ИНТЕГРИРОВАНІЕ ДИФФЕРЕНЦІАЛОВЪ,

содержащихъ корень квадратный изъ многочлена четвертой степени и дифференціаловъ, содержащихъ корень кубичный изъ многочлена третьей степени.

(Статья Н. Алексѣева).

I.

Въ предыдущей запискѣ выведена теорема, относительно которой теорема Абеля составляетъ частный случай. Дѣйствительно, если положимъ въ этой теоремѣ $m = 2$, то α опредѣлится изъ уравненія:

$$\alpha^2 - 1 = 0,$$

первообразный корень котораго есть -1; цѣлыхъ многочленовъ, означенныхъ чрезъ P_0, P_1, ... будетъ только два: P_0, P_1; h_1, $h_2 \ldots$, k_1, $k_2, \ldots$, l_1, l_2 будутъ единицы и мы получимъ теорему Абеля:

Теорема. Если интегралъ $\int \frac{f dx}{\sqrt{R}}$, въ которомъ f и R цѣлые многочлены, можно выразить въ конечномъ видѣ посредствомъ логариѳмовъ, то существуютъ цѣлые многочлены P_0 и P_1, удовлетворяющіе условію:

$$(P_0 + P_1 \sqrt{R})(P_0 - P_1 \sqrt{R}) = \text{постоянному}$$

и

$$\int \frac{f dx}{\sqrt{R}} = M.\ log \left[P_0 + P_1 \sqrt{R} \right]^{+1} \left[P_0 - P_1 \sqrt{R} \right]^{-1}.$$

Здѣсь М есть постоянное число.

Употребляя тѣже буквы, какія употреблялъ Абель (Oeuvres complètes. T I p. 33 T. II p. 140), мы напишемъ эти уравненія такъ:

$$P^2 - Q^2 R = 1. \tag{1}$$

$$\int \frac{f dx}{\sqrt{R}} = 2\,M\,log\,(P + Q\sqrt{R}) \tag{2}$$

Послѣднее уравненіе, въ предположеніи, что многочлены P и Q извѣстны, можетъ служить къ опредѣленію функціи f и постояннаго коеффиціента М.

Дифференцируя уравненіе (2) и означая производныя отъ P, Q, R чрезъ P', Q', R', получимъ:

$$\frac{f}{\sqrt{R}} = 2M.\frac{P' + Q'\sqrt{R} + \frac{QR'}{2\sqrt{R}}}{P + Q\sqrt{R}} = 2M\left[P' + Q'\sqrt{R} + \right.$$

$$\left. + \frac{QR'}{2\sqrt{R}}\right]\left[P - Q\sqrt{R}\right]$$

$$= 2M.\left[PP' + PQ'\sqrt{R} + \frac{PQR'}{2\sqrt{R}} - QP'\sqrt{R} - QQ'R - \frac{Q^2R'}{2}\right].$$

Но по уравненію (1)

$$PP' - QQ'R - \frac{Q^2R'}{2} = 0,$$

откуда:

$$f = 2M\left[(PQ' - QP')R + \frac{PQR'}{2}\right]$$

Опредѣляя R и R' изъ того же уравненія (1) имѣемъ:

$$R = \frac{P^2 - 1}{Q^2},\ \frac{QR'}{2} = \frac{PP'Q - Q'(P^2 - 1)}{Q^2};$$

слѣдовательно:

$$f = 2M.\frac{P'}{Q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Частное $\frac{P'}{Q}$ есть цѣлый многочленъ и можно опредѣлить его степень, зная только степень R. Дѣйствительно изъ уравненія Абеля (1) слѣдуетъ, что P и Q многочлены взаимно-простые, но дифференцируя это уравненіе получаемъ:

$$PP' - Q\left(Q'R + \frac{QR'}{2}\right) = 0.$$

Выраженіе въ скобкахъ не можетъ равняться нулю, ибо такое положеніе вело бы къ нелѣпости $Q^2R =$ постоянное, а потому P' есть многочленъ кратный Q.

Для опредѣленія степени частнаго $\frac{P'}{Q}$ замѣтимъ, что уравненіе Абеля возможно только въ томъ случаѣ, когда степень многочлена R четная; пусть эта степень равна $2p$, степень Q означимъ чрезъ m, степень P должна равняться $p+m$; поэтому степень частнаго равна $p-1$. Когда многочленъ R четвертой степени, $p=2$ и функція f должна быть первой степени.

Уравненіе $P^2 - Q^2R = 1$ рѣшено Абелемъ (Oeuvr. compl. ibidem). Рѣшеніе Абеля есть образецъ ясности и общности анализа, но въ приложеніи къ частнымъ примѣрамъ способъ Абеля ведетъ къ продолжительнымъ вычисленіямъ. Академикъ Чебышевъ при рѣшеніи тѣхъ же вопросовъ относительно интегрируемости извѣстныхъ дифференціаловъ посредствомъ логариѳмовъ въ конечномъ видѣ замѣняетъ разложеніе $\sqrt{R}$ въ непрерывную періодическую дробь, разложеніе употребляемое Абелемъ, послѣдовательнымъ вычисленіемъ постоянныхъ коеффиціентовъ по одному и тому же закону. Но способъ Академика Чебышева, изложенный въ мемуарѣ: Sur l'integration de la diff. $\frac{(x+A)\,dx}{\sqrt{R}}$ (Bulletin de l'Academie de St. P. T. III. Octobre 1860) и снова напечатанный въ журналѣ Ліувилля за 1864 годъ, остается безъ доказательства.

Въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ слѣдующій весьма простой пріемъ можно приложить къ рѣшенію уравненія Абеля. Пусть r^2 есть квадратъ, заключающійся въ R, а s остатокъ отъ вычитанія r^2 изъ R и притомъ остатокъ, степень котораго меньше степени r; полагая $P=\frac{2r^2}{s}+1$, $Q=\frac{2r}{s}$, легко видѣть, что эти выраженія P и Q удовлетворяютъ уравненію Абеля; но чтобы эти выраженія были цѣлыми, r должно быть кратнымъ s.

Рѣшеніе вопроса объ интегрируемости дифференціала $\frac{f dx}{\sqrt{R}}$ въ конечномъ видѣ посредствомъ логариѳмовъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ можно привести къ опредѣленію P и Q по этому способу. Вопервыхъ очевидно, что въ томъ случаѣ, когда многочленъ R равняется квадрату r^2 + постоянное число s, то предыдущія выраженія P и Q, будучи цѣлыми, тотчасъ рѣшаютъ вопросъ. Если многочленъ R четвертой степени и имѣетъ видъ: $x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$; то для того, чтобы его можно было представить въ видѣ полнаго квадрата съ прибавкою постояннаго числа между коеффиціентами должно существовать слѣдующее условіе:

$$\gamma=\frac{\alpha}{2}\left(\beta-\frac{\alpha^2}{4}\right)$$

Въ слѣдующихъ §§ для сокращенія выраженіе $\beta-\frac{\alpha^2}{4}$ мы будемъ означать чрезъ t и потому предыдущее условіе напишемъ такъ:

$$\gamma-\frac{\alpha t}{2}=0.$$

Если же многочленъ R (четвертой степени) не удовлетворяетъ этому условію, то s будетъ первой степени и для того, чтобы предыдущія выраженія P и Q были цѣлыми, s должно быть дѣлителемъ r, а слѣдовательно дѣлителемъ всего многочлена R. Отсюда видимъ что одно изъ первыхъ условій, которому должно удовлетворить, состоитъ въ томъ чтобы R имѣлъ раціональнаго дѣлителя 1-й степени.

Предположимъ сначала, что такой раціональный дѣлитель первой степени существуетъ; означая этого дѣлителя чрезъ z, многочленъ R можно написать такъ:

$$z^4 + \alpha z^3 + \beta z^2 + \gamma z$$

и для опредѣленія P и Q по указанному способу необходимо, чтобы трехчленъ: $z^4 + \alpha z^3 + \beta z^2$ былъ полнымъ квадратомъ т. е. чтобы $\beta = \frac{\alpha^2}{4}$, иначе $t = 0$

Вотъ единствѣнные случаи, въ которыхъ можно опредѣлять P и Q по указанному весьма простому способу.

Замѣтимъ, что къ первому изъ этихъ случаевъ принадлежитъ и тотъ случай, когда многочленъ R разлагается на два многочлена второй степени

$$(x^2 + ax + b)\ (x^2 + ax + b'),$$

въ которыхъ коеффиціенты при первыхъ степеняхъ перемѣнной равны.

Академикъ Чебышевъ въ упомянутомъ мемуарѣ далъ замѣчательный способъ для преобразованія дифференціала $\frac{(x + \mathrm{A})\, dx}{\sqrt{\mathrm{R}}}$ въ другой, имѣющій то свойство, что многочленъ подъ корнемъ имѣетъ раціональнаго множителя 1-й степени. Самое преобразованіе я заимствую изъ этого мемуара прямо, только въ обозначеніи нѣкоторыхъ величинъ позволяю себѣ сдѣлать сокращеніе. Пусть r^2 по предыдущему есть квадратъ заключающійся въ R, s остатокъ отъ вычитанія r^2 изъ R; пусть

$$R = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta,\ r = r_0 + r'_0 x + x^2,$$
$$s = s_0 + s' x$$

Постоянные коеффиціенты r_0, r'_0, s_0, s' опредѣляются по α, β, γ, δ слѣдующими уравненіями:

$$r'_0 = \frac{\alpha}{2},\ r'^2_0 + 2r_0 = \beta,\ 2r_0 r'_0 + s' = \gamma,\ r_0^2 + s_0 = \delta$$

откуда:

$$r_0 = \frac{1}{2}\left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right) = \frac{t}{2},\ r'_0 = \frac{\alpha}{2},\ s' = \gamma - \frac{\alpha t}{2},\ s_0 = \delta - \frac{t^2}{4} \quad (1)$$

Положимъ:

$$\frac{s'}{\sqrt{R} - r} = 2z \qquad (2)$$

Уничтожая дробь и корень въ этомъ уравненіи, получаемъ:

$$s' . \sqrt{R} = 2sz - rs' \qquad (3)$$

$$s'^2 = 4z^2 s - 4s' zr \qquad (4)$$

Дифференцируя это уравненіе и означая чрезъ r' производную отъ r получимъ

$$0 = (2zs - rs')\,dz + zs'\,(z - r')\,dx$$

или:

$$\sqrt{R} \cdot dz + z\,(z - r')\,dx = 0;$$

откуда:

$$\frac{dx}{\sqrt{R}} = \frac{dz}{z\,(r' - z)} \qquad (5)$$

Изъ уравненій

$$r = r_0 + r'_0 x + x^2$$
$$r' = r'_0 + 2x$$

легко получить слѣдующее:

$$4r - r'^2 = 4r_0 - r'^2_0 \qquad (6)$$

откуда:

$$4r = 4r_0 + r'^2 - r_0'^2 \tag{7}$$

А изъ уравненій:

$$r' = r_0' + 2x$$
$$s = s_0 + s'x$$

получимъ:

$$s = \frac{s'(r' - r'_0)}{2} + s_0 \tag{8}$$

Вставляя найденныя нами величины r и s въ уравненіе (4), получимъ:

$$s' = z^3 + \frac{2(2s_0 - s'r'_0)}{s'} z^2 - z(r' - z)^2 - (4r_0 - r_0'^2) z;$$

откуда:

$$z^2 (r' - z)^2 = z^4 + \frac{2(2s_0 - s'r'_0)}{s'} z^3 + (r_0'^2 - 4r_0) z^2 - s'z;$$

и

$$z(r' - z) = \sqrt{z^4 + \frac{2(2s_0 - s'r'_0)}{s'} z^3 + (r_0'^2 - 4r_0) z^2 - s'z}$$

и уравненіе (5) принимаетъ видъ:

$$\frac{dx}{\sqrt{R}} = \frac{dz}{\sqrt{R_1}}, \tag{9}$$

гдѣ, полагая для сокращенія

$$\frac{2(2s_0 - s'r'_0)}{s'} = \alpha_1,\ r_0'^2 - 4r_0 = \beta_1,\ -s' = \gamma_1 \tag{10}$$

$$R_1 = z^4 + \alpha_1 z^3 + \beta_1 z^2 + \gamma_1$$

Съ помощію уравненія: $x = \dfrac{r' - r'_0}{2}$ получимъ:

$$\frac{(x + A)\,dx}{\sqrt{R}} = \frac{(r' - r'_0 + 2A)\,dz}{2z(r' - z)}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{dz}{z}+\frac{1}{2}\cdot\frac{(z+2A-r'_0)\,dz}{\sqrt{R_1}}$$

и

$$\int\frac{(x+A)\,dz}{\sqrt{R}}=\frac{1}{2}logz+\frac{1}{2}\int\frac{\left((z+2A-\frac{a}{2}\right)dz}{\sqrt{R_1}} \quad (11)$$

Покажемъ, какъ коеффиціенты α_1 β_1 γ_1 многочлена R опредѣляются по коеффиціентамъ α β γ δ многочлена R. На основаніи уравненій (1) и (10) получимъ:

$$\alpha_1=\frac{2(2s_0-s'r'_0)}{s'}=4\frac{s_0}{s'}-2r'_0=\frac{4\delta-t^2}{\gamma-\frac{\alpha t}{2}}-\alpha$$

$$\beta_1=r'^2_0-4r_0=\frac{\alpha^2}{4}-2t=\beta-3t$$

$$\gamma_1=-s'=-\gamma+\frac{\alpha t}{2}$$

$$\delta_1=0,\ t_1=\beta_1-\frac{\alpha_1^2}{4}=\frac{\alpha^2-\alpha_1^2}{4}-2t$$

Эти уравненія будемъ писать такъ:

$$\alpha_1+\alpha=\frac{4\delta-t^2}{\gamma-\frac{\alpha t}{2}},\ \beta_1=\beta-3t,\ \gamma_1+\gamma=\frac{\alpha t}{2},$$

$$t_1+2t=\frac{\alpha^2-\alpha_1^2}{4} \quad (12)$$

Если, опредѣливъ по этимъ уравненіямъ коеффиціенты α_1, β_1, γ_1, найдемъ, что удовлетворяется одно изъ условій.

$$\gamma_1-\frac{\alpha_1 t_1}{2}=0 \text{ или } t_1=0;$$

то, какъ видѣли, можно опредѣлить многочлена P и Q удовлетворяющіе уравненію:

$$P^2 - Q^2 R_1 = 1,$$

и выразить послѣдній интегралъ (11) въ конечномъ видѣ посредствомъ логариѳма.

Если же ни одно изъ предыдущихъ условій не выполняется, тогда послѣдній интегралъ преобразовываемъ точно также, какъ первый, полагая:

$$\frac{s_1'}{\sqrt{R_1} - r_1} = 2z_1$$

гдѣ

$$R_1 = z^4 + \alpha_1 z^3 + \beta_1 z^2 + \gamma_1 z,\ r_1 = z^2 + \frac{\alpha_1}{2} z + \frac{t_1}{2},$$

$$s_1 = -\frac{t_1^2}{4} + \left(\gamma_1 - \frac{\alpha_1 t_1}{2}\right) z.$$

Получимъ:

$$\int \frac{(x+A)dz}{\sqrt{R}} = \frac{1}{2} log z + \frac{1}{2^2} log z_1$$

$$+ \frac{1}{2^2} \int \frac{\left(z_1 + 2^2 A - \alpha - \frac{\alpha_1}{2}\right) dz_1}{\sqrt{R_2}} \tag{13}$$

гдѣ: $R_2 = z_1^4 + \alpha_2 z_1^3 + \beta_2 z_1^2 + \gamma_2 z_1$, а коеффиціенты α_2, β_2, γ_2 опредѣляются уравненіями:

$$\alpha_2 + \alpha_1 = \frac{-t_1^2}{\gamma_1 - \frac{\alpha_1 t_1}{2}},\ \beta_2 = \beta_1 - 3t_1,\ \gamma_2 + \gamma_1 = \frac{\alpha_1 t_1}{2},$$

$$t_2 + 2t_1 = \frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{4}$$

Послѣ m преобразованій получимъ:

$$\int \frac{(x + A)\, dx}{\sqrt{R}} = log. \left[\sqrt{z}. \sqrt[2^2]{z_1} \ldots \sqrt[2^m]{z_{m-1}}\right] +$$

$$+ \frac{1}{2^m} \int \frac{\left(z_{m-1} + 2^m A - 2^{m-1}\alpha - \alpha^{m-2}\alpha_1 - \ldots \frac{\alpha_{m-1}}{2}\right) dz_{m-1}}{\sqrt{R_m}}$$

где $R_m = z^4_{m-1} + \alpha_m z^3_{m-1} + \beta_m z^2_{m-1} + \gamma_m z_{m-1}$, а для послѣдовательнаго вычисленія коеффиціентовъ $\alpha_m, \beta_m, \gamma_m$, имѣемъ уравненія:

$$\alpha_m + \alpha_{m-1} = \frac{t^2_{m-1}}{\gamma_m},\ \beta_m = \beta_{m-1} - 3t_{m-1},\ \gamma_m + \gamma_{m-1} = \frac{\alpha_{m-1}\, t_{m-1}}{4}$$

$$t_m + 2t_{m-1} = \frac{\alpha^2_{m-1} - \alpha^2_m}{4}.$$

Вычисленіе этихъ коеффиціентовъ по этимъ формуламъ возможно до тѣхъ поръ пока $\gamma_m = -\left(\gamma_{m-1} - \frac{\alpha_{m-1}\, t_{m-1}}{2}\right)$ не обращается въ нуль; но если это случится, то это будетъ признакомъ возможности логариѳмическаго интеграла. Точно также если t_{m-1} обратимся въ нуль, то логариѳмическій интегралъ возможенъ.

Полагая $t_{m-1} = 0$, изъ предыдущихъ формулъ получимъ:

$$\alpha_m = -\alpha_{m-1},\ \beta_m = \beta_{m-1},\ \gamma_m = -\gamma_{m-1},\ t_m = c$$

Продолжая вычислять коеффиціенты, получимъ:

$$\alpha_{m+1} = -\alpha_m,\ \beta_{m+1} = \beta_m,\ \gamma_{m+1} = -\gamma_m;$$

слѣдовательно:

$$\alpha_{m+1} = \alpha_{m-1},\ \beta_{m+1} = \beta_{m-1},\ \gamma_{m+1} = \gamma_{m-1};$$

т. е. коеффиціенты α_i, β_i, γ_i, начиная съ $\alpha_{m-1}, \beta_{m-1}, \gamma_{m-1}$ повторяются и періодъ состоитъ изъ двухъ системъ коеффиціентовъ.

Авторъ упомянутаго мемуара показываетъ, что вообще, когда при опредѣленіи коеффиціентовъ получимъ повторяющіяся системы, какъ бы не было велико число системъ, составляющихъ періодъ, интегралъ можно выразить въ конечномъ видѣ посредствомъ логариѳмовъ; но при большемъ числѣ системъ въ періодѣ, способъ опредѣленія многочленовъ P и Q не тотъ, на который я хотѣлъ обратить вниманіе.

Примѣры:

1. $$\int\frac{(x+\mathrm{A})\,dx}{\sqrt{\left(x^2+\frac{a}{2}\right)^2+a^{\frac{3}{2}}x}}$$

$$\mathrm{R}=x^4+ax^2+a^{\frac{3}{2}}x+\frac{a^2}{4}$$

$$\alpha=0,\quad \beta=a,\quad \gamma=a^{\frac{3}{2}},\delta=\frac{a^2}{4},\ t=a, 4\delta-t^2=0$$

$$\alpha_1=0,\quad \beta_1=-2a,\gamma_1=-a^{\frac{3}{2}},\qquad t_1=-2a, t_1{}^2=4a^2$$

$$\alpha_2=4a^{\frac{1}{2}},\ \beta_2=4a,\quad \gamma_2=a^{\frac{3}{2}},\qquad t_2=0.$$

Отсюда видимъ, что этотъ интегралъ можно выразить въ конечномъ видѣ посредствомъ логариѳмовъ, если постоянное А имѣетъ должную величину.

$$\int\frac{(x+\mathrm{A})\,dx}{\sqrt{\left(x^2+\frac{a}{2}\right)^2+a^{\frac{3}{2}}x}}=\frac{1}{2}\log z+\frac{1}{2}\int\frac{(z+2\mathrm{A})\,dz}{\sqrt{z^4-2az^2-a^{\frac{3}{2}}z}}$$

гдѣ

$$2z=\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mathrm{R}}-\left(x^2+\frac{a}{2}\right)}.$$

Многочленъ $z^4-2az^2-a^{\frac{3}{2}}z=(z^2-a)^2-a^{\frac{3}{2}}(z+a^{\frac{1}{2}})$ и такъ какъ $z+a^{\frac{1}{2}}$ есть дѣлитель z^2-a, то

$$\mathrm{P}=-\frac{2(z^2-a)^2}{a^{\frac{3}{2}}(z+a^{\frac{1}{2}})}+1=-2a^{-\frac{3}{2}}(z^2-a)(z-a^{\frac{1}{2}})+1$$

$$\mathrm{Q}=-\frac{2(z^2-a)}{a^{\frac{3}{2}}(z+a^{\frac{1}{2}})}=-2a^{-\frac{3}{2}}(z-a^{\frac{1}{2}})$$

Отсюда:

$$\mathrm{P}'=-2a^{-\frac{3}{2}}(z-a^{\frac{1}{2}})(3z+a^{\frac{1}{2}})$$

$$\frac{P'}{Q} = 3z + a^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда для опредѣленія A получимъ уравненіе:

$$\frac{1}{2}(z + 2A) = 2M\,(3z + a^{\frac{1}{2}}),$$

откуда:

$$2M = \frac{1}{6}, \; A = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{6}.$$

$$\int \frac{\left(x + \frac{a^{\frac{1}{2}}}{6}\right)dx}{\sqrt{R}} =$$

$$\frac{1}{2}\,log z + \frac{1}{6} log\left[2a^{-\frac{3}{2}}(z^2 - a)(z - a^{\frac{1}{2}}) - 1 + 2a^{-\frac{3}{2}}(z - a^{\frac{1}{2}})\sqrt{R_1}\right].$$

2. $$\int \frac{(x + A)\,dx}{\sqrt{(x^2 + ax)^2 + ex}}$$

$$r = x^2 + ax, \;\; s = ex, \frac{r}{s} = \frac{x + a}{e}, \;\; P = \frac{2\,(x + a)^2\,x}{e} + 1,$$

$$Q = \frac{2\,(x + a)}{e}$$

$$P' = \frac{2\,(x + a)}{e}\left[2x + a\right], \frac{P'}{Q} = 2x + a, \; x + A = 2M(2x + a),$$

$$4M = 1, \;\; 2Ma = A$$

$$M = \frac{1}{4}, \; A = \frac{a}{2} \text{ и } \int \frac{\left(x + \frac{a}{2}\right)dx}{\sqrt{(x^2 + ax)^2 + ex}} =$$

$$\frac{1}{2}\; l\left[2x\,(x + a)^2 + e + 2\,(x + a)\,.\,\sqrt{(x^2 + ax)^2 + ex}\right],$$

3. $$\int \frac{(x+\mathrm{A})\,dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2-4abx}}$$

$$\mathrm{R} = x^4 + 2ax^3 + \left.\begin{matrix} a^2 \\ +2b \end{matrix}\right| x^2 - 2abx + b^2$$

$\alpha = \ \ 2a, \beta = a^2 + 2b, \gamma = -2ab, \delta = b^2, t = a^2 + 2b - a^2 = 2b.$
$\alpha_1 = -2a, \beta_1 = a^2 - 4b, \gamma_1 = 4ab, \qquad t_1 = -4b.$

$\gamma_1 - \frac{\alpha_1 t_1}{2} = 0.$, слѣдовательно интегралъ возможенъ въ конечномъ видѣ посредствомъ логариѳмовъ.

$$\int \frac{(x+\mathrm{A})\,dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2-4abx}} =$$

$$\frac{1}{2} \log z + \frac{1}{2} \int \frac{(z+2\mathrm{A}-a)dz}{\sqrt{z^4-2az^2+(a^2-4b)z^2+4abz}}$$

гдѣ

$$z = \frac{2ab}{\sqrt{\mathrm{R}} - (x^2+ax+b)}$$

многочленъ:

$$\begin{aligned} z^4 - 2az^2 + (a^2 - 4b)\,z^2 + 4abz &= z^2\,(z-a)^2 - 4bz\,(z-a) \\ &= z^2\,(z-a)^2 - 4bz\,(z-a) + 4b^2 - 4b^2 \\ &= [\,z\,(z-a) - 2b]^2 - 4b^2 \end{aligned}$$

$$\mathrm{P} = -\frac{[z\,(z-a)-2b]^2}{2b^2} + 1 \quad \mathrm{Q} = -\frac{z\,(z-a)-2b}{2b^2}$$

$$\mathrm{P}' = -\frac{z\,(z-a)-2b}{b^2} \,.\, (2z-a)$$

$$\frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{Q}} = 2\,(2z-a);\ \frac{1}{2}\,(z+2\mathrm{A}-a) = 4\mathrm{M}.\,(2z-a)$$

$$8\mathrm{M} = \frac{1}{2},\ \mathrm{A} - \frac{a}{2} = -4\mathrm{M}a = -\frac{a}{4},\ \mathrm{A} = \frac{a}{4}$$

$$\int \frac{\left(x+\frac{a}{4}\right)dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2-4abx}} =$$

$$\frac{1}{2}\log z + \frac{1}{8}\log\left[(z(z-a)-2b)^2-2b^2+(z(z-a)-2b)\sqrt{R_1}\right].$$

II.

Перейдемъ теперь къ дифференціаламъ, содержащимъ кубичный корень изъ многочлена какой-либо цѣлой и положительной степени.

Положимъ въ общей теоремѣ Пьюма $m=3$, имѣемъ слѣдующія уравненія:

$\alpha^3-1=0$, первообразный корень котораго $\alpha=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$;

остальные корни суть $\alpha^2=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ и $\alpha^3=1$;

$\theta = X_1X_2^2$, гдѣ X_1 есть произведеніе одиночныхъ множителей многочлена θ, X_2 — произведеніе двукратныхъ множителей того же многочлена.

Теорема въ этомъ случаѣ выражается такъ:

Если интегралъ $\int \frac{fdx}{\sqrt[3]{X_1X_2^2}}$ можно выразить въ конечномъ видѣ посредствомъ логариѳмовъ, то существуютъ цѣлые многочлены: P_0, P_1, P_2, удовлетворяющіе условію:

$$\prod_{n=0}^{n=2}\left\{P_0+\alpha^nP_1(X_1X_2^2)^{\frac{1}{3}}+\alpha^{2n}P_2(X_1^2X_2)^{\frac{1}{3}}\right\} = \text{постоянной}. \quad (1)$$

Произведеніе $X_1^2X_2$ будемъ означать чрезъ θ_1; очевидно

$$\theta\theta_1 = X_1^3X_2^3,\ \theta^{\frac{1}{3}}\theta_1^{\frac{1}{3}} = X_1X_2$$

Интегралъ въ этомъ случаѣ будетъ:

$$\int \frac{fdx}{\sqrt[3]{\theta}} = \mathrm{A}log \prod_{n=0}^{n=2} \left\{ \mathrm{P}_0 + \alpha^n \mathrm{P}_1 \theta^{\frac{1}{3}} + \alpha^{2n} \mathrm{P}_2 \theta_1^{\frac{1}{3}} \right\}^{\alpha^n} \qquad (2)$$

Пусть:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_0 + \mathrm{P}_1 \theta^{\frac{1}{3}} + \mathrm{P}_2 \theta_1^{\frac{1}{3}} &= \mathrm{У}_1 \\ \mathrm{P}_0 + \alpha\, \mathrm{P}_1 \theta^{\frac{1}{3}} + \alpha^2\, \mathrm{P}_2 \theta_1^{\frac{1}{3}} &= \mathrm{У}_2 \qquad (3) \\ \mathrm{P}_0 + \alpha^2 \mathrm{P}_1 \theta^{\frac{1}{3}} + \alpha\, \mathrm{P}_2 \theta_1^{\frac{1}{3}} &= \mathrm{У}_3 \end{aligned}$$

Изъ этихъ положеній находимъ:

$$\begin{aligned} \mathrm{У}_1 + \mathrm{У}_2 + \mathrm{У}_3 &= 3\mathrm{P}_0 \\ \mathrm{У}_2\mathrm{У}_3 + \mathrm{У}_3\mathrm{У}_1 + \mathrm{У}_1\mathrm{У}_2 &= 3(\mathrm{P}_0^{\ 2} - \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2) \qquad (4) \\ \mathrm{У}_1\mathrm{У}_2\mathrm{У}_2 &= \mathrm{P}_0^{\ 3} + \mathrm{P}_1^{\ 3} + \mathrm{P}_2^{\ 3}\theta_1 - 3\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2 \end{aligned}$$

Слѣдовательно условіе логариѳмическаго интеграла приметъ такой видъ:

$$\mathrm{P}_0^{\ 3} + \mathrm{P}_1^{\ 3}\theta + \mathrm{P}_2^{\ 3}\theta_1 - 3\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2 = \text{постоянному} \qquad (5)$$

Сверхъ того видимъ, что У есть корень кубичнаго уравненія

$$\mathrm{У}^3 - 3\mathrm{P}_0\mathrm{У}^2 + 3(\mathrm{P}_0^{\ 2} - \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2)\,\mathrm{У} - \text{пост.} = 0.$$

Интегралъ (2) принимаетъ видъ:

$$\int \frac{fdx}{\theta^{\frac{1}{3}}} = \mathrm{A}\, log\, \mathrm{У}_1 \mathrm{У}_2^{\ \alpha} \mathrm{У}_3^{\ \alpha^2} = \mathrm{A}\,[log\mathrm{У}_1 + \alpha log\mathrm{У}_2 + \alpha^2 log\mathrm{У}_3] \quad (6)$$

Можно дать этому интегралу другой видъ, но мы опредѣлимъ сначала функцію f; дифференцируя ур. (6), имѣемъ:

$$\frac{f}{\mathrm{A}\theta^{\frac{1}{3}}} = \frac{\mathrm{У}_2\mathrm{У}_3\mathrm{У}'_1 + \alpha\mathrm{У}_1\mathrm{У}_3\mathrm{У}'_2 + \alpha^2\mathrm{У}_1\mathrm{У}_2\mathrm{У}'_3}{\mathrm{У}_1\mathrm{У}_2\mathrm{У}_3}$$

Но изъ уравненій (3) получаемъ:

$$У_2У_3 = (P_0^2 - P_1P_2X_1X_2) + (P_1^2\theta^{\frac{2}{3}} - P_0P_2\theta_1^{\frac{1}{3}}) + (P_2^2\theta_1^{\frac{2}{3}} - P_0P_1\theta^{\frac{1}{3}})$$

$$У_3У_1 = (P_0^2 - P_1P_2X_1X_2) + \alpha^2(P_1^2\theta^{\frac{2}{3}} - P_0P_2\theta_1^{\frac{1}{3}}) + \alpha(P_2^2\theta_1^{\frac{2}{3}} - P_0P_1\theta^{\frac{1}{3}})$$

$$У_1У_2 = (P_0^2 - P_1P_2X_1X_2) + \alpha(P_1^2\theta^{\frac{2}{3}} - P_0P_2\theta_1^{\frac{1}{3}}) + \alpha^2(P_2^2\theta_1^{\frac{2}{3}} - P_0P_1\theta^{\frac{1}{3}})$$

Эти равенства напишемъ для сокращенія такъ:

$$\begin{aligned} У_2У_3 &= T_0 + T_1 + T_2 \\ У_3У_1 &= T_0 + \alpha^2 T_1 + \alpha T_2 \\ У_1У_2 &= T_0 + \alpha T_1 + \alpha^2 T_2 \end{aligned} \tag{7}$$

Изъ тѣхъ же уравненій (3) получимъ:

$$У'_1 = P'_0 + (P_1\theta^{\frac{1}{3}})' + (P_2\theta_1^{\frac{1}{3}})'$$

$$У'_2 = P'_0 + \alpha(P_1\theta^{\frac{1}{3}}) + \alpha^2(P_2\theta_1^{\frac{1}{3}})'$$

$$У'_3 = P'_0 + \alpha^2(P_1\theta^{\frac{1}{3}}) + \alpha(P_2\theta_1^{\frac{1}{3}})'$$

Отсюда пользуясь уравненіемъ $1+\alpha+\alpha^2=0$, получимъ:

$$У_2У_3У'_1 + \alpha У_3У_1У'_2 + \alpha^2 У_1У_2У'_3 = 3[P_0'T_1 + (P_1\theta^{\frac{1}{3}})'T_2 + (P_2\theta_1^{\frac{1}{3}})'T_0]$$

и потому полагая постоянную второй части ур. (5) равною единицѣ получимъ:

$$f = 3A\theta^{\frac{1}{3}}[P'_0T_1 + (P_1\theta^{\frac{1}{3}})'T_2 + (P_2\theta_1^{\frac{1}{3}})'T_0]. \tag{8}$$

Мы развернемъ это выраженіе для того, чтобы показать, что вторая часть есть многочленъ цѣлый и раціональный; получимъ:

$$f = 3A\left[P'_0(P_1{}^2\theta - P_1P_2X_1X_2) + P'_1P_2{}^2X_1{}^2X_2{}^2 - \frac{1}{3}P_1P_2{}^2X_1\theta'\right.$$

$$\left. - P_0P_1P'_1\theta + \frac{1}{3}P_0P_1{}^2\theta' + (P_0{}^2 - P_1P_2X_1X_2)\left(P'_2X_1X_2 - \frac{1}{3}P_2.\frac{\theta'_1}{X_1}\right)\right]$$

Но

$$\theta'_1 = (X_1{}^2X_2)' = (2X_2X'_1 + X_1X'_2)X_1 \quad \text{и} \quad \frac{\theta'_1}{X_1} = 2X_2X'_1 + X_1X'_2$$

Освободимъ теперь интегралъ (6) отъ мнимыхъ величинъ; корень α уравненія $\alpha^3 - 1 = 0$ напишемъ такъ: $\cos\beta + i\sin\beta$ точно также другой корень $\alpha^2 = \cos\beta - i\sin\beta$, гдѣ $\cos\beta = -\frac{1}{2}$, $\sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Поэтому

$$\log Y_2 = \log(P_0 + \alpha P_1\theta^{\frac{1}{3}} + \alpha^2P_2\theta_1{}^{\frac{1}{3}}) =$$

$$\log\left[\frac{2P_0 - P_1\theta^{\frac{1}{3}} - P_2\theta_1{}^{\frac{1}{3}} + i\sqrt{3}\,(P_1\theta^{\frac{1}{3}} - P_2\theta_1{}^{\frac{1}{3}})}{2}\right]$$

Положимъ:

$$P_0 - P_1\theta^{\frac{1}{3}} = Q_2, \qquad P_2\theta_1{}^{\frac{1}{3}} - P_0 = Q_1 \tag{9}$$

$$\log Y_2 = \log.\ \frac{Q_2 - Q_1 - i\sqrt{3}(Q_2 + Q_1)}{2}$$

Означая чрезъ M модуль мнимаго выраженія, стоящаго подъ знакомъ $\log$, чрезъ φ аргументъ его, имѣемъ:

$$M^2 = \frac{1}{4}\left[(Q_2 - Q_1)^2 + 3(Q_2 + Q_1)^2\right] = Q_1{}^2 + Q_2{}^2 + Q_1Q_2 \tag{10}$$

$$\cos\varphi = \frac{Q_2 - Q_1}{2M},\quad \sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}.(Q_2 + Q_1)}{2M},$$

$$tg\varphi = -\frac{\sqrt{3}(Q_3 + Q_1)}{Q_2 - Q_1} \tag{11}$$

Отсюда:

$$\alpha log Y_2 = \alpha log M + \alpha \varphi i.$$

Точно также найдемъ:

$$\alpha^2 log Y_3 = \alpha^2 log M - \alpha^2 \varphi i.$$

Слѣдовательно

$$loy Y_1 + \alpha log Y_2 + \alpha^2 log Y_3 = log Y_1 - log M + \varphi i(\alpha - \alpha^2)$$

$$= log \frac{Y_1}{M} + \varphi i.(2 i sin \beta) = log \frac{Y_1}{M} - \varphi\sqrt{3}.$$

Итакъ предыдущій интегралъ имѣетъ слѣдующій видъ:

$$A log \frac{Y_1}{M} + A\sqrt{3}.\, artg \frac{\sqrt{3}(Q_2 + Q_1)}{Q_2 - Q_1} \qquad (12).$$

Если многочленъ θ подъ корнемъ не содержитъ двукратныхъ множитилей, то должно положить въ предыдущихъ формулахъ вездѣ $X_2 = 1$ и условіе логариѳмическаго интеграла принимаетъ видъ:

$$P_0{}^3 - 1 + P_1(P^2{}_1 - 3P_0P_2)\theta + P^3{}_2\theta^2 = 0. \qquad (13)$$

Если многочленъ θ подъ корнемъ содержитъ только двукратныхъ множителей, то должно положить: $X_1 = 1$ и условіе принимаетъ видъ:

$$P^3{}_0 - 1 + P_1(P^2{}_2 - 3P_0P_1)X_2 + P^3X^2{}_2 = 0. \qquad (14)$$

Примѣры: I. $\theta = x^3 + 1 \quad \theta_1 = \theta^2$.

Уравненію (15) въ этомъ случаѣ удовлетворяютъ слѣдующія величины: $P_0 = x^2$, $P_1 = x$. $P_2 = 1$.

По этимъ величинамъ находимъ:

$$T_0 = x^4 - x\theta = -x, \quad T_1 = 0, \quad T_2 = \theta^{\frac{4}{3}} - x^3\theta^{\frac{1}{3}} = \theta^{\frac{1}{3}}$$

$$f = 3A\theta^{\frac{1}{3}} \left\{ \theta^{\frac{1}{3}}(x\theta^{\frac{1}{3}})' - x(\theta^{\frac{2}{3}})' \right\} = 3A.$$

Итакъ въ этомъ случаѣ f постоянная величина.

Положимъ $f=1$, тогда $A=\frac{1}{3}$.

$$Q_2=x^2-x\theta^{\frac{1}{3}}=-x(\theta^{\frac{1}{3}}-x),\quad Q_1=\theta^{\frac{2}{3}}-x^2=(\theta^{\frac{1}{3}}+x)(\theta^{\frac{1}{3}}-x)$$

$$Q_2+Q_1=\theta^{\frac{1}{3}}(\theta^{\frac{1}{3}}-x),\quad Q_2-Q_1=-(2x+\theta^{\frac{1}{3}})(\theta^{\frac{1}{3}}-x)$$

$$Q^2{}_2+Q^2{}_1+Q_1Q_2=$$

$$=x^2(\theta^{\frac{1}{3}}-x)^2+(\theta^{\frac{1}{3}}+x)^2(\theta^{\frac{1}{3}}-x)^2-x(\theta^{\frac{1}{3}}+x)(\theta^{\frac{1}{3}}-x)^2=\theta^{\frac{1}{3}}-x$$

и мы получимъ:

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+1}}=\frac{1}{3}\log\frac{x^2+x\theta^{\frac{1}{3}}+\theta^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{\theta^{\frac{1}{3}}-x}}-\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{\sqrt{3}\,.\,\theta^{\frac{1}{3}}}{2x+\theta^{\frac{1}{3}}}$$

$$=\frac{1}{3}\,.\log\frac{\theta-x^3}{(\theta^{\frac{1}{3}}-x)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{\sqrt{3}\,.\,\theta^{\frac{1}{3}}}{2x+\theta^{\frac{1}{3}}}$$

$$=-\frac{1}{2}\log(\theta^{\frac{1}{3}}-x)-\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{\sqrt{3}\,.\,\theta^{\frac{1}{3}}}{2x+\theta^{\frac{1}{3}}}\ .$$

Замѣтимъ впрочемъ, что этотъ интегралъ можно найти по способу интегрированія двучленныхъ дифференціаловъ, при этомъ для того, чтобы сдѣлать дифференціалъ $\frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+1}}$ раціональнымъ должно сдѣлать двойную подстановку $x=\frac{1}{y}$, $y^3+1=z^3$. Къ предыдущему виду дифференціала приводится дифференціалъ вообще такого вида:

$$\frac{dx}{\sqrt[3]{ax^3+q}}.$$

2. $\theta=(x^3+1)^2$. $\theta_1=(x^3+1)$.

Въ этомъ случаѣ: $P_0=x^2$, $P_1=1$, $P_2=x$

$$T_0 = x^4 - x\theta_1 = -x$$

$$T_1 = \theta^{\frac{2}{3}} - x^3\theta_1^{\frac{1}{3}} = \theta_1^{\frac{4}{3}} - x^3\theta_1^{\frac{1}{3}} = \theta_1^{\frac{1}{3}}$$

$$T_2 = x^2\theta_1^{\frac{2}{3}} - x^2\theta^{\frac{1}{3}} = 0.$$

$$f = 3A\theta^{\frac{1}{3}}(2x\theta_1^{\frac{1}{3}} - (x\theta_1^{\frac{1}{3}})'x) = 3Ax(2\theta_1 - \theta_1^{\frac{2}{3}}[\theta_1^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}x\theta_1^{-\frac{2}{3}}\,3x^2])$$

$$= 3Ax.(2\theta_1 - \theta_1 - x^3) = 3Ax.$$

Полагая $3A = 1$, имѣемъ $f = x$

$$Q_2 = x^2 - \theta_1^{\frac{2}{3}} = (x + \theta_1^{\frac{1}{3}})(x - \theta_1^{\frac{1}{3}})$$

$$Q_1 = x\theta_1^{\frac{1}{3}} - x^2 = x(\theta_1^{\frac{1}{3}} - x)$$

$$Q_2 + Q_1 = -\theta_1^{\frac{1}{3}}(\theta_1^{\frac{1}{3}} - x);\quad Q_2 - Q_1 = -(2x + \theta_1^{\frac{1}{3}})(\theta_1^{\frac{1}{3}} - x)$$

$$Q^2_2 + Q^2_1 + Q_1Q_2 =$$

$$= (x + \theta_1^{\frac{1}{3}})^2(\theta_1^{\frac{1}{3}} - x)^2 + x^2(\theta_1^{\frac{1}{3}} - x)^2 - (x + \theta_1^{\frac{1}{3}})(\theta_1^{\frac{1}{3}} - x)^2\,x$$

$$= (\theta_1^{\frac{1}{3}} - x)^2(x^2 + x\theta_1^{\frac{1}{3}} + \theta_1^{\frac{2}{3}})$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}} = \frac{1}{3}\log\frac{\sqrt{x^2 + x\theta_1^{\frac{1}{3}} + \theta_1^{\frac{2}{3}}}}{\theta_1^{\frac{1}{3}} - x} + \frac{\sqrt{3}}{3}.arctg\,\frac{\sqrt{3}.\theta_1^{\frac{1}{3}}}{2x + \theta_1^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{1}{3}.\log.\frac{(x^2 + x\theta_1^{\frac{1}{3}} + \theta_1^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}}{\theta_1 - x^3} + \frac{\sqrt{3}}{3}arctg\,\frac{\sqrt{3}.\theta_1^{\frac{1}{3}}}{2x + \theta_1^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{1}{2}\log(x^2 + x\theta_1^{\frac{1}{3}} + \theta_1^{\frac{2}{3}}) + \frac{1}{\sqrt{3}}arctg\,\frac{\sqrt{3}.\theta_1^{\frac{1}{3}}}{2x + \theta_1^{\frac{1}{3}}}$$

$$= -\frac{1}{2}\log(\theta_1^{\frac{1}{3}} - x) + \frac{1}{\sqrt{3}}arctg\,\frac{\sqrt{3}.\theta_1^{\frac{1}{3}}}{2x + \theta_1^{\frac{1}{3}}}$$

III.

Интегралъ слѣдующаго вида:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+px+q}}$$

можетъ быть приведенъ къ эллиптическимъ и логариѳмическимъ интеграламъ различными способами; въ частныхъ случаяхъ: 1) когда $q=0$ и 2) когда многочленъ подъ корнемъ имѣетъ два или три равныхъ корня, этотъ интегралъ приводится къ логариѳмическимъ. Здѣсь я изложу слѣдующій способъ приведенія предыдущаго интеграла къ эллиптическимъ интеграламъ.

Пусть многочленъ x^3+px+q не имѣетъ равныхъ корней и q не равно нулю; означимъ чрезъ α, β, γ, три корня этого многочлена, изъ которыхъ по крайней мѣрѣ одинъ дѣйствительный.

Положимъ: $x=\frac{\alpha+\beta y}{1+y}$; такъ какъ $\alpha^3+p\alpha+q=0$ и

$\beta^3+p\beta+q=0$; то получимъ: $x^3+px+q=\frac{Ay+By^2}{(1+y)^3}$,

гдѣ для сокращенія мы положили:

$$\begin{aligned} A &= 3\alpha\beta^2+p\alpha+2p\beta+3q \\ B &= 3\alpha^2\beta+2p\alpha+p\beta+3q \end{aligned} \tag{1}$$

Далѣе имѣемъ: $dx=\frac{(\beta-\alpha)dy}{(1+y)^2}$ и потому.

$$\frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+px+q}}=\frac{(\beta-\alpha)dy}{(1+y)\sqrt[3]{Ay+By^2}} \tag{2}$$

$$=\frac{(\beta-\alpha)\sqrt[3]{4B}\,.\,d(2By+A)}{[2B-A+(2By+A)]\sqrt[3]{(2By+A)^2-A^2}}$$

Положивъ $2By + A = Az$, получимъ вмѣсто предыдущаго дифференціала слѣдующій:

$$\frac{(\beta - \alpha)\sqrt[3]{4AB} \,.\, dz}{A\left[2.\frac{B}{A} - 1 + z\right]\sqrt[3]{z^2 - 1}}$$

Если положимъ теперь: $z = \sqrt{u^3 + 1}$, то получимъ:

$$\frac{3(\beta - \alpha)\sqrt[3]{4AB}}{2A\left[2.\frac{B}{A} - 1 + \sqrt{u^3 + 1}\right]} \cdot \frac{udu}{\sqrt{u^3 + 1}}$$

или

$$\frac{3(\beta - \alpha)\sqrt[3]{4AB}}{2A\left[4\frac{B}{A}\left(\frac{B}{A} - 1\right) - u^3\right]} .udu. \left\{\frac{2\frac{B}{A} - 1}{\sqrt{u^3 + 1}} - 1\right\}$$

или

$$\frac{3(\beta - \alpha)\sqrt[3]{4AB}}{2A}\left\{\frac{\left(2\frac{B}{A} - 1\right)udu}{\left[\frac{4B}{A}\left(\frac{B}{A} - 1\right) - u^3\right]\sqrt{u^3 + 1}} - \frac{udu}{4\frac{B}{A}\left(\frac{B}{A} - 1\right) - u^3}\right\}$$

Первый диффререрціалъ по интегрированіи приводитъ къ эллиптическимъ интеграламъ, а второй къ логариѳмическимъ.

Постояннымъ входящимъ въ выраженія этихъ дифференціаловъ можно дать болѣе удобный видъ для вычисленія ихъ.

Изъ (1) получимъ

$$A + B = (3\alpha\beta + 3p)(\alpha + \beta) + 6q$$

Такъ какъ $\alpha + \beta + \gamma = 0$, то

$$A + B = 6q - (3\alpha\beta\gamma + 3p\gamma) = 9q - 3p\gamma = 3(3q - p\gamma)$$

Изъ тѣхъ же уравненій (1) имѣемъ.

$$A-B=(3\alpha\beta+p)(\beta-\alpha)=\frac{\beta-\alpha}{\gamma}(p\gamma-3q)=-\frac{\beta-\alpha}{\gamma}(3q-p\gamma)$$

Отсюда:

$$2A=\frac{3q-p\gamma}{\gamma}.(3\gamma-\beta+\alpha)=2\,.\,\frac{3q-p\gamma}{\gamma}.(\gamma-\beta)$$

и

$$A=\frac{(3q-p\gamma)(\gamma-\beta)}{\gamma}.$$

$$2B=\frac{3q-p\gamma}{\gamma}.(3\gamma+\beta-\alpha)=2\,\frac{3q-p\gamma}{\gamma}.(\gamma-\alpha)$$

и

$$B=\frac{(3q-p\gamma)(\gamma-\alpha)}{\gamma}.$$

$$AB=\frac{(3q-p\gamma)^2(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}{\gamma^2}=\frac{(3q-p\gamma)^2(2p\gamma+3q)}{p\gamma+q}$$

Такъ какъ $A+B$ и AB выражаются только по одному корню γ, то A и B можно считать функціями только одного этого корня.

Изъ предыдущихъ формулъ легко получить слѣдующія:

$$\frac{A+B}{A-B}=-\frac{3\gamma}{\beta-\alpha},\ \frac{B}{A}=\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}$$

Изъ послѣдней формулы имѣемъ:

$$2\frac{B}{A}-1=\frac{2\gamma-2\alpha-\gamma+\beta}{\gamma-\beta}=\frac{\beta+\gamma-2\alpha}{\gamma-\beta}=-\frac{3\alpha}{\gamma-\beta}$$

$$\frac{4B}{A}\left(\frac{B}{A}-1\right)=\frac{4(\gamma-\alpha)}{\gamma-\beta}.\frac{\gamma-\alpha-\gamma+\beta}{\gamma-\beta}=\frac{4(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha)}{(\gamma-\beta)^2}=$$

$$\frac{4}{(\gamma-\beta)^2}(\beta\gamma+2\alpha^2)$$

$$=\frac{4}{(\gamma-\beta)^3}.(-q+2\alpha^3).=\frac{4}{(\gamma-\beta)^2}(-q-2p\alpha-2q)=$$

$$=-\frac{4}{(\gamma-\beta)^2}.(2p\alpha+3q).$$

Но въ случаѣ двухъ равныхъ корней этотъ способъ приведенія можно употребить только съ оговоркою, что корни α и β не равны между собою, слѣдовательно либо $\gamma=\alpha$, либо $\gamma=\beta$. а отсюда слѣдуетъ. что или $B=0$ или $A=0$; полагая $B=0$ изъ уравненія (2) получимъ:

$$\frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+px+q}}=\frac{(\beta-\alpha)dy}{(1+y)\sqrt[3]{Ay}}=\frac{(\beta-\alpha)d\,Ay}{(A+Ay)\sqrt[3]{Ay}}$$

и положивъ $Ay=z^3$, имѣемъ:

$$\frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+px+q}}=\frac{3(\beta-\alpha)zdz}{(A+z^3)}$$

дифференціалъ раціональный, интегрированіе котораго приводитъ къ логариѳмамъ и круговымъ функціямъ.

Что касается до частныхъ случаевъ: когда или $q=0$, или многочленъ x^3+px+q содержитъ кратныя корни можно указать на другой способъ преобразованія.

Для преобразованія дифференціала

$$\frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+px+q}}$$

положимъ: $x=u+\alpha u^{-1}$, получимъ:

$$dx=du-\frac{\alpha du}{u^2}$$

$$x^3+px+q=\frac{u^6+(3\alpha+p)u^4+qu^3+(3\alpha+p)\alpha u^2+\alpha^3}{u^3}.$$

Полагая для опредѣленія постоянной α

$$3\alpha + p = 0$$

имѣемъ:

$$x^3 + px + q = \frac{u^6 + qu^3 + \alpha^3}{u^3}$$

$$\frac{dx}{\sqrt[3]{x^3 + px + q}} = \frac{u\left(du - \frac{\alpha du}{u^2}\right)}{\sqrt[3]{u^6 + qu^3 + \alpha^3}}$$

Когда многочленъ x^3+px+q имѣетъ равные корни, то $\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} = 0$, иначе: $\alpha^3 = \frac{q^2}{4}$ и

$$\frac{dx}{\sqrt[3]{x^3 + px + q}} = \frac{udu}{\sqrt[3]{\left(u^3 + \frac{q}{2}\right)^2}} + \frac{pdu}{3u\sqrt[3]{\left(u^3 + \frac{q}{2}\right)^2}}$$

Мы уже видѣли, что интегралъ

$$\int \frac{udu}{\sqrt[3]{\left(u^3 + \frac{q}{2}\right)^2}}$$

выражается посредствомъ логариѳмовъ, второй же дифференціалъ чрезъ подстановку $u^3 + \frac{q}{2} = z^3$ дѣлается раціональнымъ.

Положимъ теперь $q = 0$, тогда употребивъ тоже преобразованіе имѣемъ.

$$\frac{dx}{\sqrt[3]{x^3 + px}} = \frac{udu}{\sqrt[3]{u^6 - \frac{p^3}{27}}} + \frac{pdu}{3u\sqrt[3]{u^6 - \frac{p^3}{27}}}$$

Положивъ теперь $u^2 = z$, получимъ:

$$\frac{dx}{\sqrt[3]{x^3 + px}} = \frac{dz}{2\sqrt[3]{z^3 - \frac{p^3}{27}}} + \frac{pdz}{6z\sqrt[3]{z^3 - \frac{p^3}{27}}}$$

Относительно перваго дифференціала уже извѣстно какъ онъ интегрируется, а относительно втораго замѣтимъ, что чрезъ подстановку $z^3 - \frac{p^3}{27} = t^3$, онъ дѣлается раціональнымъ.