

Der Stand der Forschung über den Schiffspropeller
im Hinblick auf die technische Berechnung

Dr.-Ing. H. Lerbs



ISBN 978-3-662-27647-1 ISBN 978-3-662-29137-5 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-29137-5

Der Stand der Forschung über den Schiffspropeller im Hinblick auf die technische Berechnung.

Vortrag vor der Gesellschaft der Freunde und Förderer der HSWA,

Bremen, den 28. Januar 1942,

von Dr.-Ing. H. Lerbs.

225. Mitteilung der Hamburgischen Schiffbau-Versuchsanstalt.

Wenn wir uns über den „Stand der Forschung über den Schiffspropeller“ unterhalten wollen, dann ist meine Absicht, Ihnen einige neuere Arbeiten im Zusammenhang darzustellen, aus denen sich ein brauchbares technisches Berechnungsverfahren der üblichen Schiffschraube und auch komplizierterer Anordnungen, wie Schraube mit Leitapparat, gegenläufige Schrauben und Doppelpropeller entwickeln läßt. In der zur Verfügung stehenden Zeit kann natürlich nicht mehr erreicht werden, als die Gedankengänge der betreffenden Arbeiten zu skizzieren, aber da diese Arbeiten in der technischen und mathematischen Literatur verstreut sind, nehme ich an, daß bereits eine kurze Darstellung von einem einheitlichen Gesichtspunkt aus von Vorteil ist. Außerdem müssen sich die Betrachtungen auf Schrauben konstanter Eintrittsgeschwindigkeit, sog. „Freifahrtsschrauben“, beschränken.

Das erste brauchbare Verfahren zum Entwurf einer Schiffschraube auf Grund theoretischer Folgerungen wurde von Helmbold 1926 veröffentlicht (1)¹, wobei Erkenntnisse, die sich früher bei der Betrachtung schwachbelasteter Flugzeugschrauben ergeben hatten, weitgehende Verwendung finden konnten. Gegenüber der Interpolation eines Propellers innerhalb einer systematischen Versuchsserie, die bis dahin im Schiffbau überwiegend benutzte Methode zur Berechnung der Schraubendaten, zeigte sich bald, daß die theoretische Methode bedeutend elastischer ist, da sie nicht an die nun einmal notwendigen Konstanten im geometrischen Aufbau einer systematischen Serie und deren Grenzen gebunden ist; darüber hinaus kann sie mehr beantworten als die Interpolationsmethode, vor allem dann, wenn nicht mehr der Propeller als ganzes interessiert, sondern die Aufgabe wie bei Kavitationsfragen oder bei der Konstruktion eines Leitapparates in die Einzelheiten geht und die Verhältnisse an den einzelnen Flügelschnitten von Bedeutung sind. Der Zeitbedarf für die Berechnung war allerdings größer als bei der üblichen Interpolation, und es hat hier nicht an Versuchen gefehlt, die notwendige Zeit durch geeignete Hilfsmittel wie Kurventafeln (2) so klein wie möglich zu halten. Gerade auch in dieser Richtung sind die neueren Arbeiten als Fortschritt im Sinne eines technischen Berechnungsverfahrens zu bezeichnen, da es nunmehr gelingt, den Zeitbedarf durch

weitgehende Verwendung einmalig berechneter Funktionen und durch bestimmten Aufbau der Rechnungsmethode so zu beschränken, daß er mit dem für eine Interpolation nach systematischen Versuchen erforderlichen vergleichbar ist.

Alle diese modernen Arbeiten führen die von einer Schraube hervorgerufene Strömung und die damit verbundene Erzeugung der Kräfte auf die Tragflügeltheorie von Prandtl zurück (3) (4); in dieser Theorie entwickelten Anschauungen über die Strömung um einen einzelnen Tragflügel lassen sich sinngemäß auf die Schraube übertragen, wenn man das Schraubenblatt als Summe von unendlich vielen Einzelflügeln auffaßt und dementsprechend die Wirkung der Schraube als Summe der Wirkungen aller dieser Elementarflügel erklärt. Bei der Bewegung eines Tragflügels entsteht bekanntlich eine Kraft mit den beiden Komponenten Auftrieb und Widerstand, die erste senkrecht zur Geschwindigkeit, die andere in Richtung der Relativgeschwindigkeit; es handelt sich nun darum, die Entstehung dieser Kraftkomponenten verständlich zu machen und ihre Rückwirkung auf die Strömung zu verfolgen. Für unsere Zwecke genügt es, an folgende Ergebnisse der Theorie zu erinnern: Der Auftrieb ist notwendigerweise mit dem Vorhandensein eines Wirbels verknüpft, der in dem Flügel angeordnet zu denken ist und sich mit diesem mitbewegt; er wird deshalb als „gebundener Wirbel“ bezeichnet und erzeugt Zusatzgeschwindigkeiten in der Strömung, welche die reine Fortschrittsgeschwindigkeit des Flügels über ihm erhöhen, unter ihm dagegen verkleinern. Diesen Geschwindigkeitsdifferenzen entsprechen nach dem Satz von Bernouilli Druckdifferenzen, die sich an dem Flügel als Kraft, eben dem Auftrieb, auswirken. Den Zusammenhang zwischen der Stärke des Wirbels, die durch die Zirkulation gemessen wird, der Fortschrittsgeschwindigkeit und dem erzeugten Auftrieb gibt der Impulsatz, wonach der Auftrieb auf der resultierenden Geschwindigkeit senkrecht steht und pro Längeneinheit der Spannweite gleich ist dem Produkt aus der Flüssigkeitsdichte, der Zirkulation und der Fortschrittsgeschwindigkeit (Satz von Kutta-Joukowski); diese Aussage gilt zunächst nur für die ebene Strömung, d. h. für einen Flügel unendlicher Spannweite, bei dem der Auftrieb pro Längeneinheit einen von dieser Abmessung unabhängigen konstanten Betrag hat. Betrachten wir jetzt einen Flügel endlicher Länge, so ist festzustellen, daß hier der Auftrieb von einem Maximum in der Mitte bis

¹ Die eingeklammerten Zahlen beziehen sich auf die Literaturzusammenstellung.

auf den Wert Null an den seitlichen Rändern abfällt als Folge des Druckausgleichs zwischen dem Überdruck auf der Flügelunterseite und dem Unterdruck auf der Oberseite um den seitlichen Rand herum. Dieser Ausgleich führt zu einer Querströmung in der Flüssigkeit (4), die auf der Unterseite des Flügels von der Mitte nach den seitlichen Rändern hin und auf der Oberseite von den Rändern zur Mitte hin gerichtet ist; die Flüssigkeitsteilchen, die über den Flügel hinweggehen, werden demnach etwas seitwärts zur Mitte hin und die Teilchen, die unter ihm hindurchgehen, etwas seitwärts von der Mitte weg abgelenkt. Eine solche Bewegung der Flüssigkeit ist aber als Folge einer Wirbelschicht anzusehen, die ihren Sitz in der vom Flügel durchlaufenen Spur hat; wie aus dem Gesagten hervorgeht, hängt die Quergeschwindigkeit in der Flüssigkeit und damit die Zirkulation in der Wirbelschicht direkt mit der Auftriebs- resp. Zirkulationsänderung am Tragflügel zusammen. Die Wirbelschicht ruft nun wie jeder Wirbel entsprechend dem Satz von Biot-Savart in der ganzen umgebenden Flüssigkeit Zusatzgeschwindigkeiten hervor und erzeugt so — induziert wie man diese Fernwirkung in Analogie zur Elektrodynamik bezeichnet — außer den Quergeschwindigkeiten hinter dem Flügel am Flügel selbst Abwärtsgeschwindigkeiten. Dies Ergebnis ist von großer Bedeutung; wir erhalten jetzt am gebundenen Wirbel eine resultierende Geschwindigkeit, die sich aus der Fortschrittgeschwindigkeit und der von der abgehenden Wirbelfläche induzierten, nach unten gerichteten Geschwindigkeit zusammensetzt, die also nach unten geneigt ist. Da die auf den gebundenen Wirbel ausgeübte Kraft nach dem Satz von Kutta-Joukowski senkrecht auf der resultierenden Geschwindigkeit steht, ist diese nach hinten geneigt, womit das Entstehen eines Widerstandes in der als reibungslos vorausgesetzten Strömung erklärt ist. Man nennt diesen Widerstandsanteil den „induzierten Widerstand“, da er auf die induzierte Abwärtsgeschwindigkeit der vom Tragflügel endlicher Länge abgehenden Wirbelfläche zurückzuführen ist. Die bei der Bewegung des Flügels gegen ihn zu leistende Arbeit findet übrigens ihren Gegenwert in der Bewegungsenergie, die das abgehende Wirbelsystem der Flüssigkeit erteilt.

Wir wollen nun diese Gedanken auf den Propeller übertragen, dessen einzelne Blätter wir als eine Summe von Elementartragflügeln ansehen. Zunächst haben wir jedes Blatt, auf das ja Kräfte ausgeübt werden, als Sitz eines gebundenen Wirbels aufzufassen, von dem nun analog wie beim einzelnen Flügel endlicher Länge eine Wirbelfläche abgeht, da die vom Flügelblatt ausgeübte Kraft in radialer Richtung veränderlich ist; sie hat an der Nabe und an der Flügelspitze der Wert Null und verläuft dazwischen nach einem noch unbekannter Gesetz. Die Richtung dieser abgehenden Wirbelfläche ist durch die Richtung der Stromlinien vorgeschrieben, sie wird also eine schraubenförmige Gestalt haben. Die Aufgabe ist nun wieder wie beim Tragflügel, die induzierten Geschwindigkeiten dieses Systems von gebundenen Wirbeln und Wirbelflächen am Orte der gebundenen Wirbel zu berechnen, aus ihnen, der Fortschritts- und jeweiligen Umfangsgeschwindigkeit die resultierende Geschwindigkeit zu bilden und dann nach dem Satz von Kutta-Joukowski die resultierende Kraft zu bestimmen; diese kann nach Schubkraft und Tangentialkraft zerlegt werden, deren Integration über den Radius schließlich auf den ausgeübten Schub und das Drehmoment führt. In dieser allgemeinen Form hat die Lösung noch erhebliche Schwierigkeiten. Es kann vorläufig nur gesagt werden, daß sich die von den gebundenen Wirbeln herrührenden Zusatzgeschwindigkeiten bei symmetrischen Schrauben gegenseitig aufheben; dagegen ist das Feld der induzierten Geschwindigkeiten einer schraubenförmigen Wirbelfläche nicht ohne weiteres bekannt, und dann können wir weder etwas über den Steigungsverlauf der Fläche aussagen, der ja von den erst zu berechnenden induzierten Geschwindigkeiten abhängt, noch kennen wir den Zirkulationsverlauf innerhalb der Fläche, da diese von der vorläufig noch ganz unbekanntem Verteilung der Zirkulation über das Flügelblatt, d. h. über den gebundenen Wirbel, bestimmt wird. Um hier weiter zu kommen, wollen wir zunächst eine Voraussetzung machen und uns dann mit zwei Sätzen von Betz beschäftigen, die das Problem zur Lösung führen.

Die von den einzelnen Flügelblättern abgehenden Wirbelflächen induzieren ein Geschwindigkeitsfeld, das nach außen hin als „Propellerstrahl“ sichtbar wird. Im allgemeinen wird die induzierte Geschwindigkeit in einem bestimmten Punkte dieses Strahls eine axiale, tangentielle und radiale Komponente haben, von denen die axiale Komponente eine Zunahme der Geschwindigkeit nach hinten und die tangentielle eine Drehung der im Strahl enthaltenen Flüssigkeit bedeutet, während die Radialkomponente eine Kontraktion des Strahls verursacht; wodurch die Wirbelflächen mehr zur Achse hinrücken. Diese Komponenten sind nun nicht voneinander unabhängig (4). Zunächst kann über die axiale induzierte Komponente eines Flüssigkeitsteilchens ausgesagt werden, daß sie von dem Werte Null weit vor der Schraube bis auf einen bestimmten endlichen Wert weit hinter der Schraube stetig zunimmt, was nach dem Impulsatz unmittelbar mit der Schubzeugung zusammenhängt und als eines der Ergebnisse der

einfachen Strahltheorie bekannt ist. Diese stetige Zunahme der axialen Komponente hat nun eine entsprechende Kontraktion des Strahls und damit der Wirbelflächen zur Folge, wodurch der radiale Abstand eines Flüssigkeitsteilchens verkleinert wird; da nun das der Tangentialkomponente entsprechende Schwungmoment eines Teilchens sich bei der Kontraktion nicht ändern kann, muß die Tangentialkomponente entsprechend zunehmen, wodurch sich die kinetische Energie ihrer Bewegung erhöht. Dies kann nur auf Kosten der Energie der Axialbewegung geschehen, so daß deren Geschwindigkeit entsprechend abnimmt. Andererseits hat die Tangentialkomponente infolge der auftretenden Zentrifugalkraft ein quer zur Strömung nach dem Strahlinneren gerichtetes Druckgefälle zur Folge, welches die axiale Komponente wieder vergrößert. Auf die axiale Komponente wirken demnach zwei Effekte im entgegengesetzten Sinne, so daß es wahrscheinlich nicht viel ausmacht, wenn wir diese beiden Effekte — die Strahlkontraktion, das bedeutet die induzierte radiale Komponente, und das zentrifugale Druckgefälle — in unseren weiteren Betrachtungen vernachlässigen. Es wird nachher noch kurz erwähnt, bis zu welchen Grenzen diese beiden Vernachlässigungen tragbar sind.

Für einen kontraktionsfreien Schraubenstrahl gilt nun ein Satz von Betz (3), der aussagt, daß die von den abgehenden Wirbelflächen herrührenden Zusatzgeschwindigkeiten bei symmetrischen Schrauben am gebundenen Wirbel gerade den halben Wert erreicht haben von dem an einem entsprechenden Punkte weit hinter der Schraube. Auf das stetige Verhalten der axialen Komponente bei dieser Zunahme war bereits hingewiesen. Anders dagegen verhält sich die tangentielle Komponente; nach einem Satz aus der Geometrie der Wirbelfelder, dem Satz von Stokes, kann eine Tangentialkomponente nur dort in der Strömung vorhanden sein, wo von einer geschlossenen Leitlinie Wirbel umrandet werden. Das bedeutet aber, daß die Drehbewegung der Flüssigkeit vor der Schraube Null ist und dort, wo die freie Wirbelfläche ansetzt, unstetig einen endlichen Wert erreicht. Aus dem Satz von Stokes ergibt sich ferner, daß sich die Tangentialkomponente stromabwärts nicht mehr ändert, was damit zusammenhängt, daß die Zirkulation in einer der abgehenden Wirbelflächen ausschließlich durch die Zirkulationsänderung an der davon liegenden Stelle des Flügelblatts bestimmt wird, also stromabwärts ebenfalls konstant bleibt. Wir müssen, um diese Folgerungen mit dem Satz von Betz in Einklang zu bringen, dem gebundenen Wirbel einen Kern geringer, aber endlicher Dicke zuschreiben, über den die Tangentialkomponente von Null im vorderen Teil über den halben Wert in der Mitte bis auf den vollen Wert im hinteren Teil, wo die Wirbelfläche abgeht, zunimmt.

Nach diesen Bemerkungen über den Verlauf der Zusatzgeschwindigkeiten in axialer Richtung bleibt noch übrig, ihre radiale Verteilung sowie die in Richtung des Umfangs zu klären, bevor wir die Kräfte am Flügelblatt angeben können. Über die Verteilung in Richtung des Umfangs können wir qualitativ aussagen, daß sich die Zusatzgeschwindigkeiten von einem Extremwert in den Wirbelflächen auf einen im allgemeinen kleineren Wert zwischen ihnen ändern. Um von dieser Abhängigkeit frei zu werden, wollen wir die Voraussetzung machen, daß die Wirbelflächen sehr dicht stehen, die Flügelzahl der Schraube also sehr groß ist. Wir werden dann zwar mit einer im Mittel zu großen Geschwindigkeit rechnen, die wir aber später auf den zu den endlichen Flügelzahl gehörenden Mittelwert berichtigen werden. Zunächst also führen wir unsere Betrachtungen für eine Schraube unendlicher Flügelzahl weiter, womit die Umfangskoordinate herausfällt und allein die Frage nach der radialen Verteilung der axialen und tangentialen Zusatzgeschwindigkeiten am Flügelblatt übrig bleibt. Diese Frage hängt, wie wir wissen, mit der Verteilung der Zirkulation, d. h. der Kräfte, über das Flügelblatt zusammen und läßt sich nur beantworten, wenn wir die Zirkulationsverteilung vorgeben oder für sie besondere Bedingungen stellen, durch welche sie festgelegt wird. Praktisch von Bedeutung ist folgende Frage: wie muß der Schub und damit die Zirkulation bei gegebenem Gesamtschub über das Flügelblatt verteilt werden, damit der bei der Schubzeugung nicht vermeidbare Energieverlust, der durch das Auftreten der induzierten Geschwindigkeiten bedingt ist, zu einem Minimum wird? Diese Fragestellung, die ein Variationsproblem bedeutet, scheint unsere Aufgabe kompliziert zu machen, aber es zeigt sich, daß die Antwort auf ein besonders einfaches und anschauliches Resultat führt, das zuerst von Betz angegeben wurde (4). Man erhält dieses Resultat dadurch, daß man die Zirkulation an irgendeiner Stelle des Schraubenblatts um einen kleinen Betrag erhöht und die dadurch hervorgerufene Vermehrung von Schub und Drehmoment betrachtet. Wenn nun die Schubverteilung über das Blatt gerade so ist, daß ihr der maximal erreichbare Wirkungsgrad entspricht, dann muß der Schubzuwachs an jeder Stelle mit dem gleichen Wirkungsgrad erzeugt werden; denn sonst könnte man ja an den Stellen, wo der Schubzuwachs mit einem schlechten Wirkungsgrad verbunden ist, Schub hinwegnehmen und an einer anderen Stelle, wo er mit besserem Wirkungsgrad arbeitet, wieder hinzufügen, wodurch der Gesamtwirkungsgrad erhöht würde. Da

dieser bereits am günstigsten sein soll, muß also der Wirkungsgrad einer Schubänderung an jeder Stelle des Blattes denselben Wert haben. Die diesem Gedankengang entsprechende Rechnung führt im Falle freifahrender Schrauben auf das Resultat, daß bei günstiger Schubverteilung $\text{tg } \beta = k \cdot \text{tg } \beta_1$ (Abb. 1), wo k vom Radius unabhängig ist; dies bedeutet, daß die Richtung der resultierenden Geschwindigkeit am Flügelschnitt in diesem Falle aus der mit v und r gebildeten Richtung durch Multiplikation mit einem Faktor hervorgeht, der an jedem Radius denselben Wert hat. Demnach bildet auch die Gesamtheit der resultierenden Geschwindigkeiten eine Schraubenfläche. Die Rechnung zeigt übrigens, daß der Faktor gleichbedeutend ist mit dem Wirkungsgrad eines Flügелеlements, den wir nun allerdings als induzierten Wirkungsgrad η_i bezeichnen müssen, da ja die durch die induzierten Geschwindigkeiten bedingten Verluste die einzigen sind, die wir vorläufig betrachten. Im Optimumfall hat also jedes Flügелеlement denselben induzierten Wirkungsgrad, und demnach ist der induzierte Wirkungsgrad irgend eines Elements gleichbedeutend mit dem induzierten Wirkungsgrad der gesamten Schraube. Schließlich können wir die Optimumbedingung noch in eine dritte Form bringen; die Aussage $\text{tg } \beta = k \cdot \text{tg } \beta_1$, wo k unabhängig von r , ist nämlich gleichbedeutend damit, daß v' vom Radius unabhängig ist, womit auch w und $\vartheta = w/v$ vom Radius unabhängige Größen werden. Im Falle des geringsten Energieverlustes bestehen demnach folgende untereinander gleichwertige Beziehungen:

$$\eta_i = \frac{\text{tg } \beta}{\text{tg } \beta_1} = \frac{v/r\omega}{v'/r\omega} = \frac{v}{v'} = \frac{v}{v + \frac{w}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{\vartheta}{2}}$$

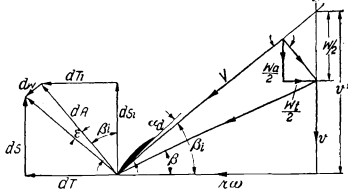


Abb. 1. Geschwindigkeits- und Kräfteplan an einem Flügелеlement des Radius $r = x \cdot R$.

wo η_i und die übrigen Ausdrücke, insbesondere der „Schlupfgrad“ ϑ vom Radius unabhängig sind, also eine Bedeutung für die Schraube als Ganzes haben. Die Beziehungen gelten demnach auch für die Flügelspitze, so daß sich schließlich die Optimumbedingung noch ausdrückt als

$$\eta_i = \frac{v/R\omega}{v'/R\omega} = \frac{\lambda}{\lambda_1}, \quad \vartheta = w/v$$

wenn λ den Fortschrittsgrad bezeichnet.

Es ist noch zu bemerken, daß die Komponenten der induzierten Geschwindigkeit durch die Optimumbedingung nicht vollständig bestimmt sind, da nur verlangt wird, daß der Endpunkt der resultierenden induzierten Geschwindigkeit auf die Richtung β_1 liegt. Für den Fall, daß die Wirbelflächen genügend dicht stehen, läßt sich zeigen, daß die resultierende induzierte Geschwindigkeit senkrecht auf der Richtung β_1 , d. h. senkrecht auf der resultierenden Geschwindigkeit steht, was für das weitere stets als genügend zutreffend vorausgesetzt wird. Aus den geometrischen Zusammenhängen der Abb. 1 lassen sich dann folgende Ausdrücke für die induzierten Komponenten am Radius $x = r/R$ des Blattes angeben (5):

$$\frac{1}{2} \frac{w_a}{v} = \frac{\vartheta}{2} \frac{x^2}{x^2 + \lambda_1^2}, \quad \frac{1}{2} \frac{w_t}{v} = \frac{\vartheta}{2} \frac{x \lambda_1}{x^2 + \lambda_1^2}$$

$$x = r/R, \quad \lambda_1 = v'/R\omega = \lambda/\eta_i, \quad \vartheta = w/v$$

Es kommt jetzt darauf an, ϑ und λ_1 oder, was nach der Optimumbedingung dasselbe ist, η_i zu bestimmen. Dies gelingt, wenn wir nunmehr nach dem Satz von Kutta-Joukowski die Kräfte am Flügелеlement bilden, aus denen sich durch Integration über das Schraubenblatt Schub und Drehmoment ergeben. Für das Element des Schubes und der Tangentialkraft erhalten wir folgende Ausdrücke:

$$dS_\infty^\infty = \Gamma_\infty \rho \left(\omega r - \frac{w_t}{2} \right) dr = \Gamma_\infty \rho v R \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{1}{2} \frac{w_t}{v} \right) dx \quad \Gamma_\infty = 2 \pi \rho w_t =$$

$$dT_\infty^\infty = \Gamma_\infty \rho \left(v + \frac{w_a}{2} \right) dr = \Gamma_\infty \rho v R \left(1 + \frac{1}{2} \frac{w_a}{v} \right) dx \quad = 2 R \pi x w_t$$

Die beiden Indizes ∞ und i an den Kräfteelementen sind notwendig, da es sich ja vorläufig um eine Schraube mit rotationssymmetrischem Strahl, d. h. mit unendlich vielen Blättern in einer idealen, also reibungsfreien Flüssigkeit handelt. Setzen wir die eben entwickelten

Ausdrücke für die induzierten Geschwindigkeiten ein, dann ist die Integration über den Radius x möglich, womit der gesuchte Zusammenhang zwischen dem Schubbelastungsgrad resp. dem Leistungsbelastungsgrad der Schraube und den Größen ϑ und λ_1 oder gleichbedeutend η_i und λ erhalten wird. Für die spätere Übertragung der Ergebnisse auf eine Schraube endlicher Flügelzahl ist es zweckmäßig, vorher noch die dimensionslose Zirkulation $G_\infty = x^3/(x^2 + \lambda_1^2)$ einzuführen, die mit Γ_∞ nach folgendem zusammenhängt:

$$\Gamma_\infty = 2 \pi \rho w_t = 2 \pi \rho w \frac{x \lambda \left(1 + \frac{\vartheta}{2} \right)}{x^2 + \lambda_1^2} = 2 \pi \frac{w v}{\omega} \left(1 + \frac{\vartheta}{2} \right) \frac{x^2}{x^2 + \lambda_1^2} =$$

$$= G_\infty \cdot 2 \pi \frac{w v}{\omega} \left(1 + \frac{\vartheta}{2} \right).$$

In G_∞ wird demnach die Abhängigkeit der Zirkulation vom Radius zusammengefaßt, während das Produkt der übrigen Größen einen für eine bestimmte Optimumschraube konstanten Faktor darstellt. Bei der Integration der Kräfteelemente über den Radius treten nun Integrale von der Form

$$\int_0^1 \frac{x^m}{(x^2 + \lambda_1^2)^n} dx$$

auf, die wir mit K bezeichnen wollen; sie hängen nur von m und n ab und stehen mit G_∞ , was für die Übertragung wesentlich ist, in folgendem Zusammenhang:

$$K_{m,n}^\infty = \int_0^1 \frac{x^m}{(x^2 + \lambda_1^2)^n} dx = \int_0^1 G_\infty \frac{x^{m-2}}{(x^2 + \lambda_1^2)^{n-1}} dx$$

In dieser Schreibweise ergibt nunmehr die Integration über die Schubelemente folgenden Ausdruck, der den Schubbelastungsgrad abhängig von ϑ und λ_1 darstellt (5):

$$C_{3,1}^\infty = 4 \vartheta \cdot K_{3,1}^\infty + 2 \vartheta^2 \cdot K_{5,2}^\infty$$

$$K_{3,1}^\infty = \frac{1}{2} \left[1 - \lambda_1^2 \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{\lambda_1^2} \right) \right]$$

$$K_{5,2}^\infty = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\lambda_1^2}{1 + \lambda_1^2} - 2 \lambda_1^2 \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{\lambda_1^2} \right) \right].$$

Der nächste Schritt zur vollständigen Lösung unserer Aufgabe ist, diesen Ausdruck für den Belastungsgrad einer Schraube mit unendlicher Flügelzahl auf eine endliche Flügelzahl zu übertragen, wobei wir vorläufig noch die Reibungsfreiheit beibehalten wollen; es kommt uns also zunächst darauf an, von $C_{3,1}^\infty$ her auf $C_{3,1}^0$ zu kommen (6). Dieser Übergang zu der Schraube endlicher Flügelzahl läßt sich durchführen, wenn wir uns daran erinnern, daß sich die Mittelwerte der induzierten Geschwindigkeiten an einem bestimmten Radius unter sonst gleichen Bedingungen um so mehr von dem entsprechenden Wert bei unendlicher Flügelzahl unterscheiden, je kleiner die Flügelzahl ist, d. h. je weiter die abgehenden Wirbelflächen auseinander stehen. Am Flügelblatt selbst behalten die induzierten Geschwindigkeiten ihre Größe bei, dazwischen ändern sie sich entsprechend dem Abstand der Wirbelflächen. Da es für die Bildung der Zirkulation nur auf den Mittelwert der induzierten tangentialen Geschwindigkeitskomponente ankommt, ist der Ansatz berechtigt: $I_3 = \kappa \cdot \Gamma_\infty$. In dem eben skizzierten Rechnungsgang erhalten wir demnach die entsprechenden Werte für endliche Flügelzahl, wenn wir Γ_∞ mit $\kappa \cdot \Gamma_\infty$ vertauschen; insbesondere erhalten wir dann

$$K_{m,n}^0 = \int_0^1 \kappa \cdot G_\infty \cdot \frac{x^{m-2}}{(x^2 + \lambda_1^2)^{n-1}} dx = \int_0^1 \frac{\kappa \cdot x^m}{(x^2 + \lambda_1^2)^n} dx$$

und damit schließlich entsprechend den Ausführungen Kramers (6):

$$C_{3,1}^0 = 4 \vartheta \cdot K_{3,1}^0 + 2 \vartheta^2 \cdot K_{5,2}^0.$$

Der „Mittelwertfaktor“ κ wurde von Goldstein durch Lösung der Potentialaufgabe erhalten, auf welche die Bestimmung des Geschwindigkeitsfeldes der schraubenförmigen Wirbelflächen hinausläuft (7). Es zeigt sich, daß κ außer von der Flügelzahl ξ nur noch von x und λ_1 abhängt (8), so daß die Integrale $K_{3,1}^0$ und $K_{5,2}^0$ als Funktionen von ξ und λ_1 numerisch angebar sind. Damit erscheint der Belastungsgrad $C_{3,1}^0$ als Funktion von ξ , λ_1 und ϑ oder, den Formulierungen der Optimumbedingung entsprechend, abhängig von ξ , λ und λ_1 . Durch diese Beziehung, die auf Abb. 2 dargestellt ist, sind wir in der Lage anzugeben, mit welchem Wirkungsgrad eine Schraube mit der Flügelzahl ξ einen bestimmten Belastungsgrad in der reibungsfreien Flüssigkeit bei gegebenem Fortschrittsgrad erzeugt.

Bevor wir dieses Ergebnis näher erörtern, wollen wir die letzte noch bestehende Voraussetzung einer reibungsfreien Flüssigkeit aufgeben und uns nunmehr mit einer reibungsbehafteten Schraube endlicher Flügelzahl beschäftigen, wodurch die vollständige Lösung des

Probleme erhalten wird. Das Auftreten der Reibung bedingt am Flügelement eine Kraftkomponente dW in Richtung der resultierenden Relativgeschwindigkeit (Abb. 1), wodurch die Richtung der Auftriebskraft gedreht wird, so daß der Schub abfällt und das Drehmoment anwächst; die auftretende Widerstandskraft wird dabei durch die Gleitzahl $\epsilon = c_w/c_a$ in Prozenten des Auftriebs gemessen. Aus der Abbildung läßt sich der Zusammenhang zwischen dem Schubelement dS ; in der idealen und dS in der reibungsbehafteten Flüssigkeit sofort angeben; $dS_i/dS = \cos \beta_i / \cos (\beta_i + \epsilon)$. Dieses Verhältnis ist von Radius zu Radius veränderlich, aber glücklicherweise ist die Abhängigkeit vom Radius nur gering, so daß man es durch seinen

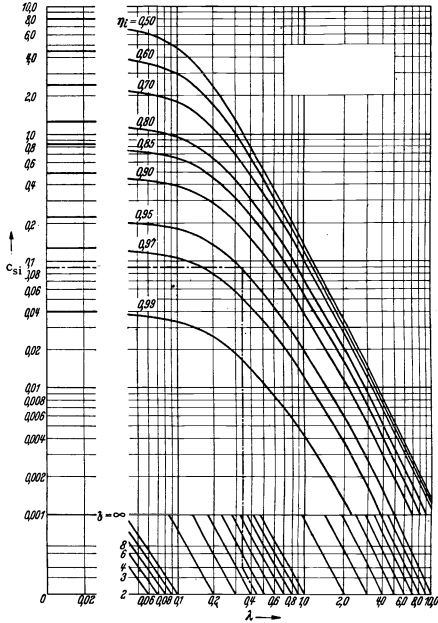


Abb. 2. Induzierter Wirkungsgrad η_i abhängig von λ , $c_{si} \cdot \delta$.
Nach Kramer, Lufo Bd. 15 (1938, Lfg. 7, S. 326/333).

Mittelwert oder sogar, für die praktische Rechnung ausreichend, durch den Wert an der Flügelspitze ersetzen und so umständliche Integrationen über den Radius umgehen kann, die außerdem eine Voraussetzung über die radiale Abhängigkeit von ϵ enthalten. Wir werden daher als Beziehung zwischen den Belastungsgraden denselben Zusammenhang anschreiben, der zunächst nur für die Schubelemente Berechtigung hat: $c_{si}/c_s = \cos \beta_i / \cos (\beta_i + \epsilon)$, wobei β_i nun den Wert an der Flügelspitze ($\tan \beta_i = \lambda_i$) oder einen Mittelwert bedeutet. Diese Beziehung ist für die praktische Rechnung wichtig, da wir hierdurch in der Lage sind, den von der Schraube geforderten Belastungsgrad c_s den größeren Wert c_{si} umzurechnen, den sie unter sonst gleichen Bedingungen in der idealen Flüssigkeit erzeugen würde.

Der Leistungsumsatz in der reibungsbehafteten Flüssigkeit hat einen besonderen Wirkungsgrad η_ϵ zur Folge, der die Veränderung von Schub und Drehmoment durch das Auftreten von dW (Abb. 1) ausdrückt; eine nähere Rechnung zeigt (9) (1), daß der Ausdruck

$$\eta_\epsilon = \frac{1 - \epsilon \lambda_i}{1 + \frac{2}{3} \frac{\epsilon}{\lambda_i}}$$

diese Verluste hinreichend genau wiedergibt, wobei vorausgesetzt wird, daß die Gleitzahl einen über den Radius konstanten Wert hat.

Wir können nunmehr den Gesamtwirkungsgrad η einer Schraube aufspalten in $\eta = \eta_1 \cdot \eta_\epsilon$, wo η_1 die kinetischen Verluste enthält, die bereits bei der Erzeugung eines Schubes in idealer Flüssigkeit auftreten, und die durch die induzierten Geschwindigkeiten bedingt sind, und wo η_ϵ den Leistungsverlust durch Reibung darstellt; im weiteren Sinne enthält η_ϵ alle die Verluste, deren Ursache die Gleitzahl des Flügelements beeinflussen, z. B. die Gitterwirkung der Profile aufeinander oder die Kavitation. Es ist leider nicht möglich, in diesem Rahmen näher auf Kavitationsvorgänge einzugehen, aber es ist nach

dem bisher Gesagten wohl vorstellbar, daß eine Schraube bei dieser Betrachtungsweise, wo die Druck- und Geschwindigkeitsverhältnisse an jedem Flügelschnitt bekannt sind, in beliebigen Kavitationszuständen berechenbar ist, wenn die Profilleigenschaften des Flügelements unter entsprechenden Druck- und Geschwindigkeitsverhältnissen gegeben sind.

An dieser Stelle müssen wir eine Bemerkung über die Optimumbedingung einschalten, die ja für den Rechnungsgang wesentlich ist, da durch sie die Schubverteilung resp. die Verteilung der induzierten Geschwindigkeiten festgelegt wird. Wir hatten diese Bedingung so formuliert, daß durch sie die induzierten Verluste zu einem Minimum werden, während die durch die Gleitzahl bedingten Verluste, also in erster Linie Reibungsverluste, unberücksichtigt blieben. Daß diese Beschränkung der Minimalbedingung auf nur einen Teil der Verluste zu einem praktisch brauchbaren Ergebnis führt, erklärt sich damit, daß der induzierte Verlustanteil der weitaus überwiegende ist, wie aus der Kleinheit der Gleitzahl eines Flügelements hervorgeht, die im Normalbereich der Schraube etwa 3% des Auftriebs beträgt. Wir sind demnach völlig berechtigt, das einfache und anschauliche Resultat der entwickelten Optimumbedingung beizubehalten, d. h. die induzierten Geschwindigkeiten als unabhängig vom Reibungsvorgang anzusehen, und die hiernach entworfene Schraube als Schraube geringsten Energieverlustes zu bezeichnen. Es ist natürlich möglich, die Minimumbedingung in gleicher Weise, wie vorhin angedeutet, für den Gesamtverlust anzusetzen, wie es von Bienen (9) und neuerdings von Flügel (10) ausgeführt wurde. Es sei erwähnt, daß nach den Rechnungen Flügels die Gesamtverluste bei schwach belasteten Schrauben dann ein Minimum sind, wenn der Gesamtwirkungsgrad längs des Halbmessers konstant ist.

Mit den bisher angegebenen Resultaten der Theorie sind wir in der Lage, die Aufgaben der praktischen Propellerkonstruktion zu lösen; wir wollen die Rechnung darauf abstellen, daß ein bestimmter Schubbelastungsgrad bei einem gegebenen Fortschrittsgrad gefordert wird, d. h., daß Schub, Drehzahl, Durchmesser und Geschwindigkeit gegeben sind und nach der erforderlichen Antriebsleistung gefragt wird. Es hat keine Schwierigkeiten, die Rechnung so einzurichten, daß von Leistung und Drehzahl ausgegangen und die erreichbare Geschwindigkeit gesucht wird.

Der Gang der Lösung ist so, daß wir zunächst den geforderten Belastungsgrad c_s der Schraube auf den etwas größeren Wert c_{si} den sie bei gleichem Fortschrittsgrad in der idealen Flüssigkeit erzeugen würde, umrechnen und dann mit Hilfe des Diagramms der Abb. 2 den Wirkungsgrad η_1 dieser Schubverteilung in der idealen Flüssigkeit bestimmen. Damit sind dann aber bereits durch die Optimumbedingung sämtliche Größen festgelegt, die wir zur Berechnung der induzierten Geschwindigkeiten am Flügelement und damit zur Berechnung der Steigung benötigen. Die erforderliche Blattbreite ergibt sich dadurch, daß wir das Auftriebsmoment einmal entsprechend der Definition des Auftriebsbeiwertes mit dem Quadrat der resultierenden Relativgeschwindigkeit V bilden und dann nach dem Satz von Kutta-Joukowski ausdrücken:

$$dA = \frac{\rho}{2} V^2 \cdot c_a \cdot \delta \cdot t \cdot dr$$

$$dA = \delta \cdot \Gamma_a \cdot \rho \cdot V \cdot dr = \delta \cdot 2 \pi r \cdot \kappa \cdot w_t \cdot V \cdot dr.$$

Durch Gleichsetzen erhalten wir ohne weiteres den Ausdruck:

$$c_a \delta t = 4 \pi r \kappa \frac{w_t}{V}.$$

Für w_t/V ergibt sich aus den geometrischen Zusammenhängen der Abb. 1 die Beziehung:

$$w_t/V = 2 \cdot \sin \beta_1 \cdot \tan (\beta_1 - \beta)$$

und damit schließlich

$$c_a \delta t = 8 \pi r \kappa \sin \beta_1 \cdot \tan (\beta_1 - \beta).$$

Damit sind alle Ausdrücke bekannt, die wir zur Berechnung der geometrischen Daten einer Schraube benötigen.

Wir benutzen für das Beispiel die in (2) angegebenen Zahlenwerte, entwerfen die Schraube nach dem im Vorstehenden entwickelten Rechnungsgang und vergleichen das Ergebnis mit dem früheren Resultat und dem dort angeführten Modellversuch.

Gegeben: $c_s = 1,273$; $\lambda = 0,187$; $\epsilon = 0,025 = 1,43\%$.

Gesucht: η und die Form der Schraube.

$$1.) c_{si} = c_s \cdot \cos \beta_1 / \cos (\beta_1 + \epsilon)$$

λ_i	β_i°	$\cos \beta_i$	$(\beta_i + \epsilon)^\circ$	$\cos (\beta_i + \epsilon)$	c_{si}	η_1
0,187	10,58	0,983	12,02	0,978	1,280	0,72
0,260	14,55	0,968	15,98	0,961	1,283	0,715
0,262	14,67	0,967	16,10	0,961	1,282	0,715
0,262

$$\theta = 2 (1 - \eta_1) / \eta_1 = 0,797.$$

$$2.) \frac{I}{2} \frac{W_a}{v} = \frac{\theta}{2} \frac{x^2}{x^2 + \lambda_i^2}; \quad \frac{I}{2} \frac{W_t}{v} = \frac{\theta}{2} \frac{x \lambda_i}{x^2 + \lambda_i^2};$$

$$\operatorname{tg} \beta_i = \left(1 + \frac{I}{2} \frac{W_a}{v} \right) \left/ \left(\frac{x}{\lambda_i} - \frac{I}{2} \frac{W_t}{v} \right) \right.; \quad \operatorname{tg} \beta = \lambda/x$$

x	x	$x^2 + \lambda_i^2$	$\frac{I}{2} \frac{W_a}{v}$	$\frac{x \lambda_i}{x^2 + \lambda_i^2}$	$\frac{I}{2} \frac{W_t}{v}$	$\operatorname{tg} \beta_i$	β_i°	λ/x	β°	$(\beta_i - \beta)^\circ$
0,353	0,125	0,194	0,257	0,093	0,191	0,741	36,53	0,530	27,92	8,61
0,471	0,222	0,291	0,305	0,123	0,169	0,555	29,03	0,397	21,67	7,36
0,588	0,346	0,415	0,333	0,154	0,148	0,445	24,00	0,318	17,62	6,38
0,706	0,498	0,567	0,351	0,185	0,130	0,371	20,33	0,265	14,83	5,50
0,823	0,677	0,746	0,362	0,216	0,116	0,318	17,62	0,227	12,78	4,84
0,941	0,885	0,954	0,370	0,247	0,103	0,278	15,53	0,199	11,28	4,25

$$3.) c_a \cdot t = \frac{8 \pi R}{\delta} \cdot x \cdot x \sin \beta_i \cdot \operatorname{tg} (\beta_i - \beta)$$

$$= 17,80 \cdot x \cdot x \sin \beta_i \cdot \operatorname{tg} (\beta_i - \beta).$$

x	x^2	$\sin \beta_i$	$\operatorname{tg} (\beta_i - \beta)$	$c_a \cdot t$	t (m)	c_a	d/t	α°	ε	
0,353	0,99	0,99	0,595	0,151	0,558	0,921	0,606	0,0923	~7	>0,035
0,471	0,98	0,485	0,130	0,516	1,029	0,502	0,0719	1,8	0,020	
0,588	0,97	0,407	0,112	0,463	1,082	0,428	0,0582	1,2	0,020	
0,706	0,92	0,348	0,096	0,387	1,065	0,363	0,0498	1,2	0,020	
0,823	0,79	0,303	0,085	0,298	0,946	0,315	0,0433	1,2	0,021	
0,941	0,49	0,268	0,075	0,166	0,634	0,262	0,0457	0,5	0,023	

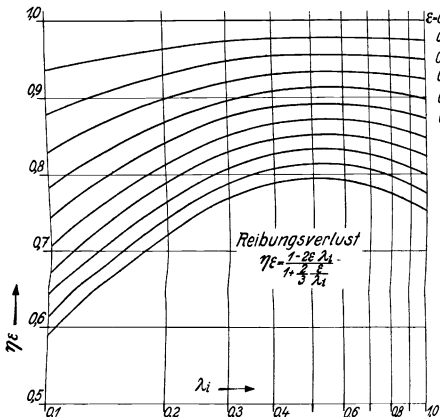


Abb. 3.

$$4.) H/2 \pi = R \cdot x \cdot \operatorname{tg} (\alpha + \beta_i) = 2,125 \cdot x \cdot \operatorname{tg} (\alpha + \beta_i)$$

x	$(\alpha + \beta_i)^\circ$	$\operatorname{tg} (\alpha + \beta_i)$	$H/2 \pi$ (m)
0,353	43,53	0,950	0,712
0,471	30,83	0,597	0,598
0,588	25,20	0,471	0,589
0,706	21,53	0,395	0,592
0,823	18,82	0,341	0,595
0,941	16,03	0,288	0,578

Mittelwert $H/2 \pi = 0,590$

Der Vergleich mit dem früheren Ergebnis zeigt, daß man die gleichen Schraubendaten wie damals erhält. Der Wirkungsgrad wird jetzt $\eta = \eta_1 \cdot \eta_e = 0,715 \cdot 0,928 = 0,664$, wo η_e der Abb. 3 entnommen werden kann. Verglichen mit dem früher berechneten Wert $\eta = 0,636$ ist der jetzt erhaltene Wirkungsgrad um etwa 4% größer; das bedeutet nach dem früher durchgeführten Modellversuch, daß die Schiffsgeschwindigkeit um etwa 0,5% zu groß angegeben wird, während sie früher um den gleichen Betrag zu klein herauskam. Betreffs der Steigungskorrektur kann hier das gleiche wie in (2) gesagt werden.

Die Grenzen der dargestellten Näherungstheorie, die im wesentlichen durch die Voraussetzung des kontraktionsfreien Schraubenstrahles und die Vernachlässigung des von der Zentrifugalkraft herrührenden Druckgefälles gegeben sind, lassen sich durch Vergleich ihrer Ergebnisse mit denen einer von Betz-Helmbold herrührenden strengen Theorie (11) angeben, welche die Kontraktion und das Druckgefälle berücksichtigt. Die Übereinstimmung ist bis zu Wirkungsgraden η herunter von etwa 0,5, d. h. im ganzen praktisch wichtigen Bereich, überraschend gut (5), so daß es für praktische Zwecke vollauf ausreichend und berechtigt ist, von dem Vorteil des äußerst einfachen

numerischen Rechnungsganges der Näherungstheorie Gebrauch zu machen, welcher der strengen Theorie leider fehlt.

Abschließend wollen wir die beiden Teilwirkungsgrade η_1 und η_e noch erörtern. Zunächst zeigt sich (Abb. 2), daß die Strahlverluste bei konstantem Fortschrittsgrad mit dem Belastungsgrad und bei konstantem Belastungsgrad mit dem Fortschrittsgrad anwachsen. Dieses Verhalten der Schraube ist im ersten Fall durch Zunahme der Verluste in der axialen Bewegung und im zweiten Fall durch ein Anwachsen der kinetischen Energie in der Strahldrehung bedingt. Besonders interessant ist dieser zweite Fall, da es ja durch Leitapparate gelingt, einen Teil der verlorenen Energie der Strahldrehung über einen zusätzlichen Schub wieder in nutzbare Energie umzusetzen. Die praktisch wichtige Frage, welcher Gewinn durch einen Leitapparat zu erwarten ist, und wie dieser von Fortschritts- und Belastungsgrad abhängt, ist auf Grund des Diagramms für η_1 zu beantworten. Wir haben den induzierten Wirkungsgrad für unendliche Flügelzahl zu vergleichen mit dem Wirkungsgrad, der sich bei gleichen Belastungsgrad für eine rein axiale Bewegung im Schraubenstrahl ergeben würde, und der an der Ordinate der Abb. 2 ganz links abzulesen ist; diese beiden Wirkungsgrade sind zur Hauptachse infolge der Strahldrehung voneinander verschiden und ergeben angenähert den durch einen verlustlosen Leitapparat möglichen Energiegewinn. Dieser Gewinn ist dann noch mit dem Wirkungsgrad des Leitapparates zu multiplizieren, der, wie eine Untersuchung von Betz gezeigt hat (12), wieder wie bei der Schraube von der Verteilung des Schubes über den Flügel der Leitvorrichtung, der Flügelänge und von seiner Flügelzahl abhängt.

Der Teilwirkungsgrad η_e nimmt mit zunehmendem ε ab, erreicht aber für $\lambda_i \sim 0,5$ ein Maximum (Abb. 3). Der Wert von ε beträgt bei dem normalen Betriebszustand einer Schraube etwa 0,03—0,04,

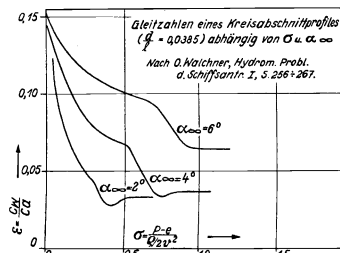


Abb. 4.

so daß die hierdurch bedingten Verluste beim günstigsten Fortschrittsgrad etwa 8% ausmachen. Bei Einsetzen von Kavitation können die Gleitzahl und damit der Verlust erheblich zunehmen; es werden hierbei unter Umständen Werte ε in der Größenordnung von 0,1 erreicht (Abb. 4), womit Verluste von 20% gegenüber η_e , das bedeutet nach dem eben Gesagten einen Verlust von etwa 12% gegenüber der kavitationsfreien Schraube, erklärbar sind.

In ihrer Abhängigkeit vom Fortschrittsgrad zeigen die beiden Teilwirkungsgrade ein entgegengesetztes Verhalten; während η_1 mit zunehmendem λ abnimmt, nimmt η_e in dem für die Anwendung in Frage kommenden Bereich mit dem Fortschrittsgrad zu. Demnach gibt es bei konstanter Belastung einen Fortschrittsgrad, an dem die gestellte Aufgabe mit einem Größtwert des Gesamtwirkungsgrades $\eta = \eta_1 \cdot \eta_e$ gelöst wird; man kann daher von einem günstigsten Durchmesser der Schraube resp. von einer günstigsten Drehzahl sprechen. Dies gilt aber nur zu dem Wert des induzierten Fortschrittsgrades, der dem Maximum von η_e entspricht; jenseits dieser Grenze ist der größte Gesamtwirkungsgrad mit einem möglichst kleinen Fortschrittsgrad verbunden.

Nach diesen Bemerkungen über die beiden Teilwirkungsgrade einer Schraube bin ich zum Schluß des Vortrages gekommen. Ich möchte noch einmal betonen, daß sich die Betrachtungen auf freifahrende Schrauben beschränkt haben, als welche die Seitenpropeller von Mehrschraubern mit genügender Genauigkeit anzusehen sind. Die Übertragung der Entwicklungen auf den Fall, daß der in Umfangsrichtung gebildete Mittelwert der Eintrittsgeschwindigkeit wie beim Einschrauber erheblich vom Radius abhängt, hat methodisch keine Schwierigkeiten; auch hier geht man wieder von der Optimumbedingung der Konstanz des Änderungswirkungsgrades aus und erhält dann die zugehörige Schubverteilung (14), die nun verglichen mit der freifahrenden Schraube mehr nach der Nabe zu entsprechend der Verteilung des Nachstromes verschoben ist.

Bezeichnungen:

Zirkulation Γ (= Linienintegral der Geschwindigkeit; $m^2 s^{-1}$)
 Dichte $\rho = \gamma/g$ ($kg \ s^2 \ m^{-4}$)

¹ Siehe (8), S. 266.

Tragflügel:

Auftrieb	A (kg)
Widerstand	W (kg)
Fortschrittsgeschwindigkeit	V (m s ⁻¹)
Flügelfläche	F (m ²)
Auftriebsbeiwert	$c_a = A \frac{\rho}{2} F V^2$
Widerstandsbeiwert	$c_w = W \frac{\rho}{2} F V^2$
Gleitzahl	$\varepsilon = c_w/c_a$

Propeller:

Schub	S (kg)
Drehmoment	M (m kg)
Aufgenommene Leistung	WPS
Fortschrittsgeschwindigkeit	v (m s ⁻¹)
Winkelgeschwindigkeit	$\omega = 2 \pi n$ (s ⁻¹)
Spitzenradius	R (m)
Zwischenradius	$r = x \cdot R$ (m)
Schraubenkreisfläche	$F_p = R^2 \pi$ (m ²)
Fortschrittsgrad	$\lambda = v/R \cdot \omega$
Schubbelastungsgrad	$c_s = S \frac{\rho}{2} F_p v^2$
Leistungsbelastungsgrad	$c_L = 75 \text{ WPS} \frac{\rho}{2} F_p v^3$
Wirkungsgrad	$\eta = c_s/c_L$

Literaturzusammenstellung:

1. Helmbold: Die Betz-Prandtl'sche Wirbeltheorie der Treibschaube und ihre Ausgestaltung zum technischen Berechnungsverfahren. Werft Reed. Hafen VII, 1926.
2. Lerbs: Kurventafeln zur Berechnung stark belasteter Freifahrtschrauben. Werft Reed. Hafen XIV, 1933.
3. Prandtl-Betz: Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik. Neudruck 1927.
4. Betz: Tragflügel und hydraulische Maschinen. Handbuch d. Physik VII, Kap. 4, 1927.
5. Lösch: Über die Berechnung des induzierten Wirkungsgrades stark belasteter Luftschauben unendlicher Blattzahl. Luftf.-Forschg. XV, Lfg. 7, 1938 (Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrtforschung).
6. Kramer: Induzierte Wirkungsgrade von Best-Luftschauben endlicher Blattzahl. Luftf.-Forschg. XV, Lfg. 7, 1938 (Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrtforschung).
7. Goldstein: On the vortex theory of screw propellers. Proc. Roy. Soc., Lond., Bd. 123, 1929. — Helmbold: Über die Goldsteinsche Lösung des Problems der Luftschaube mit endlicher Flügelzahl. Z. Flugtechn. XXII, 1931.
8. Weining: Aerodynamik der Luftschaube. Berlin: Springer 1940; insbes. S. 260/284.
9. Bienen-Karman: Zur Theorie der Luftschauben. Z. VDI, Bd. 68, 1924.
10. Flügel: Die günstigste Schubverteilung bei Propellern. Schiffbau. Bd. 41, 1940.
11. Betz-Helmbold: Zur Theorie stark belasteter Schraubenpropeller. Ing.-Arch. III, 1932.
12. Betz: Zur Theorie der Leitapparate für Propeller. Ing.-Arch. IX, 1938.
13. Walchner: Profilmessungen bei Kavitation. Hydrom. Probl. d. Schiffsantriebes I, 1932.
14. Helmbold: Beitrag z. Theorie d. Nachstromschaube. Ing.-Arch. II, 1931.