auf  $l$  bzw.  $m$  liegen. Man nimmt auf  $l$  einen beliebigen Punkt  $l'$

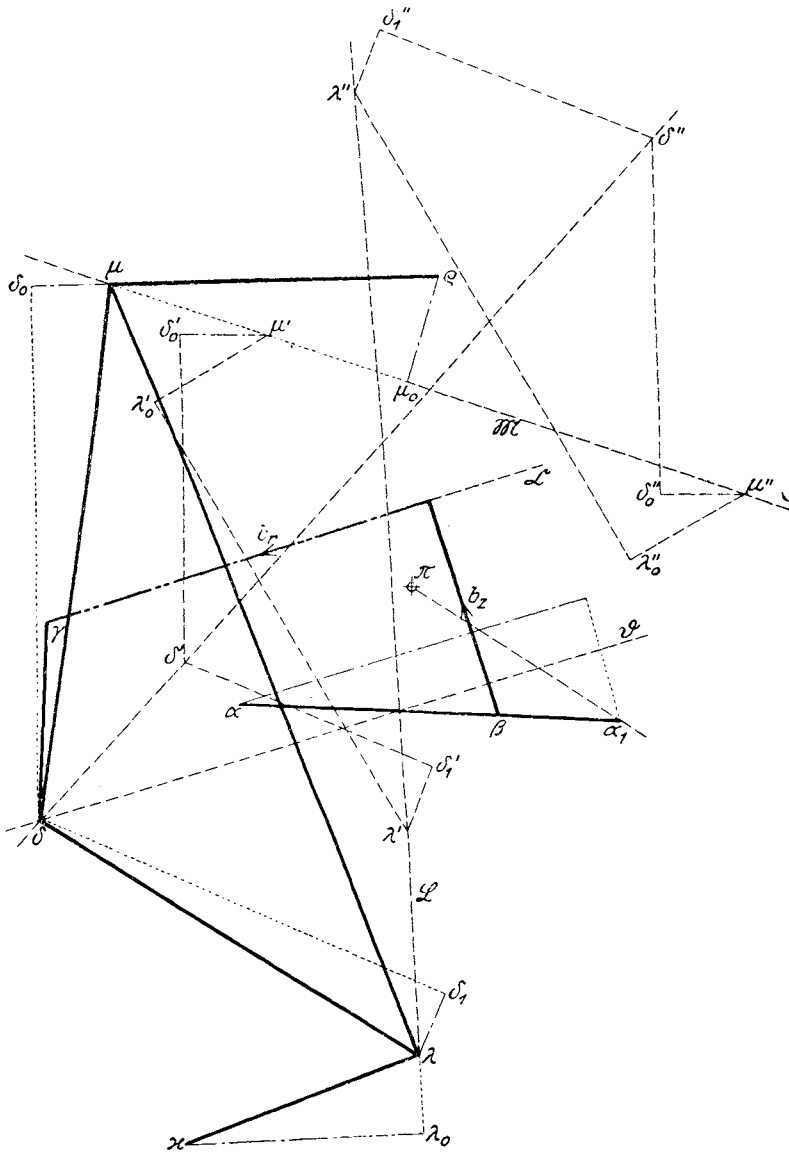


Fig. 406 b.

an, zieht  $l'm' \perp LM$  bis  $m$ , sodann  $l'd' \perp LD$ ,  $m'd' \perp MD$  und verbindet den Schnitt  $d'$  dieser beiden Senkrechten mit dem Schnittpunkte  $s$  von  $l$  und  $m$ ; diese Verbindungslinie muß auch  $d$  enthalten, schneidet also  $cb$  in  $d$ . Damit sind nun auch  $l$  und  $m$  gefunden. Um endlich noch  $c$  zu finden, beachte man den Punkt  $E$  des Gliedes 2, der augenblicklich mit  $A$  zusammenfällt.  $E$  verschiebt sich gegen  $A$  in Richtung von  $l$ ; man zieht also  $ae \parallel l$ ,  $de \perp DE$ , womit  $e$  gefunden ist; endlich  $ec \perp EC$  bis zum Schnitte  $c$  mit  $db$ . Dann ist  $v_r = \overline{bc}$  die gesuchte relative Geschwindigkeit von  $C$  gegen die Stange 1.

Beschleunigungsplan (Fig. 406b).  $\pi$  sei der Beschleunigungsnullpunkt; die absoluten Beschleunigungen wurden nicht gezeichnet.  $\pi a = b_A$ ,  $\pi \kappa = b_K$ ,  $\pi \varrho = b_R$ . Ferner  $\pi a_1 \parallel b$  in  $A_1$ ; dann wird  $a_1$  aus  $a$  mit Hilfe der Normalbeschleunigung in bekannter Weise abgeleitet. Aus  $a\beta a_1 \sim ABA_1$  findet man  $\beta$ . Nun knüpft man wieder an das Gesetz von Coriolis an:

$$b_C = b_B + b_z + b_r \text{ mit } b_z = 2v_r\omega_1,$$

worin  $\omega_1$  die Winkelgeschwindigkeit des Gliedes 1 ist. Man macht in Fig. 406:  $\overline{B_1B} = v_{BA} = \overline{ab}$ , zieht  $AB_1$ , macht  $\overline{PA} = 2v_r$  und  $PQ \perp AB$ ; dann ist  $PQ = b_z$ , das von  $\beta$  aus aufgetragen wird; durch den anderen Endpunkt von  $b_z$  wird die Gerade  $\mathfrak{C} \parallel l$  gezogen; auf ihr muß der Beschleunigungspunkt  $\gamma$  liegen; davon später. Von der Geraden  $\mathfrak{C}$  wird die Normalbeschleunigung

$$n_{DC} = \frac{v_{DC}^2}{DC} = \frac{cd^2}{DC} \text{ in Richtung } DC$$

aufgetragen und die Gerade  $\mathfrak{D} \parallel \mathfrak{C}$  gezogen. Auf ihr muß der Beschleunigungspunkt  $\delta$  liegen.

Nun zeichnet man

$$\kappa \lambda_0 = n_{LK} = \frac{v_{LK}^2}{LK} = \frac{\overline{kl}^2}{LK} \text{ in Richtung } LK,$$

durch  $\lambda_0$  die Gerade  $\mathfrak{L} \perp LK$ ; ferner

$$\varrho \mu_0 = n_{MR} = \frac{v_{MR}^2}{MR} = \frac{r m^2}{MR} \text{ in Richtung } MR,$$

durch  $\mu_0$  die Gerade  $\mathfrak{M} \perp MR$ ; dann müssen die Beschleunigungspunkte  $\lambda$  und  $\mu$  auf  $\mathfrak{L}$  bzw.  $\mathfrak{M}$  liegen. Man wählt nun auf  $\mathfrak{M}$  zwei beliebige Punkte  $\mu'$  und  $\mu''$  und führt mit ihnen dieselben Konstruktionen durch wie im vorigen Absatz; man erhält den Linienzug  $\mu'$ ,  $\delta_0'$ ,  $\lambda_0'$ ,  $\lambda'$ ,  $\delta_1'$ ,  $\delta'$  und einen entsprechenden für  $\mu''$ ; die so erhaltenen Punkte  $\delta'$ ,  $\delta''$  verbindet man, der Schnitt dieser Verbindungslinie mit  $\mathfrak{D}$  ist  $\delta$ . Aus  $\delta$  werden dann, wie in Fig. 405b aus  $\gamma$ , die Punkte  $\lambda$  und  $\mu$  auf  $\mathfrak{L}$  und  $\mathfrak{M}$  bestimmt. Als Kontrolle für die Genauigkeit der Konstruktion kann dienen, daß  $\lambda\delta\mu \sim LDM$  sein muß. Da die Glieder 1 und 2 senkrecht aufeinander bleiben, muß nach 204, Schluß,  $\gamma\delta \perp a\beta$  sein; man zieht also  $\delta\gamma$  bis zum Schnitte  $\gamma$  mit der Geraden  $\mathfrak{C}$ . Damit ist aber auch die gesuchte relative Beschleunigung  $b_r$  gefunden. 22\*



212. Achtgliedriges Getriebe mit drei geraden Kulissen. Auf den drei beweglichen Gliedern 2, 3, 4 eines Gelenkvierecks mit dem festliegenden

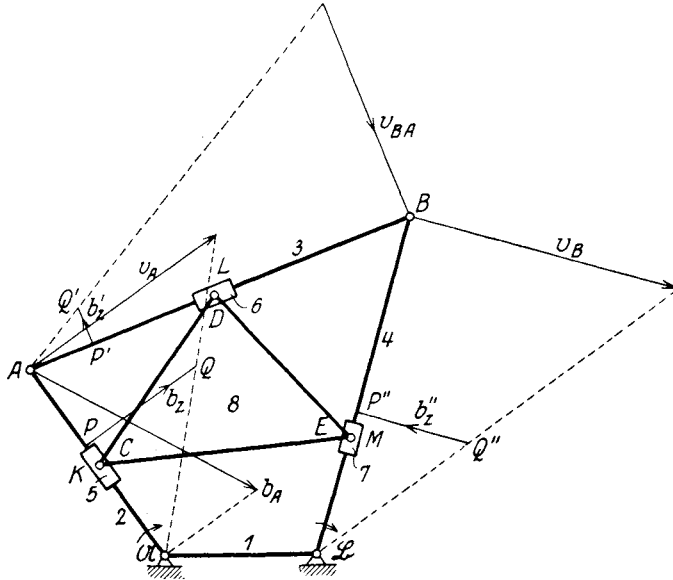


Fig. 407.

Gliede 1 gleiten die drei Schieber 5, 6, 7, die gelenkig mit dem Dreiecksgliede 8 verbunden sind (Fig. 407).

Gegeben ist die Beschleunigung  $b_A$  des Kurbelzapfens  $A$ ; gesucht sind die Beschleunigungen  $b_C, b_D, b_E$  der Eckpunkte des Gliedes 8, insbesondere aber die relativen Beschleunigungen  $b_r, b_r', b_r''$ , mit denen die Schieber 5, 6, 7 auf den Stangen 2, 3, 4 gleiten. Der Maßstab der Beschleunigungen wurde derart gewählt, daß  $n_A = A\mathfrak{A}$  ist. Es ist  $n = 8, \pi = 3$ , also nach Gleichung 113:

$$x = n - 2\pi + 2 = 4;$$

das Getriebe ist zwangläufig.

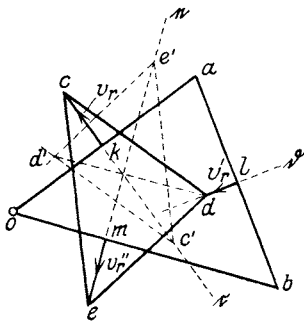


Fig. 407a.

Geschwindigkeitsplan (Fig. 407a).  $\overline{oa} = A\mathfrak{A}, ob \perp B\mathfrak{B}, ab \perp AB$ . Es seien  $K, L, M$  jene Punkte der Glieder 2, 3, 4, die augenblicklich mit  $C, D, E$  zusammen-

fallen. Dann bestehen die Ähnlichkeiten

$$oka \sim \mathfrak{A}KA, alb \sim ALB, bmo \sim BM\mathfrak{B}.$$

Damit sind die Geschwindigkeitspunkte  $k, l, m$  gefunden. Nun verschiebt sich  $C$  gegen  $K$  in Richtung der Stange 2; zieht man also durch  $k$  die Gerade  $c \parallel 2$ , so muß sie den Geschwindigkeitspunkt  $c$  enthalten.

Ebenso wird die durch  $l$  gezogene Gerade  $\delta \parallel 3$  den Punkt  $d$  und die durch  $m$  gezogene Gerade  $e \parallel 4$  den Punkt  $e$  enthalten.

Nimmt man auf  $c$  den beliebigen Punkt  $c'$  an, zieht  $c'e' \perp CE$  bis  $e$ , ferner  $c'd' \perp CD$ ,  $e'd' \perp ED$ , so erhält man den Schnittpunkt  $d'$ ; verbindet man ihn mit dem Schnittpunkte der Geraden  $c$  und  $e$ , so schneidet diese Verbindungslinie die Gerade  $\delta$  im Geschwindigkeitspunkt  $d$ . Dann ist  $dc \perp DC$  bis  $c$ ,  $de \perp DE$  bis  $e$ , wodurch  $c$  und  $e$  gefunden sind.

Die relativen Geschwindigkeiten der Schieber 5, 6, 7 gegen die Glieder 2, 3, 4 sind dann

$$v_r = \overline{kc}, v_r' = \overline{ld}, v_r'' = \overline{me}.$$

Beschleunigungsplan (Fig. 407b).  $\pi\alpha \dots b_A$ . Der Beschleunigungspunkt  $\beta$  wird auf bekannte Weise (vgl. Beschleunigungszustand des Gelenkvierecks 76) aus

$$\pi\beta_0 \dots n_B = \frac{v_B^2}{B\mathfrak{B}} \quad \text{und} \quad a\beta_1 \dots n_{BA} = \frac{v_{BA}^2}{BA},$$

$$\beta_0\beta \perp \pi\beta_0, \quad \beta_1\beta \perp a\beta_1$$

gefunden. Ferner ergeben sich die Beschleunigungspunkte  $\kappa, \lambda, \mu$  aus den Ähnlichkeiten

$$\pi\kappa\alpha \sim \mathfrak{A}KA, \quad a\lambda\beta \sim ALB, \quad \beta\mu\pi \sim BM\mathfrak{B}.$$

Um den Beschleunigungspunkt  $\gamma$  zu finden, beachte man das Gesetz von Coriolis

$$b_C = b_K + b_z + b_r.$$

Hierin ist  $b_z = 2v_r\omega_2$ , wenn  $\omega_2$  die Winkelgeschwindigkeit des Gliedes 2 ist. Man verbindet also in Fig. 407:  $\mathfrak{A}$  mit dem Endpunkt von  $v_A$ , macht  $\mathfrak{A}P = 2v_r = 2\overline{kc}$  und  $PQ \perp \mathfrak{A}P$ , so ist  $PQ = b_z$ . Dreht man die Richtung von  $v_r$  um  $90^\circ$  im Sinne von  $\omega_2$  (Uhrzeiger), so erhält man die Richtung von  $b_z$ , in welchem Sinne  $b_z$  von  $\kappa$  aus im Beschleunigungsplane aufgetragen und im Endpunkte die dazu senkrechte Gerade  $\mathfrak{C}$  errichtet wurde, welche  $b_r$  enthält.

In derselben Weise wurden die Geraden  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{E}$  gefunden. Man macht  $\overline{P'A} = 2v_r'$ , dann ist  $\overline{P'Q'} = b_z'$ ; endlich  $\overline{P''\mathfrak{B}} = 2v_r''$ , dann ist  $\overline{Q''P''} = b_z''$ .  $b_z'$  wurde von  $\lambda, b_z''$  von  $\mu$  in ihrer wie bei  $b_z$  ermittelten Richtung aufgetragen und in den Endpunkten die Senkrechten errichtet.

Um auf den drei so gefundenen Geraden  $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}$  die Beschleunigungspunkte  $\gamma, \delta, \varepsilon$  zu finden, nehme man auf  $\mathfrak{E}$  einen beliebigen Punkt  $\varepsilon'$  an, mache

$$\varepsilon'\gamma_0' = n_{CE} = \frac{v_{CE}^2}{CE} = \frac{e\varepsilon'^2}{CE} \quad \text{in Richtung } CE,$$

$\gamma_0'\gamma' \perp \varepsilon'\gamma_0'$  bis zum Schnitte  $\gamma'$  mit  $\mathfrak{C}$ , sodann

$$\gamma'\delta_0' = n_{DC} = \frac{v_{DC}^2}{DC} = \frac{\overline{c}d'^2}{DC} \quad \text{in Richtung } DC,$$

$\delta_0'\delta' \perp \gamma'\delta_0'$ ; endlich

$$\overline{\varepsilon' \delta_1'} = n_{DE} = \frac{v_{DE}^2}{DE} = \frac{\overline{ed}^2}{DE} \text{ in Richtung } DE,$$

$\delta_1' \delta' \perp \varepsilon' \delta_1'$ ; im Schnitte von  $\delta_0' \delta'$  und  $\delta_1' \delta'$  findet man den Punkt  $\delta'$ .

Nun wählt man auf  $\mathcal{E}$  einen zweiten beliebigen Punkt  $\varepsilon''$  und wiederholt die mit  $\varepsilon'$  vorgenommenen Konstruktionen, wobei die Normalbeschleunigungen  $n_{CE}$ ,  $n_{DC}$ ,  $n_{DE}$  dieselben bleiben wie früher; man

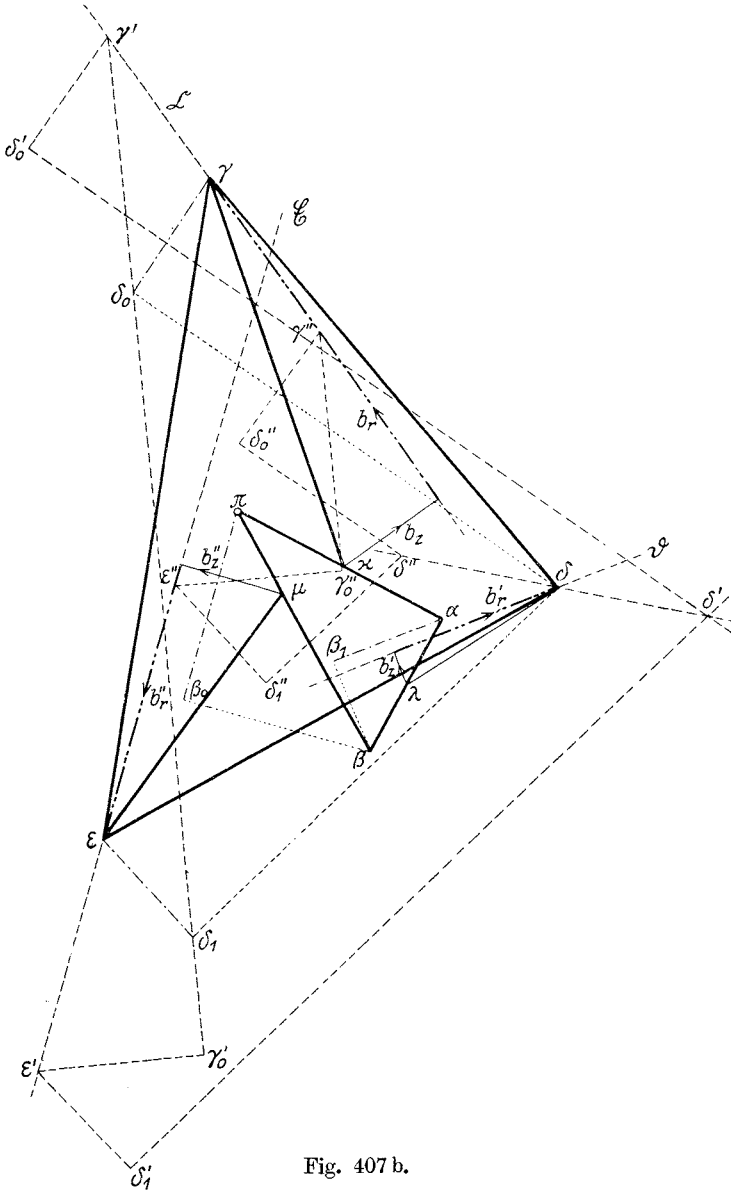


Fig. 407 b.

erhält hierbei die Punkte  $\gamma''$  auf  $\mathfrak{C}$  und  $\delta''$ . Verbindet man jetzt  $\delta'$  mit  $\delta''$ , so schneidet diese Verbindungslinie die Gerade  $\mathfrak{D}$  im richtigen Beschleunigungspunkte  $\delta$ .

Um daraus  $\gamma$  und  $\varepsilon$  zu finden, genügt es, entweder die Ähnlichkeit zu benutzen und  $\gamma'\gamma\gamma'' \sim \delta'\delta\delta'' \sim \varepsilon'\varepsilon\varepsilon''$  zu machen; oder  $\overline{\delta\delta_1} \perp DE$  zu ziehen und  $\overline{\varepsilon\delta_1} \equiv n_{DE}$  zu zeichnen, ebenso  $\overline{\delta\delta_0} \perp DC$ ,  $\overline{\gamma\delta_0} \equiv n_{DC}$ .

Die relativen Beschleunigungen  $b_r, b_r', b_r''$  liegen dann endlich auf den Geraden  $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{L}$  mit Hilfe der Polygone

$$b_C \equiv b_K + b_z + b_r, \quad b_D \equiv b_L + b_z' + b_r', \quad b_E \equiv b_M + b_z'' + b_r''$$

aus der Zeichnung sofort zu entnehmen.

Die in 210 bis 212 behandelten Ketten wurden in anderer Weise untersucht von L. Burmester, „Konstruktionen der Beschleunigungen bei zusammengesetzten Mechanismen“, Sitzungsberichte der bayer. Akad. d. Wiss. 1911.

### 213. Aufgaben.

103. Bei der rotierenden Kurbelschleife (Fig. 408) ist die Beschleunigung des Kurbelzapfens  $A$  gegeben. Es ist die relative Beschleunigung des Gliedes 2 in bezug auf 3 zu bestimmen.
104. Wie ändert sich das Resultat der vorigen Aufgabe, wenn die Anordnung der Kurbelschleife nach Fig. 409 erfolgt?
105. Der Kondensator von Blake enthält ein Getriebe, das in Fig. 410 dargestellt ist (Revue de mécanique, 1912, S. 102). Es ist die Beschleunigung der Stange 3 gegeben; man soll daraus jene der Stange  $3_1$  ermitteln,

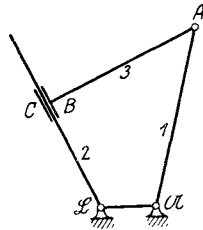


Fig. 408.

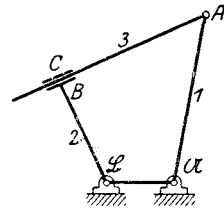


Fig. 409.

- wenn angenommen wird, daß  $A\mathfrak{U}$  und  $\mathfrak{U}A_1$  nicht gleich sind.
106. Bei der Schieberschleife (Fig. 411) sind  $v_A$  und  $v_D$ ,  $b_A$  und  $b_D$  gegeben. Man konstruiere die relativen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen des Gliedes 1 in bezug auf 2 und des Gliedes 3 in bezug auf 4.
107. Bei der Kohlenstampfmaschine von F. Méguin & Co. A.-G. und W. Müller (Fig. 412) treibt die Kurbel 1 mit Hilfe des Schiebers 2 eine Kulisse 3, die durch die Treibstange 4 die Stampfe 5 vertikal auf und ab bewegt. Es ist aus der konstanten Geschwindigkeit des Kurbelzapfens die Geschwindigkeit und Beschleunigung der Stampfe zu bestimmen.
108. Bei der Steuerung von T. Delville (Fig. 413) ist das Exzenter 1 mit dem Kreuzkopfe 3 des Arbeitskolbens durch die Stangen 4

und 2 verbunden, von denen die erste eine Kulisse enthält, in welcher der Schieber 5 sich bewegt, der mit der Schieberstange 6 gelenkig verbunden ist. Die Bewegung dieser Schieberstange soll durch diese Vorrichtung abwechselnd so beschleunigt und verzögert werden, daß auch bei kleinen Füllungen die Dampfwege schnell und vollständig ge-

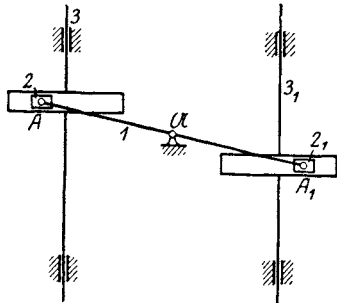


Fig. 410.

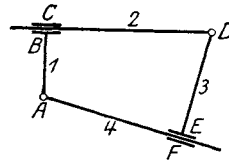


Fig. 411.

öffnet und geschlossen werden. Die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Punkte  $A$  und  $B$  sind gegeben; man konstruiere die Geschwindigkeit und Beschleunigung der Schieberstange 6.

109. Fig. 414 ist eine schematische Darstellung

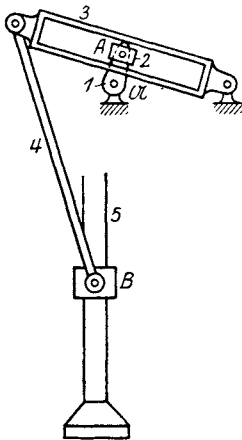


Fig. 412.

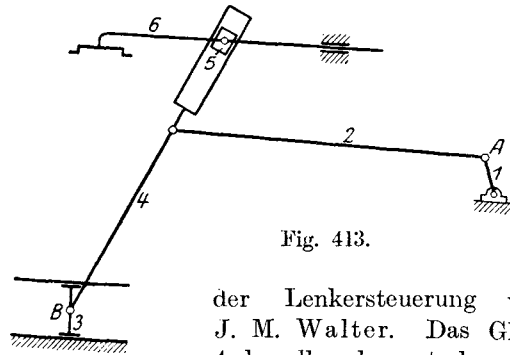


Fig. 413.

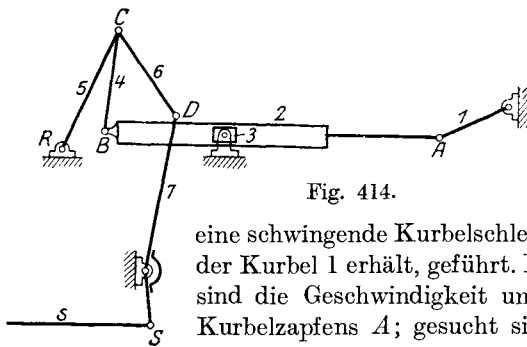


Fig. 414.

der Lenkersteuerung von J. M. Walter. Das Glied 4 derselben bewegt das Gelenkviereck 5, 6, 7; der Punkt  $R$  ist durch den Regulator festgehalten zu denken. Der Punkt  $S$  ist mit dem Steuerschieber  $s$  verbunden. Der Punkt  $B$  wird durch eine schwingende Kurbelschleife, die ihren Antrieb von der Kurbel 1 erhält, geführt. Es ist  $\overline{BC} = \overline{CD}$ . Gegeben sind die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Kurbelzapfens  $A$ ; gesucht sind  $v_s$  und  $b_s$ .

## XX. Der Beschleunigungszustand von kinematischen Ketten mit Kurvenführungen.

214. Das Schleifkurvengetriebe. In den vorhergehenden Untersuchungen wurden die Gelenkketten, sowie die Ketten mit krummlinigen und geradlinigen Kulissen auf ihren Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustand behandelt.

Außer diesen Ketten kommen in der Maschinenteknik vielfach solche vor, die neben Gelenken und Kulissen, die auf Punktführungen gegründet sind, auch Kurvenführungen benutzen, bei denen, wie uns bereits bekannt ist, Kurvenpaare aufeinander rollen und gleiten, von denen jede Kurve die Hüllbahn der anderen ist. Daß solche Ketten sehr häufig anzutreffen sind, geht schon daraus hervor, daß sämtliche Getriebe, die Räder enthalten, dazu gehören. Daß bei diesen die Kurvenpaare aufeinander rollen ohne zu gleiten, ändert nichts an dem Wesen der Kette.

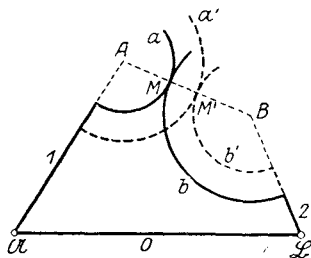


Fig. 415.

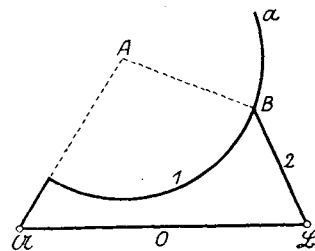


Fig. 416.

Einige dieser Ketten mit Kurvenführungen sollen hier auf ihren Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustand untersucht werden.

So wie das Gelenkviereck und seine Ableitung, das Kurbelgetriebe, die ursprünglichste und einfachste Form der geschlossenen Gelenkkette darstellen, so ist das Schleifkurvengetriebe in seiner allgemeinen Gestalt die Stammform für die meisten Ketten mit Kurvenführung.

Dieses Getriebe (Fig. 415) besteht außer dem Grundgliede  $\mathcal{U}\mathcal{B}$  aus zwei Gliedern 1 und 2, die um die festen Drehpunkte  $\mathcal{U}$  und  $\mathcal{B}$  Dauer-

drehungen ausführen und sich hierbei in den Kurven  $a$  und  $b$  dauernd berühren. Diese Kurven werden während der Bewegung aufeinander rollen und gleiten. Auf welche Weise ihre dauernde Berührung erzwungen wird, ist hier ohne Belang.

Sind  $A$  und  $B$  die Krümmungsmittelpunkte der Kurven  $a$  und  $b$ , dann ist  $A$  ein Punkt des Gliedes 1,  $B$  ein Punkt des Gliedes 2; da die Krümmungshalbmesser  $AM$  und  $BM$  ihre Länge während zweier Zeit-

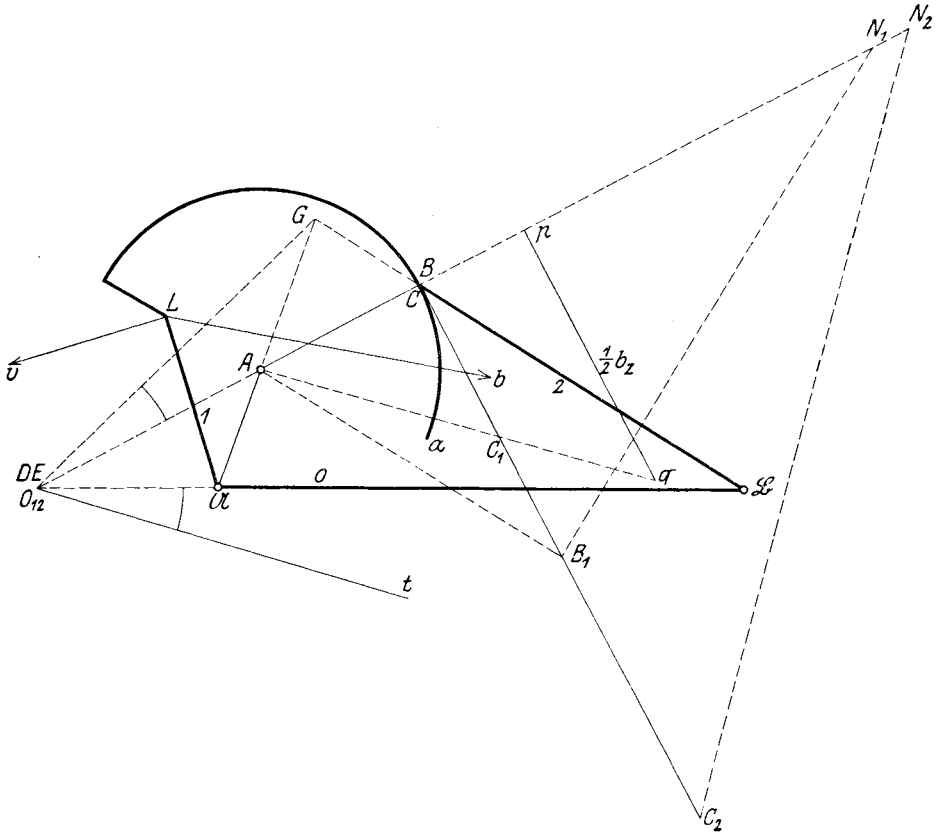


Fig. 417.

teilchen nicht ändern, wird auch die Entfernung  $AB$  während dieser Zeit ungeändert bleiben; dann ersetzt aber das Gelenkviereck  $\mathfrak{A}AB\mathfrak{B}$  das Getriebe während zweier Zeitelemente vollständig. (Vgl. L. Burmester, Kinematik, S. 30.)

Werden statt  $a$  und  $b$  zwei andere Schleifkurven  $a'$  und  $b'$  gewählt, deren Krümmungsmittelpunkte wieder  $A$  und  $B$  sind, so bleibt der Berührungspunkt  $M'$  in der Geraden  $AB$ ; dann wird aber das neue Schleifkurvengetriebe  $\mathfrak{A}a'b'\mathfrak{B}$  durch das gleiche Gelenkviereck  $\mathfrak{A}AB\mathfrak{B}$  ersetzt

werden können. Daran ändert sich auch nichts, wenn der Berührungspunkt  $M$  nach  $A$  oder  $B$  rückt. Kommt z. B.  $M$  nach  $B$  (Fig. 416), so artet die Schleifkurve  $b$  in einen Punkt aus, der auf  $a$  schleift.

**215. Schleifkurvengetriebe mit Punktführung.** In Fig. 417 ist eine dreigliedrige Kette gezeichnet, in der das Glied  $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = 0$  festgehalten ist, die Glieder 1 und 2 sich um  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  drehen und hierbei der Punkt  $B$  des Gliedes 2 an der Kurve  $a$  des Gliedes 1 schleift.

Gegeben ist die Beschleunigung  $b_L$  eines beliebigen Punktes  $L$  des Gliedes 1; gesucht wird die Geschwindigkeit  $v_B$  und die Beschleunigung  $b_B$ , insbesondere aber die relative Geschwindigkeit und Beschleunigung des Punktes  $B$  gegen die Schleifkurve  $a$ .

Geschwindigkeitsplan (Fig. 417a). Aus  $b_L$  wird zunächst in

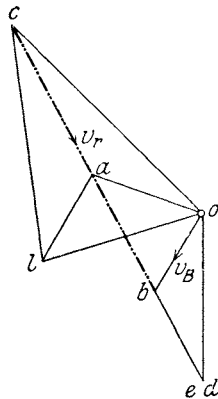


Fig. 417 a.

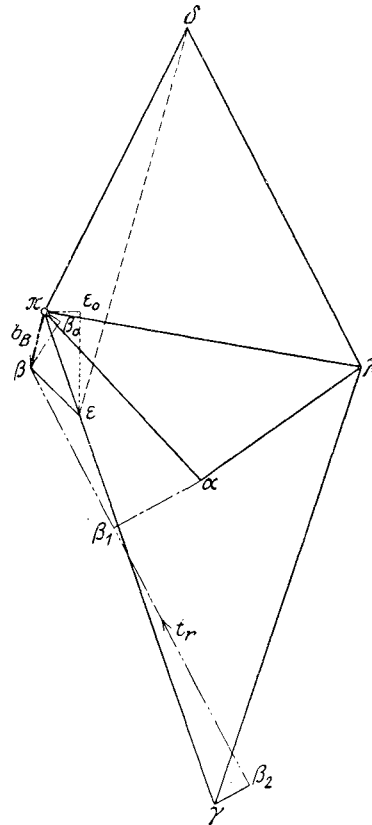


Fig. 417 b.

bekannter Weise  $v_L$  gesucht und gleich  $\overline{ol}$  gemacht, sodann  $a$  in bekannter Weise konstruiert. Aus  $ob \perp B\mathfrak{B}$  und  $ab \perp AB$  findet man  $b$ ; ist endlich  $C$  der Punkt des Gliedes 1, der augenblicklich mit  $B$  zusammenfällt, so findet man den Geschwindigkeitspunkt  $c$  aus  $oc \perp \mathfrak{A}C$ ,  $lc \perp LC$ ;  $c$  muß auf  $ab$  liegen; die relative Geschwindigkeit von  $B$  gegen den Bogen  $a$  ist  $v_r = \overline{cb}$ .

Beschleunigungsplan (Fig. 417b). Der Beschleunigungspunkt  $\beta$  kann auf verschiedenen Wegen gefunden werden, was zur Kontrolle sehr erwünscht ist:



a) Aus dem Gelenkviereck  $\mathfrak{A}AB\mathfrak{B}$ .  $\overline{\pi\lambda} \equiv b_L$ , sodann  $a$  aus der Ähnlichkeit  $\pi\lambda a \sim \mathfrak{A}LA$ .

$$\overline{\pi\beta_0} \equiv n_B = \frac{v_B^2}{B\mathfrak{B}} = \frac{\overline{ob}^2}{B\mathfrak{B}} \text{ in Richtung } B\mathfrak{B},$$

$\beta_0\beta \perp \pi\beta_0$ ;

$$\overline{\alpha\beta_1} \equiv n_{BA} = \frac{v_{BA}^2}{BA} = \frac{ab^2}{BA} \text{ in Richtung } BA,$$

$\beta_1\beta \perp \alpha\beta_1$ ; im Schnitte von  $\beta_0\beta$  und  $\beta_1\beta$  liegt  $\beta$ .

b) Mit Benützung der Zusatzbeschleunigung  $b_z$ . Es ist

$$b_B \equiv b_C + b_z + b_r,$$

worin wieder

$$b_r \equiv n_r + t_r$$

ist, also

$$b_B \equiv b_C + b_z + n_r + t_r.$$

Um  $b_z = 2v_r\omega_1$  zu finden, macht man  $\overline{CC_1} = c\overline{a}$ , verbindet  $A$  mit  $C_1$ , trägt  $\overline{Ap} = v_r = cb$  auf und zieht  $pq = \frac{1}{2}b_z$  senkrecht auf  $\overline{Ap}$ . Statt dieser bisher benützten Konstruktion kann man auch  $\overline{CC_2} \equiv 2v_r \equiv 2cb$  machen und zieht  $C_2N_2 \perp AC_1$ ; dann ist  $\overline{BN_2} = b_z$  auch der Richtung nach. Macht man ferner  $\overline{BB_1} = v_r$  und zieht  $B_1N_1 \perp AB_1$ ,

so ist

$$\overline{N_1B} = \frac{v_r^2}{BA} \equiv n_r;$$

es ist somit

$$\overline{N_1N_2} \equiv b_z + n_r.$$

Konstruiert man den Beschleunigungspunkt  $\gamma$  aus  $\pi\lambda\gamma \sim \mathfrak{A}LC$  und zieht  $\overline{\gamma\beta_2} \equiv \overline{N_1N_2}$ ,  $\beta_2\beta \perp \gamma\beta_2$ , so muß die Gerade  $\beta_2\beta$  auch durch den Beschleunigungspunkt  $\beta$  gehen.

c) Mit Benützung der Drehpole. Das Getriebe darf für zwei Zeitteilchen durch das Gelenkviereck  $\mathfrak{A}AB\mathfrak{B}$  ersetzt werden. Den Drehpol  $O_{12}$  des Gliedes 1 in bezug auf das Glied 2 (oder umgekehrt) erhält man, wenn man  $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$  mit  $AB$  zum Schnitte bringt; in diesem Punkt liegt der Punkt  $D$  des Gliedes 1 mit dem Punkt  $E$  des Gliedes 2 vereint;  $D$  und  $E$  haben augenblicklich die gleiche Geschwindigkeit, ihre relative Geschwindigkeit ist also null.

Aus  $\pi\lambda\delta \sim \mathfrak{A}LD$  erhält man zunächst den Beschleunigungspunkt  $\delta$ .

Benützt man ferner die Konstruktion von Bobillier (vgl. 42) und macht  $\sphericalangle tD\mathfrak{A} = ADG$ , so erhält man in  $Dt$  die Poltangente; die Senkrechte  $\delta\varepsilon$  zu ihr gibt die Richtung der Polnormale. Nun ist aber

$$b_E \equiv b_D + b_z + b_r;$$

die Zusatzbeschleunigung  $b_z$  ist null, da  $v_r = 0$  ist.

Die relative Beschleunigung  $b_r$  des Drehpols  $E$  hat die Richtung der Polnormale (vgl. 33); es ist also

$$b_E \equiv b_D + b_r$$

und die früher gezogene Gerade  $\delta\varepsilon$  des Beschleunigungsplanes wird somit den Beschleunigungspunkt  $\varepsilon$  enthalten.

Macht man noch im Geschwindigkeitsplan  $od \perp \mathcal{A}D$ , so erhält man im Schnitte mit  $ac$  den Geschwindigkeitspunkt  $d$  und mit ihm vereinigt  $e$ .

Dann hat man nur noch nötig, zu konstruieren

$$\overline{\pi \varepsilon_0} \equiv n_E = \frac{v_E^2}{E \mathcal{B}} = \frac{oe^2}{E \mathcal{B}} \text{ in Richtung } E \mathcal{B}$$

und  $\varepsilon_0 \varepsilon \perp \pi \varepsilon_0$ , so erhält man im Schnitte mit  $\delta \varepsilon$  den Punkt  $\varepsilon$ . Die Ähnlichkeit  $\pi \beta \varepsilon \sim \mathcal{B} B E$  gibt dann den gesuchten Beschleunigungspunkt  $\beta$ .

Hat man auf einem dieser Wege den Punkt  $\beta$  gefunden, so gibt  $t_r \equiv \overline{\beta_2 \beta}$  die relative Tangentialbeschleunigung an, mit der  $B$  auf  $a$  schleift.

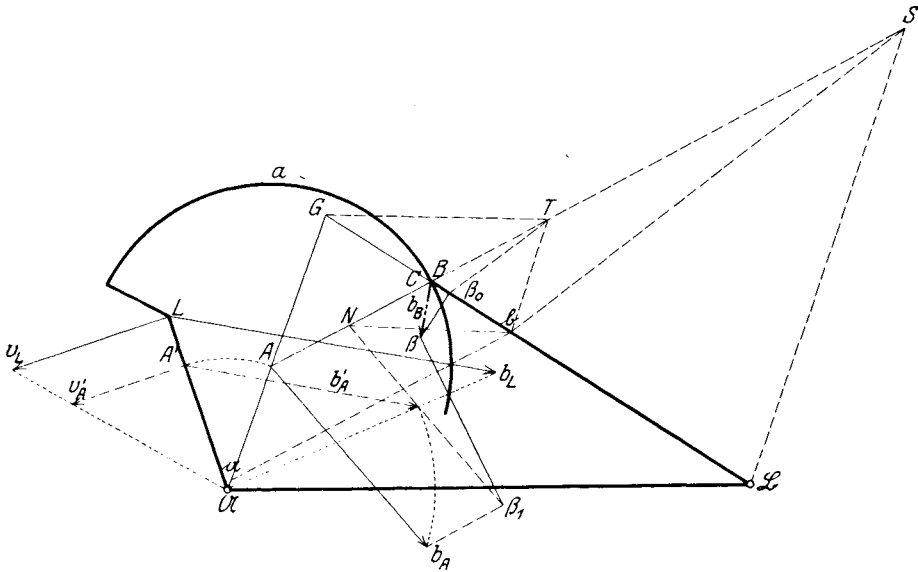


Fig. 417c.

d) In Fig. 417c ist noch eine Lösung mitgeteilt, um die Beschleunigung  $b_B$  ohne Benützung eines besonderen Planes zu bestimmen. Man braucht zu diesem Zwecke nur die in Fig. 106 mitgeteilte Konstruktion für die Beschleunigung der Zweipunktführung anzuwenden.

Aus  $v_L$  und  $b_L$  bestimmt man zunächst  $v_A'$  und  $b_A'$  des auf  $\mathcal{A}L$  liegenden Punktes  $A'$  in bekannter Weise, macht sodann  $Aa = v_A = v_A'$  und dreht  $b_A'$  nach  $b_A$ . Sodann zieht man  $ab \parallel AB$ ,  $bT \parallel AG$ ,  $\mathcal{B}S \parallel bT$  und  $T\beta_0 \parallel Sb$ , errichtet in  $\beta_0$  die Senkrechte auf  $B\mathcal{B}$ , so geht diese durch den gesuchten Punkt  $\beta$ . Zieht man ferner  $bN \parallel TG$ ,  $N\beta_1 \perp b_A$  und durch  $\beta_1$  die Senkrechte auf  $AB$ , so erhält man eine zweite durch  $\beta$  gehende Gerade. Dann ist  $\overline{B\beta} \equiv b_B$ .

## 216. Anwendungen.

1. Ventilantrieb durch Schwingdaumen. Bei den Steuergetrieben von Dampfmaschinen findet man zur Bewegung der Ventile Schwingdaumen angewendet, die von einer rotierenden Welle angetrieben,

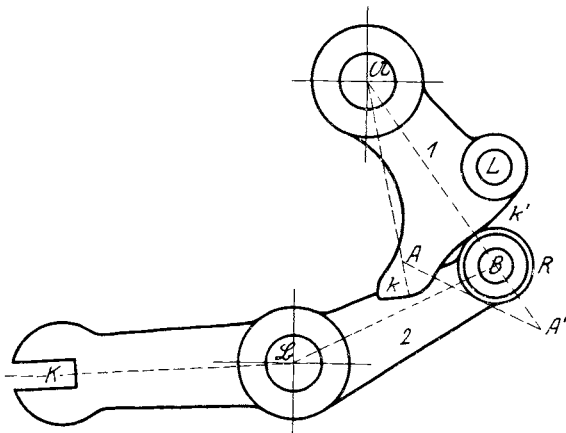


Fig. 418.

schwingende Bewegungen um ihre Achse ausführen. Fig. 418 ist ein solches Getriebe; 1 ist der Schwingdaumen, der von  $L$  aus in Schwingungen um die Achse  $\mathcal{U}$  versetzt wird. Dabei wird die Führungsrolle  $R$

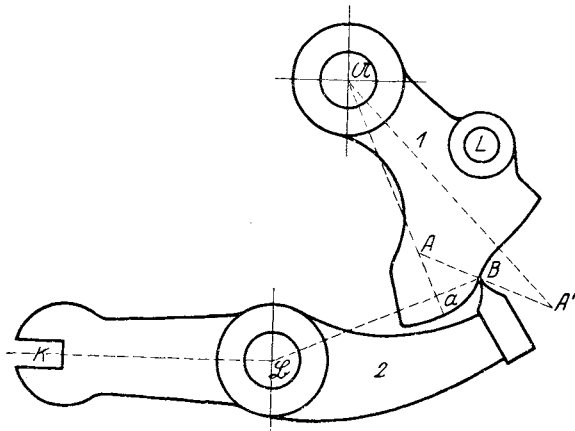


Fig. 419.

mitgenommen, deren Mittelpunkt  $B$  mit dem Ende des Hebels 2 fest verbunden ist. Das andere Ende  $K$  dieses Hebels ist in gelenkiger Verbindung mit der Ventilstange und besorgt das Öffnen und Schließen des Ventils in gesetzmäßiger Weise. Die krummlinige Begrenzung der Schwingdaumen nimmt sehr verschiedene Formen an. In Fig. 418 ist

sie aus zwei konzentrischen Kreisbögen  $k$  und  $k'$  mit dem Mittelpunkte  $\mathcal{A}$  gebildet; führt die Rolle  $R$  über diese, so findet keine Bewegung des Hebels 2 statt; man nennt daher diese Kreisbögen die innere und die äußere Rast. Die Übergangskurve von  $k$  nach  $k'$ , von einer Rast zur anderen, ist der für die Ventilbewegung maßgebende Teil.

In Fig. 419 wurde das Getriebe dahin verändert, daß die Rolle  $R$  zu ihrem Mittelpunkt  $B$  einschrumpft und die Kurven der Begrenzung

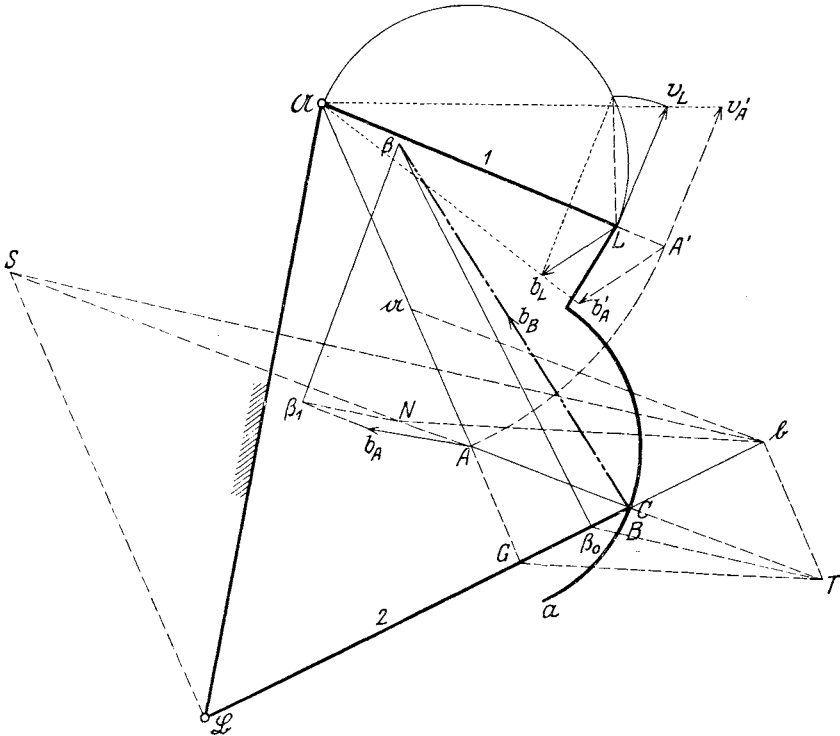


Fig. 420.

des Schwingdaumens durch ihre Äquidistante  $a$  ersetzt werden (vgl. Fig. 415, 416).

Als bekannt ist die Beschleunigung des Punktes  $L$  anzusehen, der von einem Exzenter angetrieben wird; zu bestimmen ist die Geschwindigkeit und Beschleunigung des Punktes  $B$ , durch welche ja auch die Bewegung von  $K$  bestimmt ist.

Am ehesten wird man sich vielleicht mit der Methode befreunden, die in 215 d erwähnt und in Fig. 417c durchgeführt wurde. Fig. 420 zeigt ihre Anwendung auf das Schwingdaumengetriebe Fig. 419. Es wurde nur in den notwendigsten Linien und mit den gleichen Bezeich-

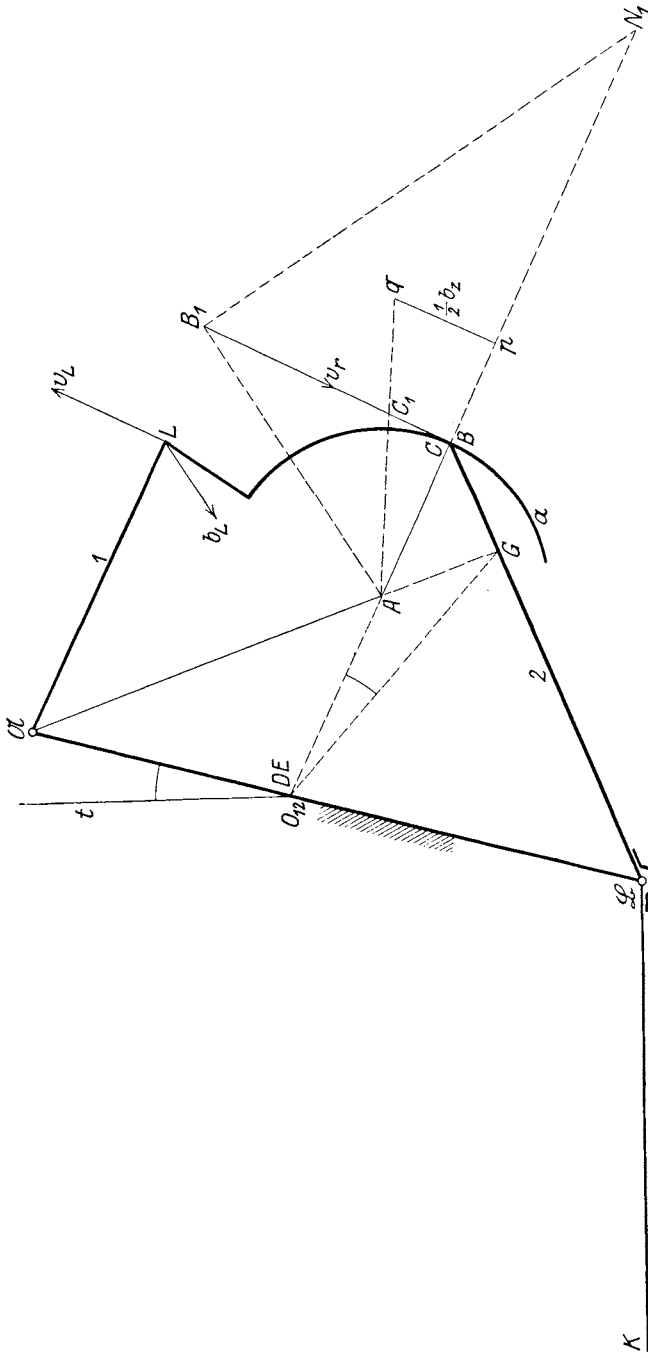


Fig. 421.

nungen angedeutet. Gegeben ist  $b_L$ ; aus ihm wurde in bekannter Weise  $v_L$  ermittelt. Auch die Bestimmung von  $v_A$  und  $b_A$  des Krümmungsmittelpunktes  $A$  von  $a$  bedarf keiner weiteren Erklärung.

Aus der gedrehten Geschwindigkeit  $Aa = v_A$  wurde durch Ziehen von  $a\bar{b} \parallel AB$  die gedrehte Geschwindigkeit  $B\bar{b} = v_B$  ermittelt, sodann  $\bar{b}T \parallel AG \parallel \mathfrak{B}S$  und  $T\beta_0 \parallel \bar{b}S$  gezogen und  $\beta_0\beta \perp B\mathfrak{B}$  errichtet; ferner  $\bar{b}N \parallel TG$  und  $N\beta_1 \parallel \bar{b}A$  gemacht, endlich  $\beta_1\beta \perp AB$  errichtet; im Schnitte von  $\beta_0\beta$  und  $\beta_1\beta$  liegt  $\beta$  und es ist  $\overline{B\beta} \equiv \bar{b}_B$ .

Wünscht man dieses Resultat zu kontrollieren, so stehen die in 215 beschriebenen Methoden  $a, b, c$  zur Verfügung, die in Fig. 421a, und b benützt wurden.

Die Konstruktion des Geschwindigkeitsplanes Fig. 421a

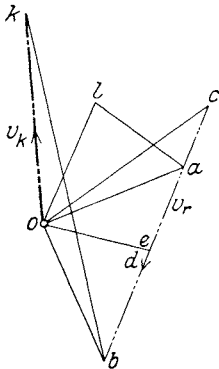


Fig. 421 a.

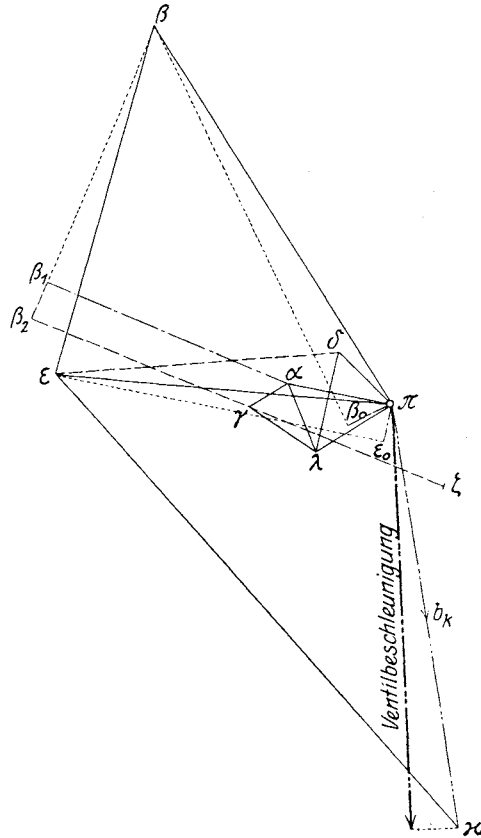


Fig. 421 b.

soll hier nicht wiederholt werden. Es sei nur erwähnt, daß in Fig. 421:  $K\mathfrak{B}B$  den Winkelhebel darstellt, an dessen Endpunkt  $K$  die vertikale Ventilstange gelenkig ansetzt und daß in Fig. 421 a  $\overline{ok}$  die Geschwindigkeit von  $K$  ist.

Die Konstruktion des Beschleunigungsplanes 421 b sei im folgenden kurz wiederholt:

- a)  $\overline{\pi\lambda} \equiv b_L$ ,  $a$  aus  $\pi\lambda\alpha \in \mathfrak{A}LA$ ,  $\overline{\pi\beta_0} \equiv \frac{v_B^2}{B\mathfrak{B}}$ ,  $\beta_0\beta \perp \pi\beta_0$ ; sodann  $\overline{a\beta_1} \equiv \frac{v_{BA}^2}{BA}$ ,  $\beta_1\beta \perp a\beta_1$ .

b)  $\beta_0\beta$  wie vorher.  $\gamma$  aus  $\alpha\lambda\gamma \in ALC$ .  $\gamma\zeta \equiv b_z$ , wobei in Fig. 421:  $\overline{CC_1} \equiv \overline{ac}$ ,  $\overline{Ap} = \overline{cb}$ ,  $\overline{pq} = \frac{1}{2} b_z$  ist. Ferner  $\zeta\beta_2 \equiv \overline{N_1B} \equiv n_r = \frac{v_r^2}{BA}$ , wobei in Fig. 421:  $\overline{B_1B} \equiv v_r \equiv \overline{cb}$  ist. Endlich  $\beta_2\beta \perp \gamma\beta_2$ .

c) Man zeichne die Drehpole  $G$  und  $O_{12}$  und mache  $\sphericalangle tO_{12}\mathfrak{A} = \sphericalangle AO_{12}G$ , dann ist  $O_{12}t$  die Poltangente;  $\delta$  aus  $\pi\lambda\delta \in \mathfrak{A}LD$ ,  $\delta\varepsilon \perp O_{12}t$ . Endlich  $\overline{\pi\varepsilon_0} \equiv \frac{vE^2}{E\mathfrak{B}}$ ,  $\varepsilon_0\varepsilon \perp \pi\varepsilon_0$ . Damit ist  $\varepsilon$  gefunden und sodann  $\beta$  aus  $\pi\varepsilon\beta \in \mathfrak{B}EB$ .

Sobald man den Beschleunigungspunkt  $\beta$  nach einer dieser Methoden gefunden hat, kann  $\kappa$  aus der Ähnlichkeit  $\pi\beta\kappa \in \mathfrak{B}BK$  (bei der Methode c, oder einfacher mit Umgehung von  $\beta$  aus  $\pi\varepsilon\kappa \in \mathfrak{B}EK$ ) bestimmt werden. Es ist dann  $\overline{\pi\kappa} \equiv b_K$ . Der vertikale Teil davon ist dann die gesuchte Beschleunigung der in  $K$  ansetzenden Ventilstange.

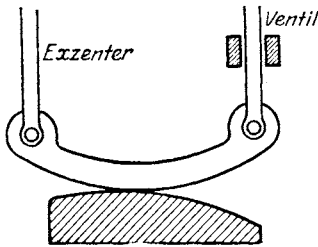


Fig. 422.

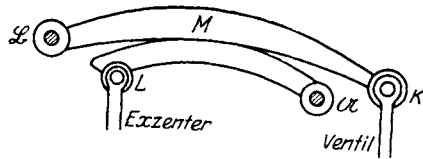


Fig. 423.

Literatur: H. Doehne, „Die Bewegungsverhältnisse von Steuertrieben mit Schwingdaumen“. Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleißes in Preußen, 1908, S. 275. Aus dieser Abhandlung wurden die Fig. 418 und 419 entlehnt. Die Beschleunigungen wurden dort auf einem anderen Wege gesucht.

K. Körner, „Die Entwicklung der Doppeldahmensteuerungen“. Zeitschrift des Österr. Ing.- u. Architekten-Vereins 1915.

2. Ventilantrieb durch Wälzhebel. Um bei Steuerung von Dampf- oder Gasmaschinen die Ventile derart zu führen, daß ihre Geschwindigkeit im Augenblicke der Absperrung vermindert und der Stoß auf die Sitzfläche des Ventils gemildert wird, bedient man sich kurvenförmiger Maschinenteile, der Wälzhebel. Es sind dies stählerne Hebelpaare, die sich mit ihren gekrümmten Flächen aufeinander abwälzen.

Man benützt Wälzhebel ohne festen Drehpunkt und mit zwei festen Drehpunkten. Bei den ersten (Fig. 422) ist der eine Wälzhebel unbeweglich, der andere sowohl mit der Ventilstange wie auch mit der Triebstange des Exzenters gelenkig verbunden. Das Gelenk der Ventilstange wird gerade geführt. Wir haben diese Art Wälzhebel schon in 81 kennen gelernt.

Bei den Wälzhebeln mit zwei festen Drehpunkten (Fig. 423) dreht sich jeder von diesen Hebeln um seinen festen Drehpunkt und wälzt sich auf dem anderen Hebel ab. Die Enden der Hebel sind mit der Ventilstange bzw. mit der Triebstange des Exzentrers gelenkig verbunden.

Das Abrollen der Wälzhebel kann in dem einen oder anderen Falle entweder mit geringfügigem Gleiten verbunden sein oder es findet ohne jedes Gleiten statt.

Im ersten Falle können beide Wälzhebel beliebige Form besitzen; im letzten ist nur die Form des einen Wälzhebels beliebig, die des anderen ist erst zu ermitteln.

Der eine der beiden Wälzhebel kann auch geradlinige Begrenzung erhalten; dieser Sonderfall wird unter 222 behandelt werden.

Die Aufsuchung der Beschleunigungen bei den Wälzhebeln allgemeiner Art bietet keine neue Aufgabe, sondern führt auf die unter 215 mitgeteilten Lösungen zurück. Sind in Fig. 424  $a$  und  $b$  die krummlinigen Begrenzungen der beiden Hebel 1 und 2,  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  ihre festen Drehpunkte,  $M$  ihr Berührungspunkt,  $A$  und  $B$  die Krümmungsmittelpunkte von  $a$  und  $b$  in  $M$ , so hat man das Getriebe für zwei kleine Zeitteilchen durch das Gelenkviereck  $\mathfrak{A}AB\mathfrak{B}$  zu ersetzen.

Als gegeben ist anzusehen die Beschleunigung  $b_L$  des Punktes  $L$  von 1, in dem die Triebstange des Exzentrers ansetzt; gesucht wird die Beschleunigung  $b_K$  des Punktes  $K$  von 2, in dem die Ventilstange gelenkig befestigt ist.

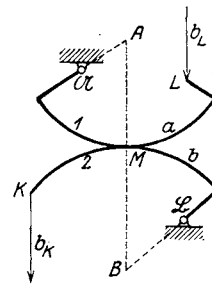


Fig. 424.

Die Lösung, die auf verschiedenen Wegen möglich ist, bleibt die gleiche wie bei den Schwingdaumen, Fig. 420 und 421.

**217. Einfluß der plötzlichen Krümmungsänderung auf die Beschleunigungen des Schleifkurvengetriebes.** In 215 wurde die Konstruktion der Beschleunigung eines Schleifkurvengetriebes auf jene eines Gelenkvierecks zurückgeführt, wobei der Krümmungsmittelpunkt  $A$  der Schleifkurve  $a$  für zwei Zeitteilchen die Rolle eines Gelenkes übernahm.

Es ist zu erwarten, daß bei plötzlicher Krümmungsänderung der Schleifkurve auch plötzliche, also sprungweise Änderungen der Beschleunigungen des geführten Punktes  $B$  auftreten werden, da der Krümmungsmittelpunkt  $A$  sprungartig seine Lage verändert und somit auch das Gelenkviereck  $\mathfrak{A}AB\mathfrak{B}$  plötzlich seine Gestalt ändern wird. (Vgl. J. Magg, Die Steuerung der Verbrennungskraftmaschinen, S. 146.)

Bei dem Schwingdaumen in Fig. 419 z. B. steht der geführte Punkt  $B$  des Hebels 1 gerade an der Übergangsstelle zweier Kreisbögen mit den Mittelpunkten  $A$  und  $A'$ ; das Gelenkviereck  $\mathfrak{A}A'B\mathfrak{B}$  wird also beim Weitergleiten des Hebels sprungartig in das Gelenkviereck  $\mathfrak{A}AB\mathfrak{B}$  übergehen.



Es soll im nachstehenden untersucht werden, von welchen Faktoren dieser Sprung der Beschleunigung abhängt und von welchen nicht, und wie sich die Größe dieses Sprunges in einfacher Weise bestimmen läßt.

In Fig. 425 ist das Schleifkurvengetriebe aus Fig. 417 nochmals aufgenommen, nur mit dem Unterschiede, daß der Schleifbogen  $a$  in  $C$  plötzlich seine Krümmung wechselt und in den Schleifbogen  $a'$  tangentiell übergeht;  $A$  und  $A'$  seien die entsprechenden Krümmungsmittelpunkte.

Es sei der Normalfall angenommen; dann stellt  $A\mathfrak{A}$  sowohl die Beschleunigung des Punktes  $A$  wie auch dessen gedrehte Geschwindig-

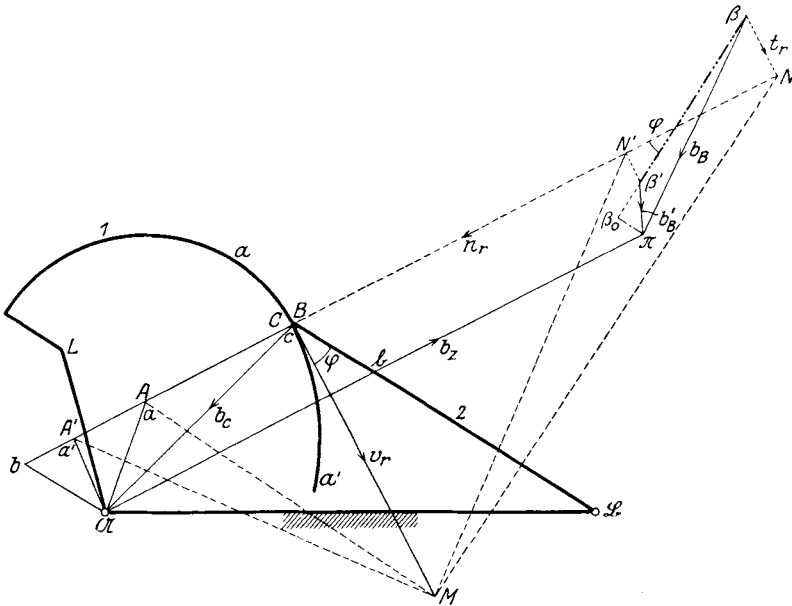


Fig. 425.

keit dar. Zieht man  $\mathfrak{A}b \parallel \mathfrak{B}B$ , so ist  $ba'ac$  bereits der um  $90^\circ$  verdrehte Geschwindigkeitsplan mit dem Nullpunkt in  $\mathfrak{A}$ . Die Winkelgeschwindigkeit des Gliedes 1 ist für den Normalfall  $\omega = 1$ . Um die Beschleunigung  $b_B$  zu suchen, benützt man mit Vorteil die in 215 unter b) mitgeteilte Methode und legt den Beschleunigungsplan in die Abbildung selbst.

Man zieht  $\mathfrak{A}\pi \parallel AB$  und macht  $\overline{\mathfrak{A}b} = \overline{b\pi}$ ; diesen Punkt  $\pi$  wählt man als Beschleunigungsnullpunkt. Ferner konstruiert man

$$\overline{\beta_0\pi} \equiv n_B = \frac{v_B^2}{B\mathfrak{B}} = \frac{\overline{\mathfrak{A}b}^2}{B\mathfrak{B}}$$

in Richtung  $B\mathfrak{B}$ ,

$\beta_0\beta \perp \pi\beta_0$ , dann wird der Beschleunigungspunkt  $\beta$  in dieser Senkrechten liegen.

Ferner mache man  $B\bar{M} = v_r = \overline{bc}$  und  $MN \perp AM$ ; dann ist

$$NB = n_r = \frac{v_r^2}{\rho} = \frac{\overline{bc}^2}{BA} \text{ in Richtung } BA$$

der Normalteil der relativen Beschleunigung  $b_r$  von  $B$  gegen  $a$ .

Zieht man endlich  $N\beta \perp NB$  bis zum Schnitte  $\beta$  mit  $\beta_0\beta$ , so ist der Beschleunigungspunkt  $\beta$  gefunden. Aus dieser Konstruktion ergibt sich nämlich

$$b_B = \beta\pi = \beta N + NB + B\mathfrak{A} + \mathfrak{A}\pi,$$

also da  $\beta N = t_r$  die relative Tangentialbeschleunigung,

$\mathfrak{A}\pi = b_z = 2 v_r \omega = 2 \cdot bc$  die Zusatzbeschleunigung ist:

$$b_B = t_r + n_r + b_C + b_z$$

in Übereinstimmung mit 215 b).

Der dem Krümmungsmittelpunkt  $A'$  entsprechende Beschleunigungspunkt  $\beta'$  wurde sodann durch die Linien  $MN' \perp A'M$  und  $N'\beta' \perp N'B$  gefunden.

$\beta\beta'$  ist der Beschleunigungssprung. Der auf diese Weise in die Abbildung verlegte Beschleunigungsplan unterscheidet sich von dem üblichen nur dadurch, daß die Beschleunigungen gegen den Nullpunkt  $\pi$  gerichtet sind.

Nennt man  $B\bar{A} = \rho$ ,  $B\bar{A}' = \rho'$ ,  $\varphi$  den Winkel zwischen der Stange 2 und der Tangente an den Schleifbogen, so ist der Beschleunigungssprung

$$\frac{N\bar{N}'}{\cos \varphi} = \frac{n_r - n_r'}{\cos \varphi} \text{ oder}$$

$$x = \beta\beta' = \frac{v_r^2}{\cos \varphi} \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'} \right) \dots \dots \dots 136)$$

Damit sind aber auch die Faktoren gekennzeichnet, die diesen Sprung beeinflussen.

Fallen  $A$  und  $A'$  auf entgegengesetzte Seiten von  $B$  (vgl. Fig. 419), so tritt in obiger Gleichung an Stelle des negativen Zeichens das positive.

**218. Das Schubkurvengetriebe.** Es entsteht aus dem allgemeinen Schleifkurvengetriebe, wenn eines der beiden festen Gelenke, z. B.  $\mathfrak{B}$ , in die Unendlichkeit rückt (Fig. 426). Dann dreht sich das Glied 1 dauernd um das feste Gelenk  $\mathfrak{A}$ , das Glied 2 verschiebt sich geradlinig mit Hilfe einer geraden Führung und die Kurven  $a$  und  $b$  bleiben während der Bewegung, durch irgendwelche Umstandee genötigt, in fortdauernder Berührung, rollen also und gleiten gleichzeitig aufeinander. Sind wieder  $A$  und  $B$  die Krümmungsmittelpunkte von  $a$  und  $b$  für die Berührungsstelle  $M$ , so ist die gemeinsame Normale  $AB$  für zwei Zeitteilchen von unveränderlicher Länge und das Schubkurvengetriebe kann für diese unendlich kleine Zeit durch das Schubkurbelgetriebe  $\mathfrak{A}AB\mathfrak{B}_\infty$  ersetzt werden.

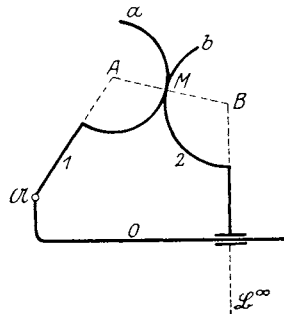


Fig. 426.

Auch hier kann eine ähnliche Überlegung angestellt werden wie beim allgemeinen Schleifkurvengetriebe. Da die Lage des Berührungspunktes  $M$  auf der Geraden  $AB$  ohne Einfluß auf das Resultat ist, kann  $M$  auch nach  $A$  oder  $B$  gerückt werden; das Getriebe hat dann die Form wie in Fig. 427 oder 428.

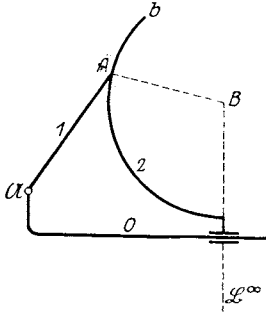


Fig. 427.

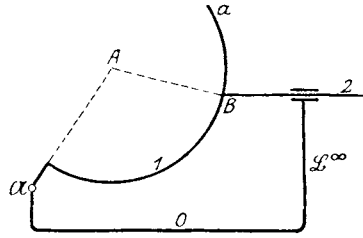


Fig. 428.

**219. Das Schubkurvengetriebe mit Punktführung.** Das Getriebe in Fig. 429 besteht aus der Schleifkurve  $a$  (Glied 1), die sich um den festen Punkt  $\mathfrak{A}$  dreht und hierbei das Ende  $B$  einer Stange (Glied 2), die gerade geführt ist, mitnimmt. Wie dies geschieht, ob in Form einer Kulisse oder anders, ist ohne Belang. Es ist die Beschleunigung  $b_L$  eines beliebigen Punktes  $L$  des Gliedes 1 gegeben; gesucht wird die Beschleunigung des Punktes  $B$  und die relative Geschwindigkeit und Beschleunigung von  $B$  auf der Gleitkurve  $a$ . Auch hier können wieder die unter **215** mitgeteilten vier Methoden verwendet werden.

Geschwindigkeitsplan (Fig. 429a). Aus  $b_L$  wird  $v_L$  gesucht und in  $ol$  aufgetragen. Die Punkte  $a, b, c$  werden wie in Fig. 417a gesucht; die Richtung von  $ob$  ist der Stange 2 parallel. Es ist wieder  $v_r \equiv \overline{cb}$  die gesuchte relative Geschwindigkeit.

Beschleunigungsplan (Fig. 429b).

a) Aus der Schubkurbel  $\mathfrak{A}AB2$ .  $\overline{\pi\lambda} \equiv b_L$ , sodann  $a$  und  $\beta_1$  wie in Fig. 417b.  $\beta_1\beta \perp a\beta_1$  schneidet dann die Gerade  $\pi\beta \parallel 2$  im gesuchten Beschleunigungspunkt  $\beta$ .

b) Mit Benützung der Zusatzbeschleunigung  $b_2$ , wie in **215** näher ausgeführt wurde.

Man macht  $\overline{BB_1} \equiv \overline{bc} \equiv v_r$ ,  $B_1N_1 \perp AB_1$ , ferner  $\overline{CC_1} \equiv \overline{ca}$ ,  $\overline{BC_2} \equiv 2v_r$ ,  $C_2N_2 \perp AC_1$ . Sodann ermittelt man  $\gamma$  aus der Ähnlichkeit

$$\pi\lambda\gamma \sim \mathfrak{A}LC$$

und macht  $\overline{\gamma\beta_2} \equiv \overline{N_1N_2}$ ; dann geht  $\beta_2\beta \perp \gamma\beta_2$  ebenfalls durch den gesuchten Punkt  $\beta$  und es ist  $\overline{\beta_2\beta} \equiv t_r$  die gesuchte relative Tangentialbeschleunigung von  $B$  auf  $a$ .

c) Mit Benützung der Drehpole. Der Drehungsmittelpunkt  $\mathfrak{B}$  des Punktes  $B$  liegt hier im Unendlichen. Bringt man  $\mathfrak{A}\mathfrak{B}^\infty$  mit  $AB$  zum

Schnitte, so erhält man den Drehpol  $O$  der Glieder 1 und 2, der mit  $DE$  bezeichnet wurde; hier fällt der Punkt  $D$  des Gliedes 1 mit dem

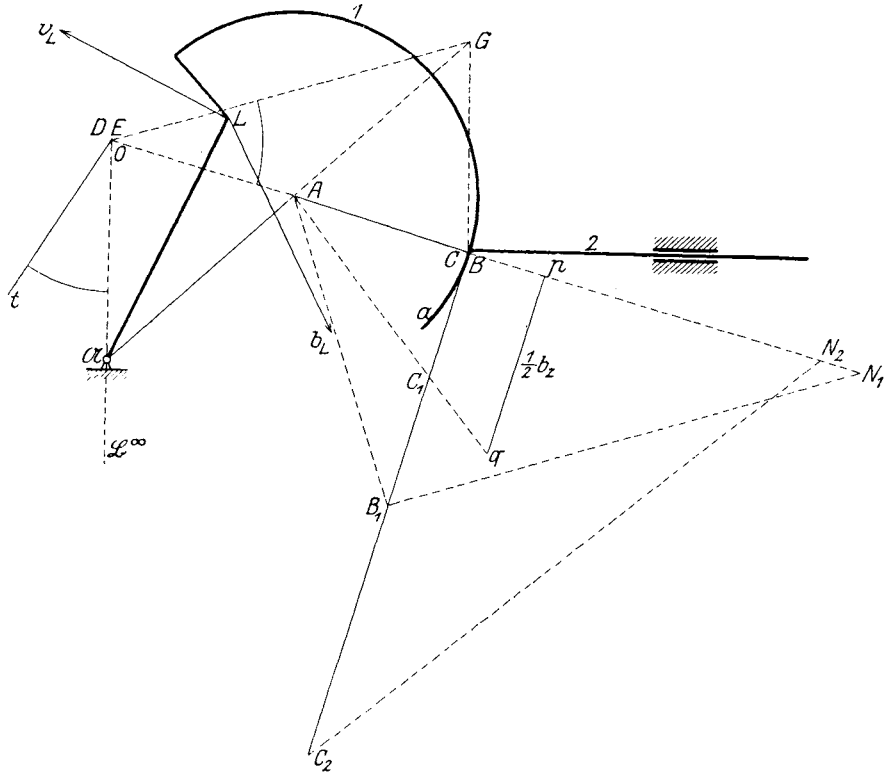


Fig. 429.

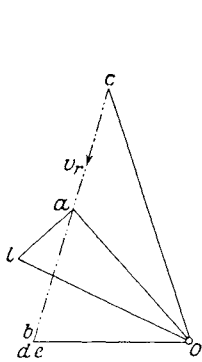


Fig. 429 a.

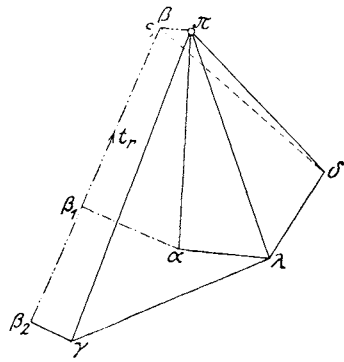


Fig. 429 b.

Punkt  $E$  des Gliedes 2 zusammen; sie haben gleiche Geschwindigkeit, ihre relative Geschwindigkeit ist null. Da die Stange 2 eine Translation ausführt, haben alle ihre Punkte gleiche Geschwindigkeit; im Ge-

schwindigkeitsplan liegen also  $d$  und  $e$  mit  $b$  vereinigt. Im Schnitte von  $\mathfrak{A}A$  mit  $B\mathfrak{B}^\infty$  findet man den Punkt  $G$  und sodann wie früher in 215c die Poltangente  $t$ .

Zeichnet man im Beschleunigungsplan 429b noch den Punkt  $\delta$  aus der Ähnlichkeit  $\pi\lambda\delta \sim \mathfrak{A}LD$  und zieht wieder  $\delta\varepsilon \perp t$ , so schneidet diese Gerade die Richtung  $\pi\beta \parallel 2$  im gesuchten Beschleunigungspunkt  $\beta$ , da hier  $\beta$  und  $\varepsilon$  zusammenfallen.

In Fig. 430 ist schließlich eine Methode, die Geschwindigkeit  $v_B$  und Beschleunigung  $b_B$  der Schubstange zu finden, mitgeteilt, die ein besonderes Zeichnen der Pläne erspart.

Es ist dies die aus Fig. 116 (Führung der Schubkurbel) bekannte Konstruktion.

Aus  $v_L$  und  $b_L$  bestimmt man wie früher in Fig. 417c  $v_A$  und  $b_A$ , macht  $Aa = v_A = v_{A'}$  und zieht  $aM$  senkrecht zur Schubstange 2

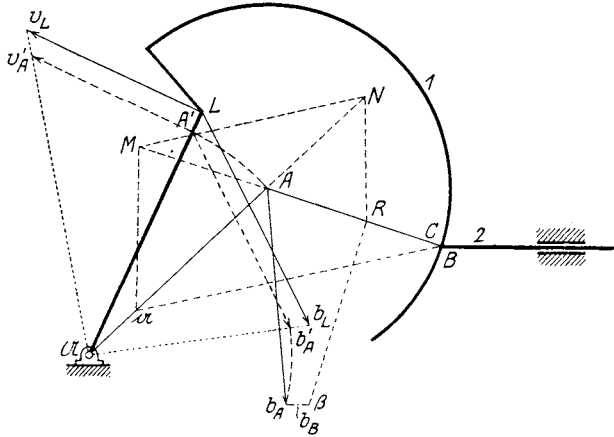


Fig. 430.

bis zum Schnitte  $M$  mit  $AB$ ; dann ist  $Ma$  die gedrehte Geschwindigkeit  $v_B$ . Sodann zieht man  $MN \parallel aB$  bis zum Schnitte  $N$  mit  $\mathfrak{A}A$ ,  $NR$  senkrecht zu 2 bis zum Schnitte  $R$  mit  $AB$  und endlich  $R\beta \perp AB$ . Zieht man nun durch den Endpunkt  $a$  der Beschleunigung  $b_A$  die Parallele zu 2, so wird sie von  $R\beta$  in  $\beta$  getroffen und es ist  $\beta a \equiv b_B$ .

**220. Anwendung. Ventiltrieb durch unrunde Scheiben (Steuer-nocken).** Bei der Steuerung von Gas- und Dampfmaschinen bedient man sich unrunder Scheiben (Fig. 431), die sich um die Welle  $\mathfrak{A}$  drehen und die gerade geführte Ventilstange  $V$  in ungleichförmige Bewegung setzen. An dem Ende dieser Stange sitzt eine kleine Rolle  $R$ , deren Umfang  $b'$  auf dem Umfang  $a'$  der Scheibe rollt; hierdurch wird das Gleiten der Ventilstange an der Scheibe und die damit verbundene Abnützung durch Reibung verhindert.

Wie schon früher erwähnt, wird an der gegenseitigen Bewegung der Scheibe 1 und der Ventilstange 2 nichts geändert, wenn man den Berührungspunkt  $M$  in den Mittelpunkt der Rolle  $b'$  rücken läßt; dann wird die Kurve  $a'$  durch ihre Äquidistante  $a$  und die Kurve  $b'$  durch ihren Mittelpunkt  $B$  zu ersetzen sein; es entsteht Fig. 432.

Bei Verwendung solcher Nocken wird Wert darauf gelegt, daß die Übertragung der Bewegung auf die Ventilstange ruhig und stoßfrei erfolge. Bei den Großgasmaschinen besitzen die Ventile und die Ventilstangen, die durch die unrundern Scheiben in kurzer Zeit beschleunigt werden müssen, erhebliche Massen; es ist deshalb behufs der Bestimmung

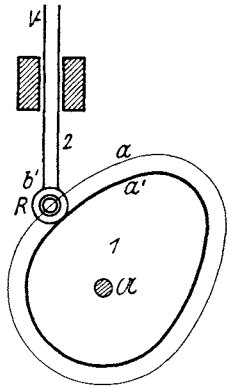


Fig. 431.

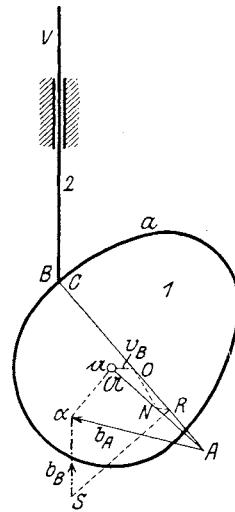


Fig. 432.

der entstehenden Massenkräfte von Wichtigkeit, die Beschleunigung jener Massen genau zu kennen. Zu große Beschleunigungen können z. B. ein Abheben der Ventilstange von der unrundern Scheibe bewirken.

Es sei in Fig. 432 die Bewegung der unrundern Scheibe bekannt; es ist die Geschwindigkeit und die Beschleunigung der Ventilstange zu bestimmen.

Die Konstruktion kann mit Hilfe der Bewegungspläne in verschiedener Weise vorgenommen werden, wie dies in 219 an drei Methoden erläutert wurde. Hier soll nur die am Schlusse von 219, Fig. 430 erwähnte Vorgangsweise benützt werden, die vielleicht, falls sie gute Schnitte gibt, die bequemste Anwendung gestattet.

Es sei  $C$  jener Punkt der unrundern Scheibe, der augenblicklich mit dem Ende  $B$  der Ventilstange zusammenfällt;  $A$  sei der Krümmungsmittelpunkt der Führungskurve  $a$  in  $C$ . Die gedrehte Geschwindigkeit von  $A$  sei durch die Strecke  $\overline{A\dot{a}} \equiv \overline{A\dot{v}}$  gegeben (Normalfall); die Be-

schleunigung  $\overline{b}_A \equiv \overline{Aa}$  ist als gegeben anzusehen; ihre Projektion auf  $A\mathfrak{U}$  ist mit dieser Strecke identisch.

Man zieht also, wie in Fig. 430 erläutert wurde,  $aO \perp 2$  bis zum Schnitte  $O$  mit  $AB$ , dann ist  $aO$  bereits die gedrehte Geschwindigkeit von  $B$ . Ferner zieht man  $ON \parallel B\mathfrak{U}$ ,  $NR \perp 2$ ,  $RS \perp AB$ ,  $\alpha S \parallel 2$ , dann ist  $\overline{Sa} \equiv \overline{b}_B$  die gesuchte Ventilbeschleunigung.

In dem besonderen Falle, wenn die Richtung der Ventilstange durch  $\mathfrak{U}$  geht (Fig. 433) und die Drehung der unrunder Scheibe gleichförmig

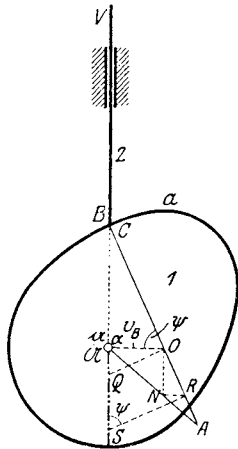


Fig. 433

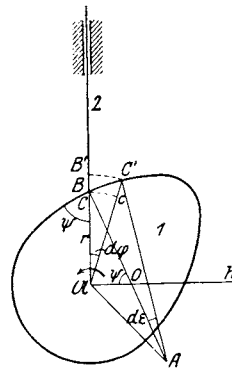


Fig. 433 a.

erfolgt, vereinfacht sich die Konstruktion etwas. Dann fällt  $a$  nach  $\mathfrak{U}$ ; man zieht die Linien  $aO \perp 2$ ,  $ON \parallel 2$ ,  $NR \perp 2$ ,  $RS \perp AB$ ; dann ist  $\overline{Sa} \equiv \overline{b}_B$  die Ventilbeschleunigung.

Von der Richtigkeit dieser Konstruktion kann man sich auch unmittelbar durch folgende Betrachtung überzeugen. Es sei in Fig. 433 a die unrunde Scheibe mit 1, die durch sie angehobene Ventilstange mit 2 bezeichnet; ihre augenblicklich zusammenfallenden Punkte seien  $C$  bzw.  $B$ . Dreht sich die Scheibe nach links um den kleinen Winkel  $d\varphi$ , so wird der neue Punkt  $C'$  der Scheibe mit  $B'$  zusammenfallen und die Ventilstange wird um das Stück  $\overline{BB'} = \overline{cC'} = dr$  gehoben, wobei  $\mathfrak{U}C = r$  ist.

Errichtet man in  $\mathfrak{U}$  die Normale  $\mathfrak{U}O$  auf die Ventilstange 2 und bringt sie zum Schnitte  $O$  mit dem Krümmungshalbmesser  $\overline{CA} = \rho$  der Begrenzung, nennt ferner  $\sphericalangle \mathfrak{U}OB = \psi$ , so ist

$$\sphericalangle \mathfrak{U}C'C = \psi - d\psi$$

und  $\overline{cC'} = \overline{Cc} \cdot \cotg(cC'C)$  oder

$$dr = r \cdot \cotg(\psi - d\psi) \cdot d\varphi.$$

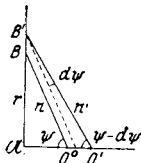


Fig. 433 b.

Nennt man  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$  die konstante Winkelgeschwindigkeit der Scheibe, so bleibt mit Hinweglassung von  $d\psi$  die Geschwindigkeit der Ventilstange

$$v_B = \frac{dr}{dt} = r\omega \cotg \psi = \overline{\mathfrak{A}O} \cdot \omega.$$

Mit  $\omega = 1$  (Normalfall) ist also  $v_B = r \cotg \psi = \overline{\mathfrak{A}O}$ .

Dreht sich die Scheibe weiter, so bleibt der Schnittpunkt  $O$  auf der Geraden  $h$  und rückt auf ihr vorwärts. Seine Geschwindigkeit ist der Beschleunigung von  $B$  proportional, denn es ist

$$b_B = \frac{dv_B}{dt} = \omega \cdot \frac{d}{dt} (\overline{\mathfrak{A}O}).$$

Nun ist nach Fig. 433b

$$d(\overline{\mathfrak{A}O}) = \overline{OO'} = \overline{Oo} + \overline{oO'} = dr \cdot \cotg \psi + \frac{rd\psi}{\sin^2 \psi}.$$

Aus Fig. 433a folgt weiter, wenn  $\sphericalangle CAC'$  mit  $d\varepsilon$  bezeichnet wird:  $d\varphi + (90 - \psi) = d\varepsilon + [90 - (\psi - d\psi)]$  oder  $d\varphi = d\varepsilon + d\psi$ ,  $\overline{CC'} = \rho \cdot d\varepsilon$ , ferner

$$\overline{CC'} = \rho d\varepsilon = \frac{\overline{Cc}}{\sin \psi} = \frac{rd\varphi}{\sin \psi}, \quad d\varepsilon = \frac{rd\varphi}{\rho \sin \psi}.$$

Damit wird

$$d(\overline{\mathfrak{A}O}) = dr \cdot \cotg \psi + \frac{rd\varphi}{\sin^2 \psi} \left(1 - \frac{r}{\rho \sin \psi}\right)$$

und schließlich

$$b_B = \omega^2 \left[ r(1 + 2 \cotg^2 \psi) - \frac{r^2}{\rho \sin^3 \psi} \right].$$

Mit  $\omega = 1$  ist

$$b_B = r(1 + 2 \cotg^2 \psi) - \frac{r^2}{\rho \sin^3 \psi} \quad \dots \dots \dots 137)$$

Daß die Größe dieser Strecke tatsächlich mit jener von  $\overline{S\mathfrak{A}}$  in Fig. 433 übereinstimmt, lehrt folgende Überlegung.

Zieht man in Fig. 433 in  $O$  die Senkrechte auf  $CO$  bis zum Schnitte  $Q$  mit  $C\mathfrak{A}$ , so ist  $\overline{S\mathfrak{A}} = \overline{SQ} + \overline{Q\mathfrak{A}}$ ,

worin 
$$\overline{SQ} = \frac{\overline{RO}}{\sin \psi}, \quad \overline{Q\mathfrak{A}} = r \cotg^2 \psi$$

und aus 
$$\overline{RO} \cdot \sin \psi = \overline{NO}, \quad \overline{NO} : r = \rho - \frac{r}{\sin \psi} : \rho$$

entnommen werden kann:

$$\overline{RO} = \frac{r}{\sin \psi} \left(1 - \frac{r}{\rho \sin \psi}\right).$$

Dies gibt aber für die Strecke  $\overline{S\mathfrak{A}}$  den in Gleichung 137 mitgeteilten Ausdruck.



Erfolgt der Anhub der Ventilstange durch ein geradliniges Stück des Umfanges der unrunder Scheibe (Fig. 434), so tritt eine weitere Vereinfachung der Konstruktion ein. Dann zieht man in  $B$  die Normale  $BR$  zur Begrenzung der unrunder Scheibe, macht  $\mathfrak{A}O \perp 2$ ,  $BO = \overline{OR}$  und  $RS \perp BR$  bis zum Schnitte  $S$  mit der Geraden  $B\mathfrak{A}$ ; dann ist  $\overline{S\mathfrak{A}} \equiv b_B$  die Ventilstangenbeschleunigung.

In diesem besonderen Falle wird  $\varrho = \infty$  und

$$b_B = r(1 + 2 \cotg^2 \psi).$$

Die Richtigkeit der Konstruktion von  $b_B$  in Fig. 434 kann auch in folgender Weise begründet werden (Fig. 435). Untersucht man die relative Bewegung der Ventilstange 2 gegen die Scheibe 1, so hat man letztere in Ruhe zu versetzen; dann macht 2 eine Doppelbewegung: eine Verschiebung in Richtung  $\mathfrak{A}B$  und eine Drehung um  $\mathfrak{A}$ . Dieser Punkt  $\mathfrak{A}$  ist dann der Gleitpunkt der Ventilstange 2 und die Normale in  $\mathfrak{A}$  auf 2

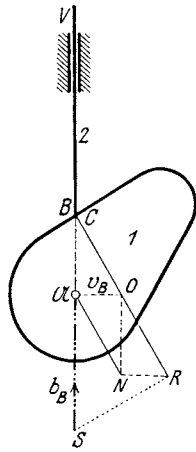


Fig. 434.

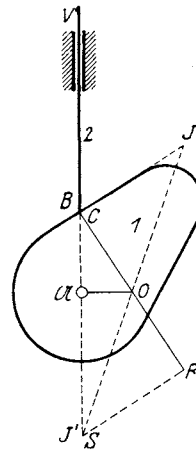


Fig. 435.

geht durch den Drehpol  $O$ . Die Richtung der relativen Bewegung von  $B$  ist die geradlinige Begrenzung der Scheibe; die Normale in  $B$  dazu geht ebenfalls durch den Drehpol  $O$ . Der Schnittpunkt  $O$  ist somit der Drehpol der relativen Bewegung von 2 gegen 1.

Bei dieser relativen Bewegung beschreibt  $B$  eine Gerade, in ihr liegt der Wendepol  $J$  des Systems 2 (vgl. 31). Kehrt man die Bewegung um, d. h. untersucht man die relative Bewegung von 1 gegen 2, so bleibt die Ventilstange 2 in Ruhe; dann beschreibt der Mittelpunkt  $\mathfrak{A}$  von 1 die Gerade  $B\mathfrak{A}$ , die somit durch den Wendepol  $J'$  dieser umgekehrten Bewegung geht. Da nun  $\overline{JO} = \overline{OJ'}$  sein muß (vgl. 46,  $J'$  ist der Rückkehrpol  $R$  von  $J$ ), genügt es, durch  $O$  eine Gerade  $JOJ'$  zu ziehen, die diese Bedingung erfüllt. Man macht zu diesem Zwecke  $\overline{OR} = \overline{BO}$  und zieht  $RJ' \perp BR$ , so ist  $J'$  im Schnitte mit  $B\mathfrak{A}$  gefunden. Dann ist aber  $J'\mathfrak{A}$  die Beschleunigung von  $B$  für  $\omega = 1$ ; denn für konstante

Winkelgeschwindigkeit fällt der Beschleunigungspol  $P$  mit dem Wendepol zusammen und es ist die Beschleunigung des Punktes  $\mathcal{A}$ :  $\overline{\mathcal{A}J'} \cdot \omega^2$ . Die Umkehrung davon ist aber  $b_B$  (vgl. 33, Schluß).

Der Punkt  $J'$  in Fig. 435 ist identisch mit dem Punkt  $S$  in Fig. 434.

Literatur:

W. Hartmann, „Die Bewegungsverhältnisse von Steuergetrieben mit unrundern Scheiben“. Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1905, S. 1581.

Th. Pöschl, „Über eine einfache Darstellung der Beschleunigung bei der Bewegung von Steuergetrieben mit unrundern Scheiben“. Zeitschr. d. Österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1912.

O. Mader, „Konstruktion der Beschleunigungen bei Füllungsänderungen“. Dingers Polytechn. Journal 1911, S. 17.

H. Götz, „Die Ermittlung der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen bei Kurvenscheibengetrieben“. Werkstatttechnik 1909, S. 363.

E. Heller, „Über die Formgebung von Steuernocken“. Dissertation München 1912.

R. Bestehorn, „Die Form der Steuerungsnocken“. Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1919, S. 263.

H. Kigerl, „Die Ermittlung der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen am Nocken mit kreisförmigem Profil“. Ölmotor 1919.

Koenemann, „Die Antriebsverhältnisse des Einblaseventils der Dieselmachine“. Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1916.

**221. Das Schleifkurvengetriebe mit gerader Führung.** Eine besondere Abart des Schleifkurvengetriebes entsteht, wenn die eine der führenden Kurven in eine Gerade ausartet (Fig. 436). Hier rückt der Krümmungsmittelpunkt  $A$  der Führungskurve  $a$  in die Unendlichkeit. Auch bei diesem Getriebe kann, wie es in Fig. 416 geschehen ist, die Kurve  $a$  durch  $a'$  ersetzt werden, die durch  $B$  hindurchgeht, ohne daß an den Bewegungsverhältnissen etwas geändert wird. Auf diese Weise entsteht das Getriebe in Fig. 437, das uns bereits von früher als rotierende Kurbelschleife bekannt ist (vgl. 206).

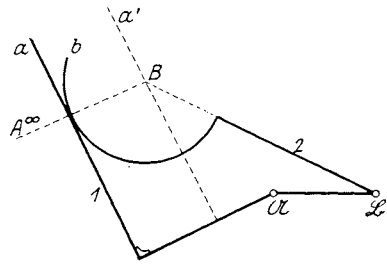


Fig. 436.

Es sei hier die Beschleunigung  $b_B$  gegeben; man soll die Beschleunigung  $b_C$  ermitteln, wobei  $C$  jener Punkt des Gliedes 1 ist, der augenblicklich mit  $B$  zusammenfällt; ferner ist die relative Geschwindigkeit  $v_r$  und die relative Beschleunigung  $b_r$  von  $B$  in bezug auf das Glied 1 zu bestimmen.

Die Zeichnung des Geschwindigkeitsplanes Fig. 437a kann wie in Fig. 429a vorgenommen werden und bietet nichts Neues.

Um die Beschleunigung  $b_C$  zu finden, kann man entweder die gleiche Konstruktion wie in Fig. 399 oder die unter c) mitgeteilte Konstruktion in 215 benutzen.

Im ersten Falle (Fig. 437) wird man zunächst  $\overline{C\bar{b}} = v_B$  machen, ferner die Linien  $b\bar{c} \perp 1$ ,  $c\bar{p} \parallel \mathfrak{A}b$ ,  $p\gamma_1 \perp 1$ ,  $\gamma_1\gamma \perp C\gamma_1$  ziehen; ferner  $\beta\gamma_2 = 2p\gamma_1$  und  $\gamma_2\gamma \parallel 1$ ; dann liegt  $\gamma$  im Schnitte von  $\gamma_1\gamma$  mit  $\gamma_2\gamma$  und es ist  $b_C \equiv \overline{C\gamma}$ .

Im zweiten Falle konstruiert man den Beschleunigungsplan (Fig 437b), macht  $\overline{\pi\beta} = b_B$ , bestimmt in Fig. 437 den Drehpol  $DE$  der Glieder 1 und 2, ermittelt nach der Bobillierschen Konstruktion die Poltangente  $t$ ,

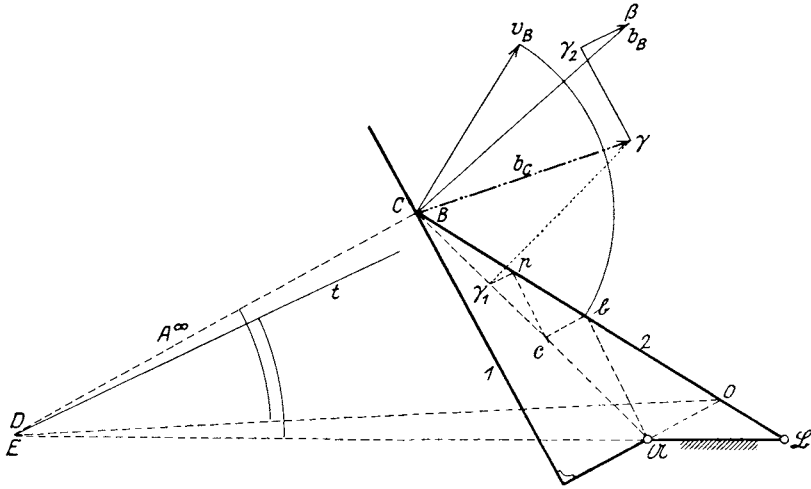


Fig. 437.

sucht  $\varepsilon$  aus der Ähnlichkeit  $\pi\beta\varepsilon \sim \mathfrak{B}BE$  und zieht  $\varepsilon\delta \perp t$ . Aus

$$\pi\delta_0 \equiv n_D = \frac{v_D^2}{D\mathfrak{A}} = \frac{\overline{od}^2}{D\mathfrak{A}}$$

und  $\delta_0\delta \perp \pi\delta_0$  erhält man im Schnitte mit  $\varepsilon\delta$  den Punkt  $\delta$  und sodann aus der Ähnlichkeit  $\pi\delta\gamma \sim \mathfrak{A}DC$  den gesuchten Beschleunigungspunkt  $\gamma$ . Dann ist  $\overline{\pi\gamma} \equiv b_C$ .

### 222. Anwendungen.

1. Geradlinige Begrenzung eines Wälzhebels. In 216, 2 wurde erwähnt, daß die Beschleunigung der Wälzhebel durch dieselbe Konstruktion gefunden werden kann, wie sie in mehreren Methoden bei den Schwingdaumen vorgeführt wurde.

Wenn jedoch der eine der beiden Wälzhebel  $a$  gerade Begrenzung besitzt (Fig. 438), so fällt der Krümmungsmittelpunkt  $A$  in unendliche Entfernung. Dann ist oben erwähnte Konstruktion unbrauchbar und

man muß zu dem in Fig. 437 für die rotierende Kurbelschleife gültigen Verfahren greifen.

$b$  sei die Begrenzung des zweiten Wälzhebels,  $B$  ihr Krümmungsmittelpunkt;  $a'$  eine Gerade durch  $B$ , parallel zu  $a$ . Dann kann das Getriebe der beiden sich aufeinander abwälzenden Hebel ersetzt werden durch die Gerade  $a'$ , die sich um  $\mathfrak{A}$  dreht, während der Hebel  $B\mathfrak{B}$  mit seinem Endpunkt  $B$  an ihr schleift.

Gegeben sei die Beschleunigung  $b_L$  des Führungspunktes  $L$ , der dem Wälzhebel  $b$  angehört; gesucht wird die Beschleunigung irgend eines Punktes des Wälzhebels  $a$ .

Es sei  $C$  jener Punkt von  $a'$ , der augenblicklich mit  $B$  zusammenfällt; es soll seine Beschleunigung  $b_C$  bestimmt werden.

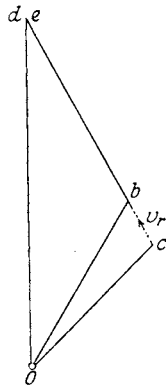


Fig. 437 a.

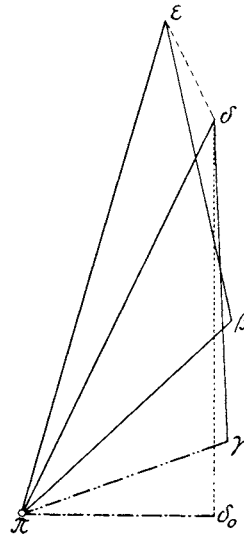


Fig. 437 b.

Aus  $b_L$  wurde zunächst mit Hilfe von  $L'$  und  $b_{L'}$  die Beschleunigung  $b_B$  ermittelt;  $B$  und  $L$  sind Punkte derselben um  $\mathfrak{B}$  sich drehenden Scheibe.

Sodann wurden auf  $b_B$  dieselben Konstruktionen angewendet, die in 221 geschildert wurden. Da auch die Bezeichnungen die gleichen sind, darf von einer Wiederholung abgesehen werden.

2. Geradliniger Anhub der Ventilstange durch eine unrunde Scheibe. Die in Fig. 437 mitgeteilte Konstruktion kann auch in umgekehrter Folge dazu benützt werden, um aus der gegebenen Beschleunigung  $b_C$  die Beschleunigung  $b_B$  zu finden. Eine Anwendung hiervon zeigt Fig. 439, in der die unrunde Scheibe 1, welche bei ihrer Drehung um  $\mathfrak{A}$  die Ventilstange 2 anhebt, eine zum Teil geradlinige Begrenzung besitzt.

Gegeben sei die Beschleunigung  $b_C$  des Punktes  $C$  der Scheibe, der augenblicklich mit dem Ende  $B$  der Ventilstange zusammenfällt.

Der Beschleunigungsmaßstab sei derart gewählt, daß die Normalbeschleunigung  $n_C$  durch die Strecke  $\overline{C\gamma_1} \equiv \overline{C\gamma}$  gemessen wird. Dann

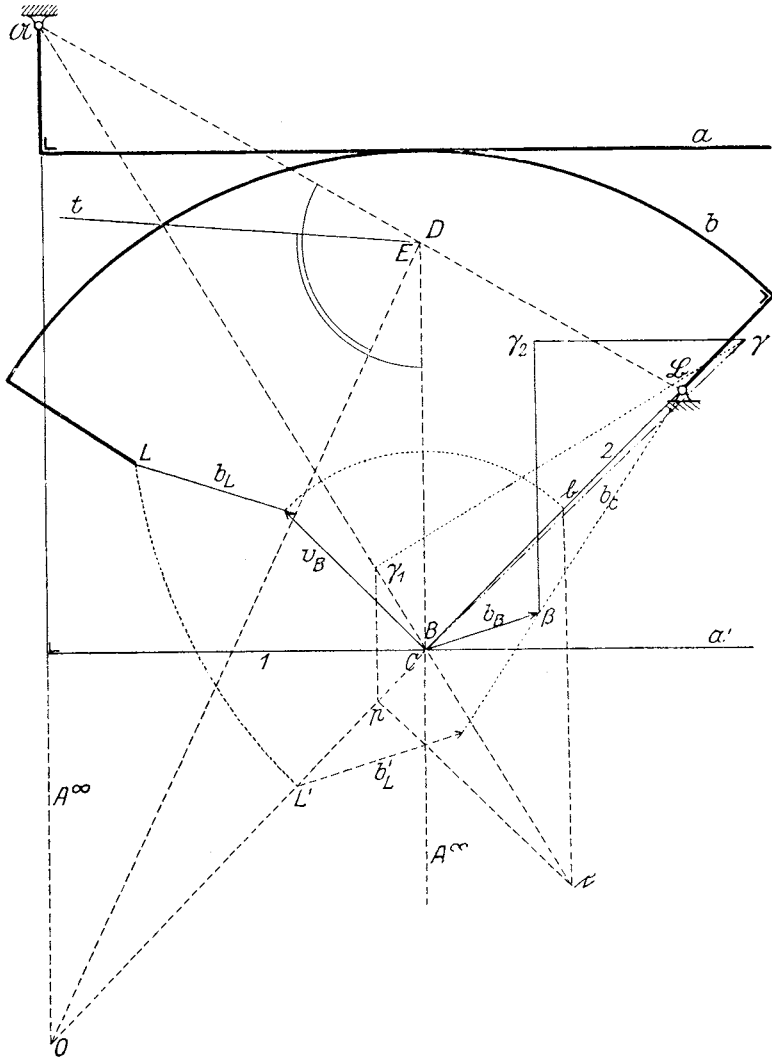
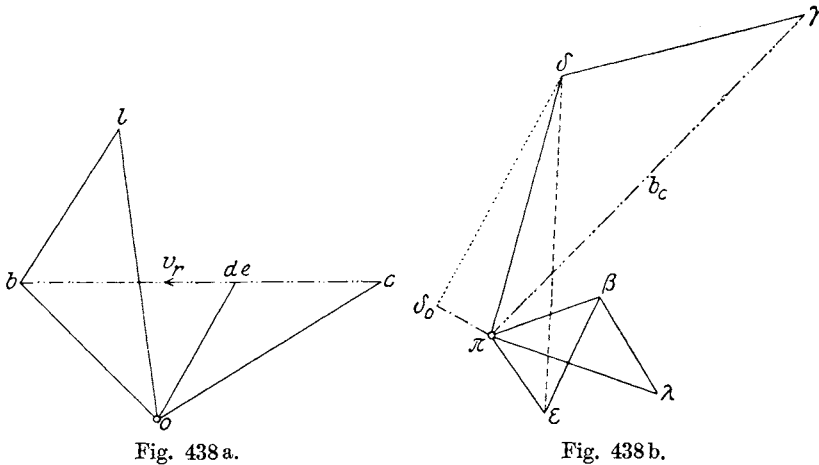


Fig. 438.

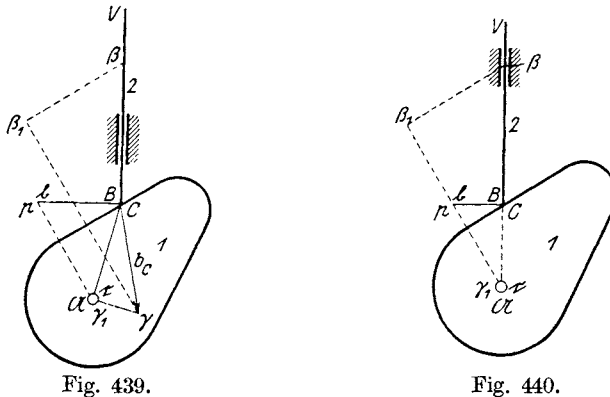
ist auch  $\overline{C\gamma} \equiv \overline{C\gamma}$  die gedrehte Geschwindigkeit  $v_C$ . Zieht man  $c\delta$  senkrecht zur geraden Begrenzung der Scheibe und  $B\delta \perp 2$ , so ist  $B\delta$  die gedrehte Geschwindigkeit  $v_B$ . Wendet man nun die Konstruktion aus Fig. 437 an, so bemerkt man, daß  $p$  mit  $b$  zusammenfällt. Macht

man  $\overline{\gamma\beta_1} \equiv 2\overline{\gamma_1 p}$  und zieht  $\beta_1\beta \perp \gamma\beta_1$ , so erhält man den Schnittpunkt  $\beta$  mit der Ventilstange 2 und es ist  $\overline{B\beta} \equiv b_B$ .

In Fig. 440 ist der besondere Fall nochmals behandelt worden, in dem die Richtung der Ventilstange durch den Drehungspunkt  $\mathcal{U}$  der



unrunden Scheibe geht und diese sich gleichförmig dreht. Dann fällt auch  $\gamma$  nach  $\mathcal{U}$ ; es genügt also, in  $\mathcal{U}$  die Normale  $\mathcal{U}b$  auf die geradlinige Begrenzung der Scheibe zu errichten, sie mit  $Bb \perp 2$  zum Schnitt  $b$  zu bringen,  $\mathcal{U}b \equiv \overline{b\beta_1}$  zu machen und  $\beta_1\beta \perp \mathcal{U}\beta_1$ ; dann ist  $\overline{B\beta} \equiv b_B$ .



In Fig. 434 hatten wir das gleiche Resultat durch eine ähnliche Konstruktion gewonnen.

**223. Aufgaben.**

110. Bei der Steuerung von Pröll-Schwabe (Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1907, S. 132) wird für das Öffnen und Schließen des Ventils ein Schwingdaumengetriebe benützt, das in Fig. 441

dargestellt ist. 1 ist der um  $\mathcal{A}$  drehbare Schwingdaumen mit der krummlinigen Begrenzung  $a'$ ; 2 der um  $\mathcal{B}$  drehbare Hebel mit der Rolle  $R$ .  $M$  ist der Berührungspunkt von Rolle und Daumen; die Ventilstange ist in  $K$  an den Daumen gelenkig angeschlossen, statt an den Hebel, wie in Fig. 418.

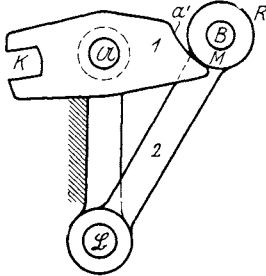


Fig. 441.

Gegeben sei die Beschleunigung des Punktes  $B$ ; es ist die Geschwindigkeit und Beschleunigung des Punktes  $K$  der Ventilstange zu ermitteln.

111. Fig. 442 zeigt die Führung der Ventilstange im Gelenke  $K$  mittels des Schwingdaumens 1, wie sie bei der Steuerung von E. König verwendet wurde. Der Schwingdaumen dreht sich um die Welle  $\mathcal{A}$ ; er besteht aus einem gekrümmten Rahmen, innerhalb dessen sich die Führungsrolle  $R$  bewegen kann. Der Hebel 2, an dessen Ende sich die Rolle befindet, dreht sich um die Welle  $\mathcal{B}$  und wird in  $L$  angetrieben. Aus der gegebenen Beschleunigung von  $L$  soll jene von  $K$  ermittelt werden.

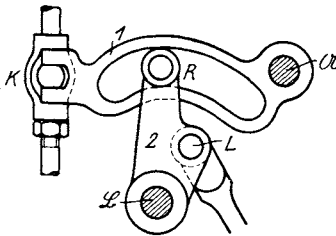


Fig. 442.

112. Fig. 443 stellt die Schwingdaumensteuerung eines Ventils vor. Der Antrieb in  $L$  wird von  $C$  aus durch eine um  $\mathcal{C}$  drehbare Kurbel (Exzenter) hervorgerufen. Der Schwingdaumen ist um  $\mathcal{A}$  drehbar; die Rolle  $R$ , die sich auf dem Schwingdaumen abwälzt, bildet das Ende eines um  $\mathcal{B}$  drehbaren Winkelhebels, der in  $K$  an die Ventilstange gelenkig angeschlossen ist.

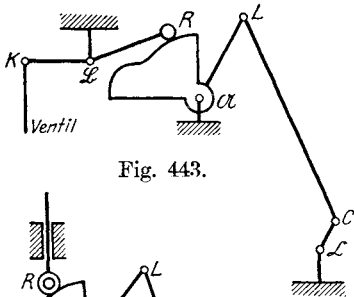


Fig. 443.

Gegeben ist die Beschleunigung des Punktes  $C$ ; es soll die Geschwindigkeit und Beschleunigung des Punktes  $K$  ermittelt werden.

113. Fig. 444 zeigt eine andere Anordnung der Schwingdaumensteuerung der vorigen Aufgabe. Es ist aus der Beschleunigung von  $C$  jene der Ventilstange zu bestimmen.

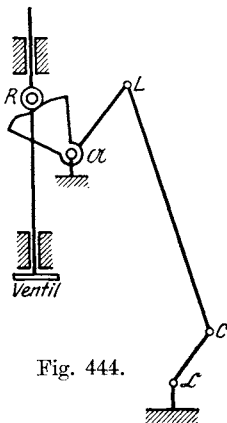


Fig. 444.

## XXI. Die Bewegung des Schwerpunkts.

In diesem Abschnitt wollen wir der Frage näher treten: wie findet man den Schwerpunkt einer kinematischen Kette oder eines Getriebes und wie findet man seine Geschwindigkeit und Beschleunigung?

Es sollen zunächst ein paar Sätze über den Schwerpunkt vorausgeschickt werden.

**224. Sätze über den Schwerpunkt.** Es seien in Fig. 445  $A$  und  $B$  zwei schwere Punkte mit den Gewichten  $G_1$  und  $G_2$ . Dann liegt deren Schwerpunkt zwischen  $A$  und  $B$  auf deren gerader Verbindungslinie und es ist

$$a G_1 = b G_2 \quad \dots \dots \dots \text{a)}$$

Man kann dies auch in der Form ausdrücken:

$$(G_1 + G_2) \cdot S \equiv G_1 \cdot A + G_2 \cdot B, \quad \dots \dots \text{b)}$$

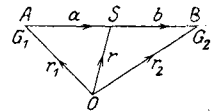


Fig. 445.

worin die Symbole  $S, A, B$  die gleichnamigen in einer Geraden liegenden Punkte bedeuten und  $G_1 + G_2, G_1$  und  $G_2$  die Maßzahlen dieser Punkte sind. Diese Art der Bezeichnung ist dem von A. F. Möbius begründeten baryzentrischen Kalkül entnommen (Möbius, Ges. Werke, I. Band), welche Rechnungsart sich für manche Untersuchungen der technischen Mechanik vortrefflich eignet.

Es möge festgesetzt werden, daß  $a$  und  $b$  Strecken sind, die in derselben Richtung, also z. B. von  $A$  nach  $B$  durchlaufen werden.

Außerhalb der Geraden  $AB$  werde ein beliebiger Punkt  $O$  angenommen und mit  $A, S, B$  verbunden. Diese Verbindungsstrecken  $r_1, r, r_2$  sollen alle als von  $O$  ausgehend angenommen werden. Dann ist

$$a \equiv -r_1 + r, \quad b \equiv -r + r_2$$

und Gleichung a) wird

$$(-r_1 + r) G_1 \equiv (-r + r_2) G_2$$

oder

$$(G_1 + G_2) r \equiv G_1 r_1 + G_2 r_2 \quad \dots \dots \dots \text{c)}$$

Diese Gleichung drückt dasselbe Gesetz aus wie Gleichung b), nur in anderer Form. Sie gestattet nämlich auch, den Schwerpunkt  $S$  zu bestimmen, benützt aber dazu einen beliebigen, außerhalb  $AB$  gelegenen Punkt  $O$ .

Multipliziert man also die Strecke  $\overline{OA} = r_1$  mit der Maßzahl  $G_1$ , ebenso die Strecke  $\overline{OB} = r_2$  mit der Maßzahl  $G_2$  und addiert die so ver-



änderten Strecken geometrisch, so erhält man eine Strecke als Summe, die gleich dem Produkt der Strecke  $\bar{O}\bar{S} = r$  in die Maßzahl  $G_1 + G_2$  ist. (Vgl. damit 51, Gleichung 37.)

Es sollen nun drei schwere Punkte  $A, B, C$  mit den Gewichten  $G_1 G_2 G_3$  angenommen werden (Fig. 446). Um ihren Schwerpunkt  $S$  zu finden, könnte man in der Weise verfahren, daß man zuerst den Schwerpunkt  $D$  von  $A$  und  $B$  sucht:

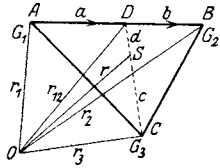


Fig. 446.

$$a G_1 = b G_2$$

und sodann den Schwerpunkt von  $D$  und  $C$ :

$$c G_3 = d (G_1 + G_2).$$

Mit Benützung der oben angeführten Bezeichnungsweise des baryzentrischen Kalküls könnte man diese Gleichungen in folgender Weise ansetzen:

$$(G_1 + G_2) \cdot D \equiv G_1 \cdot A + G_2 \cdot B$$

und  $(G_1 + G_2 + G_3) \cdot S \equiv (G_1 + G_2) \cdot D + G_3 \cdot C$

oder durch Verbindung beider Gleichungen:

$$G \cdot S \equiv G_1 \cdot A + G_2 \cdot B + G_3 \cdot C \quad \dots \dots \dots \text{d)}$$

wenn  
gesetzt wird.

$$G = G_1 + G_2 + G_3$$

Nimmt man nun wieder einen beliebigen Punkt  $O$  an und verbindet ihn mit  $A, B, C, D$  und  $S$ , so wird in Übereinstimmung mit Gleichung c):

$$(G_1 + G_2) r_{12} \equiv G_1 r_1 + G_2 r_2$$

und

$$G r \equiv (G_1 + G_2) r_{12} + G_3 r_3,$$

also durch Verbindung beider Gleichungen:

$$G r \equiv G_1 r_1 + G_2 r_2 + G_3 r_3, \quad \dots \dots \dots \text{e)}$$

welche Gleichung dasselbe ausdrückt wie d), nur mit Benützung eines beliebigen Punktes  $O$ .

Diese wenigen Sätze über den Schwerpunkt lassen sich beliebig erweitern, indem man noch andere schwere Punkte hinzunimmt.

Sind  $A, B, C, D, \dots, N$  beliebig viele Punkte mit den Gewichten  $G_1 G_2 G_3 G_4 \dots G_n$  (Fig. 447), so kann die Lage ihres Schwerpunkts  $S$  durch die symbolische Gleichung dargestellt werden:

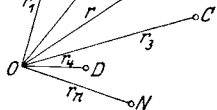


Fig. 447.

$$G \cdot S \equiv G_1 \cdot A + G_2 \cdot B + G_3 \cdot C + \dots + G_n \cdot N,$$

worin  $G = G_1 + G_2 + G_3 + \dots + G_n$

ist.

Zieht man jedoch diesem baryzentrischen Ausdruck für die Schwerpunktslage die bereits in 51 besprochene Darstellung durch Strecken vor, die von einem beliebigen Punkt  $O$  ausgehen, so müßte man die Gleichung in der Form wie jene von Gleichung 37 anschreiben:

$$Gr = G_1 r_1 + G_2 r_2 + G_3 r_3 + \dots + G_n r_n,$$

wobei die  $r, r_1, r_2, \dots, r_n$  die von  $O$  ausgehenden Strecken sind.

**225. Der Schwerpunkt zweier gelenkig verbundener Scheiben. Hauptpunkte und Hauptstrecken.** Es seien in Fig. 448: 1 und 2 zwei beliebig geformte Scheiben, deren Gewichte  $G_1$  und  $G_2$  und deren Schwerpunkte  $S_1$  und  $S_2$  sind, in  $A$  gelenkig verbunden.

Der gemeinsame Schwerpunkt  $S$  liegt dann auf der geraden Verbindungslinie  $S_1 S_2$ , und zwar ist nach der Bezeichnungsweise des baryzentrischen Kalküls:

$$(G_1 + G_2) \cdot S = G_1 \cdot S_1 + G_2 \cdot S_2.$$

Verbindet man  $A$  mit  $S_1$  und  $S_2$ , zieht  $SH_1 \parallel S_2 A$ , so ist

$$S_1 S : SS_2 = S_1 H_1 : H_1 A$$

und man kann somit auch setzen:

$$(G_1 + G_2) \cdot H_1 = G_1 \cdot S_1 + G_2 \cdot A,$$

d. h.  $H_1$  ist der Schwerpunkt der Punkte  $S_1$  und  $A$ , wenn in ihnen die Gewichte  $G_1$  und  $G_2$  angebracht werden.

Zieht man  $SH_2 \parallel S_1 A$ , so ist ebenso

$$(G_1 + G_2) \cdot H_2 = G_1 \cdot A + G_2 \cdot S_2,$$

d. h.  $H_2$  ist der Schwerpunkt der Punkte  $A$  und  $S_2$ , wenn in ihnen die Gewichte  $G_1$  und  $G_2$  angebracht werden.

Die beiden Punkte  $H_1$  und  $H_2$  sind hinsichtlich ihrer Lage in jeder der Scheiben vollkommen bestimmt und ändern sie nicht, wenn die Scheiben sich gegeneinander um  $A$  verdrehen oder sonstwie bewegen. Der Schwerpunkt  $S$  beider Scheiben bleibt also stets der vierte Eckpunkt eines Parallelogramms, dessen drei andere Eckpunkte das Gelenk  $A$  und die Punkte  $H_1$  und  $H_2$  sind.

Nach dem Vorschlage von O. Fischer, auf dessen Abhandlung: „Über die reduzierten Systeme und die Hauptpunkte der Glieder eines Gelenkmechanismus“, Zeitschr. f. Math. u. Physik 1902, 47. Bd., sich die folgenden Ausführungen stützen, nennen wir  $H_1$  und  $H_2$  die Hauptpunkte der Scheiben 1 und 2, die Strecken  $AH_1$  und  $AH_2$  ihre Hauptstrecken. (Siehe auch das Buch desselben Verfassers: „Theoretische Grundlagen für eine Mechanik der lebenden Körper“, Leipzig, 1906.)

Bewegen sich die Scheiben 1 und 2 in ihrer Ebene und drehen sie sich dabei relativ zueinander um den Punkt  $A$ , so macht das gelenkige Parallelogramm  $AH_1 S H_2$  die Bewegung mit; es ändert wohl seine Winkel, nicht aber seine Seiten. Die Lage des vierten Eckpunkts  $S$  gibt jederzeit die Lage des Schwerpunkts beider Scheiben an.

**226. Der Schwerpunkt dreier gelenkig verbundener Scheiben. Die Schwerpunktskette.** Drei Scheiben 1, 2, 3 mit den Gewichten  $G_1, G_2, G_3$

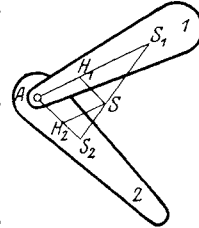


Fig. 448.

und den Schwerpunkten  $S_1, S_2, S_3$  seien in  $B$  und  $C$  gelenkig miteinander verbunden (Fig. 449). Sie bilden also eine offene kinematische Kette.

Verbindet man  $S_1$  mit  $S_2$ , so liegt auf dieser Verbindungsgeraden der Schwerpunkt  $S_{12}$  der Scheiben 1 und 2; es ist dann

$$(G_1 + G_2) \cdot S_{12} \equiv G_1 \cdot S_1 + G_2 \cdot S_2 \dots \dots \dots a)$$

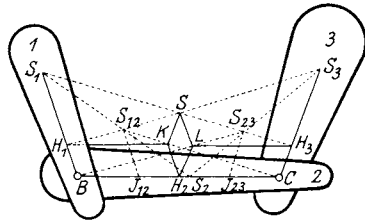


Fig. 449.

Verbindet man ebenso  $S_2$  mit  $S_3$ , so liegt auf dieser Geraden der Schwerpunkt  $S_{23}$  der Scheiben 2 und 3; es ist

$$(G_2 + G_3) \cdot S_{23} \equiv G_2 \cdot S_2 + G_3 \cdot S_3 \quad b)$$

Verbindet man  $S_{12}$  mit  $S_3$ , so liegt auf dieser Geraden der Schwerpunkt  $S$  aller drei Scheiben; setzt man  $G = G_1 + G_2 + G_3$ , so ist

$$G \cdot S \equiv (G_1 + G_2) \cdot S_{12} + G_3 \cdot S_3 \quad c)$$

Ebenso, wenn  $S_1$  mit  $S_{23}$  verbunden wird, liegt  $S$  auch auf dieser Geraden, und es ist

$$G \cdot S \equiv G_1 \cdot S_1 + (G_2 + G_3) \cdot S_{23} \dots \dots \dots d)$$

Zieht man  $SH_1 \parallel S_{23}B$ , so ist auch

$$G \cdot H_1 \equiv G_1 \cdot S_1 + (G_2 + G_3) \cdot B \dots \dots \dots e)$$

d. h.  $H_1$  ist der Schwerpunkt der Punkte  $S_1$  und  $B$ , wenn in ihnen die Gewichte  $G_1$  und  $G_2 + G_3$  angebracht werden. Wir wollen  $H_1$  wieder den Hauptpunkt der Scheibe 1 nennen.

Zieht man ferner  $SH_3 \parallel S_{12}C$ , so ist

$$G \cdot H_3 \equiv G_3 \cdot S_3 + (G_1 + G_2) \cdot C \dots \dots \dots f)$$

d. h.  $H_3$  ist der Schwerpunkt der Punkte  $S_3$  und  $C$ , wenn in ihnen die Gewichte  $G_3$  und  $G_1 + G_2$  angebracht werden. Wir nennen ebenso  $H_3$  den Hauptpunkt der Scheibe 3.

Zieht man  $S_{12}J_{12} \parallel S_1B$ , so kann in Übereinstimmung mit Gleichung a) geschrieben werden:

$$(G_1 + G_2) \cdot J_{12} \equiv G_1 \cdot B + G_2 \cdot S_2 \dots \dots \dots g)$$

Verbindet man  $S_{12}$  mit  $C$  und bringt diese Gerade zum Schnitt mit  $SK \parallel S_3C$ , so ist in Übereinstimmung mit c):

$$G \cdot K \equiv (G_1 + G_2) \cdot S_{12} + G_3 \cdot C;$$

wird endlich  $KH_2 \parallel S_{12}J_{12}$  gezogen, so ist wie in der letzten Gleichung

$$G \cdot H_2 \equiv (G_1 + G_2) \cdot J_{12} + G_3 \cdot C$$

und mit Benützung von Gleichung g):

$$G \cdot H_2 \equiv G_1 \cdot B + G_2 \cdot S_2 + G_3 \cdot C \dots \dots \dots h)$$

Wir wollen diesen Punkt  $H_2$  den Hauptpunkt der Scheibe 2 nennen. Er ist der Schwerpunkt der Punkte  $B, S_2, C$ , wenn in ihnen die Gewichte  $G_1, G_2, G_3$  angebracht werden.

Man könnte zu  $H_2$  auch noch auf anderem Wege gelangen. Zieht man nämlich  $S_{23}J_{23} \parallel S_3C$ , so ist in Übereinstimmung mit Gleichung b):

$$(G_2 + G_3) \cdot J_{23} = G_2 \cdot S_2 + G_3 \cdot C \quad \dots \dots \dots \text{i)}$$

verbindet man  $S_{23}$  mit  $B$  und zieht  $SL \parallel S_1B$  und  $LH_2 \parallel S_{23}J_{23}$ , so ist in Übereinstimmung mit Gleichung d):

$$G \cdot L = G_1 \cdot B + (G_2 + G_3) \cdot S_{23},$$

$$G \cdot H_2 = G_1 \cdot B + (G_2 + G_3) \cdot J_{23}$$

und mit Benützung von Gleichung i):

$$G \cdot H_2 = G_1 \cdot B + G_2 \cdot S_2 + G_3 \cdot C,$$

welche Gleichung mit h) übereinstimmt.

Diese drei Hauptpunkte  $H_1, H_2, H_3$  haben die Eigenschaft, daß sie in den drei Scheiben eine ganz bestimmte, unveränderliche Lage einnehmen, die von ihrer Bewegung um die Gelenke  $B$  und  $C$  in keiner Weise abhängt.

Es ist ferner

$$BH_1 \parallel \overline{H_2K} \parallel \overline{LS},$$

$$CH_3 \parallel \overline{H_2L} \parallel \overline{KS},$$

$$BH_2 \parallel \overline{H_1K}, CH_2 \parallel HL.$$

Da nun die Strecken  $BH_1, BH_2, CH_2, CH_3$ , die sogenannten Hauptstrecken, unveränderliche Längen besitzen, so ist der Schwerpunkt  $S$  mit den drei Scheiben durch drei gelenkige Parallelogramme  $BH_1KH_2, CH_3LH_2$  und  $H_2KSL$  verbunden. Man kann sich diese drei Parallelogramme aus gewichtlosen Stäben angefertigt denken (Fig. 449 a); es entsteht eine aus drei Parallelkurbeln bestehende kinematische Kette, welche die Bewegung der drei Scheiben mitmacht und deren Ecke  $S$  stets die Lage des Schwerpunkts  $S$  während der Bewegung angibt. Wir wollen diese gewichtlose Stabkette die Schwerpunktskette nennen.

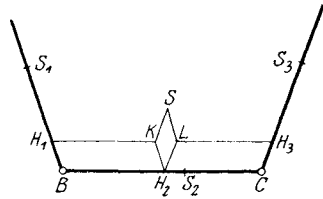


Fig. 449 a.

Sobald die drei Hauptpunkte nach den Gleichungen

$$G \cdot H_1 = G_1 \cdot S_1 + (G_2 + G_3) \cdot B \quad \dots \dots \dots \text{e)}$$

$$G \cdot H_2 = G_1 \cdot B + G_2 \cdot S_2 + G_3 \cdot C \quad \dots \dots \dots \text{h)}$$

$$G \cdot H_3 = G_3 \cdot S_3 + (G_1 + G_2) \cdot C \quad \dots \dots \dots \text{f)}$$

gefunden sind, ergibt sich die Lage des Schwerpunkts  $S$  durch geometrische Addition der drei Hauptstrecken. Die Reihenfolge dieser Addition ist ohne Einfluß auf das Resultat; man kann also die drei Hauptstrecken in der Reihe addieren:

$$\begin{aligned} & \overline{BH_1} + \overline{H_1K} + \overline{KS} \\ \text{oder} & \overline{BH_2} + \overline{H_2L} + \overline{SL} \\ \text{oder} & \overline{CH_3} + \overline{H_3L} + \overline{LS}. \end{aligned}$$

227. Der Schwerpunkt und die Schwerpunktskette von vier gelenkig verbundenen Scheiben. In derselben Weise, wie dies bei drei gelenkig

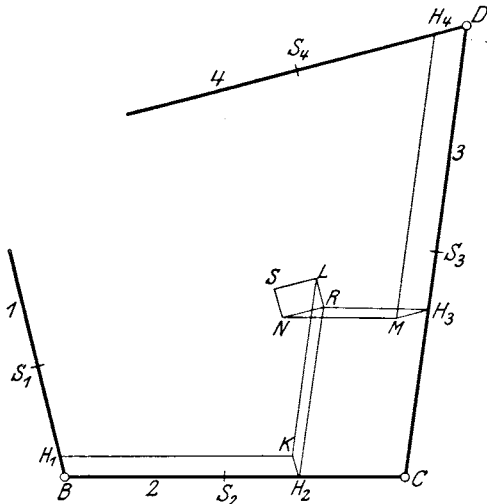


Fig. 450.

verbundenen Scheiben gezeigt wurde, kann auch der Schwerpunkt von vier Scheiben durch geometrische Addition der Hauptstrecken gefunden werden.

Die Stäbe 1, 2, 3, 4 (Fig. 450) mögen die vier Scheiben ersetzen;  $B, C, D$  seien ihre Verbindungsstellen,  $S_1, S_2, S_3, S_4$  ihre Schwerpunkte. Zunächst werden wie früher die Hauptpunkte der Scheiben gesucht mit Hilfe folgender Gleichungen, die eine Verallgemeinerung der Gleichungen e), h), f) am Schlusse des vorigen Abschnittes darstellen:

$$G = G_1 + G_2 + G_3 + G_4,$$

$$G \cdot H_1 \equiv G_1 \cdot S_1 + (G_2 + G_3 + G_4) \cdot B \quad \dots \dots \dots \text{k)}$$

$$G \cdot H_2 \equiv G_1 \cdot B + G_2 \cdot S_2 + (G_3 + G_4) \cdot C \quad \dots \dots \dots \text{l)}$$

$$G \cdot H_3 \equiv (G_1 + G_2) \cdot C + G_3 \cdot S_3 + G_4 \cdot D \quad \dots \dots \dots \text{m)}$$

$$G \cdot H_4 \equiv (G_1 + G_2 + G_3) \cdot D + G_4 \cdot S_4 \quad \dots \dots \dots \text{n)}$$

Nimmt man nun einen beliebigen Punkt  $O$  an und setzt

$$\overline{OS} = r, \overline{OS}_1 = r_1, \overline{OS}_2 = r_2, \overline{OS}_3 = r_3, \overline{OS}_4 = r_4,$$

so muß der Schwerpunkt  $S$  der Gleichung genügen:

$$Gr \equiv G_1 r_1 + G_2 r_2 + G_3 r_3 + G_4 r_4 \quad \dots \dots \dots \text{o)}$$

(vgl. Schluß von 224).

Nun kann Gleichung k) in der Form angeschrieben werden:

$$G \cdot \overline{OH}_1 \equiv G_1 \cdot \overline{OS}_1 + (G_2 + G_3 + G_4) \cdot \overline{OB};$$

wählt man  $O$  in  $B$ , so kann Gleichung l) in die Form gebracht werden:

$$G \cdot \overline{BH}_2 \equiv G_2 \cdot \overline{BS}_2 + (G_3 + G_4) \cdot \overline{BC};$$

wird sodann  $O$  in  $C$  gewählt, so ist nach m):

$$G \cdot \overline{CH}_3 \equiv G_3 \cdot \overline{CS}_3 + G_4 \cdot \overline{CD}$$

und wenn endlich  $O$  in  $D$  gewählt wird, nach n):

$$G \cdot \overline{DH}_4 \equiv G_4 \cdot \overline{DS}_4.$$

Addiert man diese vier Gleichungen, so erhält man

$$G(\overline{OH_1} + \overline{BH_2} + \overline{CH_3} + \overline{DH_4}) = G_1 \cdot \overline{OS_1} + G_2 \cdot (\overline{OB} + \overline{BS_2}) + \\ + G_3 \cdot (\overline{OB} + \overline{BC} + \overline{CS_3}) + G_4 \cdot (\overline{OB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DS_4})$$

oder auch

$$G(\overline{OH_1} + \overline{BH_2} + \overline{CH_3} + \overline{DH_4}) = G_1 r_1 + G_2 r_2 + G_3 r_3 + G_4 r_4.$$

Durch Vergleich mit Gleichung o) findet man

$$\overline{OS} = r = \overline{OH_1} + \overline{BH_2} + \overline{CH_3} + \overline{DH_4}.$$

Man findet also die Lage des Punktes  $S$ , indem man von  $H_1$  ausgehend die drei Hauptstrecken  $\overline{H_1 K} = \overline{BH_2}$ ,  $\overline{KL} = \overline{CH_3}$ ,  $\overline{LS} = \overline{DH_4}$  geometrisch addiert.

Da die Reihenfolge dieser Addition ohne Einfluß auf das Resultat ist, kann man die Aneinanderreihung der Hauptstrecken in einem beliebigen Hauptpunkt beginnen lassen, z. B. in  $H_3$ , daran  $\overline{H_3 M} = \overline{DH_4}$  schließen, daran  $\overline{MN} = \overline{CH_2}$  und sodann  $\overline{NS} = \overline{BH_1}$ .

Der Schwerpunkt  $S$  ist, wie Fig. 450 zeigt, durch sechs Parallelogramme mit der gegebenen kinematischen Kette der vier Scheiben verbunden. Diese Parallelogramme bilden hier die Schwerpunktskette, von der im vorigen Abschnitt die Rede war. Sie sind gelenkig zu denken und machen die Bewegung der vier Scheiben mit; die Ecke  $S$  bleibt immer deren Schwerpunkt.

**228. Der Schwerpunkt einer offenen kinematischen Kette.** Die in den vorigen Abschnitten geschilderte Methode, den Schwerpunkt durch gelenkige Parallelogramme mit den bewegten Scheiben zu verbinden, läßt sich leicht auf andere offene kinematische Ketten übertragen. Nur müssen diese die Eigenschaft haben, daß man von jedem Punkte der Kette zu jedem anderen nur auf einem einzigen Wege gelangen kann.

Der Hauptpunkt  $H_n$  irgend eines Gliedes  $n$  der Kette, das den Schwerpunkt  $S_n$  besitzt und in  $P$ ,  $Q$  an die Nachbarglieder gelenkig angeschlossen ist, wird in folgender Weise gefunden:

Man bringt in  $S_n$  das Gewicht  $G_n$  des Gliedes  $n$  an, in  $P$  die Gewichte aller Glieder, zu denen man von  $P$  aus gelangen kann, ohne  $S_n$  zu überschreiten; in  $Q$  die Gewichte aller übrigen Glieder. Dann ist der Schwerpunkt von  $S_n$ ,  $P$  und  $Q$  der Hauptpunkt  $H_n$ .

Man ersieht daraus, daß der Hauptpunkt jedes Gliedes in diesem eine ganz bestimmte Lage hat, und daß diese von den Gewichten sämtlicher anderen Glieder abhängt. Löst man also irgend eines oder mehrere Glieder der Kette ab, so ändern sich auch die Hauptpunkte aller zurückbleibenden Glieder.

Der Schwerpunkt der offenen kinematischen Kette wird nach erfolgter Ermittlung der Hauptpunkte gefunden, wenn man vom Hauptpunkt  $H_1$  des ersten Gliedes ausgehend im Weiterschreiten sämtliche näher-

liegende Hauptstrecken geometrisch addiert (Fig. 451)<sup>1)</sup>; es ist also

$$\overline{AS} \equiv \overline{AH_1} + \overline{BH_2} + \overline{CH_3} + \overline{DH_4} + \dots + \overline{MH_n} + \overline{NH_{n+1}} + \dots$$

$$\text{oder} \quad \overline{AS} \equiv \overline{AH_1} + \overline{H_1K} + \overline{KL} + \overline{LP} + \dots + \overline{RS},$$

womit der Schwerpunkt  $S$  als Endpunkt des Polygons  $AH_1KL \dots RS$  gefunden ist.

Es fällt nicht schwer, auch die gelenkigen Parallelogramme einzuzichnen, die den Schwerpunkt mit der kinematischen Kette verbinden; besteht die Kette aus  $r$  Gliedern, so sind hierzu  $\frac{r(r-1)}{2}$  Parallelogramme erforderlich.

Bisher wurde angenommen, daß die Kette aus Stäben zusammengesetzt ist, deren Schwerpunkte auf den Verbindungslinien der Gelenke

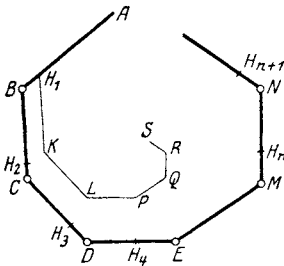


Fig. 451.

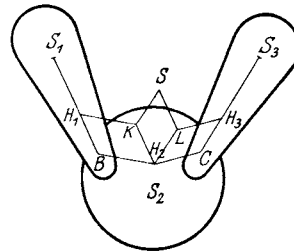


Fig. 452.

liegen. Die Methode kann aber auch auf solche Ketten angewendet werden, welche Glieder von anderer Gestalt und anderer Schwerpunktlage besitzen.

So zeigt Fig. 452 eine offene Kette, deren Glied 2 einen Schwerpunkt  $S_2$  besitzt, der nicht auf der Verbindungslinie  $BC$  liegt. Während sich an den Hauptpunkten  $H_1$  und  $H_3$  gegen früher nichts verändert, ist jetzt der Hauptpunkt  $H_2$  der Schwerpunkt der Gewichte  $G_1$  in  $B$ ,  $G_2$  in  $S_2$  und  $G_3$  in  $C$ ; auch das ist genau so wie früher, nur liegt jetzt  $H_2$  nicht auf  $BC$ . Der Beweis hierfür ist wie früher zu erbringen.

Auch die Kette der Parallelogramme, die den Punkt  $S$  führen, ist in derselben Weise wie früher zu zeichnen (vgl. Fig. 452).

### 229. Der Schwerpunkt einer geschlossenen kinematischen Kette.

Auch für eine geschlossene kinematische Kette kann die Methode der Hauptpunkte angewendet werden, wenn man vorher jedes ihrer geschlossenen Polygone durch Lösung eines Gelenkes in eine offene Kette verwandelt.

Fig. 453 stellt dieselbe Kette wie Fig. 450 dar, nur daß sie jetzt geschlossen ist und ein Gelenkviereck bildet.

<sup>1)</sup> Geht man z. B. von  $A$  aus, so müssen die näherliegenden Hauptstrecken  $BH_2, CH_3, DH_4, \dots$  und nicht  $H_2C, H_3D, H_4E \dots$  genommen werden.

Denkt man sich die Kette in  $A$  geöffnet, so entsteht eine offene Kette, für die wieder die Gleichungen k), l), m), n) in 227 gelten und deren Schwerpunkt  $S$  durch Addition der Hauptstrecken  $\overline{AH_1}$ ,  $\overline{BH_2} \equiv \overline{H_1K_1}$ ,  $\overline{CH_3} \equiv \overline{K_1L_1}$ ,  $\overline{DH_4} \equiv \mathop{\overline{L_1S}}$  gefunden werden kann.

Man könnte aber ebensogut die Kette in einem anderen Gelenk, z. B. in  $B$  öffnen, wodurch eine andere offene Kette entsteht, die auch andere Hauptpunkte und Hauptstrecken besitzt.

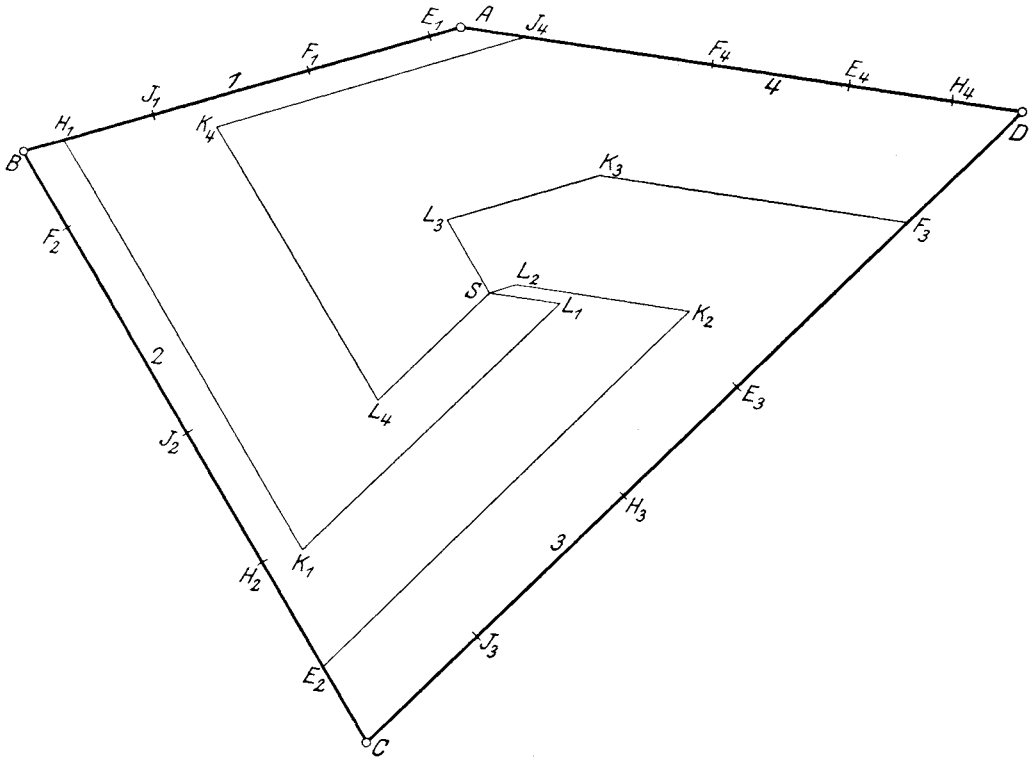


Fig. 453.

Nennen wir die neuen Hauptpunkte  $E_1, E_2, E_3, E_4$ , so sind sie durch Gleichungen bestimmt, die den Gleichungen k), l), m), n) in 227 entsprechend angeordnet sind:

$$\begin{aligned} G \cdot E_1 &= (G_2 + G_3 + G_4) \cdot A + G_1 \cdot S_1, \\ G \cdot E_2 &= G_2 \cdot S_2 + (G_3 + G_4 + G_1) \cdot C, \\ G \cdot E_3 &= G_2 \cdot C + G_3 \cdot S_3 + (G_4 + G_1) \cdot D, \\ G \cdot E_4 &= (G_2 + G_3) \cdot D + G_4 \cdot S_4 + G_1 \cdot A. \end{aligned}$$

Die entsprechenden Hauptstrecken sind dann  $\overline{BE_2}$ ,  $\overline{CE_3} \equiv \overline{E_2K_2}$ ,  $\overline{DE_4} \equiv \overline{K_2L_2}$ ,  $\overline{AE_1} \equiv \overline{L_2S}$ , durch deren geometrische Addition der Endpunkt  $S$  gefunden wird.



Ebenso könnte man die Kette in  $C$  oder  $D$  lösen; man würde dann die Hauptpunkte  $F_1 F_2 F_3 F_4$  und  $J_1 J_2 J_3 J_4$  und die Polygonzüge  $CF_3 K_3 L_3 S$  und  $DJ_4 K_4 L_4 S$  finden.

Man kann also bei einer geschlossenen Kette, die aus einem Polygon von  $n$  Gliedern besteht, den Schwerpunkt auf  $n$  verschiedenen Wegen durch Hauptstrecken erreichen. Infolgedessen sind auch  $n$  verschiedene Ketten von Parallelogrammen möglich, die den Schwerpunkt führen.

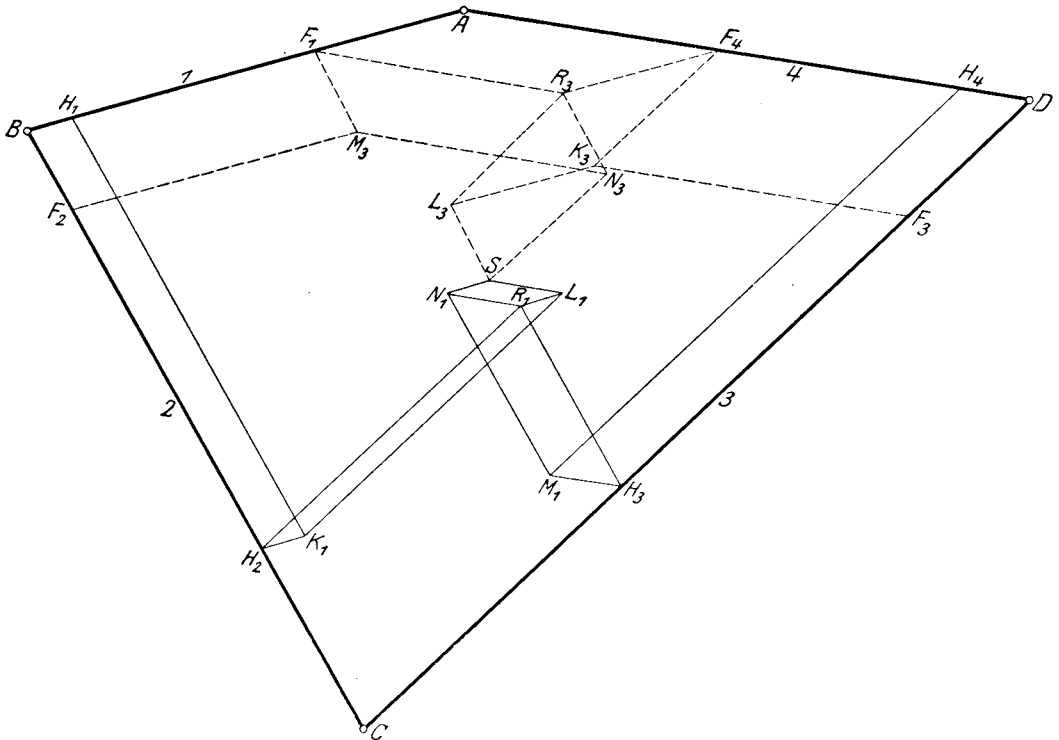


Fig. 454.

So gibt es in Fig. 453, wo  $n = 4$  ist, vier verschiedene Parallelogramm-Ketten, die alle mit ihrer Ecke  $S$  die Schwerpunktsbahn beschreiben, wenn das Gelenkviereck  $ABCD$  sich bewegt und seine Form verändert.

Nur zwei von diesen möglichen vier Parallelogramm-Ketten wurden in Fig. 454 eingezeichnet, um die Deutlichkeit nicht zu stören, nämlich die erste Kette, bestehend aus den Parallelogrammen

$$BH_1 K_1 H_2, K_1 H_2 R_1 L_1, R_1 L_1 S N_1, R_1 N_1 M_1 H_3, M_1 H_3 D H_4$$

und die dritte Kette bestehend aus den Parallelogrammen

$$D F_3 K_3 F_4, K_3 F_4 R_3 L_3, R_3 L_3 S N_3, R_3 N_3 M_3 F_1, M_3 F_1 B F_2.$$

Ähnlich wie beim Gelenkviereck geht man vor, wenn man den Schwerpunkt einer beliebigen geschlossenen Kette zu suchen hat. Zunächst muß jedes geschlossene Polygon dieser Kette dadurch geöffnet werden, daß man eine beliebige seiner Gelenkverbindungen gelöst denkt.

Fig. 455 zeigt eine sechsgliedrige, geschlossene kinematische Kette, die aus zwei Gelenkvierecken besteht; sie werden bei  $A$  und  $F$  durch Lösung der Gelenke geöffnet.

Sind  $S_1$  bis  $S_6$  die Schwerpunkte,  $G_1$  bis  $G_6$  die Gewichte der Glieder, so können die sechs Hauptpunkte durch folgende Gleichungen bestimmt werden:

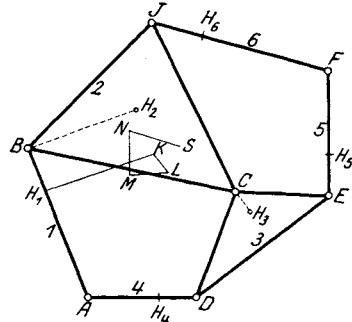


Fig. 455.

$$\begin{aligned}
 G &= G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + G_5 + G_6, \\
 G \cdot H_1 &\equiv G_1 \cdot S_1 + (G_2 + G_3 + G_4 + G_5 + G_6) \cdot B, \\
 G \cdot H_2 &\equiv G_1 \cdot B + G_2 \cdot S_2 + (G_3 + G_4 + G_5) \cdot C + G_6 \cdot J, \\
 G \cdot H_3 &\equiv (G_1 + G_2 + G_6) \cdot C + G_3 \cdot S_3 + G_4 \cdot D + G_5 \cdot E, \\
 G \cdot H_4 &\equiv G_4 \cdot S_4 + (G_1 + G_2 + G_3 + G_5 + G_6) \cdot D, \\
 G \cdot H_5 &\equiv G_5 \cdot S_5 + (G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + G_6) \cdot E, \\
 G \cdot H_6 &\equiv G_6 \cdot S_6 + (G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + G_5) \cdot J.
 \end{aligned}$$

Wendet man nun die Gleichung

$$Gr \equiv G_1 r_1 + G_2 r_2 + G_3 r_3 + G_4 r_4 + G_5 r_5 + G_6 r_6$$

der Reihe nach auf die sechs Hauptpunkte an, so ist, wenn der beliebige Anfangspunkt  $O$  der Vektoren  $r$  zunächst in  $A$  gewählt wird (entsprechend den obigen Gleichungen):

$$G \cdot \overline{AH_1} \equiv G_1 \cdot \overline{AS_1} + (G_2 + G_3 + G_4 + G_5 + G_6) \cdot \overline{AB};$$

wird  $O$  in  $B$  angenommen, so ist

$$G \cdot \overline{BH_2} \equiv G_2 \cdot \overline{BS_2} + (G_3 + G_4 + G_5) \cdot \overline{BC} + G_6 \cdot \overline{BJ};$$

wird sodann  $O$  in  $C$  gewählt:

$$G \cdot \overline{CH_3} \equiv G_3 \cdot \overline{CS_3} + G_4 \cdot \overline{CD} + G_5 \cdot \overline{CE};$$

nimmt man endlich  $O$  in  $D, E, J$  an, so entstehen die Gleichungen

$$G \cdot \overline{DH_4} \equiv G_4 \cdot \overline{DS_4},$$

$$G \cdot \overline{EH_5} \equiv G_5 \cdot \overline{ES_5},$$

$$G \cdot \overline{JH_6} \equiv G_6 \cdot \overline{JS_6}.$$

Addiert man diese sechs Gleichungen, so erhält man

$$\begin{aligned}
 G (\overline{AH_1} + \overline{BH_2} + \overline{CH_3} + \overline{DH_4} + \overline{EH_5} + \overline{JH_6}) &\equiv \\
 &= G_1 \cdot \overline{AS_1} + G_2 (\overline{AB} + \overline{BS_2}) + G_3 (\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CS_3}) + \\
 &+ G_4 (\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DS_4}) + G_5 (\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CE} + \overline{ES_5}) + \\
 &+ G_6 (\overline{AB} + \overline{BJ} + \overline{JS_6}),
 \end{aligned}$$

was auch so geschrieben werden kann:

$$\begin{aligned}
 G(\overline{AH_1} + \overline{BH_2} + \overline{CH_3} + \overline{DH_4} + \overline{EH_5} + \overline{JH_6}) &\equiv \\
 \equiv G_1 \cdot \overline{AS_1} + G_2 \cdot \overline{AS_2} + G_3 \cdot \overline{AS_3} + G_4 \cdot \overline{AS_4} + G_5 \cdot \overline{AS_5} + G_6 \cdot \overline{AS_6} \\
 \equiv G_1 r_1 + G_2 r_2 + G_3 r_3 + G_4 r_4 + G_5 r_5 + G_6 r_6.
 \end{aligned}$$

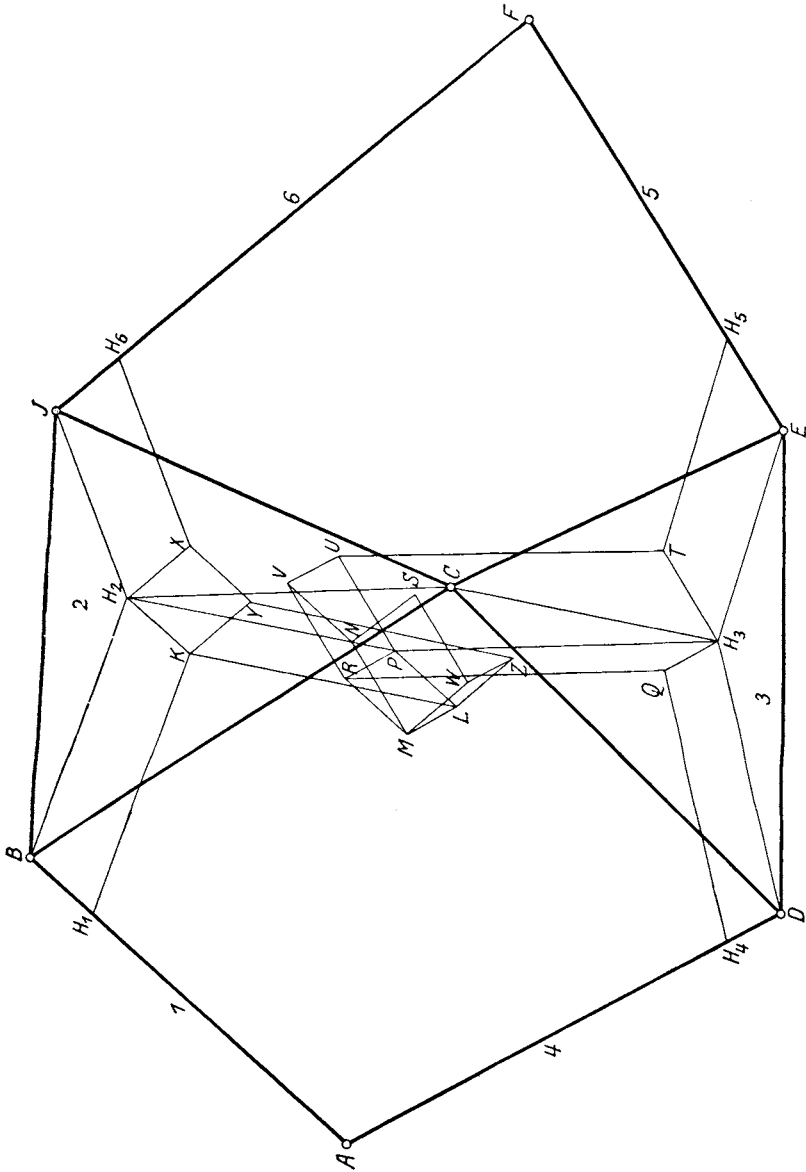


Fig. 456.

Es ist also

$$r = \overline{AH_1} + \overline{BH_2} + \overline{CH_3} + \overline{DH_4} + \overline{EH_5} + \overline{JH_6},$$

d. h. man erhält den Schwerpunkt  $S$  der kinematischen Kette, wenn man von  $A$  ausgehend die Hauptstrecken der sechs Glieder, und zwar die beim Fortschreiten zunächstliegenden<sup>1)</sup> Hauptstrecken geometrisch addiert. Fig. 455 zeigt diese Addition im Linienzuge  $AH_1KLMNS$ .

Die Parallelogrammkette des Schwerpunkts kann nun unter der Voraussetzung, daß die kinematische Kette bei  $A$  und  $F$  geöffnet wurde, unschwer ermittelt werden. Da die gegebene Kette sechs Glieder besitzt, wird die Kette der Parallelogramme aus  $\frac{6(6-1)}{2} = 15$  Parallelogrammen gebildet, deren End-Eckpunkt der Schwerpunkt  $S$  ist.

Jedes Glied bedarf immer um ein Parallelogramm mehr als das vorhergehende; die Seiten der Parallelogramme sind aus den Hauptstrecken gebildet (Fig. 456).

Das Glied 1 bedarf keines Parallelogrammes; sein Hauptpunkt ist  $H_1$ . Das Dreiecksglied 2 mit dem Hauptpunkt  $H_2$  bedarf des Parallelogrammes  $H_1BH_2K$ ;  $K$  ist der Schwerpunkt der Glieder 1 und 2.

Das Dreiecksglied 3 mit dem Hauptpunkt  $H_3$  bedarf zweier Parallelogramme:  $H_2CH_3P$  und  $KH_2PL$ .  $L$  ist der Schwerpunkt der Glieder 1, 2 und 3.

Das Glied 4 mit dem Hauptpunkt  $H_4$  bedarf dreier Parallelogramme:  $H_4DH_3Q$ ,  $H_3QRP$ ,  $RPLM$ .  $M$  ist der Schwerpunkt der Glieder 1, 2, 3, 4.

Das Glied 5 mit dem Hauptpunkt  $H_5$  beansprucht vier Parallelogramme:  $H_5EH_3T$ ,  $H_3TUP$ ,  $UPRV$  und  $RVNM$ .  $N$  ist der Schwerpunkt der Glieder 1 bis 5.

Das Glied 6 mit dem Hauptpunkt  $H_6$  beansprucht fünf Parallelogramme:  $H_6JH_2X$ ,  $H_2XYK$ ,  $YKLZ$ ,  $LZWV$ ,  $WMNS$ .

$S$  ist dann der Schwerpunkt der gegebenen kinematischen Kette. Verfolgt man den Linienzug  $AH_1KLMNS$ , so findet man der Reihe nach die sechs Hauptstrecken  $AH_1$ ,  $BH_2$ ,  $CH_3$ ,  $DH_4$ ,  $EH_5$ ,  $JH_6$ , deren geometrische Summe im Schwerpunkt  $S$  endet.

**230. Der Schwerpunkt eines Getriebes. Das Schwerpunktsgetriebe.** Einfacher als bei allgemein beweglichen kinematischen Ketten ist die Ermittlung des Schwerpunkts und seiner Parallelogramm-Kette bei den Getrieben, also bei jenen zwangsläufigen kinematischen Ketten, bei denen ein Glied, das Grundglied, festgehalten wird.

Da dieses Glied keine Bewegung ausführt, wird es auf die Bewegung des Schwerpunkts des Getriebes keinen Einfluß ausüben; man kann also das Grundglied bei der Ermittlung des Schwerpunkts außer Betracht lassen; dadurch wird aber die geschlossene kinematische Kette von selbst geöffnet.

<sup>1)</sup> Siehe Seite 378.

Fig. 457 zeigt ein allgemeines Gelenkviereck, das jedoch nur aus drei Gliedern besteht, da für die Ermittlung des Schwerpunkts das Grundglied  $\mathcal{A}\mathcal{B}$  fortgelassen werden konnte. Die Schwerpunkte  $S_1 S_2 S_3$  der drei Glieder wurden nicht auf den Verbindungslinien der Gelenke  $\mathcal{A}A$ ,  $AB$ ,  $B\mathcal{B}$  liegend angenommen. Zuerst wurden die drei Hauptpunkte  $H_1 H_2 H_3$  nach den Gleichungen des baryzentrischen Kalküls bestimmt:

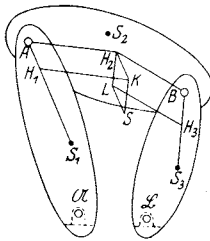


Fig. 457.

$$G = G_1 + G_2 + G_3,$$

$$G \cdot H_1 = G_1 \cdot S_1 + (G_2 + G_3) \cdot A,$$

$$G \cdot H_2 = G_1 \cdot A + G_2 \cdot S_2 + G_3 \cdot B,$$

$$G \cdot H_3 = (G_1 + G_2) \cdot B + G_3 \cdot S_3$$

und sodann das Parallelogramm-Getriebe wie in Fig. 452 gezeichnet. Es besteht aus den drei Parallelogrammen  $AH_1KH_2$ ,  $KH_2LS$ ,  $H_2LH_3B$ .

An dieser Aufstellung der Hauptpunkte und des Schwerpunktsgetriebes ändert sich gar nichts, wenn das Gelenkviereck in eine Schubkurbel übergeht, wie Fig. 458 zeigt. Der Unterschied besteht höchstens

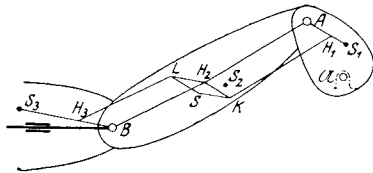


Fig. 458.

darin, daß, da  $B$  und  $H_3$  in der Schubrichtung gleiche Wege zurücklegen, die Punkte  $K$  und  $S$  kongruente Bahnen beschreiben und man sich deshalb mit der Ermittlung der Bewegung von  $K$  begnügen kann.

**231. Anwendung. Die Kniehebelpresse von G. W. Greenwood.** Fig. 459 zeigt das Getriebe, das Torka in seiner Abhandlung: „Die Maschinengetriebe und ihre mathematischen Grundgebilde“, Verhandl. d. Ver. z. Beförd. d. Gewerbefleißes in Preußen, 1908, S. 410, erwähnt. Die Schwinge  $CD$  ist in  $C$  gelenkig an das Dreieck  $ABC$  angeschlossen, dessen Ecke  $A$  direkt mit dem gerade geführten Kolben gelenkig verbunden ist, während die Ecke  $B$  durch den Lenker  $BE$  mit der Preßplatte in gelenkiger Verbindung steht.

Nennt man  $S_1$  bis  $S_5$  die (in der Abbildung nicht bezeichneten) Schwerpunkte der fünf beweglichen Glieder des Getriebes,  $G_1$  bis  $G_5$  deren Gewichte, so findet man die fünf Hauptpunkte  $H_1$  bis  $H_5$  aus folgenden baryzentrischen Gleichungen:

$$G = G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + G_5,$$

$$G \cdot H_1 = G_1 \cdot S_1 + (G_2 + G_3 + G_4 + G_5) \cdot A,$$

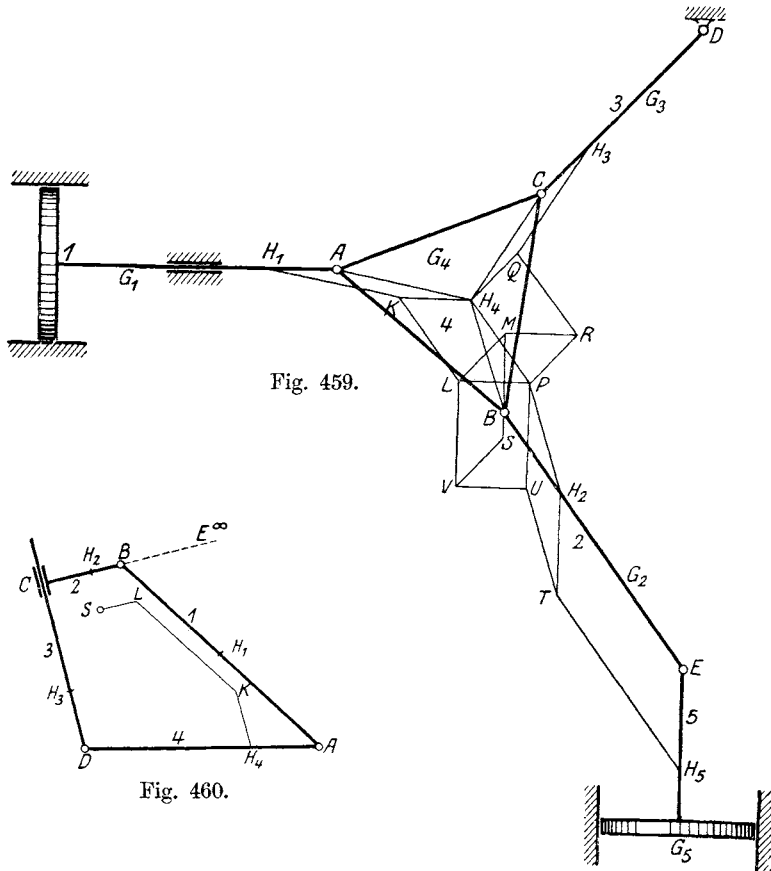
$$G \cdot H_2 = (G_1 + G_3 + G_4) \cdot B + G_2 \cdot S_2 + G_5 \cdot E,$$

$$G \cdot H_3 = G_3 \cdot S_3 + (G_1 + G_2 + G_4 + G_5) \cdot C,$$

$$G \cdot H_4 = G_1 \cdot A + (G_2 + G_5) \cdot B + G_3 \cdot C + G_4 \cdot S_4,$$

$$G \cdot H_5 = (G_1 + G_2 + G_3 + G_4) \cdot E + G_5 \cdot S_5.$$

Sodann wird das Schwerpunktsgetriebe in folgender Art gezeichnet: man konstruiert der Reihe nach die Parallelogramme  $H_1AH_4K$ ,  $H_2BH_4P$ ,  $H_4PLK$ ,  $H_3CH_4Q$ ,  $H_4QRP$ ,  $RPLM$ ,  $H_5EH_2T$ ,  $H_2TUP$ ,  $UPLV$ ,  $LVSM$ . Der Punkt  $S$  ist dann der Schwerpunkt der fünf bewegten Glieder und die zehn gelenkigen Parallelogramme führen den Schwerpunkt  $S$  auf seiner Bahn.



**232. Kinematische Ketten mit Schiebern.** Wenn die kinematische Kette außer Gelenken auch gerade Kulissen oder Schieber enthält, kann der Schwerpunkt und die Kette seiner Parallelogramme in ähnlicher Weise wie beim Gelenkviereck gefunden werden.

Das Viereck  $ABCD$  in Fig. 460 hat in  $A$ ,  $B$  und  $D$  Gelenke, in  $C$  einen geraden Schieber. Man kann ihn durch das unendlich ferne Gelenk  $E^\infty$  ersetzen, das den Gliedern 2 und 3 angehört, mit denen es durch gewichtlose Stäbe verbunden gedacht wird. Nun wird die gelenkige

Verbindung in  $E^\infty$  gelöst und von der jetzt offenen Kette werden die vier Hauptpunkte in folgender Weise gesucht.

Sind  $G_1, G_2, G_3, G_4$  die Gewichte der vier Glieder,  $S_1, S_2, S_3, S_4$  ihre Schwerpunkte, so bestehen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} G &= G_1 + G_2 + G_3 + G_4, \\ G \cdot H_1 &\equiv G_2 \cdot B + G_1 \cdot S_1 + (G_3 + G_4) \cdot A, \\ G \cdot H_2 &\equiv (G_1 + G_3 + G_4) \cdot B + G_2 \cdot S_2, \\ G \cdot H_3 &\equiv (G_1 + G_2 + G_4) \cdot D + G_3 \cdot S_3, \\ G \cdot H_4 &\equiv (G_1 + G_2) \cdot A + G_3 \cdot D + G_4 \cdot S_4. \end{aligned}$$

Nach Aufsuchung der Hauptpunkte werden die Hauptstrecken  $\overline{DH_4}, \overline{H_4K} \equiv \overline{DH_3}, \overline{KL} \equiv \overline{AH_1}$  und  $\overline{LS} \equiv \overline{BH_2}$  geometrisch addiert; der Endpunkt des Polygons ist der Schwerpunkt  $S$  der Kette.

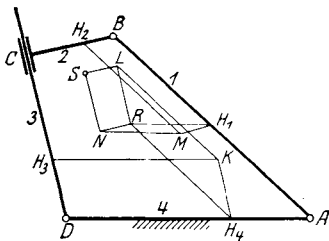


Fig. 461.

**233. Getriebe mit Schiebern.** Bei Getrieben, die einen oder mehrere Schieber aufweisen, kann bei der Schwerpunkts-ermittlung in ähnlicher Weise vorgegangen werden.

So zeigt z. B. Fig. 461 eine Kurbelschleife allgemeiner Art; hier sind die Gelenke  $A$  und  $D$  im Grundglicde 4 festgehalten,  $C$  ist der Schieber. Die Bestimmung der Hauptpunkte erfolgt wie in 232, mit dem Unterschiede, daß das

Gewicht  $G_4$  des Grundglicdes an der Bewegung nicht teilnimmt, also gleich null gesetzt werden darf. Die Abbildung zeigt auch die Kette der sechs Parallelogramme, die das Schwerpunktsgetriebe bilden und dessen Ecke  $S$  die Schwerpunktsbewegung ausführt.

**234. Die Bewegungspläne eines gelenkigen Parallelogrammes.** Es sei  $ABCD$  (Fig. 462) ein freibewegliches, gelenkiges Parallelogramm; da der Beweglichkeitsgrad nach Gleichung 113:  $x = n - 2\pi + 2 = 4$  ist, können

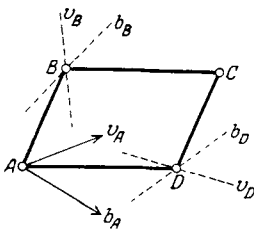


Fig. 462.

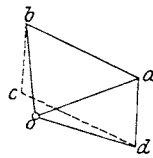


Fig. 462 a.

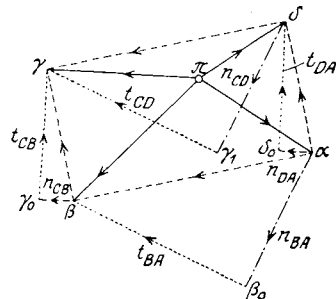


Fig. 462 b.

vier Bestimmungsstücke des Geschwindigkeitsplanes beliebig gewählt werden, also z. B.  $v_A \equiv \overline{oa}$  nach Größe und Richtung,  $v_B$  und  $v_D$  nur noch der Richtung nach.

Im Geschwindigkeitsplan (Fig. 462a) können dann die Punkte  $b$  und  $d$  ohne weiteres ermittelt werden. Aus  $bc \perp BC$ ,  $dc \perp DC$  erhält man auch den Geschwindigkeitspunkt  $c$ . Die Figur  $abcd$  im Geschwindigkeitsplan ist wieder ein Parallelogramm.

Auch für den Entwurf des Beschleunigungsplanes (Fig. 462b) genügt nach 188 die Annahme von  $b_A = \pi\alpha$  nach Größe und Richtung, sowie der Richtungen von  $b_B$  und  $b_D$ . Zu diesen ziehen wir durch  $\pi$  die Parallelen.

Die Beschleunigung  $b_B$  kann aus  $b_A$  nach der Gleichung entwickelt werden

$$\overline{b_B} = \overline{b_A} + \overline{b_{BA}},$$

worin  $b_{BA}$  die Beschleunigung von  $B$  bei dessen Drehung um  $A$  ist, also auch

$$\overline{b_B} = \overline{b_A} + \overline{n_{BA}} + \overline{t_{BA}},$$

worin  $n_{BA}$  die Normalbeschleunigung und  $t_{BA}$  die Tangentialbeschleunigung jener Drehung sind.  $n_{BA}$  kann konstruiert werden nach der Gleichung

$$\overline{n_{BA}} = \overline{\alpha\beta_0} = \frac{v_{BA}^2}{\overline{BA}} = \frac{\overline{ab}^2}{\overline{BA}} \text{ in Richtung } BA;$$

$\beta_0\beta \perp \alpha\beta_0$  trifft dann die gegebene Beschleunigungsrichtung  $\pi\beta$  im Punkte  $\beta$  und es ist

$$\overline{t_{BA}} = \overline{\beta_0\beta} = \overline{BA} \cdot \lambda_1,$$

worin  $\lambda_1$  die Winkelbeschleunigung des Stabes  $BA$  ist. Ebenso wird die Beschleunigung  $b_D$  konstruiert, indem man

$$\overline{n_{DA}} = \overline{\alpha\delta_0} = \frac{v_{DA}^2}{\overline{DA}} = \frac{\overline{ad}^2}{\overline{DA}} \text{ in Richtung } DA$$

macht und  $\delta_0\delta \perp \alpha\delta_0$  bis zum Schnitte mit  $\pi\delta$  zieht.

Die Beschleunigung  $b_C$  kann sodann aus  $b_B$  abgeleitet werden nach der Gleichung

$$\overline{b_C} = \overline{b_B} + \overline{b_{CB}} = \overline{b_C} + \overline{n_{CB}} + \overline{t_{CB}};$$

nun ist

$$\overline{n_{CB}} = \overline{\beta\gamma_0} = \frac{v_{CB}^2}{\overline{CB}} = \frac{\overline{bc}^2}{\overline{CB}} \text{ in Richtung } CB;$$

da nun  $\overline{bc} = \overline{ad}$ ,  $\overline{CB} = \overline{DA}$  ist, so wird auch

$$\overline{n_{CB}} = \overline{n_{DA}} \text{ und } \overline{\beta\gamma_0} = \overline{\alpha\delta_0}.$$

Ebenso ist aber

$$\overline{b_C} = \overline{b_D} + \overline{b_{CD}} = \overline{b_D} + \overline{n_{CD}} + \overline{t_{CD}},$$

$$\overline{n_{CD}} = \overline{\delta\gamma_1} = \frac{v_{CD}^2}{\overline{CD}} = \frac{\overline{dc}^2}{\overline{CD}} \text{ in Richtung } CD,$$

und da  $\overline{dc} = \overline{ab}$ ,  $\overline{CD} = \overline{BA}$ , so wird auch

$$\overline{n_{CD}} = \overline{n_{BA}} \text{ und } \overline{\delta\gamma_1} = \overline{\alpha\beta_0}.$$



Errichtet man nun

$$\gamma_0 \gamma \perp \beta \gamma_0, \gamma_1 \gamma \perp \delta \gamma_1,$$

so treffen sich die beiden Senkrechten in  $\gamma$  und es ist

$$t_{CD} \equiv \overline{\gamma_1 \gamma} = \overline{CD} \cdot \lambda_3,$$

wenn  $\lambda_3$  die Winkelbeschleunigung des Stabes  $CD$  ist. Nun haben aber in dem beweglichen Parallelogramme  $ABCD$  die parallelen Seiten gleiche Winkelbeschleunigung, es ist also  $\lambda_1 = \lambda_3$  und

$$t_{BA} = \overline{BA} \cdot \lambda_1 = \overline{CD} \cdot \lambda_3 = t_{CD}$$

oder  $\beta_0 \beta \equiv \overline{\gamma_1 \gamma}$ ; da aber auch  $\alpha \beta_0 \equiv \overline{\delta \gamma_1}$  ist, wie oben gezeigt wurde, so bilden die vier Beschleunigungspunkte  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  des beweglichen Parallelogrammes  $A, B, C, D$  ebenfalls ein Parallelogramm.

**235. Die Geschwindigkeit und Beschleunigung des Schwerpunktes eines Getriebes.**

1. Die Doppelkurbel (Fig. 463). Es ist die Geschwindigkeit  $v_A$  und die Beschleunigung  $b_A$  des Kurbelzapfens  $A$  gegeben (Normalfall).

Es soll das Schwerpunktsgetriebe, ferner die Geschwindigkeit und Beschleunigung des Schwerpunktes ermittelt werden.

Zunächst werden die Hauptpunkte  $H_1, H_2, H_3$  der drei beweglichen Glieder bestimmt; es soll vorausgesetzt werden, daß jede dieser Stangen eine Symmetrale besitzt, so daß Schwerpunkt und Hauptpunkt auf der Verbindungslinie der Gelenke liegen.

Sind  $G_1, G_2, G_3$  die Gewichte der drei Glieder,  $S_1, S_2, S_3$  ihre (nicht gezeichneten) Schwerpunkte, so werden die Hauptpunkte durch folgende Gleichungen gewonnen:

$$\begin{aligned} G &= G_1 + G_2 + G_3, \\ G \cdot H_1 &\equiv G_1 \cdot S_1 + (G_2 + G_3) \cdot A, \\ G \cdot H_2 &\equiv G_1 \cdot A + G_2 \cdot S_2 + G_3 \cdot B, \\ G \cdot H_3 &\equiv (G_1 + G_2) \cdot B + G_3 \cdot S_3. \end{aligned}$$

Zeichnet man nun die Parallelogramme  $H_1 A H_2 K, H_3 B H_2 L, K H_2 L S$ , so ist die letzte Ecke  $S$  der Schwerpunkt der Doppelkurbel und die Kette der drei Parallelogramme macht die Bewegung der Doppelkurbel derart mit, daß die Ecke  $S$  immer deren Schwerpunkt bleibt.

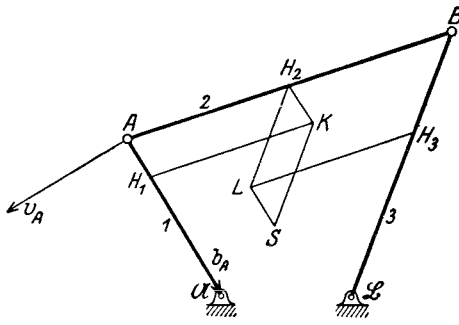


Fig. 463.

Im Geschwindigkeitsplan (Fig. 463 a) wird zunächst  $oab$  in bekannter Weise gezeichnet. Da nun die Geschwindigkeitspläne starrer Gebilde diesen ähnlich sind (vgl. 12), so bestehen hier folgende Ähnlichkeiten:

$$oh_1a \sim \mathfrak{A}H_1A, ah_2b \sim AH_2B, bh_3o \sim BH_3\mathfrak{B},$$

wodurch die Geschwindigkeitspunkte  $h_1, h_2, h_3$  der drei Hauptpunkte leicht zu ermitteln sind.

Nun wird im Geschwindigkeitsplan dieselbe Folge von Parallelogrammen konstruiert wie in der Doppelkurbel, also  $h_1ah_2k, h_3bh_2l, kh_2ls$ ; nach 234 ist die letzte Ecke  $s$  der Geschwindigkeitspunkt des

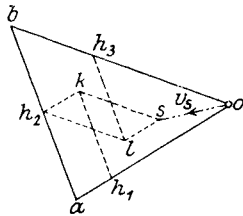


Fig. 463 a.

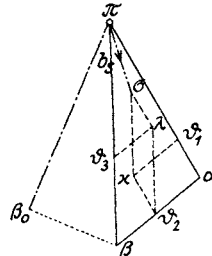


Fig. 463 b.

Schwerpunkts  $S$  und somit  $v_S \equiv os$  die gesuchte Schwerpunktschwindigkeit.

Im Beschleunigungsplan (Fig. 463 b) werden die Punkte  $a$  und  $\beta$  in bekannter Weise gefunden. Da auch die Beschleunigungspläne starrer Gebilde diesen ähnlich sind (vgl. 25), findet man die Beschleunigungspunkte  $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$  der Hauptpunkte  $H_1, H_2, H_3$  aus den Ähnlichkeiten

$$\pi\vartheta_1a \sim \mathfrak{A}H_1A, a\vartheta_2\beta \sim AH_2B, \beta\vartheta_3\pi \sim BH_3\mathfrak{B}.$$

Es erübrigt noch (nach 234) das Zeichnen der Parallelogramme in derselben Folge wie im Getriebe selbst:  $\vartheta_1a\vartheta_2\kappa, \vartheta_3\beta\vartheta_2\lambda, \kappa\vartheta_2\lambda\sigma$ ; dann

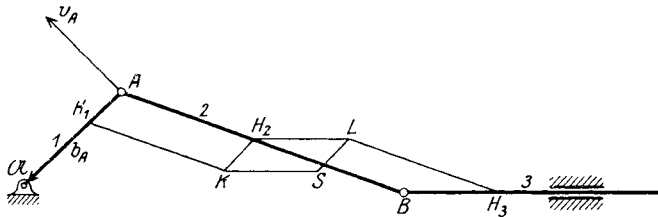


Fig. 464.

ist  $\sigma$  der Beschleunigungspunkt des Schwerpunkts  $S$  und  $b_S \equiv \pi\sigma$  dessen Beschleunigung.

2. Die Schubkurbel (Fig. 464). Die Gewichte  $G_1$  der Kurbel  $\mathfrak{A}A$ ,  $G_2$  des Lenkers  $AB$  und  $G_3$  der Kolbenstange samt Kolben seien bekannt. Sind  $S_1, S_2, S_3$  die (nicht gezeichneten) Schwerpunkte dieser drei Glieder,

so können ihre drei Hauptpunkte  $H_1, H_2, H_3$  nach den baryzentrischen Gleichungen

$$\begin{aligned}
 G &= G_1 + G_2 + G_3, \\
 G \cdot H_1 &\equiv G_1 \cdot S_1 + (G_2 + G_3) \cdot A, \\
 G \cdot H_2 &\equiv G_1 \cdot A + G_2 \cdot S_2 + G_3 \cdot B, \\
 G \cdot H_3 &\equiv (G_1 + G_2) \cdot B + G_3 \cdot S_3
 \end{aligned}$$

bestimmt werden. Sodann werden die drei Parallelogramme  $H_1AH_2K, H_3BH_2L$  und  $KH_2LS$  gezeichnet; damit ist der Schwerpunkt  $S$  der Schubkurbel und ihr Schwerpunktsgetriebe gefunden.

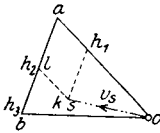


Fig. 464a.

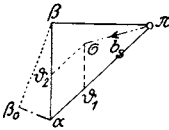


Fig. 464b.

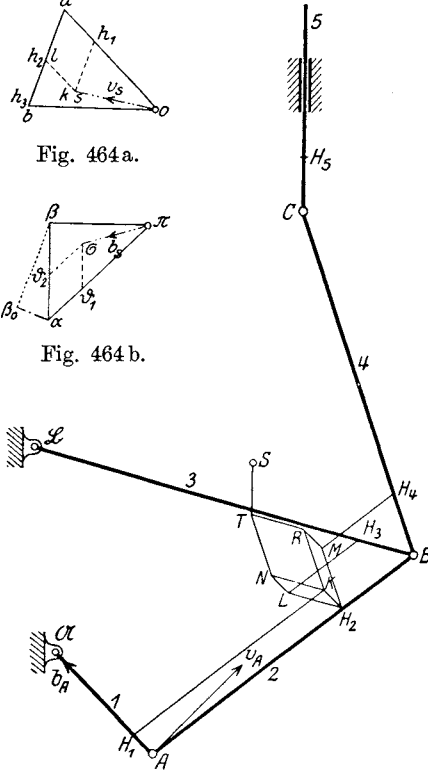


Fig. 465.

Im Geschwindigkeitsplan (Fig. 464a) wurde zunächst  $oab$  in bekannter Weise gezeichnet, sodann mit Hilfe der Ähnlichkeiten

$oh_1a \sim \mathcal{U}H_1A, ah_2b \sim AH_2B$  die Punkte  $h_1$  und  $h_2$  gefunden, endlich das Parallelogramm  $h_1ah_2k$  gezeichnet.

Da aber  $B$  und  $H_3$  gleiche Geschwindigkeiten haben, fällt  $h_3$  nach  $b$  und  $l$  nach  $h_2$ ; somit liegt  $s$  in  $k$  und es ist  $\overline{os} \parallel v_s$  die gesuchte Geschwindigkeit des Schwerpunkts  $S$ .

Die Konstruktion des Beschleunigungsplanes (Fig. 464b) wurde in der gleichen Weise vorgenommen und bedarf keiner Erklärung. Es ist  $\overline{\pi\sigma} \parallel b_s$ .

In der Zeichnung wurde die Geschwindigkeit  $v_A$  des Kurbelzapfens konstant angenommen; es ändert sich jedoch an den mitgeteilten Konstruktionen gar nichts, wenn diese Voraussetzung fallen gelassen wird; nur die

Beschleunigungspunkte  $a$  und  $\beta$  haben dann eine andere Lage.

3. Fahrzeugmaschine von Gill-Aveling. Fig. 465 zeigt das Getriebe einer vierzylindrigen Fahrzeugmaschine mit veränderlichem Hub (Bauart Gill-Aveling), das A. Nerreter in seiner 1912 erschienenen Dissertation (Technische Hochschule München) auf graphodynamischem Wege untersucht hat.

$\mathcal{A}$  ist die Kurbel mit dem festen Drehpunkt  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}B$  eine Schwinge mit dem festen Drehpunkt  $\mathcal{B}$  (der aber behufs Änderung des Hubes

von  $C$  in einer Kulissee verschoben werden kann, was hier ohne Belang ist);  $AB$  ist die Koppel,  $BC$  der Lenker, letzter ist in  $C$  mit der gerade geführten Kolbenstange und dem Kolben gelenkig verbunden.

A. Nerreter gibt nach der Methode O. Fischer's die zahlenmäßige Bestimmung der Hauptpunkte sämtlicher fünf bewegten Glieder, sowie die Zeichnung des Schwerpunktsgetriebes an. Die Bestimmung der Geschwindigkeit und Beschleunigung des Schwerpunkts soll hier auf anderem als dem von Nerreter eingeschlagenen Wege vorgenommen werden.

Ohne uns auf die zahlenmäßige Bestimmung der fünf Hauptpunkte einzulassen, sei nur erwähnt, daß sie auf folgende Weise zu finden sind. Bezeichnen  $G_1$  bis  $G_5$  die Gewichte,  $S_1$  bis  $S_5$  die (nicht gezeichneten) Schwerpunkte der fünf Glieder, so findet man deren Hauptpunkte  $H_1$  bis  $H_5$ , indem man die geschlossene kinematische Kette durch Fortnahme des ruhenden Grundgliedes in eine offene Kette umwandelt und sodann folgende Gleichungen benützt:

$$\begin{aligned} G &= G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + G_5, \\ G \cdot H_1 &= G_1 \cdot S_1 + (G_2 + G_3 + G_4 + G_5) \cdot A, \\ G \cdot H_2 &= G_1 \cdot A + G_2 \cdot S_2 + (G_3 + G_4 + G_5) \cdot B, \\ G \cdot H_3 &= G_3 \cdot S_3 + (G_1 + G_2 + G_4 + G_5) \cdot B, \\ G \cdot H_4 &= (G_1 + G_2 + G_3) \cdot B + G_4 \cdot S_4 + G_5 \cdot C, \\ G \cdot H_5 &= (G_1 + G_2 + G_3 + G_4) \cdot C + G_5 \cdot S_5. \end{aligned}$$

Der fünfte Hauptpunkt  $H_5$  kann übrigens (wie  $H_3$  in Fig. 464) weggelassen werden, da er stets vertikal über  $C$  bleibt und von  $C$  die gleiche Entfernung behält.

Man kann sich also mit dem Schwerpunkt  $T$  der ersten vier Glieder begnügen, da der Schwerpunkt  $S$  aller fünf Glieder stets vertikal über  $T$  bleibt in der konstanten Entfernung  $\overline{TS} = \overline{CH_5}$ .

Nun können die Parallelogramme des Getriebes konstruiert werden, nämlich  $H_1AH_2K$ ,  $H_2BH_3L$ ,  $H_2BH_4M$ ,  $H_2KNL$ ,  $H_2MRK$  und  $RKNT$ .

Die Konstruktion des Geschwindigkeitsplanes (Fig. 465a)  $oabc$  erfolgt in bekannter Weise. Die den Hauptpunkten entsprechenden Geschwindigkeitspunkte  $h_1$  bis  $h_4$  können wieder aus der Ähnlichkeit gefunden werden; es ist  $oh_1a \sim \mathfrak{A}H_1A$ ,  $ah_2b \sim \mathfrak{A}H_2B$ ,  $oh_3b \sim \mathfrak{B}H_3B$  und  $bh_4c \sim \mathfrak{B}H_4C$ . Der Punkt  $h_5$  liegt mit  $c$  vereinigt. Sodann wurden dieselben Parallelogramme gezeichnet wie in Fig. 465, nämlich  $h_1ah_2k$ ,  $h_2bh_3l$ ,  $h_2bh_4m$ ,  $h_2knl$ ,  $h_2mrk$  und  $rknt$ . Der Punkt  $t$  fällt mit  $s$  zusammen; es ist  $os = v_S$ .

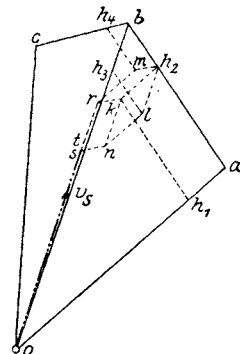


Fig. 465a.

Der Maßstab der Geschwindigkeiten wurde mit  $v_A = 2 \cdot A\mathfrak{A} = \vec{o}\vec{a}$  gewählt.

In ganz analoger Weise wurde im Beschleunigungsplan (Fig. 465 b) vorgegangen, zuerst in bekannter Weise die Punkte  $\alpha\beta\gamma$  des Planes bestimmt, sodann die Beschleunigungspunkte  $\vartheta_1$  bis  $\vartheta_4$  der Hauptpunkte aus der Ähnlichkeit ermittelt und sodann die Parallelogramme in der-

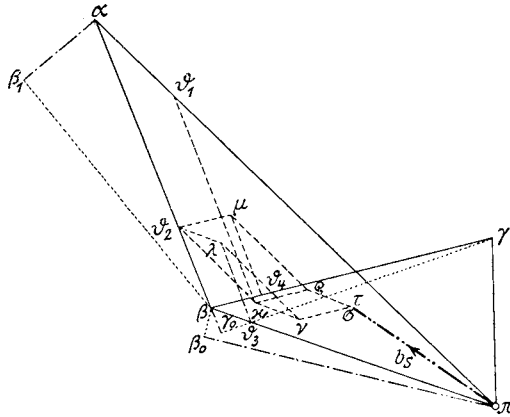


Fig. 465 b.

selben Reihenfolge gezeichnet. Schließlich, da die Punkte  $\tau$  und  $\sigma$  zusammenfallen, ist  $\vec{\pi}\vec{\sigma} \equiv \vec{b}_S$ .

Als Maßstab für die Beschleunigungen ergibt sich (Normalfall,  $b_A$  nach  $\mathfrak{A}$  gerichtet):  $b_A \equiv 4 \cdot A\mathfrak{A} \equiv \vec{\pi}\vec{a}$ .

**236. Die Geschwindigkeit und Beschleunigung des Schwerpunkts einer kinematischen Kette.** Aus den bisherigen Untersuchungen über die Lage des Schwerpunkts einer Kette und das Schwerpunktsgetriebe ergibt sich schließlich folgender Satz:

Sind  $A, B, C, \dots$  die Gelenke einer kinematischen Kette;  $a, b, c, \dots$  ihr Geschwindigkeitsplan;  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  ihr Beschleunigungsplan;  $m_A, m_B, m_C, \dots$  die statischen Ersatzmassen, so ist der Geschwindigkeitspunkt  $s$  des Schwerpunkts  $S$  der Kette der Schwerpunkt der Punkte  $a, b, c, \dots$  und der Beschleunigungspunkt  $\sigma$  von  $S$  der Schwerpunkt der Punkte  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ , wenn in diesen Punkten die Massen  $m_A, m_B, m_C, \dots$  angebracht werden.

## XXII. Das Gleichgewicht der kinematischen Kette.

**237. Anzahl der wählbaren Kräfte.** Eine kinematische Kette, die sich in ihrer Ebene frei bewegen kann, werde an beliebig vielen ihrer Gelenke von äußeren Kräften angegriffen. Wie viele derselben dürfen willkürlich angenommen werden, wenn die Kette im Gleichgewicht verharren soll?

Angenommen, es wären an  $\varepsilon$  Gelenken äußere Kräfte angebracht (Fig. 466). Jede dieser Kräfte bedarf zu ihrer Bestimmtheit zwei Stücke, nämlich die Größe und die Wirkungslinie; es sind also  $2\varepsilon$  Bestimmungsstücke erforderlich.

Da sich die Kette, wenn sie im Gleichgewicht ist, wie ein starres System verhalten wird, so müssen ihre Kräfte zunächst den drei Gleichgewichtsbedingungen der Ebene gehorchen. Fügt man die zur Starrheit fehlenden  $f$  Stäbe (vgl. 153) ein, so ist die Kette wirklich ein starres System; nur müßten dann die Spannungen in diesen fehlenden Stäben null sein. Dies liefert  $f$  weitere Bedingungsgleichungen. Somit bleiben von den  $2\varepsilon$  Bestimmungsstücken der Kräfte noch frei verfügbar

$$y = 2\varepsilon - 3 - f$$

und mit Rücksicht auf die Gleichung 116:  $f = (n - 2\pi - 1) - k$ :

$$y = 2\varepsilon - n + 2\pi + k - 2 \quad \dots \dots \dots 138)$$

worin  $k$  die Anzahl der etwa vorkommenden kreuzenden Stäbe,  $n$  die Anzahl der Glieder und  $\pi$  die Anzahl der veränderlichen Polygone nach Entfernung der gekreuzten Stäbe ist.

Die übrigen  $2\varepsilon - y$  Bestimmungsstücke der Kräfte können dann durch Konstruktion ermittelt werden.

**238. Spannungen.** Die Kräfte, welche die Kette im Gleichgewicht halten, werden in den Stäben und Scheiben Spannungen hervorrufen,

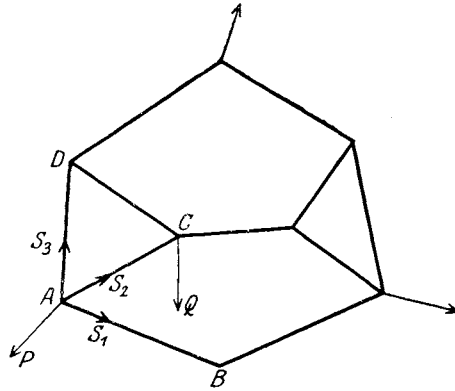


Fig. 466.

Die Spannungen der Scheiben werden in jedem Gelenk von vornherein in zwei Teile zerlegt gedacht, die in die Verbindungslinien der Gelenke fallen; während also z. B. in Fig. 466 die Spannung  $S_1$  die Richtung des Stabes  $AB$  haben muß, wird die Spannung der Scheibe  $ACD$  im Gelenk  $A$  von vornherein in die Teile  $S_2$  und  $S_3$  zerlegt, deren Resultante erst die ganze Spannung der Scheibe ist.

Jedes Gelenk der Kette muß für sich im Gleichgewicht sein; in dem Gelenk  $A$  (Fig. 466) wird z. B. die äußere Kraft  $P$  Gleichgewicht halten mit den Spannungen  $S_1 S_2 S_3$ .

Wenn in einem Gelenk  $B$ , in dem nur zwei Stäbe zusammenstoßen, keine äußere Kraft angreift, so müssen demnach die Stabspannungen null sein.

In einer kinematischen Kette wird jede Spannung doppelt vorkommen. Im folgenden soll das Gleichgewicht einiger Ketten mit Hilfe der Stabspannungen untersucht werden.

**239. Gleichgewicht eines gelenkigen Fünfecks.** Das Fünfeck  $ABCDE$  (Fig. 467) ist an seinen fünf Ecken Kräften ausgesetzt, die unter einander im Gleichgewicht sein sollen.

Es ist  $\varepsilon = 5$ ,  $n = 5$ ,  $\pi = 1$ ,  $k = 0$ ; somit  $y = 5$ .

Es bleiben also noch fünf Bestimmungsstücke der Kräfte beliebig wählbar. Gewählt wurden von den Kräften  $P_1 P_2 P_3 P_4$  die Wirkungs-

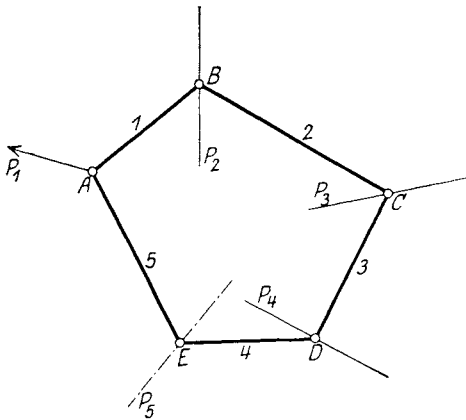


Fig. 467.

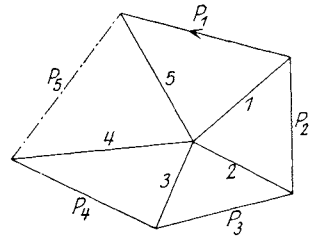


Fig. 467 a.

linien und von  $P_1$  überdies die Größe. Dann können bestimmt werden: Die Größen von  $P_2 P_3 P_4 P_5$  und von  $P_5$  überdies die Richtung.

Nennt man 1 bis 5 die in den fünf Stäben entstehenden Spannungen, so kann der Kraftplan (Fig. 467 a) in folgender Weise entwickelt werden:

$$\begin{aligned} P_1 + 1 + 5 &\equiv 0, & P_2 + 2 + 1 &\equiv 0, & P_3 + 3 + 2 &\equiv 0, & P_4 + 4 + 3 &\equiv 0, \\ & & P_5 + 4 + 5 &= 0. \end{aligned}$$

Das Kraftpolygon dieser fünf Kräfte  $P$  muß sich schließen.  $P_5$  ist die gesuchte Gleichgewichtskraft. (Vgl. L. Henneberg, „Die graphische Statik der starren Systeme“, S. 67 und 452.)

**240. Gleichgewicht einer sechsgliedrigen Kette.** Die in Fig. 468 dargestellte sechsgliedrige Kette besteht aus zwei Scheiben und vier Stäben;

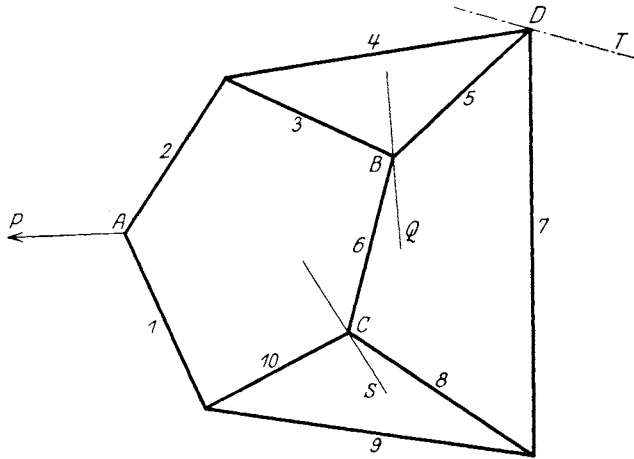


Fig. 468.

um die Spannungen in den Gelenken der Scheiben finden zu können, werden diese zweckmäßig in je drei Stäbe aufgelöst, so daß eine zehngliedrige Stabkette entsteht.

An den vier Gelenken  $A, B, C, D$  sollen Kräfte wirken, welche die Kette im Gleichgewicht erhalten. Von diesen Gelenken liegen zwei am

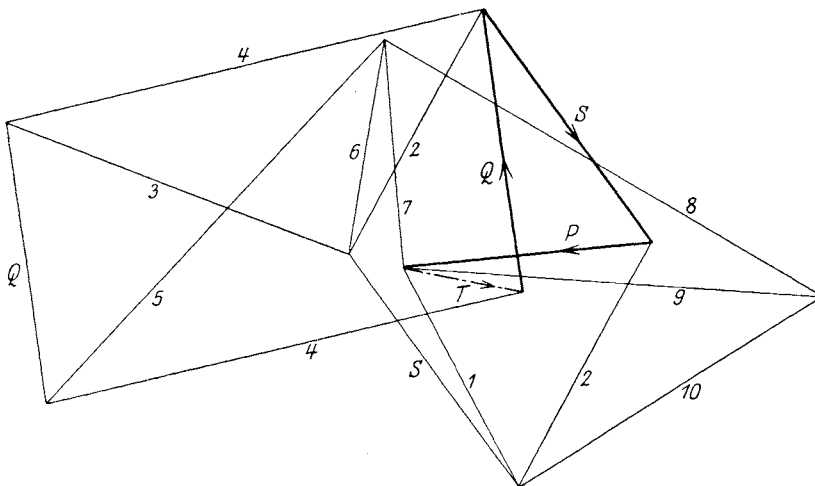


Fig. 468a.



Umfang, zwei im Innern der Kette, was, wie wir sehen werden, bei der Zeichnung des Kraftplans von Einfluß ist.

Es ist hier  $\varepsilon = 4$ ,  $n = 6$ ,  $\pi = 2$ ,  $k = 0$ , somit  $y = 4$ .

Da vier Bestimmungsstücke willkürlich wählbar sind, wurden von  $P$ ,  $Q$ ,  $S$  die Wirkungslinien und von  $P$  auch die Größe gewählt.

Im Kraftplan Fig. 468a zeichnet man maßstäblich die Kraft  $P$ , sodann die Polygone

$P + 1 + 2 \equiv 0$ ,  $1 + 9 + 10 \equiv 0$ ,  $9 + 7 + 8 \equiv 0$ ,  $10 + 8 + 6 + S \equiv 0$ ,  
womit die Kraft  $S$  gefunden ist.

Diese Kraft hat ihren Angriffspunkt  $C$  im Innern der Kette. Ihre Verlängerung würde den Stab 2 schneiden; betrachtet man diesen Schnittpunkt nach dem Vorschlage F. Schur's als idealen Knoten (vgl. auch L. Henneberg, a. a. O. S. 584), so stehen hier zwei Kräfte  $S$  und zwei Spannungen 2 im Gleichgewicht; ihm entspricht im Kraftplan das Polygon

$$S + 2 + S + 2 \equiv 0.$$

Sodann zeichnet man die Polygone

$$2 + 3 + 4 \equiv 0 \text{ und } 5 + 6 + 3 + Q \equiv 0,$$

wodurch auch die Kraft  $Q$  bestimmt ist.

Auch diese Kraft hat ihren Angriffspunkt  $B$  im Innern der Kette; ihre Verlängerung trifft den Stab 4, wo wir uns abermals einen idealen Knoten angebracht denken können. Ihm entspricht das Polygon

$$Q + 4 + Q + 4 \equiv 0.$$

Endlich liefert das Polygon

$$Q + S + P + T \equiv 0$$

die letzte Kraft  $T$  in  $D$  der Größe und Richtung nach. Auch das Polygon

$$4 + 5 + 7 + T \equiv 0$$

würde  $T$  liefern.

**241. Gleichgewicht einer achtgliedrigen Kette.** Die in Fig. 469 gezeichnete Kette (Dreispannmechanismus nach der Bezeichnung L. Burmester's) besteht aus vier Scheiben und vier Stäben. Die Scheiben wollen wir wieder wie früher in Stäbe auflösen, so daß eine aus 16 Stäben bestehende Kette entsteht.

Die Annahme der Kräfte sei die gleiche wie im vorhergehenden Beispiel; in  $A$  wirke eine bekannte Kraft  $P$ ; im Innern der Kette in  $B$  und  $C$  werden die Wirkungslinien der Kräfte  $Q$  und  $S$  beliebig gewählt; endlich sei  $D$  ein vierter Angriffspunkt. Daß diese vier Annahmen gestattet sind, geht aus Gleichung 138 hervor; es ist  $\varepsilon = 4$ ,  $n = 8$ ,  $\pi = 3$ ,  $k = 0$ , somit  $y = 4$ .

Man beginnt damit, im Kraftplan Fig. 469a die Spannung 3 beliebig anzunehmen; sodann zeichne man die Polygone

$$3 + 4 + 5 \equiv 0, 2 + 4 + 6 \equiv 0, 1 + 2 + 3 + P \equiv 0.$$

Nun kann der Kraft-Maßstab derart gewählt werden, daß die gefundene Länge  $P$  die gegebene Kraft  $P$  darstellt. Sodann zeichne man die Polygone

$$6 + 7 + 8 \equiv 0, \quad 5 + 15 + 16 \equiv 0, \quad 1 + 9 + 10 \equiv 0, \quad 9 + 11 + 13 \equiv 0,$$

$$8 + 10 + 11 + Q + 12 \equiv 0,$$

wodurch die Kraft  $Q$  bestimmt ist.

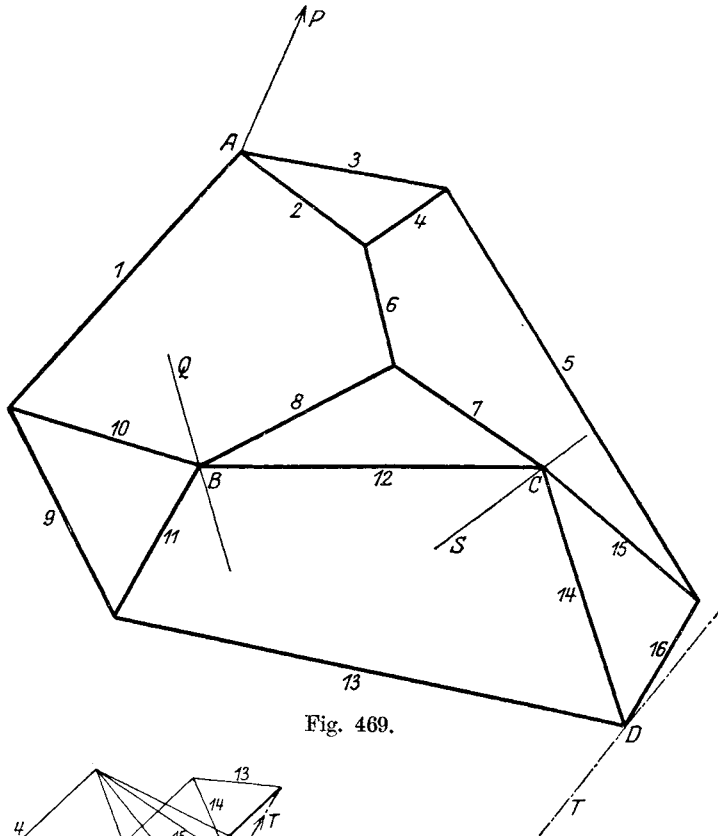


Fig. 469.

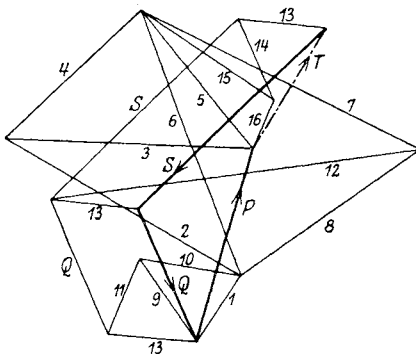


Fig. 469 a.

Endlich gibt das Polygon  $15 + 7 + 12 + S + 14 \equiv 0$  die Kraft  $S$ .

Schließt man im Kraftplan an  $P$  die beiden gefundenen Kräfte  $Q$  und  $S$  an, so wird aus

$S + Q + P + T \equiv 0$  die vierte Kraft  $T$  nach Größe und Wirkungslinie gefunden.

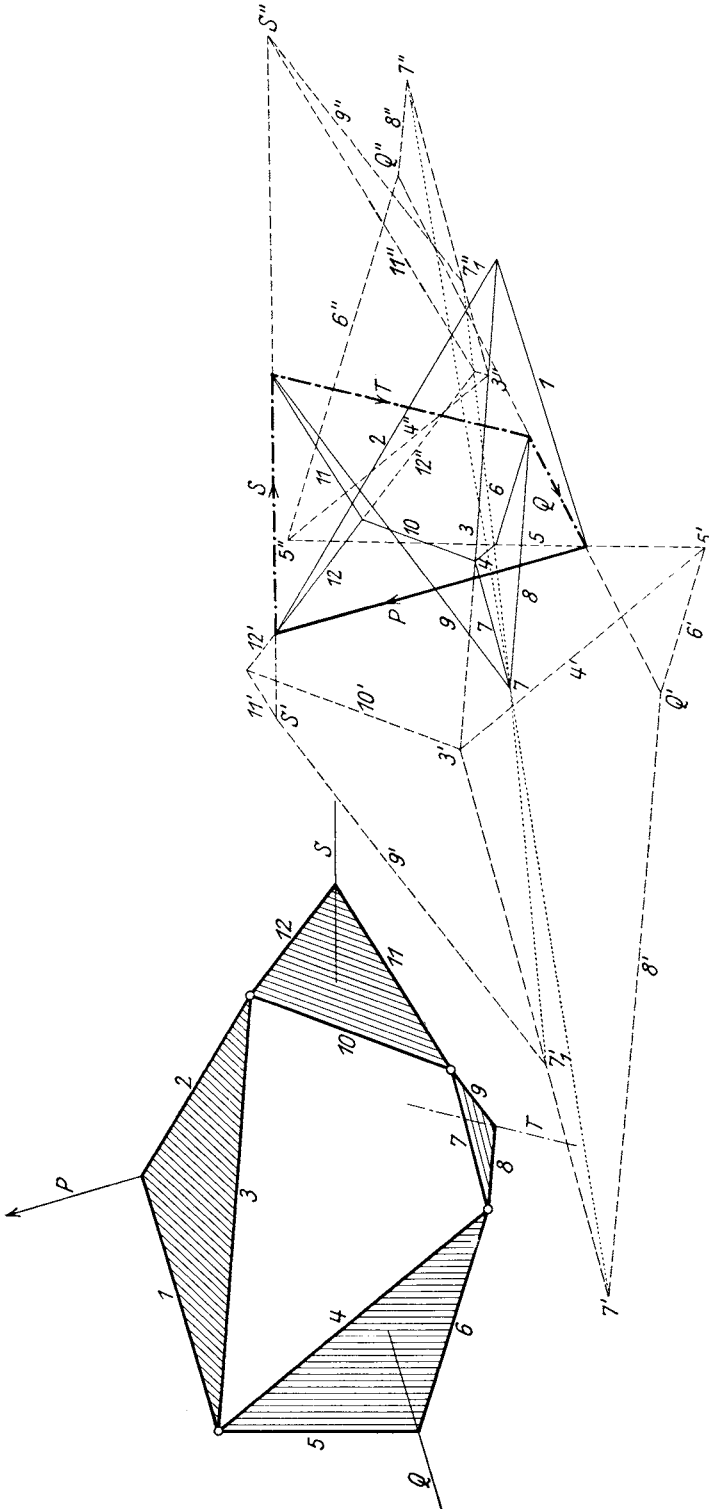


Fig. 470 und 470 a.

Den Schnittpunkten von  $Q$  und  $S$  mit dem Stabe 13 in Fig. 469 (ideale Knoten) entsprechen im Kraftplan die Polygone

$$13 + Q + 13 + Q \equiv 0, \quad 13 + S + 13 + S \equiv 0.$$

**242. Gleichgewicht eines Gelenkvierecks mit angehängten Dreiecken.** (Fig. 470.) Vier Dreiecke sind gelenkig miteinander verbunden; an den noch übrigen Ecken greifen Kräfte an. Wann stehen diese im Gleichgewicht?

Es ist  $\varepsilon = 4$ ,  $n = 4$ ,  $\pi = 1$ ,  $k = 0$ , also  $y = 4$ .

Angenommen wurde von  $P$  Größe und Wirkungslinie, von  $Q$  und  $S$  die Wirkungslinien. Zu bestimmen sind die Größen von  $Q$  und  $S$ , sowie die Gleichgewichtskraft  $T$  nach Größe und Wirkungslinie.

Im Kraftplan (Fig. 470a) wurde das Polygon

$$P + 1 + 2 \equiv 0$$

gezeichnet und durch den Schnittpunkt der beiden letzten die Parallele zum Stabe 3 gezogen. Auf ihr wurde zunächst die Spannung  $3'$  beliebig angenommen und sodann folgende Polygone gezeichnet:

$$1 + 3' + 4' + 5' \equiv 0, \quad 5' + 6' + Q' \equiv 0, \quad 4' + 6' + 8' + 7' \equiv 0;$$

ferner

$$2 + 3' + 10' + 12' \equiv 0, \quad 12' + S' + 11' \equiv 0, \quad 11' + 10' + 7_1' + 9' \equiv 0.$$

Würden die so gefundenen Spannungen  $7'$  und  $7_1'$  gleiche Größe haben, so wäre  $3'$  richtig gewählt; da dies nicht zutreffen wird, wählt man auf 3 noch einen anderen beliebigen Punkt  $3''$  und führt mit ihm die Konstruktion der sechs letzten Polygone nochmals durch; man erhält die Punkte  $7''$  und  $7_1''$ , die auch nicht zusammenfallen werden. Verbindet man jetzt  $7'$  mit  $7''$  und  $7_1'$  mit  $7_1''$ , so gibt der Schnittpunkt dieser Verbindungslinien die richtige Spannung  $7$  an, die parallel zum Stab 7 bis zur Spannung 3 reicht. Die übrigen richtigen Spannungen 4 bis 12 sind ebenso wie die richtigen Gleichgewichtskräfte  $Q$  und  $S$  durch einfaches Ziehen von Parallelen zu finden. Das Polygon

$$P + S + T + Q \equiv 0$$

gibt schließlich auch die letzte Kraft  $T$  nach Größe und Wirkungslinie.

**243. Gleichgewicht einer zehngliedrigen Kette.** Fig. 471 zeigt eine Kette, die von O. Mohr in seiner Abhandlung: „Beiträge zur Geometrie der Bewegung“, Zeitschr. f. Math. u. Physik, 1903 (auch „Abhandlungen aus dem Gebiete der techn. Mechanik“, S. 138) angegeben wurde. Sie besteht aus vier Scheiben und sechs Stäben und wurde aus erwähnten Gründen in 18 Stäbe aufgelöst.

An drei im Innern der Kette liegenden Gelenken  $A$ ,  $B$ ,  $C$  sollen Kräfte angreifen, die im Gleichgewichte stehen. Wir können 16 oder 18 als kreuzenden Stab ansehen; es ist dann

$\varepsilon = 3$ ,  $n = 9$ ,  $\pi = 3$  (nach Wegnahme des kreuzenden Stabes),  $k = 1$  und nach Gleichung 138:

$$y = 2\varepsilon - n + 2\pi + k - 2 = 2.$$

Es kann also z. B. die Kraft  $P$  nach Größe und Wirkungslinie angenommen und daraus die beiden anderen Kräfte  $Q$  und  $S$  bestimmt werden.

Man beginnt im Kraftplan Fig. 471a damit die Spannung 1 beliebig anzunehmen und zeichnet sodann folgende Polygone:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 13 &\equiv 0, & 13 + 11 + 12 &\equiv 0, & 12 + 16 + 10 &\equiv 0, \\ & & 10 + 11 + 8 + 9 &\equiv 0. \end{aligned}$$

Zieht man durch den Schnittpunkt von 8 und 9 im Kraftplan die Parallele zum Stab 7, so wird auf ihr der Endpunkt der Spannung 7

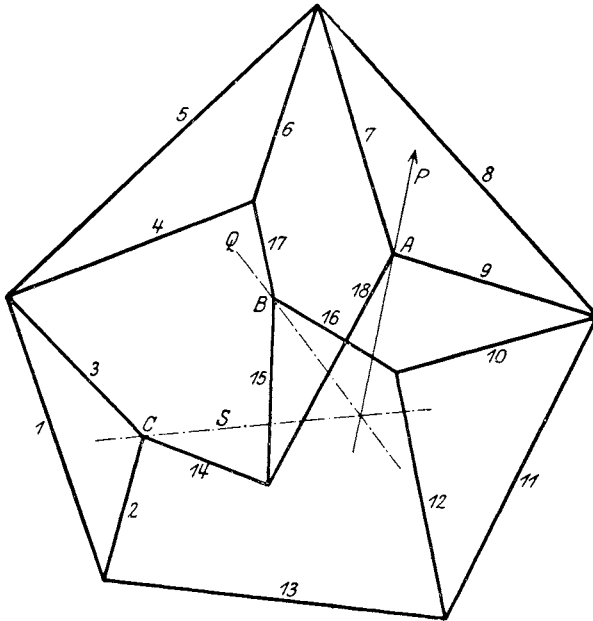


Fig. 471.

liegen müssen; denn da der Kraftplan eine reziproke Figur der Kette ist, wird dem Dreieck 7, 8, 9 der Kette der Schnittpunkt der gleichnamigen Spannungen im Kraftplan entsprechen.

Aus dem gleichen Grunde wird die Spannung 3 durch den Schnittpunkt der Spannungen 1 und 2 gehen, entsprechend dem Dreieck 1, 2, 3 der Kette.

Nimmt man nun die Spannung  $3'$  auf 3 beliebig an, so kann man die Polygone

$$1 + 3' + 4' + 5' \equiv 0, \quad 4' + 6' + 17' \equiv 0$$

konstruieren; der Schnittpunkt der beiden letzten Hilfsspannungen sei  $a$ .

Macht man jetzt für die Spannung 3 eine andere Annahme  $3''$  und konstruiert die Polygone

$$1 + 3'' + 4'' + 5'' \equiv 0, \quad 4'' + 6'' + 17'' \equiv 0,$$

so erhält man im Schnitte der beiden letzten Hilfsspannungen den Punkt  $b$ .

Da die auf 3 und 5 so entstehenden Punktreihen ähnlich sind, werden auch die Parallelbüschel  $4'4'' \dots, 6'6'' \dots, 17'17'' \dots$  ähnlich sein;

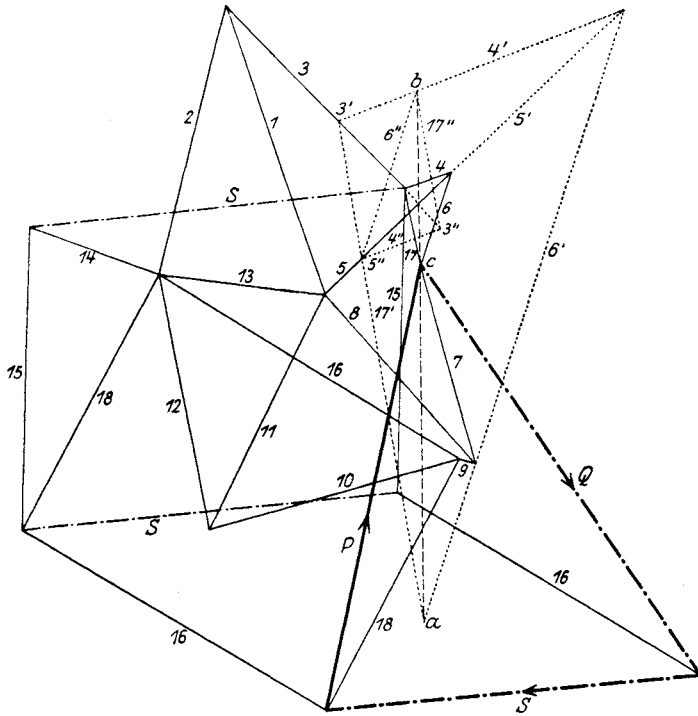


Fig. 471 a.

die beiden letzten werden sich in der Punktreihe  $ab \dots$  schneiden. Im Punkt  $c$  schneidet diese Punktreihe die Spannungsgerade 7 und gibt damit die richtige Größe dieser Spannung; dann können auch, an  $c$  anschließend, die richtigen Spannungen 6, 17, 4, 3, 5 durch Parallelenziehen gezeichnet werden.

Nun zeichnet man das Polygon

$$7 + 9 + 18 + P \equiv 0$$

und wählt jetzt erst den Kraft-Maßstab derart, daß die Länge  $P$ , die wir soeben aus dem Polygon fanden, die gegebene Kraft  $P$  darstellt.

Dem Schnittpunkt der sich kreuzenden Stäbe 16 und 18 (idealer Knoten) entspricht im Kraftplan das Polygon

$$16 + 18 + 16 + 18 = 0,$$

woraus sich auch das Polygon

$$18 + 15 + 14 = 0$$

ergibt. Ferner ergibt sich aus dem Polygon

$$3 + 2 + 14 + S = 0$$

die Kraft  $S$  in  $C$  und aus dem Polygon

$$16 + 15 + 17 + Q = 0$$

die Kraft  $Q$  in  $B$ .

Schließlich muß im Kraftplan

$$P + Q + S = 0$$

sein und in der Kette müssen die Richtungen dieser drei Kräfte durch einen Punkt gehen, was als Probe für die Richtigkeit der Zeichnung dienen kann.

**244. Das Gleichgewicht des Getriebes.** Wenn wir ein beliebiges Glied einer kinematischen Kette festhalten, so entsteht ein Getriebe; das

festgehaltene Glied haben wir Grundglied genannt.

Fig. 472 stellt eine Kette dar, von der das schraffierte Glied  $\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{D}$  festgehalten ist. In den Gelenken  $A, B, C, D$  dieses Getriebes mögen die gegebenen Kräfte  $P, Q, S, T$  wirken; welche Kraft  $R$  müßte man in einem fünften Gelenk  $E$  anbringen, damit das Getriebe im Gleichgewicht bleibt?

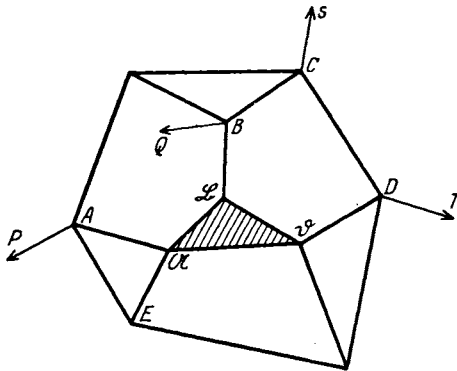


Fig. 472.

Wir haben diese Frage schon bei der Behandlung des

geführten Systems studiert (vgl. 131) und die Kraft  $R$  die Gleichgewichtskraft genannt. Zunächst soll wieder festgestellt werden, wie viele der Kräfte man beliebig wählen darf.

Die Anzahl der Gelenke, die von den Kräften  $P, Q, S, T, \dots, R$  angegriffen werden, sei  $\kappa$ ; ferner  $a$  die Anzahl der Auflagergelenke des Grundgliedes  $\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{D} \dots$ . Dann ist  $\varepsilon = a + \kappa$  die Anzahl der äußeren Kräfte des Getriebes, da die Auflagergelenke Auflagerdrücke an das Getriebe abgeben.

Da das Grundglied für sich im Gleichgewicht sein muß, so werden zwischen den  $2a$  Bestimmungsstücken seiner Kräfte 3 Bedingungs-

gleichungen zu erfüllen sein; es bleiben also noch  $2\alpha - 3$  Bestimmungsstücke frei wählbar.

Von der kinematischen Kette sind willkürlich wählbar

$$y = 2\varepsilon - 3 - f$$

und da das Getriebe zwangsläufig, also  $f = 1$  ist,

$$y = 2\varepsilon - 4$$

Bestimmungsstücke der Kräfte.

Von den Kräften  $P, Q, S, T, \dots R$  bleiben also verfügbar

$$y_1 = y - (2\alpha - 3) = 2\kappa - 1,$$

d. h. es können alle Kräfte bis auf eine (die Gleichgewichtskraft  $R$ ) vollkommen beliebig angenommen werden und selbst von  $R$  darf entweder die Größe oder die Wirkungslinie gewählt werden.

**245. Gleichgewicht des Kurbelgetriebes.** In Fig. 473 ist  $\mathcal{C}\mathcal{C}$  das festgehaltene Grundglied 0 des Kurbelvierecks, 4 und 5 die Kurbeln,  $AEC$  die Koppel. Es ist also  $\alpha = 2$  und es kann  $2\alpha - 3 = 1$  Bestimmungsstück für die beiden Auflagerdrücke  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{E}$  angenommen werden, also z. B. von  $\mathcal{C}$  die Wirkungslinie.

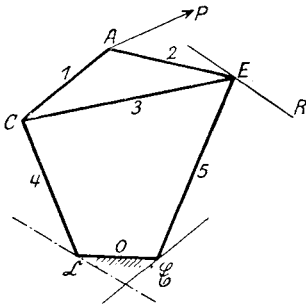


Fig. 473.

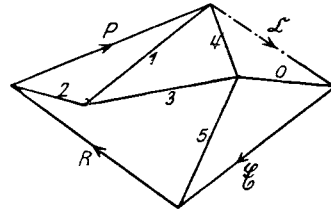


Fig. 473 a.

Die Kraft  $P$  in  $A$  ist gegeben; von der Gleichgewichtskraft  $R$  in  $E$  wollen wir ebenfalls die Wirkungslinie annehmen. Um die Größe dieser Kraft zu bestimmen, zeichnen wir im Kraftplan Fig. 473a die Polygone

$$P + 1 + 2 \equiv 0, \quad 1 + 4 + 3 \equiv 0, \quad 2 + 3 + 5 + R \equiv 0$$

und um die Auflagerdrücke  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{E}$  zu ermitteln:

$$5 + 0 + \mathcal{C} \equiv 0, \quad 0 + 4 + \mathcal{E} \equiv 0.$$

Das Polygon der äußeren Kräfte muß sich schließen:

$$P + \mathcal{C} + \mathcal{E} + R \equiv 0.$$

**246. Die Energie des Pröll'schen Regulators.** Man versteht unter der Energie eines Regulators die Kraft, die bei vertikal stehender Spindel und abgekuppeltem Stellung nötig wäre, um die an der Spindel



verschiebbare Muffe zu heben (Fig. 474). Die Energie ist also nichts anderes als die Gleichgewichtskraft im Gelenke  $E$ .

$ACE$  ist ein bei  $C$  drehbarer, steifer Winkelhebel, an dessen Ende  $A$  das Gewicht  $P$  der Schwungmasse sitzt.  $\mathcal{C}$  ist ein mit der Spindel fest verbundenes Gelenk,  $E$  das Gelenk an der Muffe.

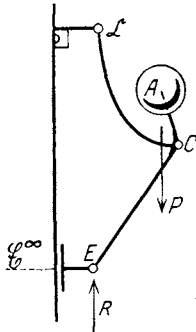


Fig. 474.

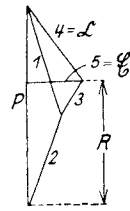


Fig. 474a.

Die Aufgabe, die Gleichgewichtskraft  $R$  zu finden, ist auf die frühere 245 zurückzuführen. Das Gelenk  $\mathcal{C}$  des Grundgliedes ist unendlich fern. Fig. 474a stellt den Kraftplan dar. Um die Energie des Regulators zu bekommen, müßte  $R$  noch um die Belastung der Muffe vergrößert werden.

**247. Gleichgewicht eines achtgliedrigen Getriebes.** Das in Fig. 475 dargestellte, aus vier Dreiecksgliedern und vier Stangen bestehende Getriebe wurde von M. Grübler in seiner auf Seite 241 angeführten Abhandlung

angegeben.  $\mathcal{CDE}$  sei das festgehaltene Grundglied. Das Getriebe werde in  $A$  von einer bekannten Kraft  $P$  beansprucht; man soll die

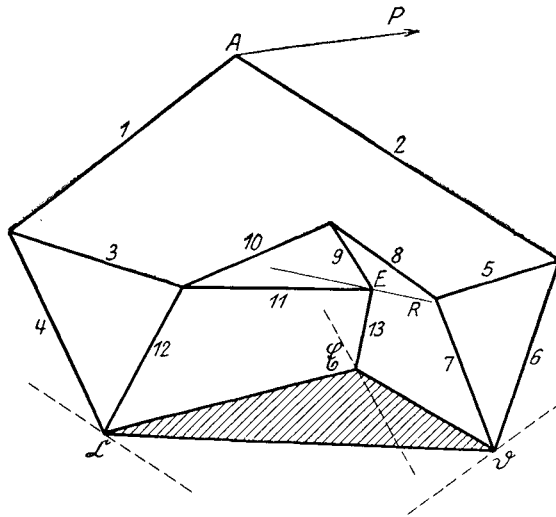


Fig. 475.

in  $E$  in gegebener Richtung anzubringende Gleichgewichtskraft  $R$ , sowie die Auflagerkräfte in  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{D}$  und  $\mathcal{E}$  ermitteln.

Man wird im Kraftplan (Fig. 475a) mit der maßstäblich aufgetragenen Kraft  $P$  beginnen und sodann der Reihe nach die Polygone zeichnen:

$P + 1 + 2 \equiv 0, 1 + 3 + 4 \equiv 0, 2 + 5 + 6 \equiv 0, 5 + 7 + 8 \equiv 0,$   
 $8 + 9 + 10 \equiv 0, 3 + 10 + 11 + 12 \equiv 0, 9 + 11 + 13 + R \equiv 0,$   
 wodurch die Gleichgewichtskraft  $R$  bestimmt ist.

Die in den Gelenken  $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}$  des Grundgliedes angreifenden Spannungen 4, 12, 13, 7, 6 sind als äußere Kräfte des Getriebes anzusehen,

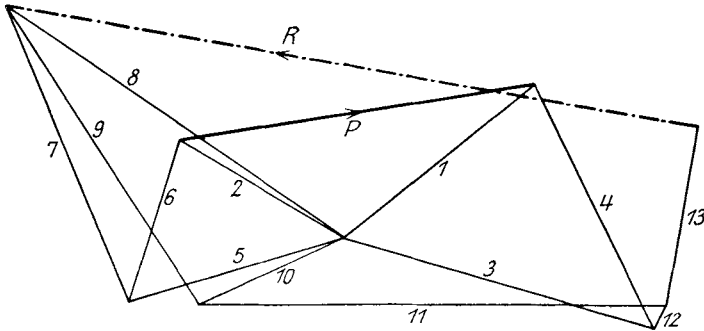


Fig. 475a.

die mit den Kräften  $P$  und  $R$  ein Gleichgewichtssystem bilden; es ist demnach im Kraftplan

$$P + 4 + 12 + 13 + R + 7 + 6 \equiv 0.$$

Von den Auflagerdrücken  $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}$  dürfen  $2a - 3 = 3$  Stücke beliebig angenommen werden. Gewählt wurden die Wirkungslinien der drei Drücke.

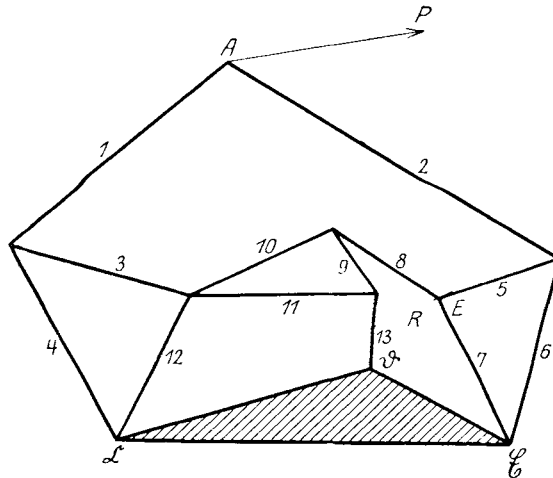


Fig. 476.

Um die Größen dieser Drücke zu finden, ist schließlich noch die Resultante aus  $P$  und  $R$  zu bilden und sodann nach den drei Richtungen von  $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{E}$  zu zerlegen, was auf eine bekannte Aufgabe zurückführt.

In Fig. 476 wurde das gleiche Getriebe mit anderem Angriffspunkt  $E$  der Gleichgewichtskraft  $R$  angenommen. Um diese, deren Wirkungslinie gegeben ist, der Größe nach zu finden, wurden im Kraftplan (Fig. 476a) zunächst wie früher die Spannungen 1, 2, 3, 4, 5, 6 gesucht. Sodann zieht man durch den Punkt  $a$  eine Parallele zum Stab 8 und nimmt dessen Spannung mit  $\overline{ab} = 8'$  beliebig an.

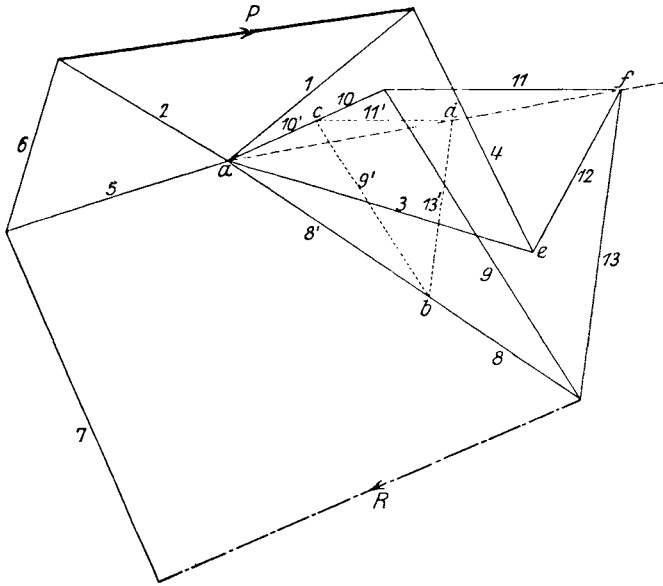


Fig. 476a.

Hierauf zeichnet man die Polygone

$$8' + 9' + 10' = 0, \quad 9' + 11' + 13' = 0,$$

wodurch der Punkt  $d$  gewonnen wird.

Bei Veränderung der Spannung  $8'$  beschreibt  $d$  die Gerade  $ad$ . Zieht man also durch  $e$  die Parallele zum Stab 12, so schneidet sie  $ad$  in einem Punkte  $f$ , der die Spannungen 11, 12 und 13 begrenzt. Damit sind aber auch die Spannungen 8, 9 und 10, sowie 7 und die Gleichgewichtskraft  $R$  gefunden.

Auch hier müssen die Kräfte  $P$  und  $R$  mit den Auflagerdrücken ein Gleichgewichtssystem bilden:

$$P + 4 + 12 + 13 + R + 7 + 6 = 0.$$

Die Ergebnisse dieses Abschnittes wurden veröffentlicht in F. Wittenbauer, „Das Gleichgewicht ebener kinematischer Ketten“, Festschrift zu O. Mohrs achtzigstem Geburtstag, 1916.

**248. Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen.** Außer durch Ermittlung der Stabspannungen kann man noch auf einem anderen Wege

zu der Gleichgewichtskraft einer Kette gelangen. Diesen Weg, der durch das Prinzip der virtuellen Verschiebungen geboten wird, haben wir schon gelegentlich der Kraftreduktion eines geführten Systems kennen gelernt (vgl. 137); wir wollen ihn nun auf die Kette ausdehnen.

In den Gelenken  $A, B, \dots E$  einer kinematischen Kette (Fig. 477) würden die Kräfte  $P, Q, \dots R$  angreifen; die Kräfte würden die Kette im Gleichgewicht halten.

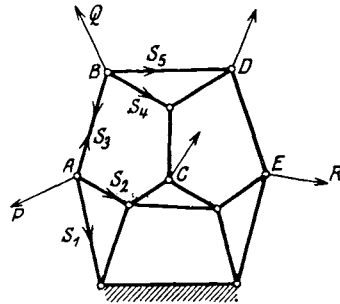


Fig. 477.

Es ist ohne weiteres zuzugeben, daß dann jedes Gelenk für sich im Gleichgewicht sein wird, so z. B. wird im Gelenk  $A$  die Kraft  $P$  mit den Spannungen  $S_1, S_2, S_3$  Gleichgewicht halten; die Mittelkraft aller dieser in  $A$  angreifenden Kräfte ist also null.

Man erteile nun der Kette eine Bewegung, bei welcher kein einziges Gelenk gelöst wird; die Gelenke gelangen in sehr wenig entfernte Nachbarlagen. Ist z. B.  $\delta a$  der kleine Weg des Gelenkes  $A$ , so ist die Arbeit der Resultante der in  $A$  angreifenden Kräfte null, weil die Resultante selbst null ist. Da aber die Arbeit einer Kraft gleich der algebraischen Summe der Arbeiten ihrer Teile ist, so wird auch diese Summe null werden.

Bezeichnet man mit  $\delta p$  den kleinen Weg des Gelenkes  $A$ , auf die Richtung der Kraft  $P$  rechtwinklig projiziert, ebenso  $\delta s_1, \delta s_2, \delta s_3$  die Projektionen von  $\delta a$  auf die Richtungen von  $S_1, S_2, S_3$ , so wird also die Gleichung bestehen

$$P \cdot \delta p + S_1 \cdot \delta s_1 + S_2 \cdot \delta s_2 + S_3 \cdot \delta s_3 = 0.$$

Im Gelenk  $B$  wird die äußere Kraft  $Q$  im Gleichgewicht stehen mit den Spannungen  $S_3, S_4, S_5$ ; bezeichnet man die Projektionen der kleinen Verschiebung  $\delta b$  von  $B$  auf die Kräfte entsprechend mit  $\delta q, \delta s_3', \delta s_4, \delta s_5$ , so wird ebenso die Gleichung gelten

$$Q \cdot \delta q + S_3 \cdot \delta s_3' + S_4 \cdot \delta s_4 + S_5 \cdot \delta s_5 = 0.$$

Stellt man diese Gleichung für jedes Gelenk auf und addiert sämtliche Gleichungen, so entsteht zunächst die Summe

$$P \cdot \delta p + Q \cdot \delta q + \dots$$

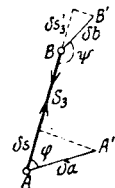
und im übrigen Glieder von der Form

$$S_n (\delta s_n + \delta s_n').$$

Es ist also

$$P \cdot \delta p + Q \cdot \delta q + \dots + \sum [S_n (\delta s_n + \delta s_n')] = 0.$$

In Fig. 477a ist der Stab  $AB$  mit seinen beiden Fig. 477a. Spannungen  $S_3$  besonders gezeichnet worden; diese haben in  $A$  und  $B$  entgegengesetzte Richtungen. Die kleinen Verschiebungen von  $A$  und  $B$  seien  $\delta a$  und  $\delta b$ ,  $\varphi$  und  $\psi$  ihre Neigungen zum Stabe.



Es ist  $\delta s_3 = \delta a \cdot \cos \varphi$ ,  $\delta s_3' = \delta b \cdot \cos \psi$   
 und da die Länge des starren Stabes  $AB$  unveränderlich ist:

$$\delta a \cdot \cos \varphi = \delta b \cdot \cos (180 - \psi),$$

somit  $\delta s_3 + \delta s_3' = 0$

und aus diesem Grunde auch

$$\Sigma [S_n (\delta s_n + \delta s_n')] = 0.$$

Es bleibt also die Gleichung übrig:

$$P \cdot \delta p + Q \cdot \delta q + \dots + R \cdot \delta r = 0 \quad \dots \quad 139)$$

die in Worten besagt:

Wenn eine kinematische Kette im Gleichgewicht ist, so werden ihre äußeren Kräfte bei einer kleinen Verschiebung und Formänderung die Gesamtarbeit null leisten.

Dabei ist vorausgesetzt, daß die Glieder der Kette starr sind und bei der Verschiebung der Kette keines ihrer Gelenke gelöst wird. Dieser Satz ist die Anwendung eines der wichtigsten und fruchtbarsten Prinzipien der Mechanik.

Wirkt eine einzige Kraft  $P$  auf das Getriebe, so ist nach Gleichung 139 die Gleichgewichtskraft

$$R = - P \cdot \frac{\delta p}{\delta r};$$

nennt man  $\delta a$  und  $\delta e$  die kleinen Verschiebungen der Punkte  $A$  und  $E$ ,  $\alpha$  und  $\varepsilon$  ihre Winkel mit  $P$  und  $R$ , so ist

$$\delta p = \delta a \cdot \cos \alpha, \quad \delta r = \delta e \cdot \cos \varepsilon$$

und  $R \cos \varepsilon = - P \cos \alpha \cdot \frac{\delta a}{\delta e}$

oder auch  $R \cos \varepsilon = - P' \cdot \frac{v_A}{v_E}$ ,

wenn  $P'$  die Projektion von  $P$  auf  $v_A$  ist.

Da nun die Geschwindigkeit der virtuellen Verschiebung willkürlich ist, kann maßstäblich  $v^E = P'$  gewählt werden; dann ist aber

$$R \cos \varepsilon = - v_A.$$

Wir werden von dieser Beziehung sofort Gebrauch machen.

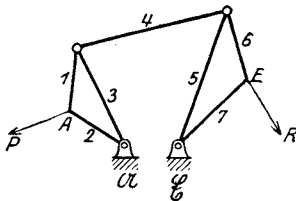


Fig. 478.

In Fig. 478 wurde das in Fig. 473 bereits behandelte Kurbelgetriebe in anderer Anordnung und mit anderem Kraftangriff gezeichnet.

Es soll die in  $E$  notwendige Gleichgewichtskraft  $R$  gesucht werden, wenn deren Wirkungslinie gegeben ist.

Die Aufsuchung von  $R$  mit Hilfe des Kraftplans ist in Fig. 478a dargestellt; sie bedarf nach dem Bisherigen keiner weiteren Erläuterung.

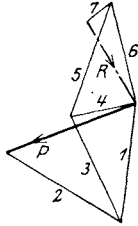


Fig. 478 a.

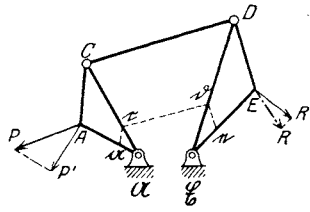


Fig. 478 b.

In Fig. 478b ist die Lösung mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verschiebungen durchgeführt. Es wurde  $P$  auf die Bewegungsrichtung von  $A$  nach  $P'$  projiziert, sodann  $P' = v_E = \overline{Ee}$  als gedrehte Geschwindigkeit aufgetragen,  $e\delta \parallel ED$ ,  $\delta c \parallel DC$ ,  $ca \parallel CA$  gezogen; dann ist  $\overline{Aa} = v_A$  und da nach früher  $v_A = -R \cos \varepsilon$  sein soll, wurde  $\overline{Aa}$  von  $E$  aus gegen die Bewegungsrichtung von  $E$  aufgetragen und daraus durch Projizieren  $R$  gefunden.

In Fig. 479 wurde in gleicher Weise die Konstruktion der Gleichgewichtskraft  $R$  für eine Kombination von drei Kurbelgetrieben durchgeführt. Man beginnt hierbei mit  $P = \overline{Ee}$  ( $P \perp A\mathcal{A}$  vorausgesetzt) und findet schließlich  $R = \overline{Aa}$  ( $R \perp E\mathcal{E}$ ). Dieses Beispiel findet sich bereits in R. Proell, Graphische Dynamik, S. 157.

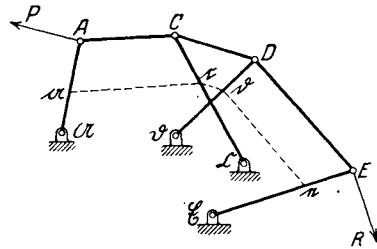


Fig. 479.

249. Aufgaben.

114. Die Kräfte  $P$  und  $R$ , die an einem Kurbelgetriebe  $\mathcal{ACDE}$  (Fig. 480) im Gleichgewicht stehen, können durch folgende Konstruktion gefunden werden:

Sind  $A$  und  $E$  die Angriffspunkte der beiden Kräfte, so suche man den Schnitt  $c$  der Kraft  $P$  mit  $C\mathcal{A}$ , ziehe  $Oc$  bis zum Schnitt  $c'$  mit  $\mathcal{E}c' \parallel \mathcal{A}c$ . Verschiebt man nun  $P$  bis  $P'$

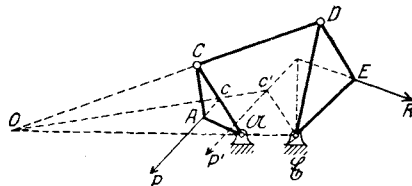


Fig. 480.

durch  $c'$ , so wird die Resultante von  $P' = P$  und  $R$  durch  $\mathcal{E}$  gehen, woraus  $R$  leicht ermittelt werden kann. Man suche den

Beweis mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verschiebungen zu erbringen. (A. B. W. Kennedy, Proceedings of the London

Mathematical Society, Vol. IX; auch F. Reuleaux, Theoretische Kinematik, II. Band, S. 441.)

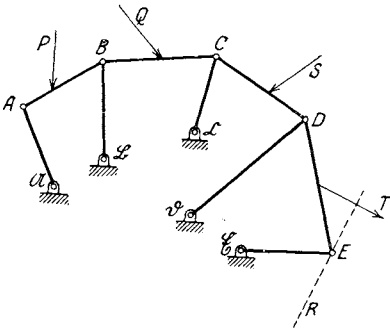


Fig. 481.

115. Das Getriebe Fig. 481 wird von vier Kräften  $P$ ,  $Q$ ,  $S$  und  $T$  angegriffen; man suche die Gleichgewichtskraft in  $E$ , wenn deren Richtung gegeben ist. (R. Pröll, Graphische Dynamik, Tafel VII, Fig. 64.)

116. Bei der Ziehpresse von F. Mc Dowell Leavitt (Fig. 482) wird das Blech  $c$  zwischen dem feststehenden Ring  $e$  und die niedergehende Matrize  $b$  festgeklemmt und sodann vom Stempel  $a$  in  $b$  hineingepreßt. Damit der Druck von  $a$  auf das Gestell übertragen wird, ist das Querhaupt  $E$  mittels des Kniegelenkes  $g, h$  und des Lenkers  $k$  mit dem Kolben  $f$  verbunden. Wenn die Kolbenkraft  $P$  gegeben ist, welche Kraft  $R$  wird ihr in  $E$  Gleichgewicht halten?

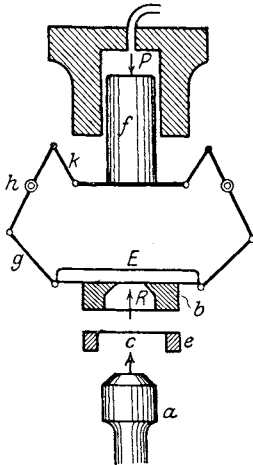


Fig. 482.

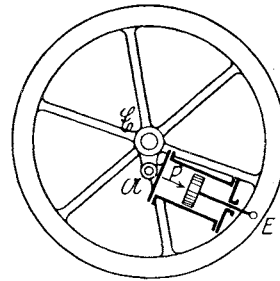


Fig. 483.

117. Das um das feste Lager  $\mathcal{C}$  drehbare Rad (Fig. 483) ist an seinem Umfang in  $E$  an die Kolbenstange eines Dampfzylinders gelenkig angeschlossen, der sich um den festen Punkt  $\mathcal{A}$  dreht. Welche Kraft  $R$  hält in  $E$  in Richtung der Bewegung Gleichgewicht mit dem Drucke  $P$  auf den Kolben? (Dampf-Maschine zum Ruderradantrieb von Ward 1821.)

118. Bei dem Luftpresser von Owen (Engineering 1881) tritt das in Fig. 484 gezeichnete Getriebe auf, das eine gekoppelte gleichschenklige Schubkurbel  $\mathcal{U}ABC$  aufweist (vgl. Fig. 520).

Wenn die Kolbenkraft  $P$  gegeben ist, soll die am Kurbelzapfen  $E$  erforderliche Gleichgewichtskraft  $R$  gesucht werden.

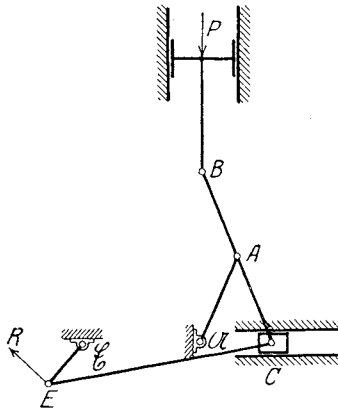


Fig. 484.

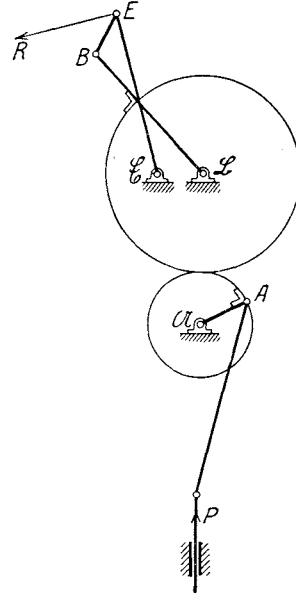


Fig. 485.

119. Mit Hilfe einer Schubkurbel (Fig. 485) treibt die Kraft  $P$  ein Paar Zahnräder, von denen das größere ein Antiparallellkurbelgetriebe  $\mathcal{B}BE\mathcal{G}$  in drehende Bewegung setzt. Man soll die Gleichgewichtskraft  $R$  in  $E$  suchen. (R. Pröll, Graphische Dynamik, Tafel VIII, Fig. 71.)



### XXIII. Die reduzierte Kraft des Getriebes.

**250. Größe und Wirkungslinie der reduzierten Kraft.** Sind  $P, Q, \dots R$  die äußeren Kräfte eines Getriebes,  $\delta p, \delta q, \dots \delta r$  die kleinen Wege ihrer Angriffspunkte bei einer Bewegung des Getriebes, in Richtung der Kräfte gemessen, so besteht die Gleichung 139:

$$P \cdot \delta p + Q \cdot \delta q + \dots + R \cdot \delta r = 0.$$

Hierbei können die Auflagerdrücke  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{D}$  des Grundgliedes (vgl. Fig. 472) außer Betracht gelassen werden, da ihre Angriffspunkte keine Wege beschreiben.

Setzt man  $R + \mathfrak{R} \equiv 0$ , so kann obige Gleichung auch in der Form geschrieben werden:

$$\mathfrak{R} \cdot \delta r = P \cdot \delta p + Q \cdot \delta q + \dots$$

oder 
$$\mathfrak{R} = \frac{1}{\delta r} \Sigma (P \cdot \delta p) \dots \dots \dots 140)$$

Wir nennen diese Kraft die reduzierte Kraft des Getriebes (vgl. 131). Da sie mit  $R$  im Gleichgewicht ist, ersetzt sie die Wirkung der Kräfte  $P, Q, \dots$  auf die Bewegung des Getriebes vollständig, sie ist diesen Kräften gleichwertig.

Den Angriffspunkt  $E$  der reduzierten Kraft am Getriebe nennen wir Reduktionspunkt.

Schreiben wir Gleichung 140) in der Form

$$\mathfrak{R} = P \cdot \frac{\delta p}{\delta r} + Q \cdot \frac{\delta q}{\delta r} + \dots$$

und setzen 
$$P \cdot \frac{\delta p}{\delta r} = \mathfrak{P}, Q \cdot \frac{\delta q}{\delta r} = \mathfrak{Q}, \dots$$

so ist 
$$\mathfrak{R} = \mathfrak{P} + \mathfrak{Q} + \dots$$

Da  $\mathfrak{P}$  die nach  $E$  reduzierte Kraft  $P$ ,  $\mathfrak{Q}$  die nach  $E$  reduzierte Kraft  $Q$  usw. bedeutet, so ist die reduzierte Kraft  $\mathfrak{R}$  des ganzen Getriebes die Summe der einzelnen, nach  $E$  reduzierten Kräfte.

Aus Gleichung 140 geht hervor, daß sich die reduzierte Kraft  $\mathfrak{R}$  eines Getriebes ändert, wenn man den Reduktionspunkt  $E$  an einer anderen Stelle wählt; sie ändert sich aber auch an der gleichen Stelle, wenn man die Wirkungslinie der reduzierten Kraft anders wählt. In beiden Fällen ändert sich nämlich  $\delta r$ , d. i. die Projektion des kleinen

Weges von  $E$  bei einer Verschiebung des Getriebes auf die Wirkungslinie von  $\mathfrak{R}$ .

Wir wollen im folgenden immer die Annahme treffen, daß  $\mathfrak{R}$  und  $\delta r$  in dieselbe Gerade fallen.

Nennt man  $\delta a, \delta b, \dots \delta r$  die kleinen Verschiebungen der Angriffspunkte  $A, B, \dots E$ , so ist

$$\delta p = \delta a \cdot \cos \alpha, \delta q = \delta b \cdot \cos \beta, \dots;$$

das Verhältnis der kleinen Verschiebungen

$$\delta a : \delta b : \dots : \delta r$$

ändert sich nicht, wenn wir es in der Form anschreiben

$$\frac{\delta a}{\delta t} : \frac{\delta b}{\delta t} : \dots : \frac{\delta r}{\delta t}$$

und durch die Verhältnisse der Geschwindigkeiten bei der gedachten kleinen Verschiebung des Getriebes ausdrücken:

$$v_A : v_B : \dots : v_E.$$

Man erhält dann

$$\mathfrak{R} \cdot v_E = P v_A \cos \alpha + Q v_B \cos \beta + \dots$$

oder

$$\mathfrak{R} = P' \cdot \frac{v_A}{v_E} + Q' \cdot \frac{v_B}{v_E} + \dots \dots \dots 141)$$

worin  $P' = P \cos \alpha, Q' = Q \cos \beta, \dots$  die Projektionen der Kräfte auf die Bewegungsrichtungen ihrer Angriffspunkte sind.

**251. Methoden zur Bestimmung der reduzierten Kraft.** Die Methoden sind die gleichen wie jene zur Bestimmung der Gleichgewichtskraft, die wir im vorigen Abschnitt kennen gelernt haben. Überblicken wir sie noch einmal, so verfügen wir über folgende:

a) Mit Benützung des Kraftplans des Getriebes. Man sucht die Gleichgewichtskraft  $R$  für den gewählten Reduktionspunkt  $E$  und nimmt sodann von  $R$  die Umkehrung  $\mathfrak{R} = -R$ . Die Wirkungslinie von  $R$  läßt man mit der Bewegungsrichtung von  $E$  zusammenfallen.

b) Mit Benützung des Geschwindigkeitsplanes. Da es sich bei Anwendung der Gleichung 141 nur um das Verhältnis der Geschwindigkeiten handelt, kann man die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes, z. B. des Reduktionspunktes  $E$ , willkürlich annehmen, sodann den Geschwindigkeitsplan konstruieren, die Kraftprojektionen  $P', Q', \dots$  auf die Geschwindigkeiten der Angriffspunkte  $A, B, \dots$  bestimmen und endlich die Summe

$$P' \cdot \frac{v_A}{v_E} + Q' \cdot \frac{v_B}{v_E} + \dots = \mathfrak{R}$$

zeichnerisch oder rechnerisch ermitteln.

c) Mit Benützung der Drehpole, indem man die Methode der gedrehten Geschwindigkeiten, wie sie beim Gelenkviereck vorgeführt wurde (vgl. Fig. 356), auf vier zusammengehörende Drehpole  $O_{mn}$ ,

$O_{np}$ ,  $O_{pq}$ ,  $O_{qm}$  des Getriebes überträgt, wie später an einigen Beispielen gezeigt werden soll.

**252. Kraftreduktion an der Doppelkurbel.** In Fig. 486 wird die Doppelkurbel  $\mathcal{U}AE\mathcal{C}$  mit den festen Gelenken  $\mathcal{U}$  und  $\mathcal{C}$  in  $A$  von der Kraft  $P$  in beliebiger Richtung beansprucht. Man soll diese Kraft nach  $E$  in dessen Bewegungsrichtung reduzieren.

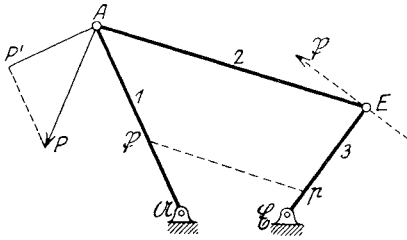


Fig. 486.

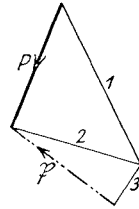


Fig. 486 a.

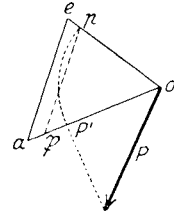


Fig. 486 b.

a) Mit Benützung des Kraftplans (Fig. 486a). Nachdem die Kraft  $P$  in ihrer Richtung maßstäblich aufgetragen ist, zeichnet man die Gleichgewichtspolygone

$$P + 2 + 1 = 0 \text{ und } 2 + 3 + \mathfrak{P} = 0;$$

damit ist die Größe  $\mathfrak{P}$  der reduzierten Kraft bereits gefunden.

b) Mit Benützung des Geschwindigkeitsplans (Fig. 486b). Man nimmt die Geschwindigkeit  $v_A = \overline{oa}$  beliebig an und sucht mit Hilfe der Linien  $oe \perp CE$ ,  $ae \perp AE$  den Punkt  $e$ . Sodann trägt man von  $o$  die Kraft  $P$  auf, projiziert sie nach  $oP'$  auf die Bewegungsrichtung von  $A$  und macht  $\overline{op} = \overline{oP'}$ ; zieht man noch  $p\mathfrak{P} \parallel ea$ , so ist  $o\mathfrak{P} = \mathfrak{P}$  die gesuchte reduzierte Kraft.

c) Mit Benützung der Drehpole. Diese Lösung ist für das vorliegende Beispiel die einfachste. Man macht  $E\overline{p} = \overline{AP'}$  und zieht  $p\mathfrak{P} \parallel EA$ ; dann ist  $\overline{A\mathfrak{P}} = \mathfrak{P}$  die gesuchte reduzierte Kraft. Ihre Richtung ergibt sich aus der Überlegung, daß  $P$  und  $\mathfrak{P}$  um den Drehpol  $O_{02}$  des Gliedes 2 in bezug auf die ruhende Ebene 0 im gleichen Sinne drehen müssen.

**253. Kraftreduktion an der Schubkurbel.** In Fig. 487 ist eine ge-  
schränkte Schubkurbel gezeichnet, in deren Kreuzkopf  $A$  eine Kolben-

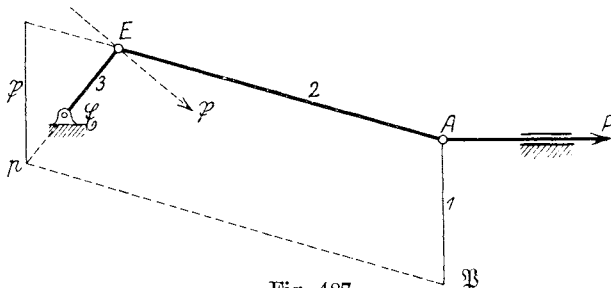


Fig. 487.

kraft  $P$  in der Schubrichtung wirken würde. Sie soll an den Kurbelzapfen  $E$  reduziert werden.

a) Mit Hilfe des Kraftplans (Fig. 487a). Die Ausführung erfolgt wie bei der vorher behandelten Doppelkurbel.

b) Mit Hilfe des Geschwindigkeitsplans (Fig. 487b). Man macht eine beliebige Annahme für  $v_A = oa$ , sucht daraus  $e$ , trägt  $op = P$  auf und zieht  $p\beta \parallel ea$ ; dann ist  $o\beta = \beta$  die in die Bewegungsrichtung von  $E$  reduzierte Kraft.

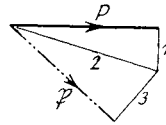


Fig. 487 a.

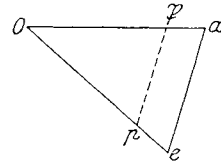


Fig. 487 b.

c) Mit Hilfe der Drehpole (Fig. 487). Diese Methode führt auch hier am schnellsten zum Ziel. Man macht  $\overline{Ep} = P$  und zieht  $p\beta \parallel EA$ , dann ist  $\overline{A\beta} = \beta$  die gesuchte nach  $E$  reduzierte Kraft. Oder noch einfacher: man zieht durch  $p$  die Senkrechte zur Schubrichtung bis zum Schnitt mit  $AE$ . Die Länge dieser Senkrechten ist dann  $\beta$ .

254. Kraftreduktion an einem sechsgliedrigen Getriebe. Das Getriebe in Fig. 488 besteht aus vier starren Dreiecken und zwei Stäben. Das Dreieck  $\mathcal{ACE}$  ist das Grundglied.

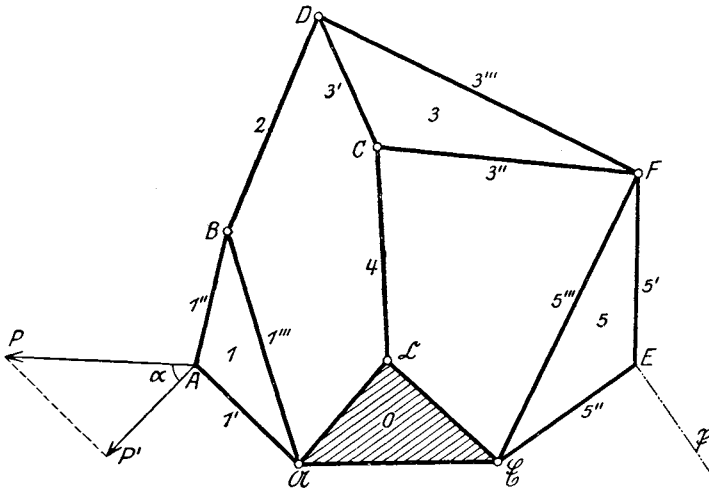


Fig. 488.

Der Eckpunkt  $A$  sei der Angriffspunkt der Kraft  $P$ ; sie soll an die Stelle  $E$  reduziert werden, und zwar in die Bewegungsrichtung dieses Punktes.

a) Mit Benützung des Kraftplans (Fig. 488a). Man zeichnet maßstäblich die Kraft  $P$  und hierauf, nachdem man die beweglichen Dreiecke in je drei Stäbe aufgelöst hat, die Polygone:

$$\begin{aligned}
 P + 1' + 1'' &\equiv 0, \quad 1'' + 1''' + 2 \equiv 0, \quad 2 + 3' + 3''' \equiv 0, \\
 3' + 4 + 3'' &\equiv 0; \quad 3''' + 3'' + 5''' + 5' \equiv 0, \quad 5' + \mathfrak{P} + 5'' \equiv 0.
 \end{aligned}$$

Darin ist  $\mathfrak{P} \perp E\mathcal{C}$  angenommen, da dies die Bewegungsrichtung von  $E$  ist. Damit ist die reduzierte Kraft  $\mathfrak{P}$  gefunden. Ihre Richtung ist dadurch bestimmt, daß  $\mathfrak{P}$  die entgegengesetzte Richtung der Gleichgewichtskraft in  $E$  hat.

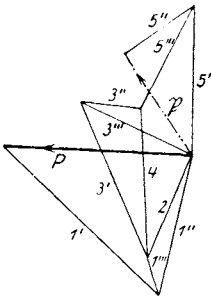


Fig. 488 a.

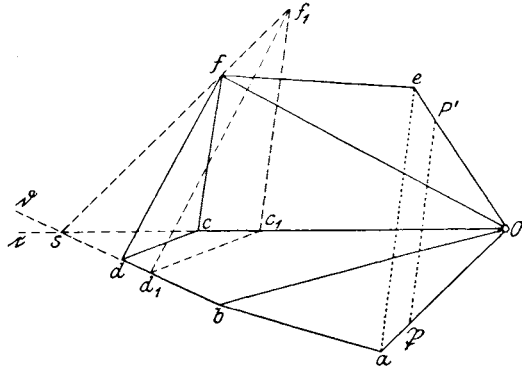


Fig. 488 b.

b) Mit Benützung des Geschwindigkeitsplans (Fig. 488 b). Nach beliebiger Annahme der Geschwindigkeit  $v_A \equiv \overline{oa}$  wurde der Punkt  $b$  konstruiert und sodann die Geraden  $b \perp BD$  durch  $b$ ,  $c \perp \mathcal{C}C$  durch  $o$  gezogen. Auf  $c$  wurde ein beliebiger Punkt  $c_1$  angenommen, hierauf  $c_1 d_1 \perp CD$ ,  $c_1 f_1 \perp CF$  und  $d_1 f_1 \perp DF$  gezogen; verbindet man den Schnittpunkt  $f_1$  mit dem Schnittpunkt  $s$  von  $c$  und  $b$ , so erhält man eine Gerade, auf der der Geschwindigkeitspunkt  $f$  liegen muß; er liegt im Schnitte mit  $of \perp \mathcal{C}F$ . Aus  $f$  ist dann auch  $e$  bestimmt. Macht man nun  $\overline{op'} = P' = P \cdot \cos a$  und zieht  $P' \mathfrak{P} \parallel ea$ , so ist

$$\overline{op'} = \mathfrak{P} = P' \cdot \frac{v_A}{v_E}$$

die nach  $E$  reduzierte Kraft  $P$ .

c) Mit Benützung der Drehpole. In Fig. 488 c wurde das Getriebe noch einmal gezeichnet und nach dem in XVI mitgeteilten Verfahren eine Reihe von Drehpolen bestimmt. Es handelt sich hier darum, nur 4 Drehpole zu finden, die zusammen für einen Augenblick ein Gelenkviereck bilden. Man muß sich also für 4 Glieder des Getriebes entscheiden.

Nun gehört  $A$  dem Gliede 1,  $E$  dem Gliede 5 an; also müssen 1 und 5 dem Gelenkviereck angehören. Als drittes Glied wählt man zweckmäßig das Grundglied 0. Als viertes Glied wurde 2 willkürlich gewählt.

Das Gelenkviereck wird somit von den Drehpolen 01, 12, 25, 05 gebildet; von diesen ist nur 25 zu suchen. Dabei wurde das Schema benützt:

$$\begin{array}{cccc} 04, 34 > 03, & 01, 03 > 13, & 01, 05 > 15, & 15, 12 > 25. \\ 05, 35 > 03, & 12, 23 > 13, & 13, 35 > 15, & 35, 23 > 25. \end{array}$$

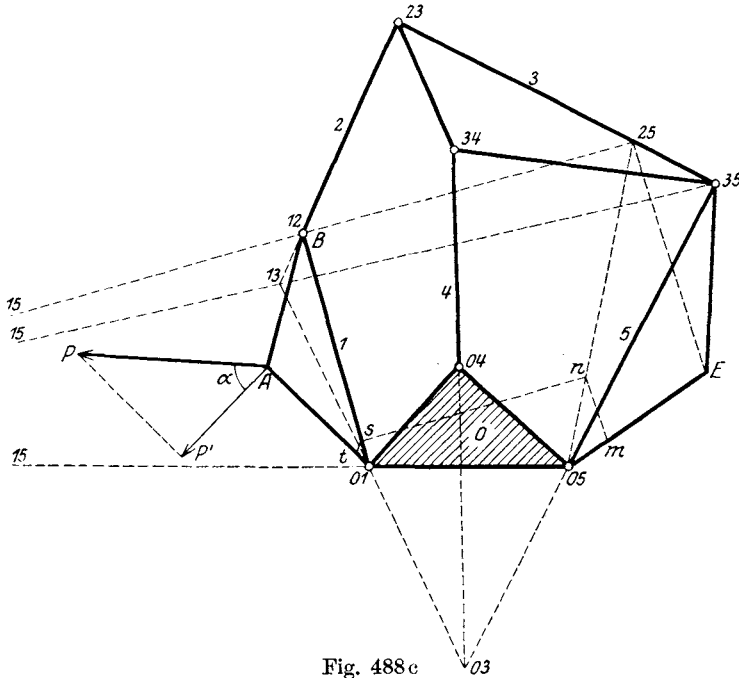


Fig. 488c

Mit diesem Gelenkviereck wurde nun wie in Fig. 478b verfahren. Man macht  $\overline{Em} = P' = P \cos \alpha$ , zieht  $mn \parallel E, 25$ ,  $ns \parallel 25, B$  und  $st \parallel BA$ ; dann ist  $\overline{At} = \beta$  der Größe nach die nach  $E$  reduzierte Kraft  $P$ .

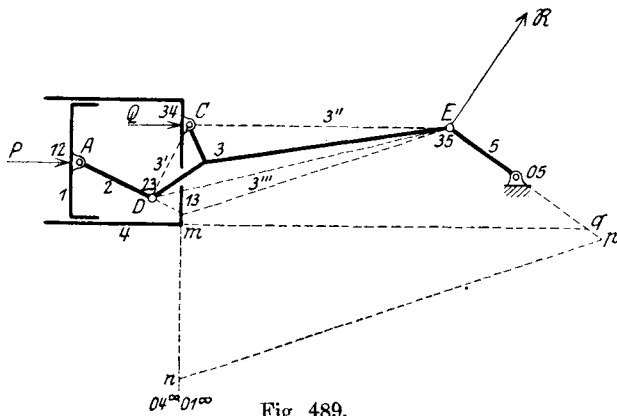


Fig. 489.

**255. Anwendung.** Die Kolbenmaschine von F. Th. Goodmann (Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1898, S. 162). In Fig. 489 ist eine schematische Skizze dieser Maschine gegeben (vgl. Fig. 359). Hier bewegen sich zwei Kolben 1 und 4 ineinander; ihre Drücke  $P$  und  $Q$  werden durch die Stange 2 und das dreistielige Glied 3 auf den Kurbelzapfen  $E$  übertragen. Es sind die beiden Kolbendrücke  $P$  und  $Q$  nach  $E$  zu reduzieren ( $\mathfrak{P}$  und  $\mathfrak{Q}$ ).

Das kinematische Schema dieses Getriebes ist das gleiche wie in Fig. 488; nur liegen wegen der Parallelbewegung der beiden Kolben die Drehpole  $O_1, O_4$  und  $I_4$  unendlich fern.

Fig. 489a zeigt die Aufsuchung der reduzierten Kraft  $\mathfrak{R} = \mathfrak{P} + \mathfrak{Q}$  mit Hilfe des Kraftplans, Fig. 489b mit Hilfe des Geschwindigkeitsplans.

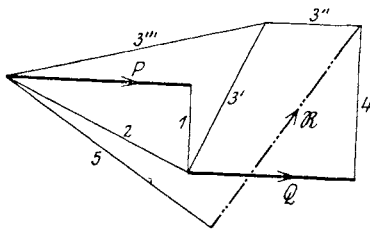


Fig. 489 a.

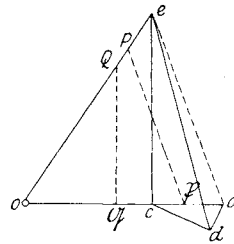


Fig. 489 b.

In letztem wurde  $v_E = \overline{oe}$  beliebig angenommen und daraus die Punkte  $a, c, d$  in bekannter Weise gefunden. Macht man  $oP = P, oQ = Q$  und zieht  $P\mathfrak{P} \parallel ea, Q\mathfrak{Q} \parallel ec$ , so ist

$$o\mathfrak{P} = P \cdot \frac{v_A}{v_E} = \mathfrak{P}, \quad o\mathfrak{Q} = Q \cdot \frac{v_C}{v_E} = \mathfrak{Q}.$$

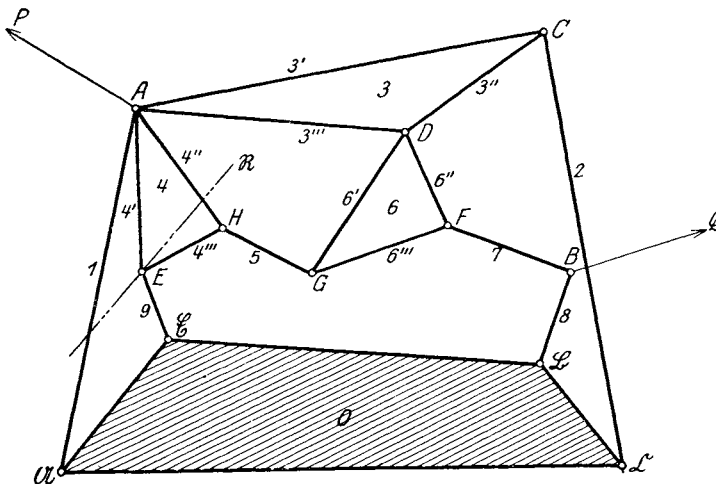


Fig. 490.

Es muß sich  $\mathfrak{P} + \mathfrak{Q} = \mathfrak{R}$  ergeben.

In Fig. 489 ist auch noch die dritte Methode angedeutet. Für die Reduktion von  $P$  wurde das Gelenkviereck  $01^\infty, 13, 35, 05$  benutzt, für die Reduktion von  $Q$  das Gelenkviereck  $04^\infty, 34, 35, 05$ . Es wurde also  $\overline{Ep} = P, \overline{Eq} = Q$  gemacht,  $pn \parallel 35, 13$  und  $qm \parallel 35, 34$  gezogen; dann ist  $13, n = \mathfrak{P}$  und  $34, m = \mathfrak{Q}$ .

**256. Kraftreduktion an einem zehngliedrigen Getriebe.** In Fig. 490 ist ein zehngliedriges Getriebe dargestellt; es besteht aus dem viereckigen Grundglied 0, den Stangen 1, 2, 5, 7, 8, 9 und den Dreiecken 3, 4 und 6. In den Gelenken  $A$  und  $B$  greifen in beliebigen Richtungen zwei gegebene Kräfte  $P$  und  $Q$  an; sie sind an das Gelenk  $E$  der Stange 9 in beliebige Richtung  $\mathfrak{R}$  zu reduzieren.

a) Mit Benützung des Kraftplans (Fig. 490a). Hier empfiehlt es sich, mit der maßstäblich aufgetragenen Kraft  $Q$  zu beginnen und folgende Polygone der Reihe nach zu zeichnen:

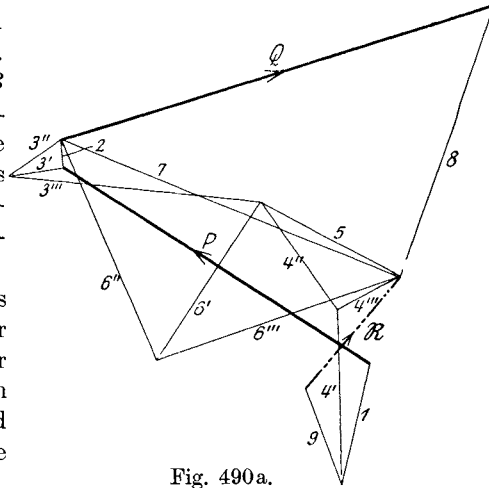


Fig. 490a.

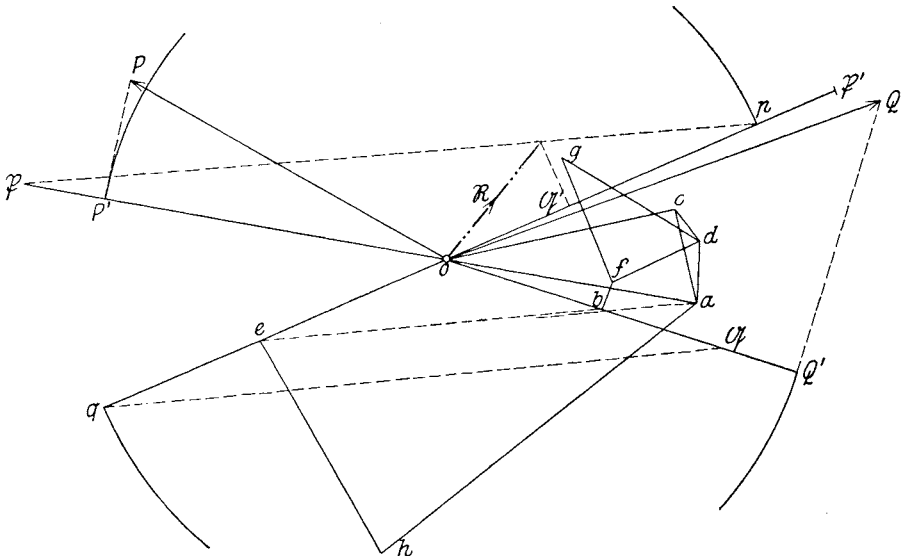


Fig. 490b.



$$\begin{aligned}
 Q + 8 + 7 &\equiv 0, & 7 + 6''' + 6'' &\equiv 0, & 6''' + 6' + 5 &\equiv 0, \\
 6' + 6'' + 3'' + 3''' &\equiv 0, & 3'' + 2 + 3' &\equiv 0, & 5 + 4''' + 4'' &\equiv 0, \\
 P + 3' + 3''' + 4'' + 4' + 1 &\equiv 0, & 4''' + 4' + 9 + \mathfrak{R} &\equiv 0.
 \end{aligned}$$

Die Gleichgewichtskraft in  $E$  ist  $R = -\mathfrak{R}$ . Die äußeren Kräfte müssen ein geschlossenes Polygon ergeben:

$$P + 2 + Q + 8 + R + 9 + 1 \equiv 0;$$

hierin sind 2, 8, 9, 1 die Auflagerdrücke an den vier Ecken des Grundgliedes.

Diese Methode hat den Vorteil, die reduzierte Kraft  $\mathfrak{R}$  sofort nach Größe und Richtung zu liefern, und zwar mit derselben Leichtigkeit, ob nun das Getriebe von einer oder von mehreren äußeren Kräften  $P, Q, \dots$  beansprucht wird. In dieser Hinsicht sind die beiden anderen Methoden umständlicher, geben aber eine wertvolle Kontrolle.

b) Mit Benützung des Geschwindigkeitsplans. In Fig. 490b wurde die Geschwindigkeit  $v_A \equiv \overline{oa}$  beliebig angenommen und sodann die Punkte  $c, d, e, h, g, f, b$  in dieser Reihenfolge ohne Schwierigkeit gefunden.

Macht man nun  $\overline{oP} \equiv P$  und sucht die Projektion  $P'$  auf die Richtung von  $v_A$ , überträgt  $\overline{op} = \overline{oP'}$  auf die Richtung von  $v_E \equiv \overline{oe}$  (wobei auf das Vorzeichen der Projektion  $P'$  zu achten ist) und zieht  $p\mathfrak{P} \parallel ea$ , so ist  $\overline{o\mathfrak{P}} = \mathfrak{P}$  die in die Bewegungsrichtung von  $E$  reduzierte Kraft  $P$ .

Ebenso wurde  $Q$  von  $o$  aus aufgetragen, in die Richtung von  $v_B \equiv \overline{ob}$  nach  $Q'$  projiziert,  $\overline{oq} = \overline{oQ'}$  gemacht und  $q\mathfrak{Q} \parallel eb$  gezogen. Dann ist  $\overline{o\mathfrak{Q}} = \mathfrak{Q}$  die in die Bewegungsrichtung von  $E$  reduzierte Kraft  $Q$ .

Zeichnet man endlich auf der Richtung von  $v_E \equiv \overline{oe}$ , wieder mit Rücksicht auf das Vorzeichen von  $P'$  und  $Q'$ , die reduzierte Kraft  $\overline{o\mathfrak{P}'} \equiv \mathfrak{P}'$  und  $\mathfrak{P}'\mathfrak{Q}' \equiv \mathfrak{Q}'$ , errichtet in  $\mathfrak{Q}'$  die Senkrechte auf  $v_E$ , so erhält man in  $\mathfrak{R}$  die Größe der gesuchten gesamten reduzierten Kraft in der gegebenen Richtung.

c) Mit Benützung der Drehpole (Fig. 490c). Die Reduktion von  $P$  und  $Q$  nach  $E$  muß getrennt vorgenommen werden.

Einfach ist die Reduktion von  $P$ ; sie ist wie bei der Doppelkurbel vorzunehmen (siehe Fig. 486). Man projiziert  $P$  auf die Bewegungsrichtung von  $A$ , macht  $\overline{Ep} = P'$  und zieht  $p\mathfrak{P} \parallel EA$ . Dann ist  $\overline{A\mathfrak{P}} = \mathfrak{P}$ . Der Pfeil der reduzierten Kraft  $\mathfrak{P} = \overline{E\mathfrak{P}'}$  in  $E$  kann daraus entnommen werden, daß  $P'$  in  $A$  und  $\mathfrak{P}'$  in  $E$  den gleichen Drehungssinn um den Drehpol 04 der Glieder 0 und 4 haben müssen.

Weniger einfach ist die Reduktion der Kraft  $Q$  nach  $E$ . Faßt man  $B$  als einen Punkt des Gliedes 8,  $E$  als einen Punkt des Gliedes 9 auf, so handelt es sich darum, die Glieder 8 und 9 durch zwei beliebig andere zu einem Gelenkviereck zu verbinden. Es wurden die Glieder 0 und 3 gewählt. Man benötigt also die Drehpole des Gelenkvierecks: 08, 83, 39, 90. Von diesen sind 08 und 90 gegeben. Die beiden anderen wurden durch Ziehen von Polgeraden gefunden, wie dies früher (vgl. 170) ge-

schildert wurde. Hierzu kann man sich des folgenden Schemas bedienen:

$$\begin{array}{l} 01, 14 > 04, \quad 01, 09 > 19, \quad 01, 13 > 03, \quad 10, 02 > 12, \\ 09, 49 > 04, \quad 14, 49 > 19, \quad 02, 23 > 03, \quad 13, 23 > 12, \end{array}$$

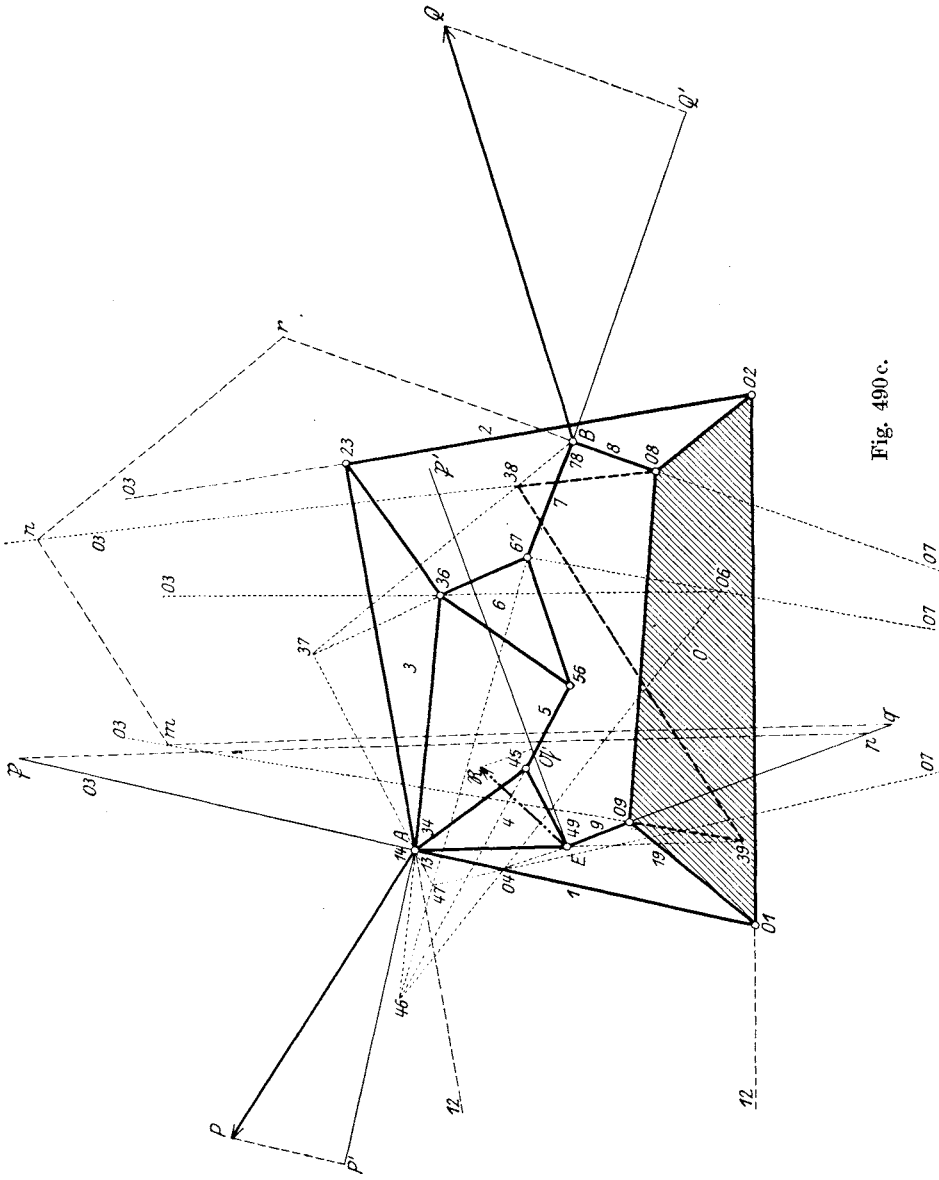


Fig. 490 c.

$$\begin{aligned}
 &56, 45 > 46, 03, 36 > 06, 08, 78 > 07, 04, 07 > 47, \\
 &36, 34 > 46, 04, 46 > 06, 06, 67 > 07, 46, 67 > 47, \\
 &34, 47 > 37, 08, 03 > 38, 19, 13 > 39, \\
 &36, 67 > 37, 87, 73 > 38, 09, 03 > 39.
 \end{aligned}$$

Damit ist das Gelenkviereck gefunden; es wurde stark strichliert. Sucht man nun die Projektion  $Q'$  von  $Q$  auf die Bewegungsrichtung von  $B$ , macht  $\overline{E\bar{q}} = Q'$  und zieht  $qm \parallel 39, E$ , ferner  $mn \parallel 39, 38$  und  $nr \parallel 38, B$ , so ist  $\overline{B\bar{r}} = \bar{\Delta}$ .

Macht man endlich die Strecke  $\bar{\beta}'\bar{\Delta}' = \bar{\Delta}$  und errichtet in  $\bar{\Delta}'$  die Senkrechte zur Bewegungsrichtung von  $E$ , so erhält man im Schnitte mit der gegebenen Richtung von  $\bar{\mathfrak{H}}$  auch deren Größe.

**257. Anwendung.** Die Schiebersteuerung von J. Isaachsen (Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1894, S. 364. Fig. 491). Zur Erzielung

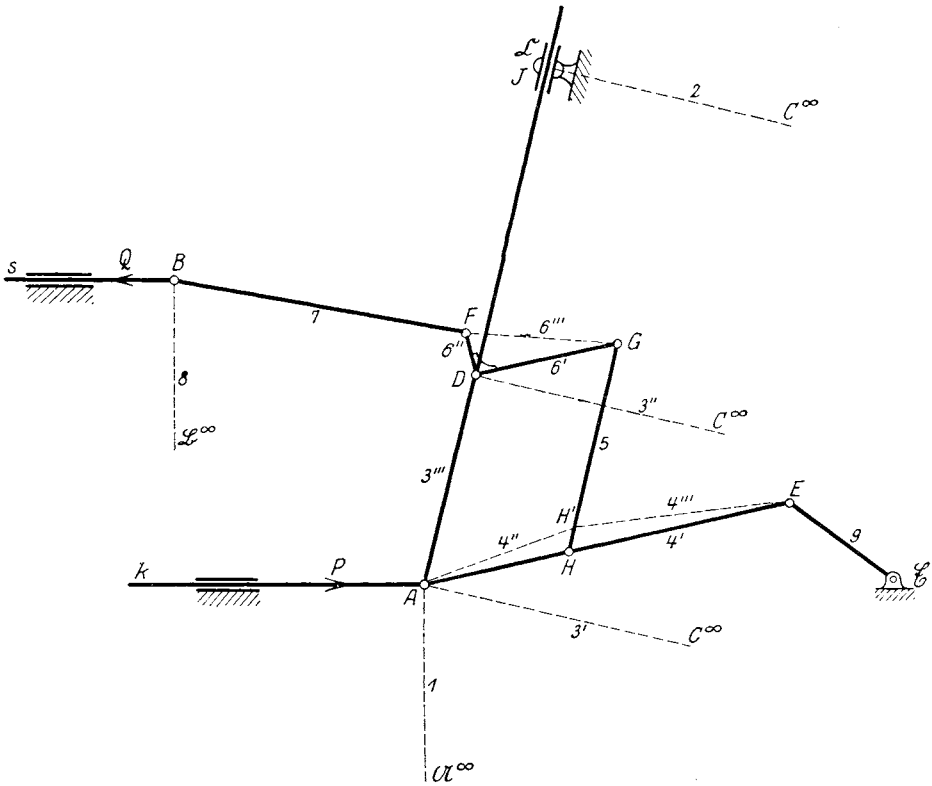


Fig. 491.

einer für kleine Füllungen günstigen Steuerung wird die Bewegung des Schiebers  $s$  aus zwei Schwingungen mit  $90^\circ$  Phasen-Unterschied zusammengesetzt: aus der Schwingung eines Punktes  $D$  der Schwinge

$AJ$ , die an den Kreuzkopf  $A$  der Kolbenstange  $k$  angeschlossen ist und in der schwingenden Hülse bei  $\mathfrak{C}$  geführt wird; und aus der Schwingung des Winkelhebels  $FDG$ , wobei die Bewegung des Punktes  $G$  durch ein Parallelogramm von jener der Lenkerstange  $AE$  abgeleitet wird.

Das Schema dieses Getriebes stimmt mit dem früher behandelten, Fig. 490, vollständig überein, nur liegen die Drehpole  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  und  $C$  im Unendlichen. Der feste Drehpunkt  $\mathfrak{C}$  ist durch einen unendlichen Arm 2 mit  $C$  verbunden, was durch die gerade Hülse bei  $\mathfrak{C}$  erzielt wird. Das Dreieck 4 artet in die Lenkerstange  $AHE$  aus.

$P$  ist die im Kreuzkopf  $A$  angreifende Kolbenkraft,  $Q$  der Widerstand des Schiebers,  $\mathfrak{R}$  die an den Kurbelzapfen  $E$  reduzierte Gesamtkraft.

a) Kraftreduktion mit Benützung des Kraftplans (Fig. 491a). Er ist nach dem Vorbilde von Fig. 490a entworfen und bedarf nur geringer

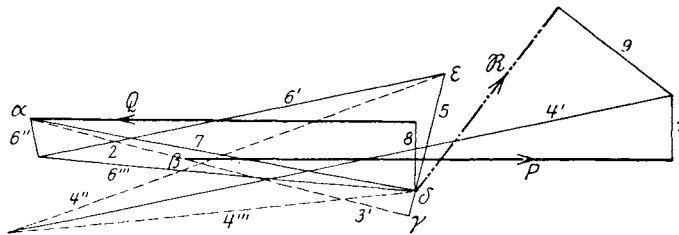


Fig. 491 a.

Erläuterung. Der Schieberwiderstand  $Q$  wurde unverhältnismäßig groß angenommen, um die Zeichnung klar zu machen.

Die Zerlegung der Spannung 5 in  $4'$  und  $4'''$  ist hier unmöglich, da sich in  $H$  diese drei Kräfte nicht Gleichgewicht halten können. Es wurde deshalb statt  $H$  ein anderer Punkt  $H'$  außerhalb der Stange  $AE$  auf  $HG$  gewählt, durch gedachte Stäbe  $AH'$  und  $EH'$  mit  $A$  und  $E$  verbunden und sodann die Spannung 5 in  $4''$  und  $4'''$  zerlegt. Durch den Schnittpunkt der beiden letzten Spannungen wurde im Kraftplan die Parallele  $4'$  zu  $AE$  gezogen. Allerdings hängt die Lage dieses Schnittpunktes von der Wahl der beiden Stäbe  $AH'$  und  $EH'$  ab; allein, wie auch  $H'$  gewählt wird, die Parallele zu  $AE$  fällt immer in dieselbe Gerade; die Größe der Spannung  $4'$  hängt aber jedenfalls von der Lage des Punktes  $H'$  ab.

Da die Stange  $AE$  in Wirklichkeit keine mathematische Gerade, sondern ein materielles Gebilde von einer gewissen Breite sein wird, so hat die Annahme des Angriffspunktes  $H'$  außerhalb der Geraden  $AE$  nichts Bedenkliches an sich. Das Gelenk  $D$ , um das sich der rechtwinklige Hebel  $FDG$  dreht, ist im Gleichgewicht unter den Spannungen  $6'$ ,  $6''$ ,  $3'''$  und der gedachten Stabspannung  $3''$ , die zu dem unendlich fernen Punkte  $C$  führt. Diese Stabspannung ist allerdings nicht vorhanden; sie wird aber ersetzt durch den Führungsdruck der Hülse in  $\mathfrak{C}$ .

Zieht man im Kraftplan  $ay \perp \gamma\epsilon$ , so ist  $ay$  die Spannung  $3''$  und  $\gamma\epsilon$  die Spannung  $3'''$ . Auch auf das Gelenk  $A$  entfällt ein Teil des Führungsdruckes der Hülse in  $\mathcal{C}$ ; nennt man diesen Teil  $3'$  (er ist die Spannung in der gedachten Stange  $AC^\infty$ ), so muß das Verhältnis bestehen:

$$3'' : 3' = A\mathcal{C} : D\mathcal{C},$$

da die Resultante aus  $3''$  und  $3'$  der eigentliche Führungsdruck  $2$  in  $\mathcal{C}$  ist. Man macht also im Kraftplan

$$a\beta : \beta\gamma = AD : D\mathcal{C};$$

dann ist  $a\beta$  der Führungsdruck  $2$  und  $\beta\gamma$  die Spannung  $3'$ .

Nachdem nun der Druck  $2$  bekannt ist, kann die Kolbenkraft  $P$  in  $\beta$  angereicht und der Kraftplan wie in Fig. 490a beendet werden.

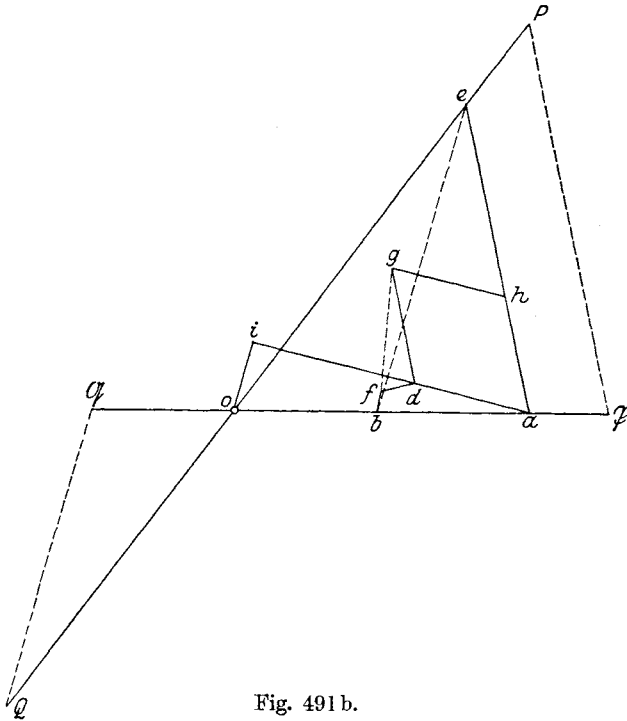


Fig. 491 b.

b) Kraftreduktion mit Benützung des Geschwindigkeitsplans. Der Entwurf dieses Planes (Fig. 491 b) macht keine besondere Überlegung notwendig. Man wählt  $v_A \equiv \overline{oa}$  beliebig, findet zunächst  $e$  und aus  $ah \sim AHE$  den Punkt  $h$ . Ist  $J$  jener Punkt der Stange  $AD$ , der augenblicklich mit dem Mittelpunkt  $\mathcal{C}$  der Hülse zusammenfällt (Gleitpunkt), so ist  $oi \parallel A\mathcal{C}$  und  $ai \perp AJ$ , wodurch  $i$  bestimmt ist.

Sodann folgt  $d$  aus  $adi \sim ADJ$ , dann  $g$  aus dem Parallelogramm über  $ad$  und  $ah$ ,  $f$  aus  $fdg \sim FDG$  und endlich  $b$  aus  $ob \parallel s$ ,  $fb \perp FB$ .

Macht man nun  $\overline{oP} = P$ ,  $oQ = Q$  und zieht  $P\mathfrak{P} \parallel ea$ ,  $Q\mathfrak{Q} \parallel eb$ , so wird  $o\mathfrak{P} = \mathfrak{P}$  die nach  $E$  reduzierte Kraft  $P$ ,  $o\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}$  die nach  $E$  reduzierte Kraft  $Q$ . Ihre Differenz ist die ganze nach  $E$  reduzierte Kraft  $\mathfrak{R}$ .

**258. Aufgaben.**

- 120. Es ist die Kraftreduktion an der Schiebersteuerung von J. Isaachsen (vgl. 257) mit Benützung der Drehpole vorzunehmen. (Anwendung von 256, c.)
- 121. Bei dem Kniehebelantrieb für Nietmaschinen der Hanna Engineering Works (Fig. 492) treibt der Kolben 1 des Druckzylinders mit Hilfe der Schwinge 4 und des beweglich gelagerten Winkelhebels 3 das Kniehebelpaar 5, 6. Es ist der Nietdruck auf den Nietstempel 7 zu konstruieren, wenn der Kolbendruck gegeben ist.

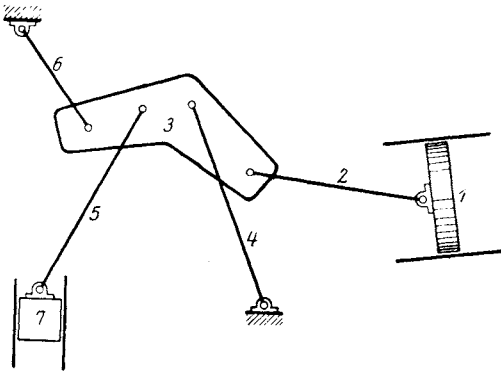


Fig. 492.

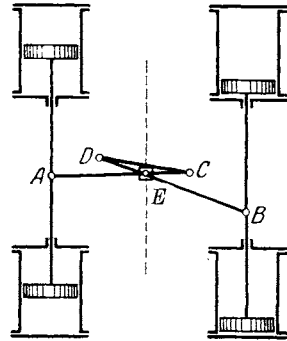


Fig. 493.

- 122. Der Kraftausgleich von M. Neumayer (Fig. 493) benützt die in  $A$  und  $B$  gelenkig gelagerten Hebel  $AC$  und  $BD$ , die durch den Lenker  $CD$  miteinander verbunden sind und in  $E$  in drehbaren Führungen gleiten, um den Kraftüberschuß der einen Maschine auf die andere zu übertragen. Wenn die Kolbenkraft in  $A$  bekannt ist, welche Wirkung wird sie in  $B$  ausüben?

- 123. Bei dem Getriebe der Verbund-Maschine von John Musgrave (Fig. 494) vermittelt das gleichschenklige Dreiecksglied 5 die Übertragung der schwingenden Bewegung der Kolbenstangen 1 und 2 auf die drehende Bewegung der Kurbel 7 mit Hilfe der Schwinge 6 und der beiden kurzen Lenker 3 und 4. Man soll die Kolbenkräfte  $P_1$  und  $P_2$  an den Kurbelzapfen  $A$  reduzieren.

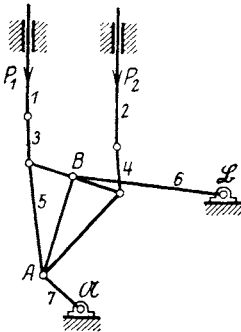


Fig. 494.

124. Fig. 495 zeigt das Getriebe der Zweizylindermaschine von F. Darcelle. An die beiden Kolben 1 und 2 sind die Lenker 3 und 4 gelenkig angeschlossen, von denen der erste rechtwinklig abgebogen und mit der Welle in  $\mathfrak{A}$  durch die Kurbel 5 verbunden ist. Man soll die beiden Kolbenkräfte  $P_1$  und  $P_2$  an den Kurbelzapfen  $A$  reduzieren.

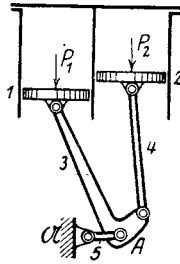


Fig. 495.

125. Fig. 496 versinnlicht den Kraftausgleich bei Zwillingsdampfmaschinen von J. Scholl und Ch. K. Longenecker. Das Kurbelgetriebe  $\mathfrak{A}AB\mathfrak{B}$  ist durch die beiden Lenker  $AC$  und  $BD$  an die Kolbenstangen der beiden Dampfzylinder angeschlossen. Man soll ermitteln, in welcher Größe der Kolbendruck  $P_1$  des einen Zylinders den des anderen unterstützt.

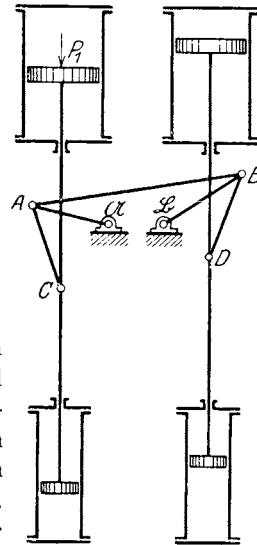


Fig. 496.

126. Bei der Kraftausgleichung für Zwillingsdampfmaschinen der Sächs. Maschinenfabrik Chemnitz (Fig. 497) sind die beiden Kolbenstangen 1 und 2 durch die beiden um  $\mathfrak{B}$  drehbaren Stangen 3 und 4 zwangsläufig miteinander verbunden. Die beiden Gelenkvierecke  $\mathfrak{A}AB\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{A}_1A_1B_1\mathfrak{B}$  sind miteinander durch die gelenkig angeschlossene Stange  $CC_1$  verbunden; der Stab 4 gehört dem starren Winkelhebel  $B\mathfrak{B}D$  an. Wenn  $P_1$  die Kolbenkraft in der Stange 1 ist, in welcher Größe wird sie auf die Stange 2 übertragen?

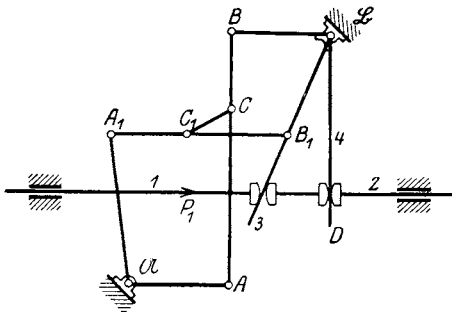


Fig. 497.

## XXIV. Die Ersatzpunkte und Beschleunigungsdrücke einer kinematischen Kette.

**259. Die Ersatzpunkte.** Im Abschnitte X haben wir ausführlich untersucht, in welcher Weise man die Masse eines starren Systems bei dessen ebener Bewegung durch dynamisch gleichwertige Punkte ersetzen kann. Insbesondere sei daran erinnert, daß man das System durch drei in einer Geraden liegende Punkte ersetzen kann, von denen der eine der Schwerpunkt des Systems ist, während die beiden anderen beliebig gewählt werden können (vgl. 105, Gleichungen 58); daß man das System auch durch zwei dynamisch gleichwertige Punkte ersetzen kann, von denen der eine beliebig angenommen werden kann.

Handelt es sich nun um die Bewegung mehrerer starrer Systeme, die miteinander durch irgendwelche Bedingungen verknüpft, also z. B. durch Gelenke miteinander verbunden sind, wie dies bei den kinematischen Ketten zutrifft, so kann man dieselbe Methode der Ersatzpunkte anwenden; man ersetzt dann nämlich jedes Glied der Kette durch seine Ersatzpunkte und verlegt zweckmäßig in jedem Gliede den einen Ersatzpunkt in ein Gelenk des Gliedes.

Man kann dann das so entstehende System von Massenpunkten dynamisch einfacher behandeln, als es bei direkter Untersuchung der materiellen Glieder der Fall wäre.

Dies soll an einem Beispiel gezeigt werden.

**260. Das Problem von Glocke und Klöppel.** Es sei (Fig. 498) in  $O$  ein Körper gelenkig aufgehängt;  $M_1$  sei seine Masse,  $S_1$  sein Schwerpunkt. Der Körper schwingt um eine durch  $O$  gehende horizontale Achse,  $\varphi$  sei sein Schwingungswinkel. An einer in  $OS_1$  liegenden Stelle  $B$  sei ein zweiter Körper gelenkig aufgehängt;  $M_2$  sei dessen Masse,  $S_2$  dessen Schwerpunkt. Der Schwingungswinkel dieses zweiten Körpers um  $B$  sei  $\psi$ . Die Abmessungen  $OS_1 = p_1$ ,  $OB = l_2$ ,  $BS_2 = p_2$  sind bekannt. Man soll die Bedingungen aufstellen, die zwischen den Massen und Abmessungen bestehen müssen, wenn bei der Schwingung dieser beiden Körper die Schwingungswinkel  $\varphi$  und  $\psi$  stets einander gleich bleiben sollen.

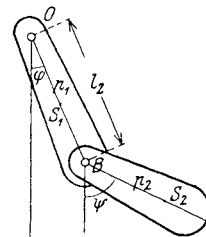


Fig. 498.



Ist  $M_1$  die Glocke,  $M_2$  der Klöppel, so wird bei Einhalten dieser Bedingungen ein Anschlagen des Klöppels an die Glocke nicht stattfinden können — ein Fall, der bekanntlich bei der Kaiserglocke des Kölner Domes im Jahre 1875 vorkam und seither zu Erörterungen in der technischen Literatur geführt hat. Man sehe hierüber:

Veltmann, Dinglers Polytechn. Journal 1876, S. 481;

W. Keck, Zeitschr. d. Architekt.- und Ing.-Vereins Hannover 1877, S. 151;

R. Skutsch, „Anwendung der Massenreduktion nach Reye und Poinso“t“, Sitzungsberichte der Berliner Mathemat. Gesellschaft 1905, S. 57;

A. Föppl, Vorlesungen über Technische Mechanik, Bd. IV, S. 296.

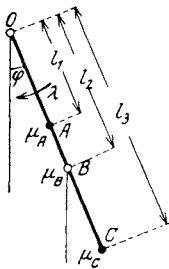


Fig. 499.

Es sei also angenommen, daß  $\varphi = \psi$  bleibt (Fig. 499). Ersetzt man die Masse  $M_1$  des ersten Körpers durch zwei Punkte, von denen der eine im Drehpunkt  $O$  angenommen wird, so hat der zweite Ersatzpunkt  $A$  die Entfernung  $OA = l_1 = p_1 + \frac{i_1^2}{p_1}$ ,

wenn  $i_1$  der Trägheitshalbmesser der Masse  $M_1$  für die Schwerachse senkrecht zur Bildebene ist; die Masse dieses in  $A$  liegenden Ersatzpunktes ist dann nach Gleichung 53:

$$\mu_A = M_1 \cdot \frac{p_1^2}{p_1^2 + i_1^2}.$$

Die Masse  $M_2$  des zweiten Körpers ersetzt man ebenfalls durch zwei Punkte, von denen man den einen im Drehpunkt  $B$  wählt; es ist die Masse dieses Ersatzpunktes nach Gleichung 53:

$$\mu_B = M_2 \cdot \frac{i_2^2}{p_2^2 + i_2^2};$$

der zweite Ersatzpunkt  $C$  hat dann die Entfernung

$$BC = p_2 + \frac{i_2^2}{p_2}$$

und die Masse

$$\mu_C = M_2 \cdot \frac{p_2^2}{p_2^2 + i_2^2},$$

wenn  $i_2$  der Trägheitshalbmesser des zweiten Körpers für seine Schwerachse senkrecht zur Bildebene ist. Dann ist  $C$  der Schwingungs- oder Stoßmittelpunkt von  $M_2$  bei seiner Drehung um  $B$  (vgl. 100).

Bezeichnet man  $\overline{OC} = l_3$  und nennt  $\lambda$  die Winkelbeschleunigung um  $O$ , so ist  $\mu_C l_3 \lambda$  der Beschleunigungsdruck der Masse  $\mu_C$  und  $\mu_C g$  ihr Gewicht; bildet man ihre Momente um  $B$ , so müssen, da die äußeren

Kräfte des Körpers den Beschleunigungsdrücken gleichwertig sind, diese Momente gleich sein, oder

$$\mu_C l_3 \lambda (l_3 - l_2) = \mu_C g (l_3 - l_2) \sin \varphi$$

oder

$$\lambda = \frac{g \sin \varphi}{l_3}.$$

Betrachtet man jetzt beide Körper  $M_1$  und  $M_2$ , da  $\varphi = \psi$  bleiben soll, wie einen einzigen starren Körper, so hat dieser die gleiche Winkelbeschleunigung  $\lambda$  um  $O$  und seine reduzierte Pendellänge ist

$$l = \frac{g \sin \varphi}{\lambda}.$$

Es ist also  $l = l_3$ , d. h. der Schwingungsmittelpunkt dieser starren Vereinigung von  $M_1$  und  $M_2$  liegt ebenfalls in  $C$ . Daraus folgt: Sollen Glocke und Klöppel derart schwingen, daß ihre beiden Achsen  $OB$  und  $BC$  immer in derselben Geraden bleiben, so muß der Schwingungsmittelpunkt des Klöppels mit jenem der vereinigten Masse von Glocke und Klöppel an dieselbe Stelle fallen. Dieses Resultat wurde von Skutsch bemerkt (siehe oben).

An der vereinigten Masse von Glocke und Klöppel wirken außer dem Gelenkdruck in  $O$  die Gewichte  $\mu_A g$ ,  $\mu_B g$ ,  $\mu_C g$ ; alle zusammen sind gleichwertig den Beschleunigungsdrücken der drei Punkte  $\mu_A$ ,  $\mu_B$ ,  $\mu_C$ . Bildet man die Momente um  $O$ , so wird demnach

$$\mu_A l_1^2 \lambda + \mu_B l_2^2 \lambda + \mu_C l_3^2 \lambda = \mu_A g l_1 \sin \varphi + \mu_B g l_2 \sin \varphi + \mu_C g l_3 \sin \varphi,$$

woraus 
$$\lambda = g \sin \varphi \frac{\mu_A l_1 + \mu_B l_2 + \mu_C l_3}{\mu_A l_1^2 + \mu_B l_2^2 + \mu_C l_3^2};$$

durch Vergleich mit

$$\lambda = \frac{g \sin \varphi}{l_3}$$

folgt:

$$l_3 = \frac{\mu_A l_1^2 + \mu_B l_2^2}{\mu_A l_1 + \mu_B l_2}.$$

Führt man hier für  $\mu_A$ ,  $\mu_B$ ,  $l_1$  die oben angegebenen Werte ein und setzt überdies

$$l_3 = \overline{OB} + \overline{BC} = l_2 + p_2 + \frac{i_2^2}{p_2},$$

so erhält man als Bedingungsgleichung zwischen den Massen und Abmessungen von Glocke und Klöppel die Beziehung:

$$M_1 [p_2 i_1^2 - p_1 p_2 (l_2 + p_2 - p_1) - p_1 i_2^2] = M_2 l_2 i_2^2.$$

**261. Die dynamischen Ersatzpunkte zweier Systeme.** Die Ersatzpunkte  $A$  und  $B$  eines ebenen Systems und die Ersatzpunkte  $C$  und  $D$  eines zweiten ebenen Systems können derart gefunden werden, daß  $A$  mit  $C$  und  $B$  mit  $D$  zusammenfällt.

Es seien (Fig. 500)  $S_1$  und  $S_2$  die Schwerpunkte der beiden Systeme,  $i_1$  und  $i_2$  ihre Trägheitshalbmesser für die Schwerachsen; dann kann obengenannte Forderung nur durch zwei Punkte  $A$  und  $B$  erfüllt werden, die auf der Geraden  $S_1S_2$  liegen. Ferner ist nach Gleichung 54 (ohne Rücksicht auf das Vorzeichen):

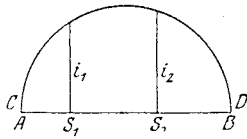


Fig. 500.

$$AS_1 = p_1, \quad \overline{BS_1} = \frac{i_1^2}{p_1};$$

$$\overline{CS_2} = p_2, \quad \overline{DS_2} = \frac{i_2^2}{p_2}.$$

Errichtet man in  $S_1$  und  $S_2$  die Senkrechten auf die Gerade  $S_1S_2$ , trägt auf ihnen die Trägheitshalbmesser  $i_1$  und  $i_2$  auf und zieht den Halbkreis, der seinen Mittelpunkt auf  $S_1S_2$  hat und durch die Endpunkte von  $i_1$ ,  $i_2$  geht, so schneidet dieser Halbkreis die Gerade  $S_1S_2$  in den gesuchten Punkten  $A$  und  $B$ , in denen auch  $C$  und  $D$  liegen werden (Skutsch, a. a. O.).

**262. Beispiel.** Zwei Scheiben bewegen sich in ihrer gemeinsamen Ebene und werden plötzlich fest miteinander verbunden. Welche Bewegung machen die Scheiben nach dieser Verbindung?

Ersetzt man die beiden Scheiben durch zwei dynamisch gleichwertige Punktpaare  $A$  und  $B$ ,  $C$  und  $D$ , so können diese, wie oben gezeigt wurde, zusammenfallend angenommen werden. Die Ersatzmassen seien dann  $\mu_A$  und  $\mu_B$  der einen Scheibe,  $\mu_C$  und  $\mu_D$  der anderen; in  $A$  ist dann die Masse  $\mu_A + \mu_C$ , in  $B$  die Masse  $\mu_B + \mu_D$  vereinigt.

Vor der Vereinigung hätten die Punkte  $A$  und  $B$  folgende Geschwindigkeiten:

$$A \begin{cases} V_1 \perp AB \\ V \parallel AB \end{cases}, \quad B \begin{cases} V_2 \perp AB \\ V \parallel AB \end{cases},$$

wobei daran erinnert werden möge, daß die Geschwindigkeit  $V$  in Richtung von  $AB$  für  $A$  und  $B$  denselben Wert haben muß (vgl. 16). Die Punkte  $C$  und  $D$  hätten vor der Vereinigung die Geschwindigkeiten:

$$C \begin{cases} v_1 \perp AB \\ v \parallel AB \end{cases}, \quad D \begin{cases} v_2 \perp AB \\ v \parallel AB \end{cases}.$$

Nach der festen Verbindung hätten die Punkte folgende Geschwindigkeiten:

$$A \text{ und } C \begin{cases} c_1 \perp AB \\ c \parallel AB \end{cases}, \quad B \text{ und } D \begin{cases} c_2 \perp AB \\ c \parallel AB \end{cases}.$$

Da die Summen der Bewegungsgrößen vor wie nach der plötzlichen Vereinigung den gleichen Wert besitzen müssen, so bestehen die Gleichungen:

$$\mu_A V_1 + \mu_C v_1 = (\mu_A + \mu_C) c_1,$$

$$\mu_B V_2 + \mu_D v_2 = (\mu_B + \mu_D) c_2,$$

$$(\mu_A + \mu_B) V + (\mu_C + \mu_D) v = (\mu_A + \mu_B + \mu_C + \mu_D) \cdot c,$$

aus denen die Geschwindigkeiten  $c$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  gerechnet werden können (vgl. Skutsch, a. a. O.).

**263. Die dynamischen Ersatzpunkte dreier Systeme.** In Abschnitt X wurde gezeigt, daß man ein in seiner Ebene bewegtes System auf sehr verschiedene Art durch drei Massenpunkte dynamisch ersetzen kann.

Bewegen sich nun drei Systeme in derselben Ebene, so kann gezeigt werden, daß man diese drei Punkte derart wählen kann, daß sie für alle drei Systeme die gleichen sind.

Bezeichnen wir in Fig. 501 die Systeme mit 1, 2, 3, ihre Schwerpunkte mit  $S_1, S_2, S_3$ , mit  $i_1, i_2, i_3$  ihre Trägheitshalbmesser für die Schwerachsen senkrecht zur Bildebene; dann können die dynamischen Ersatzpunkte  $A$  und  $B$  der Systeme 1 und 2 nach 261 an derselben Stelle gewählt werden, wenn

$$\overline{AS_1} \cdot \overline{BS_1} = i_1^2, \quad \overline{AS_2} \cdot \overline{BS_2} = i_2^2$$

gemacht wird.

Ebenso können die dynamischen Ersatzpunkte  $E$  und  $F$  der Systeme 1 und 3 an derselben Stelle angenommen werden, wenn

$$\overline{ES_1} \cdot \overline{FS_1} = i_1^2, \quad \overline{ES_3} \cdot \overline{FS_3} = i_3^2$$

gemacht wird.

Nun wurde in 104 bewiesen, daß man ein System durch drei dynamisch gleichwertige Ersatzpunkte derart ersetzen kann, daß man zwei von diesen Punkten beliebig wählt. Wir wollen also das System 1 durch drei Punkte ersetzen, von denen zwei in  $B$  und  $E$  liegen; dann muß nach 104 der dritte Ersatzpunkt auf einem Kreise liegen, der durch  $B, E$  und außerdem durch  $A$  und  $F$  geht.

Statt die ersten zwei Ersatzpunkte in  $B$  und  $E$  zu wählen, könnte man sie auch in zwei beliebigen anderen Stellen des Kreises über  $B, E, A, F$  annehmen, z. B. in  $L$  und  $M$ ; der dritte Punkt  $N$  muß dann auch auf diesem Kreise liegen, und zwar an beliebiger Stelle.

Zieht man die Gerade  $S_2S_3$  und nennt  $C, D$  ihre Schnittpunkte mit dem früher gefundenen Kreise, so ist auch

$$\overline{CS_2} \cdot \overline{DS_2} = i_2^2, \quad \overline{CS_3} \cdot \overline{DS_3} = i_3^2.$$

Es können also, um das System 2 zu ersetzen, die gleichen Punkte  $L, M, N$  wie früher gewählt werden. Dasselbe gilt von dem System 3.

Die Wahl der drei dynamischen Ersatzpunkte  $L, M, N$  auf dem Kreise über  $A, B, C, D, E, F$  ist also ganz beliebig. Natürlich wird es hierbei vorkommen können, daß die eine oder andere Masse der Ersatzpunkte negativ ausfällt.

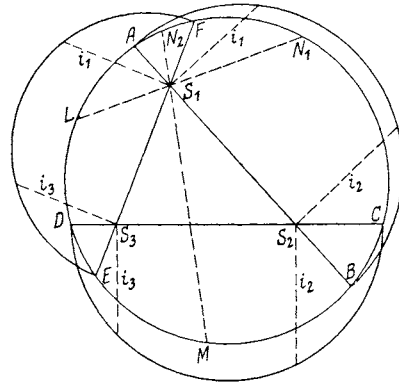


Fig. 501.

**264. Die statischen Ersatzpunkte der kinematischen Kette.** Der Ersatz der Massen einer kinematischen Kette oder eines Getriebes durch dynamisch gleichwertige Ersatzpunkte ist nicht zu umgehen, wenn es sich um den zeitlichen Verlauf der Bewegung der Kette handelt.

Wir werden auf diesen Umstand später ausführlich einzugehen haben.

Solange es sich jedoch nur um den augenblicklichen Bewegungszustand handelt, also z. B. um die Ermittlung der Beschleunigungen aus den Kräften, der Spannungen und der Gelenkdrücke usw. in einem Getriebe, genügt es, die Beschleunigungsdrücke der Kette richtig zu bestimmen. Hierzu ist aber, wie wir in 124 beweisen konnten, nicht notwendig, die Massen der Kettenglieder durch dynamisch gleichwertige Punkte zu ersetzen, sondern es genügt der Ersatz durch statisch gleichwertige Punkte. Dies erleichtert uns aber die Aufgabe wesentlich.

Als statische Ersatzpunkte eines Systems können wir entweder irgend drei Punkte annehmen oder auch zwei Punkte, wenn auf ihrer Verbindungsgeraden der Schwerpunkt liegt.

Zweckmäßig werden wir die statischen Ersatzpunkte in den Gelenken der Kette oder des Getriebes wählen und die Massen der Glieder dorthin verlegen. Die Schwerpunkte der Glieder brauchen hier nicht zu den Ersatzpunkten gezählt zu werden, sie spielen bei der Ermittlung der Spannungen und Gelenkdrücke weiter keine Rolle.

### 265. Beispiele.

1. Das Gelenkviereck, aus vier Stangen zusammengesetzt, deren Schwerpunkte in den Achsen der Stangen liegen (Fig. 502).

Hier wird die Masse jeder Stange auf ihre beiden Gelenke verteilt, und zwar nach dem Schwerpunktsgesetz; also z. B. die Masse  $M_1$  der Stange 1 in die Massen  $m_{A1}$  in  $A$  und  $m_{B1}$  in  $B$ . Führt man dies auch für die Masse  $M_4$  der Stange 4 durch, so fällt nach  $A$  überdies die Masse  $m_{A4}$ . Dann sind die vier statischen Ersatzmassen des Gelenkvierecks:

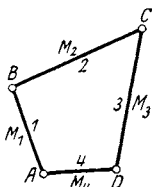


Fig. 502.

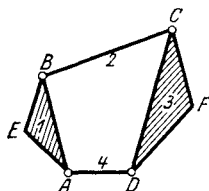


Fig. 503.

$$m_A = m_{A1} + m_{A4},$$

$$m_B = m_{B1} + m_{B2},$$

$$m_C = m_{C2} + m_{C3},$$

$$m_D = m_{D3} + m_{D4}$$

und die Gesamtmasse des Gelenkvierecks

$$M = M_1 + M_2 + M_3 + M_4$$

$$= m_A + m_B + m_C + m_D.$$

2. Das Gelenkviereck, aus zwei Stangen und zwei Dreiecksgliedern zusammengesetzt (Fig. 503).

Die Stangen 2 und 4 sind wie vorher zu behandeln. Das Dreiecksglied 1 ist durch drei statisch gleichwertige Massenpunkte in  $A$ ,  $B$ ,  $E$

nach dem Schwerpunktsgesetze zu ersetzen. Ebenso das Dreiecksglied 3. Die Masse der Kette ist dann durch folgende sechs Massenpunkte ersetzt:

$$\begin{aligned} m_A &= m_{A1} + m_{A4}, \\ m_B &= m_{B1} + m_{B2}, \\ m_C &= m_{C2} + m_{C3}, \\ m_D &= m_{D3} + m_{D4}, \\ m_E &= m_{E1}, \\ m_F &= m_{F3}. \end{aligned}$$

3. Achtgliedrige Kette, die aus vier Stangen, drei Dreiecksgliedern und einem Vierecksglied zusammengesetzt ist (Fig. 504).

Die Stangen und Dreiecksglieder werden wie früher behandelt.

Die Masse des Vierecksgliedes 8 wird nach dem Schwerpunktsgesetze auf die vier Gelenke  $A, E, F, L$  verteilt; hierbei kann eine der Massen beliebig groß, also auch gleich null angenommen werden; die anderen drei Massen sind dann bestimmt. Die Masse der Kette ist dann durch folgende elf Massenpunkte zu ersetzen:

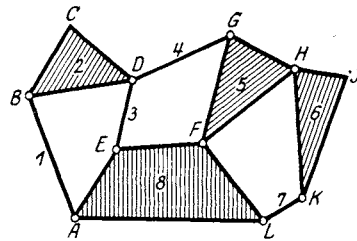


Fig. 504.

$$\begin{aligned} m_A &= m_{A1} + m_{A8}, & m_B &= m_{B1} + m_{B2}, \\ m_C &= m_{C2}, & m_D &= m_{D2} + m_{D3} + m_{D4}, \\ m_E &= m_{E3} + m_{E8}, & m_F &= m_{F5} + m_{F8}, \\ m_G &= m_{G4} + m_{G5}, & m_H &= m_{H5} + m_{H6}, \\ m_J &= m_{J6}, & m_K &= m_{K6} + m_{K7}, \\ m_L &= m_{L7} + m_{L8}. \end{aligned}$$

Auch hier kann es natürlich vorkommen, daß die Massen von Ersatzpunkten negativ oder null ausfallen, wie schon bei den Ersatzpunkten eines Systems (vgl. 104 und 108, 4. Beispiel) besprochen wurde.

**266. Die Beschleunigungsdrücke.** Die Beschleunigungsdrücke einer kinematischen Kette oder eines Getriebes setzen sich zusammen aus den Beschleunigungsdrücken ihrer Glieder.

Die Beschleunigungsdrücke jedes Gliedes sind nach den Grundsätzen zu bestimmen, die wir beim starren System erörtert haben (vgl. XII). Insbesondere sei nochmals darauf hingewiesen, wie die Beschleunigungsdrücke eines stangenartigen Gliedes (vgl. 127) und eines Dreiecksgliedes (vgl. 129 Schluß) zu bestimmen sind.

Ist von einer kinematischen Kette der Beschleunigungszustand für einen bestimmten Augenblick bekannt, so wird man die Beschleunigungsdrücke dieser Kette finden, wenn man ihre Masse auf die Gelenke nach dem Schwerpunktsgesetze verteilt, sodann die Beschleunigungsdrücke  $mb$  dieser Ersatzpunkte in Richtung der Beschleunigungen  $b$  anbringt, ebenso die Kraftpaare  $K$  (vgl. 127, 129); alle diese Kräfte  $mb$  und  $K$  zusammengenommen bilden das System der Beschleunigungsdrücke der Kette.

Die Umkehrung dieser Beschleunigungsdrücke gibt das System der Trägheitskräfte. Wir werden von dieser Ermittlung der Trägheitskräfte in den folgenden Kapiteln vielfache Anwendung machen.

---

## XXV. Dynamik der freien kinematischen Kette.

**267. Stellung des Problems.** Die ohne jeden Zwang, ohne jede Führung bewegliche Kette ist das Gegenstück zu der frei beweglichen, führungslosen Scheibe (siehe IV). Sie hat für den Ingenieur nur untergeordnetes Interesse, da alle im Maschinenbau vorkommenden kinematischen Ketten geführt, ja fast ausschließlich zwangläufig geführt sind. Jedenfalls ist aber sowohl die frei bewegliche Scheibe, wie auch die frei bewegliche kinematische Kette von höchster Wichtigkeit für die Theorie der Dynamik und aus diesem Grunde soll im folgenden wenigstens an ein paar einfachen Fällen gezeigt werden, wie die graphische Lösung sich gestalten läßt. Wir beschränken uns hierbei auf das Gelenkviereck als Beispiel für eine geschlossene Kette und auf zwei gelenkig verbundene Stäbe als Beispiel für eine offene kinematische Kette. Man wird aus diesen beiden Beispielen den Weg entnehmen, den man in anderen Fällen einzuschlagen hätte.

**268. Dynamik zweier gelenkig verbundener Stäbe ohne äußere Kräfte. Analytische Lösung.** Zwei in  $A$  gelenkig verbundene Stäbe  $AB$  und  $AC$  bewegen sich augenblicklich mit bekannten Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_1$  und  $\omega_2$ . Man soll die Winkelbeschleunigungen  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  der Stäbe ermitteln, wenn sie keinen äußeren Kräften ausgesetzt sind (Fig. 505).

Um die analytische Lösung der Aufgabe durchzuführen, wird man mit Vorteil das Schwerpunktsgetriebe der beiden Stäbe (vgl. 225, Fig. 448) heranziehen. Es seien  $S_1$  und  $S_2$  die Schwerpunkte der Stäbe,  $H_1$  und  $H_2$  ihre Hauptpunkte,  $S$  der Gesamtschwerpunkt; nach dem Schwerpunktsprinzip ist seine Beschleunigung null. Bezeichnet man

$$\overline{AH_1} = r_1, \overline{H_1S_1} = h_1; \overline{AH_2} = r_2, \overline{H_2S_2} = h_2,$$

so bestehen die Beziehungen

$$M_1 h_1 = M_2 r_1, \quad M_2 h_2 = M_1 r_2;$$

hierin sind  $M_1$  und  $M_2$  die Massen der Stäbe. Verteilt man die Masse  $M_1$

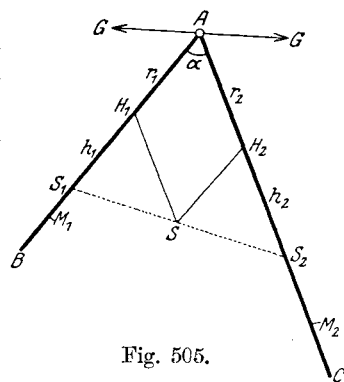


Fig. 505.



nach dem Schwerpunktsesetze in die Punkte  $H_1$  und  $A$ , so entfällt  $M = M_1 + M_2$  auf  $H_1$  und  $-M_2$  auf  $A$ ; die Verteilung der Masse  $M_2$  in die Punkte  $H_2$  und  $A$  liefert ebenso  $M$  in  $H_2$  und  $-M_1$  in  $A$ ; danach wird die Gesamtmasse beider Stäbe durch folgende drei Massen ersetzt:  $M$  in  $H_1$  und  $H_2$ ,  $-M$  in  $A$ .

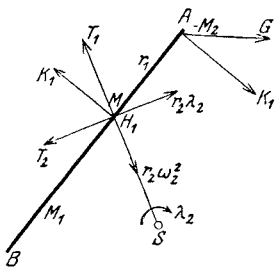


Fig. 505 a.

Löst man das Gelenk und bringt den unbekanntem Gelenkdruck  $G$  als äußere Kraft an, so kann auf den Stab  $M_1$  das d'Alembertsche Prinzip angewendet werden. Es seien  $T_1$  und  $T_2$  die Trägheitskräfte der Punktmasse  $M$  in  $H_1$  (Fig. 505 a); da  $H_1$  nur eine Drehung um  $S$  unternimmt mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_2$  der zweiten Stange

$$T_1 = M r_2 \omega_2^2 \text{ und } T_2 = M r_1 \lambda_2.$$

Außerdem ist noch in  $A$  und  $H_1$  das Kraftpaar der Trägheitskräfte

$$K_1 r_1 = M_1 \lambda_1 (p_1 p_2 - i_1^2)$$

anzubringen (vgl. 127, Gleichung 99), worin  $i_1$  der Trägheitshalbmesser des Stabes  $M_1$  in bezug auf  $S_1$ , ferner

$$p_1 = \overline{S_1 H_1} = h_1, \quad p_2 = \overline{S_1 A} = -(h_1 + r_1)$$

bedeutet. Es ist also

$$K_1 r_1 = -M_1 \lambda_1 (h_1^2 + h_1 r_1 + i_1^2).$$

Bildet man die Momente der äußeren und der Trägheitskräfte um  $A$  und setzt ihre Summe null, so ist

$$T_1 r_1 \sin \alpha + T_2 r_1 \cos \alpha + K_1 r_1 = 0$$

oder 
$$M (\omega_2^2 \sin \alpha + \lambda_2 \cos \alpha) = \frac{M_1 \lambda_1}{r_1 r_2} (h_1^2 + h_1 r_1 + i_1^2);$$

setzt man hier  $h_1 + r_1 + \frac{i_1^2}{h_1} = q_1$ , so wird, da  $r_1 r_2 = h_1 h_2$  und  $M_1 (h_2 + r_2) = M h_2$  ist:

$$\lambda_1 \frac{q_1}{h_2 + r_2} - \lambda_2 \cos \alpha = \omega_2^2 \sin \alpha \dots \dots \dots \text{ a)}$$

Eine gleiche Betrachtung für den zweiten Stab liefert die Gleichung

$$\lambda_1 \cos \alpha - \lambda_2 \frac{q_2}{h_1 + r_1} = \omega_1^2 \sin \alpha \dots \dots \dots \text{ b)}$$

worin  $h_2 + r_2 + \frac{i_2^2}{h_2} = q_2$  bezeichnet.

Aus den Gleichungen a) und b) ergeben sich die gesuchten Winkelbeschleunigungen der beiden Stäbe:

$$\lambda_1 \left( \cos^2 \alpha - \frac{q_1 q_2}{n_1 n_2} \right) = \sin \alpha \left( \omega_1^2 \cos \alpha - \omega_2^2 \frac{q_2}{n_1} \right),$$

$$\lambda_2 \left( \cos^2 \alpha - \frac{q_1 q_2}{n_1 n_2} \right) = \sin \alpha \left( \omega_2^2 \cos \alpha - \omega_1^2 \frac{q_1}{n_2} \right)$$

mit den Bezeichnungen:

$$n_1 = h_1 + r_1, \quad n_2 = h_2 + r_2, \quad q_1 = n_1 + \frac{i_1^2}{h_1}, \quad q_2 = n_2 + \frac{i_2^2}{h_2}.$$

**269. Graphische Lösung.** Zwei Systeme 1 und 2, deren Geschwindigkeitszustand bekannt ist, sind in  $A$  gelenkig miteinander verbunden. Äußere Kräfte wirken auf diese Systeme nicht ein. Es soll der Gelenkdruck  $G$ , den die beiden Systeme in  $A$  aufeinander ausüben, die Beschleunigung des Punktes  $A$  und die Beschleunigungen der beiden Schwerpunkte  $S_1$  und  $S_2$  der Systeme ermittelt werden (Fig. 506).

Der Gelenkdruck  $G$  in  $A$  tritt doppelt auf;  $G_1$  wirkt auf das System 1,  $G_2$  auf das System 2; im übrigen ist  $G_1 = G_2 = G$ .  $G_1$  und  $G_2$  sind innere Kräfte, wenn man 1 und 2 als Teile eines Systems betrachtet; sie sind hingegen äußere Kräfte, wenn man sowohl 1 wie 2 als ein selbständiges System ansieht. Infolgedessen wird  $G_1$  dem System 1 einen gewissen Beschleunigungszustand erteilen, ebenso  $G_2$  dem System 2; dabei kennt man aber  $G_1$  und  $G_2$  weder der Größe noch Richtung nach. Für deren Bestimmung stehen folgende Bedingungen zur Verfügung:

a) die Beschleunigung des Punktes  $A$  muß in beiden Systemen die gleiche sein;

b) nennt man  $M_1$  und  $M_2$  die Massen der beiden Systeme, so ist nach dem Prinzip der Schwerpunktsbewegung (vgl. 52) die Beschleunigung von

$$S_1: \quad b_{S_1} = \frac{G}{M_1},$$

die Beschleunigung von

$$S_2: \quad b_{S_2} = \frac{G}{M_2};$$

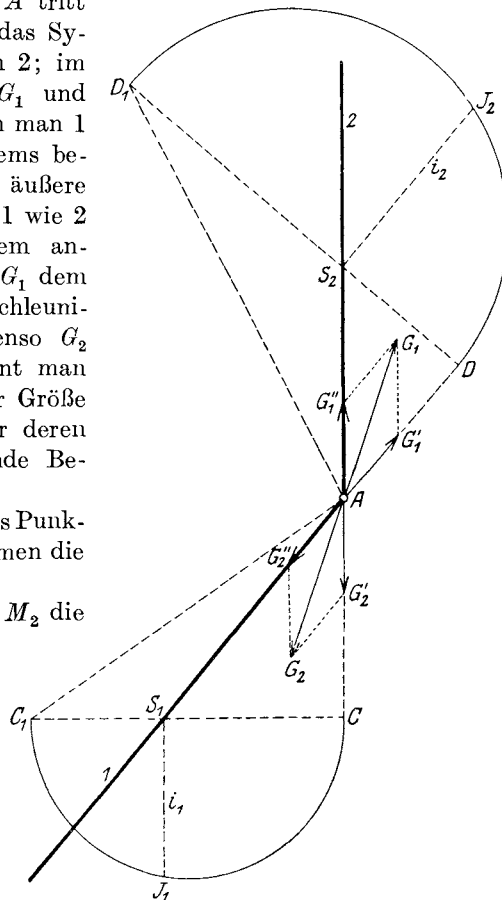


Fig. 506.

es ist also

$$b_{S_1} : b_{S_2} = M_2 : M_1,$$

und zwar haben  $b_{S_1}$  und  $b_{S_2}$  entgegengesetzte Richtungen.

In Fig. 506 sind die beiden Systeme durch die Geraden  $S_1A$  und  $S_2A$  dargestellt. Im Geschwindigkeitsplan Fig. 506a wurde  $\overline{oa} = v_A$ , gemacht, sodann  $as_1 \perp AS_1$  und  $as_2 \perp AS_2$  gezogen, endlich  $\overline{os_1} = v_{S_1}$ ,  $\overline{os_2} = v_{S_2}$  aufgetragen. Dabei wurde also angenommen, daß die drei Geschwindigkeiten  $v_A$ ,  $v_{S_1}$  und  $v_{S_2}$  gegeben sind.

Im Beschleunigungsplan Fig. 506b wurden zunächst die beiden Normalbeschleunigungen konstruiert, und zwar von einem beliebigen Punkt  $a$  ausgehend:

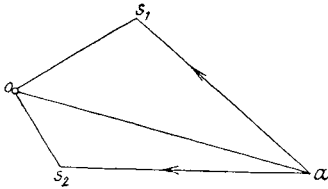


Fig. 506 a.

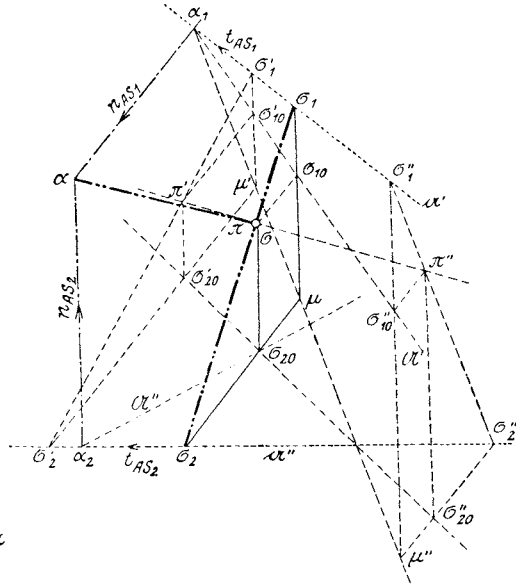


Fig. 506 b.

$$\overline{\alpha_1 a} = n_{AS_1} = \frac{v_{AS_1}^2}{AS_1} = \frac{s_1 a^2}{AS_1} \text{ in Richtung } AS_1,$$

$$\overline{\alpha_2 a} = n_{AS_2} = \frac{v_{AS_2}^2}{AS_2} = \frac{s_2 a^2}{AS_2} \text{ in Richtung } AS_2,$$

sodann in  $a_1$  und  $a_2$  die Senkrechten  $a' \perp a_1 a$ ,  $a'' \perp a_2 a$  errichtet; in ihnen müssen die gesuchten Beschleunigungspunkte  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  von  $S_1$  und  $S_2$  liegen, wenn  $a$  der Beschleunigungspunkt von  $A$  ist. Sind die noch zu suchenden Schwerpunktsbeschleunigungen

$$b_{S_1} = \overline{\pi \sigma_1}, \quad b_{S_2} = \overline{\pi \sigma_2},$$

so muß nach den Bedingungen a) und b) der Beschleunigungsnullpunkt  $\pi$  zwischen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  auf  $\sigma_1 \sigma_2$  liegen und diese Strecke im Verhältnis  $M_2 : M_1$  teilen.

Der Gesamtschwerpunkt  $S$  beider Systeme ist keiner Kraft unterworfen; sein Beschleunigungspunkt  $\sigma$  fällt also mit  $\pi$  zusammen. Die

Beschleunigung  $b_{S_1}$  rührt her von dem Gelenkdruck  $G_1$ , den das System 1 von 2 empfängt.  $G_1$  zerfällt in die beiden Teile  $G_1'$  in Richtung von  $S_1A$  und  $G_1''$  in Richtung von  $AS_2$ . Da der Teil  $G_1'$  durch  $S_1$  geht, wird er im System 1 keine Winkelbeschleunigung hervorrufen und somit dem Punkt  $A$  keine Tangentialbeschleunigung um  $S_1$  erteilen. Hingegen wird der andere Teil  $G_1''$  des Gelenkdruckes dem Punkt  $A$  eine Tangentialbeschleunigung erteilen; sie heiße  $t_{AS_1}$ .

Um sie zu finden, gehen wir wie in 56, Fig. 66, vor. Wir fällen von  $S_1$  die Senkrechte  $S_1C$  auf  $G_1''$ , suchen zum Fußpunkt  $C$  den Gegenpunkt  $C_1$ , indem wir in  $S_1$  den Trägheitshalbmesser des Systems  $\overline{S_1J_1} = i_1 \perp S_1C$  auftragen und  $C_1J_1 \perp J_1C$  ziehen. Sodann verbinden wir  $C_1$  mit  $A$  und zeichnen durch  $\alpha_1$  die Gerade  $\mathcal{U}' \perp AC_1$ .

Dasselbe führen wir auch im zweiten System durch. Wir ziehen  $S_2D \perp G_2''$  und suchen zu  $D$  den Gegenpunkt  $D_1$ ; verbinden  $D_1$  mit  $A$  und zeichnen durch  $\alpha_2$  die Gerade  $\mathcal{U}'' \perp AD_1$ .

Wären nun z. B. die Beschleunigungspunkte  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  bereits gefunden, so könnte der Punkt  $\pi$  durch die Teilung

$$\overline{\pi\sigma_1} : \overline{\pi\sigma_2} = M_2 : M_1$$

ermittelt werden. Dann wäre  $\overline{\pi\sigma_1} = b_{S_1}$  die Beschleunigung von  $S_1$ , hervorgerufen durch  $G_1$ ; würde man dann  $\pi\sigma_{10} \parallel S_1A$ ,  $\sigma_{10}\sigma_1 \parallel AS_2$  machen, so wäre  $\pi\sigma_{10}$  jener Teil von  $b_{S_1}$ , der durch  $G_1'$  erzeugt wird, hingegen  $\sigma_{10}\sigma_1$  jener Teil, der durch  $G_1''$  hervorgerufen wird. Da aber nur  $G_1''$  die Tangentialbeschleunigung  $t_{AS_1}$  von  $A$  in bezug auf  $S_1$  erzeugt, muß  $\sigma_{10}$  auf der Geraden  $\mathcal{U}'$  liegen; denn die Dreiecke  $\alpha_1\sigma_1\sigma_{10}$  und  $AS_1C_1$  sind ähnlich und um  $90^\circ$  verdreht, wie in Fig. 66 die Dreiecke  $DS_2S$  und  $ASC_1$ .

Stellt man dieselbe Betrachtung auch für das System 2 an, so entnimmt man, daß der Punkt  $\sigma_{20}$  auf der Geraden  $\mathcal{U}''$  liegen muß. Der Schnittpunkt  $\mu$  von  $\sigma_1\sigma_{10}$  mit  $\sigma_2\sigma_{20}$  liegt derart, daß ebenfalls die Beziehung besteht

$$\overline{\sigma_1\sigma_{10}} : \overline{\sigma_{10}\mu} = M_2 : M_1.$$

Da man jedoch die richtige Lage von  $\sigma_1$  nicht kennt, wird man zunächst auf der Geraden  $\alpha'$  einen beliebigen Punkt  $\sigma_1'$  annehmen,  $\sigma_1'\sigma_{10}' \parallel S_2A$  bis zum Schnitt  $\sigma_{10}'$  mit  $\mathcal{U}'$  ziehen und bis  $\mu'$  derart verlängern, daß

$$\overline{\sigma_1'\sigma_{10}'} : \overline{\sigma_{10}'\mu'} = M_2 : M_1$$

ist; ferner  $\mu'\sigma_2' \parallel AS_1$  ziehen bis zum Schnitt  $\sigma_2'$  mit  $\alpha''$ ,  $\sigma_1'$  mit  $\sigma_2'$  verbinden und diese Strecke derart teilen, daß

$$\overline{\sigma_1'\pi'} : \overline{\pi'\sigma_2'} = M_2 : M_1$$

ist; damit erhält man den Punkt  $\pi'$  und auch  $\sigma_{20}'$  im Schnitte von  $\pi'\sigma_{20}' \parallel S_2A$  mit  $\mu'\sigma_2'$ .

Wiederholt man diese Konstruktionen mit einem zweiten, auf  $\alpha'$  willkürlich angenommenen Punkt  $\sigma_1''$ , so erhält man die Punkte  $\sigma_{10}''$ ,

$\mu'', \sigma_2'', \pi''$  und  $\sigma_{20}''$ ; die Punkte  $\pi' \pi \pi''$  erfüllen eine Punktreihe, ebenso auch die Punkte  $\mu' \mu \mu''$  und  $\sigma_{20}' \sigma_{20} \sigma_{20}''$ . Bringt man demnach die Gerade  $\sigma_{20}' \sigma_{20}''$  zum Schnitt mit  $\mathcal{U}'$ , so erhält man den Punkt  $\sigma_{20}$  und aus ihm können durch Ziehen von  $\sigma_{20} \sigma_2 \parallel AS_1$  die Punkte  $\sigma_2$  und  $\mu, \sigma_{20} \pi \parallel AS_2$  der Punkt  $\pi$ , endlich aus  $\mu \sigma_1 \parallel AS_2$  oder durch Verlängerung von  $\sigma_2 \pi$  bis zum Schnitt mit  $a'$  der Punkt  $\sigma_1$  gewonnen werden.

Damit ist aber die richtige Lage des Beschleunigungsnullpunktes  $\pi$  bestimmt und es ist

$$\overline{\pi a} \equiv b_A, \quad \overline{\pi \sigma_1} \equiv b_{S_1}, \quad \overline{\pi \sigma_2} \equiv b_{S_2},$$

ferner

$$\overline{\sigma_1 a_1} \equiv t_{AS_1}, \quad \overline{\sigma_2 a_2} \equiv t_{AS_2}$$

und

$$b_A \equiv b_{S_1} + t_{AS_1} + n_{AS_1},$$

$$b_A \equiv b_{S_2} + t_{AS_2} + n_{AS_2}.$$

Die Gerade  $\sigma_1 \pi \sigma_2$  gibt die Richtung des Gelenkdruckes  $G$  in  $A$  an. Seine Größe ist

$$G = M_1 \cdot \overline{\pi \sigma_1} = M_2 \cdot \overline{\pi \sigma_2}.$$

**270. Direkte Lösung der vorigen Aufgabe.** Die Aufgabe, die Winkelbeschleunigungen und den Gelenkdruck zweier Verbundstäbe zu finden (Fig. 507), läßt auch eine direkte Lösung zu. Um sie zu erklären, bediene man sich des in Fig. 507c gezeichneten Beschleunigungsplanes.

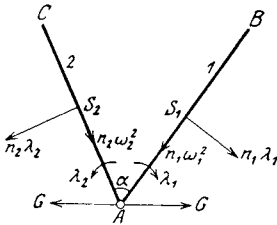


Fig. 507.

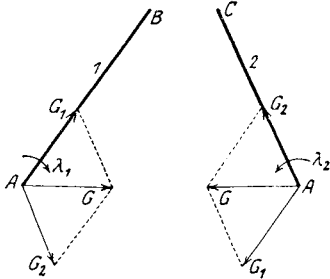


Fig. 507a.

Fig. 507b.

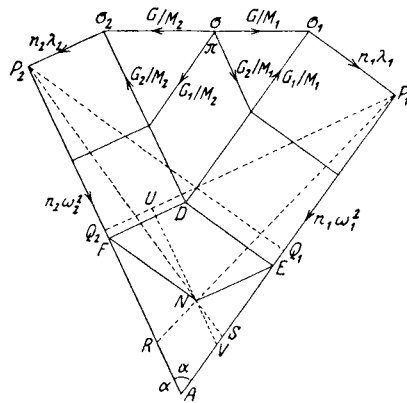


Fig. 507c.

Es seien  $\sigma_1, \sigma_2$  und  $\sigma$  die Beschleunigungspunkte von  $S_1, S_2$  und  $S$ , von denen  $\sigma$  mit dem Nullpunkte  $\pi$  zusammenfällt, da  $S$  keine Beschleunigung erhält. Ist  $G$  der Gelenkdruck in  $A$ , so ist  $\frac{G}{M_1}$  die Beschleunigung  $\overline{\pi \sigma_1}$  von  $S_1$ ,  $\frac{G}{M_2}$  die Beschleunigung  $\overline{\pi \sigma_2}$  von  $S_2$ ;  $\frac{G}{M_1}$  zerfällt in die beiden

Teile  $\frac{G_1}{M_1}$  und  $\frac{G_2}{M_2}$  in Richtung der Stangen  $AB$  und  $CA$ ; ebenso zerfällt  $\frac{G}{M_2}$  in die beiden Teile  $\frac{G_1}{M_2}$  und  $\frac{G_2}{M_2}$ . (Fig. 507a, b),

Da in 268  $\overline{AS}_1 = n_1$ ,  $\overline{AS}_2 = n_2$  bezeichnet wurden, so wird

$$\overline{b_A} \cdot \overline{\pi a} = \overline{\pi \sigma_1} + \overline{\sigma_1 P_1} + \overline{P_1 a} = \overline{b_{S1}} + n_1 \lambda_1 + n_1 \omega_1^2$$

und auch

$$\overline{b_A} = \overline{\pi \sigma_2} + \overline{\sigma_2 P_2} + \overline{P_2 a} = \overline{b_{S2}} + n_2 \lambda_2 + n_2 \omega_2^2.$$

Man bringe nun  $\frac{G_1}{M_1}$  und  $\frac{G_2}{M_2}$  zum Schnitte  $D$ , ziehe  $DE \parallel n_1 \lambda_1$ ,  $DF \parallel n_2 \lambda_2$  und zeichne  $N$  als vierten Punkt des Parallelogrammes  $DENF$ . Sodann falle man  $P_1 Q_2 \perp AF$  und verbinde  $P_1$  mit  $N$  bis zum Schnitte  $R$  mit  $AF$ . Macht man noch  $UNV \parallel Q_2 A$ , so bestehen folgende Beziehungen:

$$\overline{AQ_2} : \overline{AR} = \overline{VU} : \overline{VN} = \overline{VP_1} : \overline{VE} = \left[ G_1 \left( \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right) + \overline{VE} \right] : \overline{VE},$$

worin  $\overline{VE} \cdot \sin \alpha = n_2 \lambda_2$ .

Nun ist aber (Fig. 507, 507b)

$$\lambda_2 = \frac{G_1 n_2 \sin \alpha}{M_2 i_2^2} = \frac{\text{Kraftmoment}}{\text{Trägheitsmoment}},$$

woraus

$$[\overline{AQ_2} - \overline{AR}] : \overline{AR} = G_1 \frac{M}{M_1 M_2} \cdot \frac{n_2 \lambda_2}{\sin \alpha},$$

und

$$\overline{AR} : \overline{RQ_2} = M_1 n_2^2 : M i_2^2,$$

womit die Lage des Punktes  $R$  bestimmt ist. In gleicher Weise wird der Punkt  $S$  auf  $AE$  mittels der Senkrechten  $P_2 Q_1$  und der Proportion bestimmt:

$$\overline{AS} : \overline{SQ_1} = M_2 n_1^2 : M i_1^2.$$

Hat man nun auf diese Weise, nachdem  $P_1 A P_2$  gezeichnet wurde, die Punkte  $R$  und  $S$  konstruiert, so erhält man im Schnitte von  $P_1 R$  mit  $P_2 S$  den Punkt  $N$ , durch Zeichnen des Parallelogrammes den Punkt  $D$ , daraus die Punkte  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  und die Winkelbeschleunigungen  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ ; endlich, da

$$\overline{\pi \sigma_1} : \overline{\pi \sigma_2} = \frac{G}{M_1} : \frac{G}{M_2} = M_2 : M_1,$$

den Nullpunkt  $\pi$  des Beschleunigungsplanes, die Beschleunigung  $\overline{\pi a} = \overline{b_A}$  und den Gelenkdruck

$$G = M_1 \cdot \overline{\pi \sigma_1} = M_2 \cdot \overline{\pi \sigma_2}.$$

**271. Dynamik zweier gelenkig verbundener Stäbe unter dem Einflusse von Kräften. Analytische Lösung.** Auf die beiden Stäbe der Fig. 505 sollen nun an den Enden  $B$  und  $C$  die Kräfte  $P$  und  $Q$  wirken. Es sollen wieder die Winkelbeschleunigungen  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  ermittelt werden, wenn die Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_1$  und  $\omega_2$  bekannt sind (Fig. 508).

Zerlegt man die Kräfte  $P$  und  $Q$  in Teile, welche in die Stäbe hineinfallen ( $P_1$  und  $Q_1$ ), und solche, die zu ihnen senkrecht stehen ( $P_2$  und  $Q_2$ ), nennt  $\overline{AB} = l_1$ ,  $\overline{AC} = l_2$ , löst den Stab  $AB$  aus seinem Gelenke in  $A$  und bildet das Moment der äußeren und der Trägheitskräfte um  $A$ , so erhält man den Ansatz, ähnlich wie in 268:

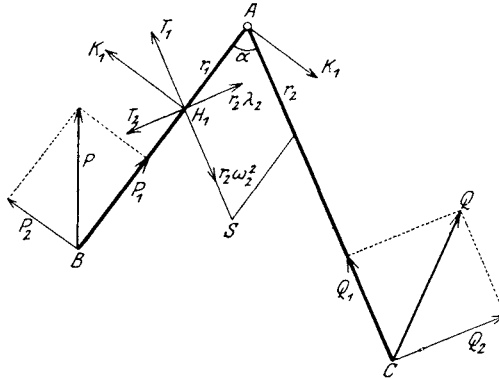


Fig. 508.

$$T_1 r_1 \sin \alpha + T_2 r_1 \cos \alpha + K_1 r_1 + P_2 l_1 = 0,$$

woraus mit den früheren Bezeichnungen

$$\lambda_1 \frac{q_1}{h_2 + r_2} - \lambda_2 \cos \alpha = \omega_2^2 \sin \alpha + \frac{P_2 l_1}{M r_1 r_2} \dots \dots \dots a')$$

und analog für den zweiten Stab:

$$\lambda_1 \cos \alpha - \lambda_2 \frac{q_2}{h_1 + r_1} = \omega_1^2 \sin \alpha + \frac{Q_2 l_2}{M r_1 r_2} \dots \dots \dots b')$$

woraus die gesuchten Winkelbeschleunigungen:

$$\lambda_1 \left( \cos^2 \alpha - \frac{q_1 q_2}{n_1 n_2} \right) = \sin \alpha \left( \omega_1^2 \cos \alpha - \omega_2^2 \frac{q_2}{n_1} \right) + \frac{Q_2 l_2 \cos \alpha - P_2 l_1 \frac{q_2}{n_1}}{M r_1 r_2},$$

$$\lambda_2 \left( \cos^2 \alpha - \frac{q_1 q_2}{n_1 n_2} \right) = \sin \alpha \left( \omega_2^2 \cos \alpha - \omega_1^2 \frac{q_1}{n_2} \right) - \frac{P_2 l_1 \cos \alpha - Q_2 l_2 \frac{q_1}{n_2}}{M r_1 r_2}.$$

**272. Graphische Lösung.** Das System 1, dessen Schwerpunkt  $S_1$  ist, werde einer Kraft  $P$  ausgesetzt, das System 2, dessen Schwerpunkt  $S_2$  ist, einer Kraft  $Q$ . Gegeben ist der Geschwindigkeitszustand beider Systeme; zu suchen sind die Beschleunigungen der Punkte  $A$ ,  $S_1$  und  $S_2$ , sowie der Gelenkdruck in  $A$  (Fig. 509).

Der Geschwindigkeitsplan, Fig. 509a, wurde wie in Fig. 506a entworfen.

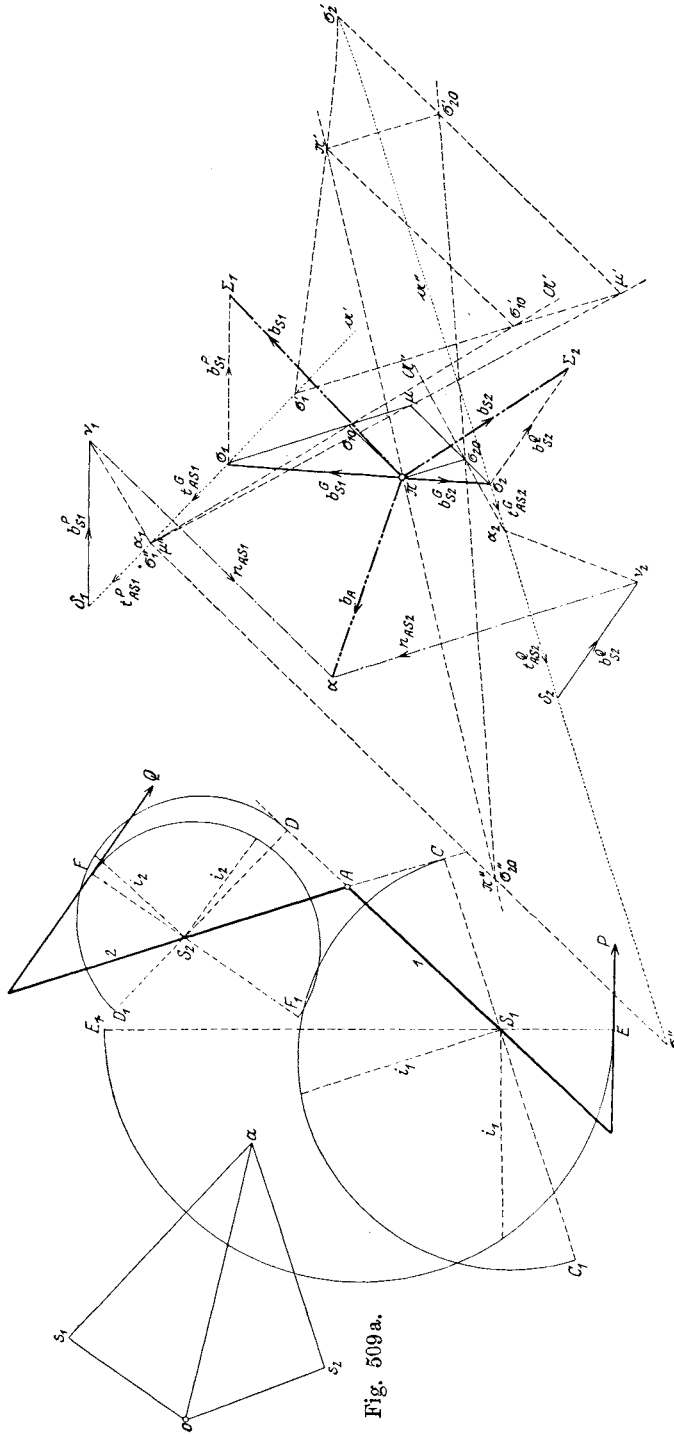


Fig. 509 a.

Fig. 509.

Fig. 509 b.



Im Beschleunigungsplan, Fig. 509b, wurden von einem beliebigen Punkt  $a$  ausgehend, die Normalbeschleunigungen  $n_{AS_1}$  und  $n_{AS_2}$  aufgetragen, wie dies schon in Fig. 506b gemacht wurde.

Vom Punkt  $v_1$  aus wurde parallel zu  $P$  die Beschleunigung  $\overline{\delta_1 v_1}$   $b_{S_1}^P = \frac{P}{M_1}$  aufgetragen, die der Schwerpunkt  $S_1$  infolge der Kraft  $P$  erhält; darin ist  $M_1$  die Masse des Systems 1. Ebenso wurde, von  $v_2$  ausgehend, parallel zu  $Q$ , die Beschleunigung  $\overline{\delta_2 v_2} = b_{S_2}^Q = \frac{Q}{M_2}$  aufgetragen, die der Schwerpunkt  $S_2$  durch die Kraft  $Q$  erhält.

Nun wurde die Tangentialbeschleunigung  $t_{AS_1}^P$  konstruiert, die der Punkt  $A$  bei seiner Drehung um  $S_1$  durch die Kraft  $P$  erhält. Es wurde von  $S_1$  die Senkrechte  $S_1 E$  auf  $P$  gezogen und mit Hilfe des Trägheitsradius  $i_1$  des Systems 1 der Gegenpunkt  $E_1$  gezeichnet, sodann  $v_1 a_1 \perp A E_1$  gezogen und zum Schnitte  $a_1$  mit der Geraden  $a' \perp A S_1$  gebracht. Dann ist  $\overline{a_1 \delta_1} = t_{AS_1}^P$ .

Ebenso wurde  $S_2 F \perp Q$  gezogen, zu  $F$  der Gegenpunkt  $F_1$  gezeichnet,  $v_2 a_2 \perp A F_1$  gezogen und zum Schnitt  $a_2$  mit der Geraden  $a'' \perp A S_2$  gebracht; dann ist  $\overline{a_2 \delta_2} = t_{AS_2}^Q$ , d. i. die Tangentialbeschleunigung, die der Punkt  $A$  durch die Kraft  $Q$  bei seiner Drehung um  $S_2$  erhält.

Von den Punkten  $a_1$  und  $a_2$  ausgehend, wurden jetzt die gleichen Konstruktionen durchgeführt wie in Fig. 506b. Durch  $a_1$  wurde die Gerade  $\mathcal{W}' \perp A C_1$ , durch  $a_2$  die Gerade  $\mathcal{W}'' \perp A D_1$  gezogen, wobei  $C_1$  und  $D_1$  die Gegenpunkte von  $C$  und  $D$  sind. Sodann wurde auf  $a'$  ein beliebiger Punkt  $\sigma_1'$  angenommen,  $\sigma_1' \sigma_{10}' \parallel S_2 A$  gezogen bis zum Schnitt  $\sigma_{10}'$  mit  $\mathcal{W}'$  und bis  $\mu'$  derart verlängert, daß die Proportion erfüllt ist:

$$\overline{\sigma_1' \sigma_{10}'} : \overline{\sigma_{10}' \mu'} = M_2 : M_1;$$

sodann wurde  $\mu' \sigma_2' \parallel S_1 A$  gezogen bis zum Schnitte  $\sigma_2'$  mit  $a''$ ,  $\sigma_2'$  mit  $\sigma_1'$  verbunden,  $\sigma_{10}' \pi' \parallel S_1 A$  gezogen bis zum Schnitte  $\pi'$  mit  $\sigma_1' \sigma_2'$  und  $\pi' \sigma_{20}' \parallel S_2 A$  bis zum Schnitte  $\sigma_{20}'$  mit  $\mu' \sigma_2'$ .

Sodann wurde auf  $a'$  ein zweiter Punkt  $\sigma_1''$  beliebig gewählt und mit ihm dieselbe Konstruktion wie mit  $\sigma_1'$  wiederholt. Man kann auch  $\sigma_1''$  nach  $a_1$  verlegen, wodurch die Zeichnung vereinfacht wird. Dann liegt auch  $\mu''$  in  $a_1$ ,  $\mu'' \sigma_2'' \parallel A S_1$  gibt im Schnitte mit  $a''$  den Punkt  $\sigma_2''$ ; auf  $\sigma_1'' \sigma_2''$  liegt der Punkt  $\pi''$  derart, daß

$$\overline{\sigma_1'' \pi''} : \overline{\pi'' \sigma_2''} = M_2 : M_1$$

ist; mit  $\pi''$  fällt  $\sigma_{20}''$  zusammen.

Nun zieht man die Geraden  $\pi' \pi''$  und  $\sigma_{20}' \sigma_{20}''$  und bringt die letzte zum Schnitte  $\sigma_{20}$  mit  $\mathcal{W}''$ ;  $\sigma_{20} \pi \parallel A S_2$  gibt im Schnitt mit  $\pi' \pi''$  den Punkt  $\pi$ ,  $\sigma_{20} \sigma_2 \parallel A S_1$  gibt ebenso im Schnitt mit  $a''$  und  $\mu' \mu''$  die Punkte  $\sigma_2$  und  $\mu$ , endlich  $\mu \sigma_1 \parallel A S_2$  im Schnitt mit  $a'$  den Punkt  $\sigma_1$ , durch den auch die Gerade  $\sigma_2 \pi$  gehen muß.

Damit ist der Beschleunigungsnullpunkt  $\pi$  gefunden; es ist

$$\begin{aligned} b_A &= \overline{b_{S_1}^G} + \overline{t_{AS_1}^G} + \overline{t_{AS_1}^P} + \overline{b_{S_1}^P} + n_{AS_1} \\ &= \pi \sigma_1 + \sigma_1 a_1 + a_1 \delta_1 + \overline{\delta_1 v_1} + v_1 a \parallel \pi a; \end{aligned}$$

darin bedeutet  $G$  den Gelenkdruck in  $A$ ,  $b_{S_1}^G$  die Beschleunigung von  $S_1$  durch den Gelenkdruck;  $t_{AS_1}^G$  die Tangentialbeschleunigung von  $A$  um  $S_1$  durch diesen Gelenkdruck. Ebenso ist

$$\begin{aligned} b_A &\equiv b_{S_2}^G + t_{AS_2}^G + t_{AS_2}^Q + b_{S_2}^Q + n_{AS_2} \\ &\equiv \overline{\pi \sigma_2} + \overline{\sigma_2 a_2} + \overline{a_2 \delta_2} + \overline{\delta_2 v_2} + \overline{v_2 a} \equiv \overline{\pi a}, \end{aligned}$$

worin die beiden ersten Glieder analoge Bedeutung wie oben haben.

Die Beschleunigungen  $b_{S_1}^G$  und  $b_{S_2}^G$  geben bereits die Richtung des Gelenkdruckes an. Es ist

$$G = M_1 \cdot \overline{\pi \sigma_1} = M_2 \cdot \overline{\pi \sigma_2}.$$

Fügt man in  $\sigma_1$  die Beschleunigung  $b_{S_1}^P$  an, so erhält man den Beschleunigungspunkt  $\Sigma_1$  und es ist

$$\overline{\pi \Sigma_1} \equiv b_{S_1} = b_{S_1}^G + b_{S_1}^P$$

die ganze Beschleunigung des Schwerpunkts  $S_1$ ; analog findet man

$$\overline{\pi \Sigma_2} \equiv b_{S_2} = b_{S_2}^G + b_{S_2}^Q$$

die ganze Beschleunigung des Schwerpunkts  $S_2$ .

**273. Aufgabe.**

127. Zwei Systeme 1 und 2 sind in  $A$  derart gelenkig verbunden, daß das System 1 das System 2 umschließt (Fig. 510). Auf das Gelenk wirkt eine bekannte Kraft  $P$ . Der Geschwindigkeitszustand ist bekannt. Man ermittle den Beschleunigungszustand beider Systeme, sowie ihren Gelenkdruck  $G$  in  $A$ . (Die Lösung kann wie in 272 erfolgen, da  $P$  am System 1 allein angreift und  $Q = 0$  ist.)

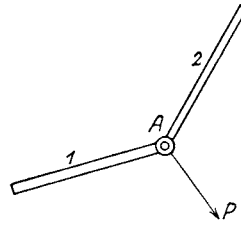


Fig. 510.

**274. Dynamik des flächenläufigen Gelenkviereckes.** Von einem Gelenkviereck  $ABCD$  (Fig. 511) werde das Gelenk  $A$  festgehalten. Auf die Gelenke  $B$  und  $D$ , deren Geschwindigkeiten gegeben sind, wirken gegebene Kräfte  $P$  und  $Q$ ; es soll der Beschleunigungszustand des Gelenkviereckes ermittelt werden.

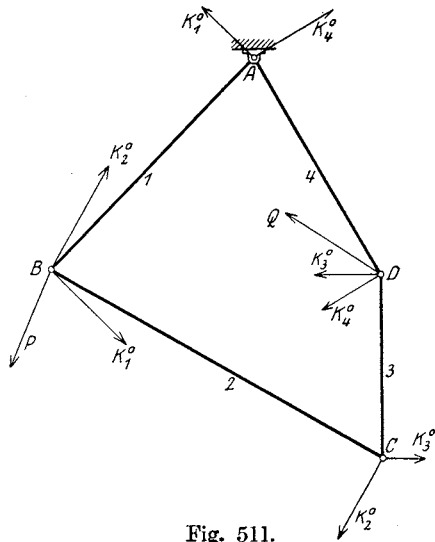


Fig. 511.

Gegeben sind: die Längen der als prismatisch und homogen angenommenen Stäbe

$\overline{AB} = 0,59 \text{ m}$ ,  $\overline{BC} = 0,76 \text{ m}$ ,  $\overline{CD} = 0,37 \text{ m}$ ,  $\overline{DA} = 0,5 \text{ m}$ ;  
ihre Gewichte

$$G_1 = 9 \text{ kg}, G_2 = 15 \text{ kg}, G_3 = 5 \text{ kg}, G_4 = 5 \text{ kg};$$

die beiden Kräfte

$$P = 170 \text{ kg}, Q = 126 \text{ kg}$$

und die Geschwindigkeiten  
 $v_B = 4,8 \text{ m/sek}$ ,  $v_D = 3 \text{ m/sek}$ .

Gewählt wurden die Maßstäbe:

Längenmaßstab:

$$1 \text{ cm} = 0,1 \text{ m},$$

Geschwindigkeitsmaßstab:

$$1 \text{ cm} = 1 \text{ m/sek},$$

Beschleunigungsmaßstab:

$$1 \text{ cm} = 10 \text{ m/sek}^2$$

$$\left( \text{oder } \alpha = 0,1, \beta = 1, \gamma = \frac{\beta^2}{\alpha} \right)$$

$$= 10, \text{ vgl. Gleichung 163} )$$

$$\text{Kraftmaßstab: } 1 \text{ cm} = \frac{100 \text{ kg}}{9,81}$$

Das Viereck ist flächenläufig, da mit Ausnahme der Gelenke  $B$  und  $D$  alle Punkte der Glieder 2 und 3 alle Lagen innerhalb einer bestimmt umrissenen Fläche einnehmen können. Die graphische Lösung dieser Auf-

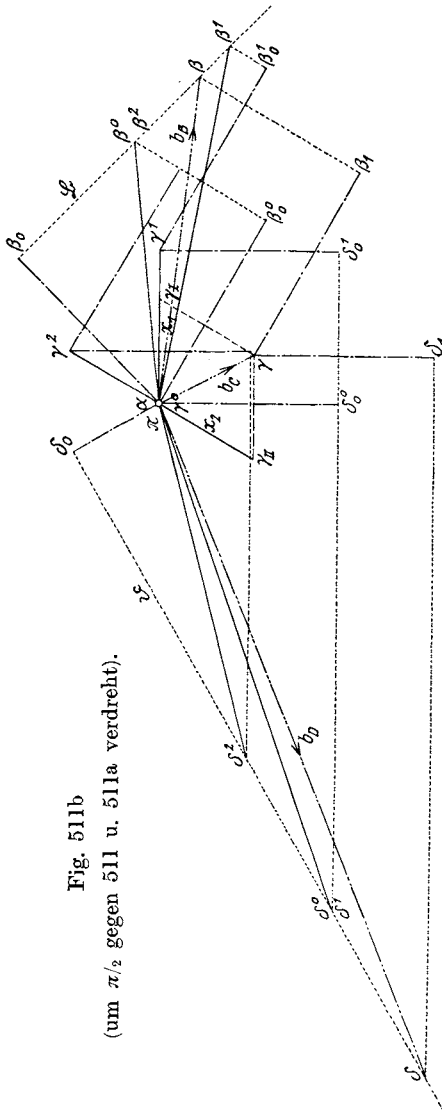


Fig. 511b  
(um  $\pi/2$  gegen 511 u. 511a verdreht).

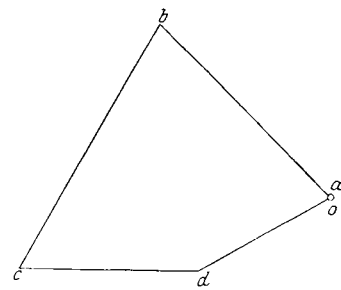


Fig. 511a.

gabe ist nur auf indirektem Wege möglich. Hingegen ließe die Umkehrung der Aufgabe: die Kräfte  $P$  und  $Q$  zu finden, wenn der Beschleunigungszustand des Gelenkviereckes gegeben ist, eine direkte Lösung zu.

In Fig. 511a wurde der Geschwindigkeitsplan auf Grund der gegebenen Größen

$$\overline{ob} = 4,8 \text{ cm}, \quad \overline{od} = 3 \text{ cm}$$

entworfen und sodann im Beschleunigungsplan Fig. 511b gezeichnet:

$$\overline{\pi\beta_0} \equiv n_B = \frac{v_B^2}{BA} = \frac{4,8^2}{0,59} = 39,05 \text{ m/sek}^2 = 3,90 \text{ cm},$$

$$\overline{\pi\delta_0} \equiv n_D = \frac{v_D^2}{DA} = \frac{3,0^2}{0,5} = 18,00 \text{ m/sek}^2 = 1,80 \text{ cm};$$

sodann zieht man durch  $\beta_0$  die Gerade  $\mathfrak{B} \perp \pi\beta_0$ , durch  $\delta_0$  die Gerade  $\mathfrak{D} \perp \pi\delta_0$ , auf welchen Geraden die richtigen Beschleunigungspunkte  $\beta$  und  $\delta$  liegen müssen.

Hingegen hat man für den Beschleunigungspunkt  $\gamma$  von  $C$  vorläufig gar keine Angabe. Man nimmt zunächst  $\gamma^0$  im Beschleunigungsnullpunkt  $\pi$  an und konstruiert die dazu gehörenden Punkte  $\beta_0^0$  und  $\delta_0^0$ , indem man

$$\overline{\gamma^0\beta_0^0} \equiv n_{BC} = \frac{v_{BC}^2}{BC} = \frac{\overline{cb}^2}{BC} \text{ in Richtung } BC,$$

$\beta_0^0\beta^0 \perp \gamma^0\beta_0^0$  bis zum Schnitte  $\beta^0$  mit  $\mathfrak{B}$  zieht; ebenso

$$\overline{\gamma^0\delta_0^0} \equiv n_{DC} = \frac{v_{DC}^2}{DC} = \frac{\overline{cd}^2}{DC} \text{ in Richtung } DC,$$

$\delta_0^0\delta^0 \perp \gamma^0\delta_0^0$  bis zum Schnitte  $\delta^0$  mit  $\mathfrak{D}$ .

Mit diesem ersten Beschleunigungsplan konstruiert man in Fig. 511c den ersten dynamischen Kraftplan. Bevor man diesen zeichnen kann, muß man die Massen der vier Stäbe statisch auf die vier Gelenke verteilen; dies liefert zunächst die Ersatzmassen

$$m_B = \frac{G_1 + G_2}{2g} = \frac{12 \text{ kg}}{g}, \quad m_C = \frac{G_2 + G_3}{2g} = \frac{10 \text{ kg}}{g},$$

$$m_D = \frac{G_3 + G_4}{2g} = \frac{5 \text{ kg}}{g}$$

und sodann die Trägheitskräfte

$$T_B^0 \equiv -m_B \overline{b_B^0}, \quad T_C^0 \equiv -m_C \overline{b_C^0}, \quad T_D^0 \equiv -m_D \overline{b_D^0}.$$

$$\text{Mit} \quad \overline{b_B^0} = \overline{\beta^0\pi} = 5,2 \text{ cm} = 52 \text{ m/sek}^2, \quad \overline{b_C^0} = 0,$$

$$\overline{b_D^0} = \overline{\delta^0\pi} = 10,7 \text{ cm} = 107 \text{ m/sek}^2$$

$$\text{wird} \quad T_B^0 = \frac{12 \text{ kg}}{g} \cdot 52 \text{ m/sek}^2 = \frac{624 \text{ kg}}{9,81} = 6,24 \text{ cm},$$

$$T_C^0 = 0, \quad T_D^0 = \frac{5 \text{ kg}}{g} \cdot 107 \text{ m/sek}^2 = \frac{535 \text{ kg}}{9,81} = 5,35 \text{ cm}.$$

Außer den Trägheitskräften  $T$  müssen auch die Trägheitskräfte  $K$  aller vier Stäbe nach der bekannten Gleichung 99:

$$K = k l \lambda, \quad k = M \frac{p_1 p_2 - i^2}{l^2}$$

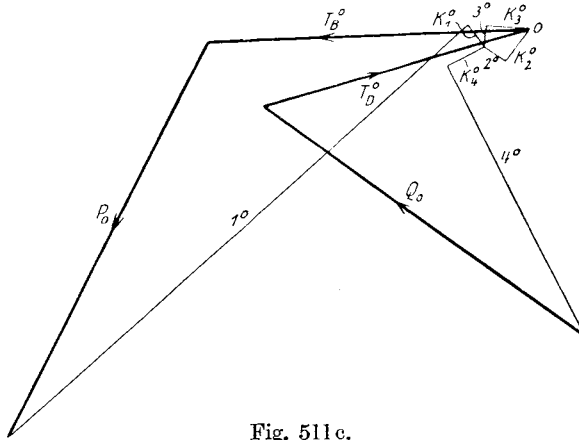


Fig. 511c.

bestimmt werden. Da die Stäbe prismatisch angenommen wurden, ist für jeden Stab

$$p_1 = p_2 = \frac{l}{2}, \quad i^2 = \frac{l^2}{12}$$

(vgl. Gleichung 91), somit  $k = \frac{M}{6}$  und

$$k_1 = \frac{9 \text{ kg}}{6 \text{ g}}, \quad k_2 = \frac{15 \text{ kg}}{6 \text{ g}}, \quad k_3 = k_4 = \frac{5 \text{ kg}}{6 \text{ g}},$$

ferner sind die Tangentialbeschleunigungen  $l\lambda$ :

$$t_B^0 = \beta_0 \beta^0 = 3,3 \text{ cm} = 33 \text{ m/sek}^2,$$

$$t_{CB}^0 = \beta_0^0 \beta^0 = 3,0 \text{ cm} = 30 \text{ m/sek}^2,$$

$$t_{DC}^0 = \delta_0^0 \delta^0 = 10,1 \text{ cm} = 101 \text{ m/sek}^2,$$

$$t_D^0 = \delta_0 \delta^0 = 10,5 \text{ cm} = 105 \text{ m/sek}^2$$

und somit

$$K_1^0 = k_1 t_B^0 = \frac{9 \text{ kg}}{6 \text{ g}} \cdot 33 \text{ m/sek}^2 = \frac{49,5 \text{ kg}}{9,81} = 0,495 \text{ cm},$$

$$K_2^0 = k_2 t_{CB}^0 = \frac{15 \text{ kg}}{6 \text{ g}} \cdot 30 \text{ m/sek}^2 = \frac{75 \text{ kg}}{9,81} = 0,75 \text{ cm},$$

$$K_3^0 = k_3 t_{DC}^0 = \frac{5 \text{ kg}}{6 \text{ g}} \cdot 101 \text{ m/sek}^2 = \frac{84,1 \text{ kg}}{9,81} = 0,84 \text{ cm},$$

$$K_4^0 = k_4 t_D^0 = \frac{5 \text{ kg}}{6 \text{ g}} \cdot 105 \text{ m/sek}^2 = \frac{87,5 \text{ kg}}{9,81} = 0,87 \text{ cm}.$$

Der Drehungssinn der Kraftpaare  $K$  stimmt mit jenem von  $\lambda$  überein; diese Kraftpaare  $K_1^0, K_2^0, K_3^0, K_4^0$  wurden in Fig. 511 eingezeichnet.

Nach dieser Vorbereitung wurden im dynamischen Kraftplan Fig. 511 c folgende Gleichgewichtspolygone gezeichnet:

$$T_C^0 (= 0) + K_2^0 + 2^0 + 3^0 + K_3^0 = 0,$$

$$T_B^0 + P_0 + 1^0 + K_1^0 + 2^0 + K_2^0 = 0,$$

$$K_3^0 + 3^0 + K_4^0 + 4^0 + Q_0 + T_D^0 = 0,$$

worin  $1^0, 2^0, 3^0, 4^0$  die Spannungen der Stäbe sind. Damit sind die Kräfte  $P_0$  und  $Q_0$  bestimmt, die dem angenommenen Beschleunigungszustande entsprechen.

Nun kann zweckmäßig durch  $\pi$  (Fig. 511 b) eine Senkrechte zum Stabe 3 gezogen und auf ihr ein anderer beliebiger Beschleunigungs-

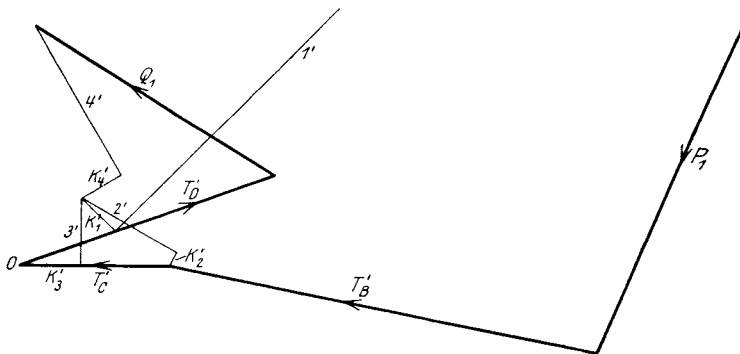


Fig. 511d.

punkt  $\gamma^1$  angenommen werden. Mit diesem wurden, wie früher mit  $\gamma^0$ , die entsprechenden Beschleunigungspunkte  $\beta^1$  und  $\delta^1$  auf  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{D}$  gesucht und sodann in Fig. 511d der dynamische Kraftplan gezeichnet. Er liefert die Kräfte  $P_1$  und  $Q_1$ .

Ebenso wurde durch  $\pi$  eine Senkrechte zum Stabe 2 gezogen und auf ihr ein dritter Beschleunigungspunkt  $\gamma^2$  beliebig angenommen, mit dem die Konstruktion des dynamischen Kraftplanes in Fig. 511 e wiederholt wurde. Er liefert die Kräfte  $P_2$  und  $Q_2$ .

Es ist natürlich nicht notwendig, die Punkte  $\gamma^1$  und  $\gamma^2$  in den genannten Senkrechten zu wählen, sie könnten ebensogut irgendwo angenommen werden. Die erwähnte Annahme vereinfacht nur die Konstruktion, weil dann die Punkte  $\beta^0, \beta^2$  und die Punkte  $\delta^0, \delta^1$  zusammenfallen.

Da das Fortschreiten des Beschleunigungspunktes  $\gamma^1$  auf der Geraden  $\pi\gamma^1$  auf den Geraden  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{D}$  ähnliche Punktreihen erzeugt (vgl. 191, Schluß) und ebenso auf allen übrigen Geraden des Beschleunigungs- und Kraftplanes, so werden sich auch die entsprechenden Kräfte  $P_1$  und  $Q_1$  nach dem Ähnlichkeitsgesetze verändern; nennt man also die beliebig gewählte Strecke  $\overline{\gamma^0\gamma^1} = c_1$ , so wird das Verhältnis

$$\frac{P_1 - P_0}{c_1} = a_1$$

eine Konstante sein; dasselbe gilt auch von dem Verhältnis

$$\frac{Q_1 - Q_0}{c_1} = b_1.$$

Bezeichnet man ferner die beliebig gewählte Strecke  $\overline{\gamma^0\gamma^2} = c_2$ , so werden auch die Verhältnisse

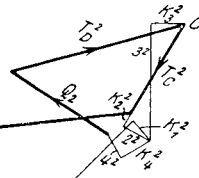


Fig. 511 c.

$$\frac{P_2 - P_0}{c_2} = a_2, \quad \frac{Q_2 - Q_0}{c_2} = b_2$$

konstant sein.

Es handelt sich nun darum, die Beschleunigungspunkte  $\gamma_I$  und  $\gamma_{II}$  auf den Geraden  $\gamma^0\gamma^1$  und  $\gamma^0\gamma^2$  derart zu wählen, daß sie, falls sie gleichzeitig bestehen, zusammen im dynamischen Kraftplan genau die gegebenen Kräfte  $P$  und  $Q$  erzeugen.

Nennt man  $x_1$  und  $x_2$  die Abstände dieser noch unbekanntenen Beschleunigungspunkte  $\gamma_I$  und  $\gamma_{II}$  von  $\gamma^0$ , so werden demgemäß die Beziehungen bestehen müssen:

$$P = P_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2, \quad Q = Q_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2,$$

woraus  $x_1$  und  $x_2$  ermittelt werden können.

Um dies weiterführen zu können, wurden maßstäblich  $P = 170 \text{ kg} = 16,68 \text{ cm}$ ,  $Q = 126 \text{ kg} = 12,36 \text{ cm}$  vorgeschrieben; ferner ist in der Zeichnung  $c_1 = \overline{\gamma^0\gamma^1} = 3,0 \text{ cm}$ ,  $c_2 = \overline{\gamma^0\gamma^2} = 2,0 \text{ cm}$  gewählt worden. Die dynamischen Kraftpläne lieferten:

$$P_0 = 8,9 \text{ cm}, \quad P_1 = 23,5 \text{ cm}, \quad P_2 = 11,2 \text{ cm};$$

$$Q_0 = 7,8 \text{ cm}, \quad Q_1 = 5,6 \text{ cm}, \quad Q_2 = 2,3 \text{ cm}.$$

Hieraus ergab sich:

$$a_1 = 4,87, a_2 = 1,15, b_1 = -0,73, b_2 = -2,75$$

und  $x_1 = 2,12 \text{ cm}, x_2 = -2,22 \text{ cm}.$

Macht man nun im Beschleunigungsplan

$$\overline{\gamma^0 \gamma_I} = x_1, \overline{\gamma^0 \gamma_{II}} = x_2,$$

so kann aus  $\gamma_I$  und  $\gamma_{II}$  die wirkliche Lage  $\gamma$  des Beschleunigungspunktes durch geometrische Addition gefunden werden.

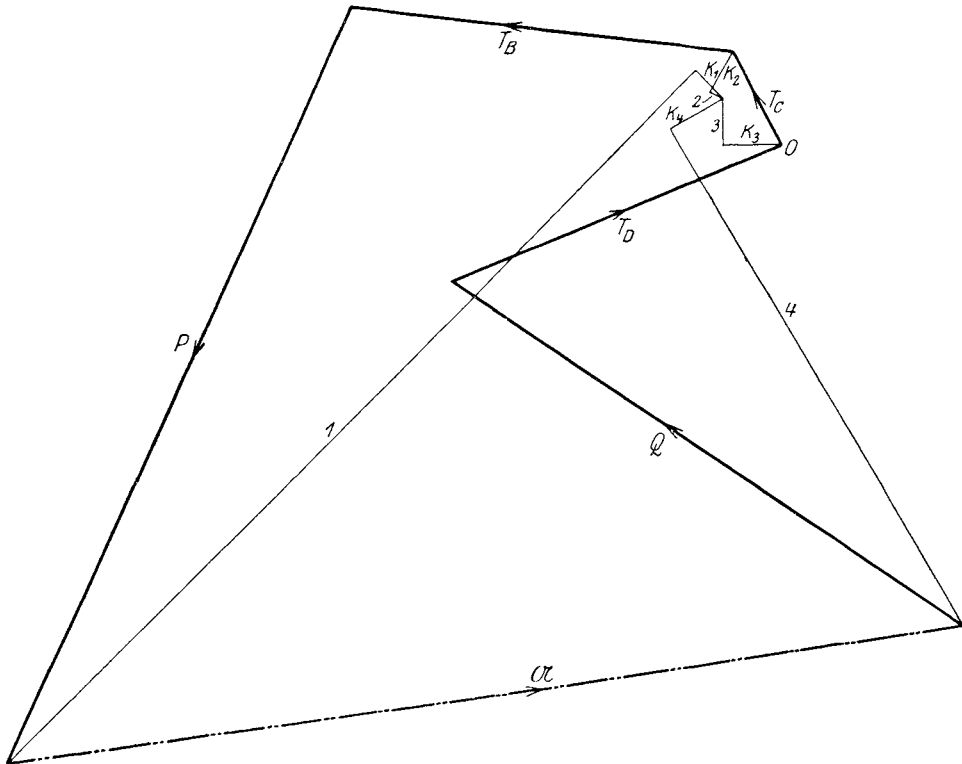


Fig. 511f.

Aus  $\gamma$  werden dann wie bekannt die richtigen Beschleunigungspunkte  $\beta$  und  $\delta$  gefunden; damit ist aber auch der endgültige dynamische Kraftplan (Fig. 511f) zu konstruieren, der die gegebenen Kräfte  $P$  und  $Q$  liefern wird, wenn die Konstruktion genau und richtig durchgeführt wurde.

Das geschlossene Polygon des endgültigen dynamischen Kraftplanes:

$$Q + T_D + T_C + T_B + P + \mathfrak{A} \equiv 0$$

gibt schließlich den Auflagerdruck  $\mathfrak{A}$  des festen Gelenkes  $A$ .



**275. Dynamik des frei beweglichen Gelenkvierecks.** Der Geschwindigkeitszustand eines frei beweglichen Gelenkvierecks sei gegeben. Auf die Gelenke  $B$  und  $D$  (Fig. 512) wirken gegebene Kräfte  $P$  und  $Q$ . Man soll die Beschleunigungen der vier Gelenke  $A, B, C, D$  ermitteln.

Diese Aufgabe läßt sich auf die frühere zurückführen und wird in folgender Weise zu lösen sein. Man nehme zunächst den Beschleunigungspunkt  $\alpha$  beliebig an (Fig. 512a) und ermittle aus den Kräften  $P$  und  $Q$  den Beschleunigungszustand  $\beta, \gamma, \delta$ , wie dies in 274 gezeigt wurde. Hierauf suche man den Beschleunigungspunkt  $\sigma$  des Schwerpunkts des Vierecks, indem man in den Punkten  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  die Massen  $m_A = 7, m_B = 12, m_C = 10, m_D = 5$  angebracht denkt (vgl. 236).

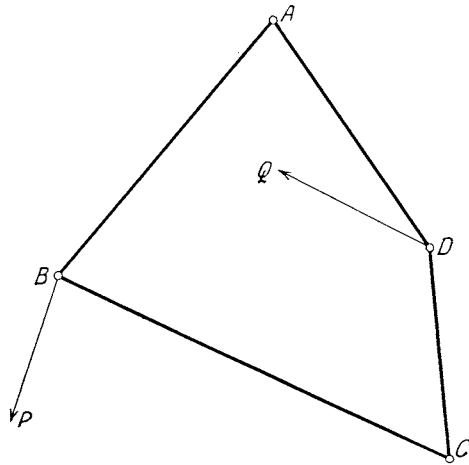


Fig. 512.

Die Beschleunigung  $b_S$  des Schwerpunkts ist nach dem Prinzip der Schwerpunktsbewegung (vgl. 52) nur eine Folge der äußeren Kräfte; ist also  $M = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = \frac{34 \text{ kg}}{g}$  die Masse des Gelenkvierecks, so wird  $b_S = b_{SP} + b_{SQ}$ , worin

$$b_{SP} = \frac{P}{M} = \frac{170}{34} g = 5 \cdot 9,81 \text{ m/sek}^2 = 49 \text{ m/sek}^2 = 4,9 \text{ cm},$$

$$b_{SQ} = \frac{Q}{M} = \frac{126}{34} g = 3,7 \cdot 9,81 \text{ m/sek}^2 = 36,3 \text{ m/sek}^2 = 3,6 \text{ cm}.$$

Fügt man diese beiden Beschleunigungen in  $\sigma$  an, so rückt der Beschleunigungsnullpunkt nach  $\pi$  und es ist  $b_A = \overline{\pi\alpha}$  die Beschleunigung des jetzt freien Gelenkes  $A$ . Damit sind aber auch die übrigen Beschleunigungen  $b_B = \overline{\pi\beta}, b_C = \overline{\pi\gamma}, b_D = \overline{\pi\delta}$  bestimmt.

Wirken gar keine Kräfte auf das Gelenkviereck, so ist die Lösung der Aufgabe, den Beschleunigungszustand zu finden, in der gleichen Weise vorzunehmen; man setzt schließlich  $P = 0$ ,  $Q = 0$ . Der Nullpunkt des Beschleunigungsplanes rückt nach  $\sigma$ .

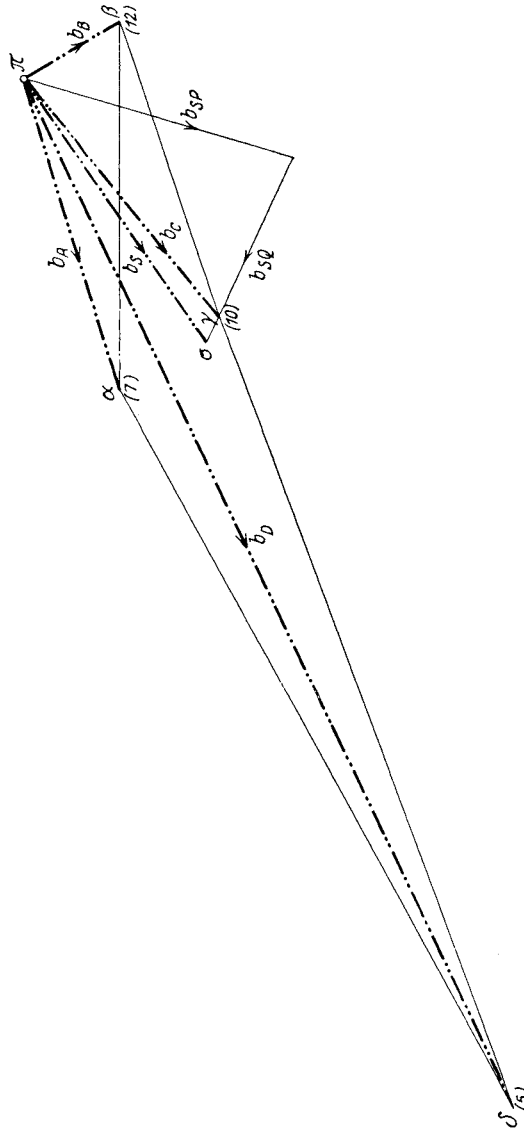


Fig. 512 a.  
(Um  $\pi/2$  gegen Fig. 512 verdreht.)

**276. Aufgaben.**

128. Auf die vier Gelenke  $A, B, C, D$  eines frei beweglichen, aus vier Stäben mit beliebiger Massenverteilung bestehenden Gelenk-

viereckes (Fig. 513) wirken gegebene Kräfte  $R$ ,  $P$ ,  $T$ ,  $Q$ . Der Geschwindigkeitszustand ist gegeben; man suche den Beschleunigungsplan.

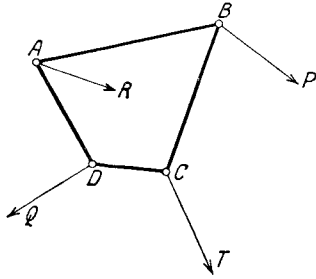


Fig. 513.

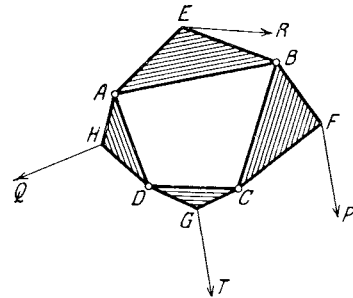


Fig. 514.

129. Vier Dreiecke von beliebiger Massenverteilung sind zu einem Viereck  $A, B, C, D$  gelenkig verbunden (Fig. 514). In den Ecken  $E, F, G, H$  wirken gegebene Kräfte  $R, P, T, Q$ . Der Geschwindigkeitszustand ist bekannt; man suche den Beschleunigungsplan.

## XXVI. Dynamik des Getriebes.

**277. Ruhe und Gleichgewicht.** Wenn ein Getriebe äußeren Kräften ausgesetzt wird, so sind zwei Erscheinungen möglich: das Getriebe bleibt entweder im Gleichgewicht — oder das Gleichgewicht des Getriebes wird gestört.

Dabei ist zu beachten, daß die Begriffe Ruhe und Gleichgewicht durchaus nicht gleiche Bedeutung besitzen. Ruhe bedeutet Bewegungslosigkeit, also das Nullwerden der Geschwindigkeiten; hingegen bedeutet Gleichgewicht das Verschwinden der Kraftwirkung auf die Bewegung. Es kann also ein Getriebe ganz wohl im Gleichgewichte sein und sich dennoch bewegen; andererseits kann es Lagen des Getriebes geben, in denen es augenblicklich in Ruhe ist, ohne jedoch im Gleichgewicht zu sein.

Wenn z. B. der Kurbelzapfen  $A$  einer Schubkurbel (Fig. 519) sich gleichförmig im Kreise dreht, so ist er im Gleichgewicht, da sich alle Kräfte in Richtung seiner Bewegung tilgen; und wenn der Kreuzkopf  $B$  in seinen äußersten Lagen die Bewegung umkehrt, so ist er augenblicklich in Ruhe, aber durchaus nicht im Gleichgewicht, da sich die an ihm wirkenden Kräfte nicht tilgen.

**278. Die reduzierte Trägheitskraft.** Sind die Kräfte eines Getriebes nicht im Gleichgewicht, so besteht zwischen ihnen und den Beschleunigungen das d'Alembertsche Prinzip, das wir in der Form angeschrieben haben:

$$\Sigma P + \Sigma T = 0$$

(vgl. Gleichung 43). Reduzieren wir sowohl die äußeren Kräfte  $P$  des Getriebes, wie auch dessen Trägheitskräfte  $T$  an den beliebig gewählten Reduktionspunkt in dessen Bewegungsrichtung und nennen  $\mathfrak{R}$  und  $\mathfrak{X}$  die Reduktionen von  $\Sigma P$  und  $\Sigma T$ , so ist nach dem d'Alembertschen Prinzip:

$$\mathfrak{R} + \mathfrak{X} = 0.$$

Nennen wir wieder  $R$  die Gleichgewichtskraft des Getriebes im Reduktionspunkt, so ist wie in 250:

$$R + \mathfrak{R} = 0.$$

Es ist also  $\mathfrak{X} = R$ , d. h.:

Die an eine beliebige Stelle des Getriebes reduzierten Trägheitskräfte geben in Summe die Gleichgewichtskraft für diese Stelle.

In Fig. 515 werde ein allgemeines Kurbelgetriebe von zwei Kräften  $P_1$  und  $P_2$  angegriffen. Die Gleichgewichtskraft  $R$  wurde in Fig. 515a mit Hilfe der Stabspannungen 1, 2, 3 bestimmt (vgl. Fig. 478), und zwar in der Bewegungsrichtung des Punktes  $B$ . Diese Kraft  $R$  ist gleichzeitig die nach  $B$  reduzierte Trägheitskraft  $\mathfrak{Z}$  des Kurbelgetriebes.

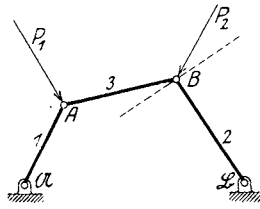


Fig. 515.

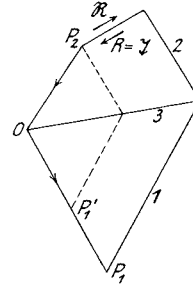


Fig. 515 a.

Nehmen wir an, die eine der beiden Kräfte wäre kleiner, nicht  $P_1$ , sondern nur  $P_1'$ ; dann ergäbe sich  $R = 0$ , also auch  $\mathfrak{Z} = 0$ ; dann verschwinden die Trägheitskräfte und mit ihnen die Beschleunigungen in Richtung der Bewegung und das Kurbelgetriebe ist im Gleichgewicht.

**279. Die beiden grundlegenden Aufgaben.** Wie in der Dynamik des Systems stehen wir auch bei der kinematischen Kette und dem Getriebe zwei wichtigen und grundlegenden Aufgaben gegenüber. Die eine setzt sich zum Ziel, die Kraft zu ermitteln, die imstande ist, einem Getriebe einen bestimmten Beschleunigungszustand zu erteilen; die andere sucht aus den gegebenen Kräften eines Getriebes dessen Beschleunigungszustand zu ermitteln.

Die erstgenannte Aufgabe läßt eine unmittelbare Lösung zu; wir wollen deshalb mit ihr beginnen.

**280. Die erste grundlegende Aufgabe: Ermittlung der Kraft aus dem Beschleunigungszustande.** Von einem zwangsläufigen Getriebe seien die Massenverteilung, die äußeren Kräfte, sowie der Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustand gegeben. Welche Kraft muß an beliebiger Stelle  $E$  des Getriebes in gegebener Richtung angebracht werden, damit der gegebene Beschleunigungszustand entsteht?

Wir wollen die Richtung der gesuchten beschleunigenden Kraft  $Q$  in der Bewegungsrichtung ihres Angriffspunktes  $E$  wählen, da uns dies freisteht. Wir können dann den Ausdruck für das d'Alembertsche Prinzip in derselben Form übernehmen, wie in der Dynamik des Systems (vgl. 140) und erhalten für die gesuchte Kraft die Gleichung

$$Q = \Sigma (mb) - \Sigma P,$$

wobei sich jetzt die Summen über das ganze Getriebe erstrecken. Die Gelenkdrücke des Getriebes kommen in dieser Gleichung nicht vor, da sie als innere Kräfte in das d'Alembertsche Prinzip nicht eintreten.

Von dieser beschleunigenden Kraft  $Q$  hat man bei verschiedenen Anlässen Anwendung gemacht. So handelt es sich z. B. bei den Regulatoren darum, die Kraft an der Muffe zu ermitteln, welche dem Stellzeug, d. i. dem Verbindungsgetriebe mit der Dampfregulierung, eine bestimmte Beschleunigung erteilen kann. Bei den Steuerungen spricht man ferner von dem Rückdruck der Steuerung als jener Kraft, die aufgewendet werden muß, um die Steuerung mit einer gewissen Beschleunigung zu bewegen (vgl. A. Föppl, Vorles. über Techn. Mechanik, VI. Bd., S. 315).

Wir wollen später in 417 und 428 Beispiele lösen, in denen der Rückdruck eines Getriebes gefunden wird, werden jedoch früher ein paar einfachere Beispiele vorausschicken.

Gewöhnlich begnügt man sich, bei Aufsuchung der beschleunigenden Kraft  $Q$  auf die übrigen äußeren Kräfte des Getriebes zu verzichten; dann ist

$$Q \equiv \Sigma (mb).$$

Man nennt dann wie früher (vgl. 140, Gleichung 107)  $Q$  den an die Stelle  $E$  reduzierten Beschleunigungsdruck des Getriebes. Dann lautet die gestellte Aufgabe folgendermaßen: Von einem zwangsläufigen Getriebe sind die Massenverteilung, der Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustand gegeben; welche Kraft  $Q$  muß an einer bestimmten Stelle  $E$  des Getriebes angebracht werden, um das Getriebe in diesen Beschleunigungszustand zu versetzen?

Diese Aufgabe wollen wir zunächst an ein paar Beispielen vorführen.

**281. Beschleunigungsdruck der Kreuzschieberkurbel.** In Fig. 516 ist dieses Getriebe dargestellt, dessen Beschleunigungsplan, Fig. 516a, wir früher bereits kennen gelernt haben (vgl. 208, Fig. 401 b).

Gegeben sind die Masse  $M$  der Kurbel  $A\mathcal{A}$ ,  $M_1$  der geraden Kulisse samt Schubstange und  $M_2$  des in  $A$  drehbaren Kulissensteins, ferner die Beschleunigung  $b_A$  des Kurbelzapfens  $A$ . Es

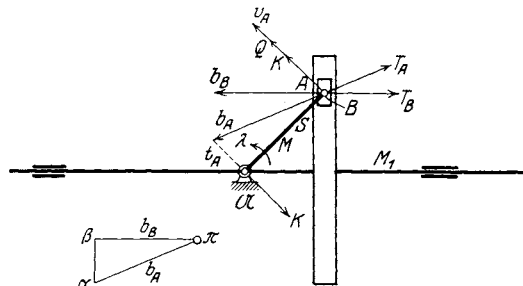


Fig. 516 a.

Fig. 516.

ist der Beschleunigungsdruck  $Q$  in  $A$  in Richtung der Bewegung zu ermitteln.

Die Trägheitskraft  $T_B$  der in geradliniger Translation begriffenen Masse  $M_1$  hält Gleichgewicht mit dem Drucke  $D$  zwischen Kulisse und Kulissenstein; es ist, also  $D = M_1 b_B$ .

Der Kulissenstein macht eine kreisförmige Translation (keine Drehung!); alle seine Punkte beschreiben kongruente Kreisbahnen

mit dem Halbmesser  $\overline{A\mathfrak{U}} = l$ . Die Masse  $M_3$  des Kulissensteins kann demnach im Punkte  $A$  vereinigt gedacht werden.

Die Masse  $M$  der Kurbel wird nach den Grundsätzen für statische Ersatzpunkte, also nach dem Schwerpunktsgesetz auf die Punkte  $A$  und  $\mathfrak{U}$  verteilt. Bezeichnet man mit  $p_1$  und  $p_2$  die Entfernungen des Schwerpunkts der Kurbel von  $\mathfrak{U}$  und  $A$ , so ist die Ersatzmasse in  $A$ :  $M \frac{p_1}{l}$ , und die ganze Ersatzmasse

$$m_A = M \frac{p_1}{l} + M_3;$$

die Trägheitskraft dieser Ersatzmasse ist

$$T_A \equiv -m_A b_A = -\left(M \frac{p_1}{l} + M_3\right) b_A.$$

Das Kraftpaar  $Kl$ , das in  $\mathfrak{U}$  und  $A$  zu den Trägheitskräften der Kurbel hinzugefügt werden muß, hat das Moment

$$Kl = M \lambda (p_1 p_2 - i^2);$$

es dreht im Sinne der Winkelbeschleunigung  $\lambda$ .

Wenn  $Q$  die Resultante aller Beschleunigungsdrücke der Kreuzschieberkurbel sein soll, so muß  $Q$  die Gleichgewichtskraft aller Trägheitskräfte sein. Dann wird die Gleichgewichtsbedingung des Gelenkes  $A$  lauten (Fig. 516b):

$$Q + T_A + D + K + S \equiv 0,$$

wenn  $S$  die Spannung in der Kurbel ist, und die Gleichgewichtsbedingung des Gelenkes  $\mathfrak{U}$ :

$$\mathfrak{U} + K + S \equiv 0,$$

wenn  $\mathfrak{U}$  der Auflagerdruck in  $\mathfrak{U}$  ist. Man beginnt also den dynamischen Kraftplan mit  $T_A$ , das bekannt ist, schließt daran  $D = T_B$  und  $K$ . Dann sind  $S$  und  $Q$  durch Ziehen der Parallelen zur Kurbel und senkrecht dazu gefunden. Schließlich ist, da die äußeren und die Trägheitskräfte im Gleichwichte stehen:

$$Q + T_A + T_B + \mathfrak{U} \equiv 0.$$

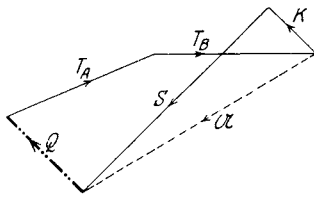


Fig. 516b.

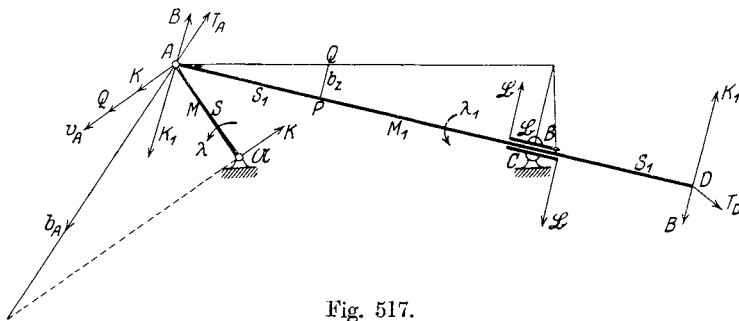


Fig. 517.

**282. Beschleunigungsdruck der schwingenden Kurbelschleife.** Von der in Fig. 517 gezeichneten Kurbelschwinge sind gegeben die Massen  $M$  der Kurbel  $A\mathfrak{A}$  und  $M_1$  der Schwinge  $AD$ , sowie die Beschleunigung  $b_A$  des Kurbelzapfens  $A$ . Die Masse der sich um  $B$  drehenden Hülse wurde vernachlässigt (siehe 290, Aufgabe 130). Es ist der Beschleunigungsdruck  $Q$  in  $A$  in Richtung der Bewegung zu bestimmen.

Der Geschwindigkeitsplan und der Beschleunigungsplan (Fig. 517a, b) sind bereits in 205, Fig. 396 entwickelt worden. Die Punkte  $d$  und  $\delta$  sind aus der Ähnlichkeit

$$ACD \sim acd \sim \alpha\gamma\delta$$

leicht zu ermitteln.

Die Masse  $M$  der Kurbel wird nach dem Schwerpunktsesetze auf  $\mathfrak{A}$  und  $A$  verteilt, die Masse  $M_1$  der Schwinge ebenso auf die Punkte  $A$  und  $D$ . Haben  $l, p_1, p_2$  dieselbe Bedeutung wie in 281, ferner  $l' p_1' p_2'$  die analoge Bedeutung für die Schwinge  $AD$ , so sind die statischen Ersatzmassen

$$m_A = M \frac{p_1}{l} + M_1 \frac{p_2'}{l'}, \quad m_D = M_1 \frac{p_1'}{l'}$$

und die Trägheitskräfte

$$T_A = -m_A b_A, \quad T_D = -m_D b_D,$$

worin  $b_A$  gegeben und  $b_D = \frac{\pi}{\delta}$  aus dem Beschleunigungsplan zu entnehmen ist.

Die Trägheitskräfte  $K$  sind wie in 281:

$$K = M l \lambda k, \quad k = \frac{p_1 p_2 - i^2}{l^2}, \quad A\mathfrak{A} = l;$$

$$K_1 = M_1 l' \lambda_1 k_1, \quad k_1 = \frac{p_1' p_2' - i_1'^2}{l'^2}, \quad AD = l'.$$

Da die Kraftpaare  $Kl, K_1 l'$  im Sinne der Winkelbeschleunigungen  $\lambda, \lambda_1$  auftreten, ist es wichtig, diesen Sinn festzustellen. Über den Sinn von  $\lambda$  kann, nachdem  $b_A$  gegeben ist, kein Zweifel entstehen. Um den Sinn von  $\lambda_1$  festzustellen, beachte man im Beschleunigungsplan die Richtung der Tangentialbeschleunigung  $t_{CA} \equiv \gamma_0 \gamma$ . Bringt man diese in  $C$  (d. i. jener Punkt der Schwinge  $AD$ , der augenblicklich mit dem Mittelpunkt  $B$  der Hülse zusammenfällt) an, so dreht sie um  $A$  gegen den Uhrzeiger; damit ist auch der Sinn von  $\lambda_1$  festgestellt.

$S$  und  $S_1$  seien die Spannungen in der Kurbel und in der Schwinge. Außerdem wird die Hülse bei  $\mathfrak{B}$  ein Auflagermoment auf die Schwinge ausüben; nennt man  $h$  die Länge der Hülse, so sei  $\mathfrak{B}h$  dieses Moment.

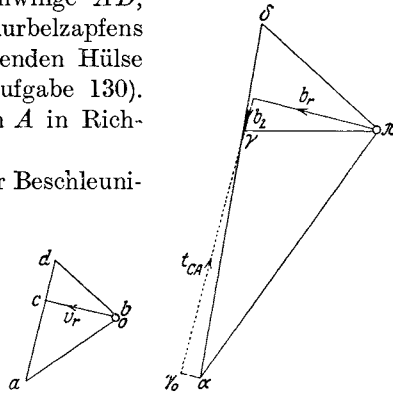


Fig. 517 a.

Fig. 517 b.



Setzt man

$$\mathbf{M} = \mathfrak{B}h = BV',$$

so erhält man die Kraft  $B$ , die in  $A$  und  $D$  die Wirkung der Hülse ersetzt; die Kraft  $B$  muß jedoch erst ermittelt werden.

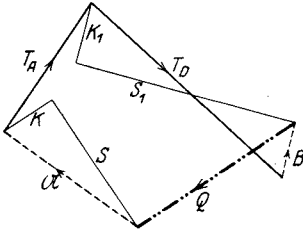


Fig. 517 c.

In Fig. 517 c wurde der dynamische Kraftplan gezeichnet. Da der Beschleunigungsdruck  $Q$  mit den Trägheitskräften im Gleichgewichte ist, so müssen für die Gelenke  $\mathfrak{A}$ ,  $A$  und den Endpunkt  $D$  der Schwinge die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sein. Es ist also

$$T_D + B + S_1 + K_1 = 0;$$

hierin sind  $T_D$  und  $K_1$  bekannt, es können also  $B$  und  $S_1$  ermittelt werden. Da-

durch ist auch das Auflagermoment  $\mathbf{M}$  gefunden.

Für das Gelenk  $A$  besteht die Bedingung

$$T_A + K_1 + S_1 + Q + S + K = 0;$$

hierin sind außer  $Q$  und  $S$  alle Kräfte bekannt, es kann also der gesuchte Beschleunigungsdruck  $Q$  leicht gefunden werden.

Endlich ist auch der Auflagerdruck  $\mathfrak{A}$  aus

$$\mathfrak{A} + K + S = 0$$

zu bestimmen.

Das Gleichgewicht der äußeren und der Trägheitskräfte verlangt schließlich die Bedingung

$$Q + \mathfrak{A} + T_A + T_D + B = 0,$$

die ebenfalls erfüllt ist.

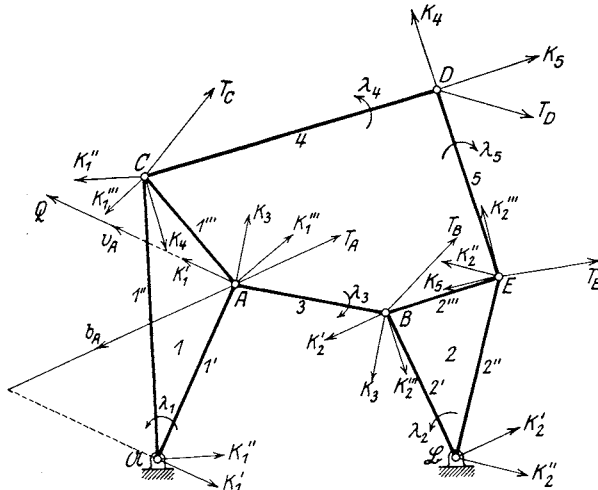


Fig. 518.

**283. Beschleunigungsdruck eines sechsgliedrigen Getriebes mit zwei Dreiecksgliedern.** Fig. 518 zeigt ein sechsgliedriges Getriebe, dessen unbezeichnetes Glied 0 das festgehaltene Grundglied ist. Sämtliche Massen und Schwerpunkte seien bekannt, ebenso die Beschleunigung  $b_A$ ; es ist der Beschleunigungsdruck  $Q$  in  $A$  in dessen Bewegungsrichtung zu bestimmen.

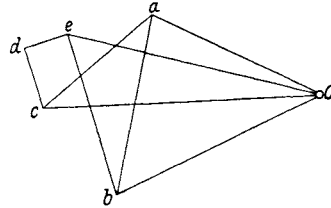


Fig. 518 a.

Der Geschwindigkeitsplan, Fig. 518a, und der in halber Größe gezeichnete Beschleunigungsplan, Fig. 518b, machen keine besondere Erläuterung notwendig; sie können nach den bekannten Methoden gezeichnet werden.

Die Massen aller Glieder werden nach dem Schwerpunktsesetze in die Gelenke verteilt und dort summiert. So wird z. B. die Masse  $M_1$  des Dreiecksgliedes 1 in die drei Punkte  $\mathcal{A}$ ,  $A$ ,  $C$  verteilt, wobei auf  $C$  der Teil  $M_{C1}$  entfallen würde; die Masse  $M_4$

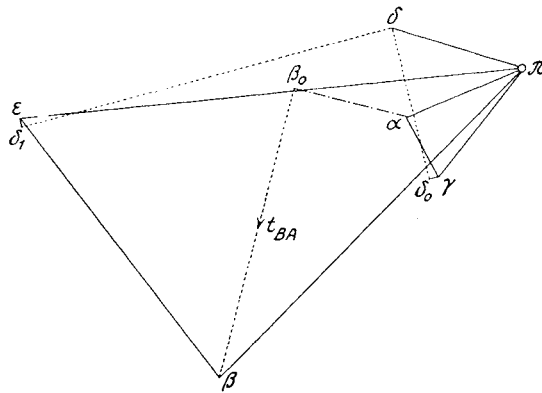


Fig. 518 b.

der Stange 4 wird in die Punkte  $C$  und  $D$  verteilt, wobei auf  $C$  der Teil  $M_{C4}$  entfällt; dann hat der statische Ersatzpunkt in  $C$  die Masse

$$m_C = M_{C1} + M_{C4}.$$

Ebenso sind die übrigen statischen Ersatzmassen in den Gelenken zu ermitteln.

Die Beschleunigungen dieser Punkte sind aus dem Beschleunigungsplan abzunehmen; es können nun bereits die Trägheitskräfte

$$T_A = -m_A b_A, \quad T_B = -m_B b_B, \quad T_C = -m_C b_C, \\ T_D = -m_D b_D, \quad T_E = -m_E b_E$$

in den Gelenken, entgegen den Beschleunigungen, angebracht werden.

Die Trägheitskräfte  $K$  der Stangen 3, 4, 5 werden wie in 281 und 282 aus der Gleichung 99:

$$K = M l \lambda k, \quad k = \frac{p_1 p_2 - i^2}{l^2}$$

bestimmt, worin  $k$  eine nur von den Abmessungen und der Massenverteilung abhängige unbenannte Zahl ist. Diese Kräftepaare  $K_3, K_4, K_5$  wurden an den Enden der Stangen 3, 4, 5 angebracht. Dazu mußten noch die Winkelbeschleunigungen  $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$  nach Größe und Drehungssinn bestimmt werden. So ist z. B. für die Stange 3 die Tangentialbeschleunigung von  $B$  gegen  $A$  (Fig. 518 b):

$$t_{BA} = l_3 \lambda_3 - \overline{\beta_0 \beta},$$

also  $K_3 = M_3 k_3 \cdot \overline{\beta_0 \beta}$ . Denkt man sich  $t_{BA}$  im Punkte  $B$  angebracht, so dreht sie um  $A$  im Sinne des Uhrzeigers; denselben Drehungssinn haben auch die beiden Kräfte  $K_3$  in  $A$  und  $B$ .

In gleicher Weise wurde die Größe und der Drehungssinn von  $K_4$  in  $C$  und  $D$ , von  $K_5$  in  $D$  und  $E$  bestimmt.

Etwas umständlicher ist die Ermittlung der Kräfte  $K$  der beiden Dreiecksglieder 1 und 2. Das Dreiecksglied 1 wurde durch die drei Stäbe  $1', 1'', 1'''$  ersetzt und an den Enden jedes dieser Stäbe die Kraftpaare  $K_1', K_1'', K_1'''$  senkrecht zu dem betreffenden Stabe angebracht. In 129, Schluß, wurde gezeigt, daß diese Kraftpaare die Moment besitzen:

$$K_1' l_1' = M_{C1} \lambda_1 (p_1^2 - i_1^2), \quad K_1'' l_1'' = M_{A1} \lambda_1 (p_2^2 - i_1^2),$$

$$K_1''' l_1''' = M_{\mathfrak{A}1} \lambda_1 (p_3^2 - i_1^2),$$

wenn  $l_1' = \overline{A\mathfrak{A}}$ ,  $l_1'' = \overline{CA}$ ,  $l_1''' = \overline{AC}$  bedeuten,  $M_{C1}, M_{A1}, M_{\mathfrak{A}1}$  die nach dem Schwerpunktsesetze auf  $C, A, \mathfrak{A}$  verteilten Massen des Gliedes 1,  $i_1$  dessen Trägheitshalbmesser für den Schwerpunkt des Gliedes,  $\lambda_1$  dessen Winkelbeschleunigung,  $p_1 p_2 p_3$  die Entfernungen der Gelenke  $C, A, \mathfrak{A}$  vom Schwerpunkt des Gliedes sind (Fig. 518 c). Die Winkelbeschleunigung  $\lambda_1$  ist für alle drei Stäbe  $1', 1'', 1'''$  die gleiche, und zwar

$$\lambda_1 = \frac{t_A}{l_1'} = \frac{t_C}{l_1''} = \frac{t_{CA}}{l_1'''};$$

sie kann aus dem Beschleunigungsplane entnommen werden.

Nachdem alle Trägheitskräfte  $T$  und  $K$  an den Gelenken angebracht sind, kann der dynamische Kraftplan gezeichnet werden (Fig. 518 d), indem man das dynamische Gleichgewicht aller Gelenke zwischen den äußeren Kräften und den Trägheitskräften untersucht.

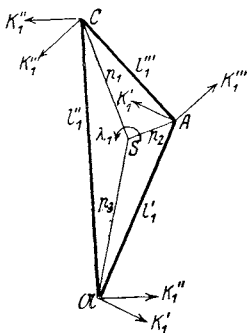


Fig. 518 c.

Zunächst wurden die Trägheitskräfte  $T_B, T_E, T_D, T_C, T_A$  aneinandergefügt, wie sie im Polygon  $BEDCA$  aufeinanderfolgen. Das dynamische Gleichgewicht des Gelenkes  $D$  erfordert die Bedingung

$$T_D + K_4 + 4 + 5 + K_5 = 0;$$

da  $T_D$  und die Trägheitskräfte  $K_4$  und  $K_5$  bekannt sind, lassen sich die Stabspannungen 4 und 5 bestimmen.

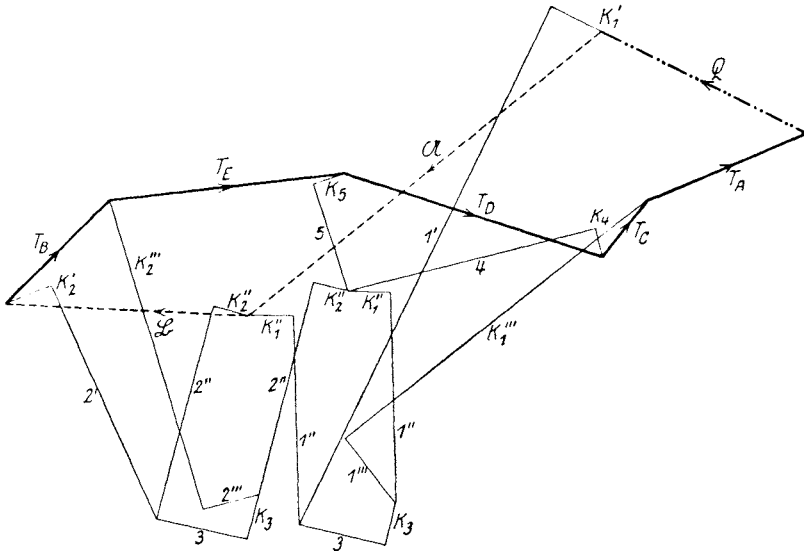


Fig. 518d.

Sodann können aus der Gleichgewichtsbedingung des Gelenkes  $E$ :

$$T_E + K_5 + 5 + K_2'' + 2'' + 2''' + K_2''' = 0,$$

in welcher alle Glieder bis auf die Spannungen  $2''$  und  $2'''$  bekannt sind, diese ermittelt werden.

Hieran schließt sich die Gleichgewichtsuntersuchung des Gelenkes  $B$  nach der Gleichung:

$$T_B + K_2''' + 2''' + K_3 + 3 + 2' + K_2' = 0,$$

aus der die Spannungen 3 und  $2'$  zu ermitteln sind.

Ebenso liefert das Gleichgewicht des Gelenkes  $C$  das Polygon

$$T_C + K_1''' + 1''' + 1'' + K_1'' + 4 + K_4 = 0,$$

woraus die Spannungen  $1''$  und  $1'''$  gefunden werden.

Endlich gibt das Gleichgewicht des Gelenkes  $A$  die Bedingung

$$T_A + Q + K_1' + 1' + 3 + K_3 + 1''' + K_1''' = 0,$$

woraus die Spannung  $1'$  und der gesuchte Beschleunigungsdruck  $Q$  gefunden werden.

Die Gelenkdrücke  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  in den Auflagern ergeben sich jetzt von selbst aus

$$\mathfrak{A} + K_1'' + 1'' + 1' + K_1' = 0,$$

$$\mathfrak{B} + K_2' + 2' + 2'' + K_2'' = 0.$$

Das Gleichgewicht der äußeren Kräfte des ganzen Getriebes und der Gesamtheit seiner Trägheitskräfte erfordert endlich die Bedingung:

$$T_B + T_E + T_D + T_C + T_A + Q + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} = 0.$$

Die Spannungen  $1''$ ,  $2''$ ,  $3$  und die Trägheitskräfte  $K_1''$ ,  $K_2''$ ,  $K_3$  kommen im dynamischen Kraftplan doppelt vor; dies ist eine Folge davon, daß die kinematische Kette außer an ihrem Umfange auch im Innern von Kräften (Trägheitskräften) beansprucht wird (vgl. 240).

**284. Beschleunigungsdruck bei Anfangsbewegungen des Getriebes.** Handelt es sich um die Bestimmung des Beschleunigungsdruckes für den Beginn der Bewegung eines Getriebes, so ist die Lösung dieser Aufgabe wesentlich einfacher. Hier sind, wie in 145 gezeigt wurde, die Beschleunigungen aller Punkte deren unendlich kleinen Wegen proportional. Man erhält dann den Beschleunigungsdruck des Getriebes an irgend einer Stelle  $A$ , wenn man die Massen sämtlicher Glieder an diese Stelle reduziert:

$$\mathfrak{M}_A = \Sigma \left( m \cdot \left( \frac{v}{v_A} \right)^2 \right)$$

und mit der Beschleunigung von  $A$  multipliziert, also

$$Q_A = \mathfrak{M}_A \cdot b_A.$$

Für ein System wurde dies bewiesen; für ein Getriebe ist der Beweis in gleicher Weise zu führen.

Die Geschwindigkeiten  $v$  und  $v_A$  können aus einem beliebig angenommenen Geschwindigkeitszustand des Getriebes entnommen werden.

**285. Die zweite grundlegende Aufgabe: Ermittlung des Beschleunigungszustandes aus den gegebenen äußeren Kräften.** Von einem zwangsläufigen Getriebe seien die Massenverteilung, die äußeren Kräfte, sowie der Geschwindigkeitszustand gegeben. Man suche den Beschleunigungszustand des Getriebes.

Diese Aufgabe wurde für das geführte System in 146 bereits gelöst und kann hier in analoger Weise behandelt werden. Sie ist nicht direkt lösbar, sondern erfordert den Umweg über beliebig gewählte Beschleunigungszustände.

Der Weg der Lösung ist in allgemeinem Überblick folgender: Man ersetzt zunächst die Masse des Getriebes durch statisch gleichwertige Ersatzmassen in den Gelenken, nimmt sodann für irgend eines der bewegten Gelenke  $A$  die Beschleunigung  $b_A'$  beliebig an und ermittelt daraus den Beschleunigungszustand des Getriebes. In den Ersatzpunkten

$A, B, C, \dots$  mit den Massen  $m_A, m_B, m_C, \dots$  werden sodann die Trägheitskräfte

$$T'_A = -m_A b'_A, T'_B = -m_B b'_B, T'_C = -m_C b'_C, \dots$$

entgegengesetzt den Beschleunigungen und überdies die Kraftpaare  $K'$  im Sinne der Winkelbeschleunigung  $\lambda'$  für jedes Glied des Getriebes angebracht.

Wäre der Beschleunigungszustand richtig gewählt gewesen, so müßten jetzt die gegebenen äußeren Kräfte mit den Trägheitskräften  $T'$  und  $K'$  nach dem d'Alembertschen Prinzip ein Gleichgewichtssystem bilden.

Dies wird nicht der Fall sein und man wiederholt deshalb die Untersuchung mit einer anders angenommenen Beschleunigung  $b''_A$  des Punktes  $A$ .

Aus den beiden Beschleunigungszuständen für  $b'_A$  und  $b''_A$  kann nun auf die richtige Beschleunigung  $b_A$  geschlossen werden, wie an einigen Beispielen gezeigt werden soll.

**286. Dynamische Bestimmung des Beschleunigungszustandes der geschränkten Schubkurbel.** Von einer geschränkten Schubkurbel (Fig. 519)

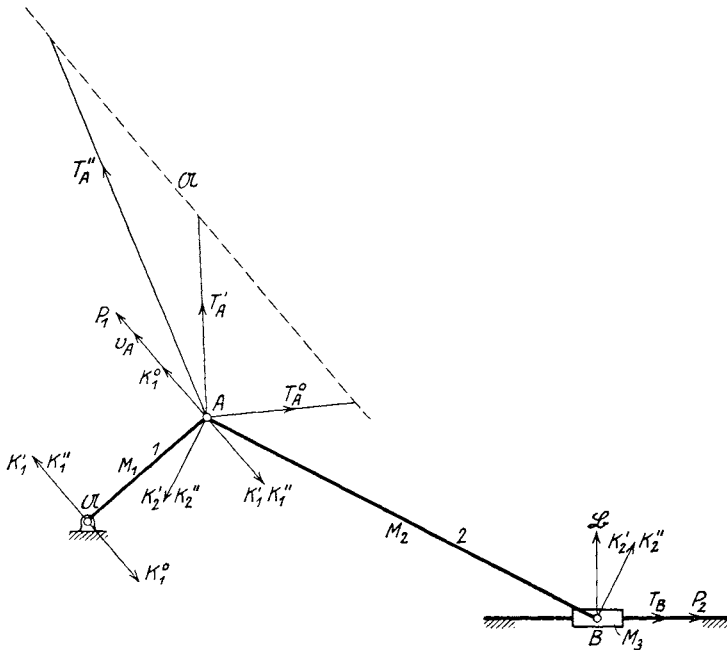


Fig. 519.

sind die Massen sämtlicher Glieder gegeben ( $M_1$  die Masse der Kurbel  $A\mathcal{A}$ ,  $M_2$  des Lenkers  $AB$ ,  $M_3$  des Schiebers); ferner die an dem Kurbelzapfen  $A$  angreifende Triebkraft  $P_1$  und der am Schieber angreifende

Widerstand  $P_2$ ; endlich die Geschwindigkeit  $v_A$  des Kurbelzapfens. Es ist der Beschleunigungszustand der Schubkurbel zu ermitteln.

Zunächst wurde aus  $v_A \equiv \overline{oa}$  in Fig. 519a der Geschwindigkeitsplan entwickelt, ferner in Fig. 519b von  $\pi$  aus die bekannte Normalbeschleunigung von  $A$ :

$$n_A \equiv \overline{\pi\alpha_0} = \frac{v_A^2}{A\mathfrak{L}} = \frac{\overline{oa}^2}{A\mathfrak{L}} \text{ in Richtung } A\mathfrak{L}$$

aufgetragen und in  $\alpha_0$  die Senkrechte  $a$  auf  $\pi\alpha_0$  errichtet. Auf dieser wurden nun zwei beliebige Punkte  $a'$ ,  $a''$  angenommen und aus ihnen die

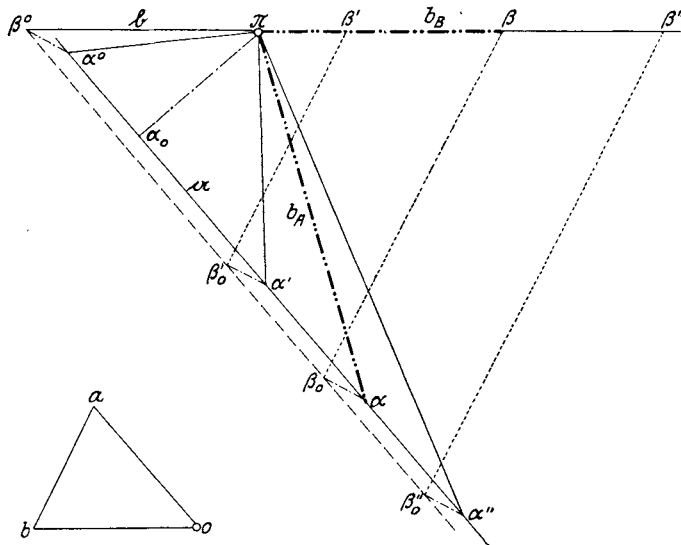


Fig. 519 a.

Fig. 519 b.

entsprechenden Beschleunigungspunkte  $\beta'$ ,  $\beta''$  auf der Geraden  $\mathfrak{b}$  gefunden, die durch  $\pi$  parallel zur Schubrichtung von  $B$  gezogen wird. Dann sind

$$\overline{\beta_0'\beta'} \equiv t_{BA'}, \quad \overline{\beta_0''\beta''} \equiv t_{BA''}$$

die Tangentialbeschleunigungen von  $B$  gegen  $A$  bei den angenommenen Beschleunigungszuständen. Bringt man überdies die Gerade  $\beta_0''\beta_0'$  zum Schnitte  $\beta^0$  mit der Geraden  $\mathfrak{b}$  und zieht  $\beta^0\alpha^0 \parallel \beta_0'\alpha'$ , so erhält man  $\alpha^0$ . Für diesen Beschleunigungszustand  $\alpha^0\beta^0$  ist  $t_{BA^0} \equiv 0$ .

Die Massen  $M_1, M_2, M_3$  wurden nach dem Schwerpunktsesetze in die Gelenke  $A$  und  $B$  verteilt; es ist dann die Ersatzmasse in  $A$ :

$$m_A = M_{A1} + M_{A2}$$

und in  $B$ :

$$m_B = M_{B2} + M_3,$$

weil die ganze Masse des Schiebers in  $B$  vereinigt werden kann.

Die Trägheitskraft der Ersatzmasse  $m_A$  ist dann

$$T_A = -m_A b_A;$$

sie wurde für die drei Beschleunigungen  $\overline{\pi a^0}$ ,  $\overline{\pi a'}$  und  $\overline{\pi a''}$  in  $A$  gezeichnet; die Endpunkte von  $T_A^0$ ,  $T_A'$ ,  $T_A''$  liegen in einer Geraden  $\mathcal{A}$ , die zur Kurbel senkrecht steht.

In Fig. 519c wurden diese drei Trägheitskräfte von  $O$  aus aufgetragen und in ihren anderen Endpunkten die Trägheitskräfte  $T_B^0$ ,  $T_B'$ ,  $T_B''$ , die aus  $T_B = -m_B b_B$  zu bilden sind, hinzugefügt. Ihre Endpunkte liegen ebenfalls in einer Geraden.

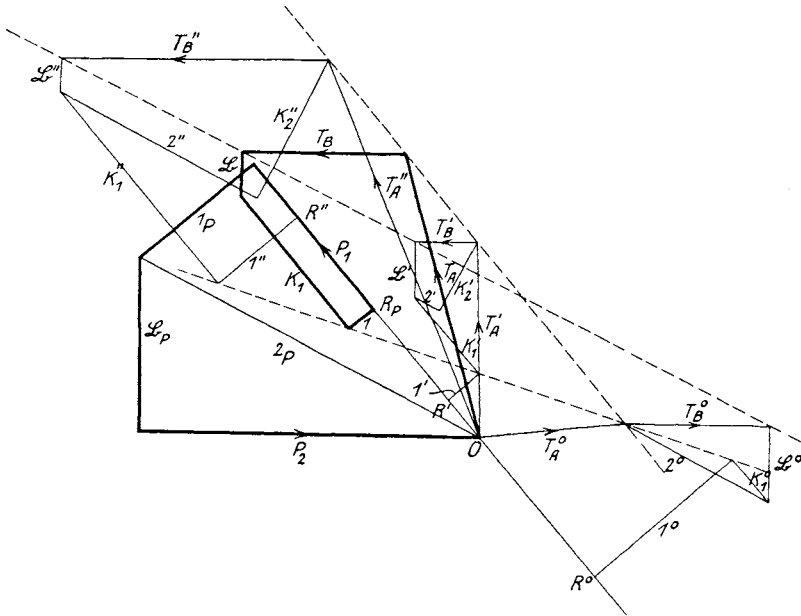


Fig. 519c.

Außer den Trägheitskräften  $T$  sind nun noch die Kraftpaare  $K$  an den Stäben 1 und 2 anzubringen. Da die Kraft  $K$  nach der Formel

$$K = M l \lambda k, \quad k = \frac{p_1 p_2 - i^2}{l^2}$$

zu bilden ist, benötigt man Größe und Richtung der Tangentialbeschleunigung  $l\lambda$ .

Für die Beschleunigungspunkte  $a^0$ ,  $a'$ ,  $a''$  sind die Tangentialbeschleunigungen  $\overline{a_0 a^0}$ ,  $\overline{a_0 a'}$ ,  $\overline{a_0 a''}$ ; die erste dreht, in  $A$  angebracht, gegen den Uhrzeiger, die beiden anderen mit dem Uhrzeiger. Dasselbe gilt von den Paaren der Trägheitskräfte  $K_1^0$ ,  $K_1'$ ,  $K_1''$  am Gliede 1; sie stehen im gleichen Verhältnis wie die Tangentialbeschleunigungen:

$$K_1^0 : K_1' : K_1'' = \overline{a_0 a^0} : \overline{a_0 a'} : \overline{a_0 a''} \dots \dots \dots a)$$



Für die Beschleunigungspunkte  $\beta^0, \beta', \beta''$  sind die Tangentialbeschleunigungen  $t_{BA} : 0, \overline{\beta_0'}\beta', \overline{\beta_0''}\beta''$ ; in  $B$  angebracht, drehen die beiden letzten das Glied 2 gegen den Uhrzeiger; im gleichen Sinne drehen auch die Kraftpaare  $K_2'$  und  $K_2''$  in  $A$  und  $B$ ; es ist

$$K_2^0 : K_2' : K_2'' = 0 : \overline{\beta_0'}\beta' : \overline{\beta_0''}\beta'' \dots \dots \dots b)$$

Im dynamischen Kraftplan Fig. 519c wurde zuerst die Gleichgewichtskraft der Trägheitskräfte gesucht (vgl. 147, zweite Methode). Im Gelenke  $B$  lautet die Gleichgewichtsbedingung für den Beschleunigungszustand  $\alpha^0 \beta^0$ :

$$T_B^0 + \mathfrak{B}^0 + 2^0 = 0;$$

hierin ist  $\mathfrak{B}^0$  der Auflagerdruck in  $B$ ,  $2^0$  die Spannung im Stabe 2, soweit sie allein von den Trägheitskräften herrühren. Die Kraft  $K_2^0$  ist null.

Im Gelenke  $A$  ist die Bedingung zu erfüllen:

$$T_A^0 + 2^0 + K_1^0 + 1^0 + R^0 = 0,$$

worin  $1^0$  die Spannung in der Kurbel allein durch die Trägheitskräfte und  $\overline{R^0O}$  oder  $R^0$  die Gleichgewichtskraft ist.

Ebenso ist für den Beschleunigungszustand  $\alpha'\beta'$ :

$$T_B' + \mathfrak{B}' + 2' + K_2' = 0,$$

$$T_A' + K_2' + 2' + K_1' + 1' + R' = 0$$

und für den Beschleunigungszustand  $\alpha''\beta''$ :

$$T_B'' + \mathfrak{B}'' + 2'' + K_2'' = 0,$$

$$T_A'' + K_2'' + 2'' + K_1'' + 1'' + R'' = 0.$$

Die Strecken  $\overline{R'O}$  und  $\overline{R''O}$  oder  $R'$  und  $R''$  bedeuten die Gleichgewichtskräfte für diese beiden Beschleunigungszustände; die Kräfte  $K_1^0, K_1', K_1''$  und  $K_2^0, K_2', K_2''$  müssen den Gleichungen a) und b) genügen; ihre Endpunkte werden also in einer Geraden liegen.

Nun wird die Gleichgewichtskraft der äußeren Kräfte gesucht. Man zeichnet die Polygone

$$P_2 + 2_P + \mathfrak{B}_P = 0,$$

$$P_1 + 1_P + 2_P + R_P = 0,$$

worin die Spannungen  $1_P$  und  $2_P$ , sowie der Auflagerdruck  $\mathfrak{B}_P$  nur von den äußeren Kräften  $P_1$  und  $P_2$  herrühren und  $\overline{OR_P}$  oder  $R_P$  die Gleichgewichtskraft ist. Damit ist aber in der Punktreihe  $R^0R'R''$  der richtige Punkt  $R_P$  gefunden. Von hier ausgehend können jetzt durch Ziehen von Parallelen die Kräfte und Spannungen  $1, K_1, \mathfrak{B}, T_B, T_A$  eingezeichnet werden. Das Gleichgewicht aller äußeren Kräfte und Trägheitskräfte der Schubkurbel ist durch das stark ausgezogene Polygon

$$P_1 + 1_P + \mathfrak{B}_P + P_2 + T_A + T_B + \mathfrak{B} + K_1 + 1 = 0$$

gekennzeichnet. Der Auflagerdruck in  $\mathfrak{A}$  ist

$$\mathfrak{A} = 1_P + K_1 + 1,$$

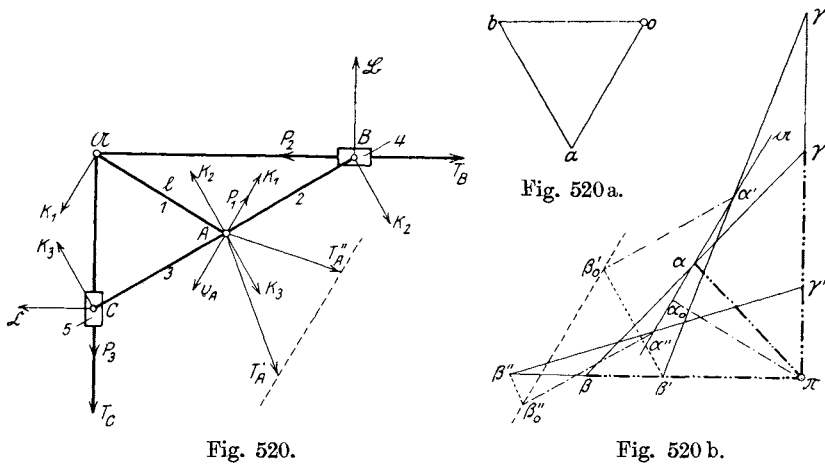
jener in  $B$  die geometrische Summe:

$$\mathfrak{B}_P + \mathfrak{B}.$$

Zieht man endlich im Beschleunigungsplan, Fig. 519b, die Gerade  $\pi a \parallel T_A$ , so erhält man im Schnitte mit  $a$  den richtigen Beschleunigungspunkt  $a$  und daraus über  $a\beta_0$  den Beschleunigungspunkt  $\beta$ ; damit sind die gesuchten Beschleunigungen  $b_A$  und  $b_B$  der Schubkurbel gefunden.

**287. Dynamische Bestimmung des Beschleunigungszustandes der gekoppelten gleichschenkligen Schubkurbel.** Dieses Getriebe ist in Fig. 520 dargestellt.

Gegeben ist die Massenverteilung der Kurbel  $A\mathfrak{A}$  und der Schubstange  $BC$ , die aus den beiden starr verbundenen, gleichlangen Stangen



2 und 3 besteht, ferner der Widerstand  $P_1$  im Kurbelzapfen  $A$  und die beiden Triebkräfte  $P_2$  in  $B$  und  $P_3$  in  $C$  in Richtung der Schieberbewegungen; endlich die Geschwindigkeit  $v_A$ . Es ist die Beschleunigung der Gelenke  $A, B, C$  zu konstruieren.

Fig. 520a ist der Geschwindigkeitsplan, aus  $v_A \parallel \overline{oa}$  entwickelt.

Im Beschleunigungsplan (Fig. 520b) wurde  $\overline{\pi a_0} \perp n_A \perp AA'$  gemacht, in  $a_0$  die Gerade  $a$  senkrecht zu  $\pi a_0$  gezogen und auf ihr zwei beliebige Punkte  $a'$  und  $a''$  angenommen; aus ihnen wurden in bekannter Weise die Punkte  $\beta', \beta''$  und  $\gamma', \gamma''$  gefunden. Es ist

$$\beta' a' \gamma' \sim \beta'' a'' \gamma'' \sim BAC.$$

$\mathfrak{A}$  sei der Auflagerdruck der Kurbel,  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{C}$  die Drücke zwischen Schieber und Führung in  $B$  und  $C$ ; alle drei sind unbekannt.

Was den Ersatz der Massen durch statische Ersatzpunkte betrifft, ist nach dem Schwerpunktsesetze die Masse  $M_1$  der Kurbel  $A\mathfrak{A}$  in die Punkte  $A$  und  $\mathfrak{A}$ , die Masse  $M_2$  der Stange 2 in die Punkte  $A$  und  $B$ , die Masse  $M_3$  der Stange 3 in die Punkte  $A$  und  $C$  zu verteilen; die Stangen 2 und 3 bilden zwar ein starres Glied, aber mit Rücksicht auf

die Trägheitskräfte  $T$  und  $K$  empfiehlt sich diese Teilung der Schubstange. Die Massen  $M_4, M_5$  der beiden Schieber sind, da sie Translationen ausführen, in  $B$  und  $C$  anzubringen. Es sind dann die statischen Ersatzmassen:

$$m_A = M_{A1} + M_{A2} + M_{A3}, \quad m_B = M_{B2} + M_4, \quad m_C = M_{C3} + M_5.$$

Die Trägheitskräfte

$$T_A' \equiv -m_A b_A', \quad T_A'' \equiv -m_A b_A''$$

sind in  $A$  entgegengesetzt den Beschleunigungen  $b_A' \equiv \pi \alpha'$  und  $b_A'' \equiv \pi \alpha''$  anzusetzen; ihre Endpunkte liegen auf einer zur Kurbel 1 senkrechten Geraden. Die Trägheitskräfte  $T_B$  und  $T_C$  sind in  $B$  und  $C$  entgegen den Beschleunigungen  $b_B$ , bzw.  $b_C$  anzubringen.

Die Trägheitskräfte  $K_1$  sind als Paar in  $\mathcal{A}$  und  $A$ , die Trägheitskräfte  $K_2$  als Paar in  $A$  und  $B$ , die Trägheitskräfte  $K_3$  als Paar in  $A$  und  $C$  anzubringen. Ihre Größe ist nach Gleichung 99:

$$K = M l \lambda k, \quad k = \frac{p_1 p_2 - i^2}{l^2}$$

zu bestimmen; der Drehungssinn dieser Paare ist aus der Tangentialbeschleunigung zu entnehmen. Die Tangentialbeschleunigung von  $A$  für den Beschleunigungszustand  $\alpha'$  ist

$$t_A' \equiv \overline{\alpha_0 \alpha'} = l \lambda_1';$$

in  $A$  angesetzt, dreht sie das Glied 1 gegen den Uhrzeiger; dies ist auch der Drehungssinn des Paares  $K_1'$ . Ebenso ist für den Beschleunigungszustand  $\alpha''$ :

$$t_A'' \equiv \overline{\alpha_0 \alpha''} = l \lambda_1'';$$

in  $A$  angebracht, dreht sie das Glied 1 im Sinne des Uhrzeigers; dies ist auch der Drehungssinn des Paares  $K_1''$ .

Die Tangentialbeschleunigung von  $B$  in bezug auf  $A$  ist für den Beschleunigungszustand  $\beta'$ :

$$t_{BA}' \equiv \overline{\beta_0' \beta'} = l \lambda_2';$$

setzt man sie in  $B$  an, so dreht sie um  $A$  im Sinne des Uhrzeigers; dies ist auch der Drehungssinn des Paares  $K_2'$ . In derselben Weise wird auch der Drehungssinn des Paares  $K_2''$  für den Beschleunigungszustand  $\beta''$  entschieden.

Die Paare  $K_3$  haben denselben Drehungssinn wie  $K_2$ . Nachdem die Trägheitskräfte  $T$  und  $K$  nach Größe und Richtung bestimmt und in den Gelenken angebracht sind, kann der dynamische Kraftplan (Fig. 520 c) entworfen werden.

Es wird zunächst die Gleichgewichtskraft aller Trägheitskräfte allein gesucht, und zwar für die beiden beliebig angenommenen Beschleunigungszustände  $\alpha' \beta' \gamma'$ ,  $\alpha'' \beta'' \gamma''$ . Man zeichnet, um mit dem ersten zu beginnen, von  $O$  ausgehend,  $T_B'$  und schließt daran  $T_A'$  und  $T_C'$ .

Das Gelenk  $C$  verlangt die Gleichgewichtsbedingung

$$T_C' + \mathfrak{C}' + 3' + K_3' \equiv 0;$$

da  $T_C'$  und  $K_3'$  bekannt sind, kann der nur von den Trägheitskräften stammende Führungsdruck  $\mathfrak{C}'$  und die Spannung  $3'$  ermittelt werden.

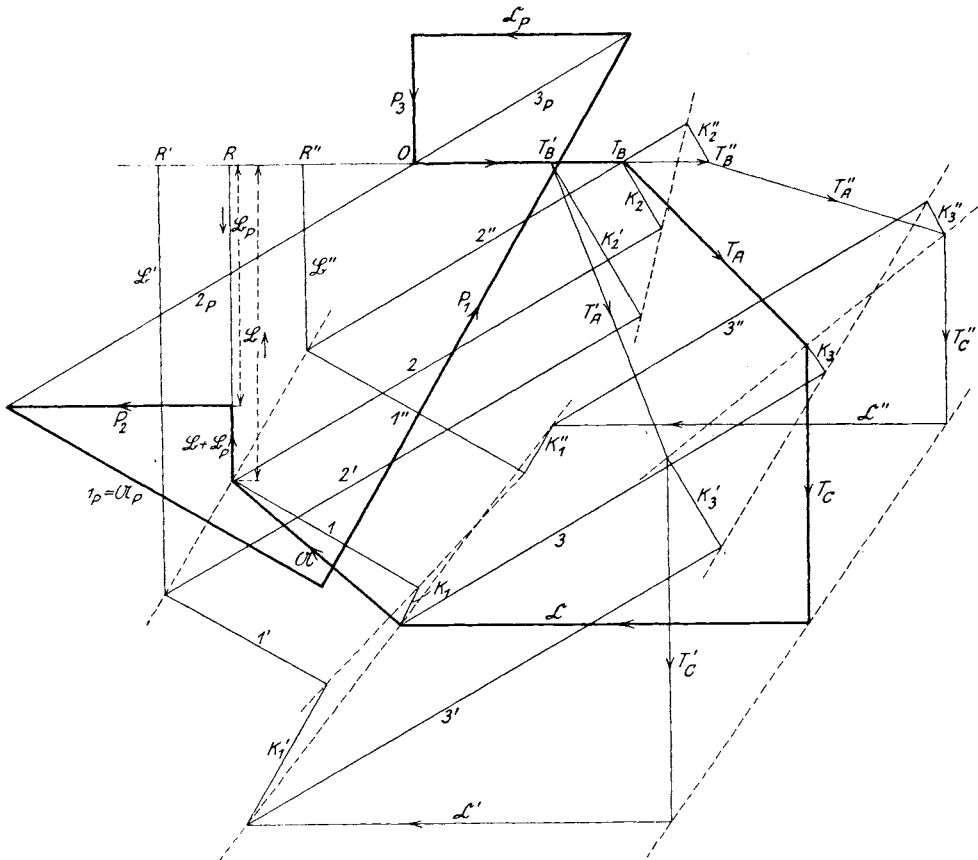


Fig. 520 c.

Das Gleichgewicht des Kurbelzapfens  $A$  erfordert die Gleichung:

$$T_A' + K_3' + 3' + K_1' + 1' + 2' + K_2' \equiv 0,$$

woraus  $1'$  und  $2'$  zu bestimmen sind. Endlich erfordert das Gleichgewicht des Gelenkes  $B$  die Bedingung:

$$T_B' + K_2' + 2' + \mathfrak{B}' + R' = 0,$$

woraus der von den Trägheitskräften herrührende Führungsdruck  $\mathfrak{B}'$  und die Gleichgewichtskraft  $\overline{R'O}$  oder  $R'$  bestimmt sind.

Durch analoge Konstruktionen findet man für den Beschleunigungszustand  $\alpha''\beta''\gamma''$  den Punkt  $R''$ . Sodann ermittelt man die Gleichgewichtskraft der äußeren Kräfte  $P_1, P_2, P_3$ . Man beginnt, von  $O$  ausgehend, mit dem Gleichgewichte von  $C$ :

$$P_3 + 3_P + \mathfrak{C}_P = 0,$$

wobei der Stellenzeiger  $P$  besagt, daß die Spannung  $3_P$  und der Führungsdruck  $\mathfrak{C}_P$  nur von den äußeren Kräften herrühren.

Das Gleichgewicht von  $A$  verlangt das Polygon:

$$P_1 + 3_P + 2_P + 1_P = 0,$$

worin die Spannung  $1_P$  auch der Auflagerdruck  $\mathfrak{A}_P$  in  $\mathfrak{A}$  ist.

Endlich ist das Gleichgewichtspolygon des Punktes  $B$ :

$$P_2 + 2_P + R + \mathfrak{B}_P = 0,$$

worin  $\mathfrak{B}_P$  der Führungsdruck in  $B$  und  $OR$  oder  $R$  die Gleichgewichtskraft der äußeren Kräfte  $P_1, P_2, P_3$  ist. Damit ist der richtige Punkt  $R$  der Punktreihe  $R'R''$  gefunden. Da alle, den verschiedenen Beschleunigungszuständen entsprechenden Punkte ähnliche Punktfolgen bilden (die gestrichelten Linien deuten einige dieser Punktfolgen an), so gilt das Verhältnis

$$\overline{R'R} : RR''$$

für alle Punktfolgen des dynamischen Kraftplans. Teilt man also die Strecke  $\overline{T_B'T_B''}$  im selben Verhältnis, so hat man den richtigen Punkt  $T_B$  gefunden. Ebenso findet man die richtigen Trägheitskräfte  $T_A$  und  $T_C$ .

Parallel zu der so gefundenen Trägheitskraft  $T_A$  zieht man sodann im Beschleunigungsplan die gesuchte Beschleunigung  $b_A = \pi a$ . Man könnte sie übrigens auch unmittelbar finden, indem man

$$\overline{a'a} : \overline{a'a''} = \overline{\beta'\beta} : \beta\beta'' = \overline{\gamma'\gamma} : \overline{\gamma\gamma''} = \overline{R'R} : \overline{R'R''}$$

konstruiert.

Das stark ausgezogene Polygon im dynamischen Kraftplan (Fig. 520c) gilt für das Gleichgewicht der äußeren Kräfte und der Trägheitskräfte des ganzen Getriebes. Es ist nämlich:

$$T_B + T_A + T_C + \mathfrak{C} + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{B}_P + P_2 + \mathfrak{A}_P + P_1 + \mathfrak{C}_P + P_3 = 0.$$

Darin ist

$$\mathfrak{A} = K_1 + 1$$

der Auflagerdruck in  $\mathfrak{A}$ , hervorgerufen von den Trägheitskräften allein, ferner die geometrischen Summen

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{A}_P, \mathfrak{B} + \mathfrak{B}_P, \mathfrak{C} + \mathfrak{C}_P$$

die ganzen Auflager- und Führungsdrücke in  $A, B, C$ .

**288. Dynamische Bestimmung des Beschleunigungszustandes eines sechsgliedrigen Getriebes mit einem Dreiecksgliede.** Bei dem in Fig. 521 dargestellten Getriebe mit den drei festen Gelenken  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{D}$ , den Stangen 1, 2, 4, 5 und dem Dreiecksgliede 3 ist die Massenverteilung

aller fünf bewegten Glieder, die Triebkraft  $P_1$  in  $A$ , der Widerstand  $P_2$  in  $D$  und die Geschwindigkeit  $v_A$  gegeben. Zu bestimmen sind die Beschleunigungen der Gelenke  $A, B, C, D$ .

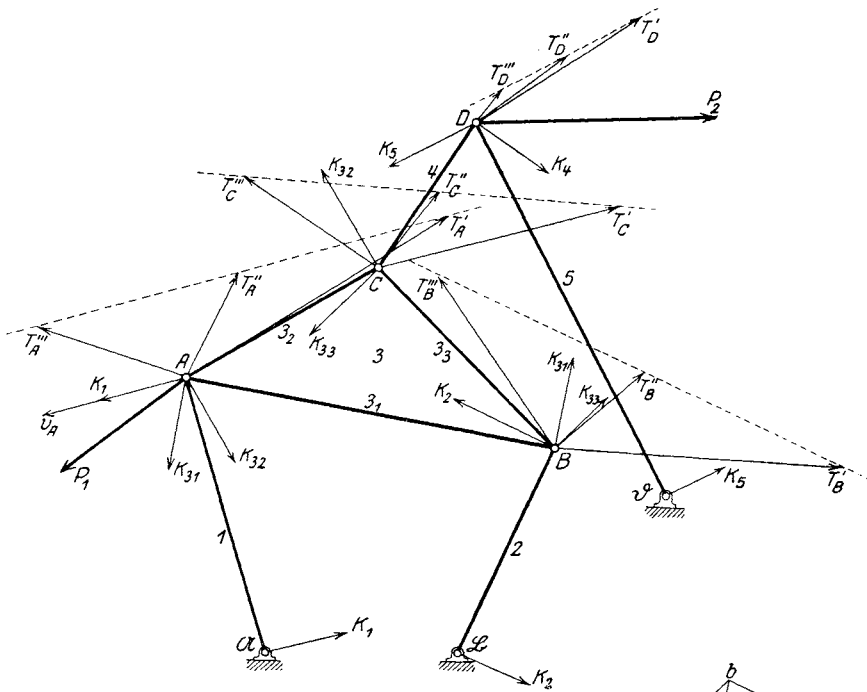


Fig. 521.

Der Geschwindigkeitsplan (Fig. 521 a) wurde aus  $v_A = oa$  in bekannter Weise entwickelt.

Im Beschleunigungsplan (Fig. 521 b) wurde  $\tau a_0 \equiv n_A$  und die Gerade  $a \perp n_A$  gemacht, ferner

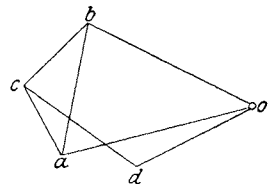


Fig. 521 a.

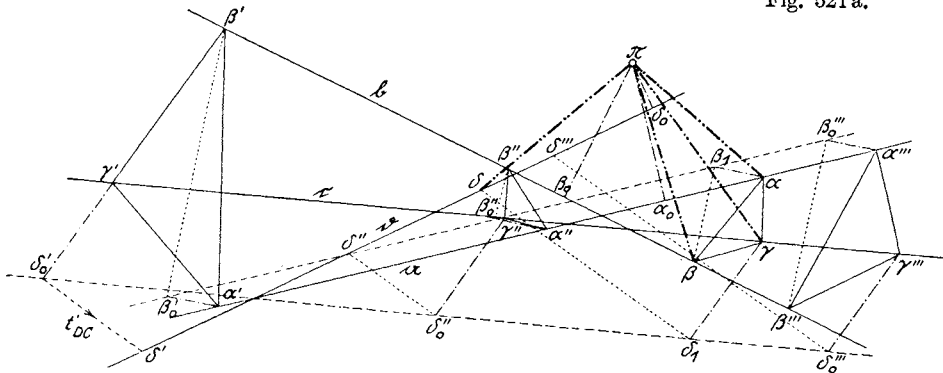


Fig. 521 b.

auf  $n$  drei beliebige Punkte  $a'$ ,  $a''$ ,  $a'''$  angenommen (obwohl zwei von ihnen genügen würden). Daraus wurden in bekannter Weise die Punkte  $\beta'$ ,  $\beta''$ ,  $\beta'''$  und sodann  $\gamma'$ ,  $\gamma''$ ,  $\gamma'''$  aus der Ähnlichkeit

$$a'\beta'\gamma' \sim a''\beta''\gamma'' \sim a'''\beta'''\gamma''' \sim ABC$$

bestimmt. Endlich wurde  $\overline{\pi\delta_0} \equiv n_D$  und die Gerade  $b \perp n_D$  gemacht und die Punkte  $\delta'$ ,  $\delta''$ ,  $\delta'''$  aus  $\gamma'$ ,  $\gamma''$ ,  $\gamma'''$  bestimmt.

Die Beschleunigungspunkte  $\beta'$ ,  $\beta''$ ,  $\beta'''$  liegen auf der Geraden  $b \perp n_B$  und auch die Punkte  $\gamma'$ ,  $\gamma''$ ,  $\gamma'''$  liegen auf einer Geraden  $c$ .

Die Ersatzmassen in den Gelenken sind, nachdem die Massen aller bewegten Glieder nach dem Schwerpunktssetze auf die Gelenke verteilt wurden:

$$m_A = M_{A1} + M_{A3}, \quad m_B = M_{B2} + M_{B3}, \\ m_C = M_{C3} + M_{C4}, \quad m_D = M_{D4} + M_{D5}.$$

Die Trägheitskräfte

$$T_A \equiv -m_A b_A, \quad T_B \equiv -m_B b_B, \quad T_C \equiv -m_C b_C, \quad T_D \equiv -m_D b_D$$

wurden für alle drei angenommenen Beschleunigungszustände  $a'$ ,  $a''$ ,  $a'''$  ermittelt und in den Gelenken entgegen den Beschleunigungen angebracht. Die Endpunkte von  $T_A'$ ,  $T_A''$ ,  $T_A'''$  liegen auf einer Geraden, die der Geschwindigkeit  $v_A$  parallel ist; dasselbe gilt von den anderen Trägheitskräften  $T_B$ ,  $T_C$  und  $T_D$ . Außerdem sind die Trägheitskräfte  $K$  zu bestimmen und in den Gelenken anzubringen. Die Kräfte  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_4$ ,  $K_5$  der vier stangenförmigen Glieder sind wie in den vorhergehenden Beispielen nach Gleichung 99:

$$K = M l \lambda k, \quad k = \frac{p_1 p_2 - i^2}{l^2}$$

zu bestimmen. Die Tangentialbeschleunigungen  $l\lambda$  sind, wie dies schon wiederholt gezeigt wurde, aus dem Beschleunigungsplan zu entnehmen. Um z. B. in

$$K_4 = M_4 l_4 \lambda_4 k_4$$

die Tangentialbeschleunigung  $l_4 \lambda_4$  zu finden, beachte man, daß die Tangentialbeschleunigung von  $D$  gegen  $C$  für den Beschleunigungszustand  $\gamma'\delta'$

$$t_{DC}' \equiv \overline{\delta_0' \delta'} \equiv l_4 \lambda_4$$

ist. Denkt man sich  $t_{DC}'$  in  $D$  angetragen, so dreht sie um  $C$  im Sinne des Uhrzeigers; denselben Drehungssinn hat das Kraftpaar  $K_4$  in  $C$  und  $D$ .

Um die Kräfte  $K$  des Dreiecksgliedes 3 zu finden, ersetze man dieses Glied durch die drei Stäbe  $3_1$ ,  $3_2$ ,  $3_3$  und suche die Trägheitskräfte  $K_{31}$ ,  $K_{32}$ ,  $K_{33}$  dieser Stäbe für alle drei Beschleunigungszustände  $a'\beta'\gamma'$ ,  $a''\beta''\gamma''$ ,  $a'''\beta'''\gamma'''$ . (Vgl. 283, Fig. 518, Glied 1 und 2.) Der Drehungssinn der Kraftpaare wird in gleicher Weise wie für die Stäbe ermittelt.

Fig. 521c zeigt den dynamischen Kraftplan. Zuerst wurde wieder die Gleichgewichtskraft der Trägheitskräfte aufgesucht. Die Trägheitskräfte  $T_D'$ ,  $T_C'$ ,  $T_B'$ ,  $T_A'$  wurden aneinandergefügt; das Gleichgewicht

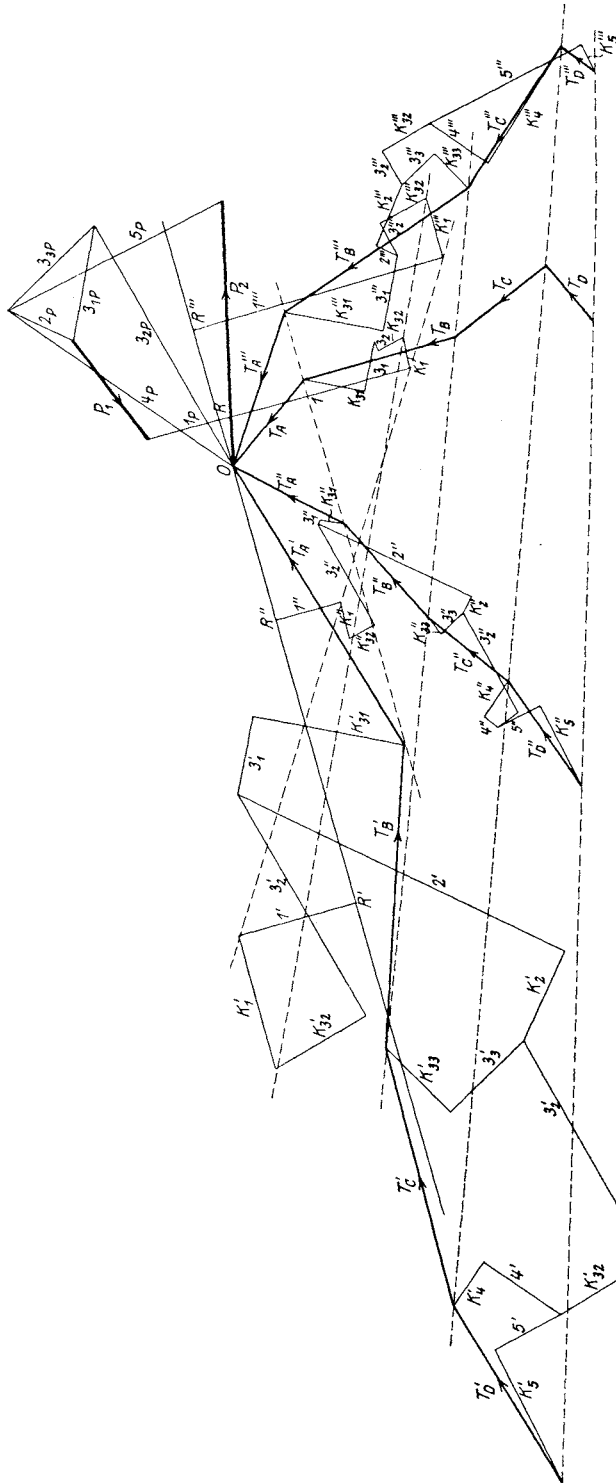


Fig. 521 c  
(um  $\pi/2$  gegen Fig. 521 verdreht).



des Gelenkes  $D$  erfordert das Polygon

$$T_D' + K_4' + 4' + 5' + K_5' = 0;$$

da  $K_4'$  und  $K_5'$  bekannt sind, werden die Spannungen  $4'$  und  $5'$  zu bestimmen sein.

Das Gleichgewicht des Gelenkes  $C$  liefert das Polygon

$$T_C' + K_{33}' + 3_3' + 3_2' + K_{32}' + 4' + K_4' = 0,$$

woraus sich die Spannungen  $3_3'$  und  $3_2'$  ergeben, da die Trägheitskräfte  $K$  bereits bekannt sind.

Das Gleichgewicht von  $B$  verlangt das Polygon

$$T_B' + K_{31}' + 3_1' + 2' + K_2' + 3_3' + K_{33}' = 0;$$

hieraus ergeben sich  $2'$  und  $3_1'$ .

Endlich verlangt das Gleichgewicht von  $A$  die Bedingung:

$$T_A' + R' + 1' + K_1' + K_{32}' + 3_2' + 3_1' + K_{31}' = 0,$$

woraus sich die Spannung  $1'$  und die Gleichgewichtskraft  $OR'$  oder  $R'$  ergibt.

In gleicher Weise führt man die Konstruktion für die beiden anderen Beschleunigungszustände  $\alpha''\beta''\gamma''\delta''$  und  $\alpha'''\beta'''\gamma'''\delta'''$  durch und findet die Punkte  $R''$  und  $R'''$ . Wie erwähnt, könnte man mit zwei beliebigen Beschleunigungszuständen auskommen; der dritte wurde nur hinzugenommen, um daran zu erinnern, daß die entsprechenden Punkte dieser drei Gruppen von Gleichgewichtspolygonen gerade Punktreihen erfüllen, und zwar nicht nur die Endpunkte der Trägheitskräfte  $T_A, T_B, T_C, T_D$ , sondern auch alle übrigen einander entsprechenden Punkte. So liegen u. a. die Schnittpunkte von  $K_1'K_{32}', K_1''K_{32}'', K_1'''K_{32}'''$  in einer Geraden, ebenso die Schnittpunkte von  $K_1'1', K_1''1'', K_1'''1'''$  usw.

Nicht alle diese Geraden wurden gezeichnet, sondern nur jene der Trägheitskräfte  $T$  und jene der oben erwähnten Schnittpunkte von  $K_1$  mit  $K_{32}$  und von  $K_1$  mit  $1$  durch gestrichelte Linien angedeutet.

Alle diese Schnittpunkte oder Ecken der Polygone bilden auf ihren (gestrichelten) Geraden ähnliche Punktreihen. Auch die Punktreihe  $R'R''R'''$  der Gleichgewichtskräfte  $OR', OR'', OR'''$  ist den übrigen ähnlich.

Nun geht man dazu über, die Gleichgewichtskraft der äußeren Kräfte des Getriebes zu suchen. Man trägt von  $O$  aus die Kraft  $P_2$  auf und sucht die Gleichgewichtskraft  $RO$  mit Benützung der Polygone:

$$P_2 + 5_P + 4_P = 0,$$

$$4_P + 3_{3P} + 3_{2P} = 0,$$

$$3_{3P} + 3_{1P} + 2_P = 0,$$

$$P_1 + 1_P + R + 3_{2P} + 3_{1P} = 0,$$

worin  $R$  die Gleichgewichtskraft  $\overline{RO}$  ist und der Stellenzeiger  $P$  bedeutet, daß die Spannungen nur von den äußeren Kräften herrühren.

In der früher gefundenen Punktreihe  $R'R''R'''$  ist nun der richtige Punkt  $R$  gefunden; wegen der Ähnlichkeit der Punktreihen ist das Verhältnis  $\overline{R'R} : \overline{RR''}$  auf alle übrigen Punktreihen zu übertragen. Dadurch erhält man die richtigen Endpunkte von  $T_A, T_B, T_C, T_D$  auf den gestrichelten Linien. Sobald der richtige Zug der Trägheitskräfte bekannt ist, können auch alle übrigen Endpunkte der Spannungen durch Ziehen von Parallelen bestimmt werden.

Zieht man endlich im Beschleunigungsplan (Fig. 521 b) durch  $\pi$  die Parallelen zu den gefundenen Trägheitskräften  $T_A, T_B, T_C, T_D$ , so erhält man auf den Geraden  $a, b, c, d$  die richtigen Beschleunigungspunkte  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  und damit den gesuchten Beschleunigungszustand.

**289. Literatur.** In ganz anderer Art, als durch die eben vorgeführte, bestimmt O. Mohr den Beschleunigungszustand eines Getriebes aus den gegebenen Massen und Kräften (siehe die Abhandlung: „Beitrag zur Kinetik ebener Getriebe“, Zeitschr. f. Math. u. Physik 1904; auch das Werk: Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik). Auch hier, wie bei der Bestimmung des Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustandes (siehe 186, 199), zerlegt Mohr die wirkliche Bewegung des Getriebes in zwei übereinander gelagerte Bewegungen. Nennt man  $\omega_1$  die bekannte Winkelgeschwindigkeit und  $\lambda_1$  die unbekannt Winkelbeschleunigung des geführten Gliedes des Getriebes, so zerlegt Mohr die wirkliche Bewegung  $I$  in zwei andere, von denen die eine ( $II$ ) die Winkelgeschwindigkeit  $\omega_2 = \omega_1$  und die Winkelbeschleunigung  $\lambda_2 = 0$ , die andere ( $III$ ) die Winkelgeschwindigkeit  $\omega_3 = 0$  und die Winkelbeschleunigung  $\lambda_3 = \lambda_1$  besitzt. Die Bewegung  $III$  ist also eine Anfangsbewegung. Aus den Beschleunigungszuständen der Bewegungen  $II$  und  $III$  wird dann der resultierende Beschleunigungszustand der Bewegung  $I$  bestimmt. Auch Mohr benützt das d'Alembertsche Prinzip, indem er die Leistung der äußeren Kräfte (er nennt sie: Arbeitsgeschwindigkeit) gleich setzt der Leistung der Beschleunigungsdrücke. Die unbekannt Winkelbeschleunigung  $\lambda_1$  des geführten Gliedes wird sodann gerechnet, nicht konstruiert (vgl. Gleichung 68 in den gesammelten Abhandlungen).

Die Zeichnung der dynamischen Kraftpläne erfolgt bei Mohr auf ganz anderer Grundlage.

**290. Aufgaben.**

- 130. In 282 wurde der Beschleunigungsdruck der schwingenden Kurbelschleife ohne Berücksichtigung der Masse der um  $B$  schwingenden Hülse gesucht. Wie ändert sich der dynamische Kraftplan, wenn man die Masse der Hülse berücksichtigt?
- 131. Es soll die dynamische Ermittlung des Beschleunigungszustandes des in Fig. 522 dar-

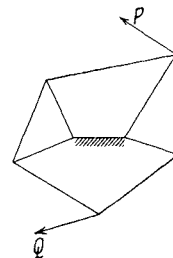


Fig. 522.

gestellten Getriebes mit zwei Dreiecksgliedern durchgeführt werden.

132. Man führe die dynamische Untersuchung der Klugschen Steuerung (siehe 302) durch. Gegeben sind: die Triebkraft  $P$  und der Widerstand  $Q$ , die Geschwindigkeit des Kurbelzapfens  $A$  und die Massenverteilung sämtlicher Glieder; es ist die Beschleunigung  $b_A$  zu konstruieren.

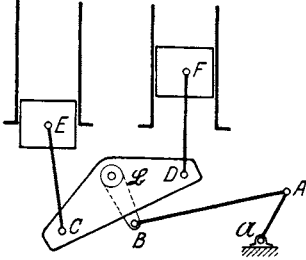


Fig. 523.

133. Fig. 523 zeigt das Getriebe der mehrzylindrigen Gasmaschine von Ch. H. Morgan. Die beiden Kolben  $E$  und  $F$  sind mit der Pleuellagerwelle  $\mathcal{A}$  durch eine Pleuellager verbunden, deren Winkel  $C\mathcal{B}D$  gleich  $152^\circ$  ist. Gegeben sind die

auf die Pleuellager wirkenden Drücke, der Widerstand und die Geschwindigkeit in  $A$ , endlich die gesamte Massenverteilung; es sind die Beschleunigungen der beiden Pleuellager zu konstruieren.

## XXVII. Die Ermittlung der Spannungen und Gelenkdrücke in einer bewegten kinematischen Kette.

**291. Die Methode.** Zu den wichtigsten Aufgaben der graphischen Dynamik gehört die Ermittlung der Spannungen, die in den Gliedern einer kinematischen Kette während deren Bewegung durch die treibenden Kräfte, die Widerstände und die Massenkräfte auftreten, sowie die Bestimmung der Drücke, die in den Gelenken dieser kinematischen Kette entstehen. Diese Aufgabe wird insbesondere Bedeutung gewinnen bei den vielfältig verwendeten Kurbelgetrieben aller Art und bei den oft recht verwickelten Steuerungen; ebenso wie die Beschleunigungen bei diesen Getrieben oft ungeahnte Größen erreichen, nehmen auch Spannungen und Drücke oft Werte an, die für die Festigkeit der betreffenden Teile verhängnisvoll werden können. Eine genaue, wissenschaftliche Methode der Untersuchung wird deshalb auch dem ausführenden Konstrukteur willkommen sein. Es fehlen nicht beachtenswerte Ansätze, diese Aufgabe zu lösen, wenigstens wurde sie bereits in verschiedenen Fällen mit mehr oder weniger Glück durchzuführen versucht.

Wir wollen hier einen Weg einschlagen, der, wie wir hoffen, allgemein anwendbar und wissenschaftlich einwandfrei ist, und die Theorie des Gegenstandes zunächst an einigen einfachen Fällen entwickeln, um sodann die Anwendung an einer Reihe von Beispielen aus der Praxis zu zeigen.

Wir gehen hierbei von dem frei beweglichen Gelenkviereck aus, also einer Kette, von der kein Glied festgestellt ist. Die äußeren Kräfte derselben, die Triebkräfte und Widerstände, denken wir uns vorläufig in den Gelenken angreifend.

Kräfte, die außerhalb der Gelenke angreifen, sowie die Eigengewichte der Kettenglieder werden wie in 415 zu behandeln sein.

Die Massen sämtlicher Glieder werden durch die statisch gleichwertigen Ersatzmassen in den Gelenken ersetzt, die Beschleunigungsdrücke der Glieder also durch die Beschleunigungsdrücke der Ersatzmassen dargestellt.

Die Grundlage der im folgenden mitgeteilten Konstruktionen ist das d'Alembertsche Prinzip. Man wird in allen Ersatzpunkten, deren Masse  $m$ , deren Beschleunigung  $b$  sei, die Trägheitskraft  $T \equiv -mb$  und das Paar  $K$  in den Gelenken anbringen; dann bestehen folgende Gleichgewichtssysteme:

1. Alle äußeren Kräfte der kinematischen Kette (Triebkräfte, Widerstände, bei Getrieben auch die Auflagerdrücke) sind im Gleichgewichte mit sämtlichen Trägheitskräften  $T$  und  $K$  der Kette.

2. Jedes Gelenk der kinematischen Kette ist für sich im Gleichgewicht, wenn außer den äußeren Kräften, die auf dieses Gelenk wirken, noch die Trägheitskraft  $T$  der Ersatzmasse in diesem Gelenke, die Trägheitskräfte  $K$  und die Spannungen  $S$  der Nachbarglieder angebracht werden.

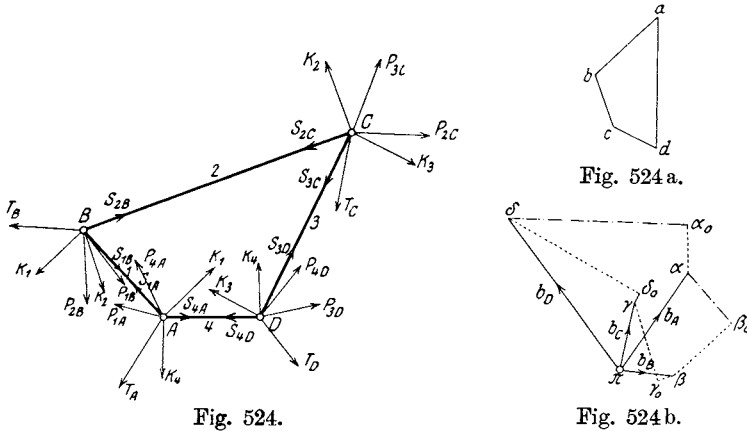
Nach diesem Grundsatz haben wir zwar schon im vorhergehenden Kapitel die Spannungen der Glieder bestimmt; wir werden uns jedoch bald überzeugen, daß der dort eingeschlagene Weg die Spannungen nur in Annäherung liefert, die noch einer Verbesserung bedarf.

3. Jedes Glied der kinematischen Kette ist für sich im Gleichgewicht, wenn außer den äußeren Kräften, die auf dieses Glied wirken, noch die Trägheitskräfte aller Massenpunkte dieses Gliedes, das Kraftpaar  $K$ , sowie die Gelenkdrücke der Nachbarglieder angebracht werden.

Dieser Grundsatz liefert die Gelenkdrücke der Kette.

Der Inhalt dieses Abschnittes wurde in der Abhandlung von F. Wittenbauer, „Dynamische Kraftpläne“, Zeitschr. f. Math. u. Physik, 1906 niedergelegt.

**292. Spannungen und Gelenkdrücke im frei bewegten Gelenkviereck.** Das Gelenkviereck  $A, B, C, D$  (Fig. 524) wird in seinen Gelenken von



Kräften  $P$  beansprucht; da es nicht gleichgültig ist, auf welches Glied die Kraft wirkt, wollen wir mit  $P_{1A}$  die Kraft bezeichnen, die auf das Glied 1 in seinem Gelenk  $A$  wirkt; ebenso wurden die noch übrigen sieben Kräfte  $P_{1B}, P_{2B}, P_{2C}, P_{3C}, P_{3D}, P_{4D}, P_{4A}$  bezeichnet.

Der Geschwindigkeitsplan (Fig. 524 a) sei gegeben; da es nur auf die relativen Geschwindigkeiten der Gelenke in bezug aufeinander ankommt, wurde der Nullpunkt  $o$  des Planes fortgelassen.

Aus den gegebenen Kräften  $P$  sei auf dynamischem Wege (vgl. XXVI) der Beschleunigungsplan (Fig. 524 b) gefunden worden. Es sind also auch die Beschleunigungen  $\overline{\pi\alpha} \equiv b_A$ ,  $\overline{\pi\beta} \equiv b_B$ ,  $\overline{\pi\gamma} \equiv b_C$ ,  $\overline{\pi\delta} \equiv b_D$  als gegeben anzusehen.

Die Massen  $M_1, M_2, M_3, M_4$  der vier Stangen werden nach dem Schwerpunktsesetze auf die vier Gelenke verteilt; dann ist

$$M_1 = M_{A1} + M_{B1}, \quad M_2 = M_{B2} + M_{C2}, \\ M_3 = M_{C3} + M_{D3}, \quad M_4 = M_{D4} + M_{A4}$$

und die Ersatzmassen in den vier Gelenken sind:

$$m_A = M_{A1} + M_{A4}, \quad m_B = M_{B2} + M_{B1}, \\ m_C = M_{C3} + M_{C2}, \quad m_D = M_{D4} + M_{D3}.$$

Die Trägheitskräfte  $T$  bestehen also auch aus zwei Teilen, nämlich

$$T_A \equiv -m_A b_A \equiv -(M_{A1} + M_{A4})b_A \equiv T_{A1} + T_{A4}, \\ T_B \equiv -m_B b_B \equiv -(M_{B2} + M_{B1})b_B \equiv T_{B2} + T_{B1}, \\ T_C \equiv -m_C b_C \equiv -(M_{C3} + M_{C2})b_C \equiv T_{C3} + T_{C2}, \\ T_D \equiv -m_D b_D \equiv -(M_{D4} + M_{D3})b_D \equiv T_{D4} + T_{D3}.$$

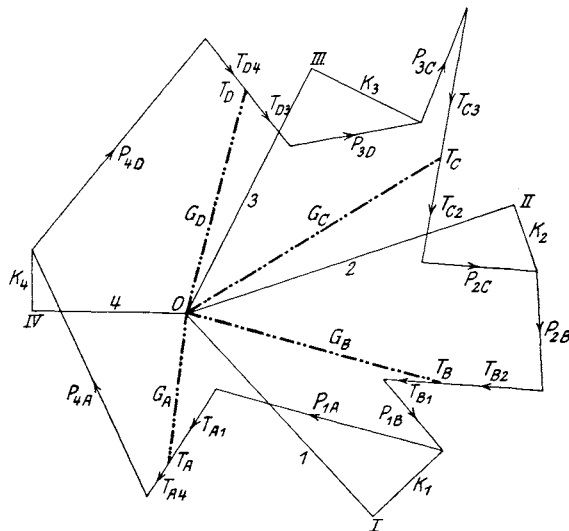


Fig. 524c.

Die Paare  $K_1, K_2, K_3, K_4$  sind in derselben Weise zu bestimmen, wie dies im vorigen Kapitel wiederholt gezeigt wurde. Die vier Kräfte  $T$  und die acht Kräfte  $K$  wurden in Fig. 524 in den Gelenken angebracht. Diese zwölf Trägheitskräfte sind nun mit den acht äußeren Kräften  $P$  ins Gleichgewicht zu bringen.

Beim Zeichnen des dynamischen Kraftplans (Fig. 524c) können zunächst die Kräfte  $K$  weggelassen werden, da sie nur als Kraftpaare

auftreten. Das Polygon der äußeren Kräfte  $P$  und der Trägheitskräfte  $T$  ist dann:

$$P_{1A} + T_A + P_{4A} + P_{4D} + T_D + P_{3D} + P_{3C} + T_C + P_{2C} + \\ + P_{2B} + T_B + P_{1B} = 0.$$

Die Schließung dieses Polygons wird eine Probe dafür sein, ob die Beschleunigungen  $b_A, b_B, b_C, b_D$  aus den Kräften  $P$  richtig bestimmt wurden.

Um die Spannungen in den vier Stäben zu bestimmen, benützen wir den Satz 2 in 291. Das Gelenk  $A$  ist im Gleichgewichte unter den äußeren Kräften  $P_{1A}$  und  $P_{4A}$ , den Spannungen 1 und 4 und den Trägheitskräften  $T_A, K_1$  und  $K_4$ . Es muß sich also das Polygon schließen:

$$P_{1A} + T_A + P_{4A} + K_4 + 4 + 1 + K_1 = 0.$$

Da die Trägheitskräfte  $K_1$  und  $K_4$  bekannt sind, können die Spannungen 1 und 4 daraus durch Ziehen von Parallelen zu den Stäben ermittelt werden.

Ebenso müssen sich die Polygone schließen:

$$P_{2B} + T_B + P_{1B} + K_1 + 1 + 2 + K_2 = 0, \\ P_{3C} + T_C + P_{2C} + K_2 + 2 + 3 + K_3 = 0, \\ P_{4D} + T_D + P_{3D} + K_3 + 3 + 4 + K_4 = 0,$$

woraus auch die übrigen Spannungen 2 und 3 zu bestimmen sind. Hieraus ergibt sich folgende Probe für die Genauigkeit der Konstruktion: Zieht man durch die Endpunkte  $I, II, III, IV$  der Kräfte  $K_1, K_2, K_3, K_4$  die Parallelen zu den Stäben 1, 2, 3, 4, so gehen diese durch denselben Punkt  $O$  hindurch. Die auf diese Art gefundenen Spannungen bedürfen jedoch noch einer Verbesserung, die später besprochen werden soll.

Um die Gelenkdrücke in  $A, B, C, D$  zu ermitteln, benützen wir den Satz 3 in 291. Das Glied 1 des Gelenkvierecks ist im Gleichgewichte unter den äußeren Kräften  $P_{1A}$  und  $P_{1B}$ , den Trägheitskräften  $T_{A1}$  und  $T_{B1}$ , sowie den Kräften  $K_1$  in  $A$  und  $B$ , die aber auf das Kraftpolygon keinen Einfluß nehmen, endlich den Gelenkdrücken in  $A$  und  $B$ .

Die Teilung der Trägheitskraft  $T_A$  in  $T_{A1}$  und  $T_{A4}$ , der Trägheitskraft  $T_B$  in  $T_{B1}$  und  $T_{B2}$  ist früher besprochen worden.

Der Gelenkdruck  $G_A$  ist die Resultante

$$G_A = T_{A4} + P_{4A} + K_4 + 4,$$

von den Kräften des Gliedes 4 herrührend; sein Gegendruck  $-G_A$  ist die Resultante

$$-G_A = 1 + K_1 + P_{1A} + T_{A1},$$

von den Kräften des Gliedes 1 herrührend.

Man findet also die Gelenkdrücke  $G_A, G_B, G_C, G_D$ , indem man den Punkt  $O$  mit den Teilungspunkten der Trägheitskräfte  $T_A, T_B, T_C, T_D$  verbindet. Dann bestehen folgende Gleichgewichtspolygone:

$$\begin{aligned} G_A + T_{A4} + P_{4A} + P_{4D} + T_{D4} + G_D &= 0, \\ G_B + T_{B1} + P_{1B} + P_{1A} + T_{A1} + G_A &= 0, \\ G_C + T_{C2} + P_{2C} + P_{2B} + T_{B2} + G_B &= 0, \\ G_D + T_{D3} + P_{3D} + P_{3C} + T_{C3} + G_C &= 0. \end{aligned}$$

293. **Korrektur der Spannungen.** Die im dynamischen Kraftplan Fig. 524c gefundenen Spannungen  $\overline{IO}$ ,  $\overline{IIO}$ ,  $\overline{III\overline{O}}$ ,  $\overline{IV\overline{O}}$  sind noch nicht die tatsächlichen Spannungen der Stäbe 1, 2, 3, 4. Denn die wirklichen Spannungen sind nicht in allen Querschnitten eines Stabes dieselben, sondern sie verändern sich und wachsen oder nehmen ab von einem Ende des Stabes zum anderen; ebensowenig wie das in den Schwer-

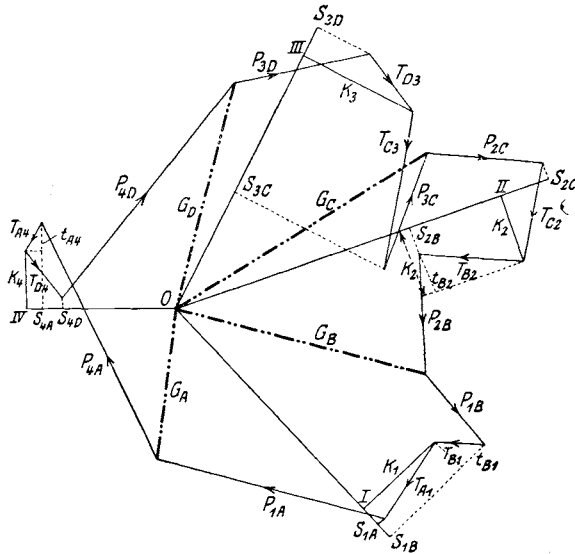


Fig. 524 d.

punkt einer Stange verlegte Gewicht ihr wirkliches Gewicht ist, da sich dieses über die Stange verteilt.

Auch die Beschleunigungsdrücke und Trägheitskräfte wirken nicht an den Enden der Stange, sondern verteilen sich über sie.

Der Kraftplan 524c gibt also nur eine vorläufige Annäherung an die wahren Werte der Spannungen; es ist dies die Folge davon, daß wir die Massen der Stäbe nach dem Schwerpunktsesetze auf die Gelenke aufgeteilt haben, wodurch auch die Trägheitskräfte auf die Gelenke aufgeteilt sind. Zulässig ist dies nur für jene Teile der Trägheitskräfte  $T$  (wir wollen sie mit  $t$  und dem entsprechenden Stellenzeiger benennen), die normal zur Stabrichtung wirken; hingegen die in die Stabrichtung fallenden achsialen Teile der Trägheitskräfte wachsen von einem Ende des Stabes zum anderen und zwar von null bis zu ihrer vollen Größe;



dadurch verändert sich aber die Spannung in verschiedenen Querschnitten des Stabes.

Jeder Stab hat also an seinen Gelenken zwei verschiedene Spannungen, die sich voneinander um die achsialen Trägheitskräfte unterscheiden. Zu diesen wirklichen Spannungen gelangt man, wenn man den dynamischen Kraftplan in anderer Anordnung zeichnet. Dies ist in Fig. 524d geschehen. Hier sind die an demselben Gelenke wirkenden Kräfte, z. B.  $P_{2C}$  und  $P_{3C}$ , zusammengerückt, die Trägheitskräfte  $T$  hingegen in ihre zwei Teile aufgelöst und auseinander gerückt, z. B.  $T_C$  in seine Teile  $T_{C2}$  und  $T_{C3}$ . Auf diese Weise rücken die Trägheitskräfte eines Gliedes, z. B.  $T_{C3}$  und  $T_{D3}$  der Stange 3 zusammen, und zwar an den Endpunkt der Trägheitskraft  $K_3$ , so daß nun alle Trägheitskräfte des Gliedes 3 in einem ununterbrochenen Zuge erscheinen:

$$T_{D3}, K_3, -K_3, T_{C3}.$$

Der größeren Deutlichkeit wegen wurde der zwischen  $OII$  und  $OIII$  liegende Teil des Kraftplanes in Fig. 524e herausgezeichnet und die Zerlegung der Trägheitskräfte  $T_{C3}$  und  $T_{C2}$  in ihre achsialen und transversalen Teile ( $t_{C3}$  und  $t_{C2}$ ) vorgenommen.

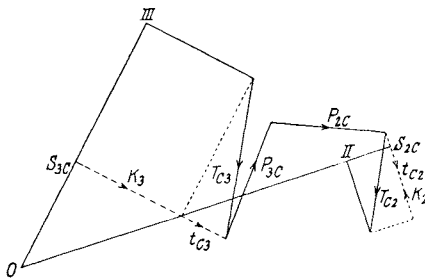


Fig. 524 e.

Der Kraftzug  $K_3 t_{C3} P_{3C} P_{2C} t_{C2} K_2$  schneidet jetzt auf den Strahlen  $OIII$  und  $OII$  die wirklichen Spannungen  $S_{3C}$  und  $S_{2C}$  ab, welche die Stäbe 3 und 2 im Gelenke C haben.

Ebenso wurden die anderen Spannungen korrigiert. Der zwischen  $OI$  und  $OII$  liegende Kraftzug  $K_2 t_{B2} P_{2B} P_{1B} t_{B1} K_1$  schneidet auf  $OII$  und  $OI$  die wirklichen Spannungen  $S_{2B}$  und  $S_{1B}$  im Gelenke B ab.

Die Spannung des Stabes 2 ist also nicht  $IIO$ , sondern  $S_{2B}$  in B und  $S_{2C}$  in C; letztere ist größer, und zwar um die ganze achsiale Trägheitskraft  $S_{2B}II + IIS_{2C}$ .

Von den vier Stäben des Gelenkvierecks sind also nicht vier Spannungen zu suchen wie in der Statik, sondern die doppelte Anzahl infolge der Beschleunigungsdrücke.

Durch diese Korrektur der Spannungen werden jedoch die bereits ermittelten Gelenkdrücke in keiner Weise berührt. Man kann dies aus Fig. 524d entnehmen. Durch die Korrektur ändert sich hier die Spannung  $I\bar{V}O$  in  $S_{4A}$ , weil die Trägheitskraft in A nicht  $T_{A4}$ , sondern  $t_{A4}$  ist und jener Teil von  $T_{A4}$  wegfällt, der in die Richtung des Gliedes 4 fällt. Dadurch wird der Gelenkdruck in A:

$$G_A = P_{4A} + t_{A4} + K_4 + S_{4A},$$

also ebenso groß wie

$$G_A = P_{4A} + T_{A4} + K_4 + 4.$$

Man erkennt dies auch aus der Überlegung, daß das Glied 4 für sich im Gleichgewichte ist, wenn man in  $A$  und  $D$  die Gelenkdrücke  $G_A$  und  $G_D$  anbringt, die durch die Spannung in 4 nicht berührt werden, da diese Spannung nicht geschnitten wird.

294. Spannungen und Gelenkdrücke im allgemeinen Kurbelgetriebe. Durch die Feststellung eines der vier Glieder im frei beweglichen Gelenkviereck Fig. 524 entsteht das Kurbelgetriebe Fig. 525<sup>1)</sup>. Hier ist das Glied 4 das Grundglied des Getriebes. Seine Geschwindigkeiten und Beschleunigungen sind null, also auch die Trägheitskräfte  $T_A$ ,  $T_D$  und  $K_4$ . Von den äußeren Kräften sollen nur

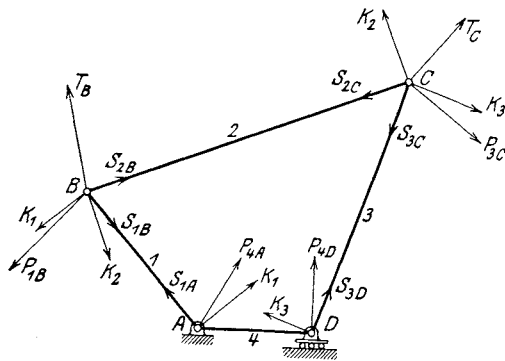


Fig. 525.

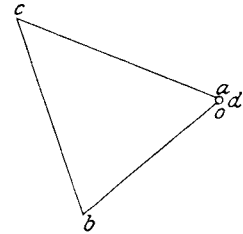


Fig. 525 a.

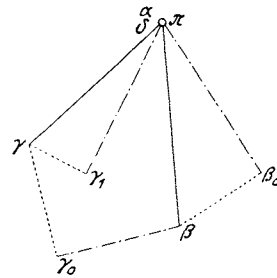


Fig. 525 b.

mehr  $P_{1B}$ ,  $P_{4C}$ ,  $P_{4D}$ ,  $P_{3A}$  in Betracht kommen; hierdurch wird der Kraftplan wesentlich vereinfacht.

Die Zeichnung des Geschwindigkeitsplanes 525a und des Beschleunigungsplanes 525b kann als bekannt vorausgesetzt werden. Die Verteilung der Massen nach statischen Gesetzen auf die Punkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , sowie die Zeichnung der Trägheitskräfte  $T_B$ ,  $T_C$ ;  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  erfolgt ebenso wie in 292.

Fig. 525c zeigt den dynamischen Kraftplan. Zuerst wird das Polygon der bekannten äußeren Kräfte und der Trägheitskräfte gezeichnet, und zwar:

$$T_{C3} + P_{3C} + T_{C2} + T_{B2} + P_{1B} + T_{B1}.$$

Sodann wurden die Trägheitskräfte  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  eingezeichnet und durch ihre Endpunkte  $I$ ,  $II$ ,  $III$  die Parallelen zu den Stäben 1, 2, 3 gezogen; sie müssen sich in einem Punkt  $O$  treffen.

<sup>1)</sup> Die Bezeichnungen der Gelenke sollen vorläufig die gleichen bleiben wie in Fig. 524; später wollen wir die festen Drehpunkte wieder mit deutschen Buchstaben bezeichnen.

In Fig. 525 wurde angenommen, daß  $A$  ein festes,  $D$  ein verschiebbares Gelenk ist; die Kraft  $P_{4A}$  ist dann der noch unbekannte Gelenkdruck in  $A$ , die Kraft  $P_{4D}$  der zur Gleitbahn von  $D$  normal stehende Auflagerdruck.

Zieht man also im Kraftplan durch den Anfangspunkt von  $T_{C3}$  die Senkrechte zur Gleitbahn, durch  $O$  die Parallele zum Stabe 4, so erhält man den Auflagerdruck  $P_{4D}$  und die Spannung  $S_4$ . Der Kraftzug wird endlich durch den Gelenkdruck  $P_{4A}$  geschlossen.

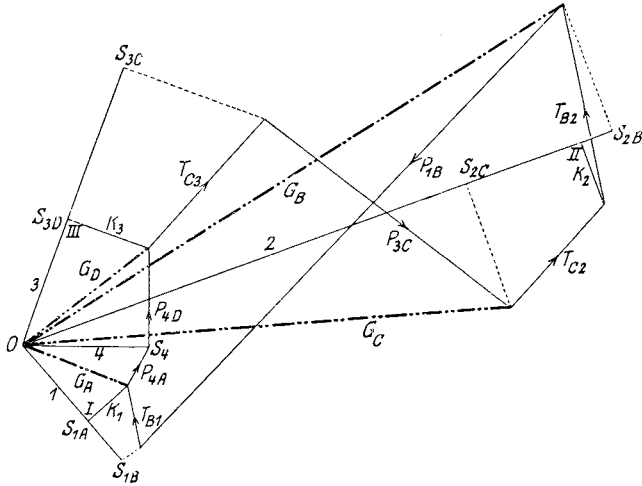


Fig. 525 c.

Um sich zu überzeugen, ob die Kräfte  $K$  mit dem richtigen Sinn in den Plan eingetragen wurden, beachte man die Gleichgewichtspolygone: für das Gelenk  $B$ :

$$P_{1B} + T_{B1} + K_1 + 1 + 2 + K_2 + T_{B2} \equiv 0;$$

für das Gelenk  $C$ :

$$P_{3C} + T_{C2} + K_2 + 2 + 3 + K_3 + T_{C3} \equiv 0;$$

für das Gelenk  $D$ :

$$P_{4D} + K_3 + 3 + 4 \equiv 0;$$

für das Gelenk  $A$ :

$$P_{4A} + 4 + 1 + K_1 \equiv 0.$$

Hierin sind  $1, 2, 3, 4$  die unkorrigierten Spannungen  $\overline{OI}$ ,  $\overline{OII}$ ,  $\overline{OIII}$ ,  $S_4$  in den vier Stäben.

Um die Gelenkdrücke zu bestimmen, beachte man, daß im Gelenke  $B$  die Kräfte  $P_{1B}$ ,  $T_{B1}$ ,  $1$  und  $K_1$ , die auf die Stange 1 wirken, mit den Kräften  $T_{B2}$ ,  $2$  und  $K_2$ , die auf die Stange 2 wirken, Gleichgewicht halten und daß jede dieser beiden Kraftgruppen den Gelenkdruck  $G_B$  zur Mittelkraft hat.

Es ist also 
$$G_B \equiv P_{1B} + T_{B1} + K_1 + 1$$
 und ebenso 
$$G_B \equiv 2 + K_2 + T_{B2},$$

welche zwei Polygone im Kraftplan vorkommen.

Im Gelenke  $C$  müssen die Kraftgruppen  $P_{3C}$ ,  $T_{C3}$ ,  $K_3$  und 3, auf die Stange 3 wirkend, und  $T_{C2}$ , 2 und  $K_2$ , auf die Stange 2 wirkend, miteinander Gleichgewicht halten; jede der beiden Gruppen hat den Gelenkdruck  $G_C$  zur Mittelkraft; es ist

$$G_C \equiv 3 + K_3 + T_{C3} + P_{3C}$$

und auch 
$$G_C \equiv T_{C2} + K_2 + 2.$$

Ebenso findet man aus dem Kraftplan die noch fehlenden Gelenkdrücke

$$G_D \equiv K_3 + 3, \quad G_D \equiv 4 + P_{4D};$$

$$G_A \equiv P_{4A} + 4, \quad G_A \equiv 1 + K_1.$$

Da auch jeder Stab für sich im Gleichgewichte ist, so müssen folgende Polygone im Kraftplan zu finden sein:

$$\begin{aligned} \text{Stab 1: } & G_B + P_{1B} + T_{B1} + G_A \equiv 0, \\ \text{Stab 2: } & G_C + T_{C2} + T_{B2} + G_B \equiv 0, \\ \text{Stab 3: } & G_D + T_{C3} + P_{3C} + G_C \equiv 0, \\ \text{Stab 4: } & G_A + P_{4A} + P_{4D} + G_D \equiv 0. \end{aligned}$$

Dabei sind die Gelenkdrücke an den Gelenken jedes Stabes als äußere Kräfte angebracht worden; die Kräfte  $K$  konnten weggelassen werden, da sie an jeder Stange paarweise auftreten.

Der Kraftplan zeigt schließlich noch die Korrektur der Spannungen, die in 293 erläutert wurde. Jeder Stab hat zufolge der Trägheitskräfte an seinen Enden verschiedene Spannungen. Man erhält diese, wenn man die Trägheitskräfte  $T$  auf die Richtungen der unkorrigierten Spannungen 1, 2, 3, 4 projiziert. So findet man durch Projektion der Trägheitskraft  $T_{B1}$  auf die Spannung 1 die Spannungen  $S_{1A}$  und  $S_{1B}$  an den Enden  $A$  und  $B$  des Stabes 1. Projiziert man ferner die Trägheitskräfte  $T_{B2}$  und  $T_{C2}$  auf die Spannung 2, so erhält man die Spannungen  $S_{2B}$  und  $S_{2C}$  an den Enden  $B$  und  $C$  des Stabes 2. In derselben Weise findet man die Spannungen  $S_{3C}$  und  $S_{3D}$  des Stabes 3. Der Stab 4 hat, da er keine Bewegung besitzt, auch keine Trägheitskraft; hier sind deshalb die Spannungen an beiden Enden  $A$  und  $D$  die gleichen, nämlich  $S_4$ .

**295. Spannungen und Gelenkdrücke der geschränkten Schubkurbel.** Die Spannungen und Gelenkdrücke in dem vielbenützten Kurbelgetriebe hat man bisher fast ausschließlich auf dem Wege der Rechnung zu bestimmen gesucht und hierbei eine Reihe von vereinfachenden Annahmen machen müssen. Mit Hilfe der graphischen Dynamik kann diese Frage ohne jede Vereinfachung oder Vernachlässigung vollkommen

strenge beantwortet werden. (F. Wittenbauer, Dynamischer Kraftplan des Kurbelgetriebes, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1906.)

Fig. 526 zeigt ein allgemeines oder geschränktes Schubkurbelgetriebe;  $A$  ist ein festes Gelenk, 1 oder  $AB$  die Kurbel, an welcher der gegebene Widerstand  $Q$  (statt  $P_{1B}$ ) in  $B$  angreifen würde. Der Lenker 2 oder  $BC$  verbindet den Kurbelzapfen  $B$  mit dem Schieber (Kreuzkopf), der eine

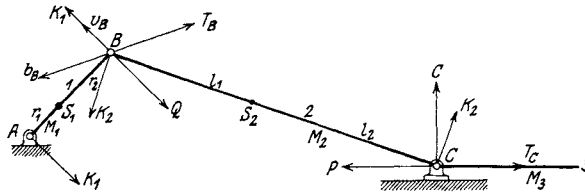


Fig. 526.

geradlinige Translation ausführt und durch das Gelenk  $C$  mit der Kolbenstange 3 verbunden ist, an der die Triebkraft  $P$  (statt  $P_{3C}$ ) angreift.

Die Geschwindigkeit  $v_B$  sei gegeben; wie man aus ihr, den gleichfalls gegebenen Kräften  $P$  und  $Q$  und den gegebenen Massen der Glieder die Beschleunigung  $b_B$  findet, wurde bereits in 286 gezeigt. Sie ist

also als bekannt anzusehen. Es sollen die Spannungen in der Kurbel 1, dem Lenker 2 und der Kolbenstange 3, sowie die Gelenkdrücke in  $A$ ,  $B$  und  $C$  konstruiert werden.

Fig. 526 a, b zeigen den Geschwindigkeits- und Beschleunigungsplan, dessen Konstruktion in 79 a, b durchgeführt wurde.

Die Massen  $M_1, M_2, M_3$  der drei Glieder sind nach dem Schwerpunktsgesetze auf die Gelenke zu verteilen, und zwar  $M_1$  in  $M_{A1}$  und  $M_{B1}$ ,  $M_2$  in  $M_{B2}$  und  $M_{C2}$ ; die Masse  $M_3$ , die nur Translation besitzt, ist ganz in  $C$  zu vereinen. Es sind dann die Massen der Ersatzpunkte:

$$m_B = M_{B1} + M_{B2}, \quad m_C = M_{C2} + M_3$$

und die Trägheitskräfte dieser Ersatzpunkte:

$$T_B = -m_B b_B = -(M_{B1} + M_{B2}) b_B = T_{B1} + T_{B2},$$

$$T_C = -m_C b_C = -(M_{C2} + M_3) b_C = T_{C2} + T_3;$$

ihre Richtungen sind den Beschleunigungen  $b_B$  und  $b_C$  entgegengesetzt.

Die in Form von Kraftpaaren auftretenden Trägheitskräfte  $K$  sind: für die Kurbel  $AB$ :

$$K_1 = M_1 r \lambda_1 \frac{r_1 r_2}{r^2} i_1^2,$$

für den Lenker  $BC$ :

$$K_2 = M_2 l \lambda_2 \frac{l_1 l_2}{l^2} i_2^2;$$

sind  $S_1$  und  $S_2$  die Schwerpunkte von Kurbel und Lenker, so bedeutet

$$r_1 = \overline{AS_1}, r_2 = \overline{S_1B}, r = r_1 + r_2 = \overline{AB};$$

$$l_1 = \overline{BS_2}, l_2 = \overline{S_2C}, l = l_1 + l_2 = \overline{BC};$$

$i_1$  und  $i_2$  sind die Trägheitshalbmesser von Kurbel und Lenker für deren Schwerpunkte.  $r\lambda_1, l\lambda_2$  sind die Tangentialbeschleunigungen  $t_{BA}$  von  $B$  gegen  $A$ ,  $t_{CB}$  von  $C$  gegen  $B$ . Nach Fig. 526 b ist

$$t_{BA} \equiv \overline{\beta_0\beta}, t_{CB} \equiv \overline{\gamma_0\gamma}.$$

Der Drehungssinn der Kraftpaare  $K_1$  in  $A$  und  $B$ ,  $K_2$  in  $B$  und  $C$  ist übereinstimmend mit jenem von  $t_{BA}$  um  $A$  und von  $t_{CB}$  um  $B$ .

In Fig. 526 wurden in  $A$ ,  $B$  und  $C$  die Trägheitskräfte  $T$  und  $K$  eingezeichnet.

Von den Auflagerdrücken in  $A$  und  $C$  ist ersterer  $A$  (statt  $P_{4A}$  nach den Bezeichnungen in Fig. 525) von unbekannter Richtung und Größe, hingegen  $C$  (statt  $P_{4D}$ ) zwar von unbekannter Größe, aber normal zur Führung.

Um den dynamischen Kraftplan (Fig. 526 c) zu entwickeln, benütze man zuerst das Gleichgewicht des Gelenkes  $C$ ; hier stehen im Gleichgewicht die äußeren Kräfte  $P$  und  $C$  mit der Spannung  $S_2$  des Lenkers und den Trägheitskräften  $T_C$  und  $K_2$ . Man zeichnet maßstäblich  $\overline{0I} = P$ ,  $\overline{12} = T_3$ ,  $\overline{23} = T_{C2}$ ,  $\overline{3a} = K_2$ ; zieht sodann durch  $a$  die Parallele zu  $BC$  und durch  $0$  die Parallele zu  $C$  bis zum Schnittpunkt  $7$  der beiden Geraden; dann ist  $\overline{a7} = S_2$  und  $\overline{70} = C$ .

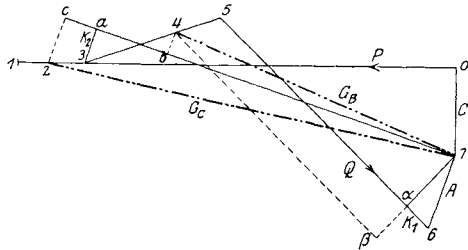


Fig. 526 c.

Sodann benützt man das Gleichgewicht des Gelenkes  $B$ ; hier halten Gleichgewicht die äußere Kraft  $Q$ , die Spannungen  $S_1$  der Kurbel und  $S_2$  des Lenkers mit den Trägheitskräften  $T_B$ ,  $K_1$  und  $K_2$ .

Man knüpft an den früheren Kraftzug an; es ist jetzt  $\overline{7a} = S_2$ ,  $\overline{a3} = K_2$ ; hier fügt man hinzu  $\overline{34} = T_{B2}$ ,  $\overline{45} = T_{B1}$ ,  $\overline{56} = Q$ ,  $\overline{6a} = K_1$ ,  $\overline{a7} = S_1$ .

Das Gleichgewicht des Gelenkes  $A$  endlich wird durch die äußere Kraft  $A$ , die Trägheitskraft  $K_1$  und die Spannung  $S_1$  erhalten. Dem entspricht der Kraftzug  $\overline{67a6}$ , wodurch auch  $A = \overline{67}$  gefunden ist.

Damit sind zunächst die beiden Auflagerdrücke  $A$  und  $C$  bestimmt. Die Spannungen  $S_1$  und  $S_2$  bedürfen noch einer Verbesserung, die mit der Verteilung der Trägheitskräfte über die Stäbe zusammenhängt, wie in 293 auseinander gesetzt wurde. Die Spannung  $S_2 = \overline{7a}$  im Lenker ist nur unter der Annahme gefunden worden, daß die Masse  $M_2$  des

Lenkers in die Gelenke  $B$  und  $C$  verteilt ist, der Lenker selbst aber keine Masse besitzt. In Wirklichkeit hat der Lenker in jedem Querschnitte eine andere Spannung; nennt man die Spannungen an den Enden  $B$  und  $C$  des Lenkers  $S_{2B}$  und  $S_{2C}$ , so erhält man diese, wenn man die Punkte 2 und 4 auf die Richtung von  $S_2$  projiziert; es ist dann

$$\overline{7b} \equiv S_{2B}, \quad \overline{7c} \equiv S_{2C},$$

da diese beiden Spannungen sich um die achsialen Teile der Trägheitskräfte  $\overline{34} \equiv T_{B2}$  und  $\overline{23} \equiv T_{C2}$  voneinander unterscheiden.

Aus gleichen Gründen ist die früher gefundene Spannung  $S_1$  nur jene im Gelenke  $A$ , also

$$\overline{7a} \equiv S_{1A},$$

während die Spannung am anderen Ende bei  $B$

$$\overline{7\beta} \equiv S_{1B}$$

gefunden wird, wenn man die Trägheitskraft  $\overline{45} = T_{B1}$  auf die Richtung der Kurbel projiziert.

Um die Gelenkdrücke in  $B$  und  $C$  zu bestimmen, beachte man, daß im Gelenke  $B$  die Kräfte  $S_1$ ,  $K_1$ ,  $Q$  und  $T_{B1}$  der Kurbel Gleichgewicht halten mit den Kräften  $S_2$ ,  $K_2$ ,  $T_{B2}$  des Lenkers; jede dieser zwei Gruppen hat den Gelenkdruck  $G_B$  zur Resultanten.

Es ist also

$$G_B \equiv \overline{45} + \overline{56} + \overline{6a} + \overline{a7} = T_{B1} + Q + K_1 + S_1$$

und auch  $G_B \equiv \overline{7a} + \overline{a3} + \overline{34} \equiv S_2 + K_2 + T_{B2}$ ,

also  $G_B \equiv \overline{47}$  und  $\overline{74}$ .

Im Gelenke  $C$  halten die Kräfte  $S_2$ ,  $K_2$ ,  $T_{C2}$  Gleichgewicht mit den Kräften  $P$ ,  $C$  und  $T_3$ ; jede dieser beiden Gruppen hat den Gelenkdruck  $G_C$  zur Resultanten. Es ist

$$G_C \equiv \overline{70} + \overline{01} + \overline{12} = C + P + T_3$$

und  $G_C \equiv \overline{23} + \overline{3a} + \overline{a7} \equiv T_{C2} + K_2 + S_2$ ,

also  $G_C \equiv \overline{72}$  und  $\overline{27}$ .

Eine Korrektur der Gelenkdrücke durch die korrigierten Spannungen ist nicht notwendig (vgl. 293, Schluß).

Auch die äußeren Kräfte  $P$ ,  $Q$ ,  $A$  und  $C$  müssen mit den Trägheitskräften  $T$  und  $K$  im Gleichgewichte stehen; beim Zeichnen des Polygons können übrigens die Kräfte  $K$  fortgelassen werden, da sie nur im Kraftpaar auftreten. Es ist also in Fig. 526c

$$\overline{01} + \overline{12} + \overline{23} + \overline{34} + \overline{45} + \overline{56} + \overline{67} + \overline{70} = 0$$

oder  $P + T_3 + T_{C2} + T_{B2} + T_{B1} + Q + A + C = 0$ .

Eine andere Lösung der hier gestellten Aufgabe findet man in R. Land, „Der Geschwindigkeits- und Beschleunigungsplan für Mechanismen“,

Zeitschrift d. Ver. deutsch. Ing. 1896, und in A. Pröll, „Zur Dynamik des Kurbelgetriebes“, Zeitschr. f. Math. u. Physik, Bd. 61, 1913.

296. Spannungen und Gelenkdrücke in der Kurbelschleife. Dieses Getriebe (Fig. 527) besteht aus der rechtwinklig gebogenen Stange 2,

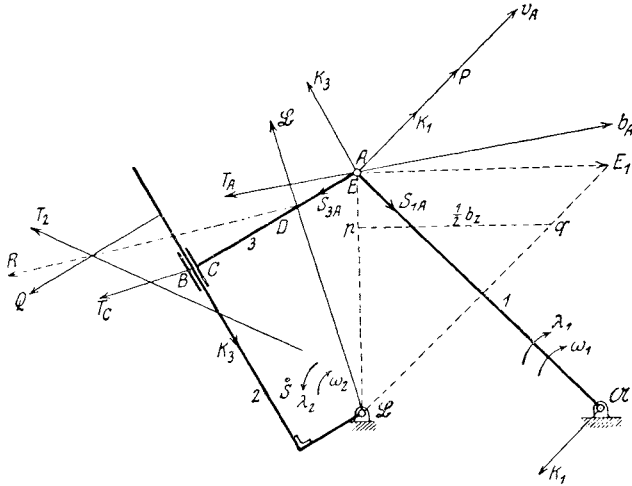


Fig. 527.

die um das feste Gelenk  $\mathfrak{B}$  drehbar ist; auf ihr verschiebt sich eine Hülse  $C$ , die durch den steifen Arm  $CA$  oder 3 in  $A$  mit der Kurbel 1 gelenkig verbunden ist.  $\mathfrak{A}$  ist das feste Gelenk dieses Gliedes 1. Gegeben ist die zur Kurbel senkrechte Triebkraft  $P$  in  $A$  und der Widerstand  $Q$ , der senkrecht zur Führungsstange 2 wirken möge, ferner die Geschwindigkeit  $v_A$ .

Wie man aus diesen Angaben und den Massen des Getriebes dessen Beschleunigungszustand ermittelt, hat der Abschnitt XXVI: Dynamik des Getriebes gezeigt. Hier soll vorausgesetzt werden, daß die Beschleunigung  $b_A$  bereits gefunden ist.

Fig. 527 a zeigt den Geschwindigkeitsplan, ausgehend von  $oa \equiv v_A$ . Es sei  $E$  jener Punkt des Gliedes 2, der augenblicklich mit  $A$  zusammenfällt. Dann bewegt sich  $E$  gegen  $A$  in Richtung der Führungsstange 2; macht man also  $oe \perp \mathfrak{B}E$  und  $ae \parallel 2$ , so ist ihr Schnittpunkt der Geschwindigkeitspunkt  $e$ .

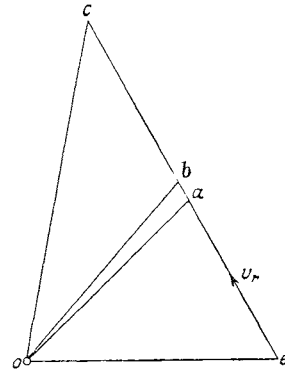


Fig. 527 a.

Ist ferner  $B$  jener Punkt der Stange 2, der augenblicklich mit dem Mittelpunkt  $C$  der Hülse zusammenfällt und zieht man  $ob \perp \mathfrak{B}B$ ,  $eb \perp EB$ , so ist der Schnittpunkt der Geschwindigkeitspunkt  $b$ ; er



liegt also auf  $ea$ . Endlich bewegt sich  $A$  gegen  $E$  genau so wie  $C$  gegen  $B$ ; macht man also  $\overline{b_c} \equiv \overline{ea}$ , so ist auch der Geschwindigkeitspunkt  $c$  gefunden.

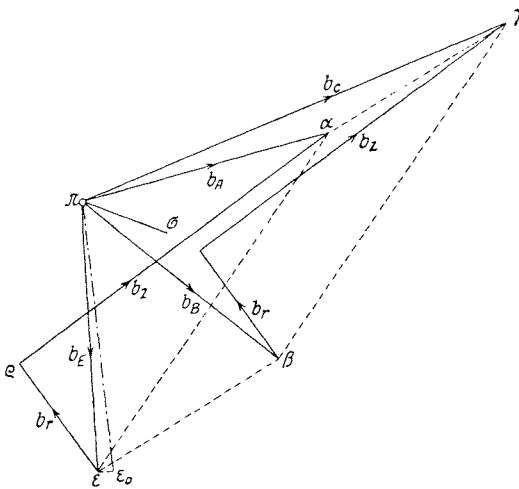
Im Beschleunigungsplan (Fig. 527 b) geht man von  $\overline{\pi a} \equiv b_A$  aus und sucht daraus  $b_E$  nach der Gleichung

$$b_A \equiv b_E + b_r + b_z$$

(vgl. 203, Gleichung 134).

Die Zusatzbeschleunigung  $b_z = 2v_r \omega_2$  wird aus der relativen Geschwindigkeit von  $A$  gegen  $E$ :  $v_r \equiv \overline{ea}$  zu ermitteln sein; man trägt  $v_E \equiv \overline{EE_1} \equiv \overline{oe}$  auf und verbindet  $E_1$  mit  $\mathfrak{B}$ ; dann ist (Fig. 527)

$$\text{tg}(E \mathfrak{B} E_1) = \omega_2,$$



d. i. die Winkelgeschwindigkeit des Gliedes 2; macht man nun  $\mathfrak{B}p \equiv v_r \equiv \overline{ea}$  und zieht  $pq \perp \mathfrak{B}E$ , so ist  $\overline{pq} = v_r \omega_2 = \frac{1}{2} b_z$ . Dreht man  $v_r$  um  $90^\circ$  im Sinne von  $\omega_2$ , so erhält man die Richtung von  $b_z$ . Man macht  $\overline{qa} \equiv b_z = 2 \overline{pq}$  und zieht in  $q$  die Parallele zur Führungsstange 2, dann muß in ihr die relative Beschleunigung  $b_r$  von  $A$  gegen  $E$  liegen und somit auch der Beschleunigungspunkt  $\epsilon$ .

Ist ferner

Fig. 527 b.

$$\overline{\pi \epsilon_0} \perp n_E = \frac{v_E^2}{E \mathfrak{B}} = \frac{oe^2}{E \mathfrak{B}} \text{ in Richtung } E \mathfrak{B}$$

und  $\epsilon_0 \epsilon \perp \pi \epsilon_0$ , so ist  $\epsilon_0 \epsilon$  eine zweite Gerade, in der  $\epsilon$  liegen muß; damit ist  $\epsilon$  und  $b_r \equiv \overline{\epsilon q}$  gefunden.

Der Beschleunigungspunkt  $\beta$  ergibt sich aus der Ähnlichkeit

$$\pi \beta \epsilon \sim \mathfrak{B} B E;$$

da sich nun  $C$  gegen  $B$  genau so bewegt, wie  $A$  gegen  $E$ , so ist auch

$$b_C \equiv b_B + b_r + b_z,$$

worin  $b_r$  und  $b_z$  dieselben Werte haben wie früher. Fügt man diese beiden Beschleunigungen in  $\beta$  an, so erhält man schließlich den Beschleunigungspunkt  $\gamma$ . Die vier Punkte  $\alpha, \gamma, \beta, \epsilon$  bilden also ein Parallelogramm, während die vier Geschwindigkeitspunkte  $a, c, b, e$  auf einer Geraden liegen.

Der Schwerpunkt des Gliedes 2 liege in  $S$ . Seinen Beschleunigungspunkt  $\sigma$  erhält man aus der Ähnlichkeit

$$\pi \epsilon \beta \sigma \sim \mathfrak{B} E B S,$$

und  $\pi\sigma = b_S$  ist die Beschleunigung des Schwerpunkts. Ist  $M_2$  die Masse des Gliedes 2, so ist, da dieses Glied eine Dauerdrehung um  $\mathfrak{B}$  macht, dessen Trägheitskraft

$$T_2 = M_2 b_S;$$

sie ist parallel und entgegengesetzt  $b_S$ , geht jedoch nicht durch  $S$ , sondern ist vom Drehpunkt  $\mathfrak{B}$  nach außen gerückt (vgl. 101) und geht durch den Schwingungsmittelpunkt des Gliedes 2.

Das Glied 2 ist vier Kräften ausgesetzt: dem Widerstande  $Q$ , der Trägheitskraft  $T_2$ , dem Hülsendrucke  $D$  und dem Auflagerdrucke  $\mathfrak{B}$ . Da die beiden ersten bekannt sind, sucht man ihre Resultante  $R$  (siehe auch Fig. 527 c) und bringt sie zum Schnitte mit  $D$ ; durch diesen Schnittpunkt geht  $\mathfrak{B}$ . Damit sind aber  $D$  und  $\mathfrak{B}$  bestimmt. Im Kraftplan ist

$$T_2 + Q + \mathfrak{B} + D = 0.$$

Um nun die übrigen Gelenkdrücke und die Spannungen zu bestimmen, verteilt man die Massen  $M_1$  und  $M_3$  der Glieder 1 und 3 nach dem Schwerpunktsesetze auf die Punkte  $A$ ,  $\mathfrak{U}$  und  $C$ . Die Ersatzmassen sind dann

$$m_A = M_{A1} + M_{A3}, \quad m_C = M_{C3}$$

und die Trägheitskräfte in  $A$  und  $C$ :

$$T_A = -m_A b_A = -(M_{A1} + M_{A3}) b_A = T_{A1} + T_{A3},$$

$$T_C = -m_C b_C = -M_{C3} b_C.$$

Die Trägheitskräfte  $K_1$  und  $K_3$  werden, wie früher, nach der Gleichung 99:

$$K = m l \lambda \frac{p q - i^2}{l^2}$$

berechnet und die Kraftpaare  $K_1$  und  $K_3$  im Sinne der Winkelbeschleunigungen  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  angebracht, da die Glieder 2 und 3 gleiche Winkelbeschleunigung besitzen. Die Tangentialbeschleunigungen  $l\lambda$  werden aus Fig. 527 b entnommen.

Sodann wurden im dynamischen Kraftplan Fig. 527 c folgende Gleichgewichtspolygone gezeichnet:

Gelenk  $A$ :

$$S_1 + K_1 + T_{A1} + P + T_{A3} + K_3 + S_3 = 0,$$

worin  $S_1 = \overline{OI}$ ,  $S_3 = \overline{III O}$  die unkorrigierten Spannungen in den Stäben 1 und 3 sind;

Punkt  $C$ :  $S_3 + K_3 + T_C + D = 0,$

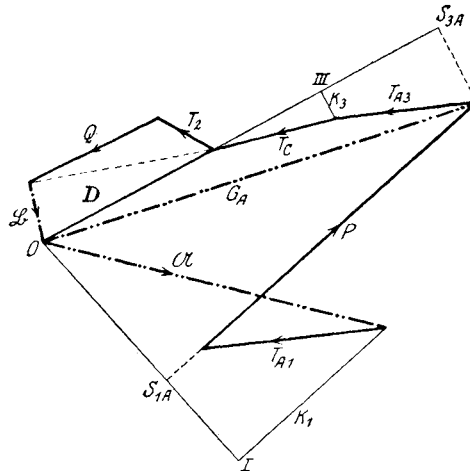


Fig. 527 c.

wodurch der Führungsdruck bestimmt ist;

$$\text{Gelenk } \mathfrak{A}: \mathfrak{A} + K_1 + S_1 = 0,$$

womit der Auflagerdruck bestimmt ist.

Um den Gelenkdruck  $G_A$  zu bestimmen, beachte man, daß in  $A$  die Kraftgruppe  $T_{A3}, K_3, S_3$  Gleichgewicht hält mit der Gruppe  $S_1, K_1, T_{A1}, P$ , und jede dieser beiden Gruppen den Gelenkdruck  $G_A$  erzeugt; es ist also

$$G_A \equiv T_{A3} + K_3 + S_3$$

und auch

$$G_A \equiv S_1 + K_1 + T_{A1} + P.$$

Die Korrektur der Spannungen  $S_1$  und  $S_3$  erfolgt endlich, wenn man  $T_{A1}$  auf  $O I$  und  $T_{A3}$  auf  $O III$  projiziert; dann ist  $S_{1A}$  die Spannung im Gliede 1 bei  $A$ ,  $S_{3A}$  die Spannung im Gliede 3 bei  $A$ ; hingegen  $O I$  die Spannung im Gliede 1 bei  $\mathfrak{A}$  und  $D$  die Spannung im Gliede 3 bei  $C$ .

**297. Spannungen und Gelenkdrücke in einem sechsgliedrigen Getriebe mit zwei Dreiecksgliedern.** Das Getriebe Fig. 528 besteht aus dem

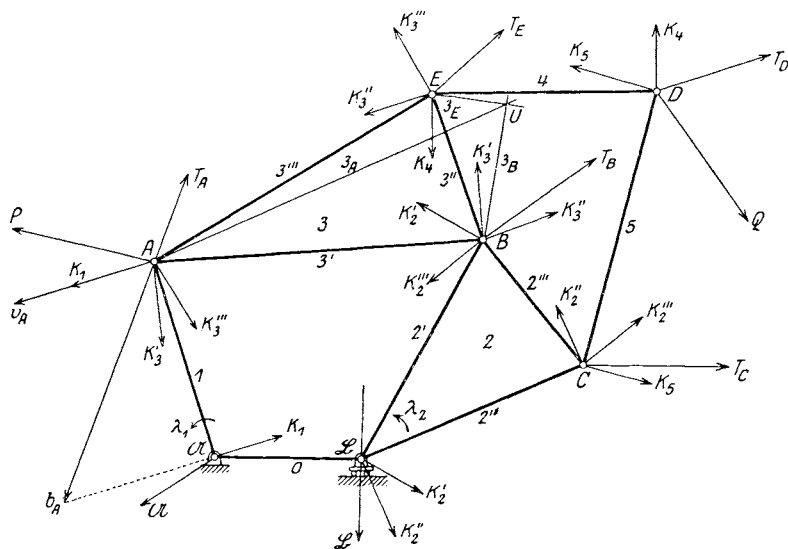


Fig. 528.

Grundglieder 0, den Stangen 1, 4, 5 und den Dreiecksgliedern 2 und 3.  $\mathfrak{A}$  ist ein festes Gelenk,  $\mathfrak{B}$  ein auf horizontaler Gleitbahn verschiebbares Gelenk.

Gegeben sind die Triebkraft  $P$  in  $A$  und der Widerstand  $Q$  in  $D$ , ferner der Geschwindigkeitszustand und die Massenverteilung.

Nach den Grundsätzen des Abschnittes XXVI, Dynamik des Getriebes, kann der Beschleunigungszustand ermittelt und soll als bereits gefunden vorausgesetzt werden.

Die Ermittlung des Geschwindigkeitsplanes Fig. 528a aus  $v_A$  und des Beschleunigungsplanes Fig. 528b aus  $b_A$  macht keinerlei Schwierigkeiten und soll deshalb nicht weiter erörtert werden.

Die Massen der fünf bewegten Glieder werden nach dem Schwerpunktsgesetze auf die Gelenke verteilt; es ist

$$M_1 = M_{g1} + M_{A1}, \quad M_2 = M_{g2} + M_{B2} + M_{C2},$$

$$M_3 = M_{A3} + M_{B3} + M_{E3}, \quad M_4 = M_{D4} + M_{E4}, \quad M_5 = M_{C5} + M_{D5}.$$

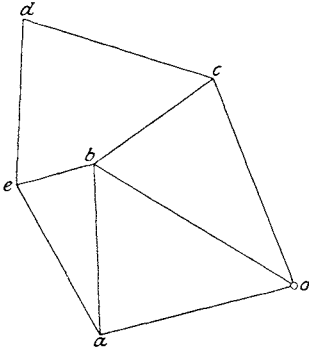


Fig. 528 a.

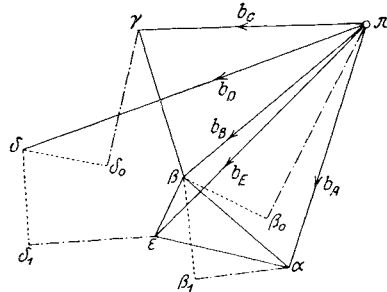


Fig. 528 b.

Dann sind die Ersatzmassen in den bewegten Gelenken:

$$m_A = M_{A1} + M_{A3}, \quad m_B = M_{B2} + M_{B3},$$

$$m_C = M_{C2} + M_{C5}, \quad m_D = M_{D4} + M_{D5}, \quad m_E = M_{E3} + M_{E4}$$

und die Trägheitskräfte dieser Massen:

$$T_A = -m_A b_A = -(M_{A1} + M_{A3}) b_A = T_{A1} + T_{A3},$$

$$T_B = -m_B b_B = -(M_{B2} + M_{B3}) b_B = T_{B2} + T_{B3},$$

$$T_C = -m_C b_C = -(M_{C2} + M_{C5}) b_C = T_{C2} + T_{C5},$$

$$T_D = -m_D b_D = -(M_{D4} + M_{D5}) b_D = T_{D4} + T_{D5},$$

$$T_E = -m_E b_E = -(M_{E3} + M_{E4}) b_E = T_{E3} + T_{E4}.$$

Die Trägheitskräfte  $K$  der Stangen und der in je drei Stangen aufgelösten Dreiecksglieder sind in derselben Weise zu bestimmen, wie dies bei dem Getriebe mit einem Dreiecksgliede (288) an diesem ausführlich erörtert wurde.

Beim Entwurf des dynamischen Kraftplanes (Fig. 528c) empfiehlt es sich, zuerst die Kräfte  $K$  unbeachtet zu lassen und nur die Trägheitskräfte  $T$  einzuführen; nachher kann dann der Kraftplan durch Einfügung der Kräfte  $K$  ergänzt werden.

Im Kraftplan wurden zuerst die bekannten Kräfte  $T_C, Q, T_D, T_B, T_E, T_A, P$  in dieser Reihenfolge aneinander gefügt und sodann für die Gelenke folgende Gleichgewichtspolygone gezeichnet:

- Gelenk  $D$ :  $Q + T_D + K_4 + 4 + 5 + K_5 = 0$ ;  
 Gelenk  $E$ :  $T_E + K_3''' + 3''' + 3' + K_3'' + 4 + K_4 = 0$ ;  
 Gelenk  $A$ :  $T_A + P + K_1 + 1 + K_3' + 3' + 3''' + K_3''' = 0$ ;  
 Gelenk  $C$ :  $T_C + K_5 + 5 + K_2''' + 2''' + 2'' + K_2'' = 0$ ;  
 Gelenk  $B$ :  $T_B + K_3'' + 3'' + 3' + K_3' + K_2' + 2' + 2''' + K_2''' = 0$ ;  
 Gelenk  $\mathfrak{B}$ :  $K_2'' + 2'' + 2' + K_2' + 0 + \mathfrak{B} = 0$ ;  
 Gelenk  $\mathfrak{A}$ :  $0 + 1 + K_1 + \mathfrak{A} = 0$ .

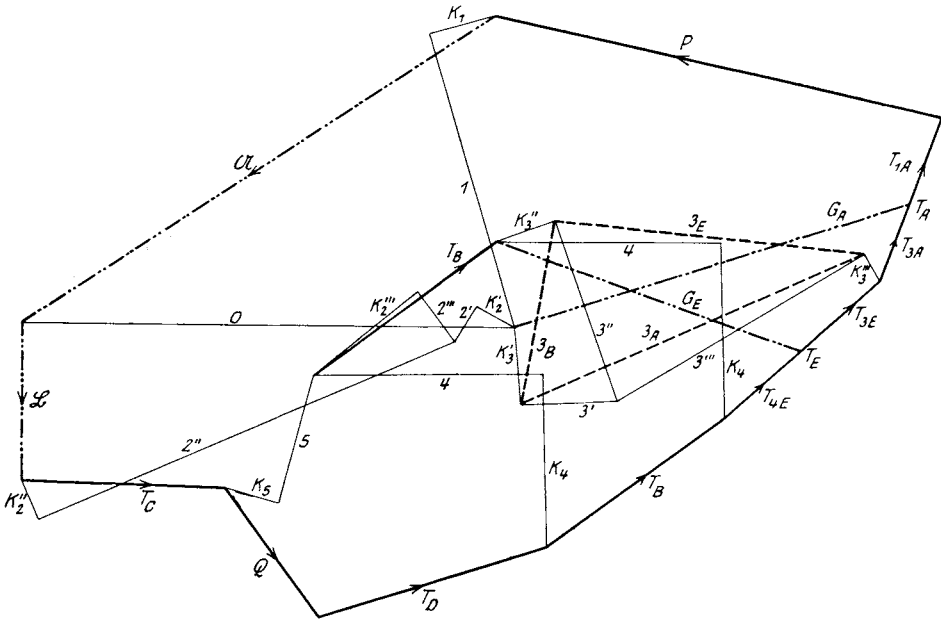


Fig. 528c.

In diesen Gleichungen bedeuten 0, 1, 4, 5 die Spannungen in den stabförmigen Gliedern,  $2'$ ,  $2''$ ,  $2'''$  und  $3'$ ,  $3''$ ,  $3'''$  die Spannungen in den Seiten der Dreiecksglieder. Die Gleichungen für die Gelenke  $D$ ,  $E$ ,  $A$ ,  $C$  und  $\mathfrak{B}$  enthalten je zwei unbekannte Kräfte, die für die Gelenke  $B$  und  $\mathfrak{A}$  je eine unbekannte Kraft.

Die Spannungen eines Dreiecksgliedes, z. B.  $2'$ ,  $2''$ ,  $2'''$ , haben im Kraftplan einen Punkt gemein (Eigenschaft des reziproken Kraftplans). Alle Kräfte und Spannungen kommen nur einmal im Kraftplan vor, mit Ausnahme von  $T_B$ ,  $K_4$  und 4. Dies hängt damit zusammen, daß  $T_B$  im Innern der kinematischen Kette angreift (vgl. 240).

Zieht man im Kraftplan die Linien

$$3_A \equiv 3' + 3''', \quad 3_B \equiv 3'' + 3', \quad 3_E \equiv 3''' + 3'',$$

so erhält man die Gesamtspannungen des Gliedes 3 in seinen Ecken  $A$ ,  $B$ ,  $E$ . Bringt man diese Spannungen in  $A$ ,  $B$ ,  $E$  an, so müssen sie

sich in einem Punkt  $u$  treffen. Dasselbe könnte auch mit dem Gliede 2 durchgeführt werden.

Die Ermittlung der Gelenkdrücke soll für die Gelenke  $A$  und  $E$  gezeigt werden.

Teilt man die Trägheitskraft  $T_A$  in die Teile  $T_{A1}$  und  $T_{A3}$ , so steht in  $A$  die Kraftgruppe  $T_{A1}$ ,  $P$ ,  $K_1$ ,  $1$  im Gleichgewicht mit der Gruppe  $K_3'$ ,  $3'$ ,  $3'''$ ,  $K_3'''$ ,  $T_{A3}$ ; jede dieser beiden Gruppen hat den Gelenkdruck  $G_A$  zur Resultanten.

Ebenso ist im Gelenke  $E$ :

$$G_E \equiv T_{E3} + K_3''' + 3''' + 3'' + K_3''$$

und auch

$$G_E \equiv 4 + K_4 + T_{E4}.$$

Das Gleichgewicht der äußeren Kräfte und der Trägheitskräfte ist durch das Polygon gekennzeichnet:

$$T_C + Q + T_D + T_B + T_E + T_A + P + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} \equiv 0.$$

Eine Korrektur der Spannungen wurde in Fig. 528c nicht vorgenommen, da die Gelenkdrücke hiervon nicht berührt werden. Wollte man diese Korrektur noch vornehmen, so hätte sie nach 293 zu geschehen.

**298. Die Wichtigkeit von Zahlenbeispielen.** Sobald der Studierende die Theorie des hier vorgetragenen Gegenstandes gründlich beherrscht, muß es ihm dringend empfohlen werden, Beispiele mit selbstgewählten Zahlen (Abmessungen, Gewichte, Trägheitsmomente) durchzukonstruieren. Die einwandfreie Lösung solcher Zahlenbeispiele als Anwendung der Theorie zu finden, ist nämlich nicht so einfach, wie es auf den ersten Blick erscheinen mag. Die Zahlen erfordern neue Überlegung und große Aufmerksamkeit; zunächst soll ihre Wahl stets mit Rücksicht auf die Möglichkeit der Ausführung getroffen werden, was den Blick für die tatsächlichen Verhältnisse übt; sodann aber ist das Rechnen und Konstruieren mit den verschiedenen Maßstäben, dem Geschwindigkeits-, Beschleunigungs- und Kraftmaßstabe mit größter Vorsicht vorzunehmen und unausgesetzt zu überprüfen; auch die Ermittlung des Drehungsinnes der Winkelbeschleunigungen der Glieder kann nur mit Hilfe von Zahlenbeispielen, die jede bequeme Willkür ausschließen, geübt werden. Der Anfänger wird staunen, welch reiche Gelegenheit zu Irrtümern und Fehlern sich hier vorfindet.

Im folgenden soll gezeigt werden, in welcher Weise solche Beispiele durchzuführen sind.

**299. Zahlenmäßige Bestimmung der Spannungen und Gelenkdrücke einer geschränkten Schubkurbel.** Fig. 529 stellt eine geschränkte Schubkurbel dar, an deren Kreuzkopf  $B$  die Kraft  $P = 900$  kg wirkt; der Widerstand am Kurbelzapfen  $A$  sei  $Q = 830$  kg.

Die Abmessungen und Gewichte sind:

Kurbel:  $\overline{A\mathfrak{U}} = r = 0,4$  m,  $\overline{AS_1} = r_2 = 0,22$  m,  $\overline{S_1\mathfrak{U}} = r_1 = 0,18$  m.

$G_1 = 40$  kg; Trägheitshalbmesser für den Schwerpunkt  $S_1$ :

$$i_1^2 = 120 \text{ cm}^2.$$

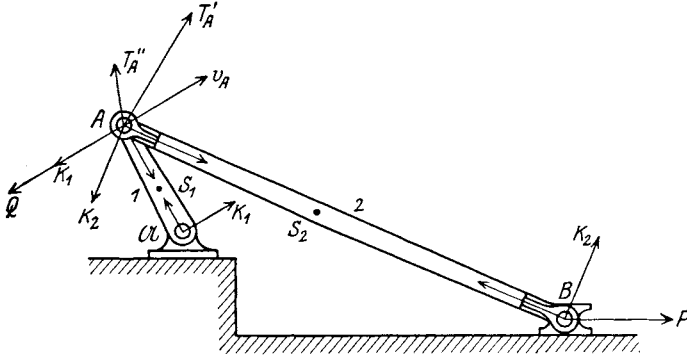


Fig. 529.

Treibstange:  $\overline{AB} = l = 1,60$  m,  $\overline{AS_2} = l_1 = 0,7$  m,  $\overline{S_2B} = l_2 = 0,9$  m.

$G_2 = 120$  kg; Trägheitshalbmesser für den Schwerpunkt  $S_2$ :

$$i_2^2 = 2800 \text{ cm}^2.$$

Kolbenstange in  $B$ :  $G_3 = 70$  kg.

Die Geschwindigkeit des Kurbelzapfens  $A$  wurde mit  $v_A = 4$  m/sek angenommen.

Zu bestimmen sind: die Normal- und Tangentialbeschleunigungen von  $A$  und  $B$ , die Gelenkdrücke in  $\mathfrak{U}$ ,  $A$  und  $B$ , endlich die Spannungen in der Kurbel, in der Treibstange und in der Kolbenstange.

In Fig. 529a wurde der Geschwindigkeitsplan gezeichnet; als Maßstab wurde hierfür gewählt:

Geschwindigkeitsmaßstab:

$$1 \text{ cm} = 0,8 \text{ m/sek.}$$

Es wurde in der Originalzeichnung  $\overline{oa} \equiv v_A = 4$  m/sek = 5 cm gemacht und

$ob$  parallel zur Bewegungsrichtung von  $B$ , ferner  $ab \perp AB$  gezogen; dann ist  $v_{BA} \equiv \overline{ab} = 2,76$  cm = 2,20 m/sek.

In Fig. 529b beginnt man den Beschleunigungsplan mit der Zeich-

$$\text{nung von } n_A = \frac{v_A^2}{r} = \frac{(4 \text{ m/sek})^2}{0,4 \text{ m}} = 40 \text{ m/sek}^2.$$

Wählt man den

Beschleunigungsmaßstab:  $1 \text{ cm} = 8 \text{ m/sek}^2$ , so wird  $n_A \equiv \overline{\pi\alpha_0} = 5$  cm in Richtung von  $A\mathfrak{U}$  aufgetragen und durch  $\alpha_0$  die Gerade  $a$  senkrecht zu  $A\mathfrak{U}$  gezeichnet.

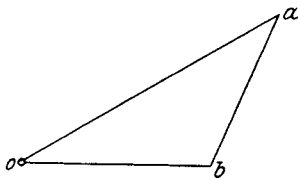


Fig. 529a.

Nun geht man dazu über, den wahren Beschleunigungszustand der Schubkurbel zu bestimmen und benützt dazu das in 286 angegebene Verfahren. Man nimmt also in der Geraden  $a$  zwei beliebige Punkte an, z. B.  $\alpha'$  und  $\alpha''$  derart, daß die zugehörigen Tangentialbeschleunigungen

$$t_{A'} = \overline{\alpha_0 \alpha'} = 10 \text{ cm} = 80 \text{ m/sek}^2, t_{A''} = \overline{\alpha_0 \alpha''} = 2 \text{ cm} = 16 \text{ m/sek}^2$$

werden; dann macht man

$$\overline{\alpha' \beta_0'} = \overline{\alpha'' \beta_0''} = n_{BA} = \frac{v_{BA}^2}{BA} = \frac{(2,20 \text{ m/sek})^2}{1,6 \text{ m}} = 3,02 \text{ m/sek}^2 = 0,38 \text{ cm}$$

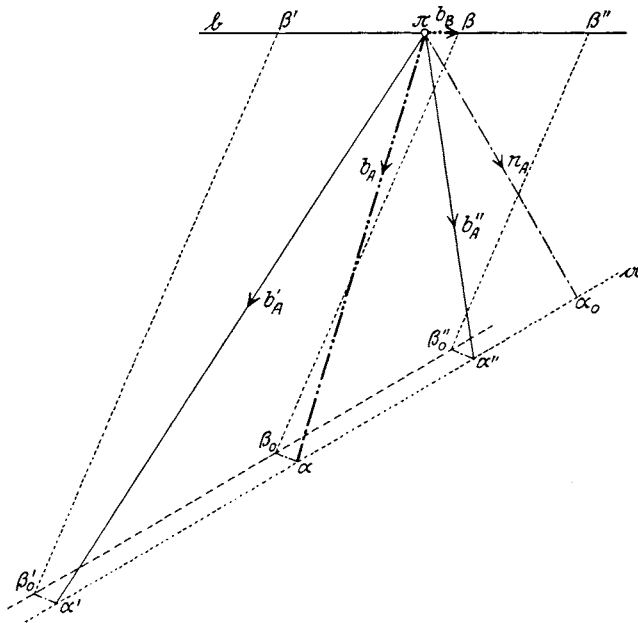


Fig. 529 b.

und errichtet in  $\beta_0'$  und  $\beta_0''$  die Senkrechten zur Treibstange bis zu den Schnittpunkten  $\beta'$  und  $\beta''$  mit der Geraden  $b$ , die durch  $\pi$  parallel zur Bewegungsrichtung von  $B$  gezogen wird.

Bevor man zur Konstruktion des dynamischen Kraftplanes übergeht, muß man die statischen Ersatzpunkte der Schubkurbel und die Trägheitskräfte bestimmen.

Die Masse  $M_1 = \frac{G_1}{g} = \frac{40 \text{ kg}}{g}$  der Kurbel wird nach dem Schwerpunktsesetze nach  $A$  und  $\mathcal{U}$  verteilt und gibt die Ersatzmassen

$$m_{A1} = M_1 \cdot \frac{18}{40} = \frac{18 \text{ kg}}{g},$$



$$m_{A1} = M_1 \cdot \frac{22}{40} = \frac{22 \text{ kg}}{g};$$

die Masse  $M_2 = \frac{G_2}{g} = \frac{120 \text{ kg}}{g}$  der Treibstange wird ebenso nach  $A$  und  $B$  verteilt und gibt die Ersatzmassen:

$$m_{A2} = M_2 \cdot \frac{90}{160} = \frac{67,5 \text{ kg}}{g},$$

$$m_{B2} = M_2 \cdot \frac{70}{160} = \frac{52,5 \text{ kg}}{g};$$

die Masse  $M_3 = \frac{G_3}{g} = \frac{70 \text{ kg}}{g}$  der Kolbenstange kann gänzlich in  $B$  vereinigt werden. Es sind also die Ersatzmassen

$$m_A = m_{A1} + m_{A2} = \frac{85,5 \text{ kg}}{g},$$

$$m_B = m_{B2} + M_3 = \frac{122,5 \text{ kg}}{g}.$$

Die Beschleunigungen wurden aus der Originalzeichnung in folgenden Größen entnommen:

$$\overline{\pi a'} \equiv b_{A'} = 11,22 \text{ cm} = 89,76 \text{ m/sek}^2,$$

$$\overline{\pi a''} \equiv b_{A''} = 5,40 \text{ cm} = 43,20 \text{ m/sek}^2,$$

$$\overline{\pi \beta'} \equiv b_{B'} = 2,42 \text{ cm} = 19,36 \text{ m/sek}^2,$$

$$\overline{\pi \beta''} \equiv b_{B''} = 2,72 \text{ cm} = 21,76 \text{ m/sek}^2.$$

Daraus ergeben sich die Trägheitskräfte, vom Vorzeichen abgesehen:

$$T_{A'} \equiv m_A b_{A'} = \frac{85,5 \text{ kg}}{9,81} \cdot 89,76 = 782,80 \text{ kg},$$

$$T_{A''} \equiv m_A b_{A''} = \frac{85,5 \text{ kg}}{9,81} \cdot 43,20 = 376,70 \text{ kg};$$

$$T_{B'} \equiv m_B \cdot b_{B'} = \frac{122,5 \text{ kg}}{9,81} \cdot 19,36 = 241,90 \text{ kg},$$

$$T_{B''} \equiv m_B \cdot b_{B''} = \frac{122,5 \text{ kg}}{9,81} \cdot 21,76 = 271,90 \text{ kg}.$$

Die Kräfte  $K_1$  und  $K_2$  (Trägheitskraft-Paare) sind nach Gleichung 99 zu berechnen:

$$K = M l \lambda \frac{p_1 p_2 - i^2}{l^2},$$

also mit den früheren Bezeichnungen:

$$K_1 = M_1 t_A \frac{r_1 r_2 - i_1^2}{r^2}, \quad K_2 = M_2 t_{B,A} \frac{l_1 l_2 - i_2^2}{l^2},$$

worin

$$M_1 = \frac{40 \text{ kg}}{g}, \quad M_2 = \frac{120 \text{ kg}}{g};$$

$$\frac{r_1 r_2 - i_1^2}{r^2} = 0,17, \quad \frac{l_1 l_2 - i_2^2}{l^2} = 0,14;$$

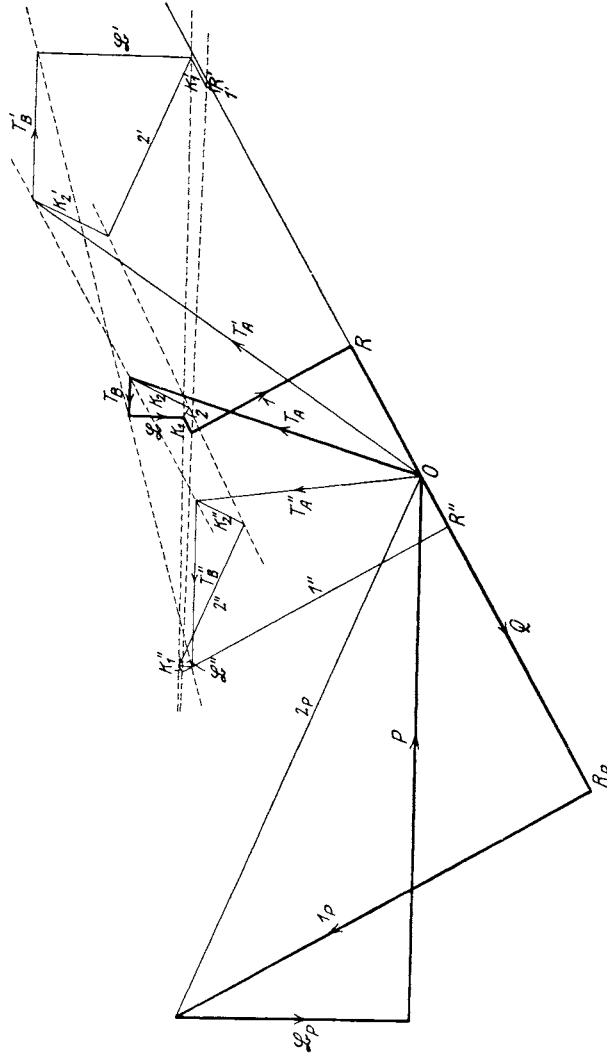


Fig. 529 c.  
(Um  $\pi/2$  gegen Fig. 529 verdreht.)

ferner war:  $t_{A'} = 80 \text{ m/sek}^2, t_{A''} = 16 \text{ m/sek}^2$

und aus dem Beschleunigungsplan ist zu entnehmen:

$$t_{BA'} = \beta_0' \beta' = 10,05 \text{ cm} = 80,4 \text{ m/sek}^2,$$

$$t_{BA''} = \beta_0'' \beta'' = 5,70 \text{ cm} = 45,6 \text{ m/sek}^2;$$

daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} K_1' &= 55,49 \text{ kg}, & K_1'' &= 11,10 \text{ kg}, \\ K_2' &= 137,48 \text{ kg}, & K_2'' &= 77,98 \text{ kg}. \end{aligned}$$

Mit diesen Trägheitskräften wurde nun in Fig. 529c der dynamische Kraftplan wie in Fig. 519c konstruiert. Als Kraftmaßstab wurde gewählt:

$$1 \text{ cm} = 100 \text{ kg}.$$

Von  $O$  aus wurden maßstäblich  $T_A'$  und  $T_A''$  aufgetragen, daran  $T_B'$  und  $T_B''$  geschlossen und im Schnittpunkte von  $T_A'$  mit  $T_B'$ , bzw.  $T_A''$  mit  $T_B''$  die Kräfte  $K_2'$  bzw.  $K_2''$  angefügt. Dann wurden die Parallelen  $2'$  und  $2''$  zur Treibstange 2 und zum Führungsdrucke  $\mathfrak{B}$  gezeichnet, in ihrem Schnittpunkt  $K_1'$  angefügt und  $1'$  parallel zur Kurbel bis  $R'$  gezeichnet; ebenso wurde  $R''$  gefunden. Diese Punkte  $R'$  und  $R''$  liegen auf der Geraden, die durch  $O$  parallel zu  $Q$  geführt wurde.

Endlich wurde von  $O$  aus die Kraft  $P$  gezeichnet und in die zu  $\mathfrak{B}$  und 2 parallelen Kräfte  $\mathfrak{B}_P$  und  $2_P$  zerlegt, ferner die Parallele  $1_P$  zur Kurbel bis zum Fußpunkt  $R_P$  gezogen. Von  $R_P$  wurde  $\overline{RR_P} = Q$  aufgetragen und von dem derart gefundenen Punkte  $R$  aus die Parallelen zu 1,  $K_1$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $T_B$  gezogen und der Anfangspunkt von  $T_B$  mit  $O$  verbunden

Damit ist das Kraftpolygon

$$T_A + T_B + \mathfrak{B} + K_1 + 1 + Q + 1_P + \mathfrak{B}_P + P = 0$$

gefunden. Es ist:  $T_A = 510 \text{ kg}$ ,  $T_B = 62 \text{ kg}$ ,  $\mathfrak{B} = 92 \text{ kg}$ ,  $\mathfrak{B}_P = 387 \text{ kg}$ ,  $1 = 300 \text{ kg}$ ,  $1_P = 780 \text{ kg}$ .

Zieht man im Beschleunigungsplan Fig. 529b durch  $\pi$  die Parallele zu  $T_A$ , so erhält man die gesuchte Beschleunigung  $b_A$  des Kurbelzapfens und seine Tangentialbeschleunigung

$$t_A \equiv \overline{a_0 a} = 5,4 \text{ cm} = 43,2 \text{ m/sek}^2;$$

ferner aus  $a$  über  $\beta_0$  die Beschleunigung des Kreuzkopfes

$$b_B = \pi \overline{\beta} = 0,47 \text{ cm} = 3,76 \text{ m/sek}^2.$$

In Fig. 529d wurde schließlich der dynamische Kraftplan in anderer Reihenfolge gezeichnet, wie dies schon in Fig. 526c erläutert wurde. Zunächst wurden  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{B}_P$  zusammengefügt; sie geben den Führungsdruck in  $B$ :

$$\mathfrak{B} + \mathfrak{B}_P = \overline{70} = 479 \text{ kg}.$$

Ferner wurden die Trägheitskräfte  $T_A$  und  $T_B$  in ihre Teile zerlegt:

$$T_A = T_{A1} + T_{A2}, \quad T_B = T_{B2} + T_{B3};$$

da die Beziehungen bestehen

$$T_{A1} : T_{A2} = m_{A1} : m_{A2} = 18 : 67,5,$$

$$T_{B2} : T_{B3} = m_{B2} : M_3 = 52,5 : 70,$$

so folgt  $T_{A1} \equiv \overline{54} = 107 \text{ kg}$ ,  $T_{A2} \equiv \overline{43} = 403 \text{ kg}$ ,

$$T_{B2} \equiv \overline{32} = 27 \text{ kg}, \quad T_{B3} \equiv \overline{21} = 35 \text{ kg}.$$

Verbindet man den Punkt 7 mit den Teilungspunkten 4 und 2, so erhält man die Gelenkdrücke in  $A$  und  $B$ :

$$G_A \equiv \overline{74} = 956 \text{ kg}, G_B \equiv \overline{72} = 983 \text{ kg}.$$

Ferner ist  $\overline{7\alpha} \equiv 1_P + 1, \overline{\alpha 6} \equiv K_1$   
 und  $\overline{76} \equiv \mathcal{U} = 480 \text{ kg}$   
 der Gelenkdruck in  $\mathcal{U}$ .

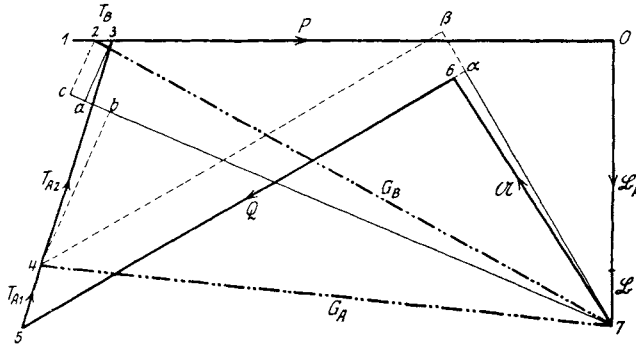


Fig. 529 d.

Die korrigierten Spannungen in der Kurbel und in der Pleiße sind endlich:

Kurbelspannung in $\mathcal{U}$ :	$S_{1\mathcal{U}} \equiv \overline{\alpha 7} = 487 \text{ kg Druck,}$
„ „ $A$ :	$S_{1A} \equiv \overline{7\beta} = 562 \text{ kg Druck;}$
Spannung der Pleiße in $A$ :	$S_{2A} \equiv \overline{7c} = 980 \text{ kg Zug,}$
„ „ „ $B$ :	$S_{2B} \equiv \overline{b7} = 912 \text{ kg Zug.}$

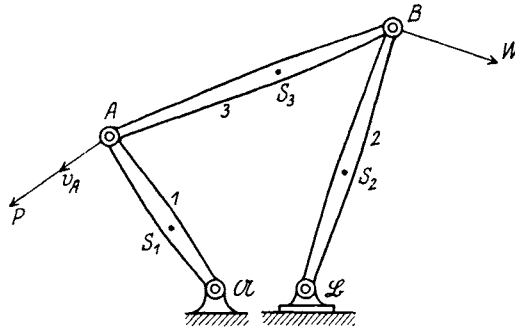


Fig. 530.

### 300. Aufgabe.

134. Von der in Fig. 530 gezeichneten Doppelkurbel sind folgende Abmessungen, Gewichte und Trägheitshalbmesser gegeben:

1. Kurbel  $A\mathfrak{A}$ :

$$\overline{AS_1} = 0,35 \text{ m}, \overline{S_1\mathfrak{A}} = 0,25 \text{ m}; G_1 = 25 \text{ kg}, i_1^2 = 400 \text{ cm}^2.$$

2. Kurbel  $B\mathfrak{B}$ :

$$\overline{BS_2} = 0,5 \text{ m}, \overline{S_2\mathfrak{B}} = 0,4 \text{ m}; G_2 = 45 \text{ kg}, i_2^2 = 600 \text{ cm}^2.$$

3. Koppel  $AB$ :

$$\overline{AS_3} = 0,6 \text{ m}, \overline{S_3B} = 0,4 \text{ m}; G_3 = 85 \text{ kg}, i_3^2 = 960 \text{ cm}^2.$$

4. Grundglied  $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = 0,3 \text{ m}$ .

Die Trägheitshalbmesser beziehen sich auf die Schwerpunkte der Glieder.

Normal zu  $A\mathfrak{A}$  wirkt in  $A$  die Triebkraft  $P = 3270 \text{ kg}$ , normal zu  $B\mathfrak{B}$  in  $B$  der Widerstand  $Q = 1400 \text{ kg}$ . Die augenblickliche Geschwindigkeit des Kurbelzapfens  $A$  ist mit  $v_A = 2 \text{ m/sek}$  gegeben.

Zu bestimmen sind:

- a) die Beschleunigungen  $b_A$  und  $b_B$ , ihre normalen und tangentiellen Teile;
  - b) die statischen Ersatzmassen in  $A$  und  $B$ ;
  - c) die Trägheitskräfte  $T_A$  und  $T_B$ ;  $K_1$ ,  $K_2$  und  $K_3$ ;
  - d) die Auflagerdrücke in  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$ , wenn  $\mathfrak{A}$  ein Gelenk,  $\mathfrak{B}$  ein Gleitlager ist;
  - e) die Gelenkdrücke in  $A$  und  $B$ ; endlich
  - f) die Spannungen der drei Stäbe 1, 2, 3 an jedem ihrer Enden.
-

## XXVIII. Steuerungen.

**301. Einführung.** Zum Abschlusse der ersten Hälfte dieses Buches, die sich ausschließlich mit Augenblickszuständen befaßt, sollen Anwendungen der bisher vorgeführten Theorie auf die Behandlung von einigen Steuerungsgetrieben mit und ohne Kulissen gezeigt werden. Dabei wurde an dem Grundsatz festgehalten, diese Steuerungen und ihre Kräfte nicht maßstäblich richtig zu zeichnen, sondern derart, daß die durchgeführten Konstruktionen ein klares und anschauliches Bild ergeben. Dies gilt auch für die Massen der Glieder dieser Getriebe. Wollte man die Längen-, Kraft- und Massenverhältnisse genau nach ausgeführten Steuerungen einhalten, so würde, da manche der Trägheitskräfte dann sehr klein ausfielen, ein wenig übersichtliches Bild entstehen, weshalb die Verzerrung der wirklichen Verhältnisse vorgezogen wurde.

Es wird übrigens leicht sein, die dargestellten Pläne zahlenmäßig richtig zu zeichnen, sobald die wirklichen Längen, Kräfte und Massen bekannt sind.

Bei allen diesen Steuerungen wurde angenommen, daß die äußeren Kräfte und die Massenverteilung aller bewegten Glieder, also die Größe ihrer Massen, ihre Schwerpunkte und Trägheitsmomente gegeben sind und daß auf Grund dieser Angaben die Beschleunigung irgendeines Punktes dynamisch ermittelt wurde.

Auf Grund der gegebenen Beschleunigung eines Punktes werden sodann im nachfolgenden die Geschwindigkeits- und Beschleunigungspläne, ferner die Spannungen und Gelenkdrücke, die Auflager- und Führungsdrücke, sowie die Kulissendrücke ermittelt.

Die Korrektur der Spannungen, die in 293 gelehrt wurde, fand hier keine Berücksichtigung, kann aber leicht ergänzt werden.

In den dynamischen Kraftplänen wurden die Größen der Trägheitskräfte  $T$  und  $K$  willkürlich angenommen, da es sich, solange keine Zahlenwerte vorliegen, nur darum handelte, ein Bild des Zusammenhanges aller Kräfte, Trägheitskräfte und Spannungen zu gewinnen.

Die Entwicklung eines dynamischen Kraftplanes macht größere Schwierigkeit als jene des statischen Kraftplanes einer ruhenden Konstruktion, da nicht nur von den gegebenen äußeren Kräften, sondern auch von den Trägheitskräften  $T$  und  $K$  die Richtungen vorgeschrieben sind. Eine selbständige und sorgfältige Behandlung der zum Schlusse

gegebenen Aufgaben wird am besten lehren, wie diese Schwierigkeiten zu überwinden sind.

Von Regeln, an die man sich im allgemeinen halten kann, seien nur folgende erwähnt:

1. Die Spannungen in den Umfangsseiten eines Vielecks-Gliedes müssen durch einen Punkt gehen. Z. B. Fig. 534 und 534c die Spannungen  $2'$ ,  $2''$ ,  $2'''$ ; Fig. 543 und 543c die Spannungen  $7'$ ,  $7''$ ,  $7'''$ .

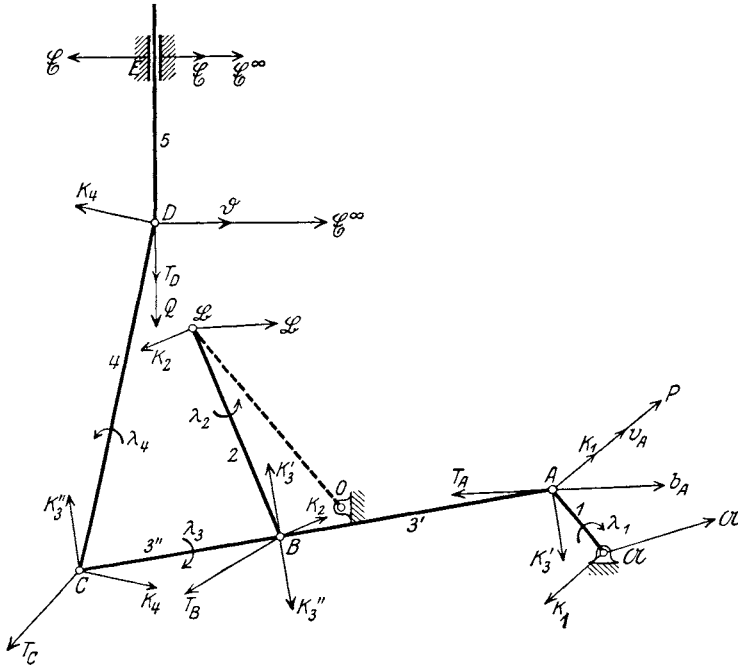


Fig. 531.

2. Die Spannung  $n$  und die Trägheitskraft  $K_n$  müssen aneinander gefügt werden. Z. B. Fig. 531c die Spannung 1 und die Trägheitskraft  $K_1$ ; die Spannung  $3'$  und die Trägheitskraft  $K_3'$ .

3. Sind  $A$  und  $B$  die Gelenke an den Enden des Stabes  $n$ , so soll die Trägheitskraft  $K_n$  in dem Punkte angesetzt werden, wo sich die Trägheitskräfte  $T_A$  und  $T_B$  aneinander schließen. Z. B. Fig. 534 und 534c. Die Gelenke  $C$  und  $D$  werden durch den Stab  $3''$  verbunden; wo sich  $T_C$  und  $T_D$  im Kraftplan treffen, wird  $K_3''$  angefügt.

Solange man im Entwerfen dynamischer Kraftpläne noch keine Übung besitzt, möge man damit beginnen, den Kraftplan mit Hingewerlassung der Kräfte  $K$  zu zeichnen und sodann auf Grund dieses ersten Entwurfes den richtigen Plan mit Einfügung der Kräfte  $K$  zu konstruieren.

**302. Die Klug-Steuerung.** (Steuerung mit einem geradlinigen Dreiecksglied ohne Kulisse.) Fig. 531 zeigt das Getriebe dieser Steuerung in schematischer Anordnung.  $\mathfrak{A}$  ist die Lagerung der Kurbelwelle,  $A$  der Mittelpunkt des Exzentrers 1. Die Kurbel, deren Zapfen auf der Verlängerung von  $\mathfrak{A}A$  liegt, wurde nicht gezeichnet; ebenso die Kolbenstange, die in einer Vertikalen über  $\mathfrak{A}$  sich bewegt. Der Lenker  $AC$  (Glieder 3) der Steuerung ist in  $C$  mit dem Lenker  $CD$  (Glieder 4) gelenkig verbunden, der in  $D$  die Bewegung auf die Schieberstange  $DE$  (Glieder 5) überträgt. Diese wird parallel zur Kolbenstange geführt. In  $B$  wird der Lenker an die Schwinge  $B\mathfrak{B}$  (Glieder 2) angeschlossen, deren Drehpunkt  $\mathfrak{B}$  festgestellt wird, dessen Stellung jedoch durch den um  $O$  drehbaren Arm  $O\mathfrak{B}$  verändert werden kann.

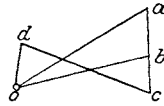


Fig. 531 a.

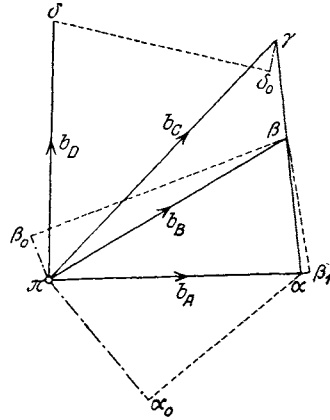


Fig. 531 b.

Der Lenker  $ABC$  ist ein geradliniges Dreiecksglied. Aus Gründen, die hier nicht erörtert werden sollen, liegen bei der Klugschen Steuerung  $\mathfrak{A}$  und  $O$  in einer zur Schieberichtung  $DE$  senkrechten Geraden. In der Abbildung wurde  $O$  in allgemeiner Lage angenommen. Es ist  $\overline{O\mathfrak{B}} = \overline{B\mathfrak{B}}$ .

Gegeben ist die Triebkraft  $P$  am Exzentermittelpunkt  $A$ , der Widerstand  $Q$  der Schieberstange in  $D$  und die Geschwindigkeit  $v_A$ ; die Ermittlung der Beschleunigung  $b_A$  erfolgt nach den Regeln der Dynamik des Getriebes (XXVI) und soll als bereits durchgeführt angenommen werden. Bekannt ist ferner die Verteilung aller Massen.

Die aus  $v_A$  und  $b_A$  ermittelten Pläne 531 a, b wurden nach den bekannten Regeln entworfen. Dabei ist zu beachten, daß

$$ABC \sim abc \sim a\beta\gamma$$

ist.

Die Massen  $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5$  der bewegten Glieder wurden nach dem Schwerpunktsesetze auf die Gelenke verteilt. Dabei wurde der Lenker  $AC$  in die beiden Glieder  $\overline{AB} = 3'$  und  $\overline{BC} = 3''$  geteilt. Es ist also

$$\begin{aligned} M_1 &= M_{\mathfrak{A}1} + M_{A1}, & M_2 &= M_{\mathfrak{B}2} + M_{B2}, \\ M_3' &= M_{A3'} + M_{B3'}, & M_3'' &= M_{B3''} + M_{C3''}, \\ M_4 &= M_{C4} + M_{D4}, & M_5 &= M_{D5}, \end{aligned}$$

und somit die statischen Ersatzmassen:

$$\begin{aligned} m_A &= M_{A1} + M_{A3'}, & m_B &= M_{B2} + M_{B3'} + M_{B3''}, \\ m_C &= M_{C3''} + M_{C4}, & m_D &= M_{D4} + M_{D5}. \end{aligned}$$



Die Trägheitskräfte

$$T_A = -m_A b_A, \quad T_B = -m_B b_B, \quad T_C = -m_C b_C, \quad T_D = -m_D b_D$$

sind entgegengesetzt den Beschleunigungen

$$b_A = \overline{\pi a}, \quad b_B = \overline{\pi \beta}, \quad b_C = \overline{\pi \gamma}, \quad b_D = \overline{\pi \delta},$$

die aus Fig. 531 b zu entnehmen sind, anzubringen.

Die in Paaren auftretenden Trägheitskräfte  $K$  sind nach Gleichung 99:

$$K = M l \lambda \frac{p_1 p_2 - i^2}{l^2}$$

zu bestimmen und in den Gelenken anzubringen.

Die Tangentialbeschleunigungen  $l\lambda$  sind aus dem Beschleunigungsplan zu entnehmen, ebenso der Drehungssinn der Winkelbeschleunigungen  $\lambda$ , der mit jenem der Kraftpaare übereinstimmt.

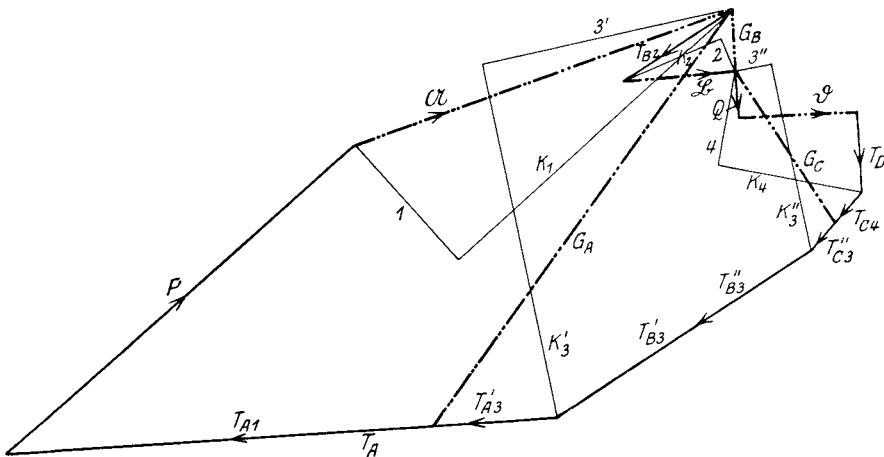


Fig. 531 c.

Um z. B. die Kräfte  $K_3'$  in  $A$  und  $B$  richtig anzubringen, beachte man, daß im Beschleunigungsplan  $\overline{\beta_1 \beta}$  die Tangentialbeschleunigung  $t_{BA}$  von  $B$  gegen  $A$  ist; denkt man sie in  $B$  angesetzt, so dreht sie um  $A$  im Sinne des Uhrzeigers; dies ist auch der Drehungssinn des Paares  $K_3'$  und es ist  $l_3 \lambda_3 = AB \cdot \lambda_3 = \overline{\beta_1 \beta}$ .

Sobald die Trägheitskräfte  $T$  und  $K$  bekannt sind, kann der dynamische Kraftplan gezeichnet werden (Fig. 531 c). Er zerfällt in folgende Gleichgewichtspolygone:

$$\text{Gelenk } C: T_C + K_3'' + 3'' + 4 + K_4 = 0; \quad T_C = T_{C4} + T_{C3}'';$$

$$\text{Gelenk } B: T_{B3}'' + T_{B3}' + K_3' + 3' + T_{B2} + K_2 + 2 + 3'' + K_3'' = 0,$$

$$T_B = T_{B3}'' + T_{B3}' + T_{B2}.$$

Aus dem Polygon des Gelenkes  $C$  werden die Spannungen  $3''$  und  $4$ , aus jenem des Gelenkes  $B$  die Spannungen  $3'$  und  $2$  ermittelt. Die An-

ordnung der Trägheitskräfte des Ersatzpunktes  $B$  im dynamischen Kraftplan wird noch später begründet werden.

$$\text{Gelenk } D: \quad T_D + K_4 + 4 + Q + \mathfrak{D} \equiv 0;$$

hierin ist  $\mathfrak{D}$  nach  $\mathfrak{C}^\infty$ , d. h. senkrecht zur Führung gerichtet und wird in der Führung den Führungsdruck  $\mathfrak{C} \equiv \mathfrak{D}$ , sowie das Biegemoment  $\mathfrak{D} \cdot \overline{DE}$  hervorrufen.

$$\text{Gelenk } A: \quad T_A + P + 1 + K_1 + 3' + K_3' \equiv 0, \quad T_A = T_{A3'} + T_{A1};$$

dieses Polygon liefert die Spannung 1.

$$\text{Gelenk } \mathfrak{A}: \quad \mathfrak{A} + K_1 + 1 \equiv 0,$$

$$\text{Gelenk } \mathfrak{B}: \quad \mathfrak{B} + 2 + K_2 \equiv 0;$$

diese beiden Polygone liefern die Auflagerdrücke  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$ .

Um endlich die Gelenkdrücke in  $A$ ,  $B$  und  $C$  zu bestimmen, teile man die Trägheitskräfte in

$$T_A \equiv T_{A3'} + T_{A1}, \quad T_B \equiv T_{B2} + T_{B3''} + T_{B3'},$$

worin  $T_{B2}$  von den beiden anderen Teilen abge sondert gezeichnet wurde, und

$$T_C \equiv T_{C4} + T_{C3''}.$$

Dann ist der Gelenkdruck in  $A$ :

$$G_A = T_{A1} + P + 1 + K_1$$

und auch

$$G_A = 3' + K_3' + T_{A3'};$$

der Gelenkdruck in  $B$ :

$$G_B = T_{B2} + K_2 + 2$$

und auch

$$G_B = 3'' + K_3'' + T_{B3''} + T_{B3'} + K_3' + 3';$$

der Gelenkdruck in  $C$ :

$$G_C = T_{C3''} + K_3'' + 3''$$

und auch

$$G_C = 4 + K_4 + T_{C4}.$$

Die Korrektur der Spannungen 1, 2, 3', 3'', 4 kann nach den Grundsätzen vorgenommen werden, die in 293 angegeben wurden.

Das Gleichgewicht der äußeren Kräfte und der Trägheitskräfte ist durch das Polygon gekennzeichnet:

$$P + \mathfrak{A} + T_{B2} + \mathfrak{B} + Q + \mathfrak{D} + T_D + T_C + T_{B3''} + T_{B3'} + T_A \equiv 0;$$

die Trägheitskräfte  $K$  konnten hierbei weggelassen werden.

Die Klug-Steuerung wurde von L. Burmester in seiner „Kinematik“ S. 735 in bezug auf die Wege und Geschwindigkeiten der Schieberstange 5 mit Hilfe der gedrehten Geschwindigkeiten untersucht.

Vergleiche auch die Arbeiten von Lewicki, Civilingenieur 1881, und von H. Ebbs, „Die Klugsche Steuerung und verwandte Konstruktionen“, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1885; in letzter wird die Steuerung im Zusammenhange mit verwandten Steuerungen, jedoch ohne Untersuchung der kinematischen Verhältnisse besprochen.

Eine dynamische Untersuchung der Klugschen Steuerung lag bisher nicht vor.

**303. Steuerung von E. Frikart.** (Steuerung mit vier Dreiecksgliedern ohne Kulisse.) Fig. 532 zeigt die Anordnung einer langsam laufenden Steuerung für Dampfmaschinen nach E. Frikart, und zwar für den Hochdruckzylinder. Der Antrieb erfolgt vom Exzenter  $A\mathfrak{A}$  (Glied 1), an das in  $A$  der starre Winkel  $BAC$  (Glied 2) gelenkig angeschlossen ist. Von  $B$  führt die Stange  $BM$  (Glied 5) zu den starren Winkeln  $\mathfrak{M}MN$  (Glied 6) und  $NKJ$  (Glied 7), und vom Gelenke  $J$  mittels der Stange

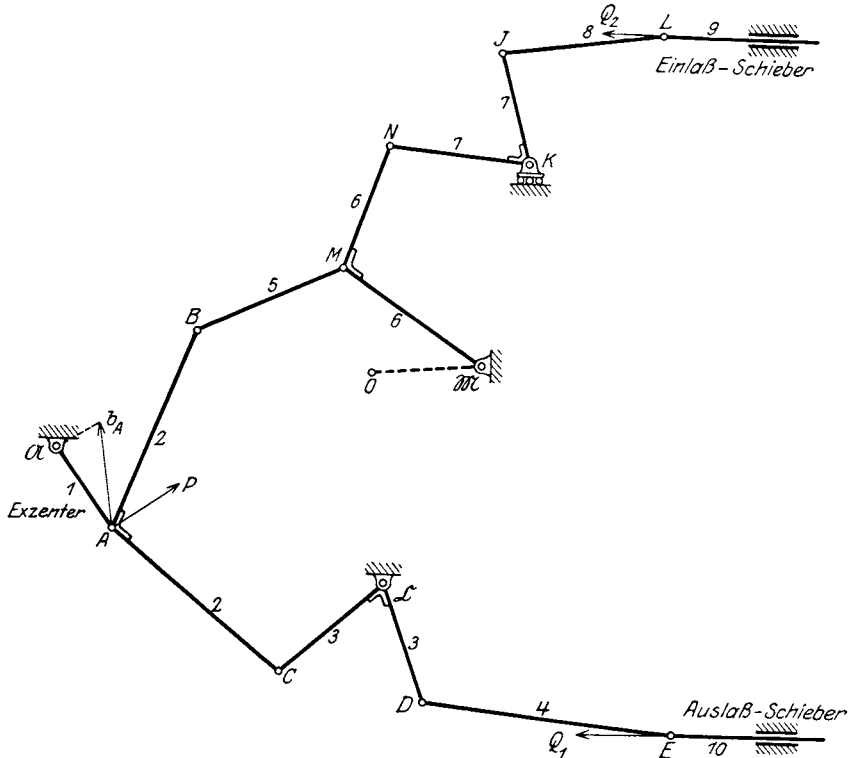


Fig. 532.

$JL$  (Glied 8) zum Einlaßschieber 9. Von  $C$  führt andererseits der starre Winkel  $CCD$  (Glied 3) und die Stange  $DE$  (Glied 4) zum Auslaßschieber 10.

Der Punkt  $\mathfrak{A}$  ist der feste Mittelpunkt der Steuerwelle,  $\mathfrak{C}$  ebenfalls ein festliegender Drehpunkt. Hingegen wird das Gelenk  $K$  gerade geführt und der Punkt  $\mathfrak{M}$  ist nur solange ein fester Drehpunkt, als der mit ihm in Verbindung stehende Regulator seine Stellung nicht verändert und den Arm  $O\mathfrak{M}$  um  $O$  dreht; bei Füllungsänderungen wird der Regulator die Lage von  $\mathfrak{M}$  verschieben.

Gegeben seien: die Triebkraft  $P$  am Mittelpunkte  $A$  des Exzenters und seine Beschleunigung  $b_A$ , die Widerstände  $Q_1$  und  $Q_2$  der beiden Schieber, endlich die Massenverteilung in sämtlichen Gliedern.

Zunächst soll die Zwangsläufigkeit der Steuerung geprüft werden. Hierzu empfiehlt es sich, die kinematische Kette durch ein Schema darzustellen, in dem die Glieder durch Gerade und starre Polygone angedeutet sind; die geraden Schieber sind durch unendlich ferne Gelenke zu ersetzen.

Fig. 533 zeigt das Schema der Steuerung. Das sechseckige Glied in der Mitte ist das festliegende Grundglied; in ihm liegen die unendlich fernen Gelenke  $\mathcal{C}^\infty \mathcal{R}^\infty \mathcal{Q}^\infty$ , welche die Geradfürungen der Gelenke  $E, K, L$  ersetzen. Die starren Winkel  $2, 3, 6, 7$  sind durch Dreiecke ersetzt.

Verwendet man für die Prüfung der Zwangsläufigkeit die Gleichung 115:

$$n = 2\pi + 2,$$

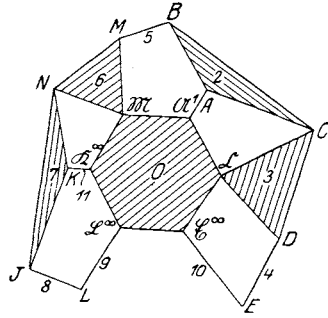


Fig. 533.

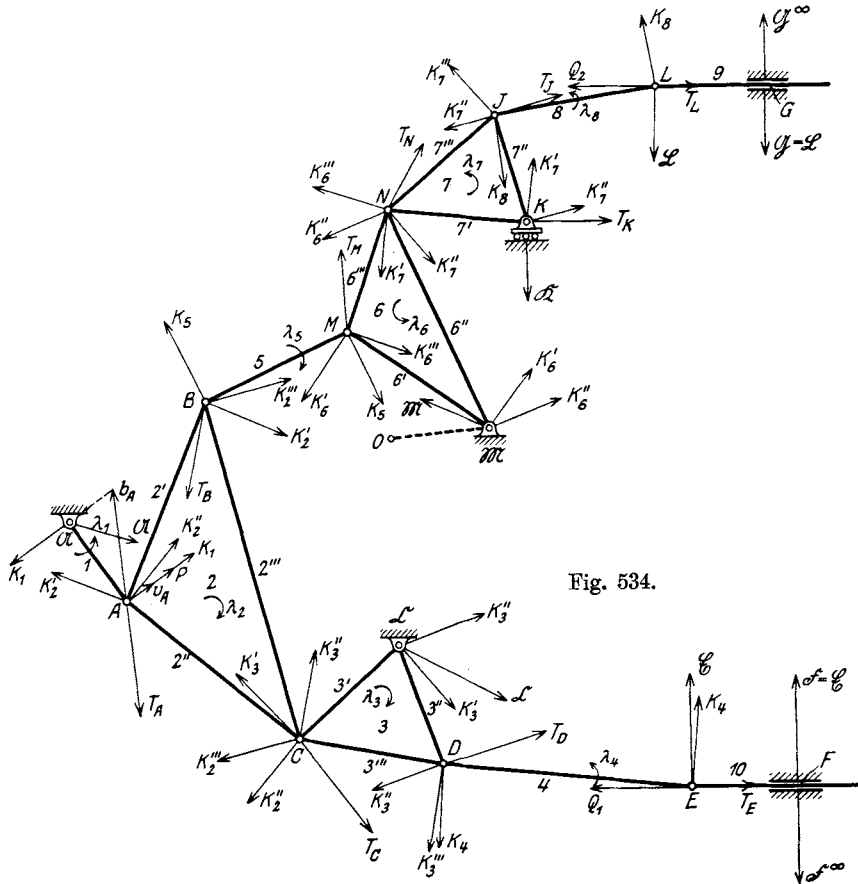


Fig. 534.

so ist die Anzahl der Glieder  $n = 12$ , wobei die Glieder 9, 10, 11 die gedachten, unendlich langen Stangen  $L\mathcal{Q}^\infty$ ,  $E\mathcal{C}^\infty$ ,  $K\mathcal{R}^\infty$  sind, welche die geraden Führungen von  $L$ ,  $E$ ,  $K$  ersetzen.

Die nicht schraffierten Polygone im Schema sind veränderlich; ihre Anzahl ist  $\pi = 5$ . Damit ist das Kennzeichen erfüllt.

Benützt man hingegen das Grüblersche Kennzeichen Gleichung 124:

$$3n - 2g = 4,$$

so ist wie früher  $n = 12$  und die Anzahl der Gelenke  $g = 16$ , welche Werte die Gleichung ebenfalls erfüllen.

Der Geschwindigkeitsplan. In Fig. 534 wurde die Steuerung noch einmal gezeichnet und die starren Winkel 2, 3, 6, 7 durch Dreiecksglieder ersetzt. Der Beschleunigungsmaßstab wurde derart gewählt, daß die Projektion von  $b_A$  oder die Normalbeschleunigung  $n_A$  mit dem

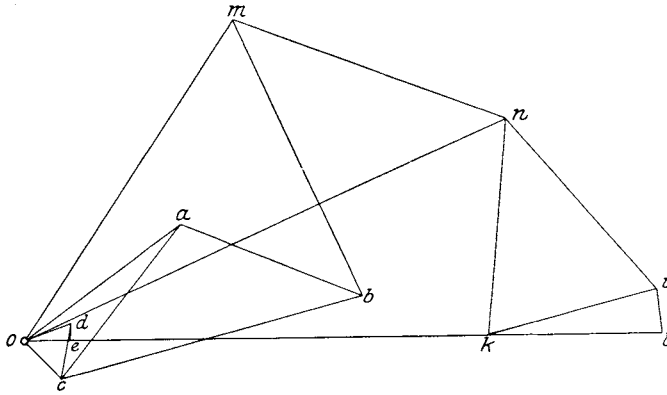


Fig. 534 a.

Exzenterhalbmesser  $A\mathcal{A}$  zusammenfällt. Dann ist auch  $v_A$  durch  $A\mathcal{A}$  zu messen.

Im Geschwindigkeitsplan Fig. 534a wurde der doppelte Maßstab gewählt, also  $\overline{oa} \equiv v_A = 2 \cdot \overline{A\mathcal{A}}$  gemacht. Sodann wurde  $oc \perp \mathcal{C}C$ ,  $ac \perp AC$  gezogen, wodurch  $c$  bestimmt ist; aus der Ähnlichkeit  $abc \sim ABC$  ergibt sich der Punkt  $b$ , aus der Ähnlichkeit  $ocd \sim \mathcal{C}CD$  der Punkt  $d$ . Zieht man durch  $o$  die Parallele zur Richtung des Schiebers 10, so erhält man im Schnitte mit  $de \perp DE$  den Punkt  $e$ .

Der Schnitt der Linien  $om \perp \mathcal{M}M$  und  $bm \perp BM$  gibt den Punkt  $m$ , die Ähnlichkeit  $omn \sim \mathcal{M}MN$  den Punkt  $n$ ; ferner der Schnitt von  $Ok$  (Schubrichtung von  $K$ ) mit  $nk \perp NK$  den Punkt  $k$ , der Schnitt von  $ni \perp NJ$  mit  $ki \perp KJ$  den Punkt  $i$ , endlich der Schnitt von  $ol$  (Schubrichtung des Schiebers 9) mit  $il \perp JL$  den Punkt  $l$  des Geschwindigkeitsplanes, womit alle Geschwindigkeiten der Gelenke bestimmt sind.

Der Beschleunigungsplan. In Fig. 534b wurde begonnen mit  $\pi a = b_A$ , sodann

$$\overline{\pi \gamma_0} = n_C = \frac{v_C^2}{C\mathbb{C}} = \frac{oc^2}{C\mathbb{C}} \text{ in Richtung } C\mathbb{C}$$

aufgetragen und  $\gamma_0\gamma \perp \pi\gamma_0$  errichtet; sodann

$$\overline{\alpha\gamma_1} = n_{CA} = \frac{v_{CA}^2}{CA} = \frac{ac^2}{CA} \text{ in Richtung } CA$$

aufgetragen und  $\gamma_1\gamma \perp \alpha\gamma_1$  errichtet; im Schnitte von  $\gamma_0\gamma$  mit  $\gamma_1\gamma$  liegt der Beschleunigungspunkt  $\gamma$ .

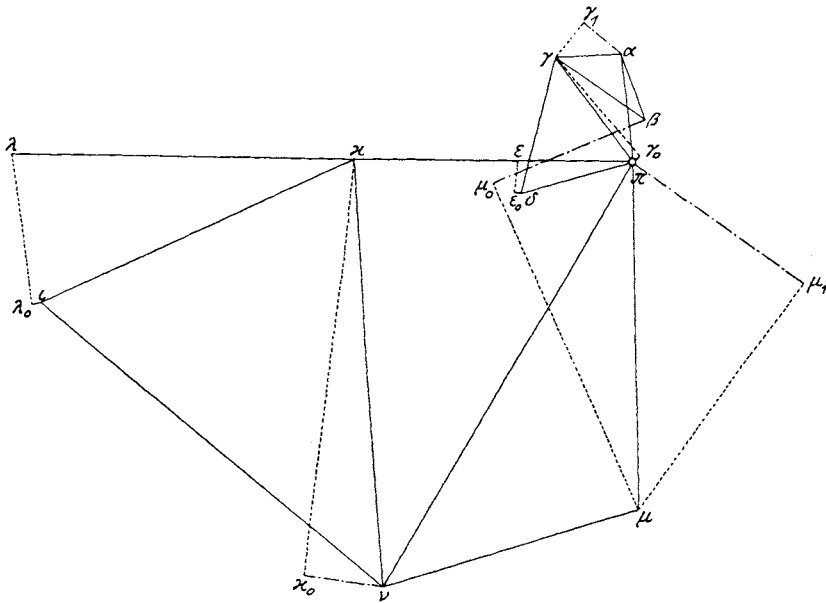


Fig. 534b.

Aus den Ähnlichkeiten  $\alpha\beta\gamma \sim ABC$  und  $\pi\gamma\delta \sim \mathbb{C}CD$  ergeben sich und  $\delta$ .

Zeichnet man ferner

$$\overline{\delta \varepsilon_0} = n_{ED} = \frac{v_{ED}^2}{ED} = \frac{de^2}{ED} \text{ in Richtung } ED$$

und  $\varepsilon_0\varepsilon \perp \delta\varepsilon_0$ , so liegt im Schnitte von  $\varepsilon_0\varepsilon$  mit der Schubrichtung  $\pi\varepsilon$  von 10 der Punkt  $\varepsilon$ . Ebenso gibt

$$\overline{\pi \mu_1} = n_M = \frac{v_M^2}{M\mathfrak{M}} = \frac{om^2}{M\mathfrak{M}} \text{ in Richtung } M\mathfrak{M}$$

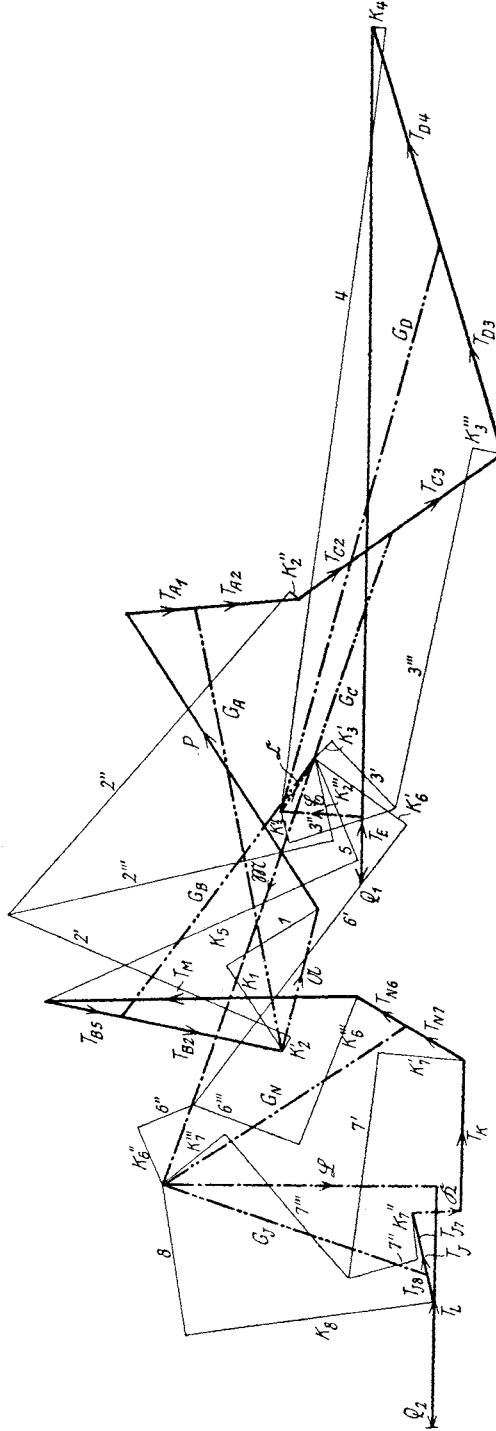


Fig. 534c.  
(Um  $\pi/2$  gegen Fig. 534 verdreht.)

und  $\mu_1\mu \perp \pi\mu_1$  eine Gerade, in der  $\mu$  liegen muß; und

$$\beta \mu_0 = n_{MB} = \frac{v_{MB}^2}{\overline{MB}} = \frac{\overline{b m^2}}{\overline{MB}} \text{ in Richtung } MB$$

und  $\mu_0\mu \perp \beta\mu_0$  eine zweite Gerade durch  $\mu$ , wodurch dieser Punkt bestimmt ist.

Die Ähnlichkeit  $\pi\mu\nu \sim \mathfrak{M}MN$  gibt dann den Punkt  $\nu$ .

$$\text{Aus } \nu\kappa_0 = n_{KN} = \frac{v_{KN}^2}{\overline{KN}} = \frac{\overline{n k^2}}{\overline{KN}} \text{ in Richtung } KN$$

und  $\kappa_0\kappa \perp \nu\kappa_0$  findet man im Schnitte mit der Schubrichtung  $\pi\kappa$  von  $K$  den Punkt  $\kappa$  und aus der Ähnlichkeit  $\nu\kappa\iota \sim NKJ$  den Punkt  $\iota$ .

Endlich ergibt sich aus

$$\iota\lambda_0 = n_{LJ} = \frac{v_{LJ}^2}{\overline{LJ}} = \frac{\overline{i l^2}}{\overline{LJ}} \text{ in Richtung } LJ$$

und  $\lambda_0\lambda \perp \iota\lambda_0$  im Schnitte mit der Schubrichtung  $\pi\lambda$  von 9 der Beschleunigungspunkt  $\lambda$ , womit die Beschleunigungen aller Gelenke gefunden sind.

Die Ersatzmassen und Trägheitskräfte. Die Massen der Glieder 1 bis 8 wurden nach dem Schwerpunktsesetze in die Gelenke der Glieder verteilt und die statischen Ersatzmassen in den Gelenken in gleicher Weise festgestellt, wie dies bei der Klug-Steuerung ausführlich erörtert wurde.

Auch die Trägheitskräfte  $T$ , die Paare  $K$  der Trägheitskräfte und die Winkelbeschleunigungen  $\lambda$  der Glieder wurden in derselben Weise bestimmt und in Fig. 534 angebracht, wie dies in 302 und schon früher in XXVI ausführlich erörtert wurde.

Der dynamische Kraftplan (Fig. 534c). Hier wurden der Reihe nach folgende Gleichgewichtspolygone der Gelenke gezeichnet:

$$\text{Gelenk } L: \quad T_L + K_8 + 8 + \mathfrak{L} + Q_2 \equiv 0,$$

woraus die Spannung 8 und der Führungsdruck  $\mathfrak{L}$  zu entnehmen sind; der eigentliche Führungsdruck  $\mathfrak{G}$  in  $G$  ist gleich  $\mathfrak{L}$ , das Moment  $\mathfrak{L} \cdot \overline{LG}$  ist das Biegemoment der Stange 9.

$$\text{Gelenk } J: \quad T_J + K_7'' + 7'' + 7''' + K_7''' + 8 + K_8 \equiv 0,$$

woraus die Spannungen  $7''$  und  $7'''$  des Dreiecksgliedes 7 zu entnehmen sind. Ebenso findet man für die übrigen Gelenke:

$$\text{Gelenk } K: \quad T_K + K_7' + 7' + 7'' + K_7'' + \mathfrak{R} \equiv 0$$

mit dem Führungsdrucke  $\mathfrak{R}$ ;

$$\text{Gelenk } N: \quad T_N + K_6''' + 6''' + 6'' + K_6'' + K_7''' + 7''' + 7' + K_7' \equiv 0;$$

$$\text{Gelenk } M: \quad T_M + K_5 + 5 + K_6' + 6' + 6'' + K_6'' \equiv 0;$$

$$\text{Gelenk } \mathfrak{M}: \quad \mathfrak{M} + K_6'' + 6'' + 6' + K_6' \equiv 0,$$

woraus sich der Auflagerdruck in  $\mathfrak{M}$  ergibt;

$$\text{Gelenk } B: \quad T_B + K_2' + 2' + 2'' + K_2'' + 5 + K_5 \equiv 0;$$



$$\text{Gelenk } A: T_A + K_2'' + 2'' + 2' + K_2' + K_1 + 1 + P = 0;$$

$$\text{Gelenk } \mathfrak{A}: \mathfrak{A} + 1 + K_1 = 0;$$

$$\text{Gelenk } C: T_C + K_3''' + 3''' + 3' + K_3' + K_2''' + 2''' + 2'' + K_2'' = 0;$$

$$\text{Gelenk } D: T_D + K_4 + 4 + K_3'' + 3'' + 3''' + K_3''' = 0;$$

$$\text{Gelenk } \mathfrak{C}: \mathfrak{C} + K_3' + 3' + 3'' + K_3'' = 0,$$

womit der Auflagerdruck  $\mathfrak{C}$  gefunden ist;

$$\text{Gelenk } E: T_E + \mathfrak{C} + 4 + K_4 + Q_1 = 0,$$

wodurch der Führungsdruck  $\mathfrak{C}$  gegeben ist.

Der eigentliche Führungsdruck  $\mathfrak{F}$  in  $F$  ist gleich  $\mathfrak{C}$ , das Moment  $\mathfrak{C} \cdot \overline{EF}$  ist das Biegemoment der Stange 10.

Das Polygon der äußeren Kräfte und der Trägheitskräfte schließt sich; es ist

$$P + T_A + T_C + T_D + Q_1 + T_E + \mathfrak{C} + \mathfrak{C} + \mathfrak{M} + \mathfrak{Q} + Q_2 + \\ + T_L + T_J + \mathfrak{R} + T_K + T_N + T_M + T_B + \mathfrak{A} = 0.$$

Die Gelenkdrücke. Um die Gelenkdrücke zu bestimmen, wurden die Trägheitskräfte  $T$  in ihre Teile nach den Gliedern zerlegt, z. B.  $T_A$  in  $T_{A1}$  und  $T_{A2}$ ; dann bestehen für die Gelenkdrücke, wie aus Fig. 534c zu entnehmen ist, folgende Gleichungen:

$$G_A = T_{A2} + K_2'' + 2'' + 2' + K_2' \\ = K_1 + 1 + P + T_{A1};$$

$$G_B = T_{B2} + K_2' + 2' + 2''' + K_2''' \\ = 5 + K_5 + T_{B5};$$

$$G_C = T_{C3} + K_3''' + 3''' + 3' + K_3' \\ = K_2''' + 2''' + 2'' + K_2'' + T_{C2};$$

$$G_D = T_{D4} + K_4 + 4 \\ = K_3'' + 3'' + 3''' + K_3''' + T_{D3};$$

$$G_N = T_{N6} + K_6''' + 6''' + 6'' + K_6'' \\ = K_7''' + 7''' + 7' + K_7' + T_{N7};$$

$$G_J = T_{J7} + K_7'' + 7'' + 7''' + K_7''' \\ = 8 + K_8 + T_{J8}.$$

Auch jedes der einzelnen Glieder muß im Gleichgewicht sein, wenn man an seinen Gelenken die Gelenkdrücke der Nachbarglieder und die Trägheitskräfte  $T$  des Gliedes anbringt. So ist z. B. für das Dreiecksglied 2:

$$G_A + T_{A2} + T_{C2} + G_C + G_B + T_{B2} = 0$$

und für das Dreiecksglied 3:

$$G_C + T_{C3} + T_{D3} + G_D + \mathfrak{C} = 0.$$

Da  $\mathfrak{M}$  kein feststehendes Gelenk ist, sondern mit Hilfe des Armes  $OM$  durch die Regulatorwelle  $O$  gedreht werden kann, wird der Gelenkdruck  $\mathfrak{M}$  der Rückdruck der Steuerung auf den Regulator sein. Das

Moment des Gelenkdruckes  $\mathfrak{M}$  um die Regulatorwelle  $O$  ist dann von Wichtigkeit für die Größe des Regulators.

Literatur. Die Frikartsche Steuerung wurde von ihrem Erfinder in dem Aufsatz: „Langsam laufende zwangläufige Steuerung für Dampfmaschinen“, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1909, S. 1766 beschrieben.

O. Kölsch hat in dem Aufsatz: „Untersuchung einer zwangläufigen Dampfmaschinen-Steuerung auf Massendrucke“, Dinglers Polytechn. Journal 1913, S. 65 die Geschwindigkeits- und Beschleunigungspläne dieser Steuerung gezeichnet und auf Grund vereinfachender Annahmen die Massendrucke und den Steuerungsrückdruck auf den Regulator untersucht.

Die Steuerungsdiagramme wurden von demselben Autor in einer früheren Arbeit besprochen (Dinglers Polytechn. Journal 1911, S. 593).

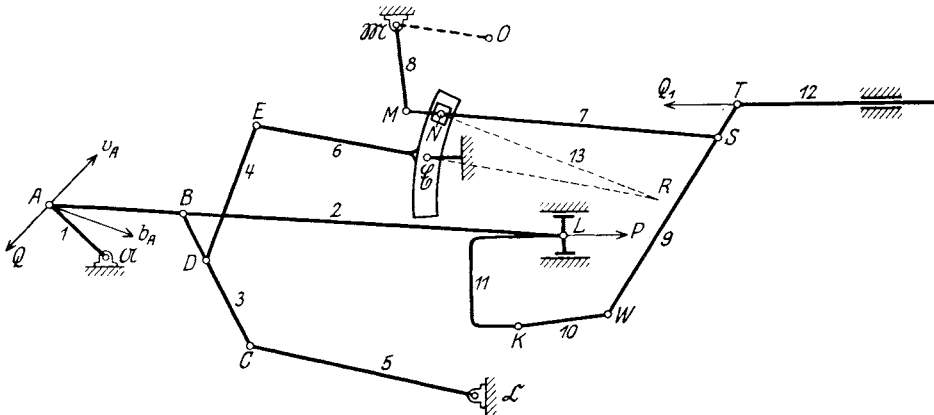


Fig. 535.

**304. Die Heusinger-Joy-Steuerung.** (Steuerung mit krummliniger Kulisse.) Diese Steuerung (Fig. 535) ist eine Abart der Heusinger von Waldegg-Steuerung für Lokomotiven und wurde von v. Borries im Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens, 1899, S. 2, mitgeteilt. Ihre Einrichtung ist in der Figur schematisch dargestellt.  $A\mathfrak{A}$  (Glied 1) ist die Kurbel des Treibrades der Lokomotive,  $Q$  dessen Widerstand;  $AL$  (Glied 2) die Triebstange,  $L$  der Kreuzkopf mit der Triebkraft  $P$ . Die Bewegung des Steuerschiebers (Glied 12) wird vom Gelenke  $B$  der Triebstange abgeleitet. Die Glieder 5, 3 und 4 besorgen die schwingende Bewegung der um  $\mathfrak{C}$  drehbaren Kulisse 6, deren Krümmungsmittelpunkt  $R$  ist. Die Bewegung des Kulissensteines  $N$ , der in der Kulisse gleitet, wird schematisch erreicht durch den um  $R$  drehbaren Arm  $NR$  (Glied 13).

Die Bewegung des Gelenkes  $T$  wird einerseits bestimmt durch die Stange  $TSW$  (Glied 9) und den Lenker  $WK$  (Glied 10); das Gelenk  $K$  ist mit dem Kreuzkopf  $L$  starr verbunden; andererseits durch die Stange  $MNS$  (Glied 7) und die Schwinge  $M\mathfrak{M}$  (Glied 8), die um  $\mathfrak{M}$  drehbar ist. Das Gelenk  $\mathfrak{M}$  ist fest zu denken; es kann mittels des Hebels  $\mathfrak{M}O$  um  $O$  verstellt werden.

Der Rahmen der Lokomotive, das Grundglied 0, verbindet die Drehpunkte  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{C}$ ,  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{M}$  mit den Führungen von  $L$  und  $T$ .

$Q_1$  ist der Widerstand des Schiebers (Glied 12). Gegeben sind die Kräfte  $P$ ,  $Q$  und  $Q_1$ , ferner die Beschleunigung  $b_A$  des Kurbelzapfens  $A$  (aus den Kräften als bereits bestimmt vorausgesetzt) und die Massenverteilung in sämtlichen Gliedern. Gesucht werden die Spannungen in allen Gliedern, die Auflagerdrücke in  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{C}$ ,  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{M}$ , die Führungsdrücke in  $L$  und  $T$ , der Druck  $X$  zwischen Kulissee und Stein, endlich die Gelenkdrücke.

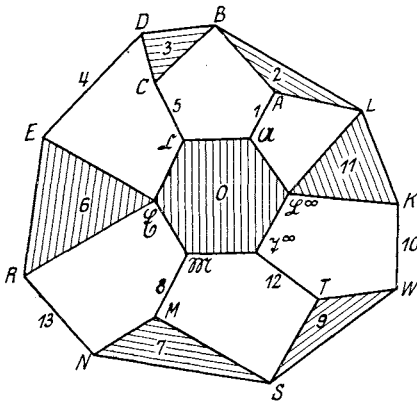


Fig. 536.

Um die Zwangläufigkeit der Heusinger-Joy-Steuerung festzustellen, zeichne man in Fig. 536 das kinematische Schema. Hier ist 0 das sechseckige, festgehaltene Grundglied, das die Gelenke  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{C}$ ,  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{M}$  verbindet und auch die Geradfürungen von  $L$  und  $T$  trägt, die durch die unendlich fernen Gelenke  $\mathfrak{L}^\infty$  und  $\mathfrak{T}^\infty$  ersetzt sind. Die Geradführung von  $K$  erfolgt ebenfalls von  $\mathfrak{L}^\infty$  aus. Die Stangen  $BDC$ ,  $ABL$ ,  $MNS$ ,  $TSW$  in Fig. 535 sind durch Dreiecke ersetzt; die Kulissee 6 ist durch das Dreieck  $E\mathfrak{C}R$  und die Führung des Punktes  $N$  in der Kulissee durch den Stab  $RN$  ersetzt.

Das Kennzeichen der Zwangläufigkeit, Gleichung 115:

$$n = 2\pi + 2$$

ist erfüllt, da die Anzahl der Glieder  $n = 14$  und die Anzahl der veränderlichen Polygone (nicht schraffiert)  $\pi = 6$  ist.

Das Kennzeichen Grüblers, Gleichung 124:

$$3n - 2g = 4$$

ist mit  $n = 14$  und der Anzahl der Gelenke  $g = 19$  ebenfalls erfüllt.

Der Geschwindigkeitsplan. Fig. 537 zeigt die Steuerung in vergrößertem Maßstab und in geänderter Stellung.

Auch hier wurde der Beschleunigungsmaßstab derart gewählt, daß

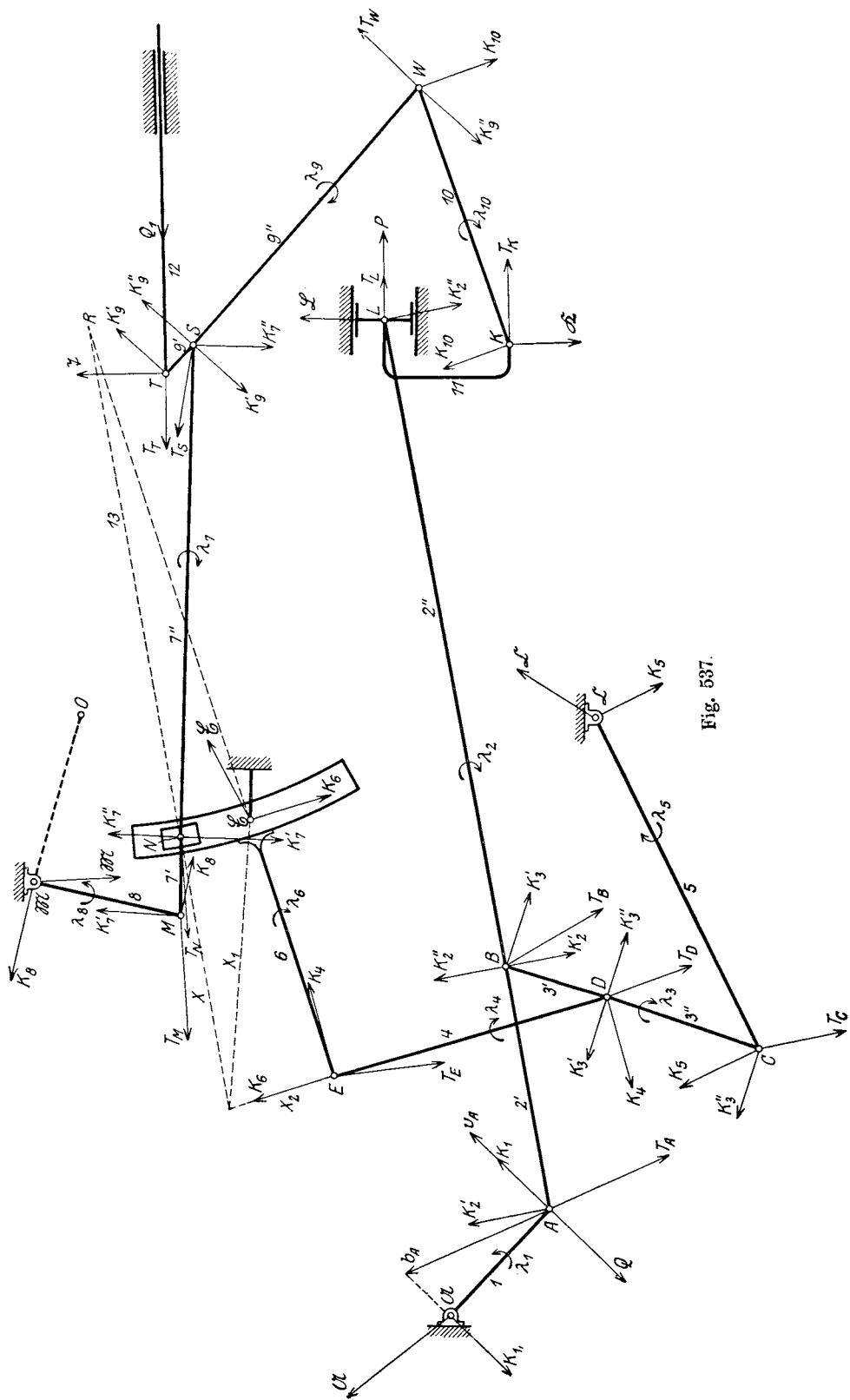


Fig. 537.

die Normalbeschleunigung  $n_A$  des Kurbelzapfens  $A$  mit  $A\mathfrak{A}$  zusammenfällt. Dann ist auch  $v_A = \overline{A\mathfrak{A}}$ .

Die Konstruktion des Geschwindigkeitsplanes Fig. 537a beginnt mit  $\overline{oa} \equiv v_A$ , und zwar in zweifacher Vergrößerung der Fig. 537. Die Parallele  $ol$  zur Schubrichtung von  $L$  und  $K$  wird von  $al \perp AL$  in  $l$  getroffen, wohin auch  $k$  fällt. Dann liefert die Ähnlichkeit  $abl \sim ABL$  den Punkt  $b$ .

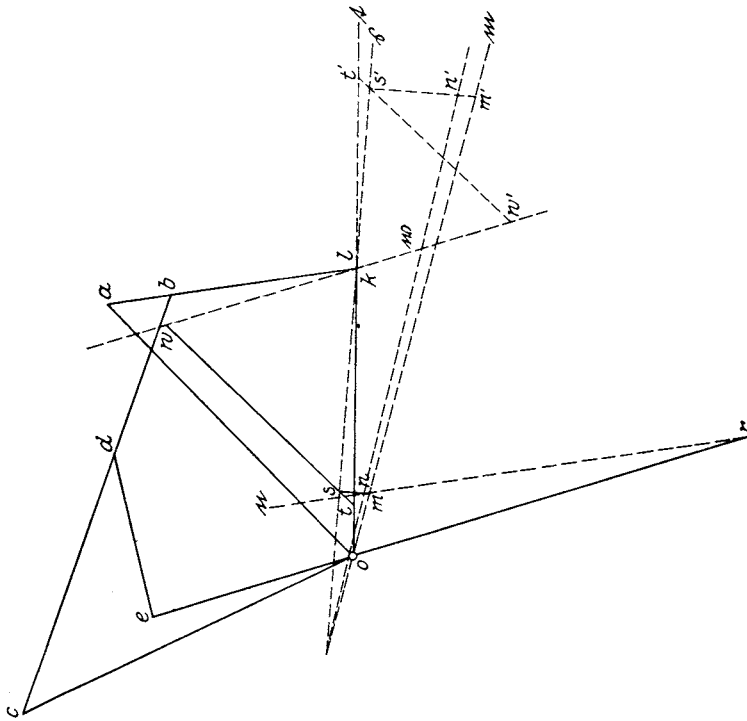


Fig. 537 a.

Aus  $oc \perp \mathfrak{C}C$  und  $bc \perp BC$  ergibt sich der Geschwindigkeitspunkt  $c$  und aus der Ähnlichkeit  $bdc \sim BDC$  der Punkt  $d$ . Ebenso aus  $oe \perp \mathfrak{C}E$  und  $de \perp DE$  der Punkt  $e$ , ferner aus der Ähnlichkeit  $eor \sim E\mathfrak{C}R$  der Punkt  $r$ .

Zieht man durch  $r$  die Gerade  $n$  senkrecht zu  $RN$ , so liegt auf  $n$  der Punkt  $n$ .

Um eine zweite Gerade zu finden, die durch  $n$  geht, ziehe man durch  $o$  die Parallele  $t$  zur Schubrichtung von  $T$  und nimm auf ihr einen beliebigen Punkt  $t'$  an; ferner zieht man durch  $k$  die Senkrechte  $w$  zu  $KW$  und bringt sie zum Schnitte  $w'$  mit  $t'w' \perp TW$ . Aus der Ähnlichkeit  $t's'w' \sim TSW$  kann sodann  $s'$  ermittelt werden; die Gerade  $s'$ ,

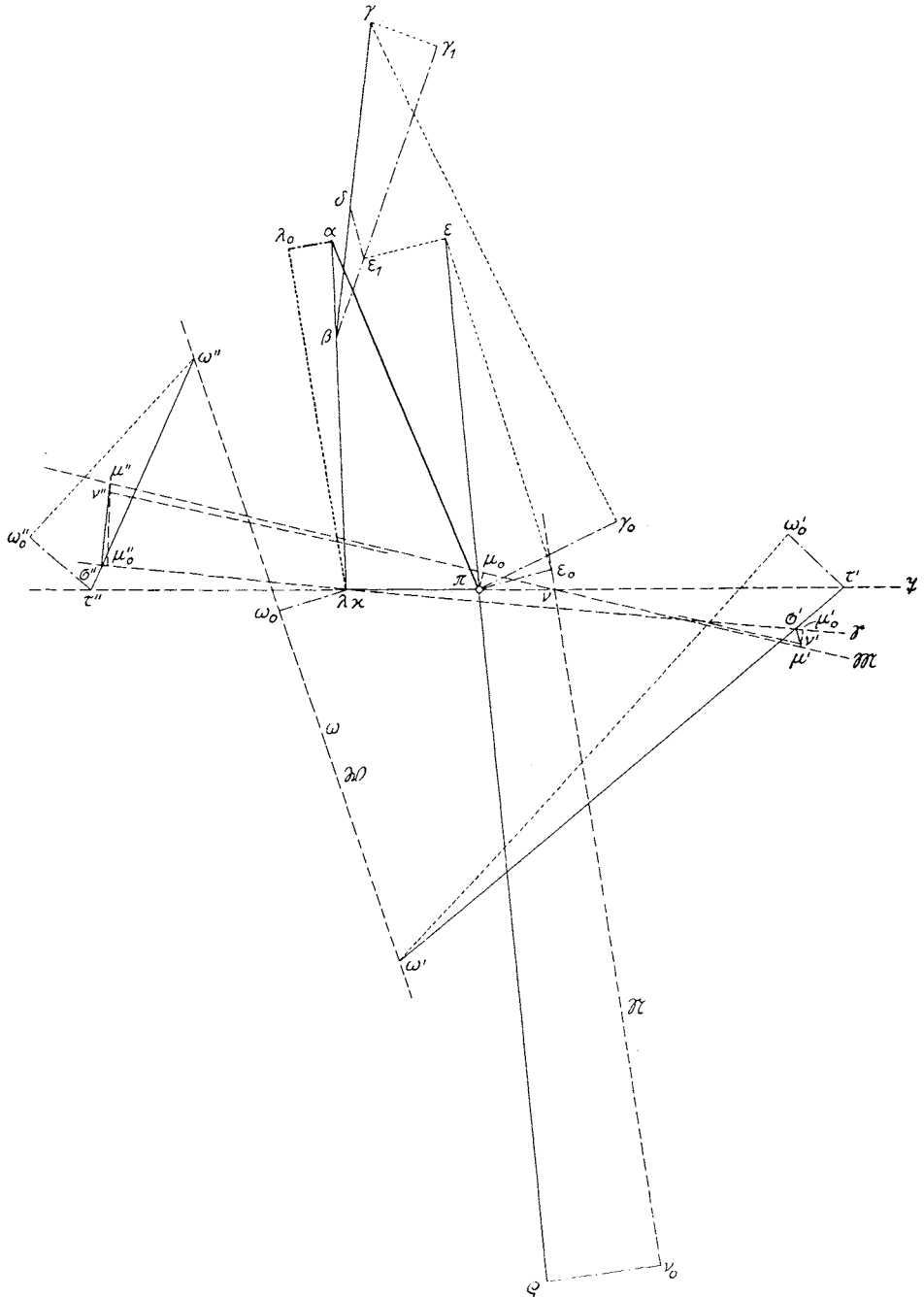


Fig. 537 b.

(Um  $\pi/2$  gegen Fig. 537 und 537a verdreht.)

welche  $s'$  mit dem Schnitte von  $t$  und  $w$  verbindet, ist dann der Träger der Punkte  $s$ . Zieht man endlich  $om' \perp \mathfrak{M}M$  und  $s'm' \perp SM$ , so erhält man den Punkt  $m'$ ; ferner aus der Ähnlichkeit  $s'n'm' \sim SNM$  den Punkt  $n'$ . Verbindet man  $n'$  mit dem Schnittpunkt der Geraden  $\bar{s}$  und  $m$  (oder  $om'$ ), so ist diese Verbindungsgerade der Träger der Punkte  $n$ ; ihr Schnitt mit  $n$  gibt den richtigen Geschwindigkeitspunkt  $n$ ; dann geben die Parallelen  $snm \parallel s'n'm'$  und  $tsw \parallel t's'w'$  die noch fehlenden Geschwindigkeitspunkte  $s, m, t, w$ .

Der Beschleunigungsplan. In Fig. 537b wird mit  $\overline{\pi a} = \overline{b_A}$  begonnen, wobei der Maßstab doppelt so groß wie in Fig. 537 gewählt wurde. Zieht man  $\pi\lambda$  parallel zur Schubrichtung von  $L$  und konstruiert

$$\overline{a\lambda_0} \equiv n_{LA} = \frac{v_{LA}^2}{LA} = \frac{\overline{al}^2}{LA} \text{ in Richtung } LA,$$

$\lambda_0\lambda \perp a\lambda_0$ , so ist der Schnitt dieser Senkrechten mit  $\pi\lambda$  der Beschleunigungspunkt  $\lambda$ , mit dem auch  $\kappa$  zusammenfällt.

Aus der Ähnlichkeit  $\alpha\beta\lambda \sim ABL$  ist sodann auch  $\beta$  bekannt.

Macht man

$$\overline{\pi\gamma_0} \equiv n_C = \frac{v_C^2}{C\mathfrak{C}} = \frac{\overline{oc}^2}{C\mathfrak{C}} \text{ in Richtung } C\mathfrak{C},$$

$\gamma_0\gamma \perp \pi\gamma_0$ ; ebenso

$$\overline{\beta\gamma_1} \equiv n_{CB} = \frac{v_{CB}^2}{CB} = \frac{\overline{bc}^2}{CB} \text{ in Richtung } CB,$$

$\gamma_1\gamma \perp \beta\gamma_1$ , so ist der Schnitt von  $\gamma_0\gamma$  mit  $\gamma_1\gamma$  der Punkt  $\gamma$ .

Aus der Ähnlichkeit  $\beta\delta\gamma \sim BDC$  ist sodann der Punkt  $\delta$  bestimmt.

Konstruiert man weiter

$$\overline{\pi\varepsilon_0} \equiv n_E = \frac{v_E^2}{E\mathfrak{E}} = \frac{\overline{oe}^2}{E\mathfrak{E}} \text{ in Richtung } E\mathfrak{E},$$

$\varepsilon_0\varepsilon \perp \pi\varepsilon_0$ ; ferner

$$\overline{\delta\varepsilon_1} \equiv n_{ED} = \frac{v_{ED}^2}{ED} = \frac{\overline{de}^2}{ED} \text{ in Richtung } ED,$$

$\varepsilon_1\varepsilon \perp \delta\varepsilon_1$ , so ist der Schnitt von  $\varepsilon_0\varepsilon$  mit  $\varepsilon_1\varepsilon$  der Punkt  $\varepsilon$  und die Ähnlichkeit  $\varepsilon\pi\rho \sim E\mathfrak{E}R$  gibt den Beschleunigungspunkt  $\rho$ .

Macht man noch

$$\overline{\rho\nu_0} \equiv n_{NR} = \frac{v_{NR}^2}{NR} = \frac{\overline{rn}^2}{NR} \text{ in Richtung } NR$$

und die Gerade  $\mathfrak{N} \perp \rho\nu_0$  durch  $\nu_0$ , so geht diese Gerade  $\mathfrak{N}$  durch den gesuchten Beschleunigungspunkt  $\nu$ .

Um eine zweite durch  $\nu$  gehende Gerade zu finden, mache man

$$\overline{\kappa\omega_0} \equiv n_{WK} = \frac{v_{WK}^2}{WK} = \frac{\overline{kw}^2}{WK} \text{ in Richtung } WK$$

und errichte in  $\omega_0$  die Gerade  $\mathfrak{B}$  senkrecht zu  $\kappa\omega_0$ , dann enthält diese den gesuchten Beschleunigungspunkt  $\omega$ .

Nun nimmt man auf der Schubrichtung  $\mathfrak{X}$  von  $T$  durch  $\pi$  einen beliebigen Punkt  $\tau'$  an, macht

$$\overline{\tau'\omega_0} \equiv n_{WT} = \frac{v_{WT}^2}{WT} = \frac{t_w^2}{WT} \text{ in Richtung } WT,$$

$\omega_0'\omega' \perp \tau'\omega_0'$  bis zum Schnitte  $\omega'$  mit  $\mathfrak{B}$ , verbindet  $\tau'$  mit  $\omega'$  und bestimmt auf  $\tau'\omega'$  den Punkt  $\sigma'$  derart, daß  $\tau'\sigma'\omega' \sim TSW$  ist.

Dasselbe führt man mit einem zweiten beliebigen Punkte  $\tau''$  der Geraden  $\mathfrak{X}$  durch und erhält durch analoge Konstruktionen den Punkt  $\sigma''$ . Die Verbindungsgerade  $\mathfrak{C}$  der Punkte  $\sigma'$  und  $\sigma''$  geht dann durch den noch unbekanntem Beschleunigungspunkt  $\sigma$ .

Sodann macht man

$$\overline{\pi\mu_0} \equiv n_M = \frac{v_M^2}{M\mathfrak{M}} = \frac{o_m^2}{M\mathfrak{M}} \text{ in Richtung } M\mathfrak{M}$$

und errichtet in  $\mu_0$  die Gerade  $\mathfrak{M}$  senkrecht zu  $\pi\mu_0$ ; ferner

$$\overline{\sigma'\mu_0'} \equiv n_{MS} = \frac{v_{MS}^2}{MS} = \frac{sm^2}{MS} \text{ in Richtung } MS,$$

$\mu_0'\mu' \perp \sigma'\mu_0'$  bis zum Schnitte  $\mu'$  mit  $\mathfrak{M}$ ; in der gleichen Weise werden aus  $\sigma''$  die Punkte  $\mu_0''$  und  $\mu''$  gewonnen.

Verbindet man  $\sigma'$  mit  $\mu'$ ,  $\sigma''$  mit  $\mu''$  und macht  $\sigma'v''\mu'' \sim \sigma'v'\mu' \sim SNM$ , so erhält man die Punkte  $v'$  und  $v''$ , deren Verbindungsgerade im Schnitte mit  $\mathfrak{N}$  den richtigen Beschleunigungspunkt  $v$  liefert.

Das Verhältnis der Strecken  $\overline{v'v}$  und  $\overline{vv''}$ , das auf diesem Wege gefunden wurde, ist nun auch maßgebend für die übrigen Beschleunigungspunkte; so findet man jetzt z. B. den Punkt  $\omega$  aus der Proportion

$$\overline{\omega'\omega} : \overline{\omega\omega''} = \overline{v'v} : \overline{vv''}.$$

Auf diesem Wege können nun auch  $\tau$ ,  $\sigma$ ,  $\mu$  ermittelt werden. Sie wurden in die Figur nicht eingezeichnet, weil sie zu nahe an  $v$  liegen, und dies bedeutet, daß die Beschleunigungen der Gelenke  $M$ ,  $N$ ,  $S$ ,  $T$  nahezu die gleichen sind.

Die Ersatzmassen und Trägheitskräfte. Die Massen der bewegten Glieder wurden, wie in den früheren Steuerungen, nach dem Schwerpunktsesetze auf die Gelenke jedes Gliedes verteilt. Hierbei wurden die Stangen 2, 3, 7 und 9 in je zwei Teile geteilt; z. B. die Stange 2 in die Teile 2' und 2'' und jeder dieser Teile für sich behandelt; so wurde die Masse des Teiles 2' nach dem Schwerpunktsesetz in die Gelenke  $A$  und  $B$ , die Masse des Teiles 2'' in die Gelenke  $B$  und  $L$  verteilt.

Die Masse der schwingenden Kulisze 6 wurde in die Punkte  $E$  und  $\mathfrak{C}$  verteilt. Die Masse des Kulissensteines kann als Punktmasse im Gelenke  $N$  vereinigt werden (Glieder 13). Es hindert jedoch nichts, dieses



Glied wie die übrigen zu behandeln, wenn der Kulissenstein große Länge besäße.

Die statischen Ersatzmassen  $m$  in den Gelenken, die Trägheitskräfte  $T$ , die Paare  $K$  und die Winkelbeschleunigungen  $\lambda$  wurden in derselben Weise wie bei den übrigen Steuerungen bestimmt und in Fig. 537 eingetragen.

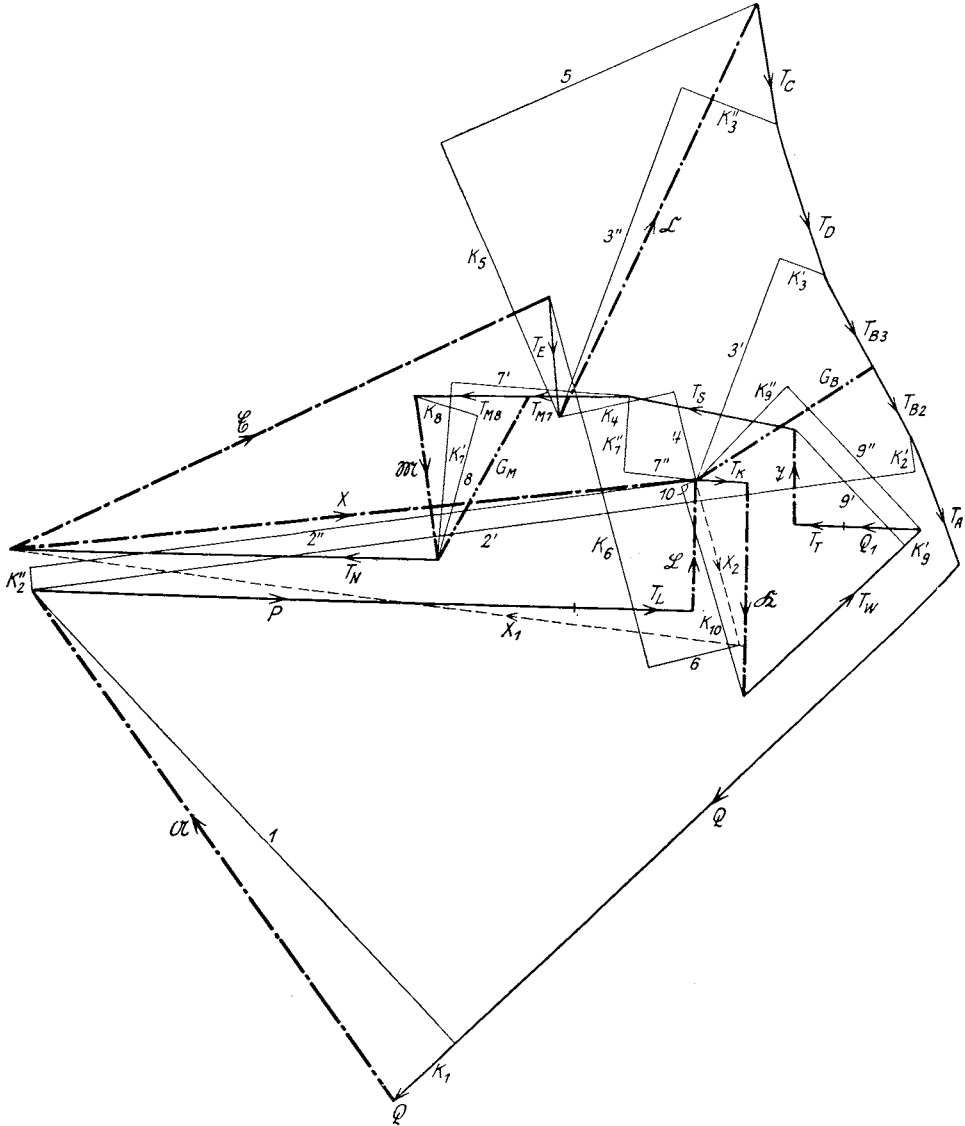


Fig. 537 c.

(Um  $\pi/2$  gegen Fig. 537 und 537 a verdreht.)

Der Kulissendruck. Der Druck zwischen Kulissee und Kulissenstein fällt in die Normale  $NR$ . Seine Größe  $X$  sei als gefunden vorausgesetzt. Er ist eine innere Kraft des Getriebes und muß durch Kräfte in  $\mathfrak{C}$  und  $E$  im Gleichgewicht erhalten werden. Die Verteilung von  $X$  nach diesen Gelenken  $\mathfrak{C}$  und  $E$  ist statisch unbestimmt; da jedoch die Berechnung der nach  $\mathfrak{C}$  und  $E$  entfallenden Teile  $X_1$  und  $X_2$  auf Grund der Elastizitätstheorie wegen der verwickelten Form der Kulissee auf Schwierigkeiten stößt, möge angenommen werden, daß der Druck  $X_2$  in  $E$  normal zu  $E\mathfrak{C}$  steht; dann geht  $X_1$  durch den Schnittpunkt von  $X$  und  $X_2$  und die drei Drücke  $X$ ,  $X_1$ ,  $X_2$  geben im Kraftplan ein sich schließendes Dreieck.

Der dynamische Kraftplan (Fig. 537c). Nach Anbringung der Trägheitskräfte  $T$  und  $K$  können nun der Reihe nach folgende Polygone gezeichnet werden:

$$\text{Gelenk } A: \quad T_A + Q + K_1 + 1 + 2' + K_2' \equiv 0,$$

wodurch die Spannungen 1 und 2' bestimmt werden.

$$\text{Gelenk } \mathfrak{A}: \quad \mathfrak{A} + 1 + K_1 \equiv 0$$

liefert den Auflagerdruck in  $\mathfrak{A}$ .

$$\text{Gelenk } L: \quad P + T_L + \mathfrak{L} + 2'' + K_2'' \equiv 0,$$

dieses Polygon gibt die Spannung 2'' und den Führungsdruck  $\mathfrak{L}$  in  $L$ .

$$\text{Gelenk } B: \quad T_B + K_2' + 2' + K_2'' + 2'' + 3' + K_3' \equiv 0,$$

mit nur einer unbekanntten Spannung 3' (Probe für Genauigkeit der Zeichnung). Es ist

$$T_B \equiv T_{B3} + T_{B2}.$$

$$\text{Gelenk } D: \quad T_D + K_3' + 3' + 4 + K_4 + 3'' + K_3'' \equiv 0,$$

das Polygon gibt die Spannungen 3'' und 4.

$$\text{Gelenk } C: \quad T_C + K_3'' + 3'' + K_5 + 5 \equiv 0;$$

hieraus ist die Spannung 5 zu entnehmen (Probe auf Genauigkeit).

$$\text{Gelenk } \mathfrak{C}: \quad \mathfrak{C} + 5 + K_5 \equiv 0$$

liefert den Auflagerdruck in  $\mathfrak{C}$ .

$$\text{Gelenk } E: \quad T_E + K_4 + 4 + X_2 + 6 + K_4 \equiv 0,$$

woraus die Spannung 6 und der Kulissendruck  $X_2$  in  $E$  zu entnehmen ist.

$$\text{Gelenk } K: \quad T_K + \mathfrak{K} + K_{10} + 10 \equiv 0,$$

das Polygon liefert die Spannung 10 und den Führungsdruck  $\mathfrak{K}$ .

$$\text{Gelenk } W: \quad T_W + 9'' + K_9'' + 10 + K_{10} \equiv 0,$$

hieraus entnimmt man die Spannung 9'' (Probe auf Genauigkeit).

$$\text{Gelenk } T: \quad Q_1 + T_T + \mathfrak{T} + 9' + K_9' \equiv 0,$$

liefert die Spannung 9' und den Führungsdruck  $\mathfrak{T}$ .

$$\text{Gelenk } S: \quad T_S + K_7'' + 7'' + K_9'' + 9'' + K_9' + 9' \equiv 0,$$

das Polygon gibt die Spannung 7'' (Probe auf Genauigkeit).

Gelenk  $M$ :  $T_M + K_8 + 8 + K_7' + 7' = 0$

gibt den Spannungen  $7'$  und  $8$ .

Gelenk  $\mathfrak{M}$ :  $\mathfrak{M} + 8 + K_8 = 0$

gibt die Auflagerdruck  $\mathfrak{M}$ .

Gelenk  $N$ :  $T_N + X + 7'' + K_7'' + 7' + K_7' = 0$

gibt den Kulissendruck  $X$  (Probe für die Richtigkeit des Druckes).

Gelenk  $\mathfrak{E}$ :  $\mathfrak{E} + K_6 + 6 + X_1 = 0$

gibt den Auflagerdruck  $\mathfrak{E}$ ;  $X_1$  ist bereits bekannt (aus  $X$  und  $X_2$ ).

Die Gelenkdrücke. Es sollen nur zwei von ihnen bestimmt werden. Der Gelenkdruck in  $B$  ist:

$$G_B \equiv T_{B2} + K_2' + 2' + K_2'' + 2''$$

und auch  $\equiv 3' + K_3' + T_{B3}$ .

Der Gelenkdruck in  $M$  ist:

$$G_M \equiv T_{M8} + K_8 + 8$$

und auch  $\equiv K_7' + 7' + T_{M7}$ .

In ähnlicher Weise werden die übrigen Gelenkdrücke bestimmt. Man versuche die Gelenkdrücke  $G_D$  und  $G_E$  zu zeichnen.

Literatur. Die behandelte Steuerung wurde von Ed. Dafinger in seiner Abhandlung: „Graphodynamische Untersuchung einer Heusinger-Joy-Steuerung“, Dingers Polytechn. Journal 1907, S. 81 auf anderem Wege untersucht. Die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen wurden ohne Benützung der Pläne bestimmt, die Trägheitskraft jedes Gliedes in ihrer Wirkung auf die sämtlichen Gelenke einzeln untersucht.

**305. Die Allan-Steuerung.** (Steuerung mit einer geraden Kulisse.) Diese Steuerung ist eine Lokomotiv-Steuerung englischer Herkunft

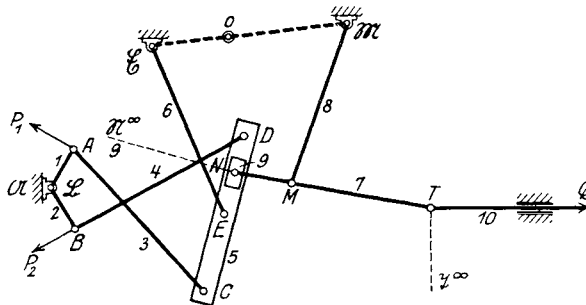


Fig. 538.

und wurde von F. Reuleaux im Civil-Ingenieur, 3. Band, 1857 hinsichtlich ihrer geometrischen Verhältnisse untersucht; ebenso von L. Burmester in dessen Kinematik, S. 728.

Fig. 538 zeigt ihre Anordnung. Die beiden Exzenter  $A\mathfrak{A}$  (Glieder 1) und  $B\mathfrak{B}$  (Glieder 2) sind durch gleichlange Kurbeln ersetzt, die sich derart bewegen, daß sie stets symmetrisch zur Halbierungslinie des Winkels  $A\mathfrak{A}B$  bleiben. Die Kurbelzapfen  $A$  und  $B$  sind durch die gleichlangen, gekreuzten Exzenterstangen  $AC$  (Glieder 3) und  $BD$  (Glieder 4) mit der geraden Kulisse  $CD$  (Glieder 5) gelenkig verbunden; der Mittelpunkt  $E$  der Kulisse wird durch die Schwinge  $E\mathfrak{C}$  (Glieder 6) um den Punkt  $\mathfrak{C}$  geführt. Der Kulissenstein in  $N$  wird durch die Lenkerstange  $NMT$  (Glieder 7) geführt, die in  $N$  gelenkig an den Kulissenstein (Glieder 9) angeschlossen ist. Der Punkt  $M$  wird mit der Schwinge  $M\mathfrak{M}$  (Glieder 8), der Punkt  $T$  mit der Schieberstange (Glieder 10) gelenkig verbunden.

Die Gelenke  $\mathfrak{C}$  und  $\mathfrak{M}$ , als feste Drehpunkte gezeichnet, sind verschiebbar; sie sind durch einen um  $O$  drehbaren Hebel verbunden, der verstellt werden kann.

Die obenerwähnte symmetrische Bewegung der beiden Kurbeln 1 und 2 kann, wie Fig. 539 zeigt, durch Einschaltung zweier symmetrischer Schubkurbeln, deren Lenker 11 und 12 sind, erreicht werden.

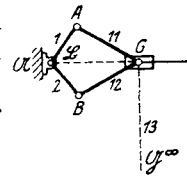


Fig. 539.

Gegeben sind die beiden gleichen Triebkräfte  $P_1$  und  $P_2$  an den Kurbeln, der Schieber-Widerstand  $Q$ , die Geschwindigkeiten  $v_A = v_B$  und die Beschleunigungen  $b_A = b_B$ , ferner die gesamtete Massenverteilung.

Gesucht werden die Auflagerdrücke in  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{C}$ ,  $\mathfrak{M}$ , der Führungsdruck  $\mathfrak{X}$  in  $T$ , der Druck  $X$  zwischen Kulisse und Stein, die Spannungen  $n$  allen Gliedern, endlich die Gelenkdrücke.

Um sich von der Zwangläufigkeit der Steuerung zu überzeugen, wurde in Fig. 540 das kinematische Schema entworfen. Die Drehpunkte  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  der Kurbeln wurden der besseren Übersichtlichkeit wegen getrennt gezeichnet; die Stäbe 1, 11, 13 mit dem unendlich fernen Gelenke  $\mathfrak{G}^\infty$  kennzeichnen die in Fig. 539 gezeichnete Ergänzung-Schubkurbel; das gleiche gilt von den Stäben 2, 12, 13. Der Kulissenstein (Glieder 9) ist durch die unendlich lange Stange 9 dargestellt, die sich um den Punkt  $\mathfrak{N}^\infty$ , der in der Kulisse (Glieder 5) festliegt, dreht. Dadurch wird die Kulisse zu dem starren Vierecksgliede  $E\mathfrak{C}D\mathfrak{N}^\infty$ . Die Lenkerstange  $NMT$  ist das Dreiecksglied 7, der Punkt  $T$  dreht sich um den unendlich fernen Punkt  $\mathfrak{T}^\infty$ . Das festgehaltene Grundglied 0 verbindet die festen Gelenke  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{C}$ ,  $\mathfrak{M}$  mit den unendlich fernen Drehpunkten  $\mathfrak{G}^\infty$  und  $\mathfrak{T}^\infty$ . Das Schema Fig. 540 zeigt also  $n = 14$  Glieder und  $\pi = 6$  veränderliche Polygone; es ist somit  $n = 2\pi + 2$ , die Kette ist zwangläufig (Gleichung 115).

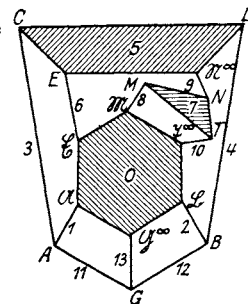


Fig. 540.

Wendet man das Grüblersche Kennzeichen der Zwangsläufigkeit an, so müssen die Gelenke  $A$ ,  $B$  und  $G$  doppelt gezählt werden; dann ist die Anzahl der Gelenke  $g = 19$  und die Gleichung 124:

$$3n - 2g = 4$$

ist ebenfalls erfüllt.

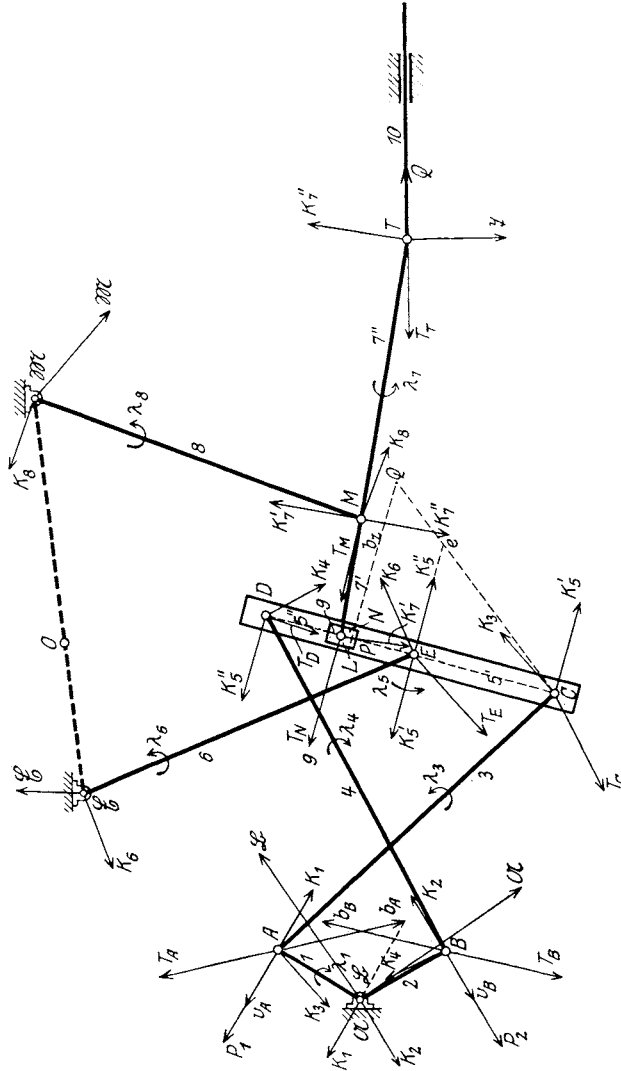


Fig. 541.

Der Geschwindigkeitsplan. In Fig. 541 wurde die Steuerung in größerem Maßstab mit Hinweglassung der Glieder 11, 12, 13 gezeichnet. Die Beschleunigung  $b_A$  wurde maßstäblich derart gewählt, daß  $n_A$  durch die Kurbellänge  $\overline{AO}$  gemessen wird. Die beiden Kurbelzapfen

$A$  und  $B$  haben gleiche Geschwindigkeiten und gleiche Beschleunigungen, symmetrisch zur Halbierungslinie des Winkels  $A\mathfrak{A}B$ .

Im Geschwindigkeitsplan Fig. 541 a wurde zunächst  $\overline{oa} \equiv v_A$ ,  $\overline{ob} \equiv v_B$  gemacht, und zwar im doppelten Maßstab. Sodann wurde die Gerade  $bd \perp BD$  und  $oe \perp CE$  gezogen, auf  $bd$  ein beliebiger Punkt  $d'$  angenommen und  $d'e' \perp DE$  gezogen. Im Schnitte von  $d'e'$  mit  $oe$  liegt der Punkt  $e'$ ; nun macht man  $\overline{e'c'} \equiv \overline{d'e'}$  und verbindet  $c'$  mit dem Schnittpunkt  $s$  von  $bd'$  mit  $oe$ ; diese Verbindungslinie wird von  $ac \perp AC$  im Punkte  $c$  getroffen;  $ced \parallel c'e'd'$  liefert dann die gesuchten Geschwindigkeitspunkte  $e$  und  $d$ . Nennt man  $L$  jenen Punkt der Kulissee, der augenblicklich mit  $N$  zusammenfällt, so erhält man den Geschwindigkeits-

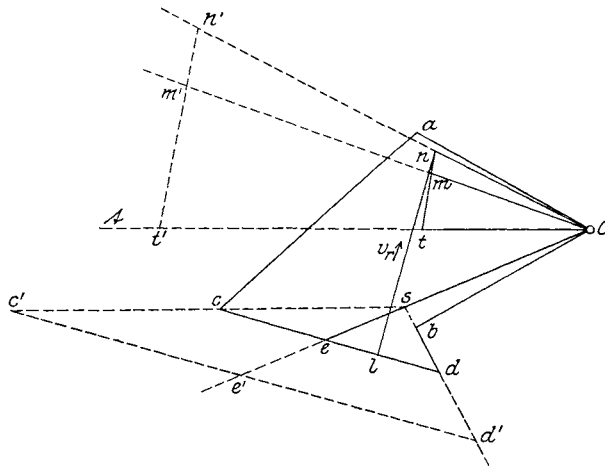


Fig. 541 a.

(Um  $\pi/2$  gegen Fig. 541 verdreht.)

punkt  $l$  aus der Ähnlichkeit  $celand \sim CELD$ . Zieht man durch  $l$  die Parallele  $ln$  zur Kulissee, so muß auf ihr der Geschwindigkeitspunkt  $n$  liegen, da  $L$  und  $N$  sich gegenseitig in Richtung der Kulissee verschieben; die relative Geschwindigkeit von  $N$  in bezug auf die Kulissee ist

$$v_r \equiv v_{NL} \equiv \overline{ln}.$$

Zieht man ferner durch  $o$  die Gerade  $t$  parallel zur Bewegung des Schiebers 10,  $om' \perp \mathfrak{M}M$ , nimmt auf  $t$  den Punkt  $t'$  beliebig an und errichtet  $t'm' \perp TM$ , zeichnet sodann  $n'$  mit Hilfe der Ähnlichkeit  $t'm'n' \sim TMN$  und verbindet  $n'$  mit  $o$ , so muß auch diese Gerade  $n'o$  durch  $n$  gehen, wodurch sowohl  $n$ , als auch  $m$  und  $t$  gefunden sind.

Der Beschleunigungsplan. In Fig. 541 b wurden zunächst die bekannten Beschleunigungen  $\overline{\pi a} \equiv b_A$  und  $\overline{\pi \beta} \equiv b_B$  in doppeltem Maßstab gezeichnet, sodann

$$\overline{a\gamma_0} \equiv n_{CA} = \frac{v_{CA}^2}{CA} = \frac{\overline{ac}^2}{CA} \text{ in Richtung } CA,$$

$\gamma_0\gamma \perp \alpha\gamma_0$  und

$$\overline{\beta\delta_0} \equiv n_{DB} = \frac{v_{DB}^2}{DB} = \frac{\overline{bd}^2}{DB} \text{ in Richtung } DB,$$

$\delta_0\delta \perp \beta\delta_0$  gezeichnet.

Ferner wurden

$$\overline{\pi\varepsilon_0} \equiv n_E = \frac{v_E^2}{E\mathcal{E}} = \frac{\overline{oe}^2}{E\mathcal{E}} \text{ in Richtung } E\mathcal{E},$$

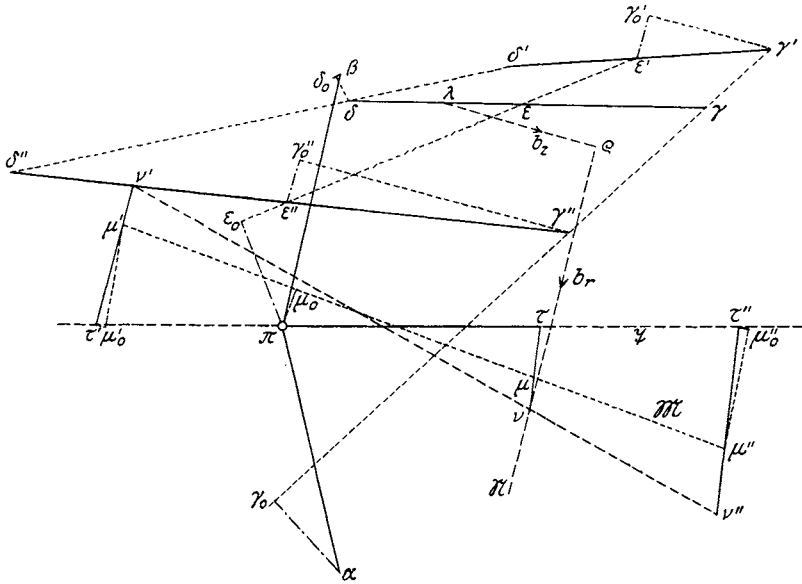


Fig. 541b.

(Um  $\pi/2$  gegen Fig. 541 verdreht.)

$\varepsilon_0\varepsilon \perp \pi\varepsilon_0$  errichtet und auf  $\varepsilon_0\varepsilon$  zwei beliebige Punkte  $\varepsilon'$  und  $\varepsilon''$  angenommen. Sodann wurde

$$\overline{\varepsilon'\gamma_0'} \equiv n_{CE} = \frac{v_{CE}^2}{CE} = \frac{\overline{ec}^2}{CE} \text{ in Richtung } CE,$$

$\gamma_0'\gamma' \perp \varepsilon'\gamma_0'$  bis zum Schnitte  $\gamma'$  mit  $\gamma_0\gamma$  gezogen,  $\gamma'$  mit  $\varepsilon'$  verbunden und  $\varepsilon'\delta' \equiv \gamma'\varepsilon'$  gemacht. Auf dieselbe Weise wurden aus  $\varepsilon''$  die Punkte  $\gamma''$  und  $\delta''$  gefunden. Verbindet man  $\delta'$  mit  $\delta''$ , so schneidet diese Verbindungslinie  $\delta_0\delta$  im richtigen Beschleunigungspunkte  $\delta$ ; und da die Punktreihen  $\gamma'\gamma\gamma''$ ,  $\delta'\delta\delta''$ ,  $\varepsilon'\varepsilon\varepsilon''$  ähnlich sind, sind auch die Punkte  $\gamma$  und  $\varepsilon$  bekannt. Aus der Ähnlichkeit  $\gamma\varepsilon\lambda\delta \sim CELD$  ergibt sich auch der Beschleunigungspunkt  $\lambda$  von  $L$ .

Um den Beschleunigungspunkt  $\nu$  von  $N$  zu finden, benütze man das Gesetz von Coriolis (vgl. 203), um die relative Beschleunigung von  $N$  gegen die Kulisse festzustellen; es ist nämlich

$$b_N \equiv b_L + b_r + b_z.$$

Hierin ist  $b_z = 2v_r\omega$  die Zusatzbeschleunigung; man findet sie, wenn man in Fig. 541  $EE_1$  ebenso lang macht wie  $2v_{EC} \equiv \overline{ce}$  im Geschwindigkeitsplan Fig. 541a und sodann  $C$  mit  $E_1$  verbindet; dann ist  $\text{tg}(E_1CE) = 2 \frac{v_{EC}}{EC} = 2\omega_5$  die doppelte Winkelgeschwindigkeit der Kulissee; ferner  $\overline{CP} = \overline{ln} = 2v_r$  macht und in  $P$  die Senkrechte auf  $CP$  errichtet; dann ist  $\overline{PQ} = \overline{CP} \cdot \text{tg}(E_1CE) = 4v_r\omega_5$ ; trägt man diese Strecke im Beschleunigungsplan von  $\lambda$  aus im Sinne von  $PQ$  auf, so ist  $\overline{\lambda\rho} \equiv b_z$  (im doppelten Maßstab).

Die Richtung von  $b_z$  erhält man durch Drehung von  $v_r$  im Sinne der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_5$  der Kulissee, also im Sinne der Uhr.

Die relative Beschleunigung  $b_r$  von  $N$  gegen  $L$  hat die Richtung der Kulissee; zieht man also durch  $\rho$  eine Parallele zu ihr, so erhält man eine Gerade  $\mathfrak{R}$ , die durch den gesuchten Punkt  $v$  gehen wird.

Nun zieht man durch  $\pi$  eine Parallele  $\mathfrak{X}$  zur Bewegung des Schiebers und nimmt auf ihr zwei beliebige Punkte  $\tau'$  und  $\tau''$  an. Man macht sodann

$$\overline{\tau'\mu_0'} \equiv n_{MT} = \frac{v_{MT}^2}{\overline{MT}} = \frac{\overline{tm}^2}{\overline{MT}} \text{ in Richtung } MT$$

und  $\mu_0'\mu' \perp \tau'\mu_0'$ ; ebenso findet man die Gerade  $\mu_0''\mu''$ .

Zeichnet man noch

$$\overline{\pi\mu_0} \equiv n_M = \frac{v_M^2}{\overline{M\mathfrak{R}}} = \frac{\overline{om}^2}{\overline{M\mathfrak{R}}} \text{ in Richtung } M\mathfrak{R}$$

und in  $\mu_0$  die Senkrechte  $\mathfrak{M}$  auf  $\pi\mu_0$ , so liegen auf ihr die beiden Schnittpunkte  $\mu'$  und  $\mu''$ . Aus der Ähnlichkeit  $\tau'\mu'v' \sim TMN$  erhält man den Punkt  $v'$  und ebenso  $v''$ . Die Verbindungslinie  $v'v''$  trifft die Gerade  $\mathfrak{R}$  im Beschleunigungspunkt  $v$ . Es ist dann  $\overline{\rho v} \equiv b_r$ . Nun können die Punkte  $\mu$  und  $\tau$  aus der Ähnlichkeit  $\mu'\mu\mu'' \sim \tau'\tau\tau'' \sim v'v''$  ermittelt werden; die Punkte  $\mu$ ,  $\tau$ ,  $v$  müssen auf einer Geraden liegen.

Die Ersatzmassen und Trägheitskräfte. Die Massen der Glieder wurden auf die Gelenke nach dem Schwerpunktsesetze verteilt; hierbei wurde die Stange  $NMT$  (Glieder 7) in die Teile  $NM$  (7') und  $MT$  (7''), die Kulissee  $CD$  (Glieder 5) in die Teile  $CE$  (Glieder 5') und  $ED$  (Glieder 5'') geteilt und jeder Teil gesondert behandelt. Die Massen der Glieder zerfallen sodann:

$$\begin{aligned} M_1 &= M_{A1} + M_{\mathfrak{A}1}, & M_2 &= M_{B2} + M_{\mathfrak{B}2}, \\ M_3 &= M_{A3} + M_{C3}, & M_4 &= M_{B4} + M_{D4}, \\ M_5' &= M_{C5'} + M_{E5'}, & M_5'' &= M_{D5''} + M_{E5''}, \\ M_6 &= M_{E6} + M_{\mathfrak{E}6}, & M_8 &= M_{M8} + M_{\mathfrak{M}8}, \\ M_7' &= M_{N7'} + M_{M7'}, & M_7'' &= M_{T7''} + M_{M7''}; \end{aligned}$$

die Masse  $M_{10}$  der Schieberstange und des Schiebers kann in  $T$ , jene  $M_9$  des Kulissensteines in  $N$  als Punktmasse vereinigt werden. Letztere



Masse  $M_9$  könnte man auch wie eine Stabmasse behandeln, wenn der Kulissenstein größere Länge besitzen würde.

Dann sind also die statischen Ersatzmassen in den beweglichen Gelenken:

$$\begin{aligned} m_A &= M_{A1} + M_{A3}, & m_B &= M_{B2} + M_{B4}, \\ m_C &= M_{C3} + M_{C5'}, & m_D &= M_{D4} + M_{D5''}, \\ m_E &= M_{E5'} + M_{E5''} + M_{D6}, & m_N &= M_{N7'} + M_9, \\ m_M &= M_{M7'} + M_{M7''} + M_{N8}, & m_T &= M_{T7''} + M_{10}. \end{aligned}$$

Sodann werden in den Gelenken die Trägheitskräfte

$$\begin{aligned} T_A &\equiv -m_A b_A, & T_B &\equiv -m_B b_B, & T_C &\equiv -m_C b_C, \\ T_D &\equiv -m_D b_D, & T_E &\equiv -m_E b_E, & T_N &\equiv -m_N b_N, \\ T_M &\equiv -m_M b_M, & T_T &\equiv -m_T b_T \end{aligned}$$

entgegengesetzt den Beschleunigungen  $b_A \equiv \overline{\pi a}$ ,  $b_B \equiv \overline{\pi \beta}$  usf. angebracht.

Die Ermittlung der Winkelbeschleunigungen  $\lambda$  aller Glieder und ihres Drehungssinnes, die in Fig. 541 eingeschrieben wurden, wie auch der Paare der Trägheitskräfte  $K$  erfolgt wie in 302 (vgl. XXVI).

Der Kulissendruck. Bevor an die Zeichnung des dynamischen Kraftplanes gegangen wird, soll erörtert werden, in welcher Weise der Druck  $X$  zwischen der Kulisse und dem Kulissensteine im Kraftplan auftreten wird.

Nehmen wir an, der auf den Kulissenstein oder das Gelenk  $N$  der Stange  $NMT$  wirkende Kulissendruck  $X = \overline{0III}$  (Fig. 541c) sei bereits gefunden. Er wird sich auf die drei Gelenke  $C$ ,  $E$  und  $D$  der Kulisse verteilen, die als deren Auflager angesehen werden können. Man steht dann vor folgender Aufgabe: der gerade Träger  $DEC$  (Fig. 542) ist in  $D$ ,  $E$  und  $C$  frei aufgelagert und erfährt in der Entfernung  $e$  von  $E$  die Belastung  $X$ ; wie groß sind die Auflagerdrücke  $X_D$ ,  $X_E$  und  $X_C$ ?

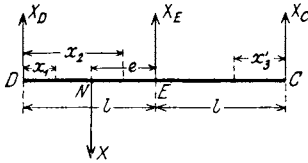


Fig. 542.

Die Statik liefert zur Lösung dieser Aufgabe nur die Gleichungen

$$\begin{aligned} X_C \cdot 2l + X_E \cdot l &= X(l - e) \dots \dots \dots a) \\ X_D \cdot 2l + X_E \cdot l &= X(l + e) \dots \dots \dots b) \end{aligned}$$

die aus den Momenten um  $D$  und  $C$  gewonnen werden.

Eine dritte Gleichung kann aus dem Gesetze Castiglianos vom Minimum der Formänderungsarbeit abgeleitet werden. Nennt man  $M_1$ ,  $M_2$  und  $M_3$  die Biegemomente des Trägers in den Feldern  $DN$ ,  $NE$  und  $EC$ , ferner  $E$  die Elastizitätszahl und  $J$  das Trägheitsmoment des konstanten Querschnittes für die Biegungsachse, so ist die Formänderungsarbeit der Biegung

$$A = \frac{1}{2EJ} \left[ \int_0^{l-c} M_1^2 dx_1 + \int_{l-c}^l M_2^2 \cdot dx_2 + \int_0^l M_3^2 \cdot dx_3 \right];$$

hierin sind

$M_1 = X_D \cdot x_1$ ,  $M_2 = X_D \cdot x_2 - X(x_2 - l + e)$ ,  $M_3 = X_C \cdot x_3$ ,  
 $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$  die Entfernungen des Querschnittes von  $D$  und  $C$ .

Setzt man nun  $\frac{\partial A}{\partial X_E} = 0$ , so wird

$$\int_0^{l-c} M_1 \cdot \frac{\partial M_1}{\partial X_E} \cdot dx_1 + \int_{l-c}^l M_2 \cdot \frac{\partial M_2}{\partial X_E} \cdot dx_2 + \int_0^l M_3 \cdot \frac{\partial M_3}{\partial X_E} \cdot dx_3 = 0 \quad . . \quad c)$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial X_E} = \frac{\partial X_D}{\partial X_E} x_1, \quad \frac{\partial M_2}{\partial X_E} = \frac{\partial X_D}{\partial X_E} \cdot x_2, \quad \frac{\partial M_3}{\partial X_E} = \frac{\partial X_C}{\partial X_E} \cdot x_3,$$

und ferner aus den beiden statischen Gleichungen a) und b):

$$\frac{\partial X_D}{\partial X_E} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial X_C}{\partial X_E} = -\frac{1}{2};$$

mit diesen Werten erhält man aus Gleichung c):

$$-\frac{1}{2} \int_0^{l-c} X_D x_1^2 dx_1 - \frac{1}{2} \int_{l-c}^l [X_D x_2 - X(x_2 - l + e)] \cdot x_2 dx_2 - \frac{1}{2} \int_0^l X_C x_3^2 dx_3 = 0.$$

Führt man diese Integrale aus, so erhält man in Verbindung mit a) und b):

$$X_C = -X \cdot \frac{e(l-e)(2l-e)}{4l^3}, \quad X_D = X \cdot \frac{e(2l^2 + 3el - e^2)}{4l^3},$$

$$X_E = X \cdot \frac{2l^3 - 3e^2l + e^3}{2l^3}.$$

Der Druck  $X_C$  ist demnach negativ, d. h. er hat die entgegengesetzte Richtung von  $X_D$  und  $X_E$  (die gleiche Richtung wie  $X$ ).

Im dynamischen Kraftplan (Fig. 541c) können dann, sobald  $X$ , der Kulissendruck, bekannt ist, die Drücke in  $D$ ,  $E$  und  $C$  gezeichnet werden; es ist  $X \equiv \overline{0III}$ ,  $X_D \equiv \overline{III'II}$ ,  $X_E \equiv \overline{III}$ ,  $X_C \equiv \overline{I\overline{0}}$  und  $X + X_D + X_E + X_C \equiv 0$ .

Der dynamische Kraftplan. Nun können in Fig. 541c der Reihe nach folgende Gleichgewichtspolygone gezeichnet werden:

Gelenk  $T$ :  $T_T + Q + 7'' + K_7'' + \mathfrak{X} \equiv 0$ ,

worin der Schieberwiderstand  $Q$  vom Ende der Trägheitskraft  $T_T$  nach rechts aufzutragen ist; das Polygon liefert die Spannung  $7''$  und den Führungsdruck  $\mathfrak{X}$ .

Gelenk  $M$ :  $T_M + K_7'' + 7'' + K_7' + 7' + K_8 + 8 \equiv 0$ ,

woraus die Spannungen  $7'$  und  $8$  zu entnehmen sind.  $T_M$  besteht aus  $T_{M7}$  und  $T_{M8}$ .

Gelenk  $\mathfrak{M}$ :  $\mathfrak{M} + 8 + K_8 \equiv 0$ .

Gelenk  $N$ :  $T_N + X + 7' + K_7' \equiv 0$ ,  
 woraus sich der Kulissendruck  $X \equiv \overline{0III}$  in  $N$  ergibt; dadurch sind mit

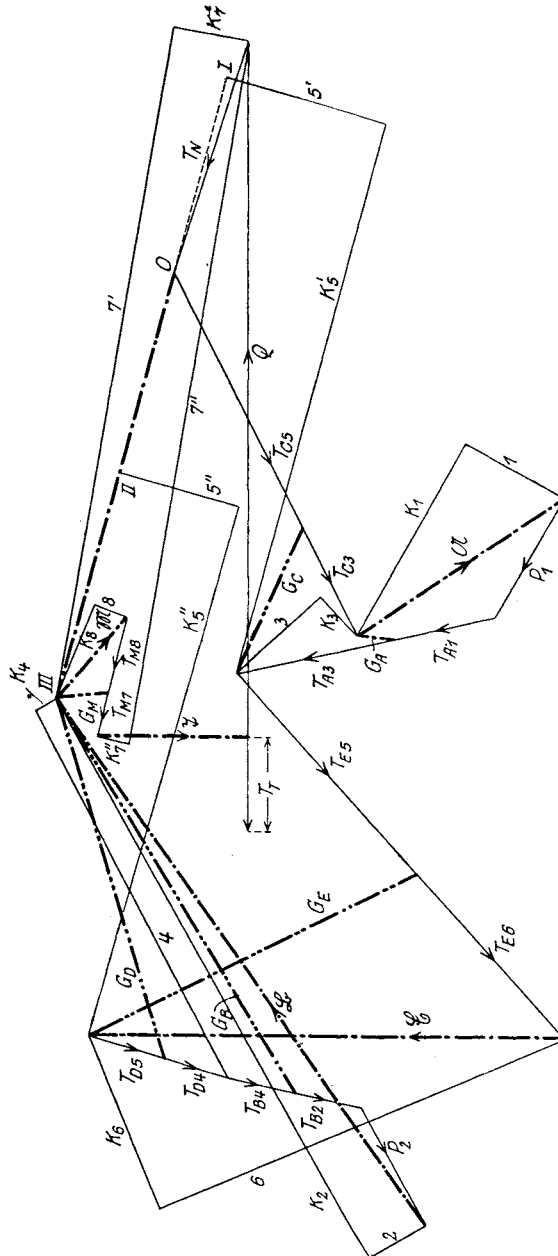


Fig. 541c.

Benützung der früheren Resultate auch die Drücke  $X_D \equiv \overline{IIIII}$ ,  
 $X_E \equiv \overline{III}$ ,  $X_C \equiv \overline{I0}$  bestimmt.

Gelenk  $C$ :  $T_C + K_3 + 3 + K_5' + 5' + X_C \equiv 0$ ,

worin  $T_C \equiv T_{C5} + T_{C3}$  ist; hieraus sind die Spannungen 3 und 5' bestimmt.

Gelenk  $E$ :  $T_E + 6 + K_6 + K_5'' + 5'' + X_E + 5' + K_5' \equiv 0$ ;

hier ist  $T_E \equiv T_{E5} + T_{E6}$ . Das Polygon liefert die Spannungen 6 und 5''.

Gelenk  $D$ :  $T_D + 4 + K_4 + X_D + 5'' + K_5'' \equiv 0$ ,

worin  $T_D \equiv T_{D5} + T_{D4}$  ist; damit ist die Spannung 4 bestimmt (Probe auf Genauigkeit der Zeichnung).

Gelenk  $\mathcal{E}$ :  $\mathcal{E} + K_6 + 6 \equiv 0$ ,

hierdurch ist der Auflagerdruck in  $\mathcal{E}$  bestimmt.

Gelenk  $B$ :  $T_B + P_2 + 2 + K_2 + K_4 + 4 \equiv 0$ ,

womit die Spannung 2 gefunden ist (Probe auf Genauigkeit). Es ist  $T_B \equiv T_{B4} + T_{B2}$ .

Gelenk  $\mathfrak{B}$ :  $\mathfrak{B} + K_2 + 2 \equiv 0$ .

Gelenk  $A$ :  $T_A + 3 + K_3 + K_1 + 1 + P_1 \equiv 0$ ,

dann ist die Spannung 1 gefunden (Probe auf Genauigkeit).

$$T_A \equiv T_{A1} + T_{A3}.$$

Gelenk  $\mathfrak{A}$ :  $\mathfrak{A} + 1 + K_1 \equiv 0$ .

Daß die äußeren Kräfte und die Trägheitskräfte ein Gleichgewichtssystem bilden, beweist schließlich das Polygon:

$$\mathfrak{A} + P_1 + T_A + T_E + \mathcal{E} + T_D + T_B + P_2 + \mathfrak{B} + \mathfrak{M} + T_M + \mathfrak{X} + T_T + Q + T_N + T_C \equiv 0.$$

Die Gelenkdrücke. Von diesen wurden nur einige gezeichnet. Es ist

und auch  $G_A \equiv K_1 + 1 + P_1 + T_{A1} \equiv T_{A3} + 3 + K_3$ .

und auch  $G_B \equiv K_4 + 4 + T_{B4} \equiv T_{B2} + P_2 + 2 + K_2$ .

und auch  $G_C \equiv K_5' + 5' + X_C + T_{C5} \equiv T_{C3} + K_3 + 3$ .

und auch  $G_D \equiv X_D + 5'' + K_5'' + T_{D5} \equiv T_{D4} + 4 + K_4$ .

und auch  $G_E \equiv K_5'' + 5'' + X_E + 5' + K_5' + T_{E5} \equiv T_{E6} + 6 + K_6$ .

und auch  $G_M \equiv K_8 + 8 + T_{M8} \equiv T_{M7} + K_7'' + 7'' + K_7' + 7'$ .

**306. Die Steuerung von Bonjour-Lachaussée.** (Steuerung mit zwei geradlinigen Kulissen.) Diese Dampfmaschinen-Steuerung (Fig. 543) hat zwei Exzenter, die durch die Kurbeln  $A\mathfrak{A}$  (Glied 1) und  $B\mathfrak{B}$  (Glied 2) dargestellt sind. Das erste Exzenter ist in fester Verbindung mit der

Schwungradwelle  $\mathcal{U}$ ; das zweite ist durch einen Achsenregler zu verstellen. Für eine bestimmte Stellung sind beide Exzenter als fest miteinander verbunden anzusehen und bilden dann zusammen ein einziges Glied.

Die Bewegung des Exzenters  $A\mathcal{U}$  überträgt sich durch die Stange  $AC$  (Glied 3) auf die Schwinde  $EC\mathcal{C}$  (Glied 6), an welche in  $E$  die geradlinige Kullisse  $ER$  (Glied 7) angeschlossen ist. Der Kulissenstein ist durch sein Gelenk  $D$  einerseits durch die Stange  $BD$  (Glied 4) an das Exzenter  $B\mathcal{B}$ , andererseits durch die Schwinde  $D\mathcal{C}$  (Glied 5) an den festen Drehpunkt  $\mathcal{C}$  angeschlossen.

Um den festen Drehpunkt  $\mathcal{M}$  schwingt eine zweite geradlinige Kullisse  $S\mathcal{M}M$  (Glied 9), deren Kulissenstein durch das Gelenk  $N$  drehbar mit der ersten Kullisse verbunden ist. Vom Gelenke  $M$  der Kullissenschwinde wird die Bewegung der Triebstange  $MT$  (Glied 11) und der Schieberstange (Glied 12) abgeleitet.

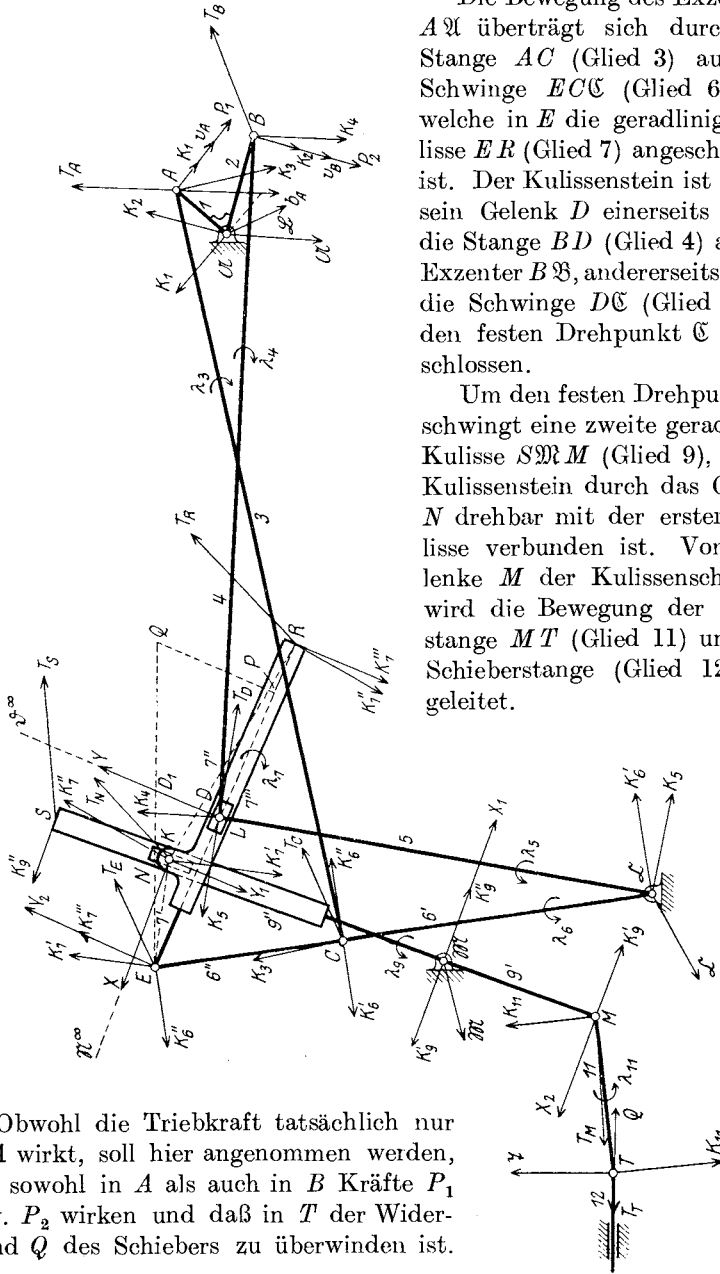


Fig. 543.

Obwohl die Triebkraft tatsächlich nur in  $A$  wirkt, soll hier angenommen werden, daß sowohl in  $A$  als auch in  $B$  Kräfte  $P_1$  bzw.  $P_2$  wirken und daß in  $T$  der Widerstand  $Q$  des Schiebers zu überwinden ist.

Außer diesen Kräften sei die Beschleunigung  $b_A$  des Exzenter-Mittelpunktes  $A$  aus der dynamischen Untersuchung bekannt, ebenso die Massenverteilung sämtlicher bewegter Glieder.

Die Zwangläufigkeit der Steuerung wird auf Grund des Schemas Fig. 544 geprüft. Hier verbindet das festgehaltene Grundglied 0 die Gelenke  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{C}$ ,  $\mathfrak{M}$  mit dem unendlich fernen Gelenk  $\mathfrak{I}^\infty$ , welches die Geradföhrung von  $T$  ersetzt. Das Glied  $AB\mathfrak{A}$  ersetzt die beiden gegeneinander festgestellten Exzenter, das Dreieck  $EC\mathfrak{C}$  die gleichbezeichnete Schwinge. Der Kulissenstein mit dem Gelenke  $D$  ist durch die unendliche Stange  $D\mathfrak{D}^\infty$ , senkrecht zur Kulisse  $ER$ , ersetzt;  $\mathfrak{D}^\infty$  ist ein Punkt dieser Kulisse, die im Schema durch das Dreieck  $EN\mathfrak{D}^\infty$  dargestellt wurde.

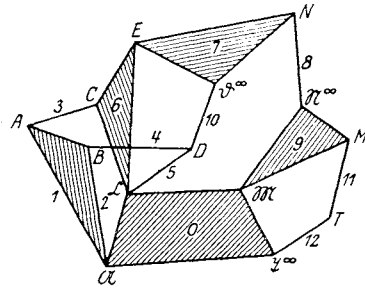


Fig. 544.

Der Kulissenstein mit dem Gelenke  $N$  ist durch die unendliche Stange  $N\mathfrak{N}^\infty$ , senkrecht zur Kulissenschwinge  $MS$ , ersetzt;  $\mathfrak{N}^\infty$  ist ein Punkt dieser Schwinge, die im Schema durch das Dreieck  $M\mathfrak{N}\mathfrak{N}^\infty$  dargestellt wurde.

Im Schema zählt man demnach, nachdem der kreuzende Stab  $BD$  entfernt wurde,  $n = 11$  Glieder (vier Dreiecke, ein Viereck und sechs Stangen) und  $\pi = 4$  veränderliche Polygone; mit  $k = 1$  ist Gleichung 117:

$$x = (n - 2\pi + 2) - k = 4,$$

das Kennzeichen der Zwangläufigkeit, erfüllt.

Nach dem Grüblerschen Kennzeichen ist  $n = 12$  und für die Anzahl der Gelenke  $g = 16$  zu nehmen, da die Gelenke  $\mathfrak{C}$  und  $D$  doppelt zu zählen sind; die Gleichung 124:

$$3n - 2g = 4$$

ist somit ebenfalls erfüllt.

Der Geschwindigkeitsplan. Der Beschleunigungsmaßstab wurde wieder so gewählt, daß die Normalbeschleunigung  $n_A$  durch die Länge der Kurbel  $A\mathfrak{A}$  gemessen wird; dann hat auch  $v_A$  diese Länge. Der Geschwindigkeitsmaßstab in Fig. 543a wurde viermal

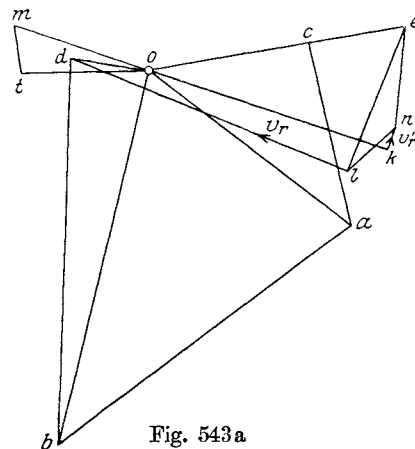


Fig. 543a

(Um  $\pi/2$  gegen Fig. 543 verdreht.)

so groß gewählt; es ist also  $\overline{oa} = 4\overline{A\mathfrak{A}}$ . Aus der Ähnlichkeit  $oab \sim \mathfrak{A}AB$  erhält man den Punkt  $b$ ; sodann aus  $oc \perp \mathfrak{C}C$ ,  $ac \perp AC$

den Punkt  $c$ , aus  $od \perp \mathcal{C}D$ ,  $bd \perp BD$  den Punkt  $d$ . Dann gibt die Ähnlichkeit  $oce \sim \mathcal{C}CE$  den Punkt  $e$ .

Nennt man  $L$  jenen Punkt der Kulisse  $ER$ , der augenblicklich mit  $D$  zusammenfällt, so ist  $el \perp EL$ ; da sich aber die Punkte  $L$  und  $D$  gegeneinander in Richtung der Kulisse  $ER$  verschieben, ist  $dl \parallel ER$ , wodurch  $l$  gefunden ist;  $v_r \equiv \overline{ld}$  ist die relative Geschwindigkeit  $v_{DL}$ .

Aus der Ähnlichkeit  $eln \sim ELN$  ergibt sich nun auch der Geschwindigkeitspunkt  $n$ .

Nennt man  $K$  jenen Punkt der Kulissenschwinge, der augenblicklich mit  $N$  zusammenfällt, so ist  $ok \perp MK$ ; und da sich die Punkte  $K$  und  $N$  gegeneinander in Richtung der Kulisse  $MS$  verschieben,

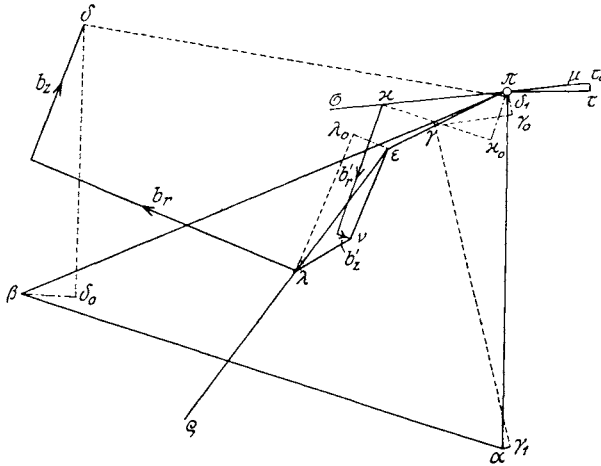


Fig. 543 b.

(Um  $\pi/2$  gegen Fig. 543 verdreht.)

ist  $kn \parallel MS$  oder  $kn \perp ok$ , wodurch der Geschwindigkeitspunkt  $k$  gefunden ist;  $v_r' \equiv \overline{kn}$  ist die relative Geschwindigkeit  $v_{NK}$ .

Endlich folgt der Punkt  $m$  aus der Ähnlichkeit  $mok \sim M\mathcal{M}K$  und sodann aus  $ot \parallel$  Schieber 12,  $mt \perp MT$  der Punkt  $t$ ;  $ot$  ist dann die Geschwindigkeit des Schiebers.

Der Beschleunigungsplan. In Fig. 543 b wurde mit der gegebenen Beschleunigung  $b_A$  begonnen, der Beschleunigungsmaßstab viermal so groß gewählt wie in Fig. 543 und somit  $\overline{\pi a} \equiv 4b_A$  gemacht. Aus der Ähnlichkeit  $\pi a \beta \sim \mathcal{A}AB$  ergibt sich der Punkt  $\beta$ . Sodann wurde konstruiert:

$$\overline{\pi \gamma_0} \equiv n_C = \frac{v_C^2}{C\mathcal{C}} = \frac{\overline{oc}^2}{C\mathcal{C}} \text{ in Richtung } C\mathcal{C},$$

$$\gamma_0 \gamma \perp \pi \gamma_0;$$

$$\overline{\alpha \gamma_1} \equiv n_{CA} = \frac{v_{CA}^2}{CA} = \frac{\overline{ac}^2}{CA} \text{ in Richtung } CA,$$

$\gamma_1\gamma \perp a\gamma_1$ ; der Schnitt von  $\gamma_0\gamma$  mit  $\gamma_1\gamma$  gibt den Punkt  $\gamma$ , woraus die Ähnlichkeit  $\pi\gamma\varepsilon \sim \mathcal{C}CE$  auch den Punkt  $\varepsilon$  liefert.

Ebenso konstruiert man

$$\overline{\pi\delta_1} \equiv n_D = \frac{v_D^2}{D\mathcal{C}} = \frac{\overline{od}^2}{D\mathcal{C}} \text{ in Richtung } D\mathcal{C},$$

$\delta_1\delta \perp \pi\delta_1$ ;

$$\overline{\beta\delta_0} \equiv n_{DB} = \frac{v_{DB}^2}{DB} = \frac{\overline{bd}^2}{DB} \text{ in Richtung } DB,$$

$\delta_0\delta \perp \beta\delta_0$ ; im Schnitte von  $\delta_0\delta$  mit  $\delta_1\delta$  erhält man den Beschleunigungspunkt  $\delta$ .

Um den Beschleunigungspunkt  $\lambda$  zu finden, mache man zunächst

$$\overline{\varepsilon\lambda_0} \equiv n_{LE} = \frac{v_{LE}^2}{LE} = \frac{\overline{el}^2}{LE} \text{ in Richtung } LE,$$

$\lambda_0\lambda \perp \varepsilon\lambda_0$ ; sodann benütze man die Gleichung für das Gesetz von Coriolis (vgl. 203):

$$b_D \equiv b_L + b_r + b_z,$$

worin  $b_D \equiv \overline{\pi\delta}$  und überdies bekannt ist, daß  $b_r$  parallel zur Kulissee  $ER$  ist. Die Zusatzbeschleunigung  $b_z = 2v_r\omega_r$  findet man, indem man  $\overline{DD_1} = \frac{1}{2}\overline{le} \perp ED$  aufträgt,  $E$  mit  $D_1$  verbindet,  $PE = v_r = \overline{ld}$  und  $PQ \perp ED$  zeichnet; dann ist mit Rücksicht auf die gewählten Maßstäbe  $PQ = b_z$  (Fig. 543).

Die Winkelgeschwindigkeit  $\omega_r$  der Kulissee  $ER$  hat die Richtung der Uhrzeigerbewegung; dreht man in diesem Sinne  $v_r$  um  $90^\circ$ , so erhält man die Richtung von  $b_z$ . Nun kann  $b_z$  von  $\delta$  aus gezeichnet und  $b_r$  senkrecht dazu angeschlossen werden; letztere trifft die Gerade  $\lambda_0\lambda$  im Punkt  $\lambda$ .

Aus der Ähnlichkeit  $\varepsilon\lambda\nu \sim ELN$  ist dann auch der Punkt  $\nu$  bekannt.

Ebenso geht man vor, um den Beschleunigungspunkt  $\kappa$  zu finden. Man macht zunächst

$$\overline{\pi\kappa_0} \equiv n_K = \frac{v_K^2}{K\mathfrak{M}} = \frac{\overline{ok}^2}{K\mathfrak{M}} \text{ in Richtung } K\mathfrak{M},$$

$\kappa_0\kappa \perp \pi\kappa_0$ , dann liegt  $\kappa$  auf dieser Senkrechten. Ferner ist nach dem Gesetze von Coriolis die Beschleunigung

$$b_N \equiv b_K + b_r' + b_z',$$

worin  $b_N \equiv \overline{\pi\nu}$  bereits bekannt ist und  $b_r'$ , die relative Beschleunigung von  $N$  gegen  $K$  die Richtung der Kulissenschwinde  $MS$  hat. Die Zusatzbeschleunigung  $b_z' = 2v_r'\omega_r$  wird ebenso wie früher  $b_z$  gefunden.

Trägt man  $b_z'$  von  $\nu$  aus auf und schließt  $b_r'$  daran, so schneidet diese Beschleunigung die Gerade  $\kappa_0\kappa$  im gesuchten Beschleunigungspunkt  $\kappa$ .

Aus den Ähnlichkeiten  $\varepsilon\lambda\rho \sim ELR$  und  $\mu\pi\kappa\sigma \sim M\mathfrak{M}KS$  findet man die Punkte  $\rho$ ,  $\mu$  und  $\sigma$ . Endlich zeichnet man noch

$$\overline{m\tau_0} \equiv n_{TM} = \frac{v_{TM}^2}{TM} = \frac{\overline{mt}^2}{TM} \text{ in Richtung } TM,$$



$\tau_0 \tau \perp \mu \tau_0$ ; im Schnitte mit der Schieberichtung durch  $\pi$  erhält man den Punkt  $\tau$ .

Die Ersatzmassen und Trägheitskräfte. Die Massen der bewegten Glieder wurden nach dem Schwerpunktsesetze auf die Gelenke verteilt. Dabei wurde die Schwinge  $ECC$  (Glieder 6) in die beiden Teile  $CC$  (Glieder 6') und  $EC$  (Glieder 6'') getrennt und jeder Teil für sich behandelt. Ebenso wurde die Kulissenschwinge  $MNS$  (Glieder 9) in die beiden Teile  $MN$  (Glieder 9') und  $NS$  (Glieder 9'') getrennt. Die Kulisse  $ER$  wurde durch das starre Dreiecksglied  $ENR$ , d. h. durch die drei Stäbe  $EN$  (7'),  $NR$  (7'') und  $ER$  (7''') ersetzt.

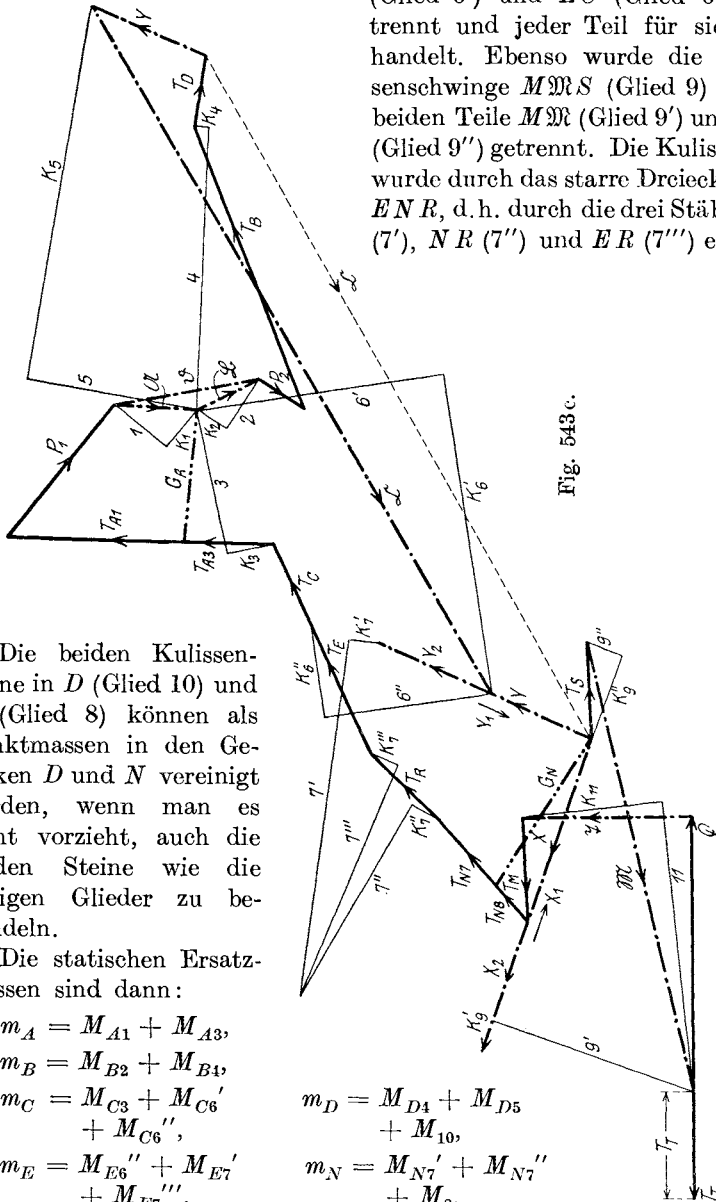


Fig. 543 c.

Die beiden Kulissensteine in  $D$  (Glieder 10) und  $N$  (Glieder 8) können als Punktmassen in den Gelenken  $D$  und  $N$  vereinigt werden, wenn man es nicht vorzieht, auch die beiden Steine wie die übrigen Glieder zu behandeln.

Die statischen Ersatzmassen sind dann:

$$m_A = M_{A1} + M_{A3},$$

$$m_B = M_{B2} + M_{B4},$$

$$m_C = M_{C3} + M_{C6'} + M_{C6''},$$

$$m_E = M_{E6''} + M_{E7'} + M_{E7'''}.$$

$$m_D = M_{D4} + M_{D5} + M_{10},$$

$$m_N = M_{N7'} + M_{N7''} + M_8.$$

$$\begin{aligned} m_K &= M_{R7}'' + M_{R7}''', & m_S &= M_{S9}'', \\ m_M &= M_{M9}' + M_{M11}, & m_T &= M_{T11} + M_{12}. \end{aligned}$$

Sodann können die Trägheitskräfte dieser Ersatzmassen  $T_A \equiv -m_A b_A$ ,  $T_B \equiv -m_B b_B$  usw. entgegengesetzt den Beschleunigungen angebracht werden.

Die Winkelbeschleunigungen  $\lambda$  wurden in schon wiederholt erklärter Art (vgl. 302) bestimmt und ihr Drehungssinn in Fig. 543 eingezeichnet.

Bezüglich der Paare  $K$  der Trägheitskräfte möge auf 302 zurückverwiesen werden (vgl. auch XXVI).

Die Kulissendrucke. Der Kulissendruck  $X$  zwischen der Kulissenschwinge  $MS$  und dem Steine bei  $N$  wird im dynamischen Kraftplan bestimmt werden; er wird in  $\mathfrak{M}$  und  $M$  Drücke  $X_1$  und  $X_2$  erzeugen, die als Auflagerdrücke der Kulissenschwinge angesehen werden dürfen; es ist

$$X + X_1 + X_2 = 0.$$

Der Kulissendruck  $Y$  zwischen der Kulissee  $ER$  und dem Steine bei  $D$  wird ebenso in  $N$  und  $E$  parallele Auflagerdrücke  $Y_1$  und  $Y_2$  hervorrufen; auch hier ist

$$Y + Y_1 + Y_2 = 0.$$

Die Größen von  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $Y_1$ ,  $Y_2$  werden aus  $X$  und  $Y$  wie in der Statik zu bestimmen sein.

Der dynamische Kraftplan. In Fig. 543c wurden der Reihe nach folgende Gleichgewichtspolygone gezeichnet:

Gelenk  $A$ :  $T_A + P_1 + 1 + K_1 + 3 + K_3 \equiv 0$

liefert die Spannungen 1 und 3.

Gelenk  $B$ :  $T_B + K_4 + 4 + K_2 + 2 + P_2 \equiv 0$

liefert die Spannungen 2 und 4.

Die Polygone für die Gelenke  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$

$$\mathfrak{A} + K_1 + 1 \equiv 0, \quad \mathfrak{B} + 2 + K_2 \equiv 0$$

liefern die Auflagerdrücke  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$ ; ihre geometrische Summe  $\mathfrak{D} \equiv \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$  ist der gesamte Auflagerdruck der Kurbelwelle.

Gelenk  $D$ :  $T_D + Y + K_5 + 5 + 4 + K_4 \equiv 0$

gibt die Spannung 5 und den Kulissendruck  $Y$ , wodurch auch  $Y_1$  und  $Y_2$  bestimmt sind.

Gelenk  $C$ :  $T_C + K_3 + 3 + 6' + K_6' + 6'' + K_6'' \equiv 0$ ,

woraus die Spannungen  $6'$  und  $6''$  zu ermitteln sind, denn  $6''$  muß durch den Endpunkt von  $Y$  gehen (siehe Gelenk  $E$ ).

Gelenk  $\mathfrak{C}$ :  $\mathfrak{C} + K_6' + 6' + 5 + K_5 \equiv 0$ ,

womit Richtung und Größe des Auflagerdruckes  $\mathfrak{C}$  bestimmt ist.

Gelenk  $E$ :  $T_E + K_6'' + 6'' + Y_2 + K_7' + 7' + 7''' + K_7''' \equiv 0$

gibt die Spannungen  $7'$  und  $7'''$ .

Der Endpunkt  $R$  der Kulissee  $ER$  gibt:

$$T_R + K_7''' + 7''' + 7'' + K_7'' = 0,$$

woraus sich die Spannung  $7''$  ergibt (Probe für die Genauigkeit der Konstruktion).

Gelenk  $N$ :  $T_N + K_7'' + 7'' + 7' + K_7' + Y_1 + X = 0$

liefert den Kulissendruck  $X$  in  $N$  (Probe).

Endpunkt  $S$  der Kulissenschwinge  $MS$ :

$$T_S + 9'' + K_9'' = 0$$

gibt die Spannung  $9''$  (Probe).

Gelenk  $M$ :  $T_M + X_2 + K_9' + 9' + 11 + K_{11} = 0$ ;

da  $X_2$  aus  $X_i$  auf statischem Wege bereits bestimmt wurde, liefert dieses Polygon die Spannungen  $9'$  und  $11$ .

Gelenk  $\mathfrak{M}$ :  $\mathfrak{M} + 9' + K_9' + X_1 + K_9'' + 9'' = 0$ ;

da  $X + X_1 + X_2 = 0$  ist, gibt dieses Polygon die Größe und Richtung des Auflagerdruckes  $\mathfrak{M}$ .

Gelenk  $T$ :  $T_T + Q + \mathfrak{X} + K_{11} + 11 = 0$ ;

dieses Polygon liefert endlich den Führungsdruck  $\mathfrak{X}$  (Probe).

Damit sind sämtliche Spannungen, Kulissendrucke, Auflager- und Führungsdrucke bestimmt.

Das d'Alembertsche Prinzip vom Gleichgewicht zwischen den äußeren Kräften und den Trägheitskräften findet seinen Ausdruck in dem geschlossenen Polygon:

$$T_A + P_1 + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + P_2 + T_B + T_D + \mathfrak{C} + T_S + \mathfrak{M} + \\ + T_T + Q + \mathfrak{X} + T_M + T_N + T_R + T_E + T_C = 0.$$

Die Gelenkdrücke. Von diesen sollen nur zwei bestimmt werden, da die übrigen in der gleichen Weise ermittelt werden können.

Es ist in Fig. 543c der Gelenkdruck in  $A$

$$G_A = T_{A1} + P_1 + 1 + K_1$$

und auch  $= 3 + K_3 + T_{A3}$ .

Der Gelenkdruck im Kulissenstein  $N$  ist

$$G_N = T_{N7} + K_7'' + 7'' + 7' + K_7' + Y_1$$

und auch  $= X + T_{N8}$ .

Literatur. Die Steuerung von Bonjour-Lachaussée wurde in *The Engineer*, 1905, S. 84 mitgeteilt.

Hans Götz gab in seiner Dissertation: „Theoretische Untersuchung einer B.-L.-Dampfmaschine auf Massendruck der Steuerung und Resonanz des Regulators“, Berlin 1910, eine graphische Untersuchung dieser Steuerung; es wird eine konstante Geschwindigkeit des Kurbelzapfens angenommen und das Getriebe in einzelne Teilgetriebe zerlegt, von denen jedes gesondert behandelt wird. Von Geschwindigkeitsplänen,

Beschleunigungsplänen und dynamischen Kraftplänen wurde kein Gebrauch gemacht.

**307. Aufgaben.** Bei den folgenden Steuerungen sind als gegeben zu betrachten: die äußeren Kräfte  $P$  und  $Q$  (Triebkraft und Widerstand), die Massenverteilung in sämtlichen Gliedern und die Beschleunigung des Punktes  $A$ ; man bestimme: a) ob die Steuerung zwangsläufig ist; b) die Spannungen in sämtlichen Gliedern; c) die Gelenkdrücke in sämtlichen bewegten Gelenken; d) die Auflager- und Führungsdrücke; e) die Kulissendrucke.

135. Die Hackworth-Steuerung (Fig. 545).  $K\mathcal{A}$  ist die Kurbel, an deren Gelenk  $K$  die Triebkraft  $P$  der Steuerung wirkt;  $A$  ist

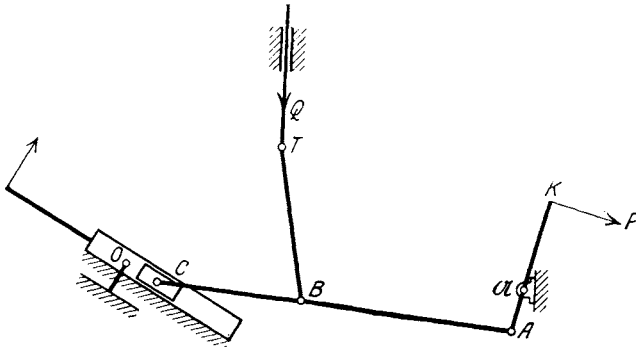


Fig. 545.

der Mittelpunkt des Exzenters,  $AC$  die Exzenterstange,  $BT$  der Lenker,  $Q$  der Widerstand in der Schieberstange. Das Gelenk  $C$  wird in einer geradlinigen Kulisse geführt, die bei der Regulierung um den festen Punkt  $O$  gedreht wird, deren Stellung aber als fest anzusehen ist. (E. A. Brauer, Verh. d. Ver. z. Bef. d. Gewerbfl. 1877, H. Ebbs, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1885.)

136. Die Joy-Steuerung (Fig. 546). Bei dieser für Straßenbahn-Lokomotiven im Auslande häufig angewendeten Steuerung ist  $\mathcal{A}ABP$  das Schubkurbelgetriebe mit der Triebkraft  $P$ ,  $MNS$  eine Verbindungsstange der Lenker  $AB$  und  $ST$ ,  $Q$  der Widerstand der Schieberstange;  $N$  ist in einem Kulissenstein gelagert. Die

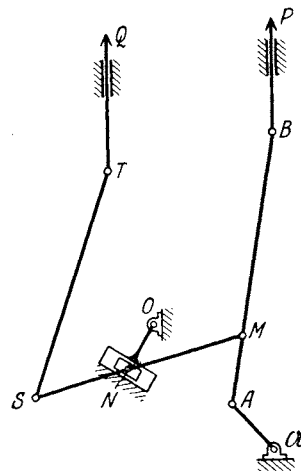


Fig. 546.

geradlinige Kulisse ist für Regulierungszwecke um den festen Punkt  $O$  drehbar, muß aber für eine bestimmte Stellung als fest angesehen werden. (H. Ebbs, a. a. O.)

137. Die Gooch-Steuerung (Fig. 547). Auf der Welle  $\mathfrak{U}$  sind zwei Exzenter aufgekeilt, die durch die Kurbeln  $A\mathfrak{U}$ ,  $B\mathfrak{U}$  dargestellt sind; sie liegen symmetrisch zur Kurbel  $K\mathfrak{U}$ , mit der sie fest ver-

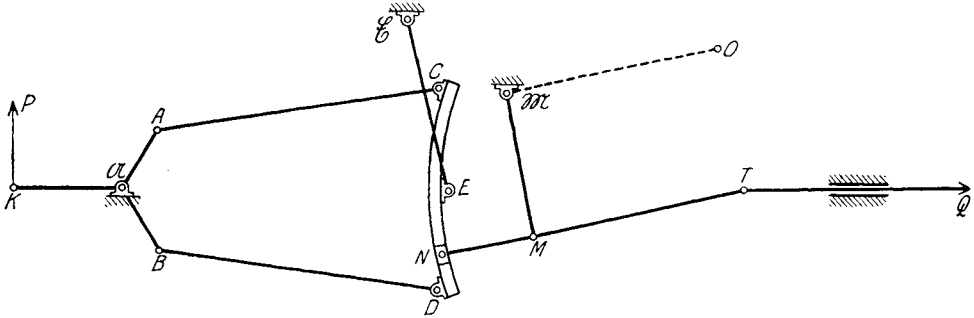


Fig. 547.

bunden sind und an der die Triebkraft  $P$  wirkt. Die gleichlangen Exzenterstangen  $AC$  und  $BD$  sind an die Kreisbogen-Kulisse  $CD$  gelenkig angeschlossen, die in  $E$  von der Schwinge  $E\mathfrak{C}$  geführt wird. Der Kulissenstein ist in  $N$  gelenkig mit dem Lenker  $NMT$  verbunden, der in  $T$  die Schieberstange bewegt und den Widerstand  $Q$  überwindet; andererseits ist  $M$  an die Schwinge  $M\mathfrak{M}$  angeschlossen.  $\mathfrak{M}$  ist durch einen Hebel  $\mathfrak{M}O$  verstellbar; für eine bestimmte Stellung der Steuerung ist  $\mathfrak{M}$  als festliegendes Gelenk aufzufassen. (Organ f. d. Fortschr. d. Eisenbahnwesens 1854, S. 76.)

138. Die Fink-Steuerung (Fig. 548).  $K\mathfrak{U}$  ist die Kurbel mit der Triebkraft  $P$ ,  $A$  der Mittelpunkt des Exzenters; in  $A$  ist die

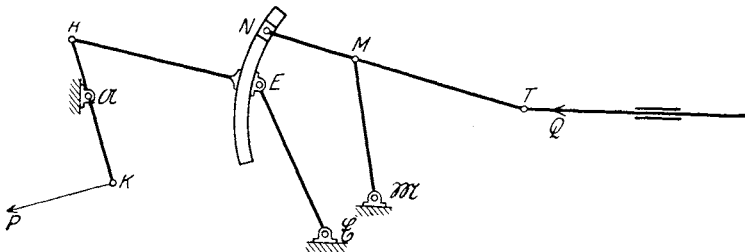


Fig. 548.

krummlinige Kulisse gelenkig angeschlossen; die Mitte  $E$  der Kulisse wird durch die Schwinge  $E\mathfrak{C}$  um  $\mathfrak{C}$  geführt. Der Kulissen-

stein ist durch das Gelenk  $N$  mit dem Lenker  $NMT$  verbunden, dessen Ende  $T$  die Schieberstange bewegt. In  $M$  wird der Lenker durch die Schwinge  $M\mathfrak{N}$  um  $\mathfrak{N}$  geführt.  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{N}$  sind als festliegend anzusehen. (Zeitschr. d. Österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1858, S. 81.)

139. Die Heusinger-Steuerung (Fig. 549).  $A\mathfrak{A}$  ist die Kurbel,  $AL$  die Triebstange,  $B\mathfrak{A}$  das mit der Kurbel starr verbundene

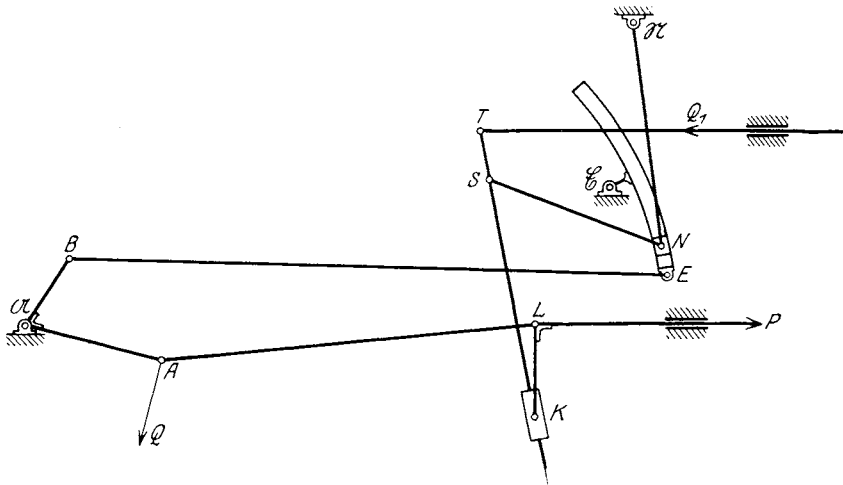


Fig. 549.

Exzenter,  $BE$  die Exzenterstange, die in  $E$  mit der Kulisse gelenkig verbunden ist.  $\mathfrak{E}$  ist der feste Drehpunkt der Kulisse. In  $L$  ist der Arm  $LK$  mit der Pleuellagerung  $LP$  starr verbunden; um  $K$  dreht sich eine Hülse, durch welche die Stange  $ST$  gleiten kann; in  $N$  ist die Stange  $SN$  mit dem Pleuellagerstein gelenkig verbunden und in  $T$  setzt die Schieberstange mit dem Widerstande  $Q_1$  ein. Endlich wird das Gelenk  $N$  durch die Schwinge  $N\mathfrak{N}$  geführt;  $\mathfrak{N}$  ist verstellbar, jedoch für eine bestimmte Stellung der Steuerung als fest zu betrachten. (Organ f. d. Fortschr. d. Eisenbahnwesens 1854, S. 90 und 1866, S. 221.)

## B. Die Bewegung in der Zeit.

### XXIX. Die zeitliche Bewegung eines Punktes.

**308. Die Bahn.** Wenn wir vermögen, den augenblicklichen Bewegungszustand eines Punktes (I.) für alle aufeinander folgenden kleinen Zeitteilchen eines bestimmten Zeitabschnittes festzustellen, so können wir sagen, daß uns die zeitliche Bewegung dieses Punktes oder seine Bewegung während dieses Zeitabschnittes bekannt ist. Wir werden aber dann nicht nur Geschwindigkeit und Beschleunigung des Punktes in allen Zeitteilchen angeben müssen, sondern auch die Lage, die der Punkt in diesen Zeitteilchen einnimmt. Dies ist aber eine Erkenntnis, die über den augenblicklichen Bewegungszustand hinausreicht und einen neuen Begriff in die Untersuchung der Bewegung einfügt: die Bahn des Punktes.

Man versteht darunter die Aufeinanderfolge aller Orte, die der Punkt während seiner Bewegung einnimmt; die Bahn ist demnach nichts real Bestehendes, sondern eine Vorstellung, die das Nacheinander durch das Gleichzeitige ersetzt. Man erkennt dies sehr leicht an einem Beispiel: an der Kurve, die ein leuchtender Punkt erblicken läßt, den man im Dunkel rasch bewegt. Trotzdem die Bahn nichts Reales ist, erblickt man sie hier, da sie durch die anhaltende Reizung der Netzhaut unseres Auges ein scheinbares Dasein führt.

**309. Freie und gezwungene Bewegung.** Ist der Punkt einzig und allein den beschleunigenden oder verzögernden Kräften, wie z. B. der Schwerkraft, anderen Anziehungskräften, dem Luftwiderstande usw., unterworfen, ohne jedoch irgend einer Beschränkung seiner Bewegung ausgesetzt zu sein, so spricht man von der freien Bewegung des Punktes. In diesem Falle ist seine Bahn nur die Folge jener Kräfte und des anfänglichen Bewegungszustandes; sie ist infolgedessen nicht im voraus bekannt und muß erst nach den Regeln der Mechanik gesucht werden.

Dies kann analytisch oder graphisch geschehen. Mit der analytischen Bestimmung der Gleichung der Bahn beschäftigt sich die analytische Mechanik. Die Methode hierzu wird in allen Lehrbüchern der Mechanik gelehrt.

Weniger geübt ist die graphische Lösung der Aufgabe, die freie Bahn eines Punktes aus dessen Anfangsgeschwindigkeit und dem Beschleunigungsgesetz zu bestimmen. Man sehe hierüber: R. Pröll, Graphische Dynamik, und Lord Kelvin, On Graphic Solution of Dynamical Problems 1892, Phil. Mag. 34, S. 443.

Ist jedoch der Punkt bei seiner Bewegung gewissen Beschränkungen ausgesetzt oder Bedingungen unterworfen, die ihn an seiner freien Bewegung hindern, so spricht man von einer vorgeschriebenen oder Zwangs-Bewegung. Dies tritt u. a. ein, wenn der Punkt genötigt wird, an bestimmten Kurven oder Flächen zu gleiten, oder wenn er mit anderen bewegten Punkten durch starre oder elastische Stäbe verbunden ist.

In dieser Lage befindet sich z. B. jeder Punkt eines bewegten Körpers, jedes Gelenk einer kinematischen Kette usw.

Schon daraus geht hervor, daß alle Punktbewegungen, in der Natur sowohl wie besonders im Maschinenbau, Zwangsbewegungen sind; nur in ganz vereinzelt Fällen, wie bei der Bewegung der Molekeln eines Gases, beim Wurf im luftleeren oder luftgefüllten Raum können unter gewissen Annahmen und Vereinfachungen die Bewegungen der Punkte als freie aufgefaßt werden.

Diese Bemerkung wird es begreiflich erscheinen lassen, wenn wir unser Interesse ausschließlich den Zwangsbewegungen zuwenden und die freie Bewegung nur als Vorbereitung zu jenen behandeln.

Bei der Bewegung eines zwangsläufigen Getriebes ist die Bahn jedes Punktes im vorhinein als feststehend anzusehen. Man kann sie, wenn es notwendig ist, Punkt für Punkt konstruieren, auch wenn man von den übrigen Bewegungsgrößen: Zeit, Geschwindigkeit, Beschleunigung noch gar nichts aussagen kann. Sie ist deshalb, auch wenn sie nicht konstruiert ist, als etwas Gegebenes, Vorgeschriebenes anzusehen. Wir werden später sehen, daß man die dynamische Untersuchung eines solchen Getriebes durchführen kann, ohne vorerst die Bahnen der Punkte aufzeichnen zu müssen. Im übrigen ist die Bewegung eines Punktes auf vorgeschriebener Bahn der graphischen Untersuchung leichter zugänglich als die freie Bewegung. Denn wenn die Bahn des Punktes  $A$  gegeben ist, kann an jeder ihrer Stellen der in die Bewegungsrichtung fallende Anteil der Kraft, die Tangentialkraft und damit auch die Tangentialbeschleunigung  $t_A$  durch Projektion der Kraft auf die Richtung der Bewegung bestimmt werden. Wickelt man dann den Weg  $s$  des Punktes  $A$  auf einer Geraden  $Os$  ab, so wird das Problem der Zwangsbewegung des Punktes auf jenes der geradlinigen Bewegung mit bekannter Beschleunigung  $t_A$  zurückgeführt.

Stellt man die zusammengehörigen Größen von  $s$  und  $t_A$  als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes dar, so erhält man für die fortlaufende Bewegung ein Schaubild, ein orthogonales Diagramm, aus dem heraus alle übrigen Bewegungsgrößen, so insbesondere die Geschwindig-



keit, die Zeit, die Arbeit, die Bewegungsenergie usw. entnommen werden können, wie in den Abschnitten XXXI und XXXII gezeigt werden wird.

Bezüglich der Konstruktion der Zwangsbewegung sehe man auch: R. Pröll, Graphische Dynamik, S. 87.

**310. Größe des Zwanges.** Unter den Fragen, die bei der vorgeschriebenen Bewegung eines Punktes auftauchen, ist die nach der Größe des Zwanges eine der wichtigsten. Unter *Z w a n g* versteht man die Kraft oder den Druck, den die vorgeschriebene Bahn auf den bewegten Punkt ausüben muß, um ihn an sich zu binden.

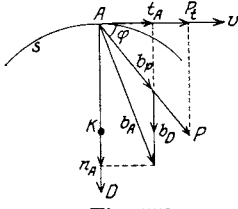


Fig. 550.

Ist *s* die vorgeschriebene Bahn (Fig. 550), *A* die Lage des Punktes zur Zeit *t*, *P* die ihn bewegende Kraft, *b<sub>P</sub>* deren Beschleunigung, *v* die Geschwindigkeit, so wird sich der Zwang der als glatt vorausgesetzten Bahn als ein Druck *D* äußern, der normal zu *s* auftreten wird. Wenn

*b<sub>D</sub>* die Beschleunigung dieses Zwanges ist, so erfährt der Punkt *A* die Gesamtbeschleunigung  $b_A = b_P + b_D$ .

Nun ist aber nach Gleichung 6:

$$b_A = n_A + t_A,$$

worin

$$n_A = \frac{v^2}{\rho}, \quad t_A = \frac{dv}{dt}$$

und  $\rho = \overline{AK}$  der Krümmungshalbmesser von *s* in *A* ist. Aus der Figur folgt:

$$n_A = b_P \sin \varphi + b_D,$$

somit der Zwang:  $D = mb_D = m(n_A - b_P \sin \varphi)$  oder

$$D = \frac{mv^2}{\rho} - P \sin \varphi \quad \dots \dots \dots 142)$$

Die Ermittlung der Geschwindigkeit erfolgt genau so, als ob die Bahn eine freie wäre, solange kein Widerstand in der Bewegungsrichtung auftritt; es ist nämlich

$$t_A = b_P \cos \varphi = \frac{P}{m} \cos \varphi = \frac{dv}{dt}$$

Es gibt Stellen der vorgeschriebenen Bahn, an denen der Zwang *D* verschwindet; an diesen Stellen wird, falls ein Abwenden des Punktes von der Bahn unmöglich gemacht wird, das Vorzeichen von *D* sich ändern, es tritt Druckwechsel ein.

**311. Das Wesen der Diagramme.** Während die analytische Dynamik die Bewegungsvorgänge durch Gleichungen zwischen den Bewegungsgrößen zu schildern sucht, ersetzt die graphische Dynamik diese Gleichungen durch Schaulinien oder Diagramme.

Das Diagramm gibt ein anschauliches Bild der Veränderung der einen Bewegungsgröße mit einer anderen, z. B. der Veränderung der Geschwindigkeit mit der Zeit — oder der Veränderung der Kraft mit dem Wege.

Diese Art, den Verlauf einer Erscheinung durch eine stetige Kurve darzustellen, hat sich heute in allen Wissenschaften, noch mehr vielleicht im praktischen Leben eingebürgert. Die Physiologie bedient sich z. B. des Diagrammes, um das Schwanken des Blutdrucks in den Adern oder die Ermüdung eines Muskels im Verlaufe der Zeit durch fortlaufende Kurven darzustellen.

Eine sehr schöne Verwendung der kinematischen Diagramme bei der Untersuchung der Bewegung des Schwerpunkts des menschlichen Körpers hat O. Fischer gemacht. (Vgl. Der Gang des Menschen, II. Teil: Die Bewegung des Gesamtschwerpunkts und die äußeren Kräfte, Abhandlungen der math. phys. Klasse der sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, 25. Bd., 1899.) In dieser Arbeit werden aus den Diagrammen der Schwerpunktsbewegung die Geschwindigkeits- und Beschleunigungsdiagramme des Schwerpunkts abgeleitet.

Der Statistiker schildert mit Hilfe eines Diagramms die Zu- und Abnahme der Bevölkerungszahl im Laufe der Jahre. Wie sehr sich die Nationalökonomien und Ingenieure zur Klarstellung wirtschaftlicher Verhältnisse der Diagramme bedienen, beweist jede der vielen Ausstellungen unserer Zeit, in denen die Schaulinien eine so hervorragende Rolle spielen. Auch soll an die Wichtigkeit der Fahrdiagramme der Bahnen für den Betrieb sowohl wie für den Entwurf erinnert werden.

Das Wesen des Diagramms ist seit langem bekannt; die Darstellung einer Kurve durch die Koordinaten ihrer Punkte durch Descartes ist vielleicht die erste bewußte Aufzeichnung einer Schaulinie gewesen.

Gewöhnlich begnügt man sich mit der Darstellung der Veränderung zweier Größen, die durch eine ebene Kurve anschaulich gemacht wird. Dies geschieht entweder durch Konstruieren einer möglichst großen Anzahl ihrer Punkte, also durch Zeichnung, oder mit Hilfe eines Instrumentes, das die Kurve selbsttätig und stetig aufzeichnet, ohne eine Konstruktion nötig zu machen.

Es gibt zahlreiche Instrumente, welche diesem Zwecke dienen und die Schaulinien automatisch aufzeichnen. So gibt es u. a. bei den modernen Festigkeitsmaschinen sinnreiche Einrichtungen, welche das Diagramm zwischen Spannung und Dehnung selbsttätig aufzeichnen. Andere Instrumente gestatten die Aufnahme der Diagramme des Luftdruckes, der Windgeschwindigkeit, der Temperatur, des Wasserstandes usw. in Abhängigkeit von der Zeit. Das dem Ingenieur am nächsten liegende Instrument dieser Art ist wohl der Dampfdruckmesser oder Indikator. Auf andere solche Einrichtungen soll später zurückgekommen werden.

In letzter Zeit hat sich das Bestreben geltend gemacht, auch die gleichzeitige Veränderung dreier Größen voneinander zeichnerisch darzustellen. Dann wird der Verlauf einer Fläche durch Angabe ihrer ebenen Schnitte parallel zu den Koordinaten-Ebenen geschildert, was

durch Aufzeichnung eines aus drei Achsen bestehenden Achsenkreuzes in schiefer Projektion geschieht.

Dieses Verfahren benützt u. a. O. Lasche für die Darstellung der Reibungsverhältnisse in Lagern mit hoher Umfangsgeschwindigkeit (Mitteil. über Forschungsarb. Heft 9), um räumliche Diagramme zwischen der Reibungszahl, der Zapfengeschwindigkeit und der Lagertemperatur zu zeichnen; ferner A. Neumann in „Die Reibungsverhältnisse in Spurzapfenlagern“, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1918, S. 573, für räumliche Diagramme zwischen der Reibungszahl, dem Druck und der Geschwindigkeit.

Auch W. Zahn, „Zur Theorie der Bandagen-Schwungräder“, Verh. d. Ver. z. Bef. d. Gewerbl. 1908, S. 491 und C. Schmid, „Die Luftschraube am Stand“, Zeitschr. f. Motorluftsch. u. Flugt. 1915, S. 56 benützen räumliche Diagramme.

Man findet auch in diesem Buche in Fig. 729 und 731 von solchen Diagrammen Gebrauch gemacht, um die Beziehungen zwischen dem Wege  $s$  des Reduktionspunktes eines Getriebes, dessen reduzierter Masse  $\mathfrak{M}$  und der Bewegungsenergie  $L$  anschaulich zu machen.

Ein konstruktiver Wert kommt solchen Schaubildern vorläufig noch nicht zu, da es sich bei ihnen nur um eine plastische Darstellungsmethode handelt.

**312. Bewegungs-Diagramme.** Man unterscheidet sie in kinematische und dynamische Diagramme, je nachdem sie nur die Größen der kinematischen Bewegungslehre: Zeit, Weg des Punktes, Geschwindigkeit und Beschleunigung zur Anschauung bringen — oder auch die Größen der Dynamik: Kraft, Masse, Arbeit und Bewegungs-Energie.

Eine andere Unterscheidung der Diagramme entsteht nach der Art, wie wir die Schaulinie in Beziehung bringen zur tatsächlichen Bewegung. Wir sprechen dann von örtlichen oder lokalen Diagrammen, wenn sie an den bewegten Punkt selbst angezeichnet werden, zum Unterschiede von jenen, die in einer Nebenfigur gezeichnet werden. Diese unterscheiden wir wieder in polare und orthogonale Diagramme. Wir behalten uns vor, die letzteren ihrer Wichtigkeit wegen in einem eigenen Abschnitte zu besprechen und wollen vorläufig nur einige Eigenschaften der lokalen und polaren Schaulinien behandeln.

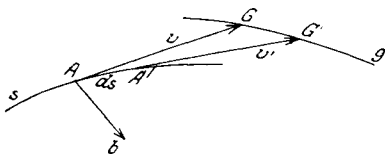


Fig. 551.

**313. Die Hodographen.** Es sei in Fig. 551  $s$  die freie oder vorgeschriebene Bahn eines Punktes  $A$ ,  $AA' = ds$  ein kleines Teilchen dieser Bahn,  $\overline{AG} = v = \frac{ds}{dt}$  die nach einem bestimmten Maßstabe aufgetragene Geschwindigkeit,  $\overline{A'G'} = v'$  dasselbe

für den benachbarten Punkt  $A'$ ,  $b$  die Beschleunigung des Punktes  $A$ .

Führt man diese Zeichnung für alle Lagen des Punktes  $A$  während seiner Bewegung aus, so erfüllen die Punkte  $G, G' \dots$  eine stetige Kurve

$g$ , die als lokale Geschwindigkeitskurve oder lokaler Hodograph bezeichnet wird. Trägt man hingegen die Geschwindigkeiten  $v, v' \dots$  nicht von den Lagen  $A, A' \dots$  des Punktes, sondern alle von einem und demselben beliebig angenommenen Punkt  $o$  auf, d. h. ist  $\overline{oa} \equiv v, \overline{oa'} \equiv v'$  usf. (Fig. 551a), so erfüllen die Punkte  $aa' \dots$  ebenfalls eine stetige Kurve  $u$ , die polare Geschwindigkeitskurve oder polarer Hodograph heißt.

Es ist  $v' \equiv v + du$ , worin  $du \equiv \overline{aa'}$  die Veränderung der Geschwindigkeit  $v$  bedeutet

$$\text{und} \quad \frac{du}{dt} = b$$

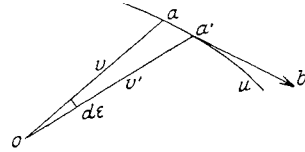


Fig. 551 a.

die Beschleunigung des Punktes  $A$  ist. (Vgl. 4, Fig. 3 und 3a.) Daraus folgen die Sätze:

I. Die Tangente des polaren Hodographen im Punkte  $a$  hat die Richtung der Beschleunigung des entsprechenden Punktes  $A$ ; und:

II. Die Geschwindigkeit, mit der der Punkt  $a$  den Hodographen  $u$  beschreibt, ist die Beschleunigung des Punktes  $A$  auf seiner Bahn  $s$ .

Folgende Eigenschaften des polaren Hodographen sollen erwähnt werden:

III. Liegt der Pol  $o$  auf dem Hodographen  $u$  selbst, so hat der entsprechende Punkt  $O$  auf der Bahn  $s$  die Geschwindigkeit null; der Punkt kehrt dann seine Bewegung um.

IV. Berührt der Hodographenstrahl  $oa$  den Hodographen  $u$ , so fallen in dem entsprechenden Punkte  $A$  Geschwindigkeit und Beschleunigung in dieselbe Gerade; dann ist die Beschleunigung  $b$  gleichzeitig auch die Tangentialbeschleunigung und die Normalbeschleunigung  $n = \frac{v^2}{\rho}$  ist null, also  $\rho = \infty$ ; der Punkt  $A$  beschreibt einen Wendepunkt seiner Bahn.

V. Steht der Hodographenstrahl  $oa$  normal zum Hodographen  $u$ , so steht im entsprechenden Punkte  $A$  die Beschleunigung  $b$  senkrecht zur Tangentialbeschleunigung, die somit null ist; aus  $dv = 0$  folgt aber, daß die Geschwindigkeit  $v$  von  $A$  einen größten oder kleinsten Wert annimmt.

Der Gedanke des polaren Hodographen stammt von A. F. Möbius, Mechanik des Himmels, 1843, und wurde von ihm zur Untersuchung der Planetenbewegung verwendet. Der Name rührt von W. R. Hamilton, Elements of Quaternions, 1846, her.

Vgl. auch O. Gerlach, „Zur Theorie des Hodographen“, Dissertation Rostock 1889 und H. Alt, „Zur Theorie der Geschwindigkeits- und Beschleunigungspläne einer kompl. bewegten Ebene“, Dissertation Dresden 1914.

**314. Konstruktion der Beschleunigung.** Um aus dem Hodographen die Größe der Beschleunigung  $b$  zu bestimmen, bediene man sich folgender Konstruktion (R. Mehmke, „Zur graphischen Kinematik und Dynamik“, Jahrbuch der Mathematiker-Vereinigung 1903, S. 561):

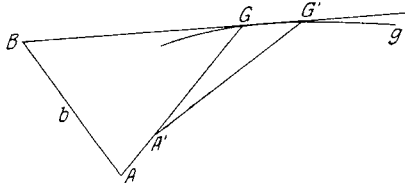


Fig. 552.

Man ziehe (Fig. 552, 552a) in  $G$  die Tangente  $GB$  an den lokalen Hodograph  $g$ , in  $a$  die Tangente  $t$  an den polaren Hodograph  $u$  und mache  $AB \parallel t$ ; dann ist  $BA$  die gesuchte Beschleunigung  $b$ .

Denn legt man beide Abbildungen aufeinander (Fig. 552b), so daß  $o$  nach  $A$  und  $a$  nach  $G$  kommt, so ist wegen  $\overline{A'G'} \equiv \overline{oa'}$ :

$$\overline{a'G'} \equiv ds \text{ und } \overline{aa'} \equiv du,$$

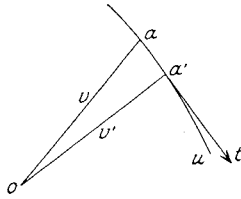


Fig. 552a.

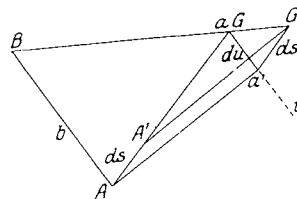


Fig. 552b.

also in den ähnlichen Dreiecken  $aa'G'$  und  $BAG$ :

$$\overline{BA} : \overline{AG} = \overline{aa'} : \overline{a'G'} = du : ds$$

oder mit  $\overline{AG} \equiv v$  : 
$$\overline{BA} \equiv \frac{du}{dt} \equiv b.$$

Man kann jedoch die Konstruktion der Beschleunigung  $b$  auch ohne Benützung des polaren Hodographen  $u$  ausführen (Fig. 553). Ist  $AK \equiv \rho$  der Krümmungshalbmesser der Bahn  $s$  in  $A$ , so erhält man die Normalbeschleunigung  $n = \frac{v^2}{\rho}$  in  $A$ , wenn man  $K$  mit  $G$  verbindet und  $GN \perp KG$  macht; dann ist  $\overline{NA} = n$ .

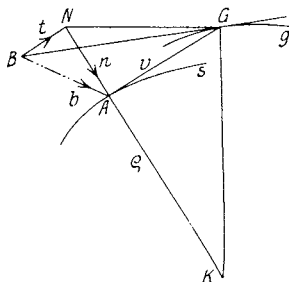


Fig. 553.

Zieht man nun  $NB \parallel GA$  und bringt  $NB$  zum Schnitte  $B$  mit der Tangente an den lokalen Hodographen in  $G$ , so ist  $\overline{BA} \equiv b$  die gesuchte Beschleunigung. Dann ist  $\overline{BN}$  die Tangentialbeschleunigung  $t$  von  $A$  und  $b \equiv t + n$ .

**315. Beispiele.**

1. Der Hodograph der Wurfbewegung (Fig. 554). Erfolgt der Wurf ohne Luftwiderstand unter alleinigem Einfluß der Schwerkraft,

so ist der Hodograph eine vertikale Gerade (Fig. 554a), da die Tangente des Hodographen der Beschleunigung der Schwere parallel ist und somit ihre Richtung nicht verändert.

2. Der Hodograph der Zykloidenbewegung (Fig. 555). Ein Kreis  $k$  rollt ohne zu gleiten gleichförmig auf einer Geraden; ein Punkt  $A$

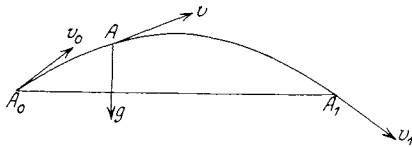


Fig. 554.

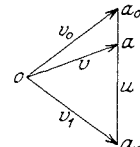


Fig. 554 a.

am Umfange dieses Kreises beschreibt die Radlinie oder gemeine Zykloide  $A_0A_1A_2 \dots$ . Ist  $O$  der Berührungspunkt des Kreises mit der Geraden, so ist er der Drehpol der Kreisscheibe und  $AO$  die Normale der Zykloide in  $A$ ; die Geschwindigkeit  $v$  ist normal zu  $AO$ , geht also durch den höchsten Punkt des Kreises.

Das gleiche gilt für jede andere Lage  $A_1$  des bewegten Punktes. Ist  $c$  die konstante Geschwindigkeit, mit welcher der Mittelpunkt des

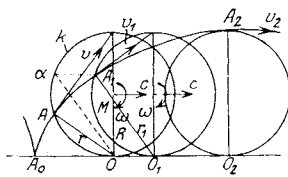


Fig. 555.

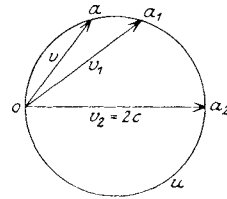


Fig. 555 a.

Kreises sich bewegt und  $\omega$  die konstante Winkelgeschwindigkeit des Kreises um seinen Mittelpunkt, so bleibt der Berührungspunkt  $O$ , der nicht gleiten soll, augenblicklich in Ruhe, wenn seine Geschwindigkeit  $c$  nach rechts sich tilgt mit der nach links gerichteten Geschwindigkeit  $R\omega$  bei der Drehung um  $M$ . Es muß also

$$c = R\omega \text{ und } \omega = \frac{c}{R}$$

sein und die Geschwindigkeit von  $A$ :

$$v = r\omega;$$

denn da  $O$  augenblicklich in Ruhe bleibt, dreht sich  $A$  um  $O$  und es ist

$$v : c = r : R.$$

Ebenso ist in  $A_1$ :

$$v_1 = r_1\omega \text{ und } v : v_1 = r : r_1.$$

Denkt man sich beide Kreise zur Deckung gebracht, so daß  $O_1$  nach  $O$ ,  $A_1$  nach  $a$  kommt, und macht man in Fig. 555a:  $oa \equiv v$ ,  $oa_1 \equiv v_1$ ,

so werden die Dreiecke  $AOa$  und  $aoa_1$  ähnlich sein; da dies für alle Punkte der Zykloide gelten wird, so ist auch der Hodograph  $u$  dem Kreise  $k$  ähnlich, d. h. der Hodograph ist ein Kreis mit dem Halbmesser  $c$ . Die Geschwindigkeit des Punktes  $A_2$  ist nämlich  $2c$  und parallel der Wälzungsgeraden.

Da der Pol  $o$  auf  $u$  liegt, wird der entsprechende Punkt  $A_0$  augenblicklich in Ruhe sein und sodann seine Bewegung umkehren (Rückkehrpunkt). (Vgl. 313, Satz III.)

In  $a_2$  ist der Hodographenstrahl  $oa_2$  normal zu  $u$ ; in  $A_2$  erreicht also die Geschwindigkeit  $v_2$  ihren Größtwert. (Vgl. 313, Satz V.)

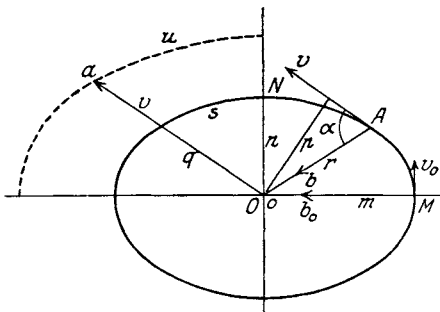


Fig. 556.

3. Der Hodograph der elliptischen Schwingung (Fig. 556). Diese Bewegung erfolgt, wenn ein Punkt, von der Anfangslage  $M$  mit der Geschwindigkeit  $v_0 \perp OM$  ausgehend, von dem Zentrum  $O$  mit einer Kraft angezogen wird, die der Entfernung proportional ist.

An einer beliebigen Stelle  $A$  der Bahn ist dann  $b = k^2 r$  und hat die Richtung  $AO$ .

Die Richtungen von  $v$  und  $b$  in  $A$  sind die gleichen, wie die der konjugierten Halbmesser  $r$  und  $q$  der elliptischen Bahn, die  $A$  beschreibt. Ist  $\alpha$  der Neigungswinkel dieser Halbmesser,  $m$  und  $n$  die Halbachsen der Ellipse, so ist bekanntlich  $qr \sin \alpha = mn$ .

Die Bewegung ist eine Zentralbewegung, für welche die Flächen- geschwindigkeit konstant ist, oder, was dasselbe besagt, das Produkt  $vp$  unveränderlich bleibt, wenn  $p = r \sin \alpha$  der Abstand der Geschwindigkeit von  $O$  ist. In  $M$  ist dieses Produkt  $v_0 m$ , also ist

$$vp = v_0 m.$$

Die Beschleunigung  $b_0$  in  $M$  steht normal zu  $v_0$ , ist also allein Normal- beschleunigung oder

$$b_0 = k^2 m = \frac{v_0^2}{\rho_0},$$

worin  $\rho_0 = \frac{n^2}{m}$  der Krümmungshalbmesser der Ellipse im Scheitel  $M$  ist.

Aus diesen Gleichungen folgt

$$v = \frac{v_0 m}{p} = \frac{m k \sqrt{m \rho_0}}{r \sin \alpha} = kq,$$

d. h. die Geschwindigkeit  $v$  des Punktes  $A$  hat die Richtung des kon- jugierten Halbmessers  $q$  und ist ihm proportional.

Trägt man demnach von  $O$  als Pol  $o$  des Hodographen die Geschwindigkeit  $v = \overline{oa}$  in Richtung von  $q$  auf, so erhält man den Hodographen als Ellipse, die der Bahn  $s$  ähnlich ist und die gleichliegenden Halbachsen  $km$  und  $kn$  hat.

4. Der Hodograph der Planetenbewegung (Fig. 557). Auch diese Bewegung ist eine Zentralbewegung. Die Bahn ist eine Ellipse mit den Halbachsen  $m$  und  $n$ ; das Anziehungszentrum liegt in einem Brennpunkte  $F$ . An der Stelle  $A$  der Bahn  $s$  sei  $v$  die Geschwindigkeit,

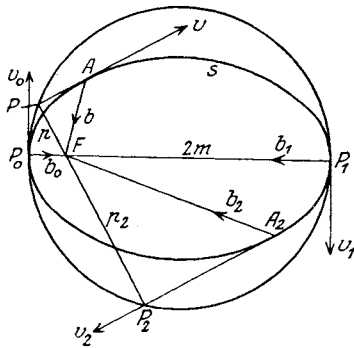


Fig. 557.

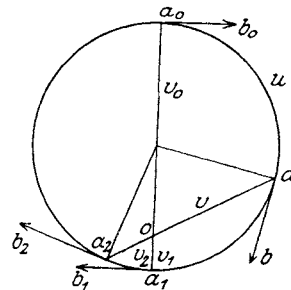


Fig. 557 a.

$p$  ihr Abstand von  $F$ ; die Beschleunigung  $b$  der Anziehung hat die Richtung  $AF$  und die Größe

$$b = \frac{k}{r^2},$$

worin  $FA = r$  und  $k$  eine Konstante ist.  $A_2$  sei eine spätere Lage des Punktes, in welcher die Geschwindigkeit  $v_2 \parallel v$  sei; ihr Abstand  $p_2$  von  $F$  liegt dann mit  $p$  in derselben Geraden.

Die Fußpunkte  $P$  und  $P_2$  der Perpendikel  $p$  und  $p_2$  auf den Tangenten der Ellipse liegen bekanntlich auf dem Kreise, der über der großen Achse  $2m$  als Durchmesser gezeichnet wird, und es ist dann

$$pp_2 = p_0p_1 = n^2 = \text{konstant, worin } p_0 = \overline{P_0F}, p_1 = \overline{P_1F} \text{ ist.}$$

Da die Bewegung eine Zentralbewegung ist, so besteht wie im Beispiel 3 die Gleichung

$$vp = v_2p_2 = v_0p_0 = v_1p_1$$

$$\text{oder } vv_2 \cdot pp_2 = v_0^2 p_0^2, \quad v_0v_1 \cdot p_0p_1 = v_0^2 p_0^2$$

$$\text{und daher } vv_2 = v_0v_1 = \frac{v_0^2 p_0^2}{n^2}.$$

In  $P_0$  ist die Beschleunigung  $b_0$  normal zu  $v_0$ , also

$$b_0 = \frac{k}{p_0^2} = \frac{v_0^2}{\rho_0}, \quad v_0^2 p_0^2 = k \rho_0.$$



worin  $\varrho_0 = \frac{n^2}{m}$  der Krümmungshalbmesser der Ellipse in deren Scheitel ist; es wird also

$$v v_2 = v_0 v_1 = \frac{k \varrho_0}{n^2} = \frac{k}{m} = \text{konstant.}$$

Daraus ergibt sich aber, daß der Hodograph  $u$  ein Kreis ist, dessen Pol  $O$  exzentrisch liegt (Fig. 557 a). Sein Durchmesser ist

$$v_0 + v_1 = \frac{2\sqrt{k m}}{n}$$

5. Aufgabe.

140. Ein Punkt beschreibt eine logarithmische Spirale unter dem Einflusse einer Anziehungskraft, die nach dem Mittelpunkt gerichtet ist. Man zeige, daß der Hodograph dieser Bewegung wieder eine logarithmische Spirale ist.

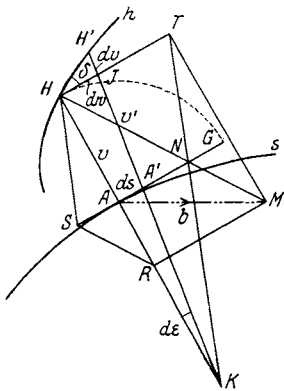


Fig. 558.

**316. Der lokale Hodograph mit gedrehten Geschwindigkeiten.** Man kann den in 313 behandelten lokalen Hodographen  $GG' \dots$  auch noch in anderer Weise darstellen, indem man die Geschwindigkeiten nicht in ihrer Richtung, sondern senkrecht dazu aufträgt, also  $\overline{AG} = v$  um  $90^\circ$  nach  $AH$  dreht (Fig. 558). Die Punkte  $H$  erfüllen dann ebenfalls einen lokalen Hodographen  $HH' \dots$  oder die Kurve  $h$ . Die unendlich nahen Normalen  $AH$  und  $A'H'$  der Bahn  $s$  schneiden sich im Krümmungsmittelpunkte  $K$ , aus dem wir den kleinen Kreisbogen  $HJ$  beschreiben. Es ist dann  $\overline{JH'} = dv$ ; mit  $\overline{AK} = \varrho$  wird  $\overline{HJ} = dw = (\varrho + v) d\varepsilon$ ,  $\overline{AA'} = ds = \varrho \cdot d\varepsilon$ ,

$$ds = dw \cdot \frac{\varrho}{\varrho + v}, \quad dv = dw \cdot \operatorname{tg} \delta$$

und somit die Tangentialbeschleunigung

$$t = \frac{dv}{dt} = v \cdot \frac{dv}{ds} = \frac{v}{\varrho} (\varrho + v) \operatorname{tg} \delta,$$

woraus sich folgende Konstruktion von  $t$  ergibt:

Man ziehe in  $H$  die Normale zu  $h$  bis zum Schnitte  $N$  mit  $AG$ , verbinde  $K$  mit  $N$  bis zum Schnitte  $T$  mit  $HJ$ , dann ist  $t = HT$ . Zieht man ferner  $HS \parallel TK$  bis zum Schnitte  $S$  mit  $AG$ ,  $SR \parallel HN$  bis zum Schnitte  $R$  mit  $AK$ , so ist die Normalbeschleunigung

$$n = \frac{v^2}{\varrho} = \overline{AR}.$$

Macht man endlich  $RM \parallel HT$ ,  $TM \parallel AK$ , so ist

$$\overline{AM} = b - t + n$$

die ganze Beschleunigung von  $A$ .

Die Punkte  $H$ ,  $N$ ,  $M$  liegen in einer Geraden; denn verbindet man  $H$  mit  $M$ , so ist

$$\frac{\overline{RM}}{\overline{HR}} = \frac{t}{v + n} = \frac{t}{v + \frac{v^2}{\rho}} = t \cdot \frac{\rho}{v} \cdot \frac{1}{\rho + v} = \operatorname{tg} \delta$$

und ebenso

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{HA}} = \operatorname{tg} \delta.$$

Es genügt also, die Normale  $HN$  zu  $h$ , ferner  $HT$ ,  $KNT$ ,  $TM$  zu ziehen, um  $\overline{AM} = b$  zu erhalten. (Vgl. M. Grübler, Lehrbuch der Technischen Mechanik, I. Bd., 1919, S. 44.)

---

### XXX. Eigenschaften der Differential- und Integralkurven.

317. Die Differentialkurve. Es sei  $K$  eine beliebige stetige Kurve (Fig. 559),  $YOX$  ein orthogonales Achsenkreuz,  $X$  und  $Y$  die Koordinaten

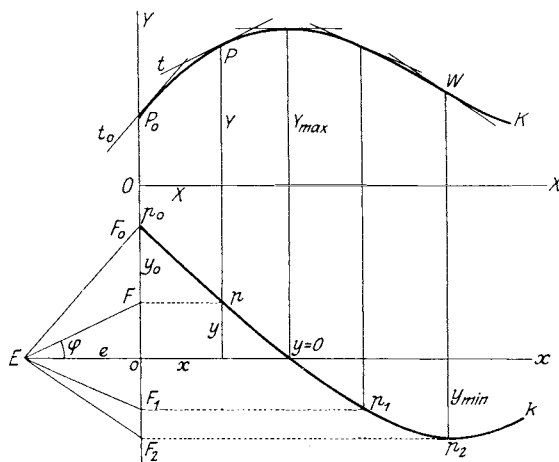


Fig. 559.

eines Punktes  $P$  der Kurve. Zieht man in  $P$  die Tangente  $t$  an diese, so gilt für ihre Neigung  $\varphi$  zur Achse  $OX$ :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dY}{dX}.$$

Es sei ferner  $y \circ x$  ein zu dem früheren paralleles Achsenkreuz und  $E$  ein beliebiger Punkt im Abstände  $e \equiv \overline{EO}$  von  $o$ . Zieht man  $EF \parallel t$ ,

so ist  $\overline{oF} = y = e \operatorname{tg} \varphi = e \frac{dY}{dX}$ . a)

Trägt man  $y$  unter  $Y$  von der  $ox$ -Achse auf, so erhält man den Punkt  $p$ .

Führt man dieselbe Konstruktion für den Anfangspunkt  $P_0$  der Kurve  $K$  durch, zieht die Tangente  $t_0$ ,  $EF_0 \parallel t_0$ , so erhält man in  $F_0$  den Punkt  $p_0$ .

Alle auf diesem Wege gefundenen Punkte  $p$  erfüllen die Kurve  $k$ . Ihre Ordinaten  $y$  sind dem Differentialquotienten  $\frac{dY}{dX}$  der Kurve  $K$  proportional, wenn  $e$  eine unveränderliche Strecke ist (Basis). Man nennt deshalb  $k$  die Differentialalkurve der Kurve  $K$ , bezogen auf die Basis  $e$ .

Erreicht die Ordinate  $Y$  einen Extremwert (Maximum oder Minimum), so ist die Tangente  $t$  parallel zur  $OX$ -Achse, es wird  $\varphi = 0$  und  $y = 0$ , d. h. die Differentialalkurve schneidet für die gleiche Abszisse  $x = X$  die Achse  $ox$ .

Hat die Kurve  $K$  einen Wendepunkt  $W$ , so wird an dieser Stelle

$$\frac{d^2 Y}{dX^2} = 0 \text{ oder } \frac{dy}{dx} = 0,$$

d. h. die Ordinate  $y$  der Differentialalkurve erreicht für die gleiche Abszisse  $x = X$  einen Extremwert (max  $y$  oder min  $y$ ).

**318. Die Integalkurve.** Es sei  $k$  eine beliebige stetige Kurve (Fig. 560),  $yo\alpha$  ein orthogonales Achsenkreuz,  $x$  und  $y$  die Koordinaten eines beliebigen Punktes  $p$  dieser Kurve.

Geht man von  $p$  zu einem unendlich nahen Nachbarpunkt  $p'$  der Kurve über und nennt  $df$  die Fläche des schmalen Streifens zwischen  $y$  und  $y'$ , so ist  $df = y \cdot dx$  und die ganze Fläche zwischen der Kurve  $k$ , der Achse  $ox$  und zwei Ordinaten:

$$f = \int y dx + C;$$

lassen wir die Fläche bei der Achse  $oy$  beginnen, so ist

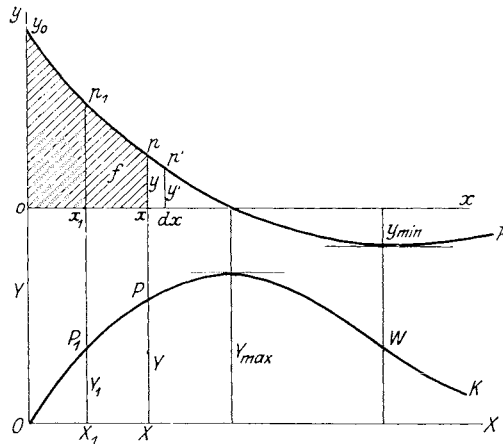


Fig. 560.

$$f = \int_0^x y dx.$$

Setzen wir  $f = EY$ , worin  $E$  eine konstante Strecke (Basis) und  $Y$  eine veränderliche Strecke bezeichnet, so kann

$$Y = \frac{f}{E} = \frac{1}{E} \int_0^x y dx$$

in einem zweiten orthogonalen Achsenkreuze  $YOX$  unter  $y$  eingetragen werden, wodurch man den Punkt  $P$  erhält.

Für einen zweiten Punkt  $p_1$  der Kurve  $k$  ist ebenso

$$f_1 = \int_0^{x_1} y dx \text{ und } Y_1 = \frac{f_1}{E},$$

die Ordinate des Punktes  $P_1$ . Die so erhaltenen Punkte  $PP_1 \dots$  bestimmen eine zweite Kurve  $K$ , die man die Integralkurve von  $k$  nennt.

Aus 
$$Y - Y_1 = \frac{f - f_1}{E}$$

ergibt sich der Satz: Die Differenz der Ordinaten der Integralkurve ist ein Maß für die Fläche zwischen den zugehörigen Ordinaten der Differentialkurve.

Zwischen den Kurven  $K$  und  $k$  bestehen dieselben Beziehungen, die wir unter 317 kennen gelernt haben: wo die Kurve  $k$  die Achse  $ox$  schneidet, nimmt die Ordinate  $Y$  der Kurve  $K$  einen Extremwert an; wo die Ordinate  $y$  der Kurve  $k$  Extremwerte annimmt, hat die Kurve  $K$  einen Wendepunkt  $W$ .

Um in  $P$  die Tangente an die Integralkurve zu finden, projiziert man (Fig. 561) den zu  $P$  gehörenden Punkt  $p$  der Kurve  $k$  nach  $F'$ , verbindet den beliebigen angenommenen Punkt  $E$  mit  $F'$  und zieht parallel

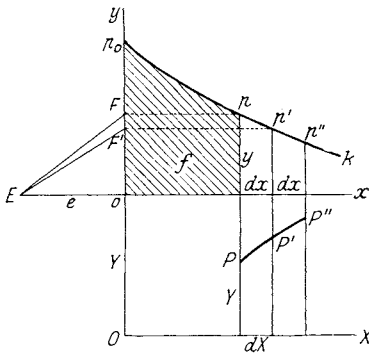


Fig. 561.

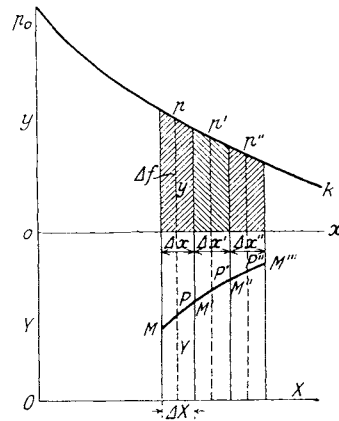


Fig. 562.

zu  $EF$  durch  $P$  ein unendlich kleines Stück  $PP'$  der Tangente, bis die um  $dX$  entfernte Ordinate in  $P'$  getroffen wird. Sodann wird der zu  $P'$  gehörende Punkt  $p'$  ebenso nach  $F'$  projiziert,  $E$  mit  $F'$  verbunden und parallel zu  $EF'$  das kleine Stück  $P'P''$  der nächsten Tangente gezogen usw.

Die Länge  $Y$  der Ordinate und damit die Lage der Achse  $OX$  ergibt sich aus

$$Y = \frac{f}{E},$$

worin  $E$  eine beliebige, konstante Strecke bedeutet.

Auf diesem Wege ergibt sich die Integralkurve als Seileck der Belastungen  $df = y dx$ , die auf der Achse  $ox$  lagern.

Die Konstruktion der Integralkurve aus der Differentialkurve ergibt sich aus der Umkehrung der in Fig. 559 angeführten Methode, um die Differentialkurve zu finden. Es sei in Fig. 561 die Kurve  $k$  gegeben und  $P$  ein Punkt der gesuchten Integralkurve.

Will man nach diesem Verfahren die Integralkurve angenähert zeichnen, so muß man die unendlich schmalen Streifen zwischen  $p$  und  $p'$ ,  $p'$  und  $p''$  usw. durch kleine endliche Streifen ersetzen. Man teilt die Achse  $ox$  in kleine Teile  $\Delta x$ ,  $\Delta x'$  usw., die nicht gleich zu sein brauchen, zieht die Belastungslinien von  $\Delta f = y \cdot \Delta x$  durch die Schwerpunkte der schmalen Streifen  $\Delta f$  (Fig. 562) und führt die oben geschilderte Konstruktion des Seilecks durch. Geht man vom Punkte  $P$  der Integralkurve auf der Belastungslinie von  $\Delta f$  aus, so zieht man zuerst das kurze Stück  $MM'$  durch  $P$ , parallel zu  $EF$  (Fig. 561), sodann  $M'M'' \parallel EF'$  usw. Man erhält also statt einer Kurve das Polygon  $MM'M'' \dots$ , dem die Integralkurve eingeschrieben ist. Statt in  $P$  hat die Konstruktion in  $O$  zu beginnen.

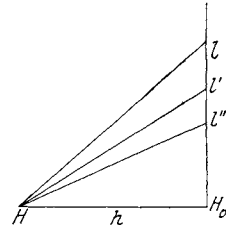


Fig. 562a.

Statt die Ordinaten  $y, y', \dots$  auf die Achse  $oy$  zu projizieren, zeichnet man in der Seitenfigur 562a eine Parallele zu dieser Achse und nimmt außerhalb den Punkt  $H$  in der beliebigen Entfernung  $\overline{HH_0} \equiv h$  an. Die hier aufgetragenen Strecken

$$l = \frac{\Delta f}{h}, \quad l' = \frac{\Delta f'}{h}, \quad \dots$$

sind den Belastungsflächen  $\Delta f$  proportional. Man spricht deshalb von dieser Figur auch als Kräfteplan, und nennt  $H$  dessen Pol,  $h$  die Polhöhe oder Basis; die Strahlen  $Hl, Hl'$  usw. sind den Seiten des Seilecks parallel.

Ändert man  $h$ , so ändert sich auch die Integralkurve, da sich der Maßstab verändert. Über den Maßstab der Differential- und Integralkurven wird gelegentlich ihrer Anwendung gesprochen werden.

Ausführliches über die Wechselbeziehung zwischen diesen Kurven findet man in dem Werke: Abdank-Abakamowicz, Die Integrphen, deutsch von E. Bitterli, 1889. Die dort gegebenen Anwendungen beschäftigen sich fast ausschließlich mit dem vom Verfasser erfundenen Instrumente. Auf S. 141 findet man eine gute Literatur-Übersicht über Integralkurven und graphische Integration.

R. Mehnke gibt in seinem Buche: Leitfaden zum graphischen Rechnen, 1917, auf S. 92 u. f. eine gedrängte Übersicht der Eigenschaften der Integral- und Differentialkurven.

Ebenso bringt C. Runge in seinen: Graphischen Methoden, 2. Aufl. 1919, einen Abschnitt über graphische Integration und Differentiation.

Auf das Zeichnen dieser Kurven wird im Abschnitt XXXI näher eingegangen werden.

**319. Aufgaben.**

141. Man zeichne die Differentialkurve einer ansteigenden Geraden.
142. Man zeichne die Schar der Integralkurven einer ansteigenden Geraden.
143. Zwei Kurven  $K_1$  und  $K_2$  schneiden sich in zwei Punkten  $P_1$  und  $P_2$ . Man zeige, daß ihre Differentialkurven  $k_1$  und  $k_2$  zwischen den Ordinaten dieser Punkte gleiche Flächen einschließen.
144. Zwei Kurven  $K_1$  und  $K_2$  berühren sich in einem Punkte  $P$ . Man zeige, daß ihre Differentialkurven  $k_1$  und  $k_2$  sich in einem Punkte  $p$  schneiden, der auf der Ordinate von  $P$  liegt.

### XXXI. Kinematische Diagramme.

**320. Das Weg-Zeit-Diagramm ( $s$ - $t$ -Diagramm).** Bei dessen Entwurf ist es gleichgültig, ob sich der Punkt in einer Geraden oder in einer krummlinigen Bahn bewegt. In letzterem Falle wickelt man den Weg  $s$  des Punktes vom Nullpunkt  $O$  aus auf einer Geraden  $Os$ , der Weg-Achse, auf. Dabei wird ein Maßstab gewählt werden müssen, der die wirklichen Wege in oft viel kleinerer Zeichnung darzustellen erlaubt. Dieser Maßstab darf beliebig gewählt werden; wir nehmen z. B. in der Schaulinie Fig. 563 dafür an:

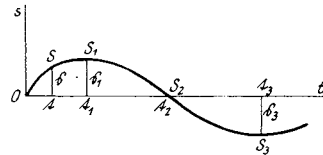


Fig. 563.

$$\left. \begin{aligned} \text{Wegmaßstab: } 1 \text{ cm Weg-Achse} &= a \text{ m Weg oder} \\ 1 \text{ m Weg} &= \frac{1}{a} \text{ cm Weg-Achse} \end{aligned} \right\} \dots 143)$$

Ist  $s$  m der Weg des Punktes, so wird er im Diagramm durch die Weg-Strecke

$$\xi \text{ cm Weg-Achse} = \frac{s}{a} \text{ cm} \dots \dots \dots 144)$$

dargestellt.

Die zu den Wegen gehörenden Zeiten trägt man auf einer zur Weg-Achse senkrechten Geraden, der Zeit-Achse  $Ot$  von  $O$  aus auf und wählt hierzu einen zweiten willkürlichen Maßstab für die Zeiten. Es sei z. B. in Fig. 563 angenommen.:

$$\text{Zeitmaßstab: } 1 \text{ cm Zeit-Achse} = 1 \text{ Sekunde Zeit} \dots \dots 145)$$

Ist z. B.  $t$  sek die für die Bewegung durch den Weg  $s$  m verfllossene Zeit, so wird sie auf der Zeit-Achse durch die Zeit-Strecke

$$t \text{ cm} = t \text{ sek} \dots \dots \dots 146)$$

dargestellt.

$\xi$  und  $t$  sind also reine Zahlen, die erst durch den Zusatz cm zu Strecken werden.

Die Koordinaten  $\xi$  cm und  $t$  cm bestimmen die Lage des Punktes  $S$  der Schaulinie; sie ist ein Bild des augenblicklichen Bewegungszustandes des bewegten Punktes, der aber selbst in der Schaulinie nicht vorkommt.



Aus der Fig. 563 entnimmt man, daß der bewegte Punkt nach der Zeit  $t_1$  den größten Weg  $s_1$  zurückgelegt haben wird, daß er dann seine Bewegungsrichtung umkehrt und sich wieder der Anfangslage  $s = 0$  nähert, die er nach der Zeit  $t_2$  erreicht; daß er sich dann über die Anfangslage hinaus bewegt, bis er nach der Zeit  $t_3$  die größte Entfernung  $s_3$  von ihr auf der anderen Seite erreicht haben wird, um vorübergehend in Ruhe zu kommen usw.

Wäre die Schaulinie keine Kurve, sondern eine Gerade, so würde dies bedeuten, daß der Weg gleichförmig mit der Zeit zunimmt; diese Bewegung heißt gleichförmig (Fig. 564). Die Zunahme des Weges

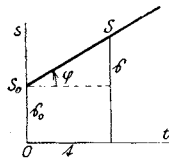


Fig. 564.

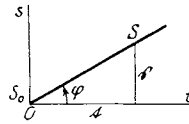


Fig. 564a.

in der Zeiteinheit ist dann  $\frac{s - s_0}{t}$ , wenn  $s_0$  der anfängliche Wert des Weges ist; man nennt diese Zunahme des Weges in der Zeiteinheit die Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung. Sie ist

$$v \text{ m/sek} = \frac{s - s_0}{t} \text{ m/sek}$$

und wenn  $s_0 = 0$  ist (Fig. 564a):

$$v \text{ m/sek} = \frac{s}{t} \text{ m/sek.}$$

In diesem Falle erhält man mit Benützung der Gleichungen 144 und 146:

$$v \text{ m/sek} = a \cdot \frac{\hat{s}}{t} \text{ m/sek}$$

und mit  $\frac{\hat{s}}{t} = \text{tg } \varphi$ :

$$v \text{ m/sek} = a \text{ tg } \varphi \text{ m/sek} \dots \dots \dots 147)$$

Die Neigung  $\varphi$  der geraden Schaulinie zur Zeit-Achse ist demnach, da  $a$  unveränderlich ist, ein Maß der Geschwindigkeit.

Je größer der Winkel  $\varphi$  ist, desto rascher ist die Bewegung. Ist  $\varphi = 90^\circ$ , so ist  $v = \infty$  und die Schaulinie läuft parallel der Weg-Achse; jede solche Parallele ist demnach das Bild einer unendlich raschen Bewegung.

Ist  $\varphi = 0$ , so wird  $v = 0$ ; verläuft also die Schaulinie parallel der Zeit-Achse, so ist sie das Bild der Ruhe.

Für  $\varphi = 45^\circ$  ist  $v \text{ m/sek} = a \text{ m/sek}$ .

Fällt die gerade Schaulinie, statt zu steigen (Fig. 565), so hat der Winkel  $\varphi$  einen negativen Wert, die Geschwindigkeit ist dementsprechend

negativ, der bewegte Punkt nähert sich der Stelle  $s = 0$ , von welcher aus der Weg gemessen wird.

Alle diese Überlegungen lassen sich ohne Schwierigkeit auf ein krummliniges Diagramm übertragen (Fig. 566), wenn man die Kurve als eine Folge von kleinen geraden Stücken, steigende und fallende, ansieht. Das sehr kleine Stück  $SS'$  des Diagramms ist auch ein Stück der geraden

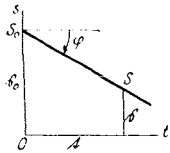


Fig. 565.

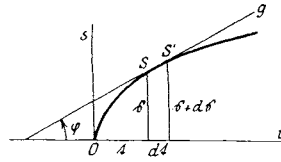


Fig. 566.

Tangente  $g$ , die, wie eben gezeigt wurde, das Diagramm einer gleichförmigen Bewegung ist. Man kann dann die Sache in folgender Weise auffassen: die Gerade  $g$  ist die Schaulinie jener gleichförmigen Bewegung, welche während der kleinen Zeit  $dt$  mit der wirklichen Bewegung des Punktes am besten übereinstimmt, also auch die gleiche Geschwindigkeit hat. Aus der Figur folgt nun

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\dot{s}' - \dot{s}}{t' - t} = \frac{d\dot{s}}{dt}$$

und mit Benützung der Gleichungen 144 und 146:

$$d\dot{s} = \frac{1}{a} \cdot ds, dt = dt: \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{a} \cdot \frac{ds}{dt}$$

und nach Gleichung 147 die Geschwindigkeit:

$$v = \frac{ds}{dt} \dots \dots \dots 148)$$

Auch die Geschwindigkeit kann man als Strecke darstellen (Fig. 567).

Man zieht in dem Punkte  $S$  des Diagramms die Tangente  $g$  an dieses, macht das Stück  $TO$  maßstäblich gleich der Zeiteinheit (1 sek = 1 cm) und zieht  $TQ$  parallel zu  $g$ ; dann ist  $\overline{OQ} = v$  jene Strecke in cm, welche die Geschwindigkeit  $v$  darstellt (Geschwindigkeits-Strecke). Denn es ist nach Gleichung a) in 317:

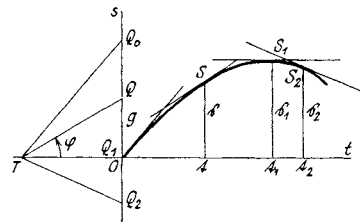


Fig. 567.

$$v \text{ cm} = \overline{OQ} = \overline{TO} \cdot \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \varphi = \frac{v}{a} \text{ cm} \dots \dots 149)$$

und

$$v = \frac{d\dot{s}}{dt} \dots \dots \dots 150)$$

Der Vergleich der Gleichungen 148 und 150 lehrt, daß zwischen den Strecken  $v$ ,  $\beta$  und  $t$  dieselbe Beziehung besteht, wie zwischen den wirklichen Bewegungsgrößen  $v$ ,  $s$  und  $t$ .

Die Geschwindigkeitseinheit ist eine abgeleitete Einheit, d. h. aus Weg- und Zeiteinheit zusammengesetzt; deshalb darf auch der Maßstab für die Geschwindigkeitsstrecke nicht mehr beliebig gewählt werden.

Für  $v \text{ m/sek} = 1 \text{ m/sek}$ , also  $v = 1$  ist  $v = \frac{1}{\alpha}$ ; daraus ergibt sich der Geschwindigkeitsmaßstab:

$$\left. \begin{aligned} 1 \text{ cm Geschw.-Achse} &= \alpha \text{ m/sek Geschwindigkeit} \\ \text{oder } 1 \text{ m/sek Geschwindigkeit} &= \frac{1}{\alpha} \text{ cm Geschw.-Achse} \end{aligned} \right\} \dots 151)$$

In Fig. 567 wurde in derselben Weise die Geschwindigkeit  $\overline{OQ_0}$  für die Anfangslage des Punktes in  $t = 0$  und ebenso die Geschwindigkeit  $\overline{OQ_2}$  für die Zeit  $t_2$  konstruiert. An jenen Stellen des Diagramms, wo der Weg  $s$  einen extremen Wert erreicht, ein Maximum oder Minimum ist, verläuft die Tangente  $g$  des Diagramms parallel zur Zeit-Achse und der Punkt  $Q$  fällt nach  $O$ ; an diesen Stellen ist also die Geschwindigkeit null.

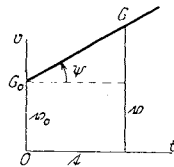


Fig. 568.

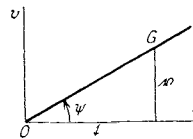


Fig. 568a.

**321. Das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm ( $v$ - $t$ -Diagramm).** Trägt man senkrecht zur Zeit-Achse die Geschwindigkeitsstrecke  $v$  nach dem Maßstab Gleichung 151 auf, so erhält man durch stetige Verbindung der Endpunkte dieser Ordinaten das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm. Es ist die Differentialkurve des  $s$ - $t$ -Diagramms.

Ist das  $v$ - $t$ -Diagramm eine ansteigende Gerade (Fig. 568), so nimmt die Geschwindigkeit gleichförmig zu. Man nennt dann

$$b \text{ m/sek}^2 = \frac{v - v_0}{t} \text{ m/sek}^2$$

die Zunahme der Geschwindigkeit in der Zeiteinheit oder die Beschleunigung der gleichförmig beschleunigten Bewegung.

Für  $v_0 = 0$  ist  $b \text{ m/sek}^2 = \frac{v}{t} \text{ m/sek}^2$  (Fig. 568a).

Nach den Gleichungen 146 und 149 ist

$$t \text{ cm} = t \text{ sek}, v \text{ cm} = \frac{v}{\alpha} \text{ cm};$$

dann wird 
$$b \text{ m/sek}^2 = a \frac{v}{t} \text{ m/sek}^2$$

und wegen  $\frac{v}{t} = \text{tg } \psi$ :

$$b \text{ m/sek}^2 = a \text{tg } \psi \text{ m/sek}^2 \dots \dots \dots 152)$$

Da  $a$  konstant ist, wird der Winkel  $\psi$  ein Maß für die Beschleunigung der Bewegung sein.

Ist z. B.  $\psi = 0$ , so verläuft das Diagramm parallel zur Zeitachse, die Geschwindigkeit ist unveränderlich; es liegt dann die oben behandelte gleichförmige Bewegung vor.

Ist hingegen  $\psi = 45^\circ$ , so wird

$$b \text{ m/sek}^2 = a \text{ m/sek}^2.$$

Ist das  $v$ - $t$ -Diagramm eine fallende Gerade, so ist der Winkel  $\psi$  negativ, also auch die Beschleunigung:

$$b = \frac{v - v_0}{t}$$

negativ und konstant; die Bewegung ist gleichförmig verzögert (Fig. 569).

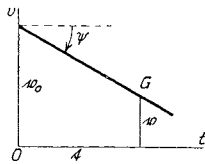


Fig. 569.

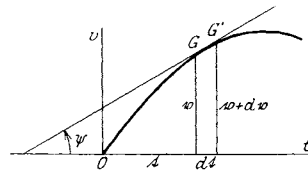


Fig. 570.

Wäre z. B.  $\psi = -20^\circ$ ,  $\text{tg } \psi = -0,364$ , so bliebe für die Beschleunigung

$$b \text{ m/sek}^2 = -0,364 a \text{ m/sek}^2.$$

Ist das  $v$ - $t$ -Diagramm eine gekrümmte Linie, so kann man, wie es schon vorher beim  $s$ - $t$ -Diagramm geschah, die Kurve als eine Aufeinanderfolge unendlich kleiner gerader Stücke, also die Bewegung als eine Aufeinanderfolge von unendlich kurz dauernden gleichförmig beschleunigten und gleichförmig verzögerten Bewegungen ansehen.

Verbindet man zwei unendlich nahe Punkte  $G$  und  $G'$  des Diagramms (Fig. 570), d. h. zieht man die Tangente, so ist diese Gerade die Schaulinie jener gleichförmig beschleunigten Bewegung, die zur Zeit  $t$  der wirklichen Bewegung am nächsten kommt, also auch die gleiche Beschleunigung hat wie sie.

Dann ist

$$\text{tg } \psi = \frac{v' - v}{t' - t} = \frac{dv}{dt}$$

aus den Gleichungen 146 und 149 folgt.

$$dt = dt, \quad dv = \frac{1}{a} \cdot dv;$$

somit ist

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{1}{a} \frac{dv}{dt}$$

und durch Vergleich mit 152):

$$b = \frac{dv}{dt} \dots \dots \dots 153)$$

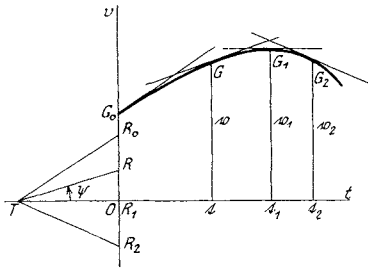


Fig. 571.

Auch die Beschleunigung kann man als Strecke darstellen. Man zieht (Fig. 571) im Punkte  $G$  des Diagramms die Tangente an dieses, macht wieder das Stück  $TO$  maßstäblich gleich der Zeiteinheit (1 sek = 1 cm) und zieht  $TR$  parallel zur

Tangente; dann ist  $\overline{OR} = b$  jene Strecke in cm, welche die Beschleunigung darstellt. Denn es ist

$$b \text{ cm} = \overline{OR} = \overline{TO} \cdot \operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \psi = \frac{b}{a} \text{ cm Geschw.-Achse} \dots 154)$$

und somit

$$b = \frac{dv}{dt} \dots \dots \dots 155)$$

Der Vergleich von 153 und 155 lehrt, daß zwischen den Strecken  $t, v, b$  dieselbe Beziehung besteht wie zwischen den Größen  $t, v, b$  selbst.

Auch die Einheit der Beschleunigung ist eine abgeleitete Einheit und läßt sich aus denen der Zeit und der Geschwindigkeit bestimmen.

Für  $b \text{ m/sek}^2 = 1 \text{ m/sek}^2$ , also  $b = 1$  ist  $b = \frac{1}{a}$ ; daraus ergibt sich der gewünschte Maßstab:

Beschleunigungsmaßstab:

$$\left. \begin{aligned} 1 \text{ cm Beschleun.-Achse} &= a \text{ m/sek}^2 \text{ Beschleun.} \\ \text{oder: } 1 \text{ m/sek}^2 \text{ Beschleunigung} &= \frac{1}{a} \text{ cm Beschleun.-Achse} \end{aligned} \right\} \dots \dots 156)$$

In Fig. 571 wurde in gleicher Weise die Beschleunigungsstrecke  $\overline{OR}_0$  für den Anfang der Bewegung und die Strecke  $\overline{OR}_2$  für die Zeit  $t_2$  konstruiert. Die letzte Beschleunigung ergibt sich negativ, da  $R_2$  unter  $O$  liegt; für die Zeit  $t_2$ , d. i. bei fallendem Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm, ist die Bewegung demnach verzögert.

An jenen Stellen des Diagramms, an denen die Geschwindigkeit einen extremen Wert annimmt (Maximum oder Minimum), ist die Tangente parallel zur Zeit-Achse; dann fällt der zugehörige Punkt  $R_1$  mit  $O$  zusammen und die Beschleunigung verschwindet.

Will man nachträglich die konstruierten Beschleunigungen in einer

eigenen Schaulinie zusammenstellen, so kann dies durch Übertragung der Strecken  $b$  geschehen.

Das so erhaltene  $b$ - $t$ -Diagramm ist die Differentialkurve des  $v$ - $t$ -Diagrammes. Aus dem  $s$ - $t$ -Diagramm und dem  $v$ - $t$ -Diagramm läßt sich durch Umzeichnung ein drittes, das  $v$ - $s$ -Diagramm, bilden, indem man die zu derselben Zeitstrecke  $t$  gehörenden Werte von  $\dot{s}$  und  $v$  als Koordinaten eines Punktes aufträgt und die so erhaltenen Punkte durch eine stetige Kurve verbindet. Dadurch wird die Zeit aus dem Diagramm entfernt. Auf diese Weise ist Fig. 572 aus dem  $s$ - $t$ - und  $v$ - $t$ -Diagramm der Fig. 577 (s. u.) entstanden.

Mit dem  $v$ - $s$ -Diagramm werden wir uns in 326 ausführlich beschäftigen.

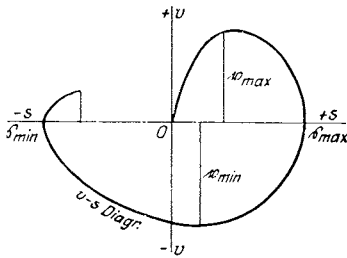


Fig. 572.

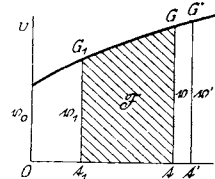


Fig. 573.

**322. Der Weg im Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm.** Aus dem  $v$ - $t$ -Diagramm ist auch der zurückgelegte Weg des Punktes zu entnehmen. Berechnet man nämlich die Fläche des Streifens zwischen den Ordinaten  $v$  und  $v'$  der Punkte  $G$  und  $G'$  (Fig. 573), so erhält man

$$d\bar{s} = v \cdot dt$$

und mit Benützung der Gleichungen 146, 149 und 148:

$$dt = dt, v = \frac{v}{\alpha}, ds = v \cdot dt: d\bar{s} = \frac{1}{\alpha} \cdot ds,$$

woraus nach Integration:

$$\bar{s} = \frac{1}{\alpha} (s - s_1)$$

oder

$$s - s_1 = \alpha \bar{s} \dots \dots \dots 157)$$

Der zurückgelegte Weg ist also dem Flächenstück des  $v$ - $t$ -Diagramms zwischen den Ordinaten  $v$  und  $v_1$  proportional. Das  $s$ - $t$ -Diagramm ist somit die Integralkurve des  $v$ - $t$ -Diagramms.

Dieses Diagramm hat die ausgezeichnete Eigenschaft, Zeit, Geschwindigkeit, Beschleunigung und Weg des Punktes entnehmen zu lassen; die ersten zwei aus den Koordinaten eines Punktes, die dritte aus einem Winkel, den Weg aus einer Fläche.

Beispiel. Es ist die Beziehung zwischen dem Wege und der Geschwindigkeit der gleichförmig beschleunigten Bewegung aus dem  $v-t$ -Diagramm zu entwickeln.

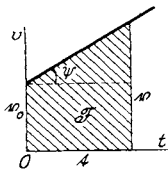


Fig. 574.

Nach 321 ist das  $v-t$ -Diagramm dieser Bewegung eine ansteigende Gerade (Fig. 574), und somit ist der Weg des Punktes der Trapezfläche  $\mathfrak{F}$  zwischen den Ordinaten  $v_0$  und  $v$  proportional. Mit  $s_0 = 0$  ist

$$s = \alpha F \text{ und nach Gleichung 144: } \mathfrak{s} = \mathfrak{F},$$

d. h. die Strecke  $\mathfrak{s}$  enthält so viele cm, als die Fläche  $\mathfrak{F}$  cm<sup>2</sup>.

Es ist 
$$\mathfrak{F} = \frac{1}{2} t (v + v_0), \quad \text{tg } \psi = \frac{v - v_0}{t} = b,$$

also 
$$\mathfrak{s} = \mathfrak{F} = \frac{1}{2} b (v + v_0) (v - v_0)$$

oder 
$$v^2 = v_0^2 + 2b\mathfrak{s}$$

und nach den Gleichungen 146, 149 und 154:

$$t \text{ cm} = t \text{ sek}, \quad v \text{ cm} = \frac{v}{\alpha} \text{ cm}, \quad b \text{ cm} = \frac{b}{\alpha} \text{ cm}:$$

$$v^2 = v_0^2 + 2bs \dots \dots \dots 158)$$

In gleicher Weise kann auch die bekannte Beziehung

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} b t^2 \dots \dots \dots 159)$$

aus der Trapezfläche  $\mathfrak{F}$  abgeleitet werden.

**323. Das Beschleunigung-Zeit-Diagramm ( $b-t$ -Diagramm).** In ganz ähnlicher Weise kann auch aus den Beschleunigungen eines Punktes und den zugehörigen Zeiten ein Diagramm entworfen werden. Seine Eigenschaften sind jenen des  $v-t$ -Diagramms analog. Von ihnen interessiert uns vorläufig nur die eine, daß die Fläche  $f$

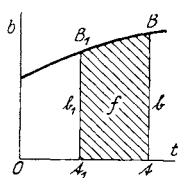


Fig. 575.

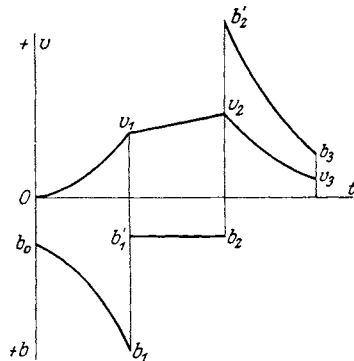


Fig. 576.

zwischen dem Diagramm, den Ordinaten  $b$  und  $b_1$  und der Zeit-Achse der Geschwindigkeitsdifferenz des Punktes proportional ist, d. h. daß in Fig. 575 
$$v - v_1 = \alpha f \dots \dots \dots 160)$$

ist. Der Nachweis dafür ist in gleicher Weise zu führen wie in 322.

Das  $b-t$ -Diagramm ist die Differentialkurve des  $v-t$ -Diagramms.

Es kommt manchmal vor, daß das  $b-t$ -Diagramm Unstetigkeiten aufweist, indem der Wert der Beschleunigung sich sprunghaft ändert (Fig. 576, vgl. 217). In diesem Falle wird die Krümmung des  $v-t$ -Diagramms keinen stetigen Verlauf nehmen; zwar wird dieses Diagramm keine Sprünge aufweisen, da sich die Geschwindigkeit nicht sprunghaft ändert, wie etwa beim Stoß; aber das Diagramm zeigt an diesen Stellen plötzliche Richtungsänderungen, Knickpunkte oder Ecken (vgl. u. a. K. Doehne, „Die Bewegungsverhältnisse von Steuergetrieben und Schwingdaumen“, Ber. d. Ver. z. Bef. d. Gewerbfl. 1908, S. 381).

Auch das  $v-t$ -Diagramm kann bei Stößen Sprünge aufweisen; an diesen Stellen erscheint das  $s-t$ -Diagramm geknickt (vgl. R. Plank, 331).

**324. Die Maßstäbe.** Aus den vorhergehenden Betrachtungen der  $s-t$ -,  $v-t$ - und  $b-t$ -Diagramme hat man entnommen, daß von den Maßstäben für die vier Größen  $t$ ,  $s$ ,  $v$ ,  $b$  nicht alle beliebig gewählt werden dürfen, sondern daß sie untereinander in einer bestimmten Beziehung stehen. So hatten wir z. B. folgende Maßstäbe als zusammengehörig gefunden:

Weg-Maßstab: 1 cm Weg-Achse =  $a$  m Weg;  
 Geschwindigkeits-Maßstab: 1 cm Geschw.-Achse =  $a$  m/sek Geschwindigkeit;  
 Beschleunigungs-Maßstab: 1 cm Beschl.-Achse =  $a$  m/sek<sup>2</sup> Beschleunigung;  
 Zeit-Maßstab: 1 cm Zeit-Achse = 1 sek.

Von diesen wurde der erste und der letzte Maßstab beliebig gewählt; die beiden anderen ergaben sich dann als Folge.

In den nächsten Ausführungen wird der Zusammenhang dieser Maßstäbe genauer studiert. Zu diesem Zwecke mögen die vier Maßstäbe in folgender Weise bezeichnet werden:

Weg-Maßstab:	1 cm Weg-Achse	= $a$ m Weg;	}	161)
Geschwindigkeits-Maßstab:	1 cm Geschw.-Achse	= $\beta$ m/sek Geschwindigkeit;		
Beschleunigungs-Maßstab:	1 cm Beschl.-Achse	= $\gamma$ m/sek <sup>2</sup> Beschleunigung;		
Zeit-Maßstab:	1 cm Zeit-Achse	= $\delta$ sek.		

Welche Beziehungen müssen zwischen den Zahlen  $a$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  bestehen, damit diese vier Maßstäbe als zusammengehörig angesehen werden dürfen?

Zunächst werden dann in Übereinstimmung mit Gleichung 144 die Gleichungen bestehen müssen:

$$s = \alpha \bar{s}, v = \beta \bar{v}, b = \gamma \bar{b}, t = \delta \bar{t} \dots \dots \dots 162)$$

worin wieder  $\bar{s}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{t}$  die Strecken in cm bedeuten, die in den Dia-



grammen die Größen  $s, v, b, t$  darstellen. Dann folgt aus den Gleichungen 148 und 153:

$$ds = v \cdot dt \text{ und } dv = b \cdot dt$$

$$a \cdot ds = \beta v \cdot \delta \cdot dt \text{ und } \beta \cdot dv = \gamma b \cdot \delta \cdot dt.$$

Sollen die Gleichungen 150 und 155

$$d\bar{s} = v \cdot dt \text{ und } dv = \bar{b} \cdot dt$$

auch hier wieder erfüllt sein, so ist dazu notwendig, daß

$$a = \beta\delta \text{ und } \beta = \gamma\delta$$

ist, oder

$$\delta = \frac{a}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} \text{ und } \beta^2 = a\gamma \dots\dots\dots 163)$$

Man kann also auch in diesem System von Maßstäben zwei derselben beliebig wählen, z. B.  $a$  und  $\delta$ ; die beiden anderen sind dann bestimmt, und zwar ist

$$\beta = \frac{a}{\delta}, \gamma = \frac{a}{\delta^2} \dots\dots\dots 164)$$

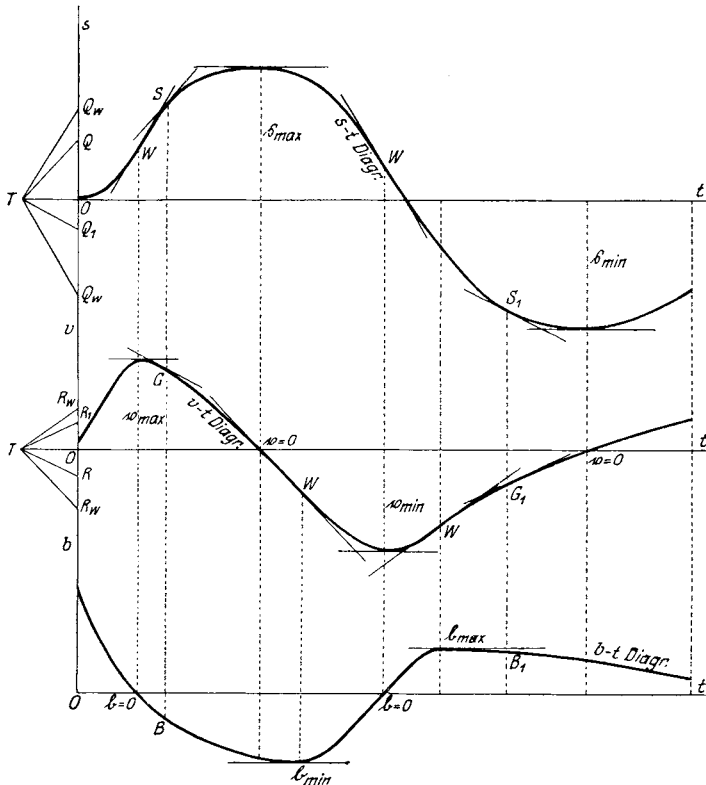


Fig. 577.

Mit  $\delta = 1$  wird wieder  $\iota = \gamma = a$  wie im zuerst benützten System von Maßstäben (Gleichung 151 und 156). Die Zeiteinheit, die in Fig. 567

und 571 als Strecke  $\overline{T\bar{O}}$  aufgetragen wurde, wird jetzt durch die Länge  $\frac{1}{\delta}$  cm dargestellt werden.

**325. Zusammenhang der Diagramme.** Die bisher behandelten  $s$ - $t$ -,  $v$ - $t$ - und  $b$ - $t$ -Diagramme stehen untereinander in denselben Beziehungen wie die Integralkurve zur Differentialkurve.

In Fig. 577 wurden aus dem gegebenen  $s$ - $t$ -Diagramm die beiden anderen als Differentialkurven entwickelt. Es ergeben sich in Übereinstimmung mit Abschnitt XXX folgende Zusammenhänge der drei Diagramme:

Die Stellen des  $s$ - $t$ -Diagramms, in denen der Weg einen extremen Wert erreicht (max  $s$  oder min  $s$ ), in denen also  $\frac{ds}{dt} = 0$  wird, liegen über den Stellen des  $v$ - $t$ -Diagramms, in denen die Geschwindigkeit null wird, wo also das  $v$ - $t$ -Diagramm die Zeit-Achse schneidet.

Die Stellen des  $s$ - $t$ -Diagramms, die seine Wendepunkte sind, wo also  $\frac{d^2s}{dt^2} = 0$  wird, liegen über jenen Stellen des  $v$ - $t$ -Diagramms, in denen die Geschwindigkeit einen extremen Wert erreicht (max  $v$  oder min  $v$ ), und ebenso über jenen Stellen des  $b$ - $t$ -Diagramms, in denen die Beschleunigung null wird, wo also das  $b$ - $t$ -Diagramm die Zeit-Achse schneidet.

Die Stellen des  $v$ - $t$ -Diagramms, die seine Wendepunkte sind, wo also  $\frac{d^2v}{dt^2} = 0$  wird, liegen über jenen Stellen des  $b$ - $t$ -Diagramms, in denen die Beschleunigung extreme Werte erreicht (max  $b$  oder min  $b$ ).

Gegeben seien die Maßstäbe:

Wegmaßstab: 1 cm Weg-Achse =  $a$  m Weg,

Zeitmaßstab: 1 cm Zeit-Achse =  $\delta$  sek.

Unter dem Hinweise, daß  $\overline{O\bar{T}}$  die Einheit der Zeit darstellt, also  $\frac{1}{\delta}$  cm ist, sind nach den Gleichungen 164 die Maßstäbe der beiden anderen Diagramme:

Geschwindigkeitsmaßstab: 1 cm Geschw.-Achse =  $\frac{a}{\delta}$  m/sek Geschw.,

Beschleunigungsmaßstab: 1 cm Beschl.-Achse =  $\frac{a}{\delta^2}$  m/sek<sup>2</sup> Beschl.

In Fig. 578 wurden aus dem gegebenen  $b$ - $t$ -Diagramm die beiden anderen als Integralkurven entwickelt. Der Zusammenhang der drei Diagramme ist der gleiche wie in Fig. 577.

Gegeben seien die Maßstäbe:

Beschleunigungsmaßstab: 1 cm Beschl.-Achse =  $\gamma$  m/sek<sup>2</sup> Beschl.,

Zeitmaßstab: 1 cm Zeit-Achse =  $\delta$  sek.

Nach Gleichung 155:  $dv = b \cdot dt$  ist durch Integration

$$v - v_0 = \int_0^t b \cdot dt = f$$

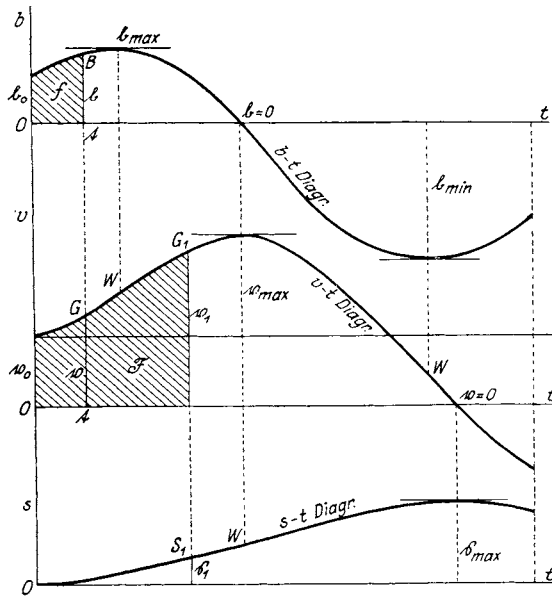


Fig. 578.

und mit Benützung von Gleichung 162:

$$v - v_0 = \beta f.$$

Die Bedeutung von 1 cm<sup>2</sup> der Fläche  $f$  ist:

$$1 \text{ cm}^2 = 1 \text{ cm Zeit-Achse} \times 1 \text{ cm Beschleunigungs-Achse}$$

$$\text{oder} \quad 1 \text{ cm}^2 = \delta \text{ sek} \times \gamma \text{ m/sek}^2 = \delta \gamma \text{ m/sek}$$

und nach Gleichung 163:

$$1 \text{ cm}^2 = \beta \text{ m/sek}$$

Wurde z. B. gewählt:  $\delta = 0,5$ ,  $\gamma = 6$ , so bedeutet

$$1 \text{ cm}^2 = 3 \text{ m/sek};$$

beträgt die Diagrammfläche  $f = 4 \text{ cm}^2$ , so ist

$$v - v_0 = f = 4 \text{ und } v - v_0 = \beta f = 12 \text{ m/sek.}$$

Die Strecken  $v = v_0 + f$  werden in ein besonderes  $v-t$ -Diagramm eingetragen; sein Maßstab ist:

Geschwindigkeitsmaßstab:

$$1 \text{ cm Geschwind.-Achse} = \beta \text{ m/sek} = \delta \gamma \text{ m/sek Geschwindigkeit.}$$

Ebenso wird das  $s-t$ -Diagramm als Integralkurve gewonnen. Nach Gleichung 157 ist mit  $s_1 = 0$ :  $s = \alpha F$ .

Die Bedeutung von  $1 \text{ cm}^2$  der Fläche  $F$  ist:

$$1 \text{ cm}^2 = 1 \text{ cm Zeit-Achse} \times 1 \text{ cm Geschwindigkeits-Achse}$$

oder  $1 \text{ cm}^2 = \delta \text{ sek} \times \beta \text{ m/sek} = \delta\beta \text{ m}$

und nach Gleichung 163:

$$1 \text{ cm}^2 = a \text{ m} = \gamma\delta^2 \text{ m.}$$

Mit  $\delta = 0,5, \gamma = 6$  ist beispielsweise

$$1 \text{ cm}^2 = 1,5 \text{ m};$$

beträgt die Fläche  $F = 12 \text{ cm}^2$ , so ist

$$\bar{s} = F = 12 \text{ und } s = aF = 18 \text{ m.}$$

Die Strecken  $\bar{s}$  werden sodann in ein besonderes  $s-t$ -Diagramm eingetragen; der Weg-Maßstab desselben ist

$$1 \text{ cm Weg-Achse} = a \text{ m} = \gamma\delta^2 \text{ m Weg.}$$

Statt die Flächen  $f$  und  $F$  zu benützen, kann das  $v-t$ -Diagramm und das  $s-t$ -Diagramm auch mit Hilfe der Seileck-Methode gefunden werden (Fig. 579).

Man trägt auf der  $Ot$ -Achse des  $b-t$ -Diagramms die beliebig kleinen und gleichen Zeiteilchen  $01, 12, 23, \dots$  maßstäblich auf, zieht durch die Punkte  $1, 2, 3, \dots$  die Senkrechten zu  $Ot$  und halbiert die Zeiteilchen durch die punktierten Parallelen. Das  $b-t$ -Diagramm denkt man sich durch das Polygon

$$B_0 B_1 B_2 B_3 \dots$$

ersetzt. Seine Eckpunkte werden auf die  $Ob$ -Achse nach  $R_1 R_2 R_3 \dots$  durch Parallele zur  $Ot$ -Achse projiziert, ferner von  $O$  wieder die Zeiteinheit  $\overline{OT} = 1 \text{ sek}$  maßstäblich aufgetragen und  $T$  mit  $R_0 R_1 R_2 R_3 \dots$  verbunden.

Im  $v-t$ -Diagramm wird sodann  $O_1 G_0$  gleich der gegebenen Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  gemacht und sodann folgende Parallelen gezogen:

$$G_0 I \parallel T R_0 \text{ bis zur ersten Halbierungslinie;}$$

$$I G_1 II \parallel T R_1 \text{ bis zur zweiten Halbierungslinie;}$$

$$II G_2 III \parallel T R_2 \text{ bis zur dritten Halbierungslinie, usw.}$$

Das Polygon  $I III III \dots$  ist dann dem  $v-t$ -Diagramm  $G_0 G_1 G_2 \dots$  umschrieben und dieses kann nun leicht gezeichnet werden.

Je kleiner man die Zeiteilchen wählt, desto genauer wird die Konstruktion des  $v-t$ -Diagramms sein.

In derselben Weise wird das  $s-t$ -Diagramm aus dem soeben gefundenen  $v-t$ -Diagramm gewonnen.

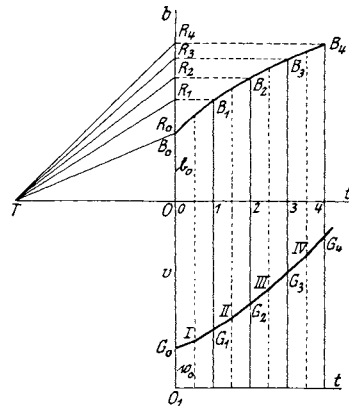


Fig. 579.

Von dieser Seilecksmethode sind zahlreiche Anwendungen gemacht worden, u. a. in den Abhandlungen:

H. Wehage, Über den ruhigen Gang der Dampfmaschine mit Kurbelwelle, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1884, S. 639;

A. Nerreter, Graphodynamische Untersuchung einer vierzylindrigen Fahrzeugmaschine. Dissertation 1912.

Genauer wird man das  $v-t$ -Diagramm aus dem  $b-t$ -Diagramm erhalten, wenn man für jeden Punkt  $G$  den Krümmungsmittelpunkt  $K$  der  $G$ -Linie aufsucht und sodann das Diagramm nicht aus kleinen geraden Stücken, wie oben, sondern aus kleinen Kreisbögen zusammensetzt, die aus den Krümmungsmittelpunkten beschrieben werden (Fig. 580).

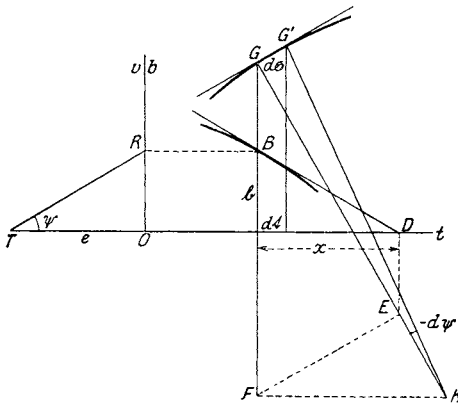


Fig. 580.

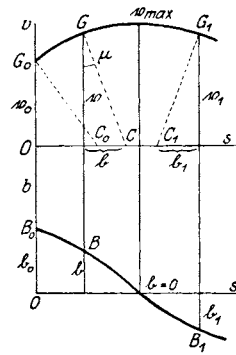


Fig. 581.

Der Strahl  $TR$  ist parallel zur Tangente an das  $v-t$ -Diagramm in  $G$ ; damit ist auch die Normale  $GK$  bekannt. Setzt man  $\overline{GK} = \rho$  und nennt  $x$  die Subtangente des  $b-t$ -Diagramms in  $B$ ,  $\overline{GG'} = d\sigma$ ,  $\overline{TO} = e$ , so bestehen die Beziehungen

$$d\sigma = \rho \cdot (-d\psi), \quad dt = d\sigma \cdot \cos \psi, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{b}{e}, \quad \frac{d\psi}{\cos^2 \psi} = \frac{db}{e},$$

ferner  $b : x = -db : dt$ , woraus schließlich:

$$x = \rho \sin \psi \cos^2 \psi.$$

Um also den Krümmungsmittelpunkt  $K$  zu finden, zieht man  $DE \perp Ot$  bis zum Schnitte  $E$  mit  $GK$ ,  $EF \perp GK$  bis zum Schnitte  $F$  mit  $b$  und  $FK \parallel Ot$ . (Mitteilung von Maurice d'Ocagne an Abdank-Abakanowicz; siehe dessen „Integraphen“, S. 160.)

**326. Das Geschwindigkeit-Weg- ( $v-s$ -) Diagramm und das Beschleunigung-Weg- ( $b-s$ -) Diagramm.** Ein viel benütztes Diagramm schließt die Zeit aus der Betrachtung aus und stellt nur den Verlauf der Geschwindigkeit mit der Länge des zurückgelegten Weges zusammen (Fig. 581).

Es seien die gewählten Maßstäbe:

Wegmaßstab:

$$1 \text{ cm Weg-Achse} = a \text{ m Weg};$$

Geschwindigkeitsmaßstab:

$$1 \text{ cm Geschw.-Achse} = \beta \text{ m/sek. Geschwindigkeit.}$$

Aus den Gleichungen 150 und 155

$$v = \frac{d\bar{s}}{dt} \text{ und } \bar{b} = \frac{dv}{dt}$$

folgt die zeitfreie Gleichung

$$v \cdot dv = \bar{b} \cdot d\bar{s} \dots \dots \dots 165)$$

die in Verbindung mit den Gleichungen 162:

$$\bar{s} = \frac{s}{a}, \quad v = \frac{v}{\beta}, \quad \bar{b} = \frac{b}{\gamma}$$

in die zeitfreie Gleichung

$$v \cdot dv = b \cdot ds$$

übergeht, wenn  $\gamma = \frac{\beta^2}{a}$  gemacht wird (Gleichung 163).

Dadurch ist der Beschleunigungsmaßstab bestimmt

$$1 \text{ cm Beschl.-Achse} = \frac{\beta^2}{a} \text{ m/sek}^2 \text{ Beschleunigung.}$$

a) Bestimmung des  $\bar{b}$ - $s$ -Diagramms aus dem  $v$ - $s$ -Diagramm. Zieht man in einem Punkte  $G$  dieses Diagramms die Normale, so schneidet sie auf der Weg-Achse  $Os$  die Beschleunigungs-Strecke  $\bar{b}$  ab. Denn es ist die Neigung der Tangente durch die Gleichung bestimmt:

$$\text{tg } \mu = \frac{dv}{d\bar{s}}$$

und mit Benützung obiger Beziehung:

$$\bar{b} = v \cdot \text{tg } \mu;$$

dieses ist aber die Subnormale des Punktes  $G$ .

Fällt nach dieser Konstruktion  $\bar{b}$  rechts von der Ordinate  $v$ , so ist  $\bar{b}$  positiv zu zählen, da  $\mu > 0$  ist; fällt hingegen  $\bar{b}_1$  links von  $v_1$ , wie im Punkte  $G_1$ , so wird  $\mu < 0$  und damit auch  $\bar{b}_1$  negativ. Die gefundenen Beschleunigungen können dann, um  $90^\circ$  gegen den Uhrzeiger gedreht, in einem besonderen  $\bar{b}$ - $s$ -Diagramm zusammengestellt werden (Fig. 581).

An den Stellen, in denen dieses Diagramm die Weg-Achse schneidet, ist  $\bar{b} = 0$  und die Geschwindigkeit nimmt größte oder kleinste Werte an; größte, wenn links vom Schnittpunkte  $\bar{b} = 0$  die Beschleunigung positiv war. Zeichnet man beide Diagramme in dasselbe Achsenkreuz ein (Fig. 582) und schneiden sie sich dann in einem Punkte  $G'$ , so ist dort  $\bar{b} = v$  und  $\text{tg } \mu = 1$ ,  $\mu = 45^\circ$ ; in diesem Schnittpunkte ist also das  $v$ - $s$ -Diagramm unter  $45^\circ$  gegen die Achsen geneigt.

b) Bestimmung des  $v$ - $s$ -Diagramms aus dem  $b$ - $s$ -Diagramm (Fig. 583). Aus der Gleichung 165:  $v \cdot dv = b \cdot ds$  ergibt sich durch Integration

$$\frac{1}{2} (v^2 - v_1^2) = \int_{s_1}^s b \cdot ds = F,$$

worin  $F$  die Fläche zwischen dem  $b$ - $s$ -Diagramm, den Ordinaten  $b_1, b$  und der  $Os$ -Achse ist. Diese Fläche ist also der Differenz der Quadrate der Geschwindigkeiten proportional. Aus der Gleichung

$$v^2 = v_1^2 + 2F$$

läßt sich eine Schaulinie  $v^2 - s$  entwickeln, die Integralkurve des  $b$ - $s$ -Diagramms, und daraus, wenn nötig, das  $v$ - $s$ -Diagramm.

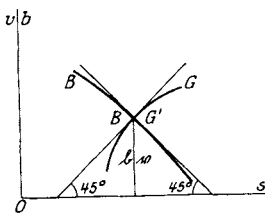


Fig. 582.

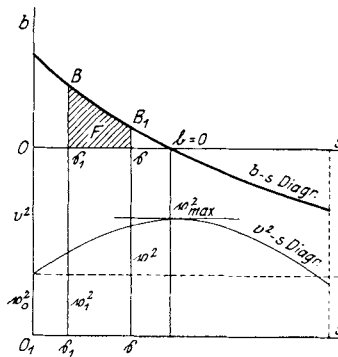


Fig. 583.

Ist das gegebene  $b$ - $s$ -Diagramm in den Maßstäben:

1 cm Weg-Achse =  $a$  m Weg,

1 cm Beschleunigungs-Achse =  $\gamma$  m/sek<sup>2</sup> Beschleunigung

entworfen worden, so bedeutet 1 cm<sup>2</sup> der Fläche  $F$ :

1 cm Weg-Achse  $\times$  1 cm Beschleunigungs-Achse =  $a\gamma$  (m/sek)<sup>2</sup>.

Wird nach Gleichung 163:  $a\gamma = \beta^2$  gesetzt, so bedeutet

$$1 \text{ cm}^2 = \beta^2 \text{ (m/sek)}^2$$

und wenn  $\mathfrak{F}$  die Anzahl der Quadratcentimeter von  $F$  ist:

$$v^2 = v_0^2 + 2\beta^2 \mathfrak{F},$$

woraus die Kurve von  $v^2$  punktweise gezeichnet werden kann.

Man kann jedoch das  $v$ - $s$ -Diagramm aus dem  $b$ - $s$ -Diagramm auch unmittelbar, ohne Benützung der Flächen  $F$  und ohne Umweg über  $v^2$  auf folgende Weise finden (Fig. 584):

Es sei  $B$  ein Punkt des gegebenen  $b$ - $s$ -Diagramms und  $G$  der entsprechende Punkt des zu suchenden  $v$ - $s$ -Diagramms. Man dreht  $b = \overline{SB}$  um  $90^\circ$  nach  $\overline{SC}$ , dann ist  $\overline{SC}$  die Subnormale der  $G$ -Linie und  $CG$  deren Normale (vgl. Fig. 581). Nach dem Vorschlage von

R. Pröll (Graphische Dynamik, S. 5) beschreibt man nun aus  $C$  mit dem Halbmesser  $CG$  einen kleinen Kreisbogen bis  $G_1$ , wobei  $G_1$  in eine beliebig nahe Ordinate  $S_1B_1$  zu liegen kommt. Dann ist  $GG_1$  angenähert ein kleines Stück des  $v$ - $s$ -Diagramms. Sodann wird  $\overline{S_1C_1} = \overline{S_1B_1}$  gemacht und mit  $C_1G_1$  als Halbmesser wieder ein kleiner Kreisbogen  $G_1G_2$  aus  $C_1$  beschrieben usw.

Diese Konstruktion, bei der das angenäherte  $v$ - $s$ -Diagramm aus kleinen Kreisbögen zusammengesetzt wird, hat bei der Anfangsstelle  $G_0$  zu beginnen.

Genauer wird man es erhalten, wenn man die kleinen Kreisbögen nicht aus den Punkten  $C, C_1, \dots$ , sondern aus den Krümmungsmittelpunkten der Kurve  $GG_1 \dots$  beschreibt.

Um den Krümmungsmittelpunkt  $K$  für die Stelle  $G$  zu finden, beachte man zunächst, daß die Normale  $GK$  durch die Umlegung der Beschleunigungsstrecke  $b$  nach  $SC$  gegeben ist. Nennt man  $\overline{GG_1} = d\sigma$ ,  $\overline{GK} = \rho$  (Fig. 585), so ist

$$\overline{SS_1} = d\tilde{s} = d\sigma \cos \mu \text{ und } d\sigma = \rho (-d\mu),$$

also

$$d\tilde{s} = -\rho \cos \mu \cdot d\mu.$$

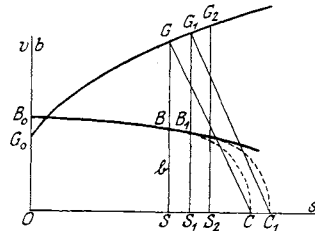


Fig. 584.

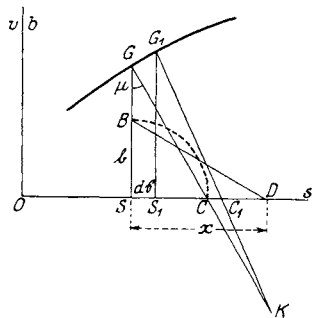


Fig. 585.

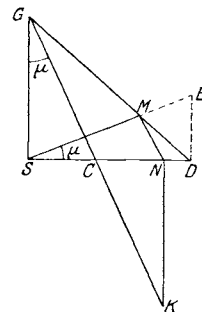


Fig. 586.

Nun ist 
$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\overline{SC}}{\overline{GS}} = \frac{b}{v}$$

und 
$$\frac{d\mu}{\cos^2 \mu} = \frac{v \cdot db - b \cdot dv}{v^2}.$$

Es ist ferner 
$$v \cdot dv = b \cdot d\tilde{s}$$

und wenn die Subtangente an die  $B$ -Kurve mit  $x = \overline{SD}$  bezeichnet wird:

$$b : x = -db : d\tilde{s}.$$



Dann erhält man

$$\frac{d\mu}{\cos^2 \mu} = -dv \left( \frac{1}{x} + \frac{\operatorname{tg} \mu}{v} \right), \quad -\frac{d\tilde{s}}{\rho \cos^3 \mu} = -v d\tilde{s} \left( \frac{1}{xv} + \frac{\operatorname{tg} \mu}{v^2} \right)$$

und schließlich mit  $\frac{\sin \mu}{b} = \frac{\cos \mu}{v}$ :

$$\frac{1}{\rho \sin \mu} = \frac{\sin^2 \mu}{b} + \frac{\cos^2 \mu}{x} \dots \dots \dots 166)$$

Die Konstruktion von  $\overline{GK} = \rho$  ist dann folgende (Fig. 586):

Man ziehe  $SM \perp GC$  bis zum Schnitte  $M$  mit  $GD$  und  $MN \parallel GC$ ,  $NK \parallel GS$ ; dann ist der Schnitt von  $NK$  mit  $GC$  der Krümmungsmittelpunkt  $K$ .

Denn es ist:

$$\overline{SM} : \overline{ME} = \overline{SG} : \overline{ED} = b \operatorname{cotg} \mu : x \operatorname{tg} \mu,$$

ferner  $\overline{ME} = \overline{SE} - \overline{SM}$ ,

woraus

$$\frac{\cos \mu}{\overline{SM}} = \frac{\sin^2 \mu}{b} + \frac{\cos^2 \mu}{x};$$

mit  $\overline{SM} = \overline{SN} \cdot \cos \mu$ ,  $\rho \sin \mu = \overline{SN}$  geht diese Gleichung in 166) über.

**327. Diagramme mit Geschwindigkeitshöhen.** Statt der Geschwindigkeit  $v$  eines Punktes pflegt man mit Vorteil dessen Geschwindigkeitshöhe zu benützen, die in vielen Anwendungen der Mechanik, so insbesondere in der Hydraulik, sich eingebürgert hat.

Unter Geschwindigkeitshöhe versteht man die Höhe, die ein schwerer Punkt erreicht, wenn er in luftleerem Raum vertikal nach aufwärts geworfen wird. Ist  $v_0$  seine Anfangsgeschwindigkeit, so besteht dann zwischen dem Weg und der Geschwindigkeit die Beziehung (vgl. Gleichung 158 mit  $b = -g$ ):

$$v^2 = v_0^2 - 2gs \dots \dots \dots 158a)$$

Der schwere Punkt steigt so lange, bis  $v = 0$  geworden ist (keine Gleichgewichtslage, sondern eine vorübergehende Ruhelage); dann hat der Punkt seine Geschwindigkeitshöhe erreicht und es ist

$$s = h_0 = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Jeder Geschwindigkeit  $v$  entspricht eine andere Geschwindigkeitshöhe; es ist allgemein

$$h = \frac{v^2}{2g} \dots \dots \dots 167)$$

Der Nachteil, daß in diese Darstellung die Beschleunigung der Schwere  $g = 9,81 \text{ m/sek}^2$  gebracht wird, verschwindet völlig bei ihrer Anwendung in der Dynamik, wie wir später sehen werden; denn hier treten Gewichte auf, die ja mit den Massen ebenfalls durch  $g$  verknüpft sind; hierdurch

wird in den Beziehungen zwischen Gewichten und Geschwindigkeitshöhen die Beschleunigung der Schwere herausfallen.

**328. Das Diagramm aus dem Weg und der Geschwindigkeitshöhe ( $h$ - $s$ -Diagramm).** Es entsteht, wenn der Weg  $s$  des Punktes auf der einen Achse, die zugehörige Geschwindigkeitshöhe  $h$  in Richtung der zweiten Achse aufgetragen wird (Fig. 587).

Als Maßstäbe seien gewählt:

Weg-Maßstab:

$$1 \text{ cm Weg-Achse} = \alpha \text{ m Weg};$$

Geschwindigkeitshöhen-Maßstab:

$$1 \text{ cm } h\text{-Achse} = \varepsilon \text{ m Geschwindigkeitshöhe};$$

Beschleunigungs-Maßstab:

$$1 \text{ cm} = \gamma \text{ m/sek}^2 \text{ Beschleunigung.}$$

Nennt man  $v$ ,  $\eta$  und  $g'$  die Strecken in cm, welche  $v$ ,  $h$  und  $g$  in der Zeichnung darstellen, so bestehen die Beziehungen:

$$v = \beta v, \quad h = \varepsilon \eta. \quad g = \gamma \cdot g' \dots \dots \dots 168)$$

und Gleichung 167 geht über in:

$$\beta^2 v^2 = 2\gamma g' \cdot \varepsilon \eta.$$

Dann ist die Gleichung

$$\eta = \frac{v^2}{2g'} \dots \dots \dots 169)$$

erfüllt, wenn

$$\beta^2 = \gamma \varepsilon$$

ist. Daraus ergibt sich der

Geschwindigkeitsmaßstab:  $1 \text{ cm} = \beta \text{ m/sek}$  Geschwindigkeit mit  $\beta = \sqrt{\gamma \varepsilon}$ .

Wählt man noch zweckmäßig  $\gamma = 1$ , so wird  $g' = 9,81$  und  $\beta = \sqrt{\varepsilon}$ .

Die Konstruktion des Geschwindigkeits-Weg-Diagramms geschieht dann in folgender Weise (Fig. 587): Man trägt von  $O$  nach abwärts  $2g' = 19,62 \text{ cm}$  auf und zieht eine Parallele zu  $Os$ . Soll für die Wegstrecke  $s$  die Geschwindigkeitsstrecke  $v$  gefunden werden, so verlängere man  $H\tilde{s} = \eta$  bis zum Schnittpunkt  $P$  und schlage über  $HP$  als Durchmesser einen Halbkreis, der  $Os$  in  $Q$  trifft; dann ist  $\tilde{s}Q = v$ , das nun noch nach  $\tilde{s}G$  gedreht wird. Die so gefundenen Punkte  $G$  erfüllen dann das  $v$ - $s$ -Diagramm, dessen Maßstab oben gefunden wurde.

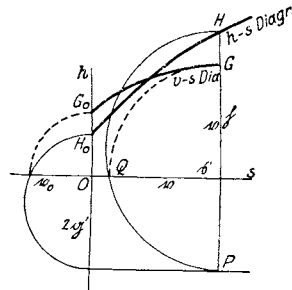


Fig. 587.

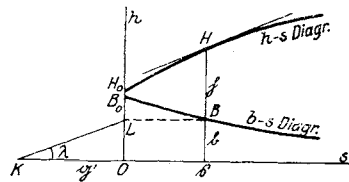


Fig. 588.

Das  $b$ - $s$ -Diagramm kann dann aus dem  $v$ - $s$ -Diagramm entwickelt werden, wie dies in 326 gezeigt wurde; es gibt aber auch einen unmittelbaren Weg ohne Benützung dieses Diagramms. Trägt man nämlich

(Fig. 588) die Beschleunigung der Schwere  $g$  nach beliebigem Maßstabe  $g = \gamma \cdot g'$  von  $O$  nach der negativen Richtung der  $Os$ -Achse auf und zieht durch den Endpunkt  $K$  die Parallele zu der Tangente des  $h$ - $s$ -Diagramms in  $H$ , so erhält man im Schnitte mit der Achse  $Oh$  den Punkt  $L$ ; es ist dann  $\overline{OL} = b$  die gesuchte Beschleunigungsstrecke in  $\xi$ .

Denn es ist  $\text{tg } \lambda = \frac{d\eta}{d\xi}$ ; aus den Gleichungen 165 und 169:

$$v \cdot dv = b \cdot d\xi, \quad v^2 = 2g'\eta$$

folgt  $v \cdot dv = g' \cdot d\eta$  und  $b \cdot d\xi = g' \cdot d\eta$

oder  $b = g' \cdot \text{tg } \lambda$ .

Macht man noch  $\xi \overline{B} = \overline{OL} = b$ , so erhält man einen Punkt  $B$  des  $b$ - $s$ -Diagramms.

**329. Ermittlung der Zeit.**

a) Aus dem  $v$ - $s$ -Diagramm. Das in 326 behandelte Geschwindigkeit-Weg-Diagramm gestattet auch die Ermittlung der Zeit der Bewegung. Nennt man wieder  $\xi, v, t$  die Strecken in cm, welche den Weg, die Geschwindigkeit und die Zeit darstellen, so ist nach Gleichung 150:

$$dt = \frac{d\xi}{v} \quad \text{und somit}$$

$$t = \int \frac{d\xi}{v} \quad \dots \dots \dots 170)$$

Setzt man  $v x = a^2$ , worin  $x$  eine neue veränderliche,  $a$  eine konstante Strecke in cm bezeichnet, so wird

$$t = \frac{1}{a^2} \int x \cdot d\xi.$$

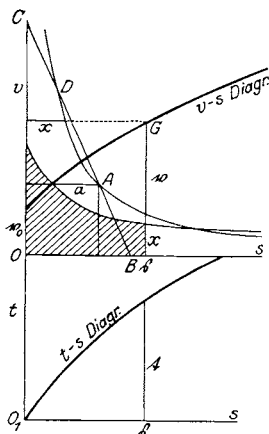


Fig. 589.

Stellt man  $x$  als Funktion von  $\xi$  dar, so hat das Integral die Bedeutung einer Fläche  $\int$  zwischen dem  $x$ - $s$ -Diagramm und der  $Os$ -Achse; es ist dann

$$t = \frac{\int}{a^2}$$

und das  $t$ - $s$ -Diagramm ergibt sich als Integralkurve des  $x$ - $s$ -Diagramms. (Vgl. R. Pröll, Graphische Dynamik, S. 8.)

Dieses  $x$ - $s$ -Diagramm kann in verschiedener Art gezeichnet werden.

Erste Art (Fig. 589). Man wählt für  $a$  eine beliebige Strecke in cm und zeichnet im gegebenen  $v$ - $s$ -Diagramm einen Punkt  $A$ , der von beiden Achsen den Abstand  $a$  hat. Die Gleichung  $v x = a^2$  entspricht einer gleichseitigen Hyperbel, deren Asymptoten die Achsen sind;  $A$  ist ihr Scheitel. Zieht man durch  $A$  eine beliebige Gerade, welche die Achsen in

$B$  und  $C$  trifft, und überträgt  $\overline{AB} = \overline{CD}$ , so ist  $D$  ein zweiter Punkt der Hyperbel. Auf diese Weise können beliebig viele Punkte der Hyperbel und diese selbst gezeichnet werden. Zieht man dann durch einen Punkt  $G$  des  $v$ - $s$ -Diagramms die Parallele zu  $Os$ , so wird auf ihr durch  $Ov$  und die Hyperbel das Stück  $x$  herausgeschnitten, das sodann noch nach  $\overline{sG}$  zu übertragen ist.

Man erhält so punktweise das  $x$ - $s$ -Diagramm, dessen Fläche  $\mathfrak{f}$  dann noch zu bestimmen ist. Um endlich die wirkliche Zeit  $t$  zu ermitteln, wenn die Maßstäbe des Diagramms:

Weg-Maßstab: 1 cm Weg-Achse =  $a$  m Weg,  
 Geschwindigkeits-Maßstab: 1 cm Geschw.-Achse =  $\beta$  m/sek Geschw.  
 sind, erinnere man sich, daß nach Gleichung 163 für den Zeitmaßstab gilt: 1 cm =  $\delta$  sek =  $\frac{a}{\beta}$  sek und somit die wirkliche Zeit:

$$t = \delta t = \frac{a}{\beta} \frac{\mathfrak{f}}{a^2} \text{ sek,}$$

worin  $\mathfrak{f}$  und  $a^2$  reine Flächen in  $\text{cm}^2$  sind.

In Fig. 589 wurden folgende Maßstäbe gewählt:

Weg-Maßstab: 1 cm Weg-Achse = 50 m Weg,  
 Geschwindigkeits-Maßstab: 1 cm Geschw.-Achse = 10 m/sek Geschw.

Die Länge  $a$  wurde mit 1,2 cm angenommen. Dann sind die Ordinaten  $t$  des  $t$ - $s$ -Diagramms:

$$t = \frac{\mathfrak{f}}{1,44}$$

und die wirkliche Zeit:  $t = 3,47 \mathfrak{f}$  sek.

An der Stelle  $\mathfrak{s}$  ergab sich durch Planimetrieren des  $x$ - $s$ -Diagramms:  $\mathfrak{f} = 2,3 \text{ cm}^2$ ; dann ist die bis zu dieser Stelle verflossene Zeit:  $t = 8,28$  sek (vgl. die Diagramme der Humphrey-Pumpe, Fig. 618 unten).

Zweite Art (Fig. 590). Man trägt die beliebige Strecke  $a$  von  $O$  aus bis  $A_1$  und  $A_2$  auf und zieht  $A_1C \parallel A_2D \parallel Os$ . Die Parallele  $A_1C$  schneidet die Ordinate  $v = \overline{sG}$  des  $v$ - $s$ -Diagramms in  $A$ ; zu beiden Seiten dieses Punktes trägt man zwei beliebige und gleiche Strecken  $\overline{BA} = \overline{AC}$  auf und zieht die Linien  $GBD$  bis zum Schnitte  $D$  mit  $A_2D$ , und  $DEC$ . Dann ist  $\overline{sE} = x$ . Denn aus der Ähnlichkeit der Dreiecke folgt:

$$\overline{BA} : \overline{DH} = \overline{GA} : \overline{GH}, \quad \overline{AC} : \overline{DH} = \overline{AE} : \overline{EH}$$

und da  $\overline{BA} = \overline{AC}$  ist:  $\overline{GA} : \overline{GH} = \overline{AE} : \overline{EH}$

oder  $(v - a) : (v + a) = (a - x) : (a + x)$ ,

woraus  $v x = a^2$ .

(Vgl. M. Tolle, Regelung der Kraftmaschinen, 2. Auf., S. 135.)

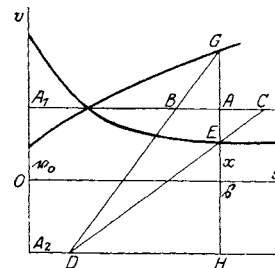


Fig. 590.

Eine andere Methode, aus dem  $v$ - $s$ -Diagramm das  $t$ - $s$ -Diagramm zu entwickeln, beruht auf einer Umkehrung der in Fig. 567 gegebenen Konstruktion, wie zuerst R. Pröll, Graph. Dynamik, S. 13 gezeigt hat (vgl. auch E. Brauer, Turbinentheorie, 1908, S. 227 und M. Tolle, Regelung der Kraftmaschinen, 2. Aufl., S. 135).

Wäre in Fig. 591 das  $t$ - $s$ -Diagramm gegeben, so fände man die Geschwindigkeitsstrecke  $\overline{OQ} = v$  durch Ziehen der Parallele  $T'Q$  zur Tangente in  $S$  an das  $t$ - $s$ -Diagramm; dabei ist  $\overline{OT}$  jene Strecke, welche die Zeiteinheit darstellt (vgl. Fig. 567). Man könnte dieselbe Strecke  $\overline{OT}_1$  auch auf der Geraden  $Os$  auftragen und in  $T_1$  die Senkrechte  $T_1Q_1$  zur Tangente in  $S$  ziehen; diese Senkrechte würde auf der lotrechten Achse  $Ov$  die Geschwindigkeitsstrecke  $v$  abschneiden.

Kehrt man diese Konstruktion um, so ergibt sich folgende Methode, das  $t$ - $s$ -Diagramm zu finden; allerdings muß bei einer bestimmten Zeit,

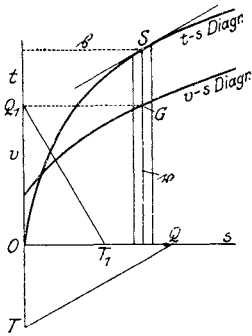


Fig. 591.

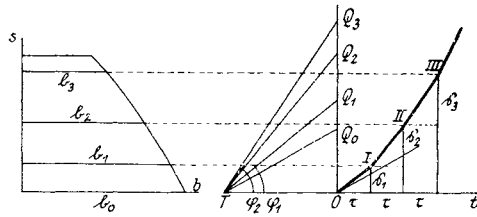


Fig. 592.

z. B.  $t = 0$  für den Anfang der Bewegung oder  $t$  für die Wegstrecke  $s$  begonnen werden.

Man projiziert den Punkt  $G$  des  $v$ - $s$ -Diagramms nach  $Q_1$  auf die Achse  $Os$ , macht  $\overline{OT}_1$  maßstäblich gleich der Zeiteinheit und zieht senkrecht zu  $T_1Q_1$  durch  $S$  ein kurzes gerades Stück, das bereits ein Teilchen des  $t$ - $s$ -Diagramms ist.

Man setzt die Konstruktion in derselben Weise fort und erhält das gewünschte Diagramm aus lauter kleinen Stücken zusammengesetzt. Die Genauigkeit dieser Konstruktion ist nur gering. (Vgl. damit die graphische Integration nach Abdank-Abakanowicz, XXX.)

b) Aus dem  $b$ - $s$ -Diagramm. Auch aus dem in 326 behandelten  $b$ - $s$ -Diagramm kann das  $t$ - $s$ -Diagramm entwickelt werden, indem man zuerst, wie dort gezeigt wurde, das  $v$ - $s$ -Diagramm zeichnet und sodann auf dieses die eben vorgetragenen Methoden anwendet.

Eine direkte Konstruktion des  $t$ - $s$ - aus dem  $b$ - $s$ -Diagramm wäre folgende (Fig. 592): Man teilt wie in Fig. 579 die Achse  $Ot$  in beliebig kleine, gleiche Zeiteilchen  $\tau$  und trägt von  $O$  nach links die Strecke  $\overline{OT}$

auf, welche die Zeiteinheit darstellt. Da nach Gleichung 164:  $\delta = \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$  ist, worin die reinen Zahlen  $\alpha$  und  $\gamma$  den Weg- und Beschleunigungsmaßstab angeben, so ist der Zeitmaßstab:

$$1 \text{ cm Zeit-Achse} = \delta \text{ sek} = \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}} \text{ sek}$$

$$\text{und} \quad 1 \text{ sek} = \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}} \text{ cm} = \overline{OT}.$$

Nun trägt man nach dem Geschwindigkeitsmaßstabe

$$1 \text{ cm} = \beta \text{ m/sek} = \sqrt{\alpha\gamma} \text{ m/sek} \text{ (vgl. Gleichung 163)}$$

die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0 = \overline{OQ_0}$  in  $Os$  und ferner  $\overline{Q_0Q_1} = \frac{1}{2} b_0 \tau$  auf, zieht schließlich  $OI \parallel TQ_1$ ; dann ist

$$\hat{s}_1 = \tau \operatorname{tg} \varphi_1 = v_0 \tau + \frac{1}{2} b_0 \tau^2$$

der Weg des Punktes im ersten Zeiteilchen  $\tau$  (vgl. Gleichung 159) und die Geschwindigkeit am Ende dieses Zeiteilchens

$$v_1 = v_0 + b_0 \tau.$$

Sodann zieht man durch  $I$  die Parallele zu  $Ot$ , die im  $b$ - $s$ -Diagramm die Beschleunigung  $b_1$  ausschneidet, trägt von  $Q_1$  aus die Strecke  $\overline{Q_1Q_2} = \frac{1}{2} (b_0 + b_1) \tau$  auf und zieht  $III \parallel TQ_2$ . Dann ist die Geschwindigkeit am Ende des zweiten Zeiteilchens  $\tau$

$$v_2 = v_1 + b_1 \tau = v_0 + b_0 \tau + b_1 \tau$$

und der Weg im zweiten Zeiteilchen

$$\hat{s}_2 = \tau \operatorname{tg} \varphi_2 = v_0 \tau + b_0 \tau^2 + \frac{1}{2} b_1 \tau^2.$$

Jetzt zieht man durch  $II$  die Parallele zu  $Ot$ , die im  $b$ - $s$ -Diagramm die Strecke  $b_2$  ausschneidet, trägt von  $Q_2$  die Strecke auf:  $\overline{Q_2Q_3} = \frac{1}{2} (b_1 + b_2) \tau$ , zieht  $IIIII \parallel TQ_3$  usw.

Das Polygon  $OIIIIII \dots$  ist angenähert das gesuchte  $s$ - $t$ -Diagramm. Je größer die Teilchen  $\tau$  gewählt werden, desto ungenauer wird das Diagramm.

Bei diesem Anlasse sei auf die interessante Studie von L. Gumbel: „Die graphische Lösung von Differentialgleichungen zweiter Ordnung in Anwendung auf die Schwingungslehre“, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1919, S. 771 hingewiesen. Hier wird in ähnlicher Weise die graphische Integration der Differentialgleichung

$$b = \frac{d^2 s}{dt^2} = f(t)$$

vorgeführt und im Anschlusse daran die Schwingungsgleichung

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + a f_1(s) + b f_2\left(\frac{ds}{dt}\right) + c f_3(t) = 0$$

mit Benützung des Seilpolygons graphisch integriert.

c) Aus dem  $b$ - $v$ -Diagramm. Die Bestimmung der Zeit aus diesem Diagramm läßt sich nach denselben Methoden wie in a) durchführen. Denn nach den Gleichungen:

$$dv = b \cdot dt, v \cdot dv = b \cdot d\bar{s}$$

kann Gleichung 170 in der Form geschrieben werden:

$$t = \int \frac{dv}{b} = \int \frac{d\bar{s}}{v}.$$

Zur Auswertung dieses Integrals wird man somit die gleichen Konstruktionen benutzen, die in a) mitgeteilt wurden; man hat nur  $\bar{s}$  durch  $v$  und  $v$  durch  $b$  zu ersetzen, das  $x$ - $v$ -Diagramm zu zeichnen, wobei  $x = \frac{a^2}{b}$  ist, und sodann die Fläche  $f = \int x \cdot dv$  zu bestimmen (Fig. 593).

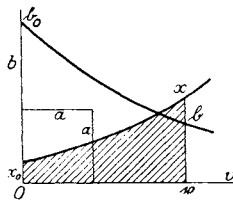


Fig. 593.

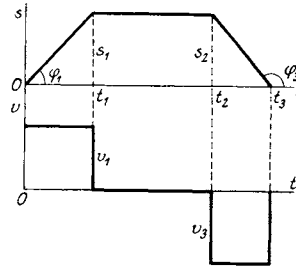


Fig. 594.

Sind die Maßstäbe vorgeschrieben:

Geschwindigkeits-Maßstab: 1 cm Geschw.-Achse =  $\beta$  m/sek Geschw.,

Beschleunigungs-Maßstab: 1 cm Beschl.-Achse =  $\gamma$  m/sek<sup>2</sup> Beschl.,

so ist nach Gleichung 163 der Zeitmaßstab:

$$1 \text{ cm Zeit-Achse} = \delta \text{ sek} = \frac{\beta}{\gamma} \text{ sek}$$

und die Zeit  $t = \delta t = \frac{\beta f}{\gamma a^2} \text{ sek.}$

(Vgl. 331 unter R. Sanzin.)

**330. Beispiele.** Da in den folgenden Diagrammen nicht maßstäblich konstruiert wird, sollen in die Abbildungen die Größen  $t, s, v, b$  statt den Strecken  $\bar{t}, \bar{s}, v, b$  eingetragen werden.

1. Das  $s$ - $t$ -Diagramm eines Punktes ist das in Fig. 594 gezeichnete Trapez. Man zeichne das  $v$ - $t$ -Diagramm.

Da in der Zeit von 0 bis  $t_1$  der Winkel  $\varphi_1$  des  $s$ - $t$ -Diagramms konstant ist, bleibt die Geschwindigkeit unverändert; es ist

$$v_1 = \text{tg } \varphi_1 = \frac{s_1}{t_1}.$$

In der Zeit von  $t_1$  bis  $t_2$  ändert sich der Weg nicht; es ist  $\varphi_2 = 0$  und  $v_2 = 0$ .

Zwischen  $t_2$  und  $t_3$  ist die Geschwindigkeit

$$v_3 = \operatorname{tg} \varphi_3 = -\frac{s_1}{t_3 - t_2},$$

also wieder konstant, aber negativ; der Punkt kehrt in die Anfangslage zurück.

2. Das  $v$ - $t$ -Diagramm eines Punktes ist das in Fig. 595 gezeichnete Trapez. Man suche das  $s$ - $t$ -Diagramm.

Bis zur Zeit  $t$  wird der Weg  $s$  durch die Fläche des schraffierten Dreiecks gemessen; es ist  $s = \frac{1}{2} vt = \frac{1}{2} t^2 \operatorname{tg} \psi_1$ . Das  $s$ - $t$ -Diagramm ist demnach eine Parabel, deren Achse die Weg-Achse  $Os$  und deren Scheitel  $O$  ist. In  $t_1$  ist der Weg

$$s_1 = \frac{1}{2} v_1 t_1 = \frac{1}{2} t_1^2 \operatorname{tg} \psi_1.$$

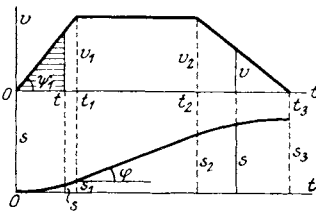


Fig. 595.

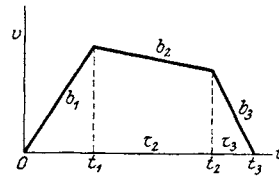


Fig. 596.

Zwischen  $t_1$  und  $t_2$  ist das  $s$ - $t$ -Diagramm eine ansteigende Gerade, die sich berührend an die Parabel anschließt; für ihren Neigungswinkel gilt die Gleichung  $\operatorname{tg} \varphi = v_1$ .

Der Weg bis  $t_2$  ist

$$s_2 = s_1 + (t_2 - t_1) \cdot \operatorname{tg} \varphi = v_1 \left( t_2 - \frac{t_1}{2} \right).$$

Zwischen  $t_2$  und  $t_3$  ist das  $s$ - $t$ -Diagramm wieder eine Parabel, die sich an die Gerade berührend anschließt. Für die Zeit  $t$  ist der Weg des Punktes die Fläche des  $v$ - $t$ -Diagramms bis zur Ordinate  $v$ , also

$$s = s_2 + \frac{1}{2} (v_1 + v) (t - t_2) = \frac{v_1 t_1 t_2 - t_2^2 - t_1 t_3 + 2 t_3 t - t^2}{t_3 - t_2}.$$

Für die Zeit  $t_3$  ist der Gesamtweg des Punktes:

$$s_3 = \frac{v_1}{2} (t_3 + t_2 - t_1).$$

3. Nach einer Mitteilung von Pforr in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, 1913, S. 788 ist das  $v$ - $t$ -Diagramm eines elektrisch betriebenen Stadtbahnzuges durch Fig. 596 gegeben. Zuerst ist die Bewegung durch die Zeit  $t_1$  gleichförmig beschleunigt; sodann, während



des Hauptteiles der Bewegung, leicht verzögert; endlich, während des Auslaufes von  $t_2$  bis  $t_3$ , stark verzögert.

Gegeben seien die Verzögerungen  $b_2$  und  $b_3$ , sowie die Zeiten  $t_2 - t_1 = \tau_2$  und  $t_3 - t_2 = \tau_3$ , und der Gesamtweg  $s$ . Zu berechnen ist die Zeit  $t_1$  des Anlaufes und seine Beschleunigung  $b_1$ . Man findet:

$$t_1 = \frac{2s - b_2 \tau_2^2 - 2b_3 \tau_2 \tau_3 - b_3 \tau_3^2}{b_2 \tau_2 + b_3 \tau_3},$$

$$b_1 = \frac{(b_2 \tau_2 + b_3 \tau_3)^2}{2s - b_2 \tau_2^2 - 2b_3 \tau_2 \tau_3 - b_3 \tau_3^2}.$$

Die Werte  $b_1, b_2, b_3$  sind absolut genommen.

4. Von zwei in derselben Geraden und von der gleichen Anfangslage bewegten Punkten sind in Fig. 597 die  $v$ - $t$ -Diagramme gezeichnet. Bekannt sind die Zeiten  $t_1$  und  $t_2$ . Nach welcher Zeit  $t$  treffen die Punkte zusammen?

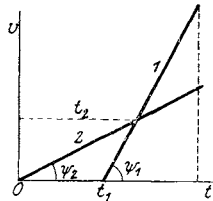


Fig. 597.

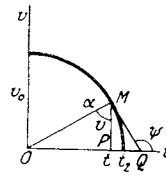


Fig. 598.

Nennt man  $\psi_1$  und  $\psi_2$  die Neigungen der beiden Diagramme 1 und 2, so ist der Weg des Punktes im Diagramm 1:

$$s_1 = \frac{1}{2} (t - t_1)^2 \cdot \operatorname{tg} \psi_1$$

und der Weg des Punktes im Diagramm 2:

$$s_2 = \frac{1}{2} t^2 \cdot \operatorname{tg} \psi_2.$$

Die Punkte treffen zusammen, wenn  $s_1 = s_2$  geworden ist, woraus

$$(t - t_1)^2 \cdot \operatorname{tg} \psi_1 = t^2 \cdot \operatorname{tg} \psi_2.$$

Nun ist aber  $(t_2 - t_1) \cdot \operatorname{tg} \psi_1 = t_2 \cdot \operatorname{tg} \psi_2$ .

Es ergibt sich  $t = t_2 + \sqrt{t_2(t_2 - t_1)}$ .

5. Das  $v$ - $t$ -Diagramm eines Punktes ist ein Viertelkreis (Fig. 598). Man berechne die Geschwindigkeit  $v$  und die Beschleunigung  $b$  des Punktes für eine beliebige Zeit  $t$ .

Der Ansatz:  $v^2 + t^2 = v_0^2$  oder  $t_2^2$  wäre unbrauchbar, weil falsch in den Dimensionen.

Es ist  $\cos \alpha = \frac{v}{v_0}, \sin \alpha = \frac{t}{t_2},$

daher  $\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 + \left(\frac{t}{t_2}\right)^2 = 1,$

woraus 
$$v = \frac{v_0}{t_2} \sqrt{t_2^2 - t^2}.$$

Ferner ist 
$$b = \operatorname{tg} \psi = - \frac{MP}{PQ}.$$

Num gilt:  $OQ : \overline{OM} = \overline{OM} : \overline{OP}$ , woraus

$$\overline{OQ} = \frac{t_2^2}{t}, \quad \overline{PQ} = \frac{t_2^2}{t} - t, \quad \overline{MP} = v$$

und 
$$b = - \frac{v_0 t}{t_2 \sqrt{t_2^2 - t^2}}.$$

6. Bei der Berechnung von Förder-Maschinen wird für die Anfahrt ein parabolisches  $v$ - $t$ -Diagramm zugrunde gelegt (vgl. H. Fritze, Die Berechnung von Förderdiagrammen für Motoren mit Reihenschluß-Charakteristik, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1914, S. 740).

Fig. 599 zeigt die drei Teile des Diagramms: die Anfahrt, deren Geschwindigkeit von 0 bis  $v_1$  zunimmt; den Beharrungszustand mit konstanter Geschwindigkeit  $v_1$ ; endlich den Auslauf mit gleichförmig verzögerter Bewegung.

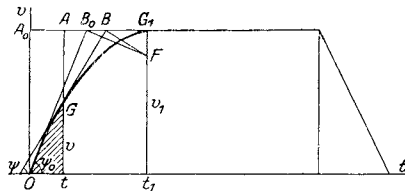


Fig. 599.

Es sei außer  $v_1$  die Anfahrtsbeschleunigung  $b_0$  gegeben; zu ermitteln ist die Anfahrtszeit  $t_1$  und für irgend eine Zeit  $t$  während der Anfahrt die Geschwindigkeit, die Beschleunigung und der Weg.

Es ist  $b_0 = \operatorname{tg} \psi_0$ , wenn  $\psi_0$  die Neigung der Anfangstangente der Parabel  $OB_0$  gegen die Zeit-Achse  $Ot$  ist. Da diese Tangente die Strecke  $A_0G_1$  halbiert, wenn  $G_1$  der Scheitel und  $G_1F$  die Achse der Parabel ist, so folgt

$$b_0 = \frac{2v_1}{t_1} \text{ und die Anfahrtszeit: } t_1 = \frac{2v_1}{b_0}.$$

Zieht man  $B_0F \perp OB_0$ , so schneidet diese Senkrechte die Achse der Parabel in deren Brennpunkt  $F$ . Soll man nun für die Zeit  $t$  die Geschwindigkeit  $v$  und die Beschleunigung  $b$  konstruieren, so zieht man die zu  $t$  gehörende Ordinate, halbiert  $\overline{AG_1}$  in  $B$ , verbindet  $B$  mit  $F$  und errichtet  $BG \perp FB$ ; dann ist  $BG$  die Tangente der Parabel, welche die Ordinate  $At$  im Punkte  $G$  schneidet; es ist  $\overline{Gt} = v$ . Ist  $\psi$  die Neigung dieser Tangente, so ist  $b = \operatorname{tg} \psi$ .

Der Weg bis zur Zeit  $t$  wird durch die schraffierte Fläche gemessen. Bezüglich der Maßstäbe siehe 324.

Die Rechnung liefert:

$$v = v_1 \left[ \frac{2t}{t_1} - \left( \frac{t}{t_1} \right)^2 \right], \quad b = b_0 \frac{t_1 - t}{t_1}, \quad s = v_1 \left[ \frac{t^2}{t_1} - \frac{t^3}{3t_1^2} \right].$$

Für  $t = t_1$  ist der Anfahrtsweg:  $s_1 = \frac{2}{3} v_1 t_1$ .

**331. Anwendungen der kinematischen Diagramme.** Wie sehr die genannten Diagramme Eingang in die Praxis gefunden haben, möge aus folgenden Anwendungen entnommen werden.

H. Stahl geht in seiner Arbeit: „Untersuchung des Auslaufweges elektrischer Aufzüge“, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1905, S. 544 vom  $s-t$ -Diagramm des Aufzuges aus, um hieraus das  $v-t$ -Diagramm zu entwickeln.

Die „Untersuchung über den Verbrennungsvorgang in der Gasmaschine“ von N. Borth, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1908, S. 522, geht von dem  $s-t$ -Diagramm aus, das ein Indikator aufgenommen hat, der Zeitmarken abgibt; auf Grund dieses Diagramms wird das  $v-t$ - und das  $b-t$ -Diagramm entwickelt.

A. Hruschka bringt in seinen „Bahntechnischen Forderungen an den elektrischen Vollbahnbetrieb“, Zeitschr. d. Österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1908, S. 797, Diagramme zwischen  $s$ ,  $v$  und  $b$  für den Anlauf zweier verschiedener elektrischer Motoren.

In seiner „Untersuchung der Bewegung selbsttätiger Pumpenventile“, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1908, S. 1842, geht K. Körner von den Bachschen Versuchen an Pumpenventilen aus. Die Ventilerhebung, auf die Zeit bezogen, wird einem  $s-t$ -Diagramm zugrunde gelegt und hieraus das  $v-t$ - und  $b-t$ -Diagramm entwickelt.

F. Freytag hat in seinem Aufsatz: „Neuerungen an Dampfmaschinen mit Ventilsteuerung, Bauart Lentz“, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1902, S. 1924, die Bewegung von Ventilen untersucht, die durch unrunde Scheiben mit Ventilführungsrollen gehoben werden (vgl. hierzu Abschnitt XX, Fig. 431).

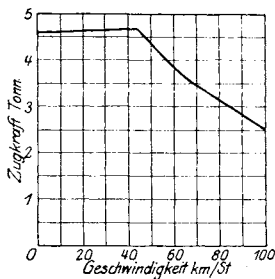


Fig. 600.

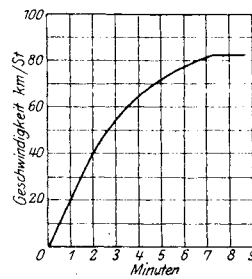


Fig. 601.

Aus dem  $s-t$ -Diagramm der Ventilerhebung werden das  $v-t$ - und das  $b-t$ -Diagramm, sowie die Massendrucke konstruiert.

Einen gleichen Vorgang befolgt Osthoff in der Abhandlung: „Die Lentz-Ventilsteuerung an Lokomotiven“, Dinglers Polyt. Journal 1909.

R. Sanzin geht in seiner Abhandlung: „Versuche über den Widerstand von Dampflokomotiven“, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1911, S. 1459, von dem  $v-t$ -Diagramm aus, das im Anlauf mit einer Güterzugslokomotive aufgenommen wurde und ermittelt daraus das  $b-t$ -Diagramm.

Derselbe Autor hat 1906 in den Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleißes unter dem Titel: „Bestimmung der Fahrzeiten aus der Leistungsfähigkeit der Lokomotiven“ eine Abhandlung veröffentlicht, in welcher von der Schaulinie zwischen Zugkraft der Lokomotive und der Fahrgeschwindigkeit in km/Std. (Fig. 600) ausgegangen und hieraus die Beschleunigung des Zuges während der Anfahrt berechnet wird. Aus dem  $b-v$ -Diagramm wird sodann die Fahrzeit nach der Gleichung

$$t = \int \frac{dv}{b}$$

mit Hilfe angenäherter Konstruktion gefunden (329). Schließlich wird aus den konstruierten Zeiten ein  $v-t$ -Diagramm und ein  $s-t$ -Diagramm entworfen (Fig. 601).

R. Harm schildert in seiner Abhandlung: „Untersuchungen an Preßluftwerkzeugen“, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1913, S. 179, ein Verfahren, um bei den rasch arbeitenden Werkzeugen (800 bis 1000 Schläge in der Minute) ein Kolbenweg-Zeit-Diagramm durch direkte Aufnahme zu gewinnen. Zu diesem Zwecke schreibt ein Stäbchen aus spanischem Rohr auf einer mit Schlemmkreide überzogenen Scheibe das  $s-t$ -Diagramm an (Fig. 602). Um den Maßstab für die Zeit-Achse zu gewinnen, beachte man, daß, wenn  $u$  die Geschwindigkeit ist, mit der die

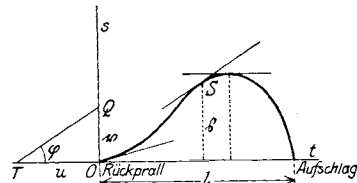


Fig. 602.

Scheibe vorbeigezogen wird,  $\frac{l}{u}$  die Zeit zwischen Rückprall und Aufschlag des Werkzeuges ist. Wird diese Zeit in der Figur durch die Länge  $l$  des Kolbenweges selbst gemessen, so ist

$$\left(\frac{l}{u}\right) \text{ sek} = l \text{ cm}$$

oder der Zeit-Maßstab:

$$1 \text{ sek} = u \text{ cm Zeit-Achse.}$$

Aus diesem  $s-t$ -Diagramm wird dann, wie in 320 und 321 gezeigt wurde, das  $v-t$ - und  $b-t$ -Diagramm mit Hilfe der Tangentenmethode abgeleitet.

R. Plank hat im 133. Hefte der „Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieur-Wesens“, 1913, unter dem Titel: „Betrachtungen über dynamische Zugbeanspruchung“ Versuche be-

sprochen, die er mittels eines Fallwerkes ausführte, um das Verhalten eines zylindrischen Stabes aus Flußeisen bei Schlagproben zu prüfen. Die Dehnungen, die der Probestab unter der stoßartigen Belastung beim Aufprallen des Fallbärs in  $O$  ( $t = 0$ ) annahm, wurden unmittelbar an einer berußten Schreibtrommel aufgenommen. Das so erhaltene  $s$ - $t$ -Diagramm (Fig. 603, Linie 1) gibt den Verlauf der Dehnungen während des Schlages.

Das  $v$ - $t$ -Diagramm (Linie 2) und das  $b$ - $t$ -Diagramm (Linie 3) wurden hierauf wie in 320 und 321 durch Tangentenziehen ermittelt und hierbei der Spiegelderivator von A. Wagener (siehe 348) benützt. Die Diagramme 1' und 2' links von  $Os$  beziehen sich auf die Bewegung des Fallbärs vor dem Aufprallen; sie ist, der Schwere entsprechend, gleichförmig beschleunigt; das  $s$ - $t$ -Diagramm 1' ist eine Parabel, das  $v$ - $t$ -Diagramm 2' eine ansteigende Gerade.

Wegen des Stoßes in  $t = 0$  entsteht in  $O$  ein Knick im  $s$ - $t$ -Diagramm, dem im  $v$ - $t$ -Diagramm ein Sprung von  $v_0$  auf  $v_0'$  entspricht (vgl. 323)

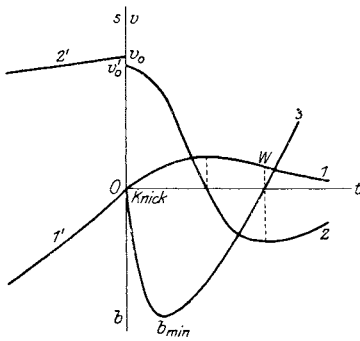


Fig. 603.

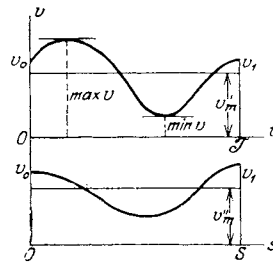


Fig. 604.

Das  $b$ - $t$ -Diagramm schnellte nach dem Stoße stark abwärts und nimmt Verzögerungswerte an, die 100 bis 200 mal so groß werden können wie die Beschleunigung der Schwere. Je heftiger der Schlag, desto näher rückt  $b_{min}$  der Achse  $Ob$ .

**332. Die mittlere Geschwindigkeit.** In vielen Fällen, in denen der Ingenieur die Geschwindigkeit eines Körpers zu untersuchen hat, insbesondere bei den mannigfachen Drehungen, interessiert er sich für den Mittelwert, den die Geschwindigkeit innerhalb einer gewissen Zeit besitzt.

Zunächst hat man versucht, diesen Mittelwert durch eine beiläufige Schätzung anzugeben. Sind  $max v$  und  $min v$  die beiden äußersten Werte, die  $v$  innerhalb jener Zeit  $T$  annimmt (Fig. 604), so hat man die mittlere Geschwindigkeit  $v_m$  durch die Gleichung ausgedrückt

$$v_m = \frac{1}{2} (max v + min v) \dots \dots \dots 171)$$

ein Ausdruck, der freilich keine Berechtigung hat, obwohl er vielfach benützt wird.

Um den Begriff der mittleren Geschwindigkeit eines Punktes festzusetzen, denke man sich die Bewegung zweier Punkte, die gleichzeitig von derselben Anfangslage ausgehen und nach der gleichen Zeit  $T$  die gleiche Endlage erreichen; die Geschwindigkeit des einen Punktes sei veränderlich, die des anderen konstant. Dann nennt man die Geschwindigkeit des zweiten Punktes die mittlere Geschwindigkeit  $v_m$  des ersten.

Nennt man  $S$  den gemeinsamen Weg beider Punkte in der gleichen Zeit  $T$ , so ist für den ersten Punkt:

$$S = \int_0^T v \cdot dt,$$

für den zweiten Punkt:

$$S = v_m' \cdot T.$$

also die mittlere Geschwindigkeit:

$$v_m' = \frac{S}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T v \cdot dt \dots \dots \dots 172)$$

Man hat versucht, die mittlere Geschwindigkeit in anderer Weise zu definieren und nicht auf die Zeit zu beziehen, sondern auf den zurückgelegten Weg. Ist nicht das  $v$ - $t$ -Diagramm des Punktes gegeben, sondern das  $v$ - $s$ -Diagramm (Fig. 604, unten), so hat man die mittlere Geschwindigkeit durch die Gleichung festgesetzt:

$$v_m'' = \frac{1}{S} \int_0^S v \cdot ds \dots \dots \dots 173)$$

(vgl. Goldstein, Die kleinste mögliche Umlaufzahl von Pumpwerken, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1906) oder auch durch die Gleichung

$$(v_m''')^2 = \frac{1}{S} \int_0^S v^2 \cdot ds$$

(vgl. H. Meuth, Kinetik und Kinetostatik des Schubkurbelgetriebes, Dingers Polyt. Journal 1905).

Hier legen die beiden Punkte zwar den gleichen Weg  $S$  zurück, aber nicht in derselben Zeit, im Gegensatze zu der ersten Definition der mittleren Geschwindigkeit. Diesen Mittelwerten  $v_m''$  und  $v_m'''$  kann man also keinerlei mechanische Bedeutung beimessen, da ja auch die Integrale  $\int v \cdot ds$  und  $\int v^2 ds$  mechanisch nicht gedeutet werden können.

Man könnte den Ersatz von  $v_m'$  durch  $v_m''$  oder  $v_m'''$  noch hinnehmen, wenn alle Definitionen der mittleren Geschwindigkeit zu dem gleichen Resultate führen würden, also  $v_m' = v_m'' = v_m'''$  wäre; dies ist aber nicht der Fall, wie folgende Beispiele beweisen mögen.

1. Gleichförmig beschleunigte Bewegung (Fig. 605). Beschleunigung  $b$  konstant, Endgeschwindigkeit  $v_1$ .

$$v = bt, \quad v_m' = \frac{1}{T} \int_0^T v \cdot dt = \frac{v_1}{2};$$

$$v^2 = 2bs, \quad v_m'' = \frac{1}{S} \int_0^S v \cdot ds = \frac{2}{3} v_1; \quad v_m''' = \frac{v_1}{\sqrt{2}}.$$

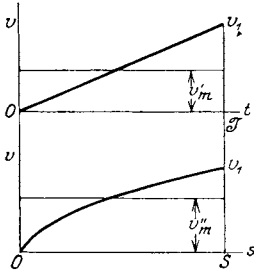


Fig. 605.

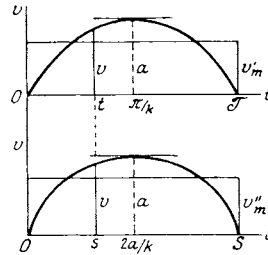


Fig. 606.

2. Sinusschwingung (Fig. 606).

$$v = a \sin kt; \text{ für die Zeit } T \text{ ist } 0 = a \sin kT, \quad kT = \pi, \quad T = \frac{\pi}{k}.$$

$$v_m' = \frac{1}{T} \int_0^T v \cdot dt = \frac{a}{T} \int_0^T \sin kt \cdot dt = \frac{2a}{\pi}.$$

$$s = \frac{a}{k} (1 - \cos kt), \quad v^2 = 2aks - k^2s^2, \quad S = \frac{2a}{k}; \quad v_m'' = \frac{1}{S} \int_0^S v \cdot ds = \frac{\pi}{4} a.$$

Das  $v$ - $s$ -Diagramm ist nämlich eine Halb-Ellipse mit den Halbachsen  $\frac{a}{k}$  und  $a$ ; das Integral ist die Fläche dieser Halb-Ellipse:  $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{a}{k} \cdot a$ . Endlich ist  $v_m''' = \frac{\sqrt{6}}{3} a$ .

Man entnimmt aus diesen Beispielen, daß  $v_m'$ ,  $v_m''$  und  $v_m'''$  verschiedene Werte ergeben. Wir werden deshalb bei der auf die Zeit bezogenen mittleren Geschwindigkeit  $v_m'$  bleiben.

Falls das  $v$ - $t$ -Diagramm der Bewegung gegeben ist, macht die Ermittlung von  $v_m$ , auch wenn das Diagramm keinem ermittelbaren mathematischen Gesetze folgt, keine Schwierigkeit. Es genügt, wenn man die Fläche zwischen dem Diagramm und der  $O$ - $t$ -Linie durch Planimetrieren gewinnt.

Anders liegt die Sache, wenn das  $v$ - $s$ -Diagramm gegeben ist und  $v_m$  bestimmt werden soll; denn hierzu darf Gleichung 173 nicht benützt werden. Es müßte zunächst aus dem  $v$ - $s$ -Diagramm nach der Gleichung

$$T = \int_0^S \frac{ds}{v}$$

die Zeit der Bewegung ermittelt werden (vgl. hierzu 329); dann wäre die mittlere Geschwindigkeit

$$v_m' = \frac{S}{T}$$

**333. Der Ungleichförmigkeitsgrad der Bewegung.** Bei vielen in der Praxis vorkommenden Bewegungen ist es von Interesse, die Schwankungen der Geschwindigkeit zu verfolgen. Besonders ist dies wichtig bei den periodischen Bewegungen, also bei solchen, deren Zustand nach gewissen Zeiten wiederkehrt. So spricht man bei allen Körpern, die eine Dauerrotation um eine Achse ausführen, von einer Periode, die hier mit einer Umdrehung oder dem Vielfachen einer Umdrehung zusammenfallen wird.

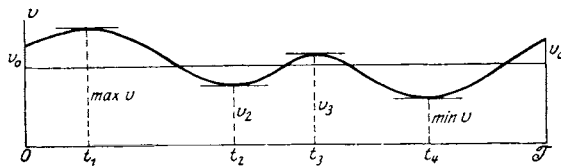


Fig. 607.

Fig. 607 zeigt das  $v$ - $t$ -Diagramm einer solchen Periode. Die Zeit derselben sei  $T$ , die Geschwindigkeit zu Anfang und zu Ende  $v_0$ ; während des Verlaufes schwankt sie in der Art, wie es das Schaubild zeigt, erreicht zur Zeit  $t_1$  einen Größtwert  $\max v$ , zur Zeit  $t_2$  einen Kleinstwert  $v_2$ , zur Zeit  $t_3$  einen anderen Größtwert  $v_3$  und zur Zeit  $t_4$  einen anderen Kleinstwert  $\min v$ .

Die mittlere Geschwindigkeit dieser Periode ist dann nach Gleichung 172:

$$v_m' = \frac{1}{T} \int_0^T v \cdot dt = \frac{S}{T},$$

worin der Weg  $S$  durch die Fläche der Schaulinie gegen die Gerade  $OT$  gemessen wird.

Der Ungleichförmigkeitsgrad soll zum Ausdruck bringen, wie groß die Schwankung  $\max v - \min v$  im Vergleiche mit der mittleren Geschwindigkeit während der Periode ist.



Geht in Fig. 607 die Schaulinie des  $v$ - $t$ -Diagramms unter die  $OT$ -Achse hinab, so wird  $\min v$  negativ und die Schwankung der Geschwindigkeit ist dann  $\max v + \min v$ .

Man kann sie auch aus dem  $s$ - $t$ -Diagramm entnehmen, wenn dieses gegeben ist (Fig. 608). Man zeichnet dann die steilste ansteigende Tangente  $T_1$  des  $s$ - $t$ -Diagramms und ebenso die steilste abfallende Tangente  $T_2$ ; die erste entspricht dem  $\max v$ , die zweite dem  $\min v$ . Trägt man von den Schnittpunkten  $S_1$  und  $S_2$  maßstäblich die Zeiteinheit auf und zeichnet die Ordinaten  $v_1$  und  $v_2$  bis zum Schnitte mit den Tangenten, so sind diese Ordina-

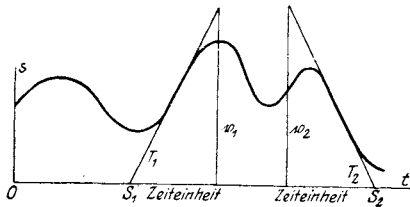


Fig. 608.

ten die Strecken, welche die größte und die kleinste Geschwindigkeit darstellen; es ist dann die gesuchte Schwankung

$$\max v + \min v = \beta (v_1 + v_2),$$

worin  $\beta = \frac{\alpha}{\delta}$  (siehe Gleichung 164) aus den Maßstäben des  $s$ - $t$ -Diagramms zu entnehmen ist. (Vgl. hierzu J. Geiger: Der Torsiograph, ein neues Instrument zur Untersuchung von Wellen, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1916.)

Zur Feststellung des Ungleichförmigkeitsgrades hat man verschiedene Vorschläge gemacht. Die gebräuchlichste und einfachste Art ist die, welche den Ungleichförmigkeitsgrad  $\mu$  durch die Angabe definiert:

$$\mu = \frac{\max v - \min v}{v_m} \dots \dots \dots 174)$$

Diese ziemlich oberflächliche Schätzung des Ungleichförmigkeitsgrades ist wiederholt angegriffen worden, da sie keinerlei wissenschaftliche Grundlage hat. Immerhin ist zu beachten, daß sie ziemlich verläßliche Resultate liefert und deshalb und ihrer Einfachheit wegen kaum je durch begründetere Vorschläge verdrängt werden wird. Läßt man für  $v_m$  die früher erwähnte Angabe (Gleichung 171) gelten:

$$v_m = \frac{1}{2} (\max v + \min v),$$

so wird der Ungleichförmigkeitsgrad

$$\mu = 2 \frac{\max v - \min v}{\max v + \min v} \dots \dots \dots 175)$$

K. Heun hat in seinem Buche: „Die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik“, S. 30, versucht, eine wissenschaftlich begründete Definition des Ungleichförmigkeitsgrades zu geben. Er empfiehlt hierfür den Ausdruck:

$$\mu'' = \frac{1}{S} \int_0^S \left(1 - \frac{v}{v_m}\right)^2 ds \dots \dots \dots 176)$$

und hebt hervor, daß hier die äußersten Grenzen der Schwankung,  $\max v$  und  $\min v$ , nicht mehr vorkommen und daß ferner der Einfluß des Vorzeichens von  $1 - \frac{v}{v_m}$  entfällt.

Da die mittlere Geschwindigkeit, unseren Ausführungen in 332 gemäß, aus dem  $v-t$ -Diagramm entnommen wird und nicht aus dem  $v-s$ -Diagramm, so wird es sich empfehlen, diesen Standpunkt auch bei der Definition des Ungleichförmigkeitsgrades einzunehmen und  $v_m$  durch  $v_m'$  zu ersetzen. Dann müßte aber für ihn die Gleichung empfohlen werden:

$$\mu' = \frac{1}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{v}{v_m'}\right)^2 dt \dots \dots \dots 177)$$

Ausgeführte Rechnungen zeigen, wie zu erwarten ist, daß die beiden Vorschläge für den Ungleichförmigkeitsgrad nach den Gleichungen 176 und 177 mit dem gebräuchlichen Wert nach Gleichung 175 durchaus nicht übereinstimmen. Tatsächlich besagt ja die Definition des Ungleichförmigkeitsgrades nach den Gleichungen 176 und 177 etwas ganz anderes, als was Gleichung 175 ausdrücken will.

An denselben Bewegungen, die schon in 332 auf ihre mittlere Geschwindigkeit untersucht wurden, soll dies gezeigt werden.

1. Gleichförmig beschleunigte Bewegung (Fig. 605). Beschleunigung  $b$  konstant, Endgeschwindigkeit  $v_1$ . Ungleichförmigkeitsgrad nach Gleichung 175 (gebräuchlicher Wert):

$$\max v = v_1, \min v = 0; \mu = 2.$$

Nach Gleichung 177:

$$v = bt, v_m' = \frac{v_1}{2}, v_1 = bT;$$

$$\mu' = \frac{1}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{v}{v_m'}\right)^2 dt = \frac{1}{3},$$

Nach Gleichung 176:

$$v^2 = 2bs, v_1^2 = 2bS, v_m'' = \frac{2}{3} v_1; \mu'' = \frac{1}{S} \int_0^S \left(1 - \frac{v}{v_m''}\right)^2 ds = \frac{1}{8}.$$

2. Sinusschwingung (Fig. 606).  $v = a \sin kt$ . Ungleichförmigkeitsgrad nach Gleichung 175 (gebräuchlicher Wert):

$$\max v = a, \min v = 0, \mu = 2.$$

Nach Gleichung 177:

$$v_m' = \frac{2a}{\pi}, \quad T = \frac{\pi}{k}, \quad \mu' = \frac{1}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{v}{v_m'}\right)^2 dt = \frac{\pi^2}{8} - 1 = 0,23.$$

Nach Gleichung 176:

$$v_m'' = \frac{\pi a}{4}, \quad S = \frac{2a}{k}, \quad v^2 = 2aks - k^2s^2;$$

$$\mu'' = \frac{1}{S} \int_0^S \left(1 - \frac{v}{v_m''}\right)^2 ds = \frac{32}{3\pi^2} - 1 = 0,08.$$

## XXXII. Dynamische Diagramme.

**334. Einleitung.** In den bisher besprochenen orthogonalen Diagrammen kamen ausschließlich die Begriffe der kinematischen Bewegungslehre: Weg, Geschwindigkeit, Beschleunigung und Zeit zur Verwendung.

In den folgenden Diagrammen werden überdies noch die wichtigsten Begriffe der Dynamik, nämlich Kraft, mechanische Arbeit, Bewegungsenergie und Leistung zur graphischen Darstellung herangezogen. Hingegen spielt die mechanische Masse des Punktes oder Körpers (vgl. 49) nur die Rolle eines konstanten Faktors, solange wir mit den wirklichen Massen zu rechnen haben; später, bei der Dynamik der Getriebe, werden wir allerdings diesen Begriff erweitern müssen und veränderliche Massen einführen. Auch bei den dynamischen Diagrammen spielt die Form des Weges keine Rolle. Es ist also gleichgültig, ob der Weg des untersuchten Punktes ein gerader oder gekrümmter ist.

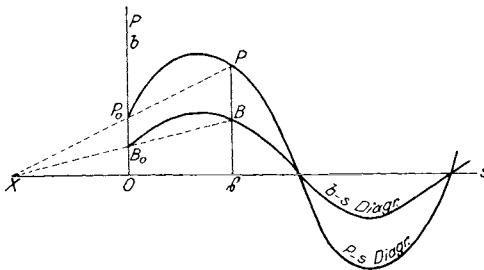


Fig. 609.

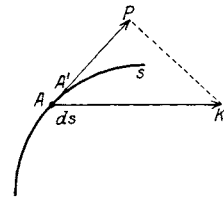


Fig. 610.

Während die Mehrzahl der kinematischen Diagramme auf die Zeit-Achse bezogen werden, ist es üblich, die dynamischen Diagramme auf die Weg-Achse zu beziehen. Es ist dies die Folge der gebräuchlichen Art, den Verlauf der Kraft, z. B. eines Dampfkolbens, durch ein zeichnendes Instrument, den Indikator, aufzunehmen und dadurch auf den Kolbenweg zu beziehen.

**335. Das Kraft-Weg-Diagramm ( $P$ - $s$ -Diagramm).** Wählt man den zurückgelegten Weg  $s$  des Punktes als die eine Koordinate, die auf ihn wirkende Kraft  $P$  in Richtung der Bewegung als die andere Koordinate

im Schaubilde, so erhält man durch stetige Verbindung der so erhaltenen Punkte das Kraft-Weg-Diagramm (Fig. 609).

Ist die Bahn krummlinig (Fig. 610), so wickelt man den Weg  $s$  auf der Achse  $Os$  ab und trägt die Projektion  $P$  der Kraft  $K$  auf die Tangente der Bahn senkrecht zu dieser Achse auf.

Hierbei sollen folgende Maßstäbe zugrunde gelegt werden:

Weg-Maßstab: 1 cm Weg-Achse =  $a$  m Weg;

Kraft-Maßstab: 1 cm Kraft-Achse =  $\kappa$  kg Kraft.

Mit Hilfe dieser wird der Weg durch die Strecke  $\bar{s}$  cm, die Kraft durch die Strecke  $\bar{p}$  cm dargestellt und es ist in Übereinstimmung mit Gleichung 44):  $\bar{s} = \frac{s}{a}$  und

$$\bar{p} = \frac{P}{\kappa} \dots \dots \dots 178)$$

Aus der Kraft  $P$ , die auf einen Massenpunkt wirkt, erhält man nach dem dynamischen Grundgesetze Newtons die Beschleunigung  $b$  des Punktes, wenn man setzt:

$$b = \frac{P}{m} \dots \dots \dots 179)$$

Hierin ist nach Gleichung 35:

$$m = \frac{G}{g}$$

die mechanische Masse und  $G$  das Gewicht des Punktes,  $g$  die Beschleunigung der Schwere. Man hat also

$$b = g \frac{P}{G}$$

Aus dem  $P$ - $s$ -Diagramm kann somit das  $b$ - $s$ -Diagramm sofort entnommen werden, wenn man die Ordinate  $\bar{p} = \bar{s}P$  durch die Anzahl  $m$  der Masseneinheiten dividiert. Es wird dann genügen, irgend eine Beschleunigung, z. B.  $b_0 = g \frac{P_0}{G}$  für den Anfang durch Rechnung zu bestimmen, auf der Achse  $OP$  nach einem angenommenen Beschleunigungsmaßstab aufzutragen ( $b_0$ ) und die übrigen Ordinaten  $\bar{b} = \bar{s}B$  durch Ziehen der Linien  $PP_0X$  und  $XB_0B$  zu konstruieren (Fig. 609).

Aus dem so gefundenen  $b$ - $s$ -Diagramm können dann die  $v^2$ - $s$ -,  $v$ - $s$ - und die Zeit-Diagramme entwickelt werden, wie dies in 326 gezeigt wurde.

Geht man von einem Punkte  $P$  des  $P$ - $s$ -Diagramms zum Nachbarpunkte  $P'$  über, so ist die Fläche zwischen den unendlich nahen Ordinaten  $\bar{p}$  und  $\bar{p}'$  (Fig. 611):

$$d\Phi = \bar{v} \cdot d\bar{s} = \frac{1}{a\kappa} P \cdot ds;$$

nun ist aber  $P \cdot ds$  die elementare Arbeit  $dA$  der Kraft  $K$  auf dem Wege  $ds$  (vgl. Fig. 610), somit

$$dA = P \cdot ds = \alpha \kappa \cdot d\Phi$$

und die ganze Arbeit der Kraft  $K$  auf dem Wege  $s$ :

$$A = \alpha \kappa \Phi,$$

worin  $\Phi$  die Fläche des  $P$ - $s$ -Diagramms zwischen den Ordinaten  $p_1$  und  $p$  ist.

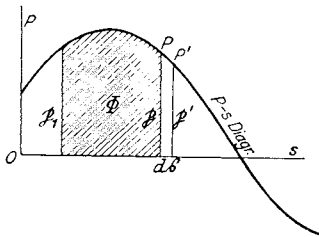


Fig. 611.

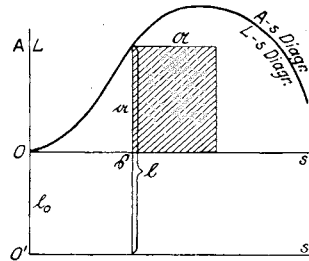


Fig. 612.

Um die Bedeutung dieser Arbeitsfläche  $\Phi$  festzustellen, beachte man, daß 1 cm<sup>2</sup> dieser Fläche die Bedeutung hat:

$$\begin{aligned} 1 \text{ cm}^2 &= 1 \text{ cm Weg-Achse} \times 1 \text{ cm Kraft-Achse} \\ &= a \text{ m Weg} \times \kappa \text{ kg} = \alpha \kappa \text{ mkg Arbeit} \end{aligned}$$

und somit

$$A = \alpha \kappa \Phi \text{ mkg} \dots\dots\dots 180)$$

worin jetzt  $\Phi$  eine unbenannte Zahl ist und lediglich die Anzahl der cm<sup>2</sup> bezeichnet.

Hätte man z. B. die Maßstäbe gewählt:

Weg-Maßstab: 1 cm Weg-Achse = 5 m Weg,

Kraft-Maßstab: 1 cm Kraft-Achse = 8 kg,

so wäre  $a = 5$ ,  $\kappa = 8$  und

$$A = 40 \Phi \text{ mkg.}$$

Mißt man nun die Fläche  $\Phi$  aus und findet dafür etwa 2,35 cm<sup>2</sup>, so wäre

$$A = 40 \cdot 2,35 \text{ mkg} = 94 \text{ mkg.}$$

**336. Das Arbeit-Weg-Diagramm (A-s-Diagramm)** ist die Integralkurve des  $P$ - $s$ -Diagramms. Ermittelt man in diesem Diagramm für genügend viele Werte von  $s$  die Fläche  $\Phi$  und trägt die Arbeit  $A$  nach einem bestimmten Maßstabe als Ordinate  $a$  über der Weg-Achse auf, so erhält man durch Verbindung der so erhaltenen Punkte das Arbeit-Weg-Diagramm.

Um die Ordinaten  $a$  dieses Diagramms zweckmäßig aufzutragen, nicht zu kleine und nicht zu große Strecken zu erhalten, wählt man eine beliebige Arbeitsbasis  $\mathfrak{A}$  in cm und verwandelt die Fläche  $\Phi$  in ein Rechteck von den Seiten  $a$  und  $\mathfrak{A}$  (Fig. 612); dann ist  $\Phi = a\mathfrak{A}$  und nach Gleichung 180:

$$\mathbf{A} = a\kappa \cdot a\mathfrak{A}$$

oder

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A} &= \lambda a \\ \lambda &= a\kappa \mathfrak{A} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 181)$$

worin

ist. Damit ist aber der Maßstab für das Arbeit-Weg-Diagramm festgelegt; er lautet:

$$1 \text{ cm Arbeits-Achse} = \lambda \text{ mkg Arbeit.}$$

Liegt die Arbeitsstrecke  $a$  über der Weg-Achse  $Os$ , so ist die Arbeit positiv; hingegen bedeutet eine unter  $Os$  befindliche Strecke  $a$  negative oder aufgezehrte Arbeit.

**337. Das Energie-Weg-Diagramm ( $L$ -s-Diagramm).** Eines der wichtigsten Prinzipien der Mechanik ist das Arbeitsprinzip oder das Prinzip der lebendigen Kraft. Es sagt aus, daß die Änderung der Bewegungsenergie während einer gewissen Zeit gleich der in dieser Zeit geleisteten Arbeit ist; oder

$$L - L_0 = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \mathbf{A} \dots \dots \dots 182)$$

wenn man sich vorläufig damit begnügt, dieses Prinzip für die Punktmasse  $m$  auszusprechen.

Man sieht dessen Richtigkeit sofort ein, wenn man von der zeitfreien Bewegungsgleichung des Punktes 165:

$$v \cdot dv = b \cdot ds$$

ausgeht und sie mit der Masse  $m$  des Punktes multipliziert:

$$m v \cdot dv = m b \cdot ds = P \cdot ds;$$

die Integration liefert dann

$$\frac{1}{2} m v^2 + C = \int P \cdot ds = \mathbf{A},$$

woraus mit Rücksicht auf den Anfangszustand des Punktes:  $v = v_0$ ,  $\mathbf{A} = 0$  sich Gleichung 182 ergibt.

Die Bewegungsenergie des Punktes kann auch in der Form geschrieben werden:

$$L = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \frac{G}{g} v^2 = G h,$$

wenn  $h = \frac{v^2}{2g}$  wieder die Geschwindigkeitshöhe des Punktes bezeichnet

(Gleichung 167). Ebenso ist  $L_0 = G h_0$ , wenn  $h_0 = \frac{v_0^2}{2g}$  ist. Damit nimmt

Gleichung 182 die Form an:

$$G (h - h_0) = \mathbf{A} \dots \dots \dots 183)$$

Aus Gleichung 182 ist ohne weiteres zu ersehen, daß Bewegungsenergie  $L$  und Arbeit  $A$  Größen derselben Art sind und zueinander addiert werden dürfen; infolgedessen ist auch ihr Maßstab der gleiche, oder auch

$$1 \text{ cm Arbeits-Achse} = \lambda \text{ mkg Bewegungsenergie.}$$

Trägt man somit in Fig. 612  $L_0$  in diesem Maßstabe von  $O$  nach abwärts auf  $(l_0)$  und zieht die neue Weg-Achse  $O's' \parallel Os$ , so ist das Arbeits-Diagramm gleichzeitig schon das Energie-Diagramm, nur ist seine Weg-Achse nicht  $Os$ , sondern  $O's'$ ; denn es ist

$$L = L_0 + \mathbf{A},$$

oder, wenn  $l, l_0$  die Strecken sind, welche die Bewegungsenergien darstellen:

$$l = l_0 + a.$$

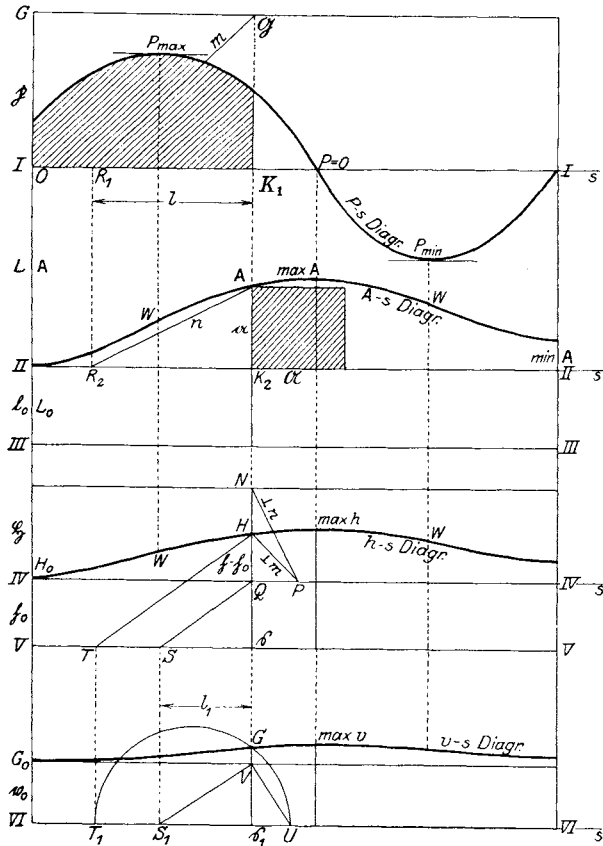


Fig. 613.

Hat z. B. die Punktmasse ein Gewicht von 20 kg und die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0 = 5$  m/sek, so ist  $h_0 = \frac{v_0^2}{2g} = 1,275$  m und



$L_0 = Gh_0 = 25,5$  mkg. Behält man die Maßstäbe von 335 bei:  $a = 5$ ,  $\varkappa = 8$  und nimmt die Arbeitsbasis mit  $\mathfrak{A} = 0,4$  cm an, so wird nach 336

$$\lambda = a\varkappa\mathfrak{A} = 16$$

und der Maßstab für die Arbeit und für die Bewegungsenergie ist

$$1 \text{ cm Arbeits-Achse} = 16 \text{ mkg.}$$

Die Strecke  $l_0$  wird dann sein:  $\frac{L_0}{16} = 1,6$  cm.

**338. Zusammenhang der dynamischen Diagramme.** Nach den vorhergehenden Ausführungen wurden in Fig. 613 aus dem gegebenen  $P$ - $s$ -Diagramm der Reihe nach das  $A$ - $s$ -Diagramm, das  $L$ - $s$ -Diagramm, das  $h$ - $s$ -Diagramm und endlich das  $v$ - $s$ -Diagramm auseinander abgeleitet.

Das  $A$ - $s$ -Diagramm ist die Integralkurve des  $P$ - $s$ -Diagramms; da

$P = \frac{dA}{ds}$  ist, werden den Stellen  $P = 0$  die Größt- und Kleinstwerte von  $A$  zugehören; und zwar entsteht der Größtwert  $\max A$  dort, wo die Kraft  $P$  von den positiven Werten zu den negativen übergeht; die Umkehrung davon entspricht der Stelle  $\min A$ .

Die Stellen der Punktbahn  $Os$ , in denen  $P$  einen Größt- oder Kleinstwert annimmt, entsprechen den Wendepunkten  $W$  des  $A$ - $s$ -Diagramms. Man vergleiche damit Fig. 578, wo man dieselben Beziehungen bei den kinematischen Diagrammen wiederfinden wird.

**339. Übergang von den dynamischen zu den kinematischen Diagrammen.** Man benützt hierzu zweckmäßig die Gleichungen 181 und 183:

$$\mathbf{A} = \lambda a, \quad \lambda = a\varkappa\mathfrak{A}; \quad G(h - h_0) = \mathbf{A},$$

woraus

$$h - h_0 = \frac{\lambda a}{G};$$

bezeichnet man mit  $p$  die Strecke in cm, die nach dem Kraft-Maßstab Gleichung 178 dem Gewicht  $G$  entspricht, so ist

$$G = \varkappa p$$

und

$$h - h_0 = \frac{a\varkappa a}{p};$$

sind ferner  $h$  und  $h_0$  die Strecken in cm, welche die Geschwindigkeitenhöhen  $h$  und  $h_0$  darstellen, so ist nach Gleichung 168:

$$h = \varepsilon h, \quad h_0 = \varepsilon h_0$$

und somit

$$\left. \begin{aligned} h - h_0 &= \frac{a\varkappa a}{\varepsilon p} = \mathfrak{S} \cdot \frac{a}{p} \\ \mathfrak{S} &= \frac{a\varkappa}{\varepsilon} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 184)$$

mit

Um danach in Fig. 613 das  $h$ - $s$ -Diagramm zu zeichnen, trägt man im  $P$ - $s$ -Diagramm  $\overline{OG} = p$  auf und zieht durch  $G$  die Parallele  $G\mathfrak{S}$  zur Achse  $Os$ ; sodann wählt man auf den Grundlinien  $II$  und  $IIII$

die beliebigen Strecken  $\overline{K_1 R_1} = \overline{K_2 R_2} = l$  und zieht die Verbindungslinien  $m = R_1 \mathcal{G}$  und  $n = R_2 A$ ; hierauf trägt man von der Grundlinie  $IVIV$  die Strecke  $\overline{QN} = \xi = \frac{a}{\varepsilon} \mathfrak{H}$  in cm auf, worin  $\mathfrak{H}$  die beliebig gewählte Arbeitsbasis in cm ist, und zieht  $NP \perp n$ ,  $PH \perp m$ .

Dann bestehen die Proportionen

$$p : l = \overline{PQ} : \overline{QH}, \quad l : a = \overline{QN} : \overline{PQ}.$$

also

$$p : a = \overline{QN} : \overline{QH} = \xi : \overline{QH}$$

und somit

$$\mathfrak{h} - \mathfrak{h}_0 = \overline{QH}.$$

Die Länge  $\overline{QH}$  stellt also die Differenz der Geschwindigkeitshöhen dar, und zwar im Maßstabe

$$h = \varepsilon \mathfrak{h}.$$

Ist  $\mathfrak{h}_0 = \frac{v_0^2}{2g}$  die anfängliche Geschwindigkeitshöhe und macht man  $\overline{VIV} = \mathfrak{h}_0$ , so ist  $\overline{sH}$  die Geschwindigkeitshöhe  $\mathfrak{h}$ .

Das  $h$ - $s$ -Diagramm erreicht seine extremen Werte  $\max h$  und  $\min h$  an denselben Stellen wie das  $A$ - $s$ -Diagramm.

Um aus dem eben gefundenen  $h$ - $s$ -Diagramm das  $v$ - $s$ -Diagramm zu entwickeln, kann man sich der in Fig. 587 mitgeteilten Konstruktion bedienen. Oder man kann folgenden Weg einschlagen (Fig. 613):

Man rechnet den Wert der Strecke  $v_0$  aus  $h_0 = \frac{v_0^2}{2g}$  ( $v_0 = \frac{v_0}{\beta}$  nach Gleichung 162), trägt  $v_0 = \overline{VI G_0}$  auf und zieht durch  $G_0$  die Parallele zur Achse. Sodann macht man  $\overline{sS} = \overline{s_1 S_1} = l_1$ , worin  $l_1$  eine beliebige Strecke ist; zieht  $HT \parallel QS$ , macht  $\overline{sT} = \overline{s_1 T_1}$ , zieht  $S_1 V$  und  $VU \perp S_1 V$ , beschreibt endlich über  $UT_1$  als Durchmesser einen Halbkreis, so geht dieser durch den Punkt  $G$  des  $v$ - $s$ -Diagramms. Denn es bestehen folgende Beziehungen:

$$\overline{s_1 G}^2 = \overline{U s_1} \cdot \overline{s_1 T_1}, \quad v_0^2 = \overline{U s_1} \cdot l_1;$$

$$\overline{s_1 G}^2 = v_0^2 \cdot \frac{\overline{s_1 T_1}}{l_1}, \quad \overline{s_1 T_1} = \overline{sT} = l_1 \cdot \frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{h}_0},$$

woraus

$$\overline{s_1 G}^2 = v_0^2 \cdot \frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{h}_0} \quad \text{und} \quad \overline{s_1 G} = v.$$

Auf diese Weise kann das  $v$ - $s$ -Diagramm ziemlich rasch punktweise gefunden werden. Es erreicht seine Extremwerte  $\max v$  und  $\min v$  an denselben Stellen wie die  $A$ - $s$ - und  $h$ - $s$ -Diagramme.

**340. Ermittlung und Maßstab der Masse.** Zwischen dem  $A$ - $s$ -Diagramm (Grundlinie  $IIII$ ) und dem  $v$ - $s$ -Diagramm (Grundlinie  $VI VI$ ) besteht ein bemerkenswerter Zusammenhang. Man kann aus beiden durch Hinweglassung des Weges  $s$  ein neues Diagramm, das  $A$ - $v$ -Dia-

gramm, entwickeln; oder man kann dies auch unmittelbar aus der Gleichung 182 entnehmen, wenn man diese in der Form anschreibt:

$$v^2 = v_0^2 + \frac{2A}{m} \dots \dots \dots 185)$$

Trägt man die Arbeit  $A$  als Abszisse, die Geschwindigkeit  $v$  als Ordinate auf, so entspricht diese Gleichung einer Parabel (Fig. 614). Sie schneidet die Achse  $Ov$  im Abstände  $v_0$  von  $O$ ; ihr Scheitel  $S$  hat die Entfernung  $L_0 = \frac{1}{2} m v_0^2$  von  $O$ . Der Halbparameter der Parabel ist

$$p = \frac{1}{m}.$$

Ist also die bewegte Masse  $m$  und ihre Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  gegeben, so kann  $v$  aus  $L_0$  und  $v_0$  gezeichnet werden; jeder Arbeits-Abszisse  $A$  entspricht dann als Ordinate die zugehörige Geschwindigkeit  $v$ .

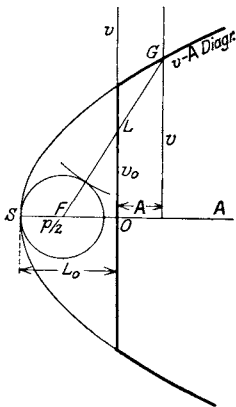


Fig. 614.

Ist hingegen die Anfangsenergie  $L_0$  und die für eine bestimmte Arbeit  $A$  gewünschte Geschwindigkeit  $v$  gegeben, so kann die hierzu notwendige Masse  $m$  konstruiert werden. Denn mit  $L_0$  ist der Scheitel  $S$  bestimmt; zeichnet man aus den Koordinaten  $A$  und  $v$  den Punkt  $G$ , nimmt  $L = A + L_0$  in den Zirkel und beschreibt aus  $G$  einen kleinen Kreisbogen, so kann der Brennpunkt  $F$  der Parabel aus der Bedingung ermittelt werden, daß der mit  $F$  als Mittelpunkt beschriebene Kreis den eben beschriebenen kleinen Kreisbogen und überdies die Parabel in  $S$  berühren muß. Der Durchmesser dieses Kreises ist aber

$\frac{1}{m}$  und damit ist die bewegte Masse gefunden. Es entsteht nun die Frage: wenn  $\delta$  der Durchmesser des Kreises in cm ist, wie groß ist die Masse  $m$  in Masseneinheiten?

Nimmt man an, das  $A$ - $v$ -Diagramm sei in den Maßstäben entworfen:  
 Geschwindigkeits-Maßstab: 1 cm Geschw.-Achse =  $\beta$  m/sek. Geschw.,  
 Arbeits-Maßstab: 1 cm Arbeits-Achse =  $\lambda$  mkg Arbeit;  
 $a$  und  $v$  seien die Strecken in cm, welche die Arbeit  $A$  und die Geschwindigkeit  $v$  darstellen; nach den Gleichungen 162 und 181 ist dann  
 $v = \beta v$ ,  $A = \lambda a$ .

Ist  $m$  die Masse des Punktes,  $m$  die Strecke in cm, welche diese Masse darstellt, und der noch unbekannte Maßstab für die Masse:

$$1 \text{ cm} = \mu \text{ Masseneinheiten (Kilogramm-Masse),}$$

so wäre übereinstimmend mit obigen Gleichungen

$$m = \mu m.$$

Soll nun die Gleichung

$$v^2 - v_0^2 = \frac{2 \mathbf{A}}{m}$$

durch die Zeichnung dargestellt werden, so müßte sie lauten

$$v^2 - v_0^2 = \frac{2 a}{m},$$

woraus sich ergibt

$$\mu = \frac{\lambda}{\beta^2}.$$

Ist also  $\delta$  cm der Durchmesser des Berührungskreises, so ist  $m = \frac{1}{\delta}$  in cm die Masse als Strecke und die gesuchte Masse:  $m = \mu m = \frac{\lambda}{\beta^2} \cdot \frac{1}{\delta}$  Masseneinheiten. Hat man z. B. die Maßstäbe gewählt:  $\beta = 4$ ,  $\lambda = 20$ , so ist  $\mu = 1,25$ ; findet man den Durchmesser des Berührungskreises mit  $\delta = 2,5$  (in cm), so ist die Masse des bewegten Punktes

$$m = \mu m = 1,25 \frac{1}{2,5} = 0,5 \text{ Kilogramm Masse.}$$

Auf das hier besprochene  $A$ - $v$ -Diagramm, sowie die Bestimmung der Masse aus dem Brennpunktkeise der Parabel hat W. G. Noack in seiner Abhandlung: „Die Humphrey-Pumpe“, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1913, S. 885, aufmerksam gemacht.

Es wird sich übrigens empfehlen, statt der Parabel ein lineares Diagramm zu benutzen und von der Gleichung 183:

$$G(h - h_0) = A$$

auszugehen, also die Geschwindigkeitshöhen statt der Geschwindigkeiten zu benutzen.

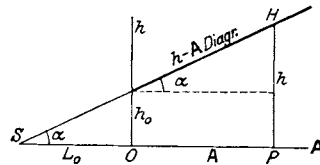


Fig. 615.

Das  $A$ - $h$ -Diagramm ist eine Gerade (Fig. 615); ihre Schnitte mit den Achsen  $OA$  und  $Oh$  haben die Entfernungen  $L_0$  und  $h_0$  von  $O$ . Die Neigung der Geraden gegen die Achse  $OA$  ist durch

$$\cotg \alpha = \frac{A}{h - h_0} = G$$

gegeben.

Die früher besprochene Aufgabe, für eine gegebene Anfangsenergie  $L_0$  die bewegte Masse  $m$  derart zu bestimmen, daß bei einem gegebenen Arbeitswert  $A$  die Geschwindigkeit  $v$  einen bestimmten Wert erreicht, läßt sich mit Hilfe dieses Diagramms so lösen, daß man  $OP = A$ ,  $\bar{P}H = h = \frac{v^2}{2g}$  aufträgt und  $H$  mit  $S$  verbindet; dann ist  $\cotg \alpha$  ein Maß für das Gewicht der gesuchten Masse.

**341. Das Kraft-Geschwindigkeit-Diagramm ( $P-v$ -Diagramm).** Dieses für elektrische Bahnen von L. Kadrnocka („Graphische Darstellung der Bewegungsgrößen elektrisch betriebener Fahrzeuge“, Elektr. Bahnen 1904, S. 389) empfohlene Diagramm stellt die Geschwindigkeiten des Fahrzeuges zusammen mit dessen Zugkraft und Widerstand, die aus den Beobachtungen entnommen werden.

Ist  $Z$  die Zugkraft und  $W$  der Widerstand, wenn das Fahrzeug die Geschwindigkeit  $v$  erreicht hat (Fig. 616), so ist  $P = Z - W$  die beschleunigende Kraft.

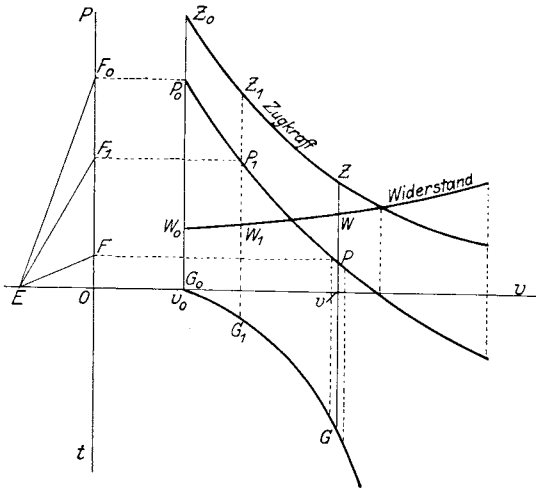


Fig. 616.

Aus dem  $Z-v$ - und dem  $W-v$ -Diagramm wurde zunächst das  $P-v$ -Diagramm gezeichnet.

Um hieraus das  $v-t$ -Diagramm abzuleiten, beachte man die Gleichung für die Beschleunigung der Bewegung

$$b = \frac{dv}{dt} = \frac{P}{M}$$

worin  $M$  die Masse des Fahrzeuges bezeichnet.

Trägt man nach dem später zu ermittelnden Maßstabe der Massen  $M$  von  $O$  nach  $E$  auf,

projiziert den Punkt  $P$  des  $P-v$ -Diagramms nach  $F$ , verbindet  $E$  mit  $F$  und zieht in dem zugehörigen Punkte  $G$  des  $v-t$ -Diagramms eine kurze Strecke senkrecht zu  $EF$ , so ist sie ein Teilchen des Diagrammes, das man zweckmäßig durch zwei naheliegende Parallele zur Achse  $OP$  begrenzt.

Ist für  $t = 0, v = v_0$  gegeben, so ist  $G_0$  der Anfangspunkt des Diagramms, entsprechend dem Punkte  $P_0$ ; hier hat man mit der oben geschilderten Konstruktion des  $P-v$ -Diagramms zu beginnen.

Waren die Maßstäbe gegeben:

- Zeit-Maßstab: 1 cm Zeit-Achse =  $\delta$  Sekunden,
- Geschwindigkeits-Maßstab: 1 cm Geschw.-Achse =  $\beta$  m/sek Geschw.,
- Kraft-Maßstab: 1 cm Kraft-Achse =  $\alpha$  Kilogramm;

dann kann der Massen-

Maßstab: 1 cm =  $\mu$  Kilogramm-Masse

in folgender Weise gefunden werden:

Bezeichnet man die Strecken der Zeichnung in cm, welche  $t, v, P$  und  $M$  darstellen, mit  $t, v, p$  und  $m$ , so ist nach den Gleichungen 162 und 178:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv \cdot \beta}{dt \cdot \delta} \quad \frac{P}{M} = \frac{\psi \cdot \kappa}{m \cdot \mu}$$

da nun zwischen den Strecken dieselbe Beziehung bestehen soll, wie zwischen den Größen, die durch sie dargestellt werden, so muß auch

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\psi}{m}$$

sein, somit

$$\frac{\beta}{\delta} = \frac{\kappa}{\mu}$$

woraus sich der Massen-Maßstab mit

$$\mu = \kappa \frac{\delta}{\beta}$$

ergibt.

Hinsichtlich der Ableitung des *s-t*-Diagramms aus dem *v-t*-Diagramm sei auf 325, Fig. 578 verwiesen.

**342. Das Kraft-Zeit-Diagramm (*P-t*-Diagramm).** Seltener als das Kraft-Weg-Diagramm wird das Kraft-Zeit-Diagramm benützt, das nur auf Umwegen zur Darstellung des Arbeitsdiagramms führt. Aus dem *P-t*-Diagramm wird zunächst wie in 335 das *b-t*-Diagramm abgeleitet und aus diesem wie in 325, Fig. 578 das *v-t*- und das *s-t*-Diagramm; aus diesem und dem gegebenen *P-t*-Diagramm kann dann durch Übertragen ein *P-s*-Diagramm gezeichnet werden, womit die Aufgabe auf 335 zurückgeführt ist.

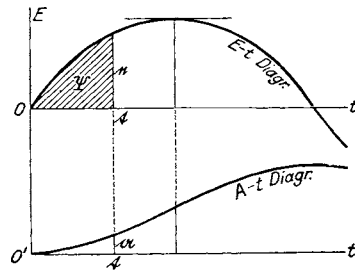


Fig. 617.

**343. Das Leistung-Zeit-Diagramm (*E-t*-Diagramm).** Statt vom *P-t*-Diagramm auszugehen, kann auch die Leistung *E* als Ordinate der Zeit-Achse aufgetragen werden.

Die Leistung ist die Änderung der Arbeit mit der Zeit oder

$$E = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \dots \dots \dots 186)$$

woraus

$$d\mathbf{A} = E \cdot dt$$

und

$$\mathbf{A} = \int E \cdot dt \dots \dots \dots 187)$$

Das *A-t*-Diagramm ist die Integralkurve des *E-t*-Diagramms. Die Fläche  $\Psi$  zwischen diesem und der Zeit-Achse (Fig. 617) ist ein Maß der Arbeit; nennt man *c* und *t* die Strecken, welche maßstäblich Leistung und Zeit darstellen, so ist  $d\Psi = c \cdot dt$

und wenn  $\mathfrak{A}$  die Arbeits-Basis ist (vgl. 336), so ist

$$\mathfrak{A} = \frac{\Psi}{\mathfrak{A}}$$

die Ordinate des *A-t*-Diagramms.

Aus diesem kann mit Hilfe der Gleichung 185:

$$v^2 = v_0^2 + \frac{2A}{M}$$

ein  $v^2-t$ -, ein  $v-t$ -,  $s-t$ - und  $b-t$ -Diagramm entwickelt werden, worauf hier nicht weiter eingegangen werden soll.

### 344. Anwendungen.

1. Arbeitsvorgang bei der Humphrey-Pumpe. Ein Beispiel von der Ableitung des  $v-s$ -Diagramms aus dem  $P-s$ -Diagramm bietet W. G. Noack in seiner oben angeführten Abhandlung (Fig. 618, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1913, S. 885).

Die Humphrey-Pumpe, bei welcher das Gasgemisch unmittelbar über der Wasseroberfläche verpufft wird, arbeitet im Viertakt. Für den

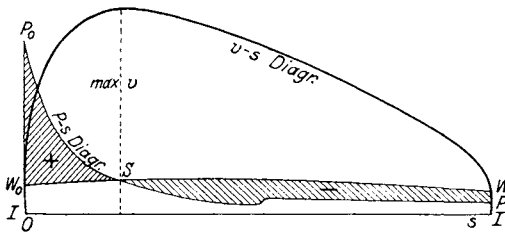


Fig. 618.

ersten Takt (Zündung des verdichteten Gasgemisches und nachfolgende Expansion) ist das  $P-s$ -Diagramm aus der Abbildung zu entnehmen. Die Linie  $P_0P$  über der Grundlinie  $II$  gibt den Verlauf des Druckes im Gasgemisch, die Linie  $W_0W$  den Verlauf des Widerstandes an; die schraffierte Fläche ist ein Maß der geleisteten Arbeit; sie ist bis zum Schnittpunkte  $S$  positiv, von da ab negativ. An dieser Stelle ist auch die Geschwindigkeit ein Maximum.

Das  $v-s$ -Diagramm kann wie in Fig. 613 entwickelt werden. An die Stelle von  $P$  ist hier  $P - W$  zu setzen. Einen anderen Weg, als den, der in 340 geschildert wurde, schlägt Noack ein.

2. Kinematographische Untersuchung eines Dampfhammers. Hierüber berichtet Otto Fuchs in seiner Abhandlung, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1911, S. 1165. Mit Hilfe einer Schreibvorrichtung wurden zunächst die Drücke über und unter dem Kolben des Dampfhammers aufgenommen; ein ununterbrochen angetriebener Papierstreifen wird über die Schreibtrommeln zweier Indikatoren gezogen, die mit den beiden Seiten des Zylinders verbunden sind. Ein Uhrwerk, durch das ein Schreibstift jede halbe Sekunde eine Marke gibt, unterteilt die Druckkurven nach der Zeit. Auf diese Weise wird also ein Kraft-Zeit-Diagramm aufgenommen (Fig. 619).

Durch eine kinematographische Aufnahme der Auf- und Abwärtsbewegung des Fallbärs, wobei eine Uhr mit aufgenommen wurde, kann man für jede Stellung des Bärs die zugehörige Zeit aus dem Film entnehmen und so das Weg-Zeit-Diagramm konstruieren. Stellt man diese beiden Diagramme, das  $P-t$ -Diagramm und das  $s-t$ -Diagramm, zusammen, so erhält man durch Entfernen der Zeit das  $P-s$ -Diagramm (Fig. 620).

Hieraus wurden die Arbeiten der auf- und abwärts wirkenden Kräfte des Dampfhammers mit Berücksichtigung des Rückpralls des Bärs entwickelt und sodann das  $v$ - $s$ -Diagramm (auf rechnerischem Wege) gefunden. Hieraus wurde schließlich das  $t$ - $s$ -Diagramm mit Hilfe der Gleichung

$$t = \int \frac{ds}{v}$$

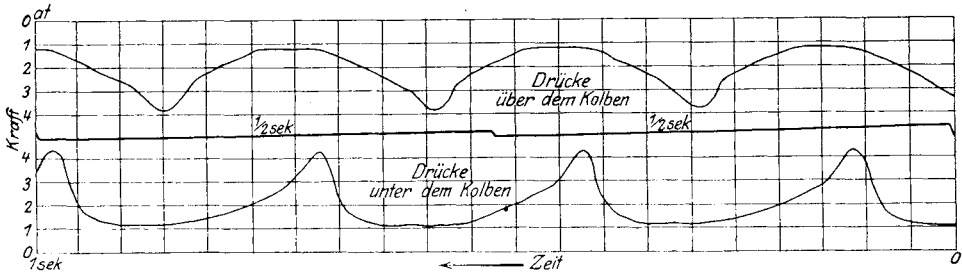


Fig. 619.

die Zeit durch Planimetrieren des aus  $\frac{1}{v}$  und  $s$  gebildeten Diagramms bestimmt, wie dies in 329 ausführlich geschildert wurde.

3. M. Herrmann stellt sich in seiner Abhandlung: „Zeichnerische Ermittlung der Gestalt von Aufwerfdaumen“, Zeitschr. d. Österr. Ing.-u. Arch.-Ver. 1909, S. 204, folgende Aufgabe: Eine sich drehende Daumenwelle  $w$  soll durch einen passend geformten Daumen  $d$  eine Stange  $S$  derart emporheben, daß in der Zeit  $t_1$  der Weg  $h$  zurückgelegt wird; nachher soll die Stange frei gegeben werden und infolge ihres Gewichtes herabfallen (Fig. 621).

Als gegeben ist das  $v$ - $t$ -Diagramm anzusehen (Fig. 622). Es ist so anzunehmen, daß die Fläche zwischen dem Diagramm und der vertikalen Zeit-Achse den gesamten Weg  $h$  der Stange darstellt; überdies muß im Anfange  $v_0 = 0$  sein, wenn das Anheben der Stange stoßfrei erfolgen soll. Der Weg-Maßstab und der Zeit-Maßstab wurden derart gewählt, daß  $h$  und  $t_1$  durch dieselbe Strecke  $\bar{h} = \bar{t}_1$  gemessen werden.

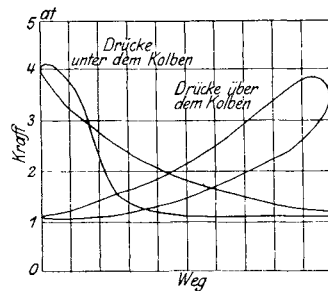


Fig. 620.

Um das  $v$ - $s$ -Diagramm zu finden, beachte man, daß nach 322 die schraffierte Fläche  $OtaO$  den Weg der Stange  $S$  darstellt.

Nennt man Fläche  $OtaO = F$ , Fläche  $OBaO = F_1$ ,

so ist

$$F : F_1 = s : h,$$

woraus sich die Wegstrecke  $\bar{O}\bar{s} = \bar{s}$  ergibt. Macht man  $\bar{s}\bar{A} = \bar{t}\bar{a}$ , so erhält man in  $A$  einen Punkt des  $v$ - $s$ -Diagramms.



Ist  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit der Welle  $w$ ,  $\rho$  die Entfernung ihres Mittelpunktes vom Berührungspunkte  $A$  zwischen Daumen  $d$  und Stange  $S$ , so ist deren Hebegeschwindigkeit:

$$v = \rho\omega \sin \varphi = y\omega.$$

Hat man den Geschwindigkeitsmaßstab derart gewählt, daß  $v$  durch  $y$  gemessen wird, so ist die Geschwindigkeitsstrecke

$$v = y = \rho \sin \varphi;$$

das  $v$ - $s$ -Diagramm gibt dann für jede Erhebung  $\bar{s}$  der Stange die horizontale Entfernung  $\bar{s}A$  der Berührungsstelle  $A$  vom Wellenmittel, d. h. das  $v$ - $s$ -Diagramm ist der geometrische Ort aller Berührungspunkte  $A$  zwischen Stange und Daumen. In Fig. 622 wurden die Geschwindigkeiten im doppelten Maßstabe gezeichnet.

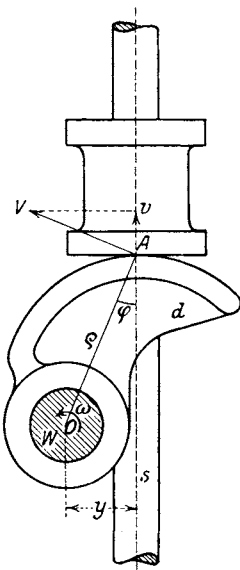


Fig. 621.

Macht man nach dem früher gewählten Zeitmaßstabe  $\overline{OT}$  gleich der Zeiteinheit und zieht

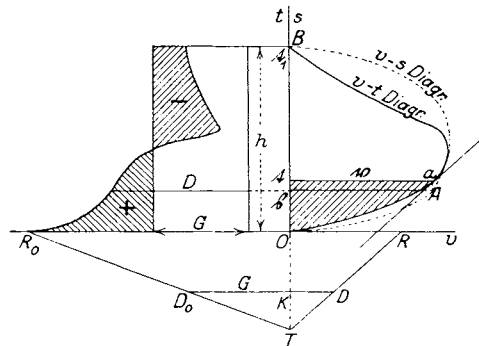


Fig. 622.

$TR$  parallel zur Tangente an das  $v$ - $t$ -Diagramm in  $a$ , so ist  $\overline{OR}$  die Beschleunigung  $b$  (vgl. Fig. 571).

Nennt man  $G$  das Gewicht der Stange,  $M = \frac{G}{g}$  ihre Masse und  $-Mb$  ihre Trägheitskraft, so ist, da  $b$  nach aufwärts, die Trägheitskraft somit nach abwärts gerichtet ist,

$$D = G + Mb = G \left( 1 + \frac{b}{g} \right)$$

der Druck zwischen Daumen und Stange. Macht man nun in Fig. 622:  $\overline{R_0O} = g' = 9,81 \text{ m/sek}^2$  nach dem Beschleunigungs-Maßstabe, ferner  $\overline{D_0K} = G$  nach beliebig gewähltem Kraft-Maßstabe, so ist  $\overline{D_0D}$  nach demselben Maßstabe der Druck  $D$ .

Fig. 622 gibt links seitlich das Druckdiagramm  $D$ - $s$ . Da die Arbeit von  $D$  während des Hubes gleich der Arbeit von  $G$ , nämlich  $Gh$  sein muß, so müssen die schraffierten Flächen gleich groß sein.

### XXXIII. Das Zeichnen von Diagrammen.

**345. Die Aufnahme von Diagrammen.** Folgt das gegebene Diagramm einem mathematischen Gesetze, wie z. B. das  $v$ - $t$ -Diagramm in den Beispielen 3 und 6 in 330, so kann seine Aufzeichnung auf konstruktivem Wege erfolgen und die übrigen Diagramme können daraus durch Konstruktion abgeleitet werden.

In der Regel trifft jedoch diese Voraussetzung nicht zu; das Diagramm folgt keinem mathematischen Gesetze, sondern ist eine mehr oder weniger komplizierte Linie, die mit Hilfe eines zeichnenden Apparates aufgenommen wurde.

Es gibt eine stattliche Anzahl von solchen Apparaten; man kann sie in zwei Gruppen trennen, je nachdem sie den Zweck haben, kinematische oder dynamische Diagramme aufzunehmen.

Die meisten Apparate, welche kinematische Diagramme aufnehmen, werden an einer rotierenden Welle angebracht und zeichnen den Weg eines Punktes der Welle in seiner Beziehung zur Zeit auf.

Man denke sich ein Schwungrad  $A$ , das mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\alpha$  läuft (Idealfall), und auf der gleichen Welle ein zweites, von  $A$  unabhängiges Schwungrad  $B$ , dessen Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  veränderlich ist. Haben beide Schwungräder gleiche Umlaufzahlen, so wird  $B$  dem  $A$  zum Teile voreilen, zum Teile zurückbleiben. Die Relativbewegung von  $B$  gegen  $A$  ist also ein Pendeln von  $B$  um einen Winkel  $\alpha_1$  nach der einen und  $\alpha_2$  nach der anderen Seite. Man nennt diese Abweichungswinkel von  $B$  gegen  $A$  Pendelwinkel; hingegen Pendelwege, wenn sie am Umfange der Welle oder des Rades gemessen werden. Diese Pendelwinkel- oder Pendelwegdiagramme werden dann auf die Zeit bezogen.

Zu den Apparaten, die in diesem Sinne  $s$ - $t$ - oder  $\varphi$ - $t$ -Diagramme aufnehmen, gehören:

1. Der Apparat von J. Radinger, bei dem eine regelmäßig schwingende Stimmgabel Wellenlinien auf dem Umfange der mit veränderlicher Winkelgeschwindigkeit rotierenden Welle aufzeichnet. Die Stimmgabel wird deshalb benützt, weil ihre Schwingungszahl hohe Unveränderlichkeit besitzt, also einen guten Zeitmesser abgibt.

2. Der Zyklometer von Ransome (Engineering 1892).

3. Der Gyrograph von Braun; beide Apparate benützen ebenfalls Stimmgabeln.

4. Der Apparat von Schäfer und Budenberg zeichnet das  $s-t$ -Diagramm einer drehenden Bewegung auf, wobei  $s$  der oben erwähnte Pendelweg ist.

5. Der Apparat von F. Göpel, beschrieben in dem Aufsatz: „Die Bestimmung des Ungleichförmigkeitsgrades rotierender Maschinen durch das Stimmgabelverfahren“, Mitteilungen über Forschungsarbeiten, Heft 2.

6. Der Apparat von R. Franke, mitgeteilt in der Abhandlung: „Über die Bestimmung des Ungleichförmigkeitsgrades von Kraftmaschinen“, Elektrotechn. Zeitschr. 1901, S. 890.

7. Der Apparat von Fr. Lux, mitgeteilt in dem Aufsatz: „Vorrichtung zum Aufzeichnen der Umlaufgeschwindigkeit und des Ungleichförmigkeitsgrades von Maschinen“, Elektrotechn. Zeitschr. 1906, S. 557. Bei diesem werden die gleichbleibenden Schwingungen einer schmalen Zunge auf photographischem Wege aufgenommen; eine Trommel, auf welcher das lichtempfindliche Papier aufgerollt ist, dreht sich mit der Welle der Maschine; der Abstand je zweier Zungenbilder auf dem Papier ist ein Maßstab der Geschwindigkeit.

8. Das Verfahren zum Aufzeichnen der Winkelabweichung einer sich ungleichförmig drehenden Welle von F. Klönne, mitgeteilt in Elektrotechn. Zeitschr. 1902, S. 715.

9. Der Strobograph von G. Wagner zur strobographischen Aufzeichnung von Pendeldiagrammen, besprochen in den Mitteilungen über Forschungsarbeiten, Heft 33. Er beruht auf der Beobachtung der Drehung einer ungleichförmig laufenden Welle durch ein Stroboskop, indem man die Bewegung vergleicht mit der gleichförmigen Drehung einer zweiten Welle. Die Pendelwege werden photographisch aufgenommen; die Pendeldiagramme setzen sich aus einer Reihe periodischer Augenblicksaufnahmen zusammen.

10. Der Resonanz-Undograph von O. Mader dient ebenfalls zum Aufzeichnen der Winkelabweichungen einer sich drehenden Welle. Mitgeteilt in Dinglers Polyt. Journal 1909, S. 529.

11. Beim Apparate von Bonin (Mitteilungen über Forschungsarbeiten, Heft 165) wird der Pendelweg ebenfalls unmittelbar aufgeschrieben. Auf der Maschinenwelle sitzt leicht drehbar eine Schwungmasse, die mit der Maschine gekuppelt ist. Wird die Kupplung gelöst, so läuft die Schwungmasse mit gleichbleibender Geschwindigkeit weiter, während die Maschine entweder zurückbleibt oder voreilt. Die relative Bewegung von Maschine und Schwungmasse wird durch ein leichtes Schreibzeug aufgeschrieben.

12. Otto Fuchs teilt in seiner Abhandlung: „Verbrauchsversuch an einem Luftdruckhammer“, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1912, S. 2107, eine Vorrichtung mit, die das  $s-t$ -Diagramm des Bären eines Luftdruckhammers aufnimmt.

---

Im Gegensatz zu diesen Apparaten, die alle  $s-t$ -Diagramme aufnehmen, zeichnet der Wirbelstromtachograph von W. Riehm unmittelbar das  $v-t$ -Diagramm einer drehenden Bewegung auf. Er ist beschrieben in der Abhandlung: „Über die experimentelle Bestimmung des Ungleichförmigkeitsgrades“, Mitteilungen über Forschungsarbeiten, Heft 137.

Andere Apparate werden zum Aufzeichnen der  $v-t$ -Diagramme bei Lokomotiven und anderen Fahrbetriebsmitteln, Aufzugs- oder Fall-Vorrichtungen benützt. So werden in der Abhandlung von K. Schlößl: „Über die Bestimmung der Leistungen von Lokomotiven aus dem Verlaufe der Geschwindigkeitskurven“, Zeitschr. d. Österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1905, S. 637, Diagramme angeführt, die mit dem Hausbälterschen Geschwindigkeitsmesser aufgenommen wurden.

---

Zu den Apparaten, welche dynamische Diagramme aufnehmen, gehört in erster Linie der Indikator, ein Instrument, das den Verlauf des Druckes in einem mit Dampf oder Gas gefüllten Zylinder während des Vorschreitens des Kolbens aufnimmt, und zwar bezogen auf den Hub des Kolbens. Der Indikator zeichnet also ein  $P-s$ -Diagramm auf.

Man kann jedoch das Indikatordiagramm statt auf den Kolbenweg auch auf die Zeit beziehen, also ein  $P-t$ -Diagramm aufnehmen; dann gibt man der Indikatortrommel, auf deren Umfang sich das Schreibpapier befindet, eine dauernde, gleichförmige Drehung, was durch einen besonderen kleinen Motor erreicht wird, und mißt die Zeit im Diagramm durch Zeitmarken, die auf elektrischem Wege durch ein schwingendes Pendel abgegeben werden.

Der Indikator kann in diesem Falle auch zur Aufnahme der Erhebungen eines Ventils, bezogen auf die Zeit, benützt werden; er nimmt dann ein  $s-t$ -Diagramm auf.

Wird die Schreibtrommel des Indikators statt um eine vertikale um eine horizontale Achse gedreht, so kann man ihre gleichförmige Drehung durch eine gleichförmig beschleunigte ersetzen, indem man um die Trommel oder ein auf gleicher Welle sitzendes Rädchen eine Schnur führt, an deren Enden ungleiche Gewichte hängen. Derartige Diagramme wurden von Schüle vorgeschlagen (Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1904, S. 441) und Falldiagramme genannt; bei ihnen sind die Abszissen nicht mehr den ersten, sondern den zweiten Potenzen der Zeit proportional.

Über die Aufnahme von Indikatordiagrammen und ihre Umwandlung in  $v-t$ - und  $b-t$ -Diagramme gibt A. Wagner in seinem Buche: „Indizieren und Auswerten von Kurbelweg- und Zeitdiagrammen“, Berlin 1906, wertvolle Ratschläge (vgl. S. 72 bis 78).

Die Frage, ob es vorteilhafter ist, die Diagramme auf die Zeit-Achse oder auf die Weg-Achse zu beziehen, läßt sich nicht ohne weiteres

beantworten, wird aber zumeist zugunsten der Zeit-Achse entschieden. In erster Linie hängt dies mit der Art des aufnehmenden Apparates zusammen. Meistens geben diese Apparate Zeitdiagramme oder doch solche Wegdiagramme, bei denen der Weg gleichförmig zurückgelegt wird, also als Zeitmesser angesehen werden kann. Dies ist z. B. bei den Wegen der Fall, die der Zapfen einer sich gleichförmig drehenden Kurbel beschreibt.

Die Wahl der Zeit-Achse hat den Vorteil, daß die Diagramme aller Punkte des Getriebes auf dieselbe Grundlinie bezogen wird, was für Vergleiche wichtig ist.

Die Wahl der Weg-Achse ist nur zu empfehlen bei der geradlinigen Bewegung des Bezugs-Punktes, wie z. B. des Kreuzkopfes eines Schubkurbelgetriebes; oder auch, wenn der Bezugs-Punkt in einem Kreise läuft, wie der Zapfen jeder Kurbel. Wenn dies jedoch nicht der Fall und der Weg  $s$  weder eine Gerade noch ein Kreisbogen ist, so müßte die Bahn des Bezugs-Punktes erst punktweise gezeichnet und sodann in eine gerade Achse  $Os$  abgerollt werden, was mühsam ist und auch zu ungenauen Resultaten führt.

**346. Zeichnerische Ausführung der Diagramme.** Die zeichnerische Ableitung eines Diagramms aus einem anderen ist im allgemeinen, wenn man nicht über gute Instrumente (siehe 347) verfügt, eine ziemlich mühselige Arbeit und läßt auch hinsichtlich der Genauigkeit zu wünschen übrig. Es darf deshalb nicht überraschen, wenn in der Literatur vielfach darüber geklagt wird, daß die gewonnenen Resultate unverläßlich seien. Da man jedoch in vielen Fällen auf die graphische Auswertung der Diagramme angewiesen ist, so wird man sich bemühen müssen, deren Methode schärfer auszubilden und durch mehrmaliges Zeichnen desselben Diagramms die Genauigkeit zu überprüfen. Wenn es möglich ist, sollte man für einige Stellen eine Kontrolle dadurch vornehmen, daß man die betreffende Ordinate des Diagramms berechnet und mit der Zeichnung vergleicht. Die Rechnung versagt freilich in den meisten Fällen, in denen Diagramme aus Versuchen zugrunde gelegt werden, vollkommen; oder man müßte bei ihrer Durchführung so vieles vernachlässigen, daß ein Vergleich mit der Konstruktion erst recht unangebracht wäre. Aber für gewisse Stellen läßt sich manchmal die Rechnung der Ordinate des Diagramms trotzdem ohne übergroße Mühe durchführen; dies sollte dann nicht unterlassen werden.

Bei der Auswertung der Diagramme hat man entweder Integralkurven oder Differentialkurven zu zeichnen, d. h. Flächen zu ermitteln oder Tangenten zu ziehen.

**347. Das Zeichnen der Integralkurven.** Es gibt drei Wege, um das Aufzeichnen der Integralkurve  $K$  einer gegebenen Kurve  $k$  vorzunehmen.

1. Mit Benützung eines Flächenmessers oder Planimeters. Man bestimmt die Flächen  $f_1, f, \dots$  für eine Reihe von

Abszissen  $x_1, x_2, \dots$  (Fig. 560) der Kurve  $k$  und trägt sie nach einem gewählten Übertragungsmaßstab als Ordinaten

$$Y = \frac{f}{E}$$

über den gleichen Abszissen  $X_1, X_2, \dots$  auf. Man integriert also die Kurve  $k$  stückweise und verbindet die so erhaltenen Punkte  $P$  durch eine Kurve  $K$ , die gesuchte Integralkurve.

Handelt es sich nicht um große Genauigkeit, so hilft man sich in der Weise, daß man die Zeichnung des Diagramms auf Millimeter-Papier anlegt und sodann die Anzahl der Quadratmillimeter der Diagrammfläche abzählt.

In der Schrift W. Grosse's: „Graphische Papiere und ihre Anwendung“, 1919, findet man eine reichhaltige Anleitung, um solche Papiere zweckmäßig zu verwenden.

2. Mit Benützung des Integraphen von Abdank-Abakanowicz, ausgeführt von Coradi. Dieser ausgezeichnete, leider sehr teure und deshalb wenig verbreitete Apparat zeichnet die Integralkurve auf, wenn der Stift die Differentialkurve befährt. (Vgl. „Die Integraphen“, 1889, mit der Beschreibung des Instrumentes durch dessen Erfinder, ferner W. Hort, „Die Differential-Gleichungen des Ingenieurs“, 2. Aufl., 1922.)

3. Mit Benützung des Seilecks. Diese Methode wurde bereits in 318 geschildert. Zur raschen Durchführung derselben kann man sich einer Vorrichtung bedienen, der ihr Erfinder H. Naatz den Namen *Integrint* gegeben hat (mitgeteilt: Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1919, S. 826). Dieser einfache Apparat (Fig. 623) besteht aus einem rechteckigen Rahmen  $r$ , zwei Linealen  $l_1$  und  $l_2$  und einem durchsichtigen Streifen  $m$  aus Zellstoff. Das Lineal  $l_1$  dient für positive Werte,  $l_2$  für negative Werte der Ordinaten der gegebenen Kurve  $k$ . Die Lineale

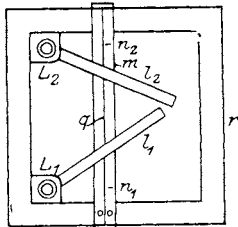


Fig. 623.

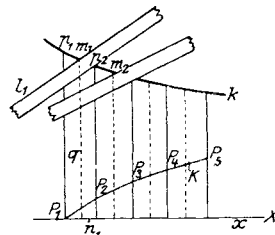


Fig. 624.

sind um  $L_1$  bzw.  $L_2$  mit Reibung drehbar. Ihre oberen Kanten gehen durch die Mittelpunkte der Gelenke  $L$ . Der Streifen  $m$  hat eine geritzte Mittellinie  $q$  und neben dieser zwei Marken  $n_1$  und  $n_2$ ; er ist mit zwei Klemmen über den Rahmen gespannt und an diesem verschiebbar.

Um die Kurve  $k$  zu integrieren (Fig. 624), ziehe man eine Reihe von Ordinaten und verschiebe den Streifen  $m$  über dem Rahmen, bis die Linie  $q$

von den Gelenken  $L$  die Entfernung besitzt, welche man für die Polhöhe des Seilecks gewählt hat; zu diesem Zwecke besitzt der Rahmen eine Teilung. Nun führt man diesen an der Reißschiene entlang, bis  $n_1$  in  $Ox$  liegt und  $q$  mit der Mittellinie eines Ordinatenstreifens zusammenfällt. Dann dreht man  $l_1$ , bis seine Oberkante durch den Punkt  $m_1$  der Kurve  $k$  geht und verschiebt den Rahmen längs der Reißschiene, bis  $l_1$  durch  $P_1$  geht. Hierauf zieht man das kurze Stück  $P_1P_2$  bis zum nächsten Streifen, der nicht die gleiche Breite wie der frühere zu haben braucht.

Darauf wird der Integrant verschoben, bis die Linie  $q$  mit der Mittellinie des zweiten Streifens zusammenfällt, dreht  $l_1$ , bis seine Oberkante durch  $m_2$  geht, verschiebt den Rahmen  $r$ , bis  $l_1$  durch  $P_2$  geht und zieht  $P_2P_3$  usf.

Das so erhaltene Seileck  $P_1P_2P_3 \dots$  ist eine gute Annäherung an die Integralkurve.

**348. Das Zeichnen der Differentialkurven mittels Tangenten.** Das Ziehen der Tangenten, wie z. B. bei Ableitung des  $v-t$ -Diagramms aus dem  $s-t$ -Diagramm, erfordert zunächst ein scharf gezeichnetes Diagramm, sodann eine möglichst genaue Einstellung der Tangente, was immer mit Schwierigkeit verknüpft sein wird, da es sich nicht um Kurven handelt, die einem bekannten Gesetze unterliegen, sondern durch den Versuch ermittelt wurden.

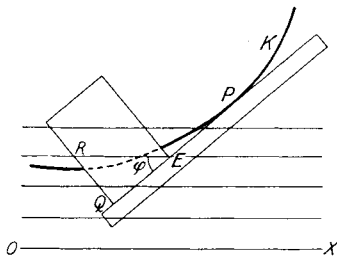


Fig. 625.

P. Melchior empfiehlt (Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1914, S. 266) folgenden Vorgang (Fig. 625): Um den Differentialquotienten der Kurve  $K$  für irgend eine Stelle  $P$  anzugeben, lege man die Kante des Lineals tangentiell an die Kurve in  $P$ , ohne die Tangente selbst zu

ziehen; ein Stück durchsichtiges Millimeterpapier wird nun längs des Lineals so verschoben, daß eine Ecke  $E$  in eine der Parallelen zur Achse  $OX$  fällt, und das Stück  $QR$  in mm genau abgelesen. Dann

ist der gesuchte Differentialquotient in  $P$ :  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\overline{RQ}}{\overline{QE}}$ , wobei  $QE$  eine gegebene Länge, z. B. 10 cm ist.

Schwierigkeit macht nur die genaue Bestimmung des Berührungspunktes  $P$ . Man visiert zu diesem Zwecke längs der Kante des Lineals oder bedient sich hierzu, um die unbequeme Kopfhaltung zu vermeiden, eines kleinen Spiegels.

Am besten ist es, man bestimmt zuerst die Normale der Kurve in  $P$  und hieraus erst die Tangente. Das geschieht vorteilhaft mit Verwendung des Normalen- oder Spiegellineals von Reusch. Dies ist ein dreiseitiges Prisma aus schwarzem Glas mit einer fein polierten und spiegelnden Fläche, das man durch den Punkt  $P$  in Richtung der

Normale legt (Fig. 626). Wenn der sichtbare Teil der Kurve und ihr Spiegelbild ohne Knick ineinander übergehen, hat das Lineal die wirkliche Lage der Normale. (Vgl. auch Gramberg, Technische Messungen, 2. Aufl., S. 178.)

A. Wagener hat dieses einfache Instrument wesentlich verfeinert; eine Beschreibung seines Spiegelderivators findet man Physik. Zeitschr. 1909, S. 57.

Für sehr scharf gezeichnete Diagramme von dünner Strichstärke genügt das ebenfalls von A. Wagener eingeführte Kurvenlot, das er in seinem Buche: „Indizieren und Auswerten von Kurbelweg- und Zeitdiagrammen“ in folgender Weise beschreibt (Fig. 627):

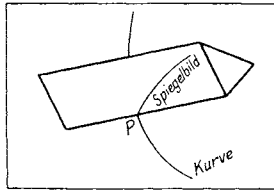


Fig. 626.

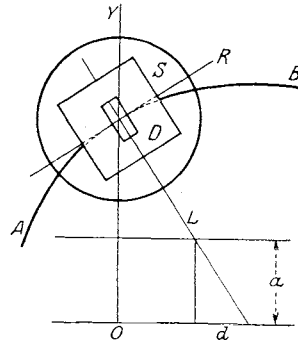


Fig. 627.

$S$  ist eine planparallele Glasscheibe, auf deren Unterseite ein mit schmalen Ausschnitt versehenes Deckblatt  $D$  festgeklebt ist, und zwar so, daß ein darauf mit sehr scharfem Bleistift ganz dünn gezogener Richtfaden  $R$  normal zu dem Lotfaden  $L$  steht, der auf der Unterseite der Glasscheibe mittels des Diamanten angerissen ist. Legt man die Scheibe auf einen zu differenzierenden Linienzug  $AB$ , so kann man dessen im Ausschnitt des Deckblattes  $D$  erscheinendes Stück mit Hilfe einer Lupe sehr genau in den Richtfaden  $R$  einstellen, so daß es, insofern die Breite des Ausschnittes relativ zum Krümmungsradius sehr klein ist, als eine mit dem Richtfaden  $R$  vollkommen sich deckende Gerade erscheint.

Ist die Scheibe überdies so aufgelegt, daß der Lotfaden  $L$  durch den Schnittpunkt der Ordinate durch die Kurve  $AB$  geht, und denkt man sich durch die Verlängerung des Lotfadens zwei parallel zur Abszissenachse der Kurve  $AB$  verlaufende, im übrigen aber beliebig liegende und beliebig weit voneinander abstehende Gerade geschnitten, so stellt die Strecke  $d$  den gesuchten Differentialquotienten für den durch  $O$  bestimmten Kurvenpunkt dar, und zwar in einem Maßstabe, der durch den Abstand  $a$  der benützten Parallelen gegeben ist.

Um die Tangente an ein Diagramm zu zeichnen, kann auch der Tangentenzeichner von Pflüger benützt werden, den man in



einer schönen Abbildung in der Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1914, S. 880 findet.

Der Berührungspunkt einer Tangente mit der Kurve kann, wenn erforderlich, durch Hilfskonstruktionen gefunden werden. Ist die Kurve  $K$  stark gekrümmt, so kann man in folgender Weise verfahren (Fig. 628): Man zieht parallel zur Tangente eine Anzahl naheliegender Sehnen, die man halbiert und deren Halbierungspunkte man durch eine stetige Kurve verbindet; der Schnitt dieser Kurve mit  $K$  liefert den gesuchten Berührungspunkt  $P$ .

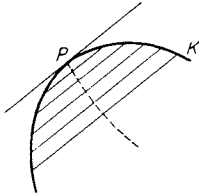


Fig. 628.

Andere Hilfskonstruktionen findet man in R. Mehmke, „Leitfaden zum graphischen Rechnen“, Leipzig 1912, S. 111.

**349. Das Zeichnen der Differentialkurven ohne Tangenten.** Ein angenähertes Verfahren, das trotz seiner Einfachheit recht gute Resultate liefern soll, wurde von P. Melchior a. a. O. angegeben (Fig. 629). Nach diesem wird die Abszisse  $OX$  in eine Anzahl gleicher Teile  $u$  geteilt, die Ordinaten werden gezogen und die Bögen  $PP_1$  der Kurve  $K$  durch die Sehnen ersetzt. Dann ist die Neigung der Sehne  $PP_1$  gegen die Achse  $OX$  ein Maß des Mittelwertes des Differentialquotienten der Kurve  $PP_1$ :

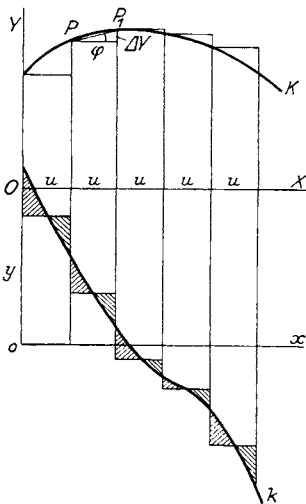


Fig. 629.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta Y}{u};$$

die Ordinatendifferenzen  $\Delta Y$  werden von der Achse  $ox$  aus in einem beliebigen Maßstabe aufgetragen, wodurch man im Achsenkreuz  $yo x$  eine treppenartige Linie erhält. Ist  $k$  die richtige Differentialkurve, so wird der Flächenstreifen zwischen zwei Ordinaten  $y$  dieser Kurve durch die Ordinatendifferenz  $\Delta Y$  der Integralkurve  $K$  gemessen. Die Fläche zwischen der Treppenlinie und der Achse  $ox$  muß also ebenso groß sein wie die Fläche zwischen der

richtigen Differentialkurve  $k$  und der Achse  $ox$ ; man wird somit die Kurve  $k$  derart einzeichnen haben, daß die schraffierten kleinen Flächen zwischen zwei Ordinaten  $y$  gleich groß sind. Bei einiger Übung wird es gelingen, eine vermittelnde Kurve  $k$  derart zu ziehen, daß die Treppenlinie flächengleich abgeschrägt wird. (Vgl. auch: H. Holzer, Zeitschr. für das gesamte Turbinenwesen 1913, S. 455 und Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1914, S. 519.) Die horizontalen Strecken der Treppenlinie sind die Differentialkurven der Sehnen  $PP_1$ .

Das Aufzeichnen der Differentialkurve kann übrigens mit ziemlicher Genauigkeit vorgenommen werden, ohne daß man von dem Zeichnen der Tangenten oder der Treppenlinie Gebrauch macht. Hierauf haben A. Linker in seiner „Elektrotechnischen Meßkunde“, 2. Aufl., S. 234, und R. Slaby in seiner Abhandlung: „Ein einfaches Verfahren zur Bildung von Differentialkurven“, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1913, S. 821, hingewiesen.

Es sei  $K$  die zu differenzierende Kurve (Fig. 630). Man verschiebe sie parallel zur  $X$ -Achse um ein beliebiges kleines Stück  $u$ , etwa in der Art, daß man  $K$  auf ein Stück Pauspapier zeichnet und dieses verschiebt. Man erhält hierdurch die kongruente Kurve  $K'$ ; die Ordinatendifferenzen  $\eta$  dieser Kurven  $K$  und  $K'$  werden von der  $X$ -Achse aus vergrößert aufgetragen. Die auf diese Weise erhaltene Kurve  $D$  ist angenähert die gesuchte Differentialkurve. Denn ist  $Y = F(X)$  die Gleichung der Kurve  $K$ ,  $Y_1 = F(X - u)$  jene von  $K'$  und die Ordinatendifferenz für gleiches  $X$

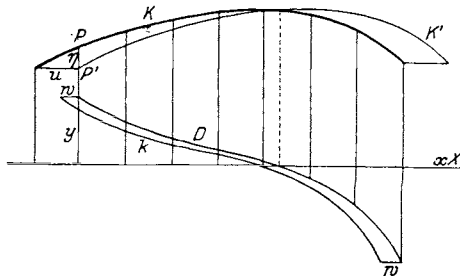


Fig. 630.

$$\eta = Y - Y_1 = F(X) - F(X - u),$$

so kann für kleine Werte von  $u$  angenähert gesetzt werden:

$$\eta = uF'(X).$$

Da nun  $F'(X)$  der Ordinate  $y$  der Differentialkurve nach der Gleichung

$$y = e \frac{dY}{dX} = e F'(X)$$

(vgl. 317) proportional ist, so wird

$$y = \frac{e}{u} \eta$$

und  $D$  ist die Differentialkurve, in einem neuen Maßstabe gezeichnet. In Fig. 630 wurde  $e = 3u$ , also  $y = 3\eta$  gemacht.

Über diesen Vorschlag hat sich ein lebhafter Meinungs-austausch entwickelt (man vgl. A. Linker, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1913, S. 1887; A. S. Oesterreicher, ebenda; P. Melchior, gleiche Zeitschrift 1914, S. 264; A. Röver, ebenda, S. 598). Das Mißliche ist, daß die so gefundene Kurve  $D$  noch ein Stück  $w$  zurückgeschoben werden muß, um in die richtige Stellung zur Kurve  $K$  zu kommen. Diese Verschiebungsgröße  $w$  steht nicht fest, sondern hängt von dem Charakter der Kurve  $K$  ab; der Vorschlag Slabys,  $w = \frac{u}{2}$  zu machen, ist jedenfalls nicht

allgemein zutreffend. Auch hat die Methode den Nachteil, daß die Kurve  $K$  zweimal gezeichnet werden muß.

Man kann jedoch einen anderen Weg einschlagen, auf dem das zweimalige Zeichnen der Kurve  $K$ , sowie das nachträgliche Zurückschieben der Kurve  $D$  überflüssig ist, und bei dem die Konstruktion der Differential-

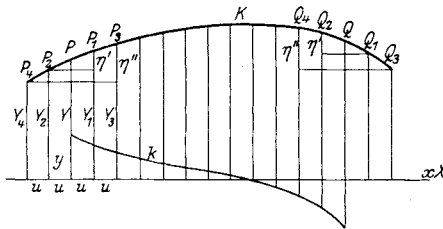


Fig. 631.

kurve  $k$  trotzdem sehr genaue Resultate liefert. Statt nämlich die Kurve  $K$  um  $u$  zu verschieben, kann diese Verschiebung mit dem Koordinatensystem vorgenommen werden, d. h. man zeichnet eine Reihe von zur  $Y$ -Achse parallelen Geraden, die untereinander den beliebigen, kleinen Abstand  $u$

haben (Fig. 631) und die aus der Kurve  $K$  die Ordinaten  $Y, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4$  usf. ausschneiden.

Verschiebt man das Koordinatensystem um  $u$  nach rechts, so wird die Gleichung der Kurve  $K$ :

$$Y = F(X)$$

übergehen in  $Y_1 = F(X + u)$

und mit Benützung der Taylorsche Reihe

$$Y_1 = Y + uF'(X) + \frac{u^2}{2}F''(X) + \frac{u^3}{6}F'''(X),$$

wenn man wegen der Kleinheit von  $u$  die übrigen Glieder vernachlässigt.

Verschiebt man hingegen das Koordinatensystem um  $u$  nach links, so wird die Gleichung der Kurve  $K$ :

$$Y_2 = F(X - u)$$

oder  $Y_2 = Y - uF'(X) + \frac{u^2}{2}F''(X) - \frac{u^3}{6}F'''(X).$

Dann ist die Differenz der Ordinaten

$$\eta' = Y_1 - Y_2 = 2uF'(X) + \frac{u^3}{3}F'''(X).$$

Nimmt man hingegen die Verschiebung des Koordinatensystems um  $2u$  nach rechts und links vor, so wird ebenso:

$$Y_3 = F(X + 2u) \text{ und } Y_4 = F(X - 2u)$$

oder  $Y_3 = Y + 2uF'(X) + 2u^2F''(X) + \frac{4}{3}u^3F'''(X)$

und  $Y_4 = Y - 2uF'(X) + 2u^2F''(X) - \frac{4}{3}u^3F'''(X),$

woraus die Differenz der Ordinaten

$$\eta'' = Y_3 - Y_4 = 4uF'(X) + \frac{8}{3}u^3F'''(X).$$

Aus den Gleichungen für  $\eta'$  und  $\eta''$  ergibt sich nun der Differentialquotient:

$$F''(X) = \frac{1}{3u} \left( 2\eta' - \frac{\eta''}{4} \right).$$

Setzt man  $2\eta' - \frac{\eta''}{4} = \eta \dots \dots \dots 188)$

und wie früher  $y = eF'(X)$ , so wird endlich

$$y = \frac{e}{3u} \eta \dots \dots \dots 189)$$

Bildet man die Differenzen  $\eta'$  und  $\eta''$  (Fig. 631) und daraus  $\eta$  für jeden Punkt  $P$  der Kurve  $K$ , so kann die Differentialkurve  $k$  punktweise sehr genau und in der richtigen Lage zu  $K$  verzeichnet werden. Wählt man überdies den Maßstab derart, daß  $e = 6u$  ist, so wird

$$y = 2\eta = 4\eta' - \frac{\eta''}{2}.$$

Um die Genauigkeit dieser Konstruktion der Differentialkurve  $k$  zu zeigen, möge angenommen werden, die gegebene Kurve  $K$  folge dem Gesetze

$$Y = F(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4.$$

Es ist dann  $F'(X) = a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2 + 4a_4X^3$

und  $y = eF'(X)$

die Gleichung der Differentialkurve.

Bildet man

$$Y_1 = F(X + u) = a_0 + a_1(X + u) + a_2(X + u)^2 + a_3(X + u)^3 + a_4(X + u)^4,$$

$$Y_2 = F(X - u) = a_0 + a_1(X - u) + a_2(X - u)^2 + a_3(X - u)^3 + a_4(X - u)^4,$$

so wird

$$\eta' = Y_1 - Y_2 = 2u[a_1 + 2a_2X + a_3(3X^2 + u^2) + 4a_4(X^3 + Xu^2)].$$

Ferner ist

$$Y_3 = F(X + 2u) = a_0 + a_1(X + 2u) + a_2(X + 2u)^2 + a_3(X + 2u)^3 + a_4(X + 2u)^4,$$

$$Y_4 = F(X - 2u) = a_0 + a_1(X - 2u) + a_2(X - 2u)^2 + a_3(X - 2u)^3 + a_4(X - 2u)^4$$

und  $\eta'' = Y_3 - Y_4 = 4u[a_1 + 2a_2X + a_3(3X^2 + 4u^2) + 4a_4(X^3 + 4Xu^2)].$

Bildet man nun  $\eta = 2\eta' - \frac{\eta''}{4}$ , so wird

$$\eta = 3u[a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2 + 4a_4X^3]$$

oder  $\eta = 3uF'(X)$  und wegen  $y = eF'(X)$ :

$$y = \frac{e}{3u} \eta.$$

Die Kurve mit den so konstruierten Ordinaten  $y$  gibt also ohne jede Vernachlässigung oder Verschiebung die gesuchte Differentialkurve  $k$ .

## XXXIV. Die Translation des Systems.

**350. Kinematik der Translation.** Wenn die Gerade  $AB$  eines starren Systems derart geführt wird, daß sie stets parallel zu sich bleibt, so sagt man, das System mache eine fortschreitende Bewegung oder eine Translation.

Je nach der Form der Führung der Systempunkte unterscheidet man die geradlinige von der krummlinigen Translation.

Werden z. B. die beiden Punkte  $A$  und  $B$  (Fig. 632) in den beiden parallelen Geraden  $a$  und  $b$  geführt, so wird die Gerade  $AB$  stets parallel zu sich bleiben und jeder andere Punkt  $C$  des Systems beschreibt ungeführt eine Gerade  $c$ , die zu  $a$  und  $b$  parallel ist. Die Bewegung des Systems ist eine geradlinige Translation.

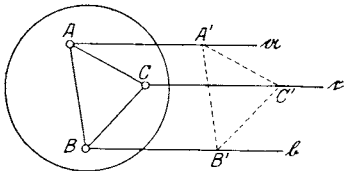


Fig. 632.

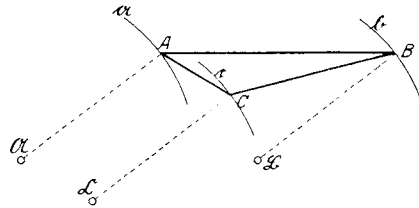


Fig. 633.

Wenn hingegen die Punkte  $A$  und  $B$  auf zwei parallel liegenden, kongruenten Kurven  $a$  und  $b$  geführt werden (Fig. 633), d. h. ist der Krümmungshalbmesser  $A\mathcal{A}$  der Führungskurve  $a$  immer gleich und parallel dem Krümmungshalbmesser  $B\mathcal{B}$  der Führungskurve  $b$ , so bleibt die Gerade  $AB$  während der Bewegung auch sich selbst parallel. Jeder andere Systempunkt  $C$  beschreibt dann ungeführt eine Kurve  $c$ , die zu  $a$  und  $b$  kongruent ist und deren Krümmungshalbmesser  $C\mathcal{C}$  gleich und parallel mit  $A\mathcal{A}$  und  $B\mathcal{B}$  ist.

Bei der krummlinigen Translation bilden also zwei beliebige Systempunkte mit den Krümmungsmittelpunkten ihrer Bahnen ein Parallelogramm.

Die Translation ist eine Bewegung, bei der alle Punkte des Systems kongruente Bahnen beschreiben und gleichzeitig den gleichen Bewegungszustand, also die gleiche Geschwindigkeit und die gleiche Beschleunigung besitzen.

**351. Anwendungen.** Die bekannteste Anwendung der krummlinigen Translation ist das Parallelkurbelgetriebe (Fig. 634). Es besteht aus zwei gleichlangen und parallelen Kurbeln  $A\mathfrak{A}$  und  $B\mathfrak{B}$ , die sich um ihre festen Punkte  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  drehen; die vier Gelenke  $A, B, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  bilden ein gelenkiges Parallelogramm. Verbindet man einen dritten Punkt  $C$  des Systems  $AB$  durch zwei Stangen  $AC, BC$  oder durch das starre Dreieck  $ABC$  starr mit der Koppel  $AB$ , so wird die ungeführte Bahn  $c$  des Punktes  $C$  ein Kreis sein, der den gleichen Halbmesser hat wie die beiden Kurbelkreise  $a$  und  $b$ . Der Mittelpunkt  $\mathfrak{C}$  dieses Kreises  $c$  wird mit den Punkten  $\mathfrak{A}AC$  ein Parallelogramm bilden und ebenso mit  $\mathfrak{B}BC$ . Man kann also, ohne die Beweglichkeit des Getriebes zu beeinträchtigen, den Punkt  $C$  durch eine dritte Kurbel  $C\mathfrak{C}$  führen. Dasselbe gilt von jedem anderen Punkt  $D$ , der mit  $AB$  fest verbunden ist.

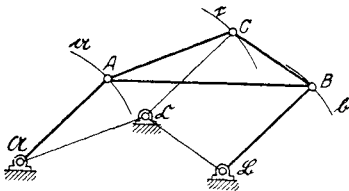


Fig. 634.

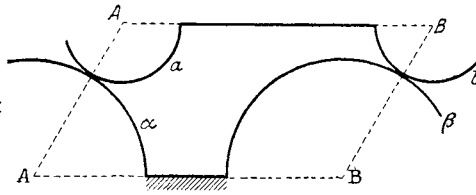


Fig. 635.

Man nennt ein solches Getriebe, das zwangläufig bleibt, obwohl es mehr Glieder besitzt, als zum Zwanglauf erforderlich wäre, ein übermäßig geschlossenes.

Statt durch die Führung zweier Punkte könnte die Translation auch durch das Gleiten zweier kongruenten Kurvenpaare aufeinander bewerkstelligt werden. In Fig. 635 gleiten die kongruenten und parallelen Kurven  $a$  und  $b$  auf den kongruenten und parallelen Kurven  $a$  und  $\beta$ ; die Krümmungsmittelpunkte  $A, B, A, B$  dieser vier Kurven bilden in jedem Augenblicke ein Parallelogramm, dessen Seitenlängen sich jedoch mit der Zeit verändern. Ein Abrollen der Kurven aufeinander ohne Gleiten ist bei der Translation ausgeschlossen, da in diesem Falle die Berührungspunkte der Kurven augenblicklich in Ruhe bleiben müßten. Da aber bei der Translation alle Punkte des Systems die gleiche Geschwindigkeit besitzen, müßten auch alle übrigen Punkte des Systems in Ruhe verharren.

**352. Dynamik der Translation.** Da alle Punkte des Systems die gleiche vorgeschriebene Bewegung ausführen, bewegen sich alle wie der Schwerpunkt des Systems. Die Bewegung des Schwerpunkts findet aber genau so statt, als ob sämtliche Kräfte und Massen des Systems im Schwerpunkt vereinigt wären (vgl. 52).

Die Dynamik der Translation wird also zurückzuführen sein auf die Dynamik eines Punktes von bekannter Masse, dessen Bahn vorgeschrieben ist (Führung der Translation) und dessen bewegende Kräfte gegeben sind.

Statt des Schwerpunkts kann jeder andere Punkt des Systems als Reduktionspunkt der Kräfte und Massen benützt werden.

In Fig. 636 ist eine Parallelkurbel gegeben, deren Koppel  $AB$  mit dem Punkte  $C$  fest verbunden ist.  $A\mathfrak{A} = B\mathfrak{B} = r$  sind die Kurbeln. In  $C$  wirke die Triebkraft  $P$ , in den Gelenken  $A$  und  $B$  die Widerstände  $Q_1$  und  $Q_2$ . Die Masse  $M$  des Systems  $ABC$  und die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  für irgend eine Anfangslage seien bekannt. Es ist das  $v$ -s-Diagramm der Bewegung und das  $D$ -s-Diagramm der Gelenkdrücke in  $A$  und  $B$  zu ermitteln.

Da die Bewegung des Systems auf die vorgeschriebene Bewegung eines Punktes, z. B. des als Reduktionspunkt gewählten Punktes  $C$ ,

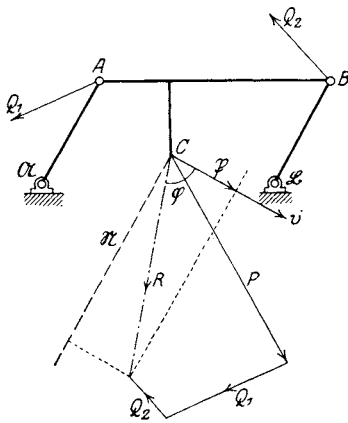


Fig. 636.

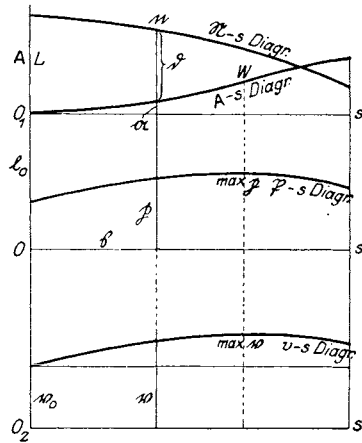


Fig. 637.

zurückgeführt wird (vgl. 309 und 310), so beginnt man damit, in  $C$  die gegebenen Kräfte  $P, Q_1, Q_2$  geometrisch zu addieren;  $R$  sei ihre Resultante. Zieht man durch  $C$  die Parallele zu  $A\mathfrak{A}$ , so ist sie die Normale der Bahn von  $C$ ; die Projektion von  $R$  auf die Richtung der Tangente  $v$  sei  $\mathfrak{B}$ . Man zeichnet nun das  $\mathfrak{B}$ -s-Diagramm (Fig. 637), indem man den Weg von  $C$  oder  $A$ , d. i. den Umfang des Kurbelkreises auf der Geraden  $Os$  abrollt, für mehrere Stellungen der Parallelkurbel die

Größe von  $\mathfrak{B}$  konstruiert und die Kraftstrecke  $p = \frac{\mathfrak{B}}{\varkappa}$  (Gleichung 178)

als Ordinate des Diagramms über  $s$  aufträgt. Hierauf wird über derselben Achse das  $L$ -s-Diagramm gezeichnet. Man rechnet zunächst

$L_0 = \frac{1}{2} M v_0^2$ , trägt die entsprechende Strecke  $l_0 = \frac{L_0}{\lambda}$  (Gleichung 181)

von  $O$  nach  $O_1$  auf und zieht die neue Weg-Achse  $O_1s_1$ . Sodann konstruiert man aus dem  $\mathfrak{B}$ -s-Diagramm mit Hilfe der Flächen  $\Phi$  das  $A$ -s-

Diagramm (vgl. 336), dessen Ordinaten die Arbeitsstrecken  $a = \frac{A}{\lambda}$  sind

(Gleichung 181). Aus dem  $\mathbf{A}$ - $s_1$ -Diagramm wurde sodann das  $h$ - $s$ -Diagramm und das  $v$ - $s$ -Diagramm entwickelt, wie dies in 339 gelehrt wurde.

Das  $\mathbf{A}$ - $s_1$ -Diagramm ist gleichzeitig das  $L$ - $s$ -Diagramm, wenn man es auf die Achse  $Os$  bezieht. Es ist  $L = \frac{1}{2} M v^2$ . Nach Gleichung 142:

$$D = \frac{M v^2}{\varrho} - P \sin \varphi$$

wird mit:  $M v^2 = 2L$ ,  $P \sin \varphi = \mathfrak{R}$ ,  $\varrho = r$ :

$$D = \frac{2L}{r} - \mathfrak{R}.$$

Führt man die Maßstäbe ein, so ist nach den Gleichungen 144, 178 und 181:

$$\kappa \delta = \frac{2}{\alpha r} \lambda l - \kappa n,$$

wenn  $\delta$ ,  $r$ ,  $l$  und  $n$  die Strecken in cm sind, welche  $D$ ,  $r$ ,  $L$  und  $\mathfrak{R}$  im Diagramm ersetzen. Darin ist nach Gleichung 181:  $\lambda = \alpha \kappa \mathfrak{U}$ . Es wird also:

$$\delta = \frac{2}{r} \mathfrak{U} l - n$$

und wenn man die Arbeitsbasis  $\mathfrak{U} = \frac{r}{2}$  wählt:

$$\delta = l - n.$$

Die Strecke  $\delta$ , welche den Führungsdruck oder Zwang in  $A$  und  $B$  darstellt, ist also die Differenz der Ordinaten des  $\mathfrak{R}$ - $s$ - und des  $L$ - $s$ -Diagramms.

**353. Anwendung.** Anfahrt eines Aufzuges. Ein Aufzug fördert eine Last  $Q$ ; die Geschwindigkeit beginnt mit null und wächst während der Anfahrt bis zur normalen Größe  $v_1$ . Das  $v$ - $t$ -Diagramm ist durch eine Parabel dargestellt, deren Scheitel in  $G$  liegt (Fig. 638). Nennt man  $t_1$  die Anfahrtszeit, so hat das Diagramm die Gleichung

$$v = v_1 \left( \frac{2t}{t_1} - \frac{t^2}{t_1^2} \right)$$

(vgl. 330, Beispiel 6) und die Beschleunigung ist

$$b = \frac{dv}{dt} = \frac{2v_1}{t_1} \left( 1 - \frac{t}{t_1} \right),$$

folgt also einem linearen Gesetze. Für  $t = 0$  ist die Anfangsbeschleunigung  $b_0 = 2 \frac{v_1}{t_1}$ ; für  $t = t_1$  ist  $b_1 = 0$ . Das  $b$ - $t$ -Diagramm ist eine fallende Gerade.

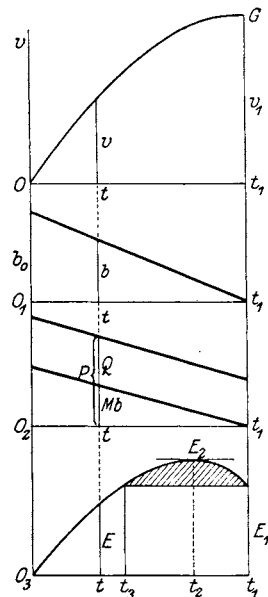


Fig. 638.



Nennt man  $P$  die Hubkraft, so ist nach dem d'Alembertschen Prinzip (vgl. 53)  $P$  im Gleichgewicht mit  $Q$  und der Trägheitskraft  $-Mb$ . Es ist also

$$P - Q - Mb = 0$$

oder 
$$P = Q \left( 1 + \frac{b}{g} \right).$$

Die Hubkraft ist also veränderlich und ebenso die Hebeleistung

$$E = Pv = Qv \left( 1 + \frac{b}{g} \right).$$

Die  $P$ - $t$ - und  $E$ - $t$ -Diagramme sind aus Fig. 638 zu ersehen; man erhält letzteres durch Multiplikation der übereinander liegenden Ordinaten  $P$  und  $v$ .

Für  $t = t_1$  ist  $b = 0$ ,  $P = Q$ ,  $E_1 = Qv$ .

Das Maximum  $E_2$  der Leistung wird erreicht für die Zeit  $t_2$ ; man erhält sie, wenn man an das  $E$ - $t$ -Diagramm die horizontale Tangente zieht.

Für  $t = t_3$  ist die Leistung  $E_3 = E_1$ , hat also bereits den schließlichen Wert für den Beharrungszustand des Hubes erreicht.

Da die Arbeit 
$$A = \int E \cdot dt$$

durch die Fläche des  $E$ - $t$ -Diagramms dargestellt ist (vgl. 343), so bedeutet die schraffierte Fläche jene Arbeit, die zwischen  $t_3$  und  $t_1$  in der gehobenen Last als Bewegungsenergie aufgespeichert wurde (vgl. Jung: „Einiges über das Anheben der Last“, Die Fördertechnik 1914, S. 138).

Ferner sei auf folgende Abhandlungen verwiesen:

F. Koczynski: „Diagrammberechnung für Förder-Maschinen, angetrieben durch Elektromotoren mit Reihenschluß-Charakteristik“. Elektrische Kraftbetriebe und Bahnen, 1909.

G. Trefler und F. Nettel: „Zeichnerische Diagramm-Ermittlung für Fördermaschinen mit Antrieb durch Reihenschluß-Motoren“. Zeitschrift d. Ver. deutsch. Ing. 1913, S. 935.

### 354. Aufgabe.

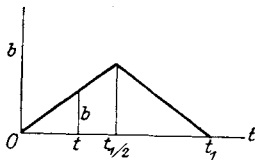


Fig. 639.

145. Das  $b$ - $t$ -Diagramm, nach dem die Last  $Q$  durch einen Aufzug gehoben wird, hat während der Anfahrt den durch Fig. 639 dargestellten Verlauf. Man suche das  $v$ - $t$ -Diagramm, die Diagramme für Hubkraft und Leistung, endlich die Zeit  $t_2$  für das Erreichen der Maximal-Leistung.

## XXXV. Die Dauerdrehung des Systems.

**355. Kinematik der Drehung.** Bei der Untersuchung des augenblicklichen Bewegungszustandes eines starren Systems fanden wir die Tatsache, daß selbst der allgemeinste Bewegungszustand sich durch die augenblickliche Drehung des Systems um einen Punkt darstellen läßt, den wir den Drehpol nannten (vgl. 13).

Wenn wir jedoch die Bewegung des Systems in mehreren aufeinander folgenden Zeiteilchen verfolgen, würden wir finden, daß dieser Drehpol nicht an derselben Stelle bleibt, sondern seine Eigenschaft als Mittelpunkt der Drehung an einen anderen Punkt des Systems überträgt. Die Schnelligkeit, mit der er diese Übertragung vornimmt, hatten wir die Wechselgeschwindigkeit des Drehpols genannt (vgl. 39).

Wird nun der Drehpol durch irgend ein Hindernis dauernd festgehalten, so wird er seine Rolle an keinen anderen Systempunkt abgeben können und die Wechselgeschwindigkeit wird dauernd null bleiben. Wir nennen diese Art der Systembewegung eine Dauerdrehung. Sie ist jedenfalls die wichtigste aller Körperbewegungen, da sie die meisten Anwendungen gefunden hat. Ihre kinematischen Verhältnisse sind bemerkenswert einfach; für den augenblicklichen Bewegungszustand wurden sie bereits in 6 bis 8, 17 bis 23 erörtert.

Der zeitliche Verlauf der Bewegung ist festgestellt, wenn die Bewegung eines einzigen Punktes  $A$ , der nicht mit dem Drehpol zusammenfällt, bekannt ist. Es genügt also die Kenntnis des  $v$ - $t$ - oder des  $b$ - $t$ -Diagramms eines beliebigen Punktes  $A$ .

Nennt man  $r$  dessen Abstand vom Drehpol, den man jetzt Mittelpunkt der Drehung nennt, so ist nach den Gleichungen 8, 11 und 9 die Geschwindigkeit, die Tangentialbeschleunigung und Normalbeschleunigung des Punktes  $A$ :

$$v_A = r\omega, \quad t_A = r\lambda, \quad n_A = r\omega^2 \quad \dots \dots \dots 190)$$

Hierin bedeutet

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad \dots \dots \dots 191)$$

die Winkelgeschwindigkeit des Systems, ferner

$$\lambda = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad \dots \dots \dots 192)$$

die Winkelbeschleunigung und  $\varphi$  den Drehungswinkel. Aus obigen Gleichungen folgt endlich

$$\omega \cdot d\omega = \lambda \cdot d\varphi \dots \dots \dots 193)$$

Zwischen den Veränderlichen  $\varphi, \omega, \lambda$  und  $t$  der Drehung eines Körpers bestehen also dieselben Beziehungen wie zwischen den Veränderlichen  $s, v, b$  und  $t$  der geradlinigen Bewegung eines Punktes. Es läßt sich deshalb alles, was in Abschnitt XXXI über die kinematischen Diagramme gesagt wurde, unbedenklich auf die Dauerdrehung eines Körpers übertragen.

Ein wesentlicher Unterschied besteht nur darin, daß das sich drehende System nach jeder Umdrehung in seine Ausgangslage zurückkehrt und damit auch meistens in den anfänglichen Bewegungszustand  $\omega_0, \lambda_0$ ; oder er erreicht ihn wenigstens nach einer Reihe von Umdrehungen. Man spricht dann von einer Periode der Drehung.

**356. Die kinematischen Diagramme. Pendelweg und Ungleichförmigkeitsgrad der Drehung.** Wie in Abschnitt XXXI können die kinematischen Diagramme entweder auf die Zeit-Achse oder auf die Weg-Achse bezogen werden.

Fig. 640 zeigt die Drehungs-Diagramme für eine Periode, auf die Zeit-Achse bezogen. Aus dem gegebenen  $\lambda$ - $t$ -Diagramm wurden das

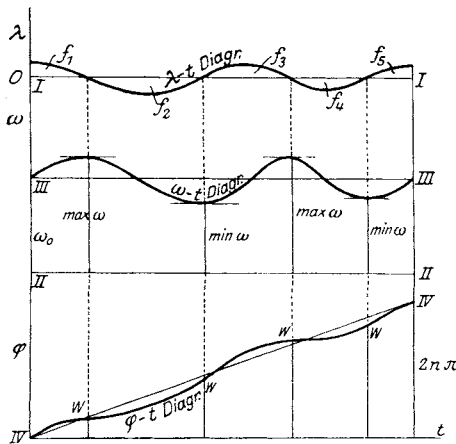


Fig. 640.

$\omega$ - $t$ -Diagramm und das  $\varphi$ - $t$ -Diagramm in derselben Weise entwickelt, wie in Fig. 578 aus dem  $b$ - $t$ -Diagramm und das  $v$ - $t$ -Diagramm und das  $s$ - $t$ -Diagramm. Die Beziehungen zwischen diesen Diagrammen sind wieder die gleichen.

Würde sich das System gleichförmig drehen, so wäre  $\lambda = 0$ , das  $\lambda$ - $t$ -Diagramm wäre die Gerade  $II I$  und das  $\omega$ - $t$ -Diagramm die Gerade  $III III$  im Abstände  $\omega_0$  von der Achse  $II III$ ; das  $\varphi$ - $t$ -Diagramm fiel in die ansteigende Gerade  $IV IV$ .

Diese gleichförmige Drehung ist der Idealfall, dem sich die Bewegung einer Welle mehr oder minder nähert, ohne ihn zu erreichen. Die Winkelbeschleunigung  $\lambda$  schwankt wellenartig, ebenso die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  und der Drehwinkel  $\varphi$ . Die Summe  $\alpha_1 + \alpha_2$  der größten Abweichungen des Winkels  $\varphi$  von den Ordinaten der Geraden  $IV IV$  nach oben und unten pflegt man den Pendelweg zu nennen; er ist ein Maß für die Ungleichförmigkeit der Drehung (vgl. 345).

Aus Gleichung 192:  $\lambda = \frac{d\omega}{dt}$  folgt

$$\omega - \omega_0 = \int_0^t \lambda \cdot dt.$$

Umfaßt die Bewegung die Zeit  $\mathfrak{T}$  einer Periode, so wird an deren Ende  $\omega = \omega_0$  und

$$\int_0^{\mathfrak{T}} \lambda \cdot dt = 0 \dots\dots\dots 194)$$

Da dieses Integral die Fläche zwischen dem  $\lambda$ - $t$ -Diagramm und der Zeit-Achse bedeutet, so müssen die über der  $O$ - $t$ -Achse liegenden positiven Flächen an Größe gleich sein den unter dieser Achse liegenden negativen Flächen oder  $f_1 - f_2 + f_3 - f_4 + f_5 = 0$ .

Aus Gleichung 191:  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$  folgt weiter:

$$\varphi = \int_0^t \omega \cdot dt \dots\dots\dots 195)$$

wenn der Anfangswert des Winkels  $\varphi$  null ist.

Erreicht der Körper nach  $n$  Umdrehungen den Anfangszustand wieder oder ist eine Periode seiner Bewegung abgelaufen, so ist

$$2n\pi = \int_0^{\mathfrak{T}} \omega \cdot dt \dots\dots\dots 196)$$

So wird in Fig. 640 durch die Endordinate  $2n\pi$  des  $\varphi$ - $t$ -Diagramms die Fläche zwischen dem  $\omega$ - $t$ -Diagramm und der Achse  $II$  gemessen.

Fig. 641 zeigt die Drehungsdiagramme für eine Periode, auf die  $O$ - $\varphi$ -Achse bezogen; dabei wird der Drehungswinkel  $\varphi$  im Bogenmaße auf der Abszissenachse aufgewickelt. Aus dem gegebenen  $\lambda$ - $\varphi$ -Diagramm wurde das  $\omega^2$ - $\varphi$ -Diagramm gezeichnet, genau so, wie in Fig. 583 aus dem  $b$ - $s$ -Diagramm das  $v^2$ - $s$ -Diagramm gefunden wurde. Die Eigenschaften der Diagramme stimmen miteinander überein.

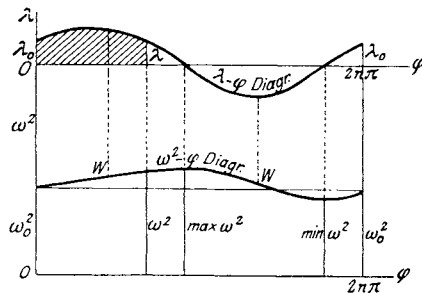


Fig. 641.

Aus Gleichung 193:  $\omega \cdot d\omega = \lambda \cdot d\varphi$  folgt:

$$\frac{1}{2} (\omega^2 - \omega_0^2) = \int_0^{\varphi} \lambda \cdot d\varphi \dots\dots\dots 197)$$

Umfaßt die Periode der Drehung  $n$  Umdrehungen, so wird am Ende derselben  $\omega = \omega_0$  und es ist

$$\int_0^{2n\pi} \lambda \cdot d\varphi = 0 \quad \dots \dots \dots 198)$$

Auch hier ist also die Gesamtfläche zwischen dem Diagramm und der Achse gleich null oder die Summe der positiven, über der Achse gelegenen Flächen gleich der Summe der negativen, unter der Achse gelegenen. Ist die Drehung keine gleichförmige, also  $\lambda$  nicht dauernd gleich null, so schwankt die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  wellenförmig zwischen gewissen Grenzen, aus denen ebenfalls ein Maß für die Ungleichförmigkeit der Drehung abgeleitet werden kann. Dieser Ungleichförmigkeit hat man das größte Interesse bei allen rotierenden Maschinen zugewendet und eine Menge Mittel erdnen, sie innerhalb gewisser Grenzen zu halten, die durch den Zweck der Maschine bedingt sind.

Alles was in 332 und 333 über mittlere Geschwindigkeit und Ungleichförmigkeitsgrad gesagt wurde, kann sinngemäß hierher übertragen werden, wenn man die Geschwindigkeit  $v$  des Punktes durch die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  des Systems ersetzt. Die gebräuchliche Art, die mittlere Winkelgeschwindigkeit anzugeben, ergibt sich aus Gleichung 171 mit

$$\omega_m = \frac{1}{2} (\max \omega + \min \omega) \quad \dots \dots \dots 199)$$

und ebenso der Ungleichförmigkeitsgrad in Übereinstimmung mit Gleichung 174:

$$\mu = \frac{\max \omega - \min \omega}{\omega_m} \quad \dots \dots \dots 200)$$

Diese theoretisch nicht zu begründende Art,  $\mu$  zu beurteilen, soll nur aus dem Grunde wiederholt werden, weil sie sich als Annäherungsweise in der Praxis allgemein eingebürgert hat.

Benützt man jedoch die Vorschläge, die in 332 und 333 gemacht wurden, so ist die mittlere Winkelgeschwindigkeit nach Gleichung 172:

$$\omega_m' = \frac{1}{\mathfrak{T}} \int_0^{\mathfrak{T}} \omega \cdot dt \quad \dots \dots \dots 201)$$

und somit nach Gleichung 196:

$$\omega_m' = \frac{2n\pi}{\mathfrak{T}} \quad \dots \dots \dots 202)$$

wenn wieder  $n$  die Anzahl der Umdrehungen in einer Periode bedeutet.

Der Ungleichförmigkeitsgrad wird nach Gleichung 177:

$$\mu' = \frac{1}{\mathfrak{T}} \int_0^{\mathfrak{T}} \left(1 - \frac{\omega}{\omega_m'}\right)^2 \cdot dt \quad \dots \dots \dots 203)$$

und mit Rücksicht auf Gleichung 196:

$$\mu' = \frac{1}{\mathfrak{T}} \int_0^{\mathfrak{T}} \left(1 - \frac{\mathfrak{T}\omega}{2n\pi}\right)^2 dt = \frac{1}{\mathfrak{T}} \int_0^{\mathfrak{T}} \left[1 - \frac{\mathfrak{T}\omega}{n\pi} + \frac{\mathfrak{T}^2\omega^2}{4n^2\pi^2}\right] \cdot dt$$

$$= \frac{1}{\mathfrak{I}} \left[ \mathfrak{I} - \frac{\mathfrak{I}}{n\pi} \int_0^{\mathfrak{I}} \omega \cdot dt + \frac{\mathfrak{I}^2}{4n^2\pi^2} \int_0^{\mathfrak{I}} \omega^2 \cdot dt \right].$$

Das erste Integral ist aber nach Gleichung 196:  $2n\pi$ ; es bleibt also

$$\mu' = \frac{\mathfrak{I}}{4n^2\pi^2} \int_0^{\mathfrak{I}} \omega^2 \cdot dt - 1 \dots \dots \dots 204)$$

Statt für die Drehung des Körpers einen bestimmten Ungleichförmigkeitsgrad  $\mu$  oder  $\mu'$  vorzuschreiben, ist es in vielen Fällen, so z. B. bei Wechselstrom-Maschinen, üblich, die Abweichung des Drehungswinkels  $\varphi$  von der Mittellage zwischen bestimmte Grenzen einzuschließen.

**357. Dynamik der Drehung.** Von einem starren System, von dem ein Punkt  $O$  dauernd festgehalten wird, seien die Massenverteilung sowie die bewegenden Kräfte gegeben. Nach Gleichung 45, die nicht nur für den Schwerpunkt, sondern auch für jeden festgehaltenen Punkt des Systems gilt, ist dann die Winkelbeschleunigung des Systems:

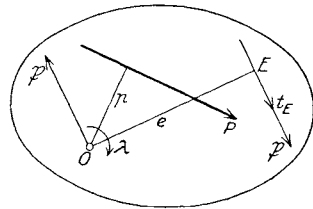


Fig. 642.

$$\lambda = \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{T}_0} \dots \dots \dots 205)$$

worin  $\mathbf{M} = \Sigma Pp$  das Moment der bewegenden Kräfte um  $O$  und  $\mathbf{T}_0$  das polare Trägheitsmoment des Systems für den gleichen Punkt ist (Fig. 642).

Wählt man irgend einen Punkt  $E$  des Systems in der Entfernung  $e$  von  $O$ , so wird die Tangentialbeschleunigung dieses Punktes

$$t_E = e \lambda = \frac{\mathbf{M} e}{\mathbf{T}_0}.$$

Ersetzt man das Moment  $\mathbf{M}$  durch ein gleichwertiges Kraftpaar  $\mathfrak{P}$  am Arme  $e$ :

$$\mathbf{M} = \Sigma Pp = \mathfrak{P} e$$

und das Trägheitsmoment  $\mathbf{T}_0$  durch jenes einer in  $E$  liegenden Punktmasse  $\mathfrak{M}$ :

$$\mathbf{T}_0 = \mathfrak{M} e^2,$$

so ist auch

$$t_E = \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{M}} \dots \dots \dots 206)$$

d. h. die Tangentialbeschleunigung des Punktes  $E$  ist die einer konstanten Punktmasse  $\mathfrak{M}$ , die der Kraft  $\mathfrak{P}$  ausgesetzt wird.

Man nennt

$$\mathfrak{M} = \frac{\mathbf{T}_0}{e^2} \dots \dots \dots 207)$$

die an den Punkt  $E$  reduzierte Masse des Systems,

$$\mathfrak{P} = \frac{\mathbf{M}}{e}$$

die in die Bewegungsrichtung von  $E$  reduzierte Kraft und  $E$  den Reduktionspunkt.

Durch diese Reduktion ist die Drehung des Körpers auf die Kreisbewegung eines Punktes  $E$  mit konstanter Masse zurückgeführt und es können alle jene Konstruktionen angewendet werden, die wir in Abschnitt XXXI kennen gelernt haben.

### 358. Beispiele.

1. Über die um  $O$  drehbare Walze vom Gewicht  $G$  ist ein absolut biegsames und gewichtloses Seil geschlungen, das an seinem Ende das Gewicht  $Q$  trägt (Fig. 643). Mit welcher Beschleunigung  $b$  wird es sinken? Wie groß ist die Seilspannung in  $E$ ?

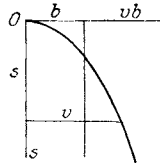


Fig. 643.

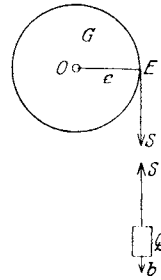


Fig. 643 a.

Man kann die Bewegung der Walze auf jene des Punktes  $E$  zurückführen, der auch dem Seil angehört. Wenn  $e$  der Halbmesser der Walze ist, so ist deren reduzierte Masse mit  $T_0 = \frac{G}{2g} e^2$  (vgl. Gleichung 88a

und 207):

$$\mathfrak{M} = \frac{T_0}{e^2} = \frac{G}{2g},$$

während die in  $E$  wirkende Kraft  $\mathfrak{P}$  die Seilspannung  $S$  ist. Nach Gleichung 206 ist dann

$$t_E = \frac{S}{\mathfrak{M}} = 2g \cdot \frac{S}{G}$$

und dies ist bereits die gesuchte Beschleunigung  $b$ . Nach dem d'Alembertschen Prinzip ist aber

$$S + \frac{Q}{g} b - Q = 0;$$

aus den beiden letzten Gleichungen folgt:

$$b = g \cdot \frac{2Q}{G + 2Q}, \quad S = \frac{GQ}{G + 2Q}.$$

Die Beschleunigung ist konstant und es ist, wenn  $v_0 = 0$  war,  $v^2 = 2bs$ . Das  $v$ - $s$ -Diagramm ist eine Parabel (Fig. 643 a).

2. Eine prismatische Stange vom Gewicht  $G$ , deren Endpunkt  $A$  fest gelagert ist (Fig. 644), schließt anfangs mit der Vertikalen den Winkel  $\alpha$

ein und ist in Ruhe. Man zeichne die Diagramme ihrer Bewegung, die erfolgt, wenn das andere Ende  $C$  losgelassen wird.

Betrachtet man den Punkt  $C$  als Reduktionspunkt, so ist wegen  $T_0 = \frac{G}{3g} l^2$  (vgl. Gleichung 94) die reduzierte Masse:

$$\mathfrak{M} = \frac{T_0}{l^2} = \frac{G}{3g}$$

und wegen  $\mathbf{M} = \frac{G}{2} l \sin \varphi$  die reduzierte Kraft:

$$\mathfrak{K} = \frac{G}{2} \sin \varphi,$$

somit

$$t_{\mathfrak{K}} = \frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{M}} = \frac{3}{2} g \sin \varphi = l \lambda$$

und die Winkelbeschleunigung

$$\lambda = \frac{3g \sin \varphi}{2l},$$

wie schon im Beispiel 1, 126, gefunden wurde. Daraus ergab sich die Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega^2 = \frac{3g}{l} (\cos \varphi - \cos a)$$

Die Diagramme von  $\lambda$  und  $\omega^2$  werden mit Vorteil statt auf die Zeit oder den Drehungswinkel  $\varphi$  auf den  $\sin \varphi$  bezogen. Beschreibt man

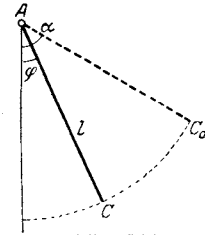


Fig. 644.

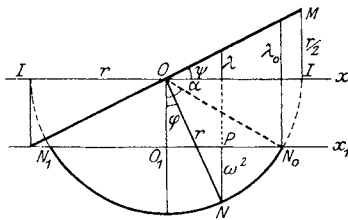


Fig. 644 a.

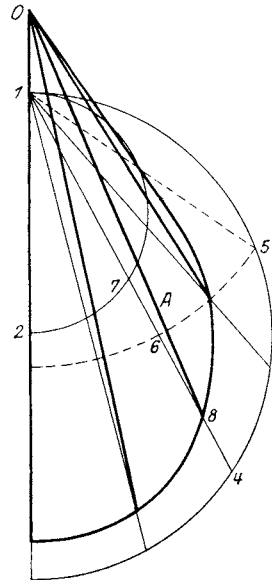


Fig. 644 b.

aus  $O$  (Fig. 644 a) einen Halbkreis mit dem Halbmesser  $r = \frac{3g}{l}$ , macht  $IM = \frac{r}{2}$  und zieht die Gerade  $OM$ , so ist sie das Diagramm der Winkelbeschleunigung in bezug auf die Abszissen  $x = r \sin \varphi$ . Denn zieht man  $ON \parallel AC$ , so erhält man die Ordinate  $\lambda = r \sin \varphi \cdot \operatorname{tg} \psi = \frac{3g \sin \varphi}{2l}$ . Macht man ferner  $ON_0 \parallel AC_0$ , worin  $AC_0$  die Anfangslage des Stabes ist, so ist die Ordinate  $\lambda_0$  die anfängliche Winkelbeschleunigung.



Das Diagramm der Winkelgeschwindigkeit erhält man, wenn man durch  $N_0$  die Parallele zu  $Ox$  zieht. Dann ist  $PN = \omega^2$  und der Kreisbogen  $N_0NN_1$  das gesuchte Diagramm. Denn es ist

$$\overline{PN} = r (\cos \varphi - \cos \alpha) = \frac{3g}{l} (\cos \varphi - \cos \alpha).$$

Um endlich den Verlauf des Gelenkdruckes  $A$  während der Drehung darzustellen (Fig. 644b), benütze man die in Fig. 229 b (Beispiel 2, 128) mitgeteilte Konstruktion. Man macht  $\overline{O1} = \frac{G}{4}$ ,  $\overline{12} = \frac{3}{4}G$ , beschreibt aus 2 mit dem Halbmesser  $\overline{12}$  einen Halbkreis und einen zweiten über  $\overline{12}$  als Durchmesser. Sodann zieht man  $14 \parallel AC$ ,  $15 \parallel AC_0$  und macht schließlich  $\overline{78} = \overline{64}$ ; dann ist  $\overline{08} = A$ .

Führt man diese Konstruktion für beliebig viele Lagen des Stabes durch, so erhält man im geometrischen Orte der Punkte 8 das polare Diagramm der Gelenkdrücke.

**359. Anfahrt, Beharrungszustand und Endlauf.** Die Dauerdrehung eines Körpers um eine feste Achse zerfällt zeitlich in drei Teile: der Anlauf oder die Anfahrt, den Beharrungszustand und den Endlauf.

Während der Anfahrt wird die Drehung durch die bewegenden Kräfte eingeleitet und so lange gesteigert, bis diese mit den Widerständen in einen durchschnittlichen Gleichgewichtszustand getreten sind.

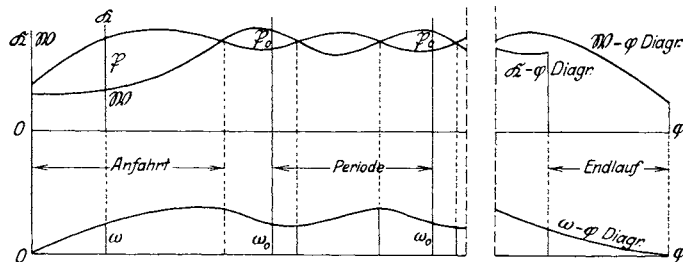


Fig. 645.

Dieser sich periodisch wiederholende Gleichgewichtszustand heißt Beharrungszustand (Fig. 645); er zerfällt in eine Folge von Perioden, an deren Ende der Bewegungszustand der gleiche ist wie bei Beginn der Periode. Es ist also die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  und die Bewegungsenergie  $L_0$  zu Beginn und zu Ende der Periode die gleiche; es wiederholen sich aber auch die Kräfte und da während einer Periode keine Arbeit geleistet wird, da  $\omega$  seinen Anfangswert  $\omega_0$  wieder annimmt, so muß die Gesamtarbeit aller Kräfte während einer Periode verschwinden.

Es sei in der Figur  $\mathfrak{R}$  das Diagramm der bewegenden Kräfte,  $\mathfrak{W}$  das der Widerstände und  $\mathfrak{P} = \mathfrak{R} - \mathfrak{W}$  der Rest an treibender Kraft;

dann ist also ( $e =$  Abstand des Reduktionspunktes  $E$  vom Drehpunkte)

$$\int_0^{2n\pi} \mathfrak{P} e \cdot d\varphi = 0 \text{ oder } \int_0^{\mathfrak{T}} E \cdot dt = 0,$$

wenn der Körper während einer Periode  $n$  Umläufe macht und  $\mathfrak{T}$  die Dauer einer Periode ist.

Während des Endlaufes nimmt die Bewegungsenergie ab und wird endlich null. Die treibende Kraft wird zu Beginn abgestellt, und es bleiben nur die Widerstände übrig, die bis zum Eintritt der Ruhe durch den Rest an Bewegungsenergie überwunden werden. Aus der Figur ist auch der beiläufige Verlauf der Winkelgeschwindigkeit zu entnehmen.

Der Beharrungszustand ist der wichtigste Teil des Ganges einer Maschine. Man kann sein Diagramm entweder auf den Weg des Reduktionspunktes  $E$  oder auf den Drehungswinkel  $\varphi$  des Körpers oder endlich auf die Zeit beziehen.

**360. Die Periode des Beharrungszustandes, bezogen auf die Zeit.** Setzen wir voraus, daß die Leistungen der Kräfte, und zwar  $E_K$  der Triebkräfte und  $E_W$  der Widerstände in ihrer Abhängigkeit von der Zeit  $t$  gegeben sind (Fig. 646).

Der Widerstand, der von Reibungen aller Art sowie von der zu überwindenden Belastung der Maschine herrührt, wird gewöhnlich als unveränderlich angenommen.

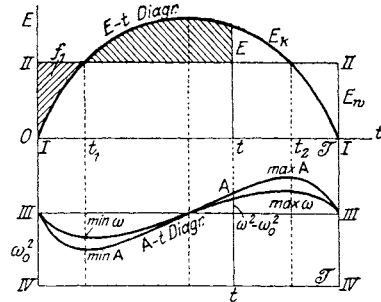


Fig. 646.

Die übrigbleibende Leistung ist

$$E = E_K - E_W;$$

verschiebt man die Zeit-Achse von  $II$  nach  $III$ , so ist das  $E$ - $t$ -Diagramm mit positiven und negativen Ordinaten anschaulich geworden.

Die bis zur Zeit  $t$  geleistete Arbeit ist

$$A = \int_0^t E \cdot dt = \int_0^t (E_K - E_W) dt;$$

für die Dauer  $\mathfrak{T}$  einer Periode ist

$$\int_0^{\mathfrak{T}} E \cdot dt = 0.$$

Nennt man  $T$  das Trägheitsmoment des rotierenden Körpers für seine Drehungs-Achse,  $\omega_0$  und  $\omega$  seine Winkelgeschwindigkeit zu Beginn der Periode und zur Zeit  $t$ , so ist nach dem Arbeitsprinzip, Gleichung 182:  $L - L_0 = A$  oder

$$\frac{1}{2} T (\omega^2 - \omega_0^2) = A = \int_0^t E \cdot dt = f \dots \dots \dots 208)$$

wenn  $f$  die Fläche zwischen dem  $E$ - $t$ -Diagramm und der Geraden  $II III$  bedeutet.

Die Integralkurve des  $E$ - $t$ -Diagramms ist das auf die Achse  $III III$  bezogene  $\mathbf{A}$ - $t$ -Diagramm. Da

$$\omega^2 - \omega_0^2 = \frac{2\mathbf{A}}{\mathbf{T}}$$

ist, so sind die Ordinaten des  $A$ - $t$ -Diagramms, im Verhältnis  $\frac{\mathbf{T}}{2}$  verkleinert, die Differenzen  $\omega^2 - \omega_0^2$ .

Würde man  $\omega_0^2$  kennen, so könnte man die Achse  $IV IV$  zeichnen und hätte damit, auf diese Achse bezogen, ein  $\omega^2$ - $t$ -Diagramm.

Für die Zeiten  $t_1$  und  $t_2$  schneiden sich die Diagramme von  $E_K$  und  $E_W$ ; an diesen Stellen ist also  $E = \frac{d\mathbf{A}}{dt} = 0$  und das  $\mathbf{A}$ - $t$ -Diagramm erreicht die extremen Ordinaten  $\min \mathbf{A}$  und  $\max \mathbf{A}$ ; gleichzeitig erreicht auch die Winkelgeschwindigkeit ihre extremen Werte  $\min \omega$  und  $\max \omega$ .

In den meisten Anwendungen wird man nun folgenden Annäherungsweg einschlagen: Schreibt man Gleichung 208 in der Form:

$$\frac{1}{2} \mathbf{T} (\min \omega^2 - \omega_0^2) = \int_0^{t_1} E \cdot dt = f_1$$

und 
$$\frac{1}{2} \mathbf{T} (\max \omega^2 - \omega_0^2) = \int_0^{t_2} E \cdot dt = f_2,$$

worin  $f_1$  und  $f_2$  die Werte der Fläche  $f$  zwischen der Achse  $OE$  und  $t_1$  bzw.  $t_2$  bezeichnen, so wird

$$\frac{1}{2} \mathbf{T} (\max \omega^2 - \min \omega^2) = \int_{t_1}^{t_2} E \cdot dt = f_2 - f_1 = f_{12}.$$

Hierin bedeutet  $f_{12}$  die Fläche des  $E$ - $t$ -Diagramms zwischen  $t_1$  und  $t_2$ .

Benützt man nun die beiden gebräuchlichen Gleichungen 199 und 200 für die mittlere Geschwindigkeit und den Ungleichförmigkeitsgrad:

$$\omega_m = \frac{\max \omega + \min \omega}{2}, \mu = \frac{\max \omega - \min \omega}{\omega_m},$$

so erhält man

$$\mu \omega_m^2 = \frac{1}{2} (\max \omega^2 - \min \omega^2),$$

und somit  
oder

$$\mu \mathbf{T} \omega_m^2 = f_{12}$$

$$\omega_m = \sqrt{\frac{f_{12}}{\mu \mathbf{T}}} \dots \dots \dots 209)$$

Ferner folgt aus Gleichung 208:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{2\mathbf{A}}{\mathbf{T}} :$$

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{\mathbf{A}}{L_0}},$$

wenn  $L_0 = \frac{1}{2} \mathbf{T} \omega_0^2$  die Bewegungsenergie zu Beginn der Periode ist, und angenähert

$$\omega = \omega_0 \left( 1 + \frac{\mathbf{A}}{2L_0} \right).$$

Nennt man  $\mathbf{A}_1$  und  $\mathbf{A}_2$  die Arbeitswerte bis zu den Zeiten  $t_1$  und  $t_2$ , so wird auch

$$\min \omega = \omega_0 \left( 1 + \frac{\mathbf{A}_1}{2L_0} \right),$$

$$\max \omega = \omega_0 \left( 1 + \frac{\mathbf{A}_2}{2L_0} \right)$$

und 
$$\frac{\max \omega + \min \omega}{2} = \omega_0 \left( 1 + \frac{1}{4} \frac{\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_1}{L_0} \right)$$

oder 
$$\omega_m = \omega_0 + \frac{\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2}{2 \mathbf{T} \omega_0},$$

woraus in Verbindung mit Gleichung 209 der Wert von  $\omega_0$  ermittelt werden kann.

Will man sich mit diesem angenäherten Verfahren nicht begnügen, so kann man folgenden Weg einschlagen:

Es seien wie vorher die Leistungs-Diagramme  $E_K-t$  und  $E_W-t$  gegeben und daraus die Integralkurve  $\mathbf{A}-t$  abgeleitet worden; sie ist auch das Diagramm der Differenzen  $L - L_0$  (Fig. 647). Die mittlere Geschwindigkeit sei nach Gleichung 202 gewählt:

$$\omega_m' = \frac{2 n \pi}{\mathfrak{T}}.$$

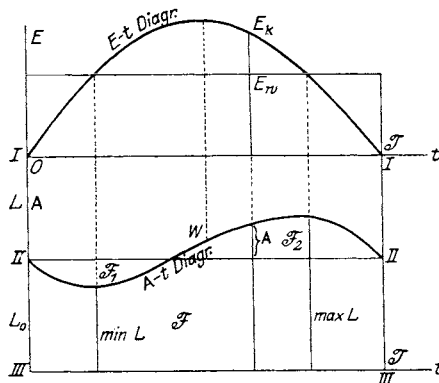


Fig. 647.

Um  $L_0$  und damit die Achse  $III III$  zu finden, nennen wir  $F$  die Fläche zwischen dem  $\mathbf{A}-t$ -Diagramm und der Achse  $III III$  für die Zeit  $\mathfrak{T}$  einer Periode; nach Gleichung 182:

$$L = L_0 + \mathbf{A}$$

ist dann 
$$\mathfrak{F} = \int_0^{\mathfrak{T}} L \cdot dt = \mathbf{T} \int_0^{\mathfrak{T}} \omega^2 \cdot dt.$$

Bezeichnet man ferner mit  $F_1$  und  $F_2$  die negative und die positive Überschußfläche des  $\mathbf{A}-t$ -Diagramms unter und über der Achse  $III III$ ,

so ist  $\mathfrak{F} = L_0 \mathfrak{Z} - \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 = \frac{1}{2} \mathbf{T} \omega_0^2 \mathfrak{Z} - \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2$

und mit Benützung von Gleichung 202 und 204:

$$\mu' + 1 = \frac{1}{\mathfrak{Z} \omega_m'^2} \int_0^{\mathfrak{Z}} \omega^2 \cdot dt,$$

ferner:  $\omega_0^2 = (\mu' + 1) \omega_m'^2 - \frac{2}{\mathfrak{Z} \mathbf{T}} (\mathfrak{F}_2 - \mathfrak{F}_1),$

woraus die anfängliche Winkelgeschwindigkeit  $\omega_0$  und ebenso die anfängliche Bewegungsenergie

$$L_0 = (\mu' + 1) \frac{\mathbf{T} \omega_m'^2}{2} - \frac{\mathfrak{F}_2 - \mathfrak{F}_1}{\mathfrak{Z}}$$

bestimmt sind und die Achse *III III* gefunden ist.

Besitzt das *E-t*-Diagramm eine zur Achse *OE* parallele Symmetrale, so verläuft das *A-t*-Diagramm derart, daß  $\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 = 0$  ist und es wird

$$\omega_0^2 = \omega_m'^2 (\mu' + 1).$$

Für den Ungleichförmigkeitsgrad  $\mu'$  dürfen jedoch nicht die gebräuchlichen Werte von  $\mu = \frac{\max \omega - \min \omega}{\omega_m}$  benützt werden; es müßten erst neue Erfahrungszahlen ermittelt werden, da  $\mu$  und  $\mu'$  in gar keiner Beziehung stehen. (Vgl. die Beispiele in 333, Schluß.)

Um den Drehungswinkel  $\varphi$  des sich drehenden Körpers in seiner Abhängigkeit von der Zeit zu finden, gehe man von der Gleichung 195:

$$\varphi = \int_0^t \omega \cdot dt$$

aus. Es ist nach Gleichung 208:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{2 \mathbf{A}}{\mathbf{T}} = \omega_0^2 \cdot \frac{L}{L_0}.$$

Setzt man

$$\frac{L}{L_0} = 1 + \frac{\mathbf{A}}{L_0} = z^2 \quad (210)$$

so wird  $\omega = z \omega_0$  und

$$\varphi = \omega_0 \int_0^t z \cdot dt.$$

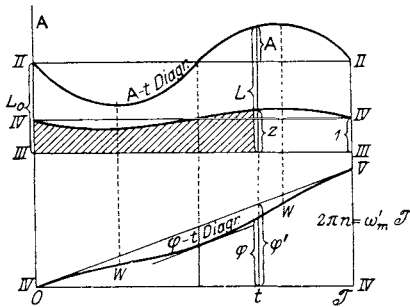


Fig. 648.

Bildet man ein *z-t*-Diagramm mit Hilfe der Verhältnisse  $\frac{L}{L_0}$  (Fig. 648)

und zeichnet dessen Integralkurve, so erhält man das  $\varphi$ -*t*-Diagramm.

Trägt man von der Achse *IV IV* das Stück *IV V* =  $2\pi n = \omega_m' \mathfrak{Z}$  nach aufwärts auf und verbindet *O* mit *V*, so erhält man das Diagramm der Winkel  $\varphi'$  bei gleichförmiger Drehung. Die Differenzen  $\varphi' - \varphi$  sind die Winkelabweichungen oder die Pendelwege des sich drehenden Körpers. Ihre größten Werte findet man, wenn man an das  $\varphi$ -*t*-Diagramm die zu *OV* parallelen Tangenten zieht.

Sind die Verhältnisse  $\frac{\mathbf{A}}{L_0}$  klein, das  $z$ - $t$ -Diagramm also wenig abweichend von der Geraden  $IVIV$ , so kann der genaue Wert

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{\mathbf{A}}{L_0}}$$

ersetzt werden durch  $\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{\mathbf{A}}{2L_0}\right)$  und der Drehungswinkel durch

$$\varphi = \int_0^t \omega \cdot dt = \omega_0 t + \frac{\omega_0}{2} \frac{\mathbf{A}}{L_0} \int_0^t dt.$$

Nimmt man

$$F = \int_0^t \mathbf{A} \cdot dt, \quad F_1 = \int_0^{\mathfrak{T}} \mathbf{A} \cdot dt$$

die Flächen des  $\mathbf{A}$ - $t$ -Diagramms bis zu den Zeiten  $t$  und  $\mathfrak{T}$ , so wird

$$\varphi = \omega_0 \left( t + \frac{F}{2L_0} \right)$$

und für eine Periode

$$2n\pi = \omega_0 \left( \mathfrak{T} + \frac{F_1}{2L_0} \right) = T\omega_m',$$

woraus

$$\omega_0 = \frac{\omega_m'}{1 + \frac{F_1}{2L_0\mathfrak{T}}} \quad \text{und} \quad \varphi = \omega_m' t \frac{1 + \frac{F}{2L_0t}}{1 + \frac{F_1}{2L_0\mathfrak{T}}}$$

Setzt man  $\frac{F}{2L_0t} = x$ ,  $\frac{F_1}{2L_0\mathfrak{T}} = x_1$ , so ist

$$\varphi = \omega_m' t \frac{1+x}{1+x_1} = \varphi' \frac{1+x}{1+x_1}$$

und da nach unserer Voraussetzung  $x$  und  $x_1$  kleine Größen sind:

$$\varphi = \varphi' (1 + x - x_1).$$

Dann ist die Winkelabweichung zur Zeit  $t$

$$\varphi' - \varphi = \frac{\varphi'}{2L_0} \left( -\frac{F}{t} + \frac{F_1}{\mathfrak{T}} \right).$$

Verwandelt man die Flächen  $F$  und  $F_1$  in die Rechtecke  $F = yt$  und  $F_1 = y_1\mathfrak{T}$  (Fig. 648a), so wird die Winkelabweichung

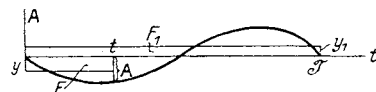


Fig. 648 a.

$$\varphi' - \varphi = \varphi' \frac{y_1 - y}{2L_0}$$

Sind jedoch nicht die Leistungsdiagramme, sondern die Kraftdiagramme gegeben so hätte man in folgender Weise vorzugehen:

In Fig. 649 ist das  $\mathfrak{K}$ - $t$ -Diagramm der treibenden Kraft und das  $\mathfrak{B}$ - $t$ -Diagramm des Widerstandes gegeben. Aus  $\mathfrak{P} = \mathfrak{K} - \mathfrak{B}$  ergibt sich zunächst das  $\mathfrak{P}$ - $t$ -Diagramm, bezogen auf die Achse  $IIII$  und wegen

$$t_E = e \lambda = \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{M}} \quad (\text{Gleichung 206})$$

auch das  $\lambda$ - $t$ -Diagramm. Für die Dauer  $\mathfrak{T}$  einer Periode ist

$$\int_0^{\mathfrak{T}} \mathfrak{P} \cdot dt = 0 \quad \text{und auch} \quad \int_0^{\mathfrak{T}} \lambda \cdot dt = 0 \quad (\text{Gleichung 194}).$$

Aus  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$  folgt mit Benützung von Gleichung 205:

$$\omega - \omega_0 = \int_0^t \lambda \cdot dt = \frac{1}{\mathfrak{I}_0} \int_0^t \mathfrak{M} \cdot dt = \mathfrak{F}.$$

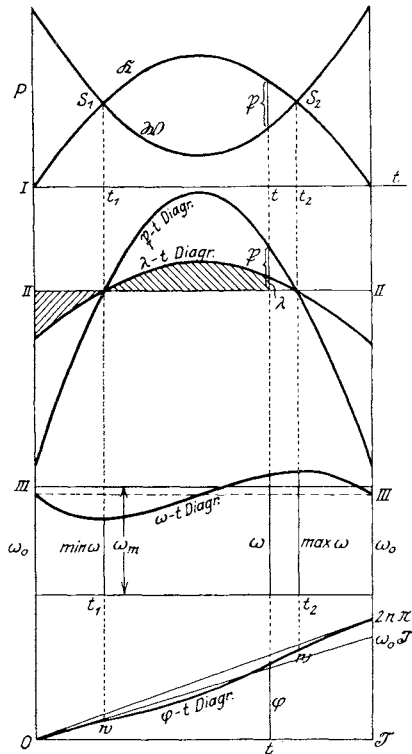


Fig. 649.

wenn  $\mathfrak{F}$  die Fläche zwischen dem  $\lambda$ - $t$ -Diagramm und der Achse  $IIII$  ist; das  $\omega$ - $t$ -Diagramm ist die Integralkurve des  $\lambda$ - $t$ -Diagramms.

Setzt man

$$\begin{aligned} \min \omega - \omega_0 &= \mathfrak{F}_1, \\ \max \omega - \omega_0 &= \mathfrak{F}_2, \end{aligned}$$

so wird

$\max \omega + \min \omega = 2\omega_0 + \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2$   
 und  $\max \omega - \min \omega = \mathfrak{F}_2 - \mathfrak{F}_1$ ,  
 worin  $\mathfrak{F}_2 - \mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_{12}$  die Fläche des  $\lambda$ - $t$ -Diagramms zwischen den Zeiten  $t_1$  und  $t_2$  ist, in denen  $\mathfrak{P} = 0$  wird. Mit Benützung der Annäherungsgleichungen 199 und 200 erhält man dann für die mittlere Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_m = \omega_0 + \frac{\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2}{2}$$

und für den Ungleichförmigkeitsgrad

$$\mu = \frac{\mathfrak{F}_2 - \mathfrak{F}_1}{\omega_m},$$

woraus sich die anfängliche Winkelgeschwindigkeit ergibt:

$$\omega_0 = \frac{\mathfrak{F}_{12}}{\mu} - \frac{\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2}{2}.$$

Aus der Gleichung  $\omega = \omega_0 + \mathfrak{F}$  folgt endlich für den Drehungswinkel:

$$\varphi = \int_0^t \omega \cdot dt = \omega_0 t + \int_0^t \mathfrak{F} \cdot dt = \omega_0 t + \Phi.$$

Man hat also die Integralkurve des  $\omega$ - $t$ -Diagramms zu bilden, dessen Fläche bis zur Zeit  $t$  die Größe  $\Phi$  habe. Der Drehungswinkel  $\varphi_1 = 2n\pi$  nach Ablauf einer Periode wird nicht mit  $\omega_0 \mathfrak{T}$  zusammenfallen.

**361. Die Periode des Beharungszustandes, bezogen auf den Weg.** Statt wie früher vom  $P$ - $t$ -Diagramm, wird hier vom  $P$ - $s$ -Diagramm ausgegangen; oder, da der Weg des Reduktionspunktes  $s = e\varphi$  ein Kreisbogen ist, vom  $P$ - $\varphi$ -Diagramm, mit  $\varphi$  als Drehungswinkel.

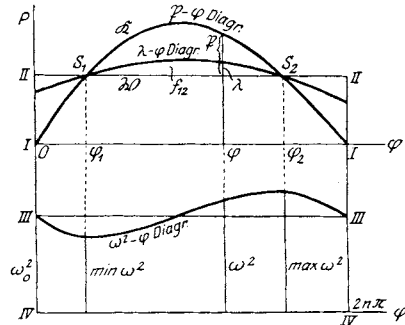


Fig. 650.

Ist wieder  $\mathfrak{R}$  die im Reduktionspunkt  $E$  bewegende Kraft,  $\mathfrak{W}$  der konstant angenommene Widerstand (Fig. 650), so ist  $\mathfrak{P} = \mathfrak{R} - \mathfrak{W}$ ; das  $\mathfrak{P}$ - $\varphi$ -Diagramm ist auf die Achse  $III III$  zu beziehen. Aus Gleichung 206:

$$\lambda = \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{M}e}$$

folgt, daß das  $\lambda$ - $\varphi$ -Diagramm aus dem  $\mathfrak{P}$ - $\varphi$ -Diagramm durch proportionale Veränderung der Ordinaten zu entnehmen ist. Für eine Periode ist wieder

$$\int_0^{2n\pi} \mathfrak{P} \cdot d\varphi = 0 \text{ und auch } \int_0^{2n\pi} \lambda \cdot d\varphi = 0 \text{ (Gleichung 198).}$$

Aus Gleichung 193:  $\omega \cdot d\omega = \lambda \cdot d\varphi$  folgt

$$\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2} = \int_0^{\varphi} \lambda \cdot d\varphi = \mathfrak{f}$$

und eine Integralkurve mit den Ordinaten  $\omega^2 - \omega_0^2$ , bezogen auf die Achse  $III III$ .

Würde man  $\omega_0^2$  kennen, so wäre damit auch das  $\omega^2$ - $\varphi$ -Diagramm, bezogen auf die Achse  $IV IV$  bekannt. Ähnlich wie in 360 ist nun

$$\frac{1}{2} (\min \omega^2 - \omega_0^2) = \int_0^{\varphi_1} \lambda \cdot d\varphi = \mathfrak{f}_1,$$

$$\frac{1}{2} (\max \omega^2 - \omega_0^2) = \int_0^{\varphi_2} \lambda \cdot d\varphi = \mathfrak{f}_2,$$

worin  $\mathfrak{f}_1$  und  $\mathfrak{f}_2$  die Werte der Fläche  $\mathfrak{f}$  zwischen der Achse  $OP$  und den Abszissen  $\varphi_1$  bzw.  $\varphi_2$  bedeuten. Dann ist



$$\frac{1}{2} (\max \omega^2 - \min \omega^2) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \lambda \cdot d\varphi = \bar{f}_2 - \bar{f}_1 = \bar{f}_{12}.$$

worin  $\bar{f}_{12}$  die Fläche des  $\lambda$ - $\varphi$ -Diagramms zwischen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  ist. Nach den Gleichungen 199 und 200 erhält man wieder  $\mu\omega_m^2 = \bar{f}_{12}$  und analog zu Gleichung 209:

$$\omega_m = \sqrt{\frac{\bar{f}_{12}}{\mu}},$$

ferner, ähnlich wie in 360, angenähert

$$\min \omega = \omega_0 \left( 1 + \frac{\bar{f}_1}{\omega_0^2} \right),$$

$$\max \omega = \omega_0 \left( 1 + \frac{\bar{f}_2}{\omega_0^2} \right)$$

und 
$$\omega_m = \omega_0 + \frac{\bar{f}_1 + \bar{f}_2}{2\omega_0},$$

woraus  $\omega_0$  gerechnet werden kann.

Die gegebenen Diagramme, seien es nun  $E$ - $t$ -,  $P$ - $t$ - oder  $P$ - $\varphi$ -Diagramme, werden es in den seltensten Fällen möglich machen, die gesuchten Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_m$  und  $\omega_0$ , sowie die Winkelabweichungen durch reine Rechnung zu finden. In der Regel wird man auf die graphische

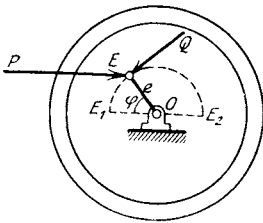


Fig. 651.

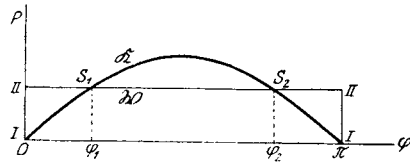


Fig. 651 a.

Ermittlung der oben erwähnten Integralkurven angewiesen sein, die das Planimetrieren von Flächen verlangt. Nur in ganz besonders einfachen Fällen kann die Rechnung an die Stelle der Konstruktion treten, wie in folgendem

**362. Beispiel.** Ein Schwungrad (Fig. 651) werde von einer Kurbel  $\overline{OE} = e$  angetrieben; die Triebkraft  $P$  sei konstant nach Größe und Richtung, der Widerstand  $Q$  ebenfalls konstant, aber senkrecht zur Kurbel. Wählt man den Kurbelzapfen  $E$  als Reduktionspunkt, so ist die reduzierte Kraft

$$\mathfrak{R} = P \sin \varphi$$

und  $\mathfrak{B} = \mathfrak{R} - \mathfrak{B} = P \sin \varphi - Q$ . Rollt man den zurückgelegten Bogen  $E_1 E E_2$  auf der Geraden  $II$  ab, so ist das  $\mathfrak{R}$ - $\varphi$ -Diagramm eine Sinus-

Linie (Fig. 651a), das  $\mathfrak{B}$ - $\varphi$ -Diagramm dieselbe Kurve, auf die Achse *II III* bezogen. Die Periode würde die Dauer einer halben Umdrehung haben; dann ist  $n = \frac{1}{2}$  und  $\int_0^{\pi} \lambda \cdot d\varphi = 0$ .

Die Winkelbeschleunigung ist

$$\lambda = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{M}e} = \frac{\mathfrak{B}e}{\mathbf{T}} = \frac{e}{\mathbf{T}} (P \sin \varphi - Q),$$

wenn  $\mathbf{T}$  das Trägheitsmoment der ganzen rotierenden Masse des Schwungrads, der Kurbel und der Welle ist. Damit ist die Gleichung des  $\lambda$ - $\varphi$ -Diagramms gegeben; durch Integration der Gleichung 193:  $\omega \cdot d\omega = \lambda \cdot d\varphi$  findet man

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{2e}{\mathbf{T}} [P(1 - \cos \varphi) - Q\varphi]$$

als Gleichung des  $\omega^2$ - $\varphi$ -Diagramms, aus dem sodann alles übrige:  $\min \omega$ ,  $\max \omega$ ,  $\omega_m$  und  $\omega_0$  durch reine Rechnung abgeleitet werden kann.

**363. Literatur.**

J. Radinger, Dampfmaschinen mit hoher Kolbengeschwindigkeit. III. Aufl. 1892.

F. Grashof, Theoretische Maschinenlehre, 2. Band.

K. Heun, Die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik, S. 34.

E. Rosenberg, Über den Parallelbetrieb von Wechselstrom-Maschinen, insbesondere bei Antrieb durch Gasmotoren. Elektrotechnische Zeitschrift 1902, S. 425.

F. Klönne, Ungleichförmigkeitsgrad und Winkelabweichung bei Kurbelkraftmaschinen. Elektrotechnische Zeitschr. 1902, S. 287.

**364. Die Anfahrt.** Das Diagramm aus Kraftmoment und Umdrehungszahl. Bei rotierenden Wellen, auf welche Triebkräfte und Widerstände wirken und die infolgedessen eine veränderliche Umdrehungszahl besitzen, empfiehlt es sich, ein Diagramm zu entwerfen,

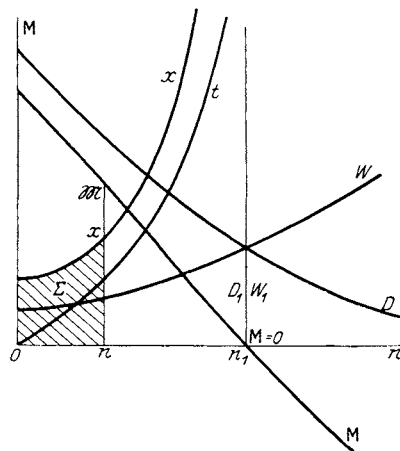


Fig. 652.

in welchem auf der einen Achse die Umdrehungszahl  $n$  in der Sekunde, auf der anderen Achse das wirksame Moment der Kräfte aufgetragen wird. Dies wird insbesondere von Vorteil sein, wenn es sich um die Ermittlung der Bewegungsverhältnisse während des Anlassens des Motors handelt. (Vgl. F. Blanc, Über Anlauf- und Auslaufverhältnisse von

motorisch angetriebenen Massen unter Anwendung eines neuen graphischen Auswertungsverfahrens. Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1919, S. 289.)

Gegeben sei das Drehmoment  $D$  der Triebkräfte um die Maschinenwelle in seiner Abhängigkeit von der Umdrehungszahl  $n$  (das  $D$ - $n$ -Diagramm, Fig. 652), ebenso das Moment  $W$  der Widerstände (das  $W$ - $n$ -Diagramm); dann ist das wirksame Moment  $\mathbf{M} = D - W$ , dessen Diagramm durch Bilden der Ordinatendifferenz von  $D$  und  $W$  punktweise ermittelt werden kann.

Für  $D_1 = W_1$  ist  $\mathbf{M} = 0$ , die Welle ist im Gleichgewichte; die zugehörige Umdrehungszahl sei  $n_1$ .

Nennt man  $\mathbf{T}$  das Trägheitsmoment der konstant angenommenen Masse, die sich um die Maschinenwelle dreht, bezogen auf diese, so ist deren Winkelbeschleunigung

$$\lambda = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{T}}$$

und mit  $\omega = 2n\pi$ :  $\lambda = \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{T}} = 2\pi \frac{dn}{dt}$ ; nennt man noch

$$2\pi \mathbf{T} = \Theta$$

das Schwungmoment, so wird  $\frac{dn}{dt} = \frac{\mathbf{M}}{\Theta}$ . Die zu einer bestimmten Umdrehungszahl  $n$  gehörende Zeit  $t$  ist dann:

$$t = \int \frac{dt}{dn} \cdot dn = \Theta \int \frac{dn}{\mathbf{M}}$$

Um  $t$  zu konstruieren, geht man nun wie in 329 a), erste Art, vor. Man setzt

$$\mathfrak{M}x = a^2,$$

worin  $\mathfrak{M}$  die Momentenstrecke,  $a$  eine konstante und  $x$  eine veränderliche Strecke bedeutet; sodann wird das  $x$ - $n$ -Diagramm gezeichnet

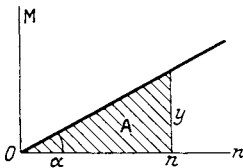


Fig. 653.

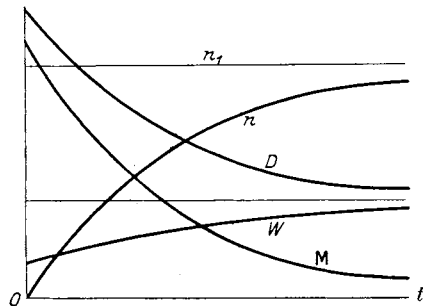


Fig. 654.

(Fig. 652). Es hat für  $n = n_1$ ,  $\mathfrak{M} = 0$  eine zur  $OM$ -Achse parallele Asymptote. Nennt man  $\Sigma = \int x \cdot dn$  die schraffierte Fläche dieses Diagramms, so ist

$$t = \frac{\Theta}{a^2} \int x \cdot dn = \frac{\Theta}{a^2} \cdot \Sigma.$$

Die so gefundenen Werte von  $t$  werden in ein eigenes  $t$ - $n$ -Diagramm eingetragen, das die gleiche Asymptote besitzt.

Die Leistung des Drehmomentes ist

$$E = Pv = Pr\omega = 2n\pi \mathbf{M},$$

wenn  $P$  die drehende Kraft und  $r$  ihr Arm ist; hieraus wird nach Gleichung 186 die Elementararbeit

$$d\mathbf{A} = E \cdot dt = 2n\pi \mathbf{M} \cdot dt$$

und mit  $\frac{dn}{dt} = \frac{\mathbf{M}}{\Theta}$ :  $d\mathbf{A} = 2\pi\Theta n \cdot dn$

oder  $\mathbf{A} = \pi\Theta n^2.$

Zeichnet man in Fig. 653 durch  $O$  eine Gerade, für deren Neigungswinkel  $\alpha$  die Gleichung  $\text{tg } \alpha = 2\pi\Theta$  gilt, so wird die Ordinate dieser Geraden

$$y = 2\pi\Theta n$$

und die schraffierte Fläche

$$\frac{1}{2} ny = \pi\Theta n^2$$

ein Maß für die Arbeit.

Die Leistung des Drehmomentes der Triebkräfte ist  $E_D = 2n\pi D$ , die Leistung der Widerstände (Nutzleistung):  $E_W = 2n\pi W$ .

Nachdem das  $t$ - $n$ -Diagramm gefunden ist, können die Kurven derart umgezeichnet werden, daß sie alle auf die Zeit-Achse bezogen erscheinen (Fig. 654).

Das  $n$ - $t$ -Diagramm nähert sich asymptotisch dem Endwerte  $n_1$  für Gleichgewicht. Das  $D$ - $t$ - und ebenso das  $W$ - $t$ -Diagramm nähert sich asymptotisch dem Gleichgewichtszustand  $D = W$ . Das  $\mathbf{M}$ - $t$ -Diagramm nähert sich asymptotisch der Zeit-Achse.

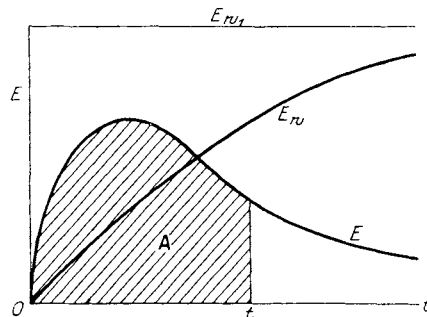


Fig. 655.

Die Nutzleistung  $E_W$  (Fig. 655) nähert sich asymptotisch dem Grenzwerte  $E_{W1} = 2n\pi W_1$ ; die Leistung  $E$  des wirksamen Momentes  $\mathbf{M}$  asymptotisch der Zeit-Achse.

Die Fläche zwischen dem  $E$ - $t$ -Diagramm und der Zeit-Achse ist nach Gleichung 187:

$$\mathbf{A} = \int E \cdot dt$$

ein Maß für die Arbeit.

## XXXVI. Bewegungsdiagramme des geführten Systems.

**365. Die Rollkurven.** Während bei der Bewegung des Punktes und auch bei der Translation und der Dauerdrehung eines Systems die kinematischen Beziehungen leicht in dynamische umgewandelt werden können, da die Masse keinen veränderlichen Einfluß auf die Bewegung nimmt, sind in der Bewegung des Systems und ebenso in der Bewegung des Getriebes die kinematischen und dynamischen Untersuchungen scharf auseinander zu halten und erfordern eine ganz verschiedenartige Behandlung.

Verhältnismäßig einfach ist die kinematische Darstellung der Systembewegung für eine bestimmte endliche Zeit, z. B. für eine Periode. Man hat hier nur die Methoden, die wir für die Konstruktion der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Systempunkte im ersten Teile dieses Buches kennen gelernt haben, für verschiedene Zeitintervalle wiederholt anzuwenden und die gefundenen Werte in ein Zeit- oder Wegdiagramm einzutragen. Dies soll im folgenden an einigen Beispielen gezeigt werden.

Man pflegt manchmal die endliche Bewegung eines Systems in seiner Ebene durch den geometrischen Ort der Drehpole im festen und im bewegten System, durch die sogenannten Polbahnen oder Rollkurven darzustellen. So elegant und lehrreich diese Darstellungsweise ist und so wichtige Resultate sie für die kinematische Untersuchung der Bewegung geliefert hat, spielt sie dennoch in der Dynamik gar keine Rolle. Es soll aus diesem Grunde auf eine Besprechung der Rollkurven nicht eingegangen werden, wie ja auch von der Konstruktion der Punktbahnen kein Gebrauch gemacht wurde. Alle diese Kurven erfordern umständliche Konstruktionen, sie erhalten oft und gerade für die gebräuchlichen Maschinengetriebe eine höchst komplizierte Gestalt mit unendlichen Ästen und Asymptoten und haben dabei für die dynamische Untersuchung, auf die es hier hauptsächlich ankommt, gar keine Bedeutung.

**366. Bewegungsdiagramme der Schubkurbel.** In Fig. 656 beschreibt der Endpunkt  $A$  der Stange  $AB = l$  um  $\mathcal{U}$  den Kreis  $a$ , während der andere Endpunkt  $B$  die Gerade  $b$  beschreibt. Es sollen für diesen Punkt (Kreuzkopf der Schubkurbel) das  $v$ - $s$ - und das  $b$ - $s$ -Diagramm für eine Umdrehung von  $A$  gezeichnet werden.

Der Kreis  $a$  wurde in 16 gleiche Teile geteilt und für alle Lagen des Punktes  $A$  die in den Fig. 115 und 118 mitgeteilten Konstruktionen

von  $v_B$  und  $b_B$  wiederholt. Dabei wurde angenommen, daß  $v_A$  konstant ist und durch den Kreishalbmesser  $A\mathcal{U}$  gemessen wird; dann ist auch  $b_A$  konstant und wird ebenfalls durch den Halbmesser gemessen (Normalfall). Um an die Konstruktionen zu erinnern, sei für die Stellung 2 des Punktes  $A$ :  $\mathcal{U}2 \parallel AB$  gezogen; dann ist  $B2$  die um  $90^\circ$  gedrehte Geschwindigkeit  $v_B$ ; in dieser Weise wurde das orthogonale  $v$ - $s$ -Diagramm punktweise gefunden; es ist eine ovale Linie, die in der Weg-Achse  $O_s$

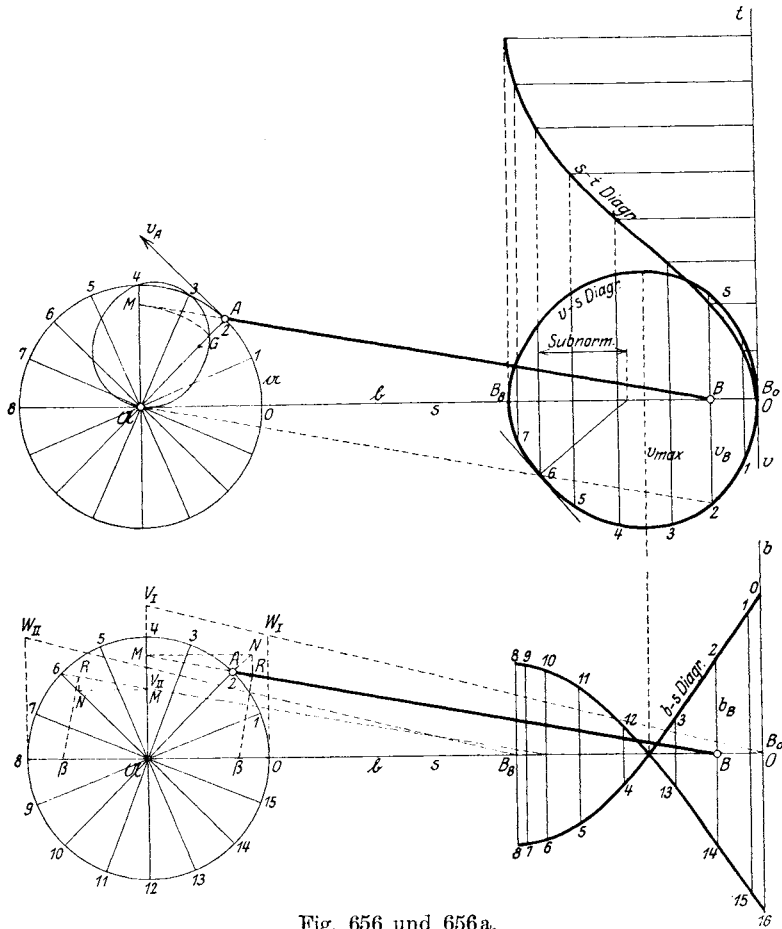


Fig. 656 und 656a.

eine Symmetrale besitzt. Für zwei Stellen von  $A$ , nämlich 0 und 8, wird  $v_B = 0$ ; diese Stellen  $B_0$  und  $B_8$  sind die Totlagen des Kreuzkopfes  $B$ ; in ihnen kehrt er seine Bewegung um. Die nach links gerichteten Geschwindigkeiten  $v_B$  wurden von  $O_s$  nach abwärts aufgetragen, die nach rechts gerichteten nach aufwärts.

Ist die Stange  $AB$  unendlich lang, so geht das ovale  $v$ - $s$ -Diagramm in einen Kreis über, der dem von  $A$  beschriebenen Kreise kongruent ist.

Verlängert man  $BA$  bis zum Schnitte  $M$  mit  $\mathfrak{A}4$ , so ist  $M\mathfrak{A}$  ebenfalls die gedrehte Geschwindigkeit  $v_B$  des Kreuzkopfes. Dreht man  $M\mathfrak{A}$  um  $\mathfrak{A}$  nach  $G\mathfrak{A}$ , so erhält man einen Punkt  $G$  des polaren Geschwindigkeitsdiagramms.

Um das orthogonale  $s$ - $t$ -Diagramm zu erhalten, zeichne man in  $O$  die Zeitachse  $Ot$  senkrecht zu  $Os$  und trage auf  $Ot$  beliebige gleiche Teile auf; wählt man diese z. B. gleich den Bogenlängen  $\widehat{01} = \widehat{12} = \widehat{23} = \dots$  auf dem Kreise  $\alpha$ , so bedeuten diese gleichen Strecken jetzt die Zeit, die bei  $\frac{1}{16}$  einer Umdrehung von  $A$  vergeht. Zieht man durch diese Teilungspunkte Parallele zu  $Os$  und projiziert auf sie die zugehörigen Stellungen des Kreuzkopfes, so erhält man das gewünschte  $s$ - $t$ -Diagramm, das für eine halbe Umdrehung gezeichnet wurde.

Die Konstruktion des  $b$ - $s$ -Diagramms zeigt Fig. 656a. Um für die Stellung 2 von  $A$  die Beschleunigung des Kreuzkopfes zu finden (vgl. Fig. 118), suche man zunächst  $M$  wie früher, ziehe  $MN \parallel \mathfrak{b}$  bis zum Schnitte  $N$  mit  $\mathfrak{A}A$ ,  $NR \perp \mathfrak{b}$  bis zum Schnitte  $R$  mit  $AB$ , endlich  $R\beta \perp AB$  bis zum Schnitte  $\beta$  mit  $\mathfrak{b}$ . Dann ist  $\beta\mathfrak{A}$  die Beschleunigung  $b_B$ . Trägt man sie in  $B$  senkrecht zur Bewegungsrichtung auf, so erhält man in 2 einen Punkt des orthogonalen  $b$ - $s$ -Diagramms. Die Konstruktion wurde für die Kurbelstellung 6 wiederholt. Fällt der Punkt  $\beta$  rechts von  $\mathfrak{A}$ , so ist die Beschleunigung positiv, sonst negativ. Die positiven Beschleunigungen wurden nach aufwärts, die negativen nach abwärts aufgetragen.

Die Stelle, an der das Diagramm die Achse  $Os$  schneidet, also  $b_B = 0$  wird, ist identisch mit der Stelle, an der  $v_B$  einen Größtwert erreicht (vgl. Fig. 577).

Für die zweite Hälfte der Umdrehung von  $A$ , d. h. für den Rücklauf des Kreuzkopfes  $B$ , erreichen die Beschleunigungen die gleichen Werte wie bei dem Hinlauf, nur mit entgegengesetztem Vorzeichen.

Für die Lagen 0 und 8 des Punktes  $B$  (Totlagen) liegen die Punkte  $\mathfrak{A}$ ,  $A$  und  $B$  in einer Geraden und die angegebene Konstruktion der Beschleunigung versagt. Man bedient sich dann der in Fig. 119 mitgeteilten Konstruktion. Man trägt  $\overline{OW_I}$  und  $8W_{II}$  gleich dem Kurbelhalbmesser  $r$  senkrecht zu  $\mathfrak{b}$  auf und verbindet  $B_0$  mit  $W_I$  und  $B_8$  mit  $W_{II}$ ; die Schnittpunkte  $V_I$  und  $V_{II}$  dieser Verbindungslinien mit  $\mathfrak{A}4$  geben dann die Beschleunigungen in den Totlagen, und zwar  $\mathfrak{A}V_I = b_0$  und  $\mathfrak{A}V_{II} = b_8$ .

Zieht man in irgend einem Punkte des  $v$ - $s$ -Diagramms, z. B. 6, an dieses die Normale und sucht deren Projektion auf die  $O$ - $s$ -Achse, so ist diese Subnormale gleich der Beschleunigung (vgl. Fig. 581).

Man kann das  $b$ - $s$ -Diagramm angenähert durch eine Parabel ersetzen. Darüber findet man nähere Angaben in J. Radinger, Dampfmaschinen mit hoher Kolbengeschwindigkeit, 3. Aufl., S. 24, und M. Tolle, Die Regelung der Kraftmaschinen, 2. Aufl., S. 34.

367. Konstruktion der Geschwindigkeit und Beschleunigung der Schubkurbel ohne Benützung der Schubstange. Die Konstruktion der Geschwindigkeit und der Beschleunigung des Kreuzkopfes der Schubkurbel wird unbequem bei großer Länge der Schubstange  $AB = l$ .

Man kann dann mit Vorteil die Konstruktionen benützen, die von L. Feigl in seiner Abhandlung: „Die Ermittlung der Bewegungsverhältnisse von Kurbelgetrieben“, Zeitschr. f. Math. u. Physik 1910, 58. Bd., angegeben wurden (Fig. 657).

Es sei  $A\mathcal{A} = r$  eine beliebige Stellung der Kurbel unter dem Winkel  $\varphi$ ,  $AB = l$  die Schubstange (Lenker) unter dem Winkel  $\psi$ ;  $\overline{BF} = v_B$  die um  $90^\circ$  gedrehte Geschwindigkeit des Kreuzkopfes nach der bisherigen Konstruktion. Für den Kurbelwinkel  $180^\circ - \varphi$  sei  $A'$  die Lage des Kurbelzapfens,  $B'$  die Lage des Kreuzkopfes und  $\overline{B'F'} = v_{B'}$  die um  $90^\circ$  gedrehte Geschwindigkeit.

Man mache  $\overline{O\mathcal{A}} = \frac{r^2}{l}$ , ziehe  $OD \parallel \mathcal{A}A$ ,  $DE \perp \mathcal{A}B$  bis zum Schnitte  $E$  mit dem Kurbelkreise und verbinde  $A$  mit  $E$ ; der Schnittpunkt  $B_1$  von  $AE$  mit  $\mathcal{A}B$  ist der um  $l$  nach links verschobene Kreuzkopf  $B$ . Denn die Dreiecke  $\mathcal{A}AB$  und  $O\mathcal{A}D$  sind ähnlich; beide enthalten den Winkel  $\varphi$  und es ist

$$\begin{aligned} O\mathcal{A} : \overline{\mathcal{A}D} &= \frac{r^2}{l} : r = r : l \\ &= \mathcal{A}A : \mathcal{A}B. \end{aligned}$$

Es ist also  $\sphericalangle ODA = \psi$  und auch  $\sphericalangle D\mathcal{A}A = \psi$  und somit  $\sphericalangle DEA = \frac{\psi}{2}$ ,  $\sphericalangle AB_1B = 90^\circ - \frac{\psi}{2}$ ; somit  $ABB_1$  ein gleichschenkliges Dreieck, d. h.  $\overline{BA} = \overline{BB_1}$ . Da jedoch  $\overline{B_{01}}$  die um  $l$  nach links verschobene

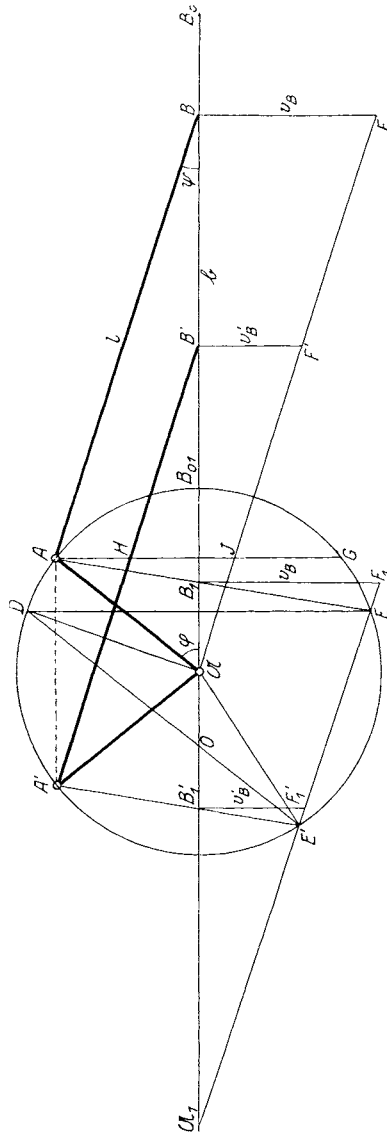


Fig. 657.



Totlage  $B_0$  des Kreuzkopfes ist, so bedeutet  $B_0B = B_{01}B_1 = s$  den Weg des Kreuzkopfes für den Kurbelwinkel  $\varphi$ . Man kann auf diese Weise den Weg des Kreuzkopfes zeichnen, ohne die Schubstange  $AB$  zeichnen zu müssen.

Verlängert man  $DO$  bis zum Schnitte  $E'$  mit dem Kurbelkreise und verbindet  $A'$  mit  $E'$ , so ist der Schnittpunkt  $B_1'$  der um  $l$  nach links verschobene Kreuzkopf  $B'$ , der zu  $A'$  gehört. Denn es ist

$$\sphericalangle A'AD = 180^\circ - 2\varphi - \psi, \sphericalangle A'E'D = 90^\circ - \varphi - \frac{\psi}{2}, \sphericalangle B_1'O E' = \varphi,$$

$\sphericalangle B_1'A'A = 90^\circ - \frac{\psi}{2} = \sphericalangle BB_1A$ , somit  $\overline{AB_1}$  gleich und parallel mit  $\overline{A'B_1'}$ ; dann ist auch  $A'B'B_1'$  ein gleichschenkliges Dreieck und  $\overline{B'A'} = \overline{B'B_1'}$ . Es ist also  $B_1'$  der um die Länge  $l$  nach links verschobene Kreuzkopf  $B'$ , und  $\overline{B_0B'} = B_{01}B_1' = s$  sein Weg.

Verbindet man nun die Punkte  $E$  und  $E'$ , dann schneidet diese Gerade die Führung  $\mathfrak{b}$  in  $\mathfrak{A}_1$ ; es ist dann  $\sphericalangle \mathfrak{A}_1 B_1 E = \sphericalangle BB_1 A = 90^\circ - \frac{\psi}{2}$ ; ferner wegen  $\sphericalangle DAA = \sphericalangle DEE' = \sphericalangle E'D = \psi : \sphericalangle DAE' = 180^\circ - 2\psi$  und  $\sphericalangle AA'E' = 180^\circ - \psi, \sphericalangle AEE' = 90^\circ - \frac{\psi}{2}$ , somit  $\sphericalangle \mathfrak{A}_1 E = \psi$  und  $\mathfrak{A}_1 E \parallel AB$ . Nun sind die Dreiecke  $\mathfrak{A}'E'\mathfrak{A}_1$  und  $\mathfrak{A}'A'B'$  kongruent;

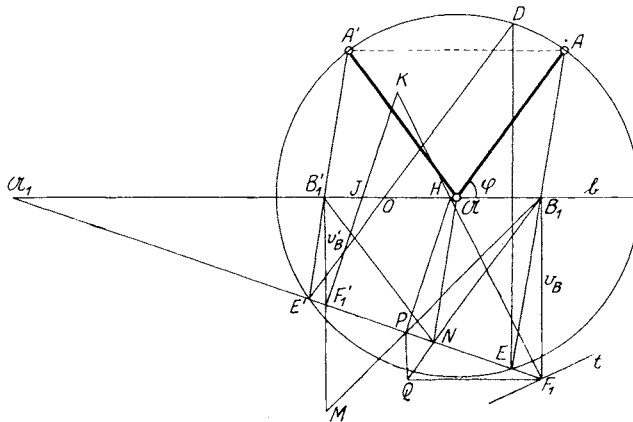


Fig. 658.

denn die Seiten  $\mathfrak{A}E'$  und  $\mathfrak{A}A'$  sind gleich, es ist ferner der Winkel  $\psi$  in beiden Dreiecken zu finden und der Winkel  $\varphi - \psi$  bei  $\mathfrak{A}$  sowohl wie bei  $A'$ . Dann ist aber  $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1 = \overline{A'B'} = l$ , d. h.  $\mathfrak{A}_1$  ist der um  $l$  nach links verschobene Mittelpunkt. Dann ist aber  $\mathfrak{A}_1E'E$  die um  $l$  nach links verschobene Gerade  $\mathfrak{A}F'F$ . Errichtet man somit in  $B_1$  und  $B_1'$  die zu  $\mathfrak{b}$  senkrechten Strecken  $\overline{B_1F_1}$  und  $\overline{B_1'F_1'}$  bis zur Geraden  $EE'$ , so sind diese beiden Senkrechten die gedrehten Geschwindigkeiten  $v_B$  und  $v_{B'}$

für die Lagen  $B$  und  $B'$  des Kreuzkopfes. Oder, zieht man  $\mathcal{A}J \parallel EE'$ , so ist auch  $AJ = v_B$  und  $JG = v_{B'}$ , weil  $JG = HJ = v_{B'}$  ist.

Auch die Beschleunigung des Kreuzkopfes kann man konstruieren, ohne die Schubstange zu zeichnen. In Fig. 658 wurden wieder die symmetrischen Punkte  $A$  und  $A'$  auf dem Kurbelkreise angenommen und die Punkte  $B_1, B_1'$  und  $F_1, F_1'$  wie früher konstruiert. Zieht man  $B_1N \parallel A\mathcal{A}$  bis zum Schnitte  $N$  mit  $EE_1$ , so ist  $B_1F_1N$  das gedrehte Geschwindigkeitsdreieck; es ist  $\overline{B_1F_1} = v_B$ ,  $\overline{B_1N} = v_A$ ,  $\overline{NF_1} = v_{BA}$  und  $\overline{B_1F_1} = \overline{B_1N} + \overline{NF_1}$  oder  $v_B = v_A + v_{BA}$ .

Zeichnet man nun  $F_1Q \parallel \mathfrak{b}$  bis zum Schnitte  $Q$  mit  $B_1N$ ,  $QP \perp \mathfrak{b}$  bis zum Schnitte  $P$  mit  $EE'$ , so ist

$$\overline{NP} : \overline{F_1N} = \overline{NQ} : \overline{B_1N} = \overline{F_1N} : \overline{N\mathcal{A}_1} \text{ oder } \overline{NP} = \frac{\overline{F_1N}^2}{\overline{N\mathcal{A}_1}}.$$

Nun ist aber  $\overline{F_1N} = v_{BA}$  und  $\overline{N\mathcal{A}_1} = l$ , weil das Dreieck  $N\mathcal{A}\mathcal{A}_1$  dem Dreiecke  $B_1AB$  in Fig. 657 kongruent ist; die beiden Dreiecke haben nämlich parallele Seiten und überdies ist  $\overline{N\mathcal{A}} = \overline{AB_1}$ . Es bleibt somit

$$\overline{NP} = \frac{v_{BA}^2}{l} = n_{BA}.$$

Fällt man in  $P$  die Gerade  $PH \perp EE'$  bis zum Schnitte  $H$  mit  $\mathfrak{b}$ , so ist

$$\overline{B_1H} = \overline{B_1N} + \overline{NP} + \overline{PH}$$

oder

$$b_B = b_A + n_{BA} + t_{BA},$$

denn  $b_A$  wird wie  $v_A$  durch die Länge  $r$  der Kurbel gemessen. Also ist  $\overline{B_1H} = b_B$ . In gleicher Weise ist für die zweite Lage  $B'$  des Kreuzkopfes:

$$\overline{B_1'H} = \overline{B_1'N} + \overline{N'P} + \overline{PH}$$

und

$$\overline{B_1'H} = b_{B'}.$$

(Vgl. damit die Konstruktion von  $b_B$  in Fig. 118.)

Die Gerade  $F_1H$  ist Normale des Geschwindigkeit-Zeit-Diagramms in  $F_1$  und somit die zu  $F_1H$  senkrechte Gerade  $t$  eine Tangente dieses Diagramms (vgl. Fig. 581).

Die Konstruktion kann auch so geführt werden, daß man

$$\overline{F_1'M} = \overline{B_1'F_1'} = v_{B'}$$

aufträgt und  $M$  mit  $B_1$  verbindet; diese Gerade schneidet  $EE'$  in  $P$ .

Oder man errichtet  $F_1'K \perp EE'$ , sucht den Schnittpunkt  $J$  dieser Senkrechten mit  $\mathfrak{b}$  und überträgt  $\overline{F_1'J} = \overline{JK}$ ; dann geht die Verbindungslinie  $KF_1$  durch den Punkt  $H$ , wodurch  $\overline{B_1H} = b_B$  und  $\overline{B_1'H} = b_{B'}$  bestimmt sind.

Auf andere Konstruktionen zu gleichem Zwecke soll nur verwiesen werden. Sie finden sich in:

R. Schorch, Kolben- und Schieberdiagramm, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1876, S. 403, mit der Verallgemeinerung von

L. Baudiß, Beiträge zur zeichnerischen Ausmittlung von Steuerungsgetrieben, Dinglers Polyt. Journal 1907, S. 417.

Ferner Chr. Müller, Über neuere Schieberdiagramme, Civilingenieur 1861, S. 347, und

A. Goldberger, Genaue Konstruktion der Schieberdiagramme, Dinglers Polyt. Journal 1905, S. 451.

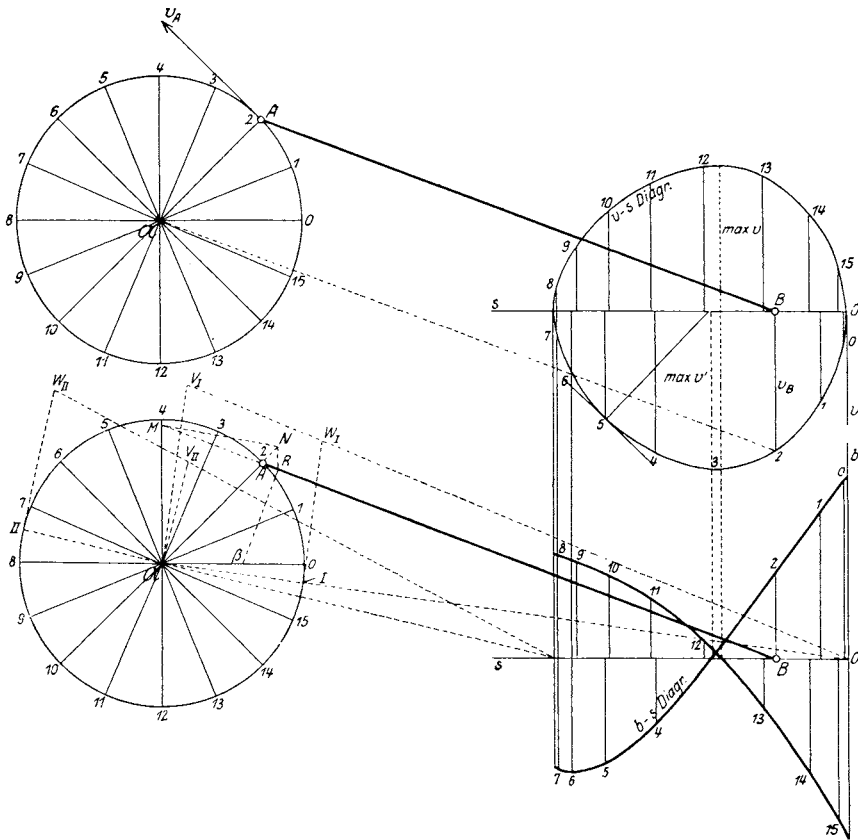


Fig. 659.

368. Bewegungsdiagramme des Kreuzkopfes der geschränkten Schubkurbel. Ein etwas allgemeinerer Fall ist die Bewegung des Kreuzkopfes  $B$  der geschränkten Schubkurbel (Fig. 659). Hier wurden die Diagramme  $v$ - $s$  und  $b$ - $s$  unter den gleichen Voraussetzungen gezeichnet wie in Fig. 656.

Es ist also die Kurbel  $A\mathcal{A}$  sowohl das Maß der konstanten Geschwindigkeit  $v_A$ , wie auch der konstanten Beschleunigung  $b_A$ .

Die Konstruktion des  $v$ - $s$ -Diagramms erfolgt in der gleichen Weise wie früher; es besitzt jedoch keine Symmetrale mehr. Die Totlagen des Kreuzkopfes  $B$  sind wieder jene, in denen die Punkte  $\mathcal{A}$ ,  $A$  und  $B$  in eine Gerade fallen; es sind nicht mehr die Punkte, die zu den Kurbelstellungen 0 und 8 gehören, sondern entsprechen den Punkten  $I$  und  $II$  des Kurbelkreises.

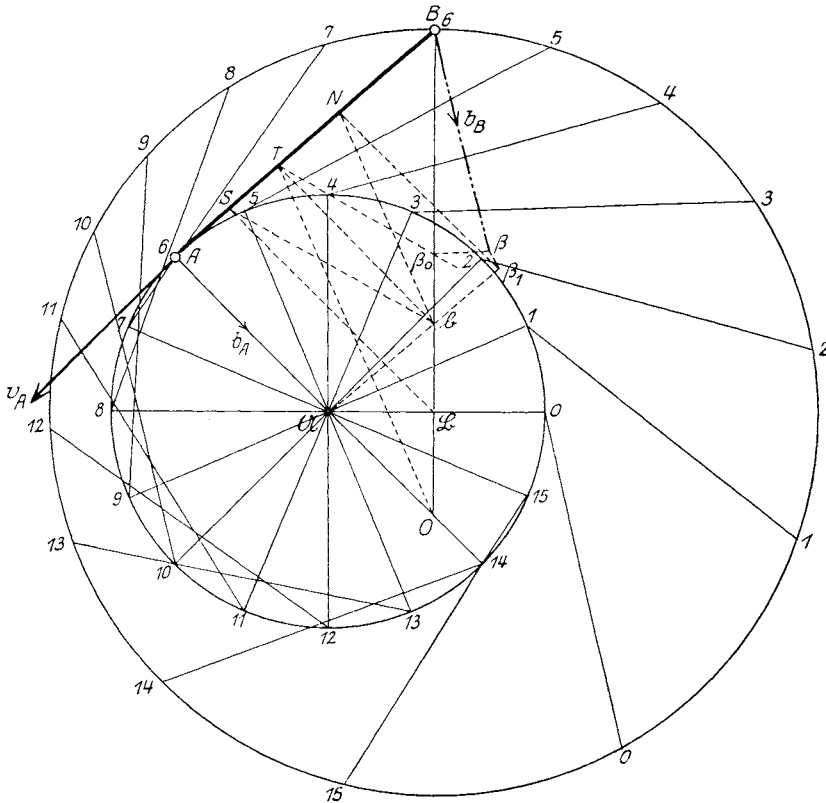


Fig. 660.

Die Konstruktion des  $b$ - $s$ -Diagramms erfolgt wie in Fig. 117.

Um z. B. für die Lage 2 die Beschleunigung zu finden, verlängere man  $AB$  bis zum Schnitte  $M$  mit  $\mathcal{A}4$ , ziehe  $MN \parallel \mathcal{A}B$  bis zum Schnitte  $N$  mit  $\mathcal{A}A$ ,  $NR \parallel \mathcal{A}4$  und  $R\beta \perp AB$  bis zum Schnitte  $\beta$  mit  $\mathcal{A}o$ ; dann ist  $\beta\mathcal{A}$  die gesuchte Beschleunigung  $b_B$ .

Für die Totlagen versagt diese Konstruktion. Um für diese die Beschleunigung zu konstruieren, errichte man in  $I$  die Senkrechte auf  $\mathcal{A}I$  und mache  $IW_I = r$ , verbinde  $W_I$  mit der entsprechenden Totlage  $O$

des Kreuzkopfes und bringe diese Verbindungslinie mit  $\mathfrak{A} V_I \parallel I W_I$  zum Schnitte. Dann ist  $\mathfrak{A} V_I$  die Beschleunigung von  $B$  in seiner äußeren Totlage. Ebenso findet man aus  $II W_{II} = r$  die Beschleunigung  $\mathfrak{A} V_{II}$  für die innere Totlage. Das  $b$ - $s$ -Diagramm für den Hingang ( $I$  über  $2$  nach  $II$ ) ist nicht symmetrisch zu jenem für den Rücklauf ( $II$  über  $10$  nach  $I$ ). Die beiden Diagramme schneiden die Achse  $Os$  an zwei verschiedenen Stellen. Im Punkte  $5$  des  $v$ - $s$ -Diagramms wurde an dieses die Normale gezogen; die Subnormale ist wieder die Beschleunigung.

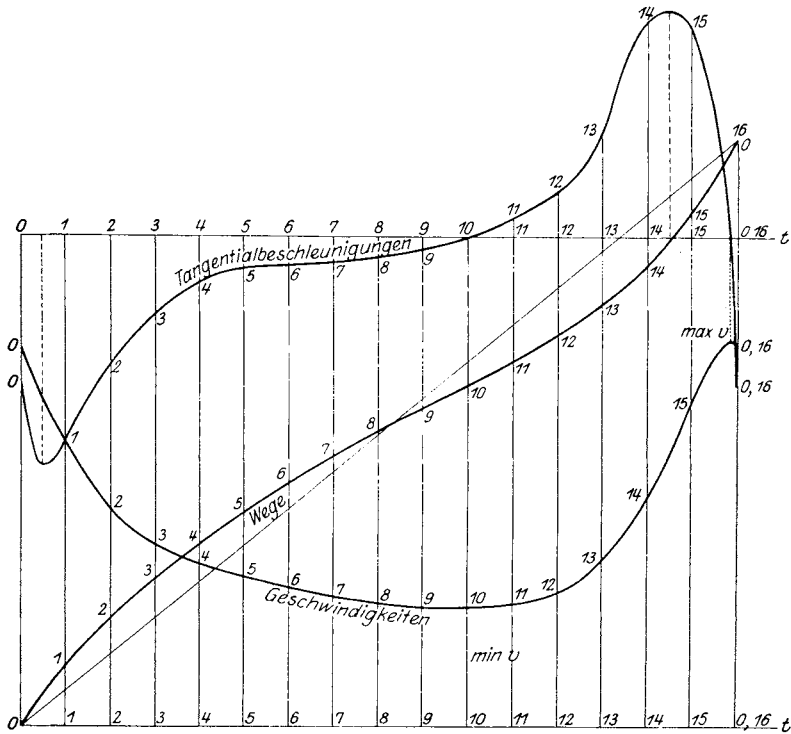


Fig. 660 a.

**369. Bewegungsdiagramme der Doppelkurbel.** In Fig. 660 werden die Endpunkte der Stange  $AB$  auf zwei Kreisen mit den Mittelpunkten  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  geführt (Führung der Doppelkurbel). Die Größenverhältnisse sind derart gewählt, daß sowohl  $A$  wie  $B$  volle Umläufe machen können. Über die Bedingungen hiefür sei verwiesen auf L. Burmester, Kinetik, S. 283, oder F. Grashof, Theoretische Maschinenlehre, II. Bd., S. 113.

Es soll ferner wieder der Normalfall vorausgesetzt werden, daß sich  $A$  gleichförmig bewege und sowohl  $v_A$  wie auch  $b_{A_1}$  durch die Länge

$A\mathfrak{A}$  gemessen werde. Dann kann die Bewegung von  $A$  als Zeitmesser benützt werden; auf den Achsen  $Ot$  der Bewegungs-Diagramme (Fig. 660a) wurden tatsächlich statt der Zeiten die Wege  $\widehat{01}$ ,  $\widehat{12}$ ,  $\widehat{23}$ , . . . . des Punktes  $A$  aufgetragen.

Für sechzehn Stellungen des Punktes  $A$  wurden die gleichbezeichneten Stellungen von  $B$  auf seinem Kreise festgestellt und die Wege von  $B$  über den Punkten 1, 2, 3, . . . der unteren Achse  $Ot$  in halber Größe aufgetragen. Dadurch erhält man das orthogonale  $s$ - $t$ -Diagramm des Punktes  $B$ . Verbindet man den ersten Punkt  $o$  dieses Diagramms mit dessen letztem Punkt 16 durch eine Gerade, so stellt diese das  $s$ - $t$ -Diagramm für gleichförmige Bewegung dar. Die Abweichungen des  $s$ - $t$ -Diagramms von dieser Geraden stellen das Voreilen und Zurückbleiben des Punktes  $B$  dar.

Um das orthogonale Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm zu zeichnen, wurde in jeder der sechzehn Stellungen des Punktes  $B$  in Fig. 660 die Geschwindigkeit  $v_B$  konstruiert (vgl. Fig. 104).

So wurde z. B. für die Stellung 6:  $\mathfrak{A}b \parallel AB$  gezogen bis zum Schnitte  $b$  mit  $B\mathfrak{B}$ ; dann ist  $Bb$  die gedrehte Geschwindigkeit  $v_B$ ; sie wurde vom Punkte 6 der unteren Achse  $Ot$  aufgetragen und so punktweise das  $v$ - $t$ -Diagramm gezeichnet. Ebenso wurden von der oberen Zeitachse  $Ot$  die Beschleunigungen aufgetragen, und zwar nur die Tangentialbeschleunigungen der Bewegung, da nur diese auf die Geschwindigkeiten verändernden Einfluß haben.

Bezüglich der Konstruktionen der Beschleunigungen sei auf Fig. 108 verwiesen. Für die Stellung 6 der Stange  $AB$  gestaltet sich hienach die Konstruktion von  $b_B$  in folgender Weise: der Schnitt  $O$  von  $A\mathfrak{A}$  und  $B\mathfrak{B}$  ist der Drehpol; man ziehe  $\mathfrak{A}S \parallel \mathfrak{A}A$ ,  $bT \parallel \mathfrak{A}A$ ,  $T\beta_0 \parallel Sb$ ,  $bN \parallel OT$ ,  $N\beta_1 \parallel A\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{A}\beta_1 \parallel AB$ ;  $\beta_0\beta \perp B\mathfrak{B}$ ,  $\beta_1\beta \perp AB$ ; dann ist  $\overline{B\beta} \equiv b_B$  und  $\beta_0\beta \equiv t_B$  die Tangentialbeschleunigung von  $B$ .

In dieser Weise wurde  $t_B$  für alle sechzehn Lagen konstruiert und von  $Ot$  aus aufgetragen, und zwar die positiven Beschleunigungen nach aufwärts, die negativen nach abwärts. Wo es erforderlich war, wie für die Stellen größter Beschleunigung, wurde die Konstruktion auch für Zwischenlagen ausgeführt.

Der Zusammenhang der Diagramme ist bekannt (vgl. Fig. 577).

Die Stellen, an denen  $v_B$  einen größten oder kleinsten Wert annimmt, sind jene, für welche das Beschleunigungsdiagramm die Zeitachse schneidet.

Die Umdrehung der Punkte  $A$  und  $B$  stellt eine Periode der Bewegung vor. Es müssen also für die Stellen 0 und 16 nicht nur die Werte von  $v_B$  und  $t_B$  die gleichen sein, sondern auch die Tangenten an jedes der beiden Diagramme die gleiche Richtung haben.

## 370. Aufgaben.

146. Die Bewegung des Systems  $AB$  erfolgt derart, daß sich  $A$  auf einem Kreise bewegt, dessen Halbmesser gleich  $AB$  ist, und  $B$  auf einer durch  $\mathfrak{A}$  gehenden Geraden. Es ist das  $v$ - $s$ - und  $b$ - $s$ -Diagramm des Punktes  $B$  zu zeichnen, wenn  $v_A$  und  $b_A$  durch die Länge  $A\mathfrak{A}$  gegeben sind (Fig. 661). (Bewegung der gleichschenkligen Schubkurbel).

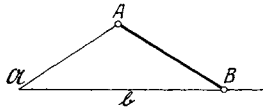


Fig. 661.

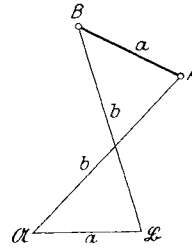


Fig. 662.

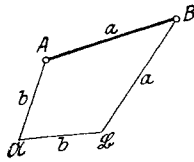


Fig. 663.

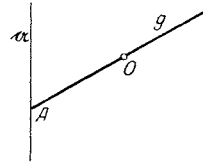


Fig. 664.

147. Die in 369 geschilderte Lösung ist anzuwenden auf die Bewegung der Stange  $AB$ , wenn  $\overline{AB} = \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} = a$ ,  $\overline{A\mathfrak{A}} = \overline{B\mathfrak{B}} = b$  ist (Fig. 662). (Bewegung der Antiparallellkurve).<sup>1</sup>
148. Die in 369 mitgeteilte Methode ist auf den speziellen Fall anzuwenden, wenn  $\overline{AB} = \overline{B\mathfrak{B}} = a$ ,  $\overline{A\mathfrak{A}} = \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} = b$  ist (Fig. 663).
149. Die Gerade  $g$  dreht sich gleichförmig um den festen Punkt  $O$  und einer ihrer Punkte  $A$  beschreibt die feste Gerade  $\alpha$ . Es ist das  $v$ - $t$ - und  $b$ - $t$ -Diagramm des Punktes  $A$  zu konstruieren (Fig. 664).

## XXXVII. Bewegungsgesetze der veränderlichen Masse eines Punktes.

**371. Die veränderliche Masse in der Astronomie und Relativitätstheorie.** So sehr es dem Empfinden und der Vorstellungskraft des Ingenieurs widerstrebt, Masse als etwas hinzustellen, was sich während der Bewegung verändert, so muß doch zugegeben werden, daß der Begriff der veränderlichen Masse in gewissen Fällen unabweisbar ist. Es gibt Fragen, bei deren Beantwortung man ohne weiteres zu diesem Begriff geführt wird; man ist dann genötigt, mit der gewohnten Vorstellung einer unveränderlich bleibenden Masse des bewegten Körpers oder Punktes zu brechen.

Am sinnfälligsten trifft dies bei einigen Problemen der Astronomie und der technischen Mechanik zu, bei denen es sich um die Bewegung von Körpern handelt, die unterwegs neue Masse aufnehmen oder alte Masse abgeben. Zuerst waren es daher die Astronomen, die sich mit der Bewegung der veränderlichen Masse beschäftigen und ihre Gesetze ergründen mußten; man sehe z. B. die Abhandlung von J. Meschtscherskij, Dynamik des Punktes mit veränderlicher Masse, 1897 (russisch; im Auszug im Jahrbuch für die Fortschritte der Mathematik, 28); hier werden auch Abhandlungen über diesen Gegenstand von A. Cayley, H. Gylden, H. Seeliger erwähnt.

Ferner sollen angeführt werden:

Lehmann-Filhès, Zentralbewegung bei Massenveränderung proportional der Zeit (Astronom. Nachrichten, 34, 1879/80).

J. Meschtscherskij, Über die Integration der Bewegungsgleichungen im Problem zweier Körper von veränderlicher Masse (Astronom. Nachrichten, 59, 1902).

E. Strömgen, Über die Bedeutung kleiner Massenänderungen für die Newtonsche Zentralbewegung (Astronom. Nachrichten, 163).

E. und F. Cosserat, Sur la dynamique du point et du corps invariable, dans la système énergétique. Comptes rendus 140.

In der modernen Relativitätstheorie spielt die Veränderlichkeit der Masse ebenfalls eine wichtige Rolle.

So hat A. Einstein in einer seiner Abhandlungen (Annalen der Physik, 18, 1905) gezeigt, daß die Maxwellsche Elektrodynamik in Verbindung mit dem Energieprinzip und dem Relativitätsprinzip zu der



Folgerung führt, daß die Masse eines Körpers bei Änderung seiner Energie sich ebenfalls ändere, welcher Art auch jene Energieänderung sein möge; es entspricht einer Energieänderung  $\Delta L$  eine gleichsinnige Änderung der Masse  $\frac{\Delta L}{c^2}$ , worin  $c$  die Lichtgeschwindigkeit bedeutet.

Die Bewegungsenergie eines materiellen Punktes von der Masse  $m$  und der Geschwindigkeit  $v$  ist nicht mehr  $\frac{1}{2} m v^2$ , wie in der klassischen Mechanik, sondern

$$L = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

nimmt der Punkt während seiner Bewegung von außen die Energie  $\Delta L$  auf (von einem mit dem Punkt bewegten Koordinatensystem aus beurteilt), so erfährt seine Energie die Zunahme:

$$\frac{\Delta L}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

die geänderte Energie ist dann

$$\frac{m c^2 + \Delta L}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\left(m + \frac{\Delta L}{c^2}\right) c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_1 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

worin  $m_1 = m + \frac{\Delta L}{c^2}$  die durch die Energieaufnahme geänderte träge Masse des Punktes ist (vgl. auch Einstein, Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie, Sammlung Vieweg, 38.)

In seiner Abhandlung: „Zur Dynamik bewegter Systeme“ (Berlin. Ber. 1907) findet M. Planck, daß die Masse jedes Körpers von der Temperatur abhängt.

**372. Die veränderliche Masse in der technischen Mechanik.** Wesentlich einfacher sind die Probleme der technischen Mechanik, in denen die veränderliche Masse eine Rolle spielt. Hierher gehören u. a. die Bewegung eines Wagens, welcher Masse durch Abströmen von Sand oder Wasser stetig verliert oder von dem sich plötzlich ganze Massen lösen; ferner die Bewegung eines Luftschiffes, das Ballast auswirft; die Bewegung einer Kette, die sich auf dem Boden aufhäuft; die Bewegung einer Rakete u. dgl. m.

In der technischen Literatur sucht man vergeblich nach Arbeiten über Probleme dieser Art. Nur in Routh, Dynamik der Systeme starrer Körper, I. Bd., findet man einige darauf bezug nehmende Bemerkungen, wie auch in einer Abhandlung von Piarron de Mondésir: „Sur la force, le principe d'Alembert, etc.“ (Mémoires et Comptes rendus

des travaux de la société des Ingénieurs civils 1887), welche Arbeit jedoch Fehler enthält.

Auch Resal behandelt in seinem *Traité de mécanique générale*, T. I, p. 339, eine hierher gehörende Aufgabe, kommt jedoch ebenfalls zu einem unrichtigen Resultat.

Es ist also jedenfalls der Mühe wert, die Bewegungsgesetze der veränderlichen Masse mit Rücksicht auf ihre Verwendung in der technischen Mechanik näher zu erörtern.

Grundsätzlich verschieden von der eben erwähnten, wirklich stattfindenden Veränderung ist jene, die wir bei der Bewegung eines geführten Systems oder eines Getriebes kennen lernen werden. Hier wird die Masse aller bewegten Teile nach einem bestimmten Grundsatz nach einem besonders ausgezeichneten Punkt reduziert; diese hier zusammengezogene Masse ist natürlich von der jeweiligen Stellung des Systems oder des Getriebes abhängig, sie ändert sich also mit dieser Stellung, sie ist eine veränderliche Punktmasse, die jedoch nicht wirklich besteht, sondern nur vorgestellt und berechnet wird. Diese Veränderung der Masse ist stetig, wenn die Bewegung des Getriebes es ist; sie kennt keine plötzliche Störung, keine sprunghafte Zu- oder Abnahme.

Es sollen im folgenden zuerst die Bewegungsgesetze der wirklich veränderlichen Masse besprochen und auf einige Beispiele angewendet werden. Sodann sollen die für die graphische Dynamik wichtigeren Bewegungsgesetze der gedachten veränderlichen Masse erörtert werden. Beide Gebiete haben, so verschiedenartig sie sind, doch gemeinsame Beziehungen, die wohl dazu dienen können, das Wesen dieser Bewegungen zu beleuchten.

**373. Wirkliche Änderung der bewegten Masse. Der Satz vom Antrieb.** Es sei  $M$  eine in fortschreitender Bewegung begriffene Masse,  $v$  ihre Geschwindigkeit,  $P$  eine in Richtung der Bewegung auf  $M$  wirkende Kraft,  $dt$  ein kleines Zeitteilchen; dann ist die Beschleunigung der Bewegung

$$b = \frac{dv}{dt}$$

und

$$M \cdot dv = Mb \cdot dt \dots \dots \dots 211)$$

So lange man es mit einer konstanten Masse zu tun hat, ist  $P = Mb$  und somit

$$d(Mv) = P \cdot dt \dots \dots \dots 212)$$

Man bezeichnet das Produkt  $Mv$  als die Bewegungsgröße der Masse  $M$ ; ist  $Mv_0$  ihr Wert zu Beginn der Bewegung, so wird Gleichung 212 nach Integration die Form annehmen:

$$Mv - Mv_0 = \int_0^t P \cdot dt \dots \dots \dots 213)$$

Man nennt  $P \cdot dt$  den Antrieb der Kraft  $P$  im Zeiteilchen  $dt$ ; dann sagt Gleichung 213 aus, daß die Änderung der Bewegungsgröße gleich dem Antrieb der Kraft in derselben Zeit ist.

Dieses durch die Gleichung 213 dargestellte Gesetz ist in der Mechanik der konstanten Massen als der Satz vom Antrieb bekannt.

**374. Das dynamische Grundgesetz.** Tritt zu der Masse  $M$  im Zeiteilchen  $dt$  eine kleine Masse  $dM$  mit der Geschwindigkeit  $v'$  hinzu, so wird die Bewegungsgröße um  $dM \cdot v'$  vermehrt und Gleichung 212 verändert sich in

$$d(Mv) = P \cdot dt + dM \cdot v' \dots \dots \dots 214)$$

eine Gleichung, die von Routh in seiner „Dynamik der Systeme starrer Körper“ (Deutsche Ausgabe, Bd. I, S. 273) angegeben wurde.

Geschieht die Zunahme oder Abnahme der Masse derart, daß die hinzutretende oder sich ablösende Masse die gleiche Geschwindigkeit wie der Körper selbst besitzt, so ist  $v' = v$  und Gleichung 214 wird

$$M \cdot dv + v \cdot dM = P \cdot dt + v \cdot dM,$$

eine Gleichung, die wieder mit 211 übereinstimmt. In diesem Falle gilt also das dynamische Grundgesetz Gleichung 179

$$b = \frac{P}{M}$$

auch für die veränderliche Masse.

Ist hingegen  $v'$  nicht gleich  $v$ , so wird Gleichung 214

$$M \cdot dv + (v - v') dM = P \cdot dt \dots \dots \dots 215)$$

und die Beschleunigung

$$b = \frac{dv}{dt} = \frac{P}{M} - (v - v') \frac{1}{M} \cdot \frac{dM}{dt};$$

setzt man noch  $v = \frac{ds}{dt}$ , so wird schließlich

$$b = \frac{P - (v - v') v \cdot \frac{dM}{ds}}{M} \dots \dots \dots 216)$$

Hier gilt also das dynamische Grundgesetz nicht mehr, sondern es muß die Änderung der Masse nach dem zurückgelegten Wege  $s$  berücksichtigt werden.

Man kann dieses Resultat auch auf anderem Wege erreichen, wenn man das Arbeitsprinzip verwendet und die Gesetze des Stoßes zu Hilfe nimmt.

Zu Beginn des Zeiteilchens  $dt$ , wenn die Masse  $M$  sich noch nicht verändert hat, ist ihre Bewegungsenergie  $\frac{1}{2} M v^2$ ; die Bewegungsenergie der hinzutretenden Masse  $dM$  ist  $\frac{1}{2} dM \cdot v'^2$ ; am Ende des Zeiteilchens  $dt$  ist die Energie der vereinigten Masse:  $\frac{1}{2} (M + dM) \cdot (v + dv)^2$ . Nun treffen aber nach unserer Voraussetzung die Massen  $M$  und  $dM$  mit

ungleichen Geschwindigkeiten  $v$  und  $v'$  zusammen, um nach dem Zusammentreffen ihren Weg mit der gleichen Geschwindigkeit  $v + dv$  fortzusetzen; dies ist aber das Kennzeichen des unelastischen Stoßes, bei dem die Bewegungsenergie

$$d\mathfrak{S} = \frac{1}{2} \cdot \frac{M \cdot dM}{M + dM} (v - v')^2 = \frac{1}{2} dM \cdot (v - v')^2 \dots 217)$$

verloren geht. Das Arbeitsprinzip liefert dann folgenden Ansatz:  
 Bewegungsenergie am Ende — Bewegungsenergie am Anfang + Energieverlust durch Stoß = Geleistete Arbeit  
 oder

$$\frac{1}{2}(M + dM)(v + dv)^2 - \frac{1}{2}Mv^2 - \frac{1}{2}dM \cdot v'^2 + \frac{1}{2}dM(v - v')^2 = P \cdot ds. \quad 218)$$

woraus  $d(Mv) = P \cdot dt + dM \cdot v'$

übereinstimmend mit Gleichung 214, woraus sich wieder Gleichung 216 ergibt.

**375. Anwendungen.**

1. Ein Wagen, der mit Wasser oder Sand gefüllt ist, bewegt sich auf einer horizontalen Straße, deren Widerstandszahl  $\kappa$  gegeben ist. Durch einen Schaden des Wagens vermindert sich seine Masse gleichförmig, so daß sie

$$M = M_0 - kt$$

gesetzt werden kann, worin  $M_0$  der Anfangswert der Masse (für  $t = 0$ ) ist. Da die abfließende Masse dieselbe Geschwindigkeit besitzt wie der Wagen, so ist  $v' = v$ ; Gleichung 214 wird dann

$$d(Mv) = -\kappa G \cdot dt + dM \cdot v,$$

wenn  $G$  das veränderliche Gewicht des Wagens ist. Es bleibt

$$M \cdot dv = -\kappa G \cdot dt$$

oder 
$$b = \frac{dv}{dt} = -\kappa \frac{G}{M} = -\kappa g.$$

Dieselbe Bewegungsgleichung besitzt aber auch der Wagen, der an Masse nichts verliert. Hier ändert also die Veränderlichkeit der Masse nichts an der Bewegungsgleichung.

2. Wenn eine brennende Rakete emporsteigt und hierbei an Masse verliert oder wenn ein Luftschiff seinen Ballast abwirft, so ändert sich ebenfalls und aus dem gleichen Grunde die Bewegungsgleichung nicht.

3. Der unter 1. behandelte Wagen, der jetzt keinen Schaden aufweisen würde, erhält während seiner Bewegung aus einem in Ruhe befindlichen Rohre gleichförmigen Zufluß von Masse. Dann ist

$$M = M_0 + kt.$$

Findet dieser Zufluß in vertikaler Richtung statt, so ist in Richtung der Bewegung  $v' = 0$  und Gleichung 214 wird:

$$d(Mv) = -\kappa G \cdot dt = -\kappa g(M_0 + kt) \cdot dt;$$

integriert man diese Gleichung, so erhält man

$$Mv - M_0v_0 = -\kappa g \int_0^t (M_0 + kt) \cdot dt = -\kappa g \left( M_0t + \frac{1}{2} kt^2 \right)$$

und

$$v = \frac{M_0}{M} v_0 - \frac{1}{2} \kappa g t \left( 1 + \frac{M_0}{M} \right).$$

Die Zeit, welche bis zum Stillstand des Wagens vergeht, ist mit  $v = 0$ :

$$T = \frac{M_0}{k} \left[ \sqrt{1 + \frac{2\kappa v_0}{\kappa g M_0}} - 1 \right],$$

während sie ohne Vermehrung der Masse, also für  $k = 0$ , den Wert

$$T = \frac{v_0}{\kappa g}$$

annehmen würde, wie man aus 1. entnehmen kann.

4. Über eine Rolle mit horizontaler Achse ist ein Faden gelegt (Fig. 665), dessen eines Ende das Gewicht  $G = Mg$  trägt, während das andere Ende an einer ebenso schweren Kette befestigt ist, die zum Teil auf einer horizontalen Ebene liegt. Man ermittle die Geschwindigkeit  $v$ , mit welcher das Gewicht  $G$  sich bewegt.

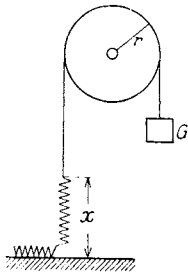


Fig. 665.

Ist  $x$  die Länge des bereits emporgehobenen Stückes der Kette,  $\mu$  seine Masse für die Längeneinheit, so ist, wenn man von der Masse der Rolle absieht, nach Gleichung 214

$$d[(M + \mu x)v] = (M - \mu x)g \cdot dt,$$

weil die Geschwindigkeit  $v'$  der neu hinzukommenden Kettenglieder null ist. Schreibt man diese Gleichung in der Form

$$\mu v \frac{dx}{dt} + (M + \mu x) \cdot \frac{dv}{dt} = (M - \mu x) \cdot g$$

und beachtet, daß  $v = \frac{dx}{dt}$  ist, so wird

$$\mu v^2 \cdot dx + (M + \mu x) \cdot v dv = (M - \mu x) \cdot g dx$$

die Differentialgleichung der Bewegung.

Ihre Lösung lautet, wenn für  $x = 0$ :  $v = 0$  sein soll:

$$v^2 = \frac{2g}{3\mu} \left[ 2M - \mu x - \frac{2M^3}{(M + \mu x)^2} \right].$$

Resal hat diese Aufgabe in seinem *Traité de mécanique générale*, T. I., p. 339 behandelt; er vergaß jedoch, die Veränderlichkeit der Masse zu berücksichtigen, wodurch das Glied  $\mu x \cdot v dv$  in der Differentialgleichung entfiel.

5. Die Enden zweier Ketten, deren Massen für die Längeneinheit  $\mu$  und  $\mu'$  sind, werden durch einen undehnbaren, gewichtlosen Faden

verbunden, der über eine Rolle läuft (Fig. 666). Zu Beginn der Bewegung ist die rechte Kette bis zur Höhe  $l$  aufgezogen, während die linke ganz auf einer horizontalen Ebene liegt; nach der Zeit  $t$  ist die rechte Kette um  $z$  gesunken, die linke hat sich um  $z$  gehoben. Es soll die Bewegungsgleichung der Kette mit Außerachtlassung der Masse der Rolle und der Widerstände aufgestellt werden.

Die bewegte Masse ist zur Zeit  $t$

$$M = z\mu' + (l - z)\mu$$

und die bewegende Kraft

$$P = (l - z)\mu g - z\mu'g.$$

Auf der linken Seite kommt im Zeiteilchen  $dt$  die Masse  $\mu' \cdot dz$  neu in Bewegung, ihre Anfangsgeschwindigkeit ist  $v' = 0$ ; auf der rechten Seite kommt im gleichen Zeiteilchen die Masse  $\mu \cdot dz$  zur Ruhe, ihre Bewegungsgröße  $\mu dz \cdot v$  kommt also in Wegfall; die im Zeiteilchen hinzukommende Bewegungsgröße ist demnach

$$\mu' dz \cdot v' - \mu dz \cdot v = -\mu v \cdot dz$$

und Gleichung 214 wird demnach

$$d\{[z\mu' + (l - z)\mu]v\} = [(l - z)\mu g - z\mu'g] dt - \mu v \cdot dz$$

oder

$$v^2 \mu' dz + v dv [\mu l + (\mu' - \mu)z] = g [\mu l - (\mu + \mu')z] dz. \quad . \quad 219$$

Die Integration dieser Gleichung liefert

$$v^2 = \frac{4g\mu l}{3\mu' - \mu} \left\{ 1 - \frac{z}{l} \frac{\mu + \mu'}{2\mu} - \left[ \frac{\mu l}{\mu l + z(\mu' - \mu)} \right]^{\frac{2\mu'}{\mu' - \mu}} \right\}. \quad . \quad 220$$

Zu demselben Resultat müßte man gelangen, wenn man statt vom Antriebsatze, der durch Gleichung 214 dargestellt ist, vom Arbeitsprinzip ausgeht. Dann müßte für die Zeit  $dt$  der Ansatz folgendermaßen hingeschrieben werden:

Bewegungsenergie am Ende  $-$  Bewegungsenergie am Anfang  $+ \text{Energieverlust durch Stoß (links und rechts)} = \text{Geleistete Arbeit.}$

Die Energie am Ende von  $dt$  ist

$$\frac{1}{2} [(z + dz)\mu' + (l - z - dz)\mu] (v + dv)^2,$$

hingegen die Energie am Anfang:

$$\frac{1}{2} [z\mu' + (l - z)\mu] v^2;$$

der Energieverlust durch Stoß ist nach Gleichung 217 für die linke Kette

$$\frac{1}{2} \mu' dz \cdot v^2$$

und für die rechte Kette:

$$\frac{1}{2} \mu dz \cdot v^2.$$

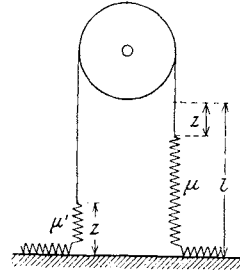


Fig. 666.

Der Ansatz wird also zu lauten haben:

$$\frac{1}{2} [(z + dz) \mu' + (l - z - dz) \mu] (v + dv)^2 - \frac{1}{2} [z \mu' + (l - z) \mu] v^2 + \frac{1}{2} \mu' dz \cdot v^2 + \frac{1}{2} \mu dz \cdot v^2 = - \mu' g z dz + \mu g (l - z) dz \dots 221)$$

woraus wieder die Gleichungen 219, 220 entstehen.

Das vorliegende Problem wurde behandelt von Piarron de Mondésir in seiner Abhandlung: „Sur la force... (Mémoires de la société des ingénieurs civils, 1887). Auch er wendet das Arbeitsprinzip auf die Bewegung der veränderlichen Masse an, unterläßt aber, die bei der Veränderung der Masse auftretenden Stöße zu berücksichtigen und kommt deshalb zu unrichtigen Resultaten. So findet er Gleichung 221 ohne die beiden letzten Glieder auf der linken Seite, die vom Stoß herühren; sein Resultat lautet:

$$v^2 = \frac{[2 \mu l - (\mu + \mu') z] g z}{\mu l + (\mu' - \mu) z}$$

Sind die beiden Ketten rechts und links von gleicher Masse, d. h. ist  $\mu = \mu'$ , so wird Gleichung 219:

$$v^2 dz + l v dv = g (l - 2z) dz$$

und daraus 
$$v^2 = 2 g l \left[ 1 - \frac{z}{l} - e^{-\frac{2z}{l}} \right],$$

während Piarron de Mondésir in diesem Falle findet:

$$v^2 = 2 g z \left( 1 - \frac{z}{l} \right).$$

6. Ein Zylinder, der dicht über einer großen Wasserfläche gelagert ist, bildet die Führung eines gut abgedichteten Kolbens, der durch eine Kraft  $P$  nach aufwärts gezogen wird (Fig. 667). Das Wasser tritt durch die Bodenöffnung  $f$  in den Zylinder ein. Man ermittle die Geschwindigkeit  $v$  des Kolbens  $F$  als Funktion des Kolbenweges  $x$ .

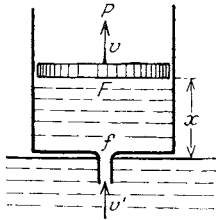


Fig. 667.

Die Wassermenge  $M$  im Zylinder ist veränderlich; in jedem Zeitteilchen wird sie um

$$dM = \mu F dx = \mu f v' dt$$

vermehrt, wenn  $v'$  die Einströmungsgeschwindigkeit ist. Es ist

$$v' = v \frac{F}{f} \text{ und } v = \frac{dx}{dt}.$$

Benützt man den Satz vom Antrieb oder Gleichung 214, so ist

$$d(Mv) = (P - Mg) dt + dM \cdot v'$$

oder mit  $M = F x \mu$ :

$$x \cdot dv^2 - 2 v^2 \cdot dx \left( \frac{F}{f} - 1 \right) = 2 \left( \frac{P}{\mu F} - xg \right) dx \dots 222)$$

Benützt man hingegen das Arbeitsprinzip, so ist zu setzen:  
 Änderung der Bewegungsenergie + Energieverlust durch Stoß = Geleistete Arbeit

oder

$$\frac{1}{2} (M + dM)(v + dv)^2 - \frac{1}{2} M v^2 - \frac{1}{2} dM \cdot v'^2 + \frac{1}{2} dM (v' - v)^2 = (P - Mg) \cdot dx,$$

woraus wieder Gleichung 222 hervorgeht.

Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet

$$v^2 = 2gx \frac{f}{2F - 3f} - \frac{Pf}{\mu F(F - f)}$$

Der Kolben kommt zur Ruhe, wenn

$$x = \frac{P \cdot 2F - 3f}{2\gamma F(F - f)}$$

geworden ist, worin  $\gamma = \mu g$  das Einheitsgewicht des Wassers bezeichnet.

**376. Gedachte Veränderung der bewegten Masse.** Zum Unterschiede von der bisher behandelten Bewegung einer Masse, die während der Bewegung zu- oder abnimmt, sich also wirklich verändert, wollen wir jetzt annehmen, daß die Masse des bewegten Punktes sich nur in der Vorstellung verändert, d. h. die Veränderung der Masse nur gedacht wird, ohne daß dieser Vorstellung eine wirklich stattfindende Veränderung entsprechen würde. So abstrakt dies klingen mag, werden wir doch bald Gelegenheit haben, solche veränderliche Punktmassen in der Dynamik des Systems und des Getriebes kennen zu lernen und hierbei wahrzunehmen, daß sich die Dynamik dieser Gebilde auf die Bewegung eines Punktes mit veränderlicher Masse zurückführen läßt. Aus diesem Grunde erscheint es nötig, diese Bewegung einer genauen Untersuchung zu unterziehen. Dahingestellt sei vorläufig, wie und auf welchem Wege die Veränderlichkeit der Punktmasse zustande kommt. Die Aufgabe lautet dann:

Ein materieller Punkt, dessen Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit gegeben sind, legt den Weg  $s$  auf einer gegebenen geraden oder krummen Bahn zurück unter dem Einflusse einer veränderlichen Kraft

$$\mathfrak{F} = F_1(s);$$

die Masse des Punktes sei gesetzmäßig veränderlich nach der Gleichung

$$\mathfrak{M} = F_2(s);$$

es ist das Bewegungsgesetz des Punktes zu finden.

**377. Das Arbeitsprinzip bei veränderlicher Masse.** Wenn der Massenpunkt  $\mathfrak{M}$  im Zeiteilchen  $dt$  den Weg  $ds$  zurückgelegt hat, werden sich Kraft und Masse um  $d\mathfrak{F}$  bzw.  $d\mathfrak{M}$  geändert haben.

Diese Zunahme an Masse erfolgt aber nicht wie unter 373 plötzlich, also ruckweise, sondern stetig; sie erfolgt im Zeiteilchen  $dt$  und durchläuft alle Werte der Geschwindigkeit von 0 bis  $v$ , liefert also einen Zuwachs an Bewegungsgröße von  $\frac{1}{2} v \cdot d\mathfrak{M}$ ; die Gleichung 214 nimmt deshalb hier die Form an:



$$d(\mathfrak{M}v) = \mathfrak{P} dt + \frac{1}{2} v \cdot d\mathfrak{M},$$

woraus

$$\mathfrak{M} \cdot dv + \frac{1}{2} v \cdot d\mathfrak{M} = \mathfrak{P} \cdot dt \dots \dots \dots 223)$$

oder  $\mathfrak{M} \cdot v dv + \frac{1}{2} v^2 \cdot d\mathfrak{M} = \mathfrak{P} \cdot ds, \quad d(\frac{1}{2} \mathfrak{M}v^2) = \mathfrak{P} \cdot ds$

und nach Integration

$$\frac{1}{2} \mathfrak{M}v^2 - \frac{1}{2} \mathfrak{M}_0 v_0^2 = \int_0^s \mathfrak{P} \cdot ds \dots \dots \dots 224)$$

wenn mit  $\mathfrak{M}_0$  und  $v_0$  die Anfangswerte von  $\mathfrak{M}$  und  $v$  bezeichnet werden.

Diese Gleichung 224 ist aber der bekannte Ausdruck für das Arbeitsprinzip (Prinzip der lebendigen Kraft), das somit für derart veränderliche Massen seine Gültigkeit behält.

**378. Das dynamische Grundgesetz bei veränderlicher Masse.** Für die Beschleunigung der veränderlichen Punktmasse ergibt sich aus Gleichung 223 die Beziehung

$$b = \frac{dv}{dt} = \frac{1}{\mathfrak{M}} \left( \mathfrak{P} - \frac{1}{2} v \frac{d\mathfrak{M}}{dt} \right)$$

oder

$$b = \frac{1}{\mathfrak{M}} \left( \mathfrak{P} - \frac{1}{2} v^2 \frac{d\mathfrak{M}}{ds} \right) \dots \dots \dots 225)$$

ein Ausdruck für die Beschleunigung, der auch aus Gleichung 216 hervorgehen würde, wenn dort  $v' = \frac{v}{2}$  gesetzt wird.

Die Gleichung 225 lehrt uns, daß das dynamische Grundgesetz Gleichung 215:

$$\text{Beschleunigung} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}}$$

für die Bewegung der veränderlichen Masse keine Gültigkeit mehr besitzt. Nur in gewissen Ausnahmefällen wird nämlich

$$b = \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{M}}$$

sein, und zwar wenn entweder  $v = 0$  ist, also für den Beginn der Bewegung aus Ruhelagen oder an Stellen, wo der Punkt seine Bewegung umkehrt; dann aber auch, wenn

$$\frac{d\mathfrak{M}}{ds} = 0$$

ist, d. h. bei unveränderlicher Masse.

Es gibt jedoch ein dynamisches Grundgesetz, welches sowohl für konstante wie auch für veränderliche Masse gilt. Definiert man nämlich als Bewegungsenergie des Punktes mit veränderlicher Masse den Ausdruck

$$L = \frac{1}{2} \mathfrak{M}v^2,$$

so ist 
$$\frac{dL}{ds} = \frac{1}{2} \frac{d\mathfrak{M}}{ds} v^2 + \mathfrak{M} v \frac{dv}{ds} = \frac{1}{2} \frac{d\mathfrak{M}}{ds} v^2 + \mathfrak{M} b$$

also durch Vergleich mit Gleichung 225:

$$\frac{dL}{ds} = \mathfrak{F}.$$

Nennt man  $\mathfrak{Q} = \frac{L}{\mathfrak{M}}$  die spezifische Bewegungsenergie der Masse, so ist

$$\frac{d\mathfrak{Q}}{ds} = \frac{1}{\mathfrak{M}^2} \left( -L \frac{d\mathfrak{M}}{ds} + \mathfrak{M} \frac{dL}{ds} \right) = \frac{1}{\mathfrak{M}} \left( \mathfrak{F} - \frac{1}{2} v^2 \frac{d\mathfrak{M}}{ds} \right) = b.$$

Schreibt man also das dynamische Grundgesetz in der Form an:

$$b = \frac{d\mathfrak{Q}}{ds} \dots \dots \dots 226)$$

so gilt es sowohl für veränderliche als auch für konstante Masse. Für letztere ist nämlich einfacher

$$L = \frac{1}{2} M v^2, \mathfrak{Q} = \frac{L}{M} = \frac{1}{2} v^2 \text{ und } \frac{dL}{ds} = v \frac{dv}{ds} = \frac{dv}{dt} = b.$$

**379. Das veränderliche Massengewicht.** Bei den praktischen Anwendungen der Bewegung einer veränderlichen Masse ist es zweckmäßig, eine Größe einzuführen, die wir Massengewicht nennen wollen und die durch die Gleichung

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{M} g \dots \dots \dots 227)$$

definiert ist, worin  $g$  die Beschleunigung der Schwere bedeutet.

Die Einführung dieser Rechnungsgröße geschieht nur aus dem Grunde, um bei den Anwendungen die Konstruktionen und Umrechnungen zu vereinfachen.

Da das Grundgesetz der Dynamik  $b = \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{M}}$  seine Gültigkeit verloren hat, wird  $\mathfrak{G}$  nur in gewissen, früher erwähnten Ausnahmefällen das Gewicht der Masse  $\mathfrak{M}$  vorstellen. Im allgemeinen jedoch hat  $\mathfrak{G}$  keinerlei mechanische Bedeutung. Es ist auch nicht nötig, mit dieser Rechnungsgröße irgend eine Vorstellung zu verbinden; man könnte höchstens sagen, daß  $\mathfrak{G}$  das Gewicht der veränderlichen Masse  $\mathfrak{M}$  im Ruhezustande ist, wenn sich also die Masse nicht mehr verändert.

**380. Die Geschwindigkeitshöhe.** Statt von der Geschwindigkeit  $v$  des veränderlichen Massenpunktes zu sprechen, werden wir es vorziehen, seine Geschwindigkeitshöhe

$$h = \frac{v^2}{2g}$$

(vgl. Gl. 167) in Rechnung zu stellen.

Die Bewegungsenergie der veränderlichen Punktmasse  $\mathfrak{M}$  nimmt dann mit Benützung der Gleichung 227 die Form an

$$L = \frac{1}{2} \mathfrak{M} v^2 = \mathfrak{G} h \dots \dots \dots 228)$$

und das durch Gleichung 224 dargestellte Arbeitsprinzip erhält die einfache Gestalt:

$$\mathcal{G}h - \mathcal{G}_0h_0 = \int_0^s \mathfrak{F} ds = \mathbf{A} \dots \dots \dots 229)$$

**381. Die Diagramme der Bewegung.** Da die Beziehungen zwischen den vier kinematischen Größen  $t$ ,  $s$ ,  $v$  und  $b$  dadurch keine Veränderung erfahren, daß die Masse des Punktes veränderlich ist, so wird auch über die Diagramme zwischen diesen vier Größen nichts Neues auszusagen sein; es bleiben vielmehr alle Regeln, Gleichungen und Konstruktionen bestehen, die wir im Abschnitt XXXI kennen gelernt haben. Insbesondere werden die auf den Weg  $s$  bezogenen Diagramme, und zwar das  $v$ - $s$ -Diagramm und das  $b$ - $s$ -Diagramm an Wichtigkeit gewinnen, da der Weg  $s$  die Veränderliche ist, auf welche die Kraft  $\mathfrak{F}$  und die Masse  $\mathfrak{M}$  bezogen werden.

Auch an den dynamischen Diagrammen, die wir in Abschnitt XXXII besprochen haben, und zwar an dem Kraft-Weg-, dem Arbeits-Weg- und dem Energie-Weg-Diagramm wird nichts zu ändern sein, da auch hier alle früher erwähnten Beziehungen wieder gelten und insbesondere das Arbeitsprinzip seine Gültigkeit behält, auch wenn die Masse veränderlich ist (vgl. 377).

Nur kommt zu den bekannten und bereits behandelten Diagrammen ein neues hinzu, das Massen-Weg-Diagramm, dargestellt durch die Gleichung

$$\mathfrak{M} = F_2(s),$$

oder, wenn man es vorzieht, die veränderliche Masse durch das veränderliche Massengewicht  $\mathcal{G} = \mathfrak{M}g$  darzustellen, das Massengewicht-Weg-Diagramm, dargestellt durch die Gleichung

$$\mathcal{G} = gF_2(s) = F(s).$$

Durch dieses neu hinzutretende Diagramm werden allerdings die Beziehungen zwischen den kinematischen und dynamischen Diagrammen vollständig geändert.

Die Gesetze, nach denen früher aus den dynamischen Diagrammen die kinematischen entwickelt werden konnten, sind jetzt ungültig, da früher die Masse und somit auch das Gewicht  $\mathcal{G} = mg$  als konstant angesehen werden durfte; sein Diagramm war keine Kurve, sondern eine zur  $s$ -Achse parallele Gerade. Es möge nun gezeigt werden, welche Konstruktionen angewendet werden müssen, um hier aus den dynamischen Diagrammen die kinematischen zu entwickeln.

Um z. B. das Diagramm der Geschwindigkeitshöhen  $h$  zu zeichnen, wurden in Fig. 668 die dynamischen Diagramme entworfen, und zwar zunächst das Diagramm der veränderlichen Kraft  $\mathfrak{F} = F_1(s)$  bezogen auf den Weg  $s$ , aufgetragen von der Achse  $II$ . Aus diesem wurde auf dem gleichen Wege wie in 335 das Arbeits-Diagramm abgeleitet, indem die Arbeit  $\mathbf{A}$  der Kraft  $\mathfrak{F}$ :

$$A = \int_0^s \mathfrak{P} ds$$

als Fläche zwischen dem  $\mathfrak{P}$ -Diagramm und der Achse  $II$  bestimmt und von der Achse  $III$  aus nach abwärts aufgetragen wurde.

Nennt man wieder, wie in 336,  $a$  die Ordinate des  $A$ -Diagramms, so ist nach Gleichung 181:

$$A = \lambda a, \quad \lambda = \alpha \varkappa \mathfrak{A},$$

worin  $\alpha$  und  $\varkappa$  von den Maßstäben für  $s$  und  $\mathfrak{P}$  abhängen und  $\mathfrak{A}$  die Arbeitsbasis in cm ist.

Der Abstand der beiden Achsen  $II$  und  $III$  wurde gleich  $l_0 = \frac{L_0}{\lambda}$ , dem Anfangswerte der Bewegungsenergie als Strecke, gewählt; da nach dem Arbeitsprinzip Gleichung 182

$$L = L_0 + A \quad \text{oder auch} \quad l = l_0 + a$$

ist, so stellt die Ordinate des  $A$ - $s$ -Diagramms, bezogen auf die Achse  $II$  die Länge  $l$  im  $L$ - $s$ -Diagramm vor.

Von der Achse  $III$  nach abwärts wurden die Ordinaten  $g$  des  $G$ - $s$ -Diagramms aufgetragen auf Grund des beliebig gewählten Maßstabes

$$g = \frac{\mathfrak{G}}{\mu} \dots \dots \dots 230)$$

Die Gleichung 228:

$$L = \frac{1}{2} M v^2 = \mathfrak{G} h$$

geht, wenn man die Strecken einführt, über in

$$\lambda l = \mu g \cdot \varepsilon \mathfrak{h}$$

(vgl. die Gleichungen 168, 178, 181, 230) oder

$$\alpha \varkappa \mathfrak{A} l = \mu g \cdot \varepsilon \mathfrak{h}$$

und wenn  $\frac{\alpha \varkappa \mathfrak{A}}{\mu \varepsilon} = \mathfrak{A}_1$  bezeichnet wird:

$$l \mathfrak{A}_1 = g \mathfrak{h} \dots \dots \dots 231)$$

Zieht man nun die beliebige Achse  $IV$  und in der Entfernung  $\mathfrak{A}_1$  von ihr die Parallele  $H_1 H_1$ , zeichnet ferner die Verbindungsgerade  $n$  des linken Punktes  $I$  mit dem Endpunkte von  $a$ , ebenso die Gerade  $m$  vom linken Punkte  $III$  zu dem Endpunkte der Ordinate  $g$ ; endlich die Gerade  $H_1 C \perp n$  bis zum Schnittpunkte  $C$  mit  $IV$  und  $CH \perp m$

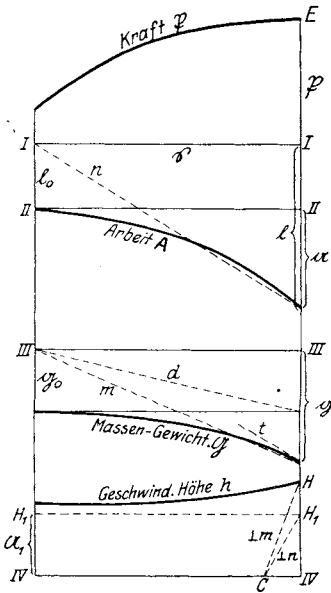


Fig. 668.

bis zum Schnittpunkte  $H$  mit der Ordinate durch den rechten Achsenpunkt  $IV$ , so ist  $IVH = h$  die gesuchte Geschwindigkeitshöhe. Denn es ist

$$IVH_1 : \overline{CIV} = g : l,$$

$$CIV : IVH = g : s,$$

somit

$$IVH_1 : \overline{IVH} = g : l$$

oder

$$\mathfrak{H}_1 : h = g : l$$

in Übereinstimmung mit Gleichung 231.

Auf diese Weise wurde das Diagramm der Geschwindigkeitshöhen  $h$  in Fig. 668 punktweise gezeichnet.

Den wesentlichen Teil dieses Abschnittes findet man in der Abhandlung von F. Wittenbauer, die unter gleichem Titel 1905 in der Zeitschrift für Mathematik und Physik erschienen ist.



## XXXVIII. Dynamik des Systems.

**382. Das System als Punkt von veränderlicher Masse.** In dem Abschnitte XIV hatten wir den augenblicklichen Bewegungszustand eines zwangläufig geführten Systems behandelt und die Methode kennen gelernt, um aus den gegebenen aktiven Kräften des Systems, seiner Massenverteilung und seinem Geschwindigkeitszustande den augenblicklichen Beschleunigungszustand, sowie die Führungsdrücke zu bestimmen.

Die Lösung dieser Aufgabe war verhältnismäßig einfach durch den Umstand, daß es sich nur um einen augenblicklichen Zustand der Bewegung, nicht um deren Geschichte handelte, daß somit der Geschwindigkeitszustand, das Resultat der vorhergehenden Beschleunigungszustände, als etwas Gegebenes angesehen werden durfte.

Wesentlich schwieriger, aber der Praxis näherstehend, ist die Aufgabe, die wir jetzt zu lösen im Begriffe sind: von einem zwangläufig geführten System sind die aktiven Kräfte, die Massenverteilung sowie der Geschwindigkeitszustand für irgend eine Anfangslage der Bewegung gegeben; es ist der Geschwindigkeitszustand des Systems nach irgend einer endlichen Zeit zu ermitteln.

Zunächst wollen wir uns vergegenwärtigen, wie sehr bei einem Getriebe die Annahme des Zwanglaufes die Lösung der Aufgabe vereinfacht. Der Zwanglauf bedingt, daß die Bewegung aller Systempunkte bestimmt ist, sobald man die Bewegung eines einzigen dieser Punkte kennt.

Daraus geht aber hervor, daß es genügt, die Bewegung eines einzigen Punktes des Systems festzustellen. Welchen Punkt des Systems man wählt, um seine Bewegung zu studieren, ist an und für sich gleichgültig. Man wird naturgemäß einen solchen Punkt wählen, dessen Bahn besonders einfach, also z. B. kreisförmig ist.

Wir nennen diesen beliebig gewählten Punkt den Reduktionspunkt des Systems und bezeichnen ihn mit  $E$ .

Das Arbeitsprinzip, für das System angewendet, liefert nach Gleichung 182 die Beziehung:

$$L - L_0 = \mathbf{A},$$

worin  $\mathbf{A}$  die Arbeit aller äußeren Kräfte des Systems ist. Da wir das System als starr angenommen haben, leisten die inneren Kräfte keine Arbeit.

Reduzieren wir sämtliche Kräfte des Systems nach den Punkt  $E$  (vgl. 137), so ist die reduzierte Gesamtkraft nach Gleichung 106:

$$\mathfrak{R} v_E = \Sigma [P v \cos (Pv)].$$

Multipliziert man diese Gleichung mit  $dt$ , so ist die rechte Seite die Summe aller elementaren Arbeiten und die linke Seite die Elementararbeit der reduzierten Gesamtkraft  $\mathfrak{R}$ ; es bleibt also mit  $ds = v_E \cdot dt$ :

$$\mathbf{A} = \int_0^s \mathfrak{R} \cdot ds.$$

Die Bewegungsenergie des Systems  $L$  kann in folgender Weise geschrieben werden:

$$L = \Sigma \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{1}{2} v_E^2 \Sigma \left[ m \left( \frac{v}{v_E} \right)^2 \right].$$

Bezeichnet man

$$\mathfrak{M} = \Sigma \left[ m \left( \frac{v}{v_E} \right)^2 \right] \dots \dots \dots 232)$$

so ist

$$L = \frac{1}{2} \mathfrak{M} v_E^2 \dots \dots \dots 233)$$

und für den Beginn der Bewegung

$$L_0 = \frac{1}{2} \mathfrak{M}_0 v_{E0}^2.$$

Es ist leicht zu erkennen, daß der Ausdruck  $\mathfrak{M}$ , der die Dimension einer Masse hat, nicht von den Geschwindigkeiten der Punkte selbst, sondern nur von deren Verhältnissen abhängen wird. Nennt man  $P$  den Punkt, dessen Masse  $m$  ist und  $O$  den Drehpol des Systems, so ist

$$v : v_E = \overline{OP} : \overline{OE}.$$

also auch

$$\mathfrak{M} = \Sigma \left[ m \left( \frac{\overline{OP}}{\overline{OE}} \right)^2 \right].$$

Es wird somit die Masse  $\mathfrak{M}$  nur von der Lage des Drehpols abhängen und sich mit dieser Lage verändern.

Das Arbeitsprinzip nimmt dann die Form an:

$$\frac{1}{2} \mathfrak{M} v_E^2 - \frac{1}{2} \mathfrak{M}_0 v_{E0}^2 = \int_0^s \mathfrak{R} ds = \mathbf{A}$$

und stimmt dann mit dem Arbeitsprinzip eines Punktes mit veränderlicher Masse (vgl. Gleichung 224) überein. Damit ist aber die Bewegung des zwangsläufig geführten Systems auf die Bewegung eines Punktes mit veränderlicher Masse zurückgeführt, die in XXXVII behandelt wurde. Dabei ist die Veränderung der Masse keine wirkliche, sondern nur eine gedachte.

**383. Reduktion der Kräfte.** Die Reduktion der Kräfte an den gewählten Reduktionspunkt  $E$  geschieht nach denselben Grundsätzen und Methoden, die bereits im Abschnitte XIII mitgeteilt wurden, weshalb hier nur darauf hingewiesen werden soll.

**384. Reduktion der Massen.** Die Reduktion der Massen an den Reduktionspunkt  $E$  wurde bisher noch nicht besprochen, da sie bei der Untersuchung des augenblicklichen Bewegungszustandes des Systems nicht erforderlich war. Eine um so größere Bedeutung erlangt sie jedoch, sobald der zeitliche Verlauf der Bewegung studiert werden soll.

Die Bewegungsenergie des Systems ist nach Gleichung 233:

$$L = \Sigma \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{1}{2} \mathfrak{M} v_E^2,$$

woraus sich folgende Definition ergibt:

Die an einen Punkt  $E$  des bewegten Systems reduzierte Masse  $\mathfrak{M}$  hat dort, als Punkt aufgefaßt, die gleiche Bewegungsenergie wie das ganze System.

Der Begriff der reduzierten Masse eines Körpers ist sehr alt; die Mechaniker des 18. Jahrhunderts haben schon mit ihm gearbeitet. So u. a. Abr. Gotth. Kästner in seinen „Anfangsgründen der höheren Mechanik“, Göttingen 1765; auch Pasquich in dem „Versuch eines Beytrags zur allgemeinen Theorie von der Bewegung und vorteilhaftesten Einrichtung der Maschinen“, Leipzig 1789. Die reduzierte Masse der Maschine wird hier als „gleichgültige“ Masse bezeichnet. Allerdings handelt es sich in diesen Arbeiten nur um die Reduktion rotierender, also konstanter Massen.

Der Begriff der veränderlichen reduzierten Masse tauchte erst später auf und wurde selten benützt. In Poncelets „Lehrbuch der Anwendung der Mechanik auf Maschinen“ findet sich zwar keine ausdrückliche Verwendung der veränderlichen reduzierten Masse; doch liegt im ersten Bande (deutsche Ausgabe S. 25) wenigstens eine Andeutung derselben vor.

F. Grashof hat in seiner „Theoretischen Maschinenlehre“, 2. Band, S. 354 u. f. die bewegten Massen der Schubkurbel an den Kurbelzapfen reduziert und den hierbei entstehenden veränderlichen Wert durch angenäherte Werte, die zum Teil konstant sind, ersetzt.

Es sei (Fig. 669)  $O$  der Drehpol des bewegten Systems,  $S$  sein Schwerpunkt,  $dm$  ein Massenteilchen,  $E$  der Reduktionspunkt;  $v_s$ ,  $v$  und  $v_E$  die Geschwindigkeiten dieser Punkte. Soll die Masse des Systems nach  $E$  reduziert werden, so ist nach Gleichung 232:

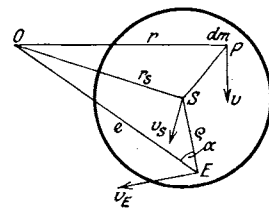


Fig. 669.

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{v_E^2} \int v^2 \cdot dm.$$

Nun ist  $v : v_E = r : e$ , wenn  $r$  und  $e$  die Entfernungen von  $dm$  und  $E$  vom Drehpol bezeichnen; es wird also

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{e^2} \int r^2 \cdot dm = \frac{\mathbf{T}_0}{e^2}, \dots \dots \dots 234)$$

wenn  $\mathbf{T}_0$  das Trägheitsmoment des Systems in bezug auf die durch  $O$



gehende augenblickliche Drehungsachse ist. Legt man zu ihr parallele Achsen durch  $S$  und  $E$ , so sind die Trägheitsmomente für diese:

$$\mathbf{T}_0 = \mathbf{T}_S + M r_S^2, \quad \mathbf{T}_E = \mathbf{T}_S + M \varrho^2;$$

darin bedeutet  $r_S = OS$ ,  $\varrho = ES$  und  $M$  die Masse des Systems. Es wird also:

$$\mathbf{T}_0 = \mathbf{T}_E + M (r_S^2 - \varrho^2).$$

Nun ist

$$r_S^2 - \varrho^2 = e^2 - 2 \varrho e \cos \alpha$$

und

$$\mathbf{T}_0 = \mathbf{T}_E + M (e^2 - 2 \varrho e \cos \alpha),$$

$$\mathfrak{M} = \frac{\mathbf{T}_E}{e^2} + M \left( 1 - 2 \frac{\varrho}{e} \cos \alpha \right).$$

Wählt man den Schwerpunkt als Reduktionspunkt, so ist  $r_S = e$ ,

$$\varrho = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{M} = \frac{\mathbf{T}_S}{r_S^2} + M.$$

Bewegt sich z. B. der Körper derart, daß der Drehpol immer die gleiche Entfernung vom Schwerpunkt behält, so ist die reduzierte Masse

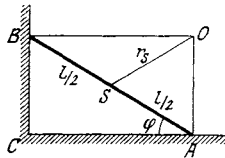


Fig. 670.

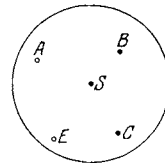


Fig. 671.

konstant. Gleitet etwa eine schwere homogene Stange an Wand und Boden (Fig. 670), so ist die nach den Schwerpunkt reduzierte Masse

$$\mathfrak{M} = \frac{4}{3} M.$$

**385. Massenreduktion mit Hilfe der dynamischen Ersatzpunkte.** Bei der Massenreduktion kann man sich mit Vorteil der dynamischen Ersatzpunkte bedienen, die wir im Abschnitt X kennen gelernt haben.

Wird die Masse des Systems z. B. durch die drei beliebig gewählten Punkte  $A, B, C$  und den Schwerpunkt  $S$  dynamisch ersetzt (Fig. 671) und sind  $\mu_A, \mu_B, \mu_C, \mu_S$  diese Ersatzmassen;  $v_A, v_B, v_C, v_S$  ihre Geschwindigkeiten; ist ferner  $E$  der Reduktionspunkt,  $v_E$  seine Geschwindigkeit, so ist die reduzierte Masse nach Gleichung 232:

$$\mathfrak{M} = \mu_A \left( \frac{v_A}{v_E} \right)^2 + \mu_B \left( \frac{v_B}{v_E} \right)^2 + \mu_C \left( \frac{v_C}{v_E} \right)^2 + \mu_S \left( \frac{v_S}{v_E} \right)^2.$$

Fällt der Reduktionspunkt mit einem dieser Punkte, z. B. mit  $A$ , zusammen, so wird

$$\mathfrak{M} = \mu_A + \mu_B \left( \frac{v_B}{v_A} \right)^2 + \mu_C \left( \frac{v_C}{v_A} \right)^2 + \mu_S \left( \frac{v_S}{v_A} \right)^2. \quad \dots \quad 235)$$

**386. Durchführung der graphischen Massenreduktion.** Nachdem die dynamischen Ersatzpunkte des Systems gewählt und ihre Massen  $\mu$  festgestellt sind, wird die reduzierte Masse nach der Gleichung 232:

$$\mathfrak{M} = \Sigma \left[ \mu \left( \frac{v}{v_E} \right)^2 \right]$$

ermittelt. Dies geschieht, indem man die Geschwindigkeitsverhältnisse  $\frac{v}{v_E}$  für alle Ersatzpunkte bestimmt; dabei kann  $v_E$  beliebig angenommen werden (z. B. mit 1 m/s). Die Geschwindigkeiten  $v$  werden mit Hilfe des Geschwindigkeitsplanes gesucht (vgl. II).

Zieht man, um  $\mathfrak{M}$  zu finden, die Rechnung vor, so wird man folgende Tabelle benützen:

Masse des Ersatzpunktes $\mu$	Geschwindigkeit d. Ersatzpunktes $v$	$\frac{v}{v_E}$	$\left( \frac{v}{v_E} \right)^2$	$\mu \cdot \left( \frac{v}{v_E} \right)^2$

Dann ist die Summe der in der letzten Kolonne stehenden Zahlen die reduzierte Masse. Diese Rechnung muß für jede Stellung des Systems durchgeführt werden, da sich mit ihr die Masse verändert (vgl. 376).

Zieht man die konstruktive Ermittlung der reduzierten Masse vor, so zeichnet man zunächst das  $v$ - $s$ -Diagramm eines Ersatzpunktes. Um dann z. B.

die Masse  $m = \mu \left( \frac{v}{v_E} \right)^2$

zu konstruieren, wähle man  $v_E$  derart, daß es durch die gleiche Strecke wie  $\mu$  dargestellt wird und konstruiere auf Grund dieser Annahme das  $v$ - $s$ -Diagramm (Fig. 672, Linie I).

Dann ist

$$m = \frac{v^2}{v_E^2} \mu$$

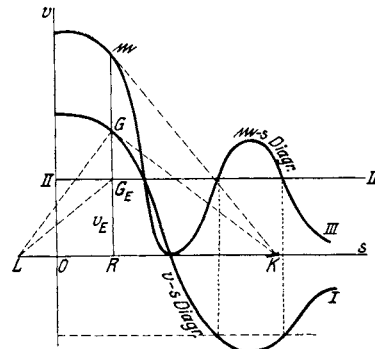


Fig. 672.

Zieht man für die Stelle  $R$  die Geraden  $GK \perp GL$ , wobei  $K$  oder  $L$  beliebig angenommen werden kann, ferner die Gerade  $II$  im Abstände  $v_E$  von der Achse  $Os$  und  $Km \perp LG_E$ , dann ist  $Rm$  die reduzierte Masse  $m$  des einen Ersatzpunktes. Denn aus der Konstruktion folgt:

$$\overline{LR} : \overline{RG} = \overline{RG} : \overline{RK}, \quad \overline{RG_E} : \overline{LR} = \overline{RK} : \overline{Rm},$$

woraus

$$\overline{RG_E} : \overline{RG} = \overline{RG} : \overline{Rm}$$

und

$$m = \frac{v^2}{v_E^2}.$$

Auf diese Weise wurde in Fig. 672 aus dem Geschwindigkeitsdiagramm *I* die Linie *III* der reduzierten Massen *m* des einen Ersatzpunktes ermittelt.

Dies muß für jeden Ersatzpunkt des Systems durchgeführt und schließlich die Massenlinien aller Ersatzpunkte addiert werden.

Das Diagramm der reduzierten Masse *m* eines Ersatzpunktes  $\mu$  hat einige bemerkenswerte Eigenschaften. Aus der Gleichung

$$m = \mu \left( \frac{v}{v_E} \right)^2$$

folgt, daß die reduzierten Massen das gleiche Vorzeichen haben wie die Ersatzmassen; da diese auch negativ sein können (vgl. 104), so gilt dies auch für die reduzierten Massen. Für  $v = v_E$  ist  $m = \mu$ .

Ferner wird

$$dm = \frac{2\mu}{v_E^2} \cdot v \cdot dv$$

und

$$d^2m = \frac{2\mu}{v_E^2} (dv^2 + v \cdot d^2v),$$

d. h. für  $v = 0$  wird sowohl  $m = 0$  wie auch  $dm = 0$ , aber  $d^2m \geq 0$ , je nachdem  $\mu \geq 0$  ist. An den Nullstellen des *v-s*-Diagramms berührt die Linie der reduzierten Masse die *s*-Achse und *m* ist hier ein Minimum bei positivem  $\mu$ . (Vgl. Fig. 672.)

An den Stellen, an denen *v* einen Extremwert erreicht, also  $dv = 0$  ist, wird  $dm = 0$  und

$$d^2m = \frac{2\mu}{v_E^2} v \cdot d^2v,$$

d. h. wenn  $\mu > 0$  und  $v > 0$  ist, wird die reduzierte Masse *m* gleichzeitig mit *v* ein Maximum oder Minimum; ist jedoch  $v < 0$ , so entspricht einem Minimum von *v* ein Maximum von *m* und umgekehrt.

**387. Massenreduktion nach Art der Kraftreduktion.** Es gibt endlich noch einen andern Weg, die Massen der Ersatzpunkte zu reduzieren, der von deren Geschwindigkeiten keinen Gebrauch macht. Denn die

Gleichung

$$m = \mu \left( \frac{v}{v_E} \right)^2$$

kann auch in der Form geschrieben werden

$$\sqrt{m} = \sqrt{\mu} \cdot \frac{v}{v_E}.$$

Erinnert man sich nun, daß eine in  $\mu$  wirkende Kraft, welche die Richtung von *v* hat, nach der Bewegungsrichtung des Punktes *E* reduziert wird mittels der Gleichung

$$\mathfrak{P} = P \cdot \frac{v}{v_E},$$

so bemerkt man, daß die Reduktion von  $\sqrt{\mu}$  nach  $E$  genau so vorgenommen werden kann, wie wir dies bei der Reduktion der Kräfte (vgl. Abschnitt XIII) kennen gelernt haben. Schließlich muß man freilich, um  $\mathfrak{M}$  zu erhalten, alle so gefundenen  $\sqrt{m}$  zur zweiten Potenz erheben und addieren.

**388. Beispiele.**

1. Ein aus zwei gleichen Stangen  $A_1A_2$  und  $A_3A_4$  bestehendes, starres und rechtwinkliges Achsenkreuz mit dem Mittelpunkte  $C$  schleift in zwei Hülsen, die sich um die festliegenden Punkte  $B_1$  und  $B_2$  drehen. Man reduziere die Masse  $M$  des Achsenkreuzes nach  $C$  (Fig. 673).

Die dynamischen Ersatzpunkte seien in  $A_1, A_2, A_3, A_4$  und  $C$  angenommen; dann sind die Massen dieser Punkte

$$\mu_{A_1} = \mu_{A_2} = \mu_{A_3} = \mu_{A_4} = \frac{M}{12}$$

und  $\mu_C = \frac{2}{3}M$  (vgl. 58).

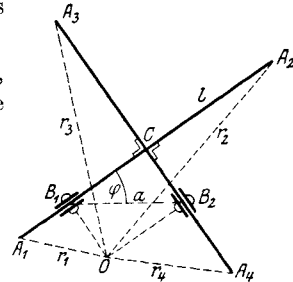


Fig. 673.

Errichtet man  $B_1O \perp A_1A_2, B_2O \perp A_3A_4$ , so ist der Schnitt  $O$  dieser beiden Senkrechten der Drehpol des Achsenkreuzes; bezeichnet man  $\overline{B_1B_2} = a, \overline{CA_1} = \overline{CA_2} = \dots = l$  und ist  $\sphericalangle C B_1 B_2 = \varphi$  der veränderliche Stellungswinkel des bewegten Systems, so bleibt  $OC = a$  unveränderlich und die Abstände der Punkte  $A$  von  $O$  sind:

$$\begin{aligned} \overline{OA_1}^2 &= r_1^2 = a^2 + l^2 - 2al \cos \varphi, \\ \overline{OA_2}^2 &= r_2^2 = a^2 + l^2 + 2al \cos \varphi, \\ \overline{OA_3}^2 &= r_3^2 = a^2 + l^2 + 2al \sin \varphi, \\ \overline{OA_4}^2 &= r_4^2 = a^2 + l^2 - 2al \sin \varphi. \end{aligned}$$

Wählt man  $C$  als Reduktionspunkt, so ist die nach  $C$  reduzierte Masse der Ersatzmasse  $\mu_{A_1}$ :

$$m_1 = \mu_{A_1} \left( \frac{v_{A_1}}{v_C} \right)^2 = \mu_{A_1} \frac{r_1^2}{a^2}$$

oder  $m_1 = \frac{M}{12} \left( 1 + \frac{l^2}{a^2} - 2 \frac{l}{a} \cos \varphi \right)$ ; analoge Ausdrücke ergeben sich für die anderen reduzierten Ersatzmassen  $m_2, m_3, m_4$ .

Die gesamte nach  $C$  reduzierte Masse ist dann

$$\mathfrak{M} = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + \mu_C = \frac{M}{12a^2} (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2) + \mu_C$$

oder 
$$\mathfrak{M} = M \left( 1 + \frac{l^2}{3a^2} \right) = \text{konstant.}$$

(Vgl. 384, Schluß.)

2. Ein homogener schwerer Stab  $AB$  von der Länge  $l$  gleite aus der ruhenden Anfangslage ( $\varphi = \varphi_0$ ), zwangsläufig an Wand und Boden ohne Reibung abwärts. Es sind die Diagramme der reduzierten Kraft und der reduzierten Masse zu zeichnen (Fig. 674).

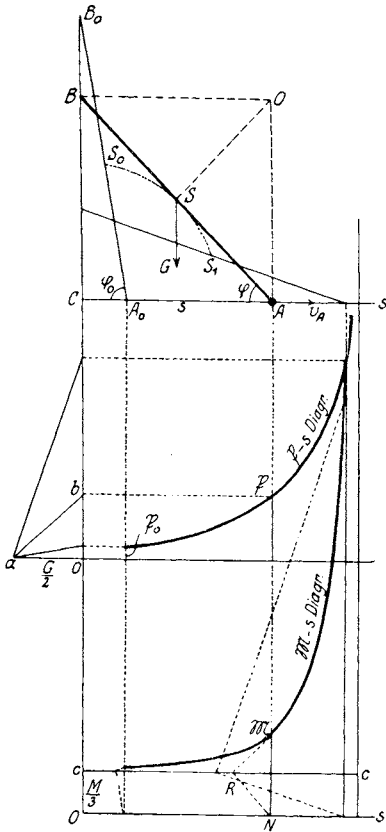


Fig. 674.

Diese Diagramme werden verschieden ausfallen, je nach der Wahl des Reduktionspunktes.

a) Man wähle zunächst das Fußende  $A$  des Stabes als Reduktionspunkt; dann ist für die reduzierte Gesamtkraft nach Gleichung 106:

$$\Re v_A = \sum [Pv \cos (Pv)].$$

In der Klammer stehen die Leistungen der äußeren Kräfte, die für die Führungsdrücke in  $A$  und  $B$  verschwinden; es bleibt nur jene des Gewichtes  $G$  der Stange übrig, also

$$\Re \cdot v_A = Gv_S \cos (Gv_S).$$

Ist  $O$  der Drehpol der Stange, so wird

$$v_A : v_S = OA : OS = 2 \sin \varphi \text{ und}$$

$$\sphericalangle (Gv_S) = \varphi,$$

somit 
$$\Re = \frac{G}{2} \cotg \varphi.$$

Ersetzt man  $\Re$  durch  $\mathfrak{R}$  und nennt  $CA = s$  den Weg des Reduktionspunktes  $A$ , so kann obige Gleichung auch in der Form geschrieben werden:

$$\mathfrak{R} = \frac{G}{2} \frac{s}{\sqrt{l^2 - s^2}}$$

d. i. das gewünschte Diagramm der reduzierten Kraft. In Fig. 674 wurde dieses Diagramm punktweise konstruiert. Es wurde maßstäblich  $oa = \frac{G}{2}$  gemacht, ferner  $ab \perp AB$  gezogen, dann ist  $ob = \mathfrak{R}$ . Das Diagramm beginnt für  $\varphi = \varphi_0$  mit  $\mathfrak{R}_0$  und endet für  $\varphi = 0$  mit  $\mathfrak{R} = \infty$  asymptotisch. Um die Masse  $M$  des Stabes nach  $A$  zu reduzieren, benütze man die Gleichung 234:

$$\mathfrak{M} = \frac{T_0}{e^2},$$

worin

$$e = OA = l \sin \varphi,$$

$$T_0 = T_S + Mr_S^2 = \frac{1}{12} Ml^2 + M \left( \frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} Ml^2$$

ist. Es bleibt  $\mathfrak{M} = \frac{M}{3} \frac{1}{\sin^2 \varphi}$

oder  $\mathfrak{M} = \frac{M}{3} \cdot \frac{l^2}{l^2 - s^2}$

die Gleichung des Diagramms der reduzierten Masse.

Das Fußende  $A$  des Stabes bewegt sich also so, wie wenn auf einen Punkt von veränderlicher Masse  $\frac{M}{3 \sin^2 \varphi}$  die Kraft  $\frac{G}{2} \cotg \varphi$  in Richtung der Bewegung wirken würde.

Das  $\mathfrak{M}$ - $s$ -Diagramm wurde in Fig. 674 konstruiert. Es wurde  $\overline{oc} = \frac{M}{3}$  maßstäblich aufgetragen, durch  $c$  die Parallele  $cc$  zur Achse  $os$ , sodann  $NR \parallel AB$  gezogen bis zum Schnitte  $R$  mit  $cc$  und endlich  $R\mathfrak{M} \perp AB$ ; dann ist  $N\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$ .

Auch dieses Diagramm endet für  $\varphi = 0$  asymptotisch im Unendlichen.

b) Wählt man statt  $A$  den anderen Endpunkt  $B$  der Stange als Reduktionspunkt, so gibt eine ähnliche Rechnung die Resultate:

$$\mathfrak{P}_1 = \frac{G}{2}, \quad \mathfrak{M}_1 = \frac{M}{3} \frac{1}{\cos^2 \varphi}.$$

Fig. 674 a zeigt das  $\mathfrak{M}_1$ - $s$ -Diagramm. Man mache  $\overline{oc} = \frac{M}{3}$ ,  $N_1R_1 \perp AB$ ,  $R_1\mathfrak{M}_1 \perp AB$ , dann ist  $N_1\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_1$ . Die Wegachse ist jetzt die Gerade  $CB$ .

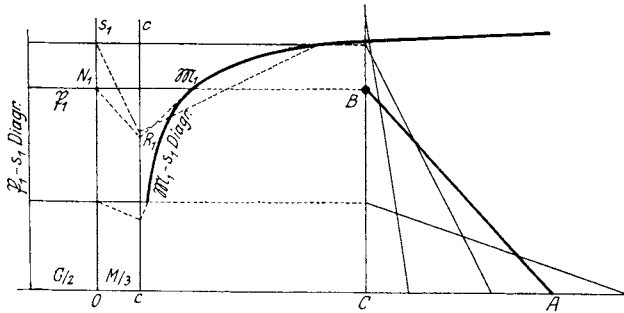


Fig. 674 a.

c) Man kann auch den Schwerpunkt  $S$  der Stange als Reduktionspunkt wählen (Fig. 674). Dann ist  $\mathfrak{P}_2 = G \cos \varphi$  und da die Entfernung des Schwerpunkts vom Drehpol  $O$  unveränderlich ist, nach 384, Schluß,  $\mathfrak{M}_2 = \frac{4}{3} M$ . Der Schwerpunkt beschreibt um  $C$  einen Kreisbogen vom Halbmesser  $\frac{l}{2}$  (Fig. 674), bewegt sich also wie ein Punkt von konstanter

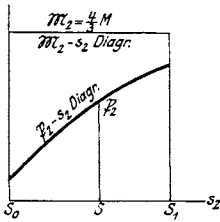
Masse  $\mathfrak{M}_2 = \frac{4}{3} M$  auf vorgeschriebener Kreisbahn unter dem Einflusse der Schwerkraft. Ist  $S_0$  die Anfangslage dieses Punktes und

$$H = \frac{l}{2} (\sin \varphi_0 - \sin \varphi)$$

seine Fallhöhe von  $S_0$  bis zur Lage  $S$ , so erreicht er in  $S$  die Geschwindigkeit  $v_S = \sqrt{2bH}$ , worin die Beschleunigung

$$b = \frac{G}{\mathfrak{M}_2} = \frac{3}{4} g$$

und somit  $v_S^2 = \frac{3}{4} gl (\sin \varphi_0 - \sin \varphi)$



ist. Fig. 674 b zeigt den aufgerollten Weg des Schwerpunkts als Wegachse mit dem  $\mathfrak{F}_2 \cdot s$  und dem  $\mathfrak{M}_2 \cdot s_2$ -Diagramm.

Fig. 674 b.

In allen drei betrachteten Fällen a), b), c) muß die Arbeit der reduzierten Kraft gleich der Arbeit der wirkenden Kräfte sein; diese ist, wenn der Schwerpunkt von  $S_0$  nach  $S$  sinkt:

$$\mathbf{A} = GH = G \frac{l}{2} (\sin \varphi_0 - \sin \varphi).$$

Im Falle a), Reduktion nach  $A$ , ist

$$\mathbf{A} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \mathfrak{F} ds, \text{ und da } \mathfrak{F} = \frac{G}{2} \cotg \varphi, \quad s = l \cos \varphi, \quad ds = -l \sin \varphi \cdot d\varphi:$$

$$\mathbf{A} = - \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{G}{2} l \cos \varphi d\varphi = G \frac{l}{2} (\sin \varphi_0 - \sin \varphi).$$

Im Falle b), Reduktion nach  $B$ , ist

$$\mathfrak{F}_1 = \frac{G}{2}, \quad s_1 = l \sin \varphi,$$

und da  $\mathfrak{F}_1$  und  $s_1$  entgegengesetzte Richtung haben:

$$\mathbf{A} = - \int_{\varphi_0}^{\varphi} \mathfrak{F}_1 ds_1 = \frac{G}{2} \int_{\varphi}^{\varphi_0} ds_1 = G \frac{l}{2} (\sin \varphi_0 - \sin \varphi).$$

Im Falle c), Reduktion nach  $S$ , ist

$$\mathfrak{F}_2 = G \cos \varphi, \quad ds_2 = \frac{l}{2} (-d\varphi)$$

und 
$$\mathbf{A} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \mathfrak{F}_2 ds_2 = \int_{\varphi_0}^{\varphi} G \cos \varphi \cdot \frac{l}{2} (-d\varphi) = G \frac{l}{2} (\sin \varphi_0 - \sin \varphi).$$

**389. Dynamik des geführten Systems.** Der zeitliche Verlauf der Bewegung eines geführten Systems mit Benützung eines Reduktionspunktes kann sowohl analytisch wie graphisch verfolgt werden.

Die analytische Behandlung empfiehlt sich nur in wenigen, besonders einfachen Fällen, in denen die Massenverteilung einem einfachen Gesetze gehorcht und die Führung sich durch ganz spezielle Form auszeichnet. Jedoch selbst dann versagt die analytische Behandlung oft sehr rasch und es empfiehlt sich deshalb, sobald man die mathematische Schwierigkeit des Ansatzes bemerkt, sofort der Übergang zur graphischen Methode.

Da das Arbeitsprinzip auch für veränderliche Massen gilt, soll zunächst gezeigt werden, wie man es zur Berechnung des Geschwindigkeitszustandes benützen kann. Wir wählen hierzu das soeben behandelte Beispiel des herabgleitenden schweren Stabes (Fig. 674) mit dem Reduktionspunkte  $A$ .

Da der Stab anfangs in Ruhe ist, lautet das Arbeitsprinzip für die nach  $A$  reduzierte Kraft und Masse:

$$\frac{1}{2} M v_A^2 = \mathbf{A} = G \frac{l}{2} (\sin \varphi_0 - \sin \varphi)$$

und da 
$$M = \frac{3}{2} \sin^2 \varphi;$$

so folgt: 
$$v_A^2 = 3 gl \sin^2 \varphi (\sin \varphi_0 - \sin \varphi).$$

Die Geschwindigkeitshöhe ist

$$h = \frac{v_A^2}{2g} = \frac{3}{2} l \sin^2 \varphi (\sin \varphi_0 - \sin \varphi);$$

mit 
$$\begin{aligned} CA &= l \cos \varphi = s, & CA_0 &= l \cos \varphi_0 = s_0, \\ AB &= l \sin \varphi = s_1, & CB_0 &= l \sin \varphi_0 = s_{10} \\ s^2 + s_1^2 &= l^2, & s_0^2 + s_{10}^2 &= l^2 \end{aligned}$$

wird 
$$h = \frac{3}{2} l^2 s_1^2 (s_{10} - s_1).$$

Aus 
$$\frac{dh}{ds_1} = 0$$
 folgt für den Extremwert von  $h$ :

$$s_1 = \frac{2}{3} s_{10}$$

und daraus die Koordinaten:

$$s = \frac{1}{3} \sqrt{5l^2 + 4s_0^2}, \text{ und } \max h = \frac{2}{3} l \sin^3 \varphi_0;$$

Aus 
$$\frac{d^2h}{ds_1^2} = 0$$
 erhält man für den Wendepunkt des Diagramms

$s_1 = \frac{1}{3} s_{10}$  und die Koordinaten

$$s = \frac{1}{3} \sqrt{8l^2 + s_0^2} \text{ und } h_w = \frac{1}{3} l \sin^3 \varphi_0 = \frac{1}{2} \max h.$$

Obwohl die mathematische Behandlung dieses Beispiels auf einfache Weise zu den Diagrammen führt und jedenfalls der mühsameren graphischen Methode vorzuziehen ist, soll doch schon hier diese Methode



vorgeführt werden, damit sich der Leser in diese einfühle; er ist hier noch in der Lage, die auf analytischem Wege gefundenen Resultate zum Vergleich heranziehen zu können.

In später zu behandelnden, allgemeineren Fällen werden wir von der analytischen Methode ohnedies ganz absehen müssen und nur die graphische anwenden können.

Fig. 675 zeigt die graphische Lösung.  $AB$  sei eine allgemeine Lage der Stange;  $A_0C B_0$  das feste Achsenkreuz der Führung,  $A_0B_0$  die Anfangslage. Es sei  $l = 1,2$  met; die Zeichnung wurde im Maßstabe 1:10 angefertigt (und danach alles auf  $\frac{2}{3}$  verkleinert). Das Gewicht der Stange wurde mit 6 kg angenommen und durch eine Strecke von 6 cm dargestellt. Als Reduktionspunkt wurde  $A$  gewählt. Das  $\mathfrak{P}$ - $s$ -Diagramm wird wie in Fig. 674 konstruiert.

Seine Integralkurve ist das  $A$ - $s$ -Diagramm. Statt hier die Flächen zu planimetrieren, empfiehlt es sich, die bereits gefundene Gleichung

$$\mathbf{A} = G \frac{l}{2} (\sin \varphi_0 - \sin \varphi)$$

zu benützen. Sind die Maßstäbe:

Längenmaßstab: 1 cm Zeichnung =  $a$  m Länge,

Kraftmaßstab: 1 cm Zeichnung =  $\varkappa$  kg Kraft,

so ist nach Gleichung 181:

$$\mathbf{A} = \lambda a = a \varkappa \mathfrak{A};$$

setzt man also  $\varkappa \mathfrak{A} = \frac{G}{2}$ , so wird  $a a = l (\sin \varphi_0 - \sin \varphi)$ , d. h. es ist  $B_0B$  die Ordinate des  $\mathbf{A}$ - $s$ -Diagramms, das von der Achse  $II$  aus gezählt wird.

Da  $\varkappa = 1$  angenommen wurde, ist die Arbeitsbasis  $\mathfrak{A} = \frac{G}{2\varkappa} = 3$  cm.

Das Diagramm beginnt in  $a_0$  auf  $II$  und endet in  $II$ . Es ist ein Kreisbogen mit dem Mittelpunkte  $C$ , und zwar fällt er zusammen mit der festen Rollkurve des Stabes (Ort des Drehpols).

Das  $\mathfrak{M}$ - $s$ -Diagramm kann am raschesten nach der Gleichung

$$\mathfrak{M} = \frac{M}{3 \sin^2 \varphi}$$

aufgetragen werden; statt dessen wurden jedoch die reduzierten Massengewichte

$$\mathfrak{G} = \frac{G}{3 \sin^2 \varphi}$$

konstruiert. Da  $\frac{G}{3}$  durch eine Länge von 2 cm gemessen wird, wurde diese von  $III$  nach  $c$  aufgetragen und durch  $c$  eine Parallele zu  $III III$  gezogen. Dann wurde  $NR \parallel AB$ ,  $R\mathfrak{G} \perp AB$  gezogen; es ist  $\overline{N\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}$  im Kraftmaßstabe. Auf diese Weise wurde das  $\mathfrak{G}$ - $s$ -Diagramm punktweise gezeichnet; es beginnt in  $s_0$  und endet in  $s = l$  mit  $\mathfrak{G} = \infty$ .

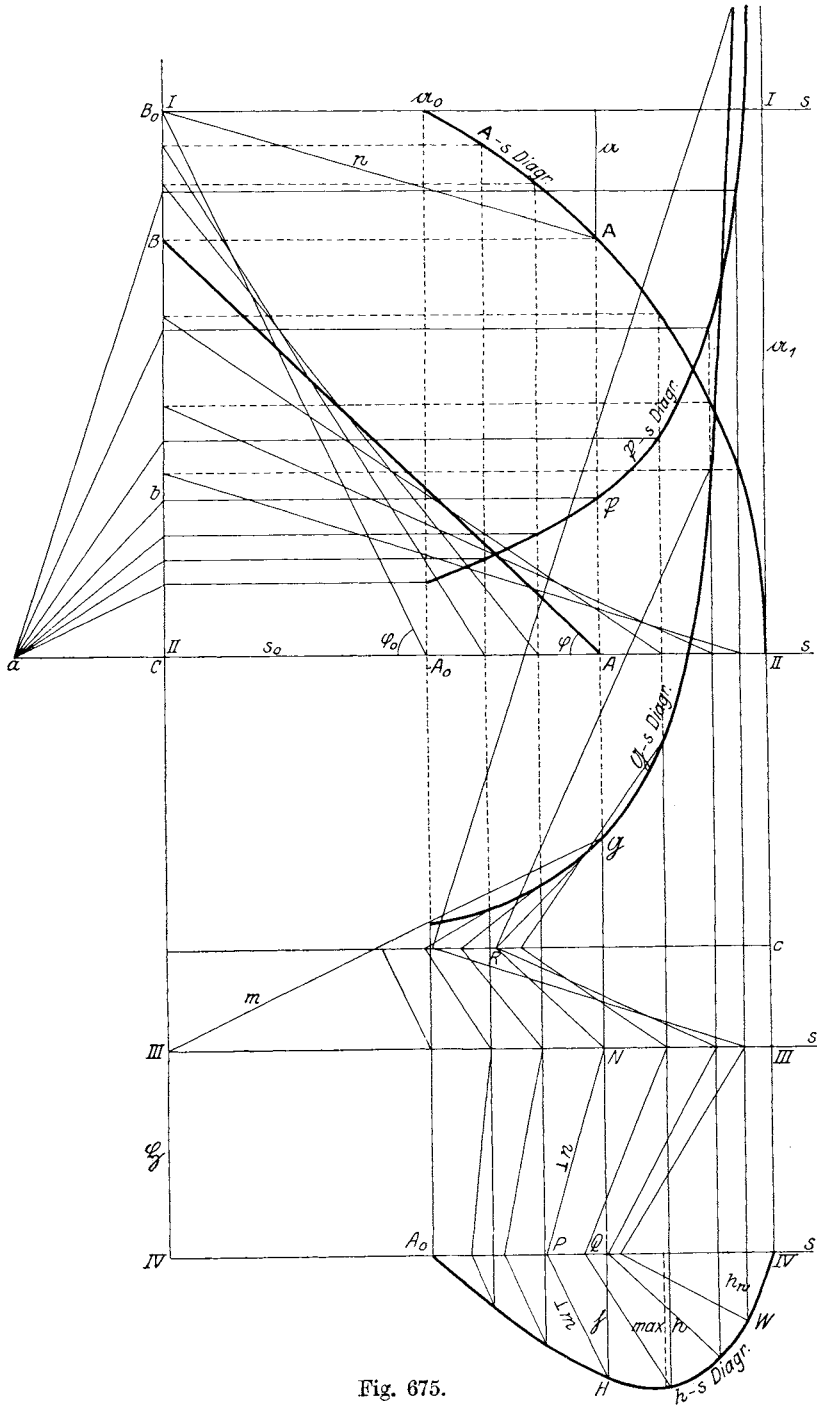


Fig. 675.

Sodann wurden die Geschwindigkeitshöhen  $h$  konstruiert und von der Achse  $IVIV$  nach abwärts aufgetragen. In  $A_0$  und  $A_1$ , der höchsten und tiefsten Lage des Stabes entsprechend, ist  $h = 0$ .

Die Konstruktion der Strecke  $\mathfrak{h}$ , welche  $h$  maßstäblich darstellt, ist von früher bekannt (vgl. 339).

Um sie für die Stelle  $A$  nochmals vorzuführen, trage man von  $III$  eine beliebig gewählte Länge  $\mathfrak{S} = 4$  cm nach abwärts auf und ziehe die Parallele  $IVIV$  zu  $III III$ . Durch den Fußpunkt  $N$  ziehe man  $NP \perp n$ , wobei  $n$  die Verbindungslinie  $B_0A$  ist; ferner  $PH \perp m$ , wobei  $m$  die Verbindungslinie  $III \mathfrak{S}$  ist. Dann ist  $\overline{QH} = \mathfrak{h}$ .

Um schließlich den Maßstab der Geschwindigkeitshöhen

1 cm Zeichnung =  $\varepsilon$  met. Geschwindigkeitshöhe zu finden, für welchen die Gleichung 168 gilt:

$$\mathfrak{h} = \frac{h}{\varepsilon},$$

beachte man, daß Gleichung 184 mit  $\mathfrak{h}_0 = 0$  und  $\mathfrak{S}$  statt  $P$ ,  $\mathfrak{g}$  statt  $p$  die Beziehung liefert:

$$\mathfrak{h} \mathfrak{g} = \mathfrak{S} a,$$

daß ferner nach den Gleichungen 181, 229 und 230:

$$\mathbf{A} = a \kappa \mathfrak{A} a \text{ und } \mathbf{A} = \mathfrak{S} h = \mu \mathfrak{g} \varepsilon \mathfrak{h}$$

ist, woraus sich 
$$\varepsilon = \frac{a \kappa}{\mu} \cdot \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{S}}$$

ergibt. Nun war  $a = \frac{1}{10}$ ,  $\kappa = 1$ ,  $\mu = 1$ ,  $\mathfrak{A} = 3$  cm,  $\mathfrak{S} = 4$  cm; es wird

somit  $\varepsilon = \frac{3}{40}$ , und der Maßstab der Geschwindigkeitshöhen:

1 cm Zeichnung =  $\frac{3}{40}$  met. Geschwindigkeitshöhe.

**390. Dynamik der Konchoidenführung.** Ein homogener Stab  $\overline{AC} = l$ , dessen Masse  $M$  sei, werde mit seinem Endpunkte  $A$  in der Geraden  $A_0A$  geführt, während der Stab selbst durch eine um den festen Punkt  $B$  drehbare Hülse gleitet. Diese Hülse werde mit einem konstant bleibenden Kraftmoment  $\mathbf{M}$  gedreht. In der Anfangslage  $A_0B$  sei der Stab in Ruhe. Man ermittle den zeitlichen Verlauf der Bewegung, insbesondere die Geschwindigkeit  $v_A$ . Auf das Gewicht des Stabes sei keine Rücksicht zu nehmen (Fig. 676).

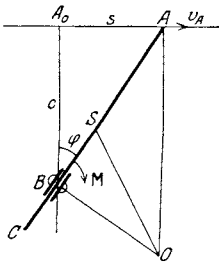


Fig. 676.

a) Analytische Lösung. Als Reduktionspunkt werde das Stabende  $A$  gewählt.

Um die Kräfte nach  $A$  zu reduzieren, verdrehe man den Stab um den Winkel  $d\varphi$ ; die Arbeit des wirkenden Momentes ist dann  $\mathbf{M} \cdot d\varphi$ ; rückt dabei  $A$  um  $ds$  weiter, so ist die Arbeit der reduzierten Kraft  $\mathfrak{P} \cdot ds$ ; setzt man diese Arbeiten gleich und beachtet, daß

$$s = A_0 \dot{A} = c \cdot \operatorname{tg} \varphi, \quad ds = c \cdot \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}$$

ist, so wird die reduzierte Kraft

$$\mathfrak{P} = \frac{\mathbf{M}}{c} \cos^2 \varphi.$$

Die Masse der Stange kann dynamisch durch die drei Punktmassen

$$\mu_A = \mu_C = \frac{M}{6}, \quad \mu_S = \frac{2}{3} M$$

in  $A$ ,  $C$  und im Schwerpunkt  $S$  ersetzt werden (vgl. Gleichung 58).  
Dann ist wie in Gleichung 235:

$$\mathfrak{W} = \mu_A + \mu_C \left( \frac{v_C}{v_A} \right)^2 + \mu_S \left( \frac{v_S}{v_A} \right)^2 = \frac{M}{6} \left[ 1 + \left( \frac{v_C}{v_A} \right)^2 + 4 \left( \frac{v_S}{v_A} \right)^2 \right].$$

Um die Verhältnisse der Geschwindigkeiten zu bestimmen, suche man den Drehpol  $O$  des bewegten Systems, indem man  $AO \perp A_0 A$  und  $BO \perp AB$  errichtet und zum Schnitte bringt. Es ist dann

$$v_C : v_A = \overline{OC} : \overline{OA} \quad \text{und} \quad v_S : v_A = \overline{OS} : \overline{OA}.$$

Aus der Figur ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\overline{OA} = \frac{\overline{AB}}{\cos \varphi} = \frac{c}{\cos^2 \varphi}, \quad \overline{OC}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{BC}^2, \quad \overline{OS}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{BS}^2,$$

$$\overline{OB} = \overline{AB} \cdot \operatorname{tg} \varphi = \frac{c \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}, \quad \overline{BC} = l - \frac{c}{\cos \varphi}, \quad \overline{BS} = \frac{c}{\cos \varphi} - \frac{l}{2},$$

woraus 
$$\overline{OC}^2 = \frac{1}{\cos^4 \varphi} (c^2 + l^2 \cos^4 \varphi - 2 cl \cos^3 \varphi),$$

$$\overline{OS}^2 = \frac{1}{\cos^4 \varphi} \left( c^2 + \frac{l^2}{4} \cos^4 \varphi - cl \cos^3 \varphi \right)$$

und 
$$\mathfrak{W} = M \left( 1 + \frac{l^2}{3c^2} \cos^4 \varphi - \frac{l}{c} \cos^3 \varphi \right).$$

Um die Geschwindigkeit  $v_A$  des Reduktionspunktes zu finden, benütze man das Arbeitsprinzip

$$L - L_0 = \mathbf{A}$$

und da der Stab anfangs in Ruhe ist:

$$\frac{1}{2} \mathfrak{W} v_A^2 = \mathbf{A} = \mathbf{M} \varphi,$$

woraus 
$$v_A^2 = \frac{2 \mathbf{M} \varphi}{M \left( 1 + \frac{l^2}{3c^2} \cos^4 \varphi - \frac{l}{c} \cos^3 \varphi \right)}.$$

b) Graphische Lösung. Die Fig. 677 wurde derart angelegt, daß die Bewegung des Punktes  $A$  in der Geraden  $II$  erfolgt; die Entfernung  $A_0 \bar{B}$  wurde mit  $c = 1,5$  m gewählt; der Längenmaßstab  $\alpha = \frac{1}{10}$ , so daß die Strecke

$$c = A_0 B = \frac{c}{a} = \frac{1,5}{0,1} = 15 \text{ cm}$$

wird. Das Kraftpaar  $\mathbf{M}$  wurde mit 750 mkg angenommen; dann ist die reduzierte Kraft

$$\mathfrak{F} = \frac{\mathbf{M}}{c} \cos^2 \varphi = 500 \cos^2 \varphi \text{ kg.}$$

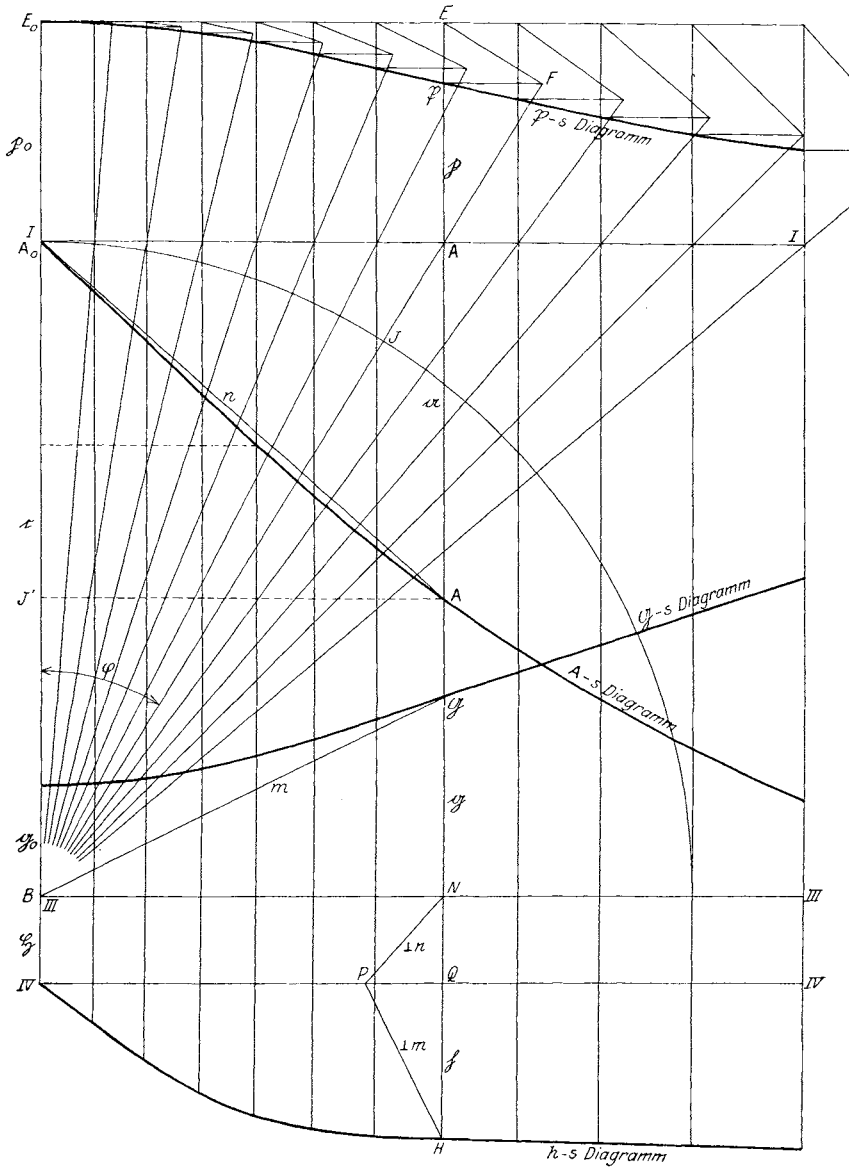


Fig. 677.

Für den Kraftmaßstab  $\kappa = 100$  ist die Ordinate des  $\mathfrak{P}$ -s-Diagramms  $p = \frac{\mathfrak{P}}{\kappa}$  oder  $p = 5 \cos^2 \varphi$  cm;

die Anfangsordinate für  $\varphi = 0: p_0 = \overline{A_0 E_0} = 5$  cm wurde von  $A_0$  nach aufwärts aufgetragen. Die Stellungen der gedrehten Stange wurden sodann für die Winkel

$$\varphi = 4\frac{1}{2}^\circ, 9^\circ, 13\frac{1}{2}^\circ, 18^\circ \text{ usf.}$$

gezeichnet und zu diesem Zwecke aus  $B$  ein Kreisbogen mit 15 cm Halbmesser gezeichnet. Um für die Lage  $A$  die reduzierte Kraft zu zeichnen wurde durch  $E_0$  eine Parallele zur Achse  $II$  gezogen,  $AE$  senkrecht dazu errichtet,  $EF \perp AB$  und  $F\mathfrak{P} \perp AE$  gezeichnet, dann ist  $\overline{A\mathfrak{P}} = p$ .

Für die Arbeit des Momentes fanden wir früher  $\mathbf{A} = \frac{\mathbf{M}}{c} \cdot c\varphi$ . Nun ist nach Gleichung 181 auch:  $\mathbf{A} = \alpha\kappa\mathfrak{A}$ ; setzt man also  $\frac{\mathbf{M}}{c} = \kappa\mathfrak{A}$ ,  $c\varphi = \alpha a$ , so ist die Arbeitsbasis  $\mathfrak{A} = 5$  cm und die Ordinate des  $\mathbf{A}$ -s-Diagramms:

$a = \frac{c}{\alpha} \varphi = 15 \varphi$  cm. Der Bogen  $\widehat{A_0 J} = c\varphi$  ist also ein Maß für die Arbeit. Macht man  $\overline{A_0 J'} = \widehat{A_0 J}$  und zieht  $J'A \parallel II$ , so ist  $A\mathbf{A} = a$  die Ordinate des  $\mathbf{A}$ -s-Diagramms, das auf diese Weise konstruiert wurde. Sein Maßstab ist nach Gleichung 181:

$$1 \text{ cm Zeichnung} = \lambda \text{ mkg Arbeit,}$$

worin  $\lambda = \alpha\kappa\mathfrak{A} = \frac{1}{10} \cdot 100 \cdot 5 = 50$  ist.

Für das  $\mathfrak{M}$ -s-Diagramm kann die oben gefundene Gleichung benützt werden, die auch in der Form angeschrieben werden kann:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{M}g = G \left[ 1 + \frac{l^2}{3c^2} \cos^4 \varphi - \frac{l}{c} \cos^3 \varphi \right] \text{ kg.}$$

Mit  $G = 10$  kg,  $l = 2,4$  met,  $c = 1,5$  met. wird

$$\mathfrak{G} = 10 [1 + 0,853 \cos^4 \varphi - 1,6 \cos^3 \varphi] \text{ kg}$$

und hieraus für

$$\begin{aligned} \varphi &= 0^\circ, & 4\frac{1}{2}^\circ, & 9^\circ, & 13\frac{1}{2}^\circ, & 18^\circ, & 22\frac{1}{2}^\circ, & 27^\circ, \\ \mathfrak{G} &= 2,53, & 2,57, & 2,70, & 2,92, & 3,22, & 3,59, & 4,06 \text{ kg;} \\ \varphi &= 31\frac{1}{2}^\circ, & 36^\circ, & 40\frac{1}{2}^\circ, & 45^\circ, & 49\frac{1}{2}^\circ, & 54^\circ, \\ \mathfrak{G} &= 4,59, & 5,18, & 5,81, & 6,48, & 7,13 & 7,76 \text{ kg.} \end{aligned}$$

Diese reduzierten Massengewichte wurden in der Zeichnung von der Achse  $III$  nach aufwärts aufgetragen; wählt man hierfür den Maßstab

$$1 \text{ cm Zeichnung} = \mu \text{ kg Massengewicht,}$$

so ist die Strecke in cm, welche das Massengewicht  $\mathfrak{G}$  darstellt:

$$\mathfrak{G} = \frac{\mathfrak{G}}{\mu} \dots \dots \dots 230)$$

In der Zeichnung wurde  $\mu = 1$  gewählt.

Das Diagramm der Geschwindigkeitshöhen wurde in derselben Weise konstruiert wie im vorigen Abschnitt. Es ist hier

$$\alpha = \frac{1}{10}, \kappa = 100, \mu = 1, \mathfrak{A} = 5 \text{ cm}, \mathfrak{S} = 2 \text{ cm},$$

somit in  $\mathfrak{h} = \frac{h}{\varepsilon}$  (Gleichung 168)

$$\varepsilon = \frac{\alpha \kappa}{\mu} \cdot \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{S}} = 25,$$

also der Maßstab des  $h$ - $s$ -Diagramms:

1 cm Zeichnung = 25 m Geschwindigkeitshöhe.

**391. Dynamik der Schubkurbelführung. Analytische Lösung eines Sonderfalles.** Eine homogene Stange  $AB = r$  (Fig. 678) werde derart geführt, daß der Endpunkt  $A$  einen Kreis vom Halbmesser  $r$  und der andere Endpunkt  $B$  eine Gerade beschreibt, die durch den Mittelpunkt  $\mathfrak{A}$  des Kreises geht.

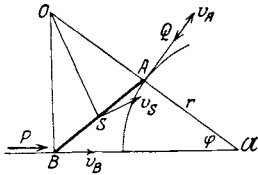


Fig. 678.

Die konstante Kraft  $P$  soll in die Richtung von  $v_B$ , der konstante Widerstand  $Q$  in die entgegengesetzte Richtung von  $v_A$  fallen. Als Reduktionspunkt wurde  $A$  gewählt. Dann ist die Resultante der nach  $A$  reduzierten Kräfte

$$\mathfrak{R} = P \cdot \frac{v_B}{v_A} - Q;$$

konstruiert man den Drehpol  $O$  der Stange  $AB$ , so ist

$$v_B : v_A = OB : OA = 2 \sin \varphi,$$

also

$$\mathfrak{R} = 2 P \sin \varphi - Q$$

und die Arbeit der reduzierten Kraft

$$\mathbf{A} = \int \mathfrak{R} \cdot ds = \int_0^\varphi (2 P \sin \varphi - Q) \cdot r d\varphi = r \left[ 4 P \sin^2 \frac{\varphi}{2} - Q \varphi \right].$$

Da die Masse des Stabes als gleichförmig verteilt angenommen wurde, ist ähnlich wie in 390, Dynamik der Konchoidenführung, die reduzierte Masse:

$$\mathfrak{M} = \frac{M}{6} \left[ 1 + \left( \frac{v_B}{v_A} \right)^2 + 4 \left( \frac{v_S}{v_A} \right)^2 \right];$$

es ist  $v_S : v_A = OS : OA$  und

$$\left( \frac{v_S}{v_A} \right)^2 = 2 \sin^2 \varphi + \frac{1}{4},$$

woraus

$$\mathfrak{M} = \frac{M}{3} + 2 M \sin^2 \varphi.$$

Ist für  $\varphi = 0$  die Geschwindigkeit  $v_{A0}$  gegeben, so folgt jetzt aus dem Arbeitsprinzip:

$$M \left[ \left( \frac{1}{3} + 2 \sin^2 \varphi \right) v_A^2 - \frac{1}{3} v_{A0}^2 \right] = 2r \left[ 4P \sin^2 \frac{\varphi}{2} - Q\varphi \right],$$

woraus  $v_A$  für jede Stellung  $\varphi$  gerechnet werden kann.

So einfach die analytische Lösung in diesem Falle wird, um so verwickelter wird sie, wenn man die vielen vereinfachenden Annahmen fallen läßt und z. B. annimmt, daß die Kräfte  $P$  und  $Q$  veränderlich sind, daß die Masse der Stange nicht gleichförmig verteilt ist, daß die Stange  $BA$  nicht ebensolang ist wie  $OA$  und daß die Gerade, die  $B$  beschreibt, nicht durch  $\mathcal{U}$  geht. Alle diese Voraussetzungen treffen bei technischen Anwendungen ganz oder zum Teile zu; die analytische Lösung ist dann geradezu unmöglich, insbesondere wenn es sich um zahlenmäßige Auswertung handelt.

Im folgenden soll diese Aufgabe graphisch gelöst werden, und zwar unter den oben genannten, die Einfachheit aufhebenden Voraussetzungen.

**392. Dynamik der Schubkurbelbewegung. Graphische Lösung des allgemeinen Falles.** In Fig. 679 sind die Abmessungen einer geschränkten

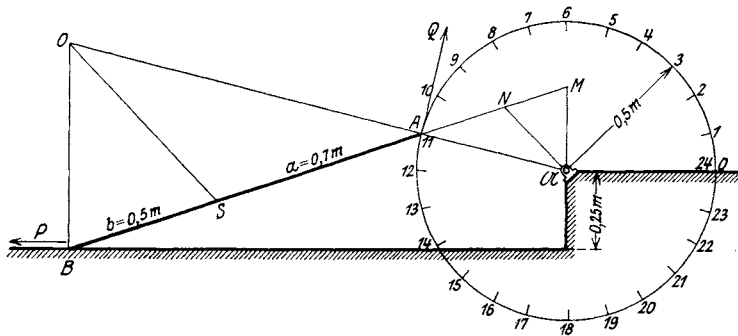


Fig. 679.

Schubkurbel angegeben; es ist  $r = 0,5$  m der Halbmesser des Kurbelkreises,  $l = 1,2$  die Länge der Schubstange  $AB$ , deren Bewegung dynamisch untersucht werden soll. Ihr Gewicht sei  $G = 90$  kg, ihr Schwerpunkt  $S$  habe die Abstände  $AS = a = 0,7$  m,  $BS = b = 0,5$  m; der Trägheitshalbmesser in bezug auf den Schwerpunkt sei durch  $i^2 = 0,18$  m<sup>2</sup> gegeben.

Verteilt man die Masse der Schubstange auf die Endpunkte  $A$ ,  $B$  und den Schwerpunkt, so sind diese drei dynamischen Ersatzmassen nach Gleichung 58:



$$\mu_A = M \frac{i^2}{al} = \frac{19,3 \text{ kg}}{g}, \quad \mu_B = M \frac{i^2}{bl} = \frac{27 \text{ kg}}{g},$$

$$\mu_S = M \left(1 - \frac{i^2}{ab}\right) = \frac{43,7 \text{ kg}}{g}$$

und somit die Massengewichte:

$$\mathfrak{G}_A = 19,3 \text{ kg}, \quad \mathfrak{G}_B = 27 \text{ kg}, \quad \mathfrak{G}_S = 43,7 \text{ kg};$$

ihre Summe ist 90 kg.

Als Reduktionspunkt wurde *A* gewählt. Dann ist die nach *A* reduzierte Masse nach Gleichung 235:

$$\mathfrak{M} = \mu_A + \mu_B \left(\frac{v_B}{v_A}\right)^2 + \mu_S \left(\frac{v_S}{v_A}\right)^2.$$

Die Verhältnisse der Geschwindigkeiten wurden in der Weise bestimmt, daß  $v_A$  beliebig angenommen, z. B. durch die Länge  $AN$  dargestellt, und hieraus wie in Fig. 115  $v_B$  und  $v_S$  ermittelt wurden (Fig. 679).

Man wird also durch  $\mathfrak{M}$  eine Senkrechte zur Schubrichtung ziehen und mit  $BA$  zum Schnitt  $M$  bringen; dann ist  $\overline{M\mathfrak{M}} = v_B$ .

Ist der Drehpol  $O$  zugänglich, so ziehe man  $\mathfrak{M}N \parallel SO$ ; dann ist  $\overline{N\mathfrak{M}} = v_S$ ; ist  $O$  nicht zugänglich, so mache man

$$\overline{AN} : \overline{NM} = a : b;$$

denn  $ANM$  ist der um  $90^\circ$  gedrehte Geschwindigkeitsplan von  $ASB$  mit dem Nullpunkt in  $\mathfrak{M}$ .

Für 24 Stellungen des Punktes *A* wurden die Geschwindigkeitsverhältnisse  $\frac{v_B}{v_A}$  und  $\frac{v_S}{v_A}$  ermittelt und in folgender Tafel eingetragen, von der jedoch nur die Zahlen für die Stellungen 0 bis 5 mitgeteilt wurden.

Stellung des Punktes A	$\frac{v_B}{v_A}$	$\frac{v_S}{v_A}$	$\left(\frac{v_B}{v_A}\right)^2$	$\left(\frac{v_S}{v_A}\right)^2$	$\mu_A g$	$\mu_B g \left(\frac{v_B}{v_A}\right)^2$	$\mu_S g \left(\frac{v_S}{v_A}\right)^2$	$\mathfrak{G}^{kg}$	$P^{kg}$	$\mathfrak{P}^{kg} =$ $P \cdot \frac{v_B}{v_A}$
0	0.21	0.433	0.044	0.187	19.3	1.188	8.17	28.66	146	30.66
1	0.065	0.406	0.004	0.165		0.108	7.21	26.62	164	10.66
2	0.1	0.45	0.01	0.20		0.270	8.74	28.31	180	18.00
3	0.29	0.55	0.034	0.30		2.268	13.11	34.68	192	55.68
4	0.51	0.7	0.26	0.49		7.02	21.41	47.73	196	99.96
5	0.76	0.85	0.578	0.72		15.606	31.46	66.37	203	154.28

Aus ihnen wurden folgende Größen ermittelt und in die Tafel eingeschrieben:  $\left(\frac{v_B}{v_A}\right)^2$ ,  $\left(\frac{v_S}{v_A}\right)^2$ ,  $\mu_B g \left(\frac{v_B}{v_A}\right)^2$ ,  $\mu_S g \left(\frac{v_S}{v_A}\right)^2$ , ferner die Summe

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{M}g = \mu_A g + \mu_B g \left(\frac{v_B}{v_A}\right)^2 + \mu_S g \left(\frac{v_S}{v_A}\right)^2.$$

In Fig. 680 wurde zuerst das *P-s*-Diagramm der Triebkraft und das *Q-s*-Diagramm des Widerstandes als gegeben betrachtet; *s* ist der

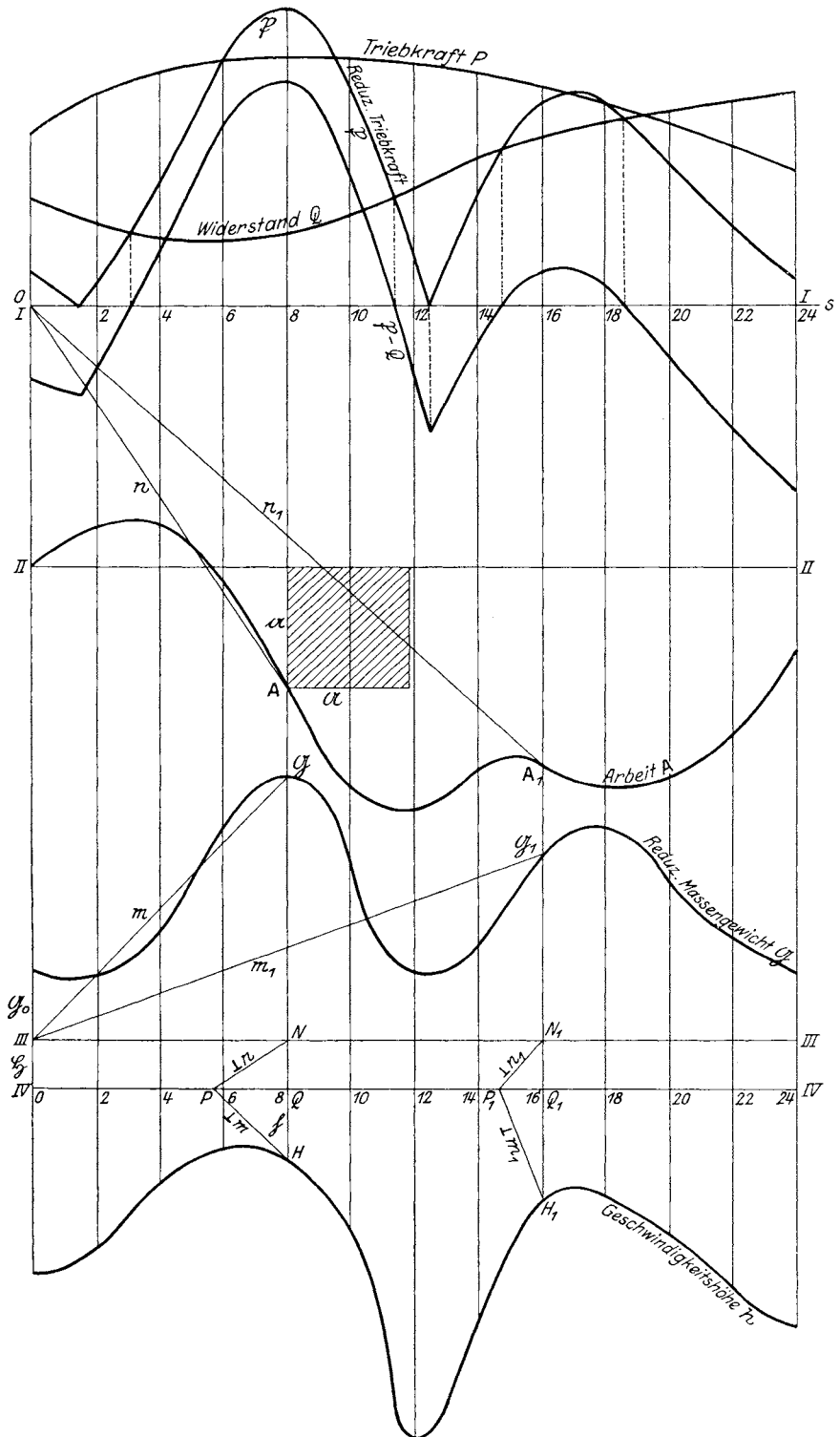


Fig. 680.

aufgerollte Weg des Reduktionspunktes  $A$ . Die Werte von  $P$  wurden ebenfalls in die Tafel eingetragen, ebenso die nach der Gleichung

$$\mathfrak{P} = P \left( \frac{v_B}{v_A} \right)^2$$

reduzierten Triebkräfte. Als drittes Diagramm wurde jenes der Differenzen  $\mathfrak{P} - Q$  gezeichnet.

Als Maßstäbe wurden gewählt:

Längenmaßstab 1 cm Zeichnung = 0,2 m Länge,

Kraftmaßstab 1 cm Zeichnung = 40 kg Kraft,

Massengewichtsmaßstab 1 cm Zeichnung = 20 kg Massengewicht;

es ist also  $\alpha = 0,2$ ,  $\varkappa = 40$ ,  $\mu = 20$ .

Die Massengewichte  $\mathcal{G}$  wurden von der Achse  $III III$  nach aufwärts aufgetragen.

Die Geschwindigkeit des Punktes  $A$  wurde für die Stellung 0 mit  $v_0 = 8,7$  m/sek angenommen; dann ist die Bewegungsenergie für diese Stellung

$$L_0 = \frac{1}{2} M_0 v_0^2 = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{G}_0}{g} v_0^2 = 110,33 \text{ mkg.}$$

Wählt man den

Arbeitsmaßstab 1 cm Zeichnung = 20 mkg Arbeit,

also  $\lambda = 20$ , so gibt die Strecke  $l_0 = III = 5,5$  cm,

die Darstellung der Bewegungsenergie  $L_0$ . Für die Zeichnung des  $A$ - $s$ -Diagramms sei an die Gleichungen 181 erinnert:

$$\mathbf{A} = \alpha \varkappa \mathfrak{A} = \lambda \alpha.$$

Die Arbeitsbasis ist demnach

$$\mathfrak{A} = \frac{\lambda}{\alpha \varkappa} = 2,5 \text{ cm.}$$

Die Flächen des  $\mathfrak{P}$ - $Q$ -Diagramms wurden sodann planimetriert und in Rechtecke umgewandelt, von denen  $\mathfrak{A}$  die eine Seite ist; die andere Seite ist dann die Ordinate  $\alpha$  des  $\mathbf{A}$ - $s$ -Diagramms.

Aus dem  $\mathbf{A}$ - $s$ -Diagramm und dem  $\mathcal{G}$ - $s$ -Diagramm wurde schließlich das Diagramm der Geschwindigkeitshöhen in derselben Weise konstruiert wie in den Figg. 675 und 677. Dabei wurde  $\xi = 1$  cm gewählt, so daß

$$\varepsilon = \frac{\alpha \varkappa}{\mu} \cdot \frac{\mathfrak{A}}{\xi} = 1$$

wird. Es ist also der Maßstab der Geschwindigkeitshöhen:

1 cm Zeichnung = 1 m Geschwindigkeitshöhe.

**393. Aufgaben.**

Folgende Systembewegungen sind durch Reduktion der angegebenen Kräfte und der Massen nach  $A$  dynamisch zu untersuchen:

150. Die homogene Stange  $AB$  schleift an dem glatten Boden und an einer glatten kreiszylindrischen Walze; die Kraft ist das Gewicht der Stange, die Anfangslage ist in Ruhe. Nach welcher Zeit gelangt  $B$  an den Kreis? (Fig. 681).

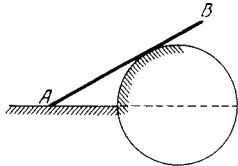


Fig. 681.

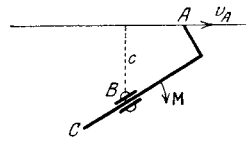


Fig. 682.

151. Die in Fig. 678 behandelte besondere Schubkurbelbewegung soll dahin verändert werden, daß der von  $A$  beschriebene Kreis die von  $B$  beschriebene Gerade berührt.
152. Die in Fig. 676 behandelte Aufgabe soll dahin verändert werden, wie es Fig. 682 angibt.



### XXXIX. Kinematische Diagramme der Getriebe.

**394. Stellung der Aufgabe.** Die Schilderung des zeitlichen Verlaufes der Bewegung eines Getriebes vom kinematischen Gesichtspunkt setzt voraus, daß man den zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Getriebepunktes kennt; diese selbst zu bestimmen,

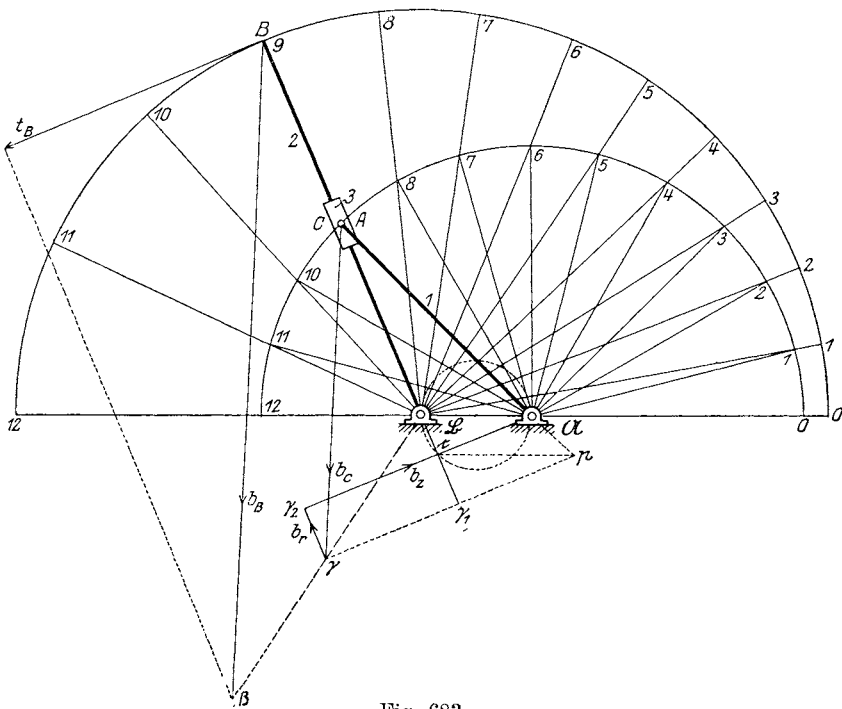


Fig. 683.

kann nicht Aufgabe der Kinematik sein, sondern es muß der Dynamik vorbehalten werden, die Beschleunigungen aus den Massen und Kräften des Getriebes zu ermitteln.

Wir werden diese Aufgabe im nächsten Abschnitte lösen und jetzt voraussetzen, daß uns das  $v-t$ -Diagramm oder das  $v-s$ -Diagramm eines beliebigen Punktes des Getriebes, z. B. des Reduktionspunktes, bekannt sei; daraus werden wir die entsprechenden Diagramme anderer Getriebe-  
punkte entwickeln.

Dies erfordert aber keine neue Untersuchung, sondern nur die Anwendung des in den Abschnitten XVII bis XX Vorgetragenen. Was dort für eine augenblickliche Stellung des Getriebes gelehrt wurde, hat man nun für die übrigen ins Auge gefaßten Stellungen zu wiederholen und aus den so konstruierten Geschwindigkeiten und Beschleunigungen jedes Getriebepunktes die Diagramme aufzutragen, welche den gewünschten zeitlichen Verlauf schildern.

Hierbei wird häufig angenommen, daß jener Punkt des Getriebes, von dessen vorausgesetzter Geschwindigkeit man ausgeht, eine gleichförmige Drehung besitzt; dann ist also seine Geschwindigkeit konstant und seine Tangentialbeschleunigung null.

Dies ist wohl eine Vereinfachung, wie sie in der Maschinenkinematik so häufig gemacht wird, bedeutet aber immer nur eine Annäherung an die Wirklichkeit, da solche Drehungen mit unveränderlicher Geschwindigkeit überhaupt nicht vorkommen. Immerhin sind die Schwankungen manchmal so klein, daß die Annahme einer konstanten

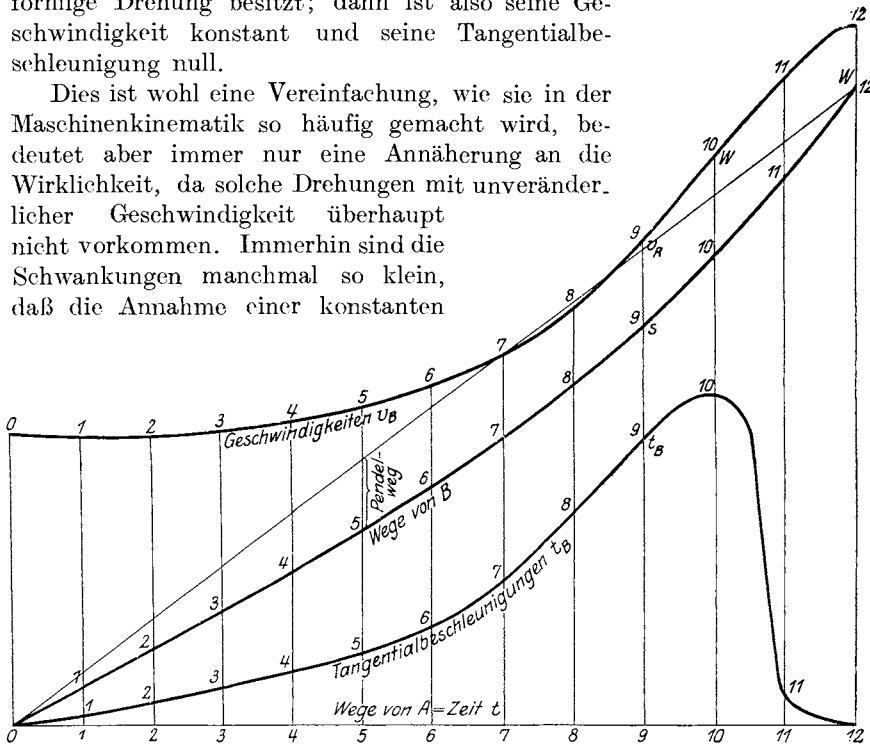


Fig. 683 a.

Geschwindigkeit des einen Getriebepunktes, auf den die anderen bezogen werden, gestattet ist. Im folgenden soll die Konstruktion der Diagramme an einigen, der Praxis entnommenen Beispielen erläutert werden.

**395. Diagramme der rotierenden Kurbelschleife.** Bei der Bewegung dieses Getriebes (Fig. 683) macht die Kurbel  $A\mathcal{A}$  volle Umdrehungen und nimmt dabei den Schieber 3 mit, der auf der Stange  $B\mathcal{B}$  gleitet; auch diese macht hierbei um den festliegenden Punkt  $\mathcal{B}$  volle Umdrehungen. Es werde angenommen, daß die Drehung von  $A$  eine gleichförmige ist; man zeichne die  $s$ - $t$ -,  $v$ - $t$ - und  $t_B$ - $t$ -Diagramme des Punktes  $B$ ,

wenn  $t_B$  seine Tangentialbeschleunigung ist; ferner das  $v_r-s_r$  und  $b_r-s_r$ -Diagramm des Gelenkes  $A$  bei seiner relativen Bewegung auf der Stange  $B\mathfrak{B}$ .

Da die ganze Bewegung symmetrisch zur Geraden  $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$  verläuft, beschränken wir uns auf die Diagramme für eine halbe Umdrehung. Da der Weg von  $A$  ferner gleichförmig zurückgelegt wird, wählen wir ihn als Zeitmesser und rollen ihn auf der Geraden  $0 \dots 12$ , die als Zeitachse dient, ab (Fig. 683a).

Von dieser Achse wurden zunächst die Wege des Punktes  $B$ , auf seinem Kreise gemessen, nach aufwärts aufgetragen und das  $s-t$ -Diagramm von  $B$  gezeichnet. Es hat im letzten Punkte 12 der halben Umdrehung einen Wendepunkt  $W$ . Verbindet man 0 mit  $W$  durch eine Gerade, so ist diese das  $s-t$ -Diagramm jener gleichförmigen Bewegung, die in derselben Zeit den gleichen Weg zurücklegt. Die Differenzen der Ordinaten der beiden  $s-t$ -Diagramme sind die Pendelwege des Punktes  $B$  (vgl. 356). Als Maß der Geschwindigkeit und auch der Beschleunigung des Punktes  $A$  wurde die Länge  $A\mathfrak{A}$  der Kurbel gewählt (Normalfall).  $C$  sei jener Punkt der Stange  $B\mathfrak{B}$ , der augenblicklich mit  $A$  zusammenfällt; seine Geschwindigkeit  $v_C$  und seine Beschleunigung  $b_C$  wurden wie in Fig. 396 ( $v_B = B\dot{\beta}$ ,  $b_B = B\ddot{\beta}$ ) konstruiert. Man zieht also  $\mathfrak{A}c \perp B\mathfrak{B}$ , dann ist  $v_C = C\dot{c}$ ; aus der Proportion

$$v_C : v_B = C\mathfrak{B} : B\mathfrak{B}$$

findet man  $v_B$ . Die Konstruktion wurde in Fig. 683 für die Stellung 9 des Getriebes durchgeführt und in Fig. 683a  $v_B$  von der Zeitachse nach aufwärts aufgetragen. Auf diese Weise wurde das  $v-t$ -Diagramm des Punktes  $B$  gezeichnet. Die Punkte  $c$  erfüllen einen Kreis mit dem Durchmesser  $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ .

Um die Beschleunigung  $b_C = C\ddot{\gamma}$  zu finden, ziehe man  $cp \perp \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ,  $p\gamma_1 \perp B\mathfrak{B}$  und mache  $\mathfrak{A}\gamma_2 = 2 \cdot p\gamma_1$  sowie  $\gamma\gamma_2 \parallel b_r$ , parallel zu  $\mathfrak{B}B$ ; dann ist  $C\ddot{\gamma} = b_C$  gefunden und damit auch  $B\ddot{\beta} = b_B$  parallel zu  $C\gamma$ . Die Projektion von  $b_B$  auf die Bewegungsrichtung von  $B$  liefert die Tangentialbeschleunigung  $t_B$ , die

in das  $t_B-t$ -Diagramm in Fig. 683a von 9 nach aufwärts aufgetragen wurde. In derselben Weise wurden die  $t_B$  für die übrigen Stellungen von  $B$  gefunden und in das Diagramm eingetragen.

Das Geschwindigkeitsdiagramm  $v_r-s_r$  und das Beschleunigungsdiagramm  $b_r-s_r$  der relativen Bewegung von  $A$  gegen  $B\mathfrak{B}$  wurde auf den

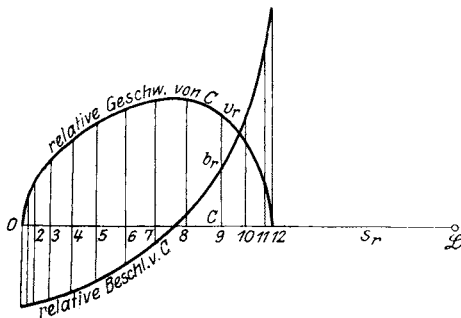


Fig. 683 b.

relativen Weg  $s_r$ , bezogen (Fig. 683 b). Man findet  $s_r$ , wenn man die Entfernungen des Punktes  $\mathfrak{B}$  in Fig. 683 von den Punkten  $0, 1, 2, \dots$

des von  $A$  beschriebenen Halbkreises von der Stelle  $\mathfrak{B}$  in Fig. 683b auf einer Geraden aufträgt.

So ist z. B.  $\mathfrak{B}A$  in Fig. 683 gleich  $\mathfrak{B}9$  in Fig. 683b. Die bereits gefundenen relativen Beschleunigungen  $b_r$  wurden von der Wegachse 0 bis 12 aus aufgetragen, und zwar die positiven nach abwärts.

Da  $v_r = \dot{\mathfrak{A}}c$  ist, so macht auch die Konstruktion des Diagramms der relativen Geschwindigkeiten keine Schwierigkeit.

**396. Der Kompressor der Hartford-Machine Screw Co.** Bei diesem in der Revue de mécanique, 1912, S. 362 beschriebenen Kompressor (Fig. 684) trägt der um  $\mathfrak{A}$  rotierende Kurbelzapfen  $A$  einen gleicharmigen Balancier  $BC$ , dessen Ende  $B$  um den festen Punkt  $\mathfrak{B}$  schwingt, während das andere Ende  $C$  mittels der Triebstange  $CD$  den Kolben im Gehäuse antreibt.

In Fig. 685 wurde das Getriebe in anderer Stellung und etwas verzerrter Gestalt gezeichnet; die Kurbel wurde mit  $r = A\mathfrak{A} = 14,5$  cm angenommen, die Triebstange mit  $CD = 80$  cm, die Schwinge mit  $B\mathfrak{B} = 56$  cm; die übrigen Abmessungen sind eingeschrieben. Der Längenmaßstab ist 1 cm = 0,1 m,  $\alpha = 0,1$ . Es wurde ferner angenommen, daß die Kurbel mit  $n = 540$  Umdrehungen in der Minute gleichförmig rotiert. Dann ist  $v_A = \frac{r n \pi}{30} = 8,2$  m/sek, die Beschleunigung

$$b_A = \frac{v_A^2}{r} = 463,7 \text{ m/sek}^2.$$

Nimmt man die Kurbel  $A\mathfrak{A}$  sowohl als Maß der Beschleunigung  $b_A$ , wie auch der Geschwindigkeit  $v_A$ , so ergibt sich der

Geschwindigkeitsmaßstab: 1 cm Zeichnung = 5,65 m/sek

und der

Beschleunigungsmaßstab: 1 cm Zeichnung = 320 m/sek<sup>2</sup>.

Es ist also  $\alpha = 0,1$ ,  $\beta = 5,65$ ,  $\gamma = 320$  und  $\beta^2 = \alpha\gamma$  (vgl. Gleich. 163).

Das Getriebe wurde, nachdem der Kurbelkreis in 24 gleiche Teile geteilt wurde, in den Stellungen 0 und 4 gezeichnet und für letztere Stellung in Fig. 685a der Geschwindigkeitsplan, in Fig. 685b der Beschleunigungsplan in doppelter Größe gezeichnet.  $v_D$  ist die Geschwindigkeit,  $b_D$  die Beschleunigung des Kolbens. Die Pläne sind so einfach, daß sie einer Erläuterung nicht bedürfen; sie wurden für alle 24 Stellungen durchgeführt und die halben Resultate in die Diagramme eingetragen.

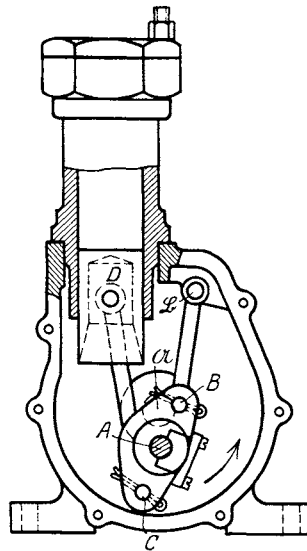


Fig. 684.



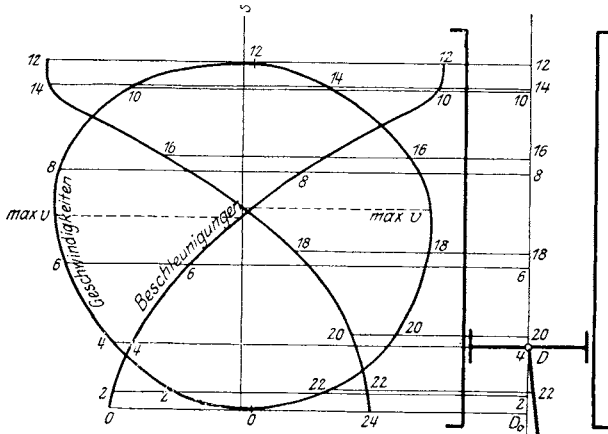


Fig. 685 d.

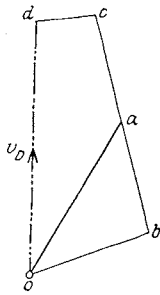


Fig. 685 a.

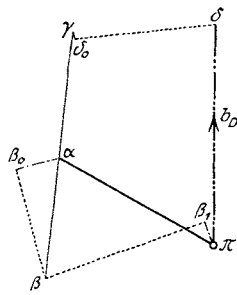


Fig. 685 b.

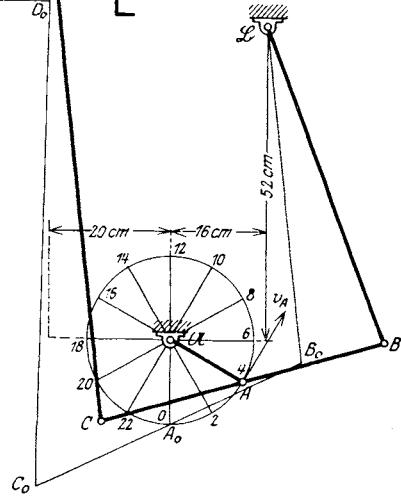


Fig. 685.

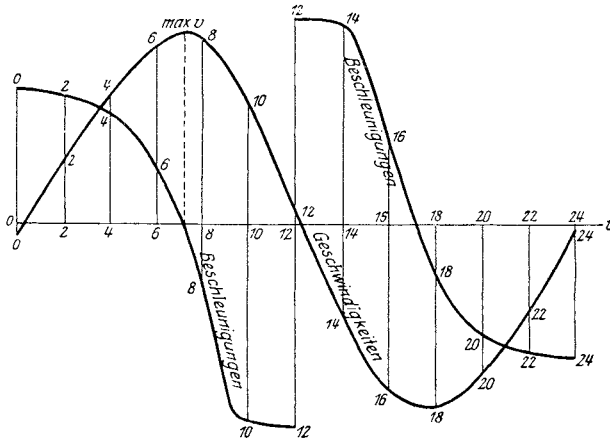


Fig. 685 c.

Das  $v$ - $s$ - und das  $b$ - $s$ -Diagramm, bezogen auf den Kolbenweg, wurden neben das Zylindergehäuse gezeichnet (Fig. 685d), die positiven Beschleunigungen nach links von der  $0s$ -Achse aufgetragen. In Fig. 685c wurden in derselben Weise das  $v$ - $t$ - und  $b$ - $t$ -Diagramm gezeichnet, 0 bis 24 ist der aufgerollte Weg des Punktes  $A$ , dessen gleichförmige Bewegung als Zeitmaß benützt wurde.

**397. Das Dampfmaschinengetriebe von Williams.** Dieses in Fig. 686 gezeichnete Getriebe besitzt ein starres, um  $\mathcal{A}$  drehbares, gleichseitiges Kurbeldreieck  $A\mathcal{B}$ ; die Kurbelzapfen  $A$  und  $B$  sind durch zwei gleichlange Triebstangen  $AC$  und  $BD$  mit den Endpunkten  $C$  und  $D$  einer Schwinde gelenkig verbunden, deren Mitte  $E$  ihren Drehungspunkt in der Kolbenstange hat.

Gegeben ist die konstante Geschwindigkeit  $v_A$ ; man soll die Diagramme  $v$ - $t$ ,  $b$ - $t$ ,  $v$ - $s$  und  $b$ - $s$  des Kreuzkopfes  $E$  ermitteln. Der Punkt  $A$  wurde in 12 gleichweit entfernten Lagen einer halben Umdrehung gezeichnet, für die Lage 0 überdies das ganze Getriebe  $A_0B_0C_0D_0E_0$ . Da das Getriebe bei der zweiten Halbdrehung von  $A$  symmetrische Lagen annehmen wird, kann man sich mit den Diagrammen einer halben Umdrehung begnügen.

Die Fig. 686 ist im Maßstab 1 : 20 angelegt, oder es ist:

Längenmaßstab:

$$1 \text{ cm Zeichnung} = a \text{ m, } a = \frac{1}{5}.$$

Die Abmessungen sind:

$r = A\mathcal{A} = 0,5 \text{ m, } AB = 0,5 \text{ m,}$   
 $AC = BD = 1,6 \text{ m, } CE = ED = 0,35 \text{ m;}$  die Umdrehungszahl der Kurbel ist  $n = 80$  i. d. Min., somit die Geschwindigkeit

$$v_A = \frac{n r \pi}{30} = 4,19 \text{ m/sek.}$$

Als Geschwindigkeitsmaßstab wurde gewählt:

$$1 \text{ cm Zeichnung} = \beta \text{ m/sek. Geschwindigkeit, } \beta = 1.$$

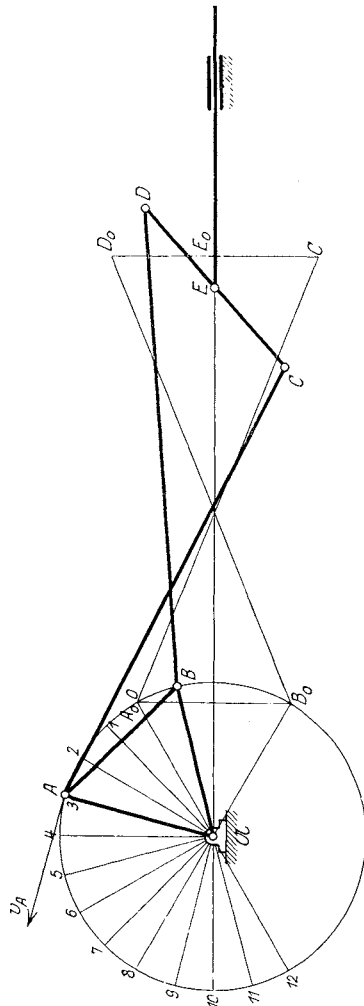


Fig. 686.

Dann ist also im Geschwindigkeitsplan 686a:  $v_A \perp oa = 4,19 \text{ cm}$ ; ebensogroß ist  $v_B \perp ob$ .

Sodann wurde die Gerade  $c \perp AC$  durch  $a$ , die Gerade  $d \perp BD$  durch  $b$  gezogen, auf  $c$  ein beliebiger Punkt  $c_1$  angenommen und  $c_1 e_1 \perp CE$  gezeichnet.

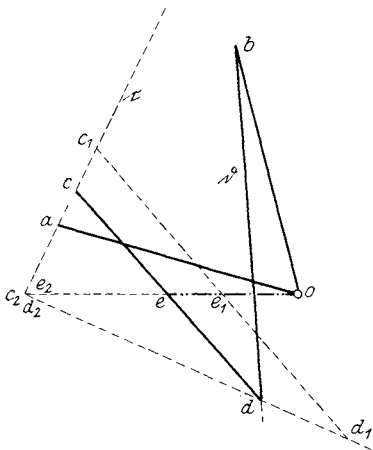


Fig. 686a  
(um  $\pi/2$  gegen Fig. 686 verdreht).

Zieht man durch  $o$  eine Parallele zur Bewegungsrichtung von  $E$ , so liegen  $e$  und  $e_1$  auf dieser Geraden; macht man  $c_1 e_1 = e_1 d_1$  und beachtet, daß im Schnittpunkte  $c_2$  von  $c$  mit  $oe$  auch  $e_2$  und  $d_2$  vereinigt sein werden, so gibt die Verbindungsgerade  $d_1 d_2$  im Schnitte mit  $d$  den Punkt  $d$ ;  $dec \perp DEC$  liefert dann die Punkte  $e$  und  $c$ . Die gefundene Geschwindigkeit  $v_B \perp oe$  wurde sodann in Fig. 686c von der Zeitachse in der Stellung 3 nach aufwärts aufgetragen. Als Zeitachse diente wieder die Aufrollung des von  $A$  beschriebenen Halbkreises.

Auf diese Weise wurde die Geschwindigkeit  $v_B$  für die zwölf Stellungen des Gelenkes  $A$  konstruiert und in das  $v-t$ -Diagramm eingetragen (Fig. 686c).

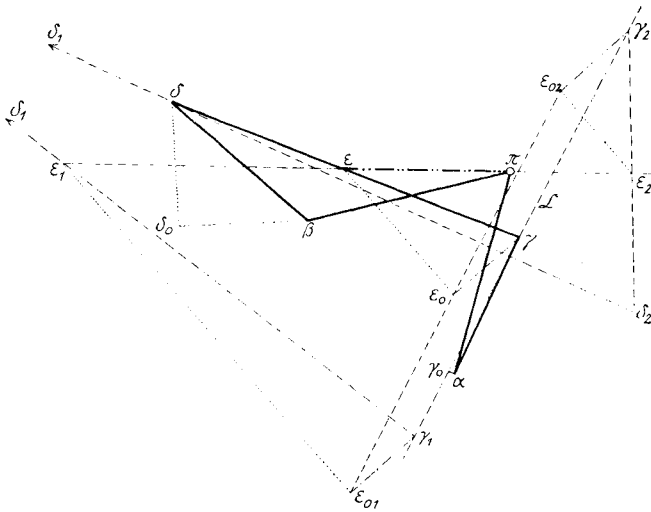


Fig. 686b  
(um  $\pi/2$  gegen Fig. 686 verdreht).

Die Zeit für eine Umdrehung ist  $t = \frac{2 r \pi}{v_A} = 0,75 \text{ sek.}$ , also ein Teilchen der Zeitachse  $\frac{t}{24} = 0,031 \text{ sek.}$

Der Zeitmaßstab ist

$$1 \text{ cm Zeichnung} = 0,048 \text{ sek.}$$

Die Beschleunigung des Punktes  $A$  ist

$$b_A = \frac{v_A^2}{r} = 35,11 \text{ m/sek}^2;$$

als Maßstab für die Beschleunigungen wurde gewählt:

$$1 \text{ cm Zeichnung} = \gamma \text{ m/sek}^2 \text{ Beschleunigung mit } \gamma = 5.$$

Bei diesen Annahmen der Maßstäbe ist die Bedingung

$$\beta^2 = a\gamma$$

(siehe Gleichung 163) eingehalten.

Dann würde  $b_A$  durch die Länge 7,02 cm gemessen werden; dies hindert aber nicht, den Beschleunigungsplan in einem anderen Maßstabe anzulegen, wenn mit Vorsicht konstruiert wird. So wurde in Fig. 686b:  $b_A - \pi a = 3,51 \text{ cm}$  gemacht, also nur in halber Größe gezeichnet.

Ebenso groß ist  $b_B = \pi \beta$ . Nun wurde

$$a\gamma_0 = n_{CA} = \frac{v_{CA}^2}{CA} = \frac{a c^2}{CA} \text{ in Richtung } CA$$

gezeichnet und durch  $\gamma_0$  die Gerade  $\mathcal{C} \perp a\gamma_0$ ; ebenso

$$\beta \delta_0 = n_{DB} = \frac{v_{DB}^2}{DB} = \frac{b d^2}{DB} \text{ in Richtung } DB$$

und  $\delta_0 \delta \perp \beta \delta_0$ .

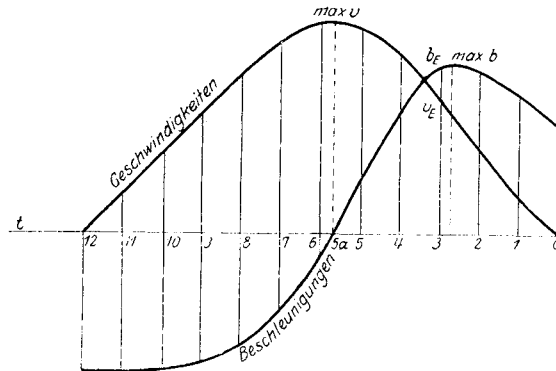


Fig. 686 c.

Sodann wurde auf  $\mathcal{C}$  ein beliebiger Punkt  $\gamma_1$  angenommen,

$$\gamma_1 \varepsilon_0 = n_{EC} = \frac{v_{EC}^2}{EC} = \frac{c e^2}{EC} \text{ in Richtung } EC$$

und  $\varepsilon_0 \varepsilon_1 \perp \gamma_1 \varepsilon_0$  bis zum Schnitte  $\varepsilon_1$  mit der Geraden  $\pi \varepsilon_1$ , parallel zur Bewegungsrichtung von  $E$  gezogen; dann wurde  $\overline{\gamma_1 \varepsilon_1} = \overline{\varepsilon_1 \delta_1}$  gemacht und die Konstruktion mit einem zweiten Punkte  $\gamma_2$  der Geraden  $\mathcal{C}$

wiederholt, wodurch der Punkt  $\delta_2$  gefunden wurde. Der Schnitt von  $\delta_1\delta_2$  mit  $\delta_0\delta$  ist der gesuchte Beschleunigungspunkt  $\delta$ ; die Punkte  $\varepsilon$  und  $\gamma$

werden dann durch die Ähnlichkeit der Punkt-reihen  $\gamma_1\gamma\gamma_2$ ,  $\delta_1\delta\delta_2$ ,  $\varepsilon_1\varepsilon\varepsilon_2$  gefunden.

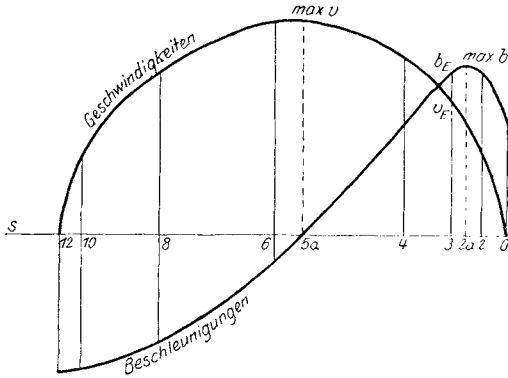


Fig. 686 d.

Die so gefundenen Beschleunigungen  $b_E$   $\pi\varepsilon$  wurden dann in gleicher Größe in das  $b-t$ -Diagramm (Fig. 686c) übertragen und die Konstruktion für alle Stellungen des Gelenkes A von 0 bis 12 wiederholt.

Nach dem obigen sind die Maßstäbe der Diagramme:

Geschwindigkeiten: 1 cm Zeichnung = 1 m/sek.,

Beschleunigungen: 1 cm Zeichnung = 10 m/sek<sup>2</sup>,

(weil der Beschleunigungsplan in halber Größe gezeichnet wurde).

Fig. 686d zeigt die Umzeichnung in das  $v-s$ - und das  $b-s$ -Diagramm. Die Wege  $s$  des Punktes E wurden im Maßstab 1 : 10, also im doppelten Längenmaßstab aufgetragen.

**398. Aufgaben.**

153. In dem Kurbelgetriebe mit schnellem Rückgang von A. Kersten (Fig. 687) ist die konstante Geschwindigkeit  $v_A$  während eines

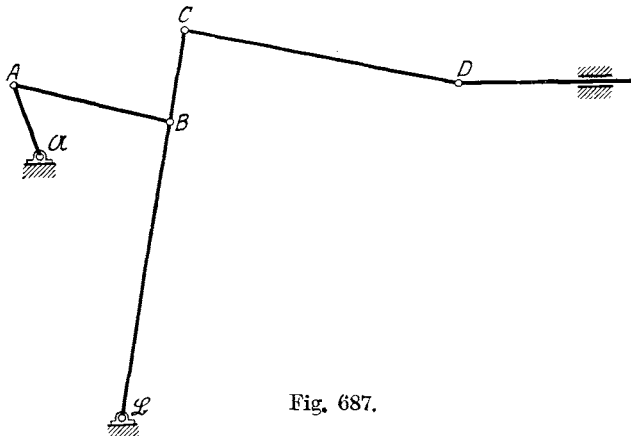


Fig. 687.

Umlaufes der Kurbel A gegeben. Man konstruiere das  $v-s$ - und das  $b-s$ -Diagramm des Punktes D, der eine geradlinige Schwingung vollzieht.

154. Fig. 688 gibt eine schematische Skizze der Lenkersteuerung von Otto. Die konstante Geschwindigkeit  $v_A$  des Kurbel-

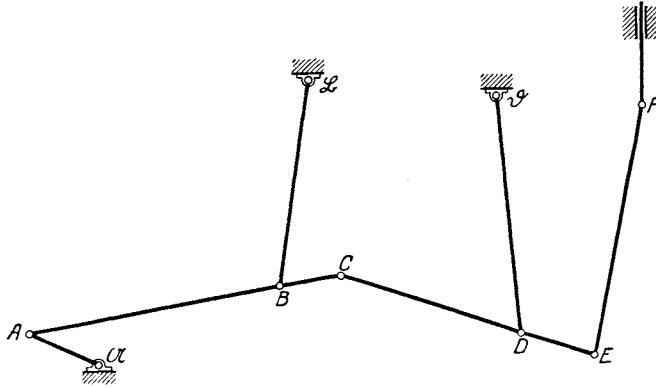


Fig. 688.

zapfens ist gegeben. Man zeichne das  $v$ - $s$ - und das  $b$ - $s$ -Diagramm des Punktes  $F$  für eine Umdrehung der Kurbel  $AB$ .  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{D}$  sind feste Gelenke.

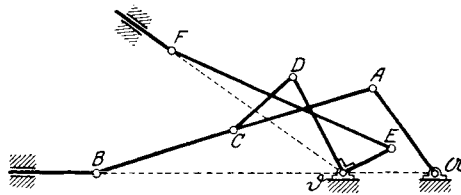


Fig. 689.

155. Von dem Gelenke  $C$  der Triebstange  $AB$  einer Schubkurbel (Fig. 689) wird durch die Stange  $CD$  ein rechter Winkel  $D\mathfrak{D}E$  angetrieben, der um  $\mathfrak{D}$  drehbar ist. Die Triebstange  $EF$  besorgt die Hin- und Herbewegung der Schieberstange in  $F$ , deren  $v$ - $s$ -Diagramm und  $b$ - $s$ -Diagramm zu zeichnen ist, wenn der Kurbelzapfen  $A$  eine gleichförmige Umdrehung vollführt.

156. Bei der Wanzer'schen Nähmaschine findet sich folgendes Getriebe (Fig. 690): Die geradlinig geführte Nadel bei  $C$  wird durch einen starren Winkel  $ABC$  bewegt, dessen Punkte  $A$  und  $B$  in zwei zueinander senkrechten Führungen  $a$  und  $b$  gleiten; diese liegen auf einer Scheibe, die sich um  $O$  gleichförmig dreht. Man zeichne

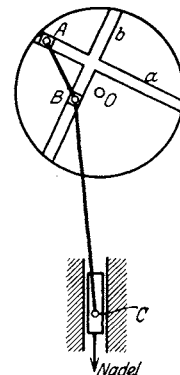


Fig. 690.

das  $v$ - $s$ - und das  $b$ - $s$ -Diagramm des Punktes  $C$ . (155, 156: Rittershaus, Zivil-Ingenieur 1880.)

157. Um bei Maschinen, die mit schwer brennbaren Stoffen betrieben werden, eine langsame Kolbenbewegung während der Verbrennung und eine schnelle während der Ausdehnung zu erzielen,

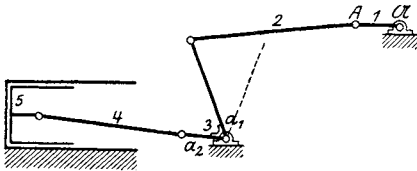


Fig. 691.

wird bei dem Kurbelgetriebe für Petroleum-Maschinen von E. Capitaine (Fig. 691) zwischen die Lenkstangen 2 und 4, die an die Kurbel 1 und den Kolben 5 gelenkig angeschlossen sind, ein ungleicharmiger Winkelhebel 3 eingeschaltet, dessen einer Arm  $a_2$  beim inneren Totpunkte mit 4 in die Strecklage kommt, während der andere  $a_1$  nach beiden Seiten nahezu dieselben Ausschlagwinkel macht. Es sind die  $v$ - $s$ - und  $b$ - $s$ -Diagramme

des Kolbens zu zeichnen unter der Voraussetzung, daß der Kurbelzapfen  $A$  eine gleichförmige Drehung vollzieht.

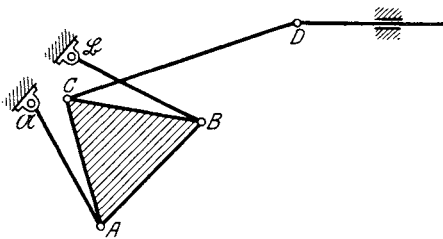


Fig. 692.

158. Das Getriebe der Dampfmaschinensteuerung von K. Körner ist eine Doppelkurbel  $\mathfrak{A}AB\mathfrak{B}$  (Fig. 692), wobei ein Punkt  $C$  der Koppel  $AB$  durch die Stange  $CD$  den Dampfleinlaß steuert. Die von  $C$  beschriebene Kurve schließt die Triebachse  $\mathfrak{A}$  ein, deren konstante Winkelgeschwindigkeit gegeben ist. Man zeichne das  $v$ - $s$ - und  $b$ - $s$ -Diagramm des Punktes  $D$ .

159. Fig. 693 zeigt die Antriebsvorrichtung für Schlagflügel von M. Farcot. Um die Geschwindigkeit des Flügels  $F$  beim Herabschlagen gegen die beim Hochschlagen wesentlich zu erhöhen, wird in dem Gelenkvierecke  $\mathfrak{A}AB\mathfrak{B}$  der Punkt  $A$  mit konstanter Geschwindigkeit im Kreise herumgeführt und  $AB$  bis  $D$  verlängert; hier greift der Lenker  $CD$  des um  $C$  drehbaren Flügels  $F$  an. Es ist das  $v$ - $t$ - und das  $b$ - $t$ -Diagramm des Punktes  $F$  für eine Umdrehung der Kurbel  $\mathfrak{A}\mathfrak{A}$  zu zeichnen.

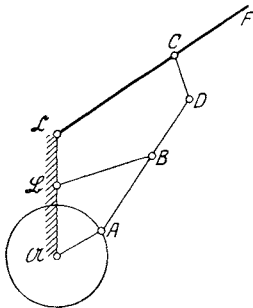


Fig. 693.

160. Bei dem Getriebe für Gasmotoren von A. Brun und E. Barbier (Fig. 694) werden zwei Kurbeln 1 und 2 von zwei Zahnrädern  $z_1$  und  $z_2$ , deren Halbmesser im Verhältnis 1 : 2 stehen, mitgenommen; sie werden durch die Lenker 3 und 4, sowie durch die Schwinde 5

bewegt, welche in  $E$  die Bewegung des Kolbens 6 übernimmt. Diese Verbindung bezweckt folgende Arbeitsverteilung: Drehung von  $a$  bis  $b$ : Saughub;  $b$  bis  $c$ : Verdichtungshub;  $c$  bis  $d$ :

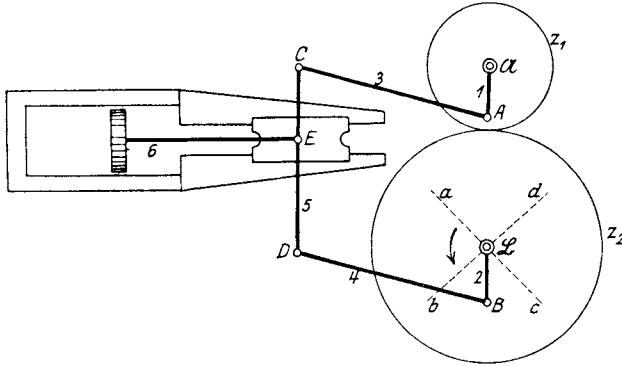


Fig. 694.

Arbeitshub;  $d$  bis  $a$ : Auspuffhub des Kolbens. Es soll das  $v$ - $s$ - und  $b$ - $s$ -Diagramm des Punktes  $E$  gezeichnet werden, wenn die Geschwindigkeit von  $A$  als konstant zugrunde gelegt wird.

161. In der Dissertation von S. G. Werner: „Kurvenführungen im Werkzeugmaschinenbau“ wird die in Fig. 695 dargestellte Hyperbelführung des Punktes  $C$  angegeben:

das Gelenk  $A$  wird mit einer Hülse an der Geraden  $g$  geführt; mit der Hülse fest verbunden ist die Kulisse  $h$ . Die Stange  $s$  ist um  $A$  drehbar und trägt zwei Kulissen  $k$  und  $l$ , von denen die letzte an dem festen Gelenk  $B$  schleift, während  $k$  und  $h$  zusammen den Punkt  $C$  führen. Welche relative Geschwindigkeit und Beschleunigung hat  $C$  in bezug auf die Kulissen  $k$  und  $h$ , wenn  $v_A$  und  $b_A$  gegeben sind? Es sind die Diagramme dieser relativen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen in bezug auf den Weg des Punktes  $A$  zu zeichnen.

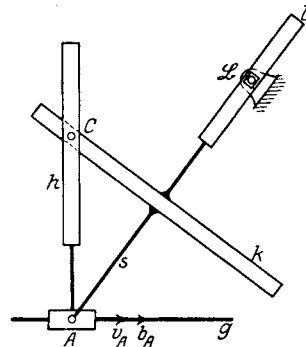


Fig. 695.



## XL. Dynamik des Getriebes.

**399. Einführung.** Die Dynamik des Getriebes, erstreckt auf eine Zeitdauer, stellt sich eine wesentlich schwierigere Aufgabe als die Kinematik. Bei dieser wird nämlich der zeitliche Verlauf der Beschleunigung eines Punktes des Getriebes als gegeben angesehen und aus ihm der zeitliche Verlauf der Beschleunigungen aller anderen Punkte des Getriebes abgeleitet. Wenn z. B. wie in **395, 396, 397** angenommen wurde, das Gelenk  $A$  dreht sich gleichmäßig im Kreise, so ist damit der zeitliche Verlauf der Beschleunigung  $b_A = n_A$  in vorhinein angenommen. Eine andere Aufgabe kann die Kinematik tatsächlich nicht lösen, da sie sich weder mit Kräften noch mit Massen beschäftigt.

Die Dynamik des Getriebes stellt sich aber eine wesentlich tiefer greifende Aufgabe. Sie geht von einem bekannten Augenblickszustande des Getriebes aus, der auch der anfängliche Ruhezustand sein kann und ermittelt aus den gegebenen Triebkräften und Widerständen, sowie der Massenverteilung des Getriebes den zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen eines bestimmten Punktes; ist dieser einmal bekannt, so können die Bewegungsdiagramme der anderen Getriebepunkte auf rein kinematischem Wege gefunden werden, wie oben bereits erwähnt wurde.

Mit dieser wichtigsten Aufgabe der graphischen Dynamik sollen sich nun die folgenden Ausführungen beschäftigen; zu ihrer Lösung kann ein Weg eingeschlagen werden, der schon bei dem analogen Problem des bewegten Systems (vgl. XXXVIII) verwendet wurde.

Zunächst soll wieder angenommen werden, daß das Getriebe zwangläufig sei; es ist also ein Glied der kinematischen Kette festgestellt (Grundglied) und die sämtlichen Punkte aller übrigen Glieder beschreiben in bezug auf das ruhende Grundglied ganz bestimmte Bahnen.

Das schon wiederholt benützte Arbeitsprinzip hatte, so lange es sich um einen einzigen Punkt handelte, den Ausdruck Gleichung 182:

$$L - L_0 = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \mathbf{A};$$

es ist auch für eine Anhäufung von Punkten, für einen Körper, und auch für eine Kette von Körpern, für ein Getriebe anwendbar und lautet dann:

$$\Sigma L - \Sigma L_0 = \Sigma \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) - \Sigma \left( \frac{1}{2} m v_0^2 \right) = \Sigma \mathbf{A} \dots 236)$$

worin  $\Sigma L$  die ganze Bewegungsenergie des Getriebes, also die Summe der Bewegungsenergien seiner Punkte,  $\Sigma L_0$  die ganze Bewegungsenergie

des Getriebes zur Zeit  $t = 0$  und  $\Sigma \mathbf{A}$  die Summe der Arbeiten aller Triebkräfte und Widerstände im Zeitabstand  $t = 0$  bis  $t$  bedeuten.

**400. Die Kräfte des Getriebes.** Auf das Getriebe wirken im allgemeinen folgende Gruppen von Kräften:

1. Die Triebkräfte, herrührend von der treibenden Naturkraft (Menschenkraft, Zugtier, Dampf, Gas, Wasser usw.);
2. Die Nutzwiderstände, herrührend von Lasten, die zu heben oder von Arbeitsmaschinen, die zu treiben sind;
3. die Gewichte der Getriebeteile, die zu heben oder zu senken sind;
4. die Auflagerdrücke (Drücke auf das Grundglied);
5. die Drücke in den Gelenken und andere Drücke zwischen den Gliedern (Zahndrücke, Nockendrücke, Wälzhebeldrücke usw.);
6. die Nebenwiderstände (Reibungen zwischen den Gliedern und deren Umgebung).

Die letzte Gruppe von Kräften soll jedoch grundsätzlich außer Betracht bleiben. Sobald dies festgesetzt ist, stehen die Auflagerdrücke und Gelenkdrücke (Zahndrücke usw.) normal zur Druckfläche und leisten infolgedessen keine Arbeit; für die Bildung von  $\Sigma \mathbf{A}$  sind also nur die ersten drei Gruppen von Einfluß.

Reduziert man diese in die Bewegungsrichtung des angenommenen Reduktionspunktes  $E$  (wobei meist auch die Gewichte der Glieder als zu untergeordnet weggelassen werden können), so ist nach den Ausführungen in 382 für jedes Zeiteilchen die Summe der geleisteten Arbeiten gleich der Arbeit der Resultanten  $\mathfrak{R}$  der reduzierten Kräfte oder

$$\Sigma (d\mathbf{A}) = \mathfrak{R} \cdot ds$$

oder

$$\Sigma \mathbf{A} = \int_0^t \mathfrak{R} \cdot ds \dots \dots \dots 237)$$

**401. Reihenfolge der auszuführenden Arbeiten.** Hat man die Bewegung eines Getriebes von irgend einem Zeitpunkte an, z. B. vom Beginne der Bewegung, dynamisch zu verfolgen, so sind folgende Arbeiten der Reihe nach auszuführen:

1. Die Wahl des Reduktionspunktes;
2. Reduktion der treibenden und widerstrebenden Kräfte des ganzen Getriebes an den gewählten Reduktionspunkt;
3. Reduktion sämtlicher bewegten Massen des Getriebes an den Reduktionspunkt;
4. Untersuchung der Bewegung des Reduktionspunktes;
5. Ableitung sämtlicher Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Gelenke usw. des Getriebes aus jenen des Reduktionspunktes;
6. Konstruktion der dynamischen Kraftpläne, der Spannungen und Gelenkdrücke, der Führungsdrücke und Auflagerkräfte für die verschiedenen Stellungen des Getriebes;

7. Konstruktion der Zeit- oder Wegdiagramme, und zwar der Geschwindigkeiten, Beschleunigungen, Spannungen, Gelenkdrücke usw.

Bei der Wahl des Reduktionspunktes sind solche Punkte zu vermeiden, die schwingende Bewegungen ausführen, wie z. B. der Kreuzkopf der Schubkurbel oder die Punkte einer Schwinge; solche Punkte kommen nämlich vorübergehend in Ruhe und es wird an solchen Umkehrstellen  $v_E = 0$ ; dann wird aber nach Gleichung 232:  $\mathfrak{M} = \infty$ , was bei den weiteren Arbeiten unbrauchbar ist (vgl. Fig. 674, 675).

Eine Ausnahme hiervon machen nur Getriebe, welche in solchen Stellungen, wo  $v_E = 0$  wird, überhaupt vorübergehend zur Ruhe kommen (vgl. 411, Getriebe des Indikators). Hier werden auch sämtliche Geschwindigkeiten der Getriebepunkte null und  $\mathfrak{M}$  nimmt keinen unendlich großen Wert an.

Man wird im allgemeinen einen Reduktionspunkt wählen, der einen fortlaufenden Weg beschreibt, ohne seine Bewegungsrichtung umzukehren. Da überdies dieser Weg für die Wegdiagramme in eine Gerade aufgerollt werden muß, so wird es sich empfehlen, Punkte von einfachen Wegformen zu wählen und da die Gerade, wie oben bemerkt wurde, in der Regel ausgeschlossen ist (eine Ausnahme siehe Fig. 677), wird man jenen Punkten den Vorzug geben, die Kreisbahnen beschreiben.

Die Reduktion der Kräfte nach dem Reduktionspunkt ist im Abschnitt XXIII ausführlich behandelt worden.

**402. Die reduzierte Masse des Getriebes.** Nennt man  $E$  den Reduktionspunkt und  $v_E$  seine Geschwindigkeit, so ist in Übereinstimmung mit der Dynamik des Systems die Bewegungsenergie des ganzen Getriebes

$$\Sigma L = \Sigma \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{1}{2} v_E^2 \Sigma \Sigma \left[ m \left( \frac{v}{v_E} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \mathfrak{M} v_E^2 . . . . . 238)$$

und die nach  $E$  reduzierte Masse des Getriebes

$$\mathfrak{M} = \Sigma \Sigma \left[ m \left( \frac{v}{v_E} \right)^2 \right] . . . . . 239)$$

worin sich das innere Summenzeichen auf die Massenpunkte eines Gliedes das äußere auf sämtliche bewegten Glieder erstreckt.

Diese veränderliche Masse  $\mathfrak{M}$  ist unabhängig von der Größe der Geschwindigkeiten, dafür abhängig von deren Verhältnissen; diese aber hängen wieder nur ab von der Lage der Drehpole der einzelnen Glieder und diese sind wieder nur bedingt durch die Stellung des Getriebes, nicht aber durch dessen Bewegung. Die Masse  $\mathfrak{M}$  ändert sich also nur mit der Stellung des Getriebes. Diese veränderliche Masse ist eine Funktion des Weges, den der Reduktionspunkt zurücklegt und wird, wie in der Dynamik des Systems (vgl. Abschnitt XXXVIII) durch ein  $\mathfrak{M}$ -s-Diagramm dargestellt. Das Arbeitsprinzip, Gleichung 236 nimmt dann die Form an:

$$\frac{1}{2} \mathfrak{M} v_E^2 - \frac{1}{2} \mathfrak{M}_0^2 v_{E0}^2 = \int_0^t \mathfrak{R} \cdot ds$$

wie bei der Bewegung des einzelnen Systems (vgl. Gleichung 224). Was bei diesem gesagt wurde, läßt sich nun auch auf das Getriebe ausdehnen: die Bewegung eines zwangsläufigen Getriebes läßt sich dynamisch auf die Bewegung eines Punktes mit veränderlicher Masse zurückführen.

Hat das Getriebe eine besonders einfache Massenverteilung, so gelingt es, eine Gleichung dieses Diagramms aufzustellen, die dann dazu benützt werden kann, das Diagramm zu zeichnen. Ist dies nicht der Fall, wie dies gewöhnlich bei Aufgaben der Maschinentechnik zutreffen wird, muß man die Ordinaten des Diagramms tabellarisch berechnen, wie in 392.

Im nachfolgenden soll das  $M$ - $s$ -Diagramm einiger Getriebe nach beiden Arten abgeleitet werden.

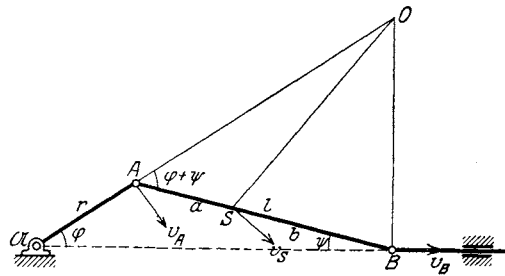


Fig. 696.

**403. Massenreduktion der Schubkurbel.** Dieses schon wiederholt behandelte Getriebe (Fig. 696) besteht aus drei Gliedern:

1. Der Kurbel  $A\mathcal{Q}$  mit dem Trägheitsmoment  $\mathbf{T}_1$  für die Drehungsachse  $\mathcal{Q}$ ;
2. der Pleuellstange  $AB$  mit der Masse  $M_2$ , dem Schwerpunkte  $S$  und dem Trägheitshalbmesser  $i$  für die zur Bildebene senkrechte Schwerlinie;
3. dem Pleuell samt der Pleuellstange mit der Masse  $M_3$ .

Es sollen sämtliche Massen an den Pleuellzapfen  $A$  reduziert werden. Die Ersatzmassen sind:

1. Für die Kurbel:  $\mu_{A1} = \frac{\mathbf{T}_1}{r^2}$  in  $A$ ;
2. für die Pleuellstange:  
 $\mu_{A2} = M_2 \frac{i^2}{a l}$  in  $A$ ,  $\mu_{B2} = M_2 \frac{i^2}{b l}$  in  $B$ , und  $\mu_S = M_2 \left(1 - \frac{i^2}{ab}\right)$  in  $S$ .

(Vgl. Gleichung 58.)

3. für den Pleuell samt Pleuellstange:

$$\mu_{B3} = M_3 \text{ in } B.$$

Es ist also:

$$\mu_A = \mu_{A1} + \mu_{A2} = \frac{\mathbf{T}_1}{r^2} + M_2 \frac{i^2}{a l};$$

$$\mu_B = \mu_{B2} + \mu_{B3} = M_2 \frac{i^2}{b l} + M_3;$$

$$\mu_S = M_2 \left(1 - \frac{i^2}{ab}\right)$$

und die nach  $A$  reduzierte Masse:

$$\mathfrak{M} = \mu_A + \mu_B \left( \frac{v_B}{v_A} \right)^2 + \mu_S \left( \frac{v_S}{v_A} \right)^2.$$

Aus Fig. 696 folgen die Beziehungen:

$$v_B : v_A = \overline{BO} : \overline{AO} = \sin(\varphi + \psi) : \cos \psi,$$

$$v_S : v_A = \overline{SO} : \overline{AO}.$$

Nun ist, wenn  $AB = l$  gesetzt wird,

$$AO = l \frac{\cos \psi}{\cos \varphi},$$

ferner 
$$SO^2 = \overline{AO}^2 + \overline{AS}^2 - 2 \overline{AO} \cdot \overline{AS} \cdot \cos(\varphi + \psi),$$

$$\left( \frac{v_S}{v_A} \right)^2 = \frac{\overline{SO}^2}{\overline{AO}^2} = 1 + \frac{\overline{AS}^2}{\overline{AO}^2} - 2 \frac{\overline{AS}}{\overline{AO}} \cos(\varphi + \psi)$$

$$= 1 + \left( \frac{a \cos \varphi}{l \cos \psi} \right)^2 - 2 \frac{a \cos \varphi}{l \cos \psi} \cos(\varphi + \psi)$$

und somit

$$\mathfrak{M} = \mu_A + \mu_B \frac{\sin^2(\varphi + \psi)}{\cos^2 \psi} + \mu_S \left[ 1 + \frac{a^2 \cos^2 \varphi - 2 a l \cos \varphi \cos \psi \cos(\varphi + \psi)}{l^2 \cos^2 \psi} \right].$$

In dem besonderen Falle, daß die Triebstange prismatisch und homogen ist, wird

$$a = b = \frac{l}{2}, \quad i^2 = \frac{l^2}{12}, \quad \mu_{A2} = \mu_{B2} = \frac{M_2}{6}, \quad \mu_S = \frac{2}{3} M_2$$

und der Ausdruck für die reduzierte Masse wird:

$$\mathfrak{M} = \left( \frac{\mathbf{T}_1}{r^2} + \frac{M_2}{6} \right) + \left( M_3 + \frac{M_2}{6} \right) \frac{\sin^2(\varphi + \psi)}{\cos^2 \psi} + \frac{2}{3} M_2 \left[ 1 + \frac{\cos^2 \varphi - 4 \cos \varphi \cos \psi \cos(\varphi + \psi)}{4 \cos^2 \psi} \right].$$

Ist die Triebstange so lang, daß der Winkel  $\psi$  als klein vernachlässigt werden kann, so wird dieser Ausdruck:

$$\mathfrak{M} = \left( \frac{\mathbf{T}_1}{r^2} + \frac{M_2}{6} \right) + \left( M_3 + \frac{M_2}{6} \right) \sin^2 \varphi + \frac{2}{3} M_2 \left[ 1 - \frac{3}{4} \cos^2 \varphi \right]$$

oder

$$\mathfrak{M} = \left( \frac{\mathbf{T}_1}{r^2} + \frac{\mathbf{M}_2}{3} \right) + \left( M_3 + \frac{2}{3} M_2 \right) \sin^2 \varphi \quad \dots \dots 240$$

d. h. unter der Voraussetzung einer prismatischen Triebstange von solcher Länge, daß der Winkel  $\psi$  vernachlässigt werden kann, darf die Masse der Triebstange angenähert derart ersetzt werden, daß  $\frac{1}{3}$  derselben zur rotierenden Masse in  $A$ , hingegen  $\frac{2}{3}$  zur Masse der Kolbenstange geschlagen werden kann.

Diese Annäherungsregel ist sehr bekannt (vgl. u. a. J. Weisbach, Lehrbuch der Ing. u. Masch.-Mechanik, III. Bd., Zwischenmaschinen, S. 708) und wurde viel benützt.

Ganz verfehlt ist hingegen die Angabe von W. Hartmann in „Die Maschinen-Getriebe“, 1913, S. 350, an welcher Stelle mit Nachdruck behauptet wird, daß zur Bestimmung des Tangentialdruck-Diagrammes die ganze Masse der Triebstange zur Kolbenstange hinzuzufügen ist. Diese Behauptung beruht auf einer Verkennung der dynamischen Vorgänge.

**104. Massenreduktion beim Bucherer Motor.** Dieser Motor ist eine jener Umlaufmaschinen, wie sie für Fahr- und Flugzeuge gebaut werden. (Vgl. O. Kölsch, Gleichgang und Massenkräfte bei Fahr- und Flugzeugmaschinen.)

Sie kennzeichnen sich dadurch, daß die Zylinder, in denen sich die Kolben bewegen, nicht im Grundgliede liegen, sondern volle Umläufe machen.

Fig. 697 zeigt die schematische Skizze eines Bucherer-Umlaufmotors mit einem Zylinder. Dieser ist um die festgelagerte Welle  $\mathfrak{B}$  drehbar, während die Kurbel  $A$  sich um die ebenfalls festgelagerte Welle  $\mathfrak{A}$  dreht. Es ist  $\overline{A\mathfrak{A}} = \overline{\mathfrak{B}\mathfrak{A}} = r$ . Der Kurbelzapfen  $A$  ist in der Kolbenstange  $CD$  gelagert, die zwei Kolben,  $C$  und  $D$  trägt. Bezeichnet man mit  $\varphi$  und  $\psi$  die Winkel der Kurbel und der Zylinderachse mit der festbleibenden Geraden  $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$  des Grundgliedes, so ist für jede Stellung

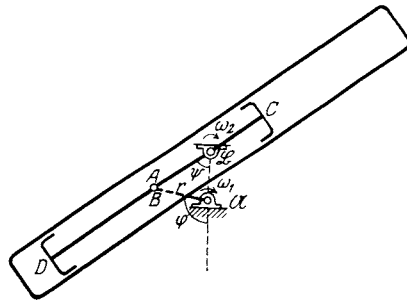


Fig. 697.

$\varphi = 2\psi$  und somit  $\frac{d\varphi}{dt} = 2 \frac{d\psi}{dt}$  oder  $\omega_1 = 2\omega_2$ , wenn  $\omega_1$  und  $\omega_2$  die Winkelgeschwindigkeiten von Kurbel und Zylinder bezeichnen.

Die Kurbel macht also die doppelte Anzahl der Umdrehungen des Zylinders.

Es sind sämtliche Massen dieses Getriebes an den Kurbelzapfen  $A$  zu reduzieren.

Nennt man  $T_1$  das Trägheitsmoment der Kurbel für die Wellenachse  $\mathfrak{A}$ , so ist die nach  $A$  reduzierte Masse der Kurbel

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{T_1}{r^2}.$$

Ist ferner  $T_2$  das Trägheitsmoment des Zylinders für die Wellenachse  $\mathfrak{B}$ ,  $B$  der augenblicklich mit  $A$  zusammenfallende Punkt des Zylinders, so ist seine nach  $B$  reduzierte Masse

$$m_2 = \frac{T_2}{B\mathfrak{B}^2}$$

und die nach  $A$  reduzierte Masse

$$\mathfrak{M}_2 = m_2 \cdot \left(\frac{v_B}{v_A}\right)^2;$$

nun ist  $v_A = r\omega_1 = 2r\omega_2, v_B = B\mathfrak{B} \cdot \omega_2,$

also 
$$\mathfrak{M}_2 = \frac{\mathbf{T}_2}{4r^2}.$$

Nennt man endlich  $M_3$  die Masse der Kolbenstange  $CD$  samt den Kolben,  $\mathbf{T}_3$  ihr Trägheitsmoment für die durch  $A$  gehende, zur Bildfläche senkrechte Achse, so ist nach der allgemeinen Gleichung für die Bewegungsenergie eines Körpers:

$$L = \frac{1}{2} M v_S^2 + \frac{1}{2} \mathbf{T}_S \omega^2$$

die Bewegungsenergie des Kolbensystems, dessen Schwerpunkt  $A$  ist:

$$\frac{1}{2} M_3 v_A^2 + \frac{1}{2} \mathbf{T}_3 \omega_2^2,$$

da die Kolbenstange die gleiche Winkelgeschwindigkeit hat wie der Zylinder. Setzt man diesen Ausdruck gleich  $\frac{1}{2} \mathfrak{M}_3 v_A^2,$  so erhält man die nach  $A$  reduzierte Masse des Kolbensystems:

$$\mathfrak{M}_3 = M_3 + \frac{\mathbf{T}_3 \omega_2^2}{v_A^2} = M_3 + \frac{\mathbf{T}_3}{4r^2},$$

und die ganze reduzierte Masse

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_3 = M_3 + \frac{4\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3}{4r^2}.$$

Da dieser Ausdruck eine Konstante ist, so kann die Bewegung des Motors wie die eines rotierenden Punktes  $A$  mit der konstanten Masse  $\mathfrak{M}$  behandelt werden. Ist somit  $\mathfrak{R}$  die nach  $A$  reduzierte Kraft, so wird die Tangentialbeschleunigung des Kurbelzapfens

$$t_A = \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{M}}.$$

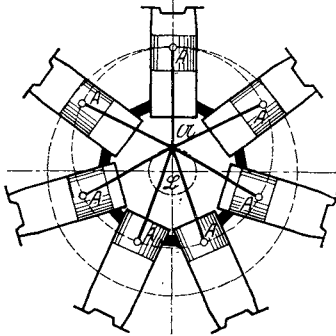


Fig. 698.

**405. Massenreduktion beim Gnômemotor.** Fig. 698 zeigt die Anordnung eines 50 pferdigen Gnômemotors mit sieben gleichen Zylindern, die sich samt ihrem Gehäuse um die feste Achse  $\mathfrak{B}$  drehen; die Kolben sind gelenkig mit den sieben Triebstängen  $A\mathfrak{A}$  verbunden, die sich um die feste Achse  $\mathfrak{A}$  drehen (vgl. die Mitteilungen von G. Schendel in der Zeitschrift für Motorluftschiffahrt und Flugtechnik, 1910, S. 250).

Fig. 699 zeigt das Schema dieser Umlaufmaschine mit einem Zylinder in zwei Stellungen. Es soll die Masse dieses Getriebes an das Kolben-gelenk  $A$  reduziert werden.

Mit den gleichen Bezeichnungen wie in 404 findet man wie dort:

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{\mathbf{T}_1}{r^2}, \quad \mathfrak{M}_2 = \frac{\mathbf{T}_2}{B\mathfrak{B}^2} \left( \frac{v_B}{v_A} \right)^2, \quad \mathfrak{M}_3 = M_3 + \frac{\mathbf{T}_3}{B\mathfrak{B}^2} \left( \frac{v_B}{v_A} \right)^2.$$





Nach dieser Gleichung wurde das Diagramm der  $\mathcal{G}$  gezeichnet (Fig.700) bezogen auf den abgerollten Weg des Reduktionspunktes  $A$ . Die verwendeten Maßstäbe sind:

Wege des Punktes  $A$ : 1 cm Zeichnung = 0,1 m Weg,

Massengewichte  $\mathcal{G}$ : 1 cm Zeichnung = 2 kg,

also mit den bisher eingeführten Bezeichnungen:

$$\alpha = 0,1, \quad \mu = 2.$$

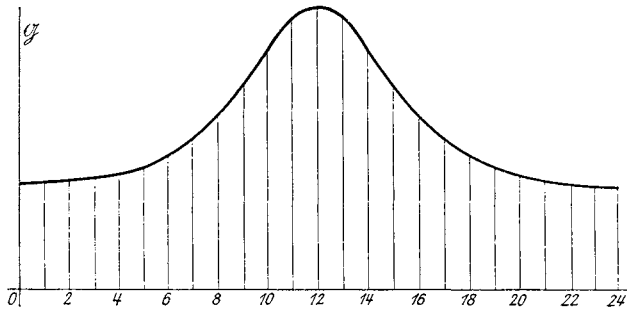


Fig. 700.

**406. Ersatzpunkte des Getriebes.** Die vorhergehenden Beispiele sollten zeigen, daß es in gewissen einfachen Fällen möglich ist, die reduzierte Masse während der Bewegung durch einen mathematischen Ausdruck festzulegen, der zur Konstruktion des Massen-Diagramms benützt werden kann.

Dies wird freilich in den seltensten Fällen zutreffen und man wird in der Regel die Masse punktwise konstruieren müssen, ohne hierfür eine mathematische Funktion benützen zu können, wenn man darauf verzichtet, durch Vernachlässigungen oder gewagte Annahmen die Aufgabe zu vereinfachen.

Im allgemeinen wird man dann die Massen sämtlicher bewegten Glieder des Getriebes durch Punktmassen ersetzen, die in ihrer Gesamtheit auf die Bewegung denselben Einfluß nehmen, wie die wirkliche Masse.

Nennt man  $\mu$  die Masse eines solchen Ersatzpunktes,  $v_e$  seine Geschwindigkeit, so wird, da die Ersatzmassen zusammen die gleiche Bewegungsenergie haben müssen wie das Getriebe selbst, die Gleichung bestehen

$$\Sigma L = \Sigma \Sigma \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = \Sigma \left( \frac{1}{2} \mu v_e^2 \right)$$

oder nach Gleichung 238:

$$\mathfrak{M} = \Sigma \left[ \mu \left( \frac{v_e}{v_F} \right)^2 \right] \dots \dots \dots 241)$$

worin die Summe über sämtliche Ersatzpunkte des Getriebes zu erstrecken ist.

Nun haben wir in 96 gesehen, daß es zwei Arten von Ersatzpunkten für ein Massensystem gibt: die statischen und die dynamischen. Die statischen Ersatzpunkte haben zusammen die gleiche Masse und den gleichen Schwerpunkt wie das wirkliche System; bei der Untersuchung seines augenblicklichen Bewegungszustandes genügt es, mit diesen statischen Ersatzpunkten zu arbeiten, da die Beschleunigungsdrücke sich durch sie vollständig ausdrücken lassen und es nicht notwendig ist, die Schwerpunkte der Getriebeglieder heranzuziehen.

Dies trifft jedoch nicht mehr zu, wenn es sich um die Massenreduktion eines bewegten Getriebes handelt. Hier sind die dynamischen Ersatzpunkte zu benützen; sie haben die oben genannten Eigenschaften der statischen Ersatzpunkte, besitzen also zusammengekommen die gleiche Masse und den gleichen Schwerpunkt wie die wirkliche Masse, außerdem aber noch das gleiche Trägheitsmoment für jede Achse. Mit der Theorie dieser dynamischen Ersatzpunkte haben wir uns in 98 u. f. ausführlich beschäftigt.

**407. Anzahl der dynamischen Ersatzpunkte einer kinematischen Kette.** Bei der Zurückführung der Masse einer kinematischen Kette auf die Massen einzelner Punkte entsteht die Frage nach der Anzahl dieser Punkte.

In 105 wurde gezeigt, daß man jedes starre System durch drei in einer Geraden liegende Punkte ersetzen kann: durch eine Masse im Schwerpunkt und zwei andere Massen in zwei beliebig gewählten Punkten der Schwerlinie.

Ebenso wurde in 107 bewiesen, daß man jedes System durch vier Punkte ersetzen kann: durch eine Masse im Schwerpunkt und drei andere Massen in drei beliebig gewählten Punkten (Fig. 701). Ein Dreiecksglied wird man in dieser Weise durch vier Punkte ersetzen, wobei man die Punkte  $A, B, C$  in die drei Gelenke des Gliedes verlegen wird.

Ein Glied, das die Form eines beliebigen  $n$ -Eckes hat, kann man ebenso durch vier Punkte ersetzen; man könnte aber die Verteilung der Masse auch derart vornehmen, daß

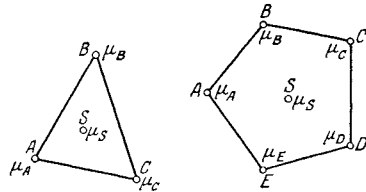


Fig. 701.

Fig. 702.

man eine Ersatzmasse in den Schwerpunkt und die  $n$  anderen Ersatzmassen in die  $n$ -Gelenke des Gliedes verlegt (Fig. 702).

In jedem Gelenke der kinematischen Kette können dann die Massen der Ersatzpunkte jener Glieder, die in diesem Gelenke drehbar miteinander verbunden sind, zu einer einzigen Masse zusammengefaßt werden. Außer in die Schwerpunkte der Glieder werden also auch in sämtliche Gelenke der Kette Ersatzpunkte zu liegen kommen. Nennt man  $n$  die Anzahl der Glieder,  $g$  die Anzahl der Gelenke, so ist dann die Anzahl der Ersatzpunkte:  $z = n + g \dots \dots \dots 242)$

Im folgenden soll dies an einigen Beispielen erörtert werden.

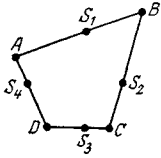


Fig. 703.

1. Das Gelenkviereck. (Fig. 703). Vier Stäbe, die gelenkig miteinander verbunden sind;  $n = 4, g = 4; z = 8$ .
2. Das Gelenkviereck, wenn die Schwerpunkte der Stäbe nicht in den Verbindungslinien der Gelenke  $A, B, C, D$  liegen (Fig. 704). In diesem Falle sind die Ecken  $E, F, G, H$  als Gelenke mitzuzählen und es ist:  $n = 4, g = 8; z = 12$ .

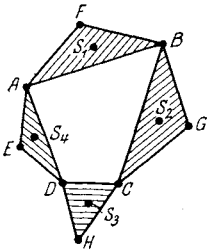


Fig. 704.

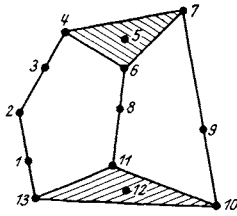


Fig. 705.

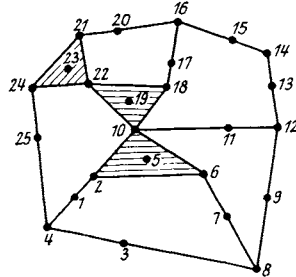


Fig. 706.

3. Zwangläufige kinematische Kette Fig. 705. Hier ist  $n = 6, g = 7; z = 13$ .
4. Flächenläufige kinematische Kette Fig. 706. Es ist  $n = 13, g = 12; z = 25$ .

**408. Anzahl der dynamischen Ersatzpunkte eines Getriebes.** Wenn ein Glied der kinematischen Kette, das Grundglied, festgehalten wird und aus ihr ein Getriebe entsteht, bedarf die Gleichung 242 für die Anzahl der Ersatzpunkte einer Veränderung. Denn jene Glieder, die sich um ein Gelenk des Grundgliedes drehen, bedürfen nur eines einzigen Ersatzpunktes. (Vgl. 384, Gleichung 234.) Da nun diese, mit dem Grundgliede gelenkig verbundenen Glieder durch die Zahl  $n$  sämtlicher Glieder bereits berücksichtigt sind, dürfen die Gelenke eines solchen Gliedes nicht weiter in  $g$  mitgezählt werden.

Dann ist also die Anzahl der Ersatzpunkte:

$$z_1 = n_1 + g_1 \dots \dots \dots 243)$$

worin  $n_1$  die Anzahl der bewegten Glieder des Getriebes und  $g_1$  die Anzahl aller jener Gelenke ist, deren sämtliche Glieder weder Drehungen um feste Punkte, noch Translationen ausführen.

Bei den meisten Getrieben, die in der Praxis verwendet werden, besitzt jedes Gelenk ein Glied, das entweder eine Drehung um einen festen Punkt oder eine Translation vollzieht; dann ist  $g_1 = 0$  und es bleibt:

$$z_1 = n_1 \dots \dots \dots 244)$$

Werden also **alle** Gelenke eines Getriebes durch sich drehende oder fortschreitende Glieder geführt, so kann die bewegte Masse des Getriebes durch ebensoviele Punkte ersetzt werden, als das Getriebe bewegte Glieder besitzt.

**Beispiele.**

1. Die Doppelkurbel (Fig. 707). Die bewegten Gelenke *A* und *B* werden durch Drehungen um die festen Gelenke  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  geführt. Es ist  $n_1 = 3$  und ebenso  $z_1 = 3$ , nämlich *A*, *B* und *S*.

2. In dem sechsgliedrigen zwangläufigen Getriebe Fig. 708 wird nur das Gelenk *E* nicht durch ein sich drehendes Glied geführt. Es ist  $n_1 = 5$ ,  $g_1 = 1$  und  $z_1 = 6$ , nämlich *A*, *B*, *E*,  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ .

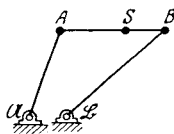


Fig. 707.

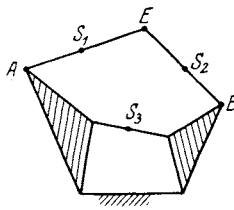


Fig. 708.

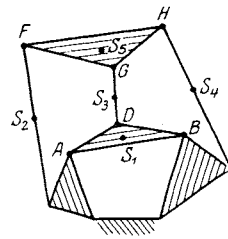


Fig. 709.

3. In dem achtgliedrigen zwangläufigen Getriebe Fig. 709 werden die Gelenke *F*, *G*, *H*, *D* nicht durch sich drehende Glieder geführt; es ist  $n_1 = 7$ ,  $g_1 = 4$  und  $z_1 = 11$ , nämlich *A*, *B*, *D*, *F*, *G*, *H* und die Schwerpunkte  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $S_4$ ,  $S_5$ .

4. Bei der Peaucellierschen Geradföhrung (Fig. 710) wird nur das Gelenk *C* nicht durch ein sich drehendes Glied geführt; es ist  $n_1 = 7$ ,  $g_1 = 1$  und  $z_1 = 8$ , nämlich *A*, *B*, *C*, *D* und die Schwerpunkte  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $S_4$ .

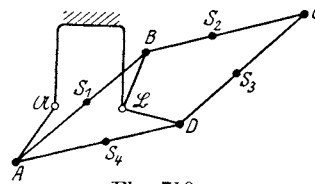


Fig. 710.

5. Fig. 711 zeigt ein achtzehngliedriges Getriebe, in dem die Gelenke *A* bis *K* nicht durch rotierende Glieder geführt werden; es ist  $n_1 = 17$ ,  $g_1 = 10$  und  $z_1 = 27$ , nämlich die Punkte *A* bis *M* und fünfzehn Schwerpunkte.

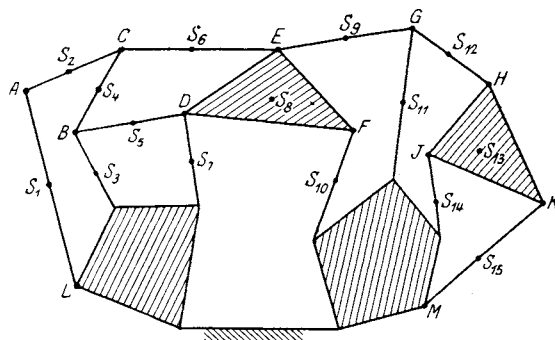


Fig. 711.

**409. Die kleinste Anzahl von Ersatzpunkten.** Die nach Gleichung 242 bestimmte Anzahl von Ersatzpunkten einer kinematischen Kette ist nicht die kleinstmögliche, da jedes Glied, und zwar nicht nur jedes stabförmige, durch zwei Punkte ersetzt werden kann, von denen keiner im Schwerpunkte liegt (vgl. 99).

Ist  $n$  die Anzahl der Glieder der Kette,  $g_r$  die Anzahl der Gelenke mit  $r$  Gliedern, so trifft in den meisten Fällen für die kleinste Anzahl der Ersatzpunkte einer kinematischen Kette die Regel zu:

$$\min z = 2n - \frac{1}{2}(g_2 + 2g_3 + 3g_4 + \dots) \dots \dots 245)$$

Bezeichnet man wieder mit  $x$  den Beweglichkeitsgrad der Kette, so kann diese Regel auch so geschrieben werden:

$$\min z = \frac{1}{4}(5n + x) \dots \dots \dots 246)$$

Zieht man zum Vergleiche die in 407 angeführten Beispiele heran, so ist für:

1. Das Gelenkviereck Fig. 712:  $n = 4$ ,  $x = 4$  und  $\min z = 6$  gegen  $z = 8$  von früher, nämlich zwei gegenüberliegende Gelenke  $A, C$  und vier in den Schwerlinien der Glieder liegende Punkte  $E, F, G, H$ .

2. Das allgemeinere Gelenkviereck Fig. 713 führt ebenfalls auf die gleichen sechs (statt 12) Ersatzpunkte.

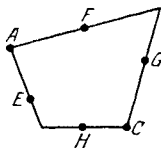


Fig. 712.

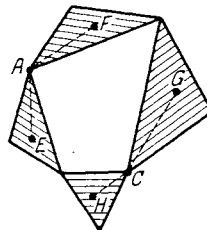


Fig. 713.

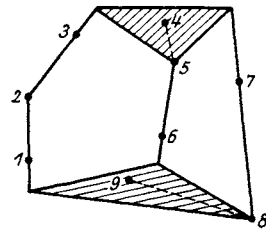


Fig. 714.

3. Für die Kette Fig. 714 ist  $n = 6$  und  $x = 4$ ,  $\min z = 8 \frac{1}{2}$ , also 9 (gegen  $z = 13$  von früher). Jeder Stab ist durch ein Gelenk und einen zweiten Punkt ersetzt, ebenso jedes Dreieck.

4. Für die Kette Fig. 715, die flächenläufig ist, wird  $x = 5$  und  $n = 13$ , somit  $\min z = \frac{1}{4}(5 \cdot 13 + 5) = 17 \frac{1}{2}$  oder 18 (gegen 25 von früher). Die Ersatzpunkte der beiden letzten Beispiele sind mit Ziffern bezeichnet.

Für ein Getriebe kann die kleinste Zahl der Ersatzpunkte in den meisten Fällen aus der Gleichung:

$$\min z_1 = 2n_b - \frac{1}{2}(g_{b2} + 2g_{b3} + 3g_{b4} + \dots) - n_0 \dots 247)$$

bestimmt werden, worin  $n_b$  die Anzahl der bewegten Glieder,  $g_{br}$  die Anzahl der bewegten Gelenke mit  $r$  Gliedern,  $n_0$  die Anzahl jener Glieder ist, die sich um Punkte des Grundgliedes drehen.

Zieht man die Beispiele aus 408 heran, so ist für:

1. die Doppelkurbel Fig. 707:  $n_b = 3$ ,  $n_0 = 2$ ,  $g_{b2} = 2$ ;  $\min z_1 = 3$  (wie früher);
2. das sechsgliedrige zwangsläufige Getriebe Fig. 716:  $n_b = 5$ ,  $n_0 = 2$ ,  $g_{b2} = 5$ ;  $\min z_1 = 5\frac{1}{2}$  oder 6 (wie früher);

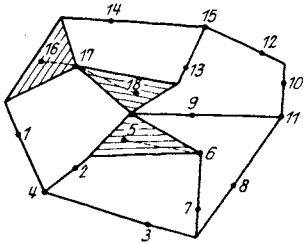


Fig. 715.

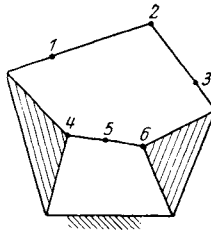


Fig. 716.

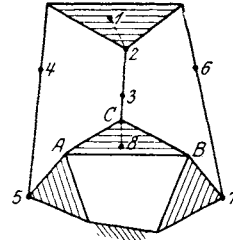


Fig. 717.

3. das achtgliedrige zwangsläufige Getriebe Fig. 717:  $n_b = 7$ ,  $n_0 = 2$ ,  $g_{b2} = 8$ ;  $\min z_1 = 8$  (gegen  $z_1 = 11$  von früher); das Dreieck  $ABC$  ist durch Punkt 8 ersetzt und eine Masse in  $A$ , die aber zu Punkt 5 zurückgeführt werden kann.

4. Das achtzehngliedrige Getriebe Fig. 718:  $n_b = 17$ ,  $n_0 = 2$ ,  $g_{b2} = 12$ ,  $g_{b3} = 5$ ;  $\min z_1 = 21$  (gegen  $z_1 = 27$  von früher).

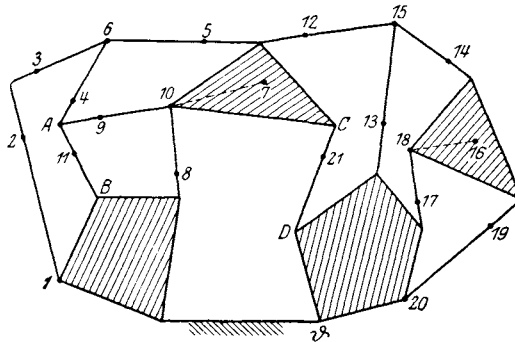


Fig. 718.

Der Stab  $AB$  ist durch Punkt 11 ersetzt und eine Masse in  $B$ , die aber nach Punkt 1 reduziert werden kann; ebenso ist der Stab  $CD$  durch den Punkt 21 ersetzt und eine Masse in  $D$ , die aber nach dem Punkt 20 reduziert werden kann, da  $D$  und 20 den gleichen festen Drehpunkt  $\mathfrak{D}$  haben.

In diesen Beispielen wurden die notwendigen Ersatzpunkte durch fortlaufende Ziffern bezeichnet.

## 410. Aufgaben.

162. Das in Fig. 719 gezeichnete Getriebe soll durch dynamische Ersatzpunkte ersetzt werden. Wie groß ist ihre Anzahl nach Gleichung 243 und wo liegen sie?

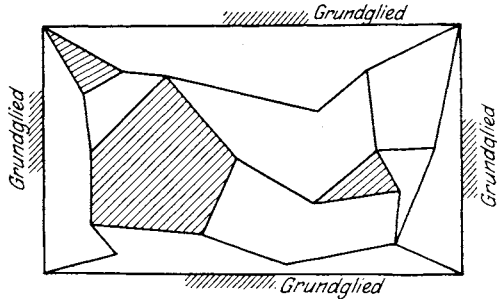


Fig. 719.

163. Auf welche kleinste Zahl läßt sich die Anzahl der nötigen Ersatzpunkte in voriger Aufgabe vermindern und wo liegen diese Ersatzpunkte?

411. Massenreduktion des Schreibzeuges eines Indikators. Das Getriebe des Indikators wurde schon in 170, Fig. 339, gelegentlich der Bestimmung der relativen Drehpole besprochen.

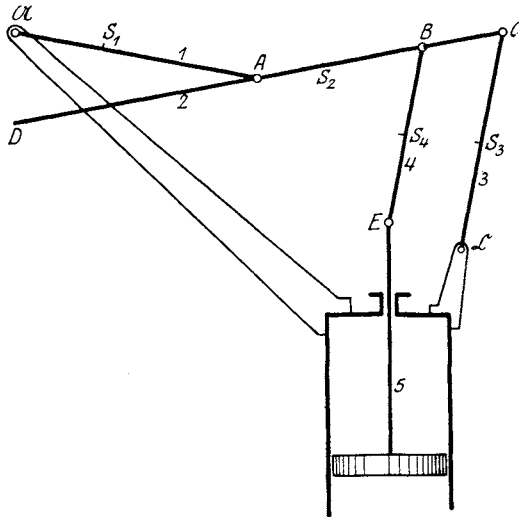


Fig. 720.

Die bewegten Teile dieses Getriebes sind (Fig. 720):  
1. die um  $\mathcal{N}$  drehbare Schwinge 1;

2. der Schreibhebel 2 mit den drei Gelenken  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und dem Schreibstift in  $D$ ;
3. die um  $\mathbb{C}$  drehbare Schwinge 3;
4. der Lenker 4;
5. die Kolbenstange 5 mit dem Kolben.

Die Massen aller dieser Teile sollen an den Punkt  $E$  der Kolbenstange reduziert werden. Ihre Abmessungen, Gewichte, Schwerpunkte und Trägheitsmomente wurden der Abhandlung von H. Polster: „Untersuchung der Druckwechsel und Stöße im Kurbelgetriebe von Kolbenmaschinen“, Forschungsarbeiten, Heft 172, 173 entnommen.

Die Abmessungen in cm sind:

$$\overline{A\mathbb{A}} = \overline{D\overline{A}} = \overline{A\overline{C}} = 4,1, \quad \overline{S_2\overline{C}} = 2,9, \quad \overline{B\overline{C}} = 1,37, \quad \overline{C\mathbb{C}} = 3,64, \\ \overline{B\overline{E}} = 2,92, \quad \overline{S_4\overline{E}} = 1,46;$$

die Gewichte in gr:

$$G_1 = 1,89, \quad G_2 = 6,88, \quad G_3 = 8,74 \quad G_4 = 7,28, \quad G_5 = 42,75;$$

die Trägheitsmomente in  $\frac{\text{grcm}^2}{g}$ :

$$\mathbf{T}_{1\mathbb{A}} = 9,4176, \quad \mathbf{T}_{2\overline{C}} = 108,6948, \quad \mathbf{T}_{3\mathbb{C}} = 43,5564, \quad \mathbf{T}_{4\overline{E}} = 14,6121.$$

Die Masse der in gerader Translation begriffenen Kolbenstange kann unmittelbar in den Reduktionspunkt  $E$  verlegt werden; es ist

$$\mu_{E5} = \frac{G_5}{g} = \frac{42,75 \text{ gr}}{g}.$$

Die Masse der Schwinge 1 kann nach Gleichung 234 durch einen einzigen Massenpunkt in  $A$  ersetzt werden; es ist

$$\mu_{A1} = \frac{\mathbf{T}_{1\mathbb{A}}}{A\mathbb{A}^2} = \frac{0,56 \text{ gr}}{g};$$

ebenso kann die Masse der Schwinge 3 durch eine einzige Punktmasse in  $C$  ersetzt werden:

$$\mu_{C3} = \frac{\mathbf{T}_{3\mathbb{C}}}{C\mathbb{C}^2} = \frac{3,28 \text{ gr}}{g}.$$

Die Masse des Lenkers 4 wird, da der Schwerpunkt  $S_4$  in der Mitte liegt, nach Gleichung 58 in die gleichen Massen  $2M_4 \left(\frac{i_4}{l_4}\right)^2$  in  $B$  und  $E$ , und in  $M_4 \left[1 - 4 \left(\frac{i_4}{l_4}\right)^2\right]$  in  $S_4$  zu zerlegen sein; hierin ist  $i_4$  der Trägheitshalbmesser des Lenkers in bezug auf  $S_4$ , er wird aus  $l_4 = \overline{B\overline{E}} = 2,92 \text{ cm}$ ,  $\overline{S_4\overline{E}} = 1,46 \text{ cm}$  und

$$\mathbf{T}_{4\overline{E}} = \frac{G_4}{g} [i_4^2 + \overline{S_4\overline{E}}^2] = \frac{14,6121 \text{ gr cm}^2}{g}$$

mit  $i_4^2 = 1,07 \text{ cm}^2$  gefunden; mit diesem Werte wird

$$\mu_{B4} = \mu_{E4} = 0,25 \frac{G_4}{g} = \frac{1,82 \text{ gr}}{g}, \quad \mu_{S4} = 0,5 \frac{G_4}{g} = \frac{3,64 \text{ gr}}{g}.$$



Die Masse des Schreibhebels 2 endlich kann in die drei Gelenke  $A$ ,  $B$ ,  $C$  zerlegt werden, wie dies allgemein in 105 gezeigt wurde.

Die Gleichungen 57 hierfür lauteten:

$$\mu_{A2} = \frac{M_2}{D} (x_3 - x_2) (x_3 x_2 + i_2^2),$$

$$\mu_{B2} = \frac{M_2}{D} (x_1 - x_3) (x_1 x_3 + i_2^2),$$

$$\mu_{C2} = \frac{M_2}{D} (x_2 - x_1) (x_2 x_1 + i_2^2),$$

$$D = x_3 x_2 (x_3 - x_2) + x_1 x_3 (x_1 - x_3) + x_2 x_1 (x_2 - x_1).$$

$$\text{Hier ist } x_1 = \overline{S_2 A} = -1,11 \text{ cm, } x_2 = \overline{S_2 B} = 1,62 \text{ cm,} \\ x_3 = \overline{S_2 C} = 2,99 \text{ cm, } D = 15,3344 \text{ cm}^3;$$

ferner aus

$$\mathbf{T}_{2C} = \frac{G_2}{g} [i_2^2 + \overline{S_2 C}^2] = \frac{108,6948 \text{ gr cm}^2}{g} : i_2^2 = 6,85 \text{ cm}^2$$

und somit

$$\mu_{A2} = 1,044 \frac{G_2}{g} = \frac{7,18 \text{ gr}}{g},$$

$$\mu_{B2} = -0,944 \frac{G_2}{g} = -\frac{6,49 \text{ gr}}{g},$$

$$\mu_{C2} = 0,900 \frac{G_2}{g} = \frac{6,19 \text{ gr}}{g}.$$

Die Massen der Ersatzpunkte sind somit:

$$\mu_A = \mu_{A1} + \mu_{A2} = \frac{7,74 \text{ gr}}{g},$$

$$\mu_B = \mu_{B2} + \mu_{B4} = -\frac{4,67 \text{ gr}}{g},$$

$$\mu_C = \mu_{C2} + \mu_{C3} = \frac{9,47 \text{ gr}}{g},$$

$$\mu_E = \mu_{E4} + \mu_{E5} = \frac{44,57 \text{ gr}}{g},$$

$$\mu_{S4} = \frac{3,64 \text{ gr}}{g}.$$

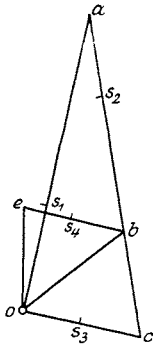


Fig. 720 a.

Sodann wurde in Fig. 720a unter Annahme der beliebigen Geschwindigkeitsstrecke  $\overline{oa} = 5 \text{ cm}$  der Geschwindigkeitsplan des Getriebes konstruiert und dabei die Verhältnisse der Geschwindigkeiten gefunden:

$$\frac{v_A}{v_E} = 2,98, \quad \frac{v_B}{v_E} = 1,26, \quad \frac{v_C}{v_E} = 1,20, \quad \frac{v_{S4}}{v_E} = 1,00.$$

Es ist dann die gesamte nach  $E$  reduzierte Masse des Getriebes

$$\mathfrak{M} = \mu_A \left( \frac{v_A}{v_E} \right)^2 + \mu_B \left( \frac{v_B}{v_E} \right)^2 + \mu_C \left( \frac{v_C}{v_E} \right)^2 + \mu_E + \mu_{S4} \left( \frac{v_{S4}}{v_E} \right)^2 \\ = \frac{1}{g} [68,73 - 7,41 + 13,64 + 44,57 + 3,64] = \frac{123,17 \text{ gr}}{g}.$$

412. Kraft und Massenreduktion bei der Atkinsonschen Gasmachine.

Fig. 721 zeigt die schematische Anordnung dieses in R. Schöttlers „Gasmachines“, 3. Aufl., 1899, S. 148 mitgeteilten Getriebes (auch Eng. 1887, S. 361 und Engng. 1887, S. 433).

Hier ist  $P$  die Kolbenkraft,  $A$  der Kreuzkopf,  $AB$  der Lenker,  $E\mathcal{C}$  die Kurbel; die Verbindung beider geschieht durch ein dreistieliges Glied  $EBC$ , das aus zwei starr miteinander verbundenen Stangen  $ED$  und  $BC$  besteht.

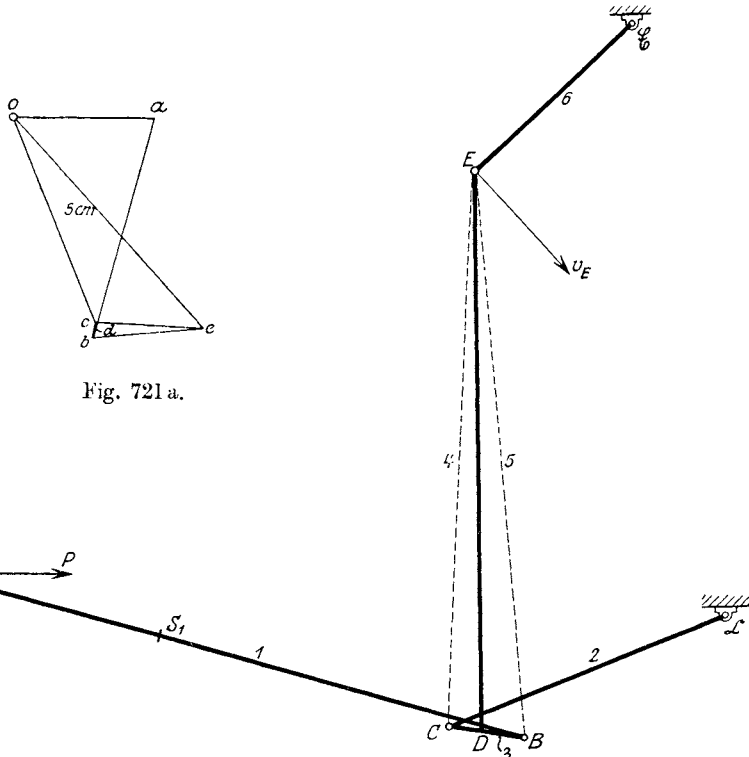


Fig. 721 a.

Fig. 721.

Während die Kurbel in  $E$ , der Lenker in  $B$  angeschlossen ist, wird der dritte Eckpunkt  $C$  des dreistieligen Gliedes von einer Schwinge  $C\mathcal{C}$  geführt, die ihren festen Drehpunkt in  $\mathcal{C}$  besitzt.

a) Kraftreduktion. Es soll die Kolbenkraft  $P$  an den Kurbelzapfen  $E$  reduziert werden.

a) Mit Benützung des Geschwindigkeitsplanes. In Fig. 721 a wurde die Geschwindigkeit  $v_E$  durch die beliebig angenommene Strecke  $oe = 5\text{cm}$  dargestellt und hieraus in bekannter Weise der Geschwindigkeitsplan gezeichnet. Dann ist die reduzierte Kraft

$$\mathfrak{P} = P \cdot \frac{v_A}{v_E} = 0,49 P.$$

β) Mit Benützung des Kraftplanes. Ersetzt man das dreistielige Glied durch die Dreieckseiten 3, 4, 5 und nennt 1 den Lenker, 2 die Schwinge, 6 die Kurbel und 7 die Verbindung von  $A$  mit  $\mathfrak{A}^\infty$ , so kann in Fig. 721 b der Kraftplan in folgender Reihenfolge leicht gezeichnet werden:

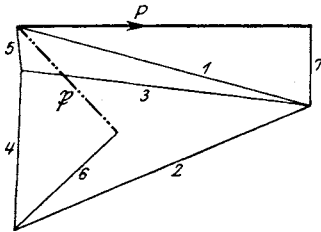


Fig. 721 b.

$$\begin{aligned} P + 7 + 1 &= 0, \\ 1 + 3 + 5 &= 0, \\ 3 + 2 + 4 &= 0, \\ 6 + 4 + 5 + \mathfrak{P} &= 0, \end{aligned}$$

wodurch  $\mathfrak{P}$  bestimmt ist.

b) Massenreduktion.

Gegeben sind:

die Längen in cm:  $AB = 55$ ,  $\overline{AS}_1 = 33$ ,  $C\mathfrak{C} = 27$ ,  $E\mathfrak{C} = 19$ ;

die Gewichte in kg:  $G_8$  (Kolbenstange) = 5,  $G_1 = 6$ ,  $G_2 = 3$ ,  $G_6 = 2,1$ ;  
das Trägheitsmoment des Lenkers 1 in bezug auf das Ende  $A$ :

$$\mathbf{T}_{1A} = \frac{9801 \text{ kgcm}^2}{g}, \text{ ferner } \mathbf{T}_{2\mathfrak{C}} = \frac{729 \text{ kgcm}^2}{g} \text{ und } \mathbf{T}_{6\mathfrak{C}} = \frac{252,7 \text{ kgcm}^2}{g}.$$

Die Angaben für das dreistielige Glied  $EBC$  wurden bereits in 108, 4. Beispiel, mitgeteilt.

Zunächst wurden die dynamischen Ersatzpunkte der Glieder festgestellt.

Die Masse der mit 8 bezeichneten Kolbenstange kann in  $A$  vereinigt werden:  $\mu_{A8} = \frac{5 \text{ kg}}{g}$ .

Die Ersatzpunkte der sich drehenden Glieder 2 und 6 können in die Punkte  $C$  und  $E$  gelegt werden; es ist

$$\mu_{C2} = \frac{\mathbf{T}_{2\mathfrak{C}}}{C\mathfrak{C}^2} = \frac{1 \text{ kg}}{g}, \quad \mu_{E6} = \frac{\mathbf{T}_{6\mathfrak{C}}}{E\mathfrak{C}^2} = \frac{0,7 \text{ kg}}{g}.$$

Um die Ersatzmassen des Lenkers 1 zu bestimmen, benütze man die Gleichungen 58:

$$\mu_{A1} = \frac{\mathbf{T}_S}{al}, \quad \mu_{B1} = \frac{\mathbf{T}_S}{bl}, \quad \mu_{S1} = M_1 - \frac{\mathbf{T}_S}{ab},$$

worin  $l = \overline{AB} = 55$  cm,  $a = \overline{AS}_1 = 33$  cm,  $b = \overline{S_1B} = 22$  cm,

$$M_1 = \frac{G_1}{g} = \frac{6 \text{ kg}}{g}, \quad \mathbf{T}_S = \mathbf{T}_{1A} - M_1 a^2 = \frac{3267 \text{ kgcm}^2}{g};$$

es wird mit diesen Werten:

$$\mu_{A1} = \frac{1,8 \text{ kg}}{g}, \quad \mu_{B1} = \frac{2,7 \text{ kg}}{g}, \quad \mu_{S1} = \frac{1,5 \text{ kg}}{g}.$$

Die Ersatzmassen des dreistieligen Gliedes  $EBC$  wurden bereits in 108, 4. Beispiel, ermittelt; sie waren auf die Punkte  $E$  (statt  $A$ ),  $B$ ,  $C$ ,  $D$  verteilt und hatten die Größen:

$$\mu_{E'} = \frac{2 \text{ kg}}{g}, \quad \mu_{B'} = -\frac{57,774 \text{ kg}}{g}, \quad \mu_{C'} = -\frac{77,128 \text{ kg}}{g}, \quad \mu_{D'} = \frac{137,462 \text{ kg}}{g}.$$

Somit erscheint das Getriebe durch folgende Punktmassen ersetzt:

$$\begin{aligned} \mu_A &= \mu_{A1} + \mu_{A1} = \frac{6,8 \text{ kg}}{g}, & \mu_B &= \mu_{B1} + \mu_{B'} = -\frac{55,074 \text{ kg}}{g}, \\ & & \mu_{S1} &= \frac{1,5 \text{ kg}}{g}, \\ \mu_C &= \mu_{C2} + \mu_{C'} = -\frac{76,128 \text{ kg}}{g}, & \mu_D &= \mu_{D'} = \frac{137,462 \text{ kg}}{g}, \\ & & \mu_E &= \mu_{E'} + \mu_{E6} = \frac{2,7 \text{ kg}}{g}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Geschwindigkeitsplanes wurden nun die Ersatzmassen  $\mu$  nach  $E$  reduziert; die gesamte nach  $E$  reduzierte Masse des Getriebes ist schließlich:

$$\mathfrak{M} = \mu_A \left( \frac{v_A}{v_E} \right)^2 + \mu_B \left( \frac{v_B}{v_E} \right)^2 + \mu_{S1} \left( \frac{v_{S1}}{v_E} \right)^2 + \mu_C \left( \frac{v_C}{v_E} \right)^2 + \mu_D \left( \frac{v_D}{v_E} \right)^2 + \mu_E.$$

Mit  $v_E = \overline{oe} = 5 \text{ cm}$ , wie angenommen wurde, ergaben sich:

$$\begin{aligned} v_A &= \overline{oa} = 2,54 \text{ cm}, & v_B &= \overline{ob} = 4,16 \text{ cm}, & v_{S1} &= \overline{os_1} = 2,98 \text{ cm}, \\ v_C &= \overline{oc} = 3,92 \text{ cm}, & v_D &= \overline{od} = 4,02 \text{ cm} \end{aligned}$$

und

$$\mathfrak{M} = 1,7544 - 38,0561 + 0,5340 - 46,8187 + 89,0754 + 2,7 = \frac{9,1890 \text{ kg}}{g}.$$

**413. Aufgabe.**

164. Beider Kruppschen Verschwindelafette (Fig. 722) wird das Geschützrohr  $R$  durch das Gegengewicht  $G$  teilweise im Gleichgewicht gehalten;  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  sind festliegende Gelenke,  $A\mathfrak{A}C$  eine starre Stange. Man soll sowohl das Gegengewicht  $G$ , wie auch die Massen des ganzen Getriebes nach dem Schildzapfen  $A$  reduzieren und das Diagramm der reduzierten Gewichte und Massen für den ganzen Weg des Zapfens  $A$  von der höchsten (Schußlage) des Rohres zeichnen. (Erwähnt in M. Schwabach, Dynamische Theorie der Verschwindelafetten, Dissertation 1904.)

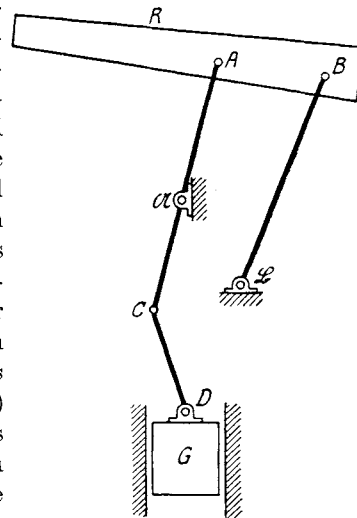


Fig. 722.

**414. Untersuchung der Bewegung des Reduktionspunktes.** Nachdem sämtliche Kräfte und Massen des Getriebes an den Reduktionspunkt  $E$  reduziert sind, was am besten in tabellarischer Zusammenstellung erfolgen wird (vgl. das Beispiel in 415), kann die Bewegung des Punktes  $E$  wie die eines Punktes mit veränderlicher Masse und veränderlicher Kraft genau nach jenen Regeln untersucht werden, die in Abschnitt XXXVIII ausführlich geschildert und an einigen Beispielen angewendet wurden.

Grundsätzlich ist also kein Unterschied zwischen der dynamischen Untersuchung eines Getriebes und jener eines einzelnen geführten Systems. In gewissen einfachen Fällen wird das Getriebe sogar direkt durch ein geführtes System ersetzt werden können. Dies trifft z. B. bei der Doppelkurbel zu (Fig. 707), die zwar drei bewegte Glieder besitzt, aber auf ein einziges, nämlich die Koppel  $AB$ , dynamisch zurückgeführt werden kann. Nennt man hier

$$\mu_{A1} = \frac{T_{1\mathfrak{A}}}{A\mathfrak{A}^2}, \quad \mu_{B2} = \frac{T_{2\mathfrak{B}}}{B\mathfrak{B}^2}$$

(vgl. 357, Gleichung 207), die nach  $A$  bzw.  $B$  verlegten Ersatzmassen der rotierenden Glieder 1 und 2; ferner  $\mu_{A3}$ ,  $\mu_{B3}$ ,  $\mu_{S3}$  die drei Ersatzmassen der Koppel 3 in  $A$ ,  $B$ ,  $S$ , so trägt diese die vereinigten Ersatzmassen:

$$\mu_A = \mu_{A1} + \mu_{A3}, \quad \mu_B = \mu_{B2} + \mu_{B3} \quad \text{und} \quad \mu_S;$$

sie ist nun wie ein einzelnes, geführtes System dynamisch zu behandeln.

Das gleiche gilt natürlich von den verschiedenen Arten der Schubkurbel.

Wie man übrigens auch die Eigengewichte der Glieder als treibende Kräfte in Rechnung stellen kann, soll folgende Anwendung auf ein einfaches Getriebe vorführen.

**415. Schwingende Bewegung eines schweren Getriebes.** Ein aus drei Stäben bestehendes Getriebe (Fig. 723)  $\mathfrak{A}AE\mathfrak{C}$  ist in den festen Gelenken  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{C}$  gelagert und in der gezeichneten Anfangsstellung in Ruhe. Die Gewichte, Schwerpunkte und Trägheitsmomente der drei Glieder sind bekannt. Man überläßt das Getriebe der Wirkung der Schwerkraft; bis zu welcher Stellung wird es schwingen und wie ändern sich die Geschwindigkeiten während der Bewegung?

Man wählt  $E$  als Reduktionspunkt, zeichnet dessen Kreisweg und teilt ihn in beliebige gleiche Teile, für die 15 cm Länge angenommen wurde; der Längemaßstab der Zeichnung ist

$$1 \text{ cm Zeichnung} = 0,3 \text{ m Länge.}$$

Der Weg des Punktes  $E$  wurde in Fig. 724 in doppelt so großem Maßstabe auf einer Geraden  $II$  abgewickelt (0 bis 16).

Kraftreduktion. Die treibenden Kräfte sind die gegebenen Gewichte:

$$G_1 = 10 \text{ kg}, \quad G_2 = 40 \text{ kg}, \quad G_3 = 25 \text{ kg.}$$

Die Entfernungen der Schwerpunkte sind:

$$\overline{AS_1} = 1,28 \text{ m}, \quad \overline{ES_2} = 0,55 \text{ m}, \quad \overline{CS_3} = 0,5 \text{ m}.$$

Verteilt man die Gewichte statisch auf die Punkte  $A$  und  $E$ , so wird das treibende Gewicht in  $A$ :

$$G_A = G_1 \cdot \frac{\overline{AS_1}}{\overline{EA}} + G_2 \cdot \frac{\overline{ES_2}}{\overline{EA}} = 18 \text{ kg},$$

das Gewicht in  $E$ :

$$G_E = G_3 \cdot \frac{\overline{CS_3}}{\overline{CE}} + G_2 \cdot \frac{\overline{S_2A}}{\overline{EA}} = 42,5 \text{ kg}.$$

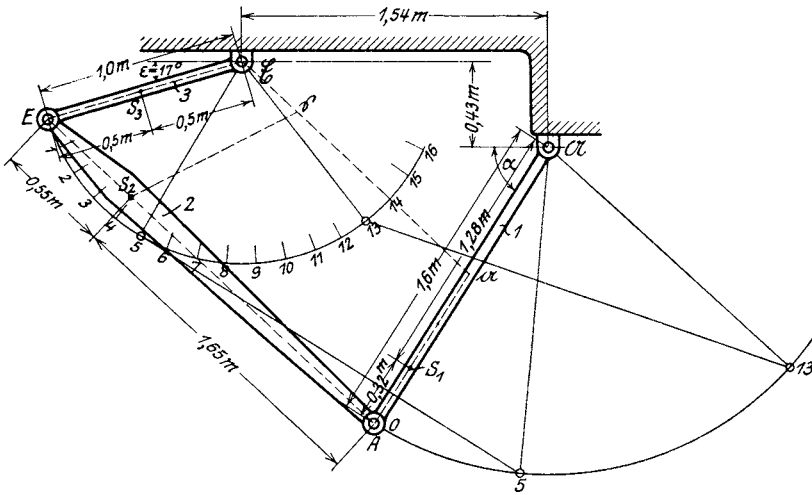


Fig. 723.

Reduziert man beide Gewichte in die Bewegungsrichtung von  $A$  bzw.  $E$ , so sind diese reduzierten Gewichte

$$G_A' = G_A \cos \alpha, \quad G_E' = G_E \cos \varepsilon$$

und somit die ganze nach  $E$  reduzierte treibende Kraft

$$\mathfrak{B} = G_E' + G_A' \frac{v_A}{v_E}.$$

Das Geschwindigkeitsverhältnis  $\frac{v_A}{v_E}$  wurde wie in Fig. 356 gefunden, indem man  $v_E$  durch die Länge  $\overline{E\mathcal{C}}$  darstellt und  $\mathcal{C}\alpha \parallel EA$  zieht; dann ist  $\overline{A\alpha}$  die entsprechende Größe von  $v_A$ . Auf diese Weise wurde  $v_A$  für die Stellungen 0 bis 16 ermittelt und die Werte der Verhältnisse  $\frac{v_A}{v_E}$  in eine Tabelle eingetragen.

Ebenso wurden die Werte von  $G_A'$  und  $G_E'$  durch Projizieren auf die Tangenten der von  $E$  und  $A$  beschriebenen Kreisbogen für die

genannten 17 Stellungen bestimmt und ebenfalls in der Tabelle zusammengestellt; endlich wurden die Summen  $\mathfrak{S}$  gebildet (s. S. 732).

Massenreduktion. Die Trägheitsmomente der drei Glieder seien in folgender Weise gegeben:

$$\mathbf{T}_{1\mathfrak{A}} = \frac{250\,000}{g} \text{ kgcm}^2, \quad \mathbf{T}_{2A} = \frac{1\,200\,000}{g} \text{ kgcm}^2, \quad \mathbf{T}_{3\mathfrak{E}} = \frac{80\,000}{g} \text{ kgcm}^2.$$

Das Glied 1 ist in  $A$  durch die Punktmasse

$$\mu_{A1} = \frac{\mathbf{T}_{1\mathfrak{A}}}{A\mathfrak{A}^2} = \frac{9,77}{g} \text{ kg},$$

das Glied 3 in  $E$  durch die Punktmasse

$$\mu_{E3} = \frac{\mathbf{T}_{3\mathfrak{E}}}{E\mathfrak{E}^2} = \frac{8}{g} \text{ kg}$$

ersetzt worden.

Der Trägheitshalbmesser  $i_2$  des Gliedes 2 ist nach der Gleichung

$$\mathbf{T}_{2A} = \frac{G_2}{g} (i_2^2 + a^2) = \frac{1\,200\,000}{g} \text{ kgcm}^2,$$

worin  $a = \overline{AS_2} = 165 \text{ cm}$ , mit  $i_2^2 = 2775 \text{ cm}^2$  zu berechnen. Die Masse dieses Gliedes wird auf die drei Punkte  $A$ ,  $S_2$ ,  $E$  dynamisch verteilt; es ist nach Gleichung 58 mit  $l = \overline{AE} = 220 \text{ cm}$ ,  $e = \overline{ES_2} = 55 \text{ cm}$ :

$$\mu_{A2} = \frac{G_2}{g} \cdot \frac{i_2^2}{al} = \frac{3,06}{g} \text{ kg}, \quad \mu_{E2} = \frac{G_2}{g} \cdot \frac{i_2^2}{el} = \frac{9,18}{g} \text{ kg},$$

$$\mu_{S_2} = \frac{G_2}{g} \left( 1 - \frac{i_2^2}{ae} \right) = \frac{27,76}{g} \text{ kg};$$

somit sind die Ersatzmassen für die Berechnung der reduzierten Masse:

$$\mu_A = \mu_{A1} + \mu_{A2} = \frac{12,83}{g} \text{ kg}, \quad \mu_E = \mu_{E3} + \mu_{E2} = \frac{17,18}{g} \text{ kg},$$

$$\mu_{S_2} = \frac{27,76}{g} \text{ kg}.$$

Das gesamte nach  $E$  reduzierte Massengewicht ist dann nach Gleichung 227 und 235:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{M}g = \left[ \mu_A \left( \frac{v_A}{v_E} \right)^2 + \mu_E + \mu_{S_2} \left( \frac{v_S}{v_E} \right)^2 \right] g.$$

Die Geschwindigkeit  $v_S$  des Schwerpunkts  $S_2$  wurde ermittelt, indem

$$\overline{\mathfrak{E}\mathfrak{s}} : \overline{\mathfrak{s}\mathfrak{a}} = \overline{ES_2} : \overline{S_2A} = 1 : 3$$

gemacht und  $S_2$  mit  $\mathfrak{s}$  verbunden wurde; dann ist  $v_S = S_2\mathfrak{s}$ , wenn  $v_E$  durch die Länge  $\overline{E\mathfrak{E}}$  dargestellt ist. (Vgl. Fig. 104 mit Punkt  $C$ .) Das

Verhältnis  $\frac{v_S}{v_E}$  wurde für die Lagen 0 bis 16 des Getriebes ermittelt

und in die Tabelle eingetragen; sodann wurden die Werte von  $\left( \frac{v_A}{v_E} \right)^2$

und  $\left(\frac{v_S}{v_E}\right)^2$  und schließlich die Werte der Summe  $\mathcal{G} = \mathcal{M}g$  tabellarisch zusammengestellt.

Das Geschwindigkeitsdiagramm. In Fig. 724 wurde über dem abgerollten Wege des Reduktionspunktes  $E$  mit dem

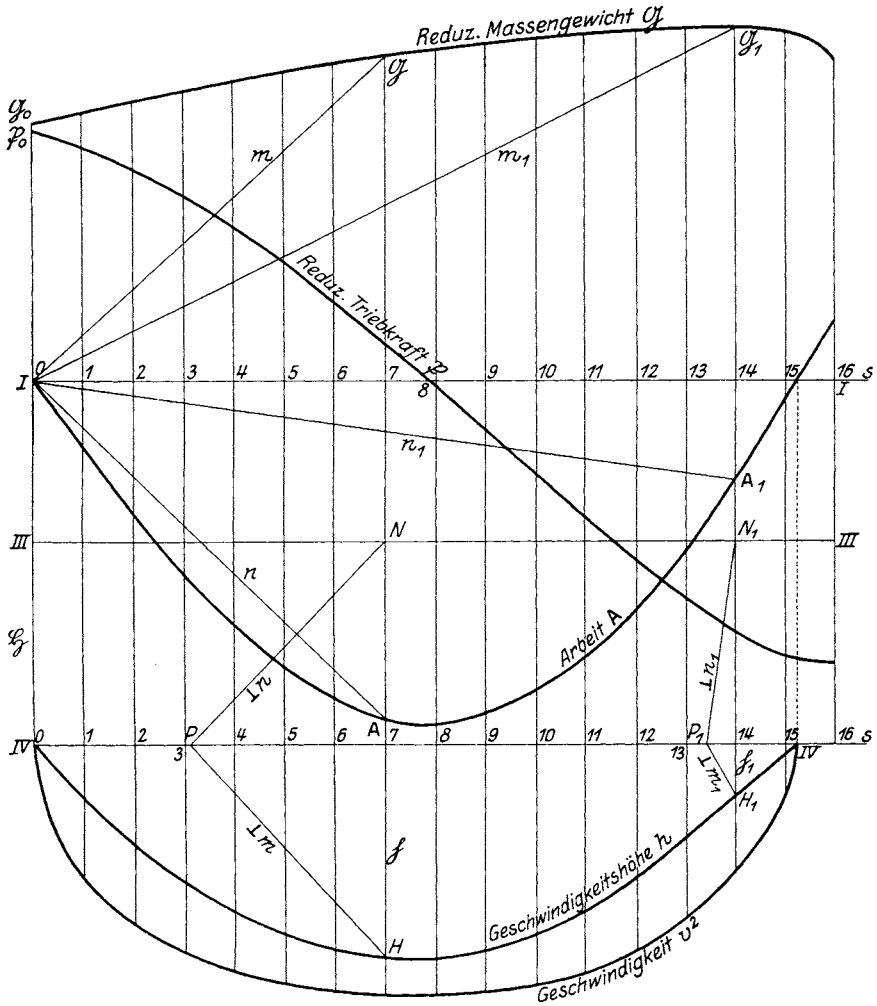


Fig. 724.

Längenmaßstab: 1 cm Zeichnung = 0,15 m Weg,  $\alpha = 0,15$ ,  
 das  $\mathcal{P}$ -s-Diagramm und das  $\mathcal{G}$ -s-Diagramm von der Achse  $II$  aus auf-  
 getragen, und zwar mit Benutzung der Maßstäbe:

Kraftmaßstab: 1 cm Zeichnung = 10 kg,  $\kappa = 10$ ;

Massengewichtsmaßstab: 1 cm Zeichnung = 10 kg,  $\mu = 10$ .



Die Integralkurve des  $\mathfrak{P}$ - $s$ -Diagramms ist das Arbeitsdiagramm  $\mathbf{A}$ - $s$ ; die Arbeitsbasis wurde mit  $\mathfrak{A} = \frac{1}{3}$  cm angenommen; dann ist nach Gleichung 181:

$$\lambda = a\kappa\mathfrak{A} = 0,5$$

und somit der

Arbeitsmaßstab: 1 cm Zeichnung = 0,5 mkg.

Nach dem Arbeitsprinzip Gleichung 182:

$$L - L_0 = \mathbf{A}$$

wird, da  $L_0 = 0$  angenommen wurde, für  $\mathbf{A} = 0$  auch  $L = 0$  sein; wo also das  $\mathbf{A}$ - $s$ -Diagramm die  $s$ -Achse schneidet, kommt der Reduktionspunkt  $E$  zur Ruhe, das Getriebe zum Stillstand, um sodann seine Bewegung umzukehren. Dies findet zwischen den Stellungen 15 und 16 statt (Fig. 724).

Die Konstruktion der Geschwindigkeitshöhen oder des  $h$ - $s$ -Diagramms ist von früher bekannt (vgl. Abb. 675 und 677).

Um z. B. für die Stellung 7 die Geschwindigkeitshöhe zu finden, nimmt man (Fig. 724)  $\mathfrak{S} = 4$  cm beliebig an, zieht die Achsen  $III\ III$  und  $IV\ IV$ , ferner die Linien  $m = I\ \mathfrak{S}$ ,  $n = IA$ ,  $NP \perp n$ ,  $PH \perp m$ ; dann ist  $7H = \mathfrak{h}$ . Dieselbe Konstruktion wurde in der Figur für die Stellung 14 wiederholt.

Der Maßstab für die Geschwindigkeitshöhen ergab sich nach 389, Schluß:

$$\varepsilon = \frac{a\kappa}{\mu} \cdot \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{S}} = \frac{1}{80} \text{ d. h.}$$

Stellung des Punktes E	$\frac{v_A}{v_E}$	$\frac{v_N}{v_E}$	$\left(\frac{v_A}{v_E}\right)^2$	$\left(\frac{v_N}{v_E}\right)^2$	$G_E'$	$G_A'$	$G_A' \cdot \frac{v_A}{v_E}$	$\mathfrak{P}^{h_g}$	$g \mu_E$	$g \mu_A \left(\frac{v_A}{v_E}\right)^2$	$g \mu_N \left(\frac{v_N}{v_E}\right)^2$	$\mathfrak{S}^{h_g}$
	0	0.870	0.930	0.757	0.865	40.800	9.835	8.556	49.356	17.180	9.712	24.012
1	0.930	0.944	0.865	0.891	38.624	8.496	7.901	46.525		11.098	24.734	53.012
2	0.975	0.960	0.951	0.922	35.088	6.912	6.739	41.827		12.201	25.595	54.976
3	1.020	0.990	1.040	0.980	31.552	5.472	5.581	37.133		13.343	27.205	57.728
4	1.060	0.994	1.124	0.988	26.656	3.672	3.892	30.548		14.420	27.426	59.026
5	1.110	1.006	1.232	1.012	21.488	2.045	2.270	23.758		15.806	28.094	61.080
6	1.145	1.025	1.311	1.051	15.667	0	0	15.667		16.820	29.176	63.176
7	1.165	1.030	1.357	1.061	9.520	-1.944	-2.265	7.255	unveränderlich	17.411	29.454	64.045
8	1.195	1.036	1.428	1.072	3.536	-3.888	-4.646	-1.110		18.321	29.759	65.260
9	1.210	1.043	1.464	1.088	-2.720	-5.904	-7.144	-9.864		18.738	30.202	66.120
10	1.225	1.050	1.501	1.103	9.248	-7.704	-9.437	18.685		19.258	30.619	67.057
11	1.240	1.053	1.538	1.109	15.014	-9.504	-11.781	26.799		19.732	30.786	67.698
12	1.260	1.064	1.588	1.132	21.216	-11.232	-14.152	35.368		20.374	31.425	68.979
13	1.266	1.065	1.603	1.134	26.656	-12.816	-16.225	42.881		20.566	31.480	69.226
14	1.270	1.070	1.613	1.145	32.640	-14.256	-18.105	50.745		20.695	31.785	69.660
15	1.255	1.070	1.575	1.145	35.360	-15.437	-19.373	54.733	20.143	31.785	69.108	
16	1.126	1.030	1.268	1.061	38.080	-16.416	-18.484	56.564	16.269	29.453	62.902	

Maßstab der Geschwindigkeitshöhen: 1 cm Zeichnung :=  $\frac{1}{80}$  m.

Das  $v^2$ - $s$ -Diagramm kann sodann aus der Gleichung  $v^2 = 2gh$  entweder gerechnet oder konstruiert werden. Als Maßstab wurde hierfür gewählt: 1 cm Zeichnung =  $0,2$  (m/sek.)<sup>2</sup>.

**416. Die Reduktion der Trägheitskräfte.** Das D'Alembertsche Prinzip kann auch dazu benützt werden, um die Gelenkdrücke an irgend einer Stelle des Getriebes, z. B. die Drücke einer Steuerung mit Umgehung der Spannungen, zu bestimmen. Löst man nämlich ein beliebiges Stück des Getriebes aus seiner Verbindung mit den übrigen Gliedern und bringt an diesem Stücke die Drücke der gelösten Gelenke und die äußeren Kräfte, Führungs- und Auflagerdrücke usw., sowie die sämtlichen Trägheitskräfte des ausgeschnittenen Teiles an, so herrscht zwischen allen diesen Kräften Gleichgewicht. Reduziert man alle an eine beliebige Stelle des Getriebes, und zwar an jene, an der der Gelenkdruck bestimmt werden soll, so müssen die reduzierten Kräfte auch noch Gleichgewicht halten; hierdurch ist aber der gesuchte Gelenkdruck leicht zu finden.

Neunt man  $m$  einen Massenpunkt des Getriebes,  $v$  seine Geschwindigkeit,  $b$  seine Beschleunigung,  $\varphi$  den Winkel zwischen beiden, so ist  $-mb$  die Trägheitskraft dieses Punktes und  $-mb \cdot v \cos \varphi$  ihre Leistung;

nun ist  $b \cos \varphi = \frac{dv}{dt}$ , somit ist die Leistung

$$-mv \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{d(mv^2)}{dt}$$

und die Leistung der Trägheitskräfte aller Punkte sämtlicher Glieder:

$$-\frac{1}{2} \frac{d \sum \sum (mv^2)}{dt}$$

Mit Benützung der Gleichung 238 für die reduzierte Masse:

$$\mathfrak{M} = \frac{\sum \sum (mv^2)}{v_E^2},$$

wenn  $E$  der Reduktionspunkt ist, wird diese Leistung

$$-\frac{1}{2} \frac{d(\mathfrak{M}v_E^2)}{dt}$$

Reduziert man sämtliche Trägheitskräfte nach  $E$  und nennt  $\mathfrak{T}$  die gesamte reduzierte Trägheitskraft, so ist deren Leistung

$$\mathfrak{T} \cdot v_E = -\frac{1}{2} \frac{d \sum \sum (mv^2)}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{d(\mathfrak{M}v_E^2)}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{d\mathfrak{M}}{dt} v_E^2 - \mathfrak{M}v_E \frac{dv_E}{dt}$$

oder 
$$\mathfrak{T} = - \left[ \frac{1}{2} \frac{d\mathfrak{M}}{dt} v_E + \mathfrak{M} \frac{dv_E}{dt} \right];$$

setzt man noch  $v_E = \frac{ds}{dt}$ ,  $b_E = \frac{dv_E}{dt}$ , so wird

$$\mathfrak{T} = - \left[ \frac{1}{2} \frac{d\mathfrak{M}}{ds} v_E^2 + \mathfrak{M}b_E \right],$$



418. Aufgabe.

165. Von der Regnierschen Compound-Wasserhaltungsmaschine, Fig. 726 (mitgeteilt von R. Dörfel, Technische Blätter 1885) ist die Massenverteilung, der Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustand gegeben. Man ermittle für den Kurbelzapfen A den Rückdruck des Getriebes.

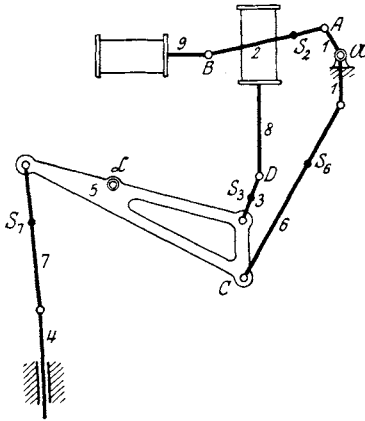


Fig. 726.

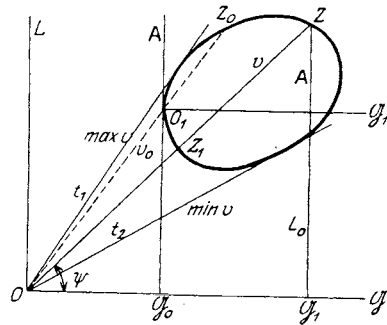


Fig. 727.

419. Das Massenwuchtdiagramm. Außer den bereits besprochenen dynamischen Diagrammen soll am Abschlusse der Dynamik eines Diagramms Erwähnung getan werden, das für die Untersuchung gewisser in die Praxis einschlagender Fragen besonders geeignet ist.

Verbindet man nämlich das von früher bekannte  $L$ - $s$ -Diagramm mit dem  $\mathcal{G}$ - $s$ -Diagramm derart, daß man die reduzierten Massengewichte  $\mathcal{G}$  als Abszissen, die zugehörigen Werte der Bewegungsenergie oder Wucht  $L$  als Ordinaten aufträgt, so entsteht das sog. Massenwuchtdiagramm (Fig. 727). Es sei  $O$  der Anfangspunkt des Achsenkreuzes  $L\mathcal{G}$ ,  $L = L_0 + A$  die Bewegungsenergie des Getriebes zu irgend einer Zeit,  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 + \mathcal{G}_1$  das reduzierte Massengewicht des Getriebes, worin  $\mathcal{G}_0$  der unveränderliche Teil,  $\mathcal{G}_1$  der veränderliche ist. Trägt man  $L$  und  $\mathcal{G}$  als Ordinate und Abszisse eines Punktes  $Z$  auf, so stellt  $Z$  den Zustand des Getriebes zu der betreffenden Zeit vor. Der geometrische Ort aller Punkte  $Z$  ist das Massenwuchtdiagramm; es muß eine geschlossene Kurve sein, wenn die Zustände des Getriebes sich wiederholen, wenn es also Perioden besitzt.

Als Anfangszustand des Getriebes in seiner Periode möge jener angenommen werden, bei welchem die veränderliche Masse verschwindet, d. h.  $\mathcal{G}_1 = 0$  ist. Dieser Zustand ist in Fig. 727 durch den Punkt  $O_1$  dargestellt, dessen Koordinaten  $L_0$ , die anfängliche Bewegungsenergie und  $\mathcal{G}_0$ , das kleinste, daher unveränderliche Massengewicht des Reduktionspunktes sind.

Legt man das Achsenkreuz durch  $O_1$  statt durch  $O$ , so sind die Koordinaten eines beliebigen Zustandes  $Z$  die Arbeit  $\mathbf{A}$  und das veränderliche Massengewicht  $\mathcal{G}_1$  des Reduktionspunktes. Verbindet man  $Z$  mit  $O$ , so ist  $\operatorname{tg} \psi = \frac{L}{\mathcal{G}}$ , also nach Gleichung 228:

$$\operatorname{tg} \psi = h = \frac{v^2}{2g}.$$

Die Neigung  $\psi$  der Geraden  $OZ$  ist demnach ein Maß für die Geschwindigkeitshöhe und somit auch für die Geschwindigkeit des Reduktionspunktes.

Die Neigung der Geraden  $OO_1$  ist ebenso ein Maß für die anfängliche Geschwindigkeitshöhe:

$$\operatorname{tg} \psi_0 = h_0 = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Die Zustände  $Z$  und  $Z_1$  des Getriebes, die auf derselben durch  $O$  gehenden Geraden liegen, besitzen gleiche Geschwindigkeit  $v$ .

Aus diesem Grunde ist z. B.  $Z_0$  jener Zustand des Getriebes, in dem die anfängliche Geschwindigkeit  $v_0$  wiederkehrt.

Die Zustände größter und kleinster Geschwindigkeit des Getriebes erhält man, indem man aus  $O$  die Tangenten an das Diagramm zieht. Denn es ist nach Gleichung 228:  $L = \mathcal{G}h$ , also  $dL = \mathcal{G} \cdot dh + h \cdot d\mathcal{G}$ . Nun ist sowohl für  $\max v$ , wie auch für  $\min v$ :  $dv = 0$ , also auch  $dh = 0$  und somit

$$h = \frac{dL}{d\mathcal{G}} = \operatorname{tg} \psi,$$

welcher Bedingung die durch  $O$  gezogenen Tangenten des Diagramms entsprechen.

Um das Massenwuchtdiagramm durch ein Beispiel darzustellen, wurde in Fig. 728 aus dem  $\mathbf{A}$ - $s$ -Diagramm und dem  $\mathcal{G}$ - $s$ -Diagramm der Fig. 680 das Massenwuchtdiagramm zusammengestellt; für die 24 Stellungen des Getriebes wurden die Massengewichte  $\mathcal{G}$  horizontal, die zugehörigen Arbeiten  $\mathbf{A}$  vertikal aufgetragen und diese Zustandspunkte durch eine stetige Kurve verbunden.

Das Diagramm ist nicht geschlossen, die Bewegung entspricht also keinem Beharrungszustande. Die Tangenten an das Diagramm, von  $O$  aus gezogen, entsprechen der größten und

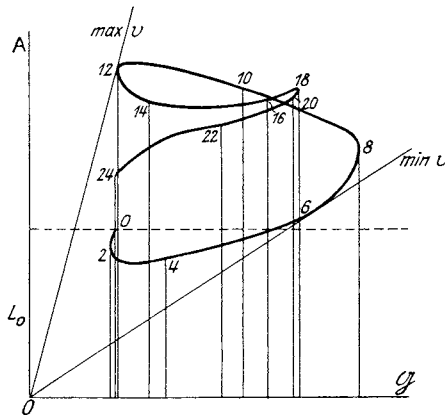


Fig. 728.

kleinsten Geschwindigkeit, die für die Stellung 12 bzw. in der Nähe von 6 (gegen 8 zu) eintreten (vgl. Fig. 680).

Von dem Massenwuchtdiagramm hat u. a. O. Kölsch in seinem Buche: „Gleichgang und Massenkräfte bei Fahr- und Flugzeugmaschinen“, 1911, ausgedehnte Anwendung gemacht und dieses Diagramm in seiner sehr abweichenden Gestalt für eine große Anzahl von Maschinen (Reihen-, Gabel-, Stern-, Fächer- und Umlaufmaschinen) gezeichnet und sehr wichtige und lehrreiche Folgerungen gezogen.

**420. Räumliche Bewegungsdiagramme.** Die Beziehungen zwischen der Bewegungsenergie  $L$ , der veränderlichen Masse  $\mathfrak{M}$ , dem Wege  $s$ , der Geschwindigkeit  $v$  und der Beschleunigung  $b$  lassen sich sehr anschaulich durch ein räumliches Diagramm darstellen (Fig. 729).

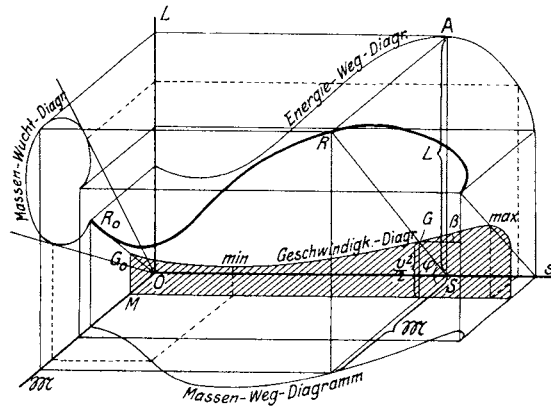


Fig. 729.

Der Zustand eines bewegten Getriebes sei für eine bestimmte Stelle  $s$  des Weges des Reduktionspunktes durch die Bewegungsenergie  $L$  und die reduzierte Masse  $\mathfrak{M}$  des Getriebes gegeben. Betrachtet man  $s$ ,  $L$ ,  $\mathfrak{M}$  als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes  $R$ , so schildert die Lage dieses Punktes den augenblicklichen Bewegungszustand des Getriebes.  $R_0$  sei dessen Anfangszustand; die räumliche Kurve  $R_0R$  gibt den Verlauf der Zustandsänderungen des Getriebes. Ihre Projektionen auf die drei Koordinatenebenen sind: das Energie-Weg-Diagramm, das Massen-Weg-Diagramm und das Massen-Wuchtdiagramm.

Zieht man in dem Punkte  $A$  des ersten dieser Diagramme die Tangente, so ist ihre Neigung  $\alpha$  gegen die  $s$ -Achse nach 378:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dL}{ds} = \mathfrak{F}$$

ein Maß für die reduzierte Kraft  $\mathfrak{F}$  des Getriebes.

Verbindet man die Punkte  $R$  und  $S$ , so ist die Neigung  $\varphi$  dieser Geraden gegen die  $\mathfrak{M}$ - $s$ -Ebene

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L}{\mathfrak{M}} = \mathfrak{L}$$

ein Maß für die spezifische Energie der Masse. (Vgl. 378.)

Legt man in der Entfernung  $OM$  gleich der Masseneinheit eine Ebene parallel zur  $L$ - $s$ -Ebene, so schneidet diese die Gerade  $RS$  im Punkte  $G$ ; der Ort aller dieser Punkte ist das Diagramm  $G_0G$ . Die Ordinaten dieses Diagramms sind

$$\frac{L}{\mathfrak{M}} = \mathfrak{L} = \frac{v^2}{2}$$

die spezifischen Energien oder die halben Quadrate der Geschwindigkeiten.

Die Neigung  $\beta$  der in  $G$  gezogenen Tangente dieses Diagramms gegen die  $\mathfrak{M}$ - $s$ -Ebene ist nach Gleichung 226:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{d\mathfrak{L}}{ds} = b$$

ein Maß für die Beschleunigung der Bewegung.

Zieht man an das Massenwuchtdiagramm  $L$ - $\mathfrak{M}$  von  $O$  die Tangenten, so findet man, wie früher geschildert wurde, jene Zustände des Getriebes, in denen die kleinsten und größten Geschwindigkeiten bestehen. Die Stellen für  $\min v$  und  $\max v$  sind in Fig. 729 im Geschwindigkeitsdiagramm angezeigt worden.

Gewöhnlich wird man mit dem  $L$ - $s$ - und dem  $\mathfrak{M}$ - $s$ -Diagramm auskommen. Man klappt sie dann um die  $s$ -Achse in eine Ebene und begnügt sich mit diesen beiden Projektionen der Zustandskurve  $R_0R$ . Dies soll an folgendem Beispiele näher erläutert werden.

**421. Beispiel. Bewegung zweier schwerer Ellipsenräder.** Das Kurbelgetriebe  $\mathfrak{A}AB\mathfrak{B}$  (Fig. 730) hat die Form eines Antiparallelogrammes; es ist  $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \overline{AB} = 2a$ ,  $A\mathfrak{A} = \overline{B}\mathfrak{B} = 2e$ ; vorausgesetzt wurde  $a > e$ . Dieses Kurbelgetriebe ist gegenläufig, d. h. die beiden Kurbeln  $A\mathfrak{A}$  und  $B\mathfrak{B}$  drehen sich im entgegengesetzten Sinne.

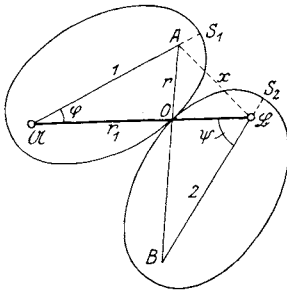


Fig. 730.

Um den relativen Drehpol der beiden Systeme 1 und 2 zu finden, müßte man z. B. das System 1 als das ruhende betrachten; dann bewegt sich das System 2 derart, daß  $B$  einen Kreis um  $A$ ,  $\mathfrak{B}$  einen Kreis um  $\mathfrak{A}$  beschreibt; der relative Drehpol ist dann der Schnittpunkt  $O$  der beiden Geraden  $AB$  und  $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ .

Um den Ort dieser relativen Drehpole zu finden, beachte man, daß

$$\overline{\mathfrak{A}O} + \overline{OA} = \overline{\mathfrak{A}O} + \overline{O\mathfrak{B}} = \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} = 2a$$

ist; der Ort der Punkte  $O$  im System 1 ist demnach eine Ellipse mit der großen Achse  $2a$  und den Brennpunkten  $\mathfrak{A}$  und  $A$ .

Ebenso ist  $\mathfrak{B}O + OB = \mathfrak{B}\bar{O} + O\mathfrak{A} = \mathfrak{B}\mathfrak{A} = 2a$ ; es ist also der Ort der Punkte  $O$  im System 2 eine kongruente Ellipse mit den Brennpunkten  $\mathfrak{B}$  und  $B$ .

Die Bewegung des Kurbelgetriebes  $\mathfrak{A}AB\mathfrak{B}$  kann demnach ersetzt werden durch das Abrollen zweier kongruenter Ellipsen aufeinander (Rollkurven), die in den Brennpunkten  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  gelagert sind. Ihr Berührungspunkt  $O$ , der Drehpol ihrer Relativbewegung, bewegt sich beim Abrollen der Ellipsen auf der festbleibenden Geraden  $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ .

Angenommen, es sei  $M$  die Masse jedes der beiden Räder; ihre Anfangslage sei  $\varphi = 0$ ,  $\psi = 180^\circ$ , d. h. die Ellipsen berühren sich in ihren Scheiteln  $S_1$  und  $S_2$ . Die anfängliche Bewegungsenergie beider Räder zusammen sei  $L_0$  und sie wären nur ihrem Eigengewichte überlassen; man soll den Verlauf der Bewegung durch Angabe des Geschwindigkeitsdiagramms des Punktes  $A$  schildern.

Ist  $A$  der Reduktionspunkt des Getriebes,  $M i^2$  das Trägheitsmoment eines elliptischen Rades für seinen Brennpunkt, so ist zunächst die Ersatzmasse des Rades 1 in  $A$ :

$$\mu_{A1} = \frac{M i^2}{4 e^2}$$

nach Gleichung 234.

Ebenso groß ist aber die Ersatzmasse des Rades 2 in  $B$ :

$$\mu_{B2} = \frac{M i^2}{4 e^2}$$

Die gesamte nach  $A$  reduzierte Masse ist dann

$$\mathfrak{M} = \mu_{A1} + \mu_{B2} \left( \frac{v_B}{v_A} \right)^2,$$

oder da

$$v_A = \overline{A\mathfrak{A}} \cdot \frac{d\varphi}{dt}, \quad v_B = -\overline{B\mathfrak{B}} \cdot \frac{d\psi}{dt}; \quad \mathfrak{M} = \frac{M i^2}{4 e^2} \left( 1 + \left( \frac{d\psi}{d\varphi} \right)^2 \right).$$

Bezeichnet man in Fig. 730a mit  $\overline{OA} = r$ ,  $\overline{O\mathfrak{A}} = r_1$  die Fahrstrahlen des Punktes  $O$ , mit  $d\varphi$  und  $-d\psi$  die Änderungen der Winkel  $\varphi$  und  $\psi$ , wenn  $O$  nach  $O_1$  kommt, mit  $O_1p$  die Zunahme von  $r$ , mit  $O p_1$  die Abnahme von  $r_1$ , so wird, da die Summe  $r + r_1$  konstant bleibt, die Beziehung bestehen:

$$\overline{O_1p} = \overline{O p_1}.$$

Dann sind aber die kleinen, rechtwinkligen Dreiecke  $O_1pO$  und  $O_1p_1O$  kongruent, also auch  $\overline{Op} = \overline{O_1p_1}$  oder  $r(-d\psi) = r_1 d\varphi$ ,  $\frac{d\psi}{d\varphi} = -\frac{r_1}{r}$ .

Nun ist  $r + r_1 = 2a$ ,  $\frac{r_1}{r} = \frac{2a}{r} - 1$ ,  $x = 2r \cos \alpha$

und aus dem Dreiecke  $AB\mathfrak{B}$ :

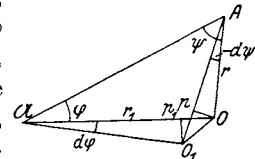


Fig. 730a.



$$4e^2 = 4a^2 + x^2 - 4ax \cos \alpha,$$

worin  $A\mathfrak{B} = x$  und  $\alpha$  den Winkel  $BA\mathfrak{B}$  bezeichnen sollen. Man erhält

hieraus 
$$\frac{r_1}{r} = \frac{4(a^2 - e^2)}{x^2}$$

und wenn mit  $b$  die kleine Halbachse der Ellipse bezeichnet wird:  $a^2 - e^2 = b^2$  und

$$\mathfrak{M} = \frac{M i^2}{4e^2} \left[ 1 + \left( \frac{2b}{x} \right)^4 \right],$$

wodurch die reduzierte Masse der elliptischen Räder als Funktion der veränderlichen Entfernung  $x$  dargestellt ist.

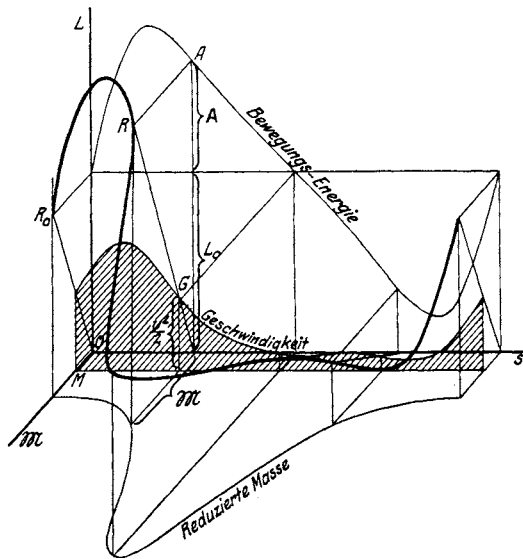


Fig. 731.

Um auch die Bewegungsenergie für irgend einen Verdrehungswinkel  $\varphi$  des Rades 1 zu finden, beachte man, daß die Arbeiten der Gewichte der Räder 1 und 2 seit Beginn der Bewegung die Werte haben:

$$\mathbf{A}_1 = -Mge \sin \varphi, \quad \mathbf{A}_2 = Mge \sin \psi;$$

die Gesamtarbeit ist demnach

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 = Mge (\sin \psi - \sin \varphi)$$

und da

$$\frac{\sin \psi}{\sin \varphi} = \frac{r_1}{r} = \frac{4b^2}{x^2},$$

so bleibt 
$$\mathbf{A} = Mge \sin \varphi \left( \frac{4b^2}{x^2} - 1 \right)$$

und die Bewegungsenergie

$$L = L_0 + A = L_0 + Mge \sin \varphi \left( \frac{4b^2}{x^2} - 1 \right).$$

In Fig. 731 wurde das  $L$ - $s$ - und das  $\mathfrak{M}$ - $s$ -Diagramm gezeichnet, nachdem der Kreisweg  $s = 2e\varphi$  des Reduktionspunktes  $A$  auf der  $s$ -Achse abgewälzt wurde. Aus der räumlichen Zustandskurve  $R_0R$  wurde wie in Fig. 729 das Geschwindigkeitsdiagramm  $\frac{v^2}{2}$  konstruiert.

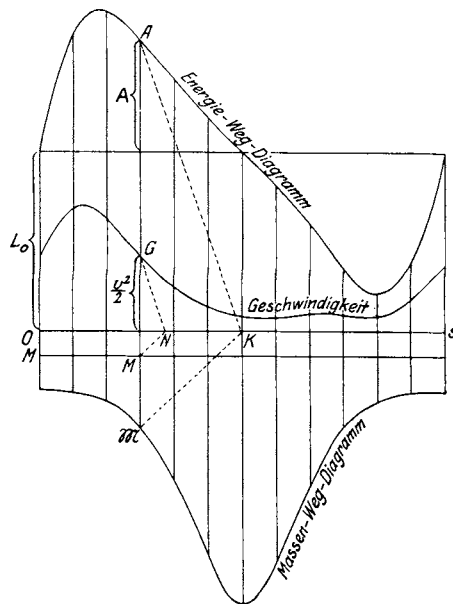


Fig. 731 a.

In Fig. 731 a ist die Umklappung der beiden Diagramme in die Bildebene dargestellt. Um hier aus dem Energie-Weg-Diagramm und dem Massen-Weg-Diagramm die Geschwindigkeitslinie  $\frac{v^2}{2}$  zu finden, genügt es, den Punkt  $K$  irgendwo, z. B. auf der  $s$ -Achse anzunehmen, ihn mit den Punkten  $A$  und  $\mathfrak{M}$  zu verbinden,  $O\bar{M}$  gleich der Masseneinheit maßstäblich aufzutragen und endlich  $MN \parallel \mathfrak{M}K$ ,  $NG \parallel KA$  zu ziehen; dann ist  $G$  ein Punkt des Diagramms von  $\frac{v^2}{2}$ .

**422. Leitsätze.**

Bei der Behandlung dynamischer Aufgaben sind folgende Sätze zu beachten, die in diesem Buche an verschiedenen Stellen vorgeführt wurden:

## a) Augenblicklicher Bewegungszustand.

1. Zur Ermittlung der Beschleunigungen, der Auflager-, Führungs- und Gelenkdrücke aus den Kräften einer kinematischen Kette oder eines Getriebes genügt es, die Massen durch statische Ersatzmassen zu ersetzen, die durch Verteilung nach dem Schwerpunkts-gesetz gefunden werden können.
2. Hierbei sind jedoch zu den Trägheitskräften der Ersatzpunkte die Kraftpaare  $K$  hinzuzufügen.
3. Die Spannungen der Stäbe und Glieder, die auf diesem Wege gefunden werden, sind noch zu korrigieren, da die Spannungen an den Enden eines und desselben Stabes nicht gleich sind.

## b) Zeitliche Bewegung.

4. Bei der Reduktion der Masse einer kinematischen Kette oder eines Getriebes an einen Punkt derselben darf die Masse nur durch dynamische Ersatzmassen ersetzt werden.
5. Nur bei Gliedern, die eine Dauerdrehung machen, kann man deren Masse an einen beliebigen, außerhalb des Drehungspunktes liegenden Reduktionspunkt reduzieren. Diese reduzierte Masse darf jedoch nicht zur Aufstellung der Trägheitskraft benützt werden.
6. Die reduzierte Masse dient nur zur Bestimmung der Beschleunigung des Reduktionspunktes.
7. Die Trägheitskräfte der statischen und dynamischen Ersatzmassen dienen nur zur Ermittlung der in Leitsatz 1 genannten Aufgaben.
8. Trägheitskräfte können wie Kräfte an einen Punkt des Getriebes reduziert werden.
9. Das Produkt

Reduzierte Masse  $\times$  Beschleunigung des Reduktionspunktes  
ist nicht die reduzierte Trägheitskraft.

---

## C. Anwendungen auf die Praxis.

### XLI. Einlaßsteuerung einer Zweitakt-Großgasmaschine, Bauart Körting.

423. Anordnung. Fig. 732 zeigt die Anordnung der Einlaßsteuerung nach einer Ausführung der Maschinenbau-A.G. vorm. Gebr. Klein in Dahlbruch. Die Figur ist entnommen dem Werke: „Die Steuerungen der Verbrennungskraftmaschinen“ von Dr. J. Magg, Berlin 1914, S. 226.

Die Steuerwelle  $\mathcal{E}$ , die durch Kegelräder von der Hauptrolle angetrieben wird und  $n = 83$  Umdrehungen in der Minute macht, bewegt zunächst das Exzenter  $E$  ( $E\mathcal{E} = 90$  mm) und die Treibstange  $EL$  oder 1, durch welche die Schwingung des Schwingdaumens 2 um  $\mathcal{B}$  erfolgt und durch diesen die Drehung des Hebels 3 und  $\mathcal{A}$  und die auf- und niedergehende Bewegung der Ventilstange 4.

Diese hat das Ventil für das Einströmen des Luft- und Gasgemisches in sehr kurzer Zeit zu öffnen und zu schließen und erfährt hierbei große Beschleunigungen. Aus diesem Grunde müssen die Ventile leicht gebaut werden, um die Beschleunigungsdrücke nicht übermäßig groß werden zu lassen; als Material wurde Stahl gewählt.

Die Ventilstange 4 (vgl. auch Fig. 734) wird nach abwärts durch die Steuerung gedrückt, nach aufwärts durch eine kräftige Feder  $F$  gezogen, derart, daß die Führungsrolle des Hebels 3 bei  $A$  an den Schwingdaumen kraftschlüssig angepreßt wird.

Die Aufgabe, die hier gelöst werden soll, besteht in der Bestimmung der Geschwindigkeiten, Beschleunigungen und hauptsächlich der Beschleunigungsdrücke der Ventilstange, sowie der Spannungen und Gelenkdrücke, die in ihr während einer Periode, d. i. während einer Umdrehung der Steuerwelle auftreten.

Fig. 733 gibt in größerem Maßstabe den Schwingdaumen und den Hebel. Die Lauffläche des ersten beginnt mit einem Kreise  $k_1$  vom Halbmesser 245 mm um den Drehpunkt  $\mathcal{B}$ , der sog. unteren Rast; in  $V$  setzt sodann ein Kreisbogen  $V III$  mit dem Halbmesser 125 mm um den Mittelpunkt  $B_1$  ein, der sodann in die Gerade  $III II$  übergeht, um mit dem kleinen Kreisbogen  $II 0$  vom Halbmesser 20 mm um den Mittelpunkt  $B$  zu schließen. Die Form des Umrisses hinter  $0$ , die für die Bewegung ohne Belang ist, wurde als Kreisbogen  $k_2$  vom Halbmesser 299 mm um den Mittelpunkt  $\mathcal{B}$ , der oberen Rast, gewählt.

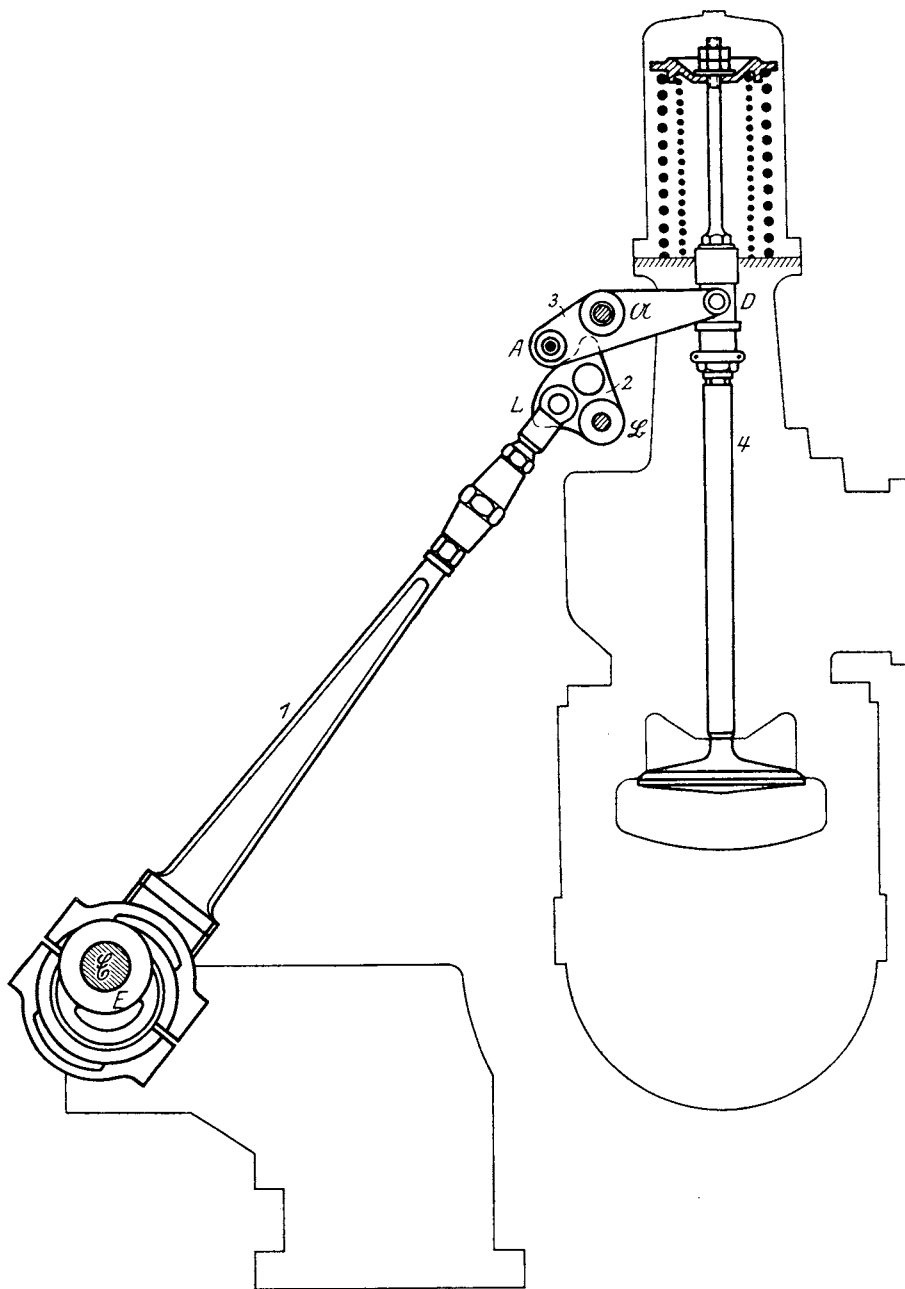


Fig. 732.

424. **Geschwindigkeiten.** Verzichtet man darauf, die übrigens nur ganz unbedeutende Ungleichförmigkeit der Drehung der Steuerwelle zu berücksichtigen, so kann diese Drehung als gleichförmig angesehen werden; die Geschwindigkeit des Exzentermittelpunktes  $E$  ist dann konstant

$$v_E = \frac{0,09 \text{ m} \cdot 83\pi}{30} = 0,782 \text{ m/sek};$$

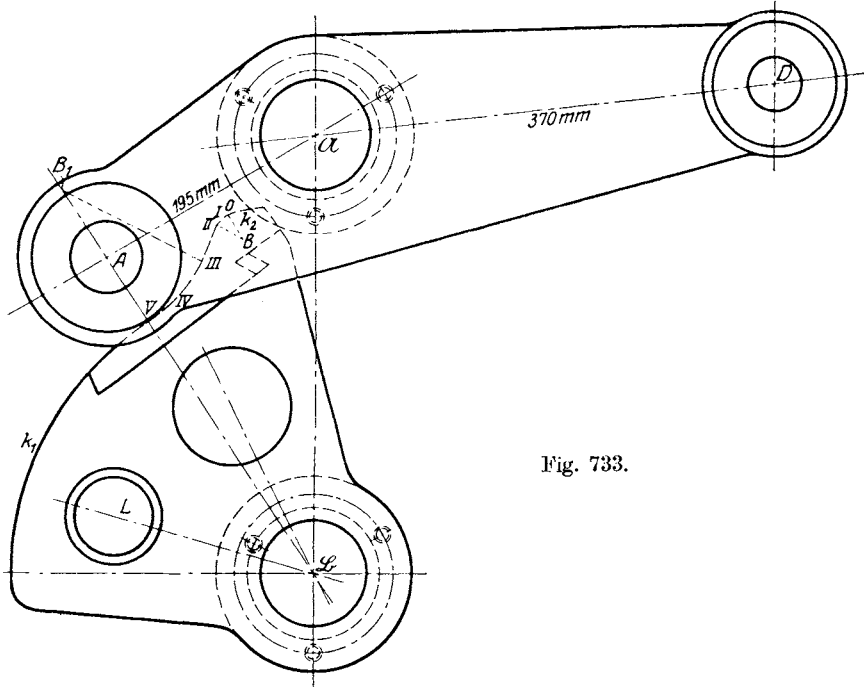


Fig. 733.

die Beschleunigung von  $E$  ist die Normalbeschleunigung

$$n_E = \frac{v_E^2}{E\mathcal{E}} = 6,79 \text{ m/sek}^2.$$

Um die Geschwindigkeit des Gelenkmittelpunktes  $L$  des Schwingdaumens zu ermitteln, wird man das in Fig. 104 geschilderte Verfahren auf das Gelenkviereck  $\mathcal{E}EL\mathcal{B}$  anwenden. Man teilt den Exzenterkreis (Fig. 734) in eine Anzahl gleicher Teile, z. B. 24 und bestimmt nach dem bezeichneten, hier nicht weiter erörterten Verfahren für alle 24 Stellungen die Geschwindigkeit  $v_L$ .

Um die Bewegung des Getriebes während einer Umdrehung des Exzenters deutlich verfolgen zu können, wurde in Fig. 734 sowohl der Exzenterkreis, wie auch der Schwingdaumen in vergrößertem Maßstab gezeichnet. Die Bewegung des Exzenters begänne z. B. in der höchsten

Stellung 0 gegen die Richtung des Uhrzeigers. Während der Bewegung von 0 bis 6 schleift die Rolle  $A$  des Hebels auf dem Kreisbogen  $k_1$ ; dabei wird der Hebel nicht bewegt. Gleich nach 6 jedoch, in der mit  $V$  be-

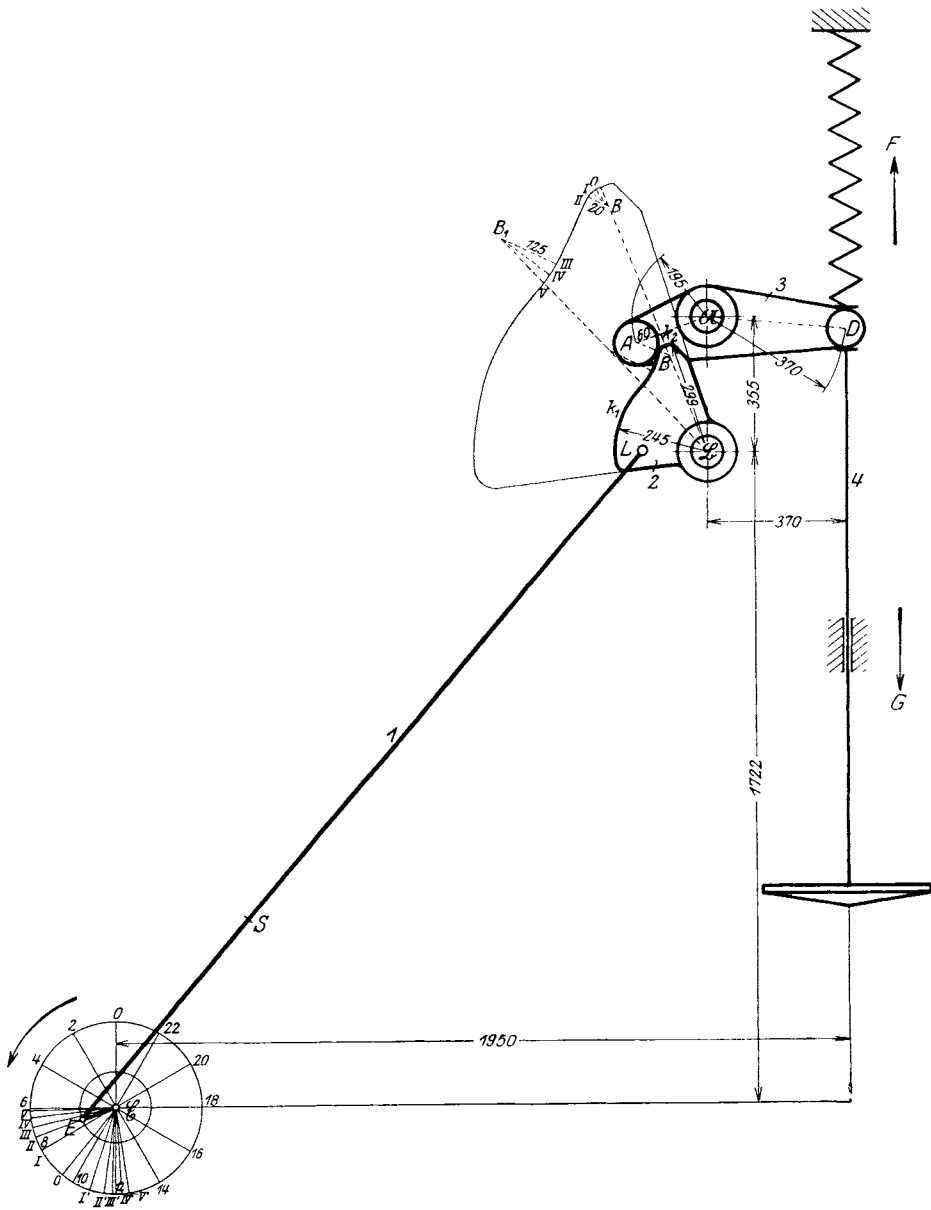


Fig. 734.

zeichneten Exzenterstellung, entsprechend der gleichbezeichneten Stellung des Schwingdaumens, wird die Rolle durch den Schwingdaumen gehoben und durchläuft die Stellungen *IV*, *III*, *II*, *I* bis 0, während das Exzenter die ebenso bezeichneten Stellungen einnimmt. Die letzte Stellung 0 befindet sich auf dem kleinen Kreise des Schwingdaumens, der den Halbmesser 20 mm besitzt. Weiter kommt die Rolle nicht; der obere Kreisbogen  $k_2$  des Schwingdaumens wird also bei dieser Anordnung nicht benützt.

An der Stelle 0 kommen Schwingdaumen und Hebel vorübergehend zur Ruhe, um sodann ihre Bewegung umzukehren; während die Rolle die Stellungen *I III III IV V* wieder durchläuft, um in *V* wieder zur Ruhe zu kommen (untere Rast), durchheilt das Exzenter die Lagen *I' II' III' IV' V'*; von hier an, also von *V'* über die Stellungen 14, 16 usw. bis 0 bewegt sich das Exzenter leer, d. h. die Rolle schleift auf dem Kreisbogen  $k_1$ . In Fig. 734 wurde die Stellung *II* des Getriebes dargestellt. Während des ersten Teiles der Bewegung der Rolle *A* von *V* nach 0 wird sich der Hebel im Sinne des Uhrzeigers drehen, also die Feder *F* gespannt und das Ventil gesenkt. Hingegen wird während des zweiten Teiles, der Rückbe-

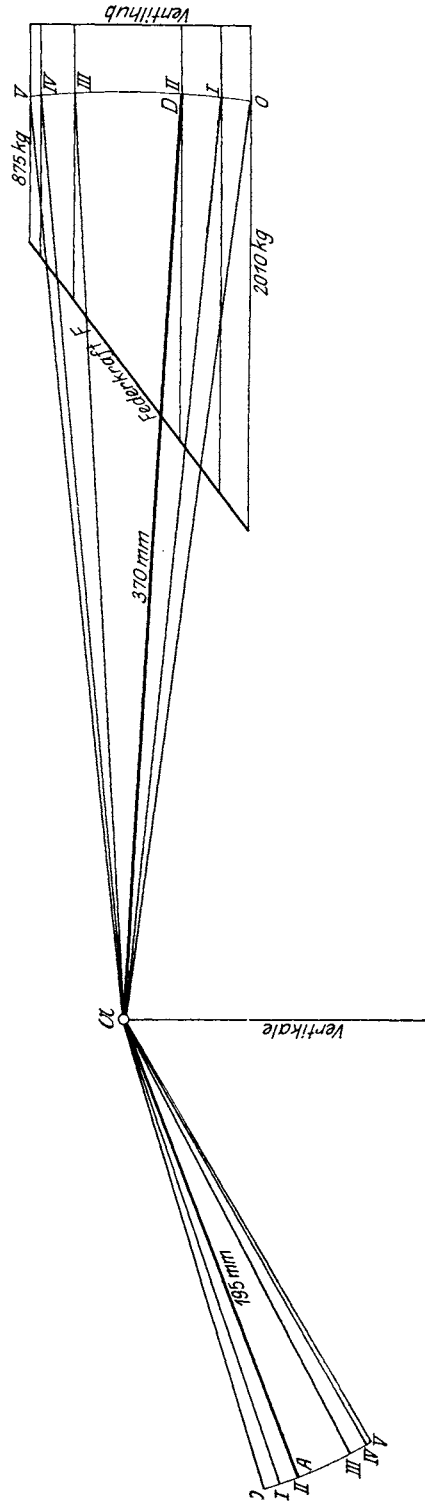


Fig. 735.



wegung der Rolle von 0 nach  $V$ , die Feder entlastet und das Ventil gehoben. Man entnimmt dies deutlicher aus Fig. 735, wo man die Stellungen des Hebels für die Lagen  $V$  bis 0 gezeichnet findet. Die vertikale Entfernung der Grenzlagen  $V$  und 0 ist der Hub des Ventils; er beträgt 88 mm.

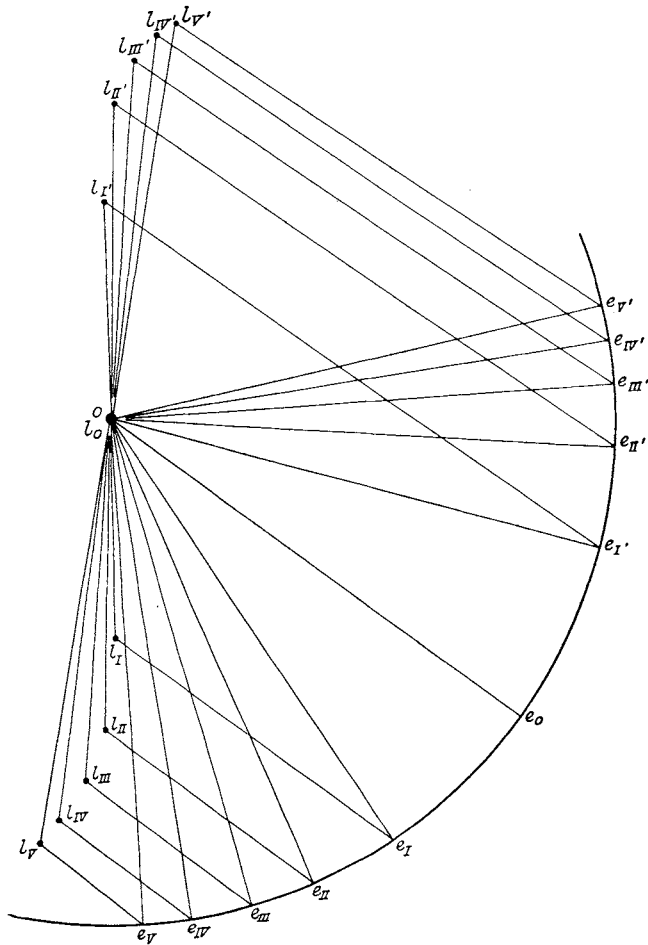


Fig. 736.

Der wichtigste Teil der Bewegung des Getriebes ist also jener zwischen den Stellungen  $V$  und  $V'$ ; er umspannt beiläufig  $98\frac{1}{2}^\circ$  der Drehung der Steuerwelle und da deren Umdrehung bei Annahme gleichförmiger Drehung die Zeit

$$t = \frac{60}{n} = \frac{60}{83} = 0,723 \text{ sek}$$

erfordert, muß die Ventilspindel in der Zeit

$$\tau = t \cdot \frac{98,5}{360} = 0,195 \text{ sek}$$

gesenkt und wieder gehoben werden.

Durch diese außerordentlich rasche Bewegung des Ventils werden bedeutende Massendrucke hervorgerufen und wegen der dadurch entstehenden Spannungen müssen die Beschleunigungen während dieser kleinen Zeit mit möglicher Genauigkeit bestimmt werden.

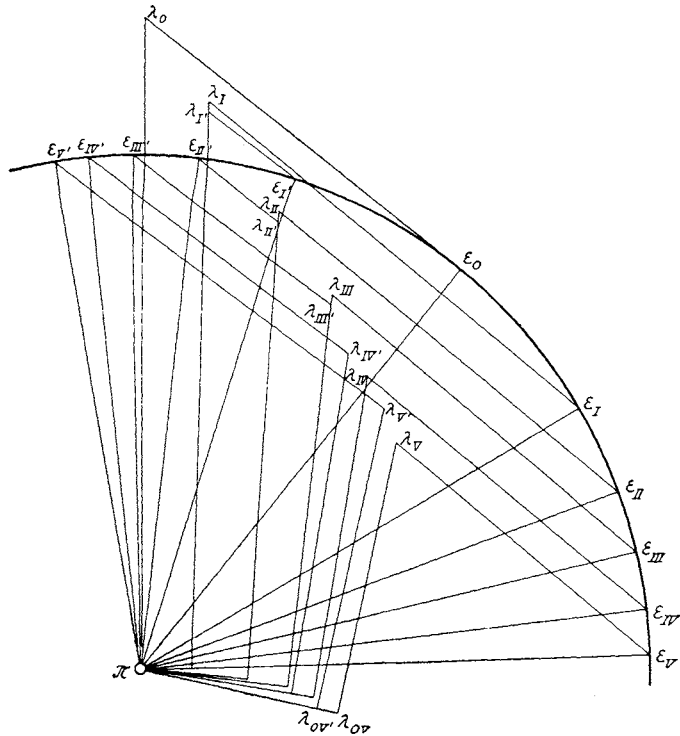


Fig. 737.

Fig. 736 ist der Geschwindigkeitsplan des Punktes  $L$  des Schwingdaumens für die neun Stellungen von  $V$  bis  $V'$ . Aus dem Geschwindigkeitsnullpunkt  $o$  wurde der Exzenterkreis in natürlicher Größe beschrieben und die Senkrechten  $oe_V, oe_{IV}, \dots$  bis  $oe_{V'}$  zu den Halbmessern  $V\mathcal{C}, IV\mathcal{C}, \dots$  bis  $V'\mathcal{C}$  (in Fig. 734) gezogen; dadurch sind die Geschwindigkeitspunkte  $e_V$  bis  $e_{V'}$  des Exzentermittelpunktes gewonnen. Ferner wurden durch  $o$  die Geschwindigkeitsrichtungen von  $L$ , senkrecht zu den neun Stellungen  $L_V\mathfrak{B}, L_{IV}\mathfrak{B}, \dots$  bis  $L_{V'}\mathfrak{B}$ , das sind die Geraden  $ol_V, ol_{IV}, \dots$  bis  $ol_{V'}$ , gezogen und endlich

durch  $e_V, e_{IV},$  usf. die Senkrechten zu den neun Lagen  $E_V L_V, E_{IV} L_{IV}$  usf. der Treibstange  $EL$  errichtet. Dadurch erhält man die Geschwindigkeitspunkte  $l_V, l_{IV}$  usf. bis  $l_{V'}$  des Gelenkes  $L$ .

Der Geschwindigkeitsmaßstab in Fig. 736 ist  $0,782 \text{ m/sek} = 9 \text{ cm}$ , also  $1 \text{ cm} = 0,087 \text{ m/sek}$ , d. i. zehnmal so groß als in Fig. 734.

**425. Beschleunigungen.** Fig. 737 stellt den zugehörigen Beschleunigungsplan dar. Da der Punkt  $E$  sich gleichförmig bewegt, sind seine Beschleunigungen nur Normalbeschleunigungen von der konstanten Größe

$$n_E = 6,79 \text{ m/sek}^2.$$

Wählt man den Beschleunigungsmaßstab derart, daß  $n_E$  durch die Länge  $\overline{E\bar{C}} = 0,09 \text{ m}$  dargestellt wird, so ist der Beschleunigungsmaßstab  $6,79 \text{ m/sek}^2 = 9 \text{ cm}$  oder  $1 \text{ cm} = 0,754 \text{ m/sek}^2$ .

Die Halbmesser  $\pi\varepsilon_V, \pi\varepsilon_{IV}$  usf. bis  $\pi\varepsilon_{V'}$  stellen die Normalbeschleunigung  $n_E$  für die neun Exzenterstellungen  $V$  bis  $V'$  dar.

Um die Beschleunigungspunkte  $\lambda$  des Gelenkes  $L$  zu finden, geht man in der Art vor, die bei Besprechung der Zweipunktführung vorgeführt wurde (siehe Fig. 105 und 105a). Man mache

$$\overline{\pi\lambda_{0V}} \equiv n_V = \frac{v_V^2}{L\mathfrak{B}} = \frac{\overline{ol_V}^2}{L\mathfrak{B}}$$

und ebenso 
$$\overline{\pi\lambda_{0V'}} \equiv n_{V'} = \frac{v_{V'}^2}{L\mathfrak{B}} = \frac{\overline{ol_{V'}}^2}{L\mathfrak{B}}$$

mit  $\overline{L\mathfrak{B}} = 0,165 \text{ m}$ .

Da der Geschwindigkeitsmaßstab in Fig. 736:  $1 \text{ cm} = 0,087 \text{ m/sek}$  war, so ist in der Originalzeichnung

$$\overline{ol_V} = 7,6 \text{ cm} = 0,661 \text{ m/sek},$$

$$\overline{ol_{V'}} = 7,1 \text{ cm} = 0,618 \text{ m/sek}$$

und 
$$n_V = \frac{(0,661 \text{ m/sek})^2}{0,165 \text{ m}} = 2,65 \text{ m/sek}^2,$$

$$n_{V'} = \frac{(0,618 \text{ m/sek})^2}{0,165 \text{ m}} = 2,31 \text{ m/sek}^2$$

oder mit Rücksicht auf den Beschleunigungsmaßstab  $1 \text{ cm} = 0,754 \text{ m/sek}^2$ :

$$\overline{\pi\lambda_{0V}} = 3,51 \text{ cm}, \quad \overline{\pi\lambda_{0V'}} = 3,07 \text{ cm}.$$

Errichtet man in  $\lambda_{0V}$  und  $\lambda_{0V'}$  die Senkrechten auf  $\pi\lambda_{0V}$  bzw.  $\pi\lambda_{0V'}$ , so enthalten diese bereits die Beschleunigungspunkte  $\lambda_V$  bzw.  $\lambda_{V'}$ . Es ist nun

$$b_L \equiv b_E + n_{LE} + t_{LE} \quad (\text{vgl. Gleichung 16}).$$

Die Normalbeschleunigung von  $L$  gegen  $E$  ist

$$n_{LE} = \frac{v_{LE}^2}{LE},$$

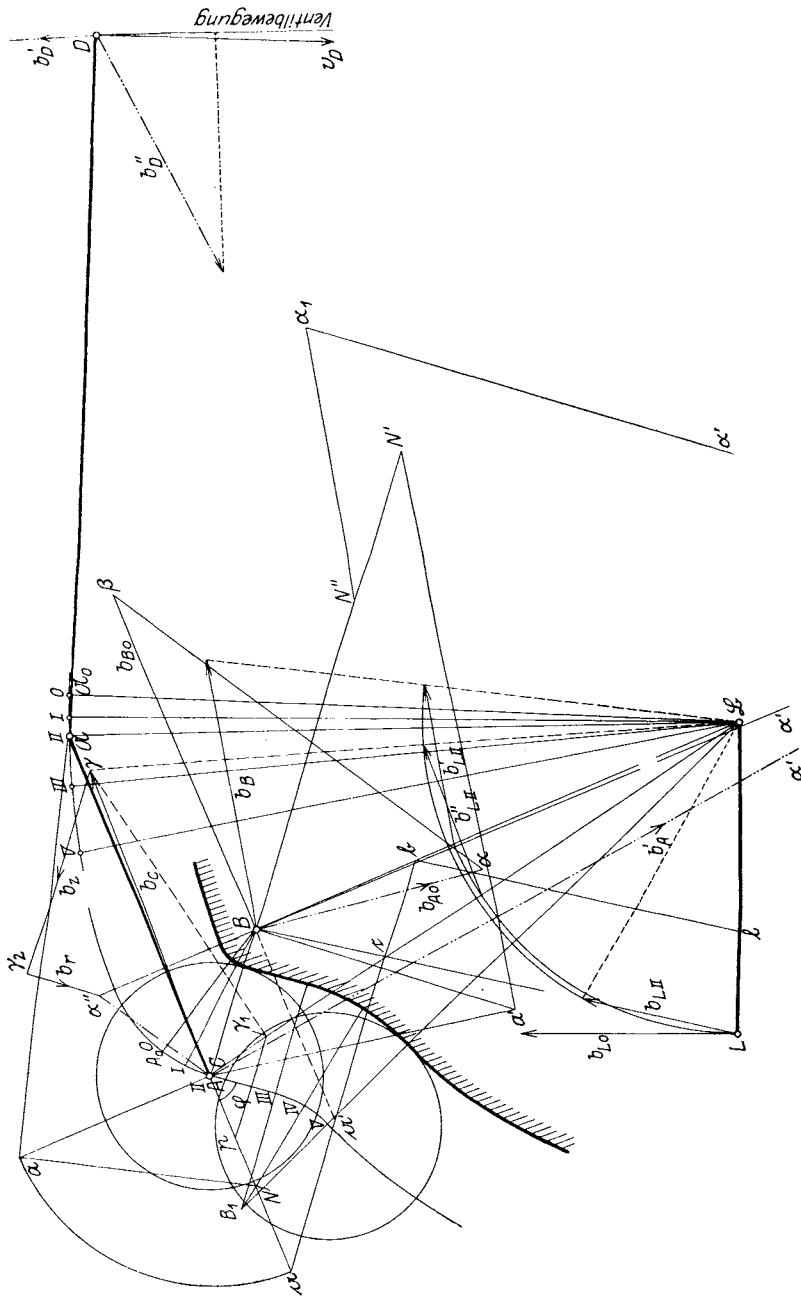


Fig. 738.

worin  $v_{LE}$  die relative Geschwindigkeit von  $L$  gegen  $E$  ist. Für die Stellung  $V$  ist aus Fig. 736:

$$v_{LE} = e_V \overline{l_V} = 2,3 \text{ cm} = 0,200 \text{ m/sek}$$

und

$$n_{LE} = \frac{(0,20 \text{ m/sek})^2}{2,322 \text{ m}} = 0,017 \text{ m/sek}^2,$$

was maßstäblich einer Länge von 0,02 cm entspricht. In der Zeichnung wurde auf diese kleine Länge keine Rücksicht genommen, also  $n_{LE}$  unterdrückt. Man begnügt sich mit der Tangentialbeschleunigung  $t_{LE}$  und zieht  $\varepsilon_V \lambda_V$  senkrecht zur Treibstange  $E_V L_V$  und ebenso  $\varepsilon_V' \lambda_V' \perp E_V' L_V'$ . Auf diese Weise findet man die Beschleunigungspunkte  $\lambda_V$  und  $\lambda_V'$ . In gleicher Art wurden die übrigen Beschleunigungspunkte  $\lambda_{IV}$ ,  $\lambda_{IV'}$ ,  $\lambda_{III}$  usw. bestimmt.

Für die Mittellage 0 ist  $v_{L0} = 0$ , somit auch  $n_{L0} = 0$  und  $b_{L0} = \pi \lambda_0$ .

**426. Ventilgeschwindigkeit.** Die Ermittlung der Ventilgeschwindigkeiten soll in Fig. 738, die in der Originalzeichnung im Maßstabe 1:2 ausgeführt wurde, für die Stellung II vorgeführt werden.

In Übereinstimmung mit **216**, an welcher Stelle die Kinematik der Schwingdaumen behandelt wurde, soll dessen Umriß durch seine Äquidistante ersetzt werden, so daß man statt der Rolle, die sich an dem Schwingdaumen abwälzt, deren Mittelpunkt  $A$  benützt und ihn auf der Äquidistanten gleiten läßt. Deshalb sind in Fig. 738 die Stellungsbezeichnungen  $V$  bis 0 auf die Lage des Punktes  $A$  bezogen und an die Äquidistante angeschrieben worden.

Um ferner die Konstruktion der Ventilgeschwindigkeiten und Beschleunigungen leichter durchzuführen, wurde in Fig. 738 angenommen, daß der Schwingdaumen, rein zeichnerisch genommen, in Ruhe bleibt und der Hebel  $A\mathcal{A}D$ , relativ genommen, sich um  $\mathfrak{B}$  dreht, wodurch an der Gegenseitigkeit von Schwingdaumen und Hebel nichts geändert wird. Dann wird der (in Wirklichkeit ruhende) Drehpunkt  $\mathcal{A}$  der Reihe nach die Lagen  $V$ ,  $IV$ ,  $III$ ,  $II$ ,  $I$ , 0 einnehmen und hierauf denselben Weg in verkehrter Reihenfolge zurücklegen. Für die Lage  $II$  z. B. kommen  $\mathcal{A}$  und  $A$  in die mit  $II$  bezeichneten Lagen, wobei aber zu beachten sein wird, daß  $\mathcal{A}\mathfrak{B}$  die Richtung der vertikalen Ventilbewegung ist. Dies hat den Vorteil, daß die Schwinde  $L\mathfrak{B}$  an der gleichen Stelle verharret.

Um die Ventilgeschwindigkeit für die Stellung  $II$  zu bestimmen, geht man in der in **216** erläuterten Weise vor. Man betrachtet  $\mathfrak{B}BA\mathcal{A}$  als Gelenkviereck und bestimmt zuerst die Geschwindigkeit von  $B$ , indem man die aus Fig. 736 bekannte Geschwindigkeit  $ol_{II}$  in halbem Maßstabe nach  $Ll$  überträgt (gedrehte Geschwindigkeit), sodann  $lb \parallel LB$  bis zum Schnitte  $b$  mit  $B\mathfrak{B}$ ,  $ba \parallel BA$  bis zum Schnitte  $a$  mit  $\mathcal{A}A$  zieht. Dann sind  $\overline{Bb}$  und  $\overline{Aa}$  die gedrehten Geschwindigkeiten von  $B$  und  $A$ .

Kennt man aber die Geschwindigkeit  $v_A$ , so ist die Geschwindigkeit  $v_D$  des Endpunktes  $D$  der Ventilstange durch einfache Konstruktion oder, sofern dies vorgezogen werden sollte, durch Multiplikation mit dem Hebelverhältnis

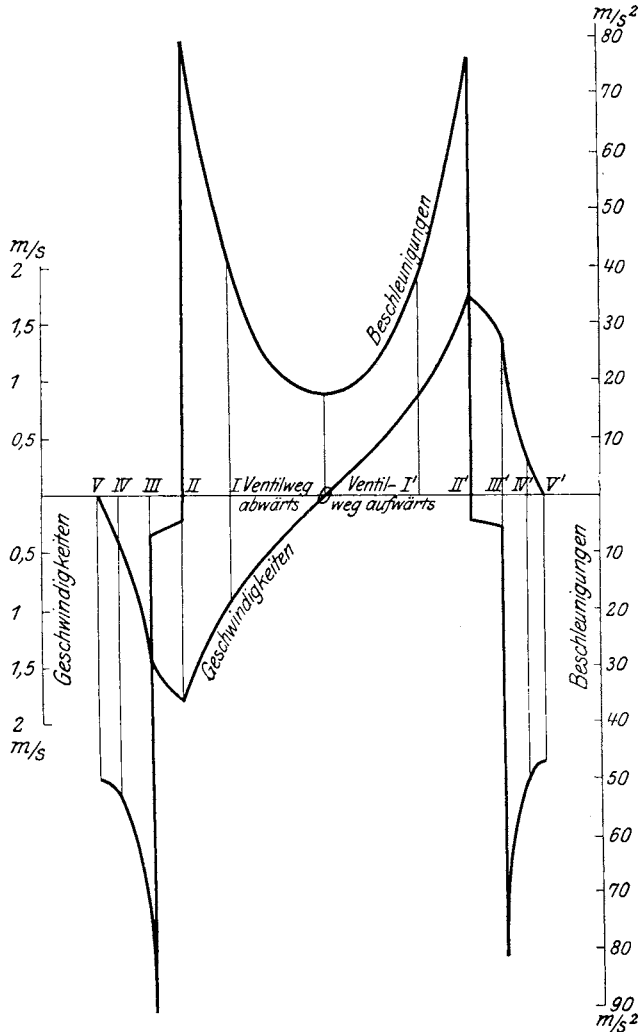


Fig. 739.

$$\frac{\overline{D\mathfrak{U}}}{A\mathfrak{U}} = \frac{370}{195} = 1,9$$

zu bestimmen. Projiziert man dann noch  $v_D$  auf die Richtung  $\mathfrak{U}\mathfrak{B}$

der Ventilbewegung, so erhält man die Ventildgeschwindigkeit für die Stellung *II*.

Der Geschwindigkeitsmaßstab ist, dem Maßstabe der Fig. 738 entsprechend:

$$1 \text{ cm} = 0,174 \text{ m/sek},$$

und in der Originalzeichnung

$$v_A = \overline{Aa} = 5,58 \text{ cm} = 0,971 \text{ m/sek.}$$

$$v_D = v_A \cdot 1,9 = 1,845 \text{ m/sek.}$$

$$\text{Ventilgeschwindigkeit} : v_D \cdot 0,99 = 1,826 \text{ m/sek.}$$

Auf diese Weise wurden die Ventildgeschwindigkeiten in allen übrigen Stellungen zwischen *V* und *V'* bestimmt und in das Geschwindigkeitsdiagramm, Fig. 739, eingetragen. Dieses Diagramm wurde über dem abgerollten Wege des Punktes *E* gezeichnet und kann deshalb als *v-t*-Diagramm angesehen werden, da *E* sich gleichförmig bewegt.

Das Ventil beginnt seine Abwärtsbewegung in der obersten Stellung *V* (vgl. Fig. 735) mit der Geschwindigkeit 0. Sie steigt sehr rasch bis zur Stellung *III*; hier hat das Geschwindigkeitsdiagramm einen Knick, die Geschwindigkeit nimmt bis *II* in langsamerer Weise zu, um von *II* ab stetig bis 0 abzunehmen; damit ist die tiefste Lage des Ventils erreicht (Stellung 0). Von hier ab beginnt die Aufwärtsbewegung der Ventilstange durch die Stellungen 0 bis *V'* mit etwas kleineren Geschwindigkeiten, aber im großen und ganzen mit dem gleichen Verlaufe des Diagramms.

**427. Ventilbeschleunigung.** Wesentlich schwieriger und umständlicher ist die Konstruktion der Ventilbeschleunigungen, auf die es hier hauptsächlich ankommt. Ihr muß die Konstruktion der Beschleunigung des Mittelpunktes *A* der Führungsrolle vorausgehen; dies soll in Fig. 738 für die Stellung *II* gezeigt werden.

Geht man wieder vom Gelenkviereck  $\mathfrak{B}BA\mathfrak{A}$  aus, so ist zunächst die Beschleunigung  $b_L$  für die Stellung *II* einzutragen und aus ihr die Beschleunigung  $b_B$  zu bestimmen.

Die Beschleunigung  $b_{LII}$  wurde aus dem Beschleunigungsplan  $\pi\lambda_{II}$ , Fig. 737, in gleicher Richtung und in halber Größe nach *L* in Fig. 738 übertragen. Sodann wurde  $b_{LII}$  nach  $b'_{LII}$  gedreht und in *B* die dazu parallele und im Verhältnis  $B\mathfrak{B} : L\mathfrak{B}$  vergrößerte Beschleunigung  $b_B$  gezeichnet.

Die Beschleunigung des Punktes *A* wurde sodann nach dem Schema (vgl. Gleichung 16)

$$b_A \equiv n_A + t_A \equiv b_B + n_{AB} + t_{AB}$$

ermittelt. Um zunächst  $n_A$  zu finden, macht man  $\overline{Aa} = v_A = \overline{A\bar{a}}$ , ferner  $aN \perp \mathfrak{A}a$ , überträgt  $\overline{NA} = \overline{A\bar{a}_0} = n_A$  und errichtet in  $a_0$  die Senkrechte auf  $A\mathfrak{A}$ , auf welcher der Beschleunigungsendpunkt  $a'$  von *A*

liegen muß. Zieht man ferner  $\overline{B\alpha'} \perp A\alpha$ , so ist  $\overline{b\alpha'} = v_{AB}$  die gedrehte relative Geschwindigkeit von  $A$  gegen  $B$ . Man macht nun  $\overline{B\alpha'} = v_{AB}$  senkrecht zu  $AB$  und zieht  $\alpha'N' \perp A\alpha'$ , dann ist  $\overline{BN'} = n_{AB}$ , das nach  $\overline{AN''}$  übertragen wird. Man fügt sodann in  $N''$  die früher gefundene Beschleunigung  $b_B = \overline{N''\alpha_1}$  hinzu und zieht  $\alpha_1\alpha' \perp AB$  bis zum Schnittpunkt  $\alpha'$  mit der früher gezogenen Senkrechten  $\alpha_0\alpha'$ ; die Verbindungsgerade  $\overline{A\alpha'}$  ist dann die gesuchte Beschleunigung  $b_{A'}$  des Punktes  $A$ . Sie hat in der Originalzeichnung die Länge 27,7 cm; der Beschleunigungsmaßstab der Fig. 738 ist der halbe von Fig. 737, also

$$1 \text{ cm} = 1,51 \text{ m/sek}^2,$$

somit ist  $b_{A'} = 41,827 \text{ m/sek}^2$ . Die Beschleunigung des Gelenkes  $D$  ist dann

$$b_{D'} = \frac{D\mathfrak{A}}{A\mathfrak{A}} b_{A'} = 1,9 b_{A'} = 79,471 \text{ m/sek}^2;$$

sie konnte in voller Größe nicht in der Zeichnung Platz finden und nur ihre Richtung angedeutet werden. Diese Beschleunigung  $b_{D'}$  ist sodann noch auf die Richtung  $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$  der Ventilbewegung zu projizieren, um die Beschleunigung des Ventils zu erhalten, was freilich nicht mehr viel ausmacht; da der  $\cos$  des Neigungswinkels 0,997 beträgt, ist die Ventilbeschleunigung für die Stelle  $II$ : 79,233 m/sek<sup>2</sup>. Mit dieser Konstruktion der Beschleunigungen  $b_{A'}$  und  $b_{D'}$  ist die Frage aber nur zur Hälfte gelöst; denn die Stellung  $II$  ist dadurch gekennzeichnet, daß im Umriß des Schwingdaumens dem Kreisbogen  $II I 0$  die Gerade  $III II$  vorausgeht. Es findet also in der Stellung  $II$  ein plötzlicher Übergang der Rolle von einer Geraden in einem Kreisbogen statt, was auch zu einer plötzlichen Änderung der Beschleunigung Veranlassung geben wird. Um somit den Beschleunigungszustand für die Stellung  $II$  kennen zu lernen, muß nun auch die Beschleunigung  $b_{A''}$  für den geradlinigen Verlauf des Schwingdaumens bestimmt werden.

Da der Umriß des Schwingdaumens durch seine Äquidistante ersetzt wurde (Fig. 738), schleift jetzt die um  $\mathfrak{A}$  drehbare Schwinge  $A\mathfrak{A}$  an der um  $\mathfrak{B}$  gedrehten Geraden  $III II$ ; hier ist für die Konstruktion der Beschleunigung von  $A$  die in Fig. 395 mitgeteilte Konstruktion für die Beschleunigungen der rotierenden Kurbelschleife zu benutzen.

Wir nennen jetzt  $C$  jenen Punkt des Schwingdaumens, der augenblicklich mit  $A$  in der Stellung  $II$  zusammenfällt und stellen seine Beschleunigung fest, indem wir  $b_L$  nach  $b_{L''}$  drehen und durch  $C$  die hiezu parallele Beschleunigung  $b_C = \overline{C\gamma}$  im Verhältnis  $\overline{C\mathfrak{B}} : \overline{L\mathfrak{B}}$  konstruieren.

Man sucht sodann die Projektion  $\overline{C\gamma_1}$  von  $\overline{C\gamma}$  auf  $C\mathfrak{B}$ , zieht  $\gamma_1 p \perp III III$  bis zum Schnitte  $p$  mit  $A\mathfrak{A}$ , konstruiert die Zusatzbeschleunigung von Coriolis

$$b_z \equiv \overline{\gamma\gamma_2} \equiv 2 \overline{\gamma_1 p}$$

und zieht durch  $\gamma_2$  die relative Beschleunigung  $b_r \equiv \overline{\gamma_2 \alpha''}$  parallel zu  $II III$  bis zum Schnitte  $\alpha''$  mit der bereits früher benützten Senkrechten



$\alpha_0 \alpha''$ . Dann ist  $\overline{A \alpha''}$  die zweite Beschleunigung des Punktes  $A$ . Sie beträgt in der Originalzeichnung 3,6 cm, also ist

$$b_A'' = (3,6 \times 1,51) \text{ m/sek}^2 = 5,436 \text{ m/sek}^2$$

und die entsprechende Beschleunigung des Punktes  $D$ :

$$b_D'' = b_A'' \cdot 1,9 = 10,328 \text{ m/sek}^2.$$

Projiziert man diese Beschleunigung auf die Richtung  $\mathfrak{A} \mathfrak{B}$  der Ventilbewegung, so erhält man, da der  $\cos$  der Neigung 0,45 ist, die Ventilbeschleunigung mit 4,648 m/sek<sup>2</sup>.

Während die Beschleunigung  $b_D''$  die Ventilstange beim Niedergange noch beschleunigt, tritt mit  $b_D'$  im gleichen Augenblicke eine Verzögerung ein; es findet also in der Stellung  $II$  in der Ventilstange ein Beschleunigungssprung statt von der Größe

$$b_D'' - (-b_D') = (4,648 + 79,233) \text{ m/sek}^2 = 83,881 \text{ m/sek}^2.$$

Der Grund für das Auftreten derartiger Beschleunigungssprünge liegt, wie dies bereits in 217 besprochen wurde, in der plötzlichen Änderung der Krümmung des Umrisses des Schwingdaumens. So geht aus Fig. 738 hervor, daß in der Stellung  $II$  der Krümmungshalbmesser von 2 cm in  $\infty$  übergeht; für den ersten Wert hatte die Tangentialbeschleunigung den Wert

$$t_A' \equiv \overline{a_0 \alpha'} = -27,6 \text{ cm} = -41,676 \text{ m/sek}^2,$$

für den zweiten

$$t_A'' \equiv \overline{a_0 \alpha''} = 1,9 \text{ cm} = 2,869 \text{ m/sek}^2;$$

der Sprung beträgt also

$$x = t_A'' - (-t_A') = 44,545 \text{ m/sek}^2.$$

In 217 hatten wir diesen Beschleunigungssprung bereits berechnet; er betrug nach Gleichung 136:

$$x = \frac{v_r^2}{\cos \varphi} \left( \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1} \right).$$

Hierin ist für die Stellung  $II$ :  $\varrho = 2 \text{ cm} + 6 \text{ cm} = 8 \text{ cm}$ ,  $\varrho_1 = \infty$ ; die relative Geschwindigkeit  $v_r$  des Punktes  $C$  gegen  $A$  erhält man in gedrehter Lage, wenn man  $C \mathfrak{B}$  mit  $b a$  in  $c$  zum Schnitt bringt; es ist dann

$$v_r \equiv \overline{a c} = 8,6 \text{ cm} = (8,6 \times 0,174) \text{ m/sek} = 1,496 \text{ m/sek}.$$

Endlich ist

$$\cos \varphi = \cos (\alpha A III) = 0,63$$

und somit der Beschleunigungssprung

$$x = 44,4 \text{ m/sek}^2.$$

Eine gleiche Erscheinung des Beschleunigungssprunges zeigt auch die Stellung  $III$ , in welcher der Krümmungshalbmesser des Schwingdaumens von 12,5 cm plötzlich auf  $\infty$  übergeht. Die Untersuchung

wird übrigens in derselben Weise geführt, wie für die Stellung *II*; die Beschleunigung der Ventilstange sinkt hier von 91,687 m/sek<sup>2</sup> plötzlich auf 7,486 m/sek<sup>2</sup> herab.

Einfacher gestaltet sich die Konstruktion der Beschleunigung für die Stellungen *V*, *IV* und *I*, an denen keine Sprünge auftreten. Hier genügt also auch eine einmalige Konstruktion der Beschleunigung. Am einfachsten ist diese für die Stellung 0; denn hier ist  $v_L = 0$ , also auch  $v_B = 0$ ,  $v_A = 0$ ,  $n_A = 0$ ,  $v_{AB} = 0$ ,  $n_{AB} = 0$ , und es bleibt

$$b_{A0} \equiv t_{A0} = t_B + t_{AB}$$

(siehe Fig. 738). Man trägt aus Fig. 737  $b_{L0} \equiv \pi \lambda_0$  in halbem Maßstabe von *L* auf, senkrecht zu *L*β, konstruiert  $b_{B0} \equiv \overline{B\beta} \perp B\beta$  nach dem Verhältnis

$$b_{B0} = b_{L0} \cdot \frac{\overline{B\beta}}{L\beta}$$

und errichtet

$$\overline{B\alpha} \equiv t_{A0} \perp A_0\mathfrak{A}_0, \quad \overline{\beta\alpha} \equiv t_{AB} \perp A_0B;$$

dann ist  $\overline{B\alpha} = b_{A0}$  die gesuchte Beschleunigung von *A* in der vorübergehenden Ruhelage 0. In der Originalzeichnung ergab sich hiefür die Länge 6,2 cm, somit ist

$$b_{A0} = (6,2 \times 1,51) \text{ m/sek}^2 = 9,362 \text{ m/sek}^2.$$

Die Beschleunigung von *D* ist dann

$$b_{D0} = b_{A0} \cdot 1,9 = 17,79 \text{ m/sek}^2$$

und die auf die Bewegungsrichtung des Ventils projizierte Beschleunigung

$$0,99 \cdot b_{D0} = 17,58 \text{ m/sek}^2.$$

Die auf diesem Wege gefundenen Beschleunigungen wurden in das Diagramm der Geschwindigkeiten, Fig. 739, eingetragen; sie bilden aus dem gleichen Grunde wie dort das *b-t*-Diagramm.

Die Senkung des Ventils beginnt in der höchsten Stellung *V* mit großer Beschleunigung (49,91 m/sek<sup>2</sup>), die sich während des Ventilweges durch die Stellungen *IV* bis *III* mit bedeutender Schnelligkeit steigert, um in *III* die größte Beschleunigung von 91,687 m/sek<sup>2</sup> zu erreichen. Hier findet ein plötzlicher Abfall auf 7,486 m/sek<sup>2</sup> statt, dem bis *II* eine stetige Verminderung auf 4,648 m/sek<sup>2</sup> folgt. In der Stellung *II* tritt ein abermaliger Beschleunigungssprung auf — 79,233 m/sek<sup>2</sup> ein, worauf eine stetige Verzögerung stattfindet, die endlich in der tiefsten Lage des Ventils mit — 17,58 m/sek<sup>2</sup> schließt. Die darauf folgende Aufwärtsbewegung des Ventils geschieht mit etwas kleineren Beschleunigungen und Verzögerungen, aber im großen und ganzen zeigt das Beschleunigungsdiagramm für die Aufwärtsbewegung denselben Verlauf wie für die Abwärtsbewegung.

Die zahlenmäßige Darstellung der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Ventilstange findet man in beiliegender Tabelle,

in welche auch die Trägheitskräfte der Ventilstange, ihre Spannungen und Federkräfte eingetragen sind.

**428. Spannung und Gelenkdruck.** Die Trägheitskräfte  $T$ , die entgegengesetzt den Beschleunigungen auftreten, erhält man aus der

Gleichung 
$$T = \frac{G}{g} b,$$

worin  $G = 150$  kg das Gewicht der Ventilstange samt Ventil ist.

Die Spannung  $S$  im höchsten Querschnitt der Ventilstange ist

$$S = G \left( 1 - \frac{b}{g} \right),$$

da nach dem d'Alembertschen Prinzip die Gleichgewichtsbedingung besteht:

$$S - G + T = 0.$$

Die Doppel-Spiralfeder, die das Ventil in seine oberste Lage zurückzieht und den Kraftschluß zwischen Schwingdaumen und Hebel besorgt, übt bei ihrer Verlängerung Kräfte  $F$  aus, die mit dieser proportional wachsen; sie sind in dem Diagramm der Fig. 735 dargestellt.

Der Druck  $D$  endlich, der im Gelenke  $D$  von der Steuerung an die Ventilstange abgegeben wird, ergibt sich aus der Gleichgewichtsbedingung

$$S + D = F$$

mit

$$D = F + G \left( \frac{b}{g} - 1 \right).$$

Seine Werte, die in der Tabelle zu finden sind, schwanken während der kurzen Dauer der Ventilbewegung von  $\tau = 0,195$  Sek. zwischen sehr weiten Grenzen.

Stellung	Ventil- geschwindigkeit m/sek	Ventil- beschleunigung m/sek <sup>2</sup>	$T^{kg}$	$S^{kg}$	$F^{kg}$	$D^{kg}$
V	0	49.91	763	-613	875	1488
IV	0.69	53.00	810	-660	924	1584
III	1.52	91.69	1403	-1231	1104	2335
		7.49	115	35		1069
II	1.83	4.65	71	79	1388	1309
		-79.23	-1211	1361		27
I	0.98	-41.2	-630	780	1860	1080
0	0	-17.58	-269	419	2010	1592

## XLII. Dynamische Ermittlung des Schwungradgewichtes.

**429. Vorgeschichte.** Die Berechnung des Schwungradgewichtes für eine Maschine, deren mittlere Umdrehungszahl und deren zulässiger Ungleichförmigkeitsgrad gegeben sind, ist eine der ersten Anwendungen der graphischen Dynamik gewesen und hat deshalb historische Bedeutung. Es hat verhältnismäßig lange gebraucht, bis die der Dynamik eigentümliche Untersuchungsweise im Maschinenbau Eingang gefunden hat; obwohl hier, sehr im Gegensatze zu den Bauten des Statikers, alles in Bewegung begriffen ist, hat man lange Zeit und selbst noch heute die bewegten Maschinenteile doch genau so untersucht, als ob man es mit rein statischen Gliedern zu tun hätte. Auf den Einfluß, den die auftretenden Massenkräfte auf die Bewegung und insbesondere auf die Festigkeit der Teile nehmen, hat man keine Rücksicht genommen und noch heute ist die Klage gerechtfertigt, daß im Maschinenbau auf die dynamischen Vorgänge zu wenig geachtet wird.

Es war deshalb unstreitig ein großes Verdienst F. Radingers, in seinem 1869 erschienenen Buche: „Dampfmaschinen mit hoher Kolbengeschwindigkeit“ mit Nachdruck eine Änderung dieses Zustandes vorgeschlagen und in seiner Methode der Schwungradberechnung einen glücklichen Versuch gemacht zu haben, die Dynamik wenigstens in einem Teile des Maschinenbaues einzubürgern.

Wenn auch ohne weiteres zugegeben werden muß, daß die Methode Radingers für die augenblicklichen Bedürfnisse der Praxis hinlänglich genügt, so muß doch anderseits betont werden, daß sie keine im eigentlichen Sinne dynamische Lösung des Schwungradproblems bietet. Dies geht schon aus dem Widerspruch hervor, daß sie eine bestimmte, konstante Umdrehungszahl der Maschine zur Voraussetzung macht, auf Grund welcher sie die Beschleunigungsdrücke bestimmt, während sie anderseits durch Einführung des Ungleichförmigkeitsgrades doch eine Schwankung der Umdrehungszahl zugibt. Dabei werden die bewegten Massen nur zum Teil und in einer Weise berücksichtigt, die nur für das normale Schubkurbelgetriebe und da nur angenähert richtig ist; würde jedoch das Schwungrad mit einem anderen Getriebe verbunden sein, so müßte die Methode Radingers notgedrungen versagen.

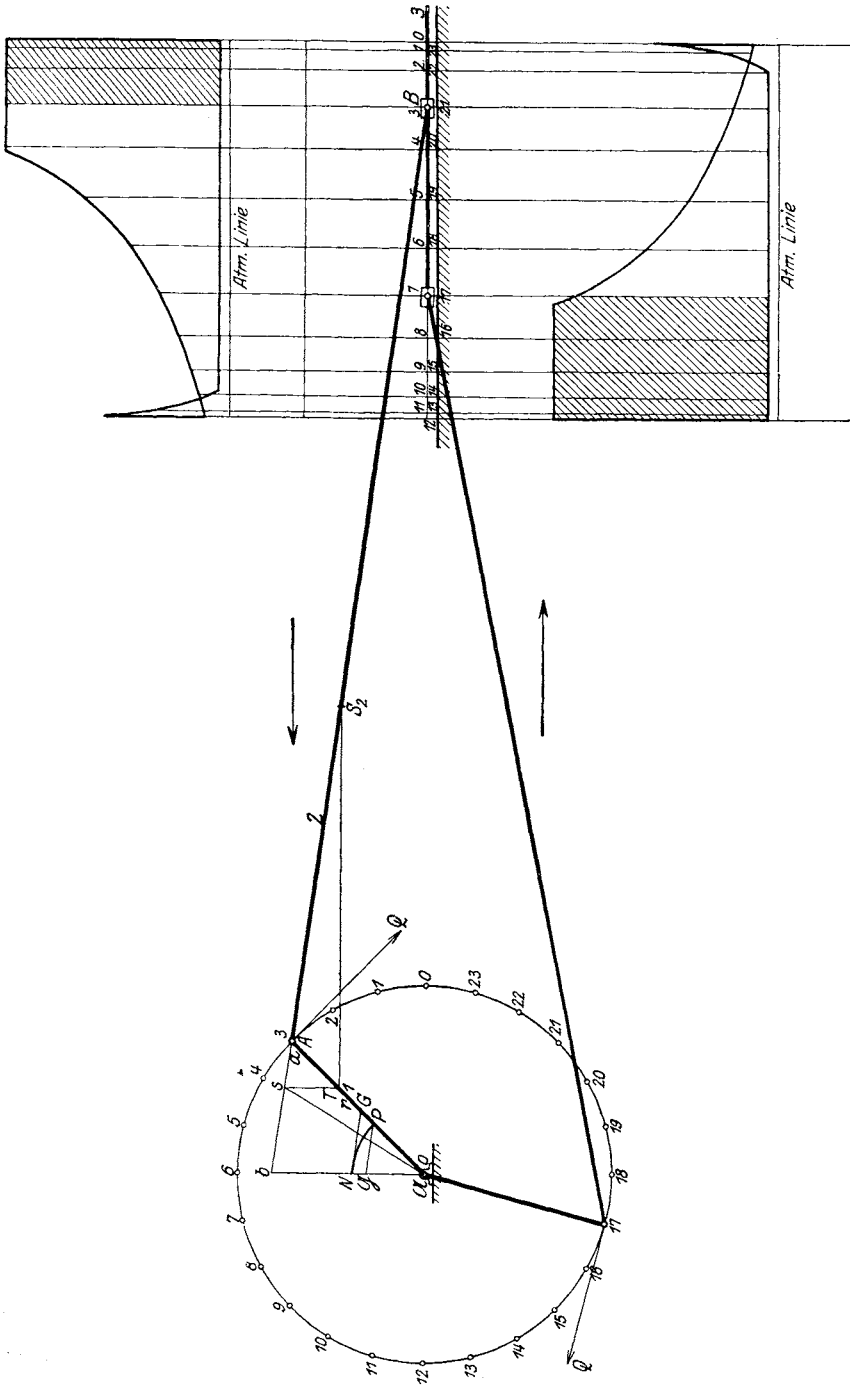


Fig. 740.

**430. Die Methode.** Die in diesem Buche vorgeführten Lehren der graphischen Dynamik veranlaßten dessen Verfasser, eine neue Methode zur Ermittlung des Schwunradgewichtes vorzuschlagen.

Diese Methode geht von anderen Gesichtspunkten aus als die Methode Radingers. Sie verwendet grundsätzlich keine Tangentialdruckdiagramme, macht keine Annahme einer mittleren Umdrehungszahl nötig, berücksichtigt die Massenverteilung des Getriebes ohne jede Vernachlässigung und ist auf jedes Getriebe anwendbar, nicht nur auf das normale Schubkurbelgetriebe. Auch gestattet das Verfahren, die Veränderung des Schwunradgewichtes mit dem Ungleichförmigkeitsgrade an einem und demselben Diagramm zu verfolgen.

Dieses Diagramm ist das Massenwuchtdiagramm, dessen Eigenschaften in 419 erläutert wurden. Überhaupt ist das ganze Verfahren eine Reihe von Anwendungen jener Lehren, die in diesem Buche vorgeführt sind.

Die gestellte Aufgabe lautet: Es ist für ein beliebiges Getriebe, mit gegebenen Kräften und Widerständen, sowie bekannter Massenverteilung die Berechnung des Schwunradgewichtes für einen vorgeschriebenen Ungleichförmigkeitsgrad durchzuführen. Die Lösung dieser Aufgabe gestaltet sich in folgender Weise:

Man wählt zunächst den Reduktionspunkt im Kurbelzapfen  $A$  der Schwunradwelle, reduziert an ihn sämtliche Kräfte und Widerstände (Abschnitt XXIII) und ermittelt die Arbeitswerte für eine beliebige große Anzahl von Stellungen des Getriebes (Abschnitt XXXII).

Hierauf wird die Masse des Getriebes durch dynamische Ersatzpunkte ersetzt (Abschnitt X) und mit deren Hilfe die gesamte bewegte Masse nach  $A$  reduziert (402).

Die zur gleichen Stellung gehörenden Werte der Arbeit und der reduzierten Masse werden nun zur Konstruktion des Massenwuchtdiagramms benützt (419), aus dem sodann durch das Ziehen von zwei Tangenten das Schwunradgewicht bestimmt wird.

Um diese Methode, deren Wesen hier nur angedeutet wurde, in ihrer Anwendung auf die Praxis kennenzulernen, soll sie hier in einem einfachen Fall ziffernmäßig vorgeführt werden.

**431. Bestimmung des Schwunradgewichtes für eine Einzylinder-Expansionsmaschine.** Das auf der Welle  $\mathfrak{U}$  (Fig. 740) aufgekeilte Schwunrad ist mit dem Kolben der Maschine durch ein Schubkurbelgetriebe verbunden. Die Abmessungen sind gegeben: Kurbel  $\overline{A\mathfrak{U}} = r = 25$  cm, Lenker  $\overline{AB} = l = 125$  cm, Kolbenfläche  $F = 500$  cm<sup>2</sup>. Das ober dem Hub des Kreuzkopfes  $B$  gezeichnete Dampfdruckdiagramm bezieht sich auf die halbe Kurbelumdrehung von 0 über 6 nach 12, das unter dem Hub gezeichnete Diagramm auf die übrige Kurbelumdrehung.

Im oberen Diagramm setzt nach der Stellung 4 die Expansion ein; vor der Stellung 10 beginnt die Kompression des Dampfes, die bis an das Ende des Hubes dauert. Ähnlich ist es mit dem unteren Diagramm für den Rückgang des Kolbens.

Als Maßstäbe wurden in der Originalzeichnung gewählt:

Längenmaßstab: 1 cm Zeichnung = 0,05 m,

Dampfdruckmaßstab: 1 cm Zeichnung = 0,5 kg/cm<sup>2</sup>;

da die Kolbenfläche 500 cm<sup>2</sup> ist, bedeutet im Dampfdruckdiagramm 1 cm<sup>2</sup> = 1 cm × 1 cm = 0,5 kg/cm<sup>2</sup> · 500 cm<sup>2</sup> · 0,05 m = 12,50 mkg Arbeit.

Um die Arbeit des Dampfes für eine Periode, d. i. für eine Umdrehung der Maschine zu ermitteln, wurde die Fläche des Dampfdruckdiagramms durch Planimetrieren bestimmt; sie beträgt 31,6 cm<sup>2</sup> und somit die Arbeit des Dampfes für eine Umdrehung  $2 \times 31,6 \times 12,50 = 790$  mkg.

Nimmt man den Widerstand  $Q$  am Kurbelzapfen konstant an, so ergibt sich seine Größe aus der Gleichung

$$Q \cdot 2r\pi = 790 \text{ mkg}$$

mit

$$Q = 502,9 \text{ kg.}$$

Der Kurbelkreis wurde in 24 gleiche Teile geteilt und der Lenker für die Stellungen 3 und 17 gezeichnet. Die übrigen Lagen des Kreuzkopfes  $B$  wurden nur durch Ziffern angezeigt und ihnen entsprechend das Dampfdruckdiagramm sowohl für den Hingang des Kolbens, wie auch für den Rückgang (unteres Diagramm) in Streifen zerschnitten. Die Fläche jedes dieser Streifen stellt die Dampfdruckarbeit zwischen den beiden Stellungen, die den Streifen begrenzen, dar. Diese Streifen wurden planimetriert und daraus die Dampfdruckarbeit für jede Stellung berechnet.

Stellung	Dampfdruckarbeit mkg	Widerstandsarbeit mkg	Differenzarbeit A mkg	Stellung	Dampfdruckarbeit mkg	Widerstandsarbeit mkg	Differenzarbeit A mkg
0	0	0	0	13	408-00	427-92	- 19-92
1	19-31	32-92	- 13-61	14	435-30	460-83	- 25-53
2	58-65	65-83	- 7-18	15	488-60	493-75	- 5-15
3	128-63	98-75	+ 29-88	16	553-60	526-67	+ 26-93
4	206-00	131-67	+ 74-33	17	639-40	559-59	+ 79-81
5	292-26	164-59	+ 127-67	18	707-00	592-50	+ 114-50
6	342-48	197-50	+ 144-98	19	738-20	625-42	+ 112-78
7	373-38	230-42	+ 142-96	20	772-00	658-34	+ 113-66
8	386-25	263-34	+ 122-91	21	790-20	691-25	+ 98-95
9	393-98	296-25	+ 97-73	22	798-00	724-17	+ 73-83
10	399-13	329-17	+ 69-96	23	795-40	757-09	+ 38-31
11	397-84	362-09	+ 35-75	24	790-00	790-00	0
12	395-00	395-00	0				

So bedeutet z. B. der schraffierte Teil des oberen Diagramms die Dampfdruckarbeit von der Stellung 0 bis zur Stellung 3; er beträgt in der Originalzeichnung 10,29 cm<sup>2</sup> und somit die Dampfdruckarbeit

$10,29 \text{ cm}^2 \times 12,5 \text{ mkg/cm}^2 = 128,63 \text{ mkg}$ . In dieser Weise wurden die Arbeiten für alle 24 Stellungen bestimmt und in die beiliegende Tabelle eingetragen.

Die Arbeit des Widerstandes  $Q$  an dem Kurbelzapfen ist  $790 \text{ mkg}$  für eine Umdrehung und somit  $32,92 \text{ mkg}$  für den 24. Teil derselben.

Diese dem Wege proportional zunehmenden Widerstandsarbeiten wurden ebenfalls in die Tabelle eingetragen und schließlich die Differenzen **A** beider Arbeiten nebeneinander hingeschrieben.

Nachdem die resultierenden Arbeiten **A** für alle 24 Stellungen ermittelt sind, sucht man den Verlauf der an den Kurbelzapfen reduzierten Masse des Getriebes und ersetzt zu diesem Zwecke die Schubkurbel durch ihre Ersatzpunkte.

Da sie drei Glieder besitzt, ist nach 408, Gleichung 244, die Anzahl der Ersatzpunkte ebenfalls drei, nämlich die Punkte  $A$ ,  $B$  und  $S_2$ . Der Ersatz der Massen findet dann in folgender Weise statt:

1. Kurbel  $A\mathcal{U}$ : Gewicht  $G_1 = 15 \text{ kg}$ , Trägheitshalbmesser für  $\mathcal{U}$ :  $i_1 = 20 \text{ cm}$ ; Ersatzmasse in  $A$ :  $\mu_{A1} = \frac{G_1}{g} \cdot \left(\frac{i_1}{r}\right)^2 = \frac{9,6}{g} \text{ kg}$ .

2. Lenker  $AB$ : Gewicht  $G_2 = 60 \text{ kg}$ ,  $\overline{AS_2} = a = 45 \text{ cm}$ ,  $\overline{S_2B} = b = 80 \text{ cm}$ , Trägheitshalbmesser für den Schwerpunkt  $S_2$ :  $i_2 = 52 \text{ cm}$ .

Nach Gleichung 58 sind dann die Ersatzmassen des Lenkers:

$$\text{in } A: \mu_{A2} = \frac{G_2}{g} \cdot \frac{i_2^2}{al} = \frac{28,8}{g} \text{ kg},$$

$$\text{in } B: \mu_{B2} = \frac{G_2}{g} \cdot \frac{i_2^2}{bl} = \frac{16,2}{g} \text{ kg},$$

$$\text{in } S_2: \mu_{S2} = \frac{G_2}{g} \left(1 - \frac{i_2^2}{ab}\right) = \frac{15}{g} \text{ kg}.$$

3. Kreuzkopf  $B$ . Die vereinigte Masse von Kreuzkopf, Kolben und Kolbenstange ist in  $B$ :  $\mu_{B3} = \frac{G_3}{g} = \frac{100}{g} \text{ kg}$ .

Somit sind die Massen der drei Ersatzpunkte:

$$\mu_A = \mu_{A1} + \mu_{A2} = \frac{38,4}{g} \text{ kg}, \quad \mu_B = \mu_{B2} + \mu_{B3} = \frac{116,2}{g} \text{ kg}, \quad \mu_{S2} = \frac{15}{g} \text{ kg}.$$

Nennt man  $v_A$ ,  $v_B$ ,  $v_{S2}$  die Geschwindigkeiten der drei Ersatzpunkte, so ist nach Gleichung 235 die an den Kurbelzapfen  $A$  reduzierte Masse der Schubkurbel

$$\mathfrak{M} = \mu_A + \mu_B \left(\frac{v_B}{v_A}\right)^2 + \mu_{S2} \left(\frac{v_{S2}}{v_A}\right)^2.$$

Nimmt man als Maß der Geschwindigkeit  $v_A$  die Länge  $\overline{A\mathcal{U}} = r$  an, so lassen sich nach Fig. 679  $v_B$  und  $v_{S2}$  in folgender Weise konstruieren (Fig. 740):



Man ziehe  $S_2T \parallel B\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{A}b \parallel Ts \perp B\mathfrak{A}$  bis zu den Schnittpunkten  $b$  und  $s$  mit dem verlängerten Lenker  $AB$ ; dann ist  $asb$  der um  $90^\circ$  gedrehte Geschwindigkeitsplan von  $AS_2B$  mit dem Geschwindigkeitsnullpunkt  $o$  in  $\mathfrak{A}$ . Es ist also

$$v_B : v_A = \overline{ob} : \overline{oa}, \quad v_{S_2} : v_A = \overline{os} : \overline{oa}.$$

Auf diese Weise wurden die Geschwindigkeitsverhältnisse für die Stellungen 0 bis 12 konstruiert, in die Tabelle (unten) eingetragen und die Quadrate dieser Verhältnisse daneben geschrieben.

In die darauffolgenden Kolonnen der Tabelle wurden dann die Werte von  $\mu_A g$ ,  $\mu_B g \left(\frac{v_B}{v_A}\right)^2$  und  $\mu_{S_2} g \left(\frac{v_{S_2}}{v_A}\right)^2$  geschrieben und endlich die Summen  $\mathfrak{M}g = \mathfrak{G}$  gebildet.

Stellung	$\frac{v_B}{v_A}$	$\frac{v_{S_2}}{v_A}$	$\left(\frac{v_B}{v_A}\right)^2$	$\left(\frac{v_{S_2}}{v_A}\right)^2$	$\mu_A g$ kg	$\mu_B g \left(\frac{v_B}{v_A}\right)^2$ kg	$\mu_{S_2} g \left(\frac{v_{S_2}}{v_A}\right)^2$ kg	$\mathfrak{G} = \mathfrak{M}g$ kg
0								
24	0	0.64	0	0.41		0	6.15	44.55
1								
23	0.32	0.68	0.10	0.46		11.62	6.90	56.92
2								
22	0.59	0.77	0.35	0.59		40.67	8.85	87.92
3								
21	0.82	0.88	0.67	0.77		77.85	11.55	127.80
4								
20	0.96	0.96	0.92	0.92		106.90	13.80	159.10
5								
19	1.02	1.00	1.04	1.00	38.40	120.85	15.00	174.25
6								
18	1.00	1.00	1.00	1.00		116.20	15.00	169.60
7								
17	0.92	0.96	0.85	0.92		98.77	13.80	150.97
8								
16	0.78	0.90	0.61	0.81		70.88	12.15	121.43
9								
15	0.60	0.86	0.36	0.74		41.83	11.10	91.33
10								
14	0.42	0.73	0.18	0.53		20.92	7.95	67.27
11								
13	0.21	0.66	0.04	0.44		4.65	6.60	49.65
12	0	0.64	0	0.41		0	6.15	44.55

Zieht man es vor, die reduzierten Massengewichte  $\mathfrak{G}$  zu konstruieren, statt zu rechnen, so kann man das Massengewicht  $\mu_B g$  des Ersatzpunktes  $B$

nach einem beliebig gewählten Maßstabe von  $\mathfrak{A}$  nach  $G$  auftragen (Fig. 740), zieht sodann  $GN \parallel BA$ , macht  $\mathfrak{A}N = \mathfrak{A}P$  und zieht  $P\mathfrak{G} \parallel BA$ ; dann ist  $\mathfrak{A}\mathfrak{G}$  das nach  $A$  reduzierte Massengewicht, denn es bestehen die Beziehungen

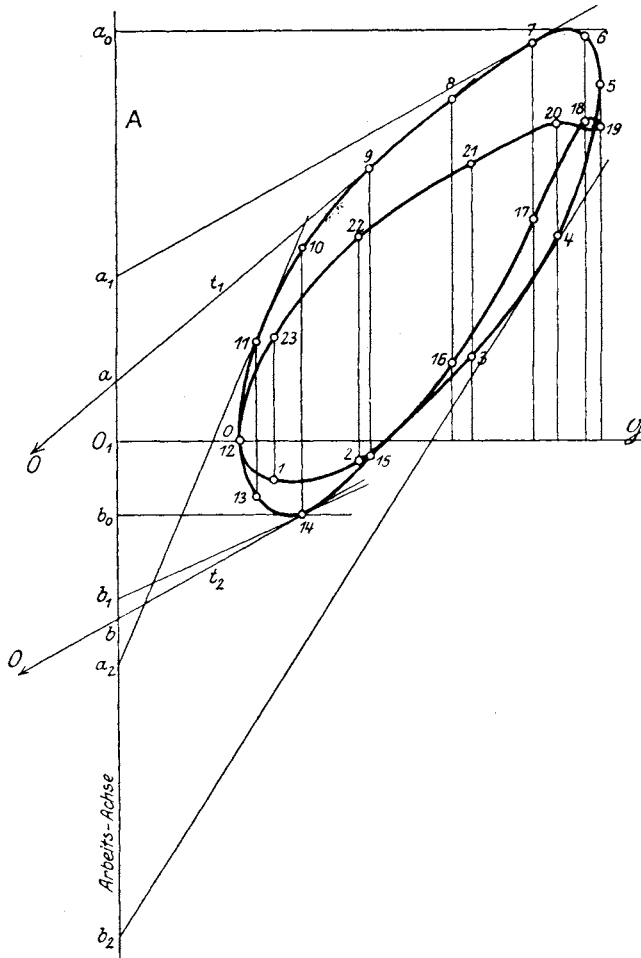


Fig. 741.

$$\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{G}} : \overline{\mathfrak{A}P} = \overline{ob} : \overline{oa} = v_B : v_A, \quad \overline{\mathfrak{A}N} : \overline{\mathfrak{A}G} = \overline{ob} : \overline{oa} = v_B : v_A,$$

somit ist

$$\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{G}} : \overline{\mathfrak{A}G} = v_B^2 : v_A^2$$

und

$$\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{G}} = \mu_B g \cdot \left(\frac{v_B}{v_A}\right)^2.$$

In ähnlicher Art wird auch die reduzierte Masse von  $\mu_S g$  zu gewinnen sein.

Aus den Arbeitsdifferenzen **A** und den reduzierten Massengewichten wurde in Fig. 741 das Massenwuchtdiagramm konstruiert.

Hierfür wurden die Maßstäbe gewählt:

Arbeitsmaßstab: 1 cm Zeichnung =  $\lambda$  mkg,  $\lambda = 20$ ,

Gewichtsmaßstab: 1 cm Zeichnung =  $\kappa$  kg,  $\kappa = 20$ .

So ist z. B. für die Stellung 3 aus den Tabellen:

$$\mathbf{A} = \lambda a = 29,88 \text{ mkg}, \quad \mathfrak{G} = \kappa \cdot g = 127,80 \text{ kg},$$

also sind  $a = 1,49$  cm,  $g = 6,39$  cm

die Koordinaten des Zustandpunktes 3. In derselben Weise wurden die Punkte 0 bis 23 des Massenwuchtdiagramms gefunden und durch eine stetige Kurve verbunden. Mit Hilfe dieses Diagramms wurde nun das Schwungradgewicht ermittelt (419).

Nennt man  $v$  die Geschwindigkeit des Kurbelzapfens  $A$  und  $n$  seine Umdrehungszahl, so ist nach Fig. 727

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{L_0 + \mathbf{A}}{\mathfrak{G}} = \frac{\lambda(l_0 + a)}{\kappa g} = \frac{\lambda}{\kappa} \operatorname{tg} \psi.$$

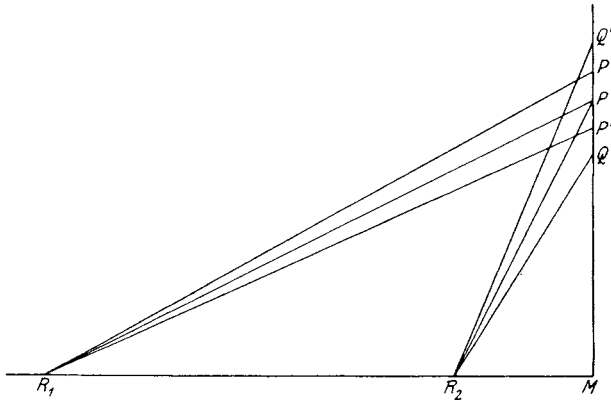


Fig. 742.

Setzt man hier  $v = \frac{r n \pi}{30}$ , so wird

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\kappa}{\lambda} \cdot \frac{r^2 n^2 \pi^2}{1800 g}$$

und mit  $\frac{\pi^2}{g} \approx 1$ ,  $\kappa = 20$ ,  $\lambda = 20$ :

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{r^2 n^2}{1800}$$

Für  $r = 0,25$  m wird endlich

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{n^2}{28800}$$

Es entspricht demnach jeder Umdrehungszahl  $n$  ein ganz bestimmter Winkel  $\psi$  im Massenwucht-Diagramm.

Nimmt man in dem rechtwinkligen Achsenkreuz, Fig. 742, den Punkt  $P$  beliebig an,  $\overline{MP} = p$ , so ist

$$\overline{MR} = x = p \cotg \psi = 28800 \frac{p}{n^2}$$

und es entspricht jeder Umdrehungszahl  $n$  ein bestimmter Punkt  $R$  auf der horizontalen Achse. So ist z. B.

$$\text{für } n_1 = 120 : \overline{MR}_1 = x_1 = 2 p,$$

$$\text{für } n_2 = 240 : \overline{MR}_2 = x_2 = \frac{p}{2}.$$

Wenn die zum Winkel  $\psi$  gehörende Geschwindigkeit  $v$  zwischen den Grenzen  $\max v$  und  $\min v$  schwankt, so ist

$$\max h = \frac{\max v^2}{2g} = \tg \psi_{\max},$$

$$\min h = \frac{\min v^2}{2g} = \tg \psi_{\min}.$$

Ist  $v_m$  die mittlere Geschwindigkeit und  $\mu$  der Ungleichförmigkeitsgrad, so ziehen wir die Gleichungen 171 und 174 heran:

$$v_m = \frac{\max v + \min v}{2}, \quad \mu = \frac{\max v - \min v}{v_m},$$

woraus

$$\max v^2 - \min v^2 = 2\mu v_m^2, \quad \max v = v_m \left(1 + \frac{\mu}{2}\right), \quad \min v = v_m \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)$$

$$\text{und} \quad \tg \psi_{\max} = \tg \psi \left(1 + \frac{\mu}{2}\right)^2, \quad \tg \psi_{\min} = \tg \psi \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)^2,$$

oder, wenn  $\mu$  eine kleine Zahl ist, genau genug

$$\tg \psi_{\max} = \tg \psi (1 + \mu), \quad \tg \psi_{\min} = \tg \psi (1 - \mu).$$

Macht man also in Fig. 742  $\overline{PP'} = \overline{PP''} = \mu p$ , und zieht die Verbindungslinie  $RP'$  und  $RP''$ , so erhält man bei  $R$  die Winkel  $\psi_{\max}$  und  $\psi_{\min}$ , die den Grenzgeschwindigkeiten  $\max v$  und  $\min v$  entsprechen.

Man zieht nun zu diesen Geraden  $RP'$  und  $RP''$  die äußersten parallelen Tangenten  $t_1$  und  $t_2$  an das Massenwuchtdiagramm und sucht deren Schnittpunkt  $O$ . Der normale Abstand dieses Punktes von der Arbeitsachse  $\mathbf{A}$  ist das gesuchte Schwungradgewicht, auf den Kurbelzapfen reduziert (vgl. Fig. 727).

Der Schnittpunkt  $O$  fällt fast immer aus der Zeichenfläche heraus, läßt sich auch nicht mit Sicherheit feststellen, da der Schnitt der Tangenten unter sehr spitzen Winkeln erfolgt. Man verzichtet deshalb auf das Aufsuchen des Punktes  $O$  und führt die Tangenten  $t_1$  und  $t_2$  nur bis

zu ihren Schnittpunkten  $a$  und  $b$  mit der Arbeitsachse (Fig. 741). Die Strecke  $ab$  ist dann maßgebend für die Berechnung des Schwungradgewichts, wie folgende Überlegung zeigt.

Denkt man sich, ohne an dem Schwungrad etwas zu ändern, also bei unveränderter Lage des Punktes  $O$ , man würde die Massen des Getriebes kleiner und kleiner machen und endlich ganz vernachlässigen; dann würden, wenn auch die Grenzgeschwindigkeiten  $\max v$  und  $\min v$  dieselben bleiben sollten, auch die aufzuwendenden Arbeiten immer kleiner werden und endlich die Werte  $\overline{O_1 a}$  und  $\overline{O_1 b}$  annehmen. Das Massenwuchtdiagramm artet dann in die Gerade  $ab$  aus. Für die Grenzgeschwindigkeiten bestehen dann die Gleichungen

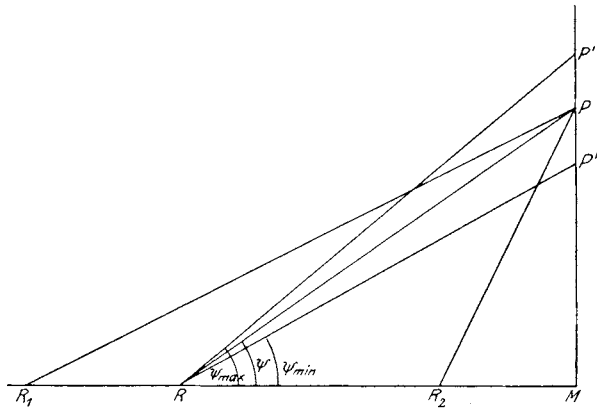


Fig. 743.

$$\frac{\max v^2}{2g} = \frac{\max \mathbf{A}}{\mathfrak{G}}, \quad \frac{\min v^2}{2g} = \frac{\min \mathbf{A}}{\mathfrak{G}},$$

worin  $\mathfrak{G}$  nur mehr das reduzierte Massengewicht des Schwungrades und

$$\max \mathbf{A} = \overline{O_1 a}, \quad \min \mathbf{A} = -\overline{O_1 b}$$

ist. Man erhält hieraus

$$\max v^2 - \min v^2 = \frac{2g}{\mathfrak{G}} (\max \mathbf{A} - \min \mathbf{A}) = \frac{2g}{\mathfrak{G}} \cdot ab$$

und da die linke Seite  $2\mu v_m^2$  und

$$v_m = \frac{r n \pi}{30}$$

ist, so bleibt mit der Vernachlässigung  $\frac{\pi^2}{g} \cdot 1$  für das Schwungradgewicht, an den Kurbelzapfen reduziert:

$$\mathfrak{G} = \frac{900}{\mu r^2 n^2} \cdot ab,$$

worin  $ab$  den größten Arbeitsüberschuß  $U$  während der Umdrehung darstellt und somit nach dem Arbeitsmaßstab

$$1 \text{ cm Zeichnung} = \lambda \text{ mkg, } \lambda = 20$$

in mkg umgerechnet werden muß.

Ist  $r = 0,25 \text{ m}$ , so wird

$$\mathcal{G} = \frac{14400}{\mu n^2} U.$$

Nimmt man z. B. für die gegebene Maschine  $n_1 = 120$ ,  $\mu_1 = \frac{1}{10}$  an und ist in der Originalzeichnung von Fig. 743:  $MP = 5 \text{ cm}$ , so ist nach früher  $\overline{MR}_1 = 10 \text{ cm}$  und  $\overline{PP'} = \overline{PP''} = 0,5 \text{ cm}$ ; die zu  $R_1P'$  und  $R_1P''$  parallelen Tangenten an das Massenwuchtdiagramm schneiden auf der Arbeitsachse die Strecke  $a_1b_1 = 5,90 \text{ cm}$  ab; es ist

$$U_1 = (5,9 \times 20) \text{ mkg} = 118 \text{ mkg}$$

und das Schwunradgewicht

$$\mathcal{G} = 1180 \text{ kg.}$$

Ist hingegen  $n_2 = 240$ ,  $\mu_2 = \frac{1}{5}$ , so wird  $\overline{MR}_2 = 2,5 \text{ cm}$ ,  $PQ' = PQ'' = 1 \text{ cm}$ ; die beiden Tangenten schneiden die Strecke  $a_2b_2 = 4,94 \text{ cm}$  ab und es wird  $U_2 = 98,8 \text{ mkg}$ ,  $\mathcal{G} = 123,5 \text{ kg}$ .

Man kann also an dem gleichen Massenwuchtdiagramm den Einfluß verschiedener Umdrehungszahlen und Ungleichförmigkeitsgrade auf das Schwunradgewicht studieren.

Wollte man den Einfluß der bewegten Masse des Getriebes ganz außer acht lassen, so würde das Massenwuchtdiagramm gänzlich in die Achse **A** fallen und die Strecke  $a_0b_0$  bilden. In der Originalzeichnung ist  $a_0b_0 = 8,8 \text{ cm}$  und der entsprechende Arbeitsüberschuß  $U_0 = 176 \text{ mkg}$ , somit das Schwunradgewicht

$$\mathcal{G}_0 = \frac{14400}{\mu n^2} U_0$$

und für  $n_1 = 120$ ,  $\mu_1 = \frac{1}{10}$ :  $\mathcal{G}_0 = 1760 \text{ kg}$ ;

für  $n_2 = 240$ ,  $\mu_2 = \frac{1}{5}$ :  $\mathcal{G}_0 = 220 \text{ kg}$ .

Diese letztere Art, das Schwunrad zu berechnen, würde dem älteren Verfahren entsprechen, bei dem auf die dynamische Wirkung der Massen noch keine Rücksicht genommen wurde.

**432. Bestimmung des Schwunradgewichtes für eine Einzylinder-Expansionsmaschine mit geschränkter Schubkurbel in Verbindung mit einer Doppelkurbel.** Dieses Getriebe ist in Fig. 744 dargestellt. Es sind dieselben Verhältnisse gewählt, wie bei der früher behandelten Maschine, was die Länge der Kurbel und des Lenkers und ihre Massenverteilung, sowie die Dampfdruckdiagramme betrifft. Nur liegt die Bahn des Kreuzkopfes  $B$  unter der Kurbelwelle  $\mathfrak{A}$  und die Schubkurbel ist gekoppelt mit einer Doppelkurbel  $\mathfrak{A}AC\mathfrak{C}$ ; der konstant angenommene Widerstand  $Q$



wirke im Kurbelzapfen  $C$ , normal zur Kurbel  $CC$ . Der vom Kurbelzapfen  $A$  beschriebene Kreis wurde wieder in 24 gleiche Teile geteilt und die entsprechenden Punkte 0 bis 23 des von  $C$  beschriebenen Kreises bestimmt.

Es ist wie früher  $A\mathcal{U} = r_1 = 0,25$  m, ferner  $CC = r_5 = 0,1875$  m,  $AC = l_4 = 0,281$  m. Das Getriebe wurde nur für die Stellungen 4 und 14 gezeichnet, die Streifen des oberen und des unteren Dampfdruckdiagramms jedoch für alle 24 Stellungen planimetriert und in Arbeit umgerechnet, wie dies bei dem vorhergehenden Beispiel geschehen ist. Die Tabelle gibt eine Übersicht über diese Dampfdruckarbeiten, deren Größe nach einer Umdrehung wie früher 790 mkg ist. Ebenso groß ist die Arbeit des Widerstandes  $Q$ , nur daß sich jetzt diese Arbeit über die 24 Stellungen des Punktes  $C$  nicht gleichmäßig verteilt, sondern den Abschnitten 01, 12, 23, . . . des kleineren Kurbelkreises proportional auszuteilen ist. So entfällt z. B. auf den Weg 04 des Punktes  $C$  die Widerstandsarbeit

$$790 \text{ mkg} \cdot \frac{04}{2r_1\pi} = 136,85 \text{ mkg}.$$

In dieser Art wurden die Widerstandsarbeiten für sämtliche 24 Stellungen ermittelt und in die Tabelle eingetragen. Die Differenzen  $\mathbf{A}$  aus den Dampfdruck- und Widerstandsarbeiten wurden in der letzten Kolonne der Tabelle gebildet.

Das geschränkte Schubkurbelgetriebe samt der Doppelkurbel hat fünf Ersatzpunkte:  $A$ ,  $B$ ,  $S_2$ , wie früher, und überdies  $C$  und  $S_4$ , der Schwerpunkt der Koppel  $AC$ .

Die Ersatzmassen in den ersten drei Punkten sind dieselben wie früher; dazu kommen:

4. Koppel  $AC$ : Gewicht  $G_4 = 20$  kg, Trägheitshalbmesser für den Schwerpunkt  $S_4$ :  $i_4^2 = 144$  cm<sup>2</sup>,  $AS_4 = a_4 = 15,6$  cm,  $S_4C = b_4 = 12,5$  cm.

Ersatzmassen:

$$\text{in } A: \mu_{A4} = \frac{G_4}{g} \cdot \frac{i_4^2}{a_4 l_4} = \frac{6,6}{g} \text{ kg},$$

$$\text{in } C: \mu_{C4} = \frac{G_4}{g} \cdot \frac{i_4^2}{b_4 l_4} = \frac{8,2}{g} \text{ kg},$$

$$\text{in } S_4: \mu_{S4} = \frac{G_4}{g} \cdot \left(1 - \frac{i_4^2}{a_4 b_4}\right) = \frac{5,2}{g} \text{ kg}.$$

5. Kurbel  $CC$ : Gewicht  $G_5 = 10$  kg, Trägheitshalbmesser für  $C$ :  $i_5^2 = 300$  cm<sup>2</sup>; Ersatzmasse in  $C$ :

$$\mu_{C5} = \frac{G_5}{g} \left(\frac{i_5}{r_5}\right)^2 = \frac{8,6}{g} \text{ kg}.$$

Nimmt man noch die von früher bekannten Ersatzmassen  $\mu_{A1} = \frac{9,6}{g}$  kg,



Stellung	$\frac{v_B}{v_A}$	$\frac{v_C}{v_A}$	$\frac{v_{S2}}{v_A}$	$\frac{v_{S4}}{v_A}$	$\left(\frac{v_B}{v_A}\right)^2$	$\left(\frac{v_C}{v_A}\right)^2$	$\left(\frac{v_{S2}}{v_A}\right)^2$	$\left(\frac{v_{S4}}{v_A}\right)^2$	$\mu_{A,1} g \left(\frac{v_{11}}{v_A}\right)^2$ kg	$\mu_{C,1} g \left(\frac{v_C}{v_A}\right)^2$ kg	$\mu_{S2,1} g \left(\frac{v_{S2}}{v_A}\right)^2$ kg	$\mu_{S4,1} g \left(\frac{v_{S4}}{v_A}\right)^2$ kg	$\Sigma M g$ kg	Dampfdruckarbeit mkg	Widerstandsarbeit mkg	Differenzarbeit A mkg
0	0.18	0.5	0.66	0.67	0.03	0.25	0.44	0.45	3.50	4.20	6.60	2.34	61.64	7.50	20.40	— 12.90
1	0.49	0.58	0.74	0.72	0.24	0.34	0.55	0.52	27.98	5.71	8.25	2.70	89.64	45.00	44.20	+ 0.80
2	0.76	0.66	0.81	0.77	0.58	0.44	0.66	0.59	67.63	7.39	9.90	3.07	132.99	98.75	71.66	+ 27.09
3	0.96	0.74	0.91	0.81	0.92	0.55	0.83	0.66	107.27	9.24	12.45	3.43	177.39	180.00	102.68	+ 77.32
4	1.06	0.81	0.99	0.85	1.12	0.66	0.98	0.72	130.59	11.09	14.70	3.74	205.12	262.50	136.85	+ 125.65
5	1.08	0.88	1.02	0.88	1.17	0.77	1.04	0.77	136.42	12.94	15.60	4.00	213.96	325.00	173.83	+ 151.17
6	1.00	0.97	1.00	0.92	1.00	0.94	1.00	0.85	116.60	15.79	15.00	4.42	196.81	363.75	214.63	+ 149.12
7	0.86	1.08	0.95	0.96	0.74	1.17	0.90	0.92	86.28	19.66	13.50	4.78	169.22	386.25	258.83	+ 127.42
8	0.66	1.24	0.86	1.00	0.44	1.54	0.74	1.00	51.30	25.87	11.10	5.20	138.47	397.50	309.83	+ 87.67
9	0.46	1.44	0.77	1.06	0.21	2.07	0.59	1.12	24.49	34.78	8.85	5.82	118.94	402.50	369.16	+ 33.34
10	0.25	1.72	0.67	1.08	0.06	2.96	0.45	1.17	7.00	49.73	6.75	6.08	114.56	400.00	438.00	— 38.00
11	0.04	1.90	0.64	1.00	0.00	3.61	0.41	1.00	0.00	60.65	6.15	5.20	117.00	395.00	517.48	— 122.48
12	0.19	1.50	0.65	0.68	0.04	2.25	0.42	0.46	4.66	37.80	6.30	2.39	96.15	401.25	593.13	— 191.88
13	0.39	0.91	0.70	0.43	0.15	0.83	0.49	0.18	17.49	13.94	7.35	0.94	84.72	427.50	645.83	— 218.33
14	0.59	0.51	0.77	0.33	0.35	0.26	0.59	0.11	40.81	4.37	8.85	0.57	99.60	476.25	673.88	— 197.63
15	0.74	0.35	0.85	0.36	0.55	0.12	0.72	0.13	64.13	2.02	10.80	0.68	122.63	540.00	692.16	— 152.16
16	0.87	0.28	0.94	0.40	0.76	0.08	0.88	0.16	88.62	1.34	13.20	0.83	148.99	620.00	704.90	— 84.90
17	0.96	0.24	0.99	0.42	0.92	0.06	0.98	0.18	107.27	1.01	14.70	0.94	168.92	690.00	715.10	— 25.10
18	1.00	0.24	1.00	0.43	1.00	0.06	1.00	0.18	116.60	1.01	15.00	0.94	178.55	742.50	725.73	+ 16.77
19	0.98	0.25	0.99	0.47	0.96	0.06	0.98	0.22	111.94	1.01	14.70	1.14	173.79	775.00	736.36	+ 38.64
20	0.86	0.27	0.92	0.50	0.74	0.07	0.85	0.25	86.28	1.18	12.75	1.30	146.51	791.25	747.83	+ 43.42
21	0.69	0.31	0.84	0.54	0.48	0.10	0.71	0.29	55.97	1.68	10.65	1.51	114.81	800.00	759.73	+ 40.27
22	0.42	0.37	0.73	0.59	0.18	0.14	0.53	0.35	20.99	2.35	7.95	1.82	78.11	795.00	774.60	+ 20.40
23	0.12	0.43	0.66	0.64	0.01	0.18	0.44	0.41	1.17	3.02	6.60	2.13	57.92	790.00	790.00	0

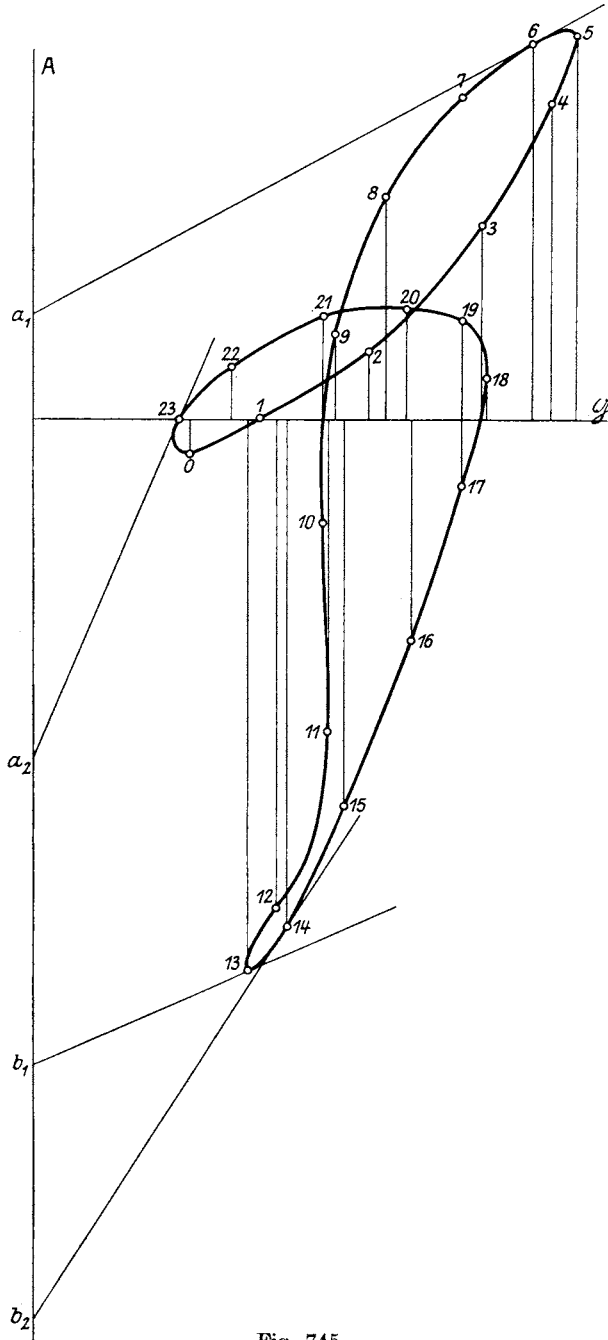


Fig. 745.

$$\mu_{A2} = \frac{28,8}{g} \text{ kg}, \quad \mu_{S2} = \frac{15}{g} \text{ kg}, \quad \mu_{B2} = \frac{16,2}{g} \text{ kg}, \quad \mu_{B3} = \frac{100}{g} \text{ kg} \text{ hinzu, so}$$

werden die Ersatzmassen des Getriebes:

$$\mu_A = \mu_{A1} + \mu_{A2} + \mu_{A4} = \frac{45,0}{g} \text{ kg}, \quad \mu_B = \mu_{B2} + \mu_{B3} = \frac{116,6}{g} \text{ kg},$$

$$\mu_C = \mu_{C4} + \mu_{C5} = \frac{16,8}{g} \text{ kg}, \quad \mu_{S2} = \frac{15}{g} \text{ kg}, \quad \mu_{S4} = \frac{5,2}{g} \text{ kg}.$$

und die nach  $A$  reduzierte Gesamtmasse:

$$\mathfrak{M} = \mu_A + \mu_B \left( \frac{v_B}{v_A} \right)^2 + \mu_C \left( \frac{v_C}{v_A} \right)^2 + \mu_{S2} \left( \frac{v_{S2}}{v_A} \right)^2 + \mu_{S4} \left( \frac{v_{S4}}{v_A} \right)^2.$$

Als Maß der Geschwindigkeit  $v_A$  wurde wieder die Länge  $A\mathfrak{Q}$  genommen und die Geschwindigkeiten  $v_B$  und  $v_{S2}$  wie in der früheren Aufgabe konstruiert.

Um die Geschwindigkeiten  $v_C$  und  $v_{S4}$  zu finden, wurde  $\mathfrak{M}c$   $AC$  bis zum Schnitte  $c$  mit  $C\mathfrak{C}$  gezogen, dann ist  $\overline{Cc} = v_C$ ; ferner  $A\mathfrak{Q}$  und  $C\mathfrak{C}$  zum Schnitte  $O$  gebracht (Drehpol von  $AC$ ) und  $S_4$  mit  $O$  verbunden; dann ist  $\overline{S_4\mathfrak{s}} = v_{S4}$  (vgl. Fig. 679). Die auf diese Weise für alle 24 Stel-

lungen gefundenen Geschwindigkeitsverhältnisse  $\frac{v_B}{v_A}, \frac{v_C}{v_A}, \frac{v_{S2}}{v_A}, \frac{v_{S4}}{v_A}$  und ihre Quadrate wurden in die Tabelle eingetragen, worauf die nächsten Kolonnen bis zur reduzierten Masse  $\mathfrak{M}$  ausgerechnet werden konnten. Das aus den Angaben der Tabelle für  $\mathbf{A}$  und  $\mathfrak{M}g$  konstruierte Massenwuchtdiagramm ist aus Fig. 745 zu entnehmen. Von nun an erfolgt die Bestimmung des Schwungradgewichts genau so wie in der früheren Aufgabe. Nachdem man die Tangenten parallel zu den Strahlen der Fig. 743 gezogen hat, werden die Abschnitte gemessen:

$$\overline{a_1 b_1} = 14,9 \text{ cm}, \quad \overline{a_2 b_2} = 11,1 \text{ cm}.$$

woraus die Arbeitsüberschüsse

$$U_1 = 298 \text{ mkg}, \quad U_2 = 222 \text{ mkg}$$

und somit die Schwungradgewichte, an den Kurbelzapfen  $A$  reduziert,

$$\mathfrak{G} = \frac{14400}{\mu n^2} U:$$

$$\text{für } n_1 = 120, \mu_1 = \frac{1}{10}: \quad \mathfrak{G}_1 = 2980 \text{ kg},$$

$$\text{für } n_2 = 240, \mu_2 = \frac{1}{5}: \quad \mathfrak{G}_2 = 277,5 \text{ kg}.$$

**433. Literatur.** Das hier geschilderte Verfahren der graphischen Ermittlung des Schwungradgewichts wurde von F. Wittenbauer 1905 in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure veröffentlicht.

M. Tolle gibt in seinem ausgezeichneten Werke: „Die Regelung der Kraftmaschinen“, dritte Auflage, 1922, eine eingehende Darstellung dieses Verfahrens und knüpft daran eine Reihe schöner und interessanter Anwendungen. Es werden nach dem dynamischen Verfahren die Schwun-

radgewichte bestimmt für eine Einzylindermaschine, eine einfach und eine doppelt wirkende Pumpe, endlich für eine Zwillingsmaschine.

Aus diesem Grunde konnte im vorliegenden Buche von der Vorführung weiterer Beispiele abgesehen werden.

Die Frage der Berechnung des Schwungradgewichtes ist in einer Reihe wertvoller Arbeiten behandelt worden, von denen nur einige angeführt sein sollen.

R. v. Mises, Die Ermittlung der Schwungmassen im Schubkurbelgetriebe. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1906.

R. Proell, Die genaue und die angenäherte Schwungradermittlung. Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1905.

E. Wellner, Graphische Schwungradausmittlung ohne Entwurf des Tangentialdruckdiagramms. Dingler Pol. Journ. 1915.

A. Pielmann, Einfluß der hin- und hergehenden Massen auf Ungleichförmigkeit und Winkelabweichung bei Umlaufzahl- und Belastungsänderung. Dissert. Dresden 1913.

## Die wichtigsten Gleichungen.

Nr.		Seite
1.	Geschwindigkeit des Punktes $A$ :	
	$v_A = \frac{ds}{dt}$ . . . . .	2
3.	Beschleunigung des Punktes $A$ :	
	$b_A = \frac{dv_A}{dt}$ . . . . .	4
4.	Normalbeschleunigung des Punktes $A$ :	
	$n_A = \frac{v_A^2}{\rho}$ . . . . .	5
5.	Tangentialbeschleunigung des Punktes $A$ :	
	$t_A = \frac{dv_A}{dt}$ . . . . .	5
6.	$b_A = n_A + t_A$ , $n_A = b_A \cos \varphi$ , $t_A = b_A \sin \varphi$ . . . . .	5
7.	Winkelgeschwindigkeit:	
	$\omega = \text{tg } \delta$ . . . . .	7
8.	$v_B = \overline{BA} \cdot \omega$ , $v_M = \overline{MA} \cdot \omega$   mit $A$ als Mittelpunkt der Dreh. . . . .	7
9.	$n_B = \overline{BA} \cdot \omega^2 = \omega \cdot v_B$ . . . . .	16
10.	$t_B = \frac{dv_B}{dt} = \overline{BA} \cdot \frac{d\omega}{dt}$ . . . . .	17
11.	$t_B = \overline{BA} \cdot \dot{\lambda}$ , $t_M = \overline{MA} \cdot \dot{\lambda}$ . . . . .	17
12.	Winkelbeschleunigung: $\dot{\lambda} = \text{tg } \alpha$ . . . . .	17
13.	$b_B = \sqrt{n_B^2 + t_B^2} = \overline{BA} \cdot \sqrt{\omega^4 + \dot{\lambda}^2}$ . . . . .	17
14.	Beschleunigungswinkel:	
	$\text{tg } \varphi = \frac{t_B}{n_B} = \frac{t_M}{n_M} = \frac{\dot{\lambda}}{\omega^2}$ . . . . .	18
15.	Relative Normalbeschleunigung:	
	$n_{CB} = \frac{v_{CB}^2}{\overline{CB}}$ . . . . .	22
16.	$b_B = n_{BA} + t_{BA} + b_A$ . . . . .	24
17.	$b_{AB} + b_{BC} + b_{CA} = 0$ . . . . .	26

Nr.		Seite
18.	$n_{AB} + n_{BC} + n_{CA} = 0$ .	27
19.	$t_{AB} + t_{BC} + t_{CA} = 0$ .	27
20.	$\operatorname{tg} \varphi = \frac{t_{BA}}{n_{BA}} = \frac{\lambda}{\omega^2}$ .	27

Beschleunigungsteile in bezug auf den Beschleunigungspol  $P$ :

21.	$v_A = b_A \cos \varphi = \overline{AP} \cdot \omega^2$ .	35
22.	$\tau_A = b_A \sin \varphi = \overline{AP} \cdot \lambda$ .	35
23.	$b_A = \overline{AP} \cdot \sqrt{\omega^4 + \lambda^2}$ .	35
24.	Beschleunigung des Drehpols $O$ : $b_O = d \omega^2 = e \lambda$ .	36
25.	$b_A = \overline{AJ} \cdot \omega^2$ .	36

Zerlegungen der Beschleunigung:

26.	$b_A = b_1 + b_2$ .	38
27.	$b_1 = \overline{AO} \cdot \omega^2$ in Richtung von $AO$ .	38
28.	$b_2 = \overline{AT} \cdot \lambda$ senkrecht zu $AT$ .	38
29.	$b_A = b_W + b_Z$ .	39
30.	Wendebeschleunigung $b_W = \overline{AJ} \cdot \omega^2$ in Richtung von $AJ$ .	39
31.	Triebbeschleunigung $b_Z = \overline{AO} \cdot \lambda$ senkrecht zu $AO$ .	39
32.	Wechselgeschwindigkeit $u = d \cdot \omega$ .	42
33.	Krümmungshalbmesser $\varrho = \frac{r^2}{r - d \cos \alpha}$ .	43
35.	Masse eines Systems: $M = \frac{G}{g}$ .	52
36.	Koordinaten des Schwerpunkts: $x_S = \frac{\Sigma(m x)}{M}$ , $y_S = \frac{\Sigma(m y)}{M}$ .	53
37.	$r_S = \frac{\Sigma(m r)}{M}$ .	53
38.	$M v_S = \Sigma(m v)$ .	54
39.	$M b_S = \Sigma(m b)$ .	54
41.	$b_S = \frac{\Sigma P}{M}$ .	56

D'Alembertsches Prinzip:

42.	Für einen Punkt: $P + S + T = 0$ .	56
43.	Für ein starres System: $\Sigma P + \Sigma T = 0$ .	56
44.	Trägheitsmoment für den Schwerpunkt: $\mathbf{T}_S = \Sigma(m \varrho^2)$ .	58

Nr.	Seite
45. Winkelbeschleunigung eines Systems:	
$\lambda = \frac{\Sigma (P p)}{\mathbf{T}_S}$ . . . . .	58
46. Trägheitshalbmesser:	
$i = \sqrt{\frac{\mathbf{T}}{M}}$ . . . . .	58
48. Bedingungen für statische Ersatzpunkte:	
$\Sigma m_n = M, \Sigma (m_n x_n) = 0, \Sigma (m_n y_n) = 0$ . . . . .	140
49. Bewegungsenergie eines Systems:	
$L = \Sigma \left( \frac{1}{2} m v^2 \right)$ . . . . .	141
49a. Bewegungsenergie eines sich drehenden Systems (im Text nicht besonders angeführt):	
$L = \frac{1}{2} \mathbf{T} \omega^2$ . . . . .	141
50. Bewegungsenergie, bezogen auf den Schwerpunkt:	
$L = \frac{1}{2} M v_S^2 + \frac{1}{2} \mathbf{T}_S \omega^2$ . . . . .	141
51. Bedingung für dynamische Ersatzpunkte:	
$\Sigma (m_n p_n^2) = \mathbf{T}_S = M i^2$ . . . . .	141
53. Zwei dynamische Ersatzpunkte:	
$\mu_A = M \frac{i^2}{p_1^2 + i^2}, \mu_B = M \frac{i^2}{p_2^2 + i^2}$ . . . . .	142
54. $p_2 = \frac{i^2}{p_1}$ . . . . .	142
58. Drei dynamische Ersatzpunkte:	
$\mu_A = M \frac{i^2}{a l}, \mu_B = M \frac{i^2}{b l}, \mu_S = M \left( 1 - \frac{i^2}{a b} \right)$ . . . . .	150
66. Flächenträgheitsmoment für die X-Achse:	
$J_X = \int y^2 dF$ . . . . .	167
67. Trägheitshalbmesser für die X-Achse:	
$i_X = \sqrt{\frac{J_X}{F}}$ . . . . .	167
68. $J_X = J_0 + F e^2$ . . . . .	167
69. Polares Flächenträgheitsmoment:	
$J_P = \int \rho^2 dF$ . . . . .	167

Nr. Seite

70. Polarer Trägheitshalbmesser:

$$i_P = \sqrt{\frac{J_P}{F}} \dots \dots \dots 167$$

71.  $J_P = J_X + J_Y$ . 168

72.  $J_P = J_S + Fr_0^2$ . 168

Trägheitsmomente:

73. Rechteck, Achse  $a$  durch  $S$ :  $J_X = \frac{1}{12} ab^3$ . 168

74. Rechteck, in bezug auf  $S$ :  $J_S = \frac{1}{12} ab (a^2 + b^2)$ . 168

75.  $i = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{12}}$  168

76. Quadrat:  $J_X = J_Y = \frac{1}{12} a^4$ . 168

77. Quadrat:  $J_S = \frac{1}{6} a^4$ ,  $i = \frac{a}{\sqrt{6}}$ . 168

78. Dreieck, in bezug auf die Grundlinie  $a$ :

$$J_X = \frac{1}{12} ah^3 \dots \dots \dots 168$$

79. Dreieck, in bezug auf die Schwerlinie parallel zu  $a$ :

$$J_0 = \frac{1}{36} ah^3 \dots \dots \dots 169$$

81. Dreieck, in bezug auf den Eckpunkt  $A$ :

$$J_A = \frac{F}{12} (3b^2 + 3c^2 - a^2) \dots \dots \dots 169$$

82. Dreieck, in bezug auf den Schwerpunkt:

$$J_S = \frac{F}{36} (a^2 + b^2 + c^2) \dots \dots \dots 169$$

83. Parallelogramm, in bezug auf den Schwerpunkt:

$$J_S = \frac{F}{12} (a^2 + b^2) \dots \dots \dots 170$$

85. Kreis, in bezug auf einen Durchmesser  $2r$ :

$$J_X = \frac{\pi r^4}{4} \dots \dots \dots 170$$

86. Ellipse, in bezug auf die Achse  $2a$ :

$$J_X = \frac{\pi ab^3}{4} \dots \dots \dots 170$$



Nr.	Seite
88. Polares Trägheitsmoment der Scheibe:	
$\mathbf{T}_P = \frac{MJ_P}{F} \dots \dots \dots$	171
88a. Kreisscheibe, in bezug auf den Mittelpunkt:	
$\mathbf{T}_O = \frac{1}{2} Mr^2 \dots \dots \dots$	171
89. Stange, in bezug auf die Querachse durch $S$ :	
$\mathbf{T}_S = \frac{M}{12} (l^2 + d^2) \dots \dots \dots$	171
90. Dünne Stange: $\mathbf{T}_S = \frac{1}{12} Ml^2 \dots \dots \dots$	171
91. $i = \frac{l}{\sqrt{12}} \dots \dots \dots$	171
92. $\mathbf{T}_P = \mathbf{T}_S + Mr_0^2 \dots \dots \dots$	172
93. $i_P^2 = i^2 + r_0^2 \dots \dots \dots$	172
94. Dünne Stange in bezug auf die Querachse durch das Ende $A$ :	
$\mathbf{T}_A = \frac{1}{3} Ml^2 \dots \dots \dots$	172
95. $i_A = \frac{l}{\sqrt{3}} \dots \dots \dots$	172
96. Schwingungsdauer: $t = \pi \sqrt{\frac{\mathbf{T}}{Gp}} \dots \dots \dots$	172
97. $\mathbf{T} = 365 \frac{Gp}{z^2} \dots \dots \dots$	173
98. $k = 1 - \frac{Mi^2}{\Sigma (m_n p_n^2)} \dots \dots \dots$	180
99. Paar der Trägheitskräfte:	
$Kl = M \lambda (p_1 p_2 - i^2) \dots \dots \dots$	184
100. Dasselbe für eine prismatische Stange:	
$Kl = \frac{1}{6} M \lambda l^2 \dots \dots \dots$	184
102. $k = 1 - \frac{f i^2}{f_1 p_1^2 + f_2 p_2^2 + f_3 p_3^2} \dots \dots \dots$	190
102a. Paar der Trägheitskräfte $K$ einer Scheibe:	
$\mathbf{M} = K_1 a + K_2 b + K_3 c \dots \dots \dots$	191
102b. $K_1 = m_A \lambda \frac{p_1^2 - i^2}{a}$ u. s. f. $\dots \dots \dots$	191
102c. $K_2 = M_2 \lambda \frac{p_1 p_2 - i_2^2}{b}$ , $K_3 = M_3 \lambda \frac{q_1 q_2 - i_3^2}{c} \dots \dots \dots$	192

Nr.	Seite
104. Prinzip der virtuellen Verschiebungen:	
$\Sigma (P \cdot \delta p) = 0$ . . . . .	198
106. Reduzierte Kraft:	
$\mathfrak{R} = \Sigma \left[ P \cos (Pv) \cdot \frac{v}{v_F} \right]$ . . . . .	199
108. Beweglichkeitsgrad: $x = 3 +$ fehlende Stäbe . . . . .	227
110. Anzahl der fehlenden Stäbe:	
$f = s - 2p - 1$ , $s =$ Anzahl der Seiten, $p =$ Anzahl der Polygone . . . . .	229
113. Beweglichkeitsgrad: $x = n - 2\pi + 2$ ; $n =$ Anzahl der Glieder, $\pi =$ Anzahl der veränderlichen Polygone. . . . .	234
119. Beweglichkeitsgrad einer Schubkette: $x = n - \pi_S + 2$ , $n =$ Anzahl der Glieder, $\pi_S =$ Anzahl der Polygone . . . .	237
121. Beweglichkeitsgrad, allgemein: $x = n - 2\pi - \pi_S - k + 2$ $n =$ Anzahl der Glieder; $\pi =$ Anzahl der veränderlichen Polygone; $\pi_S =$ Anzahl der Polygone, die nur von geraden Schiebern gebildet werden; $k =$ Anzahl der kreuzenden Stäbe. . . . .	238
122. Kennzeichen für Zwangslauf, allgemeine Kette:	
$n - k = 2\pi + \pi_S + 2$ . . . . .	238
124. Kennzeichen für Zwangslauf von Gelenkketten nach Grübler:	
$3n - 2g = 4$ $n =$ Anzahl der Glieder, $g =$ Anzahl der Gelenke. . . .	241
125. Gleichgerichtete Drehungen: $\omega = \omega_1 + \omega_2$ . . . . .	246
127. Entgegengesetzt gerichtete Drehungen: $\omega = \omega_2 - \omega_1$ . . . .	248
128. $\omega_{mn} = -\omega_{nm}$ . . . . .	251
129. $\omega_{01} + \omega_{12} + \omega_{20} = 0$ . . . . .	251
130. $\omega_{mn} + \omega_{np} + \omega_{pq} + \dots + \omega_{rs} + \omega_{sm} = 0$ . . . . .	252
131. Anzahl der Drehpole von $n$ Systemen:	
$u = \frac{n(n-1)}{2}$ . . . . .	253
132. Anzahl der Geraden, auf denen drei Drehpole liegen:	
$v = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ . . . . .	253
134. Zusatz- (Coriolis-) Beschleunigung:	
$b_C = b_B + b_z + b_r$ , $b_z = 2v_r\omega_2$ . . . . .	318
136. Beschleunigungssprung bei Kurvenführung:	
$x = \frac{v_r^2}{\cos \varphi} \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'} \right)$ . . . . .	357

Nr.	Seite
138. Anzahl der wählbaren Kräfte einer kinematischen Kette für Gleichgewicht: $y = 2\varepsilon - n + 2\pi + k - 2$ $\varepsilon =$ Anzahl der Gelenke mit Kräften. . . . .	393
142. Zwang einer vorgeschriebenen Bahn: $D = \frac{mv^2}{\rho} - P \sin \varphi$ . . . . .	548
158. $v^2 = v_0^2 + 2bs$ . . . . .	570
159. $s = v_0t + \frac{1}{2}bt^2$ . . . . .	570
161. Wegmaßstab: 1 cm = $a$ m Weg, Geschwindigkeitsmaßstab: 1 cm = $\beta$ m/sek. Geschwindigkeit, Beschleunigungsmaßstab: 1 cm = $\gamma$ m/sek. <sup>2</sup> Beschleunigung, Zeitmaßstab: 1 cm = $\delta$ Sekunden. . . . .	571
162. $s = \alpha \hat{s}$ , $v = \beta \hat{v}$ , $b = \gamma \hat{b}$ , $t = \delta \hat{t}$ . . . . .	571
163. $\delta = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma}$ , $\beta^2 = a\gamma$ . . . . .	572
164. $\beta = \frac{\alpha}{\delta}$ , $\gamma = \frac{a}{\delta^2}$ . . . . .	572
165. Zeitfreie Gleichung: $v \cdot dv = b \cdot ds$ , $\hat{v} \cdot d\hat{v} = \hat{b} \cdot d\hat{s}$ . . . . .	577
167. Geschwindigkeitshöhe: $h = \frac{v^2}{2g}$ . . . . .	580
168. $h = \varepsilon \hat{h}$ , $g = \gamma \hat{g}$ . . . . .	581
169. $\hat{h} = \frac{\hat{v}^2}{2\hat{g}}$ . . . . .	581
170. Zeitstrecke: $t = \int \frac{ds}{v}$ . . . . .	582
171. Mittlere Geschwindigkeit: $v_m = \frac{1}{2}(\max v + \min v)$ . . . . .	592
172. $v_m' = \frac{S}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T v \cdot dt$ . . . . .	593
173. $v_m'' = \frac{1}{S} \int_0^S v \cdot ds$ . . . . .	593
174. Ungleichförmigkeitsgrad: $\mu = \frac{\max v - \min v}{v_m}$ . . . . .	596
175. $\mu = 2 \frac{\max v - \min v}{\max v + \min v}$ . . . . .	596
176. $\mu'' = \frac{1}{S} \int_0^S \left(1 - \frac{v}{v_m}\right)^2 \cdot ds$ . . . . .	597

Nr.	Seite
177. $\mu' = \frac{1}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{v}{v_m'}\right)^2 \cdot dt$ . . . . .	597
178. Kraftstrecke: $\mu = \frac{P}{z}$ . . . . .	600
179. Dynamisches Grundgesetz: $b = \frac{P}{m}$ . . . . .	600
181. $\mathbf{A} = \lambda a$ , $L = \lambda l$ , $\lambda = a z \mathfrak{A}$ . . . . .	602
182. Arbeitsprinzip: $L - L_0 = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \mathbf{A}$ . . . . .	602
183. $G(h - h_0) = \mathbf{A}$ . . . . .	602
184. $h - h_0 = \mathfrak{S} \frac{a}{p}$ , $\mathfrak{S} = \frac{a \mathfrak{A}}{\varepsilon}$ . . . . .	604
185. $v^2 = v_0^2 + \frac{2 \mathbf{A}}{m}$ . . . . .	606
186. Leistung: $E = \frac{d \mathbf{A}}{dt}$ . . . . .	609
187. Arbeit: $\mathbf{A} = \int E \cdot dt$ . . . . .	609
190. Dauerdrehung: $v_A = r \omega$ , $t_A = r \lambda$ , $n_A = r \omega^2$ . . . . .	629
191. $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ . . . . .	629
192. $\lambda = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ . . . . .	629
193. Zeitfreie Gleichung der Drehung: $\omega \cdot d\omega = \lambda \cdot d\varphi$ . . . . .	630
194. $\int_0^{\bar{t}} \lambda \cdot dt = 0$ für eine Periode. . . . .	631
195. $\varphi = \int_0^t \omega \cdot dt$ . . . . .	631
196. $2n\pi = \int_0^{\bar{t}} \omega \cdot dt$ . . . . .	631
197. $\frac{1}{2} (\omega^2 - \omega_0^2) = \int_0^{\varphi} \lambda \cdot d\varphi$ . . . . .	631
198. $\int_0^{2n\pi} \lambda \cdot d\varphi = 0$ für eine Periode. . . . .	632
199. Mittlere Winkelgeschwindigkeit: $\omega_m = \frac{1}{2} (\max \omega + \min \omega)$ . . . . .	632

Nr.	Seite
200. Ungleichförmigkeitsgrad der Dauerdrehung:	
$\mu = \frac{\max \omega - \min \omega}{\omega_m} \dots \dots \dots$	632
201. $\omega_m' = \frac{1}{\mathfrak{I}} \int_0^{\mathfrak{I}} \omega \cdot dt \dots \dots \dots$	632
202. $\omega_m' = \frac{2n\pi}{\mathfrak{I}} \dots \dots \dots$	632
203. $\mu' = \frac{1}{\mathfrak{I}} \int_0^{\mathfrak{I}} \left(1 - \frac{\omega}{\omega_m'}\right)^2 \cdot dt \dots \dots \dots$	632
204. $\mu' = \frac{\mathfrak{I}}{4n^2\pi^2} \int_0^{\mathfrak{I}} \omega^2 \cdot dt - 1 \dots \dots \dots$	633
205. Winkelbeschleunigung eines Körpers: $\lambda = \frac{M}{T_0} \dots \dots \dots$	633
206. Tangentialbeschleunigung des Reduktionspunktes:	
$t_E = \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{M}} \dots \dots \dots$	633
207. Reduzierte Masse bei Dauerdrehung:	
$\mathfrak{M} = \frac{T_0}{e^2} \dots \dots \dots$	633
208. Arbeitsprinzip bei Dauerdrehung:	
$\frac{1}{2} T (\omega^2 - \omega_0^2) = \mathbf{A} = \int_0^t E \cdot dt \dots \dots \dots$	637
213. Satz vom Antrieb: $M(v - v_0) = \int_0^t P \cdot dt \dots \dots \dots$	661
214. Satz vom Antrieb bei veränderlicher Masse:	
$d(Mv) = P \cdot dt + dM \cdot v' \dots \dots \dots$	662
217. Energieverlust beim Stoß einer Masse $dM$ :	
$d\mathfrak{S} = \frac{1}{2} dM(v - v')^2 \dots \dots \dots$	663
224. Arbeitsprinzip für veränderliche Masse:	
$L - L_0 = \frac{1}{2} \mathfrak{M} v^2 - \frac{1}{2} \mathfrak{M}_0 v_0^2 = \mathbf{A} = \int_0^s \mathfrak{P} \cdot ds \dots \dots \dots$	668
225. Beschleunigung der veränderlichen Masse:	
$b = \frac{1}{\mathfrak{M}} \left[ \mathfrak{P} - \frac{1}{2} v^2 \frac{d\mathfrak{M}}{ds} \right] \dots \dots \dots$	668

Nr.	Seite
226. $b = \frac{d\mathfrak{Q}}{ds}$ , $\mathfrak{Q} =$ spezifische Bewegungsenergie. . . . .	669
227. Massengewicht: $\mathfrak{G} = \mathfrak{M}g$ . . . . .	669
228. Bewegungsenergie der veränderlichen Punktmasse: $L = \mathfrak{G}h = \frac{1}{2} \mathfrak{M}v^2$ . . . . .	669
229. $\mathfrak{G}h - \mathfrak{G}_0 h_0 = \mathbf{A} = \int_0^s \mathfrak{P} ds$ . . . . .	669
230. $g = \frac{\mathfrak{G}}{\mu}$ . . . . .	671
232. Reduzierte Masse des Systems: $\mathfrak{M} = \Sigma \left[ m \left( \frac{v}{v_E} \right)^2 \right]$ . . . . .	674
233. Bewegungsenergie des Systems: $L = \frac{1}{2} \mathfrak{M} v_E^2$ . . . . .	674
235. Reduzierte Masse für den Reduktionspunkt $A$ : $\mathfrak{M} = \mu_A + \mu_B \left( \frac{v_B}{v_A} \right)^2 + \mu_C \left( \frac{v_C}{v_A} \right)^2 + \mu_S \left( \frac{v_S}{v_A} \right)^2$ . . . . .	676
236. Arbeitsprinzip für das Getriebe: $\Sigma L - \Sigma L_0 = \Sigma \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) - \Sigma \left( \frac{1}{2} m v_0^2 \right) = \Sigma \mathbf{A}$ . . . . .	708
237. $\Sigma \mathbf{A} = \int_0^s \mathfrak{R} \cdot ds$ , Arbeit der Kräfte des Getriebes. . . . .	709
239. $\mathfrak{M} = \Sigma \Sigma \left[ m \left( \frac{v}{v_E} \right)^2 \right]$ , reduzierte Masse des Getriebes. . . . .	710

## Bezeichnungen,

die in diesem Buche verwendet wurden.

- A, B, C, . . .* Punkte einer Scheibe.
- A, B, C, . . .* Auflager- und Führungsdrücke.
- A, B . . .* Krümmungsmittelpunkte der Kurven *a, b . . .*
- B* Punkt im *b-t*-Diagramm.
- D* Zwang, Druck auf vorgeschriebene Bahn.
- E* Leistung.
- E* Impulspol.
- E* Reduktionspunkt.
- F* Fläche, allgemein.
- F* Fläche im *v-t*- und *L-t*-Diagramm.
- G* Gewicht.
- G* Punkt im *v-t*-Diagramm.
- H* Pol des Kraftplans.
- J* Wendepol.
- J<sub>x</sub>* Flächenträgheitsmoment für die *X*-Achse.
- K* Führungsdruck.
- K* Trägheitskraft, als Paar auftretend.
- K* Integralkurve.
- L* Dimension der Länge.
- L* Bewegungsenergie.
- L<sub>0</sub>* anfängliche Bewegungsenergie.
- M* Dimension der Masse.
- M* Masse des Systems, des Gliedes, der Scheibe.
- O* Drehpol, Geschwindigkeitspol.
- P* Beschleunigungspol.
- P* Punkt der Integralkurve.
- P, Q, R, S, T . . .* äußere Kräfte.
- P<sub>1A</sub>* Kraft des Gliedes 1 in *A*.
- R* Rückkehrpol.
- R* Gleichgewichtskraft.
- S* Schwerpunkt.
- S* Punkt im *s-t*-Diagramm.
- S* Spannung, innere Kraft.
- S<sub>1A</sub>* Spannung des Gliedes 1 in *A*.

- $T$  Dimension der Zeit.  
 $T$  Tangentialpol.  
 $T_{A1}$  Trägheitskraft der Ersatzmasse  $m_{A1}$  oder  $\mu_{A1}$ .  
 $X, Y$  Koordinaten der Integralkurve.  
 $X, Y$  Kulissendrucke.  
 $W$  Wendepunkt.
- 
- $a, b, \dots$  bewegliche Kurven.  
 $a, b, c, \dots$  Geschwindigkeitspunkte im Geschwindigkeitsplan.  
 $b$  Beschleunigung, allgemein.  
 $b_A$  Beschleunigung des Punktes  $A$ .  
 $b_r$  relative Beschleunigung.  
 $b_S$  Beschleunigung des Schwerpunkts.  
 $b_z$  Zusatzbeschleunigung nach Coriolis.  
 $c$  Lichtgeschwindigkeit.  
 $d$  Wendedurchmesser, Durchmesser des Wendekreises.  
 $e$  Durchmesser des Tangentialkreises.  
 $f$  Anzahl der zur Starrheit fehlenden Stäbe.  
 $f$  Fläche, allgemein.  
 $f$  Fläche in  $b$ - $t$ - und  $E$ - $t$ -Diagramm.  
 $g$  Beschleunigung der Schwere.  
 $g$  Geschwindigkeitskurve.  
 $h$  Geschwindigkeitshöhe.  
 $h$  Polhöhe.  
 $i$  Trägheitshalbmesser in bezug auf den Schwerpunkt.  
 $i_0$  „ „ „ „ „ „ Punkt  $O$ .  
 $i_x$  „ „ „ „ „ „ die  $X$ -Achse.  
 $k$  Anzahl der kreuzenden Stäbe.  
 $k$  Differenzialkurve.  
 $k$  Faktor der Beschleunigungsdrücke der statischen Ersatzpunkte.  
 $m$  Punktmasse.  
 $m_A, m_B, m_C, \dots$  statische Ersatzmassen.  
 $m_{A1}$  statische Ersatzmasse in  $A$  vom Gliede 1.  
 $n$  Anzahl der Glieder.  
 $n$  Anzahl der Umdrehungen in der Minute.  
 $n_A$  Normalbeschleunigung des Punktes  $A$ .  
 $n_{AB}$  Normalbeschleunigung des Punktes  $A$  in bezug auf den Punkt  $B$ .  
 $o$  Geschwindigkeitsnullpunkt.  
 $p$  Punkt der Differenzialkurve.  
 $p$  Anzahl der Polygone.  
 $s$  Anzahl der Polygonseiten.  
 $s$  Bahn des Punktes.  
 $s$  Geschwindigkeitspunkt des Schwerpunkts.  
 $t$  Zeit.



- $t$  Poltangente.  
 $t_A$  Tangentialbeschleunigung des Punktes  $A$ .  
 $t_{AB}$  Tangentialbeschleunigung des Punktes  $A$  in bezug auf den Punkt  $B$ .  
 $t_{A1}$  transversaler Teil der Trägheitskraft  $T_{A1}$ .  
 $u$  Wechselgeschwindigkeit.  
 $u$  Anzahl der Drehpole mehrerer Systeme.  
 $u$  Hodograph.  
 $v$  Anzahl der Geraden, auf denen drei Drehpole liegen.  
 $v$  Geschwindigkeit, allgemein.  
 $v_A$  Geschwindigkeit des Punktes  $A$ .  
 $v_{AB}$  Geschwindigkeit des Punktes  $A$  in bezug auf den Punkt  $B$ .  
 $v_m$  mittlere Geschwindigkeit.  
 $v_r$  relative Geschwindigkeit.  
 $v_S$  Geschwindigkeit des Schwerpunkts.  
 $x$  Beschleunigungssprung bei Kurvenführung.  
 $x$  Beweglichkeitsgrad.  
 $x, y$  Punktkoordinaten, allgemein.  
 $x, y$  Koordinaten der Differenzialkurve.  
 $x_S, y_S$  Koordinaten des Schwerpunkts.  
 $y$  Anzahl der wählbaren Stücke beim Gleichgewichte einer kinematischen Kette.  
 $y$  Anzahl der wählbaren Stücke beim Beschleunigungszustand.  
 $y_1$  Anzahl der wählbaren Stücke beim Gleichgewichte eines Getriebes.  
 $z$  Anzahl der Ersatzpunkte einer kinematischen Kette.  
 $z_1$  Anzahl der Ersatzpunkte eines Getriebes.  
 $z = \frac{\omega}{\omega_0}, z^2 = \frac{L}{L_0}$ .

- 
- $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \dots$  Auflagerdrücke in  $A, B, C, \dots$ .  
 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \dots$  Krümmungsmittelpunkte der Bahnen von  $A, B, C, \dots$ .  
 $\mathfrak{A}$  Arbeitsbasis.  
 $\mathfrak{F}$  Fläche im  $\lambda$ - $t$ -Diagramm.  
 $\mathfrak{G} = \mathfrak{M}g$  Massengewicht.  
 $\mathfrak{Q} = \frac{L}{\mathfrak{M}}$  spezifische Bewegungsenergie.  
 $\mathfrak{M}$  reduzierte Masse.  
 $\mathfrak{N}$  Kraft normal zur Bahn.  
 $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$  = reduzierte Kräfte.  
 $\mathfrak{R}$  reduzierte resultierende Kraft.  
 $\mathfrak{T}$  Dauer der Periode.  
 $\mathfrak{T}$  reduzierte Trägheitskraft.  
 $\mathfrak{B}$  Energieverlust beim Stoß.  
 $\mathfrak{W}$  reduzierter Widerstand.

- a, b, ... Bahnen der Punkte A, B, ...
- a Arbeitsstrecke (von **A**).
- b Beschleunigungsstrecke (von *b*).
- δ Druckstrecke (von *D*).
- e Leistungsstrecke (von *E*).
- f Fläche im  $\lambda$ - $\varphi$ -Diagramm.
- f Fläche  $\int \frac{dv}{s}$ .
- g Massengewichtsstrecke (von *g*).
- g' Strecke von *g*.
- h Geschwindigkeitshöhenstrecke (von *h*).
- l Bewegungsenergiestrecke (von *L*).
- m Massenstrecke (von *M*).
- n Normalkraftstrecke (von *N*).
- p Kraftstrecke (von *P*).
- s Wegstrecke (von *s*).
- t Zeitstrecke (von *t*).
- v Geschwindigkeitsstrecke (von *v*).

A, B, ... Krümmungsmittelpunkte der Hüllbahnen  $\alpha, \beta, \dots$

$\Theta = 2\pi \mathfrak{Z}$ .

$\Sigma$  Fläche im **M**-*n*-Diagramm.

$\Phi$  Fläche im *P*-*s*-Diagramm.

$\Psi$  Fläche im *E*-*t*-Diagramm.

$\alpha, \beta, \dots$  feste Kurven, Hüllbahnen.

$\alpha$  Maßstabzahl für Wege.

$\alpha$  Beschleunigungswinkel.

$\alpha$  Anzahl der Auflagergelenke.

$\beta$  Maßstabzahl für Geschwindigkeiten.

$\gamma$  Maßstabzahl für Beschleunigungen.

$\delta$  Maßstabzahl für die Zeit.

$\delta$  Geschwindigkeitswinkel.

$\delta a$  virtuelle Verschiebung des Gelenkes *A*.

$\delta p$  virtuelle Verschiebung des Angriffspunktes der Kraft *P* in ihrer Richtung.

$\varepsilon$  Anzahl der Gelenke, in denen Kräfte angreifen.

$\varepsilon$  Maßstabzahl für Geschwindigkeitshöhen.

$\varkappa$  Maßstabzahl für Kräfte.

$\varkappa$  Widerstandszahl eines Wagens.

$\hat{\lambda}$  Winkelbeschleunigung.

$\hat{\lambda} = \alpha \varkappa \mathfrak{A}$  Maßstabzahl für Arbeiten.

$\mu$  Masse der Längeneinheit.

- $\mu$  Maßstabzahl für Masse und Massengewicht.  
 $\mu$  Neigungswinkel im  $v$ - $s$ -Diagramm.  
 $\mu, \mu', \mu''$  Ungleichförmigkeitsgrade.  
 $\mu_A, \mu_B, \mu_C \dots$  dynamische Ersatzmassen.  
 $\mu_{A1}$  Ersatzmasse in  $A$  vom Gliede 1.  
 $v_A$  Normalbeschleunigung des Punktes  $A$  in bezug auf den Beschleunigungspol.  
 $\pi$  Beschleunigungsnullpunkt.  
 $\pi$  Anzahl der veränderlichen Polygone.  
 $\pi_S$  Anzahl der Polygone aus geraden Schiebern.  
 $\rho$  Krümmungshalbmesser.  
 $\tau_A$  Tangentialbeschleunigung des Punktes  $A$  in bezug auf den Beschleunigungspol.  
 $\varphi$  Drehungswinkel.  
 $\varphi$  Beschleunigungswinkel.  
 $\varphi$  Neigungswinkel im  $s$ - $t$ -Diagramm.  
 $\psi$  Neigungswinkel im  $v$ - $t$ -Diagramm.  
 $\psi$  Geschwindigkeitswinkel.  
 $\xi$  Anzahl der wählbaren Bestimmungsstücke bei  $n$  Ersatzpunkten.  
 $\omega$  Winkelgeschwindigkeit.  
 $\omega_m, \omega_m'$  mittlere Winkelgeschwindigkeit.  
 $\omega_0$  anfängliche Winkelgeschwindigkeit.

---

**A** Arbeit.

**F** Fläche im  $b$ - $s$ - und im **A**- $t$ -Diagramm.

**M** Kraftmoment.

**T** Trägheitsmoment, allgemein.

**T**<sub>0</sub> „ für den Punkt O.

**T**<sub>S</sub> „ für den Schwerpunkt.

---

## Namensverzeichnis.

- Abdank-Abakanowicz, Br. 561, 576, 584, 617.  
 d'Alembert, J. 56, 200, 207, 210, 455, 456, 465, 477, 479, 542, 628, 733, 758, 777.  
 Allan 526.  
 Alt, H. 551.  
 Aronhold 41, 47, 48.  
 Atkinson 155, 725.  
 Atwood 172.  
 Autenrieth, E. 99, 100.
- Bach, C. v.** 590.  
 Barbier, E. 706.  
 Baudiß, L. 654.  
 Bestehorn, R. 365.  
 Bitterli, E. 561.  
 Blake, J. 343.  
 Blanc, F. 645.  
 Bobillier, E. E. 44, 45, 46, 109, 111, 121, 348, 366.  
 Bonin 614.  
 Bonjour-Lachaussée 535, 542.  
 v. Borries 517.  
 Borth, W. 590.  
 Bradford 243.  
 Brauer, E. 584.  
 Brauer, E. A. 543.  
 Braun 613.  
 Bresse, J. A. Chr. 32, 34.  
 Brun, A. 706.  
 Bucherer 329, 713.  
 Budenberg 614.  
 Burmester, L. 9, 10, 13, 24, 41, 92, 99, 117, 253, 261, 262, 289, 324, 343, 346, 509, 526, 656.
- Cayley, A. 659.  
 Capitaine, E. 706.  
 Carney, Ch. J. 315.  
 Castigliano, A. 532.  
 Collmann 242, 331.  
 Coradi 617.  
 Coriolis, G. 115, 317, 318, 325, 326, 333, 341, 530, 539, 781.  
 Cosserat, E. und F. 659.
- Dafinger, E. 526.  
 Darcelle, F. 426.  
 Delville, T. 343.  
 Descartes, R. 549.  
 Doehne, H. 354.  
 Doehne, K. 571.  
 Dörfel, R. 735.  
 Mc Dowell Leavitt, F. 410.
- Ebbs, H. 509, 543, 544.  
 Einstein, A. 659, 660.  
 Enßlin, M. 176.
- Farcot, M. 706.  
 Feigl, L. 651.  
 Fink 544.  
 Fischer, O. 373, 391, 549.  
 Föppl, A. 428, 457.  
 Franke, R. 614.  
 Freytag, F. 590.  
 de Fries 235, 327.  
 Frikart, E. 510, 517.  
 Fritze, H. 589.  
 Fuchs, O. 610, 614.
- Galilei, G. 198.  
 Geiger, J. 596.  
 Gerlach, O. 551.  
 Gill-Aveling 390.  
 Goldberger, A. 654.  
 Goldstein, C. 593.  
 Gooch 544.  
 Goodman, F. Th. 281, 290, 418.  
 Göpel, F. 614.  
 Gorton, J. C. 315.  
 Götz, H. 365, 542.  
 Gramberg, A. 619.  
 Grashof, F. 645, 656, 675.  
 Greenwood, G. W. 384.  
 Grosse, W. 617.  
 Grübler, M. 39, 43, 230, 240, 241, 242, 244, 404, 512, 518, 528, 537, 557, 781.  
 Gümbel, L. 585.  
 Gylden, H. 659.
- Hackworth** 543.  
 Hamilton, W. R. 551.
- Harm, R. 591.  
 Hartmann, W. 365, 713.  
 Haubhälter 615.  
 Heller, E. 365.  
 Henneberg, L. 290, 395.  
 Herre, O. 174.  
 Herrmann, M. 611.  
 Herzog, A. 92.  
 Heun, K. 596, 645.  
 Heusinger von Waldegg 517, 526, 545.  
 De la Hire 34.  
 Hohlehouse, Th. 243.  
 Holst, C. P. 258.  
 Holzer, H. 620.  
 Hort, W. 617.  
 Hruschka, A. 590.  
 Humphrey 583, 607, 610.  
 Huyghens, Chr. 198.
- Isaachsen, J.** 422, 425.
- Joy 517, 526, 543.  
 Jung, F. 55, 62.  
 Jung 628.
- Kadrnozka, L. 608.  
 Kästner, A. G. 675.  
 Keck, W. 428.  
 Kelvin, Lord. 547.  
 Kennedy, A. B. W. 410.  
 Kersten, A. 704.  
 Kigerl, H. 365.  
 Klein 743.  
 Klönne, F. 614, 645.  
 Klug 478, 507, 509.  
 Koenemann, A. 365.  
 Koenigs, G. 42.  
 Kohn, M. 172.  
 Kölsch, O. 517, 713, 737.  
 König, E. 370.  
 Kopczynski, F. 628.  
 Körner, K. 354, 590, 706.  
 Kriso, K. 238.  
 Krupp 727.
- Lagrange, J. L.** 198.  
 Land, R. 25, 490.  
 Lasche, O. 550.  
 Lechner, A. 172.

- Lehmann-Filhès, R. 659.  
 Lentz 590.  
 Lewicki, L. 509.  
 Linker, A. 621.  
 Longenecker, Ch. H. 426.  
 Lorenz, H. 142, 184.  
 Lux, F. 614.  
  
 Mader, O. 365, 614.  
 Magg, J. 250, 355, 743.  
 Mannheim, A. 42.  
 Marcus, H. 283.  
 Massot 51. 102.  
 Maxwell, J. Cl. 659.  
 Méguin, F. 343.  
 Mehmke, R. 11, 25, 552,  
 561, 620.  
 Mehrtens, G. C. 290.  
 Melchior, P. 618, 620, 621.  
 Meschtschersky, J. 659.  
 Meuth, H. 593.  
 v. Mises, R. 775.  
 Möbius, A. F. 371, 551.  
 Mohr, O. 11, 25, 92, 99,  
 106, 236, 262, 280, 290,  
 313, 314, 399, 406, 477.  
 Möller 327.  
 Mollier, R. 176, 203.  
 Morgan, Ch. H. 478.  
 Morley, H. W. 243.  
 Müller, Chr. 654.  
 Müller, W. 343.  
 Müller-Breslau, H. 290.  
 Musgrave, J. 425.  
  
 Naatz, H. 617.  
 Nerreter, A. 390, 391, 576.  
 Nettel, F. 628.  
 Neumann, A. 550.  
 Neumayer, M. 425.  
 Newton 53, 600, 659.  
 Noack, W. G. 607, 610.  
  
 d'Ocagne, M. 576.  
 Österreicher, A. S. 621.
- Osthoff 590.  
 Otto 705.  
 Owen 411.  
  
 Pasquich 675.  
 Peaucellier, A. 719.  
 Pflüger, J. 100, 619.  
 Pforr 587.  
 Piarron de Mondésir 660,  
 666.  
 Pielmann, A. 775.  
 Planck, M. 660.  
 Plank, R. 571, 591.  
 Poinsot, L. 143, 183, 428.  
 Poisson, S. D. 56.  
 Polster, H. 723.  
 Poncelet, J. V. 675.  
 Pöschl, Th. 61, 62, 63, 65,  
 66, 137, 138, 365.  
 Proell, R. 13, 199, 369,  
 403, 410, 411, 547, 548,  
 579, 582, 584, 775.  
 Pröll, A. 491.  
  
 Radinger, J. 613, 645, 650,  
 759, 761.  
 Ransome 613.  
 Regnier 735.  
 Rehfeld, E. 164.  
 Resal, H. 661, 664.  
 Reuleaux, F. 410, 526.  
 Reusch 618.  
 Reye, Th. 164, 183, 428.  
 Riehm, W. 615.  
 Rittershaus, T. 24, 92, 99,  
 261, 706.  
 Rosenberg, E. 645.  
 Routh, E. J. 159, 660, 662.  
 Röver, A. 621.  
 Runge, C. 561.  
  
 Sanzin, R. 586, 591.  
 Saviotti, C. 290.  
 Schadwill 99.  
 Schäfer 614.
- Schell, W. 43.  
 Schendel, G. 714, 715.  
 SchlöB, K. 615.  
 Schmid, C. 550.  
 Scholl, J. 426.  
 Schorch, R. 654.  
 Schöttler, R. 725.  
 Schüle, W. 615.  
 Schur, F. 396.  
 Schwabach, M. 727.  
 Schwabe 369.  
 Seeliger, H. 659.  
 Skutsch, R. 183, 428, 429,  
 431.  
 Slaby, R. 621.  
 Stahl, H. 590.  
 Strömgren, E. 659.  
  
 Taverdon, L. 329.  
 Tolle, M. 16, 31, 583, 584,  
 650, 774.  
 Torka 384.  
 Trefler, G. 628.  
  
 Veltmann, W. 428.  
 Vorreiter, A. 329.  
  
 Wagener, A. 592, 615, 619.  
 Wagner, G. 614.  
 Walter, J. M. 344.  
 Wanzer 705.  
 Ward 410.  
 Wehage 576.  
 Weisbach, J. 712.  
 Wellner, E. 775.  
 Werner, S. G. 707.  
 Williams 701.  
 Williot 290.  
 Wittenbauer, F. 37, 51,  
 175, 314, 406, 480, 488,  
 672, 774.  
  
 Zahn, W. 550.

## Sachverzeichnis.

- d'Alembertsches Prinzip 56.  
 Anfahrt 627, 636, 645.  
 Anfangsbewegungen 209, 464.  
 Antiparallelkurbel 658.  
 Antrieb, Satz vom 662.  
 Antriebsvorrichtung für Schlagflügel 706.  
 Arbeitsprinzip 602, 667, 668.  
 Atkinsonsche Gasmaschine 155, 725.  
 Aufwerfdaumen 611.  
 Aufzug, Anfahrt bei einem 627.  
 Äußere Rast 351.  
**Bahn** 546.  
 Balancier-Kolben-Getriebe 306.  
 — — -Maschine, Rückdruck 734.  
 Beharrungszustand 636.  
 — bei Drehung 636.  
 Beschleunigung 3.  
 -- gedrehte 32.  
 — relative 22, 115, 245.  
 — von Coriolis 115.  
 Beschleunigungsdruck 55, 177, 433, 457.  
 — bei Drehung 143.  
 — reduzierter 455.  
 — -Figur 20.  
 — -Kraft 201, 203, 205.  
 — -Maßstab 18.  
 — -Nullpunkt 21.  
 — -Plan 21, 306.  
 — -Pol 31, 60.  
 — -Punkt 22.  
 — -Winkel 32.  
 — -Zustand 16, 293.  
 Beweglichkeitsgrad 226, 238.  
 Bewegung, fortschreitende 624.  
 — freie 546.  
 — gezwungene 546.  
 — gleichförmige 566.  
 — gleichförmig beschleunigte 566.  
 — — verzögerte 567.  
 — relative 245.  
 — zeitliche 546.  
 Bewegungsenergie 141.  
 — Prinzip der 602, 668.  
 — spezifische 141.  
 Bewegungsgröße 661.  
 Bucherer-Motor 329, 713.  
 Calcul, baryzentrischer 371.  
 Compound - Wasserhaltungs - Maschine  
 735.  
 Coriolis-Beschleunigung 318, 341, 530.  
 Cyklometer von Ransome 613.  
**Dampfhammer** 610.  
 Dampfmaschinengetriebe von Williams 701.  
 Dauerdrehung 82, 86, 124, 629.  
 Dauerpol 254, 629.  
 Diagramme 548, 613, 670.  
 — dynamische 550, 599, 607.  
 — kinematische 563, 590, 604, 696.  
 — lokale 550.  
 — orthogonale 550.  
 — örtliche 550.  
 — polare 550.  
 — räumliche 737.  
 — Arbeit-Weg (**A-s**) 601, 670.  
 — Arbeit-Zeit (**A-t**) 647.  
 — Beschleunigung-Weg (b-s) 576.  
 — — -Zeit (b-t) 570.  
 — Bewegungsenergie-Weg (L-s) 602, 670.  
 — — -Zeit (L-t) 647.  
 — Drehmoment-Umdrehungszahl (**M-n**)  
 645.  
 — — -Zeit (**M-t**) 647.  
 — Drehungswinkel-Zeit ( $\varphi$ -t) 613.  
 — Energie-Weg 602.  
 — Geschwindigkeit-Weg (v-s) 576.  
 — — -Zeit (v-t) 566, 569.  
 — Geschwindigkeitshöhe-Weg (h-s) 581.  
 — Kraft-Geschwindigkeit (P-v) 608.  
 — — -Weg (P-s) 599, 670.  
 — — -Winkel (P- $\varphi$ ) 643.  
 — — -Zeit (P-t) 609.  
 — Leistung-Zeit (E-t) 609.  
 — Massen-Weg (**M-s**) 670.  
 — — -wucht (**M-L**) 735.  
 — — -Gewicht-Weg (**G-s**) 670.  
 — Umdrehungszahl-Zeit (n-t) 646, 647.  
 — Weg-Zeit (s-t) 563.  
 — Winkelgeschwindigkeit-Zeit ( $\omega$ -t) 630.  
 — Winkelbeschleunigung-Winkel ( $\lambda$ - $\varphi$ )  
 630.  
 — Winkelbeschleunigung-Zeit ( $\lambda$ -t) 630.  
 Differentialkurven 558, 559, 618, 620.  
 Doppelkurbel 388, 414, 656, 769.  
 Drang 55.  
 Drehpol 11, 12.  
 — relativer 249, 250.  
 — Anordnung 252.

- Drehung, Periode des Beharrungszustandes der 630.  
 — Reduktionspunkt der 412, 728.  
 — reduzierte Kraft der 634.  
 — — Masse der 633.  
 — Ungleichförmigkeitsgrad der 630.  
 Drehungsmittelpunkt 629.  
 Drehungsperiode 630.  
 Dreispannmechanismus 234, 271, 308, 396, 719, 721.  
 Druckwechsel 548.  
 Dynamische Ersatzpunkte 140, 717.  
 Dynamisch gleichwertig 142.  
  
 Einkurvenführung 71, 74, 77, 224.  
 Einlaßsteuerung einer Zweitaktgroßgasmaschine 743.  
 Einpunktführung 70, 71, 72, 76, 222.  
 Ellipsenräder 738.  
 Endlauf 636.  
 Energie der Bewegung 141.  
 — des Regulators 403.  
 Ersatzpunkte, dynamische 140, 181, 429, 431, 717, 718.  
 — statische 140, 179.  
 — des Getriebes 716.  
 — der kinematischen Kette 427, 431.  
 — kleinste Anzahl der 720.  
  
 Fächermaschine 283.  
 Fachwerk 227.  
 Fahrzeugmaschine von Gill-Aveling 390.  
 Falldiagramme 615.  
 Fehlende Stäbe 228.  
 Flächenlauf 67, 76, 445.  
 Fortschreitende Bewegung 624.  
 Freie Bewegung 546.  
 Freiheitsgrad 67.  
 Führung 67, 82.  
 Fundament 256.  
  
 Gasmaschine von Atkinson 155, 725.  
 — — Ch. H. Morgan 478.  
 — Getriebe von Brun und Barbier 706.  
 Gedrehte Geschwindigkeit 13, 263.  
 — Beschleunigung 32.  
 Gegenpunkt 62.  
 Gelenk 67, 225, 254.  
 — -druck 479.  
 — Kette 226, 293.  
 — -Viereck 86, 227, 253, 263, 295, 304, 399, 432, 480.  
 — — flächenläufiges 445.  
 — — freibewegliches 452, 480.  
 Geradföhrung von Peaucellier 719.  
 Geschlossene kinematische Kette 378.  
 Geschränkte Schubkurbel 465, 487, 497.  
 Geschwindigkeit 2.  
 — absolute 13.  
 — gedrehte 13, 263.  
  
 Geschwindigkeit, mittlere 592, 593.  
 — relative 8, 14, 226.  
 Geschwindigkeits-Höhe 580, 669.  
 — -Messer von Haußhälter 615.  
 — -Nullpunkt 10, 269.  
 — -Plan 10, 269.  
 — -Pol 12.  
 — -Punkt 11.  
 — -Zustand 6, 262.  
 Getriebe 262, 276, 306, 383, 388, 696, 708, 728.  
 — mit Schiebern 386.  
 Gezwungene Bewegung 546.  
 Gleichförmige Bewegung 564.  
 Gleichförmig beschleunigte Bewegung 566.  
 — verzögerte Bewegung 567.  
 Gleichgewicht 393, 455.  
 — von Getrieben 402, 403, 455.  
 Gleichgewichtskraft 193.  
 Gleichschenklige Schubkurbel 469.  
 Gleitfreie Wälzhebel 250.  
 Gleitkurve 225.  
 Gleitpunkt 14.  
 Glied 52, 225.  
 Glocke und Klöppel 427.  
 Gnömemotor 714.  
 Graphische Papiere 617.  
 Grundglied 256, 383.  
 Gyrograph von Braun 613.  
  
 Hauptpunkt 373.  
 Hauptstrecke 373.  
 Hodograph, lokaler 550, 551, 556.  
 — polarer 551.  
 Hüllbahn 46, 225.  
 Humphreypumpe 583, 607, 610.  
 Hyperbelföhrung 707.  
  
 Ideale Knoten 396.  
 Impuls 62.  
 Impulspol 62.  
 Indikator 258, 615, 722.  
 Innere Kraft 55.  
 — Rast 351.  
 Integralkurven 559, 616.  
 Integrant von H. Naatz 617.  
 Integraph von Abdank-Abakanowicz 165, 561, 617.  
  
 Kennzeichen für Zwanglauf 238, 240.  
 Kette, kinematische 52, 221, 225, 262, 345, 393, 479.  
 — mit Scheiben 233.  
 — — Schiebern 230, 232, 262, 285, 287, 316, 385.  
 Kinematische Kette, Ersatzpunkte der 427.  
 — — geschlossene 226.  
 — — offene 226, 273.  
 Klöppel und Glocke 427.  
 Kniehebelantrieb für Nietmaschinen 425.

- Kniehebelpresse von Greenwood 384.  
 Kohlenstampfmaschine von Méguin 343.  
 Kolbenmaschine von F. Th. Goodmann 281, 290, 418.  
 Kompressor der Hartford Machine Screw Co. 699.  
 Konchoidenführung 83, 111, 686.  
 Kondensator von Blake 343.  
 Kraft, innere 55.  
 — reduzierte 193, 412.  
 Kraftausgleich von M. Neumayer 425.  
 Kraftausgleich der Sächs. Maschinenfabrik Chemnitz 426.  
 — bei Zwillingsdampfmaschinen von J. Scholl und Ch. K. Longenecker 426.  
 Kraftbüschel 63.  
 Kraftreduktion bei Drehung 193.  
 — bei der Zweipunktführung 194.  
 — — — Punkt- und Kurvenführung 195.  
 — — — Zweikurvenführung 195.  
 Kreuzschieber 82, 102, 131, 205, 210.  
 — -Kurbel 326, 457.  
 — Massenreduktion 678.  
 Krümmungsänderung 355.  
 Krümmungskreis 3.  
 Krümmungsmittelpunkt 42.  
 Kulisse 67.  
 — gerade 319.  
 Kulissendruck 525, 532, 541.  
 Kulissenführung 108, 109, 316.  
 Kulisenstein 109.  
 Kurbelantrieb für Kolbenmaschinen 258.  
 Kurbelgetriebe 276, 403, 408, 485.  
 — für Petroleummaschine 706.  
 — mit schnellem Rückgang 704.  
 Kurbelschleife, gleichschenklige 329.  
 — rotierende 323, 365, 491, 697.  
 — schwingende 83, 112, 324, 459.  
 Kurvenführung 70.  
 Kurvenlot 619.  
 Lafette 727.  
 Lenkersteuerung von Otto 705.  
 — — — J. M. Walter 344.  
 Luftpresser der New-Yorker Airbrake-Comp. 291.  
 — von Owen 411.  
 Masse 52, 599, 605.  
 — reduzierte 710.  
 — veränderliche 599, 659, 660, 667, 673.  
 Massengewicht 669.  
 Massenmittelpunkt 53, 165, 371.  
 Massenreduktion, analytisch 675, 676, 678.  
 — graphisch 677, 678, 711.  
 — beim Kreuzschieber 683.  
 — bei der Schubkurbel 711.  
 Massenwuchtdiagramm 735.  
 Maßstab: Arbeit 602.  
 — Beschleunigung 18, 571.  
 — Bewegungsenergie 578.  
 — Geschwindigkeit 18, 571.  
 — Geschwindigkeitshöhe 571.  
 — Kraft 600.  
 — Masse 605.  
 — Weg 18, 571.  
 — Zeit 571.  
 Mittelpunkt der Drehung 7, 629.  
 Mittlere Geschwindigkeit 592, 593.  
 Momentanpol 12, 254.  
 Momentanzentrum 12.  
 Motor von Atkinson 155, 725.  
 — — Brun und Barbier 706.  
 — — Bucherer 329, 713.  
 — Gnôme 714.  
 Nähmaschine von Wanzer 705.  
 Nietmaschine, pneumatische, von Carey & Gorton 315.  
 Nocken 360, 367, 369.  
 Normalbeschleunigung 5, 16.  
 — relative 22.  
 Normalenlinal von Reusch 618.  
 Offene kinematische Kette 273.  
 Papiere, graphische 617.  
 Parallelkurbelgetriebe 625.  
 Parallelogramm, gelenkiges 386.  
 Pendellänge, reduzierte 142.  
 Pendelweg 613, 630.  
 Pendelwinkel 613.  
 Periode 630.  
 — der Drehung 630, 635, 636, 637, 643.  
 Petroleummaschine, Kurbelgetriebe 706.  
 Planimeter 616.  
 Polares Trägheitsmoment 167.  
 Polbahnen 648.  
 Poltangente 42, 92.  
 Prinzip d'Alemberts 56, 777.  
 — des Antriebes 662.  
 — der Bewegungsenergie (lebendige Kraft) 602, 668.  
 — — Bewegung des Schwerpunkts 55.  
 — — virtuellen Verschiebungen 198, 406.  
 Pumpe von Humphrey 610.  
 — von Taverdon 329.  
 Punktführung 70.  
 Punkt- und Kurvenführung 83, 105, 108, 111, 112, 225.  
 Räder 738.  
 — elliptische 738.  
 — unrunde 738.  
 Rast, innere und äußere 351.  
 Reduktion der Kraft 193, 412, 674.  
 — — Masse, analytisch 675.  
 — — — graphisch 677.  
 — der Trägheitskraft 455, 461.



- Reduktionspunkt 412, 673, 728.  
 — bei Drehung 634, 673.  
 Reduzierte Beschleunigungsdrücke 733.  
 — Kraft bei Drehung 193, 634.  
 — Masse bei Drehung 633.  
 — — des Getriebes 710.  
 — Pendellänge 142.  
 — Trägheitskraft 455, 461.  
 Regulator von Proell 403.  
 — Energie des 403.  
 Relativbewegung 245.  
 Relative Beschleunigung 22, 115.  
 — Drehpole 249, 250.  
 — Geschwindigkeit 8, 226.  
 — Normalbeschleunigung 22.  
 — Tangentialbeschleunigung 22.  
 Relativitätstheorie 659.  
 Resonanz-Undograph von O. Mader 614.  
 Rollkurven 648.  
 Rollung 85, 121, 135.  
 Rückdruck der Balancier-Kolbenmaschine 734.  
 — — Steuerung 457, 516.  
 Rückkehrkreis 44.  
 Rückkehrpol 48.  
 Ruderantrieb von Ward 410.  
 Ruhe 455.
- Schaulinien 548.  
 Scheibe 52.  
 Scheiben, unrunde 360, 367, 369.  
 Schieber 225.  
 — gekrümmte 230, 285, 316, 385.  
 — gerade 232, 287, 386.  
 Schieberschleife 343.  
 Schiebersteuerung von Isaachsen 422, 425.  
 Schlagflügel, Antriebsvorrichtung für 706.  
 Schleifkurvengetriebe 345, 347, 355, 365.  
 Schubketten 236.  
 Schubkurbel 82, 95, 201, 203, 389, 414, 469, 648, 651, 690, 691, 711.  
 — geschränkte 465, 487, 497, 654.  
 — gleichschenklige 469.  
 Schubkurvengetriebe 357, 358.  
 Schwerpunkt 53, 165, 371.  
 Schwerpunktsbewegung 55, 371, 388, 392.  
 — Prinzip der 55.  
 Schwerpunktsgetriebe 383.  
 Schwerpunktskette 373, 375.  
 Schwingdaumen 350.  
 Schwingende Kurbelschleife 83, 112, 324, 459.  
 Schwingungsdauer 172, 175.  
 Schwingungsmethode 172.  
 Schwingungsmittelpunkt 142.  
 Schwung 62.  
 Schwungmoment 646.
- Schwungrad 644, 759, 769.  
 — Gewichtsermittlung 759, 761, 769.  
 Seileck 561, 617.  
 Spannung 55, 393, 479, 758.  
 — Korrektur der 483.  
 Spezifische Bewegungsenergie 141.  
 Spiegelderivator von A. Wagener 619.  
 Spiegellineal von Reusch 618.  
 Stäbe, fehlende 228.  
 Stabwerk 227.  
 Statische Ersatzpunkte 140.  
 Stein 108.  
 Stelzzeug 403, 457.  
 Steuernocken 360, 367, 369.  
 Steuerung von Allan 526.  
 — — Bonjour-Lachaussée 535, 542.  
 — — Collmann 242, 331.  
 — — Delville 343.  
 — — Fink 544.  
 — — Frikart 510, 517.  
 — — Gooch 544.  
 — — Hackworth 543.  
 — — Heusinger 545.  
 — — Heusinger-Joy 517.  
 — — Joy 543.  
 — — Isaachsen 422, 425.  
 — — Klug 478, 507.  
 — — König 370.  
 — — Körner 706.  
 — — Lutz 590.  
 — — Morley, Bradford und Hohlehouse 243.  
 — — Otto 705.  
 — — Proell-Schwabe 369.  
 — — Walter 344.  
 — für Zweitakt-Großgasmaschinen 743.  
 Stoß, Energieverlust bei 663.  
 Stoßmaschine 235, 327.  
 Stoßmittelpunkt 143.  
 Strobograph von G. Wagner 614.
- Tachograph von W. Riehm 615.  
 Tangenzenzeichner von Pflüger 619.  
 Tangentialbeschleunigung 5, 17.  
 — relative 22.  
 Tangentialkreis 34.  
 Tangentialpol 34.  
 Tangentialpol-Gerade 64.  
 Torsiograph 596.  
 Totlagen 649.  
 Trägheitshalbmesser 58.  
 — von Flächen 167.  
 Trägheitskraft 56, 143.  
 — reduzierte 455.  
 Trägheitskreis 165.  
 Trägheitsmoment 58, 165.  
 — von Flächen 166.  
 — polares 167.  
 Translation 624.  
 Triebbeschleunigung 510.

- Überkreuzung von Stäben 236.  
 Übermäßig geschlossene Getriebe 625.  
 Umkehrung der Bewegung 49, 85.  
 Umlaufmotor von Bucherer 329.  
 Undograph von Mader 614.  
 Ungleichförmigkeitsgrad 595, 614.  
 — der Drehung 630.  
 Umunde Scheiben 360, 367, 369.  
  
 Ventilantrieb 350.  
 — durch unrunde Scheiben 360, 367.  
 — — Schwingdaunen 350.  
 — — durch Wälzhebel 354.  
 Ventilbeschleunigung 754.  
 — -geschwindigkeit 753.  
 Ventilsteuerung von Collmann 331.  
 Veränderliche Masse 599, 659, 661, 667, 673.  
 Verbundmaschine von Musgrave 425.  
 Verlust an Energie beim Stoß 663.  
 Verschiebungspläne von Fachwerken 290.  
 Verschwindelafette von Krupp 727.  
 Virtuelle Verschiebungen, Prinzip der 198, 406.  
  
 Wälzhebel 105, 106, 250, 354, 366.  
 Wasserhaltungsmaschine von Regnier 735.  
  
 Wechselgeschwindigkeit 42, 629.  
 Wendebeschleunigung 36.  
 Wendedurchmesser 39.  
 Wendekreis 32, 33, 119.  
 Wendepol 32, 33.  
 Wendepolgerade 63.  
 Winkelbeschleunigung 17.  
 Winkelgeschwindigkeit 7, 246.  
 — absolute 246.  
 Winkelgeschwindigkeit, relative 246.  
 Winkelschleife 325.  
 Wirbelstromtachograph von W. Riehm 615.  
 Wurfgetriebe von H. Marcus 283.  
  
 Zeitliche Bewegung 546.  
 Ziehpresse von Mc Dowell Leavitt 410.  
 Zusatzbeschleunigung 318.  
 Zwang 548.  
 Zwanglauf 67, 82, 124, 221, 226, 233.  
 — Kennzeichen für 238, 240.  
 Zwangsbewegung 547.  
 Zweikurvenführung 83, 116, 118, 224.  
 Zweipunktführung 82, 86, 87, 92, 94, 126, 207, 214, 223.  
 Zweizylindermaschine von F. Darcelle 426.  
 Zyklometer von Ransome 613.

---

### Druckfehler.

- Seite 25: Zeile 4 und 8 von oben lies  $\equiv$  statt  $=$ .  
 Seite 403: Zeile 1 von unten lies Stellzeug statt Stellung.  
 Seite 475: Der Treffpunkt von  $K_1''$  und  $K_{32}''$  soll auf der knapp daran vorbeigehenden, schräg nach rechts geneigten punktierten Linie liegen.  
 Seite 604: In 338 lies immer: **A** statt A.  
 Seite 658: Zeile 6 von unten lies: Antiparallelkurbel.  
 Seite 685: Im h-s-Diagramm (unterste Kurve) sollte deutlicher hervortreten, daß W ein Wendepunkt ist.