Hans Lorenz

Lehrbuch der Technischen Physik

Erster Band

Technische Mechanik starrer Gebilde

1

Zweite Auflage

Lehrbuch der Technischen Physik

von

Dr. Dr.-Ing. Hans Lorenz
o. Professor an der Technischen Hochschule Danzig
Geheimer Regierungsrat

Zweite, neubearbeitete Auflage

Erster Band

Technische Mechanik starrer Gebilde

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH 1924

Technische Mechanik starrer Gebilde

von

Hans Lorenz

Zweite, vollständig neubearbeitete Auflage
der Techn. Mechanik starrer Systeme

Erster Teil

Mechanik ebener Gebilde

Mit 295 Textabbildungen

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH 1924

ISBN 978-3-662-42871-9 ISBN 978-3-662-43157-3 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-43157-3

Ursprünglich erschienen bei Julius Springer in Berlin
Softcover reprint of the hardcover 2nd edition 1924

Vorwort.

Die erste Auflage der „Technischen Mechanik starrer Systeme", welche den ersten Band meines Lehrbuches der Technischen Physik bildet, ist im Jahre 1902 erschienen und mit dem 1904 folgenden zweiten Bande, der „Technischen Wärmelehre", schon seit mehreren Jahren vergriffen. Ich habe zunächst versucht, auf Grund meiner 20 jährigen Lehrtätigkeit durch zahlreiche Zusätze und Abänderungen das Werk der Neuzeit anzupassen, mußte aber nach längerer Arbeit feststellen, daß dadurch die Einheitlichkeit der Darstellung verloren geht, so daß ich mich schließlich für eine völlig neue Niederschrift aus einem Gusse entschied. Das hat naturgemäß eine starke Verzögerung des Erscheinens der Neubearbeitung zur Folge gehabt. Dazu kam, daß ich vor der Drucklegung einige größere Abschnitte in ihrer neuen Fassung in meinen Vorlesungen für Anfänger und reifere Studierende, sowie im Seminar für angewandte Mechanik an der Technischen Hochschule Danzig erproben wollte.

Zur Trennung in die Mechanik ebener und räumlicher Gebilde habe ich mich auf Grund meiner Lehrerfahrungen entschlossen. Die Mechanik in der Ebene ist nicht nur viel einfacher als die im Raume und darum dem Anfänger leichter zugänglich, sie umfaßt auch die weitaus meisten praktisch wichtigen Probleme, zu deren selbständiger Behandlung das Buch den Leser an Hand von Beispielen führen will. Ist er mit diesem Stoffe vertraut, so bietet die räumliche Mechanik, insbesondere unter Zuhilfenahme der Vektorrechnung, die in der Ebene keine nennenswerte Rolle spielt, als Erweiterung nicht so viele Schwierigkeiten mehr wie bei ihrer Stellung an die Spitze. Aber auch innerhalb der beiden Teile, von denen der erste hier vorliegt, während der zweite in Jahresfrist folgen soll, habe ich auf einen übersichtlichen Aufbau des Stoffes großen Wert gelegt und den Zerfall des Werkes in eine Reihe kaum noch zusammenhängender Abhandlungen vermieden. Die größeren Abschnitte sind dabei so abgefaßt, daß sie von einem mit den Grundbegriffen bekannten Leser ohne fortwährende Rückverweisungen für sich verständlich sind. Im einzelnen bemerke ich noch, daß in der Statik neben den analytischen auch die graphischen Methoden zu ihrem Rechte kommen, und daß ich sowohl hier als auch in der Dynamik des Punktes und der starren Scheibe auf die Widerstände, vor allem die Gleitreibung, angesichts ihrer großen Wichtigkeit etwas ausführlicher eingegangen bin, als dies in andern Schriften üblich ist. Daß ich auch sonst in der Stoffauswahl, Anordnung und Darstellung eigene Wege gegangen bin, wird der kundige Leser bemerken, auch wird man mir wohl die gelegentliche Aufnahme eigener Forschungsergebnisse zubilligen. Quellenangaben finden sich nur im Verein mit Hinweisen auf weiter-gehende Ausführungen. Mit Rücksicht auf die Raumersparnis sind alle Wiederholungen und jede unnötige Breite vermieden. Das Buch erfordert demnach, selbst auf angestrengter Arbeit beruhend, ein ernstes Studium und bietet dafür Studierenden der Mathematik, Physik und aller Zweige der Technik mannigfache Aufschlüsse, sowohl im Text als auch in den zahlreichen Beispielen.

Der Raumersparnis dient auch die sehr allgemeine Verwendung der Newtonschen Abkürzung für die zeitlichen Ableitungen durch Punkte über der Veränderlichen, sowie die Benutzung möglichst kurzer Worte ohne grundsätzliche Vermeidung hierfür gebräuchlicher längerer mit gleicher Bedeutung. Hiervon sei u. a. angeführt:

Geschwindigkeit	= Lauf
Beschleunigung	= Anlauf
Verzögerung	= Ablauf
Winkelgeschwindigkeit	= Drehwert
Winkelbeschleunigung	= Andrehwert
Umfangsgeschwindigkeit	= Umlauf
Radialgeschwindigkeit	= Strahllauf
Halbmesser, Radius	= Arm
Radiusvektor	= Strahl
Trägheitsmoment	= Schwungmoment
Trägheitshalbmesser	= Schwungarm
Zentrifugalmoment	= Schleudermoment
Komponente	= Teil, Anteil
Impuls, Antrieb	= Prall
Impulsmoment	= Drall
kinetische Energie	= Wucht
potentielle Energie	= Drang
Gesamtenergie	= Macht
Zentrifugalkraft	= Fliehkraft
mathem. Pendel	= Fadenpendel
physisches oder materielles Pendel	= Scheibenpendel
materieller Punkt	= Massenpunkt
Koeffizient	= Beiwert
Konstante	= Festwert
universelle Konstante	= Weltwert

Die Zeichnung der gegenüber der ersten Auflage stark vermehrten und fast durchweg neuen Abbildungen haben meine Assistenten Dr. Falkenhagen, Dipl.-Ing. Beckmann und cand. mach. Oestert durchgeführt, die beiden letzteren mich auch bei der Korrektur wirksam unterstützt, wofür ich ihnen allen an dieser Stelle ebenso danke wie dem rührigen Verlage für sein Entgegenkommen in der würdigen Ausstattung des Buches.

Danzig-Langfuhr, im April 1924.

H. Lorenz.

Inhaltsverzeichnis.

Drittes Buch: Statik ebener Gebilde.

Viertes Buch: Dynamik starrer Gebilde.

Erstes Buch.

Kinematik ebener Gebilde.

I. Geometrische Bewegungslehre.

§ 1. Verschiebung und Drehung ebener Gebilde. Beobachten wir die uns umgebenden Gegenstände, so zeigt sich, daß einzelne von ihnen, z. B. die Gebäude, ihre gegenseitige Lage beibehalten, andere dagegen, wie Fuhrwerke, Tiere und wir selbst, ihre Lage gegenüber den ersteren, sowie untereinander verändern. Die ersteren Körper befinden sich dann nach unserer Ausdrucksweise im Zustande der Ruhe (gegeneinander), die letzteren im Zustande der Bewegung (gegenüber den ersteren sowie untereinander), wobei wir die in Klammern gesetzten näheren Bezeichnungen gewöhnlich unterdrücken.

Bei näherem Zusehen erweist sich nun die Ortsveränderung eines beliebigen Körpers als ein äußerst verwickelter Vorgang, weshalb wir uns zunächst auf die Verfolgung eines einzelnen Körperpunktes beschränken. Die aufeinanderfolgenden Lagen eines solchen Punktes bezeichnen wir dann als seine Bahn, die im allgemeinen eine Raumkurve sein und von den Bahnen anderer Körperpunkte verschieden sein wird. Im einfachsten Fall kann diese Bahn eine Gerade sein, vielfach werden wir es auch mit gekrümmten, aber ebenen Bahnen zu tun haben. Verlaufen nun die Bahnen aller Körperpunkte in parallelen Ebenen, so sprechen wir die ganze Erscheinung als eine ebene Bewegung an. Mit dieser wollen wir uns vorläufig allein beschäftigen und uns weiter auf Körper beschränken, deren einzelne Punkte während der Bewegung ihre gegenseitige Lage nicht ändern. Solche vollkommen starre Körper gibt es in Wirklichkeit nicht, indessen kommen ihnen Gegenstände aus Metallen, natürlichen oder künstlichen Steinen, sowie aus Holz angefertigte Dinge vermöge der nur außerordentlich kleinen Verschiebungen ihrer Teile gegeneinander hinreichend nahe, um diese Vereinfachung wenigstens für den Gesamtvorgang zu rechtfertigen. Ist ein derartiger Körper senkrecht zu den parallelen Bewegungsebenen seiner Einzelpunkte nur wenig ausgedehnt, so sprechen wir wohl auch von einer starren Scheibe. Ändert diese ohne jeden Zusammenhang mit andern gleichartigen Scheiben ihre Lage, so vollzieht sie eine freie Bewegung, ist sie aber dabei mit anderen Körpern irgendwie verbunden, so haben wir eine unfreie oder gezwungene Bewegung vor uns. Die Gesamtheit der miteinander verbundenen Scheiben, die sich in ihren Bewegungen gegenseitig bedingen, heißt dann eine kinematische Kette (griechisch κίνημα = Bewegung). Die einfachsten Beispiele solcher Ketten bilden die Gleitstücke auf einer geraden oder krummen Führungsschiene und der Zapfen mit Lager, wobei alle Punkte der mit dem beweglichen Teile verbundenen Scheibe konzentrische Kreise beschreiben.

Da nun die Lage eines Punktes in der Ebene durch seine Abstände von zwei festen Punkten eindeutig gegeben ist, so brauchen wir auch nur die Bewegung zweier Punkte einer Scheibe zu verfolgen, womit diese Bewegung auf die der geraden Verbindungslinie beider Punkte, die im übrigen willkürlich gewählt werden können, zurückgeführt ist. Denken wir uns in Abb. 1 eine Gerade AB in die neue Lage $A'B'$ verschoben, die mit der ursprünglichen den Winkel φ' bildet, so schneiden sich die Mittellote der Verbindungslinien AA' und BB' der Endpunkte beider Lagen in P so zwar, daß $AP = A'P$, $BP = B'P$, also wegen der Gleichheit der beiden Strecken AB und $A'B'$ auch $\triangle ABP \cong A'B'P$. Dann also ist auch $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PA'B'$, sowie $\sphericalangle PBA = \sphericalangle PB'A'$, und wegen der Neigung φ' von $A'B'$ gegen AB wird $\sphericalangle APA' = \sphericalangle BPB' = \varphi'$. Die ebene Bewegung einer mit der betrachteten Strecke fest verbundenen starren Scheibe kann daher durch die Drehung um einen Pol P ersetzt werden.

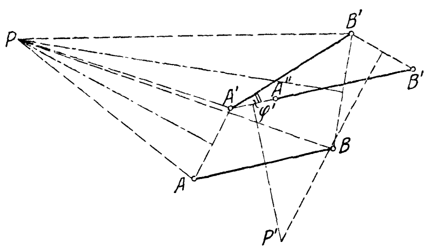

Abb. 1.

Bringen wir dann die Strecke $A'B'$ in die dritte Lage $A''B'' \parallel AB$, so ist auch diese Verlagerung gleichwertig der Rückdrehung um einen zweiten Pol P' mit demselben, aber entgegengesetzten Drehwinkel $-\varphi'$. Zwei gleiche, aber entgegengesetzte Drehungen einer Scheibe ergeben daher eine Parallelverschiebung oder umgekehrt: die Parallelverschiebung einer starren Scheibe kann auch durch zwei entgegengesetzt gleiche Drehungen um verschiedene Pole hervorgerufen werden. Ist die dritte Lage $A''B''$ der Strecke nicht parallel der ersten, sondern um den beliebigen Winkel φ'' gegen die zweite Lage $A'B'$ geneigt, so können wir sie auch unmittelbar aus der ersten durch eine Drehung vom Betrage $\varphi' + \varphi''$ erhalten usw., so daß sich aufeinanderfolgende Drehungen einfach algebraisch addieren.

Wir haben bisher nur die Endlagen der einzelnen Ortsveränderungen dieser mit der starren Scheibe verbundenen Geraden AB

ins Auge gefaßt, über die Zwischenlagen der beiden Punkte A und B, d. h. über ihre wahren Bahnen dagegen nichts ausgesagt. Sind beide Bahnen bekannt, bzw. durch Führungs- oder Leitkurven festgelegt, so dürfen wir das vorstehende Verfahren der Polbestimmung auf je zwei benachbarte Lagen der Strecke AB anwenden. Die zugehörigen Mittellote fallen dann mit den Normalen der Bahnen in A und B zusammen und schneiden sich im Pole P, der allerdings bei der Ortsveränderung der Geraden ebenfalls wandert und eine in der Bewegunsgebene feste Polbahn beschreibt. Betrachten wir nunmehr in Abb. 2 drei aufeinanderfolgende unendlich nahe Lagen der Strecke AB mit den zugehörigen Polen $P_1 P_2 P_3$, so wird bei der Drehung um P_2 der erste mit AB fest verbundene Pol P_1 nach P_1' und bei weiterer Drehung um P_3 der erste Pol nach P_1'', der zweite nach P_2'' gelangt sein, wobei wegen der Drehung um unendlich kleine Winkel $P_2 P_1 = P_2 P_1' = P_2'' P_1''$, $P_3 P_2 = P_3 P_2''$ ist und die Strecken $P_1 P_1'$ in P_1, $P_2 P_2''$ in P_2 senkrecht auf der festen Polbahn $P_1 P_2 P_3$ stehen. Daraus folgt, daß die mit AB fest verbunden gedachten aufeinanderfolgenden Pole $P_1'' P_2'' P_3$ eine als bewegliche Polbahn bezeichnete Kurve bilden, die ersichtlich auf der festen Polbahn abrollt, ohne zu gleiten, wobei immer der Berührungspunkt beider Polbahnen den augenblicklichen Pol, den sog. Momentanpol bildet. Wir dürfen demnach die beliebige ebene Bewegung einer starren Scheibe durch das Abrollen einer mit ihr starr verbundenen Kurve, der beweglichen Polbahn, auf einer in der Ebene festliegenden Kurve, der festen Polbahn, ersetzen, welche dabei die bewegliche Polbahn in allen ihren Lagen umhüllt. Durch diese Rollbewegung sind dann umgekehrt die Bahnen der beiden Punkte A und B und mit ihnen alle Punktbahnen der bewegten Scheibe als Rollkurven bestimmt, wovon man in der Technik der Fortbewegung durch Rollen umfassenden Gebrauch macht, indem man die feste wie bewegliche Polbahn unmittelbar zur Begrenzung der gegeneinander bewegten Körper benutzt. Sie können offenbar miteinander vertauscht werden, wodurch neue Rollkurven der vorher festen Scheibe entstehen, die sich in den Berührungspunkten stetig an die vorher betrachteten anschließen.

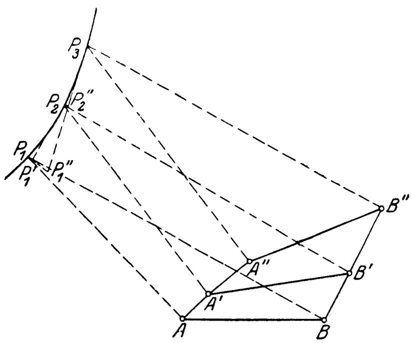

Abb. 2.

1. Beispiel. Rollt z. B. ein Kreis auf einer festen Geraden, Abb. 3, so beschreiben seine Umfangspunkte gemeine Zykloiden, die innerhalb und außerhalb des Umfanges gelegenen Punkte dagegen Trochoiden, deren Normalen stets durch den als Momentanpol wirkenden Berührungspunkt des Rollkreisumfangs mit der Führungsgeraden hindurchgehen. Rollt ein Kreis auf einem festen andern Kreise, Abb. 4, dem sog. Grundkreis, so erhalten wir als Bahnkurven Epizykloiden bzw. Epitrochoiden, wenn die beiden Kreise im Berührungspunkt entgegengesetzt gekrümmt sind. Bei gleicher Krümmung dagegen, Abb. 5, spricht man von Hypozykloiden und Hypotrochoiden, wenn der Rollkreishalbmesser kleiner als der des festen Kreises ist, und von Perizykloiden und Peritrochoiden im umgekehrten Falle. Hat im Falle der Hypozykloide der bewegte Rollkreis den halben Durchmesser des festen, so entspricht jedem Drehwinkel φ des ersteren ein Bogen mit dem Winkel $\frac{\varphi}{2}$ auf dem letzteren, womit im Anschluß an Abb. 6 sich der Durchmesser des festen Kreises als Rollkurve ergibt. Außerdem erkennt man aus dem Bilde, daß die Enden des Rollkreisdurchmessers AB dauernd auf den beiden zueinander senkrechten Geraden OX und OY bleiben. Die ganze Vorrichtung kann demnach zur Umwandlung einer Kreisbewegung in eine gradlinige oder umgekehrt benutzt werden.

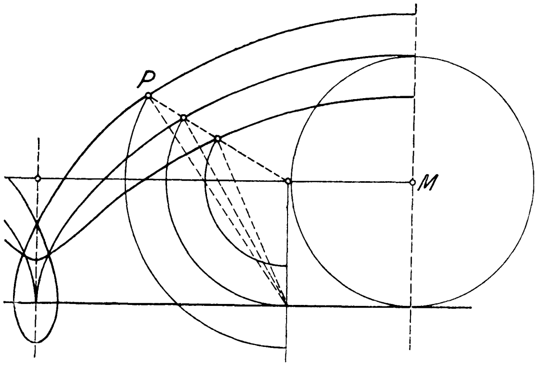

Abb. 3.

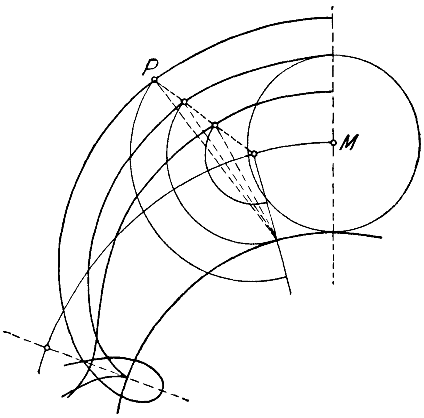

Abb. 4.

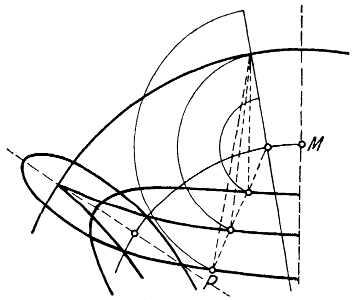

Abb. 5.

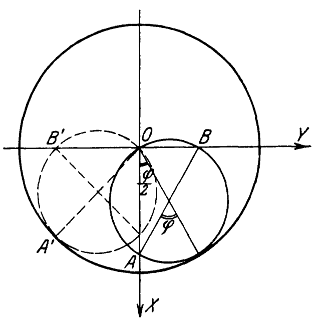

Abb. 6.

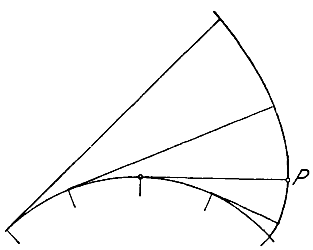

Abb. 7.

Vertauschen wir nun aber die beiden Scheiben, lassen also im ersten Fall die Gerade auf einem festen Kreis abrollen, was leicht durch Abwickeln eines straff gespannten Fadens von einer Rolle erreicht werden kann, so beschreiben die Punkte der Geraden bzw. des Fadens Kreisevolventen, Abb. 7, welche die erzeugende Gerade in allen Lagen senkrecht schneiden. Die andern Rollkurven gehen bei der Vertauschung der Kreise in solche gleicher Art über, während im letzten Falle des Abrollens eines bewegten Kreises von doppeltem Durchmesser auf dem festen Kreise bei gleicher Krümmung an Stelle der geraden Bahn sich eine Herzlinie ergibt.

2. Beispiel. Die Schubstange AB eines einfachen Kurbeltriebes ist im Punkte A vermittels des Kurbelzapfens auf dem sog. Kurbelkreis um O, im Punkte B durch den als Gleitstück wirkenden Kreuzkopf auf der festen Leitgeraden OB geführt, Abb. 8. Der Momentanpol P entsteht daher als Schnitt des Strahles OA mit dem Lote auf der Leitgeraden OB in B und beschreibt bei der Drehung von A im oberen Halbkreis die feste Polbahn H—H. Diese rückt für die senkrechte Stellung der Kurbel OA ins Unendliche, besitzt aber eine in Abb. 8 strichpunktierte Asymptote senkrecht zu OB und kommt bei weiterer Drehung auf der andern Seite mit dem Zweige H_1 aus dem Unendlichen zurück. Auf beiden Zweigen H und H_1 der festen Polbahn rollt alsdann die bewegliche Polbahn $CPBC$ ab, der für die zweite Hälfte der Kreisbewegung ein zweiter symmetrischer Zweig auf der andern Seite der Asymptote entspricht. Auf diesem Zweige rollen die ebenfalls nicht mitgezeichneten Fortsetzungen der Polbahnen H und H_1 zu beiden Seiten der Geraden OB ab.

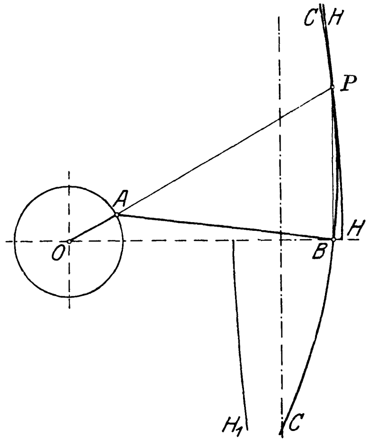

Abb. 8.

§ 2. Die Hüllkurven bewegter Scheiben. Zeichnen wir uns in Abb. 9 den Umriß der bewegten starren Scheibe in allen ihren Lagen auf, so werden diese durch zwei Kurven eingehüllt, welche ihrerseits mit den Scheiben den ganzen Bewegungsvorgang bestimmen. Der Momentanpol P ergibt sich alsdann als Schnitt der Normalen in zwei zusammengehörigen Berührungspunkten der Hüllkurven und wird im allgemeinen nicht auf einer derselben liegen. Daraus erkennt man, daß die Bewegung der Berührungsstellen längs der Hüllkurven erfolgt, die Scheibe also, ohne zu rollen, an den beiden Kurven hingleitet, die als Teile der Begrenzung einer festen Scheibe angesehen werden können. Eine dieser Hüllkurven kann auch durch die vorgelegte Bahn eines bestimmten Punktes der bewegten Scheibe ersetzt und mit der andern Hüllkurve zur Ermittlung der festen Polbahn durch den Schnitt der Normalen beider in zugehörigen Punkten benutzt werden. Die einfachsten hierher gehörigen Fälle bilden das schon oben erwähnte Gleitstück mit seiner Führungsschiene, sowie der Zapfen und das Lager.

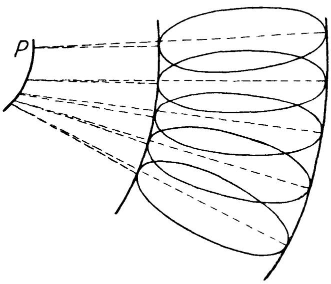

Abb. 9.

Ist die neben der Hüllkurve vorgelegte Punktbahn ein Kreis, so können wir auch, da es nur auf die gegenseitige Bewegung beider Scheiben ankommt, die ursprünglich bewegte Scheibe in einem Punkte dieses Kreises festhalten und dafür der vorher festen Scheibe eine

Drehung um den Kreismittelpunkt gestatten. Alsdann drehen sich beide Scheiben K_1 und K_2 um zwei feste Punkte O_1 und O_2, während ihre Randkurven aneinander hingleiten und sich wechselseitig als Hüllkurven bedingen. Da $O_1 O_2$ zur ursprünglichen Kreisbahn senkrecht steht, so bildet der Schnitt dieser Geraden mit der Berührungsnormalen den **Momentanpol** P **der gegenseitigen Drehung beider Scheiben, der somit auf der Verbindungslinie ihrer Drehpunkte liegt.**

In Abb. 10 sei A der augenblickliche Berührungspunkt mit den Abständen r_1 und r_2 von den Drehpunkten O_1 und O_2, die mit der Berührungsnormalen die Winkel α_1 und α_2 bilden, sowie $d\varphi_1$ und $d\varphi_2$ die zusammengehörigen entgegengesetzten unendlich kleinen Drehungen beider Scheiben. Dann beschreibt A um O_1 den Bogen $r_1 \, d\varphi_1$, um O_2 den Bogen $r_2 \, d\varphi_2$. Diese Bogenwerte zerlegen wir in je zwei Teilwerte durch Projektion auf die gemeinsame Normale und Tangente. Der Unterschied der Tangentialwerte

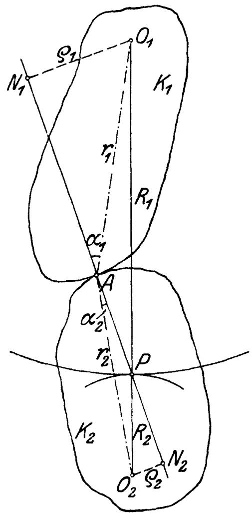

Abb. 10.

$$r_1 \cos \alpha_1 \, d\varphi_1 - r_2 \cos \alpha_2 \, d\varphi_2 = ds$$

gibt die **Gleitung** beider Körper während der zusammengehörigen Drehungen an, wogegen die in die Normalenrichtung fallenden Verschiebungen, damit die Berührung aufrecht erhalten bleibt, in Richtung und Größe miteinander übereinstimmen müssen, woraus

$$r_1 \sin \alpha_1 \, d\varphi_1 = r_2 \sin \alpha_2 \, d\varphi_2$$

hervorgeht. Hierin sind aber $r_1 \sin \alpha_1 = \varrho_1$ und $r_2 \sin \alpha_2 = \varrho_2$ die Lote von O_1 und O_2 auf die Berührungsnormale, mithin

$$\varrho_1 \, d\varphi_1 = \varrho_2 \, d\varphi_2, \quad \text{oder} \quad \frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}.$$

Mit dieser Gleichung ist die Abhängigkeit der beiden Verdrehungen voneinander bei gegebenen Scheibenrissen vollständig bestimmt.

Beispiel. Von praktischer Bedeutung ist nun der Fall eines konstanten Verhältnisses der Verdrehungen, des sog. Übersetzungsverhältnisses für die Bewegungsübertragung durch Zahnräder, deren Zähne nichts anderes als Randstücke der gegeneinander verdrehten Scheiben darstellen. Alsdann ist auch das Verhältnis der beiden Lote $\varrho_1 : \varrho_2$ unabhängig von der Lage der Zähne gegeneinander und wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke $O_1 N_1 P$ und $O_2 N_2 P$ auch das Verhältnis von $O_1 P : O_2 P = R_1 : R_2$, also die Lage des Momentanpoles P auf der Verbindungslinie der Drehpunkte $O_1 O_2$. Damit aber ist die Bewegung der beiden Scheiben K_1 und K_2 auf das Abrollen zweier sich stets im Punkte P berührender sog. Teilkreise zurückgeführt, deren Halbmesser die Verbindungslinie $O_1 O_2$ nach dem Übersetzungsverhältnis derart teilen, daß

$$R_1 \, d\varphi_1 = R_2 \, d\varphi_2 .$$

Dies läßt sich indessen nicht mit zwei beliebigen Zahnbegrenzungen für K_1 und

K_2 durchführen, von denen vielmehr eine die Form der anderen bedingt. Denken wir uns in Abb. 11 eine Begrenzung $A_1 A B_1$ des um O_1 drehbaren Zahnes in der Lage gegeben, daß A gerade im Momentanpole mit dem zugehörigen Punkte des Gegenzahnes zusammenfällt. Bei der Drehung bewegt sich A_1 in einem Kreise um O_1, wobei die Normale der Zahnflanke in A_1, welche den Teilkreis um O_1 in P_1 trifft, nach Zurücklegung des Bogens $A O_1 P_1 = \varphi_1$ in die Lage $A A_2$ gelangt. Der auf dem Kreise durch Abtragen der Länge $A_1 P_1$ von A aus gewonnene Punkt A_2 stellt demnach den Berührungspunkt von A_1 mit dem entsprechenden Punkt des Gegenzahnes dar. Wendet man dieses Verfahren auf weitere Punkte der vorgelegten Zahnflanke an, wobei man für die innerhalb des Teilkreises gelegenen eine Rückdrehung vorzunehmen hat, so ergibt sich als geometrischer Ort aller Berührungspunkte die sog. Eingriffslinie $A_2 A B_2$. Dem Punkte P_1 entspricht nun auf dem andern Teilkreis um O_2 der Punkt P_2 derart, daß der Bogen $A P_1 = A P_2$ ist, woraus sich der zugehörige Winkel $A O_2 P_2 = \varphi_2$ ergibt, so zwar, daß $R_1 \varphi_1 = R_2 \varphi_2$ ist. Den zu A_1 gehörigen Punkt A_3 des Gegenzahnes erhält man alsdann durch Abtragen der Normalenlänge $A A_2$ von P_2 aus auf dem Kreisbogen mit dem Halbmesser $O_2 A_2$, so daß $A A_2 = P_2 A_3$.

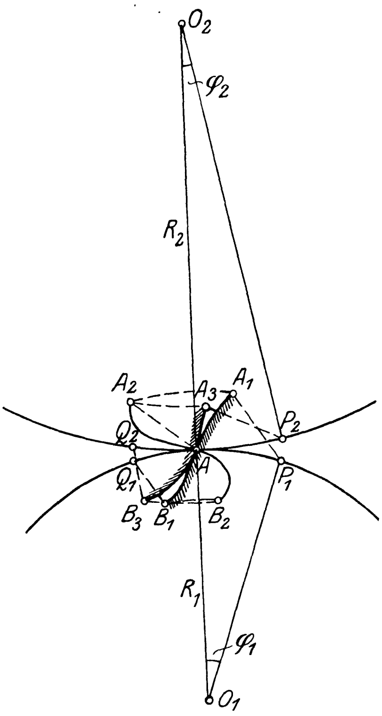

Abb. 11.

Bei der Anwendung dieses von Reuleaux herrührenden Verfahrens in der Technik geht man fast immer von der Eingriffslinie aus, die man häufig aus zwei im Punkte A die Teilkreise berührenden Kreisbogen $A_2 A$ und $A B_2$ zusammensetzt oder einfach als schräge Gerade durch diesen Punkt wählt. Dem Übergange von A_2 nach A_1 entspricht dann ein Abrollen des aus $A_2 A$ ergänzten Vollkreises auf dem Teilkreis um O_1, dem Übergange von A_2 nach A_3 ein Abrollen auf dem Teilkreis um O_2, während das Abrollen des dem unteren Teile $A B_2$ der Eingriffslinie zugehörigen Kreises auf dem Teilkreise die Punkte B_1 und B_3 der Zahnflanke ergibt, die sich alsdann je aus einem Epizykloiden- und einem Hypozykloidenstück zusammensetzen. Im Falle der geraden Eingriffslinie, die wir auf zwei Berührungskreisen um O_1 und O_2 abrollen lassen, ergeben sich als Zahnflanken je zwei Evolventenstücke. Außerdem erkennt man, daß hierbei die Berührungsnormale für alle Punkte der Zahnflanken mit der Eingriffslinie zusammenfällt und daher ihre Richtung im Gegensatz zu den Zykloidenzähnen nicht ändert. Jedenfalls erhellt aus diesen Darlegungen, deren weitere Ausführung den Schriften über Maschinenelemente überlassen werden muß, die ganze Wichtigkeit der schon oben behandelten Rollkurven.

§ 3. Theorie der Planimeter. Die beliebige ebene Bewegung einer Geraden AB können wir uns auch nach Abb. 12 durch eine Parallelverschiebung nach $A''B''$, sowie eine Drehung um den einen Endpunkt A'' um den Winkel ψ in die schließliche Lage $A''B'''$ ersetzt denken. Die Parallelverschiebung selbst läßt sich weiterhin noch zerlegen in eine Verschiebung der Geraden in sich selbst bis $A'B'$ und eine dazu senkrechte nach $A''B''$. Handelt es sich um eine unendlich kleine Bewegung, so zerfällt dieselbe in eine Parallelverschiebung um die elementare Strecke $A'A'' = B'B'' = dh$, sowie eine Elementardrehung $B''A''B''' = d\psi$, woraus sich die von der Strecke von der Länge $AB = b$ überstrichene Fläche zu

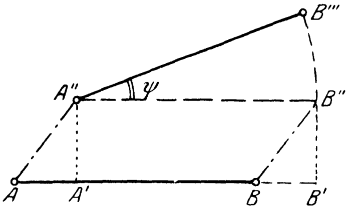

Abb. 12.

$$dF = b \cdot dh + \frac{b^2}{2} d\psi \quad . \quad . \quad 1)$$

ergibt.

Durchlaufen nun bei der Bewegung der Strecke ihre beiden Endpunkte geschlossene Kurven in den in Abb. 13 eingetragenen Pfeilrichtungen mit den Flächen F_a und F_b, so schließen die beiden äußersten Lagen AB und $A''B''$ der bewegten Strecke mit den inneren Kurvenstücken $AA'A''$ und $B''B'''B$ die Fläche F_c ein. Beim Übergang von AB nach $A''B''$ wird mithin von der Strecke die Fläche $F_1 = F_c + F_b$, beim Übergang von $A''B''$ nach AB dagegen die Fläche $F_2 = F_c + F_a$ überstrichen, so daß insgesamt beim Umlauf der Strecke AB die Fläche

$$F = F_1 - F_2 = F_b - F_a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

überstrichen wird, die auch aus 1) durch Integration gewonnen werden kann. Dabei sind die beiden Fälle zu unterscheiden, daß die Flächen F_a und F_b, wie in Abb. 13 dargestellt, außerhalb voneinander liegen oder daß eine derselben die andere nach Abb. 14 völlig um-

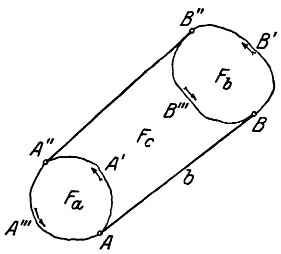

Abb. 13.

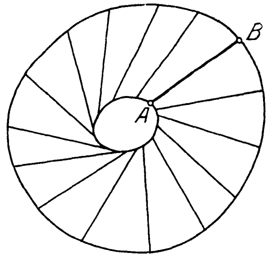

Abb. 14.

schließt. Im ersteren Falle wächst der Winkel ψ bis zu einem bestimmten Betrage an und nimmt dann wieder bis zu seinem Anfangswerte ψ_0 ab, so daß nach 1)

$$F_b - F_a = bh + \frac{b^2}{2}\int_{\psi_0}^{\psi_0} d\psi = b \cdot h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2a)$$

wird. Im zweiten Fall aber durchläuft ψ alle Werte von ψ_0 bis $\psi_0 + 2\pi$, mithin wird

$$F_b - F_a = bh + \frac{b^2}{2}\int_{\psi_0}^{\psi_0 + 2\pi} d\psi = bh + \pi b^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2b)$$

während h die gesamte Parallelverschiebung der Strecke b darstellt. Durch diese Parallelverschiebung ist demnach in beiden Fällen der Flächenunterschied F_b und F_a bestimmt, oder auch eine dieser beiden Flächen, wenn die andere von vornherein gegeben ist. Damit ist die Ermittlung der von einem Endpunkt der bewegten Strecke umfahrenen geschlossenen Kurve auf die gesamte Parallelverschiebung der Strecke beim Umlauf zurückgeführt. Vorrichtungen, welche die Flächenbestimmung auf diesem Wege ermöglichen, bezeichnet man allgemein als Planimeter; unter ihnen haben die Polarplanimeter die größte Verbreitung gewonnen und sollen darum auch hier besonders besprochen werden. Wir bezeichnen jetzt den Halbmesser des Polarkreises mit a, seinen Winkel mit einer in der Bildebene festen Geraden mit φ, dann ist die von a bei einer elementaren Verschiebung überstrichenen Fläche $dF_a = \frac{a^2}{2} d\varphi$, woraus sich im Verein mit 1) und 2)

$$dF_b = \frac{a^2}{2} d\varphi + \frac{b^2}{2} d\psi + b\,dh \quad \text{. . . . . . . 3)}$$

ergibt. Die vom Fahrstift P am Ende der Strecke b umfahrene Fläche ist demnach in den Fällen 2a) und 2b) entsprechend Abb. 13 und 14

$$F_b = b \cdot h, \quad \text{. . . . . 3a)}$$

$$F_b = b \cdot h + (a^2 + b^2)\pi, \quad \text{. . . . . 3b)}$$

so daß es nur noch auf die Messung der Parallelverschiebung h ankommt. Dieses geschieht beim Schneidenradplanimeter, Abb. 15, durch ein Rädchen R mit messerartig zugeschärftem Umfang, das auf einer zum Arm b senkrechten und mit ihm starr verbundenen Achse AC hin- und hergleiten kann. Bei der Drehung des Armes AC rollt das Rädchen unbehindert auf der Bildebene, Verschiebungen in seiner Achsenrichtung AC dagegen verhindert die Schärfe seines Umfanges, so daß auf einem an der Achse selbst oder einer daneben liegenden Schiene angebrachten Maßstab unmittelbar die ganze Parallelverschiebung h von b als Unterschied der Abstände AR in der Anfangs- und Endlage des Rädchens abgelesen werden kann.

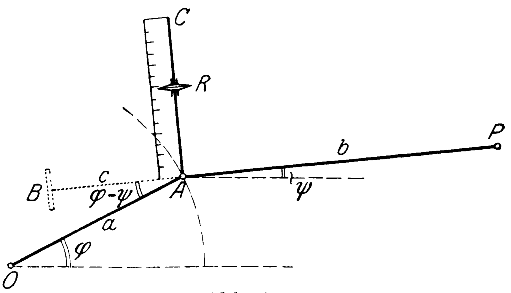

Abb. 15.

An Stelle dieser wenig genauen und darum auch selten gebrauchten Vorrichtung benutzt man nach dem Vorgang von Amsler (1856) zur Messung eine Rolle B vom Halbmesser r (Abb. 15 gestrichelt), die auf der Fortsetzung des Armes AP über A hinaus im festen Abstande $AB = c$ über die Bildebene läuft. Sie vollzieht dabei nur Drehungen um ihre Achse, wenn der Arm c sich um A dreht, sowie bei Verschiebungen desselben senkrecht zu seiner augenblicklichen Lage, nicht aber bei solchen in der Armrichtung selbst. Erleidet also b eine senkrechte Parallelverschiebung dh und vollzieht gleichzeitig eine Drehung um $d\psi$, so hat sich der Arm c um denselben Winkel zurückgedreht, also die Rolle auf der Bildebene den Weg $dh - c\,d\psi$ durchlaufen. Dieser muß mit dem abgerollten Bogen $r\,d\chi$ ihres Umfanges übereinstimmen, so daß wir

$$dh = c\,d\psi + r\,d\chi \quad \ldots \ldots \ldots \quad 4)$$

erhalten. Setzen wir dies in 3) ein, so folgt

$$dF_b = \frac{a^2}{2}\,d\varphi + \frac{b^2 + 2bc}{2}\,d\psi + b\cdot r\,d\chi \quad \ldots \ldots \quad 5)$$

und nach Integration für die beiden in Abb. 16 und 17 dargestellten Fälle

$$F_b = b\cdot r\cdot\chi \quad \ldots \ldots \ldots \quad 5a)$$

$$F_b = b\cdot r\cdot\chi + (a^2 + b^2 + 2bc)\,\pi \ldots \ldots \quad 5b)$$

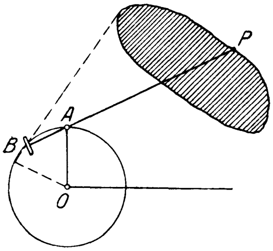

Abb. 16.

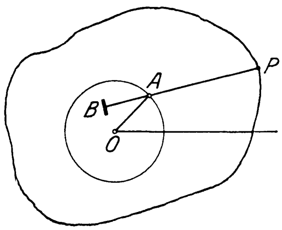

Abb. 17.

Der abgerollte Bogen $r\chi$ kann als Unterschied zwischen der Anfangs- und Endlage auf einer mit Nonius versehenen Marke am Arm c unmittelbar bis auf Tausendstel der vollen Umdrehung abgelesen, die Länge des Armes b durch Verschieben des Drehpunktes A beliebig eingestellt werden, um allen praktischen Anforderungen zu genügen.

Beim Gebrauch des Amslerschen Planimeters ist nicht zu übersehen, daß beim Durchlaufen gewisser Kurven die Meßrolle gar keine Drehungen vollzieht. Das tritt dann ein, wenn in 4) mit $d\chi = 0$

$$dh = c\,d\psi \quad \ldots \ldots \ldots \quad 4a)$$

wird. Nun ist aber nach Abb. 15

$$dh = a\,d\varphi\cos(\varphi - \psi), \ldots \ldots \ldots \quad 6)$$

also mit 4a)

$$c\cdot d\psi = a\cos(\varphi - \psi)\,d\varphi \ldots \ldots \ldots \quad 4b)$$

Die wegen der nicht durchführbaren Trennung der beiden Veränderlichen φ und ψ unausführbare Integration dieser Gleichung kann nun leicht durch eine Näherungsverzeichnung der zugehörigen Kurve der Meßrolle und des Fahrstiftes ersetzt werden. Man übersieht leicht, daß die erstere sich nicht dreht, wenn der Arm $BAP = b + c$ um den Berührungspunkt B der Meßrolle gedreht und dann in sich selbst verschoben wird. Das erreicht man in Abb. 18 durch Verbindung des Endpunktes A' des um $d\varphi$ gedrehten Polarmes mit dem ursprünglichen Endpunkte B des anderen Armes und Abtragung der Längen $A'B' = AB = c$, sowie $A'P' = AP = b$ auf dieser Verbindungslinie, wonach B' und P' Nachbarpunkte auf den gesuchten Kurven sind. Dabei gelangt der Punkt A durch Drehung um B nach A'', so daß

$$AA'' = AB\,d\psi = c\,d\psi,$$

$$AA' = OA\,d\varphi = a\,d\varphi$$

ist. Da nun

$$\sphericalangle A'AA'' = \sphericalangle OAB = \varphi - \psi,$$

so ist auch

$$AA'' = AA' \cos(\varphi - \psi),$$

woraus dann wieder nach Einsetzen von AA'' und AA' Gl. 4b) hervorgeht. Diese wird im Sonderfalle erfüllt durch einen unveränderten Winkelunterschied $\varphi - \psi$, der sich wegen $d\varphi = d\psi$ aus Gl. 4b) zu

$$\cos(\varphi - \psi) = \frac{c}{a} \quad . \quad 4\text{c})$$

ergibt. Dem entspricht aber in Abb. 19 ein rechtwinkliges Dreieck OAB, das bei der Bewegung keine Änderung erleidet, so daß sowohl B als auch P je einen Kreis um den Pol O beschreiben. Diesen beiden in Abb. 18 eingezeichneten Grundkreisen nähern sich die drehungsfreien Kurven asymptotisch. Die Halbmesser dieser Kreise sind ersichtlich

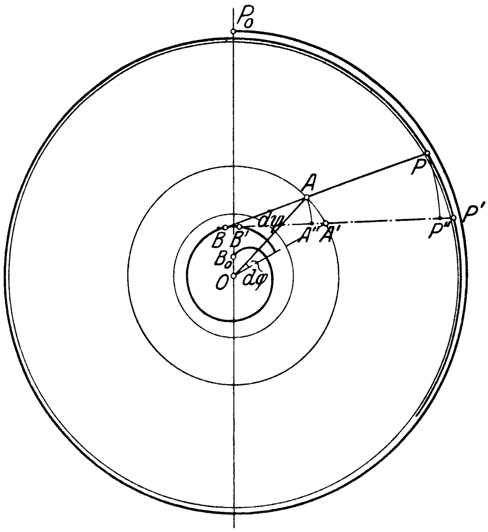

Abb. 18.

für B: $\quad r_1 = \sqrt{a^2 - c^2}$,

für P: $\quad r_2 = \sqrt{a^2 + b^2 + 2bc}$,

wonach die Konstante in Gl. 5b) mit der Fläche des Grundkreises von P übereinstimmt, auf die in diesem Falle der größte Betrag der umfahrenen Fläche entfällt.

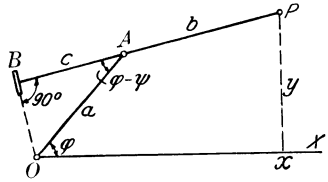

Abb. 19.

II. Zeitliche Bewegungsänderungen.

§ 4. Einführung der Zeit. Unsere bisherigen Untersuchungen erstreckten sich ausschließlich auf Änderungen der Lage des Körpers, insbesondere von Scheiben in einer Ebene, welche wir stets durch Längen- und Winkelmaße ausdrücken und dadurch miteinander vergleichen konnten. Es fehlt uns aber noch ein von den gegenseitigen Verschiebungen unabhängiger Vergleichsmaßstab, den wir zweckmäßig einer ohne unser Zutun stetig und ununterbrochen verlaufenden Bewegung entnehmen. Als solche bietet sich uns die Drehung des Erdballes gegen den Fixsternhimmel dar, die wir in handlichen Vorrichtungen, den sogen. Uhren, durch Drehung des Zeigers auf einem Zifferblatte derart nachahmen, daß jeder Stellung einer bestimmten Meridianebene der Erde gegen den Fixsternhimmel eine Zeiger-stellung der Uhr entspricht. Den ganzen Unterschied zweier aufeinanderfolgender Meridiandurchgänge eines Fixsternes, d. h. den Umlauf der Erde selbst gegen den Fixsternhimmel, bezeichnen wir als einen Sterntag. Infolge des durch die Drehung der Erde gegen die Sonne bedingten Wechsels von Tag und Nacht hat sich allerdings die Benutzung des Unterschieds zweier aufeinanderfolgender Meridiandurchgänge der Sonne, d. h. des Sonnentages, als praktischer erwiesen, obwohl dessen Verhältnis zum Sterntag gewissen, wenn auch nur kleinen Schwankungen unterliegt, deren Grund wir später kennen lernen werden. Sehen wir zunächst davon ab, so ist das Verhältnis durch die Eigenbewegung der Sonne am Fixsternhimmel, die auf den Umlauf der Erde um die Sonne zurückzuführen ist, gegeben. Dieser Umlauf, dargestellt durch den Unterschied zweier gleicher aufeinanderfolgender Stellungen der Sonne am Fixsternhimmel, vollzieht sich 365,25 Sonnentagen oder $365{,}25 + 1 = 366{,}25$ Sterntagen und wird als ein Jahr bezeichnet. Den Sonnentag teilt man nun in 24 Stunden, $24 \cdot 60 = 1440$ Minuten und $24 \cdot 60 \cdot 60 = 86400$ Sekunden und bedient sich der letzteren als Einheit des gewöhnlich als Zeit benannten Maßes für die Bewegungsvorgänge.

Die bei der Bewegung eines Punktes zwischen zwei Endlagen verflossene Zeit ist demnach durch den Winkelunterschied zweier Zeigerstellungen einer Uhr gegeben, die mit den beiden Endlagen zusammen beobachtet werden. Das ist streng genommen nur möglich, wenn die Uhr an der Bewegung des Punktes selbst teilnimmt, eine Bedingung, die für irdische Vorgänge allerdings keine Rolle spielt und darum auch nicht beachtet zu werden pflegt. Wichtig ist dagegen, daß die aus einer stets gleichsinnig verlaufenden Drehung der Erde oder des Uhrzeigers abgeleitete Zeit auch nur Änderungen in einem Sinne erleidet, also bei positiv gerechneten Drehwinkeln nur zunehmen kann. Da weiterhin jede Drehung um eine Achse erfolgt, so liegt es nahe, auf dieser in einem willkürlich vereinbarten Maßstab die zurückgelegten Drehwinkel und die daraus abgeleiteten Zeiten in einem und demselben Sinne als Strecken aufzutragen und mit diesem die bei einer Bewegung zurückgelegten zugehörigen Wege zu messen. Wir erhalten auf diese Weise eine Zeitachse, deren Richtung ebenso willkürlich ist wie diejenige der Achse des benutzten Uhrzeigers. Genau so können wir auch die auf einer geraden oder krummen Bahn von einem Punkte von einer Anfangslage aus zurückgelegten Wege s auf einer Geraden auftragen und jedem Punkt derselben die vom Anfangspunkte bis dahin verflossene Zeit durch eine Parallele zur Zeitachse von entsprechender Länge zuordnen. Wählen wir die Zeit als Abszisse und den durchlaufenen Weg als Ordinate und stellen der Einfachheit halber beide senkrecht zueinander, so erhalten wir durch Verbindung der Ordinatenpunkte die in Abb. 20 dargestellte Wegkurve mit der Gleichung

$$s = f(t) \qquad \text{1)}$$

Da der bewegte Punkt nicht gleichzeitig, d. h. bei einer und derselben Uhrzeigerstellung, zwei verschiedene Lagen einnehmen kann, sondern zum Übergang von einer Lage in die andere eine endliche Zeit gebraucht, innerhalb deren er alle Zwischenlagen überstreicht, so kann die Wegkurve auch keine Sprünge aufweisen, sondern muß durchaus stetig verlaufen. Sie kann auch nicht geschlossen oder teilweise rückläufig sein, auch darf sie keine Schleifen enthalten, da in allen diesen Fällen einem Punkte der Zeitachse mehrere Lagen des bewegten Punktes entsprechen würden. Für den Ruhezustand des Punktes geht die Wegkurve in eine Parallele zur Zeitachse über, in die sie auch beim Aufhören des Bewegungszustandes einmündet. Kommt demnach ein Punkt zeitweilig zur Ruhe, so enthält seine Wegkurve parallele Stücke zur Zeitachse.

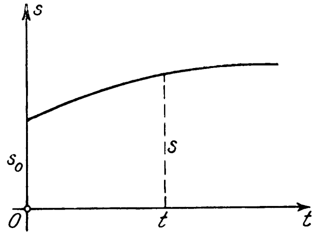

Abb. 20.

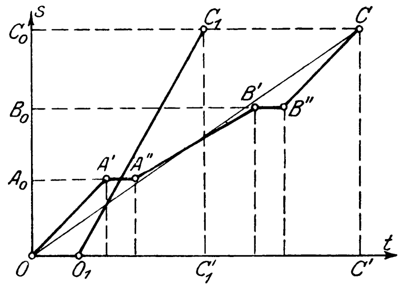

Abb. 21.

1. Beispiel. Aus Wegkurven dieser Art setzen sich die graphischen Fahrpläne des Eisenbahnbetriebes zusammen. In Abb. 21 ist durch die gebrochene Linie $OA'A''B'B''C$ die Wegkurve eines Eisenbahnzuges zwischen den Endstationen O und C_0 dargestellt, der auf den Zwischenstationen A_0 und B_0 Aufenthalt nimmt, deren Dauer der Länge der zur Zeitachse parallelen Stücke $A'A''$ und $B'B''$ entspricht, während die ganze Reisedauer durch die Strecke OC' gegeben ist. Ein zwischen den Stationen O und C_0 nicht haltender Schnellzug verläßt die Ausgangsstation um die durch die Länge OO_1 gemessene Zeit später und überholt den vorgenannten Zug auf der ersten Station A_0, während dessen Aufenthaltes, so daß seine Wegkurve durch die steiler ansteigende Gerade O_1C_1 mit der Reisedauer O_1C_1' dargestellt ist. In derselben Weise kann man auch noch andere Wegkurven von Zügen mit anderen Fahrzeiten und Aufenthalten, sowie solche mit entgegengesetzter Fahrtrichtung nach dem Kursbuche eintragen, welch letztere naturgemäß durch abfallende Linienzüge dargestellt werden und insgesamt ein übersichtliches Bild der ganzen Streckenbelastung darbieten.

Haben wir es mit einer krummen Bahn zu tun, so bereitet die Messung der Weglänge mit Hilfe eines im allgemeinen starren geraden Maßstabes Schwierigkeiten und führt leicht zu Ungenauigkeiten. Man wird es darum vorziehen, in solchem Fall die beiden Risse (Projektionen) x und y des durchlaufenden Weges s auf den Achsen eines in der Bewegungsebene festen Achsenkreuzes (Koordinatensystems) zu betrachten und deren Änderung mit der Zeit festzulegen. Für jeden dieser Risse erhält man alsdann eine Wegkurve nach den Formeln:

$$x = f_1(t), \qquad y = f_2(t), \quad \ldots \ldots \ldots \quad 2)$$

aus denen sich durch Ausschaltung der Zeit t die Bahngleichung

$$F(x, y) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

in der xy-Ebene selbst ergibt. Legen wir dann die Achsenkreuze beider Wegkurven nach Abb. 22 derart aneinander, daß die Zeitachsen zusammenfallen und die beiden Wegachsen zueinander senkrecht stehen, so erhalten wir ein räumliches Achsenkreuz xyt und in diesem eine Raumkurve PQR mit den drei Rissen $P_1Q_1R_1$, $P_2Q_2R_2$, $P_0Q_0R_0$, deren Gleichungen durch 2) und 3) gegeben sind. Diese Raumkurve, die auch bei geschlossener Bahn $P_0Q_0R_0$ ins Unendliche verläuft und im Falle von Haltepunkten zur t-Achse parallele Stücke aufweist, wollen wir nach dem Vorgange von Minkowski als die Weltlinie der ebenen Bewegung bezeichnen.

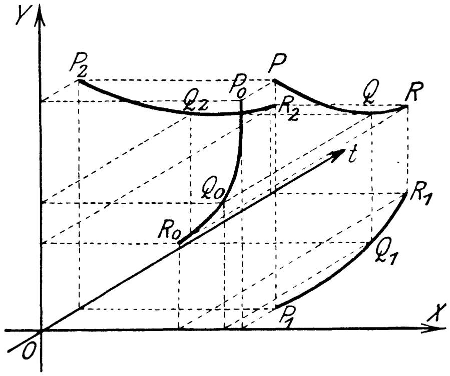

Abb. 22.

2. Beispiel. Legt der bewegte Punkt auf einer geraden Bahn in gleichen Zeiten gleiche Strecken zurück, so sprechen wir von einer gleichförmigen Bewegung. Alsdann werden auch die beiden Achsen x, y im einfachen Verhältnis mit der Zeit wachsen, also die beiden Wegkurven geradlinig verlaufen, dem dann wiederum eine geradlinige Weltlinie entspricht.

3. Beispiel. Durchläuft der Punkt einen Kreis vom Halbmesser r derart, daß in gleichen Zeiten gleiche Wege zurückgelegt, Abb. 23, also vom Fahrstrahl r gleiche Winkel φ überstrichen werden, so treten an Stelle von 2) die einfachen Formeln

$$r = \text{konst.}, \qquad \varphi = \omega t, \quad . \quad 4)$$

worin ω ein unveränderlicher Beiwert ist, der mit der Umlaufszeit t_0 in der einfachen Beziehung

$$2\pi = \omega t_0 \quad . \quad . \quad 5)$$

steht. Außerdem erkennt man, daß in diesem Falle der gleichförmigen Kreisbewegung die erste Gl. 4), welche die Zeit t nicht enthält, ohne weiteres die Bahngleichung darstellt, die im Verein mit der zweiten als Weltlinie eine Schraubenlinie ergibt. Die beiden Wegkurven ergeben sich alsdann aus

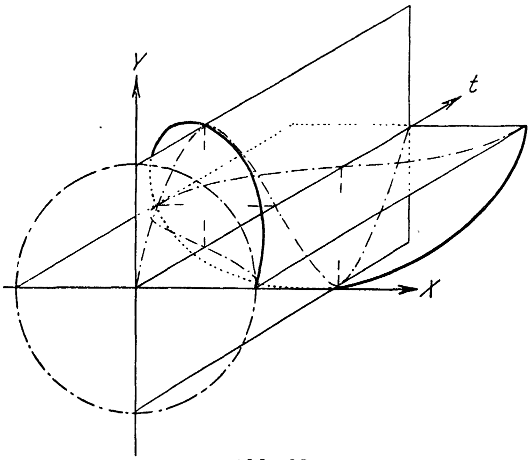

Abb. 23.

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi = r\cos\omega t \\ y &= r\sin\varphi = r\sin\omega t \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4a)$$

als Sinuslinien, die ebenso wie die Weltlinie ins Unendliche fortlaufen, während die Bahngleichung auch

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4\,\mathrm{b})$$

geschrieben werden kann.

§ 5. **Geschwindigkeit oder Lauf.** Wir haben im vorigen Abschnitt eine gleichförmige Bewegung dadurch gekennzeichnet, daß entsprechend einer geradlinigen Wegkurve in gleichen Zeiten gleiche Strecken zurückgelegt werden, daß also der Bruch aus dem Wege und dem zugehörigen Zeitunterschiede für die Endlage

$$\frac{s - s_1}{t - t_1} = c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

einen beständigen Wert besitzt. Man bezeichnet denselben gewöhnlich als die Geschwindigkeit, wofür wir auch das kürzere Wort „Lauf" benutzen wollen. Bilden wir denselben Bruch für eine Bewegungsart mit gekrümmter Wegkurve, so finden wir für jede durchlaufene Strecke einen anderen Wert, den wir alsdann als mittlere Geschwindigkeit oder mittleren Lauf des Punktes auf der zwischen zwei Punkten zurückgelegten Strecke bezeichnen. Solche Mittelwerte können wir z. B. dem graphischen Fahrplan Abb. 21 sofort entnehmen und aus der Neigung der zugehörigen Weggeraden ihre Verschiedenheit zwischen den einzelnen Haltestellen erkennen. Über den Bewegungsvorgang zwischen den Endpunkten einer der herausgegriffenen Strecken gibt der Mittelwert indessen keine Auskunft, wenn wir nicht zu einer weiteren Unterteilung schreiten und immer neue Mittelwerte bilden. Gehen wir damit bis zum verschwindenden Wegelement ds, dem dann auch nur noch ein Zeitelement dt zugeordnet ist, so erhalten wir den Grenzwert in drei Schreibweisen[1])

$$\lim \frac{s - s_1}{t - t_1} = \frac{ds}{dt} = \dot{s} = v, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1\,\mathrm{a})$$

der nunmehr den Lauf an der betrachteten Stelle darstellt und durch die trigonometrische Tangente des Tangentenwinkels im zugehörigen Punkte der Wegkurve gegeben ist. Trägt man die so gewonnenen einzelnen Laufwerte in einem geeigneten, sonst aber willkürlichen Maßstabe als Funktion der Zeit auf, so erhält man zu jeder Wegkurve eine Laufkurve, die ersichtlich für die durch 1) gegebene gleichförmige Bewegung parallel zur Zeitachse verläuft. Da ferner im Zähler des Ausdruckes für den Lauf stets eine Länge l, gemessen in Meter, im Nenner eine in Sekunden gemessene Zeit t steht, so wird der ganze Bruch in m/sec nach der Dimensionsformel

$$v = [l \cdot t^{-1}] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

ausgedrückt.

---

[1]) Die in der Folge vielfach angewandte Schreibweise $\dot{s}$ für die Ableitung nach der Zeit rührt schon von Newton her, während Leibnitz dafür $ds : dt$ benutzte.

Man kann natürlich auch jeden Lauf v mit der zugehörigen Strecke s zu einer **Laufwegkurve** mit der Gleichung

$$v = \dot{s} = \varphi(s) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

auftragen und aus dieser durch Integration der Formel

$$dt = \frac{ds}{\dot{s}} = \frac{ds}{v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3\text{a})$$

zwischen den Grenzen s_1 und s die auf dieser Strecke verflossene Zeit rechnerisch oder graphisch (durch Planimetrieren der v^{-1}-Kurve) ermitteln.

1. Beispiel. Um von einem Punkte P_1 mit den Achsenabständen x_1, y_1 zu einem Punkte P_2 mit x_2, y_2 auf der anderen Seite der x-Achse über P mit dem Abstande x von O, Abb. 24, derart zu gelangen, daß der Lauf oberhalb derselben unverändert gleich c_1, unterhalb dagegen c_2 ist, braucht man die Zeit

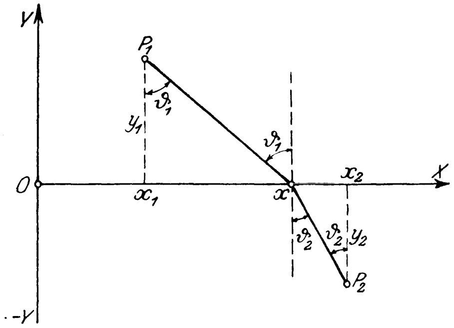

Abb. 24.

$$t = \frac{\sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}}{c_2}, \quad . \quad 4)$$

die somit nur von der durch x gegebenen Lage des Übergangspunktes P abhängt. Soll die ganze Laufdauer einen Kleinstwert annehmen, so folgt

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x - x_1}{c_1\sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2}} - \frac{x_2 - x}{c_2\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + y_2^2}} = 0, \quad \ldots\ldots \quad 4\text{a})$$

oder unter Einführung der Bahnwinkel ϑ_1 und ϑ_2 mit der Senkrechten in P

$$\frac{\sin\vartheta_1}{c_1} = \frac{\sin\vartheta_2}{c_2}, \quad \text{oder} \quad \frac{\sin\vartheta_1}{\sin\vartheta_2} = \frac{c_1}{c_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 4\text{b})$$

Es ist dies nichts anderes, als der von **Fermat** herrührende Beweis des **Snelliusschen Brechungsgesetzes eines Lichtstrahles an der Grenze zweier Körper**, in denen das Licht verschiedene Läufe besitzt. Daß es sich nicht um einen Höchstwert von t handeln kann, folgt ohne Bestimmung des Vorzeichens der zweiten Ableitung von t nach x schon aus dem Umstande, daß t mit x augenscheinlich und im Einklange mit 4) unbegrenzt wachsen muß.

Bewege ich mich im Gang eines fahrenden Eisenbahnwagens in der Fahrtrichtung, so ist der von mir gegenüber dem Bahnkörper zurückgelegte Weg die Summe der Wege des Wagens und des meines Körpers in demselben, während bei umgekehrter Gangrichtung der Gesamtweg als Unterschied der einzelnen sich ergibt. Daraus folgt, daß **gleichgerichtete Wege sich algebraisch addieren.** Übertragen wir dies auf die Elemente dx' und dx'', so wird das Gesamtwegelement

$$dx = dx' + dx''$$

und nach Division mit dem dabei verflossenen Zeitelement dt

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + \frac{dx''}{dt},$$

oder

$$v_x = \dot{x} = \dot{x}' + \dot{x}'' = v_x' + v_x'', \quad \ldots \ldots \quad 5)$$

d. h. *in einer und derselben Richtung addieren sich die Läufe eines bewegten Punktes algebraisch.* Daraus folgt weiter, daß *die Geschwindigkeit oder der Lauf ebenso wie eine Strecke eine gerichtete Größe, einen sog. Vektor darstellt, dessen Richtung mit derjenigen der Bahntangente an jeder Stelle übereinstimmt.*

Bewegt man sich nun im Abteil eines Eisenbahnwagens senkrecht zur Fahrtrichtung, so ergibt sich eine von der Vorwärtsbewegung gänzlich unabhängige, gleichzeitige Seitenverschiebung dy, die mit der Vorwärtsbewegung dx gemeinsam auf eine schräge Gesamtverschiebung führt. Bezeichnen wir das Element derselben, welches offenbar mit dem der Bahn übereinstimmt, mit ds und seinen Neigungswinkel gegen die x-Achse mit ϑ, so ist offenbar

$$dx = ds\cos\vartheta, \quad dy = ds\sin\vartheta,$$

oder nach Division mit dt in beiden Schreibweisen

$$\dot{x} = \dot{s}\cos\vartheta = v\cdot\cos\vartheta = v_x$$

$$\dot{y} = \dot{s}\sin\vartheta = v\cdot\sin\vartheta = v_y,$$

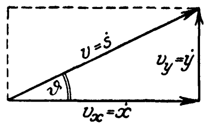

Abb. 25.

also

$$\left.\begin{aligned} v &= \dot{s} = \dot{x}\cos\vartheta + \dot{y}\sin\vartheta = v_x\cos\vartheta + v_y\sin\vartheta \\ v^2 &= \dot{s}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v_x^2 + v_y^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 6)$$

Der Gesamtlauf oder die Resultante als Vektor stellt hiernach die Diagonale des aus den beiden Teilläufen, den Komponenten, gebildeten Rechteckes dar. Abb. 25.

Sind die beiden gleichzeitigen Verschiebungen eines bewegten Punktes gegeneinander um den Winkel ϑ_0 geneigt, so zerlegen wir sie zweckmäßig in je zwei zueinander senkrechte Teilbeträge in den Achsenrichtungen, so zwar, daß

$$dx' = ds'\cos\vartheta', \quad dy' = ds'\sin\vartheta'$$
$$dx'' = ds''\cos\vartheta'', \quad dy'' = ds''\sin\vartheta''$$

ist und addieren diese nach Teilung mit dt für sich. Daraus folgt dann für die Teilbeträge des Gesamtlaufes $\dot{s}$ nach Abb. 26

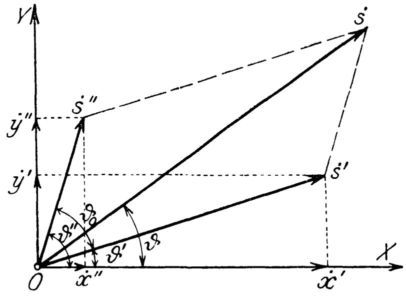

Abb. 26.

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \dot{x} = \dot{s}'\cos\vartheta' + \dot{s}''\cos\vartheta'' = v'\cos\vartheta' + v''\cos\vartheta'' \\ v_u &= \dot{y} = \dot{s}'\sin\vartheta' + \dot{s}''\sin\vartheta'' = v'\sin\vartheta' + v''\sin\vartheta'' \end{aligned}\right\}, \quad \ldots \quad 7)$$

also nach Quadrieren und Addieren wegen 6)

$$\dot{s}^2 = \dot{s}'^2 + \dot{s}''^2 + 2\,\dot{s}'\dot{s}''(\cos\vartheta'\cos\vartheta'' + \sin\vartheta'\sin\vartheta''),$$

oder da

$$\cos\vartheta'\cos\vartheta'' + \sin\vartheta'\sin\vartheta'' = \cos(\vartheta' - \vartheta'') = \cos\vartheta_0,$$

$$v^2 = \dot{s}^2 = \dot{s}'^2 + \dot{s}''^2 + 2\,\dot{s}'\dot{s}''\cos\vartheta_0 = v'^2 + v''^2 + 2\,v'v''\cos\vartheta_0. \quad 7\text{a})$$

Ebenso erhalten wir auch durch Erweiterung der ersten Formel 7) mit $\cos\vartheta$, der zweiten mit $\sin\vartheta$ und Addition

$$\dot{x}\cos\vartheta + \dot{y}\sin\vartheta = \dot{s}'(\cos\vartheta'\cos\vartheta + \sin\vartheta'\sin\vartheta)$$
$$+ \dot{s}''(\cos\vartheta''\cos\vartheta + \sin\vartheta''\sin\vartheta),$$

oder mit Rücksicht auf 6)

$$v = \dot{s} = \dot{s}'\cos(\vartheta - \vartheta') + \dot{s}''\cos(\vartheta'' - \vartheta)$$
$$= v'\cos(\vartheta - \vartheta') + v''\cos(\vartheta'' - \vartheta) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 7\text{b})$$

Danach erscheint auch bei beliebig gegeneinander geneigten Einzelläufen der Gesamtlauf eines bewegten Punktes als Diagonale des aus den Einzelläufen gebildeten Parallelogramms oder auch als Schlußlinie des aus ihnen durch Aneinanderreihung erhaltenen gebrochenen Linienzuges. Dieses Ergebnis ist offenbar die Verallgemeinerung der oben durch 6) gegebenen Zusammensetzung zweier senkrecht zueinander gerichteter Teilbeträge und gilt für alle Arten von Vektoren. Es läßt sich, wie man durch Vereinigung des zuletzt erhaltenen Gesamtbetrages mit einem dritten Einzelbetrage erkennt, ohne weiteres auf eine beliebige Anzahl von Vektoren ausdehnen, deren Aneinanderreihung einen gebrochenen Linienzug ergibt, dessen Schlußlinie nach Größe und Richtung den Gesamtvektor darstellt. Diese Aneinanderreihung bezeichnet man wohl auch als geometrische Addition der Vektoren im Gegensatz zur algebraischen und schreibt sie unter Verwendung von Frakturbuchstaben in der einfachen Form

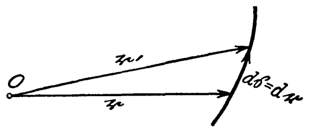

Abb. 27.

für Strecken

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{s}' + \mathfrak{s}'' + \ldots,$$

oder für Läufe

$$\left.\begin{array}{l} \dot{\mathfrak{s}} = \dot{\mathfrak{s}}' + \dot{\mathfrak{s}}'' + \ldots \\ \mathfrak{v} = \mathfrak{v}' + \mathfrak{v}'' + \ldots \end{array}\right\} \; . \; . \; . \quad 8)$$

bzw.

Danach würde, wenn in Abb. 27 $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}'$ zwei benachbarte Fahrstrahlen von einem willkürlichen Anfangspunkte O an das Bahnelement $d\mathfrak{s}$ bedeuten, dieses sich als geometrischer Unterschied

$$d\mathfrak{s} = \mathfrak{r}' - \mathfrak{r} = d\mathfrak{r} = \dot{\mathfrak{r}}\,dt \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 8\text{a})$$

zugleich mit dem Lauf $\dot{\mathfrak{s}} = \dot{\mathfrak{r}}$ nach Größe und Richtung ergeben. Schließlich sei noch bemerkt, daß durch die Einzelvektoren stets der Gesamtvektor bestimmt ist, umgekehrt aber nur die zwei Teilbeträge eines Vektors, wenn deren Richtungen gegeben sind.

2. Beispiel. Sind die beiden Wegkurven für die x- und y-Richtung gegeben durch

$$\begin{matrix} x = a\cos\omega t \\ y = b\sin\omega t \end{matrix} \quad \text{bzw.} \quad \left.\begin{matrix} x = a e^{\alpha t} \\ x = b e^{-\alpha t} \end{matrix}\right\}, \quad \ldots \ldots \quad 9)$$

so sind die zugehörigen Bahngleichungen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{bzw.} \quad x \cdot y = ab\,, \quad \ldots \ldots \quad 9\text{a})$$

also eine Ellipse oder gleichseitige Hyperbel.

Weiter sind die Laufteile

$$\begin{matrix} \dot{x} = -\,\omega a\sin\omega t \\ \dot{y} = \omega b\cos\omega t \end{matrix} \quad \text{bzw.} \quad \left.\begin{matrix} \dot{x} = \alpha a e^{\alpha t} \\ \dot{y} = -\,\alpha b e^{-\alpha t} \end{matrix}\right\} \quad \ldots \ldots \quad 9\text{b})$$

und die Gesamt- oder Bahnläufe:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,,$$

also für die Ellipse:

$$v = \omega\sqrt{a^2\sin^2\omega t + b^2\cos^2\omega t} \quad \ldots \ldots \quad 9\text{c})$$

und für die Hyperbel:

$$v = \alpha\sqrt{a^2 e^{2\alpha t} + b^2 e^{-2\alpha t}} \quad \ldots \ldots \quad 9\text{d})$$

§ 6. Winkelgeschwindigkeit oder Drehwert. Es erscheint häufig zweckmäßig, die Bewegung und die Bahn eines Punktes nicht auf zwei rechtwinklige Achsen zu beziehen, sondern durch seinen Abstand von einem Anfangspunkte O und den Drehwinkel dieses sog. Fahrstrahls gegen eine feste Anfangslage auszudrücken. Davon haben wir schon einmal am Schlusse des § 4 bei der Betrachtung einer gleichförmigen Kreisbewegung, sowie für die Vektordarstellung des Laufes am Ende des letzten Abschnittes Gebrauch gemacht.

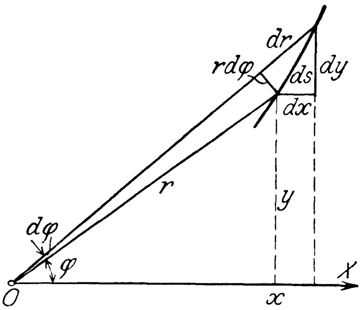

Abb. 28.

Bedeuten wieder x und y die rechtwinkligen Koordinaten eines Bahnpunktes, so ergibt sich sein Abstand r vom Anfang O und dessen Drehwinkel φ gegen die X-Achse nach Abb. 28:

$$x = r\cos\varphi\,, \qquad y = r\sin\varphi\,, \quad \ldots \ldots \quad 1)$$

also:

$$\left.\begin{matrix} dx = dr\cos\varphi - r\sin\varphi\, d\varphi \\ dy = dr\sin\varphi + r\cos\varphi\, d\varphi \end{matrix}\right\} \quad \ldots \ldots \quad 1\text{a})$$

und für das Bahnelement

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2\, d\varphi^2. \quad \ldots \ldots \quad 1\text{b})$$

Die Teilung der Elemente 1a) mit dt sowie von 1b) mit dt^2 ergibt alsdann mit den beiden neuen Ausdrücken:

$$\frac{dr}{dt} = \dot{r} = v_r, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} = \omega\,, \quad \ldots \ldots \quad 2)$$

von denen wir den ersten als Radialgeschwindigkeit oder Strahllauf, den zweiten als Winkelgeschwindigkeit oder Drehwert mit der Dimension $\omega = [t^{-1}]$, das Produkt $r\,\omega = v_u$ mit dem Strahl r

aber als Drehgeschwindigkeit oder Drehlauf bezeichnen wollen, unter sonstiger Beibehaltung der bisher geübten Schreibweise

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi = v_r\cos\varphi - r\,\omega\sin\varphi \\ v_y &= \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi = v_r\sin\varphi + r\,\omega\cos\varphi \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; 3)$$

$$v^2 = \dot{s}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = v_r^{\,2} + r^2\omega^2 = v_r^{\,2} + v_u^{\,2} \; . \; . \; . \; . \; . \; 3\,\mathrm{a})$$

Hiernach kann der Bahnlauf v, den wir im letzten Paragraph in zwei Teile nach den Achsenrichtungen zerlegt hatten, auch in der Strahlrichtung und senkrecht dazu nach Abb. 29 in einen Strahllauf v_r und einen Drehlauf $r\omega$ derart aufgeteilt werden, daß mit der Neigung ψ der Bahn gegen den Strahl r

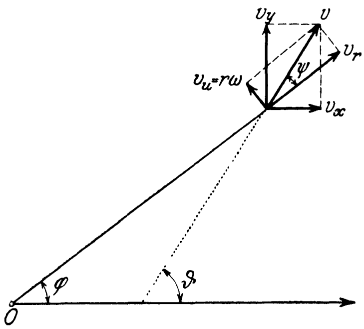

Abb. 29.

$$v_r = v\cos\psi, \qquad r\,\omega = v\sin\psi \quad 4)$$

wird. Angesichts der willkürlichen Lage des rechtwinkligen Achsenkreuzes sind diese Formeln allerdings selbstverständlich und mit den Gleichungen 6), § 5, gleichwertig, in die sie, wie man durch Einsetzen von 4) in 3) feststellt, mit $\varphi + \psi = \vartheta$ übergehen, worin ϑ den Neigungswinkel der Bahn gegen die feste Anfangslage bedeutet.

1. Beispiel. Haben wir es im Sonderfall mit einer reinen Kreisbewegung zu tun, so bleibt der Strahl r vom Kreismittelpunkt aus unverändert, und die beiden Teilläufe in den Achsenrichtungen vereinfachen sich mit $v_r = \dot{r} = 0$ in

$$v_x = -r\,\omega\sin\varphi, \qquad v_y = r\,\omega\cos\varphi, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 5)$$

während der Bahnlauf mit dem Drehlauf

$$v = r\,\omega \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 5\,\mathrm{a})$$

übereinstimmt.

2. Beispiel. Bewegt sich der Mittelpunkt einer gleichförmigen Drehung $\varphi = \omega t$ selbst noch gleichförmig mit dem Laufe c etwa in der x-Richtung fort, o erhalten wir für die Gesamtbewegung

$$x = c \cdot t + r\cos\omega t, \qquad y = r\sin\omega t, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 6)$$

oder auch

$$x = \frac{c\cdot\varphi}{\omega} + r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 6\,\mathrm{a})$$

Mit $c = r\omega$ wird die Bahn eine gemeine Zykloide, mit $c \gtrless r\omega$ eine Trochoide Abb. 3). Die Teilläufe sind

$$v_x = c - r\,\omega\sin\varphi, \qquad v_y = r\,\omega\cos\varphi \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 7)$$

und der Gesamt- oder Bahnlauf v folgt aus

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = c^2 + r^2\omega^2 - 2\,r\,c\,\omega\sin\varphi = c^2 + r^2\omega^2 - 2\,c\,\omega\,y, \; . \; . \; 7\,\mathrm{a})$$

schwankt also nur mit der Höhenlage des Punktes über dem Kreismittelpunkt zwischen den durch

$$(c + r\,\omega)^2 > v^2 > (c - r\,\omega)^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 7\,\mathrm{b})$$

gegebenen Grenzen.

3. Beispiel. Dreht sich ein Punkt P gleichzeitig um zwei Pole O_1 und O_2, während die augenblicklichen Fahrstrahlen r_1 und r_2 die Winkel φ_1 und φ_2 mit dem Achsenabstande $O_1 O_2 = a$ bilden, so hat man nach Abb. 30 zunächst die geometrischen Beziehungen

$$r_1 \sin \varphi_1 = r_2 \sin \varphi_2 , \qquad r_2 \cos \varphi_2 - r_1 \cos \varphi_1 = a \quad \ldots \ldots \quad 8)$$

Da sich nun nach den Ausführungen des § 1 die Drehungen, d. h. die Änderungen $d\varphi_1$ und $d\varphi_2$ der Winkel einfach algebraisch addieren, so gilt dies auch für die Drehwerte $\dot{\varphi}_1 = \omega_1$ und $\dot{\varphi}_2 = \omega_2$, die mithin den Gesamtdrehwert

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 9)$$

ergeben. Die Laufwerte der Gesamtbewegung in der x- und y-Richtung berechnen sich ferner durch Addition der durch 5) bestimmten Beträge der Einzeldrehungen zu

$$\left. \begin{aligned} v_x &= - r_1 \omega_1 \sin \varphi_1 - r_2 \omega_2 \sin \varphi_2 \\ v_y &= r_1 \omega_1 \cos \varphi_1 + r_2 \omega_2 \cos \varphi_2 \end{aligned} \right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 10)$$

mit dem aus

$$v^2 = r_1^2 \omega_1^2 + r_2^2 \omega_2^2 + 2 r_1 r_2 \omega_1 \omega_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2) \quad \ldots \ldots \quad 10a)$$

hervorgehenden Bahnlauf. Betrachten wir auch diesen als Drehlauf um einen Pol O im Abstand $OP = r$ auf der Senkrechten zu v, die mit a den Winkel φ bildet, so muß deren Drehwert $\dot{\varphi} = \omega$ und

$$v_x = - r \omega \sin \varphi , \qquad v_y = r \omega \cos \varphi$$

sein. Das gibt mit 10)

$$\left. \begin{aligned} r \omega \sin \varphi &= r_1 \omega_1 \sin \varphi_1 + r_2 \omega_2 \sin \varphi_2 \\ r \omega \cos \varphi &= r_1 \omega_1 \cos \varphi_1 + r_2 \omega_2 \cos \varphi_2 \end{aligned} \right\} \quad 10b)$$

Mit der ersten dieser Formeln folgt aber aus 8) und 9)

$$r_1 \sin \varphi_1 = r_2 \sin \varphi_2 = r \sin \varphi \quad , \ldots \quad 8a)$$

d. h. der gesuchte Drehpol O liegt auf der Geraden $O_1 O_2$. Weiter wird aus 10b) nach Erweiterung mit $\cos \varphi$, bzw. $\sin \varphi$ und Addition bzw. Subtraktion

$$\left. \begin{aligned} r \cdot \omega &= r_1 \omega_1 \cos (\varphi - \varphi_1) + r_2 \omega_2 \cos (\varphi - \varphi_2) \\ 0 &= r_1 \omega_1 \sin (\varphi - \varphi_1) + r_2 \omega_2 \sin (\varphi - \varphi_2) \end{aligned} \right\} 10\,c)$$

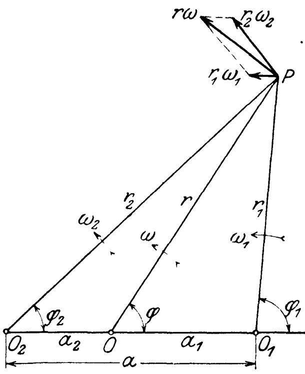

Abb. 30.

Bezeichnen wir nunmehr die Abstände des Poles O von den Einzelpolen O_1 und O_2 mit a_1 und a_2, so daß also $a_1 + a_2 = a$ ist, so erkennen wir aus den Dreiecken $O_1 O P$ und $O_2 O P$

$$\frac{a_1}{r} = \frac{\sin (\varphi_1 - \varphi)}{\sin \varphi_1} , \qquad \frac{a_2}{r} = \frac{\sin (\varphi - \varphi_2)}{\sin \varphi_2} , \quad \ldots \ldots \quad 11)$$

also mit Rücksicht auf die zweite Gl. 10c) sowie 8a)

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\sin (\varphi_1 - \varphi) \sin \varphi_2}{\sin (\varphi - \varphi_2) \sin \varphi_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} , \quad \ldots \ldots \ldots \quad 11a)$$

womit die Lage des Punktes O durch $a_1 \omega_1 = a_2 \omega_2$ festgelegt ist. Wird im Sonderfalle entgegengesetzt gleicher Drehwerte $\omega_1 + \omega_2 = 0$ oder $\omega_1 = - \omega_2$ so folgt aus 10) mit Rücksicht auf die Gl. 8)

$$v_x = 0 ; \qquad v_y = a \omega_2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 12)$$

und aus 11a)

$$\frac{a_1}{a_2} = -1 , \qquad \sin \varphi = 0 , \qquad \text{also } a_1 = - a_2 = \infty ,$$

d. h. zwei entgegengesetzt gleiche Drehungen, ein sog. Drehpaar, ergeben eine zur Polverbindung senkrechte Verschiebung mit dem Laufwerte $a \omega_2$, die auch als Drehung um einen unendlich fernen Pol aufgefaßt werden kann.

4. Beispiel. Rollt ein Kreis vom Halbmesser r_1 auf einem festen vom Halbmesser r_2, so wird bei einer Drehung des ersteren um φ_1 der Berührungspunkt auf dem festen Kreise den Bogen $r_1 \varphi_1 = r_2 \varphi_2$ zurücklegen. Verläuft die Bewegung gleichförmig, so dürfen wir dafür auch unter Einführung der beiden Drehwerte, sowie mit dem unveränderlichen Abstande r_0 der beiden Kreismitten schreiben

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2, \qquad r_1 + r_2 = r_0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 13)$$

woraus sich

$$r_1 = \frac{\omega_2 r_0}{\omega_1 + \omega_2}, \qquad r_2 = \frac{\omega_1 r_0}{\omega_1 + \omega_2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 14)$$

ergibt. Jeder Punkt des Rollkreises beschreibt alsdann nach dem 1. Beispiel § 1, eine Epizykloide. Solche Kurven beschreiben angenähert die Monde der Planeten um die Sonne, deren Bahnebenen, wie diejenige des Erdmondes, nur wenig gegen die Ebenen der Planetenbahnen geneigt und wie diese selbst nahezu kreisförmig sind. Im Falle des Erdmondes ist $\omega_2 : \omega_1 \approx 12{,}37$ und die Neigung seiner Bahnebene gegen die der Erdbahn (Ekliptik) wenig größer als 5^0, so daß die Rollkreishalbmesser ungefähr $r_2 = 0{,}075\, r_0$, $r_1 = 0{,}925\, r_0$ werden, wenn r_0 den Erdbahnhalbmesser bedeutet. Da nun der mittlere Halbmesser der Mondbahn um die Erde nur $r = r_0 : 390$ ist, so weicht die Mondbahn um die Sonne nur um diesen kleinen Betrag nach außen und innen von der fast kreisförmigen Erdbahn ab, ist also wie diese selbst stets konkav gegen die Sonne. Für den Umlauf der Erde um die Sonne, sowie der des Mondes um die Erde sind ferner

$$u_1 = \omega_1 r_0, \qquad u_2 = \omega_2 r,$$

also ist

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{\omega_2 r}{\omega_1 r_0} = \frac{12{,}37}{390} = 0{,}032\,.$$

Mit $u_1 \approx 30$ km/sec wird demnach $u_2 \approx 1$ km/sec, so daß der Mond auf seiner Bahn um die Sonne an dem am weitesten außerhalb der Erdbahn gelegenen Punkte den Lauf $u_1 + u_2 \approx 31$ km/sec, an dem innersten Punkte aber den Lauf $u_1 - u_2 \approx 29$ km/sec besitzt, also merklich ungleichförmig um die Sonne läuft, wozu noch die Ungleichförmigkeiten infolge der Abweichungen von der Kreisbahn hinzutreten.

§ 7. Beschleunigung oder Anlauf. Beobachten wir einen Eisenbahnzug auf seinem Wege vom Ausgangspunkte bis zur nächsten Haltestelle, so stellen wir zunächst einen Übergang vom Ruhezustand zu einer nahezu gleichförmigen Bewegung, die auf der sog. offenen Strecke eingehalten wird, und danach wieder einen allmählichen Übergang zum Ruhezustande fest. Längs des ganzen Weges ist demnach sowohl der Bahnlauf v, als auch seine beiden Teilbeträge v_x und v_y in zwei zueinander senkrechten Achsenrichtungen veränderlich, und zwar unabhängig davon, ob die Bahn gerade oder gekrümmt ist. Im Anschluß an dies Bild unseres Eisenbahnzuges wollen wir den elementaren Zuwachs des Laufes zu Beginn der Bewegung gemessen durch das Zeitelement als Beschleunigung oder Anlauf, den entsprechenden Bruch der Abnahme und der Zeit als Verzögerung oder Ablauf bezeichnen. Die beiden neuen Begriffe unterscheiden sich offenbar nur durch das Vorzeichen, so daß wir den Ablauf auch als den negativen Anlauf ansehen und nur mit letzterem zu rechnen brauchen. Nach dieser Festsetzung erhalten wir für die Bahn und die beiden Achsenrichtungen die Anläufe

$$\left.\begin{array}{c} q_s = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s} \\ q_x = \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{d^2 x}{dt^2} = \ddot{x}; \quad q_y = \dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{d^2 y}{dt^2} = \ddot{y} \end{array}\right\}, \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

worin der Doppelpunkt über dem Buchstaben, der die Richtung angibt, eine zweifache Ableitung nach der Zeit in sinngemäßer Ausdehnung der bisher für den Lauf gebrauchten Schreibweise andeuten möge. Erweitert man die Formeln der zweiten Reihe mit $dx = v_x dt$ bzw. $dy = v_y dt$ und addiert, so erhält man mit Rücksicht auf die Beziehung $v^2 = v_x^2 + v_y^2$

$$q_x dx + q_y dy = v_x dv_x + v_y dv_y = v dv, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1a)$$

worin aber dx und dy nicht beliebige Differentiale, sondern Risse des Bahnelementes darstellen.

Der Anlauf hängt nun mit dem Wege selbst und dem Laufe aufs engste zusammen, wie am klarsten aus der Entwicklung des Weges $s = f(t)$ als Zeitfunktion nach der Taylorschen Reihe hervorgeht. Diese liefert

$$s = s_0 + \frac{t}{1!}\left(\frac{ds}{dt}\right)_0 + \frac{t^2}{2!}\left(\frac{d^2 s}{dt^2}\right)_0 + \frac{t^3}{3!}\left(\frac{d^3 s}{dt^3}\right)_0 + \cdots,$$

oder

$$s = s_0 + \frac{t}{1!}\dot{s}_0 + \frac{t^2}{2!}\ddot{s}_0 + \frac{t^3}{3!}\dddot{s}_0 + \cdots, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

worin der Zeiger 0 den Wert der damit behafteten Größe zu Beginn der Zeitrechnung angibt. Wir werden nun bald sehen, daß in vielen Fällen der Anlauf $\ddot{s}$ selbst nicht in seiner Abhängigkeit von der Zeit, sondern vielmehr von der Lage des bewegten Punktes, d. h.

$$\ddot{s} = \frac{d^2 s}{dt^2} = q(s) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

von vornherein gegeben ist. Alsdann ergibt sich

$$\left.\begin{array}{l} \dddot{s} = \dfrac{d^3 s}{dt^3} = \dfrac{dq}{ds}\cdot\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{dq}{ds}\cdot\dot{s} \\ \ddddot{s} = \dfrac{d^4 s}{dt^4} = \dfrac{d^2 q}{ds^2}\dot{s}^2 + \dfrac{dq}{ds}\ddot{s} = \dfrac{d^2 q}{ds^2}\dot{s}^2 + q\,\dfrac{dq}{ds} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3a)$$

usf., so daß also durch 3) in der Tat alle Ableitungen von s festgelegt sind. Daraus folgt aber im Zusammenhange mit 2), daß man zur vollständigen Beschreibung des Bewegungszustandes nur die Anfangslage s_0, den Anfangslauf $\dot{s}_0$ und die Abhängigkeit des Anlaufes q von der Lage zu kennen braucht. Erleidet einer der Werte von $\dot{s}$ oder $\ddot{s}$ an irgendeiner Stelle eine Unstetigkeit, so gilt natürlich die Reihe 2) nur bis zu dieser Stelle und ist jenseits derselben mit den neuen Anfangswerten wieder aufzustellen. Im Falle einer krummen Bahn wird für jede der beiden Richtungen x und y eine Reihe 2) angeschrieben, deren weitere Behandlung genau wie oben vonstatten geht. Die diesen Richtungen entsprechenden Anlaufteile q_x und q_y ergeben alsdann einen Gesamtanlauf

$$q = \sqrt{q_x^2 + q_y^2}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 1b)$$

der die Bewegungsrichtung eines vorher in Ruhe befindlichen Punktes bestimmt und daher selbst als Vektor mit dieser Richtung aufzufassen ist. Dagegen braucht diese Richtung durchaus nicht mit derjenigen des Laufes übereinzustimmen, so daß im allgemeinen auch der Gesamtanlauf q von dem Bahnanlauf q_s verschieden ausfällt. Sind beide Anlaufteile q_x und q_y in jedem Punkte der Bewegungsebene, d. h. durch die Achsenabstände x und y bestimmt, so trifft dies auch für den Gesamtanlauf q nach Größe und Richtung zu. Die ganze Ebene stellt alsdann ein Anlauffeld dar, in dem der Gesamtanlauf als sog. Feldstärke die Bewegung jedes Punktes nach Gl. 1b) bedingt.

Da ferner der Anlauf aus der Teilung des Laufzuwachses mit dem Zeitelemente hervorgeht, so ist seine Dimension

$$q = \ddot{s} = [l \cdot t^{-2}], \quad \ldots \ldots \ldots \quad 4)$$

er wird mithin in m/sec² gemessen.

1. Beispiel. Besonders einfach gestaltet sich der Bewegungsvorgang auf einer Geraden mit einem gleichgerichteten unveränderlichen Anlauf $q = q_s = g$. Alsdann ist mit einem Anfangslauf $\dot{s} = c$ an der Stelle s_0, sowie wegen des Verschwindens aller höheren Ableitungen wie $\dddot{s}$ u. a. m. nach 2) der zur Zeit t zurückgelegte Weg sofort gegeben durch

$$s = s_0 + ct + \tfrac{1}{2} gt^2, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 5)$$

und der dabei erreichte Lauf

$$v = \dot{s} = c + gt \quad \ldots \ldots \ldots \quad 5a)$$

Wegen des mit der Zeit gleichförmig wachsenden Laufes bezeichnet man den ganzen Vorgang als eine gleichförmig beschleunigte Bewegung, deren Wegkurve eine Parabel ist, während die Laufkurve eine schräg ansteigende Gerade wird. Schalten wir noch die Zeit aus den Formeln 5) und 5a) aus, so erhalten wir für den Zusammenhang zwischen dem Lauf v und dem zurückgelegten Weg die Beziehung

$$v^2 - c^2 = 2g(s - s_0) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 5b)$$

Die vorstehenden Gleichungen finden unmittelbar Anwendung auf den freien Fall an der Erdoberfläche, an der erfahrungsgemäß ein Anlauffeld mit senkrecht nach unten gerichtetem, auch mit der Höhe nahezu beständigem Anlauf, der sog. Erdbeschleunigung im Betrage von $g = 9{,}81$ m/sec² herrscht. Hierbei bedeutet $s - s_0 = h$ die durchfallene Höhe, c den nach unten gerichteten Anfangslauf. Die Formeln sind aber auch für das Ansteigen im Erdfelde nach Umkehrung des Vorzeichens von g zu verwenden und ergeben dann für die größte Steighöhe h, für die $\dot{s} = v = 0$ wird,

$$2gh = c^2, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 5c)$$

2. Beispiel. Im Falle des schiefen Wurfes nach oben mit dem Anfangslauf c unter dem Winkel α gegen die Wagerechte haben wir die beiden Teilläufe in den Achsenrichtungen

$$\dot{x}_0 = c \cos \alpha, \qquad \dot{y}_0 = c \sin \alpha, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 6)$$

während nur in der Senkrechten als Anlauf die Erdbeschleunigung $q_y = \ddot{y} = -g$ nach unten wirkt. Beginnt die Bewegung im Anfangspunkte 0 des Achsenkreuzes, so lauten die aus 2) abgeleiteten Gleichungen der Wegkurven in beiden Richtungen

$$\left.\begin{aligned} x &= ct \cos \alpha \\ y &= ct \sin \alpha - \frac{g}{2} t^2 \end{aligned}\right\}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 7)$$

von denen die erste wieder eine Gerade, die zweite aber eine Parabel darstellt. Durch Ausschalten der Zeit erhalten wir daraus

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{2 c^2 \cos^2 \alpha} = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{2 c^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7\text{a})$$

als Gleichung der Wurfbahn, die hiernach auch eine Parabel ist und mit der Erdbeschleunigung g als Gesamtanlauf einen stetig veränderlichen Winkel bildet. Für $y = 0$ wird daraus

$$x \left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{g x}{2 c^2 \cos^2 \alpha} \right) = 0$$

mit den beiden Wurzeln

$$x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{2 c^2}{g} \operatorname{tg} \alpha \cos^2 \alpha = \frac{c^2}{g} \sin 2 \alpha \,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8)$$

von denen die erste den Anfangspunkt, die zweite aber die größte Wurfweite ergibt, die hiernach mit einem Erhebungswinkel von 45^0 erreicht werden kann. Aus den Laufteilen in den Achsenrichtungen

$$v_x = \dot{x} = c \cos \alpha \,, \qquad v_y = \dot{y} = c \sin \alpha - g t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9$$

folgt mit $v_y = 0$ die größte Wurfhöhe mit den Achsenabständen

$$x_0 = \frac{c^2}{2 g} \sin 2 \alpha \,, \qquad y_0 = \frac{c^2}{2 g} \sin^2 \alpha \,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9\text{a})$$

von denen der erstere der halben Wurfweite gleicht, so daß der höchste Punkt den Parabelscheitel bildet.

Für den Bahnlauf erhalten wir mit $v^2 = v_x^2 + v_y^2$ aus 9)

$$v^2 = c^2 - 2 g t c \sin \alpha + g^2 t^2 \,,$$

oder mit Rücksicht auf die zweite Formel 7)

$$v^2 = c^2 - 2 g y \,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9\text{b})$$

d. h. der Bahnlauf ist nur mit der Höhe über dem Erdboden veränderlich und hat für gleich hohe Punkte beim Auf- und Abstieg denselben Wert. Danach hat der geworfene Körper beim Niederfallen denselben Lauf wie beim Abwurf. Schalten wir ferner die Zeit aus den beiden Formeln 7) und 9) aus, so folgt

$$2 g y = c^2 \sin^2 \alpha - v_y^2 \,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9\text{c})$$

wonach gleiche Höhen auch mit denselben Bahnwinkeln durchlaufen werden, der geworfene Körper also auch unter dem Ausgangswinkel den Erdboden wieder erreicht.

Soll ein bestimmtes Ziel P mit den Achsenabständen x_1, y_1 erreicht werden, so erfordert dies einen Erhebungswinkel, der sich nach Einsetzen in die Bahngleichung 7a) durch Auflösen nach $\operatorname{tg} \alpha$ berechnet. Man findet

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{c^2}{g x_1} \pm \frac{1}{g x_1} \sqrt{c^4 - 2 c^2 g y_1 - g^2 x_1^2} \,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 10)$$

also im allgemeinen zwei Werte von α, denen auch zwei Flugbahnen entsprechen. Von ihnen bezeichnet man die untere OCP in Abb. 31 als Flachbahn, die obere als Steilbahn. Die beiden Werte von α sind indessen nur so lange reell, als $c^4 - 2 c^2 g y_1 - g^2 x_1^2 > 0$ bleibt. Ziele außerhalb der durch die Kurve

$$c^4 - 2 c^2 g y_1 - g^2 x_1^2 = 0 \quad 10\text{a})$$

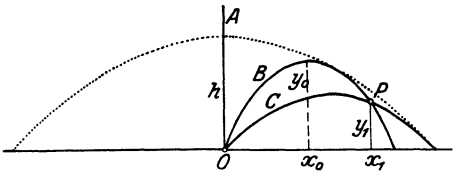

Abb. 31.

umschlossenen Fläche sind folglich mit dem Anfangslauf c überhaupt nicht erreichbar. Die auf der in Abb. 31 punktiert eingetragenen Kurve 10a), die ersichtlich wieder eine Parabel, aber mit senkrechter Achse durch den Anfang darstellt, gelegenen Ziele werden dann nur mit je einem Winkel $\operatorname{tg}\alpha = \frac{c^2}{g x_1}$, also auch nur einer Flugbahn erreicht. Die Kurve mit der durch 5c) gegebenen Scheitelhöhe hüllt somit alle die Flugbahnen mit gleichem Anfangslauf c ein und umschließt den sog. Schußbereich.

3. Beispiel. Fragen wir nach der Kurve, auf welcher die Fallzeit zwischen zwei Punkten den kleinsten Wert gegenüber allen andern durch diese hindurchgehenden Kurven annimmt, so brauchen wir nur drei unendlich benachbarte Punkte der gesuchten Kurve, Abb. 32, mit den Abständen ds', ds'' und den Neigungswinkeln ϑ', ϑ'' gegen die Wagerechte und den Laufwerten v', v'' ins Auge zu fassen. Verschieben wir nunmehr den Zwischenpunkt wagerecht um δx, so ändern zwar die Wegelemente ds' und ds'' sich um $-\delta x \cos\vartheta'$ und $+\delta x \cos\vartheta''$, nicht aber die Laufwerte v' und v''. Der Änderung des Gesamtweges entspricht aber ein Zeitunterschied

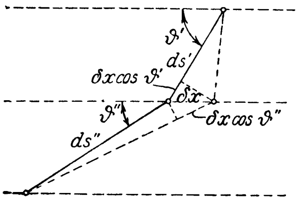

Abb. 32.

$$\delta t = \left(\frac{\cos\vartheta''}{v''} - \frac{\cos\vartheta'}{v'}\right)\delta x \quad . \; . \; . \quad 11)$$

gegenüber der Zeit zum Durchlaufen der ursprünglichen Strecken ds' und ds''. Damit diese Zeit ein Kleinstwert wird (ein Höchstwert kommt natürlich nicht in Frage), so muß $\delta t = 0$, also wegen der Willkür von δx die Klammer verschwinden. Es muß daher längs der gesuchten Kurve der Bruch

$$\frac{\cos\vartheta'}{v'} = \frac{\cos\vartheta''}{v''} = \frac{\cos\vartheta}{v} = C \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 11\text{a})$$

einen festen Wert besitzen. Rechnen wir nun die Fallhöhen y von der Ruhelage aus, so geht mit

$$v = \sqrt{2gy}, \qquad \cos\vartheta = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}, \qquad \frac{1}{2gC^2} = c \quad . \; . \; . \quad 11\text{b})$$

Gl. 11a) über in

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{c-y}{y}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 12)$$

Setzen wir darin

$$\left.\begin{aligned} &y = c\sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{c}{2}(1-\cos\varphi), \qquad dy = \frac{c}{2}\sin\varphi\, d\varphi, \\ &\text{so würde mit } x = 0 \text{ für } \varphi = 0 \\ &dx = c\sin^2\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = \frac{c}{2}(1-\cos\varphi)\, d\varphi, \qquad x = \frac{c}{2}(\varphi - \sin\varphi). \end{aligned}\right\} \quad . \quad 13)$$

Wir erhalten also zwischen x, y und φ die Gleichungen einer gemeinen Zykloide, § 1, deren Rollkreis mit dem Durchmesser $c = 2r$ den Bogen φ vom Anfang zurückgelegt hat.

Mit 13) folgt aus 12) für die Tangentenneigung, den Bogen und den Krümmungsarm

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{tg}\vartheta = \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}, \qquad \vartheta = \frac{\pi-\varphi}{2}, \qquad 2\,d\vartheta = -d\varphi \\ &ds = \sqrt{dx^2+dy^2} = 2r\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi, \qquad s = 4r\left[1-\cos\frac{\varphi}{2}\right] \\ &\varrho = -\frac{ds}{d\vartheta} = 4r\sin\frac{\varphi}{2} = 4r\cos\vartheta \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad 13\text{a})$$

Danach ist der Gesamtbogen der Zykloide für eine volle Rollkreisdrehung

$\varphi = 2\pi$, $s_1 = 8r$ und der Krümmungsarm ist gleich der doppelten Normale n bis zum Fußpunkt des Rollkreises, Abb. 33, der nach § 1 den augenblicklichen Drehpol bildet. Außerdem geht die Tangente stets durch das diesem Pol entgegengesetzte Ende des Rollkreisdurchmessers. Tragen wir auf der Tangente in P die Länge des Bogens PO' bis zum Scheitel O' der Zykloide ab, machen also $PP' = PO'$, so ist P' ein Punkt der Evolvente mit den Abständen x' und y' in bezug auf das Achsenkreuz durch O'. Da hiernach

$$OP' = 4r,$$

$$OP = s = 4r\left[1 - \cos\frac{\varphi}{2}\right],$$

$$PP' = OP' - OP = 4r\cos\frac{\varphi}{2}$$

ist, so wird

$$x' = r\pi - x - 4r\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}$$
$$= r[\pi - \varphi - \sin(\pi - \varphi)]$$

$$y' = y - 2r + 4r\cos^2\frac{\varphi}{2}$$
$$= r[1 + \cos\varphi],$$

oder mit $\pi - \varphi = \varphi'$

$$\left.\begin{aligned} x' &= r(\varphi' - \sin\varphi'), \\ y' &= r(1 - \cos\varphi'), \end{aligned}\right\} \quad . \ 13\text{b})$$

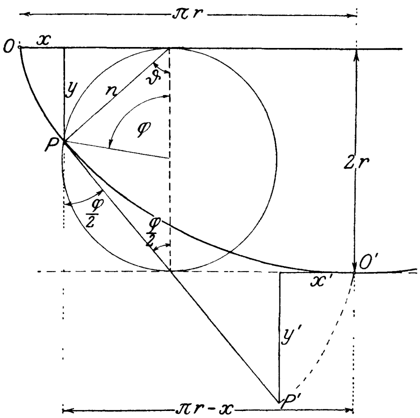

Abb. 33.

d. h. die Evolvente der Zykloide ist eine von ihrem Scheitel ausgehende kongruente Zykloide. Man kann demnach die Bewegung auf einer Zykloide durch den Endpunkt eines Fadens von der Länge $4r$ darstellen, der sich selbst auf einer festen Zykloide mit dem Rollkreisarm r auf- und abwickelt. Dadurch entsteht ein sog. Zykloidenpendel, auf dessen Bewegung wir noch zurückkommen werden.

§ 8. **Bahnanlauf und Normalanlauf.** Angesichts der völlig willkürlichen Lage des Bezugsachsenkreuzes ist die im letzten Abschnitt benutzte Herleitung des Gesamtanlaufes aus den beiden Teilbeträgen in den Achsenrichtungen wenig geeignet, über seine Wirkung auf den Bewegungsvorgang einen klaren Aufschluß zu gewähren. Insbesondere ist daraus nicht ohne weiteres die Ursache der Nichtübereinstimmung des Gesamtanlaufes mit dem Bahnanlaufe nach Größe und Richtung ersichtlich. Die gewünschte Einsicht gewinnen wir nun durch Betrachtung des Bogenelementes ds und des Neigungswinkels ϑ der Bahntangente gegen die x-Richtung, welche beide durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2, \qquad & dy &= \operatorname{tg}\vartheta\, dx \\ dx &= ds\cos\vartheta, & dy &= ds\sin\vartheta \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ 1)$$

gegeben sind. Durch nochmalige Differentiation der oberen Formeln erhalten wir

$$ds\, d^2s = dx\, d^2x + dy\, d^2y$$

$$d^2y - \operatorname{tg}\vartheta\, d^2x = \frac{dx\, d\vartheta}{\cos^2\vartheta},$$

und nach Teilung mit $ds \cdot dt^2$ und Einführung des Krümmungshalbmessers ϱ durch

$$ds = \varrho\, d\vartheta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1\,\text{a})$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dy}{ds} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dx}{ds} - \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{dy}{ds} = \frac{1}{\varrho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2.$$

Dafür dürfen wir aber mit unsern bisherigen Bezeichnungen schreiben

$$\left.\begin{aligned} q_y \sin\vartheta + q_x \cos\vartheta &= \frac{dv}{dt} \\ q_y \cos\vartheta - q_x \sin\vartheta &= \frac{v^2}{\varrho} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

und erhalten somit zwei Anlaufteile in der Richtung der Bahntangente und senkrecht dazu

$$q_s = \frac{dv}{dt} = \ddot{s}, \qquad q_n = \frac{v^2}{\varrho} = \frac{\dot{s}^2}{\varrho}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

von denen der erste mit dem schon bekannten Bahnanlauf übereinstimmt, während wir den zweiten als Normalanlauf bezeichnen wollen. Beide Anteile entstehen durch Addition der Risse der beiden Achsenanläufe auf die Bahntangente und Bahnnormale und ergeben durch Quadrieren und Addition der beiden Formeln 2)

$$q_s^{\,2} + q_n^{\,2} = q_x^{\,2} + q_y^{\,2} = q^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3\,\text{a})$$

wieder den Gesamtanlauf q. Von den beiden Anteilen bedingt hiernach der Bahnanlauf, wie schon die Bezeichnung ausdrückt, die Laufänderung längs der Bahn selbst, der Normalanlauf dagegen insofern deren Krümmung, als er den bewegten Punkt aus der Bahntangente, welche die augenblickliche Bewegungsrichtung angibt, in die Bahnkurve selbst dauernd ablenkt. Bei freier Bewegung ist demnach der Normalanlauf immer nach dem Krümmungsmittelpunkte hin gerichtet.

Man kann dieses Ergebnis auch unmittelbar aus dem Schaubilde Abb. 34 ablesen, welches die von einem Pole aus aufgetragenen Läufe nach Größe und Richtung enthält. Darin erscheint die Verbindung $q \cdot dt$ der Endpunkte zweier benachbarter Läufe v und $v + dv$ als Hypotenuse zweier elementarer rechtwinkliger Dreiecke, so zwar, daß

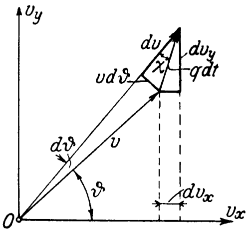

Abb. 34.

$$q^2 dt^2 = dv_x^{\,2} + dv_y^{\,2} = dv^2 + v^2 d\vartheta^2,$$

woraus nach Division mit dt^2 und Beachtung von 1 a)

$$q^2 = \left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{\varrho^2} \quad \ldots\ldots \quad 3\,\text{b})$$

in Übereinstimmung mit 3 a) hervorgeht. Daraus erkennt man auch sofort, daß der Normalanlauf mit dem Elemente $v \cdot d\vartheta$ senkrecht auf v und damit auf der Bahntangente steht, während der Gesamtanlauf q in die jeweilige Tangente des Ortes aller Laufenden, des sog. Hodographen (nach Hamilton) fällt, also von der Bahnrichtung im allgemeinen um einen Winkel χ abweicht, der sich aus

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{v\, d\vartheta}{dv} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 3c)$$

ergibt. Nach dem Vorgange der Abb. 27 kann man auch aus Abb. 34 die Vektorschreibweise für den Gesamtanlauf

$$\mathfrak{q}_s + \mathfrak{q}_n = \mathfrak{q} = \dot{\mathfrak{v}} = \ddot{\mathfrak{r}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 4)$$

unmittelbar ablesen, da $\mathfrak{q} \cdot dt$ nur der geometrische Unterschied zweier benachbarter Laufvektoren ist. Damit ist zugleich die zweite Ableitung des Strahlvektors $\mathfrak{r}$ als geometrische Summe des Bahn- und Normalanlaufes dargestellt.

1. Beispiel. In dem schon im ersten Beispiel des § 6 behandelten Falle einer Kreisbewegung waren die beiden Laufteile:

$$v_x = -r\,\omega \sin\varphi\,, \qquad v_y = r\,\omega\cos\varphi\,,$$

woraus sich durch weitere Ableitung nach der Zeit die gleichgerichteten Anlaufteile zu

$$\left.\begin{aligned} q_x &= \frac{dv_x}{dt} = \ddot{x} = -r\left[\frac{d\omega}{dt}\sin\varphi + \omega^2\cos\varphi\right] \\ q_y &= \frac{dv_y}{dt} = \ddot{y} = +r\left[\frac{d\omega}{dt}\cos\varphi - \omega^2\sin\varphi\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad 5)$$

ergeben. Aus ihnen folgt nach der Formel 3a)

$$q^2 = r^2\left[\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + \omega^4\right] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 5a)$$

der Gesamtanlauf q, in dem

$$q_s = r\,\frac{d\omega}{dt} \qquad \text{und} \qquad q_n = r\,\omega^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 5b)$$

den Bahnanlauf und den Normalanlauf bedeutet. Bei gleichförmiger Drehung verschwindet der erstere und der Gesamtanlauf stimmt mit dem Normalanlauf überein, geht also durch den Kreismittelpunkt. Mit $r\,d\varphi = ds$ und $r\,d\omega = dv$, sowie $r = \varrho$ gehen die Gleichungen 5b) wieder in die Form 3) über, aus der sie sofort hergeleitet werden können.

2. Beispiel. Bei der Wurfbewegung mit dem Neigungswinkel ϑ der Bahntangente gegen die Wagerechte zerfällt der mit der Erdbeschleunigung übereinstimmende senkrecht nach unten gerichtete Gesamtanlauf $-g$ in die beiden Teilbeträge

$$q_s = \frac{dv}{dt} = -g\sin\vartheta\,, \qquad q_n = \frac{v^2}{\varrho} = -g\cos\vartheta\,, \quad \ldots \ldots \quad 6)$$

von denen der erstere auch durch Ableitung von Gl. 9b) § 7

$$v\,\frac{dv}{dt} = -g\,\frac{dy}{dt}$$

mit $dy = v_y dt = ds \sin\vartheta$ gewonnen werden kann. Aus der zweiten Formel 6) ergibt sich mit Gl. 9b) und 7a) § 7 der Krümmungshalbmesser der Wurfparabel zu

$$\varrho = -\frac{c^2 - 2gy}{g\cos\vartheta} = -\frac{(c^2 - gx\operatorname{tg}\alpha)^2 + g^2x^2}{g\,c^2\cos\vartheta}\,, \quad \ldots \ldots \quad 6a)$$

worin die Bahnneigung ϑ aus der Parabelgleichung 7a) § 7 durch

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha - \frac{g x}{c^2 \cos^2\alpha} \quad \text{. . . . .} \quad 6\text{b})$$

sich berechnet. Bei der Wurfparabel nimmt mit wachsender Bogenlänge ds der Neigungswinkel ϑ beständig ab, daher ist hier $ds = -\varrho\, d\vartheta$ anzusetzen.

§ 9. Strahlanlauf und Drehanlauf. Im § 6 haben wir den Bahnlauf unter Benutzung von Polarkoordinaten r und φ in einen Strahllauf v_r und einen Drehlauf $v_u = r\omega$ zerlegt und wollen nunmehr auch die dazugehörigen Anläufe ermitteln. Zu diesem Zwecke greifen wir auf die Formeln 3) § 6 für die Laufteile in den Richtungen eines rechtwinkligen Achsenkreuzes zurück, nämlich

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_r \cos\varphi - r\omega \sin\varphi \\ v_y &= v_r \sin\varphi + r\omega \cos\varphi \end{aligned}\right\}, \quad \text{. . . . .} \quad 1)$$

woraus sich durch nochmalige Ableitung nach der Zeit

$$\left.\begin{aligned} q_x &= \frac{dv_x}{dt} = \left(\frac{dv_r}{dt} - r\omega^2\right)\cos\varphi - \left(\frac{d(r\omega)}{dt} + v_r\omega\right)\sin\varphi \\ q_y &= \frac{dv_y}{dt} = \left(\frac{dv_r}{dt} - r\omega^2\right)\sin\varphi + \left(\frac{d(r\omega)}{dt} + v_r\omega\right)\cos\varphi \end{aligned}\right\} \quad . \quad 2)$$

ergibt. Schreiben wir für die darin enthaltenen Klammerausdrücke

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv_r}{dt} - r\omega^2 &= \frac{dv_r}{dt} - v_u\,\omega = q_r \\ \frac{d(r\omega)}{dt} + v_r\,\omega &= \frac{dv_u}{dt} + v_r\,\omega = q_u \end{aligned}\right\}, \quad \text{. . . . . .} \quad 3)$$

so wird aus 2):

$$\left.\begin{aligned} q_x &= q_r \cos\varphi - q_u \sin\varphi \\ q_y &= q_r \sin\varphi + q_u \cos\varphi \end{aligned}\right\} \quad \text{. . . . .} \quad 2\text{a})$$

oder quadriert und addiert:

$$q^2 = q_x^{\,2} + q_y^{\,2} = q_r^{\,2} + q_u^{\,2} \quad \text{. . . . .} \quad 2\text{b})$$

Danach stellen die Ausdrücke 3) ebenfalls zwei zueinander senkrechte Anlaufteile in der Strahl-

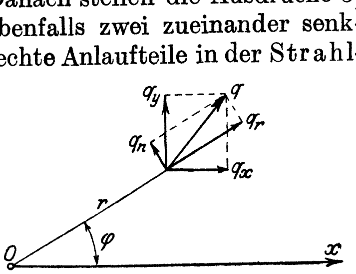

Abb. 35.

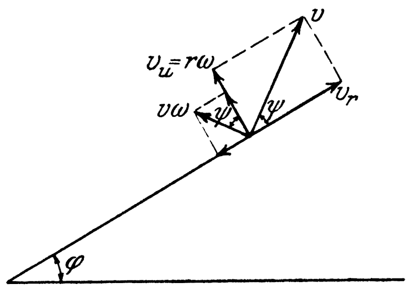

Abb. 36.

und Drehrichtung dar, Abb. 35, die durchaus nicht mit den Ableitungen der zugehörigen Laufteile nach der Zeit übereinstimmen. Sie sind vielmehr mit Zusatzgliedern behaftet, die vermöge der aus Abb. 36 ersichtlichen Beziehungen

$$\left.\begin{array}{ll} v_r = v \cos\psi, & v_u = r\omega = v \sin\psi \\ \text{oder} \quad v_r\omega = v\omega \cos\psi, & v_u\omega = r\omega^2 = v\omega \sin\psi \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

als Teile eines **Zusatzanlaufes**

$$v\omega = v_r\omega \cos\psi + v_u\omega \sin\psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4\text{a})$$

erscheinen, der nach Abb. 36 in die Bahnnormale fällt. Es fragt sich nunmehr, wie dieser Zusatzanlauf mit dem im letzten Abschnitt ermittelten Normalanlauf zusammenhängt. Erinnern wir uns, daß das Bogenelement $ds = v \cdot dt$ und der Tangentenwinkel $\vartheta = \varphi + \psi$ ist, so haben wir

$$\frac{v}{\varrho} = \frac{ds}{dt}\frac{d\vartheta}{ds} = \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} = \omega + \dot{\psi},$$

also

$$v \cdot \omega = \frac{v^2}{\varrho} - v \cdot \dot{\psi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4\text{b})$$

Der Zusatzanlauf ist also um den Betrag $v\dot{\psi}$ kleiner als der Normalanlauf. Der Unterschied entsteht durch die Drehung der Bahntangente gegen den Fahrstrahl r. Man kann übrigens die beiden Ausdrücke 3) für den Strahl- und Drehanlauf unmittelbar aus dem Vektorschaubilde Abb. 37 ablesen, in dem der von einem beliebigen Pol O aus aufgetragene Lauf v in die beiden Teile v_r und v_u zerlegt ist, von denen v_r ebenso wie der gleichgerichtete Strahl den Winkel φ mit einer Anfangslage bildet. Zeichnen wir dann noch einen benachbarten Lauf $v + dv$ mit den zugehörigen Teilen $v_r + dv_r$, $v_u + dv_u$, deren ersterer gegen v_r um $d\varphi$ geneigt ist, so lesen wir aus der Abbildung sofort die Beziehungen

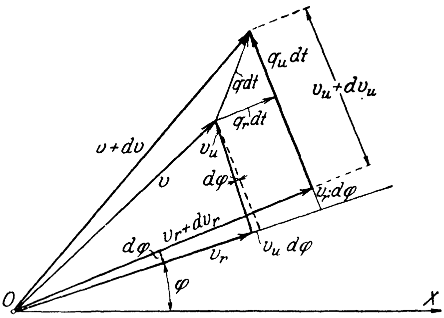

Abb. 37.

$$q_r dt = dv_r - v_u d\varphi$$
$$v_u + q_u dt = v_u + dv_u + v_r d\varphi,$$

aus denen nach Wegheben gleicher Beträge auf beiden Seiten und Kürzung mit dt die Ausdrücke 3) hervorgehen.

Von diesen wird der Drehanlauf auch nach Erweiterung mit dem dazu senkrechten Fahrstrahl r znm **Drehanlaufmoment**

$$q_u \cdot r = r\frac{d(r\omega)}{dt} + \omega r\frac{dr}{dt} = \frac{r^2 d\omega + 2\omega r\, dr}{dt} = \frac{d(r^2\omega)}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

Hierin ist aber nach Abb. 38 mit dem Lote h auf die Bahntangente

$$r^2\omega = r^2\frac{d\varphi}{dt} = 2\frac{dF}{dt} = h\frac{ds}{dt} = h \cdot v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6)$$

das Doppelte der unendlich kleinen vom Fahrstrahl r im Zeitelemente dt überstrichenen Fläche, also der doppelte Flächenlauf, so daß wir auch nach Einführung in 5) schreiben können

$$q_u \cdot r = 2\frac{d^2 F}{dt^2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 5\text{a})$$

d. h. das Drehanlaufmoment bedingt einen Flächenanlauf des Fahrstrahles.

Für das Flächenelement haben wir aber auch nach Abb. 38 in den Achsenabständen

$$2\,dF = (x + dx)(y + dy) - xy - 2\,y\,dx = x\,dy - y\,dx,$$

also

$$2\frac{dF}{dt} = x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = x v_y - y v_x . \quad \ldots \quad 6\text{a})$$

Mithin ist

$$q_u \cdot r = \frac{d}{dt}\left(x v_y - y v_x\right) = x\frac{dv_y}{dt} - y\frac{dv_x}{dt}, \quad \ldots\ldots \quad 5\text{b})$$

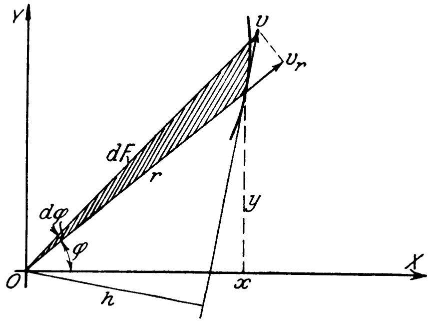

Abb. 38.

oder wegen Gl. 1) § 7:

$$q_u \cdot r = q_y x - q_x \cdot y \quad . \quad 5\text{c})$$

Wir dürfen also das Drehanlaufmoment durch zwei entsprechende Momente der Achsenanläufe ersetzen.

Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß nach Erweiterung der Formeln 3) mit $dr = v_r \cdot dt$ und $r \cdot d\varphi = v_u \cdot dt$, sowie Addition mit Rücksicht auf die Beziehung $v^2 = v_r^2 + v_u^2$

$$q_r dr + q_u r\,d\varphi = v_r\,dv_r + v_u\,dv_u = v\,dv \quad \ldots\ldots \quad 3\text{a})$$

ergibt, ein Ergebnis, das angesichts der willkürlichen Lage jedes benutzten Achsenkreuzes der Gl. 1a) in § 7 durchaus gleichwertig ist.

Beispiel. Ein Punkt bewegt sich auf einer archimedischen Spirale

$$r = a\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 7)$$

mit beständigem Drehwert ω. Alsdann sind seine beiden Laufteile

$$\left.\begin{array}{l} v_r = a\dot{\varphi} = a\omega, \quad v_u = r\omega \\ v^2 = v_r^2 + v_u^2 = (a^2 + r^2)\,\omega^2 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 7\text{a})$$

und die zugehörigen Anlaufteile nach Gl. 3)

$$\left.\begin{array}{l} q_r = -r\omega^2, \quad q_u = 2a\omega^2 \\ q^2 = q_r^2 + q_u^2 = (r^2 + 4a^2)\,\omega^4 \end{array}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 7\text{b})$$

von denen der Strahlanlauf nach dem Anfang zu gerichtet ist und mit dem Fahrstrahl linear zunimmt, während der Drehanlauf beständig denselben Wert besitzt. Nach 6) wächst in diesem, wie in allen Fällen mit beständigem Drehwert der Flächenlauf mit dem Quadrat des Fahrstrahls.

Die Neigung ψ des Bahnlaufes $v = \omega\sqrt{r^2 + a^2}$ gegen den Fahrstrahl ergibt sich aus

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{v_u}{v_r} = \frac{r}{a} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots 8)$$

und diejenige $\chi + \psi$ des Gesamtanlaufes $q = \omega^2\sqrt{r^2 + 4a^2}$ gegen den Fahrstrahl aus

$$\operatorname{tg}(\chi + \psi) = \frac{\operatorname{tg}\chi + \operatorname{tg}\psi}{1 - \operatorname{tg}\chi\operatorname{tg}\psi} = \frac{q_u}{q_r} = -\frac{2a}{r}, \quad \ldots \ldots \quad 8a)$$

woraus sich dann leicht die Neigung χ von q gegen die Bahn zu

$$\operatorname{tg}\chi = \frac{2a}{r} + \frac{r}{a} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots 8b)$$

berechnet.

Führen wir nun die Werte 7a) und 7b) in Gl. 3a) ein, so wird daraus

$$-\omega^2 r\,dr + 2a\,\omega^2 r\,d\varphi = \omega^2 r\,dr,$$

woraus im Einklang mit 7) $dr = a\,d\varphi$ folgt. Daraus erkennt man deutlich, daß Gl. 3a) nur dann zutrifft, wenn dr und $r\,d\varphi$ die Risse des Bahnelementes, nicht aber willkürliche Differentiale darstellen. Jedenfalls ist durch 7b) und 8a) das ganze Anlauffeld nach Größe und Richtung völlig bestimmt.

§ 10. Die Zentralbewegung. Geht die Richtung des Gesamtanlaufes q während des ganzen Bewegungsvorganges durch einen festen Punkt, so sprechen wir von einer Zentralbewegung und verlegen zweckmäßig den Anfang 0 des Achsenkreuzes, bzw. den Ausgang aller Fahrstrahlen in diesen Punkt, in das sog. Anlaufzentrum. Alsdann haben wir für die beiden Anlaufteile in den Achsenrichtungen

$$q_x = q\frac{x}{r}, \qquad q_y = q\frac{y}{r}, \quad \ldots \ldots \quad 1)$$

oder in der Strahl- und Drehrichtung

$$q = q_r = \frac{dv_r}{dt} - r\omega^2, \qquad q_u = 0. \quad \ldots \ldots \quad 1a)$$

Aus der letzten Formel folgt aber in Verbindung mit Gl. 5) und 6) des § 9

$$r^2\omega = 2\frac{dF}{dt} = hv = C, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 2)$$

d. h. bei der Zentralbewegung überstreicht der Fahrstrahl vom Anlaufzentrum in gleichen Zeiten gleiche Flächen, und der Bahnlauf selbst steht im umgekehrten Verhältnis zum Lote auf die Bahntangente. Dieses Ergebnis ermöglicht es, den Drehwert ω durch den Fahrstrahl selbst auszudrücken und damit die Bewegungsgleichungen erheblich zu vereinfachen. So erhalten wir zunächst für den Bahnlauf v

$$v^2 = v_r^2 + r^2\omega^2 = \left[\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2\right]\omega^2,$$

oder wegen 2)

$$v^2 = \frac{C^2}{r^4}\left[\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2\right] = C^2\left[\left(\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right], \quad \ldots \quad 3)$$

während aus Gl. 3a) § 9 kurz

$$q = v\frac{dv}{dr} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

wird[1]). Dafür können wir aber mit Hilfe von 1a) noch einen anderen Ausdruck entwickeln, indem wir beachten, daß

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\,\omega = \frac{C}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} = -C\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi} \quad \ldots\ldots \quad 5)$$

geschrieben werden kann. Alsdann ist

$$\frac{dv_r}{dt} = \omega\frac{dv_r}{d\varphi} = -\frac{C^2}{r^2}\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2}, \quad \ldots\ldots \quad 5a)$$

wodurch im Verein mit 2) die erste Gl. 1a) übergeht in

$$q = -\frac{C^2}{r^2}\left[\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r}\right]. \quad \ldots\ldots\ldots \quad 6)$$

Zu derselben Formel wären wir auch durch Einsetzen von 3) in 4) gelangt.

1. Beispiel. Bewegt sich ein Punkt derart in einer Ellipse, daß sein Fahrstrahl vom Ellipsenzentrum in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht, so benutzen wir zweckmäßig die Zentralgleichung der Ellipse, die mit $x = r \cdot \cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ übergeht in

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = r^2\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right) - 1 = 0, \quad \ldots \quad 7)$$

woraus durch Ableitung

$$\frac{1}{r^3}\frac{dr}{d\varphi} = \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)\sin\varphi\cos\varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad 7a)$$

folgt. Das liefert in 3)

$$v^2 = C^2 r^2\left[\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)^2 \sin^2\varphi\cos^2\varphi + \frac{1}{r^4}\right],$$

oder nach Ausschalten von $1 : r^4$ in der Klammer mit Hilfe der Gl. 7)

$$v^2 = C^2 r^2\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^4} + \frac{\sin^2\varphi}{b^4}\right) = C^2 r^2\left(\frac{1}{a^2}\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{1}{b^2}\frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right)$$

$$v^2 = C^2 r^2\left[\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right) + \frac{1}{b^2}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\cos^2\varphi}{a^2}\right)\right]$$

$$v^2 = C^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) - \frac{C^2 r^2}{a^2 b^2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 8)$$

worin mit der Umlaufszeit t_0 wegen 2)

$$C t_0 = 2\pi ab \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 9)$$

[1]) Hierzu gelangt man auch durch Auswertung von $q\,dr = q_r\,dr$ mit 1a) unter gleichzeitiger Beachtung von 2).

ist. Durch Ableitung von 8) und Einsetzen in 4) ergibt sich der Zentralanlauf

$$q = -\frac{C^2 r}{a^2 b^2} = -\frac{4\pi^2 r}{t_0^2} \qquad 10)$$

als verhältnisgleich dem Fahrstrahl und wegen des negativen Vorzeichens nach dem Zentrum gerichtet, genau wie q_n bei der Kreisbewegung im 1. Beispiel § 8, die sich hieraus für $\omega t_0 = 2\pi$ und $a = b = r$ als Sonderfall ergibt.

Schließlich erkennt man noch, daß für den Fall der Hyperbel in den vorstehenden Formeln nur b^2 durch $-b^2$ zu ersetzen wäre, womit der Zentralanlauf 10) vom Zentrum weggerichtet erscheint.

2. Beispiel. Kepler verdankt man die Feststellung, daß die Planeten 1. in Ellipsen die in einem ihrer Brennpunkte befindliche Sonne umkreisen, wobei 2. der Fahrstrahl von der Sonne in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht. Daraus dürfen wir nach den vorhergehenden Ausführungen auf eine Zentralbewegung schließen und die Abhängigkeit des Gesamtanlaufs von der Lage des Planeten bestimmen. Schreiben wir die Polargleichung eines Kegelschnittes mit dem Parameter p (dem Lote im Brennpunkte auf der Längsachse) und der numerischen Exzentrizität ε in der Form

$$\frac{p}{r} = 1 - \varepsilon \cos \varphi, \qquad 11)$$

worin für die Ellipse, Parabel oder Hyperbel $\varepsilon^2 \lesseqgtr 1$ zu setzen ist, so ergibt die Ableitung

$$\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi} = \frac{\varepsilon \sin \varphi}{p}, \quad \left(\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\varepsilon^2}{p^2}\left(1 - \cos^2 \varphi\right)$$

und nach Einführung in 3) unter Ausschaltung von $\cos \varphi$ durch 11)

$$v^2 = \frac{C^2}{p}\left[\frac{\varepsilon^2 - 1}{p} + \frac{2}{r}\right] \qquad 12)$$

Durch Ableitung dieses Ausdruckes nach r folgt dann nach 4)

$$q = -\frac{C^2}{p r^2}, \qquad 13)$$

also ein Gesamtanlauf, der im umgekehrten Verhältnis des Quadrates des Abstandes vom Brennpunkte steht und wegen des negativen Vorzeichens nach diesem zugerichtet ist, wie es Newton zuerst aus den Keplerschen Gesetzen abgeleitet hatte.

Da die Beziehung 13) im ganzen Bereich der Bewegung um den als Anfangszentrum wirksamen Brennpunkt gilt, so ist $-q r^2 = \frac{C^2}{p}$ ein diesem eigentümlicher Festwert, für den wir auch unter Einführung der auch hierfür gültigen Umlaufszeit 9), sowie nach Ersatz von p durch die beiden Halbachsen a und b mit Hilfe der Beziehung $ap = b^2$

$$-q r^2 = 4\pi^2 \frac{a^3}{t^2} = \frac{4\pi^2 a_1^3}{t_1^2} \qquad 13a)$$

schreiben dürfen, wenn a_1 und t_1 die entsprechenden Werte für einen andern Planeten bedeuten. Es verhalten sich also für je zwei den Zentralkörper umkreisende Planeten die Quadrate der Umlaufszeiten, wie die Kuben der großen Achsen ihrer Bahnellipsen. Es ist dies das dritte von Kepler aus Beobachtungen unmittelbar abgeleitete Gesetz, welches somit nur eine Folgerung der beiden ersten darstellt und, wie gleich hier bemerkt sein mag, mit diesen und dem Gesetz über die Abhängigkeit des Gesamtanlaufes für alle Himmelskörper, z. B. die Monde der Planeten, wiederkehrende Kometen und Doppelsterne gilt.

Mit 13) folgt ferner aus 4) durch Integration

$$v^2 - v_0^2 = \frac{2C^2}{p}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right), \quad \ldots \ldots \ldots \quad 14)$$

also erreicht, wenn $v_0 = 0$ für $r_0 = \infty$ ist, ein aus der Ruhelage im Unendlichen herankommender Himmelskörper im Abstande r vom Anlaufzentrum den durch

$$v_\infty^2 = \frac{2C^2}{p \cdot r} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 14\text{a})$$

gegebenen Lauf unabhängig von seiner Richtung. Setzen wir das in 12) ein, so wird

$$v^2 - v_\infty^2 = \frac{C^2}{p^2}\left(\varepsilon^2 - 1\right), \quad \ldots \ldots \ldots \quad 14\text{b})$$

d. h. ein Himmelskörper beschreibt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel je nachdem sein Lauf $v \lesseqgtr v_\infty$ als der Fallauf aus der Ruhelage im Unendlichen ist. Damit sind auch die nicht wiederkehrenden Kometen den vorstehenden Gesetzen über die Zentralbewegung mit Ausnahme derjenigen über die Umlaufszeiten, welche natürlich hier ihren Sinn verlieren, unterworfen.

3. Beispiel. Steht ein Körper im Gegensatz zum vorhergehenden Beispiel unter der Wirkung eines positiven Zentralanlaufes, wird er also vom Zentrum abgestoßen, so zwar, daß

$$q = + \frac{C^2}{pr^2}$$

ist, so folgt die Bewegungsgleichung aus 6) zu

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r} + \frac{1}{p} = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 15)$$

deren vollständiges Integral (§ 11, Beispiel 2) in der Form

$$\frac{1}{r} = -\frac{1}{p} + \frac{\varepsilon}{p}\cos(\varphi - \varphi_0) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 16)$$

geschrieben werden kann, in dem ε und φ_0 die durch die Anfangsbedingungen gegebenen Integrationskonstanten bedeuten. Die Gl. 16) stellt offenbar denjenigen Zweig einer Hyperbel dar, der zum Anlaufzentrum als Brennpunkt konvex liegt.

Eine solche Hyperbelbahn beschreiben die α-Strahlen in der Nähe des Atoms eines chem. Elementes, eine Beobachtung, die Rutherfords veranlaßte, seine bekannte Kerntheorie der Atome aufzustellen, derart, daß der positiv geladene Kern des Atoms die ebenfalls positiv geladenen α-Teilchen abstößt und so in ihre Hyperbelbahn zwingt.

4. Beispiel. Bewegt sich ein Himmelskörper in einem Kegelschnitt um dessen Brennpunkt, während die Hauptachse selbst sich um diesen dreht, der Fahrstrahl aber insgesamt in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht, so setzt sich der Gesamtdrehwinkel ψ des Fahrstrahls aus dem Winkel φ gegen die Kegelschnittsachse und aus deren Drehwinkel φ' derart zusammen, daß

$$\psi = \varphi + \varphi', \quad \varphi = \psi - \varphi' = \varkappa\psi$$

ist. Nach Einführung in die Kegelschnittsgleichung erhalten wir

$$\frac{p}{r} = 1 - \varepsilon\cos\varkappa\psi, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 17)$$

also eine nicht geschlossene Kurve, Abb. 39, welche für die Drehwinkel

$$\varkappa\psi = n\pi, \quad \psi = \frac{n\pi}{\varkappa} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 17\text{a})$$

mit ganzzahligen ungeraden n den Kleinstwert $r_1 = \frac{p}{1+\varepsilon}$,

mit ganzzahligen geraden n den Höchstwert $r_2 = \frac{p}{1-\varepsilon}$

in fortwährendem Wechsel ergibt. Mit unveränderlichem Beiwert $\varkappa$ wird alsdann

$$p \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\psi} = \varepsilon \varkappa \sin \varkappa \psi$$

und nach Einsetzen in 3) sowie Ausschalten des Winkels ψ mit Hilfe der Bahngleichung 17)

$$v^2 = \frac{C^2 \varkappa^2}{p}\left[\frac{\varepsilon^2 - 1}{p} + \frac{2}{r} - \frac{\varkappa^2 - 1}{\varkappa^2}\frac{p}{r^2}\right] \quad 18)$$

Damit folgt aus 4) für den Gesamtanlauf

$$q = -\frac{C^2 \varkappa^2}{p}\left[\frac{1}{r^2} - \frac{\varkappa^2 - 1}{\varkappa^2}\frac{p}{r^3}\right]. \quad 19)$$

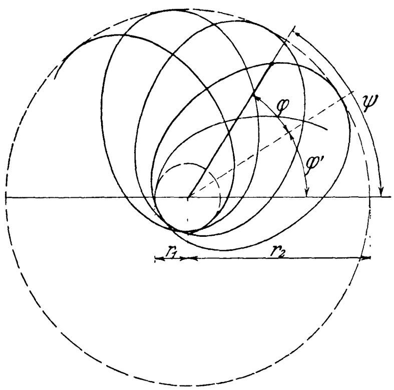

Abb. 39.

Mit $\varkappa = 1$ vereinfachen sich diese Ausdrücke in 12) und 13) des 2. Beispiels, während wir für $\varkappa^2 \gtrless 1$ einen zusätzlichen Ab- oder Anlauf nach dem Brennpunkt erhalten, der sich im verkehrten Verhältnis des Kubus des Fahrstrahles ändert und dadurch nach 17a) eine Rückwärts- oder Vorwärtsdrehung der Achse im Umlaufssinne bedingt. Das letztere trifft, wie hier nur kurz erwähnt sein mag, für den Planeten Merkur zu, dessen Achse im Umlaufssinne etwa 42″ im Jahrhundert voreilt.

5. Beispiel. Schrumpft die Keplersche Bahnellipse mit $p = 0$ zu einer Geraden von der Länge der großen Achse zusammen, so bleibt nur eine Bewegung in der Strahlrichtung durch das Anlaufzentrum übrig, deren Lauf im äußersten Punkte $r = 2a$, $v = 0$ ist, während nach Gl. 14) für $r = 0$, $v^2 = \infty$, $v = \pm\infty$ wird. Der nach dem Zentrum fallende Körper kehrt alsdann dort um und wandert auf derselben Geraden wieder zurück, bis er im äußersten Punkt zur Ruhe gelangt, worauf das Spiel von neuem beginnt. Man kann diese Bewegung auch aus der Formel 13) ableiten, die mit $C^2 : p = k$ und $q = q_r = \ddot{r}$ in

$$\ddot{r} = -\frac{k}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 20)$$

übergeht und nach Erweiterung mit dr, sowie wegen $\ddot{r}\,dr = \dot{r}\,d\dot{r} = v\,dv$ durch Integration

$$v^2 = 2k\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 20a)$$

liefert, was auch unmittelbar aus 14) mit $v_0 = 0$, $r_0 = 2a$ folgen würde. Setzen wir darin mit der Hilfsveränderlichen ψ

$$r = a[1 + \cos\psi]; \quad dr = v\,dt = -a \sin\psi\,d\psi,$$

so wird aus 20a)

$$a^2 \sin^2\psi\,\dot{\psi}^2 = \frac{k}{a}\frac{1-\cos\psi}{1+\cos\psi} = \frac{k}{a}\frac{\sin^2\frac{\psi}{2}}{\cos^2\frac{\psi}{2}}$$

oder

$$\pm\sqrt{\frac{k}{a^3}}\,dt = 2\cos^2\frac{\psi}{2}\,d\psi = (1 + \cos\psi)\,d\psi$$

und nach Integration, wenn für $t = 0$, $r = 2a$, also $\psi = 0$ sein soll,

$$\left.\begin{aligned} \pm\sqrt{\frac{k}{a^3}}\,t &= \psi + \sin\psi \\ \frac{r}{a} &= 1 + \cos\psi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 21)$$

Wir erhalten also als **Wegkurve** eine gemeine **Zykloide**, deren Rollwinkel unsere Hilfsveränderliche derart bildet, daß wir für jeden Wert von ψ die zueinander gehörigen Werte von $r:a$ und $\sqrt{\frac{k}{a^3}}\,t$ berechnen können, was in der folgenden kleinen Tabelle geschehen ist:

ψ^0	ψ	$\sin\psi$	$\cos\psi$	$\pm\sqrt{\frac{k}{a^3}}\,t$	$\frac{r}{a}$
0^0	0	0	1	0	2
30^0	0,524	0,500	0,866	1,024	1,866
60^0	1,048	0,866	0,500	1,914	1,500
90^0	1,570	1,000	0,000	2,570	1,000
120^0	2,095	0,866	— 0,500	2,961	0,500
150^0	2,618	0,500	— 0,866	3,118	0,133
180^0	3,142	0,000	— 1,000	3,142	0,000 ·

Da die Zykloide nur auf einer Seite der Zeitachse verläuft, so kann der Fahrstrahl r auch niemals sein Vorzeichen wechseln, womit das oben aus der Ellipsenbewegung abgeleitete Spiel seine Bestätigung gefunden hat.

III. Einfache und zusammengesetzte Schwingungen.

§ 11. Die einfache geradlinige Schwingung. Bei unseren Betrachtungen sind wir schon mehrfach auf Bewegungsvorgänge gestoßen, die sich innerhalb bestimmter Zeiten fortwährend wiederholen, so daß also der bewegte Punkt immer wieder in dieselbe Lage mit gleichem und gleichgerichtetem Laufe zurückkehrt. Der einfachste dieser Vorgänge, die wir allgemein als **Schwingungserscheinungen** bezeichnen wollen, ist offenbar die gleichförmige Kreisbewegung eines Punktes, die unter einem nach dem Zentrum gerichteten, dem beständigen Fahrstrahl verhältnisgleichen Anlauf sich abspielt. Aber auch jeder Riß des bewegten Punktes auf einen Durchmesser vollzieht auf diesem eine solche und zwar **geradlinige Schwingung**, da er nach Verstreichen der gesamten Umlaufszeit gleichläufig wieder dieselbe Lage überschreitet. Rechnet man die Zeit vom Durchgang durch die Mittellage aus, so empfiehlt es sich, mit einem Drehwert α auch den Drehwinkel der Kreisbewegung $\varphi = \alpha t$ von dort aus zu messen und unter Zugrundelegung unserer bisherigen Bezeichnungsweise die Bewegung des Risses auf dem senkrechten Durchmesser zu verfolgen. Auf diesem ist der Abstand bei einem Kreishalbmesser a nach Abb. 40

$$x = a \sin\varphi,$$

oder wenn wir den Zeitbeginn einem andern Winkel β aus der

Mittellage zuordnen, so daß $\varphi = \alpha t + \beta$ wird, allgemeiner

$$x = a \sin(\alpha t + \beta) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 1)$$

Hierin wird gewöhnlich der absolute Höchstwert a des Schwingungsausschlages x als die Amplitude, β als die Phase und die Drehzahl α der zugehörigen Kreisbewegung als die Kreisfrequenz bezeichnet. Gl. 1) gilt unmittelbar für die Wegkurve, die durch eine Sinuslinie dargestellt wird.

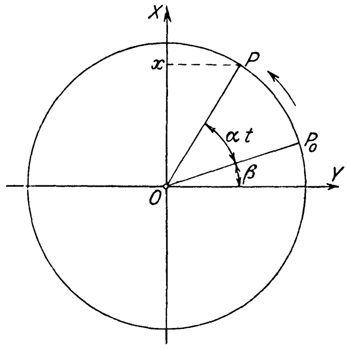

Abb. 40.

Soll nach Verlauf der Zeit t_0 der auf der Schwingungsgeraden XOX bewegte Punkt dieselbe Lage mit demselben Lauf

$$\dot{x} = a\alpha \cos(\alpha t + \beta) \quad \ldots \quad 2)$$

wieder einnehmen, so muß

$$\sin(\alpha t + \beta) = \sin(\alpha t + \alpha t_0 + \beta)$$
$$\cos(\alpha t + \beta) = \cos(\alpha t + \alpha t_0 + \beta)$$

oder

$$\sin(\alpha t + \beta)[1 - \cos\alpha t_0] = \cos(\alpha t + \beta) \sin\alpha t_0$$
$$\cos(\alpha t + \beta)[\cos\alpha t_0 - 1] = \sin(\alpha t + \beta) \sin\alpha t_0,$$

also

$$\cos\alpha t_0 = 1, \qquad \sin\alpha t_0 = 0$$

sein. Diese beiden Bedingungen werden erfüllt für

$$\alpha t_0 = 2 n \pi, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 1a)$$

worin n jede beliebige ganze Zahl bedeuten kann, d. h. dieselbe Lage und derselbe Bewegungszustand wird bei einer einfachen Schwingung in gleichen Zeitabständen, nämlich der Umlaufszeit der zugeordneten Kreisbewegung

$$t_0 = \frac{2\pi}{\alpha} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 1b)$$

erreicht, die wir nunmehr als Schwingungsdauer oder Periode bezeichnen. Aus der Verbindung von 1) und 2) erhalten wir unter Ausschaltung der Zeit

$$\dot{x}^2 = \alpha^2(a^2 - x^2), \quad \ldots \ldots \ldots \quad 2a)$$

wonach der Lauf seinen absoluten Höchstwert $\pm \alpha a$ beim Durchgang durch die Mittellage $x = 0$ annimmt und in beiden Endlagen $x = \pm a$, die zugleich Umkehrpunkte sind, verschwindet. Bemerkenswert ist, daß in der Differentialgleichung erster Ordnung 2a) die Phase β nicht mehr vorkommt; sie stellt demnach in 1), dem sog. Integral von 2a), die an sich willkürliche Integrationskonstante dar.

Durch nochmalige Differentiation von 2) nach t erhalten wir dann

$$\ddot{x} = -a\alpha^2 \sin(\alpha t + \beta), \quad \ldots \ldots \ldots \quad 3)$$

oder mit Ausschaltung von t vermittels 1) kurz

$$\ddot{x} + \alpha^2 x = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 3a)$$

also eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, die sog. Schwingungsgleichung, in der weder a noch β mehr vorkommt. Danach ist auch die Amplitude a als Integrationskonstante aufzufassen. Dies Verhalten wird noch deutlicher, wenn 1) in der Form

$$x = a \sin\beta \cos\alpha t + a \cos\beta \sin\alpha t$$

oder mit den Abkürzungen

$$a \sin\beta = A, \qquad a \cos\beta = B, \quad \ldots \ldots \quad 4)$$

$$\left.\begin{aligned} x &= A \cos\alpha t + B \sin\alpha t \\ \dot{x} &= \alpha (B \cos\alpha t - A \sin\alpha t) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad 5)$$

geschrieben wird. Auch diese Gleichung liefert nach zweimaliger Ableitung nach t wieder 3a), so daß A und B ebenfalls als Integrationskonstante erscheinen, die durch 4) mit den früheren zusammenhängen und diese aus

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{A}{B}, \qquad a^2 = A^2 + B^2 \quad \ldots \ldots \quad 4\text{a})$$

zu berechnen gestatten. Gl. 5) sagt in der Schreibweise

$$x = A \sin(\alpha t - 90^0) + B \sin\alpha t \quad \ldots \ldots \quad 5\text{a})$$

weiter aus, daß eine einfache Schwingung auch in zwei solche mit verschiedenen Amplituden A und B und einem Phasenunterschied von $\beta = 90^0$ zerfällt oder sich aus diesen zusammensetzt, sowie daß sowohl $x_1 = A \cos\alpha t$, als auch $x_2 = B \sin\alpha t$ partikuläre Integrale der Differentialgleichung 3a) darstellen, deren Summe erst das mit 1) gleichwertige vollständige Integral 5) ergibt.

Gl. 3a) wird offenbar auch erfüllt durch den Ansatz

$$x = C e^{\varkappa t}, \qquad \ddot{x} = \varkappa^2 C e^{\varkappa t}, \quad \ldots \ldots \quad 6)$$

woraus nach Einsetzen

$$(\varkappa^2 + \alpha^2)\, C e^{\varkappa t} = 0 \quad \ldots \ldots \quad 6\text{a})$$

wird. Da hierin der Schwingungsausschlag $x = C e^{\varkappa t}$ laut Voraussetzung nicht verschwindet, so kann das nur noch der Klammerausdruck, der mithin die beiden Wurzeln

$$\varkappa = \pm \alpha \sqrt{-1} = \pm \alpha i \quad \ldots \ldots \quad 6\text{b})$$

liefert. Wir erhalten somit als vollständige Lösung die Summe zweier Exponentialgrößen mit imaginärem Argument, jede wieder behaftet mit einem willkürlichen Beiwort, also

$$\left.\begin{aligned} x &= C_1 e^{\alpha i t} + C_2 e^{-\alpha i t} \\ \dot{x} &= \alpha i (C_1 e^{\alpha i t} - C_2 e^{-\alpha i t}) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad 7)$$

Erinnern wir uns, daß nach dem Moivreschen Lehrsatze

$$e^{\pm \alpha i t} = \cos\alpha t \pm i \sin\alpha t$$

ist, so wird daraus

$$x = (C_1 + C_2) \cos\alpha t + i (C_1 - C_2) \sin\alpha t \quad \ldots \quad 7\text{a})$$

eine Form, die mit

$$C_1 + C_2 = A, \qquad i(C_1 - C_2) = B$$

wieder in 5) übergeht. Welche von den drei gleichwertigen Lösungen 1), 5) und 7) der Schwingungsgleichung wir benutzen, ist eine von Fall zu Fall zu entscheidende Zweckmäßigkeitsfrage.

1. Beispiel. Wird bei einer Schwingung mit vorgelegter Frequenz α ein Punkt x_1 mit der Geschwindigkeit $\dot{x}_1 = v_1$ zur Zeit $t = 0$ überstrichen, so ergibt sich aus 1) und 2) für die Amplitude und Phase

$$x_1 = a \sin \beta, \qquad v_1 = a\alpha \cos \beta, \quad \ldots \quad 8)$$

also

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\alpha x_1}{v_1}, \qquad a^2 = \frac{\alpha^2 x_1^2 + v_1^2}{\alpha^2},$$

mithin als vollständige Lösung nach Einführung in 1)

$$x = \frac{\sqrt{\alpha^2 x_1^2 + v_1^2}}{\alpha} \sin \left[\alpha t + \operatorname{arctg} \frac{\alpha x_1}{v_1}\right]. \quad \ldots \quad 8a)$$

Benutzen wir dagegen die Form 5), so ist dort für $t = 0$

$$x_1 = A, \qquad v_1 = \alpha B \quad \ldots \quad 9)$$

und das vollständige Integral nimmt die viel übersichtlichere Gestalt

$$x = x_1 \cos \alpha t + \frac{v_1}{\alpha} \sin \alpha t \quad \ldots \quad 9a)$$

an. Die letzte Form 7) liefert schließlich mit

$$x_1 = C_1 + C_2, \qquad v_1 = \alpha i (C_1 - C_2) \quad \ldots \quad 10)$$

nach Berechnung der Beiwerte C_1 und C_2

$$x = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{v_1}{\alpha i}\right) e^{\alpha i t} + \frac{1}{2}\left(x_1 - \frac{v_1}{\alpha i}\right) e^{\alpha i t}. \quad \ldots \quad 10a)$$

Hieraus erkennt man deutlich, daß im vorliegenden Falle das Integral 9a) die übersichtlichste Lösung darstellt.

2. Beispiel. Zur Herleitung der Bahngleichung unter der Wirkung des Newtonschen Zentralanlaufes $q = -\frac{C_0}{r^2}$ verbinden wir diesen mit Gl. 6) § 10 und erhalten

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r} = \frac{C_0}{C^2}, \quad \ldots \quad 11)$$

oder mit der Abkürzung

$$\frac{1}{r} - \frac{C_0}{C^2} = x \quad \ldots \quad 12)$$

$$\frac{d^2 x}{d\varphi^2} + x = 0. \quad \ldots \quad 11a)$$

Das ist aber der Form nach eine Schwingungsgleichung, in der nur $\alpha^2 = 1$ und die Zeit t durch φ ersetzt ist. Das vollständige Integral ist mithin

$$x = A \cos \varphi + B \sin \varphi \quad \ldots \quad 11b)$$

oder wegen (12)

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{C_0}{C^2} + A \cos \varphi + B \sin \varphi \\ \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi} &= B \cos \varphi - A \sin \varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 13)$$

Soll nun für $\varphi = \pi$, r einen Kleinstwert r_1 annehmen, der einem Scheitel der Bahn bzw. dem Perihel (d. h. Sonnennähe) eines Planeten entspricht, so wird $B = 0$ und außerdem

$$\frac{1}{r_1} - \frac{C_0}{C^2} = -A,$$

womit die Bahngleichung lautet

$$\frac{1}{r} = \frac{C_0}{C^2} - \left(\frac{1}{r_1} - \frac{C_0}{C^2}\right)\cos\varphi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 13\text{a})$$

Führen wir noch die Ordinate p im Anlaufszentrum ein, setzen also für $\varphi = 90^0$, $r = p$, so wird daraus

$$\frac{p}{r} = 1 - \left(\frac{p}{r_1} - 1\right)\cos\varphi = 1 - \varepsilon\cos\varphi, \quad \ldots \ldots \quad 13\text{b})$$

also die Polargleichung eines Kegelschnittes vom Brennpunkte aus, der eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel wird, wenn

$$\varepsilon \lesseqgtr 1 \quad \text{bzw.} \quad p \lesseqgtr 2 r_1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 14)$$

Wir können demnach die Bewegung eines Himmelskörpers um ein Anlaufszentrum als einfache periodische Änderung des Fahrstrahlkehrwertes $1:r$ um einen Mittelwert $1:p$ auffassen. Das trifft übrigens auch für das Laufquadrat zu, das durch Einsetzen von 13b) in Gl. 3) § 10 in

$$v^2 = \frac{C^2}{p^2}(\varepsilon^2 + 1 - 2\varepsilon\cos\varphi) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 15)$$

übergeht, also mit

$$v^2 - \frac{C^2}{p^2}(\varepsilon^2 + 1) = x \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 15\text{a})$$

ebenfalls die obige Schwingungsgleichung 11a) erfüllt.

Die Änderung des Laufes v mit der Bewegungsrichtung tritt besonders deutlich im Hodographen hervor, dessen Gleichung wir leicht aus den beiden Formeln 3) § 6 bzw. 1) § 9 durch Einsetzen von

$$v_r = \omega\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{\varepsilon\,\omega\,r^2}{p}\sin\varphi = -\frac{C\varepsilon}{p}\sin\varphi \quad \ldots \ldots \quad 13\text{c})$$

erhalten. Es ist alsdann mit 13b)

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_r\cos\varphi - r\,\omega\sin\varphi = -C\left(\frac{\varepsilon\cos\varphi}{p} + \frac{1}{r}\right)\sin\varphi = \frac{C}{p}\sin\varphi \\ v_y &= v_r\sin\varphi + r\,\omega\cos\varphi = -C\left(\frac{\varepsilon\sin^2\varphi}{p} - \frac{\cos\varphi}{r}\right) = -\frac{C\varepsilon}{p} + \frac{C}{p}\cos\varphi \end{aligned}\right\}, \quad 16)$$

also nach Ausschaltung von φ

$$v_x{}^2 + \left(v_y + \frac{C\varepsilon}{p}\right)^2 = \frac{C^2}{p^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 17)$$

Das ist aber die Gleichung eines Kreises, dessen Mittelpunkt um $\frac{C\varepsilon}{p}$ unter dem Anfangspunkte der Hodographenachsen v_x und v_y liegt. Mit der Bahnneigung ϑ können wir $v_x = v\cos\vartheta$, $v_y = v\sin\vartheta$ ausschalten, womit 17) in die Polargleichung des Hodographen

$$v^2 + 2v\frac{C\varepsilon}{p}\sin\vartheta = \frac{C^2}{p^2}(1 - \varepsilon^2) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 17\text{a})$$

übergeht.

Während der lineare Schwingungsausschlag aus der Mittellage offenbar einen Vektor darstellt, trifft dies für die hier behandelten Größen $1:r$, sowie v^2 nicht mehr zu, wie man schon daraus erkennt, daß der letztere Ausdruck seinen Wert beim Vorzeichenwechsel von v

nicht mehr ändert. Wir haben es also hier mit periodischen Änderungen einer nicht gerichteten Größe, eines sog. Skalars, zu tun, der den Bewegungszustand des Punktes in einer bestimmten Lage kennzeichnet.

§ 12. **Zusammensetzung einfacher Schwingungen auf einer Geraden.** Die einfache geradlinige Schwingung können wir am leichtesten durch die Aufhängung eines Körpers, z. B. einer Bleikugel an einer Gummischnur oder einer Schraubenfeder verwirklichen, dessen Auslenkungen aus der Ruhelage verhältnisgleiche nach dieser gerichtete Anläufe erfahrungsgemäß bedingen. Vollzieht nun auch der Aufhängepunkt eine Schwingung auf derselben (hier senkrechten) Geraden, so werden sich seine Ausschläge zu denen des aufgehängten Körpers algebraisch addieren, was man auch als Überlagerung beider Schwingungsausschläge anspricht.

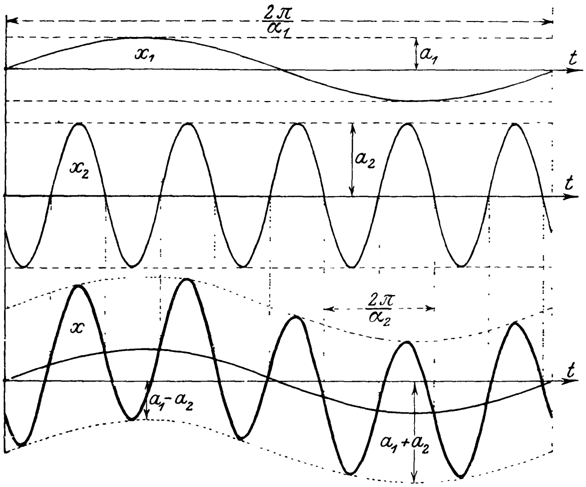

Abb. 41.

Sind unter Benutzung der früheren Bezeichnungen

$$x_1 = a_1 \sin(\alpha_1 t + \beta_1), \qquad x_2 = a_2 \sin(\alpha_2 t + \beta_2) \quad . \ . \ . \quad 1)$$

die Ausschläge zweier Einzelschwingungen auf derselben Geraden, so ist der Gesamtausschlag

$$x = x_1 + x_2 = a_1 \sin(\alpha_1 t + \beta_1) + a_2 \sin(\alpha_2 t + \beta_2) \quad . \ . \quad 1\,a)$$

In Abb. 41 sind oben die beiden Einzelschwingungen 1) mit sehr verschiedenen Drehwerten und darunter ihre Vereinigung zur Gesamtbewegung 1a) aufgezeichnet, woraus man erkennt, daß deren Ausschlag zwischen den Grenzen $\pm(a_1 + a_2)$ und $\pm(a_1 - a_2)$ schwankt.

Da jeder der beiden Ausschläge 1) zwei willkürliche Festwerte, nämlich a_1, β_1 und a_2, β_2 enthält, so gehen in den Ausdruck für den Gesamtausschlag alle vier ein. Um dieselben, oder was auf dasselbe hinausläuft, die Einzelausschläge x_1 und x_2 selbst auszuschalten müssen wir außer 1 a) noch zwei weitere Gleichungen aufstellen, welche die Größen x_1 und x_2 enthalten. Diese gewinnen wir, da die Winkelfunktionen sich nach zweimaliger Ableitung wiederholen, durch Bildung der zweiten und vierten Ableitung von 1 a), nämlich

$$\left.\begin{array}{l}\ddot{x} = -\alpha_1^2 x_1 - \alpha_2^2 x_2 \\ \ddddot{x} = +\alpha_1^4 x_1 + \alpha_2^4 x_2\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1\,b)$$

Dann folgt aus 1 a) und der ersten dieser Formeln durch Ausschaltung von x_1 bzw. mit beiden Formeln 1 b)

$$\left.\begin{array}{l}\ddot{x} + \alpha_1^2 x = (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)\, x_2 \\ \ddddot{x} + \alpha_1^2 \ddot{x} = (\alpha_2^2 - \alpha_1^2)\, \alpha_2^2 x_2\end{array}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

woraus schließlich nach Erweiterung der ersten dieser Gleichungen mit α_2^2 und Addition

$$\ddddot{x} + (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)\,\ddot{x} + \alpha_1^2 \alpha_2^2 x = 0\,, \quad \ldots\ldots \quad 2\,a)$$

also eine **Differentialgleichung vierter Ordnung** für die Gesamtschwingung hervorgeht. Diese enthält offenbar nur positive beständige Beiwerte, die mit den Drehwerten α der Einzelschwingungen unmittelbar zusammenhängen, nicht aber die willkürlichen Festwerte a_1, β_1, a_2, β_2 der Gesamtschwingung 1 a). Mithin stellt 1 a) umgekehrt das **vollständige Integral der Differentialgleichung** 2 a) dar.

Weiter erkennt man aus 2), daß für $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha^2$

$$\ddot{x} + \alpha^2 x = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

wird, also wieder die einfache Schwingungsgleichung erscheint. In der Tat erhalten wir hierfür aus 1 a)

$$x = a_1 \sin(\alpha t + \beta_1) + a_2 \sin(\alpha t + \beta_2)$$

durch Zerlegung der Winkelfunktionen

$$x = (a_1 \cos\beta_1 + a_2 \cos\beta_2)\sin\alpha t + (a_1 \sin\beta_1 + a_2 \sin\beta_2)\cos\alpha t\,, \;.\; 3\,a)$$

also eine einfache Schwingung. **Zwei gleichgerichtete Schwingungen mit demselben Drehwert bzw. derselben Schwingungsdauer setzen sich also zu einer einfachen Schwingung von gleicher Dauer zusammen.**

Die Zusammensetzung zweier Schwingungen können wir nun auch bildlich im Anschluß an Abb. 40 vornehmen, indem wir an den Endpunkt P_1 des Halbmessers a_1 der ersten Schwingung den Halbmesser a_2 der zweiten Schwingung mit dem Winkel $\alpha_2 t + \beta_2$ gegen die x-Achse antragen, Abb. 42. Beide Halbmesser als Vektoren ergeben alsdann einen Gesamtvektor a_0 als Schlußlinie des Dreiecks $O P_1 P_2$, der sich aus

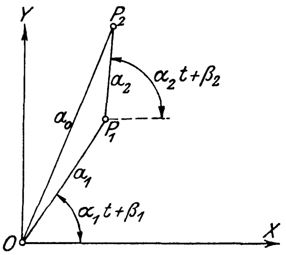

Abb. 42.

$$a_0^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2\, a_1 a_2 \cos[(\alpha_1 - \alpha_2)t + \beta_1 - \beta_2] \;.\; 4)$$

berechnet. Führen wir nun durch

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha_1 = \alpha + \delta, & \alpha_2 = \alpha - \delta \\ \alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}, & \delta = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 4\text{a})$$

einen mittleren Drehwert α und die Abweichungen $\pm\delta$ beider Einzeldrehwerte α_1 und α_2 von diesem ein, so wird aus 4) unter Wegfall von α

$$a_0^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2\,a_1\,a_2 \cos[2\,\delta\,t + \beta_1 - \beta_2]\,. \quad . \; . \; . \quad 4\text{b})$$

Hiernach schwankt der Vektor a_0, wie aus Abb. 41 ersichtlich, zwischen den Grenzen

$$\begin{array}{lll} a_0' = \pm(a_1 + a_2) & \text{für} & 2\,\delta\,t' + \beta_1 - \beta_2 = 0, 2\,\pi, 4\,\pi \ldots \\ a_0'' = \pm(a_1 - a_2) & \text{für} & 2\,\delta\,t'' + \beta_1 - \beta_2 = \pi, 3\,\pi, 5\,\pi \ldots \end{array}$$

mit einem Zeitunterschiede

$$t'' - t' = \frac{\pi}{2\,\delta} = \frac{\pi}{\alpha_1 - \alpha_2}\,. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 5)$$

Um über die Bedeutung von a_0 Klarheit zu gewinnen, führen wir die Werte α und δ in die Grundformel 1 a) ein, die damit übergeht in

$$\begin{array}{l} x = [a_1 \cos(\delta\,t + \beta_1) + a_2 \cos(\delta\,t - \beta_2)] \sin\alpha\,t \\ \quad + [a_1 \sin(\delta\,t + \beta_1) - a_2 \sin(\delta\,t - \beta_2)] \cos\alpha\,t, \end{array} \quad . \; . \; . \; . \quad 6)$$

oder mit Rücksicht auf 4b) kürzer

$$x = a_0\,[\cos\eta \sin\alpha\,t + \sin\eta \cos\alpha\,t] = a_0 \sin(\alpha\,t + \eta)\,. \quad . \; . \quad 6\text{a})$$

Damit stellt der Vektor a_0 die selbst periodisch schwankende Amplitude dieser Schwingung mit dem mittleren Drehwert α und der Schwingungsdauer

$$t_0 = \frac{2\,\pi}{\alpha} = \frac{4\,\pi}{\alpha_1 + \alpha_2}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 6\text{b})$$

sowie mit einer ebenfalls periodisch veränderlichen Phase η dar. Tragen wir die Werte von a_0 für kleine δ, also im Gegensatz zu Abb. 41, nur wenig verschiedenen Drehwerten α_1 und α_2 in Abb. 43 auf, so ergeben sich wieder zwei gestrichelte Kurven zu beiden Seiten der Zeitachse, zwischen denen die mittlere Schwingung verläuft. Einen solchen Vorgang mit abwechselnd zu- und abnehmender Amplitude bezeichnet man als eine Schwebung und die zwischen zwei Scheitelwerten gleicher Art verflossene Zeit

$$t_0' = 2\,(t'' - t') = \frac{\pi}{\delta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 5\text{a})$$

als die Schwebungsdauer. Aus dem Vergleich der Abb. 41 und 43 erkennt man, daß derartige Schwebungen nur dann deutlich hervortreten, wenn der Unterschied $\alpha_1 - \alpha_2$ sehr klein ausfällt. Alsdann verschieben sich die beiden Einhüllenden der zusammengesetzten Schwingung Abb. 41 so gegeneinander, daß sie, wie in Abb. 43, nahezu symmetrisch zur Zeitachse liegen.

Haben wir es allgemein mit n Schwingungen auf einer Geraden zu tun, so sind diese nach Gl. 1) mit $2n$ Integrationskonstanten α und β behaftet, deren Ausschaltung nach dem Vorgang von 2a) auf eine Differentialgleichung $2n$-ter Ordnung führt. Auch in diesem Falle kann man aus der Gesamtschwingung in der x- und y-Richtung, nämlich

$$x = \sum a \sin(\alpha t + \beta), \qquad y = \sum a \cos(\alpha t + \beta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7)$$

durch Quadrieren und Addieren den Gesamtvektor

$$a_0^2 = \sum a_i^2 + 2 \sum a_i a_k \cos[(\alpha_i - \alpha_k) t + \beta_i - \beta_k] \quad . \quad . \quad . \quad 7\text{a})$$

ermitteln. Setzen wir hierin

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 = \alpha + \delta_1, \qquad \alpha_2 = \alpha + \delta_2 \ldots \alpha_k = \alpha + \delta_k \\ \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_k = 0, \quad \text{also} \quad \alpha = \frac{1}{k} \sum\limits_1^k \alpha_i \end{array}\right\}, \quad . \quad . \quad 7\text{b})$$

so wird aus 7a) unter Wegfallen der α

$$a_0^2 = \sum a_i^2 + 2 \sum a_i a_k \cos[(\delta_i - \delta_k) t + \beta_i - \beta_k] \cdot \quad . \quad . \quad 7\text{c})$$

Danach kann auch in diesem allgemeinen Falle a_0 durch zwei zur Zeitachse symmetrische Kurven dargestellt werden, zwischen denen,

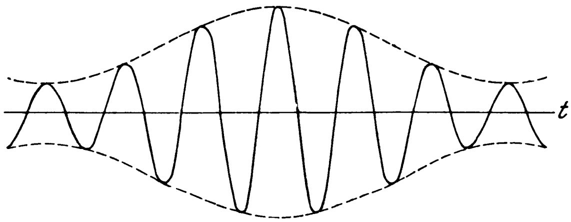

Abb. 43.

wie in Abb. 41, die Schwingungslinien mit dem mittleren Drehwert α verlaufen. Indessen treten hier die Verstärkungen und Verschwächungen nicht in so regelmäßiger Folge und so rein hervor wie in Abb. 43 für gewöhnliche Schwebungen.

§ 13. Grundschwingungen und Oberschwingungen. Verlangen wir, daß im Falle der Überlagerungen zweier einfacher Schwingungen stets nach Ablauf einer bestimmten Zeit t_0 derselbe Ort im gleichen Bewegungszustand durchlaufen wird, so müssen die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} x = a_1 \sin(\alpha_1 t + \beta_1) + a_2 \sin(\alpha_2 t + \beta_2) \\ \dot{x} = a_1 \alpha_1 \cos(\alpha_1 t + \beta_1) + a_2 \alpha_2 \cos(\alpha_2 t + \beta_2) \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

mit $t + t_0$ an Stelle von t dieselben Werte von x und $\dot{x}$ ergeben, d. h. es ist

$$\begin{array}{c} a_1 [\sin(\alpha_1 t + \alpha_1 t_0 + \beta_1) - \sin(\alpha_1 t + \beta_1)] \\ + a_2 [\sin(\alpha_2 t + \alpha_2 t_0 + \beta_2) - \sin(\alpha_2 t + \beta_2)] = 0, \\ a_1 \alpha_1 [\cos(\alpha_1 t + \alpha_1 t_0 + \beta_1) - \cos(\alpha_1 t + \beta_1)] \\ + a_2 \alpha_2 [\cos(\alpha_2 t + \alpha_2 t_0 + \beta_2) - \cos(\alpha_2 t + \beta_2)] = 0, \end{array}$$

oder

$$\left.\begin{aligned}\cos\left[\alpha_1\left(t+\frac{t_0}{2}\right)+\beta_1\right]\sin\frac{\alpha_1 t_0}{2}+a_2\cos\left[\alpha_2\left(t+\frac{t_0}{2}\right)+\beta_2\right]\sin\frac{\alpha_2 t_0}{2}=0\\ \alpha_1\sin\left[\alpha_1\left(t+\frac{t_0}{2}\right)+\beta_1\right]\sin\frac{\alpha_1 t_0}{2}+a_2\alpha_2\sin\left[\alpha_2\left(t+\frac{t_0}{2}\right)+\beta_2\right]\sin\frac{\alpha_2 t_0}{2}=0\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad 2)$$

Wegen der Willkür der von t abhängigen Winkelfunktionen können diese Gleichungen aber nur bestehen, wenn gleichzeitig

$$\sin\frac{\alpha_1 t_0}{2}=0 \quad \text{und} \quad \sin\frac{\alpha_2 t_0}{2}=0$$

sind, d. h. wenn mit zwei ganzen Zahlen k_1 und k_2

$$\alpha_1 t_0 = 2 k_1 \pi, \qquad \alpha_2 t_0 = 2 k_2 \pi \quad \ldots\ldots \quad 2\text{a})$$

oder nach Division

$$\alpha_1 : \alpha_2 = k_1 : k_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2\text{b})$$

wird. Zwei Schwingungen auf derselben Geraden mit ungleichen Drehwerten ergeben nur dann eine periodische Bewegung, wenn die beiden Drehwerte oder die zugehörigen Schwingungsdauern in einem ganzzahligen Verhältnis zueinander stehen.

Setzt sich die Bewegung aus mehr als zwei Einzelschwingungen zusammen, so führt die Forderung eines periodischen Gesamtvorganges in 2) auf eine entsprechende Vermehrung der Glieder und der zugehörigen Bedingungen 2a), also auf ganzzahlige Verhältnisse aller einzelnen Drehwerte und Schwingungsdauern untereinander. Alsdann können wir aber immer einen Drehwert α angeben, dessen ganzzahlige Vielfache die andern Drehwerte sind. Die diesem kleinsten Drehwert entsprechende Schwingung bezeichnen wir als die Grundschwingung, die andern als Oberschwingungen des Gesamtvorganges, den wir nunmehr ganz allgemein durch die sog. harmonische oder periodische Reihe

$$x = x_0 + a_1 \sin(\alpha t + \beta_1) + a_2 \sin(2\alpha t + \beta_2) + \cdots, \quad \ldots \quad 3)$$

oder nach Zerlegung der Winkelfunktionen $\sin(k\alpha t + \beta_k)$ durch

$$\begin{aligned} x = x_0 &+ A_1 \cos\alpha t + A_2 \cos 2\alpha t + \ldots \\ &+ B_1 \sin\alpha t + B_2 \sin 2\alpha t + \ldots \quad \ldots\ldots \quad 3\text{a}) \end{aligned}$$

darstellen können. Mit $\alpha t = \varphi$ können wir dafür auch schreiben

$$\begin{aligned} x = x_0 &+ A_1 \cos\varphi + A_2 \cos 2\varphi + \ldots + A_k \cos k\varphi + \ldots \\ &+ B_1 \sin\varphi + B_2 \sin 2\varphi + \ldots + B_k \sin k\varphi + \ldots, \quad \ldots \quad 3\text{b}) \end{aligned}$$

ein Ausdruck, dessen einzelne Glieder für $\varphi + 2\pi$ denselben Wert annehmen, weshalb der zugehörige Polarplan eine geschlossene Kurve wird, dessen allgemeine Gleichung somit eine harmonische Reihe ist.

Beispiel. Das Kurbelgetriebe, welches in der Technik zur Überführung einer Drehung in eine geradlinig hin- und hergehenden Bewegung oder umgekehrt umfassend verwendet wird, haben wir schon im § 1 als Beispiel einer ebenen Bewegung kurz besprochen und wollen es nunmehr unter dem Gesichtspunkte der Schwingungserscheinungen analytisch verfolgen. Das Getriebe besteht, wie aus Abb. 44 hervorgeht, aus der um den Pol O, dem Kurbelmittel, drehbaren starren Kurbel OA von der Länge r, dem geradlinig in der Richtung durch O hin- und hergehenden Gleitstück oder Kreuzkopf C und einer durch Zapfen mit A und C verbundenen sog. Schubstange AC von der Länge l. In einer bestimmten Stellung sei φ der Winkel der Kurbel gegen ihre Anfangslage OB, dem der Auslenkungswinkel ψ der Schubstange gegen ihre Mittellage derart entspricht, daß

$$r \sin\varphi = l \sin\psi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 4)$$

ist. Daraus, sowie aus der Abb 44 geht hervor, daß ψ im Gegensatz zu φ auf um so engere positive und negative Auslenkungen beschränkt bleibt, je kleiner das Verhältnis $r:l$ ist, weiter aber, daß jeder durch φ gegebenen Kurbelstellung nur ein Winkel ψ zugeordnet ist, während einem Werte von ψ, wie man durch Parallelverschiebung von AC in der Richtung CO feststellt, zwei Werte von φ angehören. Wir können daher die augenblickliche Gestalt des Getriebes eindeutig nur durch den Winkel φ bestimmen und werden zweckmäßig auf diesen als unabhängige Veränderliche alle anderen Veränderlichen beziehen. Um nun die Bewegung eines im Abstande z vom Gleitstück C auf der Pleuelstange befindlichen Punktes zu untersuchen, führen wir dessen Abstände x und y von der Achse OC und einer durch O dazu senkrechten durch die Gleichungen

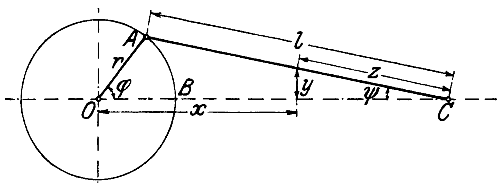

Abb. 44.

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi + (l-z)\cos\psi = r\cos\varphi + (l-z)\left[1 - \frac{r^2}{l^2}\sin^2\varphi\right]^{\frac{1}{2}} \\ y &= z\sin\psi = z\frac{r}{l}\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 5)$$

ein. Die somit gegebene Bahnkurve des betrachteten Punktes läßt sich leicht aus den aufeinanderfolgenden Lagen der Schubstange bildlich darstellen. Entwickeln wir den letzten Klammerausdruck der ersten Formel 5) in eine Potenzreihe, so wird daraus

$$\left(1 - \frac{r^2}{l^2}\sin^2\varphi\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\frac{r^2}{l^2}\sin^2\varphi - \frac{1}{2^2\,2!}\frac{r^4}{l^4}\sin^4\varphi - \frac{1\cdot 3}{2^3\,3!}\frac{r^6}{l^6}\sin^6\varphi - \ldots \quad 5\text{a})$$

oder wegen

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi$$

$$\sin^4\varphi = \frac{1}{2^3}(3 - 4\cos 2\varphi + \cos 4\varphi)$$

$$\sin^6\varphi = \frac{1}{2^5}(10 - 15\cos 2\varphi + 6\cos 4\varphi - \cos 6\varphi) \quad \text{usw.}$$

$$\begin{aligned} \left[1 - \frac{r^2}{l^2}\sin^2\varphi\right]^{\frac{1}{2}} = 1 &- \frac{1}{4}\frac{r^2}{l^2} - \frac{3}{64}\frac{r^4}{l^4} - \frac{5}{256}\frac{r^6}{l^6} + \ldots \\ &+ \cos 2\varphi\left[\frac{1}{4}\frac{r^2}{l^2} + \frac{1}{16}\frac{r^4}{l^4} + \frac{15}{512}\frac{r^6}{l^6} + \ldots\right] \\ &+ \cos 4\varphi\left[\quad\cdot\quad \frac{1}{64}\frac{r^4}{l^4} + \frac{3}{256}\frac{r^6}{l^6} + \ldots\right] \\ &+ \cos 6\varphi\left[\quad\cdot\quad\cdot\quad \frac{1}{512}\frac{r^6}{l^6} + \ldots\right] + \ldots \end{aligned} \quad \ldots \quad 5\text{b})$$

Nach Einführung dieser Ergebnisse in 5) erkennt man, daß der Abstand x durch eine harmonische Reihe mit dem Kurbelwinkel zusammenhängt, also mit diesem periodisch veränderlich ist, während y selbst eine einfache Schwingung vollzieht. Die Beiwerte der Winkelfunktionen der harmonischen Reihe sind selbst Potenzreihen, die aber für alle Werte von $r:l<1$ so rasch konvergieren, daß man sich mit der Beibehaltung von $r^2:l^2$ unter Vernachlässigung der höheren Potenzen in allen praktischen Fällen begnügen kann. Damit aber vereinfacht sich die erste Formel 5) in

$$x=(l-z)\left(1-\frac{1}{4}\frac{r^2}{l^2}\right)+r\cos\varphi+\frac{l-z}{4}\frac{r^2}{l^2}\cdot\cos 2\varphi, \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 6)$$

wonach die Bewegung des Punktes in der x-Richtung in erster Annäherung als Überlagerung einer Grundschwingung und einer doppelt so raschen Oberschwingung erscheint.

Setzen wir der Einfachheit halber in naher Übereinstimmung mit der Wirklichkeit eine gleichförmige Kurbeldrehung mit $\varphi=\omega t$ voraus, so werden die Laufteile des Stangenpunktes

$$\dot{x}=-r\omega\left(\sin\varphi+\frac{l-z}{2l}\frac{r}{l}\sin 2\varphi\right), \qquad \dot{y}=z\frac{r}{l}\omega\cos\varphi, \quad . \quad 6\text{a})$$

von denen der erste wieder aus einer Grund- und der ersten Oberschwingung besteht. Dasselbe gilt schließlich von den Anlaufteilen

$$\ddot{x}=-r\omega^2\left(\cos\varphi+\frac{l-z}{l}\frac{r}{l}\cos 2\varphi\right), \qquad \ddot{y}=-z\frac{r}{l}\omega^2\sin\varphi. \quad . \; . \quad 6\text{b})$$

Für $z=l$ geht die ganze Bewegung in die gleichförmige Drehung des Kurbelzapfens über, wobei x und y als Risse der Kurbel einfache Schwingungen vollziehen, während für den Kreuzkopf mit $z=0$, $\dot{y}=0$, $\ddot{y}=0$ und

$$v_x=\dot{x}=-r\omega\left(\sin\varphi+\frac{r}{2l}\sin 2\varphi\right), \qquad \ddot{x}=-r\omega^2\left(\cos\varphi+\frac{r}{l}\cos 2\varphi\right). \quad 6\text{c})$$

wird. Besonders anschaulich wirkt die bildliche Darstellung dieser Größen in ihrer Abhängigkeit von der Kreuzkopfstellung x selbst, die in Abb. 45 für $\omega=1$

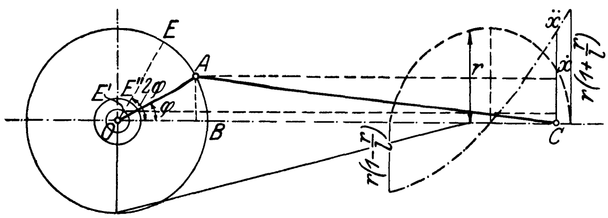

Abb. 45.

durchgeführt ist. Dazu benötigt man nur außer dem Kurbelkreis, dessen Halbmesser für $\varphi=90^0$ sofort den zugehörigen Wert von v_x angibt, die beiden Kreise mit den Radien $r^2:2l$ und $r^2:l$ einzuzeichnen, jeder Strecke OA mit dem Winkel $BOA=\varphi$ einen Strahl mit $BOE=2\varphi$ zuzuordnen und die entsprechenden Risse der Strahlen OE' und OE'' den Rissen von OA algebraisch hinzuzufügen. Auf diese Weise ergeben sich die beiden in Abb. 45 gestrichelten Kurven.

§ 14. Die harmonische Analyse. In der Physik und Technik ist häufig der Gesamtverlauf eines periodischen Bewegungszustandes an Hand von Versuchen vorgelegt, der sich dann nach den Ausführungen des letzten Abschnittes durch eine harmonische Reihe von der Form:

$$x = A_0 + A_1 \cos\varphi + A_2 \cos 2\varphi + \ldots + A_k \cos k\varphi + \ldots$$
$$+ B_1 \sin\varphi + B_2 \sin 2\varphi + \ldots + B_k \sin k\varphi + \ldots \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

analytisch wiedergeben läßt. Daraus erwächst die Aufgabe der Bestimmung der Beiwerte A und B, mit denen dann die Einzelschwingungen, aus welchen sich der Vorgang zusammensetzt, bekannt werden. Dieses Verfahren der Auflösung desselben in seine periodischen Bestandteile bezeichnet man als harmonische Analyse. Erweitern wir zunächst Gl. 1) mit $d\varphi$ und integrieren über die Periode der Grundschwingung, d. h. von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$, so werden alle Integrale der Form

$$A_k \int_0^{2\pi} \cos k\varphi \, d\varphi = 0\,, \qquad B_k \int_0^{2\pi} \sin k\varphi \, d\varphi = 0\,,$$

und es bleibt nur

$$2\pi A_0 - \int_0^{2\pi} x \, d\varphi = 0, \quad \text{oder} \quad A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x \, d\varphi \quad . \quad . \quad . \quad 1\,\mathrm{a})$$

übrig, so daß A_0 unmittelbar als Mittelwert von x über der Periode erscheint und durch Planimetrieren der Gesamtkurve zu ermitteln ist. Die andern Beiwerte, z. B. A_k und B_k, erhalten wir durch Erweiterung mit $\cos k\varphi \, d\varphi$ und $\sin k\varphi \, d\varphi$ und abermalige Integration. Für die h-ten Glieder folgt alsdann

$$A_h \int_0^{2\pi} \cos h\varphi \cos k\varphi \, d\varphi = \frac{A_h}{2} \int_0^{2\pi} [\cos(h-k)\varphi + \cos(h+k)\varphi] \, d\varphi = 0\,,$$

$$A_h \int_0^{2\pi} \cos h\varphi \sin k\varphi \, d\varphi = \frac{A_h}{2} \int_0^{2\pi} [\sin(h+k)\varphi - \sin(h-k)\varphi] \, d\varphi = 0\,.$$

$$B_h \int_0^{2\pi} \sin h\varphi \cos k\varphi \, d\varphi = \frac{B_h}{2} \int_0^{2\pi} [\sin(h+k)\varphi + \sin(h-k)\varphi] \, d\varphi = 0\,,$$

$$B_h \int_0^{2\pi} \sin h\varphi \sin k\varphi \, d\varphi = \frac{B_h}{2} \int_0^{2\pi} [\cos(h-k)\varphi - \cos(h+k)\varphi] \, d\varphi = 0\,,$$

und es bleiben nur die mit A_k und B_k behafteten übrig, die aus dem Vorstehenden durch $h = k$ hervorgehen. Es wird mithin:

$$\left.\begin{array}{ll} A_k \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2 k\varphi \, d\varphi = A_k \pi = \int_0^{2\pi} x \cos k\varphi \, d\varphi\,, & A_k = \displaystyle\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos k\varphi \, d\varphi \\ B_k \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^2 k\varphi \, d\varphi = B_k \pi = \int_0^{2\pi} x \sin k\varphi \, d\varphi\,, & B_k = \displaystyle\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin k\varphi \, d\varphi \end{array}\right\} . \quad 1\,\mathrm{b})$$

Die Auswertung dieser Integrale mit Hilfe des Planimeters setzt die vorherige Verzeichnung der Kurven $x \cos k\varphi$ und $x \sin k\varphi$ voraus, die jedenfalls mühsam und bei einer größeren Zahl von Gliedern sehr zeitraubend ist. Man hat daher versucht, diese Umzeichnung mit den damit verbundenen Fehlerquellen durch Vorrichtungen zu ersetzen, welche die Produktbildung selbsttätig durchführen und in Verbindung mit einem gewöhnlichen Planimeter die einzelnen Beiwerte unmittelbar liefern. Der einem solchen harmonischen Analysator zugrunde liegende Gedanke ist die Verschiebung einer Rolle um die Ordinate x der ursprünglichen Kurve 1) unter gleichzeitiger Drehung um einen Winkel $k\varphi$. Alsdann werden zwei auf der Rolle um 90^0 voneinander abstehende Punkte P_s und P_c geschlossene Kurven beschreiben, deren Inhalte der Integration 1b) verhältnisgleich sind.

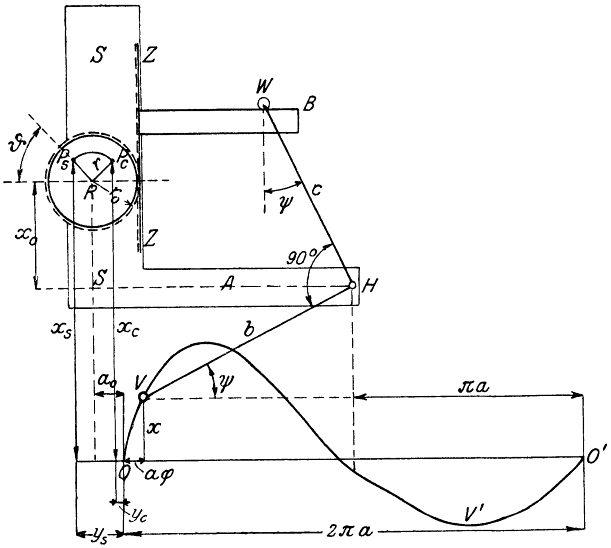

Abb. 46.

In dem wohl einfachsten Analysator von Mader[1]) ist dieser Gedanke, Abb. 46, folgendermaßen verwirklicht. Die als Zahnrad ausgebildete Rolle R mit dem Teilkreishalbmesser r_0 ist auf einem Schlitten SS befestigt, der nur in der Ordinatenrichtung x auf einer in der Bildebene festen Schiene auf- und abgehen kann und an einem hierzu senkrechten Arm A mittels eines Zapfens einen Winkelhebel $VHW = 90^0$ trägt. Der Fahrstift V des einen Armes $VH = b$ wird auf der ursprünglichen Kurve hin- und auf deren Abszissenachse zurückgeführt, wobei der Schlitten auf- und abgleitet, während das mit einer Druckrolle versehene andere Ende W des Winkelhebels durch einen dem Arm A bzw. der Abszissenachse gleichgerichteten

[1]) Mader, Ein einfacher harmonischer Analysator mit beliebiger Basis. Elektrotechn. Zeitschrift 1909, S. 847.

Arm B eine damit starr verbundene Zahnstange ZZ auf dem Schlitten SS in dessen Bewegungsrichtung verschiebt und die Rolle R in Drehung versetzt. Bei der Anwendung des Analysators wird zunächst der Punkt H auf das Lot durch die Mitte der Grundlänge $2\pi a$ der zu analysierenden Schwingungskurve gebracht, die im Punkte O die Abszissenachse schneidet. Befindet sich der Fahrstift über diesem Punkte, so sei a_0 die Abszisse des Rollenmittels R, über dem der oben genannte Punkt P_c (der Kosinuskurve) gerade liegen möge, während der Punkt P_s (der Sinuskurve) den Abszissenabstand r vom Rollenmittel besitzt. Befindet sich dann der Fahrstift V über einem beliebigen Punkte der Schwingungskurve mit den Abständen $a\varphi$ und x, so sei ψ der Winkel des Armes b gegen die Abszissenachse und der Halbmesser r von P_s habe sich um ϑ gegen seine Anfangslage mit der Rolle gedreht. Alsdann ist

$$b\cos\psi = a(\pi - \varphi), \qquad b\sin\psi\, d\psi = a\, d\varphi \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

und die Verschiebung der Arme A und B gegeneinander durch Drehung des Hebelarmes c wird $c\cos\psi$. Diese aber bedingt durch die Zahnstange die Drehung der Rolle R um ϑ so zwar, daß

$$r_0\, d\vartheta = -c\sin\psi\, d\psi, \qquad r_0\vartheta = c(\cos\psi - \cos\psi_0), \quad \ldots \quad 3)$$

oder wegen 2)

$$d\vartheta = -\frac{ca}{br_0}\, d\varphi.$$

Da ferner in der Anfangsstellung O des Fahrstiftes $\varphi = 0$ auch $\vartheta = 0$ sein soll, so wird daraus

$$\vartheta = -\frac{ca}{br_0}\varphi, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

d. h. die Rollendrehung ist verhältnisgleich der Abszisse der Schwingungskurve. Nunmehr sind die Achsenabstände der Punkte P_c und P_s in bezug auf O für eine beliebige Stellung des Fahrstiftes V, wenn x_0 den Abstand des Rollenmittels von Arm A bedeutet:

$$\left.\begin{aligned} y_c &= -a_0 + r\sin\vartheta, & x_c &= x + b\sin\psi + x_0 + r\cos\vartheta \\ y_s &= -a_0 - r\cos\vartheta, & x_s &= x + b\sin\psi + x_0 + r\sin\vartheta \end{aligned}\right\} \quad . \quad 5)$$

und die Elemente der von den Punkten P_c und P_s überstrichenen Flächen mit Rücksicht auf 3)

$$\begin{aligned} x_c\, dy_c = x_c r\cos\vartheta\, d\vartheta &= (x + x_0 + r\cos\vartheta) r\cos\vartheta\, d\vartheta \\ &\quad - \frac{rbc}{r_0}\sin^2\psi\cos\left[\frac{c}{r_0}(\cos\psi - \cos\psi_0)\right] d\psi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_s\, dy_s = x_s r\sin\vartheta\, d\vartheta &= (x + x_0 + r\sin\vartheta) r\sin\vartheta\, d\vartheta \\ &\quad - \frac{rbc}{r_0}\sin^2\psi\sin\left[\frac{c}{r_0}(\cos\psi - \cos\psi_0)\right] d\psi. \end{aligned}$$

Beim Umfahren der ganzen Fläche $OVV'O'O$ längs der vorgelegten Kurve $OVV'O'$ und rückwärts $O'O$ auf der Zeitachse gehen die

Winkel ϑ und ψ auf ihre Anfangswerte zurück, so daß bei der Integration alle Glieder verschwinden bis auf

$$\left.\begin{aligned} F_c &= \int x_c\, d y_c = r \int x \cos\vartheta\, d\vartheta = -\frac{r c a}{b r_0} \int_0^{2\pi} x \cos\left(\frac{c a}{b r_0}\varphi\right) d\varphi \\ F_s &= \int x_s\, d y_s = r \int x \sin\vartheta\, d\vartheta = +\frac{r c a}{b r_0} \int_0^{2\pi} x \sin\left(\frac{c a}{b r_0}\varphi\right) d\varphi \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; 6)$$

Die Integrale stimmen aber mit denen in 1b) überein, wenn wir

$$\frac{c a}{b r_0} = k$$

setzen, also unter sonst gleichen Verhältnissen für $k = 1, 2, 3 \ldots$ Rollen vom Halbmesser r_0, $\frac{1}{2} r_0$, $\frac{1}{3} r_0$ usw. anwenden, für welche auf den Schlitten passende Zapfenlöcher angebracht sind. Außerdem ist die Armlänge b zur Anpassung an verschiedene Grundlängen $2\pi\alpha$ der Schwingungskurve verstellbar.

Steht kein solcher Analysator zur Verfügung, so kann man die oben angedeutete Planimetrierung der für jedes Einzelglied umgezeichneten Schwingungskurve auch durch Näherungsverfahren ersetzen, von denen wohl das einfachste von Fischer-Hinnen[1]) vorgeschlagen wurde. Zu dessen Erläuterung denken wir uns die Kurve nach Abzug des nach 1a) leicht zu ermittelnden Gliedes A_0 auf die Form

$$x = a_1 \sin(\varphi + \beta_1) + a_2 \sin 2(\varphi + \beta_2) + \ldots + a_k \sin k(\varphi + \beta_k) + \ldots \quad . \; . \; 7)$$

zurückgeführt, worin jedes Einzelglied einen Wellenzug darstellt, der um die zugehörige Phase gegen den Nullpunkt der Abbildung verschoben ist. Um den Punkt der k-ten Welle zu bestimmen, welcher dem beliebigen Winkel φ zugeordnet ist, teile man von der entsprechenden Ordinate $A_1 B_1 = x_1$ der Gesamtkurve ausgehend die genannte Periode $OO = 2\pi$ in k Teile (in Abb. 47 sind 3 Teile gewählt), wodurch man die um $\frac{2\pi}{k}$, $2\frac{2\pi}{k}$ usw. abstehenden Ordinaten $A_2 B_2 = x_2$, $A_3 B_3 = x_3 \ldots$ erhält. Diese sind gegeben durch die Reihen

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \Sigma a_h \sin h(\varphi + \beta_h), \qquad x_2 = \Sigma a_h \sin h\left[\varphi + \beta_h + \frac{2\pi}{k}\right] \\ x_3 &= \Sigma a_h \sin h\left(\varphi + \beta_h + 2\frac{2\pi}{k}\right), \qquad \text{usw.} \end{aligned}\right\}, \quad . \; . \; 7a)$$

deren Addition offenbar eine Doppelreihe ergibt, aus der wir das n-te Glied

$$\begin{aligned} S_n = a_n \Big[&\sin n(\varphi + \beta_n) + \sin n\left(\varphi + \beta_n + \frac{2\pi}{k}\right) + \cdots \\ &+ \sin n\left(\varphi + \beta_n + (k-1)\frac{2\pi}{k}\right)\Big] \end{aligned} \quad . \; . \; . \; . \; . \; 8)$$

herausgreifen. Die Zerlegung der Einzelterme führt mit der Abkürzung

$$\frac{\pi n}{k} = \alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 9)$$

[1]) Elektrotechn. Zeitschrift 1901, S. 396.

auf

$$S_n = a_n \sin n(\varphi + \beta_n)\,[1 + \cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \ldots + \cos(k-1)\,2\alpha]$$
$$+ a_n \cos n(\varphi + \beta_n)\,[\quad \sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \ldots + \sin(k-1)\,2\alpha] \quad . \quad 8a)$$

oder[1])

$$S_n = \frac{a_n}{2} \sin n(\varphi + \beta_n)\left[1 + \frac{\sin(2k-1)\alpha}{\sin\alpha}\right]$$
$$+ \frac{a_n}{2}\cos n(\varphi + \beta_n)\left[\operatorname{ctg}\alpha - \frac{\cos(2k-1)\alpha}{\sin\alpha}\right] \ldots\ldots \quad 8b)$$

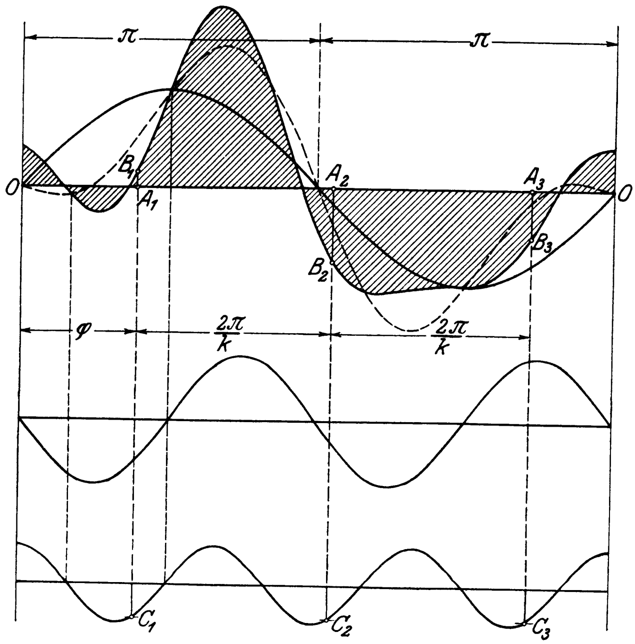

Abb. 47.

Nun ist wegen 9)

$$1 + \frac{\sin(2k-1)\alpha}{\sin\alpha} = 1 - \cos 2k\alpha + \sin 2k\alpha \operatorname{ctg}\alpha$$
$$= 1 - \cos 2\pi n + \sin 2\pi n \operatorname{ctg}\frac{\pi n}{k},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha - \frac{\cos(2k-1)\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha\,(1 - \cos 2k\alpha) - \sin 2k\alpha$$
$$= (1 - \cos 2\pi n)\operatorname{ctg}\frac{\pi n}{k} - \sin 2\pi n,$$

woraus man erkennt, daß für gebrochene Werte von $n:k$ beide Ausdrücke und damit auch S_n verschwinden. Ist dagegen $n:k$ eine ganze Zahl, also α ein ganzzahliges Vielfaches von π, so vereinfacht sich 8a) unmittelbar in

$$S_n = k\,a_n \sin n(\varphi + \beta_n) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 10)$$

oder für $n = k$

$$S_k = k\,a_k \sin k(\varphi + \beta_k) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 10a)$$

[1]) Die Summierung der Klammerreihen in 8a) erfolgt nach Erweiterung mit $2\sin\alpha$ und Zerlegung der Einzelglieder in je zwei nach dem Schema $2\cos 2\alpha \sin\alpha = \sin 3\alpha - \sin\alpha$, $2\sin 2\alpha\sin\alpha = \cos\alpha - \cos 3\alpha$, wobei sich alles bis auf das erste und letzte Glied aufhebt.

für $n = 2k$

$$S_{2k} = k a_{2k} \sin 2k(\varphi + \beta_{2k}) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 10\text{a})$$

usw. Damit wird aus der Doppelreihe

$$\Sigma x = k\,[a_k \sin k(\varphi + \beta_k) + a_{2k} \sin 2k(\varphi + \beta_k) + \ldots], \quad \ldots \quad 11)$$

wonach das arithmetische Mittel aller um je $\frac{2\pi}{k}$ voneinander innerhalb der Grundperiode entfernten Ordinaten einer Schwingungskurve zugehört, welche nur die k-te, $2k$-te, $3k$-te usw. Wellen enthält, aber keine niederen und auch nicht die zwischen den Ordnungszahlen k, $2k$, $3k$ liegenden Glieder. Zieht man die durch Mittelwertbildung gewonnene, bei starker Konvergenz der Reihe 1) mit der k-ten Welle schon nahe übereinstimmende Schwingungskurve von der ursprünglichen ab, so bleibt eine Restkurve übrig, die alle Wellen bis zur $(k-1)$-ten und die in der oberen Kurve nicht einbegriffenen Glieder enthält. Die Wellen unterhalb der $(k-1)$-ten ergeben sich alsdann durch immer wiederholte Anwendung des Verfahrens auf die Restkurve, womit die harmonische Analyse zeichnerisch durchgeführt ist. Zur Berechnung der Beiwerte A_k und B_k bzw. a_k und β_k gehen wir von einer beliebigen als Mittelwert gewonnenen Ordinate $\xi_1 = \frac{\Sigma x}{k}$ aus und einer zweiten ξ_2 um $\frac{\pi}{2k}$ davon abstehenden. Alsdann ist

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= a_k \sin k(\varphi + \beta_k) \\ \xi_2 &= a_k \sin k\left(\varphi + \beta_k + \frac{\pi}{2k}\right) = a_k \cos k(\varphi + \beta_k) \end{aligned}\right\}, \quad \ldots \quad 12)$$

woraus sich für die Amplitude der k-ten Welle

$$a_k^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2,$$

ergibt. Um die Phase β_k zu ermitteln, bestimmen wir einfach die Ordinate dieser Welle für $\varphi = 0$, nämlich

$$\xi_0 = a_k \sin k\beta_k, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 12\text{b})$$

womit dann auch nach Gl. 4 § 11

$$A_k = a_k \sin k\beta_k, \qquad B_k = a_k \cos k\beta_k \quad \ldots \ldots \quad 12\text{c})$$

gegeben ist.

§ 15. Zusammensetzung gegeneinander geneigter Schwingungen. Vollzieht die Schwingungsgerade selbst eine Schwingung mit der Richtung φ gegen sich selbst, so können wir diese sofort in zwei Teile $s\cos\varphi$ und $s\sin\varphi$ zerlegen, von denen der erste sich nach den Lehren des § 12 mit der Schwingung in der Geraden überlagert, während der letztere eine davon unabhängige Schwingungsbewegung der Geraden selbst in der Normalen dazu darstellt. Danach brauchen wir von vornherein zur Kennzeichnung derartiger Bewegungsvorgänge nur die Verbindung zweier zueinander senkrechter Schwingungen

$$\left.\begin{aligned} x &= a \sin(\alpha_1 t + \beta_1), & y &= b \sin(\alpha_2 t + \beta_2) \\ \dot{x} &= a\alpha_1 \cos(\alpha_1 t + \beta_1), & \dot{y} &= b\alpha_2 \cos(\alpha_2 t + \beta_2) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 1)$$

ins Auge zu fassen, die offenbar nach Ausschaltung der Zeit die Bewegung auf einer ebenen Bahn ergeben, die ganz innerhalb des Rechteckes mit den Seitenlängen $2a$ und $2b$ so verläuft, daß sie alle vier Seiten berührt. Soll die Gesamtbewegung wieder periodisch sein, so muß der bewegte Punkt nach Verlauf der Periode t_0 durch denselben Punkt x, y mit gleichem und gleichgerichtetem Lauf wieder hindurchgehen, die Bahnkurve also geschlossen sein. Das ist aber nur möglich, wenn

$$\sin(\alpha_1 t + \alpha_1 t_0 + \beta_1) - \sin(\alpha_1 t + \beta_1) = 2\cos\left(\alpha_1 t + \frac{\alpha_1 t_0}{2} + \beta_1\right)\sin\frac{\alpha_1 t_0}{2} = 0;$$

$$\sin(\alpha_2 t + \alpha_2 t_0 + \beta_2) - \sin(\alpha_2 t + \beta_2) = 2\cos\left(\alpha_2 t + \frac{\alpha_2 t_0}{2} + \beta_2\right)\sin\frac{\alpha_2 t_0}{2} = 0;$$

$$\cos(\alpha_1 t + \alpha_1 t_0 + \beta_1) - \cos(\alpha_1 t + \beta_1) = -2\sin\left(\alpha_1 t + \frac{\alpha_1 t_0}{2} + \beta_1\right)\sin\frac{\alpha_1 t_0}{2} = 0;$$

$$\cos(\alpha_2 t + \alpha_2 t_0 + \beta_2) - \cos(\alpha_2 t + \beta_2) = -2\sin\left(\alpha_2 t + \frac{\alpha_2 t_0}{2} + \beta_2\right)\sin\frac{\alpha_2 t_0}{2} = 0;$$

oder, wenn mit ganzen Zahlen k_1 und k_2

$$\left.\begin{array}{ccc} \sin\frac{\alpha_1 t_0}{2} = \sin\frac{\alpha_2 t_0}{2} = 0, & \alpha_1 t_0 = 2k_1\pi, & \alpha_2 t_0 = 2k_2\pi \\ \alpha_1 : \alpha_2 = k_1 : k_2, & t_0 = \frac{2k_1\pi}{\alpha_1} = \frac{2k_2\pi}{\alpha_2} & \end{array}\right\} \quad . \quad 2)$$

ist, d. h. für ein ganzzahliges Verhältnis der beiden Drehwerte α_1 und α_2, genau wie bei der Verbindung zweier Einzelschwingungen auf einer Geraden zu einer Gesamtschwingung (§ 12 und 13). Alsdann ist es immer möglich, mit den Winkelfunktionen die Zeit t aus den beiden Schwingungsformeln 1) auszuschalten, woraus sich eine algebraische Gleichung für die nach einer endlichen Zahl von Umläufen geschlossenen Bahnkurve ergibt. Die kleinsten ganzen Werte k_1 und k_2 geben somit die Zahl der Umläufe der Schwingungsvektoren für die x- und y-Richtung an, denen je eine Berührung mit den Rechteckseiten $\pm a$ und $\pm b$ zugehört, so daß also k_1 Berührungen auf die Seite $2b$ und k_2 auf die Seite $2a$ entfallen. Infolgedessen wird die ganze Rechteckfläche um so dichter mit den Bahnstücken zwischen je zwei aufeinander folgenden Berührungen gegenüberliegender Rechteckseiten bedeckt erscheinen, je größer die beiden Zahlen k_1 und k_2 sind, je mehr sich also ihr Verhältnis einer Irrationalzahl nähert, die auch als $\infty : \infty$ aufgefaßt werden kann[1]). In diesem Falle versagt die Ausschaltung der Zeit in den Schwingungsformeln 1), und die Kurvenzüge bedecken das Rechteck vollkommen dicht, da erst nach unendlich vielen Berührungen die Bahn geschlossen wird. Die Gestalt der Kurven, die man gewöhnlich nach ihrem Entdecker Lissajou benennt, hängt indessen nicht nur von den Verhältnissen $a:b$ und $k_1 : k_2$, sondern außerdem noch von den beiden Phasen β_1 und β_2 ab. Man erkennt dies schon daran, daß z. B. x und y gleichzeitig nur verschwinden, wenn mit zwei weiteren ganzen Zahlen n_1 und n_2

$$\alpha_1 t + \beta_1 = n_1\pi, \qquad \alpha_2 t + \beta_2 = n_2\pi,$$

---

[1]) Ist z. B. $k_1 : k_2 = 5{,}2834$, so kann man dafür setzen $52834 : 10000 = 26417 : 5000$, d. h. 26417 Wellen auf 5000 Umläufen mit entsprechenden Berührungszahlen auf beiden Rechteckseiten.

oder

$$\frac{n_1 \pi - \beta_1}{\alpha_1} = \frac{n_2 \pi - \beta_2}{\alpha_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

wird. Andernfalls geht die Schwingungskurve nicht durch den Mittelpunkt des Rechtecks. Schreibt man für die Grundformeln 1) mit $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = \beta$

$$x = a \sin \alpha_1 \varphi, \qquad y = b \sin (\alpha_2 \varphi + \beta), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1\,a)$$

so erkennt man die bequeme Darstellbarkeit des Bahnverlaufes als Aufriß der auf einem Zylinder vom Halbmesser a derart

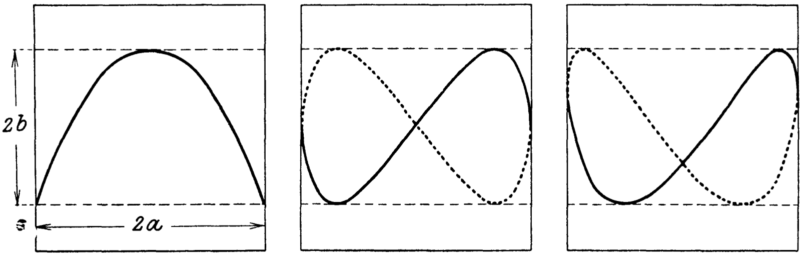

Abb. 48.

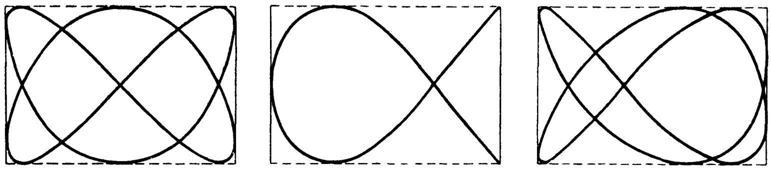

Abb. 49.

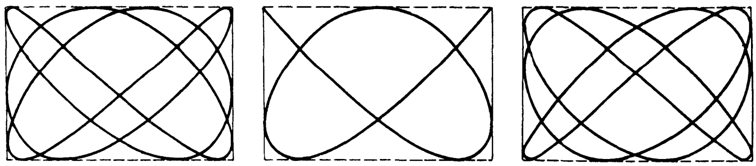

Abb. 50.

aufgewickelten Sinuslinie für y mit dem Ausschlage $\pm b$, daß auf je k_1 Zylinderumfänge k_2 Sinuslinien entfallen, wie es in Abb. 48, 49 und 50 für $k_1 : k_2 = 1:2$, $2:3$, $3:4$ geschehen ist. Durch Drehung des Zylinders, der zur Sichtbarmachung des auf der Rückseite befindlichen Kurvenstückes am besten aus Glas besteht, erhält man dann alle mit der Phase β wechselnden Kurvenformen, von denen in Abb. 48, 49 und 50 je drei für $\beta = 0$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$; 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{12}$; 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ angedeutet sind. Daraus ist auch ersichtlich, daß für echte Brüche $k_1 : k_2$ die aufgetragene Sinuslinie sich schließt, während für ein irrationales Verhältnis $\alpha_1 : \alpha_2$ dies erst nach unendlich vielen Umläufen eintritt, wobei die im Aufriß dicht nebeneinander liegenden Bahnkurvenstücke das ganze Rechteck überdecken. In grober Weise kann man die Lissajouschen Kurven auch durch einen Sandstreuer erhalten, der an einem Pendel hängt, welches seinerseits mit einem andern Pendel derart befestigt ist, daß die Schwingungsebenen senkrecht zueinander stehen und die Pendellängen, die die Schwingungsdauer bestimmen (vgl. § 17), verstellbar angeordnet sind. Für irrationale Verhältnisse beider Schwingungszeiten bedeckt dann der ausgestreute Sand auf einem darunter gelegten Papierblatt nach und nach das ganze Rechteck.

1. Beispiel. Haben die beiden zueinander senkrechten Schwingungen die gleiche Dauer und Drehzahl α, so sind ihre Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a} &= \sin(\alpha t + \beta_1) = \cos\beta_1 \sin\alpha t + \sin\beta_1 \cos\alpha t \\ \frac{y}{b} &= \sin(\alpha t + \beta_2) = \cos\beta_2 \sin\alpha t + \sin\beta_2 \cos\alpha t\end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots \quad 4)$$

so ergibt die Ausschaltung von αt die Bahn

$$\left(\frac{x\cos\beta_2}{a} - \frac{y\cos\beta_1}{b}\right)^2 + \left(\frac{x\sin\beta_2}{a} - \frac{y\sin\beta_1}{b}\right)^2 = \sin^2(\beta_1 - \beta_3), \quad \ldots \quad 4\text{a})$$

oder

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab}\cos(\beta_1 - \beta_2) = \sin^2(\beta_1 - \beta_2), \quad \ldots\ldots \quad 4\text{b})$$

d. h. die Gleichung einer schräg liegenden Ellipse, Abb. 51. Diese artet für $\beta_1 - \beta_2 = n\pi$ in die beiden Diagonalen des Rechteckes

$$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$$

aus und nimmt für $\beta_1 - \beta_2 = \frac{2n+1}{2}\pi$, also ungerade Vielfache von $\frac{\pi}{2}$ ihre Normalform

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

an. Die Ellipse dreht sich also bei stetiger Änderung des Phasenunterschiedes $\beta_1 - \beta_2$ um den Anfang unter gleichzeitiger Änderung ihrer Gestalt innerhalb des umschriebenen Rechtecks.

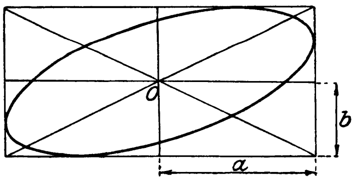

Abb. 51.

2. Beispiel. Schwingt der Punkt in der y-Richtung doppelt so rasch wie in der x-Richtung, so gilt

$$\frac{x}{a} = \sin\alpha t, \qquad \frac{y}{b} = \sin(2\alpha t - \beta) = \sin 2\alpha t\cos\beta - \cos 2\alpha t\sin\beta, \quad \ldots \quad 5)$$

oder

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\alpha t, \qquad \text{also} \qquad \cos 2\alpha t = 1 - 2\frac{x^2}{a^2} \\ \sin 2\alpha t\cos\beta = \frac{y}{b} + \cos 2\alpha t\sin\beta = \frac{y}{b} + \left(1 - 2\frac{x^2}{a^2}\right)\sin\beta\end{aligned}\right\}. \quad . \quad 5\text{a})$$

Daraus folgt nach Ausschaltung von $2\alpha t$ für die Bahn

$$\frac{y^2}{b} + \left(1 - 2\frac{x^2}{a^2}\right)^2 + 2\left(1 - 2\frac{x^2}{a^2}\right)\frac{y}{b}\sin\beta = \cos^2\beta, \quad \ldots\ldots \quad 5\text{b})$$

also für $\beta = 0$ die doppelt symmetrische Schleife 4. Ordnung, Abb. 48

$$\frac{y^2}{b^2} + 4\frac{x^4}{a^4} = 4\frac{x^2}{a^2} \qquad \text{5c)}$$

und für $\beta = \pm\frac{\pi}{2}$ ein Parabelpaar

$$\pm\frac{y}{b} + \left(1 - 2\frac{x^2}{a^2}\right) = 0, \qquad \text{5d)}$$

von denen in Abb. 48 die mit dem negativen Vorzeichen eingetragen ist.

IV. Gezwungene und Relativbewegung.

§ 16. Die gezwungene Bewegung. Wir haben früher (§ 7) festgestellt, daß die ebene Bewegung eines Punktes völlig bestimmt ist, wenn außer dem Anfangslauf auch der Anlauf für alle möglichen Lagen nach Größe und Richtung bekannt ist. Insbesondere kann hieraus die Bahn des Punktes abgeleitet werden, wovon wir in § 7 für die Wurfbewegung und in § 10 für die Planetenbewegung Gebrauch machten. Dabei war allerdings vorausgesetzt, daß der bewegte Punkt der Wirkung des Anlaufsfeldes uneingeschränkt Folge leisten könne, so daß die Bewegung als eine freie zu bezeichnen war. Den Anlauf q konnten wir uns alsdann in den Bahnanlauf und Normalanlauf zerlegen, von denen der erstere die Änderung des augenblicklichen Laufes in der Bahntangente, der letztere aber die durch die Bahnkrümmung gegebene Ablenkung aus der Tangentenrichtung zur Folge hatte. Bewegt sich der Punkt in Abb. 52 dagegen in einer vorgeschriebenen Bahn PB unter der Wirkung eines ebenfalls vorgelegten Anlauffeldes q, so können wir uns in jedem Punkte P die dort tangential sich anschließende freie Bahn PA einzeichnen, deren Krümmung von der vorgeschriebenen Bahn im allgemeinen abweicht. Der erzwungene Übergang von der freien in diese Bahn setzt alsdann einen neuen normalen Zwangsanlauf q' in der Richtung der Abweichung voraus, durch dessen Hinzufügung zum vorgelegten Anlauf die ganze Bewegung wieder als eine freie angesehen und behandelt werden kann. Alsdann ist mit der Bahnneigung ϑ und der Anlaufsneigung $\varkappa$ im Punkt P

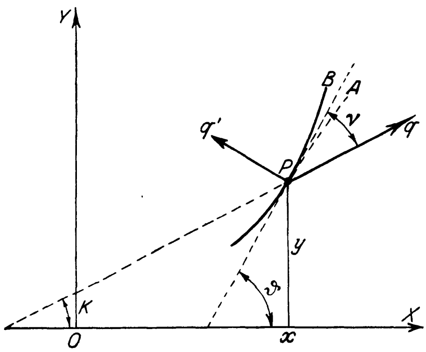

Abb. 52.

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= q\cos\varkappa - q'\sin\vartheta \\ \ddot{y} &= q\sin\varkappa + q'\cos\vartheta \end{aligned}\right\} \qquad 1$$

oder nach Erweiterung mit

$$dx = ds\cos\vartheta, \qquad dy = ds\sin\vartheta,$$

sowie Addition bzw. Subtraktion mit Rücksicht auf $\ddot{x}\,dx + \ddot{y}\,dy = v\,dv$ und $\ddot{y}\,dx - \ddot{x}\,dy = \frac{v^2\,ds}{\varrho}$ (vgl. § 8), sowie Einführung des Winkels ν des Anlaufs gegen die Bahn

$$\left.\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= q\cos(\vartheta - \varkappa) = q\cos\nu\\ \frac{v^2}{\varrho} &= -q\sin(\vartheta - \varkappa) + q' = q' - q\sin\nu\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

Daraus geht hervor, daß der Bahnanlauf unabhängig ist vom Zwangsanlauf, der nach der zweiten Formel 2) seinerseits durch die Bewegung in der Zwangsbahn und das Anlauffeld bestimmt ist. Bezeichnen wir ferner mit ϱ_0 den Krümmungshalbmesser der freien, im Punkt P anschließenden Bahn, so gilt für diese (wegen Wegfalls von q')

$$\frac{v^2}{\varrho_0} = -q\sin\nu, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2\,\mathrm{a})$$

also mit der zweiten Formel 2)

$$q' = \frac{v^2}{\varrho} + q\sin\nu = v^2\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right), \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

so daß der Zwangsanlauf durch den Krümmungsunterschied der gezwungenen und freien Bahn unmittelbar gegeben ist. Dabei ist natürlich auf das Vorzeichen der beiden Krümmungshalbmesser zu achten, welches nur dann miteinander übereinstimmt, wenn die Krümmungsmittelpunkte auf derselben Seite der gemeinsamen Bahntangente liegen. Falls beide Krümmungshalbmesser an der betrachteten Stelle gleich sind, so verschwindet dort der Zwangsanlauf und die Bewegung wird zu einer freien.

1. Beispiel. Liegt die Zwangsbahn in einer wagerechten Ebene, so besteht bei einer gleichförmigen Bewegung kein äußeres Anlauffeld, und die Formeln 2) vereinfachen sich in

$$v = c, \qquad q' = \frac{c^2}{\varrho}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2\,\mathrm{b})$$

Daher erfährt ein Eisenbahnzug im Beharrungszustande auf gerader Strecke, wo $\varrho = \infty$ ist, keinen wagerechten Zwangsanlauf, wohl aber in gekrümmter Bahn. Schließt sich diese unvermittelt an die gerade Strecke an, so stellt sich auch plötzlich der Zwangsanlauf ein, was besonders bei Straßenbahnen lästig bemerkbar ist. Daher sollten die Übergänge, wie es im Eisenbahnwesen stets geschieht, mit stetig veränderlicher Krümmung erfolgen.

2. Beispiel. Bewegt sich ein Punkt auf einer Zwangsbahn in einer senkrechten Ebene unter dem Einfluß des beständigen Erdanlaufs $q = g$, so ist nach Abb. 53 $\nu = 90 + \vartheta$, also wird aus 2)

$$\frac{dv}{dt} = -g\sin\vartheta, \qquad q' = \frac{v^2}{\varrho} + g\cos\vartheta \quad \ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

Aus der ersten Formel folgt nach Erweiterung mit ds und $ds\sin\vartheta = dy$

$$v\,dv = -g\,dy, \qquad \text{oder} \qquad v^2 - v_0{}^2 = 2\,g\,(y_0 - y), \quad \ldots\ldots \quad 4\,\mathrm{a})$$

wonach also wie beim freien Wurf der Lauf nur von der Höhenlage abhängt. Ist die Zwangsbahn eine Gerade, so ist ϑ unveränderlich und $\varrho = \infty$, also

$$q' = g \cos \vartheta, \quad \text{4b)}$$

d. h. der Zwangsanlauf auf einer schiefen Geraden hebt genau den zu ihr senkrechten Anteil des Erdanlaufs auf. Damit ist nach 3) sofort auch die Krümmung der in einem beliebigen Punkte der Geraden anschließenden freien Wurfparabel durch

$$\frac{v^2}{\varrho_0} = -g \cos \vartheta \quad \text{4c)}$$

bestimmt, wobei das negative Vorzeichen die Lage des Krümmungsmittelpunktes unterhalb der Geraden (Bahntangente) festlegt.

Ist die Zwangsbahn ein Kreis vom Halbmesser $\varrho = l$, in den der bewegte Punkt an der tiefsten Stelle eintritt, so haben wir nach Abb. 54

$$l \cos \vartheta = l - y + y_0, \quad \text{5)}$$

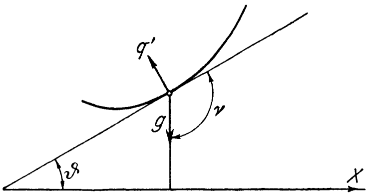

Abb. 53.

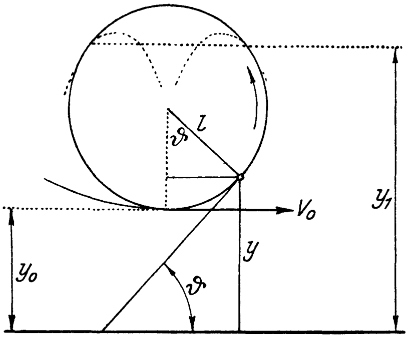

Abb. 54.

also ist der Zwangsanlauf nach Gl. 4)

$$q' = \frac{1}{l}\left[v^2 + g(l - y + y_0)\right] \quad \text{5a)}$$

und im höchsten Punkte mit $y - y_0 = 2\,l$

$$q' = \frac{1}{l}\left[v^2 - gl\right] \quad \text{5b)}$$

Ein im Innern eines Hohlzylinders vom Halbmesser l bewegter Körper, z. B. ein radfahrender Looping-Läufer, muß demnach im höchsten Punkte noch einen Lauf von $v = \sqrt{gl}$ besitzen, damit das Rad oben noch auf der Bahn anliegt. Da für kleinere Werte von v die freie Wurfparabel im Innern der Kreisbahn verläuft, so würde unfehlbar ein Absturz erfolgen.

Tritt der bewegte Punkt an der tiefsten Stelle y_0 mit einem Lauf v_0 ein, so ändert sich derselbe unter dem Einfluß des Erdanlaufs g nach 4a), so zwar, daß der Zwangsanlauf mit 5)

$$q' = \frac{1}{l}\left[{v_0}^2 + gl - 3\,g\,(y - y_0)\right] = \frac{1}{l}\left[{v_0}^2 + gl\,(3 \cos \vartheta - 2)\right] \quad \text{6)}$$

wird und in der Höhe y_1, bzw. für den Winkel ϑ_1, gegeben durch

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{3}\left(\frac{{v_0}^2}{g} + l\right); \qquad \cos \vartheta_1 = \frac{2}{3} - \frac{{v_0}^2}{3\,gl} \quad \text{6a)}$$

verschwindet. An dieser Stelle tritt alsdann die freie Wurfparabel tangential von der Außenseite in das Innere der Kreisbahn über, wie in Abb. 54 angedeutet ist. Soll der Körper auch im höchsten Punkte $y - y_0 = 2\,l$ entspr. $\vartheta_1 = \pi$ noch immer anliegen, so muß dafür in 6) $q' > 0$, also

$${v_0}^2 > 5\,gl \quad \text{6b)}$$

sein.

Lassen wir dagegen einen Körper auf der Außenseite eines Kreiszylinders derart abgleiten, daß wir ihm an der höchsten Stelle den Lauf v_1 erteilen, so ist nach 4a)

$$v_0^2 = v_1^2 + 4\,g\,l \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 7)$$

und der nach außen gerichtete Zwangsanlauf

$$q' = \frac{1}{l}\left[v_1^2 + g\,l\,(3\cos\vartheta + 2)\right]. \quad \ldots \ldots \ldots \quad 7\text{a})$$

Dieser verschwindet für

$$\cos\vartheta_2 = -\frac{1}{3}\left(2 + \frac{v_1^2}{g\,l}\right), \quad \ldots \ldots \ldots \quad 7\text{b})$$

worauf der Körper der freien Wurfparabel folgt. Für $v_1 = 0$, also Abgleiten aus der oberen Ruhelage ist $\cos\vartheta_2 = -\frac{2}{3}$, also $\vartheta_2 = 131^0\,40'$ mit rd. $48^0\,20'$ Abweichung aus der Senkrechten.

3. Beispiel. Läuft ein Kraftwagen über eine Einsenkung der Straße, die sich bis auf die Tiefe h stetig zu- und wieder abnehmend auf die Länge l erstreckt, so können wir die Einsenkungslinie nach Abb. 55 durch

$$y = \frac{h}{2}(\cos\alpha x - 1), \qquad \alpha l = 2\pi, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 8)$$

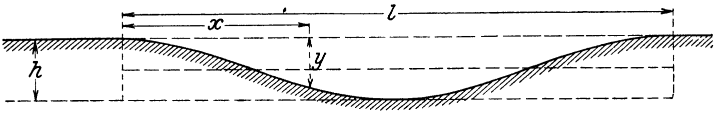

Abb. 55.

sowie wegen der Kleinheit der Neigung ϑ der Bahn, also $\cos\vartheta \approx 1$ die Krümmung durch

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d^2 y}{d x^2} = -\frac{\alpha^2 h}{2}\cos\alpha x = -\frac{4\pi^2}{l^2}\left[\frac{h}{2} + y\right] \quad \ldots \ldots \quad 8\text{a})$$

darstellen. Alsdann muß der Zwangsanlauf nach Gl. 4)

$$q' = g - \frac{4\pi^2}{l^2}v^2\left(\frac{h}{2} + y\right) > 0\,, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 9)$$

d. h.

$$v^2 < \frac{g\,l^2}{2\pi^2(h + 2y)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 9\text{a})$$

sein, damit der Wagen sich nirgends von der Bahn löst und ins Springen kommt. Diese Gefahr ist am größten für die größte Krümmung, also $y = 0$ bei Beginn und Ende der Einsenkung, nicht aber für den unterhalb der Tiefe $\frac{1}{2}h$ liegenden Teil, da dort die Krümmung positiv ist und die freie Wurfparabel im Boden liegt.

4. Beispiel. Ein Kahn K werde durch ein gleichförmig aufgerolltes Seil nach dem Anfang O hingezogen, während er gleichzeitig von der Strömung in der x-Richtung abgetrieben wird. Ist c_1 der Seillauf, c_2 der des Stromes, so sind nach Abb. 56

$$v_r = \dot{r} = -c_1\,, \qquad v_u = r\dot{\varphi} = -c_2\sin\varphi \quad \ldots \ldots \quad 10)$$

der Strahllauf und Drehlauf des Kahnes, woraus sich für die Bahn

$$\frac{dr}{r} = \frac{c_1\,d\varphi}{c_2\sin\varphi} = \frac{c_1\,d\varphi}{c_2\,2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}} = \frac{c_1\,d\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{c_2\,\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{c_1\,d\left(\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}\right)}{c_2\,\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}}\,, \quad . \quad 10\text{a})$$

oder integriert mit einem Beiwert r_0

$$\lg n\, r = \lg n\, r_0 + \frac{c_1}{c_2} \lg n\, \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}, \qquad r = r_0 \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{c_1}{c_2}} \quad \ldots \quad 11)$$

ergibt. Darin ist offenbar für $\varphi = 90^0$, $r = r_0$, der zur Stromrichtung senkrechte Strahl der Bahn, dessen Länge durch die Anfangswerte von r und φ bestimmt ist. Da nach 10) für

$$\begin{array}{lll} \varphi = 0, & \dot\varphi = 0, & r = 0; \\ \varphi = \pi, & \dot\varphi = 0, & r = \infty \end{array}$$

wird, so berührt die Bahn die x-Achse im Anfang O und nähert sich ihr andererseits asymptotisch. Die Fahrzeit bis zum Punkte O folgt aus dem gleichförmigen Seillauf sofort zu $t_0 = r_0/c_1$. Weiter sind die Achsenabstände mit 10a)

$$\left.\begin{array}{ll} x = r \cos\varphi, & \dfrac{dx}{d\varphi} = \dfrac{dr}{d\varphi} \cos\varphi - r \sin\varphi = r \left[\dfrac{c_1}{c_2} \operatorname{ctg}\varphi - \sin\varphi\right] \\ y = r \sin\varphi, & \dfrac{dy}{d\varphi} = \dfrac{dr}{d\varphi} \sin\varphi + r \cos\varphi = r \left[\dfrac{c_1}{c_2} + \cos\varphi\right] \end{array}\right\}, \quad 11\text{a})$$

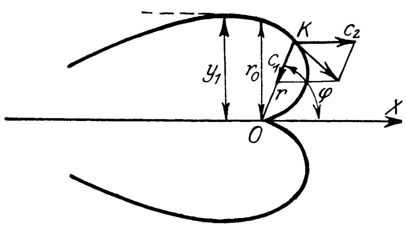

Abb. 56.

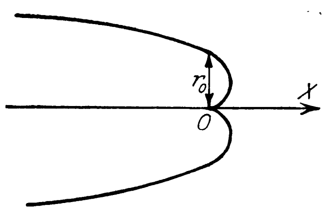

Abb. 57.

deren erste Zeile einen Höchstwert von x ergibt für

$$\frac{c_1}{c_2} = \sin\varphi \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi} = \frac{1 - \cos^2\varphi}{\cos\varphi}, \qquad \cos\varphi = -\frac{c_1}{2c_2} \pm \sqrt{\frac{c_1^2}{4c_2^2} + 1}, \quad 11\text{b})$$

von denen aber nur das positive Vorzeichen wegen $\cos^2\varphi < 1$ einen Sinn hat. Außerdem wird die Bedingung $dx : d\varphi = 0$ erfüllt durch $r = \infty$, $\varphi = \pi$.

Die zweite Zeile 11a) liefert einen reellen Höchstwert y des Achsenabstandes für

$$\cos\varphi_1 = -\frac{c_1}{c_2}, \qquad \operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2} = \frac{\sin\frac{\varphi_1}{2}}{\cos\frac{\varphi_1}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \cos\varphi_1}{1 + \cos\varphi_1}} = \sqrt{\frac{c_2 + c_1}{c_2 - c_1}}, \quad 11\text{c})$$

also

$$y_1 = r_0 \sqrt{\left(1 - \frac{c_1^2}{c_2^2}\right) \left(\frac{c_2 + c_1}{c_2 - c_1}\right)^{\frac{c_1}{c_2}}}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 11\text{d})$$

solange $c_1 < c_2$; andernfalls entfernt sich die Bahn dauernd von der Achse und hat erst für $\varphi = \pi$ mit $r = \infty$ ihr gleichlaufende Tangenten im Unendlichen, Abb. 57. Außerdem erkennt man leicht, daß auch im ersten Falle der links vom Höchstwert y_1 gelegene Kurventeil keine Bedeutung besitzt, da ihm, wie die Einzeichnung der Laufteile und der Bahntangente lehrt, ein von O weggerichteter Strahllauf $\dot r = + c_1$ entsprechen würde. Alsdann wäre das Seil infolge des auf O zu gerichteten Teiles $c_2 \cos\varphi$ von c_2, der sich zu $\dot r$ addiert, wirkungslos, und der Kahn würde bis zum rechts von y_1 gelegenen Bahnteil in der Achsenrichtung nur treiben, wenn man nicht durch Steigerung des Seillaufes bis $c_1 > c_2$ auf die Bahn Abb. 57 übergeht. Dasselbe gilt natürlich für jeden Punkt des O gegenüberliegenden Ufers links von y_1. Weiter haben wir für den Strahl- und Drehanlauf wegen 10) mit $\dot\varphi = \omega$

$$\left.\begin{aligned} q_r &= -r\omega^2 = -\frac{c_2^2\sin^2\varphi}{r} = -\frac{c_2^2\sin^2\varphi}{r_0}\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{c_1}{c_2}} \\ q_u &= -\omega\,(c_2\cos\varphi + c_1) = +\frac{c_2\sin\varphi}{r}(c_2\cos\varphi + c_1) = \frac{c_2\sin\varphi}{r_0}(c_2\cos\varphi + c_1)\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{c_1}{c_2}} \end{aligned}\right\}, \quad 12)$$

so daß der Gesamtanlauf $q = \sqrt{q_s^2 + q_u^2}$ nicht nur mit φ veränderlich ist, sondern auch seine Neigung zum Fahrstrahl stetig ändert. Man erkennt, daß die ganze Bewegung unter einem in der Fadenrichtung wirkenden Zwangsanlauf sich vollzieht, der vermöge des gleichförmigen Strahllaufes mit q übereinstimmt. Denn mit diesem Anlaufe würde der vom Faden befreite Kahn sich in der Fahrstrahlrichtung vermöge der Strömung c_2 mit deren Strahllauf $c_2\cos\varphi$ fortbewegen, während der Drehlauf seinen aus 10) ersichtlichen Wert beibehält.

§ 17. Das Fadenpendel. Unter einem mathematischen oder Fadenpendel, Abb. 58, verstehen wir einen Körper, der unter dem Einfluß des Erdanlaufes g auf einem Kreisbogen in einer senkrechten Ebene hin und her schwingt. Ist l der hier als Pendellänge bezeichnete Kreishalbmesser, φ dessen Auslenkung aus der Senkrechten, so ist $v = l\dot\varphi$ der Lauf, und der Anlauf des bewegten Punktes ist

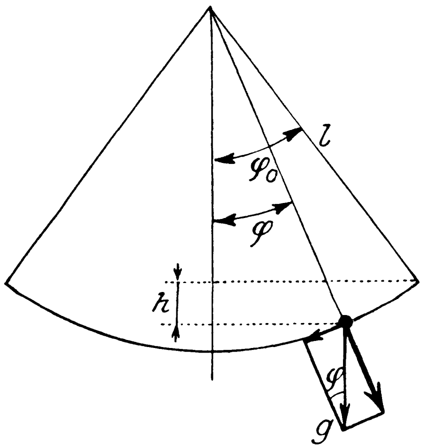

Abb. 58.

$$l\ddot\varphi = -g\sin\varphi\,, \quad . \quad . \quad 1)$$

während der Normalanlauf $g\cos\varphi$ wegen der vorgeschriebenen Bahn nicht zur Wirkung kommt. Handelt es sich um sehr kleine Ausschläge, so wird aus 1) mit $\sin\varphi \sim \varphi$

$$l\ddot\varphi + g\varphi = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1\text{a})$$

oder mit $g = l\alpha^2$

$$\ddot\varphi + \alpha^2\varphi = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1\text{b})$$

d. h. eine einfache Schwingungsgleichung für φ mit dem vollständigen Integral

$$\varphi = \varphi_1\cos\alpha t + \varphi_2\sin\alpha t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

und der Schwingungsdauer

$$t_0 = \frac{2\pi}{\alpha} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

die hiernach unabhängig ist vom Ausschlag. Die beiden Beiwerte φ_1 und φ_2 in 2) bestimmen sich aus den Bedingungen, daß für $t = 0$, der größte Ausschlag $\varphi = \varphi_0$ sein möge, bei dem $\dot\varphi = 0$

ist, zu $\varphi_1 = \varphi_0$ und $\varphi_2 = 0$, so daß also an Stelle von 2)

$$\varphi = \varphi_0 \sin \alpha t = \varphi_0 \sin t \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \ldots \ldots \quad 2\text{a})$$

tritt.

Ist dagegen der Ausschlag nicht mehr klein, so folgt aus 1) nach Erweiterung mit $d\varphi$, sowie wegen $\ddot{\varphi}\, d\varphi = \dot{\varphi}\, d\dot{\varphi}$

$$l\dot{\varphi}\, d\dot{\varphi} = -g \sin \varphi\, d\varphi$$

und nach Integration zwischen den Grenzen φ und φ_0, $\dot{\varphi}$ und $\dot{\varphi} = 0$

$$l\dot{\varphi}^2 = 2\, g (\cos \varphi - \cos \varphi_0) \,. \quad \ldots \ldots \quad 4)$$

Dafür können wir auch mit $l\dot{\varphi} = v$ und $l(\cos \varphi - \cos \varphi_0) = h$ schreiben

$$v^2 = 2\, gh\,,$$

wonach also der **Lauf eines Pendelkörpers** ebenso nur von der **Höhenlage** abhängt, wie der eines freigeworfenen Körpers (vgl. § 7, 2. Beispiel). Durch 4) ist im Verein mit dem Normalanlauf $g \cos \varphi$ nach Gl. 4) des vorigen Abschnittes der **Zwangsanlauf**

$$q' = g\,(3 \cos \varphi - 2 \cos \varphi_0)$$

gegeben. Zur Berechnung der Schwingungsdauer ist eine Integration der Gl. 4) erforderlich, die aber in endlicher Form nicht möglich ist. Eine unmittelbare Reihenentwicklung verbietet sich weiter durch das Verschwinden der Klammer für $\varphi = \varphi_0$. Darum formen wir Gl. 4) um in

$$l\,\dot{\varphi}^2 = 4\, g \left(\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right) \quad \ldots \ldots \quad 4\text{a})$$

und setzen darin:

$$\left.\begin{array}{l} \sin \dfrac{\varphi}{2} = \sin \dfrac{\varphi_0}{2} \sin \psi, \qquad \cos \dfrac{\varphi}{2}\, d\varphi = 2 \sin \dfrac{\varphi_0}{2} \cos \psi\, d\psi, \\ \text{also} \\ \dot{\varphi} = \dfrac{2 \sin \dfrac{\varphi_0}{2} \cos \psi\, \dot{\psi}}{\cos \dfrac{\varphi}{2}} = \dfrac{2 \sin \dfrac{\varphi_0}{2} \cos \psi\, \dot{\psi}}{\sqrt{1 - \sin^2 \dfrac{\varphi_0}{2} \sin^2 \psi}} \end{array}\right\} \quad 5)$$

Damit wird nun 4a) wegen

$$\dot{\psi}\, dt = d\psi, \qquad \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \cos^2 \psi \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}$$

$$g\, dt^2 \left(1 - \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \psi\right) = l\, d\psi^2, \quad \ldots \ldots \quad 4\text{b})$$

oder mit Rücksicht darauf, daß dem Ausschlage φ_0 der Winkel $\psi = \frac{\pi}{2}$ entspricht, für die Fallzeit von einer Endlage bis φ bzw. ψ

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\psi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \psi}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6)$$

Entwickeln wir den Ausdruck unter dem Integralzeichen in die Reihe:

$$\left(1 - \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \psi\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \psi + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} \sin^4 \psi + \ldots,$$

so können wir wieder wie im Beispiel des § 13 die Potenzen von $\sin \psi$ in cos der Vielfachen von ψ ausdrücken und erhalten alsdann nach Ausführung der Integration:

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \left[A_0 \left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) - A_2 \sin 2\psi - A_4 \sin 4\psi - \ldots \right], \quad . \quad 6a)$$

also die Überlagerung einer linearen Funktion und einer harmonischen Reihe, deren Beiwerte wie im früheren Falle wieder unendliche Potenzreihen bzw. harmonische Reihen des größten Ausschlages sind. Von diesen hat nur der erste eine praktische Bedeutung, da die andern Glieder für die untere Grenze $\psi = 0$, entsprechend der Mittellage $\varphi = 0$, sämtlich verschwinden. Wir erhalten alsdann für die ganze Schwingungsdauer t_0 den vierfachen Wert von 6a) mit $\psi = 0$, d. h. nach Auswerten von $A_0 = f(\varphi_0)$

$$t_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \sin^6 \frac{\varphi_0}{2} + \ldots \right]. \quad 6b)$$

Zur Übersicht über die Änderung der Schwingungsdauer mit dem größten Ausschlage φ_0 dient folgende kleine Tabelle der Werte des Klammerausdrucks A_0

φ_0	A_0	φ_0	A_0	φ_0	A_0	φ_0	A_0
0°	1,00000	10°	1,00194	45°	1,0400	120°	1,3753
2°	1,00005	15°	1,00430	60°	1,0732	150°	1,7600
5°	1,00048	30°	1,01741	90°	1,1800	180°	∞

1. Beispiel. Für kleine Ausschläge ist demnach der Unterschied der Schwingungsdauern so gut wie unmerklich im Einklang mit der hierfür gültigen Formel 3). Gehen wir einen Schritt weiter, so dürfen wir angesichts der starken Konvergenz der Reihe 6b) für kleine Ausschläge schreiben:

$$t_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\varphi_0^2}{16}\right) = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} (1 + \mu \varphi_0^2), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6c)$$

wobei für die Umrechnung in Winkelgraden

$$\mu = \frac{1}{16} \left(\frac{\pi}{180}\right)^2 = 0{,}000019$$

zu setzen ist. Mithin ist das Verhältnis zweier den Winkeln φ_0' und φ_0'' entsprechenden Schwingungsdauern angenähert:

$$\frac{t_0'}{t_0''} = \frac{1+\mu\,\varphi_0'^2}{1+\mu\,\varphi_0''^2} \sim 1+\mu\,(\varphi_0'^2-\varphi_0''^2) \quad \text{7)}$$

Schwingt also ein Pendel beim Ausschlage $\varphi_0' = 7^0$ gerade eine Sekunde, also $t_0' = 1$ Sek., so wird es bei $\varphi_0'' = 8^0$

$$t_0'' = 1 + 0{,}000019\,(64-49) = 1{,}0002856 \text{ Sek.}$$

schwingen, und die dadurch geregelte Uhr am Tage mit 86400 Sek. um

$$0{,}0002856 \cdot 86400 = 24{,}7 \text{ Sek.}$$

nachgehen. Daraus erkennt man deutlich die Empfindlichkeit der Uhren gegen Änderungen des Pendelausschlages und ihre große Genauigkeit als Meßgerät für kleine Zeitabschnitte. Unter einem Sekundenpendel versteht man übrigens ein solches, welches zu einem bloßen Hingang eine Sekunde Zeit erfordert, dessen ganze Schwingungsdauer also $t_0 = 2$ Sekunden beträgt. Die Länge eines solchen Pendels berechnet sich dann für kleine Ausschläge mit $g = 9{,}81$ m/sec² zu

$$l = \frac{g}{\pi^2} = 0{,}994 \text{ m}.$$

2. Beispiel. Es liegt nun nahe, auch endliche Ausschläge des Pendels angesichts des periodischen Gesamtverlaufes durch eine harmonische Reihe darzustellen, deren Grundschwingung naturgemäß die durch 6b) gegebene Dauer t_0 mit dem durch $\alpha_0 t_0 = 2\pi$ gegebenen Drehwert α_0 besitzt. Wir greifen zu diesem Zwecke nochmals auf Gl. 1) zurück und schreiben dafür mit einer Potenzreihe für $\sin\varphi$

$$\ddot{\varphi} + \alpha^2\varphi = \alpha^2\left(\frac{\varphi^3}{3!} - \frac{\varphi^5}{5!} + \frac{\varphi^7}{7!} - \dots\right) \quad \text{8)}$$

Setzen wir darin

$$\varphi = \varphi_0 \sin\alpha_0 t + \psi, \quad \text{9)}$$

so wird daraus

$$\ddot{\psi} + \alpha^2\psi = (\alpha_0^2 - \alpha^2)\,\varphi_0 \sin\alpha_0 t + \alpha^2\left[\frac{(\varphi_0 \sin\alpha_0 t + \psi)^3}{3!} - \frac{(\varphi_0\sin\alpha_0 t + \psi)^5}{5!} + \dots\right], \quad \text{8a)}$$

oder nach vorläufiger Unterdrückung der ψ auf der rechten Seite als erste Annäherung

$$\ddot{\psi} + \alpha^2\psi = (\alpha_0^2 - \alpha^2)\,\varphi_0\sin\alpha_0 t + \alpha^2\left[\frac{\varphi_0^3\sin^3\alpha_0 t}{3!} - \frac{\varphi_0^5\sin^5\alpha_0 t}{5!} + \dots\right] \quad \text{8b)}$$

Nun ist weiter

$$\left.\begin{aligned} 2^2\sin^3\alpha_0 t &= \binom{3}{1}\sin\alpha_0 t - \sin 3\,\alpha_0 t \\ 2^4\sin^5\alpha_0 t &= \binom{5}{2}\sin\alpha_0 t - \binom{5}{1}\sin 3\,\alpha_0 t + \sin 5\,\alpha_0 t \\ 2^6\sin^7\alpha_0 t &= \binom{7}{3}\sin\alpha_0 t - \binom{7}{2}\sin 3\,\alpha_0 t + \binom{7}{1}\sin 5\,\alpha_0 t - \sin 7\,\alpha_0 t \end{aligned}\right\} \quad \text{10)}$$

usw.,

also geht mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} \binom{3}{1}\frac{\varphi_0^3}{2^2\,3!} - \binom{5}{2}\frac{\varphi_0^5}{2^4\,5!} + \binom{7}{3}\frac{\varphi_0^7}{2^6\,7!} - \dots &= \varphi_1, \\ \frac{\varphi_0^3}{2^2\,3!} - \binom{5}{1}\frac{\varphi_0^5}{2^4\,5!} + \binom{7}{2}\frac{\varphi_0^7}{2^6\,7!} - \dots &= \varphi_3, \\ \frac{\varphi_0^5}{2^4\,5!} + \binom{7}{1}\frac{\varphi_0^7}{2^6\,7!} - \dots &= \varphi_5, \\ \frac{\varphi_0^7}{2^6\,7!} - \dots &= \varphi_7 \end{aligned}\right\} \quad \text{10a)}$$

usw.

Gl. 8b) über in

$$\ddot{\psi} + \alpha^2 \psi = [(\alpha_0^2 - \alpha^2) \varphi_0 + \alpha^2 \varphi_1] \sin \alpha_0 t + \alpha^2 [\varphi_3 \sin 3\alpha_0 t + \varphi_5 \sin 5 \alpha_0 t + \ldots] \quad 8c)$$

Dieser Differentialgleichung genügt alsdann der Ansatz

$$\psi = A_1 \sin \alpha_0 t + A_3 \sin 3 \alpha_0 t + A_5 \sin 5 \alpha_0 t + \ldots, \quad \ldots \quad 11)$$

dessen Beiwerte sich nach Einsetzen in 8c) durch Vergleich mit denen derselben Winkelfunktionen der rechten Seite derart ergeben, daß wir an Stelle von 9) erhalten

$$\varphi = \frac{\alpha^2 \varphi_1}{\alpha^2 - \alpha_0^2} \sin \alpha_0 t + \frac{\alpha^2 \varphi_3}{\alpha^2 - 9\alpha_0^2} \sin 3 \alpha_0 t + \frac{\alpha^2 \varphi_5}{\alpha^2 - 25 \alpha_0^2} \sin 5 \alpha_0 t + \ldots, \quad 9a)$$

also in der Tat eine harmonische Reihe, deren Beiwerte durch Einsetzen von 11) in die rechte Seite von 8a) unter Wiederholung des Verfahrens noch genauer bestimmt werden können, ohne am Wesen der Sache etwas zu ändern. Nur darauf sei noch hingewiesen, daß für $\alpha = \alpha_0$, auch $\varphi_0 = 0$ wird und damit wegen 10a) kein Ausschlag zustande kommt.

3. Beispiel. Bewegt sich ein Körper in einer senkrechten Ebene am Ende eines Fadens, der an der Übergangsstelle zweier Zykloidenbahnen mit wagerechter Rollbahn befestigt ist und auf dieser Bahn sich auf- und abwickelt, während das freie Stück stets gerade bleibt, so haben wir ein Zykloidenpendel vor uns, bei dem der Körper die Evolvente beschreibt, die mit der ursprünglichen Zykloide kongruent und nur um den Rollkreisdurchmesser $2r$ senkrecht, sowie um den Halbkreisumfang wagerecht verschoben ist, vgl. § 7, 3. Beispiel und Abb. 33. Aus der Zykloidengleichung

$$x = r(\varphi - \sin\varphi), \qquad y = r(1 - \cos\varphi), \quad \ldots \quad 12)$$

worin x von der Spitze aus und y senkrecht nach unten gerichtet ist, während φ den zugehörigen Bogen des Rollkreises bedeutet, folgt

$$dx = r(1 - \cos\varphi)\, d\varphi, \qquad dy = r \sin\varphi\, d\varphi, \qquad ds = 2r \sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi. \quad . \quad 12a)$$

Alsdann ist der Lauf von der Ruhelage bei y_0 bzw. φ_0

$$v = \sqrt{2g(y - y_0)} = \sqrt{2gr(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)} = \sqrt{4gr\left(\cos^2\frac{\varphi_0}{2} - \cos^2\frac{\varphi}{2}\right)}, \quad 13)$$

und die zwischen diesen Lagen verflossene Zeit

$$t = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{ds}{v} = \sqrt{\frac{r}{g}} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi}{\sqrt{\cos^2\frac{\varphi_0}{2} - \cos^2\frac{\varphi}{2}}} = -2\sqrt{\frac{r}{g}} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)}{\sqrt{\cos^2\frac{\varphi_0}{2} - \cos^2\frac{\varphi}{2}}}, \quad 14)$$

oder

$$t = 2\sqrt{\frac{r}{g}} \left[\arcsin 1 - \arcsin\left(\frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi_0}{2}}\right)\right]. \quad \ldots \quad 14a)$$

Am tiefsten Punkt ist $y = 2r$, also $\cos\varphi = -1$, $\varphi = \pi$, $\cos\frac{\varphi}{2} = 0$, also wird, da $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ ist, $t = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}$ und die ganze Schwingungsdauer für den Hin- und Rückgang

$$t_0 = 4\pi\sqrt{\frac{r}{g}} \quad \ldots \quad 14b)$$

unabhängig von dem durch φ_0 bzw. y_0 gegebenen Ausschlag und in Übereinstimmung mit der Dauer kleiner Schwingungen eines Kreispendels von der

Länge $4r$. Der Zwangsanlauf, der durch den Faden bedingt ist, ergibt sich mit dem Krümmungsarm $\varrho = 4r\sin\frac{\varphi}{2}$ zu

$$q' = \frac{v^2}{\varrho} + g\cos\vartheta = g\left[\frac{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}} + \sin\frac{\varphi}{2}\right],$$

also im höchsten und tiefsten Punkte mit $\varphi = \varphi_0$ und $\varphi = \pi$

$$q_0' = g\sin\frac{\varphi_0}{2} \qquad \text{und} \qquad q_\pi' = \frac{g}{2}(3 + \cos\varphi_0)\,.$$

Beim Vergleich dieser Ergebnisse mit dem Kreispendel ist zu beachten, daß der Winkel φ beim Zykloidenpendel nicht den Ausschlag aus der lotrechten Ruhelage, sondern den doppelt so großen Rollwinkel, vgl. Abb. 33, bedeutet.

§ 18. Die freie Relativbewegung ohne Drehung. Befinden wir uns in einem fahrenden Eisenbahnzuge, so erscheint uns die Umgebung in einer der Fahrtrichtung entgegengesetzten und zwar um so rascheren Bewegung begriffen, je näher die Gegenstände dem Bahnkörper sind. Gehen wir ferner in dem noch langsam fahrenden Zug rückwärts, so können wir unsern Lauf so regeln, daß wir unsern Ort gegenüber der Umgebung nicht ändern, die somit an unserer Bewegung teilzunehmen scheint. In beiden Fällen haben wir es mit einer scheinbaren oder Relativbewegung von Körpern gegen einen selbst bewegten Körper zu tun, die schon darum eine genauere Untersuchung erfordert, weil wir streng genommen absolut ruhende Körper nicht feststellen können. Denn von der im gewöhnlichen Leben als ruhend betrachteten Erde wissen wir, daß sie um die Sonne läuft und sich außerdem um ihre Achse gegen den Fixsternhimmel dreht. Wir dürfen aber auch aus dem gleichartigen Auseinanderrücken von Fixsternen in einer Himmelsgegend und dem Zusammenrücken solcher in entgegengesetzter Richtung auf eine Bewegung des ganzen Sonnensystems gegenüber dem Fixsternhimmel schließen. Endlich zeigt sich, daß auch die vermeintlichen Fixsterne nicht dauernd ihre gegenseitige Lage beibehalten, so daß es in der Tat nur Relativbewegungen von Körpern gegeneinander gibt und nirgends in der Welt ein ruhender Punkt angegeben werden kann.

Wenn wir trotzdem im folgenden von einem ruhenden Achsenkreuz sprechen, so dürfen wir niemals vergessen, daß auch das nur relativ zu verstehen ist und zwar im gewöhnlichen Sprachgebrauch in bezug auf die Erde, von deren Bewegung wir dabei zunächst absehen. Gegenüber diesem Achsenkreuz XOY möge ein zweites $\xi\Omega\eta$ sich in derselben Ebene parallel zu sich selbst derart verschieben, daß sein Anfang Ω eine Kurve $A'\Omega B'$ mit den sog. absoluten Achsenabständen x', y' in bezug auf das ruhende Kreuz beschreibt. Legen wir dann noch, da Drehungen der Achsenkreuze gegeneinander nicht in Frage kommen, die Achsen des bewegten parallel denen des ruhenden, so wird ein Punkt P mit den Achsenabständen x'', y'' im ruhenden Kreuz in bezug auf das bewegte nach

Abb. 59 die relativen Abstände

$$\xi = x'' - x', \qquad \eta = y'' - y' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

besitzen, aus denen dann auch die relativen Lauf- und Anlaufteile

$$\left.\begin{array}{ll} \dot\xi = \dot x'' - \dot x', & \dot\eta = \dot y'' - \dot y' \\ \ddot\xi = \ddot x'' - \ddot x', & \ddot\eta = \ddot y'' - \ddot y' \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1\,\mathrm{a})$$

hervorgehen. Bei der drehungsfreien Relativbewegung sind demnach die absoluten Achsenabstände, Lauf- und Anlaufteile eines bewegten Punktes die Summe der entsprechenden relativen des Punktes und der absoluten des Bezugspunktes Ω. Alle daraus abgeleiteten Punktabstände, z. B. r', r'' und r in Abb. 59, Läufe und Anläufe im festen und bewegten Achsenkreuz sind folglich Vektoren und können wie diese geometrisch zusammengesetzt werden. Ist ferner ϑ der Neigungswinkel der Absolutbahn (im festen Achsenkreuz) und τ die Neigung der Relativbahn (im bewegten), so gilt

$$\dot y'' = \dot x'' \operatorname{tg} \vartheta, \qquad \dot\eta = \dot\xi \operatorname{tg} \tau, \quad 1\,\mathrm{b})$$

also wegen 1a)

$$\dot y'' - \dot\eta = \dot y' = \dot x'' \operatorname{tg} \vartheta - \dot\xi \operatorname{tg} \tau. \quad 1\,\mathrm{c})$$

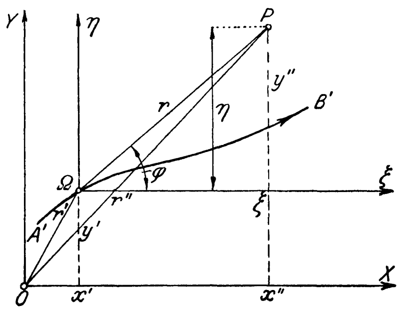

Abb. 59.

Insbesondere erhalten wir für den ruhenden Punkt P wegen $\dot x'' = \dot y'' = 0$

$$\left.\begin{array}{ll} \dot\xi = -\dot x', & \dot\eta = -\dot y' \\ \ddot\xi = -\ddot x', & \ddot\eta = -\ddot y' \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

Der feste Punkt befindet sich demnach von einem bewegten Ω aus beobachtet in einer derjenigen von Ω entgegengesetzten Relativbewegung. In der Tat geht, während die erste Gl. 1b) mit $\dot x'' = \dot y'' = 0$ ihren Sinn verliert, die zweite über in

$$\dot y' = \dot x' \operatorname{tg} \tau.$$

Setzen wir in 2)

$$\xi = r \cos \varphi, \qquad \eta = r \sin \varphi,$$

so wird

$$\dot\xi = \dot r \cos \varphi - \dot\varphi\, r \sin \varphi, \qquad \dot\eta = \dot r \sin \varphi + \dot\varphi\, r \cos \varphi, \quad . \quad . \quad 2\,\mathrm{a})$$

also

$$\dot\xi^2 + \dot\eta^2 = v'^2 = \dot r^2 + \dot\varphi^2 r^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2\,\mathrm{b})$$

Das Vorbeifahren an einem ruhenden Punkt weckt demnach einen scheinbaren Drehwert, der im verkehrten Verhältnis zum Abstand von diesem steht. Dadurch erklärt sich das scheinbar rasche Vorbeieilen der Telegraphenstangen im Vergleich zu der langsamen Relativbewegung weiter vom Bahnkörper entfernter Gegenstände im Gesichtsfelde eines Beobachters im Eisenbahnzuge.

1. Beispiel. Der Lauf eines fahrenden Schiffes wird aus der Relativbewegung eines ausgeworfenen Schwimmers, des sog. Logs, welches auf der ruhenden Wasseroberfläche unbeweglich liegen bleibt durch Beobachtung der Ablaufzeit t einer durch Knoten abgeteilten Länge s auf der Logleine ermittelt. Ist c_1 der Schiffslauf in der Fahrtrichtung x, c_2 der Lauf senkrecht dazu infolge Seitenwindes, so folgt nach 2) für die Relativlaufteile des Logs

$$\dot{\xi} = -c_1, \qquad \dot{\eta} = -c_2, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 3)$$

also mit dem Winkel α der Logleine gegen die Fahrtrichtung

$$c_1 t = s \cos\alpha, \qquad c_2 t = s \sin\alpha \quad \ldots \ldots \ldots \quad 3a)$$

2. Beispiel. Ein Fahrzeug mit dem Lauf v in der x-Richtung wird von einem Körper getroffen, der die Bahn mit dem Lauf c unter dem Winkel α kreuzt, Abb. 60. Alsdann sind die Relativlaufteile dieses Körpers in bezug auf das Fahrzeug wegen

$$\dot{x}'' = c\cos\alpha \quad \text{und} \quad \dot{y}'' = c\sin\alpha,$$
$$\dot{\xi} = c\cos\alpha - v, \qquad \dot{\eta} = c\sin\alpha \quad \ldots \ldots \ldots \quad 4)$$

und der relative Kreuzungswinkel $(\alpha + \delta)$ folgt aus

$$\operatorname{tg}(\alpha+\delta) = \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{c\sin\alpha}{c\cos\alpha - v},$$

oder

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{v\sin\alpha}{c - v\cos\alpha}, \quad \text{bzw.} \quad \frac{\sin(\alpha+\delta)}{\sin\delta} = \frac{c}{v} \quad 4a)$$

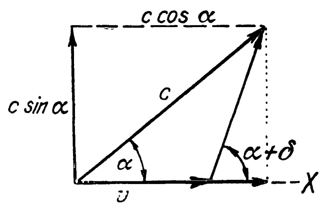

Abb. 60.

Für $\alpha = 90^0$ wird daraus

$$c\operatorname{tg}\delta = v, \quad \ldots \ldots \quad 4b)$$

womit die Neigung δ der mit c senkrecht herabfallenden Regentropfen gegen die Lotrichtung auf der Fensterscheibe des Fahrzeuges gegeben ist. Unser Ansatz trifft auch noch zu für die sog Aberration eines Lichtstrahls, der mit dem Lichtlauf $c = 300000$ km/sec die Erdbahntangente unter einem Winkel α kreuzt. Da für die Erde $v = 30$ km/sec ist, so folgt für $\alpha = 90^0$ aus 4b) $\delta = 20{,}25''$ Es ist das die große der Erdbahnebene (Ekliptik) parallele Halbachse der scheinbaren Ellipsenbahnen aller Fixsterne, die an der Ekliptik in Gerade, an den Polen in Kreise übergehen, damit Abbilder der Erdbewegung um die Sonne sind und rückwärts die Laufbestimmung des Lichtes ermöglichen.

3. Beispiel. Die in einem bewegten Aufzug befindlichen Körper unterliegen dem Erdanlauf $\ddot{x}'' = -g$, wenn x'' deren Höhe über der Schachtsohle bedeutet. Ist dann x' die zugehörige Höhe des Aufzugsbodens und ξ die Körperhöhe über diesem, Abb. 61, so besteht die Beziehung für den Relativanlauf

$$\ddot{\xi} = -g - \ddot{x}' \quad \ldots \ldots \ldots \quad 5)$$

Daraus folgt, daß beim Anheben mit positivem $\ddot{x}'$ für den Aufzug der darin befindliche Körper einen größeren Anlauf als g erfährt, vor dem Anhalten dagegen wegen $\ddot{x}' < 0$ einen kleineren, während für die Abwärtsbewegung gerade das Umgekehrte zutrifft. Davon kann man sich leicht durch einen Fallversuch im Aufzug selbst überzeugen, der nur bei gleichförmiger Bewegung desselben scheinbar mit dem Erdanlauf vor sich geht.

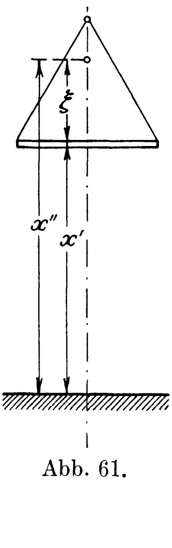

Abb. 61.

4. Beispiel. Zur Ermittlung des Zusammenhanges zwischen den scheinbaren und wahren Planetenbahnen nehmen wir die letzteren der Einfachheit halber als kreisförmig und in einer und derselben Ebene gelegen an, Abb. 62. Sind dann a_1 und a_2 zwei Bahnhalbmesser mit den Drehwerten α_1 und α_2, so sind in bezug auf ein fest gedachtes Achsenkreuz die Achsenabstände beider

$$\left.\begin{array}{ll} x' = a_1 \cos \alpha_1 t\,, & y' = a_1 \sin \alpha_1 t \\ x'' = a_2 \cos(\alpha_2 t + \beta)\,, & y'' = a_2 \cos(\alpha_2 t + \beta) \end{array}\right\}, \quad \ldots \quad 6)$$

wenn β den der Nullage (für $t = 0$) von P_1 entsprechenden Winkel von P_2 mit der X-Achse bedeutet. Alsdann sind die Relativabstände von P_2 in einem mit P_1 bewegten zum festen parallelen Achsenkreuz

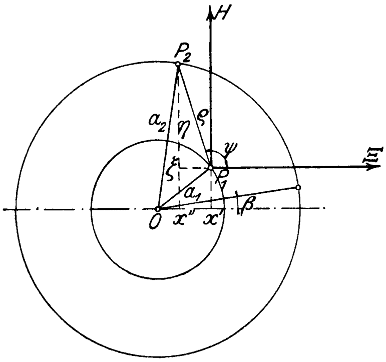

Abb. 62.

$$\left.\begin{array}{l} \xi = a_2 \cos(\alpha_2 t + \beta) - a_1 \cos \alpha_1 t \\ \eta = a_2 \sin(\alpha_2 t + \beta) - a_1 \sin \alpha_1 t \end{array}\right\} \quad 7)$$

mit dem durch $\varrho^2 = \xi^2 + \eta^2$ oder

$$\varrho^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2 a_1 a_2 \cos[(\alpha_2 - \alpha_1)\, t + \beta] \quad 7\text{a})$$

gegebenen veränderlichen Abstand beider Planeten, der in der Periode

$$t_0 = \frac{2\pi}{\alpha_2 - \alpha_1} \quad \ldots \quad 7\text{b})$$

zwischen dem Kleinstwert $\varrho = a_2 - a_1$ und dem Höchstwert $a_2 + a_1$ schwankt. Die dem ersteren entsprechende Stellung eines Planeten bezeichnet man als Opposition, wenn der innere Kreis die Erdbahn darstellt, im andern Falle dagegen als untere Konjunktion, während die dem Höchstwerte von ϱ entsprechende Stellung die obere Konjunktion heißt. Der relative Drehwinkel ψ des Fahrstrahls ϱ gegen eine durch Fixsternbeobachtungen festgelegte Richtung $P_1\,\Xi$ ergibt sich dann aus

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\eta}{\xi} = \frac{a_2 \sin(\alpha_2 t + \beta) - a_1 \sin \alpha_1 t}{a_2 \cos(\alpha_2 t + \beta) - a_1 \cos \alpha_1 t}, \quad \ldots \ldots \quad 8)$$

worin nach dem dritten Keplerschen Gesetz mit den Umlaufszeiten t_1 und t_2

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 = \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^2 = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^2 \quad \ldots \ldots \quad 9)$$

die Abstände durch die Drehwerte α_1 und α_2 ersetzt werden können. Zu deren Ermittlung, sowie der Phase β braucht man demnach drei Beobachtungen von ψ. Ferner folgt aus

$$\varrho^2 \dot{\psi} = \xi \dot{\eta} - \eta \dot{\xi}$$

der doppelte scheinbare Flächenlauf zu

$$\varrho^2 \dot{\psi} = a_1^2 \alpha_1 + a_2^2 \alpha_2 - a_1 a_2 (\alpha_1 + \alpha_2) \cos[(\alpha_2 - \alpha_1)\, t + \beta] \quad \ldots \quad 10)$$

als eine periodische Zeitfunktion, so daß also die Relativbewegung der Planeten nicht als Zentralbewegung aufgefaßt werden kann. Der relative Flächenlauf und Drehwert kann sogar zeitweilig verschwinden und danach sein Vorzeichen ändern, woraus eine teilweise rückläufige scheinbare Bewegung hervorgeht. Derartige Umkehrpunkte treten ein für $\dot{\psi} = 0$, also nach 10) unter Ausschaltung von a_1 und a_2 durch 9) für Stellungen bzw. Zeitpunkte, welche die Bedingung

$$\cos[(\alpha_2 - \alpha_1)t + \beta] = \frac{a_1^2 \alpha_1 + a_2^2 \alpha_2}{a_1 a_2 (\alpha_1 + \alpha_2)} = \frac{(t_1 t_2)^{\frac{1}{3}} (t_1^{\frac{1}{3}} + t_1^{\frac{1}{3}})}{t_1 + t_2} \quad \ldots \quad 10\text{a})$$

erfüllen. Nennen wir den hierdurch bestimmten Winkel γ, so werden die zugehörigen Zeitpunkte

$$t = \frac{\beta \pm \gamma}{\alpha_1 - \alpha_2} \quad \text{10b)}$$

Es gehören also immer zwei solche Umkehrpunkte zusammen, zwischen denen die scheinbare Planetenbahn wegen der in unserer Betrachtung vernachlässigten Neigung gegen die Erdbahn eine Schleife bildet, die durch die Exzentrizität der Bahnen noch ein wenig geändert wird. Mit den Umlaufszeiten und Drehwerten ist auch nach 9) das Abstandsverhältnis $a_1 : a_2$ gegeben; es fehlt also noch eine weitere Gleichung zwischen diesen Größen zu ihrer absoluten Bestimmung. Diese liefert uns der Vorbeigang eines Planeten, z. B. der Venus vor der Sonne, Abb. 63, wobei der Schatten der Venus von zwei möglichst weit auf der Erde voneinander entfernten Punkten A und B aus an zwei Stellen S' und S'' auf der Sonnenscheibe betrachtet wird, deren scheinbaren Abstand man durch den kleinen Winkel $AVB = S'VS'' = \delta$ messen kann. Für eine symmetrische Lage von $AB = b$ zur Knotenlinie EVS ist dann

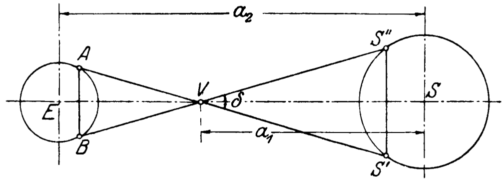

Abb. 63.

$$a_2 - a_1 = \frac{b}{2} \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} \sim \frac{b}{\delta} \quad \text{11)}$$

die gesuchte weitere Gleichung.

5. Beispiel. Ein Kahn K fährt mit gleichförmigem Lauf c_1 auf einem Fluß mit dem Stromlauf c_2 in der x-Richtung auf eine feste Uferstelle O zu, Abb. 64. In diesem Falle empfiehlt es sich, an Stelle der Relativbewegung zum strömenden Wasser die wahre Bahn durch Zusammensetzung der wahren Laufteile in der Strahl- und Drehrichtung in bezug auf O ähnlich zu ermitteln, wie dies im 4. Beispiel des § 16 geschehen ist. Mit dem Fahrstrahl $OK = r$ und dem Drehwinkel φ haben wir hiernach den Strahl- und Drehlauf des Kahnes

$$v_r = \dot r = c_2 \cos\varphi - c_1\,; \qquad v_u = r\,\dot\varphi = -c_2 \sin\varphi\,, \quad \text{12)}$$

also

$$\frac{dr}{r} = \frac{c_1 - c_2 \cos\varphi}{c_2 \sin\varphi}\, d\varphi\,, \quad \text{12a)}$$

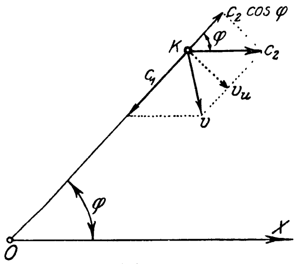

Abb. 64.

$$\lg n\, r = \lg n\, r_0 + \frac{c_1}{c_2} \lg n \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} - \lg n \sin\varphi\,, \qquad r = \frac{r_0}{\sin\varphi}\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{c_1}{c_2}}, \quad \text{13)}$$

worin der Integrationsbeiwert r_0 den auf der x-Achse senkrechten Fahrstrahl bedeutet, dessen Länge durch irgend eine Anfangsstellung r_1, φ_1 des Kahnes gegeben ist. Da für

$$\varphi = 0, \quad \dot\varphi = 0, \quad r = 0, \qquad \text{für} \qquad \varphi = \pi, \quad \dot\varphi = 0, \quad r = \infty \text{ ist},$$

so berührt die Bahn die x-Achse in O und läuft ihr andrerseits im Unendlichen parallel, Abb. 57. Weiter ist

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi = r_0 \operatorname{ctg}\varphi \left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{c_1}{c_2}} = \frac{r_0}{2}\left[\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{c_1-c_2}{c_2}} - \left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{c_1+c_2}{c_2}}\right] \\ y &= r\sin\varphi = r_0 \left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{c_1}{c_2}} \end{aligned}\right\}, \quad \text{13a)}$$

oder nach Ausschaltung von φ

$$2\frac{x}{r_0} = \left(\frac{y}{r_0}\right)^{\frac{c_1-c_2}{c_1}} - \left(\frac{y}{r_0}\right)^{\frac{c_1+c_2}{c_1}}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 13\text{b)}$$

wonach Höchstwerte x_1 und y_2 für

$$\left.\begin{array}{lll} \left(\operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2}\right)^2 = \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2}, & & x_1 = \frac{r_0}{2}\left[\left(\frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2}\right)^{\frac{c_1-c_2}{2c_2}} - \left(\frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2}\right)^{\frac{c_1+c_2}{2c_2}}\right] \\ \operatorname{tg}\frac{\varphi_2}{2} = \infty, & \varphi_2 = \pi, & y_2 = \infty \end{array}\right\} \quad 13\text{c)}$$

sich ergeben, deren erster allerdings an die Bedingung $c_1 > c_2$ geknüpft ist.

Für die Fahrzeit erhalten wir aus 12) mit 13)

$$dt = -\frac{r\,d\varphi}{c_2 \sin\varphi} = -\frac{r_0\,d\varphi}{c_2 \sin^2\varphi}\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{c_1}{c_2}} = -\frac{r_0\,d\varphi}{4\,c_2 \sin^2\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2}}\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{c_1}{c_2}}, \quad 14)$$

$$\frac{2c_2}{r_0}\,dt = -\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\varphi}{2}} + \frac{1}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}\right)\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{c_1}{c_2}}\frac{d\varphi}{2}$$

$$= \left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)^{-\frac{c_1}{c_2}} d\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right) - \left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{c_1}{c_2}} d\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right),$$

also nach Integration von φ bis 0

$$\frac{2t}{r_0} = \frac{1}{c_1 - c_2}\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{c_1-c_2}{c_2}} + \frac{1}{c_1 + c_2}\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{c_1+c_2}{c_2}}, \quad \ldots \ldots \quad 14\text{a)}$$

oder

$$\frac{2t}{r_0} = \frac{1}{c_1 - c_2}\left(\frac{y}{r_0}\right)^{\frac{c_1-c_2}{c_1}} + \frac{1}{c_1 + c_2}\left(\frac{y}{r_0}\right)^{\frac{c_1+c_2}{c_1}} \quad \ldots \ldots \quad 14\text{b)}$$

und im Sonderfalle für den O in der Entfernung $y = r_0$ gerade gegenüberliegenden Ausgangspunkt mit $\varphi = 90^0$

$$t_0 = \frac{r_0\,c_1}{c_1^2 - c_2^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 14\text{c)}$$

Die Fahrzeit ist demnach nur so lange endlich, als $c_1 > c_2$, d. h. als die Kahngeschwindigkeit größer als der Stromlauf ist. Andernfalls kann der Kahn die gerade gegenüberliegende Stelle überhaupt nicht erreichen.

Unser Ergebnis gilt auch für den Fall, daß an Stelle der Strömung die umgekehrte gleichförmige Bewegung c_2 des Punktes O tritt, den ein seitlich herankommender mit c_1 zu erreichen sucht[1]). Die Gleichung der hieraus hervorgehenden sog. Verfolgungskurve erhalten wir, indem wir $x + c_2(t - t_0) = -x'$ setzen, mit 13b), 14b), 14c) zu

$$-\frac{2x'}{r_0} = \frac{c_1}{c_1 - c_2}\left(\frac{y}{r_0}\right)^{\frac{c_1-c_2}{c_1}} - \frac{c_1}{c_1 + c_2}\left(\frac{y}{r_0}\right)^{\frac{c_1+c_2}{c_2}} - \frac{2c_1\,c_2}{c_1^2 - c_2^2} \quad \ldots \quad 15)$$

[1]) Die Übereinstimmung beider Bewegungen hat seltsamerweise W. Voigt nicht bemerkt, der sie mit dem 4. Beispiel § 16 in seiner „Elementaren Mechanik" (2. Aufl. 1902) S. 73ff. gesondert behandelt und mit Hilfe der Relativbewegung durch recht umständliche Rechnungen Gl. 15) und aus ihr mit $y = 0$ die Laufzeit 14c) gewinnt.

§ 19. Die freie Relativbewegung mit Drehung. Dreht sich das Achsenkreuz $\Xi O H$ um den Anfang des festen Kreuzes XOY, so sind die Achsenabstände in beiden nach Abb. 65 durch die Formeln

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ \eta &= y\cos\varphi - x\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad \text{oder} \quad \left.\begin{aligned} x &= \xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi \\ y &= \eta\cos\varphi + \xi\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad 1)$$

miteinander verknüpft. Daraus folgt dann durch Ableitung mit $d\varphi = \omega\, dt$

$$\left.\begin{aligned} \dot\xi - \eta\omega &= \dot x\cos\varphi + \dot y\sin\varphi \\ \dot\eta + \xi\omega &= \dot y\cos\varphi - \dot x\sin\varphi \end{aligned}\right\}, \quad . \quad 1\text{a})$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \dot x + y\omega &= \dot\xi\cos\varphi - \dot\eta\sin\varphi \\ \dot y - x\omega &= \dot\eta\cos\varphi + \dot\xi\sin\varphi \end{aligned}\right\} . \quad . \quad 1\text{b})$$

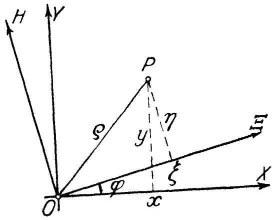

Abb. 65.

Auf der rechten Seite von 1a) stehen offenbar die in die Richtungen ξ und η fallenden wahren Laufteile, auf der rechten Seite von 1b) dagegen die relativen Laufteile in den Richtungen x und y, während links zu den wahren Laufteilen noch die wahren Drehlaufteile hinzutreten. Daraus geht hervor, daß der wahre Lauf eines Punktes sich nach den Vektorregeln aus dem Relativlauf und dem Drehlauf zusammensetzt. Der Drehlauf bezieht sich hierbei auf den Punkt in der Drehkreuzebene, der gerade mit dem bewegten Punkt P zusammenfällt; er steht demnach senkrecht zum Fahrstrahl $OP = \varrho$ und hat den Wert

$$\varrho\omega = \omega\sqrt{x^2 + y^2} = \omega\sqrt{\xi^2 + \eta^2}. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 2)$$

Besitzt das Drehkreuz $\Xi \Omega H$ noch eine fortschreitende Bewegung, so haben wir, unter x', y' die Achsenabstände von Ω und x'', y'' von P im festen Kreuz XOY verstanden, nach Gl. 1) des vorigen Abschnittes

$$\left.\begin{aligned} x &= x'' - x', \qquad & y &= y'' - y' \\ \dot x &= \dot x'' - \dot x', \qquad & \dot y &= \dot y'' - \dot y' \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 3)$$

in 1b) mit 1) zu setzen, woraus

$$\left.\begin{aligned} \dot x'' - \dot x' &= (\dot\xi - \eta\omega)\cos\varphi - (\dot\eta + \xi\omega)\sin\varphi \\ \dot y'' - \dot y' &= (\dot\eta + \xi\omega)\cos\varphi + (\dot\xi - \eta\omega)\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad 3\text{a})$$

hervorgeht. Der wahre Lauf $v'' = \sqrt{\dot x''^2 + \dot y''^2}$ des Punktes P setzt sich demnach aus dem wahren Lauf $v' = \sqrt{\dot x'^2 + \dot y'^2}$ des Drehzentrums Ω, dem Relativlauf $v = \sqrt{\dot\xi^2 + \dot\eta^2}$ in bezug auf das Drehkreuz und dem Drehlauf $\varrho \cdot \omega$ des mit P in der Drehkreuzebene sich gerade deckenden Punktes nach der Vektorregel zusammen, wie in Abb. 66 zu ersehen ist. Hierin bildet $\Omega v'$ die Tangente an die Bahn von Ω, Pv die Tangente in P an die relative oder scheinbare Bahn im Drehkreuz und schließlich Pv'' die Tangente an die wahre Bahn von P im festen Kreuz.

Zur Ermittlung der **Anlaufteile** sehen wir wieder zunächst von der Eigenbewegung des Drehkreuzanfanges ab und erhalten dann durch weitere Ableitungen von 1a)

$$\left.\begin{aligned}\ddot{\xi}-\frac{d(\eta\omega)}{dt}&=\ddot{x}\cos\varphi+\ddot{y}\sin\varphi+\omega(\dot{y}\cos\varphi-\dot{x}\sin\varphi)\\ \ddot{\eta}+\frac{d(\xi\omega)}{dt}&=\ddot{y}\cos\varphi-\ddot{x}\sin\varphi-\omega(\dot{x}\cos\varphi+\dot{y}\sin\varphi)\end{aligned}\right\}. \quad . \quad 4)$$

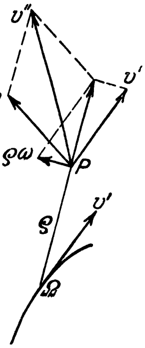
Abb. 66.

Hierin bedeuten die Glieder

$$\ddot{x}\cos\varphi+\ddot{y}\sin\varphi=(\ddot{\xi}), \qquad \ddot{y}\cos\varphi-\ddot{x}\sin\varphi=(\ddot{\eta}) \quad 5)$$

die in die ξ- und η-Richtung fallenden **wahren Anlaufteile** und nach 1a)

$$\dot{x}\cos\varphi+\dot{y}\sin\varphi=(\dot{\xi}), \qquad \dot{y}\cos\varphi-\dot{x}\sin\varphi=(\dot{\eta}) \quad 5\text{a})$$

die in die gleiche Richtung fallenden **wahren Laufteile** von P, so daß wir auch an Stelle von 4) schreiben dürfen

$$\left.\begin{aligned}\ddot{\xi}-\frac{d(\eta\omega)}{dt}&=(\ddot{\xi})+\omega(\dot{\eta})\\ \ddot{\eta}+\frac{d(\xi\omega)}{dt}&=(\ddot{\eta})-\omega(\dot{\xi})\end{aligned}\right\}. \quad . \quad . \quad . \quad 4\text{a})$$

Der wahre Anlauf setzt sich demnach nicht allein aus dem relativen und dem Drehanlauf zusammen, deren Anteile auf der linken Seite von 4a) stehen, sondern enthält noch einen auf den wahren Lauf normalen **Zusatzanlauf** ωv, der gewöhnlich nach seinem Entdecker **Coriolis** (1832) benannt wird. Dieser Zusatzanlauf ist uns schon einmal bei der Aufstellung der Anlaufteile in Polarkoordinaten im § 9 begegnet. Die dort entwickelten Formeln lassen sich aus den vorstehenden unmittelbar ableiten, wenn wir $\xi=r$, $\dot{\xi}=\dot{r}$, $\eta=0$, $\dot{\eta}=0$ setzen, so daß die Bewegung in Polarkoordinaten als Relativbewegung eines Punktes auf dem rotierenden Fahrstrahl erscheint.

Zur weiteren **Verwendung** unserer Ergebnisse ersetzen wir zweckmäßig in 4) die Klammerausdrücke rechts durch ihre Werte aus 1a) und erhalten dann nach Zerlegung von $d(\eta\omega):dt$ und $d(\xi\omega):dt$ die Formeln

$$\left.\begin{aligned}(\ddot{\xi})&=\ddot{\xi}-\eta\dot{\omega}-\xi\omega^2-2\omega\dot{\eta}\\ (\ddot{\eta})&=\ddot{\eta}+\xi\dot{\omega}-\eta\omega^2+2\omega\dot{\xi}\end{aligned}\right\}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4\text{b})$$

die sich für eine beständige Drehung mit $\dot{\omega}=0$ noch vereinfachen, bzw. unter Benutzung von 3) auf den Fall des fortschreitenden Drehpunktes Ω dadurch ausdehnen lassen, daß wir an Stelle von $(\ddot{\xi})$ und $(\ddot{\eta})$ die Unterschiede $(\ddot{\xi})''-(\ddot{\xi})'$ und $(\ddot{\eta})''-(\ddot{\eta})'$ setzen, in denen die ersteren Glieder die Anteile des wahren äußeren Anlaufes, die zweiten dagegen die Anlaufteile des Anfanges Ω des bewegten Achsenkreuzes, beide in den ξ- und η-Richtungen genommen, bedeuten.

Beispiel. Der bewegte Punkt sei einem nach dem Drehmittelpunkt gerichteten, dem Abstande von diesem verhältnisgleichen Anlauf unterworfen, während die Drehung selbst gleichförmig verläuft. Alsdann sind mit einem Beiwert α^2 die wahren Anlaufteile

$$(\ddot{\xi}) = -\alpha^2 \xi, \qquad (\ddot{\eta}) = -\alpha^2 \eta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 6)$$

und wir erhalten aus (4b)

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\xi} + (\alpha^2 - \omega^2)\,\xi &= 2\,\omega\dot{\eta} \\ \ddot{\eta} + (\alpha^2 - \omega^2)\,\eta &= -2\,\omega\dot{\xi} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 6\text{a})$$

Es handelt sich also, wie die Betrachtung der linken Seite dieser Formeln lehrt, um gleichzeitige Schwingungen des Punktes in der ξ- und η-Richtung, die aber durch die rechts stehenden Glieder miteinander gekoppelt sind. Den beiden Schwingungen genügen nach § 11 die Ansätze

$$\xi = A e^{\varkappa t}, \qquad \eta = B e^{\varkappa t}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 7)$$

deren Einführung in 6a) nach Wegheben der nicht verschwindenden Exponentialgröße $e^{\varkappa t}$

$$\left.\begin{aligned} A\,(\varkappa^2 + \alpha^2 - \omega^2) &= 2\,\omega\varkappa B \\ B\,(\varkappa^2 + \alpha^2 - \omega^2) &= -2\,\omega\varkappa A \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 7\text{a})$$

ergibt. Da auch A und B nicht verschwinden können, so liefert die Multiplikation und Division dieser Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &(\varkappa^2 + \alpha^2 - \omega^2)^2 = -4\,\omega^2\varkappa^2 \\ &\frac{A}{B} + \frac{B}{A} = 0, \quad \text{oder} \quad A^2 + B^2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 7\text{b})$$

Die erste dieser Gleichungen vereinfacht sich in

$$\varkappa^4 + 2\,(\alpha^2 + \omega^2)\,\varkappa^2 + (\alpha^2 - \omega^2)^2 = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 7\text{c})$$

mit den Wurzeln

$$\varkappa^2 = -(\alpha^2 + \omega^2) \pm 2\,\alpha\omega = -(\alpha \pm \omega)^2,$$

oder

$$\varkappa_{12} = \pm i\,(\alpha + \omega) = \pm i\,\alpha_1, \qquad \varkappa_{34} = \pm i\,(\alpha - \omega) = \pm i\,\alpha_2 \ldots \quad 7\text{d})$$

Wir erhalten also in beiden Achsenrichtungen des Drehkreuzes

$$\left.\begin{aligned} \xi &= A_1 e^{i\alpha_1 t} + A_2 e^{-i\alpha_1 t} + A_3 e^{i\alpha_2 t} + A_4 e^{-i\alpha_2 t} \\ \eta &= B_1 e^{i\alpha_1 t} + B_2 e^{-i\alpha_1 t} + B_3 e^{i\alpha_2 t} + B_4 e^{-i\alpha_2 t} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad 8)$$

je zwei sich überlagernde Schwingungen, die sich gegenseitig nach § 12 abwechselnd verstärken und verschwächen und deren Beiwerte A und B durch 7a) bzw. die zweite Bedingung 7b) derart miteinander verknüpft sind, daß

$$\left.\begin{aligned} &\frac{B_1}{A_1} = \frac{B_4}{A_4} = +i, \qquad &&\frac{B_2}{A_2} = \frac{B_3}{A_3} = -i \\ &\frac{B_1 B_2}{A_1 A_2} = \frac{B_1 B_3}{A_1 A_3} = 1, \qquad &&\frac{B_1 B_4}{A_1 A_4} = \frac{B_2 B_3}{A_2 A_3} = -1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad 9)$$

Damit ergibt sich dann

$$\eta = i\left[A_1 e^{i\alpha_1 t} - A_2 e^{-i\alpha_1 t} - A_3 e^{i\alpha_2 t} + A_4 e^{-i\alpha_2 t}\right] \quad \ldots \ldots \quad 8\text{a})$$

und wegen $\alpha_1 + \alpha_2 = 2\,\alpha$, $\alpha_1 - \alpha_2 = 2\,\omega$ der Fahrstrahl ϱ aus

$$\varrho^2 = \xi^2 + \eta^2 = 4\left[A_1 A_2 + A_3 A_4 + A_1 A_3 e^{2i\alpha t} + A_2 A_4 e^{-2i\alpha t}\right] \quad . \quad 8\text{b})$$

mit dem relativen Flächenlauf

$$\begin{aligned} \varrho^2\dot{\psi} = \dot{\eta}\xi - \dot{\xi}\eta &= -4\left[(\alpha + \omega)\,A_1 A_2 - (\alpha - \omega)\,A_3 A_4\right] \\ &\quad - 4\,\omega\left[A_1 A_3 e^{2i\alpha t} + A_2 A_4 e^{-2i\alpha t}\right] \quad \ldots \ldots \quad 8\text{c}) \end{aligned}$$

Die Relativbewegung ist demnach wegen der periodischen Schwankung der letzten Größe, deren Periode übrigens vom Drehwert ω unabhängig ist, keine Zentralbewegung. Im Sonderfalle $\alpha = 0$, also z. B. einer frei beweglichen absolut glatten Kugel auf einer absolut glatten wagerechten Scheibe verschwindet die Veränderlichkeit von ϱ und $\varrho^2\dot\psi$, wonach nur ein Kreis von beliebigem Halbmesser als Relativbahn übrig bleibt.

Wird schließlich $\alpha^2 = \omega^2$, so vereinfacht sich 6a) in

$$\left.\begin{array}{ll}\ddot\xi = 2\,\omega\dot\eta\,, & \ddot\eta = -\,2\,\omega\dot\xi\,, \\ \dddot\xi + 4\,\omega^2\dot\xi = 0\,, & \dddot\eta + 4\,\omega^2\dot\eta = 0\end{array}\right\} \quad \text{10)}$$

woraus

wird. Danach sind die beiden relativen Laufteile je einer einfachen Schwingung

$$\dot\xi = c_1 \sin(2\,\omega t + \beta_1)\,, \qquad \dot\eta = c_2 \sin(2\,\omega t + \beta_2) \quad \text{10a)}$$

von gleicher Dauer unterworfen, die sich auch aus 8) bzw. 8a) mit $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 = 2\,\omega$ ergeben. Beide Schwingungen ergeben nach § 15, Beispiel 1, als Relativbahn eine Ellipse, deren Mittelpunkt allerdings nicht mit dem Drehzentrum zusammenzufallen braucht. Zur Bestimmung der Beiwerte, die sich auch in diesem Falle auf vier zurückführen lassen, aus den anfänglichen Achsenabständen ξ, η und den zugehörigen Laufteilen $\dot\xi$, $\dot\eta$ bedient man sich zweckmäßig wieder der Gleichungen 8) bzw. 8a), die für diesen Fall in

$$\left.\begin{array}{l}\xi = A_1 e^{2i\omega t} + A_2 e^{-2i\omega t} + A_3 + A_4 \\ \eta = i\left[A_1 e^{2i\omega t} - A_2 e^{-2i\omega t} - A_3 + A_4\right]\end{array}\right\} \quad \text{11)}$$

übergehen und mit Hilfe des Moivreschen Lehrsatzes leicht auf Winkelfunktionen umgeformt werden können.

§ 20. Die gezwungene Relativbewegung ohne Drehung. Ist der betrachtete Punkt gezwungen, sich in einer vorgeschriebenen Bahn zu bewegen, welche selbst fortschreitet, ohne sich zu drehen, so haben wir nur, wie in § 16, den zur relativen Bahntangente senkrechten Zwangsanlauf q' in die Bewegungsgleichungen einzuführen und diese dann ebenso weiter zu behandeln wie bei der freien Bewegung. Ist in Abb. 67 τ der Neigungswinkel der Zwangsbahn gegen die ξ-Achse, so sind $-\,q'\sin\tau$ und $+\,q'\cos\tau$ die in die ξ- und η-Richtung fallenden Anteile des Zwangsanlaufes, so daß dann für eine **reine Parallelverschiebung** der Bahn unter dem Einfluß eines äußeren Anlaufes mit den Teilen q_x und q_y die Bewegungsgleichungen lauten

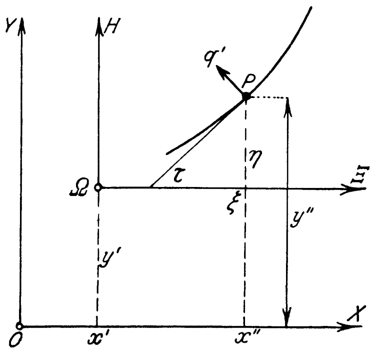

Abb. 67.

$$\left.\begin{array}{l}\ddot x'' = \ddot\xi + \ddot x' = q_x - q'\sin\tau \\ \ddot y'' = \ddot\eta + \ddot y' = q_y + q'\cos\tau\end{array}\right\} \quad \text{1)}$$

Daraus folgt nach Erweiterung mit $d\xi = d\sigma\cos\tau$, $d\eta = d\sigma\sin\tau$, wobei $d\sigma$ das Bogenelement der Zwangsbahn bedeutet, sowie unter Einführung des Relativlaufes v und des Krümmungshalbmessers ϱ

durch

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\xi}\, d\xi + \ddot{\eta}\, d\eta &= v\, dv \\ \ddot{\eta} \cos\tau - \ddot{\xi} \sin\tau &= \frac{v^2}{\varrho} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

nach Addition und Subtraktion

$$\left.\begin{aligned} v\, dv &= (q_x - \ddot{x}')\, d\xi + (q_y - \ddot{y}')\, d\eta \\ \frac{v^2}{\varrho} &= (q_y - \ddot{y}') \cos\tau - (q_x - \ddot{x}') \sin\tau + q' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 1\,a)$$

zur Bestimmung von v und q'.

1. Beispiel. Handelt es sich um eine gleichförmig fortschreitende Zwangsbahn in einer lotrechten Ebene unter dem Einfluß des Erdanlaufs g, so wird

$$q_x = 0, \quad q_y = -g, \quad \ddot{x}' = 0, \quad \ddot{y}' = 0, \quad \ldots\ldots \quad 3)$$

also nach 1 a)

$$v\, dv = -g\, d\eta, \qquad \frac{v^2}{\varrho} = q' - g \cos\tau, \quad \ldots\ldots \quad 3\,a)$$

oder mit einem Anfangswert v_0 für η_0

$$v^2 - v_0^2 = 2\, g\, (\eta_0 - \eta) \,. \quad \ldots\ldots \quad 3\,b)$$

Das würde z. B. für ein auf einem gleichförmig bewegten Fahrzeug angebrachtes Pendel zutreffen, welches demnach genau so schwingt wie an einem ruhenden Aufhängepunkt und insbesondere wegen $d\eta = 0$ mit $dv = 0$, bzw. $v = 0$ den tiefsten Punkt mit dem größten Lauf durchstreicht, der auch die relative Ruhelage des Pendels darstellt. Unterliegt dagegen mit oder ohne gleichförmiges Fortschreiten in der y-Richtung die Zwangsbahn einem Anlauf q in der x-Richtung außer demjenigen der Erde, so haben wir

$$q_x = 0, \quad q_y = -g, \quad \ddot{x}' = q, \quad \ddot{y}' = 0, \quad \ldots\ldots \quad 4)$$

also nach 1 a)

$$\left.\begin{aligned} v\, dv &= -q\, d\xi - g\, d\eta \\ \frac{v^2}{\varrho} &= q \sin\tau - g \cos\tau + q' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 4\,a)$$

Die erste dieser Gleichungen ist für beständiges q sofort integrabel; sie ergibt aber auch ohne weiteres für $dv = 0$ die Bedingung

$$q\, d\xi + g\, d\eta = 0 \quad \ldots\ldots \quad 4\,b)$$

des größten Laufes, der mit $v = 0$ auch die relative Ruhelage genügt. Es stellt dies offenbar eine Gerade mit dem Winkel τ_0 gegen das Lot, gegeben durch

$$\operatorname{tg} \tau_0 = \frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{q}{g} \quad \ldots\ldots \quad 4\,c)$$

dar, um welche ein Pendel im beschleunigten Fahrzeuge schwingt. Durch die Beobachtung dieses Winkels ist man somit in der Lage, im Innern des Fahrzeuges die Richtung und Größe eines solchen wagerechten Anlaufes festzustellen, der unter anderem auch beim Durchfahren einer Krümmung $1 : r$ mit dem Lauf c im Betrage $q = c^2 : r$ sich geltend macht.

2. Beispiel. Soll ein Punkt P auf einem mit dem Anlauf $\ddot{x}' = q$ bewegten Keil, Abb. 68, liegen bleiben, so ist

$$\ddot{x}' = q, \quad \ddot{y}' = 0, \quad \ddot{\xi} = 0, \quad \ddot{\eta} = 0, \quad q_x = 0, \quad q_y = -g, \quad \ldots \quad 5)$$

also nach 1)

oder

$$\left.\begin{aligned} q = -q' \sin\tau, \qquad g &= q' \cos\tau, \\ q &= -g \operatorname{tg}\tau \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 5\,a)$$

Der Zwangsanlauf q' zerfällt demnach in zwei Teile, deren lotrechter den Erdanlauf ausgleicht, während der wagerechte dem Anlaufe q des Keiles entspricht, der selbst nach der y-Achse zugerichtet ist.

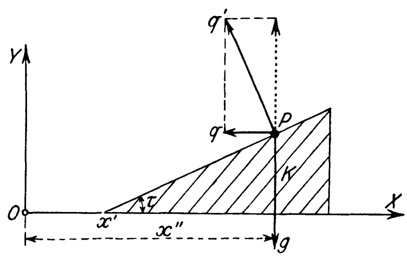

Abb. 68.

Die Ruhelage des Punktes auf dem Keil können wir auch erreichen durch Festhaltung des letzteren und Drehung des ganzen Gebildes um die y-Achse mit dem Drehwert ω. Alsdann wäre unter sonst gleichen Verhältnissen $\ddot{x}' = 0$, $q_x = q = x''\omega^2$ und nach Einsetzen in 1)

$$q = q' \sin\tau, \quad g = q' \cos\tau, \quad q = g \operatorname{tg}\tau \qquad 5\text{b})$$

§ 21. Die gezwungene Relativbewegung mit Drehung. Um die gezwungene Relativbewegung auf einer vorgelegten, um den Anfangspunkt O sich drehenden ebenen Kurve, Abb. 69, zu untersuchen, greifen wir auf die Gl. 4b) § 19 zurück und fügen den wahren Anlaufteilen in der ξ- und η-Richtung auf der linken Seite die entsprechenden Zwangsanlaufteile $-q'\sin\tau$ und $q'\cos\tau$ hinzu. Dadurch erhalten wir unter Beibehaltung der übrigen Bezeichnungen

$$\left.\begin{aligned}(\ddot{\xi}) - q'\sin\tau &= \ddot{\xi} - \eta\dot{\omega} - \xi\omega^2 - 2\omega\dot{\eta}\\ (\ddot{\eta}) + q'\cos\tau &= \ddot{\eta} + \xi\dot{\omega} - \eta\omega^2 + 2\omega\dot{\xi}\end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

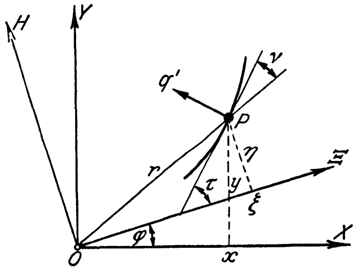

Abb. 69.

worin sich der Tangentenwinkel τ der Zwangsbahn aus der Gleichung im $\xi\eta$-Kreuz bestimmt. Handelt es sich, wie in den meisten praktischen Fällen, um die Drehung der Zwangsbahn in einer wagerechten Ebene, so vereinfachen sich infolge Wegfalls eines äußeren Anlaufs, also wegen $(\ddot{\xi}) = (\ddot{\eta}) = 0$, die Formeln. Unter Einführung des im letzten Paragraphen durch 2) bestimmten Relativlaufes v und des Krümmungshalbmessers ϱ der Zwangsbahn wird daraus

$$\left.\begin{aligned} v\,dv &= \omega^2(\xi\,d\xi + \eta\,d\eta) - \dot{\omega}(\xi\,d\eta - \eta\,d\xi)\\ q' &= \frac{v^2}{\varrho} - \omega^2(\eta\cos\tau - \xi\sin\tau) + 2\omega(\dot{\xi}\cos\tau + \dot{\eta}\sin\tau) +\\ &\qquad + \dot{\omega}(\xi\cos\tau + \eta\sin\tau)\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 1\text{a})$$

Hierin ist aber nach Abb. 69 mit $OP = r$

$$\xi^2 + \eta^2 = r^2, \qquad \xi\,d\xi + \eta\,d\eta = r\,dr, \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

sowie

$$\dot{\xi}\cos\tau + \dot{\eta}\sin\tau = v \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2\text{a})$$

und schließlich mit dem Winkel ν des Fahrstrahls r mit der Bahntangente

$$\xi = r\cos(\tau - \nu), \qquad \eta = r\sin(\tau - \nu)$$

$$\left.\begin{aligned}\eta\cos\tau - \xi\sin\tau &= -r\sin\nu\\ \xi\cos\tau + \eta\sin\tau &= r\cos\nu\end{aligned}\right\}. \quad \ldots\ldots \quad 2\text{b})$$

Damit vereinfachen sich unsere Gleichungen in

$$\left.\begin{aligned} v\,d\,v &= \omega^2 r\,d\,r - \dot{\omega}\,(\xi\,d\,\eta - \eta\,d\,\xi) \\ q' &= \frac{v^2}{\varrho} + \omega^2 r \sin\nu + 2\,\omega\,v + \dot{\omega}\,r\cos\nu \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

Wollen wir unsere Formeln auf den allgemeinen Fall der Wirkung eines äußeren Anlaufes unter gleichzeitiger Verschiebung des Anfangspunktes Ω des bewegten Achsenkreuzes ausdehnen, so haben wir nur in 1) die Ausdrücke $(\ddot{\xi})$ und $(\ddot{\eta})$ durch die Unterschiede $(\ddot{\xi})'' - (\ddot{\xi})'$ und $(\ddot{\eta})'' - (\ddot{\eta})'$ der Anteile des wahren äußeren Anlaufes und des Anlaufes von Ω in der ξ- und η-Richtung zu ersetzen. Dadurch werden indessen die Gleichungen so weitschweifig und für die Anwendung so unbequem, daß wir derartige Bewegungserscheinungen in der Folge lieber von vornherein im ruhenden Achsenkreuz verfolgen wollen, womit sich die hier nur angedeutete Erweiterung von 1) und 3) erübrigt.

Dagegen ist noch der praktisch wichtige Fall des unveränderlichen Drehwertes ω zu erwähnen, in dem sich unsere letzten Formeln 3) vereinfachen in

$$\left.\begin{aligned} v\,d\,v &= \omega^2 r\,d\,r \\ q' &= \frac{v^2}{\varrho} + \omega^2 r \sin\nu + 2\,\omega\,v \end{aligned}\right\}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3a)$$

von denen die erstere sofort integrabel ist und mit den Anfangswerten r_0 und v_0

$$v^2 - v_0^2 = \omega^2 (r^2 - r_0^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3b)$$

ergibt.

1. Beispiel. Ist die mit ω sich drehende Bahn eine Gerade mit dem kürzesten Abstand $OA = r_0$ vom festen Drehpunkt O, so erhalten wir nach Abb. 70, wenn noch die relative Bahnstrecke $AP = \sigma$ gesetzt wird,

$$r^2 = r_0^2 + \sigma^2, \qquad r\,d\,r = \sigma\,d\,\sigma, \qquad v = \dot{\sigma}, \qquad v\,d\,v = \dot{\sigma}\,d\,\dot{\sigma} = \ddot{\sigma}\,d\,\sigma,$$

also nach der ersten Gl. 3a)

$$\ddot{\sigma} = \omega^2 \sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

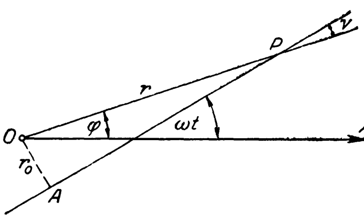

Abb. 70.

Diese Gleichung unterscheidet sich von der Schwingungsgleichung nur durch das Vorzeichen des rechts stehenden Gliedes, würde also Winkelfunktionen mit imaginärem Argument ergeben, die durch reelle Exponentialgrößen ersetzt werden können. Wir erhalten demnach mit zwei Integrationsbeiwerten A und B die Lösung

$$\sigma = A e^{\omega t} + B e^{-\omega t}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4a)$$

von deren Richtigkeit man sich durch Einsetzen in 4) überzeugen kann. Da ferner

$$v = \dot{\sigma} = \omega\,(A e^{\omega t} - B e^{-\omega t}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4b)$$

ist, so bestimmen sich die Beiwerte mit den Bedingungen, daß für $t = 0$, $\sigma = 0$, $v = v_0$ werden soll, aus den Gleichungen

$$A + B = 0, \qquad (A - B)\,\omega = v_0$$

zu

$$A = \frac{v_0}{2\,\omega}, \qquad B = -\frac{v_0}{2\,\omega}.$$

Mithin lautet das Ergebnis

$$\sigma = \frac{v_0}{2\,\omega}\left(e^{\omega t} - e^{-\omega t}\right), \qquad v = \frac{v_0}{2}\left(e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 5)$$

und der Zwangsanlauf folgt aus der zweiten Gl. 3a) mit $\varrho = \infty$, $r \sin \nu = r_0$

$$q' = \omega^2 r_0 + \omega v_0 \left(e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 5\text{a})$$

Zur Ermittlung der Absolutbahn des Punktes im ruhenden Achsenkreuz führen wir den Fahrstrahlwinkel φ mit der x-Achse durch die Gleichungen

$$r \sin(\omega t - \varphi) = r_0, \qquad \varphi = \omega t - \arcsin \frac{r_0}{r} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 6)$$

ein, welcher den Zeitbeginn für die in Abb. 70 wagerechte untere Lage der Zwangsbahn festlegt. Da nun nach 5)

$$e^{\omega t} - e^{-\omega t} = \frac{2\,\sigma\,\omega}{v_0}; \qquad e^{2\omega t} - \frac{2\,\sigma\,\omega}{v_0}\, e^{\omega t} = 1$$

$$e^{\omega t} = \frac{\sigma\,\omega}{v_0} \pm \sqrt{1 + \frac{\sigma^2\,\omega^2}{v_0^2}}, \qquad \omega t = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\, \frac{\sigma\,\omega}{v_0} = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\, \frac{\omega}{v_0}\sqrt{r^2 - r_0^2} \text{ ist,}$$

so lautet die Polargleichung

$$\varphi = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\, \frac{\omega}{v_0}\sqrt{r^2 - r_0^2} - \arcsin \frac{r_0}{r} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 6\text{a})$$

Für den Sonderfall der durch den festen Anfang gehenden Zwangsbahn wird daraus mit $r_0 = 0$, $\varphi = \omega t$, $\sigma = r$

$$r = \frac{v_0}{\omega}\,\mathfrak{Sin}\,\varphi = \frac{v_0}{\omega}\,\frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2}, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 6\text{b})$$

was man auch unmittelbar aus 5) hätte ablesen können. In jedem Falle haben wir es mit einer Bewegung zu tun, bei der die Entfernung vom festen Drehpunkte mit der Zeit unbegrenzt zunimmt.

2. Beispiel. Der auf einer durch den Anfang als Drehzentrum O gehenden Geraden bewegte Punkt sei vermittels einer sog. Schraubenfeder einem Anlauf unterworfen, welcher dem Abstande von einem festen Punkt A auf derselben Geraden verhältnisgleich und nach diesem zu gerichtet ist, Abb. 71. Dreht sich die Führungsgerade gleichförmig mit dem Drehwert ω, so haben wir mit dem Abstand $OA = a$

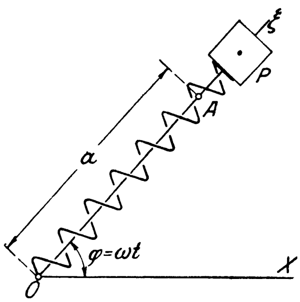

Abb. 71.

$$\tau = 0, \quad \eta = 0, \quad \dot\eta = 0, \quad \ddot\eta = 0,$$

$$\dot\omega = 0, \quad \xi = r, \quad \ddot\xi = \ddot r, \quad (\xi) = -\omega_0^2 (r - a)$$

an Stelle von 1)

$$\left.\begin{aligned} \ddot r - \omega^2 r + \omega_0^2 (r - a) &= 0 \\ q' &= 2\,\omega\,\dot r \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \quad 7)$$

Schreiben wir die erste dieser Gleichungen in der Form

$$\ddot r + (\omega_0^2 - \omega^2)\left[r - \frac{a\,\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\right] = 0, \quad 7\text{a})$$

so erkennen wir, daß sie für $\omega_0^2 - \omega^2 = \alpha^2 > 0$ eine Schwingung

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{a\,\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} + A \cos \alpha t + B \sin \alpha t \\ \dot r &= \qquad \alpha\,(B \cos \alpha t - A \sin \alpha t) \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 8)$$

um die Mittellage $a\omega_0^2 : (\omega_0^2 - \omega^2)$ darstellt. Rechnen wir die Zeit vom Durchlaufen dieser Mittellage mit dem Lauf v_0, so wird

$$A = 0, \qquad \alpha B = v_0,$$

also

$$r = \frac{a\,\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} + \frac{v_0}{\alpha} \sin \alpha t, \qquad \dot r = v_0 \cos \alpha t \quad \text{8a)}$$

Mit $v_0 = 0$, d. h. nach Unterdrückung der Schwingung auf der Führungsgeraden rotiert der Punkt in seiner Mittellage um den Anfang. Wird $\omega_0^2 = \omega^2$, so vereinfacht sich die erste Gleichung von 7) in

$$\ddot r = \omega_0^2 a \quad \text{9)}$$

und die Mittellage rückt ins Unendliche. An Stelle der Schwingungsgleichungen 8a) treten alsdann die Formeln

$$\dot r = v_1 + \omega_0^2 a t, \qquad r = r_1 + v_1 t + \frac{\omega_0^2 a t^2}{2}, \quad \text{9a)}$$

worin v_1 den Lauf im willkürlichen Punkte r_1 zu Beginn der Zeitrechnung bedeutet. Da hierbei sowohl r als auch $\dot r$ mit der Zeit unbegrenzt zunehmen, praktisch also zur Zerstörung des Zusammenhanges führen, so nennen wir $\omega = \omega_0$ den kritischen Drehwert. Wird endlich infolge Steigerung des Drehwertes $\omega^2 - \omega_0^2 = \alpha^2 > 0$, so lautet die Grundformel

$$\ddot r = (\omega^2 - \omega_0^2)\left[r + \frac{a\,\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2}\right] \quad \text{7b)}$$

mit der Lösung [vgl. Gl. 4)]

$$\left.\begin{aligned} r + \frac{a\,\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2} &= C e^{\alpha t} + D e^{-\alpha t} \\ \dot r &= \alpha\left[C e^{\alpha t} - D e^{-\alpha t}\right] \end{aligned}\right\} \quad \text{10)}$$

Die Beiwerte bestimmen wir dadurch, daß wir den bewegten Punkt zu Beginn, also für $t = 0$ in der Lage r_0 mit $\dot r = 0$ freigeben. Also ist

$$r_0 + \frac{a\,\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2} = C + D, \qquad C - D = 0,$$

$$C = D = \frac{1}{2}\left[r_0 + \frac{a\,\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2}\right],$$

oder

$$r + \frac{a\,\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2} = \frac{1}{2}\left[r_0 + \frac{a\,\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2}\right]\left[e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}\right]. \quad \text{10a)}$$

Auch diese Bewegung liefert ein unbegrenztes Wachstum der Ausschläge, so daß der Bestand der ganzen Vorrichtung überhaupt an Drehwerte unterhalb des kritischen ω_0 geknüpft ist.

Zweites Buch.

Dynamik des Massenpunktes.

V. Grundlagen der Dynamik des Massenpunktes.

§ 22. Masse und Kraft. Bei unseren bisherigen Untersuchungen von Bewegungsvorgängen haben wir auf die Größe der bewegten Körper, von denen wir streng genommen nur immer einen Punkt ins Auge faßten, keine Rücksicht genommen. Daß diese Beschränkung für die Erkenntnis des Zusammenhanges der Naturvorgänge nicht ausreicht, erkennt man sofort aus dem Verlauf der Bewegungen zweier verschiedener Körper unter sonst gleichen Umständen. Wir betrachten zu diesem Zweck die geradlinige wagerechte Schwingung eines Körpers am Ende eines lotrechten federnden Stabes, dessen anderes Ende festgeklemmt ist, und stellen einen der Auslenkung x aus der Ruhelage nach der Formel

$$\ddot{x} = -\alpha^2 x \qquad \text{1)}$$

verhältnisgleichen Anlauf fest. Die Schwingungsdauer des Körpers folgt hieraus nach den Lehren des § 11 zu

$$t_1 = \frac{2\pi}{\alpha} \qquad \text{1a)}$$

Befestigen wir nun an demselben Stabe statt dieses Körpers zwei genau gleiche, oder einen solchen aus demselben Stoffe, aber dem doppelten Rauminhalt, so beobachten wir wieder Schwingungen, aber von der Dauer $t_2 = t_1\sqrt{2}$. Wiederholen wir den Versuch mit 3, 4, ... m solchen Körpern bzw. einem vom 3, 4, ... m-fachem Rauminhalt aus demselben Stoff, so sind die Schwingungszeiten

$$t_3 = t_1\sqrt{3}, \qquad t_4 = t_1\sqrt{4}, \qquad \ldots\, t_m = t_1\sqrt{m}. \qquad \text{1b)}$$

Setzen wir den letzten allgemeinen Wert in 1a) ein, so ergibt sich mit

$$t_m = \frac{2\pi}{\alpha_m} = \frac{2\pi}{\alpha}\sqrt{m}$$

ein Anlauf

$$\ddot{x} = -\frac{\alpha^2}{m}x$$

oder

$$m\ddot{x} = -\alpha^2 x. \qquad \text{2)}$$

Wir werden also der Vergrößerung des schwingenden Körpers durch Hinzufügung eines demselben verhältnisgleichen Beiwertes zum Anlauf gerecht, den wir die Masse des Körpers nennen wollen. Da ihre Vergrößerung eine Verlangsamung der Bewegung bedingt, so schreiben wir der Masse die Eigenschaft der Trägheit zu und sprechen demgemäß auch von einer trägen Masse. Auf der rechten Seite der Gl. 2) steht die nur von den Eigenschaften des federnden Stabes (nämlich der Federungszahl α^2) und seiner Auslenkung, nicht aber von der Größe des bewegten Körpers abhängige Bewegungsursache, die wir im Einklang mit dem Sprachgebrauch als eine Kraft bezeichnen, welche der Masse einen Anlauf erteilt. Da ferner die Masse das Maß für die Körpergröße, also ein Skalar darstellt, so ist die Kraft als sein Produkt mit dem gerichteten Anlauf selbst ein Vektor, dessen Richtung mit dem des Anlaufes übereinstimmt.

Um ein von unserem Schwingungsvorgang unabhängiges Maß für die Kraft zu gewinnen, klemmen wir den federnden Stab nach Abb. 72 wagerecht ein und beobachten dann eine lotrechte Auslenkung des anderen Endes mit der dort aufgehängten Masse. Diese unterliegt dort dem ebenfalls lotrechten Erdanlauf g entsprechend einer Kraft in derselben Richtung von der Größe

Abb. 72.

$$mg = G, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

die man als ihre Schwere oder ihr Gewicht bezeichnet. Da nun ohne die daran befestigte Masse der Stab keine (nennenswerte) Auslenkung zeigt, so muß die mit derselben beobachtete, der, wie wir oben sahen, eine Kraft entspricht, durch ihr Gewicht bedingt sein. Die träge Masse hat also gleichzeitig die Eigenschaft der Schwere gegen den Erdkörper und ist in der Lage, auf einen andern Körper eine Kraft, z. B. auf den Stab eine Federkraft $-\alpha^2 x$ zu übertragen. Diese hat vermöge der lotrechten Auslenkung dieselbe Richtung wie die Schwere G, wird sich also zu dieser einfach addieren, und zwar muß, da im Ruhezustand keine Masse wirklich beschleunigt wird, die Summe verschwinden, d. h. es ist

$$G - \alpha^2 x = 0, \qquad G = \alpha^2 x. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3a)$$

Durch diese Beziehung sind wir in den Stand gesetzt, das Gewicht an der Auslenkung des federnden Stabes oder umgekehrt diese durch das Gewicht zu messen. Als Maßeinheit der Kraft benutzt man in der Technik unter dem Namen des Kilogramms (kg) das Gewicht von einem Liter (1 dm^3) Wasser bei 4^0 Celsius unter gewöhnlichem Atmosphärendruck, wobei allerdings zu beachten ist, daß der im Gewicht enthaltene Erdanlauf sich vom Pol zum Äquator aus später zu besprechenden Gründen ein wenig ändert. Um hiervon unabhängig zu sein, gehen die

Physiker von der als unveränderlich vorausgesetzten Masse aus und wählen als deren Einheit die als Gramm (g) bezeichnete Masse eines cm^3 Wasser unter den oben genannten Verhältnissen. Als Einheit der Kraft wird alsdann die Dyne (dyn) festgelegt, welche dieser Masseneinheit den Anlauf von 1 cm/sec^2 erteilt. Da nun der Erdanlauf $g = 9{,}81\ m/sec^2 = 981\ cm/sec^2$ beträgt, so ist die Masse eines Gramms nach Gl. 3) im technischen Maß $G : g = 1 : 981$ und 1 dyn $= 1 : 981$ Gramm $= 1{,}02$ Milligramm, also ein für praktische Messungen sehr kleiner Betrag. Bemerkenswert ist jedenfalls, daß die physikalische Massen- und Krafteinheit auf der Trägheit der Masse, die technische dagegen auf deren Schwere beruht, so daß beide erst durch die der letzteren eigentümliche Erdbeschleunigung miteinander verknüpft sind. Allgemein dagegen ist die Kraft durch den von ihr der Masse m erteilten Anlauf q derart gegeben, daß

$$Q = mq \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 4)$$

ist, der unter der Einführung der Masse als neuer Einheit neben der Länge und der Zeit die Dimension

$$Q = [mlt^{-2}] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 4a)$$

zukommt.

An den Begriff der Masse schließt sich die aus dem Vergleich mehrerer Körper aus verschiedenem Stoff hervorgehende Dichte δ an, welche die in der Raumeinheit enthaltene Masse bedeutet. In der Technik benutzt man statt dessen lieber das spezifische oder Raumgewicht γ, d. h. das in der Raumeinheit enthaltene Körpergewicht, sowie dessen Kehrwert den von der Gewichtseinheit des Körpers erfüllten Raum v unter der Bezeichnung des Gewichtsraumes oder spezifischen Volumens. Ist dann V der vom Gesamtgewicht G eines Körpers erfüllte Raum, so bestehen zwischen den eben eingeführten Größen die einfachen Beziehungen

$$\left.\begin{array}{llll} m = V\delta, & G = V\gamma, & V = G\cdot v, & G = mg \\ \gamma\cdot v = 1, & \delta g = \gamma, & g\delta v = 1, & \end{array}\right\}, \quad \ldots \quad 5)$$

durch die man die zufälligen Körperabmessungen, seine Masse und sein Gewicht ausschalten kann. Es ist dies darin begründet, daß vermöge des allen Körperteilen gemeinsamen Erdanlaufes g auch jedem derselben ein Eigengewicht zukommt. Gehen wir damit bis zu den Raumelementen, so entsprechen diesen auch Gewichtselemente, die sich auf den ganzen vom Körper eingenommenen Raum verteilen und vereinigt das Gesamtgewicht

$$G = g\int dm \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 6)$$

des Körpers ergeben. Das Gewicht oder die Körperschwere stellt demnach eine Kraft dar, die sich auf den ganzen vom Körper erfüllten Raum verteilt und als eine Volumen- oder Raumkraft bezeichnet werden mag.

Ruht der Körper dagegen auf einer Unterlage, d. h. auf einem andern Körper, so findet eine Berührung in einer beiden Körpern gemeinsamen Fläche statt, auf die sich dann das Gewicht des ersten Körpers oder allgemein die von diesem auf den zweiten ausgeübte Kraft verteilt. Auf jedes Element dieser Fläche entfällt daher auch nur ein Element der Kraft Q, derart, daß der Bruch

$$\frac{dQ}{dF} = p, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 7)$$

den wir als sog. Spannung in kg/cm² oder dyn/cm² ausdrücken, ein Maß für die Flächenbelastung bildet. Wir haben es also hier im Gegensatz zu den Raumkräften mit Flächenkräften zu tun, die überall da auftreten, wo Kräfte auf die Oberflächen von Körpern wirken und in diesen weitergeleitet werden. Schrumpft die Berührungsfläche zu einem Punkt zusammen, so wird die Spannung bei endlicher Kraft unendlich groß. Es ist das der Grenzfall bei einer Kraft, die längs eines dünnen Stabes oder Fadens wirkt, an dessen Ende ein Gewicht drückt oder zieht. Alsdann sprechen wir unter Verzicht auf die Einführung der Spannung 7) von einem punktförmigen Kraftangriff und stellen die Kraft selbst als einen vom Angriffspunkt ausgehenden Vektor dar. In dem Angriffspunkt können wir uns dann auch eine endliche Masse vereinigt denken, deren Dichte natürlich ebenso wie die Spannung unendlich groß ausfällt. Diese der endlichen Kraftwirkung unterworfene punktförmig gedachte Masse nennen wir dann einen materiellen oder Massenpunkt. Seine Erfindung verdankt derselbe der Erwartung, daß sein Verhalten im Ruhe- und Bewegungszustande besonders übersichtlich wird und Folgerungen auf das Verhalten endlicher Körper verspricht. Ohne weiteres aber erkennen wir, daß bei dem im ersten Buch behandelten Bewegungsvorgängen der Ersatz des bewegten Punktes durch den Massenpunkt nur die Erweiterung des Anlaufes mit der Masse erfordert, wodurch an Stelle der Anlaufsteile entsprechende Kräfte treten. Auf diese Weise gelangen wir bei freier Bewegung zu einer Bahn- und Normalkraft, sowie zu einer Zentralkraft, der bei einer Kreisbewegung die Fliehkraft $mr\omega^2$ entgegenwirkt, während bei gezwungener Bewegung senkrecht zur Zwangsbahn eine gewöhnlich als Bahndruck bezeichnete Zwangskraft mq' auftritt.

§ 23. Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt. Greifen an einem Massenpunkt m zwei Kräfte Q_1 und Q_2 an, so wird jede von ihnen der Masse m einen ihr gleichgerichteten Anlauf q_1 bzw. q_2 derart erteilen, daß

$$Q_1 = mq_1, \qquad Q_2 = mq_2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 1)$$

wird. Beide Anläufe aber setzen sich als Vektoren geometrisch zu einem Gesamtanlauf q zusammen, dem alsdann eine ihm gleichgerichtete Gesamtkraft

$$Q = mq \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 1a)$$

zugeordnet ist. Da alle drei Anläufe mit derselben übrigens ganz willkürlichen Masse als Beiwert behaftet sind, so gilt die geometrische

Vereinigung unverändert auch für die Kraftvektoren, die hiernach wie die Anläufe vereinigt und zerlegt werden können. Die Unabhängigkeit der Einzelanläufe bedingt demnach auch eine solche der Einzelkräfte voneinander in ihrer Wirkung auf den Massenpunkt. Sind mehr als zwei Kräfte vorhanden, so vereinigt man wie bei den Anläufen erst zwei, dann deren Gesamtwert mit der dritten usf., woraus sich schließlich die Gesamtkraft als Schlußlinie des durch Aneinanderreihen aller Einzelkräfte entstandenen Kraftecks ergibt. Ist das Krafteck geschlossen, so heben sich die Wirkungen aller Kräfte auf den Angriffspunkt auf, weshalb man von einem Gleichgewicht der Kräfte spricht. In diesem Falle kann man auch jede Einzelkraft als umgekehrte Schlußlinie des Kraftecks aller übrigen auffassen, die somit deren Gesamtkraft das Gleichgewicht hält. Sind $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ die Neigungswinkel der Kraftvektoren gegen die x-Achse eines Kreuzes xy, so wird man zweckmäßig die Einzelkräfte in ihre Bestandteile in den Achsenrichtungen zerlegen und diese für sich vereinigen, woraus mit dem Winkel α der Gesamtkraft

$$\left.\begin{aligned} Q\cos\alpha &= Q_1\cos\alpha_1 + Q_2\cos\alpha_2 + \ldots + Q_n\cos\alpha_n \\ Q\sin\alpha &= Q_1\sin\alpha_1 + Q_2\sin\alpha_2 + \ldots + Q_n\sin\alpha_n \end{aligned}\right\}, \quad . \; . \; . \quad 2)$$

oder mit

$$\left.\begin{aligned} Q_k\cos\alpha_k &= X_k, & Q_k\sin\alpha_k &= Y_k \\ Q\cos\alpha &= X, & Q\sin\alpha &= Y \end{aligned}\right\}, \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 2\,a)$$

$$X = \sum_1^n X_k, \qquad Y = \sum_1^n Y_k. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 2\,b)$$

hervorgeht. Der hierdurch gegebenen Gesamtkraft folgt der Massenpunkt derart, daß seine Anlaufteile durch

$$X = \sum_1^n X_k = m\ddot{x}, \qquad Y = \sum_1^n Y_k = m\ddot{y} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 3)$$

gegeben sind. Im Falle des Gleichgewichts aller Kräfte verschwinden mit Q auch die links stehenden Teilsummen, die nichts als die Risse des Kraftecks auf die Achsen darstellen, und es ist

$$\left.\begin{aligned} \sum_1^n X_k &= 0, & \sum_1^n Y_k &= 0 \\ \ddot{x} &= 0, & \ddot{y} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 3\,a)$$

Das Verschwinden der Anlaufteile hat aber nach früherem eine gleichförmige Bewegung des Massenpunktes im Falle des Gleichgewichts der daran wirkenden Kräfte zur Folge, von welcher der Ruhezustand nur einen Sonderfall darstellt.

Wenn auch nach diesen Darlegungen die Zusammensetzung von Kräften nach den Regeln der geometrischen Addition aus der Vektoreneigenschaft des Anlaufes, die durch den skalaren Beiwert der Masse nicht geändert wird, hervorgeht, so enthebt uns dies doch nicht der Notwendigkeit der Prüfung durch den Versuch. Zu diesem Zweck befestigen wir an zwei Punkten A und B (Abb. 73) unter Zwischenschaltung zweier Schraubenfedern AA_1 und BB_1 einen Faden A_1CB_1 und hängen im Punkte C das Gewicht G auf. Danach beobachten wir die Ausdehnung der beiden Federn und die Winkel α und β der Fadenteile mit der Lotrechten durch C, welche zugleich die Richtung der Kraft G angibt. Bestimmen wir schließlich durch besondere Belastung die beiden Gewichte G_1 und G_2, welche an den Federn die vorher festgestellten Ausdehnungen hervorrufen, so zeigt sich, daß für alle Lagen von C, also auch für alle mit unserer Anordnung verträglichen Winkel α und β

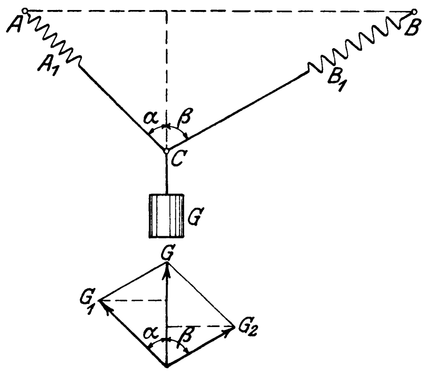

Abb. 73.

$$\left.\begin{aligned} G_1 \cos\alpha + G_2 \cos\beta &= G \\ G_1 \sin\alpha - G_2 \sin\beta &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

sein wird, was durchaus dem darunter gezeichneten Kraftecke entspricht.

Angesichts der großen Bedeutung der Kräftezerlegung und -zusammensetzung wollen wir hier noch einen analytischen Beweis dafür nach Navier anführen. Es mögen zwei gleiche unter dem Winkel 2φ gegeneinander geneigte Kräfte am Punkte O angreifen, Abb. 74. Dann wird die Gesamtkraft R aus dem Grunde der Gleichberechtigung in die Halbierungslinie des Winkels fallen und den Einzelkräften verhältnisgleich sein, so zwar, daß mit einer noch unbekannten Funktion $f(\varphi)$

$$R = Qf(\varphi) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

ist. Denken wir uns ferner jede der Kräfte Q als Gesamtkraft aus zwei Kräften P hervorgegangen, die mit ihr die Winkel ψ bilden, so ist auch

$$Q = Pf(\psi), \qquad \text{also} \qquad R = Pf(\varphi)f(\psi) \quad \ldots \quad 5\text{a})$$

Andrerseits können wir auch die Gesamtkraft R unmittelbar aus der Zusammenfassung der beiden äußeren Kräfte P mit dem Winkel $\varphi + \psi$ und der inneren mit dem Winkel $\varphi - \psi$ hervorgegangen denken, wonach

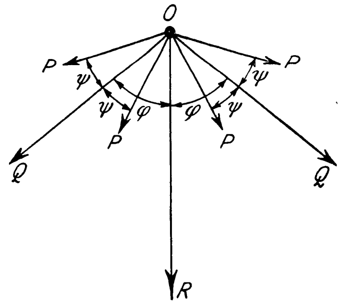

Abb. 74.

$$R = Pf(\varphi + \psi) + Pf(\varphi - \psi) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 5\text{b})$$

wird. Aus dem Vergleich dieser Formel mit der zweiten Gleichung 5a) folgt dann unter Wegheben von P

$$f(\varphi)f(\psi) = f(\varphi + \psi) + f(\varphi - \psi) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 6)$$

zur Bestimmung der noch unbekannten Funktion $f(\varphi)$.

Daraus folgt zunächst mit

$$\left.\begin{aligned} \psi &= 0, \qquad f(0) = 2 \\ \varphi &= 0, \qquad f(\psi) = f(-\psi) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 6\text{a})$$

Außerdem verschwindet die Gesamtkraft für entgegengesetzt gleiche Q, d. h. es ist in 5) für

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad 6\text{b})$$

Ferner ergibt die Ableitung von 6) nach ψ mit $\psi = 0$

$$\left.\begin{array}{lll} f(\varphi) f'(\psi) = f'(\varphi + \psi) - f'(\varphi - \psi), & \text{also} & f'(0) = 0 \\ f(\varphi) f''(\psi) = f''(\varphi + \psi) + f''(\varphi - \psi), & \text{„} & f(\varphi) f''(0) = 2 f''(\varphi) \end{array}\right\} \; . \; . \qquad 6\text{c})$$

worin $\frac{1}{2} f''(0) = \pm \varkappa^2$ einen noch unbekannten, jedenfalls aber unveränderlichen Beiwert bedeutet, der positiv oder auch negativ sein kann. Die Gleichung

$$f''(\varphi) = \pm \varkappa^2 f(\varphi) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad 7)$$

hat aber die Lösungen

$$f(\varphi) = A e^{\varkappa\varphi} + B e^{-\varkappa\varphi}, \quad \text{oder} \quad f(\varphi) = A \cos \varkappa\varphi + B \sin \varkappa\varphi,$$

von denen indessen nur die letztere alle Grenzbedingungen 6a), 6b) und 6c) erfüllt, wenn $B = 0$, $A = 2$ und $\varkappa = 1$ gesetzt wird. Mithin bleibt als Ergebnis

$$R = 2 Q \cos \varphi \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad 5\text{c})$$

im Einklang mit der Schlußlinie im Krafteck der beiden Kräfte Q. Man übersieht sofort, daß die vorstehende Beweisführung für jede Art von Vektoren zutrifft.

§ 24. **Wechselwirkung, Prall und Bewegungsgröße.** Im Vorstehenden ist mehrfach von der Wirkung einer Kraft auf einen Körper die Rede gewesen. So haben wir gesehen, daß jeder Körper an der Erdoberfläche der Schwere unterliegt, die durch den Erdanlauf sein Gewicht bedingt. Ruht der Körper auf einer Unterlage, so vermag er dem Erdanlauf nicht mehr zu folgen, woraus wir auf eine Gegenkraft schließen müssen, welche dem Körpergewicht gerade das Gleichgewicht hält. Der Sitz dieser Gegenkraft ist offenbar die Berührungsstelle mit der Unterlage, die wiederum einem andern Körper angehört, der somit mit dem ersteren in einer Wechselwirkung steht. Es fragt sich nun, ob auch im Falle der Bewegung eines Körpers eine solche Wechselwirkung besteht. Zur Entscheidung dieser Frage nehmen wir eine solche Wirkung an und denken uns zwischen zwei Körpern einen dritten von der Masse m eingeschaltet, der beide gerade berühren möge. Alsdann ist dieser dritte Körper seitens der beiden andern den Kräften Q' und Q'' mit den Achsenteilen X', X'' und Y', Y'' ausgesetzt, so zwar, daß

$$X' + X'' = m\ddot{x}, \quad Y' + Y'' = m\ddot{y} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad 1)$$

wird. Wir können nun die Masse des Zwischenkörpers immer mehr verkleinern, indem wir ihn entweder bis auf einen Punkt, nämlich den Berührungspunkt der beiden ersten Körper zusammenschrumpfen lassen oder durch stetige Verminderung seiner Dichte zum Verschwinden bringen. Alsdann verschwindet mit m die rechte Seite von 1) und es bleibt für die Wechselwirkung zweier Körper

$$X' + X'' = 0, \quad Y' + Y'' = 0, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad 2)$$

mögen sich dieselben berühren oder nicht. Die von zwei Körpern aufeinander ausgeübten Kräfte sind hiernach entgegengesetzt gleich, so daß sie sich in ihrer Wirkung nach außen aufheben. Danach übt nicht nur der Erdball auf einen außerhalb befindlichen Körper die sein Gewicht bedingende Schwerkraft aus, sondern erleidet auch von diesem eine entgegengesetzt gleiche, also nach dem Körper zu gerichtete Kraft.

Die beiden Kräfte Q' und Q'' erteilen nun den Massen m' und m'' der beiden in Wechselwirkung stehenden Körper, die wir uns der Einfachheit halber wieder als Massenpunkte vorstellen dürfen, Anläufe

$$q' = \frac{dv'}{dt} \quad \text{und} \quad q'' = \frac{dv''}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

derart, daß

$$Q'dt = m'dv', \qquad Q''dt = m''dv'' \quad \ldots\ldots \quad 4)$$

ist. Die rechten Seiten dieser Formeln sind aber wegen der Unveränderlichkeit der Massen sofort integrabel, so daß wir mit den anfänglichen Laufwerten v_0' und v_0'' erhalten

$$\int Q'dt = m'(v' - v_0'), \qquad \int Q''dt = m''(v'' - v_0'') \ldots \quad 4a)$$

Waren die Körper ursprünglich im Ruhezustand, so verschwinden v_0' und v_0'' und es bleibt

$$\int Q'dt = m'v', \qquad \int Q''dt = m''v''. \quad \ldots\ldots \quad 4b)$$

Die rechtseitig stehenden Produkte mv bezeichnen wir nach dem Vorgange Newtons als die Bewegungsgrößen der Massen, die durch die linksseitigen Kraftwirkungen während einer gewissen Zeit, die wir uns auch beliebig kurz denken können, hervorgerufen werden. Wir wollen darum die links stehenden Zeitintegrale der Kraft als Antrieb (Impuls) oder Prall bezeichnen. Derselbe besitzt, wie die Bewegungsgröße, ersichtlich die Dimension

$$[m \cdot v] = [m \cdot l \cdot t^{-1}] \quad \ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

und ist als Produkt der skalaren Masse mit dem Laufvektor v selbst ein Vektor, für den dieselben Verbindungsregeln gelten wie für die Laufteile. Für den Fall der Wechselwirkung können wir die Formeln 4a) addieren und erhalten, da sich die Integrale links über die gemeinsame Wirkungszeit erstrecken mit $Q' + Q'' = 0$

$$m'(v' - v_0') + m''(v'' - v_0'') = 0$$

oder

$$m'v' + m''v'' = m'v_0' + m''v_0'', \quad \ldots\ldots\ldots \quad 6)$$

d. h. die gesamte Bewegungsgröße zweier in Wechselwirkung stehender Massen bleibt ungeändert.

Beispiel. Das im Rohr eines Geschützes oder Gewehrlaufes befindliche Geschoß befindet sich mit diesem und der Pulverladung anfänglich in Ruhe. Ist demnach m' die Masse des ersteren, m'' die des zweiten, so gilt mit $v_0' = v_0'' = 0$ nach 6) für das Verlassen des Rohres die Beziehung

$$m'v' + m''v'' = 0,$$

wonach also das Rohr einen Rücklauf

$$v' = -\frac{m''}{m'}v'' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 7)$$

erleidet, der bei Geschützen durch besondere Vorrichtungen unschädlich gemacht wird. Hängt man das Rohr nach Abb. 75 pendelartig auf, daß es unter einer Erhebung h dem Rücklauf folgen kann, so wird nach den Pendelgesetzen $v' = \sqrt{2gh}$, also

$$v'' = -\frac{m'}{m''}\sqrt{2gh}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 7a)$$

so daß man aus der Erhebung des Rohres nach dem Schuß und den ihren Gewichten verhältnisgleichen Massen von Rohr und Geschoß den Lauf des letzteren beim Verlassen des Rohres bestimmen kann. Die Pulverladung stellt hier den oben benutzten Zwischenkörper dar, dessen Masse wir vernachlässigt haben, aber als Zuschlag zu der des Geschosses für genauere Ermittlungen berücksichtigen müßten. Angesichts der in der Neuzeit sehr gesteigerten Geschoßgeschwindigkeiten ist dieses Verfahren allerdings jetzt ebenso verlassen, wie das Hineinschießen in einen in derselben Weise wie in Abb. 75 angedeutet aufgehängten Sandkasten, den man wohl als ballistisches Pendel bezeichnet. In diesem Falle blieb das Geschoß in dem Kasten von der Masse m' stecken und bewegte sich danach mit ihm gemeinsam weiter. Wir haben also hier in 6) $v_0' = 0$, $v' = v''$ zu setzen und erhalten für den Geschoßlauf

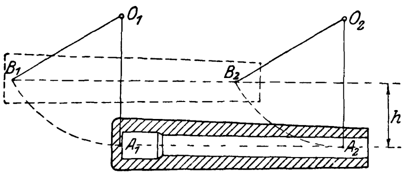

Abb. 75.

$$m'' v_0'' = (m' + m'')v' = (m' + m'')\sqrt{2gh}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 8)$$

$$v_0'' = \left(1 + \frac{m'}{m''}\right)\sqrt{2gh}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 8a)$$

oder wegen der Kleinheit von $m'' : m'$ mit genügender Annäherung

$$v_0'' = \frac{m'}{m''}\sqrt{2gh}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 8b)$$

In den beiden hier geschilderten Fällen kommt es nur auf den Anfangs- und Endzustand der in Wechselwirkung begriffenen Körper an, nicht aber auf den dazwischenliegenden Vorgang, der nur nach Kenntnis der Veränderlichkeit der zwischen den Körpern wirkenden Kraft verfolgt werden kann.

Unsere Gl. 6) gilt zunächst nur für Bewegungen in der Richtung der Kräfte Q' und Q'', läßt sich aber vermöge der Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} X' dt &= m' dv_x', & X'' dt &= m'' dv_x'' \\ Y' dt &= m' dv_y', & Y'' dt &= m'' dv_y'' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 1a)$$

auf beliebig gerichtete Bewegungen ausdehnen. Für diese erhalten wir alsdann mit 2)

$$\left.\begin{aligned} m' v_x' + m'' v_x'' &= m' v_{x_0}' + m'' v_{x_0}'' \\ m' v_y' + m'' v_y'' &= m' v_{y_0}' + m'' v_{y_0}'' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 6a)$$

Hierin enthalten die rechts stehenden Glieder die anfänglichen Laufteile beider Massenpunkte, die wir uns auch zu irgendeiner Zeit in einen von der Gesamtmasse $m' + m''$ mit gemeinsamen Laufteilen v_x und v_y vereinigt denken und an Stelle von 6a)

$$\left.\begin{aligned} m' v_x' + m'' v_x'' &= (m' + m'')\, v_x \\ m' v_y' + m'' v_y'' &= (m' + m'')\, v_y \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 6b)$$

schreiben dürfen, woraus der Bestand von v_x und v_y unmittelbar erhellt. Führen wir dann noch die augenblicklichen Achsenabstände $x', y'; x'', y''$ der Massen m' und m'', sowie x, y der zeitweilig in einem sogen. Massenmittelpunkt vereinigten Gesamtmasse ein, so stellen die Formeln 6b) die Ableitungen von

$$\left.\begin{aligned} m'x' + m''x'' &= (m' + m'')x \\ m'y' + m''y'' &= (m' + m'')y \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad 9)$$

dar, wodurch die Lage x, y des Massenmittelpunktes gegen die beiden Einzelmassen jederzeit gegeben ist. Schreibt man sie in der Form

$$\begin{aligned} (x - x')\,m' + (x - x'')\,m'' &= 0 \\ (y - y')\,m' + (y - y'')\,m'' &= 0, \end{aligned}$$

so folgt daraus durch Ausschalten von m' und m''

$$\frac{y - y'}{x - x'} = \frac{y'' - y}{x'' - x}, \quad \ldots \ldots \quad 9a)$$

d. h. der durch 9) gegebene Massenmittelpunkt zweier in Wechselwirkung stehender Massenpunkte liegt auf deren Verbindungslinie, teilt diese im verkehrten Verhältnis der Einzelmassen und schreitet selbst gleichförmig fort.

Multiplizieren wir ferner die Kraftgleichungen 1a) mit y', y'' bzw. mit x', x'' und subtrahieren, so wird wegen 2) sowie mit Rücksicht auf die Wechselwirkung auf der Verbindungslinie

$$Y''x'' + Y'x' - X''y'' - X'y' = Y''(x'' - x') + X'(y'' - y') = 0 \;. \quad 10)$$

und es bleibt

$$m'(x'dv_y' - y'dv_x') + m''(x''dv_y'' - y''dv_x'') = 0,$$

$$m'\frac{d}{dt}(x'v_y' - y'v_x') + m''\frac{d}{dt}(x''v_y'' - y''v_x) = 0,$$

oder nach Einführung der Fahrstrahlen r' und r'' der Massenpunkte m' und m'', sowie deren Neigungswinkel φ' und φ'' gegen die x-Achse

$$m'r'^2\dot\varphi' + m''r''^2\dot\varphi'' = C_0, \quad \ldots \ldots \quad 10a)$$

d. h. die Summe der Produkte der Massen mit den Flächenläufen ihrer Fahrstrahlen erleidet im Falle der Wechselwirkung keine Änderung. Da $r\dot\varphi$ ein Umlauf ist, so stellt $mr\dot\varphi$ die zugehörige Bewegungsgröße bzw. den Prall dar und $mr^2\varphi$ das Moment dieses Pralles, das wir nach dem Vorgang von Föppl kurz als Drall bezeichnen wollen. Dann dürfen wir den vorstehenden Satz auch so aussprechen, daß im Falle der Wechselwirkung zweier Massenpunkte ihr Gesamtdrall keine Änderung erfährt.

Verlegen wir nunmehr den Anfang des Achsenkreuzes in den Massenmittelpunkt, setzen also dessen Achsenabstände $x = y = 0$, so wird bei einem Gesamtabstand r der beiden Massenpunkte

$$r'' - r' = r \;. \ldots \ldots \quad 11)$$

wegen 9)

$$m'r' + m''r'' = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 9\text{b})$$

woraus im Einklang mit der Folgerung aus 9a)

$$r'(m' + m'') = -m''r, \qquad r''(m' + m'') = m'r \quad \ldots \quad 9\text{c})$$

hervorgeht. Setzen wir ferner den nunmehr gemeinsamen Drehwert von r, r' und r'' um den Anfang $\dot\varphi = \dot\varphi' = \dot\varphi'' = \omega$, so geht 10a) über in

$$(m'r'^2 + m''r''^2)\,\omega = C_0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 10\text{b})$$

oder nach Einsetzen der Werte von r' und r'' aus 9c)

$$m'm''r^2\omega = C_0(m' + m''). \quad \ldots\ldots\ldots \quad 10\text{c})$$

Die hieraus folgende Unveränderlichkeit des Flächenlaufes ist aber die Bedingung für die relative Zentralbewegung eines der Massenpunkte um den andern, den wir uns festgehalten denken können.

Ersetzen wir dagegen in 10c) den Gesamtabstand r beider Massen durch die Abstände r' und r'' vom Massenmittelpunkt nach 9c), so wird

$$r'^2\omega = \frac{C_0 m''}{(m' + m'')\,m'}, \qquad r''^2\omega = \frac{C_0 m'}{(m' + m'')\,m''}, \quad \ldots \quad 10\text{d})$$

d. h. die beiden in Wechselwirkung stehenden Massenpunkte vollziehen Zentralbewegungen um ihren Massenmittelpunkt.

Ist nach § 10, Gl. 1a)

$$q_r = \frac{dv_r}{dt} - r\omega^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 12)$$

der Zentralanlauf bei der Relativbewegung der Massenpunkte umeinander, so folgt mit 9c)

$$q_r = -\frac{m' + m''}{m''}\left[\frac{dv_r'}{dt} - r'\omega^2\right] = \frac{m' + m''}{m'}\left[\frac{dv_r''}{dt} - r''\omega^2\right],$$

oder unter Einführung der Zentralanläufe q_r' und q_r'' bei der Bewegung um den Massenmittelpunkt

$$q_r = -\frac{m' + m''}{m''}\,q_r' = +\frac{m' + m''}{m'}\,q_r'', \quad \ldots\ldots \quad 12\text{a})$$

woraus sich dann noch

$$\left.\begin{aligned} q_r'' - q_r' &= q_r \\ q_r''m'' + q_r'm' &= Q' + Q'' = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 12\text{b})$$

im Einklang mit dem Satze der Wechselwirkung ergibt, der für die Relativbewegung der Massenpunkte umeinander, wie man sich leicht durch Erweiterung von q_r in 12a) mit m' bzw. m'' überzeugt, nicht mehr gilt, sondern durch die Festhaltung eines Massenpunktes, der eine seinen Anlauf aufhebende Zwangskraft bedingt, gestört wird.

§ 25. **Die Arbeit.** Erweitern wir die Kraftgleichung eines geradlinig bewegten Massenpunktes m unter Einfluß der Kraft

$$Q\,dt = m\,dv$$

mit dem Laufe $\dot{s} = v$, so wird daraus

$$Q \cdot ds = m \cdot v\,dv, \qquad \text{1)}$$

worin wieder die rechte Seite unmittelbar integrabel ist, während die Auswertung der linken Seite die Kenntnis der Veränderlichkeit der Kraft Q mit dem von der Masse zurückgelegten Wege voraussetzt. Denken wir uns denselben etwa zeichnerisch gegeben, so erhalten wir in den Grenzen s_0 und s entsprechend v_0 und v

$$L = \int_{s_0}^{s} Q \cdot ds = \frac{m}{2}(v^2 - v_0^2) \qquad \text{1a)}$$

Darin bezeichnen wir das Wegintegral L als die Arbeit der Kraft und das Produkt $\frac{1}{2}mv^2$ als die kinetische Energie, Bewegungsenergie oder noch kürzer als die Wucht der Masse m, deren Veränderung hiernach durch die an der Masse geleistete Arbeit der Kraft gegeben ist. Arbeit und Wucht haben offenbar die Dimension

$$L = [ml^2t^{-2}] \qquad \text{2)}$$

und werden am einfachsten gemessen an der Arbeit einer längs eines Weges beständigen Kraft. Als solches Maß bietet sich zwanglos die Hubarbeit der Gewichtseinheit auf eine der Längeneinheit gleiche Höhe dar, also das Meterkilogramm (mkg), während die Physik demgegenüber die Zentimeterdyne unter dem Namen eines Erg (erg) eingeführt hat. Da nun 1 kg $= 9{,}81 \cdot 10^5$ dyn ist, so ist

$$1 \text{ mkg} = 9{,}81 \cdot 10^7 \text{ erg}. \qquad \text{2a)}$$

Zur Vermeidung der großen Zahlen bei physikalischen Maßen hat man als neue Einheit für technische Zwecke

$$10^7 \text{ erg} = 1 \text{ Joule} \qquad \text{2b)}$$

eingeführt, so daß

$$1 \text{ mkg} = 9{,}81 \text{ Joule} \qquad \text{2c)}$$

wird.

Wenn auch in unserer Formel für die Arbeit die Zeit nicht vorkommt, d. h. die beim Durchlaufen des Weges $s_0 - s$ aufgewendete Arbeit unabhängig von der dabei verflossenen Zeit ist, so brauchen wir diese doch zum Vergleich der Arbeitsfähigkeit sog. Energiequellen, z. B. der Arbeitstiere und Antriebsmaschinen. Man braucht nur daran zu denken, daß ein kräftiger Mann zur Arbeit von 1 mkg vielleicht nur die halbe Zeit braucht wie ein schwacher, um einzusehen, daß der erstere das Doppelte zu leisten imstande ist. Wir führen darum durch

$$N = \frac{dL}{dt} = Q \cdot v \qquad \text{3)}$$

die Leistung ein mit der Dimension

$$N = [ml^2 t^{-3}] \qquad 4)$$

Sie wird gemessen in Meterkilogramm in der Sekunde oder Sekundenmeterkilogramm (mkg/sec). In der Physik tritt dafür das Erg in der Sekunde (erg/sec) oder auch als neue Einheit

$$1 \text{ Joule i. d. Sek.} = 1 \text{ Watt} \qquad 4a)$$

Mithin ist

$$1 \text{ mkg/sec} = 9{,}81 \text{ Watt} \qquad 4b)$$

Die in der Technik häufig gebrauchte Einheit der Pferdestärke ist dann

$$1 \text{ PS} = 75 \text{ mkg/sec} = 736 \text{ Watt} \qquad 4c)$$

Neuerdings zieht man es vor, die Leistung in

$$1000 \text{ Watt} = 1 \text{ Kilowatt} \qquad 4d)$$

zu messen, und hat demnach zur Umrechnung

$$1 \text{ Kilowatt} = 102 \text{ mkg/sec} = 1{,}36 \text{ PS} \qquad 4e)$$

Um zu entscheiden, ob die Arbeit als Produkt zweier gerichteter Größen selbst eine gerichtete Größe ist oder nicht, betrachten wir eine krummlinige Bewegung unter dem Einflusse einer gegen die x-Achse um den Winkel $\varkappa$ geneigten Kraft Q mit den Teilkräften

$$X = Q \cos \varkappa, \qquad Y = Q \sin \varkappa \qquad 5)$$

in den Achsenrichtungen. Erweitern wir diese Ausdrücke mit den Rissen

$$dx = ds \cos \vartheta, \qquad dy = ds \sin \vartheta \qquad 5a)$$

des gegen die x-Achse um ϑ geneigten Bahnelementes ds, so erhalten wir die Arbeitsbeträge

$$X\,dx = Q\,ds \cos \varkappa \cos \vartheta, \qquad Y\,dy = Q\,ds \sin \varkappa \sin \vartheta \qquad 5b)$$

der Teilkräfte. Diese lassen sich aber unter Einführung des Winkels $\nu = \varkappa - \vartheta$ zwischen der Kraft und Bahnrichtung vermittels der Beziehung

$$\cos \varkappa \cos \vartheta + \sin \varkappa \sin \vartheta = \cos(\varkappa - \vartheta) = \cos \nu$$

addieren zu

$$X\,dx + Y\,dy = Q\,ds \cos \nu \qquad 6)$$

Die Arbeitssumme der beiden Teilkräfte ist hiernach gleich der Arbeit des in die Bahnrichtung fallenden Anteils der Gesamtkraft, woraus wiederum folgt, daß der senkrecht zur Bahn stehende Kraftanteil $Q \sin \nu$ keine Arbeit leistet, da ihm kein dazu nötiger Weg zukommt.

Gehen wir dagegen von den Teilkraftgleichungen 3) § 23

$$X = m\ddot{x}, \qquad Y = m\ddot{y} \qquad 7)$$

aus und erweitern sie mit dx und dy, so ergibt die Addition

$$X\,dx + Y\,dy = m(\ddot{x}\,dx + \ddot{y}\,dy), \qquad 7a)$$

oder wegen

$$\ddot{x}\,dt = dv_x, \quad \ddot{y}\,dt = dv_y, \quad dx = v_x\,dt, \quad dy = v_y\,dt$$

$$X\,dx + Y\,dy = m(v_x\,dv_x + v_y\,dv_y) = m v\,dv \qquad 8)$$

und nach Vereinfachung mit 6)

$$Q\,ds\cos\nu = m v\,dv = dL \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9)$$

Hieraus erkennen wir, daß die Arbeitssumme der Teilkräfte in der Tat die Gesamtarbeit der Kraft selbst darstellt, die wiederum zur Vermehrung der Wucht der bewegten Masse dient. Die algebraische Addition der Arbeitsbeträge in verschiedenen, hier zu einander senkrechten Richtungen ist aber nur möglich, wenn die Arbeit eine skalare Größe ist. Das gilt natürlich auch für die Leistung. Außerdem ersieht man, daß die vorstehende Betrachtung ohne weiteres auch für die gezwungene Bewegung gilt, da der senkrecht zur Zwangsbahn stehende Bahndruck ebenso wie die Normalkraft $Q\sin\nu$ keine Arbeit leistet und darum in der Arbeitsgleichung 9) nicht auftreten kann.

Schließlich sei noch bemerkt, daß im Zustande des Gleichgewichtes unter Wegfall des Anlaufes $dv = 0$, sowie in der Ruhelage mit $v = 0$ aus 8)

$$dL = X\,dx + Y\,dy = Q\,ds\cos\nu = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 10)$$

hervorgeht, was auf einen Scheitelwert der Arbeit hindeutet, der für $\nu = 90^0$, d. h. für eine zur Bahn des Massenpunktes in dieser Lage senkrechten Kraftrichtung eintritt. Wirkt bei einer kleinen Verschiebung ds aus der Gleichgewichtslage mit den Achsenrissen dx und dy die Kraft derselben entgegen, also verzögernd, so strebt der ausgelenkte Massenpunkt der Ruhelage wieder zu. Wirkt sie aber beschleunigend, also in der Richtung der Auslenkung, so entfernt er sich immer weiter von der Ruhelage. Im ersteren Fall sprechen wir von einem stabilen Gleichgewicht, im andern vom labilen Gleichgewicht des Massenpunktes.

1. Beispiel. Die obere und untere Ruhelage eines Kreispendels Abb. 76 erfüllen offenbar die vorstehenden Bedingungen des Gleichgewichts, da in ihnen die auf den Massenpunkt wirkende Schwere, d. h. sein Gewicht senkrecht zur Bahn steht und durch den Bahndruck aufgehoben wird. Im Falle einer Auslenkung $s = l\varphi$, also $ds = l\,d\varphi = v\,dt$ aus den Ruhelagen A und B ist für den oberen Punkt A' der Winkel der Kraft $Q = mg$ mit der Bahn $\nu = 90 - \varphi$, für den unteren Punkt B' aber $\nu = 90 + \varphi$, womit dann 9) mit $dv = l\ddot\varphi\,dt$ übergeht

$$\left.\begin{array}{l}\text{für } A' \text{ in } l\ddot\varphi = g\sin\varphi \\ \text{für } B' \text{ in } l\ddot\varphi = -g\sin\varphi\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 11)$$

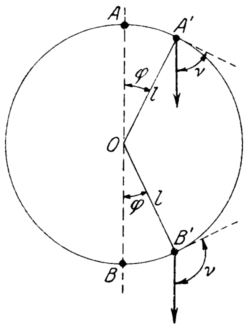

Abb. 76.

Die zweite dieser Formeln mit negativem Anlauf ist die gewöhnliche, in § 17 ausführlich behandelte Pendelgleichung und liefert Schwingungen um die stabile Ruhelage B, die erste dagegen führt auf eine dauernde wachsende Entfernung von der Lage A, die darum als labil anzusprechen ist. Man übersieht leicht, daß man auch diese Bewegung durch Einführung des Winkels $A'OB = 180^0 - \varphi$ an Stelle von φ als Schwingung um die untere Lage darstellen kann, die nach der Zahlentafel in § 17 beim Verlassen von A ohne Anfangslauf eine unendlich große Dauer besitzt. Der Anfangsverlauf der Bewegung von A' wird besonders deutlich für sehr kleine Ausschläge mit $\sin\varphi \sim \varphi$, womit wir für die erste Formel 11)

$$l\ddot{\varphi} = g\varphi \quad \text{11a)}$$

schreiben dürfen. Deren Lösung ist mit $g = l\alpha^2$ und den Beiwerten C und D

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= C e^{\alpha t} + D e^{-\alpha t} \\ \dot{\varphi} &= \alpha (C e^{\alpha t} - D e^{-\alpha t}) \end{aligned}\right\} \quad \text{11b)}$$

Ist für $t = 0$, $\varphi = \varphi_0$ und $\dot{\varphi} = 0$, so folgt daraus $C = D = \frac{\varphi_0}{2}$, also

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 \frac{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}{2} = \varphi_0 \operatorname{Cof} \alpha t \\ \dot{\varphi} &= \alpha\varphi_0 \frac{e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}}{2} = \alpha\varphi_0 \operatorname{Sin} \alpha t \end{aligned}\right\}, \quad \text{11c)}$$

woraus das dauernde Anwachsen des Ausschlages φ bzw. $l\varphi$ unmittelbar hervorgeht.

2. Beispiel. Eine lotrechte feste Wand sei dem wagerechten dauernden Anprall einer großen Zahl kleiner Massen ausgesetzt, die alle mit demselben Lauf v herankommen und ohne Einbuße an Wucht wieder zurückprallen. Dann besteht für den Anprall eines Massenelementes dm die Beziehung

$$dQ = dm \frac{dv}{dt} = \frac{dm}{dt} dv, \quad \text{12)}$$

in der jetzt $dm : dt$ die in der Zeiteinheit auftreffende Masse bedeutet, die im sog. Dauer- oder Beharrungszustand als beständig anzusehen ist. Da ferner der Lauf jedes Massenteilchens sich beim Anprall gerade umkehrt, also von $-v$ in $+v$ übergeht, so wird aus 12)

$$Q = \frac{dm}{dt} \int_{-v}^{+v} dv = 2 \frac{dm}{dt} v. \quad \text{12a)}$$

Treffen in der Zeiteinheit (Sekunde) gerade n Massen m auf die Wand, so üben diese

$$\frac{dm}{dt} = n \cdot m \quad \text{12b)}$$

eine Kraft

$$Q = 2 \cdot n \cdot mv \quad \text{12c)}$$

aus. Das ist z. B. angenähert der Fall bei einer großen Anzahl kurzer Hammerschläge gegen einen Körper, die wie eine dauernd wirkende Kraft demselben einen beständigen Anlauf erteilen.

Betrachten wir andererseits den von den auftreffenden Massen mit der Dichte δ erfüllten Raum $dV = F ds$ von der Wandfläche F, so ist

$$dm = \delta \cdot F ds = \frac{\gamma}{g} F ds, \qquad \frac{dm}{dt} = \frac{\gamma}{g} F v \quad \text{13)}$$

und nach Einsetzen in 12a), wenn man berücksichtigt, daß nur die Hälfte der Teilchen in Rechnung zu setzen ist, da dieselbe Kraft auch auf der andern Seite ausgeübt wird,

$$Q = \frac{\gamma}{g} F v^2, \quad \text{13a)}$$

oder nach Division mit F

$$p = \frac{Q}{F} = \frac{\gamma}{g} v^2 = 2 \frac{\gamma v^2}{2g}. \quad \text{13b)}$$

Wir erhalten also als Wirkung des senkrechten Anpralles einer großen Anzahl den Raum vor einer Platte erfüllenden Massenteilchen einen Flächendruck auf dieselbe, welcher der Wucht der in der Raumeinheit vorhandenen Masse verhältnisgleich ist. Von dieser

Vorstellung macht man bei Aufstellung der sog. kinetischen Gastheorie Gebrauch, welche das Gas als eine ungeheure Zahl sehr kleiner, wirr durcheinander bewegter Körper betrachtet.

§ 26. Die Arbeit bei der Wechselwirkung zweier Massenpunkte. Stehen mit oder ohne Vermittlung des Zentralkörpers zwei Massen m' und m'' miteinander in Wechselwirkung $\pm Q$, so gelten für beide die Gleichungen des § 24:

$$\left.\begin{aligned} -Q\,ds'\cos\nu' &= -X\,dx' - Y\,dy' = m'v'\,dv' \\ Q\,ds''\cos\nu'' &= X\,dx'' + Y\,dy'' = m''v''\,dv'' \end{aligned}\right\}, \quad \ldots \quad 1)$$

aus denen sich durch Addition ergibt:

$$\begin{aligned} Q\,[ds''\cos\nu'' - ds'\cos\nu'] &= X(dx'' - dx') + Y(dy'' - dy') \\ &= m'v'\,dv' + m''v''\,dv'' \quad \ldots\ldots \quad 1\,\text{a}) \end{aligned}$$

Hierin sind aber nach Abb. 77:

$$dx'' - dx' = dx, \quad dy'' - dy' = dy \quad . \; 2)$$

die relativen Verschiebungen der beiden Massenpunkte in den Achsenrichtungen und

$$ds''\cos\nu'' - ds'\cos\nu' = dr \quad . \; 2\,\text{a})$$

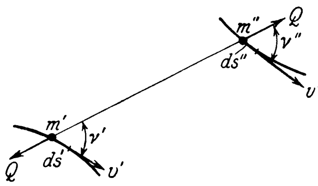

Abb. 77.

die Änderung ihres Abstandes r, so daß wir auch an Stelle von 1a) mit der relativen Arbeit

$$dL = Q\cdot dr = X\,dx + Y\,dy \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

schreiben dürfen

$$dL = m'v'\,dv' + m''v''\,dv'' \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3\,\text{a})$$

oder integriert mit den Anfangswerten v_0' und v_0''

$$L = \frac{m'}{2}(v'^2 - v_0'^2) + \frac{m''}{2}(v''^2 - v_0''^2) \quad \ldots\ldots \quad 3\,\text{b})$$

Zerlegen wir nun den Lauf beider Massen unter Festhaltung des Massenmittelpunktes in je einen Anteil v_r', v_r'' in der Richtung der Verbindungslinie und v_u', v_u'' senkrecht dazu, so ist

$$v'^2 = v_r'^2 + v_u'^2, \qquad v''^2 = v_r''^2 + v_u''^2 \quad \ldots\ldots \quad 4)$$

Außerdem aber folgt aus Gl. 9c) des § 24 durch Differenzieren

$$v_r' = -\frac{m''\,v_r}{m' + m''}, \qquad v_r'' = +\frac{m'\,v_r}{m' + m''}, \quad \ldots \quad 4\,\text{a})$$

wo $v_r = v_r'' - v_r'$ den Relativlauf beider Massenpunkte in der r-Richtung bedeutet. Andererseits haben wir mit dem Drehwert ω des Strahles r um den Massenmittelpunkt unter Benutzung der Formeln 10)

$$v_u' = r'\omega = -\frac{m''\,v_u}{m' + m''}, \qquad v_u'' = r''\omega = +\frac{m'\,v_u}{m' + m''}, \quad . \; 4\,\text{b})$$

unter $v_u = r\omega = v_u'' - v_u'$ den Relativlauf der Massenpunkte gegeneinander senkrecht zur Verbindungslinie verstanden. Setzen wir die

Ausdrücke 4) mit 4a) und 4b) in Gl. 3b) ein und beachten, daß nunmehr durch

$$v_r^2 + v_u^2 = v^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4\text{c})$$

der gesamte Relativlauf v bestimmt ist, so wird daraus

$$L = \frac{m' m''}{m' + m''} \frac{v^2 - v_0^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

d. h. die Relativarbeit hat bei Festhaltung des Massenmittelpunktes auch nur eine Änderung der relativen Wucht zur Folge.

Ist dagegen der Massenmittelpunkt selbst in Bewegung mit dem Lauf $w = \sqrt{w_r^2 + w_u^2}$, so treten bei ungeänderter Gl. 4) an Stelle von 4a) und 4b)

$$\left.\begin{aligned} v_r' &= w_r - \frac{m'' v_r}{m' + m''}, \qquad v_r'' = w_r + \frac{m' v_r}{m' + m''} \\ v_u' &= w_u - \frac{m'' v_u}{m' + m''}, \qquad v_u'' = w_u + \frac{m' v_u}{m' + m''} \end{aligned}\right\}, \quad \ldots \quad 6)$$

woraus

$$\left.\begin{aligned} m' v_r' + m'' v_r'' &= (m' + m'') w_r \\ m' v_u' + m'' v_u'' &= (m' + m'') w_u \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 6\text{a})$$

also wegen der Unveränderlichkeit der links stehenden Summen der Prallteile in der Strahlrichtung und senkrecht dazu die Beständigkeit von w_r und w_u, d. h. eine gleichförmige Bewegung des Massenmittelpunktes folgt. Weiter erhalten wir durch Quadrieren und Addieren von 6) mit 4) und 4a)

$$\left.\begin{aligned} v'^2 &= w^2 - \frac{2 m'' (w_r v_r + w_u v_u)}{m' + m''} + \frac{m''^2 v^2}{(m' + m'')^2} \\ v''^2 &= w^2 + \frac{2 m' (w_r v_r + w_u v_u)}{m' + m''} + \frac{m'^2 v^2}{(m' + m'')^2} \end{aligned}\right\}, \quad \ldots \quad 6\text{b})$$

mithin

$$m' v'^2 + m'' v''^2 = (m' + m'') w^2 + \frac{m' m''}{m' + m''} v^2 . \quad \ldots \quad 6\text{c})$$

Führen wir diesen Ausdruck in die Arbeitsgleichung 3b) ein, so nimmt sie wiederum die Gestalt 5) an, da alle mit w^2 behafteten Glieder sich gegenseitig wegheben. Gl. 5) gilt demnach u. a. auch für die Anfangsbewegung eines von der bewegten Erde weggeschleuderten Körpers gegen diese selbst. Da in diesem Falle die Körpermasse m'' stets als sehr klein gegen die Masse m' des Erdkörpers anzusehen ist, so dürfen wir unter Vernachlässigung von $m'' : m'$

$$L = \frac{m''}{1 + \frac{m''}{m'}} \cdot \frac{v^2 - v_0^2}{2} = \frac{m''}{2} (v^2 - v_0^2) \quad \ldots\ldots \quad 7)$$

für alle Relativbewegungen an der Erdoberfläche gegen diese mit hinreichender Genauigkeit setzen und damit bei solchen Untersuchungen von der Erdbewegung selbst völlig absehen.

1. Beispiel. Im Falle des Abfeuerns eines Geschützes oder Gewehrs befindet sich sowohl das Rohr wie das Geschoß anfänglich im Ruhezustand, also ist $v_0 = 0$ und wegen 6a) $m' v_r' + m'' v_r'' = 0$, wie schon im Beispiel des § 24 bemerkt wurde. Die relative Arbeit dagegen ist hier durch den in Abb. 78 dargestellten Verlauf der Pulverdruckkurve gegeben, die man durch Zusammendrücken von Kupferzylindern durch kleine Kolben erhält, welche in seitlichen Anbohrungen A an verschiedenen Stellen des Rohres beweglich sind. Ist p kg/cm² der Pulverdruck, F der Geschoß- und Rohrquerschnitt, so ist die treibende Kraft $Q = Fp$ und die Arbeit auf dem Wege s im Rohr, der vermöge des Rücklaufes als Relativweg anzusehen ist

$$L = \int_0^s Q\,ds = F\int_0^s p\,ds\,, \quad . \quad . \quad 8)$$

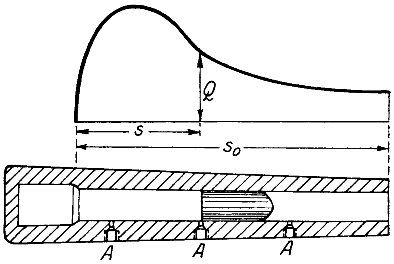

Abb. 78.

während die Gesamtarbeit sich durch Integration über den ganzen Geschoßweg s_0 im Rohre ergibt. Man kann diese auch durch die Erhebung h des nach Abb. 75 pendelnd aufgehängten Rohres ermitteln und erhält dann aus dem Vergleich von 6b) und der Gl. 7a) § 24 mit $w = 0$ und $v_r' = v'$, $v_r'' = v''$ und Einsetzen in 3b)

$$L = (m' + m'')\frac{m'}{m''}gh\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8a)$$

worin m' die Rohrmasse und m'' die Geschoßmasse bedeutet.

Die Integration des Ausdruckes 3) für die Arbeit ist offenbar nur möglich, wenn die Kraft Q als Funktion des Abstandes r der beiden Massen oder wegen

$$Q = \frac{dL}{dr}$$

als Ableitung einer Funktion von r nach dem Abstande aufgefaßt werden kann. Wir wollen diese sog. Kräftefunktion oder das Potential mit $-U$ bezeichnen also

$$Q = -\frac{dU}{dr} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9)$$

setzen und erhalten dann für die Arbeit

$$dL = -dU = X\,dx + Y\,dy\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9a)$$

oder wegen $x^2 + y^2 = r^2$ auch

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9b)$$

für die Teilkräfte in den Achsenrichtungen

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Y = -\frac{\partial U}{\partial y}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9c)$$

Wegen der Willkür der Lage des Achsenkreuzes ergeben sich demnach im Falle des Bestehens einer Kräftefunktion die Teilkräfte als deren partielle Ableitungen nach der entsprechenden Richtung. Da ferner

$$L = \int_{r_0}^{r} Q\,dr = U(r_0) - U(r) = U_0 - U \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 10)$$

ist, worin die Funktionswerte U_0 und U nur durch den Anfangs- und Endabstand der Massen bestimmt sind, so erhalten wir durch Einsetzen in 3b) mit den Abkürzungen

$$m' v_0'^2 + m'' v_0''^2 = 2\,T_0, \qquad m' v'^2 + m'' v''^2 = 2\,T \quad . \; . \quad 10\text{a})$$

für die gesamte Wucht der Massengruppe entsprechend den Abständen r_0 und r

$$U + T = U_0 + T_0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 11)$$

wonach die Summe $U + T$ bei der Bewegung der beiden Massen ihren Wert dauernd behält. Im Gegensatz zur Wucht oder kinetischen Energie T bezeichnen wir nun die nur von der gegenseitigen Lage der Massen abhängige Größe U als Energie der Lage, potentielle Energie oder kurz als Drang; die beständige Summe 11) als den Energieinhalt oder als Macht der Massengruppe. Im Falle des Bestehens einer Kräftefunktion (Potential) bleibt also die Macht einer Gruppe von zwei gegeneinander beweglichen Massen ungeändert, während die Änderungen von Drang und Wucht sich gegenseitig ausgleichen.

Unsere Untersuchungen gelten natürlich auch für die Bewegung einer einzelnen Masse, die wir uns dann relativ zur festgehaltenen andern zu denken haben. Die Festhaltuug erreichen wir am einfachsten dadurch, daß wir die zugehörige Masse beliebig anwachsen lassen, also in der Formel 5) nach Kürzung mit m'' diese unendlich groß machen, wodurch die Wuchtänderung sich auf

$$L = \frac{m'}{2}(v^2 - v_0^2), \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 5\text{a})$$

d. h. auf diejenige der bewegten Masse allein beschränkt.

2. Beispiel. Sind die beiden nur in ihrer Verbindungslinie beweglichen Massen durch eine selbst masselos gedachte Schraubenfeder miteinander gekoppelt, deren spannungslose Länge a sein möge, so wird mit einer Federungszahl α^2 die zwischen ihnen wirksame Kraft

$$Q = -\alpha^2 (r - a) = -\frac{dU}{dr}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 12)$$

also

$$U = \frac{\alpha^2 (r-a)^2}{2}, \qquad U_0 = \frac{\alpha^2 (r_0 - a)^2}{2}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 12\text{a})$$

während die Wuchtänderung der ganzen Massengruppe nach 5) sich zu

$$T - T_0 = \frac{m' m''}{m' + m''} \, \frac{v_r^2 - v_{r_0}^2}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 12\text{b})$$

ergibt. Mithin erhalten wir für die Macht nach 11) unter Weglassung des Nenners 2

$$\alpha^2 (r-a)^2 + \frac{m' m''}{m' + m''} v_r^2 = \alpha^2 (r_0 - a)^2 + \frac{m' m''}{m' + m''} v_{r_0}^2 . \; . \; . \; . \quad 13)$$

Wollen wir über die Bewegung der Einzelmassen Aufschluß gewinnen, so müssen wir auf die Kraftgleichungen zurückgreifen, die für die Abstände r' und r'' der Massen m' und m'' vom Masssenmittelpunkt lauten

$$\alpha^2 (r - a) = m' \ddot{r}', \qquad -\alpha^2 (r - a) = m'' \ddot{r}'' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 14)$$

Da ferner nach Gl. 9c) § 24

$$m'' r = -(m' + m'') r', \qquad m' r = (m' + m'') r'' \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 15)$$

ist, so erhalten wir an Stelle von 14) auch

$$\left.\begin{aligned} \ddot{r}' + \alpha^2 \frac{m' + m''}{m' m''} \left(r' + \frac{m'' a}{m' + m''}\right) = 0 \\ \ddot{r}'' + \alpha^2 \frac{m' + m''}{m' m''} \left(r'' - \frac{m' a}{m' + m''}\right) = 0 \end{aligned}\right\}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 14a)$$

also zwei Schwingungen um die Mittellagen

$$r_0' = -\frac{m'' a}{m' + m''}, \qquad r_0'' = \frac{m' a}{m' + m''} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 15a)$$

mit der gemeinsamen Dauer

$$t_0 = \frac{2\pi}{\alpha} \sqrt{\frac{m' m''}{m' + m''}} = \frac{2\pi}{\alpha_0} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 14b)$$

Die Schwingungsausschläge selbst sind

$$\left.\begin{aligned} r' &= r_0' + A_1 \cos \alpha_0 t + B_1 \sin \alpha_0 t \\ r'' &= r_0'' + A_2 \cos \alpha_0 t + B_2 \sin \alpha_0 t \end{aligned}\right\}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 16)$$

worin wegen 15) und 15a)

$$A_1 m' + A_2 m'' = 0, \qquad B_1 m' + B_2 m'' = 0$$

sein muß, so daß nur noch zwei Beiwerte durch Anfangsbedingungen zu bestimmen sind. Ist z. B. für $t = 0$, $r' = r_1$, $\dot{r}' = 0$, so folgt

$$A_1 = r_1 - r_0', \qquad A_2 = \frac{m'}{m''}(r_0' - r_1), \qquad B_1 = B_2 = 0,$$

und es wird aus 16)

$$\left.\begin{aligned} r' &= r_0' + (r_1 - r_0') \cos \alpha_0 t \\ r'' &= r_0'' + (r_0' - r_1) \frac{m'}{m''} \cos \alpha_0 t \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 16a)$$

Beide Massen befinden sich daher zu Beginn in Ruhe. Durch Abzug ergibt sich weiter aus beiden Formeln 16a) mit Rücksicht auf 15) und 15a) für die Relativschwingung

$$r - a = (r_0' - r_1) \frac{m' + m''}{m''} \cos \alpha_0 t \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 16b)$$

von gleicher Dauer und Phase wie die Einzelschwingungen. Man erkennt leicht, daß sie der Arbeitsformel 13) mit $v_r = \dot{r}$ und $v_{r_0} = 0$ genügt.

VI. Die allgemeine Schwere.

§ 27. Das Schwerefeld eines Massenpunktes. Aus den in § 10 besprochenen Bewegungsgesetzen der Himmelskörper, die angesichts der Kleinheit ihrer Abmessungen gegenüber ihren Entfernungen voneinander mit großer Annäherung als Massenpunkte angesehen werden dürfen, haben wir geschlossen, daß sie Zentralanläufen unterworfen sind, welche im verkehrten Verhältnis des Quadrates ihrer gegenseitigen Abstände r stehen. Daraus folgt unmittelbar eine Anziehungskraft der Masse m'' auf den Körper mit der Masse m'

$$P' = + k'' \frac{m'}{r^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 1)$$

in der Richtung von r, worin k'' nur von den Eigenschaften des Körpers m'' abhängt. Andrerseits erfährt aber auch diese Masse eine Anziehungskraft

$$P'' = -k' \frac{m''}{r^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 1\text{a})$$

seitens der Masse m', wobei k' wiederum nur von deren Eigenschaften bedingt sein kann. Da nach dem Satze der Wechselwirkung $P' + P'' = 0$, also

$$k' m'' - k'' m' = 0$$

sein muß, so folgt daraus die Gleichheit des Bruches

$$\frac{k'}{m'} = \frac{k''}{m''} = k \quad \ldots \ldots \ldots \quad 2)$$

für beide Massen und darum wegen der erfahrungsmäßigen Allgemeingültigkeit der Bewegungsgesetze in der ganzen, unserer Beobachtung zugänglichen Welt für alle in derselben enthaltenen Massen. Eine solche Größe, deren Zahlenwert nur von den gewählten Maßeinheiten abhängt, nennt man gewöhnlich eine universelle Konstante, wofür wir kürzer Weltwert sagen wollen. Den vorliegenden Weltwert nennt man gewöhnlich Gaußsche Zahl. Unter Einführung derselben in die Kraftausdrücke 1) bzw. 1a) haben wir dann mit $P' = -P'' = -P$ für die gegenseitige Anziehung der Massen m' und m''

$$P = -k \frac{m' m''}{r^2}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 3)$$

woraus sich dann die Anläufe beider Massen

$$q' = \frac{P'}{m'} = k \frac{m''}{r^2}, \qquad q'' = \frac{P''}{m''} = -k \frac{m'}{r^2} \quad \ldots \quad 3\text{a})$$

und der Relativanlauf beider gegeneinander zu

$$q = q'' - q' = -k \frac{m' + m''}{r^2} = P \frac{m' + m''}{m' m''} \quad \ldots \quad 3\text{b})$$

berechnet. Von der letzteren Formel ist immer dann Gebrauch zu machen, wenn man sich eine der beiden Massen festgehalten denkt und die Relativbewegung der anderen in bezug auf diese ins Auge faßt, während man bei der Verfolgung der wahren Bewegungen etwa unter Festhaltung der Massenmittelpunkte die Gleichungen 3) und 3a) benutzen wird. Diese lehren also, daß jeder Massenpunkt den Ausgang eines strahlenförmig nach allen Seiten des ganzen Raumes erfüllenden Anlauffeldes darstellt, welches kurz als Schwerefeld bezeichnet werden mag und völlig durch die im Ausgang befindliche Masse bestimmt ist. An Stelle des Anlaufes an einer Stelle des Feldes spricht man wohl auch von der dort wirksamen Feldstärke, die vermöge ihrer Abhängigkeit vom Fahrstrahl auf konzentrischen Kugeln um den Massenpunkt denselben Wert besitzt.

Erinnern wir uns, daß die Dimension des Anlaufes $q = [l \cdot t^{-2}]$ war, so dürfen wir die Stärke des Schwerefeldes einer Masse dann zur Festsetzung ihrer Dimension benutzen, wenn wir den Weltwert k als reine Zahl ansehen. Alsdann folgt sofort für die gesuchte Dimension

$$m = [l^3 t^{-2}] \quad \text{. . . . . 4)}$$

Nach dem dritten Keplerschen Gesetze Gl. 13a) § 10 ist nun

$$-q r^2 = 4\pi^2 \frac{a^3}{t^2} \quad \text{. . . . . 5)}$$

unter a die halbe große Achse der Bahnellipse und t die Umlaufszeit eines den Brennpunkt umkreisenden Körpers verstanden. Mit

$$q r^2 = -k m$$

wird daraus also

$$k m = 4\pi^2 \frac{a^3}{t^2} \quad \text{. . . . . 4a)}$$

im Einklang mit 4), so daß die Masse geradezu durch den Umlauf einer gegen sie selbst verschwindenden andern Masse bestimmt ist. Mit dieser schon von Gauß gelegentlich vorgeschlagenen Massenfestsetzung 4), von der man seltsamerweise bislang weder in der Physik, noch in der Technik Gebrauch gemacht hat, würden sich die Dimensionen

der Kraft zu $P = [l^4 t^{-4}]$
des Pralls zu $m v = [l^4 t^{-3}]$
der Arbeit zu $m v^2 = [l^5 t^{-4}]$

ergeben.

Sind zwei Massenpunkte vorhanden, die aufeinander mit der Kraft 3) wirken, so bewegt sich jeder im Schwerefelde des andern und vollzieht demnach je eine Zentralbewegung. Die hierbei geleistete Arbeit ist wegen der reinen Abhängigkeit der Schwerkraft vom Abstande r

$$L = \int_{r_0}^{r} P\,dr = -k m' m'' \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r^2} = k m' m'' \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right] \quad \text{. . . 6)}$$

nur eine Funktion der beiden Endlagen und darf daher nach den Ausführungen des letzten Abschnittes als Unterschied zweier Potentialwerte

$$U = -k \frac{m' m''}{r}, \qquad U_0 = -k \frac{m' m''}{r_0} \quad \text{. . . . . 6a)}$$

aufgefaßt werden. Sie dient zur Veränderung der Wucht beider Massen, für die wir auch unter Einführung der Relativläufe v nach dem Ergebnis des vorigen Abschnittes Gl. 5)

$$k m' m'' \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) = \frac{m' m''}{m' + m''} \frac{v^2 - v_0^2}{2}$$

oder

$$k (m' + m'') \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) = \frac{v^2 - v_0^2}{2} \quad \text{. . . . . . 7)}$$

und nach Differenzieren nach r

$$-k\frac{m'+m''}{r^2}=v\frac{dv}{dr}, \qquad \text{7a)}$$

schreiben können, worin die linke Seite ersichtlich mit dem Relativanlauf 3b) übereinstimmt. Man kann demnach die Bewegung zweier Massenpunkte im gemeinsamen Schwerefeld sowohl als Relativbewegung des einen um den anderen oder auch als Zentralbewegung beider um den Massenmittelpunkt auffassen.

Beispiel. Betrachten wir die Bewegung der Himmelskörper als relativ zueinander, d. h. die der Planeten als Umläufe um die Sonne, die der Monde als Umläufe um die Planeten, so ist stets für den Zentralanlauf der Ausdruck 3b) anzusetzen, mit dem das dritte Keplersche Gesetz 5) übergeht in

$$k(m'+m'')t^2=4\pi^2a^3 \qquad \text{5a)}$$

Ist z. B. m_0 die Sonnenmasse, m_1 und m_2 die Massen zweier Planeten, mit den großen Halbachsen a_1, a_2 und den Umlaufszeiten t_1, t_2, so folgt für jeden desselben

$$k(m_0+m_1)t_1^2=4\pi^2a_1^3$$
$$k(m_0+m_2)t_2^2=4\pi^2a_2^3,$$

also

$$\frac{m_0+m_1}{m_0+m_2}\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^2=\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3. \qquad \text{5b)}$$

Darf ferner die Masse eines der beiden Planeten, etwa m_2 gegen die Sonnenmasse vernachlässigt werden, so bleibt

$$\left(1+\frac{m_1}{m_0}\right)\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^2=\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 \qquad \text{5c)}$$

zur Bestimmung des Verhältnisses $m_1:m_0$. Auf diese Weise wird z. B. das Verhältnis der Erdmasse zur Sonnenmasse ermittelt. Kennt man dieses, so ergibt sich für die Bewegung des Mondes von der Masse m_3 um die Erdmasse m_1, und dieser um die Sonne m_0

$$k(m_1+m_3)t_3^2=4\pi^2a_3^3$$
$$k(m_1+m_0)t_1^2=4\pi^2a_1^3,$$

und nach Division

$$\frac{1+\dfrac{m_3}{m_1}}{1+\dfrac{m_0}{m_1}}\left(\frac{t_3}{t_1}\right)^2=\left(\frac{a_3}{a_1}\right)^3, \qquad \text{5d)}$$

oder unter Vernachlässigung der Erdmasse gegen die der Sonne im Nenner hinreichend genau

$$\frac{m_1}{m_0}\left(1+\frac{m_3}{m_1}\right)\left(\frac{t_3}{t_1}\right)^2=\left(\frac{a_3}{a_1}\right)^3 \qquad \text{5e)}$$

zur Berechnung des Verhältnisses $m_3:m_1$ der Mondmasse zur Erdmasse. Werden schließlich zwei Planeten von den Massen m_1 und m_2 von Monden umkreist, deren Massen m' und m'' gegen die der Planeten vernachlässigt werden dürfen, so dürfen wir auch schreiben

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3=\frac{m_1+m'}{m_2+m''}\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^2\sim\frac{m_1}{m_2}\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^2, \qquad \text{5f)}$$

woraus sich dann das Massenverhältnis zweier Planeten aus den großen Halbachsen und Umlaufszeiten ihrer Monde besonders genau berechnet. Mit diesen Formeln sind die in der letzten Spalte der folgenden Tafel angegebenen Massen und Dichteverhältnisse der Planeten zur Erde aus den voranstehenden Bahnelementen der Planeten und des Erdmondes gewonnen. Darin bedeutet a die mittlere Entfernung vom Zentralkörper im Verhältnis zur Erdbahn und ε die Bahnexzentrizität, t die Umlaufszeit in Jahren, D den Äquatordurchmesser (Erde $= 1$) und t_u die Umdrehungsdauer der Körper um ihre Achsen.

Name	a	ε	t	D	t_u	m	δ
Sonne . . .	0,000	0,0000	0,0000	109,00	$\sim 26^{d}$	333,432	0,26
Merkur . .	0,387	0,2056	0,2408	0,37	?	0,06	1,10
Venus . . .	0,723	0,0068	0,6152	0,97	?	0,82	0,91
Erde . . .	1,000	0,0168	1,0000	1,00	$23^{h}\,56'\,4''$	1,00	1,00
Mars . . .	1,523	0,0933	1,8808	0,54	$24^{h}\,37'\,23''$	0,11	0,69
Jupiter . .	5,203	0,0483	11,8620	11,14	$9^{h}\,50'$	318,00	0,25
Saturn . . .	9,539	0,0559	29,4560	9,40	$10^{h}\,14'$	95,00	0,13
Uranus . .	19,187	0,0463	84,0130	4,00	?	14,60	0,23
Neptun . .	30,060	0,0090	164,6160	4,30	?	17,30	0,22
Erdmond .	1 : 389	0,0550	0,0746	0,27	$27{,}32^{d}$	0,0124	0,62

§ 28. **Das Schwerefeld kugelförmiger Massen.** Sind mehrere Massenpunkte $m, m', m''\ldots$ mit den Achsenabständen $xy, x'y', x''y'', \ldots$ und den Abständen $r', r''\ldots$ vom ersten vorhanden, Abb. 79. so können wir die Kraftwirkungen auf diesen

$$P' = -k\frac{mm'}{r'^2}, \qquad P'' = -k\frac{mm''}{r''^2} \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

nach den Achsenrichtungen in die Teilkräfte

$$\left.\begin{aligned} X' &= -k\frac{mm'}{r'^2}\frac{x-x'}{r'}, & X'' &= -k\frac{mm''}{r''^2}\frac{x-x''}{r''} \\ Y' &= -k\frac{mm'}{r'^2}\frac{y-y'}{r'}, & Y'' &= -k\frac{mm''}{r''^2}\frac{y-y''}{r''} \end{aligned}\right\} \quad . \quad 1\text{a})$$

zerlegen. Aus

$$r'^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2, \qquad r'dr' = (x-x')\,dx + (y-y')\,dy$$

folgt aber

$$\frac{x-x'}{r'} = \frac{\partial r'}{\partial x}, \qquad \frac{y-y'}{r'} = \frac{\partial r'}{\partial y},$$

mithin auch

$$\left.\begin{aligned} X' &= -\frac{kmm'}{r'^2}\frac{\partial r'}{\partial x} = kmm'\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r'}\right) \\ Y' &= -\frac{kmm'}{r'^2}\frac{\partial r'}{\partial y} = kmm'\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r'}\right) \end{aligned}\right\}, \quad 2)$$

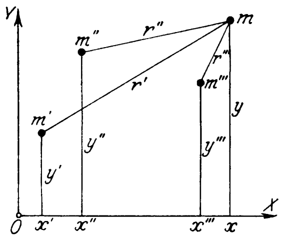

Abb. 79.

oder mit den Potentialen

$$-\frac{kmm'}{r'} = U', \qquad -\frac{kmm''}{r''} = U'' \quad \ldots\ldots \quad 3)$$

$$\left.\begin{aligned} X' &= -\frac{\partial U'}{\partial x}, & X'' &= -\frac{\partial U''}{\partial x} \\ Y' &= -\frac{\partial U'}{\partial y}, & Y'' &= -\frac{\partial U''}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 2\text{a})$$

Addieren wir alle gleichgerichteten Teilkräfte, so erhalten wir die Achsenanteile

$$\left.\begin{aligned} X = \Sigma X' = -\sum \frac{\partial U'}{\partial x} = -\frac{\partial \Sigma U'}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} \\ Y = \Sigma Y' = -\sum \frac{\partial U'}{\partial y} = -\frac{\partial \Sigma U'}{\partial y} = -\frac{\partial U}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \quad 2\text{b})$$

der Gesamtanziehung aller Massen $m'm''\ldots$ auf m als partielle Ableitungen eines aus der Summierung der Einzelpotentiale hervorgehenden Gesamtpotentials U nach den Achsenabständen der Masse m. Für dieses Gesamtpotential dürfen wir demnach mit 3) schreiben

$$U = -km\left[\frac{m'}{r'} + \frac{m''}{r''} + \ldots\right] = -km\sum \frac{m'}{r'}, \quad . \ . \ . \quad 3\text{a})$$

oder, wenn an Stelle der Massenpunkte $m'm''\ldots$ die Elemente dm' eines ganzen Körpers treten

$$U = -km\int \frac{dm'}{r} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad 3\text{b})$$

Die vorstehende Entwicklung gilt natürlich zunächst nur für eine ebene Verteilung der Massepunkte $m\,m'm''\ldots$ bzw. für eine mit Masse bedeckte Scheibe und einen Massenpunkt m. Sie lassen sich aber sofort auf einen Umdrehungskörper ausdehnen, auf dessen Achse der Massenpunkt m liegt, da alle Körperelemente in gleichem Abstande von der Umdrehungsachse denselben Abstand r von m besitzen und darum auch dieselbe Wirkung auf m ausüben. Wir dürfen mithin in diesem Fall in einem Meridianschnitte des Umdrehungskörpers die auf einen Ring um die Drehachse befindlichen Massenelemente zu dm' zusammenfassen und danach die in 3b) angedeutete Integration durchführen.

1. Beispiel. Ist die Masse $m' = m_0$ gleichförmig auf einer Kugelschale vom Halbmesser a_0 und dem Zentralabstand $OA = r_0$ verbreitet, Abb. 80, so entfällt auf ein Oberflächenelement dF der Kugel die Masse

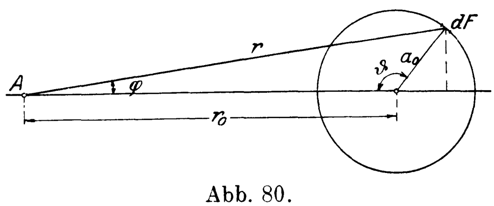

Abb. 80.

$$dm' = \frac{m_0\,dF}{4\pi a_0^2} \quad . \ . \ . \quad 4)$$

Als Flächenelement wählen wir nun einen Ring vom Abstande $a_0 \sin\vartheta$ von der Drehachse und der Breite $a_0 d\vartheta$, also vom Inhalte

$$dF = 2\pi a_0^2 \sin\vartheta\, d\vartheta \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad 5)$$

Mit dem Winkel ϑ berechnet sich aber aus Abb. 80 der Abstand dieses Elementes von A aus

$$\left.\begin{aligned} r^2 &= r_0^2 + a_0^2 - 2 r_0 a_0 \cos\vartheta \\ r\,dr &= r_0 a_0 \sin\vartheta\, d\vartheta \end{aligned}\right\}, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad 5\text{a})$$

also ist auch

$$dF = \frac{2\pi a_0 r\,dr}{r_0} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad 5\text{b})$$

und mit 4)
$$\frac{dm'}{r} = \frac{m_0}{2\,a_0}\frac{dr}{r_0}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 4a)$$

Eingesetzt in 3b) ergibt sich das Potential der Kugelschale für den Massenpunkt m
$$U = -\frac{kmm_0}{2\,a_0 r_0}\int dr, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 6)$$

wobei nur die Verschiedenheit der Integrationsgrenzen für die Lage von m außerhalb oder innerhalb der Schale zu beachten ist. Es ist für den

$$\left.\begin{aligned} &\text{Außenpunkt:}\quad U_a = -\frac{kmm_0}{2\,a_0 r_0}\int\limits_{r_0-a_0}^{r_0+a_0} dr = -\frac{kmm_0}{r_0} \\ &\text{Innenpunkt:}\quad U_i = -\frac{kmm_0}{2\,a_0 r_0}\int\limits_{a_0-r_0}^{a_0+r_0} dr = -\frac{kmm_0}{a_0} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad 6a)$$

Das Potential hat demnach im Innern der Kugelschale überall denselben Wert und stimmt für einen äußeren Punkt mit dem Potential der im Kugelmittel vereinigten Masse der Schale überein.

Für die Anziehungskraft der Kugelschale auf den Massenpunkt m erhalten wir dann
$$\left.\begin{aligned} P_a &= -\frac{\partial U_a}{\partial r_0} = -\frac{kmm_0}{r_0^2} \\ P_i &= -\frac{\partial U_i}{\partial r_0} = 0 \end{aligned}\right\}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 7)$$

so daß also die Kugelschale auf einen inneren Punkt gar nicht, auf einen äußeren Massenpunkt dagegen ebenso wirkt, als wenn ihre Gesamtmasse im Kugelmittel vereinigt wäre. Denken wir uns nun die Himmelskörper aus derartigen Kugelschalen zusammengesetzt, wobei indessen die Dichte sich längs des Halbmessers ändern kann, so dürfen wir sie für jede Wirkung nach außen als reine Massenpunkte ansehen, womit die frühere Behandlung der Planetenbewegung ihre nachträgliche Rechtfertigung erfährt.

Wichtig ist noch die Bemerkung, daß das Potential beim Durchgang durch die Schale selbst, also bei $r_0 = a_0$ stetig bleibt, während die Kraft
$$\text{von } P_i = 0 \quad \text{auf } P_a = -\frac{kmm_0}{a_0^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 7a)$$
dort plötzlich ansteigt, um danach nach Gl. 7) nach außen abzunehmen, wie dies aus Abb. 81 ersichtlich ist.

Haben wir eine Vollkugel von gleichförmiger Dichte δ vor uns, so geht die Anziehung auf einen inneren Punkt im Abstand r_0 nur von der innerhalb dieses Punktes liegenden Vollkugel von der Masse
$$m' = \tfrac{4}{3}\pi r_0^3 \delta$$
aus und nimmt den Betrag
$$P_i' = -\frac{kmm'}{r_0^2} = -k\frac{4}{3}\delta\pi m r_0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 7b)$$
an, steigt also von der Kugelmitte bis zur Oberfläche $r_0 = a_0$ linear an, während das Potential mit dem Massenelement $dm' = 4\pi\delta r^2 dr$ der unendlich dünnen Kugelschalen zwischen $r_0 < r < a_0$ sich zu

$$U_i' = -\frac{kmm'}{r_0} - km\int\limits_{r_0}^{a_0}\frac{dm'}{r}$$
$$U_i' = -2\pi\delta km\left(a_0^2 - \frac{r_0^2}{3}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 6b)$$

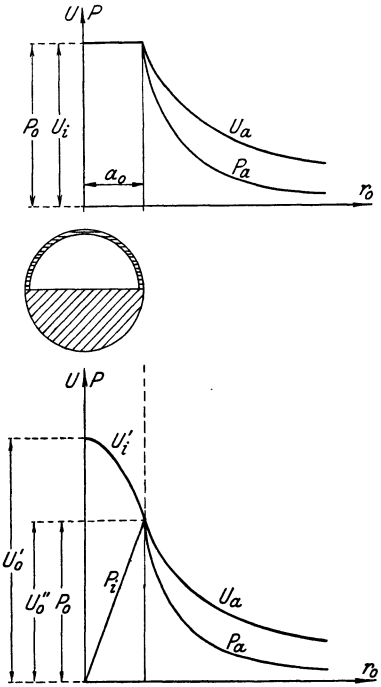

Abb. 81 u. 82.

berechnet, also absolut genommen eine Abnahme von der Mitte bis zur Oberfläche zwischen den Werten

$$\left.\begin{aligned} U_0' &= -2\pi\delta k m a_0^2 \\ \text{bis}\quad U_0'' &= -\tfrac{4}{3}\pi\delta k m a_0^2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad 6\text{c})$$

aufweist, vgl. Abb. 82. An dem Verlaufe beider Größen außerhalb der Kugel gegen die Kugelschale von gleicher Masse wird hierbei nichts geändert. Die Berechnung der Kraft und des Potentials bietet auch keine Schwierigkeiten, wenn die Dichte δ

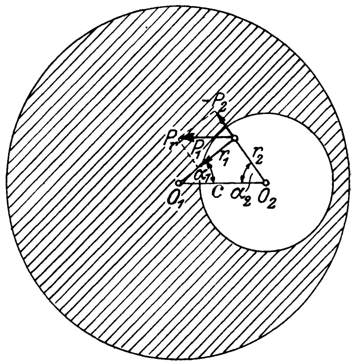

Abb. 83.

längs des Halbmessers gesetzmäßig von innen nach außen zu- oder abnimmt. Alsdann wird für innere Punkte

$$\left.\begin{aligned} P_i' &= \frac{4\pi k m}{r_0^2}\int_0^{r_0} \delta r^2 dr \\ U_i' &= -\frac{4\pi k m}{r_0}\int_0^{r_0} \delta r^2 dr - 4\pi k m \int_{r_0}^{a_0} \delta r\, dr \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8)$$

2. Beispiel. Die Wirkung einer Kugelschale auf einen Massenpunkt ergibt sich auch ohne Zuhilfenahme des Potentials durch unmittelbare Berechnung der in die Richtung von r_0 fallenden Teilkraft im Anschluß an Abb. 80. Diese Teilkraft ist mit 4)

$$P = -k m \int \frac{dm' \cos\varphi}{r^2} = -\frac{k m m_0}{4\pi a_0^2}\int \frac{dF \cos\varphi}{r^2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9)$$

oder wegen

$$\cos\varphi = \frac{r^2 + r_0^2 - a_0^2}{2 r_0 r}$$

und 5b)

$$P = -\frac{k m m_0}{4 r_0^2 a_0}\int \left(1 + \frac{r_0^2 - a_0^2}{r^2}\right) dr, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9\text{a})$$

woraus dann mit den Integrationsgrenzen $r_0 - a_0$ und $r_0 + a_0$ für den äußeren Punkt, sowie $a_0 - r_0$ und $a_0 + r_0$ für den inneren die oben ermittelten Werte 7) hervorgehen.

3. Beispiel. Enthält eine gleichförmig mit Masse erfüllte Kugel einen ebenfalls kugelförmigen Hohlraum, so dürfen wir diesen als eine Vollkugel mit der negativen Dichte δ der Vollkugel ansehen und erhalten dann für einen Punkt im Hohlraum mit den Abständen r_1 und r_2 von den beiden Kugelmitten O_1 und O_2, Abb. 83, nach 7b) die beiden Kräfte

$$P_1 = -\tfrac{4}{3} k\delta\pi m r_1, \qquad P_2 = +\tfrac{4}{3} k\delta\pi m r_2 \quad \ldots\ldots \quad 10)$$

Mit den Neigungswinkeln α_1 und α_2 der Strahlen r_1 und r_2 gegen die Zentrale $O_1 O_2 = c$ folgen dann die Kräfte in deren Richtung und senkrecht dazu

$$\left.\begin{aligned} P_x &= P_1 \cos\alpha_1 - P_2 \cos\alpha_2 = -\frac{4\pi}{3} k\delta m (r_1 \cos\alpha_1 + r_2 \cos\alpha_2) = -\frac{4\pi k \delta m c}{3} \\ P_y &= P_1 \sin\alpha_1 + P_2 \sin\alpha_2 = -\frac{4\pi}{3} k\delta m (r_1 \sin\alpha_1 - r_2 \sin\alpha_2) = 0 \end{aligned}\right\} \quad 10a)$$

Wir erhalten also im Innern der kugelförmigen Höhlung überall dieselbe, nur durch den Abstand der Kugelmitten bestimmte Kraft in der Richtung dieses Abstandes. Der Hohlraum in einer Vollkugel stellt demnach ein gleichförmiges Schwerefeld dar.

4. Beispiel. Zur Bestimmung der Masse m_0 des Erdballs, die nach den Ausführungen des vorigen Abschnittes der Massenbestimmung aller andern Weltkörper zugrunde liegt, bedient man sich zweckmäßig des Vergleichs mit einer bekannten kugelförmigen Masse m_1. Bringt man diese nach Abb. 84 auf die Erdoberfläche, so ergibt sich im Abstand h über der Mitte von m_1 der Gesamtanlauf durch Wägung oder Pendelschwingungen zu:

$$g_1 = k\left(\frac{m_0}{a_0^2} + \frac{m_1}{h^2}\right) = k\frac{m_0}{a_0^2}\left(1 + \frac{m_1}{m_0}\frac{a_0^2}{h^2}\right) = g\left(1 + \frac{m_1}{m_0}\frac{a_0^2}{h^2}\right), \quad \ldots \quad 11)$$

worin g den Erdanlauf ohne die Zusatzmmasse m_1 bedeutet. Daraus folgt

$$\frac{m_1}{m_0} = \frac{h^2}{a_0^2}\,\frac{g_1 - g}{g} \quad \ldots\ldots \quad 11a)$$

für das Massenverhältnis, während der Gaußsche Weltwert sich zu

$$k = \frac{g a_0^2}{m_0} = \frac{h^2}{m_1}(g_1 - g) \quad \ldots\ldots \quad 11b)$$

ergibt. Ein anderes Verfahren zur Bestimmung von k beruht auf der Seitenablenkung des Lotes durch eine bekannte Masse m_1, die durch eine ihrer Anziehung entgegengesetzte meßbare Federkraft wieder aufgehoben wird.

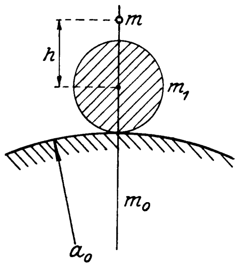

Abb. 84.

Man kann aber auch die mittlere Dichte δ des ganzen Erdballs mit derjenigen δ_1 einer Oberflächenschicht von der Dicke h durch Messung des Erdanlaufes g an der Oberfläche und g_1 in der Tiefe h vergleichen, wo die Wirkung der Oberflächenschicht als umhüllende Kugelschale wegfällt. Alsdann hat man nach Abb. 85

$$g_1 = \frac{4\pi}{3} k\delta \frac{(a_0 - h)^3}{(a_0 - h)^2} = \frac{4\pi}{3} k\delta (a_0 - h), \quad \ldots \quad 12)$$

$$g = k\left[\frac{4\pi}{3}\delta\frac{(a_0 - h)^3}{a_0^2} + 4\pi\delta_1\frac{a_0^2 h}{a_0^2}\right],$$

$$g = \frac{4\pi}{3} k\left[\delta\frac{(a_0 - h)^3}{a_0^2} + 3\delta_1 h\right] \quad \ldots\ldots \quad 12a)$$

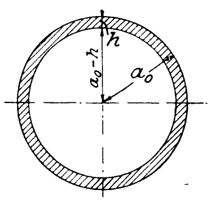

Abb. 85.

und nach Division

$$\frac{g}{g_1} = \left(1 - \frac{h}{a_0}\right)^2 + 3\frac{\delta_1}{\delta}\frac{h}{a_0 - h},$$

oder wegen der Kleinheit der Tiefe h gegen den Erdhalbmesser a_0 hinreichend genau:

$$\frac{g}{g_1} = 1 - 2\frac{h}{a_0} + 3\frac{\delta_1}{\delta}\frac{h}{a_0}$$

$$\frac{\delta_1}{\delta} = \frac{2}{3} + \frac{a_0}{3h}\left(\frac{g}{g_1} - 1\right). \qquad 13)$$

So fand Airy durch Pendelbeobachtung in $h = 333$ m Tiefe

$$1 - \frac{g}{g_1} = \frac{1}{19200},$$

woraus mit $a_0 = 6370000$ m, $\delta_1 = 0{,}38\,\delta$ oder $\gamma_1 = 0{,}38\,\gamma$ folgt. Da nun das Raumgewicht γ der Gesteine an der Erdoberfläche zwischen 2000 und 2500 kg/m^3 schwankt, so würde dasjenige der ganzen Erde zwischen 5200 und 5600 kg/m^3 liegen. In der Tat haben genauere Versuche, z. B. von Reich, nach demselben Verfahren $\gamma = 5580$ kg/m^3 ergeben. Damit aber wird

$$k = \frac{g a_0^2}{m_0} = \frac{3 g a_0^2}{4\pi\delta a_0^3} = \frac{3 g^2}{4\pi a_0 \gamma} = 648 \cdot 10^{-12},$$

also ein sehr kleiner Wert, der die Anziehungskraft zweier Masseneinheiten von je 9,81 kg in der Entfernung von 1 m in Kilogramm angibt. Im physikalischen Maßsystem würden wir für die Anziehung der Masse von je 1 g in der Entfernung von 1 cm $k = 66 \cdot 10^{-9}$ dyn erhalten.

Die Anziehungskraft zwischen Körpern an der Erdoberfläche besitzt demnach nur so kleine Beträge, daß wir sie nur durch feinste Beobachtungsmittel feststellen und von ihrer Berücksichtigung gegenüber der Erdschwere selbst für praktische Zwecke gänzlich absehen können.

Das bedeutet aber eine ganz außerordentliche Vereinfachung in der Behandlung irdischer Bewegungsvorgänge, die unter Berücksichtigung der gegenseitigen Anziehung der Körper kaum noch zu überblicken, geschweige denn rechnerisch zu verfolgen wäre.

5. Beispiel. Die Bewegung eines Massenpunktes m'' im Schwerefeld einer kugelförmigen Masse m' vollzieht sich, da die letztere nach außen hin wie ein Massenpunkt m' im Kugelzentrum wirkt, genau nach den Sätzen des § 27, bzw. nach den Keplerschen Gesetzen in Kegelschnitten um das Kugelzentrum als Brennpunkt.

Die früher besprochene Wurfparabel ist demnach nur als Näherungslösung für ein Ellipsenstück anzusehen, deren einer Brennpunkt mit der Erdmitte zusammenfällt. Bezeichnen wir den Erdanlauf an der Oberfläche bei einem Erdhalbmesser von a_0 und der Erdmasse m' mit g_0, so ist also:

$$g_0 = k\frac{m'}{a_0^2} \qquad 14)$$

und daher der Anlauf in einer Höhe h über der Erdoberfläche oder einem Abstand $r = a_0 + h$ von der Erdmitte

$$g = k\frac{m'}{r^2} = g_0\frac{a_0^2}{r^2} = g_0\frac{a_0^2}{(a_0+h)^2}, \qquad 14\text{a})$$

wofür wir für kleine Werte von $h : a_0$ auch angenähert schreiben dürfen

$$g = g_0\left(1 - 2\frac{h}{a_0}\right). \qquad 14\text{b}).$$

Die Bahnberechnung mit dieser Näherungsformel gestaltet sich übrigens unbequemer als mit der genauen Gleichung 14a); so daß wir von ihr um so mehr absehen können, als sie uns nichts Neues bietet.

Dagegen sei noch der Endlauf eines auf die Erde treffenden Meteorsteines berechnet, wenn er aus unendlicher Entfernung kommt und dort im Ruhezustand war. Alsdann wird nach Gl. 7) § 27 unter Vernachlässigung der Meteormasse m'' gegen die Erdmasse m', und $r_0 = \infty$, $v_0 = 0$

$$v^2 = 2k\frac{m'}{r} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 15)$$

und für die Erdoberfläche mit $r = a_0$, sowie wegen 14)

$$v^2 = 2 g_0 a_0 . \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 15\text{a})$$

Das liefert mit $g_0 = 9{,}81\ \mathrm{m/sec^2}$ und $a_0 = 6\,370\,000\ \mathrm{m}$, $v = 11\,190\ \mathrm{m/sec}$. Mit demselben Anfangslauf müßte auch ein Körper weggeschleudert werden, damit er nicht wieder auf die Erde zurückfällt. Soll schließlich ein Körper wagerecht so geschleudert werden, daß er dauernd die Erde an der Oberfläche umkreist, so muß er nach dem dritten Keplerschen Gesetz, Gl. 5a) § 27, wieder unter Weglassung von m'' gegen m', sowie mit $\frac{2\pi a_0}{t} = v$

$$v^2 = \frac{km'}{a_0} = g_0 a_0 , \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 15\text{b})$$

also die halbe Wucht gegenüber demjenigen 15a) für das Fortschleudern ins Unendliche besitzen, so daß sein Lauf sich zu $v = 7900\ \mathrm{m/sec}$ ergibt.

§ 29. Störung des Schwerefeldes einer Kugel durch eine zweite. Das Schwerefeld einer kugelförmigen Masse ist nach den Ausführungen des letzten Abschnittes wie dasjenige eines Massenpunktes strahlenförmig von geraden Kraft- und Anlauflinien aus der Kugelmitte durchsetzt, die ihrerseits durch Kugeln senkrecht geschnitten werden, auf denen das Potential oder der Drang bestimmte Werte besitzt, so daß sie auch als Äquipotentialflächen, Niveauflächen oder kurz als Drangflächen bezeichnet werden können. Befindet sich nun außerhalb der Kugel von der Masse m' im Abstande $OQ = r$ noch eine zweite kugelige Masse m'', Abb. 86, so erteilt diese nicht nur einem Massenpunkte P im Abstand $OP = r'$ von O mit dem Neigungswinkel φ', und $QP = r''$ mit dem Winkel φ'' gegen r einen Anlauf $q'' = k\frac{m''}{r''^2}$ in der Richtung PQ, sondern auch der Kugel m' einen solchen $q = k\frac{m''}{r^2}$ in der Richtung OQ, während P selbst seitens m' den Anlauf $q' = k\frac{m'}{r'^2}$ in der Richtung PO erfährt. Der Relativanlauf von P gegen die Masse m' zerfällt dann in zwei Teile, nämlich q_r' in der Richtung des Strahles r' und q_u' senkrecht dazu, so zwar, daß mit dem Winkel $QPR = \psi = \varphi' + \varphi''$

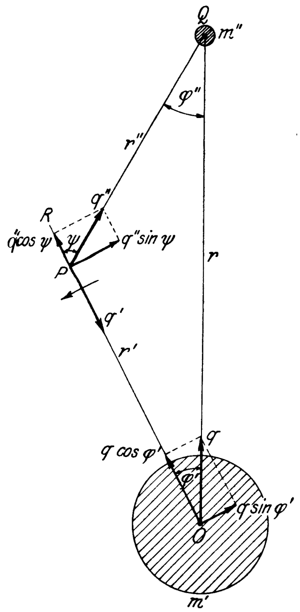

Abb. 86.

$$\left.\begin{aligned} q_r' &= -k\left[\frac{m'}{r'^2}+\frac{m''}{r^2}\cos\varphi'-\frac{m''}{r''^2}\cos\psi\right] \\ q_u' &= k\left[\frac{m''}{r^2}\sin\varphi'-\frac{m''}{r''^2}\sin\psi\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

Nun ist aber

$$\left.\begin{aligned} r'^2 &= r^2+r''^2-2\,rr''\cos\varphi'' \\ r''^2 &= r^2+r'^2-2\,rr'\cos\varphi' \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

also

$$\sin\varphi''=\frac{r'}{r''}\sin\varphi', \qquad \cos\varphi''=\frac{r^2+r''^2-r'^2}{2\,rr''}=\frac{r-r'\cos\varphi'}{r''} \quad 2\,\mathrm{a})$$

und damit

$$\left.\begin{aligned} \cos\psi &= \cos\varphi'\cos\varphi''-\sin\varphi'\sin\varphi''=\frac{r\cos\varphi'-r'}{r''}=-\frac{\partial r''}{\partial r'} \\ \sin\psi &= \sin\varphi'\cos\varphi''+\cos\varphi'\sin\varphi''=\frac{r\sin\varphi'}{r''}=\frac{\partial r''}{r'\partial\varphi'} \end{aligned}\right\}. \quad 2\,\mathrm{b})$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die Anlaufformeln 1) ein, so gehen diese über in

$$\left.\begin{aligned} q_r' &= -k\left(\frac{m'}{r'^2}+\frac{m''\cos\varphi'}{r^2}+\frac{m''}{r''^2}\frac{\partial r''}{\partial r'}\right) \\ q_u' &= k\,m''\left(\frac{1}{r^2}-\frac{r}{r''^3}\right)\sin\varphi'=k\,m''\left(\frac{\sin\varphi'}{r^2}-\frac{1}{r'r''^2}\frac{\partial r''}{\partial\varphi'}\right) \end{aligned}\right\}, \quad 1\,\mathrm{a})$$

oder wegen 2)

$$\left.\begin{aligned} q_r' &= -k\left(\frac{m'}{r'^2}+\frac{m''}{r^2}\cos\varphi'-\frac{m''(r\cos\varphi'-r')}{[r^2+r'^2-2\,rr'\cos\varphi']^{\frac{3}{2}}}\right) \\ q_u' &= k\,m''\left[\frac{1}{r^2}-\frac{r}{(r^2+r'^2-2\,rr'\cos\varphi')^{\frac{3}{2}}}\right]\sin\varphi' \end{aligned}\right\}. \quad 1\,\mathrm{b})$$

und ergeben mit dr' bzw. $r'd\varphi'$ erweitert und addiert mit Rücksicht auf die Bedeutung der Anlaufteile nach § 9 Gl. 3) und 3a), nämlich

$$\left.\begin{aligned} q_r' &= \frac{dv_r}{dt}-r'\left(\frac{d\varphi'}{dt}\right)^2, \qquad q_u'=\frac{dv_u}{dt}+v_r\frac{d\varphi'}{dt} \\ q_r'dr' &+ q_u r'd\varphi' = v_r dv_r+v_u dv_u = v\,dv \end{aligned}\right\}, \quad \ldots \quad 3)$$

wo v, v_r, v_u den Relativlauf und seinen Strahl- und Drehteil in bezug auf die Massengruppe $m'm''$ bedeuten, mit Rücksicht auf 2) die Arbeitsgleichung der Masseneinheit in P

$$v\,dv=k\,d\left[\frac{m'}{r'}-\frac{m''r'\cos\varphi'}{r^2}+\frac{m''}{r''}\right]=-dU. \quad \ldots\ldots \quad 4)$$

Wegen des Vorhandenseins eines Drehanlaufs q_u ist die durch 1a) bestimmte Bewegung des Massenpunktes P um m' keine Zentralbewegung, trotzdem aber hat das gemeinsame Schwere- oder Anlauffeld der Massen m' und m'', das wir auch als ein durch die Masse m'' gestörtes Anlauffeld von m' betrachten können, nach 4) ein Potential derart, daß

$$q_r' = -\frac{\partial U}{\partial r'}, \qquad q_u' r' = -\frac{\partial U}{\partial \varphi'} \quad \ldots\ldots \quad 4\text{a})$$

ist. Die Formeln 1b) bilden die Grundlage für die Ermittlung der durch die Masse m'' gestörten Bahn von P um den Körper m', also z. B. der durch einen andern Planeten gestörten Planetenbahn um die Sonne oder der von dieser gestörten Bahn eines Mondes um einen Planeten. Die Berechnung geschieht in erster Annäherung derart, daß man unter Festhaltung des Abstandes $OQ = r$ der beiden Massen $m' m''$ zunächst unter Weglassung der Störungsglieder der ersten Gl. 1b)

$$\frac{m''}{r^2}\cos\varphi' - \frac{m'(r\cos\varphi' - r')}{(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\varphi')^{\frac{3}{2}}},$$

sowie des nur durch die Störung bedingten Drehanlaufs q_u' die ungestörte Bahn um m' wie in § 10 2. Beispiel ermittelt und das Ergebnis alsdann in die Störungsglieder von 1b) einführt. Man erkennt übrigens, daß beim Umlauf des Massenpunktes P um O in der Pfeilrichtung, Abb. 86, die Anziehung durch m'' in der gezeichneten Lage eine Verzögerung bedingt, der auf der anderen Seite von r eine Beschleunigung entspricht. In umgekehrter Weise wird natürlich auch die Bewegung von m'' um O durch die Masse m des Massenpunktes gestört.

Befindet sich, was für die Mondbewegung immer zutrifft, die störende Masse m'' (etwa die Sonne) in sehr großer Entfernung vom Relativzentrum m', so dürfen wir in den Störungsgliedern angenähert setzen

$$r''^2 = r^2 - 2rr'\cos\varphi', \qquad r''^3 = r^3\left(1 - 3\frac{r'}{r}\cos\varphi'\right) \quad . \; . \quad 5)$$

und erhalten an Stelle von 1b)

$$q_r' = -k\left[\frac{m'}{r'^2} + \frac{m''}{r^2}\cos\varphi' - \frac{m''}{r^2}\left(\cos\varphi' - \frac{r'}{r}\right)\left(1 + 3\frac{r'}{r}\cos\varphi'\right)\right]$$

$$q_u' = km''\left[\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2}\left(1 + 3\frac{r'}{r}\cos\varphi'\right)\right]\sin\varphi',$$

oder nach Unterdrückung des mit $r'^2 : r^2$ behafteten Gliedes in der Formel für q_r', sowie nach Zusammenziehung

$$\left.\begin{aligned} q_r' &= -k\left[\frac{m'}{r'^2} - \frac{m'' r'}{r^3}(3\cos^2\varphi' - 1)\right] \\ q_u' &= -3km''\frac{r'}{r^3}\sin\varphi'\cos\varphi' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 6)$$

1. Beispiel. Die letzten beiden Gleichungen gelten natürlich auch für Körper an der Erdoberfläche unter der Wirkung der Sonnen- oder Mondanziehung und ergeben eine Änderung des Erdanlaufes mit dem Winkel φ' des zu jeder Stelle gehörigen Erdhalbmessers $r' = a$ mit dem Fahrstrahl r

der störenden Masse. Ist demnach

$$g = -k \frac{m'}{r'^2} = -k \frac{m'}{a^2}$$

der ungestörte Erdanlauf, so erhalten wir für den gestörten die beiden lotrechten und wagerechten Teile

$$\left.\begin{aligned} g_r' &= g\left[1 - \frac{m''}{m'} \frac{a^3}{r^3} (3\cos^2\varphi' - 1)\right] \\ g_u' &= -3g \frac{m''}{m'} \frac{a^3}{r^3} \sin\varphi' \cos\varphi' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 6\text{a})$$

Die lotrechte Abweichung von g verschwindet für $3\cos^2\varphi' = 1$, $\varphi' = 54^0\,44'$ und $\varphi' = 125^0\,16'$, sie erreicht ihren Höchstwert für $\varphi' = 0$ und 180^0, also $3\cos^2\varphi' - 1 = 2$, den absoluten Kleinstwert für $\varphi' = 90^0$ mit $\cos^2\varphi' = 0$ $3\cos^2\varphi' - 1 = -1$. Der letztere vermehrt demnach den Erdanlauf um $g\frac{m''}{m'}\frac{a^3}{r^3}$, während der erstere ihn um den doppelten Betrag vermindert, vgl. Abb. 87.

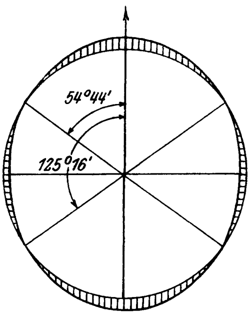

Abb. 87.

Demgegenüber verschwindet der wagerechte Anteil für $\varphi' = 0$, 90^0 und 180^0 und hat einen Höchstwert für $\varphi' = 45^0$ und 135^0 im Betrage von $\pm \frac{3}{2} g \frac{m''}{m'} \frac{a^3}{r^3}$, der also absolut zwischen den äußersten lotrechten Abweichungen liegt.

Da nun für Mond und Erde etwa $m'' : m' = 1 : 81$, $a : r = 1 : 60$ ist, so wird hierfür

$$\frac{m''}{m'} \frac{a^3}{r^3} = \frac{1}{17\,500\,000},$$

und für Sonne und Erde mit $m'' : m' = 333\,000$, $a : r = 1 : 23\,160$

$$\frac{m''}{m'} \frac{a^3}{r^3} = \frac{1}{37\,000\,000},$$

also etwas weniger als die Hälfte des Mondeinflusses. Jedenfalls sind diese Beträge, deren dynamische Wirkungen auf die Fluterscheinung in der Hydromechanik behandelt werden, ohne merkbaren Einfluß auf das Schwerefeld der Erdoberfläche.

2. Beispiel. Die Bewegungsgleichungen 1a) legen die Frage nach der Möglichkeit einer reinen Zentralbewegung des Massenpunktes P um die Massen m' und m'' nahe. Eine solche ist aber geknüpft an das Verschwinden des Drehanlaufes, der in bezug

$$\left.\begin{aligned} &\text{auf } m' \text{ durch } q_u' = km'' \left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{r''^3}\right) \sin\varphi' \\ &\text{auf } m'' \text{ durch } q_u'' = km' \left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{r'^3}\right) \sin\varphi'' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 7)$$

gegeben ist. Diese Ausdrücke verschwinden einmal für $\varphi' = \varphi'' = 0$, d. h. für jede Bewegung von P längs der geraden Verbindung r der Mitten beider Massen, die indessen praktisch bedeutungslos ist.

Andrerseits verschwinden die Drehanläufe aber auch für

$$r = r' = r'', \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 7\text{a})$$

d. h. wenn die drei Massen dauernd ein gleichseitiges Dreieck bilden. Dieser von Lagrange 1770 aufgedeckte Sonderfall des sog. Dreikörperproblems ist nun in der Tat in unserem Planetensystem durch zwei kleine 1906—1908 gefundene Körpergruppen, die sog. Trojaner, verwirklicht, deren eine im Winkel von rd. 60^0 dem Planeten Jupiter auf dessen Bahn dauernd voranschreitet, während die andere ihm im gleichen Abstande nacheilt.

Daraus erkennt man, daß die Natur die ihr durch die Anziehungsgesetze gebotenen Möglichkeiten auch wirklich ausnützt, ohne daß man über das Zustandekommen derartigen Anordnungen vorläufig etwas aussagen kann.

Jedenfalls ist die Entdeckung der beiden Körpergruppen als eine ebenso glänzende Bestätigung des Newtonschen Anziehungsgesetzes zu betrachten, wie die Voraussage der Stellung eines äußersten Planeten auf Grund von Störungsberechnungen nach der oben angedeuteten Art am Planeten Uranus durch Leverrier und Adams 1846, auf deren Grundlage der Neptun durch Galle auch wirklich unmittelbar danach gefunden wurde.

3. Beispiel. Den zuletzt behandelten Fall können wir auch aus dem Gleichgewichte der Flieh- und Anziehungskräfte der um den gemeinsamen Schwerpunkt S rotierenden Massen m_1, m_2, m_3 ableiten, deren gegenseitige Abstände r_1, r_2, r_3 und deren Entfernungen vom Schwerpunkt s_1, s_2, s_3 sein mögen. Die Winkel des Massendreiecks seien ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3, die der Schwerelinien α_1, α_2, α_3, Abb. 88. Dann liefert das Gleichgewicht der Anziehungen und der Fliehkraft $m s \omega^2$ an allen drei Massenpunkten die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
s_1^2\,\omega^4 &= k^2\left[\frac{m_2^2}{r_3^4}+\frac{m_3^2}{r_2^4}+2\,\frac{m_2\,m_3}{r_2^2\,r_3^2}\cos\vartheta_1\right]\\
s_2^2\,\omega^4 &= k^2\left[\frac{m_3^2}{r_1^4}+\frac{m_1^2}{r_3^4}+2\,\frac{m_3\,m_1}{r_3^2\,r_1^2}\cos\vartheta_2\right]\\
s_3^2\,\omega^4 &= k^2\left[\frac{m_1^2}{r_2^4}+\frac{m_2^2}{r_1^4}+2\,\frac{m_1\,m_2}{r_1^2\,r_2^2}\cos\vartheta_3\right]
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ 8)$$

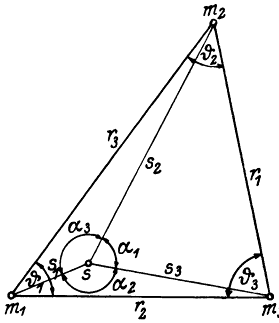

Abb. 88.

und das Gleichgewicht der Fliehkräfte am Schwerpunkt O unter Weglassung des Faktors ω^4

$$s_2^2\,m_2^2+s_3^2\,m_3^2+2\,s_2\,s_3\,m_2\,m_3\cos\alpha_1=s_1^2\,m_1^2\,.\ \ldots\ldots\ 9)$$

Dabei ist rein geometrisch

$$s_2^2+s_3^2-2\,s_2\,s_3\cos\alpha_1=r_1^2\,,\ \ldots\ldots\ 10)$$

also nach Ausschaltung von $\cos\alpha_1$, sowie unter Hinzufügung von zwei weiteren gleichgebauten Formeln

$$\left.\begin{aligned}
s_2^2\,m_2^2+s_3^2\,m_3^2-s_1^2\,m_1^2&=(r_1^2-s_2^2-s_3^2)\,m_2\,m_3\\
s_3^2\,m_3^2+s_1^2\,m_1^2-s_2^2\,m_2^2&=(r_2^2-s_3^2-s_1^2)\,m_3\,m_1\\
s_1^2\,m_1^2+s_2^2\,m_2^2-s_3^2\,m_3^2&=(r_3^2-s_1^2-s_2^2)\,m_1\,m_2
\end{aligned}\right\}\ldots\ 9\mathrm{a})$$

Deren Addition ergibt, wenn man die Glieder mit s auf die linke Seite bringt,

$$s_1^2\,m_1+s_2^2\,m_2+s_3^2\,m_3=\frac{r_1^2\,m_2\,m_3+r_2^2\,m_3\,m_1+r_3^2\,m_1\,m_2}{m_1+m_2+m_3}\quad\ldots\ 11)$$

und nach Einsetzen der Werte von s_1, s_2, s_3 aus 8), geordnet nach den Massenprodukten

$$\begin{aligned}
&m_1\,m_2\left(k^2\,\frac{m_1+m_2+m_3}{r_3^4}-\frac{r_3^2\,\omega^4}{m_1+m_2+m_3}\right)+\\
&+m_2\,m_3\left(k^2\,\frac{m_1+m_2+m_3}{r_1^4}-\frac{r_1^2\,\omega^4}{m_1+m_2+m_3}\right)\\
&+m_3\,m_1\left(k^2\,\frac{m_1+m_2+m_3}{r_2^4}-\frac{r_2^2\,\omega^4}{m_1+m_2+m_3}\right)\\
&=k^2\,m_1\,m_2\,m_3\left(\frac{1}{r_1^4}+\frac{1}{r_2^4}+\frac{1}{r_3^4}-\frac{2\cos\vartheta_1}{r_2^2\,r_3^2}-\frac{2\cos\vartheta_2}{r_3^2\,r_1^2}-\frac{2\cos\vartheta_3}{r_1^2\,r_2^2}\right).\ .\ 11\mathrm{a})
\end{aligned}$$

Soll diese Bedingung für beliebige Massenverhältnisse gelten, so müssen die

Klammerausdrücke verschwinden, d. h. es muß im Einklang mit dem dritten Keplerschen Gesetz

$$\frac{k^2}{\omega^4}(m_1 + m_2 + m_3)^2 = r_1^6 = r_2^6 = r_3^6; \quad \vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta_3,$$

d. h. das Dreieck zwischen $m_1\, m_2\, m_3$ ist unabhängig von der Massenverteilung im Gleichgewichtszustande ein gleichseitiges.

VII. Widerstandskräfte.

§ 30. Die Gleitreibung. Wir haben bisher nur solche Kräfte betrachtet, welche einer beweglichen Masse einen Anlauf erteilen. Lassen wir nun eine solche treibende Kraft P auf einen Köper, der auf einer festen Unterlage ruht, parallel der Berührungsebene wirken, so erfährt die Körpermasse m erst dann einen Anlauf, wenn die Kraft einen bestimmten Betrag R übersteigt, worauf die Bewegung nach dem Ansatze

$$P - R = m\frac{dv}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

verläuft. Hört die Wirkung der äußeren Kraft P auf, so erfährt die Masse wegen

$$-R = m\frac{dv}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1a)$$

einen Ablauf unter dem Einflusse des Widerstandes R, der somit der Bewegung entgegenwirkt, nach dem Eintritt des Ruhezustandes aber wieder verschwindet. Der Widerstand wird demnach erst geweckt durch die Einwirkung der treibenden Kraft und hält dieser an der Berührungsstelle der Masse m mit der Unterlage im Ruhezustande so lange das Gleichgewicht, als $P < R$ ist, während er im Bewegungszustande den Höchstwert R beibehält. Eine nähere Untersuchung zeigt, daß dieser Höchstwert im geraden Verhältnis zur Normalkraft N zwischen der Masse m und der Unterlage steht, in weiten Grenzen vom Lauf unabhängig ist und nur bei der Bewegungsumkehr sein Vorzeichen wechselt. Es ist nun sehr unwahrscheinlich, daß dieser Übergang sprungweise erfolgt; in der Tat haben ältere Versuche von Coulomb und neuere von Ch. Jakob einen wenn auch sehr steilen, doch stetigen Durchgang durch die Ruhelage mit einem Wendepunkt und einer in die Kraftachse fallenden Tangente, Abb. 89, ergeben. Außerdem scheint R für hohe Laufwerte v nach Eisenbahnbremsversuchen von Wiechert wieder abzunehmen. Dagegen ist R in hohem Maße bedingt durch die Beschaffenheit der Unterlage und der Oberfläche des daran hingleitenden Körpers, in deren Rauhigkeit an der Berührungsstelle wir demnach die Ursache der ganzen Erscheinung zu suchen haben, die man meist als Reibungsvorgang bezeichnet. Man spricht deshalb den Widerstand, der den Körper im Ruhezustand festhält als Haftreibung, den Widerstand beim Gleiten des Körpers auf der Unterlage aber als Gleitreibung an. Die letztere dürfen wir mit einem von der Oberflächenbeschaffenheit des bewegten Körpers und der Unterlage an der Berührungsstelle abhängigen Beiwert f, der sog. Reibungsziffer,

$$R = fN \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

schreiben, während die Haftreibung im allgemeinen unterhalb dieses Wertes bleibt. Wirkt demnach auf den Körper eine treibende Kraft Q unter dem Winkel φ gegen die Normale zur Unterlage und den Teilkräften P und N in deren Richtung und senkrecht dazu, so besteht Gleichgewicht solange

$$P - fN = Q(\sin\varphi - f\cos\varphi) < 0\,, \quad \ldots\ldots \quad 3)$$

oder

$$\operatorname{tg}\varphi < f = \operatorname{tg}\varphi_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3a)$$

ist, d. h. solange die Richtung der treibenden Kraft unabhängig von ihrem Betrage eine kleinere Neigung als φ_0 gegen die Berührungsnormale hat. Den durch 3a) bestimmten

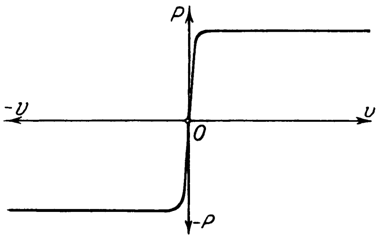

Abb. 89.

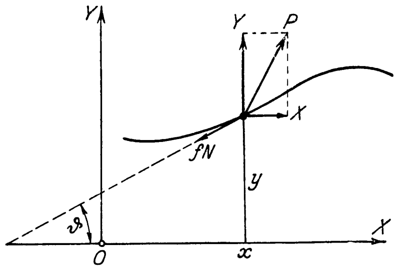

Abb. 90.

Grenzwinkel nennen wir den Reibungswinkel. Das Gleichgewicht eines Körpers auf einer rauhen Unterlage ist somit insofern unbestimmt, als man weder die Größe noch die Richtung der hierbei wirksamen treibenden Kraft angeben kann.

Ist dagegen die Bedingung 3a) nicht mehr erfüllt, fällt also die Richtung der treibenden Kraft außerhalb des Reibungswinkels so vollzieht sich die Bewegung nach der Gleichung

$$P - fN = Q(\sin\varphi - f\cos\varphi) = m\frac{dv}{dt} \quad \ldots\ldots \quad 4)$$

in völlig bestimmter Weise, verläuft also bei beständigem Q gleichförmig beschleunigt.

Fällt die Bewegung in die Bildebene, Abb. 90, so dürfen wir die Kraft P in derselben wieder in ihre Anteile X und Y in den Achsenrichtungen zerlegen und erhalten alsdann, da der Reibungswiderstand fN der Bewegungsrichtung entgegenwirkt, seine beiden Anteile

$$fN\cos\vartheta = fN\frac{dx}{ds} = fN\frac{v_x}{v}$$

$$fN\sin\vartheta = fN\frac{dy}{ds} = fN\frac{v_y}{v}\,,$$

mit denen die Bewegungsgleichungen lauten

$$\left.\begin{aligned} X &= m\frac{dv_x}{dt} + fN\frac{v_x}{v} \\ Y &= m\frac{dv_y}{dt} + fN\frac{v_y}{v} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 5)$$

Erweitern wir diese mit dx und dy und addieren, so erhalten wir mit Rücksicht auf

$$\frac{dx\,dv_x + dy\,dv_y}{dt} = v_x\,dv_x + v_y\,dv_y = v\,dv$$

$$\frac{v_x\,dx + v_y\,dy}{v} = \frac{dx^2 + dy^2}{ds} = ds$$

die Arbeitsformel

$$X\,dx + Y\,dy = m\,v\,dv + fN\,ds, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 6)$$

worin das Glied $fNds$ das **Element der Reibungsarbeit** bedeutet, die neben der Erhöhung der Wucht von der links stehenden Arbeit der treibenden Kraft zu leisten ist und für den Bewegungsvorgang verloren geht. Sie erscheint, wie sich aus einer näheren physikalischen Untersuchung über das bisher nicht erörterte Wesen der Reibung ergibt, als Vermehrung der Wucht der für das Auge unsichtbaren Bewegung der kleinsten Körperbestandteile, d. h. Wärme, die sich durch eine Temperaturerhöhung kundgibt. Man übersieht ohne weiteres, daß dieser Vorgang mit der Starrheit der Körper unverträglich ist, so daß streng genommen die Reibungserscheinungen in die Physik der unstarren Gebilde und die Wärmelehre gehören. Wenn wir sie trotzdem hier behandeln, so begnügen wir uns mit der Tatsache des Arbeitsverlustes und den oben angegebenen Erfahrungsgrundlagen, die allerdings über das Wesen der Reibung keine Aufklärung bieten.

Die Arbeitsgleichung 6) ist auch im Falle, daß die treibende Kraft P ein Potential besitzt, nur dann integrabel, wenn der Normaldruck N auf die Bewegungsebene als Funktion des Weges bekannt oder überhaupt unveränderlich ist. Die gesamte dabei erzielte Änderung der Wucht ist alsdann nicht mehr durch die Endlagen der Bewegung gegeben, sondern im Gegensatz zur reinen Potentialbewegung mit der Reibungsarbeit ahhängig vom durchlaufenen Wege.

Weicht ferner die Bahn des betrachteten Massenpunktes nur wenig von einer Geraden ab, die wir in die x-Achse verlegen, so geht bei Vernachlässigung von $v_y{}^2$ gegen $v_x{}^2 \approx v^2$ Gl. 5) über in die Näherungsform:

$$\left.\begin{aligned} X &= m\frac{dv_x}{dt} + fN \\ Y &= m\frac{dv_y}{dt} + fN\frac{v_y}{v} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 5a)$$

Da in diesem Falle auch dy^2 gegen $dx^2 \approx ds^2$ unterdrückt werden darf, so wird die Reibungsarbeit $f N ds \approx f N dx$ nahezu ganz von dem in die X-Richtung fallenden Kraftanteil geleistet. Nach der zweiten Formel 5a) setzt alsdann, da $v_y : v$ beliebig klein ist, der Massenpunkt einer seitlichen Verschiebung in der y-Richtung trotz der Reibung einen beliebig kleinen Widerstand entgegen im Gegensatz zu der Verschiebung aus der Ruhelage, so daß es den Anschein hat, als wäre in der y-Richtung anfänglich gar keine Reibung vorhanden. Von dieser Tatsache kann man sich leicht überzeugen an dem über eine Scheibe gespannten Riemen, der in der Ruhelage nur mit großem Kraftaufwand, während der Bewegung aber, die stets mit einem Gleiten verbunden ist, außerordentlich leicht seitlich verschoben oder überhaupt aufgelegt werden kann.

1. Beispiel. Befindet sich der Körper unter der Wirkung seines Eigengewichtes mg auf einer schiefen Ebene, deren Spur im Bild eine Gerade mit der Neigung φ gegen die Wagerechte ist, Abb. 91, so ergibt sich in der Richtung abwärts eine treibende Kraft $P = mg \cdot \sin\varphi$, während der Normaldruck $N = mg \cdot \cos\varphi$ den entgegengesetzten Gewichtsanteil aufhebt. Die Gleitreibung ist alsdann $R = f N = f mg \cdot \cos\varphi$, woraus nach 1) für die Abwärtsbewegung auf der schiefen Ebene

$$-g(\sin\varphi - f\cos\varphi) = \frac{dv}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad 7)$$

und für das Gleichgewicht wieder die Bedingung 3a) folgt. Der Körper bleibt also auf einer schiefen Ebene liegen, deren Neigung kleiner als der Reibungswinkel ist, und bewegt sich bei einer mit dem Reibungswinkel übereinstimmenden Neigung gleichförmig und bei größerer Neigung gleichförmig beschleunigt abwärts, während eine Aufwärtsbewegung ausgeschlossen ist, da R niemals treibend wirken kann. Damit ist zugleich ein sehr einfaches Ermittlungsverfahren für den Reibungswinkel und die Reibungsziffer gegeben.

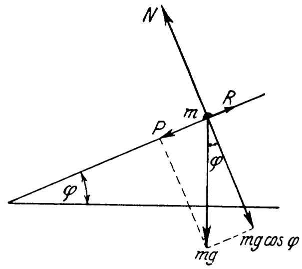

Abb. 91.

2. Beispiel. Unterliegt der Körper auf der schiefen Ebene außer seinem Gewicht noch der Wirkung einer wagerechten Kraft H (Abb. 92), so ist die gesamte aufwärts treibende Kraft $P = H \cdot \cos\varphi - mg\sin\varphi$, der Normaldruck aber $N = H\sin\varphi + mg\cos\varphi$, mithin gilt für die Auf- und Abwärtsbewegung

$$H\cos\varphi - mg\sin\varphi = \pm f(H\sin\varphi + mg\cos\varphi) + m\frac{dv}{dt} \quad 8)$$

Für das Gleichgewicht gegen Auf- und Abwärtsgleiten folgt daraus

$$H\cos\varphi - mg\sin\varphi \lesseqgtr \pm f(H\sin\varphi + mg\cos\varphi),$$

oder

$$H(\cos\varphi \mp f\sin\varphi) \lesseqgtr mg(\sin\varphi \pm f\cos\varphi) \quad . \quad . \quad . \quad 8a)$$

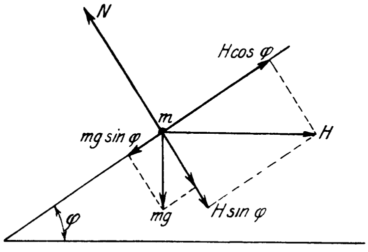

Abb. 92.

Dafür können wir auch schreiben

$$\frac{\sin\varphi - f\cos\varphi}{\cos\varphi + f\sin\varphi} < \frac{H}{mg} < \frac{\sin\varphi + f\cos\varphi}{\cos\varphi - f\sin\varphi},$$

oder wegen $f = \operatorname{tg} \varphi_0$ $\quad \operatorname{tg}(\varphi - \varphi_0) < \frac{H}{mg} < \operatorname{tg}(\varphi + \varphi_0)$, ... 8b)

wobei der linke Grenzwert für den Abwärtsgang, der rechte für den Aufwärtsgang gilt. Hieraus erkennt man, daß für $H \leqq 0$, also eine von der schiefen Ebene weggerichtete Kraft eine Aufwärtsbewegung überhaupt ausgeschlossen ist.

3. Beispiel. Bewegt sich ein Massenpunkt in beliebiger Richtung auf der rauhen schiefen Ebene, Abb. 93, unter Wirkung seines Eigengewichts, so kommt von diesem nur ein Anteil $mg \sin \varphi$ als treibend in Frage, während der Normaldruck $N = mg \cos \varphi$ die Reibung $R = f mg \cos \varphi$ entgegengesetzt der jeweiligen Bewegungsrichtung bedingt. Legen wir in die Spur der schiefen mit einer wagerechten Ebene die x-Achse und senkrecht dazu in der schiefen Ebene nach oben die y-Achse, so sind mit einer Neigung τ der Bahn gegen die Spur die beiden Anteile der treibenden Kraft $X = 0$, $Y = -mg \sin \varphi$ und die Anteile der Reibung $R \cos \tau = -f mg \cos \varphi \cos \tau$, $R \sin \tau = -f mg \cos \varphi \sin \tau$, mithin die Bewegungsformeln entsprechend 5) unter Weglassung des gemeinsamen Faktors m

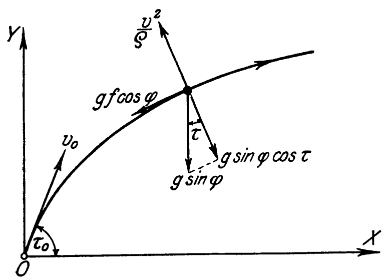

Abb. 93.

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= -g f \cos\varphi \cos\tau \\ \frac{dv_y}{dt} &= -g f \cos\varphi \sin\tau - g \sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad . \; 9)$$

Daraus folgt die Arbeitsgleichung entsprechend Gl. 6)

$$v\,dv = -g\,dy \sin\varphi - g f\,ds \cos\varphi\,, \quad 9a)$$

oder integriert von der Anfangslage

$$x = 0\,, \quad y = 0\,, \quad v = v_0\,, \quad \tau = \tau_0$$

$$v^2 - v_0^2 = -2g\,[y \sin\varphi + f s \cos\varphi]\,, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 10)$$

zu der wir noch die durch Ausschaltung der Reibungsglieder aus 9) hervorgehende, aber auch unmittelbar nach Abb. 93 einleuchtende Gleichung

$$\frac{v^2}{\varrho} = g \sin\varphi \cos\tau \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 11)$$

hinzunehmen. Setzen wir darin

$$\operatorname{tg}\tau = y'\,, \quad \cos\tau = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}\,, \quad \varrho = -\frac{ds}{d\tau} = -\frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}\,,$$

so wird daraus $\qquad v^2 = -g \sin\varphi \, \frac{1 + y'^2}{y''} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 11a)$

und nach Einführung in 10)

$$v_0^2 - 2g\,[y \sin\varphi + f s \cos\varphi] + g \sin\varphi \, \frac{1 + y'^2}{y''} = 0 \,. \quad . \; . \; . \; . \quad 12)$$

Differenzieren wir nach x, so folgt unter Wegheben zweier Glieder mit $dy'' = y'''\,dx$

$$-\frac{2f}{\operatorname{tg}\varphi}\frac{ds}{dx} = \frac{1 + y'^2}{y''^2}\,y'''$$

und mit $\qquad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}\,, \quad y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy'}\frac{dy'}{dx} = y''\frac{dy''}{dy'}$

und der Abkürzung $\qquad \frac{2f}{\operatorname{tg}\varphi} = \mu \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 13)$

$$\frac{-\mu\,dy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{dy''}{y''} \,. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 14)$$

Integriert gibt dies mit einer Konstanten a

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = a\,[y' + \sqrt{1+y'^2}]^{-\mu}, \quad \ldots \quad 14a)$$

oder

$$y'' = a\left(\operatorname{tg}\tau + \frac{1}{\cos\tau}\right)^{-\mu} = a\left(\frac{\sin\tau+1}{\cos\tau}\right)^{-\mu}, \quad \ldots \quad 14b)$$

womit 11a) übergeht in $v^2 = -\dfrac{g\sin\varphi\,(\sin\tau+1)^{\mu}}{a\,(\cos\tau)^{\mu+2}}$. . . . . 11b)

Diese Formel ermöglicht die Bestimmung der Größe a durch Einsetzen der Anfangswerte v_0 und τ_0, so zwar, daß

$$v_0^2 = -\frac{g\sin\varphi\,[\sin\tau_0+1]^{\mu}}{a\,(\cos\tau_0)^{\mu+2}}, \quad \ldots \quad 11c)$$

oder

$$\left(\frac{v\cos\tau}{v_0\cos\tau_0}\right)^2 = \left[\frac{\cos\tau_0}{\cos\tau}\cdot\frac{\sin\tau+1}{\sin\tau_0+1}\right]^{\mu}, \quad \ldots \quad 11d)$$

woraus für $\mu = 0$, $v\cos\tau = v_0\cos\tau_0 = v_x$ folgt. Das trifft in der Tat zu für $f = 0$, d. h. für eine reibungsfreie Ebene, sowie mit $\operatorname{tg}\varphi = \infty$ für eine lotrechte Lage derselben. Differenzieren wir ferner 11b) und setzen $v \cdot dv = 0$, so wird

$$2\sin^2\tau + (\mu+2)\sin\tau + \mu = 0 \quad \ldots \quad 15)$$

mit den beiden Wurzeln

$$\sin\tau_1 = -1, \qquad \sin\tau_2 = -\frac{\mu}{2} = -\frac{f}{\operatorname{tg}\varphi}, \quad \ldots \quad 15a)$$

deren erste nach Einsetzen in 11b) mit Rücksicht auf $\mu > 0$, $v = 0$, d. h. auf ein Steckenbleiben des Körpers mit $\tau_1 = -90^0$, also mit in der y-Richtung abwärts gerichteter Bahntangente führt, während der zweite Wert τ_2 mit $dv = 0$ dem Übergang von der verzögerten in die beschleunigte Bewegung entspricht, der nur eintreten kann, wenn $f = \operatorname{tg}\varphi_0 < \operatorname{tg}\varphi$, d. h. bei einer den Reibungswinkel übersteigenden Neigung der Ebene.

Zur Ermittlung der Bahngleichung setzen wir in 14a)

$$y' + \sqrt{1+y'^2} = z, \quad y' = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right), \quad y'' = \frac{dy'}{dz}\,\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{z^2}\right)\frac{dz}{dx} \quad 16)$$

und erhalten so

$$\left.\begin{aligned} dx &= \frac{z^{\mu}}{2a}\left(1+\frac{1}{z^2}\right)dz \\ dy &= y'\,dx = \frac{z^{1+\mu}}{4a}\left(1-\frac{1}{z^4}\right)dz \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 17)$$

mit den Integralen

$$\left.\begin{aligned} 2ax &= b + \frac{z^{1+\mu}}{1+\mu} + \frac{z^{\mu-1}}{\mu-1} \\ 4ay &= c + \frac{z^{2+\mu}}{2+\mu} - \frac{z^{\mu-2}}{\mu-2} \end{aligned}\right\}, \quad \ldots \quad 17a)$$

deren Konstanten sich aus den Anfangswerten für $y = x = 0$, $\tau = \tau_0$ also

$$z_0 = \operatorname{tg}\tau_0 + \frac{1}{\cos\tau_0} = \frac{\sin\tau_0+1}{\cos\tau_0} \quad \ldots \quad 16a)$$

bestimmen und mit den Scheitelabständen x_1, y_1 der Bahn, wo $\tau = 0$, $z = 1$ ist, durch

$$b = 2\left(a\,x_1 - \frac{\mu}{\mu^2-1}\right), \quad c = 4\left(a\,y_1 + \frac{1}{(\mu^2-4)}\right) \quad \ldots \quad 17b)$$

zusammenhängen. Da ferner für den Abwärtsgang in der y-Richtung mit $y' = -\infty$

$$z = -y' + y'\sqrt{1 + \frac{1}{y'^2}} \approx \frac{1}{2\,y'} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 16\text{b})$$

wird, so liegt der entsprechende Punkt für $\mu < 1$ mit $x = \infty$, $y = -\infty$ abwärts im Unendlichen. Den unteren Grenzfall der Bahn bildet hier mit $\mu = 0$ die **Wurfparabel**, deren Gleichung sich aus

$$2\,a\,x - b = z - \frac{1}{z}, \qquad 4\,a\,y - c = \frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) \quad \ldots\ldots \quad 18)$$

durch Ausschaltung von z mit der Anfangsbedingung $x = y = 0$ zu

$$2\,y = a\,x^2 - b\,x \quad \ldots\ldots \quad 18\text{a})$$

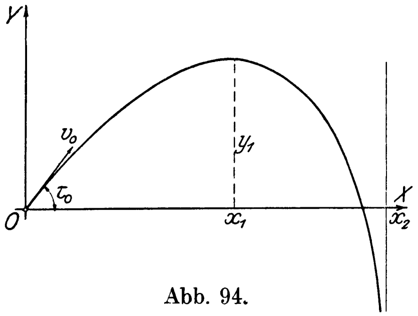

Abb. 94.

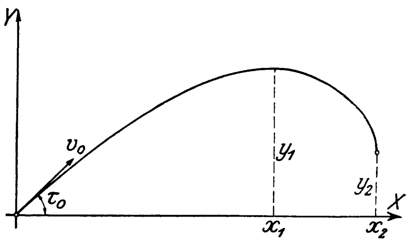

Abb. 95.

ergibt. Für $1 < \mu < 2$ und $y' = -\infty$ erreicht x den Grenzwert $x_2 = b : 2a$, während $y_2 = -\infty$ wird, so daß also die Bahn eine der y-Achse parallele Asymptote hat, Abb. 94. Für $\mu > 2$ bleibt der Körper schließlich mit $y' = -\infty$, $z = 0$ in dem Punkte $x_2 = b : 2\,a$, $y_2 = c : 4\,a$ stecken im Einklang mit dem schon oben bemerkten Erlöschen des gerade abwärts gerichteten Laufes, Abb. 95. Für $\mu = \infty$, oder $\operatorname{tg}\varphi = 0$, d. h. auf einer wagerechten rauhen Ebene wird nach Gl. 14a) $y'' = 0$, die Bahn also eine **Gerade**, längs der die Bewegung gleichförmig verzögert bis zur Ruhe verläuft.

§ 31. Die Dämpfung. Bewegt sich ein fester Körper in einer tropfbaren Flüssigkeit oder in einem Gase (z. B. der Luft), so erfährt er erfahrungsgemäß einen mit seinem Lauf v zunehmenden Widerstand, der, wie in der Hydromechanik näher festgestellt wird, durch Gleiten von Flüssigkeitsteilen aneinander und durch die Übertragung von Wucht auf dieselben bei ihrer Verdrängung seitens des bewegten Körpers hervorgerufen wird. Mangels näherer Kenntnis der Abhängigkeit dieses Widerstandes vom Lauf behelfen wir uns mit einer Potenzreihe

$$W = k_1\,v + k_2\,v^2 + k_3\,v^3 + \ldots, \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

indem wir uns die Bestimmung der Beiwerte $k_1\,k_2\,k_3 \ldots$ durch Versuche vorbehalten. Handelt es sich um langsame Bewegungen, so überwiegt erfahrungsgemäß das erste Glied alle übrigen, während bei rascheren Bewegungen, also hohen Werten von v, das zweite Glied alle übrigen weitaus übertrifft. Es liegt dies natürlich daran, daß die Beiwerte der dritten und höheren Potenzen von v, wenn sie nicht überhaupt verschwinden, so doch so stark mit steigender Ordnungsziffer abnehmen, daß die Reihe 1) für alle Werte von v rasch konvergiert. Wir begnügen uns an dieser Stelle mit der Betrachtung langsamer Bewegung in einer Flüssigkeit, dem sog. widerstehenden Mittel, und bezeichnen in diesem Falle den Widerstand

$$W = k_1 \cdot v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

als eine Dämpfung, die im Gegensatz zu Gleitreibung bei Umkehr der Bewegungsrichtung mit v ihr Vorzeichen von selbst wechselt. Wirkt auf den Körper, den wir uns wie früher als Massenpunkt vorstellen, eine treibende Kraft mit den Anteilen X und Y in den Achsenrichtungen, so erhalten wir, da die Dämpfung naturgemäß der augenblicklichen Bewegungsrichtung entgegengesetzt gerichtet ist, mit den Teilwiderständen

$$W\frac{v_x}{v} = k_1 v_x, \qquad W\frac{v_y}{v} = k_1 v_y$$

in den Achsenrichtungen

$$X = m\frac{dv_x}{dt} + k_1 v_x, \qquad Y = m\frac{dv_y}{dt} + k_1 v_y, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

aus denen sich nach Erweiterung mit dx und dy und Addition die Arbeitsformel

$$dL = X\,dx + Y\,dy = m(v_x\,dv_x + v_y\,dv_y) + k_1(v_x\,dx + v_y\,dy),$$

oder wegen

$$v_x\,dx + v_y\,dy = v^2\,dt = v \cdot ds$$

$$dL = m \cdot v dv + k_1 v ds. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3\text{a})$$

Diese Gleichung ist nicht ohne weiteres integrabel, da man den Zusammenhang zwischen dem Wege s und dem Lauf v noch nicht kennt; sie zeigt aber jedenfalls, daß die zur Vermehrung der Wucht nötige Arbeit, wie schon bei der Gleitreibung vom zurückgelegten Wege abhängt, auch wenn die treibende Kraft ein Potential besitzt. Die Behandlung der gedämpften Bewegung wird indessen dadurch erleichtert, daß in den beiden Grundformeln 3) auf der rechten Seite nur die zugehörigen Laufteile mit ihrer Ableitung, nicht aber der Gesamtlauf auftreten.

1. Beispiel. Haben wir es im Sonderfalle mit einem Körper zu tun, der ohne Einwirkung von äußeren Kräften im widerstehenden Mittel fortschreitet, so liegt zunächst kein Anlaß für eine Abweichung von der geraden Bahn vor, so daß wir uns mit der einfachen Formel

$$m\frac{dv}{dt} + k_1 v = 0, \qquad \frac{dv}{dt} = -\frac{k_1}{m}v = -\varkappa v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

begnügen dürfen. Daraus folgt umgekehrt mit einem Anfangslauf v_0 für $t = 0$

$$\frac{dv}{v} = -\varkappa t, \quad \lg n\frac{v}{v_0} = -\varkappa t, \quad v = v_0 e^{-\varkappa t}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4\text{a})$$

wonach der Körper erst mit $t = \infty$, d. h. niemals völlig zur Ruhe gelangt. Erweitern wir dagegen 4) mit $v \cdot dt = dx$, so wird mit $x = 0$ für $v = v_0$

$$dv = -\varkappa\,dx, \quad v = v_0 - \varkappa x, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4\text{b})$$

wonach die niemals ganz erreichte Ruhelage den Abstand $x_0 = \frac{v_0}{\varkappa}$ vom Anfang besitzt. Durch Ausschalten von v aus 4a) und 4b) erhalten wir schließlich die Gleichung der Wegkurve

$$x = \frac{v_0}{\varkappa}\,(1 - e^{-\varkappa t}), \qquad \text{4c)}$$

die sich vom Anfang aufsteigend asymptotisch dem Werte x_0 nähert.

2. Beispiel. Für einen mit dem Anfangslauf v_0 von der Anfangslage $y = 0$ gegen den Erdanlauf g emporsteigenden Körper liegt ebenfalls kein Anlaß für die Abweichung von der Senkrechten zur Erdoberfläche vor, also gilt hier mit der zweiten Formel 3) mit $Y = -mg$

$$-mg = m\frac{dv}{dt} + k_1 v, \quad \frac{dv}{dt} = -g - \frac{k_1}{m}\,v = -(g + \varkappa v), \qquad \text{5)}$$

oder

$$\frac{\varkappa\,dv}{g + \varkappa v} = -\varkappa\,dt, \quad \lg n\frac{g + \varkappa v}{g + \varkappa v_0} = -\varkappa t, \quad g + \varkappa v = (g + \varkappa v_0)\,e^{-\varkappa t}, \qquad \text{5a)}$$

woraus sich die Steigzeit t_1 mit $v = 0$ zu

$$t_1 = \frac{1}{\varkappa}\lg n\left(1 + \frac{\varkappa v_0}{g}\right) \qquad \text{5b)}$$

berechnet. Nach Erweiterung von 5) mit $v\,dt = dy$ folgt

$$-dy = \frac{v \cdot dv}{g + \varkappa v}; \quad \varkappa y = v_0 - v + \frac{g}{\varkappa}\lg n\frac{g + \varkappa v}{g + \varkappa v_0}, \qquad \text{5c)}$$

also die Steighöhe mit $v = 0$, sowie wegen 5b)

$$y_1 = \frac{v_0}{\varkappa} - \frac{g}{\varkappa^2}\lg n\left(1 + \frac{\varkappa v_0}{g}\right) = \frac{v_0 - g t_1}{\varkappa} \qquad \text{5d)}$$

Schließlich folgt noch durch Ausschalten von v aus 5a) und 5c)

$$\varkappa y = \frac{g + \varkappa v_0}{\varkappa}\,(1 - e^{-\varkappa t}) - g t\,. \qquad \text{5e)}$$

Die Formeln 5a), 5c) und 5e) gelten auch für den Niedergang des Körpers von der durch 5d) bestimmten Steighöhe. Sie ergeben folglich mit $y = 0$ den Endlauf v_2 beim Wiederauftreffen auf den Boden und die bis dahin vom Aufstieg an gerechnete Gesamtzeit, allerdings durch transzendente Gleichungen, die aber zeichnerisch durch den Schnitt der Exponentialkurven mit der Geraden durch den Anfang gelöst werden können, worauf wir im nächsten Beispiel zurückkommen.

3. Beispiel. Der schiefe Wurf eines Körpers mit Dämpfung führt mit $X = O$ und $Y = -mg$ in 3) auf die Gleichungen

$$m\frac{dv_x}{dt} + k_1 v_x = 0, \quad -mg = m\frac{dv_y}{dt} + k_1 v_y, \qquad \text{6)}$$

die wir jede für sich schon in den beiden vorstehenden Beispielen vollständig integriert haben. Mit $k_1 : m = \varkappa$ folgt demnach aus 4a) und 5a), bzw. 4b) und 5c)

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_{x_0}\,e^{-\varkappa t} = v_{x_0} - \varkappa x \\ v_y &= \left(\frac{g}{\varkappa} + v_{y_0}\right) e^{-\varkappa t} - \frac{g}{\varkappa} \end{aligned}\right\}, \qquad \text{6a)}$$

also
$$\left.\begin{aligned} v^2 &= \left[v_{x_0}^2 + \left(\frac{g}{\varkappa} + v_{y_0}\right)^2\right] e^{-2\varkappa t} - \frac{2g}{\varkappa}\left(\frac{g}{\varkappa} + v_{y_0}\right) e^{-\varkappa t} + \frac{g^2}{\varkappa^2} \\ \frac{v \cdot dv}{\varkappa\, dt} &= -\left[v_{x_0}^2 + \left(\frac{g}{\varkappa} + v_{y_0}\right)^2\right] e^{-2\varkappa t} + \frac{g}{\varkappa}\left(\frac{g}{\varkappa} + v_{y_0}\right) e^{-\varkappa t} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; 6\text{b})$$

Danach erreicht der Gesamtlauf v einen Höchstwert für $e^{-\varkappa t} = 0$, d. h. $t = \infty$, wobei $v_x = 0$ wird, entsprechend einer senkrechten Asymptote der Bahn, und einen Kleinstwert für
$$e^{\varkappa t} = \frac{\varkappa^2 v_{x_0}^2 + (g + \varkappa v_{y_0})^2}{g\,(g + \varkappa v_{y_0})} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 6\text{c})$$

Für die Bahngleichung erhalten wir ferner aus 4c) und 5e)
$$\left.\begin{aligned} \varkappa x &= v_{x_0}\left(1 - e^{-\varkappa t}\right) \\ \varkappa y &= \left(\frac{g}{\varkappa} + v_{y_0}\right)\left(1 - e^{-\varkappa t}\right) - g t \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 7)$$

und nach Ausschaltung der Zeit t
$$y = \left(\frac{g}{\varkappa} + v_{y_0}\right)\frac{x}{v_{x_0}} + \frac{g}{\varkappa^2}\,\lg n\left(1 - \frac{\varkappa x}{v_{x_0}}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 7\text{a})$$

Durch Differentiation folgt daraus
$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{g + \varkappa v_{y_0}}{\varkappa v_{x_0}} - \frac{g}{\varkappa v_{x_0} - \varkappa^2 x} \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= -\frac{g \varkappa^2}{(\varkappa v_{x_0} - \varkappa^2 x)^2} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 7\text{b})$$

und man erkennt, daß
$$\text{für} \quad \varkappa x = v_{x_0} \qquad \frac{dy}{dx} = -\infty, \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\infty$$
$$\text{für} \quad x = -\infty \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{g + \varkappa v_{y_0}}{\varkappa v_{x_0}}, \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

wird, d. h. also, daß die Bahn, wie aus Abb. 96 ersichtlich, zwei Asymptoten besitzt, die den Zeitwerten $t = \pm \infty$ entsprechen. Die Bewegung geht daher immer mehr in den senkrechten Fall über, wobei sich der Laufwert nach 6b) dem Höchstwerte
$$v_m = v_{y_m} = -\frac{g}{\varkappa} \quad . \; . \; 7\text{c})$$
nähert, für den nach 6) $\frac{dv_y}{dt} = 0$ und die Dämpfung gerade durch den Erdanlauf g ausgeglichen wird.

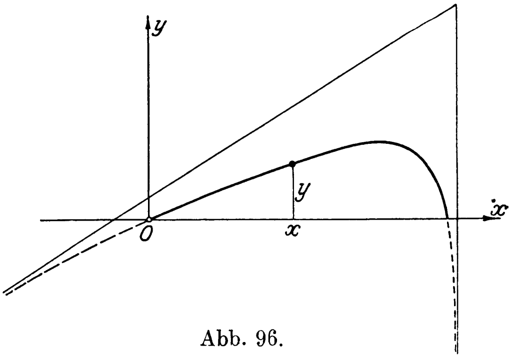

Abb. 96.

Für $y = 0$ geht 7a) über in die Gleichung
$$1 - \frac{\varkappa x}{v_{x_0}} = e^{-\left(1 + \frac{\varkappa v_{y_0}}{g}\right)\frac{\varkappa x}{v_{x_0}}}, \quad 7\text{d})$$
deren eine Wurzel x 0 den Anfang der Bewegung ergibt, während eine zweite, die Wurfweite, aus dem Schnitt der beiden Kurven
$$u_1 = 1 - \frac{\varkappa x}{v_{x_0}}, \qquad u_2 = e^{-\left(1 + \frac{\varkappa v_{y_0}}{g}\right)\frac{\varkappa x}{v_{x_0}}}$$
nach Abb. 97 hervorgeht. Daß dieser Schnitt reell ist, folgt aus den Ab-

leitungen beider Linien, die für $x=0$ sich zu

$$\left(\frac{du_1}{dx}\right)_0 = -\frac{\varkappa}{v x_0} > \left(\frac{du_2}{dx}\right)_0 = -\frac{\varkappa}{v x_0}\left(1+\frac{\varkappa v y_0}{g}\right)$$

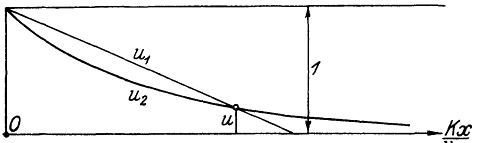

Abb. 97.

ergeben, also verschiedene Neigungen aufweisen.

Für $\varkappa=0$, d. h. für den Wegfall der Dämpfung wird aus der Bahngleichung $\infty - \infty$, also ein unbestimmter Ausdruck. Entwickeln wir also das zweite Glied in 7a) in eine Reihe, so wird aus 7a)

$$y = \frac{v y_0}{v x_0} x - \frac{g x^2}{2 v_{x_0}^2} - \frac{g \varkappa}{3 v_{x_0}^3} x^3 - \ldots, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 7\text{b})$$

also mit $\varkappa=0$ die uns schon vertraute Gleichung der Wurfparabel § 7. Gl. 7a)

$$y = \frac{v y_0}{v x_0} x - \frac{g x^2}{2 v_{x_0}^2}.$$

§ 32. Der quadratische Widerstand. Haben wir es bei rascher Bewegung mit einem dem Quadrate des Laufes verhältnisgleichen Widerstande

$$W = k_2 v^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 1)$$

zu tun, so wird dieser nicht, wie im Falle der Dämpfung, von selbst mit dem Laufe v sein Vorzeichen wechseln, da v^2 stets positiv ist. Es bleibt also, um die Widerstandsrichtung bei der Hubumkehr ebenfalls zu ändern, wie bei der Gleitreibung nichts als ein Vorzeichenwechsel des Beiwertes, oder mit andern Worten, der Ansatz einer neuen Bewegungsgleichung übrig. Für die Bewegung in einer Geraden unter der Wirkung einer treibenden Kraft P haben wir demnach mit $W = k_2 v^2$

$$\text{für } v \gtrless 0 \qquad P = m\frac{dv}{dt} \pm k_2 v^2 \quad \ldots \ldots \quad 2)$$

zu schreiben. Bei krummliniger Bewegung ohne Hubumkehr auf der Bahn sind die in die Achsenrichtungen fallenden Teilwiderstände $W\frac{v_x}{v} = k_2 v v_x$, $W\frac{v_y}{v} = k_2 v v_y$ derart einzuführen, daß die Bewegungsformeln

$$X = m\frac{dv_x}{dt} + k_2 v v_x, \qquad Y = m\frac{dv_y}{dt} + k_2 v v_y \quad \ldots \quad 3)$$

lauten. Aus ihnen folgt dann in bekannter Weise die Arbeitsgleichung

$$dL = X dx + Y dy = m(v_x dv_x + v_y dv_y) + k_2 v (v_x dx + v_y dy),$$

oder, wie im vorigen Abschnitt

$$dL = m v dv + k_2 v^2 ds. \quad \ldots \ldots \ldots \quad 3\text{a})$$

Der Arbeitsaufwand ist demnach auch beim Vorhandensein eines Potentials der treibenden Kraft wegen des Widerstandes abhängig vom zurückgelegten Weg. Da ferner der Widerstand stets einen

Arbeitsaufwand erfordert, der bei der Hubumkehr auf der Bahn mit ds sein Vorzeichen nicht wechseln darf, so erkennt man aus 3a) deutlich für diesen Fall die Notwendigkeit des Vorzeichenwechsels von k_2. Weiter ist ersichtlich, daß infolge des Auftretens des Gesamtlaufes v neben den Laufteilen v_x bzw. v_y in den Widerstandsgliedern der Bewegungsformeln diese nicht wie bei der Dämpfung unabhängig voneinander behandelt werden können, was naturgemäß eine Erschwerung mit sich bringt.

1. Beispiel. Schreitet ein Körper ohne Einwirkung treibender Kräfte in einem Mittel mit quadratischem Widerstand fort, so haben wir

$$m\frac{dv}{dt}+k_2v^2=0\,,\qquad \frac{dv}{dt}=-\frac{k_2}{m}v^2=-\varkappa v^2\,,\quad \ldots\ldots \quad 4)$$

also mit einem Anfangslauf v_0 für $t=0$

$$-\frac{dv}{v^2}=\varkappa\,dt\,,\qquad \frac{1}{v}-\frac{1}{v_0}=\varkappa t\,,\quad \ldots\ldots \quad 4a)$$

so daß v, wie bei der Dämpfung erst für $t=\infty$, d. h. niemals völlig zur Ruhe kommt. Dieser Fall tritt u. a. ein beim Anlegen von Schiffen, sowie beim Anhalten von Eisenbahnzügen, das trotz des Abstellens der Triebkraft nur durch Einschalten einer Gleitreibung (Bremsung) schließlich erzwungen wird. Erweitern wir Gl. 4) mit $v\,dt=ds$, so wird mit $s=0$ für $v=v_0$

$$\frac{dv}{v}=-\varkappa\,ds\,,\qquad \lg n\frac{v}{v_0}=-\varkappa s\,,\qquad v=v_0e^{-\varkappa s}\quad \ldots\ldots \quad 4b)$$

Der Ruhezustand tritt also hiernach erst im Unendlichen ein, woraus sich ebenfalls die Notwendigkeit einer Bremsung zum Anhalten ergibt. Nach Ausschalten von v aus 4a) und 4b) wird schließlich

$$\varkappa s=\lg n\,(1+\varkappa v_0 t)\quad \ldots\ldots \quad 4c)$$

mit der Näherungsform $s=v_0t$ für kleine Werte von $\varkappa v_0 t$. Die Bewegung geht also schließlich in eine gleichförmige über, die dem Erlöschen des Widerstandes entspricht.

2. Beispiel. Wird ein Körper aufwärts geworfen, so ist $Y=-mg$, also da der Widerstand k_2v^2 ebenfalls abwärts wirkt

$$m\frac{dv}{dt}=-mg-k_2v^2,\qquad \frac{dv}{dt}=-g-\frac{k_2}{m}v^2=-g\,(1+\varkappa_0{}^2v^2)\,,\quad \ldots \quad 5)$$

wo

$$\frac{1}{\varkappa_0}=\sqrt{\frac{mg}{k_2}}\quad \ldots\ldots \quad 6)$$

den Wert des Grenzlaufes v bedeutet, bei dem der Widerstand gerade das Körpergewicht ausgleicht. Alsdann wird mit v_0 für $t=0$

$$\frac{dv}{1+\varkappa_0{}^2v^2}=-g\,dt\,,\qquad \operatorname{arctg}\varkappa_0v-\operatorname{arctg}\varkappa_0v_0=-\varkappa_0gt\,,$$

oder umgekehrt

$$\varkappa_0v=\frac{\varkappa_0v_0-\operatorname{tg}\varkappa_0gt}{1+\varkappa_0v_0\operatorname{tg}\varkappa_0gt}=\frac{\varkappa_0v_0\cos\varkappa_0gt-\sin\varkappa_0gt}{\varkappa_0v_0\sin\varkappa_0gt+\cos\varkappa_0gt}\,,\quad \ldots \quad 5a)$$

woraus sich mit $v=0$ die Steigzeit t_1 aus

$$\operatorname{tg}\varkappa_0gt_1=\varkappa_0v_0\qquad \text{zu}\qquad t_1=\frac{\operatorname{arctg}\varkappa_0v_0}{\varkappa_0g}\quad \ldots\ldots \quad 5b)$$

berechnet. Mit $v\cdot dt=dy$ folgt weiter aus 5a) unter Beachtung, daß der

Zähler des Bruches mit $\varkappa_0 g$ erweitert die Ableitung des Nenners darstellt, durch Integration mit $y = 0$ für $t = 0$

$$\varkappa_0^2 g y = \lg n\,(\varkappa_0 v_0 \sin \varkappa_0 g t + \cos \varkappa_0 g t) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 5\,\mathrm{c})$$

Erweitert man dagegen 5) mit $v\,dt = dy$, so wird mit v_0 für $y = 0$

$$g\,dy = -\frac{v\,dv}{1 + \varkappa_0^2 v^2}\,, \qquad 2\,\varkappa_0^2 g y = \lg n \frac{1 + \varkappa_0^2 v_0^2}{1 + \varkappa_0^2 v^2} \; . \; . \; . \; . \; . \quad 5\,\mathrm{d})$$

mit der Steighöhe y_1 für $v = 0$ aus

$$2\,\varkappa_0^2 g y_1 = \lg n\,(1 + \varkappa_0^2 v_0^2) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 5\,\mathrm{e})$$

Daraus folgt schließlich durch Verbindung mit 5b) für die Steigzeit der andere Ausdruck

$$t_1 = \frac{1}{\varkappa_0 g} \operatorname{arctg} \sqrt{e^{2 g \varkappa_0^2 y_1} - 1} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 5\,\mathrm{f})$$

Für sehr kleine Werte von $\varkappa_0$ kann man in 5a) $\operatorname{tg} \varkappa_0 g t \approx \varkappa_0 g t$ und in 5d) $\lg n \dfrac{1 + \varkappa_0^2 v_0^2}{1 + \varkappa_0^2 v^2} \approx \varkappa_0^2 (v_0^2 - v^2)$ setzen, woraus dann die bekannten Ausdrücke für das widerstandslose freie Aufsteigen hervorgehen.

3. Beispiel. Beim Herabfallen des Körpers wirkt der Widerstand nach oben, also gilt, wenn wir den Lauf in der Bewegungsrichtung positiv nehmen, mit 6)

$$m \frac{dv}{dt} = m g - k_2 v^2, \qquad \frac{dv}{dt} = g \left(1 - \frac{k_2}{m g} v^2\right) = g\,(1 - \varkappa_0^2 v^2)\,, \; . \; . \; . \quad 7)$$

oder $$2\,g\,dt = \frac{2\,dv}{1 - \varkappa_0^2 v^2} = \frac{2\,dv}{(1 - \varkappa_0 v)(1 + \varkappa_0 v)} = \frac{dv}{1 - \varkappa_0 v} + \frac{dv}{1 + \varkappa_0 v}\,.$$

Das liefert mit einem Anfangslauf $v = 0$ für $t = 0$

$$\lg n \frac{1 + \varkappa_0 v}{1 - \varkappa_0 v} = 2\,g\,\varkappa_0 t\,, \qquad \varkappa_0 v = \frac{e^{2 g \varkappa_0 t} - 1}{e^{2 g \varkappa_0 t} + 1} = \frac{e^{g \varkappa_0 t} - e^{-g \varkappa_0 t}}{e^{g \varkappa_0 t} + e^{-g \varkappa_0 t}}\,, \; . \; . \quad 7\,\mathrm{a})$$

also für $t = \infty$, $\varkappa_0 v = 1$, d. h. der Lauf nähert sich asymptotisch dem Grenzwert 6). Erweitern wir 7) mit $2\,v\,dt = -2\,dy$, so wird mit $y = y_1$ für $v = 0$

$$-2\,g\,dy = \frac{2\,v\,dv}{1 - \varkappa_0^2 v^2}\,, \qquad 2\,g\,\varkappa_0^2\,(y - y_1) = \lg n\,(1 - \varkappa_0^2 v^2)\,,$$

oder $$\varkappa_0^2 v^2 = 1 - e^{-2 g \varkappa_0^2 (y_1 - y)}\,, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 7\,\mathrm{b})$$

woraus sich für $y = 0$ der Endlauf v_2 beim Auftreffen auf den Boden zu

$$\varkappa_0 v_2 = \sqrt{1 - e^{-2 g \varkappa_0^2 y_1}} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 7\,\mathrm{c})$$

ergibt. Setzen wir ferner noch in 7a) $v = -dy : dt$, so liefert die Integration mit $y = y_1$ für $t = 0$

$$g\,\varkappa_0^2\,(y_1 - y) = \lg n \frac{e^{g \varkappa_0 t} + e^{-g \varkappa_0 t}}{2} = \lg n\,\mathfrak{Cof}\,g\,\varkappa_0 t \; . \; . \; . \; . \; . \quad 7\,\mathrm{d})$$

und damit die Fallzeit t_2 mit $y = 0$. Zu dieser gelangt man noch einfacher durch Einsetzen von 7b) mit $y = 0$ in die erste Formel 7a) und erhält so

$$t_2 = \frac{1}{2\,\varkappa_0 g} \lg n \frac{1 + \sqrt{1 - e^{-2 g \varkappa_0^2 y_1}}}{1 - \sqrt{1 - e^{2 g \varkappa_0^2 y_1}}} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 7\,\mathrm{e})$$

Der Vergleich dieses Wertes mit der Steigzeit 5b) des vorigen Beispiels ist wenig übersichtlich. Dagegen ergibt der Vergleich von 7c) und 5e)

$$v_2 = \frac{v_0}{\sqrt{1 + \varkappa_0^2 v_0^2}} < v_0\,, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 7\,\mathrm{f})$$

so daß also — infolge des Arbeitsverlustes durch den Widerstand — der Körper langsamer auftrifft, als er vom Boden emporgestiegen ist. Daraus kann unmittelbar auf $t_2 > t_1$ geschlossen werden.

4. Beispiel. Für den schiefen Wurf könnten wir wieder auf die beiden Grundformeln 3) zurückgreifen, indem wir dort $X = 0$ und $Y = -mg$ setzen. Da indessen diese Gleichungen noch den Gesamtlauf v neben den Laufteilen v_x und v_y enthalten, so ist ihre getrennte Behandlung im Gegensatz zum Falle der Dämpfung nicht durchführbar. Deshalb empfiehlt es sich hier von vornherein, wenigstens die zweite Formel durch eine solche zu ersetzen, welche den Widerstand nicht enthält, d. h. durch den Ausdruck für den Normalanlauf. Wir haben also mit dem Neigungswinkel τ der Bahn und $ds = v\,dt$, sowie mit 6) aus der ersten Gl. 3)

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{k_2}{m} v v_x, \qquad \text{oder} \qquad \frac{dv_x}{v_x} = -\frac{k_2}{m} ds = -\varkappa_0^2 g\, ds \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8)$$

und für den Normalanlauf

$$\frac{v^2}{\varrho} = g \cos \tau, \qquad \text{oder} \qquad -v_x^2 \frac{d\tau}{ds} = g \cos^3 \tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9)$$

Aus 8) folgt sofort durch Integration mit dem Anfangswert $v_{x_0} = v_0 \cos \tau_0$ für $s = 0$

$$v_x = v_{x_0} e^{-g \varkappa_0^2 s}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8\text{a})$$

also $v_x = 0$ für $s = \infty$, was nur möglich ist, wenn die Bahn sich einer senkrechten Asymptote nähert. Setzen wir diesen Ausdruck in 9) ein, so wird

$$\frac{v_{x_0}^2}{g} \frac{d\tau}{\cos^3 \tau} = -e^{2 g \varkappa_0^2 s} ds, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9\text{a})$$

oder integriert

$$\varkappa_0^2 v_{x_0}^2 \left[\frac{\sin \tau}{\cos^2 \tau} + \operatorname{lgn} \operatorname{tg}\left(\frac{\tau}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right] = C - e^{2 g \varkappa_0^2 s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9\text{b})$$

Hierin ist für $s = 0$, $\tau = \tau_0$, also

$$C = 1 + \varkappa_0^2 v_{x_0}^2 \left[\frac{\sin \tau_0}{\cos^2 \tau_0} + \operatorname{lgn} \operatorname{tg}\left(\frac{\tau_0}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right], \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9\text{c})$$

während für $s = -\infty$ nach 9b) der Winkel τ einen Grenzwert annimmt, dem eine zweite schrägliegende Asymptote, wie in Abb. 96, entspricht.

Der Bahnlauf

$$v = \frac{v_x}{\cos \tau} = \frac{v_{x_0}}{\cos \tau} e^{-g \varkappa_0^2 s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8\text{b})$$

nähert sich mit $\tau = 90^0$ und $s = \infty$ dem Grenzwerte $v = 1 : \varkappa_0$, wie sich am einfachsten aus der zweiten Grundformel 3) mit $dv_y : dt = 0$ und $v_y = v$ ergibt. Die vorstehenden Gleichungen bestimmen den durchlaufenen Weg als Funktion der Bahnneigung τ, ermöglichen also die zeichnerische Integration der Ansätze

$$dx = ds \cos \tau, \qquad dy = ds \sin \tau, \qquad dt = v^{-1} ds$$

und damit die punktweise Aufzeichnung der Bahn selbst mit den dazu gehörigen Zeiten.

Für sehr langgestreckte, sog. Flachbahnen ist angenähert

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \tau \approx \sin \tau, \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} \approx \frac{d\tau}{dx} \approx \frac{d\tau}{ds}, \qquad \cos \tau \approx 1,$$

also mit 9) und $y = 0$, $\operatorname{tg} \tau = \operatorname{tg} \tau_0$ für $x = 0$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= -\frac{g}{v_x^2} = -\frac{g}{v_{x_0}^2} e^{2g\varkappa_0^2 x} \\ \frac{dy}{dx} &= +\operatorname{tg}\tau = \operatorname{tg}\tau_0 + \frac{1}{2\varkappa_0^2 v_{x_0}^2}\left[1 - e^{2g\varkappa_0^2 x}\right] \\ y &= x\left(\operatorname{tg}\tau_0 + \frac{1}{2\varkappa_0^2 v_{x_0}^2}\right) + \frac{1}{4g\varkappa_0^4 v_{x_0}^2}\left(1 - e^{2g\varkappa_0^2 x}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad 11)$$

Entwickeln wir die letzte Klammer in eine Potenzreihe und brechen mit x^3 ab, so folgt

$$y = x \operatorname{tg}\tau_0 - \frac{g x^2}{2 v_{x_0}^2} - \frac{2 g^2 \varkappa_0^2}{3 v_{x_0}^2} x^3, \quad 11\,a)$$

d. h. die angenäherte Flachbahn setzt sich aus einer gewöhnlichen Wurfparabel y_1 und einer kubischen Parabel y_2 nach Abb. 98 zusammen, von denen die letztere mit $\varkappa_0 = 0$ entsprechend dem Verschwinden des Widerstandes wegfällt.

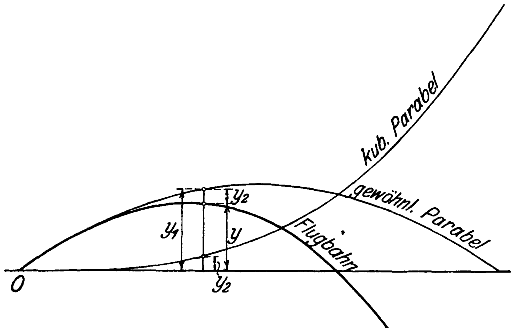

Abb. 98.

Das letzte Beispiel bildet die Grundlage der Lehre von der Geschoßbewegung oder äußeren Ballistik, bei der wir es stets mit so hohen Geschwindigkeiten zu tun haben, daß jedenfalls der Einfluß der im § 31 besprochenen Dämpfung vernachlässigt werden kann. Das trifft aber streng genommen nicht mehr zu beim senkrechten Emporwerfen eines Körpers, sowie beim freien Fall in der Luft aus der Ruhelage, in deren Nähe die Dämpfung sicher den quadratischen Widerstand übertrifft. Alsdann hätten wir für den Gesamtwiderstand genauer

$$W = k_1 v + k_2 v^2 = v\,(k_1 + k_2 v) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 12)$$

zu schreiben, womit die wagerechte Bewegung (Beispiel 1) ohne treibende Kraft nach den Formeln

$$\frac{dv}{dt} = -v\left(\frac{k_1}{m} + \frac{k_2}{m} v\right) = -\varkappa_1 v (1 + \varkappa_2 v),$$

$$\frac{v + \varkappa_2 v_0 v}{v_0 + \varkappa_2 v_0 v} = e^{-\varkappa_1 t}, \quad \frac{1 + \varkappa_2 v}{1 + \varkappa_2 v_0} = e^{-\varkappa_1 \varkappa_2 s} \quad . \; . \; . \; . \quad 12\,a)$$

leicht berechnet werden kann. Für die Auf- und Abwärtsbewegung aber hätten wir dagegen

$$\frac{dv}{dt} = \mp g - \varkappa_1 v - \varkappa_2 v^2 = \mp g - \varkappa_2\left(v^2 + \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} v\right)$$

$$\frac{dv}{dt} = \mp g + \frac{\varkappa_1^2}{4\varkappa_2} - \left(v + \frac{\varkappa_1}{2\varkappa_2}\right)^2 \varkappa_2, \quad . \; . \; . \; . \quad 12\,b)$$

also im 2. und 3. Beispiel einfach

$$\left.\begin{array}{ll} g \mp \dfrac{\varkappa_1^{\,2}}{4\varkappa_2} & \text{an Stelle von } g \\ v + \dfrac{\varkappa_1}{2\varkappa_2} & \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad v \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 12\text{c})$$

zu setzen, ohne daß sich der Rechnungsgang sonst ändert. Die Erörterung der mit 12c) erhaltenen Ergebnisse kann demnach dem Leser zur Übung überlassen werden.

VIII. Dynamik ebener Schwingungen.

§ 33. Freie Reibungsschwingungen. Befindet sich ein Massenpunkt in einem Anlauffelde, dessen Stärke dem Abstand von einem Zentrum verhältnisgleich und nach diesem hin gerichtet ist, so vollzieht er sich selbst überlassen, wie wir früher § 11 gesehen haben, in beiden Achsenrichtungen einfache Schwingungen, deren Überlagerung eine elliptische Bahn ergibt. Bewegt sich der Punkt dabei auf einer rauhen ebenen Unterlage, so tritt noch eine der augenblicklichen Bewegungsrichtung entgegengesetzte Reibungskraft hinzu, die im geraden Verhältnis zum Normaldruck $N = mg$ des Massenpunktes auf die feste Unterlage steht. Ist demnach $-\alpha^2 r$ der Zentralanlauf, so ist die entsprechende „Federkraft“ $-\alpha^2 mr$ mit den Anteilen $-\alpha^2 mx$ und $-\alpha^2 my$ in den Achsenrichtungen. Zur Beschleunigung der Masse bedarf es demnach einer äußeren Treibkraft mit den Anteilen

$$\left.\begin{array}{l} X = m\ddot{x} + \alpha^2 mx \pm mgf\dfrac{v_x}{v} \\ Y = m\ddot{y} + \alpha^2 my \pm mgf\dfrac{v_y}{v} \end{array}\right\}, \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

worin die Reibungsziffer f ihr Vorzeichen mit dem Bahnlauf v, d. h. bei einer Bewegungsumkehr auf der Bahn derart wechselt, daß für den Hin- und Rückgang das Reibungsglied mit verschiedenem Vorzeichen zu versehen ist. Durch Erweiterung der Formeln 1) mit dx, dy und Addition folgt sodann wegen $v_x dx + v_y dy = v\,ds$, $x\,dx + y\,dy = r\,dr$ die Arbeitsgleichung

$$X\,dx + Y\,dy = m\,[v\,dv + \alpha^2 r\,dr \pm gf\,ds], \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

in der das letzte Glied rechts stets die verlorene Reibungsarbeit darstellt, welche mit dem absoluten Betrage des insgesamt zurückgelegten Weges, d. h. der Summe der Hin- und Rückgänge wächst. Ist die Masse im Felde der Federkraft und Reibung sich selbst überlassen, so verschwinden die äußeren Teilkräfte X und Y und wir erhalten unter Weglassung des gemeinsamen Faktors m aus 1) und 2) für die freie Bewegung

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}+\alpha^2 x &= \mp g f \frac{v_x}{v}\\ \ddot{y}+\alpha^2 y &= \mp g f \frac{v_y}{v}\end{aligned}\right\} \quad \text{1a)}$$

$$v\,dv+\alpha^2 r\,dr=\mp g f\,ds\,, \quad \text{2a)}$$

worin die linke Seite die Änderung der gesamten Macht der bewegten Masseneinheit darstellt.

Erweitern wir schließlich die Formeln 1a). mit y bzw. x und subtrahieren, so folgt mit $x\ddot{y}-y\ddot{x}=\frac{d}{dt}(x\dot{y}-y\dot{x})=\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right)$ $=\frac{d}{dt}(r^2\omega)$

$$\frac{d(r^2\omega)}{r^2\omega}=\mp g f\frac{dt}{v}=\mp g f\frac{ds}{v^2}, \quad \text{3)}$$

oder

$$\lg n\frac{r^2\omega}{r_0{}^2\omega_0{}^2}=\mp g f\int\frac{ds}{v^2}, \quad \text{3a)}$$

d. h. der Flächenlauf des Fahrstrahls vermindert sich ebenso wie nach 2a) die gesamte Macht der frei bewegten Masse infolge der Reibung.

Verschwindet in 2a) das erste Glied links, so bleibt

$$\alpha^2 r\,dr=\mp g f\,ds \quad \text{2b)}$$

eine Bedingung, welche identisch erfüllt ist für $ds=0$, $dr=0$. also $v=0$ und damit Umkehrpunkte der Bewegung oder ein Aufhören derselben anzeigt. Verschwindet dagegen weder ds noch dr, so ist $dv=0$ und 2b) geht mit dem Neigungswinkel ν des Strahles r gegen die Bahn, oder $dr:ds=\cos\nu$ über in

$$\alpha^2 r\cos\nu=\mp g f,\qquad \frac{g^2 f^2}{\alpha^4 r^2}<1, \quad \text{2c)}$$

wonach Scheitelwerte des Laufes an solche Stellen der Bahn geknüpft sind, wo der Bahnanteil der Federkraft gerade durch die Reibung aufgehoben wird. Diese Verhältnisse werden noch klarer durch Ausschaltung des Bogenelementes $ds=\sqrt{dr^2+r^2 d\varphi^2}$ aus 2b). Wir gelangen so zur Bedingung

$$g f r\,d\varphi=\sqrt{\alpha^4 r^2-g^2 f^2}\,dr, \quad \text{2d)}$$

die für $d\varphi=0$, $dr=0$, also $v=0$, d. h. für Umkehrpunkte und Steckenbleiben ohne weiteres erfüllt ist und durch Integration eine Kurve ergibt, deren außerhalb des Kreises $\alpha^4 r^2=g^2 f^2$ gelegene reelle Schnitte mit der Bahn die Stellen der Scheitelwerte von v liefern. Ist im Sonderfalle die Bahn eine Gerade durch die Mitte des Kraft- und Anlauffeldes, so wird mit $d\varphi=0$, $ds=dr$

$$(\alpha^4 r^2-g^2 f^2)\,dr^2=0\,,$$

so daß bei einer einfachen geradlinigen Reibungsschwingung die Punkte $r = \pm \frac{fg}{\alpha^2}$ zu beiden Seiten der Feldmitte mit Scheitelwerten von v durchlaufen werden. Solche Punkte wollen wir als Schwingungsmittelpunkte bezeichnen.

1. Beispiel. Ein Körper von der Masse m sei durch eine Schraubenfeder, deren Eigenmasse gegen m vernachlässigt kann, mit einer festen Wand verbunden und auf einer rauhen Ebene beweglich (Abb. 99). Bei der Auslenkung x aus der Stellung mit ungespannter Feder sei der Anlauf $-\alpha^2 x$, also die Federkraft $\alpha^2 m x$, mithin bewegt sich der ausgelenkte und sich selbst überlassene Körper geradlinig in der x-Richtung nach der Formel

$$\ddot{x} + \alpha^2 x \pm g f = 0\,, \quad \ldots \quad 4)$$

die auch mit $v_x = v$ aus der ersten Gl. 1a) folgt. Setzen wir darin

$$g f = \alpha^2 x_r\,,$$

so wird $\ddot{x} + \alpha^2 (x \pm x_r) = 0 \quad \ldots \quad 4a)$

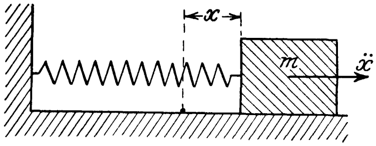

Abb. 99.

wegen der Beständigkeit von x_r erfüllt von der Schwingungsgleichung

$$\left.\begin{aligned} x \pm x_r &= A \cos \alpha t + B \sin \alpha t \\ \dot{x} &= \alpha (B \cos \alpha t - A \sin \alpha t) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 5)$$

mit der von der Reibung unabhängigen Schwingungsdauer

$$t = \frac{2\pi}{\alpha}\,. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 6)$$

Nach 4a) erhält man für $\ddot{x} = 0$, also für Scheitelwerte von $\dot{x}$ die beiden Schwingungsmittelpunkte $x = \mp x_r$ entsprechend $\dot{x} \gtrless 0$ für den Hin- und Rückgang. Die Beiwerte A und B in 5) sind durch die Anfangsbedingungen der Bewegung bestimmt, also durch $x = x_0 > 0$, $\dot{x} = \dot{x}_0 = \alpha c$ für $t = 0$ so zwar, daß für den Hingang mit

$$x_0 + x_r = A\,, \qquad \alpha c = \alpha B$$

die Gl. 5) übergehen in

$$\left.\begin{aligned} x + x_r &= (x_0 + x_r) \cos \alpha t + c \sin \alpha t \\ \dot{x} &= \alpha c \cos \alpha t - \alpha (x_0 + x_r) \sin \alpha t \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 5a)$$

Dieselben gelten mit demselben Vorzeichen nur bis zum größten Ausschlag $x_1 > x_0$, der mit $\dot{x} = 0$ zur Zeit t_1 gegeben durch

$$\operatorname{tg} \alpha t_1 = \frac{c}{x_0 + x_r}\,. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 7)$$

erreicht wird und sich damit aus der ersten Formel 5a) zu

$$x_1 = \sqrt{(x_0 + x_r)^2 + c^2} - x_r \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 7a)$$

berechnet. Mit der Hubumkehr an dieser Stelle ändert aber x_r mit der Reibungsziffer f sein Vorzeichen, so daß für den Rückgang in 5)

$$x_1 - x_r = A\,, \qquad B = 0$$

zu setzen ist, wenn wir der Einfachheit halber die Zeit von der Hubumkehr ab rechnen. Also gilt für den Rückgang

$$\left.\begin{aligned} x - x_r &= (x_1 - x_r) \cos \alpha t \\ \dot{x} &= -(x_1 - x_r)\, \alpha \sin \alpha t \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 5b)$$

mit dem nächsten Scheitelwerte für $\cos \alpha t_2 = -1$, $\alpha t_2 = \pi$

$$x_2 = 2 x_r - x_1\,. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 7b)$$

Der nächste Umkehrpunkt nach abermaligem Fortschreiten um $\alpha t = \pi$ liegt dann bei

$$x_3 = -x_2 - 2x_r = x_1 - 4x_r\,, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 7\,c)$$

so daß wir für die aufeinanderfolgenden absoluten Scheitelwerte oder Umkehrpunkte einen Unterschied von $2x_r$ erhalten, der dem Wechsel der Schwingungsmitten von $+x_r$ auf $-x_r$ entspricht und die in Abb. 100 gezeichnete Weg- und Laufkurve ergibt. Beide bestehen aus halben Sinuslinien, von denen diejenigen der Wegkurve sich an den Scheiteln tangential anschließen, während sie an den entsprechenden Punkten der Laufkurve Knicke bilden. Fällt die Hubumkehr wie x_3 in Abb. 100 zwischen die Geraden $\pm x_r$ der Schwingungsmitten, so ist der Absolutwert der Federkraft $\alpha^2 m x_3 < mgf$ nicht mehr imstande, die Masse gegen die Reibung wieder in Bewegung zu setzen. Die Masse bleibt alsdann bei x_3 liegen und die Wegkurve verläuft von dort als Parallele zur Zeitachse weiter, während die Laufkurve von da mit ihrer Zeitachse zusammenfällt. Die Arbeitsgleichung würde in unserm Falle lauten mit $v_0 = \alpha c$, $v_3 = 0$

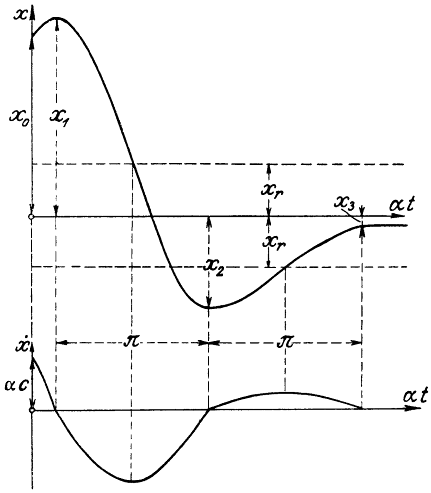

Abb. 100.

$$-\alpha^2 c^2 + \alpha^2 (x_3{}^2 - x_0{}^2) + 2gf\,[(x_1 - x_0) - (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2)] = 0$$

$$\alpha^2\,(c^2 + x_0{}^2 - x_3{}^2) = 2gf\,(2\,x_1 - 2\,x_2 + x_3 - x_0)$$

$$\alpha^2\,(c^2 + x_0{}^2 - x_3{}^2) = 2gf\,(5\,x_1 - 8\,x_r - x_0)\,, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 8)$$

deren linke Seite die Abnahme der Gesamtmacht anzeigt, welche durch die rechts stehende Reibungsarbeit bedingt ist, deren Klammer die Summe der absoluten Wege für jeden Hin- und Hergang enthält. Zur versuchsmäßigen Prüfung des Vorganges kann man an Stelle der Federung auch ein Pendel benutzen, z. B. eine an ihrer Öse auf dem schräg gestellten Reißbrett drehbar aufgehängte Reißschiene, deren Schwingungen genau in der oben abgeleiteten Weise verlaufen. Durch Änderung der Neigung α des Brettes kann überdies das Verhältnis der Reibung $fmg \cos\alpha$ zur Richtkraft $\alpha^2 m x = mg\varphi \sin\alpha$, wo φ den Pendelausschlag bedeutet, geändert werden.

2. Beispiel. Wesentlich anders gestaltet sich der Schwingungsverlauf, wenn wir den Körper von der Masse m_2 vermittels der masselos gedachten Schraubenfeder nicht mit einer festen Wand, sondern nach Abb. 101 mit einem andern Körper m_1 verknüpfen, der selbst so rasch fortschreitet, daß trotz der Schwingungen, wie bei Eisenbahnwagen im fahrenden Zuge, nur Schwankungen der Laufwerte ohne Vorzeichenwechsel auftreten. Das hat dann zur Folge, daß die Reibungsziffern f_1 und f_2 der beiden Körper auf der ebenen Unterlage ebenfalls dauernd ihr Vorzeichen beibehalten.

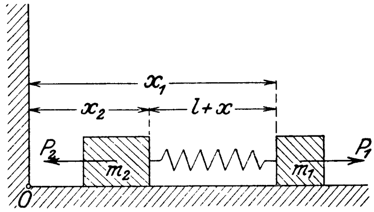

Abb. 101.

Bezeichnen wir nunmehr die augenblicklichen Abstände der beiden Massen m_1 und m_2 von einem festen Anfangspunkte 0 mit x_1 und x_2, die augenblickliche Federlänge mit $l + x$, wobei l ihre spannungslose Länge bedeutet, mit $\alpha_0{}^2 x$ die der Federverlängerung x entsprechende Federkraft, die auf m_1 verzögernd, auf m_2 aber treibend wirkt, so bestehen mit den äußeren Kräften P_1 und P_2 an den Massen m_1 und m_2 die Bewegungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= m_1\ddot{x}_1 + \alpha_0^2 x + m_1 f_1 g \\ -P_2 &= m_2\ddot{x}_2 - \alpha_0^2 x + m_2 f_2 g \end{aligned}\right\}, \qquad 9)$$

bei deren Addition

$$P_1 - P_2 = m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 + g\,(m_1 f_1 + m_2 f_2) \qquad 9a)$$

die Federkraft herausfällt. Nach Erweiterung mit dx_1 bzw. dx_2 ergibt sich wegen

$$x_1 - x_2 = l + x\,, \qquad dx_1 - dx_2 = dx \qquad 10)$$

die Arbeitsgleichung

$$P_1 dx_1 - P_2 dx_2 = m_1\dot{x}_1 d\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2 d\dot{x}_2 + \alpha_0^2 x\,dx + g\,(m_1 f_1 dx_1 + m_2 f_2 dx_2)\,, \qquad 9b)$$

in der die ersten beiden Glieder die Änderung der Wucht, das dritte die in der Feder aufgespeicherte Arbeit und das letzte Glied mit der Klammer die Reibungsarbeit bedeutet. Um zunächst den Schwingungsvorgang herauszuschälen, müssen wir in 9) die Größen x_1 und x_2 vermittels 10) ausschalten, was durch Division der beiden Formeln mit m_1 bzw. m_2 und Abziehen gelingt. Wir erhalten so mit den Abkürzungen

$$\frac{P_1}{m_1} = p_1\,, \qquad \frac{P_2}{m_2} = p_2\,, \qquad \alpha_0^2\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = \alpha^2\,, \qquad 11)$$

sowie mit $\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = \ddot{x}$

$$p_1 + p_2 - g\,(f_1 - f_2) = \ddot{x} + \alpha^2 x\,, \qquad 12)$$

also bei unveränderlichen p_1 und p_2

$$x = \frac{p_1 + p_2 - g\,(f_1 - f_2)}{\alpha^2} + A\cos\alpha t + B\sin\alpha t\,. \qquad 12a)$$

Hierin stellt

$$\frac{p_1 + p_2 - g\,(f_1 - f_2)}{\alpha^2} = x_m \qquad 13)$$

die mittlere Federverlängerung dar, um welche die Schwingungen selbst rein periodisch und unbeeinflußt von der Reibung sich abspielen mit der Dauer

$$t_0 = \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2\pi}{\alpha_0}\sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}} \qquad 13a)$$

Setzen wir nun den Ausdruck 12a) in die Grundformeln 9) ein, so folgt unter Beachtung von 11)

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \frac{P_1 - P_2 - g\,(f_1 m_1 + f_2 m_2)}{m_2 + m_1} - \frac{\alpha_0^2}{m_1}(A\cos\alpha t + B\sin\alpha t) \\ \ddot{x}_2 &= \frac{P_1 - P_2 - g\,(f_1 m_1 + f_2 m_2)}{m_1 + m_2} + \frac{\alpha_0^2}{m_2}(A\cos\alpha t + B\sin\alpha t) \end{aligned}\right\} \qquad 9c)$$

Die hierbei auftretenden beständigen Glieder verschwinden aber für

$$P_1 - P_2 = g\,(f_1 m_1 + f_2 m_2)\,, \qquad 14)$$

d. h. wenn die äußeren Kräfte gerade zur Überwindung der Gesamtreibung ausreichen. Alsdann ist aber

$$m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = 0\,, \qquad m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2 = (m_1 + m_2)\,c\,, \qquad 15)$$

d. h. der Massenmittelpunkt schreitet gleichförmig fort, und daher sind die Schwingungsausschläge der Einzelmassen einander gerade entgegengesetzt. Es bleibt somit

$$-m_1\ddot{x}_1 = m_2\ddot{x}_2 = \alpha_0^2\,(A\cos\alpha t + B\sin\alpha t) \qquad 16)$$

und mit dem gemeinsamen mittleren Lauf c

$$m_1\,(c - \dot{x}_1) = m_2\,(\dot{x}_2 - c) = \frac{\alpha_0^2}{\alpha}(A\sin\alpha t - B\cos\alpha t)\,. \qquad 16a)$$

Daraus folgt mit zwei weiteren Festwerten b_1 und b_2

$$\left.\begin{aligned} m_1 x_1 &= m_1 (b_1 + ct) + \frac{\alpha_0^2}{\alpha^2} (A \cos \alpha t + B \sin \alpha t) \\ m_2 x_2 &= m_2 (b_2 + ct) - \frac{\alpha_0^2}{\alpha^2} (A \cos \alpha t + B \sin \alpha t) \end{aligned}\right\}, \quad \ldots \quad 16\text{b)}$$

also

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = m_1 b_1 + m_2 b_2 + (m_1 + m_2) ct \quad \ldots \ldots \quad 17)$$

Verlangen wir nun, daß der durch $(m_1 + m_2) x_0 = m_1 x_1 + m_2 x_2$ gegebene Massenmittelpunkt bei Beginn der Bewegung gerade die Anfangslage $x_0 = 0$ durchläuft, so ist

$$m_1 b_1 + m_2 b_2 = 0, \qquad b_2 = -\frac{m_1}{m_2} b_1 \quad \ldots \ldots \quad 18)$$

Soll ferner b_1 die Anfangsstellung von m_1 bezeichnen, so ist für $t = 0$ $x_1 = b_1$, also nach 16b) $A = 0$, und wenn in diesem Augenblick gerade $\dot{x}_2 = 0$ ist, nach 16a) $\alpha_0^2 B = m_2 \alpha c$. Damit sind alle Festwerte der Formeln 16b) bestimmt und wir erhalten dafür

$$\left.\begin{aligned} m_1 x_1 &= m_1 (ct + b_1) + \frac{m_2 c}{\alpha} \sin \alpha t \\ m_2 x_2 &= m_2 ct - m_1 b_1 - \frac{m_2 c}{\alpha} \sin \alpha t \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad 19)$$

und an Stelle von 12a)

$$x = x_m + \frac{m_2 \alpha c}{\alpha_0^2} \sin \alpha t, \quad \ldots \ldots \quad 12\text{b)}$$

sowie

$$\dot{x}_1 = c\left(1 + \frac{m_2}{m_1} \cos \alpha t\right), \qquad \dot{x}_2 = c (1 - \cos \alpha t) \quad \ldots \ldots \quad 19\text{a)}$$

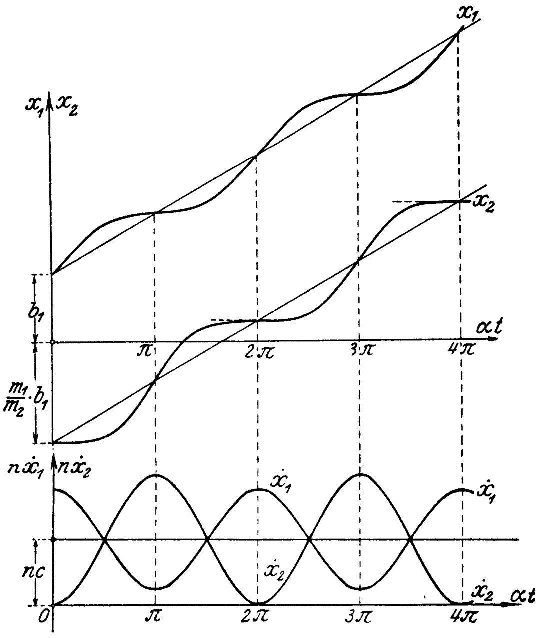

Abb. 102.

Da nun laut Voraussetzung keiner dieser Werte negativ werden darf, so muß in unserm Falle $m_2 < m_1$ sein. Alsdann kommt nur die Masse m_2 für $\alpha t = 2\pi$ zur Ruhe, schreitet also scheinbar ruckweise vorwärts, wie sich aus der Weg- und Laufkurve Abb. 102 ergibt, in der der Deutlichkeit halber die Werte $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$ in n-facher Vergrößerung eingetragen sind.

Setzen wir schließlich die Ausdrücke 19) und 19a), sowie 12a) in die Arbeitsgleichung 9b) ein, so verschwinden bei der Integration über eine oder mehrere volle Perioden alle Glieder bis auf diejenigen der Reibungsarbeit, woraus sich ungezwungen die von der Reibung unbeeinflußte Erhaltung der Schwingungen erklärt.

§ 34. Freie gedämpfte Schwingungen.

Ist eine Masse m im Felde einer zentralen Federkraft $-\alpha^2 mr$ mit den Anteilen $-\alpha^2 mx$, bzw. $-\alpha^2 my$ in den Achsenrichtungen einer

Dämpfung kv mit den Achsenanteilen kv_x und kv_y unterworfen, so lauten bei Einwirkung einer Außenkraft mit den Anteilen X und Y die Bewegungsformeln:

$$\left.\begin{aligned} X &= m(\ddot{x} + \alpha^2 x) + k\dot{x} \\ Y &= m(\ddot{y} + \alpha^2 y) + k\dot{y} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 1)$$

und mit der Abkürzung

$$\frac{k}{m} = 2\varepsilon \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 2)$$

beim Wegfall der Außenkraft, also für die freie Bewegung:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + \alpha^2 x &= 0 \\ \ddot{y} + 2\varepsilon\dot{y} + \alpha^2 y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 1a)$$

Nach Erweiterung mit dx bzw. dy und Addition folgt daraus die Arbeitsgleichung der Masseneinheit:

$$v\,dv + 2\varepsilon v\,ds + \alpha^2 r\,dr = 0, \quad \ldots \ldots \quad 3)$$

während nach Erweiterung mit y bzw. x und Subtraktion sich ergibt:

$$\ddot{y}x - \ddot{x}y + 2\varepsilon(\dot{y}x - \dot{x}y) = 0,$$

oder unter Einführung des Strahls r und seines Drehwinkels φ sowie des Drehwertes $\omega = \dot{\varphi}$

$$\frac{d(r^2\omega)}{dt} + 2\varepsilon r^2\omega = 0 \ldots \ldots \ldots \quad 4)$$

Aus 3) folgt sofort eine Abnahme der Gesamtwucht $\frac{1}{2}(v^2 + \alpha^2 r^2)$ durch die Dämpfungsarbeit, aus 4) dagegen eine asymptotische Abnahme des Flächenlaufes

$$r^2\omega = r_0^2\omega_0^2 e^{-2\varepsilon t} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 4a)$$

mit der Zeit.

Da ferner die beiden Bewegungsformeln 1a) gleich gebaut und voneinander ganz unabhängig sind, so genügt es, nur eine derselben zu untersuchen.

Wesentlich ist dafür die Unveränderlichkeit der Beiwerte der einzelnen Glieder, die eine solche Lösung nahelegt, deren Ableitungen sich voneinander nur durch einen festen Beiwert unterscheiden. Das ist aber die Eigenschaft der Exponentialgrößen

$$x = Ce^{\varkappa t}, \quad \dot{x} = C\varkappa e^{\varkappa t}, \quad \ddot{x} = C\varkappa^2 e^{\varkappa t}, \quad \ldots \ldots \quad 5)$$

worin C und $\varkappa$ zunächst noch unbekannte Festwerte bedeuten. Führen wir die Ausdrücke 5) in die erste Formel 1a) ein, so folgt:

$$Ce^{\varkappa t}(\varkappa^2 + 2\varepsilon\varkappa + \alpha^2) = 0 \ldots \ldots \quad 5a)$$

Da hierin vor der Klammer wegen 5) der Abstand x der Masse vom Anlaufzentrum steht, der im allgemeinen nicht verschwindet, so muß

$$\varkappa^2 + 2\varepsilon\varkappa + \alpha^2 = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 5b)$$

sein, woraus sich

$$\varkappa = -\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - \alpha^2} \ldots \ldots \ldots \quad 6)$$

berechnet. Es gibt also im allgemeinen zwei Werte von $\varkappa$, welche reell oder komplex ausfallen, je nachdem $\varepsilon^2 \gtrless \alpha^2$ wird. Wir betrachten zunächst den ersten Fall reeller Werte von $\varkappa$, der offenbar einer starken Dämpfung im Verhältnis zur Federkraft entspricht und setzen zur Abkürzung:

$$\left.\begin{array}{c} \sqrt{\varepsilon^2-\alpha^2}=\alpha_1, \quad \varepsilon^2>\alpha^2 \\ \varkappa=-\varepsilon \pm \alpha_1 \end{array}\right\} \quad \text{6a)}$$

Diesen beiden Wurzeln entsprechen alsdann auch zwei Ausdrücke von x mit je einem willkürlichen Festwert, so daß wir als gesuchte Lösung d. h. als vollständiges Integral der vorgelegten Differentialgleichung 1a)

$$x=e^{-\varepsilon t}\left(A e^{\alpha_1 t}+B e^{-\alpha_1 t}\right) \quad \text{7)}$$

erhalten. Von der Richtigkeit dieses Ergebnisses kann man sich auch durch nachträgliches Einsetzen mit beiden Ableitungen in 1a) überzeugen, deren erste

$$\dot{x}=e^{-\varepsilon t} \alpha_1\left(A e^{\alpha_1 t}-B e^{-\alpha_1 t}\right)-\varepsilon e^{-\varepsilon t}\left(A e^{\alpha_1 t}+B e^{-\alpha_1 t}\right)$$
$$\dot{x}=e^{-\varepsilon t} \alpha_1\left(A e^{\alpha_1 t}-B e^{-\alpha_1 t}\right)-\varepsilon x \quad \text{7a)}$$

den Lauf der Masse darstellt. Zur Bestimmung der beiden noch unbekannten Festwerte A und B dienen nun die Anfangsbedingungen der Bewegung. Verlangen wir, daß zur Zeit $t=0$ die Masse das Zentrum mit einem Anfangslauf $\dot{x}=c$ durchfährt, so ist

$$\left.\begin{array}{c} A+B=0, \quad \alpha_1(A-B)=c \\ A=-B=\dfrac{c}{2 \alpha_1} \end{array}\right\} \quad \text{7b)}$$

und wir haben an Stelle von 7) und 7a)

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{c}{2 \alpha_1} e^{-\varepsilon t}\left(e^{\alpha_1 t}-e^{-\alpha_1 t}\right)=\dfrac{c}{\alpha_1} e^{-\varepsilon t} \operatorname{Sin} \alpha_1 t \\ \dot{x}=\dfrac{c}{2} e^{-\varepsilon t}\left(e^{\alpha_1 t}+e^{-\alpha_1 t}\right)-\varepsilon x=c e^{-\varepsilon t}\left(\operatorname{Cof} \alpha_1 t-\dfrac{\varepsilon}{\alpha_1} \operatorname{Sin} \alpha_1 t\right) \end{array}\right\} \quad \text{8)}$$

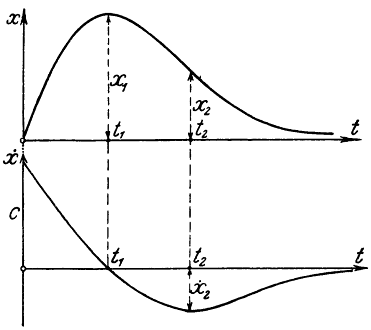

Abb. 103.

Da nach 6a) stets $\varepsilon>\alpha_1>0$ ist, so ist auch $e^{\alpha_1 t}-e^{-\alpha_1 t}>0$ und der Abstand x behält dauernd das gleiche Vorzeichen wie c; er verschwindet mit $\dot{x}$ erst für $t=\infty$, so daß sich also die einmal vom Anfang entfernte Masse diesem asymptotisch wieder nähert, Abb. 103. Nachdem sie für $t=0$ von dort ausgegangen ist, muß sie einen größten Abstand x_1, zu einem Zeitpunkt t_1 erreichen, der sich mit $\dot{x}=0$ mit der zweiten Formel 8) aus

$$e^{\alpha_1 t}(\varepsilon-\alpha_1)=e^{-\alpha_1 t}(\varepsilon+\alpha_1) \text{ zu } t_1=\frac{1}{2 \alpha_1} \lg n \frac{\varepsilon+\alpha_1}{\varepsilon-\alpha_1}>0 \quad \text{8a)}$$

berechnet, während sich durch Einsetzen von t_1 in die erste Gl. 8) unter Beachtung der zweiten und 6a)

$$x_1 = \frac{c}{\alpha}\left(\frac{\varepsilon + \alpha_1}{\varepsilon - \alpha_1}\right)^{-\frac{\varepsilon}{2\alpha_1}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 8\text{b})$$

ergibt. Der absolut größte Laufwert $\dot{x}_2$ tritt ferner auf für $\ddot{x} = 0$ entsprechend dem Wendepunkt in der Wegkurve oder nach 1a) für $2\varepsilon\dot{x} + \alpha^2 x = 0$. Führen wir in diese Bedingung die Ausdrücke 8) ein, so folgt für den Zeitpunkt des größten (negativen) Laufwertes

$$t_2 = \frac{1}{\alpha_1} \lg n \frac{\varepsilon + \alpha_1}{\varepsilon - \alpha_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 8\text{c})$$

Wird im Sonderfalle $\varepsilon = \alpha$, also $\alpha_1 = 0$, d. h. fallen die beiden Wurzeln 6) in $\varkappa = -\varepsilon$ zusammen, so nehmen die Ausdrücke für x und t_1 die unbestimmten Werte $0:0$ an. Differenzieren wir also im Zähler und Nenner nach α_1 und setzen erst dann $\alpha_1 = 0$, so folgt.

$$\left.\begin{array}{ll} x = c\,t\,e^{-\varepsilon t}, & \dot{x} = c\,e^{-\varepsilon t}\,(1 - \varepsilon t) \\ t_1 = \dfrac{1}{\varepsilon}, & x_1 = \dfrac{c}{\varepsilon e} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 8\text{d})$$

Man übersieht leicht, daß der Verlauf sich auch in diesem Falle nicht wesentlich von dem allgemeineren nach 8) unterscheidet, den wir als eine aperiodische Bewegung bezeichnen wollen.

Gehen wir nun zum zweiten Fall komplexer Wurzeln $\varkappa$ über, so dürfen wir dafür mit $\alpha^2 > \varepsilon^2$, d. h. schwacher Dämpfung im Verhältnis zur Federkraft

$$\varkappa = -\varepsilon \pm i\sqrt{\alpha^2 - \varepsilon^2} = -\varepsilon \pm i\alpha_2 \quad \ldots\ldots \quad 9)$$

schreiben. Die für den ersten Fall entwickelten Formeln behalten demnach ihre Gültigkeit, wenn wir in ihnen $\alpha_1 = i\alpha_2$ setzen und beachten, daß $e^{\pm i\alpha_2 t} = \cos\alpha_2 t \pm i \sin\alpha_2 t$ ist. Alsdann erhalten wir für die Bewegung mit denselben Anfangsbedingungen, d. h. für $t = 0$, $x = 0$, $\dot{x} = c$

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{c}{\alpha_2} e^{-\varepsilon t} \sin\alpha_2 t \\ \dot{x} = c e^{-\varepsilon t}\left(\cos\alpha_2 t - \dfrac{\varepsilon}{\alpha_2}\sin\alpha_2 t\right) \end{array}\right\}, \quad \ldots\ldots \quad 10)$$

also ersichtlich eine Schwingung, deren Ausschläge mit der Zeit asymptotisch abnehmen, Abb. 104. Da diese Abnahme ausschließlich durch die Dämpfung ε bedingt ist, wollen wir den ganzen Vorgang als eine gedämpfte Schwingung bezeichnen. Ihr entsprechen Durchgänge durch die Nullage für $\sin\alpha_2 t = 0$ oder $\alpha_2 t = n\pi$. Der Zeitunterschied zweier aufeinanderfolgender Durchgänge ist demnach $\pi : \alpha_2$ und für zwei Durchgänge in gleicher Richtung

$$t_0 = \frac{2\pi}{\alpha_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2 - \varepsilon^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 11)$$

Da nun für die Scheitelwerte von x mit $\dot{x}=0$ aus der zweiten Formel 10)

$$\operatorname{tg}\alpha_2 t = \operatorname{tg}(\alpha_2 t - n\pi) = \frac{\alpha_2}{\varepsilon} \quad \ldots\ldots \quad 11\text{a})$$

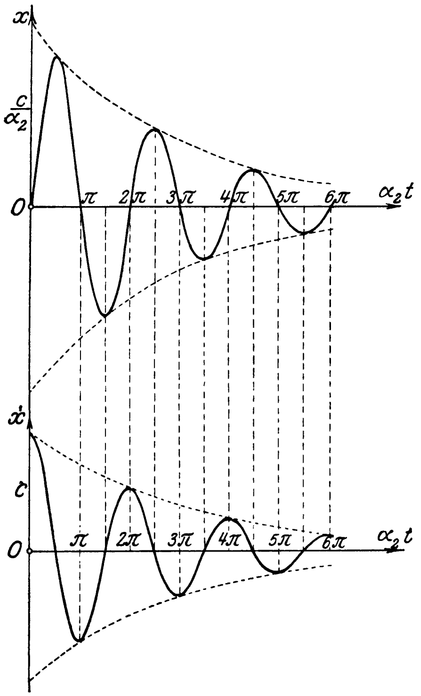

Abb. 104.

gilt, so folgen auch diese in denselben Zeitunterschieden aufeinander, wie die Nulldurchgänge. Wir dürfen somit den unveränderlichen Wert 11) als die **Schwingungsdauer** bezeichnen, die ersichtlich mit der Dämpfungsziffer ε wächst. Ist der Schwingungsausschlag zur Zeit t durch die erste Gl. 10) gegeben, so erhalten wir für die Zeit $t+t_0 = t + \frac{2\pi}{\alpha_2}$, also um die Schwingungsdauer später

$$x' = \frac{c}{\alpha_2}\, e^{-\varepsilon(t+t_0)} \sin\alpha_2 (t+t_0)$$

$$= \frac{c}{\alpha_2}\, e^{-\varepsilon(t+t_0)} \sin\alpha_2 t,$$

mithin

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{x'} &= e^{\varepsilon t_0} = \text{konst}, \\ \text{oder} \quad \operatorname{lgn}\frac{x}{x'} &= \varepsilon t_0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 12)$$

Das Verhältnis zweier in der Schwingungsdauer aufeinanderfolgender Ausschläge ist demnach ein Festwert; sein natürlicher Logarithmus wird gewöhnlich als das **logarithmische Dekrement** bezeichnet. Dieses Ergebnis ermöglicht einerseits bei vorgelegter Wegkure, wie sie sich aus Versuchen mit einem sog. **Oszillographen** ergibt, die Bestimmung der Dämpfung, andererseits aber bei vorgelegter Dämpfung die bequeme Aufzeichnung der Weg- und Laufkurve, Abb. 104. Schließlich sei noch bemerkt, daß für $\alpha_2 = 0$, $\alpha^2 = \varepsilon^2$ die Schwingungsdauer $t = \infty$ wird, womit die Schwingung selbst in den schon oben behandelten Sonderfall der aperiodischen Bewegung übergeht, während mit $\alpha^2 < \varepsilon^2$ und imaginärer Schwingungsdauer wieder der allgemeine Fall dieser Bewegungsart zum Vorschein kommt.

1. Beispiel. Fragen wir nunmehr nach der Bahn eines sich selbst überlassenen Massenpunktes im Federkraftfeld beim Vorhandensein einer Dämpfung, so haben wir nur die Gleichungen für die beiden Achsenrichtungen zu vereinigen. Stellen wir für den ersten Fall starker Dämpfung, also $\varepsilon^2 > \alpha^2$ die Bedingungen $x=0$, $\dot{x}=c$, $y=b$, $\dot{y}=-\varepsilon b$, für $t=0$, so genügen diesen mit der Abkürzung $c:\alpha_1 = a$ in 8) die Gleichungen

$$x = a e^{-\varepsilon t}\,\mathfrak{Sin}\,\alpha_1 t, \qquad y = b e^{-\varepsilon t}\,\mathfrak{Cof}\,\alpha_1 t, \quad \ldots\ldots \quad 13)$$

oder $$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = e^{-2\varepsilon t}, \qquad \frac{xb}{ya} = \mathfrak{T}\mathrm{g}\,\alpha_1 t \quad \ldots\ldots\ldots \quad 13\text{a})$$

Wir erhalten also als Bahn eine Hyperbel, deren beide Achsen mit der Zeit asymptotisch in den Anfangspunkt zusammenschrumpfen. Infolgedessen wird auch der Massenpunkt von $x = 0$, $y = b$ mit $\frac{dy}{dx} = -\frac{b\varepsilon}{c}$ ausgehend sich in einem Bogen dem Anfang nähern, ohne ihn je ganz zu erreichen. Zur Aufzeichnung der Bahn bedient man sich zweckmäßig der beiden mit der Zeitachse vereinigten Wegkurven 13) nach Abb. 105, in welche der zugehörige halbe Hyperbelast für $t = 0$ mit einer Asymptote eingetragen ist.

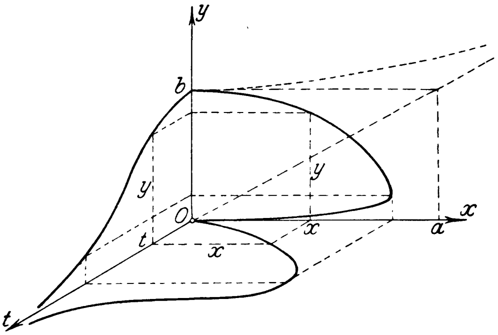

Abb. 105.

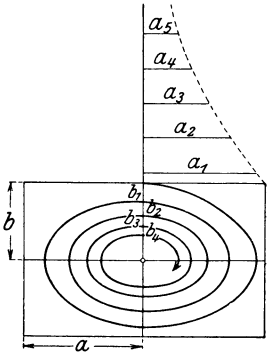

Abb. 106.

2. Beispiel. Für schwache Dämpfung $\varepsilon^2 < \alpha^2$ hat man mit denselben Anfangsbedingungen und der Abkürzung $c : \alpha_2 = a$ in 10)

$$x = a e^{-\varepsilon t} \sin \alpha_2 t, \qquad y = b e^{-\varepsilon t} \cos \alpha_2 t, \quad \ldots \quad 14)$$

oder $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = e^{-2\varepsilon t}, \qquad \frac{xb}{ya} = \operatorname{tg} \alpha_2 t \quad \ldots\ldots \quad 14\text{a})$$

Die Bahn wird also eine Ellipse, deren Halbachsen ebenfalls asymptotisch zusammenschrumpfen, so daß der Massenpunkt auf einer elliptischen Spirale dem Anfang zustrebt, ohne ihn ganz zu erreichen. Die Aufzeichnung erfordert die Kenntnis der Abnahmen der beiden Halbachsen, die man unmittelbar durch Antragen der Exponentialkurve an eine derselben gewinnt. Damit sind dann die aufeinanderfolgenden Längen $a_1 a_2 \ldots$, $b_1 b_2 \ldots$ der Halbachsen gegeben, durch deren Endpunkte die Bahn, Abb. 106, hindurchgeht.

Sämtliche in diesem Abschnitt besprochenen Bewegungsvorgänge können leicht an einem als Pendel aufgehängten Stab, der mit dem unteren Ende zur Herstellung und Veränderung der Dämpfung mehr oder weniger in ein Öl- oder Wasserbad eintaucht, nachgewiesen werden.

3. Beispiel. An einem mit raschem beständigem Lauf c in der x-Richtung vorwärts eilenden Wagen A sei im Punkte B eine Masse m angehängt, welche auf der rauhen Bewegungsebene gleitet und vermöge einer zwischen A und B eingeschalteten Blattfeder seitlich ausschwingen kann, Abb. 107. Ist X die Zugkraft des Wagens und f die Reibungsziffer von m auf der Unterlage, so lauten mit einer Federkraft $Y = -\alpha^2 m y$ die Bewegungsgleichungen

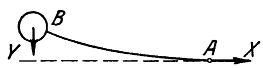

Abb. 107.

$$X = m\ddot{x} + mgf\frac{\dot{x}}{v}, \quad -m\alpha^2 y = m\ddot{y} + mgf\frac{\dot{y}}{v}. \quad \ldots \quad 15)$$

Ist der Ausschlag y nur klein, so trifft dies auch für das Verhältnis $\dot{y} : v$ zu, so daß $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \approx \dot{x}^2 = c^2$ hinreichend genau gesetzt werden darf, wenn der

Wagen gleichförmig fortschreitet. Alsdann vereinfachen sich unsere Formeln mit $\ddot{x} = 0$ in

$$X = mgf, \quad \ddot{y} + \frac{gf}{c}\dot{y} + \alpha^2 y = 0, \quad \ldots \ldots \quad 15a)$$

wonach die Zugkraft nur die Reibung zu überwinden hat, während die Masse senkrecht zur Bewegungsrichtung des Wagens einer Dämpfung unterworfen ist, die mit der Hubumkehr, also mit y von selbst ihr Vorzeichen ändert Je nachdem $gf \gtrless 2c\alpha$ wird die daraus hervorgehende Bewegung von m in der y-Richtung aperiodisch oder als gedämpfte Schwingung verlaufen, auf jeden Fall aber mit der Zeit bis zur Unmerklichkeit abklingen, wenn sie nicht von neuem durch eine meist stoßartige Seitenkraft neu erregt wird.

§ 35. Schwingungen mit quadratischem Widerstand. Bewegt sich ein Massenpunkt im Felde einer zentralen Federkraft auf einer Geraden durch den Ursprung gegen einen quadratischen Widerstand, so gilt

$$m(\ddot{x} + \alpha_0^2 x) \pm k v^2 = 0, \quad \ldots \ldots \quad 1)$$

je nachdem es sich um eine Vorwärts- oder Rückwärtsbewegung handelt. Dividieren wir durch m und benutzen die Abkürzungen $2\alpha_0^2 = \alpha^2$, $2k : m = \varkappa$, so dürfen wir mit $\ddot{x} = \dot{v} = v\frac{dv}{dx}$ auch schreiben

$$\frac{d(v^2)}{dx} + \alpha^2 x \pm \varkappa v^2 = 0. \quad \ldots \ldots \quad 1a)$$

Dieser Differentialgleichung genügt offenbar der Ansatz

$$v^2 = A + Bx + Ce^{nx}, \quad \frac{d(v^2)}{dx} = B + Cne^{nx},$$

also nach Einsetzen in 1a) und Ordnen der Glieder

$$(B \pm \varkappa A) + (\alpha^2 \pm \varkappa B)x + Ce^{nx}(n \pm \varkappa) = 0$$

$$B = \mp\frac{\alpha^2}{\varkappa}, \quad A = \mp\frac{B}{\varkappa} = \frac{\alpha^2}{\varkappa^2}, \quad n = \mp\varkappa,$$

während C als Integrationskonstante zunächst unbestimmt bleibt. Mithin lautet das vollständige Integral von 1a)

$$v^2 = \frac{\alpha^2}{\varkappa^2} \mp \frac{\alpha^2}{\varkappa}x + Ce^{\mp\varkappa x}, \quad \ldots \ldots \quad 2)$$

worin das obere Vorzeichen des Beiwertes $\varkappa$ für den Hingang, das untere für den Rückgang gilt, während C aus den Anfangsbedingungen jeder dieser Bewegungen sich berechnet.

Durchläuft nun der Körper den Ursprung $x = 0$ mit $v = v_0$ in positiver Richtung, so ist mit dem oberen Vorzeichen von $\varkappa$

$$v_0^2 = \frac{\alpha^2}{\varkappa^2} + C,$$

also gilt für den ersten Hingang

$$\left.\begin{aligned} v^2 &= \frac{\alpha^2}{\varkappa^2}\left[1 - \varkappa x + \left(\frac{\varkappa^2}{\alpha^2}v_0^2 - 1\right)e^{-\varkappa x}\right] \\ \frac{d(v^2)}{dx} &= -\frac{\alpha^2}{\varkappa}\left[1 + \left(\frac{\varkappa^2}{\alpha^2}v_0^2 - 1\right)e^{-\varkappa x}\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad 3)$$

mit der Hubumkehr für $v=0$ im Punkte x_1, gegeben durch

$$(1-\varkappa x_1)\,e^{\varkappa x_1}=1-\frac{\varkappa^2}{\alpha^2}v_0^{\,2},\quad \left[\frac{d(v^2)}{dx}\right]_{x=x_1}=-\alpha^2 x_1\ .\ .\ .\quad 3\text{a)}$$

Mit Hilfe der bekannten Exponentialkurve $e^{-\varkappa x}$ kann man leicht die v^2, x-Linien auftragen, Abb. 108, die offenbar gegen die x-Achse konvex, gerade oder konkav verläuft, je nachdem

$$\varkappa^2 v_0^{\,2} \gtreqless \alpha^2 \quad \text{und damit} \quad \varkappa x_1 \gtreqless 1 \quad 3\text{b)}$$

wird. Für den **Rückgang** gilt in Gl. 2) das untere Vorzeichen von $\varkappa$, also lautet dieselbe mit $x=x_1$, und $v=0$

$$\left.\begin{aligned} v^2&=\frac{\alpha^2}{\varkappa^2}\left[1+\varkappa x-(1+\varkappa x_1)\,e^{\varkappa(x-x_1)}\right]\\ \frac{d(v^2)}{dx}&=\frac{\alpha^2}{\varkappa}\left[1-(1+\varkappa x_1)\,e^{\varkappa(x-x_1)}\right]\end{aligned}\right\}.\quad 4)$$

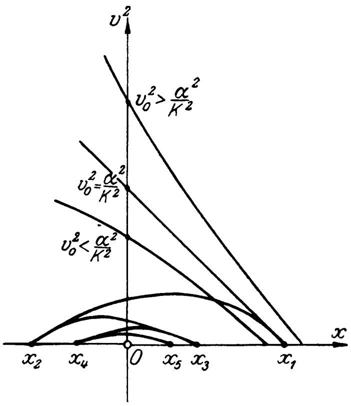

Abb. 108.

Sie **beginnt** bei x_1 mit einem Anstieg

$$\left(\frac{d(v^2)}{dx}\right)_{x=x_1}=-\alpha^2 x_1,\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\quad 4\text{a)}$$

hat also mit der Kurve für den Hingang an der Hubumkehr dieselbe Tangente, Abb. 108. Für $v=0$ ergeben sich aus 4) die Bedingungsgleichungen

$$(1+\varkappa x)\,e^{-\varkappa x}=(1+\varkappa x_1)\,e^{-\varkappa x_1},\quad \frac{d(v^2)}{dx}=-\alpha^2 x,\quad .\quad 4\text{b)}$$

deren erste durch Aufzeichnung der links stehenden Funktion gelöst werden kann. Man erkennt sofort, daß sie durch $x=x_1$ und einen der **zweiten Hubumkehr** zugehörigen Abstand $x_2=-x_1+\delta$ erfüllt wird, worin sich der als klein angenommene Unterschied δ näherungsweise mit $e^{-\varkappa\delta}\approx 1-\varkappa\delta$ zu

$$\delta=\frac{1}{\varkappa^2 x_1}\left[(1+\varkappa x_1)\,e^{-2\varkappa x_1}-1+\varkappa x_1\right]\approx\frac{2}{3}\varkappa x_1^{\,2}>0\quad .\quad 4\text{c)}$$

berechnen läßt, wobei $e^{-2\varkappa x_1}$ bis zur 3. Potenz einschließlich zu entwickeln ist. Daraus geht jedenfalls hervor, daß die zweite Hubumkehr x_2, dem Ursprung näher liegt als die erste x_1. Im Ursprung $x=0$ selbst wird

$$v_1^{\,2}=\frac{\alpha^2}{\varkappa^2}\left[1-(1+\varkappa x_1)\,e^{-\varkappa x_1}\right]=\frac{\alpha^2}{\varkappa^2}e^{-\varkappa x_1}\left[e^{\varkappa x_1}-(1+\varkappa x_1)\right]>0,\quad 4\text{d)}$$

woraus in Verbindung mit 3a)

$$\frac{v_1^{\,2}}{v_0^{\,2}}=\frac{1-(1+\varkappa x_1)\,e^{-\varkappa x_1}}{1-(1-\varkappa x_1)\,e^{\varkappa x_1}}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\quad 5)$$

hervorgeht. Entwickeln wir darin $e^{-\varkappa x_1}$ und $e^{\varkappa x_1}$ in Reihen und brechen mit dem quadratischen Gliede ab, so wird angenähert

$$\frac{v_1^2}{v_0^2} = \frac{1 - \varkappa x_1}{1 + \varkappa x_1} < 1, \quad \dots \dots \dots \quad 5a)$$

d. h. zwei aufeinanderfolgende Nullagen werden mit abnehmenden Laufwerten durchschritten, die aber selbst niemals verschwinden können. Die Bewegung kann also niemals aperiodisch verlaufen.

Wenn auch die Dauer jedes Hin- und Hergangs durch graphische Integration der Formeln

$$t_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{v}, \quad t_2 = \int_{x_2}^{x_3} \frac{dx}{v} \text{ usw.} \quad \dots \dots \dots \quad 6)$$

ermittelt werden kann, so ist das Verfahren doch sehr umständlich und wenig übersichtlich. Wir wollen daher mit Grammel[1]), der den Vorgang zuerst eingehend behandelt hat, den Ausdruck 4) für sehr kleine Ausschläge mit $e^{\varkappa(x - x_1)} = 1 + \varkappa(x - x_1)$ in die Näherungsform für den

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Rückgang:} & v^2 = -\alpha^2 x_1 (x - x_1);\ 0 < x_1 > x > x_2 < 0 \\ \text{Hingang:} & v^2 = -\alpha^2 x_2 (x - x_2);\ 0 > x_2 < x < x_3 > 0 \end{array}\right\} \quad . \quad 7)$$

usw. überführen. Nach Einsetzen in die Differentialgleichung 1) erhalten wir mit $2k : m = \varkappa$, $\alpha^2 = 2\alpha_0^2$

$$\begin{array}{c} \ddot{x} + \alpha_0^2 x + \alpha_0^2 \varkappa x_1 (x - x_1) = 0;\ x_1 > x > x_2 \\ \ddot{x} + \alpha_0^2 x - \alpha_0^2 \varkappa x_2 (x - x_2) = 0;\ x_2 < x < x_3 \\ \text{usw.,} \end{array}$$

oder

$$\left.\begin{array}{c} \ddot{x} + \alpha_0^2 (1 + \varkappa x_1) x - \alpha_0^2 \varkappa x_1^2 = 0 \\ \ddot{x} + \alpha_0^2 (1 - \varkappa x_2) x + \alpha_0^2 \varkappa x_2^2 = 0 \end{array}\right\} \quad \dots \dots \quad 8)$$

$$\text{usw.}$$

Das sind aber Gleichungen, die mit den für freie Reibungsschwingungen in § 33 formal übereinstimmen und in der Gestalt

$$\left.\begin{array}{c} \ddot{x} + \alpha_0^2 (1 + \varkappa x_1)\left(x - \dfrac{\varkappa x_1^2}{1 + \varkappa x_1}\right) = 0 \\ \ddot{x} + \alpha_0^2 (1 - \varkappa x_1)\left(x + \dfrac{\varkappa x_2^2}{1 - \varkappa x_2}\right) = 0 \end{array}\right\} \quad \dots \quad 8a)$$

usw. erkennen lassen, daß ihnen Schwingungsdauern

$$t_1 = \frac{\pi}{\alpha_0 \sqrt{1 + \varkappa x_1}}, \quad t_2 = \frac{\pi}{\alpha_0 \sqrt{1 - \varkappa x_2}} \quad \dots \quad 8b)$$

[1]) Grammel: Schwingungen nach dem quadratischen Widerstandsgesetz. Phys. Zeitschr. 1913, S. 20.

für je eine halbe Sinuslinie mit den Schwingungsmitten

$$\left.x_1' = \frac{\varkappa x_1^2}{1+\varkappa x_1}, \quad x_2' = -\frac{\varkappa x_2^2}{1-\varkappa x_2}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 8\text{c})$$

zu beiden Seiten der Zeitachse zugehören. Da $x_1 > 0$, $x_2 < 0$ usw., so sind die Ausdrücke $1+\varkappa x_1$, $1-\varkappa x_2$ usf. sämtlich positiv und nähern sich wegen der Abnahme der Absolutwerte von $x_1, x_2 \ldots$ immer mehr der Einheit. Folglich rücken die Schwingungsmittelpunkte der Zeitachse immer näher und die Schwingungsdauern wachsen asymptotisch bis zu dem für reibungsfreie Schwingungen gültigen Betrage $t_0 = \frac{2\pi}{\alpha_0}$, womit sich die Wegkurve, Abb. 109, ergibt.

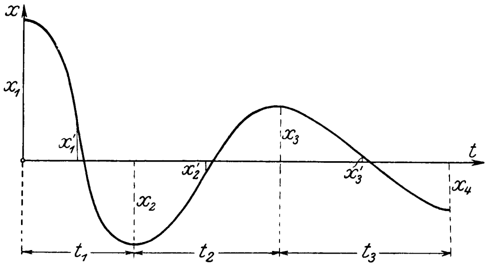

Abb. 109.

§ 36. **Erzwungene ungedämpfte Schwingungen.** Unterliegt ein Massenpunkt im Felde einer Federkraft $-m\alpha^2 x$ der Einwirkung einer äußeren gleichgerichteten und selbst periodischen Kraft $P = mp \sin \omega t$, so gilt für die Bewegung in der x-Richtung nach Wegheben der Masse m

$$\ddot{x} + \alpha^2 x = p \sin \omega t \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

Schreiben wir für den rechts stehenden Anlauf der äußeren Kraft

$$p \sin \omega t = z, \quad \text{also} \quad \ddot{z} + \omega^2 z = 0, \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

so erhalten wir aus 1)

$$\left.\begin{array}{l} \ddot{x} + \alpha^2 x = z \\ \ddddot{x} + \alpha^2 \ddot{x} = \ddot{z} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1\text{a})$$

und nach Einsetzen in 2)

$$\ddddot{x} + (\alpha^2 + \omega^2)\ddot{x} + \alpha^2\omega^2 x = 0. \quad \ldots\ldots \quad 1\text{b})$$

Das ist aber, wie der Vergleich mit § 12 Gl. 2a) unmittelbar lehrt, die Differentialgleichung einer Bewegung, die sich aus zwei einfachen Schwingungen mit den Frequenzen α und ω derart zusammensetzt, daß

$$\left.\begin{array}{rl} x &= A \cos \alpha t + B \sin \alpha t + C \cos \omega t + D \sin \omega t \\ -\ddot{x} &= \alpha^2 (A \cos \alpha t + B \sin \alpha t) + \omega^2 (C \cos \omega t + D \sin \omega t) \end{array}\right\} \ldots \quad 3)$$

Daraus folgt durch Einsetzen in 1) unter Wegfall der Glieder mit A und B

$$(\alpha^2 - \omega^2)(C \cos \omega t + D \sin \omega t) = p \sin \omega t$$

$$C = 0 \quad \text{und} \quad D = \frac{p}{\alpha^2 - \omega^2},$$

so daß wir für das vollständige Integral von 1) erhalten

$$x = A \cos \alpha t + B \sin \alpha t + \frac{p \sin \omega t}{\alpha^2 - \omega^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3\text{a})$$

Da hierin die ersten beiden Glieder $A \cos \alpha t + B \sin \alpha t$ der Gleichung $\ddot{x} + \alpha^2 x = 0$ genügen, so stellen sie in der Tat die freie Schwingung der im Felde der Federkraft sich selbst überlassenen Masse dar, während das dem Anlauf der aufgedrückten Kraft verhältnisgleiche dritte Glied als die erzwungene Schwingung bezeichnet wird. Dessen Beiwert ist überdies durch die Anlaufstärke p und die beiden Drehwerte α und ω vollständig bestimmt, während die Beiwerte A und B der freien Schwingung erst durch die Anfangsbedingungen der Gesamtbewegung gegeben sind. Diese beziehen sich auf den Ausschlag 3a) und den Lauf

$$\dot{x} = \alpha (B \cos \alpha t - A \sin \alpha t) + \frac{p\, \omega \cos \omega t}{\alpha^2 - \omega^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3\text{b})$$

und sollen der Einfachheit halber zur Zeit $t = 0$ verschwinden, d. h. die Masse m soll anfänglich in Ruhe sein. Alsdann wird

$$A = 0, \quad B = -\frac{\omega}{\alpha} \frac{p}{\alpha^2 - \omega^2}$$

und damit lautet unser Integral

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{p}{\alpha^2 - \omega^2} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{\alpha} \sin \alpha t \right) \\ \dot{x} &= \frac{p \omega}{\alpha^2 - \omega^2} \left(\cos \omega t - \cos \alpha t \right) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

Über den Verlauf der hierdurch gegebenen Bewegung können wir nun sogleich einiges aussagen. Zunächst folgt aus der Grundformel 1), daß die Scheitelwerte des Laufes $\dot{x}$ mit $\ddot{x} = 0$, entsprechend den Schwingungsmitten auf der Linie

$$x_0 = \frac{p}{\alpha^2} \sin \omega t \quad . \quad . \quad . \quad 4\text{a})$$

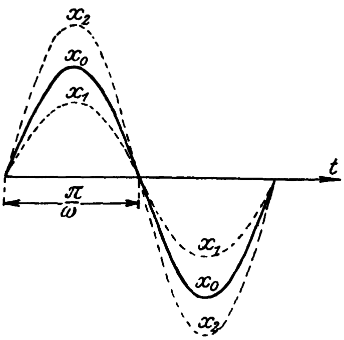

Abb. 110.

liegen, während der geometrische Ort der Umkehrpunkte mit $\dot{x} = 0$ nach der zweiten Gl. 4) der Bedingung

$$\cos \omega t = \cos \alpha t,$$
$$\sin \omega t = \pm \sin \alpha t$$

genügt. Das gibt eingesetzt in die erste Gl. 4) die beiden Kurven, Abb. 110, für die inneren und äußeren Umkehrpunkte

$$x = \frac{p}{\alpha^2 - \omega^2} \left(1 \mp \frac{\omega}{\alpha} \right) \sin \omega t = \frac{p}{\alpha^2 - \omega^2} \left(\pm 1 - \frac{\omega}{\alpha} \right) \sin \alpha t$$

oder

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{p \sin \omega t}{\alpha(\alpha+\omega)} = \frac{p \sin \alpha t}{\alpha(\alpha+\omega)} \\ x_2 &= \frac{p \sin \omega t}{\alpha(\alpha-\omega)} = -\frac{p \sin \alpha t}{\alpha(\alpha-\omega)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 4\text{b})$$

Schreibt man die zweite Gl. 4) in der Form

$$\dot{x} = \frac{2 p \omega}{\alpha^2 - \omega^2} \sin \frac{\alpha+\omega}{2} t \sin \frac{\alpha-\omega}{2} t,$$

so erkennt man, daß die Umkehrpunkte $\dot{x} = 0$ eintreten für

$$(\alpha \pm \omega) t = 2 n \pi,$$

wo n eine beliebige ganze Zahl ist. Also hat man zwischen zwei aufeinanderfolgenden Umkehrpunkten mit $n = 1$ die Zeitunterschiede

$$t_1 = \frac{2\pi}{\alpha+\omega}, \quad t_2 = \frac{2\pi}{\alpha-\omega}, \quad \ldots\ldots \quad 4\text{c})$$

von denen die erstere kurzen Schwingungen von mittlerer Drehzahl, die zweite den langen Schwebungen entspricht, die aus der Überlagerung der freien und erzwungenen Schwingungen ganz wie in den Abb. 41 und 43 hervorgehen müssen. Nähert sich der Drehwert der äußeren Kraft P dem der Eigenschwingung, so geht die Dauer der mittleren Schwingung allmählich über in $2 t_1 = 2\pi : \alpha$, während die Schwebungsdauer immer größer und schließlich unendlich wird. Dem entspricht auch ein Wachsen der größten Auslenkung

$$p_0 = \frac{p}{\alpha^2 - \omega^2}, \quad \ldots\ldots \quad 5)$$

die für

$$\left.\begin{array}{l|c|c|c|c} \omega^2 = 0 & < \alpha^2 & = \alpha^2 & > \alpha^2 & \infty \\ p_0 = \dfrac{p}{\alpha^2} & \dfrac{p}{\alpha^2 - \omega^2} > 0 & \pm \infty & \dfrac{p}{\alpha^2 - \omega^2} < 0 & 0 \end{array}\right\} \quad \ldots \quad 5\text{a})$$

wird, also beim Überschreiten des sog. kritischen Wertes $\omega^2 = \alpha^2$ im Unendlichen ihr Vorzeichen wechselt und schließlich bei unendlich rascher Frequenz der aufgedrückten Kraft verschwindet, d. h. aber, daß ein unendlich rascher Kraftwechsel von beliebiger Stärke keinen Einfluß mehr auf die in der Ruhelage befindliche Masse ausübt.

Wirkt die äußere Kraft mit der kritischen Drehzahl $\omega = \alpha$ auf die schwingende Masse, so werden die Ausschläge natürlich nicht sofort unendlich groß, sondern nehmen nach der ersten Gl. 4) den unbestimmten Wert $0:0$ an. Differenzieren wir dagegen auf der rechten Seite den Zähler und Nenner nach ω, und setzen dann erst $\omega = \alpha$, so folgt

$$x = \frac{p}{2\alpha}\left(\frac{\sin \alpha t}{\alpha} - t \cos \alpha t\right), \qquad \dot{x} = \frac{p t}{2} \sin \alpha t, \quad \ldots \quad 6)$$

also die Überlagerung einer gewöhnlichen freien Schwingung über eine solche mit zeitlich linear, also unbegrenzt wachsender Amplitude. Um über den wahren Schwingungsverlauf in diesem Falle der sog. Resonanz oder des Gleichklangs Aufschluß zu gewinnen, führen wir durch

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + \delta, & \omega &= \alpha_0 - \delta \\ \alpha_0 &= \frac{\alpha+\omega}{2}, & \delta &= \frac{\alpha-\omega}{2} \end{aligned}\right\}, \quad \ldots \ldots \quad 7)$$

die schon oben in 4c) uns entgegengetretenen Drehwerte der mittleren Schwingung und Schwankung in die erste Gl. 4) ein, die damit nach geringer Umformung übergeht in

$$x = \frac{p}{2\alpha}\left(\frac{\cos\delta t}{\alpha_0}\sin\alpha_0 t - \frac{\sin\delta t}{\delta}\cos\alpha_0 t\right). \quad \ldots \ldots \quad 8)$$

Schreiben wir dafür mit zeitlich veränderlicher Phase

$$x = p_0 \sin(\alpha_0 t + \eta) = p_0 \cos\eta \sin\alpha_0 t + p_0 \sin\eta \cos\alpha_0 t, \quad . \quad 8\text{a})$$

so besteht Übereinstimmung mit 8), wenn

$$\left.\begin{aligned} p_0\cos\eta &= \frac{p}{2\alpha\alpha_0}\cos\delta t, \qquad p_0 \sin\eta = -\frac{p}{2\alpha\delta}\sin\delta t \\ p_0{}^2 &= \frac{p^2}{4\alpha^2}\left(\frac{\cos^2\delta t}{\alpha_0{}^2} + \frac{\sin^2\delta t}{\delta^2}\right) = \frac{p^2}{8\alpha^2}\left[\frac{1}{\alpha_0{}^2} + \frac{1}{\delta^2} + \left(\frac{1}{\alpha_0{}^2} - \frac{1}{\delta^2}\right)\cos 2\,\delta t\right] \\ \operatorname{tg}\eta &= -\frac{\alpha_0}{\delta}\operatorname{tg}\delta t \end{aligned}\right\} 8\text{b})$$

Hiernach schwankt der größte Ausschlag p_0 zwischen den Werten

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= \pm\frac{p}{2\alpha\alpha_0} = \pm\frac{p}{\alpha(\alpha+\omega)} \quad \text{für } 2\,\delta t_1 = 2\pi, \quad t_1 = \frac{\pi}{\delta} \\ p_2 &= \pm\frac{p}{2\alpha\delta} = \pm\frac{p}{\alpha(\alpha-\omega)} \quad \text{für } 2\,\delta t_2 = \pi, \quad t_2 = \frac{\pi}{2\delta} \end{aligned}\right\} \quad . \quad 8\text{c})$$

im Einklang mit den absolut größten Werten von x_1 und x_2 in Gl. 4b) im Zeitunterschied der halben Schwingungsdauer t_2 Gl. 4c). Im Falle der Resonanz wird nun mit $\alpha = \alpha_0$, $\delta = 0$, $\cos\delta t = 1$, $\frac{\sin\delta t}{\delta t} = 1$, also

$$p_0{}^2 = \frac{p^2}{4\alpha^2}\left(\frac{1}{\alpha^2} + t^2\right) = \frac{p^2(1+\alpha^2 t^2)}{4\alpha^4}. \quad \ldots \quad 8\text{d})$$

Das ist aber die Gleichung einer Hyperbel, Abb. 111, mit den Asymptoten

$$\left(2\alpha\frac{p_0}{p} - t\right)\left(2\alpha\frac{p_0}{p} + t\right) = 0,$$

welche dem linearen Zuwachs des zweiten Gliedes des Schwingungsausschlages x in Gl. 6) entsprechen, während der Gesamtschwingungsverlauf durch die Hyperbeläste selbst eingehüllt wird. Man erkennt sogleich, daß dieser Verlauf nur die Ausartung einer Schwebungskurve Abb. 43 für unendlich große Schwebungsdauer darstellt.

Zum Schlusse bleibt uns noch die Ermittlung der bei der erzwungenen Schwingung von der äußeren Kraft zu leistenden Arbeit, die sich mit unseren Anfangsbedingungen $x=0$, $\dot{x}=0$ für $t=0$ aus 1) für $m=1$ zu

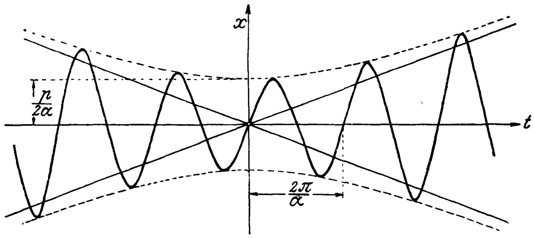

Abb. 111.

$$dL = P\,dx = (\ddot{x} + \alpha^2 x)\,dx, \qquad 2L = \dot{x}^2 + \alpha^2 x^2 \quad . \; . \; . \quad 9)$$

mit den Ausdrücken 4) leicht berechnet. Für den Sonderfall der Resonanz erhalten wir dagegen aus 9) mit 6)

$$2L = \frac{p^2}{4}\left(\frac{\sin^2 \alpha t}{\alpha^2} - \frac{2t \sin \alpha t \cos \alpha t}{\alpha} + t^2\right), \quad . \; . \; . \quad 9a)$$

also nach Ablauf der Schwingungszeiten

$$t = \frac{\pi}{\alpha}, \quad \frac{2\pi}{\alpha}, \quad \frac{3\pi}{\alpha}, \quad \frac{4\pi}{\alpha}, \quad \frac{5\pi}{\alpha} \; \ldots \; \frac{n\pi}{\alpha}$$

$$2L = \frac{p^2\pi^2}{4\alpha^2}, \quad \frac{p^2\pi^2}{\alpha^2}, \quad \frac{9\pi^2 p^2}{4\alpha^2}, \quad \frac{4\pi^2 p^2}{\alpha^2}, \quad \frac{25\pi^2 p^2}{4\alpha^2} \; \ldots \; \frac{n^2 p^2 \pi^2}{4\alpha^2},$$

d. h. eine mit der Zeit quadratische Steigerung des Arbeitsaufwandes.

Beispiel. Zur Erzeugung einer erzwungenen Schwingung bedient man sich zweckmäßig einer geradlinig geführten Masse m, die durch eine Schraubenfeder mit einem Fixpunkt A, mit einer zweiten dagegen mit dem Kreuzkopf eines Kurbeltriebes oder einer Kurbelschleife verbunden ist, Abb. 112. Sind a_1 und a_2 die ungespannten Federlängen, x_1 und x_2 ihre Verlängerungen, so sind die entsprechenden an der Masse m entgegengesetzten Federkräfte $\alpha_1^2 m x_1$ und $\alpha^2 m x_2$, so zwar, daß nach Wegheben der Masse deren Bewegungsgleichung lautet

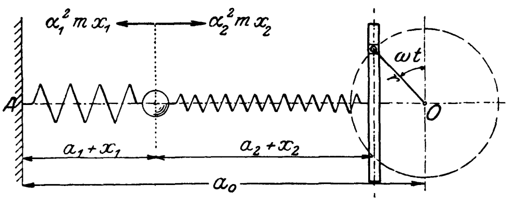

Abb. 112.

$$\ddot{x}_1 + \alpha_1^2 x_1 - \alpha_2^2 x_2 = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 10)$$

Bedeutet ferner a_0 den unveränderlichen Abstand der Kurbelmitte O vom oben genannten Fixpunkte A, r den Kurbelarm und ωt dessen Winkel aus der Mittellage, so besteht die weitere Beziehung

$$a_1 + x_1 + a_2 + x_2 + r \sin \omega t = a_0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 11)$$

Entfernen wir mit dieser die Auslenkung x_2 aus Gl. 10), so wird

$$\ddot{x}_1 + (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)\,x_1 - \alpha_2^2\,(a_0 - a_1 - a_2 - r \sin \omega t) = 0,$$

oder, da für die ungespannten Federn

$$a_1 + a_2 = a_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 11\text{a)}$$

ist, kürzer $$\ddot{x}_1 + (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)\, x_1 = -\alpha_2^2 r \sin \omega t\,, \quad \ldots\ldots \quad 10\text{a)}$$

d. h. die Gleichung einer einfachen erzwungenen Schwingung, wenn wir $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = \alpha^2$ und $-\alpha_2^2 r = p$ setzen.

§ 37. Erzwungene Schwingung mit Dämpfung. Im Falle des Vorhandenseins einer Dämpfung, d. h. eines dem Lauf verhältnisgleichen Widerstandes erhalten wir an Stelle der Bewegungsgleichung 1) des vorigen Paragraphen

$$\ddot{x} + 2\,\varepsilon\,\dot{x} + \alpha^2 x = p \sin \omega t\,, \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

oder mit $$p \sin \omega t = z\,, \qquad \ddot{z} + \omega^2 z = 0 \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} + 2\,\varepsilon\,\dot{x} + \alpha^2 x &= z \\ \ddddot{x} + 2\,\varepsilon\,\dddot{x} + \alpha^2 \ddot{x} &= \ddot{z} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 1\text{a)}$$

und nach Ausschalten von z

$$\ddddot{x} + 2\,\varepsilon\,\dddot{x} + \alpha^2 \ddot{x} + \omega^2 (\ddot{x} + 2\,\varepsilon\,\dot{x} + \alpha^2 x) = 0\,. \quad \ldots \quad 1\text{b)}$$

Dieser Differentialgleichung vierter Ordnung mit festen Beiwerten genügt der Ansatz $$x = C e^{\varkappa t}\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

der mit seinen Ableitungen in 1b) eingeführt

$$C e^{\varkappa t} [\varkappa^2 + \omega^2] [\varkappa^2 + 2\,\varepsilon\,\varkappa + \alpha^2] = 0 \quad \ldots\ldots \quad 3\text{a)}$$

ergibt, worin der vor den Klammern stehende Ausdruck 3) im allgemeinen nicht verschwindet. Es müssen daher die beiden Klammern für sich verschwinden, woraus die vier Werte

$$\varkappa_{12} = \pm\, i\,\omega\,, \qquad \varkappa_{34} = -\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - \alpha^2} \quad \ldots\ldots \quad 4)$$

hervorgehen. Von diesen gehören die ersten beiden offenbar zu einer der Gl. 1) genügenden Schwingung

$$x' = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} = C \cos \omega t + D \sin \omega t = b \sin (\omega t + \beta)\,, \quad 5)$$

deren Drehwert ω mit dem des in 1) rechts stehenden sog. Störungsgliedes übereinstimmt, so daß sie selbst nichts anderes als die erzwungene Schwingung darstellt. Durch Einsetzen von 5) in 1) ergeben sich für C und D die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} C(\alpha^2 - \omega^2) + 2\,D\,\omega\,\varepsilon &= 0 \\ D(\alpha^2 - \omega^2) - 2\,C\,\omega\,\varepsilon &= p\,, \end{aligned}$$

also $$C = \frac{-2\,p\,\omega\,\varepsilon}{(\alpha^2 - \omega^2)^2 + 4\,\omega^2 \varepsilon^2}\,, \qquad D = \frac{p(\alpha^2 - \omega^2)}{(\alpha^2 - \omega^2)^2 + 4\,\omega^2 \varepsilon^2} \quad . \quad 5\text{a)}$$

mit dem größten Ausschlag b und der Phase β aus

$$b = \sqrt{C^2 + D^2} = \frac{p}{\sqrt{(\alpha^2 - \omega^2)^2 + 4\,\omega^2 \varepsilon^2}}\,, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{C}{D} = -\frac{2\,\omega\,\varepsilon}{\alpha^2 - \omega^2}. \; 5\text{b)}$$

Daraus erkennt man, daß der Ausschlag der erzwungenen Schwingung infolge der Dämpfung niemals unendlich groß werden kann, sowie, daß sie gegenüber der periodischen äußeren Kraft eine Phasenverschiebung aufweist, beides im Gegensatz zu der erzwungenen Schwingung ohne Dämpfung.

Wir wenden uns nun zu den Wurzeln $\varkappa_{34}$ der Gl. 3a), die offenbar, wie schon aus den Darlegungen des § 34 hervorgeht, der freien Bewegung zugehören. Davon kann man sich übrigens leicht durch Zerlegung des Ausschlages x in zwei Bestandteile $x' + x'' = x$ überzeugen, mit denen 1) übergeht in

$$\ddot{x}' + 2\varepsilon\dot{x}' + \alpha^2 x' + \ddot{x}'' + 2\varepsilon\dot{x}'' + \alpha^2 x'' = p\sin\omega t,$$

und, da über den Zusammenhang von x' und x'' verfügt werden kann, in

$$\begin{aligned}\ddot{x}' + 2\varepsilon\dot{x}' + \alpha^2 x' &= p\sin\omega t\\ \ddot{x}'' + 2\varepsilon\dot{x}'' + \alpha^2 x'' &= 0\end{aligned}$$

zerfällt. Das Integral der ersten dieser Gleichungen haben wir schon in 5) aufgestellt, während das des zweiten mit

$$\varepsilon^2 - \alpha^2 = \alpha_1{}^2 > 0\,, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 4\text{a})$$

d. h. für starke Dämpfung im Einklang mit § 34 lautet

$$x'' = e^{-\varepsilon t}\left(A e^{\alpha_1 t} + B e^{-\alpha_1 t}\right). \quad \ldots\ldots\ldots \quad 6)$$

Mithin ist das vollständige Integral $x = x' + x''$ aus 5) und 6)

$$\left.\begin{aligned}x &= e^{-\varepsilon t}\left(A e^{\alpha_1 t} + B e^{-\alpha_1 t}\right) + C\cos\omega t + D\sin\omega t\\ \dot{x} &= e^{-\varepsilon t}\alpha_1\left(A e^{\alpha_1 t} - B e^{-\alpha_1 t}\right) - \varepsilon e^{-\varepsilon t}\left(A e^{\alpha_1 t} + B e^{-\alpha_1 t}\right) +\\ &\qquad + \omega\,(D\cos\omega t - C\sin\omega t)\end{aligned}\right\}, \quad 7)$$

worin, da C und D durch 5a) schon gegeben sind, nur noch die Festlegung der Integrationskonstanten A und B durch die Anfangsbedingungen übrig bleibt. Gehen wir wie früher vom Ruhezustand aus, setzen also für $t = 0$, $x = 0$, $\dot{x} = 0$, so folgt

$$A + B + C = 0, \qquad \alpha_1(A - B) - \varepsilon(A + B) + \omega D = 0$$

$$A = -\frac{1}{2\alpha_1}\left[\omega D + (\varepsilon + \alpha_1)C\right], \quad B = \frac{1}{2\alpha_1}\left[\omega D + (\varepsilon - \alpha_1)C\right], \quad 7\text{a})$$

$$\text{also}\quad x = C\left[\cos\omega t - \frac{e^{-\varepsilon t}}{2\alpha_1}\left[(\varepsilon + \alpha_1)e^{\alpha_1 t} - (\varepsilon - \alpha_1)e^{-\alpha_1 t}\right]\right] +$$

$$+ D\left[\sin\omega t - \frac{e^{-\varepsilon t}\omega}{2\alpha_1}\left(e^{\alpha_1 t} - e^{-\alpha_1 t}\right)\right]. \quad \ldots\ldots\ldots \quad 8)$$

Ist $\varepsilon^2 > \alpha^2$, also nach 4a) α_1 reell und absolut kleiner als ε, so nimmt die Gesamtheit der mit $e^{-\varepsilon t}$ behafteten Glieder in 8) von $t = 0$, mit dem Werte $-C$ beginnend, zunächst weiter ab bis zu einem durch $\dot{x}'' = 0$ bestimmten Zeitpunkte, der sich mit 5a) aus

$$e^{2\alpha_1 t_1} = \frac{\varepsilon + \alpha_1}{\varepsilon - \alpha_1}\cdot\frac{C(\varepsilon - \alpha_1) + D\omega}{C(\varepsilon + \alpha_1) + D\omega} = \frac{\varepsilon + \alpha_1}{\varepsilon - \alpha_1}\,\frac{\alpha^2 - \omega^2 - 2\varepsilon(\varepsilon - \alpha_1)}{\alpha^2 - \omega^2 - 2\varepsilon(\varepsilon + \alpha_1)},$$

oder wegen

$$e^{2\alpha_1 t_1} = \frac{\varepsilon+\alpha_1}{\varepsilon-\alpha_1}\cdot\frac{\omega^2+(\varepsilon-\alpha_1)^2}{\omega^2+(\varepsilon+\alpha_1)^2} \text{ zu } t_1 = \frac{1}{2\alpha_1}\lg n\left[\frac{\varepsilon+\alpha_1}{\varepsilon-\alpha_1}\cdot\frac{\omega^2+(\varepsilon-\alpha_1)^2}{\omega^2+(\varepsilon+\alpha_1)^2}\right] \quad 8a)$$

berechnet. Von da ab wachsen sie wieder bis zum Werte $x''=0$ für $t=\infty$, so daß wir es mit einem aperiodischen Verlaufe zu tun haben, der sich der reinen Schwingung 5) überlagert und so die in Abb. 113 dargestellte Wegkurve ergibt. An diesem Verlaufe ändert sich auch grundsätzlich nichts, wenn $\alpha_1=0$, also $\varepsilon=\alpha$ wird. Die mit $e^{-\varepsilon t}$ behafteten Glieder in 8) gehen in diesem Fall in die unbestimmten Ausdrücke 0:0

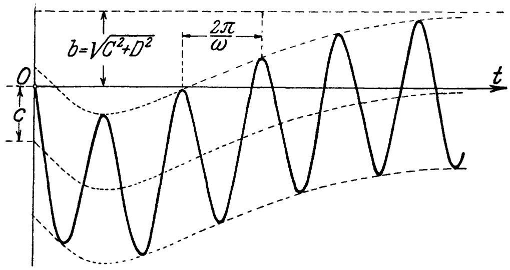

Abb. 113.

über, die in bekannter Weise durch Differenzieren nach α_1 im Zähler und Nenner derart umgeformt werden können, daß nach der Nullsetzung von α_1

$$x = C\left[\cos\omega t - e^{-\varepsilon t}(1+\varepsilon t)\right] + D\left[\sin\omega t - \omega t e^{-\varepsilon t}\right] \quad . \quad . \quad 9)$$

hervorgeht.

Ist dagegen bei schwacher Dämpfung $\varepsilon^2-\alpha^2<0$, so sind die beiden Wurzeln $\varkappa_{34}$ komplex und wir erhalten mit

$$\sqrt{\varepsilon^2-\alpha^2} = \alpha_1 = i\alpha_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4b)$$

an Stelle von 8) für dieselben Anfangsbedingungen $x=0$, $\dot{x}=0$ für $t=0$

$$x = C\left[\cos\omega t - \frac{e^{-\varepsilon t}\varepsilon}{\alpha_2}\cdot\frac{e^{i\alpha_2 t}-e^{-i\alpha_2 t}}{2i} - e^{-\varepsilon t}\frac{e^{i\alpha_2 t}+e^{-i\alpha_2 t}}{2}\right] +$$
$$+ D\left[\sin\omega t - \frac{e^{-\varepsilon t}\omega}{\alpha_2}\,\frac{e^{i\alpha_2 t}-e^{-i\alpha_2 t}}{2i}\right],$$

oder nach Ersatz der Exponentialausdrücke mit imaginärem Argument durch Winkelfunktionen:

$$x = C\left[\cos\omega t - e^{-\varepsilon t}\left(\frac{\varepsilon}{\alpha_2}\sin\alpha_2 t + \cos\alpha_2 t\right)\right] +$$
$$+ D\left[\sin\omega t - e^{-\varepsilon t}\,\frac{\omega}{\alpha_2}\sin\alpha_2 t\right], \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 10)$$

d. i. die Überlagerung der erzwungenen und einer freien gedämpften Schwingung, welch letztere mit der Zeit bis zur Unmerklichkeit abklingt. Infolge dieses Abklingens nähert sich die Wegkurve, Abb. 114, für $\omega > \alpha_2$ ebenso wie schon die oben in Abb. 113 dargestellte sichtlich der reinen erzwungenen Schwingung 5), so daß die Eigenschwingung nur für die Anfangsbewegung in Frage kommt. Um festzustellen, wie sich der Verlauf der Wegkurve ändert, wenn der Unterschied $\omega - \alpha_2$ immer mehr abnimmt, gehen wir von der allgemeinsten Form des Integrals von 1) bzw. 1b)

$$x = C\cos\omega t + D\sin\omega t + \\ + e^{-\varepsilon t}(A\cos\alpha_2 t + B\sin\alpha_2 t) \quad 11)$$

aus, in der das mit $e^{-\varepsilon t}$ behaftete Glied die gedämpfte Eigenschwingung x'' bedeutet. Setzen wir darin

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \alpha_0 + \delta, & \alpha_2 &= \alpha_0 - \delta \\ \alpha_0 &= \frac{\omega + \alpha_2}{2}, & \delta &= \frac{\omega - \alpha_2}{2} \end{aligned}\right\}, \quad 12)$$

so erhalten wir nach Zusammenfassung der Glieder mit $\cos\alpha_0 t$ und $\sin\alpha_0 t$

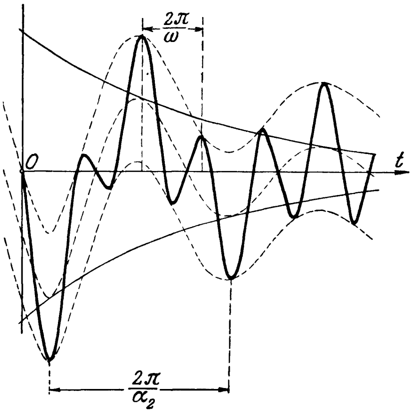

Abb. 114.

$$x = [C\cos\delta t + D\sin\delta t + e^{-\varepsilon t}(A\cos\delta t - B\sin\delta t)]\cos\alpha_0 t + \\ + [D\cos\delta t - C\sin\delta t + e^{-\varepsilon t}(A\sin\delta t + B\cos\delta t)]\sin\alpha_0 t. \quad 11a)$$

Dafür dürfen wir auch unter Einführung einer zeitlich veränderlichen Amplitude p_0 und Phase η schreiben:

$$x = p_0\sin(\alpha_0 t + \eta), \quad \ldots\ldots\ldots \quad 11b)$$

ein Ausdruck, der mit 11a) übereinstimmt, wenn

$$\left.\begin{aligned} p_0^2 &= [C\cos\delta t + D\sin\delta t + e^{-\varepsilon t}(A\cos\delta t - B\sin\delta t)]^2 + \\ &+ [D\cos\delta t - C\sin\delta t + e^{-\varepsilon t}(A\sin\delta t + B\cos\delta t)]^2 \\ \operatorname{tg}\eta &= \frac{C\cos\delta t + D\sin\delta t + e^{-\varepsilon t}(A\cos\delta t - B\sin\delta t)}{D\cos\delta t - C\sin\delta t + e^{-\varepsilon t}(A\sin\delta t + B\cos\delta t)} \end{aligned}\right\} \quad 13)$$

gesetzt wird. Nach Ausrechnung und Ordnung der Glieder erhalten wir dann:

$$p_0^2 = C^2 + D^2 + e^{-2\varepsilon t}(A^2 + B^2) + \\ + 2e^{-\varepsilon t}[(AD - BC)\sin 2\delta t + (AC + BD)\cos 2\delta t] \quad 13a)$$

mit den für

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\delta t &= \frac{AD - BC}{AC + BD}, \quad \sin 2\delta t = \frac{\operatorname{tg} 2\delta t}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\delta t}}, \\ \cos 2\delta t &= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\delta t}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad 13b)$$

eintretenden Sonderwerten:

$$p_{0_{12}}^2 = C^2 + D^2 + e^{-2\varepsilon t}(A^2 + B^2) \pm 2e^{-\varepsilon t}\sqrt{(A^2 + B^2)(C^2 + D^2)}. \quad 13c)$$

Schreiben wir darin im Einklang mit 5b)

$$C^2 + D^2 = b^2, \qquad A^2 + B^2 = a^2, \quad \ldots\ldots \quad 5\text{c})$$

so wird daraus:

$$p_{0_{12}} = \pm (b \pm a e^{-\varepsilon t}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 13\text{d})$$

Die größten und kleinsten Werte der Amplitude der Gesamtschwingung liegen demnach auf zwei Paaren von Exponentialkurven, die sich asymptotisch den Linien $\pm b$, d. h. dem vorgelegten Ausschlag der erzwungenen Schwingung nähern. Die Abstände je zweier aufeinanderfolgender Werte p_1 und p_2 sind durch die Unterschiede aller Zeitpunkte bestimmt, welche der Gl. 13b) genügen, d. h. denselben Werten von $\operatorname{tg} 2\,\delta t$ entsprechen. Das trifft aber zu für die gleichen Zeitunterschiede

$$t_1 - t_2 = t_2 - t_3 = \ldots\ldots = \frac{\pi}{2\,\delta} = \frac{\pi}{\omega - \alpha_2}, \quad \ldots \quad 12\text{a})$$

die wir wie im vorigen Abschnitt Gl. 8c) als die halbe Schwingungsdauer bezeichnen dürfen. Zwischen den hierdurch festgelegten Punkten

$$\pm (b + a e^{-\varepsilon t_1}) \quad \text{und} \quad \pm (b - a e^{-\varepsilon t_1}) \text{ usw.}$$

ergibt Gl. 11b) ein Paar von Sinuslinien, die in Abb. 115 kurz gestrichelt sind, während die obengenannten Exponentialkurven ebenda

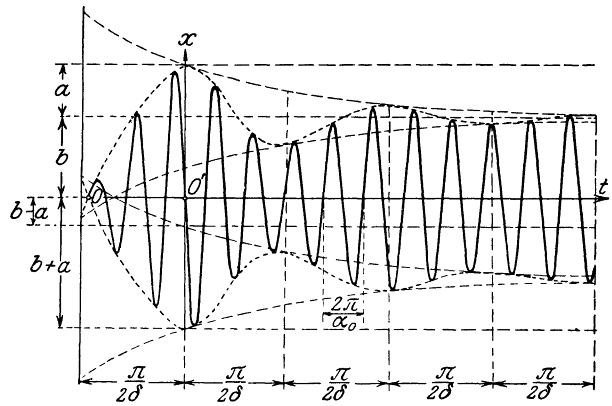

Abb. 115.

länger gestrichelt wurden. Auf diesen Sinuslinien liegen nun die Scheitel der Gesamtschwingung, deren in Abb. 115 kräftig ausgezogene Wegkurve das Abklingen der Schwebungen bis zum Übergang in die reine erzwungene Schwingung deutlich erkennen läßt. Der Anfangspunkt O' der Zeitrechnung ist hier willkürlich so eingesetzt, daß dort $x = 0$ wird, während $\dot{x}$ nicht verschwindet. Verlangen wir auch das letztere entsprechend den früheren Anfangsbedingungen, so müssen wir den Anfang bis in den Schnittpunkt O der Sinuslinien mit der Zeitachse verlegen, ohne daß der Gesamtverlauf eine Änderung erfährt.

Schließlich haben wir noch den Fall der Übereinstimmung $\omega = \alpha_2$, d. h. des Verschwindens von δ zu erörtern. Damit wird aus 11a) und 13a)

$$x = (C + Ae^{-\varepsilon t}) \cos \omega t + (D + Be^{-\varepsilon t}) \sin \omega t \quad . \; . \; . \; . \; 14)$$

$$p_0^2 = C^2 + D^2 + e^{-2\varepsilon t}(A^2 + B^2) + 2\,e^{-\varepsilon t}(AC + BD). \; . \; 15)$$

Die Amplitude dieser **Resonanzschwingung** wird hiernach unendlich groß für $t = -\infty$, erreicht für $t = 0$ den Wert

$$p_0' = \pm \sqrt{(A+C)^2 + (B+D)^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; 15a)$$

und nimmt für

$$e^{-\varepsilon t}\left[e^{-\varepsilon t}(A^2 + B^2) + AC + BD\right] = 0$$

ausgezeichnete Werte an, von denen der eine

$$p_2 = \pm \sqrt{C^2 + D^2} = \pm b \quad \text{für } t = \infty$$

der reinen erzwungenen Schwingung zugehört und asymptotisch erreicht wird, während der andere einen **Kleinstwert** darstellt und für

$$e^{-\varepsilon t_1} = -\frac{AC + BD}{A^2 + B^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 15c)$$

eintritt. Nach Einsetzen in 15) erhalten wir dafür

$$p_1^2 = C^2 + D^2 - \frac{(AC + BD)^2}{A^2 + B^2}$$

oder wegen $(A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = (AC + BD)^2 + (AD - BC)^2$ kürzer

$$p_1 = \pm \frac{AD - BC}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm \frac{1}{a}(AD - BC) \quad . \; . \; . \; 15d)$$

Damit ist das Kurvenpaar 15) festgelegt und kann in Abb. 116 gestrichelt eingetragen werden; im Zwischenraum verlaufen dann die stark ausgezogenen Resonanzschwingungen, die ersichtlich wieder in die reine erzwungene Schwingung übergehen. Es ist lehrreich, diesen Verlauf mit der ungedämpften Resonanzschwingung, Abb. 111, zu vergleichen, woraus sich eine unsymmetrische Verzerrung der beiden Hyperbeläste durch den Einfluß der Dämpfung ergibt, die überdies ein unbegrenztes Wachstum der Ausschläge durch Abklingen der freien Schwingung verhindert.

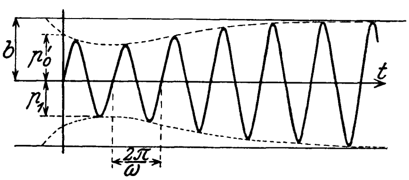

Abb. 116.

Der **Ausschlag** b der schließlich übrig bleibenden erzwungenen Schwingung ist aber ebenso wie auch die Phasenverschiebung nach Gl. 5b) bei vorgelegter Eigenschwingungsdauer und Dämpfung von der Dauer der erzwungenen Schwingung abhängig. Dies macht sich besonders geltend bei allmählicher Steigerung des Drehwertes ω unter sonst gleichen Verhältnissen.

So erhält man aus 5b) oder

$$b^2 = \frac{p^2}{(\alpha^2 - \omega^2)^2 + 4\,\varepsilon^2\omega^2}, \qquad \operatorname{tg}\beta = -\frac{2\,\omega\,\varepsilon}{\alpha^2 - \omega^2} \quad . \quad . \quad 5\text{b})$$

für

$$\omega^2 = 0 \qquad b^2 = \frac{p^2}{\alpha^2} \qquad \operatorname{tg}\beta = 0$$

$$\omega^2 = \alpha^2 - 2\,\varepsilon^2 \qquad b^2 = \frac{p^2}{4\,\varepsilon^2(\alpha^2 - \varepsilon^2)} \qquad \operatorname{tg}\beta = -\frac{\sqrt{\alpha^2 - 2\,\varepsilon^2}}{\varepsilon}$$

$$\omega^2 = \alpha^2 - \varepsilon^2 \qquad b^2 = \frac{p^2}{\varepsilon^2(4\,\alpha^2 - 3\,\varepsilon^2)} \qquad \operatorname{tg}\beta = -\frac{2\sqrt{\alpha^2 - \varepsilon^2}}{\varepsilon}$$

$$\omega^2 = \alpha^2 \qquad b^2 = \frac{p^2}{4\,\alpha^2\varepsilon^2} \qquad \operatorname{tg}\beta = -\infty, \qquad \beta = -90^0$$

$$\omega^2 = \infty \qquad b^2 = 0 \qquad \operatorname{tg}\beta = +0, \qquad \beta = +\ 0^0$$

mit dem durch Abb. 117 dargestellten Verlauf, den man wohl auch als eine Resonanzkurve bezeichnet. Zum Vergleich ist in das Bild noch die Resonanzkurve für die ungedämpfte Schwingung gestrichelt eingetragen, die ersichtlich stets oberhalb der ersteren bleibt und für $\omega^2 = \alpha^2$ auf $b = \pm\infty$ führt, während der Höchstwert des Ausschlages mit Dämpfung schon bei $\omega^2 = \alpha^2 - 2\,\varepsilon^2$, also noch vor der Resonanz $\omega^2 = \alpha^2 - \varepsilon^2$ mit der gedämpften Eigenschwingung auftritt. Weiter erkennt man aus dem Phasenverlauf ein Nacheilen der erzwungenen Schwingung gegenüber der störenden Außenkraft, das beim Überschreiten von $\omega^2 = \alpha^2$ in ein Voreilen umschlägt.

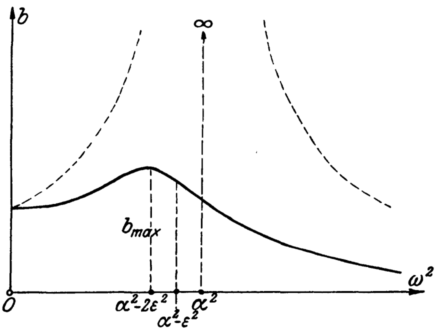

Abb. 117.

Die zur Erzeugung und Aufrechterhaltung der erzwungenen Schwingung der Masseneinheit nötige Arbeit ergibt sich zu

$$dL = p \sin \omega t\, dx,$$

worin im allgemeinen Falle nach 11)

$$dx = \omega(D\cos\omega t - C\sin\omega t)\,dt - e^{-\varepsilon t}\varepsilon(A\cos\alpha_2 t + B\sin\alpha_2 t)\,dt + \\ + e^{-\varepsilon t}\alpha_2(B\cos\alpha_2 t - A\sin\alpha_2 t)\,dt$$

zu setzen ist. Dies gibt nach Zusammenziehung und Ordnung der Glieder

$$dL = \frac{p\,\omega}{2}(D\sin 2\,\omega t - C + C\cos 2\,\omega t)\,dt - \\ - e^{-\varepsilon t}p(\varepsilon A - \alpha_2 B)\cos\alpha_2 t\sin\omega t\,dt - \\ - e^{-\varepsilon t}p(\varepsilon B + \alpha_2 A)\sin\alpha_2\sin\omega t\,dt, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 16)$$

worin der erste Teil die Arbeit zur Aufrechterhaltung der erzwungenen Schwingung, der zweite mit $e^{-\varepsilon t}$ behaftete dagegen die Arbeit zur Erzeugung der abklingenden freien Schwingung darstellt. Die Integration der ersteren ergibt mit der unteren Grenze $t = 0$

$$L' = \frac{p\omega}{2}\left[\frac{C \sin 2\omega t - D(\cos 2\omega t - 1)}{2\omega} - Ct\right], \quad . \quad 16\text{a})$$

also einen mit der Zeit anwachsenden und einen periodisch schwankenden Betrag. Der letztere verschwindet für $\omega t_1 = 2n\pi$, d. h. wenn wir die Arbeit bis zum Ablauf irgendeiner vollen Schwingung rechnen, und es bleibt mit Rücksicht auf 5a) und 5b):

$$L' = \frac{\varepsilon\omega^2 p^2 t}{(\alpha^2 - \omega^2)^2 + 4\varepsilon^2\omega^2} = 2n\pi\varepsilon\omega b^2 = \varepsilon t_1 \omega^2 b^2. \quad . \quad 16\text{b})$$

Die Arbeit zur Aufrechterhaltung der erzwungenen Schwingung in der Zeiteinheit ist also verhältnisgleich der Dämpfung, sowie dem Quadrate des Drehwertes der Schwingung und der Amplitude. Für den anderen Arbeitsbetrag schreiben wir:

$$\frac{dL''}{dt} = (\alpha_2 B - \varepsilon A)\frac{e^{-\varepsilon t}}{2} p\left[\sin(\omega + \alpha_2)t + \sin(\omega - \alpha_2)t\right] +$$
$$+ (\varepsilon B + \alpha_2 A)\frac{e^{-\varepsilon t}}{2} p\left[\cos(\omega + \alpha_2)t - \cos(\omega - \alpha_2)t\right],$$

und nach Integration zwischen den Grenzen $t = 0$ bis $t = \infty$, d. h. vom Beginn der Erregung bis zum Abklingen

$$L'' = \frac{\alpha_2 B - \varepsilon A}{2} p\left[\frac{\omega + \alpha_2}{\varepsilon^2 + (\omega + \alpha_2)^2} + \frac{\omega - \alpha_2}{\varepsilon^2 + (\omega - \alpha_2)^2}\right] +$$
$$+ \frac{\varepsilon B + \alpha_2 A}{2} p\left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + (\omega + \alpha_2)^2} - \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + (\omega - \alpha_2)^2}\right];$$

oder kürzer:

$$2L'' = p\frac{(\varepsilon^2 + \alpha_2^2)B + \omega(\alpha_2 B - \varepsilon A)}{\varepsilon^2 + (\omega + \alpha_2)^2} -$$
$$- p\frac{(\varepsilon^2 + \alpha_2^2)B - \omega(\alpha_2 B - \varepsilon A)}{\varepsilon^2 + (\omega - \alpha_2)^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 16\text{c})$$

Die Erzeugungsarbeit der freien Schwingung nähert sich also mit deren Abklingen einem Grenzwert, der, da sowohl A wie auch B mit den Beiwerten C und D der Größe p verhältnisgleich sind, mit dem Quadrate von p, also auch mit dem Quadrate der Amplitude b wächst und im Falle des Wegfalls der Dämpfung in

$$L'' = -\frac{pB\alpha\omega}{\alpha^2 - \omega^2} = -\frac{1}{2}\frac{p^2\omega^2}{(\alpha^2 - \omega^2)^2}$$

übergeht, während hierfür L' verschwindet.

Ist infolge der Dämpfung nach Ablauf einer bestimmten Zeit die freie Schwingung bis zur Unmerklichkeit abgeklungen, so bleibt nunmehr die erzwungene übrig, die nach der Formel

$$x = C\cos\omega t + D\sin\omega t \quad \text{für} \quad z = p\sin\omega t \qquad 17)$$

dauernd verläuft und deren Beiwerte C und D durch Gl. 5a) gegeben sind. Schalten wir aus diesen beiden Gleichungen die Zeit aus, so bleibt als unmittelbare Beziehung zwischen dem Zwange z und dem Ausschlage x

$$x^2 - \frac{2Dzx}{p} + \frac{C^2+D^2}{p^2}z^2 = C^2,$$

oder mit Rücksicht auf 5a) und 5b)

$$x^2\left[(\alpha^2-\omega^2)^2 + 4\varepsilon^2\omega^2\right] - 2(\alpha^2-\omega^2)xz + z^2 = \frac{4\varepsilon^2\omega^2p^2}{(\alpha^2-\omega^2)^2+4\varepsilon^2\omega^2} \qquad 17a)$$

Das ist aber die Gleichung einer im xz-Achsenkreuz schräg liegenden Ellipse, Abb: 118, welche innerhalb des Rechtecks mit den Halbachsen p und $b = \sqrt{C^2+D^2} = \frac{p}{\sqrt{(\alpha^2-\omega^2)^2+4\varepsilon^2\omega^2}}$ verläuft und in den Punkten

$$\left.\begin{aligned} x &= 0, & z &= \pm\frac{2\varepsilon\omega p}{\sqrt{(\alpha^2-\omega^2)^2+4\varepsilon^2\omega^2}} = \pm z_0 \\ z &= 0, & x &= \pm\frac{2\varepsilon\omega p}{(\alpha^2-\omega^2)^2+4\varepsilon^2\omega^2} = \pm x_0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 17c)$$

die Achsen schneidet und für $\varepsilon = 0$ in die Gerade $x(\alpha^2-\omega^2) - z = 0$ übergeht. Dieser Fall entspricht der ungedämpften erzwungenen Schwingung ohne

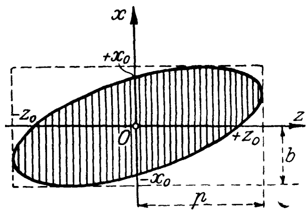

Abb. 118.

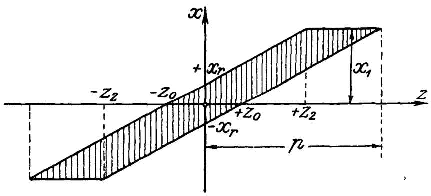

Abb. 119.

Phasenunterschied, der, durch die Dämpfung bedingt, ein als **Hysteresis** bezeichnetes Nacheilen des Ausschlages hinter dem Zwange zur Folge hat. Deshalb spricht man wohl auch die Ellipse, deren Inhalt den Arbeitsverlust durch die Dämpfung bestimmt, als **Hysteresisschleife** an.

Zum Verständnis mancher praktischer Vorgänge ist es zweckmäßig, diesen Verlauf mit demjenigen einer **erzwungenen Reibungsschwingung** zu vergleichen, die nach den Ansätzen des § 33 durch

$$\ddot{x} + \alpha^2(x \pm x_r) = p\sin\omega t = z \qquad 18)$$

gegeben ist, woraus mit Vernachlässigung der Eigenschwingung

$$x \pm x_r = \frac{p\sin\omega t}{\alpha^2-\omega^2} = \frac{z}{\alpha^2-\omega^2} \qquad 18a)$$

folgt. Das ist aber die Gleichung zweier **Parallelen zur dämpfungsfreien Schwingungsgeraden**, Abb. 119, welche die Achsen in den Punkten

$$\begin{aligned} x &= 0, & z &= \pm(\alpha^2-\omega^2)x_r = \pm z_0 \\ z &= 0, & x &= \mp x_r \end{aligned}$$

schneiden. Hat der Ausschlag auf einer Geraden seinen äußersten Wert x_1 erreicht, so kann wegen des Vorzeichenwechsels bei der Hubumkehr der Rückgang nur auf der anderen Geraden erfolgen.

Diese sind demnach miteinander durch zwei Parallelen zur z-Achse verknüpft, die mit ihnen ein Parallelogramm als Hysteresisschleife bilden, deren Ecken durch

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= \pm p \\ z_2 &= \pm [p - 2(\alpha^2 - \omega^2) x_r] \end{aligned}\right\} x_1 = \pm \left(\frac{p}{\alpha^2 - \omega^2} - x_r\right) \quad . \; . \; . \quad 18\text{c})$$

gegeben sind. Da ferner nach 18) mit $\ddot{x} = 0$ die Schwingungsmittellagen an die Geraden

$$\alpha^2 (x \mp x_r) = z \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 18\text{d})$$

geknüpft sind, denen die inneren Eckpunkte $x_1 z_2$ nicht genügen, so beginnt der Hin- und Rückgang mit einer Eigenschwingung, die demnach bei jedem Hube neu erregt wird und die genaue Verfolgung dieser Bewegungsform außerordentlich erschwert. Der in Abb. 119 dargestellte Schwingungsverlauf ist demnach nur als grobe Näherung anzusehen, aus der man jedenfalls die durch den Vorzeichenwechsel der Reibungsziffer hervorgerufenen Ecken im Gegensatz zu der stetig verlaufenden Hysteresisschleife bei Dämpfung erkennt.

§ 38. Zusammengesetzte erzwungene Schwingungen. Der in den beiden letzten Abschnitten behandelte Fall einer äußeren Erregung, die selbst nur einfach periodisch schwankt, tritt in dieser Reinheit praktisch nur selten auf. Meistens handelt es sich, wie z. B. bei der Schwingungserregung durch einen Kurbeltrieb mit endlicher Stangenlänge, um das Zusammenwirken zahlreicher bzw. unendlich vieler Kraftschwankungen, die sich ganz allgemein, wie in § 13 gezeigt wurde, durch eine harmonische Reihe darstellen lassen. Ist ω der Drehwert der Grundschwingung dieser Reihe, so ergibt sich nach Division durch die Masse m als Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + \alpha^2 x = A_0 &+ A_1 \cos\omega t + A_2 \cos 2\omega t + \ldots \\ &+ B_1 \sin\omega t + B_2 \sin 2\omega t + \ldots, \quad . \; . \quad 1) \end{aligned}$$

oder kürzer geschrieben

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + \alpha^2 x &= \sum_k (A_k \cos k\omega t + B_k \sin k\omega \mathrm{t}) \\ &= \sum_k p_k \sin(k\omega t + \beta_k), \quad k = 0, 1, 2 \ldots \end{aligned}\right\} \quad . \quad 1\text{a})$$

Wie schon im letzten Abschnitt dürfen wir auch hier den Ausschlag in eine freie und erzwungene Schwingung zerlegen, von denen die erstere, da sie mit $e^{-\varepsilon t}$ behaftet ist, infolge der Dämpfung mit der Zeit abklingt und für den schließlichen Verlauf bedeutungslos wird. Wir können sie uns daher aus 1) schon abgespalten denken und für die übrigbleibende erzwungene Schwingung

$$\left.\begin{aligned} x = C_0 &+ C_1 \cos\omega t + C_2 \cos 2\omega t + \ldots \\ &+ D_1 \sin\omega t + D_2 \sin 2\omega t + \ldots \end{aligned}\right\}, \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 2)$$

oder

$$x = \sum_k (C_k \cos k\omega t + D_k \sin k\omega t) = \sum_k b_k \sin(k\omega t + \gamma_k) \quad . \; . \quad 2\text{a})$$

ansetzen. Daraus folgt aber

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sum_k k\omega (D_k \cos k\omega t - C_k \sin k\omega t) \\ \ddot{x} &= -\sum_k k^2\omega^2 (C_k \cos k\omega t + D_k \sin k\omega t) \end{aligned}$$

und nach Einführung in 1) bzw. 1a) und Gleichsetzung der Beiwerte derselben Winkelfunktionen auf beiden Seiten

$$(\alpha^2-k^2\omega^2)\,C_k+2k\varepsilon\omega\,D_k=A_k$$
$$(\alpha^2-k\,\omega^2)\,D_k-2\,k\varepsilon\omega\,C_k=B_k,$$

also

$$\left.\begin{aligned} C_k&=\frac{(\alpha^2-k^2\omega^2)\,A_k-2k\varepsilon\omega B_k}{(\alpha^2-k^2\omega^2)^2+4k^2\varepsilon^2\omega^2}\\ D_k&=\frac{(\alpha^2-k^2\omega^2)\,B_k+2k\varepsilon\omega A_k}{(\alpha^2-k^2\omega^2)^2+4k^2\varepsilon^2\omega^2}\end{aligned}\right\},\quad\ldots\ldots\quad 3)$$

oder da

$$A_k=p_k\sin\beta_k,\quad B_k=p_k\cos\beta_k,\quad A_k^2+B_k^2=p_k^2,\quad \frac{A_k}{B_k}=\operatorname{tg}\beta_k$$

$$C_k=b_k\sin\gamma_k,\quad D_k=b_k\cos\gamma_k,\quad C_k^2+D_k^2=b_k^2,\quad \frac{C_k}{D_k}=\operatorname{tg}\gamma_k$$

$$b_k^2=\frac{p_k^2}{(\alpha^2-k^2\omega^2)^2+4k^2\varepsilon^2\omega^2},\quad \operatorname{tg}\gamma_k=\frac{(\alpha^2-k^2\omega^2)\operatorname{tg}\beta_k-2k\varepsilon\omega}{\alpha^2-k^2\omega^2+2k\varepsilon\omega\operatorname{tg}\beta_k}.\quad 3\text{a})$$

Es entspricht also jeder Einzelschwingung der äußeren Kraft ein mit gleicher Periode veränderlicher Anteil des Ausschlages, dessen Amplitude und Phase durch die entsprechenden Werte des Kraftanteils gegeben sind. Infolge der verschiedenen Ordnungszahlen k fallen nicht allein die Verhältnisse $b_k:p_k$ für jedes Glied anders aus, sondern auch die Veränderungen der Phase

$$\beta_k-\gamma_k=\delta_k,\quad \gamma_k=\beta_k-\delta_k,$$

die sich aus der zweiten Formel 3a) zu

$$\operatorname{tg}\delta_k=\frac{2k\varepsilon\omega}{\alpha^2-k^2\omega^2}\quad\ldots\ldots\ldots\quad 3\text{b})$$

berechnet. Der einem Erregerglied zugehörige Ausschlaganteil eilt also dem ersteren nach oder vor, je nachdem $\delta_k \gtrless 0$, $\alpha^2 \gtrless k^2\omega^2$ ist. Daraus ergibt sich im Verein mit der Verschiedenheit der Verhältnisse $b_k:p_k$ der Einzelglieder eine doppelte Verzerrung der Wegkurve der Gesamtschwingung gegenüber derjenigen der Gesamterregung.

Nach 3a) wird nun die Amplitude des k-ten Einzelausschlages für

$$\omega^2=0 \qquad b_k=\frac{p_k}{\alpha^2}$$

$$k^2\omega^2=\alpha^2-2\varepsilon^2 \qquad b_k=\frac{p_k}{2\varepsilon\sqrt{\alpha^2-\varepsilon^2}},\ \text{Höchstwert}$$

$$k^2\omega^2=\alpha^2-\varepsilon^2 \qquad b_k=\frac{p_k}{\varepsilon\sqrt{4\alpha^2-3\varepsilon^2}}$$

$$k^2\omega^2=\alpha^2 \qquad b_k=\frac{p_k}{2\varepsilon\alpha}$$

$$k^2\omega^2=\infty \qquad b_k=0$$

entsprechend einer Bewegungskurve, Abb. 120. Steigert man also von der Ruhelage ausgehend den Drehwert der Erregung, so werden gleichzeitig ihren Grund- und Oberschwingungen zugeordnete Einzelschwingungen der bewegten Masse auftreten, deren Amplituden dabei die eben gekennzeichneten Bewegungskurven durchlaufen. Für das Gesamtbild der Erscheinungen werden sich also die Resonanzkurven der Einzelschwingungen einfach überlagern, wie es in Abb. 120 angedeutet ist. Man erkennt daraus deutlich die Anhäufung der relativen Höchstwerte nach dem Ausgangspunkt hin, die bei einer in Wirklichkeit meist starken Konvergenz der Erregerreihe, d. h. starker Abnahme von p_k und folglich auch b_k mit der Ordnungszahl k schließlich nur als Erzitterungen der zusammengesetzten Resonanzkurve Σb_k für kleine Drehwerte ω auftreten.

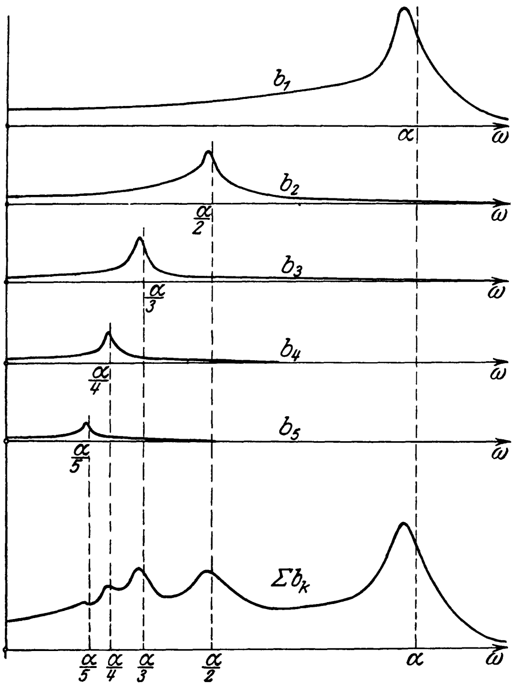

Abb. 120.

Es bleibt uns nur noch die Ermittlung des Arbeitsbedarfes für die Aufrechterhaltung der zusammengesetzten erzwungenen Schwingungen übrig, indem wir die nach dem vorigen Abschnitt einem Grenzwert für $t=\infty$ zustrebende Erzeugungsarbeit der abklingenden freien Schwingungen außer acht lassen. Wir erhalten alsdann, bezogen auf die Masseneinheit, das Arbeitselement

$$\left.\begin{aligned} dL &= dx \sum_k (A_k \cos k\omega t + B_k \sin k\omega t) \\ dx &= \omega\, dt \sum_k k\,(D_k \cos k\omega t - C_k \sin k\omega t) \end{aligned}\right\} \quad k = 0, 1, 2, \text{ usw.} \qquad 4)$$

oder

$$\frac{dL}{\omega\, dt} = \begin{pmatrix} A_0 + A_1 \cos\omega t + A_2 \cos 2\omega t + \ldots \\ + B_1 \sin\omega t + B_2 \sin 2\omega t + \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \cos\omega t + 2 D_2 \cos 2\omega t + \ldots \\ - C_1 \sin\omega t - 2 C_2 \sin 2\omega t - \ldots \end{pmatrix}$$

und nach Ausführung der Multiplikationen

$$\begin{aligned} \frac{dL}{\omega\, dt} = A_0 &\begin{pmatrix} D_1 \cos\omega t + 2 D_2 \cos 2\omega t + \ldots \\ - C_1 \sin\omega t - 2 C_2 \sin 2\omega t - \ldots \end{pmatrix} + \begin{matrix} A_1 D_1 \cos^2\omega t + 2 A_2 D_2 \cos^2 2\omega t + \ldots \\ - B_1 C_1 \sin^2\omega t - 2 B_2 C_2 \sin^2 2\omega t - \ldots \end{matrix} \\ &+ (B_1 D_1 - A_1 C_1) \sin\omega t \cos\omega t + 2\,(B_2 D_2 - A_2 C_2) \sin 2\omega t \cos 2\omega t + \ldots \\ &+ 2 B_1 D_2 \sin\omega t \cos 2\omega t - 2 A_1 D_2 \cos\omega t \sin 2\omega t + \ldots \\ &+ \ldots . \end{aligned}$$

Zerlegen wir darin die quadratischen Glieder

$$k(A_k D_k \cos^2 k\omega t - B_k D_k \sin^2 k\omega t) = k\frac{A_k D_k - B_k C_k}{2} + k\frac{A_k D_k + B_k D_k}{2}\cos 2k\omega t$$

und beachten, daß für die Produkte in den andern Gliedern stets für ganze und verschiedene Ordnungszahlen h und k

$$\begin{aligned}\sin k\omega t \sin h\omega t &= \tfrac{1}{2}\cos(k-h)\,\omega t - \tfrac{1}{2}\cos(k+h)\,\omega t\\ \sin k\omega t \cos h\omega t &= \tfrac{1}{2}\sin(k+h)\,\omega t + \tfrac{1}{2}\sin(k-h)\,\omega t\\ \cos k\omega t \cos h\omega t &= \tfrac{1}{2}\cos(k-h)\,\omega t + \tfrac{1}{2}\cos(k+h)\,\omega t\end{aligned}$$

gilt, so erkennt man, daß bei der Integration zwischen Grenzen $t = 0$ und $t_1 = \frac{2n\pi}{\omega}$, d. h. bis zum Ablauf der n-ten vollen Schwingungen alle Glieder bis auf die konstanten verschwinden. Es bleibt also

$$L = n\pi \sum k(A_k D_k - B_k C_k),$$

oder mit Rücksicht auf 3)

$$L = 2n\pi\varepsilon\omega \sum_k \frac{k^2(A_k^2 + B_k^2)}{(\alpha^2 - k^2\omega^2)^2 + 4k^2\varepsilon^2\omega^2} = 2n\pi\varepsilon\omega \sum_k k^2 b_k^2, \quad . \quad 4\text{a})$$

sowie bezogen auf die Zeiteinheit

$$\frac{L}{t_1} = \varepsilon \sum_k \omega^2 k^2 b_k^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4\text{b})$$

Die Arbeit zur Aufrechterhaltung einer zusammengesetzten erzwungenen Schwingung in der Zeiteinheit ist demnach, wie der Vergleich mit Gl. 16b), § 37, lehrt, die Summe der Arbeiten zur Aufrechterhaltung der Einzelschwingungen und insbesondere verhältnisgleich der Dämpfung.

Drittes Buch.

Statik starrer Gebilde.

IX. Analytische Statik.

§ 39. Eigenschaften der starren Gebilde. Einen mit Masse stetig oder unstetig erfüllten, nach außen begrenzten Raum bezeichnen wir im allgemeinen als einen Körper, eine mit Masse stetig oder unstetig bedeckte, durch eine geschlossene Kurve begrenztes Stück einer Ebene als eine Scheibe. Die Massenelemente oder Massenpunkte dieser Gebilde sind nun im allgemeinen Angriffsstellen äußerer Kräfte, zu denen noch auf die Oberfläche des Körpers oder den Rand der Scheibe verteilte Kräfte hinzukommen. Zwischen den einzelnen Bestandteilen wirken ebenfalls Kräfte, die sich aber nach dem Gegenwirkungssatz paarweise aufheben und darum nach außen nur insofern bemerkbar sind, als sie den Zusammenhang des Gebildes aufrechterhalten. Sind im Grenzfalle, der in Wirklichkeit niemals vollkommen erreicht wird, die Einzelbestandteite eines Gebildes nicht gegeneinander verschiebbar, so bezeichnen wir es als starr, im andern als formveränderlich oder kurz als unstarr.

Ist die Masse auf einem gekrümmten Flächenstück verteilt, so sprechen wir von einer Schale, die bei unveränderlichen Abständen aller Teile gegeneinander sich von einem starren Körper nicht unterscheidet. Sind dagegen nur die auf der Fläche selbst gemessenen Abstände der Einzelteile fest, so können diese unbeschadet dieser Bogenlängen gegeneinander verdreht, die ganze Fläche also noch derart verbogen werden, daß die Gestalt ihrer Flächenelemente erhalten bleibt. Alsdann bezeichnen wir dieses flächenstarre Gebilde, als eine undehnbare, im Grenzfall vollkommen biegsame Haut, deren Krümmung wesentlich durch die äußeren Kräfte, d. h. die an ihren Bestandteilen angreifenden Massenkräfte, die auf der Innen- und Außenfläche wirkenden Flächenkräfte und schließlich durch die am Rande verteilten Kräfte bestimmt ist. Ist endlich die Masse längs einer im allgemeinen räumlich gekrümmten Linie (Raumkurve) verteilt, so haben wir im Falle unveränderlicher Abstände aller

Punkte voneinander einen sog. starren krummen Stab vor uns, der im Sonderfalle nur eben gekrümmt oder auch gerade sein kann. Sind dagegen nur die im Bogen der Linie gemessenen Abstände festgelegt, so geht dieses linienstarre Gebilde in einen undehnbaren Faden oder in ein Seil über, das nur in seiner Längsrichtung als starr anzusehen ist, im übrigen aber seine Gestalt unter dem Einfluß der äußeren Kräfte, zu denen auch die Spannkräfte an den Enden gehören, beliebig ändern kann, also vollkommen biegsam ist. Eine besondere Form dieser Fäden bilden die Ketten mit starren gegeneinander drehbaren Gliedern, aus denen man durch gelenkige Querglieder eine Kettenhaut herstellen kann, deren Grenzfall für unendliche Vergrößerung der Gliederzahl und entsprechende Verkürzung der Gliederlänge die undehnbare, vollkommen biegsame Haut bildet. Da nun die Berührungsebene einer Fläche durch drei unendlich benachbarte Punkte bestimmt ist, so können wir uns diese durch unendlich kurze Kettenglieder oder starre Stabelemente gelenkig verbunden denken und erkennen, daß wir die undehnbare biegsame Haut unter beliebiger Aneinanderreihung solcher Elementardreiecke durch ein unendlich dichtes Netzwerk ersetzen dürfen, dessen Gesamtfläche offenbar als Summe aller unveränderlichen elementaren Dreiecksflächen bei allen Verlagerungen ebenso erhalten bleibt wie die Massenverteilung, die man durch die Stärke der Glieder der Wirklichkeit beliebig anpassen kann.

Verbindet man in derselben Weise drei Punkte in der Ebene gelenkig durch starre Stäbe, so erhält man ein Stabdreieck, das einfache Fachwerk, dessen Ecken man als Knotenpunkte oder kurz als Knoten bezeichnet. Sind k solcher Knoten in der Ebene vorhanden, so kann man jeden derselben mit den $k-1$ übrigen Knoten verbinden, wobei allerdings jede Verbindung doppelt hergestellt ist. Deshalb ist die höchste Stabzahl zwischen k Knoten

$$s=\frac{k(k-1)}{2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

während zur Festlegung des Fachwerkes die Kenntnis der $2k$ Achsenabstände x, y aller Knoten genügt. Von diesen müssen von vornherein jedenfalls die Abstände $x_1 y_1$ eines Knotens bekannt sein, um den sich das ganze als starr vorausgesetzte Gebilde noch drehen kann. Diese Drehung wird aber aufgehoben durch Festlegung nur eines Abstandes, z. B. y_2 eines weiteren Knotens, d. h. durch den Schnitt des Kreises des Knotens 2 um 1 mit der Geraden $y=y_2$. Mithin bleiben nur noch $2k-3$ unbekannte Achsenabstände der Knoten übrig, welche durch die vorgelegten Stablängen l aus den Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l}(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=l_{12}^2\\ (x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2=l_{13}^2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (x_{k-1}-x_k)^2+(y_{k-1}-y_k)^2=l_{k-1,k}^2\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

zu ermitteln sind. Dann aber muß die Anzahl dieser voneinander unabhängigen Gleichungen mit der geringsten Stabzahl s des Fachwerkes derart übereinstimmen, daß

$$s = 2k - 3. \qquad \qquad 3)$$

Ein ebenes Fachwerk, dessen Stabzahl und Knotenzahl durch diese Bedingungsgleichung verknüpft sind, ist statisch bestimmt, es verhält sich also vermöge der Unveränderlichkeit der gegenseitigen Abstände aller Knotenpunkte wie eine starre Scheibe und kann durch Vergrößerung der Stab- und Knotenzahl, also Verdichtung des Netzes, der stetigen Massenverteilung auf der Scheibe beliebig nahegebracht werden. Enthält das Fachwerk mehr als die geringste Stabzahl 3), so bezeichnet man die darüber hinausgehenden Stäbe, deren Längen durch die übrigen ausgedrückt werden können, als überzählig.

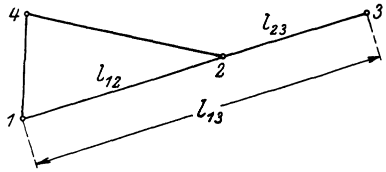

Abb. 121.

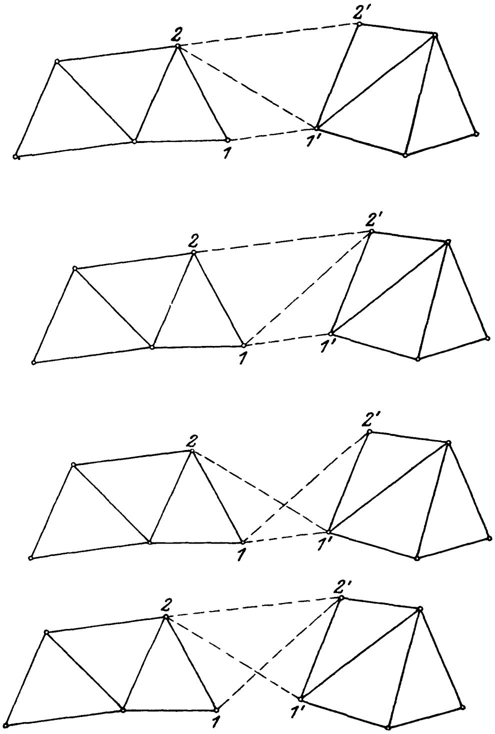

Abb. 122.

Die Unabhängigkeit der Gleichungen 2) voneinander schließt ferner den in Abb. 121 dargestellten Fall aus, daß ein in der geraden Fortsetzung eines Stabes l_{12} liegender Knoten 3 mit den beiden Knoten 1 und 2 dieses Stabes durch zwei Stäbe l_{13} und l_{23} verbunden ist, da alsdann durch $l_{13} - l_{23} = l_{12}$ drei der Gleichungen 2) miteinander verknüpft werden, also nicht mehr voneinander unabhängig sind. In der Tat kann alsdann der Knoten 3 sowohl um 1 als auch um 2 je eine, wenn auch nur unendlich kleine Drehung vollziehen, die mit der Starrheit des Gebildes unverträglich ist. Durch eine Verbindung von 3 und 4 würde diese unter Hinzutreten einer Gleichung 2) für l_{34} wieder hergestellt.

Beispiel. Soll einem Fachwerk von der Knotenzahl k und der Stabzahl s ein neuer Knoten hinzugefügt werden, so haben wir ein neues Fachwerk von der Knotenzahl $k_1 = k + 1$ und der Stabzahl

$$s_1 = 2k_1 - 3 = 2(k+1) - 3 = s + 2, \quad \ldots \ldots \quad 3a)$$

d. h. die Hinzufügung eines neuen Knotens bedingt die Vermehrung um zwei Stäbe, durch die der neue Knoten mit zwei schon vorhandenen verbunden wird, also ein neues Stabdreieck entsteht. Daraus geht wiederum hervor, daß das starre Fachwerk mit der geringsten Stabzahl sich nur aus Stabdreiecken aufbaut. Will man zwei selbständige Fachwerke mit k_1 und k_2 Knoten, sowie den geringsten Stabzahlen s_1 und s_2 zu einem einzigen vereinigen, so hat dieses die Knotenzahl $k_1 + k_2$, also die geringste Stabzahl

$$s_0 = 2(k_1 + k_2) - 3 = s + 3. \quad \ldots \ldots \quad 3b)$$

Die Vereinigung zweier Fachwerke zu einem einzigen erfordert also die Hinzufügung dreier neuer Stäbe zwischen je zwei Knoten 1, 2 und 1′, 2′ der beiden Fachwerke. Diese Verbindung kann nach Abb. 122 in vierfacher Weise und zwar ohne oder mit Überschneiden von Verbindungsstäben geschehen; das letztere wird in der Praxis meist vermieden. Alsdann gehören die im Innern des Fachwerkes verlaufenden Stäbe stets zwei Dreiecken an, während die das Fachwerk umschließenden Stäbe, die gemeinsam den Ober- und Untergurt bilden, nur je einem Dreieck zugehören.

Will man zwei Fachwerke im Sonderfall an einem Knoten vereinigen, so läuft dies nach Abb. 122 auf den Wegfall zweier Verbindungsstäbe hinaus, so daß außer dem Knoten nur noch ein Verbindungstab übrig bleibt. In der Tat hat das neue Fachwerk alsdann $k_1 + k_2 - 1$ Knoten, also

$$s_0 = 2(k_1 + k_2 - 1) - 3 = 2(k_1 + k_2) - 6 + 1 = s_1 + s_2 + 1 \quad \ldots \quad 3c)$$

Stäbe. Wird schließlich die Vereinigung durch Zusammenlegung zweier Stäbe z. B. von 1, 2 und 1′, 2′ herbeigeführt, so trifft dies gleichzeitig die Knoten 1, 1′ und 2, 2′. Das neue Fachwerk hat alsdann $s_1 + s_2 - 1$ Stäbe und k Knoten, so zwar, daß

$$s_1 + s_2 - 1 = 2k - 3, \quad \text{oder} \quad s_1 + s_2 = 2k - 2$$
$$2(k_1 + k_2) - 6 = 2k - 2, \quad k = k_1 + k_2 - 2 \quad \ldots \ldots \quad 3d)$$

Da ferner jeder Stab zwei Knoten verbindet, so ist $2s$ die Gesamtzahl der von allen Knoten ausgehenden Stäbe, also

$$s_m = \frac{2s}{k} = \frac{4k-6}{k} = 4 - \frac{6}{k} < 4 \quad \ldots \ldots \quad 4)$$

der Mittelwert der von einem Knoten ausgehenden Stäbe. Demnach ist für ein ebenes statisch bestimmtes Fachwerk mit der Knotenzahl

$k = 2$	3	4	5	6	7	8	9	$\ldots \infty$
$s = 1$	3	5	7	9	11	13	15	$\ldots \infty$
$s_m = 1$	2	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{4}{5}$	3	$3\frac{1}{7}$	$3\frac{1}{4}$	$3\frac{1}{3}$	$\ldots 4.$

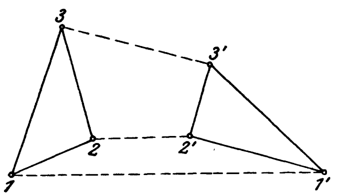

Abb. 123.

Das einfachste Fachwerk ist also ein Stab mit zwei Knoten an den Enden, danach kommt das Stabdreieck mit derselben Stabzahl an jedem Knoten, was nur noch für $k = 6$ möglich ist. In allen Fachwerken mit weniger als 6 Knoten gibt es also notwendig Knoten mit nur zwei von ihnen ausgehenden Stäben, die man wohl als Knoten erster Ordnung bezeichnet, während solche mit $3, 4 \ldots n+1$ ausgehenden Stäben als Knoten 2., 3. ... n-ter Ordnung heißen. So besitzt z. B. das Fachwerk mit 6 Knoten, das wir aus zwei Stabdreiecken durch Hinzufügung von drei Stäben aufbauen können, nach Abb. 123 entweder gar keinen Knoten erster

Ordnung, sondern nur solche zweiter Ordnung, oder nach Abb. 124 einen bzw. nach Abb. 125 höchstens zwei Knoten erster Ordnung. In Fachwerken

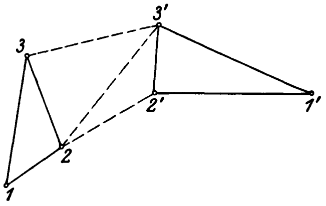

Abb. 124.

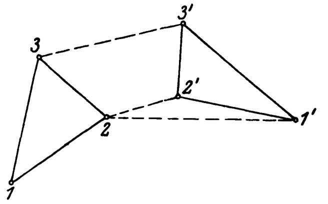

Abb. 125.

mit mehr als 6 Knoten können zwar solche erster Ordnung (gewöhnlich an den Enddreiecken) auftreten, es ist aber auch möglich, derartige Fachwerke nur mit Knoten höherer Ordnung aufzubauen.

§ 40. Kräfte an der starren Scheibe. Greift eine Kraft an einem Massenpunkt an, der in ihrer Richtung mit einem oder mehreren Massenpunkten starr verbunden ist, so werden alle diese Punkte gemeinsam beschleunigt. Daran ändert sich auch nichts durch Verlegung des Kraftangriffes nach einem dieser Massenpunkte, so daß man also an einem starren Gebilde den Angriffspunkt der Kraft in ihrer Richtung beliebig verschieben darf. Eine Kraft ist demnach bestimmt durch ihre Größe Q und die Gleichung ihrer Richtungslinie, Abb. 126

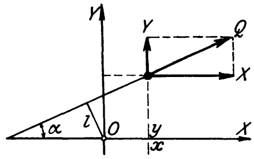

Abb. 126.

$$y \cos\alpha - x \sin\alpha = l, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

worin α den Neigungswinkel gegen die positive x-Achse und l das Lot vom Anfang O auf die Kraftrichtung bedeutet. Erweitern wir 1) mit Q, so folgt unter Einführung der Achsenanteile

$$Q \cos\alpha = X, \qquad Q \sin\alpha = Y \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

für alle Punkte xy auf der Kraftrichtung

$$yX - xY = Ql, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

worin wir das Produkt Ql der Kraft selbst mit dem als Hebelarm bezeichneten Lote von O auf ihre Richtungslinie als das Moment der Kraft in bezug auf den Pol O nennen wollen. Alsdann stellen die Produkte Xy und Yx die Momente der Teilkräfte dar, deren algebraische Summe nach 3) dem Moment der Gesamtkraft in bezug auf denselben Punkt gleich ist.

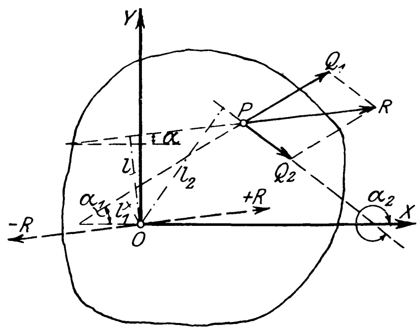

Abb. 127.

Sind in Abb. 127 nun zwei Kräfte Q_1 und Q_2 mit den Neigungen α_1 und α_2, sowie den Loten l_1 und l_2 von dem Pol aus auf ihre Richtungslinien vorgelegt, so schneiden sich diese Richtungslinien

in einem Punkte
$$\left.\begin{array}{l} y \cos\alpha_1 - x \sin\alpha_1 = l_1 \\ y \cos\alpha_2 - x \sin\alpha_2 = l_2 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1\text{a)}$$

$$y = \frac{l_1 \sin\alpha_2 - l_2 \sin\alpha_1}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}, \qquad x = \frac{l_1 \cos\alpha_2 - l_2 \cos\alpha_1}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}. \quad \ldots \quad 1\text{b)}$$

Durch diesen Punkt gehen alsdann alle Geraden, deren Gleichung aus 1a) durch Erweiterung mit je einem festen Beiwert und Addition hervorgehen, also auch die Gerade, die wir mit den Beiwerten Q_1 und Q_2 erhalten, nämlich

$$y(Q_1 \cos\alpha_1 + Q_2 \cos\alpha_2) - x(Q_1 \sin\alpha_1 + Q_2 \sin\alpha_2) = Q_1 l_1 + Q_2 l_2, \quad . \quad 4)$$

wobei es ganz gleichgültig ist, an welchem Punkte der Richtungslinien 1a) die Einzelkräfte Q_1 und Q_2 angreifen, da diese Angriffspunkte ja in den Schnittpunkt 1b) verlegt werden können. In 4) stellen aber

$$Q_1 \cos\alpha_1 + Q_2 \cos\alpha_2 = X, \qquad Q_1 \sin\alpha_1 + Q_2 \sin\alpha_2 = Y \quad . \quad . \quad 2\text{a)}$$

die Achsenanteile der Gesamtkraft R dar, die sich selbst hieraus durch Quadrieren und Addieren

$$Q_1^2 + Q_2^2 + 2 Q_1 Q_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1) = R^2 \quad \ldots\ldots \quad 5)$$

berechnet. Nennen wir jetzt α deren Neigung gegen die positive x-Achse und l ihren Hebelarm in bezug auf den Pol O, so geht, da alsdann

$$Q_1 \cos\alpha_1 + Q_2 \cos\alpha_2 = R \cos\alpha, \qquad Q_1 \sin\alpha_1 + Q_2 \sin\alpha_2 = R \sin\alpha \quad 2\text{b)}$$

ist, Gl. 4) in 1) über, wenn wir noch

$$R l = Q_1 l_1 + Q_2 l_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 5\text{a)}$$

setzen. Daraus geht hervor, daß sich die Momente zweier Einzelkräfte zum Moment der Gesamtkraft addieren, welche durch den Schnittpunkt ihrer Richtungsgeraden hindurchgeht. Es liegt auf der Hand, daß wir diesen Satz durch beliebige Vermehrung der Zahl der Gleichungen 1a) auf eine beliebige Anzahl von Kräften $Q_1, Q_2, Q_3 \ldots$ ausdehnen können und dann das Ergebnis

$$R l = \sum_k Q_k l_k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 5\text{b)}$$

erhalten, wobei allgemein die Achsenanteile und die Neigungen α der Gesamtkraft R und diese selbst durch

$$\left.\begin{array}{l} X = R \cos\alpha = \sum\limits_k Q_k \cos\alpha_k, \quad Y = R \sin\alpha = \sum\limits_k Q_k \sin\alpha_k \\ R^2 = X^2 + Y^2 = \sum\limits_{ik} Q_i Q_k \cos(\alpha_k - \alpha_i) \end{array}\right\} \quad 2\text{c)}$$

gegeben sind und R nach der Vektorregel durch geometrische Addition, d. h. durch Aneinanderreihen der Q zu einem gebrochenen Linienzug als dessen Schlußlinie gewonnen wird.

Sind die vorgelegten Kräfte an bestimmte Angriffspunkte $x_1 y_1, x_2 y_2, x_3 y_3, \ldots x_k y_k$ geknüpft, so lauten die Gleichungen ihrer Richtungsgeraden

$$(y - y_k)\cos\alpha_k - (x - x_k)\sin\alpha_k = 0 \quad \ldots \ldots \quad 6)$$

und diejenige der Gesamtkraft nach Erweiterung mit Q_k und Addition

$$y\sum_k Q_k \cos\alpha_k - x\sum_k Q_k \sin\alpha_k = \sum_k (y_k Q_k \cos\alpha_k - x_k Q_k \sin\alpha_k), \quad . \quad 7)$$

oder kürzer

$$yX - xY = \sum_k (y_k X_k - x_k Y_k). \quad \ldots \ldots \quad 7\,\text{a})$$

Denken wir uns nun alle Kräfte um denselben Winkel β um ihre festgehaltenen Angriffspunkte gedreht, so sind die Achsenanteile der neuen Gesamtkraft

$$\left.\begin{aligned} X' &= \sum_k Q_k \cos(\alpha_k + \beta) = \cos\beta \sum Q_k \cos\alpha_k - \sin\beta \sum_k Q_k \sin\alpha_k \\ Y' &= \sum_k Q_k \sin(\alpha_k + \beta) = \sin\beta \sum Q_k \cos\alpha_k + \cos\beta \sum_k Q_k \sin\alpha_k \end{aligned}\right\}, \quad . \quad 8)$$

oder kürzer

$$X' = X\cos\beta - Y\sin\beta, \qquad Y' = X\sin\beta + Y\cos\beta, \quad . \ . \quad 8\,\text{a})$$

so daß wegen

$$R'^2 = X'^2 + Y'^2 = X^2 + Y^2 = R^2 \quad \ldots \ldots \quad 8\,\text{b})$$

die Gesamtkraft der verdrehten Kräftegruppe mit derjenigen der ursprünglichen übereinstimmt. Dieses Ergebnis ist übrigens die einfache Folge der Vektorregel, da das daraus hervorgehende Krafteck bei der gemeinsamen Drehung aller Einzelkräfte einschließlich der Gesamtkraft seine Gestalt beibehält.

Weiterhin lautet die Gleichung der um β verdrehten Kräfte mit denselben Angriffspunkten

$$(y - y_k)\cos(\alpha_k + \beta) - (x - x_k)\sin(\alpha_k + \beta) = 0 \quad . \ . \ . \quad 9)$$

und diejenige der zugehörigen Gesamtkraft

$$\begin{aligned} & y\sum_k Q_k \cos(\alpha_k + \beta) - x\sum_k Q_k \sin(\alpha_k + \beta) \\ & = \sum_k [y_k Q_k \cos(\alpha_k + \beta) - x_k Q_k \sin(\alpha_k + \beta)], \quad . \ . \ . \quad 10) \end{aligned}$$

oder nach Herausnehmen der gemeinsamen Werte von $\cos\beta$ und $\sin\beta$ aus den Summen, sowie mit $Q_k \cos\alpha_k = X_k$, $Q_k \sin\alpha_k = Y_k$

$$\begin{aligned} & \cos\beta\,[yX - xY - \sum_k (y_k X_k - x_k Y_k)] \\ & = \sin\beta\,[yY + xX - \sum_k (y_k Y_k + x_k X_k], \quad . \ . \ . \ . \quad 10\,\text{a}) \end{aligned}$$

worin die erste Klammer wegen Gl. 7a) für sich verschwindet. Es bleibt also unter Weglassung des nicht verschwindenden Faktors $\sin\beta$ die Formel

$$yY + xX = \sum_k (y_k Y_k + x_k X_k) \quad \ldots \ldots \quad 10\,\text{b})$$

übrig, die mit Gl. 7a) zusammen die vom Winkel unabhängigen Achsenabstände x_0, y_0 des Schnittpunktes der ursprünglichen und verdrehten Gesamtkraft

$$\left.\begin{aligned} x_0 R^2 &= X \sum_k (y_k Y_k + x_k X_k) - Y \sum_k (y_k X_k - x_k Y_k) \\ y_0 R^2 &= Y \sum_k (y_k Y_k + x_k X_k) + X \sum_k (y_k X_k - x_k Y_k) \end{aligned}\right\} \quad . \quad 10c)$$

festlegen. Wir erhalten also den wichtigen Satz, daß **bei der gemeinsamen Drehung aller Kräfte um ihre festgehaltenen Angriffspunkte sich auch die Gesamtkraft um einen festen Punkt, den sog. Mittelpunkt oder astatischen Punkt dreht.**

§ 41. Parallele Kräfte. Im Falle paralleler Kräfte Q mit gemeinsamer Neigung α, Abb. 128, vereinfachen sich die Formeln 2c) des letzten Abschnittes in

$$\left.\begin{aligned} X &= \cos\alpha \sum_k Q_k, & Y &= \sin\alpha \sum_k Q_k \\ R &= \sum_k Q_k, & l \sum_k Q_k &= \sum_k Q_k l_k \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \quad 1)$$

und damit gehen auch die Ausdrücke 10c) für den Mittelpunkt der Kräfte über in

$$x_0 \sum_k Q_k = \sum Q_k x_k, \qquad y_0 \sum_k Q_k = \sum_k Q_k y_k. \quad . \ . \ . \quad 2)$$

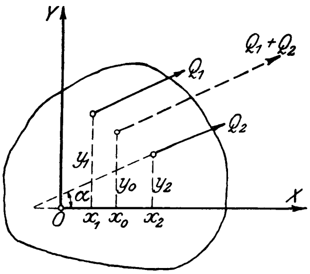

Abb. 128.

Angesichts ihrer großen Wichtigkeit für die parallele Schwerewirkung an der Erdoberfläche erscheint es zweckmäßig, dieses Ergebnis noch besonders abzuleiten. Bei festgehaltenen Angriffspunkten haben wir zunächst für die Gleichungen der Kraftrichtungslinien

$$y_k \cos\alpha - x_k \sin\alpha = l_k, \quad . \ . \ . \quad 3)$$

und daraus nach Erweiterung mit Q_k und Addition über alle Kräfte

$$\cos\alpha \sum_k Q_k y_k - \sin\alpha \sum_k Q_k x_k = \sum Q_k l_k, \quad 4)$$

während die Gleichung der Gesamtkraft nach 4) § 40 mit $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ lautet

$$y \cos\alpha \sum_k Q_k - x \sin\alpha \sum_k Q_k = \sum Q_k l_k. \quad . \ . \ . \ . \quad 4a)$$

Ziehen wir beide Formeln voneinander ab, so bleibt

$$\Big(y \sum_k Q_k - \sum_k Q_k y_k\Big) \cos\alpha - \Big(x \sum_k Q_k - \sum_k Q_k x_k\Big) \sin\alpha = 0, \quad 4b)$$

eine Bedingung, die nur dann für alle Kraftrichtungen α, die man durch Drehung des Achsenkreuzes mit der damit starr verbundenen Scheibe oder Gruppe von Massenpunkten erreichen kann, erfüllt ist, wenn die Klammern verschwinden, also die Achsenabstände $x = x_0$, $y = y_0$ den Gleichungen

$$x_0 \sum_k Q_k = \sum_k Q_k x_k, \qquad y_0 \sum_k Q_k = \sum_k Q_k y_k \quad . \ . \ . \quad 2)$$

genügen. Dadurch aber ist ein ganz bestimmter Punkt festgelegt, durch den die Gesamtkraft $R = \sum_k Q_k$ in jeder Lage der Scheibe gegen ihre Richtung hindurchgeht, und den wir darum als **Mittelpunkt der parallelen Kräfte** bezeichnen wollen. Haben alle Einzelkräfte, wie im Falle der Schwerkraft die Gewichte der Massenpunkte denselben Anlauf q, so ist $Q_k = m_k q$ und wir erhalten an Stelle von 2) nach Wegheben des gemeinsamen Faktors q

$$x_0 \sum_k m_k = \sum_k m_k x_k, \qquad y_0 \sum_k m_k = \sum_k m_k y_k \quad . \quad . \quad . \quad 2a)$$

Den hierdurch bestimmten Punkt nennen wir den **Massenmittelpunkt** oder auch kürzer den **Schwerpunkt** der Scheibe bzw. der **Massengruppe**, die rechts stehenden Summen aber die **statischen Momente** in bezug auf die y- und x-Achse. Wir sind diesem Punkt schon bei der Wechselwirkung zwischen zwei Massenpunkten im § 24 begegnet und werden seine große Bedeutung auch für die Bewegung starrer Gebilde noch näher kennen lernen.

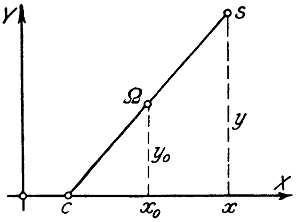

Abb. 129.

Handelt es sich um eine **stetige Verteilung** der Gesamtmasse m über die Scheibe, so tritt an Stelle des Massenpunktes m das Massenelement und für die Summe das Integral, so zwar, daß

$$x_0 m = \int x\, dm, \qquad y_0 m = \int y\, dm \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2b)$$

Bei einer **gleichförmigen Verteilung** der Masse auf der Scheibe oder längs einer Linie kann man auch mit dem Flächenelement dF und dem Linienelement ds

$$dm = \mu\, dF, \qquad dm = \lambda\, ds \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

schreiben, wo μ und λ die auf die Flächeneinheit bzw. die Längeneinheit entfallende Masse bedeutet. Alsdann ist natürlich die Gesamtmasse in beiden Fällen

$$m = \mu F, \qquad m = \lambda s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5a)$$

und wir erhalten aus 2b) nach Wegheben der gemeinsamen Beiwerte μ und λ für die **Schwerpunkte und statischen Momente von Flächen und Linienstücken**

$$x_0 F = \int x\, dF, \qquad y_0 F = \int y\, dF, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5b)$$
$$x_0 s = \int x\, ds, \qquad y_0 s = \int y\, ds, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5c)$$

worin die Integrale sich über das ganze, durch eine oder mehrere Randkurven begrenzte, also einfach oder mehrfach zusammenhängende Flächenstück F bzw. über das in sich geschlossene oder durch zwei Punkte begrenzte Linienstück s zu erstrecken haben.

1. Beispiel. Eine **Gerade**, Abb. 129, welche mit der x-Achse den Winkel α bildet und sie im Abstande c vom Anfange schneidet, hat bis zum Punkte x, y die Länge

$$s = \frac{x - c}{\cos\alpha} = \frac{y}{\sin\alpha}, \qquad \text{also} \qquad ds = \frac{dx}{\cos\alpha} = \frac{dy}{\sin\alpha}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6)$$

also ist
$$\left.\begin{aligned} x_0\, s &= \int_0^s x\, ds = \int_c^x \frac{x\, dx}{\cos\alpha} = \frac{x^2 - c^2}{2\cos\alpha}, & x_0 &= \frac{x+c}{2} \\ y_0\, s &= \int_0^s y\, ds = \int_0^y \frac{y\, dy}{\sin\alpha} = \frac{y^2}{2\sin\alpha}, & y_0 &= \frac{y}{2} \end{aligned}\right\}, \quad \ldots \quad 6\text{a})$$

d. h. der Schwerpunkt eines Geradenstückes liegt in seiner Mitte.

2. Beispiel. Für ein Kreisbogenstück, Abb. 130, vom Halbmesser r und den beiden Winkeln φ_1 und φ_2 der Endradien gegen die x-Achse ist

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad ds = r\, d\varphi, \qquad s = r\,(\varphi_2 - \varphi_1), \qquad 7)$$

also

$$x_0\, s = \int_0^s x\, ds = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 \cos\varphi\, d\varphi = r^2(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1),$$

$$y_0\, s = \int_0^s y\, ds = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 \sin\varphi\, d\varphi = r^2(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2),$$

$$x_0 = r\,\frac{\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1}{\varphi_2 - \varphi_1}, \qquad y_0 = r\,\frac{\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2}{\varphi_2 - \varphi_1}. \quad \ldots \quad 7\text{a})$$

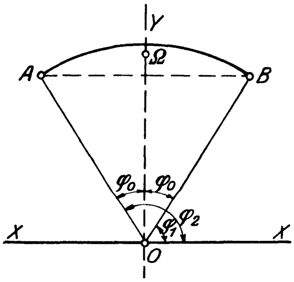

Abb. 130.

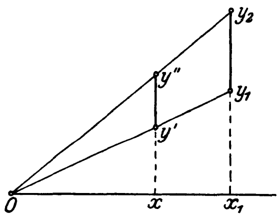

Abb. 131.

Liegt der Kreisbogen symmetrisch zur y-Achse, so ist $\varphi_1 + \varphi_2 = \pi$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{2} - \varphi_0$,

folglich
$$x_0 = 0, \qquad y_0 = \frac{2\,r\cos\varphi_1}{\varphi_2 - \varphi_1} = \frac{2\,r\cos\varphi_1}{\pi - 2\,\varphi_1} = \frac{r\sin\varphi_0}{\varphi_0}. \quad \ldots \quad 7\text{b})$$

Der Schwerpunktsabstand von der Kreismitte verhält sich also zum Halbmesser, wie die Sehne zum Bogen, ein Ergebnis, welches ganz allgemein und unabhängig von der Lage des Achsenkreuzes zum Bogen gilt.

3. Beispiel. Für ein Dreieck, Abb. 131, mit der Spitze im Anfang und den Eckpunkten x_1, y_1, x_1, y_2 ist

$$y'' - y' = (y_2 - y_1)\,\frac{x}{x_1}, \qquad dF = (y'' - y')\, dx, \quad \ldots \quad 8)$$

also die Fläche

$$F = \int_0^{x_1} (y'' - y')\, dx = \frac{y_2 - y_1}{x_1}\int_0^{x_1} x\, dx = (y_2 - y_1)\,\frac{x_1}{2}, \quad \ldots \quad 8\text{a})$$

also $$x_0\,F=\int x\,dF=\int(y''-y')\,x\,dx=\frac{y_2-y_1}{x_1}\int_0^{x_1}x^2\,dx=(y_2-y_1)\frac{x_1^2}{3},$$

$$x_0=\tfrac{2}{3}\,x_1\,, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 8\text{b})$$

d. h. der Schwerpunkt liegt von einer Spitze aus in 2:3 der Höhe, kann also stets als Schnitt der entsprechenden Parallelen zu zwei Seiten erhalten werden.

4. Beispiel. Das oben gewonnene Ergebnis kann sofort für einen Kreissektor von der halben Öffnung φ_0 verwendet werden, da alle Elementarsektoren vom Öffnungswinkel $d\varphi$ und der Fläche $dF=\frac{1}{2}r^2\,d\varphi$ als Dreiecke von der Höhe r und der Grundlinie $r\cdot d\varphi$ mit einem Schwerpunktsabstand $\frac{2}{3}r$ von der Kreismitte aufzufassen sind. Alle Schwerpunkte der Elementarsektoren liegen demnach auf einem Kreisbogen von diesem Halbmesser und dem halben Öffnungswinkel φ_0, dessen Schwerpunkt mit dem aus 7b) abgeleiteten Abstand

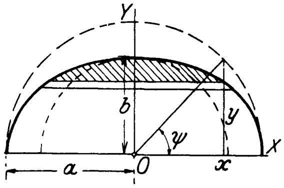

Abb. 132.

$$r_0=\frac{2}{3}\,\frac{r\sin\varphi_0}{\varphi_0} \quad \ldots \ldots \quad 9)$$

alsdann den gesuchten Schwerpunkt des ganzen Kreissektors darstellt. Dasselbe ergibt sich auch mit 7) und $dF=r\,dr\,d\varphi$, $F=r^2\varphi_0$ aus

$$y_0\,F=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}y\,dF=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_0^r r^2\,dr\sin\varphi\,d\varphi=\frac{r^3}{3}(\cos\varphi_1-\cos\varphi_2)=\frac{2}{3}r^3\sin\varphi_0\,.$$

Für die Halbkreisfläche ergibt sich mit $\varphi_0=\frac{\pi}{2}$ demgemäß $y_0=\frac{4r}{3\pi}$. Die Kappe zwischen dem Bogen und der Sehne ist als Unterschied des Kreissektors und dem Sehnendreiecke

$$F=F_1-F_2=r^2(\varphi_0-\sin\varphi_0\cos\varphi_0)\,, \quad \ldots \ldots \quad 9\text{a})$$

und ihr statisches Moment

$$y_0\,F=\int y\,dF_1-\int y\,dF_2=\tfrac{2}{3}r^3(\sin\varphi_0-\sin\varphi_0\cos^2\varphi_0)\,,$$

also $$y_0=\frac{2}{3}r\,\frac{\sin\varphi_0(1-\cos^2\varphi_0)}{\varphi_0-\sin\varphi_0\cos\varphi_0}=\frac{2}{3}r\,\frac{\sin^3\varphi_0}{\varphi_0-\sin\varphi_0\cos\varphi_0} \quad \ldots \quad 9\text{b})$$

5. Beispiel. Für die Ellipse, Abb. 132, mit den Halbachsen a und b gilt

$$x=a\cos\psi\,, \qquad y=b\sin\psi\,, \qquad dy=b\cos\psi\,d\psi\,, \quad \ldots \quad 10)$$

also $$dF=2\,x\,dy=2\,a\,b\cos^2\psi\,d\psi=a\,b\,(1+\cos2\psi)\,d\psi\,,$$

mithin ist die Kappenfläche zwischen $\psi=\frac{\pi}{2}$ und ψ

$$F=a\,b\left(\frac{\pi}{2}-\psi-\sin\psi\cos\psi\right), \quad \ldots \ldots \quad 10\text{a})$$

$$y_0\,F=2\int_y^b x\,y\,dy=2\,a\,b^2\int_\psi^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\psi\sin\psi\,d\psi=\tfrac{2}{3}\,a\,b^2\cos^3\psi\,,$$

$$y_0=\frac{2}{3}\,b\,\frac{\cos^3\psi}{\frac{\pi}{2}-\psi-\sin\psi\cos\psi} \quad \ldots \ldots \quad 10\text{b})$$

Diese Formeln gehen mit $\frac{\pi}{2} - \psi = \varphi_0$ und $a = b = r$ in 9a) und 9b) über und können aus diesen auch durch Verkürzung aller y-Abmessungen im Verhältnis von $b:a$ mit $r = a$ abgeleitet werden. Für die Halbellipse über der großen Achse erhalten wir mit $\psi = 0$

$$y_0 = \frac{4b}{3\pi}$$

und nach Vertauschen von b und a den Schwerpunktsabstand

$$x_0 = \frac{4a}{3\pi}$$

der Halbellipse über $2b$.

§ 42. **Kräftepaare.** Zwei parallele Kräfte Q_1 und Q_2 mit der Richtung α, Abb. 133, vereinigen sich zu einer Gesamtkraft, deren Richtungslinie nach Gl. 4), § 40, durch

$$y \cos\alpha - x \sin\alpha = \frac{Q_1 l_1 + Q_2 l_2}{Q_1 + Q_2} = l \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

gegeben ist, worin

$$R = Q_1 + Q_2 \quad \text{und} \quad R\,l = Q_1 l_1 + Q_2 l_2 \quad \ldots\ldots \quad 1a)$$

die Gesamtkraft und ihr Moment in bezug auf den Pol im Abstande l von der Richtungslinie 1) bedeutet. Sind nun beide Kräfte entgegengesetzt gleich, d. h.

$$Q_1 + Q_2 = 0, \qquad Q_2 = -Q_1 = -Q, \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

so verschwindet die Gesamtkraft R, nicht aber das Moment, das vielmehr in

$$M = Q(l_1 - l_2) = Q \cdot h \quad \ldots\ldots \quad 2a)$$

übergeht, wobei h den Abstand der beiden Kraftvektoren bezeichnet. Außerdem aber wird aus $R\,l = Q\,h$ mit $R = 0$, der Hebelarm $l = \infty$, so daß also zwei entgegengesetzt gleiche Parallelkräfte, die wir in der Folge ein Kräftepaar nennen wollen, eine im Unendlichen liegende, verschwindende Gesamtkraft, aber ein endliches Moment besitzen. Zu demselben Ergebnis wären wir auch gelangt mit zwei Kräften Q_1', Q_2' mit den Loten l_1', l_2' vom Anfang auf ihre unter dem Winkel α' geneigten Richtungslinien, falls nur wieder $Q_1' + Q_2' = 0$, $Q_1' = -Q_2' = Q'$, $l_1' - l_2' = h'$ und $Q\,h = Q'h'$ ist, d. h. zwei Kräftepaare sind unabhängig von der Richtung und dem Abstand ihrer Einzelkräfte und einander gleichwertig, wenn nur ihre Momente übereinstimmen.

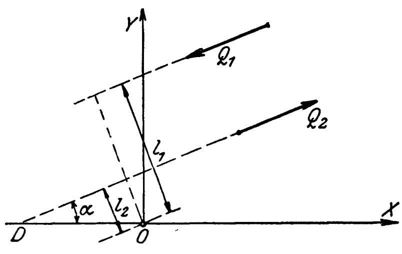

Abb. 133.

Haben wir zwei Kräftepaare, Abb. 134, mit den Richtungslinien

$$\left.\begin{array}{ll} y\cos\alpha' - x\sin\alpha' = l_1', & y\cos\alpha'' - x\sin\alpha'' = l_1'' \\ y\cos\alpha' - x\sin\alpha' = l_2', & y\cos\alpha'' - x\sin\alpha'' = l_2'' \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad 3)$$

der Einzelkräfte $\pm Q'$, $\pm Q''$, so können wir zunächst je ein Q' und Q'' zu einer Gesamtkraft vereinigen und erhalten so die beiden Kraftlinien

$$\left.\begin{array}{l} y(Q'\cos\alpha' + Q''\cos\alpha'') - x(Q'\sin\alpha' + Q''\sin\alpha'') = Q'l_1' + Q''l_1'' \\ -y(Q'\cos\alpha' + Q''\cos\alpha'') + x(Q'\sin\alpha' + Q''\sin\alpha'') = -Q'l_2' - Q''l_2'' \end{array}\right\}, \quad 3\,\mathrm{a})$$

mit den Momenten

$$M_1 = Q'l'_1 + Q''l_1'', \qquad M_2 = -Q'l_2' - Q''l_2''. \quad . \quad . \quad 4)$$

In 3a) sind aber

$$Q'\cos\alpha' + Q''\cos\alpha'' = Q\cos\alpha, \qquad Q'\sin\alpha' + Q''\sin\alpha'' = Q\sin\alpha \quad 3\,\mathrm{b})$$

die Achsenanteile der Gesamtkraft von Q' und Q'', womit 3a) übergeht in

$$\left.\begin{array}{l} y\,Q\cos\alpha - x\,Q\sin\alpha = Q'\,l_1' + Q''\,l_1'' = Q\,l_1 \\ -y\,Q\cos\alpha + x\,Q\sin\alpha = -Q'\,l_2' - Q''\,l_2'' = -Q\,l_2 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad 3\,\mathrm{c})$$

Das sind aber die Gleichungen eines neuen Kräftepaares $\pm Q$ mit den Neigungswinkeln α und den Hebelarmen l_1, l_2, deren Addition auf das Gesamtmoment

$$M = Q(l_1 - l_2) = Q'l_1' + Q''l_1'' - Q'l_2' - Q''l_2''$$

oder wegen 4) auf

$$M = M_1 + M_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4\,\mathrm{a})$$

führt. Dafür dürfen wir aber mit den Momenten der ursprünglichen Kräftepaare $\pm Q'$, $\pm Q''$ nämlich

$$Q'(l_1' - l_2') = M', \qquad Q''(l_1'' - l_2'') = M''$$

auch schreiben

$$M = M' + M'', \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4\,\mathrm{b})$$

so daß sich also die Momente zweier Kräftepaare unabhängig von der Richtung der Einzelkräfte algebraisch zu einem Gesamtmoment addieren.

Es liegt auf der Hand, daß dieser Satz auch auf die Vereinigung beliebig vieler Kräftepaare zu einem Gesamtmoment

$$M = \sum M' \quad . \quad . \quad . \quad 4\,\mathrm{c})$$

ausgedehnt werden kann. Das Gesamtmoment verschwindet alsdann, wenn entweder die Einzelkräfte aller Paare sich nach den Gleichungen

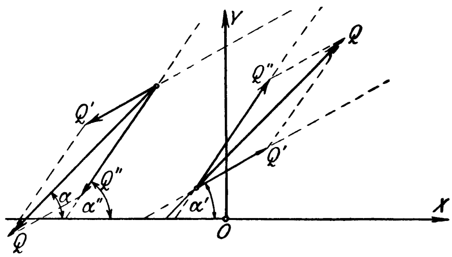

Abb. 134.

$$\sum Q'\cos\alpha' = 0, \qquad \sum Q'\sin\alpha' = 0$$

zu einem geschlossenen Krafteck vereinigen lassen, so daß $Q = 0$ wird, oder wenn mit $l_1 = l_2$ die beiden aus der Vereinigung der

Einzelkräfte hervorgehenden Bestandteile $\pm Q$ des Gesamtpaares in eine und dieselbe Gerade fallen.

Ist ein Kräftepaar durch sein Moment M und eine Einzelkraft Q durch die Gleichung

$$y\,Q\cos\alpha - x\,Q\sin\alpha = Q\,l_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

gegeben, so kann stets $M = Q(l_1 - l_2)$ gesetzt und daraus l_1 berechnet werden. Alsdann lauten die Gleichungen des Kräftepaares

$$\left.\begin{aligned} y\,Q\cos\alpha - x\,Q\sin\alpha &= Q\,l_1 \\ -y\,Q\cos\alpha + x\,Q\sin\alpha &= -Q\,l_2 \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots \quad 5\,\mathrm{a})$$

von denen die zweite sich gegen 5) aufhebt, so daß nur noch die erste Gl. 5a) übrigbleibt, die eine der vorgelegten gleiche Parallelkraft darstellt, die aber um $l_1 - l_2$, also um den Hebelarm des Kräftepaares $Q(l_1 - l_2)$ gegen die vorgelegte Kraft verschoben ist. Die Verbindung eines Kräftepaares mit einer Einzelkraft führt also stets auf eine gegen diese parallel verschobene ihr gleiche Einzelkraft. Ist ferner nur eine Einzelkraft Q vorgelegt mit dem Polabstand l_1, so kann man stets im beliebigen Abstand l_2 zwei entgegengesetzt gleiche Parallelkräfte $\pm Q$ anbringen, von denen die eine mit der gegebenen ein Kräftepaar bildet, während die andere mit dem Polabstand l_2 übrigbleibt, d. h. durch die Parallelverschiebung einer Einzelkraft wird ein Kräftepaar geweckt, dessen Moment durch die Kraft und die Parallelverschiebung als Hebelarm gegeben ist.

Daraus folgt sofort, daß das Moment Ql einer Einzelkraft Q mit dem Polabstand l mit dem des Kräftepaares übereinstimmt, welches durch deren Parallelverschiebung nach dem Pol geweckt wird und nach Gl. 3), § 40, auch durch die Momente der Teilkräfte X und Y dargestellt werden kann. Sind mehrere Einzelkräfte vorhanden, so erhalten wir durch ihre Verschiebung nach dem Pol ebensoviele Kräftepaare, die sich alsdann zu einem Gesamtpaar mit dem Moment

$$M = \sum Ql = \sum (yX - xY) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 6)$$

zusammenfassen lassen.

Um über die Wirkung eines Kräftepaares an einem starren Gebilde Klarheit zu gewinnen, betrachten wir die von der Kraft Q bei der Verschiebung ihres Angriffspunktes xy geleistete Arbeit, für die wir nach früherem auch die Arbeit der Achsenanteile X und Y setzen dürfen, so zwar, daß

$$dL = X\,dx + Y\,dy \quad \ldots\ldots\ldots \quad 7)$$

Da nun infolge der Starrheit der Fahrstrahl r vom Schwerpunkt $x_0 y_0$ bis zum Kraftangriff xy sich nicht ändern kann, so ist nach Abb. 135

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + r\cos\varphi, & dx &= dx_0 - r\sin\varphi\,d\varphi = dx_0 - (y - y_0)\,d\varphi \\ y &= y_0 + r\sin\varphi, & dy &= dy_0 + r\cos\varphi\,d\varphi = dy_0 + (x - x_0)\,d\varphi \end{aligned}\right\}, \quad 8)$$

also nach Einführung in 7)

$$dL = X\,dx_0 + Y\,dy_0 + [(x - x_0)Y - (y - y_0)X]\,d\varphi \;.\;. \quad 7\,\mathrm{a})$$

Diese Umformung der Arbeitsformel 7) entspricht aber einer in Abb. 135 angedeuteten Parallelverschiebung der Kraft Q nach dem Schwerpunkt S, wodurch das in der eckigen Klammer stehende Moment eines Kräftepaares geweckt wird, das ersichtlich eine Drehung des Fahrstrahles r und damit des ganzen Gebildes um den Schwerpunkt bedingt, der selbst durch die nunmehr an ihm wirkende Kraft eine Verschiebung mit den Achsenrissen dx_0 und dy_0 erfährt. Wirken an der starren Scheibe mehrere Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten, so gelten für den Abstand r jeder derselben vom gemeinsamen Schwerpunkt x_0, y_0 die Gleichungen 8) und wir erhalten durch Summierung von 7) bzw. 7a)

$$dL = \sum (X\,dx + Y\,dy) = dx_0 \sum X + dy_0 \sum Y + M\,d\varphi\,, \quad . \quad 7\text{b})$$

worin abkürzungsweise

$$\sum [(x - x_0)\,Y - (y - y_0)\,X] = M \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7\text{c})$$

für das Gesamtmoment aller durch Verschiebung der Einzelkräfte nach dem Schwerpunkt geweckten Kräftepaare geschrieben wurde. Es sei nur noch angemerkt, daß dieses Moment dann positiv erscheint, wenn die von ihm hervorgerufene Drehung $d\varphi$, wie aus Abb. 135 ersichtlich, eine Vergrößerung der Fahrstrahlneigung gegen die x-Achse bedingt.

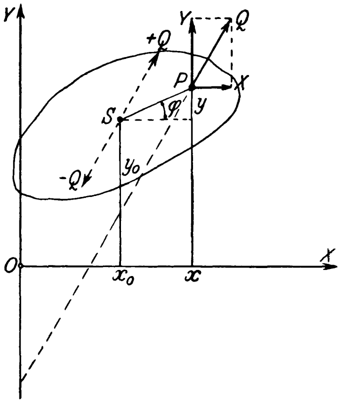

Abb. 135.

Die vorstehende Arbeitsgleichung gilt auch noch für mehrere Körper, die in irgendeiner Weise, z. B. durch Zapfen oder einfache Stützung (Kraftschluß) miteinander zusammenhängen, sofern durch die Wirkung der äußeren Kräfte dieser Zusammenhang nicht gestört wird. Denn an jeder Verbindungsstelle zweier Körper findet eine Wechselwirkung zweier Kräfte $\pm Q'$ statt, die sich dort aufheben und demnach aus der Arbeitsgleichung herausfallen, da ihre Achsenanteile X' und Y' im Falle der Aufrechterhaltung des Zusammenhanges mit denselben Verschiebungen dx' und dy' behaftet sind. Das trifft aber auch für alle im Innern eines Körpers zwischen dessen einzelnen Bestandteilen oder Massenelementen wirkenden Kräfte zu, deren Arbeitsbeträge im Falle der Starrheit sich gegenseitig aufheben, so daß sie überhaupt nicht in der Arbeitsgleichung erscheinen.

§ 43. Das Gleichgewicht starrer ebener Gebilde. Denken wir uns nun den Körper oder eine zusammenhängende Körpergruppe aus der Ruhelage unter der Einwirkung äußerer Kräfte um unendlich kleine, mit dem Zusammenhange verträgliche, aber sonst willkürliche Beträge dx, dy, ... bzw. dx_0, dy_0, $d\varphi$, sog. virtuelle

Verschiebungen herausgebracht, so verschwindet die Gesamtarbeit dL, wenn hierbei nach Gl. 7) § 42

$$\sum (X\,dx + Y\,dy) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad 1)$$

ein Ausgleich der Einzelarbeiten der äußeren Kräfte stattfindet. Wegen der Willkür der Verschiebungen dx_0, dy_0 und $d\varphi$ läuft dies aber wegen 7a) § 42 darauf hinaus, daß deren Beiwerte verschwinden, d. h. mit Rücksicht auf 7b) § 42 gemeinsam

$$\sum X = 0, \qquad \sum Y = 0, \qquad \sum (xY - yX) = 0 \; . \; . \; . \qquad 2)$$

Alsdann sprechen wir von einem Gleichgewicht der Kräfte an dem starren Körper oder der Körpergruppe, welches dann eintritt, wenn die nach dem Schwerpunkt verschobenen Kräfte ein geschlossenes Krafteck bilden, ohne daß ein Kräftepaar geweckt wird.

Der durch 1) oder $dL = 0$ mit den Formeln 2) gleichwertige sog. Satz vom Ausgleich der virtuellen Arbeiten bedingt aber, daß die bis zur Gleichgewichtslage geleistete Gesamtarbeit der äußeren Kräfte einen Scheitelwert erreicht hat, der ebensowohl ein Höchstwert als auch ein Kleinstwert sein kann. Im ersteren Falle steht für eine kleine Verschiebung aus der Gleichgewichtslage, die niemals ohne äußere Einwirkung möglich ist, keine Arbeit mehr zur Verfügung. Der Körper besitzt also keinen Drang (potentielle Energie) zur Änderung seiner Lage und kehrt, einmal durch äußere Einwirkung unendlich wenig daraus verschoben, von selbst mit deren Aufhören in diese Lage zurück, die darum als eine stabile Gleichgewichtslage bezeichnet wird.

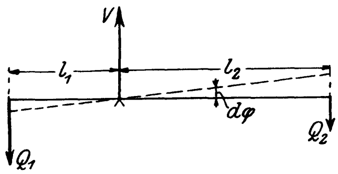

Abb. 136.

Dagegen ist bei einem Kleinstwert der am Körper von den Außenkräften geleisteten Arbeit stets ein Drang vorhanden, unter Vermehrung der Arbeitsleistung die eingeleitete Verschiebung aus der Gleichgewichtslage so weit zu vergrößern, bis die Arbeitsleistung mit Erreichung ihres Höchstwertes erschöpft und der Drang zur Lagenänderung verschwunden ist. Wir sprechen alsdann von einer labilen oder instabilen Lage, aus welcher der Körper vermöge des in ihm vorhandenen Dranges der stabilen Lage zustrebt. Hat schließlich der Körper nach einer Verschiebung aus seiner Lage weder den Drang, in dieselbe zurückzukehren, noch sich von ihr weiter zu entfernen, so sprechen wir von einer indifferenten Gleichgewichtslage.

1. Beispiel. An den Enden eines masselosen starren Stabes greifen senkrecht dazu die Parallelkräfte Q_1 und Q_2 an, Abb. 136, denen ein Stützen- oder Auflagerdruck V das Gleichgewicht halten soll. Dann muß zunächst

$$V = Q_1 + Q_2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad 3)$$

sein und das Moment aller Kräfte in bezug auf einen beliebigen Pol verschwinden. Wählen wir als solchen den Angriffspunkt von Q_1 und bezeichnen die Abstände der Stütze von den Enden mit l_1 und l_2, so haben wir mit Rücksicht auf die Kraftrichungen

$$V l_1 = Q_2 (l_1 + l_2), \quad \text{3a)}$$

oder in Verbindung mit 3)

$$Q_1 l_1 = Q_2 l_2 \quad \text{3b)}$$

Einen solchen Stab nennt man gewöhnlich einen doppelarmigen Hebel. Drehen wir ihn um den Stützpunkt um den Winkel $d\varphi$, so sind die virtuellen Verschiebungen der Kraftangriffsstellen $-l_1 d\varphi$ und $l_2 d\varphi$, mithin nach dem Satze der virtuellen Verschiebungen

$$(Q_2 l_2 - Q_1 l_1) d\varphi = 0,$$

woraus nach Wegheben von $d\varphi$ wieder die Gl. 3b) hervorgeht. Daran wird auch nichts geändert, wenn an Stelle des unendlich kleinen Winkels $d\varphi$ ein beliebig großer endlicher Winkel φ tritt, so daß also der in Abb. 136 dargestellte Stab mit den Endkräften Q_1 und Q_2 sich bei jeder Neigung im indifferenten Gleichgewicht befindet.

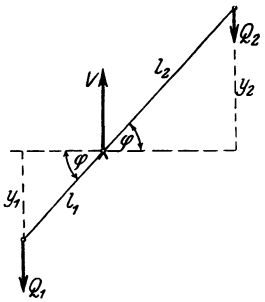

Abb. 137.

Ist die Bedingung 3b) nicht erfüllt, so sind bei einer endlichen Neigung φ, Abb. 137, die Auslenkungen der Angriffspunkte, positiv nach unten gerechnet

$$y_1 = l_1 \sin\varphi, \qquad y_2 = -l_2 \sin\varphi,$$
$$dy_1 = l_1 \cos\varphi\, d\varphi, \qquad dy_2 = -l_2 \cos\varphi\, d\varphi,$$

und die virtuelle Arbeit bei der Verdrehung um $d\varphi$

$$dL = (Q_1 l_1 - Q_2 l_2) \cos\varphi\, d\varphi \quad . \; . \; . \quad 4)$$

kann nur verschwinden, wenn $\cos\varphi = 0$, $\varphi = \pm 90^0$ ist, d. h. bei lotrechter Lage des Stabes. Die Arbeit L selbst erreicht dabei einen Höchstwert, wenn dL kurz vorher noch positiv ist, also wenn bei herabgehendem Angriffspunkt von Q_1 und steigendem Q_2

$$Q_1 l_1 > Q_2 l_2 \quad \text{4a)}$$

ausfällt. Alsdann ist die lotrechte Lage des Stabes mit dem unteren Angriffspunkt von Q_1 stabil, die mit dem oberen Angriffspunkt von Q_1 instabil. Ersetzen wir die Kräfte durch die Gewichte $m_1 g$ und $m_2 g$ von Massen an den Stabenden, so ist der Schwerpunktabstand vom Drehpunkt

$$l_0 = \frac{m_1 l_1 - m_2 l_2}{m_1 + m_2} \gtrless 0, \quad . \; . \; . \; . \quad 4b)$$

d. h. nach unten oder nach oben gerichtet, je nachdem der in diesem Falle als Pendel bezeichnete Stab sich im stabilen oder labilen Gleichgewichte befindet. Unter der Einwirkung der Schwere strebt demnach der Schwerpunkt eines Körpers einer tiefsten Lage zu, die dann dem stabilen Gleichgewicht entspricht.

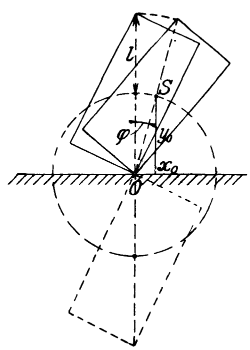

Abb. 138.

2. Beispiel. Eine rechteckige mit einer Ecke O auf der festen Unterlage gestützte, gleichförmig mit Masse belegte Scheibe, Abb. 138, unterliegt der Wirkung ihres im Schwerpunkt S, d. h. im Schnitte der Diagonalen angreifenden Gewichtes G. Ist φ der Neigungswinkel der Diagonalen von der Länge $2\,l$ mit der Lotrechten, so ist die Schwerpunktshöhe über der Unterlage $y_0 = l \cos\varphi$ und ihr Abstand vom Stützpunkt $x_0 = l \sin\varphi$. Dann besteht nach 1) Gleichgewicht, wenn bei einer Drehung um $d\varphi$

$$dL = -G\, dy_0 = G\, l \sin\varphi\, d\varphi = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 5)$$

also $\sin\varphi = 0$, $\varphi = 0$ oder $\varphi = \pi$. Zu demselben Ergebnis gelangen wir auch mit Hilfe der Gleichungsgruppe 2), in der wegen des Wegfalls wagerechter Kräfte $\sum X = 0$ und wegen der Gleichheit von G mit dem Auflagerdruck V in $O \sum Y = 0$ ist, während das Moment um O

$$M = G\,l \sin\varphi = 0$$

übrigbleibt. Die Lage $\varphi = \pi$ entspricht offenbar der Aufhängung des Körpers am Pol O, unter dem alsdann der Schwerpunkt lotrecht sich in der tiefsten Stellung befindet, während $\varphi = 0$ die höchste Lage bedingt. Bei der Auslenkung aus derselben leistet das Gewicht die Arbeit

$$L = G \cdot l\,(1 - \cos\varphi)\,, \qquad \text{5a)}$$

die für die tiefste Lage $\varphi = \pi$ den Höchstwert $L = 2\,G\,l$ annimmt. Daraus geht hervor, daß diese Lage stabil, die höchste des auf der Spitze ruhenden Körpers aber instabil ist.

Bei einer festen Unterlage ist natürlich die Schwerpunktslage $\varphi = \pi$ ausgeschlossen und der Körper kann nur mit seinen beiden Seiten $2a > 2b$ darauf ruhen. Alsdann ist für diese Lagen, Abb. 139, $\cos\varphi_1 = \frac{a}{l}$, $\cos\varphi_2 = \frac{b}{l}$ entsprechend den Arbeitsleistungen

$$L_1 = G\,l\left(1 - \frac{a}{l}\right) < L_2 = G\,l\left(1 - \frac{b}{l}\right). \qquad \text{5b)}$$

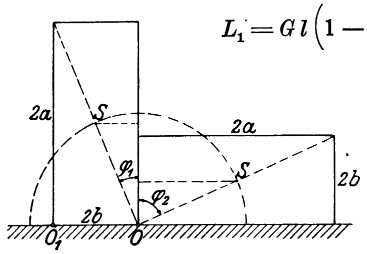

Abb. 139.

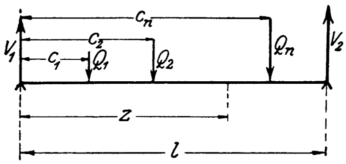

Abb. 140.

Da beide Beträge die den unendlich benachbarten, d. h. um $d\varphi$ nach oben abweichenden Lagen zukommenden Arbeitsleistungen übertreffen, so stellen sie ihnen gegenüber Höchstwerte dar. Mithin sind beide Lagen stabil, wenn auch in verschiedenem Maße, so zwar, daß wir die ihnen zugeordneten Arbeitsleistungen der äußeren Kraft, d. h. des Gewichtes beim Übergang aus der labilen Lage geradezu als **Maß der Stabilität** benutzen dürfen. Natürlich kann der Körper auch noch um die Ecke O_1 in die untere Stellung gebracht werden, so daß er im ganzen drei verschiedene Lagen besitzt, von denen zwei dieselbe größere Stabilität L_2 besitzen.

3. Beispiel. Ein **wagerechter, gerader und selbst als gewichtslos gedachter Stab** von der Länge l ruhe mit seinen Enden auf zwei Stützen und werde durch eine Anzahl von lotrechten **Einzelkräften** $Q_1, Q_2 \ldots$ in den Abständen $c_1, c_2 \ldots$ vom linken Ende belastet, Abb. 140. Dadurch werden an den Stützen die Auflagerkräfte V_1 und V_2 geweckt, die sich aus der Momentengleichung in bezug auf die beiden Stützen als Pole zu

$$V_2\,l = \sum_0^l Q\,c, \qquad V_1\,l = \sum_0^l Q\,(l - c) \qquad \text{6)}$$

berechnen und nach Addition und Wegheben von l

$$V_1 + V_2 = \sum_0^l Q \qquad \text{6a)}$$

ergeben. Denken wir uns den Stab im Abstande z vom linken Ende durchschnitten, so wird das Gleichgewicht dann aufrecht erhalten, wenn wir der Schnittstelle diejenigen Kräfte und Momente anbringen, mit denen das abgeschnittene Stück auf das beibehaltene wirkt, die also an der Schnittstelle in

Wirklichkeit den Zuzammenhang aufrecht erhalten. Es kann sich in unserm Falle lotrechter Belastungen auch nur um eine lotrechte sog. **Querkraft** T und ein **Moment** handeln, die aus der Verschiebung aller Kräfte auf einer Seite des Schnittes nach diesem hervorgehen und denen die auf der andern Seite wirksamen das Gleichgewicht halten. Mithin ist die Querkraft

$$T=\sum_0^z Q-V_1=-\sum_z^l Q+V_2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 7)$$

und das Moment

$$M=\sum_0^z Q(z-c)-V_1 z=-V_2(l-z)+\sum_z^l Q(c-z). \quad \ldots \quad 7a)$$

Aus 7) folgt sofort wieder 6a), während an Stelle von 7a) auch

$$(V_1+V_2-\sum_0^l Q)z=V_2 l-\sum_0^l Qc \quad \ldots \ldots \ldots \quad 7b)$$

geschrieben werden darf. Diese Formel kann aber für beliebige Werte von z nur bestehen, wenn die Klammer links und die ganze rechte Seite für sich verschwinden, d. h. wenn die Formeln 6) und 6a) erfüllt sind, die wir somit auch auf diesem Wege gewinnen. Ferner folgt durch Differenzieren von 7a) wegen 7)

$$\frac{dM}{dz}=\sum_0^z Q-V_1=V_2-\sum_z^l Q=T \quad \ldots \ldots \ldots \quad 7c)$$

für den Zusammenhang zwischen T und dem Moment M, welches vermöge seiner Wirkung auf den Stab gewöhnlich als **Biegungsmoment** bezeichnet wird.

4. Beispiel. Trägt der wagerechte Stab eine **stetig über seine Länge verbreitete Last**, Abb. 141, die wir uns durch Aufschütten einer lockeren Masse, im Sonderfalle durch sein Eigengewicht, hervorgerufen denken können, so ruht auf einem Längenelement dz das Gewicht $dQ=q\,dz$, worin q die im allgemeinen längs des Stabes veränderliche **Belastung der Längeneinheit** bedeutet. Die Gesamtlast wird auch hier durch die beiden Auflagerkräfte aufgenommen, so zwar, daß

$$V_1+V_2=\int_0^l q\,dz \quad \ldots \ldots \quad 8)$$

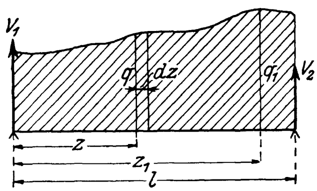

Abb. 141.

ist. Durchschneiden wir den Balken an der Stelle z_1, so ergibt die Summierung der Kräfte auf beiden Seiten des Schnittes die Querkraft

$$T=\int_0^{z_1} q\,dz-V_1=-\int_{z_1}^l q\,dz+V_2, \quad 8a)$$

woraus wieder Gl. 8) hervorgeht. Ebenso erhalten wir für das Moment an der Stelle z_1

$$M=\int_0^{z_1} q(z_1-z)\,dz-V_1 z_1=+V_2(z_1-l)+\int_{z_1}^l q(z-z_1)\,dz. \ldots \quad 8b)$$

Da hierin für die Integration z_1 einen Festwert darstellt, so dürfen wir dafür auch schreiben

$$(\int_0^l q\,dz-V_1-V_2)z_1=\int_0^l qz\,dz-V_2 l. \quad \ldots \ldots \ldots \quad 8c)$$

Auch hier bedingt die Gültigkeit für beliebige z_1 das Verschwinden der Klammer links und der rechten Seite für sich, woraus wieder 8) hervorgeht, und außerdem

$$V_2 l=\int_0^l qz\,dz, \qquad \text{also} \qquad V_1 l=\int_0^l q(l-z)\,dz \quad \ldots \ldots \quad 8d)$$

wird. Schreiben wir für das Biegungsmoment

$$M=z_1\int_0^{z_1} q\,dz-\int_0^{z_1} qz\,dz-V_1 z_1=+V_2(z_1-l)-\int_l^{z_1} qz\,dz+z_1\int_l^{z_1} q\,dz,$$

so ergibt die Differentiation, da die Ableitung eines bestimmten Integrals nach der oberen Grenze mit dem Werte des Integranden an dieser Stelle übereinstimmt, also mit $q = q_1$ für $z = z_1$

$$\frac{dM}{dz_1} = \int_0^{z_1} q\,dz + q_1 z_1 - q_1 z_1 - V_1 = + V_2 - q_1 z_1 + q_1 z_1 + \int_l^{z_1} q\,dz = T \qquad 8e)$$

im Einklang mit dem Ergebnis am Schluß des letzten Beispiels.

5. Beispiel. Sind Einzellasten und eine stetige Belastung vorhanden, so haben wir nur die Formeln der beiden vorhergehenden Beispiele zusammenzufassen und erhalten alsdann

$$T = \sum_0^{z_1} Q + \int_0^{z_1} q\,dz - V_1 = V_2 - \sum_{z_1}^{l} Q - \int_{z_1}^{l} q\,dz \quad \ldots\ldots \quad 9)$$

$$\begin{aligned} M &= \sum_0^{z_1} Q\,(z_1 - c) + \int_0^{z_1} q\,(z_1 - z)\,dz - V_1 z_1 \\ &= V_2\,(z_1 - l) + \sum_{z_1}^{l} Q\,(c - z_1) + \int_{z_1}^{l} q\,(z - z_1)\,dz, \quad \ldots\ldots \quad 9a) \end{aligned}$$

woraus wiederum für beliebige Abstände z_1

$$\left.\begin{aligned} V_1 l &= \sum_0^{l} Q\,(l - c) + \int_0^{l} q\,(l - z)\,dz \\ V_2 l &= \sum_0^{l} Q c + \int_0^{l} q z\,dz \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 9b)$$

und

$$T\,dz = dM \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 9c)$$

folgt.

6. Beispiel. Zur Ermittlung der Gleichgewichtslage eines Stabes vom Gewichte G und der Länge l, der sich auf zwei völlig glatte Gerade mit den Neigungswinkeln α_1 und α_2 gegen die Wagerechte nach Abb. 142 stützt, bezeichnen wir mit N_1, N_2 die zu den festen Geraden lotrechten Stützdrücke und mit Q die in der Stabrichtung selbst durch die Stützung geweckte Kraft. Diese muß alsdann an den Stützpunkten mit den Stützdrücken und den auf diese Punkte entfallenden Gewichtsanteilen G_1 und G_2 des Stabes, die zusammen $G_1 + G_2 = G$ betragen, im Gleichgewichte stehen. Danach haben wir die Gleichgewichtsbedingungen in wagerechter und senkrechter Richtung mit dem Neigungswinkel ψ des Stabes

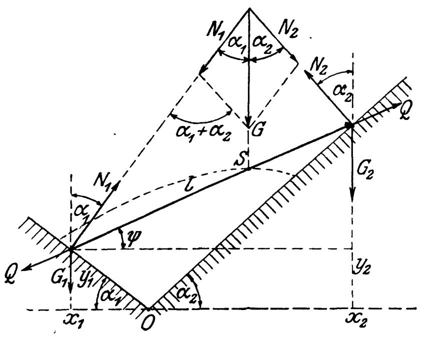

Abb. 142.

$$\left.\begin{aligned} N_1 \sin\alpha_1 &= N_2 \sin\alpha_2 = Q \cos\psi \\ N_1 \cos\alpha_1 &+ N_2 \cos\alpha_2 = G \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 10)$$

woraus sofort

$$\frac{N_1}{G} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}, \quad \frac{N_2}{G} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \quad \ldots\ldots \quad 10a)$$

hervorgeht. Da nun die Stützdrücke mit der lotrechten Gesamtkraft G die Neigungswinkel α_1 und α_2 bilden, so besagen diese Formeln, daß das Stabgewicht G im Schnittpunkte der Stützdrücke in diese nach der Vektorregel zerfällt. Zur Ermittlung der Stabneigung ψ ziehen wir noch eine der Gleichgewichtsbedingungen

$$G_1 \sin \alpha_1 = Q \cos (\alpha_1 + \psi), \qquad G_2 \sin \alpha_2 = Q \cos (\alpha_2 - \psi) \quad . \; . \; . \quad 10\text{b})$$

an den Stützpunkten in den Richtungen der festen Geraden heran und erhalten aus 10), 10a), sowie unter Beachtung von $G = G_1 + G_2$ nach Ausschaltung von Q

$$\frac{(G_1 + G_2) \sin \alpha_2}{\sin (\alpha_1 + \alpha_2)} = \frac{G_1 \cos \psi}{\cos (\alpha_1 + \psi)},$$

oder

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{G_2 \operatorname{ctg} \alpha_1 - G_1 \operatorname{ctg} \alpha_2}{G_1 + G_2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 10\text{c})$$

Die Stablänge tritt in allen vorstehenden Formeln nicht auf, so daß jede geometrisch ähnliche Anordnung mit entsprechender Gewichtsverteilung ihnen genügt. Die Lagen der Stange auf einer der beiden Geraden genügen dagegen nicht den Grundbedingungen, da für jede derselben die Neigung der andern ohne Bedeutung ist.

Dagegen sei noch bemerkt, daß man mit den Achsenabständen $x_1 y_1$, $x_2 y_2$ der Stützpunkte in bezug auf den Schnitt O der beiden festen Geraden auch hat

$$\left.\begin{array}{ll} y_2 - y_1 = l \sin \psi, & x_2 + x_1 = l \cos \psi \\ y_2 = x_2 \operatorname{tg} \alpha_2, & y_1 = x_1 \operatorname{tg} \alpha_1 \end{array}\right\}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 11)$$

also

$$x_1 = l \, \frac{\cos \psi \operatorname{tg} \alpha_2 - \sin \psi}{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2}, \qquad x_2 = l \, \frac{\cos \psi \operatorname{tg} \alpha_1 + \sin \psi}{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2}, \quad . \; . \; . \quad 11\text{a})$$

womit die Lage für jede Neigung bestimmt ist. Aus diesen Gleichungen kann man auch zur Gleichgewichtsbedingung mit Hilfe des Satzes der virtuellen Verschiebungen, d. h. durch

$$G_1 \, dy_1 + G_2 \, dy_2 = 0$$

gelangen, der mit 11) auch

$$G_1 \, dx_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + G_2 \, dx_2 \operatorname{tg} \alpha_2 = 0$$

geschrieben werden kann, und nach Einsetzen von 11a) unter Wegfall des Differentials $d\psi$ unmittelbar auf 10c) führt. Da ferner der geometrische Ort aller Stangenpunkte, also auch der punktierte des Schwerpunktes, je eine Ellipse um O ist, so entspricht 10a) einer Höchstlage des Schwerpunktes, also einem labilen Gleichgewicht.

§ 44. Theorie des ebenen statisch bestimmten Fachwerks. Wir betrachten jetzt ein in der lotrechten Ebene befindliches Fachwerk, dessen einer Endknoten durch einen Zapfen festgehalten ist, während der andere Endknoten auf einer geraden, meist wagerechten Unterlage etwa vermittels eines Rollenlagers ruht. Durch diese Auflagerbedingungen ist das Fachwerk, wie wir in § 39 gesehen haben, gegen jede Verschiebung gesichert.

Greifen an den k-Knoten dieses ebenen Fachwerks die äußeren Kräfte $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$, in denen nicht nur die auf die Knoten verteilten Stabgewichte, sondern auch die Stützdrücke enthalten sind, an, so besteht nach den Sätzen des § 43 Gleichgewicht, wenn die Achsenanteile der Kräfte die drei Bedingungen.

$$\sum_1^k X_i = 0, \qquad \sum_1^k Y_i = 0, \qquad \sum_1^k (Y_i x_i - X_i y_i) = 0 \quad . \; . \; . \quad 1)$$

erfüllen, wobei $i = 1, 2, \ldots k$ die einzelnen Knoten bezeichnet. Schneiden wir alle s_i vom i-ten Knoten ausgehenden Stäbe durch, so wird das Gleichgewicht an dieser Stelle nicht gestört, sofern wir die zerschnittenen Stäbe durch die in ihnen wirkenden Kräfte S ersetzen, die alsdann mit der im Knoten angreifenden äußeren Kraft ein geschlossenes Kraftеck bilden müssen. Das trifft aber dann zu, wenn an jedem Knoten die Gleichungen

$$X_i = \sum_1^{s_i} S_{hi} \frac{x_h - x_i}{l_{hi}}, \quad Y_i = \sum_1^{s_i} S_{hi} \frac{y_h - y_i}{l_{hi}} \quad \ldots \quad 2)$$

bestehen, worin l_{hi} die durch

$$l_{hi}^2 = (x_h - x_i)^2 + (y_h - y_i)^2 \quad \ldots \ldots \quad 3)$$

gegebene Stablänge zwischen den Knoten h und i ist, und die Summierung in 2) sich über alle s_i im Knoten i zusammenstoßenden Stäbe erstreckt. Aus 3) folgt aber

$$\frac{x_h - x_i}{l_{hi}} = -\frac{\partial l_{hi}}{\partial x_i}, \quad \frac{y_h - y_i}{l_{hi}} = -\frac{\partial l_{hi}}{\partial y_i}, \quad \ldots \quad 3a)$$

so daß wir auch an Stelle von 2) schreiben dürfen:

$$X_i + \sum_1^{s_i} S_{hi} \frac{\partial l_{hi}}{\partial x_i} = 0, \quad Y_i + \sum_1^{s_i} S_{hi} \frac{\partial l_{hi}}{\partial y_i} = 0. \quad \ldots \quad 2a)$$

Die Zahl dieser Gleichungen beträgt bei k Knoten offenbar $2k$; sie sind indessen nicht alle voneinander unabhängig; sondern durch die drei Bedingungen 1) zwischen den äußeren Kräften miteinander verknüpft. Mithin stehen für die Berechnung der unbekannten s Stabkräfte S_{ki} im ganzen $2k - 3$ voneinander unabhängige Gleichungen zur Verfügung, so daß für das statisch bestimmte Fachwerk

$$s = 2k - 3 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 4)$$

sein muß, was wir schon im § 39 aus rein geometrischen Überlegungen geschlossen hatten.

In die Summen 2a) können wir nun nicht bloß die wirklich im Knoten i angreifenden s_i Stäbe mit ihren Kräften, sondern unbedenklich auch alle anderen Stäbe aufnehmen, deren Längen die Achsenabstände x_i und y_i des Knotens i nicht enthalten, so daß die entsprechenden Ableitungen verschwinden. Schreiben wir dann noch für den n-ten Stab ganz allgemein S_n und l_n und setzen abkürzungsweise

$$\frac{\partial l_n}{\partial x_i} = \lambda_{ni}, \quad \frac{\partial l_n}{\partial y_i} = \mu_{ni}, \quad \ldots \ldots \quad 3b)$$

so wird aus 2a)

$$\left.\begin{aligned} S_1 \lambda_{1i} + S_2 \lambda_{2i} + \ldots + S_n \lambda_{ni} + \ldots + S_s \lambda_{si} &= -X_i \\ S_1 \mu_{1i} + S_2 \mu_{2i} + \ldots + S_n \mu_{ni} + \ldots + S_s \mu_{si} &= -Y_i \end{aligned}\right\} \quad . \quad 2b)$$

Diese insgesamt $2k$ Gleichungen sind aber durch die drei Gleichgewichtsbedingungen 1) der äußeren Kräfte derart miteinander verknüpft, daß wir nach Bestimmung aller Kraftanteile X_i und Y_i durch 1) drei der Gleichungen 2b) weglassen können, so daß nach 4) immer noch s lineare Gleichungen übrig bleiben, die zur Berechnung der unbestimmten Stabkräfte gerade ausreichen. Ihre Auflösung ergibt nur dann endliche Werte der Kräfte S, wenn die Determinante der Beiwerte

$$D_s = \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{21} & \lambda_{31} & \cdots & \lambda_{s1} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \lambda_{32} & \cdots & \lambda_{s2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{11} & \mu_{21} & \mu_{31} & \cdots & \mu_{s1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{1s} & \mu_{2s} & \mu_{3s} & \cdots & \mu_{ss} \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots \quad 5)$$

nicht verschwindet. Andererseits ist aber auch nach Gl. 3), 3a) und 3b) die unendlich kleine Verlängerung des n-ten Stabes zwischen den Knoten k und i unter Hinzufügung der verschwindenden Ableitungen nach den anderen Knotenabständen:

$$\lambda_{n1}\partial x_1 + \lambda_{n2}\partial x_2 + \ldots + \lambda_{ni}\partial x_i + \mu_{n1}\partial y_1 + \ldots + \mu_{ns}\partial y_s = \partial l_n \ldots \quad 3c)$$

Das sind aber, wenn wir nur die gegenseitigen (relativen) Verschiebungen der Knoten infolge der Stabverlängerung ins Auge fassen, im ganzen wieder s Gleichungen mit ebensovielen Unbekannten ∂x_i bzw. ∂y_i, welche nur dann entsprechend der Forderung der Starrheit des Fachwerks mit dem ∂l_n verschwinden, wenn die Determinante der Beiwerte

$$D_l = \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \cdots & \mu_{11} & \cdots & \mu_{1s} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & \cdots & \mu_{21} & \cdots & \mu_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{s1} & \lambda_{s2} & \lambda_{s3} & \cdots & \mu_{s1} & \cdots & \mu_{ss} \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots \quad 5a)$$

einen endlichen, von Null verschiedenen Wert besitzt. Diese Determinante kann aber in die Form 5) durch Vertauschen der wagerechten und senkrechten Zeilen übergeführt werden, wodurch sich der Wert nach dem Bildungsgesetz der Determinanten nicht ändert. Es ist demnach $D_l = D_s$ und die Bedingung der Starrheit des Fachwerks stimmt mit derjenigen für seine statische Bestimmtheit derart überein, daß in diesem Falle keine noch so kleine Verschiebung von Knoten gegeneinander möglich ist. Damit ist u. a. die Verbindung eines Knotens mit zwei auf derselben Geraden liegenden andern Knoten entsprechend der Abb. 121 in § 39 ausgeschlossen, da hierbei trotz des Verschwindens der Verlängerungen zweier Stäbe eine unendlich kleine Verschiebung des erstgenannten Knotens möglich ist, die ein Verschwinden der Determinanten 5) und 5a) bedingt.

Zur Berechnung der einzelnen Stabspannungen ist die vorstehende von A. Föppl aufgestellte und in ihrer allgemeinen Bedeutung erkannte Formelgruppe 2b) allerdings wenig geeignet, da ihre Auflösung trotz des Wegfalls zahlreicher Beiwerte λ und μ, welche den nicht am Stabe beteiligten Knoten entsprechen, zu zeitraubend ausfällt. Von den zahlreichen bewährten Lösungen dieser Aufgabe[1]) wollen wir darum hier nur das nach unserer Ansicht einfachste Rittersche Schnittverfahren erläutern. Danach denken wir uns das Fachwerk so durchschnitten, daß hierbei drei nicht in einem Knoten zusammenlaufende Stäbe getroffen werden. Die in ihnen wirksamen, die Stäbe selbst ersetzenden Stabkräfte treten alsdann an Stelle der Gesamtkraft R der äußeren Kräfte auf einer Seite des Schnittes, deren Richtungslinie wir uns in das Fachwerksgeripppe, Abb. 143, eingezeichnet denken. Sind dann ABC die Schnittpunkte der drei Stäbe bzw. ihrer Verlängerungen, in denen die Spannungen $S_1 S_2 S_3$ herrschen, so hat die Gesamtkraft R in bezug auf diese Punkte mit den Loten h_a, h_b, h_c auf R die Momente $R h_a$, $R h_b$, $R h_c$. Diese werden nach dem Durchschnitt der Stäbe jeweils ausgeglichen von dem Momente derjenigen Stabkraft, welche nicht durch den fraglichen Knoten hindurchgeht, während die in ihm sich schneidenden Stabkräfte in bezug auf ihn kein Moment besitzen. Also haben wir mit den Loten h_1, h_2 und h_3 von ABC auf $S_1 S_2 S_3$ die Momente:

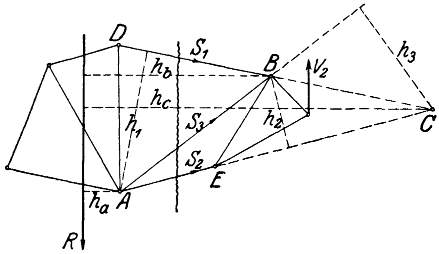

Abb. 143.

$$S_1 h_1 = R h_a, \qquad -S_2 h_2 = R h_b, \qquad S_3 h_3 = R h_c, \quad . \; . \; . \quad 6)$$

wodurch die Stabkräfte nach Größe und Vorzeichen unmittelbar gegeben sind. So erkennt man, daß der Schnitt durch DB bei festgehaltenen Auflagern eine Senkung von A mit einer Drehung der Stäbe AD und AB gegeneinander zur Folge hat; also muß S_1 eine Druckkraft sein. In derselben Weise ergibt sich S_2 als Zugkraft infolge der Senkung von B und des Auseinanderdrehens der Stäbe AB und EB, während nach dem Durchschneiden von AB das Stabviereck $ADBE$ unter Verkürzung der Diagonale AB zusammenklappt, womit S_3 als Druckkraft gekennzeichnet ist.

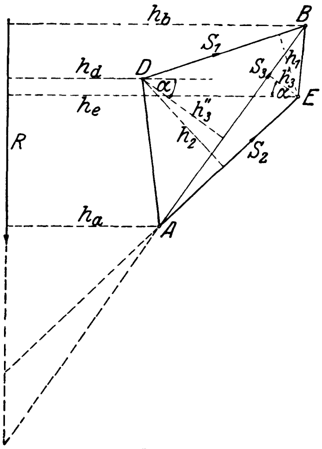

Abb. 144.

Liegt der Schnittpunkt C zweier Stabverlängerungen mit geringer Neigung

[1]) Die wohl vollständigste Zusammenstellung enthält das Werk von Henneberg: Graphische Statik der starren Systeme. Leipzig. Verlag B. G. Teubner. 1911.

gegeneinander in unbequemer Entfernung, Abb. 144, oder bei parallelen Stäben $AE \parallel BD$ im Unendlichen, Abb. 145, so ändert dies zunächst nichts an der Ermittlung der parallelen Stabkräfte S_1 und S_2 mit Hilfe der Pole A und B. Dann aber liefert der Momentenansatz von den Polen D oder E aus mit den Loten h_d und h_e auf die Gesamtkraft R, sowie den Loten h_3' bzw. h_3'' auf den Diagonalstab mit der noch unbekannten Spannung S_3 die einander gleichwertigen Formeln:

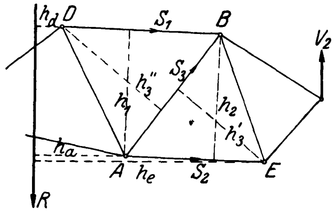

Abb. 145.

$$S_3 h_3'' + S_2 h_2 = -R h_d, \quad \text{bzw.} \quad S_3 h_3' + S_1 h_1 = R h_e. \quad . \quad 6\text{a)}$$

1. Beispiel. Im einfachen Stabdreieck, Abb. 146, mit den Seiten l_1, l_2, l und den Basiswinkeln α_1 und α_2 ist

$$l_1 \cos \alpha_1 - l_2 \cos \alpha_2 = l, \qquad l_1 \sin \alpha_1 - l_2 \sin \alpha_2 = 0,$$

also

$$l_1 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) = l \sin \alpha_2, \qquad l_2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) = l \sin \alpha_1,$$

also sind bei einer Belastung Q an der Spitze lotrecht zu l die Auflagerdrücke

$$V_1 = -Q \frac{l_2}{l} \cos \alpha_2 = -\frac{Q \sin \alpha_1 \cos \alpha_2}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}, \quad V_2 = Q \frac{l_1}{l} \cos \alpha_1 = \frac{Q \sin \alpha_2 \cos \alpha_1}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}. \quad 7)$$

Weiter gelten für die Stabkräfte die Gleichungen:

$$S = -S_1 \cos \alpha_1 = S_2 \cos \alpha_2, \qquad V_1 = S_1 \sin \alpha_1, \qquad V_2 = S_2 \sin \alpha_2, \quad . \quad 8)$$

mithin:

$$S_1 = -\frac{Q \cos \alpha_2}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}, \qquad S_2 = \frac{Q \cos \alpha_1}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}, \qquad S = \frac{Q}{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}. \quad . \quad 8\text{a)}$$

Daraus ergibt sich, daß für die in Abb. 146 gegebene Anordnung wegen $\cos \alpha_2 < 0$, $Q < 0$, $S_1 < 0$, $S_2 < 0$, $S > 0$, d. h. daß S_1 und S_2 Druckkräfte, S dagegen eine Zugkraft ist. Wäre dagegen, wie in der Anordnung Abb. 147 eines Kranträgers $\cos \alpha_2 > 0$, so würde $S_1 > 0$, $S_2 < 0$, $S < 0$ und außerdem $V_1 < 0$, $V_2 > 0$. Wir hätten also im Stab l_1 eine Zugkraft, dagegen in l_2 und l Druckkräfte, und zwei entgegengesetzt gerichtete Auflagedrücke, von

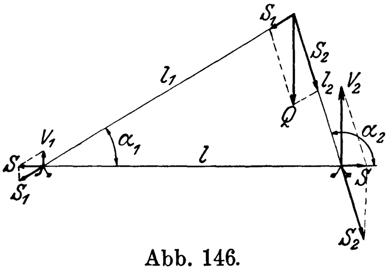

Abb. 146.

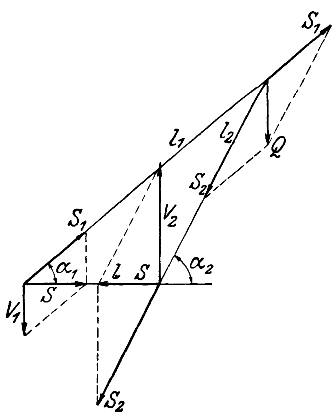

Abb. 147.

denen $V_2 > Q$ ausfällt, während V_1 den Träger gegen Umkippen festhalten muß. Man kann natürlich auch die Formeln 8a) aus der Kräftezerlegung an der Spitze unmittelbar ableiten und dann die Kräfte S_1 und S_2 an der Basis mit den Auflagerdrücken zu S zusammenfassen, wie es in den Abbildungen angedeutet ist.

2. Beispiel. Der in Abb. 148 dargestellte **Polonceau-Binder** sei an den Knoten 1 und 1′ durch die lotrechten Kräfte Q_1 und an der Spitze durch Q_2 belastet, so daß aus Symmetriegründen $V_1 = V_2 = Q_1 + 0{,}5\, Q_2$ wird. Dann

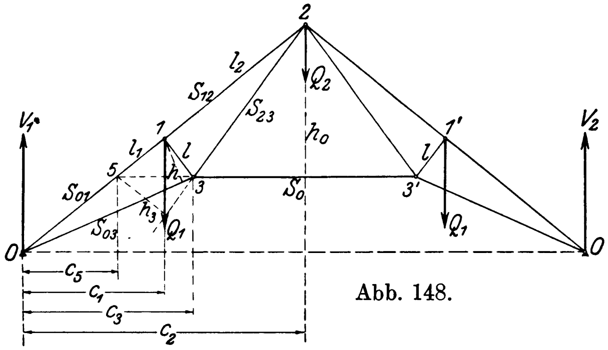

Abb. 148.

liefert mit den eingeschriebenen Längen und Polabständen das Rittersche Schnittverfahren folgende Gleichungen für die Stabkräfte

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{Pol } 1\colon\ S_{03} h = V_1 c_1, & \text{Pol } 0\colon\ S_{13} l_1 = -Q c_1 \\
\text{Pol } 2\colon\ S_0 h_0 = V_1 c_2 - Q_1 (c_2 - c_1) & \\
\text{Pol } 3\colon\ S_{01} l = -V_1 c_3, & S_{12} l = -V_1 c_3 + Q_1 (c_3 - c_1) \\
\text{Pol } 5\colon\ S_{23} h_3 = -V_1 c_5 - Q_1 (c_1 - c_5) &
\end{array}\right\} \quad \ldots \quad 9)$$

Man übersieht leicht, daß sich die Kräfte S_{01} und S_{12} nur um den in ihre Richtung fallenden Anteil von Q_1 unterscheiden können, während der andere Anteil auf S_{13} entfällt, so daß alle diese Stabkräfte Druckkräfte darstellen. Dasselbe gilt auch für S_{23}, da nach Wegnahme der entsprechenden Stäbe das Stabviereck 1 2 1′ 3′ 3 zusammensinken würde bei wagerechtem Ausweichen einer der Stützen 0 oder 0′. Das Gleichgewicht an diesen bedingt die Zugkraft S_{03} und die Verhinderung des Ausweichens der Stützen die Zugkraft S_0.

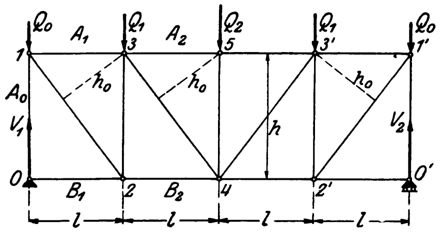

Abb. 149.

3. Beispiel. Der aus 4 Feldern von der Länge l und der Höhe h bestehende symmetrische **Parallelträger**, Abb. 149, sei durch die lotrechten Außenkräfte $Q_0\, Q_1\, Q_2\, Q_1\, Q_0$ in den oberen Knoten belastet, so daß die Auflagerdrücke $V_1 = V_2 = Q_0 + Q_1 + 0{,}5\, Q_2$ werden. Alsdann erhalten wir die Momentengleichungen

$$\left.\begin{array}{llll}
\text{Schnitt } A_0 B_1, & \text{Pol } 1\colon & S_{02} = 0; & \text{Pol } 2\colon\ S_{01} = -V_1 \\
\quad\text{"}\quad A_1 B_1, & \quad\text{"}\quad 2\colon & S_{13} h = -(V_1 - Q_0)\, l; & \text{Pol } 3\colon\ S_{12} h_0 = (V_1 - Q_0)\, l \\
\quad\text{"}\quad A_1 B_2, & \quad\text{"}\quad 4\colon & S_{23} l = -(V_1 - Q_0)\, 2l - S_{13} h & \\
 & & \phantom{S_{23} l} = -(V_1 - Q_0)\, l & \\
\quad\text{"}\quad A_1 B_2, & \quad\text{"}\quad 3\colon & S_{24} h = (V_1 - Q_0)\, l & \\
\quad\text{"}\quad A_2 B_2, & \quad\text{"}\quad 4\colon & S_{35} h = -(V_1 - Q_0)\, 2l + Q_1 l & \\
\quad\text{"}\quad A_2 B_2, & \quad\text{"}\quad 5\colon & S_{34} h_0 = (V_1 - Q_0)\, 2l - Q_1 l - S_{24} h & \\
 & & \phantom{S_{34} h_0} = (V_1 - Q_0 - Q_1)\, l &
\end{array}\right\} . \quad 10)$$

Schließlich bleibt noch die Stabkraft S_{45} übrig, die naturgemäß im Knoten 5 der Last Q_2 das Gleichgewicht halten muß, so daß

$$S_{45} = -Q_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 10\,\text{a})$$

wird. Zu demselben Ergebnis gelangt man durch die Überlegung, daß am Knoten 4

$$-S_{45} = 2 S_{34} \frac{h_0}{l} = 2 (V_1 - Q_0 - Q_1) = Q_2$$

sein muß. Damit sind alle Stabkräfte nach Größe und Vorzeichen, d. h. positiv als Zug und negativ als Druckkräfte bestimmt.

Da in diesem Fachwerk der Stab 02 spannungsfrei bleibt, so kann er mit dem Druckstab 01 auch ganz weggelassen und das Fachwerk in 1 gestützt werden. Greifen die äußeren Kräfte an den unteren Knoten an, so wird nur der Stab 45 spannungsfrei, da dort die Last Q_2 von den beiden Stabkräften S_{34} aufgenommen wird. Schließlich erkennt man, daß die Kraft in jedem lotrechten Stabe mit der dort herrschenden Querkraft übereinstimmt, die sich aus der Zusammenfassung aller auf der einen Seite wirkenden äußeren Kräfte, wie beim einfachen geraden wagerechten Stab auf zwei Stützen ergibt.

§ 45. Das Stützeck und Seileck. Entfernen wir aus einem ebenen Fachwerk, Abb. 150, sämtliche Zwischenstücke, so daß nur der Ober- und Untergurt als geschlossener Stabzug übrig bleibt, so wird das Gleichgewicht nicht gestört, wenn wir die in den herausgenommenen Stäben wirkenden Zug- und Druckkräfte an den von ihnen ursprünglich verbundenen Knoten nach Größe und Richtung anbringen und mit den dort wirkenden äußeren Kräften zu je einer Gesamtkraft vereinigen. Trennen wir dann noch das so erhaltene unvollständige Fachwerk an den beiden Auflagerstellen A und B, so erhalten wir zwei offene Stabzüge, die wir durch je einen Stab in der Richtung der Verbindungslinie der Auflagerpunkte wieder schließen können. In dem aus Obergurt und Untergurt des ursprünglichen Fachwerkes bestehenden geschlossenen Stabzug ist dieser vorher nicht vorhandene, also für das Gleichgewicht unnötige Verbindungsstab kräftefrei, was auch durch Überlagerung einer gleich großen Zug- und Druckkraft erreicht werden kann. Nach der Trennung in zwei geschlossene Stabzüge wirkt demnach im Verbindungsstab AB eines derselben eine Zugkraft, im andern eine gleich große Druckkraft, die mit der Auflagerkraft und der benachbarten Stabkraft im Gleichgewicht steht. Man kann natürlich auch den Verbindungsstab AB weglassen und statt dessen die beiden alsdann offenen Stabzüge in den Punkten A und B gelenkig festhalten. Alsdann treten an Stelle der Stabkraft AB zwei entgegengesetzt in ihre Richtung in A und B angreifende äußere Kräfte.

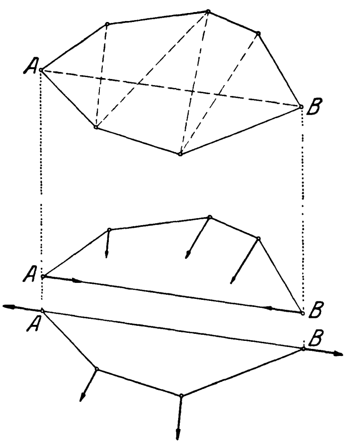

Abb. 150.

Sind die Knotenkräfte, wie in Abb. 150 angedeutet, im oberen Stabzug nach innen, im unteren nach außen gerichtet, so wirken in den Stäben der ersteren nur Druckkräfte, in denen der letzteren dagegen nur Zugkräfte, während der Verbindungsstab umgekehrt auf Zug bzw. auf Druck beansprucht wird. Man bezeichnet darum die zweite Anordnung, in der die Zugstäbe durch Fäden oder Seile ersetzt werden dürfen, als Seileck mit Seitenzug, die erstere dagegen als Stützeck mit Seitenschub, weil sie nach Abb. 151 die Stütz- und Berührungspunkte einer Reihe starrer Scheiben mit den Angriffspunkten der äußeren Kräfte verbindet. Sie kann demnach auch als das Gerippe eines Gewölbes betrachtet werden, dessen Standfestigkeit auf dem Gleichgewichte der Kräfte an den Stützpunkten beruht.

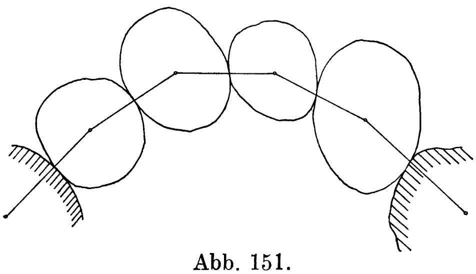

Abb. 151.

Durch Umkehrung der Richtung der in den Knoten angreifenden Außenkräfte geht offenbar eine Stützlinie in die kongruente Seillinie über. Das von einem Stützeck oder Seileck mit der Verbindungsgeraden der Auflager gebildete unvollständige Fachwerk besitzt nun ebenso viele Knoten wie Stäbe, also ist hier

$$s = k \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 1)$$

mit $2k$ Achsenabständen $x_i y_i$ der einzelnen Knoten, von denen wie beim vollständigen Fachwerk zur Festlegung wieder drei als gegeben anzusehen sind. Mithin bleiben $2k - 3$ noch unbekannte Achsenabstände der Knoten übrig, zu deren Bestimmung zunächst nur die $s = k$ Stablängen $l_{i,i-1}$ durch die Gleichungen

$$(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 = l_{i,i-1}^2 \quad \ldots \ldots \quad 2)$$

zur Verfügung stehen, so daß noch $2k - 3 - k = k - 3$ Achsenabstände willkürlich gewählt werden können. Das ganze Gebilde ist also im Gegensatz zu dem früher betrachteten Fachwerk geometrisch nicht vollständig bestimmt, sondern kann durch Veränderung der $k - 3$ willkürlichen Abstände verschoben werden, d. h. es besitzt noch $k - 3$ Freiheitsgrade der Bewegung. Danach hat ein

	Stabdreieck	Stabviereck	Fünfeck	Sechseck
mit $k =$	3	4	5	6
	0	1	2	3 Freiheitsgrade,

die nur durch Beziehungen zwischen äußeren Kräften aufgehoben werden können. Die Zahl derselben ist aber, wie am Eingang des § 44 gezeigt wurde, $2k - 3$, d. h. $2k$ Gleichgewichtsbedingungen 2) an den Knoten, welche durch die drei Gleichgewichtsbedingungen 1) der äußeren Kräfte unter sich noch zusammenhängen. In den ersteren Bedingungen treten aber noch die ebenfalls unbekannten k-Stabkräfte S auf, so daß für die Aufstellung der Freiheitsgrade nur die hierzu genügende Zahl von $k - 3$ Gleichungen übrig bleiben.

Bei der Aufstellung der Gleichungen für das Seil- und Stützeck wollen wir uns auf den praktisch wichtigsten Fall paralleler Knoten und Auflagerkräfte, z. B. unter der Wirkung der Schwere in der Lotrichtung beschränken. Da die von einem Knoten ausgehenden Stabkräfte S_i und S_{i+1} mit den Stabrichtungen α_i und α_{i+1} der lotrechten Knotenlast Q_i das Gleichgewicht halten, so müssen die beiden wagerechten Kraftanteile von S_i und S_{i+1} einander aufheben, also ist mit einer Seitenkraft H, Abb. 152,

$$\left.\begin{aligned} S_i \cos\alpha_i = S_{i+1} \cos\alpha_{i+1} = H \\ S_i \sin\alpha_i - S_{i+1} \sin\alpha_{i+1} = Q_i \end{aligned}\right\}, \qquad 3)$$

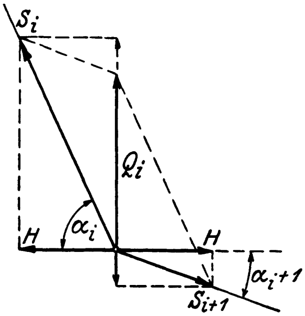

Abb. 152.

woraus zunächst derselbe Wert der Seitenkraft H für alle Knoten des Stabzuges, sowie nach Ausschaltung der Stabkräfte aus der zweiten Formel 3)

$$H(\operatorname{tg}\alpha_i - \operatorname{tg}\alpha_{i+1}) = Q_i \quad \ldots \ldots \ldots \quad 3\text{a})$$

folgt. Ebenso erhalten wir für den Knoten $i+1$

$$H(\operatorname{tg}\alpha_{i+1} - \operatorname{tg}\alpha_{i+2}) = Q_{i+1},$$

also

$$\frac{Q_{i+1}}{Q_i} = \frac{\operatorname{tg}\alpha_{i+1} - \operatorname{tg}\alpha_{i+2}}{\operatorname{tg}\alpha_i - \operatorname{tg}\alpha_{i+1}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 4)$$

Die Zahl dieser Gleichungen ist offenbar $k-1$, außerdem aber ergibt die Summierung aller k-Formeln 3a), in denen auch die Auflagerkräfte enthalten sind, die Bedingung

$$\sum_1^k Q_i = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 3\text{b})$$

durch welche die Formeln 4) miteinander verknüpft sind. Dazu kommt noch die Momentengleichung in bezug auf einen Auflagerpunkt

$$\sum_1^k Q_i \sum_1^i l_i \cos\alpha_i = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 3\text{c})$$

als weitere Bedingung zwischen den Bestimmungsstücken, so daß nur noch die erforderlichen $k-3$ Gleichungen zur Aufhebung der Freiheitsgrade übrig bleiben. Diese selbst können wir auch auf die Stabneigungen α_i erstrecken, von denen eine, z. B. die der Verbindungslinie der Auflagerpunkte von vornherein gegeben ist, wozu noch die Bedingungen für die Geschlossenheit des ganzen Stabzuges

$$\sum_1^k l_i \cos\alpha_i = 0, \qquad \sum_1^k l_i \sin\alpha_i = 0 \quad \ldots \ldots \quad 5)$$

hinzutreten. Es bleiben demnach nur noch $k-3$ voneinander unabhängige Stabneigungen übrig, die somit durch ebenso viele unabhängige Gleichgewichtsbedingungen 4) festgelegt werden. Nachdem dies geschehen, die Gestalt des ganzen Stabzuges also gegeben ist, berechnet sich aus einer der Formeln 3a) die Seitenkraft H, aus der ersten Zeile 3) alle einzelnen Stabkräfte S_i, sowie aus 3b) und 3c) die beiden lotrechten Auflagerkräfte.

Zu demselben Ergebnis gelangen wir auch mit Hilfe des Satzes der virtuellen Verschiebungen

$$\left.\begin{aligned} &\sum Q_i\,dy_i = Q_1\,dy_1 + Q_2\,dy_2 + \dots + Q_i\,dy_i + \dots + Q_k\,dy_k = 0, \\ &\text{oder} \\ &\quad 1 + \frac{Q_2}{Q_1}\frac{dy_2}{dy_1} + \dots + \frac{Q_i}{Q_1}\frac{dy_i}{dy_1} + \dots + \frac{Q_k}{Q_1}\frac{dy_k}{dy_1} = 0, \end{aligned}\right\} \quad . \quad 6)$$

worin y die lotrechten Knotenabstände von irgendeiner Wagerechten bedeuten. Dann ist nach Abb. 153

$$y_i - y_{i-1} = l_i \sin\alpha_i, \qquad dy_i - dy_{i-1} = l_i \cos\alpha_i\,d\alpha_i \quad . \quad . \quad . \quad 7)$$

Andrerseits folgt aus 5)

$$\left.\begin{aligned} \sum l_i \sin\alpha_i\,d\alpha_i &= l_1 \sin\alpha_1\,d\alpha_1 + l_2 \sin\alpha_2\,d\alpha_2 + \dots + l_k \sin\alpha_k\,d\alpha_k = 0 \\ \sum l_i \cos\alpha_i\,d\alpha_i &= l_1 \cos\alpha_1\,d\alpha_1 + l_2 \cos\alpha_2\,d\alpha_2 + \dots + l_k \cos\alpha_k\,d\alpha_k = 0 \end{aligned}\right\}, \quad 5\,\text{a})$$

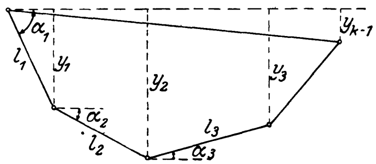

Abb. 153.

von denen die letzte Gleichung nach Einsetzen von 7) durch gegenseitiges Aufheben der dy wegen der Aufrechterhaltung der Geschlossenheit der Stabzüge identisch erfüllt ist, während die erste bei vorgelegter Schlußlinie $k-1, k$, also mit $d\,y_{k-1} = 0$, $dy_k = 0$, $d\alpha_k = 0$ übergeht in

$$dy_1 \operatorname{tg}\alpha_1 + (dy_2 - dy_1)\operatorname{tg}\alpha_2 + (dy_3 - dy_2)\operatorname{tg}\alpha_3 + \dots$$
$$+ (dy_i - dy_{i-1})\operatorname{tg}\alpha_i + \dots = 0.$$

Schreiben wir dafür

$$dy_1(\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_2) + dy_2(\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_3) + \dots$$
$$+ dy_i(\operatorname{tg}\alpha_i - \operatorname{tg}\alpha_{i+1}) + \dots = 0$$

oder

$$1 + \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_3}{\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_2}\frac{dy_2}{dy_1} + \dots + \frac{\operatorname{tg}\alpha_i - \operatorname{tg}\alpha_{i+1}}{\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_2}\frac{dy_i}{dy_1} + \dots = 0, \quad . \quad . \quad 7)$$

so liefert der Abzug von 6)

$$\left(\frac{Q_2}{Q_1} - \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_3}{\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_2}\right)\frac{dy_2}{dy_1} + \dots$$
$$+ \left(\frac{Q_i}{Q_1} - \frac{\operatorname{tg}\alpha_i - \operatorname{tg}\alpha_{i+1}}{\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_2}\right)\frac{dy_i}{dy_1} + \dots = 0. \quad . \quad . \quad 8)$$

Wegen der Willkür der Ableitungen $dy_i : dy_1$ kann diese Gleichung aber allgemein nur bestehen, wenn alle Klammern verschwinden, d. h. wenn im Einklang mit 4)

$$\frac{Q_i}{Q_1} = \frac{\operatorname{tg}\alpha_i - \operatorname{tg}\alpha_{i+1}}{\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8)$$

Aus dem Ansatz $dL = \sum Q_i\,dy_i = 0$ ergibt sich ferner, daß die Arbeit der äußeren Kräfte für das Stützeck ein Kleinstwert, für das Seileck aber ein Höchstwert ist. Danach befindet sich das letztere Gebilde im stabilen, das erstere dagegen im labilen Gleichgewicht und hat das Bestreben, bei einer kleinen Störung in die stabile Form umzuschlagen bzw. zusammenzustürzen, wenn es nicht durch Reibung in den Gelenken oder im Falle des Gewölbes, Abb. 151, an den Berührungsstellen daran gehindert wird.

Die Ermittlung der Gestalt des Stütz- oder Seilecks gestaltet sich ganz einfach, wenn die Neigungen α_i und α_{i+1} irgend zweier im Punkte i zusammenhängender Stäbe bekannt sind. Alsdann ergibt nämlich Gl. 3a) sofort die Seitenkraft H und die andern Gleichungen 4) derselben Art mit den bekannten Knotenkräften die weiteren Neigungswinkel, womit sich die Stab- oder Seilkräfte aus den ersten Formeln 3) berechnen. Kennt man aber, wie gewöhnlich nur eine Neigung, z. B. diejenige α_{k-1} der Verbindung der Auflagerpunkte, so enthalten die Ausdrücke $\operatorname{tg}\alpha_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2$ nach Gl. 3a) noch die unbekannte Seitenkraft, die mit dem Winkel in die Formel 3c) und 5) mit den beiden Auflagerkräften als Unbekannte eingeht und so mit diesen berechnet werden kann.

1. Beispiel. Ist das Kraftfeld in der Ebene vorgelegt, d. h. sind die parallelen Knotenkräfte Q durch ihre Richtungslinien, sowie die Auflagerpunkte gegeben, so sind damit auch die Auflagerkräfte und die Gesamtkraft in ihrer Größe $R = \Sigma Q$ und durch ihre wagerechten Abstände a_1 und a_2 von den Auflagern bestimmt. Der Höhenunterschied der Auflagerpunkte sei b, die Abstände der aufeinanderfolgenden Kraftrichtungen voneinander $c_1, c_2 \ldots$ Dann geht die Gesamtkraft durch den Schnitt der beiden Stäbe l_1 und l_{k-1}, die sich an die Auflagerpunkte anschließen. Es ist mithin dort

$$\left.\begin{aligned} H(\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_{k-1}) &= R \\ a_1 \operatorname{tg}\alpha_1 + a_2 \operatorname{tg}\alpha_{k-1} &= b \end{aligned}\right\}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 9)$$

also

$$(a_2 - a_1)\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{R}{H}a_2 - b, \qquad (a_1 - a_2)\operatorname{tg}\alpha_{k-1} = \frac{R}{H}a_1 - b \quad \ldots \quad 9\text{a})$$

Kennen wir nun die gesamte Seillänge l zwischen den Auflagern, so gilt

$$\Sigma l_i = l_1 + l_2 + l_3 + \ldots + l_{k-1} = l, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 10)$$

oder wegen der bekannten Abstände der Kräfte Q von einander

$$l_1 \cos\alpha_1 = c_1, \qquad l_2 \cos\alpha_2 = c_2, \ldots l_{k-1}\cos\alpha_{k-1} = c_{k-1} \quad \ldots \quad 10\text{a})$$

$$\frac{c_1}{\cos\alpha_1} + \frac{c_2}{\cos\alpha_2} + \ldots \frac{c_{k-1}}{\cos\alpha_{k-1}} = l. \quad \ldots \ldots \ldots \quad 10\text{b})$$

Dafür können wir auch schreiben

$$c_1\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha_1} + c_2\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha_2} + \ldots + c_{k-1}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha_{k-1}} = l, \quad \ldots \quad 10\text{c})$$

während für die einzelnen Knoten die Gleichungen 3a), also

$$\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{Q_1}{H}, \qquad \operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_3 = \frac{Q_2}{H}, \quad \ldots \ldots \quad 11)$$

oder wegen

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha_1 &= \frac{R\,a_2 - b\,H}{(a_2 - a_1)H}, \qquad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{R\,a_2 - b\,H}{(a_2 - a_1)H} - \frac{Q_1}{H} \\ \operatorname{tg}\alpha_{i-1} &= \frac{R\,a_2 - b\,H}{(a_2 - a_1)H} - \frac{Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_i}{H} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 11\text{a})$$

gelten. Setzen wir diese Ausdrücke in 10c) ein, so erhalten wir für die einzige Unbekannte H eine Gleichung, deren Lösung allerdings recht umständlich ausfällt.

2. Beispiel. Im Stabdreieck, Abb. 154, mit wagerechter Grundlinie $a_1 + a_2$, und der Höhe h sind die beiden andern Stäbe l_1 und l_2 durch Gewichte G_1 und G_2 mit den Hebelarmen c_1 und c_2 um die Auflager belastet. Dann entfällt nach Verteilung der Lasten auf die Auflager und die Spitze auf die letztere die Last

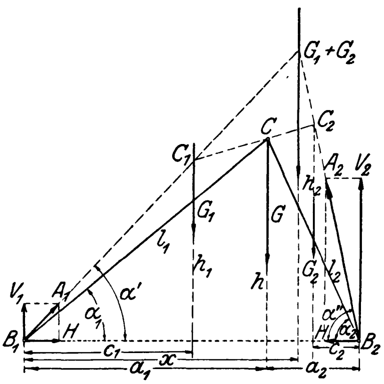

Abb. 154.

$$G = G_1 \frac{c_1}{a_1} + G_2 \frac{c_2}{a_2} \quad . \; . \; 12)$$

mit einem Seitenschub H aus

$$H\,(\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2) = H\left(\frac{h}{a_1} + \frac{h}{a_2}\right) = G,$$

oder

$$H = \frac{G\,a_1\,a_2}{h\,(a_1 + a_2)} = \frac{G_1\,c_1\,a_2 + G_2\,c_2\,a_1}{h\,(a_1 + a_2)}. \quad 12\text{a})$$

Andererseits sind die beiden lotrechten Auflagerkräfte

$$V_1 = \frac{G_1\,(a_1 + a_2 - c_1) + G_2\,c_2}{a_1 + a_2}, \qquad V_2 = \frac{G_2\,(a_1 + a_2 - c_2) + G_1\,c_1}{a_1 + a_2}, \quad 12\text{b})$$

woraus

$$V_1 + V_2 = G_1 + G_2,$$

aus denen sich mit H die Richtungen α' und α'' und die Größe der Gesamtauflagekräfte, nämlich

$$\left.\begin{array}{ll} H\operatorname{tg}\alpha' = V_1, & H\operatorname{tg}\alpha'' = V_2 \\ A_1 = \sqrt{V_1^2 + H^2}, & A_2 = \sqrt{V_2^2 + H^2} \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; 12\text{c})$$

berechnen. Der Hebelarm x der Gesamtkraft $G_1 + G_2$ in bezug auf das linke Auflager ist gegeben durch

$$(G_1 + G_2)\,x = G_1\,c_1 + G_2\,(a_1 + a_2 - c_2), \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 13)$$

oder

$$(V_1 + V_2)\,x = (a_1 + a_2)\,V_2.$$

Schreiben wir dafür

$$x\,V_1 = (a_1 + a_2 - x)\,V_2$$
$$x\operatorname{tg}\alpha' = (a_1 + a_2 - x)\operatorname{tg}\alpha'', \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 13\text{a})$$

so erkennen wir, daß die Gesamtkraft $G_1 + G_2$ durch den Schnittpunkt der beiden Auflagekräfte A_1 und A_2 hindurchgeht.

Führen wir schließlich noch die lotrechten Abstände h_1 und h_2 der Schnitte C_1 und C_2 von G_1 und G_2 mit den Kraftrichtungen von A_1 und A_2 durch

$$h_1 = c_1\operatorname{tg}\alpha' = c_1\frac{V_1}{H}, \qquad h_2 = c_2\operatorname{tg}\alpha'' = c_2\frac{V_2}{H} \quad . \; . \; . \; . \; . \; 14)$$

ein und bilden den Ausdruck

$$\frac{h_2 - h_1}{h - h_1} = \frac{c_2\,V_2 - c_1\,V_1}{H\,h - c_1\,V_1},$$

so wird daraus mit 12a) und 12b) nach einigen Kürzungen

$$\frac{h_2 - h_1}{h - h_1} = \frac{a_1 + a_2 - c_1 - c_2}{a_1 - c_1}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 14\text{a})$$

so daß also die beiden Schnitte von G_1 mit A_1 und G_2 mit A_2 auf einer Geraden durch die Dreiecksspitze C liegen. In diesen Schnitten C_1 und C_2 findet demnach eine Zerlegung der Lasten G_1 und G_2 in die Auflagerkräfte A_1, A_2 und zwei durch C hindurchgehende Knotenkräfte statt, die entgegengesetzt gleich sein müssen und darum nach außen hin nicht in Erscheinung treten. Dagegen belasten sie die beiden Stäbe, in deren Richtungen die Stabkräfte

$$S_1 = H\cos\alpha_1 + V_1 \sin\alpha_1, \qquad S_2 = H\cos\alpha_2 + V_2\sin\alpha_2 \quad . \; . \; . \; 15)$$

und außerdem noch Biegungsmomente herrschen, die von den hierzu senkrechten Lastanteilen $G_1 \cos\alpha_1$ und $G_2 \cos\alpha_2$ geweckt werden und wie in den Beispielen des § 43 zu berechnen sind.

3. Beispiel. Der Kurbeltrieb, Abb. 155, kann als offenes Stabdreieck mit dem Kurbelarm r und der Schubstange l als Stäbe aufgefaßt werden. Bezeichnen wir deren Neigungen gegen die Verbindungslinie x zwischen Kurbelmitte und Kreuzkopf mit φ und ψ, so ist

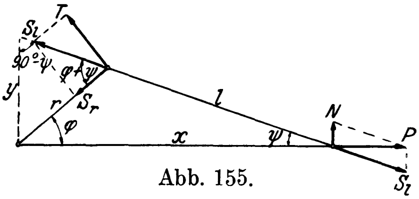

Abb. 155.

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi + l\cos\psi, & r\sin\varphi &= l\sin\psi \\ -dx &= r\sin\varphi\, d\varphi + l\sin\psi\, d\psi, & r\cos\varphi\, d\varphi &= l\cos\psi\, d\psi \end{aligned}\right\}, \quad . \; . \; 16)$$

also

$$-\frac{dx}{r\,d\varphi} = \sin\varphi + \frac{\sin\psi\cos\varphi}{\cos\psi} = \frac{\sin(\varphi+\psi)}{\cos\psi}.$$

Nach dem Satze der virtuellen Arbeiten besteht zwischen der im Kreuzkopf in der x-Richtung wirkenden Kolbenkraft P und dem Moment $T\,r$ an der Kurbel die Gleichgewichtsbedingung $T\,r\,d\varphi + P\,dx = 0$, also

$$\frac{T}{P} = -\frac{dx}{r\,d\varphi} = \frac{\sin(\varphi+\psi)}{\cos\psi} = \frac{y}{r}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 16\,\mathrm{a})$$

wenn y das von der Schubstange auf dem Lot in O auf x abgeschnittene Stück bedeutet. Danach kann die Drehkraft T leicht zeichnerisch aus P für jede Kurbelstellung φ ermittelt werden. Die Stangenkräfte ergeben sich bei reibungsfreier Gleitbahn durch Kräftezerlegung zu

$$\left.\begin{aligned} S_l &= \frac{P}{\cos\psi}, \qquad N = P\,\mathrm{tg}\,\psi \\ S_r &= S_l\cos(\varphi+\psi) = P\,\frac{\cos(\varphi+\psi)}{\cos\psi} \end{aligned}\right\}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 16\,\mathrm{b})$$

wo N der Normaldruck auf die Gleitbahn ist.

§ 46. Die Seil- und Stützkurve.

Greift an einem Knoten eines Stabzuges eine Kraft Q mit den Achsenanteilen X, Y an, so steht dieselbe mit den benachbarten Stabkräften $S'\,S''$, deren Richtungen nach Abb. 156 die Neigungswinkel ϑ' und ϑ'' mit der Wagerechten bilden, im Gleichgewicht, so zwar, daß

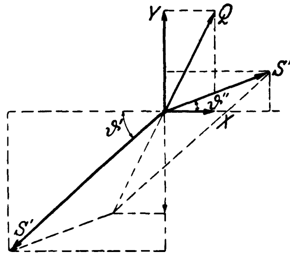

Abb. 156.

$$\left.\begin{aligned} S'\cos\vartheta' - S''\cos\vartheta'' &= X, \\ S'\sin\vartheta' - S''\sin\vartheta'' &= Y \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; 1)$$

Daraus folgt sofort durch Erweiterung mit $\sin\vartheta''$, $\cos\vartheta''$ bzw. $\sin\vartheta'$, $\cos\vartheta'$ und Abzug

$$\left.\begin{aligned} S'\sin(\vartheta''-\vartheta') &= X\sin\vartheta'' - Y\cos\vartheta'' \\ S''\sin(\vartheta''-\vartheta') &= X\sin\vartheta' - Y\cos\vartheta' \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; 1\,\mathrm{a})$$

Erweitern wir dagegen die Formeln 1) mit $\cos\vartheta'$, $\sin\vartheta'$ bzw. $\cos\vartheta''$, $\sin\vartheta''$ und addieren, so wird

$$\left.\begin{array}{l} S' - S''\cos(\vartheta' - \vartheta'') = X\cos\vartheta' + Y\sin\vartheta' \\ S'\cos(\vartheta' - \vartheta'') - S'' = X\cos\vartheta'' + Y\sin\vartheta'' \end{array}\right\}, \quad . \; . \; . \; 1\,\text{b})$$

oder zusammengefaßt

$$(S' - S'')[1 + \cos(\vartheta' - \vartheta'')] = X(\cos\vartheta' + \cos\vartheta'') + Y(\sin\vartheta' + \sin\vartheta''). \quad . \; . \; . \; 1\,\text{c})$$

Aus 1a) erkennen wir nun, daß der Winkelunterschied $\vartheta' - \vartheta''$, sowie aus 1c), daß der Unterschied der $S' - S''$ der beiden benachbarten Stabkräfte bei der Willkür eines Winkels ϑ' oder ϑ'' unendlich klein werden können, wenn auch X mit Y selbst unendlich klein wird. In diesem Falle der Knotenbelastung durch ein Kraftelement findet also ein stetiger Übergang der beiden Stäbe und ihrer Kräfte unter Aufrechterhaltung ihrer Drehbarkeit gegeneinander statt. Diese Überlegung gilt sofort, wenn wir die Zahl der Stäbe unter gleichzeitiger Verkürzung derselben zu Elementen ds unendlich vergrößern, für den ganzen Stabzug, der damit in eine stetig gekrümmte Seilkurve mit vollkommener Drehbarkeit der Linienelemente gegeneinander übergeht. Um zu entscheiden, ob hierbei noch Querkräfte senkrecht zu S auftreten, betrachten wir, Abb. 157, ein Seilelement ds mit den Achsenrissen dx und dy, an dessen Mitte die äußeren Kräfte dX und dY wirken. Dann liefert die Momentengleichung in bezug auf einen Endpunkt

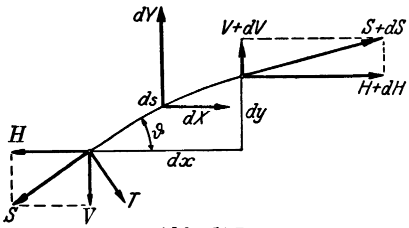

Abb. 157.

$$-T\,ds = \tfrac{1}{2}(dy\,dX - dx\,dY), \quad 2)$$

also einen Betrag, der unendlich klein zweiter Ordnung ist, so daß also T selbst unendlich klein erster Ordnung ausfällt und folglich gegen S selbst vernachlässigt werden muß. In einem vollkommen biegsamen Seile herrscht also lediglich eine Kraft in der Tangentenrichtung, die ihrerseits in einen wagerechten und senkrechten Bestandteil H und V derart zerfällt, daß

$$S\cos\vartheta = H, \qquad S\sin\vartheta = V, \qquad V = H\,\text{tg}\,\vartheta \quad . \; . \; . \; 3)$$

ist. Das Gleichgewicht dieser Kraftanteile mit der äußeren Kraft am Element bedingt ferner nach Abb. 157

$$dH + dX = 0, \qquad dV + dY = 0, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 4)$$

also im Sonderfalle einer nur lotrechten äußeren Kraft mit $dX = 0$, $dH = 0$, d. h. einen über das ganze Seil gleichen Seitenzug und daher mit 3)

$$\frac{dV}{dx} = H\frac{d\,\text{tg}\,\vartheta}{dx} = H\frac{d^2y}{dx^2}, \quad \text{oder} \quad H\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dY}{dx} = 0, \; . \; . \; 4\,\text{a})$$

oder unter Einführung der lotrechten Belastung der Längeneinheit des Grundrisses durch

$$dY = q\,dx, \qquad H\frac{d^2 y}{dx^2} + q = 0 \quad \ldots\ldots \quad 4\text{b})$$

Kennt man demnach die Form der Seilkurve, d. h. $y = f(x)$, so bestimmt sich aus 4b) die Belastungskurve $q = F(x)$, während aus der letzteren die Gleichung der Seilkurve durch zweimalige Integration hervorgeht. Es gehört also zu jeder Seilkurve eine lotrechte Belastungskurve. An Stelle von 4b) kann man auch unter Einführung des Krümmungsarmes ϱ schreiben

$$\frac{H}{\varrho\cos^3\vartheta} + q = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 4\text{c})$$

was für manche Fälle bequemer ist.

Steht ferner die äußere Kraft überall senkrecht zur Seilkurve, so haben wir

$$dX\cos\vartheta + dY\sin\vartheta = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

also auch wegen 4) und 3)

$$dH\cos\vartheta + dV\sin\vartheta = \frac{1}{S}(H\,dH + V\,dV) = dS = 0, \quad \ldots \quad 5\text{a})$$

d. h. in einem nur normal, sonst aber beliebig veränderlich belasteten Seil herrscht überall dieselbe Tangentialkraft. In diesem Falle dürfen wir auch an Stelle von 5) schreiben

$$\frac{dX}{\sin\vartheta} = -\frac{dY}{\cos\vartheta} = dP,$$

oder nach Division mit ds wegen $ds\cos\vartheta = dx$, $ds\sin\vartheta = dy$

$$\frac{dX}{dy} = -\frac{dY}{dx} = \frac{dP}{ds} = p, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 5\text{b})$$

wo p die beliebig veränderliche Normalbelastung der Längeneinheit des Seilbogens bedeutet. Damit wird aber in 4)

$$dH = -p\,dy = -p\,ds\sin\vartheta, \qquad dV = p\,dx = p\,ds\cos\vartheta$$

und nach Differentiation der ersten beiden Gleichungen 3) mit $S = \text{konst.}$

$$-S\sin\vartheta\,d\vartheta = dH = -p\,ds\sin\vartheta$$
$$S\cos\vartheta\,d\vartheta = dV = p\,ds\cos\vartheta,$$

also nach Einführung des Krümmungsarmes durch $ds = \varrho\,d\vartheta$

$$S = p\varrho, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 6)$$

d. h. die Krümmung einer nur normal belasteten Seilkurve ist an jeder Stelle der dort herrschenden Belastung verhältnisgleich.

Schreiben wir an Stelle von 6)

$$S\frac{d^2 y}{dx^2} = p\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 6\text{a})$$

so erkennen wir, daß auch hier die Formen der Belastungskurve und der Seilkurve sich gegenseitig bedingen. Während nun die ersteren einfach durch Differentiation aus der Seilkurve $y = f(x)$ gewonnen wird, hat man im umgekehrten Falle bei vorgelegter Belastungskurve p mit

$$\frac{dy}{dx} = y', \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx}, \qquad \frac{dy'}{dx}\,dy = y'\,dy',$$

aus 6a) nach Erweiterung mit dy

$$p\,dy = \frac{S\,y'\,dy'}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = -S\,d(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}},$$

oder integriert

$$\int p\,dy = C - S(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}} = C - S\cos\vartheta\,. \quad . \quad . \quad . \quad 6\text{b})$$

Die Ausführung der Rechnung gestaltet sich besonders einfach, wenn $p = F(y)$ vorgelegt ist, was im Falle eines Flüssigkeitsdruckes unter Wirkung der Schwere an der Erdoberfläche stets zutrifft.

Schließlich sei noch bemerkt, daß die vorstehenden Betrachtungen auch für Stützkurven unverändert gelten, die sich dann allerdings, auch wenn sie aus lauter festen, gelenkig verknüpften Elementen kettenartig zusammengesetzt sind, unter der Einwirkung tangentialer Druckkräfte an Stelle des Seilzuges, nur im labilen Gleichgewichte befinden, falls nicht wie bei Gewölben Reibungswiderstände, die wir bisher vernachlässigten, zu Hilfe kommen. Man erreicht dies sicher durch Aneinanderreihen von Wölbsteinen mit gegeneinander etwas geneigten Seitenflächen, deren Spuren (Fugen) im Gewölbeplan die Normalen zur Stützlinie bilden, sich also in ihren Krümmungsmittelpunkten schneiden. Dabei geht natürlich die Drehbarkeit der Längenelemente der Stützlinie gegeneinander, die unseren Darlegungen zugrunde lag, zugunsten der Standfestigkeit verloren, was vom praktischen Standpunkt nur erwünscht sein kann. Außerdem aber müßte man streng genommen für jede Stelle Wölbsteine mit anderer Neigung der Seitenflächen bei gleicher Dicke in der Wölbrichtung oder bei gleicher Neigung solche mit verschiedener Dicke verwenden. Meistens begnügt man sich, bei nicht völlig kreisförmiger Stützkurve mit der Verwendung zweier Arten von Wölbsteinen mit zwei Krümmungsarmen, ersetzt also die Stützlinie durch mehrere tangential aneinanderstoßende Kreisbogen und bezeichnet ein derartiges Gebilde als einen Korbbogen, Abb. 158. Dieser muß dann so angeordnet werden, daß die der wirklichen Belastung entsprechende Stützlinie zwischen der oberen und unteren Begrenzung des Gewölbes verläuft, damit

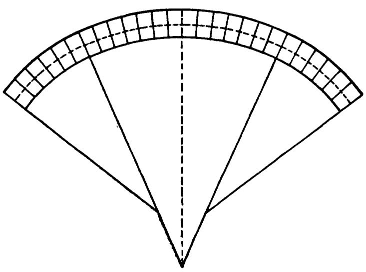

Abb. 158.

die Stützkraft überall von den Steinen aufgenommen werden kann. Dies ist dann hinreichend gewährleistet, wenn an den Übergangsstellen und den Enden die Kreisbögen die Stützkurve berühren.

1. Beispiel. Bei einem lotrecht belasteten Kreisbogen vom Halbmesser r als Seil- oder Stützkurve ist nach 4c) mit $\varrho = r$

$$-q = H\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{H}{r\cos^3\vartheta} = \frac{q_0}{\cos^3\vartheta}, \quad . \quad 7)$$

worin $H : r = q_0$ die Belastung im Scheitel bedeutet. Die hierdurch gegebene Ordinate der Belastungskurve läßt sich nach A. Ritter[1]) leicht zeichnerisch ermitteln, wenn wir in Abb. 159 $AB = y_0$ auf dem zum Winkel ϑ gegen das Scheitellot gehörigen Halbmesser der Stützlinie AA' auftragen. Dann ist mit dem Raumgewicht γ der Masse über der Stützkurve, also $q_0 = \gamma y_0$

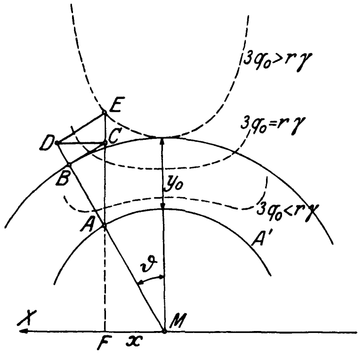

Abb. 159.

$$AC = \frac{y_0}{\cos\vartheta}, \qquad AD = \frac{y_0}{\cos^2\vartheta}, \qquad AE = y = \frac{y_0}{\cos^3\vartheta} = -\frac{q}{q_0}\,y_0 = -\frac{q}{\gamma}. \quad 7a)$$

Die Wiederholung dieses Verfahrens liefert sofort die punktiert eingetragene Belastungskurve bezogen auf die Stützlinie als Basis. Deren Gleichung ist mit $MF = x$, $EF = z = y + r\cos\vartheta$

$$z = \frac{y_0}{\cos^3\vartheta} + r\cos\vartheta, \qquad x = r\sin\vartheta, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ 7b)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= \frac{3\,y_0\sin\vartheta}{r\cos^5\vartheta} - \operatorname{tg}\vartheta = \left(\frac{3\,y_0}{r\cos^4\vartheta} - 1\right)\operatorname{tg}\vartheta \\ \frac{d^2 z}{d x^2} &= \left(\frac{15\,y_0\sin^2\vartheta}{r\cos^4\vartheta} + \frac{3\,y_0}{r\cos^2\vartheta} - 1\right)\frac{1}{r\cos^3\vartheta} \end{aligned}\right\}, \quad . \ . \ . \ . \ . \ 7c)$$

also im Scheitel für $\vartheta = 0$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right)_0 = \left(\frac{3\,y_0}{r} - 1\right)\frac{1}{r}. \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ 7d)$$

Der letzte Wert verschwindet für $3\,y_0 = r$ entsprechend einer verschwindenden Krümmung im Scheitel, während für $3\,y_0 \gtrless r$ die Belastungskurve im Scheitel eine der Stützkurve entgegengesetzte bzw. gleichgerichtete Krümmung besitzt, wie aus den verschiedenen Kurven der Abb. 159 zu ersehen ist. Aus diesem Verlauf erkennt man, daß das flache Kreisbogengewölbe angenähert als Stützlinie für eine in bezug darauf gerade wagerechte Belastungskurve benutzt werden kann, wenn

$$1 = \frac{3\,y_0}{r} = \frac{3\,q_0}{\gamma r} = 3\frac{H}{\gamma r^2} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ 8)$$

wird, womit sich bei bekanntem r der Seitenschub zu $H = \frac{\gamma r^2}{3}$ berechnet. Nun ist bei einem Gewölbe stets die Spannweite l, d. h. die Sehne des Kreis-

[1]) A. Ritter, Lehrbuch der Ingenieurmechanik, 3. Aufl. Leipzig 1899, S. 340.

bogens AB und die Tiefe $h = AC$ der Auflagerpunkte (sog. Kämpfer) unter der Belastungsgeraden gegeben, also ist nach Abb. 160 mit 8)

$$h = y_0 + r(1 - \cos\vartheta_0) = \frac{4}{3}r - \sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}}, \quad \ldots \ldots \quad 8\text{a})$$

$$r = \frac{12}{7}h \pm \sqrt{\frac{81}{49}h^2 - \frac{9}{28}l^2} = \frac{12}{7}h \pm \frac{9}{7}h\sqrt{1 - \frac{7}{36}\frac{l^2}{h^2}}. \quad \ldots \quad 8\text{b})$$

Von diesen Werten entspricht, wie man sofort nach Vernachlässigung des nach Voraussetzung kleinen Bruches $l^2 : h^2$ erkennt, der größere $r_1 = 3h$ der Stützkurve AB mit der schraffierten Belastung $ABCD$, der kleinere $r_2 = \frac{3}{7}\cdot h$ dagegen der Seilkurve A_1B_1 mit der Belastung A_1B_1CD, für die alsdann $A_1C = B_1D = h$ zu setzen ist.

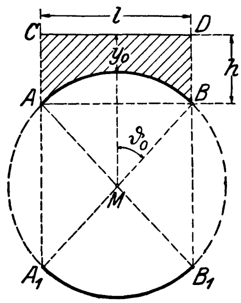

Abb. 160.

2. Beispiel. Soll die Belastung gleichförmig über die ganze Spannweite verteilt sein, so ist in Gl. 4b) q ein Festwert q_0, also

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{q_0}{H}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{q_0}{H}x + C_1, \\ &y = -\frac{q_0}{2H}x^2 + C_1x + C_2 \end{aligned}\right\}, \quad \ldots \quad 9)$$

d. h. die zugehörige Stütz- und Seilkurve ist eine Parabel. Legen wir die Bezugsachse durch die beiden Auflagerpunkte, die um die Spannweite l entfernt sich in gleicher Höhe befinden mögen, so wird für $x = 0$, $y = 0$ und für $x = \frac{l}{2}$, $\frac{dy}{dx} = 0$, $y = h$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q}{H}\left(\frac{l}{2} - x\right), \quad y = \frac{q_0}{2H}(lx - x^2), \quad H = \frac{q_0 l^2}{8h}, \quad \ldots \quad 9\text{a})$$

d. h. der Seitenschub oder -zug der parabolischen Stütz- bzw. Seillinie wächst mit dem Kehrwert der Pfeilhöhe.

3. Beispiel. Ist ein Seil nur durch sein Eigengewicht, das auf die Längeneinheit q_0 beträgt, belastet, so entfällt auf das Bogenelement ds die Kraft $dY = -q_0\,ds$, also ist nach 4) $dV = q_0\,ds$ und wenn wir vom Scheitel aus die Bogenlänge rechnen, wo nach 3) $V = 0$ ist

$$V = q_0 s = H\frac{dy}{dx}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad 10)$$

Mit der Abkürzung $H : q_0 = a$ wird daraus

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} = \frac{s}{a}, \qquad \frac{dy^2 + dx^2}{dx^2} = \frac{ds^2}{dx^2} = \frac{s^2 + a^2}{a^2} \\ &dx = \frac{a\,ds}{\sqrt{a^2 + s^2}}, \qquad dy = \frac{s\,ds}{\sqrt{a^2 + s^2}} \end{aligned}\right\}, \quad \ldots \ldots \quad 10\text{a})$$

also integriert

$$y - c = \sqrt{a^2 + s^2}, \qquad x = a\,\mathrm{lgn}\left(\frac{s}{a} + \sqrt{1 + \frac{s^2}{a^2}}\right), \quad \ldots \quad 10\text{b})$$

wenn der Scheitel auf der y-Achse liegen soll, Abb. 161. Sein Abstand vom Ursprung ist mit $s = 0$ alsdann $y_0 = c + a$. Da ferner nach 10a)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a}\frac{ds}{dx} = \frac{\sqrt{s^2 + a^2}}{a^2}$$

ist, so wird der Krümmungsarm der Seilkurve

$$\varrho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{dx^2}} = \frac{a^2+s^2}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 10\text{c})$$

mit $\varrho = a$ für $s = 0$, so daß also der Beiwert a den Krümmungsarm im Scheitel der Seilkurve angibt. Die gesuchte Gleichung der Seilkurve ergibt sich schließlich nach Ausschaltung von s aus den beiden Formeln 10b) zu

$$y - c = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = a\,\mathfrak{Cof}\,\frac{x}{a} \quad \ldots \quad 11)$$

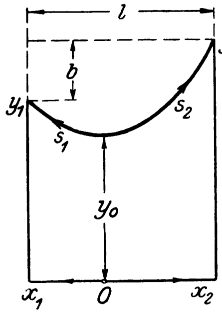

Abb. 161.

Diese genügt offenbar der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{y-c}{a^2}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 11\text{a})$$

die wir auch durch Ausschaltung der Wurzel aus den Formeln 10a) und 10b) für dx und $y - c$ und Einführung in die mit $dY = -q_0\,ds$ aus 4a) hervorgehende Gleichung

$$H\frac{d^2 y}{dx^2} = q_0\frac{ds}{dx}$$

gewinnen konnten. Danach ist aber

$$-dY = dV = q_0\,ds = \frac{q_0^2}{H}(y-c)\,dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad 11\text{b})$$

entsprechend einer geraden wagerechten Belastungskurve (vgl. Beispiel 2) über der alsdann gewichtslos gedachten Seilkurve, so daß unser Ergebnis auch für diesen Fall unbeschränkt gültig bleibt. Aus der Verbindung von 11) mit der ersten Gl. 11b) folgt weiter unter Ausschaltung von $y - c$

$$s = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) = a\,\mathfrak{Sin}\,\frac{x}{a}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad 11\text{c})$$

Sind nun, wie stets in der Praxis, der Höhenunterschied b der Aufhängepunkte die Spannweite l und die ganze Seillänge s_0 gegeben, so hat man, da der Anfangspunkt O unter dem Scheitel liegt, für die Achsenabstände

$$x_2 - x_1 = l, \qquad y_2 - y_1 = b = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x_2}{a}} + e^{-\frac{x_2}{a}} - e^{\frac{x_1}{a}} - e^{-\frac{x_1}{a}}\right)$$

$$s_2 - s_1 = s_0 = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x_2}{a}} - e^{-\frac{x_2}{a}} - e^{\frac{x_1}{a}} + e^{-\frac{x_1}{a}}\right),$$

also

$$s_0 + b = a\left(e^{\frac{x_2}{a}} - e^{\frac{x_1}{a}}\right), \qquad s_0 - b = -a\left(e^{-\frac{x_2}{a}} - e^{-\frac{x_1}{a}}\right)$$

$$s_0^2 - b^2 = a^2\left(e^{\frac{x_2-x_1}{a}} + e^{-\frac{x_2-x_1}{a}} - 2\right) = a^2\left(e^{\frac{l}{2a}} - e^{-\frac{l}{2a}}\right)^2,$$

oder

$$\frac{\sqrt{s_0^2 - b^2}}{a} = 2\,\mathfrak{Sin}\,\frac{l}{2a}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 12)$$

Aus dieser transzendenten Gleichung ergibt sich schließlich der noch unbekannte Wert $a = Hq_0$ durch Probieren oder auf zeichnerischem Wege als Schnitt der Kurven

$$z = \mathfrak{Sin}\,\frac{l}{2a} \quad \text{und} \quad z = \frac{\sqrt{s_0^2 - b^2}}{l}\,\frac{l}{2a}, \quad \ldots\ldots \quad 12\text{a})$$

wobei zweckmäßig $l:2a$ als Abszisse gewählt wird. Damit ist dann auch der Seitenzug H bei vorgelegtem Seilgewicht $q_0 s_0 = G$ und die Seilspannung.

$$S = \frac{H}{\cos\vartheta} = \frac{H\,ds}{dx} = \frac{H}{a}\sqrt{a^2+s^2} = q_0\sqrt{a^2+s^2} \quad \ldots\ldots \quad 12\text{b})$$

an jeder Stelle bestimmt.

4. Beispiel. Ist eine einfach gekrümmte gewichtslose Haut, deren Spur in der Zeichenebene als Seil aufgefaßt werden kann, durch Flüssigkeitsdruck belastet, der stets normal zur Hautfläche wirkt, so haben wir in Gl. 6b) mit dem Abstand y des Hautelementes von der ebenen Flüssigkeitsoberfläche

$$p = \gamma y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 13)$$

zu setzen, wo γ das Raumgewicht der Flüssigkeit bedeutet. Damit wird aus 6b) mit der Scheiteltiefe y_0 für $\vartheta = 0$

$$\gamma(y^2 - y_0^2) = 2S(1-\cos\vartheta) = 4S\sin^2\frac{\vartheta}{2}, \quad \ldots\ldots \quad 13\text{a})$$

oder da der Seitenschub bzw. -zug $H = S\cos\vartheta$

$$H = S - \frac{\gamma}{2}(y^2 - y_0^2) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 13\text{b})$$

Andererseits folgt aus 6) für den Krümmungsarm

$$S = \gamma y \varrho = \gamma y_0 \varrho_0, \qquad \varrho = \frac{S}{\gamma\sqrt{y_0^2 + 4\frac{S}{\gamma}\sin^2\frac{\vartheta}{2}}} \quad \ldots\ldots \quad 13\text{c})$$

und für den Krümmungsarm ϱ' der Evolute der Seilkurve

$$\varrho' = \frac{d\varrho}{d\vartheta} = \frac{-S^2\sin\vartheta}{\gamma^2\left(y_0^2 + \frac{4S}{\gamma}\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad \ldots\ldots \quad 13\text{d})$$

der für $\vartheta = 0$ und $\pm\pi$ verschwindet, so daß also den Scheiteln der Seilkurve Scheitelwerte ihres Krümmungsarmes und Spitzen ihrer Evolute entsprechen. Die Gestalt der Kurve ist alsdann durch die Verhältniszahl

$$\frac{S}{\gamma y_0^2} = \frac{\varrho_0}{y_0} = \alpha^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 14)$$

gegeben, mit der die vorstehenden Formeln übergehen in

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 &= 1 + 4\alpha^2\sin^2\frac{\vartheta}{2}, & \frac{H}{S} &= 1 - \frac{1}{2\alpha^2}\left(\frac{y^2}{y_0^2} - 1\right) \\ \frac{\varrho}{y_0} &= \frac{\alpha^2}{\sqrt{1+4\alpha^2\sin^2\frac{\vartheta}{2}}}, & \frac{\varrho'}{y_0} &= \frac{\alpha^4\sin\vartheta}{\left(1+4\alpha^2\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 14\text{a})$$

Dazu kommen dann noch die Ausdrücke

$$ds = \varrho\,d\vartheta, \qquad dx = ds\cos\vartheta = \varrho\cos\vartheta\,d\vartheta = \varrho\,d(\sin\vartheta), \quad \ldots\ldots \quad 15)$$

aus denen sich nach Ermittlung von $\varrho : y_0$ für verschiedene Winkel die zugehörigen vom Scheitel aus gerechneten Werte von $s : y_0$ und $x : y_0$ durch graphische Integration oder durch Näherungsrechnung für kleine Winkelunterschiede unter Benutzung von Mittelwerten für $\varrho : y_0$ beliebig genau bestimmen lassen. Bezeichnen wir

für die Winkelunterschiede $\vartheta_1 - 0$, $\vartheta_2 - \vartheta_1$, $\vartheta_3 - \vartheta_2$,
die Mittelwerte mit ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3,

so wird aus 15)

$$\left.\begin{aligned} s &= \varrho_1\vartheta_1 + \varrho_2(\vartheta_2 - \vartheta_1) + \varrho_3(\vartheta_3 - \vartheta_2) + \ldots \\ x &= \varrho_1\sin\vartheta_1 + \varrho_2(\sin\vartheta_2 - \sin\vartheta_1) + \varrho_3(\sin\vartheta_3 - \sin\vartheta_2) + \ldots \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 15\text{a})$$

Auf diese Weise erhalten wir z. B. für die Winkelunterschiede von 30° und 60° und $\alpha^2 = 1$

für $\vartheta = 0$	60°	90°	120°	180°
arc $\vartheta = 0$	1,05	1,57	2,09	3,14
$\frac{y}{y_0} = 1$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{5}$
$\frac{\varrho}{y_0} = 1$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$
$\frac{x}{y_0} = 0$	0,77	0,86	0,79	0,39
$\frac{s}{y_0} = 0$	0,75	1,05	1,31	1,78.

Die diesen Werten entsprechenden kongruenten Gestalten der Stütz- und Seilkurve sind in Abb. 162 für gleichen Außen- und Innendruck unter Einzeichnung der Evolute dargestellt. Beide Kurven unterscheiden sich nur durch das verschiedene Vorzeichen von p bzw. γ und S und können auch an beliebigen Stellen, z. B. für $\vartheta = \pm 90^0$ an feste Wände angeschlossen werden, so daß beliebige Stücke von ihnen die zugehörigen Seil- und Stützkurven bilden.

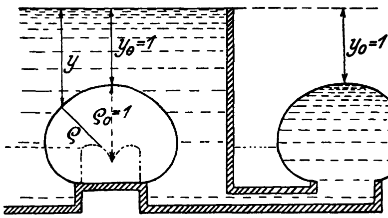

Abb. 162.

Für ein **hängendes Seil** mit Flüssigkeitslast ändert ϱ_0 sein Vorzeichen, also nach 14) auch die Verhältniszahl α^2 in den Gleichungen 14a). Der Betrag von α^2 folgt aus einer vorgelegten Grenzbedingung. Verlangen wir z. B., daß der Flüssigkeitsspiegel $y_1 = 0$ das Seil unter dem Winkel ϑ_1 schneidet, so ergibt die erste Gl. 14a)

$$-1 = 4\,\alpha^2 \sin^2\frac{\vartheta_1}{2}, \quad \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 = 1 - \left(\frac{\sin\frac{\vartheta}{2}}{\sin\frac{\vartheta_1}{2}}\right)^2, \quad \frac{y_0}{\varrho_0} = -4\sin^2\frac{\vartheta_1}{2} \quad . \; . \; . \quad 14\text{b})$$

Auf diese Weise erhalten wir mit $y_0 = 1 \cdot$ nach **Ritter** a. a. O.

$\vartheta = 60^0$	$\alpha^2 = 1 = -\varrho_0$
90^0	$\alpha^2 = \frac{1}{3} = -\varrho_0$
120^0	$\alpha^2 = \frac{1}{2} = -\varrho_0$

die in Abb. 163 dargestellten Seilkurven, die natürlich für Außendruck in Stützlinien übergehen. Ist die Krümmung nur schwach, die Seilspannung nach 6)

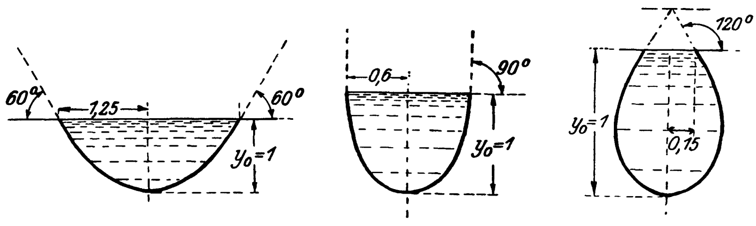

Abb. 163.

also sehr groß, so kann unter Vernachlässigung von $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \operatorname{tg}^2\vartheta$ gegen 1 an Stelle von 6a) auch

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p}{S} = \frac{\gamma y}{S} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 6\text{c})$$

geschrieben werden, woraus dann wieder die gemeine Seilkurve des 3. Beispiels als Näherungsform hervorgeht.

5. Beispiel. Wirkt außer dem Flüssigkeitsdruck p noch das Eigengewicht q_0 der Längeneinheit des Seiles, so ist

$$dX = p\,dy = -dH, \qquad dY = -p\,dx - q_0\,ds, \quad \ldots\ldots \quad 16)$$

also wegen $dX \cos\vartheta + dY \sin\vartheta + dS = 0$ und $dy \cos\vartheta - dx \sin\vartheta = 0$ in der Tangentenrichtung

$$dS = q_0 ds \sin\vartheta = q_0 dy\,. \quad \ldots\ldots \quad 16a)$$

Daraus folgt mit $p = \gamma y$, sowie mit den Scheitelwerten $y = y_0$, $S_0 = H_0$ für $\vartheta = 0$

$$\left.\begin{aligned} H &= H_0 - \frac{\gamma}{2}(y^2 - y_0^2) \\ S &= H_0 + q_0 (y - y_0) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 16b)$$

Ferner ist $H = S\cos\vartheta$, $dH = dS\cos\vartheta - S\sin\vartheta\, d\vartheta$, folglich mit $\varrho\, d\vartheta = ds$

$$\left.\begin{aligned} S &= \varrho\,(p + q_0 \cos\vartheta) = \varrho\,(\gamma y + q_0 \cos\vartheta) \\ S_0 &= H_0 = \varrho_0\,(\gamma y_0 + q_0) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 16c)$$

$$\cos\vartheta = \frac{H}{S} = \frac{H_0 - \frac{\gamma}{2}(y^2 - y_0^2)}{H_0 + q_0 (y - y_0)}, \quad \ldots\ldots \quad 16d)$$

oder mit den Abkürzungen

$$\frac{H_0}{\gamma y_0^2} = \alpha^2, \qquad \frac{q_0}{\gamma y_0} = \beta \quad \ldots\ldots \quad 17)$$

umgekehrt

$$\frac{y}{y_0} = -\beta\cos\vartheta \pm \sqrt{(1 + \beta\cos\vartheta)^2 + 4\,\alpha^2 \sin^2\frac{\vartheta}{2}}, \quad \ldots \quad 17a)$$

sowie aus 16c) und 16b)

$$\frac{\varrho}{y_0} = \frac{\alpha^2 + \beta\left(\frac{y}{y_0} - 1\right)}{\frac{y}{y_0} + \beta\cos\vartheta} \quad \ldots\ldots \quad 17b)$$

Mit Hilfe dieser Formeln kann unter Hinzuziehung der auch hier gültigen Gl. 15a) die gesuchte Seil- oder Stützkurve wie oben aus Kreisbogenstücken für bestimmte Winkelunterschiede zusammengesetzt und aufgezeichnet werden, woraus ganz ähnliche Formeln wie im letzten Beispiel bei entsprechenden Grenzbedingungen hervorgehen.

Von Sonderfällen, unter denen nach 17b) auch Kreisbogen möglich sind, sei nur derjenige angemerkt, der sich aus der Bedingung

$$\gamma y_0 + q_0 = 0, \qquad \text{d. h. } \beta = -1,$$
$$H_0 = 0, \qquad \alpha^2 = 0,$$

d. h. für den Fall des Ausgleiches des Flüssigkeitsdruckes von unten durch das Seilgewicht im Scheitel ergibt. Damit erhält man aus 17a) mit dem hierfür allein zulässigen positiven Vorzeichen der Wurzel $y = y_0$, also eine spannungslose wagerechte Gerade als Seilkurve.

X. Graphische Statik.

§ 47. Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften und Kräftepaaren. Da der Angriffspunkt einer Kraft an einem starren Gebilde in der Kraftrichtung selbst beliebig verschoben werden kann, so erfolgt die Vereinigung zweier Kräfte zweckmäßig im Schnittpunkte ihrer Richtungsgeraden zu einer Gesamtkraft nach der Vektorregel. Dieses einfache Verfahren versagt bei **Parallelkräften**, Abb. 164, kann aber mittelbar hierauf nach Hinzufügung zweier entgegengesetzt gleicher Kräfte N übertragen werden, die mit den vorgelegten Parallelkräften Q_1 und Q_2 die sich im Punkte P schneidenden Kräfte R_1 und R_2 bilden, so daß die Richtung der Gesamtkraft $R = Q_1 + Q_2$, in der die Zusatzkräfte N nicht mehr erscheinen, durch P hindurchgeht. Aus der Ähnlichkeit der in Abb. 164 gleichartig schraffierten Dreiecke folgt dann mit $AP_1 = a$, $AP_2 = b$, $AP = c$

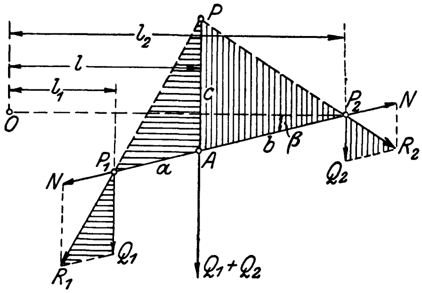

Abb. 164.

$$\frac{Q_1}{N} = \frac{c}{a}, \qquad \frac{Q_2}{N} = \frac{c}{b},$$

oder

$$Q_1 a = Q_2 b. \qquad \qquad 1)$$

Bezeichnen wir weiter die Lote von irgendeinem Punkte O der Kraftebene auf die Kräfte Q_1 und Q_2 und die Gesamtkraft $R = Q_1 + Q_2$ mit l_1, l_2 und l, so ist der Neigungswinkel β der Linie P_1P_2 gegen diese Lote bestimmt durch

$$a \cos\beta = l - l_1, \qquad b \cos\beta = l_2 - l,$$

womit 1) unter Wegfall von $\cos\beta$ übergeht in

$$Q_1(l - l_1) = Q_2(l_2 - l),$$

oder

$$Q_1 l_1 + Q_2 l_2 = (Q_1 + Q_2) l = R l \qquad \qquad 1\text{a})$$

in Übereinstimmung mit dem früher abgeleiteteu **Hebelgesetz**. Sind die Parallelkräfte entgegengesetzt gleich, bilden also ein Kräftepaar, so erhält man auch nach Hinzufügung beliebiger Zusatzkräfte N keinen Schnittpunkt, da wegen $Q_1 + Q_2 = 0$ in 1a) mit verschwindender Gesamtkraft R deren Richtungslinie ins Unendliche rückt. **Ein Kräftepaar läßt sich also nicht zu einer Gesamtkraft vereinigen.**

Die Zerlegung einer vorgelegten Kraft in zwei parallele Teilkräfte nach der Vektorregel ist unendlich vieldeutig und wird erst bestimmt nach **Angabe der Einzelrichtungen oder zweier Punkte auf den Richtungsgeraden**. Verbinden wir alsdann die beiden Punkte P_1 und P_2 mit irgendeinem Punkte P auf

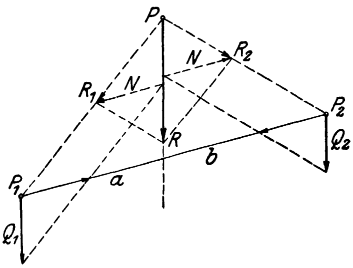

Abb. 165.

der vorgelegten Kraft, Abb. 165, und zerlegen sie dort nach den Richtungen PP_1 und PP_2, so sind R_1 und R_2 die durch diese Punkte hindurchgehenden Teilkräfte, die indessen noch die entgegengesetzt gleichen, wegen der beliebigen Lage von P noch willkürlichen Bestandteile N parallel P_1P_2 enthalten. Da diese sich aber aufheben, so bleiben nurmehr die beiden Einzelkräfte Q_1 und Q_2 übrig, welche durch die Beziehung 1), sowie durch $Q_1 + Q_2 = R$ miteinander derart verknüpft sind, daß

$$Q_1 = \frac{R \cdot b}{a + b}, \qquad Q_2 = \frac{R \cdot a}{a + b} \quad \ldots \ldots \quad 1\text{b})$$

ist. Zeichnerisch ergeben sich beide Teilkräfte in Abb. 165 durch Ziehen von Parallelen zu PP_1 und PP_2, durch den Schnitt der Richtungslinie der vorgelegten Kraft R mit den Parallelen zu P_1P_2 durch R_1 und R_2, die dann auf den Parallelen zu R durch P_1 und P_2 die gesuchten Kräfte Q_1 und Q_2 abschneiden. Noch einfacher gelangt man zum Ziele durch die in Abb. 166 dargestellte Konstruktion mit Hilfe eines Parallelogramms aus $P_1P_2 = a + b$ und der vorgelegten Kraft R. Dann sind die Abschnitte der Diagonalen auf der Kraft R schon die gesuchten Einzelkräfte Q_1 und Q_2, wie sich aus der Ähnlichkeit der zugehörigen Dreiecke ergibt. Damit ist zugleich die Aufgabe der Verteilung einer Kraft auf zwei Punkte einer Strecke gelöst, von dem man in der Theorie der Fachwerke zum Zwecke der Gewichtsverteilung auf die Knoten vielfach Gebrauch macht.

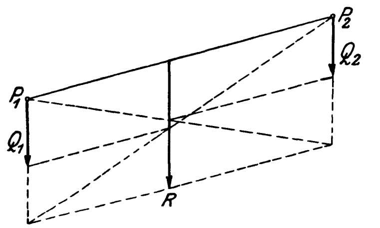

Abb. 166.

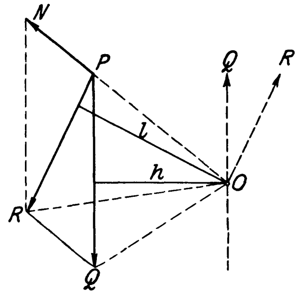

Abb. 167.

Vereinigen wir eine vorgelegte Kraft Q mit einer beliebigen Kraft N und fällen von einem Punkte O auf der Richtungslinie der letzteren die Lote h und l auf Q und die Gesamtkraft R aus Q und N, Abb. 167, so folgt aus der Parallelität der Geraden QR zu N die Flächengleichheit der Dreiecke $OPQ = OPR$, also

$$Qh = Rl, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 2)$$

d. h. die Gleichheit der Momente von Q und R in bezug auf O. Wenden wir dieses Verfahren auf ein Kräftepaar an, indem wir den Punkt O z. B. auf die Richtungslinie einer der Einzelkräfte des Paares legen und dort, wie auch im beliebigen Punkte P der andern Kraftrichtung die entgegengesetzt gleichen Zusatzkräfte anbringen, so gilt die Gl. 2) ohne weiteres auch für die beiden Kräftepaare Qh und Rl. Danach kann ein Kräftepaar beliebig in seiner Ebene verschoben und verdreht werden, wenn nur das Moment keine Änderung erfährt.

Sollen die Einzelkräfte eines Paares durch zwei gegebene Punkte P_1P_2 hindurchgehen, so wendet man zweckmäßig die in Abb. 166 dargestellte Konstruktion zur Verteilung jeder Teilkraft des Paares an.

Sind ferner zwei Kräfte Q_1 und Q_2 in Abb. 168 zu einer Gesamtkraft R vereinigt, so sind die Momente in bezug auf einen Pol O mit den Loten l_1, l_2 und l auf die Kräfte gleich den doppelten Dreiecksflächen OPQ_1, OPQ_2 und OPR. Diese haben aber die Strecke $\overline{OP} = P$ gemein, so daß mit den Loten h_1, h_2 und h von Q_1, Q_2, R auf OP: $Q_1 l_1 = P h_1$, $Q_2 l_2 = P h_2$, $R l = P h$ und wegen $h_1 + h_2 = h$ schließlich

$$Q_1 l_1 + Q_2 l_2 = R \cdot l, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

d. h. die Summe der Momente beliebig gerichteter Kräfte ergibt das Moment der Gesamtkraft. Gehen nun durch O zu Q_1, Q_2 und R entgegengesetzt gleiche Kräfte, die mit den ersteren zusammen drei Kräftepaare bilden, so ist dieser Satz auch unmittelbar auf diese übertragbar, d. h. zwei Kräftepaare in einer Ebene setzen sich zu einem einzigen Kräftepaar zusammen, dessen Moment die Summe der Momente der Einzelpaare darstellt.

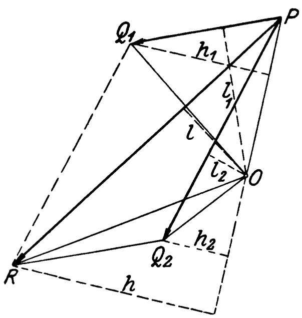

Abb. 168.

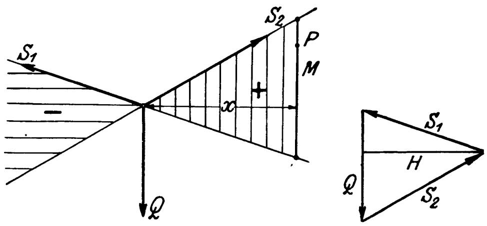

Abb. 169.

Das Moment einer Kraft wird hiernach ganz allgemein durch die Fläche des Kraftvektors mit dem Lot vom Pol auf demselben dargestellt. Denken wir uns die Kraft Q in Abb. 169 durch zwei gegen sie geneigte Kräfte $S_1 S_2$ aufgehoben, so bilden diese mit ihr ein geschlossenes Kraftdreieck mit der Höhe H auf Q, die selbst eine Kraft darstellt. Die Richtungslinien der beiden Teilkräfte S_1 und S_2 schließen nun einen Winkelraum mit der Spitze auf Q ein, der mit einer Parallelen zu Q im Abstande x von der Spitze ein Dreieck begrenzt, welches dem Kräftedreieck ähnlich ist. Mithin besteht für die zwischen den Kraftrichtungen liegende Strecke M der Parallelen die Beziehung

$$M = \frac{Q x}{H}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

so daß also M dem Moment der Kraft Q in bezug auf jeden Punkt P auf der Parallelen verhältnisgleich ist. Man bezeichnet daher den in Abb. 169 schraffierten Winkelraum als die Momentenfläche der Kraft Q, deren beide Hälften entsprechend dem Drehsinn des durch sie bestimmten Momentes verschiedene Vorzeichen und verschiedene Schraffur aufweisen. Sind zwei Kräfte Q_1 und Q_2 vorgelegt, Abb. 170, so gehört jede einer Momentenfläche zu, die sich nach

Abb. 170 unter Zuhilfenahme eines Kraftecks vereinigen lassen. Dadurch entsteht unter Aufhebung des zwischen den Linien $S_1 S_2 S_3$ eingeschlossenen doppelt schraffierten Dreiecks durch entgegengesetzte Vorzeichen ein neuer einfach schraffierter Winkelraum als Momentenfläche der Gesamtkraft R, die durch dessen Spitze und den Schnitt P der beiden Kräfte Q_1 und Q_2 hindurchgeht. Das gilt auch ohne weiteres für **Parallelkräfte**, deren Gesamtkraft $Q_1 + Q_2$ alsdann auch in ihrer Richtung und durch die Spitze des Winkelraums in ihrer Lage völlig bestimmt

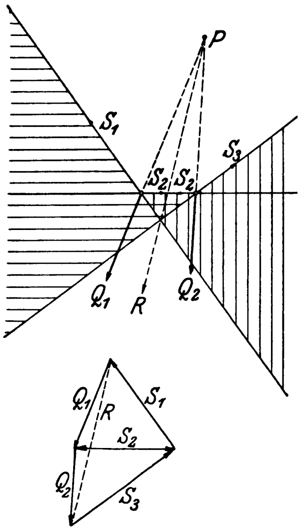

Abb. 170.

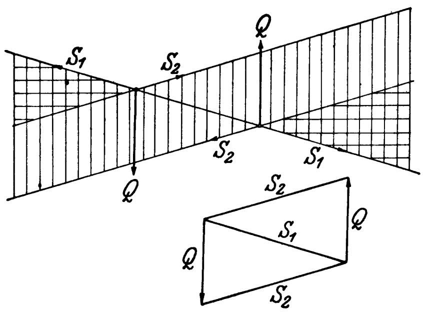

Abb. 171.

ist. Liegt ein **Kräftepaar** vor, so nimmt das in Abb. 171 dargestellte Krafteck die Gestalt eines Parallelogramms an, und die beiden Winkelräume der Einzelkräfte überschneiden sich derart, daß vermöge der verschiedenen durch die Schraffur ausgedrückten Vorzeichen nur noch ein **Parallelstreifen** übrig bleibt, der ein in der **ganzen Ebene unveränderliches Moment**, nämlich das des Kräftepaares, darstellt.

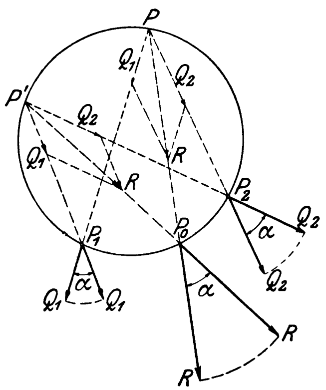

Abb. 172.

Sind schließlich die Angriffspunkte P_1 und P_2 zweier Kräfte Q_1 und Q_2 gegeben, so kann man durch diese und ihren Schnittpunkt P einen Kreis zeichnen, der die Gesamtkraft R im Punkte P_0 trifft, Abb. 172. Drehen wir nun beide Kräfte an ihren Angriffspunkten um denselben Winkel α, so wandert ihr Schnittpunkt von P nach P' auf dem Kreise, auf dem $\sphericalangle P_1 P P_2 = \sphericalangle P_1 P' P_2$ Peripheriewinkel über demselben Bogen darstellen. Aus demselben Grunde ist aber auch $\sphericalangle P_1 P P_0 = \sphericalangle P_1 P' P_0$, d. h. **die Gesamtkraft R geht auch nach der Drehung der Einzelkräfte durch denselben Punkt P_0 und erfährt dieselbe Drehung wie diese.** Den Punkt P_0 bezeichnet man wohl als den **astatischen Mittelpunkt** der beiden Kräfte.

Im Falle paralleler Kräfte Q_1 und Q_2 rücken die Punkte P und P' ins Unendliche, so daß der Kreis in eine Gerade $P_1 P_2$ übergeht, auf der dann der astatische Punkt P_0 liegt.

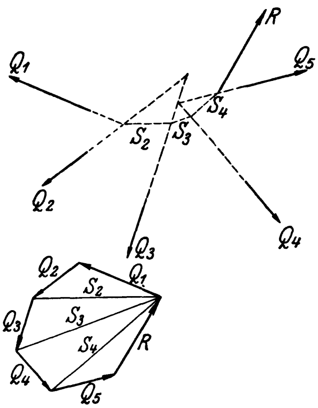

Abb. 173.

§ 48. Das Krafteck und Seileck. Sind mehr als zwei Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten und Richtungen gegeben, so kann man zunächst zwei derselben nach der Dreiecksregel an ihrem Schnittpunkt vereinigen, dann die vereinigte Kraft mit der dritten vorgelegten in derselben Weise zusammensetzen und so fortfahren, bis alle Kräfte auf eine Gesamtkraft R zurückgeführt sind. Die Vereinigung der Kräfte erfolgt zweckmäßig in einem daneben gezeichneten Krafteck, Abb. 173, in dem $S_2, S_3 \ldots$ die nacheinander zuammengesetzten Kräfte nach Größe und Richtung darstellen, denen dann im vorgelegten Kräftebild Gerade zwischen den Kraftrichtungen entsprechen. Diese können, da immer zwei der S mit einer Kraft Q, z. B. S_2 und S_3 mit Q_3 im Gleichgewicht stehen, als durch die Kräfte S gespannte gewichtslose Seile und darum ihre Schnittpunkte mit den Kraftrichtungen als Knoten derart aufgefaßt werden, daß sie mit den Richtungen der ersten Kraft Q und der Gesamtkraft R ein alsdann im Gleichgewicht befindliches Seileck bilden. Das dazu gehörige Krafteck unterscheidet sich nicht von einem solchen für Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt und deutet nur an, daß jede Einzelkraft Q mit allen übrigen und der Gesamtkraft R für sich, d. h. ohne Rücksicht auf die in ihm durch sog. Seilstrahlen dargestellten Seilkräfte S im Gleichgewicht ist.

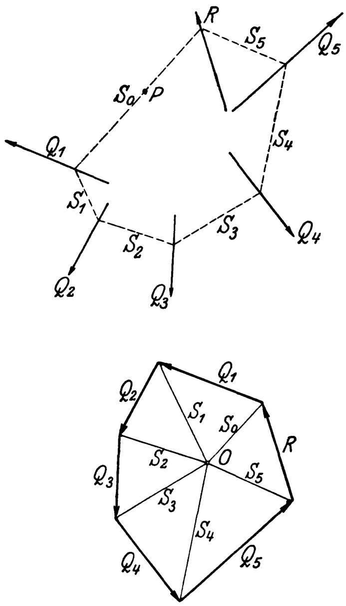

Abb. 174.

Da dieses Verfahren für Parallelkräfte versagt, so schlug Culmann vor, die aus dem Krafteck hervorgehende Gesamtkraft R durch zwei Seilkräfte zu ersetzen, die mit ihr ein Kräftedreieck bilden, im übrigen aber willkürlich sind. Dies wird erreicht durch willkürliche Wahl eines Punktes O im Krafteck, des sog. Kräftepols, der mit dessen Ecken durch gerade Seilstrahlen verbunden wird, welche nach dem Vorstehenden sämtlich Seilkräfte S darstellen. Zieht man nun von einem beliebigen Punkt P, Abb. 174, des vorgelegten Kräfteplans ausgehend zu den Seilstrahlen S Parallele zwischen je zwei zugehörigen Kräften, so erhält man ein Seileck, dessen beide Schlußlinien den Ersatzkräften S_0 und S_5 der Gesamtkraft R parallel laufen und sich in einem Punkt der Richtungslinie derselben schneiden. Man hat also nur erst diese Gesamtkraft, deren Größe und Richtung durch das Krafteck gegeben ist, durch diesen Schnitt hindurchzulegen, um mit der Gesamtgegenkraft das Gleichgewicht des ganzen nunmehr geschlossenen Seilecks herzustellen.

Es kann aber auch der in Abb. 175 dargestellte Fall eintreten, daß die vorgelegte Kräftegruppe mit geschlossenem Krafteck keine Gesamtkraft besitzt, ohne daß sich alle Kräfte in einem Punkt aufheben. Dann ist auch das Seileck nicht geschlossen, sondern hat zwei parallele Schlußlinien nach einem unendlich fernen Punkt, welchem zwei entgegengesetzte gleiche Seilspannungen $\pm S_0$, deren Betrag dem Krafteck zu entnehmen ist, entsprechen. Diese bilden ein Kräftepaar, dessen Hebelarm h durch den Abstand der parallelen Seile gegeben ist. Damit ist auch das Moment $S_0 \cdot h$ des Kräftepaares bestimmt, dessen Momentenfläche durch die beiden parallelen Seilspannungen begrenzt wird.

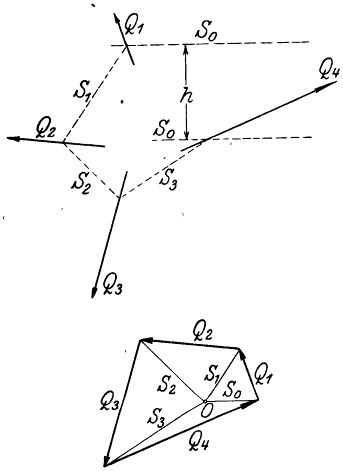

Abb. 175.

Drehen wir alle Kräfte einer vorgelegten Gruppe mit festgehaltenen Angriffspunkten auf ihren Richtungslinien um denselben Winkel, so dreht sich nach dem Satz am Schlusse des letzten Abschnittes auch die Gesamtkraft von je zweien um einen festen Punkt in der gleichen Weise ohne Änderung ihres Betrages. Diese Gesamtkraft können wir mit einer dritten der vorgelegten Kräfte vereinigen und erhalten so die Drehung der Gesamtkraft aus drei Kräften um einen festen Punkt usw. Daraus folgt also, daß auch die Gesamtkraft aller vorgelegten Kräfte bei gleicher Drehung um ihre festen Angriffspunkte eine ebenso große Drehung um einen festen Punkt der Ebene, den Mittelpunkt der Kräfte, erfährt, ohne daß ihr Betrag sich ändert. Das letztere kann auch unmittelbar aus dem Krafteck gefolgert werden, das hierbei ohne Änderung seiner Gestalt sich als Ganzes an der Drehung beteiligt. Der Mittelpunkt der Kräfte wird leicht als Schnitt der Gesamtkräfte in zwei beliebigen Lagen der Gruppe, denen auch in der Gestalt verschiedene Seilecke zugehören, gefunden. Tritt wie in Abb. 175 an Stelle der verschwindenden Gesamtkraft ein Kräftepaar als Ergebnis der Vereinigung aller Kräfte, so fassen wir zunächst alle diese bis auf eine zusammen und erhalten so eine der übriggebliebenen entgegengesetzt gleiche Gesamtkraft. Diese dreht sich alsdann ohne Änderung ihres Betrages ebenso um einen festen Punkt wie die übriggebliebene Einzelkraft, die mit ihr ein Kräftepaar bildet. Dadurch wird aber dessen Hebelarm, also auch sein Moment geändert und kann sogar verschwinden, wenn beide Kraftrichtungen in die Verbindungslinie der Drehpunkte fallen, womit das Seileck sich schließt. Daraus folgt umgekehrt, daß durch die Drehung aller Einzelkräfte und der Gesamtkraft einer Kräftegruppe um beliebig gewählte Festpunkte ihrer Richtungsgeraden ein Kräftepaar geweckt wird.

Die Gestalt des nach dem Culmannschen Verfahren gezeichneten Seilecks ist nun offenbar bedingt durch die willkürliche Lage des Poles O im Krafteck. Verlegen wir den Pol von O nach O', so erhalten wir ein neues Krafteck, in dem die Verbindungsgerade $O\,O'$ selbst als eine neue Kraft aufgefaßt werden kann, die immer mit zwei entsprechenden Seilkräften S und S' ein Dreieck bildet, also mit ihnen im Gleichgewicht steht. Beschränken wir uns in Abb. 176 zunächst auf die Einzelkraft Q, so entsprechen sich in den beiden zugehörigen Kraftecken mit den Polen O und O' die Seilkräfte $S_1 S_1'$ und $S_2 S_2'$, die sich im Seileck in den Punkten A_0 und E_0 schneiden. Wir ziehen nun im Krafteck $ABO'O$, dessen Diagonalen sich in C schneiden, die Geraden $OD \,||\, AB = Q$ und $DE \,||\, O'B = S_2'$. Dann ist $\triangle BCO' \sim ECD$ und $\triangle ACB \sim DCO$, also

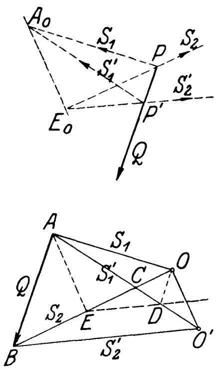

Abb. 176.

$$\frac{CE}{CB} = \frac{CD}{CO'} \quad \text{und} \quad \frac{CB}{CO} = \frac{CA}{CD},$$

also nach Multiplikation beider Verhältnisse miteinander:

$$\frac{CE}{CO} = \frac{CA}{CO'}, \quad \text{d. h.} \quad AE \,||\, OO'.$$

Da nun die Geraden OE, DE, AO, AD im Krafteck den Geraden PE_0, $P'E_0$, A_0P, A_0P' parallel sind, so ist auch

$$A_0E_0 \,||\, AE \,||\, O\,O'.$$

Es schneiden sich also die entsprechenden Seiten zweier Seilecke auf einer zur Polverbindung OO' parallelen Geraden. Da dies für je zwei aufeinanderfolgende Seitenpaare gilt, so muß es auch für alle entsprechenden Seiten der beiden Seilecke mit beliebig vielen Kräften zutreffen. Man bezeichnet alsdann den geometrischen Ort aller dieser Schnittpunkte als die Polarachse und benutzt dieselbe zur Zeichnung des Seilecks durch vorgelegte Punkte.

Sind z. B. die Punkte A_1 und B des Seilecks für die Kräftegruppe Q_1, Q_2, Q_3 gegeben, Abb. 177, so zeichne man mit Hilfe des Kraftecks nach willkürlicher Wahl des Poles O ausgehend von A_1 das Seileck $S_1 S_2 S_3 S_4$ parallel den entsprechenden Linien im Krafteck. Dann ziehe man willkürlich die Polarachse $A_1 A$ und verlängere die Seilstücke bis zu ihren Schnitten $A_2 A_3 A_4$ mit derselben. Die Verbindung von B mit A_3 liefert alsdann sofort das durch den gesuchten Punkt B hindurchgehende Seilstück S_3', an das sich mit Benutzung der Schnitte A_2 und A_4 die übrigen S_1', S_2', S_4' ungezwungen anschließen. Im Krafteck ergibt der Schnitt der Parallelen zu $A_1 A_4$ durch O mit irgendeiner Parallelen S' den diesem entsprechenden Pol O'.

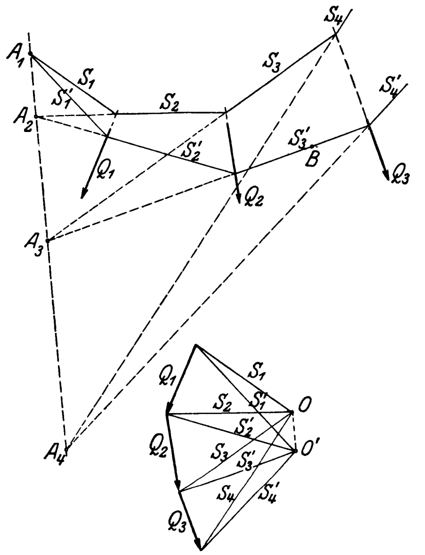

Abb. 177.

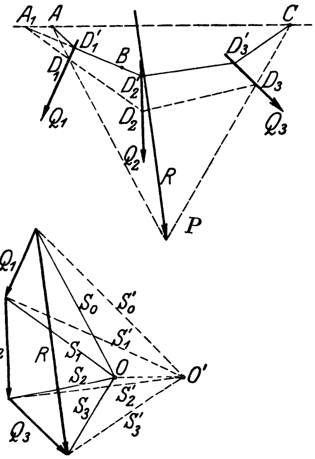

Abb. 178.

Man übersieht, daß bei anderer Wahl der Polarachse auch ein anderes Seileck durch die vorgelegten Punkte A und B sich ergeben würde, so daß diese Aufgabe unendlich viele Lösungen besitzt. Sie wird indessen eindeutig durch Vorschrift eines dritten Punktes C. Wir denken uns zunächst etwa mit Hilfe eines beliebigen Kraft- und Seilecks die Richtungslinie der Gesamtkraft R aller vorgelegten Kräfte ermittelt und in die Kräftegruppe eingetragen, Abb. 178. Einen Punkt P auf der Richtungslinie von R verbinden wir mit A und C, erhalten durch Parallele $S_0 S_3$ hierzu im Krafteck den zugehörigen Pol O und die übrigen Seiten des entsprechenden Seilecks $A D_1 D_2 D_3 C$. Soll das gesuchte Seileck noch durch B hindurchgehen, so wählen wir AC als Polarachse und verlängern die Seiten des Seilecks $A D_1 D_2 D_3 C$ bis zu den Schnitten $A_1 A_2 A_3$ mit AC, durch welche auch die Seiten des gesuchten Seilecks $A D_1' D_2' D_3' C$ hindurchgehen. Man braucht also in Abb. 178 nur B mit A_1 zu verbinden, um die Seite $D_1' D_2'$ des gesuchten Seilecks zu erhalten, an die sich die andern in den Schnittpunkten mit den Richtungslinien der vorgelegten Kräfte anschließen. Sie sind den Seilkräften des Kraftecks mit dem Pol O' parallel, der als Schnitt von $OO' \,||\, AC$ mit $S_1' \,||\, D_1' D_2'$ bestimmt ist. Die Parallelität der einzelnen Seilstücke mit den nicht benutzten Seilkräften im Krafteck dient zur Prüfung der Genauigkeit der Zeichnung.

Als Beispiel betrachten wir drei Kräfte $Q_1 Q_2 Q_3$, die miteinander ein Dreieck, Abb. 179, derart bilden, daß ihre Beträge den Dreiecksseiten selbst verhältnisgleich, ihre Richtungen aber durch den Umfahrungssinn des Dreiecks gegeben sind. Der Kräfteplan kann sofort alsdann als Krafteck ohne Gesamtkraft angesehen werden. Wählen wir einen Pol O mit den Seilkräften $S_0 S_1 S_2$ nach den Ecken, so ergibt sich durch Parallelziehen von einem willkürlichen Ausgangspunkt D_1 aus das Seileck $D_1 D_2 D_3$ mit zwei entgegengesetzt gleichen parallelen Schlußkräften S_0 im Abstand h, die ein Kräftepaar mit dem Moment $S_0 h$ bilden, welches die ursprüngliche Kräftegruppe vollständig ersetzt. Natürlich kann man auch zwei Kräfte, z. B. Q_1 und Q_2, in ihrem Schnitte vereinigen und erhält dann eine mit Q_3 entgegensetzt gleiche Kraft durch die Spitze des Dreiecks, womit das Kräftepaar und sein Moment ebenfalls gegeben sind.

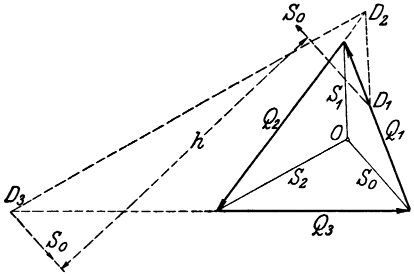

Abb. 179.

Drehen wir nun alle Kräfte $Q_1 Q_2 Q_3$ um die als feste Angriffspunkte gedachten Ecken $A_1 A_2 A_3$ um denselben Winkel φ, Abb. 180, so schließen ihre neuen Richtungsgeraden ein kleineres Dreieck $B_1 B_2 B_3 \sim A_1 A_2 A_3$ derart ein, daß dessen Außenwinkel $\beta_1 = 180^0 - \alpha_1, \beta_2 = 180^0 - \alpha_2, \beta_3 = 180^0 - \alpha_3$ sind. Diese Außenwinkel sind aber in den Umkreisen $A_1 B_1 A_3$, $A_1 B_2 A_2$, $A_2 B_3 A_3$ enthalten, die sich wegen $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 360^0$ in einem Punkte schneiden. Dieser nach seinem Entdecker genannte Brocardsche Punkt ist demnach der Mittelpunkt unserer Kräftegruppe, an dem sie also unter Verschwinden des Kräftepaares mit der eingeschlossenen Dreiecksfläche $B_1 B_2 B_3$ im Gleichgewicht steht.

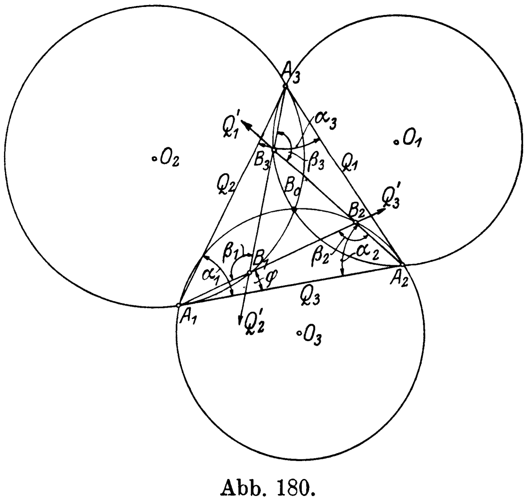

Abb. 180.

Bilden die Kräfte ein beliebiges geschlossenes Vieleck, so ergibt sich ebenfalls ein Kräftepaar, und die gleiche Drehung aller um die Eckpunkte liefert stets ein dem vorgelegten Kräftevieleck ähnliches, das im Grenzfalle zum Mittelpunkt der Kräfte zusammenschrumpft. Das alsdann verschwindende Kräftepaar ist stets verhältnisgleich einer Abmessung des eingeschlossenen Vielecks, die sich mit der Wurzel aus der Fläche ändert.

§ 49. **Parallelkräfte und stetige Belastung.** Die vorstehenden Ausführungen vereinfachen sich außerordentlich in dem praktisch wichtigsten Falle von Parallelkräften, die sich im Krafteck zu einer Geraden aneinanderreihen. Die von einem beliebigen Pol O, Abb. 181, nach den Endpunkten der Kraftvektoren, die den Ecken des früheren Kraftecks entsprechen, gezogenen Seilstrahlen S haben senkrecht zur gemeinsamen Richtung der äußeren Kräfte alle denselben Anteil H, den wir als die Seitenkraft bezeichnen. Diese Seitenkraft hat demnach an allen Stellen des wie früher durch Parallele zu den Seilstrahlen zwischen den Richtungslinien der Einzelkräfte im Kräfteplan gezeichneten Seilecks denselben Wert. Halten wir auf dem Anfangs- und Endseil des Seilecks zwei Aufhängepunkte A und B fest, so stellt deren Verbindungsgerade die Schlußlinie des Seilecks dar, der im Krafteck ein paralleler Seilstrahl S entspricht, welcher die Gesamtkraft in zwei der vorgelegten Kraftrichtung parallele Auflagekräfte V_1 und V_2 zerlegt. Diese stehen offenbar an den Aufhängepunkten mit den Spannungen im Endseil und in der Schlußlinie im Gleichgewicht, wie ein Blick auf das Krafteck lehrt. Die Gesamtkraft $R = \Sigma Q$ ist außerdem im Gleichgewicht mit den Endspannungen S_0 und S_3 und geht darum im Kräfteplan durch den Schnittpunkt der entsprechenden Seile. Verlegt man den Pol im Krafteck auf die andere Seite der Kräfte, so kehrt sich mit H auch das Vorzeichen aller Seilkräfte um, und wir erhalten an Stelle des hängenden Seilecks ein über der Schlußlinie verlaufendes Stützeck, dessen Behandlung sich aber, wie wir in § 45 schon rechnerisch festgestellt haben, nicht von der des Seilecks unterscheidet.

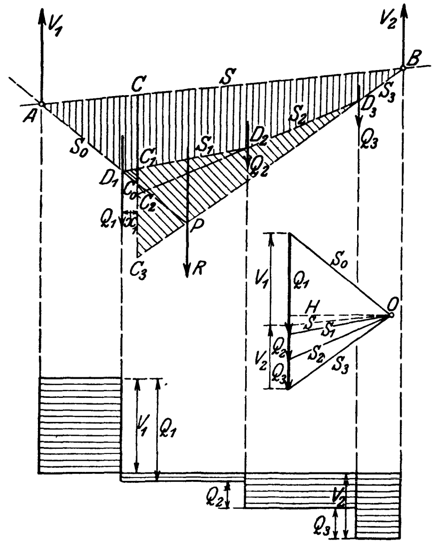
Abb. 181.

Ferner stellt nach § 47 der Winkelraum zwischen zwei Seilspannungen die Momentenfläche der mit ihnen im Gleichgewichte befindlichen, durch die Spitze hindurchgehenden Kraft derart dar, daß das von den Schenkeln auf einer Parallelen im Abstand l zu dieser Kraft abgeschnittene Stück mit Rücksicht auf das Krafteck dem Moment

$$M = \frac{Ql}{H} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 1)$$

verhältnisgleich ist. Beachtet man dann noch die Gleichheit des mit der Seitenkraft H übereinstimmenden Nenners für alle Punkte des Seilecks, so können im Falle paralleler Kräfte diese Abschnitte für mehrere Kräfte einfach algebraisch addiert werden, daß also in Abb. 181 die Strecke $C C_0$ dem Moment M_0 der Auflagerkraft V_1, $C_1 C_0$ dem Moment M_1 der Kraft Q_1, also

$$M = M_0 - M_1 = C C_1$$

dem Gesamtmomente von Q und V für alle Punkte auf der Geraden $C C_0$ entspricht. Mithin ist die ganze vom Seileck und seiner Schlußlinie umgrenzte, in Abb. 181 senkrecht schraffierte Fläche, als Momentenfläche des vorgelegten Kräfteplanes anzusprechen und ergibt ohne weiteres durch die von ihr abgeschnittenen Stücke der Parallelen zur Kraftrichtung die Werte des Momentes für alle auf diesen Parallelen liegenden Punkte.

Die Dreiecksfläche $D_1 C_1 C_0$ zwischen der Seillinie $D_1 D_2$ und der Endlinie AP ist nun mit dem Abstand x_1 der Geraden $C_1 C_0$ von Q_1

$$F_1 = \frac{M_1 x_1}{2} = \frac{Q_1 x_1^2}{2H}, \quad \text{2)}$$

also einem Moment zweiter Ordnung $Q_1 x_1^2$ verhältnisgleich, dem wir als Trägheitsmoment oder Schwungwert später noch begegnen werden. Wichtig ist, daß dieser Ausdruck mit wechselndem Vorzeichen von x stets positiv bleibt. Bezeichnen wir also die Abstände der Geraden $C_1 C_0$ von Q_2 und Q_3 mit x_2, und x_3, so sind

$$F_2 = \frac{Q_2 x_2^2}{2H}, \quad F_3 = \frac{Q_3 x_3^2}{2H} \quad \text{2a)}$$

den Dreiecksflächen $C_1 C_2 D_2$ bzw. $C_2 C_3 D_3$ verhältnisgleich, so daß die Summe

$$F = \frac{\Sigma Q x^2}{2H} \quad \text{2b)}$$

durch die in Abb. 181 unter dem Seileck schräg schraffierte Fläche gemessen werden kann. Wir bezeichnen die Summe $\Sigma Q x^2$ als den Schwungwert der Kräftegruppe in bezug auf die Achse $C_1 C_3$ und bemerken noch, daß dieser in bezug auf die Richtungslinie der Gesamtkraft R einen Kleinstwert infolge des wegfallenden Zipfels $C_0 C_3 P$ erreicht.

Nun wird das Moment an irgendeiner Stelle erst geweckt durch die Parallelverschiebung aller auf einer Seite wirkenden Kräfte nach dieser Stelle, wo sich die verschobenen Kräfte alsdann zu einer Querkraft T algebraisch zusammensetzen. Zu diesen äußeren Kräften gehören aber der Gleichgewichtsbedingung wegen auch die Auflagerkräfte V_1 und V_2. Mithin ist V_1 selbst die Querkraft links von Q_1, von da bis Q_2 aber $V_1 - Q_1$, zwischen Q_1 und Q_2 ferner $V_1 - Q_1 - Q_2$ usw. Tragen wir diese Querkräfte über einer Senkrechten zur Kraftrichtung auf, so erhalten wir den im unteren Teile von Abb. 181 verzeichneten unstetigen Linienzug, der an der Stelle des Höchstwertes des Momentes durch die Nullage hindurchgeht.

Das vorstehend gekennzeichnete Verfahren ist auch anwendbar auf stetig verteilte Lasten, die dann zweckmäßig durch eine Belastungskurve ersetzt werden. Diese können wir uns durch eine große Zahl von Parallelen zur Kraftrichtung auf gleichen Abständen in beliebig viele kleine Streifen zerlegt denken, deren mittlere Ordinaten mit großer Annäherung die Einzellasten darstellen und wie oben im Krafteck vereinigt werden. Nach Wahl des zugehörigen Poles ergeben sich alsdann die Seilstrahlen des Kraftecks, denen ebensoviele Seiten des Seilecks entsprechen, welche die der stetigen Belastung entsprechende Seilkurve einhüllt, wie man sofort durch Verdoppelung der Seitenzahl und der zugehörigen Seilstrahlen in Abb. 182 erkennt. Auch der darunter gezeichnete Verlauf der Querkräfte bildet eine stetige Kurve, die sich angenähert durch den für kleine Einzellasten treppenförmigen Linienzug hindurchlegen läßt. Der Schwerpunkt der Belastungsfläche liegt naturgemäß auf der Richtungslinie der Gesamtkraft R, deren Lage durch den Schnitt der Endtangenten der Seilkurve, die den beiden äußersten Seilstrahlen im Krafteck parallel laufen, gegeben ist. Damit ist auch das statische Moment der Belastungsfläche, die wir uns auch als gleichförmig mit Masse belegte Scheibe vom Gewicht R denken können, für jeden Punkt ihrer Ebene durch seinen Abstand x von R zu $R\,x$ bestimmt, während der Schwungwert in bezug auf die Schwerlinie R wieder als Fläche zwischen der Seilkurve und ihren Endtangenten erscheint.

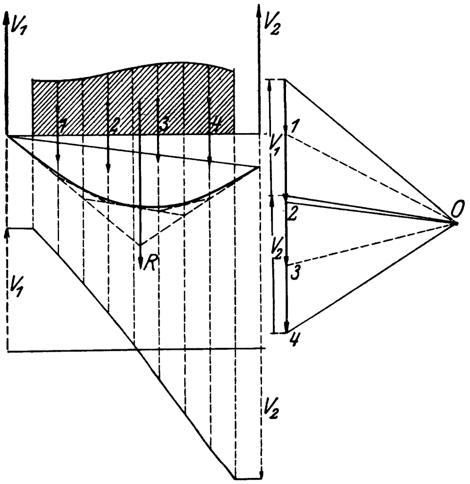

Abb. 182.

Die in dem vorstehenden von Mohr ausgebildeten Verfahren notwendige Benutzung des Kraft- und Seilecks kann bei der Ermittlung der statischen und höheren Momente nach Nehls dadurch vermieden werden, daß man im Abstande h von der Bezugsachse XX eine zweite Achse X_1X_1 zeichnet, die Endpunkte AB eines Parallelstreifens der zu untersuchenden in Abb. 183 schraffierten Fläche im Abstand y von XX darauf projiziert und durch die Risse A_1B_1 von einem willkürlichen Pole O der Bezugsachse die Strahlen OA_1 und OB_1 bis zu ihren Schnitten $A'B'$ mit der Geraden AB fortsetzt. Dann ist wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke $\triangle OA_1B_1 \sim OA'B'$ mit $A'B' = b'$, $AB = b$

$$\frac{b'}{y} = \frac{A'B'}{y} = \frac{A_1B_1}{h} = \frac{AB}{h} = \frac{b}{h},$$

oder nach Erweiterung mit der Streifenbreite dy und $b\,dy = dF$, $b'dy = dF_1$

$$F_1 = \int b'dy = \frac{1}{h}\int b\,y\,dy = \frac{1}{h}\int y \cdot dF, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 3)$$

d. h. das statische Moment wird durch die Fläche dargestellt, auf deren Umfang die so zeichnerisch ermittelten Punkte $A'B'$ liegen, es kann demgemäß auch durch Planimetrieren dieser Fläche ermittelt werden. Wendet man dasselbe Verfahren auf die Umfangs-

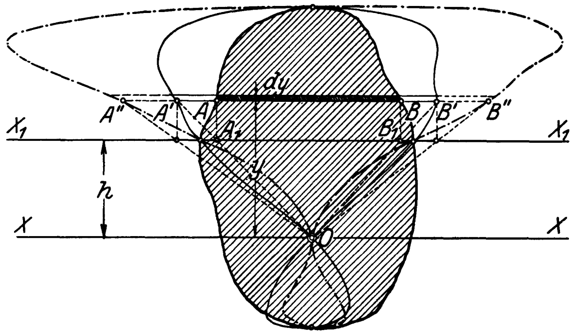

Abb. 183.

kurve mit den Punkten $A'B'$ an, so gewinnt man einen Streifen von der Breite $A''B'' = b''$, deren Endpunkte auf dem Umfang einer weiteren Fläche F_2 liegen, so zwar, daß mit $dF_2 = b''\,dy$ und $\frac{b''}{y} = \frac{b'}{h} = \frac{by}{h^2}$

$$F_2 = \int b''dy = \frac{1}{h^2}\int by^2\,dy = \frac{1}{h^2}\int y^2 dF \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 3\,a)$$

den Schwungwert von F in bezug auf die Achse XX angibt und durch Planimetrieren von F_2 erhalten werden kann.

§ 50. Der Kräfteplan des ebenen Fachwerkes. In einem Fachwerk besteht Gleichgewicht zwischen den an jedem Knoten zusammenlaufenden Stabkräften und der dort angreifenden Außenkraft, die sich mithin alle zu einem Krafteck vereinigen lassen. Da ferner ein statisch bestimmtes einfaches Fachwerk, welches sich aus Stabdreiecken aufbaut, wenigstens einen Knoten erster Ordnung, in dem also nur zwei Stäbe sich treffen, enthält, so wird für diesen das Krafteck zu einem Dreieck aus der äußeren Kraft und den beiden durch den Fachwerksplan gegebenen Richtungslinien der Stabkräfte. Diese sind damit auch ihrer Größe nach festgelegt und ermöglichen im Verein mit den äußeren Kräften an den benachbarten Knoten die Ermittlung der dort zusammenlaufenden anderen Stabkräfte. Auf diese Weise erhält man fortschreitend ebenso viele Kraftecke wie Knoten, in denen die gemeinsamen Stabkräfte mehrfach auftreten. Es fragt sich nun, ob man nicht dieses zwar nicht schwierige, aber doch recht umständliche Verfahren durch Vereinigung der einzelnen Kraftecke mit Hilfe der ihnen gemeinsamen Stabkräfte zu einem einzigen Bild wesentlich vereinfachen und damit das mehrfache Auftreten derselben vermeiden kann. Das muß in der Tat möglich sein im Anschluß an das in sich geschlossene Krafteck der Außenkräfte, die in der Reihenfolge ihrer Angriffspunkte längs der Gurtung zunächst aufgetragen werden, Abb. 184. Da jeder Gurtstab zwei dieser Angriffspunkte verbindet, so wird man den Gleichgewichtsbedingungen an diesen gerecht durch Eintragen der zugehörigen Stabkraft vom Schnittpunkt der beiden Außenkräfte im Krafteck. In diesem gehen demnach die Kräfte der Gurtstäbe in ihren durch den Fachwerksplan vorgeschriebenen Richtungen von den Ecken aus und schneiden sich für diejenigen Knoten, in denen nur zwei Stäbe zusammenlaufen. Diesem einfachen Knoten entspricht also in dem zum Kräfteplan erweiterten Krafteck je ein Kräftedreieck der äußeren Kraft mit den beiden zugehörigen Stabkräften. Laufen in einem Punkte mehr als zwei, im allgemeinen n Stäbe zusammen, zu denen noch die dort angreifende Außenkraft hinzutritt, so entspricht ihm im Kräfteplan ein $(n+1)$-Eck. Weiter übersieht man, daß den Quer- oder Diagonalstäben, welche im Fachwerk zwei gegenüberliegende Gurtknoten verbinden und zwei benachbarten Stabdreiecken angehören, im Kräfteplan verlaufende Parallelstrecken als Stabkräfte zugeordnet sind, welche zwischen den Schnittpunkten der andern Stabkräfte der betreffenden Fachwerkdreiecke verlaufen.

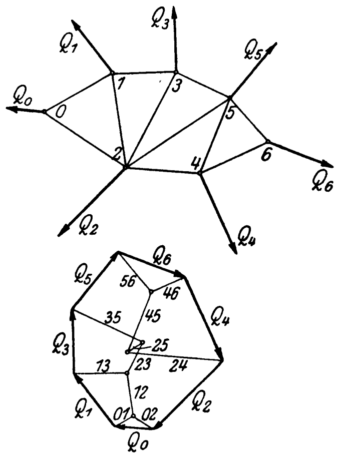

Abb. 184.

Der ganze Kräfteplan ist demnach aus der Zusammenschiebung der Knotenkraftecke derart hervorgegangen, daß die Außenkräfte in ihrer Reihenfolge an den Gurtknoten ihn umrahmen, die Gurtspannungen von den Ecken dieses Kraftecks ausgehen und die Querstabkräfte zwischen den Gurtkräften verlaufen, wobei jedem Stabdreieck im Fachwerk der Schnitt dreier zugehöriger Spannungen im Kräfteplan entspricht. Hierbei ist vorausgesetzt, daß alle Außenkräfte einschließlich der Auflagerdrucke sich an einem Punkte des Fachwerksplanes das Gleichgewicht halten, also je ein geschlossenes Kraft- und Seileck besitzen. Da den Dreiecken des Fachwerksplanes allgemein die Knoten des Kräfteplanes, den Vielecken des letzteren aber Knoten des ersteren entsprechen, während die Kräfte in beiden durch parallele Geraden dargestellt sind, so bezeichnet man die beiden Pläne nach Maxwell als reziprok.

Bei der Aufzeichnung zweier reziproker Pläne geht man zweckmäßig vom geschlossenen Krafteck und einem Fachwerksplan aus, in dem die Lage eines Knotens, z. B. 6, noch offen gelassen ist. Dann werden nacheinander die Gurt- und Querkräfte von Q ausgehend parallel den zugehörigen Stäben in das Krafteck mit ihren den Stabdreiecken zugeordneten Schnittpunkten eingetragen. So gelangt man bis zur Geraden 45, auf welcher der dem noch fehlenden Schlußdreieck 456 zugeordnete Punkt willkürlich gewählt wird. Damit sind dann die letzten Stabkräfte 46 und 56 nach Größe und Richtung gegeben und der Schnitt der zugehörigen Parallelen im Fachwerk durch 4 und 5 ergibt den noch fehlenden Schlußknoten 6. An diesem muß die schon bekannte Außenkraft Q_6 angreifen, damit die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sind.

1. Beispiel. Besonders übersichtlich gestaltet sich der Kräfteplan des einfachen Stabdreiecks, Abb. 185, dessen Außenkräfte $Q_1 Q_2 Q_3$ sich im Punkte P ausgleichen mögen. Alsdann ergeben im Kräfteplan durch Eintragen von Parallelen zu den Dreiecksstäben, die sich im Punkte O schneiden, deren Längen von diesem Schnittpunkt bis zu den Knoten sofort die Stabkräfte in gleichem Maßstabe wie die Außenkräfte. Dabei entspricht der Punkt O dem ganzen Stabdreieck, die Punkte ABC des Kräfteplanes den Fachwerksdreiecken Q_2PQ_3, Q_3PQ_1, Q_1PQ_2, während umgekehrt der Punkt P dem ganzen Krafteck ABC und die Knoten $Q_1 Q_2 Q_3$ den Dreiecken COB, COA, AOB im Kräfteplan zugeordnet sind, woraus die Reziprozität beider Pläne erhellt.

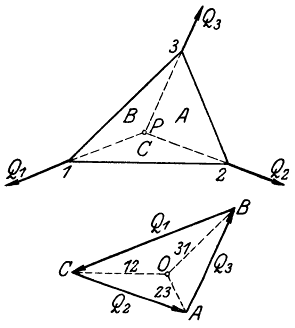

Abb. 185.

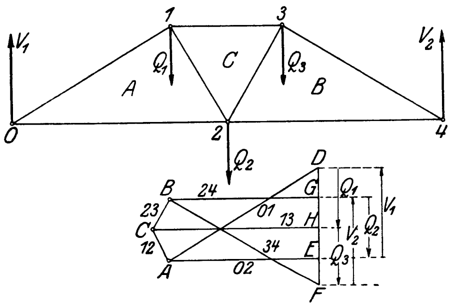

Abb. 186.

2. Beispiel. Für Parallelkräfte geht das Krafteck in eine in sich zurücklaufende Gerade über, die in Abb. 186, welche ein um die lotrechte Mittellinie symmetrisch gestaltetes und belastetes Fachwerk darstellt, zur besseren Übersicht der Einzelkräfte aneinandergezogen ist. Der Kräfteplan enthält drei wagerechte Gerade, die Spannungen der drei gleichgerichteten Gurtstäbe 02, 13, 24, die in den drei Punkten ACB sich mit den Gurtkräften 01 bzw. 34, sowie den Querstabkräften 12 und 23 derart treffen, daß die Punkte ACB den Stabdreiecken 012, 234, 123 zugeordnet sind. Umgekehrt entsprechen die einfachen Knoten 0 und 4 des Fachwerks im Kräfteplan den Dreiecken ADE; BFG, die zweifachen Knoten 1 und 3 den sich überschneidenden Vierecken $ACHD$, $BCHF$ und dem dreifachen Knoten 2 das Fünfeck $ACBGE$, woraus wiederum die Reziprozität beider Pläne hervorgeht. Man erkennt schließlich, daß die Last Q_2 nur in die beiden Stabkräfte 12 und 23 zerfällt, also keinen Beitrag zu den zu ihr senkrechten Stabrichtungen 02 und 24 liefert.

XI. Das Reibungsgleichgewicht.

§ 51. **Die doppelt gestützte Scheibe.** Wir haben früher gesehen, daß die relative Ruhelage des durch eine Außenkraft an eine rauhe Oberfläche gedrückten Massenpunktes an die Bedingung geknüpft war, daß der Tangentialanteil der Kraft zur Oberfläche durch den entgegengesetzten Reibungswiderstand aufgehoben wird, der selbst erst durch die Kraftwirkung geweckt wird, von sich aus also keine Bewegung hervorrufen kann. Die Bewegung tritt erst ein, wenn der Tangentialanteil der Kraft einen dem Normalanteile verhältnisgleichen Betrag erreicht, sodaß also das Gleichgewicht des Massenpunktes nicht mehr durch eine Gleichung gegeben, sondern vielmehr durch eine Ungleichung begrenzt wird.

Im Gegensatz zum Massenpunkte kann nun eine bewegliche starre Scheibe auf dem Rande einer festen abrollen, was nur durch gleichzeitige Stützung an einem weiteren Punkte des festen Randes so lange verhindert werden kann, als die Richtung der Außenkraft zwischen beide Stützpunkte fällt. Alsdann bleibt nach Abb. 187 immer noch die Möglichkeit des mit einer Drehung der Scheibe um den Schnitt M der beiden Berührungsnormalen verbundenen Gleitens an den Stützpunkten unter Überwindung der dort geweckten Reibungswiderstände übrig, die wiederum den Normaldrücken verhältnisgleich sind. Es fragt sich daher, unter welchen Bedingungen eine solche an zwei Punkten gestützte Scheibe im Gleichgewicht verharrt.

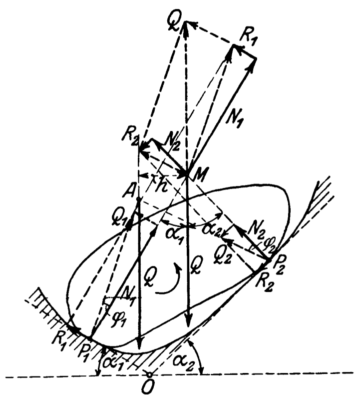

Abb. 187.

Da erkennen wir zunächst, daß die auf die bewegliche Scheibe wirkende Außenkraft Q, die im Sonderfalle mit ihrem Gewicht übereinstimmen mag, nach dem Schnitte M der Berührungsnormalen parallel verschoben werden kann. Dabei wird aber, wie aus Abb. 187 hervorgeht, ein in der Pfeilrichtung drehendes Kräftepaar geweckt, das im Falle des Gleichgewichts von den beiden Momenten der in den Berührungspunkten P_1 und P_2 tangential wirksamen Reibungskräfte R_1 und R_2, die durch die Parallelverschiebung nach M entstehen, derart aufgehoben wird, daß mit den Loten h, h_1, h_2 von M auf die Kraftrichtungen Q, R_1, R_2

$$Qh = R_1 h_1 + R_2 h_2 \quad \quad \quad 1)$$

Wegen der Starrheit der auf der Scheibe liegenden Geraden müssen die beiden Momente $R_1 h_1$ und $R_2 h_2$ denselben Drehsinn haben und daher können die Reibungskräfte R_1 und R_2 nicht gleichzeitig nach dem Schnittpunkte O der Berührungstangenten hin- oder weggerichtet sein.

Weiter besteht am Punkte M Gleichgewicht zwischen der dorthin verschobenen Außenkraft Q, den ebenfalls dorthin verschobenen Reibungskräften R_1 und R_2, sowie den sich dort schneidenden Normaldrücken N_1 und N_2. Mit deren Neigungswinkeln α_1 und α_2 gegen Q folgt alsdann in der Richtung von Q und senkrecht dazu

$$\left.\begin{aligned} N_1 \cos\alpha_1 + R_1 \sin\alpha_1 + N_2 \cos\alpha_2 - R_2 \sin\alpha_2 = Q \\ N_1 \sin\alpha_1 - R_1 \cos\alpha_1 - N_2 \sin\alpha_2 - R_2 \cos\alpha_2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad 2)$$

Da die drei Gleichungen 1) und 2) vier Unbekannte, nämlich $N_1 N_2 R_1 R_2$ enthalten, so genügen sie nicht zu deren Berechnung, wenn man auch von vornherein sagen kann, daß die aus N_1 und R_1 bzw. N_2, R_2 gebildeten Kräfte Q_1 und Q_2 Auflagerdrücke darstellen und sich demnach auf der Richtungslinie der Außenkraft Q, mit der sie im Gleichgewicht stehen, schneiden müssen. Führen wir nämlich die Neigungswinkel φ_1 und φ_2 der Auflagerdrücke Q_1 und Q_2 gegen die Normalen ein, so folgt nach Abb. 187

$$R_1 = N_1 \operatorname{tg}\varphi_1, \quad R_2 = N_2 \operatorname{tg}\varphi_2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

und damit geht 2) über in

$$\left.\begin{aligned} N_1 \frac{\cos(\alpha_1 - \varphi_1)}{\cos\varphi_1} + N_2 \frac{\cos(\alpha_2 + \varphi_2)}{\cos\varphi_2} = Q \\ N_1 \frac{\sin(\alpha_1 - \varphi_1)}{\cos\varphi_1} - N_2 \frac{\sin(\alpha_2 + \varphi_2)}{\cos\varphi_2} = 0 \end{aligned}\right\}, \quad . \quad . \quad . \quad 3\,\mathrm{a})$$

also

$$\left.\begin{aligned} N_1 \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \varphi_2 - \varphi_1) = Q \sin(\alpha_2 + \varphi_2) \cos\varphi_1 \\ N_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \varphi_2 - \varphi_1) = Q \sin(\alpha_1 - \varphi_1) \cos\varphi_2 \\ R_1 \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \varphi_2 - \varphi_1) = Q \sin(\alpha_2 + \varphi_2) \sin\varphi_1 \\ R_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \varphi_2 - \varphi_1) = Q \sin(\alpha_1 - \varphi_1) \sin\varphi_2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

Daraus berechnen sich dann die Auflagerdrücke zu

$$\left.\begin{aligned} Q_1 = \sqrt{N_1^2 + R_1^2} = Q \frac{\sin(\alpha_2 + \varphi_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \varphi_2 - \varphi_1)} \\ Q_2 = \sqrt{N_2^2 + R_2^2} = Q \frac{\sin(\alpha_1 - \varphi_1)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \varphi_2 - \varphi_1)} \end{aligned}\right\}, \quad . \quad . \quad . \quad 4\,\mathrm{a})$$

worin $\alpha_1 - \varphi_1$ und $\alpha_2 + \varphi_2$ die Winkel zwischen Q_1 bzw. Q_2 und Q, sowie $\alpha_1 + \alpha_2 + \varphi_2 - \varphi_1$ ihre Neigung gegeneinander bedeuten. Somit drücken die Gleichungen 4) nur aus, daß sich die Auflagerdrücke nach der Vektorregel zu der Außenkraft Q zusammensetzen, was nur im Schnittpunkt A aller drei Richtungsgeraden möglich ist. Über die Größen der Winkel φ_1 und φ_2 sagen diese Beziehungen natürlich nichts aus, so daß die Unbestimmtheit der Gleichgewichtslage der Scheibe bestehen bleibt. Ist aber die Stellung der Scheibe vorgelegt, so erstreckt sich die Unbestimmtheit auf die Lage der Richtungslinie der Außenkraft. Diese kann auch auf der andern Seite des Normalschnittes von M verlaufen, woraus ein Kräftepaar Qh mit entgegengesetztem Drehsinne und ein Vorzeichenwechsel beider Reibungswiderstände R_1 und R_2 hervorgehen würde.

Da nun der Reibungswiderstand einen durch $R = fN$ bestimmten Höchstwert, in dem f die Reibungsziffer bedeutet, nicht überschreiten kann, so besteht das Gleichgewicht in unserm Falle so lange für beide Neigungen, als

$$\operatorname{tg} \varphi_1 < f_1, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 < f_2$$

ist, d. h. solange der Neigungswinkel keines der beiden Auflagerdrücke gegen die Berührungsnormale den zugehörigen Reibungswinkel übertrifft. Mithin ist die Gleichgewichtslage der Scheibe an die Bedingung geknüpft, daß die Richtungsgerade der Außenkraft zwischen den äußersten Schnittpunkten A_1 und A_2 der um die zugehörigen Reibungswinkel gegen die Berührungsnormale geneigten Schenkel hindurchgeht, wie aus Abb. 188 ersichtlich ist. Die beiden Auflagerdrücke Q_1 und Q_2 sind dabei noch abhängig von der Wahl des Zerlegungspunktes auf der Geraden Q, der zunächst ganz willkürlich zu sein scheint, aber doch infolge der Starrheit der Geraden P_1P_2, welche eine gleichzeitige Verschiebung der Berührungspunkte nach oder von O und damit eine gleichzeitige entsprechende Richtung der Reibungskräfte R_1 und R_2 ausschließt, auf die Strecke B_1B_2 zwischen den Schnitten mit den Berührungsnormalen gebunden ist.

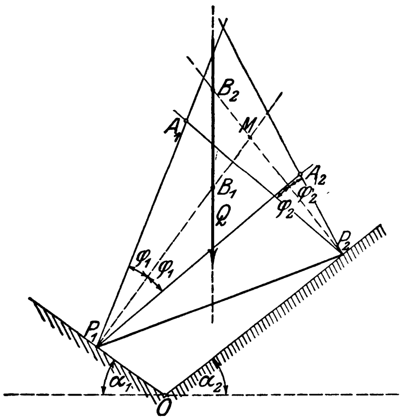

Abb. 188.

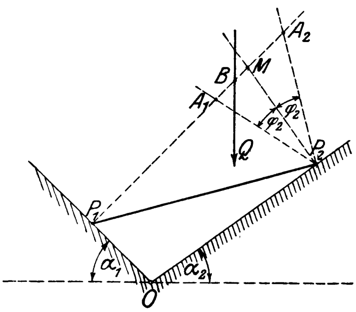

Abb. 189.

Fällt die Reibung an einem Stützpunkte, z. B. P_1 infolge vollkommener Glätte der beiden Scheibenränder an dieser Stelle weg, was allerdings niemals ganz erreichbar ist, so verschwindet mit R_1 auch der Reibungswinkel, und das Gleichgewicht ist an die Lage der Außenkraft zwischen den Schnittpunkten A_1 und A_2 der reibungslosen Berührungsnormale mit den Schenkeln der Reibungswinkel gegen die Berührungsnormale im andern Stützpunkt geknüpft. Bei vorgelegter Richtungslinie der Kraft Q ist also eine Zerlegung am Schnitte B mit der reibungsfreien Berührungsnormalen vorzunehmen, vgl. Abb. 189, ergibt also ganz eindeutig bestimmte Werte der Auflagerdrücke $Q_1 = N_1$ und Q_2 sowie N_2 und R_2. Denn in diesem Falle erhalten wir die vereinfachten drei Grundformeln

$$Qh = R_2 h_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1\text{a)}$$

$$\left.\begin{aligned} N_1 \cos\alpha_1 + N_2 \cos\alpha_2 - R_2 \sin\alpha_2 &= Q \\ N_1 \sin\alpha_1 - N_2 \sin\alpha_2 - R_2 \cos\alpha_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2\text{a)}$$

mit nur noch ebensovielen Unbekannten $N_1 N_2 R_2$, von denen R_2 durch 1a) unmittelbar und N_1 und N_2 durch

$$\left.\begin{aligned} N_1 \sin(\alpha_1 + \alpha_2) &= Q \sin\alpha_2 + R_2 = Q\left(\sin\alpha_2 + \frac{h}{h_2}\right) \\ N_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2) &= Q \sin\alpha_1 - R_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2) = \\ &= Q\left(\sin\alpha_1 - \frac{h}{h_2}\cos(\alpha_1 + \alpha_2)\right) \end{aligned}\right\} \quad . \quad 4\text{b)}$$

gegeben sind. Dabei ist die Bedingung

$$\frac{R_2}{N_2} < f_2 \quad \text{oder} \quad h \sin(\alpha_1 + \alpha_2) < f_2\,[h_2 \sin\alpha_1 - h \cos(\alpha_1 + \alpha_2)] \quad . \quad 5)$$

zu erfüllen. Verschwindet schließlich im Grenzfalle die Reibung an beiden Berührungsstellen, so erhalten wir mit $h = 0$ den labilen Gleichgewichtszustand beim Durchgang der Kraftlinie Q durch den Normalenschnitt M, den wir schon früher (§ 43, Beispiel 6) eingehend behandelt haben.

Um nun zu entscheiden, welcher Art das Reibungsgleichgewicht in unserem allgemeinen Falle ist, haben wir nur die beiden Grenzlagen ins Auge zu fassen, zwischen denen der Körper sich stets im Gleichgewichte befindet. Verschieben wir ihn z. B. aus der Grenzlage $P_1 P_2$, in welchem sein Schwerpunkt S, an dem das Gewicht Q angreift, gerade unter dem Schnitte A_2 der unter den Reibungswinkeln gegen die Normalen MP_1 bzw. MP_2 geneigten Geraden $A_2 P_1$ und $A_2 P_2$ liegt, in die benachbarte Lage $P_1' P_2'$, so rückt S nach S' und A_2 nach A_2', so zwar, daß $P_1' A_2' \,//\, P_1 A_2$ und $P_2' A_2' \,//\, P_2 A_2$. Man übersieht aus Abb. 190 sofort, daß alsdann S' nicht mehr unter A_2', sondern rechts davon liegt, so daß also ein im Sinne des Pfeiles drehendes durch das der Reibungskräfte nicht mehr voll ausgeglichenes Moment entsteht, das bei weiterer Verschiebung im gleichen Sinne dauernd zunimmt. Da nun das Drehmoment der Last Q in der reibungsfreien Ruhelage überhaupt verschwindet, zwischen ihr und den Grenzlagen durch die mit ihm zunehmenden Reibungsmomente gerade aufgehoben wird, so ist das Gleichgewicht in den Grenzlagen für Verschiebungen innerhalb derselben stabil, für solche außerhalb derselben aber labil.

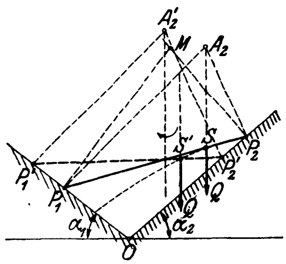

Abb. 190.

1. Beispiel. Entfernen wir in dem Stabdreieck Abb. 154 des 2. Beispiels in § 45 die beiden Fußgelenke B_1, B_2, so bleiben die in C durch ein reibungsloses Gelenk miteinander verbundenen Stäbe nur dann im Gleichgewicht, wenn die Richtungen der Stützdrücke A_1 und A_2 weniger als um die Reibungswinkel gegen die Normalen in B_1 und B_2 geneigt sind, d. h. wenn mit den Reibungsziffern f_1 und f_2 die Bedingungen

$$H < f_1 V_1, \qquad H < f_2 V_2$$

erfüllt sind, denen die früher entwickelten Ausdrücke für H, V_1, V_2 zu genügen haben. Ist nur eine dieser Ungleichungen nicht erfüllt, so gleitet der entsprechende Stab aus, während der andere anfänglich sich nur um seinen Stützpunkt so lange dreht, bis auch bei ihm infolge größerer Neigung der Ungleichung nicht genügt ist und sein Stützpunkt zu gleiten beginnt.

2. Beispiel. Eine Stange von der Länge l, deren Gewicht G im Schwerpunktsabstand s_0 vom unteren Ende angreift, stützt sich auf den Boden und gegen eine lotrechte Wand. Wird sie gegen Abgleiten durch eine wagerechte Kraft H', deren Angriffspunkt im Abstande s_1 vom unteren Ende angreift, gestützt, so hat man mit den Berührungsnormalen h_1 und h_2, sowie den Achsenabständen x_0 und y_1 der beiden Kraftangriffe bei der Neigung ψ nach Abb. 191

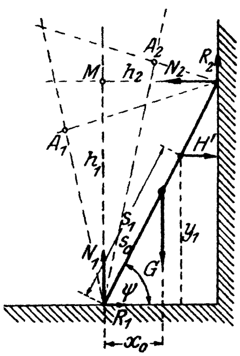

Abb. 191.

$$\left.\begin{aligned} h_1 &= l \sin\psi, & h_2 &= l \cos\psi \\ x_0 &= s_0 \cos\psi, & y_1 &= s_1 \sin\psi \end{aligned}\right\} , \quad . \; . \; . \qquad 6)$$

Da die Stange ohne die Kraft H' abgleiten soll, so sind für die Reibungswiderstände ihre Höchstwerte

$$R_1 = f_1 N_1, \qquad R_2 = f_2 N_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \qquad 7)$$

einzuführen, mit denen die Gleichgewichtsbedingungen am unteren Stützpunkt lauten

$$\left.\begin{aligned} H' + f_1 N_1 = N_2, \qquad N_1 + f_2 N_2 = G \\ N_2 (h_1 + f_2 h_2) = G x_0 + H' y_1 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \qquad 8)$$

Daraus folgt nach Ausschalten der Normaldrücke N_1 und N_2

$$\frac{H'}{G} = \frac{x_0(1 + f_1 f_2) - f_1 f_2 h_2 - f_1 h_1}{h_1 - y_1 (1 + f_1 f_2) + f_2 h_2} = \frac{[s_0 (1 + f_1 f_2) - l f_1 f_2] \cos\psi - l f_1 \sin\psi}{[l - s_1 (1 + f_1 f_2)] \sin\psi + l f_2 \cos\psi} \qquad 8\text{a})$$

und die Gesamtkraft $Q' = \sqrt{G^2 + H'^2}$ geht durch den Schnitt A_2 der rechten Schenkel der Reibungswinkel.

Soll umgekehrt die Kraft H'' gerade ausreichen, den Stab emporzuschieben, so erhalten wir dafür durch Vorzeichenwechsel von f_1 und f_2

$$\frac{H''}{G} = \frac{[s_0 (1 + f_1 f_2) - l f_1 f_2] \cos\psi + l f_1 \sin\psi}{[l - s_1 (1 + f_1 f_2)] \sin\psi - l f_2 \cos\psi} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad 8\text{b})$$

mit einem Durchgang der Gesamtkraft $Q'' = \sqrt{G^2 + H''^2}$ durch den Schnitt A_1 der linken Schenkel der Reibungswinkel.

Im ersten Falle besteht nun eine Grenzlage, in der H' verschwindet, der Stab also gerade sich noch selbst hält. Für $H' = 0$ ist

$$\operatorname{tg}\psi' = \frac{s_0 - (l - s_0) f_1 f_2}{l f_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad 8\text{c})$$

Für $\psi > \psi'$ würde $H' < 0$, womit die Gleichung ihren Sinn verliert, da alsdann der Stab ohne die Kraft H' sich im Reibungsgleichgewicht befindet.

Im zweiten Falle dagegen wird $H'' = \infty$ für die Grenzlage

$$\operatorname{tg}\psi'' = \frac{l f_2}{l - s_1 (1 + f_1 f_2)}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad 8\text{d})$$

in welcher Selbstsperrung stattfindet, während für $\psi > \psi''$ die Kraft $H'' < 0$ und damit der Ansatz seinen Sinn verliert.

Ist z. B. $s_0 = s_1 = l/2$, so wird

$$\operatorname{tg}\psi' = \frac{1 - f_1 f_2}{2 f_1}, \qquad \operatorname{tg}\psi'' = \frac{2 f_2}{1 - f_1 f_2}, \qquad \frac{\operatorname{tg}\psi'}{\operatorname{tg}\psi''} = \frac{(1 - f_1 f_2)^2}{4 f_1 f_2}$$

und beide Grenzlagen fallen zusammen für

$$f_1 f_2 = 3 - \sqrt{8} = 0{,}17\,,$$

also etwa für $f_1 = f_2 = 0{,}412$.

3. Beispiel. Sind die beiden Stützgeraden einander parallel, so kann eine mit ihnen dauernd in Berührung stehende Scheibe keine Drehungen vollziehen, sondern nur selbst eine Parallelverschiebung in der Richtung der Stützgeraden erleiden. Die Reibungswiderstände R_1 und R_2 an den Stützpunkten sind daher in diesem Falle gleichgerichtet, und wir erhalten mit einem Abstand h der Stützgeraden für die in Abb. 192 dargestellte Gerade von der Länge l unter Einwirkung der ihnen ebenfalls parallelen Kraft Q im Abstande s von der linken Parallelen

$$l \cos\psi = h\,, \qquad l \sin\psi = \sqrt{l^2 - h^2} \quad . \quad . \quad 9)$$

und

$$\left.\begin{aligned} N_1 = N_2 = N\,, \qquad R_1 + R_2 = Q \\ Q s = l\,(N_2 \sin\psi + R_2 \cos\psi) \end{aligned}\right\}, \quad . \quad 10)$$

oder

$$Q s = l\left(N \sqrt{1 - \frac{h^2}{l^2}} + R_2 \frac{h}{l}\right). \quad 10\text{a})$$

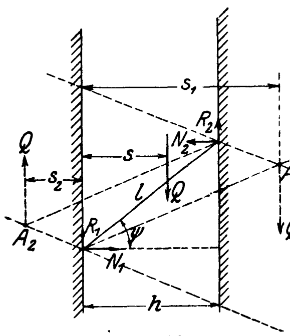

Abb. 192.

Das Gleichgewicht ist unbestimmt, da zur Berechnung von R_1, R_2 und N nur die zweite Formel 10) und Gl. 10a) verfügbar sind. Dagegen erhalten wir für den Grenzfall mit

$$\left.\begin{aligned} R_1 = f_1 N, \qquad R_2 = f_2 N \\ (f_1 + f_2)\, N = Q \end{aligned}\right\}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 11)$$

also aus 10a) unter Wegfall von Q und $s = s_1$

$$\frac{s_1}{l}(f_1 + f_2) = \sqrt{1 - \frac{h^2}{l^2}} + f_2 \frac{h}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 11\text{a})$$

entsprechend dem Schnittpunkte A_1 der Schenkel der beiden Reibungswinkel, während ein zweiter Schnittpunkt A_2 im Abstand s_2 sich durch den Wechsel der Vorzeichen von f_1 und f_2 für eine entgegengesetzte Kraft Q aus 11a) ergibt. Liegt demnach die Kraft außerhalb dieser Schnitte A_1 und A_2, so tritt Selbstsperrung, für die innere Lage dagegen Verschiebung des Stabes in der Kraftrichtung ein. Die vorstehenden Ausführungen gelten auch nur mit umgekehrter Kraftrichtung für einen Bügel, der sich von außen schräg auf eine Stange stützt, wie z. B. die Klettereisen der Telegraphenarbeiter.

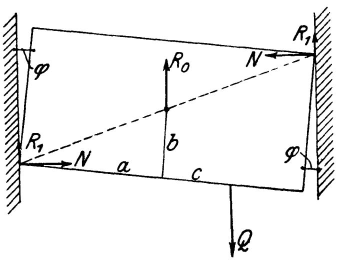

Abb. 193.

4. Beispiel. Für die wagerechte Bewegung einer in ihrer Führung eckenden Schublade vom Gewichte G durch eine seitlich angreifende Kraft Q gilt mit den Reibungsziffern f_0 auf der Unterlage und f an den Seitenwänden nach Abb. 193

$$R_0 = f_0 G, \qquad N_1 = N_2 = N, \qquad R_1 = R_2 = f N\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 12)$$

also nach Verschiebung aller Kräfte nach der linken Ecke

$$\left.\begin{array}{r} Q = R_0 + R_1 + R_2 = f_0 G + 2 f N \\ Q\,(a + c) \cos\varphi = (f_0 G + 2 f N)\,(a \cos\varphi + b \sin\varphi) + 2 N\,(b \cos\varphi - a \sin\varphi) \end{array}\right\} \quad . \quad 13)$$

Nach Ausschaltung von N wird daraus

$$\frac{Q}{G} = \frac{f_0\,(b \cos\varphi - a \sin\varphi)}{b \cos\varphi - a \sin\varphi + f\,(b \sin\varphi - c \cos\varphi)} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 13\text{a})$$

und für verschwindend kleine φ mit $\sin\varphi = 0$, $\cos\varphi = 1$

$$\frac{Q}{G} = \frac{f_0 b}{b - fc}\,, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 13\text{b})$$

so daß für $b = fc$ mit $Q = \infty$ Selbstsperrung eintritt.

Bemerkenswert ist noch die in Abb. 194 dargestellte Lage der Schublade, in der die Diagonale senkrecht zu den Führungen steht, so daß $b \cos\varphi = a \sin\varphi$. Alsdann ist Gleichgewicht nur möglich, wenn die Kraft durch die Mitte geht, d. h. wenn gleichzeitig $b \sin\varphi = c \cos\varphi$ wird. Damit aber wird in 13a) $Q : G = 0 : 0$. Schreiben wir dagegen hierfür mit

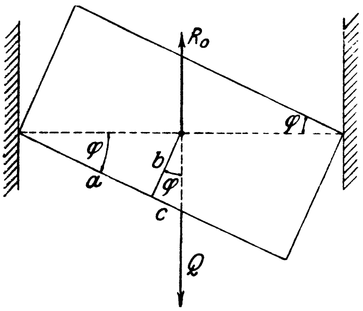

Abb. 194.

$$\frac{b \cos\varphi - a \sin\varphi}{b \sin\varphi - c \cos\varphi} = u$$

an Stelle von 13a)

$$\frac{Q}{G} = \frac{f_0 u}{u + f}\,,$$

so liefert die Differentiation im Zähler und Nenner $Q = f_0 G$, und im Verein mit der ersten Gl. 13) $R = fN = 0$, so daß also in diesem Falle die Seitenreibung wegfällt und nur die auf der Unterlage zu überwinden ist.

5. Beispiel. Zum Eintreiben eines Keiles, Abb. 195, mit der Neigung 2β der Seitenflächen gegeneinander ist die Kraft

$$Q' > 2 N\,(\sin\beta + f \cos\beta) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 14)$$

anzuwenden, zum Herausschlagen dagegen die umgekehrt gerichtete Kraft

$$Q'' > 2 N\,(f \cos\beta - \sin\beta) . \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 14\text{a})$$

Ist der letztere Ausdruck positiv, also $f > \operatorname{tg}\beta$, d. h. der Reibungswinkel größer als die halbe Neigung der Keilseitenflächen, so bleibt der Keil in seiner Lage stecken, d. h. es findet Selbstsperrung statt. Der Keil übt überdies auf die beiden Backen einen Seitenschub

$$H = N \cos\beta - R \sin\beta > N\,(\cos\beta - f \sin\beta) \quad . \quad 14\text{b})$$

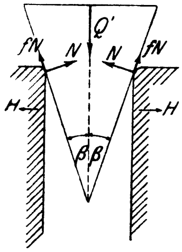

Abb. 195.

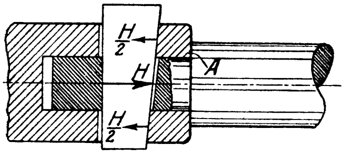

Abb. 196.

aus, welcher umgekehrt, solange $f > \operatorname{tg}\beta$, nicht imstande ist, den Keil herauszudrücken. Dient der Keil zur Verbindung zweier Maschinenteile, z. B. des Kreuzkopfes mit der Kolbenstange, Abb. 196, so ist durch einen Anlauf A an letzterer dafür zu sorgen, daß ein etwaiger Vorzeichenwechsel der zwischen beiden wirkenden Kraft sich nicht auch bis auf H erstreckt.

6. Beispiel. Haben wir es mit einer Reihe von starren Scheiben zu tun, die sich gewölbeartig aufeinander stützen, so bilden die Berührungsnormalen ein Stützeck nach § 45 mit den Knoten M, Abb. 197. Eine Drehung und Verschiebung der einzelnen Scheiben ist alsdann so lange nicht zu befürchten, als die an jeder derselben angreifende Außenkraft (Belastung) zwischen den beiden Schnittpunkten A_1 und A_2 der entsprechenden von den Berührungspunkten P_1 und P_2 ausgehenden Schenkel der Reibungswinkel fällt. Es wird also durch die Gleitreibung in den Stützpunkten das an sich labile Stützeck zu einer stabilen Gleichgewichtsform, worauf schon in § 45 hingedeutet wurde.

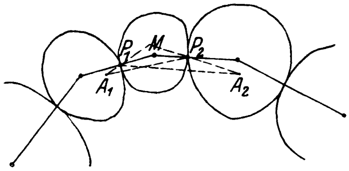

Abb. 197.

§ 52. Die Seil- und Hautreibung. Die Berührung starrer Scheiben findet, wie wir im letzten Abschnitt gesehen haben, im allgemeinen nur in einzelnen Punkten statt. Die Berührung längs eines endlichen Teiles des Scheibenumfanges kann demgegenüber nur mit Hilfe eines vollkommen biegsamen gespannten Fadens oder Seiles bzw. im Falle einer bestimmten Scheibendicke durch einen Hautstreifen oder Riemen erfolgen, welche seitens der Scheibe Normaldrücke erleiden, durch die wiederum tangentiale Reibungskräfte geweckt werden. Alsdann besteht Gleichgewicht, wenn die Seilspannung S im Verein mit dem in ihre Richtung fallenden Gewichtsanteil des Seiles nicht zur Überwindung der Reibung ausreicht. Für den Grenzfall des gerade beginnenden Gleitens erhalten wir alsdann am Seilelement von der Länge ds und dem Gewichte $q\,ds$ mit der Neigung φ gegen die Wagerechte bei einer Reibungsziffer f zwischen Seil und Scheibe nach Abb. 198 die Gleichungen in den Achsenrichtungen

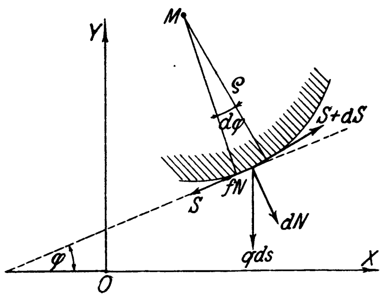

Abb. 198.

$$\left.\begin{aligned} d\,(S\cos\varphi) + (\sin\varphi - f\cos\varphi)\,dN &= 0 \\ d\,(S\sin\varphi) - (\cos\varphi + f\sin\varphi)\,dN &= q\,ds \end{aligned}\right\}, \quad \ldots \quad 1)$$

oder nach Umformung in die Tangential- und Normalrichtung

$$\left.\begin{aligned} dS - fS\,d\varphi &= q\,(\sin\varphi - f\cos\varphi)\,ds \\ -dN + S\cdot d\varphi &= q\,ds\cos\varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 1\text{a})$$

sowie unter Einführung des Krümmungsarmes ϱ durch $ds = \varrho\,d\varphi$

$$\left.\begin{aligned} dS - fS\,d\varphi &= q\varrho\,(\sin\varphi - f\cos\varphi)\,d\varphi \\ dN &= S\,d\varphi - q\varrho\cos\varphi\,d\varphi \end{aligned}\right\}. \quad \ldots \quad 1\text{b})$$

Schreiben wir in der ersten dieser Formeln

$$S = U\cdot V, \qquad dS = U\,dV + V\,dU, \quad \ldots \quad 2)$$

so wird daraus

$$U\,dV + V\,dU - fU\cdot V\,d\varphi = q\varrho\,(\sin\varphi - f\cos\varphi)\,d\varphi \quad . \; . \quad 2\text{a})$$

Da wir nun noch über eine Beziehung zwischen den Hilfsgrößen U und V verfügen können, so zerlegen wir die letzte Gleichung in die beiden

$$\left.\begin{array}{r} U(dV - fV d\varphi) = 0 \\ V dU = q\varrho(\sin\varphi - f\cos\varphi)\,d\varphi \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 3)$$

Da U nicht verschwinden kann, weil damit auch S verschwinden würde, so folgt aus der ersten Gl. 3) mit einem willkürlichen Festwert V_0

$$\lg n \frac{V}{V_0} = f\varphi, \quad \text{oder} \quad V = V_0 e^{f\varphi} \quad \ldots\ldots \quad 3\text{a})$$

und eingesetzt in die zweite Gl. 3)

$$dU = \frac{q\varrho}{V_0} e^{-f\varphi} (\sin\varphi - f\cos\varphi)\,d\varphi, \quad \ldots\ldots \quad 3\text{b})$$

deren Integral ist alsdann mit einem neuen Festwert U_0

$$U = \frac{1}{V_0}\int q\varrho e^{-f\varphi} (\sin\varphi - f\cos)\,d\varphi + U_0, \quad \ldots\ldots \quad 3\text{c})$$

woraus sich schließlich in Verbindung mit 3a) nach 2), sowie mit $U_0 V_0 = C$

$$S = e^{f\varphi}\int q\varrho e^{-f\varphi} (\sin\varphi - f\cos\varphi)\,d\varphi + C e^{f\varphi} \quad \ldots\ldots \quad 4)$$

ergibt. Der darin noch enthaltene Festwert berechnet sich aus der Angabe einer Seilspannung S_0 für einen vorgelegten Neigungswinkel φ_0 nach Ausführung der in 4) nur angedeuteten Integration. Diese wiederum erfordert die Kenntnis des Zusammenhanges zwischen q, ϱ und φ, von denen der erste Betrag im allgemeinen als unveränderlich für das ganze Seil, also auch über den umspannten Bogen, anzusehen ist, während sich ϱ und φ vermittels der Gleichung des Scheibenumfangs ausdrücken läßt.

1. Beispiel. Umspannt das Seil eine Scheibe mit lotrechter Achse, so hat sein Gewicht keinen Anteil in der Scheibenebene, so daß hierfür mit $q = 0$ und $C = S_0$ Gl. 4) sich vereinfacht in

$$S = S_0 e^{f\varphi}, \quad \ldots\ldots \quad 4\text{a})$$

worin S_0 den dem Winkel $\varphi = 0$ zugeordneten Wert der Seilspannung bedeutet. Diese ändert sich somit ganz unabhängig von der Scheibenform nach einem Exponentialgesetz, nimmt also im Grenzfalle des Gleitbeginnens mit dem Umspannungswinkel außerordentlich rasch zu und erreicht bald die Höhe der Bruchfestigkeit des Seiles. Daher kommt es, daß man schon mit ein bis zwei Windungen um einen Pfahl mit der Zugkraft eines Menschen ein Schiff festhalten kann.

Gl. 4a) gilt auch noch für die sprungweise Änderung der Seilspannung an einer scharfen Kante, da alsdann mit $\varrho = 0$ das erste Glied in Gl. 4) verschwindet. Der Spannungssprung ist in diesem Falle mit dem Kantenwinkel φ

$$S - S_0 = S_0(e^{f\varphi} - 1), \quad \ldots\ldots \quad 4\text{b})$$

also an einer rechtwinkligen Ecke mit $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$S - S_0 = S_0\left(e^{f\frac{\pi}{2}} - 1\right). \quad \ldots\ldots \quad 4\text{c})$$

Mit $f = 0{,}4$, entsprechend einem Hanfseile auf Holz, wird hierfür $S - S_0 = 0{,}855 \cdot S_0$, so daß also der Spannungssprung an einer Kante stets zu berücksichtigen ist.

2. Beispiel. Auf einer schiefen Ebene ist der Neigungswinkel φ beständig, außerdem aber $\varrho \cdot d\varphi = ds$, so daß 4) übergeht in

$$S = qs(\sin\varphi - f\cos\varphi) + S_0\,, \qquad 5)$$

wenn wir das hier unveränderliche zweite Glied der rechten Seite von 4) kurz mit S_0 bezeichen. Alsdann sind S und S_0 die Seilspannungen an den beiden Teilen des Seiles, deren Unterschied dann verschwindet, wenn $\operatorname{tg}\varphi = f = \operatorname{tg}\varphi_0$, d. h. wenn die Neigung der Ebene mit dem Reibungswinkel übereinstimmt. Hängt das Seil von der Gesamtlänge l derart über die schiefe Ebene, Abb. 199, herab, daß noch ein Stück von der Länge x sich oben befindet, so ist an der Kante die Spannung des letzteren

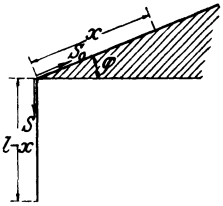

Abb. 199.

und die des ersteren

$$\left.\begin{aligned} S_0 &= -qx(\sin\varphi - f\cos\varphi) \\ S &= q(l - x) \end{aligned}\right\}, \qquad 5\text{a})$$

während beide durch

$$S = S_0\, e^{f\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)} \qquad 5\text{b})$$

verknüpft sind. Es besteht also gerade Gleichgewicht für

$$q(l - x) = -qx(\sin\varphi - f\cos\varphi)\, e^{f\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)}\,,$$

woraus sich

$$\frac{l}{x} = 1 - (\sin\varphi - f\cos\varphi)\, e^{f\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)} \qquad 5\text{c})$$

berechnet. Für eine wagerechte Platte wird hieraus mit $\varphi = 0$

$$\frac{l}{x} = 1 + f e^{f\frac{\pi}{2}}\,,$$

also mit $f = 0{,}4$

$$l = (1 + 0{,}4 \cdot 1{,}855)\,x = 1{,}742\,x\,, \qquad x = 0{,}547\,l\,.$$

3. Beispiel. Ist das Seil um eine lotrechte Kreisscheibe vom Halbmesser r gespannt, Abb. 200, so folgt mit $\varrho = r$ aus 4)

$$S e^{-f\varphi} - C = qr \int e^{-f\varphi}(\sin\varphi - f\cos\varphi)\, d\varphi \qquad 6)$$

$$S = C e^{f\varphi} - \frac{2f\sin\varphi + (1 - f^2)\cos\varphi}{1 + f^2}\, qr\,. \qquad 6\text{a})$$

Ist $S = S_0$ für $\varphi = 0$, so bestimmt sich C aus

$$S_0 = C - \frac{1 - f^2}{1 + f^2}\, qr$$

und damit wird aus 6a)

$$\left.\begin{aligned} S = {} & \left(S_0 + \frac{1 - f^2}{1 + f^2}\, qr\right) e^{f\varphi} - \\ & - \frac{2f\sin\varphi + (1 - f^2)\cos\varphi}{1 + f^2}\, qr \end{aligned}\right\}, \qquad 6\text{b})$$

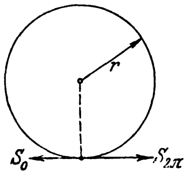

Abb. 200a.

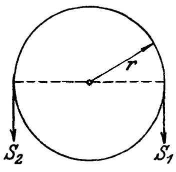

Abb. 200b.

also nach einer vollen Windung mit $\varphi = 2\pi$

$$S_{2\pi} = \left(S_0 + \frac{1 - f^2}{1 + f^2}\, qr\right) e^{2f\pi} - \frac{1 - f^2}{1 + f^2}\, qr\,. \qquad 6\text{c})$$

Daraus erkennt man, daß bei völliger Umschließung das Seilgewicht die Spannung teilweise aufhebt und belastet.

Ist dagegen das Seil nur über den Halbkreis nach Abb. 200b gelegt, so ist $S = S_1$ für $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $S = S_2$ für $\varphi = \frac{3}{2}\pi$, also wird mit

$$C = \left(S_1 + \frac{2fqr}{1+f^2}\right) e^{-f\frac{\pi}{2}}$$

$$S = \left(S_1 + \frac{2fqr}{1+f^2}\right) e^{f\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)} - \frac{2f\sin\varphi + (1-f^2)\cos\varphi}{1+f^2} qr \quad . \quad . \quad . \quad 7)$$

und

$$S_2 = \left(S_1 + \frac{2fqr}{1+f^2}\right) e^{f\pi} + \frac{2fqr}{1+f^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7\,a)$$

In diesem Falle kann, da die untere Scheibe nicht mit umspannt ist, das Eigengewicht des Seiles nur belastend wirken. Der hier vorgetragene Fall hat eine praktische Bedeutung für sog. Bremsräder, unter denen die Bremsscheibe sich gleichförmig dreht.

§ 53. Die Steifigkeit der Ketten und Seile. Wir haben bisher vorausgesetzt, daß die linien- und flächenstarren Gebilde, d. h. Ketten, Seile und Häute, einer Verbiegung keinen Widerstand entgegensetzen und daß ein solcher erst durch Reibung bei der Berührung mit den festen Scheiben geweckt wird. Daß diese Annahme für Ketten nicht zutrifft, geht schon aus der Reibung der Kettenglieder, welche durch die Spannkraft S aneinander gedrückt werden, hervor. Wird ein solches Glied um den Winkel φ gegen das benachbarte gedreht, so wird bei einem Halbmesser r_0 des Ketteneisens oder Kettenbolzens der Reibungswiderstand fS auf dem Wege $r_0\varphi$ derart überwunden, daß eine Arbeit $M\varphi = f \cdot S \cdot r_0 \varphi$ durch das Biegungsmoment

$$M = fSr_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

zu überwinden ist, welches somit ein Maß für die Steifigkeit der Kette bildet. Liegt die Kette auf einer Rolle vom Halbmesser r, so sind die Momente der auf- und ablaufenden Kette mit den Spannungen S_1, S_2

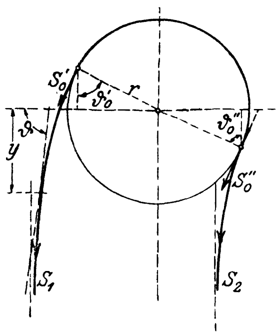

Abb. 201.

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= S_1 (r + fr_0) \\ M_2 &= S_2 (r - fr_0), \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

und es besteht ohne Rücksicht auf das Kettengewicht gerade Gleichgewicht, wenn $M_1 = M_2$, also

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{r - fr_0}{r + fr_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2\,a)$$

Die beiden verschiedenen Spannkräfte besitzen also in bezug auf die Rollenmitte ungleiche Hebelarme, Abb. 201, und bedingen daher Übergangsbogen der Kette, welche die Rolle unter bestimmten Neigungswinkeln gegen die ursprüngliche Richtung der Spannkräfte berühren.

Haben wir es mit einem **Faden**, einem **Seil** oder einem **Hautstreifen von endlicher Dicke** h zu tun, so können wir uns auch dieses Gebilde aus einer großen Zahl sehr kleiner Kettenglieder zusammengesetzt denken, bei deren gegenseitiger Drehung Reibungsmomente zu überwinden sind, die sich aus dem Gesamtmoment 1) ergeben. Darin ist nur der Zapfenhalbmesser r_0 durch eine Länge zu ersetzen, die mit der Dicke h des Seiles wächst, so daß wir für diesen Fall unter Einführung einer neuen Reibungsziffer f_0

$$M = f_0 h S \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1a)$$

schreiben dürfen.

Zur Ermittlung der **Übergangskurven**, oder allgemeiner der **Form der versteiften Ketten- oder Seilkurve** wollen wir das Seilgewicht q der Längeneinheit von vornherein berücksichtigen und erhalten alsdann, da die Steifigkeit eine Querkraft T hervorruft, als Gleichgewichtsbedingungen des Elementes mit der Neigung ϑ in den Achsenrichtungen, sowie gegen Verdrehung nach Abb. 202

$$\left.\begin{aligned} dH &= d(S\cos\vartheta - T\sin\vartheta) = 0 \\ dV &= d(S\sin\vartheta + T\cos\vartheta) = q\,ds \\ dM &= T\,ds \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 3)$$

oder nach Integration, sowie mit Rücksicht auf 1a)

$$\left.\begin{aligned} S\cos\vartheta - T\sin\vartheta &= C_1 \\ S\sin\vartheta + T\cos\vartheta &= qs + C_2 \\ T &= f_0 h \frac{dS}{ds} \end{aligned}\right\}, \quad \ldots \quad 3a)$$

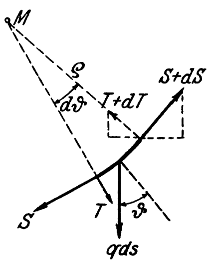

Abb. 202.

worin C_1 offenbar den unveränderlichen Seitenzug H bedeutet. Aus den ersten beiden Gleichungen folgt

$$\left.\begin{aligned} S &= (qs + C_2)\sin\vartheta + C_1\cos\vartheta \\ T &= (qs + C_2)\cos\vartheta - C_1\sin\vartheta \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots \quad 3b)$$

also im Verein mit der dritten Formel 3a)

$$[(qs + C_2)\cos\vartheta - C_1\sin\vartheta]\left(1 - f_0 h \frac{d\vartheta}{ds}\right) = f_0 h q \sin\vartheta \quad \ldots \quad 4)$$

Das ist schon die Differentialgleichung der versteiften Seilkurve und zwar in den Lagengrößen s und ϑ; ihre Integration ist allerdings, wie wir noch sehen werden, nur näherungsweise durchführbar.

Führen wir in den ersten beiden Gl. 3) die Differentiation aus und erweitern mit $\cos\vartheta$ bzw. $\sin\vartheta$, so ergeben sich nach Addition und Subtraktion die Formeln

$$dS - T\,d\vartheta = q\,ds\sin\vartheta, \qquad dT + S\,d\vartheta = q\,ds\cos\vartheta, \quad \ldots \quad 5)$$

die man auch unmittelbar am Element ablesen kann. Setzen wir in die erste derselben die dritte Gl. 3a) ein, so folgt

$$dS\left(1 - f_0 h \frac{d\vartheta}{ds}\right) = q\,ds\sin\vartheta \quad \ldots\ldots\ldots \quad 6)$$

oder angenähert für praktisch stets zutreffende kleine Verhältnisse $h\frac{d\vartheta}{ds}=\frac{h}{\varrho}$ mit $ds\sin\vartheta=dy$

$$dS=q\left[dy+f_0 h\sin\vartheta\, d\vartheta\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad 6a)$$

und nach Integration mit den Grenzen S_0, ϑ_0

$$S-S_0=q\left[y-y_0-f_0 h(\cos\vartheta-\cos\vartheta_0)\right] \quad \ldots\ldots \quad 7)$$

1. Beispiel. Ein Seil von der Länge l liege auf einer wagerechten vollkommen glatten Ebene und sei an den Enden zwei entgegengesetzt wirkenden Kräften P in der y-Richtung unterworfen. Dann fällt der Gewichtseinfluß $q\cdot ds$ aus den Gl. 3a) und 3b) weg und es ist mit $C_1=H=0$, $C_2=P$

$$\left.\begin{aligned} S&=T\operatorname{tg}\vartheta, & S&=P\sin\vartheta \\ \frac{dS}{ds}&=P\cos\vartheta\frac{d\vartheta}{ds}=P\frac{\cos\vartheta}{\varrho} \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 8)$$

also mit der dritten Formel 3a)

$$\varrho=f_0 h, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 8a)$$

d. h. die **Seilkurve** ist ein **Kreisbogen**, aus dessen Halbmesser sich die innere Reibungsziffer f_0 ermitteln läßt.

Da ferner nach Gl. 1a) das Moment

$$M=Px=f_0 hS$$

ist, so folgt mit 8) und 8a)

$$x=\varrho\sin\vartheta,$$

d. h. die Seilkurve ist ein Halbkreis, an dessen Enden die Kräfte P angreifen.

2. Beispiel. Im Falle eines durch ein Gewicht lotrecht gespannten Seiles, welches über eine Rolle vom Halbmesser r mit wagerechter Achse läuft, Abb. 201, seien ϑ_0' bzw. ϑ_0'' die Seilwinkel und S_0' bzw. S_0'' die Seilspannungen an den Berührungsstellen mit der Rolle, denen dort die Querkräfte T_0' bzw. T_0'' zugehören. Dann ergibt 7) sofort mit $y_0=-r\cos\vartheta_0$ die Spannung an jeder Stelle y, ϑ an, insbesondere für größere Abstände von der Rolle, wo das Seil schon nahezu lotrecht hängt, also $\cos\vartheta\approx 0$ geworden ist,

$$S-S_0=q\left[y+(r+f_0 h)\cos\vartheta_0\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad 9)$$

Andererseits haben wir in diesem Falle für das lotrecht gespannte Seil keine Seitenkraft, so daß also $H=C_1=0$ und daher wegen 3a) und 3b)

$$S=T\operatorname{tg}\vartheta, \qquad S=(qs+C_2)\sin\vartheta \quad \ldots\ldots\ldots \quad 10)$$

wird. Rechnen wir den Bogen s von der Berührungsstelle mit der Rolle, setzen also $s=0$ für $\vartheta=\vartheta_0'$, so ist für die linke Seite der Abb. 201

$$S_0'=T_0'\operatorname{tg}\vartheta_0', \qquad S_0'=C_2\sin\vartheta_0', \quad \ldots\ldots \quad 10a)$$

also

$$S=\left(qs+\frac{S_0'}{\sin\vartheta_0'}\right)\sin\vartheta, \qquad T=\left(qs+\frac{S_0'}{\sin\vartheta_0'}\right)\cos\vartheta \quad \ldots\ldots \quad 10b)$$

Für die Gleichung der Seilkurve erhalten wir aus 4) mit $C_1=0$ und 10a)

$$\left(qs+\frac{S_0'}{\sin\vartheta_0'}\right)\left(1-f_0 h\frac{d\vartheta}{ds}\right)=f_0 hq\operatorname{tg}\vartheta \quad \ldots\ldots \quad 11)$$

und angenähert mit Vernachlässigung von $h:\varrho$ $h\frac{d\vartheta}{ds}$

$$qs+\frac{\sin\vartheta_0'}{S_0'}=f_0 hq\operatorname{tg}\vartheta, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 11a)$$

also mit $s=0$, $\vartheta=\vartheta_0'$

$$S_0'=f_0 hq\frac{\sin^2\vartheta_0'}{\cos\vartheta_0'}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 11b)$$

während sich der Krümmungsarm ϱ_0 an dieser Stelle aus der strengen Gleichung 11) mit $ds = \varrho\, d\vartheta$ berechnet.

Nun ist in Wirklichkeit die Seilspannung S_1 durch das daran hängende Gewicht in einem so großen Abstand gegeben, daß dort also für $s = -s_1$, $\vartheta = 90^0$ gesetzt werden kann, so daß nach der ersten Gleichung 10b)

$$S_1 + q s_1 = \frac{S_0'}{\sin \vartheta_0'} = f_0 h q \operatorname{tg} \vartheta_0' \quad \ldots \ldots \ldots \quad 12)$$

wird. Damit ist dann sowohl ϑ_0' als auch S_0' bestimmt, während die Seilkurve selbst aus 11) abgeleitet werden kann. Die Seilspannung S_1 ruft nun an der Rolle selbst das Moment $S_1 r$ hervor, zu der, da an der Auflaufstelle der Krümmungsarm der Seilkurve nicht mit dem Rollenhalbmesser übereinstimmt, noch nach 4) das Moment $f_0 h S_1$ zur Überwindung der Steifigkeit hinzutritt, so daß sich das Gesamtmoment

$$M_1 = S_1 (r + f_0 h) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 13)$$

ergibt, dem auf der andern Rollenseite ein Moment

$$M_2 = S_2 (r - f_0 h) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 13a)$$

entspricht. Dazu kommt noch das Moment des auf der Rolle lastenden Seilgewichts

$$M_q = \int q r \sin \vartheta \, ds = q r^2 \int_{\vartheta_0'}^{\vartheta_0''} \sin \vartheta \, d\vartheta = q r^2 (\cos \vartheta_0' - \cos \vartheta_0''), \quad . \; . \quad 13b)$$

so daß wir als Gleichgewichtsbedingung der Rolle gegen Drehung $M_1 = M_2 + M_q$, oder

$$S_1 (r + f_0 h) = S_2 (r - f_0 h) + q r^2 (\cos \vartheta_0' - \cos \vartheta_0'') \quad \ldots \ldots \quad 14)$$

an Stelle der ohne Rücksicht auf das Seilgewicht aufgestellten ersten Näherungsformel 2a) erhalten.

3. Beispiel. Haben wir es mit einer Seilkurve zwischen zwei Aufhängepunkten zu tun, wie sie in § 46, 3. Beispiel betrachtet wurde, so ist hier wieder der Seitenzug H unveränderlich und wir erhalten aus 4) mit $C_1 = H$ unter Vernachlässigung von $h : \varrho$

$$q s + C_2 = (H + f_0 h q) \operatorname{tg} \vartheta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 15)$$

Setzen wir wie früher für den Scheitel $\vartheta = 0$, $s = 0$, so verschwindet C und es bleibt:

$$q s = (H + f_0 h q) \operatorname{tg} \vartheta, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 15a)$$

eine Gleichung, die mit derjenigen des vollkommen biegsamen Seiles übereinstimmt, wenn wir nur H durch $H + f_0 h q$ ersetzen. Daraus folgt, daß durch die Steifigkeit nur der Seitenzug, nicht aber die Form der Seilkurve eine Änderung erfährt.

4. Beispiel. Ein Seil von der Länge l wird an einem Ende A vom Boden um y_0 aufgehoben und langsam am Boden entlang geschleift, Abb. 203. Das gehobene Seilstück hat die Länge s_0, dann ist $l - s_0$ der am Boden schleifende Rest, zu dessen Bewegung ein Reibungswiderstand

$$H = f q (l - s_0) \quad . \; . \; . \quad 16)$$

zu überwinden ist, der mit dem Seitenzug übereinstimmt. Rechnen wir den Seilbogen s von der Berührungsstelle mit dem Boden aus, wo $\vartheta = 0$ ist, so folgt aus 4) zunächst $C_2 = 0$; also gilt auch für diesen Fall Gl. 15a). Mit $s = s_0$, $\vartheta = \vartheta_0$, sowie mit 16) wird aber daraus:

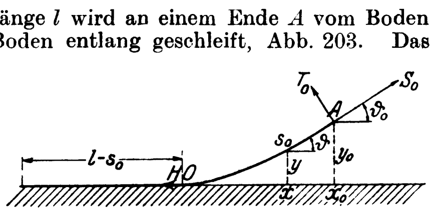

Abb. 203.

$$s_0 = [f (l - s_0) + f_0 h] \operatorname{tg} \vartheta_0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 15b)$$

und, wenn wir bei nur geringer Erhebung y vom Boden gegenüber der Länge s den Seilbogen angenähert mit seinem Grundriß x verwechseln, an Stelle von 15a) wegen $y=0$ für $x=0$, die Parabelgleichung:

$$\operatorname{tg}\vartheta=\frac{dy}{dx}=\frac{qx}{H+f_0hq}; \qquad 2y(H+f_0hq)=qx^2,$$

oder mit 16)

$$2y\,[f(l-s_0)+f_0h]=x^2 \qquad 17)$$

Da nun für $x=x_0\approx s_0$, $y=y_0$ ist, so folgt daraus:

$$2y_0\,[f(l-s_0)+f_0h]=s_0^2 \qquad 17\text{a})$$

$$s_0=-fy_0+\sqrt{f^2y_0^2+2y_0(fl+f_0h)}, \qquad 17\text{b})$$

worin das negative Vorzeichen der Wurzel als bedeutungslos weggelassen ist. Dadurch ist die Länge des aufgehobenen Seilstücks und aus 15b) auch der Endwinkel ϑ_0 bestimmt.

Zur Berechnung der Seilspannung S_0 und der Querkraft an diesem Ende greifen wir auf Gl. 3b) zurück, die mit $C_1=H$, $C_2=0$, übergehen in

$$\left.\begin{aligned} S_0&=qs_0\sin\vartheta_0+H\cos\vartheta_0\\ T_0&=qs_0\cos\vartheta_0-H\sin\vartheta_0\end{aligned}\right\}, \qquad 18)$$

während sich die Auflagerkraft am gehobenen Ende nach 3) zu $V_0=qs_0$ berechnet.

§ 54. Das Gleichgewicht lockerer Massen. Unter einer lockeren Masse verstehen wir einen Haufen unregelmäßig gestalteter, an sich starrer Körper, deren Abmessungen klein gegen diejenigen der Gesamtmasse sind. Da die zwischen den Einzelkörpern, den sog. Körnern, wirkende Anziehung nach den Lehren über die allgemeine Schwere vernachlässigt werden kann, erfolgt die Trennung eines trockenen, d. h. nicht benetzten Kornes von der Gesamtmasse senkrecht zur Oberfläche ohne Widerstand. Daher ist die lockere Masse nicht imstande, Zugkräfte aufzunehmen, und ihr Gleichgewichtszustand ist nur von Druckkräften bedingt, welche ihrerseits an den Berührungsstellen der Körner Reibungswiderstände auslösen. Daß es sich hierbei nur um die Gleitreibung handelt, zeigt sich sofort, wenn die Neigung der Oberfläche gegen die Wagerechte einen bestimmten Betrag, den sog. Böschungswinkel, überschreitet. Alsdann geraten die Teile der Gesamtmasse, welche sich über der um den Böschungswinkel geneigten Ebene durch den Fußpunkt befinden, in Bewegung, die sich so lange fortsetzt, bis die neue Oberfläche den Böschungswinkel erreicht hat. Ein alsdann aufgescheuchtes Korn rutscht auf dieser Oberfläche gleichförmig genau so ab wie ein Körper auf der um den Reibungswinkel geneigten schiefen Ebene, so daß der Böschungswinkel mit dem Reibungswinkel der Gesamtmasse übereinstimmt. Es sei gleich hier bemerkt, daß im Falle der Erfüllung der obigen Bedingung der Böschungswinkel nahezu unabhängig vom Stoffe der Körner ist, der Haufen selbst also eine ganz verschiedenartige Zusammensetzung haben kann, wie man das an Geröllhalden im Gebirge beobachten kann. Man findet nämlich für diese, ebenso auch für Steinhaufen, Schotter bis hinab zu feinem Dünensand, eine Reibungsziffer von etwa $f=0{,}75$ entsprechend einem

Reibungswinkel von $\varphi = 36^0\,30'$. Eine Abhängigkeit desselben von der Korngröße und dem Stoffe macht sich erst bei der Benetzung oder völligen Durchfeuchtung der Gesamtmasse geltend, die wir aber hier ausschließen wollen, zumal damit auch Zugkräfte zwischen den Körnern verbunden sind. Andererseits nimmt die Reibungsziffer und der Böschungswinkel erheblich ab, wenn der Haufen aus völlig oder nahezu gleichgestalteten und gleich großen Körnern besteht, also z. B. für Getreide und Kugelhaufen (Bleischrot).

Wir betrachten nunmehr eine lockere Masse, die auf einer wagerechten Ebene überall gleich hoch aufgeschüttet und einseitig durch eine glatte lotrechte Wand begrenzt wird. Alsdann verteilt sich das Gewicht G der Gesamtmasse gleichförmig auf die Unterlage F qm, woraus bei einem Raumgewicht von γ kg/m³ und einer Schütthöhe h sich mit $G = \gamma h F$ ein lotrechter Flächendruck

$$q = \frac{G}{F} = \gamma h \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 1)$$

berechnet, der sich in der Tiefe $y < h$ unter der wagerechten Oberfläche auf

$$q_y = \gamma y \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 1\,a)$$

ermäßigt.

Um den **Druck auf die lotrechte Seitenwand** zu ermitteln, erinnern wir uns der im 2. Beispiel § 30 ermittelten wagerechten Kraft H, unter deren Wirkung ein Körper vom Gewichte G auf der schiefen Ebene von der Neigung φ mit dem Reibungswinkel φ_0 im Gleichgewichte verharrt. Wir fanden dort die Ungleichung

$$\operatorname{tg}(\varphi - \varphi_0) < \frac{H}{G} < \operatorname{tg}(\varphi + \varphi_0) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 2)$$

mit zwei Grenzwerten des Verhältnisses $H : G$, deren links stehender kleinerer den Abwärtsgang verhinderte, während der größere rechts stehende gerade zur Einleitung der Aufwärtsbewegung genügte. Denken wir uns nun die schiefe Ebene durch den Fußpunkt O der Seitenwand nach Abb. 204 gelegt, so stellt der zwischen beiden und der Oberfläche befindliche Keil, dessen Breite wie die der ganzen Schüttung senkrecht zur Bildebene b sein möge, den auf der schiefen Ebene befindlichen Körper vom Gewicht

$$G = \frac{\gamma h^2 b}{2 \operatorname{tg} \varphi} \quad \ldots \ldots \quad 3)$$

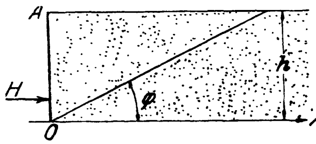

Abb. 204.

dar, den wir uns im Gleichgewichtszustand, ohne daran etwas zu ändern, ebenso wie die übrige Masse erstarrt denken können. Damit aber wird aus 2)

$$\frac{\operatorname{tg}(\varphi - \varphi_0)}{\operatorname{tg}\varphi} < \frac{2H}{\gamma h^2 b} < \frac{\operatorname{tg}(\varphi + \varphi_0)}{\operatorname{tg}\varphi}, \quad \ldots \ldots \quad 2\,a)$$

worin φ zunächst noch willkürlich zu sein scheint. Ein Abwärtsgleiten findet aber offenbar dann statt, wenn das in der Mitte stehende

Verhältnis gerade mit dem Höchstwert der linken Seite, ein Aufwärtsdrücken, wenn es mit dem Kleinstwert der rechten Seite übereinstimmt. Die Bedingung dafür ist aber

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\operatorname{tg}(\varphi \mp \varphi_0)}{\operatorname{tg}\varphi}\right) = 0, \quad \text{oder} \quad \sin 2\varphi = \sin 2(\varphi \mp \varphi_0),$$

d. h.

$$2\varphi + 2(\varphi \mp \varphi_0) = \pi$$

und liefert die sog. Gleitwinkel

$$\varphi_{12} = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\varphi_0}{2}, \qquad \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\pi}{2}, \qquad \varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_0 \cdot \quad . \quad . \quad 4)$$

Mit ihnen ergeben sich aus 2a) die beiden Grenzwerte

$$H_1 = \frac{\gamma h^2 b}{2}\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_0}{2}\right), \qquad H_2 = \frac{\gamma h^2 b}{2}\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2}\right), \quad . \quad 5)$$

von denen der erstere H_1 ausreicht, um durch die Wand das Abgleiten zu verhindern und darum vom Standpunkte der lockeren Massen aus als aktiver Erddruck bezeichnet wird, während der passive Erddruck H_2 gerade zur Aufwärtsbewegung des Erdkeils genügt. Beide Fälle unterscheiden sich also durch die Neigungswinkel der bewegten Erdkeile, Abb. 205. Ist die Wand von unten bis zur Tiefe y abgestützt, so entfällt auf den oberen Teil nur ein Erddruck von

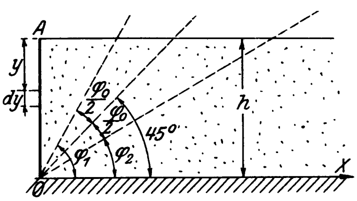

Abb. 205.

$$H = \frac{\gamma y^2 b}{2}\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{\varphi_0}{2}\right) = \frac{\gamma y^2 b}{2}\beta, \quad 5a)$$

also auf einen Flächenstreifen von der Tiefe dy nur $dH = \gamma y b\, dy\, \beta$, woraus sich der wagerechte Flächendruck im Grenzfall zu

$$q_x = \frac{dH}{b\,dy} = \gamma y \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{\varphi_0}{2}\right) = \gamma y \beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5b)$$

berechnet. Das Drehmoment von H in bezug auf die Oberkante der Wand ist alsdann

$$M = \int_0^h y\,dH = \gamma b \beta \int_0^h y^2\,dy = \frac{\gamma b h^3}{3}\beta, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6)$$

also mit 5a) für $y = h$

$$M = \tfrac{2}{3} h H = y_0 H, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6a)$$

so daß der Angriffspunkt des Erddruckes in $^2/_3$ der Tiefe liegt. Ferner hat man nach 4)

$$\operatorname{tg}\varphi_{12} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{\varphi_0}{2}\right) = \frac{1 \pm \operatorname{tg}\frac{\varphi_0}{2}}{1 \mp \operatorname{tg}\frac{\varphi_0}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4a)$$

$$\text{und}\quad \operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\varphi_0}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\varphi_0}{2}}, \qquad \operatorname{tg}\frac{\varphi_0}{2} = -\operatorname{ctg}\varphi_0 \pm \sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\varphi_0}. \quad 4\text{b})$$

Ist nun $f = \operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{3}{4}$, so folgt $\operatorname{tg}\frac{\varphi_0}{2} = \frac{1}{3}$ oder $= -3$, also

$$\left.\begin{array}{ll} \operatorname{tg}\varphi_1 = 2, & \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{1}{2} \\ \varphi_1 = 63^0\,30', & \varphi_2 = 26^0\,30' \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4\text{c})$$

Wir sehen also, daß der aktive Erddruck einen Keil mit sehr steiler Gleitfläche, deren Neigung jedenfalls nicht unter den Böschungswinkel sinken kann, am Abrutschen verhindert, während der passive Erddruck einen Keil mit wenig gegen die Wagerechte geneigter Gleitfläche emporzuschieben strebt. Bemerkt sei noch, daß für verschwindende Reibung, also

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi}{4}, \qquad H = \frac{\gamma h^2 b}{2}, \qquad q_x = q_y = \gamma y \quad . \quad . \quad . \quad 7)$$

wird. Die einzelnen Körner der lockeren Masse sind alsdann ohne Widerstand gegeneinander verschiebbar, die Oberfläche im Gleichgewichtszustande wird zu einer wagerechten Ebene, und der nur mit der Tiefe unter derselben wachsende Flächendruck ist unabhängig von der Richtung. Einen Körper mit diesen Eigenschaften bezeichnen wir als eine Flüssigkeit, die als Sonderfall einer lockeren Masse erscheint.

Unterliegt die lockere Masse kleinen Erschütterungen, wie sie beim Auffüllen unvermeidlich sind, so wechseln auch die Berührungsstellen der Körner unter zeitweiser Aufhebung der Reibung. In diesem Zustande nähert sich die Masse dem Verhältnis einer Flüssigkeit, übt wie diese einen allseitig gleichen Flächendruck aus und ist bestrebt, eine Gleichgewichtslage mit wagerechter Oberfläche einzunehmen. Davon kann man sich leicht durch Klopfen an der Wand eines mit Sand gefüllten Gefäßes überzeugen.

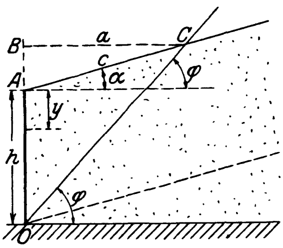

Abb. 206.

Ist die ebene Oberfläche der lockeren Massen gegen die Wagerechte um einen Winkel $\alpha < \varphi_0$ geneigt, so berechnet sich aus Abb. 206 das Gewicht des hinter der Wand befindlichen Keiles mit der Neigung $\varphi > \alpha$ mit $BC = a$, $AC = c$ zu

$$G = \frac{\gamma h a b}{2} = \frac{\gamma h b c \cos\alpha}{2} = \frac{\gamma h^2 b}{2}\,\frac{\cos\alpha\cos\varphi}{\sin(\varphi-\alpha)}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8)$$

womit die Ungleichung 2) übergeht in

$$\frac{\operatorname{tg}(\varphi-\varphi_0)\cos\varphi}{\sin(\varphi-\alpha)} < \frac{2H}{\gamma h^2 b\cos\alpha} < \frac{\operatorname{tg}(\varphi+\varphi_0)\cos\varphi}{\sin(\varphi-\alpha)} \quad . \quad . \quad . \quad 2\text{b})$$

Zur Bestimmung der Grenzwerte haben wir alsdann aus

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\operatorname{tg}(\varphi \mp \varphi_0)\cos\varphi}{\sin(\varphi-\alpha)}\right)=\frac{d}{d\varphi}\left[\frac{\operatorname{tg}(\varphi \mp \varphi_0)}{\operatorname{tg}\varphi\cos\alpha-\sin\alpha}\right]=0$$

$$(\operatorname{tg}\varphi\cos\alpha-\sin\alpha)\cos^2\varphi=\operatorname{tg}(\varphi\mp\varphi_0)\cos^2(\varphi\mp\varphi_0)\cos\alpha \quad . \quad . \quad 9)$$

oder

$$\sin(2\varphi-\alpha)-\sin 2(\varphi\mp\varphi_0)\cos\alpha=\sin\alpha, \quad . \quad . \quad . \quad 9\text{a})$$

woraus sich die beiden Gleitwinkel des Keiles für den aktiven und passiven Erddruck berechnen lassen.

Besonders einfach gestaltet sich das Ergebnis bei einer unter dem Reibungswinkel geneigten Oberfläche mit $\alpha=\varphi_0$, also

$$\sin(2\varphi-\varphi_0)-\sin 2(\varphi-\varphi_0)\cos\varphi_0=\sin\varphi_0 \quad . \quad . \quad . \quad 9\text{b})$$

für den aktiven Erddruck, dem das obere Vorzeichen entspricht. Dann wird nämlich diese Gleichung erfüllt für $\varphi=\varphi_0$, d. h. für eine der Böschung parallele Gleitfläche durch den Fußpunkt O, und wir erhalten aus 2b) für den Grenzfall

$$H_1=\frac{\gamma h^2 b}{2}\cos^2\varphi_0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 10)$$

sowie für die Tiefe y unter A

$$H_1=\frac{\gamma y^2 b}{2}\cos^2\varphi_0, \qquad q_x=\frac{dH}{b\,dy}=\gamma y\cos^2\varphi_0. \quad . \quad . \quad 10\text{a})$$

während der Ausdruck für den passiven Erddruck H_2 etwas verwickelter ausfällt. Setzt man hierfür in 9) mit $\operatorname{tg}(\varphi+\varphi_0)$, $\operatorname{tg}\varphi=u$, $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\varphi_0=f$, so erhält man nach einigen Umformungen

$$u^2+2uf=2+f^2, \quad \text{also} \quad u=\operatorname{tg}\varphi=-f+\sqrt{2(1+f^2)}, \quad 9\text{c})$$

da das negative Vorzeichen der Wurzel keinen Sinn hat. Damit aber ergibt sich nach Einsetzen die rechte Seite von 2b) für den Grenzwert des passiven Erddruckes

$$H_2=\frac{\gamma h^2 b}{2\left[1+3f^2-2f\sqrt{2(1+f^2)}\right]}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 11)$$

der für $f=1$, oder $\varphi_0=\frac{\pi}{4}$, wie schon aus 2b) hervorgeht, unendlich wird, so daß ein solcher Grenzwert nur dann besteht, wenn im Einklang mit der Erfahrung der Böschungswinkel $\varphi_0<45^0$ ist. Der entsprechende Wert für die bis zur Tiefe y von unten abgestützte Wand, sowie der zugehörige Flächendruck q berechnet sich aus 11) genau wie dies in 10a) für den aktiven Erddruck geschehen ist. In beiden Fällen liegt, wie der Vergleich mit 6a) lehrt, der Angriffspunkt der Kraft in $^2/_3$ der Tiefe von A aus gerechnet.

Es fragt sich nunmehr noch, welchen Wert der lotrechte Flächendruck bei geneigter Oberfläche im Innern und am Boden der lockeren Masse annimmt. Da er an der Oberfläche selbst verschwindet, so kommt eine gleichförmige Verteilung des über einer wagerechten Ebene lagernden Haufengewichts auf diese Ebene nicht in Frage und es bleibt nur noch der Ansatz 1a) übrig, wonach dieser Druck dem lotrechten Abstand von der Oberfläche verhältnisgleich sein wird.

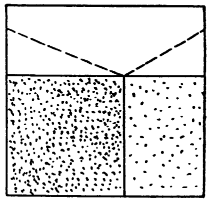

Abb. 207.

1. Beispiel. In einem Kasten, Abb. 207, seien zwei Gattungen lockerer Massen zu beiden Seiten einer beweglichen Zwischenwand enthalten. Ist dann der aktive Erddruck der einen größer als der passive der andern, so wird die Wand nach der zweiten Masse verschoben. So hat man für die ebene Schüttung in $h = 1$ m Höhe, $b = 1$ m Breite

Schrot	$\gamma = 6750$ kg/m³,	$\varphi_0 = 25^0$,	$f = 0{,}47$,	$H_1 = 1350$ kg,	$H_2 = 8320$ kg
Sand	$\gamma = 1800$ „	$\varphi_0 = 36^0\,50'$,	$f = 0{,}75$,	$H_1 = 225$ „	$H_2 = 1800$ „
Getreide	$\gamma = 750$ „	$\varphi_0 = 30^0$,	$f = 0{,}58$,	$H_1 = 125$ „	$H_2 = 1125$ „
Wasser	$\gamma = 1000$ „	$\varphi_0 = 0^0$,	$f = 0{,}0$	$H_1 = 500$ „	$H_2 = 500$ „

Es würde hiernach Bleischrot auf der einen Seite der Wand diese gegen Getreide oder Wasser verschieben.

Bei schräger gegen die bewegliche Wand unter dem Böschungswinkel abfallender Schüttung hatte man für dieselben Körper nach Gl. 10) und 11)

Schrot	$H_1 = 2770$ kg,	$H_2 = 17\,680$ kg
Sand	$H_1 = 576$ „	$H_2 = 26\,500$ „
Getreide	$H_1 = 380$ „	$H_2 = 3410$ „
Wasser	$H_1 = 500$ „	$H_2 = 500$ „

so daß in diesem Falle das Gleichgewicht der lockeren Massen gewahrt ist, nicht aber dasjenige von Schrot und Sand gegen Wasser.

2. Beispiel. Trägt die lockere Masse auf ihrer Oberfläche eine gleichförmig verteilte Last von der Höhe h_1, Abb. 208, und dem Raumgewicht γ_1, so ist das von der Wand mit der Höhe h gestützte Gewicht des Keils und der darauf liegenden Last

$$G = b\left(\frac{\gamma h^2}{2} + \gamma_1 h_1 h\right)\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}, \quad . \; . \quad 12)$$

also sind die Grenzwerte des passiven und aktiven Erddrucks gegeben durch die Scheitelwerte von

$$H = b\left(\frac{\gamma h^2}{2} + \gamma_1 h_1 h\right)\frac{\operatorname{tg}(\varphi \mp \varphi_0)}{\operatorname{tg}\varphi}, \quad 13)$$

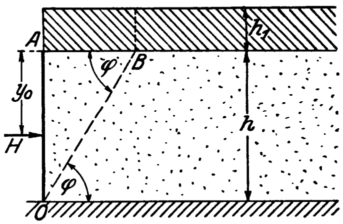

Abb. 208.

d. h. wie oben:

$$H_{12} = b\left(\frac{\gamma h^2}{2} + \gamma_1 h_1 h\right)\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{\varphi_0}{2}\right) = b\left(\frac{\gamma h^2}{2} + \gamma_1 h_1 h\right)\beta. \; . \; . \quad 13\text{a})$$

Der Tiefe y unter A entspricht dann der Wert:

$$H_{12} = b\left(\frac{\gamma y^2}{2} + \gamma_1 h_1 y\right)\beta, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 13\text{b})$$

also der seitliche Flächendruck:

$$q_x = \frac{dH}{b\,dy} = (\gamma y + \gamma_1 h_1)\beta, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 14)$$

woraus sich das Moment in bezug auf A zu

$$M = b\int_0^h q_x y\,dy = b\left(\frac{\gamma h^3}{3} + \frac{\gamma_1 h_1 h^2}{2}\right)\beta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 15)$$

und die Tiefe des Angriffspunktes unter A aus

$$y_0 = \frac{M}{H} = \frac{\frac{\gamma}{3} + \frac{\gamma_1}{2}\frac{h_1}{h}}{\frac{\gamma}{2} + \gamma_1 \frac{h_1}{h}} h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 14a)$$

ergibt. Für $h_1 = 0$ wird hieraus wieder $y_0 = \frac{2}{3} h$ im Einklang mit 6a), während für $h_1 = \infty$, $y_0 = \frac{h}{2}$ folgt. Die Auflast bedingt also eine höhere Lage des Angriffspunktes.

§ 55. Die Standfestigkeit der Futter- und Staumauern. Tritt an Stelle der im letzten Abschnitt betrachteten glatten Wand zum Abstützen einer lockeren Masse eine sog. Futtermauer, so kann wegen deren rauher Oberfläche die Reibung R zwischen beiden nicht mehr vernachlässigt werden. Da diese in die zunächst lotrecht angenommene Innenfläche der Mauer fällt, so besteht im Grenzfalle des Abrutschens des Keiles vom Gewichte G mit dem Normaldruck N und der Reibungsziffer $f = \operatorname{tg} \varphi_0$ der lockeren Masse an der um φ geneigten Gleitebene nach Abb. 209 die Gleichgewichtsbedingung

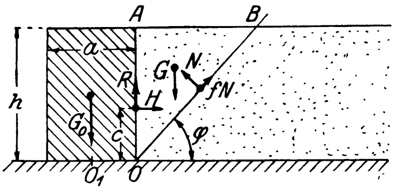

Abb. 209.

$$\left.\begin{aligned} H + f N \cos\varphi - N \sin\varphi &= 0 \\ R + f N \sin\varphi + N \cos\varphi &= G \end{aligned}\right\}, \quad 1)$$

Setzen wir darin die Reibung der Schuttmasse an der Mauer gleich der Reibung im Innern, also

$$R = f H = H \operatorname{tg} \varphi_0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1a)$$

so liefert die Ausschaltung von R und N

$$\frac{H}{G} = \frac{\sin\varphi - f \cos\varphi}{\cos\varphi (1 - f^2) + 2 f \sin\varphi} = \frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi_0}{1 + \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg} 2\varphi_0} \frac{\cos^2\varphi_0}{\cos 2\varphi_0}, \quad . \quad . \quad 2)$$

oder mit

$$G = \frac{\gamma h^2 b}{2 \operatorname{tg}\varphi}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

für wagerechte Oberfläche:

$$H = \frac{\gamma h^2 b}{2} \frac{\cos^2\varphi_0}{\cos 2\varphi_0} \frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi_0}{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}^2\varphi \operatorname{tg} 2\varphi_0}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

Der Höchstwert dieses Ausdrucks, dem auch ein Höchstwert von R nach 1a) zugeordnet ist, stellt dann den aktiven wagerechten Erddruck dar, dem die Mauer standhalten muß. Er ergibt sich aus dem Verschwinden der Ableitung von 4) nach $\operatorname{tg}\varphi$, d. h. aus

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi_0}{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}^2\varphi \operatorname{tg} 2\varphi_0} = \frac{1}{1 + 2 \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg} 2\varphi_0},$$

oder

$$\operatorname{tg}^2\varphi \operatorname{tg} 2\varphi_0 - 2 \operatorname{tg}\varphi_0 \operatorname{tg} 2\varphi_0 \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\varphi_0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4a)$$

oder nach Unterdrücken des hier bedeutungslosen negativen Vorzeichens der Wurzel für

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\varphi_0 + \sqrt{\operatorname{tg}^2\varphi_0 + \frac{\operatorname{tg}\varphi_0}{\operatorname{tg}2\varphi_0}} = f + \sqrt{\frac{1+f^2}{2}} \quad . \quad . \quad 4\text{b})$$

Nun ist aber hierfür wegen 4a)

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi_0}{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}^2\varphi\operatorname{tg}2\varphi_0} = \frac{\operatorname{tg}\varphi_0}{\operatorname{tg}^2\varphi\operatorname{tg}2\varphi_0},$$

folglich nach Einsetzen in 4)

$$H = \frac{\gamma h^2 b}{4\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{\gamma h^2 b}{4\left[f + \sqrt{\frac{1+f^2}{2}}\right]^2} = \frac{\gamma h^2 b}{2}\beta, \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

womit dann auch R nach 1a) gegeben ist.

Ist dagegen die Schüttung hinter der Mauer um den Böschungswinkel geneigt, so haben wir für das Gewicht des Keiles nach Gl. 8), § 54

$$G = \frac{\gamma h^2 b}{2}\frac{\cos\varphi_0\cos\varphi}{\sin(\varphi-\varphi_0)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6)$$

Nun können wir an Stelle von 2) auch schreiben:

$$\frac{H}{G} = \frac{\sin(\varphi-\varphi_0)\cos\varphi_0}{\cos(\varphi-2\varphi_0)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2\text{a})$$

oder nach Einsetzen von 6)

$$H = \frac{\gamma h^2 b}{2}\frac{\cos^2\varphi_0\cos\varphi}{\cos(\varphi-2\varphi_0)} = \frac{\gamma h^2 b}{2}\frac{\cos^2\varphi_0}{\cos 2\varphi_0 + \operatorname{tg}\varphi\sin 2\varphi_0} \quad . \quad . \quad 7)$$

Dieser Ausdruck wächst mit abnehmendem $\operatorname{tg}\varphi$, das aber, wenn Gleiten überhaupt möglich sein soll, nicht unter $\operatorname{tg}\varphi_0 = f$ sinken kann. Also ist in diesem Fall für $\varphi = \varphi_0$ der Höchstwert des aktiven wagerechten Erddruckes

$$H = \frac{\gamma h^2 b}{2}\cos^2\varphi_0 = \frac{\gamma h^2 b}{2}\frac{1}{1+f^2} = \frac{\gamma h^2 b}{2}\beta. \quad . \quad . \quad . \quad 7\text{a})$$

Da sowohl der Seitendruck H als auch die Reibung R in allen Fällen mit dem Quadrat der Tiefe wachsen, so liegt, wie schon im vorigen Abschnitt Gl. 6a) gezeigt wurde, deren Angriffspunkt in der Tiefe $y_0 = \frac{2}{3}h_0$ unter der Oberkante A oder in der Höhe $c = \frac{1}{3}h$ über O, wodurch ein Moment bei der um die Mitte O_1 der Mauersohle im Betrage von

$$M = Hc - R\frac{a}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8)$$

bedingt ist, wenn a die Mauerdicke bedeutet. Diesem Moment wirkt ein solches der Spannungen p in der Mauersohle entgegen, die wir uns nach Abb. 210 um den Drehpunkt O_1 linear verteilt denken können, so zwar, daß mit einem Höchstwert p_1

$$p = 2p_1\frac{x}{a}, \qquad M = b\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} p\,x\,dx = \frac{2p_1}{a}b\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} x^2\,dx = \frac{p_1 a^2 b}{6} \quad . \quad 9)$$

zu setzen ist. Andererseits ist die Sohle durch das Gewicht $G_0 = \gamma_0 a b h$ der Mauer und durch die Reibungskraft R belastet, woraus ein gleichförmig verteilter Flächendruck

$$p_0 = \frac{G_0 + R}{a b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 10)$$

hervorgeht. Damit nun in der Sohle nirgends Zugspannungen auftreten, welche von der Mauer ihrer Fugen wegen nicht aufgenommen werden können, so muß $p_0 > p_1$, oder

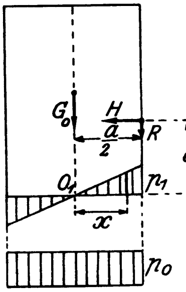

Abb. 210.

$$M = Hc - R\frac{a}{2} < (G_0 + R)\frac{a}{6},$$

oder
$$Hc - \frac{2}{3} R a < G_0 \frac{a}{6}. \quad \ldots\ldots \quad 11)$$

Außerdem aber darf die Mauer nicht von der Seitenkraft H weggeschoben werden, so daß mit einer Reibungsziffer f_0 derselben an der Sohle

$$H < (G_0 + R) f_0, \quad \text{oder} \quad H - f_0 R < G_0 f_0 \quad 12)$$

sein muß. Schreiben wir in diesen Formeln unter Einführung des Raumgewichts γ_0 des Mauerwerks

$$H = \frac{\gamma \beta b h^2}{2}, \qquad R = f H, \qquad G_0 = \gamma_0 a b h, \qquad \frac{\gamma \beta}{\gamma_0} = \varepsilon, \quad 13)$$

so lauten die beiden Bedingungen für die Standfestigkeit der Futtermauer mit $c = \frac{h}{3}$

$$\left(\frac{a}{h}\right)^2 > \varepsilon \left(1 - 2 f \frac{a}{h}\right), \qquad \frac{a}{h} > \varepsilon \frac{1 - f_0 f}{2 f_0}, \quad \ldots \quad 14)$$

deren erste auf

$$\frac{a}{h} > -\varepsilon f + \sqrt{\varepsilon^2 f^2 + \varepsilon} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 14\text{a})$$

führt. Vernachlässigen wir dann noch die Reibung R auf der Innenseite der Mauer, die damit, wie in § 54 als völlig glatt angesehen wird, so vereinfachen sich diese Bedingungen mit $f = 0$ noch in

$$\left(\frac{a}{h}\right)^2 > \varepsilon, \qquad \frac{a}{h} > \frac{\varepsilon}{2 f_0}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 14\text{b})$$

durch deren Erfüllung eine noch höhere Standfestigkeit wie nach 14) verbürgt wird.

Der letzte Fall trifft dann streng zu, wenn an Stelle der lockeren Masse eine Flüssigkeit tritt; alsdann bezeichnet man die Mauer als Staumauer. Jedenfalls lehren diese Ergebnisse, daß die gleichmäßige Stärke einer Futter- oder Staumauer im geraden Verhältnis zur Höhe der abzustützenden Masse wächst. Daraus folgt ohne weiteres, daß die Mauer unbeschadet ihrer Standfestigkeit am oberen Ende schwächer gehalten werden kann als am unteren, woraus sich eine erhebliche Ersparnis an Baustoff und Herstellungskosten ergibt. Zur Ermittlung der hierfür zweckmäßigsten Mauerform bezeichnen wir wieder mit p_1 die größte Spannung in einem wagerechten Schnitt von der Dicke x und der Tiefe y. Dann ergibt sich, wenn wir wieder eine lineare Spannungsverteilung voraussetzen, das Moment dieser Spannungen aus 9) nach Ersatz von a durch x zu

$$M = \frac{p_1 x^2 b}{6}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 9\text{a})$$

welches unter Vernachlässigung der Wandreibung R durch das Moment des Seitenschubes H, dessen Richtungslinie um $\frac{y}{3}$ über dem betrachteten Querschnitt liegt, also durch

$$M = H\frac{y}{3} = \frac{\gamma \beta b}{6} y^3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 8\text{a})$$

geweckt wird. Mithin ist im Grenzfalle

$$\gamma \beta y^3 = p_1 x^2. \quad \ldots\ldots\ldots \quad 15)$$

Andererseits ruft bei veränderlicher Mauerstärke x das darüber lagernde Gewicht G eine gleichförmige Druckspannung p_0 derart hervor, daß $G = p_0 x b$ oder, da nach Abb. 211 $dG = \gamma_0 b x \, dy$ ist,

$$dG = b\, d(p_0 x) = \gamma_0 b x \, dy \quad \ldots \quad 16)$$

Soll diese Druckspannung im Grenzfalle gerade die höchste Zugspannung ausgleichen, so ist mit $p_0 = p_1$ und der Belastung der Längeneinheit der Mauer

$$\frac{G}{b} = q = p_1 x, \quad \ldots\ldots \quad 17)$$

$$dq = d(p_1 x) = \gamma_0 x \, dy, \quad \ldots \quad 17\text{a})$$

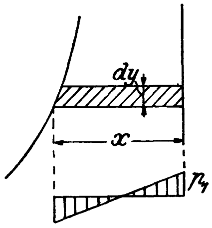

Abb. 211.

während wir nach Einführung von 17) in 15) erhalten:

$$\gamma \beta y^3 = x q. \quad \ldots\ldots\ldots \quad 15\text{a})$$

Die Ausschaltung von x aus den letzten beiden Formeln ergibt sodann

$$q \, dq = \gamma \gamma_0 \beta y^3 \, dy,$$

oder integriert zwischen den Grenzen 0 und y entsprechend q_0 und q

$$q^2 - q_0^2 = \frac{\gamma \gamma_0 \beta y^4}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 18)$$

also mit 15a)

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{2 \gamma^2 \beta^2 y^4}{\gamma \gamma_0 \beta y^4 + 2 q_0^2}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad 19)$$

Setzen wir darin

$$\frac{\gamma \beta}{\gamma_0} = \varepsilon, \qquad \frac{2 q_0^2}{\gamma_0^2} = y_0^4, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 20)$$

so folgt:

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{2 \varepsilon^2 y^4}{\varepsilon y^4 + y_0^4}, \qquad \frac{dx}{dy} = y^2 \sqrt{2 \varepsilon^2} \, \frac{\varepsilon y^4 + 3 y_0^3}{(\varepsilon y^4 + y_0^4)^{\frac{3}{2}}}. \quad \ldots \quad 21)$$

Das Ergebnis ist die in Abb. 212 dargestellte Kurve, die im Anfangspunkte $x = 0$, $y = 0$ mit lotrechter Tangente ansetzt, sich der schrägen Geraden AC

$$x = y\sqrt{2\,\varepsilon^2} \quad \text{. . . . .} \quad 21\text{a)}$$

asymptotisch nähert und mit der Senkrechten durch A den Aufriß der Staumauer begrenzt. Wegen der Spitze in A, welche einen unendlich großen Flächendruck durch die Auflast bedingen würde, ist diese Form indessen ebensowenig brauchbar wie das Dreieck AOC zwischen dem Lote AO und der Geraden AC, Gl. 21a), in welche die gefundene Kurve 21) für $q_0 = 0$, d. h. beim Wegfall der Auflast, ausartet. Die Kurve der Mauer muß schon wegen der auftretenden Schwankungen des Flüssigkeitsspiegels über diesen hinausragen, und um begehbar zu sein, eine gewisse Breite $AD = a_0$ besitzen, wodurch eben die Auflast q_0 bedingt ist. Die Verteilung derselben auf die Mauer wird alsdann durch ine in Abb. 212 gestrichelte Kurve erreicht, die in D lotrecht beginnt und sich der Geraden AC nach Art einer Hyperbel asymptotisch nähert. Dadurch wird einerseits die errechnete Mauerdicke x etwas vergrößert und folglich die Spannung p_1 vermindert, andererseits aber auch die gleichförmige Flächenbelastung p_0 erhöht, so daß für die neue Form die Ungleichung $p_0 > p_1$, oder

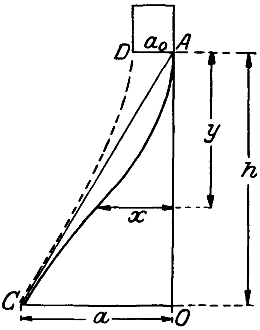

Abb. 212.

$$q > \frac{\gamma\,\beta\,y^2}{x} \quad \text{. . . . .} \quad 22)$$

zur Vermeidung von Zugspannungen im Mauerwerk sicher erfüllt ist. Das wird noch gefördert durch eine in der Praxis häufig vorgenommene Abschrägung der Wasserseite der Staumauer, wodurch eine lotrechte Belastung derselben durch das Wasser bedingt ist. Rechnen wir für die Standfestigkeit gegen Verschieben nur das Gewicht des Grunddreiecks OAC, so ist bei einer Höhe $OA = h$ und einer Grundlinie $OC = a$ wegen 21a) $a:h = \sqrt{2\,\varepsilon^2}$

$$H = \frac{\gamma\,h^2\,b}{2}, \qquad G_0 = \frac{\gamma_0\,a\,h\,b}{2} = \frac{\gamma_0\,h^2\,b}{2}\sqrt{2\,\varepsilon^2},$$

also muß sein

$$\gamma < f_0\,\gamma_0\sqrt{2\,\varepsilon^2} \quad \text{. . . . .} \quad 23)$$

Durch eine Auflast wird die Standfestigkeit nur erhöht, so daß sie bei Erfüllung von 23) völlig gesichert erscheint.

1. Beispiel. Haben wir es mit einer Masse zu tun, für welche $f = \operatorname{tg}\varphi = 0{,}75$ ist, so erhalten wir

a) für wagerechte Schüttung nach Gl. 5) $\beta = 0{,}186$,

b) für Schüttung im Böschungswinkel Gl. 7a) $\beta = 0{,}64$,

mit $\gamma = \gamma_0 = 1800$ kg/m³, $f = f_0$ also $\varepsilon = \beta$.

Damit erhalten wir für die Standfestigkeit der gleich starken Futtermauer die Bedingungen nach Gl. 14), 14a), 14b)

$$\begin{array}{llll}
\text{a) mit Wandreibung} & \frac{a}{h} > 0{,}32, & & \frac{a}{h} > 0{,}054, \\
\quad\text{ohne Wandreibung} & \frac{a}{h} > 0{,}43, & & \frac{a}{h} > 0{,}125, \\
\text{b) mit Wandreibung} & \frac{a}{h} > 0{,}45, & & \frac{a}{h} > 0{,}19, \\
\quad\text{ohne Wandreibung} & \frac{a}{h} > 0{,}8, & & \frac{a}{h} > 0{,}427,
\end{array}$$

c) für eine gleichstarke Staumauer gegen Wasserdruck ist mit $\gamma = 1000$ kg/m³, $\beta = 1$, $\varepsilon = 1:1{,}8 = 0,565$, also mit $f_0 = 0{,}75$

$$\frac{a}{h} > \frac{\sqrt{5}}{3} = 0{,}745, \qquad \frac{a}{h} > 0{,}377.$$

Daraus erhellt, daß die Mauerstärke im allgemeinen durch die Unterdrückung der Zugspannungen bedingt ist, während die Standfestigkeit gegen Fortschieben zu kleine Werte von $a:h$ liefert. Weiter erkennt man den überaus ungünstigen Einfluß der schrägen Schüttung, die eine viel größere Oberfläche bedingt als die wagerechte Oberfläche.

2. Beispiel. Für eine abgeschrägte Staumauer gegen Wasserdruck nach Abb. 212 aus Granit ist $\gamma_0 = 2500$ kg/m³, also $\beta = 1$, $\varepsilon = \gamma : \gamma_0 = 1:2{,}5 = 0{,}4$. Daher hat die schräge Vorderfläche die Gleichung 21a)

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{h} = \sqrt{0{,}32} \approx 0{,}565,$$

wenn Zugspannungen im Mauerwerk ausgeschlossen sein sollen. Daraus folgt ein Flächendruck an der Grundlinie

$$p_0 = \frac{G_0}{ab} = \frac{\gamma_0 h}{2},$$

also für eine Stauhöhe von $h = 20$ m, $p_0 = 25\,000$ kg/m² $= 2{,}5$ kg/cm², während die Bedingung 23) gegen Fortschieben, nämlich $1000 < 0{,}75 \cdot 2500 \cdot 0{,}565 = 1062$ ersichtlich erfüllt ist und durch eine Auflast nur noch verbessert wird, ohne daß der Flächendruck am Boden eine erhebliche Steigerung erfährt.

§ 56. Das Gleichgewicht feuchter Erde. Feuchtet man eine feinkörnige Masse etwas an, so setzt sie einer Verschiebung ihrer Bestandteile gegeneinander auch ohne merkbare Belastung einen Widerstand entgegen, der wie die Reibung in die Gleitfläche hineinfällt und der Bewegungsrichtung entgegengesetzt gerichtet ist. Diesen neben der Reibung auftretenden Widerstand gegen die Lösung des Zusammenhangs bezeichnet man gewöhnlich als Kohäsion, und lockere Massen, in denen solche neben der äußeren Reibung geweckt werden, allgemein als Erde.

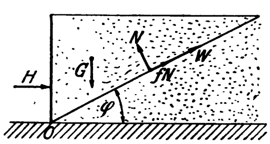

Abb. 213.

Wir denken uns nun einen solchen Erdkörper mit wagerechter Oberfläche wie in § 54 die trockene lockere Masse durch eine glatte lotrechte Wand abgestützt und erhalten für das Gleichgewicht des Keiles vom Gewichte G zwischen dieser Wand und einer unter dem Winkel φ gegen die Wagerechte geneigten Gleitebene, in der ein Widerstand W außer der Reibung fN wirkt, nach Abb. 213

$$\left.\begin{array}{l} H\cos\varphi + fN + W = G\sin\varphi \\ H\sin\varphi - N + G\cos\varphi = 0 \end{array}\right\}, \qquad \qquad 1)$$

oder nach Ausschaltung des Normaldruckes N

$$H(\cos\varphi + f\sin\varphi) - G(\sin\varphi - f\cos\varphi) + W = 0 \quad \ldots \quad 1\text{a})$$

Führen wir dann noch den Reibungswinkel durch $f = \operatorname{tg}\varphi_0$ und das Gewicht des Keiles ein und nehmen mit Ritter an, daß der Gleitwiderstand der Kohäsion bezogen auf die Einheit der Gleitfläche überall denselben Wert k besitzt, setzen also mit der Wandbreite b

$$G = \frac{\gamma h^2 b}{2\operatorname{tg}\varphi}, \qquad W = \frac{k h b}{\sin\varphi}, \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

so folgt für den Grenzfall des aktiven Erddruckes

$$\frac{H}{b} = \frac{\gamma h^2}{2}\frac{\operatorname{tg}(\varphi - \varphi_0)}{\operatorname{tg}\varphi} - \frac{k h \cos\varphi_0}{\sin\varphi\cos(\varphi - \varphi_0)}. \quad \ldots\ldots \quad 3)$$

Dieser Ausdruck wird offenbar dann am größten, wenn das erste Glied einen Höchstwert, das zweite aber einen Kleinstwert annimmt. Der erstere ist uns aber schon aus § 54 bekannt, er tritt ein für $\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2}$, während für das zweite Glied aus der Bedingung

$$\cos\varphi\cos(\varphi - \varphi_0) - \sin\varphi\sin(\varphi - \varphi_0) = \cos(2\varphi - \varphi_0) = 0, \quad 4)$$

$$2\varphi - \varphi_0 = \pm\frac{\pi}{2}, \qquad \text{also} \qquad \varphi = \frac{\varphi_0}{2} \pm \frac{\pi}{4} \quad \ldots \quad 4\text{a})$$

sich ergibt. Von diesen beiden Werten stimmt aber der erste mit dem oben angeführten für den Höchstwert des ersten Gliedes maßgebenden überein, so daß der aktive Erddruck im Grenzfalle

$$\frac{H_1}{b} = \frac{\gamma h^2}{2}\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_0}{2}\right) - \frac{k h \cos\varphi_0}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_0}{2}\right)}, \quad \ldots\ldots \quad 3\text{a})$$

oder

$$\frac{H_1}{b} = \frac{\gamma h^2}{2}\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_0}{2}\right)\left[1 - \frac{2k\cos\varphi_0}{\gamma h \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_0}{2}\right)}\right] \quad \ldots \quad 3\text{b})$$

wird. Dieser Ausdruck verschwindet mit dem Klammerausdruck rechts; schreiben wir also für die dieser Bedingung genügende Höhe $h = h_0$, gegeben durch

$$\frac{h_0}{k} = \frac{2\cos\varphi_0}{\gamma\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_0}{2}\right)} = \frac{4}{\gamma}\left[f + \sqrt{1 + f^2}\right] \quad \ldots\ldots \quad 5)$$

und führen dies in 3b) ein, so wird daraus mit der Abkürzung β

$$\frac{H_1}{b} = \frac{\gamma h^2}{2}\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_0}{2}\right)\left[1 - \frac{h_0}{h}\right] = \frac{\gamma\beta}{2}(h^2 - h_0 h) \quad \ldots \quad 3\text{c})$$

und man erkennt, daß h_0 die Höhe einer lotrechten Erdwand darstellt, die ohne jede Stützung gerade noch im Gleichgewicht verharrt. Durch diese versuchsmäßig zu ermittelnde Höhe ist alsdann mit Hilfe der Gl. 5) der Beiwert k des Gleitwiderstandes der Kohäsion gegeben, vgl. Abb. 214. Verschwindet die Reibung, was etwa bei völliger Benetzung der Oberfläche aller Körner eintreten dürfte, welche deren unmittelbare Berührung aufhebt, so wird der Zusammenhang nur noch durch die Oberflächenspannung der Benetzungsflüssigkeit aufrecht erhalten, und wir erhalten an Stelle von 3a) und 5)

$$\frac{H_1}{b} = \frac{\gamma h^2}{2} - 2\,k\,h = \frac{\gamma h^2}{2}\left(1 - \frac{h_0}{h}\right) = \frac{\gamma h^2}{2}\left(1 - \frac{4\,k}{\gamma\,h}\right), \quad . \; . \qquad 6)$$

mit einem Gleitwinkel von $\varphi = 45^0$ wie bei reinen Flüssigkeiten. Deren Zustand wird allerdings erst erreicht, wenn die Benetzung bis zur Auffüllung aller Hohlräume zwischen den Körnern fortgeschritten ist, so daß im Innern keine freien Oberflächen mehr vorhanden sind und damit die Oberflächenspannung selbst wegfällt, also $k = 0$ wird. Das ist der Fall des Schwimmsandes, der nur bei wagerechter Oberfläche im Gleichgewichte verharren kann.

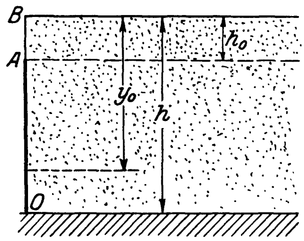

Abb. 214.

Es sei hier noch bemerkt, daß der Grenzwert des passiven Erddruckes sich aus den obigen Formeln durch Vertauschen des Vorzeichens von φ_0 und k zu

$$\frac{H_2}{b} = \frac{\gamma h^2}{2}\,\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2}\right) + \frac{k\,h\cos\varphi_0}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2}\right)} \quad . \; . \; . \; . \qquad 3\mathrm{d})$$

ergibt. Ein Verschwinden desselben kommt naturgemäß nicht in Betracht, da dieses auf eine negative freie Wand führen würde, die offenbar sinnlos ist.

Um den Angriffspunkt der Erddrücke zu ermitteln, setzen wir wieder für eine Tiefe y unter B in Abb. 214 allgemein an Stelle von 3c)

$$H = \frac{\gamma\beta b}{2}(y^2 - h_0\,y), \qquad dH = \frac{\gamma\beta b}{2}(2\,y - h_0)\,dy, \quad . \; . \qquad 7)$$

woraus sich das Moment

$$H_1\,y_0 = \int_{h_0}^{h} y\,dH = \frac{\gamma\beta b}{2}\left[\frac{2}{3}(h^3 - h_0^3) - \frac{h_0(h^2 - h_0^2)}{2}\right], \quad . \qquad 7\mathrm{a})$$

also mit 3c)

$$y_0 = \frac{1}{h}\left[\frac{2}{3}\,\frac{h^3 - h_0^3}{h - h_0} - \frac{h_0}{2}\,\frac{h^2 - h_0^2}{h - h_0}\right] = h\left[\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\frac{h_0}{h} + \frac{1}{6}\frac{h_0^2}{h^2}\right] \quad . \qquad 8)$$

ergibt.

Ist die freie Höhe der senkrechten Erdwand $h > h_0$, so muß, um das Gleichgewicht ohne Stützwand herzustellen, von dem Keil ein Stück vom Gewichte G_1 entfernt werden. Alsdann hat man an Stelle von 1a) mit $H = 0$ und $G - G_1$ an Stelle von G

$$(G - G_1)(\sin\varphi - f\cos\varphi) = W,$$

also wegen 2)

$$\frac{G_1}{b} = \frac{\gamma h^2}{2\operatorname{tg}\varphi} - \frac{k h}{\sin\varphi(\sin\varphi - f\cos\varphi)}, \quad \ldots \ldots \quad 9)$$

oder

$$\frac{G_1}{b} = \frac{\gamma h^2}{2\operatorname{tg}\varphi} - \frac{k h(\operatorname{tg}^2\varphi + 1)}{\operatorname{tg}^2\varphi - f\operatorname{tg}\varphi}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad 9\text{a})$$

Setzen wir hierin zur Abkürzung

$$\frac{\gamma h^2}{2} = \alpha, \qquad \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} = \operatorname{ctg}\varphi = u, \qquad \frac{G_1}{b} = q, \quad \ldots \quad 10)$$

so wird daraus

$$q = \alpha u - \frac{k h(1 + u^2)}{1 - f u} = \frac{\alpha u - k h - (k h + \alpha f) u^2}{1 - f u}. \quad \ldots \quad 9\text{b})$$

Der kleinste Wert dieser Entlastung ergibt sich alsdann aus $\frac{dq}{du} = 0$, also

$$\frac{\alpha u - k h - (k h + \alpha f) u^2}{1 - f u} = \frac{2(k h + \alpha f) u - \alpha}{f}$$

oder mit Rücksicht auf 9b)

$$\alpha + q f = 2(k h + \alpha f) u. \quad \ldots \ldots \ldots \quad 11)$$

Führen wir diesen Wert von u in 9b) ein und lösen nach q auf, so folgt unter gleichzeitigem Ersatz von α durch $\frac{\gamma h^2}{2}$

$$q = \frac{h}{2 f^2}\left[4 k + \gamma f h - 2\sqrt{2 k(1 + f^2)(2 k + \gamma f h)}\right]. \quad \ldots \quad 12)$$

Dieser Ausdruck verschwindet für $h = 0$, was schon aus 9) zu erkennen war. Er verschwindet aber auch für $h = h_0$, so daß man daraus auch die Höhe der ungestützten Erdwand ableiten kann. Es ist ferner $q \gtrless 0$ für $h \gtrless h_0$, d. h. es ergibt sich für eine Erdwand $h < h_0$ die Möglichkeit einer weiteren Belastung, was auch ohne weiteres verständlich ist.

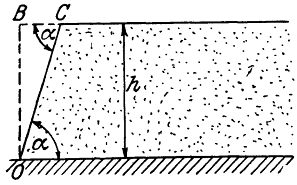

Abb. 215.

Die Gestalt des Entlastungskörpers haben wir bisher unbestimmt gelassen, es ist aber klar, daß durch seine Wegnahme die an sich zu hohe freie Wand erniedrigt werden muß, da sie sonst nicht stabil sein kann. Geben wir dem Entlastungskörper die Form eines Keiles OBC, dessen untere Kante mit dem Fuß O der freien Wand zusammenfällt, so ist bei einem Neigungswinkel α der schrägen Seitenebene, Abb. 215,

$$G_1 = \frac{\gamma h^2 b}{2\operatorname{tg}\alpha}, \qquad q = \frac{G_1}{b} = \frac{\gamma h^2}{2\operatorname{tg}\alpha} \quad \ldots \ldots \quad 10\text{a})$$

und wir erhalten aus 12)

$$\gamma f^2 h \operatorname{ctg} \alpha = 4k + \gamma f h - 2\sqrt{2k(1+f^2)(2k+\gamma f h)} \quad . \quad 12\text{a})$$

für den Zusammenhang des Böschungswinkels α mit der Höhe h der Böschung selbst. Für $\alpha = 90^0$, $\operatorname{ctg}\alpha = 0$, wird natürlich wieder $h = h_0$, während wir nach Division mit h für $h = \infty$

$$\operatorname{tg}\alpha = f = \operatorname{tg}\varphi_0,$$

also wieder den natürlichen Böschungswinkel der lockeren Masse ohne Kohäsion erhalten, der sich aus 12a) auch mit $h = 0$ ergibt.

Für eine im allgemeinen gekrümmte Böschung haben wir nach Abb. 216

$$\left.\begin{aligned} G_1 &= \gamma b \int y\,dx, \\ q &= \frac{G_1}{b} = \gamma \int y\,dx \\ dq &= \gamma y\,dx \end{aligned}\right\}, \quad . \quad 10\text{b}$$

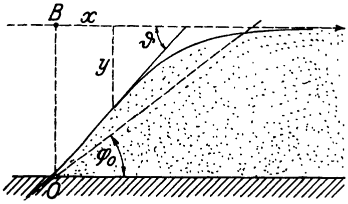

Abb. 216.

wobei y als Tiefe unter der Oberkante nach unten positiv zu rechnen ist. Für den Entlastungskeil bis zu dieser Tiefe haben wir alsdann in Gl. 12) y an Stelle von h einzuführen und erhalten mit 10b)

$$2\gamma f^2 \int_0^y y\,dx = 4ky + \gamma f y^2 - 2\sqrt{2k(1+f^2)(2ky^2+\gamma f y^3)}. \quad 13)$$

Schreiben wir dafür abkürzungshalber

$$a_0 \int y\,dx = a_1 y + a_2 y^2 - a_3\sqrt{y^2 + a_4 y^3}, \quad . \quad . \quad . \quad 13\text{a})$$

so liefert die Ableitung nach y nach Division mit y

$$a_0 \frac{dx}{dy} = \frac{a_1}{y} + 2a_2 - \frac{a_3}{2}\,\frac{2 + 3a_4 y}{\sqrt{y^2 + a_4 y^3}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 13\text{b})$$

als Differentialgleichung der Böschungslinie, die zwar nicht in geschlossener Form integrabel ist, aber doch für jeden Wert von y die Ermittlung des zugehörigen Böschungswinkels ϑ aus $dy = dx \operatorname{tg}\vartheta$ gestattet. So erkennt man, daß für $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\vartheta = 0$, für $y = \infty$, $\operatorname{tg}\vartheta = \frac{a_0}{2a_2} = f = \operatorname{tg}\varphi_0$ wird, während dazwischen $\frac{d^2x}{dy^2} = 0$ entsprechend einem Nullpunkte mit der größten Neigung ϑ wird, woraus sich der in Abb. 216 dargestellte Verlauf mit zwei Asymptoten in guter Übereinstimmung mit natürlichen Hügelformen ergibt.

Beispiel. Ist die Höhe einer nicht gestützten lotrechten Wand einer Erdmasse gerade $h_0 = 1$ m, so berechnet sich mit einer Reibungsziffer $f = \frac{3}{4}$ entspr. einer natürlichen Böschung $\varphi_0 = 36^0 50'$ die Kohäsionsziffer aus 5) bei $\gamma = 1800$ kg/m³ zu

$$k = \frac{h_0 \gamma}{4(f + \sqrt{1+f^2})} = 225 \text{ kg/m}^2.$$

Mit diesem Werte erhalten wir für die Neigung einer Böschung von der Höhe h aus 12a)

$$1013 \operatorname{ctg} \alpha = \frac{900}{h} + 1350 - \frac{1125}{h} \sqrt{1 + 3h},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{0{,}89}{h} + 1{,}33 - \frac{1{,}11}{h} \sqrt{1 + 3h},$$

also für	$h = 1\,\mathrm{m} = h_0$	3 m	6 m	9 m	∞
	$\operatorname{tg} \alpha = \infty$	2,19	1,498	1,292	0,75
	$\alpha = 90^0$	$65^0 30'$	$56^0 20'$	$52^0 20'$	$36^0 50'$.

Andererseits berechnen sich mit den obigen Werten von h und f die Neigungswinkel der nach Abb. 216 stetig gekrümmten Böschung aus 13b)

$$\operatorname{ctg} \vartheta = \frac{0{,}477}{y} + 1{,}33 - 0{,}38 \frac{1 + 4{,}5\,y}{\sqrt{y^2 + 3\,y^3}},$$

also z. B. für	$h = 0$	$h_0 = 1$ m	$h = 4$ m	∞
	$\operatorname{tg} \vartheta = 0$	1,312	1,055	0,75
	$\vartheta = 0$	$52^0 50'$	$46^0 30'$	$36^0 50'$.

Damit läßt sich der Verlauf der Böschungslinie stückweise aufzeichnen.

Viertes Buch.

Dynamik starrer Gebilde.

XII. Grundlagen der Dynamik starrer Gebilde.

§ 57. Der Satz von D'Alembert und die Bewegung einer zusammenhängenden Massengruppe. Wirkt auf einen freien Massenpunkt m eine Kraft Q, so erfährt er durch diese in ihrer Richtung einen Anlauf $q = Q : m$. Bildet der Massenpunkt aber den Bestandteil eines Körpers, bzw. einer ebenen Scheibe, so kann er vermöge eines Zusammenhanges mit den anderen Massenpunkten derselben der äußeren Kraftwirkung nicht frei folgen und wird deshalb einen Anlauf erleiden, der nach Größe und Richtung von dem Werte $Q : m$ abweicht, Abb. 217. Der wohl auch als wirksame Kraft oder Anlaufkraft bezeichnete Vektor mq stellt demnach nur noch einen Anteil der Außenkraft Q dar, während der andere Anteil Q' durch den Zusammenhang des Massenpunktes mit den anderen Bestandteilen der Scheibe aufgehoben und darum als verlorene Kraft bezeichnet wird. Da andrerseits diese Kraft Q' auch als Gesamtkraft von Q und $-mq$ aufgefaßt werden kann und nach dem Vorstehenden mit den entsprechenden verlorenen Kräften der anderen Massenpunkte der Scheibe im Gleichgewichte steht, so gilt dies auch von der Vereinigung der beiden Kräfte Q und $-mq$ für die ganze Scheibe. Wir erhalten also den zuerst von D'Alembert (1743) aufgestellten Satz: Die Gesamtheit der äußeren Kräfte an einer bewegten Scheibe befindet sich im Gleichgewicht mit der Gesamtheit der umgekehrten wirksamen Kräfte, wodurch die Behandlung des Bewegungszustandes auf eine Gleichgewichtsaufgabe zurückgeführt ist.

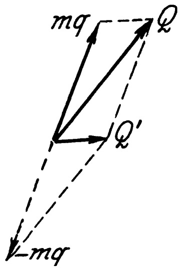

Abb. 217.

Zur Formulierung dieses für die ganze Dynamik grundlegenden Satzes zerlegen wir die Kräfte Q und Q' in ihre Bestandteile X, Y, bzw. X', Y' und ebenso den Anlauf q in $q_x = \ddot{x}$, $q_y = \ddot{y}$. Dann gilt im Anschluß an Abb. 217 für den k-ten Massenpunkt in bezug auf ein festes Achsenkreuz Oxy in der Bewegungsebene

$$X_k = X_k' + m_k \ddot{x}_k, \qquad Y_k = Y'_k + m_k \ddot{y}_k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

und nach Summierung über alle Massenpunkte wegen $\Sigma X' = 0$, $\Sigma Y' = 0$

$$\Sigma(X_k - m_k \ddot{x}_k) = 0. \quad \Sigma(Y_k - m_k \ddot{y}_k) = 0. \quad \ldots \quad 2)$$

Ebenso erhalten wir nach Erweiterung der beiden Gleichungen 1) mit y_k bzw. x_k und Subtraktion für das Moment der äußeren Kraft um den Anfangspunkt des Achsenkreuzes

$$Y_k x_k - X_k y_k = Y_k' x_k - X_k' y_k + m_k(\ddot{y}_k x_k - \ddot{x}_k y_k) \quad . \quad . \quad 1a)$$

und nach Summierung über alle Massenpunkte, wobei das Moment aller im Gleichgewichte befindlichen verlorenen Kräfte, d. h. $\Sigma(Y_k' x_k - X_k' y_k) = 0$ wird, für das Gesamtmoment

$$\Sigma(Y_k x_k - X_k y_k) = \Sigma m_k(\ddot{y}_k x_k - \ddot{x}_k y_k). \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

Die drei Formeln 2) und 3) bilden demnach zusammen den Ausdruck für den D'Alembertschen Satz der verlorenen Kräfte und gehen im Falle des Verschwindens der Anlaufteile $\ddot{x}_k$ und $\ddot{y}_k$ in die uns schon bekannten Gleichgewichtsbedingungen der äußeren Kräfte über. Der Anwendung dieser Gleichungen auf die Bewegung der zur ebenen Scheibe vereinigten Gruppe von Massenpunkten steht nun scheinbar die Notwendigkeit nicht nur der vorherigen Vereinigung aller Einzelkräfte zu einer Gesamtkraft und einem Kräftepaar, sondern auch die Ermittlung der Anläufe aller Massenpunkte entgegen. Diese Schwierigkeit umgehen wir durch Einführung der Achsenabstände x_0, y_0 des Schwerpunktes Ω, durch den wir uns ein dem ursprünglichen Achsenkreuz paralleles $\Omega\xi\eta$ gelegt denken, so zwar, daß

$$x_k = x_0 + \xi_k, \quad y_k = y_0 + \eta_k, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

also auch

$$\Sigma m_k x_k = x_0 \Sigma m_k + \Sigma m_k \xi_k, \quad \Sigma m_k y_k = y_0 \Sigma m_k + \Sigma m_k \eta_k \;, \quad . \quad 4a)$$

woraus, da die Schwerpunktsabstände x_0, y_0 durch

$$x_0 \Sigma m_k = \Sigma m_k x_k, \quad y_0 \Sigma m_k = \Sigma m_k y_k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4b)$$

festgelegt sind, für alle Lagen der Scheibe

$$\Sigma m_k \xi_k = 0, \quad \Sigma m_k \eta_k = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4c)$$

hervorgeht. Aus 4b) folgt aber auch für die Bewegung des Körpers durch Ableitung nach der Zeit

$$\left.\begin{array}{ll} \Sigma m_k \dot{x}_k = \dot{x}_0 \Sigma m_k, & \Sigma m_k \dot{y}_k = \dot{y}_0 \Sigma m_k \\ \Sigma m_k \ddot{x}_k = \ddot{x}_0 \Sigma m_k, & \Sigma m_0 \ddot{y}_k = \ddot{y}_0 \Sigma m_k \end{array}\right\}, \quad . \quad . \quad . \quad 4d)$$

und damit vereinfachen sich die beiden Bewegungsgleichungen 2), wenn wir noch der Kürze halber die Gesamtmasse $\Sigma m_k = m$ und die Achsenanteile der Gesamtkraft $\Sigma X_k = X$, $\Sigma Y_k = Y$ setzen, in

$$X = m\ddot{x}_0, \quad Y = m\ddot{y}_0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2a)$$

so daß also der Schwerpunkt der Scheibe sich unter dem Einflusse der äußeren Kräfte so bewegt, als wenn in ihm die Gesamtmasse vereinigt wäre und die Gesamtkraft dort angriffe.

Ferner geht mit 4) und 4b) die Momentenformel 3) über in

$$\begin{aligned} & x_0 \Sigma Y_k - y_0 \Sigma X_k + \Sigma (Y_k \xi_k - X_k \eta_k) \\ & = \Sigma m_k \ddot{y}_k (x_0 + \xi_k) - \Sigma m_k \ddot{x}_k (y_0 + \eta_k) \\ & = x_0 \Sigma m_k \ddot{y}_k - y_0 \Sigma m_k \ddot{x}_k + \Sigma m_k (\ddot{y}_k \xi_k - \ddot{x}_k \eta_k), \end{aligned}$$

woraus sich die ersten beiden Glieder links gegen die entsprechenden rechts wegheben. Dann bleibt wieder mit 4)

$$\begin{aligned} & \Sigma (Y_k \xi_k - X_k \eta_k) = \Sigma m_k [(\ddot{y}_0 + \ddot{\eta}_k) \xi_k - (\ddot{x}_0 + \ddot{\xi}_k) \eta_k] \\ & = \ddot{y}_0 \Sigma m_k \xi_k - \ddot{x}_0 \Sigma m_k \eta_k + \Sigma m_k (\ddot{\eta}_k \xi_k - \ddot{\xi}_k \eta_k); \end{aligned}$$

oder, da auch hier die ersten beiden Glieder rechts wegen 4c) verschwinden

$$\Sigma (Y_k \xi_k - X_k \eta_k) = \Sigma m_k (\ddot{\eta}_k \xi_k - \ddot{\xi}_k \eta_k) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3\text{a})$$

Die linke Seite dieser Gleichung stellt nunmehr das Gesamtmoment M_0 aller Außenkräfte um den Schwerpunkt dar, welches durch deren Parallelverschiebung nach diesem geweckt wurde, während die rechte Seite unter Einführung des Schwerpunktsabstands r_k und seiner Neigung φ_k gegen die x-Achse für jeden Massenpunkt durch

$$\xi_k = r_k \cos \varphi_k, \qquad \eta_k = r_k \sin \varphi_k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4\text{e})$$

in

$$\frac{d}{dt} \Sigma m_k (\dot{\eta}_k \xi_k - \dot{\xi}_k \eta_k) = \frac{d}{dt} \Sigma m_k r_k^2 \dot{\varphi}_k$$

umgeformt werden kann. Alsdann haben wir an Stelle von 3a) kürzer

$$M_0 = \frac{d}{dt} \Sigma m_k r_k^2 \dot{\varphi}_k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3\text{b})$$

und insbesondere für eine starre Scheibe, an der die Schwerpunktsabstände aller Massenpunkte ungeändert bleiben, der Drehwert $\dot{\varphi}_k = \dot{\varphi} = \omega$ aber gemeinsam ist und für alle Bestandteile sich gleichzeitig um gleiche Beträge ändert,

$$M_0 = \frac{d\omega}{dt} \Sigma m_k r_k^2 \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

Die auf der rechten Seite stehende Summe, für die wir ersichtlich unter Einführung eines mittleren Schwerpunktsabstandes k_0

$$\Sigma m_k r_k^2 = k_0^2 \Sigma m_k = m k_0^2 = \Theta_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6)$$

setzen dürfen, bezeichnet man als Trägheitsmoment der Scheibe um den Schwerpunkt, den Abstand k_0 als den Trägheitshalbmesser, wofür wir kürzer Schwungmoment und Schwungarm sagen wollen. Schreibt man damit Gl. 5)

$$M_0 = m k_0^2 \ddot{\varphi} = \Theta_0 \ddot{\varphi}, \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5\text{a})$$

so übersieht man ihren den Kraftgleichungen 2a) gleichartigen Aufbau, in denen nur an Stelle der Teilkräfte, Anlaufteile und der Gesamtmasse das Gesamtmoment der Kräfte, das sog. Drehmoment, der Andrehwert und das Schwungmoment getreten sind, zu dessen Ermittlung wir bald besondere Verfahren kennen lernen werden.

Das in Gl. 3b), welche ganz allgemein gilt, also nicht nur auf die starre Scheibe beschränkt ist, auftretende Produkt ist uns schon einmal in § 20 bei der Wechselwirkung zweier Massenpunkte begegnet und wurde dort als Moment der Bewegungsgröße, Moment des Pralles oder kurz als Drall bezeichnet. Im Falle der starren Scheibe geht dieser in $\Theta_0 \omega = m k_0^2 \dot{\varphi}$ über, ist also das Produkt des Schwungmomentes mit dem Drehwert.

Haben nun die äußeren Kräfte an einer Massengruppe, innerhalb der irgendwelche Wechselwirkungen bestehen, keine Gesamtkraft, so verschwinden in 3a) deren Achsenanteile X und Y und wir erhalten mit zwei Festwerten c_x und c_y

$$\dot{x}_0 = c_x, \qquad \dot{y}_0 = c_y,$$

wonach also bei Wegfall der Gesamtkraft der Schwerpunkt der Massengruppe sich gleichförmig geradlinig fortbewegt. Dabei braucht noch nicht das Moment M_0 zu verschwinden, da immer noch ein Kräftepaar übrig bleiben kann. Verschwindet auch dieses, so bleibt nach 3b) der Gesamtdrall ungeändert, was auch immer dann eintritt, wenn die äußeren Kräfte sich im Schwerpunkt zu einer Kraft vereinigen lassen. Haben wir es mit einer starren Scheibe zu tun, so bedingt das Verschwinden des Drehmomentes nach Gl. 5a) eine gleichförmige Drehung der Scheibe um den Schwerpunkt. Da ferner das Verschwinden der Gesamtkraft und des Momentes das Gleichgewicht der Kräfte kennzeichnet, so ist dieses offenbar mit einem gleichförmigen Fortschreiten des Schwerpunktes und der gleichförmigen Drehung um dieselben durchaus verträglich. Umgekehrt kann beim Vorhandensein dieses Bewegungszustandes ohne weiteres auf das Gleichgewicht der äußeren Kräfte geschlossen werden.

§ 58. Die Arbeitsgleichung starrer Scheiben. Zur Ableitung der Arbeitsgleichung einer zusammenhängenden Massengruppe gehen wir noch einmal auf die Grundformeln 1) des letzten Abschnittes, nämlich

$$X_k = X_k' + m_k \ddot{x}_k, \qquad Y_k = Y_k' + m_k \ddot{y}_k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 1)$$

zurück und erweitern diese mit den Wegelementen dx_k und dy_k in den Achsenrichtungen. Dann ergibt die Addition

$$X_k dx_k + Y_k dy_k = X_k' dx_k + Y_k' dy_k + m_k (\ddot{x}_k dx_k + \ddot{y}_k dy_k), \qquad 2)$$

wobei die rechte Seite das Arbeitselement der Kraft Q_k bedeutet und wegen $\ddot{x} dx + \ddot{y} dy = v_x dv_x + v_y dv_y = v dv$ das letzte Glied rechts auch $m_k v_k dv_k$ geschrieben werden kann und so die Änderung der Wucht des Massenpunktes m_k darstellt. Die ersten beiden Glieder rechts können wir aber unter Benutzung von Gl. 4) § 57 umformen in

$$X_k' dx_k + Y_k' dy_k = X_k' dx_0 + Y_k' \, dy_0 + X_k' d\xi_k + Y_k' d\eta_k$$

und erhalten alsdann durch Summierung von 2) über alle Einzelmassen mit Rücksicht auf $\Sigma X_k' = 0$, $\Sigma Y_k' = 0$ wegen des Gleichgewichtes der verlorenen Kräfte

$$\Sigma (X_k dx_k + Y_k dy_k) = \Sigma (X_k' d\xi_k + Y_k' d\eta_k) + \Sigma m_k v_k dv_k. \qquad 2a)$$

Um nun die Bedeutung der ersten Summe der rechten Seite zu erkennen, setzen wir darin, wie schon in Gl. 4e) § 57

$$\left.\begin{array}{ll} \xi_k = r_k \cos\varphi_k, & \eta_k = r_k \sin\varphi_k \\ d\xi_k = dr_k \cos\varphi_k - \eta_k d\varphi_k, & d\eta_k = dr_k \sin\varphi_k + \xi_k d\varphi_k \end{array}\right\} \qquad 3)$$

und erhalten so

$$\Sigma (X_k' d\xi_k + Y_k' d\eta_k)$$
$$= \Sigma (X_k' \cos\varphi_k + Y' \sin\varphi_k) dr_k + \Sigma (Y' \xi_k - X' \eta_k) d\varphi_k \quad . \; . \; . \; 4)$$

Mit

$$X_k' = Q_k' \cos\varkappa_k, \qquad Y' = Q_k' \sin\varkappa_k \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; 5)$$

sowie unter Einführung eines allen Punkten gemeinsamen Drehwinkels φ und der ihnen eigentümlichen Abweichungen φ_k' durch

$$\varphi_k = \varphi + \varphi_k', \qquad d\varphi_k = d\varphi + d\varphi_k' \quad . \; . \; . \; . \; . \; 3a)$$

wird dann aus 4) wegen $\Sigma (Y_k' \xi_k - X_k' \eta_k) = 0$

$$\Sigma (X_k' d\xi_k + Y_k' d\eta_k) = \Sigma Q_k' dr_k \cos(\varphi_k - \varkappa_k) + \Sigma (Y_k' \xi_k$$
$$- X_k' \eta_k) d\varphi_k' \quad . \; . \; . \; 4a)$$

Hierin stellt das erste Glied rechts die von den verlorenen Kräften zur Vergrößerung der Schwerpunktsabstände r_k, das zweite die von den zugehörigen Kraftmomenten zur Verdrehung $d\varphi_k'$ dieser Strahlen r_k gegeneinander geleistete Arbeit dar, die mit der ersten zusammen die gesamte Formänderungsarbeit bildet. Bezeichnen wir dieselbe mit L', mit L dagegen die in 2a) links stehende äußere Arbeit, so wird

$$dL = dL' + \Sigma m_k v_k dv_k \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 2b)$$

d. h. die Arbeit der äußeren Kräfte an einer zusammenhängenden Massengruppe dient einerseits zur Formänderung derselben, andrerseits zur Vermehrung der Wucht. Die Formänderungsarbeit wird nun nach Gl. 4a) im Innern der Massengruppe geleistet durch die gegenseitige Verschiebung der Einzelteile unter Überwindung der verlorenen Kräfte und der von ihnen bedingten Momente. Diese Kräfte können wir darum auch als innere Kräfte der Massengruppe bezeichnen. Haben wir es an Stelle der Massengruppe mit einer starren Scheibe zu tun, in der weder die Schwerpunktsabstände noch auch ihre gegenseitigen Neigungen sich ändern, so verschwindet mit $dr_k = 0$, $d\varphi_k' = 0$ auch die Formänderungsarbeit dL' und es bleibt als Arbeitsgleichung nur noch

$$dL = \Sigma (X_k dx_k + Y_k dy_k) = \Sigma m_k v_k dv_k \quad . \; . \; . \; . \; . \; 2c)$$

übrig, in der die inneren oder verlorenen Kräfte ebensowenig auftreten wie in den Bewegungsformeln des letzten Abschnittes. An Stelle dieser Gleichung dürfen wir aber auch schreiben

$$\Sigma [(X_k - m\ddot{x}_k) dx_k + (Y_k - m\ddot{y}_k) dy_k] = 0,$$

worin dx_k und dy_k Verschiebungen der Massenpunkte bedeuten, die mit der Anordnung der Gruppe verträglich sind. In dieser Form entspricht die Arbeitsgleichung völlig dem Satz der **virtuellen Verschiebungen der Statik**, der hier für die eingeklammerten Anteile der verlorenen Kräfte gilt.

Setzen wir nach Gl. 4) § 57 unter Einführung der Schwerpunktsabstände x_0, y_0, sowie mit $d\varphi_k = d\varphi$, $\dot\varphi_k = \dot\varphi = \omega$

$$\left.\begin{aligned} x_k &= x_0 + r_k \cos\varphi_k = x_0 + \xi_k, & y_0 &= y_0 + r_k \sin\varphi_k = y_0 + \eta_k \\ dx_k &= dx_0 - r_k\, d\varphi_k \sin\varphi_k = dx_0 - \eta_k d\varphi, & v_{x_k} &= v_{x0} - \eta_k \omega \\ dy_k &= dy_0 + r_k\, d\varphi_k \cos\varphi_k = dy_0 + \xi_k\, d\varphi, & v_{y_k} &= v_{y_0} + \xi_k\, \omega \end{aligned}\right\}, \quad 5)$$

also

$$v_k^2 = v_{x_k}^2 + v_{y_k}^2 = v_{x_0}^2 + v_{y_0}^2 + (\xi_k^2 + \eta_k^2)\,\omega^2 + 2\,\omega\,(v_{y_0}\xi_k - v_{x_0}\eta_k).$$

Beachten wir dann noch, daß durch $v_{x_0}^2 + v_{y_0}^2 = v_0^2$ der Schwerpunktslauf und durch $\xi_k^2 + \eta_k^2 = r_k^2$ der Schwerpunktsabstand gegeben ist, so folgt nach Erweiterung mit m_k und Summierung über alle Massenpunkte der Scheibe, wobei $\Sigma m_k \xi_k = 0$, $\Sigma m_k \eta_k = 0$, für die doppelte Wucht

$$2\,J = \Sigma m_k v_k^2 = m v_0^2 + \omega^2\, \Sigma\, m_k r_k^2 = m v_0^2 + \omega^2\, m k_0^2. \quad . \quad . \quad 6)$$

Ebenso wird aus der linken Seite von 2c)

$$\Sigma(X_k dx_k + Y_k dy_k) = dx_0\, \Sigma X_k + dy_0\, \Sigma Y_k + d\varphi\, \Sigma(Y_k \xi_k - X_k \eta_k) \quad . \quad 7)$$

oder auch, da $\Sigma X_k = X$, $\Sigma Y_k = Y$, $\Sigma(Y_k \xi_k - X_k \eta_k) = M_0$ die Achsenanteile der Gesamtkraft und deren Drehmoment um den Schwerpunkt darstellen,

$$\Sigma(X_k\, dx_k + Y_k\, dy_k) = X\, dx_0 + Y\, dy_0 + M_0\, d\varphi. \quad . \quad . \quad 7a)$$

Führen wir diesen Ausdruck mit 6) in Gl. 2a) ein, so wird die **Arbeitsformel für die starre Scheibe**

$$X\, dx_0 + Y\, dy_0 + M_0\, d\varphi = m v_0\, dv_0 + \omega\, d\omega\, m k_0^2, \quad . \quad . \quad 8)$$

die wir auch unmittelbar durch Erweiterung der Gl. 2a) und 5a) § 57 mit dx_0, dy_0, $d\varphi$ sowie Addition erhalten konnten. Weiter übersieht man, daß die rechte Seite als Element der Gesamtwucht der Scheibe stets integrabel ist, während dies für die linke Seite nur dann zutrifft, wenn

$$dL = X\, dx_0 + Y\, dy_0 + M_0\, d\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9)$$

ein vollständiges Differential darstellt. Alsdann kann man dafür wie in § 26 unter Einführung des **Dranges** oder der **potentiellen Energie** (Potential) U auch schreiben

$$-dL = dU = \frac{\partial U}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial U}{\partial y_0} dy_0 + \frac{\partial U}{\partial \varphi} d\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9b)$$

so daß

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x_0}, \quad Y = -\frac{\partial U}{\partial y_0}, \quad M_0 = -\frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad . \quad . \quad . \quad 9b)$$

gesetzt werden kann. Damit dies zutrifft, müssen die Bedingungen

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial y_0}=-\frac{\partial^2 U}{\partial x_0\,\partial y_0}=\frac{\partial Y}{\partial x_0},\quad \frac{\partial Y}{\partial \varphi}=-\frac{\partial^2 U}{\partial y_0\,\partial \varphi}=\frac{\partial M_0}{\partial y_0}\\ \frac{\partial M_0}{\partial x_0}=-\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi\,\partial x_0}=\frac{\partial X}{\partial \varphi}\end{aligned}\right\} \quad . \ 9\text{c})$$

erfüllt sein, was man in jedem Falle leicht feststellen kann, **wenn die äußeren Kräfte nur von der Lage ihrer Angriffspunkte abhängen.** Alsdann vereinfacht sich das Integral der Arbeitsformel in

$$U+J=U_0+J_0, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ 10)$$

d. h. **die gesamte Macht (Summe aus Drang und Wucht) der Scheibe erleidet bei ihrer Bewegung keine Änderung.**

Das setzt naturgemäß voraus, daß von der Scheibe während der Bewegung keine Arbeit nach außen, d. h. an andere Körper, z. B. durch Überwindung von Widerstandskräften (Reibung, Dämpfung usw.), abgegeben wird, oder daß sie nur unter der Wirkung treibender Kräfte steht, die man wohl auch wegen der Erhaltung der Macht als **konservative Kräfte** bezeichnet. Ist die Scheibe während der Bewegung dauernd oder zeitweilig mit einer oder mehreren andern Scheiben in Verbindung, so ist auch ohne Widerstandskräfte eine Arbeitsübertragung möglich, falls diese andern Scheiben selbst beweglich sind. Alsdann ist die Summierung in den Gleichungen dieses und des vorigen Abschnittes über die Massenpunkte m_k aller bewegten Körper zu erstrecken, wobei die Normaldrücke an den Berührungsstellen infolge der Wechselwirkung als verlorene Kräfte herausfallen. Die Bewegungsgleichungen in diesem Falle lauten alsdann

$$\Sigma X=\Sigma m\ddot{x}_0, \quad \Sigma Y=\Sigma m\ddot{y}_0, \quad \Sigma M_0=\Sigma m k_0^2\ddot{\varphi} \quad . \ . \ 11)$$

und die Arbeitsformel

$$\Sigma(X\,dx_0+Y\,dy_0)+\Sigma M_0\,d\varphi=\Sigma m v_0\,dv_0+\Sigma m k_0^2\,\omega\,d\omega, \quad 11\text{a})$$

wobei die X, Y, M, x_0, y_0, φ, v_0, ω und m bzw. $m k_0^2$ für jede einzelne Scheibe festzustellen und in die Summen einzuführen sind. Wird dagegen aus einer solchen Körpergruppe eine Scheibe für sich betrachtet, so sind die Verbindungskräfte an den Berührungsstellen mit den anderen Körpern als äußere Kräfte zu betrachten und mit den unmittelbar an der Scheibe wirkenden Kräften zu einer Gesamtkraft und einem äußeren Drehmoment zu vereinigen, worauf die Scheibe wie ein frei bewegter Körper weiterbehandelt werden kann. Die Verbindungskräfte genügen in diesem Falle stets gewissen, aus dem Zusammenhang folgenden Bedingungen, welche ihre Ermittlung unmittelbar oder im Verein mit den Bewegungsgleichungen ermöglichen. Die Arbeitsgleichung gilt allerdings in diesem Falle in der Form 10) oder 11a) nur für die ganze Körpergruppe, auch wenn keine Widerstandskräfte auftreten.

1. Beispiel. Eine Rolle vom Halbmesser a und dem Gewichte $G=mg$ fällt senkrecht herab, wobei sich ein um ihren Umfang geschlungenes Seil, dessen Masse gegen die der Rolle vernachlässigt werden kann und welches oberhalb an einem Punkte festgehalten wird, abrollt, Abb. 218. Ist S die als Außenkraft am Umfang lotrecht nach oben wirkende Seilspannung, so wird durch ihre Parallelverschiebung nach dem Rollenmittelpunkt, der zugleich den Schwerpunkt bildet, ein Kräftepaar mit dem Moment $M = Sa$ geweckt und wir erhalten die Bewegungsgleichungen

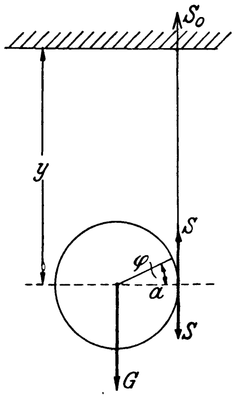

Abb. 218.

$$Y = G - S = m\ddot{y}, \qquad M = Sa = mk_0^2\ddot{\varphi} \qquad 12)$$

mit der Bedingung für das **reine Abrollen**

$$a\dot{\varphi} = \dot{y}, \qquad a\ddot{\varphi} = \ddot{y}, \quad \ldots\ldots \quad 12a)$$

wenn wir den Abstand der Rollenmitte vom Aufhängepunkt des Seiles mit y bezeichnen. Aus 12) folgt durch Ausschalten von S mit $G = mg$

$$ga = a\ddot{y} + k_0^2\ddot{\varphi}$$

oder wegen 12a) $\quad g = \left(1 + \frac{k_0^2}{a^2}\right)\ddot{y}, \quad \ldots\ldots \quad 12b)$

d. h. eine **gleichförmig beschleunigte Fallbewegung**, deren Anlauf kleiner als die Erdbeschleunigung g ist. Weiter wird nach Einsetzen von 12b) in die erste Gl. 12) die Fadenspannung

$$S = \frac{mg\,k_0^2}{a^2 + k_0^2}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 12c)$$

also unabhängig von der Lage der Rolle.

Die Arbeitsgleichung erhalten wir durch Erweiterung der Gleichung 12) mit dy bzw. $d\varphi$, also mit $\omega\,dt = d\varphi$, $v\,dt = dy$

$$Y\,dy + M\,d\varphi = (G - S)\,dy + Sa\,d\varphi = m\,(v\,dv + k_0^2\,\omega\,d\omega) \quad . . \quad 13)$$

oder, da nach 12a) $a\,d\varphi = dy$ ist

$$g\,dy = v\,dv\left(1 + \frac{k_0^2}{a^2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 13a)$$

mit dem Integral $\quad 2g\,(y - y_1) = 2\,gh = (v^2 - v_1^2)\left(1 + \frac{k_0^2}{a^2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 13b)$

Zur Ermittlung des **Dranges** haben wir nach Gl. 13) zu setzen

$$G - S = -\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad Sa = -\frac{\partial U}{\partial \varphi},$$

also wegen $dy = a\,d\varphi$

$$(G - S)\,dy + Sa\,d\varphi = G\,dy = -\,dU,$$

oder $\quad U_1 - U = (G - S)\,y + Sa\varphi + C = G\,(y - y_1) \quad \ldots\ldots \quad 13c)$

Denkt man sich den Faden hinweg, so kann die Rolle als ein unter der Wirkung des Gewichtes G und der am Rande angreifenden Fadenspannung S frei beweglicher Körper angesehen werden, wobei die an sich unbestimmte Fadenspannung erst durch die Bedingung der Übereinstimmung des Schwerpunktslaufes v mit dem Umlauf $a\omega$ festgelegt wird.

2. Beispiel. **Rollt eine Walze auf einer schiefen Ebene** von der Neigung α gegen die Wagerechte, so wird das Gleiten des Rollenumfanges durch dessen Rauhigkeiten und diejenige der Ebene ebenso verhindert, als wenn beide mit ineinander greifenden Zähnen versehen wären. Infolgedessen wird zwischen der ebenen Unterlage und der Walze eine dem Zahndruck entsprechende Umfangskraft S ebenso wirken wie die Seilspannung im vorigen Beispiel. Außerdem wirkt die schiefe Unterlage mit einem Normaldruck N auf die Walze, der durch den gleichgerichteten Gewichtsanteil nach Abb. 219 aufgehoben wird. Nennen wir den Abstand des Berührungspunktes vom Fußpunkt der schiefen Ebene $OA = z$, so lauten die Bewegungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} S - G\sin\alpha &= m\ddot{z} \\ Sa &= m k_0^2 \ddot{\varphi} \\ N &= G\cos\alpha \end{aligned}\right\} , \quad . \quad . \quad 14)$$

woraus sich mit $a\dot{\varphi} = -\dot{z}$, $a\ddot{\varphi} = -\ddot{z}$ ergibt

$$-g\sin\alpha = \left(1 + \frac{k_0^2}{a^2}\right)\ddot{z} \quad . \quad 14\text{a})$$

$$S = \frac{m k_0^2 g \sin\alpha}{a^2 + k_0^2} \quad . \quad . \quad . \quad 14\text{b})$$

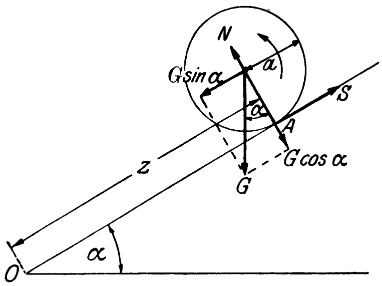

Abb. 219.

so daß also dieser Fall mit dem vorher besprochenen übereinstimmt, wenn wir die Erdbeschleunigung g durch $-g\sin\alpha$ und y durch z ersetzen. Damit erhalten wir, da das Höhenelement $dy = dz\sin\alpha$ ist, auch wieder Gl. 13b) mit $\dot{z} = v$ und schließlich für den Drang

$$U = (G\sin\alpha - S)z - Sa\varphi + C = Gz\sin\alpha + U_0 = Gy + U_0 , \quad . \; 14\text{c})$$

der somit ganz wie beim lotrechten oder freien Fall nur von der Höhenlage abhängt.

3. Beispiel. Auf eine Rolle vom Halbmesser a mit festgehaltener Drehachse O und dem Schwungmoment $m_0 k_0^2$ sei ein Faden gelegt, an dessen beiden Enden die Gewichte $G_1 = m_1 g$, $G_2 = m_2 g$ lotrecht wirken. Alsdann wird das schwerere Gewicht $G_2 > G_1$ herabsinken und das leichtere unter gleichzeitiger Drehung der Rolle emporheben. Mit den Schwerpunktstiefen y_1 und y_2 der Gewichte unter der Rollenachse und den Seilspannungen S_1 und S_2, die unter Vernachlässigung der Seilmasse sowohl den Gewichten entgegenwirken wie auch umgekehrt am Rollenumfung nach Abb. 220 angreifen, haben wir dann die Bewegungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} S_1 = m_1 g - m_1 \ddot{y}_1 , \qquad S_2 = m_2 g - m_2 \ddot{y}_2 \\ a(S_1 - S_2) = m_0 k_0^2 \ddot{\varphi} \end{aligned}\right\} \quad 15)$$

sowie, wenn der Faden in der Längsrichtung starr ist und auf der Rolle nicht gleitet, die Bedingungsgleichungen

$$\dot{y}_1 + \dot{y}_2 = 0 , \qquad a\dot{\varphi} = \dot{y}_1 = -\dot{y}_2 \quad . \quad . \quad . \quad 15\text{a})$$

Setzen wir dies in die Formeln 15) unter Ausschaltung der Spannungen S_1 und S_2 ein, so folgt als Momentengleichung, in der die Kräfte S_1 und S_2 nicht mehr vorkommen

$$(m_1 - m_2) g = \left(m_1 + m_2 + m_0 \frac{k_0^2}{a^2}\right)\ddot{y}_1 , \quad . \; 15\text{b})$$

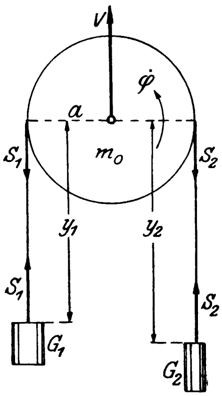

Abb. 220.

also wieder ein beständiger Anlauf, der in der Atwoodschen Fallmaschine zur Prüfung der Fallgesetze benutzt wird. Die Seilspannungen ergeben sich durch Einsetzen in 15) zu

$$S_1 = \frac{m_1\left(2m_2 + m_0 \frac{k_0^2}{a^2}\right)}{m_1 + m_2 + m_0 \frac{k_0^2}{a^2}} g , \qquad S_2 = \frac{m_2\left(2m_1 + m_0 \frac{k_0^2}{a^2}\right)}{m_1 + m_2 + m_0 \frac{k_0^2}{a^2}} g \quad . \quad . \quad . \quad 15\text{c})$$

Bezeichnen wir den Stützendruck am Rollenzapfen mit V, so ist

$$V = S_1 + S_2$$

oder wegen 15) $\qquad (m_1 + m_2) g - V = m_1 \ddot{y}_1 + m_2 \ddot{y}_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 15\text{d})$

die Kraftgleichung des Satzes von D'Alembert, in welcher wieder nur die äußeren Kräfte V, $m_1 g$ und $m_2 g$ nicht aber die inneren Kräfte S_1 und S_2 auftreten.

Erweitern wir die Gl. 15) der Reihe nach mit dy_1, dy_2 und $d\varphi$ und addieren, so wird

$$\begin{aligned}(m_1 g - S_1)\, dy_1 + (m_2 g - S_2)\, dy_2 + (S_1 - S_2)\, a\, d\varphi \\ = m_1 \dot{y}_1\, d\dot{y}_1 + m_2 \dot{y}_2\, d\dot{y}_2 + m_0 k_0^2 \dot{\varphi}\, d\dot{\varphi}\,, \quad \ldots \ldots \quad 16)\end{aligned}$$

oder wegen $\dot{y}_1\, d\dot{y}_1 = \dot{y}_2\, d\dot{y}_2 = a^2 \dot{\varphi}\, d\dot{\varphi} = v\, dv$

$$(m_1 - m_2)\, g\, dy_1 = \left(m_1 + m_2 + m_0 \frac{k_0^2}{a^2}\right) v\, dv\,, \quad \ldots \ldots \quad 16\,a)$$

was auch unmittelbar aus 15 b) hergeleitet werden konnte.

Für den Drang erhalten wir schließlich aus 16) mit

$$dy_1 = - dy_2 = a\, d\varphi$$

$$U_0 - U = (m_1 y_1 + m_2 y_2)\, g\,, \quad \ldots \ldots \quad 16\,b)$$

d. h. der Drang ist der Höhenlage des Gesamtschwerpunktes, die einem Kleinstwert zustrebt, verhältnisgleich.

§ 59. Körper mit veränderlicher Masse. Nimmt während der Bewegung eines Gebildes seine Masse m stetig zu oder ab, so hat die Arbeit $Q\, ds$ der äußeren Kraft Q auf dem Wegelemente ds nicht nur die Wucht der schon bewegten Masse um $m\, v\, dv$ zu vermehren, sondern auch dem aus der Ruhelage in die Bewegung hineingezogenen Massenelement dm die Wucht $\frac{v^2}{2} dm$ derart zu erteilen, daß

$$Q\, ds = m\, v\, dv + \frac{v^2}{2} dm = \frac{1}{2} d(m v^2) = dJ \quad \ldots \quad 1)$$

ist, wenn J die augenblickliche Wucht des Gebildes bedeutet. Dafür können wir aber auch mit $ds = v\, dt = \dot{s}\, dt$

$$Q = m \frac{dv}{dt} + \frac{v}{2} \frac{dm}{dt} = \frac{d(m v)}{dt} - \frac{v}{2} \frac{dm}{dt} \quad \ldots \quad 1\,a)$$

schreiben. Andererseits haben wir auch, da die Masse von der Lage abhängt

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial s} = \frac{v^2}{2} \frac{dm}{ds} = \frac{v}{2} \frac{dm}{dt} = \frac{\dot{s}}{2} \frac{dm}{dt}, \quad \frac{\partial J}{\partial \dot{s}} = m v = m \dot{s} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial J}{\partial \dot{s}}\right) = m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt} = m \ddot{s} + \dot{s} \frac{dm}{dt}\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 2)$$

und daraus wegen 1 a) die Bewegungsgleichung von Lagrange (1788)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial J}{\partial \dot{s}}\right) - \frac{\partial J}{\partial s} = m \ddot{s} + \frac{\dot{s}}{2} \frac{dm}{dt} = Q. \quad \ldots \ldots \quad 3)$$

Besitzt die äußere Kraft ein Potential U, so ist $dU + dJ = 0$ und

$$Q = - \frac{\partial U}{\partial s} \quad \ldots \ldots \quad 4)$$

und wir erhalten aus 3)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial J}{\partial \dot{s}}\right) + \frac{\partial (U - J)}{\partial s} = 0. \quad \ldots \ldots \quad 3\,a)$$

oder, da U jedenfalls von $\dot{s}$ unabhängig ist, mit $U - J = E$

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{s}}\right) + \frac{\partial E}{\partial s} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3\text{b})$$

Bei dieser Bewegung sind zwei Fälle zu unterscheiden. Die hinzutretende Masse kann sich nämlich gleichförmig auf die Oberfläche des bewegten Körpers ablagern, oder aber, wie beim ablaufenden Faden nur dessen bewegte Länge um den zurückgelegten Weg vergrößern. In beiden Fällen nimmt die Zusatzmasse an der Gesamtbewegung unmittelbar nach der Vereinigung teil, deren Lauf aber nur im ersten mit dem des Gesamtschwerpunktes übereinstimmt. Beim ablaufenden Faden dagegen verschiebt sich der Schwerpunkt der bewegten Länge trotz des Fortschreitens in der Fadenrichtung stetig rückwärts, so daß seine Geschwindigkeit nur die Hälfte des allen Fadenelementen gemeinsamen Gesamtlaufes beträgt.

1. Beispiel. Die Masse eines kugelförmigen Regentropfens nimmt beim Fallen durch Niederschlag vom Wasserdampf aus der umgebenden Luft an seiner Oberfläche F stetig zu, so zwar, daß mit einem Beiwert k und dem Raumgewicht γ des Wassers

$$m = \frac{4}{3}\pi\frac{\gamma}{g}r^3, \qquad k\,F = 4\,\pi\,k\,r^2 = \frac{dm}{dt} = 4\,\pi\frac{\gamma}{g}r^2\frac{dr}{dt}, \quad \ldots\ldots \quad 5)$$

also

$$\frac{dr}{dt} = \frac{k\,g}{\gamma} = c, \qquad r = r_0 + c\,t \quad \ldots\ldots\ldots \quad 5\text{a})$$

wird. Mit der jetzt nach unten positiv gerechneten Fallhöhe y und dem Tropfengewicht $mg = Q$ als äußerer Kraft lautet die Arbeitsgleichung

$$2\,mg\,dy = d\,(m\dot{y}^2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 6)$$

oder wegen 5)

$$2\,g\,r^3\,dy = d\,(r^3\dot{y}^2);$$

und da nach 5a) $dy = \dot{y}\,dt = \frac{\dot{y}}{c}\,dr$ ist,

$$\frac{2\,g}{c}\,r\,dr = 3\,\dot{y}\,dr + 2\,r\,d\dot{y} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 6\text{a})$$

Setzen wir

$$\dot{y} = u\cdot v, \qquad d\dot{y} = u\,dv + v\,du,$$

so können wir die damit umgeformte Gl. 6a)

$$2\,\frac{g}{c}\,r\,dr = 3\,uv\,dr + 2\,r\,(u\,dv + v\,du)$$

zerfällen in

$$u\,(3\,v\,dr + 2\,r\,dv) = 0\,, \qquad r\left(\frac{g}{c}\,dr - v\,du\right) = 0\,,$$

von denen die erstere mit einem Beiwert C_1 das vollständige Integral

$$\lg n\, v + \frac{3}{2}\lg n\, r = \lg n\, C_1, \qquad v = C_1\,r^{-\frac{3}{2}}$$

hat und nach Einsetzen die zweite mit einem weiteren Festwert C_2

$$u = C_2 + \frac{2}{5}\,\frac{g}{c}\,\frac{r^{\frac{5}{2}}}{C_1}$$

ergibt. Mithin ist

$$\dot{y} = u\cdot v = C_1\,C_2\,r^{-\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}\,\frac{g}{c}\,r$$

und, wenn für den Beginn der Bewegung $\dot{y} = 0$, $r = r_0$, $y = 0$ ist,

$$\dot{y} = \frac{2}{5}\,\frac{g}{c}\,r\left[1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{5}{2}}\right], \quad \ldots\ldots\ldots \quad 7)$$

sowie

$$dy = \frac{\dot y}{c}\,dr = \frac{2}{5}\frac{g}{c^2}\,r\left[1-\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{5}{2}}\right]dr$$

$$y = \frac{1}{5}\frac{g}{c^2}\left[r^2 - r_0^{\,2} + 4\,r_0^{\frac{5}{2}}\left(\frac{1}{r^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{r_0^{\frac{1}{2}}}\right)\right] \quad \ldots\ldots \quad 7\text{a})$$

Aus diesen Formeln kann schließlich noch der Kugelhalbmesser r durch 5a) ausgeschaltet und durch die Fallzeit ersetzt werden.

2. Beispiel. Ein vollkommen biegsames Seil liegt auf einem kleinen Haufen zusammengerollt am Rande eines Tisches, so daß ein freies Ende reibungslos abrutschen kann. Hat der abgelaufene Teil die Länge y, so wird von diesem mit einem Seilgewicht q der Längeneinheit beim Herabsinken des Endes um dy die Arbeit $q y\,dy$ geleistet, die zur Vermehrung der Gesamtwucht $\frac{1}{2}\,m\dot y^2 = \frac{q}{2g}\,y\,\dot y^2$ dient. Also ist

$$2\,g\,y\,dy = d\,(y\,\dot y^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 8)$$

oder, wenn zu Beginn $y=0$, $\dot y = 0$ ist,

$$\dot y^2 = g\,y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 8\text{a})$$

Zu demselben Ergebnis gelangt man auch durch Gleichsetzen der Wucht mit der Fallarbeit $\frac{q\,y^2}{2}$ des abgelaufenen Seilstückes, dessen Schwerpunkt dabei um $y_0 = \frac{1}{2}\,y$ gesunken ist. Daraus erkennt man sofort, daß in diesem Falle dessen Geschwindigkeit $\dot y_0$ nur die Hälfte des allen bewegten Seilelementen gemeinsamen Gesamtlaufes ist.

Wirkt auf den Körper von der augenblicklichen Masse m eine Gesamtkraft Q und ein Drehmoment M um den Schwerpunkt, dessen Achsenabstände x, y sein mögen, so haben wir nach Gl. 1) für die Achsenanteile von Q zunächst

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{1}{2}\frac{d\,(m\,\dot x^2)}{dx} = m\,\ddot x + \frac{\dot x}{2}\frac{dm}{dt} \\ Y &= \frac{1}{2}\frac{d\,(m\,\dot y^2)}{dy} = m\,\ddot y + \frac{\dot y}{2}\frac{dm}{dt} \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots \quad 9)$$

woraus sich mit einem Winkel ν der Kraftrichtung gegen das Element ds der Schwerpunktsbahn die Arbeit der Fortbewegung zu

$$X\,dx + Y\,dy = Q\,ds\cos\nu = \tfrac{1}{2}\,d\left[m\,(\dot x^2 + \dot y^2)\right] = \tfrac{1}{2}\,d\,(m\,v_0^{\,2}) \; . \quad 9\text{a})$$

ergibt, worin v_0 den Schwerpunktslauf bedeutet. Infolge des Hinzutretens des Momentes ist aber die Gesamtarbeit

$$X\,dx + Y\,dy + M\,d\varphi = \tfrac{1}{2}\,d\left[m\,(v_0^{\,2} + k^2\,\dot\varphi^2)\right] = dJ \quad \ldots\, . \quad 10)$$

und daher nach Abzug von (9) das Moment

$$M = \frac{1}{2}\frac{d\,(m\,k^2\,\dot\varphi^2)}{d\varphi} = k\left(m\,\frac{d\,(k\,\dot\varphi)}{dt} + \frac{k\,\dot\varphi}{2}\frac{dm}{dt}\right) = P\,k, \quad \ldots \quad 11)$$

wobei P die Einzelkraft am Hebelarm k des Kräftepaares M bedeutet. Andererseits ist auch mit $d\varphi = \dot\varphi\,dt$, $dk = \dot k\,dt$

$$\frac{\partial J}{\partial \varphi} = m\,k\,\frac{dk}{d\varphi}\,\dot\varphi^2 + \frac{k^2\,\dot\varphi^2}{2}\frac{dm}{d\varphi} = m\,k\,\dot k\,\dot\varphi + \frac{k^2\,\dot\varphi}{2}\frac{dm}{dt}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \dot\varphi} = m\,k^2\,\dot\varphi; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial J}{\partial \dot\varphi}\right) = m\,k^2\,\ddot\varphi + 2\,m\,k\,\dot k\,\dot\varphi + k^2\,\dot\varphi\,\frac{dm}{dt},$$

also

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial J}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial J}{\partial \varphi} = m k^2 \ddot{\varphi} + m k \dot{k} \dot{\varphi} + \frac{k^2 \dot{\varphi}}{2} \frac{dm}{dt} = k \left(m \frac{d(k\dot{\varphi})}{dt} + \frac{k \dot{\varphi}}{2} \frac{dm}{dt}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial J}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial J}{\partial \varphi} = M = P k \quad \ldots \ldots \quad 11\text{a})$$

die Lagrangesche Form der Momentengleichung. Da ferner das Produkt $k^2 \dot{\varphi}$ in der Arbeitsgleichung die Schwerpunktsabstände nicht enthält, so ergeben sich für die Kraftantriebe selbst, ganz wie oben Gl. 3)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial J}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial J}{\partial x} = X, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial J}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial J}{\partial y} = Y, \quad \ldots \quad 11\text{b})$$

also insgesamt drei Bewegungsgleichungen, welche völlig den Formeln 9) und 11), sowie denen des Satzes von D'Alembert (§ 57) für die starre Scheibe entsprechen und auch für diese benutzt werden können. Steht die Scheibe mit beständiger oder veränderlicher Masse mit andern Körpern in Verbindung und Massenaustausch, so enthalten die Größen X, Y und M auch noch die Anteile der Verbindungskräfte, die sonach für jeden Bestandteil einer Gruppe als äußere Kräfte aufzufassen sind, aber für die Gesamtgruppe nach dem Satze der Wechselwirkung herausfallen.

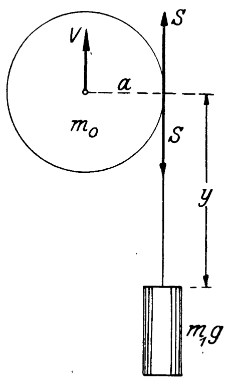

Abb. 221.

3. Beispiel. Läuft von einer um eine feste wagerechte Achse drehbare Rolle vom Halbmesser a und dem Schwungmoment $m_0 k_0^2$ ein Seil mit der Masse m und der in Ruhelage voll ausgewickelten Länge l unter der Wirkung eines daranhängenden Gewichtes $G_1 = m_1 g$ ab, Abb. 221, so besteht nach dem Ablauf der Länge y die Arbeitsgleichung

$$\left[m_0 k_0^2 + \frac{m}{l}(l-y) a^2\right] \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \left(m_1 + \frac{m y}{l}\right) \frac{\dot{y}^2}{2} = g \left(m_1 y + \frac{m y^2}{2 l}\right), \; . \; . \quad 12)$$

oder da $dy = a\, d\varphi$, also $\dot{y} = a \dot{\varphi}$ ist, zur Bestimmung des Laufes $\dot{y}$

$$2 J = \dot{y}^2 \left(m_0 \frac{k_0^2}{a^2} + m_1 + m\right) = 2 g y \left(m_1 + \frac{m y}{2 l}\right). \quad \ldots . \quad 12\text{a})$$

Durch Ableitung nach y wird mit $\dot{y}\, d\dot{y} = \ddot{y}\, dy$ daraus

$$\ddot{y} \left(m_0 \frac{k_0^2}{a^2} + m_1 + m\right) = g \left(m_1 + \frac{m y}{l}\right), \quad \ldots \ldots \quad 13)$$

worin die rechte Seite mit dem Stützendruck V ohne das Rollengewicht übereinstimmt. Dieser Differentialgleichung genügt offenbar der Ansatz

$$m_1 + \frac{m y}{l} = C e^{\varkappa t}, \qquad \frac{m \ddot{y}}{l} = C \varkappa^2 e^{\varkappa t}, \quad \ldots \ldots \quad 13\text{a})$$

der nach Einsetzen in 13) auf

$$\varkappa^2 l \left[m_0 k_0^2 + (m_1 + m) a^2\right] = g m a^2 \quad \ldots \ldots \quad 13\text{b})$$

führt. Nennen wir die beiden Wurzeln dieser Gleichung $\pm \varkappa$, so erhalten wir als Integral von 13)

$$\left.\begin{aligned} y &= C_1 e^{\varkappa t} + C_2 e^{-\varkappa t} - \frac{m_1 l}{m} \\ \dot{y} &= \varkappa \left(C_1 e^{\varkappa t} - C_2 e^{-\varkappa t}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 13\text{c})$$

Soll hierin nach Voraussetzung der anfänglichen Ruhelage für $t = 0$, $y = 0$, $\dot{y} = 0$ sein, so wird

$$C_1 = C_2 = \frac{m_1}{m}\frac{l}{2},$$

oder
$$y = \frac{m_1 l}{m}\left(\frac{e^{\varkappa t} + e^{-\varkappa t}}{2} - 1\right) = \frac{m_1 l}{m}(\mathfrak{Cof}\,\varkappa t - 1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 13\text{d})$$

Gl. 13) hätten wir auch, da der Stützendruck $V = g\left(m_1 + m\frac{y}{l}\right)$ die am Rollenschwerpunkt angreifende Außenkraft darstellt, aus 12a) durch

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial J}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial J}{\partial y} = V$$

ableiten können. Wollen wir dagegen die Seilspannung S am Ablösungspunkte ermitteln, so haben wir mit den Ausdrücken für die Wucht des abgelaufenen Seiles mit dem Gewicht $m_1 g$ sowie der Rolle, nämlich

$$2\,J_1 = \left(m_1 + \frac{m\,y}{l}\right)\dot{y}^2, \quad 2\,J_0 = \left[m_0\,k_0^2 + \frac{m}{l}(l - y)\,a^2\right]\dot{\varphi}^2 \quad . \quad . \quad . \quad 14)$$

$$\left.\begin{aligned} g\left(m_1 + m\frac{y}{l}\right) - S &= \frac{dJ_1}{dy} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial J_1}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial J_1}{\partial y} \\ S\,a &= \frac{dJ_0}{d\varphi} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial J_0}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial J_0}{\partial \varphi} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 14\text{a})$$

zu setzen, also

$$\left.\begin{aligned} g\left(m_1 + m\frac{y}{l}\right) - S &= \left(m_1 + \frac{m\,y}{l}\right)\ddot{y} + \frac{m\,\dot{y}^2}{2\,l} \\ S\,a &= \left[m_0\,k_0^2 + \frac{m}{l}(l - y)\,a^2\right]\ddot{\varphi} - \frac{m}{2\,l}a^2\,\dot{\varphi}^2\frac{dy}{d\varphi} \end{aligned}\right\}, \quad . \quad 14\text{b})$$

oder wegen $a\,\dot{\varphi} = \dot{y}$, $a\,d\varphi = dy$

$$S\,a = \left[m_0\,k_0^2 + \frac{m}{l}(l - y)\,a^2\right]\ddot{\varphi} - \frac{m\,\dot{y}^2}{2\,l}a. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 14\text{c})$$

Dadurch ist die Seilspannung S gegeben, wenn wir die oben ermittelten Werte für $\dot{y} = a\,\dot{\varphi}$, $\ddot{y} = a\,\ddot{\varphi}$ einführen. Außerdem aber ergibt die Ausschaltung von S durch Division von 14c) mit a und Addition zur ersten Gl. 14b) wieder die Bewegungsgleichung 13).

4. Beispiel. Der schon im letzten Abschnitt behandelte Fall der Rolle am festgehaltenen Seil Abb. 218 genügt mit Rücksicht auf das Seilgewicht der Arbeitsformel

$$\begin{aligned} &\left[m_0\,k_0^2 + \frac{m}{l}(l - y)\,a^2\right]\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \left[m_0 + \frac{m}{l}(l - y)\right]\frac{\dot{y}^2}{2} \\ &\qquad = g\left[m_0 + \frac{m}{l}(l - y)\right]y + \frac{m\,y^2}{2\,l}g, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 15) \end{aligned}$$

oder wegen $\dot{y} = a\,\dot{\varphi}$

$$\left[m_0\left(1 + \frac{k_0^2}{a^2}\right) + 2\frac{m}{l}(l - y)\right]\dot{y}^2 = 2\,g\,y\left[m_0 + m - \frac{m\,y}{2\,l}\right] \quad . \quad . \quad . \quad 15\text{a})$$

Daraus wird durch Ableitung nach y

$$\left[m_0\left(1 + \frac{k_0^2}{a^2}\right) + 2\frac{m}{l}(l - y)\right]\ddot{y} - \frac{m}{l}\dot{y}^2 = g\left[m_0 + m - \frac{m\,y}{l}\right], \quad . \quad 15\text{b})$$

Die recht umständliche Integration dieser Gleichungen, d. h. die Ermittlung der Abhängigkeit der Fallhöhe von der Zeit mag unterbleiben, da es uns hier auf die Berechnung der Fadenspannung S am Ablösungspunkte ankommt. Zu diesem Zwecke setzen wir

$$2J_1 = \left(m_0 + m - m\frac{y}{l}\right)\dot{y}^2, \qquad 2J_0 = \left(m_0\frac{k_0^2}{a^2} + m - m\frac{y}{l}\right)a^2\dot{\varphi}^2 \quad . \quad 16)$$

und erhalten aus

$$\left.\begin{aligned}\left(m_0 + m - m\frac{y}{l}\right)g - S &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial J_1}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial J_1}{\partial y}\\ S a &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial J_0}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial J_1}{\partial \varphi}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 16\text{a})$$

unter Beachtung von $dy = a\,d\varphi$ für S die beiden Formeln

$$\left.\begin{aligned}\left(m_0 + m - m\frac{y}{l}\right)g - S &= \left(m_0 + m - m\frac{y}{l}\right)\ddot{y} - \frac{m\dot{y}^2}{2l}\\ S &= \left(m_0\frac{k_0^2}{a^2} + m - m\frac{y}{l}\right)\ddot{y} - \frac{m\dot{y}^2}{2l}\end{aligned}\right\}, \quad . \, . \quad 16\text{b})$$

aus denen nach Ausschaltung von S wieder 15b) hervorgeht. Schalten wir dagegen $\ddot{y}$ aus 16b) aus, so ergibt sich

$$\begin{aligned}S\left[m_0\left(1 + \frac{k_0^2}{a^2}\right) + 2\frac{m}{l}(l - y)\right] &= g\left(m_0 + m - m\frac{y}{l}\right)\left(m_0\frac{k_0^2}{a^2} + m - m\frac{y}{l}\right)\\ &\quad - \frac{m m_0}{2l}\frac{a^2 - k_0^2}{a^2}\dot{y}^2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 16\text{c})\end{aligned}$$

worin wir wiederum $\dot{y}^2$ durch seinen Wert 15a) ersetzen können, um die Abhängigkeit der Seilspannung von der Lage zu erhalten, die für $m = 0$, d. h. bei Vernachlässigung des Seilgewichts wie in § 58 Gl. 12c) hinfällig wird. Schließlich ergibt sich noch die Seilspannung am Aufhängepunkte aus der Gleichgewichtsbedingung am ruhig herabhängenden Seilstück zu

$$S_0 = S + mg\frac{y}{l}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 17)$$

5. Beispiel. Eine Schlauchrolle mit dem Schwungmoment $m_0 k_0^2$ wird mit einem Anfangslauf v_0 in wagerechte Bewegung versetzt. Dann ist auf dem Wege s von der Schlauchmasse m der Teil $m s : l$ abgelaufen und wir erhalten aus der Übereinstimmung der Anfangs- und Endwucht die Arbeitsgleichung

$$\left[m_0\left(1 + \frac{k_0^2}{a^2}\right) + 2m\frac{l - s}{l}\right]v^2 = \left[m_0\left(1 + \frac{k_0^2}{a_0}\right) + 2m\right]v_0^2, \quad . \, . \quad 18)$$

woraus eine dauernde Zunahme des Laufes bis $s = l$ auf

$$\frac{v_1^2}{v_0^2} = 1 + \frac{2ma^2}{m_0(a^2 + k_0^2)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 18\text{a})$$

hervorgeht. Alsdann ist der Schlauch abgelaufen, worauf ein später zu behandelnder Stoßvorgang einsetzt.

Zur Ableitung der Abhängigkeit des Weges von der Zeit schreiben wir mit der Abkürzung

$$\frac{m_0}{2m}\left(1 + \frac{k_0^2}{a^2}\right) + 1 = \frac{s_0}{l}$$

an Stelle von 18)

$$\left(1 - \frac{s}{s_0}\right)\frac{v^2}{v_0^2} = 1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 18\text{b})$$

oder mit

$$1 - \frac{s}{s_0} = u, \qquad -ds = s_0\,du = -v\,dt,$$

also

$$-s_0 u^{\frac{1}{2}}\,du = v_0\,dt.$$

Integriert gibt dies

$$C - \frac{2}{3} s_0 u^{\frac{3}{2}} = v_0 t,$$

$$C - \frac{2}{3} s_0 \left(1 - \frac{s}{s_0}\right)^{\frac{3}{2}} = v_0 t,$$

oder mit $s = 0$ für $t = 0$

$$\left(1 - \frac{3}{2} \frac{v_0 t_0}{s_0}\right)^2 = \left(1 - \frac{s}{s_0}\right)^3, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 19)$$

woraus sich für $s = l$ die ganze Ablaufszeit ergibt.

§ 60. Schwungmomente und Schleudermomente starrer Scheiben. Zur praktischen Verwendung der Bewegungsgleichungen ist die Kenntnis der in ihnen auftretenden Festwerte notwendig, von denen derjenige des Trägheits- oder Schwungmomentes noch zu ermitteln ist. Es war für eine zusammenhängende Massengruppe oder Scheibe gegeben durch die Formel

$$m k_0^2 = \Sigma m r^2 = \Sigma m (\xi^2 + \eta^2), \quad \ldots \ldots \quad 1)$$

worin r den Abstand eines Massenpunktes vom Schwerpunkt und ξ, η die Achsenabstände in einem Achsenkreuz durch den Schwerpunkt bedeuten, so daß

$$\Sigma m \xi = 0, \qquad \Sigma m \eta = 0 \quad \ldots \ldots \quad 2)$$

ist. Das Schwungmoment in bezug auf den Schwerpunkt zerfällt nach Gl. 1) in zwei Teile

$$\Sigma m \xi^2 = m k_1^2, \qquad \Sigma m \eta^2 = m k_2^2, \quad \ldots \ldots \quad 1a)$$

welche nunmehr auf zwei sog. Schwerachsen bezogen sind und daher axiale Schwungmomente im Gegensatz zu ihrer als polares Schwungmoment bezeichneten Summe 1) heißen. Aus demselben Grunde nennen wir auch den durch 1) festgelegten mittleren Massenabstand k_0 vom Schwerpunkt den polaren Schwungarm, die entsprechenden Abstände k_1 und k_2 in 1a) dagegen die axialen Schwungarme oder Trägheitshalbmesser.

Wählen wir als Pol für das Schwungmoment einen andern, vom Schwerpunkt um s bzw. x_0, y_0 entfernten Punkt 0, so zwar, daß

$$x_0 + \xi = x, \qquad y_0 + \eta = y, \qquad x_0^2 + y_0^2 = s^2, \qquad x^2 + y^2 = r'^2$$

ist, so sind die axialen Schwungmomente in bezug auf das neue Kreuz OXY mit Rücksicht auf 2)

$$\left.\begin{aligned} \Sigma m x^2 &= \Sigma m (x_0 + \xi)^2 = m x_0^2 + \Sigma m \xi^2 \\ \Sigma m y^2 &= \Sigma m (y_0 + \eta)^2 = m y_0^2 + \Sigma m \eta^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 3)$$

und das neue polare Schwungmoment

$$\Sigma m r'^2 = m s^2 + \Sigma m r^2, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 3a)$$

woraus dann unter Einführung der Schwungarme k_x, k_y, k durch

$$\Sigma m x^2 = m k_x^2, \qquad \Sigma m y^2 = m k_y^2, \qquad \Sigma m r'^2 = m k^2 \quad . \; . \quad 3b)$$

auch folgt

$$k^2 = s^2 + k_0^2, \qquad k_x^2 = x_0^2 + k_1^2, \qquad k_y^2 = y_0 + k_2^2. \quad . \quad 3c)$$

Die Schwungmomente in bezug auf einen beliebigen Pol und zwei zueinander senkrechte Achsen durch denselben ergeben sich also aus den Schwungmomenten in bezug auf den Schwerpunkt und zwei den vorigen parallele Achsen durch denselben durch Hinzufügung der hierauf bezogenen Schwungmomente der im Schwerpunkt vereinigten Gesamtmasse.

Da die Schwungmomente weiterhin als Summen von Einzelmassen mit Abstandsquadraten im Gegensatz zum statischen Moment nicht verschwinden können, so nehmen sie in bezug auf den Schwerpunkt und auf Schwerachsen Kleinstwerte gegenüber allen andern Polen und Parallelachsen durch diese an.

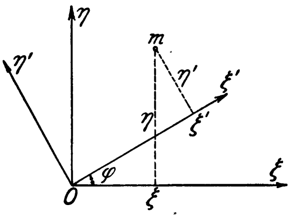

Abb. 222.

Drehen wir dagegen das Achsenkreuz im Schwerpunkt um den Winkel φ, Abb. 222, so stehen die neuen Achsenabstände ξ', η' mit den ursprünglichen ξ, η in den Beziehungen

$$\xi' = \xi \cos\varphi + \eta \sin\varphi, \qquad \eta' = \eta\cos\varphi - \xi \sin\varphi, \quad . \; . \; . \quad 4)$$

also ist
$$\left.\begin{aligned} \xi'^2 &= \xi^2 \cos^2\varphi + \eta^2 \sin^2\varphi + 2\,\xi\,\eta \sin\varphi\cos\varphi \\ \eta'^2 &= \xi^2 \sin^2\varphi + \eta^2\cos^2\varphi - 2\,\xi\,\eta\sin\varphi\cos\varphi \\ \xi'\,\eta' &= (\eta^2 - \xi^2)\sin\varphi\cos\varphi + \xi\,\eta\,(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi). \end{aligned}\right\} \quad . \quad 4\text{a})$$

Daraus ergibt sich durch Erweiterung mit m und Summierung, wobei die Winkelgrößen als gemeinsame Festwerte anzusehen sind, mit den Ausdrücken

$$\left.\begin{aligned} \Sigma m\,\xi^2 &= m\,k_1^2, \qquad \Sigma m\,\eta^2 = m\,k_2^2, \qquad \Sigma m\,\xi\,\eta = m\,\psi \\ \Sigma m\,\xi'^2 &= m\,k_1'^2, \qquad \Sigma m\,\eta'^2 = m\,k_2'^2, \qquad \Sigma m\,\xi'\,\eta' = m\,\psi', \end{aligned}\right\}, \quad . \quad 5)$$

von denen wir die neu auftretenden $m\psi$ und $m\psi'$ als Schleudermomente bezeichnen wollen unter Wegheben der gemeinsamen Gesamtmasse m

$$\left.\begin{aligned} k_1'^2 &= k_1^2\cos^2\varphi + k_2^2\sin^2\varphi + 2\,\psi\sin\varphi\cos\varphi \\ k_2'^2 &= k_1^2\sin^2\varphi + k_2^2\cos^2\varphi - 2\,\psi\sin\varphi\cos\varphi \\ \psi' &= \psi\cos 2\varphi - (k_1^2 - k_2^2)\sin\varphi\cos\varphi. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad 6)$$

Zunächst folgt durch Addition der ersten beiden Formeln

$$k_1'^2 + k_2'^2 = k_1^2 + k_2^2 = k_0^2,$$

womit nur ausgesprochen ist, daß für das polare Schwungmoment die Neigung des Achsenkreuzes gleichgültig ist.

Fragen wir nun, da die Schwungmomente ja nicht verschwinden können, nach ihren Scheitelwerten, so erhalten wir dafür mit

$$\frac{d\,(k_1'^2)}{d\varphi} = 0, \qquad \frac{d\,(k_2'^2)}{d\varphi} = 0$$

die gemeinsame Bedingung

$$\left.\begin{aligned} \psi \cos 2\varphi - (k_1^2 - k_2^2) \sin\varphi \cos\varphi = \psi' = 0 \\ \operatorname{tg} 2\varphi_1 = \frac{2\psi}{k_1^2 - k_2^2}, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; 6\text{a})$$

welche nach der dritten Gl. 6) auf ein Verschwinden des Schleudermomentes für das unter dem Winkel φ_1 gegen die ursprünglichen Achsen geneigte Kreuz führt. Dies ist im Gegensatz zu den Schwungmomenten darum möglich, weil die Schleudermomente aus Produkten $m\xi\eta$ sich zusammensetzen, von denen ξ und η, z. B. auf beiden Seiten einer Symmetrieachse entgegengesetzte Vorzeichen besitzen, so daß zwei derselben sich wie bei statischen Momenten aufheben können.

Setzen wir mit 6a)

$$\cos^2 2\varphi_1 = \frac{(k_1^2 - k_2^2)^2}{(k_1^2 - k_2^2)^2 + 4\psi^2}, \qquad \sin^2 2\varphi_1 = \frac{4\psi^2}{(k_1^2 - k_2^2)^2 + 4\psi^2}$$

in 6) ein, so erhalten wir für die größten und kleinsten Schwungarme k_a, k_b in bezug auf die dazugehörigen sog. Hauptachsen

$$\left.\begin{aligned} k_a^2 = \frac{k_1^2 + k_2^2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(k_1^2 - k_2^2)^2 + 4\psi^2} \\ k_b^2 = \frac{k_1^2 + k_2^2}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(k_1^2 - k_2^2)^2 + 4\psi^2} \end{aligned}\right\} \psi' = 0, \quad . \; 7)$$

für die außerdem kein Schleudermoment besteht. Dessen Scheitelwert folgt alsdann aus 6) für

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\psi'}{d\varphi} = 0, \quad -2\psi \sin 2\varphi - (k_1^2 - k_2^2)\cos 2\varphi = 0 \\ \operatorname{tg} 2\varphi_2 = -\frac{k_1^2 - k_2^2}{2\psi} \end{aligned}\right\} \quad . \; 6\text{b})$$

zu

$$\psi_0' = \pm \frac{1}{2}\sqrt{(k_1^2 - k_2^2)^2 + 4\psi^2}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; 7\text{a})$$

wobei

$$\operatorname{tg} 2\varphi_1 \operatorname{tg} 2\varphi_2 = -1, \qquad \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{4} \quad . \; . \; . \; . \; 7\text{b})$$

ist. Das Achsenkreuz des absolut größten Schleudermomentes halbiert also die Winkel der Hauptachsen.

Schreiben wir nunmehr für die Hauptschwungarme an Stelle von 6)

$$\left.\begin{aligned} k_a^2 = k_1^2 \cos^2\varphi + k_2^2 \sin^2\varphi + 2\psi \sin\varphi\cos\varphi \\ k_b^2 = k_1^2 \sin^2\varphi + k_2^2 \cos^2\varphi - 2\psi \sin\varphi\cos\varphi \\ 0 = \psi \cos 2\varphi - (k_1^2 - k_2^2)\sin\varphi\cos\varphi, \end{aligned}\right\}, \quad . \; . \; 8)$$

so folgt aus den ersten beiden Formeln

$$k_a^2 - k_b^2 = (k_1^2 - k_2^2)\cos 2\varphi + 2\psi \sin 2\varphi$$

und mit Hilfe der dritten Formel 8)

$$k_a^2 - k_b^2 = \frac{k_1^2 - k_2^2}{\cos 2\varphi} = \frac{\psi}{\sin\varphi\cos\varphi}; \quad \psi = \frac{k_1^2 - k_2^2}{2}\,\mathrm{tg}\,2\varphi. \qquad 8a)$$

Damit ist das Schleudermoment durch die beiden zugehörigen Schwungarme und den Neigungswinkel der Achsen gegen die Hauptachsen bestimmt.

Sind dagegen die Hauptachsen mit den zugehörigen Hauptschwungarmen k_a, k_b vorgelegt, so ist für ein anderes um φ geneigtes Achsenkreuz nach 6)

$$\left.\begin{aligned} k_1^2 &= k_a^2\cos^2\varphi + k_b^2\sin^2\varphi = \frac{k_a^2 + k_b^2}{2} + \frac{k_a^2 - k_b^2}{2}\cos 2\varphi \\ k_2^2 &= k_a^2\sin^2\varphi + k_b^2\cos^2\varphi = \frac{k_a^2 + k_b^2}{2} - \frac{k_a^2 - k_b^2}{2}\cos 2\varphi \\ \psi &= \frac{k_b^2 - k_a^2}{2}\sin 2\varphi, \end{aligned}\right\}, \qquad 9)$$

wonach sich also beliebige Schwungmomente und das zugehörige Schleudermoment aus den Hauptschwungmomenten und der Neigung gegen die Hauptachsen berechnen lassen.

Für nicht durch den Schwerpunkt gehende Achsen erhalten wir schließlich mit

$$x = x_0 + \xi, \qquad y = y_0 + \eta$$

für das Schleudermoment wegen 2)

$$\Sigma m x y = m x_0 y_0 + \Sigma m \xi \eta \quad . \quad . \qquad 10)$$

oder kürzer $\quad \psi'' = x_0 y_0 + \psi, \quad . \quad . \quad . \qquad 10a)$

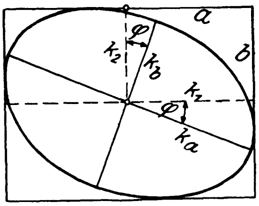

Abb. 223.

so daß also der auf die Schwerachsen bezogene Wert von ψ nur um die Rechtecksfläche $x_0\,y_0$ zu vermehren ist, um den Wert für die neuen Achsen zu erhalten.

Die vorstehende, durch Wegheben der Masse aus den Gleichungen schon ganz geometrische Ermittlung läßt sich auf doppelte Weise auch bildlich durchführen. Umschreibt man nämlich in Abb. 223 eine Ellipse mit den beiden Halbachsen k_a, k_b mit einem Rechteck, dessen eine Seite um φ gegen die große Achse geneigt ist, so genügen die halben Rechteckseiten a, b bzw. die Lote vom Schwerpunkt auf dieselben den ersten beiden Gleichungen 9) und stellen demnach, wenn k_a, k_b Hauptschwungarme sind, die der Achsenneigung φ zugehörigen Schwungarme dar. Deshalb wollen wir diese Ellipse auch als Trägheits- oder Schwungellipse der Massengruppe oder der Scheibe bezeichnen. Für $k_a = k_b = a = b$ geht sie in einen Kreis, das umschriebene Rechteck in ein Quadrat über und die Schwungmomente haben für alle Richtungen denselben Wert.

Um gleichzeitig auch das Schleudermoment zu erhalten, hat Mohr die zweite Form der Gl. 9) durch einen Kreis vom Durchmesser $k_a^2 - k_b^2$ dargestellt, Abb. 224, der auf einer Achse von O aus die Längen k_a^2 und k_b^2 abschneidet. Dann ergeben die Abszissen der Punkte eines Durchmessers mit dem Neigungswinkel 2φ sogleich die Schwungarme k_1^2 und k_2^2, die Ordinaten aber die Größe ψ.

Hiernach genügt für alle Fälle die Ermittlung der Hauptschwungmomente, die wir auf zeichnerischem Wege schon in § 49 kennengelernt haben.

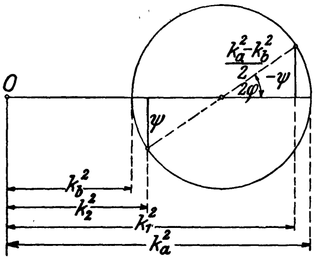

Abb. 224.

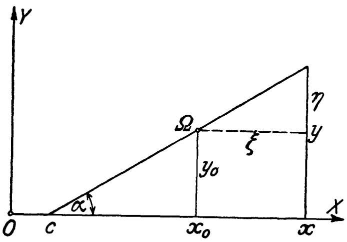

Abb. 225.

1. Beispiel. Für eine Gerade, Abb. 225, welche mit dem Neigungswinkel α die Achse im Abstande c vom Anfange schneidet, ist mit

$$s = \frac{x-c}{\cos\alpha} = \frac{y}{\sin\alpha}, \qquad ds = \frac{dx}{\cos\alpha} = \frac{dy}{\sin\alpha} \quad \ldots\ldots \quad 11)$$

in bezug auf die Achsen

$$\left.\begin{aligned} s k_1^2 &= \int_0^s x^2\,ds = \frac{x^3 - c^3}{3\cos\alpha}, \qquad k_1^2 = \frac{x^2 + cx + c^2}{3} \\ s k_2^2 &= \int_0^s y^2\,ds = \frac{y^3}{3\sin\alpha}, \qquad k_2^2 = \frac{y^2}{3} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 11\text{a})$$

und in bezug auf parallele Schwerachsen mit den Schwerpunktsabständen

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{x+c}{2} = x - \xi, \qquad y_0 = \frac{y}{2} = y - \eta \\ k_a^2 &= k_1^2 - x_0^2 = \frac{(x+c)^2 - cx}{3} - x_0^2 = \frac{(x_0 - c)^2}{3} = \frac{\xi^2}{3} \\ k_b^2 &= k_2^2 - y_0^2 = \frac{y^2}{3} - y_0^2 = \frac{y^2}{12} = \frac{y_0^2}{3} = \frac{\eta^2}{3}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 11\text{b})$$

wenn ξ und η die symmetrischen Endwerte der Abstände auf den Schwerachsen bedeuten. Natürlich hätte man auch umgekehrt erst $k_a\,k_b$ berechnen und daraus k_1, k_2 bestimmen können. Für das Schleudermoment erhalten wir nach Gl. 8a) in bezug auf die Schwerachsen

$$\psi = \frac{\xi^2 - \eta^2}{6}\operatorname{tg} 2\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 11\text{c})$$

und nach 10a) für das um x_0, y_0 aus dem Schwerpunkt verschobene Kreuz

$$\psi'' = x_0\,y_0 + \frac{\xi^2 - \eta^2}{6}\operatorname{tg} 2\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 11\text{d})$$

2. Beispiel. Für das Kreisbogenstück nach Abb. 130 vom Halbmesser r und den Winkeln φ_1 und φ_2 der Endhalbmesser gegen die x-Achse ist

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad ds = r\,d\varphi, \quad s = r(\varphi_2 - \varphi_1) \quad . \; . \; . \; . \quad 12)$$

$$\left.\begin{aligned} s k_1^2 &= \int_0^s x^2\,ds = r^3\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\cos^2\varphi\,d\varphi = \frac{r^3}{2}\left(\varphi_2 - \varphi_1 + \frac{\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1}{2}\right) \\ s k_2^2 &= \int_0^s y^2\,ds = r^3\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sin^2\varphi\,d\varphi = \frac{r^3}{2}\left(\varphi_2 - \varphi_1 - \frac{\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1}{2}\right) \end{aligned}\right\} \quad 12\text{a})$$

und bei symmetrischer Lage um die y-Achse also für $\varphi_1 + \varphi_2 = \pi$, $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\varphi_0$

$$k_1^2 = \frac{r^2}{2}\left(1 - \frac{\sin 2\varphi_0}{2\varphi_0}\right), \qquad k_2^2 = \frac{r^2}{2}\left(1 + \frac{\sin 2\varphi_0}{2\varphi_0}\right) \quad . \; . \; . \; . \quad 12\text{b})$$

mit verschwindendem Schleudermoment. Dagegen folgt der polare Schwungarm k_0 aus 12a) ganz allgemein aus

$$k_0^2 = k_1^2 + k_2^2 = r^2, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 12\text{c})$$

da hier alle Längenelemente, die man sich mit Masse gleichmäßig belegt denken kann, denselben Abstand r vom Anfang O haben.

3. Beispiel. Ein Rechteck mit den Seitenlängen 2a und 2b liefert nach Abb. 226 in bezug auf dazu parallele Schwerachsen

$$dF = 2a\,d\eta, \quad \text{oder} \quad dF = 2b\,d\xi, \qquad F = 4ab \quad . \quad 13)$$

$$\left.\begin{aligned} F k_a^2 &= \int \xi^2\,dF = 2b\int_{-a}^{+a}\xi^2\,d\xi = \frac{4}{3}a^3 b, \quad k_a^2 = \frac{a^2}{3} \\ F k_b^2 &= \int \eta^2\,dF = 2a\int_{-b}^{+b}\eta^2\,d\eta = \frac{4}{3}ab^3, \quad k_b^2 = \frac{b^2}{3} \end{aligned}\right\} \quad 13\text{a})$$

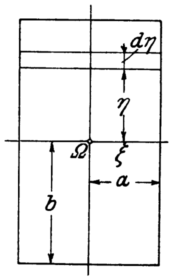

Abb. 226.

und in bezug auf einen Eckpunkt mit $x_0 = a$, $y_0 = b$

$$k_1^2 = k_a^2 + x_0^2 = \frac{4}{3}a^2, \qquad k_2^2 = k_b^2 + y_0^2 = \frac{4}{3}b, \quad 13\text{b})$$

während für das Schleudermoment sich hier mit $\varphi = 0$

$$\psi = x_0 y_0 = ab \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 13\text{c})$$

ergibt.

4. Beispiel. Für die Fläche eines Kreises mit dem Halbmesser a haben wir zunächst das ringförmige Element $dF = 2\pi r\,dr$, $F = \pi a^2$, also

$$F k_0^2 = 2\pi\int_0^a r^3\,dr = \frac{\pi a^4}{2}, \qquad k_0^2 = \frac{a^2}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 14)$$

und daher die einander gleichen axialen Schwungarme $k_1^2 = k_2^2 = \frac{k_0^2}{2} = \frac{a^2}{4}$.

Für den Kreisring mit den Halbmessern $r_1 < r_2$ und $F = \pi(r_2^2 - r_1^2)$ ergibt sich demgemäß

$$F k_0^2 = \frac{\pi}{2}(r_2^4 - r_1^4), \quad k_0^2 = \frac{r_2^2 + r_1^2}{2} = 2k_1^2 = 2k_2^2 \quad . \; . \; . \; . \quad 14\text{a})$$

5. Beispiel. Für eine Ellipsenfläche, Abb. 132, mit den Halbachsen a und b gilt in bezug auf den Mittelpunkt

$$\left.\begin{aligned} x = a\cos\psi, \quad y = b\sin\psi, \quad dx &= -a\sin\psi\,d\psi, \quad dy = b\cos\psi\,d\psi \\ dF = x\,dy = ab\cos^2\psi\,d\psi \quad &\text{oder} \quad dF = y\,dx = -ab\sin^2\psi\,d\psi \end{aligned}\right\}, \; 15)$$

also
$$\left.\begin{aligned} F k_1^2 &= \int x^2\,dF = \int x^2 y\,dx = -\,a^3 b\int\sin^2\psi\cos^2\psi\,d\psi \\ F k_2^2 &= \int y^2\,dF = \int y^2 x\,dy = \,a b^3\int\sin^2\psi\cos^2\psi\,d\psi \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad 15\text{a})$$

Beschränken wir uns auf einen Quadranten, so ist die Integration zu erstrecken zwischen den Grenzen $\psi = 0$ und $\psi = \frac{\pi}{2}$, also folgt mit $F = \frac{\pi}{4} a b$

$$k_1^2 = \frac{a^2}{4}, \quad k_2^2 = \frac{b^2}{4}, \quad k_0^2 = \frac{a^2 + b^2}{4} \quad \text{. . . . . 15b)}$$

Die Schwungarme ändern sich auch nicht, wenn wir statt des Quadranten die halbe oder ganze Ellipsenfläche ins Auge fassen, da das Schwungmoment in diesen Fällen im Verhältnis der Flächen zunimmt. Weiter erkennt man aus 15b), daß die Schwungellipse hier einfach eine der vorgelegten ähnliche mit halben Abmessungen ist. Da ferner die Schwerpunktsabstände der Ellipsenquadranten von den Achsen

$$x_0 = \frac{4a}{3\pi}, \quad y_0 = \frac{4b}{3\pi}$$

sind, so ergeben sich für die hierauf bezogenen Schwungarme

$$k_1'^2 = a^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2}\right), \quad k_2'^2 = b^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2}\right) \quad \text{. . . . . . 15c)}$$

Um schließlich das Schleudermoment des Quadranten zu ermitteln, müßten wir die Richtung seiner Hauptachsen kennen. Da diese nicht von vornherein feststeht, müssen wir auf die Grundformel 5) zurückgehen, also

$$F\psi = \int xy\, dF = \int_0^b \int_0^x xy\, dx\, dy = \int_0^b \frac{x^2}{2} y\, dy \quad \text{. . . . . . 16)}$$

setzen, woraus sich mit 15)

$$\left.\begin{aligned} F\psi &= a^2 b^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\psi \sin\psi\, d\psi = -a^2 b^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\psi\, d(\cos\psi) = \frac{a^2 b^2}{4}, \\ \text{oder} \qquad \psi &= \frac{a b}{\pi} \end{aligned}\right\} \quad \text{. 16a)}$$

für die beiden Ellipsenachsen und für die Parallelen durch den Quadrantenschwerpunkt

$$\psi' = \psi - x_0 y_0 = \frac{a b}{\pi}\left(1 - \frac{16}{9\pi}\right) \quad \text{. . . . . 16b)}$$

ergibt. Also ist nach 8a) die Neigung der Hauptachsen des Quadranten gegen die Ellipsenachse gegeben durch

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\psi'}{k_1'^2 - k_2'^2} = \frac{2ab}{a^2 - b^2} \frac{\frac{1}{\pi} - \frac{16}{9\pi^2}}{\frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2}} \quad \text{. . . . . . . 16c)}$$

XIII. Reibungsfreie Bewegung starrer Scheiben.

§ 61. Allgemeine Theorie der Scheibenbewegung. Die ebene Bewegung einer starren Scheibe ist, wie wir in § 57 gesehen haben, völlig bestimmt durch die Verschiebung der beiden Schwerpunktsabstände $x_0\ y_0$ gegen ein festes Achsenkreuz und die Drehung φ der Verbindungslinie des Schwerpunktes mit irgend einem anderen Scheibenpunkt gegen eine vorgegebene Anfangslage. Sind diese drei Bewegungen, denen die drei Grundformeln

$$X = m\ddot{x}_0, \qquad Y = m\ddot{y}_0, \qquad M_0 = m k_0^2 \ddot{\varphi} \quad \text{. . . . 1)}$$

entsprechen, voneinander unabhängig, so sprechen wir von einer freien Bewegung der Scheibe und schreiben ihr drei Freiheitsgrade zu. Bestehen dagegen zwischen den drei Größen $x_0\ y_0\ \varphi$ oder ihren Ableitungen von vornherein irgendwelche Beziehungen, welche die drei Bewegungen miteinander verknüpfen und damit die Zahl der Freiheitsgrade einschränken, so vollzieht die Scheibe eine gebundene oder gezwungene Bewegung. Die neuen Bedingungsgleichungen sind aber mit den Grundformeln 1) nur dann verträglich, wenn zu den äußeren Kräften noch solche hinzutreten, welche die Abweichung der freien und der gezwungenen Bewegung auszugleichen vermögen. Ist z. B. die Schwerpunktsbewegung durch die Gleichung einer Führungsbahn

$$f(x_0\, y_0) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 2)$$

vorgeschrieben, also auf zwei Freiheitsgrade beschränkt, so kann dies auch durch eine Zwangskraft Q' mit den Achsenanteilen X' und Y' erreicht werden, die zu der äußeren treibenden Kraft noch hinzutritt, selbst aber keine Arbeit leistet oder verzehrt, da sie an jeder Stelle auf der Führungsbahn senkrecht steht. Mithin ist

$$X'\,dx_0 + Y'\,dy_0 = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 2\text{a})$$

und die Bewegungsgleichungen 1) nehmen, da die Zwangskraft am Schwerpunkt angreifend keinen Beitrag zum Moment M der äußeren Kraft liefert, die Form an

$$X + X' = m\ddot{x}_0, \qquad Y + Y' = m\ddot{y}_0, \qquad M_0 = m k_0^2\,\ddot{\varphi} \quad \ldots \quad 3)$$

Durch die 5 Gleichungen 2) 2a) 3) sind nun sowohl die $x_0\ y_0\ \varphi$, als auch die Anteile $X'\ Y'$ der Zwangskraft ebenso bestimmt wie bei der freien Bewegung die $x_0\ y_0\ \varphi$ durch die Grundformeln 1).

Halten wir den Schwerpunkt fest oder lassen nur eine gleichförmig geradlinige Bewegung zu, deren Lauf v nach Größe und Richtung ganz willkürlich sein kann, so lauten die Bedingungsgleichungen

$$\ddot{x}_0 = \ddot{y}_0 = 0 \quad \text{bzw.} \quad \dot{x}_0 = \dot{y}_0 = 0 \quad 2\text{b})$$

mit denen sich 3) vereinfacht in:

$$\left.\begin{array}{l} X + X' = 0, \qquad Y + Y' = 0 \\ M = m k_0^2\,\ddot{\varphi}. \end{array}\right\} \quad 3\text{a})$$

In diesem Falle der Bewegung mit nur einem Freiheitsgrad, nämlich der Drehung der Scheibe um ihren Schwerpunkt besteht an diesem Gleichgewicht zwischen der Zwangskraft und der Außenkraft.

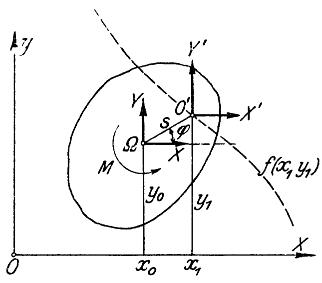

Abb. 227.

In den meisten wirklich vorkommenden Fällen erstrecken sich die Bedingungsgleichungen, welche die Bewegungsfreiheit einschränken, nicht auf die Schwerpunktslage, sondern auf die Achsenabstände x_1, y_1 eines andern Scheibenpunktes O' in der Entfernung s vom Schwerpunkt Ω, so zwar, daß wir im Anschluß an Abb. 227

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 = x_0 + s\cos\varphi, & y_1 = y_0 + s\sin\varphi \\ \dot{x}_1 = \dot{x}_0 - s\,\dot{\varphi}\sin\varphi, & \dot{y}_1 = \dot{y}_0 + s\,\dot{\varphi}\cos\varphi \\ \ddot{x}_1 = \ddot{x}_0 - s\,(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi), & \ddot{y}_1 = \ddot{y}_0 + s\,(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi) \end{array}\right\} \quad 4)$$

haben. Damit wird aus 1) für die freie Bewegung durch Verschiebung der Außenkraft von Ω nach O', unter Berücksichtigung des dadurch geweckten Kräftepaares $X(y_1 - y_0) - Y(x_1 - x_0) = (X \sin\varphi - Y\cos\varphi)\, s$, sowie wegen $k_0^2 + s^2 = k^2$ und $M_0 = m k_0^2 \ddot{\varphi}$

$$\left.\begin{aligned} X &= m\ddot{x}_1 + m s(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi) \\ Y &= m\ddot{y}_1 - m s(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi) \\ M &= M_0 + (X\sin\varphi - Y\cos\varphi)s = mk^2\ddot{\varphi} + ms(\ddot{x}_1\sin\varphi - \ddot{y}_1\cos\varphi) \end{aligned}\right\}, \quad 4\text{a})$$

worin k den Schwungarm der Scheibe um den Punkt O' bedeutet. Da hierin bei vorgelegtem Kraftfeld wieder nur die Lagengrößen x_1 y_1 φ auftreten, so wird die Zahl der Freiheitsgrade durch die Verschiebung des Kraftangriffs nicht geändert.

Schränken wir die Bewegungsfreiheit durch gewisse Bedingungen ein, z. B. durch eine Führungsbahn des Punktes x_1 y_1, so treten wieder Zwangskräfte Q' bzw. X', Y' auf, welche längs der Zwangsbahn aber keine Arbeit leisten. Es müssen also die Bedingungsgleichungen

$$f(x_1 y_1) = 0, \qquad X'dx_1 + Y'dy_1 = 0 \quad \ldots\ldots \quad 5)$$

erfüllt sein, während die Bewegungsgleichungen 4a) übergehen in

$$\left.\begin{aligned} X + X' &= m\ddot{x}_1 + m s(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi) \\ Y + Y' &= m\ddot{y}_1 - m s(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi) \\ M &= m k^2\ddot{\varphi} + m s(\ddot{x}_1\sin\varphi - \ddot{y}_1\cos\varphi) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 5\text{a})$$

und mit 5) zusammen zur Bestimmung der Unbekannten x_1 y_1 φ, X', Y' gerade ausreichen. Da wir mit Hilfe der ersten Gl. 5), d. h. der vorgelegten Bahn einen der Abstände x_1 y_1 durch den andern ausdrücken können, so daß in den übrigbleibenden Formeln nur einer derselben außer φ eingeht, so besitzt die an einem Punkte geführte Scheibe nur noch zwei Freiheitsgrade. Halten wir dagegen den Punkt x_1 y_1 gänzlich fest, setzen also

$$\dot{x}_1 = \dot{y}_1 = 0 \quad \text{bzw.} \quad \ddot{x}_1 = \ddot{y}_1 = 0, \quad \ldots\ldots \quad 5\text{b})$$

so vereinfachen sich die Formeln 5a) in

$$\left.\begin{aligned} X + X' &= + m s(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi) \\ Y + Y' &= - m s(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi) \\ M &= m k^2\ddot{\varphi} \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots \quad 5\text{c})$$

von denen die Integration der letzteren die Drehung φ in ihrer Abhängigkeit von der Zeit liefert, während sich aus den beiden ersteren die Achsenanteile X' Y' der sogen. Auflagerdrücke ergeben. Eine solche um einen Pol außerhalb ihres Schwerpunktes drehbare starre Scheibe nennen wir ein materielles, physisches oder Scheibenpendel, welches ersichtlich nur noch einen Freiheitsgrad besitzt und später eingehend untersucht werden wird.

Sehr viel verwickelter gestaltet sich der Fall des Gleitens oder Abrollens der Scheibe vermittels einer mit ihr starr verbundenen Kurve längs einer Führungsbahn im festen Achsenkreuz, die wie oben auf die Scheibe an der Berührungsstelle x, y die Zwangskraft Q' mit den Anteilen $X' Y'$ ausübt. Sind ξ, η die Abstände des Berührungspunktes in einem mit der Scheibe starr verbundenen Achsenkreuz durch deren Schwerpunkt $x_0\ y_0$, welches nach Abb. 228 mit dem in der Bewegungsebene festen Achsenkreuz $x\,y$ den Winkel φ bildet, so ist zunächst

$$\left.\begin{aligned} x - x_0 &= \xi \cos\varphi - \eta \sin\varphi \\ y - y_0 &= \xi \sin\varphi + \eta \cos\varphi \end{aligned}\right\} \quad . \quad 6)$$

Weiter seien die Gleichungen der Führungsbahn und der Scheibenkurve

$$\left.\begin{aligned} f_1(x\,y) &= 0 \\ f_2(\xi\,\eta) &= 0 \end{aligned}\right\}, \quad . \quad . \quad . \quad 6\text{a})$$

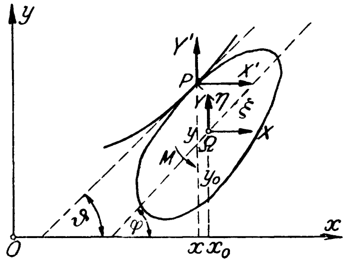

Abb. 228.

die miteinander im Berührungspunkt $x\,y$ bzw. $\xi\,\eta$ durch die gemeinsame unter dem Winkel ϑ gegen die feste x-Achse geneigte Tangente derart verbunden sind, daß

$$dy = dx \operatorname{tg}\vartheta, \qquad d\eta = d\xi \operatorname{tg}(\vartheta - \varphi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6\text{b})$$

Hierzu treten noch die der Einfachheit halber auf den Schwerpunkt bezogenen Bewegungsgleichungen unter Hinzunahme der Zwangskraft in x, y

$$\left.\begin{aligned} X + X' = m\ddot{x}_0, \qquad Y + Y' = m\ddot{y}_0 \\ M_0 + Y'(x - x_0) - X'(y - y_0) = m k_0^2 \ddot{\varphi} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad 7)$$

und im Falle des reibungsfreien Gleitens die Normalbedingung

$$X'dx + Y'dy = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7\text{a})$$

so daß in der Tat für die 10 Unbekannten $x_0\,y_0\,x\,y\,\varphi\,\vartheta\,\xi\,\eta\,X'\,Y'$ eine gerade hinreichende Zahl von Gleichungen vorhanden ist. Da wir durch die 6 Gleichungen 6a), 6b), 6) alle Lagengrößen durch zwei z. B. x, y ausdrücken und diese dann in 7) und 7a) einführen können, so bleiben noch vier Gleichungen zur Ermittlung von $X' Y'$ und $x\,y$ übrig. Die Gleitbewegung der Scheibe besitzt also zwei Freiheitsgrade.

Rollt dagegen die Scheibenkurve auf der Führungsbahn etwa durch Vermittlung einer beiderseitigen Verzahnung, Rauhigkeit oder eines über beide gespannten linienstarren Fadens ab, so entfällt wegen des Zahndrucks oder der Fadenspannung in die Tangentenrichtung an der Berührungsstelle die Normalbedingung 7a), und es tritt dafür die Gleichheit der aufeinander abrollenden Bogenelemente, d. h.

$$d\xi^2 + d\eta^2 = dx^2 + dy^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7\text{b})$$

Diese gestattet alsdann im Verein mit den 6 Formeln 6), 6a), 6b) die Ausschaltung aller Lagengrößen bis auf eine, z. B. den Drehwinkel φ, so daß die reine Rollbewegung der Scheibe nur noch einen Freiheitsgrad besitzt. Das einfachste Beispiel hierfür bildet das schon in § 58 behandelte Abrollen einer Kreisscheibe auf einer Geraden, welches dort leicht mit elementaren Hilfsmitteln bewältigt werden konnte.

Viel wichtiger ist der praktisch sehr häufige Fall der **Führung einer starren Scheibe** durch mit ihr starr verbundene Gleitstücke oder Zapfen an **zwei** vorgelegten **Führungs-** oder **Leitkurven** mit den Gleichungen

$$f_1(x_1 y_1) = 0, \qquad f_2(x_2 y_2) = 0 \quad \ldots \ldots \quad 8)$$

im festen Achsenkreuz. Bezeichnen wir in Abb. 229 den Abstand der beiden Führungspunkte auf der Scheibe mit l, ihre Schwerpunktsabstände mit s_1 und s_2, deren feste Winkel gegen l mit $\alpha_1 \alpha_2$ und die Neigung von l gegen die feste x-Achse mit φ, so bestehen zunächst die rein geometrischen Beziehungen

$$\left.\begin{array}{ll} x_2 - x_1 = l\cos\varphi, & y_2 - y_1 = l\sin\varphi \\ x_0 - x_1 = s_1\cos(\varphi - \alpha_1), & y_0 - y_1 = s_1\sin(\varphi - \alpha_1) \\ x_2 - x_0 = s_2\cos(\varphi + \alpha_2), & y_2 - y_0 = s_2\sin(\varphi + \alpha_2) \end{array}\right\} \quad . \quad 8\,\mathrm{a})$$

Diese sind allerdings nicht völlig unabhängig voneinander, sondern durch die Länge l und das Dreieck aus $l\, s_1\, s_2$ derart miteinander verknüpft, daß z. B. die Schwerpunktsabstände $x_0\, y_0$ sich durch Ausschaltung von φ aus den letzten 4 Gleichungen in den Abständen $x_1\, y_1$, $x_2\, y_2$ der Führungspunkte ausdrücken lassen. Es bleiben also im Verein mit 8) im ganzen nur 6 voneinander unabhängige Beziehungen übrig, welche die Zurückführung aller Lagengrößen $x_0 y_0$, $x_1 y_1$, $x_2 y_2\, \varphi$ auf eine, z. B. den Drehwinkel φ ermöglichen, so daß **die Bewegung der zweifach geführten Scheibe nur einen Freiheitsgrad besitzt.**

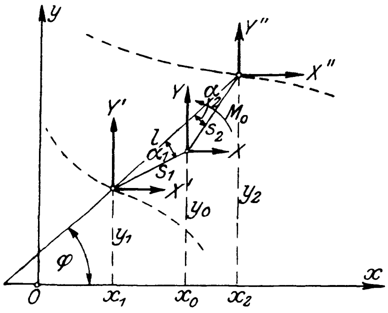

Abb. 229.

Dazu treten noch die Bewegungsgleichungen bezogen auf den Schwerpunkt mit Rücksicht auf die Zwangskräfte

$$\left.\begin{array}{l} X + X' + X'' = m\ddot{x}_0, \qquad Y + Y' + Y'' = m\ddot{y}_0 \\ M_0 + Y'(x_1 - x_0) - X'(y_1 - y_0) + Y''(x_2 - x_0) - X''(x_2 - x_0) \\ = m k_0^2 \ddot{\varphi} \end{array}\right\} 9)$$

und schließlich die Normalbedingnngen der Zwangskräfte selbst an den Führungsschienen

$$X'\,dx_1 + Y'\,dy_1 = 0, \qquad X''\,dx_2 + Y''\,dy_2 = 0, \quad . \quad . \quad 9\,\mathrm{a})$$

welche zusammen zur Ermittlung der noch übrigen Unbekannten φ, $X'Y'$, $X''Y''$ gerade hinreichen. Von dieser Bewegung werden wir später einige wichtige Sonderfälle betrachten.

Sind schließlich **mehrere Scheiben** durch **Berührung** ihrer **Ränder** oder auch durch **Gelenke** miteinander verknüpft, so besitzt die ganze Gruppe stets weniger Freiheitsgrade als die freien Scheiben zusammengenommen, also bei n Scheiben weniger als $3n$ Freiheitsgrade. Da jede Berührung die gegenseitige Bewegung in der Berührungsnormalen verknüpft, so wird hierdurch je ein Freiheitsgrad ausgeschaltet, durch ein Gelenk dagegen, dessen Achsenabstände $x\,y$ je zwei Scheiben gemeinsam sind, demnach zwei Freiheitsgrade. Mithin haben zwei gelenkig verbundene Scheiben $6 - 2 = 4$ Freiheitsgrade, entsprechend den Achsenabständen $x\,y$ des Gelenkes und den Neigungswinkeln $\varphi_1\,\varphi_2$ der beiden Schwerachsen der Scheiben, Abb. 230. Beziehen wir diese auf die Lotrechte und führen noch die Neigung ψ der Verbindungslinie l der Schwerpunkte $x_1\,y_1$, $x_2\,y_2$ mit deren Abständen $s_1\,s_2$ vom Gelenke ein, so haben wir die Beziehungen

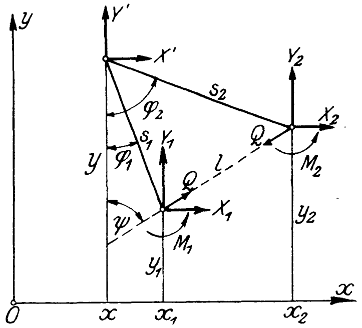

Abb. 230.

$$s_1 \cos\varphi_1 = y - y_1, \quad s_2 \cos\varphi_2 = y - y_2, \quad s_2 \cos\varphi_2 - s_1 \cos\varphi_1 = l \cos\psi$$
$$s_1 \sin\varphi_1 = x_1 - x, \quad s_2 \sin\varphi_2 = x_2 - x, \quad s_2 \sin\varphi_1 - s_1 \sin\varphi_1 = l \sin\psi.$$

Mit den Achsenanteilen $X'\,Y'$ des Zapfendruckes, den Außenkräften $X_1\,Y_1$, $X_2\,Y_2$ mit ihren Momenten $M_1\,M_2$, sowie einer Zwischenkraft Q in der Verbindungsgeraden l der Schwerpunkte lauten dann die Bewegungsgleichungen

$$X_1 + X' + Q \sin\psi = m_1 \ddot{x}_1, \qquad Y_1 + Y' + Q \cos\psi = m_1 \ddot{y}_1$$
$$X_2 - X' - Q \sin\psi = m_2 \ddot{x}_2, \qquad Y_2 - Y' - Q \cos\psi = m_2 \ddot{y}_2$$
$$M_1 - (X' \cos\varphi_1 + Y' \sin\varphi_1)\, s_1 = m_1 k_1^2 \ddot{\varphi}_1,$$
$$M_2 + (X' \cos\varphi_2 + Y' \sin\varphi_2)\, s_2 = m_2 k_2^2 \ddot{\varphi}_2.$$

Diese 12 Gleichungen reichen gerade aus zur Berechnung der 10 Lagengrößen $x\,y$, $x_1\,y_1$, $x_2\,y_2$, $\varphi_1\,\varphi_2$, $l\,\psi$, sowie der Zapfendruckanteile $X'\,Y'$ bei willkürlich aufgenommener, bzw. frei veränderlicher Kraft Q. Das ist z. B. der Fall beim Abstürzen einer Katze, deren Rückenkrümmung angenähert durch ein Gelenk ersetzt werden kann, während Q die Muskelkraft zwischen den Teilschwerpunkten bedeutet, durch welche die Katze ihre Lage während der Bewegung derart verändert, daß sie stets mit den Füßen den Boden berührt.

Da man nun in allen Fällen die Arbeitsgleichung sofort anschreiben kann, so genügt dieselbe offenbar schon zur vollständigen Beschreibung der Bewegung mit nur einem Freiheitsgrade, während bei mehreren Freiheitsgraden stets auf die Bewegungsgleichungen zurückgegriffen werden muß.

§ 62. Kritische Drehwerte rotierender Wellen. Trägt eine als gewichtslos betrachtete Welle eine Schwungmasse m mit dem polaren Schwungarm k_0 um ihren Schwerpunkt S, so wird der letztere im allgemeinen infolge ungenauer Zentrierung nicht in die geometrische Wellenachse fallen, sondern einen kleinen Abstand a von ihr haben. Im Ruhezustand wird alsdann dieser Schwerpunkt seine tiefste Lage einnehmen, die sich aus der der Belastung verhältnisgleichen federnden Durchbiegung r_0 des Wellenmittels M an der Belastungsstelle und der Größe a durch einfache Addition zu $r_0 + a$ ergibt. Ist die Welle um einen Winkel β gegen die Lotrechte geneigt, so ist $m g \sin\beta = m g'$ der zu ihr normale, die Durchbiegung bedingende Gewichtsanteil, während der in die Wellenachse selbst fallende Anteil von den Lagern aufgenommen wird. Mit einer Federungszahl α^2 hat man alsdann für die Durchbiegung in der Ruhelage

$$m g \sin\beta = m g' = \alpha^2 r_0 \, . \quad . \quad . \quad 1)$$

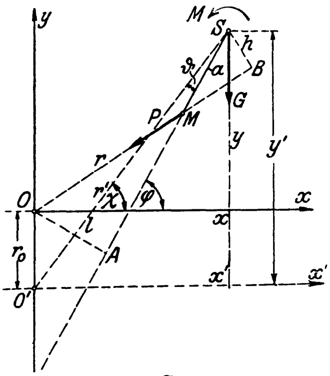

Abb. 231.

Bei der Drehung der Welle werden sowohl das Wellenmittel als auch der Massenschwerpunkt Auslenkungen aus ihren Ruhelagen erfahren. Wählen wir in der als Zeichenebene der Abb. 231 gewählten Normalebene der Welle durch S den sog. Durchstoßpunkt der Verbindungsgeraden der Lagermitten zum Anfang O des Achsenkreuzes mit wagerechter x-Achse, so können wir uns zunächst das Wellenmittel M durch die starre Gerade a mit dem Massenschwerpunkt S verbunden denken. Ist der augenblickliche Abstand $OM = r$, so wirkt in M die nach O gerichtete Federkraft $P = \alpha^2 r$, in S mit den Achsenabständen x und y dagegen der Gewichtsanteil $G = m g'$ in der negativen y-Richtung. Unter der Wirkung dieser beiden Kräfte vollzieht die als starre Scheibe aufzufassende Schwungmasse alsdann eine freie Bewegung, deren Verlauf wir festzustellen haben. Ist nun $h = SB$ das Lot auf die mit r zusammenfallende Kraftrichtung von P, $l = OA$ das Lot von O auf $MS = a$, so ist mit Rücksicht auf die Ähnlichkeit der Dreiecke $OMA \sim SMB$

$$h \cdot r = a l = a (x \sin\varphi - y \cos\varphi)$$

und wir erhalten mit dem im Sinne des Pfeiles wirkenden Drehmoment $\mathfrak{M}$ eines an der Schwungmasse in der Zwischenebene wirkenden äußeren Kräftepaares durch Verschiebung aller Kräfte nach S die Bewegungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} m \ddot{x} &= -\alpha^2 (x - a \cos\varphi) \\ m \ddot{y} &= -\alpha^2 (y - a \sin\varphi) - m g' \\ m k_0^2 \ddot{\varphi} &= -\alpha^2 r h + \mathfrak{M} = \alpha^2 a (y \cos\varphi - x \sin\varphi) + \mathfrak{M}, \end{aligned}\right\}, \quad 2)$$

die wir mit den Abkürzungen

$$\frac{\alpha^2}{m} = \omega_0^2, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \omega, \qquad \frac{\mathfrak{M}}{m} = M \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

auch schreiben können

$$\left.\begin{array}{c}\ddot{x} = -\,\omega_0^2\,(x - a\cos\varphi), \qquad \ddot{y} = -\,\omega_0^2\,(y - a\sin\varphi) - g' \\ k_0^2\,\dot{\omega} = \omega_0^2\,a\,(y\cos\varphi - x\sin\varphi) + M.\end{array}\right\}, \quad 2\text{a})$$

Setzen wir darin

$$x = x', \qquad \omega_0^2\,y + g' = \omega_0^2\,y', \quad \ldots\ldots \quad 3\text{a})$$

so wird darin in bezug auf einen neuen Anfangspunkt O'

$$\left.\begin{array}{c}\ddot{x}' = -\,\omega_0^2\,(x' - a\cos\varphi), \qquad \ddot{y}' = -\,\omega_0^2\,(y' - a\sin\varphi) \\ k_0^2\,\dot{\omega} = \omega_0^2\,a\,(y'\cos\varphi - x'\sin\varphi) - a g'\cos\varphi + M.\end{array}\right\} \quad 2\text{b})$$

Für die Ruhelage ist nun mit $\dot{\omega} = 0$, $\ddot{x} = \ddot{x}' = 0$, $\ddot{y} = \ddot{y}' = 0$, $M = 0$,

$$\left.\begin{array}{c}x = x' = a\cos\varphi, \qquad \omega_0^2\,y + g' = \omega_0^2\,y' = \omega_0^2\,a\sin\varphi \\ y\cos\varphi - x\sin\varphi = 0.\end{array}\right\} \quad 2\text{c})$$

Diese Formeln werden befriedigt durch

$$\cos\varphi = 0, \qquad \sin\varphi = \pm 1, \qquad x_0 = 0, \qquad y_0' = \pm a = y_0 + \frac{g'}{\omega_0^2},$$

oder unter Beachtung von 1)

$$y_0' = \pm a = y_0 + r_0, \qquad y_0 = -\,r_0 \pm a,$$

so daß also, wenn wir $y = -r + a$ als labil ausschalten, der Anfangspunkt O' des Achsenkreuzes $x'y'$ mit der stabilen Ruhelage des Wellenmittels M zusammenfällt.

Für $a = 0$, also eine vollkommene Zentrierung der Schwungmasse auf der Welle, vereinfachen sich unsere Formeln in

$$\left.\begin{array}{c}\ddot{x}' + \omega_0^2\,x' = 0, \qquad \ddot{y}' + \omega_0^2\,y' = 0 \\ k_0^2\,\dot{\omega} = M\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 2\text{d})$$

und ergeben in der x- und y-Richtung die Möglichkeit freier Schwingungen, unbeeinflußt von der durch das Moment bedingten Veränderlichkeit des Drehwertes der Schwungmasse.

Unsere Gleichungen 2a) und 2b) bestimmen nun die Veränderlichen φ, x, y bzw. $x'y'$ bei vorgelegtem Drehmoment als Funktionen der Zeit. Erweitern wir 2a) der Reihe nach mit

$$dx = v_x\,dt, \qquad dy = v_y\,dt, \qquad d\varphi = \omega\,dt \quad \ldots \quad 4)$$

und addieren, so erhalten wir mit Rücksicht auf

$$\left.\begin{array}{l}v_x^2 + v_y^2 = v^2 \\ r^2 = (x - a\cos\varphi)^2 + (y - a\sin\varphi)^2\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 4\text{a})$$

die Arbeitsgleichung bezogen auf die Masseneinheit

$$v\,dv + k_0^2\,\omega\,d\omega + \omega_0^2\,r\,dr + g'\,dy = M\,d\varphi. \quad \ldots \quad 5)$$

Diese besagt nur, daß die Arbeit des äußeren Momentes M zur Beschleunigung des Schwerpunktes der Gesamtmasse, zur Erhöhung des

Drehanlaufes, der Federspannung und zur Hebung des Schwerpunktes verwendet wird und hätte darum auch sogleich angeschrieben werden können. Sie bestätigt somit nur die Richtigkeit unseres Ansatzes 2) der Bewegungsgleichungen.

Wenn wir auch diese unter gewissen vereinfachenden Annahmen unmittelbar integrieren können, so wollen wir doch 2b) zur bequemeren Übersicht der Veränderlichkeit des Fahrstrahls $O'S = r'$ durch die Gleichungen

$$x' = r' \cos\chi, \qquad y' = r' \sin\chi, \qquad \dot{\chi} = \omega' \quad . \ . \ . \quad 6)$$

in Polarkoordinaten umformen. Daraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}' &= (\ddot{r}' - r'\omega'^2)\cos\chi - \frac{1}{r'}\frac{d(r'^2\omega')}{dt}\sin\chi \\ \ddot{y}' &= (\ddot{r}' - r'\omega'^2)\sin\chi + \frac{1}{r'}\frac{d(r'^2\omega')}{dt}\cos\chi \\ y'\cos\varphi - x'\sin\varphi &= -r'\sin(\varphi - \chi) = -r'\sin\vartheta \end{aligned}\right\} \quad 4b)$$

und eingesetzt in die ersten beiden Gl. 2b)

$$[\ddot{r}' + r'(\omega_0^2 - \omega'^2)]\cos\chi - \frac{1}{r'}\frac{d(r'^2\omega')}{dt}\sin\chi = a\,\omega_0^2\cos\varphi$$

$$[\ddot{r}' + r'(\omega_0^2 - \omega'^2)]\sin\chi + \frac{1}{r'}\frac{d(r'^2\omega')}{dt}\cos\chi = a\,\omega_0^2\sin\varphi,$$

oder nach Ausschaltung von χ unter Beachtung von $\varphi - \chi = \vartheta$ und unter Hinzufügung der Momentenformel 2b):

$$\left.\begin{aligned} \ddot{r}' + r'(\omega_0^2 - \omega'^2) &= a\,\omega_0^2\cos\vartheta \\ \frac{d(r'^2\omega')}{dt} &= a\,\omega_0^2\,r'\sin\vartheta \\ k_0^2\,\dot{\omega} + a\,\omega_0^2\,r'\sin\vartheta &= M - a\,g'\cos\varphi \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \quad 7)$$

Diese Gleichungsgruppe wird zunächst einmal erfüllt für einen unveränderlichen Drehwert ω' und einen beständigen Winkel $\vartheta = \varphi - \chi = \vartheta_0$, womit wiederum $\omega' = \omega$ wird und für $\vartheta_0 = 0$ die drei Punkte $O'MS$ auf einer Geraden liegen. Die Gleichungen vereinfachen sich alsdann mit $\dot{\omega} = 0$, $\cos\vartheta_0 = 1$, $\sin\vartheta_0 = 0$

$$r' = \frac{a\,\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}, \qquad \dot{r}' = 0, \qquad M = a\,g'\cos\varphi, \quad . \ . \quad 7a)$$

so daß also in diesem Falle das äußere Moment nur die in jeder Lage φ verschiedene Gewichtswirkung der exzentrisch auf der Welle sitzenden Masse auszugleichen hat. Die Drehung vollzieht sich hierbei mit **unveränderlichem Abstand** r' des Schwerpunktes S vom Wellenmittel O' in der Ruhelage, der für $\omega^2 \lessgtr \omega_0^2$, $r' \gtrless 0$ wird. Führen wir statt dessen den jeweiligen Abstand des Wellenmittels M von der Ruhelage $O'M = r'' = r' - a$ ein, so wird

$$r'' = \frac{a\,\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \gtrless 0 \quad \text{für} \quad \omega^2 \lessgtr \omega_0^2 \quad \ldots\ldots \quad 7\text{b})$$

und für

$$\begin{array}{llll} \omega^2 = 0 & \omega_0^2 & \infty \\ r'' = 0 & \infty & -a. \end{array}$$

Der Schwerpunkt S rotiert also, wie aus Abb. 232 ersichtlich ist, um die Ruhelage O' des Wellenmittels für $\omega^2 < \omega_0^2$ außerhalb des sich drehenden Wellenmittels M, rückt mit diesem für $\omega^2 = \omega_0^2$ ins Unendliche und rotiert für $\omega^2 > \omega_0^2$ innerhalb des Wellenmittels M, so daß beim Überschreiten der sog. kritischen Drehzahl $\omega_\varkappa = \omega_0$ ein Umschlagen des Schwerpunktsabstandes a erfolgt. Da der Schwerpunkt hierbei dicht an die Ruhelage O' heranrückt, die er allerdings erst für $\omega^2 = \infty$ erreicht, so rotiert das ganze Gebilde für sehr hohe Drehzahlen nahezu um den Massenschwerpunkt S. Man bezeichnet diesen Vorgang, der zuerst bei den sehr schnell rotierenden Wellen der Lavalschen Dampfturbinen (1894) auftrat, als Selbsteinstellung der Welle, die unterhalb und oberhalb der kritischen Drehzahl ruhig läuft und nur bei dauernder Drehung mit dieser infolge der beliebig großen Ausschläge gefährdet ist.

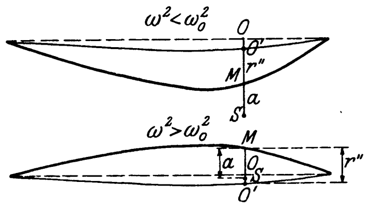

Abb. 232.

Es fragt sich nun, wie dieses Anwachsen und gleichzeitig der Umschlag des Abstandes r'' bei der kritischen Drehzahl erfolgt. Zur Beantwortung kehren wir noch einmal zu den Bewegungsgleichungen 7) zurück, denen mit $\omega' = \omega$, $\dot{\omega} = 0$ offenbar auch durch $\vartheta = \vartheta_0' = \pm 90^0$ Genüge geleistet wird, ohne daß r' unveränderlich zu sein braucht. Damit aber wird aus der zweiten Gl. 7)

$$2\,\dot{r}'\,\omega = \pm\, a\,\omega_0^2, \qquad \ddot{r}' = 0 \quad \ldots\ldots \quad 7\text{c})$$

und die erste geht über in

$$r'(\omega_0^2 - \omega^2) = 0, \quad \text{d. h.} \quad \omega = \omega_0, \quad \ldots\ldots \quad 7\text{d})$$

d. h. beim kritischen Drehwert steht der Arm a senkrecht zum Fahrstrahl, der einerseits gleichförmig sich ändert. Das Vorzeichen von $\dot{r}'$ in 7c) ist bedingt durch dasjenige des Momentes in der dritten Gl. 7)

$$M - a\,g'\cos\varphi = +\,a\,\omega_0^2\,r'.$$

d. h. der Fahrstrahl nimmt mit dem linksstehenden Gesamtmoment zu oder ab.

Mit $\omega = \omega_0$ und $\dot{r}' = \frac{dr'}{dt} = \frac{dr'}{d\varphi}\,\omega_0$ wird ferner aus 7c)

$$2\,dr' = a\,d\varphi, \qquad r' = r_0' + \frac{a}{2}\,\varphi \cdot \quad \ldots\ldots \quad 8)$$

Die Bahn des Schwerpunktes ist also bei der kritischen Drehzahl eine archimedische Spirale, längs der der Fahrstrahl bei jedem Umlauf um πa sich ändert, Abb. 233. Dabei ist eine Arbeit

$$dL = m\,M\,d\varphi = (a g' \cos\varphi\, d\varphi + a\,\omega_0^2 r' d\varphi)\, m$$

oder wegen 8)

$$dL = (a g' \cos\varphi\, d\varphi + 2\,\omega_0^2 r' dr')\, m$$
$$L = m a g' (\sin\varphi - \sin\varphi_0) + m\,\omega_0^2 (r'^2 - r_0'^2)$$

zu leisten, wobei der erste Klammerausdruck für volle Umläufe also mit $\varphi - \varphi_0 = 2 n \pi$ verschwindet, so daß für $r_0' = a$ insgesamt nur

$$L_0 = + m\,\omega_0^2 (r'^2 - a^2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 8\text{a})$$

übrigbleibt. Da ferner wegen des rechten Winkels bei S der Fahrstrahl r'' des Wellenmittels sich aus $r''^2 = r'^2 + a^2$ berechnet, so ist auch $L = m\,\omega_0^2 (r''^2 - r_0''^2)$, also in Übereinstimmung mit der Arbeit der Federkraft, die somit beim Anwachsen der Ausschläge vom äußeren Moment zu leisten ist, welches selbst im geraden Verhältnis zum Ausschlag r' wächst. Man erkennt, daß auch M eine der Spirale von S sich nach innen anschließende asymptotische Spirale beschreibt, die in Abb. 233 eingetragen ist.

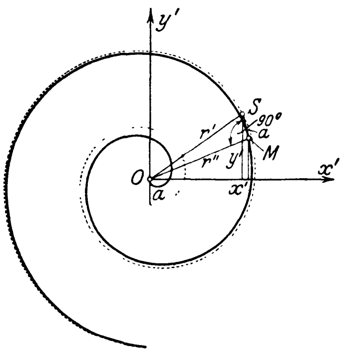

Abb. 233.

Hat man z. B. die mit einem Gewicht $mg = 10{,}5$ kg belastete wagerechte Welle einen kritischen Drehwert von $\omega_0 = 30$ sec.$^{-1}$, so ist bei einer Abweichung von $a = 1$ mm $= 10^{-3}$ m des Massenschwerpunktes S vom Wellenmittel das dem Fahrstrahl r' entsprechende Gesamtmoment

$$\mathfrak{M} - a m g \cos\varphi = + a\,\omega_0^2 m r' = + 0{,}963\, r' \text{ mkg}$$

und der Arbeitsaufwand:

$$L = m\,\omega_0^2 (r'^2 - a^2) = 963\,(r'^2 - a^2) \text{ mkg}.$$

Nach 10 Umläufen wäre der Fahrstrahl auf $r' = 10\,\pi a + a = 32{,}4$ mm, das Moment auf 0,0312 mkg und der Arbeitsverbrauch auf $L = 1{,}00$ mkg angewachsen, woraus man erkennt, daß schon in kürzester Zeit unter sehr mäßigem Arbeitsaufwand gefährliche Auslenkungen bei Aufrechterhaltung des kritischen Drehwertes auftreten.

Zur Bestimmung des kritischen Drehwertes, der naturgemäß im praktischen Betriebe unbedingt vermieden werden muß, denken wir uns nun die Welle mit der daraufsitzenden Masse aus ihrer Ruhelage in lotrechte Schwingungen versetzt. Dafür gibt sofort die zweite Gl. 2b) mit $\varphi = 90^0$, also

$$\ddot{y}' + \omega_0^2 (y' - a) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2\text{d})$$

woraus sich die Schwingungsdauer

$$t_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 9)$$

ergibt. Deren Beobachtung aus der ausgeführten Welle liefert mithin sofort den kritischen Drehwert, ohne daß es nötig ist, die Welle in Drehung zu versetzen.

Um festzustellen, ob noch andere kritische Drehwerte auftreten, betrachten wir mit Hilfe der Gl. 2a) die Drehung unserer Welle um den Durchstoßpunkt O der Lagermitten, wobei die Punkte OMS dauernd auf einer Geraden liegen sollen. Alsdann ist

$$x = (r + a)\cos\varphi, \qquad y = (r + a)\sin\varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 10)$$

und es verschwindet mit $y\cos\varphi - x\sin\varphi = 0$ der Hebelarm h des Momentes der Federkraft $\alpha^2 r$ an der Schwungmasse, deren Drehwert alsdann nach der dritten Gl. 2a) keinen Schwankungen unterliegt, wenn auch das äußere Moment $\mathfrak{M}$ bzw. M wegfällt. Damit erledigt sich diese Gleichung und die beiden ersten Formeln 2a) gehen mit 10) über in

$$\begin{gathered}[\ddot r + (\omega_0^2 - \omega^2)\,r - \omega^2 a]\cos\varphi - 2\,\omega\,\dot r\sin\varphi = 0\\ [\ddot r + (\omega_0^2 - \omega^2)\,r - \omega^2 a]\sin\varphi + 2\,\omega\,\dot r\cos\varphi = -\,g'\end{gathered}$$

und zerfallen sonach unter gleichzeitiger Festsetzung einer gleichförmigen Drehung durch $\varphi = \omega t$ in

$$\left.\begin{aligned}\ddot r + (\omega_0^2 - \omega^2)\left(r - \frac{a\,\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) &= -\,g'\sin\omega t\\ 2\,\omega\,\dot r &= -\,g'\cos\omega t\end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad 10\text{a})$$

Mit der Abkürzung $\omega_0^2 - \omega^2 = \alpha_0^2$ können wir für die erste dieser Formeln auch schreiben

$$\ddot r + \alpha_0^2\left(r - \frac{\omega^2}{\alpha_0^2}a\right) = -\,g'\sin\omega t \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 10\text{b})$$

und erkennen, daß es sich um eine erzwungene Schwingung des Schwerpunktes S und Wellenmittels M auf dem rotierenden Fahrstrahl handelt, die allgemein durch

$$r - \frac{\omega^2}{\alpha_0^2}a = A\cos\alpha_0 t + B\sin\alpha_0 t - \frac{g'\sin\omega t}{\alpha_0^2 - \omega^2} \quad . \; . \; . \quad 11)$$

dargestellt ist. Nach Einsetzen in die zweite Gl. 10a) folgt

$$2\,\alpha_0\,\omega\,(B\cos\alpha_0 t - A\sin\alpha_0 t) = g'\left(\frac{2\,\omega^2}{\alpha_0^2 - \omega^2} - 1\right)\cos\omega t$$

eine Bedingung, die für alle Werte von t nur erfüllt werden kann, wenn

$$A = B = 0, \qquad 3\,\omega^2 - \alpha_0^2 = 0,$$

oder wegen der Bedeutung von α_0

$$4\,\omega^2 = \omega_0^2, \qquad \omega = \frac{\omega_0}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 11\text{a})$$

ist. Damit vereinfacht sich unsere Lösung 11) in

$$r = \frac{a}{3} - \frac{2g'}{\omega_0^2} \sin \frac{\omega_0}{2} t, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 11\,\text{b})$$

wofür nach 1) auch mit der Auslenkung r_0 des Wellenmittels in der Ruhelage

$$r = \frac{a}{3} - 2 r_0 \sin \frac{\omega_0}{2} t \quad \ldots \ldots \ldots \quad 11\,\text{c})$$

geschrieben werden kann. Der Schwerpunkt und das Wellenmittel vollziehen also beim halben kritischen Drehwert endliche Schwingungen auf dem damit rotierenden Fahrstrahl. Die Form der Bahnen des Wellenmittels sind für die beiden Fälle $a \gtrless 6 r_0$ in den Abb. 234 dargestellt und durch Versuche von Stodola gut bestätigt.

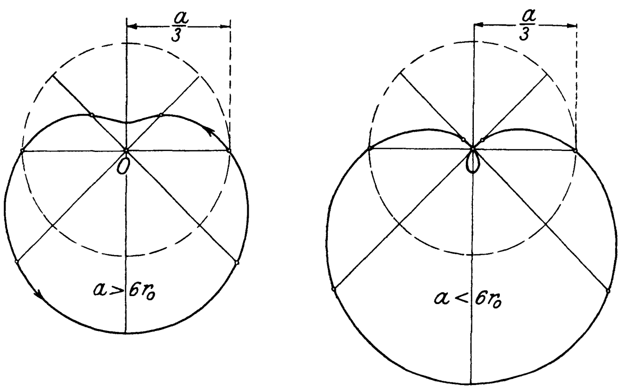

Abb. 234.

Steht die Welle senkrecht, so wird $g' = g \sin \beta = 0$, und $r = \frac{1}{3} a$ entsprechend der früheren Formeln 7a) für $2\omega = \omega_0$, womit sich die nur durch das Gewicht bedingte Wirkung dieses Drehwertes erledigt. Dieser ist somit ausschließlich auf nicht lotrechte Wellen beschränkt und führt wegen der Kleinheit von a und r_0 niemals zu gefährlichen Ausschlägen, wohl aber zu einem infolge der Abweichung der Bahnen, Abb. 234, von der Kreisform unruhigen Gang der Welle.

§ 63. Wirkung eines periodischen Momentes auf die Schwungmasse. Um die Wirkung eines periodischen Momentes auf die Drehung einer biegsamen Welle mit einer nicht völlig zentrierten Schwungmasse festzustellen, greifen wir nochmals auf die Formeln 2b) des vorigen Abschnittes, die sich auf das Wellenmittel M in der Ruhelage O' beziehen, zurück und schreiben dieselben unter Weglassung des Gewichtsgliedes

$$\left.\begin{array}{c} \ddot{x}' + \omega_0^2 (x' - a \cos \varphi) = 0, \qquad \ddot{y}' + \omega_0^2 (y' - a \sin \varphi) = 0 \\ k_0^2 \dot{\omega} - \omega_0^2 a (y' \cos \varphi - x' \sin \varphi) = M \end{array}\right\}. \quad 1)$$

Für die Momentengleichung können wir aber auch unter Benutzung der beiden letzen Gl. 7) des letzten Abschnittes kürzer schreiben

$$M = k_0^2 \dot{\omega} + \frac{d(r'^2 \omega')}{dt} = \frac{d}{dt}(k_0^2 \omega + r'^2 \omega'), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1\text{a})$$

worin r' den Fahrstrahl $O'S$ des Schwerpunktes der Schwungmasse und ω' seinen Drehwert bedeutet. Da dieser von der gleichen Größenordnung wie der Drehwert ω der Schwungmasse m um ihren Schwerpunkt, r' aber klein ist gegen den Schwungarm k_0, so erkennen wir, daß das zweite Glied in der Klammer gegen das erste vernachlässigt werden darf, wenn nicht ω überhaupt keine Änderung erleidet. Eine Entscheidung hierüber setzt die vollständige Lösung der Differentialgleichungen 1) voraus, die indessen an der undurchführbaren Trennung der Veränderlichen scheitert. Wir müssen uns darum auf die Betrachtung der beiden Grenzfälle beschränken und vernachlässigen zunächst in Gl. 1a) das zweite Glied in der Klammer. Alsdann erhalten wir mit einem rein periodischen Moment von $\varkappa$ Schwankungen während einer Umdrehung für den ersten Grenzfall

$$k_0^2 \dot{\omega} = M_1 \cos \varkappa\varphi + M_2 \sin \varkappa\varphi, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

oder nach Erweiterung mit $\omega dt = d\varphi$ und Integration mit dem Festwert ω_1

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \frac{2}{\varkappa k_0^2}(M_1 \sin \varkappa\varphi - M_2 \cos \varkappa\varphi), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2\text{a})$$

oder für kleinere Unterschiede $\omega - \omega_1$ angenähert

$$\omega = \omega_1 + \frac{1}{\varkappa \omega_1 k_0^2}(M_1 \sin \varkappa\varphi - M_2 \cos \varkappa\varphi), \quad . \quad . \quad . \quad 2\text{b})$$

worin das zweite Glied die Schwankung der Drehzahl darstellt, die infolge der großen Werte von k_0^2 und ω_1 in der Tat nur klein ausfällt im Einklang mit der Voraussetzung für unsere Näherungsrechnung. Mit den Abkürzungen

$$\frac{M_1}{\varkappa^2 \omega_1^2 k_0^2} = \mu_1, \qquad \frac{M_2}{\varkappa^2 \omega_1^2 k_0^2} = \mu_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

schreiben wir hinreichend genau

$$\omega = \omega_1 + (\mu_1 \sin \varkappa \omega_1 t - \mu_2 \cos \varkappa \omega_1 t)\varkappa \omega_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2\text{c})$$

und erhalten durch Integration mit $\varphi = 0$ für $t = 0$

$$\varphi = \int_0^t \omega dt = \omega_1 t - \mu_1 (\cos \varkappa \omega_1 t - 1) - \mu_2 \sin \varkappa \omega_1 t \quad . \quad . \quad 4)$$

und wegen der Kleinheit der mit μ_1 und μ_2 behafteten Glieder

$$\left.\begin{aligned} \cos \varphi &= \cos \omega_1 t + [\mu_1 (\cos \varkappa \omega_1 t - 1) + \mu_2 \sin \varkappa \omega_1 t] \sin \omega_1 t \\ \sin \varphi &= \sin \omega_1 t - [\mu_1 (\cos \varkappa \omega_1 t - 1) + \mu_2 \sin \varkappa \omega_1 t] \cos \omega_1 t \end{aligned}\right\}, \quad 4\text{a})$$

oder nach Umformung der Produkte der sin und cos

$$\left.\begin{aligned}\cos\varphi &= \cos\omega_1 t - \mu_1 \sin\omega_1 t + \frac{\mu_1}{2}\Big[\sin(\varkappa+1)\omega_1 t - \sin(\varkappa-1)\omega_1 t\Big]\\ &\quad - \frac{\mu_2}{2}\Big[\cos(\varkappa+1)\omega_1 t - \cos(\varkappa-1)\omega_1 t\Big]\\ \sin\varphi &= \sin\omega_1 t + \mu_1 \cos\omega_1 t - \frac{\mu_1}{2}\Big[\cos(\varkappa+1)\omega_1 t + \cos(\varkappa-1)\omega_1 t\Big]\\ &\quad - \frac{\mu_2}{2}\Big[\sin(\varkappa+1)\omega_1 t + \sin(\varkappa-1)\omega_1 t\Big]\end{aligned}\right\} \quad 4\text{b}$$

Führen wir diese Ausdrücke in die beiden ersten Formeln 1) ein, so erscheinen diese als Differentialgleichungen erzwungener Schwingungen mit den auf bekannte Weise zu gewinnenden allgemeinen Integralen, von denen wir nur dasjenige für x anschreiben wollen wie folgt

$$\begin{aligned} x &= x_1 \cos\omega_0 t + x_2 \sin\omega_0 t + \frac{\omega_0^2 a}{\omega_0^2 - \omega_1^2}(\cos\omega_1 t - \mu_1 \sin\omega_1 t)\\ &\quad + \frac{\omega_0^2 a}{2}\cdot\frac{\mu_1 \sin(\varkappa+1)\omega_1 t - \mu_2 \cos(\varkappa+1)\omega_1 t}{\omega_0^2 - (\varkappa+1)^2\omega_1^2}\\ &\quad - \frac{\omega_0^2 a}{2}\cdot\frac{\mu_1 \sin(\varkappa-1)\omega_1 t - \mu_2 \cos(\varkappa-1)\omega_1 t}{\omega_0^2 - (\varkappa-1)^2\omega_1^2}\end{aligned}$$

Hierin fallen mit $a = 0$ alle Glieder außer der Eigenbeschwingung weg, deren Beiwerte x_1 x_2 nur noch vom Anfangszustande abhängen, so daß die Welle mit einer zentrierten Schwungmasse beliebige Biegungsschwingungen mit dem kritischen Drehwert vollziehen kann. Bei nicht verschwindendem a aber erleidet unter der Einwirkung des periodisch schwankenden Momentes nicht nur der Drehwert ω Schwankungen von derselben Periode ohne Phasenverschiebung, sondern es treten neben der freien Schwingung des ganzen Gebildes, dessen Beiwerte x_1 und x_2 durch die Anfangsbedingungen bestimmt sind, erzwungene Schwingungen von der Umlaufsperiode ω_1 und zweier weiteren Perioden $(\varkappa+1)\omega_1$ und $(\varkappa-1)\omega_1$ auf. Diesen drei Schwingungen entsprechen dann auch kritische Drehwerte

$$\omega_k = \omega_0, \qquad \omega_{k_1} = \frac{\omega_0}{\varkappa+1}, \qquad \omega_{k_2} = \frac{\omega_0}{\varkappa-1}, \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 6)$$

die aber nur dann zu gefährlichen Ausschlägen führen, wenn das Moment die zu ihrem Wachstum erforderliche Arbeit dauernd leisten kann, also ebenfalls eine dauernde Zunahme erfährt. Ist dies wie bei unserer Annahme von rein periodischen Änderungen nicht der Fall, so bleiben auch bei Aufrechterhaltung des Drehwertes 6) die Ausschläge in engen Grenzen eingeschlossen, womit nur ein unruhiger Gang verbunden ist. Auch dieses wird man vor allem auch bei

Zahnradübersetzungen gern vermeiden, da hierbei ein Kraftwechsel mit Stößen zwischen den Zähnen auftritt, der bei längerer Dauer stets zu deren Zerstörung führt.

Wir gehen nunmehr zum zweiten Grenzfalle des beständigen Drehwertes der Schwungmasse über, mit dem sich die Momentengleichung unter Einführung desselben Ausdruckes wie oben für das periodische Moment vereinfacht in [vgl. Gl. 1a) und 1) mit $\dot{\omega} = 0$]

$$\left.\begin{aligned} \omega_0^2 a (x' \sin\varphi - y' \cos\varphi) \\ = M_1 \cos\varkappa\omega t + M_2 \sin\varkappa\omega t \end{aligned}\right\}, \qquad 7)$$

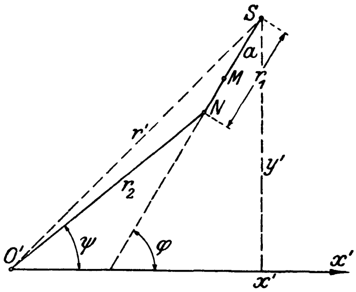

Abb. 235.

während die beiden ersten Gl. 1) unverändert gültig bleiben. Setzen wir dann unter Einführung zweier neuer Fahrstrahlen $SN = r_1$ $NO' = r_2$ mit den Drehwinkeln $\varphi = \omega t$ und ψ gegen die x-Achse, von denen der erste Strahl SN stets die Richtung von $a = SM$ haben möge, nach Abb. 235

so wird

$$x' = r_1 \cos\varphi + r_2 \cos\psi, \qquad y' = r_1 \sin\varphi + r_2 \sin\psi, \quad . \quad . \quad 8)$$

$$\left.\begin{aligned} x' \sin\varphi - y' \cos\varphi &= r_2 \sin(\varphi - \psi) \\ r'^2 = x'^2 + y'^2 &= r_1^2 + r_2^2 + 2 r_1 r_2 \cos(\varphi - \psi) \end{aligned}\right\} \quad . \quad 8a)$$

und nach Einführung in 7)

$$\omega_0^2 a r_2 \sin(\varphi - \psi) = M_1 \cos\varkappa\omega t + M_2 \sin\varkappa\omega t. \quad . \quad . \quad 7a)$$

Schreiben wir darin

$$\varphi = \omega t. \qquad \psi = \omega' t + \varphi_0, \qquad \psi - \varphi = (\omega' - \omega) t + \varphi_0, \quad . \quad 9)$$

so wird

$$\begin{aligned} -\omega_0^2 a r_2 [\sin(\omega' - \omega) t \cos\varphi_0 + \cos(\omega' - \omega) t \sin\varphi_0] \\ = M_1 \cos\varkappa\omega t + M_2 \sin\varkappa\omega t. \quad . \quad . \quad 7b) \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann aber nur dann für alle Werte von t bestehen, wenn

$$\left.\begin{aligned} & \omega' = (\varkappa + 1)\omega \\ & r_2 \cos\varphi_0 = -\frac{M_2}{a\omega_0^2}, \qquad r_2 \sin\varphi_0 = -\frac{M_1}{a\omega_0^2} \\ & r_2 = \frac{\sqrt{M_1^2 + M_2^2}}{a\omega_0^2}, \qquad \operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{M_1}{M_2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad 10)$$

ist. Hiernach bleibt also sowohl der Fahrstrahl r_2, als auch sein Drehwert ω' bei der Bewegung unverändert, wenn die Schwungmasse selbst mit ω gleichförmig rotiert. Für $a = 0$ wird $r_2 = \infty$, damit verliert aber unsere ganze Herleitung ihren Sinn, da alsdann die linke Seite von 7) oder in der Momentengleichung von 1) das zweite Glied links wegfällt, so daß also nur noch $M = k_0^2 \dot{\omega}$, d. h. eine periodische Schwankung von ω mit dem Momente übrig bleibt, die unserer Voraussetzung der Unveränderlichkeit von ω widerspricht.

Zur Ermittlung des Verhaltens des anderen Fahrstrahls r_1 führen wir nunmehr unsere Ansätze 8) in die beiden ersten Formeln 1) ein und erhalten für beständige ω und ω'

$$\begin{aligned}
[\ddot{r}_1 + (\omega_0^2 - \omega^2) r_1 - \omega_0^2 a] \cos\varphi - 2\dot{r}_1 \omega \sin\varphi + r_2 (\omega_0^2 - \omega'^2) \cos\psi = 0 \\
[\ddot{r}_1 + (\omega_0^2 - \omega^2) r_1 - \omega_0^2 a] \sin\varphi + 2\dot{r}_1 \omega \cos\varphi + r_2 (\omega_0^2 - \omega'^2) \sin\psi = 0,
\end{aligned}$$

oder nach Ausschaltung von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$

$$\left.\begin{aligned}
\ddot{r}_1 + (\omega_0^2 - \omega^2)\left(r_1 - \frac{a\,\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) + r_2 (\omega_0^2 - \omega'^2) \cos(\psi - \varphi) = 0 \\
2\dot{r}_1 \omega + r_2 (\omega_0^2 - \omega'^2) \sin(\psi - \varphi) = 0.
\end{aligned}\right\} \quad 11)$$

Daraus wird aber nach Einführung der Werte von r_2 und $\psi - \varphi$ aus 9) und 10), sowie mit der Abkürzung $\omega_0^2 - \omega^2 = \alpha_0^2$

$$\left.\begin{aligned}
\ddot{r}_1 + \alpha_0^2\left(r_1 - \frac{a\,\omega_0^2}{\alpha_0^2}\right) = \frac{\omega_0^2 - \omega'^2}{a\,\omega_0^2}(M_2 \cos\varkappa\omega t - M_1 \sin\varkappa\omega t) \\
2\dot{r}_1 \omega = \frac{\omega_0^2 - \omega'^2}{a\,\omega_0^2}(M_1 \cos\varkappa\omega t + M_2 \sin\varkappa\omega t).
\end{aligned}\right\} \quad 11\text{a})$$

Beide Gleichungen werden offenbar erfüllt für

$$\omega_0^2 = \omega'^2 = (\varkappa + 1)^2 \omega^2, \quad \text{also } \omega = \omega_{k_1} = \frac{\omega_0}{\varkappa + 1} \qquad 12)$$

und liefern dann mit $\dot{r}_1 = 0$, $\ddot{r}_1 = 0$

$$r_1 = \frac{a\,\omega_0^2}{\alpha_0^2} = \frac{a\,\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{a(\varkappa + 1)^2}{\varkappa(\varkappa + 2)}, \quad \ldots\ldots \quad 12\text{a})$$

also einen beständigen Wert des Fahrstrahls r_1.

Für andere Drehwerte ω und ω' dagegen erhalten wir das allgemeine Integral der ersten Gl. 11a)

$$\begin{aligned}
r_1 - \frac{a\,\omega_0^2}{\alpha_0^2} &= A \cos\alpha_0 t + B \sin\alpha_0 t \\
&+ \frac{\omega_0^2 - \omega'^2}{a\,\omega_0^2}\,\frac{M_2 \cos\varkappa\omega t - M_1 \sin\varkappa\omega t}{\omega_0^2 - (\varkappa^2 + 1)\omega^2}, \quad \ldots \quad 13)
\end{aligned}$$

das nach Einführung in die zweite Gl. 11a) die Bedingungsgleichung

$$\begin{aligned}
&2\alpha_0 \omega (B \cos\alpha_0 t - A \sin\alpha_0 t) \\
&= \frac{\omega_0^2 - \omega'^2}{a\,\omega_0^2}\,\frac{\omega_0^2 - (\varkappa - 1)^2 \omega^2}{\omega_0^2 - (\varkappa^2 + 1)\omega^2}(M_1 \cos\varkappa\omega t + M_2 \sin\varkappa\omega t), \quad \ldots \quad 13\text{a})
\end{aligned}$$

ergibt, der für alle Zeitpunkte nur genügt wird, wenn

$$\left.\begin{aligned}
&A = B = 0 \\
\text{und} \quad &\omega_0^2 = \omega'^2 \quad \text{oder} \quad \omega_0^2 = (\varkappa - 1)^2 \omega^2
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 13\text{b})$$

ist, d. h. wenn zunächst keine freie Schwingung auftritt. Die Bedingung $\omega_0{}^2 = \omega'^2$ stimmt aber mit 12) überein, so daß allgemein nur die schon oben unter 6) erhaltenen Drehwerte

$$\left.\begin{array}{ll} \omega_{k_1} = \dfrac{\omega_0}{\varkappa + 1}, & \omega_{k_2} = \dfrac{\omega_0}{\varkappa - 1} \\[2ex] \omega'_{k_1} = \omega_0, & \omega'_{k_2} = \dfrac{\varkappa + 1}{\varkappa - 1}\,\omega_0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 14)$$

unverändert bestehen können. Dem ersteren entspricht dann wieder der beständige Wert 12a) des Fahrstrahles r_1, während mit ω_{k_2} aus 13) folgt

$$r_1 = \frac{(\varkappa - 1)^2}{\varkappa(\varkappa - 2)}\,a + \frac{2}{a\,\omega_0{}^2}\left(M_2 \cos\frac{\varkappa\,\omega_0 t}{\varkappa - 1} - M_1 \sin\frac{\varkappa\,\omega_0 t}{\varkappa - 1}\right) \quad . \quad 13\text{c})$$

Dieser Ausdruck wird für $\varkappa = 1$ entsprechend einem Drehwerte $\omega_{k_2} = \infty = \omega'_{k_2}$ praktisch bedeutungslos. Er wird ferner unendlich groß für $a = 0$, womit nach der Bemerkung für Gl. 10) aber die unserer Herleitung zugrunde liegende Beständigkeit von ω hinfällig wird. Schließlich wird er noch unendlich groß für $\varkappa = 2$, d. h. für $\omega_{k_2} = \omega_0$, im Einklang mit Gl. 7a) des vorigen Abschnittes, die auf ein beliebig großes Anwachsen des Ausschlages bei dieser kritischen Drehzahl führte, wenn das Drehmoment mit demselben zunimmt. Unsere Gl. 13) sagt dann nur aus, daß in diesem Falle die Periodizität des Momentes keine Rolle spielt. Für $\varkappa = 1$ und $\varkappa = 2$ kommt demnach nur der beständige Wert 12a) in Frage. Führt man die Werte des Fahrstrahls mit den zugehörigen Ausdrücken 14) für die Drehwerte in Gl. 8) ein, so erhält man die Bahngleichung des Massenschwerpunktes, die im Gültigkeitsbereiche unserer Betrachtung niemals auf unendlich große Ausschläge führt. Die durch 14) gegebenen Drehwerte infolge periodischer Momente können demnach im Gegensatz zu dem eigentlichen kritischen Werte $\omega_k = \omega_0$ nicht gefährlich werden, wenn sie auch gelegentlich zu lästigen Erschütterungen führen.

Beispiel. Für die Gewichtswirkung der Schwungmasse ist z. B. mit $\varkappa = 1$ $M = -a g' \cos\varphi = -a g' \cos\omega t = -a g' \cos\frac{\omega_0}{2} t$, die mit 10) und 12a) auf

$$r_2 = + \frac{g'}{\omega_0{}^2}, \quad r_1 = \frac{4}{3}\,a, \quad \operatorname{tg}\varphi_0 = \infty, \quad \varphi_0 = 90^0 \quad \ldots . \quad 15)$$

führt, also mit

$$\varphi = \omega t = \frac{\omega_0}{2}\,t, \quad \psi = 2\,\omega t + 90^0 = \omega_0 t + 90^0 \quad \ldots . \quad 15\text{a})$$

unter Benutzung von 8) die Schwerpunktsbahn

$$\left.\begin{array}{l} x' = r_1 \cos\dfrac{\omega_0}{2} t - r_2 \sin\omega_0 t = \left(r_1 - 2\,r_2 \sin\dfrac{\omega_0}{2} t\right)\cos\dfrac{\omega_0}{2} t \\[2ex] y' = r_1 \sin\dfrac{\omega_0}{2} t + r_2 \cos\omega_0 t = \left(r_1 - 2\,r_2 \sin\dfrac{\omega_0}{2} t\right)\sin\dfrac{\omega_0}{2} t + r_2 \end{array}\right\} \quad . \quad 16)$$

ergibt. Da hierin, wie aus Gl. 1) des letzten Abschnittes erhellt, $r_2 = r_0$ die Ruhelage des Wellenmittels bedeutet, so ist mit $x'^2 + (y' - r_2)^2 = (r + a)^2$, d. h. unter Einführung des Fahrstrahls des Wellenmittels OS vom Durchstoßpunkt der Lagermitten aus gerechnet

$$\left.\begin{aligned} r + a &= r_1 - 2 r_2 \sin \frac{\omega_0}{2} t \\ r &= \frac{a}{3} - \frac{2g'}{\omega_0^2} \sin \frac{\omega_0}{2} t \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 16\text{a})$$

in voller Übereinstimmung mit Gl. 11b) des vorigen Abschnittes.

Wirkt dagegen auf die Welle eine einzylindrige Viertaktmaschine, so erreicht das Drehmoment seinen Höchstwert einmal für zwei volle Umläufe, also ist hier

$$\varkappa = \frac{1}{2}, \quad \omega k_1 = \frac{2\omega_0}{3}, \quad \omega k_2 = -\frac{\omega_0}{2},$$

während für eine doppeltwirkende Dampfmaschine mit zwei Scheitelwerten des Momentes während eines Umlaufes

$$\varkappa = 2, \quad \omega k_1 = \frac{\omega_0}{3}, \quad \omega k_2 = \omega_0$$

wird. Man übersieht sofort, daß mit der Zahl der Kurbeltriebe auch der Beiwert $\varkappa$ ansteigt, womit dann immer kleinere kritische Drehzahlen verknüpft sind, die indessen bei dem meist sehr hohen Werte von ω_0 sämtlich außerhalb des Betriebsbereiches liegen, also auch nicht zu Erschütterungen führen.

§ 64. Das Scheibenpendel. Der in einer lotrechten Ebene verlaufenden Bewegung des Scheibenpendels legen wir zweckmäßig ein Achsenkreuz durch den Drehpol O mit wagerechter x-Achse und lotrecht nach unten gerichteter y-Achse zugrunde. Alsdann wirkt als treibend auf das Pendel sein im Schwerpunkt $x_0\, y_0$ angreifendes Gewicht mg, das in bezug auf den Drehpunkt das Moment $mg \cdot x_0$ besitzt. Unter Einführung der beiden Achsenanteile H und V des Auflagedruckes erhalten wir demnach mit Rücksicht auf Abb. 236 die Bewegungsgleichungen

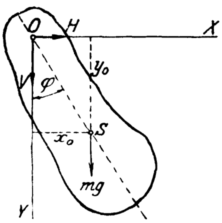

Abb. 236.

$$H = m\ddot{x}_0, \quad V + mg = m\ddot{y}_0, \quad mg\,x_0 = -m k^2 \ddot{\varphi}, \quad . \quad 1)$$

wenn k den Schwungarm der Pendelscheibe in bezug auf den Drehpunkt O bedeutet, und der Drehwinkel φ der Schwerachse durch O von der lotrechten y-Achse aus gerechnet wird. Alsdann ist weiter mit dem Schwerpunktsabstand s von O

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= s \sin\varphi & y_0 &= s\cos\varphi \\ \dot{x}_0 &= s\dot{\varphi}\cos\varphi & \dot{y}_0 &= -s\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \ddot{x}_0 &= s(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi) & \ddot{y}_0 &= -s(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi), \end{aligned}\right\} \quad 2)$$

so daß wir auch an Stelle von 1) erhalten

$$\left.\begin{aligned} H &= ms(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi) \\ V &= -ms(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi) - mg \\ \ddot{\varphi} &+ \frac{gs}{k^2}\sin\varphi = 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 1\text{a})$$

Die letzte aus der Momentengleichung durch Wegheben der Masse hervorgegangene Formel stimmt nun mit der Schwingungsgleichung des mathematischen Pendels (§ 17) völlig überein, wenn wir

$$\frac{k^2}{s} = \frac{k_0^2 + s^2}{s} = l \quad \dots\dots\dots \quad 3)$$

als reduzierte Pendellänge oder Pendellänge schlechthin einführen. Damit gelten sofort die früher abgeleiteten Formeln für die Abhängigkeit der Schwingungsdauer vom größten Pendelausschlag für das Fadenpendel, insbesondere die Schwingungsdauer

$$t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{k^2}{g s}} \quad \dots\dots\dots \quad 4)$$

für so kleine Ausschläge, daß $\sin\varphi \approx \varphi$ gesetzt werden darf. Mit dieser Schwingungsdauer ist demnach auch die Pendellänge l gegeben, aus der dann bei bekanntem Schwungarm k_0 um den Schwerpunkt der Scheibe der Schwerpunktsabstand s des Drehpols mit Hilfe von 3) oder

$$s^2 - l s + k_0^2 = 0 \quad \dots\dots\dots \quad 3\text{a})$$

berechnet werden kann. Die Auflösung dieser Gleichung ergibt die beiden Wurzeln

$$s_{12} = \frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4} - k_0^2}, \quad \dots\dots\dots \quad 3\text{b})$$

die nur so lange reell sind, als $l \gtreqless 2 k_0$. Diesem Grenzwerte von l entspricht mit $s = \frac{l}{2}$ die kleinste Schwingungsdauer

$$t_1 = 2\pi\sqrt{\frac{2 k_0}{g}}, \quad \dots\dots \quad 4\text{a})$$

die mit der vorgelegten Scheibe überhaupt erreicht werden kann. Für jede andere Schwingungsdauer mit zugehörigem l erhält man dagegen zwei Werte von s, die durch

$$s_1 + s_2 = l \quad \dots\dots \quad 3\text{c})$$

miteinander verknüpft sind. Schlagen wir also um den Scheibenschwerpunkt zwei Kreise mit den Armen s_1 und s_2, Abb. 237, so bilden diese geometrische Örter für alle Drehpole mit gleicher Schwingungsdauer. Den auf der Schwerachse durch den Drehpol O hiervon um l entfernten Punkt A bezeichnet man wohl auch als den Schwingungspunkt des Pendels.

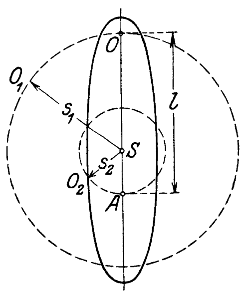

Abb. 237.

Verschiebt man nun auf einem Stabe eine Masse zwischen zwei festen Schneiden so lange, bis die Schwingungsdauer um beide gleich geworden ist, so stellt ihr durch ein Kathetometer sehr genau bestimmbarer Abstand die der Schwingungsdauer zugehörige Pendellänge dar. Eine solche Vorrichtung bezeichnet man als ein Umkehrpendel.

Aus 3) folgt ferner, daß l und damit auch $t = \infty$ wird für $s = \infty$ und $s = 0$. Der erste Fall ist selbstverständlich, der zweite aber die Folge des Gleichgewichts um den Schwerpunkt, der somit nicht als Drehpol gewählt werden kann.

Nachdem durch die dritte Gl. 1a) die Bewegung des Pendels gegeben ist, können wir auch aus den beiden ersten Formeln 1a) die Auflagedrücke für jede Lage berechnen. Zu diesem Zwecke erweitern wir die dritte Formel mit $d\varphi$ und erhalten durch Integration:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2g}{l}(\cos\varphi - \cos\varphi_0), \quad \ldots \ldots \quad 5)$$

wenn φ_0 den größten Ausschlag bedeutet, für den $\dot{\varphi}$ verschwindet. Setzen wir dies mit dem Ausdruck für $\ddot{\varphi}$ aus der dritten Formel 1a) in die ersten beiden ein, so wird:

$$\left.\begin{aligned} H &= mg\frac{s}{l}(2\cos\varphi_0 - 3\cos\varphi)\sin\varphi \\ V &= mg\frac{s}{l}(1 - 3\cos^2\varphi + 2\cos\varphi\cos\varphi_0) - mg. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 6)$$

Der größte Zapfendruck $Q = \sqrt{H^2 + V^2}$ folgt daraus mit

$$\frac{d}{d\varphi}(H^2 + V^2) = 0 \quad \text{für} \quad \sin\varphi\,[2\,(2\,s + l)\cos\varphi_0 - 3\,(s + 2\,l)\cos\varphi] = 0,$$

entsprechend einem Höchstwert

$$Q_1' = V_1 = -mg\left(1 + \frac{4\,s}{l}\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\right) \quad \text{für} \quad \varphi_1 = 0 \quad \ldots \quad 6a)$$

beim Durchgang des Pendels durch den tiefsten Punkt, während ein kleinster Druck bei der Stellung φ_2 gegeben ist durch

$$\frac{\cos\varphi_2}{\cos\varphi_0} = \frac{2}{3}\frac{2\,s + l}{s + 2\,l} = \frac{2}{3}\frac{3\,s^2 + k_0^2}{3\,s^2 + 2\,k_0^2} < 1, \quad \ldots \ldots \quad 6b)$$

d. h. nur dann auftritt, wenn $\varphi_0 > 90^0$ ist. Andernfalls kann der Zapfendruck nicht unter den Wert

$$Q_0' = mg\sqrt{1 - 2\frac{s}{l}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{s}{l}\right)\sin^2\varphi_0} \quad \ldots \ldots \quad 6c)$$

sinken, der sich aus 6) mit $\varphi = \varphi_0$ unmittelbar ergibt.

Die große praktische Bedeutung des Scheibenpendels beruht einmal in seiner Verwendung für die unmittelbare Zeitmessung, sowie als Regler für Uhren in Verbindung mit sog. Hemmungen für das sonst beschleunigt ablaufende Triebwerk, weiterhin aber auch zur Bestimmung des Erdanlaufes g für einzelne Orte der Erdoberfläche. In der Technik ermittelt man gern aus den Pendelschwingungen einer Treibstange um einen ihrer Zapfen ihr polares Schwungmoment, während das dazugehörige statische Moment mit der Wage festgestellt wird.

1. Beispiel. Für einen Stab von der Breite b und der Länge h, Abb. 238, hat sich der polare Schwungarm um den Schwerpunkt durch

$$b\,h\,k_0^2 = \frac{1}{12}(b\,h^3 + h\,b^3); \qquad k_0^2 = \frac{h^2+b^2}{12}$$

ergeben. Also ist der Schwungarm und die Pendellänge für einen Pol O am Stabende mit $s = \frac{h}{2}$

$$k^2 = k_0^2 + \frac{h^2}{4} = \frac{h^2}{3}\left(1 + \frac{1}{4}\frac{b^2}{h^2}\right),$$

$$l = \frac{k^2}{s} = \frac{2}{3}h\left(1 + \frac{1}{4}\frac{b^2}{h^2}\right).$$

Für eine Kreisscheibe vom Halbmesser r folgt ebenso

$$k_0^2 = \frac{r^2}{2}, \quad k^2 = k_0^2 + r^2 = \frac{3}{2}r^2, \quad l = \frac{3}{2}r$$

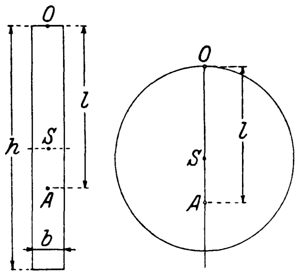

Abb. 238.

und für einen dünnen Kreisring, der um einen Punkt seines Umfanges schwingt,

$$k_0^2 = r^2, \quad k^2 = k_0^2 + r^2 = 2r^2, \quad l = 2r,$$

so daß in diesem Falle der Schwingungspunkt dem Drehpunkt auf dem Umfang gegenüberliegt.

2. Beispiel. Durch die Verschiebung der Masse oder der Schneiden gestaltet sich das Arbeiten mit dem Umkehrpendel ziemlich zeitraubend. Zeuner hat darum vorgeschlagen, statt dessen ein Pendel mit drei auf der Schwerachse in beliebigen Abständen liegenden festen Schneiden $O\,A\,B$ zu verwenden, denen die Pendellängen l_0, l_1, l_2 mit den Schwingungszeiten t_0, t_1, t_2 entsprechen, Abb. 239. Dann sind wohl die Abstände $O\,A = a$, $O\,B = b$ bekannt, nicht aber der Schwerpunktsabstand $O\,S$ der ersten Schneide O, der polare Schwungarm k_0 um den Schwerpunkt und der Erdanlauf g. Man hat nun die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} t_0 &= 2\pi\sqrt{\frac{l_0}{g}}, & l_0 &= \frac{k_0^2+s^2}{s} \\ t_1 &= 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}, & l_1 &= \frac{k_0^2+(a-s)^2}{a-s} \\ t_2 &= 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}}, & l_2 &= \frac{k_0^2+(b-s)^2}{b-s} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 7)$$

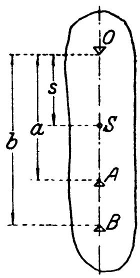

Abb. 239.

und daraus nach Ausschalten der l die beiden Formeln:

$$\left.\begin{aligned} \frac{k_0^2+(a-s)^2}{k_0^2+s^2}\,\frac{s}{a-s} &= \left(\frac{t_1}{t_0}\right)^2 \\ \frac{k_0^2+(b-s)^2}{k_0^2+s^2}\,\frac{s}{b-s} &= \left(\frac{t_2}{t_0}\right)^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 7a)$$

zur Berechnung der Unbekannten k_0 und s aus den Schwingungszeiten. Setzt man diese in die rechts stehenden Gleichungen 7) ein, so ergeben sich die Pendellängen l und mit diesen aus den links stehenden Formeln 7) der Erdanlauf g.

Bei dem von Zeuner in der Technischen Hochschule in Dresden verwendeten Pendel ergab die Messung:

$$a = 850{,}728 \text{ mm}, \qquad b = 492{,}831 \text{ mm}$$

die halben Schwungzeiten waren:

$$0{,}5\,t_0 = 0{,}810125 \text{ sec}, \quad 0{,}5\,t_1 = 0{,}860288 \text{ sec}, \quad 0{,}5\,t_2 = 0{,}879350 \text{ sec}$$

und damit $s = 312{,}185$ mm, $l_1 = 652{,}52$ mm, $g = 9{,}8127$ m/sec^2

entsprechend einer für Dresden giltigen Sekundenpendellänge

$$l = \frac{g}{\pi^2} = 994{,}24 \text{ mm}.$$

§ 65. **Das Doppelpendel.** Hängen wir an irgendeinem Punkte eines Scheibenpendels ein zweites drehbar auf, so erhalten wir ein sog. Doppelpendel, wie es in der Glocke mit dem darin für sich schwingenden Klöppel verwirklicht ist. Wir vereinfachen nun das Gebilde durch die praktisch stets zutreffende Annahme, daß der Aufhängepunkt A des zweiten Pendels $A\,B$ auf der Schwerachse des ersten Pendels durch dessen Drehpol O im Abstande $O\,A = r$ liegt. Die Schwerpunktsabstände beider Pendel von ihren Drehpolen seien $O\,S_1 = s_1$ und $A\,S_2 = s_2$, die Neigungen dieser Achsen gegen die Lotrechte durch den festen Drehpol φ_1 und φ_2, die Schwungarme in bezug auf die Drehpole k_1 und k_2. Alsdann sind die Schwerpunktsabstände im festen Achsenkreuz nach Abb. 240:

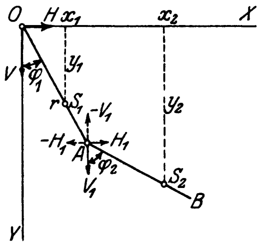

Abb. 240.

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= s_1 \sin\varphi_1, & y_1 &= s_1 \cos\varphi_1, \\ \text{also} \quad x_2 &= r\sin\varphi_1 + s_2 \sin\varphi_2, & y_2 &= r\cos\varphi_1 + s_2\cos\varphi_2 \end{aligned}\right\}, \quad . \quad 1)$$

$$\left.\begin{aligned} \dot x_1 &= s_1\dot\varphi_1\cos\varphi_1, & \dot y_1 &= -s_1\dot\varphi_1\sin\varphi_1 \\ \dot x_2 &= r\dot\varphi_1\cos\varphi_1 + s_2\dot\varphi_2\cos\varphi_2, & \dot y_2 &= -r\dot\varphi_1\sin\varphi_1 - s_2\dot\varphi_2\sin\varphi_2 \end{aligned}\right\} \quad 1\text{a})$$

$$\left.\begin{aligned} \ddot x_1 &= s_1(\ddot\varphi_1\cos\varphi_1 - \dot\varphi_1^2\sin\varphi_1), \quad \ddot y_1 = -s_1(\ddot\varphi_1\sin\varphi_1 + \dot\varphi_1^2\cos\varphi_1) \\ \ddot x_2 &= r(\ddot\varphi_1\cos\varphi_1 - \dot\varphi_1^2\sin\varphi_1) + s_2(\ddot\varphi_2\cos\varphi_2 - \dot\varphi_2^2\sin\varphi_2) \\ \ddot y_2 &= -r(\ddot\varphi_1\sin\varphi_1 + \dot\varphi_1^2\cos\varphi_1) - s_2(\ddot\varphi_2\sin\varphi_2 + \dot\varphi_2^2\cos\varphi_2). \end{aligned}\right\} \quad 1\text{b})$$

Daraus geht hervor, daß wir alle Lagengrößen in den beiden Winkeln $\varphi_1\,\varphi_2$ ausdrücken können, das Doppelpendel also zwei Freiheitsgrade besitzt. Wir können das zweite Pendel mit beweglichem Pol auch als eine Scheibe ansehen, die in einem ihrer Punkte längs eines Kreisbogens um O geführt ist und von dieser Führung eine zu ihr senkrechte Zwangskraft mit den Achsenanteilen $H_1\,V_1$ erfährt, die naturgemäß in entgegengesetzter Richtung auf das um O drehbare erste Pendel zurückwirkt. Dieses unterliegt seinerseits noch dem Zapfendruck in O mit den Teilkräften $H\,V$, so daß unter Hinzunahme der Pendelmassen m_1 und m_2 wir die Bewegungsgleichungen aufstellen können. Diese lauten, indem wir die auf das erste Pendel wirkenden Momente auf den festen Drehpunkt, die des zweiten auf seinen Schwerpunkt beziehen, in bezug auf den das Schwungmoment $m_2 k_0^2 = m_2(k_2^2 - s_2^2)$ ist,

$$\left.\begin{aligned} H - H_1 = m\ddot x_1, \qquad V - V_1 + m_1 g = m_1 \ddot y \\ r(H_1\cos\varphi_1 - V_1\sin\varphi_1) + m_1(g\,s_1\sin\varphi_1 + k_1^2\ddot\varphi_1) = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad 2)$$

$$\left.\begin{aligned} H_1 = m_2\ddot x_2, \qquad V_1 + m_2 g = m_2\ddot y_2 \\ s_2(H_1\cos\varphi_2 - V_1\sin\varphi_2) + m_2(k_2^2 - s^2)\ddot\varphi_2 = 0. \end{aligned}\right\} \quad . \quad 3)$$

Schalten wir nun aus diesen Formeln die Zapfendruckanteile H, H_1, V, V_1 aus und ersetzen noch die Anläufe $\ddot{x}_1\,\ddot{y}_1\,\ddot{x}_2\,\ddot{y}_2$ durch die Ausdrücke 1b), so bleiben insgesamt die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}&\ddot{\varphi}_1(m_1 k_1^2 + m_2 r^2) + (m_1 s_1 + m_2 r)\, g \sin\varphi_1\\ &\qquad + m_2 s_2 r\,[\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)] = 0\\ &\ddot{\varphi}_2\, m_2 k_2^2 + m_2 s_2\, g \sin\varphi_2\\ &\qquad + m_2 s_2 r\,[\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)] = 0\end{aligned}\right\} \quad . \quad 4)$$

übrig. Es sind dies offensichtlich die **Schwingungsgleichungen der beiden Pendel**, von denen das erste (Glocke) um die Masse des zweiten (Klöppel) an dem Aufhängepunkt A vergrößert erscheint, jedes Pendel aber durch die in den eckigen Klammern enthaltene Bewegung des andern eine Störung erleidet. Die Störungen stehen also in Wechselwirkung, d. h. die Pendel sind mechanisch miteinander gekoppelt.

Dies wird besonders deutlich durch Aufstellung der Arbeitsformel, indem wir die erste Gl. 4) mit $d\varphi_1$, die zweite mit $d\varphi_2$ erweitern und addieren. Beachten wir, daß

$$\ddot{\varphi}_1\, d\varphi_1 = \dot{\varphi}_1\, d\dot{\varphi}_1, \qquad \ddot{\varphi}_2\, d\varphi_2 = \dot{\varphi}_2\, d\dot{\varphi}_2$$

$$\begin{aligned}(\dot{\varphi}_1\, d\dot{\varphi}_2 &+ \dot{\varphi}_2\, d\dot{\varphi}_1)\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - (\dot{\varphi}_1^2\, d\varphi_2 - \dot{\varphi}_2^2\, d\varphi_1)\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\\ &= d(\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2)\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\, dt\\ &= d(\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2)\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\, d(\varphi_1 - \varphi_2)\\ &= d\,[\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)],\end{aligned}$$

so lautet die Arbeitsgleichung

$$\begin{aligned}(m_1 s_1 + m_2 r)\, g \sin\varphi_1\, d\varphi_1 + m_2 s_2\, g \sin\varphi_2\, d\varphi_2 + (m_1 k_1^2 + m_2 r^2)\,\dot{\varphi}_1\, d\dot{\varphi}_1\\ + m_2 k_2^2\,\dot{\varphi}_2\, d\dot{\varphi}_2 + m_2 s_2 r\, d\,[\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] = 0. \quad . \quad . \quad . \quad 5)\end{aligned}$$

Hierin ist aber mit Rücksicht auf 1a)

$$s_1 \sin\varphi_1\, d\varphi_1 = -\,d y_1, \qquad r \sin\varphi_1\, d\varphi_1 + s_2 \sin\varphi_2\, d\varphi_2 = -\,d y_2$$

und weiter, wenn J_1 und J_2 die Wuchtwerte der beiden Pendel bedeuten

$$2 J_1 = m_1 k_1^2 \dot{\varphi}_1^2, \quad 2 J_2 = m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + m_2(k_2^2 - s^2)\,\dot{\varphi}_2^2$$

oder wegen 1a)

$$2 J_2 = m_2\,[r^2\dot{\varphi}_1^2 + k_2^2\dot{\varphi}_2^2 + 2 s_2 r\,\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Damit aber geht 5) über in die Form

$$m_1 g\, dy_1 + m_2 g\, dy_2 = dJ_1 + dJ_2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5\text{a})$$

die wir auch von vornherein hätten anschreiben können, und die nichts anderes als den **Machtaustausch der beiden Pendel während ihrer Bewegung** zum Ausdruck bringt.

Kehren wir nun zu den Schwingungsgleichungen 4) zurück, so erkennen wir, daß die beiden Veränderlichen φ_1 und φ_2 sich nicht trennen lassen und damit auch die Integration der Gleichungen selbst, auf der die Bestimmung der Auflage- und Zwischenkräfte beruht, nicht durchgeführt werden kann. Wir müssen uns daher mit der Untersuchung einiger Sonderfälle begnügen, die immerhin von praktischer Bedeutung sind.

1. Beispiel. Denken wir uns das Doppelpendel derart ausgelenkt, daß beide Ausschläge anfänglich übereinstimmen, und fragen nach den Bedingungen, daß diese Übereinstimmung bei der von da beginnenden Bewegung erhalten bleibt. Das Doppelpendel wird sich alsdann wie ein einfaches Pendel verhalten, so daß im Falle von Glocke und Klöppel der letztere überhaupt nicht zum Anschlag gelangt, die Glocke also versagt. Setzen wir demgemäß in unsern Formeln 4) $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$, so gehen sie über in

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\varphi}\,(m_1 k_1^2 + m_2 r^2 + m_2 s_2 r) + (m_1 s_1 + m_2 r)\, g \sin\varphi = 0 \\ \ddot{\varphi}\,(k_2^2 + s_2 r) + s_2\, g \sin\varphi = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 6)$$

Diese können miteinander nur bestehen, wenn nach Ausschaltung von $\ddot{\varphi}$

$$[m_1 k_1^2 + m_2 r (r + s_2)]\, s_2 = (m_1 s_1 + m_2 r)(k_2^2 + s_2 r)\,,$$

oder mit $k_1^2 = l_1 s_1$, $k_2^2 = l_2 s_2$

$$l_1 - l_2 - r = \frac{m_2 r}{m_1 s_1}(l_2 - s_2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 6\text{a})$$

ist. Im Falle der Glocke ist nun deren Masse m_1 stets sehr viel größer als die Klöppelmasse m_2, außerdem aber noch der bewegliche Aufhängepunkt in der Glocke nahe dem festen Drehpol derselben, so daß also auch r klein gegen s_1 wird. Schließlich ist noch $l_2 - s_2$ infolge der keulenartigen Form des Klöppels stets ein kleiner Betrag, und daher können wir die rechte Seite von 6a) als Produkt dreier kleiner Werte ganz vernachlässigen. Es bleibt mithin

$$l_1 - l_2 = r\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 6\text{b})$$

d. h. die Glocke verhält sich mit dem Klöppel wie ein starrer Körper, wenn ihr Schwingungspunkt in der Ruhelage mit der des Klöppels zusammenfällt. So fand Veltmann (Dingl. Polytechn. Journal 1876), der zuerst das Doppelpendel untersuchte, durch Beobachtungen an der Kaiserglocke des Kölner Domes $l_1 = 3{,}282$ m, $l_2 = 2{,}629$ m, also $l_1 - l_2 = 0{,}653$ m, während $r = 0{,}667$ m war. Dieser geringe Unterschied genügte, daß der Klöppel beim Läuten der Glocke nicht zum Anschlag gelangte und eine nachträgliche Änderung seiner Massenverteilung erfahren mußte.

2. Beispiel. Fragt man, unter welchen Bedingungen das eine Pendel unbeeinflußt vom andern schwingt, so erkennt man aus 4), daß dies zunächst für $r = 0$, also für einen gemeinsamen festen Drehpol zutrifft, was von vornherein selbstverständlich erscheint. Um noch andere Möglichkeiten festzustellen, setzen wir in 4) für die Ruhelage des zweiten Pendels $\varphi_2 = 0$, $\dot{\varphi}_2 = 0$, $\ddot{\varphi}_2 = 0$, woraus sich

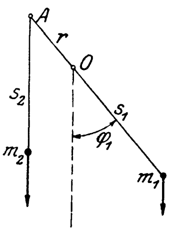

Abb. 241.

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 (m_1 k_1^2 + m_2 r^2) + (m_1 s_1 + m_2 r)\, g \sin\varphi_1 = 0 \\ s_2 r\,(\ddot{\varphi}_1 \cos\varphi_1 - \dot{\varphi}_1^2 \sin\varphi_1) = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad 7)$$

ergibt. Erweitern wir die erste dieser Formeln mit $d\varphi_1$ und integrieren bis zum oberen Ausschlag α_1, so folgt

$$\dot{\varphi}_1^2 = 2g\,\frac{m_1 s_1 + m_2 r}{m_1 k_1^2 + m_2 r^2}(\cos\varphi_1 - \cos\alpha_1) \quad \ldots \quad 7\text{a})$$

und nach Einsetzen dieses Wertes mit $\ddot{\varphi}_1$ aus der ersten Gl. 7) in die zweite

$$g\, s_2 r\, \frac{m_1 s_1 + m_2 r}{m_1 k_1^2 + m_2 r^2}(2\cos\alpha_1 - 3\cos\varphi_1)\sin\varphi_1 = 0\,. \quad \ldots\ldots \quad 7\text{b})$$

Diese Bedingung ist nur erfüllbar, wenn, wie schon erwähnt, $r = 0$, oder

$$m_1 s_1 + m_2 r = 0, \quad \text{bzw.} \quad r = -\frac{m_1}{m_2} s_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 7\text{c})$$

gewählt wird, d. h. für einen bestimmten über den festen Pol auf dem Pendel m_1 liegenden Aufhängepunkt des Pendels m_2, Abb. 241.

Man übersieht leicht, daß umgekehrt die Ruhe des ersten Pendels $\varphi_1 = 0$, $\dot\varphi_1 = 0$, $\ddot\varphi_1 = 0$ auf die Bedingung

$$\frac{s_2^2\, r}{k_2^2}\,(2\cos\alpha_2 - 3\cos\varphi_2)\sin\varphi_2 = 0$$

führen würde, die nur für $r = 0$ erfüllt werden kann.

Ganz allgemein ergeben aber auch die Formeln 7) zwei sich überlagernde Schwingungen des Pendels m_1, von denen die eine nach der ersten Gl. 7) eine reine Pendelschwingung ist, deren Verlauf wir schon in § 64 kennen gelernt haben, während aus der zweiten Gl. 7) mit $\ddot\varphi\, d\,t = d\,\dot\varphi$, $\dot\varphi\, d\,t = d\,\varphi$

$$d\,\dot\varphi_1 \cos\varphi_1 - \dot\varphi_1\, d\,\varphi_1 \sin\varphi_1 = d\,(\dot\varphi_1 \cos\varphi_1) = 0 \quad \ldots\ldots \quad 8)$$

$$\dot\varphi_1 \cos\varphi_1 = \frac{d\,\varphi_1 \cos\varphi_1}{d\,t} = \frac{d\,(\sin\varphi_1)}{d\,t} = c$$

$$\sin\varphi_1 = c_0 + c\,t, \quad \varphi_1 = \arcsin\,(c_0 + c\,t) \quad \ldots\ldots \quad 8\text{a})$$

folgt. Diese Bedingung bleibt auch noch bestehen, wenn die Bedingung 7c) erfüllt ist und mit $\ddot\varphi_1 = 0$ an Stelle der einfachen Pendelschwingung eine **gleichförmige Drehung**

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \omega\, t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 8\text{b})$$

tritt, der sich dann die Bewegung 8a) überlagert. Soll umgekehrt $\varphi_1 = 0$ sein, d. h. das erste Pendel in Ruhe bleiben, so ergeben die Gl. 4) wieder für das zweite Pendel m_2 eine Bewegung nach Gl. 8a) und die einfache Pendelschwingung, die aber hier, da $m_2 s_2$ keinesfalls verschwinden kann, nicht in eine gleichförmige Drehung nach 8b) ausarten kann.

3. Beispiel. Wirkt auf das erste Pendel ein äußeres Moment, welches in jeder Lage die Gewichtswirkung $(m_1 s_1 + m_2 r)\, g \sin\varphi_1$, sowie den Einfluß des zweiten Pendels ausgleicht, so bleibt hierfür nur eine **gleichförmige Drehung** $\dot\varphi_1 = \omega$ übrig. Setzen wir dann noch $\varphi_2 = \varphi_1 + \varphi = \omega\, t + \varphi$, $\varphi_1 - \varphi_2 = -\varphi$, so wird aus der zweiten Gl. 4)

$$\ddot\varphi\, k_2^2 + g\, s_2 \sin(\omega\, t + \varphi) + s_2\, r\, \omega^2 \sin\varphi = 0 \quad \ldots\ldots \quad 9)$$

und für kleinere Auslenkungen φ um die Mittellage $\varphi_1 = \omega\, t$

$$\ddot\varphi\, k_2^2 + s_2\,(\omega^2\, r + g\cos\omega\, t)\,\varphi + g\, s_2 \sin\omega\, t = 0 \quad \ldots\ldots \quad 9\text{a})$$

Diese Gleichung wird befriedigt durch eine harmonische Reihe

$$\varphi = \Sigma\,(A_n \cos n\,\omega\, t + B_n \sin n\,\omega\, t), \quad \ldots\ldots\ldots \quad 9\text{b})$$

deren Beiwerte A und B sich durch Einsetzen in 9a) leicht berechnen lassen. Das an einem gleichförmig sich drehenden Arm OA bewegte Pendel vollzieht demnach eine zusammengesetzte Schwingung um die Gerade OA, deren Grundschwingungsdauer mit der Umlaufszeit des Armes übereinstimmt. Ist $\omega^2 r \gg g$, so vereinfacht sich 9a) in

$$\ddot\varphi\, k_2^2 + \omega^2\, r\, s_2\, \varphi + g\, s_2 \sin\omega\, t = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 9\text{c})$$

woraus eine einfache erzwungene Schwingung der Umlaufsdauer mit der darüber gelagerten Eigenschwingung von der Dauer

$$t_0 = \frac{2\pi}{\omega}\sqrt{\frac{k_2^2}{r\, s_2}} = \frac{2\pi}{\omega}\sqrt{\frac{l_2}{r}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 9\text{d})$$

hervorgeht.

Um über den Verlauf des Schwingungsgangs des Doppelpendels eine wenigstens angenäherte Vorstellung zu gewinnen, wollen wir uns auf so kleine Ausschläge beschränken, daß wir $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$ setzen und die Quadrate von φ und seiner Ableitung $\dot\varphi$ vernachlässigen dürfen. Schreiben wir dann noch abkürzungsweise

$$\frac{k_1^2}{s_1} = l_1, \quad \frac{k_2^2}{s_2} = l_2, \quad \frac{m_1 k_1^2 + m_2 r^2}{m_1 s_1 + m_2 r} = l, \quad \frac{m_2 s_2 r}{m_1 s_1 + m_2 r} = s, \quad 10)$$

so wird aus den Bewegungsgleichungen 4)

$$\left.\begin{array}{l} l\ddot{\varphi}_1 + g\varphi_1 + s\ddot{\varphi}_2 = 0 \\ l_2\ddot{\varphi}_2 + g\varphi_2 + r\ddot{\varphi}_1 = 0\,. \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 4\mathrm{a})$$

Diesen genügen die Ansätze

$$\varphi_1 = A\,e^{\varkappa t}, \qquad \varphi_2 = B\,e^{\varkappa t}$$

und liefern nach Einsetzen

$$A(\varkappa^2 l + g) + B\varkappa^2 s = 0$$
$$B(\varkappa^2 l_2 + g) + A\varkappa^2 r = 0,$$

oder

$$\left.\begin{array}{l} (\varkappa^2 l + g)(\varkappa^2 l_2 + g) = \varkappa^4 rs \\ \dfrac{A^2}{B^2} = \dfrac{s}{r}\,\dfrac{\varkappa^2 l_2 + g}{\varkappa^2 l + g}\,. \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 10\mathrm{a})$$

Die erste dieser Formeln liefert in der Schreibweise

$$\varkappa^4(l l_2 - rs) + \varkappa^2 g(l + l_2) + g^2 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 10\mathrm{b})$$

die beiden Wurzeln

$$\varkappa^2 = -\frac{g}{2}\,\frac{l + l_2 \pm \sqrt{(l + l_2)^2 - 4(l l_2 - rs)}}{l l_2 - rs}$$
$$= -\frac{g}{2}\,\frac{l + l_2 \pm \sqrt{(l - l_2)^2 + 4rs}}{l l_2 - rs} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 11)$$

Hierin ist nach 10)

$$\left.\begin{array}{l} l l_2 - rs = \dfrac{m_1 k_1^2 k_2^2 + m_2 r^2 (k_2^2 - s_2^2)}{s_2(m_1 s_1 + m_2 r)} \gtrless 0 \\ l = \dfrac{m_1 k_1^2 + m_2 r^2}{m_1 s_1 + m_2 r} \gtrless 0 \end{array}\right\} \text{für } m_1 s_1 + m_2 r \gtrless 0\,.\; 11\mathrm{a})$$

Im ersten Falle, daß diese Werte > 0 sind, wird $\varkappa^2 < 0$ und damit die 4 Wurzeln von 10b) sämtlich imaginär, und paarweise entgegengesetzt gleich, d. h.

$$\varkappa_{12} = \pm i\alpha_1, \qquad \varkappa_{34} = \pm i\alpha_2 \,. \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 10\mathrm{b})$$

Damit aber gehen die Exponentialausdrücke für φ_1 und φ_2 in Winkelfunktionen über, so zwar, daß wir als vollständige Integrale der beiden Gleichungen 4a)

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1 = A_1 \cos\alpha_1 t + A_2 \sin\alpha_1 t + A_3 \cos\alpha_2 t + A_4 \sin\alpha_2 t \\ \varphi_2 = B_1 \cos\alpha_1 t + B_2 \sin\alpha_1 t + B_3 \cos\alpha_2 t + B_4 \sin\alpha_2 t \end{array}\right\} \quad . \quad 12)$$

erhalten. Hierin sind je zwei übereinanderstehende Beiwerte durch die eine Bedingungsgleichung 10a) miteinander verknüpft, so daß unsere Integrale im ganzen nur 4 voneinander unabhängige Festwerte enthalten, die aus den Anfangsbedingungen der Bewegung zu bestimmen sind. Die Bewegung jedes der beiden Pendel zerfällt dabei in zwei sich überlagernde Schwingungen, von denen die eine rasch, die andere dagegen langsamer verläuft.

4. Beispiel. Im Sonderfalle des zweiten Beispiels $\ddot{\varphi}_2 = 0$, d. h. für $m_1 s_1 + m_2 r = 0$ mit über dem festen Pol des ersten Pendels liegendem Drehpunkt des zweiten wird nach Gl. 10)

$$l = \infty, \quad \frac{r \cdot s}{l} = \frac{m_2 s_2 r^2}{m_1 k_1^2 + m_2 r^2} = \frac{m_1 s_1^2 s_2}{m_2 k_1^2 + m_1 s_1^2} = \frac{s_1 s_2}{\frac{m_2}{m_1} l_1 + s_1} \quad . \quad 13)$$

$$l_2 - \frac{r s}{l} = \frac{\frac{m_2}{m_1} l_1 l_2 - s_1 s_2 + s_1 l_2}{\frac{m_2}{m_1} l_1 + s_1} > 0,$$

da stets

$$l_1 = \frac{k_1^2}{s_1} = \frac{k_1^2 - s_1^2}{s_1} + s_1 > s_1, \qquad l_2 = \frac{k_2^2}{s_2} = \frac{k_2^2 - s_2^2}{s_2} + s_2 > s_2$$

ist, vereinfacht sich 10b) damit in

$$\varkappa^2 \left[\varkappa^2 \left(l_2 - \frac{r s}{l}\right) + g\right] = \varkappa^2 \left(\frac{\varkappa^2}{\alpha^2} + 1\right) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 13a)$$

mit den beiden Wurzelpaaren $\varkappa_{12} = 0$, $\varkappa_{34} = \pm i\alpha$, welche nur noch je eine Schwingung für beide Pendel mit gleicher Schwingungsdauer ergeben. Außerdem aber folgt alsdann noch aus der zweiten Gl. 4a) mit $\ddot{\varphi}_2 = 0$, $\varphi_2 = 0$ auch wie nach Gl. 8b) $\varphi_1 = \varphi_0 + \omega t$, worauf wir auch durch 12) geführt werden, wenn wir dort, bevor $\alpha_1 = 0$ gesetzt wird, im zweiten Gliede $A_2 \sin \alpha_1 t = A_2 \alpha_1 t = \omega t$ schreiben, so daß mit $A_1 = \varphi_0$ und $\alpha_2 = \alpha$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_1 t + A_3 \cos \alpha t + A_4 \sin \alpha t$$

sich ergibt. Da hierbei der als klein vorausgesetzte Ausschlag beliebig mit der Zeit anwachsen würde, so widerspricht das Glied $\omega_1 t$ den äußeren Voraussetzungen und es bleibt nur noch die einfache Schwingung des Pendels m übrig.

§ 66. Theorie der Hebelwagen.

Unter einer Wage verstehen wir eine Vorrichtung zur Bestimmung von Gewichten oder zur Ermittlung von Kräften durch Vergleich mit schon bekannten Gewichten oder Kräften. Dieser Vergleich kann in einfacher Weise dadurch ermöglicht werden, daß wir die zu vergleichenden Gewichte an den Enden eines starren Stabes angreifen lassen und denjenigen Punkt des Stabes aufsuchen, der zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichts unterstützt werden muß. Ein solches Gebilde ist im wesentlichen schon eine Wage, und zwar, da vom Unterstützungspunkt aus betrachtet jede der beiden Kräfte an einem Hebelarm angreift, eine doppelarmige Hebelwage. Die Aufgabe der Mechanik ist es nun, die für die Brauchbarkeit einer solchen Wage maßgebenden Bedingungen festzustellen.

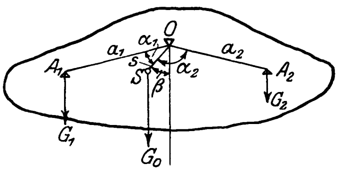

Abb. 242.

Zu diesem Zwecke betrachten wir in Abb. 242 eine auf wagerechter Schneide O ruhende starre Scheibe, den sog. Wagebalken vom Eigengewichte G_0 mit dem Schwerpunkt S im Abstande $OS = s$ vom Drehpol O. Der Balken trage in den Punkten $A_1 A_2$ in den Abständen $OA_1 = a_1$ und $OA_2 = a_2$ vom Pol zwei weitere wagerechte Schneiden, an denen die Wageschalen, deren Eigengewichte einschließlich ihrer Aufhängevorrichtungen G_1 und G_2 sein mögen, aufgehängt werden. Die Winkel der Strecken a_1 und a_2 mit der Schwerachse s des Balkens seien $\alpha_1\,\alpha_2$ und β die Neigung der Schwerachse gegen die Vertikale in der Ruhelage des Ganzen ohne Belastung der Schalen. Alsdann bestehen mit dem Auflagedruck V_0 in O die Gleichgewichtsbedingungen der durchweg lotrechten Kräfte

$$\left.\begin{array}{l} V_0 = G_0 + G_1 + G_2 \\ G_0\, s \sin\beta + G_1\, a_1 \sin(\alpha_1 + \beta) - G_2\, a_2 \sin(\alpha_2 - \beta) = 0 \end{array}\right\} . \qquad 1)$$

Soll nun nach gleicher Belastung der beiden Schalen die Lage des Balkens sich nicht ändern, so erhalten wir mit dem neuen Auflagedruck V

$$\left.\begin{array}{l} V = G_0 + G_1 + G_2 + 2\,Q \\ G_0\, s \sin\beta + (G_1 + Q)\, a_1 \sin(\alpha_1 + \beta) = (G_2 + Q)\, a_2 \sin(\alpha_2 - \beta) \end{array}\right\} \quad 1\text{a})$$

oder nach Abzug der Momentenformeln 1) und 1a) unter Wegheben von Q

$$a_1 \sin(\alpha_1 + \beta) = a_2 \sin(\alpha_2 - \beta), \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

d. h. die Gleichheit der Hebelarme der lotrechten Kräfte in A_1 und A_2 von O aus. Damit also wird die Momentengleichung 1)

$$G_0\, s \sin\beta + (G_1 - G_2)\, a_1 \sin(\alpha_1 + \beta) = 0 . \quad \ldots \quad 2\text{a})$$

Das Gleichgewicht der Wage wird alsdann unabhängig vom Schalengewicht, wenn $G_1 = G_2 = G$ und damit auch $G_0\, s \sin\beta = 0$ ist. Da G_0 nicht verschwinden kann, so kann nur $\sin\beta = 0$ sein, da für $s = 0$ der Balken allein in jeder Lage im Gleichgewichte wäre, was sich aber mit dem Wesen der Schneiden nicht verträgt. Wir erhalten also die Bedingung, daß im Gleichgewicht der Schwerpunkt des Wagebalkens senkrecht unter dem Drehpole liegt, womit dann aus 2)

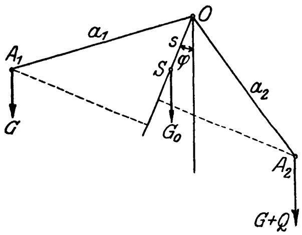

Abb. 243.

$$a_1 \sin\alpha_1 = a_2 \sin\alpha_2 \quad \ldots \quad 2\text{b})$$

wird, wonach die Abstände der Schneiden A_1 und A_2 von der Schwerachse des Wagebalkens einander gleich sein müssen.

Wir wollen nun eine solche Wage durch das Gewicht Q auf einer Schale einseitig belasten und erhalten damit einen Ausschlag φ der Schwerachse OS, Abb. 243, entsprechend der Gleichgewichtsbedingung

$$G_0\, s \sin\varphi + G\, a_1 \sin(\alpha_1 + \varphi) = (G + Q)\, a_2 \sin(\alpha_2 - \varphi),$$

oder wegen 2b)

$$[G_0\, s + G\,(a_1 \cos\alpha_1 + a_2 \cos\alpha_2)] \sin\varphi = Q\, a_2 \sin(\alpha_2 - \varphi) . . \quad 3)$$

Vertauschen wir alsdann die belastete mit der unbelasteten Schale, so soll die Wage nach der andern Seite um denselben Winkel φ ausschlagen; d. h. es soll

$$[G_0\, s + G\,(a_1 \cos\alpha_1 + a_2 \cos\alpha_2)] \sin\varphi = Q\, a_1 \sin(\alpha_1 - \varphi) \quad . \quad 3\text{a})$$

sein. Durch Verbindung mit 2b) folgt aber dann

$$a_1 \cos \alpha_1 = a_2 \cos \alpha_2 = a \cos \alpha\,, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 3\text{b})$$

d. h. die gleiche Höhenlage der Schalenschneiden im Ruhezustand. Der Ausschlag selbst berechnet sich damit aus 3) zu

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Q\, a \sin \alpha}{G_0\, s + (2\, G + Q)\, a \cos \alpha}\,. \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 4)$$

Hierin bezeichnet man das Verhältnis

$$\frac{d\varphi}{dQ} = \frac{(G_0\, s + 2\, G\, a \cos \alpha)\, a \sin \alpha}{[G_0\, s + (2\, G + Q)\, a \cos \alpha]^2} \cos^2 \varphi\,.$$

oder mit $\cos^2 \varphi = \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}$

$$\frac{d\varphi}{dQ} = \frac{(G_0\, s + 2\, G\, a \cos \alpha)\, a \sin \alpha}{[G_0\, s + (2\, G + Q)\, a \cos \alpha]^2 + Q^2\, a^2 \sin^2 \alpha} \quad . \; . \; . \quad 4\text{a})$$

als die Empfindlichkeit der Wage, die somit ganz wesentlich außer von der Belastung selbst auch noch von den Eigengewichten G_0 und G, sowie von den Abmessungen des Wagebalkens abhängt. Mit $\alpha = 90^0$, $\cos \alpha = 0$ wird

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Q\, a}{G_0\, s}\,, \qquad \frac{d\varphi}{dQ} = \frac{G_0\, s\, a}{G_0{}^2\, s^2 + Q^2\, a^2}\,, \quad . \; . \; . \; . \quad 4\text{b})$$

so daß in diesem Falle der Einfluß der Schalengewichte herausfällt. Die Empfindlichkeit wächst hiernach besonders mit abnehmendem Balkengewicht G_0 und Schwerpunktsabstand s, von denen das erstere wieder der Achsenlänge a verhältnisgleich ist.

Betrachten wir die Wage in dynamischer Hinsicht, so dürfen wir sie als Vereinigung zweier Doppelpendel auffassen und demnach die Massen der Schalen und der darauf befindlichen Lasten in den zugehörigen Aufhängepunkten $A_1\, A_2$ vereinigt anbringen. Sehen wir von den seitlichen Schwingungen der Schalen ab, so erhalten wir bei einseitiger Belastung Q mit

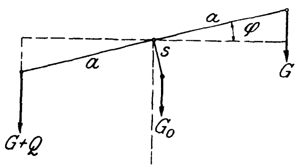

Abb. 244.

$$G_0 = m_0\, g\,, \qquad G = m\, g\,, \qquad Q = m_1\, g$$

nach Abb. 244 die Schwingungsgleichung:

$$[m_0\, k^2 + (2\, m + m_1)\, a^2]\, \ddot{\varphi} + m_0\, g\, s \sin \varphi - m_1\, g\, a \cos \varphi = 0 \qquad 5)$$

oder für kleine Ausschläge:

$$[m_0\, k^2 + (2\, m + m_1)\, a^2]\, \ddot{\varphi} + m_0\, s\, g \left(\varphi - \frac{m_1\, a}{m_0\, s}\right) = 0\,, \quad . \; . \quad 5\text{a})$$

woraus sich zunächst der Ausschlag 4b) als Mittelwert ergibt, um den dann der Balken mit einer Schwingungsdauer

$$t_0 = 2\, \pi \sqrt{\frac{m_0\, k^2 + (2\, m + m_1)\, a^2}{m_0\, s\, g}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 5\text{b})$$

pendelt. Damit dieser Betrag, wie es für die rasche Erledigung von Wägungen erwünscht ist, klein ausfällt, wird man, da der Schwungarm k wesentlich durch die Armlänge a bedingt ist, diese so kurz als möglich halten und außerdem den Schwerpunktsabstand des Balkens s tunlichst vergrößern.

1. Beispiel. Nahe verwandt mit der zweiarmigen Hebelwage ist die einfache Zeigerwage, Abb. 245, welche aus einen um O drehbaren Winkelhebel AOB besteht, an dessen eine Achse bei A die Schale für die zu wägenden Gegenstände aufgehängt ist, während der andere Arm ein bestimmtes Gewicht trägt. Mit diesem sei G_0 das Gesamtgewicht des Winkelhebels, das wir uns im Schwerpunkt S mit dem Abstande $OS = a_0$ von O vereinigt denken. Ist dann $OA = a$ die Länge des Schalenarmes und $\alpha = \sphericalangle AOB$ sein Winkel mit der Schwerachse, in deren Richtung ein Zeiger fällt, der den mit der Belastung Q veränderlichen Neigungswinkel φ gegen das Lot auf einem Bogen abzulesen gestattet, so besteht die Momentengleichung:

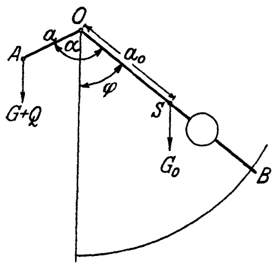

Abb. 245.

$$(G+Q)\,a\sin(\alpha-\varphi) = G_0\,a_0 \sin\varphi\,,$$

oder

$$\operatorname{cotg}\varphi = \operatorname{cotg}\alpha + \frac{G_0\,a_0}{(G+Q)\,a\sin\alpha} \quad . \quad . \quad 6)$$

Für die unbelastete Wage wird daraus mit $Q = 0$

$$\operatorname{cotg}\varphi_0 = \operatorname{cotg}\alpha + \frac{G_0\,a_0}{G\,a\sin\alpha}\,,$$

also

$$\operatorname{cotg}\varphi_0 - \operatorname{cotg}\varphi = \frac{G_0\,a_0\,Q}{G\,(G+Q)\,a\sin\alpha}\,. \quad 6\,a)$$

Nach dieser wenig übersichtlichen Formel ist die Gradeinteilung des Bogens vorzunehmen, was in der Praxis darum meist auf dem Versuchswege geschieht. Man erkennt außerdem, daß weder der Ausschlag noch die Empfindlichkeit, deren Herleitung dem Leser überlassen bleibt, vom Einfluß des Schalengewichtes befreit werden kann.

2. Beispiel. Wird die zu wägende Last nicht auf die Mitte der Schale einer der vorbesprochenen Wagen aufgebracht, so stellt sich die Schale so ein, daß der gemeinsame Schwerpunkt von Schale und Last gerade unter den Aufhängepunkt fällt. Um das damit verbundene Pendeln der Schale zu vermeiden, wird dieselbe häufig mit einer Parallelführung verbunden, wie dies zuerst in der Wage von Roberval, Abb. 246, geschehen ist, deren Gleichgewicht den Zeitgenossen des Erfinders im 18. Jahrhundert gelegentlich als Paradoxon erschien. Den Schlüssel zur Lösung bietet ungezwungen der Satz der virtuellen Verschiebungen, der für zwei miteinander im Gleichgewichte befindlichen Kräfte P und Q mit den Verschiebungen dh_1, dh_2 in den Kraftrichtungen

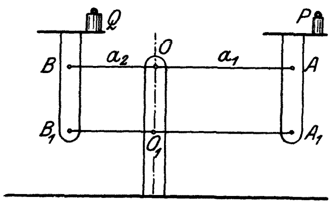

Abb. 246.

$$P\,dh_1 + Q\,dh_2 = 0\,, \qquad -\frac{dh_2}{dh_1} = \frac{P}{Q} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 7)$$

ergibt. Hiervon heißt der Bruch $P:Q$ das Übersetzungsverhältnis der Wage, die damit auch zum Vergleiche verschiedener Gewichte dienen kann. Bezeichnet man die verschieden angenommenen Armlängen der Robervalschen Wage mit a_1 und a_2, so ist offenbar bei einem Verdrehungswinkel $d\varphi$

$$dh_1 = a_1\,d\varphi\,, \qquad dh_2 = -\,a_2\,d\varphi\,, \qquad \frac{a_2}{a_1} = \frac{P}{Q} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 7\,a)$$

unabhängig von der Lage der Last auf den beiden Schalen, die selbst vermöge der Parallelführung keiner Verdrehung unterliegen. Sind dagegen x_1 x_2 die

Schwerpunktsabstände der Gewichte P und Q von den Stangen AA_1 und BB_1, so werden die beiden Kräftepaare Px_1 und Qx_2 durch die Stäbe OA, O_1A_1, bzw. OB, O_1B_1, auf das Fußgestell OO_1, übertragen, das somit unbeschadet des Gleichgewichts von P und Q auf der Wage ein Kippmoment $Px_1 + Qx_2$ aufzunehmen hat.

Diese Parallelführung wird häufig auch bei Briefwagen nach Abb. 247 angewandt, deren Theorie alsdann — unabhängig von der Lage der Last Q auf der Schale — durch das 1. Beispiel gegeben ist, wenn wieder $OA = a$ unter Beibehaltung aller anderen Bezeichnungen gesetzt wird.

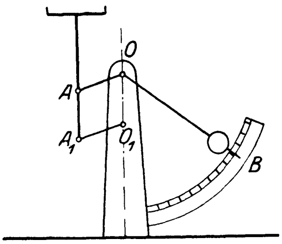

Abb. 247.

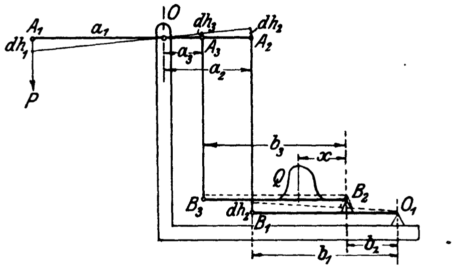

Abb. 248.

3. Beispiel. Für die Wägung sehr großer Lasten bedient man sich sog. Brückenwagen, bei denen die Last auf einer als Brücke bezeichneten Platte ruht. Auch hier muß die Bedingung erfüllt sein, daß die Lage der Last auf der Brücke ohne Einfluß auf die Wägung ist. Die einfachste Form einer solchen Brückenwage ist in Abb. 248 dargestellt, in der das Vergleichsgewicht auf einer gewöhnlichen Schale am Ende A_1 eines zweiarmigen Hebels $A_1OA_3A_2$ ruht. Von A_2 führt eine Zugstange A_2B_1 zur Platte O_1B_1, die einerseits um die Schneide O_1 schwingen kann, andrerseits aber die Schneide B_2 trägt, auf der die eigentliche Brücke ruht, deren anderes Ende von der Zugstange A_3B_3 gehalten wird. Das ganze Gebilde wird so vermittels eines Laufgewichtes auf dem Wagehebel A_1O eingestellt, daß es in unbelastetem Zustande mit wagerechtem Balken im Gleichgewichte einspielt. Alsdann brauchen wir bei der Aufstellung der Gleichgewichtsbedingung für die belastete Wage auf das Eigengewicht der beweglichen Teile keine Rücksicht zu nehmen, da die entsprechenden Arbeitsglieder in der Gleichung für die virtuelle Verschiebung sich gegenseitig aufheben. Setzen wir nun die Längen $A_1O = a_1$, $A_2O = a_2$, $A_3O = a_3$, $O_1B_1 = b_1$, $O_1B_2 = b_2$, $B_2B_3 = b_3$ und die Verschiebungen von $A_1A_2A_3$ mit dh_1, dh_2, dh_3, so ist zunächst

$$a_2\,dh_1 = a_1\,dh_2, \qquad a_1\,dh_3 = a_3\,dh_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 8)$$

und die Verschiebung von B_2

$$dh_2' = \frac{b_2}{b_1}\,dh_2 = \frac{a_2 b_2}{a_1 b_1}\,dh_1 \,. \quad \ldots\ldots\ldots \quad 9)$$

Die Hebung dh_3 des Brückenendes B_3 setzt sich alsdann aus der Parallelverschiebung dh_2' des Punktes B_2 und einer Drehung dh_3' um diesen Pol derart zusammen, daß

$$dh_3 = dh_2' + dh_3' \quad \ldots\ldots\ldots \quad 10)$$

und die Last Q im Abstande $B_2Q = x$ auf der Brücke erleidet die Verschiebung

$$dh_4 = dh_2' + \frac{x}{b_3}\,(dh_3 - dh_2'), \quad \ldots\ldots\ldots \quad 11)$$

oder wegen 9)

$$dh_4 = \frac{a_2 b_2}{a_1 b_1}\,dh_1 + \frac{x}{b_3}\left(\frac{a_3}{a_1} - \frac{a_2 b_2}{a_1 b_1}\right) dh_1 \,. \quad \ldots\ldots \quad 11\,a)$$

Verlangen wir nunmehr, daß das Übersetzungsverhältnis $dh_4 : dh_1$ unabhängig von der Lage der Last x auf der Brücke ist, so muß der Beiwert von x in 11) oder 11a) verschwinden, d. h. es muß sein

$$dh_3 - dh_2' = dh_3' = 0, \quad \text{11b)}$$

d. h. die Brücke darf beim Einspielen der Wage keine Drehung erleiden, so daß die ganze Einrichtung als Parallelführung wirkt. Alsdann ist aber

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{a_2 b_2}{a_1 b_1} \quad \text{oder} \quad \frac{a_3}{a_2} = \frac{b_2}{b_1} \quad \text{11c)}$$

und es bleibt an Stelle von 11a)

$$\frac{dh_4}{dh_1} = \frac{P}{Q} = \frac{a_2 b_2}{a_1 b_1} = \frac{a_3}{a_1} \quad \text{12)}$$

Das Übersetzungsverhältnis der Wage kann also sofort aus den Abmessungen des Wagebalkens ermittelt werden. Die Aufstellung der Schwingungsgleichung der Wage bietet, wenn wir uns, wie bei der einfachen Hebelwage auf lotrechte Bewegungen beschränken, keine Schwierigkeiten und führt nur auf eine größere Zahl von Gliedern in den Klammerausdrücken von 5). Für weitere Einzelheiten und andere Bauarten von Wagen sei auf das Buch von E. Brauer: „Die Konstruktion der Wage" (Weimar 1880) und Grashofs: „Theoretische Maschinenlehre" Bd. II (Hamburg 1883), S. 772ff. verwiesen.

§ 67. Der federnd gelagerte Stab. In der Technik werden sehr häufig feste Körper, z. B. die Tragkästen oder Platten von Fahrzeugen, federnd mit ihrer Unterlage, etwa dem Fahrgestell, verbunden, um die Wirkungen von Stößen auf die Unterlage, d. h. eine plötzliche Bewegung derselben gegen den Körper abzuschwächen. Dabei ist es gleichgültig, ob die federnde Verbindung in einer Aufhängung oder Stützung beruht. Wir wollen uns der Einfachheit halber den Körper durch einen starren Stab vom Gewicht $G = mg$ ersetzt denken, dessen Schwerpunkt von den Stützpunkten die Abstände s_1 s_2 besitzt, Abb. 249. Die ungespannten Längen der Federn bei A_1 A_2 seien h_1 h_2 im gespannten dagegen y_1 y_2, und die den Längenänderungen verhältnisgleichen Federkräfte

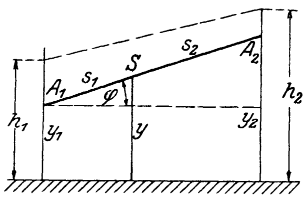

Abb. 249.

$$P_1 = \alpha_1^2 (h_1 - y_1), \qquad P_2 = \alpha_2^2 (h_2 - y_2). \quad \text{1)}$$

Alsdann ist mit einem kleinen Neigungswinkel φ des Stabes gegen die Wagerechte und der augenblicklichen Schwerpunktshöhe y

$$y_1 = y - s_1 \sin\varphi \approx y - s_1\varphi, \qquad y_2 = y + s_2 \sin\varphi \approx y + s_2\varphi \; . \quad \text{2)}$$

und wir erhalten als Bewegungsgleichungen, wenn wir die Federmassen vernachlässigen und Seitenschwankungen durch eine lotrechte Führung des Schwerpunktes verhindern,

$$\left.\begin{array}{l} P_1 + P_2 - G = m\ddot{y} \\ P_2 s_2 - P_1 s_1 = m k_0^2 \ddot{\varphi} \end{array}\right\} \quad \text{3)}$$

Ersetzen wir darin die Kräfte durch ihre Ausdrücke 1) und gleichzeitig mit 2) die Abstände y_1 y_2 durch die Veränderlichen y und φ, so wird daraus

$$\left.\begin{array}{l} m\ddot{y}+(\alpha_1^2+\alpha_2^2)y-(\alpha_1^2 s_1-\alpha_2^2 s_2)\varphi-\alpha_1^2 h_1-\alpha_2^2 h_2+mg=0 \\ mk_0^2\ddot{\varphi}+(\alpha_1^2 s_1^2+\alpha_2^2 s_2^2)\varphi-(\alpha_1^2 s_1-\alpha_2^2 s_2)y+\alpha_1^2 s_1 h_1 \\ \qquad -\alpha_2^2 s_2 h_2=0 \end{array}\right\} \quad 3\text{a)}$$

und im Ruhezustande mit $\ddot{y}=0$, $\ddot{\varphi}=0$, $y=y_0$, $\varphi=\varphi_0$

$$\left.\begin{array}{l} (\alpha_1^2+\alpha_2^2)y_0-(\alpha_1^2 s_1-\alpha_2^2 s_2)\varphi_0=\alpha_1^2 h_1+\alpha_2^2 h_2-mg \\ (\alpha_1^2 s_1^2+\alpha_2^2 s_2^2)\varphi_0-(\alpha_1^2 s_1-\alpha_2^2 s_2)y_0=\alpha_2^2 s_2 h_2-\alpha_1^2 s_1 h_1 \end{array}\right\}, \quad 3\text{b)}$$

was man auch unmittelbar aus den Gleichgewichtsbedingungen hätte ableiten können. Zieht man die letzten Formeln von 3a) ab, so folgt für die Abweichungen $y-y_0=y'$, $\varphi-\varphi_0=\varphi'$ von der Gleichgewichtslage

$$\left.\begin{array}{l} m\ddot{y}'+(\alpha_1^2+\alpha_2^2)y'-(\alpha_1^2 s_1-\alpha_2^2 s_2)\varphi'=0 \\ mk_0^2\ddot{\varphi}'+(\alpha_1^2 s_1^2+\alpha_2^2 s_2^2)\varphi'-(\alpha_1^2 s_1-\alpha_2^2 s_2)y'=0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

Da in diesen Gleichungen zwei voneinander unabhängige Lagegrößen auftreten, so besitzt der Stab **zwei Freiheitsgrade** und vollzieht offenbar um die Ruhelage senkrechte und Drehschwingungen, die miteinander durch die Beziehungen 4) **gekoppelt** sind. Da fernerhin in der ersten Gleichung φ' und in der zweiten y' dieselben Beiwerte $\alpha_1^2 s_1-\alpha^2_2 s_2$ haben, so wird die Kopplung für

$$\alpha_1^2 s_1=\alpha_2^2 s_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4\text{a)}$$

aufgehoben, was insbesondere stets dann eintritt, wenn der Stab auf beiden Seiten des Schwerpunktes dieselbe Massenverteilung aufweist und die Federn gleiche Abmessungen besitzen und aus gleichem Stoff bestehen. Alsdann haben wir es mit einfachen, voneinander unabhängigen freien lotrechten und Drehschwingungen zu tun, die wir schon zur Genüge kennen gelernt haben.

Dividieren wir nun die Gleichungen 4) durch m, bzw. mk_0^2 und setzen

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\alpha_1^2+\alpha_2^2}{m}=\omega_1^2 \qquad \dfrac{\alpha_1^2 s_1^2+\alpha^2_2 s_2^2}{mk_0^2}=\omega_2^2 \\ \alpha_1^2 s_1-\alpha_2^2 s_2=mk_0\omega_0^2 \end{array}\right\}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

so wird aus 4)

$$\left.\begin{array}{l} \ddot{y}'+\omega_1^2 y'-\omega_0^2 k_0\varphi'=0 \\ \ddot{\varphi}'+\omega_2^2\varphi'-\dfrac{\omega_0^2}{k_0}y'=0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5\text{a)}$$

Diese Gleichungen unterscheiden sich von denen kleiner Ausschläge des Doppelpendels dadurch, daß die Störungs- oder Koppelglieder nicht die Anläufe, sondern die Ausschläge selbst enthalten, werden aber wie dort durch die Ansätze

$$y' = A e^{\varkappa t}, \qquad \varphi' = B e^{\varkappa t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6)$$

erfüllt, deren Einfürung nach Wegheben des gemeinsamen, nicht verschwindenden Faktors $e^{\varkappa t}$

$$\left.\begin{aligned} A(\varkappa^2 + \omega_1^2) &= \omega_0^2 k_0 B \\ B(\varkappa^2 + \omega_2^2) &= \frac{\omega_0^2}{k_0} A \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6a)$$

oder

$$\left.\begin{aligned} (\varkappa^2 + \omega_1^2)(\varkappa^2 + \omega_2^2) &= \omega_0^4, \\ \frac{A^2}{B^2} &= k_0^2 \frac{\varkappa^2 + \omega_2^2}{\varkappa^2 + \omega_1^2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6b)$$

ergibt. Schreibt man für die erste dieser Formeln

$$\varkappa^4 + (\omega_1^2 + \omega_2^2)\varkappa^2 + \omega_1^2 \omega_2^2 - \omega_0^4 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6c)$$

so erkennt man, daß ihre beiden Wurzeln

$$\varkappa^2 = -\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4\omega_0^4} \quad . \quad . \quad . \quad 6d)$$

unter allen Umständen negativ ausfallen und auf zwei imaginäre Wertpaare

$$\varkappa_{12} = \pm i\omega', \qquad \varkappa_{34} = \pm i\omega'' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7)$$

führen, denen dann für jeden Ausschlag y' und φ' die Überlagerung zweier Schwingungsvorgänge, wie beim Doppelpendel, § 65, Gl. 12), entspricht und deren Beiwerte durch die zweite Gleichung 6b) derart miteinander verknüpft sind, daß nur noch vier derselben im Einklang mit der Integration zweier Differentialgleichungen 5a) zweiter Ordnung durch die Anfangsbedingungen der Bewegung zu berechnen übrig bleiben.

Die beiden Wurzeln ω' und ω'' können übrigens nur dann übereinstimmen, wenn in 6a)

$$\omega_1^2 = \omega_2^2, \qquad \omega_0^2 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8)$$

oder wegen 5), wenn

$$k_0^2 = s_1 s_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8a)$$

unabhängig von den Einzelwerten von α_1 α_2 wird. Da nun die Schwungarme um die Auflagerstellen A_1 A_2 durch $k_1^2 = k_0^2 + s_1^2$, $k_2^2 = k_0^2 + s_2^2$ und die zugehörigen Pendellängen durch $k_1^2 : s_1 = l_1$, $k_2^2 : s_2 = l_2$ gegeben sind, so führt die Bedingung 8a) auf

$$k_1^2 = s_1^2 + s_1 s_2 = s_1(s_1 + s_2), \qquad \text{also} \qquad l_1 = l_2 = s_1 + s_2, \quad . \quad 8b)$$

d. h. auf die Übereinstimmung der Stablänge zwischen den Auflagern mit der Pendellänge. Alsdann findet zwischen beiden Schwingungen nach 5a) Gleichklang statt, aber auch eine Aufhebung der Kopplung, so daß sie mit gleicher Dauer ganz unabhängig voneinander verlaufen.

1. Beispiel. Die vorstehende Untersuchung kann man auch auf eine Stützung durch mehr als zwei Federn ausdehnen, wobei für jede derselben eine ihrer Längenänderung verhältnisgleiche Kraft hinzutritt. Da die Längenänderung durch die Lage des Stabes schon bestimmt ist, so bleibt die Zahl der voneinander unabhängigen Lagengrößen und damit die der Freiheitsgrade ungeändert. Man erkennt dies am besten durch die Betrachtung des Falles der Stabschwingung auf einer federnden Unterlage, einem sogen. Kissen, welches offenbar eine unendlich große Zahl von Federn ersetzt. Ist h die unbelastete und y die belastete Kissenhöhe an einer bestimmten Stelle z von O aus gerechnet, Abb. 250, so wird dort die Längeneinheit des Stabes durch

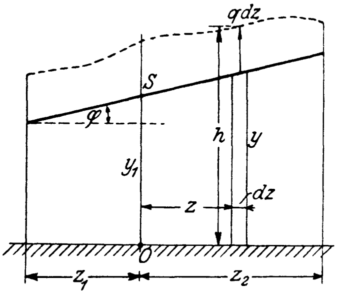

Abb. 250.

$$q = \alpha^2 (h - y) \quad \ldots\ldots \quad 9)$$

belastet. Nehmen wir ferner eine gerade Stabunterseite mit der Schwerpunktshöhe y_1 an, so dürfen wir bei nur kleinen Winkelauslenkungen φ hinreichend genau

$$y - y_1 = z\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 10)$$

setzen und erhalten alsdann die Bewegungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \int q\,dz - m g &= m \ddot{y}_1 \\ \int q\,z\,dz - g \int z\,dm &= m k_0^2 \ddot{\varphi} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 11)$$

Denken wir uns den Schwerpunkt auf der Lotrechten durch den Anfang O geführt, so verschwindet in der zweiten Formel 11) das statische Moment der Stabmasse und wir erhalten nach Einsetzen von 9) und 10)

$$\begin{aligned} \alpha^2 \int h\,dz - \alpha^2 y_1 \int dz - \alpha^2 \varphi \int z\,dz - m g &= m \ddot{y}_1 \\ \alpha^2 \int h\,z\,dz - \alpha^2 y_1 \int z\,dz - \alpha^2 \varphi \int z^2\,dz &= m k_0^2 \ddot{\varphi}, \end{aligned}$$

oder nach Ausführung der Integrationen zwischen den Grenzen $-z_1$ bis $+z_2$

$$\left.\begin{aligned} m \ddot{y}_1 + \alpha^2 (z_1 + z_2)\, y_1 + \frac{\alpha^2}{2} (z_2^2 - z_1^2)\, \varphi - \alpha^2 \int_{-z_1}^{+z_2} h\,dz + m g &= 0 \\ m k_0^2 \ddot{\varphi} + \frac{\alpha^2}{3} (z_1^3 + z_2^3)\, \varphi + \frac{\alpha^2}{2} (z_2^2 - z_1^2)\, y_1 - \alpha^2 \int_{-z_1}^{+z_2} h\,z\,dz &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 11\text{a})$$

Im Gleichgewichtszustande ist $y_1 = y_0$, $\varphi = \varphi_0$, also

$$\left.\begin{aligned} \alpha^2 (z_1 + z_2)\, y_0 + \frac{\alpha^2}{2} (z_2^2 - z_1^2)\, \varphi_0 - \alpha^2 \int_{-z_1}^{+z_2} h\,dz + m g &= 0 \\ \frac{\alpha^2}{3} (z_1^3 + z_2^3)\, \varphi_0 + \frac{\alpha^2}{2} (z_2^2 - z_1^2)\, y_0 - \alpha^2 \int_{-z_1}^{+z_2} h\,z\,dz &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 11\text{b})$$

und nach Abzug von 11a) mit den Abweichungen aus der Ruhelage $y_1 - y_0 = y'$, $\varphi - \varphi_0 = \varphi'$

$$\left.\begin{aligned} m \ddot{y}' + \alpha^2 (z_1 + z_2)\, y' + \frac{\alpha^2}{2} (z_2^2 - z_1^2)\, \varphi' &= 0 \\ m k_0^2 \ddot{\varphi}' + \frac{\alpha^2}{3} (z_1^3 + z_2^3)\, \varphi' + \frac{\alpha^2}{2} (z_2^2 - z_1^2)\, \varphi' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 12)$$

Dieses Gleichungspaar ist von derselben Bauart wie Gl. 4) und muß daher auch wie diese auf zwei miteinander gekoppelte Schwingungen führen, die bei symmetrischer Anordnung des Stabes um die lotrechte Schwerachse, d. h. für $z_1 = z_2$ voneinander völlig unabhängig verlaufen. Dabei ist der ganze Bewegungsvorgang gänzlich unabhängig von der ursprünglichen Form des federnden Auflagekissens, die lediglich die durch 11b) gegebene Ruhelage des Stabes bedingt.

2. Beispiel. Die Bewegung des Stabes würde ebenso verlaufen, wenn er mit einer senkrechten Wand federnd derart verknüpft wäre, daß nur wagerechte Auslenkungen möglich sind. Denken wir uns dann einen Punkt festgehalten und den dadurch aufgehobenen Freiheitsgrad durch die Drehbarkeit der Wand ersetzt, so erhalten wir zwei miteinander federnd gekoppelte Pendel, Abb. 251. Sind a_1 und a_2 die Abstände der Kopplungspunkte der Pendel von den Drehpunkten $O_1\, O_2$ und ist die Feder in der lotrechten Lage der Pendel spannungsfrei, so ist bei den Auslenkungen φ_1 und φ_2 die Federspannung $P = \alpha^2(a_1\varphi_1 - a_2\varphi_2)$. Damit erhalten wir für kleine Auslenkungen die Bewegungsformeln

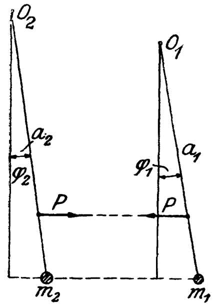

Abb. 251.

$$\left.\begin{array}{l} m_1 k_1^2 \ddot{\varphi}_1 + m_1 g s_1 \varphi_1 + \alpha^2 (a_1\varphi_1 - a_2\varphi_2) a_1 = 0 \\ m_2 k_2^2 \ddot{\varphi}_2 + m_2 g s_2 \varphi_2 - \alpha^2 (a_1\varphi_1 - a_2\varphi_2) a_2 = 0 \end{array}\right\}, \qquad 13)$$

oder nach Einführung der Pendellängen l_1 und l_2

$$\left.\begin{array}{l} \ddot{\varphi}_1 + \left(\frac{g}{l_1} + \frac{\alpha^2 a_1^2}{m k_1^2}\right)\varphi_1 - \frac{\alpha^2 a_2 a_1}{m k_1^2}\varphi_2 = 0 \\ \ddot{\varphi}_2 + \left(\frac{g}{l_2} + \frac{\alpha^2 a_2^2}{m k_2^2}\right)\varphi_2 - \frac{\alpha^2 a_1 a_2}{m k_2^2}\varphi_1 = 0 \end{array}\right\} . \qquad 13\text{a})$$

Auch diese Gleichungen stimmen formal mit 4) überein und ergeben gekoppelte Schwingungen beider Pendel. Nur können hier die Kopplungsfaktoren $\frac{\alpha^2 a_1 a_2}{m k_1^2}$ und $\frac{\alpha^2 a_1 a_2}{m k_2^2}$ niemals verschwinden, die Schwingungen also auch nicht voneinander unabhängig verlaufen. Es werden sich vielmehr stets die langsame und rasche Schwingung zu einer Schwebung derart zusammensetzen, daß infolge des Arbeitsaustausches zwischen den Pendeln die schwache Bewegung des einen Pendels mit der starken des andern zusammenfällt. Die Verfolgung des Bewegungsvorganges im einzelnen bietet keine weiteren Schwierigkeiten und kann dem Leser überlassen werden.

§ 68. Der zwangläufig bewegte Stab. Wir haben schon in § 61 die Bewegungsgleichungen einer Scheibe kennen gelernt, die mit zweien ihrer Punkte an zwei Führungskurven gebunden ist und eine Bewegung mit nur einem Freiheitsgrade vollzieht. Hier wollen wir uns auf den praktisch wichtigsten Fall eines Stabes beschränken, dessen Schwerpunkt auf der Verbindungslinie l der beiden Führungspunkte im Abstande s von einem Ende liegt, Abb. 252. Alsdann sind die Schwerpunktsabstände $x\,y$ mit den Achsenabständen $x'\,y'$, bzw. $x''\,y''$ der Führungspunkte durch die Beziehungen

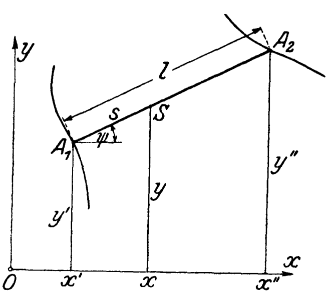

Abb. 252.

$$\frac{x - x'}{s} = \frac{x'' - x'}{l}, \quad \frac{y - y'}{s} = \frac{y'' - y'}{l}, \quad . \ . \ . \ . \ . \qquad 1)$$

oder
$$x = x'\frac{l-s}{l} + x''\frac{s}{l}, \qquad y = y'\frac{l-s}{l} + y''\frac{s}{l} \quad . \; . \; . \quad 1\text{a})$$

verknüpft. Aus ihnen erhält man durch Erweiterung mit der Stabmasse m und den Abkürzungen

$$m\frac{l-s}{l} = m', \qquad m\frac{s}{l} = m'' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 2)$$

$$m\,x = m'\,x' + m''\,x'', \qquad m\,y = m'\,y' + m''\,y'', \quad . \; . \; . \quad 1\text{b})$$

also eine Verteilung der Stabmasse auf die beiden Führungspunkte. Damit erhalten wir für die Kraftgleichungen des Stabes

$$\left.\begin{aligned} \Sigma X &= m\,\ddot{x} = m\left(\ddot{x}'\frac{l-s}{l} + \ddot{x}''\frac{s}{l}\right) = m'\,\ddot{x}' + m''\,\ddot{x}'' \\ \Sigma Y &= m\,\ddot{y} = m\left(\ddot{y}'\frac{l-s}{l} + \ddot{y}''\frac{s}{l}\right) = m'\,\ddot{y}' + m''\,\ddot{y}'' \end{aligned}\right\}, \quad . \; . \quad 3)$$

d. h. wir können die reine Verschiebung des Stabes auch durch die Bewegung zweier starr miteinander verbundener Massenpunkte auf den Führungskurven ersetzen.

Da ferner die Gesamtbewegung des Stabes aus der Verschiebung des Schwerpunktes und der Drehung um denselben besteht, so ist das Moment aller äußeren Kräfte einschließlich der Auflagerdrücke an den Führungspunkten in bezug auf den Anfangspunkt des Achsenkreuzes

$$M = m\,(\ddot{y}\,x - \ddot{x}\,y) + m\,k_0^2\,\ddot{\psi}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 4)$$

oder mit 1a)

$$M = m\left(\frac{l-s}{l}\right)^2 (\ddot{y}'\,x' - \ddot{x}'\,y') + m\left(\frac{s}{l}\right)^2 (\ddot{y}''\,x'' - \ddot{x}''\,y'') + m\,k_0^2\,\ddot{\psi}$$
$$+ m\frac{s\,(l-s)}{l^2}(\ddot{y}'\,x'' + \ddot{y}''\,x' - \ddot{x}'\,y'' - \ddot{x}''\,y'). \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 4\text{a})$$

Hierin können wir aber die letzte Klammer auch umformen in

$$\ddot{y}'\,x' - \ddot{x}'\,y' + \ddot{y}''\,x'' - \ddot{x}''\,y'' + (\ddot{x}'' - \ddot{x}')(y'' - y') - (\ddot{y}'' - \ddot{y}')(x'' - x')$$

und darin wieder

$$(\ddot{x}'' - \ddot{x}')(y'' - y') - (\ddot{y}'' - \ddot{y}')(x'' - x') = \frac{d}{dt}[(\dot{x}'' - \dot{x}')(y'' - y')$$
$$- (\dot{y}'' - \dot{y}')(x'' - x')]$$

setzen. Da nun

$$\left.\begin{aligned} x'' - x' &= l\cos\psi, & y'' - y' &= l\sin\psi \\ \dot{x}'' - \dot{x}' &= -\,l\,\dot{\psi}\sin\psi, & \dot{y}'' - \dot{y}' &= l\,\dot{\psi}\cos\psi \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad 1\text{c})$$

ist, so wird daraus kurz

$$-\frac{d}{dt}(l^2\,\dot{\psi}) = -\,l^2\,\ddot{\psi}.$$

Damit geht 4a) über in

$$\frac{M}{m} = \left[\frac{(l-s)^2}{l^2} + \frac{s(l-s)}{l^2}\right](\ddot{y}'x' - \ddot{x}'y')$$
$$+ \left[\frac{s^2}{l^2} + \frac{s(l-s)}{l^2}\right](\ddot{y}''x'' - \ddot{x}''y'') + [k_0{}^2 - s(l-s)]\,\ddot{\psi},$$

oder mit $k_0{}^2 + s^2 = k^2$

$$\frac{M}{m} = (\ddot{y}'x' - \ddot{x}'y')\frac{l-s}{l} + (\ddot{y}''x'' - \ddot{x}''y'')\frac{s}{l} + (k^2 - s\,l)\,\ddot{\psi}$$
$$M = m'(\ddot{y}'x' - \ddot{x}'y') + m''(\ddot{y}''x'' - \ddot{x}''y'') + m(k^2 - s\,l)\,\ddot{\psi}\,. \quad 4\text{b})$$

Daraus erkennt man, daß der Stab auch in bezug auf die Wirkung des Momentes nur durch zwei Massenpunkte nach der Schwerpunktsregel ersetzt werden darf, wenn deren als Stablänge bezeichneter Abstand mit seiner Pendellänge übereinstimmt, womit das letzte Glied in 4b) verschwindet. Alsdann stellen $m'\ddot{x}'$, $m'\ddot{y}'$ und $m''\ddot{x}''$, $m''\ddot{y}''$ die Achsenanteile der sogen. Massendrücke, sowie $m'(\ddot{y}'x' - \ddot{x}'y')$ und $m''(\ddot{y}''x'' - \ddot{x}''y'')$ die Massendruckmomente des Stabes an den Führungskurven dar.

Weiter ist die doppelte Wucht des bewegten Stabes

$$2\,J = m(v^2 + k_0{}^2\dot{\psi}^2) = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + k_0{}^2\dot{\psi}^2)\,, \quad \ldots \quad 5)$$

oder mit 1a)

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2)\left(\frac{l-s}{l}\right)^2 + (\dot{x}''^2 + \dot{y}''^2)\left(\frac{s}{l}\right)^2$$
$$+ 2\frac{s(l-s)}{l^2}(\dot{x}'\dot{x}'' + \dot{y}'\dot{y}''), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 5\text{a})$$

oder wegen 1c), d. h.

$$2(\dot{x}'\dot{x}'' + \dot{y}'\dot{y}'') = \dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{x}''^2 + \dot{y}''^2 - l^2\dot{\psi}^2,$$

sowie mit den Laufwerten der Führungspunkte v', v''

$$2(\dot{x}'\dot{x}'' + \dot{y}'\dot{y}'') = v'^2 + v''^2 - l^2\dot{\psi}^2$$
$$\frac{2\,J}{m} = v'^2\frac{l-s}{l} + v''^2\frac{s}{l} + (k^2 - s\,l)\,\dot{\psi}^2$$
$$2\,J = m'v'^2 + m''v''^2 + m(k^2 - s\,l)\,\dot{\psi}^2\,. \quad \ldots\ldots \quad 5\text{b})$$

Auch hier tritt also das mit $k^2 - s\,l$ behaftete Zusatzglied auf, dessen Verschwinden bei Übereinstimmung der Stab- und Pendellänge erst die Verteilung der Gesamtmasse auf die beiden Führungspunkte nach dem Schwerpunktssatze für die Wucht rechtfertigt. Daraus geht jedenfalls die große Bedeutung und die Notwendigkeit der Ermittlung der Pendellänge aller solcher Stäbe hervor, die neben einer Verschiebung ihres Schwerpunktes auch eine Drehung um denselben erfahren. Stimmt übrigens die Pendellänge für einen Führungspunkt mit der Stablänge überein, ist also $k'^2 = s\,l$, so besteht auch für den andern Punkt wegen

$$k''^2 = k_0{}^2 + (l-s)^2 = k_0{}^2 + s^2 + l^2 - 2\,l\,s = k'^2 - 2\,l\,s + l^2$$
$$k''^2 = l(l-s) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 6)$$

dieselbe Übereinstimmung, d. h. der Stab stellt in diesem Falle in bezug auf seine Führungspunkte, die gewöhnlich durch Zapfenmitten gegeben sind, ein Umkehrpendel dar. Man kann daher aus den Schwingungsdauern um die Führungszapfen sich in jedem Falle von der Erfüllung dieser Bedingung überzeugen, die schon die Kopplung eines federnd gestützten Stabes aufhob, wie wir im letzten Abschnitt gesehen haben.

Da der zwangläufig bewegte Stab nur einen Freiheitsgrad besitzt, so ist die Bewegung selbst durch eine solche Gleichung bestimmt, in der keine unbekannten Kräfte auftreten. Unbekannt, bzw. durch die Bewegung selbst erst bestimmt sind aber die Auflagedrücke Q', Q'' an den Führungskurven mit den Achsenanteilen $X'Y'$, $X''Y''$, die dort keine Arbeit leisten. Daher wird man den Bewegungsverlauf aus der Arbeitsgleichung bestimmen, und nachträglich die Auflagedrücke aus 3) unter Zuhilfenahme der beiden Bedingungen für die Normalstellung von Q', Q'' zu den Führungskurven, nämlich

$$\left.\begin{aligned} X'dx' + Y'dy' &= 0 \\ X''dx'' + Y''dy'' &= 0 \end{aligned}\right\}, \quad . \quad . \quad 7)$$

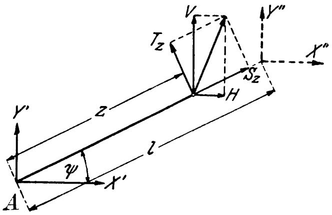

Abb. 253.

berechnen. Damit aber ist die gesamte Belastung des Stabes im Bewegungszustande bekannt und die Berechnung der in ihm selbst wirkenden Kräfte und Momente ermöglicht. Bezeichnen wir die Stabkraft und die Querkraft im Abstande z vom Ende A mit S_z und T_z, das dort wirkende Biegungmoment mit M_z, so können wir die ersteren auch nach Abb. 253 durch einen wagerechten und senkrechten Anteil derart ersetzen, daß mit der Stabneigung ψ

$$S_z = H\cos\psi + V\sin\psi, \qquad T_z = V\cos\psi - H\sin\psi \quad . \quad . \quad . \quad 8)$$

wird, während sich das Biegungsmoment aus $dM_z = T_z\,dz$ oder

$$M_z = \int_0^z T_z\,dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8\text{a})$$

bequemer berechnet, als durch Aufstellung der Momentengleichung der Einzelkräfte an dem abgeschnittenen Stabteil von 0 bis z. Dabei sind natürlich nur diejenigen äußeren Kräfte einzuführen, welche an diesem Stabteile angreifen, also z. B. der Gewichtsteil im Teilschwerpunkt. Bezeichnen wir diese äußeren Kraftanteile mit $X_z\,Y_z$, so lauten die Kraftgleichungen des Stabteiles

$$\left.\begin{aligned} X_z + X' + H &= \int_0^z \ddot{x}\,dm = m_z\ddot{x}_z \\ Y_z + Y' + V &= \int_0^z \ddot{y}\,dm = m_z\ddot{y}_z, \end{aligned}\right\}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9)$$

wenn $x_z\,y_z$ die Achsenabstände des Teilschwerpunktes und $m_z = \dfrac{G^z}{g}$ die Masse des Stabteiles zwischen 0 und z bedeutet.

Beispiel. Ein gerader Stab von der Länge l gleite an einer glatten lotrechten Wand und auf dem ebenso glatten Boden herab, Abb. 254. Dann sind bei einer augenblicklichen Neigung ψ die Gleichungen der Führungskurven und die zugehörigen Laufwerte

$$\left.\begin{array}{llll} x' = -l\cos\psi\,, & y' = 0\,, & x'' = 0\,, & y'' = l\sin\psi \\ \dot{x}' = +l\dot{\psi}\sin\psi\,, & \dot{y}' = 0\,, & \dot{x}'' = 0\,, & \dot{y}'' = l\dot{\psi}\cos\psi \end{array}\right\}, \quad 10)$$

so daß also dem einen Freiheitsgrad entsprechend die Lage durch den Winkel ψ vollständig gegeben ist. Mit dem Stabgewicht $G = mg$ haben wir zunächst die Arbeitsformel $G s \sin\psi + J = C$, oder wegen 5b) mit der anfänglichen Ruhelage ψ_0

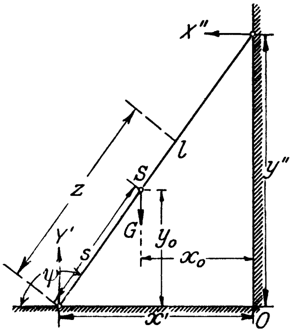

Abb. 254.

$$2gs(\sin\psi_0 - \sin\psi) = l^2\dot{\psi}^2\left[\sin^2\psi\left(1-\frac{2s}{l}\right)+\frac{k^2}{l^2}\right] \quad 11)$$

Daraus folgt, daß der Stab für $\psi = 0$ mit dem Drehwert

$$\dot{\psi}_1 = +\sqrt{\frac{2gs\sin\psi_0}{k^2}} = +\sqrt{\frac{2gy_0}{k^2}} \quad .\ 11\text{a})$$

auf dem Boden ankommt, wenn y_0 die anfängliche Schwerpunktshöhe bedeutet. Da der Lauf $\dot{x}' = +l\dot{\psi}\sin\psi$ für $\psi = 0$ verschwindet, so besteht beim Aufschlagen überhaupt kein wagerechter Laufanteil, so daß der Stab jedenfalls in dieser Richtung nicht weiter fortschreitet.

Weiter folgt aus 11) für den Drehanlauf

$$l^2\ddot{\psi}\left[\frac{k^2}{l^2}+\left(1-\frac{2s}{l}\right)\sin^2\psi\right]^2 = -gs\cos\psi\left[\frac{k^2}{l^2}+(2\sin\psi_0-\sin\psi)\sin\psi\left(1-\frac{2s}{l}\right)\right] \quad 11\text{b})$$

also für das Aufschlagen mit $\psi = 0$

$$\ddot{\psi}_1 = -\frac{gs}{k^2}\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ 11\text{c})$$

Die Anlaufwerte sind nach 10)

$$\left.\begin{array}{l} \ddot{x}' = -l\dfrac{d^2\cos\psi}{dt^2} = +l(\ddot{\psi}\sin\psi + \dot{\psi}^2\cos\psi) \\ \ddot{y}'' = l\dfrac{d^2\sin\psi}{dt^2} = l(\ddot{\psi}\cos\psi - \dot{\psi}^2\sin\psi)\,, \end{array}\right\} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ 12)$$

also die Auflagerdrücke

$$\left.\begin{array}{ll} X' = 0\,, & Y' = G + m\dfrac{s}{l}\ddot{y}'' = m\left(g + s\dfrac{d^2\sin\psi}{dt^2}\right) \\ X'' = m(l-s)\dfrac{d^2\cos\psi}{dt^2}\,, & Y'' = 0 \end{array}\right\} \ . \ . \ . \ 13)$$

mit den Werten für das Aufschlagen $\psi = 0$

$$\ddot{x}_1' = \frac{2gls\sin\psi_0}{k^2} = \frac{2gly_0}{k^2}\,, \qquad \ddot{y}''_1 = -\frac{gs}{k^2}l\ . \ . \ . \ . \ . \ 12\text{a})$$

$$X_1'' = 2G\frac{l-s}{k^2}y_0\,, \qquad Y_1' = G\left(1-\frac{s^2}{k^2}\right)\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ 13\text{a})$$

Weiter erhalten wir für die Stabkräfte im Abstande z vom unteren Ende nach 9)

$$\left.\begin{array}{l} -H = \dfrac{d^2\cos\psi}{dt^2}\displaystyle\int_0^z (l-z)\,dm = \dfrac{d^2\cos\psi}{dt^2}\left(l\,m_z - \int_0^z z\,dm\right) \\ V = G_z - Y' + \displaystyle\int_0^z \ddot{y}\,dm = G_z - G - \dfrac{d^2\sin\psi}{dt^2}\left(ms - \int_0^z z\,dm\right) \end{array}\right\} \ . \quad 14)$$

mit den Werten für das Aufschlagen $\psi = 0$

$$H_1 = \frac{2 g y_0}{k^2}\left(m_z l - \int_0^z z\, dm\right), \qquad V_1 = G_z - G + \frac{g s}{k^2}\left(m s - \int_0^z z\, dm\right). \quad 14\text{a})$$

Setzen wir darin $z = 0$, bzw. $z = l$, so erhalten wir wieder die Ausdrücke 13a).

Schließlich erhalten wir für das Biegungsmoment aus der Verbindung von 8), 8a) und 14)

$$M_z = -\cos\psi\left[G z - \int_0^z G_z\, dz + \frac{d^2 \sin\psi}{dt^2}\left(m s z - \int_0^z dz \int_0^z z\, dm\right)\right]$$

$$+ \sin\psi \frac{d^2 \cos\psi}{dt^2}\left[l \int_0^z m_z\, dz - \int_0^z dz \int_0^z z\, dm\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad 15)$$

oder wegen

$$\int G_z\, dz = g\left(m_z z - \int_0^z z\, dm\right), \qquad \int_0^z dz \int_0^z z\, dm = z \int_0^z z\, dm - \int_0^z z^2\, dm$$

$$M_z = g \cos\psi\left[(m_z - m) z - \int_0^z z\, dm\right] - \cos\psi \frac{d^2 \sin\psi}{dt^2}\left[m s z - z \int_0^z z\, dm + \int_0^z z^2 dm\right]$$

$$+ \sin\psi \frac{d^2 \cos\psi}{dt^2}\left[m_z l z - (l + z)\int_0^z z\, dm + \int_0^z z^2 dm\right] \quad \ldots \quad 15\text{a})$$

Für das Aufschlagen folgt daraus mit $\psi = 0$, unter Benutzung von 12a)

$$M_z = g\left[m_z z - m\left(1 - \frac{s^2}{k^2}\right) z - \left(1 + \frac{s z}{k^2}\right)\int_0^z z\, dm + \frac{s}{k^2}\int_0^z z^2\, dm\right] \quad . \; 15\text{b})$$

Außerdem erkennt man, daß 15a) für $z = 0$ verschwindet und für $z = l$ übergeht in

$$M_l = -m\left[g s \cos\psi + \left(k^2 + l^2 \sin^2\psi\left(1 - \frac{2 s}{l}\right)\right)\ddot{\psi}\right.$$

$$\left. + l^2 \dot{\psi}^2 \sin\psi \cos\psi\left(1 - \frac{2 s}{l}\right)\right], \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \; 15\text{c})$$

worin der Klammerausdruck nichts als die Ableitung der Arbeitsgleichung 11) darstellt und daher mit dieser verschwindet. Damit wird nur die Voraussetzung des Gleitens an den Führungsschienen bestätigt, wonach an den Führungszapfen keine Biegungsmomente auftreten.

§ 69. Das Kräftespiel im Kurbelgetriebe. Als wichtigste Anwendung der Lehre des letzten Abschnittes betrachten wir das Kräftespiel im Kurbelgetriebe, dessen Bewegung wir schon in § 13 kennen gelernt haben. Dieser Trieb dient zur Arbeitsübertragung zwischen einem geradlinig hin- und hergehenden Körper und einer rotierenden Schwungmasse mit festem Drehpol, der im einfachsten Falle, den wir hier allein ins Auge fassen, auf der Führungsgeraden selbst liegt. Die Arbeitsübertragung wird alsdann von der Schubstange vermittelt. d. i. einem geraden Stab, der am Kreuzkopf geradlinig und am Kurbelzapfen auf dem sog. Kurbelkreis geführt wird. Die Stangenlänge, d. h. der Abstand beider Zapfenmitten, sei wieder l, der

Kurbelarm r, die Neigungswinkel beider gegen die Führungsgerade ψ und φ, während x' den augenblicklichen Abstand des Kreuzkopfes vom Drehpol der Kurbel und der damit starr verbundenen Schwungmasse sein möge. Alsdann bestehen die geometrischen Beziehungen

$$r \sin\varphi = l \sin\psi, \qquad x' = r\cos\varphi + l\cos\psi, \quad . \; . \; . \quad 1)$$

woraus wir nach § 13 den Winkel ψ ausschalten können, so daß mit x' die Lage der Stange allein durch den Winkel φ festgelegt ist, entsprechend einem Freiheitsgrade ihrer Bewegung.

Ist ferner $m_0 k_0^2$ das Schwungmoment der Schwungmasse mit der Kurbel, m die Stangenmasse und m_1 die nur hin- und hergehende Masse des Kreuzkopfes mit der daran befestigten Kolbenstange und dem Kolben, der einem Motor oder einer Pumpe für Gas oder Flüssigkeiten angehören möge, so haben wir mit dem Schwerpunktsabstand s der Stange, ihrem Trägheitsarm vom Kreuzkopf k die doppelte Wucht aller bewegten Teile nach Gl. 5b) § 68

$$2J = \left(m_0 k_0^2 + m\frac{s}{l}r^2\right)\dot\varphi^2 + \left(m_1 + m\frac{l-s}{l}\right)\dot x'^2 + m(k^2 - sl)\dot\psi^2. \quad 2)$$

Im Falle der Übereinstimmung der Stangenlänge l mit ihrer Pendellänge, die durch zweckmäßige Verteilung der Stangenmasse stets erreichbar ist, verschwindet das letzte Glied; trifft dies aber nicht zu, so ist doch der Unterschied $k^2 - sl$ klein gegen l^2 und außerdem das Quadrat des Drehwertes der nur pendelnden Stange $\dot\psi^2$ klein gegen $\dot\varphi^2$ der stets im gleichen Sinne rotierenden Schwungmasse, so daß man unbedenklich das letzte Glied gegen die Gesamtwucht vernachlässigen darf. Außerdem folgt aus 1)

$$r\dot\varphi\cos\varphi = l\dot\psi\cos\psi, \qquad \dot x' = -(r\dot\varphi\sin\varphi + l\dot\psi\sin\psi), \quad 1\text{a})$$

wofür man wegen der stets nur kleinen Auslenkungen ψ der Stange aus ihrer Mittellage (vergl. § 13) hinreichend genau

$$\dot\psi = \frac{r}{l}\dot\varphi\cos\varphi, \qquad \dot x' = -r\dot\varphi\sin\varphi\left(1 + \frac{r}{l}\cos\varphi\right) \quad . \quad 1\text{b})$$

setzen darf. Damit vereinfacht sich Gl. 2) in

$$2J = r^2\dot\varphi^2\left[m_0\frac{k_0^2}{r^2} + m\frac{s}{l} + \left(m_1 + m\frac{l-s}{l}\right)\sin^2\varphi\left(1 + \frac{r}{l}\cos\varphi\right)^2\right], \; 2\text{a})$$

worin die von Winkelfunktionen freien Glieder in der Klammer als die am Kurbelzapfen rotierende Masse, die anderen dagegen als die mit dem Kreuzkopf hin- und hergehende anzusehen sind. Wegen des weit überwiegenden Betrages der ersteren können wir den ganzen veränderlichen Teil als kleinen Zusatz betrachten und darin

$$\sin^2\varphi\left(1 + \frac{r}{l}\cos\varphi\right)^2 \approx \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi)\left(1 + 2\frac{r}{l}\cos\varphi\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + 2\frac{r}{l}\cos\varphi - \cos 2\varphi - 2\frac{r}{l}\cos 2\varphi\cos\varphi\right) \quad . \; . \; . \; . \quad 3)$$

schreiben, worin die mit $r:l$ behafteten Glieder den Einfluß der Schubstangenlänge darstellen. Lassen wir auch diese noch als klein gegen 1 weg, so bleibt mit $\dot{\varphi} = \omega$

$$2\,J = r^2\,\omega^2 \left[m_0 \frac{k_0^{\,2}}{r^2} + m\,\frac{s}{l} + \frac{1}{2}\left(m_1 + m\,\frac{l-s}{l}\right)(1 - \cos 2\,\varphi)\right], \quad 2\text{b})$$

oder abgekürzt

$$2\,J = r^2\,\omega^2\,(m' - m'' \cos 2\,\varphi)\,. \;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad 2\text{c})$$

Nun ist für eine Kolbenmaschine sowohl das Drehmoment M am Kurbelzapfen als auch die Kolbenkraft P gegeben, so daß unter Einführung der augenblicklichen Schwerpunktshöhe y einer der Getriebemassen m, deren Abhängigkeit vom Kurbelwinkel aus den Gleichungen 1) mit Rücksicht auf die Neigung der Geradführung gegen die Wagerechte bestimmt ist, die Arbeitsgleichung

$$P\,d\,x - M\,d\,\varphi - g\,\Sigma\,m\,d\,y = d\,J \;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad 4)$$

besteht, in welcher der Zusammenhang zwischen P und x stets aus dem sog. Indikatordiagramm hervorgeht, während das Drehmoment M meist als unveränderlich angesehen werden kann. Aus beiden kann

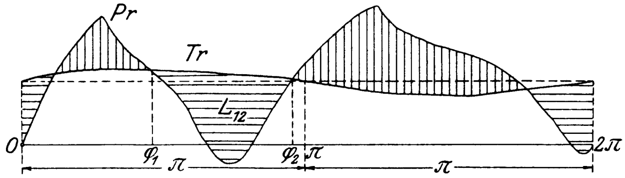

Abb. 255.

dann unter Hinzunehmen der periodisch veränderlichen Hubarbeit $g\,\Sigma\,m\,d\,y$ ein sog. Drehkraftbild aufgezeichnet werden, dessen Fläche ein Maß für die ein- und abgeleitete Arbeit bildet. Zeichnet man in Abb. 255 die Drehkraftkurve der Kolbenkraft Pr (§ 45, Beispiel 3) und die des vereinigten Widerstandes Tr und der Gewichte bezogen auf den Kurbelzapfen für sich auf, so schneiden sich beide Linien in mehreren Punkten derart, daß dort das Element der Wucht verschwindet, diese also abwechselnd größte und kleinste Werte annimmt, deren Unterschied der zwischen den Punkten liegenden schraffierten Überschußflächen zwischen beiden Kurven verhältnisgleich ist. Bezeichnen wir den Flächenunterschied von einer Totlage $\varphi = 0$ aus gerechnet in Arbeitseinheiten mit L, setzen also in 4)

$$\int_0^{\varphi} (P\,d\,x - M\,d\,\varphi - g\,\Sigma\,m\,d\,y) = L\,, \;.\;.\;.\;.\;. \quad 4\text{a})$$

so ist

$$2\,L = 2\,(J - J_0) = r^2\,\omega^2\,(m' - m'' \cos 2\,\varphi) - r^2\,\omega_0^{\,2}\,(m' - m'') \quad 5)$$

und für eine Überschußfläche zwischen den Punkten $\varphi_1\,\varphi_2$

$$2\,L_{12} = r^2\,\omega_2^{\,2}\,(m' - m'' \cos 2\,\varphi_2) - r^2\,\omega_1^{\,2}\,(m' - m'' \cos 2\,\varphi_1)\,. \quad 5\text{a})$$

Mit Hilfe der Gl. 5) ist man also in der Lage, bei vorgelegtem ω_0 die Veränderung von ω mit dem Kurbelwinkel φ zeichnerisch zu ermitteln. Schreibt man an Stelle von 5) angesichts des praktisch nur geringen Unterschiedes $\omega^2 - \omega_0^2$

$$2\,L = r^2\,m'\,(\omega^2 - \omega_0^2) - r^2\,m''\,\omega_0^2\,(\cos 2\,\varphi - 1)\,, \quad . \quad . \quad 5\,\mathrm{b})$$

so ergibt sich als Bedingung für Scheitelwerte von $\omega^2 - \omega_0^2$

$$\frac{d\,L}{d\,\varphi} = r^2\,m''\,\omega_0^2 \sin 2\,\varphi\,,$$

oder wegen 4a)

$$P\frac{d\,x}{d\,\varphi} - M - g\,\Sigma\,m\,\frac{d\,y}{d\,\varphi} = r^2\,m''\,\omega_0^2 \sin 2\,\varphi\,. \quad . \quad . \quad . \quad 6)$$

Man erhält also im **Drehkraftdiagramm** die Stellen ausgezeichneter Drehwerte durch den Schnitt der Gesamtkraftkurve mit der rechts stehenden Kurve der $r^2\,m''\,\omega_0^2 \sin 2\,\varphi$. Da diese Kurve wegen der Kleinheit von m'' gegen m' ziemlich flach verläuft, Abb. 256, so werden die Schnittpunkte den Enden der durch 5a) gekennzeichneten Überschußfläche sehr nahe kommen, so daß man diese in der technischen Praxis häufig dafür benutzt.

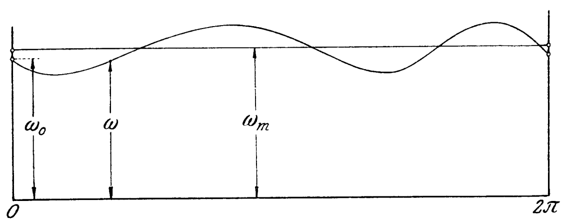

Abb. 256.

Aus 5b) erhält man dann für die größte Überschußfläche

$$\begin{aligned} 2\,L_{12} &= 2\,(L_2 - L_1) \\ &= r^2\,m'\,(\omega_2^2 - \omega_1^2) - r^2\,m''\,\omega_0^2\,(\cos 2\,\varphi_2 - \cos 2\,\varphi_1)\,, \quad . \quad 5\,\mathrm{c}) \end{aligned}$$

oder indem man angenähert

$$\omega_1 + \omega_2 = 2\,\omega_0\,, \qquad \omega_2 - \omega_1 = \delta\,\omega_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7)$$

setzt und δ als **Ungleichförmigkeit** der Maschine bezeichnet

$$\delta = \frac{L_{12}}{m'\,r^2\,\omega_0^2} + \frac{1}{2}\,\frac{m''}{m'}\,(\cos 2\,\varphi_2 - \cos 2\,\varphi_1)\,. \quad . \quad . \quad 7\,\mathrm{a})$$

Der in diesen Formeln auftretende Drehwert ω_0 für die Totlage $\varphi = 0$ braucht indessen nicht mit dem Mittelwert ω_m übereinzustimmen, der mit der Umdrehungsdauer t durch die Gleichung

$$t = \frac{2\,\pi}{\omega_m} = \int_0^{2\pi} \frac{d\,\varphi}{\omega} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8)$$

verknüpft ist. Schreiben wir mit nur kleinen Abweichungen $\varDelta\,\omega$ vom Mittelwerte ω_m für den Drehwert $\omega = \omega_m + \varDelta\,\omega$, so wird an Stelle von 8)

$$t = \int_0^{2\pi} \frac{d\,\varphi}{\omega_m + \varDelta\,\omega} \approx \frac{1}{\omega_m} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{\varDelta\,\omega}{\omega_m}\right) d\,\varphi = \frac{2\,\pi}{\omega_m} - \frac{1}{\omega_m^2} \int_0^{2\pi} \varDelta\,\omega\,d\,\varphi\,, \quad 8\,\mathrm{a})$$

worin das letzte Glied der rechten Seite verschwindet, da das erste schon mit t übereinstimmt. Danach dürfen wir mit hinreichender Genauigkeit die mittlere Höhe der in Abb. 256 dargestellten Drehkurve in ihrer Abhängigkeit vom Kurbelwinkel als mittleren Drehwert ansehen und erhalten daraus auch sogleich das Verhältnis von $\omega_m : \omega_0$. Dieses wird allerdings von der Einheit nur so wenig abweichen, daß die Ungleichförmigkeit 7a) durch Vertauschen von ω_0 mit ω_m keine praktisch in Frage kommende Änderung erfährt.

Nachdem die Bewegung im Kurbeltriebe klargestellt ist, haben wir noch die Wirkung derselben auf das Gestell, mit dem die Leitkurven fest verbunden sind, zu ermitteln. Hierzu erinnern wir uns, daß nach § 45, 3. Beispiel der statischen Kolbenkraft P am Kurbelzapfen ein Drehmoment

$$M = Pr\frac{\sin(\varphi + \psi)}{\cos\psi} = Pr\sin\varphi\left(1 + \frac{r}{l}\cos\varphi\right) \quad . \; . \; . \quad 9)$$

das Gleichgewicht hält. Während der Bewegung tritt zu P noch der Massendruck der lediglich hin- und hergehenden Teile m_1, der damit auch auf den Kurbelzapfen übertragen, dort mit demjenigen der Schubstange vereinigt schließlich vom Wellenlager aufgenommen wird. Bezeichnen wir also mit s_0 den Schwerpunktsabstand aller mit der Kurbel drehbaren Massen m_0 vom Wellenmittel, mit

$$\left.\begin{aligned} x'' &= r\cos\varphi, \qquad y'' = r\sin\varphi \\ \ddot{x}'' &= -r\ddot{\varphi}\sin\varphi - r\dot{\varphi}^2\cos\varphi \\ \ddot{y}'' &= r\ddot{\varphi}\cos\varphi - r\dot{\varphi}^2\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 10)$$

die darauf bezogenen Achsenabstände, so sind die Massendruckanteile des ganzen Getriebes und ihr Moment inbezug auf das Wellenmittel

$$\left.\begin{aligned} X &= \Sigma m\ddot{x} = \left(m_1 + m\frac{l-s}{l}\right)\ddot{x}' + \left(m_0\frac{s_0}{r} + m\frac{s}{l}\right)\ddot{x}'' \\ Y &= \Sigma m\ddot{y} = \left(m_0\frac{s_0}{r} + m\frac{s}{l}\right)\ddot{y}'' \\ M'' &= \Sigma m(\ddot{y}x - \ddot{x}y) = m\frac{s}{l}(\ddot{y}''x'' - \ddot{x}''y'') + (k^2 - sl)m\ddot{\psi} + m_0k_0^2\ddot{\varphi}. \end{aligned}\right\} 11)$$

Ist das Schwungmoment $m_0 k_0^2$ groß, so sind die Schwankungen von $\dot{\varphi} = \omega$ nach den vorstehenden Ausführungen so klein, daß wir mit Ausnahme der letzten Gleichung überall unbedenklich den Drehanlauf $\ddot{\varphi}$ und noch vielmehr $\ddot{\psi}$ vernachlässigen, also nach 1b) und 10)

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}' &= -r\omega^2\left(\cos\varphi + \frac{r}{l}\cos 2\varphi\right) \\ \ddot{x}'' &= -r\omega^2\cos\varphi, \qquad \ddot{y}'' = -r\omega^2\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; 10\text{a})$$

setzen dürfen. Wir erhalten so für die Massendrücke und ihr Moment

$$\left.\begin{aligned} X &= -r\omega^2\left[\left(m_0\frac{s_0}{r}+m+m_1\right)\cos\varphi+\frac{r}{l}\left(m_1+m\frac{l-s}{l}\right)\cos 2\varphi\right] \\ Y &= -r\omega^2\left(m_0\frac{s_0}{r}+m\frac{s}{l}\right)\sin\varphi \\ M'' &= \frac{d\omega}{dt}\left(m_0 k_0^2+m\frac{s}{l}r^2\right). \end{aligned}\right\} \quad 11\,\mathrm{a})$$

Zu dem Moment tritt dann noch dasjenige des Auflagerdruckes am Kreuzkopf durch die Zerlegung der Kolbenkraft in die Schubstangenrichtung und senkrecht zur Gleitbahn, Abb. 257, nämlich mit

$$x' P \operatorname{tg}\psi \approx P x' \sin\psi = P x' \frac{r}{l}\sin\varphi \approx P r \sin\varphi\left(1+\frac{r}{l}\cos\varphi\right),$$

welches ersichtlich mit 9) übereinstimmt und von diesem ausgeglichen wird, während die in die x-Richtung fallende Kolbenkraft P selbst auf dem mit dem Gestell fest verbundenen Zylinderdeckel aufgenommen und somit als verlorene Kraft nach außen unwirksam wird. Dagegen ist für die Gesamtwirkung des bewegten Getriebes auf das Gestell noch die Gewichtswirkung zu berücksichtigen. Diese belastet zunächst bei einem Neigungswinkel α der Gleitbahn das Wellenlager mit den beständigen Anteilen $g(m_0+m+m_1)\sin\alpha$ und $g(m_0+m+m_1)\cos\alpha$ in den Achsenrichtungen und ergibt mit den Schwerpunktsabständen s_1 der hin- und hergehenden Masse vom Kreuzkopf und s_0 der rotierenden Masse m_0 vom Wellenmittel in bezug auf letzteres ein Moment

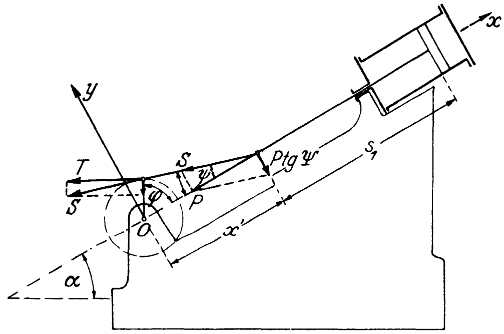

Abb. 257.

$$M' = \left(m_0 s_0 + m\frac{s}{l}r\right) g\cos(\varphi+\alpha) + \left(m\frac{l-s}{l}+m_1\right) g(x'+s_1)\cos\alpha, \quad 12)$$

worin wegen der Kleinheit des zweiten Gliedes und des Winkels ψ hinreichend genau

$$x' = r\cos\varphi + l \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 1\,\mathrm{c})$$

gesetzt werden darf. Danach setzt sich das Gewichtsmoment aus einem beständigen Teile und einem mit dem einfachen Kurbelwinkel periodisch veränderlichen zusammen und ist auch so in das Schaubild 255 der Drehmomente eingetragen. Somit bleibt für den veränderlichen Anteil des Momentes an der Welle nur den Betrag

$$M' + M'' = \left(m_0 s_0 + m\frac{s}{l}r\right) g\cos(\varphi+\alpha) + \left(m\frac{l-s}{l} + m_1\right) g r\cos\varphi\cos\alpha$$
$$+ \left(m_0 k_0^2 + m\frac{s}{l}r^2\right)\frac{d\omega}{dt} \quad \ldots \ldots \quad 13)$$

übrig, in dem noch

$$\frac{d\omega}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{1}{2}\frac{d(\omega^2)}{d\varphi} \quad \ldots \ldots \quad 14)$$

vermittels der Arbeitsgleichung 5b) dem Schaubilde der Drehkräfte entnommen werden kann.

Greifen an derselben Kurbel mehrere in derselben Ebene arbeitende Getriebe an, deren Gleitbahnen, wie bei neuzeitlichen Flugzeugmotoren sternförmig um das Wellenmittel angeordnet sind, so ergeben sich die Massenkräfte und das Massendruckmoment aus der Summierung der obigen Formeln mit verschiedenen Neigungswinkeln α. Ändert bei der Bewegung der Gesamtschwerpunkt seine Lage nicht, so ist die ganze Getriebegruppe in jeder Stellung im Gleichgewicht, womit auch die Veränderlichkeit der Gewichtswirkung wegfällt. Da alsdann aber auch

$$\Sigma m\ddot{x} = \ddot{x}\Sigma m = 0, \qquad \Sigma m\ddot{y} = \ddot{y}\Sigma m = 0$$

wird, so verschwinden in diesem Falle auch die Massendrücke und deren Moment bis auf den von der Ungleichförmigkeit der Drehung herrührenden Betrag, so daß also der Ausgleich der Gewichtswirkung den der Massendrucke einer Getriebegruppe nach sich zieht. Näheres hierüber kann in meiner Abhandlung: „Massenwirkungen in Getriebegruppen", Zeitschrift d. Vereins d. Ingenieure 1918, nachgelesen werden.

§ 70. Das Wälzpendel. Unter einem Wälzpendel verstehen wir eine starre Scheibe, die sich unter der Wirkung ihres Gewichtes vermittels eines mit ihr fest verbundenen Kreisbogens, dessen Mitte nicht mit ihrem Schwerpunkt zusammenfällt, an einer ruhenden Führungsbahn gleitet oder abrollt. Als Führungsbahn wählen wir ebenfalls einen Kreisbogen, der im Sonderfalle in eine geneigte oder wagerechte Gerade ausarten kann. Alsdann dürfen wir uns die Scheibe einfach durch eine kreiszylindrische Walze ersetzt denken, deren Schwerpunkt infolge ungleichförmiger Massenverteilung nicht in die geometrische Achse fällt, sondern einen festen Abstand s von derselben besitzt, Abb. 258. Da in diesem Falle die Berührungsnormale des Rollkreises stets durch den Mittelpunkt O der Führungsbahn hindurchgeht, so bietet sich dieser zwanglos als Anfang des

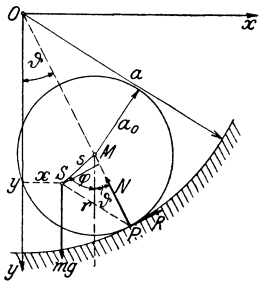

Abb. 258.

festen Achsenkreuzes dar, dessen positive y-Achse mit dem Erdanlauf g nach unten gerichtet sein mag. Ist dann a der Bahnhalbmesser, a_0 der des Rollkreises, so sind mit den Neigungswinkeln ϑ und φ der Berührungsnormale und der Schwerachse s gegen die Lotrechte die Achsenabstände des Schwerpunktes

$$\left.\begin{aligned} & x = (a - a_0)\sin\vartheta - s\sin\varphi, \qquad y = (a - a_0)\cos\vartheta + s\cos\varphi \\ & dx = (a - a_0)\cos\vartheta\, d\vartheta - s\cos\varphi\, d\varphi, \\ & dy = -(a - a_0)\sin\vartheta\, d\vartheta - s\sin\varphi\, d\varphi \end{aligned}\right\} . \quad 1)$$

Bezeichnen wir ferner den Bahndruck mit N und die Tangentialkraft, welche infolge der Rauhigkeit des Scheibenrandes und der Führungsbahn das Gleiten verhindert, mit R, so lauten die Bewegungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} & R\cos\vartheta - N\sin\vartheta = m\ddot{x}, \qquad mg - R\sin\vartheta - N\cos\vartheta = m\ddot{y} \\ & - R\left(a_0 - s\cos(\varphi + \vartheta)\right) - Ns\sin(\varphi + \vartheta) = mk_0^2\ddot{\varphi} \end{aligned}\right\} . \quad 2)$$

Erweitern wir sie mit dx, dy, $d\varphi$ und addieren, so folgt als **Arbeitsgleichung** nach einigen Kürzungen

$$mg\, dy + R\left((a - a_0)\, d\vartheta - a_0\, d\varphi\right) = m(\dot{x}\, d\dot{x} + \dot{y}\, d\dot{y} + k_0^2\, \dot{\varphi}\, d\dot{\varphi}).$$

Hierin verschwindet das zweite Glied links im Falle des **reinen Rollens** wegen der Übereinstimmung der Elemente der Führungsbahn und des Rollkreises, d. h.

$$a_0(d\varphi + d\vartheta) = a\, d\vartheta \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

und bei vollkommen glattem Scheibenrand und ebensolcher Führungsbahn, also beim reibungsfreien **Gleiten** wegen $R = 0$, so daß wir in beiden Fällen

$$g\, dy = \dot{x}\, d\dot{x} + \dot{y}\, d\dot{y} + k_0^2\dot{\varphi}\, d\dot{\varphi} \quad \ldots\ldots \quad 4)$$

erhalten. Natürlich vereinfachen sich für den Fall des **reinen Gleitens** die Bewegungsformeln durch Wegfall von R in

$$\left.\begin{aligned} & -N\sin\vartheta = m\ddot{x}, \qquad mg - N\cos\vartheta = m\ddot{y} \\ & -Ns\sin(\varphi + \vartheta) = mk_0^2\ddot{\varphi} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 5)$$

Wenn auch die beiden Bewegungsarten der Walze auf dieselbe Arbeitsformel führen, so besteht doch zwischen ihnen ein ganz wesentlicher Unterschied. Denn im Falle des reinen Rollens lassen sich alle Lagengrößen x, y, φ durch die Gleichungen 1) und 3) in der Neigung ϑ ausdrücken, so daß, wie schon im § 61 allgemein bemerkt wurde, die **reine Rollbewegung einer Scheibe nur einen Freiheitsgrad** besitzt und darum durch die Arbeitsgleichung unter Ausschaltung von N und R allein völlig gegeben ist. Dagegen gilt die Beziehung 3) nicht mehr für das Gleiten der Walze, und in der Tat bleiben nach Ausschalten von N, x, y aus 1) und 5) noch zwei Formeln übrig zur Berechnung der beiden Winkel φ und ϑ, so daß also die Gleitbewegung zwei Freiheitsgrade aufweist und demnach trotz des einfacheren Baues der Bewegungsgleichungen 5) gegen 2) viel weniger übersichtlich verläuft.

Bevor wir die Einzelfälle betrachten, wollen wir noch die Arbeitsgleichung dadurch umformen, daß wir mit 1) für das Quadrat des Schwerpunktslaufes

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (a - a_0)^2 \dot{\vartheta}^2 + s^2 \dot{\varphi}^2 - 2(a - a_0) s \cos(\varphi + \vartheta) \dot{\varphi} \dot{\vartheta} \quad 1\text{a)}$$

einführen, womit wir durch Integration von 4) mit einem Festwert C

$$2gy + C = (a - a_0)^2 \dot{\vartheta}^2 + (k_0{}^2 + s^2) \dot{\varphi}^2 - 2(a - a_0) s \dot{\varphi} \dot{\vartheta} \cos(\varphi + \vartheta) \quad 4\text{a)}$$

erhalten, worin noch y durch 1) ausgedrückt werden kann. Hierzu tritt im Falle des Rollens Gl. 3) zum Zwecke des Ersatzes von ϑ durch φ und im Falle des Gleitens die aus den ersten beiden Formeln 5) folgende Gleichung

$$g \sin\vartheta = \ddot{y} \sin\vartheta - \ddot{x} \cos\vartheta,$$

oder, da nach 1)

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= (a - a_0) \ddot{\vartheta} \cos\vartheta - (a - a_0) \dot{\vartheta}^2 \sin\vartheta - s\ddot{\varphi} \cos\varphi + s\dot{\varphi}^2 \sin\varphi \\ \ddot{y} &= -(a - a_0) \ddot{\vartheta} \sin\vartheta - (a - a_0) \dot{\vartheta}^2 \cos\vartheta - s\ddot{\varphi} \sin\varphi - s\dot{\varphi}^2 \cos\varphi \end{aligned}\right\} \quad 1\text{b)}$$

ist, unter Hinzufügung des Ergebnisses der Ableitung der Arbeitsgleichung 4a)

$$\left.\begin{aligned} g \sin\vartheta + (a - a_0) \ddot{\vartheta} &= s[\ddot{\varphi} \cos(\varphi + \vartheta) - \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi + \vartheta)] \\ gs \sin\varphi + (k_0{}^2 + s^2) \ddot{\varphi} &= s[\ddot{\vartheta} \cos(\varphi + \vartheta) - \dot{\vartheta}^2 \sin(\varphi + \vartheta)](a - a_0) \end{aligned}\right\} \quad 5\text{a)}$$

eine Formel, welche offenbar den Schwingungsgleichungen des Doppelpendels entspricht und auf eine gekoppelte Schwingung der Ausschläge ϑ und φ hindeutet.

1. Beispiel. Wir betrachten zunächst das reine Wälzpendel, dessen Umfangspunkte Hypozykloiden beschreiben, während beliebige andere Punkte sich auf den zugehörigen Trochoiden bewegen, und erhalten aus 4a) mit 1) und 3)

$$2g[(a - a_0) \cos\vartheta + s \cos\varphi] + C = [k_0{}^2 + a_0{}^2 + s^2 - 2sa_0 \cos(\varphi + \vartheta)] \dot{\varphi}^2. \quad 6)$$

Darin ist aber unter Einführung von $SP = r$

$$a^2_0 + s^2 - 2sa_0 \cos(\varphi + \vartheta) = r^2, \quad \ldots\ldots\ldots \; 7)$$

also

$$2g[(a - a_0) \cos\vartheta + s \cos\varphi] + C = (k_0{}^2 + r^2) \dot{\varphi}^2, \quad \ldots\ldots \; 7\text{a)}$$

oder nach Vergleich mit 4)

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = r^2 \dot{\varphi}^2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \; 7\text{b)}$$

so daß also die augenblickliche Schwerpunktsbewegung als Drehung um den Berührungspunkt P im Einklang mit den Ergebnissen des § 1 über die Rollbewegung überhaupt aufzufassen ist.

Setzen wir nun fest, daß bei der Berührung der Walze im tiefsten Punkte auch der Schwerpunkt seine tiefste Lage erreicht, d. h. daß ϑ und φ gleichzeitig verschwinden, so ist nach 3)

$$(a - a_0) \vartheta = a_0 \varphi, \quad a_0(\varphi + \vartheta) = a\vartheta, \quad \ldots\ldots\ldots \; 3\text{a)}$$

und es wird aus 6)

$$2g\left[(a-a_0)\cos\left(\frac{a_0\varphi}{a-a_0}\right)+s\cos\varphi\right]+C$$

$$=\left[k_0^2+a_0^2+s^2-2sa_0\cos\left(\frac{a\varphi}{a-a_0}\right)\right]\dot{\varphi}^2, \quad \ldots \quad 6\mathrm{a})$$

worin der Festwert C sich aus der oberen Ruhelage φ_0 mit $\dot{\varphi}=0$ ergibt, die dem Auflegen der Walze auf die Unterlage entspricht. Damit ermöglicht 6a) die Berechnung des Drehwertes $\dot{\varphi}$ für jede andere Lage des Wälzpendels. Da Gl. 6a) nur $\cos\varphi$, $\cos\left(\frac{a_0\varphi}{a-a_0}\right)$, $\cos\left(\frac{a\varphi}{a-a_0}\right)$ enthält, die für positive und negative φ dasselbe Vorzeichen besitzen, so vollzieht die Walze eine um die Lotrechte durch O symmetrische Schwingung, deren Dauer sich allerdings aus 6a) nicht in geschlossener Form berechnen läßt.

Beschränken wir uns dagegen auf kleine Auslenkungen aus der tiefsten Lage, so folgt mit

$$\cos\varphi\approx 1-\frac{\varphi^2}{2}, \quad \cos\frac{a_0\varphi}{a-a_0}\approx 1-\frac{a_0^2\varphi^2}{2(a-a_0)^2},$$

sowie mit $\varphi=\varphi_0$ für $\dot{\varphi}=0$ unter Vernachlässigung des Produktes $\varphi^2\dot{\varphi}^2$

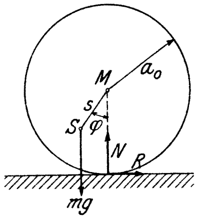

Abb. 259.

$$g\left(\frac{a_0^2}{a-a_0}+s\right)(\varphi_0^2-\varphi^2)=[k_0^2+(a_0-s)^2]\dot{\varphi}^2, \quad \ldots \quad 7)$$

also mit der Abkürzung

$$\frac{k_0^2+(a_0-s)^2}{\dfrac{a_0^2}{a-a_0}+s}=l \quad \ldots \ldots \ldots \quad 8)$$

$$g(\varphi_0^2-\varphi^2)=l\dot{\varphi}^2, \quad \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi_0^2-\varphi^2}}=dt\sqrt{\frac{g}{l}}=\alpha\,dt. \quad 7\mathrm{a})$$

Das ist aber die Differentialgleichung einer einfachen Pendelschwingung mit der Dauer t_0:

$$\varphi=\varphi_0\sin(\alpha t+\beta), \quad t_0=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 7\mathrm{b})$$

so daß die oben eingeführte Abkürzung l die dem Wälzpendel zugeordnete Pendellänge bedeutet.

Rollt die Walze auf einer wagerechten Unterlage, Abb. 259, so ist $a=\infty$, $\vartheta=0$, und es wird aus 6a) mit $\varphi=\varphi_0$ für $\dot{\varphi}=0$

$$2gs(\cos\varphi-\cos\varphi_0)=(k_0^2+a_0^2+s^2-2sa_0\cos\varphi)\dot{\varphi}^2, \quad \ldots \quad 9)$$

woraus für kleine Ausschläge nach Vernachlässigung von $\varphi^2\dot{\varphi}^2$, sowie mit

$$k_0^2+(a_0-s)^2=l_0 s \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 8\mathrm{a})$$

wieder 7a) bzw. 7b) hervorgeht. Da ersichtlich nach 8)

$$l_0 s=ls+l\frac{a_0^2}{a-a_0}>ls \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 8\mathrm{b})$$

ist, so schwingt das Wälzpendel auf der Ebene langsamer als in einem Kreisbogen.

Weiter erkennt man, daß kleine Schwingungen um die Lage $\varphi=0$ nur so lange möglich sind, als $l>0$ ist. Dies trifft für das Wälzpendel im Kreisbogen zu, solange

$$a_0^2+(a-a_0)s>0, \quad \text{oder} \quad a_0^2>(a_0-a)s \quad \ldots \ldots \quad 8\mathrm{c})$$

ist. Es kann demnach auch s negativ sein, d. h. der Schwerpunkt darf bis zur Grenze $a_0{}^2 = (a_0 - a)s$ über der Rollkreismitte M liegen, darüber hinaus wird allerdings an Stelle von 7a) mit $g = -\alpha^2 l$

$$\dot\varphi^2 = \alpha^2(\varphi^2 - \varphi_0^2), \quad \varphi = \varphi_1 e^{\alpha t} + \varphi_2 e^{-\alpha t}, \quad . \; 7\text{c})$$

wobei $4\varphi_1\varphi_2 = \varphi_0{}^2$ ist. Wir erhalten also eine asymptotische Bewegung, die sofort zum Umkippen des Wälzpendels in die stabile Lage führt, um die es dann wieder Schwingung vollziehen kann.

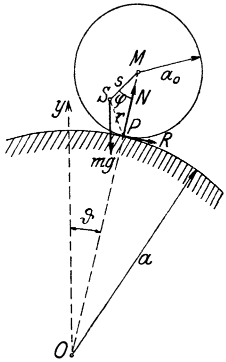

Abb. 260.

Der stabile Schwingungszustand der Walze bleibt auch noch erhalten, wenn dieselbe nicht auf der Innenseite, sondern mit umgekehrten Vorzeichen von a nach Abb. 260 auf der Außenseite einer festen Kreisbahn rollt, wobei die Umfangspunkte des Rollkreises Epizykloiden, andere Punkte dagegen Epitrochoiden beschreiben, solange in 7) und 8)

$$s > \frac{a_0^2}{a + a_0}, \quad l = \frac{k_0^2 + (a_0 - s)^2}{s - \dfrac{a_0^2}{a + a_0}} > 0 \quad . \; . \; . \; 8\text{d})$$

bleibt.

Ersetzen wir die Walze durch einen Stab, dessen Schwerpunkt um s_0 über dem Berührungspunkt mit dem festen Führungskreis in der Ruhelage liegt, so geht der Rollkreis mit $a_0 = \infty$ in eine Gerade über und wir haben für diese sog. Wippe, Abb. 261, nach 8d) und 8)

$$a_0 - s = s_0, \quad l = \left(\frac{k_0^2 + s_0^2}{a_0 - s_0 - \dfrac{a_0^2}{a + a_0}}\right)_{a_0 = \infty} = \frac{k_0^2 + s_0^2}{a - s_0} \quad . \; . \; . \; 8\text{e})$$

Damit die Gl. 7) hiermit auf stabile Schwingungen führt, muß nur $s_0 < a$, d. h. die Stabdicke kleiner als der Wälzdurchmesser sein.

Schließlich kann außer a auch noch a_0 negativ werden, woraus ein Wälzen des Rollkreises auf einem von ihm umfaßten Zapfen, Abb. 262, also eine sog. Wiege entsteht. Für diese ist alsdann

$$l = \frac{k_0^2 + (a_0 + s)^2}{s + \dfrac{a_0^2}{a_0 - a}} > 0 \text{ für } a_0 > a$$

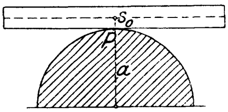

Abb. 261.

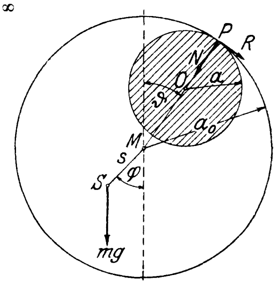

Abb. 262.

zu setzen, womit sich unabhängig von der Lage des Schwerpunktes des Wälzpendels stets stabile Schwingungen nach Gl. 7b) ergeben. Im Sonderfalle eines dünnen Kreisringes vom Halbmesser a_0, der auf dem Zapfen mit dem Halbmesser a wälzt, ist alsdann mit $s = 0$, $k_0 = a_0$

$$l = 2(a_0 - a).$$

2. Beispiel. Nachdem wir schon oben die Übereinstimmung der Differentialgleichungen 5a) des Gleitens einer Walze auf einer vollkommen glatten Kreisbahn mit den Bewegungsgleichungen des Doppelpendels erkannt haben, so brauchen wir uns mit den daraus hervorgehenden gekoppelten Schwingungen der Walzenmitte und des Schwerpunktsstrahls s um diese, welche durch die beiden Winkel φ und ϑ (entspr. φ_1 und φ_2 in § 65) gegeben sind, nicht mehr zu befassen. Dagegen sei hier noch der Sonderfall der Walze auf einer wagerechten ebenen Unterlage, Abb. 259, (mit $R = 0$), kurz behandelt, für den sich aus 5) mit $\vartheta = 0$

$$mg - N = m\ddot y, \quad -Ns \sin\varphi = mk_0^2\ddot\varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 10)$$

ergibt. Daraus folgt zunächst, daß der Schwerpunkt S keinem wagerechten Anlauf unterliegt, also in dieser Richtung nur gleichförmig mit $\dot{x} = c$ fortschreiten kann, bzw. wenn $c = 0$ ist, nur lotrecht auf- und absteigt, während die Rollkreismitte wagerecht hin- und herschwankt. Da beide Punkte den festen Abstand s besitzen, so haben wir es mit der durch Abb. 6, § 1 gekennzeichneten Hypozykloidenbewegung eines Rollkreises vom Durchmesser s und einem solchen vom doppelten Durchmesser zu tun, wobei die Enden von s auf dem Achsenkreuz durch die Mitte des festen Kreises hingleiten.

Schalten wir nun in 10) den Bahndruck N aus und ersetzen noch nach 1b) mit $\vartheta = 0$

$$\ddot{y} = -s(\ddot{\varphi} \sin\varphi + \dot{\varphi}^2 \cos\varphi),$$

so bleibt

$$(k_0^2 + s^2 \sin^2\varphi)\ddot{\varphi} + gs\sin\varphi + s^2\dot{\varphi}^2 \sin\varphi\cos\varphi = 0 \quad \ldots\ldots \quad 10\text{a})$$

Zu demselben Ergebnis wären wir auch gelangt, wenn wir in Gl. 5a) mit $\vartheta = 0$, $\dot{\vartheta} = 0$; $\ddot{\vartheta} = 0$, $a = \infty$ den wagerechten Lauf der Walzmitte $a\dot{\vartheta} = \dot{x}'$ setzen, so daß

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}' &= s(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi) \\ gs\sin\varphi + (k_0^2 + s^2)\ddot{\varphi} &= s\ddot{x}'\cos\varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 11)$$

übrig bleibt. Hieraus erhellt, daß die Bewegung zwei Freiheitsgrade x' und φ besitzt, und daß wir nach Ausschalten von $\ddot{x}'$ wieder Gl. 10a) erhalten. Durch Erweiterung von 10a) mit $d\varphi$ und Integration ergibt sich daraus die Arbeitsgleichung

$$C - 2gs\cos\varphi + (k_0^2 + s^2\sin^2\varphi)\dot{\varphi}^2 = 0, \quad \ldots\ldots \quad 10\text{b})$$

die wir auch unmittelbar mit den genannten Annahmen für ϑ und a aus 4a) hätten ableiten können. Hierin bestimmt sich der Festwert C durch den zu einer bestimmten Lage φ_0 gehörigen Drehwert $\dot{\varphi}_0$, so daß man, wenn für $\varphi_0 = \pi$, $\dot{\varphi}_0^2 = 0$ gesetzt wird, eine dauernde Kreisbewegung von S um den hin- und hergehenden Mittelpunkt M erhält, die ganz dem vollen Umlauf eines gewöhnlichen Pendels entspricht und naturgemäß mit stark veränderlichem Drehwert $\dot{\varphi}$ verläuft.

Betrachten wir dagegen Schwingungen um die untere Ruhelage, setzen also $\dot{\varphi} = 0$ für $\varphi = \varphi_0$, so wird aus 10b)

$$(k_0^2 + s^2\sin^2\varphi)\dot{\varphi}^2 = 2gs(\cos\varphi - \cos\varphi_0) \quad \ldots\ldots \quad 10\text{c})$$

und bei Beschränkung auf kleine Ausschläge

$$(k_0^2 + s^2\varphi^2)\dot{\varphi}^2 = gs(\varphi_0^2 - \varphi^2). \quad \ldots\ldots\ldots \quad 12)$$

Beachten wir, daß $s\varphi$ jedenfalls klein gegen k_0^2 ist, so dürfen wir dafür angenähert schreiben:

$$\left(1 + \frac{s^2}{2k_0^2}\varphi^2\right)\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{gs}{k_0^2}}\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 12\text{a})$$

oder

$$dt\sqrt{\frac{gs}{k_0^2}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}} + \frac{s^2}{2k_0^2}\frac{\varphi^2\, d\varphi}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}}. \quad \ldots\ldots \quad 12\text{b})$$

Setzen wir darin $\varphi = \varphi_0 \sin\psi$, $d\varphi = \varphi_0\cos\psi\, d\psi$ mit den zusammengehörigen Grenzwerten $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\varphi = \varphi_0$, $\psi = \frac{\pi}{2}$, so wird daraus:

$$dt = d\psi + \frac{s^2}{2k_0^2}\varphi_0^2\sin^2\psi\, d\psi = d\psi\left[1 + \frac{s^2}{4k_0^2}\varphi_0^2 - \frac{s^2}{4k_0^2}\varphi_0^2\cos 2\psi\right] \quad 12\text{c})$$

und ergibt, integriert mit der unteren Grenze $t=0$, $\psi=0$:

$$t\sqrt{\frac{g s}{k_0^2}}=\psi\left(1+\frac{s^2}{4 k_0^2}\varphi_0^2\right)-\frac{s^2}{8 k_0^2}\varphi_0^2 \sin 2\psi, \quad \ldots \quad 13)$$

oder

$$t\sqrt{\frac{g s}{k_0^2}}=\left(1+\frac{s^2}{4 k_0^2}\varphi_0^2\right)\arcsin\frac{\varphi}{\varphi_0}-\frac{s^2}{8 k_0^2}\varphi_0^2 \sin\left(2\arcsin\frac{\varphi}{\varphi_0}\right). \quad . \quad 13a)$$

Für $\varphi=\varphi_0$ und $\psi=\frac{\pi}{2}$ wird daraus der vierte Teil der ganzen Schwingungsdauer t_0, also

$$t_0=2\pi\sqrt{\frac{k_0^2}{g s}}\left(1+\frac{s^2}{4 k_0^2}\varphi_0^2\right), \quad \ldots \quad 14)$$

in naher Übereinstimmung mit einem Pendel von der Länge $l=\frac{k_0^2}{s}$. Beziehen wir die Achsenabstände y des Schwerpunktes S und x des Mittelpunktes M des Rollkreises auf die Mittellage des ersteren, so ist

$$y=s\cos\varphi, \quad x=s\sin\varphi \quad \ldots \quad 15)$$

oder angenähert

$$\left.\begin{aligned} y&=s\sqrt{1-\sin^2\varphi}\approx s\sqrt{1-\varphi^2}\approx s\left(1-\frac{\varphi^2}{2}\right)=s\left(1-\frac{\varphi_0^2}{2}\sin^2\psi\right)\\ x&=s\sin\varphi\approx s\varphi=s\varphi_0\sin\psi,\end{aligned}\right\} \quad 15a)$$

womit auch deren Abhängigkeit von der Zeit unter Hinzunahme von 13) gegeben ist.

3. Beispiel. Das Wälzpendel befindet sich im Gleichgewicht, wenn nach Gl. 2) mit $\ddot{x}=0$, $\ddot{y}=0$, $\ddot{\varphi}=0$

$$\left.\begin{aligned} R\cos\vartheta-N\sin\vartheta=0, \quad R\sin\vartheta+N\cos\vartheta=mg\\ R\,(a_0-s\cos(\varphi+\vartheta))+Ns\sin(\varphi+\vartheta)=0\end{aligned}\right\}, \quad \ldots \quad 16)$$

oder wenn

$$R=mg\sin\vartheta, \quad N=mg\cos\vartheta, \quad a_0\sin\vartheta+s\sin\varphi=0 \quad \ldots \quad 16a)$$

ist, d. h. wenn der Schwerpunkt S lotrecht über dem Stützpunkt P auf der Führungsbahn liegt. Ist im Falle des reinen Gleitens $R=0$, so ist nach 16a) das Gleichgewicht nur möglich für $\vartheta=0$, $\varphi=0$, d. h. für die tiefste Lage des Walzenmittels mit senkrecht darunter befindlichem Schwerpunkt.

XIV. Die Scheibenbewegung mit Widerständen.

§ 71. Die Scheibe auf fester Führungsbahn. Die Bewegung einer Scheibe, die auf einer festen Führungsbahn

$$f_1(xy)=0, \quad dy=dx\,\mathrm{tg}\,\vartheta \quad \ldots \quad 1)$$

vermittels einer Randkurve

$$f_2(\xi\eta)=0, \quad d\eta=d\xi\,\mathrm{tg}(\vartheta-\varphi) \quad \ldots \quad 2)$$

rollend hingleitet, haben wir schon in § 61 an Hand der Abb. 228 kennengelernt und insbesondere festgestellt, daß sie zwei Freiheitsgrade besitzt. Mit der Außenkraft Q, deren Achsenanteile XY und deren Moment um den Scheibenschwerpunkt M_0 sein mögen, erhielten wir die Bewegungsformeln:

$$\left.\begin{aligned} X+X'=m\ddot{x}_0, \quad Y+Y'=m\ddot{y}_0\\ M_0+Y'(x-x_0)-X'(y-y_0)=m k_0^2\ddot{\varphi},\end{aligned}\right\}, \quad \ldots \quad 3)$$

worin $X' Y'$ die Achsenanteile des Bahndruckes an der Berührungsstelle $x\,y$ mit der Tangentenneigung ϑ sind. Zerlegen wir den Bahndruck in einen Normaldruck N und einen Tangentialdruck R, so wird

$$-X' = R\cos\vartheta - N\sin\vartheta, \qquad -Y' = R\sin\vartheta + N\cos\vartheta \,. \quad . \quad 3\text{a})$$

Erweitern wir ferner die Formeln 3) mit dx_0, dy_0, $d\varphi$ und addieren, so folgt mit $\ddot{x}_0\,dx_0 + \ddot{y}_0\,dx_0 = \dot{x}_0\,d\dot{x}_0 + \dot{y}_0\,d\dot{y}_0 = v\,dv$, $\ddot{\varphi}\,d\varphi = \dot{\varphi}\,d\dot{\varphi}$ die Arbeitsgleichung

$$\begin{gathered} X\,dx_0 + Y\,dy_0 + M_0\,d\varphi \\ + X'[dx_0 - (y - y_0)d\varphi] + Y'[dy_0 + (x - x_0)d\varphi] = m(v\,dv + k_0^2\,\dot{\varphi}\,d\dot{\varphi}) . \quad 4) \end{gathered}$$

Hierin stellen die mit $X' Y'$ behafteten Klammerausdrücke

$$dx_0 - (y - y_0)\,d\varphi = dx', \qquad dy_0 + (x - x_0)\,d\varphi = dy' \quad . \quad . \quad 5)$$

elementare Verschiebungen des Berührungspunktes dar, die sich aus denen des Schwerpunktes $dx_0\,dy_0$ und den Drehungen $-(y - y_0)\,d\varphi$, $(x - x_0)\,d\varphi$ um denselben ergeben. Andererseits gilt für den Berührungspunkt, in dem mit der Scheibe fest verbundenen Schwerpunktsachsenkreuz

$$x - x_0 = \xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi, \qquad y - y_0 = \xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi, \quad . \quad 6)$$

also

$$\left.\begin{aligned} d(x - x_0) &= d\xi\cos\varphi - d\eta\sin\varphi - (y - y_0)\,d\varphi \\ d(y - y_0) &= d\xi\sin\varphi + d\eta\cos\varphi + (x - x_0)\,d\varphi \end{aligned}\right\}, \quad . \quad . \quad 6\text{a})$$

oder wegen 5)

$$d(x - x') = d\xi\cos\varphi - d\eta\sin\varphi, \quad d(y - y') = d\xi\sin\varphi + d\eta\cos\varphi \quad 6\text{b})$$

und nach Erweiterung mit $\sin\vartheta$, $\cos\vartheta$ und Abzug mit Rücksicht auf 1) und 2)

$$\begin{gathered} d(y - y')\cos\vartheta - d(x - x')\sin\vartheta = d\eta\cos(\vartheta - \varphi) - d\xi\sin(\vartheta - \varphi) \\ \frac{dy'}{dx'} = \operatorname{tg}\vartheta = \frac{dy}{dx}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6\text{c}) \end{gathered}$$

so daß also die Verschiebung des Berührungspunktes

$$dy'\sin\vartheta + dx'\cos\vartheta = \sqrt{dx'^2 + dy'^2} = ds' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7)$$

längs der Führungskurve stattfindet. Damit aber, sowie mit 3a) folgt

$$\begin{aligned} & X'\,dx' + Y'\,dy' \\ & = (N\sin\vartheta - R\cos\vartheta)\,dx' - (N\cos\vartheta + R\sin\vartheta)\,dy' = -R\,ds' \end{aligned}$$

und die Arbeitsgleichung 4) vereinfacht sich in

$$X\,dx_0 + Y\,dy_0 + M_0\,d\varphi = m(v\,dv + k_0^2\,\dot{\varphi}\,d\dot{\varphi}) + R\,ds', \quad . \quad 4\text{a})$$

worin das letzte Glied rechts einen Arbeitsverlust darstellt, der nur durch eine tangentiale Widerstandskraft R und eine Verschiebung ds' des Berührungspunktes bedingt sein kann. Diese Widerstandsarbeit tritt nicht auf, wenn mit $R = 0$ der Bahndruck normal zur Bahn, wie es bei vollkommen glattem Scheibenrand und Führung in der Tat zutrifft, steht. Es verschwindet ebenfalls mit $ds' = 0$, oder wegen 7) $dx' = dy' = 0$, d. h. bei ruhendem Berührungspunkt. Damit aber ergibt sich aus 6b) durch Quadrieren und Addieren

$$dx^2 + dy^2 = d\xi^2 + d\eta^2, \quad \ldots \ldots \quad 7a)$$

was wir schon früher als Bedingung für das reine Abrollen der Scheibe auf der Führungsbahn kennengelernt haben. Dies tritt immer dann ein, wenn bei rauher Bahn und rauhem Scheibenrande mit der Reibungsziffer f

$$0 < R < fN \quad \ldots \ldots \quad 8)$$

ausfällt, da alsdann die Reibung nicht überwunden werden kann. Beim Hingleiten des Berührungspunktes aber hat stets die Tangentialkraft ihren Höchstwert

$$R = fN, \quad \text{oder} \quad X'(\cos\vartheta + f\sin\vartheta) = Y'(f\cos\vartheta - \sin\vartheta), \quad . \quad 8a)$$

womit zugleich eine Bedingungsgleichung gegeben ist, die zu den Bewegungsformeln 3) hinzutritt. Diese genügen alsdann im Verein mit 1), 2), 6a) und 8) gerade zur Bestimmung der Unbekannten X', Y', x_0, y_0, x, y, φ, wonach sich der Gleitweg aus 7) ergibt.

1. Beispiel. Die vorstehenden Betrachtungen gelten auch für den Fall einer Kreisscheibe mit dem Halbmesser r, die ohne Ortsveränderung des Schwerpunktes, der in ihrer Achse liegen mag, sich lediglich dreht, wobei nach Abb. 263 der Gleitweg $ds = r\,d\varphi$ ist. Alsdann haben wir mit

$$x - x_0 = r\sin\vartheta, \qquad y - y_0 = -r\cos\vartheta$$

aus 3)

$$\left.\begin{array}{l} X + X' = 0, \qquad Y + Y' = 0 \\ M_0 + (X'\cos\vartheta + Y'\sin\vartheta)\,r = m k_0^2 \ddot\varphi \end{array}\right\} \ldots \ldots \quad 9)$$

und wegen 8a)

$$R = -(X'\cos\vartheta + Y'\sin\vartheta) = fN, \quad \ldots \ldots \quad 10)$$

also

$$M_0 = Rr + mk_0^2\ddot\varphi = fNr + mk_0^2\ddot\varphi. \quad \ldots \ldots \quad 9a)$$

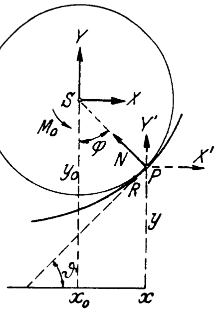

Abb. 263.

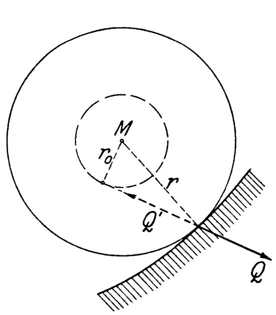

Abb. 264.

Daraus folgt der Gleichgewichtszustand, bei dem die Scheibe sich ohne Ortsveränderung gleichförmig dreht, mit $\ddot\varphi = 0$ für $M_0 = Rr$, wobei die Gesamtkraft Q aus XY und M_0 durch den Berührungspunkt P der Scheibe mit der Führungsbahn hindurchgeht und dort vom Bahndruck Q' aufgehoben wird, Abb. 264. Mit dem Hebelarm r_0 von Q in bezug auf die Scheibenmitte ist alsdann

$$M_0 = Qr_0 = Q \cdot r f_0 = Rr, \quad \ldots \ldots \quad 9b)$$

oder wegen 8a) und $Q^2 = R^2 + N^2 = N^2(1 + f^2)$

$$\frac{r_0}{r} = \frac{f}{\sqrt{1+f^2}} = f_0 < f \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 9c)$$

Die auf einer Führungsbahn sich drehende Scheibe, z. B. ein Zapfen in einem Lager, befindet sich also im Gleichgewicht, wenn die an der Scheibe wirksame äußere Gesamtkraft Q den Kreis mit dem Halbmesser $r_0 < r$ den sog. Reibungskreis gerade berührt. Andernfalls nimmt der Drehwert ab oder zu, wenn die Kraftrichtung den Reibungskreis schneidet oder an ihm vorbeigeht. Dies trifft auch für die Drehung eines Zapfens in einem (nicht geschmierten) Lager von größerem Schalendurchmesser zu, wobei f_0 gewöhnlich als Zapfenreibungsziffer bezeichnet wird.

Wird umgekehrt auf die um ihre Mitte drehbare Kreisscheibe durch einen andern Körper ein Druck Q' ausgeübt, so nimmt die Scheibe eine verzögerte oder beschleunigte Drehung an, wenn Q' ihren Reibungskreis schneidet oder nicht, woraus dann für die anfänglich ruhende Scheibe im ersten Fall eine Selbstsperrung hervorgeht. Daher ist es im allgemeinen nicht möglich, durch ein sog. Exzenter, d. h. einen die ganze Welle umfassenden Kurbelzapfen, dessen Kurbelarm meist kleiner ist, als der mit dem Zapfenradius wachsende Halbmesser des Reibungskreises, die Welle anzutreiben, während der umgekehrte Antrieb durch ein Drehmoment an der Welle stets durchführbar ist. Hieraus erklärt sich auch die Notwendigkeit, die Kurbel einer Kolbenmaschine zum Anlaufen so weit aus dem Totpunkte herauszudrehen, bis die Richtung der Schubstangenkraft nicht mehr den Reibungskreis des Wellenlagers schneidet.

Durch Messung der Umfangskraft R einer sich gleichförmig drehenden Scheibe ergibt sich bei bekanntem Scheibenhalbmesser aus 9b) das Drehmoment und daraus dessen Leistung $M_0\omega$. Davon macht man Gebrauch bei dem von Prony vorgeschlagenen Bremszaum, Abb. 265, der die Bremsscheibe mit zwei durch Schrauben angezogenen Backen A und B umfaßt und mit einem Hebel von der Länge l versehen ist, der mit der Kraft P am Punkte C auf eine Wage drückt, so daß

$$M_0 = R \cdot r = P \cdot l \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 10)$$

ist. An Stelle der Bremsbacken verwendet man zum Zwecke der gleichmäßigeren Anlage an der Scheibe und der besseren Ableitung der Reibungswärme, die durch Vernichtung der Arbeit frei wird, einzelne auf einem Metallband befestigte Bremsbacken oder läßt auch ein durch eine meßbare Außenkraft gespanntes Band selbst auf der Scheibe schleifen, woraus die sog. Bandbremse hervorgeht.

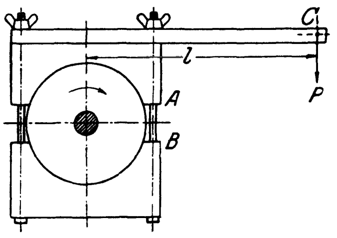

Abb. 265.

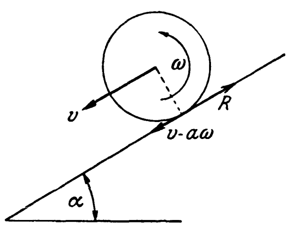

Abb. 266.

2. Beispiel. Eine Rolle vom Halbmesser a, vom Gewicht $G = mg$ und dem Schwungarm k_0 bewegt sich auf einer rauhen schiefen Ebene von der Neigung α. Dann lauten die Bewegungsgleichungen im Anschluß an Abb. 266 mit dem Abwärtslauf v des Schwerpunktes und dem gleichsinnigen Drehwert ω

$$mg \sin\alpha - R = m\dot{v}, \quad N = mg\cos\alpha, \quad Ra = mk_0^2\dot{\omega} \quad \ldots \ldots \quad 12)$$

Für das Vorzeichen von R ist die Bewegungsrichtung des Berührungspunktes P maßgebend, die ihrerseits durch den Unterschied $v - a\omega$, d. h. durch die Gleitung bestimmt ist. Für die Abwärtsbewegung von P gilt also Abb. 266

$$v > a\omega, \quad R = fN = fmg\cos\alpha \quad \ldots \ldots \ldots \quad 13)$$

und damit wird aus 12)

$$\left.\begin{aligned} g(\sin\alpha - f\cos\alpha) = \dot v, \qquad f g \frac{a^2}{k_0^2}\cos\alpha = a\dot\omega \\ g\left[\sin\alpha - f\cos\alpha\left(1+\frac{a^2}{k_0^2}\right)\right] = \dot v - a\dot\omega \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots \quad 13\text{a})$$

d. h. eine gleichförmige Zunahme des Laufes v, des Drehwertes ω und der Gleitung $v - a\omega$, so lange

$$\operatorname{tg}\alpha \geqq f\left(1+\frac{a^2}{k_0^2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 13\text{b})$$

Andererseits ist die Bedingung für reines Rollen nach 8) $R < fN$ also mit 12)

$$g\sin\alpha - \dot v < f g\cos\alpha, \qquad a\dot\omega < f g\frac{a^2}{k_0^2}\cos\alpha,$$

also addiert mit $\dot v = a\dot\omega$

$$\operatorname{tg}\alpha < f\left(1+\frac{a^2}{k_0^2}\right) = \operatorname{tg}\alpha_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 14)$$

Für diese kleine Neigung erhalten wir also aus 13a) eine Abnahme der Gleitung, die zur Zeit t_1 mit den Anfangswerten $v_0 - a\omega_0$

$$t_1 = \frac{v_0 - a\omega_0}{g\left[f\cos\alpha\left(1+\frac{a^2}{k_0^2}\right) - \sin\alpha\right]}, \quad v_1 - a\omega_1 = 0 \quad 14\text{a})$$

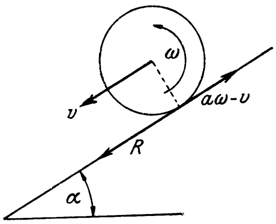

Abb. 267.

geworden ist, woraus ein ferneres reines Rollen hervorgeht. Für dieses verliert dann Gl. 13a) ihren Sinn und wir erhalten aus 12) selbst mit $v = a\omega$ nach Ausschalten von R

$$g\sin\alpha = \left(1+\frac{k_0^2}{a^2}\right)\dot v, \quad \ldots\ldots \quad 14\text{b})$$

also ein gleichförmig beschleunigtes Abwärtsrollen, in das im Falle 14) die Bewegung übergeht. Ist dagegen trotz des Abwärtsganges des Schwerpunktes infolge des Anfangszustandes der Bewegung $v_0 < a\omega_0$ bei gleichem Drehsinne der Rolle, so hat man wegen des Aufwärtslaufens des Berührungspunktes P, Abb. 267,

$$v < a\omega, \qquad R = -fN = -f m g\cos\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad 15)$$

und damit aus 12)

$$\left.\begin{aligned} g(\sin\alpha + f\cos\alpha) = \dot v, \qquad f g\frac{a^2}{k_0^2}\cos\alpha = -a\dot\omega \\ g\left[\sin\alpha + f\cos\alpha\left(1+\frac{a^2}{k_0^2}\right)\right] = \dot v - a\dot\omega \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 15\text{a})$$

Es nimmt also hierbei v zu und ω ab, bis zur Zeit

$$t_2 = \frac{a\omega_0 - v_0}{\sin\alpha + f\cos\alpha\left(1+\frac{a^2}{k_0^2}\right)}, \qquad v_2 - a\omega_2 = 0 \quad \ldots \quad 15\text{b})$$

geworden ist, wonach für $\alpha \leqq \alpha_0$, Gl. 14) reines Rollen 14b) eintritt, oder für $\alpha > \alpha_0$ mit weiter wachsendem $v - a\omega > 0$ das Vorzeichen von f wechselt und an Stelle von 15a) die Bewegung nach den Formeln 13a) weiter verläuft.

Bei umgekehrtem Drehsinn und Abwärtsbewegung der Rolle, Abb. 268, gelten ebenfalls die Formeln 13a), aus denen eine beständige Zunahme des erst negativen Drehwertes $\omega < 0$ über 0 in eine positive Drehung hervorgeht. Bei der Aufwärtsbewegung der Rolle und positivem Drehsinn müssen wir dagegen im Anschluß an Abb. 269 die Formeln 15a) anwenden, welche eine Zunnahme des erst negativen Laufes $v < 0$ über Null in den positiven Wert, d. h. ein Übergang in die Abwärtsbewegung ergeben, die dann wie oben geschildert weiter verläuft.

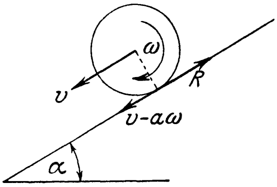

Abb. 268.

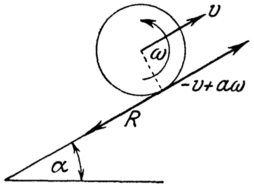

Abb. 269.

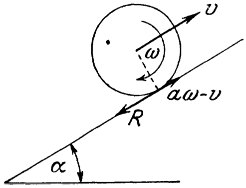

Abb. 270.

Beim Aufwärtsgang mit negativem Drehsinn, Abb. 270, gilt mit $[v] > [a\omega]$ ebenfalls Gl. 15a) und ergeben eine Zunahme des erst negativen $v < 0$ über Null bis zu positiven Werten mit gleichzeitiger Abnahme von $\omega < 0$, d. h. wieder eine Umkehr in die Abwärtsbewegung, die naturgemäß später einsetzt, wenn nach Abb. 271 schließlich $[v] < [a\omega]$ ist, wobei nach 13a) $\omega < 0$ zunimmt und nach Durchgang durch Null positiv wird, worauf dann bald die Bewegungsumkehr erfolgt.

Die Rolle wird daher aus jedem beliebi'gen Anfangszustand schließlich in eine Abwärtsbewegung mit zunehmender Gleitung oder reines Rollen übergehen, solange $\alpha \gtrless \alpha_0$ ist. Schließlich erkennt man leicht, daß die Bewegung auf wagerechter Ebene mit $\alpha = 0$ nur in reines Rollen ausartet, was sich an Billardbällen leicht bestätigen läßt.

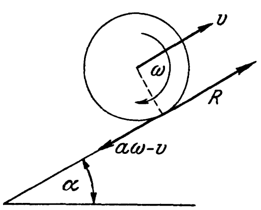

Abb. 271.

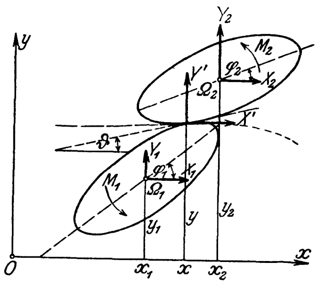

Abb. 272.

§ 72. Die Bewegung zweier sich berührender Scheiben. Die Betrachtungen des letzten Abschnittes lassen sich nun ohne weiteres auf die Bewegung zweier Scheiben ausdehnen, die dauernd miteinander in Berührung stehen, Abb. 272. Wir brauchen dazu nur auf der andern Seite der Führungsbahn

$$f(x\,y) = 0, \qquad d\,y = d\,x \operatorname{tg} \vartheta, \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

die jetzt allerdings nicht vorgelegt, sondern lediglich als geometrischer Ort der Berührungspunkte beider Scheiben in Abb. 272 gestrichelt angedeutet ist, die zweite Scheibe anzulegen. Auf diese wirkt dort der entgegengesetzte Bahndruck $-Q'$ mit seinen Achsenanteilen $-X'$, $-Y'$, während sich für die erste nichts ändert. Bezeichnen wir also die Schwerpunktsabstände der Scheiben $m_1\,m_2$ im festen Achsenkreuz mit $x_1\,y_1$, $x_2\,y_2$, ihre absoluten Drehwinkel gegen dieses mit $\varphi_1\,\varphi_2$, die Schwungarme mit $k_1\,k_2$, so lauten die Bewegungsformeln mit den Außenkräften $X_1\,Y_1$, $X_2\,Y_2$ und den zugehörigen Momenten $M_1\,M_2$ um die Schwerpunkte

$$\left.\begin{aligned} X_1 + X' &= m_1 \ddot{x}_1, \qquad Y_1 + Y' = m_1 \ddot{y}_1 \\ M_1 + Y'(x - x_1) - X'(y - y_1) &= m_1 k_1^2 \ddot{\varphi}_1 \\ X_2 - X' &= m_2 \ddot{x}_2, \qquad Y_2 - Y' = m_2 \ddot{y}_2 \\ M_2 - Y'(x - x_2) + X'(y - y_2) &= m k_2^2 \ddot{\varphi}_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 2)$$

Durch Addition je zweier Formeln für die gleiche Richtung fallen die Zwischendruckanteile $X'\,Y'$ heraus und es bleibt

$$X_1 + X_2 = m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2, \qquad Y_1 + Y_2 = m_1 \ddot{y}_1 + m_2 \ddot{y}_2, \quad .\ 2\,\mathrm{a})$$

während die Addition der Momente

$$M_1 + M_2 + Y'(x_2 - x_1) - X'(y_2 - y_1) = m_1 k_1^2 \ddot{\varphi}_1 + m_2 k_2^2 \ddot{\varphi}_2$$

ergibt. Daraus können wir aber $X'\,Y'$ mit Hilfe der Kraftgleichungen 2) ausschalten und erhalten schließlich

$$\begin{aligned} M_1 + M_2 &+ Y_1 x_1 - X_1 y_1 + Y_2 x_2 - X_2 y_2 \\ &= m_1 k_1^2 \ddot{\varphi}_1 + m_2 k_2^2 \ddot{\varphi}_2 + m_1(\ddot{y}_1 x_1 - \ddot{x}_1 y_1) + m_2(\ddot{y}_2 x_2 - \ddot{x}_2 y_2) \quad 2\,\mathrm{b}) \end{aligned}$$

als Momentenformel für die Gesamtheit beider Scheiben im Einklang mit dem Satze der verlorenen Kräfte, zu denen hier der Zwischendruck gehört.

Wichtiger für uns ist die Arbeitsgleichung, die wir durch Erweiterung der Kraftformeln 2) mit den zugehörigen Schwerpunktsverschiebungen $d x_1\,d y_1$, $d x_2\,d y_2$ und Drehungen $d\varphi_1\,d\varphi_2$, sowie Addition unter Beachtung von $\ddot{x}\,dx + \ddot{y}\,dy = v\,dv$ erhalten wie folgt

$$\begin{aligned} X_1\,d x_1 &+ Y_1\,d y_1 + X_2\,d x_2 + Y_2\,d y_2 + M_1\,d\varphi_1 + M_2\,d\varphi_2 \\ &+ X'(d x_1 - (y - y_1)\,d\varphi_1) - X'(d x_2 - (y - y_2)\,d\varphi_2) \\ &+ Y'(d y_1 + (x - x_1)\,d\varphi_1) - Y'(d y_2 + (x - x_2)\,d\varphi_2) \\ &= m_1 v_1\,d v_1 + k_1^2 \dot{\varphi}_1\,d\dot{\varphi}_1 + m_2 v_2\,d v_2 + k_2^2 \dot{\varphi}_2\,d\dot{\varphi}_2. \quad \ldots \quad 3) \end{aligned}$$

Hierin sind aber wieder

$$\left.\begin{aligned} d x_1 - (y - y_1)\,d\varphi_1 &= d x_1', \qquad d y_1 + (x - x_1)\,d\varphi_1 = d y_1' \\ d x_2 - (y - y_2)\,d\varphi_2 &= d x_2', \qquad d y_2 + (x - x_2)\,d\varphi_2 = d y_2' \end{aligned}\right\} \quad .\ 4)$$

Verschiebungen der Berührungspunkte beider Scheiben, deren Normalanteile zur Berührungstangente einander gleich sein müssen, um die Berührung aufrecht zu erhalten. Es ist also

$$\frac{d(y_1' - y_2')}{d(x_1' - x_2')} = \operatorname{tg}\vartheta = \frac{d y}{d x} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 4\,\mathrm{a})$$

und die gegenseitige in die Tangentenrichtung fallende Verschiebung oder Gleitung der Scheiben aneinander

$$d(y_1' - y_2')\sin\vartheta + d(x_1' - x_2')\cos\vartheta = d s', \quad \ldots \quad 4\,\mathrm{b})$$

während die Zerlegung der Zwischenkraft Q' in einem Normalanteil N und den Tangentialanteil R wie in § 71

$$-X' = R\cos\vartheta - N\sin\vartheta, \qquad -Y' = R\sin\vartheta + N\cos\vartheta \quad . \quad 5)$$

ergibt. Mit 4b) und 5) wird aber aus der Arbeitsgleichung

$$\Sigma(X\,dx + Y\,dy + M\,d\varphi) = R\,ds' + \Sigma m(v\,dv + k^2\dot{\varphi}\,d\dot{\varphi}), \quad . \ 3\text{a})$$

so daß wir auch hier wieder einen Arbeitsverlust erhalten, der an das Bestehen eines Tangentialanteils R der Zwischenkraft Q' und einer Gleitung ds' der Scheiben aneinander gebunden ist. Das Gleiten tritt nicht ein, solange

$$0 < R < fN \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad 6)$$

und führt dann auf die Bedingung $ds' = 0$, oder wegen 4b) und 4b) $dx_1' = dx_2'$, $dy_1' = dy_2'$ eines relativ ruhenden Berührungspunktes, d. h. auf reines Abrollen der Scheiben aufeinander.

Andernfalls nimmt die Tangentialkraft ihren Höchstwert

$$R = fN \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad 6\text{a})$$

an, um beim Gleiten die Reibung zu überwinden. Die Formeln 2) 4a), 5) und 6a) genügen erst dann zur Berechnung der Unbekannten X', Y', R, N, x, y, x_1, y_1, x_2, y_2, φ_1, φ_2, wenn wir die Gleichungen der beiden Randkurven hinzunehmen.

Um die Zahl der Freiheitsgrade der bei ihrer Bewegung miteinander in Berührung stehenden Scheiben zu ermitteln, erinnern wir uns, daß jede derselben bei vorgelegter Führungsbahn eine Gleitung längs derselben und eine Drehung um den Berührungspunkt vollziehen kann, woraus vier Freiheitsgrade hervorgehen. Da indessen die Führungsbahn in diesem Falle nicht vorgeschrieben ist, so tritt hierzu noch ein weiterer Freiheitsgrad, so daß wir insgesamt fünf Freiheitsgrade der Bewegung erhalten. Dies erhellt auch aus der Tatsache, daß man zunächst die eine Scheibe ihren drei Freiheitsgraden, d. h. den Verschiebungen ihres Schwerpunktes und der Drehung um diesen frei folgen kann, während alsdann die Lage der zweiten mit ihren beiden Schwerpunktsabständen durch die Bedingung der Berührung mit der andern, welche die Drehung festlegt, gegeben ist.

Tritt hierzu noch die weitere Bedingung des unveränderlichen Abstandes zweier Punkte $O_1\,O_2$ auf den Scheiben $m_1\,m_2$ etwa vermittels eines starren Stabes mit den Gelenkzapfen $O_1\,O_2$, so genügt bei beliebiger durch $x_1\,y_1\,\varphi_1$ gegebener Lage der ersten Scheibe die Kenntnis der Neigung von $O_1\,O_2$ gegen das feste Achsenkreuz, um die Lage der zweiten Scheibe gegen die erste völlig zu bestimmen. Wir haben alsdann nur mehr vier Freiheitsgrade, die auch aus den dreien der Bewegung der Geraden $O_1\,O_2$ und der Drehung der einen Scheibe gegen sie hervorgehen, mit der durch die Berührungsbedingung auch die Lage der andern bestimmt ist. Der oben besprochene allgemeine Fall ergibt sich daraus durch Hinzutreten der Veränderlichkeit der Strecke $O_1\,O_2$ als neuer Freiheitsgrad. Sollen die miteinander durch einen Gelenkstab $O_1\,O_2$ verbundenen Scheiben dauernd an einer Bahn durch den Führungspunkt P hindurch gleiten, so kann dies offenbar nur geschehen, wenn das Dreieck $O_1\,O_2\,P$ unverändert bleibt, also bei einem und demselben Berührungspunkt keine Relativbewegung der Scheiben gegeneinander stattfindet, die sich alsdann zusammen wie ein starrer Körper mit drei Freiheitsgraden verhalten. Daher kann bei einer Relativbewegung der Scheiben, die nur in einer Drehung um einen der Punkte $O_1\,O_2$ besteht, der geometrische Ort der aufeinander folgenden Berührungspunkte, die sogen. Eingriffslinie nicht tangential wie oben zu der Scheibe verlaufen, also in 4a) und 4b) der Winkel ϑ nicht mehr die Tangentenneigung im Berührungspunkte angeben.

Beschränken wir uns auf den praktisch wichtigsten Fall, daß durch den Stab $O_1\,O_2 = l = \Omega_1\,\Omega_2$ die beiden Schwerpunkte miteinander verknüpft sind, Abb. 273, so tritt zu dem sonst unverändert gültig bleibenden Bewegungsgleichungen noch die Bedingung

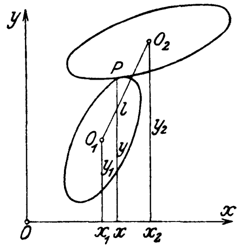

Abb. 273.

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l^2, \quad . \quad . \quad . \quad 7)$$

durch welche also die Zahl der Freiheitsgrade um einen vermindert wird. Die Bedingung 7) ist von selbst erfüllt bei Festhaltung beider Scheibenschwerpunkte. Dann aber vereinfachen sich die Bewegungsformeln mit $x_1 = x_2 = 0$, $y_1 = 0$, $y_2 = l$

$$\left.\begin{aligned} X_1 + X' = 0, \quad Y_1 + Y' = 0, \quad X_2 - X' = 0, \quad Y_2 - Y' = 0 \\ M_1 + Y'\,x - X'\,y = m_1\,k_1^2\,\ddot{\varphi}_1, \\ M_2 - Y'\,x + X'\,y - X'\,l = m_2\,k_2^2\,\ddot{\varphi}_2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad 8)$$

und die Arbeitsgleichung in

$$M_1\,d\varphi_1 + M_2\,d\varphi_2 = R\,ds' + m_1\,k_1^2\,\dot{\varphi}_1\,d\dot{\varphi}_1 + m_2\,k_2^2\,\dot{\varphi}_2\,d\dot{\varphi}_2 \,. \quad . \quad 9)$$

Verlangen wir dann noch eine gleichförmige Drehung beider Scheiben mit beständigem Übersetzungsverhältnis, so geht nach § 2 die Berührungsnormale stets durch denselben Punkt A der Verbindung der Drehpunkte $O_1\,O_2$ und es ist mit $O_1 A = r_1$, $O_2 A = r_2$, $r_1 + r_2 = l$

$$r_1\,\varphi_1 + r_2\,\varphi_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 10)$$

$$\left.\begin{aligned} M_1 + Y'\,x - X'\,y = 0, \quad M_2 - Y'\,x + X'\,y = X'\,l \\ M_1\,d\varphi_1 + M_2\,d\varphi_2 = R\,ds' \end{aligned}\right\}, \quad . \quad . \quad 8\mathrm{a})$$

oder auch Addition der beiden ersten Formeln 8a)

$$M_1 + M_2 = X'\,l \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8\mathrm{b})$$

Diese Formeln gewinnen eine praktische Bedeutung für das Kräftespiel der Zahnräder und erlauben insbesondere die Ermittlung der Reibungsarbeit, welche für deren Abnutzung und ihre Arbeitsübertragung von Bedeutung sind. Die letztere ist offenbar abhängig von dem Verhältnis der gewonnenen zur aufgewandten Arbeit, nämlich

$$\eta = -\frac{M_2\, d\varphi_2}{M_1\, d\varphi_1} = 1 - \frac{R\, ds'}{M_1\, d\varphi_1}, \quad \ldots\ldots \quad 11)$$

welches man allgemein als den mechanischen Wirkungsgrad bezeichnet.

Beispiel. Sind $r_1\, r_2$ die Teilkreisarme zweier sogen. Stirnräder, Abb. 274, vom Achsenabstande $O_1 O_2 = l = r_1 + r_2$, die sich mit zwei Zahnflanken BB und CC im Punkte P berühren, so sind die Achsenanteile des Zahndruckes Q' auf die Flanke BB nach 5) mit 6a)

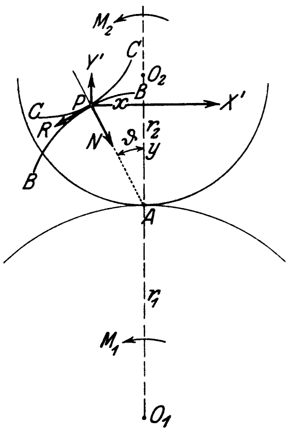

Abb. 274.

$$\left.\begin{aligned} X' &= N(\sin\vartheta - f\cos\vartheta) \\ Y' &= -N(\cos\vartheta + f\sin\vartheta) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 5\text{a})$$

wenn ϑ die Neigung der Berührungsnormale $AP = n$ gegen die Zentrale $O_1 O_2$ bedeutet. Wählen wir den Berührungspunkt der Teilkreise A als Anfang, so hat P die Achsenabstände $x\, y$ und wir erhalten für die Momente um die Achsen $O_1\, O_2$

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= X'(r_1 + y) + Y'x = \\ &= X'(r_1 + n\cos\vartheta) + Y' n \sin\vartheta \\ M_2 &= X'(r_2 - y) - Y'x = \\ &= X'(r_2 - n\cos\vartheta) - Y' n\sin\vartheta \end{aligned}\right\}, \quad . \quad 12)$$

oder wegen 5a)

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= N[r_1(\sin\vartheta - f\cos\vartheta) - fn] \\ M_2 &= N[r_2(\sin\vartheta - f\cos\vartheta) + fn] \end{aligned}\right\} \quad . \quad 12\text{a})$$

und daraus mit 10), d. h. $r_1\, d\varphi_1 + r_2\, d\varphi_2 = 0$

$$M_1\, d\varphi_1 + M_2\, d\varphi_2 = -fNn(d\varphi_1 - d\varphi_2). \quad \ldots\ldots \quad 13)$$

Da nun $fN = R$ den Reibungswiderstand bedeutet, so stellt

$$n(d\varphi_2 - d\varphi_1) = ds' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 14)$$

den Gleitweg der beiden Zahnflanken aufeinander dar. Setzen wir darin den Wälzbogen auf den Teilkreisen

$$r_2\, d\varphi_2 = -r_1\, d\varphi_1 = ds, \quad d\varphi_2 = \frac{ds}{r_2}, \quad d\varphi_1 = -\frac{ds}{r_1}, \quad \ldots \quad 14\text{a})$$

so wird aus 14)

$$ds' = n\, ds\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 14\text{b})$$

also aus 13)

$$M_1\, d\varphi_1 + M_2\, d\varphi_2 = fNn\, ds\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right). \quad \ldots\ldots \quad 13\text{a})$$

Diese Gleichung läßt sich integrieren, wenn wir den Zusammenhang zwischen Nn und ds kennen. Im Falle einer Evolventenverzahnung ist nun AP Tangente an den Kreis um O_1 und stimmt mit dem zugehörigen Wälzbogen überein, so daß hierfür $ds = dn$ wird, während zugleich N die in A auf $O_1 O_2$ senkrechte unveränderliche Umfangskraft der Zahnräder bedeutet. Somit gilt hierfür

$$M_1\, d\varphi_1 + M_2\, d\varphi_2 = fNs\, ds\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right),$$

oder integriert

$$M_1\, \varphi_1 + M_2\, \varphi_2 = fN\frac{s^2}{2}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right), \quad \ldots\ldots \quad 13\text{b})$$

also ist der Wirkungsgrad mit $M_1 \varphi_1 = -N r_1 \varphi_1 = N s$

$$\eta = 1 - f\frac{s}{2}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 15)$$

Führen wir noch die Zähnezahlen $z_1 z_2$ beider Räder durch

$$s \cdot z_1 = 2\pi r_1, \quad s \cdot z_2 = 2\pi r_2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 16)$$

ein, indem wir den Wälzbogen der Teilung gleichsetzen, so wird aus 15)

$$\eta = 1 - f\pi\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right), \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 15a)$$

so daß also der Wirkungsgrad um so größer, der Arbeitsverlust um so kleiner ausfällt, je mehr Zähne die beiden Räder besitzen.

Da bei großer Zähnezahl, also kleiner Zahnteilung auch bei anderen Zahnformen der Wälzbogen s sich nur wenig von der Normalen unterscheidet und ebenso die Richtung von N stets derjenigen der Tangente nahekommt, so gelten die vorstehenden Ergebnisse in erster Annäherung allgemein für beliebige Zahnformen, von denen allerdings die Evolventenverzahnung den Vorzug verdient.

§ 73. Der Rollwiderstand. Das reine Abrollen starrer Scheiben aufeinander, das auch als relative Drehung um den relativ ruhenden Berührungspunkt aufgefaßt werden kann, muß schon wegen des Wegfalls jedes Gleitweges der Scheiben gegeneinander ohne Arbeitsverlust erfolgen. Nun haben aber Versuche von Osborne Reynolds (1875) gezeigt, daß beim Rollen von Eisenwalzen auf Gummiunterlagen merkliche Gleitungen auftreten, und ebenso gelangt eine solche Walze auch auf härterer Unterlage schließlich zum völligen Stillstand, der unter dem Einfluß des Luftwiderstandes erst nach unendlich langer Zeit erreicht werden könnte. Dieser Widerspruch ist natürlich in der bisher von uns festgehaltenen Annahme der Starrheit der aufeinander abrollenden Scheiben begründet, die in Wirklichkeit nicht vorhanden ist und schon mit dem Auftreten der Gleitreibung unverträglich war.

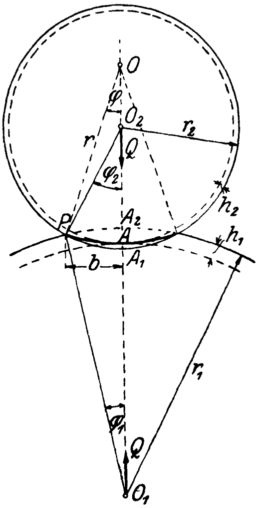

Abb. 275.

Zwei durch die Zentralkraft $\pm Q$ gegeneinander gedrückte Kreisscheiben mit den Halbmessern $r_1 r_2$, Abb. 275, werden sich demnach im Gleichgewichtszustande nicht nur an einem gemeinsamen Randpunkt berühren, sondern in der Nachbarschaft der Berührungsnormalen eine solche Formänderung erfahren, daß eine schmale gemeinsame Berührungsfläche entsteht, deren Spur in der Bildebene angenähert ebenfalls als Kreisbogen vom Halbmesser r um denPunkt O auf der Zentralen $O_1 O_2$ angesehen werden darf. Bezeichnen wir die Eindruckstiefen der Berührungspunkte A in beide Walzen mit $h_1 h_2$, so ist $OO_1 = r + r_1 - h_1$, $OO_2 = r - r_2 + h_2$, also in den Dreiecken OPO_1 und OPO_2 mit den Winkeln φ bei O und $\varphi_1 \varphi_2$ bei O_1 und O_2

$$\frac{r + r_1 - h_1}{r} = \frac{\sin(\varphi + \varphi_1)}{\sin \varphi_1}, \quad \frac{r - r_2 + h_2}{r} = \frac{\sin(\varphi_2 - \varphi)}{\sin \varphi_2},$$

oder wegen der Kleinheit aller Winkel $\varphi\,\varphi_1\,\varphi_2$ mit der halben Breite $AP = r\varphi = b$ der gemeinsamen Berührungsfläche

$$\frac{r + r_1 - h_1}{r} = \frac{\varphi}{\varphi_1} + 1, \qquad \frac{r - r_2 + h_2}{r} = 1 - \frac{\varphi}{\varphi_2}$$

$$(r_1 - h_1)\,\varphi_1 = (r_2 - h_2)\,\varphi_2 = b\,. \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

Zur Berechnung des Halbmessers r der Abplattung führen wir deren Sehnenhöhe $AA_0 = h$ ein und erhalten alsdann in Abb. 276

$$OA_0 = r - h, \quad O_1A_0 = r_1 + h - h_1, \quad O_2A_0 = r_2 - h - h_2,$$

oder

$$r - h = r\cos\varphi = r\sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2}}$$

$$r_1 + h - h_1 = r_1\cos\varphi_1 = r_1\sqrt{1 - \frac{b^2}{r_1^{\,2}}}$$

$$r_2 - h - h_2 = r_2\cos\varphi_2 = r_2\sqrt{1 - \frac{b^2}{r_2^{\,2}}},$$

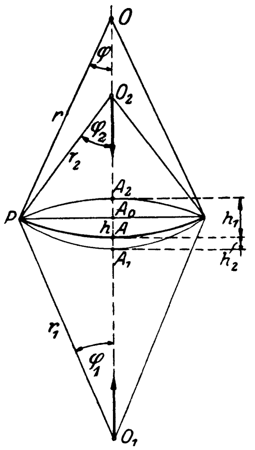

Abb. 276.

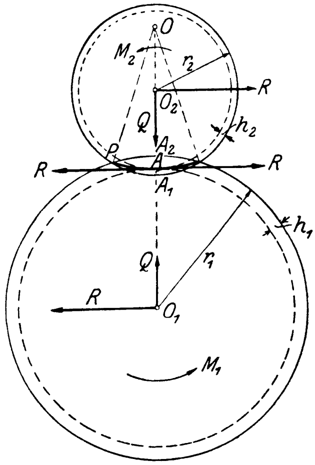

Abb. 277.

oder wegen der Kleinheit von b^2 gegen r^2, $r_1^{\,2}$, $r_2^{\,2}$ angenähert

$$h = \frac{b^2}{2\,r}, \quad h_1 - h = \frac{b^2}{2\,r_1}, \quad h + h_2 = \frac{b^2}{2\,r_2},$$

oder

$$\left.\begin{array}{l} h_1 + h_2 = \dfrac{b^2}{2}\left(\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2}\right) \\[2ex] h = \dfrac{h_1 r_1 - h_2 r_2}{r_1 + r_2}, \quad r = \dfrac{(h_1 + h_2)\,r_1 r_2}{h_1 r_1 - h_2 r_2} \end{array}\right\} \quad \ldots \quad 1\,\mathrm{a})$$

Lassen wir nunmehr neben der Zentralkraft $\pm Q$ an den Mitten $O_1\,O_2$ auf die beiden Kreisscheiben die Kräftepaare $M_1\,M_2$ wirken, Abb. 277, so entspricht diesen in der Berührungsfläche eine durch A gehende zu $O_1 O_2$ normale Umfangskraft $\pm R$, so zwar, daß

$$\left.\begin{array}{c} M_1 = R(r_1 - h_1), \quad M_2 = R(r_2 - h_2), \\ M_1 + M_2 = R(r_1 + r_2 - h_1 - h_2) \end{array}\right\} \quad \text{also} \quad \ldots . \quad 2)$$

ist. Sollen die Scheiben also ihren Ort nicht verändern, so müssen die Mittelpunkte $O_1 O_2$ durch die beiden Kräfte $\pm R$ normal zu $O_1 O_2$ gestützt werden. Dann aber tritt bei ungeänderter Lage der Scheibenachsen eine Drehung ein, sobald die Umfangskraft den Reibungswiderstand fQ in der Berührungsfläche erreicht, der somit seinen Höchstwert

$$R = fQ \quad \ldots\ldots\ldots . \quad 3)$$

darstellt. Die Drehung würde unter Überwindung der Reibung für nicht abgeplattete starre Scheiben sich nach den Formeln

$$M_1 - fQ\,r_1 = m_1 k_1^2 \ddot{\varphi}_1, \quad M_2 - fQ\,r_2 = m_2 k_2^2 \ddot{\varphi}_2 \quad \ldots \quad 4)$$

unter gegenseitigem Gleiten an der Berührungsstelle abspielen, bei Nichterfüllung von 3), d. h. für

$$R < fQ \quad \ldots\ldots\ldots . \quad 3\text{a})$$

aber unabhängig von der Abplattung überhaupt nicht zustande kommen. In diesem Falle würde für nicht abgeplattete Scheiben reines Rollen eintreten, welches aber ebenso wie auch das Gleiten an Ort und Stelle in Wirklichkeit durch die Abplattung gehindert wird, falls diese keine Änderung erleiden könnte. Eine solche Änderung tritt nun in der Tat ein, und zwar wird die Abplattung bei der Drehung an den zur Berührung gelangenden Umfangsstücken der Scheiben stets von neuem durch den Zwischendruck $\pm Q$ hervorgerufen und bildet sich nach der Entlastung außerhalb der Berührungsstelle wieder zurück, wobei die Scheiben nach Gleichung 1) mit den durch die Abplattung verkürzten Halbmessern aufeinander rollen oder auch gleiten. Würde die Bildung und Rückbildung der Abplattung bei gleichförmiger Drehung der Rollen in gleichen Zeiten, also symmetrisch zur Zentralen $O_1 O_2$ erfolgen, so würden auch die hierbei auftretenden Arbeiten sich ausgleichen, das Rollen also widerstandsfrei vor sich gehen, während wir für das Gleiten an Stelle von 4)

$$M_1 - fQ(r_1 - h_1) = m_1 k_1^2 \ddot{\varphi}_1, \quad M_2 - fQ(r_2 - h_2) = m_2 k_2^2 \ddot{\varphi}_2 \quad 4\text{a})$$

zu setzen hätten. Da die Abplattung aber nicht umkehrbar entsteht und wieder verschwindet, d. h. die zu ihrer Erzeugung nötige Arbeit bei der Rückbildung nicht vollständig auf die Scheiben wieder übertragen wird, so ist die Berührungslinie zu beiden Seiten der Zentrale $O_1 O_2$ verschieden belastet und die gesamte Zwischenkraft Q' verschiebt sich in der Rollrichtung um z aus der Zentrale. Im Falle des gleichförmigen Rollens haben wir alsdann mit den beiden Anteilen N und R normal und tangential zur Berührungslinie nach Abb. 278 die Momente

$$M_1 = R\,l_1 + N z, \quad M_2 = R\,l_2 - N z, \quad \ldots \ldots \quad 5)$$

wenn $l_1\,l_2$ die Lote von $O_1 O_2$ auf die Kraftrichtung von R bedeuten, die sich nur wenig von $r_1\,r_2$ unterscheiden und N als nahezu parallel $O_1 O_2$ angesehen wird. Erweitern wir diese Formeln mit $d\varphi_1$, $-d\varphi_2$ und addieren, so wird die Arbeitsgleichung

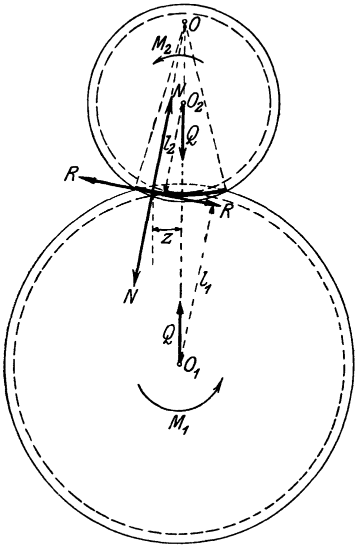

Abb. 278.

$$\left.\begin{array}{l} M_1\,d\varphi_1 - M_2\,d\varphi_2 = R\,(l_1\,d\varphi_1 - \\ \quad - l_2\,d\varphi_2) + N z\,(d\varphi_1 + d\varphi_2) \end{array}\right\}, \quad 6)$$

oder da bis auf Unterschiede von zweiter Ordnung

$$l_1 = r_1 - h_1, \quad l_2 = r_2 - h_2 \quad . \quad 7)$$

nach Gl. 1)

$$M_1 d\varphi_1 - M_2 d\varphi_2 = N z (d\varphi_1 + d\varphi_2), \quad 6\,a)$$

worin die rechte Seite die verlorene Formänderungsarbeit bedeutet, die somit als Widerstandsarbeit auf dem Rollweg erscheint und nach 1) in der Tat einen Gleitweg

$$d s' = r_1\,d\varphi_1 - r_2\,d\varphi_2 = h_1\,d\varphi_1 - h_2\,d\varphi_2$$

in Übereinstimmung mit den Versuchen von O. Reynolds zur Folge hat. Integrieren wir 6a) und setzen auf der rechten Seite unter Vernachlässigung von Gliedern zweiter Ordnung

$$r_1\,\varphi_1 = r_2\,\varphi_2 = b, \quad z = \zeta\,b \quad \ldots \ldots \quad 1\,b)$$

und wegen der nur geringen Neigung von N gegen die Zentrale $N \approx Q$, so erhalten wir

$$M_1\,\varphi_1 - M_2\,\varphi_2 = \zeta\,Q\,b^2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right). \quad \ldots \quad 6\,b)$$

Diese Formel entspricht in ihrer Bauart der Arbeitsgleichung zweier Stirnräder so vollkommen, daß man die gegenseitige Abplattung der Walzen als einen Zahneingriff mit der Teilung b auffassen kann, wobei die Kraft Q als Zentralanteil des Zahndruckes erscheint. Demgemäß ist der Wirkungsgrad des Rollentriebes mit der Umfangskraft R und

$$M_1\,\varphi_1 \approx R\,r_1\,\varphi_1 = R\,b \quad \ldots \ldots \ldots \quad 8)$$

$$\eta = \frac{M_2\,\varphi_2}{M_1\,\varphi_1} = 1 - \zeta\,b \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \frac{Q}{R}, \quad \ldots \quad 8\,a)$$

wobei als Bedingung für das Rollen $R < f N \approx f Q$ zu beachten ist. Wird eine Rolle festgehalten oder überhaupt keine Arbeit auf die getriebene Rolle übertragen, so verschwindet mit dem Drehwinkel φ_2 bzw. dem Moment M_2 der Wirkungsgrad und es bleibt

$$R = \zeta\, b \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) Q = \zeta\, b\, Q \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2} \quad \ldots\ldots \quad 8\text{b})$$

als **Rollwiderstand** übrig, der sich für die Bewegung auf ebener Unterlage mit $r_2 = \infty$, $r_1 = r$ in

$$R_0 = \frac{\zeta\, b\, Q}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 8\text{c})$$

vereinfacht. Der Beiwert der Belastung Q in diesen Formeln, den wir als **Rollziffer** bezeichnen wollen, spielt demnach dieselbe Rolle wie die Reibungsziffer und **wechselt insbesondere wie diese mit der Bewegungsumkehr ihr Vorzeichen.** Da die halbe Breite b der Berührungsfläche nach 1a) noch von den Abplattungen h_1 und h_2 der beiden Walzen abhängt, diese aber mit der Belastung nach einem Gesetze wachsen, welches noch nicht bekannt ist, so ist man vorläufig ganz auf spärliche Versuche angewiesen. Dazu kommt, daß die Auslenkung $z = \zeta\, b$ der Angriffspunkte der Zwischenkraft mit der Geschwindigkeit wenigstens bis zu einem Grenzwert ansteigt, den sie, wie die Reibungsziffer nach den Versuchen von Ch. Jakob (§ 30) bei rascherem Lauf beibehält. Für **gehärtete Stahlwalzen** auf ebensolcher Unterlage hat sich als Grenzwert je nach der Belastung

$$\zeta\, b = 0{,}002 - 0{,}005 \text{ cm}$$

ergeben. Jedenfalls erkennt man, **daß** im Einklang der Erfahrung **der Rollwiderstand mit der Größe der Walzen abnimmt.**

Beispiel. Der Rollwiderstand tritt in der technischen Praxis bei der Fortbewegung schwerer Lasten auf. Dabei rollen im allgemeinen mehrere Walzen, deren Halbmesser wir als gleich groß ansetzen wollen, einerseits auf der Unterlage, andererseits auf der Unterfläche der Last ab. Haben wir es nach Abb. 279 mit einem Balken vom Gewicht G und zwei Walzen im Abstande a zu tun, so sind bei einem Schwerpunktsabstand s des Balkens von der einen Walze die Belastungen derselben

$$G_1 = G\,\frac{s}{a}, \qquad G_2 = G\,\frac{a-s}{a},$$

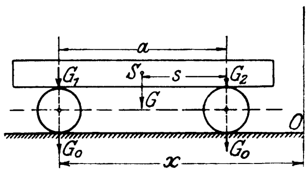

Abb. 279.

also der Rollwiderstand auf der Unterseite mit $\zeta_1 b_1 = \zeta'$

$$\frac{\zeta'}{r}(G_1 + G_2) = \frac{\zeta' G}{r}$$

und auf dem Relativwege ds die entsprechende Arbeit $dL' = \zeta' \frac{G}{r} ds$. Ebenso ergibt sich mit einem Walzengewicht G_0 der Rollwiderstand und die Arbeit auf der Unterlage bei einem Fortschritte der Walzen um dx

$$\frac{\zeta''}{r}(2\,G_0 + G), \qquad dL'' = \frac{\zeta''}{r}(2\,G_0 + G)\,dx,$$

also die Gesamtarbeit wegen $dx = ds$

$$L = \left[\frac{\zeta'}{r} G + \frac{\zeta''}{r}(2\,G_0 + G)\right] s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 9)$$

Da nun der Gesamtweg der Last sich aus dem der Walzen und der Verschiebung gegen diese zusammensetzt, also $2s$ beträgt, so wird die Kraft zum Fortschieben der Last

$$P = \frac{L}{2s} = \frac{(\zeta' + \zeta'')G + 2\zeta'' G_0}{2r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9\text{a})$$

Ist nun bei einer Walzenlänge l und einem Raumgewicht γ derselben $G_0 = \pi r^2 l \gamma$, so wird daraus

$$P = \pi \zeta'' l \gamma r + (\zeta' + \zeta'')\frac{G}{2r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9\text{b})$$

mit einem Kleinstwert

$$P_m = \sqrt{2\pi l \gamma G \zeta''(\zeta' + \zeta'')} \quad \text{für} \quad r = \sqrt{\frac{G}{2\pi l \gamma}\left(1 + \frac{\zeta'}{\zeta''}\right)} \,. \quad . \quad . \quad 9\text{c})$$

Beachten wir aber, daß die Last erst auf die Rollen zu heben ist, so ergibt sich als Gesamtarbeit

$$L_g = (\zeta' + \zeta'')\frac{Gs}{r} + \frac{2\zeta'' G_0 s}{r} + 2Gr = (\zeta' + \zeta'')\frac{Gs}{r} + 2(\zeta'' \pi l \gamma s + G)r \,. \quad 10)$$

mit einem Kleinstwert

$$L_m = 2\sqrt{2(\zeta'' \pi l \gamma s + G)(\zeta' + \zeta'')Gs} \quad \text{für} \quad r = \sqrt{\frac{(\zeta' + \zeta'')Gs}{2(\zeta'' \pi l \gamma s + G)}} \,. \quad 10\text{a})$$

Da das Rollengewicht klein gegen die Last ist, so kann man dafür auch angenähert schreiben

$$r = \sqrt{\frac{(\zeta' + \zeta'')s}{2}} \,, \qquad L_m = 2G\sqrt{2(\zeta' + \zeta'')s} = 4Gr \,. \quad . \quad . \quad . \quad 10\text{b})$$

Damit ergibt sich für $\zeta' = 0{,}05$ cm, $\zeta'' = 0{,}09$ cm entsprechend einem Holzbalken, der vermittels eiserner Walzen auf festgestampftem Boden $s = 100$ m zu verschieben ist,

$$r = 26{,}4 \text{ cm}, \qquad L = 1{,}06\, G \text{ mkg},$$

während man beim Schleifen auf dem Boden mit der Reibungsziffer $f = 0{,}4$, $L = 40\, G$ mkg aufzuwenden hätte.

§ 74. Die Bewegung der Fuhrwerke. Unter einem Fuhrwerk wollen wir ein zur Fortbewegung von Lasten zweckmäßig ausgebildetes Gestell verstehen, welches auf den Achsen von Rollen oder Rädern mit oder ohne Zwischenschaltung von federnden Gliedern derart ruht, daß es mit den Rädern denselben Lauf besitzt. Rollen die Räder auf der Unterlage ohne zu gleiten, so hat notwendig ihr Umlauf denselben Wert wie der Lauf des Gesamtschwerpunktes des Fuhrwerkes. Alsdann haben wir es, wenn von der federnden Verbindung des Gestelles mit den Achsen abgesehen werden darf, nur mit einem Freiheitsgrad der Bewegung zu tun. Findet dagegen neben der Rollbewegung ein Gleiten der Räder auf der Unterlage statt, so besteht zwischen dem Umlauf der Räder und dem Lauf des Gesamtschwerpunktes keine geometrische Beziehung mehr, und die Zahl der Freiheitsgrade wächst mit derjenigen der Räderzahl. Ein Wagen mit vier Rädern, die sich auf zwei Achsen unabhängig voneinander drehen, hat demnach für jedes Rad einen Freiheitsgrad und außerdem noch einen für die Gesamtbewegung, im ganzen also fünf, ein Eisenbahnwagen dagegen mit zwei auf den Achsen festsitzenden Räderpaaren nur drei Freiheitsgrade. Einen solchen wollen wir der nachstehenden Untersuchung zugrunde legen und dabei seine Bewegung auf einer um den Winkel α geneigten Bahn verfolgen, Abb. 280. Das Gewicht des Gestells mit der Ladung sei G, G_0 das jedes Räderpaares vom Halbmesser r; der Abstand der Radachsen, der sogen. Radstand, sei a, der Schwerpunkt des Gestells sei durch die Höhe h_0 über den Achsen und die Achsenabstände $s_1 + s_2 = a$ festgelegt. Außerdem aber liegt die der Unterlage gleichgerichtete Zugkraft P um h_1, der äußere Bewegungswiderstand W um h_2 über den Achsen. Sind dann $X_1 Y_1$, $X_2 Y_2$ die in der Bewegungsrichtung und senkrecht dazu wirkenden Achskräfte mit den Momenten M_1 M_2, R_1 R_2 die von der Reibung und dem Rollwiderstand bedingten Umfangskräfte an den Rollen, so bestehen, wenn wir von der Federung des Gestelles absehen, in den Achsen die beiden Momentengleichungen

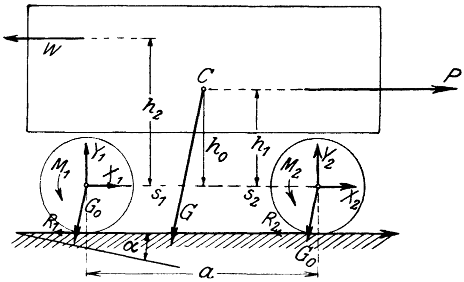

Abb. 280.

$$\left.\begin{aligned} Y_1 a &= G(s_2 \cos\alpha + h_0 \sin\alpha) - P h_1 + W h_2 \\ Y_2 a &= G(s_1 \cos\alpha - h_0 \sin\alpha) + P h_1 - W h_2 \end{aligned}\right\}, \quad \ldots \quad 1)$$

also

$$Y_1 + Y_2 = G \cos\alpha \, . \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1\,a)$$

Außerdem aber ist für das Gestell und die Radsitze bei **Aufwärtsbewegung**

$$\left.\begin{aligned} P - W - G\sin\alpha - X_1 - X_2 &= m\ddot{x} \\ X_1 - G_0 \sin\alpha - R_1 = m_0 \ddot{x}, \quad X_2 - G_0 \sin\alpha - R_2 &= m_0 \ddot{x} \\ M_1 + R_1 r = m_0 k_0^2 \ddot{\varphi}_1, \quad M_2 + R_2 r &= m_0 k_0^2 \ddot{\varphi}_2 \end{aligned}\right\}, \quad \ldots \quad 2)$$

oder $\quad P - W - (G + 2\,G_0)\sin\alpha - R_1 - R_2 = (m + 2\,m_0)\,\ddot{x} \, . \quad . \quad 2\,a)$

Erweitern wir die ersten drei Formeln 2) mit dx, die letzten mit $d\varphi_1\, d\varphi_2$ und addieren, so folgt mit $\ddot{x}\,dx = \dot{x}\,d\dot{x}$, $\ddot{\varphi}\,d\varphi = \dot{\varphi}\,d\dot{\varphi}$, $dx \sin\alpha = dy'$ die **Arbeitsgleichung**

$$\left.\begin{aligned} P\,dx + M_1\,d\varphi_1 + M_2\,d\varphi_2 = W\,dx &+ (G + 2\,G_0)\,dy' \\ &+ R_1(dx - r\,d\varphi_1) + R_2(dx - r\,d\varphi_2) \\ &+ (m + 2\,m)\,\dot{x}\,d\dot{x} + m_0 k_0^2 (\dot{\varphi}_1\,d\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2\,d\dot{\varphi}_2) \end{aligned}\right\} \ldots \quad 3)$$

In allen diesen Formeln sind zunächst die Umfangskräfte R_1 R_2 unbestimmt, sie lassen sich aber aus den vier untereinander stehenden Bewegungsgleichungen 2) ausschalten, so daß wir auch haben

$$\left.\begin{aligned} M_1 + X_1 r &= G_0 r \sin\alpha + m_0(\ddot{x} r + k_0^2 \ddot{\varphi}_1) \\ M_2 + X_2 r &= G_0 r \sin\alpha + m_0(\ddot{x} r + k_0^2 \ddot{\varphi}_2) \end{aligned}\right\}, \quad . \quad . \quad 2\,b)$$

oder

$$M_1 + M_2 + (X_1 + X_2) r = 2\,[G_0 r \sin\alpha + m_0 \ddot{x} r] + m_0 k_0^2 (\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) \, . \quad 2\,c)$$

Diese gibt schließlich mit der ersten Gl. 2) und $G = m\,g$, $G_0 = m_0\,g$

$$(P - W)\,r + M_1 + M_2 = r\,(m + 2\,m_0)\,(g \sin\alpha + \ddot{x}) + m_0\,k_0^2\,(\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2). \quad 4)$$

Damit ist indessen nichts gewonnen, da in dieser Gleichung die drei Lagengrößen $x\,\varphi_1\,\varphi_2$ ebenso auftreten wie in der Arbeitsformel 3).

Sollen aber die Räder nur rollen, so wird mit $dx = r\,d\varphi_1 = r\,d\varphi_2$ in 4)

$$\begin{aligned}(P - W)\,r + M_1 + M_2 &= (m + 2\,m_0)\,g\,r \sin\alpha \\ &+ \left[m + 2\,m_0\left(1 + \frac{k_0^2}{r^2}\right)\right]\ddot{x}\,r, \quad . \; . \; . \quad 5)\end{aligned}$$

woraus sich dann bei vorgelegten Kräften $P\,W$ und den Momenten $M_1\,M_2$ der Anlauf $\ddot{x}$ berechnet. Sind alle diese Größen beständig, so ist diese Bewegung gleichförmig beschleunigt oder verzögert, je nachdem

$$P\,r + M_1 + M_2 \gtrless W\,r + (m + 2\,m_0)\,g\,r \sin\alpha. \quad . \; . \; . \quad 5\text{a})$$

Für diese Bewegung ergeben sich dann die Umfangskräfte aus den letzten Gl. 2), nämlich

$$\left.\begin{aligned} R_1\,r &= m_0\,k_0^2\,\ddot{\varphi}_1 - M_1 = m_0\,\frac{k_0^2}{r}\,\ddot{x} - M_1 \\ R_2\,r &= m_0\,k_0^2\,\ddot{\varphi}_2 - M_2 = m_0\,\frac{k_0^2}{r}\,\ddot{x} - M_2 \end{aligned}\right\}, \quad . \; . \; . \quad 5\text{b})$$

falls mit der Reibungsziffer f die Bedingungen für die Absolutwerte

$$[R_1] < f\,(Y_1 + G_0 \cos\alpha), \quad [R_2] < f\,(Y_2 + G_0 \cos\alpha) \quad . \; . \quad 5\text{c})$$

an den Berührungsstellen der Räder mit der Fahrbahn erfüllt sind. Im Sonderfall der gleichförmigen Bewegung erhalten wir mit $\ddot{x} = 0$

$$(P - W)\,r + M_1 + M_2 = (m + 2\,m_0)\,g\,r \sin\alpha \quad . \; . \; . \; . \quad 6)$$

oder mit Rücksicht auf 5c) und 1a) nach Ausschaltung von $M_1 + M_2$ durch 5b) für die Aufwärtsbewegung

$$P - W < (G + 2\,G_0)\,(\sin\alpha + f \cos\alpha) \quad . \; . \; . \; . \quad 6\text{a})$$

und für die Abwärtsbewegung mit Vorzeichenwechsel von P, W und f

$$W - P > (G + 2\,G_0)\,(\sin\alpha - f \cos\alpha). \quad . \; . \; . \; . \quad 6\text{b})$$

Das sind aber die schon aus § 30 bekannten Bedingungen für das Gleichgewicht auf der schiefen Ebene, die somit auch für das reine Rollen erfüllt sein müssen. Ist wie bei einem Triebwagen oder einer Lokomotive, keine äußere Zugkraft vorhanden, also $P = 0$, so erfolgt hiernach die Fortbewegung durch die auf die Räder vermittels einer Antriebsmaschine übertragenen Momente $M_1 + M_2$, denen dann die Momente der Umfangskräfte das Gleichgewicht halten. Deren Gegenkräfte wirken alsdann an den Berührungsstellen der Räder mit der Fahrbahn nach Gl. 2) als äußere

Treibkräfte und dürfen daher den Betrag des Reibungswiderstandes nicht überschreiten, da andernfalls die Räder ins Gleiten geraten. Diese Erscheinung tritt darum stets ein, wenn durch Befeuchtung der Schienen oder durch Glatteis die Reibungsziffer erheblich herabgezogen wird, wogegen man sich durch Streuen von Sand schützen kann. Weiter erkennt man aus 6b), daß die gleichförmige Abwärtsbewegung mit $P=0$ stets möglich ist, wenn

$$\operatorname{tg}\alpha < f, \qquad 6c)$$

d. h. wenn die Bahnneigung kleiner als der Reibungswinkel ausfällt. Bei größeren Bahnneigungen kann, da im wesentlichen W als Luftwiderstand auftritt und daher

$$W = k v^2 \qquad 7)$$

zu setzen ist, die gleichförmige Talfahrt erst bei sehr raschem Lauf erwartet werden, so daß die Bewegung anfänglich stark beschleunigt ist. Dieser Zustand dauert so lange, bis nach 6b) mit $P=0$

$$W = (G + 2\,G_0)(\sin\alpha - f\cos\alpha) = k v^2, \qquad 6d)$$

oder wegen 2a) mit $\ddot{x}=0$ und umgekehrten Vorzeichen von W, R_1, R_2

$$R_1 + R_2 = f(G + 2\,G_0)\cos\alpha \qquad 6e)$$

geworden ist, wonach der Abwärtsgang weiterhin gleichförmig verläuft.

Beispiel. Wir fassen nunmehr den Fall eines Eisenbahnzuges ins Auge, der von einem gleichförmigen Anfangslauf v durch Bremsen einzelner Räder zum Stillstand gebracht werden soll. Die Zahl der ungebremsten Achsen sei n_1, die der gebremsten n_2, die Gesamtzahl also $n_1 + n_2 = n$. Dann wirkt auf die ersteren kein äußeres Moment, also $M_1 = 0$; außerdem besteht für sie kein Anlaß zum Gleiten, mithin ist $r\dot{\varphi} = \dot{x} = v$ und wir erhalten die Bewegungsgleichung der ungebremsten Achsen nach 2)

$$R_1 = m_0 \frac{k_0^2}{r^2}\ddot{x}. \qquad 8)$$

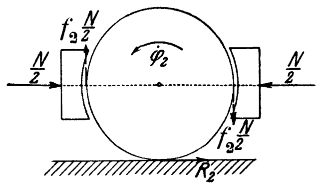

Abb. 281.

Für jede gebremste Achse gilt dagegen mit einem Bremsdruck N gegen den Umfang und einer Reibungsziffer f_2 zwischen Bremsklotz und Rad nach Abb. 281

$$M_2 = -f_2 N r, \quad \text{also} \quad (R_2 - f_2 N)\,r = m_0 k_0^2 \ddot{\varphi}_2. \qquad 9)$$

Da beim Eisenbahnzug keine äußere Triebkraft wirkt, so haben wir für die Talfahrt mit $P=0$ und dem ganzen Zuggewicht $G = mg$ an Stelle von 2a)

$$g(m + n m_0)\sin\alpha - W - n_1 R_1 - n_2 R_2 = (m + n m_0)\ddot{x},$$

oder nach Ausschalten von R_1 nach 8)

$$g(m + n m_0)\sin\alpha - W - n_2 R_2 = \left[m + m_0\left(n + n_1\frac{k_0^2}{r^2}\right)\right]\ddot{x}. \qquad 10)$$

1. Ist die Bremsung schwach, so rollen die gebremsten Räder noch ebenso wie die ungebremsten ohne zu gleiten, also ist mit $r\ddot{\varphi}_2 = \ddot{x}$ in 9)

$$R_2 - f_2 N = m_0 \frac{k_0^2}{r^2}\ddot{x} \qquad 9a)$$

und damit geht 10) wegen $n_1 + n_2 = n$ über in

$$g(m + n m_0) \sin\alpha - W - n_2 f_2 N = \left[m + n m_0 \left(1 + \frac{k_0^2}{r^2}\right)\right] \ddot{x} . \quad . \quad . \ 10\text{a})$$

Dies setzt allerdings voraus, daß die durch Ausschalten von $\ddot{x}$ aus 9a) und 10) erhaltene Reibung zwischen Rad und Schiene, nämlich

$$R_2 = \frac{[g(m + n m_0)\sin\alpha - W]\, m_0 \frac{k_0^2}{r^2} + \left[m + m_0\left(n + n_1 \frac{k_0^2}{r^2}\right)\right] f_2 N}{m + n m_0 \left(1 + \frac{k_0^2}{r^2}\right)}$$

$$< f g \left(\frac{m}{n} + m_0\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 11)$$

ausfällt, worin angenähert $g \frac{m}{n} = \frac{G}{n}$ die Belastung einer Achse durch das Wagengewicht bedeutet. Da die Gesamtbewegung des Zuges durch 10a) bestimmt ist, so besitzt sie in diesem Falle nur einen Freiheitsgrad. Schreiben wir mit $W = k v^2$ und

$$\frac{n_2 f_2 N - g(m + n m_0)\sin\alpha}{m + n m_0\left(1 + \frac{k_0^2}{r^2}\right)} = q\,, \qquad \frac{k}{m + n m_0\left(1 + \frac{k_0^2}{r^2}\right)} = \varkappa \quad . \quad 12)$$

an Stelle von 10a) mit $\dot{x} = v$

$$-(q + \varkappa v^2) = \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d(v^2)}{dx} = \frac{1}{2\varkappa}\frac{d(q + \varkappa v^2)}{dx},$$

so ergibt die Integration zwischen v_0 und $v = 0$ für den Bremsweg x_0

$$2\varkappa x_0 = \lg n\left(1 + \frac{\varkappa v_0^2}{q}\right) . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 13)$$

Dieser Ausdruck ist aber nur so lange positiv, als $q > 0$ oder

$$n_2 f_2 N > g(m + n m_0)\sin\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \ 12\text{a})$$

ist, so daß die Zahl der gebremsten Achsen und der angewandte Bremsdruck N mit der Bahnneigung zunehmen muß.

Darf der Luftwiderstand während des Bremsens vernachlässigt werden, so vereinfacht sich 13) in die Formel für die gleichmäßig verzögerte Bewegung

$$2 q x_0 = v_0^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \ 13\text{a})$$

woraus man für vorgelegte Werte von v_0, x_0 die Verzögerung q berechnen kann, die alsdann bei bekanntem Gefälle α, sowie mit den Werten von m, $n m_0$, bzw. $\frac{k_0^2}{r^2}$ die Reibung $n_2 f_2 N$ der Bremsklötze aus 12) ergibt. So erhält man z. B. für den Schnellzugslauf $v_0 = 25$ m/sek und den Bremsweg $x_0 = 300$ m, $q = 1{,}04$ m/sec^2. Ist ferner $g m = 150$ tons, $n g m_0 = 12$ tons, das ganze Zuggewicht also $g(m + n m_0) = 162$ tons, so wird mit $k_0^2 : r^2 = 0{,}75$, $g\left[m + n m_0\left(1 + \frac{k_0^2}{r^2}\right)\right] = 171$ tons und mit $q : g = 0{,}106$ bei einem Gefälle $\sin\alpha = 0{,}01$

$$n_2 f_2 N = 0{,}106 \cdot 171 + 162 \cdot 0{,}01 = 19{,}8 \text{ tons}.$$

Dieses Ergebnis ist indessen nur als ein Mittelwert aufzufassen, da erfahrungsgemäß die Reibungsziffer f_2 mit zunehmendem Lauf stark abnimmt und sich einem Grenzwert zu nähern scheint. Es liegt dies offenbar an der durch Umwandlung der Reibungsarbeit in Wärme bedingten Temperatursteigerung der Berührungsflächen, die sich hierbei erweichen und eine schmierende Zwischenschicht bilden.

Weiter ist zu beachten, daß die Bremsklötze niemals plötzlich und gleichzeitig mit voller Wirkung angedrückt werden, sondern daß hierzu eine sog.

Entwicklungsdauer erforderlich ist, die bei neueren Luftbremsen auf $t_1 = 2$ sek geschätzt werden kann. Nehmen wir an, daß in derselben nur die halbe Verzögerung wirkt, so gilt für den zugehörigen Wert x_1 mit Vernachlässigung von t_1^2

$$\frac{2\,q\,x_1}{2} = v_0^2 - \left(v_0 - \frac{q}{2}\,t_1\right)^2 \approx v_0\,q\,t_1\,,$$

während für den Rest des Bremsweges $x_0' - x_1$ an Stelle von 13a) mit voller Verzögerung q

$$2\,q\,(x_0' - x_1) = \left(v_0^2 - \frac{q}{2}\,t_1\right)^2 \approx v_0^2 - v_0\,q\,t_1$$

tritt. Mithin haben wir nach Ausschalten von x_1

$$2\,q\,x_0' = v_0^2 + v_0\,q\,t_1\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 13\text{b})$$

also gegen 13a) eine Vermehrung des Bremsweges um

$$\varDelta\,x = x_0' - x_0 = \frac{v_0\,t_1}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 13\text{c})$$

Dies gibt mit den obigen Werten $\varDelta\,x = 25\,m$ also einen gewiß nicht zu vernachlässigenden Betrag.

II. Werden die Bremsen stärker angezogen, bis die Bremsreibung $f_2\,N$ die Gleitreibung zwischen Rad und Schiene zu überwinden imstande ist, so beginnt mit dem Höchstwerte

$$R_2 = f\,g\left(\frac{m}{n} + m_0\right) = f\,G' < f_2\,N \quad \ldots\ldots\ldots \quad 14)$$

das Gleiten $v - r\,\dot{\varphi}_2 > 0$ der gebremsten Räder auf den Schienen. Damit wird aus 9) und 10)

$$(f\,G' - f_2\,N)\,r = m_0\,k_0^2\,\ddot{\varphi}_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 9\text{b})$$

$$g\,(m + n\,m_0)\sin\alpha - W - n_2\,f\,G' = \left[m + m_0\left(n + n_1\,\frac{k_0^2}{r^2}\right)\right]\ddot{x} \quad \ldots \quad 10\text{b})$$

mit einer gleichförmigen Abnahme des Drehwertes $\dot{\varphi}_2$ der Bremsräder, während die des Zuglaufes v sich mit 7) und den Abkürzungen

$$\frac{n_2\,f\,G' - g\,(m + n\,m_0)\sin\alpha}{m + m_0\left(n + n_1\,\frac{k_0^2}{r^2}\right)} = q'\,, \qquad \frac{k}{m + m_0\left(n + n_1\,\frac{k_0^2}{r^2}\right)} = \varkappa' \quad 12\text{b})$$

aus $-(q' + \varkappa'\,v^2) = \frac{dv}{dt}$ berechnet und den Bremsweg x_1' nach

$$2\,\varkappa'\,x_1' = \lg n\left(1 + \frac{\varkappa\,v_0^2}{q'}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 13\text{d})$$

ergibt. Natürlich tritt auch dieser Zustand, bei dem im Gegensatz zur schwachen Bremsung die Wucht des Zuges nicht allein durch Reibung an den Bremsklötzen, sondern auch noch an den Schienen aufgezehrt wird, erst nach einer Entwicklungszeit ein, die auch noch die schwache Bremsung umfaßt. Da der Nenner von q in 12) größer ist als der von q' in 12b), so wird wegen 11) stets $q' > q$, d. h. die starke Bremsung mit gleitenden Rädern ist zwar wirksamer wie die schwache mit nur rollenden Bremsrädern; zugleich aber schädlicher wegen der damit verbundenen Schienenabnutzung. Wegen der beiden voneinander unabhängigen Gleichungen 9b) und 10b) verläuft dieser Bewegungszustand mit zwei Freiheitsgraden und dauert so lange an, bis durch Festbremsen der Räder mit $\ddot{\varphi}_2 = 0$ die Gleitung an den Schienen ihren Höchstwert erreicht hat. Damit fällt, da eine Rückwärtsdrehung der Räder nicht in Frage kommt, die Momentengleichung 9b) und der zugehörige Freiheitsgrad fort, so daß für den Rest der Bremsdauer die Bewegung allein nach Gl. 10b) abläuft. Es heißt das nichts anderes, als daß durch das Gleiten der stark gebremsten Räder deren Wucht für die Bewegung des ganzen Zuges ausgeschaltet wird.

XV. Der Stoß fester Scheiben.

§ 75. Der Stoß freier Scheiben. Gelangen zwei Scheiben mit verschiedenen Geschwindigkeiten nach Größe und Richtung miteinander in Berührung, so erfolgt ein **Stoß**, bei dem erfahrungsgemäß sowohl die Laufwerte als auch die Drehwerte beider Scheiben plötzliche, d. h. sehr rasche Änderungen erfahren. Die Dauer dieses Vorganges ist so kurz, daß die innerhalb derselben erfolgten Lagenänderungen der Scheiben unwesentlich sind und daher vernachlässigt werden können. Den beträchtlichen Änderungen der Lauf- und Drehwerte in der kurzen Stoßdauer entsprechen also dann sehr große Anläufe und Andrehwerte, die ihrerseits eine so starke Stoßkraft voraussetzen, daß dagegen der Einfluß der äußeren Kräfte $X_1 Y_1$, $X_2 Y_2$ und ihrer Momente $M_1 M_2$ verschwindet. Das geht schon daraus hervor, daß beim Stoße gelegentlich eine Zertrümmerung der Körper eintritt, wenn eine solche nicht gerade hierdurch herbeigeführt werden soll, was aber durch die stetige Wirkung äußerer Kräfte, z. B. der Schwere, nicht erreichbar ist. Als Stoßkraft kommt aber nur die an der Berührungsstelle der Scheiben wirkende Zwischenkraft Q' mit den Achsenanteilen $X' Y'$ in Frage, die bei glatten Rändern ohne Reibung in die Berührungsnormale fällt, während bei rauhen Rädern der Tangentialanteil R und der Normalanteil N mit der Reibungsziffer f durch

$$R = fN, \qquad Q'^2 = R^2 + N^2 = N^2(1 + f^2) \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

verknüpft sind. Alsdann vereinfachen sich die Bewegungsgleichungen 2) § 72 mit Weglassung von $X_1 X_2 Y_1 Y_2 M_1 M_2$ für den Stoßvorgang in

$$\left.\begin{array}{l} X' = m_1 \ddot{x}_1, \qquad Y' = m_1 \ddot{y}_1 \\ Y'(x - x_1) - X'(y - y_1) = m_1 k_1^2 \ddot{\varphi}_1 \\ -X' = m_2 \ddot{x}_2, \qquad -Y' = m_2 \ddot{y}_2 \\ -Y'(x - x_2) + X'(y - y_2) = m_2 k_2^2 \ddot{\varphi}_2 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

worin wieder $m_1 m_2$ die Scheibenmassen mit den Schwungarmen $k_1 k_2$, den augenblicklichen Schwerpunktsabständen $x_1 y_1$, $x_2 y_2$ und den Drehwinkeln $\varphi_1 \varphi_2$ irgendwelcher Schwerachsen in denselben gegen die x-Achse bedeuten, während xy die Lage des Berührungspunktes bestimmen. Wenn nun auch alle diese Lagengrößen während der Stoßdauer, wie schon erwähnt, keine merklichen Änderungen erfahren, also für den ganzen Vorgang als beständig anzusehen sind, so gilt dies keinesfalls für ihre Ableitungen $\dot{x}_1 \dot{y}_1$, $\dot{x}_2 \dot{y}_2$, $\dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2$, deren Anfangswerte $\dot{x}_1' \dot{y}_1'$, $\dot{x}_2' \dot{y}_2'$, $\dot{\varphi}_1' \dot{\varphi}_2'$ bei Beginn der Berührung als bekannt vorausgesetzt werden, während die Endwerte $\dot{x}_1'' \dot{y}_1''$, $\dot{x}_2'' \dot{y}_2''$, $\dot{\varphi}_1'' \dot{\varphi}_2''$ zu ermitteln sind. Wir haben es also mit 6 veränderlichen Laufwerten zu tun, zu denen noch die unbekannten Stoßkraftanteile $X' Y'$ hinzutreten. Da über diese ohne und mit Reibung nur erst eine Aussage vorliegt, nämlich die Normalstellung von Q' oder das Verhältnis 1) zwischen dem Tangential- und Normalanteil, so verfügen wir nach der Ausschaltung der $X'Y'$ nur über 5 Gleichungen, die zur Berechnung der veränderlichen Laufwerte nicht ausreichen. Die Ausschaltung der Stoßkraft selbst erweist sich aber als notwendig, da zu ihrer Berechnung aus den Laufänderungen die Kenntnis der Abhängigkeit dieser Laufänderungen von der Zeit notwendig ist, für die aber unsere Ansätze keinen Anhalt bieten. Ein solcher aber könnte nur aus der Formänderung der Scheiben an der Berührungsstelle, wie beim Rollwiderstand, mit Rücksicht auf die Eigenschaften der Scheibenstoffe gewonnen werden und müßte dann auch über die Stoßdauer Aufschluß ergeben. Verzichten wir dagegen auf die Ermittlung der Stoßkräfte und Stoßdauer und damit auf die Verfolgung des Stoßvorganges im einzelnen, so müssen wir zur Aufstellung der fehlenden Beziehung einen andern Weg einschlagen und wollen zunächst die Arbeitsgleichung aufstellen. Diese ergibt sich durch Erweiterung der Formeln 2) mit den Verschiebungsanteilen $dx_1\, dy_1$, $dx_2\, dy_2$, $d\varphi_1\, d\varphi_2$ und Addition zu

$$\left.\begin{aligned} X'[dx_1-(y-y_1)\,d\varphi_1] - X'[dx_2-(y-y_2)\,d\varphi_2] \\ + Y'[dy_1+(x-x_1)\,d\varphi_1] - Y'[dy_2+(x-x_2)\,d\varphi_2] \end{aligned}\right\} = \\ = \left\{\begin{aligned} m_1(v_1\,dv_1+k_1^2\,\dot\varphi_1\,d\dot\varphi_1) \\ + m_2(v_2\,dv_2+k_2^2\,\dot\varphi_2\,d\dot\varphi_2) \end{aligned}\right. \quad \ldots\ldots \quad 3)$$

worin mit den Verschiebungen des Berührungspunktes

$$\left.\begin{aligned} dx_1-(y-y_1)\,d\varphi_1 = d\xi_1, \quad & dy_1+(x-x_1)\,d\varphi_1 = d\eta_1 \\ dx_2-(y-y_2)\,d\varphi_2 = d\xi_2, \quad & dy_2+(x-x_2)\,d\varphi_2 = d\eta_2 \end{aligned}\right\} \quad 4)$$

die rechte Seite

$$\left.\begin{aligned} X'\,d(\xi_1-\xi_2)+ \\ + Y'\,d(\eta_1-\eta_2) = dL \end{aligned}\right\} \quad 3\text{a})$$

die Arbeit der Stoßkraft bedeutet, die somit die in 3) rechts stehende Änderung der Wucht beider Scheiben bedingt. Legen wir nun unser Achsenkreuz so, daß die senkrecht zur Berührungstangente stehende Stoßnormale in die x-Richtung fällt, Abb. 282, so stellt offenbar X' selbst die Normalkraft und

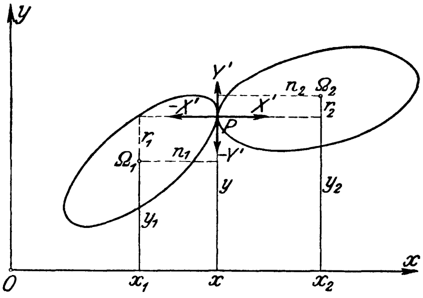

Abb. 282.

$$Y' = fX' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1\text{a})$$

den tangentialen Reibungswiderstand an der Berührungsstelle und

$$\left.\begin{aligned} x-x_1 = n_1, \quad & y-y_1 = r_1 \\ x_2-x = n_2, \quad & y_2-y = r_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 5)$$

die während der kurzen Stoßdauer beständigen Lote von den Scheibenschwerpunkten auf die Berührungstangente und die Stoßnormale dar. Damit aber vereinfachen sich die Bewegungsgleichungen 2) unter gleichzeitiger Ausschaltung von $X' Y'$ mit Hilfe von 1a) in

$$\left.\begin{array}{rr} m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 = 0, & m_1 \ddot{y}_1 + m_2 \ddot{y}_2 = 0 \\ \ddot{y}_1 = f \ddot{x}_1, & \ddot{y}_2 = f \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_1 n_1 - \ddot{x}_1 r_1 = k_1^2 \ddot{\varphi}_1, & -\ddot{y}_2 n_2 + \ddot{x}_2 r_2 = k_2^2 \ddot{\varphi}_2, \end{array}\right\} \quad . \quad 2\text{a})$$

worin allerdings die Gleichungen der ersten Zeile durch diejenigen der zweiten miteinander verknüpft sind, so daß im ganzen 2a) nur fünf unabhängige Formeln enthält.

Verläuft nun der Stoßvorgang derart, daß die dabei aufgetretenen Formänderungen an der Berührungsstelle beider Scheiben vor ihrer Trennung sich in umkehrbarer Weise wieder völlig zurückbilden, so muß die in der Stoßrichtung während der ganzen Stoßdauer geleistete Arbeit verschwinden. Wir erhalten also in diesem Falle des sog. vollkommen elastischen Stoßes mit 4) und 5)

$$\int X' d(\xi_1 - \xi_2) = m_1 \int \ddot{x}_1 (dx_1 - r_1 d\varphi_1) + m_2 \int \ddot{x}_2 (dx_2 + r_2 d\varphi_2) = 0, \quad 6)$$

oder wegen der zweiten und dritten Zeile von 2a)

$$m_1 \int \left(\dot{x}_1 d\dot{x}_1 - \frac{r_1 k_1^2 \dot{\varphi}_1 d\dot{\varphi}_1}{f n_1 - r_1}\right) + m_2 \int \left(\dot{x}_2 d\dot{x}_2 - \frac{r_2 k_2 \dot{\varphi}^2{}_2 d\dot{\varphi}_2}{f n_2 - r_2}\right) = 0, \quad 6\text{a})$$

worin die Integrale sofort ausgewertet werden können.

Verläuft der Stoß bei völlig glatten Scheibenwänden reibungsfrei, so wird daraus mit $f = 0$, $\ddot{y}_1 = \ddot{y}_2 = 0$

$$m_1 \int (\dot{x}_1 d\dot{x}_1 + k_1^2 \dot{\varphi}_1 d\dot{\varphi}_1) + m_2 \int (\dot{x}_2 d\dot{x}_2 + k_2^2 \dot{\varphi}_2 d\dot{\varphi}_2) = 0. \quad . \quad 6\text{b})$$

Findet dagegen an der Berührungsstelle keine Rückbildung der Formänderungen statt, so geht die ganze Stoßarbeit in der Richtung der Normalen verloren. Alsdann haften die Scheiben an der Berührungsstelle am Schlusse der Stoßdauer derart aneinander, daß die schließlichen Laufteile dort übereinstimmen. Bezeichnen wir sie mit $\dot{\xi}_1'' \dot{\xi}_2''$, so gilt wegen 4) und 5) für diesen unelastischen Stoß

$$\dot{x}_1'' - r_1 \dot{\varphi}_1'' = \dot{x}_2'' + r_2 \varphi_2'' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 7)$$

an Stelle der Gleichungen 6) oder 6a). Unter Hinzunahme der Formeln 6) und 7) genügen nunmehr die Bedingungsgleichungen zur Bestimmung aller Lauf- und Drehwerte am Ende des elastischen oder unelastischen Stoßes, wenn die Anfangswerte im Augenblicke der beginnenden Berührung, nämlich $\dot{x}_1' \dot{y}_1'$, $\dot{x}_2' \dot{y}_2'$, $\dot{\varphi}_1' \varphi_2'$ gegeben sind. Hierzu empfiehlt es sich allerdings, noch die Bedingung 6a) etwas umzuformen, und zwar mit Hilfe der Bewegungsformeln nach

Ausschaltung der Laufteile $\dot{y}_1 \dot{y}_2$, die sich ja aus den $\dot{x}_1 \dot{x}_2$ durch die zweite Zeile 2a) sofort ergeben. Wir erhalten dort

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \frac{\ddot{y}_1}{f} = \frac{k_1^2 \ddot{\varphi}_1}{f n_1 - r_1} = a_1 \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{x}_2 &= \frac{\ddot{y}_2}{f} = \frac{k_2^2 \ddot{\varphi}_2}{r_2 - f n_2} = a_2 \ddot{\varphi}_2, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 8)$$

integriert zwischen dem Anfangs- und Endzustande

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1'' - \dot{x}_1' &= \frac{\dot{y}_1'' - \dot{y}_1'}{f} = a_1 (\dot{\varphi}_1'' - \dot{\varphi}_1') \\ \dot{x}_2'' - \dot{x}_2' &= \frac{\dot{y}_2'' - \dot{y}_2'}{f} = a_2 (\dot{\varphi}_2'' - \dot{\varphi}_2'). \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad 8a)$$

Ebenso wird mit 8) aus 6a) nach Integration

$$\begin{aligned} & m_1 [\dot{x}_1''^2 - \dot{x}_1'^2 - a_1 r_1 (\dot{\varphi}_1''^2 - \dot{\varphi}_1'^2)] \\ & + m_2 [\dot{x}_2''^2 - \dot{x}_2'^2 + a_2 r_2 (\dot{\varphi}_2''^2 - \dot{\varphi}_2'^2)] = 0, \end{aligned}$$

oder wegen 8a)

$$\begin{aligned} & m_1 (\dot{x}_1'' - \dot{x}_1') [\dot{x}_1'' + \dot{x}_1' - r_1 (\dot{\varphi}_1'' + \dot{\varphi}_1')] \\ & + m_2 (\dot{x}_2'' - \dot{x}_2') [\dot{x}_2'' + \dot{x}_2' + r_2 (\dot{\varphi}_2'' + \dot{\varphi}_2')] = 0. \end{aligned}$$

Verbinden wir dies mit der ersten Gleichung 2a), so folgt nach deren Integration, d. h.

$$m_1 (\dot{x}_1'' - \dot{x}_1') + m_2 (\dot{x}_2'' - \dot{x}_2') = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 2c)$$

$$\dot{x}_1'' + \dot{x}_1' - r_1 (\dot{\varphi}_1'' + \dot{\varphi}_1') = \dot{x}_2'' + \dot{x}_2' + r_2 (\dot{\varphi}_2'' + \dot{\varphi}_2'), \quad . \quad 9)$$

oder

$$\left.\begin{aligned} (\dot{x}_1'' - \dot{x}_1') - r_1 (\dot{\varphi}_1'' - \dot{\varphi}_1') - (\dot{x}_2'' - \dot{x}_2') - r_2 (\dot{\varphi}_2'' - \dot{\varphi}_2') \\ = 2 [\dot{x}_2' - \dot{x}_1' + r_1 \dot{\varphi}_1' + r_2 \dot{\varphi}_2'] \end{aligned}\right\} \quad 9a)$$

und nach Ausschaltung von $\dot{x}_1'' - \dot{x}_1'$, $\dot{x}_2'' - \dot{x}_2'$ aus 8a), 9) und 2c)

$$\begin{gathered} (a_1 - r_1)(\dot{\varphi}_1'' - \dot{\varphi}_1') - (a_2 + r_2)(\dot{\varphi}_2'' - \dot{\varphi}_2') = 2 [\dot{x}_2' - \dot{x}_1' + r_1 \dot{\varphi}_1' + r_2 \dot{\varphi}_2'] \\ m_1 a_1 (\dot{\varphi}_1'' - \dot{\varphi}_1') + m_2 a_2 (\dot{\varphi}_2'' - \dot{\varphi}_2') = 0. \end{gathered}$$

Mithin ist für den elastischen Stoß

$$\left.\begin{aligned} \dot{\varphi}_1'' - \dot{\varphi}_1' &= \frac{2 m_2 a_2 (\dot{x}_2' - \dot{x}_1' + r_1 \dot{\varphi}_1' + r_2 \dot{\varphi}_2')}{m_2 a_2 (a_1 - r_1) + m_1 a_1 (a_2 + r_2)} = \frac{\dot{x}_1'' - \dot{x}_1'}{a_1} \\ \dot{\varphi}_2'' - \dot{\varphi}_2' &= \frac{-2 m_1 a_1 (\dot{x}_2' - \dot{x}_1' + r_1 \dot{\varphi}_1' + r_2 \dot{\varphi}_2')}{m_2 a_2 (a_1 - r_1) + m_1 a_1 (a_2 + r_2)} = \frac{\dot{x}_2'' - \dot{x}_2'}{a_2}, \end{aligned}\right\} , \; . \; . \quad 10)$$

während wir unter Benutzung der Gl. 7), welche sich ersichtlich von 9a) nur durch Wegfall des Beiwertes 2 auf der rechten Seite unterscheidet, für den unelastischen Stoß genau die halben Werte von 10) erhalten. Da außerdem nach der zweiten Zeile von 2a)

$$\dot{y}_1'' - \dot{y}_1' = f(\dot{x}_1'' - \dot{x}_1'), \qquad \dot{y}_2'' - \dot{y}_2' = f(\dot{x}_2'' - \dot{x}_2') \tag{2d}$$

ist, so sind nunmehr alle Lauf- und Drehwerte der Scheiben nach dem Stoße durch die Werte vor dem elastischen und unelastischen Stoße bestimmt. Da ferner die Klammern in den Zählern von 10) die anfänglichen Laufunterschiede der Berührungsstellen in der Stoßrichtung enthalten, so sind diesen alle Lauf- und Drehwertsänderungen durch den Stoß verhältnisgleich. Die Übereinstimmung der Ergebnisse 10) für beide Stoßarten bis auf den Beiwert 2, die sich auch noch auf Gl. 9a) derart erstreckt, daß diese nach Vertauschen des Beiwertes 2 mit 1 in die Formel 7) für den unelastischen Stoß übergeht, legt es nahe, für den allgemeinen, zwischen diesem und dem elastischen Stoß liegenden Fall unter Einführung einer sog. Stoßziffer ε den genannten Formeln den Beiwert $1+\varepsilon$ zu erteilen. Diese Stoßziffer liegt zwischen den Grenzwerten für den elastischen Stoß $\varepsilon = 1$, für den unelastischen Stoß $\varepsilon = 0$, allgemein also $0 < \varepsilon < 1$ und ist für die Berührung je zweier Körper ebenso versuchsmäßig zu bestimmen, wie die Reibungsziffer f und die Rollziffer ζ. Damit erhalten wir an Stelle der Formeln 9) bzw. 9a) und 10)

$$\dot{x}_1'' - \dot{x}_2'' - r_1\dot{\varphi}_1'' - r_2\dot{\varphi}_2'' = \varepsilon(\dot{x}_2' - \dot{x}_1' + r_1\dot{\varphi}_1' + r_2\dot{\varphi}_2') \tag{12}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\dot{\varphi}_1'' - \dot{\varphi}_1'}{m_2 a_2} = \dfrac{\dot{x}_1'' - \dot{x}_1'}{m_2 a_1 a_2} = \dfrac{\dot{y}_1'' - \dot{y}_1'}{m_2 f a_1 a_2} \\[2ex] \dfrac{\dot{\varphi}_2' - \dot{\varphi}_2''}{m_1 a_1} = \dfrac{\dot{x}_2' - \dot{x}_2''}{m_1 a_1 a_2} = \dfrac{\dot{y}_2' - \dot{y}_2''}{m_1 f a_1 a_2} \end{array}\right\} = \frac{(1+\varepsilon)(\dot{x}_2' - \dot{x}_1' + r_1\dot{\varphi}_1' + r_2\dot{\varphi}_2')}{m_2 a_2(a_1 - r_1) + m_1 a_1(a_2 + r_2)}. \tag{13}$$

Es bleibt uns nunmehr noch die Ermittlung der Stoßarbeit übrig, die nach 3a) in die Arbeit der beiden Stoßkraftanteile in der Normal- und Tangentialrichtung zerfällt, von denen die letztere offenbar bei reibungsfreier Berührung verschwindet. Bezeichnen wir beide Teile mit L_x und L_y, so erhalten wir nach 6) mit 5)

$$\begin{aligned} L_x &= m_1 \int \ddot{x}_1 (dx_1 - r_1\, d\varphi_1) + m_2 \int \ddot{x}_2 (dx_2 + r_2\, d\varphi_2) \\ L_y &= m_1 \int \ddot{y}_1 (dy_1 + n_1\, d\varphi_1) + m_2 \int \ddot{y}_2 (dy_2 - n_2\, d\varphi_2), \end{aligned}$$

oder mit 8) integriert zwischen dem Anfangs- und Endzustande des Stoßes

$$\begin{aligned} 2L_x &= m_1[\dot{x}_1''^2 - \dot{x}_1'^2 - a_1 r_1(\dot{\varphi}_1''^2 - \dot{\varphi}_1'^2)] \\ &\quad + m_2[\dot{x}_2''^2 - \dot{x}_2'^2 + a_2 r_2(\dot{\varphi}_2''^2 - \dot{\varphi}_2'^2)] \\ 2L_y &= m_1[\dot{y}_1''^2 - \dot{y}_1'^2 + f a_1 n_1(\dot{\varphi}_1''^2 - \dot{\varphi}_1'^2)] \\ &\quad + m_2[\dot{y}_2''^2 - \dot{y}_2'^2 - f a_2 n_2(\dot{\varphi}_2''^2 - \dot{\varphi}_2'^2)] \end{aligned}$$

und mit 8a)

$$\begin{aligned}2\,L_x &= m_1(\dot x_1'' - \dot x_1')\,[\dot x_1'' + \dot x_1' - r_1(\dot\varphi_1'' + \dot\varphi_1')]\\ &\quad + m_2(\dot x_2'' - \dot x_2')\,[\dot x_2'' + \dot x_2' + r_2(\dot\varphi_2'' + \dot\varphi_2')]\\ 2\,L_y &= m_1(\dot y_1'' - \dot y_1')\,[\dot y_1'' + \dot y_1' + n_1(\dot\varphi_1'' + \dot\varphi_1')]\\ &\quad + m_2(\dot y_2'' - \dot y_2')\,[\dot y_2'' + \dot y_2' - n_2(\dot\varphi_2'' + \dot\varphi_2')]\,.\end{aligned}$$

Wegen der ersten beiden Formeln 2a) ist

$$m_1(\dot x_1'' - \dot x_1') = -m_2(\dot x_2'' - \dot x_2'), \qquad m_1(\dot y_1'' - \dot y_1') = -m_2(\dot y_2'' - \dot y_2'),$$

also

$$\begin{aligned}2\,L_x &= m_1(\dot x_1'' - \dot x_1')\,[\dot x_1'' + \dot x_1' - r_1(\dot\varphi_1'' + \dot\varphi_1') - \dot x_2'' - \dot x_2'\\ &\qquad - r_2(\dot\varphi_2'' + \dot\varphi_2')]\\ 2\,L_y &= m_1(\dot y_1'' - \dot y_1')\,[\dot y_1'' + \dot y_1' + n_1(\dot\varphi_1'' + \dot\varphi_1') - \dot y_2'' - \dot y_2'\\ &\qquad + n_2(\dot\varphi_2'' + \dot\varphi_2')],\end{aligned}$$

hierin aber ist der Ausdruck in der eckigen Klammer von L_x mit Rücksicht auf 12)

$$(\varepsilon - 1)(\dot x_2' - \dot x_1' + r_1\dot\varphi_1' + r_2\dot\varphi_2'),$$

während wir für den entsprechenden in L_y schreiben dürfen

$$\begin{aligned}(\dot y_1'' - \dot y_1') + n_1(\dot\varphi_1'' - \dot\varphi_1') - (\dot y_2'' - \dot y_2') + n_2(\dot\varphi_2'' - \dot\varphi_2')\\ + 2(\dot y_1' - \dot y_2' + n_1\dot\varphi_1' + n_2\dot\varphi_2').\end{aligned}$$

Mithin ergibt sich wegen 13) schließlich, wenn wir noch die Abkürzungen:

$$\left.\begin{aligned}\dot x_1' - r_1\dot\varphi_1' = v_{x_1}, \qquad \dot x_2' + r_2\dot\varphi_2' = v_{x_2}\\ \dot y_1' + n_1\dot\varphi_1' = v_{y_1}, \qquad \dot y_2' - n_2\dot\varphi_2' = v_{y_2}\end{aligned}\right\} \quad .\;.\;. \quad 14)$$

für die Laufanteile der Scheiben in der Berührungsstelle vor dem Stoße einführen:

$$\left.\begin{aligned}2\,L_x &= \frac{(\varepsilon^2 - 1)\,m_1 m_2\,a_1 a_2\,(v_{x_2} - v_{x_1})^2}{m_2 a_2(a_1 - r_1) + m_1 a_1(a_2 + r_2)} < 0\\ 2\,L_y &= f\,\frac{(1+\varepsilon)^2\,a_1 a_2\,(v_{x_2} - v_{x_1})^2\,m_1 m_2}{m_2 a_2(a_1 - r_1) + m_1 a_1(a_2 + r_2)}\\ &\quad \left[\frac{f(m_2 + m_1)\,a_1 a_2 + n_1 m_2 a_2 - n_2 m_1 a_1}{m_2 a_2(a_1 - r_1) + m_1 a_1(a_2 + r_2)} + \frac{2}{1+\varepsilon}\,\frac{v_{y_1} - v_{y_2}}{v_{x_2} - v_{x_1}}\right].\end{aligned}\right\} \quad 15)$$

Damit beide Stoßarbeiten als Verluste stets negativ erscheinen, müssen die Vorzeichen von a_1 und a_2, die für $f = 0$ nach 8) offenbar entgegengesetzt ausfallen, auch für beliebig große Reibungsziffern entgegengesetzt bleiben. Das ist aber nur möglich, wenn von vornherein, was wir bisher offen gelassen haben, $f < 0$ gesetzt wird.

Es sei noch bemerkt, daß auf jeder Scheibe ein Punkt mit den Achsenabständen $\xi_1\,\eta_1$, $\xi_2\,\eta_2$, von den Schwerpunkten aus gerechnet, durch die Bedingung festgelegt werden kann, daß seine Laufteile durch den Stoß keine Änderungen erfahren. Das trifft nach Abb. 283 zu für

$$\dot x_1'' - \eta_1 \dot\varphi_1'' = \dot x_1' - \eta_1 \dot\varphi_1', \qquad \dot y_1'' + \xi_1 \dot\varphi_1'' = \dot y_1' + \xi_1 \dot\varphi_1'$$
$$\dot x_2'' - \eta_2 \dot\varphi_2'' = \dot x_2' - \eta_2 \dot\varphi_2', \qquad \dot y_2'' + \xi_2 \dot\varphi_2'' = \dot y_2' + \xi_2 \dot\varphi_2',$$

oder mit Rücksicht auf 8a)

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{\dot x_1'' - \dot x_1'}{\dot\varphi_1'' - \dot\varphi_1'} = a_1; & \xi_1 &= \frac{\dot y_1'' - \dot y_1'}{\dot\varphi_1'' - \dot\varphi_1'} = f\,a_1 \\ \eta_2 &= \frac{\dot x_2'' - \dot x_2'}{\dot\varphi_2'' - \dot\varphi_2'} = a_2; & \xi_2 &= \frac{\dot y_2'' - \dot y_2'}{\dot\varphi_2'' - \dot\varphi_2'} = f\,a_2. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad 16)$$

War ein solcher Punkt O_2 vorher in Ruhe, so verharrt er darin auch während und nach dem Stoße, ohne daß es dazu einer äußeren Kraft zur Festhaltung bedarf. Er bildet alsdann einen kräftefreien Drehpol der Scheibe und eignet sich besonders zum Anbringen einer stoßfreien Achse. Den Schnittpunkt S der Schwerachse durch den kräftefreien Pol mit der Stoßnormale bezeichnet man wohl auch als den Stoßmittelpunkt oder den Stoßpunkt der Scheibe.

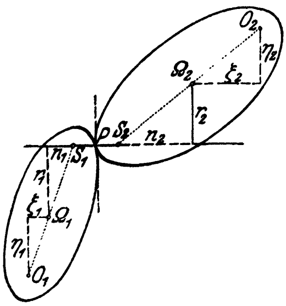

Abb. 283.

Mit den Laufänderungen sind unmittelbar die Anteile des Pralles

$$\left.\begin{aligned} \int X'\,dt &= m_1(\dot x_1'' - \dot x_1') = m_2(\dot x_2' - \dot x_2'') \\ \int Y'\,dt &= m_1(\dot y_1'' - \dot y_1') = m_2(\dot y_2' - \dot y_2'') \end{aligned}\right\} \quad 17)$$

gegeben, nicht aber die Stoßkraftanteile $X'Y'$ selbst, die wir deshalb aus unseren Formeln ausschalten mußten. Eine Berechnung derselben wäre nur möglich auf Grund der Formänderung der Scheiben, die aber mit deren angenommener Starrheit unverträglich ist und daher in die Mechanik der nichtstarren Körper gehört.

§ 76. **Der Zentralstoß freier Scheiben.** Der im letzten Abschnitt besprochene allgemeine Fall des Stoßes freier Scheiben wird nur ausnahmsweise absichtlich hervorgerufen und besitzt darum nur geringe praktische Bedeutung. Da die Berührungsnormale hierbei an den Scheibenschwerpunkten vorbeigeht, so bezeichnet man ihn auch als exzentrischen Stoß, außerdem aber noch als schiefen Stoß wegen der nicht in die Richtung der Normale fallenden Geschwindigkeiten beider Scheiben. In Gegensatz hierzu tritt der Zentralstoß, bei dem die Berührungsnormale durch die beiden Schwerpunkte geht, viel häufiger auf und wird insbesondere zum geraden Zentralstoß, wenn auch die beiden Laufwerte in die Normale fallen. Ein solcher ist allerdings nur gewährleistet, wenn entweder neben der Fortbewegung der Scheiben keine Drehungen auftreten oder wenn die Scheiben kreisförmig sind. Die Drehungen haben im allgemeinen auch bei zentraler Schwerpunktsbewegung tangentiale Verschiebungen der Berührungspunkte und damit das Auftreten von Reibungskräften zur Folge, die beim **drehungsfreien geraden Zentralstoß** fortfallen. Daher beschränken sich die Stoßgleichungen für diesen wichtigen Sonderfall auf

$$\left.\begin{aligned} m_1(\dot{x}_1'' - \dot{x}_1') + m_2(\dot{x}_2'' - \dot{x}_2') &= 0 \\ \dot{x}_1'' - \dot{x}_2'' &= \varepsilon(\dot{x}_2' - \dot{x}_1'), \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 1)$$

also

$$\left.\begin{aligned} \frac{\dot{x}_1'' - \dot{x}_1'}{m_2} = -\frac{\dot{x}_2'' - \dot{x}_2'}{m_1} &= \frac{(1+\varepsilon)(\dot{x}_2' - \dot{x}_1')}{m_1 + m_2} \\ 2L_x &= \frac{(\varepsilon^2 - 1) m_1 m_2 (\dot{x}_2' - \dot{x}_1')^2}{m_1 + m_2}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 2)$$

die wir auch aus 12), 13), 14), 15) des vorigen Abschnittes mit $r_1 = r_2 = 0$, $f = 0$, also $a_1 = a_2 = \infty$ und $\ddot{y}_1 = \ddot{y}_2 = 0$, $\ddot{\varphi}_1 = \ddot{\varphi}_2 = 0$ hätten ableiten können.

Für den **schiefen Zentralstoß** mit oder ohne Drehung der Scheiben vereinfachen sich dagegen die Formeln des letzten Abschnittes mit $r_1 = r_2 = 0$, also 8) $a_1 f n_1 = k_1^2$, $a_2 f n_2 = -k_2^2$ in

$$\left.\begin{aligned} \frac{m_1 k_1^2}{f n_1}(\dot{\varphi}_1'' - \dot{\varphi}_1') = m_1(\dot{x}_1'' - \dot{x}_1') = \frac{m_1}{f}(\dot{y}_1'' - \dot{y}_1') \\ \frac{m_2 k_2^2}{f n_2}(\dot{\varphi}_2'' - \dot{\varphi}_2') = m_2(\dot{x}_2' - \dot{x}_2'') = \frac{m_2}{f}(\dot{y}_2' - \dot{y}_2'') \end{aligned}\right\} = \frac{(1+\varepsilon) m_1 m_2 (\dot{x}_2' - \dot{x}_1')}{m_1 + m_2}, \quad 3)$$

$$\left.\begin{aligned} 2L_x &= \frac{(\varepsilon^2 - 1) m_1 m_2 (\dot{x}_2' - \dot{x}_1')^2}{m_1 + m_2} \\ 2L_y &= f \frac{(1+\varepsilon)^2 m_1 m_2 (\dot{x}_2' - \dot{x}_1')^2}{m_1 + m_2} \\ &\left[f\left(1 + \frac{m_2 k_2^2 n_1^2 + m_1 k_1^2 n_2^2}{k_1^2 k_2^2 (m_1 + m_2)}\right) + \frac{2}{1+\varepsilon} \frac{v_{y_1} - v_{y_2}}{v_{x_2} - v_{x_1}}\right] \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad 4)$$

Da $\varepsilon^2 < 1$, so ist auch die Stoßarbeit $L_x < 0$, stellt also einen **Arbeitsverlust** dar, der für vollkommen elastische Körper verschwindet. Auch L_y muß stets einen Verlust darstellen, wonach sich das Vorzeichen der Reibungsziffer bestimmt, das mit der gegenseitigen Verschiebung an der Berührungsstelle, d. h. denjenigen von $v_{y_1} - v_{y_2}$ wechselt. Das ist auch bei der Benutzung der Gl. 3) zur Ermittlung der Lauf- und Drehwertänderungen genau zu beachten, wodurch die Durchführung der vollständigen Rechnung recht umständlich werden kann. Jedenfalls übersieht man, daß **durch die Reibung beim schiefen Zentralstoß die vorher nicht rotierenden Scheiben im allgemeinen in Drehung versetzt werden.** Fällt dagegen bei glatten Rändern die Reibung fort, so erleiden weder die Laufteile $\dot{y}_1 \dot{y}_2$, noch die Drehwerte $\dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2$ eine Änderung, die sich vielmehr auf $\dot{x}_1 \dot{x}_2$ nach den Formeln 1) und 2) des geraden Zentralstoßes beschränkt, in welche die Gl. 3) und 4) mit $f = 0$ übergehen.

Schließlich ist noch der Fall des Stoßes einer Scheibe gegen eine feste Wand zu erörtern, die als Begrenzung einer unbewegten Scheibe mit unendlich großer Masse angesehen werden kann. Setzen wir demgemäß in den Formeln 12), 13), 15) des letzten Abschnittes $m_2 = \infty$, $n_2 = l_2 = k_2 = a_2 = \infty$, $\dot{x}_2 = \dot{y}_2 = 0$, $\dot{\varphi}_2 = 0$ und lassen für die allein noch übrigbleibende Scheibe den Zeiger 1 als überflüssig weg, so bleibt:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}'' - r\dot{\varphi}'' &= -\varepsilon(\dot{x}' - r\dot{\varphi}') \\ \dot{\varphi}'' - \dot{\varphi}' = \frac{\dot{x}'' - \dot{x}'}{a} &= \frac{\dot{y}'' - \dot{y}'}{fa} = -\frac{(1+\varepsilon)(\dot{x}' - r\dot{\varphi}')}{a - r}, \end{aligned}\right\} \quad . \quad 5)$$

$$\left.\begin{aligned} 2L_x &= \frac{(\varepsilon^2 - 1)\, m a\, (\dot{x}' - r\dot{\varphi}')^2}{a - r} \\ 2L_y &= f\frac{(1+\varepsilon)^2 m a\, (\dot{x}' - r\dot{\varphi}'^2)^2}{a - r}\left[\frac{fa + n}{a - r} - \frac{2}{1+\varepsilon}\cdot\frac{\dot{y}' + n\dot{\varphi}'}{\dot{x}' - r\dot{\varphi}'}\right], \end{aligned}\right\} \quad . \quad 6)$$

worin nach Gl. 8) § 75

$$a = \frac{k^2}{fn - r}, \quad \frac{a}{a - r} = \frac{k^2}{k^2 + r^2 - fnr}, \quad \frac{fa + n}{a - r} = \frac{f(k^2 + n^2) - nr}{k^2 + r^2 - fnr} \quad 7)$$

zu setzen ist. Im Falle des Zentralstoßes gegen die feste Wand wird daraus mit $r = 0$

$$\frac{k^2}{fn}(\dot{\varphi}'' - \dot{\varphi}') = \dot{x}'' - \dot{x}' = \frac{\dot{y}'' - \dot{y}'}{f} = -(1+\varepsilon)\dot{x}'. \quad \dot{x}'' = -\varepsilon\dot{x}', \quad 5\text{a})$$

$$\left.\begin{aligned} 2L_x &= (\varepsilon^2 - 1)\, m\dot{x}'^2, \\ 2L_y &= f(1+\varepsilon)^2 m\dot{x}'^2\left(f\frac{k^2 + n^2}{k^2} - \frac{2}{1+\varepsilon}\,\frac{\dot{y}' - n\dot{\varphi}'}{\dot{x}'}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \quad 6\text{a})$$

und beim Wegfall der Reibung

$$\dot{x}'' = -\varepsilon\dot{x}', \quad 2L_x = (\varepsilon^2 - 1)\, m\dot{x}'^2, \quad \dot{\varphi}'' = \dot{\varphi}', \quad \dot{y}'' = \dot{y}', \quad 6\text{b})$$

d. h. in beiden Fällen ein Rückprall von der Wand mit verminderten Laufteilen $\dot{x}$ und $\dot{y}$, solange $\varepsilon < 1$.

1. Beispiel. Zur Ermittlung der Stoßziffer bedient man sich zweckmäßig des Aufpralles einer von der Höhe h' auf eine wagerechte mit der Unterlage fest verbundenen Platte auftreffenden Kugel von der Masse m. Dann ist deren Fallgeschwindigkeit $\dot{x}' = \sqrt{2gh'}$ und die Steighöhe h'' nach dem Rückprall folgt aus $\dot{x}'' = \sqrt{2gh''}$, wobei nach (6b) $\dot{x}'' = -\varepsilon\dot{x}'$ wird. Mithin ergibt sich die Stoßziffer durch Ausschalten der Laufwerte zu

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{h''}{h'}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 8)$$

und der Stoßverlust nach 6b) zu

$$L_x = (\varepsilon^2 \dot{x}'^2 - \dot{x}'^2)\frac{m}{2} = mg\,(h'' - h') \quad \text{8a)}$$

Wiederholt man den Versuch mit Platten von verschiedener Größe und anderer Auflagerung, so wird man im allgemeinen andere Werte für ε erhalten, so daß die Stoßziffer nicht nur von den Stoffen der sich berührenden Körper, sondern auch von deren Größe, Form und Auflage abhängt. Daher kommt es auch, daß hierüber im Gegensatz zu der Reibungsziffer, die nur von der Oberflächenbeschaffenheit an der Berührungsstelle von Körpern abhängt, keine einheitlichen Angaben vorliegen.

2. Beispiel. Läßt man eine vermittels eines Fadens von der Länge h aufgehängte Kugel nach ihrer Auslenkung gegen eine feste Wand nach Abb. 284 stoßen, so bestimmt sich zunächst ihr Lauf $\dot{x}'$ aus der Fallhöhe h' durch die Formel

$$\dot{x}'^2 + k^2\,\dot{\varphi}'^2 = 2\,g h', \qquad h\,\dot{\varphi}' = \dot{x}',$$

also

$$\dot{x}'^2\left(1 + \frac{k^2}{h^2}\right) = 2\,g h' = \dot{\varphi}'^2\,(h^2 + k^2) \quad \text{9)}$$

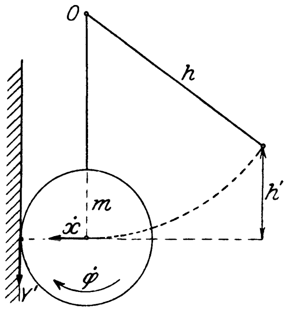

Abb. 284.

Wegen des hier auftretenden Drehwertes vor der Berührung mit der Wand haben wir es mit einem schiefen Zentralstoß zu tun, der beim Vorhandensein von Reibung eine Änderung von $\dot{\varphi}$ und $\dot{y}$ bedingt. Dürfen wir von der Fadenspannung als kleine Kraft gegenüber den durch den Stoß geweckten Kraftanteilen absehen, so gelten hierfür die Gl. 5a) und 6a), also, da $\dot{y}' = 0$

$$\dot{x}'' = -\,\varepsilon\,\dot{x}', \qquad \dot{y}'' = -\,(1+\varepsilon)\,\dot{x}'\,f, \qquad \dot{\varphi}'' = \dot{\varphi}' - \frac{fn}{k^2}(1+\varepsilon)\,\dot{x}', \quad \text{10)}$$

worin jetzt n den Kugelhalbmesser bedeutet.

Da die Reibung an der Berührungsstelle nur von der Drehung $\dot{\varphi}'$ bedingt ist, der eine Verschiebung des Berührungspunktes nach oben entspricht, so ist sie nach unten gerichtet und würde demgemäß auch eine Verschiebung des Kugelschwerpunktes nach unten mit dem Lauf $\dot{y}''$ zur Folge haben. Nehmen wir entsprechend der Vernachlässigung der Fadenspannung gegen die Stoßkraftanteile an, daß der Faden hinreichend nachgiebig ist, um dies zuzulassen, so ergibt sich eine Gesamtverschiebung des Berührungspunktes nach oben mit $h\,\dot{\varphi}' = \dot{x}'$

$$n\,\dot{\varphi}'' + \dot{y}'' = \dot{x}'\left[\frac{n}{h} - f(1+\varepsilon)\left(1 + \frac{n^2}{k^2}\right)\right], \quad \text{10a)}$$

die mit dem Vorzeichenwechsel ihren Sinn verliert, da alsdann auch die Reibung sich umkehrt. Das wird aber bei einigermaßen beträchtlichen Werten von f und hinreichend langem Faden h praktisch immer eintreten und hat dann ein Erlöschen der Drehung und der Verschiebung des Berührungspunktes zur Folge, so daß der Rückprall mit $\dot{\varphi}'' = 0$ erfolgt und auf eine Steighöhe h'' führt, die sich aus

$$2\,g h'' = \dot{x}''^2 = \varepsilon^2\,\dot{x}'^2 \quad \text{10b)}$$

berechnet. Dies liefert in Verbindung mit 9) für die Stoßziffer

$$\varepsilon^2 = \frac{h''}{h'}\left(1 + \frac{k^2}{h^2}\right) \quad \text{11)}$$

Erfolgt der Stoß dagegen reibungsfrei, so tritt keine Verschiebung parallel der Wand ein und der Drehwert $\dot{\varphi}'$ bleibt auch nach dem Stoß erhalten. Dadurch aber wird eine Auslenkung des Fadens bewirkt, die ein Moment der Fadenspannung in bezug auf den Kugelmittelpunkt weckt und so auf Drehschwingungen der Kugel während ihrer Aufwärtsbewegung nach dem Stoße wie beim Doppelpendel führt.

3. Beispiel. Eine schräge an die feste Wand ohne anfängliche Drehung anprallende Kugel ändert ihre Laufteile und Drehwerte nach den Formeln 5a), also ist:

$$\dot x'' = -\varepsilon\,\dot x', \quad \dot y'' = \dot y' - (1+\varepsilon) f \dot x', \quad \dot\varphi'' = -\frac{f n}{k^2}(1+\varepsilon)\,\dot x' \quad . \; . \quad 12)$$

mit den Ein- und Ausfallwinkeln $\beta'\,\beta''$ gegen die Stoßnormale

$$\operatorname{tg}\beta' = \frac{\dot y'}{\dot x'}, \quad \operatorname{tg}\beta'' = \frac{\dot y''}{\dot x''} = -\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{tg}\beta' + \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} f. \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 12\text{a})$$

Der durch die Reibung beim Stoß geweckte Drehwert hat nach Abb. 285 den gleichen Sinn wie beim Rollen der Kugel auf der Wand. Für reibungsfreien elastischen Stoß wird mit $f=0$, $\varepsilon=1$, $\dot x'' = -\dot x'$, $\dot y'' = \dot y'$, $\dot\varphi'' = 0$, $\beta'' = -\beta'$, so daß also die Kugel mit demselben Ausfallwinkel auf der andern Seite der Stoßnormale zurückprallt wie der Lichtstrahl an einem Spiegel.

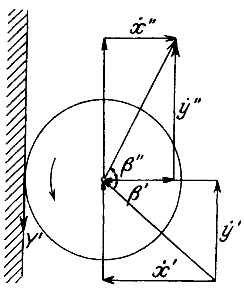

Abb. 285.

Beim vollkommen unelastischen Stoß wird $\varepsilon = 0$, also

$$\left.\begin{aligned} &\dot x'' = 0, \quad \dot y'' = \dot y' - f\dot x' \\ &\dot\varphi'' = -\frac{f n}{k^2}\dot x', \quad \operatorname{tg}\beta'' = \infty \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad 12\text{b})$$

wonach die Kugel nach dem Stoß unabhängig von ihrer ursprünglichen Richtung an der Wand rollt und gleitet.

4. Beispiel. Für den Zusammenstoß zweier Kugeln gelten die Formeln 3) und 4), die sich für gleiche Kugeln, also für $m_1 = m_2$ usw. vereinfachen in

$$\left.\begin{aligned} \frac{k^2}{f n}(\dot\varphi_1'' - \dot\varphi_1') = \dot x_1'' - \dot x_1' = \frac{\dot y_1'' - \dot y_1'}{f} \\ \frac{k^2}{f n}(\dot\varphi_2' - \dot\varphi_2'') = \dot x_2' - \dot x_2'' = \frac{\dot y_2' - \dot y_2''}{f} \end{aligned}\right\} = \frac{1+\varepsilon}{2}(\dot x_2' - \dot x_1'). \quad . \; . \; . \quad 13)$$

Daraus folgt für die Laufteile in der Stoßrichtung

$$2\dot x_1'' = (1+\varepsilon)\dot x_2' + (1-\varepsilon)\dot x_1', \quad 2\dot x_2'' = (1-\varepsilon)\dot x_2' + (1+\varepsilon)\dot x_1' \quad . \; 13\text{a})$$

und bei vollkommen elastischen Körpern mit $\varepsilon = 1$

$$\dot x_1'' = \dot x_2', \quad \dot x_2'' = \dot x_1'$$

d. h. ein völliger Austausch dieser Stoßläufe. Daher wird beim zentralen geraden Stoß einer bewegten Kugel gegen eine ruhende die letztere die Bewegung der ersteren annehmen, während diese liegen bleibt. Das gilt auch für eine ganze Reihe solcher sich berührender Kugeln, die beim Stoße durch eine gleich große bewegte einfach ihre Stoßläufe austauschen und daher liegen bleiben bis auf die letzte, welche die Bewegung der stoßenden Kugel annimmt.

5. Beispiel. Befindet sich in einem Kasten von der Länge l und dem Querschnitt F die sehr große Zahl von n sehr kleinen elastischen Kugeln von der Masse m, welche je zur Hälfte in der Längsrichtung l den sehr raschen Lauf $\pm\,\dot x$ besitzen, so werden dieselben beim Aufprallen an die Wand ihren Lauf gerade umkehren. Da sie zum Durchlaufen von l die Zeit $t = \frac{l}{\dot x}$ gebrauchen und werden in dieser $\frac{n}{2}$ Kugeln gerade einmal von der Wand zurückgeworfen, so dürfen wir hinreichend genau $\ddot x = \frac{\dot x'' - \dot x'}{t} = -\frac{2\dot x}{t}$ schreiben. Die Wand unterliegt also der Stoßkraft

$$X = \frac{n}{2} m \ddot x \approx -n m \frac{\dot x}{t} = -\frac{n m \dot x^2}{l}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 14)$$

die sich als ein Flächendruck p derart an der Wand äußert, daß $X = -p\,F$ ist. Mithin erhalten wir unter Einführung des Rauminhaltes $F\,l = V$ an Stelle von 14) auch:

$$p = \frac{n\,m\,\dot{x}^2}{F\,l} = \frac{n\,m}{V}\,\dot{x}^2, \qquad 14a)$$

oder wenn wir das Raumgewicht γ oder die Dichte δ der Gesamtmasse durch

$$n\,m = V\,\delta = V\,\frac{\gamma}{g}$$

einführen,

$$p = \delta\,\dot{x}^2 = \frac{\gamma}{g}\,\dot{x}^2. \qquad 14b)$$

Haben die Teilchen außerdem noch **gleiche Laufteile** in der y- und z-Richtung, so ist nach der Vektorregel der Gesamtlauf u gegeben durch:

$$u^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 3\,\dot{x}^2 = 3\,\dot{y}^2 = 3\,\dot{z}^2$$

und wir dürfen an Stelle von 14a) und 14b) auch schreiben

$$p = \frac{1}{3}\,\frac{n\,m}{V}\,u^2 = \frac{1}{3}\,\delta\,u^2 = \frac{1}{3}\,\frac{\gamma}{g}\,u^2, \qquad 14c)$$

d. h. **eine große Zahl in einem Gefäß hin- und herbewegter elastischer Kugeln übt auf die Wände einen der Gesamtwucht aller Kugeln in der Raumeinheit verhältnisgleichen Druck aus.**

Setzt man noch die Wucht eines Teilchens

$$\frac{m\,u^2}{2} = T,$$

so wird daraus

$$p\,V = \tfrac{2}{3}\,n\,T$$

eine Formel, welche das Verhalten der sogen. vollkommenen **Gase** darstellt, wenn unter T deren Temperatur verstanden wird. Diese Körper dürfen wir somit als eine große Zahl mit gleichen Laufteilen durcheinander schwirrender elastischer Kugeln auffassen, deren Stoß gegen die Gefäßwände den Druck hervorruft. Die eingehende Erörterung dieses Gegenstandes mit verschiedenen Werten und Richtungen von u sowie unter Berücksichtigung der Zusammenstöße der Einzelteile gehört in die Wärmelehre.

§ 77. Der Stoß festgehaltener Scheiben. Wird eine mit dem Schwerpunktslauf $\dot{x}_0\,\dot{y}_0$ und dem Drehwert $\dot{\varphi}$ ursprünglich frei bewegte Scheibe m an einem Punkte x, y (A), Abb. 286, plötzlich **festgehalten**, so tritt dort eine Stoßkraft mit den Anteilen $X'\,Y'$ auf, so zwar, daß mit Vernachlässigung anderer Massenkräfte

$$\left.\begin{aligned} X' = m\,\ddot{x}_0, \qquad Y' = m\,\ddot{y}_0 \\ Y'(x - x_0) - X'(y - y_0) = m\,k_0^2\,\ddot{\varphi} \end{aligned}\right\} \qquad 1)$$

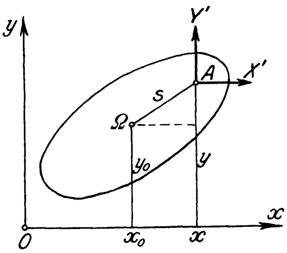

Abb. 286.

gilt. Die Festhaltung bedingt ferner das Verschwinden der schließlichen Laufteile am Punkte $x\,y$, also

$$\dot{x}'' = \dot{x}_0'' - (y - y_0)\,\dot{\varphi}'' = 0, \qquad \dot{y}'' = \dot{y}_0'' + (x - x_0)\,\dot{\varphi}'' = 0, \qquad 2)$$

während die Ausschaltung der Stoßkräfte $X'\,Y'$ aus 1) auf

$$\ddot{y}_0\,(x - x_0) - \ddot{x}_0\,(y - y_0) = k_0^2\,\ddot{\varphi},$$

oder nach Integration zwischen den Laufwerten vor und nach dem Stoße bei unveränderten Lagengrößen $x\,y$, $x_0\,y_0$ auf

$$(\dot y_0'' - \dot y_0')(x - x_0) - (\dot x_0'' - \dot x_0')(y - y_0) = k_0^2(\dot\varphi'' - \dot\varphi') \quad . \quad 3)$$

führt. Setzen wir in diese Formel die Werte von $\dot x_0''$ und $\dot y_0''$ aus 2) ein, so wird mit $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = s^2$, wobei s den Schwerpunktsabstand des festgehaltenen Punktes bedeutet,

$$\left.\begin{aligned} (k_0^2 + s^2)\,\dot\varphi'' &= k_0^2\,\dot\varphi' + \dot x_0'(y - y_0) - \dot y_0'(x - x_0) \\ \dot x_0'' = (y - y_0)\,\dot\varphi'', &\qquad \dot y_0'' = -(x - x_0)\,\dot\varphi'' \end{aligned}\right\}, \quad . \; 3a)$$

so daß als Ergebnis eine Drehung um den Festpunkt $x\,y$ mit dem Drehwert $\dot\varphi''$ übrig bleibt. Da $m(k_0^2 + s^2)$ das Schwungmoment um den Festpunkt ist, so ergibt sich mit $\dot x_0^2 + \dot y_0^2 = v^2$ der Arbeitsverlust durch das Festhalten mit Rücksicht auf 3a) zu

$$L = \frac{m}{2}(k_0^2 + s^2)\,\dot\varphi''^2 - \frac{m}{2}(v_0'^2 + k_0^2\,\dot\varphi'^2). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

Den Festpunkt können wir uns auch als Berührungsstelle der bewegten Scheibe mit einer unendlich großen ruhenden Masse vorstellen, und ersehen aus dem Verschwinden der zugehörigen Laufwerte 2) nach der Festhaltung, daß diese einem vollkommen unelastischen Stoße in beiden Achsrichtungen durchaus gleichwertig ist.

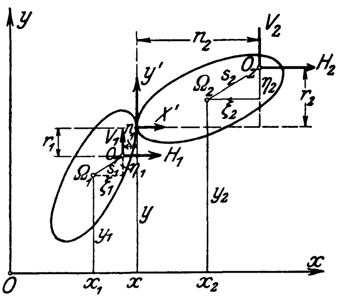

Abb. 287.

Sind die beiden aneinander stoßenden Scheiben von vornherein um feste Punkte mit den Schwerpunktsabständen $s_1\,s_2$ und den entsprechenden Achsabständen $\xi_1\,\eta_1$, $\xi_2\,\eta_2$ drehbar, Abb. 287, so treten dort Auflagekräfte auf, deren Achsenanteile $H_1\,V_1$, $H_2\,V_2$ sein mögen. Alsdann erhalten wir an Stelle der Bewegungsformeln 2) § 75 mit dem Berührungspunkte $x\,y$

$$\left.\begin{aligned} X' + H_1 = m_1\,\ddot x_1, &\qquad Y' + V_1 = m_1\,\ddot y_1 \\ Y'(x - x_1) - X'(y - y_1) + V_1\,\xi_1 &- H_1\,\eta_1 = m_1\,k_1^2\,\ddot\varphi_1 \\ -X' + H_2 = m_2\,\ddot x_2, &\qquad -Y' + V_2 = m_2\,\ddot y_2 \\ -Y'(x - x_2) + X'(y - y_2) + V_2\,\xi_2 &- H_2\,\eta_2 = m_2\,k_2^2\,\ddot\varphi_2 \end{aligned}\right\} \quad 5)$$

und als Bedingungen für die festen Drehpunkte:

$$\left.\begin{aligned} \dot x_1 - \eta_1\,\dot\varphi_1 = \dot x_2 - \eta_2\,\dot\varphi_2 = 0, &\qquad \xi_1^2 + \eta_1^2 = s_1^2 \\ \dot y_1 + \xi_1\,\dot\varphi_1 = \dot y_2 + \xi_2\,\dot\varphi_2 = 0, &\qquad \xi_2^2 + \eta_2^2 = s_2^2 \end{aligned}\right\} . \; . \; . \quad 6)$$

Nach Ausschaltung der Auflagekräfte $H\,V$ aus 5) bleiben nur noch die beiden Momentengleichungen

$$\begin{aligned} Y'(x - x_1 - \xi_1) - X'(y - y_1 - \eta_1) &= m_1(k_1^2\,\ddot\varphi_1 - \xi_1\,\ddot y_1 + \eta_1\,\ddot x_1) \\ X'(y - y_2 - \eta_2) - Y'(x - x_2 - \xi_2) &= m_2(k_2^2\,\ddot\varphi_2 - \xi_2\,\ddot y_2 + \eta_2\,\ddot x_2) \end{aligned}$$

übrig, die sich wegen 6) vereinfachen in

$$\left.\begin{aligned} Y'(x-x_1-\xi_1)-X'(y-y_1-\eta_1)&=m_1(k_1^2+s_1^2)\ddot{\varphi}_1\\ X'(y-y_2-\eta_2)-Y'(x-x_2-\xi_2)&=m_2(k_2^2+s_2^2)\ddot{\varphi}_2 \end{aligned}\right\} . \quad 7)$$

und mit Rücksicht darauf, daß $(k_1^2+s_1^2)m_1$ bzw. $(k_2^2+s_2^2)m_2$ die Schwungmomente der Scheiben um ihre Drehpole $O_1 O_2$ bedeuten, auch von vornherein hätten angeschrieben werden können. Wir vereinfachen sie zunächst durch die Abkürzungen für die Hebelarme der Stoßkraftanteile in $O_1 O_2$, Abb. 287,

$$\left.\begin{aligned} x-x_1-\xi_1=n_1,\quad y-y_1-\eta_1=r_1,\quad k_1^2+s_1^2=k_1'^2\\ x_2-x+\xi_2=n_2,\quad y_2-y+\eta_2=r_2,\quad k_2^2+s_2^2=k_2'^2 \end{aligned}\right\}, \quad . \quad 8)$$

sowie mit $$Y'=fX' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9)$$

in $$X'(fn_1-r_1)=m_1 k_1'^2\ddot{\varphi}_1,\quad X'(fn_2-r_2)=m_2 k_2'^2\ddot{\varphi}_2 \quad . \quad . \quad 7a)$$

oder mit $$\frac{k_1'^2}{fn_1-r_1}=a_1,\quad \frac{k_2'^2}{fn_2-r_2}=a_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8a)$$

kürzer $$X'=m_1 a_1\ddot{\varphi}_1,\quad X'=m_2 a_2\ddot{\varphi}_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7b)$$

Daraus aber folgt nach Ausschaltung von X' und Integration zwischen dem Anfangs- und Endzustand

$$m_1 a_1(\dot{\varphi}_1''-\dot{\varphi}_1')=m_2 a_2(\dot{\varphi}_2''-\dot{\varphi}_2') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 10)$$

Da nun $r_1 d\varphi_1$, $r_2 d\varphi_2$ die Normalverschiebungen, $n_1 d\varphi_1$, $n_2 d\varphi_2$ die Tangentialverschiebungen der Scheiben an der Berührungsstelle sind, so ist

$$\begin{aligned} L&=f\int X'(n_1 d\varphi_1+n_2 d\varphi_2)-\int X'(r_1 d\varphi_1+r_2 d\varphi_2)\\ &=\tfrac{1}{2}m_1 k_1^2(\dot{\varphi}_1''^2-\dot{\varphi}_1'^2)+\tfrac{1}{2}m_2 k_2^2(\dot{\varphi}_2''^2-\dot{\varphi}_2'^2) \quad . \quad . \quad . \quad 11) \end{aligned}$$

die gesamte Stoßarbeit. Deren erster Teil schreibt sich mit 7b)

$$L_y=f\int X'(n_1 d\varphi_1+n_2 d\varphi_2)=f\int(m_1 a_1 n_1\dot{\varphi}_1 d\dot{\varphi}_1+m_2 a_2 n_2\dot{\varphi}_2 d\dot{\varphi}_2) \quad 11a)$$

und rührt von der Reibung her, während der zweite

$$L_x=-\int X'(r_1 d\varphi_1+r_2 d\varphi_2)=-\int(m_1 a_1 r_1\dot{\varphi}_1 d\dot{\varphi}_1+m_2 a_2 r_2\dot{\varphi}_2 d\dot{\varphi}_2) \quad 11b)$$

durch die Formänderung an der Berührungsstelle in Richtung der normalen Stoßkraft X' bedingt ist.

Verläuft der Stoß vollkommen elastisch, so verschwindet L_x, also ist nach Integration

$$m_1 a_1 r_1(\dot{\varphi}_1''^2-\dot{\varphi}_1'^2)+m_2 a_2 r_2(\dot{\varphi}_2''^2-\dot{\varphi}_2'^2)=0, \quad . \quad . \quad 12)$$

woraus sich in Verbindung mit 10)

$$r_1(\dot{\varphi}_1''+\dot{\varphi}_1')+r_2(\dot{\varphi}_2''+\dot{\varphi}_2')=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 13)$$

also schließlich

$$\frac{\dot{\varphi}_1''-\dot{\varphi}_1'}{m_2 a_2}=\frac{\dot{\varphi}_2''-\dot{\varphi}_2'}{m_1 a_1}=\frac{-2(r_1\dot{\varphi}_1'+r_2\dot{\varphi}_2')}{m_1 a_1 r_2+m_2 a_2 r_1} \quad . \quad . \quad . \quad 14)$$

ergibt. Demgegenüber erhalten wir nach dem unelastischen Stoß übereinstimmende Normalläufe, also mit Rücksicht auf den Drehsinn, Abb. 287,

$$r_1\dot{\varphi}_1'' + r_2\dot{\varphi}_2'' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 13a)$$

und mit 10)

$$\frac{\dot{\varphi}_1'' - \dot{\varphi}_1'}{m_2 a_2} = \frac{\dot{\varphi}_2'' - \dot{\varphi}_2'}{m_1 a_1} = \frac{-(r_1\dot{\varphi}_1' + r_2\dot{\varphi}_2')}{m_1 a_1 r_2 + m_2 a_2 r_1}, \quad \ldots \quad 14a)$$

also wie schon bei freien Scheiben gerade die halben Werte wie beim elastischen Stoß. Führen wir daher wie früher eine Stoßziffer $0 < \varepsilon < 1$ ein, die für den elastischen Stoß $\varepsilon = 1$ wird und beim unelastischen verschwindet, so erhalten wir an Stelle von 13) und 13a)

$$r_1\dot{\varphi}_1'' + r_2\dot{\varphi}_2'' = -\varepsilon(r_1\dot{\varphi}_1' + r_2\dot{\varphi}_2'), \quad \ldots \quad 15)$$

oder $r_1(\dot{\varphi}_1'' - \dot{\varphi}_1') + r_2(\dot{\varphi}_2'' - \dot{\varphi}_2') = -(1 + \varepsilon)(r_1\dot{\varphi}_1' + r_2\dot{\varphi}_2')$, 15a)

und es folgt allgemein

$$\frac{\dot{\varphi}_1'' - \dot{\varphi}_1'}{m_2 a_2} = \frac{\dot{\varphi}_2'' - \dot{\varphi}_2'}{m_1 a_1} = -\frac{(1+\varepsilon)(r_1\dot{\varphi}_1' + r_2\dot{\varphi}_2')}{m_1 a_1 r_2 + m_2 a_2 r_1} \quad \ldots \quad 16)$$

Nun sind die Stoßarbeiten in normaler und tangentialer Richtung nach 11a), 11b) unter Beachtung von 7b)

$$-2L_x = m_1 a_1 r_1(\dot{\varphi}_1''^2 - \dot{\varphi}_1'^2) + m_2 a_2 r_2(\dot{\varphi}_2''^2 - \dot{\varphi}_2'^2)$$

$$\frac{2L_y}{f} = m_1 a_1 n_1(\dot{\varphi}_1''^2 - \dot{\varphi}_1'^2) + m_2 a_2 n_2(\dot{\varphi}_2''^2 - \dot{\varphi}_2'^2),$$

oder wegen 10)

$$-2L_x = m_1 a_1(\dot{\varphi}_1'' - \dot{\varphi}_1')\,[r_1(\dot{\varphi}_1'' + \dot{\varphi}_1') + r_2(\dot{\varphi}_2'' + \dot{\varphi}_2')]$$

$$\frac{2L_y}{f} = m_1 a_1(\dot{\varphi}_1'' - \dot{\varphi}_1')\,[n_1(\dot{\varphi}_1'' + \dot{\varphi}_1') + n_2(\dot{\varphi}_2'' + \dot{\varphi}_2')]\,.$$

Schalten wir aus den großen Klammern der ersten Zeile $r_1\dot{\varphi}_1'' + r_2\dot{\varphi}_2''$ durch 15) aus, während für die zweite Zeile diese Klammer übergeht in

$$n_1(\dot{\varphi}_1'' - \dot{\varphi}_1') + n_2(\dot{\varphi}_2'' - \dot{\varphi}_2') + 2(n_1\dot{\varphi}_1' + n_2\dot{\varphi}_2'),$$

so wird nach Ersatz der Größen $\dot{\varphi}_1'' - \dot{\varphi}_1'$ durch 16) schließlich

$$\left.\begin{aligned} L_x &= \frac{(1-\varepsilon^2)\,m_1 m_2 a_1 a_2 (r_1\dot{\varphi}_1' + r_2\dot{\varphi}_2')^2}{2(m_1 a_1 r_2 + m_2 a_2 r_1)} \\ L_y &= f\frac{(1+\varepsilon)^2 m_1 m_2 a_1 a_2 (r_1\dot{\varphi}_1' + r_2\dot{\varphi}_2')^2}{2(m_1 a_1 r_2 + m_2 a_2 r_1)} \\ &\left(\frac{m_1 a_1 n_2 + m_2 a_2 n_1}{m_1 a_1 r_2 + m_2 a_2 r_1} - \frac{2}{1+\varepsilon}\,\frac{n_1\dot{\varphi}_1' + n_2\dot{\varphi}_2'}{r_1\dot{\varphi}_1' + r_2\dot{\varphi}_2'}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 17)$$

Beide Arbeitsbeträge sind als Stoßverluste negativ, wie man aus dem negativen Vorzeichen von a_1 und a_2 in 8a) für $f = 0$ ohne weiteres erkennt. Daraus folgt, daß für beliebig große Reibungsziffern die negativen Vorzeichen von $a_1\ a_2$ und damit von $L_x\ L_y$ nur dann aufrecht zu erhalten sind, wenn stets $f < 0$, also mit negativem Vorzeichen eingeführt wird, was wir schon im § 75 als notwendig erkannten.

Verlangen wir nun, daß die Auflagekräfte H, V in den Drehpolen O_1 O_2 verschwinden, so wird die Scheibenbewegung frei und wir erhalten an Stelle der Kraftgleichungen in 5)

$$\left.\begin{array}{ll} X' = m_1 \ddot{x}_1, & -X' = m_2 \ddot{x}_2 \\ Y' = m_1 \ddot{y}_1, & -Y' = m_2 \ddot{y}_2 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 5\text{a})$$

oder wegen 6)

$$\left.\begin{array}{ll} X' = m_1 \eta_1 \ddot{\varphi}_1, & -X' = m_2 \eta_2 \ddot{\varphi}_2 \\ Y' = -m_1 \xi_1 \ddot{\varphi}, & Y' = m_2 \xi_2 \ddot{\varphi}_2 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 5\text{b})$$

Dies gibt in Verbindung mit 7b) und $fX = Y$

$$\left.\begin{array}{ll} \eta_1 = a_1, & \eta_2 = -a_2 \\ \xi_1 = -f a_1, & \xi_2 = f a_2 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 18)$$

in Übereinstimmung mit den Ergebnissen 16) § 75 mit Beachtung der dort verschiedenen Vorzeichen von a_1 und a_2.

1. Beispiel. Wird eine der beiden Massen unendlich, z. B. $m_2 = \infty$, also auch $r_2 = \infty$, $a_2 = \infty$, so wird mit $r_2 \dot{\varphi}_2 = n_2 \dot{\varphi}_2 = 0$ aus 15) oder 16) für den Stoß gegen eine feste Wand

$$\dot{\varphi}'' = -\varepsilon \dot{\varphi}' \quad \ldots\ldots \quad 15\text{b})$$

und aus 17)

$$2 L_x = (1 - \varepsilon^2)\, m a r \dot{\varphi}'^2, \qquad 2 L_y = -f (1 - \varepsilon^2)\, m a n \dot{\varphi}'^2 \quad \ldots \quad 17\text{a})$$

also für reibungsfreien Stoß mit $ar = -k^2$ nach 8a)

$$2 L_x = (\varepsilon^2 - 1)\, k^2 \dot{\varphi}'^2 m \quad \ldots\ldots \quad 17\text{b})$$

2. Beispiel. Rückt der Drehpol einer der beiden Scheiben in der y-Richtung ins Unendliche, Abb. 288, so geht deren Bewegung in eine geradlinige Verschiebung derart über, daß mit $r_2 = \infty$, $k_2^2 = k_2'^2 = \infty$, $a_2 = -k_2'^2 : r_2 = -\infty$, auch bei endlichem n_2, $\dot{\varphi}_2 = 0$ und $r_2 \dot{\varphi}_2 = -a_2 \dot{\varphi}_2 = \dot{x}_2$ wird. Wir erhalten also für diesen Zusammenstoß der drehbaren Scheibe m_1 mit der geradlinig bewegten Masse m_2 an Stelle der beiden Formeln 10) und 15a)

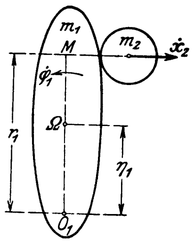

Abb. 288.

$$\left.\begin{array}{l} m_1 a_1 (\dot{\varphi}_1'' - \dot{\varphi}_1') + m_2 (\dot{x}_2'' - \dot{x}_2') = 0 \\ r_1 (\dot{\varphi}_1'' - \dot{\varphi}_1') + \dot{x}_2'' - \dot{x}_2' = -(1 + \varepsilon)(r_1 \dot{\varphi}_1' + \dot{x}_2') \end{array}\right\} \quad 15\text{c})$$

und daraus

$$\frac{\dot{\varphi}_1'' - \dot{\varphi}_1'}{m_2} = \frac{\dot{x}_2' - \dot{x}_2''}{m_1 a_1} = \frac{(1 + \varepsilon)(r_1 \dot{\varphi}_1' + \dot{x}_2')}{m_1 a_1 - m_2 r_1} \qquad 19)$$

mit dem Stoßverlust

$$\left.\begin{array}{l} L_x = \dfrac{1 - \varepsilon^2}{2} \dfrac{m_1 m_2 a_1 (r_1 \dot{\varphi}_1' + \dot{x}_2')^2}{m_2 r_1 - m_1 a_1} \\[2ex] L_y = \dfrac{(1+\varepsilon)^2}{2} f \dfrac{m_1 m_2 a_1 (r_1 \dot{\varphi}_1' + \dot{x}_2')^2}{m_2 r_1 - m_1 a_1} \left[\dfrac{m_2 n_1}{m_2 r_1 - m_1 a_1} - \dfrac{2}{1+\varepsilon} \dfrac{n_1 \dot{\varphi}_1'}{r_1 \dot{\varphi}_1' + \dot{x}_2'}\right] \end{array}\right\}. \quad 20)$$

Für den reibungsfreien Stoß wird zunächst aus 8a)

$$k^2 = -a_1 r_1 \quad \ldots\ldots \quad 8\text{b})$$

und damit aus 19)

$$\frac{\dot\varphi_1'' - \dot\varphi_1'}{m_2 r_1} = \frac{\dot x_2'' - \dot x_2'}{m_1 k^2} = -\frac{(1+\varepsilon)(r_1\dot\varphi_1' + \dot x_2')}{m_2 r_1^2 + m_1 k^2}.$$

Soll dieser Stoß keine Wirkung auf den Pol O_1 ausüben, so muß nach 18) dessen Schwerpunktsabstand senkrecht zur Stoßnormale $\eta_1 = a_1$ sein und darum wegen 8b) das Lot $-r_1$ von O_1 auf die Stoßnormale mit der Pendellänge von m_1 in O_1 übereinstimmen. Den Fußpunkt M dieses Lotes nennt man darum auch den Mittelpunkt des Stoßes oder den Stoßpunkt kurzweg. Bei der zahlenmäßigen Verwertung der vorstehenden Gleichungen ist zu beachten, daß der positive Drehsinn $\dot\varphi_1'$ wie in Abb. 288 angedeutet, dem positiven Lauf $\dot x_2$ der Masse m_2 entgegengesetzt gerichtet ist.

3. Beispiel. Handelt es sich um den Stoß einer drehbaren Scheibe m_1 gegen eine solche, die vermöge ihrer sehr großen Masse m_2 keine Änderung des Drehwertes $\dot\varphi_2$ erleidet, so wird mit $\dot\varphi_2 = \dot\varphi_2'' = \dot\varphi_2' = \omega$ und $m_2 = \infty$ aus 15)

$$r_1\dot\varphi_1'' = -\varepsilon r_1\dot\varphi_1' - (1+\varepsilon) r_2\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 15\text{d})$$

und für reibungsfreien Stoß mit $a_1 r_1 = -k_1'^2$, $a_2 r_2 = -k_2'^2$ aus 17)

$$L_x = \frac{(\varepsilon^2 - 1) m_1 k_1'^2 (r_1\dot\varphi_1' + r_2\omega)^2}{2 r_1^2}, \quad L_y = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 17\text{c})$$

Nach diesen Formeln vollzieht sich u. a. der Antrieb eines sog. Schwanzhammers m_1, Abb. 289, durch eine Daumenwelle, die etwa mit einem Wasserrad durch ein Zahnradvorgelege unter Zwischenschaltung eines Schwungrades gekuppelt ist und sich gleichförmig dreht. Da der Hammer vor dem Anstoß durch den Daumen ruht, nach dem Stoß aber mit diesem eine Zeitlang in Berührung bleibt, so ist der Stoß als unelastisch anzusehen. Wir erhalten also mit $\varepsilon = 0$, $\dot\varphi_1' = 0$ aus 15d) und 17c)

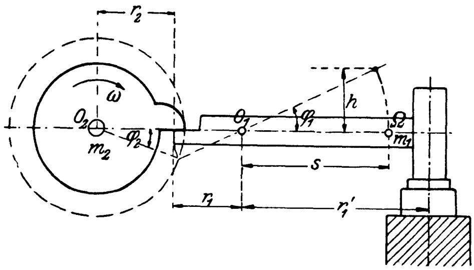

Abb. 289.

$$\left.\begin{aligned} r_1\dot\varphi_1'' &= -r_2\omega \\ L_x &= -\frac{m_1 k_1'^2 r_2^2\omega^2}{2 r_1^2} \end{aligned}\right\}, \quad 21)$$

während der Stoß des Hammers auf den Amboß, der mit der Erde fest verbunden und in Ruhe verharrt, nach den Gl. 15b) und 17b) erfolgt. Auch hier kann der Stoß als unelastisch und reibungsfrei angesehen werden, so daß sich mit einer Fallhöhe h des Hammerschwerpunktes im Abstande s vom Drehpunkt $s\dot\varphi' = \sqrt{2gh}$ und die Stoßarbeit

$$L_x' = -\frac{m_1 k_1^2 g h}{s^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 21\text{a})$$

ergibt, die allerdings angesichts der beabsichtigten Formänderung des Werkstückes zwischen Hammer und Amboß nicht mehr als Verlust zu betrachten ist. Als solcher kommt vielmehr nur der Betrag 21) in Frage, so daß sich mit einer Nutzarbeit von $m_1 g h$ an der Daumenwelle ein Arbeitsaufwand von

$$L = m_1\left(gh + \frac{k_1'^2 r_2^2\omega^2}{2 r_1^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 22)$$

mit einem Wirkungsgrade der Vorrichtung

$$\eta = \frac{m_1 g h}{L} = \frac{1}{1 + \dfrac{k_1'^2 r_2^2\omega^2}{2 g h r_1^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 22\text{a})$$

berechnet.

XVI. Die Seilbewegung.

§ 78. Die Bewegungsgleichungen eines Seiles. Denken wir uns die aufeinanderfolgenden Lagen, Abb. 290, eines in der Ebene bewegten Seiles gegeben, so sind die Achsenabstände x, y jedes Seilpunktes durch dessen Entfernung s von einem besonders ins Auge gefaßten Punkte, gemessen auf dem Seile selbst bestimmt. Mithin sind die Achsenabstände Funktionen sowohl dieser Seillänge s, als auch der Zeit, in der sich die Lage des ganzen Seiles ändert, so daß wir für die Lagenänderungen

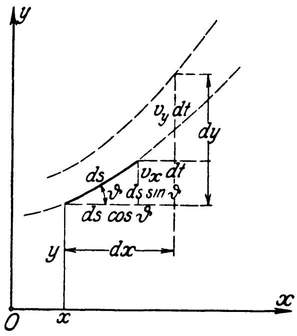

Abb. 290.

$$\left.\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial s} ds + \frac{\partial x}{\partial t} dt \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial s} ds + \frac{\partial y}{\partial t} dt \end{aligned}\right| \quad \ldots \quad 1)$$

zu schreiben haben. Hierin ist aber, wenn wir den Neigungswinkel ϑ des Elementes ds einer der Seilkurven für einen bestimmten Zeitpunkt betrachten,

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \cos\vartheta, \qquad \frac{\partial y}{\partial s} = \sin\vartheta, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 2)$$

während beim Übergang des Elementes ds von einer Lage zur andern in der unendlich kleinen Zeit dt

$$\frac{\partial x}{\partial t} = v_x, \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = v_y \quad \ldots \ldots \ldots \quad 3)$$

die wirklichen Laufteile des Elementes bedeuten, welches selbst infolge der vorausgesetzten Linienstarre seine Länge nicht ändert. Damit erhalten wir durch partielle Ableitung von 2) nach der Zeit

$$\frac{\partial v_x}{\partial s} = -\frac{\partial \vartheta}{\partial t} \sin\vartheta, \qquad \frac{\partial v_y}{\partial s} = \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \cos\vartheta \,. \quad \ldots \ldots \quad 2a)$$

An dem Elemente von der Masse μds, worin $\mu = m : l$ die Masse der Längeneinheit des Seiles bedeutet, greift nun eine Außenkraft dQ mit den Achsenanteilen

$$dX = q_x \mu ds, \qquad dY = q_y \mu ds \quad \ldots \ldots \ldots \quad 4)$$

und an seinen Enden die Seilspannung S in der Richtung von ds, sowie die normal dazu gerichtete von der Steifigkeit bedingte Querkraft T an. Diese ändern sich von einem Ende des Elementes zum andern auf einer bestimmten Seilkurve, d. h. bei festgehaltener Zeit derart, daß parallel den Achsenrichtungen die beiden Kraftüberschüsse

$$dH = \frac{\partial}{\partial s}(S\cos\vartheta - T\sin\vartheta)\, ds, \qquad dV = \frac{\partial}{\partial s}(S\sin\vartheta + T\cos\vartheta)\, ds \quad 5)$$

übrig bleiben, die zu den Außenkraftanteilen 4) hinzutreten und zeitliche Laufänderungen derart bedingen, daß

$$dX + dH = \mu \frac{\partial v_x}{\partial t} ds, \qquad dY + dV = \mu \frac{\partial v_y}{\partial t} ds \quad . \; . \; . \quad 6)$$

wird. Mit 4) und 5) nehmen alsdann die Bewegungsgleichungen die Form

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s}(S \cos\vartheta - T \sin\vartheta) &= \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} - q_x\right) \\ \frac{\partial}{\partial s}(S \sin\vartheta + T \cos\vartheta) &= \mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial t} - q_y\right) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad 6a)$$

an, wozu noch nach Gl. 3a) § 53 die aus der Seilsteifigkeit folgende Bedingung

$$T = f_0 h \frac{\partial S}{\partial s} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 7)$$

tritt, in der f_0 die innere Seilreibungsziffer und h die Seildicke bedeuten. Die kinematischen Gleichungen 2a) sind nun im Verein mit den dynamischen Formeln 6a) und 7) gerade hinreichend, um bei vorgelegtem Kraftfelde, d. h. q_x, q_y die fünf Unbekannten $S, T, \vartheta, v_x, v_y$ in den Urveränderlichen s und t auszudrücken, woraus sich dann mit Hilfe von 1) oder wegen 2) und 3) durch

$$dx = ds \cos\vartheta + v_x dt, \qquad dy = ds \sin\vartheta + v_y dt \quad . \; . \; . \quad 1a)$$

die Achsenabstände x y selbst ergeben.

Für manche Zwecke ist es bequemer, an Stelle der Laufwerte $v_x v_y$ im festen xy Kreuz solche v_s, v_n in der augenblicklichen Tangential- und Normalrichtung zur Seillinie selbst durch die Beziehungen

$$v_x = v_s \cos\vartheta - v_n \sin\vartheta, \qquad v_y = v_s \sin\vartheta + v_n \cos\vartheta, \quad . \; . \; . \quad 8)$$

wie dies schon bei der Bewegung eines Punktes längs einer Bahn in § 8 geschehen ist, einzuführen. Dann folgt durch Ableitung nach s in Verbindung mit 2a)

$$\left(\frac{\partial v_s}{\partial s} - v_n \frac{\partial \vartheta}{\partial s}\right)\cos\vartheta - \left(\frac{\partial v_n}{\partial s} + v_s \frac{\partial \vartheta}{\partial s}\right)\sin\vartheta = -\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\sin\vartheta$$

$$\left(\frac{\partial v_s}{\partial s} - v_n \frac{\partial \vartheta}{\partial s}\right)\sin\vartheta + \left(\frac{\partial v_n}{\partial s} + v_s \frac{\partial \vartheta}{\partial s}\right)\cos\vartheta = \frac{\partial \vartheta}{\partial t}\cos\vartheta,$$

oder nach Ausschaltung von $\cos\vartheta$ $\sin\vartheta$ sowie mit

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial s} = \frac{1}{\varrho} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 9)$$

als neue kinematische Bedingungen

$$\frac{\partial v_s}{\partial s} - \frac{v_n}{\varrho} = 0, \qquad \frac{\partial v_n}{\partial s} + \frac{v_s}{\varrho} = \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 8a)$$

Schreiben wir ferner an Stelle von 6a) mit 9)

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial S}{\partial s}-\frac{T}{\varrho}\right)\cos\vartheta-\left(\frac{\partial T}{\partial s}+\frac{S}{\varrho}\right)\sin\vartheta=\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}-q_x\right)\\ \left(\frac{\partial S}{\partial s}-\frac{T}{\varrho}\right)\sin\vartheta+\left(\frac{\partial T}{\partial s}+\frac{S}{\varrho}\right)\cos\vartheta=\mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial t}-q_y\right)\end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad 10)$$

und ersetzen die Anlaufteile $\partial v_x : \partial t$, $\partial v_y : \partial t$ durch die rein zeitlichen Ableitungen von 8) und führen noch durch Erweiterung mit $\cos\vartheta$, $\sin\vartheta$, sowie Addition und Subtraktion den Tangential- und Normalanlauf q_s q_n der Außenkraft durch

$$q_x\cos\vartheta+q_y\sin\vartheta=q_s, \qquad q_y\cos\vartheta-q_x\sin\vartheta=q_n \quad . \; . \quad 11)$$

ein, so erhalten wir an Stelle von 10) die neuen Bewegungsformeln

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial s}-\frac{T}{\varrho}=\mu\left(\frac{\partial v_s}{\partial t}-v_n\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\right)-\mu q_s\\ \frac{\partial T}{\partial s}+\frac{S}{\varrho}=\mu\left(\frac{\partial v_n}{\partial t}+v_s\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\right)-\mu q_n\end{aligned}\right\}, \; . \; . \; . \; . \; . \; 10\text{a})$$

zu denen noch die unveränderte Gl. 7) hinzutritt. Bei vorgelegtem Kraftfelde q_s, q_n genügen diese Formeln im Verein 8a) wieder zur Ermittlung der Unbekannten S, T, v_s, v_n, ϑ als Funktionen von s und t. Für ein vollkommen biegsames Seil verschwindet mit der inneren Seilreibung f_0 auch die Querkraft T, die sonst nach 7) nur wegfallen kann, wenn im steifen Seil die Spannung S an allen Stellen gleichzeitig denselben Wert besitzt, was eine zeitliche Änderung allerdings nicht ausschließt. Die Integration der Bewegungsgleichungen läßt sich übrigens auch mit $T=0$ nur in wenigen Sonderfällen durchführen, zu denen wir uns nunmehr wenden.

Unterliegt das vollkommen biegsame Seil in der lotrechten Ebene nur der Schwere, so haben wir an Stelle von 10a) mit $T=0$, $q_s=-g\sin\vartheta$, $q_n=-g\cos\vartheta$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial s}=\mu\left(\frac{\partial v_s}{\partial t}-v_n\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\right)+\mu g\sin\vartheta\\ \frac{S}{\varrho}=\mu\left(\frac{\partial v_n}{\partial t}+v_s\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\right)+\mu g\cos\vartheta\end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; 12)$$

Differenzieren wir jede dieser Formeln nochmals partiell nach s, addieren und subtrahieren die mit $1:\varrho=\partial\vartheta:\partial s$ erweiterte andere Gleichung, so verschwinden die mit g behafteten Glieder, und es bleibt

$$\frac{\partial^2 S}{\partial s^2}-\frac{S}{\varrho^2}=\mu\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v_s}{\partial s}-\frac{v_n}{\varrho}\right)-\left(\frac{\partial v_n}{\partial s}+\frac{v_s}{\varrho}\right)\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\right]$$

$$\frac{2}{\varrho}\frac{\partial S}{\partial s}+S\frac{\partial^2\vartheta}{\partial s^2}=\mu\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v_n}{\partial s}+\frac{v_s}{\varrho}\right)+\left(\frac{\partial v_s}{\partial s}-\frac{v_n}{\varrho}\right)\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\right],$$

oder mit Rücksicht auf die kinematischen Beziehungen 8a)

$$\frac{S}{\varrho^2}-\frac{\partial^2 S}{\partial s^2}=\mu\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\right)^2; \quad \frac{2}{\varrho}\frac{\partial S}{\partial s}+S\frac{\partial^2\vartheta}{\partial s^2}=\mu\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2} \quad . \quad . \quad . \quad 12\text{a)}$$

Setzen wir darin

$$\varrho\frac{\partial\vartheta}{\partial t}=u, \quad \frac{\partial\vartheta}{\partial t}=u\frac{\partial\vartheta}{\partial s}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8\text{b)}$$

so stellt u die Geschwindigkeit eines Massenpunktes längs der im allgemeinen selbst bewegten Seilkurve, die wir den Seillauf nennen wollen, dar. Außerdem aber können wir die linke Seite der zweiten Formel noch wegen $\partial\vartheta:\partial s=1:\varrho$ zusammenziehen und erhalten so an Stelle von 12a) die beiden übersichtlicheren Gleichungen

$$\frac{S-\mu u^2}{\varrho^2}=\frac{\partial^2 S}{\partial s^2}, \quad \frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{S^2}{\varrho}\right)=\mu\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2}, \quad . \quad . \quad . \quad 12\text{b)}$$

in denen die äußere Kraft überhaupt nicht mehr auftritt.

Für einen unveränderlichen Seillauf erhalten wir ferner aus 8b)

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2}=u\frac{\partial^2\vartheta}{\partial s\,\partial t}, \quad \frac{\partial^2\vartheta}{\partial t\,\partial s}=u\frac{\partial^2\vartheta}{\partial s^2},$$

also

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2}=u^2\frac{\partial^2\vartheta}{\partial s^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8\text{c)}$$

Damit wird aber aus der zweiten Gl. 12a)

$$\frac{2}{\varrho}\frac{\partial S}{\partial s}+(S-\mu u^2)\frac{\partial^2\vartheta}{\partial s^2}=0,$$

oder wegen der Unveränderlichkeit von u mit

$$S-\mu u^2=S' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 13\text{)}$$

$$\frac{2}{\varrho}\frac{\partial S'}{\partial s}+S'\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{\varrho}\right)=0.$$

Ziehen wir diesen Ausdruck noch zusammen und setzen 13) in die erste Gl. 12b) ein, so erhalten wir für beständigen Seillauf die Gleichungen

$$\frac{S'}{\varrho^2}=\frac{\partial^2 S'}{\partial s^2}, \quad \frac{1}{S'}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{S'^2}{\varrho}\right)=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 14\text{)}$$

welche die Zeit t nicht mehr enthalten.

1. Beispiel. Die Gleichungen 14) sind nun ersichtlich identisch erfüllt, wenn unabhängig von der Änderung von ϱ

$$S'=0 \quad \text{oder} \quad S=\mu u^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 13\text{a)}$$

wird. Alsdann aber ist wegen der Willkür von ϱ jede beliebige Seilkurve möglich, die wegen der Unabhängigkeit von der Zeit ihre Form nicht ändert, solange der an allen Stellen gleiche Seillauf seinen Wert beibehält. Von der Richtigkeit dieses Schlusses überzeugt man sich leicht an einem geschlossenen Seil oder Riemen, der über eine Rolle gelegt, von dieser gleichförmig mitgenommen wird, Abb. 291. Im Ruhezustande nimmt der herabhängende Teil die Form der gewöhnlichen Seilkurve an, die er nach Einleitung der Bewegung auch für jeden Wert des Seillaufes beibehält. Ändert man dagegen diese Form etwa durch einen Seitenstoß, wodurch das Seil einen Knick erhält, so bleibt derselbe an seinem Ort erhalten und wird von den einzelnen Seilelementen in stetiger Folge durchlaufen. Schlingt man ein Seil derart um die Rolle, daß seine Länge mit dem Rollenumfang übereinstimmt und streift es nach erteilter rascher Drehung ab, so behält es die Kreisform bei und rollt auf einer daneben befindlichen Unterlage wie eine starre Kreisscheibe fort. Das in sich gleichförmig bewegte Seil erfährt also durch seinen Lauf eine Versteifung, die aber nichts mit der durch die Innenreibung bedingten Steifigkeit zu tun hat. Die letztere, die wir in unseren Formeln vernachlässigt haben, wird im Gegenteil eine Verzögerung des Laufes und dadurch mit der Zeit eine Formänderung des Seiles bedingen[1]).

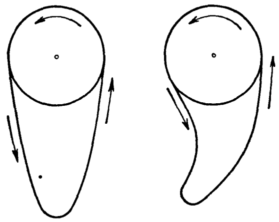

Abb. 291.

An Stelle des gleichförmig bewegten Seiles können wir uns aber auch ein vollkommen biegsames Rohr denken, in dem eine Flüssigkeit gleichförmig strömt, deren Bewegung somit den Seillauf ersetzt, während die Rohrwand nur als Begrenzung dient. Ein derart durchströmter Schlauch wird alsdann in jeder Lage auch gegen die Erdschwere verharren und Formänderungen einen Steifigkeitswiderstand entgegensetzen, der beim leeren oder mit reibender Flüssigkeit gefüllten Schlauch verschwindet.

2. Beispiel. Die vorstehenden Schlußfolgerungen gelten auch noch für ein gerades Seil mit einer beliebig gestalteten Ausbuchtung an irgendeiner Stelle, die bei gleichförmigem Seillauf dort erhalten bleibt, Abb. 292. Am ausgelenkten Teile ändert sich auch nichts, wenn wir das ganze Seil entgegengesetzt dem Seillauf verschieben, wobei nur die Ausbuchtung mit dem Verschiebungslauf wandert. Stimmt der Betrag desselben mit dem Seillauf überein, so ruht der gerade Teil des Seiles und die Ausbuchtung wandert nach 13a) mit

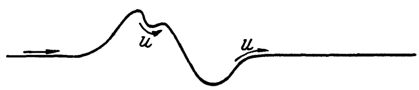

Abb. 292.

$$u = \pm \sqrt{\frac{S}{\mu}} \quad . \quad . \quad . \quad 13\text{b})$$

längs des mit der Kraft S gespannten Seiles nach beiden Seiten fort. Auf diese Weise entsteht eine sogen. Seilwelle, deren Form und Größe ganz willkürlich ist. Auf diese Erscheinung werden wir später nochmals zurückkommen.

3. Beispiel. Verschwindet dagegen die Spannung $S' = S - \mu u^2$ bei beständigem Seillauf nicht, so folgt aus der zweiten Formel 14) mit einem Festwert c^2

$$S'^2 = c^2 \varrho \qquad \text{oder} \qquad S' : \varrho^2 = c^4 : S'^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 14\text{a})$$

und nach Einsetzen in die erste

$$\frac{c^4}{S'^3} = \frac{d^2 S'}{ds^2}, \qquad \frac{c^4\, dS'}{S'^3} = \frac{dS'}{ds}\, d\left(\frac{dS'}{ds}\right),$$

also integriert mit einem weiteren Festwert C^2

$$\left(\frac{dS'}{ds}\right)^2 = \frac{C^2 S'^2 - c^4}{S'^2}, \qquad \frac{S'\, dS'}{\sqrt{C^2 S'^2 - c^4}} = ds$$

und nochmals integriert

$$C^2 s + C_1 = \sqrt{C^2 S'^2 - c^4}\,.$$

[1]) Eine große Zahl von Versuchen mit umlaufenden Ketten und Bändern beschreibt J. Aitken in der Abhandlung: On some experiments of rigidity produced by centrifugal force, Philosophical magazine, 1878, Vol. V, p. 81.

Rechnen wir den Bogen von einem Scheitel der gesuchten Kurve aus, setzen also $dS' : ds = 0$ für $s = 0$, so wird hierin auch $C_1 = 0$ und es bleibt nach Quadrieren

$$C^2 S'^2 = c^4 + C^4 s^2, \quad \varrho = \frac{S'^2}{c^2} = \frac{c^4 + C^4 s^2}{C^2 c^2}, \quad \ldots \ldots \quad 14\text{b})$$

also

$$\frac{d\vartheta}{ds} = \frac{1}{\varrho} = \frac{C^2 c^2}{c^4 + C^4 s^2}$$

mithin, wenn für $s = 0$ auch $\vartheta = 0$ sein soll,

$$s = \frac{c^2}{C^2} \operatorname{tg} \vartheta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 14\text{c})$$

Das ist aber nach § 46 die Differentialgleichung der gemeinen Seillinie, die somit auch noch bei beständigem Seillauf erhalten bleibt. Ein über zwei Rollen laufendes gespanntes Seil oder ein Treibriemen wird demnach dieselbe Form annehmen wie im Ruhezustande, während seine Spannung nur um den Betrag μu^2 zunimmt.

4. Beispiel. An dem vorstehenden Ergebnis ändert sich auch nichts, bei gleichförmiger Bewegung des ganzen in sich bewegten Seiles in der Bildebene. Infolgedessen wird ein vom Schiff ablaufendes Kabel, welches auf dem Meeresgrund zur Ruhe kommt, eine Seilkurve bilden, wenn der Seillauf gerade mit dem Schiffslauf an der Oberfläche übereinstimmt, wobei wiederum die Seilspannung die statische um μu^2 übertrifft. Für die Berechnung der letzteren nach den Formeln des § 46 ist allerdings die Abnahme des Seilgewichtes durch den Auftrieb des Wassers durch einen anderen Wert des Erdanlaufes $g' = g \frac{\gamma - \gamma_0}{\gamma}$ zu berücksichtigen, worin γ das Raumgewicht des Seiles und γ_0 das des Wassers bedeutet. Auf das Zusatzglied der Spannung hat dagegen der Auftrieb keinen Einfluß.

§ 79. Der Seiltrieb. Läuft ein in sich geschlossenes, sogen. endloses Seil, ein Riemen oder eine Kette über zwei Rollen, so wird die durch ein eingeleitetes Moment hervorgerufene Drehung der einen Rolle eine Bewegung des hinreichend gespannten Seiles und durch diese eine Drehung der anderen Rolle unter Überwindung eines dort angreifenden Gegenmomentes bewirken. Eine derartige zur Arbeitsübertragung zwischen zwei festen Achsen dienende Vorrichtung bezeichnet man als einen Seil-, Riemen- oder Kettentrieb. Setzen wir zunächst einen Beharrungszustand voraus, in dem sich die Form der Seilkurve zwischen den Rollen nicht ändert, so findet nur eine Tangentialbewegung der einzelnen Seilelemente statt, und wir haben mit $v_n = 0$, sowie unter Einführung des beständigen Seillaufes $v_s = u = \varrho \frac{\partial \vartheta}{\partial t}$, $\frac{\partial v_s}{\partial t} = 0$, $q_s = -g \sin \vartheta$, $q_n = -g \sin \vartheta$, an Stelle der Gl. 10a) des letzten Abschnittes für die Bewegung zwischen den Rollen

$$\frac{dS}{ds} - \frac{T}{\varrho} = \mu g \sin \vartheta, \quad \frac{dT}{ds} + \frac{S}{\varrho} = \mu \left(\frac{u^2}{\varrho} + g \cos \vartheta\right), \quad . \; . \quad 1)$$

oder wegen

$$T = f_0 h \frac{dS}{ds} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 2)$$

$$\frac{dS}{ds}\left(1 - \frac{f_0 h}{\varrho}\right) = \mu g \sin \vartheta, \quad f_0 h \frac{d^2 S}{ds^2} + \frac{S}{\varrho} = \mu \left(\frac{u^2}{\varrho} + g \cos \vartheta\right). \; . \quad 1\text{a})$$

Benutzen wir jedoch die Bewegungsgleichungen 6a) § 78, so lauten diese mit

$$v_x = u\cos\vartheta,\quad v_y = u\sin\vartheta,\quad q_x = 0,\quad q_y = -g$$

$$\frac{d}{ds}(S\cos\vartheta - T\sin\vartheta) = -\mu\frac{u^2}{\varrho}\sin\vartheta,$$

$$\frac{d}{ds}(S\sin\vartheta + T\cos\vartheta) = \mu\left(\frac{u^2}{\varrho}\cos\vartheta + g\right)\quad \ldots\ldots \quad 3)$$

und ergeben wegen $ds = \varrho\, d\vartheta$, sowie mit 2) integriert von der unteren Grenze

$$s = 0,\quad \vartheta = 0,\quad \frac{dS}{ds} = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} S\cos\vartheta - S_0 - f_0 h\frac{dS}{ds}\sin\vartheta &= \mu u^2(\cos\vartheta - 1)\\ S\sin\vartheta + f_0 h\frac{dS}{ds}\cos\vartheta &= \mu u^2\sin\vartheta + \mu g s\end{aligned}\right\},\quad \ldots \quad 3a)$$

oder

$$\left.\begin{aligned} S - \mu u^2 - (S_0 - \mu u^2)\cos\vartheta &= \mu g s\sin\vartheta\\ f_0 h\frac{dS}{ds} + (S_0 - \mu u^2)\sin\vartheta &= \mu g s\cos\vartheta\end{aligned}\right\}.\quad \ldots \quad 3b)$$

Schalten wir aus der letzten Formel und der ersten Gl. 1a) $dS:ds$ aus, so folgt

$$\mu g s\cos\vartheta = \left(S_0 - \mu u^2 + \frac{\mu g f_0 h}{1 - \frac{f_0 h}{\varrho}}\right)\sin\vartheta,\quad \ldots\ldots \quad 4)$$

oder unter Vernachlässigung der Potenzen von $f_0 h$ hinreichend genau

$$\mu g s = (S_0 - \mu u^2 + \mu g f_0 h)\operatorname{tg}\vartheta \quad \ldots\ldots \quad 4a)$$

und nach Einsetzen in die erste Gl. 3b)

$$S_0 - \mu u^2 = (S - \mu u^2)\cos\vartheta - \mu g f_0 h\sin^2\vartheta$$

oder

$$S_0 - \mu u^2 + \mu g f_0 h = (S - \mu u^2 + \mu g f_0 h\cos\vartheta)\cos\vartheta \ldots \quad 5)$$

Das durch Gl. 4a) ausgedrückte Wachstum des vom Scheitel gerechneten Bogens mit $\operatorname{tg}\vartheta$ ist aber die Eigenschaft der gewöhnlichen Seilkurve, in der somit auch das bewegte Seil verharrt, solange $f_0 h:\varrho$ als klein angesehen werden darf. Diese Bedingung trifft lediglich bei starken Krümmungen nicht mehr zu, wie sie sich beim Auf- und Ablaufen an den Rollen einstellen, so daß die Übergangslagen besonders zu behandeln sind. Für praktische Zwecke kann man, wie dies schon in § 53 geschehen ist, diesem Übergang durch Einführung des Steifigkeitsmomentes

$$M_s = f_0 h S$$

gerecht werden, welches beim Auflaufen zum Momente $S r$ der Seilspannung an der Rolle hinzutritt, beim Ablauf dagegen abzuziehen ist. Mithin ist das Moment einer Seilspannung S an der Rolle vom Halbmesser r

$$M = S(r \pm f_0 h) = S' r, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 6)$$

so daß also $f_0 h$ die durch die Seilsteifigkeit bedingte Änderung des Hebelarmes darstellt, der wir auch durch eine von der freien Seilspannung S verschiedene Auf- oder Ablaufspannung S' des Seiles genügen können. Bezeichnen wir nun die Seilspannung vor dem Auflauf mit S_1, nach dem Ablauf mit S_2, so ist die in der Zeiteinheit vom Seil geleistete Arbeit

$$L = (S_2 - S_1) \cdot u, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 7)$$

von der also nur der Betrag

$$L_1 = S_2 \left(1 - \frac{f_0 h}{r}\right) u - S_1 \left(1 + \frac{f_0 h}{r}\right) u = (S_2' - S_1') u \quad . \quad 7\text{a})$$

auf die Rolle übertragen wird. Also ist der Wirkungsgrad dieses Vorganges mit Rücksicht auf die Kleinheit des Verhältnisses $f_0 h : r$

$$\eta = \frac{L_1}{L} = \frac{S_2' - S_1'}{S_2 - S_1} = 1 - \frac{S_2 + S_1}{S_2 - S_1} \frac{f_0 h}{r} \approx 1 - \frac{S_2' + S_1'}{S_2' - S_1'} \frac{f_0 h}{r} . \quad 7\text{b})$$

Auf der Rolle selbst, an der die beiden Spannungen $S_1' \, S_2'$ herrschen, findet nun keine Änderung der Seilkrümmung statt. Infolgedessen verschwindet hierfür der durch die Querkraft gegebene Einfluß der Steifigkeit, wogegen noch ein Normaldruck $dN : ds = dN : r\, d\vartheta$ auf die Einheit des Rollenumfanges hinzutritt, der beim Gleiten des Seiles auf der Rolle eine Reibung $f dN : ds$ bedingt. Wir haben demnach für die Bewegung des Seiles über die Rolle an Stelle der Formeln 1)

$$\frac{dS}{r\, d\vartheta} = \mu g \sin\vartheta - f \frac{dN}{r\, d\vartheta}, \qquad \frac{S}{r} = \mu \left(\frac{u^2}{r} + g \cos\vartheta\right) + \frac{dN}{r\, d\vartheta} \qquad 8)$$

und nach Integration der ersten Gl. 8) mit den Auf- und Ablaufspannungen $S_1' \, S_2'$, sowie wegen $ds \sin\vartheta = dy$

$$S_2' - S_1' = \mu g (y_2 - y_1) - f(N_2 - N_1), \quad \ldots . \quad 8\text{a})$$

während die Ausschaltung von $dN : d\vartheta$ aus beiden Gleichungen 8)

$$\frac{dS}{d\vartheta} + f(S - \mu u^2) = r \mu g (\sin\vartheta + f \cos\vartheta) \quad \ldots . \quad 8\text{b})$$

ergibt. Das vollständige Integral dieser Gleichung ist mit drei Festwerten C, C_1, C_2

$$S - \mu u^2 = C e^{-f\vartheta} + C_1 \sin\vartheta + C_2 \cos\vartheta$$

$$\frac{dS}{d\vartheta} = - C f e^{-f\vartheta} + C_1 \cos\vartheta - C_2 \sin\vartheta$$

also wegen 8 b)

$$fC_1 - C_2 = r\mu g, \qquad C_1 + fC_2 = r\mu g f$$

$$C_1(1+f^2) = 2r\mu g f, \qquad C_2(1+f^2) = r\mu g(f^2-1),$$

oder

$$S - \mu u^2 = C e^{-f\vartheta} + r\mu g \frac{2f\sin\vartheta - (1-f^2)\cos\vartheta}{1+f^2} \quad . \quad . \quad . \quad 9)$$

Der allein noch übrige Festwert C ergibt sich aus der Auflaufspannung S_1' für $\vartheta = 0$ zu

$$C = S_1' - \mu u^2 + r\mu g \frac{1-f^2}{1+f^2},$$

so daß wir schließlich erhalten

$$S - \mu u^2 = \left(S_1' - \mu u^2 + r\mu g \frac{1-f^2}{1+f^2}\right) e^{-f\vartheta} +$$

$$+ r\mu g \frac{2f\sin\vartheta - (1-f^2)\cos\vartheta}{1+f^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9\text{a})$$

Ist, wie in den meisten praktischen Fällen, die Seilspannung sehr groß gegen das Seilgewicht $r\mu g$ von der Länge des Rollenhalbmessers, so kann dieses vernachlässigt werden, womit sich die Formeln 8 a) und 9 a) vereinfachen in

$$S_2' - S_1' = f(N_1 - N_2), \qquad S - \mu u^2 = (S_1' - \mu u^2)e^{-f\vartheta}. \quad 10)$$

Erweitern wir die erste dieser Formeln mit dem Seillauf u, so erhalten wir

$$(S_2' - S_1')u = f(N_1 - N_2)u, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 11)$$

d. h. die Leistung des Seiles an der Rolle, deren Umlauf $u_0 = r\omega$ im allgemeinen nicht mit u übereinstimmt. Da nun das Moment der Seilreibung $M = f(N_1 - N_2)\cdot r$ ist, so stellt

$$f(N_1 - N_2)r\omega = M\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 11\text{a})$$

die Leistung der Rolle selbst dar, so zwar, daß durch Addition von 11) und 11 a)

$$(S_2' - S_1')u = f(N_1 - N_2)(u - r\omega) + M\omega \quad . \quad . \quad . \quad 11\text{b})$$

hervorgeht mit einem Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{M\omega}{(S_2' - S_1')u} = 1 - \frac{u - r\omega}{u} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 11\text{c})$$

Das Verhältnis $(u - r\omega):u$ bezeichnet man wohl auch als den Schlupf des Seiles oder Riemens, von dessen Größe der durch das erste Glied rechts in 11 b) dargestellte Reibungsverlust abhängt. Für linienstarre Gebilde kann dieser erfahrungsgemäß stets auftretende Schlupf, der überdies zu einer Abnützung der sich berührenden Flächen führt, nicht berechnet werden, so daß unsere Theorie nach dieser Richtung einer Ergänzung durch die Berücksichtigung der Dehnung des Seiles oder Riemens unter der Wirkung der Seilspannung bedarf. Wir können von dieser in die Lehre der nichtstarren Körper gehörigen Ergänzung hier indessen um so eher absehen, als es sich beim Schlupf nur um kleine Zahlen (0,02 — 0,03) handelt, die überdies noch mit der Reibungsziffer $f = 0{,}2$ bis $0{,}25$ erweitert nur sehr geringe Arbeitsverluste hervorrufen, die jedenfalls erheblich unter den von der Seilsteifigkeit bedingten liegen. Man begnügt sich denn auch in der technischen Praxis mit der Einführung eines Gesamtwirkungsgrades, der für jede Rolle einschließlich der Zapfenreibung versuchsmäßig ermittelt werden kann und selten unter 0,95 liegt. Für langsam bewegte Rollen genügt es daher, alle Widerstände durch Vermehrung oder Verminderung des Rollenhalbmessers r um den Halbmesser r_0 eines Reibungskreises zu berücksichtigen, also für die Momente

$$S_1(r - r_0) = S_2(r + r_0) \quad \dots\dots\dots \quad 12)$$

wie bei der Seilsteifigkeit zu setzen und das Verhältnis

$$\eta = \frac{S_2}{S_1} = \frac{r - r_0}{r + r_0} \approx 1 - 2\frac{r_0}{r} \quad \dots\dots \quad 12\text{a})$$

als den Wirkungsgrad zu bezeichnen.

1. Beispiel. Ein sog. Flaschenzug besteht aus zwei gleichen Gruppen von Rollen mit je einer gemeinsamen Achse, um die ein gemeinsames Seil geschlungen und mit einem Ende an einem der Rollenkörper befestigt ist, während das andere frei von der letzten Rolle herabhängt. Durch eine dort eingeleitete Seilspannung werden die Abstände der Rollenkörper vermindert und eine unten hängende Last emporgehoben. In Abb. 293 sind die Rollenkörper der leichteren Übersicht halber derart auseinandergezogen, daß alle Rollen in einer Ebene liegen.

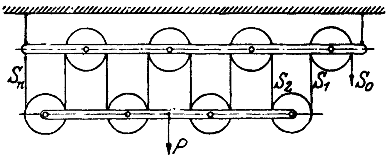

Abb. 293.

Daraus erkennt man, daß ohne Rücksicht auf das Seil und Rollengewicht die Summe aller einzelnen Seilspannungen im Gleichgewicht mit der Last P übereinstimmt, also

$$S_1 + S_2 + \dots + S_n = P \quad \dots\dots\dots\dots \quad 13)$$

ist. Wären keine Bewegungswiderstände vorhanden, so hätte man mit $S_1 = S_2 = \dots = S_n$ die einfache Beziehung $nS = P$, wenn n die Anzahl der Rollen bedeutet. Infolge der Widerstände ist jedoch wegen 12a)

$$S_1 = \eta S_0, \qquad S_2 = \eta S_1 \dots, \qquad S_n = \eta S_{n-1}, \quad \dots\dots \quad 13\text{a})$$

oder

$$S_1 = \eta S_0, \qquad S_2 = \eta^2 S_0, \qquad \dots, \qquad S_n = \eta^n S_0$$

$$S_0(\eta + \eta^2 + \dots + \eta^n) = P,$$

oder nach Summierung der Reihe

$$S_0 = \frac{1-\eta}{1-\eta^n}\,\frac{P}{\eta} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad 13\text{b})$$

Da nun beim Heben die Seilspannung S_0 am freien Ende den n-fachen Weg der Last P zurücklegt, so ist der Gesamtwirkungsgrad

$$\eta_0 = \frac{P}{n S_0} = \frac{(1-\eta^n)\,\eta}{n(1-\eta)} \quad \dots\dots\dots\dots \quad 13\text{c})$$

2. Beispiel. Schlingt man um drei Rollen, von denen zwei von verschiedenen Halbmessern $r_1\, r_2$ starr miteinander verbunden und festgehalten sind, ein endloses Seil derart, daß es von der kleineren zur größeren schlaff herabhängt, so erhält man einen Differentialflaschenzug, Abb. 294. Erteilt man dem von der größeren Rolle herabhängenden Seilende eine äußere Spannung S_0, so wirkt diese am Hebelarm r_1 und es bestehen mit einer Last G an der beweglichen Rolle unter Weglassung des Rollen- und Seilgewichts die Gleichgewichtsbedingungen:

$$(S_0\, r_1 + S_2\, r_2)\, \eta_1 = S_1\, r_1\,, \qquad S_2 = \eta_2\, S_1\,, \qquad S_1 + S_2 = G\,, \quad 14)$$

also

$$S_0 = \frac{G}{1+\eta_2}\left(\frac{1}{\eta_1} - \eta_2 \frac{r_2}{r_1}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 14\,\mathrm{a})$$

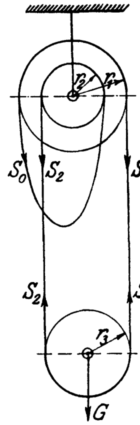

Abb. 294.

Dieser Ausdruck verschwindet für $r_1 = r_2\, \eta_1\, \eta_2$ und wird sogar für $r_1 < \eta_1\, \eta_2\, r_2$ negativ, so daß in diesem Falle die Last G ohne Seilzug S_0 infolge der Selbstsperrung ruhig hängen bleibt, was beim gewöhnlichen Flaschenzug nicht eintritt. Da nun für $\eta_1 = \eta_2 = 1$

$$S_0' = \frac{G}{2}\left(1 - \frac{r_2}{r_1}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 14\,\mathrm{b})$$

ist, so stellt

$$\eta_0 = \frac{S_0'}{S_0} = \frac{\eta_1\,(1+\eta_2)\,(r_1 - r_2)}{2\,(r_1 - \eta_1\,\eta_2\,r_2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 14\,\mathrm{c})$$

den Gesamtwirkungsgrad des Flaschenzugs dar. In diesen Formeln kommt der Halbmesser r_3 der dritten Rolle nicht vor; indessen steckt in der Annahme der parallelen Seilspannungen $S_1\, S_2$ die Bedingung $2\, r_3 = r_1 + r_2$, wodurch r_3 gegeben ist.

3. Beispiel. Zur Messung der durch Seile oder Riemen zwischen zwei Rollen übertragenen Arbeit bedient man sich eines von Hefner-Alteneck (1881) angegebenen Dynamometers, Abb. 295, welches in der Hauptsache aus zwei miteinander fest verbundenen Spannrollen $C_1\, C_2$ besteht, die vom Riemen mit den Winkeln $\varphi_1\, \varphi_2$ umspannt werden. Alsdann üben die Seilspannungen $S_1\, S_2$ auf die Spannrollen die Kräfte

$$Q_1 = 2\, S_1 \sin\frac{\varphi_1}{2}\,, \qquad Q_2 = 2\, S_2 \sin\frac{\varphi_2}{2} \quad 15)$$

aus, deren Unterschied durch eine Belastung

$$Q = Q_1 - Q_2 = 2\left(S_1 \sin\frac{\varphi_1}{2} - S_2 \sin\frac{\varphi_2}{2}\right) 15\,\mathrm{a})$$

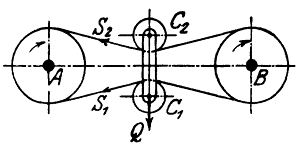

Abb. 295.

der ganzen Spannvorrichtung ausgeglichen und vermittels einer Wage gemessen werden kann. Läßt man die Wage so einspielen, daß bei gleichem Rollenhalbmesser deren Abstand gerade vom Achsenabstande des ganzen Seiltriebes halbiert wird, so ist $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$, und wir erhalten:

$$Q = 2\,(S_1 - S_2) \sin\frac{\varphi}{2}\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 15\,\mathrm{b})$$

und für die Leistung mit dem Seillauf u

$$L = (S_1 - S_2)\, u = \frac{Q\, u}{2 \sin\frac{\varphi}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 15\,\mathrm{c})$$

In der Last Q ist natürlich das Gewicht der Spannvorrichtung selbst mit enthalten, wenn die Bewegung in einer senkrechten Ebene stattfindet.

§ 80. Schwingungen eines gespannten Seiles. Die Bewegungsgleichungen eines durch S gespannten, vollkommen biegsamen Seiles, dessen Längenelement ds die augenblicklichen Achsenabstände xy besitzt, lauten nach Gl. 6a) § 78 für $T = 0$

$$\frac{\partial (S \cos \vartheta)}{\partial s} = \mu \left(\frac{d v_x}{d t} - q_x \right), \qquad \frac{\partial (S \sin \vartheta)}{\partial s} = \mu \left(\frac{d v_y}{d t} - q_y \right), \qquad 1)$$

worin die Laufteile allgemein mit dem Seillauf $ds : dt = u$

$$v_x = \frac{\partial x}{\partial t} + u \frac{\partial x}{\partial s}, \qquad v_y = \frac{\partial y}{\partial t} + u \frac{\partial y}{\partial s} \quad . \; . \; . \; . \quad 2)$$

anzusetzen sind. Soll das Seil nur kleine Ausschläge um einen Beharrungszustand vollziehen, in dem es sich geradlinig zwischen zwei Punkten bewegt, so dürfen wir zunächst die Bogenlänge s mit dem Abstand x verwechseln, oder $\cos \vartheta = 1$, $\sin \vartheta = \vartheta$ schreiben und die zeitlichen Änderungen $\partial x : \partial t = 0$ setzen, woraus dann bei beständigem Seillauf

$$v_x = u, \qquad \frac{d v_x}{d t} = 0,$$

also aus der ersten Gl. 1) unter Wegfall einer Außenkraft in der x-Richtung

$$\frac{\partial S}{\partial s} = \frac{\partial S}{\partial x} = 0,$$

oder eine längs des Seiles beständige Spannung S folgt. Da ferner mit

$$\sin \vartheta = \frac{\partial y}{\partial s} \approx \frac{\partial y}{\partial x}, \qquad \frac{\partial (S \sin \vartheta)}{\partial s} = S \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

wird, so geht die zweite Formel 1) mit $q_y = -g$ über in

$$\frac{S}{\mu} \frac{\partial^2 y}{d x^2} = \frac{d v_y}{d t} + g . \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 1a)$$

Im Beharrungszustand wird das Seil eine gewöhnliche Seilkurve bilden, die bei straffer Spannung sich einem flachen Parabelbogen nähert. Rechnen wir die Ausschläge y von diesem Bogen aus, der nur wenig von der Geraden abweicht, so können wir den Erdanlauf g auch weglassen, d. h. das Seilgewicht der Längeneinheit gegen die Seilspannung S vernachlässigen und erhalten kürzer

$$\frac{S}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d v_y}{d t} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + u \frac{\partial v_y}{\partial x},$$

oder mit

$$\frac{S}{\mu} = c^2, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 3)$$

sowie wegen 2) mit $s = x$

$$c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2u \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} + u^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} . \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 1b)$$

Dieser partiellen Differentialgleichung genügt aber der Ansatz

$$y = f(x - a t); \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f'', \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} = -a f'', \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 f'', \qquad 4)$$

dessen Einführung in 1b)

$$c^2 = (a - u)^2 \quad \text{oder} \quad a = u \pm c \quad \ldots\ldots \quad 4\text{a})$$

ergibt. Bei der völligen Willkür der Funktion $f(x - a\,t)$, welche die Form des ausgelenkten Seiles bestimmt, heißt dies nichts anderes, als daß zwei beliebig gestaltete Auslenkungen, sog. Wellen, auf dem Seil mit den Geschwindigkeiten $a_1 = u + c$ und $a_2 = u - c$ fortwandern. Diesen beiden Werten genügen aber auch zwei verschiedene Funktionen, so daß wir allgemein

$$y = y_1 + y_2 = f_1(x - a_1 t) + f_2(x - a_2 t) \quad \ldots\ldots \quad 4\text{b})$$

als vollständiges Integral von 1b) erhalten, sofern nur die Werte $a_1\,a_2$ die Werte 4a) besitzen, wie man sofort durch Einsetzen von 4b) in 1b) erkennt.

Die beiden sich nach 4b) überlagernden Wellenzüge sind nun bestimmt, wenn die Ausschläge und die zugehörigen Geschwindigkeiten der einzelnen Seilpunkte zu einer bestimmten Zeit, z. B. für $t = 0$ entsprechend einer Anfangserregung vorgelegt sind. Mit $y = \varphi(x)$ und $v = c\,\psi'(x)$ für $t = 0$ ist demnach

$$\left.\begin{aligned} f_1(x) + f_2(x) &= \varphi(x) \\ -a_1 f_1'(x) - a_2 f_2'(x) &= c\,\psi'(x) \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots \quad 5)$$

also

$$-a_1 f_1(x) - a_2 f_2(x) = c\,\psi(x)$$

oder

$$\left.\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{a_2\,\varphi(x) + c\,\psi(x)}{a_2 - a_1} \\ f_2(x) &= \frac{a_1\,\varphi(x) + c\,\psi(x)}{a_1 - a_2} \end{aligned}\right\}. \quad \ldots\ldots \quad 5\text{a})$$

Mithin sind die beiden mit verschiedenem Fortlauf a_1 und a_2 auf dem Seil wandernden Wellen wegen $a_1 - a_2 = 2c$ gegeben durch

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= f_1(x - a_1 t) = \frac{a_2}{2c}\,\varphi(x - a_1 t) + \frac{1}{2}\,\psi(x - a_1 t) \\ y_2 &= f_2(x - a_2 t) = -\frac{a_1}{2c}\,\varphi(x - a_2 t) - \frac{1}{2}\,\psi(x - a_2 t) \end{aligned}\right\}. \quad 5\text{b})$$

Erstrecken sich die ursprünglichen Ausschläge für $t = 0$ nur über eine bestimmte Strecke $l_1 < x < l_2$, so zwar, daß für $l_1 > x > l_2$ $\varphi(x) = 0$, $\psi'(x) = 0$, $\psi(x) = 0$ ist, so bleibt dies auch gültig für

$$l_1 - a_1 t < x - a_1 t < l_2 - a_1 t$$
$$l_1 - a_2 t < x - a_2 t < l_2 - a_2 t,$$

woraus dann eine Trennung der beiden Wellen y_1 und y_2 mit selbständigem Fortlauf über das außerhalb derselben gerade gespannte Seil folgt.

Die zweite Welle $f_2(x - a_2 t)$ verschwindet übrigens, wenn in 5a)

$$a_1\,\varphi(x) + c\,\psi(x) = 0,$$

also
$$v = c\,\psi'(x) = -\,a_1\,\varphi'(x)$$
vorgelegt ist. Alsdann läuft auf dem unendlich ausgedehnten Seil **nur eine Welle** mit dem Lauf a_1.

Wird die Auslenkung y eines Seilelementes um dy gesteigert, so leistet der Spannungsüberschuß $d(S\sin\vartheta)$ die Arbeit $d(S\sin\vartheta)\,dy$, also ist der gesamte Zuwachs des **Dranges** am Seilelement von der Ruhelage $y=0$ aus
$$\frac{\partial U}{\partial x} = \int \frac{\partial(S\sin\vartheta)}{\partial x}\,dy \approx S\int \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)dy = \frac{S}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2.$$
Dazu kommt noch die **Wucht**
$$\frac{\partial J}{\partial x} = \frac{\mu v_y^2}{2} = \frac{\mu}{2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2,$$
so daß der ganze **Arbeitsinhalt**, d. h. die **Macht** des ausgelenkten und bewegten Seilelementes von der Länge dx
$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{S}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \frac{\mu}{2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{\mu}{2}\left[c^2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] \quad . \; . \qquad 6)$$
beträgt. Hiervon ist aber nach 4b)
$$\frac{\partial y}{\partial x} = f_1' + f_2' = \frac{\partial y_1}{\partial x} + \frac{\partial y_2}{\partial x}$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial t} + u\frac{\partial y}{\partial x} = -\,a_1 f_1' - a_2 f_2' + u(f_1' + f_2')$$
$$\frac{dy}{dt} = (u - a_1)f_1' + (u - a_2)f_2' = c(f_2' - f_1') = c\left(\frac{\partial y_2}{\partial x} - \frac{\partial y_1}{\partial x}\right),$$
also
$$\frac{\partial L}{\partial x} = \mu c^2 (f_1'^2 + f_2'^2) = S\left[\left(\frac{\partial y_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_2}{\partial x}\right)^2\right] \quad . \; . \; . \qquad 6\,a)$$
$$\frac{\partial y}{\partial x}\frac{dy}{dt} = c(f_2'^2 - f_1'^2) = c\left[\left(\frac{\partial y_2}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial y_1}{\partial x}\right)^2\right]. \; . \; . \; . \qquad 6\,b)$$
Haben sich die aus der anfänglichen Erregung hervorgegangenen Wellen von endlicher Ausdehnung auf dem endlosen Seil getrennt, so verschwindet für jede derselben in ihrem Bereich der Ausschlag der anderen, und es gilt nach unseren Gleichungen:
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L_1}{\partial x} &= S\left(\frac{\partial y_1}{\partial x}\right)^2 = \frac{\mu}{2}\left[c^2\left(\frac{\partial y_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2\right], & \frac{dy_1}{dt} &= -\,c\frac{\partial y_1}{\partial x} \\ \frac{\partial L_2}{\partial x} &= S\left(\frac{\partial y_2}{\partial x}\right)^2 = \frac{\mu}{2}\left[c^2\left(\frac{\partial y_2}{\partial x}\right)^2 + \frac{dy_2}{dt}\right]^2, & \frac{dy_2}{dt} &= +\,c\frac{\partial y_2}{\partial x} \end{aligned}\right\}, \qquad 7)$$
oder wegen $S = \mu c^2$
$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = \frac{\partial J_1}{\partial x}, \qquad \frac{\partial U_2}{\partial x} = \frac{\partial J_2}{\partial x} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad 7\,a)$$

d. h. in den getrennten Einzelwellen ist der Drang an jeder Stelle und zu jeder Zeit gleich der Wucht. Beide erreichen also an jeder Stelle dann ihre Höchstwerte, wenn mit $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0$ ein Wendepunkt der Seillinie die betreffende Stelle überstreicht, und verschwinden mit $dy:dt=0$, also $\partial y:\partial x=0$ beim größten Ausschlage sowie in der Ruhelage, in der das Element nach Ablauf der Bewegung weiter verharrt.

1. Beispiel. Setzen wir zunächst voraus, daß das Seil im Beharrungszustande ruht, so erhalten wir mit $u=0$ an Stelle von 1b) und 4b)

$$c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad y=f_1(x-ct)+f_2(x+ct)\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8)$$

Soll zur Zeit t' an der Stelle x' derselbe Ausschlag y bestehen, so gilt

$$f_1(x-ct)-f_1(x'-ct')+f_2(x+ct)-f_2(x'+ct')=0\,,$$

oder wegen der Willkür der Funktionen $f_1 f_2$

$$x-ct=x'-ct', \quad x+ct=x'+ct'$$
$$x-x'=c(t-t'), \quad x-x'=-c(t-t'),$$

d. h. auf dem ruhenden Seil wandern im allgemeinen zwei willkürlich gestaltete Wellen mit entgegengesetzt gleichen, nach 3) nur durch die Seilspannung und die Seilmasse bestimmten Geschwindigkeiten derart, daß alle Seilpunkte nacheinander kongruente Bewegungen vollziehen und wieder in die Ruhelage zurückkehren.

Wird ein Punkt, den wir als Anfang $x=0$ wählen, festgehalten, so ist dort dauernd $y=0$, also nach 8)

$$f_2(ct)=-f_1(-ct)\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8a)$$

oder allgemeiner

$$f_2(x+ct)=-f_1(-x-ct)\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8b)$$

so daß wir an Stelle von 8) mit nur einer willkürlichen Wellenfunktion

$$y=f(x-ct)-f(-x-ct) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9)$$

schreiben dürfen. Betrachten wir nun einen Punkt im Abstande $x=ct$ vom Anfang, so ist dort der Ausschlag zur Zeit t

$$y_1=f(0)-f(-2\,ct),$$

während für $x=-ct$

$$y_2=f(-2\,ct)-f(0)=-y_1$$

sich ergibt. Die Strecke x ist also von der Welle erst nach dem Festpunkt $x=0$ in einem Sinne und darauf von ihm hinweg im andern Sinne durchlaufen worden, wonach sich der Ausschlag an dem betrachteten Punkte gerade umgekehrt hat. Diesen Vorgang der Umkehrung der Ausschläge am Punkte x im Verlaufe der Zeit $t'=2\,x:c$ bezeichnen wir nun als eine Spiegelung oder Reflexion.

Halten wir noch einen zweiten Punkt im Abstande l vom Anfang fest, so ist nach 9)

$$f(l-ct)=f(-l-ct),$$

oder nach Ersatz von $l-ct$ bzw. $-l-ct$ durch $x-ct$ allgemeiner

$$f(x-ct)=f(x-ct-2\,l)=f(x-ct+2\,l), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9a)$$

d. h. die Bewegung wiederholt sich bei zwei festen Punkten im Abstande l, der sogen. Spannweite, nach Durchlaufen der Strecke $\pm 2\,l$ in der Zeit

$$t_0=\frac{2\,l}{c}=2\,l\sqrt{\frac{\mu}{S}}\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 10)$$

Denken wir uns das gespannte Seil nach beiden Seiten vom ruhenden Anfang $x = 0$ beliebig verlängert, so erkennen wir aus 9a), daß alle Punkte in den Abständen $\pm n l$ vom Anfang, wo n eine ganze Zahl bedeutet, in Ruhe verharren und nur die zwischen ihnen befindlichen Punkte Schwingungen von der Dauer t_0 vollziehen. Da ferner der Ausschlag 9) mit x sein Vorzeichen ändert, so haben hierbei alle Punkte in gleichen Abständen zu beiden Seiten eines Festpunktes zur selben Zeit gleich große, aber entgegengesetzte Ausschläge, während alle um $\pm 2 l$ voneinander entfernte Punkte gleichzeitig dieselben Ausschläge besitzen. Für $t = \frac{l}{c}$ wird aber in 9) wegen 9a) $y = 0$, d. h. nach Ablauf der halben Schwingungsdauer gehen alle Seilpunkte gleichzeitig durch die Ruhelage. Eine solche Erscheinung, die man leicht an einem zwischen zwei Festpunkten gespannten Seil hervorrufen kann, bezeichnet man als eine stehende Welle, die Festpunkte als Knoten und die dazwischen liegenden Ausschläge als Bäuche derselben.

2. Beispiel. Nachdem wir gesehen haben, daß es sich bei den Seilwellen um Schwingungsvorgänge handelt, können wir in der Differentialgleichung 8) auch mit zwei nur von x und t abhängigen Funktionen X, T setzen:

$$y = X T, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = T \frac{d^2 X}{d x^2}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = X \frac{d^2 T}{d t^2}, \quad \ldots\ldots \quad 11)$$

also

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{d t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{d t^2} = -\alpha^2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 11a)$$

wo α^2 zunächst ein willkürlicher Festwert ist. Damit zerfällt aber 11a) in

$$\frac{d^2 X}{d x^2} + \alpha^2 X = 0, \quad \frac{d^2 T}{d t^2} + \alpha^2 c^2 T = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 11b)$$

mit den Integralen

$$X = X_0 \sin(\alpha x + \beta), \quad T = T_0 \sin(\alpha c t + \delta), \quad \ldots\ldots \quad 11c)$$

die zusammengefaßt mit $X_0 T_0 = y_0$ in 11)

$$\left.\begin{aligned} y &= y_0 \sin(\alpha x + \beta) \sin(\alpha c t + \delta) \\ y &= \frac{y_0}{2} \cos[\alpha(x - c t) + \beta - \delta] - \frac{y_0}{2} \cos[\alpha(x + c t) + \beta + \delta] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 12)$$

in Übereinstimmung mit 9) ergeben. Halten wir den Punkt $x = 0$ fest, so muß dort, d. h. für $x = 0$ unabhängig von t der Ausschlag $y = 0$ sein, d. h. in der ersten Gl. 12) $\beta = 0$ sein. Verlangen wir ferner, daß zur Zeit $t = 0$ gerade alle Punkte durch die Ruhelage gehen, so muß hierfür y unabhängig von x verschwinden, also auch $\delta = 0$ sein. Es bleibt alsdann nur noch

$$y = y_0 \sin \alpha x \sin \alpha c t = \frac{y_0}{2} \cos \alpha(x - c t) - \frac{y_0}{2} \cos \alpha(x + c t) \quad \ldots \quad 12a)$$

Soll schließlich im festgehaltenen zweiten Punkt y für $x = l$ dauernd verschwinden, so ist mit einer ganzen Zahl n

oder

$$\left.\begin{aligned} &\sin \alpha l = 0, \quad \alpha l = n \pi, \\ &y = y_0 \sin \frac{n \pi x}{l} \sin \frac{n \pi c t}{l} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 12b)$$

Da nun alle Zahlen n gleichberechtigt sind, so stellt mit jeder derselben 12b) eine Lösung von 9) dar, und wir erhalten schließlich als vollständiges Integral deren Summe, d. h. die doppelt periodische Reihe

$$y = \sum_{n=1}^{n=\infty} y_n \sin \frac{n \pi x}{l} \sin \frac{n \pi c t}{l}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 12c)$$

die entsprechend den Knoten auch für jedes ganze Vielfache $x = k\,l$ verschwindet. Da auch

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n^2 \pi^2 y_n}{l^2} \sin\frac{n\pi x}{l} \sin\frac{n\pi c t}{l}$$

für $x = k\,l$ verschwindet, so stellen die Knoten Wendepunkte der stehenden Welle dar.

3. Beispiel. Soll ein Punkt des unendlich ausgedehnten Seiles, den wir alsdann als Anfang wählen können, dauernd einfach periodisch schwingen, so haben wir mit $y_1 = y_0 \sin \omega t$ in 12) für $x = 0$

$$\sin\beta \sin(\alpha c t + \delta) = \sin\omega t$$

$$\sin\beta (\cos\delta \sin\alpha c t + \sin\delta \cos\alpha c t) = \sin\omega t\,,$$

also
$$\sin\beta\cos\delta = 1, \quad \sin\beta\sin\delta = 0, \quad \alpha c = \omega, \quad \delta = 0, \quad \beta = \frac{\pi}{2}$$

und es ist

$$\left.\begin{aligned} y &= y_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\omega x}{c}\right) \sin\omega t = y_0 \cos\frac{\omega x}{c} \sin\omega t \\ y &= \frac{y_0}{2} \sin\frac{\omega}{c}(x + ct) - \frac{y_0}{2} \sin\frac{\omega}{c}(x - ct) \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots \quad 13)$$

d. h. es gehen von dem schwingenden Anfangspunkt nach beiden Seiten immer neue stehende Wellen derart aus, daß alle Punkte, für welche $\omega x_1 = \frac{2n+1}{2} \pi c$ ist, als Knoten in Ruhe dauernd verharren, während die Bäuche für $\omega x_2 = n \pi c$ die gleiche oder entgegengesetzte Schwingung wie der Anfang vollziehen. Den Abstand zweier gleich schwingender Punkte

$$l = \frac{2\pi c}{\omega} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 13\text{a})$$

dürfen wir demnach als die Wellenlänge bezeichnen.

Die Macht einer solchen Welle ergibt sich durch Einsetzen von 13) in 6) durch Integration von

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\mu y_0^2 \omega^2}{2} \left[\sin^2\frac{\omega x}{c} \sin^2 \alpha t + \cos^2\frac{\omega x}{c} \cos^2 \omega t\right]$$

zwischen den Grenzen von 0 bis l mit Rücksicht auf 13a) zu

$$L = \frac{l \mu y_0^2 \omega^2}{4}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 14)$$

worin $\mu\,l$ die auf die Wellenlänge entfallende Masse und $y_0\,\omega : 2$ deren mittlere Geschwindigkeit senkrecht zur Seilrichtung bedeutet. Da nun die Schwingungsdauer jedes Punktes

$$t_0 = \frac{2\pi}{\omega} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 13\text{b})$$

beträgt, so ist mit 13a)

$$c\,t_0 = l, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 13\text{c})$$

und das Verhältnis

$$\frac{L}{t_0} = \frac{\mu c y_0^2 \omega^2}{4} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 14\text{a})$$

stellt die in der Zeiteinheit an der Stelle $x = 0$ dem Seil zugeführte Arbeit dar, welche als Energie- oder Arbeitsstrom von dort mit der Welle selbst, also mit dem Lauf c nach beiden Seiten dauernd fortwandert.

Namenverzeichnis.

Sachverzeichnis.

Druckfehlerverzeichnis.

S. 65, Zeile 2 v. o. Gl. 2a):

statt $\varphi = \varphi_0 \sin \alpha t = \varphi_0 \sin t \sqrt{\frac{g}{l}}$ lies: $\varphi = \varphi_0 \cos \alpha t = \varphi_0 \cos t \sqrt{\frac{g}{l}}$.

S. 93, Zeile 10 v. u.:

statt $m r^2 \varphi$ lies: $m r^2 \dot{\varphi}$.

S. 284, Abb. 233:

Der rechte Winkel ϑ_0' ist versehentlich bei M statt bei S eingetragen worden. Infolgedessen muß die Bahn des Schwerpunktes S innerhalb der des Punktes M verlaufen.

S. 343, Abb. 280:

Bei den Momenten M_1 und M_2 sind die Pfeile umzukehren.

S. 347, Zeile 18 v. u. Gl. 13d):

statt $\frac{\varkappa v_0^2}{q'}$ lies: $\frac{\varkappa' v_0^2}{q'}$.

S. 354, Zeile 7 und 8 v. o. Gl. 16):

ξ_1 und ξ_2 müssen negative Vorzeichen erhalten.