С. Я. ЛУРЬЕ

АРХИМЕД

287–212
ГОДЫ ДО НАШЕЙ ЭРЫ

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР
НАУЧНО-ПОПУЛЯРНАЯ СЕРИЯ
БИОГРАФИИ

Профессор
С. Я. ЛУРЬЕ

АРХИМЕД

1945
ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА — ЛЕНИНГРАД

Под общей редакцией Комиссии АН СССР по изданию
научно-популярной литературы
Председатель Комиссии президент АН СССР
академик *С. И. ВАВИЛОВ*
Зам. председателя член-корреспондент АН СССР
П. Ф. ЮДИН

ГЛАВА ПЕРВАЯ

☆

Эллинистическая Греция в годы детства и юности Архимеда

«Тирания, это ужасное и гнусное бедствие, обязано своим происхождением только тому, что люди перестали ощущать необходимость в общем и равном для всех законе и праве. Некоторые люди, неспособные судить здраво, думают, что причины появления тиранов — другие и что люди лишаются свободы без всякой вины с их стороны только потому, что подверглись насилию со стороны выдвинувшегося тирана. Однако это ошибка... Как только потребность в общем для всех законе и праве исчезает из сердца народа, на место закона и права становится отдельный человек. И действительно, в каком же другом случае неограниченная власть могла бы попасть в руки отдельного человека? Такой человек, который захотел бы уничтожить право и устранить общий закон, должен был бы быть сделан из железа — человек, который вознамерился бы отнять эти блага у народа, он, один, у них, многих! Если же он сделан из плоти и крови и устроен так же, как другие люди, то он, конечно, не в состоянии это сделать. Но если потребность в равном для всех законе и праве и без того исчезла, то такой человек может достичь неограниченной власти. Поэтому некоторые люди не замечают тирании даже тогда, когда она уже наступила».

Так характеризует неизвестный нам по имени философ конца V в. положение вещей, создававшееся в его время и достигшее полного развития во времена Архимеда, в III в. до н. э. Вместо множества совершенно самостоятельных городских общин с демократическим устройством, бассейн Средиземного моря в силу новых экономических условий объединился в несколько больших государств, каждое из которых управлялось неограниченным монархом; этому монарху обычно уже при жизни воздавались божеские почести. Такими государствами были Египет с главным городом Александрией, где правили Птолемеи, державшие себя, как преемники древних египетских «божественных» фараонов; Сирия с главными городами Антиохией и Селевкией, где правили Селевкиды; Македония, где правили Антигониды. Такое же монархическое государство, но меньшего масштаба, представляло собою государство восточной Сицилии — Сиракузы, где родился Архимед.

Сохранились в это время и прежние государства-города с их демократическим аппаратом, особенно на материке Греции; но, конечно, сохранить на сколько-нибудь продолжительное время действительную независимость, находясь в соседстве с такими колоссами, как Египет, Сирия и Македония, было невозможно. Как сообщает Плутарх, все богатства спартанского государства и его отдельных граждан, взятые вместе, были во много раз меньше, чем имущество какого-либо одного из приближенных сирийского царя.

Не следует думать, что все монархи этого времени были холодными злодеями и бессовестными негодяями. Правда, неограниченная власть развращала их; тем не менее, некоторые из них, быть может, искренно, увлекались культурой классического времени. Для прочих это «увлечение» было только модной фразеологией, в которую облекалось их стремление облегчить распространение своего политического и экономического влияния. Так, декреты о восстановлении прежней свободы и независимости Греции издают македонский правитель Полисперхонт, македонские цари Антигон и Деметрий Полиоркет, а затем и египетские цари Птолемей I Сотер и Птолемей II Филадельф. В ответ на это граждане греческих городов воздают «освободителям Эллады» божеские почести, сочиняют в честь их гимны и... разрешают им ставить в свои города их гарнизоны и управителей. Как замечает крупнейший историк эллинизма Вилькен, свобода и независимость Эллады стали мелкой разменной монетой в борьбе честолюбивых монархов между собой. Но происходило это не только потому, что монархи не вкладывали реального смысла в свои декреты, но и потому, что старая рабовладельческая демократия себя изжила: греки, вынужденные примириться с экономической необходимостью происшедшего перелома, потеряли всякую потребность в свободе и политической независимости и не умели уже ими пользоваться; в этом философ, которого мы цитировали выше, был совершенно прав.

Это положение вещей было еще только первым шагом на пути деградации греческого полиса. В это время еще никому не приходило в голову, что скоро наступит время, когда во главе Греции станет еще более циничная римская власть, когда «жалкие греки» (graeculi) будут рассматриваться лишь как люди второго сорта, как естественный объект для эксплоатации римских ростовщиков, когда население целых греческих государств, вполне лойяльных и покорных Риму, не ведущих с ним никакой войны, будет продаваться в рабство за неуплату кабальных долгов римским ростовщикам или непосильных налогов римским откупщикам. Никому еще не приходило в голову, чтобы свобода и автономия греческих городов могли получить такой вид, что организовать раздачу хлеба населению или организовать пожарную дружину в греческом городе можно будет только со специального разрешения римского императора. В рассматриваемую нами эпоху греческие государства еще лишались только права вести самостоятельную внешнюю политику; во внутренних муниципальных делах они еще были совершенно независимы, если только не производили массового освобождения рабов, передела земли, отмены долгов и других мер, угрожающих общественному порядку, т. е. в первую голову устойчивости сделок крупных купцов и ростовщиков.

Если, таким образом, от свободы и автономии греческих городов классического времени осталась только тень, то, с другой стороны, эллинистическое общество сделало большой шаг вперед в сторону космополитизма. В классическую эпоху гражданин греческого государства относился с нескрываемым презрением к иностранцам, проникшим тем или иным путем в среду граждан, а тем более, поселившимся в государстве в качестве иностранных поселенцев-метэков, даже если эти «иностранцы» были такими же греками из другого города-государства, лежащего на расстоянии десятка километров. Отношение к «варварам», т. е. не-грекам, было еще более презрительным: греков считали созданными для свободной жизни, «варваров» — предназначенными судьбой для рабства. Такие учения проповедывались, например, Аристотелем, который дал своему воспитаннику Александру Македонскому совет, находясь в Азии, обращаться с греками, как с младшими товарищами (ἡγεμονικῶς), а с варварами, как деспот с рабами (δεσποτικῶς). Теперь, придворный астроном египетских Птолемеев, близкий друг Архимеда, Эратосфен в одном из своих сочинений порицает Аристотеля за эти слова и хвалит Александра за то, что он не последовал совету своего учителя: людей надо делить не на греков и варваров, а на добродетельных и подлых, а добродетельных людей не мало и среди варваров. Так, например, по его мнению, индусы и бактрийцы отличаются высокими нравственными качествами, а *римляне и карфагеняне* имеют замечательное государственное устройство. Несомненно придворный ученый излагал в этих словах официальную точку зрения Птолемеев.

В государстве Птолемеев мы, правда, находим официальное деление на «македонян», «греков», «египтян», но это только пережиточные термины, в основном характеризующие деление на сословия: среди «греков» и «персов» мы находим не мало египтян и евреев. Зажиточный человек, одевающийся по-гречески и усвоивший греческий культурный облик, тем самым становился греком. В этом отношении очень интересен дошедший до нас александрийский папирус, в котором написано: «Египтяне... должны быть выселены из Александрии... *Не следует делать препятствий* тем египтянам, которые приезжают для получения образования, по торговым делам и для осмотра достопримечательностей города». Высылке подлежат лишь египтяне, говорящие по-египетски, одетые в египетскую одежду и соблюдающие египетские национальные обычаи, «чуждые культурным людям». Этот космополитизм соответствовал интересам эллинистических владык: им приходилось управлять огромными монархиями, населенными людьми самых различных национальностей; в число своих приближенных и управителей они хотели выдвигать людей, наиболее надежных и преданных им и в то же время наиболее ловких и способных. Всякая «варварофобия», всякая национальная исключительность и национальная вражда только мешали бы их политике и связывали бы их по рукам, ибо такая политика нарушала бы нормальную деловую жизнь больших эллинистических государств.

Сиракузы, в которых родился Архимед, были одним из наиболее космополитических городов Греции. Вся восточная половина острова Сицилии была населена греками. Здесь поселения греков-дорян перемежались с поселениями греков-ионян. В классическую эпоху антагонизм между дорянами и ионянами был весьма резким. Теперь появился общегреческий язык, койнэ, литературный язык всей Греции, образовавшийся из аттического. Правда, широкие массы населения продолжали говорить на своих диалектах, а дорийский диалект с его причудливыми для греческого интеллигента звучаниями вошел в моду в силу своей экзотичности и простонародности, «буколичности»; в частности, и Архимед писал на дорийском диалекте. Но в дорийский диалект проникло много ионийских слов, резкая разница между диалектами стерлась, и от былого антагонизма между дорянами и ионянами не осталось почти ни следа. Западная часть Сицилии в годы юности Архимеда принадлежала карфагенянам. Карфагенян можно было массами встретить на улицах Сиракуз; они оказали большое влияние на культуру Сицилии. Карфагенское государственное устройство считал достойным подражания образцом уже Аристотель, а вслед за Аристотелем друг Архимеда Эратосфен. Организация торговли в карфагенском государстве и карфагенская военная техника тщательно изучались и усваивались в Сицилии. Но особенное восхищение вызывала карфагенская система организации крупного плантационного сельского хозяйства, так как и в Сицилии такое хозяйство было широко распространено. В Карфагене существовала очень популярная в Греции теоретическая литература по этому вопросу (например, сочинения Магона), явившаяся источником для аналогичных трудов сиракузского тирана Гиерона. Как велико было влияние Карфагена в это время, видно из того, что еще некоторое время спустя после смерти Архимеда в далеком Риме поэт Плавт пишет целые сцены своей комедии «Финикиянин» (Poenulus) на языке карфагенян: очевидно, среди римской публики было не мало людей, понимавших по-карфагенски. С другой стороны, карфагенское государство само по себе имело ярко космополитические черты: в войсках карфагенян служили греки, галлы, италики, ливийцы и нумидийцы.

Не менее многочисленны и влиятельны были в Сицилии и италийские племена. Один из важнейших городов восточной Сицилии — Мессана — был в детские годы Архимеда в руках италийского племени мамертинцев; бруттии, луканы, кампанцы и самниты были частыми гостями в Сиракузах. Еще более значительным было в Сицилии уже в это время влияние могущественного Рима. На почве торгового общения целый ряд латинских слов вошел в греческий язык Сицилии — libra (фунт), uncia (унция), salinum (солонка) и т. д. Наконец, в самой Сицилии жили туземные племена, сикулы и сиканы, в это время уже в значительной мере ассимилировавшиеся с греческим населением.

Но при всем этом космополитизме греки Сицилии чувствовали себя прежде всего греками и наиболее близки им были греки Балканского полуострова. Греческая история и литература VI—IV вв. была *их* историей и литературой, греки классической эпохи — *их* предками. На литературе этой славной эпохи, прежде всего на Гомере, греки Сицилии воспитывались с раннего детства. Это было одной из причин того, что теснимые с двух сторон римлянами и карфагенянами, сиракузяне в раннем детстве Архимеда призвали к себе на помощь Пирра из Греции, несмотря на его автократические замашки. И карфагенян, и римлян, и сикулов они готовы были считать равными себе лишь постольку, поскольку те усвоили греческую культуру и греческий облик: в противном случае это были «варвары».

В такой обстановке около 287 г. до н. э. в семье математика и астронома Фидия родился сын Архимед. Фидий был, очевидно, небогатым человеком, ибо и его родственник, впоследствии тиран Сиракуз Гиерон, был в это время, как сообщают источники, небогатым, простым гражданином. Этому соответствует и образование, полученное Архимедом. Мы ничего не слышим о том, чтобы Архимед занимался философией или изящной литературой. Между тем богатые и знатные люди того времени давали своим детям всестороннее образование, в центре которого были занятия философией и литературой, а математике учили их *лишь постольку, поскольку это было нужно для философии*. Уже Аристотель сказал по этому поводу: «Нет ничего недостойного для свободного человека в том, чтобы заниматься некоторыми свободными науками до известного предела, но слишком усидчивое изучение их до полного совершенства... делает тело и разум людей негодным для потребностей и дел добродетели». И действительно, друг Архимеда Эратосфен, кроме математики, занимался и философией, и изучением литературы, и сам писал стихи. Наоборот, античные ремесленники уже с детства посвящали детей в тайны своей науки и учили их только этому делу, но зато до полного совершенства. Именно так воспитан был Архимед: его учили, повидимому, только математическим наукам. Впрочем, причиной того, что он интересовался только ими и овладел ими в совершенстве, был не только характер воспитания, но и его гениальность и душевный склад.

Родственник Архимеда Гиерон сражался в войсках Пирра, прибывшего в 280 г. из материковой Греции на помощь своим италийским и сицилийским соплеменникам, теснимым, с одной стороны, Римом, с другой, Карфагеном. В этой войне Гиерон настолько отличился, что после ухода Пирра назад в Грецию ему удалось захватить неограниченную власть в Сиракузах. Разумеется, это не могло не отразиться на материальном положении его ближайших родственников. Может быть, именно эта перемена в судьбе и дала Архимеду возможность отправиться на продолжительное время для завершения своего образования в один из центров тогдашней образованности.

Важнейшими такими центрами были тогда Афины и Александрия; меньшее значение имел Пергам в Малой Азии. В области философии и изящной литературы Афины, этот «университет Эллады», в то время не только не уступали новому центру — Александрии, но и превосходили его. Но в области астрономии, математики, филологии и медицины Афины должны были безоговорочно уступить первое место Александрии. Неудивительно, что в то время как Эратосфен ездил на долгое время учиться в Афины, Архимеда и в силу полученного им образования и в силу природных склонностей не могло влечь в Афины, и он направился сразу же в Александрию.

Но в Александрию он приехал, получив уже хорошую математическую подготовку в доме отца. Что же это была за подготовка? По каким учебникам готовился Архимед? На этот вопрос мы, кажется, в состоянии ответить с полной определенностью. Незадолго до рождения Архимеда вышел курс геометрии, сразу же затмивший и вытеснивший все курсы геометрии, появившиеся до этого времени. Этот курс был тогда последней научной новинкой, и впоследствии Архимед неоднократно ссылается на него в своих работах. Это — «Начала» Евклида. Вот почему, для того чтобы понять и внутренний строй и оформление трудов Архимеда, нам необходимо несколько подробнее остановиться на Евклиде и его трудах.

ГЛАВА ВТОРАЯ

☆

«Начала» и «Конические сечения» Евклида

Еще задолго до возникновения греческих государств наука древнего Востока овладела целым рядом отраслей математики. Египтяне и вавилоняне умели решать задачи на уравнения первой и второй степеней, на равенство и подобие треугольников, на арифметическую и геометрическую прогрессии, на определение площадей треугольников и четырехугольников, объема параллелепипедов и т. д. Они знали точные формулы для определения суммы квадратов последовательных чисел, начиная от 1, объема цилиндра, конуса, пирамиды и даже усеченной пирамиды, хотя нам до сих пор не ясно, как они к этим формулам пришли. Были у них в ходу и приближенные формулы, например для определения площади круга, а у вавилонян — всякого рода таблицы (таблицы умножения, обратных величин, квадратов, кубов, таблицы решений для кубичного уравнения типа $x^3+x^2=n$ и т. д.). Но характерным для этой древневосточной математики было то что здесь прежде всего интересовались нахождением или отгадыванием любым способом правильного решения, запоминанием и практическим применением его. До нас не дошло ни в одном древневосточном памятнике доказательства того или иного математического положения; мы имеем только готовые рецепты для решения задач: «возьми то-то», «сделай то-то». Эти рецепты передавались из поколения в поколение; новые поколения ученых находили рецепты для решения новых задач, но как они пришли к ним, оставалось их профессиональной тайной.

Греки первой половины V в. вряд ли сколько-нибудь значительно расширили круг вопросов, которыми занималась математика Востока. Но направление их интересов было совершенно другое: их волновал прежде всего вопрос, откуда взяты эти по виду такие простые и в то же время такие неожиданные решения, как доказать, что эти решения верны, как установить, во всех ли случаях они верны, и если не во всех, то в каких именно. Основными элементами, которые несомненно характеризовали уже древнейшие математические работы греков, были: постулаты — положения, которые, как непосредственно очевидные, предлагается принять на веру (αἰτήματα), доказательства (ἀποδείξεις), решения задач (λύσεις) и определение условий, при которых данное решение имеет смысл и остается верным (διορισμοί). В соответствии с образным типом мышления греков ведущей математической дисциплиной у них стала геометрия. Исключая наиболее простые, «непосредственно очевидные», арифметические задачи, все вопросы математики старались осмыслить геометрически: вместо произведения говорили «площадь», вместо произведения числа на самое себя — «квадрат» (выражение, сохранившееся до нашего времени). Графическая, геометрическая интерпретация выражений, в роде

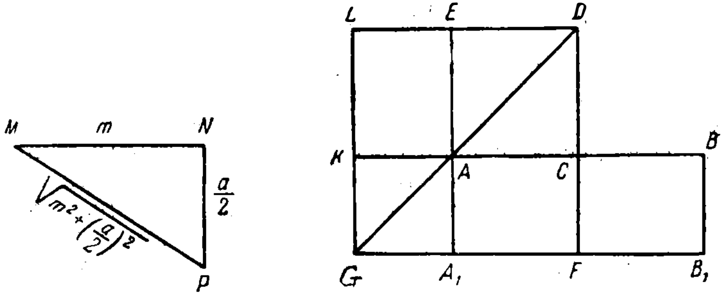
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

нас не может удивить, ибо такая интерпретация обычна в нашей школе. Интереснее античная процедура решения квадратного уравнения

$$x^2+ax=m^2.$$

Задача формулировалась так: к данному отрезку AB (равному a) приложить такой прямоугольник, чтобы, имея избытком квадрат (одной высоты с ним), он был равновелик данному квадрату (со стороной m).

Решается эта задача так (фиг. 1): Отрезок AB $(=a)$ делят пополам в точке C. В точке C восстанавливают перпендикуляр CD, равный AC, и достраивают квадрат $AEDC$. Кроме того, строят прямоугольный треугольник, один катет которого $MN=m$, другой $NP=\frac{a}{2}$. От точки D



Фиг. 1.

в сторону точки C откладывают отрезок DF, равный гипотенузе MP, из F проводят прямую FG, параллельную AB, до пересечения с продолжением диагонали AD в точке G; ABB_1A_1 есть искомый прямоугольник. В самом деле, достроим квадрат KA и прямоугольник LA.

DF — сторона квадрата $DFGL$, по построению равна

$$MP=\sqrt{m^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2};$$

значит, площадь этого квадрата равна $m^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2$. CD— сторона квадрата $AEDC$, по построению равна $\frac{AB}{2}=\frac{a}{2}$; площадь квадрата $AEDC$ равна $\left(\frac{a}{2}\right)^2$. Площадь фигуры $LGFCAE$, так называемого *гномона*, очевидно, равна квадрату $DFGL$ минус квадрат $AEDC=m^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2=m^2$. Но прямоугольник $KALE$ равен прямоугольнику CBB_1F; поэтому *гномон* равен фигуре KBB_1G.

Итак, на отрезке $AB = a$ построен такой прямоугольник ABB_1A_1, что при прибавлении к нему квадрата KGA_1A одной высоты с ним он равняется по площади m^2, что и требовалось сделать.

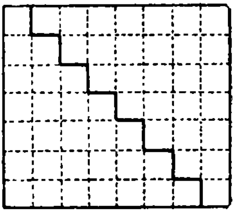
С другой стороны, греческие геометры требовали, чтобы все предлагаемые построения были осуществимы, а поскольку унаследованными с востока геометрическими инструментами были линейка (χανών) и циркуль (διαβήτης), требовалось, чтобы их можно было осуществить при помощи циркуля и линейки.

Что касается, в частности, геометрических задач, то одним из величайших открытий греков V в. было последовательное применение метода геометрических мест (τόποι). Например, если искомая точка должна лежать на заданном расстоянии d от данной точки A, то ее τόπος'ом будет окружность радиуса d с центром в A; если требуется, чтобы точка лежала на расстоянии k от прямой MN, то ее τόπος'ом будет прямая, параллельная MN и отстоящая от нее на k. Если же требуется, чтобы искомая точка удовлетворяла обоим указанным условиям, то она должна лежать на пересечении обоих τόποι.

В V в. авторы математических работ еще не видели в читателе строгого критика, который подкарауливает их, следит за каждым их шагом и готов придраться к каждой их ошибке. Они писали для узкого круга своих учеников и друзей, привыкших к их ходу мысли. Их основной целью было показать, ка́к они пришли и как вообще можно притти к тем или иным выводам, развить в своих читателях математическую интуицию и умение проверять найденные решения. Для них было достаточно того, что их ученики понимают, что̀ они хотят сказать. Так, например, живший еще в VI в. Фалес, по преданию, доказывал теорему, что диаметр делит круг на две равные части, таким образом: диаметр есть прямая, т. е. такая линия, которая во всех частях имеет одно и то же направление (χώρησις) к центру. Если бы диаметр в какой-нибудь точке залез в верхнюю половину круга, то в этой точке он имел бы сначала направление вверх, а затем вниз и, следовательно, не был бы одной прямой линией. По тем же причинам он не может залезть и в нижнюю половину круга; значит, он делит круг на две равные части. Такое рассуждение, конечно, никак не является отчетливым и строгим, но, чтó хочет сказать автор, понятно.

С бóльшими трудностями пришлось встретиться греческим геометрам при доказательстве формул для площади круга и эллипса и для объема пирамиды, конуса и шара. Здесь пришлось отправляться от таких постулатов, которые, как замечал Архимед, «далеко не всем могли казаться очевидными»: именно, что всякая линия состоит из «точек», точнее, прямолинейных отрезков чрезвычайно малой длины; что, накладывая прямые линии чрезвычайно большое число раз друг на друга, получим плоскость, а накладывая плоскости чрезвычайно большое число раз друг на друга, получим тело. При таких постулатах круг оказывался многоугольником с чрезвычайно большим числом сторон, конус — пирамидой с таким «бесконечноугольником» в основании, шар — многогранником с чрезвычайно большим числом граней и т. д. Этот же постулат давал право утверждать, что две пирамиды, имеющие равновеликие основания и равные высоты, равновелики: если каждая пирамида «состоит» из чрезвычайно большого числа все уменьшающихся плоских многоугольников, наложенных друг на друга, то каждый многоугольник в одной из пирамид равновелик соответствующему многоугольнику в другой пирамиде, находящемуся на такой же высоте; а если так, то равновелики и «суммы» всех многоугольников, заключенных в одной и другой пирамидах, а следовательно, равны друг другу и объемы пирамид. Параллелепипед не трудно разбить на три пирамиды, имеющие равновеликие основания и равные высоты. Следовательно, объем пирамиды равен трети объема призмы с равновеликими основанием и высотой, а значит, этот объем равен трети произведения площади основания на высоту. Точно так же при этих предпосылках не трудно доказать, что площадь круга, т. е. «бесконечноугольника», равна половине произведения его периметра на радиус, а объем шара, т. е. «бесконечногранника», — трети произведения его поверхности на радиус; круг рассматривался как совокупность чрезвычайно узких треугольников, а шар как совокупность чрезвычайно узких пирамид, с вершинами в центре круга или шара и с высотами, равными радиусу.

Эллипсом занимались уже древние египтяне, и можно не сомневаться, что он был уже известен грекам в V в. но не как коническое сечение, а как «сплющенный круг». Это видно из четвертого предложения архимедова сочинения «О коноидах и сфероидах», где основным свойством эллипса еще считается то, что он соединяет точки деления всех ординат круга, разделенных в определенном отношении. При таком определении не трудно найти площадь эллипса. Круг и эллипс *«состоят»* из ординат, тесно приложенных друг к другу; каждая ордината круга относится к соответственной ординате эллипса, как $m : n$; поскольку в пропорции сумма предыдущих относится к сумме последующих, как каждое предыдущее к каждому последующему, «сумма» ординат эллипса, т. е. его площадь, относится к «сумме» ординат круга, т. е. к его площади, как $n : m$, или как его малая ось к большой. Вот почему, когда Архимед в предисловии к «Квадратуре параболы» (см. стр. 109) говорит, что площадь эллипса (эллиптического сегмента) прежде находили, «исходя из вряд ли допустимых предпосылок», то можно быть уверенным, что он имеет в виду именно это решение, при котором эллипс рассматривается как совокупность «всех его ординат».



Фиг. 2

Можно полагать, что теми же методами решались в это время и задачи суммирования некоторых сходящихся рядов. Мы знаем теперь, что уже древние вавилоняне умели суммировать не только арифметическую и геометрическую прогрессии, но и ряд $a^2 + (2a)^2 + (3a)^2 + \ldots$ Как я доказываю в другом месте, суммирование рядов $1 + 2 + 3 + \ldots$ и $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots$ производилось в это время наглядным геометрическим путем (фиг. 2 и табл. 3). Если принять за 1 каждый из квадратов, изображенных на фиг. 2, то книзу от ломаной линии находятся: в верхнем ряду 1 квадрат, во втором 2, в третьем 3 и т. д., т. е. перед нами сумма $1 + 2 + 3 \ldots + n$. Над ломаной линией находится как раз такой же величины фигура, а обе они вместе представляют собою прямоугольник со сторонами n и $n + 1$. Площадь всего прямоугольника $n(n+1)$, а каждой из ступенчатых фигур $\frac{n(n+1)}{2}$. Такова сумма ряда $1+2+3\ldots$ $\ldots+n$. Точно так же на прилагаемой таблице изображена ступенчатая пирамида. Если принять за 1 каждый куб, из которых она составлена, то в верхнем слое 1 такой куб, во втором слое, имеющем в два раза бо́льшую ширину и длину, 2×2 таких куба, в третьем слое, имеющем в три раза бо́льшую ширину и длину, 3×3 таких куба, а всего $1^2+2^2+3^2\ldots+n$. Если сложить три такие ступенчатые пирамиды способом, изображенным на табл. $3b$ и $3c$, то получим: а) параллелепипед со сторонами n, n и $n+1$, к которому сверху добавлено еще б) ступенчатое тело, имеющее высотой 1, а основанием ступенчатую фигуру, изображенную на фиг. 2. Площадь ее, как мы видим, равна $\frac{n(n+1)}{2}$. Итак, объем всего этого тела

$$n^2(n+1)+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{2n^3+3n^2+n}{2},$$

а объем каждой ступенчатой пирамиды, т. е. сумма ряда $1^2+2^2+3^2\ldots+n$, в три раза меньше, или $\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$.

Из знаменитого парадокса Зенона (середина V в. до н. э.) можно сделать вывод, что уже его противники занимались суммированием ряда $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\cdots$ и ставили вопрос о том, что получится, если продолжать это суммирование до бесконечности. Содержащееся у Евклида решение этой задачи для «сколь-угодно большого» числа членов заставляет предположить, что его предшественники-атомисты делали вывод, что при продолжении этого ряда до его конца мы придем к такому результату, когда разность между 1 и суммой членов этого ряда равна одному неделимому; а так как в мире чувств одной неделимой при сложении с конечным числом можно пренебречь, то в мире чувств сумму членов этого ряда можно считать равной 1. Точно так же из архимедова суммирования рядов $a+2a+3a+4a\ldots$ и $a^2+(2a)^2+(3a)^2\ldots$ и связанного с ним предельного перехода (см. стр. 149 и сл.) можно, кажется, сделать вывод, что его предшественники-атомисты изучали эту сумму и для случая, когда число членов n сверхчувственно велико; тогда в формуле $S_n = \frac{(na)^2 + na}{2}$ членом первой степени можно пренебречь по сравнению с квадратом, и мы получим $S_n = \frac{(na)^2}{2}$; в формуле

$$S_n = \frac{2(na)^3 + 3(na)^2 + na}{6};$$

квадратным членом и членом первой степени можно подобным же образом пренебречь по сравнению с кубичным, и мы получим

$$S_n = \frac{(na)^3}{3},$$

т. е. когда ступенчатый треугольник вследствие чрезвычайной малости ступеней в мире чувств превратится в треугольник, то квадрат со стороной na окажется равным двум треугольникам с таким же основанием и высотой, а когда ступенчатая пирамида вследствие чрезвычайной малости ступенек в мире чувств превратится в пирамиду, то куб со стороной na окажется равным трем пирамидам с такими же основанием и высотой.

Мы не можем здесь останавливаться на спорах, разгоревшихся в V в. по вопросу об этом методе примитивного интегрирования. Укажу только, что наиболее последовательной и продуманной математической системой, построенной на этом принципе чрезвычайно малых частиц, была система Демокрита из Абдеры, жившего во второй половине V в., и его последователей-атомистов.

Не следует смешивать атомизм как *физическое учение* с *математической* теорией атомистов. Атом представляет собою, по мнению Демокрита, сплошную частицу массы самой различной формы; внутри нее *отсутствует пустота*, и она абсолютно тверда; поэтому атом нельзя разрезать или разделить никаким инструментом, но потенциально, в воображении, его можно, конечно, делить. Атомы вовсе не должны обязательно быть чрезвычайно малыми. Между атомами находятся промежутки пустоты. Эти физические атомы можно (только в уме, в воображении, теоретически) разделить на неделимые частицы —

амеры. Эти амеры имеют минимальное протяжение, лишены формы, не имеют верха, низа, переда, зада и т. д.; амеры неделимы даже в воображении. На этих-то амерах и строится математическая теория атомистов.

Руководясь своеобразным методом неделимых, Демокрит, как впоследствии указывал Архимед, нашел, что объем пирамиды равен трети произведения основания на высоту. Можно быть уверенным, что он знал уже указанные выше формулы для отношений площади круга к его окружности (она известна его современнику Гиппократу из Хиоса) и объема шара к его поверхности (формула для поверхности шара ему не была еще известна, ее впервые открыл Архимед).

Этот способ интегрирования, разумеется, не был достаточно строгим с математической точки зрения и при недостаточно осторожном пользовании им мог приводить к грубым ошибкам. Возьмем такой пример: пусть треугольник, согласно указанному принципу атомистов, состоит из тесно приложенных друг к другу прямых, параллельных одному из катетов. Каждая такая прямая пересечёт другой катет и гипотенузу в точке. Если весь треугольник состоит из таких прямых, то этот катет и гипотенуза будут состоять из точек. Но ясно, что таких точек одинаковое число и на катете и на гипотенузе, ибо число их равно числу параллельных прямых. Выходит, что катет равен гипотенузе. Враги атомистов выдвигали целый ряд таких возражений; многие из них атомисты опровергали весьма убедительно; в других случаях это было труднее.

Атомистическое учение, по которому первоосновой всей природы являются атомы — мельчайшие неделимые частицы материи, движущиеся по законам необходимости, без всякого вмешательства каких бы то ни было высших сил и без всякой предустановленной цели, казалось идеологам аграрной аристократии верхом безбожия и анархизма. К началу IV в. афинская демократия потерпела поражение; началась общая умственная реакция, и аристократическая идеология стала господствующей. Бесконечные по числу и в принципе равноценные между собою атомы, носящиеся в пространстве и образующие мир в силу общих и равных для всех законов, давали как бы идеологическое обоснование демократическому государству с его многочисленными и в принципе равноценными между собою гражданами, управляющими государством на основании общих и равных для всех законов. В эпоху, когда во главе государств становятся отдельные сильные индивидуумы, опирающиеся на наиболее богатых и влиятельных граждан и управляющие государствами по своему усмотрению, такое учение стало рассматриваться как вредное и антигосударственное. Платон, создавший первоосновы для идеалистической философии эллинистической эпохи, не только вел в своих произведениях ожесточенную борьбу с материализмом, но и скупал, где только мог, произведения Демокрита и сжигал их. Ученик Платона Аристотель написал целый ряд произведений по философии естествознания, основная цель которых—опровержение материализма и прежде всего демокритова атомизма. Результатом этой энергичной деятельности было то, что произведения Демокрита стали редкими и малодоступными. Широкие круги читающей публики знали о них лишь по наслышке со слов идеалистических философов; читались они только в узком кругу последователей Демокрита и близких к атомистам эпикурейцев.

Особенно легкой и убедительной была борьба с атомистами в области математики, ибо здесь предпосылки атомистов действительно «не обладали необходимой в математике очевидностью» и приводили иногда к ошибочным выводам. Последним словом в математике V в. было открытие иррациональных, несоизмеримых величин, тогда как с точки зрения атомистической математики никаких несоизмеримых величин существовать не может, ибо неделимое является общей мерой всех величин. Доводы, выставленные математиками идеалистического лагеря, казались неопровержимыми, и математика атомистов быстро вышла из моды и была предана забвению.

Новая математика выросла на фоне яростной, ожесточенной борьбы с материализмом; поэтому способы аргументации в ней были совершенно иными, чем в математике V в. Математик этого времени не видит уже в читателе своего друга и ученика, безусловно доверяющего ему, которого он хочет ввести в самые сокровенные методы нахождения и доказательства математических решений. Нет, математик этой эпохи смотрит на читателя, как на настороженного противника, готового ухватиться за всякую ошибку, за всякое произвольное или плохо сформулированное утверждение автора. Меньше всего этот автор расположен делиться с читателем секретами своего производства — как он дошел до той или иной мысли, откуда он взял то или иное решение; до этого читателю не должно быть дела. Важно путем цепи силлогизмов загнать читателя в угол и заставить его — хочет он этого или не хочет — признать, что предлагаемое ему решение, откуда бы автор его ни взял, единственно возможное и правильное.

Не удивительно, что с этого времени авторы математических книг черпают свою аргументацию из практики уголовного судопроизводства. Уголовный преступник, выступающий с защитительной речью перед судом, не может рассчитывать на особенное доверие слушателей. Если он попросту расскажет, как было дело, ему никто не поверит; он должен подробно разобрать перед публикой постулированную обвинителями картину преступления и доказать, что она по самому ходу вещей невозможна, абсурдна. Примеров такого рода аргументации сколько угодно в античных судебных речах.

Так же поступает и античный математик. Я, говорит он, утверждаю, что величина A равна B. Вы, конечно, мне не верите и думаете, что A больше или меньше B. Допустим на минуту, что A больше B (argumentum a contrario — доказательство от противного). Сделав такое допущение, мы делаем из него цепь логических выводов и в результате приходим к невозможному, нелепому выводу, например, к пропорции, в которой левое отношение больше единицы, а правое — меньше, к треугольнику, у которого катет больше гипотенузы, и т. д. Теперь я допускаю, что A меньше B. Это допущение также приводит к абсурду. Эти абсурдные выводы могли получиться только потому, что сделанное допущение не верно. Значит, A не может быть ни больше B, ни меньше B. Итак, остается один вывод, что A равно B, а это и требовалось доказать. Такой способ аргументации называется reductio ad absurdum (приведение к нелепости).

Влияние адвокатской практики и красноречия софистов дало важные положительные результаты: аргументация стала более строгой, основанной на правильных и точных, научно безукоризненных определениях. Математика перестала быть связанной с определенной философской, моральной или политической системой: ее выводы стали *общеобязательными для всех людей*.

Тем не менее способ reductio ad absurdum, этот способ доказательства, делающий излишними какие бы то ни было «недостаточно очевидные» предпосылки, вроде предпосылки о существовании неделимых частиц, и приводящий к неопровержимым выводам, имеет два существенных недостатка.

Во-первых, будучи хорошим орудием для проверки и доказательства результата, уже заранее известного или угаданного, он не годится для нахождения новых, еще не известных решений.

Во-вторых, этот метод скорее огорашивает читателя, чем развивает его ум. Читатель не знает, откуда взято это свалившееся, как снег на голову, решение и откуда он сам возьмет такое решение в других случаях. Он не получает сколько-нибудь отчетливой картины взаимосвязи между отдельными истинами.

В ряде своих частей эта новая геометрия по существу мало чем отличалась от математики V в.: те же постулаты, основанные якобы на очевидности, те же теоремы, те же следствия из этих теорем. Но всякого рода расчеты величины тех или иных линий, фигур и тел под влиянием идеалистической философии изгоняются из геометрии в учебники прикладной арифметики—логистики; геометрия теперь учит только об *отношениях* различных величин, а не об *измерении* их.

В связи с этим особое значение получает *учение о пропорциях*. Так как определять величину искомого отрезка, площади или объема не рекомендуется, то приходится прибегать к нахождению очень сложных отношений между величинами, а это достигается преобразованием пропорций. Мы отметим здесь важнейшие из этих преобразований, но, вместо греческих, даваемых Евклидом, приведем здесь для удобства читателя более поздние латинские названия.

1. Перестановка средних членов — *permutando*. Если

$$a:b=c:d,$$

то

$$a:c=b:d.$$

2. Переворачивание — *convertendo*.
Если

$$a:b=c:d,$$

то

$$b:a=d:c.$$

3. Образование суммы — *componendo*.
Если

$$a:b=c:d,$$

то

$$(a+b):b=(c+d):d.$$

4. Образование разности — *dividendo*.
Если

$$a:b=c:d,$$

то

$$(a-b):b=(c-d):d.$$

5. *Ut omnes ad omnes, ita unus ad unum* (как все [предыдущие] ко всем [последующим], так один [предыдущий] к одному [последующему]).
Если

$$a:b=c:d=e:f=g:h,$$

то

$$a:b=(a+c+e+g):(b+d+f+h).$$

Резкое расхождение между старой и новой математикой начиналось там, где старая математика принуждена была постулировать неделимые, чрезвычайно малые элементы. Здесь-то новая математика и прибегает к reductio ad absurdum.

При этом математики IV и III вв. положили в основу своих рассуждений не демокритово разложение на элементы, каждый из которых чрезвычайно мал, а своеобразный метод, примененный софистом Антифонтом, последователем Демокрита, жившим во второй половине V в. Средневековый еврейский ученый XV в. Альфонсо в своей книге «О квадратуре круга»[1] сообщает об этом методе следующее:

«Антифонт вписывал в круг прямолинейную фигуру (имеется в виду правильный многоугольник. — *С. Л.*), после чего он делил пополам каждую дугу, прилегающую к каждой из сторон фигуры. Затем он соединял концы каждой дуги хордой. Он не переставал поступать так с каждой из дуг, пока не приходил к выводу, что путем деления он *достиг тех частиц, из которых состоят как прямая, так и окружность круга*. Однако, как сказал Аристотель, это находится в противоречии с основными положениями геометрии, так как, согласно этим основным положениям, линия не состоит из точек и величины могут быть делимы до бесконечности».

Итак Антифонт наивно полагал, как впоследствии, в конце XII в., Скалигер (см. стр. 247), что путем последовательного удвоения числа сторон вписанного многоугольника можно в конце концов дойти до окружности круга и точно определить длину окружности или площадь круга. Конечно, здесь речь не могла итти о нахождении приближенной длины круга путем вычерчивания многоугольника, который на-глаз совпадет с окружностью. Антифонт говорит о том, что удваивание должно продолжаться до тех пор, пока исследователь не дойдет «до тех минимальных частиц, из которых состоят как прямая, так и окружность», а ему не могло не быть ясно, что эти частицы лежали далеко за пределами того, что достигается зрением.

Какой же критерий мог быть у исследователя, для того чтобы утверждать, что он после ряда последовательных вычислений уже достиг этих частиц? Мне кажется, что вероятнее всего следующее: он удваивал число сторон не только вписанного, но и описанного многоугольника и продолжал эту операцию до тех пор, пока не обнаруживалось, что периметры (или площади) одноименных вписанных и описанных многоугольников оказывались равными друг другу[2]; это должно было служить доказательством того, что исследователь достиг того многоугольника, каж-

---

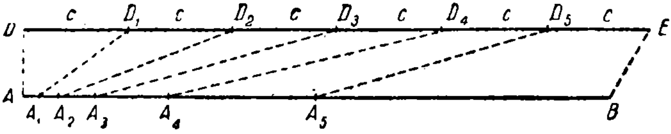
[1] Это место впервые опубликовано мною в книге «Теория бесконечно малых у древних атомистов». Л., 1935, стр. 150.

[2] При недостаточной точности античных вычислений это совпадение могло казаться наступившим сравнительно скоро.

дая сторона которого является частицей окружности и который, следовательно, полностью совпадает с кругом. Если это мое предположение верно, то нововведение, внесенное впоследствии Архимедом в метод исчерпания, заключавшееся в том, что для кривой берутся не только нижняя, но и верхняя границы, состоящие из отрезков прямых линий, было не его выдумкой, а только развитием наивного софистического приема Антифонта.

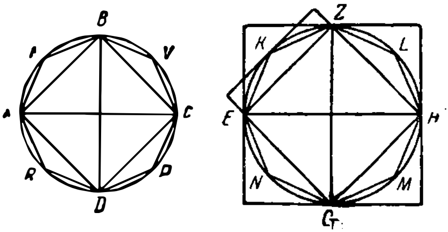
Однако, до Архимеда эта процедура нахождения верхней и нижней границ, повидимому, не нашла применения. У Антифонта было заимствовано только последовательное удвоение числа сторон вписанного многоугольника с целью, как он выражался, «исчерпать» или «израсходовать» (δαπανᾶν) все пространство внутри круга. Вместо суммирования элементов, каждый из которых был меньше любого конечного числа (как поступал Демокрит), теперь вслед за Антифонтом суммируют элементы, из которых первый — конечная, вовсе не малая величина, а дальнейшие уменьшаются по определенному принципу, пока не становятся в конце концов меньше любого конечного числа (обычно каждый последующий элемент меньше предыдущего в два или «более чем в два» раза). Далее доказывают путем reductio ad absurdum, что площадь, ограниченная кривой, не больше и не меньше определенной величины, причем для доказательства второй части такой теоремы не прибегают к описанному многоугольнику, а просто переворачивают пропорцию, полученную при доказательстве первой части.

Для примера рассмотрим вкратце содержащееся в «Началах» Евклида (кн. XII, предл. 2) доказательство того, что площади кругов относятся, как квадраты их диаметров. В основу своего доказательства Евклид кладет предл. 1, кн. X: «Если даны две неравные величины и если мы от большей из них отнимем половину или более, чем половину, и от полученного остатка половину или более, чем половину, и будем продолжать этот процесс и дальше, то в остатке получится величина, которая меньше, чем меньшая из данных величин». Доказательство этой вспомогательной теоремы хотя и не является доказательством от противного в прямом смысле слова, но все же представляет собою типичный обход атомистического доказательства, когда окончательный результат заранее известен. Автор исходит из основной аксиомы этой новой геометрии: *всякая величина, будучи складываема сама с собой, раньше или позже станет больше любой заданной конечной величины.* Пусть



Фиг. 3

дана (фиг. 3) величина AB: надо доказать, что если от нее отнять половину или больше, от остатка половину или больше и т. д., то в конце концов получим остаток, меньший, чем любая данная величина c. Для доказательства



Фиг. 4

этой теоремы прибегают к такому обходному способу: отрезок c прибавляют к самому себе до тех пор, пока не получится отрезок DE, больший AB. Теперь отнимем от AB половину или больше, от остатка половину или больше и т. д. и будем повторять этот процесс столько раз, сколько раз c содержится в E. Не трудно видеть, что каждый раз как мы отнимаем такие части от AB, а от DE соответственно отнимаем c, на AB остается меньший отрезок, чем на DE, так что, когда на DE останется c, на AB останется меньше, чем c.

На основании этой леммы Евклид и доказывает (фиг. 4) основную теорему.

Пусть даны два круга: $ABCD$ и $EZHG$. Надо доказать, что

$$ABCD : EZHG = BD^2 : ZG^2.$$

Пусть это неверно, тогда

$$BD^2 : ZG^2 = ABCD : S,$$

где S либо меньше, либо больше $EZHG$.

Допустим сперва, что S меньше $EZHG$. Впишем в круг $EZHG$ квадрат. Площадь его равна половине квадрата, описанного вокруг круга $EZHG$, а значит она больше половины площади круга. Построим на каждой стороне вписанного квадрата равнобедренный треугольник с вершиной на круге. Площадь этого треугольника равна половине площади прямоугольника, построенного на той же стороне квадрата, как указано на чертеже. А значит его площадь больше половины площади кругового сегмента. Площадь же четырех таких треугольников, построенных на всех четырех сторонах, больше половины всей разницы между площадью круга и площадью вписанного квадрата. Если на каждой из сторон образовавшегося вписанного многоугольника опять построим таким же образом по треугольнику, снова прибавится площадь, которая больше половины оставшейся разницы между площадью круга и площадью вписанного многоугольника. На основании указанного выше предл. 1 книги X эту процедуру можно продолжать до тех пор, пока разница между вписанным многоугольником и окружностью не станет меньше, чем разница между S и окружностью. Тогда окажется, что этот вписанный многоугольник O_2 больше, чем S. Теперь в круг $ABCD$ впишем многоугольник O_1, подобный многоугольнику O_2. Площади подобных многоугольников относятся, как квадраты диаметров описанных вокруг них кругов, поэтому

$$O_1 : O_2 = BD^2 : ZG^2. \qquad (1)$$

Но мы допустили, что

$$\text{окр. } ABCD : S = BD^2 : ZG^2, \qquad (2)$$

откуда

$$O_1 : O_2 = \text{окр. } ABCD : S, \qquad (3)$$

или, переставляя средние члены пропорции (permutando),

$$O_1 : \text{окр. } ABCD = O_2 : S. \qquad (4)$$

Но O_1, площадь многоугольника, меньше $ABCD$, площади описанной вокруг него окружности, а O_2, как мы только что показали, больше S. Итак, знаменатель левого отношения <1, а правого >1, что абсурдно. Значит S не может быть, как мы предположили, меньше $EZHG$.

Теперь предположим, что S' больше $EZHG$.

Тогда, оборачивая (*convertendo*) пропорцию (2), получим

$$S : ABCD = ZG^2 : BD^2. \tag{5}$$

Пусть

$$S : ABCD = EZHG : x, \tag{6}$$

или, *permutando*,

$$S : EZHG = ABCD : x.$$

Поскольку, согласно предположению, $S > EZHG$, очевидно, $x < ABCD$.

Но из (5) и (6)

$$ZG^2 : BD^2 = EZHG : x.$$

Откуда, согласно (1),

$$O_2 : O_1 = EZHG : x,$$

permutando,

$$O_2 : EZHG = O_1 : x.$$

На основании доказанного выше, площадь многоугольника при многократном удвоении числа сторон может быть сделана больше любого x (если $x < ABCD$, а это доказано). Итак $O_2 < EZHG$, а $O_1 > x$, что также невозможно.

Значит S не больше и не меньше, чем $EZHG$, а следовательно, оно равно $EZHG$, что и требовалось доказать.

При таком способе доказательства приходится в данную кривую вписывать многоугольники, увеличивая число их сторон до тех пор, пока пространство между многоугольниками и кривой не станет сколь угодно малым, пока оно не «исчерпается». Поэтому такой метод и получил название *метода исчерпания*. Основателем его считают математика платоновской школы Евдокса.

Не трудно убедиться в огромных принципиальных преимуществах этого нового метода. Здесь впервые в основу инфинитезимальных выкладок кладется понятие *континуума*; вместо совокупности недоступных чувствам «неделимых», т. е. вместо *метафизической* по существу предпосылки, исследователь орудует с *рядом конечных величин, уменьшающихся непрерывно по определенному закону*. Излишне говорить, какое огромное влияние оказал этот новый метод на нынешнюю математику. Но адвокатский способ изложения и сокрытие от читателя евристической процедуры, приведшей к решению, имели результатом то, что только исключительно даровитый читатель мог понять, что речь идет о переменной величине, все более и более приближающейся к пределу. Понятия «предел» античная математика вообще не вводила, и пропасть между последним из взятых конечных членов ряда и пределом благодаря приему reductio ad absurdum, оставалась ничем не заполненной. Новый метод не обогатил геометрию ни одной новой истиной; для строгого доказательства каждого из положений, доказанных нестрогим путем математики атомистов, снова и снова повторялась длинная и скучная процедура исчерпания.

Вся эта большая работа в области геометрии, проделанная математиками идеалистических философских школ в IV в. и базирующаяся в свою очередь на математике атомистов V в., была подытожена и систематически изложена в «Началах» (Στοιχεῖα) Евклида. В труде Евклида было мало оригинального; в области теоретически-методологической он базировался главным образом на исследованиях Евдокса. Но книга его отличалась исключительной четкостью, строгостью и обстоятельностью; все, что было существенного в трудах предшественников Евклида, было здесь собрано. Вот почему книга Евклида быстро вытеснила все геометрические «Начала», бывшие в ходу до него; когда, например, Архимед ссылается на «Начала», не называя автора, он всегда имеет в виду Евклида. Подобно тому как Гомер стал поэтом par excellence и когда говорили просто «поэт» (ὁ ποιητής) всегда имели в виду Гомера, так и выражение ὁ στοιχειωτής, «творец Начал», стало означать Евклида. В книге Евклида были, если угодно, и философская направленность и художественная законченность: ее конечной целью и результатом было исследование правильных многогранников, игравших такую видную роль в платоновском учении об идеях, изложенном в «Тимее».

Но был ряд проблем, решение которых не требовало для своего обоснования ни недозволенных предпосылок о неделимых, ни метода исчерпания; однако эти проблемы при помощи циркуля и линейки решены быть не могли. В самом деле, при помощи циркуля и линейки могут быть решены только задачи, сводящиеся к уравнениям первой и второй степеней, а в течение V в. греческая геометрия поставила уже ряд задач, сводящихся к уравнениям третьей и более высоких степеней.

Такими задачами были — не говоря о квадратуре круга, которая не может быть разрешена и при помощи уравнений высших степеней с конечным числом членов — удвоение куба («делосская» задача) и трисекция угла, наиболее модные вопросы в геометрии второй половины V в. Все попытки разрешить эти задачи при помощи применявшихся до тех пор так называемых плоских (επίπεδοι) геометрических мест (кругов и прямых) не приводили ни к какому результату. Для решения этих задач идут двумя путями: с одной стороны, по пути изобретения геометрических инструментов, более сложных, чем циркуль, с другой — в связи с развитием стереометрии—по пути *объемных* (στερεοί) геометрических мест, т. е. вместо пересечений линий (прямых с окружностями) ищут пересечения *поверхностей* (плоскостей с цилиндрами, конусами и шарами) и таким путем приходят к нахождению и пересечению *кривых второго порядка*.

Приборы для вычерчивания более сложных кривых употребляются и в наше время; вспомним хотя бы упоминаемый во всех элементарных учебниках прибор для вычерчивания эллипса, основанный на том его свойстве, что сумма фокусных расстояний равна постоянной величине (большой оси).

Геометры античности ввели в обращение целый ряд таких приборов. Здесь я остановлюсь только на одном приборе, изобретенном другом Архимеда Эратосфеном для нахождения двух средних пропорциональных (μεσότητες) между двумя данными величинами, ибо к этой задаче сводится уже упомянутая задача удвоения куба. В самом деле, задача удвоения куба сводится к геометрическому решению уравнения

$$\frac{x^3}{a^3}=\frac{2}{1},$$

а это частный случай уравнения

$$\frac{x^3}{a^3}=\frac{m}{n}.$$

Если мы положим

$$\frac{m}{y}=\frac{y}{z}=\frac{z}{n}, \tag{1}$$

т. е. будем искать два средних пропорциональных y и z между m и n, то будем иметь

$$\frac{m}{y}\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{n}=\frac{m}{n}, \tag{2}$$

но в силу (1)

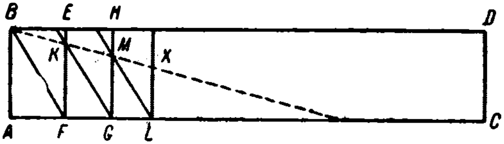
$$\frac{m}{y}\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{n}=\frac{m^3}{y^3}=\frac{m}{n}=\frac{x^3}{a^3}, \tag{3}$$

откуда

$$\frac{m}{y}=\frac{x}{a},$$

что и требовалось найти.

Эратосфен устроил (фиг. 5) прибор «месолаб» (т. е. «Уловитель средних величин»), состоящий их трех равных



Фиг. 5

друг другу прямоугольных треугольников любых размеров; из них один закреплен неподвижно, а два других передвигаются вправо и влево по параллельным друг другу каналам BD и AC (по верхнему движется катет, по нижнему — противоположная ему вершина). На вертикальном катете одного из подвижных треугольников отложим снизу отрезок LX так, чтобы AB: $LX = m : n$. Теперь будем двигать оба подвижных треугольника до тех пор, пока точки K и M пересечения катета одного треугольника с гипотенузой следующего за ним не окажутся на одной прямой с B и X. Тогда из подобия $\triangle BFA$ и $\triangle KFG$

$$\frac{AB}{KF}=\frac{AF}{FG}=\frac{BK}{KM}.$$

Но из подобия $\triangle BFK$ и $\triangle KMG$

$$\frac{BK}{KM}=\frac{KF}{MG},$$

откуда

$$\frac{AB}{KF}=\frac{KF}{MG}.$$

Точно так же из подобия $\triangle KFG$ и $\triangle MGL$

$$\frac{KF}{GM}=\frac{FG}{GL}=\frac{KM}{MX}.$$

Но из подобия $\triangle KMG$ и $\triangle MXL$

$$\frac{KM}{MX}=\frac{MG}{XL},$$

откуда

$$\frac{AB}{KF}=\frac{KF}{MG}=\frac{MG}{XL},$$

а следовательно, по доказанному выше,

$$\frac{MG^3}{XL^3}=\frac{AB}{XL}=\frac{m}{n},$$

что и требовалось найти.

При стороне XL, равной стороне данного куба, и при AB, равной $2XL$, отрезок MG, очевидно, будет стороной удвоенного куба.

До Эратосфена применялся более простой инструмент. Задачу сводили к построению отрезка данной длины, лежащего между двумя линиями (прямыми или окружностями), причем продолжение его должно проходить через данную точку. Для этого построения на линейку наносили две точки, расстояние между которыми равнялось данному; затем накладывали одну точку на первую из двух линий, другую — на вторую и двигали линейку (так чтобы обе точки оставались на этих линиях) до тех пор, пока линейка не пройдет через данную точку. Тогда задача удвоения куба без труда сводилась к построению отрезка данной длины, лежащего между двумя взаимно перпендикулярными прямыми, продолжение которого проходит через данную точку. Этот прием носит в греческой науке название νεῦσις («наклонение»); мы встретимся с ним у Архимеда.

Однако характерно для греческого гения, что греки не остановились на такого рода практических решениях трудных математических вопросов, а стремились обобщить и исследовать их, сводя их к геометрическим местам и их пересечению. При этом пришлось пойти по второму пути, по пути изучения *объемных* (см. стр. 32) *геометрических мест* (мы назвали бы их «пространственными»).

Свидетельства об Архите, пифагорейском математике начала IV в., показывают нам[1], что первоначально эти задачи действительно решались путем построения пересекающихся между собою плоскостей, цилиндров, конусов и т. п. Однако при этих построениях последователи Архита—Менехм и Евдокс — убедились в том, что при пересечении этих поверхностей между собой получается несколько определенных типов кривых и что поэтому, если изучить свойства этих кривых, громоздкую процедуру построения тел можно заменить вычерчиванием по определенным правилам этих кривых. Поскольку эти кривые получились из пересечения тел между собой, они и получили название *объемных* (στερεοί) геометрических мест.

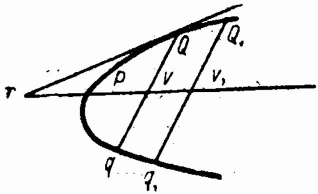
Все различные кривые, получающиеся таким путем, можно получить из сечения трех типов конуса плоскостью, перпендикулярной к его образующей. Кривую, получающуюся из сечения тупоугольного конуса (т. е. конуса

---

[1] Архит решал задачу удвоения куба (нахождения двух средних пропорциональных) путем нахождения точки пересечения конуса, цилиндра и тора (т. е. тела, образованного вращением круга вокруг касательной к его окружности).

с тупым углом при вершине в осевом сечении), назвали «сечением тупоугольного конуса»; соответственно и две другие кривые были названы «сечением прямоугольного конуса» и «сечением остроугольного конуса». Так называет эти сечения и Архимед. Уже после Архимеда (вероятно, впервые в дошедших до нас «Конических сечениях» Аполлония Пергейского) «сечение тупоугольного конуса» получило название гиперболы, «сечение прямоугольного конуса» — параболы, «сечение остроугольного конуса» — эллипса. Архимед этих новых названий еще не знает.

Коническим сечениям уже в середине IV в. посвятил специальную книгу друг Платона Менехм, затем Аристей написал пять книг об «Объемных местах» и, наконец, Евклид, наряду с «Началами», написал еще «Конические сечения», где подытожил все сделанное до него в этой области; его книга стала классической. На нее обычно и ссылается Архимед.



Фиг. 6

Архимед не повторяет доказательств того, что уже было сделано его предшественниками, а отсылает к ним. Из этих ссылок мы видим, что было уже достоянием науки во время выхода в свет книги Евклида; это очень важно для правильной оценки собственных заслуг Архимеда. Перечислим важнейшие из этих основных выводов доархимедовой науки.

Для параболы (фиг. 6): Диаметр параболы PV делит ее хорду Qq, параллельную касательной в конце P диаметра, пополам.

2. Если в конце Q хорды Qq проведем касательную QT до пересечения с диаметром в T, то $PV = PT$.

3. Если две хорды QVq и $Q_1V_1q_1$, параллельные касательной в точке P, пересекают диаметр в точках V и V_1, то

$$PV : PV_1 = QV^2 : Q_1V_1^2.$$

Не трудно видеть, что это уравнение есть выраженное в виде пропорции основное уравнение параболы

$$px = y^2.$$

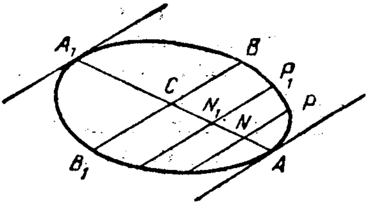
Для эллипса (фиг. 7):

Отношение квадрата ординаты к произведению соответствующих отрезков диаметра есть постоянная величина, равная отношению квадратов полудиаметров (или диаметров):

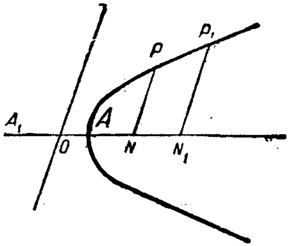
$$\frac{PN^2}{AN\cdot A_1N}=\frac{P_1N_1^2}{AN_1\cdot A_1N_1}=\frac{CB^2}{CA^2},$$

т. е. в наших символах (приняв точку A за начало координат)

$$\frac{y^2}{x\,(2a-x)}=\frac{b^2}{a^2},$$



Фиг. 7



Фиг. 8

что легко приводится к каноническому виду

$$\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Аналогично *для гиперболы* (фиг. 8):

$$\frac{PN^2}{AN\cdot A_1N}=\frac{P_1N_1^2}{AN_1\cdot A_1N_1},$$

т. е. в наших символах (приняв A за начало координат)

$$\frac{y^2}{x\,(2a+x)}=c(\text{const}).$$

Это уравнение не трудно привести к привычному для нас виду

$$\frac{(x+a)^2}{a^2}-\frac{y^2}{c}=1.$$

Однако ни Архимед ни его предшественники не имели еще представления о гиперболе как о единой кривой, состоящей из двух ветвей; поэтому они не могли еще представить частное в данной выше пропорции как отношение квадратов полудиаметров гиперболы.

Исходя из этих положений Менехм, Аристей и Евклид построили стройное учение о конических сечениях. Мы не можем здесь останавливаться на этом вопросе сколько-нибудь подробно; укажу как на пример на то, что уже им были известны фокусные свойства эллипса. Для нас важно лишь, что вновь найденные кривые были немедленно же использованы как объемные геометрические места — в частности, для более строгого научного решения проблем удвоения куба и трисекции угла. Уже Менехм доказал, что решение задачи удвоения куба (или, что то же, нахождения двух средних пропорциональных) при помощи инструментов описанного выше типа фактически сводится к нахождению точки пересечения параболы и равносторонней гиперболы [1]. Задача трисекции угла также сводилась к построению отрезка данной длины, лежащего между двумя взаимно перпендикулярными прямыми, продолжение которого проходит через данную точку; это построение осуществлялось соответствующим перемещением линейки. Теперь, точно так же, как в случае удвоения куба, доказали, что фактически это построение сводится к нахождению точки пересечения окружности с равносторонней гиперболой.

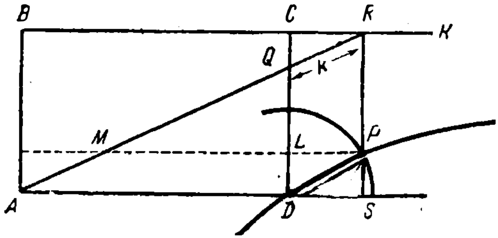
Чтобы читатель имел представление, как проводились подобные доказательства, приведем в качестве примера это рассуждение (фиг. 9).

Пусть даны две взаимно перпендикулярные прямые CD и BK. Требуется построить отрезок данной длины k между этими прямыми так, чтобы его продолжение прошло через данную точку A. Предположим, что такой отрезок построен; пусть прямая, на которой он находится, пересекает CD в точке Q, а BK в точке R. Из A опускаем перпендикуляры AB и AD на BK и CD; получим прямоуголь-

[1] Очевидно, что любое кубичное уравнение $Ax^3+Bx^2+Cx+D=0$ может быть представлено как пересечение параболы $y=Ax^2+Bx+C$ с равносторонней гиперболой $xy+D=0$ или другим подобным образом, и указанные задачи приводятся к кубичным уравнениям.

ник $ABCD$. Проведем DP, параллельную AR, и RP, параллельную CD. Пусть эти прямые пересекаются в точке P. В параллелограме $DPRQ$, очевидно, $DP = QR = k$.

Ясно, что P лежит на окружности с центром в D и с радиусом k.



Фиг. 9

Из подобных треугольников ABR и QCR (*dividendo et permutando*)

$$\frac{BR}{BC} = \frac{AR}{AQ}. \tag{1}$$

Из подобных треугольников ARS и AQD

$$\frac{AR}{AQ} = \frac{RS}{QD} = \frac{AB}{RP}. \tag{2}$$

Из (1) и (2)

$$\frac{BR}{BC} = \frac{AB}{RP},$$

или

$$BR \cdot RP = AB \cdot BC;$$

но это — уравнение равносторонней гиперболы с центром и началом координат в данной точке B, ибо мы можем переписать его на языке наших символов так:

$xy = \text{const}$ (AB и BC — постоянные величины).

Следовательно, точка P лежит также на равносторонней гиперболе с центром в B, а значит на пересечении равносторонней гиперболы с центром в B с окружностью радиуса k с центром в D.

Как мы видели, учения о конических сечениях Евклид в свои «Начала» не включил. Нельзя объяснить это случайностью; эта область идеалистическими философами также признавалась недостойной «математики, цель которой — приблизить человека к божеству». Несмотря на то, что труд Менехма вышел в свет уже в 360—350 гг., Аристотель в дошедших до нас сочинениях нигде ни словом не упоминает о конических сечениях. Платон же по поводу уже упомянутых работ Архита и Менехма, пытавшихся свести удвоение куба «к применению инструментов и механизмов, месографов, при помощи которых они вычерчивали кривые линии и находили их пересечения», замечал: «При таких решениях пропадает и гибнет благо геометрии, возвращающейся назад к чувственным вещам. При этом она не подымает нас ввысь, не приводит нас в общение с вечными и бестелесными идеями, пребывая с которыми бог всегда есть бог...» Платон негодовал на них за то, что они «губят и разрушают благо геометрии, так как при этом она уходит от бестелесных и умопостигаемых вещей к чувственным и пользуется телами, нуждающимися в применении орудий пошлого ремесла». Впоследствии платоник Плутарх не находит лучшего комплимента для Архимеда, чем сказать, что он «в своих доказательствах *вступает в спор с материей*».

Наука, однако, не могла обходиться без этих методов, ибо они представляли единственную возможность двигаться вперед и приходить к новым открытиям. С запретом Платона, как мы видим, не считались даже его друзья и ученики; однако они тщательно отделяли νεῦσις и конические сечения от «чистой» математики. Вот почему в «Началах» Евклида не оказалось места для этих отделов.

На этих учебниках и этих взглядах был воспитан отцом с детства Архимед. То, что относилось к этим «механическим» частям математики, еще в большей мере относилось к самой механике: механика третировалась как чисто прикладная, практическая наука (ἐμπειρία τις), не имеющая ничего общего с высокой чистой наукой, просветляющей душу человека. Как ни интересны, как ни плодотворны эти области, но Архимеда приучили на них смотреть как на развлечение между делом, а не как на настоящие математические занятия, часто сводившиеся либо к усвоению уже сделанного предшественниками и к решению различных частных задач для применения на практике уже открытых положений, либо к построению скучных и однообразных доказательств по методу исчерпания для строгого доказательства положений, найденных уже прежде методом неделимых или установленных эмпирически.

Влияние этого воспитания дает себя знать во всей дальнейшей научной деятельности Архимеда. Архимед, этот гениальнейший механик-изобретатель, написал только один труд по прикладной механике; в остальных его трудах нет ни одного описания механизма, из них тщательно устранено все, что имеет прикладной характер, не описан ни один прибор для тех решений, «νεῦσις», о которых мы выше говорили.

Соответствовали ли действительно эти воспитанные с детства установки природному душевному складу Архимеда? В этом можно сильно сомневаться. Сделанный им небесный глобус, на котором можно было наблюдать не только движения светил, но и затмения и который приводился в движение водой, изобретенная им машина для поливки египетских полей, целый ряд сложнейших военных машин — дают нам право восстановить образ инженера-изобретателя, несомненно уже с детства проявлявшего специфическую гениальность в *технической* области. Однако полученное им воспитание заставляло его загонять эти живые устремления в глубь души, идя по путям, принятым в идеалистической математической науке. Я убежден, что, не оценив в достаточной мере этих особенностей душевного склада Архимеда, мы не сможем правильно понять и тот своеобразный путь развития, который он проделал в области чистой математики.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

☆

Александрийский Музей

В то время, когда Архимед овладел математикой настолько, что для дальнейшего углубления в ней ему нужно было предпринять поездку за границу, его родственник Гиерон, несомненно, достиг уже высшей неограниченной власти в государстве; это не могло не повлиять и на материальное положение семьи Фидия. Для близкого родственника правителя Сиракуз такая поездка, хотя и была в те времена связана с очень большими расходами, однако никаких трудностей не представляла. Круг интересов Архимеда ограничивался математикой; никаких интересов к философии и к гуманитарным наукам вообще, поскольку можно судить на основании дошедших до нас свидетельств, у него не было. Если главным культурным центром Греции в это время были Афины, то крупнейшие астрономы и математики того времени — Эратосфен и Конон — жили в Александрии. Понятно, что он поехал в Александрию; можно думать, что отец его, будучи астрономом, предназначал его для занятий не только математикой, но и астрономией. Как мы увидим, живой интерес и глубокое знакомство с астрономией характерны для Архимеда в течение всей его жизни, Ученые, к кругу которых примкнул Архимед, группировались вокруг Александрийского Музея. С древнейших времен греческие монархи имели обычай собирать при своем дворе виднейших поэтов и ученых. Эти ученые не только непосредственно обслуживали потребности двора (врачи, инженеры, поэты и музыканты, организаторы празднеств и т. д.), но и увеличивали международное значение и популярность государства. С другой стороны, поэты и музыканты с древнейших времен образовывали особые религиозные союзы с состязаниями в пении и музыке. Такие союзы (как, например, в Милете) обычно имели своими верховными попечителями богов-покровителей искусств — Аполлона, Муз, Харит. Такие же религиозные союзы врачей существовали при храмах бога медицины Асклепия.

Такого типа учреждение, но в грандиозном масштабе, и было организовано Птолемеем I Сотером в Александрии. С юридической стороны это было религиозное сообщество при храме Муз, но на структуру его оказала большое влияние платоновская Академия. Впрочем, никаких видных философов Александрийский Музей в свои ряды не привлек: центром философских занятий остались, как и прежде, Афины. Но все прочие отрасли науки и искусства были здесь представлены очень богато. «В то время как специальные науки (Einzelwissenschaften) здесь достигли пышного расцвета, философия здесь увядала» (Hirzel).

Идея, легшая в основание организации Музея, была весьма гуманной: собрать в Александрии крупных, зарекомендовавших себя ученых, освободить их от всяких жизненных забот, предоставить им максимальный досуг и дать им, таким образом, возможность заниматься, чем каждый желает, без всякого давления с чьей бы то ни было стороны. Знаменитые ученые, собранные с различных концов мира, жили при храме Муз на полном иждивении царя; они обедали совместно, и эти обеды сопровождались научными беседами на самые различные темы. Серьезная научная работа и тогда уже требовала больших расходов: историки и литературоведы нуждались в хорошей библиотеке; астрономы, физики, естествоиспытатели и географы — в сложном инструментарии и дорогостоящих экспедициях. На все эти нужды щедро выдавались деньги из царской казны. Так, географ и математик Эратосфен, о котором мы подробнее скажем ниже, измерил земной радиус на основании астрономических наблюдений, произведенных в Родосе, Александрии и Сиене; на это предприятие понадобились огромные средства, и они были даны александрийским двором.

Но наиболее ценной частью Музея была библиотека. Частью путем покупки, частью путем переписывания здесь были собраны почти все греческие книги, начиная с Гомера. Ряд ученых занимался выправлением текста книг и их комментированием. При этом допускалась большая свобода: даже в гомеровских поэмах, игравших у греков роль священного писания, эти ученые позволяли себе не только исправлять ошибки, но и браковать целые стихи, как подложные [1]. Они считали допустимым даже сомневаться в том, что Гомер был автором этих поэм: некоторые из александрийских ученых считали, что «Илиада» и «Одиссея» написаны разными авторами. Тем же свободным духом проникнуты и труды работавшего в Музее врача Герофила. Он выступил против обычного в то время представления, по которому душа человека находится в сердце или грудобрюшной преграде; он открыл, что органом мышления является мозг, центр разветвленной нервной системы, что артерии наполнены не воздухом, как думали до него, а кровью. К этим выводам он пришел, вскрывая человеческие трупы; до него никто не решался на такие вскрытия, — это считалось кощунством. В том же александрийском Музее были сделаны блестящие открытия в области физики, астрономии и математики, о которых мы скажем ниже.

Получается впечатление высокого расцвета науки и полной свободы научной мысли. Но это только поверхностное впечатление.

Расцвет науки в эту эпоху носил крайне односторонний характер. В области ряда гуманитарных наук, например истории, философии, наблюдается отсутствие оригинальных трудов, усталость мысли и упадок. В классическую

---

[1] Другая обстановка была в конкурирующей с Музеем Пергамской научной школе, ориентировавшейся на Рим: царь Аттал I приказал казнить «грамматика» Дафида за недостаточно почтительное отношение к Дельфийскому оракулу и Гомеру!

эпоху наука была продуктом творчества сравнительно широких групп населения; борьба между классами и группами отражалась в борьбе между научными группировками, и в этой непрестанной борьбе рождалась научная мысль. Теперь наука, как и все прочие отрасли общественной жизни, получила придворный характер, развиваясь при покровительстве царей. Не удивительно, что теперь принципиальные противоречия в основном стираются; если все еще продолжается спор между различными течениями, то он посвящен вопросам, не имеющим большого принципиального значения. Мы ничего, например, не слышим о том, чтобы кто-либо из ученых Музея проводил в своих сочинениях материалистические взгляды, чтобы, например, в Музее работал кто-либо из эпикурейских ученых. Поскольку нам известны взгляды ученых Музея, все они стояли на платоновских, академических или стоических позициях. В ряде областей эти позиции делали невозможным дальнейший прогресс науки. Как мы увидим, как раз наиболее выдающиеся ученые в ряде вопросов, не связанных тесно с материалистическим мировоззрением, фактически возвращаются к позициям Демокрита, но при этом следы заимствования стираются. Взгляды Демокрита перерабатываются и приспособляются так, чтобы по возможности устранить противоречия между ними и основными предпосылками идеалистической философии; разумеется, это не всегда удавалось. Большинство же александрийских ученых вовсе не читало Демокрита и знакомилось с его взглядами и открытиями только из тенденциозной выборки, изложения и критики их у Аристотеля и его последователей, несмотря на то, что в александрийской библиотеке, при ее исключительной полноте, конечно, были налицо все сочинения Демокрита. Так, применявшиеся Демокритом приемы примитивного интегрирования были близки к подобным же приемам, применявшимся впоследствии Архимедом; однако Архимед, как мы увидим ниже, познакомился с математическими работами Демокрита лишь значительно позже, после возвращения из Александрии в Сицилию.

Я не хочу этим сказать, что Птолемеи запрещали в Музее изучение Демокрита и других материалистов или что произведения Демокрита хранились в каком-либо особом секретном фонде библиотеки. В этом не было нужды. Как мы уже говорили в первой главе, вся беда как раз в том, что люди уже утратили навыки к свободному мышлению, что они с детства приучались направлять мысль по определенному одобренному начальством фарватеру и сами старались забегать вперед, угадывая мысль власть имущих. Я иллюстрирую эту мысль несколькими примерами из жизни Музея.

Женой правившего с 247 г. в Египте Птолемея III Евергета была дочь киренского царя Вереника, игравшая большую роль в управлении страной и, повидимому, державшая мужа под башмаком. Она была просватана еще ребенком за Евергета и была единственной наследницей киренского престола; но мать ее, считая нежелательным соединение Кирены и Египта в одних руках, решила выдать дочь за своего любовника Деметрия. Тогда Вереника, видя, что ее честолюбивые планы рушатся, будучи еще пятнадцатилетней девочкой, собственными руками зарезала Деметрия. Руководитель библиотеки Музея поэт Каллимах счел своим долгом в своих стихотворениях прославить это убийство. Вскоре после вступления Евергета на престол ему пришлось отправиться в поход в Сирию. Его жена Вереника принесла свои волосы в дар богам, чтобы вымолить у них счастливое возвращение мужа. Но по возвращении Евергета обнаружилось, что волосы Вереники из храма исчезли. По античным представлениям тот, кто завладеет волосами какого-либо человека, может, колдуя над ними, принести ему тяжелый вред или даже смерть; не удивительно, что пропажа волос привела в ярость Евергета. В это время в Музее работал Конон из Самоса, по свидетельству такого авторитетного свидетеля, как Архимед, другом которого он был, — крупнейший астроном и математик того времени. Конон нашел выход из создавшегося положения: он заявил, что волосы Вереники перенесены богами на небо, что обнаруженное им на небе новое созвездие и есть волосы Вереники. Уже упомянутый поэт Каллимах по этому случаю написал изящное стихотворение, воспевающее это превращение волос властной царицы в созвездие.

Случай этот не был единичным: как подчеркивает крупнейший знаток александрийской литературы Зуземиль, и другие гимны Каллимаха переполнены политическими намеками, переполнены подхалимским прославлением Птолемея и членов его семьи и в прямой и в косвенной форме; «боги, которым эти гимны посвящены, часто являются только оболочкой для прославления под видом бога царствующего монарха». Четвертый гимн Каллимаха был ему непосредственно заказан царем; остальные пять «во всяком случае служили интересам этого царя и его политики».

Такой же характер носило и творчество другого поэта Музея — Феокрита из Сиракуз. Вначале он тщетно пытался добиться расположения ряда богатых и могущественных людей; затем он делает попытку втереться в милость монарха своего родного города, уже упомянутого Гиерона; он посвящает Гиерону свою XVI идиллию. Но и из этого ничего не вышло, ибо,воспевая борьбу с Карфагеном, Феокрит не понял истинных политических намерений Гиерона. Тогда поэт решает попытать счастья у Птолемея II Филадельфа. В своей XIV идиллии [1] он описывает, как влюбленный покидает свою неверную возлюбленную, чтобы поступить в войско царя Филадельфа; идиллия кончается прославлением этого царя. Эта лесть имела успех, и Феокрит был приглашен в Музей. После этого он пишет ряд идиллий, содержащих прозрачную лесть по адресу Филадельфа, Арсинои и Вереники; в XVII идиллии под видом браков Кроноса и Реи и Зевса и Геры он говорит о браке Филадельфа с Арсиноей. «Так далеко, — замечает Зуземиль, — не заходил даже Каллимах».

При всем изяществе этой александрийской поэзии ее нельзя назвать иначе, как вырождающейся. Тщетно стали бы мы искать при александрийском дворе политической комедии в стиле Аристофана или трагедии в стиле Еврипида, ставящей под мифологической оболочкой самые жгучие вопросы политического и морального характера. Даже эротической поэзии в стиле Архилоха или Сапфо, отражающей сильные и глубокие любовные переживания, мы не найдем в эту эпоху. В Музее идет спор между двумя направлениями: одни, как Аполлоний Родосский, счи-

[1] Номера идиллий Феокрита не соответствуют их хронологическому порядку.

тают основной задачей поэтов писание больших поэм, другие (Каллимах, Феокрит) считают, что эпос отжил свой век, что надо писать небольшие изящные вещицы. В этом последние были безусловно правы: того непосредственного наивного восприятия вещей и эпического спокойствия, которое было необходимо для писания эпических поэм в стиле Гомера, нельзя было уже найти при александрийском дворе. Но и идиллии александрийских поэтов, напичканные глубокой мифологической ученостью, с размеренными модными чувствами и изысканным языком действующих лиц, говорящих на искусственном, «народном», дорийском диалекте, лишены всякой силы и всякого живого чувства. Значительно более свежее впечатление производят на нас натуралистические сценки Геронда, написанные на том же модном дорийском диалекте, но и они лишены какой бы то ни было печати гения, не говоря уже о том, что они не лишены лести по адресу Птолемеев.

Правда, эллинистическая математика и астрономия находились в лучшем положении. Здесь и в эллинистическую эпоху были сделаны значительные успехи. Это объясняется отчасти чрезвычайным развитием военного дела, тем, что для военных усовершенствований необходима была основательная математическая, механическая и техническая основа, а для торгового и военного мореходства — основательное знание астрономии. Но астрономия и математика переживали свой последний поздний расцвет; после поколения Эратосфена и Архимеда мы уже не находим здесь новых интересных идей, и эти науки быстро идут к упадку.

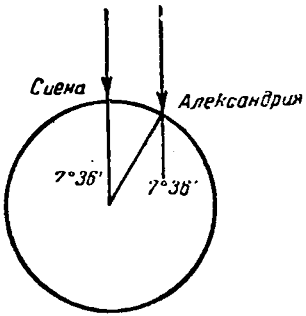
К тому же нельзя думать, что математические науки могли отгородиться китайской стеной от текущей политической жизни и что атмосфера подхалимства и казенных предначертаний могла не отразиться на этих науках. Мы видели уже, как крупнейший астроном и математик того времени Конон счел себя обязанным обнаружить на небе отрезанные волосы властвующей царицы. До самой смерти он оставался прежде всего придворным, а затем уже ученым: умирая (около 230 г.), он величайший труд свой — «Астрономию» в семи книгах — оставляет в наследство царю Евергету.

С другой стороны, в те времена специалисты в отдельных областях науки представляли собою скорее исключение, чем правило, и вряд ли такая специализация поощрялась свыше. Следуя заветам Аристотеля, ученые старались работать одновременно и в филологии, и в поэзии, и в математических науках. Прекрасным образцом такой разносторонности является ближайший друг Архимеда Эратосфен; именно в письме к нему Архимед раскрывает, как мы увидим ниже, сокровеннейшие тайны своей науки. Эратосфен из Кирены был ровесником Архимеда, но умер позже его, так как дожил до 80 лет. Его учителями были философы Аристон и Аркесилай, стоики, порвавшие со своей философской школой вследствие каких-то разногласий, грамматик Лисаний из Кирены, поэт Каллимах. Гуманитарным наукам он учился в Афинах, где, кстати, одним из его учителей (на ряду с упомянутыми уже философами) был и художник Апеллес. Около 245 г. он был приглашен в Александрию в качестве воспитателя наследника престола, будущего Птолемея IV Филопатора. Одновременно он занимал должность директора библиотеки, освободившуюся после смерти его учителя Каллимаха.

Из дошедшей до нас эпиграммы Эратосфена мы видим, что он был настоящим придворным. Эпиграмма является приношением в храм «бога Птолемея», т. е. покойного царя Птолемея I. В ней Эратосфен рассыпается в лести и пред царствующим Птолемеем III Евергетом и перед своим учеником, будущим царем. Другое его сочинение было даже озаглавлено «Арсиноя» — так звалась вдовствующая царица, жена Птолемея II Филадельфа.

Написал Эратосфен и ряд философских сочинений. С его философскими занятиями были связаны и его космополитические высказывания, о которых мы говорили выше. Далее, он написал трактаты «О добре и зле», «О богатстве и бедности», «Об искусстве жить, не скорбя», «О том, что всякий поэт стремится развлекать, а не учить читателя». Все это — темы, теснейшим образом связанные с современностью и текущей политикой, и можно не сомневаться, что придворный ученый отвечал на эти вопросы так, как это было в интересах его покровителей. Он написал сочинения и по истории литературы («О древней комедии»), и по хронологии («Хронография», «Олимпийские победители»), и по грамматике; писал и стихотворения (например, «На смерть Гесиода», «Эригона», «Гермес»). Все это не помешало ему быть одним из самых выдающихся географов (он написал «Географию» и сочинение «О ветрах») и выдающимся астрономом. Он написал книги «Об измерении Земли», «Об измерении Солнца», «О расположении звезд», «О расположении знаков Зодиака».

Для определения величины Земли были выбраны два значительно удаленных друг от друга места, лежащие, как тогда думали, на одном и том же меридиане: одно — Александрия, другое — далеко на юге — Сиена. Наблюдения были сделаны во время летнего солнцестояния в 12 часов дня (фиг. 10). Отвес солнечных часов (гномон) не отбрасывал в это время никакой тени в Сиене, а в Александрии длина тени соответствовала углу в 7°36′ между отвесом и солнечным лучом (1/50 всего круга). Ввиду равенства накрест лежащих углов (все солнечные лучи Эратосфен принимал параллельными друг другу) центральный угол между земными радиусами, идущими к Сиене и Александрии, также должен быть равен 7°36′; значит, расстояние от Александрии до Сиены, равное 785 км, есть 1/50 окружности экватора; следовательно, окружность экватора равна 39 250 км, а диаметр — 12 625 км. Здесь ошибка против действительной длины земной оси всего около 75 км.



Фиг. 10

В сочинении «Об измерении солнца» Эратосфен приходил к выводу, что Солнце в 27 раз больше Земли и что расстояние от Земли до Солнца 5 104 000 км.

Этих вычислений мы еще коснемся, когда будем говорить о соответствующих вычислениях Архимеда. Перейдем теперь к математическим произведениям Эратосфена. Здесь только в области теории простых чисел интересы Архимеда, поскольку нам известно, не совпадали с интересами Эратосфена. К этой области относится наиболее известное из математических сочинений Эратосфена (Κόσκινον — «решето»), в котором он давал простейший способ составления таблицы простых чисел.

Остальные математические труды Эратосфена были посвящены вопросам, волновавшим также и Архимеда. Это прежде всего сочинение «О конических сечениях» — вопрос, которому Архимед посвятил значительную часть своих трудов, и сочинение «Об измерениях» (Καταμετρήσεις). Наконец, сочинение «О средних величинах» (Περὶ μεσοτήτων) скорее всего посвящено было нахождению одной, двух и более двух средних пропорциональных, при помощи которых, как мы говорили уже, решались знаменитые задачи удвоения куба и трисекции угла.

Вопрос о нахождении двух средних пропорциональных интересовал честолюбивого Эратосфена уже с самого начала его научной деятельности: ведь к этому вопросу сводилась знаменитая «делосская задача» — удвоение куба, над которой ломали себе голову все великие математики того времени. Еще будучи воспитателем наследника престола, Эратосфен нашел решение этой задачи при помощи изобретенного и сконструированного им прибора «месолаба», о котором мы говорили выше. Это привело его в такой восторг, что он, как мы говорили уже (стр. 49), счел нужным сделать благодарственное посвящение высшему придворному божеству Птолемею I. Эратосфен посвятил в его храм мраморный столб, на котором был изображен «месолаб», дано геометрическое доказательство правильности решения и начертана эпиграмма, в которой Эратосфен высокомерно противопоставлял себя своим предшественникам; здесь, между прочим, говорилось:

Способ нелегкий сеченья цилиндров постичь не старайся,
Точно Архит, и не тщись конус трояко рассечь
Вместе с Менехмом; Евдокс божественный если начертит
Линии формы кривой, также не следуй за ним.

Подробнее эта полемика с предшественниками была развернута в главном программном философском сочинении Эратосфена «Платоник» (Πλατωνικός). Несомненно, именно отсюда заимствованы Плутархом и другими позднейшими авторами сообщения об отношении Платона к методу «объемных мест», введенному Архитом, Менехмом и Евдоксом. Здесь Эратосфен цитировал взгляд Платона (см. стр. 40), согласно которому, прибегая для доказательства теорем к чувственным и осязаемым телам трех измерений, математика низводит нас к бренному миру, вместо того чтобы подымать нас ввысь и приводить «в общение с вечными и бестелесными идеями, пребывая с которыми бог всегда бог». Из того, как Эратосфен цитировал эти места, можно, кажется, заключить, что к этим взглядам Платона он относился в общем сочувственно [1]; недаром в своей эпиграмме он стремится отвратить читателя и от построения пересекающихся тел и от построения пересекающихся «линий кривой формы» — конических сечений. Но как же быть тогда с делосской задачей и задачей трисекции угла, которые, по словам того же Эратосфена, «не допускали логического и линейного доказательства»? Эратосфен нашел такой компромисс: запрещая, повидимому, метод объемных мест, он рекомендовал метод νεῦσις, ибо при доказательстве правильности решений, полученных по методу νεῦσις, вполне можно обходиться пересечениями кругов и прямых линий. Разумеется, с точки зрения математической строгости это прием страуса, прячущего голову под крыло, ибо, как мы говорили уже выше, применяя такого рода приборы, мы завуалированным путем находим точки пересечения кривых второго порядка; недаром современники считали это сочинение Эратосфена недостаточно обоснованным теоретически.

Приборы для выполнения νεῦσις были открыты задолго до Эратосфена, — в лучшем случае его прибор был несколько проще и удобнее других. Сам Эратосфен гордился лишь тем, что его предшественники, описав теоретически, как должны действовать подобные приборы, не пытались сконструировать их и применить к делу, тогда как он осуществил и применил свой «месолаб». Принципиальной же новизны в его приборе не было.

В «Платонике» много говорилось также о пропорциях, о гармонии, о музыке. Мы знаем, какое огромное значение в философии Платона играло учение о пропорциях

---

[1] Может быть, поэтому он и получил прозвище «второй Платон» или «новый Платон».

и музыке; эти науки, по мнению Платона, учили граждан дисциплине, показывали им, что «геометрическое» равенство, когда каждый занимает соответственное место в обществе, выше «арифметического», при котором в обществе все равны. И здесь Эратосфен, несомненно, шел по стопам Платона.

Может быть, далее, и курьезная полемика Эратосфена с Архимедом содержалась в этом же сочинении. Страбон писал впоследствии по этому поводу: «Не забавно ли, что Эратосфен, будучи математиком, отказывался признать принцип, выставленный Архимедом в его сочинении «О плавающих телах», — именно то, что поверхность всякой жидкости в состоянии покоя принимает форму поверхности шара с центром в центре Земли, хотя это предложение должен принять каждый, кто сколько-нибудь понимает в математике?» Эта теорема являлась у Архимеда, как мы увидим, строго математическим выводом из демокритова положения, по которому все тела тяжелы и все стремятся к центру Земли. Ясно, что Эратосфен, будучи математиком, оспаривал не правильность этого умозаключения, а правильность самой предпосылки о стремлении всех тел к центру Земли, против которой возражал уже Аристотель, деливший тела на тяжелые и легкие, причем каждое стремится не к центру Земли, а к своему естественному месту (οἰκεῖος τόπος): огонь и воздух—вверх, вода—в середину, земля — вниз. И здесь, таким образом, Эратосфен, став в интересах чистоты идеалистической философии на точку зрения Аристотеля, выступал не только против Демокрита, но, как мы увидим, и против более близких ему по времени ученых — Стратона и Архимеда.

И наконец, именно в этом сочинении скорее всего содержалась интересная полемика Эратосфена с Демокритом и Эпикуром. В самом деле, уже a priori невозможно было сомневаться в том, что этот блестящий придворный, воспитатель наследника, хотя и был одним из крупнейших астрономов и математиков древности, тем не менее и в своих математических трудах не позволял себе ничего, что могло навлечь на него неудовольствие его покровителей; в частности он был чужд каким бы то ни было манипуляциям с неделимыми в математике, запрещенными с точки зрения идеалистической философии, которую он усвоил со школьных лет и которая одобрялась свыше.

Нам известно, что, по мнению Демокрита, точки и линии не могли быть вовсе непротяженными, ибо из точек составляются протяженные линии, а из линий — протяженные плоскости. Так как определение линии как простой совокупности точек приводило к чисто математическим затруднениям, то Эпикур выражался несколько иначе: «Точка измеряет длину линии некоторым особенным, ей одной свойственным образом», т. е. линия — не просто совокупность точек; ее длина — некоторая функция числа этих точек (иногда точки расположены гуще, иногда реже). Эратосфен выступал и против той и против другой точек зрения: точка не имеет никакого протяжения; поэтому из точек не составляется, как думает Демокрит, и ими не измеряется, как думает Эпикур, длина линии. Но тем не менее непротяженная точка перемещается («*течет*»), и в результате этого перемещения непротяженной точки возникает протяженная линия. Это было, очевидно, некое недоступное логике таинство (ἀδιανόητον), но его необходимо было принять, как засвидетельствованный в опыте факт.

Если вместе с Демокритом и Эпикуром считать, что протяженные тела состоят из протяженных неделимых частиц — материальных линий и материальных точек, то окажется, что материализм прав, что первоначалом всего является имманентная бездушная материя. Если же допускать, что протяженная материя создана движением находящейся вне ее непротяженной, а следовательно нематериальной, идеальной точки, духовной сущности, то окажется, что прав идеализм, утверждающий что «демиург» нематериален и находится вне материального мира. Вот почему этой туманной «недоступной для логики» концепции придавалось такое большое принципиальное значение в идеалистической философии.

На такой точке зрения стоял Эратосфен. Более крупные творческие математики и физики инстинктивно чувствовали, что действительный прогресс в естественных науках был в ту эпоху возможен только на базе атомистической науки, но это делалось осторожно, украдкой, причем из демокритовых положений выхолащивалась вся их материалистическая сущность.

В этом отношении чрезвычайно поучительна деятельность Стратона из Лампсака; сочинения его (или его учеников), несомненно, изучались Архимедом[1]. Стратон был схолархом (руководителем) основанной Аристотелем перипатетической школы с 287 по 268 год. Задачей его было углубить учение Аристотеля не с философской, а с естественно-научной стороны, бывшей наиболее слабым местом системы Аристотеля. Для этой цели ему пришлось заимствовать ряд положений из науки атомистов; получился своеобразный синтез из учений Аристотеля и Демокрита.

Как мы уже говорили, Аристотель считал, что существуют абсолютно легкие и абсолютно тяжелые тела. Абсолютно легким телам свойственно стремиться вверх, абсолютно тяжелым—вниз. Движению тех и других препятствует среда; поэтому, чем среда менее плотна, тем быстрее несутся тяжелые тела вниз, а легкие вверх. С точки зрения Аристотеля прилагать силу надо не только для того, чтобы привести тело в движение, но и для того, чтобы это движение продолжалось: если движущееся тело не толкать непрерывно, то оно раньше или позже остановится даже и при отсутствии сопротивления среды и трения; эта сила прямо пропорциональна массе тела. Никакой пустоты в природе существовать вообще не может, как и действия на расстоянии.

Наоборот, Демокрит считал, что все тела тяжелы, т. е. все стремится к центру космоса. Но при этом более плотные тела, имеющие больший удельный вес, пересиливают более легкие тела и отталкивают их назад; поэтому и получается впечатление, будто эти тела стремятся вверх. Понятно, что более плотная среда пересиливает более легкие тела в большей степени, чем менее плотная; поэтому тела перемещаются вверх («отстают») тем быстрее, чем более плотна среда. Прилагать силу надо только для того, чтобы вывести тело из состояния покоя или пере-

[1] Стратон был почти заново открыт в 1893 г. Дильсом, показавшим, что предисловие к «Пневматике» Герона (жившего около начала нашей эры) — только извлечение из сочинения Стратона «О пустоте».

менить направление движения; движущееся тело будет двигаться с той же скоростью бесконечно, если оно не будет осилено сопротивлением среды или трением. Между каждыми двумя атомами есть мельчайшие прослойки пустоты. Большие промежутки пустоты существуют только в пространствах между космосами, в «междумириях»; внутри космоса большие пространства пустоты можно получить только искусственно, и они недолговечны.

Стратон отказался от наиболее тормозивших науку частей учения Аристотеля: он не признавал существования абсолютно легких тел, считая все тела тяжелыми, а стремление легких тел вверх объяснял вслед за атомистами выталкиванием их вверх более тяжелыми телами. Он возражал против теории Аристотеля, по которой пустоты не существует, и вместе с Демокритом считал, что каждые две мельчайшие частицы вещества отделены друг от друга прослойкой пустоты; если вдуматься, это означало принятие атомистической структуры материи, хотя Стратон такого вывода explicite не делал. Поскольку речь идет о нашем мире, он считал, как и Демокрит, что здесь большие промежутки пустоты можно вызвать только искусственно. Разница была лишь в том, что, по Демокриту, причиной немедленного заполнения больших пространств пустоты было действие на расстоянии — стремление частиц *однородных* элементов друг к другу; по Стратону же, в пустоту немедленно устремлялись со всех сторон какие угодно, а не только однородные тела («боязнь пустоты», horror vacui). Это было несомненно прогрессом по сравнению с Демокритом.

Но, с другой стороны, Стратон вместе с Аристотелем считал, что приведенное в движение тело должно остановиться даже при отсутствии сопротивления и трения, так как сила, приводящая тело в движение, вскоре «прекращается и исчерпывается».

Уже Дильс показал, что работавший в александрийском Музее ученик Стратона, знаменитый астроном Аристарх из Самоса во многом вслед за своим учителем стал на точку зрения Демокрита. Например, в его теории зрения повторяются характерные выражения Демокрита. Мы обратим внимание лишь на одно высказывание Аристарха, характерное для математики атомистов. Как сообщает Архимед в своем «Числе песчинок» («Псаммит»), Аристарх говорил, что «окружность, по которой Земля движется вокруг Солнца, так относится к расстоянию до неподвижных звезд, как центр шара к его поверхности». Архимед, который не читал сочинений атомистов и не знал их математики, недоумевает и видит в этом выражении сплошную нелепость: «Ясно, что этого быть не может; так как центр шара никакой величины не имеет, то следует полагать, что никакого отношения между ним и поверхностью шара быть не может». С точки зрения геометрии Евдокса и Евклида это действительно нелепо, но не с точки зрения математики атомистов, по которой центр имел не «никакую», а предельно малую величину; он был «амерой», самой маленькой из математических величин. Из Фемистия, комментатора Аристотеля, нам известно, что атомисты утверждали это именно о центре круга: «Нельзя разделить круг на два равные друг другу полукруга, но центр всегда окажется при разрезании присоединенным либо к одной, либо к другой половине, и сделает эту половину бо́льшей». Аристарх, как свидетельствует впоследствии Витрувий, был одним из образованнейших людей и лучших математиков своего времени. Он не мог бы сказать такой нелепости, если бы он стоял на позициях Евдокса; очевидно, он знал о позиции Демокрита и Эпикура и примыкал к ней, хотя открыто и не заявлял об этом, что̀ и ввело в заблуждение Архимеда, не знакомого с математикой атомистов.

Архимед в «Числе песчинок» сообщает об Аристархе следующее: «Аристарх Самосский написал сочинение, содержащее ряд (новых) допущений. Выводом из его предпосылок является то, что мир во много раз больше того, который мы приняли выше. Ибо он принимает, что неподвижные звезды и Солнце остаются недвижными, а Земля движется вокруг Солнца по окружности круга, в центре которого лежит Солнце... При таком понимании, доказательства, даваемые на основании наблюдений, будут соответствовать его допущениям».

Отметим, что эта теория, как указывал Архимед, была не произвольным допущением, а *выводом из наблюдений и математических выкладок Аристарха*. «Здесь он смело поднялся над ограниченностью древних, над их узкими взглядами, которые оставались господствующими и позже, вплоть до Коперника и Галилея. Он не только перешел к гелиоцентрической системе, но и расширил все наше представление о вселенной. Солнце есть неподвижная звезда, как все прочие неподвижные звезды, которые мы видим на небесном своде (видимое ежедневное обращение Солнца и звезд, следовательно, есть результат вращения Земли вокруг оси). Вокруг Солнца вращается Земля (как и прочие планеты). Если мы представим себе орбиту Земли как большой круг шара, то весь этот шар в сравнении с мирозданием надо рассматривать как точку». Так характеризует Аристарха известный историк астрономии Гульч, и можно только удивляться тому, что некоторые астрономы (например, проф. Н. И. Идельсон в его вышедшей недавно брошюре о Копернике) без всякого основания игнорируют Аристарха.

Но Гульч неправ в одном. Аристарх не был первым, расширившим наше представление о вселенной. Вместо единого ограниченного мира с Землей в центре (старинный взгляд, которого держался впоследствии и Аристотель) уже Демокрит постулировал бесконечное число космосов, в каждом из которых периферийные тела вращаются вокруг центра; одним из таких космосов он считал наш. Правда, Демокрит в противоположность Аристарху считал, что в центре нашего космоса находится не Солнце, а Земля, но самая мысль, что солнечная система — лишь ничтожная часть вселенной, заимствована Аристархом у Демокрита. И самая идея считать весь наш мир атомом, «точкой», по сравнению со вселенной, быть может, была ему навеяна представлением Демокрита о других мирах, где отдельные атомы имеют величину всего нашего космоса (κοσμιαῖοι).

Мы видим, таким образом, что Аристарх находился под еще более сильным влиянием атомизма, чем его учитель Стратон, хотя прямо и открыто атомизма не исповедывал. Характерно, что стоик Клеанф обвинил Аристарха в безбожии за то, что он «сдвинул с места сердце вселенной», что, несмотря на исключительную простоту и убедительность его теории, Аристарх не нашел ни одного последователя не только в Александрии, но и во всем мире, исключая одного лишь Селевка из Селевкии на Тигре. Из астрономических выкладок Эратосфена мы видим, что этот последний во всяком случае не был последователем Аристарха.

Такова была научная атмосфера, в которой пришлось работать молодому математику Архимеду по прибытии в Александрию. Недаром, живший в это время странствующий философ-скептик Тимон из Флиунта сказал о Музее:

В разноплеменном Египте откармливают легионы
Книжных червей ручных, что ведут бесконечные споры
В птичнике муз...

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

☆

Начало научной деятельности Архимеда

Если бы Архимед, прибыв в Александрию, захотел итти по тому проторенному пути, по которому шли прочие математики, то он делал бы следующее:

1) подкреплял бы истины, открытые математиками V—IV вв. при помощи метода неделимых, доказательствами методом исчерпания,

2) разрабатывал бы те области математики, которые не требуют примитивного интегрирования, например теорию чисел,

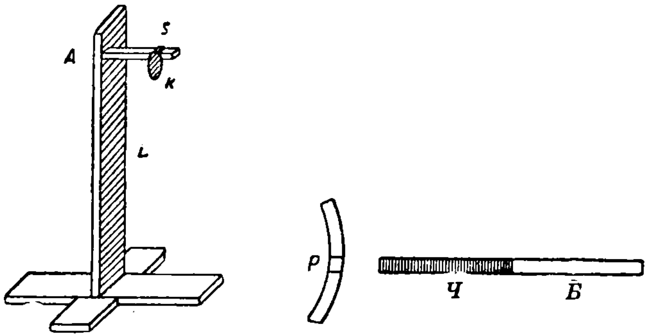
3) занимался бы астрономическими наблюдениями, кладя в основу старую геоцентрическую систему Аристотеля, и

4) писал бы стихи и философские исследования; здесь легче всего было польстить монарху, поддержать его политику и таким путем сделать себе придворную карьеру.

Этим путем, как мы видели, и шли друзья и коллеги Архимеда — Конон и Эратосфен. Однако Архимед был настолько крупным и оригинальным мыслителем, что отказался следовать в этом за ними. К придворной карьере он не имел никакого вкуса, да и не нуждался в ней: как близкому родственнику сиракузского монарха, ему и без того были бы обеспечены все жизненные блага, если бы только он их добивался. Вдобавок Гиерон был человеком иного склада, чем Птолемеи, и лесть при его дворе, поскольку мы еще можем судить, была не в моде. Архимед с детства не получил аристократического разностороннего воспитания; его отец, астроном, посвятил его лишь в тайны своих наук, и этими лишь науками он интересовался всю жизнь. Повидимому, никакого интереса к философским рассуждениям и к поэтическому творчеству у него не было, хотя, как мы увидим, он был, вероятно, неплохим версификатором.

Ни одна астрономическая работа Архимеда не дошла до нас, и мы не знаем, держался ли он геоцентрических или гелиоцентрических взглядов. Но нам хорошо известно, как мы говорили уже выше, что он с особым интересом относился к системе Аристарха, которую прокляла официальная философия. Принимал ли Архимед эту систему? Не забудем, что эта система не пользовалась официальным одобрением, и поэтому трудно было бы ожидать, чтобы осторожный и корректный Архимед, живший в обстановке придворного Музея, открыто выступил в ее защиту (точно так же впоследствии Кавальери не решился открыто выступить в защиту того же учения, снова выставленного Коперником). Достаточно, однако, того, что Архимед в своем «Числе песчинок» ссылается на Аристарха; как мы видели, ему остается непонятным одно из высказываний Аристарха в духе математики атомизма (стр. 57), но он вследствие этого не отвергает всей системы Аристарха, а старается осмыслить это высказывание так, чтобы оно не противоречило основам евклидовой математики. «Надо допустить, что Аристарх имел в виду следующее: так как мы обычно считаем, что Земля — центр мира, то (он и утверждает, что) Земля так же относится к тому, что мы называем космосом, как сфера, по одному из больших кругов которой вращается, согласно допущению Аристарха, Земля, к той сфере, на которой находятся неподвижные звезды». Архимед замечает, что стоит только понять таким образом это сомнительное с точки зрения математики выражение, и все остальные выводы Аристарха, основанные на астрономических наблюдениях, сохраняют свою силу. Конечно, это толкование Архимеда — явная натяжка, ибо сам Аристарх не считал Землю центром нашего космоса и поэтому так выразиться не мог, *но это перетолкование нужно Архимеду как раз для того, чтобы спасти теорию Аристарха* в целом, сделав ее неуязвимой для нападок современных ему математиков. И вслед за тем во всей остальной части книги Архимед вычисляет объем вселенной, кладя в основу *теорию Аристарха*, правда, с оговоркой: «Даже если мир так велик, как представляет себе Аристарх сферу неподвижных звезд...» Если бы Архимед не относился серьезно к этой теории, то он просто игнорировал бы ее, положив в основу систему мира Аристотеля. С другой стороны, учтя ту придворную обстановку, на которой мы подробно остановились в предыдущей главе, нельзя не притти к выводу, что Архимед и при полном сочувствии к системе Аристарха, не мог бы выразиться определеннее. Позволительно думать поэтому, что гениальный Архимед в душе сочувствовал теории Аристарха.

При определении диаметра Солнца Архимед, как он сам сообщает впоследствии в своем «Числе песчинок», ближе примыкал к Аристарху, считавшему, что этот диаметр равен $\frac{1}{720}$ круга Зодиака, чем к своему отцу, астроному Фидию, считавшему, что Солнце примерно в $1\frac{1}{2}$ раза меньше этой цифры. При решении этого вопроса проявились специфические механические способности Архимеда — он изобрел специальный прибор (фиг. 11) для измерения диаметра Солнца, описанный в том же сочинении. Этот прибор реконструирован А. Чвалина (см. Библиогр. указатель, № 127), причем он дает такое пояснение к описанию Архимеда: «В точке A (фиг. 11, a) вертикально установленной рейки L на высоте глаза укрепляется горизонтальная линейка, снабженная делениями масштаба; вдоль нее может скользить планка S, с которой плотно скреплен круглый диск K, остающийся поэтому при движении планки всегда на одной высоте с A. Если теперь ранним утром, когда Солнце находится еще у горизонта и не настолько ярко, чтобы на него нельзя было смотреть, поместить глаз в точке A, а диск K расположить на таком расстоянии, чтобы он полностью закрывал перед глазом диск Солнца, то, зная диаметр диска K и расстояние AK, можно сразу же найти и видимую величину Солнца γ. Архимед отдавал себе при этом полный отчет в том, как трудно оценить ошибки наблюдения. Источник ошибок заключается, во-первых, в том, что глаз в действительности занимает некоторый объем в пространстве, тогда как в опыте



a *Фиг. 11* *b*

он принимается за точку; во-вторых, в том, что нельзя достичь вполне точного совпадения диска K с солнечным диском. Архимед и здесь также пользуется методом, вполне аналогичным методу исчерпания. Сначала он приближает диск к глазу с довольно значительного расстояния, пока солнечный диск не исчезнет за диском K. Так как расстояние AK принимается при этом значительно меньшим, чем то, которое должно бы было быть при точном совпадении видимых дисков, то в результате получится *верхняя граница* γ. Поправки на величину зрачка не нужно, так как ошибка действует в сторону увеличения изменяемой величины. При втором измерении Архимед удаляет диск от глаза, пока солнечный диск не станет виден из-за диска K. В этом случае размеры зрачка уже, очевидно, учесть необходимо. Архимед изготовил два тонких цилиндрических стержня, белый $Б$ и черный $Ч$. Последний он помещает непосредственно перед зрачком P по направлению оптической оси глаза (фиг. 11,b), а белый стержень помещается непосредственно вслед за черным на той же оси.

Если стержень тоньше диаметра зрачка, то *Б* будет видим, в противном случае — не видим. Калибрируя стержни, Архимед находит размер зрачка.

Пределами оказались — верхним $\frac{1}{656}$ ($0^\circ 32' 9''$), нижним $\frac{1}{800}$ круга Зодиака ($0^\circ 27'$), т. е. результат Аристарха оказался примерно правильным $\left(\frac{1}{720}\right)$, а результат, полученный отцом Архимеда $\left(\frac{1}{1080}\right)$, преуменьшенным. Архимед с гордостью отмечает, что результат этот получен с помощью механического прибора (ὀργανικῶς). В действительности эти границы $32'5''$ и $31'5''$, так что результат Архимеда отличается изумительной точностью.

В астрономических работах Архимеда проявилась и его любовь к сложным вычислительным операциям. Как сообщает один поздний писатель, он определял не только расстояние от Земли до Солнца, но и «расстояние от Земли до Луны, от Луны до Венеры, от Венеры до Меркурия, от Меркурия до Солнца, от Солнца до Марса, от Марса до Юпитера, от Юпитера до Сатурна и от Сатурна до сферы неподвижных звезд». Он определял также поперечник Луны. Тит Ливий называет Архимеда «непревзойденным наблюдателем неба и звезд».

Очевидно, Архимед полностью усвоил от отца навыки в астрономии; тем не менее, он не сделал в этой области каких-либо выдающихся открытий, которые сохранились бы в памяти современников. С другой стороны, он сделал и ряд ошибок; в некоторых случаях уже современники отмечали неправильность его вычислений. Так, окружность земного экватора Архимед определяет (в «Числе песчинок») в 3 000 000 стадий (461 000 км); эта цифра в 12 раз больше полученной Эратосфеном цифры, очень близкой к истинной. Точно так же отношение диаметра Солнца к диаметру Луны, по его мнению, 30 : 1; в действительности оно в 10 раз больше. Расстояние от Земли до Солнца Архимед определяет в 5 млрд. стадий, т. е. 785 млн. км. Действительное расстояние — 150 млн. км. Архимед неправильно определял также продолжительность солнечного года в 365 дней, несмотря на то, что на основании сделанных примерно в то же время (в 238 г. до н. э.)

астрономических вычислений официальным постановлением египетской жреческой коллегии продолжительность солнечного года была определена в 365 1/4 года. Впоследствии знаменитый астроном Гиппарх замечал: «Из моих наблюдений следует, что различия в длине года лишь крайне незначительны, что же касается солнцеворотов, то я склонен думать, что Архимед и я в наших наблюдениях и в сделанных из них выводах ошиблись на 1/4 года».

Если принять во внимание гениальность и точность мышления Архимеда, то эти факты явятся лишним подтверждением того, что астрономические занятия Архимеда относятся к самой ранней эпохе его деятельности, еще к его пребыванию в Александрии. Вполне понятно, что Фидий хотел иметь в сыне своего продолжателя и готовил Архимеда в астрономы; для него геометрия была лишь вспомогательной наукой к астрономии. Поэтому Архимед и начал с астрономических занятий, но его природная склонность заставила его очень скоро перейти к другим занятиям — к занятиям механикой.

В самом деле, и в астрономии Архимед выделился прежде всего изобретением сложных механических приборов. О приборе для измерения поперечника Солнца мы уже говорили; гораздо больше славы принесла Архимеду сооруженная им «сфера», т. е. небесный глобус, к описанию которого мы сейчас и переходим.

Цицерон, знакомый Марцелла, правнука того Марцелла, который отдал на разграбление в 212 г. Сиракузы и после убийства Архимеда вывез оттуда сооруженную им «сферу», рассказывает в своей книге «De republica» в тоне непринужденной светской болтовни следующее:

«Я вспоминаю, как я однажды вместе с Гаем Сульпицием Галлом, одним из самых ученых людей нашего отечества,... был в гостях у Марка Марцелла... и Галл попросил его принести знаменитую «сферу», единственный трофей, которым прадед Марцелла пожелал украсить свой дом после взятия Сиракуз, города, полного сокровищ и чудес. Я часто слышал, как рассказывали об этой «сфере», которую считали шедевром Архимеда, и должен признаться, что на первый взгляд я не нашел в ней ничего особенного. Оказалось, что другую «сферу», сделанную Архимедом, Марцелл посвятил в храм Добродетели; эта «сфера» была гораздо более популярной и имела гораздо более импозантный вид. Однако, когда Галл начал нам объяснять с бесконечной ученостью всю систему этого прекрасного произведения, я вынужден был притти к выводу, что этот сицилиец обладал гением, которого, казалось бы, человеческая природа не может достигнуть. Галл рассказал нам, что «сфера», подобная той, второй сфере, т. е. в виде сплошного шара, была изобретена впервые Фалесом Милетским, изготовившим ее первую модель; что затем Евдокс Книдский, ученик Платона, изобразил на поверхности «сферы» различные созвездия, утвержденные на небесном своде... Но, прибавил он, для того чтобы изобразить Солнце, Луну и пять светил, которые мы называем блуждающими (планетами), пришлось отказаться от «сферы» в виде сплошного шара, при помощи которого нельзя воспроизвести их движений, и придумать «сферу» совершенно иного типа. Главным чудом в изобретении Архимеда было то искусство, благодаря которому он смог соединить в одной системе и осуществить при помощи одного вращательного движения столь несходные между собою движения и столь различные вращения разных светил. Когда Галл приводил «сферу» в движение, можно было наблюдать, как при каждом обороте Луна уступает место Солнцу на земном горизонте, подобно тому как она уступает ему место ежедневно на небе; как и на небе, можно было наблюдать солнечное затмение, как Луна постепенно погружается в тень Земли...»

Из других свидетельств мы узнаем, что на этой «сфере» можно было наблюдать фазы Луны, движения планет, солнечные и лунные затмения, что она была сделана из меди и приводилась в движение незаметным для глаза двигателем, находившимся внутри «сферы», *повидимому, водяным двигателем*. Архимед придавал этому изобретению столь большое значение, что написал недошедшую до нас специальную книгу «Об изготовлении небесной сферы» — единственную книгу по техническим наукам, вышедшую из-под его пера.

Есть и ряд других данных, позволяющих заключить, что на этой ранней стадии развития Архимеда больше всего интересовали вопросы механики.

В пользу этого говорит и общий ход развития его творчества и хронологическая последовательность его произведений.

В самом деле, уже в самом раннем из его математических сочинений [1], в трактате «О квадратуре параболы», имеются ссылки на его работы по механике («О рычагах» и «О равновесии плоскостей»). Поэтому мы имеем полное право утверждать, что уже в период пребывания Архимеда в Александрии его чрезвычайно занимали вопросы механики. Недаром, будучи еще в Египте он изобрел или вернее, усовершенствовал «улитку» (χοχλίας) — замечательную машину для поливки полей, имевшую большое хозяйственное значение в Египте, где дождей почти не бывает и где все сельское хозяйство основано на искусственном орошении. Диодор, писатель I в. до н. э., хорошо знавший Египет, сообщает: «Побережья Нила, заливаемые наводнениями и хорошо орошенные, приносят изобильный и разнообразный урожай. Нил отлагает здесь каждый раз после наводнения новый слой ила, и жители могут легко орошать весь остров при помощи машины, сооруженной Архимедом, которая, вследствие своей формы, носит название улитки».[2] Более подробно этот автор касается «улитки» при описании эксплоатации рудников в Испании: «Рудокопы часто наталкиваются на подземные реки; они борются с их быстрым течением, отводя их в наклонные рвы... Поражает то, что им удается вычерпать всю воду до конца при помощи египетских машин, изобретенных Архимедом Сиракузским во время его путешествия в Египет. Они последовательными переливаниями поднимают эту воду до входа в шахту и, сделав шахты

---

[1] Хронологическая последовательность сочинений Архимеда устанавливается только по содержащимся в одних из этих произведений ссылкам на другие; в других случаях, наоборот, из тех или иных утверждений в одном сочинении можно сделать вывод, что другое его сочинение в это время еще не могло выйти. Руководясь этими критериями, мы и распределяем сочинения Архимеда между различными периодами его жизни.

[2] Изображение архимедовой «улитки», приводимой в движение рабом (на каррикатуре — пигмеем), дошло до нас на одной помпеянской фреске (см. табл. 5). Ее устройство, на основании этого рисунка, интерпретировано Джаконо (см. Библиогр. указатель, № 117).

сухими, работают там с полным удобством. Эта машина была так гениально построена, что при помощи ее можно было выкачивать огромные массы воды: без труда можно было целую реку извлечь из глубины земли на ее поверхность. Но, разумеется, не только за это одно следует восхищаться гением Архимеда; мы обязаны ему многими другими изобретениями, еще более великими и более знаменитыми во всем мире».

Мы видели уже, с каким резким отрицанием отнесся Платон к тому, что Архит, Евдокс и Менехм позволяли себе применять механические приборы для решения геометрических проблем. Разумеется, с тем бо́льшим негодованием и презрением должен был относиться Платон к тому, что философы занимались непосредственно механикой. «Основателями (механики), — говорит Плутарх, повторяя, вероятно, слова Эратосфена, — были Евдокс и Архит, которые дали геометрии более пестрое и интересное содержание, игнорируя ради непосредственно осязаемых и технически важных применений этой науки ее отвлеченные и недоступные графическому изображению проблемы... Платон порицал их за это». Столь же резко отрицательно должен был относиться к механике, судя по всему направлению его научной деятельности, и Аристотель: механика—не наука, а «ремесленный навык» (ἐμπειρία), достойный раба и излишний для философии и познания творца.[1] Приписываемое Аристотелю сочинение «Механические проблемы» ему не принадлежит. Однако в этих вопросах ученики Платона и Аристотеля позволяли себе не соглашаться со своими учителями, ибо механика не была запрещена идеалистической философией, подобно атомизму и материализму вообще; в ней видели только времяпрепровождение, может быть, и интересное, но не имеющее ничего общего с настоящей наукой. «После Платона, — сообщает Плутарх, — механика, изгнанная из геометрии, отделилась от нее и долгое время находилась в пренебрежении у теоретической науки, став лишь одной

[1] Ср. замечание Ньютона (в предисловии к «Philosophiae naturalis principia mathematica», изд. 1687 г.): «Древние... устанавливали между механикой и геометрией то различие, что все точное относили к последней, все менее точное — к первой».

из вспомогательных практических отраслей военного искусства».

В древности, как мы узнаем из комментария Прокла к Евклиду, механика делилась на следующие разделы:

1. ὀργανοποιική — искусство изготовления машин, частью которого является βελοποιικά — искусство изготовления военных машин.

2. Изготовление сфер, т. е. глобусов и моделей, изображавших движения небесных тел.

Этими разделами занимался всю жизнь Архимед.

3. θαυματοποιική — искусством изготовления механических игрушек — Архимед, насколько нам известно, не занимался вовсе. Но относительно друга Платона — Архита из Тарента, о котором мы уже говорили выше, нам засвидетельствовано, что он изготовил механическую погремушку и механического голубя, сделанного из дерева и умевшего летать. Из дошедшего до нас описания этого механического голубя можно сделать вывод, что Архит знал, что воздух имеет вес и что воздух стремится из места с бóльшим давлением в место с меньшим давлением. Мы вернемся к этому вопросу, когда будем говорить о гидростатических занятиях Архимеда. Пока отметим, что включение изобретения механических игрушек в систему науки соответствует тому характеру развлечения во время отдыха, который носила механика в это время. Впрочем, эти игрушки играли роль эксперимента в механике.

4. μηχανική в собственном смысле, т. е. теория центров тяжести, рычага, параллелограма сил и т. д. Можно не сомневаться, что, если не Демокриту, то его ближайшим последователям — атомистам не только было известно, что такое центр тяжести, но они умели и находить его математическим путем. В самом деле, изучая архимедовы теории центров тяжести, мы убеждаемся, что ему не только заранее известно, где должен находиться центр тяжести каждой фигуры, но что применяемый им метод исчерпания представляет собою только перелицованный в новом духе метод неделимых с целью обойти неприемлемые для евдоксовой математики «не очевидные допущения», согласно которым всякая линия, фигура и тело состоят из неделимых частиц. Из этих архимедовых доказательств ясно, что его предшественники, базировавшиеся на меха-

нике атомистов, для нахождения центра тяжести параллелограма разбивали его на «материальные» прямые линии, параллельные одной из боковых сторон; поскольку центр тяжести каждой такой «линии» находится в ее середине, можно считать всю тяжесть такой прямой сосредоточенной в ее середине; тогда центр тяжести всей системы должен находиться на средней линии. Но тот же параллелограм можно разбить на материальные прямые линии, параллельные другой из его боковых сторон, и точно таким же образом доказать, что центр тяжести должен находиться на средней линии, параллельной другой из сторон параллелограма; значит, он лежит на пересечении этих двух средних линий.

Точно так же и треугольник разбивался на ряд «материальных» прямых, параллельных основанию; центр тяжести каждой такой «прямой» находится в ее середине, а центр тяжести всего треугольника — на прямой, соединяющей эти середины. Рассуждая так же, как и в предыдущем случае, приходим к выводу, что центр тяжести находится на пересечении медиан; отсюда уже элементарно геометрическим путем не трудно сделать вывод, что он находится на $\frac{1}{3}$ длины медианы, считая от основания.

Как определяли атомисты самое понятие «центр тяжести», нам не известно. Впервые такое определение мы встречаем в стоической физике начала III в. Стоическая физика носила мало оригинальный, компилятивный характер; поэтому, если мы в стоической физике находим чрезвычайно интересное предвосхищение архимедова учения о центре тяжести, то есть много оснований думать, что стоики просто заимствовали это учение из науки более ранней эпохи. Анализ сообщения героновой «Механики» (1,24), являющейся нашим единственным источником (I в. н. э), не противоречит этому предположению. Здесь Герон говорит как о своем предшественнике о стоике Посидонии, причем, как видно из общего контекста, Посидоний рассматривается как предшественник Архимеда; поэтому Герон, очевидно, имеет здесь в виду не известного стоика Посидония из Апамеи, учителя Цицерона, а Посидония из Александрии, жившего в начале III в.

Вот что говорит Герон: «Стоик Посидоний определил центр тяжести и равновесия при помощи естественного (физического) определения. Он сказал: «Центр тяжести и равновесия есть точка, обладающая таким свойством, что если подвесить в ней тяжесть, то эта тяжесть разделится на две равные части». Поэтому Архимед и его сторонники в механике исследовали частные случаи этого закона и провели различие между точкой подвеса и центром тяжести». Отсюда мы видим, прежде всего, что Посидоний рассматривал еще только тот случай, когда центр тяжести совпадал с точкой опоры, и не заметил, что для равновесия достаточно, чтобы центр тяжести и точка подвеса равновесия находились на одной вертикальной линии; этот недосмотр был исправлен Архимедом.

С другой стороны, необходимо отметить грубую ошибку: вертикальная плоскость, проходящая через центр тяжести, делит тело, по мнению Посидония, не на две уравновешивающие друг друга (ἰσορροποῦντα), а на две равновеликие по весу (ἴσα, ἰσοβαρῆ) части.

Ошибка, характерная для поверхностного диллетантизма стоической науки [1].

Перейдем теперь к принципу рычага.

Рычаг был одним из древнейших орудий, выведших человека из беспомощного первобытного состояния. Этот загадочный механизм, при помощи которого можно малой силой поднимать большой груз, не мог не казаться

---

[1] Конечно, можно было бы думать, что мы имеем дело просто с неточностью арабского перевода Герона и что сам Посидоний говорил не о равенстве площадей, а о равенстве статических моментов. В самом деле, если в 1878 г. один из крупнейших специалистов по истории математики Гульч (Hultsch) дважды позволяет себе в своем издании VIII книги Паппа переводить слово ἰσορροποῦντα (уравновешивающие) словами «aequali pondere» («с равным весом», стр. 1030, 27; 1032, 20), то такая ошибка у средневекового арабского переводчика была бы более чем естественной. Но мы видим, что компилятор Герон списывает не только это определение, но и ряд положений, в которых оно применяется на деле: движение по наклонной плоскости, нахождение центра тяжести треугольника, опрокидывание камня при помощи рычага. Поэтому следует считать, что стоическая механика действительно делала такую ошибку и что те задачи в учебнике Герона, в которых в противоречии с другими частями той же книги этот принцип применен, восходят к той же книге Посидония.

первобытному человеку чем-то чудесным, сверхъестественным. Человек видел два параллельных ряда явлений: большое плечо рычага, описывающее большую дугу, и малое плечо, описывающее в то же время малую дугу, причем оба сектора, описываемые плечами рычага, подобны друг другу. Эти аналогичные ряды явлений связаны между собою стержнем рычага. Воздействуя на одно плечо рычага, можно вызвать аналогичное действие в другом плече и достигнуть результата, далеко превосходящего человеческие силы.

Отсюда первобытный человек мог сделать и более общий вывод: если мы имеем два аналогичных ряда и свяжем их тем или иным способом между собой, то мы можем, воздействуя на один ряд, вызывать в другом действия, далеко превосходящие человеческие силы. Подобным образом рассуждает австралийский колдун, желая вызвать дождь: он берет два аналогичных явления — тучу и дождь, с одной стороны, кучу известняка, которой придана форма тучи, и струю воды из сосуда — с другой. Между обоими явлениями устанавливается связь при помощи особых формул заклинания. После этого колдун поливает кучу известняка водой, и это, по его мнению, должно вызвать дождь из тучи. Эта первобытная наука носит название симпатической магии.

Учение о рычаге до Архимеда сохраняло ряд черт этой симпатической магии.

Этот наивный примитивный подход к рычагу как к сверхъестественному явлению мы находим еще в «Механических проблемах», т. е. в сочинении, написанном лишь за несколько десятилетий до Архимеда. Это сочинение прежде ошибочно приписывалось Аристотелю; в настоящее время его справедливо считают перипатетической компиляцией эпохи Стратона, когда в учение Аристотеля проник уже ряд атомистических элементов.

Здесь мы читаем: «Из происходящего согласно естественному ходу вещей, в нас вызывает удивление все то, причины чего мы не можем постигнуть. Из того же, что происходит вопреки естественному ходу вещей, нас поражает все то, что создается искусством на благо людей. Ведь во многих случаях природа поступает вопреки нашей пользе. Природные явления всегда происходят по одному и тому же порядку, а полезно для человека один раз одно, другой раз другое. Если же нам нужно выполнить что-либо вопреки естественному ходу вещей, то это оказывается нелегким, связанным с препятствиями и требующим искусства. Поэтому мы и называем ту часть искусства, которая помогает нам в борьбе с такого рода препятствиями, «ухищрением» (μηχανή). Ведь дело обстоит так, как сказал поэт Антифонт:

Искусством мы природу побеждаем,
Когда она нас хочет победить.

К такого рода удивительным вещам относятся те случаи, когда меньшее берет верх над бо́льшим, когда вещь легковесная сама по себе приводит в движение большие тяжести, и все то, что мы называем *механикой*.

Самым выдающимся из всех вопросов механики является вопрос о рычаге. На первый взгляд кажется нелепым, чтобы большая тяжесть приводилась в движение малой силой, и при том при помощи еще большего увеличения ее тяжести: ту же тяжесть, которую мы не сможем сдвинуть без помощи рычага, мы сдвинем весьма быстро, если прибавим к этой тяжести еще тяжесть стержня рычага...

Первоначальная причина всех подобных явлений — круг».

Вслед за этим автор дает пространное восторженное рассуждение о чудесных свойствах круга (эти рассуждения, может быть, почерпнуты из магической или полумагической псевдонаучной литературы) и продолжает: «Вот почему нет ничего парадоксального в том, что круг — первопричина всех удивительных явлений. В самом деле, все то, что наблюдается на весах, приводится к кругу, все, что наблюдается в рычаге, приводится к весам, а все, что вообще относится к механическому движению, сводится к рычагу».

Из замечаний Демокрита и Платона видно, что в их время принцип рычага был уже оформлен в виде математической зависимости (равенство моментов). Но характерным пережитком *магических* представлений и у Демокрита и в «Механических проблемах» является то, что здесь жесткая связь между точками приложения сил и точкой опоры *не является* непременным условием действия законов рычага и что основным отправным пунктом древней механики является *подобие* между секторами, resp. треугольниками, получающимися в результате смещения плеч рычага. В тех же «Механических проблемах» рычаг часто появляется просто как некая магическая, сверхъестественная сила, скрытая позади чуть ли не каждого явления: если автор не может объяснить действия какой-нибудь машины, например блока или клина, он довольствуется голословным заявлением, что здесь скрыт рычаг, не объясняя, как этот рычаг действует.

Мы останавливаемся так подробно на этом вопросе потому, что в истории науки под влиянием идеалистической философии до последних лет преобладала тенденция приписывать создание научной, математически обоснованной механики пифагорейцам, Аристотелю и перипатетикам, сводя на нет роль Архимеда, якобы повинного в простом circulus vitiosus (Мах).

Разберем доводы, выставлявшиеся в защиту этого взгляда.

Уже упомянутый Архит «впервые написал систематический трактат по механике, основанный на математических принципах» (Лаэрций Диоген). Стратон, о котором мы также говорили уже выше, написал книгу «О металлических механизмах». Но отсюда следует только, что эти ученые какие-то механические явления выводили математически из каких-то механических принципов; заключать отсюда, что уже они обосновали математически принцип рычага, никак не возможно. Да это и не вероятно: если бы они дали такое доказательство, то мы нашли бы его в вышедших в III в. «Механических проблемах», тогда как в них мы находим лишь полумагический детский лепет.

Но нам заявляют, что якобы уже Аристотель дал примитивную формулировку закона сохранения энергии и даже принципа возможных перемещений. При этом сваливают в одну кучу и подлинные произведения Аристотеля и позднюю компиляцию — «Механические проблемы». Разберем то и другое отдельно.

У Аристотеля (в сочинении «О небе») содержатся только следующие замечания:

1) «Для равновесия необходимо, чтобы на вес, прило-

женный в конце каждого плеча, действовала одна и та же сила» (это можно понять только в том смысле, что силы <sic!>, приложенные к обоим концам рычага, в случае равновесия должны быть равны друг другу — так и понимали Аристотеля в средние века).

2) «Меньший и более легкий вес произведет большее движение, если на него действует *та же сила*... Скорость меньшего тела так относится к скорости большего, как большее к меньшему».

Вот и все. Думаю, что отсюда можно сделать только один вывод. Аристотель, как и его предшественники, конечно, знал математическую формулировку принципа рычага, но то, что мы называем *моментом*, он называл *силой*. Исходя, далее, из пропорциональности *длины* плеча *скорости* движения его конца, он считал силу равной произведению веса (массы) на скорость: mv. Эта неудачная терминология оставалась господствующей и в средние века; в виде рудимента она сохранилась до наших дней: и в наших учебниках кинетическая энергия $\frac{mv^2}{2}$ еще носит название «живой *силы*». Ни о каком законе сохранения энергии или принципе возможных перемещений здесь не может быть и речи.

Перейдем к «Механическим проблемам». Мы уже видели, что рассуждения автора этого сочинения, которыми он обосновывает принцип рычага, носят *магический* характер. Такой же характер носит и его другое неудобопонятное доказательство принципа рычага. «Естественное движение относится к естественному, как противоестественное к противоестественному». И для него, как и для Аристотеля, понятие «сила», очевидно, тождественно с нашим понятием «момента». «Под влиянием *одной и той же силы* больше переместится тот из движущихся грузов, который помещен дальше от точки опоры». Но в этом сочинении есть одно выражение, которое давало исследователям некоторое основание видеть в мнимом Аристотеле предшественника нынешней научной механики: «Всегда, чем больше груз отстоит от точки опоры рычага, тем легче он приведет рычаг в движение; причина: точка, отстоящая дальше от центра, опишет (в равное время) бóльшую дугу». Здесь, если угодно, можно найти в зародыше мысль, что выигрыш в силе уравновешивается проигрышем в пути, а отсюда якобы недалеко до закона сохранения энергии. Но не проще ли полагать, что довольно туго мыслящий автор «Проблем» просто констатирует данный в опыте факт, что одно и то же усилие руки, приложенное к концу одного плеча рычага, поднимет груз, привешенный к концу другого плеча, на расстояние, тем *большее*, чем длиннее это плечо; а следовательно, чем длиннее плечо, тем *легче* передвинуть груз на *равное* расстояние, тем *меньшее* усилие руки для этого необходимо [1].

Но даже и эту скромную мысль мы не вправе приписать Аристотелю, ибо автор «Механических проблем», как я показал в своей статье «Механика Демокрита», кроме Аристотеля, компилировал самые различные источники, в том числе и атомистические.

Отметим еще, что все авторы, жившие до Архимеда, подходят к рычагу с точки зрения *динамики*, т. е. изучают неуравновешенный рычаг, рычаг в *движении*. При младенческом состоянии науки в то время; такой подход не мог дать ничего, кроме путаницы и разочарований.

Прежде чем вернуться к Архимеду, обратим внимание еще на одну характерную особенность до-архимедовой механики. В *математических* трудах со времени Евдокса всякие инфинитезимальные выкладки были категорически

---

[1] Совершенно недопустимой нам кажется попытка видеть здесь примитивно сформулированный Аристотелем принцип возможных перемещений! Оно произвольно не только потому, что автору и в голову не приходит вводить условие идеальных связей и бесконечно малых перемещений. Принцип возможных перемещений требует, чтобы в случае равновесия сумма работ задаваемых сил для каждого возможного перемещения системы, подчиненной идеальным связям, равнялась нулю, т. е. в интересующем нас случае, чтобы работы, совершаемые силами, приложенными в каждом конце рычага (или, что то же, чтобы произведения каждой из этих двух сил на элементарное перемещение концов рычага), были равны друг другу. Между тем для автора «Механических проблем» необходимым условием равновесия является равенство самих сил. Далее, и о перемещении в интересующем нас месте «Проблем», в сущности, нет речи. Правда, здесь речь идет о том, что точка опишет бóльшую дугу, больше переместится, но при этом делается ссылка на сказанное в главе I, а в этой главе автор, употребляя то же выражение: «описывая больший круг», всегда прибавляет еще: «в равное время», т. е. имеет в виду не перемещение, а скорость.

запрещены. Но механика уже со времени Платона была объявлена не наукой, а прикладной ἐμπειρία, имеющей целью не «возвысить душу до мира идей и творца», а сообщить определенные практические навыки. Против применения метода бесконечно малых в механике поэтому ничего нельзя было возразить, если только он облегчал усвоение материала и нахождение новых решений. И действительно, как мы видели уже, из архимедова способа нахождения центра тяжести мы можем сделать вывод, что до него центр тяжести находили при помощи атомистического разложения фигуры. Атомистические методы применялись даже в перипатетической механике.

Так в «Механических проблемах» для объяснения того факта, что в водяном вихре все тела уносятся в середину, вихрь разлагается на ряд концентрических «атомных» кругов чрезвычайно малой толщины. Точно так же практический учебник механики Герона Александрийского, составленный приблизительно в I в. н. э., основан, кроме Архимеда, еще на перипатетической (Стратон и др.) и стоической (Посидоний Александрийский) литературе. Поэтому, если мы находим здесь рассуждения, характерные для атомистической науки, то они несомненно имеют непосредственными источниками перипатетические и стоические руководства по механике. Здесь для объяснения действия клина клин разбивается на чрезвычайно большое число атомов-клиньев, имеющих общую вершину с большим клином. Равным образом и удар разбивается на атомы ударов, «наименьшие из всех известных ударов», как выражается Герон.

Прибыв в Александрию, Архимед несомненно набросился на всю эту литературу по теоретической механике, столь близкой его научным устремлениям. Он пришел к выводу, что положения и приемы механики можно применить и для решения тех чисто геометрических задач, которые не могут быть решены способами элементарной геометрии, но для этого необходимо перестроить механику в точную, строго математическую науку, теоремы которой были бы логическим выводом из немногих вполне очевидных предпосылок. И действительно, наиболее оригинальным и дававшим удивительные результаты приемом Архимеда при решении геометрических задач, требующих инфинитезимальных выкладок, было применение для их решения *закона рычага*.

В чем секрет этих решений? Всем известна сказка о солдате, который учил скупую бабу варить суп из топора. После того как хозяйка добавила в суп мяса и картошки, он действительно оказался очень вкусным, но топор не разварился и так и лежал на дне кастрюли, его можно было без всякого вреда убрать.

То же было и с архимедовым методом рычага: его нельзя было применять, не разлагая поверхность фигуры на чрезвычайно малые элементы, т. е. без инфинитезимальной процедуры, а если применять запрещенную евдоксовой школой инфинитезимальную процедуру, то можно без труда обойтись и без рычага.

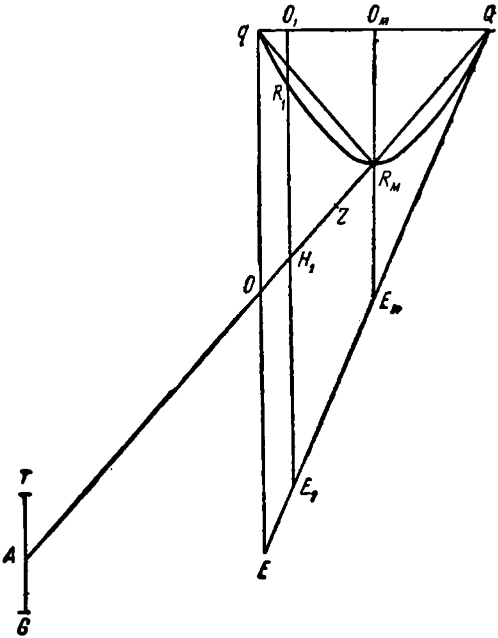
Очевидно дело в том, что в изученной Архимедом *математической* литературе — у Евдокса, Менехма, Аристея, Евклида и др. — Архимед ни следов инфинитезимальной процедуры не нашел; она была начисто вытравлена, и Архимед не знал даже об ее существовании. Но, изучая низкую, прикладную науку — механику, он встречался с этой процедурой на каждом шагу и видел, к каким блестящим открытиям новых фактов механика приводит — прежде всего при нахождении центров тяжести. Он решил поэтому перенести методы механики в геометрию, не отдавая себе ясного отчета в том, что дело здесь не в механике, а в применяемой ею чисто математической инфинитезимальной процедуре. «Ненаучность» же самой этой процедуры нисколько не пугала Архимеда, ибо основательно пройденная им евклидовская школа научила его в совершенстве искусству превращать в строго математическое доказательство любой вывод, полученный «без научного доказательства на основании недостаточно очевидных предпосылок»; это делалось при помощи метода исчерпания (с применением reductio ad absurdum).

Чтобы читателю стало ясно, как применял Архимед принцип рычага к решению геометрических задач, приведу содержащееся в его письме в Эратосфену (стр. 137) решение задачи о нахождении площади параболического сегмента, которое он здесь рассматривает лишь как предварительное, нуждающееся в подтверждении при помощи строгого доказательства (фиг. 12).

Уже ранее было доказано, что в параболе

$$E_1O_1:O_1R_1=Qq:qO_1 \tag{1}$$

и что, следовательно, $E_м R_м = R_м O_м$, так как $QO_м = O_м q$.



Фиг. 12

Но

$$Qq:qO_1=QO:OH_1, \tag{2}$$

откуда

$$E_1O_1:O_1R_1=QO:OH_1. \tag{3}$$

Теперь Архимед продолжает QO на отрезок OA, равный QO; тогда

$$E_1O_1:O_1R_1=OA:OH_1. \tag{4}$$

Поскольку

$$E_м R_м = R_м O_м; \; O_1H_1 = H_1E_1, \tag{5}$$

имеем

$$qO = OE. \tag{6}$$

Затем Архимед рассматривает прямую AQ, как рычаг, а параболический сегмент $qR_м Q$ и треугольник qEQ как две материальные пластинки, наложенные одна на другую. Для дальнейшего решения он применяет метод математики атомистов, т. е. рассматривает и сегмент $qR_м Q$ и треугольник qEQ как состоящие каждый из чрезвычайно большого числа материальных прямых линий, параллельных qE и плотно прилегающих друг к другу. Из параболической пластинки он вынимает произвольную прямую R_1Q_1 из числа этих материальных прямых и переносит ее в точку A так, чтобы она приняла положение GT и чтобы точка A была ее центром тяжести. Затем он доказывает, что элемент параболического сегмента $qR_м Q$ — прямая O_1R_1, перенесенная в положение GT, — и соответствующий элемент треугольника QEq — прямая O_1E_1, оставленная на своем месте — взаимно уравновесятся. Для этого необходимо и достаточно, чтобы плечи AO и OH_1 рычага AH_1 были обратно пропорциональны нагрузкам TG и E_1O_1. Поскольку $GT = O_1R_1$, из соотношения (4) следует

$$E_1O_1 : TG = AO : OH_1. \tag{7}$$

Следовательно, это условие соблюдено, и грузы взаимно уравновесятся. Но E_1O_1 есть *произвольно* взятый элемент треугольника QEq; ясно, что то, что верно для E_1O_1 и R_1O_1, равного TG, будет верно и для любого элемента, т. е. для любого отрезка прямой, параллельного qE и заключенного между Qq и QE, и части его, заключенной в параболическом сегменте $qR_м Q$. Итак, всякая такая прямая в треугольнике qEQ уравновесит соответствующую ей прямую в параболическом сегменте, если перенести последнюю в точку A. Мы можем, разбив весь параболический сегмент на прямые, параллельные qE, перенести их все в точку A. Следовательно, весь параболический сегмент, перенесенный в точку A, уравновесит весь треугольник, оставшийся на своем месте.

Но QO — медиана треугольника qEQ, так как, согласно (6), $qO = OE$; значит, центр тяжести треугольника лежит в точке Z, для которой

$$OZ = \frac{1}{3}\,OQ = \frac{1}{3}\,AO,$$

ибо не только Архимедом, но уже до него атомистическими методами было доказано, что центр тяжести треугольника лежит на 1/3 медианы (см. стр. 70).

Вес всего треугольника EqQ мы сможем считать сосредоточенным в центре его тяжести, в точке Z. Но, как мы видели, треугольник EqQ, оставшийся на своем месте, уравновесится параболическим сегментом $QR_{м}q$, перенесенным в точку A. Отсюда, по закону рычага, отношение веса параболического сегмента $qR_{м}Q$ к весу треугольника EqR равно $OZ : AO = 1 : 3$.

Но площади однородных плоских тел относятся, как их веса, и, значит, площадь параболического сегмента равна 1/3 площади треугольника qEQ.

Треугольник QqO, как имеющий с треугольником QEq общее основание, а высоту в два раза меньшую, равен по площади половине треугольника QEq; треугольник $QR_{м}q$, как имеющий с треугольником QqO общее основание и высоту, в два раза меньшую, равен по площади половине треугольника QqO. Итак,

$$\triangle\, QR_{м}q = \frac{1}{4}\,\triangle\, EQq,$$

откуда площадь параболического сегмента равна 4/3 площади треугольника $QR_{м}q$, вписанного в этот сегмент так, что его вершина совпадает с вершиной параболы.

В дошедшем до нас сравнительно позднем сочинении Архимеда это решение дается как предварительное, евристическое, которое станет научным только после того, как полученный вывод будет подтвержден методом исчерпания при помощи reductio ad absurdum. Можно думать, что Архимед разрабатывал эти «механические» методы уже в раннюю эпоху своей деятельности с тем, чтобы, доказав свои механические предпосылки строго математическим путем, затем включить их в свою систему математики.

Так как эти методы имели, как вы убедились, исходными пунктами *закон рычага* и *учение о центрах тяжести*, то первой заботой Архимеда было дать *строго математический вывод* этих законов.

Со свойственной ему гениальной интуицией Архимед сразу же понял, что при тогдашнем состоянии науки в области *динамики* дальше беспочвенных фантазий и произвольных допущений пойти нельзя. Поэтому он принципиально ограничивает себя изучением законов *равновесия*: нахождением центров тяжести и исследованием *уравновешенного и неподвижного рычага*. Архимед является, таким образом, основателем новой науки — *статики*.

Вопросам теоретической механики и посвящена первая книга дошедшего до нас сочинения «О равновесии плоских тел или о центрах тяжести плоских тел» в двух книгах. Эта первая книга — самое ранее из дошедших до нас произведений Архимеда. Постулат и первые семь теорем этой книги посвящены как раз теории двуплечего рычага (весов); остальная часть посвящена нахождению центра тяжести треугольника, параллелограма и трапеции.

Как же обосновывает закон рычага Архимед?

Своему изложению он предпосылает следующие постулаты: «Мы требуем (αἰτούμεθα), т. е. ставим такие предварительные условия (постулаты) [1]:

1. Равные веса, находящиеся на равных расстояниях (от точки опоры), находятся в равновесии, а равные веса, находящиеся на неравных расстояниях, не находятся в равновесии, но перевес происходит в сторону того веса, который находится на бо́льшем расстоянии.

2. Если два веса, находясь на определенных расстояниях, уравновешивают друг друга и если к одному из

[1] «Идет ли здесь речь о рычаге, который сам по себе лишен массы и концы которого непосредственно совпадают с центрами тяжести подвешенных фигур, так что получается *безразличное* равновесие, или речь идет о стержне, к концам которого подвешены на нитях грузы, так что получается *стабильное* равновесие, остается в этой работе Архимеда до конца ее невыясненным» (В. Штейн).

этих весов что-либо прибавить, то весы уже не будут уравновешивать друг друга, но наклонятся к тому весу, который увеличили.

3. Если подобным же образом отнять что-либо от одного из весов, то весы не останутся в равновесии, но склонятся к тому, от которого не отнимали.

4. Если равные и подобные[1] плоские фигуры при наложении совпадают, то совпадают и их центры тяжести (τὰ κέντρα τῶν βαθέων).

5. В неравных, но подобных фигурах центры тяжести сходственно расположены.

6. Если две величины, находясь на известных расстояниях, уравновешивают друг друга, то и равновеликие им[2] величины, находясь на тех же расстояниях, уравновесят друг друга (под величинами Архимед понимает здесь линии, плоскости и тела. — *С. Л.*).

7. Если обвод какой угодно фигуры имеет выпуклость всюду в одну и ту же сторону, то центр тяжести должен быть внутри фигуры.

Эти постулаты вполне аналогичны по форме постулатам, которые клались в основу античной геометрии, хотя бы той же геометрии Евклида. С точки зрения античного понимания аксиоматики они должны представлять собой самоочевидные истины. Между тем, не трудно заметить, что 6-ой постулат самоочевидной истины уж никак не представляет. В самом деле, если перевести на привычный нам язык, то этот постулат будет звучать так: если нагрузку одного из плеч рычага заменить другой, равной ей по массе и имеющей центр тяжести на той же вертикали, то равновесие не нарушится. Не трудно видеть, что этот далеко не самоочевидный постулат implicite содержит в себе утверждение о равенстве статических моментов обеих нагрузок. Возьмем, например, простейший случай: материальная точка с массой M, отстоящая от точки опоры на L, заменена двумя материальными точ-

[1] «Равные» означает «равновеликие», поэтому «равные и подобные» означает «равные конгруэнтно».

[2] Как уже сказано термином ἴσα, «равные», обозначаются равновеликие фигуры; равные конгруэнтно были бы названы: «равные и подобные».

ками с массой $\frac{M}{2}$ каждая, одна из которых отстоит от точки опоры на $L+l$, другая на $L-l$. Тогда массы обеих нагрузок равны, и центры тяжести совпадают. Но в этом случае, очевидно, и моменты равны, ибо

$$ML=\frac{M}{2}(L+l)+\frac{M}{2}(L-l).$$

Так как любую фигуру можно себе представить в виде множества пар частиц, из которых одна находится вправо от вертикали, проходящей через центр тяжести, а другая— влево на таком же расстоянии, то этот вывод может быть распространен на любые две плоские нагрузки с одинаковой массой и одним и тем же центром тяжести.

Утверждение это, таким образом, не самоочевидно; мы могли бы с равным правом принять за постулат то что является окончательной целью доказательства — равенство моментов нагрузок неравноплечего рычага. Правда, принятое Архимедом за постулат положение несколько проще[1].

Итак, Архимед стремится придать своему рассуждению характер аксиоматического обоснования по образцу математики, как того требовала в то время, если можно так выразиться, научная благопристойность; но фактически он кладет в основу своего рассуждения экспериментально обоснованный факт о равенстве сумм моментов.

Впрочем, сущность вопроса заключается в том, что в разбираемом нами сочинении вовсе не дано определение важнейшего понятия — понятия центра тяжести. Повидимому, это определение уже было дано Архимедом в книге «О весах» или «О рычагах» (Περὶ ζυγῶν). Поскольку

---

[1] На принципиальную неубедительность рассуждения Архимеда указал впервые Мах (см. Библиогр. указатель, № 49), но он несправедливо обвиняет Архимеда в circulus vitiosus: если принять аксиому Архимеда, все остальное *логически* из нее вытекает. Чвалина (см. Библиогр. указатель, № 41), примыкая в общем к выводам Маха, делает такое совершенно непонятное замечание: «Для Архимеда закон рычага формулировался следующим образом: рычаг находится в равновесии, если грузы обратно пропорциональны *квадратам* (!) плеч». Скорее всего это ошибка переводчика (подлинник мне недоступен).

можно судить по ссылкам на это сочинение, здесь даны были постулаты и общие теоремы учения о центрах тяжести, отсутствующие в дошедшем до нас труде, а также, вероятно, теоремы о центрах тяжести тел (пирамиды, конуса, параболоида вращения и т. д.). Как мы видим из указания Паппа, жившего в III в. н. э., указания, подтверждающегося теоремой 4 разбираемого сочинения «О равновесии» и теоремой 6 сочинения «О квадратуре параболы», Архимед понимал под центром тяжести точку, отличающуюся тем свойством, что при подвешивании тела за эту точку оно останется в равновесии, какое бы ему ни было придано положение. «Это стержневой принцип теории центра тяжести» — читаем мы у Паппа.[1] — Ты узнаешь основные положения, доказываемые при помощи этой теории, если прочтешь учение о равновесии Архимеда». В сочинении «О квадратуре параболы» Архимед говорит, что это положение у него *доказано* в другом месте — очевидно, в сочинении «О рычагах».

Как было сказано выше, уже до Архимеда стоик Посидоний определял центр тяжести как точку, отличающуюся тем свойством, что при проведении через нее вертикальной плоскости тело разделится на две равные (вернее, имеющие равные моменты) части. Как сообщает Герон (в своей «Механике»),[2] Архимед и его школа углубили это положение, проведя различие между центром тяжести и точкой подвеса. В самом деле, Архимед понимал, что фактически подвесить тело за центр тяжести в большинстве случаев невозможно: такое подвешивание может быть произведено только *мысленно* (κατ' ἐπίνοιαν, как выражается Папп);[3] для практического же нахождения центра тяжести надо проводить вертикальные плоскости через точки подвеса, подвешивая тело в различных положениях, и искать точку пересечения таких плоскостей.

Все эти особенности: 1) самое понимание центра тяжести, 2) *доказательство* его существования и 3) способ его нахождения через точку подвеса — характерны для рассуждения о центре тяжести, содержащегося у Паппа. Так как сам Папп резко противопоставляет оригиналь-

[1] Книга VIII, глава 8.
[2] Книга I, глава 24.
[3] Стр. 1030, строка 12.

ные части своего труда этой «общеизвестной» части и указывает как на источники ее на Архимеда и на «Механику» Герона и так как в «Механике» Герона таких рассуждений не содержится, то мы можем с полным основанием считать эти рассуждения заимствованными у Архимеда и потому привести их здесь.

«Пусть дана вертикальная плоскость $ABCD$, направленная к центру вселенной, куда направляется все, имеющее тяжесть. Пусть AB прямая, параллельная плоскости, по которой мы ходим (горизонтальная). Если мы положим какое-либо тело, имеющее вес, на прямую AB так, чтобы плоскость $ABCD$ при продолжении пересекала тело, и будем его перемещать, то раньше или позже тело примет такое положение, что оно перестанет качаться и не будет падать. Если, установив тело таким образом, представим себе плоскость $ABCD$ продолженной, то она разделит тело на две уравновешивающие друг друга части, которые составят как бы весы с точкой опоры на плоскости. Переместим теперь нагрузку так, чтобы она касалась прямой AB другой частью своей поверхности. После ряда колебаний она опять примет такое положение, что будет неподвижной, если даже ее не поддерживать, и не упадет. Если теперь снова представить себе плоскость $ABCD$ продолженной, то она снова разделит груз на уравновешивающие друг друга части и должна пересечься с указанной выше плоскостью, рассекавшей груз также на уравновешивающие друг друга части. В самом деле, если вторая плоскость не пересечет первой, то она будет целиком находиться внутри одной из уравновешивающих друг друга частей и поэтому одни и те же части, образованные второй плоскостью, будут и уравновешивать и не уравновешивать друг друга, что нелепо.

Теперь представим себе прямую AB, перпендикулярную к плоскости, по которой мы ходим, иначе — направленную к центру вселенной (т. е. вертикальную). Пусть, подобно разобранному выше случаю, груз помещен на точку A, так что прямая AB будет служить ему подпорой. Если, после того как тело придет в равновесие, продолжить прямую AB, то часть ее окажется внутри тела. Представим себе, что отрезок прямой внутри тела сохраняет свое положение (относительно тела), а самое тело положено на прямую *AB* другим местом своей поверхности и пришло в равновесие. Я утверждаю, что если теперь продолжить прямую *AB*, то она пересечется с первым, проведенным в теле отрезком (внутри тела). В самом деле, если она не пересечется (внутри тела), то можно будет через обе эти прямые провести плоскости, не пересекающиеся друг с другом внутри тела, так что каждая из них будет рассекать тело на части, одновременно уравновешивающие и не уравновешивающие друг друга, что нелепо. Значит, указанные прямые пересекутся внутри тела. Равным образом, если тело будет помещено в других каких-либо положениях на *A* и придет в равновесие, то продолжение прямой *AB* пересечется с проведенными внутри тела указанными выше отрезками. Отсюда ясно, что все мысленно проведенные указанным способом прямые пересекутся в одной и той же точке. Эта точка и называется центром тяжести. Ясно, что, если мы мысленно представим себе груз подвешенным за центр тяжести, то он не будет колебаться, а будет неподвижно сохранять любое приданное ему положение. В самом деле, всякая плоскость, проведенная через эту точку, разделит груз на уравновешивающие друг друга части, так что у тела не будет никакой причины менять положение».

Итак, Архимед *доказывал*, что центр тяжести имеет такое свойство, но это еще не значит, что он так *определял* его. Вполне возможно, что Архимед определял центр тяжести как точку, отличающуюся тем свойством, что при перенесении в нее всех точек нагрузки равновесие не нарушится — свойством, из которого впоследствии исходил Герон [1]. Тогда во всем ходе рассуждения нет никаких логических дефектов, но ни самый процесс перенесения всех точек, ни возможность существования центра тяжести в указанном здесь смысле не являются чем-то очевидным. Это опять же интерпретированный в предельном смысле экспериментальный факт; на опыте мы можем убедиться лишь в том, что при замене одного груза другим, сколько угодно малым по величине, но равным ему по весу и помещенным в районе центра тяжести, равновесие не нарушится.

---

[1] Глава 36, кн. II его «Механики».

Приняв указанные выше постулаты, Архимед прежде всего доказывает три непосредственно вытекающие из них *обратные теоремы* (теоремы 1—3). Интереснее их теорема 4: «Если две равные друг другу величины имеют разные центры тяжести, то общий центр тяжести лежит на середине прямой, соединяющей эти центры тяжести». Эта теорема является лишь следствием из двух теорем, *содержавшихся, очевидно, в сочинении о рычагах*: во-первых, здесь принимается за доказанное, что этот общий центр тяжести лежит где-то на прямой, соединяющей центры тяжести двух нагрузок («то, что он лежит на прямой AB, было уже доказано»). Во-вторых, здесь считается известным, что при перенесении точки опоры в центр тяжести система будет в равновесии, а эта теорема, как мы видели, была скорее всего доказана там же (помещение точки опоры в центре тяжести — это частный случай подвешивания в точке, находящейся на одной вертикали с центром тяжести). Приняв эти два положения, Архимед без всякого труда путем reductio ad absurdum доказывает, что центр тяжести может быть только в середине.

В теореме 5 берутся три равные друг другу величины, лежащие на одной прямой и отстоящие друг от друга на равных расстояниях. Из предыдущей теоремы очевидно, что центр тяжести этой системы совпадает с центром тяжести средней величины. Отсюда очевидно, что сколько бы мы ни имели равных и равноотстоящих друг от друга величин, лежащих на одной прямой, общий их центр тяжести лежит на середине этой прямой (следствие из теоремы 5).

После этих лемм Архимед доказывает основную теорему (теорема 6): «*Соизмеримые величины, помещенные от точки опоры рычага на расстояниях, обратно пропорциональных их весу, уравновешивают друг друга*».

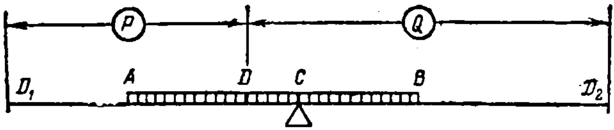
Доказательство это настолько же просто, насколько изящно. Пусть общей мерой нагрузок P и Q будет k и пусть k в P заключено m раз, а в Q заключено n раз. Разделим рычаг, т. е. прямую AB, соединяющую центры тяжести нагрузок, в точке C в отношении $n : m$ (на n единиц и m единиц) и в точке D в отношении $m : n$ (на m единиц и n единиц). Необходимо доказать, что при помещении точки опоры в C рычаг будет в равновесии.

Отложим влево от A отрезок AD_1 равный AD (фиг. 13), а вправо от B отрезок BD_2, равный BD. Тогда, очевидно, D_1A, имеет m единиц длины, AD — m единиц длины, AC — n единиц длины, BD — n единиц длины, CB — m единиц длины, BD_2 — n единиц длины.

Рычаг AB равен $m + n$ единиц длины.

Прямая D_1D_2 равна $D_1A + AB + BD_2 = 2m + 2n$ единиц длины.

Отрезок $CD_2 = CB + BD_2 = m + n$ единиц длины.



Фиг. 13

Таким образом, точка C есть середина прямой D_1D_2. Поместим на каждой единице длины нагрузку $\frac{k}{2}$. Центром тяжести всех таких нагрузок, помещенных на отрезке D_1D, будет, согласно следствию из теоремы 5, точка A; общий вес их равен $2m \cdot \frac{k}{2} = mk = P$. Значит, согласно постулату 6, этими нагрузками можно заменить груз P без нарушения равновесия. Точно так же центром тяжести всех таких нагрузок, помещенных на отрезке DD_2, будет точка B; общий вес их равен $2n \cdot \frac{k}{2} = nk = Q$. Значит, согласно постулату 6, этими нагрузками можно заменить без нарушения равновесия груз Q.

Но, согласно следствию из теоремы 5, центр тяжести всей системы будет лежать в середине прямой D_1D_2, т. е. в точке C, что и требовалось доказать.

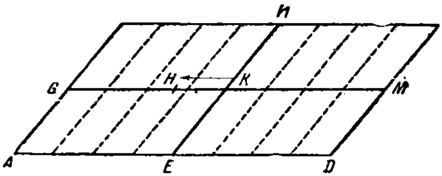
В теореме 7 это доказательство по известному евклидову шаблону распространяется и на случай несоизмеримых величин.

В разобранном нами месте сочинения о равновесии речь идет только о прямолинейном рычаге. Но Архимеду были хорошо известны и законы криволинейного рычага; об этом рычаге Архимед, очевидно, говорил в своем утраченном сочинении «О весах». У Герона (I, 33) читаем:

«Архимед доказал, что и в этом случае отношение грузов обратно пропорционально расстояниям». Точно так же, говоря о частном случае криволинейного рычага, о равновесии грузов, привешенных к двум концентрическим окружностям, Герон (II, 7) прибавляет: «Это доказал Архимед в своем сочинении о равновесии».

Перейдем к вопросу о центре тяжести.

Задачи на нахождение центра тяжести интересовали Архимеда преимущественно как геометра: они давали ему



Фиг. 14

материал для новых блестящих преобразований и доказательств. Для истории механики их значение не велико. Я коснусь здесь поэтому только простейших задач — задач на нахождение центра тяжести параллелограма и треугольника, чтобы охарактеризовать основные различия между доказательствами Архимеда и доказательствами его предшественников, о которых мы говорили выше (стр. 70).

Теорема 9 гласит, что центр тяжести параллелограма лежит на прямой, соединяющей середины противоположных сторон.

Для доказательства этой теоремы делается ложное предположение, что центр тяжести не лежит на этой прямой, а находится в точке H (фиг. 14). Каждая из половин стороны AD (AE и ED) делится на столько равных между собой частей, чтобы каждая из них была меньше KH, и через них проводятся прямые, параллельные боковым сторонам. Получаем ряд конгруэнтно равных параллелограмов. Центр тяжести всей фигуры лежит на прямой, соединяющей центры тяжести двух средних параллелограмов, а согласно постулату 7 (стр. 83), центр тяжести выпуклой фигуры лежит внутри этой фигуры и, следовательно, центр тяжести не может находиться в точке H, как бы мало ни было расстояние от средней линии до H. Итак, центр тяжести должен лежать на средней линии EN, а следовательно, и на средней линии GM, а следовательно, на пересечении их или на пересечении диагоналей (теорема 10).

Таким образом, решение, очевидно, известно уже до начала доказательства, и Архимед стремится свести к абсурду всякое другое решение. Кто знаком с общим методом построения аналогичных доказательств у Евклида и Архимеда, тот знает, что эти решения представляют собою обход атомистической инфинитезимальной процедуры: разбивая параллелограм на вертикальные полоски, которые у́же любой заданной величины, Архимед в сущности разбивает его на неделимые, но в окончательном решении устраняет все, что носит атомистический характер. В до-архимедовской механике параллелограм, очевидно, просто разбивался на «материальные» линии, параллельные одной из боковых сторон; поскольку центр тяжести каждой такой «линии» находится в ее середине, можно считать всю тяжесть такой прямой сосредоточенной в ее середине; тогда центр тяжести всей системы должен находиться на средней линии и т. д. (стр. 70).

Все сказанное можно почти дословно повторить и для теоремы 8 — о центре тяжести треугольника. И здесь, как мы говорили (стр. 70), первоначально треугольник разбивался на ряд «материальных» прямых, параллельных основанию. Задачей Архимеда было только перестроить это решение так, чтобы оно удовлетворяло требованиям строгости. Он поступил так же, как в случае параллелограма, сделав предположение, что центр тяжести не находится на медиане, и применив затем reductio ad absurdum.

В связи со сказанным было бы очень важно установить, что́ понимал Архимед под центром тяжести *плоской фигуры*: имел ли он в виду тела в форме пластинки с очень небольшой глубиной (тогда центр тяжести находился бы на середине глубины), или же абстрактные образы предельного типа. У Герона (I, 24) мы читаем следующее: «Никто не станет отрицать, что в действительности центр тяжести может быть только у тел. Если же говорят, что и у геометрических фигур (надо понимать — нематериальных) плоских и телесных есть какой-то определенный центр тяжести, то (смысл этого выражения) надлежаще объяснил Архимед». Очевидно, Архимед, говоря (в трактате «О весах») о центре тяжести геометрических фигур, имел в виду идеальные, нематериальные тела.

В теснейшей связи с архимедовым учением о центре тяжести находилась и его теория о распределении груза между опорами; поэтому очень возможно, что и недошедшая до нас книга его «Об опорах» была написана в раннюю эпоху его научной деятельности, может быть, уже в Александрии.

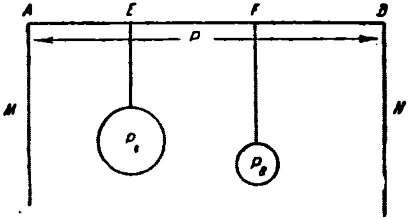
Приводя ряд правил распределения груза между опорами, Герон в своей «Механике» говорил: «Архимед указал уже на способ решения таких задач в книге, называемой «Книгой опор». Отсюда мы вправе заключить, что та теория распределения груза между опорами, которую мы находим в этом месте «Механики» Герона — книги, носившей компилятивный характер, в общих чертах восходит к Архимеду. Только характерная ошибка, восходившая, как мы говорили уже (стр. 70—71), к стоической механике и состоявшая в том, что груз распределяется между опорами поровну, независимо от их расположения, не может быть приписываема Архимеду. Исключив эти явные нелепости из рассуждений Герона, мы получим в основных чертах теорию Архимеда. В самом деле в 26-й главе I книги «Механики» Герона мы читаем: «(Из книги Архимеда) мы опускаем то, что необходимо для других вещей, и в данном случае используем лишь то, что относится к количественному измерению, как это нужно для учащегося. Общий подход при этом таков. Пусть дано любое количество колонн и на них покоятся балки, причем положение нагрузки относительно двух крайних колонн одинаковое или не одинаковое; пусть балки выступают за одну из этих опор или за обе сразу; пусть, наконец, расстояние между колоннами равное или неравное; требуется узнать, какая нагрузка приходится на каждую из колонн. Пример: пусть дана длинная балка, тяжесть которой распределена равномерно; пусть ее несут люди, размещенные на равных расстояниях друг от друга по длине и в концах балки; пусть один или оба конца торчат, требуется узнать, какая тяжесть приходится на каждого из людей...»

Герон начинает со случая, когда балка с равномерно распределенной тяжестью подперта на концах и в произвольных точках по ее длине. Он рассуждает так: если разрезать балку над каждой из опор, то отрезки балки останутся лежать на опорах, и никакого перемещения не произойдет. Стало быть, думает он, если разрезать балку над каждой из опор, груз останется распределенным так же, как и раньше (рассуждение, конечно, неверное, ибо фактически в результате разрезывания взаимоотношение внутренних сил в балке станет совершенно иным). Теперь задачу уже ничего не стоит решить. Если, например, мы имеем опоры A, B, C, D, K, L, а тяжесть участка балки между A и B равна P_A, между B и C равна P_B, между C и D равна P_C..., а между K и L равна P_K, то опора A будет нести нагрузку $\frac{P_A}{2}$, опора B — нагрузку $\frac{P_A}{2}+\frac{P_B}{2}$, опора C — нагрузку $\frac{P_B+P_C}{2}$ и т. д., и, наконец, опора L— нагрузку $\frac{P_K}{2}$.

В действительности эта задача в общем ее виде статически совершенно неопределенная, и восходящее, вероятно, к Архимеду решение Герона, основанное, как мы видели, на ошибочном допущении, имеет только интерес курьеза.

Более интересен случай, когда балка покоится на двух опорах, но один из концов ее не подперт. Этот случай Герон рассматривает в главе 27, и рассуждает в общем правильно. Пусть, например, мы имеем две опоры A и B, пусть часть балки, свободно висящая слева от опоры A, имеет вес P_A, а часть, заключенная между опорами A и B, вес P_B. Тогда груз P_A, висящий слева от опоры A, уравновесится равным ему грузом P_A левой части отрезка балки, лежащего вправо от опоры A. Весь этот груз, равный $2P_A$, должна будет выдерживать опора A. Остается вес правой части отрезка балки, лежащего между опорами и примыкающего слева к опоре B; он равен, очевидно, $P_B—P_A$. Этот груз надлежит распределить между обеими опорами.

До этого места Герон рассуждает совершенно правильно. Но здесь дает себя знать роковое заблуждение, в которое, как мы видели, ввел Герона стоик Посидоний и которое не могло иметь места у Архимеда. Герон забывает о законе рычага и распределяет груз $P_B—P_A$ поровну между обеими опорами, а не обратно пропорционально расстояниям центра тяжести этого груза от опор. Для доказательства этого положения он представляет себе, что в точке, где кончается отрезок, весящий P_A, и где начинается отрезок $P_B—P_A$, подставлена еще колонна C; в этом случае нагрузка $P_B—P_A$, разумеется, распределяется равномерно между колонной B и колонной C. Далее он предполагает, что колонна C принята и что ее нагрузка автоматически



Фиг. 15

передается колонне A — допущение неверное, основанное на ошибочном правиле Посидония. Несомненно, у Архимеда речь здесь шла о распределении груза $P_B—P_A$ обратно пропорционально расстоянию центра тяжести от опор, но Герон его неправильно понял.

Это видно из того, что, рассматривая действие на опоры нагрузок, привешенных в различных точках равномерно тяжелой балки, имеющей опоры в концах, Герон неожиданно поступает совершенно правильно, распределяя нагрузки по закону рычага. Так, для изображенного на фиг. 15 случая, где вес балки P, вес нагрузок P_1 и P_2, а опоры M и N, Герон дает такое решение (в переводе на нашу символику): на опору M приходится

$$\frac{P_1 \cdot EB}{AB} + \frac{P_2 \cdot FB}{AB} + \frac{P}{2},$$

на опору N приходится

$$\frac{P_1 \cdot AE}{AB} + \frac{P_2 \cdot AF}{AB} + \frac{P}{2}.$$

Не менее правильно поступает Герон (resp. Архимед), определяя нагрузку на каждую из опор для случая треугольника, подпертого в трех вершинах. Если требуется найти нагрузку, вызванную тяжестью самого треугольника,[1] Герон поступает так. Он считает груз P помещенным в центре тяжести треугольника, т. е. на медиане, на $\frac{1}{3}$ ее длины, считая от основания. Этот груз P он распределяет на оба конца медианы. Получается нагрузка в $\frac{1}{3}P$ в вершине и в $\frac{2}{3}P$ в основании медианы (по закону рычага). Груз в $\frac{2}{3}$ в основании медианы, т. е. в середине основания треугольника, распределяется затем поровну между двумя концами этого основания. На каждое приходится $\frac{1}{3}P$. Получается правильный вывод: каков бы ни был треугольник, подпертый в вершинах, его опоры несут одинаковую нагрузку.

Если на какую-либо точку треугольника, подпертого в трех вершинах, положен груз, то для распределения нагрузки на три опоры Герон, следуя, разумеется, за Архимедом, предлагает (гл. 39) следующее правильное решение, которое мы даем в нынешних символах. Точка, в которой лежит груз, соединяется с одной из вершин треугольника, и соединяющая прямая продолжается до пересечения с противоположной стороны треугольника. Пусть нагрузка равна P и пусть точка ее приложения делит проведенную прямую в отношении $m : n$ (считая от вершины), тогда на вершину этой прямой придется нагрузка $\frac{nP}{m+n}$, на основание $\frac{mP}{m+n}$. Пусть теперь проведенная нами прямая разделит основание треугольника в отношении $k : l$. Тогда на один из его концов придется нагрузка $\frac{lmP}{(m+n)(k+l)}$, на другой $\frac{kmP}{(m+n)(k+l)}$.

Здесь мы находим у Архимеда несомненное предвосхищение нынешней механики. В самом деле, эта теорема

[1] Книга II, глава 38.

очевидно дает однозначный результат при проведении прямой к любой из трех вершин. Проделав эту процедуру в общем виде для трех вершин, приравняв полученные выражения и сократив, получим теорему Чевы.

Резюмируя сказанное, мы прежде всего должны указать на то, что живой интерес к механике, засвидетельствованный уже для эпохи пребывания Архимеда в Александрии, заставляет нас считать неверным утверждение Плутарха, выставлявшего Архимеда, в духе симпатичной Плутарху идеалистической философии, поклонником чистой отвлеченной математики, относившимся к механике с высокомерным пренебрежением как к прикладной, сугубо практической дисциплине и занимавшимся ею лишь для развлечения в часы досуга. Наоборот, Архимед делает все возможное для того, чтобы максимально сблизить «чистую» математику с механикой: с одной стороны, он перестраивает всю теоретическую механику по образцу евклидовой геометрии с ее постулатами и логически вытекающими из них теоремами; с другой, он пытается решать чисто геометрические задачи при помощи принципов рычага и учения о центрах тяжести.

Дело в том, что, как мы убедимся ниже, в области математики все внимание Архимеда было устремлено как раз на те отделы ее, где необходимо было интегрирование, запрещенное идеалистической философией; он меньше всего готов был довольствоваться подыскиванием строгих доказательств для положений, уже выставленных в V и IV вв. Одним из главных путей, найденных им для продвижения в этой области, и было математическое обоснование закона рычага и применение его для геометрических доказательств.

Мы видели уже, что по существу обе эти попытки были неудачными. Постулаты, положенные в основание теоретической механики, принадлежали как раз к числу тех «недостаточно очевидных предпосылок», с которыми Архимед, как мы увидим, боролся в области чистой математики; то положение, которое Архимед доказывал — что нагрузки рычага обратно пропорциональны длине его плеч, по существу говоря, немногим менее очевидно, чем тот постулат, который он при этом принимал без доказательства, — что два тела, имеющие равный вес, будучи подвешены за центр тяжести, могут заменять друг друга на рычаге без нарушения равновесия.

Но если бы даже это обоснование теоретической механики и оказалось математически безукоризненным, идея применения принципов механики для решения чисто геометрических проблем не могла оправдать себя: приемы, почерпнутые из механики, потому только приводили к новым выводам в геометрии, что в них допускалось и применялось примитивное интегрирование атомистической математики, запрещенное в чистой геометрии. Стоило только допустить применение этих приемов в геометрии, и не трудно открыть целый ряд новых истин в учении о площадях и объемах, не прибегая к рычагам и центрам тяжести. Правда, Архимед с его техническим складом мышления отличался гениальной виртуозностью именно в применении этих методов, основанных на механике, но, ввиду наличия в них инфинитезимальных элементов, он в этом виде не мог применять их для математических *доказательств*, а только в *евристических* целях, для *нахождения* новых решений, которые затем должны были *доказываться* строгим методом исчерпания.

Обогащенный этим многообразным научным опытом, с новыми раскрывшимися перед ним математическими горизонтами, Архимед вернулся в родные Сиракузы.

ГЛАВА ПЯТАЯ

☆

Архимед в Сиракузах

Архимед вернулся в родной город крупным ученым с мировым именем. В Сиракузах ему как родственнику монарха было обеспечено блестящее общественное положение, достаток и досуг, дававший возможность полностью посвятить себя научным занятиям; вдобавок в Сиракузах не было той специфической придворной обстановки, которая, как мы видели, накладывала свою отвратительную печать на работу поэтов и ученых. Спокойной научной работе благоприятствовала и внешняя обстановка; благодаря искусной внешней политике Гиерона, Сиракузы наслаждались миром во время первой Пунической войны (264—241) и пользовались всеми выгодами нейтрального, невоюющего государства; такое же спокойное и выгодное положение занимали они и в промежутке между первой и второй Пуническими войнами.

В это время в кругах математиков (во всяком случае, среди крупнейших математиков Мувея) существовал интересный обычай, впоследствии, в XVII—XVIII вв., снова вошедший в моду. Когда кому-либо из математиков удавалось открыть и доказать новую математическую истину, то он, прежде чем опубликовать доказательство этой истины, сообщал свой вывод без доказательства крупнейшим математикам Музея. Только по отношению к молодым, еще не имеющим имени математикам считалось допустимым сразу сообщать им доказательство, не дав им возможности самим испытать свои силы в новом вопросе. Конечно, наибольшая честь принадлежала тому, кто первый предложил и доказал новую истину; поэтому, если математик предложил для доказательства теорему, а затем оказывалось, что сам он доказательства ее не нашел, то это было большим конфузом для предложившего.

Так, например, Архимед имел обыкновение открытые им новые истины до их опубликования посылать для доказательства Конону, крупнейшему из современных ему математиков. Об этом мы узнаем из написанного после смерти Конона письма Архимеда к Досифею, молодому талантливому ученику Конона. Письмо это было написано значительно позже и представляет собою предисловие к сочинению «О спиралях».

«Архимед желает здравствовать Досифею. Бо́льшая часть теорем, которые я послал Конону и доказательство которых ты меня просишь прислать в каждом письме, доказана уже в моих работах, которые доставил тебе Гераклид. Еще несколько доказательств содержатся в книге, которую я тебе теперь шлю. Не удивляйся тому, что я чересчур долго задерживал опубликование этих доказательств. Причина этого в том, что я хотел сперва сообщить об этих теоремах людям, занимающимся математикой, которые хотели бы сначала сами попробовать доказать их. Ведь очень многие геометрические теоремы, которые на первый взгляд кажутся чрезвычайно трудными, в конце концов, находят успешное окончательное решение. Но Конон умер прежде, чем ему удалось урвать время для того, чтобы заняться этими теоремами. Если бы этого не случилось, он нашел бы решение всех этих проблем, ясно доказал бы их, и, кроме того, обогатил бы геометрию и собственными открытиями. Ведь я хорошо знаю, что он обладал необыкновенными математическими дарованиями и к тому же исключительной ученостью. И вот протекло много лет со смерти Конона, а я ничего не слышал о том, чтобы кто-нибудь взялся за решение одной из этих задач.

Поэтому я перечислю здесь по порядку все теоремы, предложенные мною Конону, а особенно две из них, которые привели меня к неправильному выводу: пусть это будет устрашающим примером того, как люди, утверждающие, будто они умеют доказать все то, что они предлагают решить другим, но не прилагающие собственных решений этих вопросов, в конце концов, принуждены убедиться, что они брались доказать то, что доказать невозможно».

Далее Архимед дает перечень тех теорем, которые он послал для решения Конону (разумеется, без доказательства). Это — часть тех теорем, которые впоследствии вошли в сочинения «О шаре и цилиндре», «О коноидах и сфероидах» (обе теоремы о параболоиде), «О спиралях». Для нашей цели интересно только следующее замечание Архимеда: «Следующая теорема была неверной, именно вот что: если шар будет рассечен плоскостью, перпендикулярной к одному из диаметров его, на две неравные части, то отношение большего сегмента к меньшему равно квадрату отношения большей поверхности к меньшей.... Не верна также и последняя предложенная мною для доказательства теорема, что если диаметр шара разделен в таком отношении, что квадрат большей части в три раза больше, чем квадрат меньшей части, и если через точку деления провести плоскость, перпендикулярную к диаметру, и рассечь ею шар, то тело, подобное большему из этих шаровых сегментов, будет наибольшим из всех сегментов, имеющих одинаковую с ним поверхность Действительно, как мы увидим из II книги сочинения «О шаре и цилиндре», Архимед впоследствии сам обнаружил неправильность и того и другого вывода и дал правильные решения и для объема шарового сегмента и для условия, при котором он имеет максимальную величину. Надо при этом отметить, что, как видно из его замечаний, ни один из математиков, которым он предложил для доказательства свои теоремы, этих ошибок не обнаружил. Тем не менее, Архимед счел необходимым публично, в работе, предназначенной для широкого распространения, заявить о своих ошибках, прибавив к этому еще такой нелестный выпад по своему адресу: «Пусть это будет устрашающим примером того, как люди, утверждающие, будто они умеют доказать все то, что они предлагают решить другим, но не прилагающие собственных решений этих вопросов, в конце концов принуждены убедиться в том, что они брались за невозможное». Это — образец редкой научной честности и объективности Архимеда! Что касается комплиментов по адресу Конона, то нам уже трудно судить, было ли утверждение Архимеда: «Если бы Конон был жив, то он нашел бы решения всех этих проблем и ясно доказал бы их», объективной оценкой этого выдающегося предшественника или простой галантностью, принятой в научных кругах того времени.

О том же обычае сообщать содержание теорем без доказательств крупнейшим математикам до опубликования этих доказательств свидетельствует и начало письма к Эратосфену «О методе доказательства теорем при помощи механики». Мы узнаем отсюда, что все заключенные в этом сочинении теоремы были сначала посланы Эратосфену «как серьезному ученому, выдающемуся по значению философу, не затрудняющемуся и в вопросах математики, если приходится иметь с ними дело»; очевидно, Эратосфен этих решений не нашел: «Архимед желает Эратосфену здравствовать. Раньше я послал тебе некоторые из найденных мною теорем, причем я сообщил тебе только выводы с предложением самому найти доказательства, которых я тебе пока не сообщал».

Из всего этого материала совершенно ясно, что Архимед был в это время общепризнанной величиной, членом математического Олимпа, бывшим на равной ноге с Кононом и Эратосфеном, возглавлявшими математическую науку; с Кононом он был к тому же в личной дружбе. С Досифеем, любимым и талантливым учеником Конона (как мы сказали бы, — занявшим его кафедру), Архимед переписывается после смерти Конона, но как корифей науки с младшим коллегой (он не предлагает ему для доказательства свои открытия, а сразу сообщает свои доказательства).

Однако, будучи вполне респектабельным академическим математиком, он решается (правда, весьма осторожно) ввести в науку приемы, заимствованные им из механики, не боясь бросить вызов тому, что считалось хорошим тоном в математических кругах.

Как я говорил уже, данное Архимедом математическое обоснование его механики не может нас удовлетворить. Можно думать, что либо и ему самому оно не казалось вполне безукоризненным, либо он сомневался в том, что это нововведение может сразу же убедить его коллег. Поэтому он в самом раннем из своих геометрических сочинений, в сочинении «О квадратуре параболы», не довольствуется «механическим» доказательством теоремы о площади параболического сегмента, а дает еще параллельное строгое геометрическое доказательство. В более поздних же сочинениях, исключая лишь письмо к Эратосфену, «механические» доказательства больше вовсе не встречаются, хотя из этого письма мы узнаем, что свои решения Архимед и в более позднее время находил при помощи механики. Очевидно, он пришел к выводу, что механический метод является недостаточно строгим, и поэтому при окончательной обработке своих трудов устранил все его следы.

Во всяком случае, этот метод включал в себя прием, который был категорически запрещен в математике со времени Евдокса: это — интегрирование, применявшееся атомистами, составление тел из «плоскостей» (т. е. из тел, имеющих бесконечно малую толщину), а плоскостей из «линий» (т. е. из плоскостей, имеющих бесконечно малую ширину). В своем личном обиходе Архимед, как мы говорили, применял этот метод, заимствованный им из использованных им трудов по механике; но в первом же труде, в котором он открыто выступает со своим «механическим» методом, он заботливо и тщательно устраняет все следы этой интеграции, вводя вместо нее доказательства евдоксовым методом исчерпания с применением reductio ad absurdum.

Однако, если мы сравним доказательства этого типа в «Началах» Евклида и у Архимеда, то убедимся, что и на этих доказательствах лежит печать гениальности сиракузца: эти доказательства в его руках получили гораздо более наглядный и убедительный характер. В обычном своем виде доказательство исчерпанием состоит в том, что неизвестно откуда берется готовое решение и затем его правильность устанавливается чисто догматически; доказывают, что оно не может быть ни больше ни меньше этой готовой величины. Усваивая такую казуистическую аргументацию, молодой математик не мог на основании такого решения уяснить себе даже то, что речь идет о переменной величине, все более и более приближающейся к пределу; поэтому метод исчерпания не расширял его математического кругозора. Архимед, наряду со старым методом исчерпания, применяет новое видоизменение старого приема Антифонта (стр. 26); он не только вписывает в кривую, площадь сегмента которой он определяет, но и описывает вокруг нее ступенчатую прямолинейную фигуру; затем он доказывает, что площадь вписанной фигуры всегда меньше некоторой величины S (которая, как он заранее узнавал при помощи «нестрогого» атомистического метода, равна площади искомого сегмента), а площадь описанной — всегда больше той же величины S. Далее, он как бы сдвигает обе прямолинейные фигуры так, чтобы они совпали между собой и с криволинейной фигурой, площадь которой он определяет. Разумеется, он и этого прямо не делает и нигде не говорит, что эти прямолинейные фигуры в пределе стремятся к криволинейной. Он вместо этого всего доказывает, что разность между обеими прямолинейными фигурами может быть сделана *меньше любой заданной величины*, скажем, D. Теперь стоит предположить, что площадь криволинейной фигуры больше S на любую заданную величину D, и она, очевидно, окажется больше площади описанной прямолинейной фигуры; стоит предположить, что площадь криволинейной фигуры меньше S на D, и она, очевидно, окажется меньше площади вписанной прямолинейной фигуры, ибо вся разница между площадями этих прямолинейных фигур меньше D. А если искомая площадь не больше и не меньше S, то она, очевидно, равна S. Отметим, что Архимед не дает и этого доказательства раз навсегда, а повторяет его снова и снова для каждого отдельного случая. Но во всяком случае, как ни далек метод Архимеда от нынешней предельной процедуры, он вводил сближающиеся между собой верхнюю и нижнюю границы и таким образом, правда, бессознательно, подводил читателя к *понятию предела*. В этом его величайшая заслуга и значение.

Чтобы читателю стало ясно, какие задачи ставил своему исследованию сам Архимед в эту эпоху, позволю себе процитировать предисловие к его сочинениям этого времени: к «Квадратуре параболы» и к книгам «О шаре и цилиндре».

«Архимед желает здравствовать Досифею. Узнав, что Конон, бывший моим другом при жизни, скончался и что и ты, как и я, был близок к нему и, кроме того, что ты — знаток геометрии, я, несмотря на всю печаль, вызванную потерей не только друга, но и замечательного математика, решил тем не менее направить тебе письмо, которое я собирался послать Конону, и сообщить тебе в нем геометрическую теорему, которой до сих пор никто не занимался и которою я занялся теперь. Я нашел ее сперва при помощи механики, а затем доказал также и геометрически. Некоторые геометры прежнего времени пытались доказать, что можно найти площадь, ограниченную прямыми линиями, которая была бы равна данному кругу или данному круговому сегменту; затем они пытались найти квадратуру площади, заключенной между сечением остроугольного конуса (т. е. обводом эллипса, см. выше, стр. 35—36) и прямой линией, причем они позволяли себе исходить из вряд ли допустимых предпосылок. Поэтому бóльшая часть ученых пришла к выводу, что они этих задач не разрешили. Но я ничего не слышал о том, чтобы кто-либо из моих предшественников попытался найти квадратуру сегмента, ограниченного прямой линией и сечением прямоугольного конуса (т. е. обводом пораболы, см. выше, стр. 35). Ныне я нашел решение этой задачи. Ибо в настоящей работе я показываю, что всякий сегмент, ограниченный прямой линией и сечением прямоугольного конуса, равен (т. е. равновелик) четырем третям треугольника, имеющего то же основание и равную высоту с ним. Для доказательства этого свойства я применил следующую предпосылку: излишек, на который бóльшая из двух неравных площадей превосходит меньшую, будучи прибавляем к самому себе, может быть сделан бóльшим, чем любая данная ограниченная площадь. Прежние геометры пользовались этой предпосылкой и с ее помощью они доказали, что круги относятся, как квадраты, а шары, как кубы их диаметров. То, что всякая пирамида есть третья часть призмы, которая имеет то же основание, что и пирамида, и равную с ней высоту; что любой конус есть треть цилиндра, который имеет то же основание, что и конус, и равную с ним высоту, они доказали, применяя предпосылку, сходную с предыдущей. И в самом деле, каждое из доказательств этих теорем было принято так же, как если бы они этой предпосылкой не пользовались (т. е. принятие этой очевидной предпосылки не сделало их доказательств менее убедительными в глазах ученых. — *С. Л.*). Я был бы удовлетворен, если бы мое публикуемое теперь сочинение подверглось той же оценке, что и указанные теоремы. Поэтому я тщательно обработал мое доказательство и шлю его тебе; я доказываю это положение сперва методом механики, а потом геометрически. Я предпосылаю своей работе несколько элементарных теорем о конических сечениях, полезных для доказательства теоремы. Будь здоров».

Таким предисловием снабжена первая его работа «О квадратуре параболы». Вскоре после этой работы он шлет тому же Досифею свое новое сочинение «О шаре и цилиндре», в предисловии к которому он замечает: «При предыдущей оказии я послал тебе мои изыскания, которые я успел закончить к тому времени, в том числе доказательство того, что площадь сегмента, ограниченного сечением прямоугольного конуса и прямой, равна четырем третям треугольника, имеющего то же основание, что и сегмент, и ту же высоту. После отсылки этого письма я нашел другие важные теоремы и разработал их доказательства. А именно: во-первых, что поверхность всякого шара в четыре раза больше площади его большого круга; во-вторых, что поверхность всякого шарового сегмента равна площади круга, радиус которого равен прямой, соединяющей вершину сегмента с одной из точек окружности круга, служащего основанием сегмента; далее, что цилиндр, основание которого равно большому кругу шара, а высота — диаметру шара, сам (т. е. по объему — *С. Л.*) в полтора раза больше этого шара, а его поверхность (включая площади верхнего и нижнего основания — *С. Л.*) в полтора раза больше поверхности шара. Разумеется, эти свойства были присущи этим телам всегда, но они остались неизвестными всем геометрам; ни один из них не заметил даже, что эти тела соизмеримы между собой. Поэтому я могу без ложного стыда поставить эти исследования в один ряд с теоремами Евдокса о телах, — с теоремами, которые считаются далеко превосходящими все остальные, — именно, что пирамида равна трети призмы, имеющей такое же основание и высоту, а конус — цилиндра... Разумеется, и эти свойства были присущи телам всегда, но, тем не менее, *верно то, что они оставались неизвестными всем замечательным геометрам, жившим до Евдокса, и никто из них не открыл их.*

Каждый, кто понимает в этом деле, может проверить правильность моих открытий. Как хорошо было бы, если бы они были сделаны еще в то время, когда Конон был жив! Я думаю, что он лучше, чем кто бы то ни было, мог бы понять их и вынести справедливый приговор».

Эти выступления дают нам яркий образ замечательного сиракузского математика. Он получает известие о смерти своего ближайшего друга и, вероятно, учителя. Но печаль по покойном не вынуждает его ни на минуту отвлечься от работы. Наука прежде всего. С этой точки зрения для Архимеда важнее всего то, что он лишился лучшего и компетентнейшего собеседника и критика, с которым он, между прочим, решил поделиться и новым сделанным им открытием. Но он узнает, что Конон оставил знающего и способного ученика, и он немедленно направляет к нему работу, предназначенную для Конона. Архимед знает, что ему удалось сделать важные открытия, и рад этому; но он чужд всякого тщеславия. Он обрисовывает в основных чертах ход развития науки о квадратурах и кубатурах в последнее столетие и вполне объективно отмечает место, которое принадлежит его исследованиям в ряду этих замечательных открытий.

С другой стороны, из этого вступления мы видим, какие новые задачи ставит себе в области квадратур и кубатур Архимед.

Площади прямолинейных фигур, круга и его частей были найдены еще в V в.; затем эти выводы были подтверждены строгим методом исчерпания. Точно так же еще Демокритом были найдены объемы призмы, цилиндра, пирамиды и конуса, но доказательства его были даны нестрогим атомистическим методом. Строгое доказательство этих теорем методом исчерпания дал Евдокс. Отметим попутно, что, как мы видим из второго приведенного здесь предисловия, в это время Архимед еще ничего не знает о математических трудах Демокрита, а приписывает честь открытия теорем об объеме пирамиды и конуса *исключи-*

тельно Евдоксу, считая эти открытия «далеко превосходящими все остальные». Впоследствии он сам исправит эту ошибку. Это не случайность. Демокрит был запрещен; в идеалистической науке было правилом, следуя Платону, не упоминать его имени даже там, где это было нужно, а между тем почти для каждого нового открытия в области естествознания и математики приходилось непосредственно или через третьи руки обращаться к Демокриту. Особенно часто заимствуют ту или иную часть учения Демокрита платоники и пифагорейцы, и кто знает, сколько еще великих открытий Демокрита стало известно нам в искаженном виде и под чужим именем!

Предшественникам Архимеда было уже известно, что объемы шаров относятся, как кубы их радиусов, как было известно им и отношение объема шара к его поверхности, но нахождение самой этой поверхности, т. е. нахождение отношения этой поверхности к площади большого круга, было еще делом будущего.

Вот почему Архимед должен был сосредоточить свое внимание на квадратурах конических сечений, на нахождении поверхности и объема шара и, наконец, на телах, получаемых от вращения конических сечений вокруг оси. Для этой цели необходимы были пересмотр и углубление учения о конических сечениях, уже до него, как мы видели, систематически изложенного Менехмом, Аристеем и Евклидом.

Как мы знаем, для нахождения решений Архимед применял методы атомистов, но, будучи воспитан в евдоксовых принципах и выступая перед александрийскими учеными, он всячески подчеркивает строгость своего метода, который не должен, по его мнению, встретить возражений со стороны даже самых строгих ревнителей нового вполне научного метода. Он отгораживается от «вряд ли допустимых» предпосылок тех из предшественников (т. е. атомистов и их последователей), выводы которых не получили признания в науке; он имеет в виду, конечно, не Демокрита, с трудами которого он, как мы видели, еще не был знаком, а тех из платоников, которые в математике приняли метод Демократа. Сам Архимед исходит из предпосылки, которая не встретила возражений со стороны кого-либо из математиков, именно, что «излишек», на который большая из двух неравных площадей превосходит меньшую, будучи прибавляем к самому себе, может быть сделан бо́льшим, чем любая данная ограниченная площадь. И в «Квадратуре параболы» и в «Шаре и цилиндре» и позже в сочинении «О спиралях» эта аксиома предпослана доказательству. В самом деле, на этом допущении, как мы видели, зиждилась знаменитая теорема, легшая в основу метода исчерпания: «Если от излишка, на который большая из двух неравных площадей превосходит меньшую, отнять больше половины, от полученного остатка снова отнять больше половины и т. д., то, в конце концов, можно получить остаток, который будет меньше, чем любая заданная ограниченная площадь».

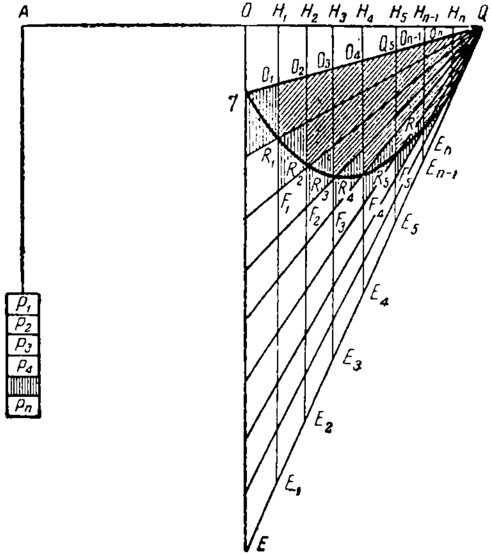
Первым публичным выступлением Архимеда в этой области и было нахождение квадратуры параболы. Он пользуется этим случаем для того, чтобы познакомить ученую публику также и со своим новым «механическим» методом решения геометрических задач. Но, отнюдь не желая навлечь на себя обвинение в недостаточной строгости, он при публикации видоизменяет этот метод, устраняя из него атомистическое составление площадей из линий, заимствованное им из трудов по механике.

Чтобы наглядно понять, в чем состояла эта очистка «механических» приемов доказательства от «вряд ли убедительных» (атомистических) предпосылок, сравним новое, тоже «механическое» доказательство теоремы о площади параболического сегмента, содержащееся в «Квадратуре параболы», с приведенным выше (стр. 79) «механическим» доказательством, которое Архимед применял для собственных надобностей и о котором мы узнали из его письма к Эратосфену.

В первоначальном доказательстве, известном нам из этого письма, площади как треугольника, так и находящегося внутри него параболического сегмента рассматривались как *состоящие* из чрезвычайно большого множества плотно прилегающих друг к другу «материальных» прямых линий, параллельных оси параболы. Предпосылка, что тело *состоит* из таких линий, есть, как впоследствии выражается Архимед, «постулат, с которым нелегко согласиться». Поэтому в своем предназначенном для опубликования сочинении Архимед уже не делит треугольник и параболу на чрезвычайно большое число линий, а рассматривает некоторое ограниченное число *трапеций* с равными высотами. Разделив сторону треугольника, параллельную оси параболы, на равные части и соединив полученные точки с противоположной вершиной треугольника, он получает две зубчатые ломаные линии: одну, объемлющую параболу, другую, — объемлемую параболой. Как Архимед будет дальше доказывать, ясно заранее: зная наперед (он установил это при помощи атомистического метода), что площадь параболического сегмента равна трети площади треугольника, он будет доказывать, что площадь объемлющей ломаной всегда больше трети площади всего треугольника, а площадь объемлемой всегда меньше трети ее; затем он докажет, что разность между объемлющей и объемлемой ломаными может быть сделана сколь угодно малой, и, наконец, при помощи reductio ad absurdum покажет, что площадь параболического сегмента не может быть ни больше, ни меньше трети площади треугольника, а следовательно, равна трети этой площади.

Именно так ведется доказательство в сочинении «О квадратуре параболы». Самому доказательству (предл. 14—15) предпосылаются две группы лемм. Первая группа (предл. 1—5) содержит несколько теорем о параболе, нужных для доказательства основной теоремы; из них те, которые уже были доказаны Евклидом в его «Конических сечениях» (предл. 1—3), приводятся без доказательств, а остальные доказываются весьма изящным искусственным способом при помощи преобразования пропорций. Вторая группа (предл. 6—13) представляет собою ряд очень элементарных теорем, относящихся к теории рычага, основной смысл которых сводится к принципу: чем дальше от точки опоры привесить один и тот же груз, тем больший противовес нужен, чтобы его уравновесить.

Для доказательства основной теоремы параболический сегмент подвешивается (фиг. 16) к одному из плеч равноплечего рычага так, чтобы ось параболы шла вертикально, чтобы один из концов его основания Q упирался в конец плеча, а другой q находился на одной вертикали с точкой опоры O рычага. На это же плечо подвешивается треугольник, одной из сторон которого служит уже упомянутое основание параболического сегмента Qq, другой — вертикаль qE, проходящая при продолжении через O, третьей — касательная QE к параболе в точке Q. Основание Qq делим на n равных частей: qO_1, O_1O_2, $O_2O_3,\ldots$, O_nQ и через точки деления O_1, O_2, $O_3,\ldots$, O_n проводим вертикальные прямые до пересечения с плечом рычага в точках H_1, H_2, $H_3,\ldots$,



Фиг. 16

H_n, с параболой в точках R_1, R_2, $R_3,\ldots$, R_n и с касательной QE к параболе в точках E_1, E_2, $E_3,\ldots$, E_n. Проводим ряд прямых QR_1, QR_2, QR_3, ..., QR_n до пересечения с вертикалью qE.

Теперь, как и в первоначальном доказательстве, уравновесим треугольник EqQ грузом, подвешенным в точке A. Но в отличие от первого, «атомистического» доказательства, во-первых, Архимед не говорит ничего о том, что грузы P_1, P_2, $P_3,\ldots$, подвешенные в A, представляют собою перенесенные на новое место элементы параболического сегмента $qR_мQ$ и что именно каждый элемент параболического сегмента по перенесении в A уравновешивает соответствующий элемент треугольника QqE; во-вторых, теперь эти грузы $P_1, P_2, P_3, \ldots$ уравновешивают не «линии» в треугольнике, т. е. элементы бесконечно малой ширины, а элементы треугольника некоторой произвольно взятой конечной ширины — трапеции EO_1, E_1O_2 и т. д., оставшиеся на своих местах; разумеется, про себя Архимед все время представляет себе $P_1, P_2, P_3 \ldots$, как те же, но перенесенные на новое место элементы параболы, но из соображений строгости он об этом говорить не может. Теперь P_1, P_2, P_3, просто *некоторые* грузы, которые, будучи подвешены в точке A, соответственно уравновесят оставшиеся на своих местах трапеции EO_1, E_1O_2 и т. д.

Не трудно видеть, что вследствие этого доказательство Архимеда лишилось наглядности и получило характер некоего фокуса. Поскольку сам «фокусник» все время лишь видоизменяет «атомистическое» доказательство, он может быть спокоен, что в конце концов придет к желанному результату. Итак, в непосредственной наглядной убедительности уже нет нужды; поэтому теперь нет уже надобности брать за коромысло весов AQ медиану; теперь он берет за коромысло другую прямую.

Как и в первоначальном доказательстве [стр. 79, уравнения (1), (2), (3), (4)], Архимед исходит из уравнений

$$OA : OH_1 = QO : OH_1 = Qq : qO_1 = E_1O_1 : O_1R_1,$$

но так как прямую O_1R_1 он не имеет уже права считать элементом параболического сегмента, а O_1E_1 — элементом треугольника, то он, исходя из того, что площади трапеций EO_1 и FO_1, имеющих равные высоты, пропорциональны суммам их оснований, а, значит, и основаниям E_1O_1 и O_1R_1, заменяет прежние бесконечно малые элементы E_1O_1 и O_1R_1 конечными элементами — трапециями EO_1 и FO_1:

$$OA : OH_1 = \text{трап. } EO_1 : \text{трап. } FO_1.$$

Так как OA и OH_1 — плечи рычага, то отсюда видно, что трапеция FO_1 при перенесении ее так, чтобы ее центр тяжести находился на одной вертикали с A, уравновесит трапецию EO_1, центр тяжести которой будет перенесен на вертикаль, проходящую через H_1; в действительности же, ее центр тяжести лежит где-то между вертикалями OE и H_1E_1 и в точке A она уравновешивается грузом P_1. Итак, в действительности правое плечо меньше, чем OH_1, а для того, чтобы трапеция FO_1 уравновесила, находясь в конце левого плеча, трапецию EO_1, правое плечо приходится *увеличить*; следовательно,

$$\text{трап.}\, FO_1 > P_1. \tag{1}$$

Таким же образом получим:

$$\text{трап.}\, F_1O_2 > P_2;\ \text{трап.}\, F_2O_3 > P_3; \ldots \tag{2}$$

Но прямые E_1O_1 и O_1R_1 являются основаниями не только трапеций EO_1 и FO_1, но и трапеций E_1O_2 и R_1O_2. Очевидно, и их площади пропорциональны их основаниям, т. е.

$$OA:OH_1 = \text{трап.}\, E_1O_2 : \text{трап.}\, R_1O_2.$$

Отсюда видно, что трапеция R_1O_2 при перенесении ее так, чтобы центр тяжести попал в A, уравновесит трапецию E_1O_2, центр тяжести которой будет перенесен на вертикаль, проходящую через H_1; в действительности же, ее центр тяжести лежит где-то между вертикалями H_1E_1 и H_2E_2 и в точке A она уравновесится грузом P_2. Итак, в действительности правое плечо больше, чем OH_1, а для того чтобы трапеция R_1O_2 уравновесила, находясь в конце левого плеча, трапецию EO_1, правое плечо приходится уменьшить; следовательно,

$$\text{трап.}\, R_1O_2 < P_2. \tag{3}$$

Сопоставляя (2) с (3), получим

$$\text{трап.}\ F_1O_2 > P_2 > \text{трапеции}\ R_1O_2. \tag{4}$$

Точно так же докажем, что

$$\text{трап.}\, F_2O_3 > P_3 > \text{трап.}\, R_2O_3 \ \text{и т. д.}$$

Но P_1, P_2, P_3,... уравновешивают последовательные элементы треугольника EqQ, а $P_1+P_2+P_3+\ldots$ весь треугольник EqQ; следовательно, как это доказано в сочинении «О равновесии плоских тел»,

$$P_1 + P_2 + P_3 + \ldots = \frac{1}{3} \triangle EqQ.$$

Складывая почленно приведенные выше неравенства, получим

$$\text{трап.}\, FO_1 + \text{трап.}\, F_1O_2 + \text{трап.}\, F_2O_3 >$$
$$\frac{1}{3}\, \text{треуг.}\, EqQ > \text{трап.}\, R_1O_2 + \text{трап.}\, R_2O_3 +$$
$$+ \text{трап.}\, R_3O_4 + \ldots$$

После этого Архимед по разобранному выше рецепту очень обстоятельно доказывает, что разность между суммой в левой части уравнения и суммой в правой части уравнения может быть сделана сколь угодно малой: каждая из трапеций, заштрихованных на нашем чертеже вертикальными штрихами, сдвигается так, чтобы она прилегала к прямой qQ; получается, что их сумма (т. е. искомая равность между двумя суммами объемлющих и объемлемых трапеций) равна площади треугольника qQF, а эта площадь может быть сделана сколь угодно малой при разделении Qq на достаточно большое число частей. Затем уже по шаблону доказывается, что площадь параболического сегмента, лежащая между этими двумя суммами, не может быть ни больше, ни меньше $^1/_3$ площади треугольника qQE, а следовательно, она равна ей.

Необходимо отметить, что различная штриховка чертежа применена нами, а не Архимедом; он вообще ни словом не дает понять, что сумма площадей трапеций в левой части уравнения — это площадь ломаной, объемлющей параболический сегмент, а сумма площадей трапеций в правой части уравнения — это площадь ломаной, вписанной в параболический сегмент, и что по мере увеличения числа зубцов обе эти ломаные стремятся к общему пределу — к параболическому сегменту. Даже такие намеки на метод атомистов казались недостаточно строгими и противоречили хорошему тону в математике, который требовал, чтобы ученый не подводил ученика к решению и не уяснял ему общие приемы нахождения решения, а при помощи ряда чудодейственных манипуляций, неизвестно откуда пришедших ему в голову, но зато вполне строгих, принуждал принять его выводы, как логически неизбежные.

Выставленное Архимедом в предисловии к этому сочинению программное утверждение, что он не пользуется «вряд ли допустимыми» предпосылками атомистов, а кладет в основу указанную выше (стр. 107—108) предпосылку, принятую всеми корифеями математики, Архимед, таким образом, полностью оправдывает; при окончательном доказательстве того, что площадь сегмента не больше и не меньше $\frac{1}{3}\triangle EqQ$ (предл. 16), он умышленно ссылается на эту предпосылку в ее канонической форме и лишь затем подвергает ее преобразованию: «Излишек площади сегмента над $\frac{1}{3}\triangle EqQ$, будучи многократно прибавляем к самому себе, может быть сделан больше EqQ. Поэтому можно найти такую часть треугольника EqQ, которая будет меньше, чем указанный излишек площади сегмента над $\frac{1}{3}\triangle EqQ$.»

Если таким образом Архимед тщательно вытравил все следы метода атомистов из своей работы, то у него все же не могло быть уверенности в том, что его нововведение — «механический» метод решения, основанный на законе рычага, — будет благосклонно принят официальной математикой. А так как он не хотел ради пропаганды нового метода ставить под удар свое новое открытие, которым он, как мы видели, гордился, то он в этом же сочинении дает и другой вывод площади параболического сегмента, основанный на чисто геометрических предпосылках.

На основании выведенных Архимедом во вспомогательных леммах зависимостей в параболе он доказывает, что если мы впишем в параболический сегмент треугольник, вершина которого совпадает с вершиной параболического сегмента, а затем на каждой из сторон этого треугольника построим снова треугольник, вершина которого совпадает с вершиной сегмента, ограниченного этой стороной треугольника, и будем продолжать этот процесс и дальше, то каждый новый треугольник равен $\frac{1}{8}$ предыдущего, а следовательно, площадь всех фигур, построенных на первом треугольнике, равна $\frac{1}{4}$ площади этого треугольника, площадь всех фигур, построенных на этих фигурах, равна $\frac{1}{4}$ площади этих фигур и т. д. Далее Архимед должен был бы доказать, что сумма членов бесконечно убывающей прогрессии

$$1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots=\frac{4}{3}.$$

Но такое доказательство требовало в то время применения атомистического метода (см. стр. 19). Он идет обходным путем, доказывая, что сумма любого числа членов этой прогрессии отличается от $\frac{4}{3}$ не больше чем на $\frac{1}{3}$ последнего члена.

Он доказывает это положение (в переводе на наши обозначения) так: пусть мы имеем ряд членов A, B, C, D,..., Z, где каждый последующий равен $\frac{1}{4}$ предыдущего.

Тогда

$$B+C+D+\cdots Z+\frac{1}{3}B+\frac{1}{3}C+\frac{1}{3}D+\cdots+\frac{1}{3}Z=$$
$$=\frac{4}{3}B+\frac{4}{3}C+\frac{4}{3}D+\cdots+\frac{4}{3}Z. \qquad (1)$$

Но

$$\frac{4}{3}B=\frac{1}{3}A;$$
$$\frac{4}{3}C=\frac{1}{3}B;$$
$$\frac{4}{3}D=\frac{1}{3}C$$

и т. д., откуда

$$B+C+D+\cdots+Z+\frac{1}{3}B+\frac{1}{3}C+\frac{1}{3}D+\cdots+\frac{1}{3}Z=$$
$$=\frac{1}{3}A+\frac{1}{3}B+\frac{1}{3}C+\cdots+\frac{1}{3}Y. \qquad (2)$$

Отнимая от обеих частей уравнения общие члены

$$\frac{1}{3}B+\frac{1}{3}C+\frac{1}{3}D+\cdots+\frac{1}{3}Y,$$

получим

$$B+C+D+\cdots+Z+\frac{1}{3}Z=\frac{1}{3}A, \tag{3}$$

или, прибавляя к обеим частям уравнения по A,

$$A+B+C+D+\cdots+Z+\frac{1}{3}Z=\frac{4}{3}A.$$

Если $A=1$, $B=\frac{1}{4}$, $C=\left(\frac{1}{4}\right)^2$ и т. д., то получим

$$1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{4}{3}.$$

Совершенно ясно, что такое изысканное, искусственное решение можно найти, только зная заранее результат.

Теперь с нашей точки зрения остается только констатировать, что $\frac{1}{3}Z$ или $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$ при достаточном увеличении числа членов прогрессии может быть сделано меньше любой данной величины, чтобы притти к заключению, что сумма членов этой прогрессии равна $\frac{4}{3}$. Архимед принужден итти другим, хорошо уже нам известным шаблонным путем, предполагая сначала, что эта сумма больше, а затем, что она меньше $\frac{4}{3}$ на любую заданную величину, и приводя читателя в обоих случаях к абсурду.

Перейдем теперь к сочинению «О шаре и цилиндре», вышедшему, как мы говорили уже, вслед за сочинением «О квадратуре параболы». И эта книга начинается с ряда аксиом, определений и лемм. Так как Архимеду придется рассматривать круг, круговой сектор и поверхности вращения как пределы фигур и тел, ограниченных прямыми линиями и плоскостями, то ему приходится дать определение фигур, выпуклых в одну сторону, и постулировать, что прямая — кратчайшее расстояние между двумя точками, а из выпуклых фигур объемлемая всегда короче объемлющей; поэтому периметр многоугольника, описанного вокруг круга, больше окружности, а вписанного — меньше. Как мы уже отмечали, рассмотрение двух рядов переменных величин — верхнего и нижнего, — стремящихся к одному и тому же пределу (в частном случае, *вписанного* в круг и *описанного* многоугольника), и сближение их между собой, так чтобы разница стала сколько угодной малой, представляет собой собственное нововведение Архимеда, основанное на развитии мысли софиста Антифонта; его непосредственные предшественники всегда имели дело только с одной величиной, стремящейся к пределу. Для этой цели Архимед доказывает, что если даны две неравные величины, сколько угодно близкие друг к другу, то всегда можно найти такие два отрезка прямой, чтобы отношение большего к меньшему было меньшим, чем отношение этих величин. Повторяя затем вывод первой части приведенного выше (стр. 27) предл. 2 кн. XII Евклида о том, что разность между площадью вписанного многоугольника и круга при достаточном увеличении числа сторон многоугольника может быть сделана меньше любой заданной величины, он не довольствуется ссылкой на Евклида, а дополняет эту теорему другой, показывающей, что и разность между площадями *вписанного* и *описанного* многоугольников может быть сделана меньше любой заданной величины.

Затем Архимед переходит к определению боковой поверхности цилиндра и конуса. Методом атомистов эти задачи решались чрезвычайно просто. Поскольку окружность основания рассматривалась как многоугольник с очень большим числом сторон, каждая из которых равнялась неделимому, боковая поверхность цилиндра оказывалась совокупностью чрезвычайно узких прямоугольников, а боковая поверхность конуса — чрезвычайно узких треугольников. Боковая поверхность призмы равна произведению периметра основания на высоту, а боковая поверхность пирамиды — половине произведения периметра основания на образующую; эти же формулы без дальнейших доказательств применялись к цилиндру и к конусу. Для Архимеда эта процедура атомистов была, разумеется, неприемлема, он заменяет ее описыванием и вписыванием в цилиндр (resp. конус) призм (resp. пирамид) с последовательным увеличением числа сторон основания до тех пор, пока разность между вписанной и описанной фигурами не станет меньше любой заданной величины. Результат заранее известен, и автору необходимо только путем reductio ad absurdum доказать, что искомая поверхность не может быть ни больше, ни меньше этой величины. При этом, выражаясь языком нынешней алгебры, формуле для боковой поверхности конуса πrl придается вид $\pi(\sqrt{rl})^2$, т. е. она рассматривается как равновеликая площади круга, радиус которого есть средняя пропорциональная между радиусом основания конуса r и образующей l. Так же и формула для боковой поверхности усеченного конуса у Архимеда соответствует нашей формуле $\pi[\sqrt{(r_1+r_2)\,l}\,]^2$.

Приведем первую часть доказательства для боковой поверхности конуса как один из наиболее типичных примеров архимедова reductio ad absurdum (в наших обозначениях).

Пусть площадь основания конуса есть R, его радиус r, образующая l, средняя пропорциональная между r и l пусть равна m. Пусть M площадь круга с радиусом m, а S боковая поверхность конуса. Надо доказать, что $S=M$.

Пусть S не равно M, тогда оно либо больше, либо меньше M. Пусть $S>M$.

Вокруг окружности M опишем и в окружность M впишем подобные друг другу многоугольники так, чтобы отношение между их площадями было меньше отношения $S:M$. Вокруг окружности R опишем и в окружность R впишем многоугольники, подобные первым двум, а вокруг конуса — пирамиды, имеющие эти многоугольники основанием. Пусть площадь многоугольника, описанного вокруг R, равна R_1, а описанного вокруг M равна M_1, пусть площадь многоугольника, вписанного в R, равна R_2, а вписанного в M равна M_2; пусть боковая поверхность описанной пирамиды равна S_1. Тогда

$$R_1:M_1=r^2:m^2=r:l=R_1:S_1,$$

откуда

$$M_1=S_1.$$

Но по условию

$$M_1:M_2<S:M,$$

а значит, и подавно

$$S_1:M_2<S:M.$$

Но это невозможно: $S_1 > S$, а $M_2 < M$; следовательно, первое отношение имеет больший числитель и меньший знаменатель, чем второе; поэтому оно не меньше, а больше второго. Итак, неравенство $S > M$ невозможно.

Сходным же способом Архимед доказывает, что и $S < M$ невозможно; значит $S = M$, что и требовалось доказать.

Важнейшими основными теоремами в этом сочинении являются теоремы о поверхности и объеме шара и шарового сегмента. Интегрирование, к которому здесь косвенным образом прибегает Архимед, является поразительной демонстрацией его гения, ибо оно соответствует в наших обозначениях интегрированию

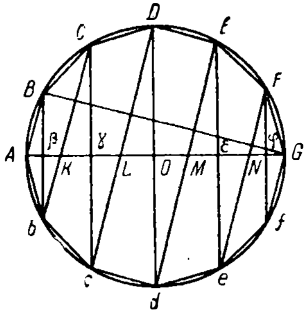
$$4\pi r^2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin\varphi\, d\varphi,$$

к которому Архимед фактически приходит путем нахождения предела суммы ряда

$$\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{3\pi}{n} + \cdots,$$

где $2n$ — число сторон многоугольника, стремящееся к ∞.[1]

Но перейдем к этому исключительно изящному решению Архимеда. Здесь приведем только его решение для шара, ибо его решение для шарового сегмента в принципе тождественно с этим решением.



Фиг. 17

Архимед вписывает в круг правильный многоугольник с четным числом сторон $2n$ и проводит вспомогательные линии, указанные на фиг. 17. Затем он вращает весь чертеж, как вокруг оси, вокруг диаметра AG. Не трудно видеть, что от вращения многоугольника получатся следующие тела: два конуса ABb и GFf и ряд усеченных кону-

[1] См. ниже, стр. 120, примечание 1.

сов $BbCc$, $CcDd$ и т. д., а от вращения круга — шар. Прямые Bb, Cc, Dd и т. д. параллельны между собой, как параллельны между собой и прямые bC, cD, dE и т. д.

Из подобия треугольников $A\beta B$ и ABG получаем

$$B\beta : \beta A = GB : BA.$$

Но (также из подобия треугольников)

$$B\beta : \beta A = \beta b : \beta K = C\gamma : \gamma K : \cdots = f\varphi : \varphi G.$$

Ut omnes ad omnes, ita unus ad unum (см. стр. 25, п. 5), т. е.

$$\frac{B\beta + \beta b + C\gamma + \gamma c + \cdots + F\varphi + \varphi f}{A\beta + \beta K + K\gamma + \gamma L + \cdots + N\varphi + \varphi G} = GB : BA,$$

или, поскольку $B\beta + \beta b = Bb$, $C\gamma + \gamma c = Cc$ и т. д.

$$(Bb + Cc + Dd + \cdots + Ff) : AG = GB : BA. \tag{1}$$

Но поверхность тела, получаемого от вращения многоугольника, согласно выведенным Архимедом формулам, соответствующим (см. стр. 118) πrl для боковой поверхности каждого конуса и $\pi(r_1 + r_2)l$ для боковой поверхности каждого усеченного конуса, будет суммой следующих поверхностей:

конуса $ABb = \pi \cdot AB \cdot B\beta$ [1],

[1] Архимед выражает эту формулу (и соответственно следующие) так: «Круг, радиус которого есть средняя пропорциональная между AB и $B\beta$ (символ π ему не известен). Не трудно видеть, что

$$B\beta = r \sin BO\beta = r \sin \frac{\pi}{n},$$

$$C\gamma = r \sin CO\gamma = r \sin \frac{2\pi}{n},$$

и т. д., а сумма

$$2B\beta + 2C\gamma + 2DO + \cdots = 2r\left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \right.$$

$$\left. + \sin \frac{3\pi}{n} + \cdots \right);$$

следовательно, Архимед сводит задачу к суммированию этого ряда при n, стремящемся к ∞.

усеч. конуса $BbCc = \pi \cdot BC(B\beta + C\gamma) = \pi AB(B\beta + C\gamma)$, усеч. конуса $CcDd = \pi \cdot CD(C\gamma + DO) = \pi AB(C\gamma + DO)$ и т. д., конуса $FfG = \pi \cdot FG \cdot F\varphi = \pi \cdot AB \cdot F\varphi$.

Складывая, находим, что искомая поверхность равна

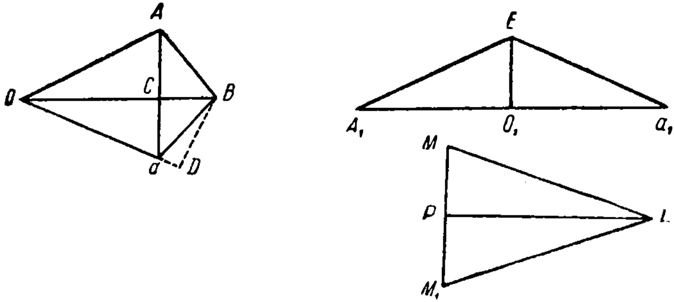
$$\pi \cdot AB(2B\beta + 2C\gamma) + 2DO + \cdots + 2F\varphi) = \\ = \pi \cdot AB(Bb + Cc + Dd + \cdots + Ff). \qquad (2)$$

Но в силу пропорции (1)

$$AB(Bb + Cc + Dd + Ff) = GB \cdot AG,$$

откуда поверхность искомого тела равна $\pi \cdot GB \cdot AG$, а следовательно, она меньше $\pi \cdot AG^2$ (или $4\pi r^2$).

Теперь Архимед описывает вокруг круга многоугольник и, рассуждая таким же образом, доказывает, что поверхность подобного разобранному выше тела вращения, уже не вписанного, а *описанного* вокруг шара, *больше*



Фиг. 18

$\pi \cdot AG^2$ (или $4\pi r^2$). Поскольку выше было доказано, что разность между поверхностями этих тел может быть сделана меньше любой заданной величины, Архимед по знакомому уже нам шаблону доказывает reductione ad absurdum, что поверхность шара не может быть ни больше, ни меньше $\pi \cdot AG^2$, а следовательно, равна этой величине (т. е. $4\pi r^2$).

Вычисление объема шара основано на лемме, дающей формулу для объема тела, составленного из двух конусов с общим основанием; тело это Архимед называет «телесным ромбом» (фиг. 18). Архимед доказывает, что объем телесного ромба $OABa$ равен объему конуса EA_1a_1, площадь основания которого (круг с радиусом A_1O_1) равна боковой поверхности OAa одного из конусов, образующих телесный ромб, а высота которого EO_1 равна перпендикуляру BD, опущенному из вершины второго из конусов, образующих телесный ромб BAa, на образующую первого конуса.

Мы приводим здесь полностью это доказательство Архимеда, чтобы показать, к каким громоздким геометрическим процедурам ему приходилось прибегать для того, чтобы выразить на языке геометрии то, что мы без всякого труда проделываем при помощи алгебраических преобразований (см. стр. 14); в дальнейшем мы этого делать не будем, а будем переводить решения Архимеда на язык нашей алгебры. Данная задача с нашей точки зрения сводится к доказательству, что объем телесного ромба равен $\frac{\pi\cdot Oa\cdot AC\cdot BD}{3}$.

Мы бы доказывали это так:

Объем конуса OAa равен $\frac{\pi\cdot aC^2\cdot OC}{3}$.

Объем конуса ABa равен $\frac{\pi\cdot aC^2\cdot CB}{3}$.

Объем всего тела равен $\frac{\pi\cdot aC^2}{3}(OC+CB)=\frac{\pi\cdot aC\cdot aC\cdot OB}{3}$.

Но из подобия треугольников OaC и OBD ($\angle BOD$ — общий; оба прямоугольные) имеем

$$Oa:aC=OB:BD,$$

откуда

$$aC\cdot OB=Oa:BD;$$

следовательно,

$$\frac{\pi\cdot aC\cdot aC\cdot OB}{3}=\frac{\pi\cdot aC\cdot Oa\cdot BD}{3},.$$

что и требовалось доказать.

Но сложение $OC+CB$ на языке геометрии осмысляется тем путем, что строится третий вспомогательный конус MM_1L с основанием (круг радиуса MP), равным основанию телесного ромба (кругу радиуса AC), и с высотой PL, равной $OC+CB$, т. е. всей высоте телесного ромба OB. Затем доказывается весьма громоздким путем, что этот вспомогательный конус равновелик сумме конусов с высотами OC и CB, т. е. телесному ромбу.

Архимед предварительно доказал уже, что объем телесного ромба относится к объему одного из образующих его конусов, как вся высота этого ромба к высоте конуса. Значит,

$$(\text{ромб}\, OABa):(\text{конус}\, ABa)=OB:CB. \tag{1}$$

Поскольку объемы конусов с равными основаниями относятся, как высоты,

$$(\text{конус}\, MM_1L):(\text{конус}\, ABa)=PL:CB. \tag{2}$$

Но PL по построению равно OB; значит, в этих двух пропорциях равны три члена; следовательно, равны и четвертые, т. е.

$$(\text{ромб}\, OABa)=(\text{конус}\, LMM_1). \tag{3}$$

Далее, $Aa=MM_1$, а боковая поверхность конуса OAa равна площади основания конуса EA_1a_1; следовательно,

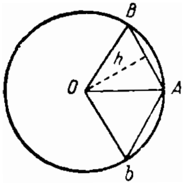
$$\begin{gathered}(\text{осн. конуса}\, EA_1a_1):(\text{осн. конуса}\, LMM_1)=\\=(\text{бок. поверхн. конуса}\, OAa):(\text{осн. конуса}\, OAa)=\\=Oa:aC=OB:BD=LP:EO_1.\end{gathered}$$

Получается, что в конусах EA_1a_1 и LMM_1 площади оснований обратно пропорциональны высотам EO_1 и LP, а следовательно, эти конусы равновелики. Но, согласно (3), объем конуса MM_1L равен объему ромба $OABa$; значит, и ромб $OABa$ равен по объему конусу EA_1a_1, что и требовалось доказать.

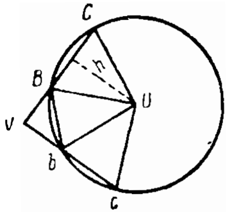
Доказав эту теорему, Архимед может уже перейти к теореме об объеме шара (фиг. 19). Как было показано на фиг. 17, он вращает вписанный в круг многоугольник $ABCDEFG$ вокруг оси AG. Радиусами, проведенными из центра, круг разбивается на секторы AOB, BOC, COD и т. д., и изучаются тела, получающиеся от вращения треугольника, вписанного в каждый сектор. От вращения треугольников ABO и OFG получаются телесные ромбы, от вращения остальных треугольников, например BOC, получаются тела с поверхностью усеченного конуса.

Если мы этот усеченный конус достроим до полного конуса с вершиной в V, то объем тела, получающегося от вращения $\triangle$ BOC, будет равен разности между объемом телесного ромба $VCOc$ и телесного ромба $VBOb$ (фиг. 20).

На основании предыдущей леммы объем телесного ромба, полученного от вращения $\triangle$ ABO, равен объему конуса, имеющего поверхность конуса ABb и высоту h, равную перпендикуляру, опущенному из O (вершины одного из конусов, образующих телесный ромб) на поверхность второго.



Фиг. 19



Фиг. 20

Такое же доказательство для тела, получаемого от вращения треугольника BOC, в виду его элементарности, но в то же время крайней громоздкости, мы переведем на язык нынешних терминов.

Объем телесного ромба $VCOc$ равен бок. поверхн. конуса $VCc \times \frac{h}{3}$.

Объем телесного ромба $VBOb$ равен бок. поверхн. конуса $VBb \times \frac{h}{3}$.

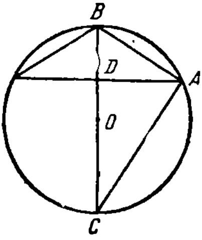
Объем искомого тела равен, как мы видели, разности между этими объемами, т. е. (бок. поверхн. конуса VCc минус бок. поверхн. конуса $VBb) \times \frac{h}{3}$, или бок. поверхн. усеч. конуса $BCbc \times \frac{h}{3}$.

Для нахождения объема всего тела вращения надо все эти объемы сложить. Получим: поверхность всего тела $\times \frac{h}{3}$.

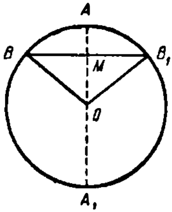
То же доказывается и для тела, описанного вокруг шара, а затем по известному уже нам шаблону доказывается, что объем шара не может быть ни больше, ни меньше произведения его поверхности на треть высоты, опущенной из центра на поверхность шара, т. е. на треть радиуса, или

$$4\pi R^2 \times \frac{R}{3} = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Идя таким же путем Архимед получает соответствующие формулы и для шарового сектора. Поверхность шарового сегмента (или, что то же, сектора) равна площади круга, радиусом которого является образующая конуса,



Фиг. 21



Фиг. 22

имеющего общую вершину и общее основание с сегментом. Переводя это выражение Архимеда на язык нашей алгебры, получим (фиг. 21):

Поверхность шарового сегмента равна $\pi \cdot AB^2$.

Но из прямоугольного треугольника ABC

$$AB^2 = CB \cdot BD.$$

Обозначив BC через $2R$, а BD через H, получим: поверхность шарового сегмента (или сектора) равна

$$\pi \cdot CB \cdot BD = 2\pi RH.$$

Объем шарового сектора получается тем же путем, что и объем шара; он оказывается равным произведению поверхности сектора на треть радиуса, или $\frac{2}{3}\pi R^2 H$.

Вторая книга сочинения «О шаре и цилиндре» посвящена более частным вопросам. Важно и интересно предл. II об объеме шарового сегмента (фиг. 22). Оно очень замысловато: «Если BAB_1 шаровой сегмент, BB_1 диаметр основания сегмента, O центр шара и AA_1 его диаметр, разделяющий BB_1 пополам в точке M, то объем сегмента равен объему конуса, имеющего то же основание, что и сегмент, и высота x которого определяется из пропорции (перевожу на язык наших геометрических символов):

$$x : AM = (OA_1 + A_1M) : A_1M.$$

Очевидно, что

$$x = \frac{H\,(3R - H)}{2R - H}.$$

Я не буду приводить здесь вспомогательных чертежей и сложных геометрических выкладок Архимеда. По существу дело сводится здесь к вычитанию из объема сектора $\frac{2\pi R^2 H}{3}$ объема центрального конуса $\frac{\pi\,(2RH - H^2)\,(R - H)}{3}$. В результате вычитания получится выражение

$$\frac{\pi H^2\,(3R - H)}{3},$$

аналогичное полученному Архимедом геометрическому выражению[1].

На основании этой формулы Архимед хочет решить задачу: разделить шар плоскостью так, чтобы поверхности или объемы этих частей имели между собой данное отношение ($m : n$).

Первый случай (с отношением поверхностей) больших затруднений не содержит. Для нас интереснее второй случай с отношением объемов. Два получающихся сегмента имеют общее основание B_1B с радиусом BM, а, так как

---

[1] В самом деле, квадрат BM (радиус основания сегмента) равен $AM \cdot A_1M$ [полухорда — среднее пропорциональное между отрезками диаметра или $H(2R - H)$].

Наше выражение мы можем написать в виде

$$\frac{\pi H \cdot H\,(2R - H)\,(3R - H)}{3\,(2R - H)},$$

или

$$\frac{\pi}{3}\,BM^2\,\frac{H\,(3R - H)}{2R - H}.$$

объем сегмента, как мы видели, выражается формулой

$$\frac{\pi}{3} BM^2 \cdot \frac{H\,(3R-H)}{2R-H},$$

где $\frac{\pi}{3}BM^2$ — постоянный множитель, то очевидно, что

$$\frac{H\,(3R-H)}{2R-H} : \frac{H_1\,(3R-H_1)}{2R-H_1} = m:n$$

(H и H_1 — высоты двух сегментов).

Исключая из этих уравнений H_1 (Архимед проделывает это очень сложным геометрическим путем), мы получаем уравнение

$$H^3 - 3H^2R + \frac{4m}{m+n}R^3 = 0,$$

т. е. кубическое уравнение.

По существу Архимед и получает это уравнение, но он выражает его в виде пропорции. Действительно, его можно представить себе в виде

$$H^3 - 3H^2R + 4R^3 - 4R^3 + \frac{4m}{m+n}R^3 = 0,$$

или

$$(R+H)(4R^2 - 4RH + H^2) = \left(4 - \frac{4m}{m+n}\right)R^3,$$

или

$$(R+H)(2R-H)^2 = \frac{4nR}{m+n}.$$

Если $2R-H$ обозначить через x, а $\frac{4nR}{m+n}$ через C, то получим

$$(3R-x)\cdot x^2 = C\cdot R^2,$$

или

$$(3R-x):C = R^2:x^2.$$

Итак, задача сводится к следующей: заданный отрезок ($3R$) разделить на две части ($3R-x$ и x) так, чтобы одна из частей ($3R-x$) так относилась к данному отрезку (C), как данная площадь (R^2) к квадрату второй части (x^2).

Именно к этому вопросу, идя другим, геометрическим, путем, и сводит задачу Архимед, и в этом все ее значение.

Он прекрасно знал, что задача такого рода не может быть решена при помощи циркуля и линейки, но он мог, как это делали его современники — Эратосфен и другие, удовольствоваться решением данной задачи при помощи особых приборов (νεῦσις) или путем пересечения конических сечений. Он этого, однако, не хочет делать, а видит в этой задаче лишь частный случай общей задачи:

$$\frac{C-x}{C_1}=\frac{C_2^2}{x^2},$$

т. е. по существу частный случай решения *кубического уравнения в общей форме*. Придя к этому выводу, он замечает: «Если подойти к задаче в этой общей форме, то она требует диоризма (т. е. установления предельных значений, между которыми она имеет решения); в данном же частном случае нет нужды в диоризме (т. е. задача имеет решения при всех значениях параметров). Анализ и синтез задачи я дам в конце».

Что̀ означает последнее замечание, непонятно, ибо никакого решения этой задачи в дошедшем до нас сочинении «О круге и цилиндре» нет. Не было этого решения уже в античных экземплярах этой книги. Как сообщает живший в VI в. н. э. комментатор Архимеда Евтокий, Дионисодор и Диокл, первый из которых жил вскоре после Архимеда, а второй — столетием позже, не нашли в разбираемом сочинении Архимеда решения этой задачи и решили, «что Архимед пообещал, но не выполнил своего обещания», и поэтому добавили решения этой задачи от себя. «Но я, — замечает Евтокий, — в результате неутомимых поисков нашел в одной старинной книге доказательство нескольких теорем; правда, они были мало понятны вследствие множества ошибок и содержали много погрешностей в чертежах, но в основном в них заключалось то, что я искал; вдобавок, они были написаны отчасти на дорийском наречии, на котором писал Архимед; далее, в них применялась терминология, бывшая в ходу в древнейшее время, как, например, „сечение прямоугольного конуса“ для параболы» и т. д. Вслед за этим Евтокий приводит найденное им в этой книге решение, принадлежавшее, по его мнению, самому Архимеду. Здесь эта задача решалась при помощи двух объемных мест, т. е. путем нахождения точки пересечения параболы и равносторонней гиперболы.

Евтокий думал, что он нашел утраченную страницу из разбираемого сочинения, и в этом с ним согласны исследователи нашего времени — Гейберг и Гэвс. Мне, однако, это допущение кажется неправильным по следующим причинам:

1. Если Архимед и ссылается в своих произведениях на νεῦσις (на решение геометрических задач при помощи особых приборов) или на решения с помощью пересечения конических сечений, то нигде эти приемы не применяются для получения *решения* задачи, а только для *доказательства* существования и возможности решения, для диоризма.

2. Евтокий установил принадлежность найденного им «в старинной книге» рассуждения Архимеду по математическому стилю и языку, но он нигде не говорит, что он нашел сочинение «О круге и цилиндре», в котором содержалось бы и это решение. Если бы он нашел экземпляр сочинений «О круге и цилиндре» с этим недостающим доказательством, то он не стал бы доказывать косвенным путем, что отрывок принадлежит Архимеду.

Поэтому нет оснований сомневаться в указаниях Дионисодора и Диокла, что рукописи сочинения «О шаре и цилиндре» не содержали этого решения. Мы видели уже, что Платон считал такого рода решения принципиально недопустимыми в математике; правда, предшественники и современники Архимеда часто применяли их, но Архимед, очевидно, не пошел по их стопам. Полное отсутствие таких решений в трудах Архимеда показывает, что он сознательно избегал таких, модных в его время решений, считая их недостаточно строгими. Но в сочинениях типа «писем к друзьям» Архимед считал возможным и нужным говорить о тех недостаточно строгих путях, которые привели его к тому или иному решению; возможно, что из такого «письма» и позаимствовано решение, приводимое Евтокием.

Вернемся, однако, к архимедову общему решению кубического уравнения. Нам теперь известно, что древние вавилоняне решали кубическое уравнение. Интересно сопоставить эти решения с архимедовым, чтобы убедиться в глубокой принципиальной разнице между древневосточной и греческой математикой.

Древневавилонского математика интересовало прежде всего нахождение числовых решений кубических уравнений, встречающихся в практике. Он поступал для этой цели таким образом. Найдя способы преобразовывать всякого рода кубические уравнения к виду

$$x^3+x^2=m,$$

он, не ища решения этого уравнения, затабулировал все целые решения для x (подставлял он, конечно, последовательные решения для x, а находил m, а не наоборот; поэтому решать уравнение ему не приходилось).

Совсем иначе поступает Архимед. Он стремится свести частные случаи кубического уравнения к одному универсальному виду вовсе не для нахождения числовых решений: нахождением числовых решений греческая геометрия вообще не занималась. Его интересуют принципиальные вопросы: возможность обобщения проблемы, существование решений, предельные возможные значения (диоризм) и т. д. Этот диоризм сводится к нахождению наибольших возможных решений для x^2 $(C-x)$; Архимед приходил к правильному решению, что таким наибольшим значением является

$$x=\frac{2}{3}C.$$

Для этого вывода ему и понадобилось «нестрогое» решение при помощи конических сечений, ибо таким путем он мог предварительно найти, что указанные выше кривые соприкасаются между собой в точке $x=\frac{2}{3}C$, при

$$C_2^2\cdot C_1=\frac{4}{27}C^3.$$

Если, с другой стороны, $C_2^2\cdot C_1<\frac{4}{27}C^3$, то, как он доказывает, существуют два вещественных корня. В частном случае с шаром ясно, что условие для существования вещественных корней выполнено; ибо выражение, отвечающее $C_2^2 C_1$ в этом случае, есть $\frac{n}{m+n}\cdot 4R^3$; необходимо только, чтобы

$$\frac{n}{m+n}\cdot 4R^3 \leqslant \frac{4}{27}(3R)^3 \text{ или } 4R^3,$$

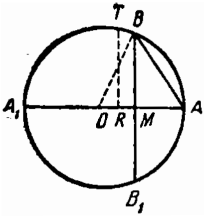
что всегда верно.

Теоремы 5—7 книги II сочинения «О шаре и цилиндре» представляют собою, с нашей точки зрения, элементарные алгебраические упражнения в формулах для шарового сегмента (построить шаровой сегмент, равновеликий одному данному шаровому сегменту и подобный другому или имеющий поверхность, равную поверхности одного шарового сегмента, и подобный другому и т. п.). Разница лишь в том, что Архимед принужден решать эти задачи геометрическим путем, что значительно усложняет решение. Первая из этих задач приводится к кубическому уравнению и потому не может быть решена при помощи циркуля и линейки; верный своему принципу не давать «нестрогих решений» при помощи «вставления отрезков» (νεῦσις) или пересечения кривых, Архимед констатирует, что задача приводится к нахождению двух средних пропорциональных, но решения построением не дает. Решения сопровождаются диоризмами, т. е. установлением предельных значений, при которых решение задачи возможно.

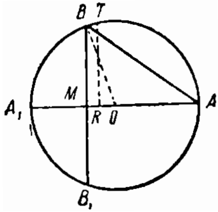
Для нас более интересны два последних предложения книги II. В первом из них доказывается, что при разделении шара на два неравных сегмента отношение объемов этих сегментов меньше отношения квадратов их поверхностей и больше отношения полуторных степеней их поверхностей (или, как выражается Архимед, меньше удвоенности этого отношения и больше полуторности его). Этим доказательством Архимед исправил свое неправильное утверждение в письме к Конону (стр. 100), будто объемы шаровых сегментов относятся, как квадраты их поверхностей. Для нас эта теорема интересна тем, что здесь Архимед *впервые в математической науке вводит понятие дробной степени*.

Еще интереснее последняя теорема: «Из всех шаровых сегментов с равновеликой поверхностью полушар имеет наибольший объем». И здесь Архимед исправляет свое неверное утверждение в том же письме к Конону, будто наибольший объем имеет тот из таких сегментов, который образован делением диаметра шара в отношении 3 : 1. Для нас интересно то, что здесь ставится задача на нахождение максимума, т. е. знаменитая изопериметрическая задача.

Правда, общепринятый взгляд, будто изопериметрическая проблема была Архимедом поставлена впервые, неправилен. Из комментария Филопона мы узнаем, что уже Демокрит доказывал, что из всех многогранников с одинаковым объемом наименьшую поверхность имеет шар. Правда, метод его доказательства нам не известен;



Фиг. 23



Фиг. 24

нам известно только доказательство этой теоремы, данное Зенодором, одним из ближайших преемников Архимеда.

Задачу о сегменте Архимед решает следующим образом (в переводе на нашу алгебраическую терминологию).

Выше (стр. 119 и сл.) мы видели, как Архимед доказал, что поверхность шарового сегмента ABB_1 равна площади окружности с радиусом AB. На фиг. 23 и 24 представлены оба мыслимых случая: когда сегмент меньше полушара (слева) и когда он больше полушара (справа). В обоих случаях

$$AB^2 = AM^2 + BM^2,$$

но в первом $BM > AM$, и поэтому

$$AB^2 > 2AM^2,$$

во втором же случае $BM < AM$, и поэтому

$$AB^2 < 2AM^2.$$

В первом случае

$$AB^2 < 2AO^2$$

(как квадрат стороны, лежащей против острого угла), значит,

$$2AO^2 > AB^2 > 2AM^2,$$

или

$$AO > \frac{AB}{\sqrt{2}} > AM.$$

Во втором случае

$$AB^2 > 2AO^2$$

(как квадрат стороны, лежащей против тупого угла), значит,

$$2AO^2 < AB^2 < 2AM^2,$$

или

$$AO < \frac{AB}{\sqrt{2}} < AM.$$

Иными словами, если на диаметре AA_1 отложить от A отрезок AR, равный $\frac{AB}{\sqrt{2}}$, то точка R в обоих случаях будет лежать между M и O; а если так, то полухорда RT, перпендикулярная к AA_1 в обоих случаях, больше BM. Но

$$BM^2 = AM \cdot A_1M,$$
$$RT^2 = AR \cdot A_1R,$$

откуда

$$AR \cdot A_1R > AM \cdot A_1M.$$

Подставив

$$AM = h, \quad AO = r, \quad AR = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{A_1A \cdot h}}{\sqrt{2}} = \sqrt{rh},$$ [1]

получим

$$\sqrt{rh}\,(2r - \sqrt{rh}) > h\,(2r - h),$$
$$\sqrt{rh}\,(2r - \sqrt{rh}) + rh > h\,(2r - h) + rh,$$

[1] Катет AB — среднее пропорциональное между гипотенузой A_1A и прилежащим отрезком AM (ибо $\triangle A_1BA$, как опирающийся на диаметр, прямоугольный).

$$2r\sqrt{rh} > h(3r-h),$$

$$\frac{2\pi rh\sqrt{rh}}{3} > \frac{2\pi h^2(3r-h)}{3},$$

или

$$\frac{2\pi(\sqrt{rh})^3}{3} > \frac{2\pi h^2(3r-h)}{3}.$$

Правая часть неравенства есть объем шарового сегмента при радиусе шара r и высоте сегмента h; его поверхность $2\pi rh$. Левая часть неравенства — объем полушара радиуса $\sqrt{rh}$; его поверхность:

$$2\pi(\sqrt{rh})^2 = 2\pi rh.$$

Этот полушар есть один из шаровых сегментов, имеющих ту же поверхность $2\pi rh$. Но по объему он больше всякого другого сегмента с такой же боковой поверхностью, что и требовалось доказать.

Подведем итог этой главе. И в эпоху написания ранних математических сочинений для творчества Архимеда характерно продолжающееся увлечение механикой и механическими методами решения геометрических задач. Он начинает свою математическую деятельность, повидимому, с того, что во вполне обработанном и предназначенном для широкой публикации сочинении открыто демонстрирует метод решения чисто геометрических задач при помощи механики. Правда, все атомистические рассуждения и приемы из этой механики тщательно устранены, но самое введение механики в геометрический обиход после категорических запрещений Платона, вдохновителя позднейших деятелей Александрийского Музея, было несомненно революционным актом; очевидно, в эту эпоху Архимед был убежден, что его закон рычага доказан по всем правилам тогдашней математики при помощи reductio ad absurdum, как и все другие теоремы геометрии. Поэтому он считал ссылку на этот закон в геометрическом сочинении логически безукоризненной; предпосылка же, по которой подвешенное к рычагу тело можно, не нарушая равновесия, заменить любым другим, имеющим ту же массу и тот же центр тяжести, казалась ему в это время столь же очевидной, как любая аксиома геометрии. Но в другом отношении Архимед проявил бóльшую строгость и щепетильность, чем его современники: он не только не допускал доказательств и решений, исходящих из атомистического разложения величин на сверхчувственно малые элементы, но и исходил из принципа, что геометр может ссылаться только на манипуляции, выполняемые при помощи циркуля и линейки: нахождение пересечения кривых или «вставление» отрезков данной длины между двумя кривыми играли у него почти ту же роль, что в евклидовых «Началах» — предположение, что задача решена.

То, что его увлечение механикой не остыло и в это время, ясно из следующего. Если сочинение «О квадратуре параболы» содержит ссылки на первую книгу сочинения «О равновесии плоскостей» и, следовательно, написано после нее, то вторая книга сочинения «О равновесии плоскостей» в нескольких местах опирается на основные выводы книги «О квадратуре параболы», принимая их за доказанные. Значит, эта работа вышла уже в Сиракузах, после появления первых геометрических сочинений Архимеда.

Конечно, при этом нельзя не отметить того, что увлечение механикой уже отошло на второй план, уступив место чисто геометрическим интересам. Все содержание этой книги сводится к нахождению центра тяжести параболического сегмента и отрезка параболы, заключенного между двумя параллельными хордами; самое решение дано строгим методом последовательного исчерпывания (все уменьшающиеся треугольники) без разбивания фигуры на элементы и перенесения их на другое плечо рычага. Если в книге I сочинения «О равновесии» автор в основном занимался вопросами механики, то здесь центр интереса в основном несомненно лежит на чисто геометрических вопросах. Как по содержанию, так и по методам доказательства эта книга в сущности есть лишь дополнение к сочинению «О квадратуре параболы».

С другой стороны, именно в этой книге можно впервые отметить у Архимеда повышенный интерес к вычислительной математике, которая трактовалась в идеалистической философии, а следовательно, и в официальной математике, как «логистика», т. е. как низкая прикладная наука, достойная рабов. Так, в одном из предложений этой книги, изобилующем числовыми данными, Архимед решает вопрос, с нашей точки зрения, чисто алгебраический, в котором геометрическое обрамление является только внешней формой: «Если AB, CB, DB, EB четыре отрезка, находящиеся в непрерывной пропорции и расположенные в порядке уменьшения их величин и если EB так относится к разности между AB и EB, как некоторый отрезок ZH к трем пятым разности между AB и DB, и если, далее, $2AB+4CB+6DB+3EB$ так относится к $5AB+10CB+10DB+5EB$, как некоторый отрезок HO к разности между AB и DB, то отрезок ZO (т. е. сумма отрезков ZH и HO) равен двум пятым AB».

Наконец, замечательным достижением Архимеда уже в эту эпоху его творчества является введение понятия *дробной степени* и постановка и удачное разрешение *изопериметрической проблемы*.

ГЛАВА ШЕСТАЯ

☆

Архимед и Демокрит

Из первой книги сочинения «О шаре и цилиндре» мы с несомненностью заключили (стр. 106), что во время его написания Архимед не знал еще трудов Демокрита. Иначе он не мог бы утверждать, что «замечательные теоремы, далеко превосходящие все другие», об объеме пирамиды и конуса, впервые открыты Евдоксом и что «ни один из выдающихся геометров, живших до Евдокса, не знал и не открыл их». В «Письме к Эратосфену о механическом методе решения геометрических задач» Архимед со свойственной ему прямотой и честностью исправляет эту свою ошибку:

«Так как я (как я говорил уже) считаю тебя серьезным ученым и выдающимся по значению философом..., то я счел уместным в этой же книге изложить и объяснить тебе особый метод, благодаря которому ты получишь хорошее вспомогательное средство для исследования некоторых математических вопросов при помощи механики. Этот прием, по моему глубокому убеждению, *не в меньшей мере полезен и для доказательства теорем*: многие факты стали для меня впервые ясными благодаря механическому методу, но затем их необходимо было доказать геометрически, так как указанный метод строгих доказательств (ἀποδείξεις) не дает. Ясно, что *легче найти строгое доказательство после того, как при помощи этого метода приобретена некоторая ориентировка в вопросах*, чем найти его без такой ориентировки. Вот почему и в том случае, когда речь идет о теоремах, *строгое доказательство которых впервые нашел Евдокс*, — именно, что конус — третья часть цилиндра, а пирамида — третья часть призмы, имеющих то же основание и равную высоту, немалую роль надо отвести и *Демокриту*, который впервые выставил это положение относительно указанных тел *без строгого доказательства* (ἀπόδειξις). *Я сам нахожусь в таком же положении*, ибо теоремы, которые я сейчас публикую, я нашел прежде при помощи такого же метода; и я решил дать письменное изложение этого метода, отчасти потому, что я уже раньше говорил о нем, и я не хотел бы, чтобы говорили, что это были праздные разговоры, отчасти же и потому, что, как я убежден, *я оказываю этим немаловажную услугу математике*: я полагаю, что *многие из моих современников или последователей, ознакомившись с этим методом, будут в состоянии находить новые теоремы, до которых я еще не додумался*».

Я думаю, что по прочтении этого письма читателю станет ясно, что Архимед ознакомился с работами Демокрита впервые уже после опубликования первой книги сочинения «О шаре и цилиндре», посланного Архимедом из Сиракуз в Александрию после смерти Конона. Значит, будучи в Александрии, он еще не знал о математических работах Демокрита. Трудно допустить, что их не было в александрийской библиотеке, скорее дело просто в том, что никто из его коллег не указал ему на труды Демокрита, где есть вещи, интересные и для математика. В самом деле, то, что мы знаем об Архимеде, исключает возможность бойкота им вслед за философами-идеалистами сочинений Демокрита за его «безбожие»; случай с Аристархом показывает, что Архимед не посчитался бы ни с какими рогатками, если бы нашел что-нибудь интересное для своей науки.

Обнаружив в Сиракузах математические труды Демокрита, Архимед, несомненно, с жадностью набросился на них. В самом деле, он оказался здесь у истоков того «атомистического» интегрирования, которое ему с трудом и по частям приходилось реставрировать из отдельных намеков и приемов в трудах по механике, написанных его предшественниками. Правда, Архимед с детства знал, что нет большей ереси и большего греха перед великой математической наукой, чем (даже с евристической целью) «составлять» тело из плоскостей, плоскости — из линий, линии—из точек. Уже Платон в «Законах» заявлял категорически: «Что касается отношений линий и площадей к телам или линий к площадям, то разве мы, эллины, не думаем, что их возможно измерять одни другими? Но это никак и никаким образом невозможно». О том же, но в значительно более ясных словах мог прочитать Архимед в сочинении Аристотеля «О небе»: «Постулируя неделимые тела, Демокрит и Левкипп должны впасть в противоречие с основами математики... Самое маленькое отступление от истины в дальнейшем ходе рассуждения увеличивается в десятки тысяч раз, как например, если кто-нибудь скажет, что существует минимальная величина: введение самой маленькой величины расшатывает самые великие основы математики». Эта полемика является основным тоном и в комментариях к Аристотелю и в знаменитой античной «Истории математики» Евдема Родосского. Как мы видели, в этой полемике принял участие и тот самый Эратосфен, которому было адресовано разбираемое нами послание. Эта полемика даже была на исходе античности сформулирована в виде принципа: «Все научные системы истинны лишь постольку, поскольку они не основаны на предположении, что непрерывное состоит из неделимых».

И вот, наткнувшись на книгу Демокрита, в которой он наверное не ожидал найти ничего, кроме мало интересовавших его вредных и завиральных философских идей, Архимед находит здесь как раз то, что он искал и чего нехватало ему в математике: разложение математических величин на элементы и оперирование соединениями этих элементов. При этом он обнаруживает, что те геометрические теоремы, которые он считал величайшим и гениальнейшим математическим открытием — нахождение объема конуса и цилиндра — найдены вовсе не Евдоксом, а тем же Демокритом.

Правда, Архимед как хороший математик не мог думать, что те заимствованные у атомистов доказательства, которые были ему известны из механики и которые он нашел в чистом и более логическом и убедительном виде у Демокрита, можно было принять за строгие и окончательные доказательства (ἀποδείξεις). Но он хорошо знал также из своего большого математического опыта, что эти строгие доказательства обычно строятся ремесленным образом по однообразным шаблонам при помощи reductio ad absurdum и что, найдя нестрогое решение, основанное на «вряд ли приемлемых» предпосылках механического, т. е. «атомистического» характера, уже не так трудно каждый шаг этого решения по определенному шаблону перелицевать в строгое доказательство, поскольку «ориентировка в вопросе уже приобретена». Архимед по своему опыту знал, что, стоит только найти такое нестрогое доказательство, и главная часть дела уже сделана [1]. Недаром его коллеги, которым он посылал одни только выводы из своих теорем без указания того пути, которым он до них дошел, как правило, не могли найти доказательств этих положений и ждали решения от Архимеда. Вот почему он в послании подчеркивает, что «нестрогий» метод полезен не только для нахождения решений, но «не в меньшей мере и для нахождения строгого доказательства теорем», ибо «легче найти строгое доказательство после того, как при помощи этого метода приобретена некоторая ориентировка в вопросах». Он вовсе не собирается расшатывать авторитет такого общепризнанного главы новой математической школы, как Евдокс, но, заявляя, что в сделанных Евдоксом открытиях «немалую роль надо отвести и Демокриту», он тем самым подчеркивает значение тех найденных им самим «механико-атомистических» методов решения математических проблем, к которым цеховые математики того времени несомненно относились с недоверием и подозрительностью.

Письмо к Эратосфену является, по существу говоря,

[1] «Проведение доказательства методом исчерпания на основании предварительного решения, полученного без помощи этого метода, было, с точки зрения Архимеда, не серьезной научной заслугой, а простым техническим приемом, которым он владел в совершенстве» (В. Штейн).

выговором и нравоучением господствовавшему в математике направлению, возглавляемому тем же Эратосфеном. До сих пор Архимед нигде ни звуком не упоминал о запрещенных приемах интегрирования, применявшихся атомистами. Он изредка довольствовался скромной пропагандой тоже достаточно смелого с точки зрения тогдашней математики приема — введения в геометрию доказательств, основанных на законе рычага. Прочитав Демокрита, он убедился, что при помощи этих запретных „атомистических“ приемов можно построить замечательное здание математики, конечно, при условии, что вслед за тем ее фасад будет отделан при помощи строгого метода исчерпания. «Я посылал тебе мои открытия (таков истинный смысл письма к Эратосфену) для того, чтобы ты сам попытался найти их доказательства. Ты этого не сделал. Я, конечно, могу теперь без дальнейших рассуждений прислать тебе мои решения, но от этого большой пользы не будет. Ты — серьезный ученый и философ и хороший математик, поэтому не обижайся за правду. Ты не смог и впредь не сможешь решать подобные вопросы потому, что не обладаешь тем золотым ключом [1], который открывает все математические двери. Я мог бы сохранить в секрете этот золотой ключ, но не хочу этого делать, так как убежден, что оказываю этим немаловажную услугу математике; я полагаю, что многие из математиков нашего или будущего времени, ознакомившись с этим методом, будут в состоянии находить все новые и новые теоремы».

Несомненно такое открывание ширм и разоблачение секретов математического производства было прямым нарушением тогдашнего математического этикета, но для Архимеда интересы истины и дорогой ему науки были выше всего. Однако, настоящим революционным актом, настоящим неприличием с точки зрения этого этикета было то, что в этом послании Архимед, не моргнув глазом, без всяких оговорок и извинений излагает как что-то само собою подразумевающееся основы математики атомистов. Он, точь-в-точь как Демокрит, разлагает цилиндр, конус или шар на чрезвычайно тонкие листки — кружки. Далее он доказывает нужное ему положение для одного

---

[1] Выражение, принадлежащее Бонавентуре Кавальери.

из кружков, затем замечает, что его вывод должен быть верен для любого из кружков, и, наконец, так как тело, по его мнению, все сложено (с о с т о и т) из таких кружков и целиком з а п о л н е н о ими (συμπληρωθέντος), он сразу же строит умозаключение и для целого. Подобным же образом плоскость, по его словам, с о с т о и т (сложена, συγκείμενος) из линий. Недаром, он начинает это письмо со ссылки на Демокрита.

Правда, эта заимствованная у атомистов предпосылка применяется здесь только на первой стадии — для нахождения предварительных решений без строгого доказательства. Но с точки зрения тогдашних взглядов вообще нельзя было ни в какой части сочинения ссылаться как на общепонятную истину, без всяких оговорок и извинений, на концепцию, борьбе с которой были посвящены все математические труды того времени (включая, как мы видели, труды самого адресата письма—Эратосфена). Ведь Архимед мог бы сказать: «допустим пока, что тело состоит из плоскостей», или «дело происходит так, как если бы тело состояло из плоскостей», или «нахождение решения значительно облегчается, если сделать несоответствующее действительности допущение» и т. п. Ничего подобного мы здесь не находим. Выражение — «*Так как* треугольник *ΓZA состоит* из прямых, ограниченных обводом треугольника *ΓZA*, а параболический сегмент — из прямых, находящихся в сегменте *ABΓ*»,— имеет вполне аподиктическую форму. Здесь совершенно то же положение вещей, что и в вопросе о гелиоцентрическом учении Аристарха Самосского. Архимед кладет его в основу своих вычислений, ни слова не говоря о том, как он к нему относится. Гипотеза атомистов полезна, значит, несмотря на все школьные предрассудки и на протест, который она должна вызвать у воспитанного читателя, ее надо использовать; она недостаточно убедительна, значит, сделанные при ее помощи выводы надо проверить другим, более убедительным образом. Принципиальные возражения Эратосфена против демокритова способа выражения, против составления линий из точек, площадей из линий здесь, таким образом, просто игнорируются.

Нельзя ссылаться на то, что послание к Эратосфену есть письмо, имеющее, в противоположность другим работам Архимеда, интимный характер. Верно, что оно рассчитано на более узкий круг читателей, чем другие его произведения, как выражается Архимед, — «на серьезного ученого и философа», для которого атомистическая ересь соблазна не представляет. Но это не значит, что перед нами личное письмо, рассчитанное на то, что Эратосфен прочтет его и уничтожит. «Письмо» является в данном случае только литературной формой; Архимед сам ведь говорит в предисловии, что хочет оказать этим письмом «большую услугу математике и желает, чтобы с его методом познакомились многие математики настоящего и будущего». Итак, это — не частное письмо, а манифест, агитационное произведение, начинающееся с упоминания огромных заслуг Демокрита и далее излагающее, в сущности, основанный им метод. Вдобавок надо иметь в виду и то, что и другие сочинения Архимеда, по самому своему содержанию, также не рассчитаны на очень уж широкие круги читателей.

Это письмо дает нам возможность понять структуру доказательства некоторых из теорем, заключенных в трудах Архимеда. С первого взгляда его решения кажутся каким-то фокусом; после ряда непонятных нам преобразований и манипуляций, неизвестно откуда взятых и какую цель преследующих, внезапно получается верный и неопровержимый вывод. Но стоит восстановить соответствующее доказательство по методу атомистов и каждый шаг в решении Архимеда станет понятным.

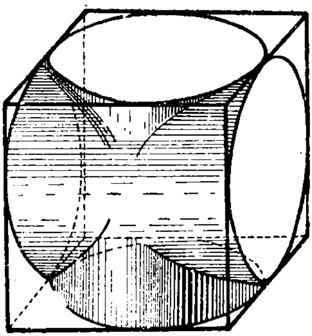
Любопытно, что по иронии судьбы (если не по проискам врагов атомистов) из известных нам сочинений Архимеда ученым эпохи рождения интегрального исчисления (XVII и начала XVIII в.) не было известно как раз «Письмо к Эратосфену». Лишь в 1906 г. приват-доцент Петербургского университета Пападопуло-Керамевс нашел в библиотеке одного из иерусалимских монастырей какой-то позднехристианский текст, написанный на пергаменте, с которого был смыт более древний греческий текст X в. В виду своего невежества в математике и в истории точных наук Пападопуло заинтересовался только верхним христианским текстом, а из нижнего, смытого, который тем не менее можно было без большого труда прочесть, привел в каталоге Иерусалимской библиотеки только не-большую выдержку. Однако, для знаменитого датского историка математики Гейберга этой выдержки было достаточно, чтобы определить, что смыт был текст Архимеда. Гейбергу удалось прочесть его почти полностью и издать. Из содержащихся здесь сочинений Архимеда наиболее интересно впервые опубликованное Гейбергом «Послание к Эратосфену».

Математикам XVII и XVIII вв. это произведение, таким образом, не могло быть известно, но к чести их надо сказать, что из изучения других сочинений Архимеда они безошибочно определили, что Архимед пользовался для нахождения своих решений методом неделимых, но только скрывал это от читателя.

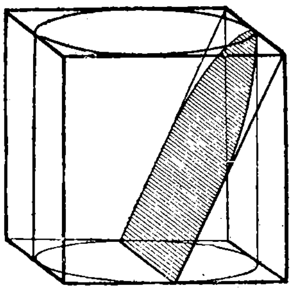
Этот характер доказательств Архимеда мы продемонстрируем ниже, когда будем разбирать его вывод суммы членов ряда $1^2+2^2+3^2+\ldots$ (стр. 151—153). Сейчас остановимся несколько подробнее на «Письме к Эратосфену», или, как его сокращенно называли древние, «Эфод» или «Эфодик» («Метод»).

В предисловии к этому сочинению, конец которого, к сожалению, не дошел до нас, Архимед перечисляет те проблемы, которые он в двух предыдущих письмах предложил разрешить Эратосфену и которые теперь составили содержание разбираемой книги. В первом из этих писем Архимед предлагал Эратосфену доказать теоремы, относящиеся к открытой им впервые области, — к телам, образуемым вращением конических сечений. Уже в письме к Конону, о котором мы говорили выше, Архимед предлагал ему доказать, что сегмент параболоида вращения, образованный сечением, перпендикулярным к оси, в $1\frac{1}{2}$ раза больше конуса с тем же основанием и той же высотой и что объемы двух сегментов параболоида вращения, образованных сечениями, параллельными друг другу, но не перпендикулярными к оси, относятся, как квадраты осей. Эти же задачи Архимед задал и Эратосфену; но он присоединил сюда еще теорему о том, что объем эллипсоида вращения равен $\frac{2}{3}$ объема описанного вокруг него цилиндра и что центр тяжести параболоида лежит на его оси, на $\frac{1}{3}$ расстояния от основания.

Второе письмо к Эратосфену содержало предложение решить две задачи: 1) Определить объем тела, образованного двумя цилиндрами, вписанными в куб, один из которых имеет ось, параллельную основанию, другой — ось, параллельную боковой грани (фиг. 25).[1] 2) В прямую призму с квадратным основанием вписан цилиндр. Через ребро верхнего основания призмы и через центр нижнего основания ее проведена плоскость, отсекающая часть цилиндра. Требуется доказать, что объем этой части цилиндра составляет $\frac{1}{6}$ объема всей призмы (фиг. 26).



Фиг. 25

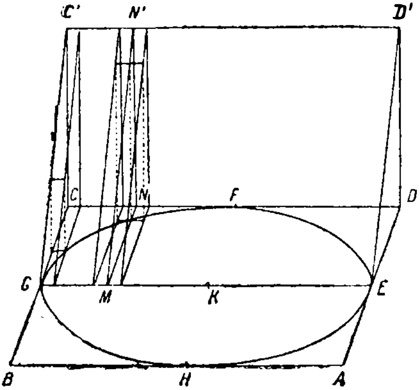


Фиг. 26

С точки зрения Архимеда обе эти задачи интересны тем, что тела, ограниченные цилиндрическими поверхностями, оказываются равновеликими телам, ограниченным плоскостями (таким образом, мы здесь имеем стереометрическую параллель к знаменитым гиппократовым лункам и к квадратуре параболы). Для нас вторая из этих задач интересна тем, что это — единственная задача во всем наследии Архимеда, которая решается путем неделимых в чистом виде, без всякого применения механики (закона рычага), тогда как во всех других случаях разложение на неделимые применяется только так, как это было принято в задачах механики, для перенесения тела на дру-

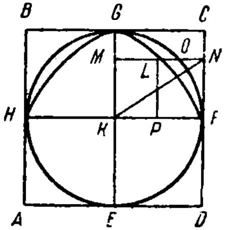
[1] Решения этой интересной задачи в дошедшем до нас дефектном экземпляре «Эфода» не сохранилось.

гое плечо рычага. Появление такого решения (теорема 14) в сочинении, которое открывается указанием на заслуги Демокрита в деле определения объема тел, не случайно:



Фиг. 27,a

в данном случае мы имеем, несомненно, дело с приемом, прямо заимствованным у Демокрита. Приводим решение этой интересной задачи.



Фиг. 27,b

Фиг. 27,*b* представляет собой одно из квадратных оснований призмы $ABCD$; $HGFE$ — основание цилиндра. Через EG и через ребро $C'D'$ второго основания (показанное на чертеже 27,*a*) лежащее над стороной CD и параллельное ей, проведена плоскость. Ото всей призмы отсекается, таким образом, треугольная призма $GECDC'D'$, равная, очевидно, половине четырехугольной призмы, имеющей основанием тоже $GECD$ и, следовательно, $\frac{1}{4}$ всей призмы. Теперь Архимед вписывает в полукруг $GOFE$ параболу с осью KF (на рис. 27,*b* показана только ветвь GLF этой параболы). Это чрезвычайно важный и интересный прием: парабола здесь просто *вспомогательная кривая*, которая строится лишь для того, чтобы искомую кубатуру свести аналитическим путем к уже известной читателю квадратуре параболы. Теперь будем изучать любую из числа «всех горизонтальных прямых», из которых *составлены* как прямоугольник $EGCD$, так и круг и параболический сегмент; если через такую прямую MN провести вертикальную плоскость (см. фиг. 27,*а*), то она отсечет: 1) в треугольной призме — один из тех равных друг другу прямоугольных треугольников с основанием, равным MN, из которых *составлена* эта призма, 2) в отсеченной части цилиндра — один из неравных друг другу прямоугольных треугольников, из которых составлена эта часть цилиндра. Пусть прямая MN последовательно пересечет параболу, круг и сторону квадрата в точках L, O и N. Абсцисса параболы, помноженная на ее параметр MN, равна квадрату ее ординаты:

$$MN \cdot NL = NF^2,$$

откуда

$$\frac{MN^2}{MN \cdot NL} = \frac{MN^2}{NF^2},$$

или

$$MN : NL = MN^2 : NF^2 = MN^2 : LP^2.$$

Образуем в обеих частях пропорции отношения предыдущего к разности между предыдущим и последующим (dividendo et permutando):

$$MN : ML = MN^2 : (MN^2 - LP^2),$$

$$MN : ML = MN^2 : (MN^2 - MK^2) = MN^2 : (KO^2 - MK^2) =$$
$$= MN^2 : MO^2.$$

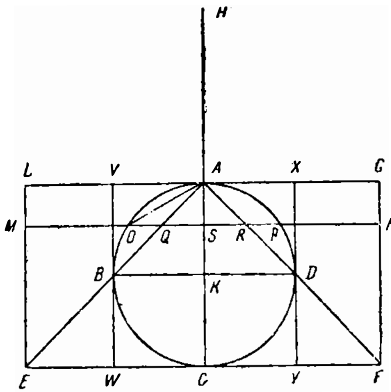
Но *каждый из* прямоугольных треугольников, из которых *состоит* вся отсеченная часть призмы (фиг. 27,*а*), подобен *каждому* из прямоугольных треугольников, из которых *состоит* вся отсеченная часть цилиндра, а следовательно, их площади относятся как квадраты сходственных катетов (как $MN^2 : MO^2$). Но, как мы видели, в то же время,

$$MN^2 : MO^2 = MN : ML,$$

т. е. каждый из прямоугольных треугольников, из которых состоит отсеченная часть призмы, так относится к каждому из прямоугольных треугольников, из которых состоит отсеченная часть цилиндра, как каждая из всех прямых, из которых состоит прямоугольник $EGCD$, к каждой из всех прямых, из которых состоит параболический сегмент. «Каждая к каждому, как все ко всем»; значит, и *все* прямоугольные треугольники, из которых состоит отсеченная часть призмы, т. е. и *вся отсеченная часть призмы*, так относятся ко *всем* прямоугольным треугольникам, из которых состоит отсеченная часть цилиндра, т. е. *ко всей отсеченной части цилиндра*, как все прямые, из которых состоит прямоугольник $EGCD$, т. е. *весь прямоугольник* $EGCD$, ко всем прямым, из которых состоит параболический сегмент, т. е. *ко всему параболическому сегменту*. Но нам уже известно, что площадь параболического сегмента равна $\frac{2}{3}$ площади прямоугольника $EGCD$; значит, и объем отсеченной части цилиндра равен $\frac{2}{3}$ объема отсеченной части призмы, равного $\frac{1}{4}$ объема всей призмы. Итак, объем отсеченной части цилиндра равен $\frac{1}{6}$ объема всей призмы.

Все остальные теоремы, содержащиеся в «Письме к Эратосфену», решаются сначала при помощи рычага, а затем методом исчерпания (эти последние решения не сохранились в рукописи, но для нас они большого интереса не представляют); поэтому этим теоремам предпослано несколько лемм из механики, доказанных в сочинении «О равновесии плоскостей». Только теорема о том, что центр тяжести конуса лежит на $\frac{1}{4}$ его высоты, на которую здесь ссылается Архимед, ни в одном из дошедших до нас сочинений не доказана; очевидно, это доказательство содержалось в одном из утраченных его сочинений.

Архимед начинает в качестве образца механического метода с хорошо известной его читателям теоремы о площади параболического сегмента, дабы они могли сравнить оба метода доказательства. Это доказательство из «Эфода» приведено выше (стр. 78 и сл.). Далее следует также хорошо известная его читателям из сочинения «О круге и цилиндре» теорема об объеме шара. Здесь (ср. только что разобранную задачу) конструируются конус, шар и цилиндр (фиг. 28); произвольная горизонтальная плоскость (след которой $MOPN$) отсекает от каждого из этих тел по элементу — по кругу разной величины с диаметрами MN, OP, QR. Оказывается следующее: если круговые элементы шара и конуса, образованные одним и тем же сечением, перенести в конец H второго плеча рычага (A точка опоры, $CA = AH$), а соответствующий элемент цилиндра оставить на месте, то они уравновесятся. Зная отношение длин плеч (2 : 1), а также зная, что объем конуса равен трети объема цилиндра, не трудно уже найти и объем шара; предлагаю читателю проделать это самому. Далее, Архимед, совершенно в духе Демокрита, говорит, что объем шара равен объему конуса, основание которого равно поверхности шара, а высота — его радиусу, и уже отсюда определяет поверхность.



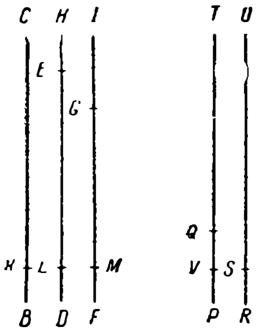
Фиг. 28

На остальных задачах, содержащихся в «Эфоде», останавливаться не буду. Я полагаю, что механический метод усвоен уже читателем в достаточной мере на этих двух примерах. Укажу лишь на то, что характерной чертой этого приема, как и разобранной выше (стр. 146) задачи, решенной методом неделимых, является, как правильно указал Гэзс, замена непосредственного интегрирования элементов, составляющих искомую площадь или объем, другим интегрированием, результат которого заранее известен. Орудием для такой замены в данном случае является рычаг.

Прежде чем перейти к двум следующим большим трудам Архимеда, «О спиралях» и «О коноидах и сфероидах», разберем приемы, применяемые Архимедом при суммировании рядов

$$a + 2a + 3a + 4a + \ldots + na,$$
$$a^2 + (2a)^2 + (3a)^2 + (4a)^2 + \ldots + (na)^2,$$

ибо они чрезвычайно типичны для применяемой им перестройки математики атомистов. В этой математике, как мы говорили, первый ряд суммировался очень просто: складывались между собою два равных друг другу ступенчатых треугольника (см. фиг. 2) и получался прямоугольник со сторонами na и $(n+1)a$, т. е. площадь каждого такого треугольника оказывалась равной $\frac{(na)^2+na}{2}$, а при очень большом n величиной na можно было по сравнению с $(na)^2$ пренебречь, и получалось $\frac{(na)^2}{2}$.



Фиг. 29

В «геометрической алгебре», обоснованной в арифметических книгах «Начал» Евклида, общим выражениям для чисел, символами которых у нас являются буквы a, b, c и т. д., соответствовали отрезки прямых и *только отрезки прямых*. Поэтому Архимед, верный принципам евдоксовой школы, отказывается изображать единицу квадратиками, из которых составляется ступенчатый треугольник. Он изображает (фиг. 29) каждую величину отрезком прямой соответствующей длины, затем продолжает каждый отрезок до величины наибольшего. Он получает (если перевести на наш алгебраический язык), кроме наибольшей величины na, ряд сумм, соответствующих отдельным отрезкам чертежа: $(n-1)\,a$ и a; $(n-2)\,a$ и $2a$; $(n-3)\,a$ и $3a$ вплоть до a и $(n-1)\,a$; затем он прибавляет еще na (0 и na). Таких прямых $n+1$, каждая имеет длину na; значит их сумма равна $na(n+1)$, или $n(n+1)a$. Но сумма добавок, сделанных к отрезкам, чтобы уравнять их с наибольшим из них, как раз равна самим отрезкам; значит, сумма отрезков равна

$$S = \frac{n\,(n+1)\,a}{2} = \frac{n^2a+na}{2}.$$

Ясно, что эта сумма

$$S > \frac{n^2a}{2}.$$

Обозначив $n+1$ через m, получим

$$S=\frac{(m-1)\,ma}{2}=\frac{m^2a-ma}{2},$$

откуда

$$S<\frac{m^2a}{2},\text{ или } S<\frac{(n-1)^2a}{2}.$$

Итак, мы получили верхний и нижний пределы, после чего методом reductio ad absurdum можно уже доказать, что при достаточном уменьшении a разница между S и $\frac{n^2a}{2}$ может быть сделана меньше любой, заранее заданной величины.

И на этом примере не трудно видеть, что метод Архимеда гораздо менее нагляден и гораздо более искусственен, чем старый прием, но задача здесь настолько проста, что это не бросается в глаза.

Другое дело ряд

$$a^2+(2a)^2+(3a)^2+\ldots+(na)^2.$$

Здесь старое решение так же просто, как в случае с рядом $a+2a+3a+\ldots$, только вместо двух ступенчатых треугольников складываются три ступенчатые пирамиды (см. табл. 3). Когда же Архимеду приходится и в этом случае изобразить величины не кубиками, а отрезками прямых, то выкладки становятся такими сложными, что ему приходится чистосердечно признаться, что он имеет готовый ответ (полученный, конечно, заранее методом неделимых) и что к нему он подгоняет свое решение.

Сначала все идет благополучно. Как раз, как в первой задаче, все отрезки дополняются до величины наибольшего. Но теперь уже эти отрезки символизируют не величины, а квадраты величин; поэтому при сложении и возведении в квадрат двух отрезков, имеющих на чертеже длину a и $(n-1)\,a$, а в сумме na, получится уже не просто $a^2+[(n-1)\,a]^2$, а еще удвоенное произведение. Получается:

$$\begin{aligned}
(na)^2&=(na)^2 &&=(na)^2\\
(na)^2&=[a+(n-1)\,a]^2 &&=a^2+2a\,(n-1)\,a+[(n-1)\,a]^2,\\
(na)^2&=[2a+(n-2)\,a]^2 &&=(2a)^2+2\cdot(2a)(n-2)a+[(n-2)a]^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(na)^2&=[(n-1)\,a+a]^2 &&=[(n-1)\,a]^2+2(n-1)\,a\cdot a+a^2,\\
(na)^2&=(na)^2 &&=(na)^2.
\end{aligned}$$

Складывая, получаем:

$$(n+1)(na)^2 = 2[a^2 + (2a)^2 + (3a)^2 + \ldots + (na)^2] + \\ + 2[a\cdot(n-1)a + 2a\cdot(n-2)a + 3a\cdot(n-3)a + \\ + \ldots + (n-1)a\cdot a].$$

Здесь Архимед останавливается в недоумении. Что делать с последним головоломным слагаемым, не ясно. Но он предварительно, методом неделимых, определил, что в результате складывания трех ступенчатых пирамид получается тело, состоящее из параллелепипеда со сторонами na, na и $(n+1)a$ и «ступенчатого треугольника», площадь основания которого равна $n(n+1)a^2$, а объем, при глубине a равен $n(n+1)a^3$. Итак весь объем трех ступенчатых пирамид с квадратным основанием:

$$n^2(n+1)a^3 + \frac{n(n+1)a^3}{2}.$$

Разумеется, поскольку Архимед изображает каждую a линейным отрезком, он получает не кубичную, а квадратную степень, и он знает, что у него должно получиться:

$$3[a^2 + (2a)^2 + (3a)^2 + \ldots + (na)^2] = \\ = n^2(n+1)a^2 + \frac{n(n+1)a^2}{2}.$$

«Остается, — замечает он, — доказать, что полученное мною выражение равнозначно этому выражению».

Определим $n^2(n+1)a^2$ из обоих выражений, и полученные значения приравняем друг другу (обозначаем искомую сумму $a^2+(2a)^2+(3a)^2\ldots$ для простоты через S). Должно получиться

$$n^2(n+1)a^2 = 3S - \frac{n(n+1)a^2}{2}.$$

Получилось

$$n^2(n+1)a^2 = 2S + \\ + 2[a\cdot(n-1)a + 2a\cdot(n-2)a + 3a\cdot(n-3)a + \ldots + (na)^2],$$

откуда после вычитания второго выражения из первого должно получиться

$$S = \frac{n(n+1)a^2}{2} + 2[a\cdot(n-1)a + 2a\cdot(n-2)a + \\ + 3a\cdot(n-3)a + \ldots + (n-1)a\cdot a].$$

Но в верности этого равенства мы убедимся, сложив следующие выражения:

$$a^2 = a^2,$$
$$(2a)^2 = 2a^2 + 2 \cdot a^2,,$$
$$(3a)^2 = 3a^2 + 2(2a^2 + a^2),$$
$$(4a)^2 = 4a^2 + 2(3a^2 + 2a^2 + a^2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(na)^2 = na^2 + 2[(n-1)a^2 + (n-2)a^2 + \ldots + a^2)]$$
$$S = \frac{n(n+1)a^2}{2} + 2[(n-1)a^2 + 2(n-2)a^2 + 3(n-3)a^2 + \ldots + (n-1)a^2],$$

что и требовалось доказать.

Итак,

$$3S_n = n^3a^2 + n^2a^2 + \frac{n^2a^2}{2} + \frac{na^2}{2}.$$

Наряду с этим точным значением для S мы встречаемся у Архимеда и с пределом этого значения

$$3S_n > n^3a^2.$$

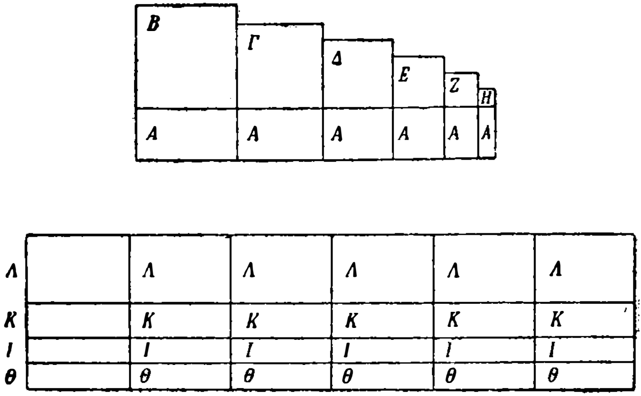
Как мы видели (стр. 20), это при переводе в третье измерение (n^3a^3) — объем трех пирамид со стороной основания и высотой na, которые могли рассматриваться как предел ступенчатых пирамид при чрезвычайно малом a.

Сходным путем Архимед доказывает также, что

$$3S_{n-1} < n^3a^2.$$

Из других теорем, содержащихся в этих сочинениях, наибольший принципиальный интерес, быть может, представляет собой предложение II сочинения «О коноидах и сфероидах» (фиг. 30).

«Если ряд линий (т. е. отрезков прямых) равны между собой, если к каждой из них приложена некоторая площадь, имеющая избытком квадрат (см. выше, стр. 14 и сл.), тогда как стороны этих фигур, выступающие одна на другой, превосходят друг друга на одну и ту же величину, равную наименьшей из этих сторон; если, с другой стороны, дан ряд площадей в том же числе, что и первые, причем каждая из вторых площадей равна по величине наибольшей из первых, то отношение их суммы к сумме первых площадей будет меньше, чем отношение прямой, равной сумме стороны наибольшего из выступающих друг над другом прямоугольников с одной из равных друг другу сторон, к прямой, равной сумме $\frac{1}{3}$ стороны наибольшего из выступающих друг над другом прямоугольников с половиной одной из равных друг другу сторон» (так же формулирован и нижний предел).



Фиг. 30

Я нарочно привел эту теорему в формулировке автора, чтобы читатель мог убедиться, насколько невразумителен для нас, привыкших к алгебраическим обозначениям, язык евклидовой геометрической алгебры, и почему нам приходится, щадя время и внимание читателя, обычно переводить эти невразумительные формулировки на наш математический язык. Так, площадь «имеющая избытком квадрат», значит, как мы видели, что в прямоугольнике, одна сторона a которого постоянная, а другая x переменная величина, на последней строится квадрат, и следовательно, площадь всей фигуры, состоящей из прямоугольника и квадрата, равна $ax+x^2$. В целом эта пропорция выразится в наших терминах так:

$$\frac{n\,[b\cdot na+(na)^2]}{[ba+a^2]+[b\cdot 2a+(2a)^2]+[b\cdot 3a+(3a)^2]+\ldots+[b\cdot na+(na)^2]}<\frac{b+na}{\frac{b}{2}+\frac{na}{3}}.$$

К этому выводу Архимед приходит таким образом. Суммируя

$$b\cdot a+b\cdot 2a+b\cdot 3a+\ldots+b\cdot na,$$

он, согласно приведенной выше (стр. 150) теореме, получает (умножая обе части неравенства на b)

$$\frac{bn^2a}{2}<ba+b\cdot 2a+b\cdot 3a+\ldots+b\cdot na.$$

Суммируя затем

$$a^2+(2a)^2+(3a)^2+\ldots+(na)^2,$$

он, согласно приведенной там же теореме, получает

$$\frac{n^3a^2}{3}<a^2+(2a)^2+(3a)^2+\ldots+(na)^2.$$

При сложении правых и левых частей неравенств получается

$$\frac{n^3a^2}{3}+\frac{bn^2a}{2}<[ba+a^2]+[b\cdot 2a+(2a)^2]+\ldots+[bna+(na)^2],$$

откуда уже легко выводится требуемое неравенство (числитель и знаменатель левой части сокращаются на n^2a).

Если элементарные слагаемые, входящие в это рассуждение, мы будем представлять себе не фигурами, а телами, имеющими минимальную глубину a, как это делалось в атомистической математике, то, как мы говорили выше (стр.152), a в правых частях этих неравенств придется заменить через a^2, а a^2 через a^3; в последнем неравенстве в левой части получится

$$\frac{(na)^3}{3}+\frac{b\,(na)^2}{2}.$$

Обозначив переменную na через x, мы вправе для наглядности перевести всю эту процедуру на язык наших терминов (с применением знака $\int dx$); получим

$$\int_0^x bx\,dx = \frac{bx^2}{2},$$

$$\int_0^x x^2\,dx = \frac{x^3}{3},$$

откуда

$$\int_0^x (x^2 + bx)\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{bx^2}{2}.$$

Как раз таким же образом можно было бы доказать, что

$$\frac{n\,[d\cdot na - (na)^2]}{[d\cdot a - a^2] + [d\cdot 2a - (2a)^2] + [d\cdot 3a - (3a)^2] + \ldots + [d\cdot na - (na)^2]} < \frac{d - na}{\frac{d}{2} - \frac{na}{3}}.$$

В обоих случаях, если возьмем сумму не n, а n—1 членов, знак $<$ изменится на $>$. Таким способом мы получим верхний и нижний пределы, после чего методом reductio ad absurdum можно уже доказать, что при достаточном уменьшении a знак неравенства превратится в знак равенства. Как мы увидим, однако, ниже (стр. 168 и сл.). *формулой с отрицательным знаком при* a^2 *Архимед не пользуется*, хотя казалось бы, она ему была необходима.

К этому общему виду и сводятся все основные теоремы книги «О коноидах и сфероидах», поскольку они не могут быть сведены к более простому виду $\int bxdx$ или $\int x^2dx$. Вправе ли мы на этом основании говорить, что Архимед нашел и применял общий алгорифм для решения степенного ряда до второй степени? Думаю, что это было бы неправильно, ибо применение этого «общего алгорифма» носило у Архимеда стихийный и бессознательный характер; он нигде не отказывается от других разнообразных методов интегрирования ради этого метода, нигде не выделяет его и не подчеркивает его универсального значения. Впервые осознал значение этого приема Кавальери, подчеркнувший и выдвинувший на первое место свою «теорию абсцисс» с ее «всеми абсциссами», «всеми квадратами абсцисс», «всеми остатками абсцисс» и т. д. Интегрирование как самостоятельный алгорифм родилось только с этого момента.

Тем не менее, нельзя, конечно, недооценивать значение открытия, сделанного Архимедом.

Перейдем теперь к отдельным трудам Архимеда, относящимся к этому времени. Сочинение «О спиралях» (буквально: «О раковинообразных линиях»—Περὶ κογχοειδῶν) посвящено нахождению площади витка спирали, названной впоследствии *архимедовой спиралью*. Это — спираль, у которой радиус-вектор (т. е. прямая, проведенная из начала (центра) спирали к любой точке ее окружности) имеет один конец неподвижно закрепленным в этом начале, тогда как другой вращается (по часовой стрелке) вокруг этого начала, причем длина радиуса-вектора все время возрастает пропорционально возрастанию этого угла. Иными словами, уравнение этой спирали[1]

$$\rho = n\varphi.$$

Определение этой спирали, содержащееся во введении к этой книге, особенно интересно, ибо оно показывает, что Архимед был и оставался прежде всего механиком. Здесь впервые в истории математики дано *механическое определение генезиса спирали*, как кривой, которую описывает на плоскости точка, движущаяся равномерно вдоль прямой, в то время как сама эта прямая совершает равномерное вращательное движение вокруг точки. Здесь Архимед впервые дает ясное определение понятий: «*равномерное прямолинейное движение*», «*равномерное вращательное движение*» и «*сложение*» этих движений.

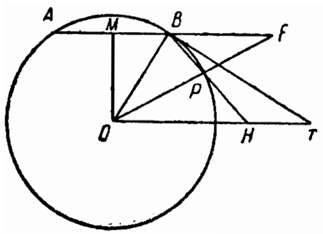
Площадь, ограниченную начальным радиусом и витком спирали (т. е. путем, проходимым концом радиуса-вектора за время его полного оборота вокруг оси — первого,

[1] Или (в декартовых координатах)

$$x^2 + y^2 = n^2 \operatorname{arc\,tg}^2 \frac{y}{x}.$$

второго и т. д.), Архимед называет первой площадью, второй площадью и т. д., а площадь круга, имеющего центром начало спирали и радиус которого равен по длине радиусу-вектору в конце каждого витка, Архимед называет первым кругом, вторым кругом и т. д.

Как во всех других своих книгах, и здесь основным теоремам Архимед предпосылает несколько вспомогательных лемм. Из них наибольший принципиальный интерес имеют три леммы, посвященные νεῦσις, т. е., как мы говорили уже, вставке между двумя линиями отрезка данной длины, продолжение которого проходит через данную точку.



Фиг. 31

Так, например, Архимед (фиг. 31) доказывает, что, если дана хорда AB в данном круге и перпендикуляр OM, опущенный из центра O на эту хорду, то всегда можно так провести радиус OP, чтобы при продолжении его затем до пересечения с хордой AB в точке F

$$PF:PB > BM:MO. \qquad (1)$$

Для этой цели из центра O проводим прямую OT, параллельную AB, и из B прямую, перпендикулярную OB, до пересечения с OT в точке T. Тогда треугольники OMB и OBT с взаимно перпендикулярными сторонами подобны, откуда

$$BM:MO = OB:BT. \qquad (1)$$

Берем любую длину d, удовлетворяющую неравенству

$$OB:d > BM:MO. \qquad (2)$$

Между окружностью и прямой OT вставляем отрезок PH длины d так, чтобы продолжение PH попадало в B. Тогда из подобия треугольников OPH и BPF получим

$$PF:PB = OP:PH = OP:d. \qquad (3)$$

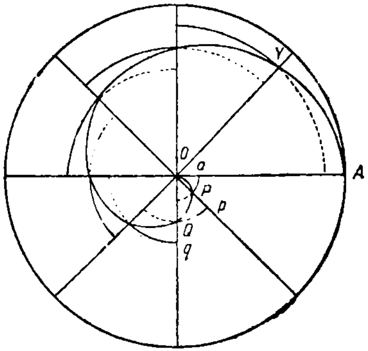
Но $OP = OB$, как радиусы круга, и значит

$$PF:PB = OB:d. \qquad (4)$$

Следовательно, на основании (2) мы нашли такую точку P, что

$$PF:PB > BM:MO.$$

В этих леммах применен, как мы видим, неортодоксальный, запрещенный прием, νεῦσις, но применен он не как прием решения, а только для исследования задачи, для доказательства существования решения.



Фиг. 32

Как мы уже сказали, основная цель сочинения — нахождение площади, ограниченной спиралью и начальной линией. Для характеристики методов работы Архимеда достаточно взять только теорему о площади первого витка, равной, как доказывает Архимед, $\frac{1}{3}$ площади первого круга. Разделив окружность на n равных друг другу секторов и проведя через точки деления радиусы, Архимед откладывает соответствующие радиусы-векторы: на первом радиусе — равный 0, на втором — равный a, на третьем — равный $2a$, на четвертом — равный $3a$ и т. д. Через концы этих радиусов-векторов и проходит искомая спираль. Теперь из O как из центра проведем через концы радиусов-векторов отрезки окружностей до пересечения с соседними радиусами (фиг. 32). Секторы, получающиеся по направлению против часовой стрелки от этих точек спирали, образуют ломаную линию, состоящую из изображенных сплошной линией дуг и отрезков радиусов и *описанную* вокруг спирали, а секторы, образующиеся в направлении по часовой стрелке от этих точек на спирали, представляют собой такую же ломаную линию, но *вписанную* в спираль; она состоит из изображенных пунктиром дуг и отрезков радиусов. Площадь первого описанного сектора равна $\frac{\pi a^2}{n}$, площадь второго $\frac{\pi(2a)^2}{n}$, третьего $\frac{\pi(3a)^2}{n}$ и т. д. вплоть до последнего, n-го, площадь которого $\frac{\pi(na)^2}{n}$. Вынося $\frac{\pi}{n}$ за скобку и суммируя, получим площадь, ограниченную описанной ломаной:

$$\frac{\pi}{n}[a^2+(2a)^2+(3a)^2+\ldots+(na)^2].$$

Но этот ряд (ряд квадратов натуральных чисел) Архимед, как мы видели, суммировал и приходил к выводу, что

$$n^3a^2<3[a^2+(2a)^2+(3a)^2+\ldots+(na)^2]$$

или

$$\frac{\pi n^2a^2}{3}<\frac{\pi}{n}[a^2+(2a)^2+(3a)^2+\ldots+(na)^2].$$

Если мы теперь возьмем вписанные секторы, то площадь первого из них также равна $\frac{\pi a^2}{n}$, второго $\frac{\pi(2a)^2}{n}$ и т. д.; но этих секторов меньше: их не n, а $n-1$; получим сумму ряда

$$\frac{\pi}{n}[a^2+(2a)^2+(3a)^2+\ldots+(n-1)a^2],$$

для которого, как указано выше, будет верно неравенство

$$n^3a^2>3\{a^2+(2a)^2+\ldots+[(n-1)a]^2\}$$

или

$$\frac{\pi n^2a^2}{3}>\frac{\pi}{n}\{a^2+(2a)^2+\ldots+[(n-1)a]^2\}.$$

На основании этих неравенств Архимед известным путем доказывает, что, поскольку разность между

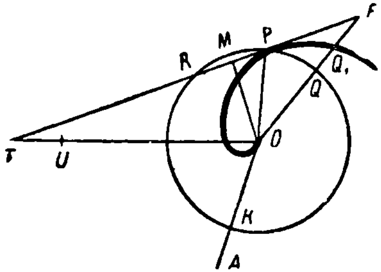
$$\frac{\pi}{n}[a^2+(2a)^2+\ldots+(na)^2]$$

и

$$\frac{\pi}{n}\{a^2+(2a)^2+\ldots+[(n-1)a]^2\},$$

равная πna^2, при достаточно большом n и достаточно малом a может быть сделана меньше любой заданной величины, площадь витка спирали не может быть ни больше ни меньше $\frac{\pi(na)^2}{3}$ (т. е., она равна трети площади круга с радиусом, равным na, т. е., трети площади круга). Множителя $\frac{\pi}{n}$ Архимед, однако, не вводит, так как оперирует пропорциями.

Из других теорем остановимся только на одной (фиг. 33), в которой применяется указанный выше νεῦσις.[1] Если в любой точке P первого витка провести касательную к спирали, а из центра O восставить перпендикуляр к радиусу-вектору OP до пересечения с касательной в точке T, а затем из центра O радиусом OP



Фиг. 33

описать окружность до пересечения с начальным радиусом в точке K, то подкасательная OT равна дуге KP.

Путем reductio ad absurdum Архимед доказывает, что OT не может быть ни больше, ни меньше части окружности KRP. Пусть OT больше, чем дуга KRP. На основании приведенной выше леммы мы можем всегда найти такой радиус OQ, чтобы при продолжении его до пересечения с секущей TRP в точке F

$$FQ:PQ > \frac{1}{2} PR:OM,$$

[1] Как и в других случаях у Архимеда, не для решения построением, а только для анализа задачи, как осуществимая возможность.

откуда, ввиду подобия треугольников OTP и OMP,

$$FQ:PQ > PO:OT$$

или

$$FQ:PQ = PO:OU,$$

где точка U лежит между O и T и выбрана так, что $OU > \smile KRP$.

Переставляем средние члены:

$$FQ:PO = PQ:OU,$$

откуда

$$FQ:PO < \smile PQ:\smile KRP$$

(ибо $PQ < \smile PQ$, а OU, по предположению, $> \smile KRP$).

Откуда, componendo [образуя суммы членов каждого отношения (см. стр. 24 и сл.)],

$$FO:QO < \smile KRQ:\smile KRP.$$

Но в спирали дуги пропорциональны радиусам-векторам; следовательно,

$$FO:QO < OQ_1:OP.$$

Поскольку последующие члены QO и OP между собой равны, $FO < OQ_1$, а это невозможно.

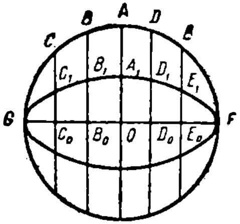
Подобным же образом Архимед доказывает, что OT не может быть и меньше дуги KRP. Значит,

$$\smile KRP = OT.$$

Крайняя искусственность этого решения и неожиданность получающегося результата вызывали протесты математиков последующего времени, начиная с Паппа, жившего в III в. н. э., и до наших дней. Уже Папп справедливо указал, что эта теорема может быть доказана способом «плоскостных» геометрических мест, без применения в каком бы то ни было виде «объемных» мест (пересечения конических сечений или νεῦσις), и притом прямым путем, без помощи reductio ad absurdum. Папп показал даже, как это можно сделать. По справедливому предположению Гэзса, искусственное и недостаточно наглядное решение Архимеда, скорее всего было результатом того, что он и в этом случае нашел решение методом неделимых, а затем уже, по известному нам шаблону, переложил каждый его шаг на язык строгого метода. Гэзс сделал даже попытку восстановить весь ход его мыслей, но это восстановление, естественно, остается произвольным.

Перейдем теперь к одному из самых замечательных сочинений Архимеда, к сочинению «О коноидах и сфероидах». В этой области Архимед, повидимому, был пионером; мы ничего не слышим о том, чтобы кто-нибудь до него занимался телами, полученными от вращения сегментов конических сечений вокруг их оси. Архимеду пришлось самому придумать и терминологию для этих тел. Параболу Архимед, как мы видели, называл «сечением прямоугольного конуса»; соответственно этому параболоид вращения он назвал «прямоугольным коноидом»; гиперболу (вернее, каждую из ветвей гиперболы) он назвал «сечением тупоугольного конуса»; соответственно этому гиперболоид вращения он назвал «тупоугольным коноидом». Но тем не менее, Архимед не назвал эллипсоид вращения «остроугольным коноидом», хотя эллипс он и называл «сечением остроугольного конуса». Эллипсоид, образованный вращением эллипса вокруг его большой оси, он называет «удлиненным сфероидом», т. е. «удлиненным шарообразным телом»; эллипсоид, образованный вращением эллипса вокруг его малой оси, он называет «сплющенным сфероидом», т. е. «сплющенным шарообразным телом». Можно думать, что эти последние названия Архимед придумал (или усвоил у предшественников) еще в раннюю эпоху своего творчества, а затем не хотел уже их менять в угоду стройности всей его системы. Мы говорили уже, что в V в. эллипс, очевидно, рассматривался с точки зрения атомистов как круг, в котором каждая из составляющих его ординат уменьшена в одном и том же отношении; соответственно этому и эллипсоид вращения должен был рассматриваться не как продукт вращения конического сечения, а как удлиненный или сплющенный шар. Отсюда и эти названия.

То, что Архимеду была близка эта «атомистическая» концепция эллипса, видно из предл. 4 разбираемого нами сочинения. Здесь он доказывает, что площадь круга, диаметром которого является большая ось эллипса, относится к площади эллипса, как большая ось эллипса к малой. Доказательство ведется по всем правилам евклидова метода исчерпания (см. стр. 27) без характерного для Архимеда введения на ряду с нижней и верхней границами. Но интересно замечание Архимеда: «Так как *все линии* в круге (параллельные малой оси эллипса, т. е. ординаты) *разделены* в одном и том же отношении», то такое же отношение имеют и ограниченные этими линиями треугольники и трапеции (GCC_0 и GC_1C_0, CBC_0B_0 и $C_1B_1C_0B_0$, BAB_0O и $B_1A_1B_0O$ и т. д.), на которые соответственно разбиваются вписанные в эллипс и круг многоугольники, а так как сумма этих треугольников и трапеций и составляет в сумме эти многоугольники, то так же относятся и площади этих многоугольников. Но полудиаметр круга, равный половине большой оси эллипса, и половина малой оси эллипса (AO и A_1O) есть одна из таких пар соответственных ординат; значит, площади многоугольников относятся, как большая ось к малой. Далее, путем reductio ad absurdum доказывается, что и отношение площади круга к площади эллипса не может быть ни больше, ни меньше отношения площадей этих многоугольников, а следовательно, оно равно этому отношению.



Фиг. 34

Итак, все доказательство обработано в духе математической строгости: бесконечные по числу ординаты, составляющие круг и эллипс, заменены треугольниками и трапециями конечной ширины, применено анагогическое доказательство (reductio ad absurdum). Но отправным пунктом служит не античная форма уравнения эллипса как конического сечения:

$$\frac{y^2}{x(2a-x)}=\frac{b^2}{a^2}, \tag{1}$$

а сформулированное в духе атомистов свойство ординат эллипса:

$$y:y_1=b:a. \tag{2}$$

Разумеется, Архимеду не трудно было с уравнением (1) эллипса сопоставить свойство круга: «квадрат перпендикуляра, опущенного на диаметр, равен произведению отрезков диаметра», т. е.

$$y_1^2 = x(2a - x), \tag{3}$$

и из сопоставления уравнений (1) и (3) он сразу же получил бы (2):

$$\frac{y^2}{y_1^2} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Однако в этом случае Архимед сохранил бы хоть какое-нибудь указание на все эти преобразования, а не сказал бы: «так как эти линии разделены в одном и том же отношении», ибо такое разделение не является определяющим свойством эллипса при трактовке его как конического сечения.

Но вернемся к терминологии, которую Архимед предпосылает своему исследованию. «Конус, описанный прямыми, ближайшими к сечению тупоугольного конуса», Архимед называет «охватывающим конусом». «Ближайшие прямые» — это, конечно, асимптоты гиперболы; речь идет о конусе, образованном вращением асимптот вокруг оси. Расстояние от вершины этого конуса до вершины гиперболоида вращения Архимед называет «отрезком, примыкающим к оси», и т. п. Если оси двух сфероидов пропорциональны друг другу, то Архимед называет такие сфероиды подобными.

Как мы узнаем из предисловия к сочинению «О спиралях», теоремы об объеме сегментов параболоида вращения Архимед открыл уже в раннюю эпоху своей деятельности, о чем он сообщал уже в письме к Конону, т. е. до выхода его первого геометрического сочинения «О квадратуре параболы», написанного уже после смерти Конона. Что же касается теорем, посвященных объему гиперболоида и эллипсоида вращения, то к ним Архимед пришел лишь в разбираемую нами эпоху, как видно из предисловия к этому сочинению, обращенного к ученику Конона Досифею:

«В этой книге я посылаю тебе мои доказательства теорем, которых недоставало в книгах, посланных тебе до сих пор. Кроме того, я шлю тебе доказательства некоторых теорем, найденные позже, ибо, несмотря на ряд повторных попыток, прежде мне приходилось отказаться от их доказательства — со столь большими трудностями это было связано. Поэтому-то я и не опубликовал этих доказательств вместе с другими. Но когда позже я засел за них с еще бо́льшим усердием, мне удалось разрешить то, что до сих пор представляло для меня непреодолимые трудности».

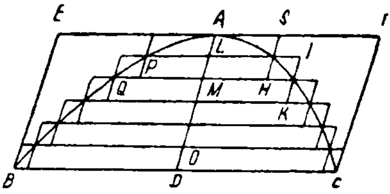
Своей книге Архимед предпосылает следующие леммы из области теории конических сечений:

1. В параболоиде вращения всякое сечение плоскостью, параллельной оси, есть парабола, подобная параболе, произведшей параболоид.
2. В гиперболоиде вращения всякое сечение плоскостью, параллельной оси, есть гипербола, подобная гиперболе, произведшей гиперболоид.
3. В гиперболоиде вращения всякое сечение плоскостью, проходящее через вершину асимптотического конуса, есть гипербола, не подобная гиперболе, произведшей гиперболоид.
4. Во всяком сфероиде сечение плоскостью, параллельной оси, есть эллипс, подобный эллипсу, произведшему сфероид.

Доказательства этих лемм Архимед не дает, но замечает: «Доказательства всех этих предложений очевидны» (φανεροί).

Замечание это не может не вызвать удивления. Все эти положения вовсе не самоочевидны, особенно третье. Это замечание не может также означать, что эти положения были уже доказаны в «Элементах конических сечений» Евклида, так как в таких случаях Архимед прямо на это указывает. Я считал бы правильным сопоставить с этим замечанием Архимеда случайно сохраненное традицией сообщение Гераклида, биографа Архимеда. Мы узнаем отсюда, что знаменитого автора «Конических сечений» Аполлония из Перги обвиняли в плагиате: его «Конические сечения» якобы есть только видоизменение «Конических сечений» Архимеда, которые автор не успел опубликовать; Аполлоний якобы присвоил себе труд Архимеда. Об этом обвинении мы скажем ниже (стр. 202), когда будем говорить о взаимоотношениях между Архимедом и Аполлонием. Пока учтем только то, что Архимед, очевидно, готовил публикацию собственных «Конических сечений», которые он, по неизвестным нам причинам, не опубликовал (ни один античный автор на этот труд не ссылается); вполне вероятно, что Архимед в момент написания книги «О сфероидах и коноидах» собирался включить эти леммы в свои «Конические сечения», а потому не считал нужным дать их доказательства.

Из остальных лемм, предшествующих основным теоремам, в этом сочинении наиболее интересны 8-я и 9-я. Здесь показано, как по данному эллиптическому сечению конуса и его вершине, лежащей на осевой плоскости, перпендикулярной к плоскости сечения, найти круговые сечения конуса. Иными словами, всякий прямой конус с эллипсом в основании всегда можно рассматривать как наклонный конус с кругом в основании.



Фиг. 35

Основной задачей книги является нахождение объема сегмента параболоида, гиперболоида и эллипсоида вращения. Архимед показывает, что этот объем зависит только от площади основания сегмента и его высоты и не зависит от величины угла между основанием сегмента и осью эллипса. Для нахождения объема в каждое из указанных тел (фиг. 35) вписывается и вокруг него описывается ступенчатое тело, составленное из ряда наложенных друг на друга цилиндров, прямых или наклонных, ибо их оси совпадают с осью тела вращения. Высоты этих цилиндров a равны между собой и равны каждая $\frac{1}{n}$ всей высоты тела. Не трудно убедиться, что первый описанный цилиндр (считая от вершины тела вращения) равен первому вписанному, второй — второму и т. д., но последний из описанных цилиндров не имеет себе соответствия во вписанном ступенчатом теле. Так как высоты цилиндров равны между собой, то их объемы относятся, как квадраты радиусов их оснований, т. е. как квадраты ординат.

Но квадраты ординат относятся:

1) в *параболе* — как соответствующие абсциссы, т. е. они пропорциональны

$$a, 2a, 3a, 4a, \ldots, na;$$

2) в *гиперболе* — как произведения соответствующих абсцисс на сумму абсциссы с осью b, т. е. они пропорциональны

$$a\cdot(b+a),\ 2a\cdot(b+2a),\ 3a\cdot(b+3a), \ldots, na\cdot(b+na),$$

или

$$b\cdot a+a^2,\ b\cdot 2a+(2a)^2,\ b\cdot 3a+(3a)^2, \ldots, b\cdot na+(na)^2;$$

3) в *эллипсе* — как произведения соответствующих отрезков диаметра d

$$a\cdot(d-a),\ 2a\cdot(d-2a),\ 3a\cdot(d-3a), \ldots, na\cdot(d-na)$$

или

$$d\cdot a-a^2,\ d\cdot 2a-(2a)^2,\ d\cdot 3a-(3a)^2, \ldots, d\cdot na-(na)^2.$$

Разность между объемами описанной и вписанной ступенчатых фигур равна одному цилиндрику, прилегающему к основанию сегмента; при достаточно большом n она может быть сделана сколь угодно малой. Но эти ступенчатые фигуры представляют собой верхний и нижний пределы соответствующих тел вращения; следовательно, по доказанному выше (стр. 151), объем цилиндра, в который вписан параболоид вращения, относится к объему параболоида вращения, как

$$n^2 a : \frac{n^2 a}{2} = 2:1;$$

а так как объем конуса, имеющего то же основание и ту же вершину, что и цилиндр, равен трети объема цилиндра, то объем параболоида вращения равен $\frac{3}{2}$ объема этого конуса.

Таким же образом из формул для соответствующих ступенчатых фигур в гиперболоиде и эллипсоиде вращения можно найти отношение объемов этих фигур к объему описанного вокруг них цилиндра.

Необходимо, однако, указать на то, что Архимед пользуется только формулой для суммы ряда $ba+a^2$, $b\cdot 2a+(2a)^2$ и т. д., а формулу для суммы ряда

$$d\cdot a - a^2 \quad d\cdot 2a - (2a)^2, \ldots$$

не выводит и ею не пользуется. Он строит ряд прямоугольников со сторонами $\frac{d}{2}+h$ и $2h$ (где d — большой диаметр эллипса, а h — отрезок диаметра от центра до основания сегмента), отнимает от каждого из них гномон (см. стр. 15) с площадью

$$d\cdot a - a^2, \quad d\cdot 2a - (2a)^2, \ldots$$

и получает в результате ряд прямоугольников, ширина которых убывает, когда ряд a, $2a$, $3a$,... возрастает. Суммирование площадей гномонов заменяется нахождением суммы площадей этих прямоугольников, которая получает уже вид

$$c\cdot a + a^2, \quad c\cdot 2a + (2a)^2, \ldots,$$

т. е. вид формулы, которой он пользовался для получения объема гиперболоида; в особой формуле для эллипсоида, таким образом, нет нужды. На этом примере мы видим, с какими непонятными для нас трудностями приходилось иметь дело греческому геометру вследствие отсутствия алгебраических обозначений и представления об отрицательном числе.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

☆

Архимед при дворе Гиерона. Рим и Карфаген

Считая неблагородным ремеслом занятия механикой и вообще всякого рода практической наукой, Архимед обратил все свое внимание на геометрию, на ту отрасль знания, красота и преимущество которой не имеют ничего общего с удовлетворением практических потребностей. Эти знания не выдерживают никакого сравнения с другими, *ибо они в своих доказательствах вступают в спор с материей*. Во всей геометрии нельзя найти более трудных и серьезных задач, которые были бы притом изложены в более простой и наглядной форме, чем это сделано в сочинениях Архимеда. Одни видят в этом доказательство его таланта; по мнению других, упорным трудом было сделано то, что кажется каждому сделанным без усилий, легко. Самому не найти иной раз доказательств для решения задачи, но стоит обратиться к сочинениям Архимеда, и тотчас же приходишь к убеждению, что мог бы решить ее сам; так ровна и коротка дорога, которой он ведет к доказательствам.

Архимед был так гениален, имел такой блестящий ум и имел столь великие богатства в области теоретической науки, что не пожелал оставить после себе даже какие-либо сочинения о том, чем приобрел он себе имя и славу не человеческих, а как бы божеских познаний,— об устройстве изобретенных им машин.

Нет основания не доверять тому, что рассказывают о нем: что его, точно некая поселившаяся в его доме сирена, влекла к себе геометрия; поэтому он забывал о пище и питье и пренебрегал всякой заботой о теле. Если его насильно заставляли итти в баню, то там он чертил на пепле очага геометрические фигуры, а на своем собственном теле, смазанном маслом, он проводил пальцем линии, — столь велико было его восхищение этой наукой, и в такой мере он был одержим страстью к Музам. Но хотя он сделал так много прекрасных открытий, он просил своих родных и друзей, чтобы на его могиле не было изображено ничего, кроме шара, вписанного в цилиндр, и надписи, указывающей, во сколько раз описанное тело больше вписанного. Однако непобедимыми сделало его и его город (поскольку это зависело от Архимеда) как раз его глубокое знание механики».

В предыдущих главах мы уже в достаточной мере познакомились с Архимедом для того, чтобы понять, что́ в этих словах Плутарха — литературный шаблон и что́ — историческая истина. То, что сообщается здесь о рассеянности Архимеда, рассказывается в сходных выражениях и о Фалесе и о Демокрите. Фалес, погруженный в ученые размышления, не заметил, как упал в яму; Демокрит, занятый вопросами философии, не заметил привязанного рядом с ним мычащего быка и т. д. Конечно, нельзя отрицать, что рассеянность — вполне естественное свойство человека, погруженного всей душой в научные размышления, но наличие литературного шаблона делает эти рассказы весьма подозрительными, тем более, что из выражения Плутарха «нет основания не доверять» и т. д. видно, что и среди его современников и предшественников были такие, которые не доверяли этим рассказам.

Очевидно также, что сам Плутарх не читал и не мог понимать математических работ Архимеда; иначе он не мог бы сказать, что «сто́ит обратиться к сочинениям Архимеда, и тотчас же приходишь к убеждению, что мог бы решить задачу сам»; наоборот, искусственные решения Архимеда, полученные неизвестно откуда и неизвестно каким путем (читателю сообщаются только доказательства!), вызывают у читателя скорее чувство собственной беспомощности и удивления, а никак не «убеждение, что он мог бы решить и сам». На это обратили внимание такие ученые, как учитель Ньютона Барроу и Лейбниц, которым, конечно, никто не может отказать в математических дарованиях. Недаром Такэ, известный геометр XVII в., замечал: «Архимеда больше хвалят, чем читают, больше восхищаются им, чем понимают его». Лишь в очень немногих случаях дорога, по которой Архимед ведет читателя, может показаться «ровной и короткой»; в большинстве случаев она весьма извилиста, и читатель остается пораженным, когда внезапно замечает, что эта дорога неожиданно привела его к цели (это отмечено тем же Барроу). Замечание Плутарха дает нам возможность лишний раз убедиться в том, что Плутарх часто говорит не о том, каким был Архимед, а о том, каким должен был бы быть, по его мнению, идеальный ученый.

Равным образом, и то, что Архимед не изложил ни в одном из своих сочинений (исключая, впрочем, книгу о сооружении небесного глобуса) своих открытий в области практической техники, и то, что он велел начертать на своем могильном памятнике только геометрическую теорему, — все это указывает в лучшем случае лишь на то, что Архимед был пропитан предубеждениями той ученой среды, в которой ему пришлось жить, и стыдился своих технических склонностей.

Любопытно, что в другой характеристике Архимеда, дошедшей до нас в сочинении аль-Ялиль ас-Сийзи, арабского математика X—XI вв. н. э., и, несомненно, восходящей также к античному источнику, нет ни следа этого презрения к занятиям практической механикой: «Архимед достиг у греков высшей славы в геометрии; ни до, ни после него не было никого, кто мог бы сравниться с этим замечательным геометром, как не было никого, кто занимался бы с таким же усердием практически полезными вещами. Благодаря исключительной силе своего разума он изобретал орудия и инструменты для военного дела».

Для того же чтобы понять истинный душевный склад Архимеда, необходимо учесть то, что разобранное нами только что сочинение «О коноидах и сфероидах» было, повидимому, последним геометрическим трудом Архимеда. Более поздние его работы посвящены: 1) проблемам счета и вычислениям приближенных численных значений, т. е. «логистике», низшей прикладной науке с точки зрения древних, ибо задачей истинной науки было находить отношения объемов, площадей и отрезков друг к другу, а не их истинную величину; 2) математическим играм и 3) гидростатике. Все это, с точки зрения ученых того времени, —«прикладные» и «развлекательные» науки. Можно ли предположить, что ученый, влюбленный в теоретическую науку и презирающий прикладные науки, во цвете лет вдруг прекратил бы занятия этими любимыми науками и всецело посвятил бы себя ненавистной ему «механике»? Другое дело, если это исключительное увлечение теоретическими науками было навеяно воспитанием, а в глубине души Архимед был прежде всего инженером-виртуозом.

Если в предыдущую эпоху своей жизни Архимед посвящал свои труды своим коллегам по Александрийскому Музею — Конону, Эратосфену, Гераклиду, Досифею, то теперь он посвящает свои труды сиракузским монархам Гиерону и Гелону. Появление книги о математической игре «стомахион» («головоломка») также показывает, что теперь он становится в бóльшей мере практическим деятелем. И, наконец, как знаменитые механические открытия Архимеда, так и его труд по гидростатике теснейшим образом связываются с нуждами сиракузских монархов.

Вот что мы читаем у того же Плутарха:

«Архимед писал однажды своему родственнику и другу царю Гиерону, что любой данной силой можно поднять любую тяжесть. В непоколебимом доверии к силе своего доказательства он сказал, как говорят, что, если бы у него была другая земля, он перешел бы на нее и сдвинул бы с места нашу. Удивленный Гиерон стал просить его доказать на деле эту проблему и привести в движение какое-либо большое тело малою силой. Архимед приказал посадить на царскую грузовую триеру, с громадным трудом, с помощью многих рук вытащенную на берег, большой экипаж, положить на нее обычный груз, и, усевшись на некотором расстоянии, без всяких усилий, спокойно двигая рукой конец машины с множеством блоков, стал тянуть к себе триеру так тихо и ровно, как будто она плыла по морю. Пораженный этим, царь оценил важность механики и упросил Архимеда построить для него всякого рода машины и осадные сооружения, которые служили бы как для защиты, так и для нападения при какой угодно осаде».

Рассказ о триере, сдвинутой с места машинами Архимеда, дошел до нас в нескольких редакциях, отчасти противоречащих друг другу. Так, Прокл, в комментарии к «Началам» Евклида сообщает, что эта триера была построена Гиероном для царя Птолемея; что ее не удавалось стащить с берега, хотя в нее впрягалось все население Сиракуз, но Архимед придумал такие приспособления, что ее смог сдвинуть в воду сам Гиерон, без чьей-либо помощи. Убедившись в этом, Гиерон воскликнул: «С этого времени я требую, чтобы Архимеду верили во всем, что он только ни скажет». В вопросе о том, каков был тот механизм, при помощи которого Архимед привел в движение триеру, свидетельства древних также расходятся: по одним — это полиспаст, по другим — рычаг, по третьим — передача при помощи зубчатых колес, по четвертым — винт. Возможно, что в действительности это была сложная машина с применением различных видоизменений рычага; во всяком случае весь этот рассказ содержит сильное преувеличение.

Сообщив об этом изобретении Архимеда, Плутарх, примыкавший к школе Платона, очевидно, убоялся, как бы читатель, чего доброго, не подумал в самом деле, что Архимед всерьез увлекался этой недостойной мудреца-идеалиста прикладной техникой, тогда как сам он подчеркивал, что Архимед «в своих доказательствах вступал в спор с материей». Поэтому он считает нужным прибавить: «Но Архимед не придавал значения всем этим машинам... Он видел в них лишь простую геометрическую игру, которой он занимался только в минуты отдыха и то по большей части по настоянию царя Гиерона, ибо этот монарх, не переставая, убеждал его применять свой талант не к чисто теоретическим вещам, а вместо них к предметам, постигаемым чувствами, и сделать свои рассуждения в большей или меньшей мере доступными для чувств и осязаемыми для широких масс, применяя их для общеполезных вещей».

Эти оправдания Плутарха не могут не напомнить нам замечательные слов Плеханова в его работе «К вопросу о развитии монистического взгляда на историю» [1]: «Плутарх, упомянув об изобретениях, сделанных Архимедом во время осады Сиракуз римлянами, находит нужным извинить изобретателя. Философу, конечно, неприлично заниматься такого рода вещами, рассуждает он, но Архимеда оправдывает крайность, в которой находилось его отечество. Мы не считаем теперь постыдным — совсем напротив! — употребление человеком в дело его способности к механическим изобретениям, а греки (или, если хотите, римляне), как видите, смотрели на это совсем иначе...

Греческие и римские общества были, как известно, обществами рабовладельцев. В таких обществах весь физический труд, все дело производства достается на долю рабов. Свободный человек *стыдится* такого труда, и потому, естественно, устанавливается презрительное отношение даже к важнейшим изобретениям, касающимся производственных процессов, и, между прочим, к изобретениям механическим. Вот почему Плутарх смотрел на Архимеда не так, как мы смотрим теперь на Эдисона».

Нельзя не согласиться с Плехановым в том, что разбираемое место Плутарха в сущности ничего не говорит о личных склонностях Архимеда, а характерно лишь для преобладавшего в античном обществе (и прежде всего среди последователей Платона) взгляда на занятия механикой, который, конечно, разделял, будучи платоником, и сам Плутарх. Пусть переход Архимеда от занятий геометрией к механике соответствовал интересам двора Гиерона, — это не значит еще, что деятельность инженера не соответствовала также и внутреннему душевному складу Архимеда.

Появление крупнейшего труда поздней эпохи творчества Архимеда — его сочинения «О плавающих телах» — в традиции также связывается с нуждами двора Гиерона. Царем Гиероном была заказана мастеру корона, которая должна была быть сделана из чистого золота. Когда заказ был выполнен, Гиерон побоялся, не обманул ли его мастер

[1] Соч., т. VII, стр. 166—167.

и не подменил ли он часть данного ему золота серебром. Он обратился к Архимеду с просьбой, не разрушая короны, определить, сколько пошло на ее изготовление золота и сколько серебра. Архимед сразу не нашел решения. Но когда он вслед затем мылся в бане, ему внезапно пришло в голову решение этой задачи при помощи погружения короны в воду. Он, голый, убежал из бани домой, крича всю дорогу: «Нашел! Нашел!» — «εὕρηκα, εὕρηκα» (в господствовавшем у нас прежде семинарском произношении это звучало: «еврика, еврика!»). Это — еще один вариант того же анекдота о рассеянности Архимеда.

Очень возможно, что задача о короне, как и принцип «любой груз можно привести в движение любой силой», заключалась в одном из недошедших до нас сочинений Архимеда, написанном в форме письма к Гиерону. Возможно, что в этом сочинении было употреблено нередкое у Архимеда выражение εὕρηκα («я нашел», «я обнаружил»). Это могло дать повод к анекдоту о короне Гиерона, разработанному по шаблону античных анекдотов.

Кроме рассеянности, кроме отвращения ко всему практическому, античная биографическая литературная традиция считала обязательным свойством великого ученого аполитичность: великий ученый чужд всяких политических группировок и стоит в стороне от политических партий. Только когда его отчизне угрожает смертельная опасность, он берет оружие и становится на ее защиту. Архимед якобы потому еще в эпоху глубокого мира с Римом и Карфагеном снабжал царя Гиерона своими замечательными машинами, что занятие техникой было его любимым развлечением, и потому, что об этом его неотступно просил Гиерон.

Факты исторической действительности не согласуются с этим схематическим образом Архимеда. Архимед был родственником и другом правителей Сиракуз Гиерона и Гелона; как человек с живым тонким умом и как патриот своего отечества, он не мог не интересоваться вопросами внешней политики, ибо с ними была связана независимость и самое существование сиракузского государства. В 215 г., после смерти Гиерона и вступления на престол его несовершеннолетнего внука Гиеронима, Архимед вместе с другими почтенными людьми, стоявшими близко к дому Гиерона, несомненно приобрел большое влияние, и в 212 г. действительно мы видим его не только в роли военного инженера, но и в роли гениального организатора обороны.

Перед всяким политическим деятелем и вообще мыслящим гражданином Сиракуз, как показывают исторические факты, в это время стояла дилемма: Рим или Карфаген. Сиракузы были слишком маленьким и слабым государством, чтобы пытаться играть самостоятельную роль в борьбе двух колоссов. Здесь все время борются две партии — римская и карфагенская; после смерти Гиерона, в 215 г., большое влияние приобретает римская партия, но вскоре затем, с воцарением Гиеронима, сторонники римской партии устраняются от власти, и фактическими руководителями государства становятся уполномоченные Ганнибала. Можно думать, что к этому правительству был близок и Архимед. Новое правительство ведет энергичную и последовательную политику. Сиракузы заключают тесный союз с Карфагеном и открывают военные действия против Рима. К союзу, в который, кроме Карфагена и Сиракуз, входило уже и ведущее государство материковой Греции Македония, возглавляемая Филиппом V, Сиракузы пытаются привлечь и Египет. Как мы видим, делается попытка объединить эллинистический мир в борьбе против Рима. В 214 г. в Сиракузах верх снова взяла римская партия, олигархическая партия «зажиточных людей», но не надолго. Короткое время спустя к власти опять пришла карфагенская, демократическая партия. Начинается последняя борьба с Римом: осада Сиракуз римлянами и замечательная оборона города, организованная Архимедом. Обо всем этом мы скажем подробнее ниже.

Мне кажется, не может быть сомнения в том, что Архимед был не просто сиракузским патриотом, но, как и весь дом Гиерона, и определенным сторонником карфагенской партии. Даже легенда о гибели Архимеда, несмотря на римскую цензуру, сохранила воспоминание о жгучей ненависти ученого к римлянам: когда римский воин потащил Архимеда к Марцеллу, рассеянный старик сразу даже не понял, что с ним происходит, но когда он обернулся и заметил, что тащит его римлянин, в ярости закричал: «Пусть кто-нибудь из моих соратников даст мне какое-либо из моих орудий!» Услышав это, испуганный римлянин убил его (Диодор).

Известный немецкий историк Леншау показал в результате внимательного изучения политики Гиерона, что эта политика была с самого начала пропитана симпатиями к Карфагену. Уже в 264 г. Гиерон понял, что настоящая опасность угрожает Сиракузам не со стороны Карфагена, а со стороны Рима, и, несмотря на обиды, нанесенные Карфагеном Сиракузам, он становится на сторону карфагенян и соединяется с ними. Только победы Рима, отпадение ряда сицилийских городов и яростная агитация римской партии в Сиракузах заставили его прекратить военные действия против Рима и стать фактически в полувассальные отношения к нему. Но каковы были его личные настроения, видно из того, что после 241 г., когда Карфаген оказался в чрезвычайно тяжелом положении вследствие восстания наемников и римляне пытались использовать это положение, Гиерон поддерживает Карфаген всеми возможными для него средствами. Правда, он продолжал сохранять хорошие отношения и с Римом и посылал туда ценные подарки [1], но такие же подарки он посылал в Египет и на Родос. Политика взяток и заискивания характерна для Гиерона, — она давала возможность его государству богатеть и наслаждаться миром в эти тяжелые времена.

И в это же время Архимед строит для Гиерона замечательные и дорогостоящие военные машины и оборонительные сооружения. Против кого были предназначены эти машины? Карфаген был в это время в упадке; того, что через 15—20 лет появится молодой Ганнибал, тогда никто не мог предвидеть. Вдобавок в это время Карфаген не имел никаких владений и никаких интересов в Сицилии. Римляне же к этому времени покорили всю Италию, бо́льшую часть Сицилии, Корсику и Сардинию, и «каждому человеку было понятно, что на желание помочь подвергающимся опасности они ссылаются только для того, чтобы скрыть

---

[1] Из того, что наследник Гиерона Гиероним впоследствии требует, чтобы римляне вернули эти «подарки» обратно, ясно, что они либо были результатом прямого или косвенного вымогательства, либо носили характер займа.

свои агрессивные намерения, а в действительности стремятся к захвату Сицилии» (Диодор).

Машины Архимеда могли сооружаться только против римлян, и Архимед не мог не знать, против кого он кует свое страшное оружие.

Нас здесь интересует не политика Сиракуз, а Архимед. Поэтому нам необходимо ответить на вопрос, почему лучшие представители греческой культуры и науки в это время отдавали предпочтение Карфагену перед Римом.

Карфаген был одним из многих мало чем выдающимся в культурном отношении, но весьма почтенным эллинизованным государством. При раскопках здесь был найден ряд предметов греческого искусства высокой художественной техники. Никакой резкой грани между семитизмом и эллинством не существовало: из карфагенских надгробий, сопоставленных на прилагаемой таблице, ясно видно, как семитический стиль в изделиях одного и того же времени постепенно переходит в чисто эллинский. В Карфагене вышел ряд замечательных научных трудов, например, Ганнона и Гимилькона по географии и Магона по сельскому хозяйству. Последняя книга была чрезвычайно популярна в Греции; как мы уже говорили, она послужила главным источником для многочисленных трудов по сельскому хозяйству, написанных другом и родственником Архимеда, царем сиракузским Гиероном. В списке знаменитых пифагорейских философов, приводимом Ямвлихом, нет ни одного римлянина, но целых четыре карфагенянина. Один из них — Мильтиад — был популярным у греков образцом нравственной жизни и добродетели. Еще более известны были карфагенские стоические философы Герилл и Клитомах-Гасдрубал, переселившийся затем из Карфагена в Афины и поражавший афинян своими замечательными дарованиями. Даже Дельфийский оракул нашел нужным засвидетельствовать высокие достоинства карфагенской философии (см. стр. 182). Карфагенское государственное устройство считалось в греческой философии образцовым, его прославлял уже Аристотель и старший друг Архимеда Эратосфен (правда, последний наряду с римским). Карфагенская интеллигенция носила чисто греческие имена и одевалась на греческий лад.

Одним из наиболее ярких представителей этой карфагенской интеллигенции был Ганнибал. Это был один из образованнейших людей своего времени, автор знаменитого в свое время сочинения о переустройстве Малой Азии. Он прекрасно владел иностранными языками. Его ближайшими приближенными были знаменитые литераторы того времени — Силен и Сосил из Лакедемона. Несмотря на все попытки противников очернить его, его исключительная гуманность в ведении войны, верность слову и договорам приводили в восхищение всех греческих историков его времени.

Мы уже выше отметили характерный для александрийских ученых космополитизм, главным провозвестником которого был друг Архимеда Эратосфен. По их мнению, эллином является не только человек греческой крови, но и всякий, кто проникся греческим образованием. Понятно поэтому, что, с точки зрения Архимеда и его друзей, Карфаген, несмотря на национальный состав его граждан, был эллинским городом.

Другое дело — Рим. Несмотря на невысокий культурный уровень в III в., римские передовые слои относились к грекам с высокомерным презрением варваров. Об ученых или философах в Риме, которые играли бы какую-либо роль в мировой науке или философии того времени, мы ничего не слышим. Римский поэт Плавт, перелицовывавший греческие комедии на римский лад, сам называет себя варваром (Philemon finxit, Plautus vortit barbare).

Всякому было понятно, что захват Сиракуз римлянами означал беспощадную эксплоатацию, вплоть до полного обнищания и разорения этого города, и полный его культурный упадок. В военных действиях этого времени римляне проявили жестокость и вероломство, не имеющие себе равных во всей античной истории. Так, в конце 214 г. в Риме были безжалостно перебиты заложники греческих городов Тарента и Фурий по ложному обвинению в попытке к бегству. Это вызвало волну возмущения в греческом мире и усиление карфагенской партии. В том же году тем самым Марцеллом, который впоследствии осаждал Сиракузы, был заключен договор с осажденным городом Касилинум в Кампании. Жителям было разрешено покинуть город и уйти в Капую. Но, как только они вышли из города, Марцелл, нарушив договор, напал на них и всех перебил. Таким же образом в 213 г. в нарушение договора было устроено Марцеллом поголовное кровавое избиение жителей сицилийского города Энны; так же поступил с бруттиями Фабий Максим после взятия Тарента, тогда как во время захвата Тарента карфагенянами ни один житель не потерпел обиды. Неслыханной жестокостью отличалась расправа с жителями взятого приступом сицилийского города Леонтин. Голову убитого Гасдрубала Клавдий Нерон велел бросить к ногам его брата Ганнибала.

Как мы видим из сообщений древних, эти поступки римлян были предметом разговоров и возмущения во всем греческом мире. В частности, они были одной из причин свержения римской партии в Сиракузах в 214 г. В то время как римская агитация встречала сочувствие главным образом в кругах богатых заговорщиков, народные массы всюду сочувствовали карфагенянам и переходили на их сторону.

Как относились к Риму и Карфагену широкие круги греческой интеллигенции этого времени, видно еще из следующего. Противопоставляя друг другу *лучшего представителя греческой историографии* времени Пунических войн Филина и лучшего представителя римской— Фабия Пиктора, Полибий считает вполне естественным «с точки зрения жизненных и идейных интересов того и другого», что оба они «влюблены»—первый *в Карфаген*, второй — в Рим. «Так, вследствие своих идейных воззрений и симпатий, Филин *находил все действия карфагенян разумными*, *прекрасными и великодушными*, *а римлянам приписывал совершенно противоположные черты*». Не менее поучительно и поведение Дельфийского оракула. Дельфийский оракул всегда был рупором наиболее трусливых, примиренческих групп греческой интеллигенции и всегда стоял на стороне того, кто был сильнее и имел успех. Во время Греко-Персидских войн он стоял на стороне персов, во время покорения Греции Македонией он стоял на стороне Филиппа и Александра; когда самым могущественным государством стал Рим, он перешел на сторону Рима. Но приближающаяся несомненная и полная победа Рима над Карфагеном привела в ужас даже Дельфы. Спустя немного лет после смерти Архимеда, после победы римлян над карфагенянами, в Адриатическом море произошло страшное подводное извержение вулкана и землетрясение, в результате чего между Ферой и Ферасией появился новый остров. Дельфийский оракул истолковал эти страшные события, предвещающие бедствия, как проявление гнева Аполлона за победу римлян над карфагенянами. Было оглашено такое «старинное» предсказание бога (римляне считали себя потомками древних троянцев, а карфагеняне были по национальности финикийцами):

После того, как потомки троянцев одержат победу
Над финикийцами, страшные вещи свершатся в природе:
Молний удары на волны обрушатся с каменным градом,
В море внезапно появится остров, неведомый людям.
Чудо такое свершится тогда: ибо *худшие* люди
Грубою силою рук над *лучшим* одержат победу.

И, конечно, всякому культурному греку было понятно, что «худшие люди» — это римляне, а «лучший» — это Ганнибал.

Любопытно, что (несомненно еще до этих событий) дельфийское жречество нашло нужным засвидетельствовать и высокие достоинства карфагенской философии. Как сообщал впоследствии знаток античной литературы император Юлиан, бог «засвидетельствовал мудрость финикиян», сказав:

«И финикийцам во многом пути блаженных известны».

В свете этих фактов поведение Архимеда станет нам вполне понятным: выступив активно на стороне карфагенян, он боролся и за родину, и за «демократию», и за общегреческое дело. Более того, разобрав в следующей главе сочинения Архимеда, относящиеся к его полемике с Аполлонием из Перги, мы сможем выставить правдоподобное предположение, что и в его научно-литературной деятельности вопросы мировой политики также невольно сыграли некоторую роль.

Описание машин, изобретенных Архимедом, будет дано в последней главе, когда мы будем говорить об их практическом применении. Пока укажем на основные типы их. Это прежде всего катапульты, античные пушки, выбрасывавшие на большое расстояние свинец и камни различной величины, от огромных глыб до небольших кусков; далее, это машины, снабженные подвесными бревнами, «клювами», содержавшими в особых желобах куски свинца и камня. После того как эти «клювы» передвигались в нужное место, они опрокидывались при помощи особых блоков и сбрасывали камни на врага. Из других машин спускались на канатах «журавлиные клювы», которые при помощи особых механизмов захватывали носы вражеских кораблей, приподнимали их и, сотрясая и раскачивая, приводили в негодное состояние. Машины эти представляли собою комбинацию блока, винта и зубчатых колес; вероятно, также были применены пружина и водяной двигатель.

Все это дорогостоящее оборудование заготовлялось Гиероном с помощью Архимеда исподволь, в течение долгого промежутка между окончанием Первой пунической войны (241 г.) и смертью Гиерона в 215 г. Чем более лояльным и угодливым вассалом прикидывался Гиерон по отношению к римской власти, чем более ценные подарки и взятки он посылал в Рим, тем глубже и непримиримее была ненависть Гиерона и его друзей, в том числе Архимеда, к римским захватчикам, тем более страшные орудия выковывались в Сиракузах для отражения римлян в тот момент, когда они окончательно сбросят маску и приступят к захвату последнего свободного государства в сфере Апеннинского полуострова.

Эти политические волнения и тревоги не приостановили ни на минуту научной работы великого исследователя, но она получила более практический, более прикладной уклон.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

☆

Поздние работы Архимеда

При описании архимедовой «сферы» мы говорили уже, что скорее всего она приводилась в движение водяным двигателем, т. е. было использовано давление воды, сжатой в закрытом пространстве. Очень возможно, что такого же рода двигатель был применен Архимедом и при сооружении некоторых из его военных машин. Действительно, ряд игрушек и приборов, изобретенных предшественниками Архимеда, Архитом, Стратоном и другими, приводился в движение при помощи сжатой воды или сжатого воздуха.

Уже начиная с Демокрита, делались попытки теоретического обоснования принципов упругости. На основании опытов приходили к выводу, что жидкость упруга и, будучи сжата, стремится расшириться, что она расширяется при нагревании и сжимается при охлаждении. Для объяснения этих явлений исходили из гипотезы об атомистической структуре тел: между атомами есть промежутки, пустоты; атомы огня или теплоты, попадая в эти промежутки, раздвигают основные атомы тела, которое и увеличивается в объеме; при охлаждении эти атомы огня выходят из тела, основные атомы сближаются друг с другом либо потому, что «подобное стремится к подобному», как думал Демокрит, либо потому, что «природа боится пустоты», как думал Стратон, — и тело сжимается.

Стоит сравнить эти гидростатические рассуждения с «геометрической гидростатикой», содержащейся в написанном в разбираемую нами эпоху сочинением Архимеда «О плавающих телах» (Περὶ τῶν ὀχουμένων), чтобы убедиться, что мы имеем дело с принципиальным переломом первостепенной важности: вместо полуспекулятивных, полуэмпирических рассуждений, мы встречаем здесь стройную цепь математических доказательств, логически вытекающих из нескольких предпосылок.

Такой предпосылкой является аксиома, по которой при равномерном и непрерывном расположении частиц жидкости менее сдавленная частица вытесняется более сдавленной и каждая отдельная частица жидкости испытывает давление жидкости, отвесно над ней расположенной.

Непосредственным выводом из этой аксиомы является теорема, по которой поверхностью всякой жидкости является сфера с центром в центре Земли (таким образом, для Архимеда шарообразность Земли является уже очевидным фактом). В самом деле, если бы поверхность жидкости не была сферой, то частицы жидкости, находящиеся на одинаковом расстоянии от центра Земли, испытывали бы разные давления, поэтому они не оставались бы в равновесии, а двигались бы, пока поверхность жидкости не приняла бы сферической формы.

Из тех же предпосылок делается далее вывод, что тела, имеющие одинаковый удельный вес с жидкостью, в которую они погружены, не могут выдаваться над поверхностью жидкости, но будут держаться на самой ее поверхности, не погружаясь глубже.

Действительно, если бы тело выступало над поверхностью жидкости, то находящийся под телом слой жидкости испытывал бы большее давление, чем слой жидкости, находящийся на таком же расстоянии от центра в каком-либо другом месте. А это значит, что жидкость придет в движение и не успокоится до тех пор, пока тело не погрузится целиком в жидкость и давление на все точки одного и того же слоя жидкости не станет одинаковым. Но как только все тело погрузится в жидкость и наступит равновесие, уже не будет никакой причины для погружения тела глубже под воду.

Точно таким же образом без труда доказывается, что тело, имеющее меньший удельный вес, чем жидкость, в которую оно погружено, будет стремиться вверх из воды, пока не окажется погруженным лишь одной частью, тогда как другая часть будет выступать над поверхностью воды; только в этом случае давление на различные точки одного и того же слоя жидкости будет одинаковым; в том месте, где находится тело, расстояние от поверхности до взятого слоя будет, правда, больше, чем в других местах, но зато удельный вес здесь соответственно меньше, а следовательно, давление всюду одинаково. Очевидно также, что, заменяя часть жидкости *плавающим* телом, мы не нарушаем равновесия и не изменяем давления на находящийся под телом слой жидкости, а это возможно только в том случае, если вес тела равен весу жидкости, вытесненной частью, находящейся под поверхностью жидкости. Выводом из этой теоремы является следующая за ней: погруженное в жидкость тело, удельный вес которого меньше удельного веса жидкости, стремится кверху с силой, равной разности между весом жидкости, взятой в объеме этого тела, и весом самого тела. В самом деле, если некоторое тело плавает на поверхности жидкости, то часть его, погруженная в жидкость, стремится вверх, как и всякое тело, более легкое, чем жидкость, часть же его, находящаяся в воздухе, стремится, очевидно, вниз. Так как в результате плавающее тело остается неподвижным, то, очевидно, стремление вверх части, погруженной в жидкость, равно стремлению вниз, т. е. весу части, находящейся в воздухе. Но вес части, находящейся в воздухе, равен разности между весом всего плавающего тела и весом его подводной части, а, как мы видели, вес всего плавающего тела равен весу жидкости, взятой в объеме погруженной в жидкость части его. Итак стремление погруженной в воду части вверх (равное весу части, находящейся в воздухе) равно *разности между весом жидкости, взятой в объеме погруженной в жидкость части, и весом самой этой части*. Это верно, очевидно, для всякого погруженного в жидкость тела.

Эта теорема имеет огромный принципиальный интерес. Стремление тела вверх, т. е. эта разность, очевидно, тем больше, чем больше удельный вес жидкости, в которую тело погружено. Это есть принцип Демокрита, прямо противоположный принципу Аристотеля, по которому тело, погруженное в жидкость, движется тем быстрее, чем удельный вес этой жидкости меньше. Очень возможно, что в этом случае, как и в случае с определением объема пирамиды, Архимед, не зная Демокрита, самостоятельно пришел к тому же выводу, что и он.

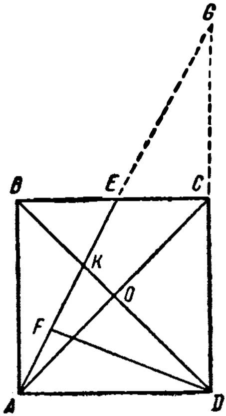
Это совпадение во взглядах между Архимедом и Демокритом осталось не отмеченным в нынешней науке вследствие недостаточно глубокого знакомства с наследием Демокрита. Но древним оно не могло не броситься в глаза; недаром Эратосфен, боровшийся, как мы видели, с атомизмом, счел необходимым и в этом случае выступить против теории, противоречившей концепции Аристотеля.

Как мы уже указали выше (стр. 53—54), Эратосфен, будучи математиком, не мог оспаривать правильность доказательства Архимеда. Несомненно, он оспаривал не самое доказательство, а аксиому, легшую в его основание, согласно которой все тела тяжелы и все стремятся к центру Земли, а не к «своему естественному месту» (οἰκεῖος τόπος), как утверждал Аристотель, и, очевидно, вслед за ним Эратосфен.

Исходя из той же аксиомы, Архимед показывает, что всякое тело с бóльшим удельным весом, чем жидкость, при погружении в эту жидкость теряет в своем весе столько, сколько весит вытесненный им, т. е. равный его объему, объем жидкости.

Пусть вес тела $a+b$, вес равного ему объема воды b. Представим себе теперь тело, более легкое, чем вода, вес которого равен b, тогда как вес равного ему объема воды $a+b$. Сцепим вместе оба тела. Вместе они весят $(a+b)+b=$ $=a+2b$; вес равного им объема воды $b+(a+b)=a+2b$. Теперь соединенное тело весит как раз столько, сколько вытесненный им объем воды, и, следовательно, плавает и находится в состоянии равновесия. Но второе, легкое тело стремится вверх, как мы видели выше, с силой, равной разности между весом жидкости, взятой в его объеме, и его собственным весом, т. е. с силой $(a+b)-b=a$. Итак, легкое тело стремится вверх с силой a, и в результате получается равновесие; это возможно только в том случае, если тяжелое тело стремится вниз с той же силой a, а следовательно, его потеря в весе равна b, т. е. оно потеряло в весе столько, сколько весит равный ему объем жидкости.

Прежде чем перейти к группе работ из области «логистики» (вычислительной арифметики), остановимся на курьезной работе Архимеда, посвященной салонной игре «стомахион» («головоломке»), бывшей, вероятно, одним из развлечений сиракузского двора. Из этого сочинения прежде известен был только один небольшой отрывок в арабском переводе. Так как в более позднее время всякую трудную задачу называли «архимедовой задачей», то полагали, что и сочинение о «стомахионе» называлось «архимедовым» в этом переносном смысле, ибо считали невероятным, чтобы Архимед занимался такими пустяками, как теория салонной игры. Однако в рукописи с подлинными сочинениями Архимеда, найденной в 1906 г. Попадопуло-Керамевсом и опубликованной Гейбергом (см. стр. 143), сохранилось и начало «стомахиона», так что нет никаких сомнений в подлинности этого сочинения.



Фиг. 36

Игра «стомахион» состоит в том, чтобы сложить 14 пластинок из слоновой кости таким образом, чтобы они в совокупности образовали квадрат; разумеется, это можно сделать различными способами. Архимед прежде всего обратил внимание на то, что в некоторых случаях получается только видимость заполнения квадрата фигурами, «стороны фигур не лежат на одной прямой, но так мало отступают от нее, что это не заметно глазу»; эти случаи также подлежат изучению, ибо и в этом случае задача считается решенной.

Так, например, если в квадрате $ABCD$ (фиг. 36) провести прямую AE, соединяющую вершину A с серединой

E противоположной ей стороны BC, а затем отрезок AK прямой AE от вершины A до пересечения с диагональю BD разделить пополам в точке F, то получается впечатление, что $\triangle AFD = \triangle FKD$ и что один из них можно заменить другим. В действительности же, если прямые AE и CD продолжить до пересечения в точке G, то

$$\angle AKD = \angle AGD + \angle GDB. \tag{1}$$

Но в $\triangle ACG$ сторона CG, равная стороне квадрата, меньше стороны AC (диагонали квадрата) и, следовательно,

$$\angle GAC < \angle AGD; \tag{2}$$

с другой стороны,

$$\angle CAD = \angle GDB. \tag{3}$$

Поэтому, складывая почленно (2) и (3), получаем

$$\angle GAC + \angle CAD < \angle AGC + \angle CDB,$$

или, ввиду (1),

$$\angle GAD < \angle AKD.$$

Следовательно, $\triangle AFD$ не равен $\triangle FKD$.

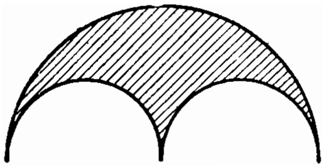
Другой дошедший до нас отрывок посвящен доказательству того, что отношение площади каждой из 14 пластинок «стомахиона» к площади всего квадрата рационально.

Это сочинение — характерный образец того, как ясный и научно вышколенный ум ученого умеет найти строго логические связи в любых фактах, казалось бы, основанных на сцеплении случайностей.

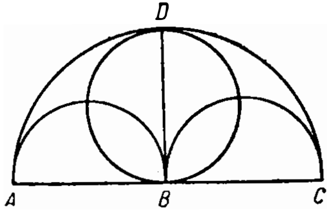
Дошедшая до нас в арабском переводе «Книга лемм» представляет собою, повидимому, сделанную в позднее время выборку из различных сочинений Архимеда. Мы приведем из этого собрания две задачи, относящиеся к типу математических развлечений и близко примыкающие по типу к «стомахиону».

1. Найти площадь *«скорняжного ножа»* (ἄρβηλος). Поверхность скорняжного ножа, применявшегося для разрезания и очистки кожи, представляла собой фигуру, ог-

раниченную тремя касающимися друг друга полуокружностями, центры которых лежат на одной прямой (фиг. 37). Архимед доказывает, что площадь скорняжного ножа равна площади круга, диаметр которого перпендикулярен к общей линии центров данных окружностей и идет от точки касания двух меньших окружностей до пересечения с большей (фиг. 38).



Фиг. 37



Фиг. 38

В самом деле,

$$AC^2 = (AB + BC)^2 = AB^2 + BC^2 + 2AB \cdot BC.$$

Но

$$AB \cdot BC = DB^2,$$

откуда

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2DB^2,$$

т. е.

$$\frac{\pi}{8} AC^2 = \frac{\pi}{8} AB^2 + \frac{\pi}{8} BC^2 + \frac{\pi}{4} . DB^2,$$

или

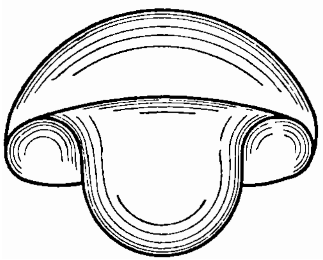
$$\frac{\pi}{8} AC^2 - \frac{\pi}{8} AB^2 - \frac{\pi}{8} BC^2 = \frac{\pi}{4} . DB^2.$$

Левая часть этого равенства есть площадь скорняжного ножа, а правая — площадь круга с диаметром DB, что и требовалось доказать.

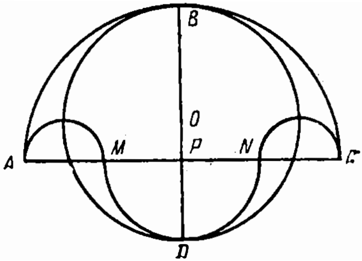
2. Римская солонка (σάλινον) имеет форму полушария с желобком вокруг в форме тора и крышкой в форме полушария (фиг. 39). Изображенная в проекции на плоскость она выглядит, как на прилагаемом чертеже (фиг. 40). Эту проекцию Архимед и называл σάλινον («римской солонкой»).

Докажем, что площадь искомой фигуры равна площади круга с диаметром BD.

$$AN^2 = (PN + AP)^2 = PN^2 + AP^2 + 2PN \cdot AP,$$
$$AN^2 + AM^2 = PN^2 + AP^2 + 2PN \cdot AP + AM^2.$$



Фиг. 39



Фиг. 40

Заменяя AP в предпоследнем члене через $PN + AM$, получим

$$\begin{aligned} AN^2 + AM^2 &= PN^2 + AP^2 + 2PN(PN + AM) + AM^2 = \\ &= PN^2 + AP^2 + 2PN^2 + 2PN \cdot AM + AM^2 = \\ &= AP^2 + 2PN^2 + (PN + AM)^2 = \\ &= 2(AP^2 + PN^2). \end{aligned}$$

Но

$$BD = BP + PD = AP + PN = AN,$$

откуда

$$BD^2 + AM^2 = 2AP^2 + 2PN^2,$$

или

$$2AP^2 + 2PN^2 - AM^2 = BD^2,$$

т. е.

$$\frac{\pi}{2} AP^2 + \frac{\pi}{2} PN^2 - \frac{\pi}{4} AM^2 = \frac{\pi}{4} BD^2.$$

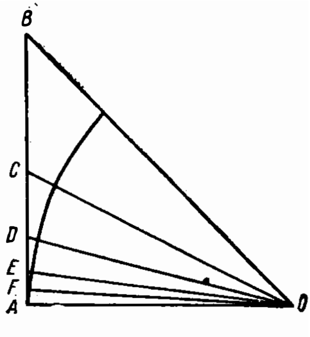
Здесь левая часть — площадь солонки, а правая — площадь круга с диаметром BD, что и требовалось доказать. Архимед обходится без умножения обеих частей уравнения на $\frac{\pi}{4}$, ибо он действует при помощи пропорций.

Сочинение «Об измерении круга», как и другие работы этой эпохи, исключая разобранную выше работу «О плавающих телах», не имеет большого познавательного значения, скорее являясь образцом виртуозного овладения вычислительной техникой («логистикой»). Избалованные алгебраическими обозначениями, таблицами корней, логарифмов и т. д., мы, к сожалению, уже не в состоянии воздать должную дань восхищения этой стороне работы Архимеда. Открывающая это сочинение теорема о том, что площадь круга равна площади прямоугольного треугольника, один из катетов которого равен окружности, а другой — радиусу, представляет собою переработку в новом духе старой теоремы математики атомистов. В этой математике круг как «бесконечноугольник» (как «всюду-угол», как выражался Демокрит) естественно рассматривался как совокупность узких треугольников с вершинами в центре, высоты которых сколь угодно мало отличались от радиусов. Сумма площадей всех этих треугольников, очевидно, равна площади того треугольника, о котором говорит Архимед. Но Архимед так рассуждать не мог. Он предполагает, что площадь круга больше или меньше площади указанного треугольника на некоторую конечную величину. Описывая и вписывая многоугольники и последовательно удваивая число их сторон, он показывает по разобранному выше шаблону невозможность того и другого допущений.

Основная теорема этой книги — это доказательство того, что отношение окружности любого круга к его диаметру меньше, чем $3\frac{1}{7}$, и больше, чем $3\frac{10}{71}$.

Для этой цели применяется метод, который мы вынуждены были постулировать уже для Антифонта: число сторон вписанного и описанного многоугольников последовательно удваивается, длины периметров описанного и вписанного многоугольников сравниваются между собой. Но, конечно, Архимед не собирается продолжать эту процедуру до тех пор, пока периметры описанного и вписанного многоугольников станут равны между собой: он сопоставляет эти периметры только для *оценки погрешности*, для определения *степени точности* полученного результата. Это его первая большая заслуга.

Нахождение периметра многоугольника с числом сторон $2n$ не является личной заслугой Архимеда: этот периметр умел находить уже Антифонт[1]. Но Архимед упростил и рационализировал чертеж, и, повидимому, получил результат при помощи более простых и более точных вычислений. Вместо того чтобы чертить ряд описанных многоугольников, он откладывает полустороны описанных многоугольников на одной и той же касательной (фиг. 41). В самом деле, пусть AB половина стороны описанного n-угольника; стоит разделить угол BOA пополам и провести биссектрису OC, и мы получим отрезок AC, равный полустороне описанного $2n$-угольника. Разделив далее пополам $\angle COA$ и проведя биссектрису OD, мы получим отрезок AD, равный полустороне описанного $4n$-угольника и т. д.



Фиг. 41

Пусть AB полусторона описанного шестиугольника а, следовательно, угол BOA — треть прямого. Тогда

$$OA:AB=\sqrt{3}:1>265:153, \quad (1)$$
$$OB:AB=2:1=306:153. \quad (2)$$

Откуда взял Архимед приближение $265:153$ для $\sqrt{3}$, нам не известно: либо оно было вычислено уже его предшественниками, либо он сам произвел это вычисление в одном из утраченных арифметических произведений; Архимед дает лишь готовый результат без всяких пояснений.

Для определения длины полустороны 12-угольника AC, 24-угольника AD и т. д. Архимед пользуется теоремой: биссектриса делит основание на части, пропорциональные боковым сторонам

$$OB:OA=BC:CA.$$
$$(OB+OA):OA=(BC+CA):CA,$$
$$(OB+OA):OA=BA:CA.$$
$$(OB+OA):BA=OA:CA.$$

[1] См. стр. 26.

Но, складывая (1) и (2), получаем

$$(OB+OA):BA=(265+306):153=571:153.$$

Следовательно,

$$OA:CA=571:153, \tag{3}$$

или

$$OA=571 \text{ часть}, \ CA=153 \text{ части}.$$

Чтобы определить отношение $OC:CA$, учтем, что OC — гипотенуза треугольника OAC, катеты которого — CA и OA, и, следовательно,

$$OC^2=CA^2+OA^2.$$

Но из (3)

$$OA^2+CA^2=(571^2+153^2) \text{ частей},$$
$$OC^2=(571^2+153^2) \text{ частей},$$
$$OC^2:CA^2=(571^2+153^2):153^2=349\,450:23\,409,$$

на основании чего Архимед сразу пишет

$$OC:CA>591\frac{1}{3}:153.$$

Как Архимед извлек квадратный корень из 349 450, нам не известно.

Применяя тот же прием и для дальнейшего удвоения числа сторон, он получает для полустороны 24-угольника

$$OA:DA>1162\frac{1}{8}:153,$$
$$OD:DA>1172\frac{1}{8}:153,$$

где $1172\frac{1}{8}$ есть квадратный корень из $1\,373\,943\frac{33}{64}$; как извлечен этот корень, Архимед и в этом случае не объясняет.

Переходя к полустороне AE 48-угольника, Архимед получает

$$OA:EA>2334\frac{1}{4}:153,$$
$$OE:EA>2339\frac{1}{4}:153,$$

а для полустороны OF 96-угольника:

$$OA:AF > 4673\frac{1}{2}:153.$$

Но отношение радиуса OA к полустороне 96-угольника равно отношению диаметра к целой стороне 96-угольника; значит, отношение диаметра ко всему периметру

$$> 4673\frac{1}{2}:(153 \times 96) > 4673\frac{1}{2}:14688.$$

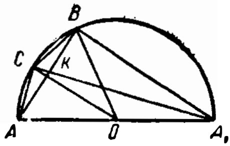
А следовательно, отношение периметра 96-угольника к диаметру

$$< 14688:4673\frac{1}{2} < 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}} < 3\frac{1}{7}.$$

Не трудно видеть из чертежа, что Архимед здесь дает правило для последовательного нахождения

$$\operatorname{ctg} \alpha, \quad \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}, \ \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}, \ \ldots$$

Для определения нижнего предела (фиг. 42) Архимед начинает со стороны вписанного n-угольника AB. Если соединить точку B с противоположным концом A_1 диаметра AA_1, то получится прямоугольный треугольник. Если мы разделим $\angle AOB$ пополам и проведем биссектрису OC, то сторона AC будет, очевидно, стороной $2n$-угольника. Но, проведя CA_1, убедимся, что при этом и $\angle AA_1B$ разделился пополам (ибо $\angle AA_1B = \frac{1}{2}\angle AOB$, а $\angle AA_1C = \frac{1}{2} AOC$); итак, и разделяя угол при A_1 пополам, мы получаем каждый раз сторону многоугольника с удвоенным числом сторон.



Фиг. 42

Треугольники ACA_1 и ACK подобны, ибо $\angle CAK = \angle BA_1C$ как опирающиеся на одну и ту же дугу CB, а

$\angle BA_1C = \angle CA_1A$ и следовательно, $\angle CAK = \angle CA_1A$; $\angle ACA_1$ — общий. Следовательно,

$$CA_1 : AC = AC : CK = AA_1 : AK. \qquad (1)$$

Но A_1C — биссектриса $\angle BA_1A$; следовательно (permutando),

$$AA_1 : AK = A_1B : BK; \qquad (2)$$

из (1) и (2) ut omnes ad omnes, ita unus ad unum:

$$CA_1 : AC = (AA_1 + A_1B) : (AK + BK),$$
$$CA_1 : AC = (AA_1 + A_1B) : AB,$$

откуда, в случае шестиугольника

$$CA_1 : AC = (2 + \sqrt{3}) : 1$$

и т. д.

Таким же путем, как в случае с описанным 96-угольником, получаем для вписанного 96-угольника, что отношение периметра к диаметру

$$> (66 \times 96) : 2017\frac{1}{4} > 6336 : 2017\frac{1}{4} > 3\frac{10}{71}.$$

И здесь на каждом шагу приходится извлекать корни из очень больших чисел, но Архимед не объясняет, как он это делает. Не трудно видеть, что последовательные, получаемые им величины это

$$\operatorname{cosec} \alpha, \ \operatorname{cosec} \frac{\alpha}{2}, \ \operatorname{cosec} \frac{\alpha}{4}, \ \ldots$$

Предел погрешности, очевидно, равен

$$3\frac{1}{7} - 3\frac{10}{71} = \frac{1}{497} \approx 0.002.$$

Для прикладного практического уклона научной деятельности Архимеда в эту эпоху характерен повышенный интерес к вычислительной технике, логистике и к связанному с ней вопросу о написании и наименовании больших чисел. Уже из сочинения об измерении круга мы видели, что Архимед мастерски владел искусством извлечения квадратных корней из многозначных чисел.

Большой заслугой Архимеда была новая система обозначений для многозначных чисел. Греческая система обозначений чисел не была позиционной. В позиционных системах одна и та же цифра имеет различное числовое значение в зависимости от позиции, от положения: так, в нашей десятичной системе цифра, скажем цифра 6, означает число «6», если стоит на первом месте справа, «60» — если стоит на втором месте справа, «600», если на третьем и т. д. В древневавилонской шестидесятичной системе та же цифра 6 означала число «6», если стояла на первом месте справа, «360», если стояла на втором месте, «21600» — если стояла на третьем месте и т. д. Наоборот, в греческой нумерации каждая цифра всегда имеет определенное значение, независимо от места, которое она занимает: α — всегда 1, δ — всегда 4, $\varkappa$ — всегда 20, o — всегда 70, ρ — всегда 100, υ — всегда 400 и т. д. Распространение десятичного принципа на числа меньше единицы привело к открытию десятичных дробей, не известных древним грекам; однако, древние вавилоняне оперировали уже с шестидесятичными дробями, вполне аналогичными нашим десятичным.

Трудно допустить, чтобы Архимеду и его современникам не была известна эта вавилонская нумерация, применявшаяся уже за 2 000 лет до н. э. Однако, греки вплоть до начала нашей эры никогда не применяли шестидесятичной системы, отчасти, может быть, потому, что ее трудно было совместить с греческим способом обозначения чисел, но главным образом, несомненно, ввиду своей косности. Однако Архимед (или его предшественник), вероятно, от тех же вавилонян усвоил метод записи чисел при действиях над ними: несмотря на абсолютное значение числовых знаков, он располагал их по десятичным разрядам, подписывая знаки одного и того же разряда друг под другом.

Греческая система исчисления сближалась с позиционной в том отношении, что греки имели различные названия для чисел лишь до одной мириады, т. е. 10 000, а дальше уже считали мириадами. Самым большим числом, которое могло быть выражено таким образом, была «мириада мириад», т. е. 100 миллионов. Занятия астрономией заставили греков иметь дело с расстояниями, требовавшими для своего выражения гораздо больших чисел. Этим вопросам была посвящена не дошедшая до нас книга Архимеда «Основы арифметики» (ἀρχαί); как мы узнаем из популярного сочинения Архимеда «Число песчинок», она была посвящена «наименованиям чисел». Краткое резюме не дошедших до нас «Основ» и дано в упомянутой популярной книге.

Примером «бесконечно большого» числа в греческом фольклоре и быте с древнейших времен было число песчинок. Аристофан даже употребляет шутя особое название для такого числа: «песоксот» (ψαμμακόσιοι). Название сочинения Архимеда — «Псаммит», которое мы неточно переводим — «Число песчинок», имеет тот же смысл, что и «песоксот».

Это сочинение по своему оформлению также примыкает к числу придворных развлекательных сочинений Архимеда. Оно посвящено соправителю Гиерона, царю Гелону, и имеет вид парадокса. Согласно общему мнению греков, число песчинок — самое большое из всех возможных чисел; большего числа нельзя придумать. Архимед доказывает, что это неверно: если даже число существующих в мире песчинок мы увеличим настолько, что они займут все мироздание, то и в этом случае их число не будет наибольшим из всех возможных чисел. Для этой цели Архимеду прежде всего необходимо определить максимальную величину мира. При этом он, как мы говорили уже, исходит из гелиоцентрической системы Аристарха Самосского, полагая, что диаметр всего мира примерно во столько раз больше диаметра солнечной системы, во сколько раз этот диаметр больше диаметра Земли. Уже Аристарх нашел, что Солнце равно примерно $\frac{1}{720}$ большого круга солнечной системы; Архимед экспериментальным путем нашел угол, под каким видно Солнце: этот угол больше $\frac{1}{164}$ прямого и меньше $\frac{1}{120}$ прямого (т. е. больше $0°33'$ и меньше $0°45'$); отсюда следует, что диаметр Солнца больше, чем сторона тысячеугольника, вписанного в большой круг солнечной системы. Но диаметр Солнца меньше, чем 30 диаметров Земли, а диаметр Земли меньше, чем 1 000 000 стадиев (157 000 км). Из этих отношений получаем, что диаметр солнечной системы меньше, чем «сто мириад мириад стадиев» (т. е. чем 10 000 000 000 стадиев = 1 570 000 000 км). С другой стороны, зерно мака содержит не более 10 000 песчинок, а ширина пальца не больше, чем ширина 40 зерен мака.

Чтобы найти отношение величины мироздания к величине песчинки, придется иметь дело с числами, не имеющими названий в греческом языке. Но Архимед в своих «Основах арифметики» уже придумал систему названий для этих чисел. В разбираемой нами книге он вкратце знакомит читателя с этой системой.

Числа, названия для которых существуют в языке, т. е. числа до «мириады мириад» (или до 10^8) он называет числами «первого порядка» или «первой октады» («восьмерицы»); название «восьмерицы» показывает, что Архимед воспринимал уже $10\,000 \times 10\,000$ как 10 в восьмой степени, хотя и не создал еще понятия степени. Числа от 10^8 до 10^{6} он называет числами «второго порядка», или «второй октады», от 10^{16} до 10^{24} — «третьего порядка» и т. д., перебирая все употребляющиеся числа вплоть до «мириадно-мириадного» или 100-миллионного порядка, заключающего числа от $10^{8 \cdot 10^8 - 1}$ до $10^{8 \cdot 10^8}$. Этим числом заканчивается первый период. Второй период, также разбиваемый на «порядки», простирается от $10^{8 \cdot 10^8}$ до $(10^{8 \cdot 10^8})^2$ и т. д. Наибольшим из чисел, которое можно выразить этим путем, будет последнее число «мириадно-мириадного» порядка «мириадно-мириадного» периода, т. е. $(10^{8 \cdot 10^8})^{10^8}$. Если выражать эти результаты нашими цифрами, то уже последнее число *первого* периода выразится единицей с 800 000 000 нулей, а последнее из всех этих чисел выразится единицей с 80 триллионами нулей!

Впрочем для поставленной Архимедом задачи не только нет необходимости выходить за пределы первого периода, но можно довольствоваться лишь первыми восемью из 100 миллионов порядков этого периода: число песчинок в мироздании оказывается меньшим, чем 10 000 000 единиц восьмого порядка первого периода ($=10^{63}$).

Две последние работы Архимеда — «Об измерении круга» и «О наименовании чисел» — вызвали (я думаю, мы вправе это утверждать) энергичную полемику со стороны другого великого математика эллинистической эпохи — Аполлония из Перги. Поэтому, прежде чем перейти к последнему из дошедших до нас сочинений, приписываемых Архимеду, будет целесообразным остановиться здесь на Аполлонии и на споре его с Архимедом; возможно, что этот спор имел политическую подкладку.

По вычислениям нынешних ученых, основанных на различных замечаниях древних авторов, Аполлоний из Перги (в М. Азии) родился приблизительно в 262 г., т. е. был на 20—25 лет моложе Архимеда. Мы не знаем, жил ли он в Александрии уже одновременно с Архимедом или прибыл туда только после отъезда Архимеда в Сиракузы. Во всяком случае он очень долго жил в Александрии, причем его товарищами по работе были, как сообщают древние авторы, «ученики Евклида». Из его сочинений видно, что он был хорошо знаком с трудами и научной перепиской упомянутого Конона, Никотела из Кирены и других корифеев математической науки. Главной работой Аполлония были его «Конические сечения» в восьми книгах; эта книга оставалась вплоть до нового времени таким же основным классическим сочинением в области конических сечений, как и книга Евклида в области элементарной геометрии. Она быстро вытеснила все существовавшие до нее труды по коническим сечениям, которые поэтому и не дошли до нас.

Интереснейшей чертой биографии Аполлония была его близость к пергамскому двору и к самому царю Пергама Атталу I, царствовавшему с 241 по 197 г.

До Аттала I Пергамское царство, расположенное в северо-западном углу М. Азии, находилось в вассальном подчинении у Селевкидов. Атталу I удалось освободиться от этой зависимости, нанести сокрушительное поражение Селевкидам и стать одним из могущественнейших государей тогдашнего мира. Главным орудием для этого усиления было его *сближение с Римом*.

Во главе греческих государств, сблизившихся между собой в этот последний час греческой свободы для совместного отпора Риму, стояла Македония с ее царем Филиппом V, союзником Ганнибала, и Ахейский союз. Наиболее влиятельные круги, а также лучшие представители образованности в Александрии и Сиракузах также сочувствовали этому объединению; однако страх перед могуществом Рима удерживал Птолемеев от выступления против римлян и побуждал их поддерживать с ним хорошие отношения. В Сиракузах, как мы увидим ниже, шла открытая борьба между греко-карфагенской и римской партиями.

Естественно, что те небольшие государства, которые были до этого времени врагами главных руководителей греческой коалиции или терпели от них обиды, ищут поддержки у Рима. Так, на стороне Рима выступил Этолийский союз, главный враг Ахейского союза; открыто выступил на стороне Рима также Аттал I Пергамский, враг Филиппа V Македонского и Селевка III Сирийского. Аттал и его преемники вели низкопоклонную политику по отношению к Риму (так Аттал I послал в Рим золотой венок весом 246 фунтов). Флот и войска Аттала действуют совместно с римлянами и наносят ряд чувствительных ударов Филиппу V. Римляне умели ценить по заслугам эту помощь. По словам У. Вилькена, виднейшего специалиста по истории эллинизма, верность союзу, заключенному с Римом, была причиной расцвета Пергама в ближайшие десятилетия; но, с другой стороны, чрезмерная преданность Риму была причиной потери Пергамом политической независимости.

Немаловажной причиной сближения Пергама с Римом был экономический антагонизм между Пергамом и Александрией. Это и было одной из причин, которые побудили Аттала создать в Пергаме второй центр греческой культуры, пытавшийся конкурировать с Александрией. Так же, как Гиерон Сиракузский, сам Аттал был писателем: он написал ряд сочинений географического и естественно-научного содержания. Он собрал при своем дворе выдающихся философов и ученых, например философов Антигона из Кариста и Неанфа Младшего. В Пергаме образовалась и замечательная математическая школа, виднейшими представителями которой были Филонид из Эфеса, Евдем и Аполлоний. О преследовании вольнодумства в Пергамской школе мы говорили уже выше (стр. 44, прим. 1).

Аполлоний провел большую часть своей жизни в Александрии; но, как мы узнаем из предисловия к книге I его

«Конических сечений», он провел значительное время и в Пергаме в теснейшем общении с математиком Евдемом. Первые три книги своего труда Аполлоний посвятил Евдему. Остальные *он посвятил царю Атталу I*; это делает вполне вероятным предположение, что Аполлоний провел последнюю часть своей жизни при пергамском дворе.

Как мы говорили уже (стр. 166), после выхода в свет «Конических сечений» Аполлонию было брошено обвинение в плагиате; это сочинение будто бы было только переработкой неопубликованных «Конических сечений» Архимеда.

Это обвинение, несомненно, было вздорным. Сам Аполлоний, как мы видим из предисловия к отдельным книгам его труда, никогда не выдавал своей работы за собственное оригинальное открытие, но скромно заявлял, что он привел только в систематический порядок открытия своих предшественников, придав их выводам более универсальный характер; в тех случаях, когда он сам что-либо открыл, он тщательно это отмечал. Нынешняя критика показала, что Аполлоний склонен скорее преуменьшать, чем преувеличивать свои заслуги: и новой последовательной терминологией, и ясностью изложения, и прекрасным литературным греческим языком он далеко превосходит Архимеда. С другой стороны, Архимед как гениальный мыслитель не имел ни желания, ни вкуса подробно излагать то, что уже до него было сделано другими, и писать учебники; каждый его труд — это отчет о его *новом* открытии. Несомненно, сам Архимед не мог принимать участия в этом обвинении Аполлония в плагиате; за это говорит весь тон предисловий к его сочинениям. Конфликт скорее всего раздувался уже упомянутым Гераклидом и другими друзьями и единомышленниками Архимеда из политических соображений: в Аполлонии, быть может видели прежде всего сторонника Аттала, т. е. сторонника римской партии.

Во всяком случае, между Архимедом и Аполлонием не было дружественных отношений. Архимед, который поддерживал оживленную переписку с выдающимися математиками своего времени и постоянно упоминает их в своих трудах, ни разу не упомянул Аполлония, величайшего из современных ему математиков.

С другой стороны, Аполлоний, по всей видимости, энергично полемизировал с последними работами Архимеда. Повидимому, в ответ на «Измерение круга» Архимеда он выпускает сочинение с полемическим, сатирическим заглавием «Средство для ускорения родов» (Ὠκυτόκιον); для нахождения π он пошел совершенно иным путем, чем Архимед, и получил более точное значение. Он отвергал новые наименования для чисел, предложенные Архимедом, как необычные, чересчур отступающие от принятого словоупотребления. Он счел совершенно излишним давать наименования любым мыслимым числам и показал, что и при помощи словоупотребления, близкого к обычному, можно обозначить числа, далеко превосходящие все, что только можно себе представить. Счету октадами, выдуманными Архимедом, он противопоставлял обычный счет мириадами. Его система в основном та же, что применяем и мы, но нашей тысяче, соответственно особенностям греческого языка, соответствует «мириада» (10 000): если в нашем счете в каждом классе три разряда (единицы, десятки, сотни), то в его счете в каждом классе четыре разряда (единицы, десятки, сотни, тысячи). Мириаду мириад ($10\,000^2$) он называет «двойной мириадой», $10\,000^3$ — «тройной мириадой» и т. д. Здесь же Аполлоний обнаружил, соперничая с Архимедом, исключительную виртуозность в действиях над числами и дал общее правило показателей при действиях над мириадами.

Если «Средство для ускорения родов» имело сатирическое острие, направленное против Архимеда, то, быть может, прав Гульч, заключивший из начальных слов архимедовой «Задачи о быках» (рукопись которой впервые найдена и опубликована Лессингом в 1773 г.), что эта «Задача» имела в виду Аполлония, ибо ее начальные слова имеют сатирический оттенок [1].

Здесь применен столь обычный в литературе эллинистического времени «ложный адрес». Такой же прием был применен знаменитым Евгемером в его «Священной надписи», поставленной якобы Зевсом в то время, когда он был царем никогда не существовавшего государства Пан-

[1] Подлинность этого сочинения, впрочем, оспаривается некоторыми учеными.

хеи. Архимед якобы нашел старинную надпись, в которой содержалась головоломная задача на вычисление. Задача эта в дошедших до нас рукописях имеет заголовок, не принадлежащий самому Архимеду: «Задача, которую Архимед, найдя на надписи, послал для решения александрийским математикам в письме, адресованном Эратосфену Киренскому». Дальше следуют стихи, написанные эпическим ионийским языком:

Сколько у Солнца коров и быков, сосчитай, иностранец,
Ум навостривши, коль впрямь свойственна мудрость тебе.
Сколько скота выгонялось на долы Сицилии влажной?
Разного цвета стада бог лучезарный имел,
Счетом четыре: из них одно — белоснежное было,
Черным отливом других лоснилась жирная шерсть,
Бурое — третье стадо, четвертое — пестрое. В каждом
Стаде дородных быков было большое число.
Так ты исчислишь быков: найти чтоб число белоснежных,
Надо от черных быков взять половину и треть [1],
Бурых к ним всех присчитавши (прими это все во вниманье!)
Черных быков число четверти с пятой равно
Пестрых быков, если к ним присчитать в добавление бурых.
Пестрых число, наконец (тех, что остались еще),
Части шестой и седьмой равнялось быков белоснежных,
Если к ним бурых быков всех заодно присчитать.
Если ж коров сосчитать захочешь, получится вот что:
Белых коров число черного стада всего
Трети с четвертою частью равно (безо всякой ошибки).
Черных коров число части четвертой равно
Пестрого стада, коль к ней и пятую часть присчитаем,
Тех, что с быками паслись вместе на общем лугу [2].

---

[1] $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$. Так обозначали египтяне, а вслед за ними и греки число $\frac{5}{6}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$, применяя только дроби с числителем 1. Точно так же, вместо $\frac{9}{20}$, говорили и писали $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$; $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ обозначало $\frac{7}{12}$ и т. д. В эпоху Архимеда уже входило в употребление обозначение, принятое у нас (только числитель писался внизу, а знаменатель вверху), но в «старинной» надписи естественно был применен и старый способ обозначения.

[2] Т. е. число черных коров было равно $\frac{9}{20}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)$ всего пестрого стада (быков и коров вместе).

Пятой же части с шестою частию бурого стада
Было равно по числу сонмище пестрых коров.
Бурых коров число равно половине от трети
Вместе с седьмой от числа белого стада голов [1].

Если уже в словах: «Если ты причастен к мудрости, постарайся напрячь свой разум и исчислить число быков», можно видеть добродушную усмешку по адресу противника, то во всяком случае эта первая часть задачи, даже при отсутствии алгебраических обозначений и знакомства с алгебраическими преобразованиями, не представляла собою чего-либо особенно трудного для античного математика, хотя и требовала головоломных вычислений, в которых проявил себя таким мастером Аполлоний. С нашей точки зрения это — задача на систему из 7 уравнений с 8 неизвестными:

$$u=\frac{5}{6}x+y,$$

$$x=\frac{9}{20}z+y,$$

$$z=\frac{13}{42}u+y,$$

$$u'=\frac{7}{12}(x+x'),$$

$$x'=\frac{9}{20}(z+z'),$$

$$z'=\frac{11}{30}(y+y'),$$

$$y'=\frac{13}{42}(u+u').$$

Это — древнейшая из известных нам задач на неопределенный анализ; при решении этой системы уравнений в качестве *наименьших* значений получаются числа, вполне представимые и обозримые; наибольшее из них u равно 10 366 482, а во всем стаде 50 389 073 головы.

Однако к этой части задачи присоединена еще вторая, предлагающая условия, делающие задачу неразрешимой

---

[1] $\frac{1}{6}+\frac{1}{7}=\frac{13}{42}$.

для античного математика, с числами, совершенно необозримыми и непредставимыми:

Если сочтешь скота всего там сколько набралось,
Сколько паслось на лугах мясообильных быков,
Сколько удойных коров и сколько каждого цвета,
Не назовет уж никто в числах невеждой тебя.
Все же и к мудрым еще тебя не причислят за это,
Коль не учтешь ты еще разных повадок быков:
Если смешается черных быков с белоснежными стадо,
То занимают они на поле точный квадрат
С равной длине шириною, и эта несчетная масса
Поле Тринакии все сплошь заполняет собой.
Если же бурые все и пестрые вместе сберутся
(А остальные от них будут отдельно пастись,
Иль все равно, если к ним придут и все остальные),
Так, что в переднем ряду станет один, а затем
В каждом дальнейшем ряду все больше, то будет в фигуре,
Что заполняют собой все они, три стороны: [1]
Если сумеешь все это найти и взором духовным
Стада размеры объять сам и другим передать,
Гордо шествуй вперед, кичася великой победой:
Знай, что, других превзойдя, первый по мудрости ты.

Эта вторая часть задачи, по всем видимостям, не может быть разрешена средствами античной математики и во всяком случае приводит к числам, которые не могут быть обозначены или «измерены» при применении метода, предложенного Аполлонием. По вычислению Вурма, общее количество голов скота в этом случае выражается числом, имеющим 206 545 десятичных знаков, т. е., для того чтобы только записать это число, придется занять 60 страниц убористого шрифта.

Вот почему вполне уместно видеть в этой второй части насмешку над Аполлонием: «Ты думал перещеголять меня в искусстве счета. То, что ты сделал в твоем «Ὠκυτόκιον», еще не настоящая мудрость. А вот реши-ка предлагаемую задачу, и тогда я готов открыто признать, что ты меня победил».

Весьма интересно также небольшое сочинение Архимеда «О семиугольнике», ставшее известным только в 1927 г.

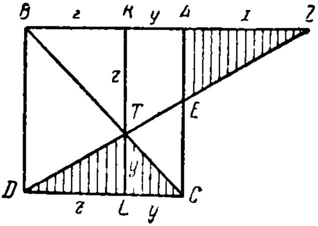
---

[1] Иными словами, сумма белых и черных быков представляет собою квадратное число; общее число быков — треугольное число; число бурых быков с пестрыми — тоже треугольное число [(т. е. 1+2+3+..., см. выше, стр. 18)].

в переводе Шоя с арабского перевода Табит ибн Куррах (см. стр. 240). Сочинению была предпослана следующая лемма (фиг. 43):

В квадрате $ABCD$ проведена прямая DE так, чтобы при продолжении ее до пересечения с продолжением стороны AB в точке Z образовался $\triangle EAZ$, равновеликий треугольнику DTC (T — точка пересечения прямой DE с диагональю BC, TL — высота $\triangle DTC$. Докажем, что

$$DC:AZ = AZ:DL,$$
$$LT:DL = DL:(LT + AZ).$$



Фиг. 43

Действительно, треугольники DTC и AEZ, по условию, равновелики, откуда

$$AZ \cdot AE = DC \cdot TL,$$

или

$$\frac{AE}{TL} = \frac{DC}{AZ}. \qquad (1)$$

$\triangle AEZ$ подобен $\triangle TLD$ (они прямоугольны и накрестлежащие углы AZE и TDC равны), откуда

$$\frac{AE}{TL} = \frac{AZ}{DL}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2)

$$\frac{DC}{AZ} = \frac{AZ}{DL}.$$

Продолжим TL до пересечения с AB в точке K. Тогда из подобия треугольников DLT и TKZ

$$\frac{LT}{DL} = \frac{LT}{KT} = \frac{DT}{TZ} = \frac{DL}{KZ} = \frac{DL}{KA + AZ} = \frac{DL}{LT + AZ},$$

что и требовалось доказать.

Обозначим DL через z, AZ через x, LT через y. Тогда наши уравнения перепишутся так:

$$\frac{z+y}{x} = \frac{x}{z}; \qquad \frac{y}{z} = \frac{z}{y+x}.$$

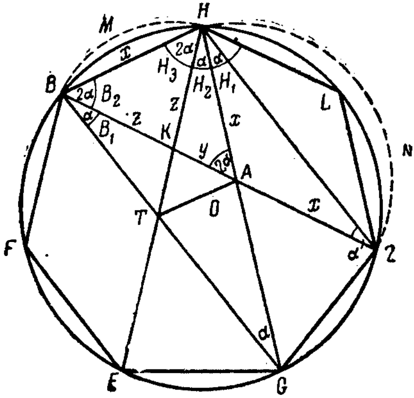
Легко видеть, что в этой лемме был применен νεῦσις и притом практически неосуществимый. Обычный (разобранный выше) νεῦσις осуществить очень просто. Не трудно передвигать прямолинейный отрезок так, чтобы его концы упирались в две линии, до тех пор пока его продолжение не попадет в данную точку (см. стр. 34—35); но для того чтобы прямую DE вращать вокруг точки D до тех пор, пока ее продолжение не образует $\triangle AEZ$, равновеликий $\triangle DTC$, нужно делать ряд проб, производя каждый раз соответствующие измерения. На неприемлемость этого решения обратили внимание уже арабские математики. Так, аль-Ялиль ас-Сийзи (951—1024) в своем сочинении «О построении семиугольника, вписанного в круг», замечал: «Это ложное решение заслуживает особенного порицания со стороны тех, которые требуют от построений геометрической точности. Приходится сделать вывод, что вспомогательное построение, с которым знакомит нас Архимед, труднее, чем сама основная теорема, и самый метод решения не красив. Эта вводная теорема не дает ясного представления о практической осуществимости решения и лишена надлежащего доказательства. Разделить прямую в таком отношении труднее, чем разделить круг на семь равных частей... Не может быть хорошего доказательства этой теоремы без применения конических сечений»...

Вдобавок Архимед вообще никогда не применял νεῦσις для *решения задач*, а только для *исследования* решений. Здесь такая же загадка, как в случае с евтокиевым решением задачи разделения шара на две части, объемы которых имеют данное отношение (стр. 128); тем не менее сомневаться в том, что это решение действительно принадлежало Архимеду, не приходится. Возможно, однако, что арабский переводчик Табит опустил какие-то принципиально важные оговорки; не надо забывать, что, по его собственным словам, рукопись Архимеда дошла до него в очень искаженном виде.

Эта лемма давала Архимеду возможность построить семиугольник при допущении, что предположенный в лемме νεῦσις выполнен и отрезки x, y, z найдены.

На прямой BZ (фиг. 44) откладываем последовательно три указанных в лемме отрезка: $BK=z$, $KA=y$, $AZ=x$. Из A как из центра — проводим окружность ZNH

радиусом $AZ = x$; из K как из центра проводим окружность BMH радиусом $BK = z$; точку пересечения этих окружностей H соединяем с B и Z. Вокруг $\triangle BHZ$ описываем окружность. *BH и есть сторона семиугольника, вписанного в эту окружность:* Проведем HAG, HKE, BTG, TA. Обозначим вписанный угол BGH, противолежащий указанной стороне BH, через α. Тогда BZH как опирающийся на ту же дугу, тоже равен α; угол H_1 (см. чертеж) ввиду равенства AZ и AH тоже равен α. Значит, ZG также равна указанной стороне BH, так как и на нее опирается вписанный угол α. Тогда и опирающийся на GZ угол B_1 также равен α. $\triangle AHK$ подобен $\triangle ZHK$, ибо $\angle K$ у них общий и по условию $y:z = z:(y+x)$ (согласно лемме); значит, $\angle H_2$ также равен α, и, следовательно, EG тоже равняется стороне BH



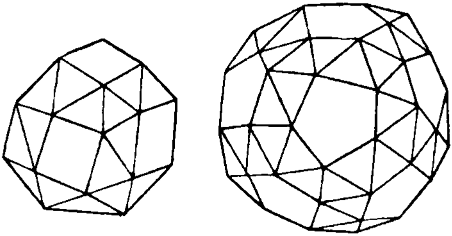
Фиг. 44

$\triangle BKT = \triangle HKA$ ($\angle HKA = \angle BKT$, $\angle H_2 = \angle B_1 = \alpha$, $HK = BK$ по построению); значит, и $\triangle BHT = \triangle BHA$, откуда $\angle B_2 = \angle H_3$, $\angle B_2 + \angle B_1 = \angle H_3 + \angle H_2$; $BT = AH = x$, а $KT = KA = y$.

Наконец, $\triangle KHA$ подобен $\triangle AHT$, ибо $\angle H_2$ у них общий, а $(z+y):x = x:z$ по условию (согласно лемме). Следовательно, $\angle HTA = \angle HAK = 2\alpha$ как внешний угол в $\triangle HAZ$. Далее, $\angle H_3 = 2\alpha$ (как угол накрест лежащий с углом HTA), $\angle B_2 = \angle H_3 = 2\alpha$ (ибо $\triangle BKH$ по построению равнобедренный). Следовательно, соответственные дуги BE и HZ, на которые опираются эти вписанные углы, в два раза больше дуги, которую стягивает указанная сторона BH, т. е. в каждую из них можно вписать по две стороны равные BH. Итак, мы построили правильный семиугольник.

Это чрезвычайно красивое, но и чрезвычайно искусственное решение, по справедливому предположению Тропфке, было получено, несомненно, обратным путем: Архимед предполагал семиугольник построенным и доказывал, что отрезки диагонали относятся между собой, как указано выше. Но применение νεῦσις, и притом в столь несовершенном виде, остается непонятным. [1]

Нам остается еще сказать несколько слов о двух не дошедших до нас сочинениях Архимеда, относящихся, повидимому, к этой эпохе. Это прежде всего сочинение «О многогранниках». В дополнение к пяти правильным



Фиг. 45

многогранникам, изученным уже Феэтетом, учеником Платона, и впоследствии вошедшим в труд Евклида, Архимед доказал существование еще 13 полуправильных многогранников, ограниченных равносторонними и равноугольными, но не одинаковыми между собой многоугольниками: это восьмигранник, ограниченный четырьмя правильными треугольниками и четырьмя квадратами, три различных 14-гранника (первый ограничен 8 треугольниками и 6 квадратами; второй — 6 квадратами и 8 шестиугольниками, третий — 8 треугольниками и 6 восьмиугольниками) и т. д. На фиг. 45 изображены 38-гранник, ограниченный 32 правильными треугольниками и 6 квадратами, и 92-гран-

[1] Приняв $x = a$, получим для z:

$$z^3 + 2az^2 - a^2z - a^3 = 0.$$

Это уравнение легко решается пересечением двух кривых 2-го порядка (например, параболы и равносторонней гиперболы); естественно было ожидать, что Архимед укажет на это; как мы видели, арабские математики считали необходимым применение конических сечений.

ник, ограниченный 80 треугольниками и 12 пятиугольниками.

Что касается других не дошедших до нас произведений, то наиболее тяжелой надо считать утрату оптического сочинения Архимеда «Катоптрика».

Живший двумя столетиями позже римский архитектор Витрувий вкратце сообщает об основных вопросах, разбиравшихся в этой книге:

«Почему в плоских зеркалах предметы сохраняют свою натуральную величину, в выпуклых — уменьшаются, а в вогнутых — увеличиваются; почему левые части предметов видны справа и наоборот; когда изображение в зеркале исчезает и когда появляется; почему вогнутые зеркала, будучи поставлены против Солнца, зажигают поднесенный к ним трут; почему в небе видна радуга; почему иногда кажется, что на небе два одинаковых Солнца, и много другого подобного же рода, о чем рассказывается в объемистом томе Архимеда».

Итак, круг интересов Архимеда в этой книге был чрезвычайно широк; зная точность научного метода Архимеда, можно быть уверенным, что, если бы удалось найти эту книгу, то наши представления о научной оптике древних изменились бы коренным образом.

Из дошедших до нас цитат известно, что Архимед излагал здесь также результаты наблюдений над предметами, видимыми в воде: чем глубже они погружены, тем в большем увеличении мы их видим. Архимед бросал в сосуд с водой кольцо, чтобы изучать явления рефракции света.

Феон Александрийский, говоря о рефракции в атмосфере, замечает, что «в этом случае, увеличение вследствие рефракции объяснено Архимедом очень точно».

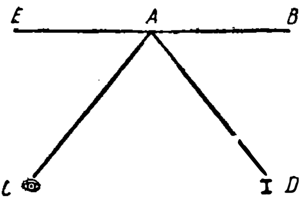
В этом же сочинении Архимед доказывал, что в зеркале угол падения равен углу отражения; это доказательство случайно сохранилось в схолии к псевдоевклидовой «Катоптрике».

Оно имело характерную для Архимеда форму reductio ad absurdum (фиг. 46).

Пусть EB плоское зеркало, C глаз, D видимый предмет. Пусть $\angle CAE=a$, $\angle DAB=b$. Допустим, что a не равно b. Тогда оно либо больше, либо меньше b. Пусть $a>b$.

Поместим теперь глаз в точку D, а видимый предмет в точку C. Так как, по нашему предположению, угол отражения больше угла падения, то получаем $b>a$. Но как мы видели, $a>b$, и это невозможно. Так же невозможно и обратное предположение; значит, $a=b$. Не трудно видеть, что это доказательство имеет предпосылкой аксиому: если предмет и глаз поменяются местами, то глаз увидит предмет так же, как до перемещения. Однако такая аксиома не самоочевидна.

«Катоптрика» Архимеда была очень популярна в древности и послужила, повидимому, источником легенды, будто Архимед сжег римский флот при помощи изобретенных им зажигательных зеркал. На этой легенде мы остановимся подробнее ниже (стр. 235 и сл.); легенда эта служит подтверждением того, что в своей «Катоптрике» Архимед изучал зажигательные стекла и зеркала.



Фиг. 46

Арабские математики Абульвафа и Эль-Бируни (в книге «О нахождении хорд круга», ставшей нам известной впервые в 1910—1911 г.), сообщают поразивший всех факт: знаменитая теорема для определения площади треугольника по сторонам

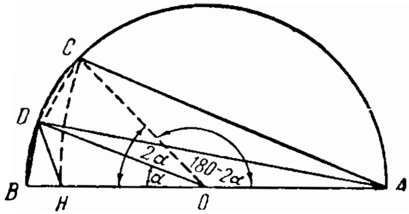
$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

известная нам из труда Герона Александрийского и приписывавшаяся ему (ее называли всегда «теоремой Герона»), оказывается, была открыта Архимедом в его «Книге кругов». Герон и в этом случае оказался только компилятором. В этой же книге была решена задача нахождения высот треугольника по трем сторонам; здесь содержалась также пользовавшаяся большой популярностью у арабских математиков «лемма Архимеда», предвосхищавшая в известной степени, как показал Тропфке (см. Библиогр. указатель, № 114), выводы нынешней тригонометрии.

Лемма эта гласит (фиг. 47): Если $\angle BAC$ между диаметром AB и хордой AC разделить пополам хордой AD, а затем на диаметре AB отложить отрезок $AH=AC$, то

$$OB \cdot BH = BD^2.$$

Эта лемма доказывалась таким образом. $\triangle DAC$ равен $\triangle DHA$, ибо углы BAD и DAC, равно как и стороны CA и AH равны между собой по условию, а сторона DA— общая. Значит, и $DH = DC$. Но $DC = DB$, откуда $DH = DB$ и, следовательно, $\triangle\ DBH$ равнобедренный.



Фиг. 47

Но в таком случае $\triangle\ DBH$ подобен $\triangle DBO$: оба они равнобедренные, а угол при основании DBO общий, следовательно,

$$HB : BD = BD : DO,$$

или

$$BD^2 = HB \cdot DO = HB \cdot BO.$$

Если принять радиус за 1, а $\angle DOB$ обозначить через α, то

$$\angle DAB = \frac{\alpha}{2}, \quad BD = 2 \sin \frac{\alpha}{2}, \quad HB = AB - AH =$$
$$= AB - AC = 2 - 2 \sin (90 - \alpha) = 2 - 2 \cos \alpha,$$

откуда

$$4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 2 (1 - \cos \alpha),$$
$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} (1 - \cos \alpha).$$

Такой вид получит эта формула в переводе на язык нынешней тригонометрии.

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

☆

Борьба с Римом. Гибель Архимеда

Выше мы показали, почему и сиракузское правительство и сиракузская интеллигенция и, в частности, Архимед в борьбе между римлянами и карфагенянами сочувствовали последним. Пока успех был на стороне карфагенян, а до окончательной развязки было еще далеко, политика Гиерона была верхом дипломатической мудрости: Сицилия не была театром военных действий, Рим был ее непосредственным соседом, до Карфагена было далеко. Самым разумным было поэтому ублаготворять Рим вымогаемыми им взятками и изъявлениями лойяльности, а втайне сочувствовать и содействовать Карфагену. Но к концу правления Гиерона дела карфагенян, несмотря на победу при Каннах, стали ухудшаться, и наиболее прозорливые люди видели, что в победе Карфагена уже не могло быть уверенности. Чаши весов, повидимому, уравновесились, и маленькая гиря, брошенная на ту или другую чашу — такой гирей и могли быть Сиракузы с их армией — могла решить исход войны. Гелон, сын и соправитель Гиерона (тот самый Гелон, которому Архимед посвятил свое «Число песчинок»), подготовлял, как говорили, при тайном содействии Гиерона, открытое выступление на стороне карфагенян. После его смерти наследником престола оставался малолетний внук Гиерона Гиероним. Гиерон был болен и чувствовал, что скоро умрет; он понимал, что в этом случае Гиероним станет игрушкой в руках различных придворных групп и начнется полоса тяжелой внутренней борьбы. Теперь Сиракузам было необходимо выступить либо на той, либо на другой стороне. Дом Гиерона и сиракузская интеллигенция сочувствовали Карфагену; близкая ко двору партия богатых людей, экономически заинтересованная в победе Рима, агитировала за присоединение к Риму.

Может быть, именно в предчувствии этих событий Гиерон решился отречься от престола и по завещанию объявить Сиракузы демократической республикой; всю ответственность за дальнейшие события он перекладывал таким образом на народ. Однако в конце концов он принужден был отказаться от этого намерения.

Действительно, в 216 г., тотчас после смерти Гиерона, немедленно же началась междоусобная борьба. Гиероним, как и весь дом Гиерона, сочувствовал карфагенянам, но он был еще малолетним, и с его взглядами никто не хотел считаться. Большое влияние приобретает сочувствующая римлянам партия богатых людей, возглавляемая неким Фрасоном. Эти люди занимают враждебную Карфагену позицию и ведут предательские переговоры с Римом.

Так как Гиероним был горячим приверженцем Карфагена, то организуется заговор на его жизнь.

Политика эта вызвала, однако, негодование интеллигенции и народных масс. Гиероним объявляется совершеннолетним. Происходит переворот: Фрасон и его друзья устраняются. Гиероним приближает к себе в качестве фактических правителей мужей своих сестер Адранодора и Зоиппа, вождей карфагенской партии. Новое правительство шлет своих послов к Ганнибалу; Ганнибал со своей стороны делает ловкий политический шаг: он шлет послами в Сиракузы двух братьев — Гиппократа и Эпикида.

Гиппократ и Эпикид родились от карфагенянки, но они принадлежали к одному из знатных и популярных сиракузских домов: дед их был изгнан из Сиракуз и бежал в Карфаген; он был одним из видных сторонников карфагенской ориентации. Как сыновья сиракузянина, Гиппократ и Эпикид сохраняли сиракузское гражданство. Жители Сиракуз и руководившая ими теперь карфагенская партия встретила братьев с распростертыми объятиями; они становятся членами совета и главными советниками молодого царя, фактически возглавляя правительство Сиракуз.

Итак, жребий был брошен. Как мы уже говорили, пока казалось, что с Римом справятся и без помощи Сиракуз, Сиракузы вели хитрую дипломатическую игру и, оставаясь вне войны, щадили свои силы и извлекали все выгоды, которые выпадают на долю нейтральной державы. Теперь, когда положение Карфагена ухудшилось, сиракузяне выступают как передовые борцы за эллинизм против грядущей римской эксплоатации и римского варварства. Македонский царь Филипп V уже стал на сторону Карфагена (заключенный в 215 г. договор Филиппа с Карфагеном дошел до нас). Гиероним и его советники теперь озабочены привлечением к этой коалиции Александрии, чтобы сплотить против Рима наиболее влиятельные культурные и экономические центры эллинистического мира.

Узнав о новой политической ориентации Сиракуз, римляне шлют сюда свое посольство. Но сиракузяне даже не сделали попытки скрыть свое сочувствие Карфагену и приняли римское посольство чрезвычайно холодно. Затем Сиракузы шлют послов в Карфаген, и карфагеняне обещают им в случае победы власть над всей Сицилией.

После этого сиракузяне предъявляют ультиматум Риму, требуя возвращения всех данных римлянам Гieроном «даров». Вслед за тем Зоипп с младшими братьями царя отправляется в Александрию, чтобы привлечь на свою сторону Птолемеев. Между сиракузским царским домом и Птолемеями была тесная дружба; поэтому предприятие обещало успех. Однако, александрийское правительство, учтя обстановку, не решилось выступить на стороне Ганнибала, хотя внешне сохраняло с ним дружественные отношения. Дело в том, что в Александрии наблюдался такой же разлад, как и в Сиракузах. Лучшие представители придворного общества и интеллигенции, как, например, Эратосфен, в большей или меньшей мере сочувствовали Карфагену. В IV в. прославление Аристотелем Карфагенского государства могло еще расцениваться примерно так же, как прославление скифских законов, как аполитическое увлечение экзотикой. Теперь, во второй половине III в., во время напряженной борьбы Карфагена и ряда греческих государств с Римом, открытое прославление Эратосфеном карфагенского строя как лучшего из всех существующих, хотя бы и на ряду с римским, не могло не расцениваться как политический выпад. С другой стороны, близость Аполлония с пергамским царем Атталом I и поездки Аполлония ко двору этого царя не могли не рассматриваться как определенная политическая демонстрация: Пергам, как мы видели, открыто поддерживал Рим.

Несомненно, Аполлоний не был одинок; в Александрии было не мало сторонников Рима. Еще больше было близоруких людей, которым римская агрессия в Египте казалась не стоящей на повестке ближайших дней и которые, даже сочувствуя Карфагену, считали безрассудным и опасным ввязываться в конфликт между Римом и Карфагеном. Поэтому-то посольство в Александрию и осталось безрезультатным.

Не довольствуясь дипломатическими демаршами, сиракузяне начинают весной 214 г. военные приготовления. Царь Гиероним отправляется в Леонтины, находившиеся поблизости от границы римских владений; Гиппократ движется к границе с двухтысячным войском. Но в это время тайному агенту римлян в Сиракузах Диномену удается организовать в Леонтинах убийство царя Гиеронима. Гиппократ вынужден был спешно вернуться в Сиракузы, чтобы противодействовать дальнейшему усилению влияния римской партии.

Открытое военное выступление Сиракуз на стороне Карфагена не было непосредственно спровоцировано римлянами: сиракузяне могли при всем сочувствии к Карфагену, еще долгое время сохранять политику нейтралитета, не бросая Риму открытого вызова. Это обстоятельство и должно было содействовать усилению римской партии. Удается убить вождей карфагенской партии Андранодора и Фемиста, а также братьев царя, Но в это время в Сиракузы пришли первые известия о зверских расправах римлян в греческих городах. Возмущением сиракузского общества не преминули воспользоваться уцелевшие сторонники карфагенской партии. Гиппократ и Эпикид выступают в народном собрании с требованием возобновить политику открытой борьбы с Римом; их избирают стратегами на место убитых. Но и римская партия сохранила еще влияние: богач Аполлоний требует открытого выступления на стороне римлян.

В это время получилось известие, что римляне подходят к Леонтинам, входившим в сферу сиракузского влияния. Гиппократ и Эпикид отправляются на выручку Леонтин; это было весьма на руку сторонникам римской партии, ввиду исключительного влияния Гиппократа в народном собрании; после их отъезда проводятся массовые аресты и конфискации в рядах карфагенской партии.

По ходу военных действий Гиппократу пришлось вторгнуться на римскую территорию и причинить серьезный урон римлянам; поскольку Сиракузы еще не были формально в состоянии войны с Римом, римский полководец Марцелл, учитывая политическую обстановку в Сиракузах, потребовал у леонтинцев выдачи Гиппократа. Правительство Сиракуз, бывшее теперь всецело в руках римской партии, не только присоединяется к римскому требованию выдачи Гиппократа, но еще и назначает награду за его голову. Однако ненависть к римлянам была настолько сильна в леонтинском народе, что леонтинцы отказались выдать Гиппократа.

Гиппократу не удалось все же сдержать натиск двух римских армий, из которых одна возглавлялась уже упомянутым Марцеллом, а другая — Аппием Клавдием. Гиппократ бежал в Гербесс, а Леонтины были взяты Марцеллом, который организовал здесь дикий, бесчеловечный погром, сопровождавшийся массовым убийством мирных жителей. Сиракузское же правительство дошло в своем угодничестве до того, что послало свое войско на помощь римлянам к Гербессу; но братья Гиппократ и Эпикид, хорошо зная настроение народных масс в Сиракузах, *вышли навстречу сиракузскому войску и, несмотря на все уговоры аристократических полководцев, одним из которых* *был Диномен, убийца Гиеронима, убедили воинов отказаться от похода.*

Когда известие об ужасном погроме в Леонтинах пришло в Сиракузы, произошел открытый взрыв возмущения против римлян. Офицерам и полицейским с трудом удавалось удерживать массы от открытого восстания. Затем с поля военных действий вернулись Гиппократ и Эпикид; в своих речах в народном собрании они ярко описывали бесчеловечные злодеяния римлян в Леонтинах и обвиняли своих аристократических коллег по стратегии в том, что они действовали как агенты Рима. Диномен пытался пойти испытанным им путем — организовать убийство Гиппократа, но из этого теперь ничего не вышло. Стратеги — сторонники римской партии были казнены; вся власть была передана Гиппократу и Эпикиду.

Последовавшее вскоре после этого новое избиение римлянами мирных жителей в Энне не могло не вызвать в сиракузском обществе нового взрыва враждебности к Риму. Все предложения римлян, сделанные ими в ответ на ходатайства прежнего правительства, были отвергнуты; пятиярусный военный корабль (пентэра) с римскими послами был арестован; с трудом удалось удержать народные массы от кощунства — от убийства римских послов.

После этого римский флот под командованием Марцелла и сухопутное войско под начальством Аппия Клавдия двинулись к Сиракузам и осадили их. Гиппократ, понимая, что собственными силами Сиракузы не справятся с римлянами, еще до прихода римлян отправил в Карфаген посольство с просьбой о помощи. Весной 213 г. в Сицилии высадился карфагенский полководец Гимилькон с большим войском. Гиппократ передал управление городом своему брату Эпикиду, а сам с 10 000 пехотинцев и 500 всадниками двинулся навстречу Гимилькону, успевшему уже занять Акрагант. Несмотря на то, что Марцелл преградил путь Гиппократу и нанес его войскам тяжелое поражение, Гиппократу удалось прорваться в Акрагант и соединиться с Гимильконом; вместе они готовятся к походу на Сиракузы.

Мы остановились так подробно на всех этих фактах политической и военной истории Сиракуз потому, что обычно в нашей литературе они излагаются с римской точки зрения, в извращенной тенденциозной трактовке римских историков. [1]

Но вернемся к осажденным Сиракузам. Чтобы парализовать возникновение мощной антиримской коалиции, необходимы были немедленные решительные действия, и римляне пришли под стены Сиракуз вполне оснащенными. На кораблях находилось большое число испытанных в боях воинов и военные машины, в том числе гигантская машина самбука.

Уже в это время война была в значительной мере войной машин, войной техники; римляне, одержавшие уже в 260 г. морскую победу над карфагенянами благодаря «воронам», особым перекидным мостам с крючьями, показали, что они — не новички в этом деле.

С дальнейшими событиями читатель познакомится непосредственно из красочных рассказов Полибия, жившего немного времени спустя после этих событий, и Плутарха в его биографии Марцелла:

«Приготовив плетенки, метательные орудия и все прочее, нужное для осады, римляне надеялись благодаря многочисленности рабочих рук покончить приготовления в течение пяти дней и затем напасть на неприятеля. Но при этом они не приняли в расчет искусство Архимеда, не учли, что иногда один даровитый человек способен сделать больше, чем множество рук. Теперь они убедились в этом на опыте... Архимед заготовил внутри города, а

---

[1] Так, например, в предисловии приват-доцента И. Ю. Тимченко к книге Н. Гейберга «Новое сочинение Архимеда» (Одесса, 1909) дается такой «политический фон» для деятельности Архимеда: «Военачальник Гиппократ, желая захватить власть в свои руки, вступил в сношения с Карфагеном и в угоду своим союзникам приказал умертвить большое число римлян около сицилийского города Леонтия (sic!). Тогда римляне решили завладеть Сиракузами». И всё.

Вопросом о том, было ли римское завоевание Сиракуз «прогрессивным» или «регрессивным» явлением, мы здесь не занимаемся и заниматься не собираемся. Мы пишем биографию Архимеда, и нас интересует только, как должны были люди его круга реагировать на происходящие события. Именно с точки зрения этих людей мы и излагаем события 216—212 гг.

В изложении же самых фактов мы следуем Карштедту, которого никак нельзя обвинить в пристрастии к карфагенянам: его презрение к карфагенянам, как к семитам, сквозит в каждой строчке его книги.

равно и против нападающих с моря такие средства обороны, что защитникам не предстояло утруждать себя непредусмотренными работами на случай неожиданных способов нападения: у них заранее было все готово к отражению врага при всяком случае... Находившиеся на каждом римском судне люди были вооружены луками, пращами и легкими дротиками, чтобы прогонять врага, нападающего с зубцов стен. Вместе с тем римляне отняли у восьми пятиярусных судов (пентэр) весла, у одних с правой стороны, у других с левой, связали суда попарно с боков, лишенных весел, и, действуя веслами только с наружных сторон, стали подвозить к городской стене так называемые самбуки...

(Когда все это было готово) римляне приготовились итти приступом на башни городской стены. Однако и Архимед со своей стороны соорудил машины, которые могли выбрасывать снаряды на любое желаемое расстояние. Враги были еще далеко от города, когда Архимед из своих больших дальнобойных метательных машин стал поражать их корабли таким множеством тяжелых снарядов и стрел, что они никак не могли уберечься от них и оказались беспомощными и бездеятельными. Когда Архимед замечал, что снаряды попадают слишком далеко, за линию вражеских кораблей, он пускал в ход меньшие машины, соответственно нужному ему расстоянию. Это вызывало такой ужас среди римлян, что они не в силах были двигаться вперед. Поэтому Марцелл, не зная, что ему делать, был принужден вести свои корабли на приступ ночью, без шума, незаметно для врага. Но когда они приблизились к берегу на расстояние выстрела, Архимед применил другую заготовленную им военную хитрость против тех, которые сражались с вражеских кораблей. По его приказу в стене, на высоте человеческого роста, были просверлены многочисленные отверстия, имеющие приблизительно ширину ладони. За этими амбразурами он поместил стрелков и метателей снарядов; они непрерывно обстреливали вражеский флот и таким образом сводили на нет все усилия римских солдат. Таким способом, был ли враг в отдалении, или он находился у самых стен города, Архимед не только препятствовал осуществлению всех его планов, но и убивал бо́льшую часть нападающих. Лишь только римляне начинали выставлять против города свои самбуки, тотчас же осажденные пускали в ход свои машины, находившиеся внутри городских стен и остававшиеся до этих пор незаметными для врага. Когда надо было пустить их в дело, они подымались над бастионами и высовывали свои клювы далеко вперед от укреплений города. Одни несли на себе камни, весившие не менее десяти талантов ($^1/_4$ тонны), другие — груды свинца. Как только самбуки приближались к стенам, осажденные, ослабляя при помощи каната блоки, к которым клювы этих машин были подвешены, поворачивали их вправо или влево — туда, где это было нужно; затем открывались задвижки, и из клюва падал на самбуку камень, который разбивал не только машину, но и корабль, на котором она стояла, подвергая находившихся на ней воинов величайшей опасности. В распоряжении сиракузян были и другие машины; когда приближались вражеские корабли, покрытые специальными плетенками для защиты от стрел, бросаемых через отверстия в стенах, эти машины извергали камни такой величины, что находившиеся на носах кораблей принуждены были спасаться бегством.

Кроме того, по приказу Архимеда, опускалась железная лапа, привязанная к цепи; этой лапой машинист, управлявший клювом машины, точно рулем корабля, захватывал нос корабля и затем опускал вниз другой конец машины, находившийся внутри городских стен. Он подымал таким образом в воздух нос корабля и ставил корабль отвесно на корму, а затем закреплял неподвижно основание машины, а лапа и цепь отделялись при помощи каната. Непосредственным результатом этого было то, что корабли либо падали на бок, либо совершенно опрокидывались; еще чаще (так как носы падали с большой высоты в море) корабли совершенно погружались и наполнялись водой, к ужасу тех, которые на них находились. Марцелл оказался в очень тяжелом положении; все его планы терпели крушение благодаря изобретениям Архимеда. Потери римлян были огромны, а осажденные глумились над всеми их усилиями. Однако и он, хотя и был сильно раздражен, позволял себе подшучивать над изобретениями великого геометра: «Этот человек, — говорил он, — решил напоить наши корабли допьяна морской водой, а наши самбуки он ударами палки высокомерно прогоняет с попойки, как недостойных его общества». Так кончилась осада сиракузян с моря.

Аппий с войском очутился в столь же трудном положении и потому совсем отказался от приступа. И действительно, находясь еще далеко от города, римляне сильно терпели от метательных машин Архимеда, ибо сиракузяне имели наготове множество метательных орудий, превосходных и метких. Оно и понятно, так как уже Гиерон дал средства на них, а Архимед изобрел их и мастерски исполнил. Итак, когда римляне приближались к городу, одни из них были, как я говорил уже выше, непрерывно обстреливаемы через отверстия в стене, терпели урон и не могли продолжать наступление; другие, надеявшиеся пробиться вперед под защитой плетенок, гибли под ударами камней и бревен, падавших сверху. Много бед причиняли сиракузяне римлянам и теми лапами при машинах, о которых мы говорили выше: лапы эти поднимали воинов в полном вооружении и кидали их вниз.

Наконец, Аппий с товарищами возвратился в стоянку и устроил совещание с трибунами, на котором единогласно решили испытать все мыслимые средства, но отказаться от надежды взять Сиракузы приступом; согласно этому решению они и действовали.

Так в течение восьми месяцев римляне оставались под стенами города, и не было такой уловки или отважного дела, пред которыми они остановились бы. Но итти на приступ они больше ни разу не осмеливались. Такова чудесная сила одного человека, одного дарования, умело приспособленного к какому-либо специальному делу. Вот и теперь: располагая столь значительными силами, сухопутными и морскими, римляне надеялись с первого же приступа взять город и сделали бы это, если бы кто-нибудь изъял из среды сиракузян одного этого старичка. Но он был, и римляне не решались даже итти на приступ».

Полибий писал лишь небольшое время спустя после описываемых событий, и он вообще известен как точный, трезвый и серьезный историк; поэтому мы обязаны считать этот рассказ, за вычетом риторических украшений и небольших преувеличений, исторической истиной, лишь несколько стилизированной из желания противопоставить великого человека серой массе. Только рассказу о судах, вытянутых из воды железными лапами и поставленных вертикально на корму, верить нельзя: такого результата без помощи механического двигателя достигнуть невозможно. В лучшем случае, речь могла итти о том, что захваченный лапой нос корабля слегка приподнимался над поверхностью воды.

Сходные рассказы мы находим и у более поздних писателей — у Ливия и Плутарха; приведем здесь рассказ Плутарха ввиду его живости и красочности.

«Марцелл двинулся к Сиракузам со всеми войсками... Марцелл производил нападения и с суши и с моря... Марцелл командовал 60 пентэрами, наполненными всякого рода оружием и стрелами. Он приказал связать между собою восемь больших кораблей, поставил на них осадную машину и подплывал с нею к стенам, надеясь на успех ввиду обширности и тщательности своих приготовлений и славы своего имени. Но все это было пустяками для Архимеда и архимедовых машин...

В свое время царь Гиерон оценил важность механики и упросил Архимеда построить для него всякого рода машины и осадные сооружения, которые служили бы как для защиты, так и для нападения в какой угодно осаде... Теперь машины эти пригодились сиракузцам, а вместе с машинами и их изобретатель.

Когда римляне осадили город с двух сторон, сиракузцы испугались. От страха каждый молчал, потому что не надеялся, что можно будет оказать сопротивление такой грозной силе.

В это-то время и привел Архимед в действие свои машины. В неприятельскую пехоту неслись пущенные им различного рода стрелы и невероятной величины камни с шумом и страшной быстротою. Решительно ничто не могло вынести силы их удара; они опрокидывали тех, в кого они попадали, и расстраивали их ряды. На море внезапно поднимались со стен над кораблями бревна, загнутые наподобие рога. Одни из них ударяли в некоторые корабли сверху и силой удара топили их. Другие железными лапами или клювами, наподобие журавлиных, схватывали корабли за носы, поднимали их в вертикальном направлении на воздух, ставили корабль на корму и затем (удалив крюк) топили... Часто корабль поднимало высоко над поверхностью моря, и, вися в воздухе, он к ужасу окружающих качался в разные стороны, являя собою ужасающее зрелище, пока весь экипаж не был сброшен или перестрелян... Самбука, машина, которую Марцелл поставил на нескольких кораблях и подводил к стенам..., еще далеко не успела подойти к стене, как оттуда вылетел камень весом в десять талантов, за ним другой, третий. Они упали на машину со страшным шумом и силой, разбили ее корпус, разорвали болты и уничтожили связи, так что Марцелл, не зная, что делать, решил отплыть поспешно с флотом и приказал пехоте отступить...

Они успели отойти на большое расстояние, но стрелы догоняли их, попадали в отступающих, так что они понесли огромные потери в пехоте. Многие корабли их были разбиты, между тем как неприятелю они не могли причинить никакого вреда; большая часть машин Архимеда стояла за стенами. Казалось, римляне сражались с богами; над ними разражалась беда за бедой, между тем они не видели врагов!

Марцелл успел, однако, избежать опасности. Он шутил над своими техниками и механиками и говорил: «Не перестать ли нам драться с математиком Бриареем? Он, сидя спокойно у моря, выбрасывает наши корабли и, бросая в нас разом столько стрел, оставляет за собой мифических сторуких великанов». Действительно, все остальные сиракузяне служили своего рода телом архимедовых машин, один он был душою, которая всех двигала, все направляла... Наконец, римляне стали так трусливы, что если замечали, что над стеной движется кусок каната или бревно, то кричали: «Вот, вот оно!» и, думая, что Архимед хочет направить на них какую-либо машину, ударялись в бегство. Видя это, Марцелл прекратил всякого рода сражения и нападения»...

Попытаемся дать оценку всех этих сообщений, чтобы правильно понять роль и позицию Архимеда в тяжелых событиях интересующего нас времени. Мы видели уже, что борьба Рима с Карфагеном была теснейшим образом связана с борьбой партий внутри Сиракуз; на Карфаген ориентировались придворные группы и демократическая, народная партия; на Рим — богачи, вернее какие-то группы богачей, заинтересованные экономически в сближении с Римом; к ним примыкали, несомненно, и немалочисленные группы простонародья, стремившиеся во что бы то ни стало избежать открытой войны и надеявшиеся на то, что им удастся сохранить нейтралитет до ее развязки. Подготовляя техническое оснащение для борьбы с римлянами, Архимед, друг и родственник царской семьи, придворный математик и механик, в момент ожесточенной партийной борьбы, конечно, выступал не как отвлеченный ученый, воспользовавшийся удобным случаем для постановки экспериментов по механике, а как активный деятель карфагенской партии. Всякому понятно, что структура его машин и приспособлений была теснейшим образом координирована с общим планом военной обороны Сиракуз; только учтя силы свои и неприятельские, топографию сиракузских укреплений, общий план обороны и т. д., Архимед мог правильно рассчитать расположение отверстий в стенах, дальнобойность и радиус действия изобретенных им машин, вес снарядов и т. д. Архимед был, следовательно, членом, если не руководителем сиракузского военного совета, а если учесть малолетство Гиеронима и родственную связь Архимеда с царствующим домом, то можно быть уверенным, что, по крайней мере, в 215—214 гг. Архимед был и *одним из его политических руководителей*.

Машины Архимеда могли защитить город только от неприятельских приступов, но не могли спасти осажденных от голода. Вот почему уже в начале 213 г. сиракузяне, как мы видели, отправили в Карфаген посольство с просьбой о помощи и теперь со дня на день ожидали прибытия к городу Гимилькона и Гиппократа.

Весной 212 г. Гимилькон и Гиппократ узнали о том, что римлянам удалось захватить у истощенных сиракузян (вероятно, благодаря помощи предателей внутри города) сиракузское укрепление Гексапилы, и они двинулись поспешно к Сиракузам, где их с таким нетерпением ожидали. К ним стекались большие массы туземцев-сикулов, из которых Гимилькон составил вспомогательное войско. Союзникам удалось проникнуть в большую гавань Сиракуз, но их нападения на осаждающих были отражены. К тому же счастье пришло на помощь римлянам: в карфагенском лагере разразилась эпидемия чумы, от которой погибло все войско, в том числе и Гиппократ. Теперь положение осажденных стало безнадежным, а их капитуляция — только вопросом времени.

С нашей оценкой роли Архимеда в описанных событиях вполне согласуется и рассказ о гибели Архимеда. [1]

В той же биографии Марцелла Плутарх рассказывает, как Марцеллу удалось, наконец, ворваться в город вследствие измены сиракузских граждан, принадлежавших к римской партии. Взятие Сиракуз, как и других городов, попавших в руки римлян, сопровождалось невероятными актами жестокости, убийствами, грабежами и насилиями. В числе убитых был и Архимед.

Плутарх жил под римской властью, пользуясь благодеяниями римских магнатов. [2] Он чрезвычайно озабочен тем, чтобы не скомпрометировать Рим в глазах культурных людей и не вызвать недовольства своих господ. Жестокости, сопровождавшие взятие Сиракуз, очевидно, запомнились надолго и ставились римлянам в вину. Рассказ Плутарха имеет поэтому апологетический характер. Другие полководцы, говорит он, не только не смели противиться зверствам солдат, но еще поощряли их. Однако Марцелл, смотря на разрушаемый и разоряемый город, чуть не плакал. У него одного из всех полководцев хватило мужества запрещать воинам убивать, насиловать и обращать в рабство свободных людей. Но воины его не слушали. После этих вводных слов, Плутарх замечает:

«Ничто так не огорчило Марцелла, как смерть Архимеда. Этот философ находился во время взятия Сиракуз один в своем жилище, углубленный в рассмотрение каких-то геометрических фигур. Будучи всем умом и чувствами погружен в эти размышления, он не обратил внимания на шум и крики римлян, бежавших по всему городу, и даже не знал, что город уже в их власти. Вдруг пред ним в его

---

[1] Античная картина (фреска из Геркуланума), изображающая смерть Архимеда, и толкование ее, данное Винтером (Библиогр. указатель, № 40), были мне во время написания этой книги еще недоступны.

[2] См. мое предисловие к переводу «Избранных биографий Плутарха», Ленинград, Соцэкгиз, 1941.

доме предстал римский солдат с требованием немедленно следовать за ним к Марцеллу. Но Архимед отказался следовать за ним прежде чем не закончит доказательства разбираемой им математической проблемы. Раздраженный римлянин вытащил меч из ножен и убил его. По словам других, к Архимеду явился солдат с мечом в руке, чтобы его убить. Но Архимед настойчиво просил его подождать одну минуту, чтобы задача, которой он занимался, не осталась нерешенной; солдат, которому не было дела до его доказательства, пронзил его своим мечом. Согласно третьему рассказу, Архимед уже шел сам к Марцеллу, неся в ящике математические инструменты — солнечные часы, небесные глобусы и угломеры для измерения величины Солнца. Встретившие его солдаты решили, что в ящике золото, и убили его, чтобы завладеть его сокровищами. Но, несмотря на все разногласия, все историки согласны в том, что Марцелл был очень огорчен его смертью; к убийце он отнесся с отвращением, как к совершившему кощунство; он разыскал родственников Архимеда и оказал им всяческое уважение».

Сходный рассказ мы находим и у римского историка Валерия Максима. И он, прежде всего, подчеркивает, что Марцелл приказал пощадить гениального математика, что убийство было совершено без ведома Марцелла. К этому писателю восходит столь часто повторяемое изречение Архимеда: «Noli turbare circulos meos» («Не трогай моих чертежей»). «Солдат, усмотрев в этих словах оскорбление могущества победителей, отрубил ему голову, и кровь Архимеда запятнала его научный труд».

Звериная жестокость римлян по отношению к побежденным противникам нам хорошо известна из приведенных уже выше примеров. В частности, нам хорошо известна из событий в Леонтинах и Энне и звериная жестокость Марцелла, победителя Сиракуз.

Если Марцелл приказывал истреблять ни в чем не повинных женщин и детей в побежденных им городах, то как должен был он поступить с руководителем «мятежного сопротивления» римлянам в городе, заключившем договор с римлянами и «вероломно» нарушившем его, с человеком, который нанес римлянам столько чувствительных ударов, уничтожил множество римских воинов и много кораблей, был причиной затяжки войны и уныния в римском войске? Если Марцелл просто убил этого вредного старика, не подвергнув его мучительной пытке, это уже было бы с его стороны актом исключительного для римлян великодушия.

В самом деле, было бы наивно предполагать у римлян III в. какое-то особое уважение к отвлеченной греческой науке. Ученый или поэт был с точки зрения римской ведущей аристократии этого времени человеком низшей породы, не то ремесленником, не то шутом. Недаром римские аристократы Метеллы на остроумные стихотворения Невия, величайшего римского поэта III в., ответили стихом:

«Дадут Метеллы в морду Невию поэту»
(Dabunt malum Metelli Naevio poetae).

А это был римский поэт-патриот, автор знаменитой тогда поэмы о Пунической войне. Что же касается греческих философов, то их деятельность считалась вредным суемудрием; их неоднократно попросту высылали из Рима. Как же должны были они отнестись к «философу», боровшемуся с Римом и причинившему им неисчислимые бедствия?

Другое дело — вторая половина второго и первый век. Греческая мода постепенно становилась господствующей в Риме, а неотъемлемой частью этой моды было подчеркивание уважения к отвлеченной науке. Всякого рода высокопоставленные дилетанты, вроде Цицерона, считали необходимым не только прокламировать уважение к философии и науке, но и усвоить какие-то верхи науки, чтобы «без принужденья в разговоре коснуться до всего слегка, с ученым видом знатока». Жестокое умерщвление величайшего из греческих математиков, разумеется, бросало тень на одну из самых славных страниц римского прошлого, на историю Пунических войн.

Издатель Архимеда, вер-Экке, справедливо замечает по этому поводу:

«Римский народ интересовался прежде всего искусством управления и военным делом, но он всегда оставался чужд математическим спекуляциям. Даже астрономия в Риме была чисто физической наукой, а геометрия здесь никогда не подымалась выше уровня простой геодезии. И сочинения Архимеда дошли до нас не благодаря римской цивилизации — римляне, повидимому, не знали сочинений Архимеда, и вообще точные науки ничем не обязаны римлянам».

С другой стороны, римляне, как известно, были мастерами в фабрикации занимательных исторических рассказов апологетического характера. Историческая критика показала, что вся древнейшая римская история, включая эпоху царей, — в основном выдумка, имеющая целью прославить знатное происхождение и знатное прошлое римского народа, не опирающаяся ни на какие исторические факты. С такими же апологетическими целями выдумана и злостная характеристика Ганнибала и ряд мрачных черт из его биографии.

Трогательный рассказ о смерти Архимеда относится к категории рассказов о рассеянном ученом, не замечающем того, что происходит вокруг него; к тому же он дошел до нас в ряде противоречащих друг другу версий. [1] Поэтому в свете всех сопоставленных выше фактов не вправе ли мы видеть в этом рассказе апологетическую выдумку, имевшую целью затушевать истинные обстоятельства патриотической смерти Архимеда и тем обелить римское прошлое?

Более того, можно думать, что не в силу простого случая Архимед был предан забвению, и всякая память о нем изгладилась среди сиракузских греков, которые при его жизни увлекались его произведениями и гордились им как величайшим из своих сограждан. Нельзя забывать, что Архимед с точки зрения римских властей его времени был тягчайшим государственным преступником; родственники Архимеда могли заботиться о его погребении и ставить ему памятник — по античным представлениям, это был их религиозный долг, в исполнении которого им не могли отказать даже римляне; но всякий другой, кто стал бы публично вспоминать об Архимеде, навлек бы на себя обвинение в политической неблагонадежности. Этим проще всего объяснить то, что память об Архимеде так скоро изгладилась в Сиракузах.

---

[1] Следы патриотической антиримской версии сохранились в пересказе Диодора у Цецы. См. выше, стр. 177.

Вот что сообщает об этом Цицерон в своих «Тускуланских беседах»:

«В бытность мою в Сицилии, я с любопытством осведомлялся о могиле Архимеда в Сиракузах. Но оказалось, что здешние люди так мало знали об этом, что утверждали даже, будто от его могилы не осталось никакого следа. Однако я продолжал поиски с таким усердием, что мне, наконец, удалось разыскать его могильный памятник среди терниев и чертополоха. Мне удалось сделать это открытие благодаря нескольким стихам, которые по моим сведениям должны были быть выгравированы на этом памятнике и благодаря изображению шара и цилиндра, которое должно было помещаться над этими стихами. Выйдя из ворот Сиракуз, я оказался на пустыре, покрытом многочисленными могилами; я внимательно смотрел во все стороны и вдруг обнаружил маленькую колонну, вершина которой подымалась из заросли; на ней был изображен шар и цилиндр, которые я искал. Я тотчас же сказал сопровождавшим меня представителям Сиракуз, что перед нами несомненно могильный памятник Архимеда. И, действительно, как только позвали людей, чтобы вырубить заросли и проложить для нас дорогу, и как только мы приблизились к этой колонне, мы увидели на ее базе надпись. Часть начертанных стихов можно еще было прочесть, все остальное было стерто временем. Итак, один из самых славных городов Греции, некогда породивший на свет столько ученых, не знал уже даже, где находится гробница самого гениального из его граждан, до тех пор пока не явился человек из маленького города Арпина, чтобы показать им эту могилу!»

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

☆

Архимед в истории математики

Архимед — очень трудный автор. Таким он кажется нам, таким же он должен был казаться древним. Если Плутарх восхищается ясностью доказательств Архимеда, тем, что он ведет читателя к выводу «кратчайшим и наиболее прямым путем», то это, как мы говорили уже, свидетельствует лишь о том, что он, ничего не понимая в математике, никогда не читал Архимеда и рисует лишь образ идеального ученого. Даже Вьета (в XVI в.) счел нужным заметить, что он не сразу и с трудом разобрался в некоторых доказательствах Архимеда; автор «Анализа бесконечно малых» Буйо (Bouillaud), писавший в XVII в., признавался, что многих доказательств Архимеда он так и не понял; Такэ, писавший в том же веке, утверждал, что «Архимеда многие хвалят и восхищаются им, но лишь немногие читают и понимают»; Фонтенель в 1722 г. называл рассуждения Архимеда «длинными и трудными для понимания»; наконец, в XIX в. к этому приговору присоединился Либри, автор «Истории математических наук в Италии».

То, что в наши дни мы можем с помощью научного аппарата читать Архимеда без больших затруднений, ничего не доказывает. Сочинения Архимеда в том виде, как они дошли до нас в рукописях, не могут не представлять больших трудностей для чтения. Одни из этих трудностей существуют только для нас, другие — и для античного читателя. Нас прежде всего затрудняет «геометрическая алгебра» Архимеда, отсутствие удобной и привычной для нас алгебраической символики; к этому присоединяется еще то, что в ряде случаев Архимед получал свои решения атомистическим способом, а затем переводил каждый шаг этого решения на язык метода исчерпания. Поэтому за отсутствием руководящей нити нам чрезвычайно трудно следить за ходом мыслей автора. Нам необходимо все его выкладки переводить на язык нынешней алгебры; от этого решение становится не только более наглядным и компактным, но, применяя обозначения x, y для переменных, $a, b, c\ldots$ для постоянных, a_1 и a_2, b_1 и b_2 для симметричных величин, мы получаем возможность легче понять, к какой цели стремится Архимед. Однако такой перевод на язык алгебры не всегда достаточно легок и прост; поэтому издания, вроде издания Гэзса, где эта работа уже проделана, чрезвычайно облегчают понимание Архимеда.

Другой ряд трудностей существовал и для античного читателя, привыкшего к геометрической алгебре и достаточно в ней вышколенного. Архимед был оригинальным гением; он никогда не занимался, подобно Евклиду и Аполлонию, пересказыванием и подытоживанием того, что было уже сделано другими. Он довольствуется краткими ссылками на свои или чужие сочинения: «Как это доказано в Началах», «Как это было доказано» и т. д., никогда точно не указывая, какое место своих или чужих сочинений он имеет в виду; если принять во внимание, что значительная часть этих произведений до нас не дошла (некоторые из них погибли уже в древности), то станет понятным, почему Архимеда подчас так трудно понять. Будучи гением и обращаясь в своих сочинениях к специалистам-математикам, Архимед предполагает и в читателе наличие такой же математической интуиции, как та, которой он сам обладал; поэтому он более элементарные звенья своей цепи умозаключений часто просто опускает, иногда даже позволяет себе ссылаться на простые теоремы, которые будут им доказаны только в дальнейшей части книги, и т. д. Это не могло не затруднять даже античного читателя-специалиста; поэтому комментирование и толкование Архимеда со вставкой недостающих звеньев на основании собственных догадок комментатора началось уже вскоре после его смерти. Так, например, предложение 4 книги II «О шаре и цилиндре» кончается словами: «анализ и синтез обеих задач будут даны в конце», но никакого анализа и синтеза мы в этой книге не находим. И вот целый ряд математиков (например, Дионисодор, живший вскоре после Архимеда, Диокл, живший во II—I вв. до н. э. и др.) предлагает свои восстановления недостающей части. Эта работа по дополнению и комментированию Архимеда была, наконец, на исходе античной истории, в VI в. н. э., подытожена Евтокием, комментарий которого обычно присоединяется к изданиям Архимеда. Тем не менее, этого комментария и этих заполнений лакун для нас все еще недостаточно, и ряд ученых нового времени, начиная с Мавролико и Коммандино, живших в XVI в., и кончая учеными XX в. Гейбергом, Гэзсом и вер-Экке, продолжают это дело дополнения и комментирования Архимеда.

При помощи готовой алгебраической транскрипции и этих комментариев мы сравнительно легко разбираемся в наследии Архимеда. Совсем иным было бы наше положение при отсутствии этих пособий. Автор этой книги испытал это, когда ему пришлось переводить и комментировать «Геометрию неделимых» Кавальери, незаслуженно считающуюся исключительно темной и непонятной только потому, что она никогда не комментировалась и не переводилась. Книга эта написана совершенно в стиле Архимеда, но несравненно легче и проще его сочинений; тем не менее перевод и комментирование этой книги были сопряжены с огромной затратой труда и времени.

Огромное большинство древних авторов не математиков, писавших об Архимеде и восхищавшихся им, сочинений его не читало, но знало от специалистов, что он величайший из когда-либо живших математиков; с другой стороны, им хорошо была известна его роль при осаде Сиракуз. Вокруг имени Архимеда быстро стал кристаллизоваться ряд легенд. Вероятно, значительная часть этих легенд носила патриотический и антиримский характер, но такие рассказы (за исключением приведенного на стр. 177) до нас не дошли по понятным причинам.

Когда забыли об Архимеде как о политическом деятеле, и о нем сохранилась лишь память как о математике и механике-чародее, правящим римским кругам имело смысл содействовать распространению этих легенд, придав им нужное римлянам направление. Эти легенды строились по обычным шаблонам: крайне рассеянный ученый, думающий все время только о вопросах своей науки и не видящий, что делается у него под носом, испытывающий отвращение ко всему практическому и далекий от политики, так как он заинтересован только в доказательстве правильности своих теоретических положений. Но этот чудак оказывается могущественнейшим из людей, ибо один гениальный ум сильнее тысяч рук. Против машин, открытых Архимедом, бессильны все полководцы.

Для этой живущей своей жизнью и обрастающей все новыми и новыми фактами легенды характерно, что уничтожение вражеского флота при помощи машин казалось недостаточно красочным и чудесным. Рассказывали более поразительные вещи: как старичок Архимед, спокойно сидя на стуле и потихоньку вращая какую-то ручку, плавно передвигал по суше огромный пятиярусный корабль, наполненный людьми. В сочинении о нахождении удельного веса сплавов Архимед, можно думать, употребил встречающееся и в других сочинениях выражение: «Я нашел»; отсюда, повидимому, вырастает анекдот о рассеянном ученом, который бежит совершенно голый по улице из бани с криками: «Я нашел! Я нашел!»

Наконец, в своем сочинении «Катоптрика» Архимед говорил о зажигательных стеклах и зеркалах. Такие стекла и зеркала давно уже привлекали внимание афинского простонародья; уже в V в. в «Облаках» Аристофана Стрепсиад фантазирует, как он при помощи зажигательного стекла расплавит составленный против него и написанный на воске обвинительный акт. Ни современники Архимеда, ни люди, жившие в ближайшие века после него, ничего не знают о том, чтобы Архимед сжег римский флот при помощи зажигательных зеркал. Впервые о сожжении Архимедом римского флота мы читаем у Лукиана (II в. н. э.) и у Галена (III в.), но и здесь речь скорее всего идет еще не о зажигательных зеркалах, а о стрелах, обернутых в зажженную паклю, о «греческом огне». Однако Анфемий, живший в VI в. н. э., говорит о сожжении Архимедом римского флота при помощи зажигательных зеркал как об общеизвестном факте; в дошедшем до нас отрывке из его сочинения «О парадоксах механики» он подробно рассуждает, каким путем Архимед мог этого достичь. Он считает, что Архимед не мог применить для этой цели вогнутое параболическое зеркало, так как его пришлось бы сделать необъятной величины, и приходит к выводу, что Архимед мог достигнуть удовлетворительного результата при помощи комбинации из 24 плоских зеркал. [1]

Любопытно, что особенно живучей и действенной оказалась эта легенда в новое время. Когда в 1548 г. Гонгава опубликовал латинский перевод с арабского перевода сочинения неизвестного античного автора «О зажигательном зеркале в форме вогнутой параболы», [2] в нем сразу же признали утраченное сочинение Архимеда. Оронт Финэ (Orontus Finaeus) написал в 1551 г. специальное иследование,[3] посвященное этому вопросу, в котором присоединяется к выводам Анфемия. В 1632 г. этому же вопросу посвящает специальную работу знаменитый итальянский математик Кавальери [4]. Исходя из приписанного Архимеду сочинения, он изучает чисто геометрически отражение света от параболических, эллиптических и гиперболических зеркал, критикует «Архимеда» и т. д.

---

[1] Даже и в наше время находятся еще изобретатели, предлагающие уничтожить современную военную технику врага (танки, артиллерию, склады боеприпасов), концентрируя на них солнечные лучи с помощью вогнутых зеркал или комбинаций плоских зеркал. Принципиальная невозможность осуществления такого рода изобретений очень хорошо показана в книге Г. Г. Слюсарева «О возможном и невозможном в оптике» (Изд. Акад. Наук СССР, М.—Л., 1944), знакомство с которой может избавить авторов этих изобретений от напрасной траты времени и сил.

[2] Antiqui scriptoris de speculo comburante concavitatis parabolae, ex arabica latine vertit Gongava, Lovanii, 1548. Это редкое сочинение мне недоступно; поэтому я не могу судить, на чем основано приписывание его Архимеду. Обычно считают, что оно не могло принадлежать Архимеду, потому что в нем упоминается Аполлоний; как мы видели, этого довода недостаточно.

[3] De speculo ustorio ignem ad propositam distantiam generante, Parisiis, 1551.

[4] Lo Specchio Ustorio, ovvero Trattato delle settione coniche e alcuni loro mirabili effetti intorno al lume, caldo, freddo, suoni e molto ancora. Bologna, Ferroni, 1632.

Наконец, Кирхер в 1646 г. [1] и Бюффон в 1747 г. пытаются дать экспериментальную проверку «открытия Архимеда». Таким образом, легенда об Архимеде, как это ни удивительно, принесла обильные научные плоды.

Перейдем теперь от легенды об Архимеде к оценке научной роли его сочинений. Архимед уже при жизни был признан великим ученым, классиком математической науки. Время Архимеда и Аполлония было кульминационным пунктом греческой геометрии; после них математика начинает быстро клониться к упадку. Монографии и специальные исследования заменяются «Началами», мы бы сказали, «университетскими учебниками», подытоживающими все, что было открыто отдельными великими математиками. Такими «университетскими учебниками» были «Начала» Евклида и «Конические сечения» Аполлония; в этих книгах было очень немного своего, но в них отчетливо и вразумительно систематизировались достижения математической науки. Математики первых поколений после Архимеда, если не сделали выдающихся открытий, то во всяком случае были достаточно интеллигентными и компетентными, чтобы читать в оригиналах сочинения великих математиков и разбираться в них; таков был, например, живший в I веке до н. э. Гемин. Ученые следующих поколений обычно уже довольствуются изучением «Начал», преимущественно только для прикладных целей. В ту эпоху появляются учебники гораздо более низкого ранга, чем книги Евклида и Аполлония. Это, например, работы жившего около начала н. э. Герона; его книги носят прикладной характер и обходятся подчас без строгих доказательств. Иногда решения изложены у него по египетскому образцу в форме рецептов, без всяких доказательств. Единственным крупным самостоятельным математическим мыслителем этого времени (я не касаюсь здесь Птолемея и его предшественников-астрономов) был живший в III в. н. э. Папп; написанная им «Математическая энциклопедия» («Collectiones») — довольно беспорядочное сочинение, являющееся и хрестоматией по математике и курсом истории математики,— все же она содержит ряд новых и оригинальных открытий.

---

[1] Ath. Kircherus. Ars magna lucis et umbrae in decem libros digesta. Romae, 1646 (книга X, задача IV).

Однако есть монографические работы, знакомство с которыми не только Папп, но и все авторы эпохи упадка считают для себя безусловно обязательным на ряду со знанием курсов Евклида и Аполлония; это — сочинения Архимеда. Несомненно, арабские математики только повторяют мнение математиков поздней античности, когда замечают: «Безусловно необходимо изучать все работы замечательного Архимеда, даже самые незначительные» (аль-Ялиль ас-Сийзи, X в. н. э.). Пусть эти поздние авторы не всегда понимают Архимеда (так Герон, как мы видели, стр. 93 и сл., смешивал равенство моментов с равенством масс и тем свел к нулю все учение Архимеда об опорах), но основательное знакомство с ним, как с классиком математики, они считают для себя обязательным и сплошь и рядом списывают его доказательства даже в тех случаях, когда не называют его имени (например, в случае «теоремы Герона» для определения площади треугольника по трем сторонам).

После Паппа греческая математика быстро вырождается. Римляне вообще не имели вкуса к теоретическим наукам; в их руках геометрия превращается в прикладную геодезию, довольствующуюся приблизительными результатами.[1] По справедливому замечанию вер-Экке, им нынешняя математика не обязана решительно ничем. В V в. н. э. в Восточной империи, в связи с последней вспышкой «языческой» мудрости вообще, наблюдался и последний поздний расцвет математической науки. В Афинах открывается математическая школа, руководимая Проклом, комментатором Евклида; Евтокий пишет замечательный для своего времени комментарий к Архимеду, о котором мы говорили уже выше. В 529 г. эта школа была закрыта императором Юстинианом как «языческая мерзость». Однако уже в 531 г. пришлось прибегнуть к помощи «языческих» математиков: сгорел собор св. Софии, и его пришлось отстраивать. Его строители, Анфемий из Тралл и Исидор Милетский, были для своего времени выдающимися математиками и тщательно изучали Архимеда; с трактатом

[1] См. Рудио (Библиогр. указатель, № 86): «Нет народа, который так мало был бы расположен к научным математическим рассуждениям, как римляне». Статья Kenneth Scott, Roman Opposition to Scientific Progress (Classical Journal, 29, 1933/34, стр. 615 и сл.) мне недоступна.

Анфемия о зеркалах мы познакомились уже выше. В дальнейшем упадок математической науки быстро прогрессирует; некоторые рукописи Архимеда по традиции продолжают переписываться в монастырях, но содержание их уже никому не понятно. Значительная часть сочинений Архимеда в это время в европейских государствах погибла.

В то время как в странах греко-римской культуры математика находилась в состоянии глубочайшего падения и застоя, с IX в. начинается новый ее расцвет в центрах арабской культуры. [1] Экономические потребности этих больших мировых торговых центров и полное отсутствие всяких философских и церковных запретов оказали особенно благотворное влияние на возрождение греческой науки и ее дальнейшее развитие у арабов. Здесь переводятся и изучаются творения классиков греческой науки, давно забытые на их родине. Одно из первых мест и здесь принадлежит Архимеду. Уже около 900 г. Ишак Ибн Хунан, сын и ученик известного арабского математика Хунана Ибн Ишак, под наблюдением отца перевел на арабский язык сочинение Архимеда «О шаре и цилиндре», ставшее у арабов особенно популярным. Примерно в то же время Табит Ибн Куррах из Багдада (836—901) перевел «Измерение круга» и ряд других сочинений Архимеда; известный арабский математик Альмохтассо абиль Хасан снабдил их своими комментариями. В это собрание вошли и «Леммы», греческий подлинник которых не сохранился; впоследствии, в 1657 и 1661 гг., эти «Леммы» будут переведены [2] с арабского на латинский язык, и этот арабский текст останется единственным источником для ознакомления с содержащимися здесь теоремами, открытыми Архимедом.

---

[1] Вопроса об индийской математике я здесь не касаюсь, ибо до сих пор остается спорным, развивалась ли она самостоятельно или под влиянием греческой. Здесь уже в 471 г. н. э. Арьябхатта нашел для π величину, много более точную, чем Архимед, определив периметр 384-угольника (3,1416). Однако ничего нового в метод Архимеда он не внес, и поэтому можно думать, что ему уже был известен метод Архимеда, тем более что индусам было известно и архимедово «неточное значение для π» ($3^1/_7$).

[2] В 1657 г. Гревсом и Форстером в Лондоне, в 1661 г. — Авраамом Эхельским во Флоренции.

Табит ибн Куррах перевел с греческого также небольшое сочинение Архимеда «О семиугольнике», неоднократно упоминающееся и у позднейших арабских авторов. По его сообщению, рукопись этого сочинения дошла до него в крайне плохом состоянии: она была испещрена бессмысленными описками, теоремы и чертежи были перепутаны. Поэтому, как он замечает, восстановление и перевод рукописи доставили ему очень много труда; как мы говорили выше, можно полагать, что он выполнил свою задачу не вполне безукоризненно.

До сих пор греческая рукопись сочинения «О семиугольнике» не найдена; перевод Табита остается нашим единственным источником. Этот перевод стал впервые известен только в 1927 г. в немецком переводе Шоя (Schoy). Тот же Шой опубликовал в 1926 г. сочинение аль-Ялиль ас-Сийзи (951—1024), давшего критический разбор этого решения Архимеда и предложившего свое, лучшее решение (стр. 208).

Вышедшее в X в. исследование аль-Кухи, посвященное сочинению Архимеда «О шаре и цилиндре», показывает глубокое проникновение автора в творчество Архимеда. Он решает здесь три задачи: 1) построить шаровой сегмент, подобный одному данному шаровому сегменту и равновеликий другому данному шаровому сегменту; 2) построить шаровой сегмент, подобный одному данному шаровому сегменту и имеющий поверхность, равную поверхности другого данного сегмента, и 3) построить шаровой сегмент, равновеликий одному данному сегменту и имеющий поверхность, равную поверхности другого данного сегмента. Первые две задачи представляют собой 5 и 6 предложения II книги «О шаре и цилиндре»; третья, наиболее сложная, выдумана самим аль-Кухи. Он решает ее совсем в духе греческой науки — нахождением точки пересечения двух «объемных мест», равносторонней гиперболы и параболы.

Живший в XI в. аль-Махани посвятил свою работу разобранному нами выше (стр. 131 и сл.) предложению 4 той же книги (разделить шар плоскостью так, чтобы образующиеся шаровые сегменты имели между собой данное отношение). Как мы видели, при решении этой задачи получается кубическое уравнение; аль-Махани приводит его к «каноническому» виду $x^3+ax^2+bx=c$, но найти корни этого уравнения ему не удается.

Аль-Бируни посвятил свое сочинение («Книга нахождения хорд в круге») ряду различных задач, частично близких к задачам, содержащимся в извлеченных из Архимеда «леммах». Здесь же приведена, как архимедова, задача нахождения площади треугольника по трем сторонам, которую прежде ошибочно считали впервые решенной Героном.

Но, быть может, наиболее замечательным арабским ученым с интересующих нас точек зрения был живший в Египте около 1000 г. Ибн-аль-Хайтам. Из его работ мы видим, что арабы не только полностью усвоили наследие греческих математиков, в частности Архимеда, но и выбрали из них и развили все то, что могло быть полезным для их учения о бесконечно малых и для алгебраической символики, т. е. для тех математических областей, зачатки которых арабы получили не от греков, а от индусов. У Ибн-аль-Хайтама мы находим наряду с развитой алгебраической символикой и своеобразные инфинитезимальные процедуры. Если Архимед суммировал ряд $1^2+2^2+3^2$..., то этот ученый суммирует уже ряд $1^4+2^4+3^4$ ... Хотя сочинение Архимеда «О коноидах и сфероидах» было арабам недоступно, Ибн-аль-Хайтам нашел объем параболоида вращения (иным способом, чем Архимед). Он же правильно нашел объем тела, получающегося от вращения сегмента параболы вокруг стягивающей его хорды: это — знаменитое «параболическое веретено»; честь открытия его объема обычно неправильно приписывается Кеплеру. Ибн-аль-Хайтам написал и исследования о квадратуре круга (нахождение π), базирующиеся на архимедовом «Измерении круга».

В то время как арабские ученые сделали так много для сохранения наследия Архимеда [1] и дальнейшей работы в предуказанном им направлении, европейская математическая наука, как мы говорили, находилась еще в та-

[1] Значительная часть арабских рукописей до сих пор еще не изучена и не переведена европейскими учеными. Поэтому можно надеяться, что сочинение о семиугольнике — не последнее опубликованное сочинение Архимеда и что в будущем нам станет доступным и ряд других его сочинений.

ком детски беспомощном состоянии, что здесь не могло быть и речи не только о дальнейшем развитии идей Архимеда, но и о простом понимании того, что он написал. Архимед для людей этого времени — это полусказочный чародей-математик древности, почти нарицательное имя, которому готовы были приписать любую математическую головоломку. О нем знают главным образом от арабов; это можно заключить из того, что имя его в XIII—XIV вв. часто цитируется в характерном для арабов искаженном виде — Archimenides. Так, в рукописях Иордана Неморария (около 1220 г.) фигурирует сочинение «Archimenidis de curvis superficiebus», несомненно переведенное с арабского и ничего общего с настоящим Архимедом не имеющее. Точно так же английский математик Фома Брадвардин, выпустивший в свет около 1325 г. сочинение об изопериметрических фигурах, ссылается на того же Archimenides; однако, здесь без всяких собственных добавлений излагаются результаты исследования Зенодора на ту же тему, а та задача на изопериметрические фигуры (полушар—самый большой из шаровых сегментов), которую разбирал Архимед, здесь как раз отсутствует. В самом деле, чего можно ожидать от математиков этого времени, если они (как, например, Боэций) определяли площадь треугольника как произведение половины основания на боковую сторону?

Разумеется, это не исключало того, что отдельные питомцы арабов обнаруживали познания в античной математике. Так, одиноко стоит доминиканский монах Вильгельм Мербеке, живший при папском дворе в Витербо и уже в 1269 г. опубликовавший первый перевод Архимеда с греческого на латинский (греческий язык тогда знали на западе лишь несколько человек, тогда как латынь была языком всей науки того времени). Перевод этот, пропавший в XVI в. и снова найденный В. Розе в Ватикане в 1884 г., был сделан поспешно. Мербеке переводит слово за словом, не вдумываясь в смысл, и в ряде случаев, несомненно, не понял греческого текста; тем не менее такой перевод мог сделать только человек, более или менее разбирающийся в античной математике. Отзыв знаменитого Роджера Бэкона («Этот Вильгельм не знает ничего порядочного ни в науках, ни в языках») вряд ли был беспристрастным.

Но это не исключение. Из сочинений итальянского математика Николая Кузанского, сделавшего в середине XIV в. латинский перевод сочинения Архимеда «Об измерении круга», мы узнаем, что до него среди математиков господствовало убеждение, что Архимедом была найдена точная величина π, равная $3\frac{1}{7}$[1]. Г. Пейербах (1423—1461) и его ученик Региомонтан (И. Мюллер из Кенигсберга, 1468) знают уже и архимедово и индийское значение для π и понимают, что обе величины — лишь приближения. Региомонтан пользовался уже новым переводом Архимеда, сделанным в 1447 г. Яковом Кремонским по поручению папы Николая I, и собственноручно сделал с него копию, причем исправил ряд ошибок и внес в нее разночтения из другой греческой рукописи. Тем не менее в своей вводной лекции об арабском астрономе Альфрагане, читанной им в 1461 г. в Падуе, он утверждает, будто Архимед, доказав, что подкасательная спирали равна длине соответствующей дуги, тем самым нашел точное решение задачи о длине окружности, т. е. дал точное значение π.

В связи с этим поучительна следующая особенность математики XV и XVI вв.: когда в связи с новыми общественными потребностями начинается быстрый расцвет техники, механики и гидростатики, а следовательно, и математики, путь Архимеда оказывается для ученых этого времени слишком трудным; они идут своими более примитивными путями, а из Архимеда выхватывают только готовые результаты или наиболее простые и понятные решения. Так, не без основания полагают, что Леонардо да Винчи, найдя (в 1482—1487 гг.) центр тяжести пирамиды, исходил из соответствующего готового результата у Архимеда, хотя и не заимствовал его доказательства.

Однако спрос на переводы Архимеда все время растет. В конце XV в. в Англии появляется первый *печатный* текст Архимеда, что всего удивительнее, *без латинского перевода*; это — английское издание «Псаммита» без указания автора и года; в 1501 г. Георг Валла в своем сочинении «De expetendis et fugiendis rebus», вышедшем в

---

[1] Точным значением π считали $3\frac{1}{7}$ также Joannes Campanus, живший в VIII в., Альберт Саксонский (1390 и др.).

Венеции, дает перевод принадлежавшей ему рукописи Архимеда; в 1503 г. появляется первое печатное издание старого латинского перевода «Квадратуры параболы» и «Измерения круга», сделанного Мербеке; издал его математик и астролог Люкас Гаурикус (Lucas Gauricus); перевод этот остался почти неизвестным и влияния на современную науку не оказал. Только в 1544 г. в Базеле вышел перевод Архимеда, сделанный Т. Гешофом (Gechauff), сразу получивший широкий резонанс среди математиков и открывший новую эпоху в науке. Это было первое печатное издание всего греческого текста Архимеда с комментарием Евтокия и латинским переводом.

За издание перевода Архимеда взялся также почти одновременно с Гешофом такой крупный и оригинальный математик, как Николай Тарталья. Перевод его вышел в 1543 г. в Венеции. Тарталья перепечатал указанное выше издание Гаурикуса, присоединив к нему еще перевод сочинений «О равновесии плоских тел» и «О плавающих телах». К сожалению, из ложного тщеславия он указал, будто перевод был сделан им самим по найденной им полуистлевшей и трудно читаемой греческой рукописи; в действительности он только списал старый перевод Мербеке.

Ввиду все растущей популярности Архимеда Тарталья в 1551 г. выпустил в Венеции еще и итальянский перевод сочинения «О плавающих телах». Этот первый перевод Архимеда на «lingua volgare» показывает, насколько расширился круг читателей сочинений Архимеда, особенно тех сочинений, чтение которых не требует большой математической подготовки.

Такими работами были прежде всего как раз сочинения «О равновесии плоских тел» и «О плавающих телах», впервые напечатанные Тарталья. Больше всего над ними поработали два наиболее прославившиеся издателя античных математиков — Мавролико и Коммандино. В 1576 г. вышли «Opuscula mathematica» Мавролико (его латинский перевод Архимеда вышел в свет только через 80 лет после его смерти, в 1685 г., в Палермо). Насколько компетентен был Мавролико в вопросах, разбираемых в указанных сочинениях Архимеда, видно из того, что утраченное в рукописях архимедово доказательство теоремы: центр тяжести параболоица вращения лежит на трети высоты, считая от основания, он дополнил сам; кроме того, к своему переводу Архимеда он приложил собственное исследование «О центре тяжести на основе Архимеда». К двум архимедовым книгам «О равновесии плоских фигур» (в его переводе это сочинение разделено на три книги) он от себя добавил четвертую: «О равновесии тел» — первое исследование, посвященное этому вопросу в новое время. Мы убеждаемся в этом сочинении, что Мавролико не только мастерски овладел архимедовым принципом исчерпания, но и мастерски творил в этом же направлении: подобно тому как Архимед вписывал в круг все уменьшающиеся треугольники, построенные на сторонах многоугольника, он вписывал в шар все уменьшающиеся тетраэдры. Современники дали даже Мавролико прозвище «второй Архимед».

Еще более известен как переводчик и комментатор Архимеда Коммандино. В 1558 г. он издал в Венеции перевод сочинений Архимеда «Об измерении круга», «О спиралях», «О квадратуре параболы», «О коноидах и сфероидах», «Псаммит», с обширными комментариями. В 1565 г. он издал в Болонье перевод сочинений «О плавающих телах» и «О равновесии плоских фигур», также с комментариями; он также добавляет от себя «Книгу о центре тяжести тел». В духе нового времени он уже отступает от Архимеда; он обходится *без* доказательства от противного, довольствуясь рассуждениями по аналогии. Любопытно следующее. В переводе сочинения «О плавающих телах», сделанном Мербеке, отсутствовало доказательство теоремы: если круговой сегмент плавает в воде, то он примет такое положение, что ось его совпадет с радиусом Земли. Коммандино добавил от себя это доказательство. Когда в 1906 г. был найден греческий текст этого сочинения (см. стр.143), оказалось, что восстановление Коммандино точно совпало с текстом теоремы Архимеда,—настолько он проникся мыслями Архимеда.

Эти же работы Архимеда привлекали к себе главное внимание ученых и в конце XVI в. Так, в 1586 г. голландец Симон Стэвин выпустил свои «Начала гидростатики», которые всецело базировались на прекрасно усвоенном им труде Архимеда и являлись его продолжением. Он точно копирует схему архимедова сочинения «О плавающих телах» с его определениями и постулатами, из которых логически выводится все дальнейшее. Он развивает учение о плавающих телах в духе Архимеда. Так, например, в дополнение к выводам Архимеда он показал, что давление на круглую пластинку, погруженную в воду и расположенную не параллельно ее поверхности, равно весу водяного усеченного цилиндра, причем центр давления на нее лежит на пересечении ее поверхности с перпендикуляром, опущенным на нее из центра тяжести цилиндра.

Однако в ряде мест это сочинение уже заострено против Архимеда. Не называя Архимеда по имени, автор ведет полемику с его формально риторичной и непрактичной схемой. Архимед, как мы видели (стр. 185), доказывал, что поверхность воды должна иметь форму сферы. По этому поводу Стэвин в постулате VI замечает: «Известно, что поверхность воды имеет форму сферы... Но принятие соответствующего положения чрезвычайно затруднило бы последующие доказательства, *не давая никакой практической выгоды*. В целях упрощения, мы принимаем поэтому, что поверхность воды — плоскость». Архимед утверждал, что давление жидкости, находящейся в покое, во всех точках одинаковое; в противном случае жидкость перемещалась бы из участков с большим давлением в участки с меньшим, пока не достигла бы состояния покоя. С точки зрения Стэвина самое допущение того, что жидкость раньше или позже должна прийти в состояние покоя, вовсе не является само собой подразумевающимся; поэтому он прибавляет дополнительный постулат: «вечное движение», perpetuum mobile, невозможно. Наконец, в виде поправки к рассуждениям Архимеда он вводит такой фактор, как *вес воздуха*.

Характерно также упрощение, внесенное им в архимедов метод исчерпания. Как впоследствии Ньютон, он раз навсегда постулирует: «Величины, разность между которыми меньше любой заданной величины, *равны между собой*».

Большой интерес привлекают к себе в эту эпоху и «зажигательные зеркала», открытие которых по традиции приписывалось Архимеду. Оронт Финэ (Orontus Finaeus) выпустил специальную книгу, посвященную этому вопросу (см. стр. 236, примечание), в котором присоединяется к выводам Анфемия (см. стр. 235); это — тот самый Финэ, который, как и знаменитый филолог И. Скалигер (J. Scaliger, Nova Cyclometria, Лейден, 1592), считал возможным найти точное значение π.

Начало серьезной и углубленной работе над математическими сочинениями Архимеда положил великий основатель нынешней алгебры Вьета. Мы уже указали на те чрезвычайные трудности, с которыми должны были на первых порах встретиться ученые, оторвавшиеся от античной школьной традиции, особенно в тех случаях, когда Архимед находил доказательство по атомистическому методу, а затем перелицовывал его на апагогическое; в этом случае смысл и цель доказательства совершенно ускользают от читателя, не говоря уже о том, что и вообще геометрическая алгебра древних не наглядна и весьма трудна для восприятия. Вьета решил изучить метод или «канон» доказательства таких теорем и выделил доказательства, найденные по методу геометрической алгебры, в особый курс «Effectionum geometricarum canonica recensio», вышедший в 1593 г. Уже выше (стр. 102) мы отметили особые трудности архимедова доказательства теоремы о равенстве подкасательной и соответствующей дуги спирали. Вьета вначале так и не мог разобраться в нем и считал парадоксальный на вид вывод Архимеда о равенстве кривой и прямой линии неверным и основанным на логической ошибке. Но впоследствии он выпустил особое сочинение «О спиралях», в котором признается в сделанном им промахе и восхищается доказательством Архимеда. Прямым последователем Архимеда был Вьета и в применении νεῦσις для решения уравнений 3-й степени и задачи трисекции угла, а также в определении величины π, которую он не только нашел с значительно большей точностью, чем Архимед, но и впервые представил в виде бесконечного ряда; [1] он нашел π с точностью до 9 знаков. Еще большей точности достиг его современник ван-Румен (van Roomen, Adrianus Romanus). В ответ на попытку И. Скалигера най-

---

[1] $$\pi = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right)}\cdots}$$

ти точную[1] величину π он выпускает свою «Апологию Архимеда против Скалигера», где дает греческий текст сочинения Архимеда «Об измерении круга», латинский перевод, комментарий и десять диалогов, в которых по всем правилам схоластики доказывает невозможность найти точное значение π. В другой книге, в сочинении «Метод многоугольников» («Methodus polygonorum»), вышедшей в Лувене в 1593 г., ван-Румен дает значение π с 15 десятичными знаками, вычисленное по методу Архимеда.

С начала XVII в. внимание ученых привлекает к себе преимущественно другая группа произведений Архимеда. В связи с практическими потребностями выдвигаются на первый план проблемы измерения площадей и объемов. Трудно судить, прав ли Ольшки, утверждающий, что атомистические методы решения таких задач сохранились в устной традиции техников и архитекторов; скорее, ученые XVII в. либо получили эти решения в наследство от арабов, либо пришли к ним самостоятельно, расшифровывая непонятные им решения, содержащиеся у Архимеда. Впрочем, нельзя забывать, что архимедов «Эфод» был до 1906 г. не известен, а во всех прочих сочинениях Архимеда атомистический метод завуалирован и переработан в апагогические доказательства.

Для ученых XVII в. открывалось несколько путей: 1) считать, что Архимед знал атомистический метод, но скрывал его от читателя; 2) считать, что апагогический метод Архимеда при всей его точности является недостаточно наглядным и убедительным и что он поэтому нуждается в замене новым; 3) поступать так, как поступали со священным писанием, т. е. придавать аргументации Архимеда тот смысл, которого она не имела, истолковывая ее в смысле метода неделимых.

По этому последнему пути пошел Кеплер. Его вышедшая в 1615 г. «Стереометрия винных бочек» преследовала, как видно из заглавия, практическую цель. Первую часть ее Кеплер озаглавил «Архимедова стереометрия». Он дает здесь ряд теорем из сочинений Архимеда «О шаре и цилиндре», но в чрезвычайно упрощенной трактовке. Он

[1] Скалигер уверял, что уже периметр вписанного в круг 12-угольника больше окружности этого круга.

признает (стр. 114 русск. пер.), что Архимед пользовался методом косвенного доказательства, но, по мнению Кеплера, понимать Архимеда надо так: окружность как бы (velut) состоит из стольких частиц, сколько в ней точек, т. е. из бесконечного числа частиц. Если соединить концы каждой такой частицы с центром, получим ряд треугольников с вершинами в центре и т. д. Тела представляют собой «ставшие телом плоскости» (plana corporata, т. е. совокупности ряда наложенных друг на друга плоскостей: цилиндр — кругов, правильный параллелепипед — квадратов). Поэтому объем цилиндра относится к объему вписанного в него параллелепипеда, как площади их оснований. Одним словом, метод исчерпания всюду отбрасывается и заменяется бесконечно малыми.

Разумеется, такое толкование в стиле «гармонических» толкований священного писания — прямое насилие над Архимедом, и Александр Андерсон был прав, когда в 1616 г. в сочинении «Иск об освобождении Архимеда» («Vindiciae Archimedis») заявлял, что Кеплер фальсифицирует Архимеда. Однако Кеплер, игнорируя метод доказательства Архимеда, угадал его эвристический метод; поэтому в «Supplementa ad Archimedem» ему удается найти объем ряда тел, не рассмотренных Архимедом, по большей части вполне правильно.

Тем же духом пропитано издание Архимеда, сделанное Давидом Рево (Davidus Rivaltus) и вышедшее в 1615 г. в Париже «с новыми доказательствами и комментариями» (novis demonstrationibus commentariisque illustrata). Здесь даны полностью только тезы теорем, а доказательства сокращены и упрощены. Необходимо отметить, что, как видно из ссылок в «Геометрии неделимых»[1], именно этим текстом Архимеда пользовался знаменитый математик Бонавентура Кавальери (1590—1647).

Вряд ли можно назвать еще какого-нибудь ученого, который знал бы Архимеда так глубоко и основательно, как Кавальери. Еще в молодости Кавальери изучил, наряду с Аполлонием, Паппом и Птолемеем, также и Архимеда. Об этом свидетельствует такой компетентный судья, как Галилей, называющий его в своих письмах

---

[1] См. стр. 350 и сл. моего перевода.

«новым Архимедом» и «соперником Архимеда». Изучая последовательно все наследие Архимеда, Кавальери дополняет недостающие доказательства, старается заменить доказательства Архимеда более простыми. Работая над «Шаром и цилиндром», он придумывает новые доказательства для нахождения объема конуса, столь же строгие, как у Архимеда, но более простые; работая над «Сфероидами и коноидами», он находит объем нового тела, tympanum hyperbolicum, эллиптического гиперболоида, неизвестного Архимеду. Он нашел также более простой вывод квадратуры параболы, а, работая над спиралями, он, по его собственным словам, «пошел значительно дальше Архимеда», не только найдя новым путем квадратуру спирали, но и открыв ряд новых теорем. Вслед за Архимедом он применяет законы статики к решению геометрических задач, но при этом исходит не только из тел с равномерно распределенной материей, но и постулирует тела, удельный вес которых изменяется по некоторому определенному закону. Изучая вслед за Архимедом гидростатику, он, подобно Архимеду, конструирует новую машину «гидраконтистерий» и пишет два исследования по гидравлике. Наконец, отправляясь от приписывавшегося Архимеду исследования о зажигательных зеркалах, он изучает фокусные свойства конических сечений.

Но, конечно, важнее всего этого «Геометрия неделимых», дающая новые принципы интегрирования на основе работ Архимеда. Останавливаться сколько-нибудь подробно на развитии учения о квадратурах у Кавальери и его преемников мы здесь, разумеется, не можем; для этого пришлось бы написать целую книгу [1]. Здесь отметим только, что Кавальери, в противоположность своим предшественникам и преемникам, прекрасно понимал, что метод исчерпания давал абсолютно доказанные и чуждые противоречий результаты, чего ему самому с его методом неделимых так и не удалось достичь. Но, с другой стороны, Кавальери очень резко ощущал, что метод Архимеда не-

---

[1] См. мое предисловие к переводу «Геометрии» Кавальери (Москва, 1940); мои статьи: «Эйлер и его «исчисление нулей» (в сборнике «Эйлер», изд. Акад. Наук, 1936); «Предшественники Ньютона в философии бесконечно малых» (в сборнике «Исаак Ньютон», изд. Акад. Наук, 1943).

плодотворен, искусственен, не нагляден и поэтому не отличается непосредственной убедительностью; Кавальери стремился всюду, где это возможно, заменить доказательства Архимеда прямыми доказательствами, а когда в одном случае (при определении объема пирамиды) ему не удалось это сделать, он ощущал это как большой недостаток своей системы. Тем не менее, понимая, что его метод недостаточно убедителен, он находит нужным присоединить в последней книге своей «Геометрии» еще доказательства своих теорем more Archimedeo. К сожалению, для Кавальери еще был недоступен «Эфод» Архимеда, из которого он мог бы убедиться, что и сам Архимед находил свои решения при помощи атомистического метода, считая его более наглядным и плодотворным.

Очень большое влияние оказал Архимед и на математическое творчество двух современников Кавальери — голландца Гюйгенса (1654) и англичанина Броункера. Как мы говорили выше, Архимед находил квадратуру параболического сегмента, вписывая в него многоугольную прямолинейную фигуру и последовательно удваивая число ее сторон. Он показывал, что каждая новая прибавка к площади этой многоугольной фигуры меньше $\frac{1}{4}$ предыдущей и таким образом получал как верхний предел для площади параболического сегмента

$$\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\ldots$$

Гюйгенс применил этот же прием для нахождения площади кругового сегмента. Он доказывает теоремы: разность между площадью (resp. длиной окружности) круга и площадью (resp. периметром) вписанного правильного $2n$-угольника больше $\frac{1}{3}$ разности между площадями (resp. периметрами) вписанных правильных $2\,n$-угольника и n-угольника; разность между площадью круга и $\frac{2}{3}$ площади описанного правильного многоугольника больше $\frac{1}{3}$ площади вписанного правильного одноименного многоугольника и т. д. Этим путем Гюйгенс получил для π ряд, сходящийся гораздо быстрее, чем у Архимеда (уже для 60-угольника он нашел таким путем 9 точных знаков!). Броункер применил этот же архимедов прием для нахождения квадратуры гиперболического сегмента. Однако Гюйгенс и Броункер были последними преемниками Архимеда в этом вопросе: «Со времени Уоллиса вместо способа вписанных и описанных многоугольников основной задачей стало разыскание *аналитических выражений* для отношения длины окружности к диаметру, вследствие чего старые архимедовы методы были забракованы» (Рудио).

Гюйгенс (как, впрочем, и Паскаль) унаследовал у Архимеда также и статический метод интегрирования (при помощи нахождения центра тяжести) и теорему о свойстве подкасательной спирали.

Гюйгенс, Стэвин, Торичелли, Ферма, Паскаль и др. были, таким образом, продолжателями Архимеда. Тем не менее результатом выхода в свет книги Кавальери и сочинений этих его современников было то, чего сам Кавальери меньше всего мог бы ожидать: сочинения Архимеда постепенно перестают изучать как основное руководство для усовершенствования в математике и механике, в нем все более и более становятся склонны видеть почтенную реликвию. Математики этого нового времени жадно стремятся расширить рамки геометрии, обогатив ее новыми истинами; стоит ли возиться с кропотливыми доказательствами исчерпанием, когда все может быть доказано так просто по методу неделимых? Архимед становится символом реакции в математике; книга Кавальери становится знаменем, вокруг которого группируются все те, кто тяготился громоздкостью процедуры исчерпания. «Долой Архимеда, да здравствует Кавальери!» становится боевым кличем математиков этой эпохи. Так, друг и современник Кавальери Торичелли замечал: «Метод Кавальери является действительно научным способом доказательства, *потому что всегда идет путем прямым и свойственным самой природе*. Жаль мне древней геометрии (т. е. геометрии Архимеда), которая... нашла столь мало истин, касающихся определения величины тел, оставив это злополучное убожество в наследие нашему веку». Так, Ферма находил $\int x dx$ и $\int x^2 dx$, как мы видели, по способу Архимеда, но общая формула

$$\int_0^x x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

выводится им при помощи простой аналогии; архимедова метода исчерпания с reductio ad absurdum он вообще не применяет, хотя и относится к нему с большим уважением, как к почтенной реликвии. Он раз навсегда заявляет: «Во всех случаях удобно может быть проведен и архимедов способ доказательства через reductio ad absurdum с помощью описанных и вписанных фигур». Замечание это верно далеко не для всех случаев, и ясно, что сам Ферма и не пытался проверять его: в числе изучаемых им случаев есть и несобственные интегралы (с двойным предельным переходом), где провести такое доказательство было бы затруднительно.

Так же, как Ферма, поступает и Паскаль; и он довольствуется априорным, в ряде случаев неверным утверждением, будто «все то, что доказано путем неделимых, можно доказать и методом Архимеда», освобождая себя таким образом навсегда от обязанности давать строгие доказательства своих положений.

Итак, Кавальери, Ферма и Паскаль дали в руки математикам новое оружие; книги Архимеда перестают быть настольными учебниками математики — их сдают в архив. Такэ (A. Tacquet), бывший упрямым поклонником архимедова метода и в своей книге «Cylindricorum et annularium liber», вышедшей в 1651 г., требовавший, чтобы каждое геометрическое положение доказывалось методом исчерпания, принужден с прискорбием заметить: «Sed illum plures laudant quam legunt; admirantur plures quam intelligunt». («Архимеда больше люди хвалят, чем читают; больше людей восхищаются им, чем понимают его»). Это замечание содержится в книге «Элементы геометрии на плоскости и в пространстве с добавлением нескольких теорем из Архимеда», вышедшей в 1654 г. и посвященной пропаганде метода Архимеда. Однако сам Такэ никакого нового алгорифма предельного перехода не предложил, а метод исчерпания (как указывал уже сам Архимед, что́, впрочем, не было известно Такэ) был бесплоден для творческой математической работы. Книга Такэ никого увлечь или убедить не могла, ибо ничего нового, принципиально интересного для людей этого бурного периода она не давала; она давала лишь доказательство методом исчерпания для некоторых кубатур, уже найденных методом неделимых.

Архимед и его наука отходили в область прошлого, и вряд ли было случайностью, что именно Такэ написал первую (после авторов античности) историю математики: «Historica narratio de ortu et progressu matheseos». Такие книги обычно пишут, когда заканчивается целая эпоха в истории человеческой мысли и можно подвести итог сделанному.

Эпоха революционной борьбы с Архимедом должна была скоро закончиться, и должно было наступить время, когда к оценке Архимеда можно будет подойти более объективно. Такой объективный подход к Архимеду характерен для английских ученых. Они не спорят о том, какой метод лучше — архимедов метод исчерпания или новый метод бесконечно малых. Тщательное изучение Архимеда приводит их к правильному (и в 1906 г. вполне подтвердившемуся благодаря нахождению «Эфода»!) выводу, что *сам Архимед для нахождения своих теорем применял метод неделимых*. Барроу в XXVII лекции своего университетского курса в Кэмбридже (который слушал, между прочим, и Ньютон) заметил, что предлагаемые Архимедом решения выдают его и показывают, какого рода анализ он употреблял («quod ipsum satis prodit ac arguit qualem is analysin usurpavit»); иначе, говорит Барроу, «было бы совершенно непонятно, как Архимед путем огромного числа сложений, делений, перестановок и обращений пропорций, лишенных логической целеустремленности, мог прийти к верному выводу. Верный результат мог бы быть при таком предположении только делом случая, а не логических рассуждений и искусства, но при этом было бы непонятно, почему случай каждый раз выводил Архимеда на правильную дорогу».

Поэтому, выпуская в 1675 г. в Лондоне свой латинский перевод Архимеда, Барроу считает возможным, не придерживаясь точно контекста подлинника, излагать своими словами его предложения сокращать доказательства и заменять их своими. Еще через три года, в 1679 г., Барроу выпускает в свет свою «Лекцию, в которой теоремы Архимеда о шаре и цилиндре излагаются в обработке методом неделимых». Барроу учел и «Леммы», опубликованные в 1657 и 1661 гг.

Уоллис, как издатель, пошел по более научному пути. В 1676 г. он выпускает в свет подлинный греческий текст «Псаммита» и «Измерения круга» с комментариями Евтокия, новым латинским переводом и своими примечаниями. Архимеда он ставил чрезвычайно высоко, оценивая его так: «Муж поразительной проницательности, он заложил первоосновы почти всех открытий, развитием которых гордится наш век». Однако с архимедовым методом трактовки геометрических вопросов он согласиться не может. Как и Барроу, он приходит к выводу, что Архимед «умышленно скрывал метод своих решений». Это, конечно, замечает он, наилучший способ для того, чтобы избежать упреков и возражений со стороны читателей; но сам Уоллис не хотел следовать примеру Архимеда. Конечно, замечает Уоллис, было бы умнее, если бы и он просто выставлял и доказывал отдельные предложения, вместо того чтобы излагать весь свой метод; он избежал бы таким образом замечаний и упреков, *но не мог бы подготовить почву для дальнейших успехов математики.*

Какая ирония судьбы! В то время, когда Уоллис делал этот выговор Архимеду, еще не был найден его «Эфод», и Уоллис не мог знать, что, порицая Архимеда, он почти дословно повторяет его же собственные слова: «Я счел уместным в этой книге изложить мой метод... полезный и для доказательства теорем... Легче найти строгое доказательство после того, как при помощи этого метода приобретена ориентировка в вопросах... Теоремы, которые я сейчас публикую, я нашел прежде при помощи этого метода, и я решил письменно изложить его... потому что, как я убежден, я оказываю этим *немаловажную услугу математике: многие из моих современников или последователей, ознакомившись с этим методом, будут в состоянии находить новые теоремы, до которых я еще не додумался*».

К сожалению, мечта Архимеда не исполнилась: в эпоху бурного роста математической науки его «Эфод» оставался лежать под спудом. Если бы он был найден на три столетия раньше, было бы сбережено много времени и энергии, затраченных на бесполезные споры.

К началу XVIII в. книги Архимеда окончательно перестают быть настольными курсами математики. Достаточно просмотреть указатель к IV тому «Лекций по истории математики» М. Кантора, чтобы убедиться, что с этого времени Архимеда изучают только историки математики. Новая система удобных алгебраических обозначений и преобразований и новый алгорифм для действий над бесконечно малыми величинами избаловали новое поколение математиков и сделали их туго восприимчивыми как к громоздкой и неуклюжей геометрической алгебре древних, так и к громоздкому и неуклюжему методу исчерпания. Строгость новых инфинитезимальных методов была достигнута не возвратом к методу исчерпания, а другими, новыми путями.

Правда, Лежандр (Legendre) выпустил в 1812 г. свои «Éléments de géometrie», в которых восстанавливает в правах старый метод исчерпания, почти не внося в него изменений; он даже называет его архимедовым методом (как мы видим теперь из «Эфода», название это очень неудачное). Но книга Лежандра проникнута косным реакционным духом и, по замечанию Кантора, «не отвечала требованиям того времени, которые ставились ей философской критикой».

Итак, Архимед сыграл огромную роль в истории математики и в эллинистическо-римскую эпоху (Гемин, Герон, Папп), и в средние века (арабские математики), и в XVII в., в один из наиболее блестящих периодов бурного роста математики.

И в наше время чтение Архимеда принесет, конечно, свою пользу не только в деле тренировки молодых математиков; оно может навести творческого математика на ряд новых, принципиально интересных мыслей. Но громоздкое научное оформление вынуждает математика наших дней подходить к Архимеду, как к интересной реликвии прошлого: это — великолепный каменный топор, виртуозно изготовленный художником-дикарем, а не остро отточенный клинок удобного современного ножа, сработанного на фабрике с учетом всех нужд современности.

Этот новый, *исторический* подход к Архимеду звучит уже в отзыве на пейраров перевод Архимеда, представленном Даламбером во Французскую Академию Наук: «За Архимедом сохранится репутация одного из самых удивительных гениев, которые когда-либо посвящали себя математике... Несмотря на *преимущества новых методов*, сознаваемые всеми геометрами, всякий математик должен заинтересоваться, какими своеобразными путями и глубокими размышлениями Архимед мог достичь таких сложных результатов».

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

I. ИЗДАНИЯ ТЕКСТА АРХИМЕДА И СТАРЫЕ ЛАТИНСКИЕ ПЕРЕВОДЫ

1. Θεώρημα ὦ κέχρηται ἐν τῷ Ψαμμίτῃ Ἀρχιμήδης. s. a (Оксфорд, конец XV века).
2. Campani viri clarissimi Tetragonismus, id est circuli quadratura, Romae edita cum additionibus G a u r i c i; Archimedis Syracusani Tetragonismus; de quadratura circuli secundum Boetium. Venetiis, 1503.
3. Archimedis opera, quae quidem exstant omnia, nunc primum et graece et Latine edita; adjecta sunt Eutocii Ascalonitae in eosdem Archimedis libros commentaria, item graece et latine, nunquam antea excusa. Basileae, Jos. Hervagius, 1544 (перевод сделан T h o m a s G e c h a u f f V e n a t o r i u s).
4. P a s c h a s i i H a m e l i i regii mathematici commentarius in Archimedis Syracusani praeclari mathematici librum de numero arenae. Lutetiae, 1557.
5. Archimedis opera nonnulla a F e d. C o m m a n d i n o nuper in latinum conversa et commentariis illustrata. Venetiis, 1553.
6. Archimedis de iis quae vehuntur in aqua libri duo, a F e d. C o m m a n d i n o restituti et illustrati, Eiusdem F. C o m m a n d i n i liber de centro gravitatis solidorum. Bononiae, 1565.
7. G u i d i U b a l d i in duos Archimedis aequeponderantium libros paraphrasis, scholiis illustrata. Pisauri, 1588.
8. In Archimedis Circuli Dimentionem expositio et analysis. Apologia pro Archimede ad clarissimum Josephum Scaligerum, Oruntium Finaeum et Reymarum Ursum in decem dialogos distincta. Authore A d r i a n o R o m a n o. Wurceburgi, 1597.
9. Archimedis opera quae exstant, novis demonstrationibus commentarisque illustrata, per D a v. R i v a l t u m a F l e u r a n t i o Caenomanus. Paris, 1615.

10. Archimedis opera mechanicorum libri, Apollonii Pergaei conicorum et Sereni de sectione cylindri. Lutetiae 1636 (ed. Mersenne).
11. Lemmata Archimedis apud Graecos et Latinos jampridem desiderata, e vetuste codice M. S. arabico, a Johanno Gravio traducta, et nunc primum cum arabum scholis publicata, revisa et pluribus mendis expurgata a Samuele Forster. Londini, 1657.
12. Apollonii Pergaei conicorum libri V, VI, VII, paraphraste Abalphato Asphahanensi, nunc primum editi. Additus in calce Archimedis assumptorum liber ex codicibus arabicis M. SS. Abrahamus Ecchellensis Maronita latinos reddidit, Jo. Alfonsus Borellus notas adjecit. Florentiae, 1661.
13. Elementa geometriae planae et solidae quibus accedunt selecta ex Archimede theoremata, auctore Andrea Tacquet. Ed. tertia correctior. Antwerpiae, 1672.
14. Admirandi Archimedis Syracusani monumenta omnia mathematica quae exstant, ex traditione D. Fr. Maurolici. Panormi, 1685.
15. Archimedis opera, Apollonii Pergaei conicorum libri IV, Theodosii spherica, methodo nova illustrata et succincte demonstrata. Londini, 1675 (издание Barrow).
16. Archimedis Syracusani Arenarius et Dimensio circuli, Eutocii Ascalonitae in hanc commentarius, cum versione et notis. Oxonii, 1676 (издание J. Wallis).
17. Archimedis quae supersunt omnia, cum Eutocii Ascalonitae commentariis, ex versione Josephi Torelli Veronensis, cum nova versione latina. Oxonii, 1792.
18. Lessing G. E. Beiträge zur Geschichte und Literatur. Braunschweig, 1773 (на стр. 421 и сл. — первое издание архимедовой задачи о быках).
19. Suter H. Ein Fragment aus Archimedes Stomachion. Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik, IX, 1899, стр. 491 и сл.
20. См. № 63, 110, 112, 114.
21. Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii ed J. L. Heiberg, I—III. Leipzig, Teubner, 1880—81; 2 изд., т. I, 1910; т. II, 1913 (основное издание текста).

II. ЛУЧШИЕ ПЕРЕВОДЫ АРХИМЕДА НА НОВЫЕ ЯЗЫКИ

22. Peyrard F. Oeuvres d'Archimède, traduites littéralement avec un commentaire. Paris, 1807 (неполное издание); 2 изд. 1894.
23. Archimedes von Syrakus vorhandene Werke, aus dem Griechischen übersetzt und mit erläuternden und kritischen Anmerkungen begleitet von E. Nizze. Stralsund, 1824.
24. Heath T. L. The works of Archimedes edited in modern notations, with introductory chapters. Cambridge, 1897. Авторизованный немецкий перевод с исправлениями и дополнениями автора на основе рукописи, найденной в 1906 г.: Archimedes

Werke. Mit modernen Bezeichnungen herausgegeben und mit einer Einleitung versehen von Sir Thomas H e a t h. Deutsch von Dr. Fritz K l i e m. Berlin, 1914.
25. Ver E e c k e Paul. Les oeuvres complètes d'Archimède traduites du grec en français avec une introduction et des notes. Paris-Bruxelles, 1921.
26. C z w a l i n a A. Archimedes Uebersetzungen mit Kommentar. 5 выпусков. Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften. Leipzig, 1922—1925.

III. ИЗБРАННАЯ ЛИТЕРАТУРА ОБ АРХИМЕДЕ

1. ОБЩИЕ РАБОТЫ ОБ АРХИМЕДЕ

См. прежде всего общие курсы истории математики (Кантора, Мари, Либри, Бреттшнейдера, Гюнтера, Ганкеля, Лориа, Нессельмана, Таннери, Цейтена и др.), выше № 21 (предисловие Гейберга к т. III), № 24 и 25, а также:

28. M a z z u c h e l i J. M. Notizie intorno alla vita di Archimède. Brescia, 1737.
29. G u t e n a c k e r J. Das Grabmal des Archimedes, ein Beitrag zur Charakteristik dieses grossen Mathematikers. Würzburg, 1833.
30. H e i b e r g J. L. Quaestiones Archimedeae. Inest de Arenae numero libellus. Hauniae, 1879 (важнейшая работа об Архимеде).
31. H e i b e r g J. L. Ueber den Dialekt des Archimedes. Jahrbuch für Philologie, Suppl. B. XIII, стр. 543 и сл. Interpolationen in den Schriften des Archimedes, там же, стр. 566 и сл.
32. H e i b e r g. J. L. Neue Studien zu Archimedes. Zeitschrift für Mathematik und Physik, Hist.-litt. Abteilung,[1] XXXVI, 1889, Supplementheft.
33. S u s e m i h t F. Geschichte der griechischen Literatur in der Alexandrinerzeit, т. I, стр. 723—733. Leipzig, 1891.
34. B e c k e r H. Die geometrische Entwicklung des Infinitesimalbergiffs im Exhaustionbeweise bei Archimedes (26 стр.). Insterburg, 1894.
35. H u l t s c h F. Статья «Archimedes» у Pauly-Wissowa, Real-Encyclopädie der klassischen Altertumswissenschaften, т. II, 1895, стр. 507—539.
35a. B a h n t j e H. Quaestiones Archimedeae. Diss. 1903.
36. F a v a r o A. Archimede. Genova, 1912.
37. M i d o l o P. Archimede e il suo tempo. Siracuse, 1912.

[1] В дальнейшем Zeitschrift für Mathematik und Physik, historisch-litterarische Abteilung я буду обозначать сокращенно — ZfMPh.

38. Heiberg J. G. Le rôle d'Archimède dans le développement des sciences exactes. Scientia, т. XX, 1916.
39. Heath Th. L. Archimedes (Pioneers of Progress, Men of Science), 58 стр., 1 портрет. London, Society for promoting Christian Knowledge, 1920.
40. Winter Franz. Der Tod des Archimedes (82 Winckelmanns Programm der archäologischen Gesellschaft zu Berlin). 24 стр., 1 илл., Berlin, W. de Gruyter, 1924.
41. Czwalina A. Archimedes (Mech.-phys. Bibliothek, 64), 47 стр. Leipzig, Teubner, 1925.
42. Speiser A. Klassische Stücke der Mathematik. Zürich, O. Füssli, 1925.
43. Loria Gino. Archimede. La scienza che domino Roma. (I curiosi della natura). 72 стр., Milano, 1925.
44. Kliem Fr. und Wolff G. Archimedes. 143 стр., 64 рис., 3 табл., Berlin, 1927.
45. Shoen, Harriet H. Archimedes, the reconstruction of a personality. Scripta mathematica, 2, 1934, стр. 261—4, 342—7.
46. Wieleitner H. Das Fortleben der Archimedischen Infinitesimalmethoden bis zum Beginn des 17 Jahrhunderts; insbesondere über Schwerpunktbestimmungen. Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, B. I, 1931, стр. 201—220.

2. ИССЛЕДОВАНИЯ ОБ ОТДЕЛЬНЫХ РАБОТАХ АРХИМЕДА

«О равновесии плоских фигур», «О рычагах»

47. Dühring E. Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik, Berlin, 1873, стр. 1—12, 61 и сл.
48. Vailati. Atti della Accademia di Torino, 32, 1897, стр. 742—758; Atti del Congresso Internationale di Science Storiche, Roma, 1904, v. XII. Scritti, стр. 497—502.
49. Mach E. Die Mechanik in ihrer Entwicklung. Leipzig, 1904, стр. 1—17, 33—34, 85—87, 107—110 и др.
50. Duhem P. Les origines de la statique. Paris, 1905, стр. 1—12, 61—98.
51. Juel C. Kgl. Danske Vid. Forh. Kjobenhavn, 1914, № 5—6, стр. 421—441.
52. Stein W. Der Begriff des Schwerpunktes bei Archimedes. Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, B. I, 1930, стр. 221—224.
53. Lenzen V. F. Archimedes' Theory of the Lever. Isis, т. XVII, 1932, стр. 288—289.
54. Reimann Dora. Historische Studien über E. Mach's Darstellung der Entwickelung des Hebelsatzes. Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, B. 3, 1936, стр. 554—592.

«О небесном глобусе»

55. Hultsch F. ZfMPh., B. XXII, 1877, стр. 106 и сл.
56. Curtze M. Jahresbericht für Mathematik, B. XI, 1877, стр. 186 и сл.
57. Tannery P. Revue de philologie, т. XVII, 1893, стр. 213 и сл.

«О шаре и цилиндре»

58. Zeuthen H. Bibliotheca Mathematica, 1893, стр. 97 и сл.
59. Zeuthen H. Die Lehre von Kugelschnitten im Altertum, стр. 235 и сл.

«О коноидах и сфероидах», «Квадратура параболы»

60. Heiberg J. L. ZfMPh., B. XXV, (1880), стр. 58 и сл.
61. Zeuthen H. Die Lehre von Kugelschnitten im Altertum, стр. 416, 447, 408 и др.

«Эфод»

62. Schmidt Wilh. Archimedes Ephodikon. Bibliotheca Mathematica, B. I, стр. 13 и сл.; B. III, стр. 143 и сл.
63. Heiberg J. L. Eine neue Schrift des Archimedes. Hermes, B. XLII, 1907, стр. 235—297. Русский перевод этой статьи см. № 121.
64. Heiberg J. L. und Zeuthen H. Eine neue Schrift des Archimedes. Uebersetzung und Kommentar. Bibliotheca Mathematica, 3 Folge, B. VII, 1907, стр. 321—363.
65. Heiberg J. L. Geometrical Solutions Derived from Mechanics. Chicago, 1909.
66. Reinach Th. Un traité de géometrie inédit d'Archimède. Revue générale de sciences pures et appliquées, 1907 (от 30 ноября и 15 декабря).
67. Heath T. L. The «Method» of Archimedes. Cambridge, 1912.
68. Arendt F. Bibliotheca Mathematica, 3 Folge, B. XIV, 1915, стр. 295 и сл.
69. Ruffini E. H. Il Metodo di Archimede e le origini dell'analisi infinitesimale nell'antichità. Roma, 1926.
70. Lambossy. Archimède... Le Traité de la méthode. Bulletin de la Société Fribourgeoise des sciences naturelles, 29, 1929, стр. 20—39.

«О спиралях»

71. Junge. Die Spirale des Archimedes. Zeitz, 1826.
72. Lehmann Fr. X. Die archimedische Spirale mit Rücksicht auf ihre Geschichte. Gymn. Programm, Freiburg, 1862.
73. Scherling Ch. Die archimedische Spirallinie. Gymn.-Programm, Lübeck, 1865.

74. T a n n e r y. Bulletin des sciences mathématiques, 2 sér. VIII, 1, 1884, стр. 107 и сл.
75. T a n n e r y P. Bulletin des sciences mathématiques, 3 sér. I, 1895, стр. 265—271.

«О плавающих телах». Письмо к Гиерону (корона Гиерона)

76. T h u r o t Ch. Recherches historiques sur le principe d'Archimède. Revue archéologique, 1869.
77. G e r l a n d E. Zur Geschichte der Erfindung des Aräometers. Annalen der Physik und Chemie, N. F., B. I, 1877, стр. 150 и сл.
78. H e i b e r g J. L. Mélanges Graux. Paris, 1884, стр. 691. и сл.
79. H u l t s c h F. Litterarisches Centralblatt, 1884, стр. 851 и сл.
80. B o s m a n s H. Guillaume de Moerbecke et le traité des corps flottants d'Archimède. Revue des questions scientifiques, avril 1922.
81. L a m b a s s y P. Archimède. Le traité des corps flottants. Bulletin de la Société Fribourgeoise des sciences naturelles, 29, 1929, стр. 20—39.

«Измерение круга»

82. T a n n e r y P. Sur la mesure du cèrcle d'Archimède. Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux, 2 sér. I, стр. 226—253; IV, 1882, стр. 313—337.
83. H u l t s c h F. Die Näherungswerte irrationaler Quadratwurzeln bei Archimedes. Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1893, стр. 367—428.
84. W e i s s e n b o r n Hermann. Die Berechnung des Kreisumfanges bei Archimedes und Pisano. Berliner Studien für classische Philologie, B. XIV, 3, 1894, стр. 32.
85. H u l t s c h F. Zur Kreismessung des Archimedes. ZfMPh., 1894, стр. 121—161.
86. R u d i o Fr. Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen über die Kreismessung. Berlin, Teubner, 1906 (см. №№ 122, 125).
87. H o p p e Edm. Die zweite Methode des Archimedes zur Berechnung von π. Archiv für Geschichte der Naturwissenschaften, 9, 1922, 104—107.
88. C z w a l i n a Arthur. Berechnung von Quadratwurzeln bei den Griechen, Archiv für Geschichte der Mathematik, 10, 1927, стр. 334—335.
89. V o g e l K. Näherungswerte des Archimedes für $\sqrt{3}$. Jahresberichte der deutschen Mathematikervereinigung, 14, 5—8, 1932, стр. 152 и сл.
90. M ü l l e r C. Wie fand Archimedes die von ihm gegebenen Näherungsverte von $\sqrt{3}$. Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, B. 2, 1932, стр. 281—285.
91. T ö p l i t z O. Там же, стр. 286—290.
92. H o f m a n n J. E. Ueber die Annäherung der Quadratwurzeln bei Archimedes und Heron. Jahresberichte der deutschen Mathematikervereinigung, 43, 1934, стр. 187—210.

«Псаммит»

93. Rigaud Steph. P. On the Arenarius of Archimedes. Oxford, 1837.
94. Chasles Michel. Eclaircissements sur le traité «De numero arenae» d'Archimède. Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris, 1842 (séance du 11 avril).
95. Hultsch F. ZfMPh., B. XXVII, 1882, стр. 58 и сл.
96. Czwalina A. Eine physikalische Präzisionsmessung des Archimedes. Archiv für Geschichte der Mathematik, 10, 1928, стр. 464—466.

«Задача о быках»

97. См. выше, № 18.
98. Hermann G. De Archimedis problemate bovino. Lipsiae, 1828.
99. Cantor M. ZfMPh., B. XXIV, 1879, стр. 169 и сл.
100. Amthor. ZfMPh., B. XXV, 1880, стр. 156 и сл.
101. Krumbiegel B. ZfMPh., B. XXV, 1880, стр. 121 и сл.
102. Tannery P. Mémoires de la société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux, 2 sér. III, 1881, стр. 369 и сл.
103. Tannery P. Bulletin des sciences mathématiques, 2 sér., VIII, 1, 1884, стр. 107 и сл.

«Стомахион»

104. Oldham R. D. The loculus of Archimedes. Nature, 117, 1926. стр. 337. См. также № 19.

«Леммы»

105. Heiberg I. L. Philologus, B. XLIII, 1887, стр. 483 и сл.

«Катоптрика»

106. Peyrard F. Le miroir ardent d'Archimède. Paris, 1807.
107. Rome A. Notes sur passages des catoptriques d'Archimède, conservés par Théon d'Alexandrie. Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 52, 1932, стр. 30—41 (Резюме в Isis, B. XIX, 1933, стр. 523).
108. Loria, Gino. Les miroirs ardents d'Archimède. Isis, 20, 1934, стр. 441.

«Книга кругов». Сочинение о семиугольнике

109. Suter H. Bibliotheca Mathematica, 3 Folge, B. VII, 1906/7, стр. 100.

110. Suter H. Das Buch der Auffindung der Sehnen im Kreise von Al-Biruni. Bibliotheca Mathematica, 3 Folge, B. XI, 1910/11, стр. 12—26, 39.
111. Schoy C. Graeco-Arabische Studien nach mathematischen Handschriften der Vizekönigl. Bibliothek zu Kairo, als Festgruss zum 79. Geburtstag des Herrn Prof. J. L. Heiberg, Kopenhagen, dargestellt. Isis, B. VIII, 1926, стр. 21—40.
112. Schoy C. Die trigonometrischen Lehren des persischen Astronomen... Al-Biruni, dargestellt nach Al-Qanun Al Mas'udi. Hannover, 1927, стр. 74—84.
113. Tropfke J. Zur Geschichte der Mathematik. Siebeneckkonstruktion des Archimedes... Zeitschrift des mathematisch-naturwissensch. Unterrichts, 59, 1928, стр. 195 и сл.
114. Tropfke J. Archimedes und die Trigonometrie. Archiv zur Geschichte der Mathem., Naturwiss. und Technologie, B. X, 1926, стр. 423 и сл.
115. Miller G. A. Archimedes and trigonometry, 67, 1928, стр. 555, стр. 423 и сл.
116. Tropfke J. Die Siebeneckabhandlung des Archimedes. Osiris, B. I, 1936, стр. 636—651.

Машина κοχλίας

117. Jacono L. Notizie degli scavi. Roma, 1927, стр. 81—89, табл. IX (см. выше, стр. 67 с пр. 2).

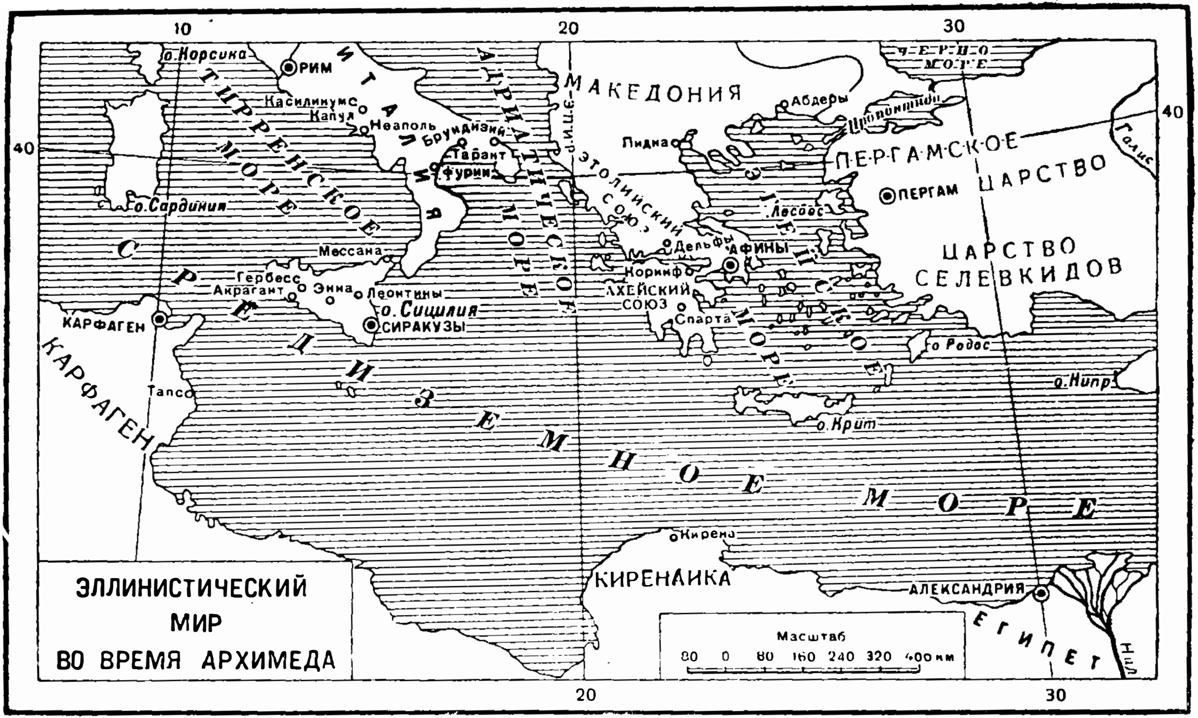
IV. РАБОТЫ ОБ АРХИМЕДЕ НА РУССКОМ ЯЗЫКЕ И РУССКИЕ ПЕРЕВОДЫ ТРУДОВ АРХИМЕДА

118. Петрушевский. Архимеда две книги о шаре и цилиндре, измерение круга и леммы. СПб., 1823.
119. Петрушевский. Архимеда «Псаммит», или исчисление песку в пространстве, равном шару неподвижных звезд, СПб., 1824.
120. Трактат Архимеда «Об измерении круга». Пер. проф. Ващенко-Захарченко. Приложение к его переводу «Начал» Евклида. Киев, 1880, стр. 299—315.
120а. Любимов Н. А. История физики, ч. I, СПб. 1892. Механика Архимеда, стр. 181—190, 241—252.
121. Гейберг И., проф. Новое сочинение Архимеда. Послание Архимеда к Эратосфену о некоторых теоремах механики. Пер. (см. № 63) с нем. под ред. «Вестника опытной физики и элементарной математики», с предисловием прив.-доц. И. Ю. Тимченко. «Матезис», Одесса, 1909.
122. Архимед, Гюйгенс, Ламберт, Лежандр. Четыре сочинения об измерении круга. С приложением истории вопроса (составил Ф. Рудио). Пер. с нем. под ред. и с прим. прив.-доц. С. Н. Бернштейна (пер. № 86). Одесса, «Матезис», 1911,

123. «Псаммит» Архимеда (исчисление песчинок). Перевод с комм. и кратким очерком научной деятельности Архимеда Г. Н. Попова, Кн-во «Сеятель» Е. В. Высоцкого, Птгр., 1922.
124. Начала гидростатики (Архимед, Стэвин, Галилей, Паскаль). Пер., прим. и вступ. статья А. Н. Долгова. М.—Л. Гос.техн.-теорет. изд-во, 1932; 2-е изд. 1933 (серия «Классики естествознания»).
125. Архимед, Гюйгенс, Ламберт, Лежандр (см. № 122). С приложением истории вопроса составил Ф. Рудио. Пер. с нем. под ред. и с прим. акад. С. Н. Бернштейна (серия «Классики естествознания»). М.—Л., 1934; 2-е изд. 1934; 3-е изд. 1936.
126. Архимед. Исчисление песчинок («Псаммит»). Перевод, краткий обзор работ Архимеда и примечания проф. Г. Н. Попова (серия «Классики естествознания»). М.—Л., Гос. техн.-теорет. изд-во, 1932.
127. Чвалина Артур. Архимед. Пер. с нем. В. И. Контовта. Гос. техн.-теорет. изд-во, М.—Л., 1934 (перев. № 41).
128. Лурье С. Я. Приближенные вычисления в древней Греции. Архив истории науки и техники, т. IV, 1934, стр. 26—37.
129. Лурье С. Я. Теория бесконечно малых у древних атомистов. М.—Л., 1935, стр. 71—74 и др.
130. Выгодский М. Я. Арифметика и алгебра в древнем мире. М.—Л., 1941, стр. 234—238.

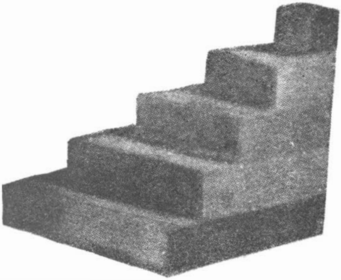
УКАЗАТЕЛЬ ИМЕН

Таблица 1. Архимед. Портретное изображение на медали. Из книги: «La Sicilia di Filippo Paruta descritta e ristampata con aggiunta da L. Agostini». Lione 1697, pl. 102

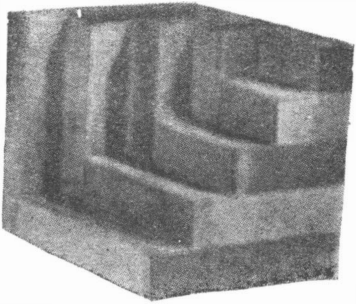


ЭЛЛИНИСТИЧЕСКИЙ МИР ВО ВРЕМЯ АРХИМЕДА
о. Корсика
РИМ
Касилинумс
Капуя
Неаполь
Брундизий
Тарант
Фурии
о. Сардиния
Мессана
Гербесс
Акрагант
Энна
Леонтины
о. Сицилия
СИРАКУЗЫ
КАРФАГЕН
Тапсо
МАКЕДОНИЯ
Абдеры
Пидна
ЭТОЛИЙСКИЙ СОЮЗ
Дельфы
АФИНЫ
Коринф
АХЕЙСКИЙ СОЮЗ
Спарта
ПЕРГАМСКОЕ ЦАРСТВО
ПЕРГАМ
Лесбос
ЦАРСТВО СЕЛЕВКИДОВ
о Родос
о. Кипр
о. Крит
Кирена
КИРЕНАИКА
АЛЕКСАНДРИЯ
ЕГИПЕТ
Нил
Масштаб
80 0 80 160 240 320 400 км
10
20
30
40

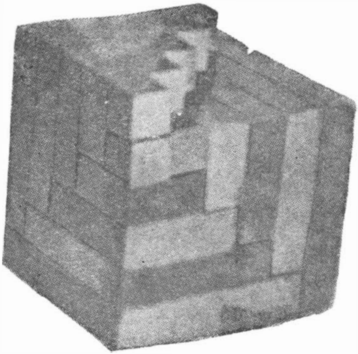
Таблица 2



а



б



c

Таблица 3. **Геометрическое суммирование утроенного ряда $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$**

Таблица 4. Архимед. Один из античных бюстов, считавшихся изображением Архимеда

Таблица 5. «Улитка». Машина для поливки полей, приводимая в движение рабом-пигмеем. Фреска из Помпей

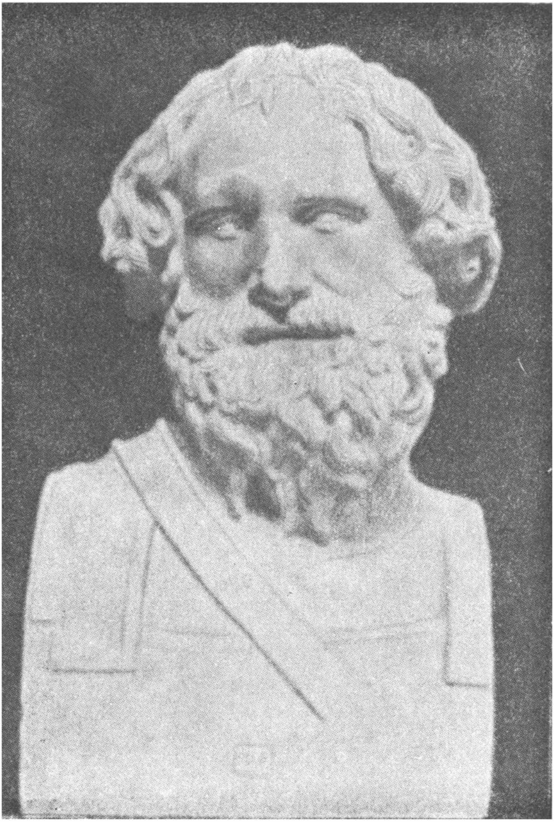


Таблица 6. Архимед. Один из античных бюстов, считавшихся изображением Архимеда

Таблица 7. Гиерон II и его жена Филистида. Скульптура в Британском музее и портретные изображения на сиракузских монетах

Таблица 8. **Памятники финикийско-эллинистического искусства. Изделия из терракоты**

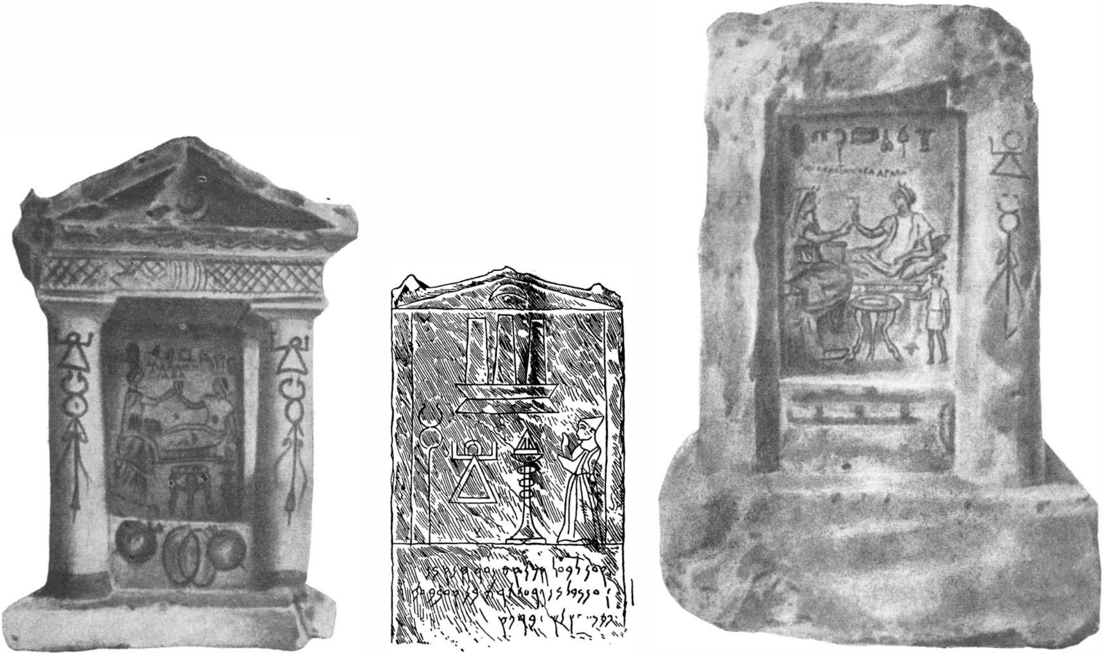


Таблица 9. Карфагенские надгробия из Лилибея (Музей в Палермо)

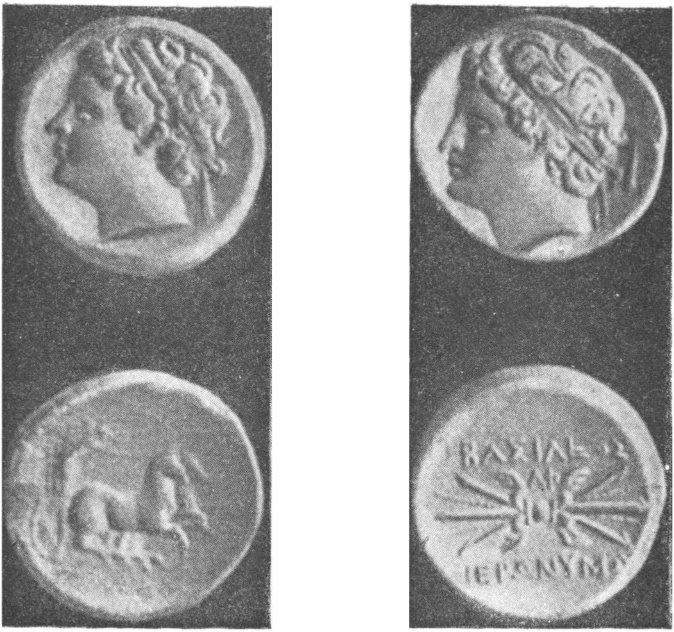


Таблица 10. **Гелон и Гиероним. Портретные изображения на сиракузских монетах**

Таблица 11. Ганнибал. Скульптура

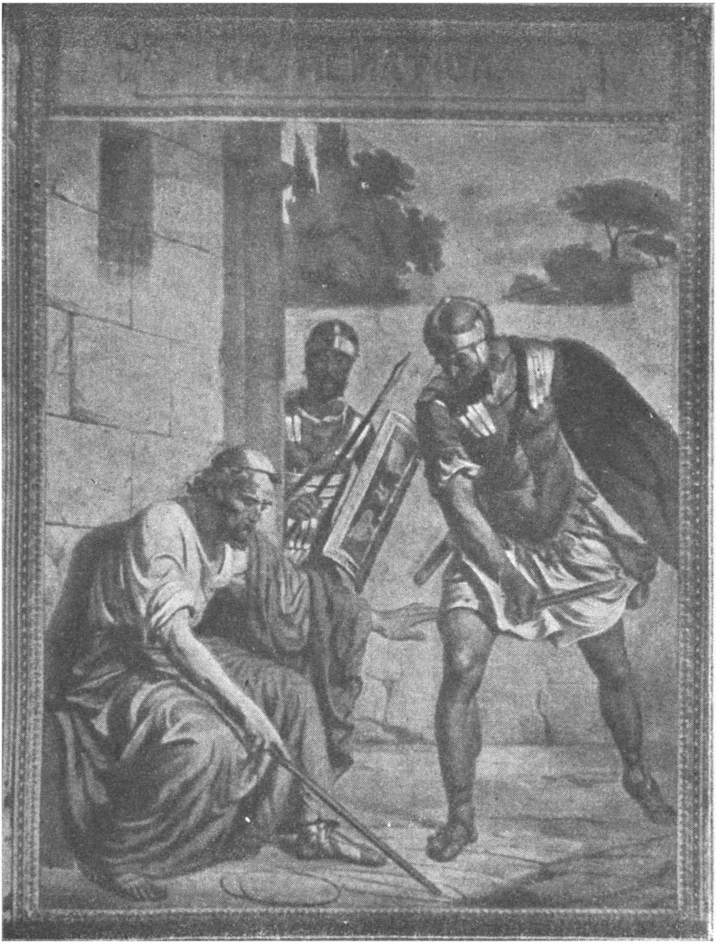


Таблица 12. Смерть Архимеда

Таблица 13. Архимед. Один из античных бюстов, считавшихся изображением Архимеда

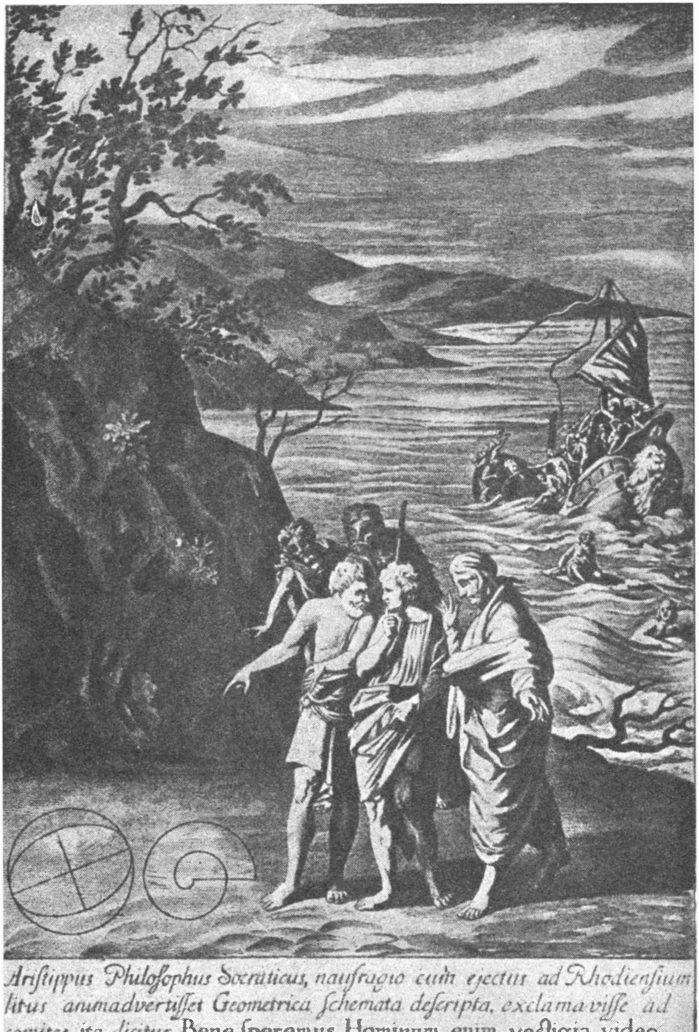


Таблица 14. Фронтиспис одного из ранних изданий Архимеда

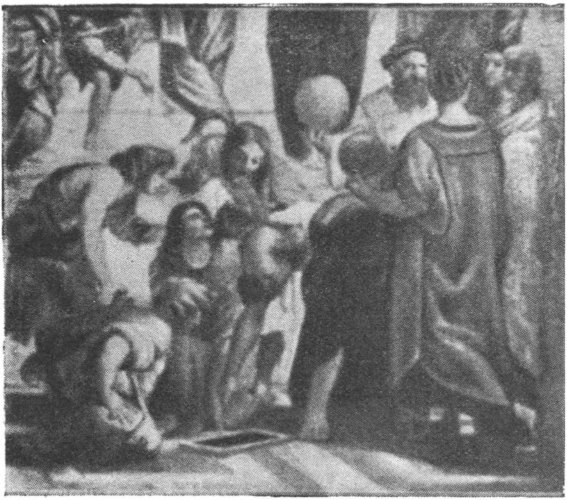


Таблица 15. Архимед и его ученики. Снимок с картины Рафаэля

ОГЛАВЛЕНИЕ

Замеченные опечатки

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
14	20 св.	ἀποϱείξεις	ἀποδείξεις
15	9 сн.	Но DF	DF
23	17 сн.	argumentum	(argumentum
29	11 сн.	O_2	O_1
50	20 сн.	1/50	$\frac{1}{50}$
65	3 св.	1 4	$\frac{1}{4}$
67	21 сн.	улитки [2]	улитки». [2]
79	фиг. 12	Q_1 $O_м$	O_1 $O_м$
93	14 св.	P_a P_b	P_A P_B
93	15 св.	P_c P_k	P_C P_K
164	7 сн.	аналогических	анагогических
	Табл. 10	Гиерон	Гелон

Лурье — Архимед

Печатается по постановлению Редакционно-издательского совета АН СССР № 2136

Переплет, титульные страницы, заставка, концовка и макет художественного оформления книги выполнил художник *Н. Седельников*

Технический редактор *Е. Симкина*

Подписано к печати 14/VII 1945 г. А19967. Печ. л. 17 + 15. вкл. Уч. изд. л. 15,5. Тираж 15 000 экз. Заказ № 3732.

Первая Образцовая типография треста «Полиграфкнига» Огиза при СНК РСФСР. изд. Москва, Валовая, 28