Aufgaben

aus der

Technischen Mechanik

Von

Ferdinand Wittenbauer
o. ö. Professor an der k. k. technischen Hochschule in Graz

II. Band

Festigkeitslehre

611 Aufgaben nebst Lösungen und einer Formelsammlung

Dritte, verbesserte Auflage

Mit 505 Textfiguren

Berlin
Verlag von Julius Springer
1918

Softcover reprint of the hardcover 3rd edition 1918

ISBN 978-3-642-51773-0 ISBN 978-3-642-51813-3 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-642-51813-3

Vorwort zur 3. Auflage.

Auch dieser Band bringt zum überwiegenden Teile leichte Aufgaben, die an der Hand von Vorlesungen über Festigkeitslehre gelöst werden können. Eine Formelsammlung am Schlusse des Buches, auf die in den Lösungen oftmals hingewiesen wird, soll den Gebrauch erleichtern.

Eine Anzahl von Beispielen wurde der technischen Literatur, insbesondere den Zeitschriften der letzten Jahre entnommen. Ich hoffe hierdurch die Studierenden zu frühzeitiger Benützung dieser ausgezeichneten Bildungsmittel anzuregen und ihr Interesse für die Bedürfnisse der Praxis zu gewinnen.

Aber auch dem ausführenden Ingenieur wird dieses Buch vielleicht willkommen sein, wenn er den Wunsch hat, die an der Schule erlangten Kenntnisse wieder aufzufrischen.

Von vielen Seiten wurde eine Erweiterung dieser Sammlung gewünscht. Ich habe bei Herausgabe der vorliegenden dritten Auflage diesem Wunsche nach Möglichkeit zu entsprechen gesucht.

Beispiele über ungleichartiges Material wurden nur so weit aufgenommen, als sie ohne Kenntnis der Theorie des Eisenbetonbaues gelöst werden können. Dieses Gebiet erfordert eine so eigenartige Behandlung, daß es nicht in dem Rahmen der allgemeinen Festigkeitslehre untergebracht werden kann. Immerhin werden einige vorbereitende Beispiele willkommen sein.

Bei der Durchsicht dieses Bandes wurde ich von dem Herrn Ingenieur Professor Richard Canaval in dankenswerter Weise unterstützt.

Graz, im April 1918.

F. Wittenbauer.

Inhaltsverzeichnis.

* Die mit diesem Zeichen versehenen Aufgaben erfordern die Kenntnis der Elemente der Differential- und Integral-Rechnung.

Bezeichnungen,

welche in diesem Buche verwendet wurden.

A = Arbeitsfestigkeit.
$A\,B\,C$ = Auflagerdrücke.
B = Bruchlast bei exzentrischem Druck.
E = Elastizitätszahl für Zug und Druck (Elastizitätsmodul).
E_e = Elastizitätszahl für Eisen.
E_{bd} = Elastizitätszahl für Beton, Druck.
E_{bz} = Elastizitätszahl für Beton, Zug.
F = Querschnittsfläche.
F_0 = Reduzierte Querschnittsfläche (bei der Schubfestigkeit).
G = Elastizitätszahl für Schub (Gleitmodul).
G = Gewicht.
H = Horizontalkraft.
J = Trägheitsmoment einer Fläche.
J_x = Trägheitsmoment einer Fläche in bezug auf die Achse X.
J_{xy} = Zentrifugalmoment in bezug auf die Achsen X und Y.
$J_1 = \max J$, $J_2 = \min J$, Hauptträgheitsmomente.
K = Hilfskraft.
K = Druckfestigkeit.
K_b = Biegungsfestigkeit.
K_d = Drehungsfestigkeit.
K_k = Knickfestigkeit.
K_s = Schubfestigkeit.
K_z = Zugfestigkeit.
L = Bewegungs-Energie.
M = Biegungsmoment.
$M_A\,M_B\,M_C$ = Auflagermomente in A, B, C.
M_d = Drehungsmoment.
$N\,N$ = Null-Linie.
P = Einzelne Last.
P = Tragfähigkeit (zulässige Last).
P_k = Knicklast.
Q = Verteilte Last.
Q = Querkraft (Scherkraft, Schubkraft).
R = Last parallel zur Achse.
S = Schwingungsfestigkeit.
S = Flächenmoment (bei der Schubfestigkeit).
S = Schwerpunkt.
T = Trägheitsmoment eines Körpers.
T = Trägheitskraft.

U = Ursprungsfestigkeit.
V = Rauminhalt.
W = Widerstandsmoment.
$a\,b$ = Abstände einer Last von den Auflagern.
$a\,b\,c$ = Konstanten der Arbeitsfestigkeit.
$a\,b\,c$ = Richtungskonstanten einer Geraden.
at = Neuatmosphäre (Druck von 1 kg auf 1 cm^2).
b = Breite eines Rechtecks.
d = Durchmesser einer Welle.
e = Raumdehnung (kubisches Ausdehnungsverhältnis).
$e_1\,e_2$ = Entfernung der Biegungsachse von der meist gezogenen bezw. gedrückten Stelle im Querschnitt.
f = Durchbiegung eines Trägers.
f = Reibungszahl.
g = Beschleunigung der Schwere.
h = Höhe eines Rechtecks.
i = Trägheitshalbmesser für Flächen.
$i = \frac{1}{EJ}$, Abkürzung.
k = zulässige Druckspannung.
k_b = zulässige Biegungsspannung.
k_d = zulässige Drehungsspannung.
k_k = zulässige Knickspannung.
k_s = zulässige Schubspannung.
k_z = zulässige Zugspannung.
kg = Kilogramm.
l = Spannweite eines Trägers.
l_r = Reduzierte Länge (bei der Knickfestigkeit).
m = Verhältnis der Längsdehnung zur Querzusammenziehung (Poissonsche Konstante).
$n = \frac{\min P}{\max P}$ (bei der Arbeitsfestigkeit).
$n = \frac{l_r}{i}$ Schlankheitsverhältnis (bei der Knickfestigkeit).
n = dynamischer Faktor (bei der Stoßfestigkeit).
p = Exzentrizität der Normalkraft P eines Querschnitts.
p = Gesamtspannung einer Ebene.
$p_1\,p_2\,p_3$ = Gesamtspannungen dreier senkrechter Ebenen.
q = Last für die Längeneinheit.
r = Halbmesser eines Kreises.
r = Arm der Kraft R.
$s_1\,s_2$ = größte Zugspannung bezw. Druckspannung im Querschnitt.
t = Zeit.
t = Tonne.

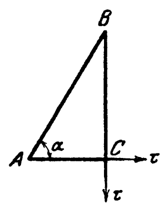
x_0 = Abstand des Wendepunktes vom Auflager.
z = Schwingungszahl eines Trägers.
z_0, z_s = Schwerpunktsabstand.
$\mathfrak{S}$ = Sicherheitsgrad (bei der Knickfestigkeit).
A = Formänderungsarbeit.
α = Befestigungszahl (bei der Knickfestigkeit).
$\alpha = \frac{d}{D}$ Durchmesserverhältnis eines Kreisringes.
α_0 = Anstrengungsverhältnis (Drehung und Biegung).
γ = Einheitsgewicht.
γ = Schiebung.
ε = Dehnung.
ϑ = Verdrehungsbogen für die Längeneinheit.
λ = Winkelbeschleunigung.
μ = Tetmajersche Zahl (bei Knickung und exzentrischem Druck).
$\mu = E_{bz} : E_{bd}$.
μ_0 = Bachsche Zahl (bei Biegungsfestigkeit von Gußeisen).
$\nu = E_e : E_{bd}$.
ϱ = Krümmungshalbmesser.
ϱ = Trägheitshalbmesser für Körper.
σ = Normalspannung.
σ_x = Normalspannung in Richtung der Achse X.
$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ = Hauptspannungen.
τ = Schubspannung.
τ_x = Schubspannung, welche die Achse X senkrecht schneidet.
φ = Verdrehungswinkel.
$\omega = \sqrt{\frac{P}{EJ}}$, Abkürzung.
ω = Winkelgeschwindigkeit.

Aufgaben.

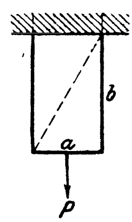
I. Spannungen und Formänderungen.

I. Ebener Spannungszustand.

1. In zwei senkrechten Ebenen eines Punktes wirken zwei Schubspannungen τ und τ_1 unter den Winkeln α und α_1 gegen die Schnittlinie der beiden Ebenen. In welchem Verhältnis müssen τ und τ_1 stehen?



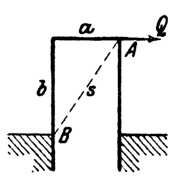
2. Zwei zueinander senkrechte Ebenen AC und BC werden nur von den Schubspannungen τ beansprucht. Wie groß muß der Winkel α gewählt werden, wenn die Ebene AB des kleinen Prismas ABC nur von einer Normalspannung beansprucht werden soll, und wie groß ist diese?



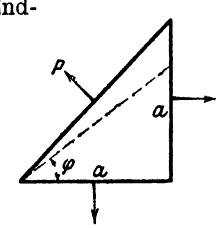
3. Ein kleines rechtwinkliges Prisma von den Kanten a, b, c wird am Ende mit der Kraft P belastet. Welche Schubspannung τ tritt in der strichlierten Diagonalebene auf?

4. Ein Stab von quadratischem Querschnitt a^2 ragt ein kurzes Stück b aus der Mauer hervor und wird an seinem Ende durch eine Querkraft Q beansprucht, die sich gleichförmig über die Endfläche verteilt. Man ermittle die Normalspannung σ in der Diagonalebene AB.

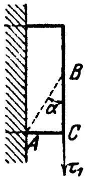
5. Ein kleines gleichschenkliges, rechtwinkliges Prisma von der Höhe b wird von drei äußeren, normalen Kräften im Gleichgewicht erhalten, die sich gleichförmig über die Flächen verteilen und von denen P bekannt ist. Man suche die Normalspannung σ und die Schubspannung τ einer beliebigen, unter φ geneigten Schnittebene.



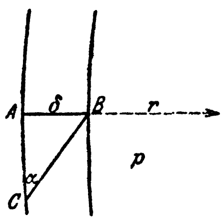
Aufg. 4.



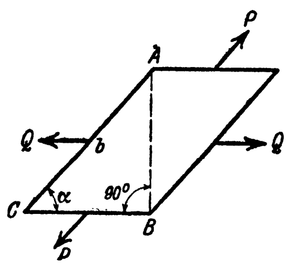
Aufg. 5.



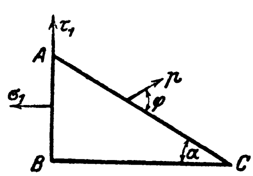
6. In der Endfläche eines sehr kurzen Balkens besteht eine gleichförmig verteilte Schubspannung τ_1. Welcher Gesamtspannung p ist eine beliebige Schnittfläche AB ausgesetzt, und unter welchem Winkel φ ist sie gegen AB geneigt?



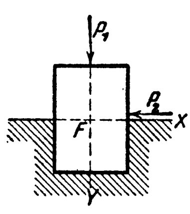
7. Die Abbildung zeigt ein Stück des Querschnittes einer flußeisernen Granate von der Stärke $AB = \delta$, dem Innenhalbmesser r und dem Innendrucke p. ABC sei ein Splitter dieser Granate. Unter welchem Winkel α wird sich die Splitterung ausbilden, wenn r sehr groß gegen δ ist?
(Gümbel, Zeitschr. Ver. deutsch. Ing. 1916.)



8. Ein kleines Prisma von der Höhe a, dessen Querschnitt nebenstehendes Parallelogramm ist, wird von vier gleichen Kräften P und Q beansprucht. Man suche die Normalspannung σ und die Schubspannung τ der Diagonalebene AB.



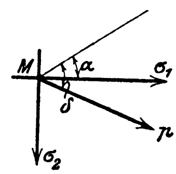
9. Ein kleines Prisma, dessen Querschnitt ein rechtwinkliges Dreieck ABC ist, wird an der Seitenfläche AB durch eine Zugspannung $\sigma_1 = 80$ at und durch eine Schubspannung $\tau_1 = 60$ at beansprucht. Der Winkel α ist 30^0. Man berechne die Spannung p der Seitenfläche AC und den Neigungswinkel φ der Spannung gegen AC.



10. Ein kleiner prismatischer Körper mit dem Querschnitt $F = 1$ cm² wird in der gezeichneten Weise von einer Druckkraft P_1 und einer Scherkraft P_2 beansprucht. Wenn sich diese Kräfte gleichförmig über F verteilen, wie groß sind dort die Hauptspannungen und welche Winkel schließen ihre Ebenen mit der Richtung X ein? Es ist $P_1 = P_2 = 100$ kg.

11. Zwei unter α geneigte Ebenen eines Punktes werden von den Zugspannungen σ bzw. σ_1 und von den Schubspannungen τ bzw. τ_1 beansprucht. Es ist $\sigma = \tau = 3\tau_1$; man suche das Verhältnis $\sigma_1 : \sigma$.

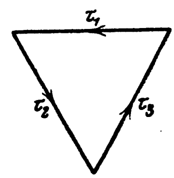
***12.** Gegeben sind die Hauptspannungen σ_1 und σ_2 eines Punktes M. Der Spannungszustand ist ein ebener. Man suche die Lage α jener Spannungsebene, deren Spannung p die kleinste Neigung δ zu ihr besitzt.



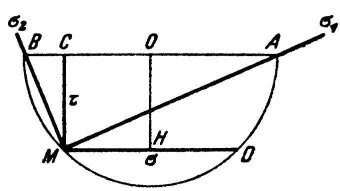
13. Ein Punkt M besitzt die Hauptspannungen σ_1 und σ_2, während die dritte $\sigma_3 = 0$ ist. Man trägt die Normalspannung σ jeder durch σ_3 gehenden Ebene auf ihrer Normale von M aus auf, derart, daß $MN = \sigma$ ist. Man suche den Ort des Endpunktes N in Polarkoordinaten.

14. Zwei Ebenen eines Punktes, die den Winkel α miteinander einschließen, erleiden die Schubspannungen τ und τ'. Wie groß ist die Differenz ihrer Normalspannungen?

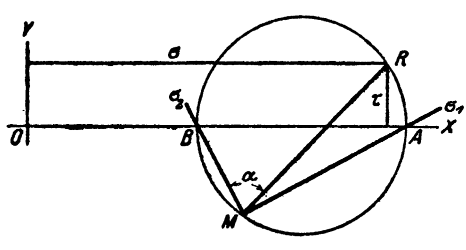
15. Ein kleines Prisma, dessen Querschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist, wird einem ebenen Spannungszustand ausgesetzt. In welcher Beziehung stehen die Schubspannungen der drei Seitenflächen?



16. Die Ebene MC des Punktes M erleidet die Zugspannung $\sigma = MD$ und die Schubspannung $\tau = MC$. Die zu dieser Ebene senkrechte Ebene MD erleidet keine Normalspannung. Halbiert man MD in H und macht HO gleich und parallel mit MC, beschreibt sodann aus O den Halbkreis BMA, so sind MA und MB die Richtungen der Hauptspannungen des Punktes M, und zwar wirkt in MA die Haupt(zug)spannung $\sigma_1 = CA$ und in MB die Haupt(druck)spannung $-\sigma_2 = BC$. Wie läßt sich das einfach nachweisen?



17. Die Hauptspannungen eines Punktes $M: \sigma_1 = OA$ und $\sigma_2 = OB$ werden auf der X-Achse eines rechtwinkligen Achsenkreuzes von O aus aufgetragen. Der Punkt M selbst werde so gezeichnet, daß die Richtungen seiner Hauptspannungen durch A und B gehen. Zieht man dann über AB als Durchmesser einen



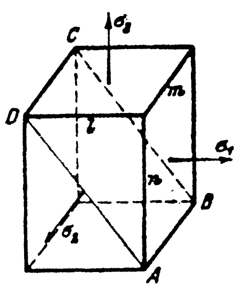
Kreis und nimmt auf diesem einen beliebigen Punkt R an, so sind dessen Koordinaten σ und τ die Normal- und die Schubspannung jener Ebene durch M, deren Normale MR ist. Man suche dies zu beweisen. (Mohr, Zeitschr. d. Ver. deutscher Ing. 1900.)

2. Räumlicher Spannungszustand.

18. Es seien p_1 und p_2 die Spannungen zweier Ebenen des Punktes M, n_1 und n_2 die Normalen dieser Ebenen. Projiziere p_1 auf n_2 und p_2 auf n_1. Welche Beziehung besteht zwischen diesen Projektionen?

19. Drei aufeinander senkrechte Ebenen eines Punktes erleiden die allgemeinen Spannungen $p_1 p_2 p_3$. Man beweise, daß die Summe $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$ sich nicht ändert, wenn man sie für drei andere senkrechte Ebenen desselben Punktes bildet.

20. Drei aufeinander senkrechte Ebenen eines Punktes erleiden die Normalspannungen $\sigma_x \sigma_y \sigma_z$. Man beweise, daß ihre Summe sich nicht ändert, wenn man drei andere senkrechte Ebenen wählt.



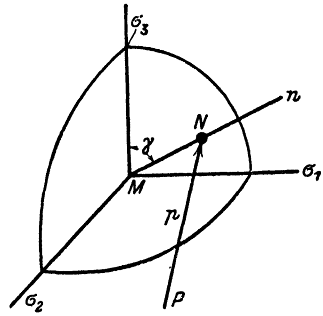
Aufg. 21.

21. Ein kleines, rechtwinkliges Parallelepiped von den Kanten l, m, n wird von drei Normalspannungen beansprucht. Man suche die Normal- und Schubspannung der Diagonalebene ABCD.

22. In einem Punkt M eines elastischen Körpers schneiden sich drei senkrechte Ebenen XY, YZ, ZX. Die Ebene XY erleidet in Richtung der $-Z$ eine Normalspannung $\sigma_z = 200$ at; die beiden anderen Ebenen erleiden nur Schubspannungen in Richtung der $+Z$, und zwar die Ebene YZ eine Schubspannung $\tau_y = 150$ at, die Ebene ZX eine Schubspannung $\tau_x = 80$ at. Wie groß ist die Schubspannung τ der Ebene XY, und welchen Winkel schließt sie mit X ein? Wie groß sind die Hauptspannungen des Punktes M, und welche Winkel schließen sie mit Z ein? Welche Gestalt und Lage hat die Spannungsfläche?

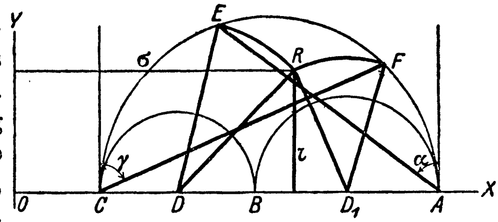
23. Die drei Hauptspannungen $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ eines Punktes M seien gegeben. Auf der Normale jeder Ebene werde von M aus die Strecke $MN = \frac{1}{\sqrt{\pm \sigma}}$ aufgetragen, wenn σ die Normalspannung der

Ebene ist. Man suche den Ort der Punkte N.



24. Von den drei Hauptspannungen eines Punktes M sei die kleinste σ_3 eine Zugspannung, die beiden andern σ_1 und σ_2 Druckspannungen. Um M werde eine Kugel mit σ_3 als Halbmesser beschrieben. n sei die Normale eines Flächenelementes in M, N ihr Durchschnitt mit der Kugel, $PN = p$ die Spannung des Flächenelementes. Welchen Ort erfüllen die Punkte P für alle Normalen n, deren Winkel γ gegen σ_3 derselbe ist? (Mohr, Zivilingenieur 1882.)

25. Die Hauptspannungen eines Punktes M: $\sigma_1 = OA$, $\sigma_2 = OB$, $\sigma_3 = OC$ werden auf der X-Achse eines rechtwinkligen Achsenkreuzes von O aus aufgetragen. Um die Gesamtspannung p einer beliebigen Ebene des Punktes M zu finden, gibt O. Mohr (Zeitschr. d. Vereins deutsch. Ingen. 1900) folgende Konstruktion an. Sind α, β, γ die Winkel der Normale der gespannten Ebene mit den drei Hauptspannungen, so ziehe man die Linien AE und CF unter den Winkeln α bzw. γ gegen die Y-Richtung und suche die Schnitte dieser Geraden mit dem über AC beschriebenen Halbkreis. Sodann ziehe man die Bögen FR und ER konzentrisch mit den Halbkreisen über AB bzw. BC. Ihr Schnittpunkt R ist ein Bild der gesuchten Spannung; es ist nämlich $p = OR$, und die Koordinaten des Punktes R sind die Normalspannung σ und die Schubspannung τ der gespannten Ebene. Man versuche dies zu beweisen.



26. Die drei Hauptspannungen eines Punktes seien $\sigma_1 = \sigma_2 = -\sigma_3 = k$. Man suche die Spannungsfläche und den Ort aller Ebenen, welche nur Schubspannungen erleiden. Wie groß sind diese?

27. Um ein Bild der Verteilung der Schubspannungen eines Punktes M zu erhalten, kann man sich folgender Konstruktion bedienen: man errichte in M eine Normale auf jede Ebene des

Punktes und trage auf ihr das Stück $MN = \varrho = \frac{1}{\sqrt{\tau}}$ nach beiden Seiten auf, wobei τ die Schubspannung der Ebene ist. Die Punkte N erfüllen dann eine Fläche. Man suche ihre Gleichung, ihre Schnitte mit den Hauptspannungsebenen und zeichne das Bild eines Oktanten der Fläche.

28. Welcher Punkt der in der vorigen Aufgabe gefundenen Fläche der Punkte N (Schubspannungsfläche) liegt dem Mittelpunkt M am nächsten, und welche Bedeutung hat diese kürzeste Entfernung und die zu ihr normale Ebene des Punktes M?

29. Es sind die Hauptspannungen eines Punktes M und eine Ebene dieses Punktes gegeben. Man suche die Schubspannung dieser Ebene.

30. Es sind die Hauptspannungen eines Punktes M und eine Gerade g dieses Punktes gegeben. Für welche Ebene liegt die Schubspannung in dieser Geraden?

31. Die Hauptspannungen eines Punktes M seien gegeben, und zwar sei $\sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2$. Man zeige, daß die durch M gehende Gerade g, deren Winkel mit den Hauptspannungen die Kosinuse

$$\sqrt{\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_2}}, \quad \sqrt{\frac{\sigma_3 - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}}, \quad 0$$

besitzen, die Eigenschaft hat, Schubspannungsrichtung für jede durch sie gehende Ebene zu sein.

***32.** Die Kegelfläche

$$F = \frac{x^2}{k + \sigma_2 + \sigma_3 - 2\sigma_1} + \frac{y^2}{k + \sigma_3 + \sigma_1 - 2\sigma_2} + \frac{z^2}{k + \sigma_1 + \sigma_2 - 2\sigma_3} = 0,$$

deren Gleichung auf die Hauptspannungen $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ des Punktes M bezogen ist, besitzt die Eigenschaft, daß jede ihrer Mantellinien die Richtung der Schubspannung der Berührungsebene ist. Dabei ist k ein veränderlicher Parameter. Man suche diese Eigenschaft zu beweisen.

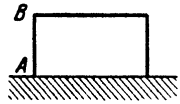
3. Dehnungen und Schiebungen.

33. Ein prismatischer Stab, der die Länge $l = 4$ m besitzt, erhält eine durchaus gleichartige Dehnung von $\varepsilon = 0{,}001$. Wie groß ist seine Länge nach der Formänderung?

34. Ein prismatischer Stab von der Länge $l = 2{,}348$ m wird gedehnt und nimmt die Länge $l_1 = 2{,}353$ m an. Wie groß ist seine Dehnung?

35. Ein prismatischer Stab hat vor seiner Formänderung die Länge 0,536 m, nach derselben 0,535 m; wie groß ist die Dehnung?

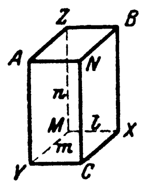
36. Eine Platte von der Höhe $AB = 20$ cm wird in ihrer Form derart verändert, daß A festgehalten, B um 0,1 mm horizontal verschoben wird. Wie groß ist die Schiebung γ der Seitenebene AB?



37. Ein rechtwinkliges Parallelepiped von den Kantenlängen 0,4 cm, 0,2 cm und 0,3 cm wird in seiner Form derart verändert, daß die Kanten bzw. die Längen 0,4004 cm, 0,20006 cm und 0,29985 cm annehmen. Wie groß ist die Raumdehnung?

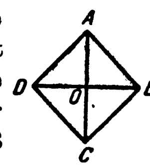
38. Ein kleines, rechtwinkliges Parallelepiped, dessen Kanten im Verhältnis $l:m:n = 1:1:2$ stehen, wird in seiner Form derart verändert, daß die Seitenebenen aufeinander senkrecht bleiben und die Dehnungen der Kanten l, m, n, folgende sind:

$$\frac{1}{50}, \frac{1}{80}, \frac{1}{100}.$$



Wie groß ist die Dehnung in Richtung der Diagonale MN?

39. Das Quadrat ABCD sei die Grundfläche eines kleinen Prismas. Die Diagonale DB erhält eine Dehnung ε_1, die Diagonale AC eine negative Dehnung $-\varepsilon_2$. Man berechne die Dehnung der Kante AB und die Schiebung der Seitenebenen AB und BC.



40. Die drei Hauptdehnungen in einem Punkt eines elastischen Körpers seien einander gleich. Wie groß ist die Schiebung einer beliebigen Ebene des Punktes?

41. Die drei Hauptdehnungen eines Punktes seien $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$. Man suche den geometrischen Ort jener Geraden des Punktes, in denen die Dehnung einen gegebenen Wert ε besitzt.

42. Ein kleines rechtwinkliges Parallelepiped (siehe Abbildung zu Aufgabe 38), dessen Kanten im Verhältnis $l:m:n = 2:3:5$ stehen, wird in seiner Form derart verändert, daß die Kanten zwar keine Längenänderungen erleiden, aber die Kantenwinkel folgende Werte annehmen: $\sphericalangle BXC = 90^0\,0'\,3''$, $\sphericalangle CYA = 89^0\,59'\,54''$, $\sphericalangle AZB = 89^0\,59'\,56''$. Wie groß ist die Dehnung in Richtung der Diagonale MN?

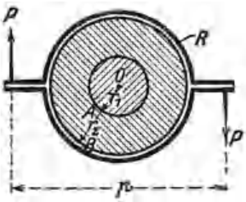
43. Die Dehnungen $\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z$ in drei aufeinander senkrechten Richtungen eines Punktes seien gleich groß, und zwar gleich ε_0.

Die Schiebungen $\gamma_x \gamma_y \gamma_z$ der drei Seitenebenen seien ebenfalls gleich groß. Man suche den geometrischen Ort aller jener Geraden des Punktes, deren Dehnung gleich mit ε_0 ist.

44. Die Dehnungen $\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z$ in drei aufeinander senkrechten Richtungen eines Punktes seien gleich groß, und zwar gleich ε_0. Die Schiebungen $\gamma_x \gamma_y \gamma_z$ der drei Seitenebenen seien ebenfalls gleich groß, und zwar gleich $2\,\varepsilon_0$. Wie groß ist die Dehnung ε in einer beliebigen Richtung, deren Richtungskonstanten a b c sind? Wie groß sind die Hauptdehnungen $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$, und welche Richtungen besitzen sie?

45. Die Katheten eines rechtwinkligen gleichschenkligen Dreiecks erleiden die Dehnung ε_1, die Hypotenuse die Dehnung $-\varepsilon_2$. Man berechne die Dehnung ε der Höhe des Dreiecks und die Schiebung γ der beiden Katheten.

46. Die Katheten a, b und die Hypotenuse c eines rechtwinkligen Dreiecks erleiden die Dehnungen $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$. Man berechne die Schiebung γ der beiden Katheten.

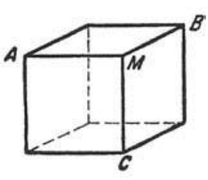


***47.** Ein Hohlzylinder mit den Halbmessern $OA = r_1$ und $OB = r_2$ und der Höhe h, dessen innere Mantelfläche festgehalten ist, wird von einem festanliegenden Ringe R umgeben, an dessen beiden Ansätzen zwei gleiche Kräfte P in entgegengesetztem Sinne wirken. Um wieviel verschiebt sich der Punkt B, wenn A unbeweglich angenommen wird?

(Grübler, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ingen. 1909.)

4. Elastizität des isotropen Körpers.

48. Ein horizontal liegender Eisenstab vom 1 cm² Querschnitt und 4 m Länge wird durch Erhitzen um 1 mm ausgedehnt; welche Kraft wird notwendig sein, um diese Dehnung zu verhindern? (Elastizitätszahl $E = 2 \cdot 10^6$ at.)



49. Die Kanten eines rechtwinkligen Parallelepipedes haben folgende Längen: $AM = 2{,}0$ cm, $BM = 1{,}6$ cm, $CM = 2{,}8$ cm; die Seitenflächen werden von folgenden Kräften beansprucht: BC durch 670 kg Zug, CA durch 940 kg Druck, AB durch 730 kg Druck. Die Elastizitätszahl ist $E = 2 \cdot 10^6$ at; das Verhältnis der Längsdehnung zur Querzusammenziehung $m = \frac{10}{3}$. Wie groß sind die Dehnungen der drei Kanten?

50. Ein Würfel liegt in einem Raum, in dem die Luftpressung $p = 20$ at herrscht. Sein Rauminhalt hat um $\frac{1}{100000}$ abgenommen. Man berechne das Verhältnis m der Längsdehnung zur Querzusammenziehung, wenn die Elastizitätszahl $E = 2 \cdot 10^6$ at ist.

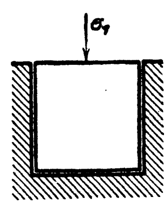
51. Ein isotroper Körper wird allseitig dem gleichen Druck p ausgesetzt; die entstehende Raumdehnung sei e. Man soll den Kompressionsmodul $k = \frac{p}{e}$ aus der Elastizitätszahl E und dem Verhältnis m der Längsdehnung zur Querzusammenziehung berechnen.

52. Die Punkte eines isotropen Körpers erleiden die Hauptspannungen $\sigma_1 = 1000$ at, $\sigma_2 = -600$ at. Der Rauminhalt ändert sich nicht. Wie groß ist die dritte Hauptspannung?

53. Ein rechtwinkliges Parallelepiped von den Kanten a, b, c wird parallel zu diesen von drei Kräften A, B, C beansprucht. Welche Beziehung muß zwischen diesen sechs Größen bestehen, wenn der Rauminhalt des Parallelepipedes sich nicht ändern soll?

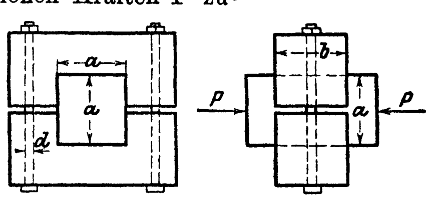
54. Ein prismatischer Stab von 0,4 m Länge und 5 mm Breite wird um 0,5 mm gedehnt. Die Elastizitätszahlen des Materials sind $E = 2{,}2 \cdot 10^6$ at für Zug, $G = 0{,}85 \cdot 20^6$ at für Schub. Um wieviel ändert sich die Breite?

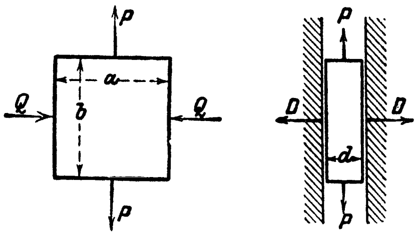
55. Die Hauptdehnungen in einem Punkt des Körpers sollen in folgender Beziehung stehen: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_3}{n}$. In welcher Beziehung stehen die Hauptspannungen?



56. Ein Würfel wird mit einer Pressung σ_1 in eine passende Vertiefung gepreßt, die nach keiner Seite nachgeben kann. Wie groß werden die Drücke sein, welche die seitlichen Würfelflächen auf die Wände der Vertiefung ausüben?

57. Ein Eisenstück von quadratischem Querschnitt a^2, das von zwei gleichen Kräften P zusammengepreßt ist, wird von zwei miteinander verschraubten Balken derart umschlossen, daß es seine Breite a nicht ändern kann. Man drücke die in den Schrauben auftretende Spannung s durch P und die Abmessungen a, b, d aus.





58. Eine rechteckige Platte von der Dicke d liegt zwischen zwei festen parallelen Flächen, die sie berühren. Welchen Druck D übt sie auf diese Fläche aus, wenn die Platte an ihren Seiten von zwei Zugkräften P und zwei Druckkräften Q beansprucht wird?

***59.** Der Körper sei nicht dem Hookeschen Gesetze $\sigma = E\varepsilon$ mit konstanter Elastizitätszahl, sondern dem hyberbolischen Gesetze

$$\sigma = \frac{a\varepsilon}{1 + b\varepsilon}$$

unterworfen. Man zeige, wie sich die Elastizitätszahl mit zunehmender Spannung verändert.

60. Ein prismatischer Stab wird zwei verschiedenen achsialen Belastungen P_1 und P_2 ausgesetzt, die ihm die Längen l_1 und l_2 erteilen, während sein Querschnitt die Größen F_1 und F_2 annimmt. Man ermittle aus diesen Angaben die Elastizitätszahl des Materials.

61. Ein zylindrischer Stab wird zwei verschiedenen achsialen Belastungen P_1 und P_2 ausgesetzt, durch die sein Querschnitt die Halbmesser r_1 und r_2 annimmt. Man bestimme aus diesen Angaben das Verhältnis m der Längsdehnung zur Querzusammenziehung.

(60, 61: Leon, Zeitschr. d. Österr. Ing. u. Arch.-Ver. 1908.)

62. Wenn der isotrope Körper nicht dem Hookeschen, sondern dem von C. v. Bach aufgestellten Gesetze $\sigma^n = C\varepsilon$ unterworfen ist, worin C und n Zahlen bedeuten, welche Beziehungen bestehen zwischen den Hauptspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ und den Hauptdehnungen $\varepsilon_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3$?

II. Normalfestigkeit.

1. Festigkeitszahlen und zulässige Spannungen.

63. v. Tetmajer empfiehlt, die Zugfestigkeit eines Stabes, der abwechselnd zwei verschieden großen Kräften $_{min}P$ und $_{max}P$ ausgesetzt wird, nach der Gleichung zu berechnen:

$$\text{Arbeitsfestigkeit } A = a + b\,n + c\,n^2,$$

worin $n = \frac{_{min}P}{_{max}P}$ ist. Wie findet man die Konstanten a, b, c des Materials, wenn die Zugfestigkeit für ruhende Belastung K_z, die Ursprungsfestigkeit U und die Schwingungsfestigkeit S durch Versuche ermittelt wurden?

64. Man berechne die in Aufgabe 63 definierte Arbeitsfestigkeit für Schweißeisen, Flußeisen und Flußstahl mit Benützung der Zahlen in Gleichung 16.

***65.** v. Launhardt berechnet die Arbeitsfestigkeit nach der Gleichung

$$A = U + (K_z - U)\,n,$$

worin n die in Aufgabe 63 angegebene Bedeutung besitzt und nur positiv vorausgesetzt wird (gleichsinnige Belastung). Für welchen Wert von n weicht diese Angabe der Arbeitsfestigkeit am meisten von jener v. Tetmajers in Aufgabe 63 ab, und wie groß ist diese Abweichung bei Schweißeisen, Flußeisen und Flußstahl?

66. Ein Stab aus Schweißeisen wird abwechselnd auf 15 t und 3 t Zug beansprucht. Seine zulässige Spannung k_z soll mit $\frac{2}{7}$ der Arbeitsfestigkeit angenommen werden; wie groß ist sie nach den Angaben von v. Tetmajer und v. Launhardt? (Vergl. Aufgabe 63 und 65.)

67. Ein Stab aus Flußeisen wird abwechselnd auf 20 t Druck und 8 t Zug beansprucht. Die zulässige Spannung k_z soll $\frac{2}{7}$ der Arbeitsfestigkeit gewählt werden; wie groß ist sie?

68. Von zwei Stäben aus demselben Material wird der eine zwischen 0 und P belastet, der andere zwischen $-\frac{P}{m}$ und $+\frac{P}{m}$.

Die Sicherheit beider Stäbe soll dieselbe sein. Wie groß muß m gemacht werden?

69. Drei Probestäbe aus demselben Eisen mit 6 cm^2 Querschnitt reißen bei sehr oft wiederholter Belastung zwischen folgenden Belastungsgrenzen:

Stab I: 17,85 t Zug und 8,925 t Zug,
Stab II: 9,6 t Zug und 3,2 t Druck,
Stab III: 8,85 t Druck und 4,425 t Zug.

Wie groß ist die Zugfestigkeit des Materials für ruhende Belastung?

***70.** Jenseits der Proportionalitätsgrenze kann für Stahl das Spannungsgesetz angenommen werden:

$$\sigma^5 = C\,\varepsilon,$$

und für den eingeschnürten Querschnitt des Probestabes:

$$F' = F(1 - \varepsilon)$$

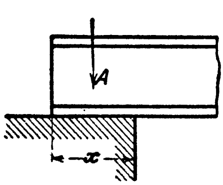
wenn F der ursprüngliche Querschnitt, C eine Konstante und ε die Dehnung ist. Man berechne die Zugfestigkeit des Probestabes unter der Annahme, daß sie eintritt, sobald die Zugkraft des Stabes ihren größten Wert erreicht hat.

(F. Leitzmann, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1900.)

2. Zug und Druck.

71. Die auf $P = 6830$ kg Zug beanspruchte Schließe eines eisernen Dachstuhls soll kreisrunden Querschnitt bekommen. Wie groß muß der Durchmesser d gewählt werden, wenn die Spannnng $k_z = 1000$ at gestattet ist?

72. Bei welcher ruhenden Zuglast reißt ein Stab aus Schweißeisen, dessen Querschnitt ein gleichseitiges Dreieck von 4 cm Seitenlänge ist? (Zugfestigkeit $K_z = 4000$ at.)



73. Der Auflagerdruck eines Trägers von $b = 30$ cm Breite ist $A = 8$ t. Auf welche Länge x muß der Träger aufliegen, wenn als zulässige Druckspannung für Ziegelmauerwerk $k = 5$ at angesetzt wird?

74. Ein Pumpengestänge von $l = 30$ m Länge und kreisrundem Querschnitt hat am Ende $P = 800$ kg ruhend zu tragen. Wie stark muß der Durchmesser d gemacht werden, wenn das Eigengewicht berücksichtigt wird? (Einheitsgewicht $\gamma = 7{,}7$, zulässige Zugspannung $k_z = 700$ at.)

75. Der Durchschnitt eines Drahtseiles zeigt 36 Drähte, von denen jeder $\delta = 2$ mm stark ist. Welche Last Q kann dieses Seil sicher tragen? Welche Last P würde das Seil zerreißen? (Zulässige Zugspannung $k_z = 600$ at, Zugfestigkeit $K_z = 5600$ at.)

76. Unter Reißlänge versteht man in der Technologie die Länge, die ein prismatischer, vertikal hängender Stab haben muß, wenn er lediglich infolge seines Gewichtes reißen soll. Man berechne diese Reißlänge aus der Zugfestigkeit K_z und dem Einheitsgewicht γ. Im besonderen für:

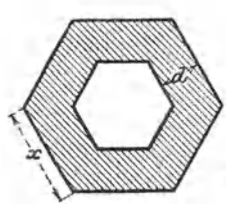
Holz mit $K_z = 790$ at, $\gamma = 0{,}5$;
Eisen mit $K_z = 3800$ at, $\gamma = 7{,}8$.

77. Eine hohle gußeiserne Säule von $d = 20$ cm äußerem Durchmesser hat eine Last von $P = 50$ t mit zehnfacher Sicherheit gegen Zerdrücken zu tragen. Wie groß muß die Wandstärke der Säule gemacht werden? (Druckfestigkeit $K = 7500$ at.)

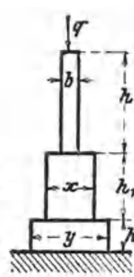
78. Eine aus Ziegeln aufgeführte Mauer soll eine derartige Höhe erhalten, daß die unterste Schichte noch zwanzigfache Sicherheit gegen Zerdrücken besitzt. Wie groß darf die Höhe sein, wenn $\gamma = 1{,}6$ das Einheitsgewicht der Ziegeln ist? (Druckfestigkeit $K = 100$ at.)

79. Ein rechtwinklig behauener Quaderstein mit den Kanten a, b, c, dem Einheitsgewicht γ und der Druckfestigkeit K wird auf einer seiner Seitenflächen horizontal gelagert. Wie verhalten sich die Lasten P_1, P_2, P_3, die mit Sicherheit auf diesen Quader gelegt werden dürfen, wenn a, b oder c vertikal steht?

80. Ein Untersatz aus Gußeisen von der Höhe h und nebenan gezeichnetem Querschnitt hat außer seinem Eigengewicht (Einheitsgewicht γ) noch die Belastung P sicher zu tragen. Wie lang muß die Seite x gemacht werden, wenn die Dicke d und die Druckfestigkeit K des Gußeisens gegeben sind?



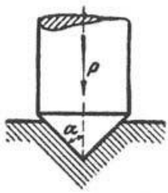
Aufg. 80.



Aufg. 81.

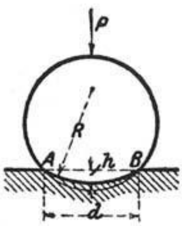
81. Eine Ziegelmauer, die in drei Absätzen mit den Höhen $h = 3$ m, $h_1 = 2$ m, $h_2 = 1$ m gebaut ist und an ihrer Krone die Breite $b = 0{,}4$ m besitzt, soll den schlechten Baugrund höchstens mit 3 at belasten. Wie groß darf die Belastung q der Mauer für jeden Meter Länge gewählt werden, und wie groß müssen die

Breiten x und y gemacht werden? (Einheitsgewicht der Mauer $\gamma = 1{,}6$.)



82. Um die Härte eines Körpers zu messen, wird nach der Ludwikschen Kegeldruckprobe ein Stahlkegel von der Öffnung $2\,\alpha = 90^0$ in die ebene Oberfläche des Körpers eingepreßt. Wie groß ist der Druck auf die Flächeneinheit des Körpers, wenn die Reibung am Kegelmantel berücksichtigt wird?

83. Bei der Brinellschen Kugeldruckprobe wird eine kleine Stahlkugel in den auf seine Härte zu prüfenden Körper gedrückt.



Es hat sich gezeigt, daß bei kleinen Drücken

$$P = C\,h$$

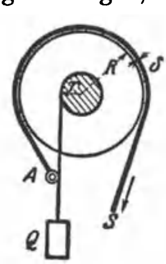
ist, worin C eine Konstante und h die Höhe der Eindruckskalotte bedeutet.

Wenn p der mittlere Einheitsdruck auf den Eindruckskreis AB und R der Krümmungshalbmesser der Eindruckskalotte ist, welche Beziehung besteht zwischen p und R?

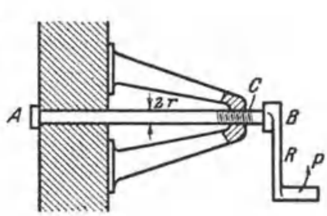
(Martens u. Heyn, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1908.)

84. Ein Treibriemen von der Stärke $\delta = 4$ mm, der über zwei Riemenscheiben vom Halbmesser $R = 1{,}2$ m läuft, überträgt $N = 12$ PS. Die Scheiben machen $n = 60$ Umdrehungen in der Minute. Welche Breite b muß der Riemen bekommen, wenn die zulässige Spannung $k_z = 20$ at nicht überschritten werden soll?

85. Um zu verhindern, daß die Last Q herabsinkt, wird über eine Bremsscheibe (Halbmesser R) ein stählernes Bremsband (Dicke δ) geschlungen, das bei A befestigt ist und an dessen Ende ein Zug ausgeübt wird. Welche Breite b muß das Band bekommen, damit durch die Zugkraft S die zulässige Spannung nicht überschritten wird? Es ist: $Q = 4$ t, $\delta = 3$ mm, $r = 10$ cm, $R = 30$ cm, $k_z = 1000$ at, $\alpha =$ umspannter Bogen des Bremsbandes $= 1{,}2\,\pi$, $f =$ Reibungszahl des Bremsbandes $= 0{,}18$.

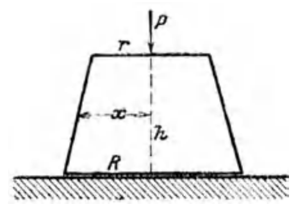


Aufg. 85.



Aufg. 86.

86. Ein schmiedeeiserner Rundstab AB von 1 cm Halbmesser wird mittelst einer Kurbel $R = 0{,}5$ m gedreht; er ist in C mit Schraubengewinden versehen, die sich in gut passender Schraubenmutter drehen. Der Steigungswinkel der Schraube ist $\alpha = 3^0\,30'$, die Reibungszahl in derselben $f = 0{,}1$. Welche Kraft P muß an der Kurbel ausgeübt werden, wenn der Rundstab zerreißen soll? (Zugfestigkeit $K_z = 4000$ at.)



***87.** Ein Kegelstutz von der Höhe h, den Halbmessern R, r und dem Einheitsgewicht γ wird mit P belastet. Man suche den Halbmesser x des am wenigst beanspruchten Querschnittes.

88. Wenn in voriger Aufgabe $R = 2\,r$ ist und der am wenigst beanspruchte Querschnitt in halber Höhe des Kegelstutzes liegen soll, in welchem Verhältnis muß die Belastung P zum Gewicht G des Kegelstutzes stehen?

89. Ein Rundeisen (Schweißeisen) hat abwechselnd 40 t und 2 t zu tragen. Welchen Durchmesser hat es für sicheres Tragen zu bekommen, wenn als zulässige Zugspannung $\frac{2}{7}$ der Arbeitsfestigkeit angenommen wird?

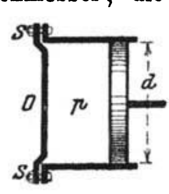
90. Die Diagonale eines Gitterträgers hat wechselnde Belastungen zwischen 14 t Zug und 5 t Zug zu ertragen. Die zulässige Spannung soll nach der Gleichung für Flußeisen:

$$k_z = 700 + 430\,n + 100\,n^2$$

gewählt werden, worin n das Verhältnis der kleinsten zur größten Beanspruchung ist. Die Diagonale wird aus Flacheisen gebildet, dessen Stärke $d = 1$ cm ist; wie groß wird die Breite b des Flacheisens zu machen sein?

91. Wie ändert sich das Resultat der vorigen Aufgabe, wenn die Belastungsgrenzen der Diagonale 6 t Zug und 2 t Druck sind?

92. Ein Dampfzylinder hat $d = 800$ mm Durchmesser; die Dampfspannung beträgt $p = 7$ at. Der Abschlußdeckel D des Zylinders wird durch n (acht) Schrauben S mit dem Zylinder verbunden. Man berechne die Stärke δ der Schraubenbolzen (Schweißeisen) mit Rücksicht auf die abwechselnde Be- und Entlastung.

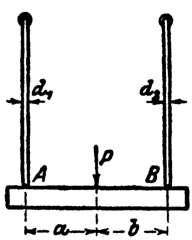


93. Der Deckel des Dampfzylinders in voriger Aufgabe ist angeschraubt. Die Schrauben S sind fest angezogen, so daß in den Schraubenspindeln bedeutende Zugspannungen auftreten. Wenn nun im Innern des Zylinders der Dampfdruck p auftritt, wird er die Spannungen in den Schraubenspindeln vergrößern oder verkleinern?

94. Wie groß ist die Verlängerung eines $l = 200$ m langen Schachtgestänges mit quadratischem Querschnitt durch die am Ende hängende Last von $P = 6$ t und durch das Eigengewicht, wenn die höchste Spannung $k_z = 600$ at beträgt? (Elastizitätszahl $E = 2 \cdot 10^6$ at, Einheitsgewicht $\gamma = 7{,}8$.)

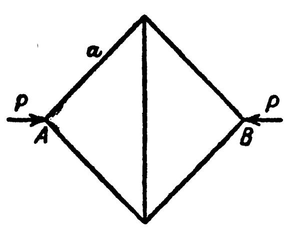
95. Das Schachtgestänge der vorigen Aufgabe soll aus vier gleichlangen Stücken hergestellt werden, von denen jedes quadratischen Querschnitt bekommt. Welche Stärken x_1, x_2, x_3, x_4 werden diese vier Stücke bekommen müssen? Wieviel beträgt die Ersparnis an Material gegen früher? Wie groß ist jetzt die gesamte Längenänderung Δl?

96. Ein Träger AB ist an seinen Enden an zwei gleichlangen Stangen aufgehängt, deren Durchmesser d_1 und d_2 gegeben sind. An welcher Stelle darf der Träger belastet werden ($a:b = ?$), wenn er horizontal bleiben soll?



Aufg. 96.

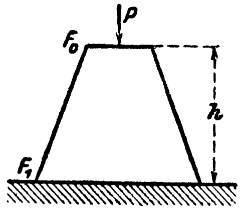
97. Eine herabhängende Eisenstange von 4 cm Breite und 2 cm Dicke werde von $t_0 = 20^0$ anfänglicher Temperatur bis auf $t_1 = -10^0$ abgekühlt. Die hierdurch entstehende Zusammenziehung der Stange soll durch ein angehängtes Gewicht verhütet werden. Wie groß muß dieses sein, wenn die Ausdehnungszahl des Eisens $\frac{1}{810}$ für 100^0 ist?



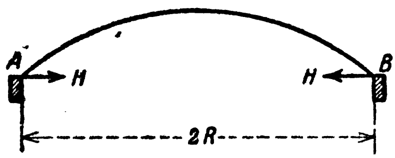
98. Ein quadratisches Stabwerk wird durch zwei gleiche Kräfte P zusammengedrückt. Die fünf Stäbe haben denselben Querschnitt F und sind aus dem gleichen Material. Um wieviel nähern sich die Punkte A und B?

***99.** Ein prismatischer Körper vom Gewicht G und der Länge l steht auf horizontaler Unterlage. Um wieviel senkt sich sein Schwerpunkt?

***100.** Ein prismatischer Stab vom Gewicht G, der auf horizontaler Unterlage steht, wird mit seinem oberen Ende an einem Haken aufgehängt. Die Länge des Stabes ändert sich nicht. Wie verteilt sich das Gewicht des Stabes auf Haken und Unterlage?

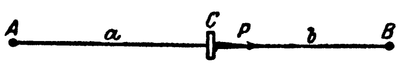


***101.** Ein gerader Kegelstutz von der Höhe h und den Endquerschnitten F_0 und F_1 wird an dem oberen Ende mit P belastet. Um wieviel ändert sich die Höhe h, wenn vom Einfluß des Eigengewichtes abgesehen wird?



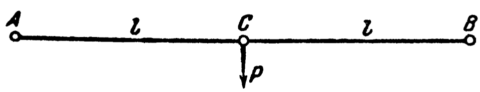
***102.** Eine flache Kuppel ruht auf einem festen Ringe vom Halbmesser R, dessen Durchschnitt man in A und B sieht. Der gesamte Seitenschub der Kuppel ist H. Wie groß ist die Zugkraft S im Auflagerringe?

103.



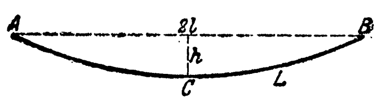
Ein zwischen zwei unverrückbaren Punkten A und B befestigter Stab wird in C achsial mit P belastet. Um wieviel rückt der Querschnitt C nach rechts?

104.



Drei Gelenke A, C, B sind durch zwei gleich lange Stäbe vom Querschnitt F miteinander verbunden. Die Gelenke A und B sind fest gelagert, das Gelenk C wird belastet. Wie groß darf die Last P sein, wenn die Spannung s nicht überschritten werden soll und wie groß ist dann die Einsenkung e des Gelenkes C?

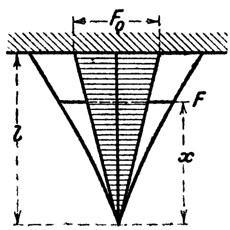
***105.**



Ein Seil, das die Länge 2 l hat und für die Längeneinheit q wiegt, wird zwischen den Punkten A und B aufgehängt. Das Seil dehnt sich und bekommt in der Mitte C einen Durchhang h. Man berechne diesen unter der Annahme, daß die Seillinie eine Parabel ist.

***106.** Ein Stab, der vertikal hängt und dessen oberster Querschnitt F_1 gegeben ist, soll derart gebaut sein, daß die Spannung überall gleich s ist. Der Stab hat nur sein eigenes Gewicht zu tragen; sein Einheitsgewicht sei γ. Wie ändert sich der Querschnitt F mit seinem Abstand x von F_1? Welche Länge darf der Stab besitzen? Wie groß ist sein unterster Querschnitt F_0? Wie groß ist sein Gewicht?

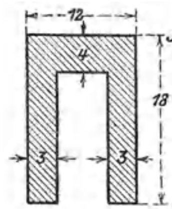
***107.** Ein Körper von veränderlichem Querschnitt F mit dem Einheitsgewicht γ hängt frei herab. Er trägt außer seinem eigenen Gewicht auch jenes eines pyramidalen Körpers von der Grundfläche F_0 und dem Einheitsgewicht γ_1, der selbst keine Festigkeit besitzt. Die Spannung im tragenden Körper soll überall die gleiche Größe k_z haben; nach welchem Gesetz hat sich F mit x zu ändern?



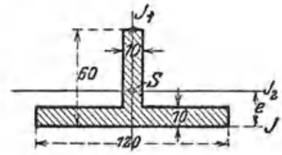
III. Biegungsfestigkeit.

1. Trägheitsmomente und Widerstandsmomente.

108. Bestimme das Trägheitsmoment J nebenstehenden Querschnittes für die Kante und die Hauptträgheitsmomente J_1 J_2 für den Schwerpunkt. (Abmessungen in cm.)



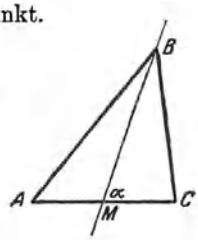
Aufg. 108.



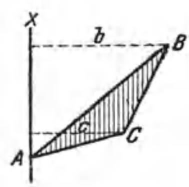
Aufg. 109.

109. Man suche von nebenstehendem Querschnitt eines T-Eisens (Abmessungen in mm) das Trägheitsmoment J sowie die Hauptträgheitsmomente J_1 und J_2 in bezug auf den Schwerpunkt.

110. Es ist das Trägheitsmoment einer Dreiecksfläche in bezug auf die Gerade MB zu suchen, welche die Grundlinie $AC = b$ halbiert.



Aufg. 110.



Aufg. 111.

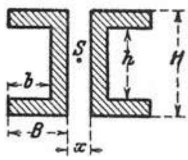
111. Suche das Trägheitsmoment eines Dreiecks ABC in bezug auf eine beliebige Gerade AX durch die Fläche F und die beiden Abstände b und c auszudrücken.

(Routh.)

112. Wie groß ist das Trägheitsmoment J eines Trapezes in bezug auf die Grundlinie a, und wie groß ist J_s in bezug auf jene Schwerlinie, die zu a parallel ist?

113. Es ist das Trägheitsmoment einer regelmäßigen Sechseckfläche in bezug auf eine beliebige Schwerlinie durch die Länge s der Seite auszudrücken.

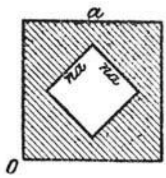
114. Man ermittle das Trägheitsmoment einer regelmäßigen Fünfecksfläche in bezug auf eine seiner Seiten s.



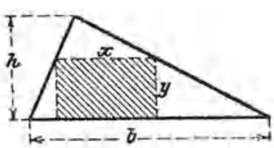
115. Zwei gleiche U-Eisen sollen in einer Entfernung x voneinander derart angeordnet werden, daß die Hauptträgheitsmomente bezüglich des Mittelpunktes S einander gleich sind. Wie groß muß x sein?

116. Man berechne die Hauptträgheitsmomente J_1 und J_2 für den Schwerpunkt eines gleichschenkligen Winkeleisens, dessen Dicke gleich einem Viertel der Schenkellänge l ist.

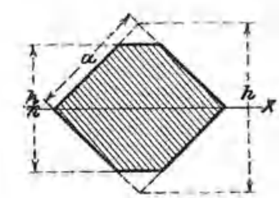
(Vergleiche Abbildung zu Aufgabe 171.)



117. Die Hauptträgheitsmomente eines durch ein zentrales kleineres Quadrat ausgehöhlten Quadrates in bezug auf einen Eckpunkt O sollen im Verhältnis 1 : 5 stehen. Wie groß muß n gemacht werden?



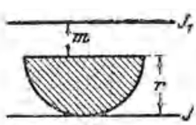
***118.** In ein Dreieck von gegebener Grundlinie b und Höhe h soll ein Rechteck derart eingeschrieben werden, daß das Widerstandsmoment des letzteren ein Maximum wird. Wie groß müssen x und y gemacht werden?



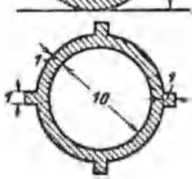
***119.** Ermittle Trägheitsmoment und Widerstandsmoment eines Quadrates von der Seitenlänge a, dessen obere und untere Ecke abgestumpft ist, für die Achse X, als Funktion von n, wenn $\frac{h}{n}$ die Höhe der Fläche ist. Für welches n erreicht das Widerstandsmoment den größten Wert und wie groß ist dieser?

(B. Kirsch, Zeitschr. Ver. Deutsch. Ing. 1898.)

120. In welchem Verhältnis stehen die Achsen der Trägheitsellipse für eine Ecke des gleichseitigen Dreiecks?



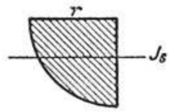
121. Man berechne die Trägheitsmomente eines Halbkreises in bezug auf die Tangente J und eine beliebige zum Durchmesser parallele Gerade J_1.



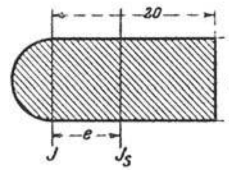
122. Wie groß ist das Trägheitsmoment und das Widerstandsmoment nebenstehenden Querschnittes in bezug auf den horizontalen Durchmesser? (Abmessungen in cm.)

123. Man suche das Trägheitsmoment einer Viertelkreisfläche in bezug auf die Schwerlinie J_s.

124. Suche das Trägheitsmoment nebenstehender Fläche in bezug auf die Gerade J und die Schwerlinie J_s. (Abmessungen in cm.)



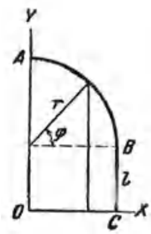
Aufg. 123.



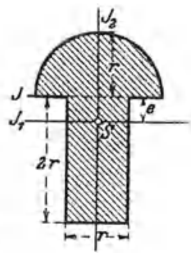
Aufg. 124.

***125.** Man berechne das Trägheitsmoment der homogenen Linie ABC in bezug auf die beiden Achsen OX und OY. AB ist ein Kreisbogen.

126. Man berechne die Hauptträgheitsmomente J_1 und J_2 für den Schwerpunkt des Längsschnittes einer Niete.

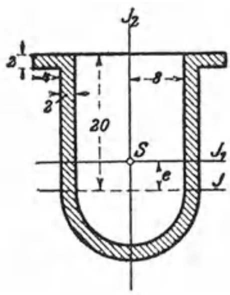


Aufg. 125.

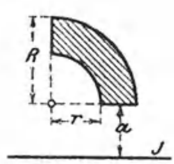


Aufg. 126.

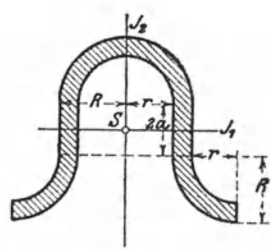
127. Man berechne die Hauptträgheitsmomente J_1 und J_2 für den Schwerpunkt des Querschnittes einer Rinne. (Abmessungen in cm.)



Aufg. 127.



Aufg. 128.

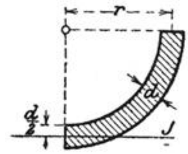


Aufg. 129.

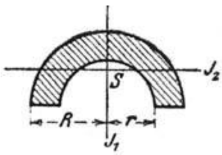
128. Man ermittle das Trägheitsmoment eines hohlen Viertelkreises in bezug auf die Achse J.

129. Man suche die Hauptträgheitsmomente J_1 und J_2 des gezeichneten Querschnittes für dessen Schwerpunkt.

130. Man suche das Trägheitsmoment einer hohlen Viertelkreisfläche in bezug auf die Achse J.



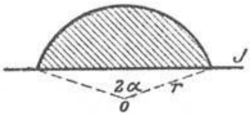
131. Ein exzentrischer Kreisring hat die Halbmesser $R = 20$ cm, $r = 10$ cm, die Exzentrizität $e = 5$ cm. Man suche die Hauptträgheitsmomente in bezug auf den Schwerpunkt des Ringes.



Aufg. 132.

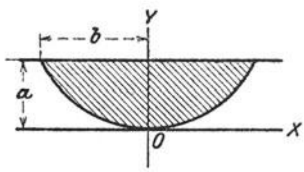
132. Suche die Hauptträgheitsmomente einer Halbringfläche in bezug auf ihren Schwerpunkt.

***133.** Es ist das Trägheitsmoment der Fläche eines Kreisabschnittes in bezug auf die Sehne zu berechnen.



Aufg. 133.

134. Es ist eine Ellipse zu suchen, welche bezüglich jeder durch ihren Mittelpunkt gehenden Achse gleiches Trägheitsmoment hat wie ein gegebenes Rechteck.

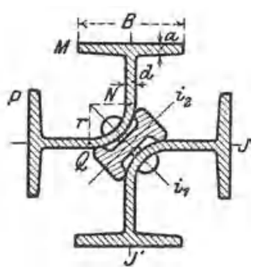


Aufg. 135.

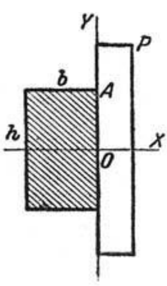
***135.** Wie groß ist das Trägheitsmoment einer Parabelfläche in bezug auf die Achsen X und Y?

136. Man berechne das Trägheitsmoment einer elliptischen Ringfläche in bezug auf die kleine Achse 2b. Es ist $a = 20$ cm, $b = 15$ cm; für die innere Ellipse des Ringes sei $a_1 : a = b_1 : b = 4 : 5$.

137. Die Trägheitsmomente einer Fläche in bezug auf zwei zueinander senkrechte Achsen, die nicht Symmetralen der Fläche sind, haben gleiche Größe. Man zeige, daß dann die Trägheitsmomente der Fläche für alle durch den Achsen-Schnittpunkt gehende Geraden gleich groß sind.



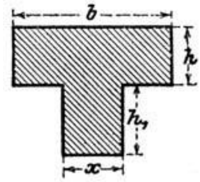
138. J. M. Latiner, Chicago, empfahl Säulen-Querschnitte aus gebogenen I-Eisen nach nebenstehender Anordnung. Man soll aus den Abmessungen B, a, d, der ursprünglichen Höhe H der I-Eisen, dem Krümmungshalbmesser r und den Hauptträgheitsmomenten i_1 und i_2 des inneren kleinen I-Eisens die Hauptträgheitsmomente des Querschnittes ermitteln.



***139.** An einen rechteckigen Querschnitt (b, h) wird symmetrisch ein anderes Rechteck gefügt, ohne daß das Widerstandsmoment in bezug auf die Symmetrale OX geändert wird. Welche Kurve muß dann der Endpunkt P des angefügten Rechtecks erfüllen?

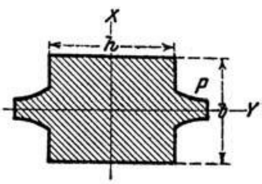
Welches ist die größte Breite dieses Rechtecks?

140. An ein Rechteck mit den Abmessungen b und h wird unten ein zweites Rechteck von der Höhe h_1 angesetzt. Das Widerstandsmoment des Querschnittes für die horizontale Schwerlinie soll jedoch hierdurch nicht geändert werden. Wie groß muß die Breite x des Ansatzes gemacht werden?
(G. Singer, Zeitschr. d. Öst. Ing. u. Arch. Ver. 1907.)



***141.** Welchem Gesetz muß die an das Rechteck b, h beiderseits angesetzte krumme Linie folgen, wenn das Widerstandsmoment W der schraffierten Fläche in bezug auf die X-Achse konstant und gleich $\frac{1}{6}bh^2$ bleiben soll?

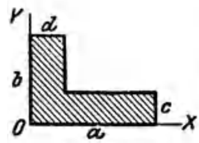
(B. Kirsch, Zeitschr. Ver. Deutsch. Ing. 1898.)



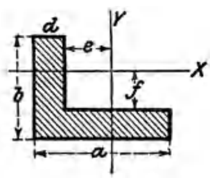
2. Zentrifugalmomente und Hauptachsen.

***142.** Man ermittle das Zentrifugalmoment eines Rechtecks in bezug auf zwei seiner nicht parallelen Seiten unmittelbar, d. h. ohne Benützung von Gl. 30.

143. Es ist das Zentrifugalmoment eines Winkeleisens in bezug auf das angegebene Achsenkreuz zu berechnen.



Aufg. 143.



Aufg. 144.

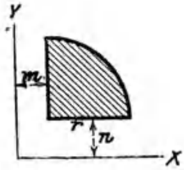
144. Es ist das Zentrifugalmoment eines Winkeleisens in bezug auf das außerhalb liegende Achsenkreuz XY zu ermitteln.

***145.** Es ist das Zentrifugalmoment eines Viertelkreises in bezug auf sein rechtwinkliges Achsenkreuz zu ermitteln.

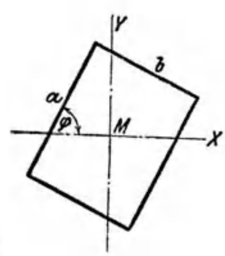
***146.** Man berechne das Zentrifugalmoment eines Viertelkreises in bezug auf das angegebene Achsenkreuz.

***147.** Es ist das Zentrifugalmoment des Quadranten einer Ellipse in bezug auf ihr rechtwinkliges Achsenkreuz zu bestimmen.

148. Es ist das Zentrifugalmoment eines Rechtecks



Aufg. 146.

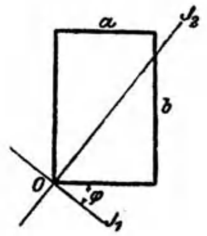


Aufg. 148.

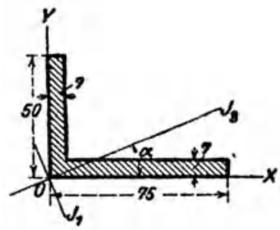
in bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Achsenkreuz des Mittelpunkts zu suchen.

149. Man berechne das Zentrifugalmoment einer Ellipse in bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Achsenkreuz ihres Mittelpunkts.

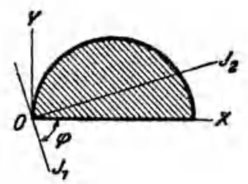
150. Berechne die Hauptträgheitsmomente J_1 und J_2 sowie den Winkel φ für die Ecke O eines Rechtecks von den Seiten $a = 2$ cm, $b = 3$ cm.



Aufg. 150.



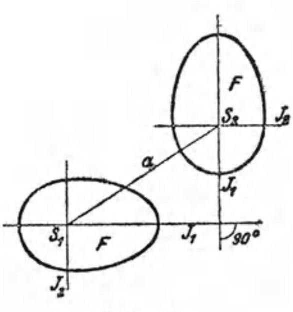
Aufg. 151.



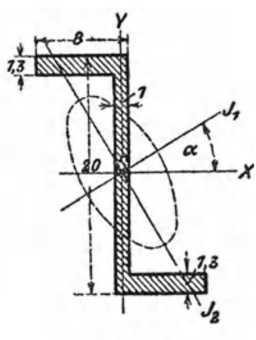
Aufg. 152.

151. Es ist der Querschnitt eines Winkeleisens gegeben. Suche für den Eckpunkt O das größte und das kleinste Trägheitsmoment J_1 und J_2 sowie den Winkel α. (Abmessungen in mm.)

152. Man suche die Hauptträgheitsmomente J_1 und J_1 sowie die Lage der Hauptachsen für die Ecke O einer Halbkreisfläche.



Aufg. 153.



Aufg. 154.

153. Der Querschnitt eines Trägers besteht aus zwei kongruenten Flächen F, deren Hauptträgheitsachsen senkrecht zu den gleichnamigen der anderen Fläche stehen und deren Schwerpunkte S_1 und S_2 die Entfernung a voneinander haben. Man suche das kleinste und größte Trägheitsmoment des Querschnittes für dessen Schwerpunkt.

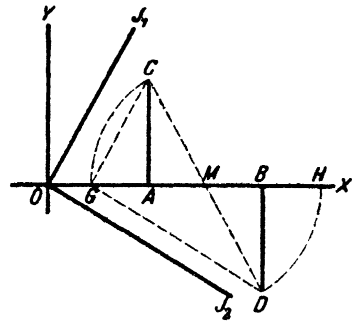
(J. Schmidt, Zeitschr. Ver. deutsch. Ing. 1916.)

154. Es ist die Trägheitsellipse für den Schwerpunkt (Zentralellipse) eines Z-Eisen-Querschnittes von obenstehender Form zu ermitteln. (Abmessungen in cm.)

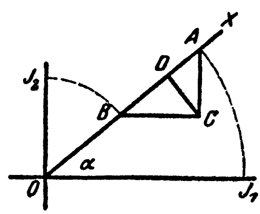
155. Die Flächenmomente zweiter Ordnung eines Querschnittes in bezug auf einen beliebigen Punkt O seien in folgender Weise aufgetragen:

$$OA = J_x, \quad OB = J_y,$$
$$AC = BD = J_{xy},$$

die beiden letzten Strecken senkrecht zur Achse OX des Achsenkreuzes XY. Man schlage aus M die beiden gezeichneten Kreisbögen; dann sind $OH = J_1$, $OG = J_2$ die beiden Hauptträgheitsmomente und GC, GD die Richtungen der beiden Hauptachsen. Man suche dies zu beweisen.

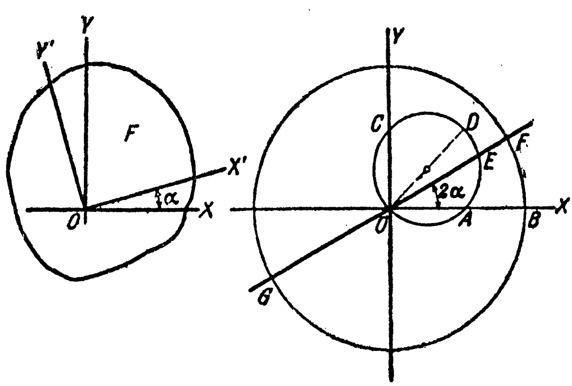


156. Die Hauptträgheitsmomente J_1, J_2 und die Hauptachsen einer Fläche in bezug auf einen Punkt O seien bekannt. Um das Trägheitsmoment für eine beliebige Achse OX zu finden, mache man $OA = J_1$, $OB = J_2$, ziehe durch A und B die Parallelen zu den Hauptachsen und fälle von C eine Senkrechte auf OX. Dann ist $OD = J_x$ und $CD = J_{xy}$, wenn $OY \perp OX$ gedacht ist. Man suche dies zu beweisen.



(155, 156: L. Hess, Zeitschr. d. Österr. Ing. u. Arch. Ver. 1903.)

157. Die Beziehungen zwischen den Trägheits- und Zentrifugalmomenten einer Fläche lassen sich auf zeichnerischem Wege in folgender Weise darstellen:



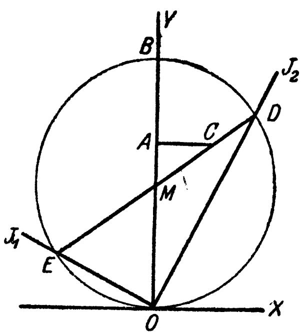
Von einer Fläche F seien in bezug auf einen Punkt O die Trägheitsmomente J_x J_y und das Zentrifugalmoment J_{xy} gegeben; um die Größen J_x' J_y' J_{xy}' auch für das um α gedrehte Achsenkreuz X′Y′ zu gewinnen, mache man

$$OA = \frac{1}{2}(J_y - J_x),\quad OB = \frac{1}{2}(J_y + J_x),\quad OC = J_{xy}$$

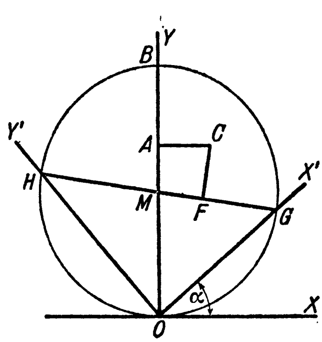
und zeichne die beiden im Bilde angegebenen Kreise. Zieht man dann durch O eine Gerade unter dem Winkel 2α gegen OX, so ist

$$EF = J_x',\quad EG = J_y',\quad ED = J_{xy}'.$$

Man versuche, diese von G. Zeuner gegebene Konstruktion zu beweisen.



158. Für einen Punkt O einer Fläche seien in bezug auf das Achsenkreuz XY bekannt die Trägheitsmomente J_x und J_y sowie das Zentrifugalmoment J_{xy}, und zwar werde aufgetragen: $OA = J_x$, $AB = J_y$, $AC = J_{xy}$ in der Richtung von OX. Über OB werde ein Kreis mit dem Mittelpunkt M beschrieben und der Durchmesser DE durch C gezogen; dann sind nach O. Mohr OD und OE die Richtungen der Hauptachsen des Punktes O und ferner nach R. Land $CD = J_2$, $CE = J_1$ die beiden Hauptträgheitsmomente. Man suche dies zu beweisen.



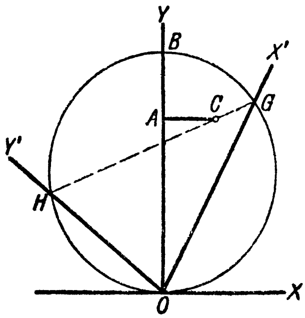
159. Die Punkte OABC haben die gleiche Bedeutung wie in der vorhergehenden Aufgabe. X′Y′ sei ein um α gedrehtes rechtwinkliges Achsenkreuz. Man zeige, daß die diesem Achsenkreuz entsprechenden Flächenmomente zweiter Ordnung durch folgende Strecken gegeben sind:

$$FG = J_x' \quad FH = J_y',\quad FC = J_{xy}'.$$

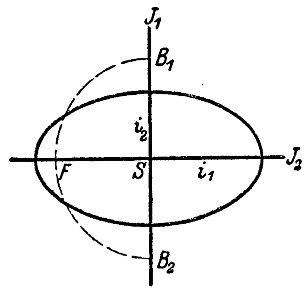
Hierbei ist $FC \perp GH$.

160. Die Punkte OABC haben die gleiche Bedeutung wie in Aufgabe 158.

Durch C wurde eine beliebige Gerade H G gezogen. Man zeige, daß das Zentrifugalmoment J'_{xy} für die Achsen O X', O Y' verschwindet.

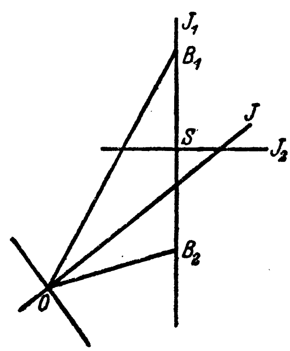


Aufg. 160.



Aufg. 161.

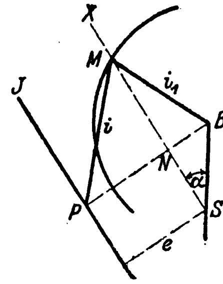
161. Die Zentral-Ellipse eines Querschnittes (in bezug auf den Schwerpunkt S desselben) sei gegeben; die Trägheitshalbmesser (Halbachsen der Ellipse) seien $i_1 i_2$. Man zeichne mit S als Mittelpunkt einen durch den einen Brennpunkt F der Ellipse gehenden Halbkreis; dann haben seine Endpunkte B_1 B_2 die Eigenschaft, daß für alle durch sie gehenden Geraden das Trägheitsmoment des Querschnittes das gleiche bleibt (Antibrennpunkte). Man suche dies zu beweisen.



Aufg. 162.

162. Es seien B_1 B_2 die aus der vorigen Aufgabe bekannten Antibrennpunkte der Zentral-Ellipse. O sei ein beliebiger Punkt im Querschnitt. Dann ist die Halbierungslinie des Winkels B_1 O B_2 eine der Hauptachsen des Punktes O. Man suche diesen von O. Mohr herrührenden Satz zu beweisen.

163. S und B_1 seien Schwerpunkt und Antibrennpunkt eines beliebigen Querschnittes (vergl. Aufgabe 161), J eine beliebige Achse. Zieht man B_1 P senkrecht zu J, S X parallel zu J und schneidet S X mit dem Trägheitskreise von B_1 (Halbmesser i_1) in M, so ist $MP = i$ der zur Achse J gehörige Trägheitshalbmesser des Querschnittes. Man suche dies zu beweisen.



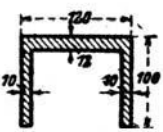
3. Biegungsspannung und Biegungsachse.

Aufg. 164.

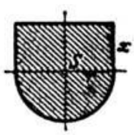
164. Man berechne die zulässige Biegungsspannung eines gußeisernen Trägers von nebenstehendem Querschnitt nach der Bachschen Gleichung 41, wenn die zulässige Zugspannung $k_z = 150$ at ist. (Abmessungen in cm.)

165. Eine gußeiserne Welle hat den Querschnitt eines Kreisringes, dessen Durchmesserverhältnis $\frac{d}{D} = \alpha$ gegeben ist. Man berechne die zulässige Biegungsspannung, wenn die zulässige Zugspannung k_z bekannt ist, auf Grund der Bachschen Gleichung 41.

166. Ein gußeiserner Stab hat halbkreisförmigen Querschnitt. Die Zugseite ist unten anzunehmen. Berechne nach der Bachschen Gleichung 41 die zulässige Biegungsspannung k_b, wenn $K_z = 1250$ at die Zugfestigkeit ist, für sechsfache Sicherheit.

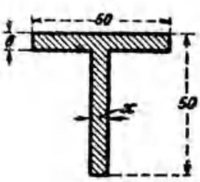


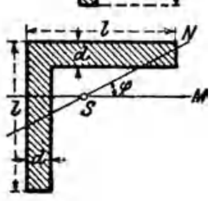
167. In welchem Verhältnis werden die zulässigen Spannungen k und k_z dieses Querschnittes stehen müssen, wenn er von gleicher Festigkeit sein soll? Die Zugseite ist oben anzunehmen. (Abmessungen in mm.)



168. Ein gußeiserner Balken, der einseitig eingespannt ist, hat nebenstehenden Querschnitt gleicher Festigkeit. S ist dessen Schwerpunkt. In welchem Verhältnis müssen die zulässigen Spannungen für Druck (k) und Zug (k_z) stehen?

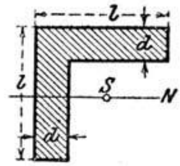
169. Wie breit (x) muß der Steg des nebenan gezeichneten Querschnittes gemacht werden, wenn dieser für die zulässigen Spannungen $k_z = 300$ at, $k = 800$ at gleiche Biegungsfestigkeit besitzen soll? Die Zugseite ist oben anzunehmen. (Abmessungen in mm.)



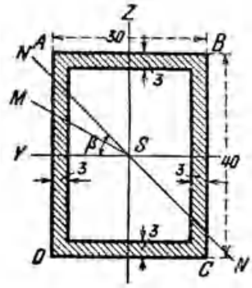


170. Ein gleichschenkliges Winkeleisen hat in bezug auf seinen Schwerpunkt folgende Hauptträgheitsmomente: $J_1 = 285$ cm^4, $J_2 = 75$ cm^4. Die Achse M des Biegungsmomentes ist parallel zu einem Schenkel. Welchen Winkel φ schließt die Biegungsachse N mit M ein?

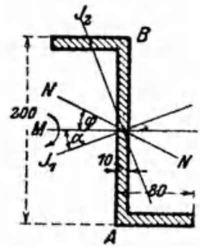
171. Die Dicke eines gleichschenkligen Winkeleisens sei $d = \frac{l}{4}$. Die Biegungsachse SN soll einem Schenkel parallel sein. Welchen Winkel φ wird die Achse des Biegungsmomentes mit ihr bilden müssen?



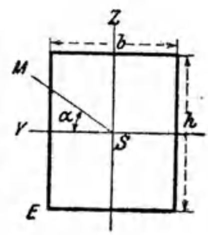
172. Um die Achse M des nebenstehenden Querschnittes, die unter 30° gegen die kleinere Kante geneigt ist, wirkt das Biegungsmoment der äußeren Kräfte M = 1200 mkg. Welche Lage besitzt die Biegungsachse NN? Welches sind die meist gespannten und gedrückten Stellen? Wie groß ist dort die Spannung? (Abmessungen in cm.)



173. Die Hauptträgheitsmomente eines Z-Eisens in bezug auf den Schwerpunkt sind $J_1 = 2421$ cm^4, $J_2 = 112$ cm^4, $\alpha = 18^0\ 46'\ 40''$. Das Biegungsmoment der äußeren Kräfte wirkt um die Horizontale. Wie groß ist der Winkel φ zwischen der Achse des Biegungsmomentes und der Biegungsachse? Welches sind die meist gespannten Stellen? Wenn daselbst die zulässige Spannung von 700 at nicht überschritten werden soll, wie groß darf M höchstens sein? (Abmessungen in mm.)

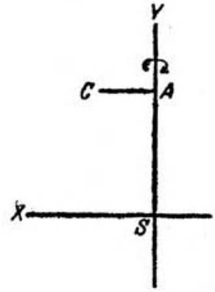


Aufg. 173.



Aufg. 174.

***174.** Der rechteckige Querschnitt eines Trägers wird von einem Biegungsmoment M beansprucht, dessen Achse einen Winkel α mit der Breite b des Rechtecks einschließt. Bei welcher Größe von α wird die Spannung im Eckpunkt E am größten werden (ungünstigste Lagerung des Trägers)? Wie groß ist dann die Spannung in E? Wie verläuft die Biegungsachse im Rechteck?



175. S sei der Schwerpunkt eines Querschnittes, SY die Achse eines den Querschnitt beanspruchenden Biegungsmomentes, ferner SA

$= J_x$, $AC = J_{xy}$ und $AC \perp SA$. Man zeige, daß SC die Null-Linie des Querschnittes ist.

***176.** Wenn jenseits der Proportionalitätsgrenze für Stahl das Spannungsgesetz $\sigma^5 = C\varepsilon$ angenommen wird (vergl. Aufgabe 70), wie ändern sich die unter Voraussetzung des Hookeschen Gesetzes $\sigma = E\varepsilon$ abgeleiteten Gleichungen 39 und 38 für die Krümmung der Stabachse:

$$\frac{1}{\varrho} = \pm \frac{M}{EJ}$$

und für die Biegungsspannung:

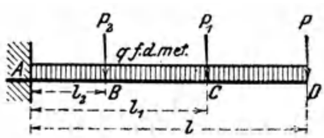
$$\sigma = -\frac{Mz}{J}.$$

(Leitzmann, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1900.)

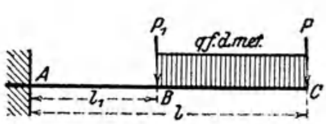
4. Der einseitig eingespannte Träger.

Man zeichne die Schaulinien der Biegungsmomente für die angegebenen Belastungen und berechne die Biegungsmomente an den Stellen A, B, C, sowie die Gleichungen der einzelnen Abschnitte der Schaulinien.

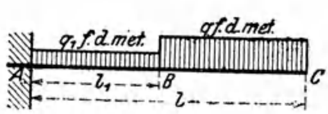
177.



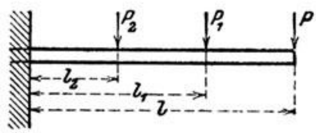
178.



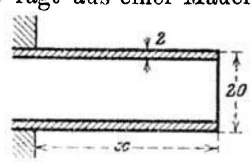
179.



180. Ein Holzbalken ist an den Stellen $l = 3$ m, $l_1 = 2$ m, $l_2 = 1$ m mit $P = 50$ kg, $P_1 = 80$ kg, $P_2 = 100$ kg belastet. Die zulässigen Spannungen seien: auf der Zugseite $\frac{1}{11}$ der Biegungsfestigkeit $K_b = 470$ at, auf der Druckseite $\frac{1}{6}$ der Druckfestigkeit $K = 280$ at. Welche Abmessungen muß der rechteckige Querschnitt für sicheres Tragen bekommen, wenn das Verhältnis der Breite zur Höhe $5:7$ sein soll?

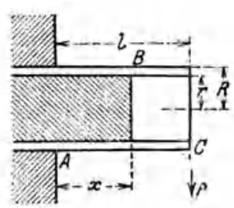


181. Ein mit Wasser gefülltes eisernes Rohr von gegebenem Querschnitt (Kreisring, Abmessungen in cm) ragt aus einer Mauer hervor. Es soll an seinem Ende höchstens 5 mm Durchbiegung aufweisen; wie groß darf die freie Länge x angenommen werden? (Elastizitätszahl $E = 2 \cdot 10^6$ at, Einheitsgewicht des Eisens $\gamma = 7{,}8$.)

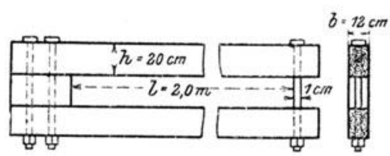


182. Um die Tragfähigkeit einer Röhre AC, die bei C belastet wird, zu vermehren, wird in das Innere ein gut passender Holzkern geschoben, der bis B reicht.

Wenn l_1 die höchstens zulässige Rohrlänge ohne Benützung eines Holzkerns ist, wie groß (l) darf die Länge bei Einlegung des Kerns sein? Wie groß darf die Länge x der Einlage sein?

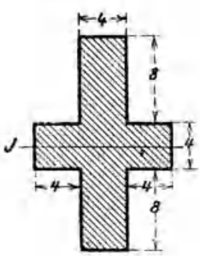


183. Zwei gleich starke Balken sind an dem einen Ende durch mehrere Schrauben an einem starken Klotz befestigt, an dem anderen Ende durch eine 1 cm starke Schraube miteinander verbunden. Welche Erscheinung tritt bei fortwährendem Anziehen der rechten Schraube früher ein: der Bruch der Balken oder das Zerreißen der Schraubenspindel? ($K_b = 470$ at Biegungsfestigkeit des Holzes, $K_z = 4000$ at Zugfestigkeit des Eisens vorausgesetzt.)

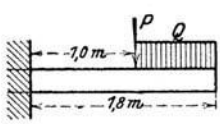


184. Ein hölzerner Balken von $l = 3$ m Länge und rechteckigem Querschnitt ($b = 20$ cm, $h = 28$ cm) ist einseitig eingemauert. Welche Last P kann der Balken am Ende sicher tragen, wenn er a) hochkantig (b horizontal), b) flachkantig (b vertikal) gelagert wird? Das Eigengewicht ist nicht zu berücksichtigen. Zulässige Biegungsspannung $k_b = 44$ at.

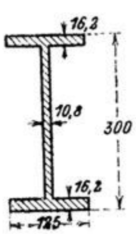
185. Ein vertikal stehender Telegraphenbaum von $l = 10$ m Länge über dem Boden soll einen solchen Durchmesser d bekommen, daß er dem Winddruck von 125 kg f. d. m² mit zehnfacher Bruchsicherheit widerstehen kann. Die Biegungsfestigkeit ist mit 420 at anzunehmen, der gesamte Winddruck (nach R. v. Lößl) gleich dem 0,785 fachen Druck auf den Längsschnitt des Baumes. Wie groß muß d gemacht werden?



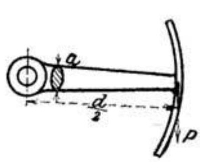
186. Die Speiche eines Rades hat kreuzförmigen Querschnitt von nebenstehenden Abmessungen in cm und eine Länge von 2 m; das eine Ende steckt in der Nabe des Rades, das andere Ende wird durch die Umfangskraft des Rades belastet. Wie groß darf diese Umfangskraft P sein, wenn die zulässige Biegungsspannung $k_b = 200$ at nicht überschritten werden soll?



187. Ein Holzbalken von rechteckigem Querschnitt ($b = 20$ cm, $h = 30$ cm) und der Länge $l = 1{,}8$ m wird in nebenan gezeichneter Weise belastet. Die Einzellast $P = 1000$ kg ist bekannt. Wie groß darf die gleichförmig verteilte Last Q gewählt werden, wenn die Biegungsspannung $k_b = 80$ at nicht überschritten werden soll?

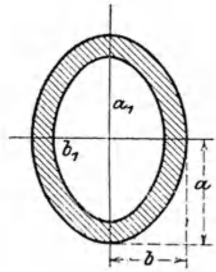


188. Ein gewalzter Träger von nebenstehendem Querschnitt soll eine derartige freie Länge bekommen, daß die Durchbiegung f am Ende 2 cm beträgt. Wie groß muß diese Länge gemacht werden, wenn außer dem Eigengewicht keine Last vorhanden ist? (Einheitsgewicht $\gamma = 7{,}8$; Elastizitätszahl $E = 2 \cdot 10^6$ at; Abmessungen in mm.)

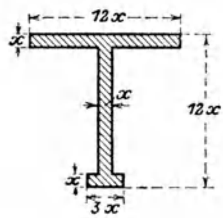


189. Eine gußeiserne Riemenscheibe vom Durchmesser $d = 0{,}4$ m macht $n = 60$ Umdrehungen in der Minute und überträgt $N = 12$ PS. Sie besitzt 4 Arme von elliptischem Querschnitt; das Achsenverhältnis der Ellipse soll $a : b = 2 : 1$ sein. Die zulässige Zugspannung ist $k_z = 150$ at. Man soll die Abmessungen a und b des Querschnitts eines Armes mit Rücksicht auf die zulässige Biegungsspannung des Gußeisens rechnen.

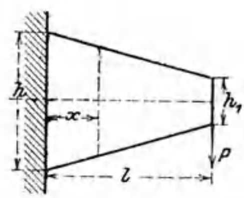
190. Ein gußeiserner Träger von $l =$ 2,8 m Länge mit dem Querschnitt einer Hohl-Ellipse wird am freien Ende durch eine Last P belastet. Wie groß darf letztere für sicheres Tragen (zulässige Zugspannung $k_z = 200$ at) genommen werden, wenn $a = 20$ cm, $b = 15$ cm, $a_1 : a = b_1 : b = 4 : 5$ und wenn das Eigengewicht berücksichtigt wird? (Einheitsgewicht des Gußeisens $\gamma = 7{,}5$.)



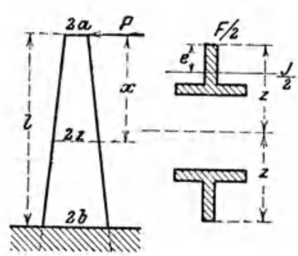
191. Ein Träger von $l = 3$ m Länge und nebenstehendem Querschnitt mit dem Einheitsgewicht $\gamma = 7{,}5$ soll am Ende die Last $P =$ 3000 kg sicher tragen. Die zulässigen Spannungen sind 300 at für die Zugseite, 800 at für die Druckseite. Wie groß muß x gemacht werden, wenn das Eigengewicht berücksichtigt wird?



***192.** In welcher Entfernung x vom Auflager befindet sich der Bruchquerschnitt eines pyramidalen Trägers von der Länge l und den Höhen h und h_1? Die Breite ist konstant, die Last P hängt am Ende. Wie groß ist das Biegungsmoment im Bruchquerschnitt? Das Eigengewicht ist nicht zu berücksichtigen.

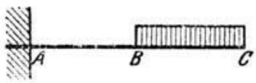


***193.** Ein an seinem oberen Ende von einer Kraft P beanspruchter Leitungsmast hat eine linear veränderliche Breite 2 z. Sein Querschnitt hat nebenan gezeichnete Form. Wenn 2 a seine Breite am oberen Ende ist, wie groß muß diese in dem meist beanspruchten Querschnitt gewählt werden? Wo ist dieser?

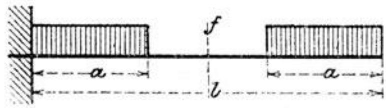


(F. Hartmann, Zeitschr. d. Österr. Ing. u. Arch. Ver. 1909.)

***194.** Ein Träger $AC = l$ ist von der Mitte B bis C gleichförmig mit q für die Längeneinheit belastet. Berechne die Neigung γ des Trägers und dessen Durchbiegung f bei C.

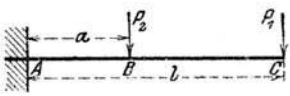


Aufg. 194.



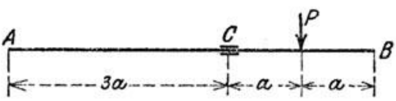
Aufg. 195.

***195.** Man berechne die Durchbiegung f in der Mitte eines einseitig eingespannten Trägers bei obenstehender Belastung.

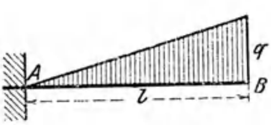


***196.** Es ist die Durchbiegung am Ende eines Trägers zu suchen, der in nebengezeichneter Weise durch zwei Einzellasten beansprucht wird.

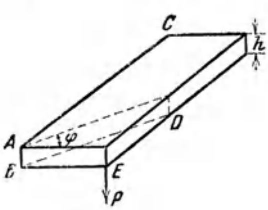
197. Man suche die vorhergehende Aufgabe ohne Benützung der elastischen Linien, nur auf Grund der Gleichungen 43 und 44 zu lösen.



198. Ein Träger AB vom Gewicht G ist in C eingemauert und wird in der Mitte des kleineren Feldes mit P belastet. Wie groß muß P sein, wenn die Durchbiegungen in A und B gleich groß sein sollen?



***199.** Wie groß ist die Durchbiegung am Ende des Trägers AB, wenn seine Belastung von der Einspannung A bis zum Ende B gleichmäßig zunimmt? (Dreieckslast.)

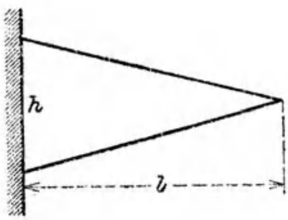


200. Ein Balken, dessen Seite ABC eingemauert ist, wird an der Kante E mit P belastet. Welchen Winkel φ bildet die meistgespannte Fläche ABD mit AE, und wie groß ist die in ihr entstehende größte Spannung?

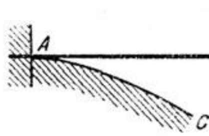
***201.** Ein Kegelstutz von den Abmessungen wie in der Abbildung zur Aufgabe 192 wird wie dort belastet. Man suche die Durchbiegung unter der Last. Das Eigengewicht ist nicht zu berücksichtigen.

*__202.__ Ein Kreiskegel wird in horizontaler Lage an seiner Grundfläche festgehalten. Man suche die Durchbiegung an der Spitze infolge des Eigengewichts.

203. Eine in A horizontal eingespannte und an ihrem Ende mit P belastete Feder



Aufg. 202.



Aufg. 203.

schmiegt sich bei ihrer Biegung an eine feste Kurve C, deren Gleichung gegeben ist. Man berechne die Durchbiegung der Feder unter der Last.

204. Die Kurve C der vorigen Aufgabe sei ein Kreisbogen mit dem Halbmesser r. Man ermittle die Durchbiegung der Feder unter der Last.

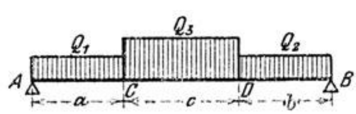
*__205.__ Die Feder des Gehreschen Dampfmessers (vergl. Abbildung zur Aufgabe 203) besitzt die Eigenschaft, daß die Durchbiegung unter der Last der Quadratwurzel aus dieser proportional ist. Man suche die Gleichung der Kurve C unter der Annahme, daß es sich nur um kleine Neigungswinkel handelt.

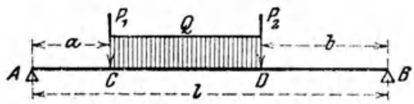
*__206.__ Aus einer bestimmten Materialmenge soll ein einseitig eingespannter Träger von kreisförmigem Querschnitt geformt werden; der Träger wird an seinem Ende belastet und soll die kleinste Durchbiegung haben. Welchem Gesetze muß der veränderliche Durchmesser z dieses Trägers genügen?
(H. Blasius, Zeitschr. f. Math. u. Phys., 62. Bd.)

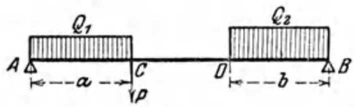
5. Der frei aufliegende Träger.

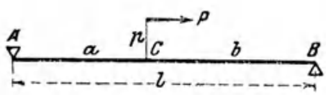
Man zeichne die Schaulinien der Biegungsmomente für folgende Belastungsfälle und gebe die Auflagerdrücke, sowie Größe und Stelle der größten Biegungsmomente an.

207.

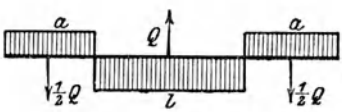


208. 

209. 

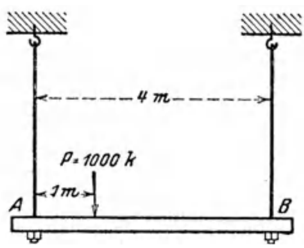


210. Träger mit steifem Arm p, an dem eine achsiale Last wirkt; A ist freies Auflager, B ein Gelenk.



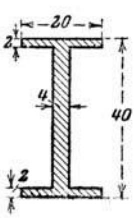
211. Träger ohne Auflager mit gleichförmigen Belastungen, die untereinander im Gleichgewicht sind.

212. Ein gußeisernes Rohr von 20 cm äußerem Durchmesser und 1 cm Wandstärke, das innen mit Wasser gefüllt ist, liegt an den Enden frei auf. Wie groß darf die Entfernung der Auflager sein, wenn höchstens eine Spannung von 300 at gestattet ist? (Einheitsgewicht des Gußeisens $\gamma = 7{,}5$.)



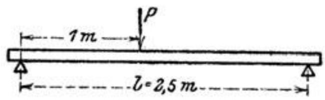
Aufg. 213.

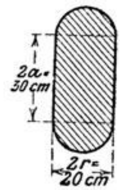
213. Ein Balken AB von quadratischem Querschnitt s^2 und 4 m freier Länge wird in der Entfernung 1 m vom Ende mit 1000 kg belastet. Der Balken wird in A und B an zwei Eisenstangen aufgehängt. Man berechne die Seite s des Balkens, die Durchmesser d_1, d_2 der beiden Stangen, wenn $k_b = 70$ at Biegungsspannung für Holz, $k_z = 700$ at Zugspannung für Eisen erlaubt sind.



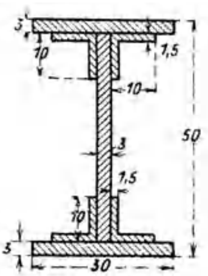
214. Ein gewalzter Träger von nebenstehendem Querschnitt wird das eine Mal auf dem 20 cm breiten Flansch gelagert, das andere Mal derart, daß die Trägerhöhe 40 cm horizontal liegt. Welche freie Länge müßte der Träger in diesen beiden Fällen bekommen, wenn er nur infolge seines Gewichtes zerbrechen sollte? (Biegungsfestigkeit $K_b = 5000$ at, Einheitsgewicht $\gamma = 7{,}8$, Abmessungen in cm.)

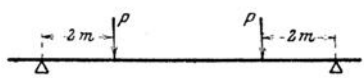
215. Ein hölzerner Balken von nebenstehendem Querschnitt und 2,5 m Länge liegt an den Enden frei auf. Welche Last P kann er in der Entfernung 1 m vom Auflager sicher ertragen, wenn die zulässige Biegungsspannung $k_b = 80$ at beträgt? Das Eigengewicht ist zu vernachlässigen.





216. Ein Träger von 8 m Länge und nebenstehendem Querschnitt wird mit 4000 kg für den m gleichförmig belastet. In den Entfernungen a = 2 m von den Auflagern sollen symmetrisch zwei gleich große Lasten P aufgebracht werden. Wie groß darf P sein, wenn die zulässige Biegungsspannung $k_b = 1360$ at nicht überschritten werden soll? (Abmessungen in cm.)





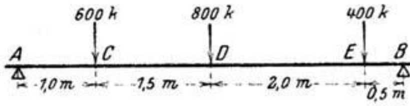
217. Ein Balken, dessen Achse die Höhe h halbiert und der die Länge l besitzt, wird gleichförmig belastet. Die Durchbiegung f in der Mitte wird gemessen. Wie groß ist die größte auftretende Spannung?

218. Man soll das Verhältnis der größten Durchbiegungen zweier rechteckiger Balken aus demselben Material nur durch deren Länge und Höhe ausdrücken, wenn die Lasten bei beiden Balken die Länge im gleichen Verhältnis teilen und gleich große Maximalspannungen hervorrufen.

219. Ein hölzerner Balken von $l = 4$ m Stützweite und rechteckigem Querschnitt wird in der Entfernung $a = 1{,}0$ m vom Auflager A mit $P = 800$ kg belastet. Die Breite b des Balkens soll $^5/_7$ der Höhe h sein. Wenn die Biegungsfestigkeit des Holzes mit 670 at angenommen und elffache Sicherheit gewünscht wird, zu berechnen: a) die Abmessungen b und h; b) die Neigungswinkel α und β des Balkens an den Auflagern A und B; c) die Durchbiegung f unter der Last; d) die größte Durchbiegung des Balkens und ihre Entfernung vom Auflager A. (Elastizitätszahl $E = 128\,000$ at.)

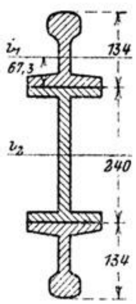
220. Ein gußeiserner Träger von 5 m Stützweite wird in umstehend gezeichneter Weise belastet; der Querschnitt ist ein Kreisring, das Verhältnis des inneren zum äußeren Durchmesser $d : D = 6 : 10$.

Die zulässige Zugspannung sei $k_z = 300$ at. Es sind zu berechnen: a) die Auflagerdrücke A, B; b) die Biegungsmomente in C, D, E; c) die zulässige Biegungsspannung k_b; d) mit Rücksicht auf k_b die Durchmesser d und D. (Das Eigengewicht ist nicht zu berücksichtigen.)

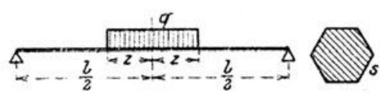


Aufg. 220.

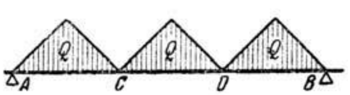
221. Der Querschnitt eines Trägers besteht aus einem Doppel-T-Eisen und zwei symmetrisch angeordneten Schienenprofilen. Die wichtigsten Abmessungen sind in mm eingeschrieben. Die Schiene hat 42,53 cm² Querschnitt und das Trägheitsmoment $i_1 = 1036{,}6$ cm⁴ für ihre horizontale Schwerlinie; das Doppel-T-Eisen hat 46,4 cm² Querschnitt und das Trägheitsmoment $i_2 = 4288$ cm⁴ für seine horizontale Schwerlinie. Dieser Träger soll außer seinem Eigengewicht (Einheitsgewicht $\gamma = 7{,}8$) noch eine gleichförmige Last von 297,5 kg für den m tragen. Wie groß darf die freie Länge l angenommen werden, wenn die größte Durchbiegung 5 mm betragen soll? (Elastizitätszahl $E = 2 \cdot 10^6$ at.)



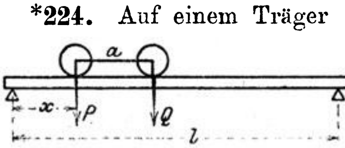
222. Ein Träger, dessen Querschnitt ein regelmäßiges Sechseck von gegebener Seite s ist, wird in angegebener Weise von der Mitte an gleichförmig belastet. Wie groß darf z gemacht werden, wenn die Spannung k_b gestattet ist?



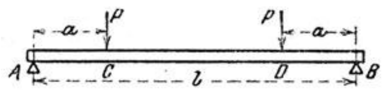
223. Der Träger AB ist in nebenstehend angegebener Art durch drei Dreieckslasten Q belastet. Sie sollen durch zwei in C und D hängende, gleiche Einzellasten P ersetzt werden, welche dasselbe Maximalmoment hervorrufen. Wie groß wird P sein müssen?



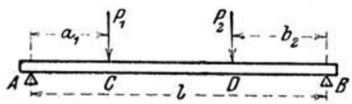
***224.** Auf einem Träger sind zwei Lasten P und Q, welche die Entfernung a voneinander beibehalten, verschiebbar. Bei welcher Stellung x entsteht unter P das größte Biegungsmoment, und wie groß ist es? (E. Brauer, Festigkeitslehre.)



***225.** Ein Balken wird durch zwei gleiche Lasten P symmetrisch belastet. Man suche die Durchbiegung in der Mitte des Balkens.



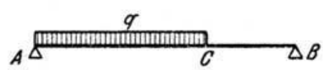
226. Auf einem Balken von der Stützweite l stehen zwei Lasten P_1 und P_2 in beliebigen Entfernungen a_1 und b_2 von den Auflagern A und B. Man ermittle die Durchbiegungen f_1 und f_2 des Balkens in C und D.



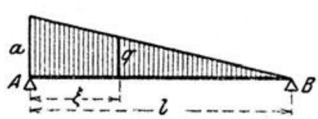
***227.** Man suche in der vorhergehenden Aufgabe jene Stelle des Balkens, welche die größte Durchbiegung aufweist, und zwar zunächst allgemein, sodann für $P_1 = 16$ t, $P_2 = 20$ t, $l = 3{,}2$ m, $a_1 = 0{,}8$ m, $b_2 = 1{,}0$ m.

228. In welchem Verhältnis müssen die Lasten P_1 und P_2 in Aufgabe 226 stehen, wenn die Durchbiegung in der Mitte des Balkens am größten sein soll? Wie groß ist diese Durchbiegung? Zuerst allgemein, dann für $a_1 = \frac{l}{4}$, $b_2 = \frac{l}{5}$.

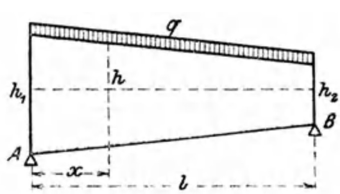
***229.** Ein Träger $AB = l$ wird auf die Länge $AC = \frac{2}{3}\,l$ gleichförmig mit q für die Längeneinheit belastet. In welcher Entfernung x von A befindet sich der Bruchquerschnitt? Wie groß ist dort das Biegungsmoment? Wie groß ist die Durchbiegung f in der Trägermitte?



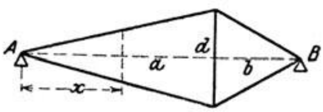
***230.** Ein Träger hat eine verteilte Belastung von nebenstehender Anordnung zu tragen. Berechne die Auflagerdrücke in A und B und das Biegungsmoment M für eine beliebige Stelle, ferner die Entfernung x_1 des Bruchquerschnittes und den größten Wert M_1 des Biegungsmomentes.

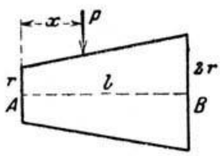


***231.** Ein Träger von konstanter Breite b und veränderlicher Höhe nach nebenstehender Abbildung ist gleichförmig mit q für die Längeneinheit belastet. In welcher Entfernung x_1 von A befindet sich der Bruchquerschnitt? Wie groß ist die größte vorkommende Spannung?

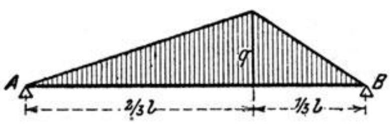


232. Ein Doppelkegel von nebenstehenden Abmessungen und dem Einheitsgewicht γ wird an den Spitzen gelagert. Man ermittle die größte Spannung eines Querschnittes als Funktion von x, wenn nur das Eigengewicht berücksichtigt wird, und zeichne die Schaulinie dieser Funktion.



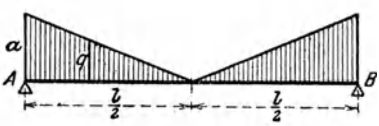


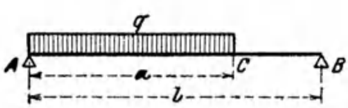
***233.** Ein Kegelstutz von der Länge l und den Halbmessern r und 2 r liegt in A und B frei auf und wird durch P belastet. Bei welcher Stellung x_1 der Last treten die größten Spannungen auf? Wie groß ist die größte Spannung?



***234.** Man ermittle für den nebenan dargestellten Belastungsfall das größte Biegungsmoment und die Entfernung x_1 seines Auftretens von A.

***235.** Auf einem frei aufliegenden Träger ist die Belastung Q in nebenan gezeichneter Weise symmetrisch ausgebreitet. Man bestimme die Durchbiegung in der Mitte des Trägers.





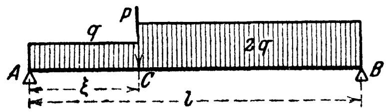
***236.** Ein Träger von der freien Länge l ist vom Auflager A an bis auf die Länge a gleichförmig belastet. Man suche die Stelle der größten Durchbiegung und diese selbst.

237. In der vorhergehenden Aufgabe wurde als selbstverständlich angenommen, daß die größte Durchbiegung des Trägers im Felde AC liegt. Bei welchem Wert von a verliert diese Voraussetzung ihre Richtigkeit?

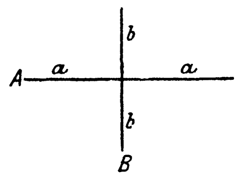
***238.** Bei der Belastung des Trägers in Aufgabe 236 werde die gleichförmige Last derart vorgeschoben, daß die Belastungsgrenze C den Weg AB beschreibt; sobald C in B angelangt ist, erscheint der ganze Träger gleichförmig belastet. Welchen Weg beschreibt hierbei die Stelle der größten Durchbiegung?

239. Eine Einzellast werde über den Träger hinweg geschoben. In welchem Teile des Trägers liegen die hierbei auftretenden größten Durchbiegungen?

***240.** Auf einem Träger $AB = l$ steht eine Last P; außerdem ist er links von P mit q, rechts von P mit 2 q für die Längeneinheit gleichförmig belastet. In welcher Entfernung ξ von A wird P stehen müssen, damit das Biegungsmoment bei C seinen größten Wert annimmt?



241. Zwei Stäbe 2a und 2b, die an den Enden frei aufliegen, sind gleichförmig mit q für die Längeneinheit belastet; sie werden übereinandergelegt und berühren sich in ihren Mitten. Wie groß ist der gegenseitige Druck in der Mitte der Stäbe? In welchem Verhältnis stehen die Auflagerdrücke in A und B?



(A. Föppl, Festigkeitslehre.)

***242.** Welche Form nimmt die Achse eines in der Mitte mit P belasteten, an den Enden frei aufliegenden Stahlstabes von der Länge l an, wenn die Belastung die Proportionalitätsgrenze stark überschreitet und wenn hierbei das Spannungsgesetz $\sigma^5 = C\varepsilon$ zugrunde gelegt werden darf?

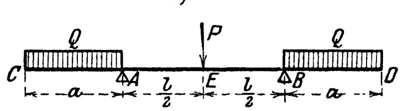
(Leitzmann, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1900.)

***243.** Wie groß wird in voriger Aufgabe die Durchbiegung p in der Mitte des Stahlstabes, wenn dessen Querschnitt ein Rechteck von den Abmessungen b und h ist?

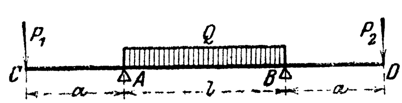
6. Der Träger mit überhängenden Feldern.

Man zeichne die Schaulinien der Biegungsmomente für folgende Belastungsfälle und berechne die Größe und Stelle der größten auftretenden Biegungsmomente sowie die Lage der Wendepunkte im Träger (Biegungsmoment $M = 0$).

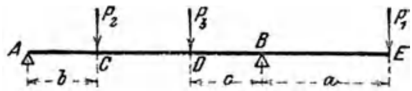
244.



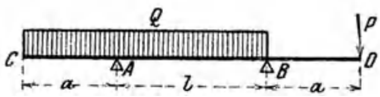
245.



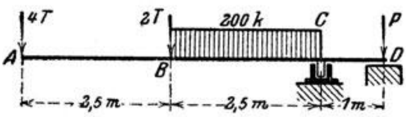
246.



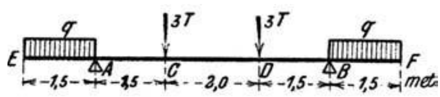
247.



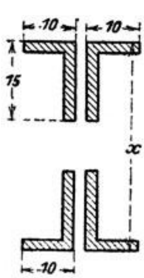
248. Der Träger einer in C gelagerten Drehbrücke ist in folgender Weise durch zwei Einzellasten 4 t und 2 t und durch die gleichförmige Last 200 kg für den m zwischen B und C belastet. Wie groß muß die in D anzubringende Last P für Gleichgewicht sein? Wie groß ist der Zapfendruck in C? Man zeichne die Schaulinie der Biegungsmomente für den ganzen Träger mit Angabe der Biegungsmomente in B und C.

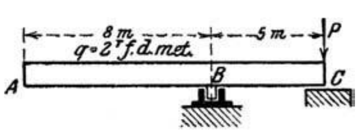


249. Ein Holzbalken von 8 m Länge liegt in A und B frei auf; er ist zwischen A und B mit zwei gleichen Einzellasten von je 3 t symmetrisch und in den überhängenden Feldern EA und BF mit q = 1,2 t für den m gleichförmig belastet. Man berechne: a) die Auflagerdrücke in A und B; b) die Biegungsmomente in A und C; c) die Stelle des Trägers, wo das Biegungsmoment Null wird; d) die Abmessungen des Balkens, wenn $b : h = 5 : 7$ und die zulässige Biegungsspannung $k_b = 60$ at sein soll. Man zeichne die Schaulinie der Biegungsmomente.



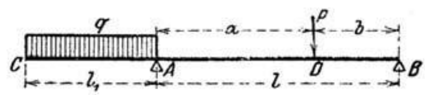
250. Eine Drehbrücke ABC von 13 m Länge ist in B drehbar gelagert und liegt bei C frei auf. Sie ist mit q = 2 t für den m gleichförmig belastet. Ihr Querschnitt besteht aus vier gleichen Winkeleisen in nebenstehender Anordnung (Abmessungen in cm). Die Dicke der Winkeleisen ist durchwegs 1,4 cm. a) Welche Last P muß in C angebracht werden, damit Gleichgewicht besteht? b) Wie groß ist der Druck auf den Zapfen bei B?



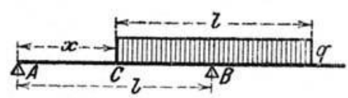


c) Wie groß ist das größte Biegungsmoment, und wo ist der Bruchquerschnitt? d) Welche Höhe x muß der Träger bekommen, damit die zulässige Biegungsspannung von 800 at eingehalten wird?

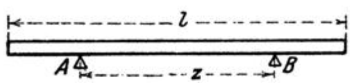
251. Der Träger AB hat ein überhängendes Feld CA; die Belastung ist aus der Abbildung zu entnehmen. Wie groß muß die Länge l_1 des überhängenden Feldes gemacht werden, wenn die Biegungsmomente in A und D gleichen absoluten Wert haben sollen? Wie groß ist dieser? Wie groß sind dann die Auflagerdrücke in A und B?



252. Auf einem frei aufliegenden Träger mit überhängendem Felde läßt sich eine gleichförmige Last von gleicher Länge l beliebig verschieben. Wie groß muß der Abstand AC gemacht werden, wenn die absoluten Werte der Biegungsmomente in C und B gleich groß sein sollen? Wie groß sind dann diese Momente?

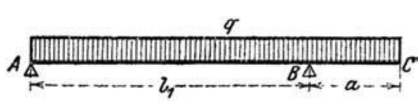


253. Ein gleichförmig belasteter Träger soll auf zwei symmetrisch liegende Stützen A und B gelegt werden. Wie muß die Entfernung z derselben gewählt werden, wenn die Biegungsspannungen den kleinsten Wert annehmen sollen?

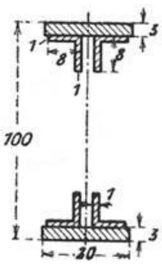


***254.** Wie groß muß in vorhergehender Aufgabe die Entfernung z der Stützen gewählt werden, wenn der Träger über den Stützen horizontal bleiben soll?

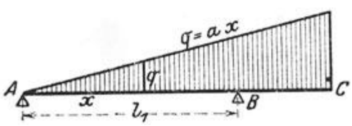
***255.** Ein Träger AC = l ist in untenstehend gezeichneter Art gelagert und mit q für die Längeneinheit gleichförmig belastet. Man suche: a) die Auflagerdrücke in A und B; b) die Schaulinie der Biegungsmomente; c) die größten Biegungsmomente des Trägers und die Stellen, wo sie auftreten; d) die Stellen, wo das Biegungsmoment Null wird; e) die Gleichung der elastischen Linie.



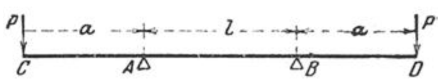
256. Derselbe Träger wie in der vorigen Aufgabe soll nebenstehend gezeichneten Querschnitt haben (Abmessungen in cm). Überdies sei gegeben: Elastizitätszahl $E = 2 \cdot 10^6$ at; zulässige Biegungsspannung $k_b = 700$ at, Trägerlänge $l = 6$ m. Man berechne: a) die Länge l_1 (Stützweite), wenn die größte Tragfähigkeit des Trägers erzielt werden soll; b) auf Grund dieser gerechneten Länge l_1 das größte Biegungsmoment und die für den Meter gestattete Last q; c) die Auflagerdrücke A und B; d) das Aufsteigen des Trägers am Ende C.



***257.** Auf einem Träger von der Länge $AC = l$, der in nebenstehend gezeichneter Art gelagert ist, liegt eine verteilte Last, deren Belastungslinie die Gleichung $q = ax$ hat. Man berechne: a) die Auflagerdrücke A und B; b) die größten Biegungsmomente und die Stellen, wo sie auftreten; c) die Stellen, wo das Biegungsmoment Null wird; d) die Länge l_1, wenn verlangt wird, daß die Tragfähigkeit des Trägers am größten sein soll.

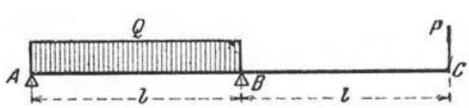


***258.** Ein Träger mit zwei gleichen überhängenden Feldern wird an den Enden mit zwei gleichen Lasten P belastet. Wie groß muß $\frac{a}{l} = z$ gemacht werden, wenn die absoluten Werte der Durchbiegungen in der Mitte und an den Enden gleich sein sollen?



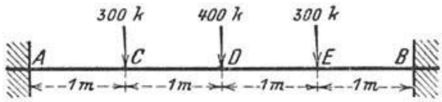
259. Man soll die Durchbiegung in der Mitte des Trägers der vorigen Aufgabe nach der genaueren Gleichung 39 berechnen und den Unterschied gegen die nach der angenäherten Gleichung 40 gerechnete Durchbiegung angeben.

***260.** Ein Träger von der Länge 2 l ist am Ende A und in der Mitte B frei aufgelagert. Das Feld AB ist mit Q gleichförmig belastet; am Ende C steht eine Last P. In welchem Verhältnis müssen P und Q stehen, wenn die Durchbiegung in C Null sein soll?



7. Statisch unbestimmte Träger.

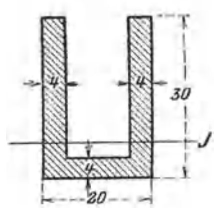
261. Ein Holzbalken von 4 m freier Länge wird in nebenstehender Weise durch drei Gewichte belastet und an den Enden eingespannt. Die Breite b des rechteckigen Querschnittes soll zur Höhe h im Verhältnis 1 : 2 stehen.



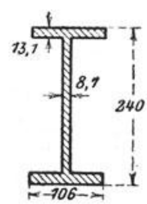
Wie groß müssen b und h gemacht werden, wenn die zulässige Biegungsspannung $k_b = 50$ at nicht überschritten werden soll? (Eigengewicht zu vernachlässigen.)

262. Ein Wasserleitungsrohr von $D = 20$ cm äußerem und $d = 16$ cm innerem Durchmesser ist an den Enden eingemauert. Welche Länge l darf es bekommen, wenn außer dem Eigengewicht des Rohres (Einheitsgewicht $\gamma = 7{,}5$) und dem Gewicht des Wassers keine Last auf das Rohr wirkt und wenn die zulässige Biegungsspannung 300 at beträgt?

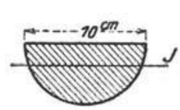
263. Ein gußeiserner Träger von nebenstehendem Querschnitt (Abmessungen in cm) und $l = 4$ m freier Länge (Enden eingespannt) wird in seiner Mitte bis zum Bruch belastet. In welchem Querschnitt tritt der Bruch ein? An welcher Stelle des Querschnittes? Wie groß ist die Bruchlast, wenn die Zugfestigkeit des Gußeisens mit $K_z = 1250$ at angenommen wird? Das Eigengewicht ist zu vernachlässigen.



264. Ein Träger von $l = 2{,}5$ m freier Länge (Enden eingespannt) und nebenstehendem Querschnitt (Abmessungen in mm) trägt in der Entfernung $a = 0{,}8$ m vom Auflager eine Last P. Wie groß darf diese mit Rücksicht auf das Eigengewicht des Trägers sein, wenn das Einheitsgewicht $\gamma = 7{,}8$ und die zulässige Biegungsspannung $k_b = 1000$ at beträgt? Wie groß ist die Durchbiegung unter P mit Rücksicht auf das Eigengewicht? $(E = 2 \cdot 10^6$ at.)

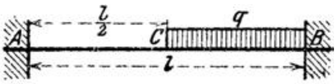


265. Ein Träger aus Schmiedeisen von halbkreisförmigem Querschnitt und $l = 4$ m freier Länge (Enden eingespannt) wird in der Entfernung $a = 1{,}5$ m vom Auflager durch eine Last P belastet. Wie groß darf P sein, wenn das Eigengewicht des

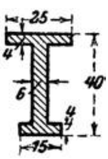


Trägers berücksichtigt wird (Einheitsgewicht $\gamma = 7,8$) und wenn eine Biegungsspannung $k_b = 1000$ at erlaubt ist?

***266.** Der Träger ist von der Mitte bis zum Ende mit q für die Längeneinheit gleichförmig belastet und an den Enden eingespannt. Man ermittle die Auflagerdrücke, die Auflagermomente, die Wendepunkte und Größe sowie Ort des größten Biegungsmomentes innerhalb der freien Länge; auch zeichne man die Schaulinie der Biegungsmomente.

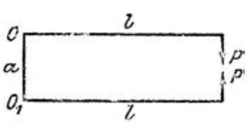


267. Ein gußeiserner Träger von $l = 5$ m freier Länge und nebenstehendem Querschnitt (Abmessungen in cm) ist in gleicher Weise belastet und eingespannt wie der Träger in vorhergehender Aufgabe. Wie groß darf die Belastung q für den Meter angenommen werden, wenn die zulässige Zugspannung $k_z = 300$ at ist? Das Eigengewicht ist zu vernachlässigen.

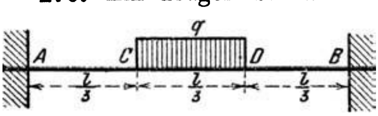


268. Ein Balken wird nur durch zwei gleiche und entgegengesetzte Einspannungsmomente M an seinen Enden beansprucht. Man berechne den Winkel, um den sich der Balken an jedem Ende senkt, und die Durchbiegung in der Mitte seiner Länge.

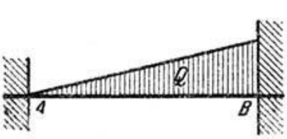
269. Ein dünner Stab ist zweimal rechtwinklig abgebogen und an den Punkten OO_1 drehbar befestigt. Wie groß muß die Kraft P gemacht werden, damit die Enden des Stabes sich berühren, wenn die rechten Winkel bei OO_1 sich nicht verändern können?



***270.** Ein Träger ist zwischen den Drittelpunkten gleichförmig mit q für den Meter belastet und an den Enden eingespannt. Nach welchem Biegungsmoment ist der Träger zu rechnen? In welchem Querschnitt treten keine Normalspannungen auf? Wie sieht die Schaulinie der Biegungsmomente aus?



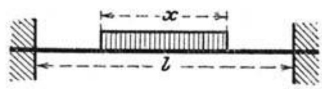
***271.** Auf einem beiderseitig eingespannten Träger ist eine Last Q derart verteilt, daß die Belastungslinie eine Gerade ist. Man berechne die Auflagerdrücke in A und B, die Auflagermomente M_A und M_B, die Lage der Wendepunkte und das größte



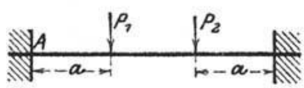
zwischen den Auflagern vorkommende Moment. Nach welchem Moment ist der Träger zu rechnen?

***272.** Ein Träger ist durch eine Einzellast P in den Entfernungen a und b von den Einspannungsstellen A und B und überdies durch eine gleichförmige Last q für die Längeneinheit belastet. Man ermittle diejenige Stelle des Trägers, an der die Durchbiegung den größten Wert erreicht.

***273.** Ein beiderseitig eingespannter Träger ist über die Länge x gleichförmig und symmetrisch belastet. Wie groß muß x gemacht werden, wenn das Auflagermoment n mal so groß sein soll wie das Biegungsmoment in der Mitte des Trägers? Zwischen welchen Grenzen kann n schwanken?

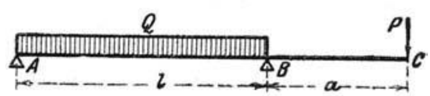


274. Ein beiderseitig eingespannter Balken wird symmetrisch mit zwei ungleichen Lasten P_1 und P_2 belastet. Wie groß muß P_2 gewählt werden, wenn das Biegungsmoment unter P_1 verschwinden soll?

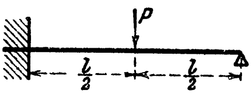


275. Eine Welle von $l = 10$ m Länge, deren eines Ende eingespannt ist und deren anderes Ende frei aufliegt, trägt in der Mitte die Last $P = 8$ t. Man zeichne die Schaulinie der Biegungsmomente und berechne den Halbmesser der Welle, wenn die zulässige Biegungsspannung $k_b = 700$ at nicht überschritten werden soll. Wie groß sind die Auflagerdrücke und der Neigungswinkel der Welle am freien Ende? An welcher Stelle der Welle treten keine Normalspannungen auf? Auf das Eigengewicht der Welle ist keine Rücksicht zu nehmen. ($E = 2 \cdot 10^6$ at.)

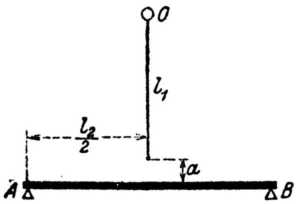
276. Ein Träger, der in A und B frei auflagert und mit Q gleichförmig belastet ist, hat ein überhängendes Feld BC, das in C mit P belastet ist. Wie groß muß die Länge a dieses Feldes gemacht werden, wenn der Träger als ein in B eingespannter betrachtet werden kann? Wo ist sein größtes Biegungsmoment und wie groß ist es? Wie groß sind die Auflagerdrücke? Es ist $l = 2{,}5$ m, $Q = 2250$ kg, $P = 1800$ kg.



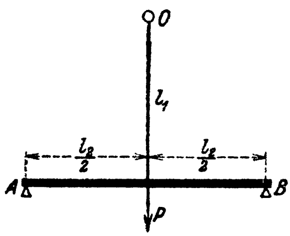
277. Ein Träger aus Flußstahl von $l = 3{,}5$ m Länge und sechseckigem Querschnitt ist in der Mitte mit $P = 4560$ kg belastet. Welche Seitenlänge muß das regelmäßige Sechseck, von dem zwei Seiten horizontal sind, erhalten, wenn die Biegungsspannung $k_b = 2494$ at gestattet ist?



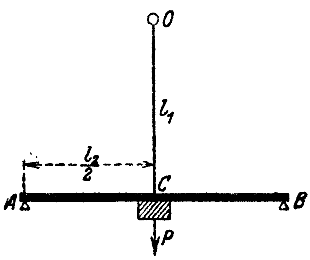
278. Über der Mitte eines frei aufliegenden Trägers AB ist eine Stange von der Länge l_1 in O aufgehängt, die nicht ganz bis AB hinabreicht. Nun wird die Mitte des Trägers gehoben und am Ende der Stange befestigt. Welche Spannung S wird in ihr entstehen? (Ohne Berücksichtigung der Eigengewichte.)



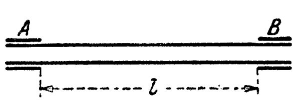
279. Ein in A und B frei aufliegender Träger von der Länge l_2 wird in seiner Mitte mit P belastet und in O an einer Stange von der Länge l_1 aufgehängt. Welcher Teil P_1 der Last P wird von der Stange getragen und welcher Teil P_2 vom Träger? Wie groß ist die Durchbiegung f in der Mitte des Trägers? (Ohne Berücksichtigung der Eigengewichte.)



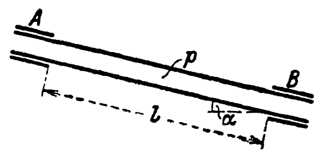
280. Der Träger der vorigen Aufgabe werde noch durch einen anderen frei aufliegenden Balken unterstützt, der senkrecht zur Bildfläche steht, die Länge l_3 hat und mit seiner Mitte in C verschraubt ist. Wie verteilt sich nun die Last P auf die Stange OC und die beiden Träger, und wie groß ist die Durchbiegung in der Mitte? (Ohne Berücksichtigung der Eigengewichte.)



***281.** Ein Wasserleitungsrohr von der Länge l ist bei A und B eingespannt; seine Belastung zufolge Eigengewicht und Wassergewicht sei q für die Längeneinheit. Welche Spannung σ entsteht in den Auflagerquerschnitten des Rohres infolge von dessen Ausdehnung?



282. Wie ändert sich das Resultat der vorigen Aufgabe, wenn das Rohr unter dem Winkel α geneigt ist und wenn außerdem die Wasserpressung p im Innern berücksichtigt wird? ($r =$ innerer Rohrhalbmesser, $\delta =$ Wandstärke des Rohres.)



8. Träger gleichen Widerstandes gegen Biegung.

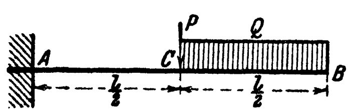
283. Ein einseitig eingespannter, gleichförmig mit Q belasteter Träger von der Länge l, der an der Einspannungsstelle die Höhe h hat, soll für gleichen Widerstand gegen Biegung geformt werden. Die Breite b des Trägers soll überall gleich sein; nach welchem Gesetz muß sich die Höhe z verändern?

284. Dieselbe Aufgabe wie vorher, doch soll die Höhe h des Trägers überall gleich sein; wie ändert sich die Breite y, wenn b die Breite an der Einspannungsstelle ist?

285. Ein einseitig eingespannter Träger, der an seinem Ende mit P belastet ist, soll eine Form gleichen Widerstandes gegen Biegung erhalten; seine Querschnitte sollen hierbei dem rechteckigen Einspannungsquerschnitt (b, h) ähnlich bleiben. Nach welchem Gesetz müssen sich Breite y und Höhe z des Querschnittes verändern?

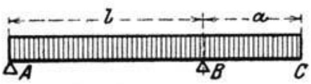
***286.** Ein einseitig eingespannter Träger von rechteckigem Querschnitt wird am Ende belastet. Die Breite b ist konstant; der Träger soll die Form gleichen Widerstandes gegen Biegung besitzen. Man suche die Gleichung der elastischen Linie.

287. Ein einseitig eingespannter Träger, der in nebenstehender Weise belastet wird, besitzt rechteckigen Querschnitt. Seine Höhe h soll konstant bleiben. Wie muß man die Breite z mit dem Abstand x von der Einspannungsstelle verändern, wenn der Träger die Form gleichen Widerstandes gegen Biegung und an der Einspannungsstelle die Breite b erhalten soll? Wie groß muß die Breite b_1 in der Mitte des Trägers sein?

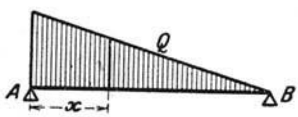


288. Ein beiderseitig eingespannter Träger von der Länge l und kreisrundem, aber veränderlichem Querschnitt (Durchmesser δ) soll die Form gleichen Widerstandes gegen Biegung erhalten, wenn die Belastung gleichförmig ist. Welches Gesetz muß für δ angenommen werden, wenn der Durchmesser d an den Auflagern gegeben ist? Wie groß ist der Durchmesser d_1 in der Mitte des Trägers? Wo wird $\delta = 0$? Man zeichne die Form des Trägers.

***289.** Ein Träger mit überhängendem Felde ist gleichförmig belastet. Der Querschnitt ist ein Kreis von veränderlichem Durchmesser δ. Man berechne und zeichne die Form für gleichen Widerstand gegen Biegung für die ganze Länge AC und gebe die größten Werte von δ an.



***290.** Ein frei aufliegender Träger ist in nebenstehender Weise belastet. Sein Querschnitt ist ein Quadrat von veränderlicher Seite y. Wie muß sich y mit x verändern, wenn der Träger die Form gleichen Widerstandes gegen Biegung haben soll, und wenn die Quadratseite h an der Bruchstelle gegeben ist?



291. Welche Form muß man dem Träger in Aufgabe 235 geben, wenn er gleichen Widerstand gegen Biegung haben soll? Der Querschnitt ist ein Rechteck von konstanter Breite b.

***292.** Eine Welle von veränderlichem Durchmesser δ und der Länge l liegt an den Enden frei auf und ist in der Mitte mit P belastet. Sie soll gleichen Widerstand gegen Biegung haben. Wie groß ist die Durchbiegung in der Mitte der Welle?

***293.** Ein einseitig eingespannter Träger hat außer seinem Eigengewicht auch eine Last P an seinem Ende zu tragen. Die Breite b des rechteckigen Querschnittes ist konstant, die Höhe z veränderlich.

Man suche die Differenzialgleichung der veränderlichen Höhe z, wenn der Träger gleichen Widerstand gegen Biegung haben soll.

(H. Blasius, Zeitschr. f. Math. u. Phys., 62. Bd.)

IV. Normal- und Biegungsfestigkeit.

1. Null-Linie und Kern.

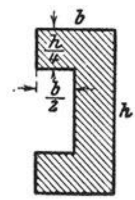
294. In welchem Verhältnis steht die Kernfläche eines gleichseitigen Dreiecks zur Querschnittsfläche?

295. Die Kerngrenze eines Kreisringes fällt in den inneren Kreis hinein. Wie groß ist das Durchmesserverhältnis des Kreisringes?

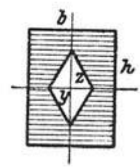
296. Man ermittle den Kern eines regelmäßigen Sechsecks.

297. Man suche den Kern für nebenstehenden Querschnitt.

298. Ein Rechteck b, h besitzt eine Aushöhlung in Form eines Rhombus. Man soll dessen Diagonalen 2 y, 2 z derart bestimmen, daß der Umriß des Rhombus mit der Kernlinie der schraffierten Fläche zusammenfällt.



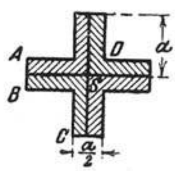
Aufg. 297.



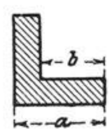
Aufg. 298.

299. Auf den gegebenen kreuzförmigen Querschnitt wirkt eine Normalkraft. Man umschreibe das Gebiet ihrer Angriffspunkte, wenn die Beanspruchung des Querschnittes gleichartig sein soll.

300. Es soll der Kern eines gleichschenkligen Winkeleisens gesucht werden.



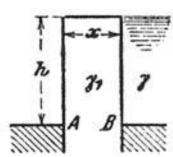
Aufg. 299.



Aufg. 300.

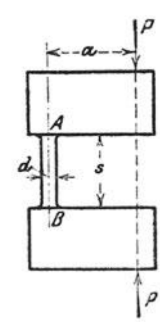
2. Zug, Druck und Biegung.

301. Ein Mauerkörper von der Höhe h und dem Einheitsgewicht γ_1 erleidet den Druck einer gleich hohen Wassermenge vom Einheitsgewicht γ. Welche Breite x darf die Mauer höchstens bekommen, wenn die Zugspannung in B die gegebene Grenze k_z nicht überschreiten soll?



Aufg. 301.

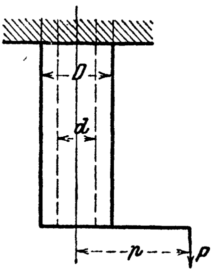
302. An den Enden eines kurzen eisernen Bolzens AB vom Durchmesser d sitzen zwei Backen, die durch zwei gleiche Kräfte P zusammengedrückt



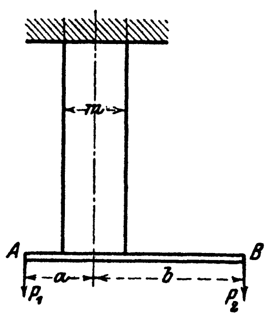
Aufg. 302.

werden. Man suche die größten Spannungen, die der Bolzen erleidet, sowie seine Ausbiegung in der Mitte.

(Stribeck, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1907.)

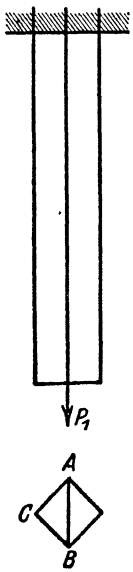


303. Ein Stab, dessen Querschnitt ein Kreisring ist (äußerer Durchmesser D, Durchmesserverhältnis $\frac{d}{D} = \delta$) wird am unteren Ende mit der Last P belastet. Um welche Größe p darf man die Last aus der Stabmitte rücken, wenn die zulässige Spannung für Zug k_z nicht überschritten werden soll?



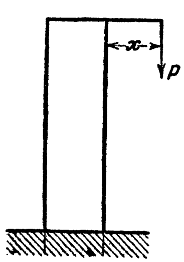
Aufg. 304.

304. Ein Stab von quadratischem Querschnitt m^2 trägt am Ende einen Querstab AB, dessen Enden die Entfernungen a und b von der Quadratmitte haben. Wie muß die Gesamtlast P auf die Punkte A und B verteilt werden, wenn die zulässige Spannung k_z nicht überschritten werden soll? Welchen größten Wert darf P besitzen, und wie verhalten sich dann P_1 und P_2?



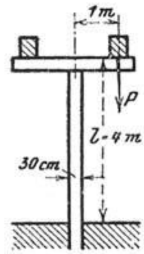
Aufg. 305.

305. Ein Stab von quadratischem Querschnitt, der frei herabhängt, erträgt die Zugkraft P_1 mit einer gewissen Sicherheit. Nun wird der Stab längs seiner Diagonalebene AB gespalten. Welche Last P_2 wird er jetzt mit der gleichen Sicherheit tragen?

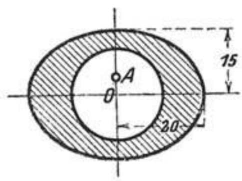


306. Ein quadratisch behauener Balken aus Eichenholz von 20 cm Stärke und 4 m Länge soll an seinem oberen Ende mit P = 800 kg belastet werden. Das untere Ende ist eingemauert. Um wieviel (x) darf die Last über den Rand des Balkens gerückt werden, wenn fünffache Bruchsicherheit bestehen soll? (Druckfestigkeit K = 345 at, Elastizitätszahl E = 103000 at.)

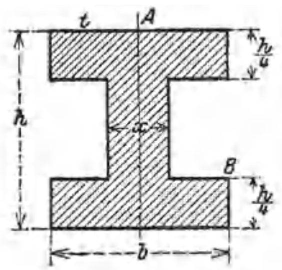
307. Eine quadratische Säule aus Kiefernholz mit $s = 30$ cm Stärke und $l = 4$ m Länge trägt an ihrem oberen Ende ein Querholz, das zwei horizontale Balken aufzunehmen hat. Einer derselben wird belastet. Man rechne die Tragfähigkeit P der Säule bei vierfacher Bruchsicherheit, ferner die Ausbiegung am oberen Ende und die größten Randspannungen. (Druckfestigkeit $K = 280$ at, Elastizitätszahl $E = 108\,000$ at.)



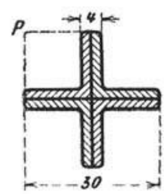
308. Der Querschnitt einer $l = 3{,}5$ m langen gußeisernen Säule ist eine Ellipse (Halbachsen 20 cm und 15 cm) mit einer kreisförmigen Höhlung (Halbmesser 10 cm). Die Säule ist in A mit $P = 50$ t belastet; die größte entstehende Druckspannung soll 125 at nicht überschreiten. Wie groß darf die Entfernung $p = OA$ der Last vom Mittelpunkt höchstens sein? (Elastizitätszahl $E = 10^6$ at.)



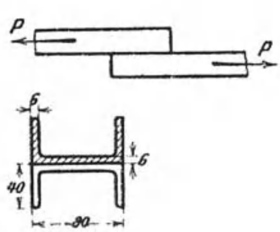
309. Ein Träger von nebenstehendem Querschnitt wird in A von einer Last beansprucht, die zur Achse des Trägers parallel ist. Wie groß muß die Breite x des Steges gemacht werden, wenn der Punkt B keine Spannung erleiden soll?

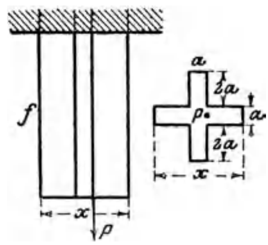


310. Eine Säule aus Schweißeisen von nebenstehendem Querschnitt (vier gleiche Winkeleisen, Abmessungen in cm) und 4 m Länge wird in P exzentrisch gedrückt. Man berechne die Tragfähigkeit an dieser Stelle, wenn vierfache Bruchsicherheit bestehen soll. (Fließgrenze $= 2200$ at, Elastizitätszahl $E = 2 \cdot 10^6$ at.)



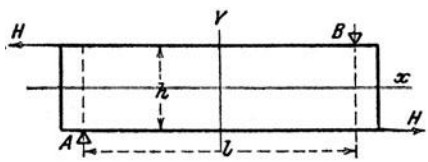
311. Zwei flußeiserne Stäbe von gleichem Querschnitt werden aneinander befestigt und durch eine Zugkraft P beansprucht, die abwechselnd auf ihre Hälfte herabsinkt. Wie groß darf P sein mit Rücksicht auf die zulässige Spannung, wenn diese $^2/_7$ der Arbeitsfestigkeit sein soll? (Abmessungen in mm.)



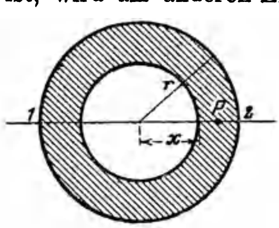


312. Ein Stab von kreuzförmigem Querschnitt wird an seinem unteren Ende in angedeuteter Weise exzentrisch belastet. Die Breite x ist unbekannt. Wie groß muß das Verhältnis $\frac{x}{a} = z$ gemacht werden, wenn die Spannung in der Faser f Null sein soll?

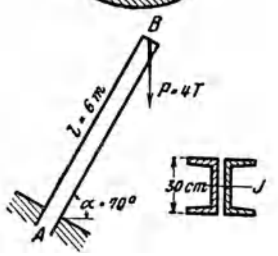
313. Ein Balken mit rechteckigem Querschnitt von der Breite b, der Höhe h und der Stützweite l wird in A und B gelagert und durch das Kraftpaar H beansprucht. Man suche den Ort aller Punkte des Balkens, die in der Richtung der Achse x keine Normalspannung erleiden.



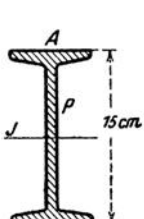
314. Ein Rohr vom Halbmesser r, dessen eines Ende befestigt ist, wird am anderen Ende in der Mitte seiner Dicke auf Zug belastet. Die in 2 entstehende Zugspannung s_1 soll sich zu der in 1 entstehenden Druckspannung s_2 wie 5 : 2 verhalten. Welchen Halbmesser x muß die innere Höhlung bekommen?



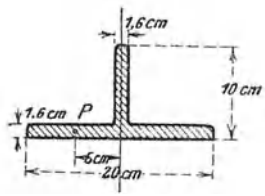
315. Der Ausleger eines Kranes hat $l = 6$ m Länge und einen aus zwei U-Eisen bestehenden Querschnitt, dessen maßgebendes Trägheitsmoment $J = 16052$ cm^4 und dessen Querschnittsfläche $F = 117{,}6$ cm^2 ist. Der Ausleger ist unter $\alpha = 70^0$ geneigt, wird in A eingespannt und in B mit $P = 4$ t belastet. Man suche Ort und Größe der größten auftretenden Spannungen. $(E = 2 \cdot 10^6$ at.)



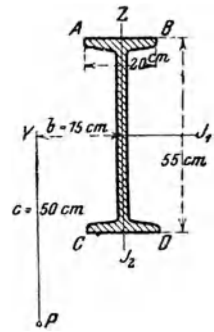
316. Ein eiserner Träger, Deutsches Normalprofil Nr. 15, mit der Länge $l = 4{,}5$ m wird in Richtung seiner Länge mit $P = 10$ t gedrückt. Welche größte Exzentrizität p darf der Kraftangriff in der vertikalen Mittellinie erhalten, wenn die größte entstehende Spannung 1000 at nicht überschreiten soll? (Elastizitätszahl $E = 2 \cdot 10^6$ at, Trägheitsmoment $J = 734$ cm^4, Fläche des Querschnittes $F = 20{,}4$ cm^2.)



317. Ein eiserner Träger, Deutsches Normalprofil Nr. 55, mit nebenstehenden Abmessungen wird in P in Richtung seiner Länge auf Zug beansprucht. Die größte auftretende Zug- oder Druckspannung soll 1000 at nicht überschreiten; wie groß darf die Last P höchstens gemacht werden? (Fläche des Querschnittes $F = 212 \text{ cm}^2$, Trägheitsmomente $J_1 = 99054 \text{ cm}^4$, $J_2 = 3486 \text{ cm}^4$.)



Aufg. 318.



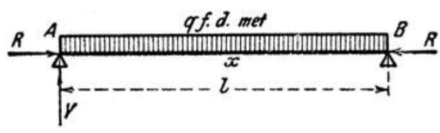
Aufg. 317.

318. Es soll die Tragfähigkeit eines T-Eisens von 10 m Länge und obenstehendem Querschnitt gesucht werden, wenn die Last P in der halben Dicke des Profils exzentrisch drückend angebracht wird. Es wird vierfache Bruchsicherheit vorausgesetzt. (Fließgrenze $= 2200$ at, Elastizitätszahl $E = 2 \cdot 10^6$ at.) Wie groß sind die größten Spannungen des Querschnittes für Tragfähigkeit und an welchen Stellen treten sie auf?

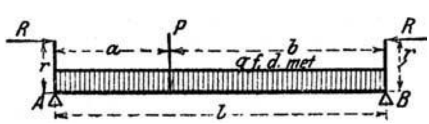
319. Ein prismatischer Stab, der einer am Arme p wirkenden exzentrischen Zugkraft P ausgesetzt ist, soll keine höheren Spannungen aufweisen als k_z für Zug und k für Druck. Man soll das Gebiet, in welchem die dieser Bedingung entsprechenden Werte von P und p liegen, durch einen Linienzug umschreiben, für welchen P und p die Koordinaten sind.

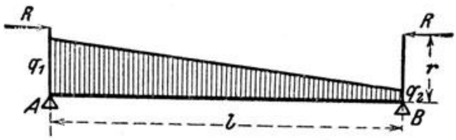
(R. Bredt, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1898.)

***320.** Ein frei aufliegender, gleichförmig belasteter Stab wird an den Enden von zwei gleichen, achsialen Druckkräften R beansprucht. Man suche die Gleichung der elastischen Linie in bezug auf das angegebene Achsenkreuz XAY und die Durchbiegung in der Mitte des Stabes.



***321.** Ein frei aufliegender, gleichförmig belasteter Stab, der überdies die Last P zu tragen hat, wird an den Enden von zwei exzentrisch liegenden Druckkräften R





beansprucht. Man suche die Durchbiegung des Stabes unter der Last P.

***322.** Man suche die Gleichung der elastischen Linie eines frei aufliegenden Trägers, der nach nebenan gezeichneter Art belastet ist.

3. Knickfestigkeit.

323. Bei welcher Belastung knickt ein Rundholz von $l = 3$ m Länge und $d = 20$ cm Durchmesser, wenn es an dem einen Ende festgeklemmt, an dem anderen drehbar befestigt ist?

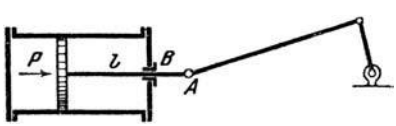
324. Eine gußeiserne Säule hat als Querschnitt eine Hohlellipse (äußere Halbachsen 14 cm und 10 cm, innere Halbachsen 10 cm und 6 cm). Sie wird mit $P = 92991$ kg belastet. Bei welcher Länge l wird diese Säule knicken, wenn ihre Enden als drehbar befestigt angenommen werden?

325. Ein Holzstab mit quadratischem Querschnitt von 4 cm Dicke ist an den Enden drehbar befestigt und wird auf Druck beansprucht. Bei welcher Länge des Stabes hört die Gültigkeit der Eulerschen Gleichung auf?

326. Ein Stab aus Flußeisen hat ein regelmäßiges Sechseck von $a = 6$ cm Seitenlänge zum Querschnitt; das eine Ende ist eingeklemmt, das andere drehbar befestigt. Bei welcher Länge des Stabes hört die Gültigkeit der Eulerschen Gleichung auf?

327. Ein Rundstab aus Eichenholz von 10 cm Durchmesser und 2 m Länge ist an dem einen Ende eingeklemmt und wird am anderen freien Ende belastet. Man berechne die zulässige Knickspannung dieses Stabes, wenn die zulässige Druckspannung $k = 86$ at ist.

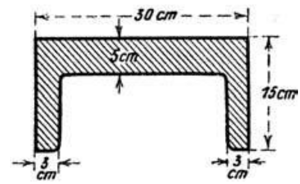
328. Man berechne den Durchmesser d einer Kolbenstange von der Länge l aus der Kolbenkraft P mit Rücksicht auf zwanzigfache Sicherheit gegen Zerknicken. Material: Schweißeisen.



329. Eine hölzerne Strebe von 4 m Länge und quadratischem Querschnitt, deren Enden drehbar befestigt sind, werde mit 5000 kg zentral gedrückt. Wie stark muß die Strebe gemacht werden mit Rücksicht auf elffache Sicherheit gegen Zerknicken?

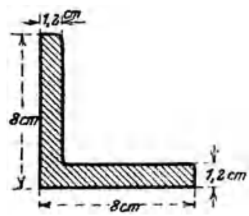
330. Eine 5,2 m lange gußeiserne Säule soll die Last 3325 kg mit zwanzigfacher Sicherheit gegen Zerknicken tragen. Die Säule hat kreisringförmigen Querschnitt; das Durchmesserverhältnis ist $d:D = 0{,}6$. Wie groß müssen diese Durchmesser gemacht werden? Die Enden der Säule sind drehbar.

331. Ein U-Eisen (Flußeisen) von nebenstehendem Querschnitt wird achsial und zentral belastet; unter Voraussetzung von $k = 1230$ at zulässiger Druckspannung besitze es eine Tragfähigkeit $P = 45$ t, wenn das eine Ende eingespannt, das andere frei ist. Welche Länge darf das U-Eisen erhalten?



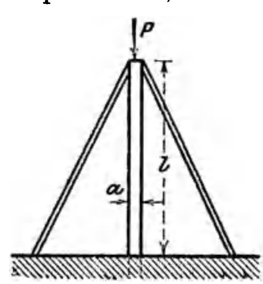
332. Eine gußeiserne Säule von $l = 5$ m Länge hat ringförmigen Querschnitt (äußerer Durchmesser $D = 30$ cm, innerer $d = 25$ cm). Die Enden der Säule sind drehbar befestigt. Man berechne die zulässige Knickspannung des Gußeisens, wenn dessen zulässige Druckspannung $k = 800$ at ist.

333. Ein Winkeleisen aus Flußeisen von nebenstehendem Querschnitt und 6 m Länge ist an beiden Enden eingespannt und wird in seiner Längenrichtung zentral gedrückt. Man soll die zulässige Knickspannung bestimmen, wenn $k = 700$ at die zulässige Druckspannung ist.



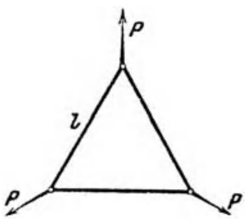
334. Ein schweißeiserner Stab von 3 m Länge und rechteckigem Querschnitt ($b:h = 1:2$) wird abwechselnd auf 20 t und 5 t Druck beansprucht. Die Enden des Stabes sind eingespannt. Man suche zunächst die Dimensionen b und h des Querschnittes für sicheres Tragen (Sicherheitsgrad $\mathfrak{S} = 5$) und prüfe dann, ob sie mit Rücksicht auf den Wechsel der Belastung ausreichend sind, d. h. welche Tragfähigkeit P der Stab wirklich besitzt.

335. Eine Holzsäule von quadratischem Querschnitt ($a = 24$ cm) und der freien Länge $l = 6$ m wird seitlich durch Streben allseitig gestützt und ist in den Boden festgerammt. Wenn man annimmt, daß die Last P nur von der Säule ge-

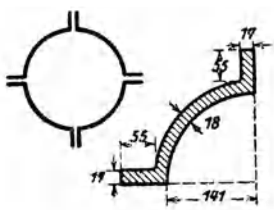


tragen wird, und daß dies mit vierfacher Sicherheit gegen Zerknicken geschieht, wie groß darf die Last gemacht werden?

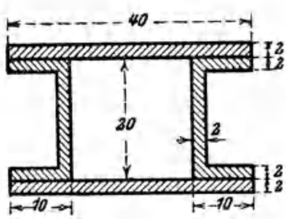
336. Drei gleichlange Stäbe aus Flußeisen von quadratischem Querschnitt sind untereinander gelenkig verbunden und werden von drei gleich großen Kräften, die zwischen 20 t Zug und 10 t Druck schwanken, im Gleichgewicht erhalten. Wie groß muß die Quadratseite a gemacht werden, wenn die zulässige Zugspannung nicht überschritten werden soll? Wie groß darf die Länge l der Stäbe höchstens sein, wenn auch die zulässige Knickspannung nicht überschritten wird?



337. Welche Tragfähigkeit P besitzt eine Säule von 4,5 m Länge, welche aus vier Quadranteisen (Flußeisen) von nebenan gezeichneter Form zusammengesetzt ist? Die Säule ist an dem einen Ende eingeklemmt, am anderen frei. (Sicherheitsgrad gegen Zerknicken $\mathfrak{S} = 5$, Abmessungen in mm.)

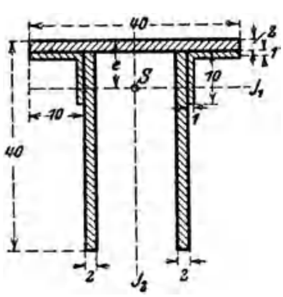


338. Es soll die Tragfähigkeit einer an beiden Enden eingespannten Strebe aus Flußeisen von 8 m Länge und nebenstehendem Querschnitt auf Grund der zulässigen Druckspannung $k = 600$ at berechnet und hieraus der Sicherheitsgrad gegen Zerknicken ermittelt werden. (Abmessungen in cm.)

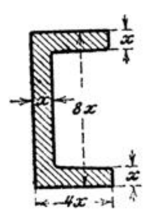


Aufg. 338.

339. Die Tragfähigkeit einer Säule aus Flußeisen von nebenstehendem Querschnitt sei 163 t bei einem Sicherheitsgrad $\mathfrak{S} = 4$ gegen Zerknicken. Die Enden der Säule sind drehbar gelagert. Welche Länge darf die Säule bekommen? (Abmessungen in cm.)



Aufg. 339.

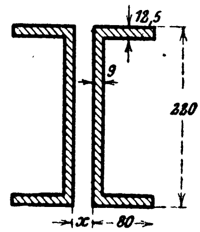


Aufg. 340.

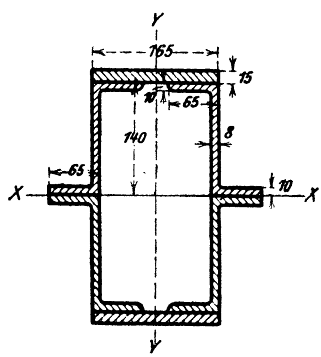
340. Eine Säule von

vorstehendem Querschnitt und 5 m Länge soll eine Last von 14 t sicher ertragen. Die zulässige Druckspannung ist 800 at. Das Material ist Gußeisen. Wie groß darf x gemacht werden? Die Säule ist an den Enden drehbar befestigt.

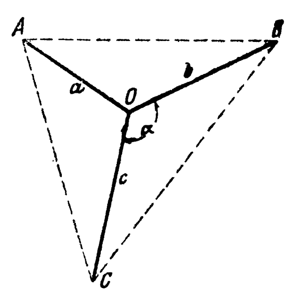
341. Eine Säule von 6,4 m Länge, die an beiden Enden drehbar befestigt ist, besteht aus zwei gleichen U-Eisen (Schweißeisen), deren Abmessungen in mm nebenan gegeben sind. Die Tragfähigkeit der Säule soll $P = 12615$ kg betragen. a) Man soll die Entfernung x der beiden U-Eisen derart berechnen, daß die gewünschte Tragfähigkeit mit einem Sicherheitsgrad $\mathfrak{S} = 4$ gegen Zerknicken erreicht wird. b) Man soll mit dem gerechneten x die Tragfähigkeit P_1 der Säule mit Rücksicht auf die zulässige Knickspannung berechnen, wenn die zulässige Druckspannung $k = 900$ at ist.



342. In welchem Verhältnis steht die Tragfähigkeit einer Säule aus Flußeisen von 2,5 m Länge und nebenstehendem Querschnitt, wenn die beiden durch die XX-Linie getrennten Hälften des Querschnittes das eine Mal fest miteinander verschraubt sind, das andere Mal jede Hälfte von der anderen unabhängig ist. Das untere Ende der Säule ist eingemauert, das obere frei. (Abmessungen in mm.)

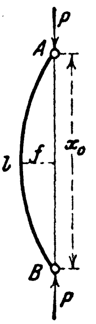


***343.** Es soll die Knickfestigkeit eines dreiarmigen ebenen Systems untersucht werden. Die drei Stäbe $AO = a$, $BO = b$, $CO = c$ sind in O starr miteinander verbunden, in A, B, C achsial belastet; jeder Stab sei für sich knicksicher, eine Ausbiegung in der Ebene kann also nicht stattfinden. Man stelle die Bedingungsgleichung zwischen den achsialen Lasten A, B, C und den Stablängen a, b, c auf, wenn O aus der Ebene heraustreten, also das System seitlich ausknicken soll.



(Vianello, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1906.)

344. Eine vertikal stehende homogene Säule von der Länge l ist nur ihrem Eigengewicht ausgesetzt, das q für die Längeneinheit beträgt. Bei welcher Größe von q wird die Säule unter ihrem Gewicht einknicken?



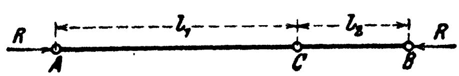
Aufg. 345.

***345.** Ein dünner Stab von der Länge l werde in achsialer Richtung durch eine Druckkraft P beansprucht, welche die Knicklast P_k übersteigt. Man berechne die Ausbiegung f in der Mitte des Stabes.

346. Man berechne die größten Spannungen σ eines langen dünnen Stabes (vergl. vorige Aufgabe), dessen zentrale Belastung P die Knicklast P_k überschritten hat, und zeichne die Schaulinie von P und σ.

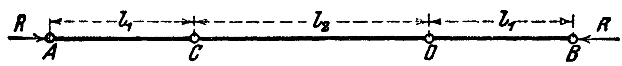
(345, 346: H. Lorenz, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1908.)

***347.** Der Stab $AB = l$ ist an seinen Enden und in einem dritten Punkt C gelenkig befestigt und achsial belastet. Man suche jene achsiale Last, welche die Knickung des Stabes herbeiführt.



348. Welches Resultat erhält man für die Knicklast der vorigen Aufgabe, wenn $l_1 = 2\, l_2$ angenommen wird?

***349.**

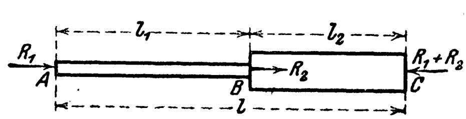


Der Stab $AB = l$ ist an seinen Enden und überdies in zwei symmetrisch liegenden Punkten C und D gelenkig gelagert; man suche die Größe der achsialen Last, welche die Knickung des Stabes herbeiführt.

350. Welches Resultat erhält man für die Knicklast der vorigen Aufgabe, wenn $l_1 = l_2 = \frac{l}{3}$ angenommen wird?

351. Wie groß ist die Knicklast der Aufgabe 349, wenn $l_1 = \frac{l}{4}$, $l_2 = \frac{l}{2}$ angenommen wird?

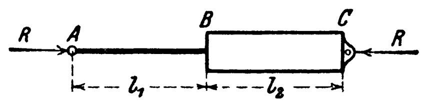
***352.** Ein zweifach abgestufter prismatischer Stab, der in A und C drehbar gelagert ist, wird zentral auf Druck belastet, und zwar mit R_1 in A und mit R_2 in B. Man



suche die Beziehung zwischen R_1, R_2 und den Abmessungen, welche die Knickung des bei B fest verbundenen Stabes herbeiführt.

(E. Jasinski, Annales des ponts et chaussées 1894.)

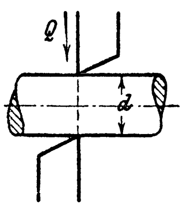
353. Ein dünner Stab AB wird in einem breiten prismatischen Stab BC eingespannt und beide an den drehbar befestigten Enden A und C von einer achsialen Kraft R beansprucht. Man gebe die Bedingung an, bei der die Knickung eintritt unter der Annahme, daß der breite Stab an der Biegung nicht teilnimmt.



(H. Streuli, Schweiz. Bauzeitung, 1895.)

V. Schub- und Biegungsfestigkeit.

1. Reiner Schub.



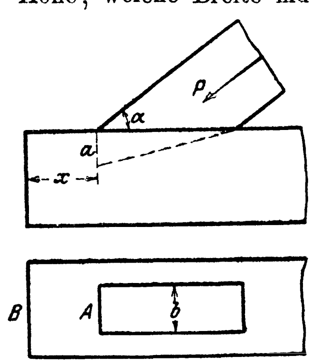
354. Welche Schubkraft Q muß von den Backen einer Eisenschere ausgeübt werden, wenn ein 4 cm starkes Rundeisen durchschert werden soll, dessen Schubfestigkeit $K_s = 3500$ at ist?

355. Welche Schubspannung ist für Flußstahl als zulässig zu erklären, wenn die Belastung zwischen gleichen Zug- und Druckgrenzen schwingt und das Verhältnis der Querzusammenziehung $m = 3{,}41$ ist?

356. Ein runder Stab aus Schweißeisen soll 40 t ruhende Querkraft sicher tragen. Welchen Durchmesser muß der Stab bekommen?

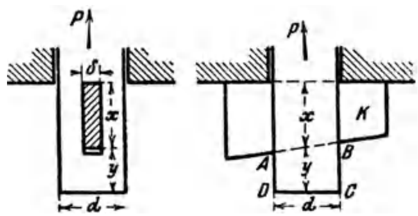
357. Ein Eichenbalken von 20 cm Breite und 30 cm Höhe soll durch eine Querkraft abgeschert werden. Wie groß muß diese Kraft angenommen werden, wenn die Schubfestigkeit für Eichenholz $K_s = 74$ at beträgt?

358. Ein gußeiserner Block von rechteckigem Querschnitt soll eine Querkraft von 80 t mit achtfacher Sicherheit tragen. Die Zugfestigkeit des Gußeisens sei $K_z = 1250$ at. Der Block hat 40 cm Höhe; welche Breite muß er bekommen?

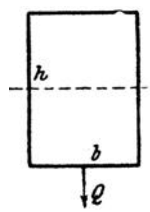


359. Der Fuß eines unter $\alpha = 30^0$ geneigten Holzsparrens drückt mit der Kraft $P = 2000$ kg in das Ende eines horizontalen Balkens und sucht das Stück AB abzuscheren. Man berechne die notwendige, dem Sparrenfuß noch vorgelagerte Länge x des Balkens, wenn die Tiefe der Verschneidung $a = 4$ cm, ihre Breite $b = 6$ cm und $k_s = 6$ at die zulässige Schubspannung des Holzes ist.

360. Ein Ankerbolzen vom Durchmesser $d = 50$ mm werde durch eine Kraft P gezogen; seine Befestigung an der Wand erfolgt durch den Keil K, der durch einen Schlitz von der Breite $\delta = 12$ mm getrieben wird. Man berechne die Abmessungen x und y und die zulässige Last P, wenn die zulässige Zugspannung des Materials $k_z = 1000$ at und die zulässige Schubspannung $k_s = 780$ at ist.



361. Eine oberflächliche Berechnung der Schubspannungen nimmt diese in allen Stellen des Querschnittes F gleich groß an, und zwar $\tau = \frac{Q}{F}$. Man untersuche, ob in einem rechteckigen Querschnitt Stellen vorkommen, deren Schubspannung wirklich diese Größe besitzt.

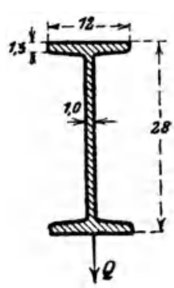


362. Wenn ein elliptischer Querschnitt von gegebener Fläche F einer Querkraft Q ausgesetzt ist, welches Achsenverhältnis muß für die Ellipse gewählt werden, damit die größte Schubspannung des Querschnittes den kleinsten Wert annimmt?

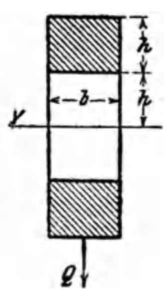
363. Ein kreisförmiger Querschnitt wird von einer Querkraft Q beansprucht. Man suche den Ort aller Punkte P des Querschnittes, deren Schubspannung gleich $\frac{1}{n}$ der größten Schubspannung ist.

364. Welche Querkraft Q kann ein eiserner Träger von nebenstehendem Querschnitt mit Sicherheit ertragen, wenn die zulässige Zugspannung des Materials $k_z = 1000$ at beträgt? (Abmessungen in cm.)

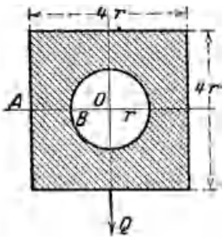
365. Ein Querschnitt, der aus zwei getrennten Rechtecken besteht, die aber starr miteinander verbunden sind, wird von einer Querkraft beansprucht. Wie groß ist die größte Spannung, und an welchen Stellen tritt sie auf?



Aufg. 364.

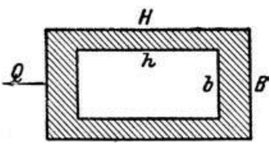


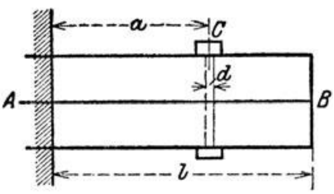
Aufg. 365.



366. Ein ausgehöhlter quadratischer Querschnitt von nebenstehenden Verhältnissen wird einer Querkraft ausgesetzt. Man ermittle die Spannung in einem Punkte der Schichte A B.

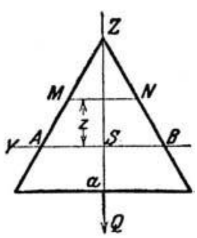
367. Ein Querschnitt besteht aus einem hohlen Rechteck, wobei $b : B = h : H = n : 1$. Wenn dieser Querschnitt von einer Querkraft beansprucht wird, wie verhält sich der für die Berechnung der größten Schubspannung maßgebende reduzierte Querschnitt F_0 zum wirklichen Querschnitt F? (Vergleiche Gleichung 103.)





Aufg. 368.

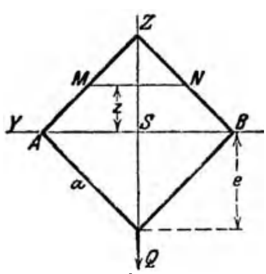
***368.** Ein rechteckiger Balken von der Höhe h und dem Gewicht G ist in der Mitte A B durchschnitten; die beiden Hälften werden in C durch eine Schraube zusammengehalten. Welchen Durchmesser d muß die Schraubenspindel erhalten, wenn die zulässige Zugspannung k_z des Eisens gegeben ist?



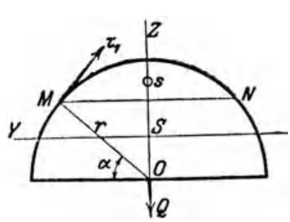
***369.** Ein gleichseitiges Dreieck wird von einer Querkraft Q beansprucht. Wie groß ist die Randspannung in A und B? An welchen Stellen findet die größte Spannung statt, und wie groß ist sie?

***370.** Ein auf der Spitze stehendes Quadrat wird in Richtung einer Diagonale von einer Querkraft beansprucht. Man suche Ort und Größe der größten Randspannung, sowie die Größe der Schubspannung in A und B.

***371.** Eine Halbkreisfläche wird von einer Querkraft Q beansprucht. Wie groß ist die Randspannung τ_1 an einer beliebigen Stelle des Umfanges? Für

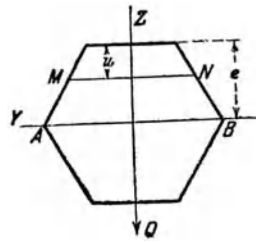


Aufg. 370.



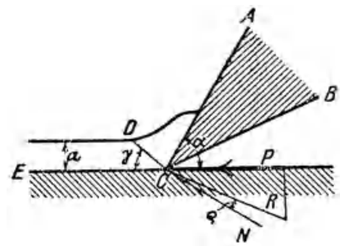
Aufg. 371.

welchen Winkel α ist τ am größten, und wie groß ist es dann?



***372.** Ein regelmäßiges Sechseck wird von einer Querkraft beansprucht. Man suche jene Schichte MN auf, in welcher die Schubspannungen den größten Wert erreichen, und ermittle diesen.

***373.** ACB ist der Durchschnitt eines Stichels, der mit der Kraft P einen Streifen DE von der Dicke a abhobelt; bei Kohlenstahl bildet sich hierbei eine Gleitfläche CD, längs der der Span abgeschert wird. Ist CN die Normale auf die Stichelfläche AC, so ist der Druck R des Stichels auf den abzuhobelnden Streifen unter dem Reibungswinkel ϱ gegen CN geneigt. Unter welchem Winkel γ wird die Gleitfläche CD liegen, wenn angenommen wird, daß sich in ihr die Schubspannungen gleichförmig verteilen, daß sie ihren Maximalwert erreichen, und daß die gleitende Reibung in der Gleitfläche (mit dem Reibungswinkel ϱ_1) berücksichtigt wird?

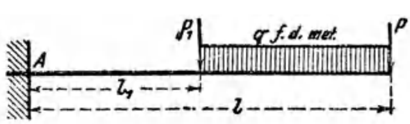


(Nach G. Herrmann, Arbeitsmaschinen.)

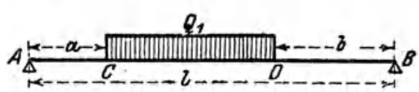
2. Schub und Biegung.

Man zeichne die Schaulinien der Querkräfte für folgende Belastungsfälle.

374.

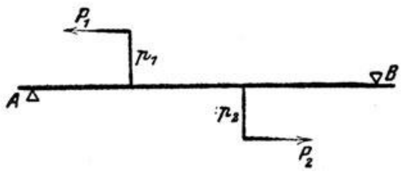


375.



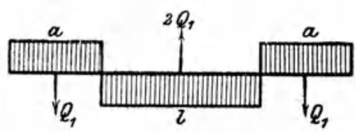
376.

377.



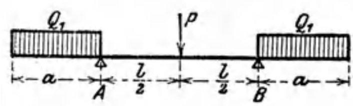
Träger mit zwei steifen Armen, an denen achsiale Lasten wirken.

378.

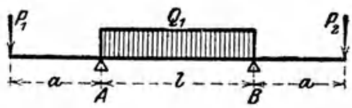


Träger ohne Auflager mit gleichförmigen Belastungen, die untereinander im Gleichgewicht sind.

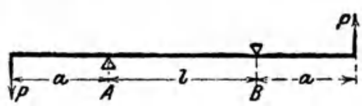
379.



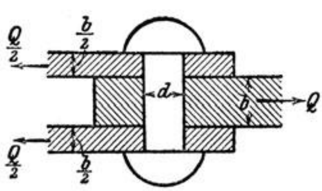
380.



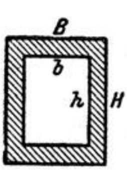
381.



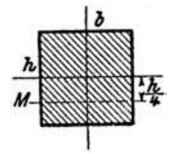
382. Die zulässige Zugspannung eines Nietbolzens sei k_z, die zulässige Biegungsspannung ebenso groß, die zulässige Schubspannung $k_s = 0{,}75\ k_z$. — Die zweischnittige Niete soll hinsichtlich Biegung und Schub gleiche Sicherheit besitzen. Wie groß muß der Durchmesser des Nietbolzens gemacht werden, wenn die Stärke b des Bleches gegeben ist?



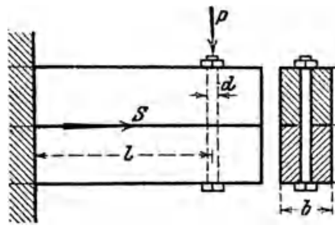
383. Ein frei aufliegender Träger von der Länge l wird an einer Stelle C, welche die Entfernungen $a = \frac{l}{4}$, $b = \frac{3\,l}{4}$ von den Auflagern hat, mit P belastet. Der Querschnitt des Trägers ist ein hohles Rechteck, worin $b : B = h : H = n : 1$. Das Verhältnis der Längsdehnung zur Querzusammenziehung ist 3. Bei welchem Verhältnis $l : H$ muß die Rechnung für Schub statt für Biegung angestellt werden?



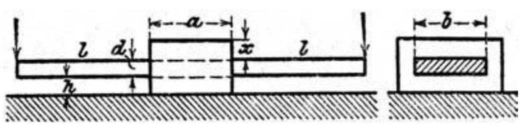
384. Ein beiderseits eingespannter Träger ist in der Mitte mit P belastet. Sein Querschnitt ist ein Rechteck mit den Seiten b und h. Die Länge des Trägers ist $l = 4h$. Suche für jenen Punkt M des Umfangs, der den Abstand $\frac{h}{4}$ von der Null-Linie hat und in der Hälfte der Trägerlänge liegt, die Hauptspannungen σ_1, σ_2, σ_3 der Größe und Lage nach.



385. Zwei gleiche Balken sind einseitig eingespannt und am Ende belastet. Ihre Enden sind verschraubt. Wie groß ist die Schubspannung τ und die Schubkraft S zwischen den Balken? Wie groß muß der Schraubendurchmesser d gemacht werden, wenn die Spannung k_s zulässig ist?

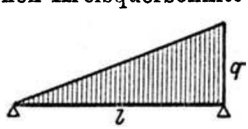


386. Durch einen festliegenden Klotz wird ein Brett von der Breite b und der Dicke d gesteckt. Die beiden Enden des Brettes werden bis zum Boden herabgedrückt. Wie groß muß die Abmessung x gemacht werden, wenn die zulässige Schubspannung k_s des Klotzes nicht überschritten werden soll?

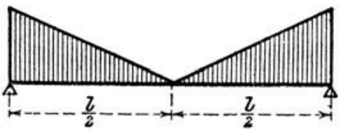


387. Ein frei aufliegender Stab von der Länge l und veränderlichem Durchmesser y ist gleichförmig belastet. Der Durchmesser y soll derart bestimmt werden, daß die größte Schubspannung in allen Querschnitten dieselbe Größe k_s erreicht. Man gebe die Gleichung für den Umriß des Stabes an und zeichne dessen Form, wenn d der Durchmesser über den Auflagern ist.

388. Ein frei aufliegender Träger, der einen Kreisquerschnitt von konstantem Durchmesser d besitzt, erhält eine Belastung in Form eines Dreiecks. In der Mitte des Trägers soll die größte Biegungsspannung neunmal so groß sein wie die größte Schubspannung. In welchem Verhältnis müssen l und d stehen?



***389.** Auf einem frei aufliegenden Träger von konstantem Querschnit F ist eine Last K in nebenan gezeichneter Weise ausgebreitet. Welche Durchbiegung erhält der Träger in der Mitte infolge seiner Querkräfte allein, wenn angenommen wird, daß sich die Schubspannungen gleichförmig über den Querschnitt ausbreiten?



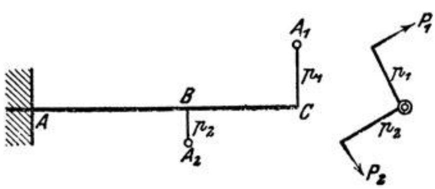
***390.** Wie ändert sich die Eulersche Gleichung für die Knicklast eines an den Enden drehbar befestigten Stabes:

$$P_k = \pi^2 \frac{E J}{l^2},$$

wenn außer dem Biegungsmoment, welches bei Ableitung dieser Gleichung allein berücksichtigt wurde, auch der Einfluß der Schubkräfte in Rechnung gezogen wird?

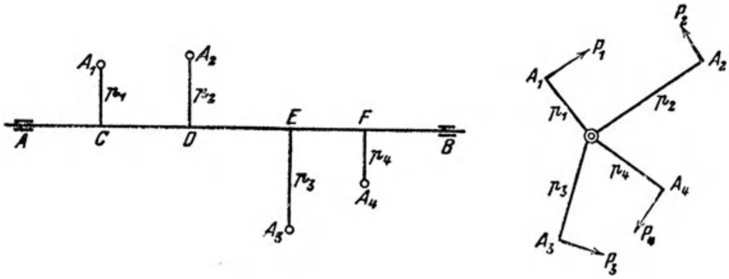
(Nussbaum, Zeitschr. f. Math. u. Physik 1907;
H. Lorenz, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1908.)

3. Drehung.



391. Eine am Ende festgehaltene Welle wird von zwei Kräften P_1 und P_2 auf Verdrehung beansprucht. Man zeichne die Schaulinie der Drehungsmomente.

392. Eine an den Enden gelagerte, im Gleichgewicht befindliche Welle wird an vier Angriffsstellen A_1, A_2, A_3, A_4 auf Ver-



drehung beansprucht. Man zeichne die Schaulinie der Drehungsmomente.

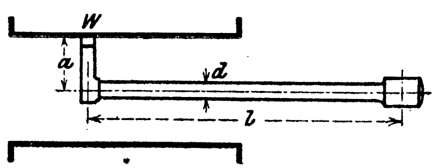
393. Auf einer Welle sitzt ein Rad von 1,2 m Durchmesser; an dem Umfang des Rades wirkt eine Kraft von 1860 kg. Welchen Durchmesser muß die Welle bekommen, wenn höchstens eine Spannung von 450 at gestattet ist?

394. Eine Welle von der Länge l und dem Durchmesser d darf durch Verdrehung höchstens einer Spannung k_d ausgesetzt werden. Wie groß darf ihr ganzer Verdrehungswinkel im äußersten Falle sein?

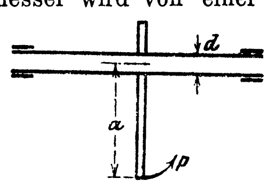
395. Ein Stab aus Flußstahl mit rechteckigem Querschnitt (4 cm $\times$ 8 cm) wird an seinem Ende von einem Drehungsmoment $M_d = 162$ mkg beansprucht. Wie groß darf die Länge l des Stabes sein, wenn der Verdrehungswinkel höchstens 3^0 betragen soll?

396. Eine Stahlwelle soll eine solche Länge bekommen, daß durch eine Viertelumdrehung des Endquerschnittes gegen den Anfangsquerschnitt die zulässige Spannung von 900 at nirgends überschritten wird. In welchem Verhältnis muß die Länge der Welle zum Durchmesser stehen? (Elastizitätszahl für Schub $G = 850\,000$ at.)

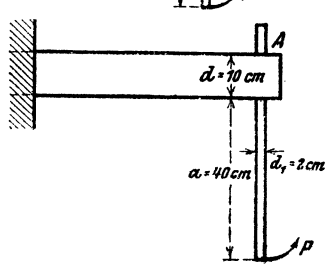
397. Der Widerstand W, den der Bohrstahl a einer Zylinderbohrmaschine findet, sei 1000 kg, der Halbmesser des zu bohrenden Zylinders 200 mm, die Länge der Bohrwelle $l = 1{,}2$ m. Wie groß muß deren Durchmesser d gemacht werden, wenn ein gesamter Verdrehungswinkel von $\varphi = \frac{1}{2}^0$ gestattet ist? (Elastizitätszahl für Schub $G = 770\,000$ at.)



398. Eine Welle von $d = 5$ cm Durchmesser wird von einer Praft P gedreht, die am Ende eines Armes $a = 0{,}8$ m senkrecht zu Arm und Welle wirkt. Wie groß darf P höchstens sein, wenn die zulässige Drehungsspannung $k_d = 500$ at nicht überschritten werden soll?



399. Durch das Ende eines 1,0 m langen, 10 cm starken Rundholzes wird ein 2 cm dicker, quadratischer Eisenstab gesteckt, so daß 0,4 m desselben hervorstehen. Am Ende des Stabes sucht eine Kraft P das Rundholz zu drehen. Wie groß

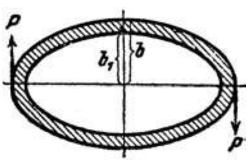


muß die Kraft P gemacht werden, damit sie a) das Rundholz abdreht ($K_d = 42$ at); b) den Eisenstab zerbricht ($K_b = 5000$ at)? Was tritt früher ein, das Abdrehen des Rundholzes oder der Bruch des Eisenstabes?

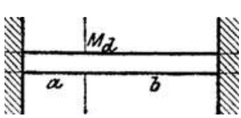
400. Ein Stab aus Flußstahl mit elliptischem Querschnitt (Achsen der Ellipse 5 cm und 8 cm) soll durch ein Drehungsmoment M_d abgedreht werden. Wie groß muß dieses sein, wenn die Drehungsfestigkeit des Flußstahls $K_d = 4000$ at beträgt?

401. Eine gußeiserne Röhre von $l = 5$ m Länge mit ringförmigem Querschnitt ($D = 50$ mm, $d = 40$ mm) ist an dem einen Ende eingespannt und wird an dem anderen durch eine Kraft P verdreht, deren Arm $p = 500$ mm beträgt. Die zulässige Zugspannung des Gußeisens ist $k_z = 300$ at, die zulässige Drehungsspannung $k_d = 0{,}8\ k_z$. Wie groß darf P gemacht werden, wenn k_d nicht überschritten werden soll? Wie groß ist dann der Verdrehungswinkel am Ende der Röhre? (Elastizitätszahl für Schub $G = 400\,000$ at.)

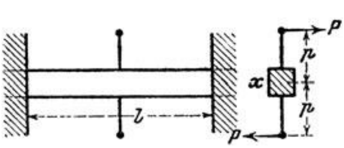
402. Ein Stab aus Eisen, dessen Querschnitt ein elliptischer Ring ist $\left(\alpha = \frac{b_1}{b} = 0{,}8\right)$, wird an den Enden der großen Achse durch zwei gleiche, aber entgegengesetzte Kräfte $P = 1800$ kg abzudrehen gesucht. Wie groß muß die Halbachse b gemacht werden, wenn die zulässige Drehungsspannung $k_d = 500$ at nicht überschritten werden soll?



403. Ein Stab, der an beiden Enden eingespannt ist, wird an einer Stelle, welche die Entfernungen a und b von den Enden hat, von einem Drehungsmoment beansprucht. Wie verteilt es sich auf die beiden Stabteile a und b?



404. Ein eiserner Stab von $l = 3$ m Länge und quadratischem Querschnitt wird in seiner Längenmitte durch zwei gleiche Kräfte $P = 100$ kg verdreht, die gleiche Arme $p = 1$ m besitzen. Die zulässige Drehungsspannung ist $k_d = 120$ at. Welche Abmessung x muß die Seite des Quadrates erhalten, wenn k_d nicht überschritten werden soll? Wie groß ist der Verdrehungswinkel des mittleren Querschnittes? (Elastizitätszahl für Schub: $G = 770\,000$ at.)



405. In welchem Verhältnis stehen die Verdrehungswinkel ϑ_1 und ϑ_2 zweier Stäbe von gleicher Länge, gleichem Rauminhalt, gleichem Material und gleichem Drehungsmoment, wenn der eine Stab quadratischen Querschnitt, der andere Kreisquerschnitt besitzt?

406. Wo befinden sich in einem elliptischen Querschnitt, der die Halbachsen b und c hat und der auf Verdrehung beansprucht wird, alle jene Punkte, welche dieselbe Schubspannung erleiden wie die Endpunkte der großen Achse 2 c?

407. Ein Stab von elliptischem Querschnitt wird von einem Drehungsmoment beansprucht. Die größte und die kleinste Spannung des Umfanges der Ellipse sollen im Verhältnis n : 1 stehen. In welchem Verhältnis müssen die Halbachsen b und c der Ellipse stehen?

408. Eine kreisrunde Welle soll N Pferdestärken mit n Umdrehungen in der Minute übertragen. Welchen Halbmesser r muß die Welle bekommen, wenn die höchste gestattete Drehungsspannung k_d gegeben ist?

409. Eine Ellipse von den Halbachsen b und c soll durch eine konzentrische und ähnliche Ellipse derart geteilt werden, daß die beiden entstehenden Flächen (innere Ellipse und elliptischer Ring) dem gleichen Drehungsmoment mit der gleichen Sicherheit widerstehen. Berechne das Verhältnis der Halbachsen $\alpha = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c}$.

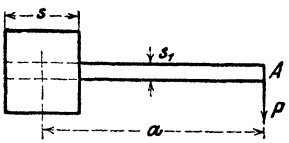
410. Aus einem Material vom Gewicht G und dem Einheitsgewicht γ soll ein Rohr von der Länge l geformt werden, welches einem gegebenen Drehungsmoment M_d mit der höchsten Spannung k_d widerstehen kann. Wie groß müssen der äußere Halbmesser R und der innere r gewählt werden?

411. Aus einem Holzstamm von d = 30 cm Durchmesser soll eine rechteckige Welle derart herausgeschnitten werden, daß sie die günstigste Querschnittsform für Verdrehung bekommt. Die Welle macht 10 Umdrehungen in der Minute und soll höchstens eine Drehungsspannung $k_d = 9$ at erleiden. Wieviel Pferdestärken wird die Welle übertragen können?

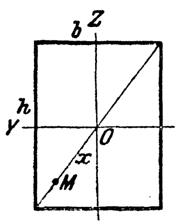
412. Eine Röhre soll ein Drehungsmoment mit derselben Sicherheit ertragen wie ein in der Röhre steckender quadratischer Balken aus gleichem Material. Wie groß muß das Verhältnis der Rohrdurchmesser sein?

***413.** Eine kreisrunde Welle vom Halbmesser r wird auf Verdrehung beansprucht. Wie groß ist der Halbmesser r_1 jenes inneren

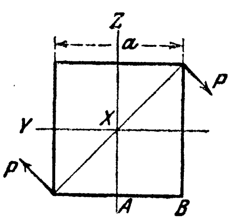
Teiles der Welle, welcher den n^{ten} Teil des Drehungsmomentes aufnimmt?



414. Ein quadratischer Stab von der Länge l und dem Querschnitt s^2 ist an dem einen Ende durchbohrt und trägt einen zweiten Stab vom Querschnitt $s_1{}^2$ und der Länge a aus demselben Material. Durch die Last P wird sich die Stelle A senken. Um welchen Winkel φ muß das andere Ende des Stabes s^2 gedreht werden, damit die Stelle A wieder in ihre Anfangslage zurückkehrt? Es ist $s_1 = \frac{s}{5}$ und $m = 4$ (Verhältnis der Längsdehnung zur Querzusammenziehung).

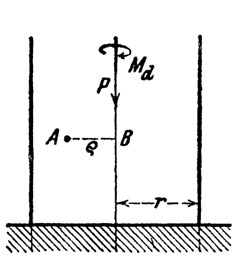


***415.** Ein rechteckiger Querschnitt (b und h) wird von einem Drehungsmoment beansprucht. Man stelle die Spannung τ eines beliebigen Punktes M der Diagonale d als Funktion der Entfernung x vom Mittelpunkte O dar. In welchem Punkte der Diagonale erreicht die Spannung den größten Wert? Wie groß ist dieser?



416. Ein quadratischer Querschnitt wird von einem Kraftpaar PP beansprucht. Wie groß sind die Hauptspannungen des Punktes A, wie sind sie gerichtet, und in welcher Ebene liegen sie?

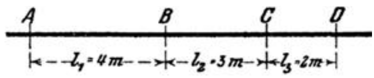
417. Auf einen Zapfen vom Halbmesser $r = 4$ cm wird ein Druck $P = 20$ t und ein Drehungsmoment $M_d = 800$ mkg ausgeübt. Es sollen für einen Punkt A im Innern, der die Entfernung $\varrho = 2$ cm von der Achse hat, die Hauptspannungen, ihre Ebene und ihre Richtung gesucht werden.



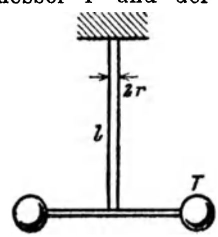
Aufg. 417.

418. Die aus Tiegelgußstahl gefertigte Schraubenspindel einer Schwungradpresse (vgl. Abbildung zu Aufgabe 502) besitzt einen Kernhalbmesser von $r = 5$ cm, einen Steigungswinkel von $\alpha = 14^0$ und einen Reibungswinkel von $\varrho = 6^0$. Durch Drehung der Spindel soll ein achsialer Druck P ausgeübt werden. Wie groß darf dieser höchstens sein, wenn die äußerste Spannung von 3000 at nirgends überschritten werden soll?

419. Eine Welle von quadratischem Querschnitt a^2, die n Umdrehungen in der Minute macht, empfängt in A: $N_1 = 3$ PS, in C: $N_3 = 12$ PS von zwei Motoren und gibt in B: $N_2 = 8$ PS, in D: $N_4 = 7$ PS an Arbeitsmaschinen ab. Man berechne den ganzen Verdrehungsbogen der Welle und zeichne die Schaulinie der auf die Welle übertragenen Pferdestärken.

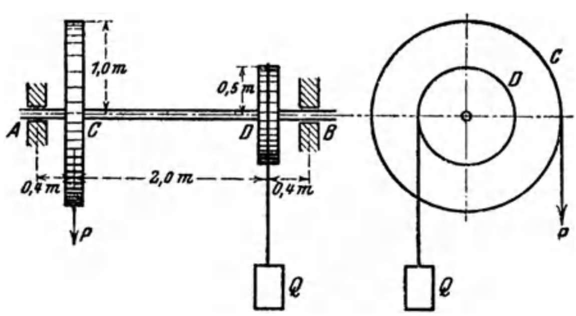


***420.** An einem dünnen Draht vom Halbmesser r und der Länge l hängt ein Stab mit zwei Schwungkugeln in horizontaler Lage im Gleichgewicht. Dieser Stab wird um den Bogen α aus seiner Ruhelage gebracht, derart, daß er in einer horizontalen Ebene bleibt, und hierauf frei gelassen; nach welcher Zeit erreicht er die nächste Ruhelage? (Dauer einer einfachen Schwingung.) Hierbei ist nur das Trägheitsmoment T der beiden Schwungkugeln zu berücksichtigen.



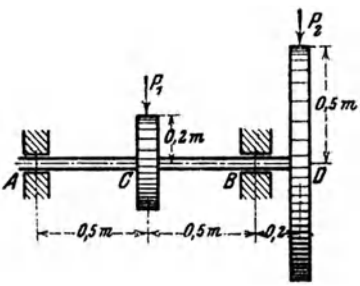
4. Drehung und Biegung.

421. Auf einer kreisrunden Welle AB sitzen in den unten angegebenen Abständen zwei Räder C und D mit den Halbmessern 1,0 m und 0,5 m. An ersterem wirkt eine Kraft P = 300 kg nach



abwärts, an letzterem befindet sich die Last Q im Gleichgewicht. Berechne den Durchmesser d der eisernen Welle unter Zugrundelegung folgender zulässigen Spannungen: für Biegung $k_b = 600$ at, für Drehung $k_d = 240$ at.

422. Auf einer kreisrunden gußeisernen Welle, die in A und B gelagert ist, sind in C und D zwei Räder aufgekeilt (Halbmesser 0,2 m



und 0,5 m). Die Belastungen der Welle sind $P_1 = 350$ kg, $P_2 = 200$ kg. Das eine Rad überträgt auf das andere $N = 8$ PS, die Welle macht $n = 80$ Umdrehungen in der Minute. Die zulässigen Spannungen sind: $k_z = 200$ at für Zug, $k_d = 200$ at für Drehung. Berechne den Wellendurchmesser d.

423. Eine Welle von elliptischem Querschnitt ist vertikal belastet und derart gelagert, daß die größere Halbachse c vertikal steht. Gegeben ist das Verhältnis der Halbachsen $c : b = n$; auch ist das Anstrengungsverhältnis α_0 als bekannt anzusehen. Wie groß muß das Verhältnis $M : M_d$ des Biegungs- zum Drehungsmoment gemacht werden, wenn gewünscht wird, daß an den Enden der beiden Halbachsen gleich große Maximaldehnungen entstehen sollen? (Verhältnis der Längsdehnung zur Querzusammenziehung $m = 3$.)

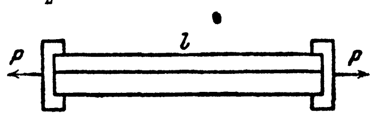
424. Ein Träger von rechteckigem Querschnitt (b, h) wird flachkantig gelagert, d. h. die größere Abmessung h ist horizontal. Das größte Biegungsmoment M und das größte Drehungsmoment M_d würden in demselben Querschnitt auftreten und seien gegeben. Ebenso sind die zulässige Biegungsspannung k_b, die zulässige Drehungsspannung k_d und das Verhältnis $b : h = n$ als gegeben anzusehen. Wie groß ist b zu machen? (Verhältnis der Längsdehnung zur Querzusammenziehung $m = \frac{10}{3}$.)

***425.** Ein eiserner Träger von rechteckigem Querschnitt (b, h) wird hochkantig gelagert, d. h. die größere Abmessung h ist vertikal. Das Biegungsmoment M und das Drehungsmoment M_d eines Querschnittes seien gegeben. Die zulässige Biegungsspannung k_b und die zulässige Drehungsspannung k_d seien vorgeschrieben. Man suche die Stelle der größten Anstrengung (Dehnung) im Querschnitt.

426. Für den Querschnitt eines hochkantig liegenden Balkens $(b : h = 1 : 2)$ sei das Biegungsmoment M gleich dem Drehungsmoment M_d, das Anstrengungsverhältnis $\alpha_0 = 1$. Wie groß ist die größte Dehnung $\max \varepsilon$ des Querschnittes, und wo tritt sie auf?

VI. Ungleichartiges Material.

427. Zwei gleich lange Stäbe von verschiedenem Material und verschiedenen Querschnitten F_1 und F_2 sind fest miteinander verbunden und werden einer achsialen Zugkraft P ausgesetzt. Man berechne die Spannung in jedem der Stäbe.



428. Die Stäbe der vorigen Aufgabe sollen durch die Kraft P derart beansprucht werden, daß ihre Spannungen im Verhältnis α stehen. Dies ist nur möglich, wenn die Stäbe schon anfangs gewisse Spannungen σ_{01} und σ_{02} besaßen. Man suche diese zu bestimmen.

429. Ein Eisenstab von 1,5 · cm^2 Querschnitt ist in einem Betonkörper von 60 cm^2 Querschnitt und von gleicher Länge eingebettet. Die Elastizitätszahlen sind $E_1 = 2 \cdot 10^6$ at für Eisen, $E_2 = 10^5$ at für Beton. Der ganze Körper wird einer Zugkraft von 2500 kg ausgesetzt; die Spannungen im Beton und im Eisen sollen im Verhältnis 1 : 20 stehen. Welche Anfangsspannung muß dem Eisenstab gegeben werden?

430. Wie groß sind die notwendigen Anfangsspannungen in der vorigen Aufgabe, wenn die Gesamtspannungen in Beton und Eisen, die nach Auftreten der Zugkraft von 2500 kg vorhanden sind, im Verhältnis 1:100 stehen? Wie groß sind diese Gesamtspannungen?

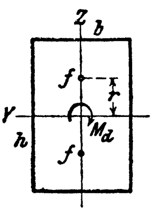
431. Um einen Eisenstab, der einer achsialen Last P ausgesetzt ist, wird Beton gegossen. Nachdem der Beton vollkommen erhärtet ist, wird die Last P entfernt. Welche Spannungen entstehen jetzt im Eisen und im Beton?

432. Der Querschnitt eines Eisen-Betonstabes enthalte $F_1 = 4$ cm^2 Eisen, $F_2 = 120$ cm^2 Beton; das Eisen habe 270 at Anfangsspannung. Man suche die Größe P jener achsialen Druckbelastung des Eisen-Betonkörpers, welche die Spannung im Eisen auf Null herabbringt. (E_1 und E_2 wie in Aufgabe 429.)

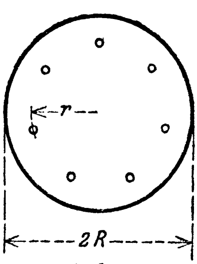
433. Eine Betonsäule besitzt eine Eiseneinlage, die gleichförmig um die Mittellinie verteilt ist. Beim Erhärten des Betons verkürzt die Säule ihre Länge l um δl. Wie groß wäre diese Verkürzung, wenn die Säule keine Eiseneinlage hätte?

434. Eine Betonsäule vom Querschnitt F_2 und der als konstant angenommenen Elastizitätszahl E_2 hat eine Eiseneinlage F_1 mit der Elastizitätszahl E_1. Wie kann aus diesen Angaben die durchschnittliche Elastizitätszahl E der Säule gerechnet werden?

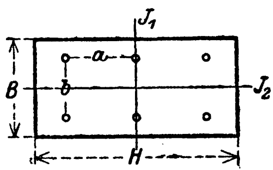
***435.** Ein gezogener Draht vom Halbmesser r hat in der Mitte die Elastizitätszahl E_1; sie nimmt nach außen in linearer Weise zu und erreicht am Rande den Wert E_2. Welche Zugkraft P kann der Draht sicher ertragen, wenn die zulässige Spannung k_z nirgends überschritten werden soll?



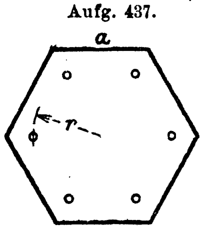
***436.** Ein auf Verdrehung beanspruchter Holzbalken wird seiner Länge nach von zwei Rundeisen durchzogen, deren Querschnitt f gleich dem 36. Teil des Balkenquerschnittes ist. Der wievielte Teil des ganzen Verdrehungsmomentes M_d wird von den beiden Rundeisen aufgenommen?



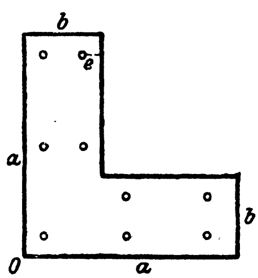
Aufg. 437.



Aufg. 439.



Aufg. 438.

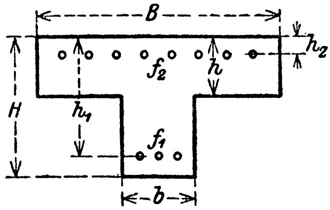


Aufg. 440.

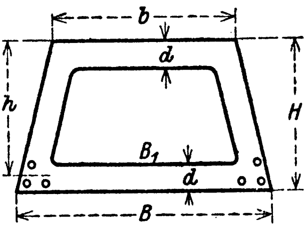
437—440. In folgenden Querschnitten von Eisenbetonsäulen, die zentral auf Druck beansprucht werden, ist der Durchmesser δ der Eiseneinlage sehr klein gegenüber dem Durchmesser der Säule. Man suche die ideellen Hauptträgheitsmomente für den Schwerpunkt. Es sei ν das Verhältnis der Elastizitätszahlen von Eisen und Beton.

Für folgende Querschnitte von Eisenbetonträgern, die auf Biegung beansprucht werden, ist die Lage der Null-Linie und das Trägheitsmoment für die obere (Druck-) Kante unter der Voraussetzung zu bestimmen, daß die Elastizitätszahl von Beton für Zug gleich Null ist, jene für Druck gleich E_{bd} und jene für Eisen $E_e = \nu E_{bd}$ ist.

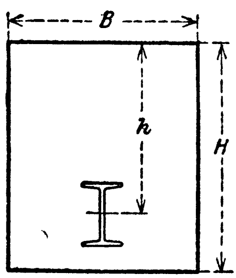
441.

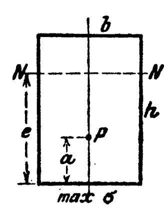


*442.



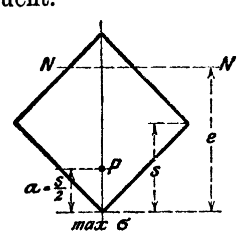
443.



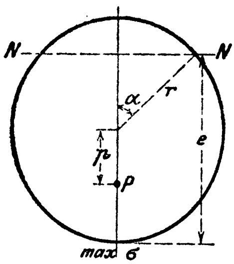


***444.** Der Querschnitt der Aufgabe 441 besitze nur die untere Eiseneinlage. Man suche ihren Abstand vom Druckmittelpunkt des Querschnittes.

***445.** Ein rechteckiger Querschnitt, der nur für Druck widerstandsfähig ist, wird von einer in der Symmetrie-Ebene liegenden exzentrischen Druckkraft P in der Entfernnng a vom Rande beansprucht. Man suche die Lage der Null-Linie NN und die größte Randspannung max σ.



***446.** Ein quadratischer Querschnitt, der nur für Druck widerstandsfähig ist, wird von einer in der Diagonalebene liegenden Druckkraft P in angegebener Entfernung beansprucht. Man suche die Lage der Null-



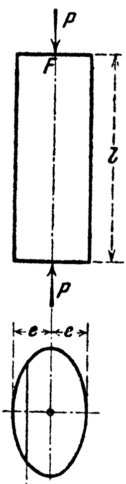
Linie NN und die größte Randspannung max σ.

***447.** Ein kreisförmiger Querschnitt, der nur für Druck widerstandsfähig ist, wird von einer exzentrisch liegenden Druckkraft in P beansprucht. Wenn NN die Null-Linie vorstellt, welche Beziehung wird zwischen dem Winkel α und der Exzentrizität p bestehen?

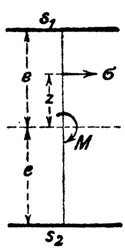
***448.** Ein gerader Stab von der Länge l wird zentral mit der Last P gedrückt. Man ermittle die elastische Linie des Stabes, wenn angenommen wird, daß sich die Spannung $\sigma_0 = \frac{P}{F}$ gleichmäßig über den Querschnitt ausbreitet, jedoch die Elastizitätszahl des Materials verschieden ist, und zwar dem Gesetze folgt:

$$E = E_0\left(1 + a\frac{z}{e}\right),$$

worin a eine Konstante ist.

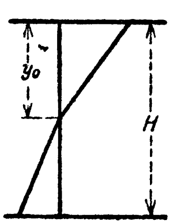


Aufg. 448.

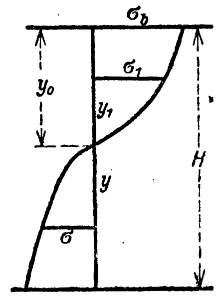


Aufg. 449.

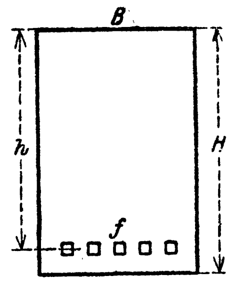
***449.** Der symmetrische Querschnitt eines geraden Trägers sei einem Biegungsmoment M ausgesetzt. Das Material ist nicht homogen; die Elastizitätszahl E ist veränderlich, und zwar nach dem Gesetze: $E = E_0\left(1 + a\frac{z}{e}\right)$. Hierin ist a eine Konstante, z die Koordinate jenes Flächenelementes, das die Elastizitätszahl E besitzt. Man ermittle: 1. die Spannung s_0 im Schwerpunkt; 2. die Lage der Punkte ohne Spannung im Querschnitt; 3. die Spannungen an den äußersten Stellen s_1 und s_2. (448, 449: F. Stark, Techn. Blätter 1907.)



450. Der Beton eines Balkens von rechteckigem Querschnitt (ohne Eisen) hätte eine konstante Elastizitätszahl E_{bd} für Druck und eine andere, ebenfalls konstante Elastizitätszahl E_{bz} für Zug. Das Verhältnis der beiden Zahlen sei bekannt. Man suche die Entfernung y_0 der Null-Linie von der Druckkante.



***451.** Der Beton des Balkens der früheren Aufgabe habe keine konstanten Elastizitätszahlen, sondern gehorche dem Bachschen Gesetze $\sigma^m = E_{bz}\,\varepsilon$ auf der Zugseite und $\sigma^{m_1} = E_{bd}\,\varepsilon_1$ auf der Druckseite. Man zeige, daß in diesem Falle die Null-Linie keinen konstanten Abstand y_0 von der Druckkante besitzt, wie in der vorhergehenden Aufgabe, sondern daß dieser von der größten Druckspannung σ_b abhängt.

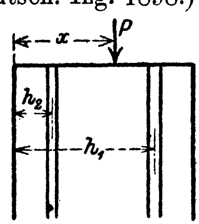


452. Ein Eisenbetonträger von nebenan stehendem Querschnitt wird von einem Biegungsmoment M beansprucht. Der Beton gehorcht dem in Aufgabe 450 angeführten Gesetze. Man suche die größte Druckspannung im Beton.

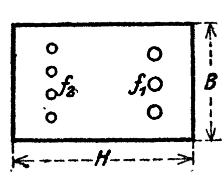
453. Ein Eisenbetonträger von demselben Querschnitt wie in Aufgabe 441 werde einem Biegungsmoment M ausgesetzt. Der Beton gehorche dem in Aufgabe 450 angeführten Gesetze. Man suche die größten Spannungen im Beton und im Eisen.

454. Ein Balken von rechteckigem Querschnitt wird von einem Biegungsmoment M und einer achsialen Zugkraft P beansprucht. Das Material des Balkens folgt dem Hookeschen Gesetze (Gleichung 8), aber die Elastizitätszahlen E_1 und E_2 für Zug und Druck sind verschieden. Man ermittle die Lage der Null-Linie im Querschnitt und die größten Spannungen s_1 und s_2.

(R. Bredt, Zeitschr. Ver. deutsch. Ing. 1898.)



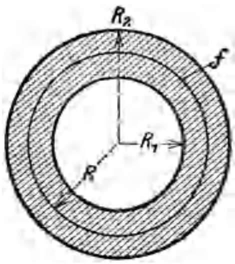
455. Der auf Biegung beanspruchte Träger vom Querschnitt wie in Aufgabe 443 kann zufolge der Steifheit seiner Eiseneinlage ein größeres Biegungsmoment aufnehmen, als wenn die Eiseneinlage ebenso groß, aber nicht widerstandsfähig gegen Biegung wäre. Wieviel wird das sein, wenn σ_e die größte im Eisen vorkommende Spannung und J_e das Trägheitsmoment der Eisenfläche für ihre horizontale Schwerlinie ist?



Aufg. 456.

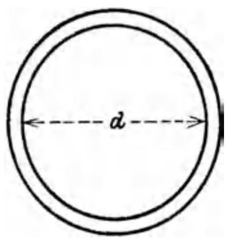
456. Die nebenan in Aufriß und Grundriß dargestellte, mit zweifacher Eiseneinlage versehene Säule wird von einer Drucklast beansprucht. Welche größte Entfernung x vom

Rande wird sie haben dürfen, wenn in der Säule keine Zugspannungen auftreten sollen?



***457.** Die Abbildung zeigt den Querschnitt einer Esse aus Beton, die eine Eiseneinlage f vom Halbmesser R besitzt. Die Esse wird in Richtung ihrer Achse von einer Drucklast beansprucht. Welchen Abstand p darf die Last P von der Achse haben, wenn nur Druckspannungen entstehen sollen?

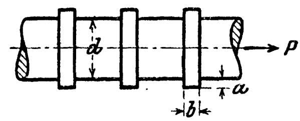
***458.** Wie groß ist in der Esse der vorigen Aufgabe die größte vorkommende Betonspannung?



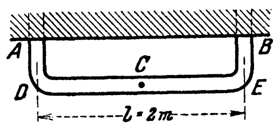
***459.** Eine Betonsäule, die in Richtung ihrer Länge l eine Druckspannung σ_b aufzunehmen hat, wird von einem eisernen Ringe umschnürt. Man berechne die im Ringe auftretende Zugspannung σ_e sowie die in der Betonsäule in Richtung ihres Durchmessers auftretende Druckspannung σ'_b.

VII. Technische Anwendungen.

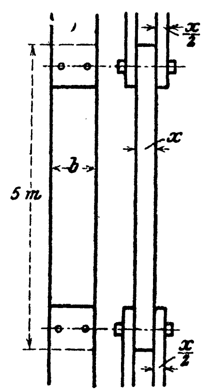
460. Ein Kammzapfen wird in achsialer Richtung von einer Kraft P beansprucht. Wenn $a = \frac{d}{8}$ und n die Anzahl der Ringe ist, wie groß muß der Durchmesser d des Zapfens und die Breite b der Ringe gemacht werden? k = zulässige Druckspannung, k_s = zulässige Schubspannung sind gegeben.



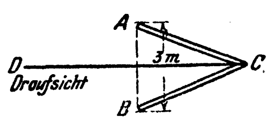
461. Ein Bügel aus Rundeisen ist in A und B befestigt, in seiner Mitte C mit P = 400 kg belastet. Welchen Halbmesser r muß der Bügel bekommen, wenn die Biegungsspannung $k_b = 1320$ at gestattet ist? Wie groß sind die Spannungen in den Endstücken AD und BE? Wodurch werden sie hervorgerufen?

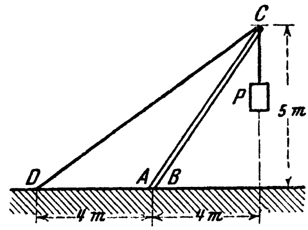


462. Ein Schachtgestänge besteht aus 10 Gliedern von je 5 m Länge und b = 8 cm Breite in nebenstehender Anordnung. Die Enden der Glieder sind untereinander durch je zwei Schrauben verbunden. Am tiefsten Ende des Gestänges hängt eine Last von P = 3 t; das Einheitsgewicht des Gestängeeisens ist 7,6, seine zulässige Zugspannung $k_z = 600$ at. Die Schraubenbolzen sind aus gutem Schweißeisen, dessen zulässige Biegungsspannung $k_b = 1176$ at ist. Berechne die notwendige Stärke x der Glieder, sowie den Durchmesser y der auf Biegung beanspruchten Schraubenbolzen.



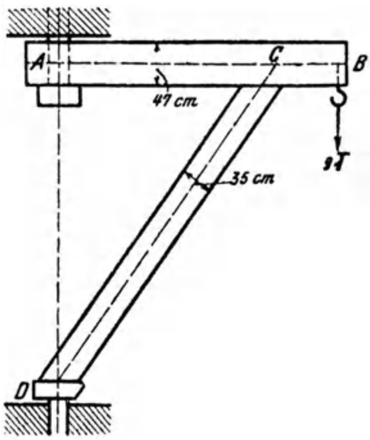
463. Ein dreibeiniger Kran besteht aus zwei Holzsäulen AC und BC, sowie aus einer eisernen Stange DC. Erstere haben quadratischen Querschnitt, die Stange Kreisquerschnitt. Bei C hängt eine



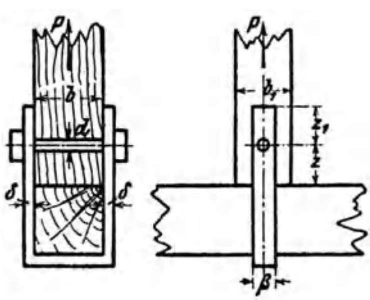


Last von P = 2 t. Berechne den Durchmesser d der Stange (zulässige Zugspannung $k_z = 600$ at), sowie die Stärke der Säulen bei elffacher Sicherheit gegen Zerknicken.

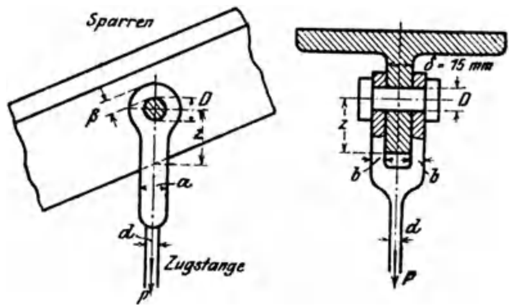
464. Ein hölzerner Gießerei-Kran von nebenstehender Form hat folgende Abmessungen: AC = 3 m, CB = 1 m, AD = 4 m. Die größte Last in B beträgt 9 t. Der Querschnitt des Balkens AB ist ein Rechteck (35 cm und 47 cm), jener der Strebe DC ein Quadrat (35 cm). In A und D ist der Kran mit schweißeisernen Bolzen drehbar befestigt. a) Wie groß ist die größte in AB auftretende Spannung? b) Wie groß ist die auf DC entfallende Druckkraft und wie groß ist die Tragfähigkeit der Strebe DC, wenn k = 80 at die zulässige Druckspannung ist? c) Welchen Durchmesser müssen die Bolzen in A und D bekommen, wenn $k_s = 480$ at gestattet ist?



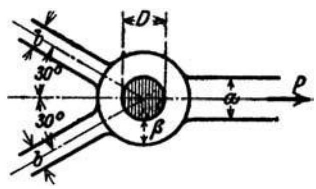
465. Eine hölzerne Strebe, in der die Zugkraft P = 5500 kg wirkt und deren Breite b = 10 cm ist, soll mittelst eines eisernen Bandes von der Stärke δ = 15 mm mit einem Balken verbunden werden. Die zulässigen Spannungen sind für Eisen: $k_z' = 750$ at Zug, $k_s' = 600$ at Schub; für Holz: $k_z'' = 100$ at Zug, $k_s'' = 10$ at Schub. Es sollen gerechnet werden: a) der Durchmesser d des Schraubenbolzens; b) die Breite b_1 der Strebe; c) die Breite β des eisernen Bandes; d) die Entfernungen z und z_1.



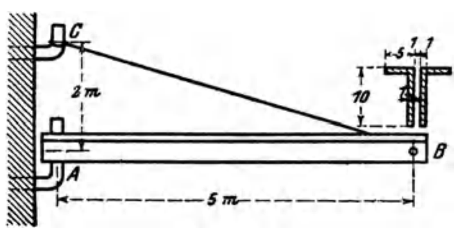
466. Von einem eisernen Dachstuhl ist der Anschluß einer Zugstange an den Sparren zu konstruieren. Die Last P = 5000 kg ist bekannt, ebenso die zulässigen Spannungen für Zug und Biegung $k_z = k_b = 700$ at, sowie für Schub $k_s = 540$ at. Es ist zu berechnen: a) der Durchmesser d der Zugstange; b) die Abmessung b, wenn $a = 1{,}25\ d$ angenommen wird; c) der Durchmesser D des Schraubenbolzens; d) die Ringbreite β; e) die Entfernung z.



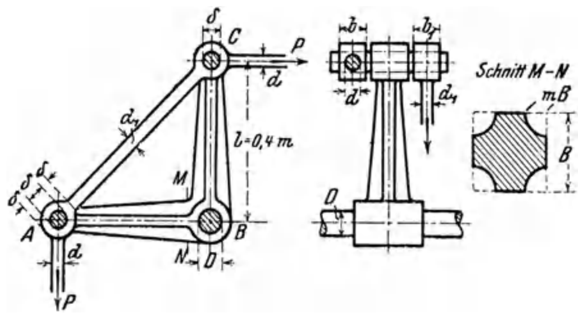
467. Drei Stangen aus Schweißeisen von $d = 4$ cm Dicke sind durch einen Schraubenbolzen vom Durchmesser D miteinander verbunden und im Gleichgewicht. Die mittlere Stange wird von einer Kraft P beansprucht, die zwischen 8000 kg Druck und 20000 kg Zug schwankt. Man berechne die Breiten a und b der Stangen für sicheres Tragen, ferner den Durchmesser D und die Ringbreite β.



468. Ein horizontaler Drehschranken AB aus Schweißeisen von 5 m Länge, dessen Querschnitt aus zwei gleichen Winkeleisen von nebenstehenden Abmessungen (in cm) besteht, ist in A auf einen eisernen Bolzen drehbar gelegt und in B durch ein Rundeisen CB gehalten, das in C an einen Bolzen gehängt ist. Das Eigengewicht des Schrankens beträgt 100 kg für den m. Es ist zu berechnen: a) die größte im Schranken auftretende Zug- bzw. Druckspannung (Elastizitätszahl $E = 2 \cdot 10^6$ at); b) die Knicksicherheit im Schranken.

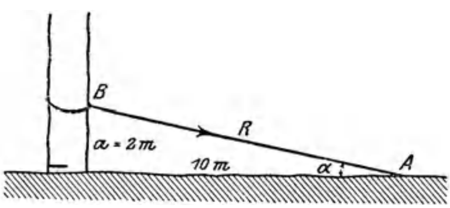


469. Ein Kunstwinkel ABC zum Betrieb einer Pumpe überträgt eine Kraft P, welche abwechselnd zwischen 2 t und 5 t Zug schwankt. Es ist $AB \perp BC$. Die drei Zugstangen, die Welle D und die Schraubenbolzen δ sind aus Schweißeisen, der Winkel selbst aus Gußeisen mit kreuzförmigem Querschnitt. Es sollen berechnet werden: a) die zulässigen Spannungen des Schweißeisens für Zug und Schub; b) die Durchmesser d, d_1, δ und D; c) die Breiten b und b_1; d) das Trägheitsmoment $_{min}J$ des Winkelquerschnittes MN



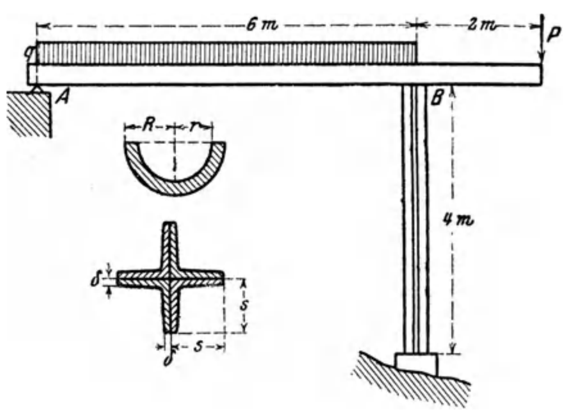
aus m und B (speziell für m = 0,4); e) die notwendige Stärke B für zehnfache Sicherheit gegen Knicken.

470. Es soll ein Eichenstamm gefällt werden, der einen Durchmesser von 20 cm hat und dicht über dem Boden zur Hälfte durchsägt ist. Ein Seil ist in der Entfernung a = 2 m vom Boden befestigt und wird von A aus mit der Kraft R gezogen. Wie



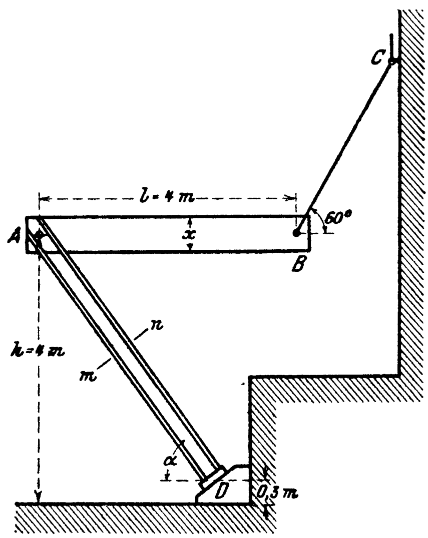
groß muß letztere sein, wenn die Entstehung einer Druckspannung von 600 at genügt, um den Stamm zum Bruch zu bringen?

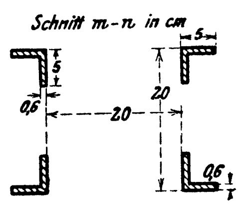
471. Ein 8 m langer Träger aus Flußeisen wird in unten-



stehender Weise frei gelagert und belastet. Die gleichförmige Last beträgt $q = 1000$ kg für den Meter, die Last am Ende $P = 3$ t. Der Querschnitt des Trägers ist ein Halbkreisring mit dem Halbmesserverhältnis $\frac{r}{R} = n = 0{,}75$. In B ist der Träger durch eine schweißeiserne Säule von 4 m Länge gestützt, die kreuzförmigen Querschnitt hat und aus 4 gleichen Winkeleisen gebildet wird. Es ist zu berechnen: a) die Stelle des größten Biegungsmomentes und die Größe desselben; b) die Halbmesser R und r, wenn die Biegungsspannung $k_b = 700$ at gestattet ist; c) die Abmessungen der Winkeleisen δ und s, wenn $\frac{\delta}{s} = m = \frac{1}{8}$ sein soll, für fünffache Knicksicherheit.

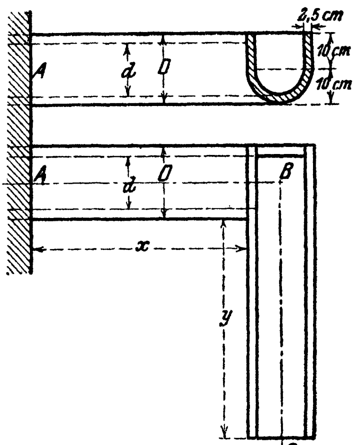
472. Ein 4 m langer hölzerner Balken, der gleichförmig belastet ist, schwebt 4 m hoch über dem Boden; er ist in B mit einer schweißeisernen Stange BC unter 60^0 gegen die Horizontale aufgehängt und in A durch eine schiefe schweißeiserne Strebe AD gestützt. Der Querschnitt mn dieser Strebe besteht aus vier gleichen Winkeleisen in gezeichneter Anordnung. a) Welche Neigung α muß



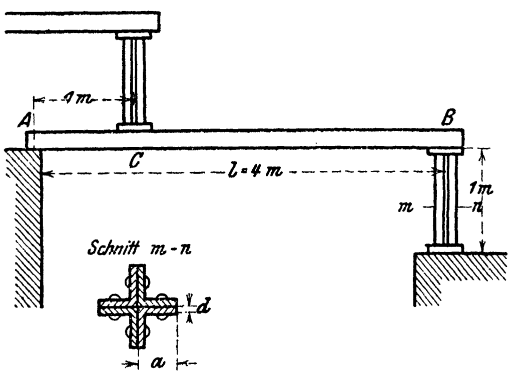


der Strebe gegeben werden, damit sie rein auf Druck (Knickung) beansprucht wird? b) Welchen Auflagerdruck darf der Balken in A ausüben, daß die zulässige Druckspannung $k = 1000$ at in der Strebe nicht überschritten wird? c) Welche Last q für die Längeneinheit kann der Balken tragen? d) Welche Höhe x muß der Balken bekommen, wenn seine Breite $b = 20$ cm und seine zulässige Spannung 100 at ist? e) Welchen Durchmesser d muß die Stange BC bekommen, wenn vollkommene Entlastung des Balkens mit Belastung wechselt?

473. Ein gußeisernes Rohr von ringförmigem Querschnitt ($D = 20$ cm, $d = 15$ cm) ist in A horizontal eingespannt und besitzt bei B einen Ansatz BC in Form einer oben offenen Röhre (Querschnitt wie nebenan). Sie ist bei C durch einen Schieber geschlossen, und beide Röhren, die geschlossene und die oben offene, sind mit Wasser gefüllt. Die zulässigen Spannungen des Rohres AB seien $k_z = 250$ at Zug, $k_s = 200$ at Schub; die zulässige Biegungsspannung im Rohr BC sei $k_b = 300$ at. Wie lang (y) darf der Ansatz gemacht werden? Wie lang (x) darf das Rohr gemacht werden? (Einheitsgewicht des Gußeisens $\gamma = 7{,}5$.)



***474.** Bei Anlage einer Treppe ist ein Holzbalken AB zu dimensionieren, der die freie Länge $l = 4$ m besitzt, in C durch den Druck einer Säule mit 1000 kg und überdies mit 500 kg für jeden Meter Länge gleichförmig belastet ist. In B stützt sich der Balken auf eine schweißeiserne Säule von 1 m Länge, deren Querschnitt aus vier gleichen Winkeleisen zusammengesetzt ist.



a) Man suche die Abmessungen des Balkens, wenn sich dessen Breite zur Höhe wie 5 : 7 verhalten soll und $k_b = 70$ at die zulässige Biegungsspannung ist; b) man ermittle die notwendigen Abmessungen der Winkeleisen, wenn die Schenkelbreite a eines derselben gleich der fünffachen Stärke d ist und sechsfache Sicherheit gegen Zerknicken verlangt wird.

VIII. Die Formänderungsarbeit.

1. Die Formänderungsarbeit von Stangen, Trägern und Wellen.

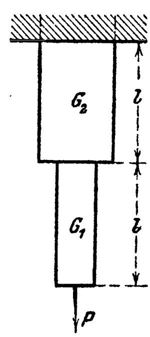
475. Ein quadratischer Eisenstab von 2 cm Stärke erleidet eine Zugkraft von $P = 4000$ kg. Wieviel Formänderungsarbeit nimmt der Kubikzentimeter des Stabes auf?

476. Ein Stab aus Schweißeisen von $l = 2{,}5$ m Länge, dessen Querschnitt eine Ellipse mit den Halbachsen $b = 4$ cm, $c = 3$ cm ist, erhält eine Längenänderung von $\Delta l = 0{,}05$ cm. Welche Arbeit hat der Stab in sich aufgenommen? (Elastizitätszahl $E = 2 \cdot 10^6$ at.)

***477.** Ein prismatischer Stab vom Querschnitt F, der Länge l und dem Gewicht G hängt unbelastet vertikal herab. Welche Formänderungsarbeit leistet sein Gewicht?

***478.** Ein Körper gleicher Zugfestigkeit, der die Länge l, die Endfläche F_0 und das Einheitsgewicht γ besitzt, wird am Ende mit der Last P belastet. Berechne die Formänderungsarbeit.

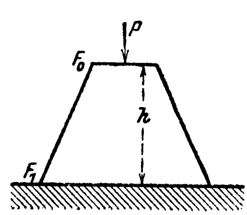
479. Zwei gleich lange prismatische Stäbe aus gleichem Material, mit den Gewichten G_1 und G_2 hängen aneinander und sind am Ende mit P belastet. Wie groß muß die Last P sein, wenn die auf die Raumeinheit bezogene Formänderungsarbeit in beiden Stäben gleich groß sein soll? (Zuerst allgemein, dann für $G_2 = 2\,G_1$.)



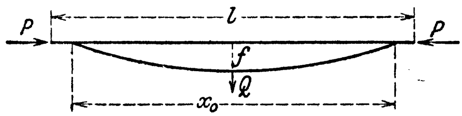
Aufg. 479.

***480.** Ein homogener gerader Kreiskegel vom Gewicht G und der Höhe h hängt an seiner Grundfläche, die den Halbmesser r besitzt, und ist nur der Schwerkraft ausgesetzt. Welche Formänderungsarbeit leistet diese?

***481.** Auf der Endfläche eines Kegelstutzes ruht die Last P. Man soll die Formänderungsarbeit berechnen, die sie allein in dem Kegelstutz hervorruft, ohne dessen Gewicht zu berücksichtigen.



***482.** Ein dünner gerader Stab von der Länge l wird in der Mitte durch die Last Q belastet.



Wie groß müßte die Achsialkraft P sein, wenn sie dieselbe Durchbiegung erzeugen soll?

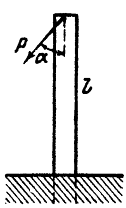
(H. Kayser, Zeitschr. Ver. deutsch. Ing. 1917.)

483. Man soll die Formänderungsarbeit eines frei aufliegenden Trägers, der in der Mitte belastet ist, aus der Durchbiegung f in der Mitte berechnen. Der Querschnitt ist unveränderlich.

484. Welche Formänderungsarbeit nimmt der in Aufgabe 277 angeführte Träger von sechseckigem Querschnitt auf, wenn die Last in der Mitte steht? ($E = 2{,}2 \cdot 10^6$ at.)

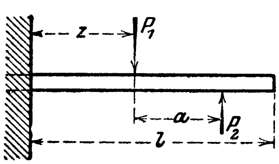
***485.** Man berechne die Formänderungsarbeit eines frei aufliegenden Trägers, der an beliebiger Stelle von einer Einzellast belastet wird.

***486.** Man suche die Formänderungsarbeit einer einseitig eingespannten, am Ende mit P belasteten Welle von kreisrundem Querschnitt, welche so geformt ist, daß sie gegen Biegung gleichen Widerstand besitzt.



487. Ein Stab von geringer Länge l, dessen Querschnitt F den Trägheitshalbmesser i besitzt, wird an seinem Ende durch eine Kraft P beansprucht, welche unter α gegen die Stabachse geneigt ist. Berechne die Formänderungsarbeit des Stabes.

***488.** Auf einen symmetrischen Träger vom Trägheitsmoment J, der einseitig eingespannt ist, wirken zwei entgegengesetzte Kräfte P_1 und P_2, die den Abstand a voneinander haben. Die Formänderungsarbeit durch die Biegung soll ein Maximum sein. Wie groß muß die Entfernung z der Last P_1 vom Auflager gemacht werden, und wie groß ist dann das Maximum der Arbeit?



***489.** Ein frei aufliegender Träger von unveränderlichem Querschnitt (Trägheitsmoment J in bezug auf die Null-Linie) und der Länge l ist gleichförmig mit q für die Längeneinheit belastet. Berechne die Formänderungsarbeit.

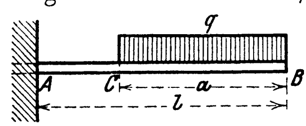
490. Man soll die Formänderungsarbeit des in voriger Aufgabe gegebenen Trägers aus der mittleren Durchbiegung desselben berechnen.

***491.** Man berechne die Formänderungsarbeit eines frei aufliegenden Trägers, der mit q für die Längeneinheit gleichförmig belastet ist und überdies an beliebiger Stelle eine Einzellast P trägt.

***492.** Die gleichförmige Belastung in Aufgabe 489 würde nur vom Auflager bis zu einer Länge a reichen. Man ermittle die Formänderungsarbeit.

***493.** Man suche die Formänderungsarbeit eines an beiden Enden eingespannten Trägers, der in den Entfernungen a und b von den Auflagern mit einer Einzellast P belastet ist.

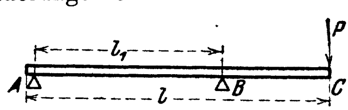
***494.** Ein einseitig eingespannter Träger von konstantem, symmetrischem Querschnitt (Trägheitsmoment J) ist vom Ende bis zu einer Entfernung a gleichförmig mit q für die Längeneinheit belastet. Man berechne die Formänderungsarbeit des Trägers.



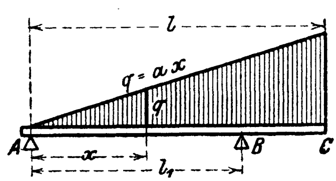
***495.** Wie ändert sich das Resultat der vorigen Aufgabe, wenn in C noch eine Einzellast P hinzutritt?

***496.** Wie groß ist die Formänderungsarbeit eines frei aufliegenden Trägers, der in gleicher Art wie in Aufgabe 235 belastet wird?

***497.** Man berechne die Formänderungsarbeit eines auf zwei Stützen A und B aufliegenden Trägers, dessen überhängendes Ende mit der Last P belastet wird.



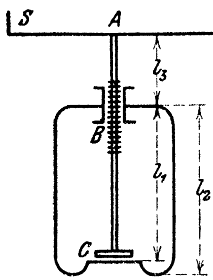
***498.** Wie groß ist die Formänderungsarbeit eines auf zwei Stützen A und B aufliegenden Trägers mit einem überhängenden Felde, auf dem eine gleichförmig wachsende Belastung (Dreieckslast) ausgebreitet wird?



***499.** Ein frei aufliegender Träger von rechteckigem Querschnitt wird an beliebiger Stelle durch eine Einzellast beansprucht. Welche Formänderungsarbeit nimmt er zufolge der entstehenden Schubspannungen allein auf?

***500.** Eine frei aufliegende kreisrunde Welle wird gleichförmig mit q für die Längeneinheit belastet. Welche Formänderungsarbeit nimmt sie zufolge der in ihr entstehenden Schubspannungen allein auf?

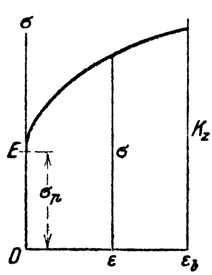
501. Eine Welle von der Länge l und dem Halbmesser r werde durch ein Drehungsmoment um den Gesamtwinkel φ^0 verdreht. Welche Formänderungsarbeit wird hierdurch in der Welle aufgespeichert?



502. Bei der Schwungradpresse wird eine Scheibe S von einem Schwungrad in rasche Umdrehung versetzt und hierdurch die Schraubenspindel ABC mit großer Kraft nach abwärts gedrückt, derart, daß bei C Prägungen in Metall stattfinden können. Wenn P der bei A übernommene Preßdruck ist, wieviel Formänderungsarbeit muß die Spindel und der Rahmen der Presse aufnehmen können?

(Schlesinger und Thumser, Zeitschr. Ver. deutsch. Ing. 1909.)

503. Nach dem Vorschlag von Intze (Wochenschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1882) kann für Eisen die Schaulinie der Dehnungen ε und der zugehörigen Spannungen σ jenseits der Proportionalitätsgrenze angenähert als Parabel mit dem Scheitel in E angesehen werden. Man berechne die Arbeit, die eine Zugstange vom Querschnitt F und der Länge l aufnimmt, wenn sie einer die Proportionalitätsgrenze überschreitenden Last P ausgesetzt wird. Als gegeben sind zu betrachten: Die Zugfestigkeit K_z, die Bruchdehnung ε_b und die Proportionalitätsgrenze σ_p.



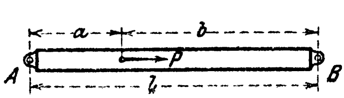
***504.** Wie wird die Formänderungsarbeit eines über die Proportionalitätsgrenze hinaus belasteten Stahlstabes zu berechnen sein, wenn hierfür das Spannungsgesetz $\sigma^5 = C\varepsilon$ zugrunde gelegt wird?

(Leitzmann, Zeitschr. Ver. deutsch. Ing. 1900.)

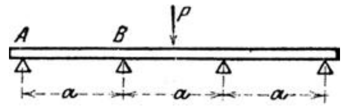
505. Wenn der Stahlstab der vorigen Aufgabe an beiden Enden frei aufgelagert und in der Mitte belastet wird, in welcher Beziehung steht die Formänderungsarbeit zur Durchbiegung p unter der Last?

2. Das Prinzip der kleinsten Formänderungsarbeit.

506. Ein prismatischer Stab AB wird an einer beliebigen Stelle seiner Achse von einer achsialen Last P beansprucht. Wie verteilt sich diese auf die beiden Auflager?

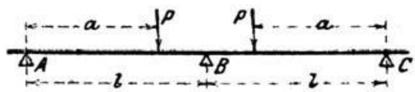


***507.** Ein durchlaufender Träger mit drei gleichen Feldern a wird in der Mitte mit P belastet. Man berechne die Auflagerdrücke in A und B.

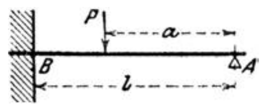


***508.** Wie ändert sich das Resultat der vorigen Aufgabe, wenn die Last P gleichförmig über das Mittelfeld ausgebreitet wird?

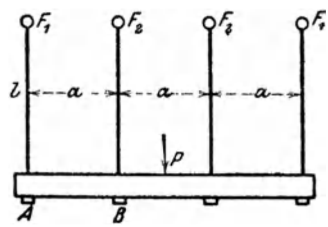
***509.** Ein durchlaufender Träger liegt über drei gleich weit entfernten Stützen A, B, C und ist mit zwei gleichen Lasten P symmetrisch belastet. Man suche den Stützendruck und das Auflagermoment in B.



***510.** Man soll die Auflagerdrücke A und B sowie das Einspannungsmoment eines mit einer Einzellast P belasteten Trägers finden, dessen anderes Ende in A frei aufliegt.

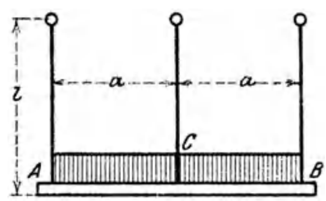


***511.** Ein Träger wird an vier gleich langen Stangen, deren Querschnitte F_1, F_2, F_2, F_1 sind, symmetrisch aufgehängt und in der Mitte mit P belastet. Man suche die Stangenkräfte in A und B, wenn der Träger starr ist und nur die Stangen elastisch sind.

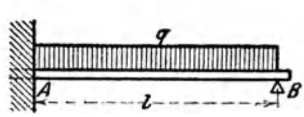


***512.** Wie ändert sich das Resultat der vorigen Aufgabe, wenn man auch den Träger als elastisch annimmt?

***513.** Ein gleichförmig belasteter Träger A B wird an drei gleich langen und gleich starken Stangen aufgehängt. Man berechne die Zugkräfte in den Stangen A, B und C.

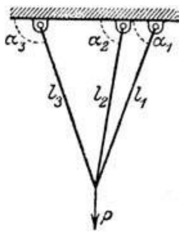


***514.** Ein gleichförmig belasteter Träger ist an dem einen Ende eingespannt, an dem anderen frei auflagernd. Man soll die Auflagerdrücke in A und B sowie das Einspannungsmoment finden.

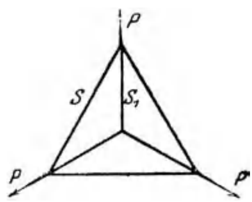


***515.** Ein gleichförmig belasteter Träger liegt an seinen Enden in zwei unnachgiebigen Gelenken. Wie groß ist die horizontale Kraft H, die in diesen Gelenken durch die Belastung entsteht?

***516.** Drei Stäbe aus gleichem Material, deren Längen l_1, l_2, l_3 und deren Querschnitte F_1, F_2, F_3 bekannt sind, werden in ihren oberen Enden drehbar gelagert und tragen mit ihren unteren Enden gemeinsam die Last P. Die Neigungswinkel α_1, α_2, α_3 sind gegeben. Man suche die Spannungen in diesen drei Stäben.

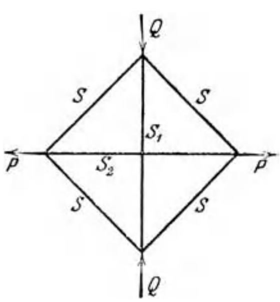


Aufg. 516.



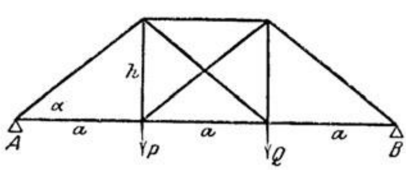
Aufg. 517.

***517.** Das gezeichnete regelmäßige Stabwerk wird von drei gleichen Kräften P im Gleichgewicht erhalten. Die Stäbe haben gleichen Querschnitt und sind aus demselben Material. Man suche die Spannungen S und S_1.

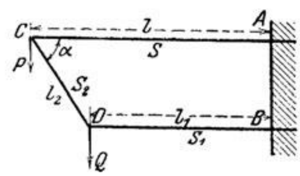


***518.** Ein aus sechs Stäben bestehendes quadratisches Fachwerk wird an den Ecken durch vier paarweise gleiche Kräfte P und Q beansprucht. Der Querschnitt und die Elastizitätszahl sind überall gleich. Es sind die Spannungen S, S_1, S_2 zu berechnen.

***519.** Es sind die Spannungen in den Stäben des nachstehend gezeichneten Fachwerkes zu ermitteln, das einen überzähligen Stab enthält und unsymmetrisch belastet ist. Die Querschnitte der Stäbe seien verschieden, ihr Material das gleiche.



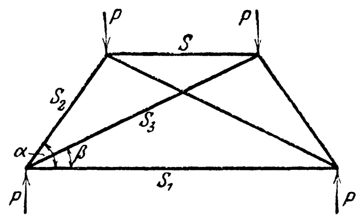
Aufg. 519.



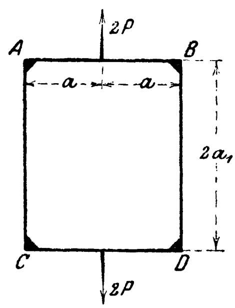
Aufg. 520.

***520.** Zwei Stäbe AC und BD sind in A und B horizontal eingespannt, in C und D mit P und Q belastet. Die belasteten

Enden sind durch einen Stab CD gelenkig miteinander verbunden. Man berechne die Auflagerdrücke in A und B, die Auflagermomente M_A und M_B daselbst sowie die Spannnngen der Stäbe S, S_1, S_2.



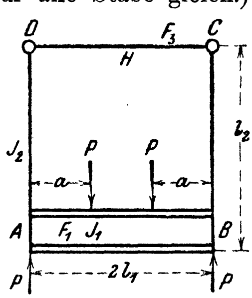
***521.** Ein aus sechs Stäben mit gleichem Querschnitt gebildetes Trapez wird von vier gleichen Kräften P belastet. Man suche die Spannungen in den Stäben.



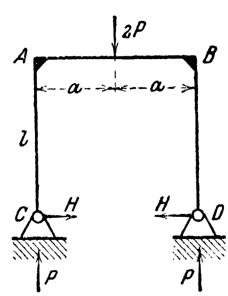
***522.** Ein rechteckiger Rahmen, der in den Ecken starr ist, wird mit der Kraft 2P in der Mitte gezogen. AB = 2a hat das Trägheitsmoment J und die Elastizitätszahl E, AC = $2a_1$ entsprechend J_1 und E_1. Man soll das in den starren Ecken auftretende Biegungsmoment M_0 berechnen.

(F. Grashof, Theorie d. Elastiz. und Festigkeit.)

***523.** Untenstehende Figur stellt den Querschnitt einer eisernen Brücke vor. AB ist der symmetrisch mit 2P belastete, an den Enden gelagerte Querträger (Querschnitt F_1 mit dem Trägheitsmoment J_1), AD und BC vertikale Ständer (Trägheitsmoment J_2), CD eine horizontale Strebe (Querschnitt F_3); C und D sind Gelenke. Berechne die in H herrschende Druckkraft. (Elastizitätszahl für alle Stäbe gleich.)



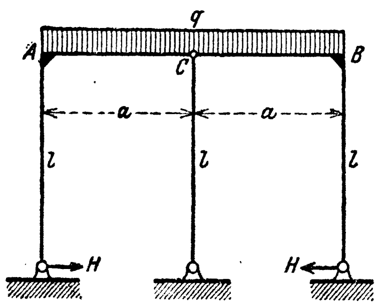
Aufg. 523.



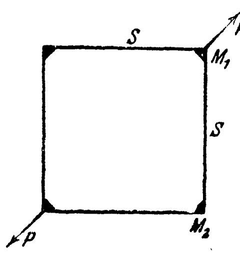
Aufg. 524.

***524.** Ein Bockkran besteht aus einem steifen Rahmen A, B, C, D, der in C und D gelenkig gelagert ist. Man soll für symmetrische Belastung 2P den in C und D auftretenden Horizontalschub berechnen. (Elastizitätszahl für alle Stäbe gleich.)

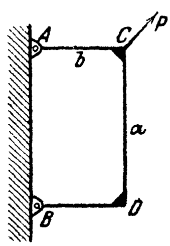
***525.** Ein dreistieliger Rahmen mit drei Fußgelenken, einem Gelenke C in der Mitte und zwei steifen Ecken A und B wird gleichförmig belastet. Man suche den Horizontalschub H, die Auflagerdrücke in A und B, sowie das Einspannungsmoment M_0 in A. (Elastizitätszahl für alle Stäbe gleich.)



***526.** Ein an den Ecken versteiftes Quadrat wird in einer Diagonale von zwei gleichen Kräften P beansprucht. Man suche die Spannungen S in den Seiten und die Einspannungsmomente M_1 und M_2 in den Ecken. (F. Grashof, Theorie der Elastizität und Festigkeit.)



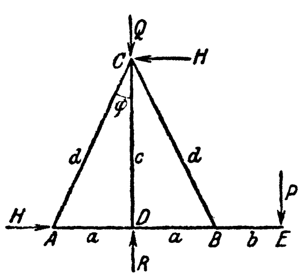
Aufg. 526.



Aufg. 527.

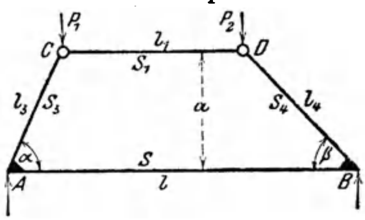
***527.** Ein Stab vom Querschnitt F ist in C und D rechtwinklig abgebogen und in A und B gelenkig befestigt. In C wird der Stab von einer Kraft P beansprucht, die mit der Richtung AB den Winkel α einschließt. Man ermittle die Spannungen in den drei Teilen des Stabes und die Biegungsmomente in C und D.

***528.** Das gleichschenklige Dreieck ABC wird durch den Stab CD = c versteift, der mit dem Träger AB in D nicht gelenkig, sondern starr verbunden ist. Die Belastung erfolgt in der gezeichneten Weise durch die beiden horizontalen Kräfte H und durch die vertikalen Kräfte P, Q, R. Man ermittle die Spannungen S_1 in CD, S_2 in AC, S_3 in BC, S_4 in AB sowie das Biegungsmoment in D.

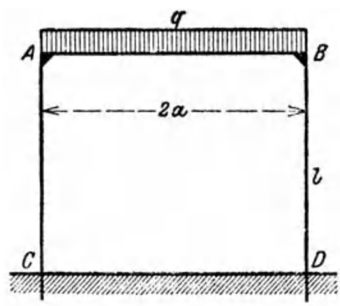


(L. Vianello, Zeitschr. Ver. deutsch. Ing. 1897.)

***529.** Ein Bockgerüst von der Gestalt eines Trapezes mit ungleichen Seiten besitzt in A und B versteifte Ecken, in C und D hingegen Gelenke, in denen die ungleichen Lasten P_1 und P_2 stehen. Man berechne unter der Annahme, daß alle Stäbe gleiche Querschnitte besitzen, die Spannungen S, S_1, S_3, S_4, sowie die Einspannungsmomente in A und B.

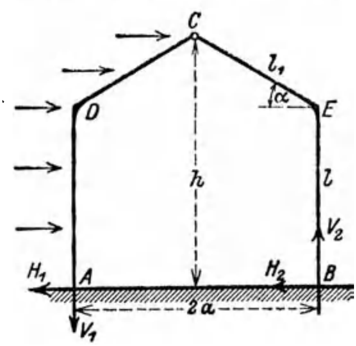


***530.** Ein bei A und B steifer Rahmen ist in C und D eingespannt. Er wird mit q für die Längeneinheit gleichförmig belastet. Man berechne den in C und D auftretenden Horizontalschub H, sowie die Einspannungsmomente M_0 und M_1 in A und C. (Elastizitätszahl für alle Stäbe gleich.)

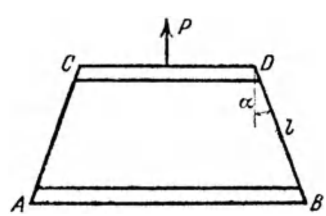


***531.** Nebenstehendes Portal ist in A und B eingespannt, in C gelenkig, in D und E steif. Es wird von dem horizontalen Winddruck q für die Längeneinheit beansprucht.

Man berechne die horizontalen Schubkräfte H_1 und H_2, die vertikalen Auflagerdrücke V_1 und V_2, die Einspannungsmomente M_1 und M_2 in A und B, endlich die Einspannungsmomente M_3 und M_4 in D und E, und den Gelenkdruck in C. Alle Stäbe haben gleichen Querschnitt; die Elastizitätszahl ist durchaus die gleiche.



***532.** Ein steifes Maschinengestell von der Form eines gleichseitigen Trapezes wird in der Mitte belastet. Die parallelen Seiten sind so stark konstruiert, daß ihre Formänderung außer acht gelassen werden kann. Man berechne die Spannungen S der schwachen Seitenteile, sowie die Einspannungsmomente M_1 und M_2 in A und C.



***533.** Welche Formänderungsarbeit leisten die Schubspannungen eines rechteckigen Balkens, der von einer beliebigen Belastung auf Biegung beansprucht wird?

***534.** Man versuche, die bekannte Gleichung der elastischen Linie eines geraden, beliebig belasteten Trägers

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = - \frac{M}{E J}$$

(vergl. Gleichung 40) aus der Formänderungsarbeit des Trägers abzuleiten, wenn nur auf die Normalspannungen Rücksicht genommen wird.

***535.** Wie ändert sich obige Gleichung der elastischen Linie, wenn auch auf die Schubspannungen Rücksicht genommen wird? Man suche die neue Gleichung ähnlich wie in voriger Aufgabe mit Hilfe der Formänderungsarbeit abzuleiten.

***536.** Wie ändert sich die Eulersche Gleichung für die Knicklast eines geraden Stabes

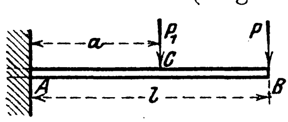
$$P = \pi^2 \frac{E J}{l^2}$$

(vergl. Gleichungen 84 und 85a), wenn nicht nur auf die Normalspannungen, sondern auch auf die Schubspannungen Rücksicht genommen wird? Man versuche die geänderte Gleichung wie in voriger Aufgabe aus der Formänderungsarbeit abzuleiten.

(535, 536: O. Domke, Zeitschr. f. Math. u. Phys., 63. Bd.)

3. Die Abgeleitete der Formänderungsarbeit.

Folgende Aufgaben sind mit Benützung der Formänderungsarbeit zu lösen (vergl. Gleichung 132):



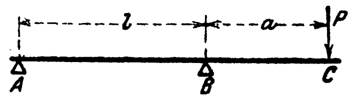
***537.** Berechne für nebenan gezeichneten Belastungsfall die Durchbiegungen unter P und P_1.

***538.** Man berechne die Durchbiegung f unter der Last P eines frei aufliegenden Trägers von der Länge l und dem Trägheitsmoment J, wenn a und b die Entfernungen der Last von den Auflagern sind.

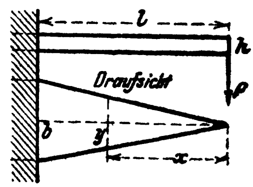
***539.** Man berechne die Durchbiegung f in der Mitte eines frei aufliegenden Trägers von der Länge l und dem Trägheitsmoment J, wenn in der Mitte die Last P steht und der Träger überdies mit q für die Längeneinheit belastet ist.

***540.** Es ist die Durchbiegung f unter der Last P eines beiderseitig eingespannten Trägers (Länge l, Trägheitsmoment J) zu berechnen, wenn a und b die Entfernungen der Last von den Auflagern sind.

***541.** Ein Stab von konstantem Querschnitt liegt in A und B frei auf und ist in C mit P belastet. Man rechne die Durchbiegung in C.



***542.** Eine Dreiecks-Feder von nebenstehenden Abmessungen ist an ihrer Spitze mit P belastet. Es ist die Durchbiegung unter P zu ermitteln.

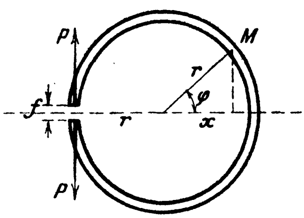


***543.** Man bestimme bei dem in Aufgabe 510 angegebenen Belastungsfall die Durchbiegung des Trägers unter der Last P.

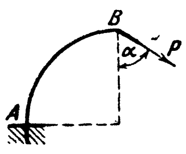
***544.** Ein frei aufliegender Träger ist gleichförmig mit q für die Längeneinheit belastet. Man berechne die Durchbiegung f an einer Stelle, welche die Entfernungen a und b von den Auflagern hat.

IX. Gekrümmte Stäbe.

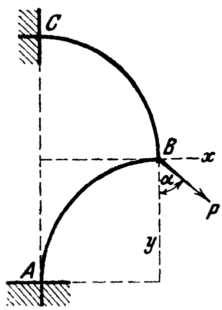
***545.** Ein Stab, dessen Achse nach einem Kreisbogen von großem Halbmesser ϱ_0 gekrümmt ist, wird an den Enden achsial und zentral mit der Last P belastet. Man suche die Gleichung der elastischen Linie und die Durchbiegung f in der Mitte des Stabes.



***546.** Eine Kreisfeder ist an einer Stelle durchschnitten und wird dort um f geöffnet. Welche Kräfte P müssen dazu aufgewendet werden? (Mit Berücksichtigung der Achsialkräfte.)



***547.** Ein dünner, elastischer Stab, der die Form eines Kreisquadranten hat, wird in B von einer beliebig gerichteten Kraft P beansprucht. Man suche die horizontale und die vertikale Verschiebung von B.

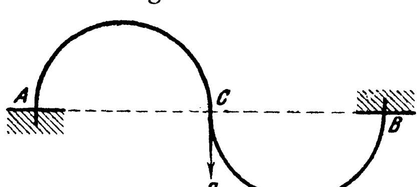


Aufg. 548.

548. Eine aus zwei Kreisquadranten bestehende Feder wird an der Verbindungsstelle B von einer beliebig gerichteten Kraft P beansprucht. Man suche Größe und Richtung der Verschiebung von B.

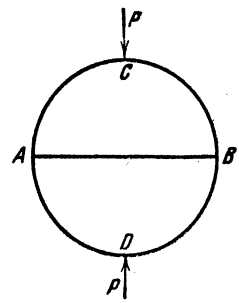
(E. Brauer, Festigkeitslehre.)

***549.** Ein dünner, elastischer Stab ACB, der aus zwei Halbkreisen geformt ist und dessen Enden vertikal eingespannt sind, wird in C mit P belastet. Man berechne die Senkung des Stabes in C.

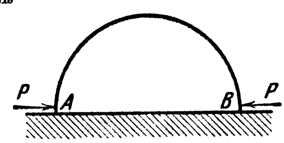


Aufg. 549.

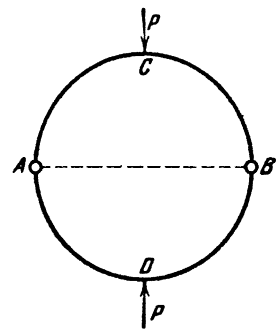
***550.** Ein dünner, elastischer Ring, der durch ein diametrales Zugband AB versteift ist, wird von zwei gleichen Kräften P gedrückt. Man berechne die Biegungsmomente in B und C, sowie die Spannung S im Zugband.



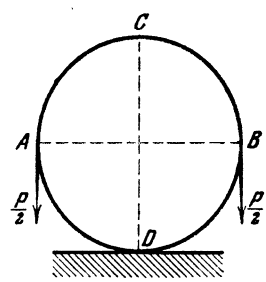
***551.** Ein schwerer, dünner Halbzylinder ruht auf einer horizontalen Ebene. An den Rändern sollen zwei gleich große, horizontale Kräfte P derart angebracht werden, daß sie die Vergrößerung des Durchmessers AB durch das Gewicht des Halbzylinders verhindern. Wie groß muß P gemacht werden?



***552.** Ein elastischer, dünner Ring ist an zwei diametral gelegenen Stellen A und B aufgeschnitten und mit Gelenken versehen. An den Enden des Durchmessers CD drücken zwei gleiche Kräfte P. Um wieviel verändern sich die Längen der Durchmesser AB und CD?

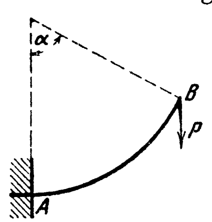


***553.** An den Enden A und B des Durchmessers eines elastischen, dünnen Ringes hängen zwei gleiche Lasten $\frac{P}{2}$. Der Ring ist in D unterstützt. Man suche die Verlängerung bezw. Verkürzung der Durchmesser AB und CD, sowie das größte Biegungsmoment im Ringe.



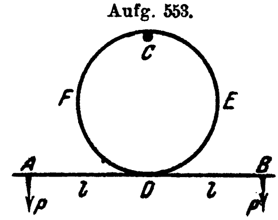
Aufg. 553.

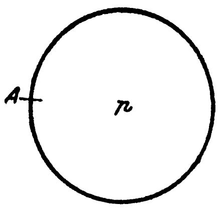
***554.** Ein dünner, elastischer Stab AB, der die Form eines Kreisbogens hat, wird in B mit P belastet. Man suche die Senkung von B und dessen seitliche Ausweichung zu berechnen.



Aufg. 554.

***555.** Ein dünner Draht ist in der Form ADECFDB gebogen; er wird in



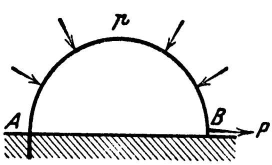


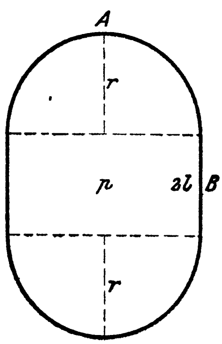
Aufg. 556.

C aufgehängt und an den Enden A und B mit P belastet. Um wieviel nähern sich die Enden, und um wieviel senken sie sich?

***556.** Ein zylindrisches Gefäß von der Länge l ist bei A aufgeschnitten. Um wieviel öffnet sich die Fuge bei A, wenn innen der Überdruck p (bezogen auf die Flächeneinheit) herrscht?

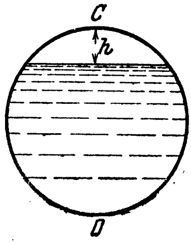
***557.** Eine halbkreisförmige dünne Feder ist in A fest eingespannt und wird in B von einer Kraft P beansprucht, die in den Durchmesser AB fällt. Außerdem wird die Feder von einer äußeren Pressung p (für die Längeneinheit) an die horizontale Fläche AB gedrückt. Wie groß muß diese Pressung sein, damit B in der Fläche AB bleibt? Um wieviel verschiebt sich B in dieser Fläche? Wie groß ist das größte Biegungsmoment der Feder, und wo ist dieses Null?





***558.** Ein dünnwandiges Gefäß hat nebenstehenden Querschnitt. Es ist einem inneren Druck p für die Längeneinheit des Umfanges ausgesetzt. Man berechne Ort und Größe des größten Biegungsmomentes der dünnen Wand, sowie die Verschiebungen der Punkte A und B. (M. Westphal, Zeitschr. Ver. Deutsch. Ing. 1909.)

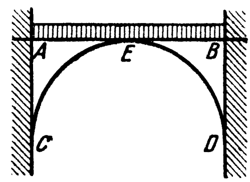
***559.** Ein horizontal liegender schwerer Hohlzylinder von geringer Wandstärke ist nur seinem Eigengewicht ausgesetzt. Man gebe den Verlauf der Biegungsmomente längs des Querschnittes an, insbesondere die Stellen, wo das Biegungsmoment Null wird und wo es größte Werte erreicht.



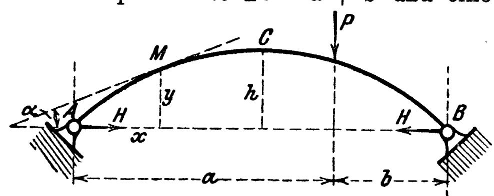
***560.** Ein zylindrisches Gefäß von der Länge l ist zum Teil mit schwerer Flüssigkeit gefüllt. Man berechne die Achsialkräfte und Biegungsmomente an den Stellen C und D unter Vernachlässigung des Einflusses, den die Abschlußböden des Gefäßes ausüben.

(E. Brauer, Festigkeitslehre.)

***561.** Ein beiderseitig eingespannter, gleichförmig belasteter Balken AB wird in der Mitte E durch einen halbkreisförmigen Bogen unterstützt, der in C und D festgeschraubt ist. Man berechne die Auflagerdrücke und die Einspannungsmomente in A, B, C, D.

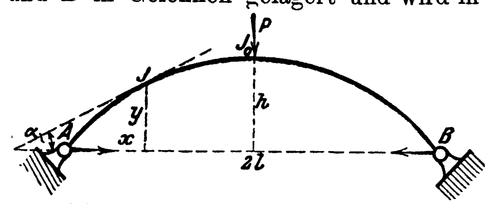


***562.** Es soll die Bestimmung des Horizontalschubes H eines parabolischen Bogens, der die Spannweite $2l = a + b$ und eine unsymmetrische Belastung P besitzt, vorgenommen werden, wenn angenommen wird, daß das Trägheitsmoment J an einer beliebigen Stelle M gleich $J_0 \sec \alpha$ ist, worin J_0 das Trägheitsmoment im Scheitel C und α die Neigung der Tangente in M bedeutet.

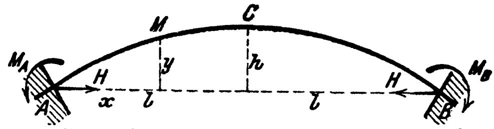


***563.** Dieselbe Aufgabe wie vorher, nur ist außer P eine symmetrisch gelegene gleiche Last P gegeben und sind die Gelenke A und B durch eine gerade Zugstange vom Querschnitt F miteinander verbunden.

***564.** Ein elastischer Parabelträger, dessen Höhe h und dessen Spannweite 2 l, ist in A und B in Gelenken gelagert und wird in der Mitte mit P belastet. Das Trägheitsmoment J an einer beliebigen Stelle des Bogens ist gleich $J_0 \sec \alpha$, wenn J_0 das Trägheitsmoment im Scheitel, α die Neigung der Parabeltangente bedeutet. Man berechne die Durchbiegung f unter der Last.



***565.** Ein elastischer Parabelträger, der an den Enden A und B eingespannt ist, wird derart belastet, daß auf jede Längeneinheit der Geraden AB die Belastung q entfällt. Der Querschnitt des Trägers ist unveränderlich. Man berechne die Auflagermomente M_1 und den Horizontalschub H.



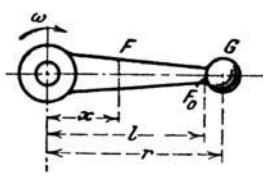
***566.** Wie ändert sich die Lösung der vorigen Aufgabe, wenn der Bogen keiner Parabel angehört, sondern in bezug auf das Koordinatenkreuz in C die allgemeine Gleichung besitzt: $F(\xi^2, \eta) = 0$?

X. Dynamische Festigkeit.

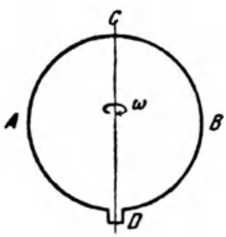
1. Spannungen in bewegten Körpern.

***567.** Ein prismatischer Stab von der Länge l und dem Einheitsgewicht γ dreht sich um sein Ende in horizontaler Ebene. Bei welcher Umdrehungszahl in der Minute wird die Spannung s im Stabe erreicht? Wie groß ist dann die Längenänderung des Stabes?

***568.** Ein Stab von nebenstehender Form, der an seinem Ende eine kleine Kugel vom Gewicht G trägt, dreht sich um das andere Ende mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine vertikale Achse. In welcher Beziehung müssen der Querschnitt F und sein Abstand x von der Drehungsachse stehen, wenn die Spannung in allen Punkten gleich s sein soll?

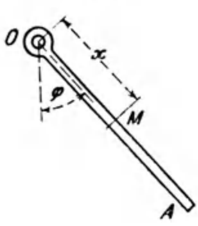


***569.** Ein dünner Ring vom Gewicht G dreht sich um seinen vertikalen Durchmesser CD mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Wie groß sind die in C, B und D entstehenden Biegungsmomente und Achsialkräfte, und wie verändern sich die Durchmesser AB und CD?



(567—569: E. Brauer, Festigkeitslehre.)

***570.** Ein Stab $OA = l$ vom Gewicht G, der in O drehbar aufgehängt ist, wird der Schwerkraft überlassen. Man berechne das Biegungsmoment an irgendeiner Stelle M in der Entfernung x von O und gebe die Lage des Bruchquerschnittes an.

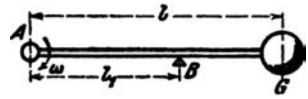


***571.** Wie groß ist in voriger Aufgabe die Querkraft an irgendeiner Stelle M, und an welcher Stelle ist sie am größten?

***572.** Wie groß ist in Aufgabe 570 die achsiale Zugkraft des Stabes an irgendeiner Stelle M, wenn der Stab seine Bewegung aus der Ruhelage $\varphi = \alpha$ beginnt?

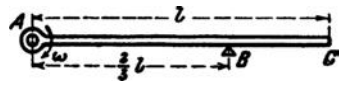
***573.** Ein halbkreisförmiger Draht dreht sich in glatter, horizontaler Ebene um sein Ende A mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω. An welcher Stelle des Drahtes ist das Biegungsmoment am größten? (570—573: Routh, Dynamik.)

574. Ein gewichtloser Stab, der an seinem Ende das Gewicht G trägt, dreht sich in horizontaler Ebene um sein anderes Ende A mit der Winkelgeschwindigkeit ω und wird plötzlich in B festgehalten. An welcher Stelle entsteht das größte Biegungsmoment im Stabe, und wie groß ist es?



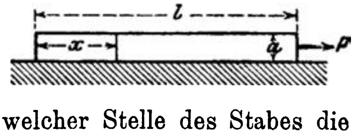
575. Ein Schwungrad, das n Umdrehungen in der Minute macht, wird in einem Punkte B eines seiner Arme plötzlich festgehalten. Wie groß ist das größte hierbei entstehende Biegungsmoment?

576. Ein prismatischer Stab $AC = l$ vom Gewicht G dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω in horizontaler Ebene um sein Ende A und wird in der Entfernung $AB = \frac{2}{3} l$ von A plötzlich festgehalten. Man suche die Stelle, an der das größte Biegungsmoment entsteht, und berechne dieses.

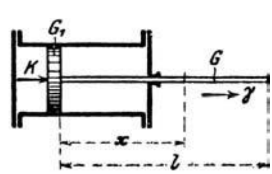


***577.** Ein frei herabhängendes Seil vom Einheitsgewicht γ macht Schwingungen in seiner Längsrichtung. Wenn in einem Augenblicke v die Geschwindigkeit des tiefsten Punktes ist, wie groß ist die Spannung des Seiles in der Entfernung x vom tiefsten Punkte, und wie groß ist die Spannung im höchsten Punkte?

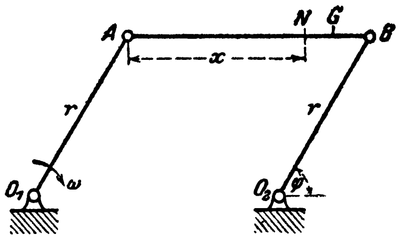
578. Ein Stab von quadratischem Querschnitt a^2 und dem Gewicht G wird von einer konstanten Kraft P über eine rauhe, horizontale Ebene gezogen. Man ermittle die Spannungsverhältnisse im Querschnitt x und gebe an, an welcher Stelle des Stabes die größte Spannung besteht. Wie groß ist diese?



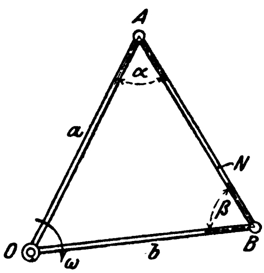
579. Ein Kolben vom Gewicht G_1 und eine Kolbenstange vom Gewicht G und der Länge l werden durch eine Kraft K vorwärts getrieben und erreichen eine Beschleunigung γ. Wie groß ist in diesem Augenblicke die achsiale Kraft N an irgendeiner Stelle x der Kolbenstange? Wo ist die Beanspruchung der Kolbenstange am größten?



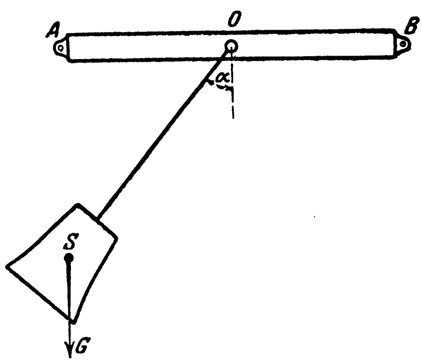
***580.** Eine Stange AB vom Gewicht G und der Länge l wird durch zwei gleiche Kurbeln r bewegt. Die Winkelgeschwindigkeit ω beider Kurbeln ist gleich, es ist $AB = O_1 O_2$. Man ermittle für irgendeine Stelle N der Stange in der Entfernung x von A das Biegungsmoment M, die achsiale Kraft N und die Querkraft Q, soweit sie von den Trägheitskräften herrühren. Wo sind diese drei Größen am größten und kleinsten?



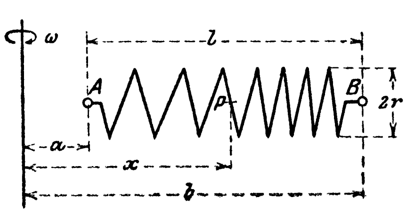
***581.** Ein Stab $AB = l$ vom Gewicht G ist durch zwei andere Stäbe a und b mit dem Gelenk O verbunden und dreht sich um diesen Punkt in glatter, horizontaler Ebene mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω. Man berechne das Biegungsmoment M an irgendeiner Stelle N des Stabes sowie die dort auftretende Achsialkraft N und Querkraft Q. An welcher Stelle wird M am größten, N und Q am kleinsten?



***582.** In der Mitte eines Trägers AB ist eine Glocke vom Gewicht G aufgehängt, die bei ihren Schwingungen um den Winkel α von der Vertikalen abweicht. Wie groß ist das Biegungsmoment und die Achsialkraft, welche die Glocke in O hervorruft, und bei welcher Stellung der Glocke wird die Spannung im Träger am größten? Von den entstehenden Querkräften im Träger soll abgesehen werden.



***583.** Eine zylindrische Schraubenfeder von kreisförmigem Querschnitt (Durchmesser d), die in A und B festgehalten ist und in



ruhendem Zustand in diesen Punkten den Druck P_0 ausübt, dreht sich um eine zu A B senkrechte Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Es soll die geänderte Druckkraft in P als Funktion von x dargestellt und die Drücke P_A und P_B in A und B berechnet werden.

(M. Tolle, Zeitschr. Ver. Deutsch. Ing. 1908.)

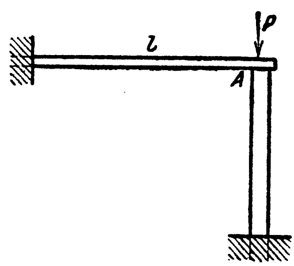
584. Wenn bei der Schraubenfeder der vorigen Aufgabe $P_0 = 0$ angenommen und das innere Ende A der Feder freigemacht wird, um wieviel rückt dieses Ende bei der Drehung um die Achse gegen den festen Endpunkt B, und wie groß wird der Federdruck in B?

2. Stoßfestigkeit und Schwingungen.

Erklärung: Ist Q die auf einen Träger stoßende Last, n Q jene ruhende Last, welche die gleiche Durchbiegung an derselben Stelle hervorrufen würde, so nennt man n den **dynamischen Faktor.** (Siehe Gleichungen 135 bis 140.)

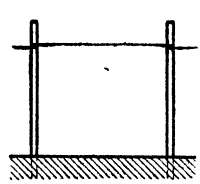
585. Wie groß ist der dynamische Faktor, wenn eine Last plötzlich in voller Größe auftritt, und zwar ohne Geschwindigkeit? (Poncelet.)

586. Man zeige, daß die plötzliche Umkehrung einer Last eine Durchbiegung hervorruft, die dreimal so groß ist wie jene bei ruhender Last.



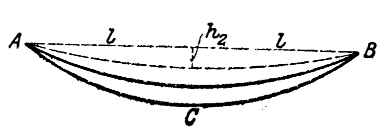
587. Das Ende eines einseitig eingespannten Trägers von der freien Länge l ist von einer Säule unterstützt und mit P belastet. Wie groß ist die Durchbiegung f des Trägers in A in dem Augenblicke, in welchem die Säule plötzlich weggeschlagen wird?

588. Die Spannung im Draht einer Telegraphenleitung sei S. Von welcher Kraft wird der Ständer zu biegen gesucht, wenn der Draht reißt?

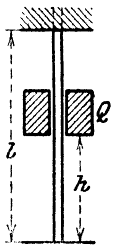


Aufg. 588.

589. Das Seil in Aufgabe 105 wird außer durch sein Eigengewicht auch noch durch aufliegenden Schnee mit q_1 für die Längeneinheit belastet. Wenn der Schnee plötzlich abfällt, schwingt das Seil zurück und erreicht für einen Augenblick den kleinsten Durchhang h_2. Wie groß ist dieser?



590. Wie groß dürfte in Aufgabe 469 die Belastung P des Kunstwinkels nur sein, damit bei einem Bruche der Zugstange AC auch der Bruch des gußeisernen Armes AB eintritt, für den die Breite $B = 4{,}6$ cm vorausgesetzt werden möge? (Biegungsfestigkeit $K_b = 2580$ at.)



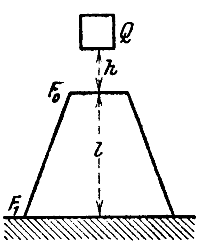
Aufg. 591.

***591.** Ein Gewicht Q fällt aus der Höhe h und stößt an das Ende einer prismatischen Stange vom Querschnitt F, der Länge l und dem Gewicht G. Man suche den dynamischen Faktor.

(Zschetsche, Zeitschr. Ver. Deutsch. Ing. 1894.)

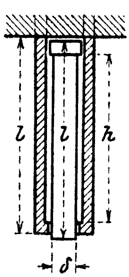
592. Ein Probestab, der einer ruhenden Belastung ausgesetzt wird, zerreißt nach 10 Minuten bei einer Dehnung von $\varepsilon = 0{,}25$. Derselbe Stab wird, einer dynamischen Belastung durch ein Fallwerk ausgesetzt, schon nach 0,0025 Sekunden zerreißen und hierbei die gleiche Dehnung aufweisen. Wie groß sind die Dehnungsgeschwindigkeiten der ruhenden und der dynamischen Belastung?

(R. Plank, Forschungsarbeiten Heft 133.)

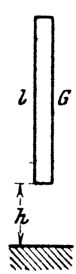


***593.** Auf eine abgestumpfte Pyramide von der Höhe l und den Endflächen F_0 und F_1 fällt aus der Höhe h eine Last Q. Man berechne den dynamischen Faktor.

594. Im Innern eines gußeisernen Hohlzylinders von $l = 4$ m Länge, $D = 12$ cm äußerem, $d = 8$ cm innerem Durchmesser befindet sich ein gußeiserner Zylinder von gleicher Länge mit dem Durchmesser $\delta = 5$ cm. Der Zylinder fällt durch $h = 3{,}8$ m herab und schlägt auf einen Vorsprung des Hohlzylinders. Welche größte Spannung wird durch diesen Schlag im Hohlzylinder hervorgerufen? (Elastizitätszahl $E = 10^6$ at, Einheitsgewicht des Gußeisens 7,5.)



Aufg. 594.

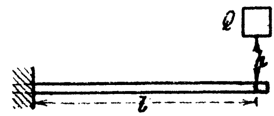


Aufg. 595.

595. Aus welcher Höhe h darf ein prismatischer Stab von der Länge l und vom Gewicht G herabfallen, wenn in seinem Material die Spannung k nicht überschritten werden soll? Der Boden ist unnachgiebig. (E. Brauer, Festigkeitslehre.)

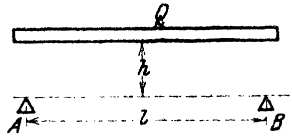
***596.** Auf das Ende eines einseitig eingespannten Trägers vom Gewicht G und von der Länge l fällt aus der Höhe h ein Gewicht Q. Man ermittle den dynamischen Faktor.

597. Ein hölzerner Balken von 15 cm Breite, 20 cm Höhe und $l = 2$ m freier Länge ist an dem einen Ende eingemauert. Über dem anderen Ende hängt ein Gewicht $Q = 100$ kg. Wie hoch darf dasselbe herabfallen, damit es im Balken keine höhere Spannung als 265 at hervorruft? (Elastizitätszahl $E = 120\,000$ at, Einheitsgewicht des Holzes 0,5.)



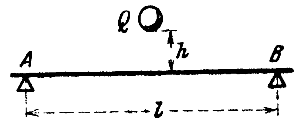
Aufg. 597.

598. Ein Balken vom Gewicht Q fällt aus der Höhe h auf zwei unnachgiebige Stützen A und B. Man ermittle den dynamischen Faktor.



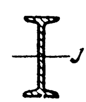
Aufg. 598.

***599.** Auf die Mitte eines frei aufliegenden Trägers vom Gewicht G und von der Länge l fällt aus der Höhe h ein Gewicht Q. Man berechne den dynamischen Faktor.



(598, 599: Zschetsche, Zeitschr. Ver. Deutsch. Ing. 1894.)

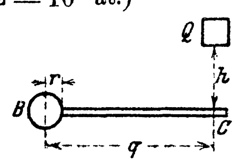
600. Ein schweißeiserner Träger (Höhe 24 cm, Querschnitt 46,4 cm², Trägheitsmoment $J = 4288$ cm⁴, Gewicht für den Meter 36,2 kg, Länge $l = 6$ m) liegt frei auf. Über der Mitte desselben hängt ein Gewicht $Q = 1000$ kg. Aus welcher Höhe muß dasselbe fallen, damit der Träger zerbricht? (Biegungsfestigkeit $K_b = 5000$ at, Elastizitätszahl $E = 2 \cdot 10^6$ at.)



***601.** Ein beiderseitig eingespannter Träger vom Gewicht G wird in der Entfernung a vom Auflager von einer durch die Höhe h fallenden Last Q gestoßen. Wie findet man für diesen Fall den dynamischen Faktor?

602. Ein gußeisernes Rohr von 5 m freier Länge, 30 cm äußerem und 24 cm innerem Durchmesser ist an beiden Enden eingemauert. In der Entfernung $a = 1$ m vom Auflager wird eine Last $Q = 400$ kg auf das Rohr fallen gelassen. Wie groß darf die Fallhöhe höchstens sein, wenn die Spannung von 700 at nicht überschritten werden soll? (Einheitsgewicht = 7,5, Elastizitätszahl $E = 10^6$ at.)

***603.** Eine Kreiswelle vom Gewicht P und dem Halbmesser r trägt einen Arm q, an dessen Ende ein Gewicht Q durch die Höhe h herabfällt. Man suche die größte in der Welle auftretende Spannung.



***604.** Ein frei aufliegender Balken vom Gewicht G wird in seiner Mitte durch eine herabfallende Last Q gestoßen. Man untersuche die Bewegung der Mitte des Balkens und stelle ihre Durchbiegung y als Funktion der Zeit dar. Wie groß ist die größte Durchbiegung? (A. Geßner, Zeitschr. d. österreich. Ing. u. Archit. Vereins 1906.)

605. Wieviel Schwingungen in der Sekunde macht ein frei aufliegender Träger vom Gewicht G, der in seiner Mitte die Last Q trägt?

606. Wieviel Schwingungen in der Sekunde macht ein einseitig eingespannter Träger vom Gewicht G, der an seinem Ende die Last Q trägt?

607. Ein frei aufliegender Träger vom Gewicht G hat in der Mitte eine Dampfmaschine vom Gewicht Q zu tragen. Wie groß muß man das Trägheitsmoment des Querschnittes wählen, wenn die Umdrehungszahl x der Maschine nur $\frac{1}{m}$ der Zahl der Eigenschwingungen des Trägers sein soll?

***608.** Ein Träger vom Gewicht G ruht auf einer horizontalen Ebene. Nachdem die Enden fest gelagert wurden, wird die Ebene plötzlich entfernt. Welche größte Durchbiegung und welche Schwingungsdauer nimmt der Träger an?

***609.** Ein frei herabhängender prismatischer Stab vom Gewicht G wird durch ein aus der Höhe h fallendes Gewicht Q an seinem unteren Ende gestoßen (Abbildung siehe Aufgabe 591). Wie groß ist die größte Verlängerung des Stabes, und wann besitzt seine Schwingung die größte Geschwindigkeit?

***610.** Ein frei herabhängender prismatischer Stab vom Gewicht G wird derart unterstützt, daß er durch sein Eigengewicht keine Längenänderung erfährt. Wenn die Unterstützung plötzlich entfernt wird, um wieviel ändert sich die Länge des Stabes, wie groß ist die Schwingungsdauer und die größte Geschwindigkeit am Ende des Stabes?

***611.** Ein gerader Stab, dessen eines Ende eingespannt ist, wird in Schwingungen versetzt. Man stelle die Differentialgleichung der schwingenden Bewegung auf und ermittle die Anzahl der Schwingungen in einer Sekunde.

(A. Sommerfeld, Zeitschr. Ver. Deutsch. Ing. 1905.)

Lösungen.

1. Da nach einem Grundsatz der Elastizitätstheorie zwei senkrechte Ebenen senkrecht zu ihrer Schnittlinie gleiche Schubspannungen erleiden, muß

$$\tau \cdot \sin \alpha = \tau_1 \cdot \sin \alpha_1$$

sein.

2. Nennt man F, F_1, F_2 die drei kleinen Flächen AB, AC BC, so wäre die Schubspannung der ersteren

$$\frac{1}{F}(\tau F_1 \cos \alpha - \tau F_2 \sin \alpha) = 0,$$

woraus $\alpha = 45^0$. Die Normalspannung der Fläche AB ist dann

$$\frac{1}{F}(\tau F_1 \sin \alpha + \tau F_2 \cos \alpha) = \tau.$$

3. Die Schubspannung τ wirkt auf die Fläche $c\sqrt{a^2 + b^2}$. Zerschneidet man das Prisma nach der Diagonalebene und stellt für den unteren Teil die Gleichgewichtsbedingung auf, so ist

$$P \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \tau \cdot c\sqrt{a^2 + b^2} = 0,$$

woraus

$$\tau = \frac{P b}{c(a^2 + b^2)}.$$

4. In der oberen Fläche a^2 wirkt die Schubspannung $\tau_1 = \frac{Q}{a^2}$ nach rechts, also in der linken Fläche ab die gleiche Spannung nach abwärts. Nennt man σ die Normalspannung der Fläche $AB = as$ und bringt die Kräfte des kleinen dreieckigen Prismas ins Gleichgewicht, so ist:

$$\sigma \cdot as + \tau_1 \cdot a^2 \cdot \frac{b}{s} + \tau_1 \cdot ab \cdot \frac{a}{s} = 0,$$

woraus

$$\sigma = -Q \cdot \frac{2b}{a(a^2 + b^2)}.$$

5. Auf jede Seitenwand wirkt eine Kraft $P_1 = \frac{P}{\sqrt{2}}$. Das kleine Prisma mit dem Winkel φ erleidet an seiner unteren Fläche die

Kraft P_1, an seiner Seitenfläche mit Rücksicht auf die gleichförmige Verteilung der Kraft $P_1 \operatorname{tg} \varphi$; die Gleichgewichtsbedingungen liefern die Gleichungen

$$F\sigma - P_1 \cos\varphi - P_1 \operatorname{tg}\varphi \sin\varphi = 0$$
$$F\tau - P_1 \sin\varphi + P_1 \operatorname{tg}\varphi \cos\varphi = 0,$$

worin F die Schnittfläche $\frac{ab}{\cos\varphi}$ ist. Es wird:

$$\sigma = \frac{P}{ab\sqrt{2}} \text{ und } \tau = 0 \text{ für alle Schnittflächen.}$$

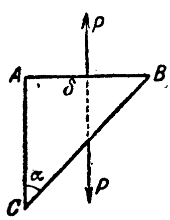
6. Man untersuche das Gleichgewicht des kleinen Prismas ABC. Nennt man σ und τ die Spannungen in AB und beachtet, daß τ_1 auch in der Fläche AC auftreten muß, so ist

$$\sigma = \tau_1 \sin 2\alpha, \quad \tau = \tau_1 \cos 2\alpha,$$

woraus

$$p = \tau_1 \quad \text{und} \quad \varphi = 2\alpha.$$

7. Der Splitter ABC erleidet linearen Spannungszustand (vergl. Gleichungen 1). Die beanspruchende Kraft für die Längeneinheit der Granate ist $P = pr$, die Schubkraft in der Fläche BC ist $P\cos\alpha$, die Fläche selbst $\frac{\delta}{\sin\alpha}$, also die Schubspannung in BC: $\frac{pr}{\delta}\sin\alpha\cos\alpha$. Die Splitterung wird sich unter jenem Winkel ausbilden, für den die Schubspannung am größten wird, also unter $\alpha = 45^0$. Dies hat Gümbel im Felde an zahlreichen Splittern konstatieren können.



8. Aus dem Gleichgewicht des Prismas ABC erhält man

$$\sigma = \frac{P\cos\alpha + Q}{ab\sin\alpha}, \qquad \tau = \frac{P}{ab}.$$

9. Wenn τ_1 in BA wirkt, so wirkt es nach einem Grundgesetze der Elastizitätstheorie auch in BC. Stellt man die Gleichgewichtsbedingungen für die Normale von AC und für die Richtung AC selbst auf, so erhält man für die Normalspannung σ und die Schubspannung τ dieser Fläche:

$$\sigma = \sigma_1 \sin^2\alpha - \tau_1 \sin 2\alpha = -31{,}96 \text{ at}$$
$$\tau = \sigma_1 \sin\alpha\cos\alpha - \tau_1 \cos 2\alpha = 4{,}64 \text{ at},$$

woraus die Gesamtspannung

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} = 32{,}3 \text{ at}$$

und ihre Neigung: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sigma}{\tau}$, $\varphi = -81^0\, 44'\, 12''$.

10. Anwendung der Gleichung 2. Es ist hier:

$$\sigma_x = 0,\ \sigma_y = -\frac{P_1}{F},\ \tau_z = \frac{P_2}{F},$$

woraus

$$\sigma = \frac{P_2}{F} \sin 2\alpha - \frac{P_1}{F} \cos^2 \alpha$$

$$\tau = \frac{P_2}{F} \cos 2\alpha + \frac{P_1}{F} \sin \alpha \cos \alpha.$$

Für die Hauptspannungen ist $\tau = 0$, woraus

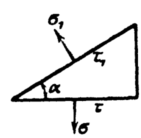
$$\operatorname{tg} 2\alpha = -2 \text{ und } \alpha_1 = 58^0\, 16'\, 50'',$$
$$\alpha_2 = -31^0\, 43'\, 10'';$$

die Hauptspannungen werden:

$\sigma_1 = +61{,}8$ at entsprechend der Ebene α_1

und $\sigma_2 = -161{,}8$ at entsprechend der Ebene α_2.

11. Man lege zwischen die beiden Ebenen ein kleines rechtwinkliges Prisma und stelle dessen Gleichgewichtsbedingung auf. In der rechten Seitenfläche des Prismas muß ebenfalls die Schubspannung τ auftreten, während deren Normalspannung nicht bekannt ist. Bildet man daher die Projektionen aller Kräfte auf die rechte Seitenfläche und setzt ihre Summe gleich Null, so erhält man (je nach der angenommenen Richtung von τ und τ_1)



$$\frac{\sigma_1}{\sigma} = 1 \pm {}^2/_3 \operatorname{tg} \alpha \text{ und } \frac{\sigma_1}{\sigma} = 1 \pm {}^4/_3 \operatorname{tg} \alpha.$$

12. Die Projektionen von p auf die beiden Hauptspannungsrichtungen sind

$$p \cos(\delta - \alpha) = \sigma_1 \sin \alpha$$
$$p \sin(\delta - \alpha) = \sigma_2 \cos \alpha,$$

woraus

$$\operatorname{tg}(\delta - \alpha) = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \cdot \operatorname{cotg} \alpha$$

und

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\sigma_1 \operatorname{tg} \alpha + \sigma_2 \operatorname{cotg} \alpha}{\sigma_1 - \sigma_2}.$$

Setzt man $\frac{d}{d\alpha}(\operatorname{tg}\delta) = 0$, so wird für den gesuchten Wert von α:

$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}},$$

ferner der zugehörige Wert der Spannung

$$p = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}$$

und ihre kleinste Neigung

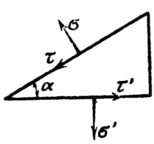
$$\operatorname{tg}\delta = \frac{2\sqrt{\sigma_1 \sigma_2}}{\sigma_1 - \sigma_2}$$

13. Aus Gleichung 3 folgt die Gleichung des Ortes von N

$$\sigma = \sigma_1 \cos^2 \varphi + \sigma_2 \sin^2 \varphi$$

mit σ und φ als Polarkoordinaten. $\left(\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha.\right)$

14. Legt man ein kleines rechtwinkliges Prisma zwischen die beiden Ebenen, so erleidet dessen rechte Seitenfläche die nach abwärts gerichtete Schubspannung τ' und eine unbekannte Normalspannung. Projiziert man alle Kräfte des Prismas auf die Vertikale, so ist für Gleichgewicht



$$\sigma \cos\alpha - \tau \sin\alpha - \sigma' \cos\alpha - \tau' \sin\alpha = 0,$$

woraus $$\sigma - \sigma' = (\tau + \tau') \operatorname{tg}\alpha.$$

(Zu beachten, daß die Kraft gleich der Spannung mal der gespannten Fläche ist.)

15. Teile das Prisma in zwei gleiche rechtwinklige Prismen durch eine Ebene, die z. B. auf τ_2 senkrecht steht. Dann wirkt in dieser Schnittebene die Schubspannung τ_2 und die unbekannte Normalspannung σ. Die Gleichgewichtsbedingung eines der beiden Prismen (Projektion der Kräfte auf τ_1) lautet dann:

$$-\tau_1 + \sigma \sin\alpha \cos\alpha + \tau_2 \cos^2\alpha - \tau_2 \sin^2\alpha = 0$$

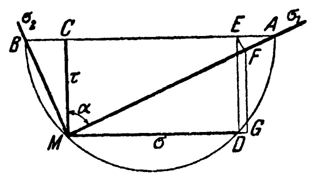
und ebenso für das andere Prisma:

$$\tau_3 + \sigma \sin\alpha \cos\alpha + \tau_2 \sin^2\alpha - \tau_2 \cos^2\alpha = 0.$$

Hierin ist $\alpha = 60^0$. Durch Entfernen von σ erhält man

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0.$$

16. Es ist $\sigma_1 = CA = BE$, $-\sigma_2 = BC = EA$. Macht man $EF \parallel BM$ und $FG \parallel CM$, so ist $\sigma = MD = MG - DG = MF \cdot \sin\alpha - EF \cdot \cos\alpha = BE \cdot \sin^2\alpha - EA \cdot \cos^2\alpha$ also $\sigma = \sigma_1 \sin^2\alpha + \sigma_2 \cos^2\alpha$ (vergl. Gleichung 3), ferner ist



$\tau = MC = MA \cdot \cos\alpha = BA \cdot \sin\alpha\cos\alpha$
und wegen $BA = BC + CA = \sigma_1 - \sigma_2$:

$$\tau = (\sigma_1 - \sigma_2) \sin\alpha \cos\alpha \text{ (vergl. Gleichung 3).}$$

17. Nennt man α den Winkel der zu MR senkrechten Ebene mit σ_1, so liefert eine einfache Betrachtung $\sigma = \sigma_1 \sin^2\alpha + \sigma_2 \cos^2\alpha$ und $\tau = (\sigma_1 - \sigma_2) \sin\alpha \cos\alpha$, übereinstimmend mit der Gleichung 3.

18. Sind σ_1, σ_2, σ_3 die drei Hauptspannungen des Punktes M, a_1, b_1, c_1 die Richtungskonstanten der Normale n_1; a_2, b_2, c_2 jene von n_2, so hat die Spannung p_1 bezogen auf das Achsenkreuz der Hauptspannungen die Teile

$$p_{1x} = a_1\sigma_1 \qquad p_{1y} = b_1\sigma_2 \qquad p_{1z} = c_1\sigma_3 \text{ (Gleichung 4)}$$

und die Projektion von p_1 auf n_2 ist

$$p_{1x} \cdot a_2 + p_{1y} \cdot b_2 + p_{1z} \cdot c_2 = a_1 a_2 \sigma_1 + b_1 b_2 \sigma_2 + c_1 c_2 \sigma_3.$$

Denselben Ausdruck erhält man aber, wenn man die Spannung p_2 auf n_1 projiziert; die beiden Projektionen sind also gleich groß.

19. Nennt man σ_1, σ_2, σ_3 die Hauptspannungen des Punktes, a_1, b_1, c_1 die Richtungskonstanten der Normale der zu p_1 gehörenden Spannungsebene, so gilt nach Gleichung 4:

$$p_1^2 = a_1^2\sigma_1^2 + b_1^2\sigma_2^2 + c_1^2\sigma_3^2$$

und analog

$$p_2^2 = a_2^2\sigma_1^2 + b_2^2\sigma_2^2 + c_2^2\sigma_3^2$$

$$p_3^2 = a_3^2\sigma_1^2 + b_3^2\sigma_2^2 + c_3^2\sigma_3^2.$$

Da die drei gegebenen Ebenen senkrecht aufeinander sind, ist

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1,$$

also

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2,$$

welche Gleichung sich nicht ändert, wenn man drei andere senkrechte Ebenen wählt.

20. Mit denselben Bezeichnungen wie in voriger Aufgabe ist nach Gleichung 5:

$$\sigma_x = a_1^2\sigma_1 + b_1^2\sigma_2 + c_1^2\sigma_3$$

$$\sigma_y = a_2^2\sigma_1 + b_2^2\sigma_2 + c_2^2\sigma_3$$

$$\sigma_z = a_3^2\sigma_1 + b_3^2\sigma_2 + c_3^2\sigma_3,$$

woraus aus gleichen Gründen wie in voriger Aufgabe

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3,$$

also für denselben Punkt unveränderlich ist.

21. Nach Gleichung 4 und 5 ist die Gesamtspannung der Ebene ABCD:

$$p^2 = a^2 \sigma_1^2 + b^2 \sigma_2^2 + c^2 \sigma_3^2$$

und ihre Normalspannung

$$\sigma = a^2 \sigma_1 + b^2 \sigma_2 + c^2 \sigma_3.$$

Dabei ist: $a^2 = \frac{n^2}{l^2 + n^2}$, $b^2 = 0$, $c^2 = \frac{l^2}{l^2 + n^2}$.

Es wird also: $\sigma = \frac{n^2 \sigma_1 + l^2 \sigma_3}{l^2 + n^2}$

und nach Gleichung 6: $\tau^2 = p^2 - \sigma^2$ die Schubspannung der Ebene ABCD:

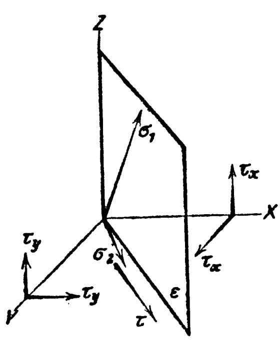
$$\tau = \frac{ln(\sigma_1 - \sigma_3)}{l^2 + n^2}.$$

22. Wenn τ_x in der Ebene ZX auftritt, muß es nach dem Grundgesetze der Elastizität auch in der Ebene XY vorhanden sein; das gleiche gilt von τ_y. Die Ebene XY erleidet also eine Schubspannung

$$\tau = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2} = 170 \text{ at.}$$

Ihr Winkel mit X ist aus

$$\operatorname{tg}(\tau, X) = \frac{\tau_x}{\tau_y} = \frac{8}{15} \text{ gleich: } 28^\circ\, 4'\, 21''.$$



Nennt man σ die Hauptspannung, a, b, c ihre Richtungskonstanten, so gelten allgemein die Gleichungen 7:

$$a(\sigma_x - \sigma) + b\,\tau_z + c\,\tau_y = 0,$$
$$b(\sigma_y - \sigma) + c\,\tau_x + a\,\tau_z = 0,$$
$$c(\sigma_z - \sigma) + a\,\tau_y + b\,\tau_x = 0.$$

Setzt man hier:

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_z = 0,$$

so bleibt

$$a\sigma = c\,\tau_y, \quad b\sigma = c\,\tau_z, \quad c(\sigma_z - \sigma) + a\,\tau_y + b\,\tau_x = 0,$$

woraus

$$\sigma^2 - \sigma\,\sigma_z = \tau^2$$

und die drei Hauptspannungen:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_z}{2} + \sqrt{\frac{\sigma_z^2}{4} + \tau^2} = 297{,}23 \text{ at},$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_z}{2} - \sqrt{\frac{\sigma_z^2}{4} + \tau^2} = -97{,}23 \text{ at}, \quad \sigma_3 = 0;$$

ferner
$$c = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma\,\sigma_z + 2\tau^2}} = \cos(\sigma, Z),$$

woraus
$$\sphericalangle(\sigma_1, Z) = 29^0\, 46',$$
$$\sphericalangle(\sigma_2, Z) = 29^0\, 46' + 90^0.$$

Die Spannungsfläche artet in eine Ellipse mit den Halbachsen σ_1 und σ_2 in der Ebene ε aus.

23. Aus der Gleichung 5:

$$\sigma = a^2\sigma_1 + b^2\sigma_2 + c^2\sigma_3$$

folgt mit $\xi = a \cdot \overline{MN}$, $\eta = b \cdot \overline{MN}$, $\zeta = c \cdot \overline{MN}$
die Gleichung des Ortes

$$\xi^2\sigma_1 + \eta^2\sigma_2 + \zeta^2\sigma_3 = \pm 1.$$

Es ist eine Fläche zweiter Ordnung mit einem Mittelpunkt.

24. Nennt man α, β, γ die Winkel von n gegen die drei Hauptspannungen, so hat p die drei Projektionen auf diese (vergl. Gleichung 4)

$$p_x = \sigma_1 \cos\alpha, \quad p_y = \sigma_2 \cos\beta, \quad p_z = \sigma_3 \cos\gamma.$$

Somit hat der Punkt P die Koordinaten:

$\xi = MN \cdot \cos\alpha - p_x$, $\eta = MN \cdot \cos\beta - p_y$, $\zeta = MN \cdot \cos\gamma - p_z$,
also $\xi = (\sigma_3 - \sigma_1)\cos\alpha$, $\eta = (\sigma_3 - \sigma_2)\cos\beta$, $\zeta = 0$.

Der Ort der Punkte P ist also die Ellipse

$$\left(\frac{\xi}{\sigma_3 - \sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{\sigma_3 - \sigma_2}\right)^2 = \sin^2\gamma,$$

deren Achsen die Richtungen der Hauptspannungen σ_1 und σ_2 haben.

25. Es ist $CA = \sigma_1 - \sigma_3$, $EA = CA \cdot \sin\alpha$,

$$DA = OA - OD = \sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3),$$

$$r^2 = \overline{DR}^2 = \overline{DE}^2 = \overline{EA}^2 + \overline{DA}^2 - 2\overline{EA} \cdot \overline{DA} \cdot \sin\alpha,$$

woraus $r^2 = \frac{1}{4}(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + a^2(\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_1 - \sigma_2)$ mit $a = \cos\alpha$.

In gleicher Weise erhält man, wenn $D_1 R = D_1 F = r_1$ bezeichnet wird:

$$r_1^2 = \frac{1}{4}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + c^2(\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3) \text{ mit } c = \cos\gamma.$$

Nennt man

$$\sphericalangle RDD_1 = \psi,\quad DD_1 = m = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2},\quad OD = n = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2},$$

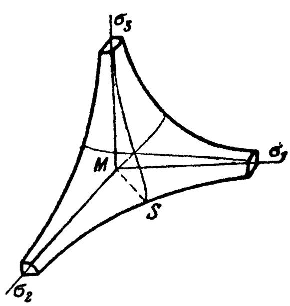
so ist
$$r_1^2 = r^2 + m^2 - 2rm\cos\psi,$$
$$\overline{OR}^2 = p^2 = r^2 + n^2 + 2rn\cos\psi,$$
woraus
$$mp^2 = (r^2 + mn)(m + n) - nr_1^2$$
und nach Einsetzen der Ausdrücke für m, n, r, r_1:
$$p^2 = a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2 + c^2\sigma_3^2 \text{ mit } b^2 = 1 - a^2 - c^2 = \cos^2\beta.$$
(Vergl. Gleichung 4.)

Ferner ist
$$\sigma = n + r\cos\psi = n + \frac{r^2 + m^2 - r_1^2}{2m}$$
und nach Einsetzen der Ausdrücke für m, n, r, r_1:
$$\sigma = a^2\sigma_1 + b^2\sigma_2 + c^2\sigma_3 \text{ mit } b^2 = 1 - a^2 - c^2 = \cos^2\beta.$$
(Vergl. Gleichung 5.)

Endlich ist $\tau = \sqrt{p^2 - \sigma^2}$. (Gleichung 6.)

26. Die Spannungsfläche ist eine Kugel vom Halbmesser k. Die Ebenen, welche nur Schubspannungen erleiden, umhüllen einen Kegel, dessen Achse die Richtung von σ_3 ist; seine Öffnung bebeträgt 90°. Die Schubspannungen in diesen Ebenen haben die Größe k.

27. Ist p die Gesamtspannung einer Ebene, σ ihre Normalspannung, so ist die Schubspannung



$$\tau^2 = p^2 - \sigma^2$$
und somit nach den Gleichungen 4 und 5:
$$\tau^2 = a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2 + c^2\sigma_3^2 - (a^2\sigma_1 + b^2\sigma_2 + c^2\sigma_3)^2$$
oder mit Benützung von
$$a^2 + b^2 + c^2 = 1:$$
$$\tau^2 = b^2c^2(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + c^2a^2(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + a^2b^2(\sigma_1 - \sigma_2)^2.$$
Für die Koordinaten des Punktes N gilt:
$$x^2 = a^2\varrho^2 = \frac{a^2}{\tau},\quad y^2 = \frac{b^2}{\tau},\quad z^2 = \frac{c^2}{\tau},$$

also wird $$k_1^2 y^2 z^2 + k_2^2 z^2 x^2 + k_3^2 x^2 y^2 = 1$$
die Gleichung der Fläche N, wenn
$$k_1 = \sigma_2 - \sigma_3, \quad k_2 = \sigma_3 - \sigma_1, \quad k_3 = \sigma_1 - \sigma_2$$
bezeichnet. Die Schnitte der Fläche mit den Hauptspannungsebenen sind gleichseitige Hyperbeln.

28. Wird $\sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2$ vorausgesetzt, so ist der Scheitel S der Schnitthyperbel mit $\sigma_1\,\sigma_2$ jener Punkt der Fläche, der den kleinsten Abstand von M hat. Dann ist $_{\max}\tau = \frac{1}{\overline{MS}^2}$ die größte Schubspannung in M, nämlich $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$; ihre Ebene ist zu MS normal.

29. Da die Gesamtspannung p der Ebene aus der Normalspannung σ und der Schubspannung τ besteht, so ist
$$\tau_x = p_x - \sigma_x$$
oder mit Benützung der Gleichungen 4 und 5:
$$\tau_x = a(\sigma_1 - \sigma) = a[\sigma_1(a^2 + b^2 + c^2) - (a^2\sigma_1 + b^2\sigma_2 + c^2\sigma_3)]$$
$$= a[b^2(\sigma_1 - \sigma_2) + c^2(\sigma_1 - \sigma_3)]$$
und analog:
$$\tau_y = b[c^2(\sigma_2 - \sigma_3) + a^2(\sigma_2 - \sigma_1)], \quad \tau_z = c[a^2(\sigma_3 - \sigma_1) + b^2(\sigma_3 - \sigma_2)];$$
dann wird:
$$\tau^2 = \tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2 = b^2c^2(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + c^2a^2(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + a^2b^2(\sigma_1 - \sigma_2)^2.$$

30. Bezeichnen l, m, n die bekannten Richtungskonstanten der gegebenen Geraden, ξ, η, ζ die unbekannten Richtungskonstanten der gesuchten Ebene, so bestehen die Beziehungen
$$l^2 + m^2 + n^2 = 1, \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$
ferner $$l : m : n = \tau_x : \tau_y : \tau_z$$
oder wenn man die Resultate der vorigen Aufgabe zu Hilfe nimmt:
$$l : m : n = \xi[\eta^2 k_3 - \zeta^2 k_2] : \eta[\zeta^2 k_1 - \xi^2 k_3] : \zeta[\xi^2 k_2 - \eta^2 k_1],$$
worin $$k_1 = \sigma_2 - \sigma_3, \quad k_2 = \sigma_3 - \sigma_1, \quad k_3 = \sigma_1 - \sigma_2;$$
diese Proportion kann auch so angeschrieben werden:
$$\frac{l k_1}{\xi} + \frac{m k_2}{\eta} + \frac{n k_3}{\zeta} = 0.$$
Hierzu kommt die Gleichung:
$$l\xi + m\eta + n\zeta = 0,$$

welche aussagt, daß die gegebene Gerade in der gesuchten Ebene liegt. Man erhält die Beziehung:

$$\xi : \eta : \zeta = \frac{l}{(k_3 - k_2) l^2 - k_2 m^2 + k_3 n^2 \pm \delta}$$

$$: \frac{m}{(k_1 - k_3) m^2 - k_3 n^2 + k_1 l^2 \pm \delta} : \frac{n}{(k_2 - k_1) n^2 - k_1 l^2 + k_2 m^2 \pm \delta},$$

worin
$$\delta^2 = k_1^2 l^4 + k_2^2 m^4 + k_3^2 n^4 - 2 k_2 k_3 m^2 n^2 - 2 k_3 k_1 n^2 l^2 - 2 k_1 k_2 l^2 m^2$$

ist. Wegen dem Doppelzeichen von δ erhält man zweierlei Werte des Verhältnisses $\xi : \eta : \zeta$; es gehören also zu jeder Geraden als Schubspannungsrichtung zwei durch sie hindurchgehende Ebenen. Nennt man $\xi_1 \eta_1 \zeta_1$, $\xi_2 \eta_2 \zeta_2$ deren Richtungskonstanten, so folgt aus obigen Gleichungen

$$\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 + \zeta_1 \zeta_2 = 0,$$

d. h. die beiden Ebenen, welche die gleiche Schubspannungsrichtung besitzen, stehen aufeinander senkrecht.

31. Die Gerade g liegt in der Hauptspannungsebene $\sigma_1 \sigma_2$. Legt man durch sie eine beliebige Ebene ε, deren Normale die Richtungskonstanten a, b, c haben möge, so ist die Normale senkrecht zu g, daher

$$a \sqrt{\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_2}} + b \sqrt{\frac{\sigma_3 - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}} = 0.$$

Nun hat die Ebene ε eine Schubspannung τ zu erleiden, deren Komponente in Richtung von σ_3 nach Aufgabe 29 folgenden Wert hat:

$$\tau_z = c\,[a^2 (\sigma_3 - \sigma_1) + b^2 (\sigma_3 - \sigma_2)].$$

Mit Benützung obiger Gleichung zwischen a und b wird $\tau_z = 0$, d. h. die Schubspannung der Ebene ε liegt in der Ebene $\sigma_1 \sigma_2$, muß demnach ganz in die Gerade g fallen.

32. Man nehme einen beliebigen Punkt x, y, z der Kegelfläche an und führe in ihm die Berührungsebene, deren Normale die Richtungskonstanten a, b, c haben möge; es ist dann zunächst

$$a x + b y + c z = 0,$$

ferner
$$a : b : c = \frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z}$$

$$= \frac{x}{k + \sigma_2 + \sigma_3 - 2\sigma_1} : \frac{y}{k + \sigma_3 + \sigma_1 - 2\sigma_2} : \frac{z}{k + \sigma_1 + \sigma_2 - 2\sigma_3}.$$

woraus in Verbindung mit $F = 0$:

$$a^2(k + \sigma_2 + \sigma_3 - 2\sigma_1) + b^2(k + \sigma_3 + \sigma_1 - 2\sigma_2) + c^2(k + \sigma_1 + \sigma_2 - 2\sigma_3) = 0$$

und wegen $a^2 + b^2 + c^2 = 1$:

$$k = (2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)a^2 + (2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1)b^2 + (2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2)c^2$$

endlich

$$x : y : z = a(k + \sigma_2 + \sigma_3 - 2\sigma_1) : b(k + \sigma_3 + \sigma_1 - 2\sigma_2) : c(k + \sigma_1 + \sigma_2 - 2\sigma_3)$$

und wenn für k der soeben gegebene Ausdruck eingesetzt wird:

$$x : y : z = a[b^2(\sigma_1 - \sigma_2) + c^2(\sigma_1 - \sigma_3)] : b[c^2(\sigma_2 - \sigma_3) + a^2(\sigma_2 - \sigma_1)] : c[a^2(\sigma_3 - \sigma_1) + b^2(\sigma_3 - \sigma_2)].$$

Dann ist nach Aufgabe 29

$$x : y : z = \tau_x : \tau_y : \tau_z,$$

d. h. die Mantellinie der Kegelfläche hat die Richtung von τ.

33. $l(1 + \varepsilon) = 4{,}004$ m.

34. $\varepsilon = \frac{l_1 - l}{l} = 0{,}00213.$

35. $\frac{0{,}535 \text{ m} - 0{,}536 \text{ m}}{0{,}536 \text{ m}} = -0{,}001\,87.$

36. $\gamma = \frac{0{,}01 \text{ cm}}{20 \text{ cm}} = 0{,}0005.$

37. Die Dehnungen in Richtung der drei Kanten sind

$$\varepsilon_1 = 0{,}001, \quad \varepsilon_2 = 0{,}0003, \quad \varepsilon_3 = -0{,}0005;$$

somit die Raumdehnung

$$e = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0{,}0008 \text{ (vergl. Gleichung 12).}$$

38. Nennt man ε_1, ε_2, ε_3 die Dehnungen der drei Kanten, d die Diagonale vor der Formänderung, d_1 nach derselben, so ist

$$d^2 = l^2 + m^2 + n^2,$$

$$d_1{}^2 = l^2(1 + \varepsilon_1)^2 + m^2(1 + \varepsilon_2)^2 + n^2(1 + \varepsilon_3)^2$$

und mit Vernachlässigung der zweiten Potenzen der kleinen Dehnungen

$$d_1{}^2 = l^2 + m^2 + n^2 + 2(l^2\varepsilon_1 + m^2\varepsilon_2 + n^2\varepsilon_3).$$

Die Dehnung der Diagonale ist dann

$$\varepsilon = \frac{d_1 - d}{d} = \sqrt{1 + 2\frac{l^2\varepsilon_1 + m^2\varepsilon_2 + n^2\varepsilon_3}{l^2 + m^2 + n^2}} - 1$$

und da das zweite Glied unter der Wurzel klein ist, genau genug

$$\varepsilon = \frac{l^2 \varepsilon_1 + m^2 \varepsilon_2 + n^2 \varepsilon_3}{l^2 + m^2 + n^2} = 0{,}012.$$

39. Nennt man $DB = AC = d$, $AB = s$, so ist die Länge von AB nach der Formänderung

$$s_1 = \sqrt{\frac{d^2}{4}(1 + \varepsilon_1)^2 + \frac{d^2}{4}(1 - \varepsilon_2)^2}$$

und mit Vernachlässigung der zweiten Potenzen der Dehnungen

$$s_1 = \frac{d}{2}\sqrt{2 + 2\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2}$$

somit die Dehnung der Kante AB:

$$\varepsilon = \frac{s_1 - s}{s} = \sqrt{1 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2} - 1 \doteq \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2).$$

Die Seitenebenen AB und BC schließen vor der Formänderung den Winkel 90^0 miteinander ein, nach der Formänderung den Winkel $90^0 - \gamma$, wobei γ die Schiebung ist.

Es wird

$$\operatorname{tg} ABO = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(90^0 - \gamma) = \frac{\frac{d}{2}(1 - \varepsilon_2)}{\frac{d}{2}(1 + \varepsilon_1)} = \frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}},$$

woraus mit Vernachlässigung der Produkte der kleinen Größen folgt

$$\gamma = \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

40. Sind ε_1, ε_2, ε_3 die Hauptdehnungen des Punktes, so lehrt die Elastizitätstheorie, daß die größte Schiebung in diesem Punkt eine der drei Hauptschiebungen

$$\gamma_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \quad \gamma_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_1, \quad \gamma_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

ist. Sind nun die Hauptdehnungen gleich, so ist die größte Schiebung Null, d. h. alle Schiebungen des Punktes sind Null.

41. Setzt man die Koordinaten eines Punktes der Geraden

$$x = a l, \quad y = b l, \quad z = c l$$

und fügt zu ε in Gleichung 11 den Faktor $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ hinzu, so folgt die Gleichung des gesuchten Ortes

$$x^2(\varepsilon_1 - \varepsilon) + y^2(\varepsilon_2 - \varepsilon) + z^2(\varepsilon_3 - \varepsilon) = 0,$$

d. i. eine Kegelfläche zweiter Ordnung.

42. Da die Dehnungen in Richtung der Achsen verschwinden, so ist die Dehnung in einer beliebigen Richtung a, b, c nach Gleichung 10

$$\varepsilon = b c \gamma_x + c a \gamma_y + a b \gamma_z.$$

Die drei Schiebungen sind hier

$$\gamma_x = -3 \text{ Bogensekunden} = -0{,}0\,000\,145,$$
$$\gamma_y = +6 \quad \text{„} \quad = +0{,}0\,000\,290,$$
$$\gamma_z = +4 \quad \text{„} \quad = +0{,}0\,000\,193;$$

ferner ist für die Diagonale MN:

$$a = \cos NMX = \frac{2}{\sqrt{38}}, \quad b = \cos NMY = \frac{3}{\sqrt{38}},$$
$$c = \cos NMZ = \frac{5}{\sqrt{38}},$$

woraus
$$\varepsilon = 0{,}000\,004\,9.$$

43. Nach Gleichung 10 ist

$$\varepsilon_0 = (a^2 + b^2 + c^2)\,\varepsilon_0 + \gamma_x (b\,c + c\,a + a\,b)$$

oder
$$b\,c + c\,a + a\,b = 0.$$

Damit folgt für den gesuchten Ort die Kegelfläche

$$y\,z + z\,x + x\,y = 0.$$

44. Die Dehnung ε nimmt nach Gleichung 10 den Wert an:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (a + b + c)^2.$$

Die größte Hauptdehnung ε_1 findet man, wenn man $a + b + c$ zu einem Maximum macht, wobei die Bedingung zu beachten ist:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Man findet

$$a_1 = b_1 = c_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \varepsilon_1 = 3\,\varepsilon_0.$$

Nennt man a_2, b_2, c_2 die Richtungskonstanten einer anderen Hauptdehnung ε_2, so ist

$$a_1\,a_2 + b_1\,b_2 + c_1\,c_2 = 0$$

also
$$\frac{1}{\sqrt{3}} (a_2 + b_2 + c_2) = 0$$

und somit $\varepsilon_2 = 0$. Ebenso ist $\varepsilon_3 = 0$.

45. Nennt man a die Kathete, h die Höhe des Dreiecks, so ist vor der Formänderung $h = \frac{a}{\sqrt{2}}$, nach derselben

$$h_1{}^2 = a^2 (1 + \varepsilon_1)^2 - \left(\frac{a\,\sqrt{2}\,(1 - \varepsilon_2)}{2}\right)^2,$$

woraus mit Vernachlässigung der zweiten Potenzen

$$h_1 = \frac{a}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}$$

und somit die Dehnung der Höhe

$$\varepsilon = \frac{h_1 - h}{h} = \sqrt{1 + 4\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} - 1$$

oder $$\varepsilon = 2\,\varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

Nennt man $90^0 - \gamma$ den Winkel der Katheten nach der Formänderung, so ist

$$\sin\frac{1}{2}(90 - \gamma) = \frac{\frac{1}{2} a \sqrt{2}\,(1 - \varepsilon_2)}{a(1 + \varepsilon_1)},$$

woraus mit $\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{\gamma}{2}$, $\cos\frac{\gamma}{2} = 1$ und Vernachlässigung zweiter Potenzen

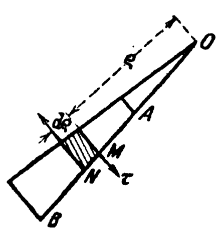
$$\gamma = 2\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

46. Lösung ähnlich wie in voriger Aufgabe.

$$\gamma = \frac{a}{b}(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) + \frac{b}{a}(\varepsilon_2 - \varepsilon_3).$$

47. Man zeichne irgendeine im Innern des Körpers liegende Zylinderfläche vom Halbmesser ϱ. Durch das Kraftpaar Pp werden in jeder derartigen Fläche Schubspannungen τ hervorgerufen, die sich über diese Mantelfläche $2\pi\varrho h$ gleichförmig verteilen. Es ist also

$$\tau = \frac{Pp}{2\pi\varrho h \cdot \varrho}.$$



Hierdurch erleidet der Punkt N gegen M eine Verschiebung $dv = \gamma \cdot d\varrho$, worin $\gamma = \frac{\tau}{G}$ (vergl. Gleichung 9) die Änderung des rechten Winkels bei M (Schiebung) ist. Für die Verschiebung von B erhält man also

$$v = \int \gamma\, d\varrho = \frac{Pp}{2\pi h G} \int_{r_1}^{r_2} \frac{d\varrho}{\varrho^2} = \frac{Pp}{2\pi h G}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

48. Die Dehnung des Stabes ist $\varepsilon = \frac{1\ \text{mm}}{4\ \text{m}} = \frac{1}{4000}$, somit die sie verhindernde Kraft

$$F \cdot E\varepsilon = 1\ \text{cm}^2 \cdot 2 \cdot 10^6\ \text{at}\,\frac{1}{4000} = 500\ \text{kg}.$$

49. Zunächst sind die Spannungen der drei Seitenflächen:

$$BC \ldots \sigma_1 = \frac{670\ \mathrm{kg}}{1{,}6\ \mathrm{cm} \cdot 2{,}8\ \mathrm{cm}} = 150\ \mathrm{at},$$

$$CA \ldots \sigma_2 = \frac{-940\ \mathrm{kg}}{2{,}0\ \mathrm{cm} \cdot 2{,}8\ \mathrm{cm}} = -168\ \mathrm{at},$$

$$AB \ldots \sigma_3 = \frac{-730\ \mathrm{kg}}{2{,}0\ \mathrm{cm} \cdot 1{,}6\ \mathrm{cm}} = -228\ \mathrm{at}.$$

Dann folgt aus den Gleichungen 15 für die Dehnungen von:

$$AM \ldots \varepsilon_1 = 134 \cdot 10^{-6}$$
$$BM \ldots \varepsilon_2 = -72 \cdot 10^{-6}$$
$$CM \ldots \varepsilon_3 = -111 \cdot 10^{-6}$$

50. Setzt man die Hauptspannungen

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p,$$

ferner die Hauptdehnungen

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \frac{e}{3}\ \text{(nach Gleichung 12)},$$

so gibt jede der Gleichungen 14

$$m = \frac{6p}{3p - Ee}.$$

Mit den gegebenen Werten $p = -20$ at, $e = -10^{-5}$ wird

$$m = 3.$$

51. Lösung wie in voriger Aufgabe.

$$k = \frac{mE}{3(m-2)}.$$

52. Die Raumdehnung e ist Null, weil der Rauminhalt sich nicht ändert; es ist also nach Gleichung 12 und 14

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$$

und

$$\sigma_3 = -400\ \mathrm{at}.$$

53. Wie vorige Aufgabe. Es ist $\sigma_1 = \frac{A}{bc}$ und analog σ_2 und σ_3. Man erhält die Bedingung $Aa + Bb + Cc = 0$.

54. Aus Gleichung 13 findet man zunächst $m = 3{,}4$. Nun ist die Dehnung

$$\varepsilon = \frac{0{,}5\ \mathrm{mm}}{0{,}4\ \mathrm{m}} = 0{,}001\,25,$$

woraus die Querzusammenziehung

$$\frac{\varepsilon}{m} = 0{,}000\,368$$

und die Änderung der Breite:

$$5\ \mathrm{mm} \cdot 0{,}000\,368 = 0{,}001\,84\ \mathrm{mm}.$$

55. Aus den Gleichungen 14 folgt zunächst $\sigma_1 = \sigma_2$. Sodann ist die Raumdehnung nach Gleichung 12

$$e = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_1 (n + 2) = \varepsilon_3 \frac{n+2}{n}.$$

Setzt man dies in die Gleichungen 14 ein, so folgt

$$\sigma_1 = \frac{m(m+n)}{(m+1)(m-2)} E \varepsilon_1,$$

$$\sigma_3 = \frac{m(mn - n + 2)}{n(m+1)(m-2)} E \varepsilon_3,$$

woraus

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \frac{m+n}{mn - n + 2}.$$

56. Da die Seitenwände der Vertiefung nicht nachgeben, ist $\varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon_3 = 0$, $e = \varepsilon_1$. Setze dies in die Gleichungen 14, so bleibt

$$\sigma_2 = \sigma_3 = \frac{\sigma_1}{m-1}.$$

57. Nennt man σ_1 die durch P hervorgerufene Druckspannung des Eisenstückes, $\sigma_2 = \sigma_3$ die von den umschließenden Balken hervorgerufenen Druckspannungen, so ist die Dehnung von a nach Gleichung 15

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \frac{\sigma_3}{m} - \frac{\sigma_1}{m}\right] = 0,$$

somit

$$\sigma_2 (m-1) = \sigma_1.$$

Nun ist

$$\sigma_1 = \frac{P}{a^2}, \quad \sigma_2 = \frac{2 \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot s}{ab}, \quad m = \frac{10}{3},$$

somit

$$s = \frac{6Pb}{7\pi a d^2}.$$

58. Da die Dicke d der Platte sich nicht vergrößern kann, ist ihre Dehnung in Richtung von d Null. Diese Dehnung berechnet man nach einer der Gleichungen 15 mit:

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\left[\frac{-D}{ab} - \frac{1}{m}\left(\frac{P}{ad} - \frac{Q}{bd}\right)\right] = 0,$$

woraus

$$D = \frac{1}{md}(Qa - Pb).$$

59. Es ist die veränderliche Elastizitätszahl

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{1}{a}(a - b\sigma)^2.$$

60. Ist l_0 die ursprüngliche Länge des Stabes, σ_1 und σ_2 die durch P_1 und P_2 entstehenden Spannungen, so ist nach dem Hookeschen Gesetz

$$\sigma_1 = \frac{P_1}{F_1} = E\frac{l_1 - l_0}{l_0},\quad \sigma_2 = \frac{P_2}{F_2} = E\frac{l_2 - l_0}{l_0},$$

woraus
$$E = \frac{\frac{P_2}{F_2} l_1 - \frac{P_1}{F_1} l_2}{l_2 - l_1}.$$

61. Ist r_0 der ursprüngliche Halbmesser des Stabes, so ist

$$\frac{r_0 - r_1}{r_0} = \frac{1}{m} \cdot \frac{P_1}{r_1^2 \pi \cdot E},\quad \frac{r_0 - r_2}{r_0} = \frac{1}{m} \cdot \frac{P_2}{r_2^2 \pi \cdot E},$$

woraus
$$m = \frac{P_2 r_1^3 - P_1 r_2^3}{\pi E r_1^2 r_2^2 (r_1 - r_2)}.$$

62.
$$\sigma_1^n = \frac{m}{m+1} C\left(\varepsilon_1 + \frac{e}{m-2}\right)$$

und analoge Gleichungen für σ_2 und σ_3. (Benütze die Gleichung 12.)

63. Für $\min P = \max P$ ist $n = 1$, $A = K_z = a + b + c$;
für $\min P = 0$ ist $n = 0$, $A = U = a$;
für $\min P = -\max P$ ist $n = -1$, $A = S = a - b + c$;
daraus ergibt sich:

$$a = U,\ b = \frac{1}{2}(K_z - S),\ c = \frac{1}{2}(K_z + S) - U.$$

64. Mit Hilfe der für diese drei Materialien angegebenen Festigkeitszahlen (siehe Gleichungen 16) ergibt sich nach Aufgabe 63 für:

Schweißeisen: $A = 2160 + 1230\,n + 250\,n^2$,
Flußeisen: $A = 2400 + 1440\,n + 360\,n^2$,
Flußstahl: $A = 2900 + 2250\,n + 890\,n^2$.

65. Die Abweichung ist
$$D = U + (K_z - U)\,n - a - b\,n - c\,n^2,$$
worin a, b, c die in Aufgabe 63 gefundenen Werte haben. Bildet man $\frac{dD}{dn} = 0$, so wird $n = \frac{1}{2}$ und $\max D = \frac{1}{8}(K_z + S - 2U)$. Mit Benützung der Festigkeitszahlen in den Gleichungen 16 wird diese größte Abweichung für Schweißeisen 62,5 at, für Flußeisen 90 at, für Flußstahl 222,5 at.

66. Es ist $n = \frac{3\,t}{15\,t} = \frac{1}{5}$; mit Hilfe der Aufgabe 64 ist die Arbeitsfestigkeit nach v. Tetmajer $A = 2416$ at, nach v. Launhardt $A = 2456$ at; somit die zulässige Spannung $k_z = 690$ at bezw. 702 at.

67. Es ist $n = \frac{8\,t}{-20\,t} = -\frac{2}{5}$; mit Hilfe der Arbeitsfestigkeit für Flußeisen in Aufgabe 64 wird $A = 1882$ at, $k_z = 538$ at.

68. Bei dem ersten Stab ist die Ursprungsfestigkeit U, bei dem zweiten die Schwingungsfestigkeit S zugrunde zu legen. Soll die Sicherheit beider Stäbe die gleiche sein, so muß die Proportion bestehen

$$U : S = P : \frac{P}{m},$$

woraus

$$m = \frac{U}{S}.$$

69. Dividiert man die größeren der Belastungsgrenzen durch 6 cm^2, so erhält man die Festigkeit jedes Stabes mit 2975 at, bezw. 1600 at und 1475 at. Nimmt man aus Aufgabe 63 die Gleichung v. Tetmajers als Grundlage, setzt das Verhältnis $n = \frac{1}{2}$, bezw. $-\frac{1}{3}$ und $-\frac{1}{2}$, so erhält man für die drei Stäbe folgende Gleichungen

$$2975 = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{4},\quad 1600 = a - \frac{b}{3} + \frac{c}{9},$$

$$1475 = a - \frac{b}{2} + \frac{c}{4}.$$

Hieraus ergibt sich $a = 2000$ at, $b = 1500$ at, $c = 900$ at und nach Aufgabe 63: $K_z = a + b + c = 4400$ at.

70. Die Zugkraft des Probestabes ist

$$P = F'\sigma = F\sigma\left(1 - \frac{\sigma^5}{C}\right).$$

Setzt man $\frac{dP}{d\sigma} = 0$, so wird die verlangte Zugfestigkeit

$$\sigma = \sqrt[5]{\frac{C}{6}}.$$

71. Aus $P = \frac{\pi d^2}{4} \cdot k_z$ folgt $d = 3$ cm.

72. Der Querschnitt des Stabes hat die Fläche $F = 6{,}928$ cm², somit ist die Zuglast

$$P = F K_z = 27\,712 \text{ kg}.$$

73. $A = b x \cdot k$, woraus $x = 54$ cm.

74. Es ist $P +$ Eigengewicht $= F \cdot k_z$, woraus der Querschnitt des Pumpengestänges

$$F = \frac{\pi}{4} d^2 = \frac{P}{k_z - l\gamma} = 1{,}18 \text{ cm}^2,$$

$$d = 1{,}23 \text{ cm};$$

da in kg und cm gerechnet wird, ist

$$l = 3000 \text{ cm}, \ \gamma = 0{,}0077 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3} \text{ einzusetzen.}$$

75. $$Q = 36 \cdot \frac{\pi}{4} \delta^2 \cdot k_z = 678 \text{ kg},$$

$$P = 36 \cdot \frac{\pi}{4} \delta^2 \cdot K_z = 6330 \text{ kg}.$$

76. Nennt man F den Querschnitt des Stabes, l die Reißlänge, so ist das Gewicht

$$F l \gamma = F K_z,$$

woraus

$$l = \frac{K_z}{\gamma};$$

für Holz: $l = 15{,}8$ Kilometer $\left(\gamma = 0{,}0005 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}\right)$,

für Eisen: $l = 4{,}87$ Kilometer $\left(\gamma = 0{,}0078 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}\right)$.

77. Der innere Durchmesser der Säule ergibt sich aus der Gleichung

$$d_1^2 = d^2 - \frac{40 P}{\pi K},$$

woraus die Wandstärke der Säule mit $\frac{d - d_1}{2} = 12$ mm folgt.

78. Ist F die Grundfläche der Mauer, so wird

$$F l \gamma = \frac{1}{20} K F$$

sein, woraus

$$l = \frac{1}{20} \frac{K}{\gamma} = 31{,}25 \text{ m}.$$

79. Steht die Kante a vertikal, so ist die Last: $P_1 + a b c \gamma$ gleich der gedrückten Fläche $b c$ mal der zulässigen Spannung λK, worin λ eine Sicherheitszahl ist.

9*

Daraus ist $P_1 = b\,c\,(\lambda K - a\gamma)$.

Stellt man ähnliche Gleichungen für P_2 und P_3 auf, so wird schließlich

$$P_1 : P_2 : P_3 = \frac{1}{a} - k : \frac{1}{b} - k : \frac{1}{c} - k,$$

worin $k = \frac{\gamma}{\lambda K}$ bedeutet.

80. Die gedrückte Fläche ist

$$F = 6\left(d\,x - \frac{d^2}{\sqrt{3}}\right)$$

und wenn λ eine Sicherheitszahl bezeichnet, so ist

$$P + h\,F\,\gamma = F \cdot \lambda K,$$

woraus

$$x = \frac{P}{6\,(\lambda K - h\gamma)\,d} + \frac{d}{\sqrt{3}}.$$

81. Aus $q + b\,h\,\gamma = b\,k$ folgt mit

$$k = 30\,000\,\frac{kg}{m^2},\ \gamma = 1600\,\frac{kg}{m^3} : q = 10\,080\,\frac{kg}{m}.$$

Aus $q + b\,h\,\gamma + x\,h_1\,\gamma = x\,k$ folgt: $x = 0{,}45$ m

und aus

$$q + b\,h\,\gamma + x\,h_1\,\gamma + y\,h_2\,\gamma = y\,k \text{ folgt: } y = 0{,}47 \text{ m}.$$

82. Ist ϱ der Reibungswinkel, so schließt der Widerstand mit der Normale des Kegelmantels den Winkel ϱ, mit der Kegelachse den Winkel $90^0 - (\alpha + \varrho)$ ein; der gesamte Widerstand des Kegelmantels ist also

$$W = \frac{P}{\sin(\alpha + \varrho)},$$

und der Normalwiderstand der Mantelfläche F, soweit sie eingedrungen ist:

$$W \cos\varrho = P\,\frac{\cos\varrho}{\sin(\alpha + \varrho)};$$

der Druck auf die Flächeneinheit wird

$$\frac{P}{F}\,\frac{\cos\varrho}{\sin(\alpha + \varrho)} = \frac{P}{F}\,\frac{\cos\varrho\,\sqrt{2}}{\sin\varrho + \cos\varrho}.$$

83. Aus $h\,(2R - h) = \left(\frac{d}{2}\right)^2$ folgt mit Vernachlässigung von h gegen 2 R:

$$Rh = \frac{d^2}{8}$$

und aus $P = p \cdot \frac{\pi d^2}{4} = Ch$ folgt: $Rp = \frac{C}{2\pi} = \text{konstant}$.

84. Die in der Sekunde zu übertragende Arbeit ist in mkg

$$Pv = P \cdot \frac{R n \pi}{30} = 75 \cdot N,$$

wenn P die Umfangskraft und v die Umfangsgeschwindigkeit ist. Setzt man

$$P = b\,\delta\,k_z,$$

so ist, wenn man alles in cm einsetzt:

$$b = 71\,620 \frac{N}{n R \delta k_z} = 14{,}9 \text{ cm}.$$

85. Nennt man $\mathfrak{R}$ die Reibung zwischen Bremsband und Bremsscheibe, so ist

$$\mathfrak{R} = S \frac{e^{f\alpha} - 1}{e^{f\alpha}}.$$

Soll verhindert werden, daß die Last Q sinkt, so muß mindestens

$$\mathfrak{R}\,R = Q\,r$$

sein. Setzt man noch $S = b\,\delta\,k_z$, so wird

$$b = \frac{Q}{\delta k_z} \frac{r}{R} \frac{e^{f\alpha}}{e^{f\alpha} - 1} = 9 \text{ cm},$$

worin $e^{f\alpha} = e^{0{,}18 \cdot 0{,}6 \cdot 2\pi} = 1{,}97$ ist.

86. Zwischen der Kraft P an der Kurbel und der Last Q in der Schraubenspindel besteht die Beziehung

$$P = \frac{r}{R} Q \operatorname{tg}(\alpha + \varrho),$$

worin $f = \operatorname{tg} \varrho = 0{,}1$, $\varrho = 5^0 40'$ der Reibungswinkel ist. Setzt man $Q = r^2 \pi \cdot K_z$, so wird $P = 40{,}6$ kg.

87. Nennt man z die Entfernung des Querschnittes $x^2 \pi$ von der oberen Endfläche, so ist

$$x = r + z \frac{R - r}{h}, \quad dz = dx \cdot \frac{h}{R - r}$$

und das Gewicht, das die Fläche $x^2\pi$ belastet:

$$G_x = \pi\gamma\int_0^z x^2\,dz = \frac{\pi\gamma h}{R-r}\int_r^x x^2\,dx = a\,(x^3 - r^3),$$

wenn
$$a = \frac{\pi\gamma h}{3(R-r)}.$$

Die Spannung der Fläche ist

$$\sigma = \frac{P + G_x}{\pi x^2} = \frac{P + a\,(x^3 - r^3)}{\pi x^2},$$

woraus
$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{1}{\pi}\left[a - 2\,\frac{P - a r^3}{x^3}\right],$$

$$\frac{d^2\sigma}{dx^2} = \frac{6\,(P - a r^3)}{\pi} \cdot x^2.$$

Macht man $\frac{d\sigma}{dx} = 0$, so folgt

$$x = \sqrt[3]{2\left(\frac{P}{a} - r^3\right)} = \sqrt[3]{\frac{6P\,(R-r)}{\pi\gamma h} - 2r^3};$$

damit x positiv ist, muß $P > a r^3$ sein, d. h. es ist $\frac{d^2\sigma}{dx^2} > 0$, die Bedingung des Minimums. Die Grenzen, innerhalb welcher diese Gleichung für x Gültigkeit besitzt, sind $x = r$ und $x = R$ oder

$$P = \frac{3}{2}\,G\,\frac{r^3}{R^3 - r^3} \text{ und } P = \frac{1}{2}\,G\,\frac{R^3 + 2r^3}{R^3 - r^3},$$

wenn mit
$$G = a\,(R^3 - r^3)$$
das Gewicht des ganzen Kegelstutzes bezeichnet wird.

88. $P : G = 43 : 112$.

89. Benützt man die Gleichung für die Arbeitsfestigkeit von Schweißeisen in Aufgabe 64:

$$A = 2160 + 1230\,n + 250\,n^2,$$

so ist wegen

$$n = \frac{2\,t}{40\,t} = \frac{1}{20},\quad A = 2222 \text{ at}$$

und $k_z = 635$ at; dann folgt aus

$$\frac{\pi d^2}{4} = \frac{40\,000 \text{ kg}}{635 \text{ at}} = 63 \text{ cm}^2,\quad d \doteq 9 \text{ cm}.$$

90. Es ist $n = \frac{5\,t}{14\,t}$, $k_z = 866$ at

und aus $14\,000\ kg = b\,d\,k_z$ wird $b = 16{,}2$ cm.

91. $n = \frac{-2\,t}{6\,t}$, $k_z = 567$ at, $b = 10{,}6$ cm.

92. Man rechnet auf Grund der Ursprungsfestigkeit (Wechsel zwischen Be- und Entlastung), die nach Gleichung 16 für Schweißeisen

$$U = 2160 \text{ at}$$

ist. Als zulässige Spannung darf man nach Gleichung 17 wählen mit $A = U$:

$$k_z = \frac{2}{7}\,U = 617 \text{ at.}$$

Die Kraft, welche den Deckel abzureißen trachtet, ist

$$P = \frac{\pi\,d^2}{4} \cdot (p - p_0),$$

worin $p_0 = 1$ at der Außendruck ist.

Setzt man noch $$P = 8 \cdot \frac{\pi\,\delta^2}{4}\,k_z,$$

so bleibt $$\delta = d\sqrt{\frac{p - p_0}{n\,k_z}} = 28 \text{ mm.}$$

93. Die Lösung wird dem Leser überlassen.

94. Nennt man x die Stärke des Gestänges, so ist zunächst

$$x^2 = \frac{P}{k_z - \gamma\,l} = 13{,}51 \text{ cm}^2$$

$$\left(\gamma = 0{,}0078\,\frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}\right),$$

sodann das Gewicht des Gestänges

$$G = \gamma\,x^2\,l = 2108 \text{ kg}$$

und die Verlängerung nach Gleichung 18

$$\Delta l = \frac{\left(P + \frac{G}{2}\right)l}{E\,x^2} = 5{,}22 \text{ cm.}$$

95. Rechnet man zunächst das unterste Stück wie in voriger Aufgabe, so ist

$$x_1{}^2 = \frac{P}{k_z - \frac{1}{4}\,\gamma\,l} = 10{,}69 \text{ cm}^2, \quad x_1 = 3{,}27 \text{ cm}$$

und das Gewicht dieses Stückes

$$G_1 = \gamma x_1^2 \frac{l}{4} = 417 \text{ kg}.$$

Für das zweite Stück ist dann

$$x_2^2 = \frac{P + G_1}{k_z - \frac{1}{4}\gamma l} = 11{,}44 \text{ cm}^2, \quad x_2 = 3{,}39 \text{ cm}$$

und das Gewicht des zweiten Stückes

$$G_2 = \gamma x_2^2 \frac{l}{4} = 448 \text{ kg}.$$

Ebenso findet man für die beiden anderen Stücke:

$$x_3^2 = \frac{P + G_1 + G_2}{k_z - \frac{1}{4}\gamma l} = 12{,}24 \text{ cm}^2, \quad x_3 = 3{,}50 \text{ cm}, \quad G_3 = 478 \text{ kg};$$

$$x_4^2 = \frac{P + G_1 + G_2 + G_3}{k_z - \frac{1}{4}\gamma l} = 13{,}09 \text{ cm}^2, \quad x_4 = 3{,}62 \text{ cm}, \quad G_4 = 511 \text{ kg}.$$

Die Materialersparnis gegen das Gestänge in voriger Aufgabe ist also

$$2108 \text{ kg} - (G_1 + G_2 + G_3 + G_4) = 254 \text{ kg}.$$

Die Verlängerung des untersten Stückes ist nach Gleichung 18:

$$\frac{\left(P + \frac{G_1}{2}\right)\frac{l}{4}}{E x_1^2} = 1{,}45 \text{ cm};$$

des zweiten Stückes

$$\frac{\left(P + G_1 + \frac{G_2}{2}\right)\frac{l}{4}}{E x_2^2} = 1{,}45 \text{ cm}.$$

Die gleichen Werte 1,45 cm findet man auch für die anderen zwei Stücke. Die ganze Längenänderung des Gestänges ist also 5,80 cm.

96. Es müssen die Längenänderungen beider Stangen gleich sein, also nach Gleichung 18

$$\frac{A + \frac{G_1}{2}}{E F_1} = \frac{B + \frac{G_2}{2}}{E F_2}.$$

Hierin sind die Auflagerdrücke

$$A = P \cdot \frac{b}{l}, \quad B = P \cdot \frac{a}{l}$$

und die Gewichte der beiden Stangen

$$G_1 = \gamma F_1 l, \quad G_2 = \gamma F_2 l,$$

wenn F_1, F_2 ihre Querschnitte sind.

Es folgt:

$$\frac{A}{F_1} = \frac{B}{F_2}$$

oder $$a : b = d_2^2 : d_1^2.$$

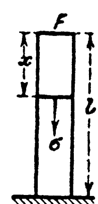
97. Ist α die Ausdehnungszahl für 1^0, so ist die Längenänderung der Stange zufolge der Temperaturänderung $l\alpha(t_1 - t_0)$, und somit die Dehnung

$$\alpha(t_1 - t_0) = \frac{1}{81\,000}(-10^0 - 20^0) = -\frac{1}{2700}.$$

Sie kann verhindert werden durch die Spannung $E\alpha(t_0 - t_1)$ und somit durch das Gewicht $EF\alpha(t_0 - t_1) = 5926$ kg, wenn $E = 2 \cdot 10^6$ at, $F = 8\ cm^2$ eingesetzt wird.

98. Um $\frac{Pa}{FE}(2 + \sqrt{2})$. [Die Spannung des Randstabes ist $\frac{P}{\sqrt{2}}$, seine Dehnung $\varepsilon_1 = -\frac{P}{EF\sqrt{2}}$; die Spannung der Diagonale ist P, ihre Dehnung $\varepsilon_2 = +\frac{P}{EF}$; der Randstab erhält die Länge $a(1 + \varepsilon_1)$, die vertikale Diagonale die Länge $a\sqrt{2}(1 + \varepsilon_2)$. Bei der Ausrechnung sind die zweiten Potenzen der Dehnungen zu vernachlässigen.]

99. An der Stelle x ist die Spannung



$$\sigma = -\frac{Gx}{Fl}$$

und die Dehnung $$\varepsilon = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{-Gx}{EFl},$$

woraus $$\Delta dx = -\frac{Gx}{EFl} \cdot dx.$$

Denkt man sich bei x eine Scheibe von der Dicke dx, so hat sie nach der Zusammendrückung durch das Gewicht die Dicke

$$dx - \Delta dx = dx\left(1 - \frac{Gx}{lFE}\right)$$

und ihr Abstand vom Boden ist

$$\xi = \int_x^l dx\left(1 - \frac{Gx}{lFE}\right) = (l - x) - \frac{G}{2lFE}(l^2 - x^2).$$

Nennt man ξ_s den Abstand des Schwerpunkts nach der Zusammendrückung vom Boden, so ist

$$G \cdot \xi_s = \int_0^l dG \cdot \xi \quad \text{mit } dG = \frac{G}{l} \cdot dx,$$

woraus

$$\xi_s = \frac{l}{2} - \frac{Gl}{3FE}$$

und die gewünschte Senkung des Schwerpunkts:

$$\frac{Gl}{3FE}.$$

100. Ist A der Widerstand des Hakens, so ist die Spannung an der Stelle x (Abbildung zur vorigen Aufgabe)

$$\sigma = \frac{A}{F} - \frac{Gx}{Fl},$$

woraus die Dehnung: $\varepsilon = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{1}{EF}\left[A - G\frac{x}{l}\right]$

und die Längenänderung: $\Delta x = \frac{1}{EF}\left[Ax - \frac{1}{2} G \frac{x^2}{l}\right].$

Setzt man nun

$$\Delta l = \frac{1}{EF}\left[Al - \frac{1}{2} Gl\right] = 0,$$

so folgt

$$A = \frac{G}{2}.$$

Ebenso groß ist der Druck auf die Unterlage.

101. Nennt man a die Höhe der Ergänzungspyramide und führt in der Entfernung x von F_0 einen horizontalen Schnitt F, so ist

$$F = F_0\left(\frac{a + x}{a}\right)^2.$$

Die Spannung in F ist

$$\sigma_x = \frac{P}{F}$$

und die Dehnung $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{\varDelta dx}{dx}$, woraus

$$\varDelta dx = d\varDelta x = \frac{P a^2}{E F_0} \cdot \frac{dx}{(a+x)^2}.$$

Die Integration liefert

$$\varDelta x = C - \frac{P a^2}{E F_0} \cdot \frac{1}{a+x},$$

und wenn man beachtet, daß für $x = o$ auch $\varDelta x = o$ ist:

$$\varDelta x = \frac{P a}{E F_0} \cdot \frac{x}{a+x}.$$

Endlich ist für $x = h$ die gewünschte Höhenänderung

$$\varDelta h = \frac{P h}{E \sqrt{F_0 F_1}}.$$

102. Man betrachte ein kleines Stück des Auflagerringes, das dem Zentriwinkel $d\varphi$ entspricht. Seine Länge ist $R\,d\varphi$; seine Schubkraft: $\frac{H}{2R\pi} \cdot R\,d\varphi$ ist im Gleichgewicht mit den beiden Zugkräften an den Enden des kleinen Stückes, also

$$\frac{H}{2R\pi} \cdot R\,d\varphi = 2S \sin\frac{d\varphi}{2},$$

woraus

$$S = \frac{H}{2\pi}.$$

103. Es sei $P = P_1 + P_2$, wobei P_1 das Stück AC dehnt, P_2 das Stück BC zusammendrückt. Setzt man die Längenänderung von AC gleich der Verkürzung von BC, so ist

$$\frac{P_1 a}{EF} = \frac{P_2 b}{EF}.$$

Nun können P_1 und P_2 berechnet werden und man erhält für die seitliche Verrückung des Querschnitts C:

$$\frac{P}{EF} \cdot \frac{ab}{a+b}.$$

104. Nennt man $S = Fs$ die in AC und BC entstehende Spannkraft, so ist die Länge von AC nach der Belastung

$$l + \Delta l = l + \frac{S l}{F E}$$

und die Einsenkung

$$e = \sqrt{(l + \Delta l)^2 - l^2} = \frac{l}{E} \sqrt{s(2E + s)}.$$

Aus dem Gleichgewicht zwischen P und den beiden Spannkräften

folgt $$P = 2S \frac{e}{\sqrt{e^2 + l^2}},$$

woraus $$P = \frac{2Fs}{E+s} \sqrt{s(2E + s)}.$$

105. Nennt man $x^2 = 2py$ die Gleichung der Seillinie, so ist für $x = l$: $y = h$, somit $p = \frac{l^2}{2h}$ und die Seillänge zwischen A und C:

$$L = \int_0^l ds = \int_0^l \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx = \int_0^l \left(1 + \frac{4h^2}{l^4} x^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot dx$$

und angenähert: $$L = l + \frac{2}{3} \frac{h^2}{l} \quad \ldots \ldots \ldots \quad a)$$

Die Spannung des Seiles in C ist $H = pq$, die Spannung im Horizontalabstand x von C:

$$S = \sqrt{H^2 + q^2 x^2},$$

die Dehnung an dieser Stelle $\varepsilon = \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{S}{EF}$, wenn F der Querschnitt des Seiles ist, und somit

$$\Delta ds = \frac{S}{FE} \cdot ds = \frac{q(p^2 + x^2)}{pFE} dx,$$

$$\Delta s = \frac{q}{pFE} \int_0^l (p^2 + x^2) \cdot dx = \frac{q l (3p^2 + l^2)}{3pFE}.$$

Die geänderte Seillänge zwischen A und C wird also

$$L = l + \Delta s = l \left[1 + \frac{q}{6hFE} (3l^2 + 4h^2)\right] \quad . \ . \quad b)$$

Aus den Gleichungen a) und b) ergibt sich

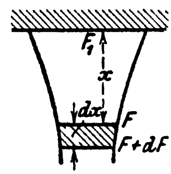
$$4h^3FE = ql^2(3l_2 + 4h^2),$$

woraus h gerechnet werden kann.

106. Nimmt man eine dünne Scheibe des Stabes zwischen den Querschnitten F und F + dF an, so ist deren Gewicht $\gamma F \cdot dx$; nennt man G_x das Gewicht des Stabes von F nach abwärts, so ist

$$G_x = Fs \text{ für den Querschnitt } F,$$
$$G_x - \gamma F dx = (F + dF)s \text{ für den Querschnitt } F + dF;$$

woraus $s \cdot dF = -\gamma F \cdot dx$, $\quad \frac{dF}{F} = -\frac{\gamma}{s} dx$,



integriert:

$$\ln F = C - \frac{\gamma}{s} x; \quad \text{für } x = 0 : C = \ln F_1,$$

woraus $F = F_1 e^{-\gamma/s\,x}$ das verlangte Gesetz für die Veränderung des Querschnitts.

Für $x = \infty$ wird $F_0 = 0$.

Das Gewicht des Stabes ist

$$G = \gamma \int_0^\infty F dx = F_1 s.$$

107. Nennt man G_x das Gewicht des tragenden Körpers unterhalb des Querschnitts F, G'_x jenes des nicht tragenden Körpers unterhalb F, so ist für sicheres Tragen

$$G_x + G'_x = F k_z$$

und für einen nahen Nachbarquerschnitt F + dF über F:

$$G_x + \gamma F dx + G'_x + \gamma_1 F' dx = (F + dF) \cdot k_z,$$

worin $F' = F_0 \frac{x^2}{l^2}$ der Querschnitt des nicht tragenden Körpers bei F ist.

Zieht man die beiden Gleichungen ab, so bleibt die Differentialgleichung

$$k_z \frac{dF}{dx} = \gamma F + \gamma_1 F_0 \frac{x^2}{l^2}.$$

Setzt man hier $F = u e^{ax}$, worin u eine neue Veränderliche und $a = \frac{\gamma}{k_z}$ ist, so wird

$$k_z u = \frac{\gamma_1 F_0}{l^2} \int x^2 e^{-ax} dx = -\frac{\gamma_1 F_0}{a l^2}\left[1 + \frac{2}{ax} + \frac{2}{a^2 x^2}\right] x^2 e^{-ax} + C,$$

$$k_z F = C e^{ax} - \frac{\gamma_1 F_0}{a^3 l^2}(a^2 x^2 + 2ax + 2)$$

und da für $x = o$, $F = o$ wird, die Integrationskonstante

$$C = \frac{2\gamma_1 F_0}{a^3 l^2},$$

und das Gesetz für den Querschnitt

$$F = \frac{2\gamma_1 F_0}{a^2 \gamma l^2}\left[e^{ax} - 1 - ax - \frac{a^2 x^2}{2}\right], \quad a = \frac{\gamma}{k_z}.$$

108. $J = \frac{1}{3}[2 \cdot 3 \cdot \overline{18}^3 + 6 \cdot 4^3] = 11\,792 \text{ cm}^4,$

Abstand des Schwerpunkts von der Achse J:

$$e = 7{,}73 \text{ cm};$$

Fläche des Querschnitts:

$$F = 132 \text{ cm}^2.$$

$$J_1 = J - F e^2 = 3905 \text{ cm}^4;$$

$$J_2 = \frac{1}{12}[18 \cdot \overline{12}^3 - 14 \cdot 6^3] = 2340 \text{ cm}^4.$$

109. $J = \frac{1}{3}[10 \cdot \overline{60}^3 + 110 \cdot \overline{10}^3] = 756\,667 \text{ mm}^4 = 75{,}7 \text{ cm}^4.$

Abstand des Schwerpunkts von der Achse J:

$$e = 1{,}38 \text{ cm}.$$

Fläche des Querschnitts:

$$F = 17 \text{ cm}^2.$$

$$J_2 = J - F e^2 = 43{,}3 \text{ cm}^4$$

und $J_1 = \frac{1}{12}[10 \cdot \overline{120}^3 + 50 \cdot \overline{10}^3] = 1444167 \text{ mm}^4 = 144{,}4 \text{ cm}^4.$

110. Betrachtet man zunächst das Dreieck ABM, so ist dessen Trägheitsmoment in bezug auf die Gerade MB nach Gleichung 23:

$$\frac{1}{12} MB \cdot (AM \cdot \sin \alpha)^3.$$

Nennt man $h = MB \cdot \sin\alpha$ die Höhe des gegebenen Dreiecks ABC in bezug auf die Grundlinie $AC = b$, so ist obiger Ausdruck

$$\frac{1}{12} \cdot \frac{h}{\sin\alpha}\left(\frac{b}{2}\sin\alpha\right)^3.$$

Für das andere Dreieck CBM erhält man das gleiche Trägheitsmoment; ihre Summe ist demnach das gesuchte

$$J = \frac{1}{48} h b^3 \sin^2 \alpha.$$

111. Verlängert man BC bis zum Schnitt D mit AX, so ist die Fläche des Dreiecks ABC:

$$F = \frac{1}{2} AD \cdot (b - c)$$

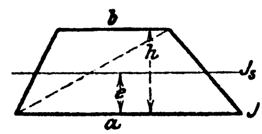
und ihr Trägheitsmoment in bezug auf AX:

$$J = \frac{1}{12} AD \cdot (b^3 - c^3),$$

woraus:

$$J = \frac{F}{6}(b^2 + bc + c^2).$$

112. Teilt man das Trapez durch eine Diagonale in zwei Dreiecke und benützt die Gleichungen 23 und 24 für die Trägheitsmomente eines Dreiecks, so ist



$$J = \frac{1}{12} a h^3 + \frac{1}{4} b h^3 = \frac{h^3}{12}(a + 3b).$$

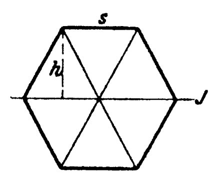
Der Schwerpunktsabstand eines Trapezes ist

$$e = \frac{h}{3} \frac{a + 2b}{a + b}.$$

Durch Anwendung der Gleichung 19 bleibt dann

$$J_s = J - F e^2 = \frac{h^3}{36} \cdot \frac{a^2 + 4ab + b^2}{a + b}.$$

113. Man zerlegt das Sechseck in sechs gleichseitige Dreiecke und wendet dann die Gleichungen 23 und 24 an. Es wird



$$J = 4 \cdot \frac{1}{12} s h^3 + 2 \cdot \frac{1}{4} s h^3 = \frac{5\sqrt{3}}{16} s^4.$$

114. Nach Aufgabe 605 des ersten Bandes (3. Auflage) ist das polare Trägheitsmoment des Fünfecks

$$J_P = \frac{F}{2}\left(h^2 + \frac{s^2}{12}\right),$$

worin $F = \frac{s^2}{4} \sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})}$ die Fläche des Fünfecks,

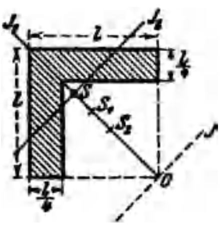
$h = \frac{s}{2} \sqrt{1 + \frac{2}{5}\sqrt{5}}$ der Abstand der Seite vom Mittelpunkt ist. Das Trägheitsmoment in bezug auf eine Schwerlinie ist $J_s = \frac{J_P}{2}$ und das gesuchte Trägheitsmoment in bezug auf eine Seite

$$J = J_s + F h^2 = \frac{s^4}{96}(8 + 3\sqrt{5})\sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})} = 1{,}0541\ s^4.$$

115. x folgt aus der Gleichung:

$$3x^2(BH - bh) + 6x[B^2H - 2Bbh + b^2h]$$
$$= BH^3 - bh^3 - 4B^3(H - h) - 4h(B - b)^3.$$

116. Die Symmetrale des Querschnitts ist bereits die eine Hauptträgheitsachse J_1 des Schwerpunkts; die andere J_2 ist zur ersten senkrecht. Für den Schwerpunkt findet man



$$OS = x_s = \frac{37}{28\sqrt{2}}\,l.$$

Das Hauptträgheitsmoment J_1 ist aus der Differenz der beiden Quadrate

$$J_1 = \frac{1}{12}\,l^4 - \frac{1}{12}\left(\frac{3}{4}\,l\right)^4 = \frac{175}{3072}\,l^4.$$

Um J_2 zu berechnen, suche man zuerst auf ähnlichem Wege mit Hilfe der beiden Quadrate J. Es ist

$$J = \frac{1}{12}\,l^4 + l^2 \cdot \overline{OS_1}^2 - \left[\frac{1}{12}\left(\frac{3}{4}\,l\right)^4 + \left(\frac{3}{4}\,l\right)^2 \cdot \overline{OS_2}^2\right]$$

$$OS_1 = \frac{l}{\sqrt{2}},\quad OS_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{l}{\sqrt{2}}$$

und

$$J = \frac{1225}{3072}\,l^4.$$

Endlich ist

$$J_2 = J - F \cdot \overline{OS}^2,$$

worin die Querschnittsfläche $F = \frac{7}{16}\,l^2$ ist.

Es bleibt

$$J_2 = \frac{361}{21504}\,l^4.$$

117. Die Symmetrale durch O ist die eine Hauptträgheitsachse. Ihr Trägheitsmoment ist

$$J_2 = \frac{a^4}{12}(1 - n^4).$$

Zieht man die dazu senkrechte Achse J_1, so wird mit Hilfe der Gleichung 19

$$J_1 = \frac{a^4}{12} + a^2 \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left[\frac{n^4 a^4}{12} + n^2 a^2 \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2\right],$$

$$J_1 = \frac{a^4}{12}(7 - 6n^2 - n^4).$$

Setzt man nun das Verhältnis

$$\frac{J_1}{J_2} = 1 + \frac{6}{1 + n^2}$$

gleich 5, so wird $$n = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

118. Das Widerstandsmoment des Rechtecks ist je nach seiner Auflagerung

$$W = \frac{1}{6} x y^2 \text{ oder } W_1 = \frac{1}{6} x^2 y.$$

Setzt man $$x = \frac{b}{h}(h - y),$$

so wird $$W = \frac{1}{6}\frac{b}{h}(h - y) y^2.$$

Das Maximum dieses Ausdrucks wird erreicht, wenn

$$\frac{dW}{dy} = 0 \text{ ist, d. h. für } y = \frac{2}{3} h,\ x = \frac{1}{3} b,$$

nämlich $${}_{\max}W = \frac{2}{81} b h^2.$$

Ebenso wird für die andere Auflagerung

$$y = \frac{1}{3} h,\ x = \frac{2}{3} b,\ {}_{\max}W_1 = \frac{2}{81} b^2 h.$$

119. Benützt man zur Berechnung des Trägheitsmomentes die Formel für das Trapez aus der Aufgabe 112, so wird

$$J = \frac{a^4}{12} \cdot \frac{4n - 3}{n^4},$$

und das Widerstandsmoment

$$W = \frac{J}{\frac{1}{2} \cdot \frac{h}{n}} = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3 \frac{4n - 3}{n^3}.$$

Setzt man $$\frac{dW}{dn} = 0, \text{ so wird } n = \frac{9}{8},$$

und
$$\frac{d^2W}{dn^2} = \sqrt{2}\,a^3\,\frac{2n-3}{n^5} < 0.$$
Das größte Widerstandsmoment wird dann
$$W = 0{,}124\,a^3.$$

120. Die Hauptträgheitsmomente für eine Ecke des gleichseitigen Dreiecks sind
$$J_1 = \frac{3\sqrt{3}}{32}\,a^4,\quad J_2 = \frac{\sqrt{3}}{96}\,a^4,$$
wenn a die Seite des Dreiecks ist.

Die Achsen der Trägheitsellipse verhalten sich wie
$$\sqrt{J_2} : \sqrt{J_1},\ \text{also wie}\ 1:3.$$

121. Benützt man Gleichung 20, so wird r it
$$e = r - \frac{4r}{3\pi},\quad e' = \frac{4r}{3\pi}:$$
$$J = r^4\left(\frac{5\pi}{8} - \frac{4}{3}\right) = 0{,}63\,r^4.$$
Ebenso, wenn man
$$e = m + \frac{4r}{3\pi},\quad e' = \frac{4r}{3\pi}\ \text{setzt:}$$
$$J_1 = r^4\left[\frac{\pi}{8} + \frac{4m}{3r} + \frac{\pi m^2}{2r^2}\right].$$

122. Der Hohlkreis gibt zunächst das Trägheitsmoment $\frac{\pi}{4}(6^4 - 5^4)$; der obere und untere Ansatz, als kleine Rechtecke mit erlaubter Annäherung angesehen, geben zusammen $\frac{1}{12}(1\cdot 14^3 - 1\cdot 12^3)$; die beiden seitlichen Ansätze liefern noch $\frac{1}{12}\cdot 2\cdot 1^3$; dies gibt zusammen das gesuchte Trägheitsmoment mit 611,8 cm^4 und das Widerstandsmoment nach Division durch 7 cm mit 87,4 cm^3.

123. Für den zur Schwerlinie parallelen Halbmesser r ist das Trägheitsmoment der Viertelkreisfläche $\frac{\pi}{16}r^4$ und da der Abstand der beiden parallelen Geraden $\frac{4r}{3\pi}$ ist, nach Gleichung 19:
$$J_s = \frac{\pi}{16}r^4 - \frac{1}{4}r^2\pi\cdot\left(\frac{4r}{3\pi}\right)^2 = r^4\left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right) = 0{,}05487\,r^4.$$

124. Es ist $J = \frac{\pi}{8} 5^4 + \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 20^3 = 26\,912 \text{ cm}^4.$

Fläche $F = 239{,}27 \text{ cm}^2,$
Schwerpunktsabstand $e = 8{,}01 \text{ cm}$
und $J_s = J - F e^2 = 11\,560 \text{ cm}^4.$

125.

$$J_x = \frac{l^3}{3} + r \int_0^{\pi/2} (l + r \sin \varphi)^2 d\varphi = \frac{l^3}{3} + \frac{\pi r l^2}{2} + 2 l r^2 + \frac{\pi r^3}{4},$$

$$J_y = l r^2 + r \int_0^{\pi/2} (r \cos \varphi)^2 d\varphi = l r^2 + \frac{\pi r^3}{4}.$$

126. $$J = r^4 \left(\frac{\pi}{8} + \frac{8}{3}\right) = 3{,}0594 r^4,$$

Fläche $F = r^2 \left(\frac{\pi}{2} + 2\right) = 3{,}571 r^2, \quad F e = \frac{4}{3} r^3,$

Schwerpunktsabstand $e = 0{,}373 r,$

$$J_1 = J - F e^2 = 2{,}5626 r^4,$$

$$J_2 = r^4 \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{6}\right) = 0{,}5594 r^4.$$

127.

$$J = \frac{\pi}{8} (10^4 - 8^4) + 2 \cdot \frac{1}{3} [6 \cdot \overline{20}^3 - 4 \cdot \overline{18}^3] = 18\,766 \text{ cm}^4.$$

Fläche des Querschnitts $F = 152{,}556 \text{ cm}^2,$
Schwerpunktsabstand $e = 5{,}105 \text{ cm},$

$$J_1 = J - F e^2 = 14\,788 \text{ cm}^4,$$

$$J_2 = \frac{\pi}{8} (10^4 - 8^4) + \frac{1}{12} [2 \cdot \overline{28}^3 + 18 \cdot \overline{20}^3 - 20 \cdot \overline{16}^3] = 11\,150 \text{ cm}^4.$$

128. Mit Benützung der Gleichung 20 für den Viertelkreis mit R und sodann für jenen mit r ist

$$J = \frac{\pi}{16} (R^4 - r^4) + \frac{2}{3} a (R^3 - r^3) + \frac{\pi}{4} a^2 (R^2 - r^2).$$

129. Mit Benützung der Gleichung 20 ähnlich wie vorige Aufgabe durchzuführen. Der Schwerpunkt liegt in der Mitte von $2a$. Es ist

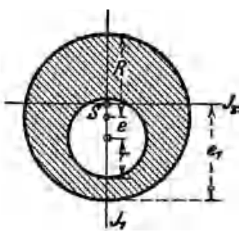
$$J_1 = \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4) + \frac{8}{3} a (R^3 - r^3) + \pi a^2 (R^2 - r^2) + \frac{4}{3} a^3 (R - r),$$

$$J_2 = \frac{3\pi}{4}(R^4 - r^4) - \frac{4}{3}(R + r - a)(R^3 - r^3) + \pi R r (R^2 - r^2).$$

130. Mit Benützung der Gleichung 20. Nennt man J′ das Trägheitsmoment für die obere Horizontale der Abbildung, so ist der Schwerpunktsabstand $e' = \frac{2}{\pi}\left(r + \frac{d^2}{12 r}\right)$,

ferner $e = r - e'$, $J' = \frac{\pi}{16}\left[\left(r + \frac{d}{2}\right)^4 - \left(r - \frac{d}{2}\right)^4\right]$

und $J = \frac{r d}{4}\left[r^2 (3\pi - 8) + d^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\right)\right]$.



131.

$$J_1 = \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4) = 117\,810 \text{ cm}^4,$$

$$J_2 = J_1 + \pi R^2 (e_1 - R)^2 - \pi r^2 (e_1 - R + e)^2,$$

$$e_1 = \frac{R^3 - r^2 (R - e)}{R^2 - r^2} = 21{,}67 \text{ cm},$$

$$J_2 = 107\,338 \text{ cm}^4.$$

132. $J_1 = \frac{\pi}{8}(R^4 - r^4)$,

Schwerpunktsabstand vom Mittelpunkt

$$e = \frac{4}{3\pi} \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2},$$

$$J_2 = J_1 - F e^2 = J_1 - \frac{8}{9\pi} \frac{(R^3 - r^3)^2}{R^2 - r^2}.$$

133. Zerschneide die Fläche in Streifen parallel zur Achse J. Ist $2y$ die Länge eines solchen Streifens, dx seine Breite, x seine Entfernung von O, so ist

$$J = 2\int (x - r\cos\alpha)^2 \cdot y\,dx = 2\int_{r\cos\alpha}^{r} (x - r\cos\alpha)^2 \sqrt{r^2 - x^2}\,dx.$$

Die Ausführung der Integration liefert:

$$J = r^4 \left\{\alpha\left(\cos^2\alpha + \frac{1}{4}\right) - \sin\alpha\cos\alpha\left(\frac{5}{4} - \frac{1}{6}\sin^2\alpha\right)\right\}.$$

134. Ellipse und Rechteck müssen dieselben Symmetralen besitzen. Nennt man x, y die Halbachsen der Ellipse, b, h die entsprechenden Abmessungen des Rechtecks, so wird in bezug auf die beiden Symmetralen nach den Gleichungen 22 und 26

$$\frac{1}{12}bh^3 = \frac{\pi}{4}xy^3 \text{ und } \frac{1}{12}b^3h = \frac{\pi}{4}x^3y,$$

woraus sich ergibt

$$x = \frac{b}{\sqrt[4]{3\pi}},\ y = \frac{h}{\sqrt[4]{3\pi}}.$$

Da Ellipse und Rechteck nun die gleichen Hauptträgheitsmomente haben, sind auch ihre Trägheitsmomente für jede durch den Mittelpunkt gehende Achse einander gleich.

135. Zerlegt man die Parabelfläche in dünne Streifen parallel zu OX, so hat einer dieser Streifen die Länge $2x$, die Breite dy und den Abstand y von OX; es ist also

$$J_x = \int y^2 \cdot 2x\,dy.$$

Die Gleichung der Parabel ist $x^2 = \frac{b^2}{a}y$, somit $dy = \frac{a}{b^2} \cdot 2x\,dx$

und $$J_x = \int_0^b \frac{a^2}{b^4}x^4 \cdot 2x \cdot \frac{a}{b^2} \cdot 2x\,dx = \frac{4}{7}a^3b.$$

Benützt man die gleichen dünnen Streifen auch für die Berechnung von J_y und betrachtet sie als Rechtecke, so ist

$$J_y = \int_0^a \frac{1}{12}dy(2x)^3 = \frac{2}{3}\int_0^b \frac{a}{b^2}2x\,dx \cdot x^3 = \frac{4}{15}ab^3.$$

136. $$J = \frac{\pi}{4}ba^3\left[1 - \left(\frac{4}{5}\right)^4\right] = 55\,616 \text{ cm}^4$$

(vergl. Gleichung 26).

137. Nennt man J_1, J_2 die Hauptträgheitsmomente für den Achsenschnittpunkt, J und J' die gegebenen Trägheitsmomente, so ist nach Gleichung 28:

$$J = J_1 \cos^2\alpha + J_2 \sin^2\alpha,$$
$$J' = J_1 \cos^2(90 + \alpha) + J_2 \sin^2(90 + \alpha).$$

Setzt man $J = J'$, so folgt $J_1 = J_2$.

138. Der Querschnittsteil von M bis N besitzt noch eine Höhe $\frac{H}{2} - \frac{r\pi}{4}$, sein Trägheitsmoment in bezug auf die Achse J ist

$$J_1 = \frac{1}{24}\left[B\left(H - \frac{r\pi}{2} + 2r\right)^3 - (B - d)\left(H - \frac{r\pi}{2} + 2r - 2a\right)^3 - 8dr^3\right]$$

Ebenso ist das Trägheitsmoment des Teiles von P bis Q in bezug auf die Achse J:

$$J_2 = \frac{1}{12}\left[a B^3 + \left(\frac{H}{2} - \frac{r\pi}{4} - a\right) d^3\right].$$

Das Trägheitsmoment des gekrümmten Teiles von N bis Q in bezug auf die Achse J ist nach Aufgabe 130

$$J_3 = \frac{rd}{4}\left[r^2(3\pi - 8) + d^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\right)\right].$$

Das ganze Trägheitsmoment der beiden gebogenen I-Eisen in bezug auf die Achse J ist also

$$J = 2(J_1 + J_2 + J_3).$$

Da die zu J senkrechte Schwerpunktachse J′ gleiches Trägheitsmoment besitzt, so haben nach Aufgabe 137 alle durch den Mittelpunkt gehenden Achsen gleiches Trägheitsmoment J; die Symmetralen i_1 und i_2 des Querschnittes besitzen also die Hauptträgheitsmomente:

$$i_1 + J \text{ und } i_2 + J.$$

139. Das Widerstandsmoment des gegebenen Rechtecks ist $\frac{1}{6} b h^2$, jenes beider Rechtecke zusammen

$$\frac{\frac{1}{12} b h^3 + \frac{2}{3} x y^3}{y},$$

wenn x, y die Koordinaten von P sind. Setzt man die Widerstandsmomente gleich, so folgt

$$y(b h^2 - 4 x y^2) = \frac{1}{2} b h^3$$

für die Gleichung der gesuchten Kurve. Sie geht durch A und hat OY zur Asymptote.

Setzt man $\frac{dx}{dy} = 0$, so folgt für die größte Breite des angefügten Rechtecks: $\max x = \frac{4}{27} b$ und die zugehörige Höhe: $y = \frac{3}{4} h$.

140. Das Widerstandsmoment des Rechtecks b, h ist $\frac{1}{6} b h^2$; jenes beider Rechtecke zusammen $\frac{J}{\eta}$, wobei J das Trägheitsmoment des ganzen Querschnitts für die horizontale Schwerlinie, η den Abstand dieser Schwerlinie von der Kante x bedeutet.

Setzt man

$$\frac{J}{\eta} = \frac{1}{6} b h^2,$$

so ergibt sich die Gleichung

$$x^3 + b n x (4 + 5 n + 4 n^2) = 2 b^2 n^3,$$

worin $n = \frac{h}{h_1}$ bedeutet.

141. Es seien x, y die Koordinaten des Punktes P der krummen Linie.

Das konstante Widerstandsmoment ist

$$\frac{J}{y} = \frac{1}{6} b h^2,$$

daher

$$d J = \frac{1}{6} b h^2 \cdot d y.$$

Setzt man nun für die Zunahme d J des Trägheitsmomentes J

$$d J = 2 d f \cdot y^2 = 2 \cdot 2 x d y \cdot y^2,$$

worin d f ein schmaler Flächenstreifen parallel zu X ist, so bleibt

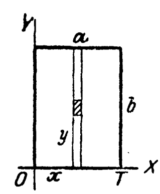
$$x y^2 = \frac{1}{24} b h^2$$

als Gleichung der krummen Linie.

Für $y = \frac{h}{2}$ ist $x = \frac{b}{6}$, d. h. die krumme Linie beginnt in den Drittelpunkten der Breite b.

142. Das Zentrifugalmoment ist allgemein

$$J_{xy} = \int x y d f.$$



Setzt man $d f = d x \cdot d y$, das kleine schraffierte Rechteck in der Zeichnung, so wird

$$J_{xy} = \iint x y \cdot d x \cdot d y = \int_0^a x \cdot d x \cdot \int_0^b y \cdot d y = \frac{1}{4} a^2 b^2,$$

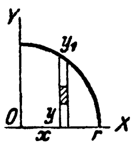
welches Resultat mit Gleichung 30 übereinstimmt, wenn man $F = a b$, $\xi = \frac{a}{2}$, $\eta = \frac{b}{2}$ setzt.

143. Mit Benützung von Gleichung 30 folgt:

$$J_{xy} = \frac{1}{4}(a^2c^2 + b^2d^2 - c^2d^2).$$

144. Mit Benützung von Gleichung 30 folgt:

$$J_{xy} = ac\left(f + \frac{c}{2}\right)\left(d + e - \frac{a}{2}\right) + d(b - c)\left(e + \frac{d}{2}\right)\left(f - \frac{b}{2} + \frac{c}{2}\right).$$



145. $$J_{xy} = \iint xy\,dx\,dy = \int_0^r \left[x\,dx \int_0^{y_1} y\,dy\right]$$

$$= \int_0^r x\,dx \cdot \frac{{y_1}^2}{2} = \frac{1}{2}\int_0^r x\,dx \cdot (r^2 - x^2) = \frac{r^4}{8}.$$

146. Es ist analog wie in voriger Aufgabe:

$$J_{xy} = \int_m^{r+m} \left[x\,dx \int_n^{y_1} y\,dy\right], \text{ worin } (y_1 - n)^2 = r^2 - (x - m)^2,$$

$$J_{xy} = \frac{1}{2}\int_m^{r+m} x\,dx\left[r^2 - (x - m)^2 + 2n\sqrt{r^2 - (x - m)^2}\right]$$

und mit $x - m = z$:

$$J_{xy} = \frac{1}{2}\int_0^r (z + m)\,dz\left[r^2 - z^2 + 2n\sqrt{r^2 - z^2}\right],$$

$$J_{xy} = \frac{r^4}{8} + \frac{r^3}{3}(m + n) + \frac{\pi r^2 mn}{4}.$$

147. Es ist ähnlich vorzugehen wie in Aufgabe 145:

$$J_{xy} = \iint xy\,dx\,dy = \int_0^a \left[x\,dx \cdot \int_0^{y_1} y\,dy\right] = \frac{1}{2}\int_0^a x\,dx \cdot {y_1}^2.$$

Hierin ist ${y_1}^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$, wenn a, b die Halbachsen der Ellipse sind. Es bleibt $J_{xy} = \frac{a^2b^2}{8}$.

148. Mit Benützung von Gleichung 32 ist

$$J_{xy} = \frac{ab}{12}(a^2 - b^2)\sin\varphi\cos\varphi.$$

149. Mit Benützung von Gleichung 32 ist

$$J_{xy} = \frac{a\,b\,\pi}{4}(a^2 - b^2)\sin\varphi\cos\varphi,$$

wenn φ die Neigung einer der Achsen des Achsenkreuzes gegen eine Ellipsenachse ist.

150. Mit Benützung der Gleichungen 33 und 34. Es ist

$$J_x = \frac{1}{3}a\,b^3 = 18\text{ cm}^4,\quad J_y = \frac{1}{3}b\,a^3 = 8\text{ cm}^4.$$

$$J_{xy} = \frac{1}{4}a^2b^2 = 9\text{ cm}^4,$$

$$J_{1,2} = 13 \pm \sqrt{106}\text{ cm}^4,\text{ woraus}$$

$J_1 = 23{,}2956\text{ cm}^4$, $J_2 = 2{,}7044\text{ cm}^4$ und $\varphi = 30^0\,28'\,22''$.

151. Mit Benützung der Gleichungen 33 und 34.

Es ist $J_x = 299\,441\text{ mm}^4$, $J_y = 989\,291\text{ mm}^4$,

$J_{xy} = 98\,931\text{ mm}^4$ (nach Aufgabe 143),

woraus: $J_1 = 1\,003\,198\text{ mm}^4$, $J_2 = 285\,534\text{ mm}^4$,

$\alpha = 8^0\,0'\,7''$.

152. Zunächst ist

$$J_x = \frac{\pi}{8}r^4,\quad J_y = \frac{5\pi}{8}r^4.$$

Zieht man durch den Schwerpunkt der Halbkreisfläche ein Achsenkreuz X' Y' parallel zu XY, so ist in bezug darauf das Zentrifugalmoment $J_{x'y} = 0$ und somit nach Gleichung 29:

$$J_{xy} = \frac{\pi r^2}{2}\cdot r\cdot\frac{4r}{3\pi} = \frac{2}{3}r^4.$$

Sodann wird mit Benützung von Gleichung 34:

$$J_{1,2} = \left[\frac{3\pi}{8} \pm \sqrt{\frac{\pi^2}{16} + \frac{4}{9}}\right]\cdot r^4$$

und die Hauptträgheitsmomente

$$J_1 = 2{,}2082\,r^4,\quad J_2 = 0{,}1480\,r^4.$$

Endlich nach Gleichung 33:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{8}{3\pi},\quad \alpha = 20^0\,9'\,46''$$

und $\qquad \varphi = 90^0 - \alpha = 69^0\,50'\,14''$.

153. Ist S der Schwerpunkt des Querschnitts und sind e_1 e_2 seine Koordinaten für das untere Achsenkreuz $J_1 J_2$, so wird, wenn XY ein durch S gehendes Achsenkreuz bedeutet,

$$J_x = J_1 + J_2 + 2F e_2^2,$$
$$J_y = J_1 + J_2 + 2F e_1^2$$

und nach Gleichung 30:

$$J_{xy} = 2\,F\,e_1\,e_2.$$

Dann wird nach Gleichung 33:

$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\,e_1\,e_2}{e_1^2 - e_2^2}$ und $\operatorname{tg}\alpha = \frac{e_2}{e_1}$, d. h. die Gerade $S_1 S_2$ ist die eine Hauptträgheitsachse des Querschnitts. Die Gleichungen 34 geben dann die beiden Hauptträgheitsmomente des Querschnitts:

$$J_{min} = J_1 + J_2, \quad J_{max} = J_1 + J_2 + \frac{1}{2} F a^2.$$

154. Es ist zunächst

$$J_y = 2 \cdot \frac{1}{3}\left[1{,}3\,(8 - 0{,}5)^3 + (20 - 1{,}3) \cdot \overline{0{,}5}^3\right] = 367{,}18 \text{ cm}^4,$$

$$J_x = 2 \cdot \frac{1}{3}\left[8 \cdot \left(\frac{20}{2}\right)^3 - (8 - 1) \cdot (10 - 1{,}3)^3\right] = 2260{,}32 \text{ cm}^4,$$

$$J_{xy} = -2 \cdot [(8 - 1) \cdot 1{,}3] \cdot 9{,}35 \cdot 4 = -680{,}68 \text{ cm}^4$$

(nach Gleichung 30; das Rechteck 20 cm · 1 cm längs der Y-Achse hat das Zentrifugalmoment Null; es bleiben somit nur die seitlichen Rechtecke, deren jedes die Fläche $(8 - 1) \cdot 1{,}3$ cm² und die Schwerpunktskoordinaten 9,35 cm und 4 cm hat).

Dann liefern die Gleichungen 34 und 33:

$$J_1 = 2480 \text{ cm}^4, \quad J_2 = 148 \text{ cm}^4,$$

$$\alpha = 17^0\,51'\,36''$$

und weil die Querschnittsfläche $F = 38{,}2$ cm² ist, gibt schließlich die Gleichung 27:

$$i_1 = \sqrt{\frac{J_1}{F}} = 8{,}06 \text{ cm}, \quad i_2 = \sqrt{\frac{J_2}{F}} = 1{,}97 \text{ cm},$$

die Halbachsen der Zentralellipse; von ihnen ist i_1 auf der Achse J_2, i_2 auf J_1 aufzutragen.

155. Da $OM = \frac{J_x + J_y}{2}$ und $CM = MD = \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}$ ist, so ergibt sich die Richtigkeit der Konstruktion unmittelbar aus Gleichung 34:

$$J_{1,2} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_y - J_x}{2}\right)^2 + J_{xy}^2},$$

welche sowohl $J_1 = OH$, wie $J_2 = OG$ liefert.

Nennt man ferner $\sphericalangle$ DGX $= \alpha$, so ist $\sphericalangle$ DMX $= 2\alpha$ und somit

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{BD}{MB} = \frac{J_{xy}}{\frac{1}{2}(J_y - J_x)},$$

welcher Ausdruck mit Gleichung 33 für die Richtung der Hauptachsen übereinstimmt.

156. Es ist

$$OD = OB + BD = OB + BA \cdot \cos^2\alpha = J_2 + (J_1 - J_2)\cos^2\alpha,$$

$$J_x = J_1 \cos^2\alpha + J_2 \sin^2\alpha$$

und
$$CD = BA \cdot \sin\alpha \cos\alpha,$$

$$J_{xy} = (J_1 - J_2)\sin\alpha\cos\alpha,$$

welche Ausdrücke mit der Gleichung 28 übereinstimmen.

157. Es ist $EF = OF - OE = OB - OD \cdot \cos(\varphi - 2\alpha)$, wenn $\sphericalangle$ DOX $= \varphi$ gesetzt wird, und weiter

$$EF = OB - OD \cdot \cos\varphi \cdot \cos 2\alpha - OD \cdot \sin\varphi \cdot \sin 2\alpha$$
$$= OB - OA \cdot \cos 2\alpha - OC \cdot \sin 2\alpha,$$

also mit Rücksicht auf die Annahme

$$EF = \frac{1}{2}(J_y + J_x) - \frac{1}{2}(J_y - J_x)\cos 2\alpha - J_{xy} \cdot \sin 2\alpha$$
$$= J_x \cos^2\alpha + J_y \sin^2\alpha - J_{xy} \sin 2\alpha,$$

welcher Ausdruck aber nach Gleichung 31 mit J_x' übereinstimmt.

Analog ist der Nachweis für $EG = J_y'$; dies folgt übrigens auch aus der Bedingung

$$J'_x + J'_y = J_x + J_y = 2 \cdot OB.$$

Endlich ist $ED = OD \cdot \sin(\varphi - 2\alpha) = OD \cdot \sin\varphi \cos 2\alpha -$
$- OD \cdot \cos\varphi \sin 2\alpha = OC \cdot \cos 2\alpha - OA \cdot \sin 2\alpha,$
also mit Rücksicht auf die Annahme

$$ED = J_{xy} \cos 2\alpha - \frac{1}{2}(J_y - J_x)\sin 2\alpha,$$

welcher Ausdruck nach Gleichung 32 mit J_{xy}' übereinstimmt.

158. Es sei $\sphericalangle$ AMC $= \varphi$, $\sphericalangle$ DOX $= \alpha$,
dann ist $\varphi = \pi - 2\alpha$,

$$\operatorname{tg}\varphi = -\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{AC}{MA} = \frac{J_{xy}}{\frac{1}{2}(J_x - J_y)}$$

oder
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 J_{xy}}{J_y - J_x},$$

welcher Ausdruck mit Gleichung 33 übereinstimmt.

Ferner ist

$$\begin{aligned} CD &= MD - MC = OM - (MA \cos\varphi + AC \sin\varphi) \\ &= \frac{1}{2}(J_x + J_y) + \frac{1}{2}(J_x - J_y) \cdot \cos 2\alpha - J_{xy} \cdot \sin 2\alpha \\ &= J_x \cos^2\alpha + J_y \sin^2\alpha - J_{xy} \sin 2\alpha; \end{aligned}$$

dieser Ausdruck stimmt mit Gleichung 31 überein, ist also das zur Achse OD gehörige Trägheitsmoment J_x'; da OD als Hauptachse erkannt wurde, ist J_x' eines der Hauptträgheitsmomente, und zwar das kleinere J_2. Da $J_x + J_y = J_1 + J_2$ sein muß, so bleibt noch $CE = J_1$ übrig.

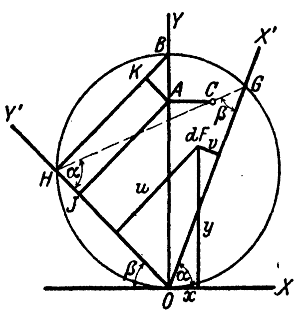
159. Der Beweis für J_x' und J_y' ist der gleiche wie in der vorhergehenden Aufgabe für J_1 und J_2.

Ferner ist $\sphericalangle\, OMG = ACF = 2\alpha$

und

$$\begin{aligned} FC &= MA \sin 2\alpha + AC \cos 2\alpha \\ &= \frac{1}{2}(J_x - J_y) \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha, \end{aligned}$$

welcher Ausdruck nach Gleichung 32 mit jenem für J_{xy}' übereinstimmt.



160. Es sei dF ein beliebiges Flächenelement, u und v seine orthogonalen Abstände von X' und Y', dann ist

$$J_{x'y'} = \int u\, v\, dF.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} u &= y \cos\beta + x \sin\beta, \\ v &= y \cos\alpha - x \sin\alpha, \end{aligned}$$

woraus

$$J_{x'y'} = J_x \cos\alpha \cos\beta - J_y \sin\alpha \sin\beta - J_{xy} \sin(\alpha - \beta)$$

oder

$$J_{y'x'} = OA \cdot \cos\alpha \cos\beta - AB \cdot \sin\alpha \sin\beta - AC \cdot \sin(\alpha - \beta).$$

Die rechte Seite ist aber Null, wie man aus dem Rechteck AKHJ entnehmen kann; dessen Eckpunkte J, K und A haben nämlich von HG die Abstände: $AB \cdot \sin\alpha \sin\beta$, $OA \cdot \cos\alpha \cos\beta$ und $AC \cdot \sin(\alpha - \beta)$.

161. Zieht man durch B_1 eine zu J_2 parallele Gerade, so ist in bezug auf sie das Trägheitsmoment des Querschnitts F

$$J_3 = J_2 + F \cdot \overline{FS}^2 = J_2 + F(i_1^2 - i_2^2),$$

und da $J_2 = F i_2^2$ ist, bleibt $J_3 = F i_1^2 = J_1$.

Die beiden Hauptträgheitsmomente von B_1 sind also gleich groß, und somit sind auch die Trägheitsmomente für alle durch B_1 gehenden Geraden gleich J_1.

162. Man ziehe durch O ein Achsenkreuz XOY parallel zu $J_1 S J_2$ und nenne a, b die Koordinaten von S in bezug darauf.

Dann ist mit Berücksichtigung der Gleichungen 27 und 30

$$J_x = J_1 + F b^2 = F(i_1^2 + b^2),$$
$$J_y = J_2 + F a^2 = F(i_2^2 + a^2),$$
$$J_{xy} = F a b;$$

ferner wird $\quad \operatorname{tg} B_1 O X = \frac{b}{a+e}, \quad \operatorname{tg} B_2 O X = \frac{b}{a-e},$

wenn $\quad e = S B_1 = S B_2 = \sqrt{i_1^2 - i_2^2}$ gesetzt wird;

nennt man noch $\sphericalangle J O X = \alpha$, so wird

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg}(B_1 O X + B_2 O X)$$

$$= \frac{\frac{b}{a+e} + \frac{b}{a-e}}{1 - \frac{b^2}{a^2 - e^2}} = \frac{2ab}{a^2 - e^2 - b^2} = \frac{2ab}{(i_2^2 + a^2) - (i_1^2 + b^2)}$$

oder $$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 J_{xy}}{J_y - J_x},$$

welcher Ausdruck mit Gleichung 33 übereinstimmt.

163. Es ist

$$\overline{PM}^2 = \overline{PN}^2 + \overline{NM}^2 = e^2 + \overline{MB_1}^2 - \overline{NB_1}^2 = e^2 + i_1^2 - \overline{SB_1}^2 \cdot \sin^2\alpha.$$

Nun ist nach Aufgabe 161:

$$\overline{SB_1}^2 = i_1^2 - i_2^2$$

also $$\overline{PM}^2 = e^2 + i_1^2 \cos^2\alpha + i_2^2 \sin^2\alpha,$$
$$F i^2 = F e^2 + J_1^2 \cos^2\alpha + J_2^2 \sin^2\alpha$$

und nach Gleichung 28: $J = F e^2 + J_x$, übereinstimmend mit Gleichung 19.

164. Es ist

$$e_1 = 12 \text{ cm}, \quad z_0 = 6{,}9 \text{ cm}, \quad \mu_0 = 1{,}2,$$

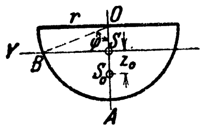
woraus $$k_b = 238 \text{ at}.$$

165. Es ist

$$\mu_0 = \frac{4}{3}, \quad e_1 = \frac{D}{2}, \quad z_0 = \frac{2}{3\pi} \cdot \frac{1-\alpha^3}{1-\alpha^2} D,$$

woraus
$$k_b = \frac{2}{3} k_z \sqrt{\frac{3\pi(1-\alpha^2)}{1-\alpha^3}}.$$

166. Ist S der Schwerpunkt der Halbkreisfläche, S_0 der Schwerpunkt des unter SY liegenden Kreisabschnittes, $\sphericalangle AOB = \varphi$, so findet man:



$$e_1 = SA = r\left(1 - \frac{4}{3\pi}\right) = 0{,}576\ r,$$

$$z_0 = \frac{2}{3} r \left[\frac{\sin^3\varphi}{\varphi - \sin\varphi\cos\varphi} - \frac{2}{\pi}\right] = 0{,}237\ r.$$

Es ist $\cos\varphi = \frac{4}{3\pi}$, woraus $\varphi = 64^0\ 53'\ 11''$ und auf Bogenmaß, wie es oben gebraucht wird, umgerechnet: $\varphi = 1{,}132$.

Dann ist die gesuchte Biegungsspannung

$$k_b = \mu_0 k_z \sqrt{\frac{e_1}{z_0}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{6} 1250 \cdot \sqrt{\frac{0{,}576}{0{,}237}}$$
$$k_b = 433 \text{ at.}$$

167. Der Schwerpunkt des Querschnitts hat die Entfernung 33,5 mm von der Oberkante.

Für gleiche Biegungsfestigkeit wird die Bedingung bestehen:

$$k : k_z = e_2 : e_1 = 100 - 33{,}5 : 33{,}5$$

oder
$$k : k_z = 1{,}985 : 1.$$

168. Wenn der Schwerpunkt S in den Mittelpunkt des Halbkreises fallen soll, so muß $x = r\sqrt{\frac{2}{3}}$ sein. Beim einseitig eingespannten Träger ist die Zugseite oben, die Druckseite unten zu suchen; für gleiche Festigkeit wird dann die Bedingung zu erfüllen sein:

$$k : k_b = e_2 : e_1 = r : x = \sqrt{3} : \sqrt{2}.$$

Nun ist nach der Bachschen Gleichung 41 für Gußeisen

$$k_b = \mu_0 k_z \sqrt{\frac{e_1}{z_0}}, \quad \mu_0 = 1{,}2, \quad z_0 = \frac{x}{2},$$

woraus
$$k = 2{,}08\ k_z.$$

169. Der Schwerpunkt des Querschnitts hat von der oberen Kante die Entfernung

$$e_1 = \frac{1232\,x + 900}{44\,x + 300}.$$

Die gleiche Biegungsfestigkeit verlangt die Bedingung

$$e_1 : e_2 = k_z : k$$

oder

$$e_1 : 50 - e_1 = 3 : 8,$$

woraus

$$e_1 = \frac{3}{11} \cdot 50 \text{ und } x = 5 \text{ mm}.$$

170. Die Achse SY des größeren Hauptträgheitsmomentes J_1 ist die Symmetrale des Querschnitts, die Achse SZ ist senkrecht dazu; vergleicht man damit Gleichung 35 sowie die zugehörige Abbildung, so ist hier

$$\alpha = 135^0, \quad \beta = \alpha - \varphi,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \varphi) = \frac{J_1}{J_2} \cdot \operatorname{tg} 135^0,$$

woraus

$$\varphi = 30^0\,15'\,23''.$$

171. In Aufgabe 116 wurden die Hauptträgheitsmomente für den Schwerpunkt ermittelt. Sie waren

$$J_1 = \frac{175}{3072} l^4, \quad J_2 = \frac{361}{21\,504} l^4.$$

Nimmt man Gleichung 35 und die zugehörige Abbildung zu Hilfe, so wird hier

$$\beta = -45^0, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{J_2}{J_1} \operatorname{tg} \beta,$$

woraus

$$\alpha = -16^0\,25'\,12''$$

und

$$\varphi = 28^0\,34'\,48''.$$

172. Man benütze die Gleichungen 35 und 37. Es ist das größere Hauptträgheitsmoment

$$J_1 = 81\,392 \text{ cm}^4$$

und das kleinere

$$J_2 = 50\,832 \text{ cm}^4, \quad \text{ferner } \alpha = 30^0,$$

woraus die Neigung der Biegungsachse N gegen die kleinere Kante

$$\beta = 42^0\,45'\,7''.$$

Die äußerst gespannten und gedrückten Stellen des Querschnitts sind dann B und D; da man ihre Koordinaten kennt, so folgt aus Gleichung 37 mit $y = -15$ cm, $z = +20$ cm für die Stelle B die Spannung $\sigma = -43$ at.

Ebenso erhält man für die Stelle D: $\sigma = +43$ at.

173. Die Neigung β der Biegungsachse N gegen die Achse von J_1 folgt zunächst aus Gleichung 35:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{J_1}{J_2} \operatorname{tg} \alpha, \quad \beta = 82^0\ 15'\ 6'',$$

woraus $$\varphi = \beta - \alpha = 63^0\ 28'\ 26''.$$

Die meist gespannten Stellen des Querschnitts sind dann A und B.

Berechnet man die Koordinaten von A in bezug auf das Hauptachsenkreuz $J_1 J_2$ mit

$$y = 10 \sin \alpha + 0{,}5 \cos \alpha = +3{,}69 \text{ cm},$$
$$z = -10 \cos \alpha + 0{,}5 \sin \alpha = -9{,}31 \text{ cm}$$

und setzt diese Werte in Gleichung 37:

$$\sigma = 700 \text{ at} = M\left(\frac{y \sin \alpha}{J_2} - \frac{z \cos \alpha}{J_1}\right),$$

so folgt $$M = 491 \text{ mkg}.$$

174. Setzt man in Gleichung 37 die Koordinaten von E ein

$$y = \frac{b}{2}, \quad z = -\frac{h}{2},$$

ferner die Hauptträgheitsmomente

$$J_1 = \frac{1}{12} b h^3, \quad J_2 = \frac{1}{12} b^3 h,$$

so wird für die Spannung in E:

$$\sigma = \frac{6M}{bh}\left(\frac{\cos \alpha}{h} + \frac{\sin \alpha}{b}\right).$$

Setzt man $\frac{d\sigma}{d\alpha} = 0$, so wird $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{b}$, $\frac{d^2 \sigma}{d\alpha^2} < 0$

und nach Gleichung 35:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{J_1}{J_2} \operatorname{tg} \alpha = \frac{h^3}{b^3},$$

d. h. die ungünstigste Lagerung des Trägers findet statt, wenn M in der andern Diagonale liegt.

Die größte Spannung in E ist dann

$$\max \sigma = \frac{6M\sqrt{b^2 + h^2}}{b^2 h^2}.$$

175. Die Richtigkeit folgt aus Aufgabe 160. Denn zieht man die dort benützte Gerade HG durch O, so fällt X′ nach OC und Y′ nach X; dann verschwindet das Zentrifugalmoment für die Geraden OC und X. Ebenso verschwindet in vorliegender Aufgabe das Zentrifugalmoment für die Geraden SC und X, d. h. sie entsprechen konjugierten Durchmessern der Zentral-Ellipse; liegt das biegende Kraftpaar demnach in der Horizontalebene SX, so ist SC die zugehörige Null-Linie.

176. Es ist wie in der gebräuchlichen Theorie der Biegung

die Dehnung $$\varepsilon = \frac{z}{\varrho}$$

und somit $$\sigma^5 = C\varepsilon = \frac{Cz}{\varrho}.$$

Das Biegungsmoment ist

$$M = \int \sigma z \cdot dF = \int \left(\frac{Cz}{\varrho}\right)^{1/5} z \cdot dF.$$

Setzt man $\int z^{6/5} \cdot dF = K$, welche Größe an Stelle des Trägheitsmomentes des Querschnittes: $\int z^2 \cdot dF = J$ tritt, so wird die Krümmung der Stabachse (nicht mehr elastische Linie!):

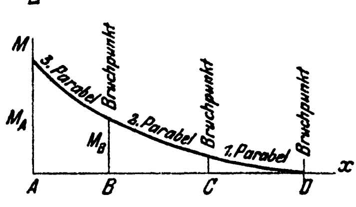
$$\frac{1}{\varrho} = \pm \frac{M^5}{CK^5}$$

und die Biegungsspannung:

$$\sigma = -\frac{M z^{1/5}}{K}.$$

177. $M_A = Pl + P_1 l_1 + P_2 l_2 + \frac{1}{2} q l^2.$

$$M_B = P(l - l_2) + P_1(l_1 - l_2) + \frac{1}{2} q (l - l_2)^2.$$



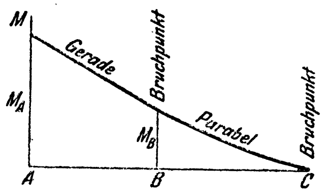
$$M_C = P(l - l_1) + \frac{1}{2} q (l - l_1)^2.$$

Gleichung der Schaulinie:

Feld AB: $$M = Pl + P_1 l_1 + P_2 l_2 + \frac{1}{2} q l^2 - (P + P_1 + P_2 + ql)x + \frac{1}{2} q x^2.$$

Feld BC: $M = Pl + P_1 l_1 + \frac{1}{2} q l^2 - (P + P_1 + q l) x + \frac{1}{2} q x^2.$

Feld CD: $M = Pl + \frac{1}{2} q l^2 - (P + q l) x + \frac{1}{2} q x^2.$



178.

$$M_A = Pl + P_1 l_1 + \frac{1}{2} q (l^2 - l_1^2).$$

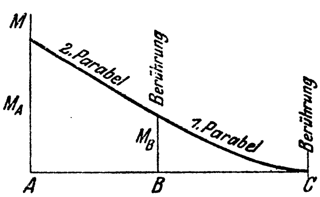
$$M_B = P(l - l_1) + \frac{1}{2} q (l - l_1)^2.$$

$$M_C = 0.$$

Gleichung der Schaulinie:

Feld AB: $M = Pl + P_1 l_1 + \frac{1}{2} q (l^2 - l_1^2) - (P + P_1 + q [l - l_1]) x.$

Feld BC: $M = Pl + \frac{1}{2} q l^2 - (P + q l) x + \frac{1}{2} q x^2.$



179.

$$M_A = \frac{1}{2} q (l^2 - l_1^2) + \frac{1}{2} q_1 l_1^2.$$

$$M_B = \frac{1}{2} q (l - l_1)^2.$$

$$M_C = 0.$$

Gleichung der Schaulinie:

Feld AB: $M = \frac{1}{2} q (l^2 - l_1^2) + \frac{1}{2} q_1 l_1^2 - (q [l - l_1] + q_1 l_1) x$

$$+ \frac{1}{2} q_1 x^2.$$

Feld BC: $M = \frac{1}{2} q l^2 - q l x + \frac{1}{2} q x^2.$

180. Das größte Biegungsmoment ist jenes an der Einspannungsstelle:

$$_{\max}M = Pl + P_1 l_1 + P_2 l_2 = 410 \text{ mkg}.$$

Die zulässigen Spannungen sind:

$$k_z = \frac{1}{11} \cdot 470 \text{ at} = 43 \text{ at}, \quad k = \frac{1}{6} \cdot 280 = 47 \text{ at}.$$

Die Zugseite ist als gefährlichere der Rechnung zugrunde zu legen.

Mit $b = \frac{5}{7} h$ ist:

$$_{\max}M = k_z \cdot W = k_z \cdot \frac{1}{6} b h^2 = k_z \cdot \frac{5}{42} h^3,$$

woraus $$h = 20 \text{ cm}, \quad b = 14{,}3 \text{ cm}.$$

181. Nach Gleichung 45 ist die Durchbiegung am Ende

$$f = \frac{1}{8} \frac{q x^4}{E J}.$$

Hierin ist $$J = \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4) = 4637 \text{ cm}^4,$$

wenn R, r die Halbmesser des Querschnitts sind;

Eisen-Querschnittsfläche $F = \pi(R^2 - r^2) = 113{,}09 \text{ cm}^2$,
Gewicht des Eisens für 1 cm Länge: 0,882 kg,
Gewicht des Wassers für 1 cm Länge: 0,201 kg,

somit $$q = 0{,}882 + 0{,}201 = 1{,}083 \text{ kg/cm}$$

und $$x = \sqrt[4]{\frac{8 f E J}{q}} = 430{,}2 \text{ cm}.$$

182. Ohne Holzkern lautet die Biegungsgleichung des Rohres:

$$P l_1 = \frac{\pi}{4} R^3 (1 - \delta^4) \cdot k_b \quad \text{mit } \delta = \frac{r}{R};$$

mit Holzkern lautet sie

$$P l = \frac{\pi}{4} R^3 (1 - \delta^4) \cdot k_b + \frac{\pi}{4} r^3 \cdot k_b',$$

woraus $$l = l_1 \left(1 + \frac{k_b'}{k_b} \cdot \frac{\delta^3}{1 - \delta^4}\right).$$

Aus $P x = \frac{\pi}{4} r^3 \cdot k_b'$ ist x zu berechnen.

183. Der Bruch der Balken erfolgt, wenn die Zugkraft P in der Schraubenspindel die Größe erreicht hat:

$$P = \frac{1}{l} \cdot \frac{1}{6} b h^2 \cdot K_b = 1880 \text{ kg}.$$

Das Reißen der Schraubenspindel erfolgt aber erst bei

$$P_1 = \frac{\pi d^2}{4} \cdot K_z = 3142 \text{ kg}.$$

184. Im Falle a) ist die größte erlaubte Last

$$P = k_b \cdot \frac{b h^2}{6 l} = 383{,}3 \text{ kg},$$

im Falle b)

$$P = k_b \cdot \frac{b^2 h}{6 l} = 273{,}8 \text{ kg}.$$

185. Der Längsschnitt des Telegraphenbaumes ist $d l$, der Winddruck auf denselben $0{,}785\ d l \cdot 125$ (wenn l und d in Meter eingeführt werden); das Auflagermoment $0{,}785\ d l \cdot 125 \cdot \frac{l}{2}$; setzt man dies $= k_b \cdot \frac{\pi}{32} d^3$, hierin

$$k_b = \frac{1}{10} \cdot 420 \text{ at} = 42 \text{ at} = 42 \cdot 10^4 \text{ kg/m}^2,$$

so wird $$d = 0{,}345 \text{ m}.$$

186. $J = 2709 \text{ cm}^4$, Widerstandsmoment $W = 270{,}9 \text{ cm}^3$, $P \cdot l = k_b \cdot W$, woraus $P = 270{,}9$ kg.

187. Aus $P \cdot 100 \text{ cm} + Q \cdot 140 \text{ cm} = k_b \cdot \frac{1}{6} b h^2$ folgt

$$Q = 1000 \text{ kg}.$$

188. Ist q die gleichförmige Belastung des Trägers durch sein Eigengewicht, so ist die Durchbiegung

$$f = \frac{1}{8} \frac{q l^4}{E J}.$$

Das Trägheitsmoment in bezug auf die horizontale Schwerlinie ist

$$J = \frac{1}{12} \left[12{,}5 \cdot \overline{30}^3 - 11{,}42 \cdot \overline{26{,}76}^3 \right] = 9888 \text{ cm}^4.$$

Die Fläche des Querschnitts ist $F = 69{,}4 \text{ cm}^2$,

somit $$q = F \gamma = 69{,}4 \cdot 0{,}0078 = 0{,}5413 \text{ kg/cm}$$

und die gefragte freie Länge des Trägers

$$l = \sqrt[4]{\frac{8 f E J}{q}} = 874{,}4 \text{ cm}.$$

189. Ist P die ganze Umfangskraft der Scheibe, v die Umfangsgeschwindigkeit, so ist die Leistung der Kraft $P v = 75\ N$ und weil $v = \frac{d n \pi}{60}$ ist:

$$P = \frac{60 \cdot 75 \cdot N}{d n \pi} = 715{,}5 \text{ kg.}$$

Auf einen Arm der Scheibe entfällt $\frac{P}{4}$; es ist also, wenn der Arm als ein in der Nabe der Scheibe eingespannter Träger betrachtet wird:

$$\frac{P}{4} \cdot \frac{d}{2} = k_b \cdot W.$$

Die Biegungsspannung für Gußeisen ist nach Gleichung 41:

$$k_b = \frac{4}{3} \cdot k_z \sqrt{\frac{e_1}{z_0}} \text{ und da } e_1 = \frac{a}{2},\ z_0 = \frac{2a}{3\pi}:$$

$$k_b = \frac{4}{3} \cdot k_z \sqrt{\frac{3\pi}{4}} = 307 \text{ at.}$$

Das Widerstandsmoment in bezug auf die zur Zeichnung senkrechte Schwerlinie des elliptischen Querschnitts ist

$$W = \frac{J}{\frac{a}{2}} = \frac{\pi}{32} b a^2 = \frac{\pi}{64} a^3;$$

dies eingesetzt, gibt:

$$\frac{P}{4} \cdot \frac{d}{2} = 307 \cdot \frac{\pi}{64} a^3;$$

woraus $a = 6{,}2$ cm, $b = \frac{a}{2} = 3{,}1$ cm.

190. Die Biegungsspannung für Gußeisen ist nach Gleichung 41:

$$k_b = \frac{4}{3} k_z \sqrt{\frac{e_1}{z_0}}, \text{ worin } e_1 = a = 20 \text{ cm},$$

$$z_0 = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{a^2 b - a_1{}^2 b_1}{a b - a_1 b_1} = \frac{4a}{3\pi} \cdot \frac{1 - \overline{0{,}8}^3}{1 - \overline{0{,}8}^2} = 11{,}51 \text{ cm},$$

$$k_b = 350 \text{ at.}$$

Der Ansatz lautet:

$$\left(P + \frac{G}{2}\right) l = k_b \cdot W = k_b \cdot \frac{J}{a},$$

die Fläche des Querschnitts ist

$$F = \pi (a b - a_1 b_1) = 339{,}29 \text{ cm}^2,$$

woraus mit $\gamma = 0{,}0075$ das Gewicht des Trägers:

$$G = F l \gamma = 712{,}6 \text{ kg.}$$

Das Trägheitsmoment des Querschnitts in bezug auf die horizontale Schwerlinie ist

$$J = \frac{\pi}{4}(b\,a^3 - b_1\,a_1{}^3) = \frac{\pi}{4}\,b\,a^3(1 - \overline{0{,}8}^4) = 55\,644\ \mathrm{cm}^4$$

und das Widerstandsmoment $W = 2782\ \mathrm{cm}^4$, woraus

$$P = 3121\ \mathrm{kg}.$$

191. Da der Träger einseitig eingespannt ist, befindet sich die Zugseite oben, die Druckseite unten. Der Schwerpunkt des Querschnitts hat von der Zugseite die Entfernung $e_1 = 4{,}02\ x$, von der Druckseite $e_2 = 7{,}98\ x$. Da

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{4{,}02}{7{,}98} > \frac{300\ \mathrm{at}}{800\ \mathrm{at}}$$

ist, so muß die Zugseite als die gefährlichere der weiteren Rechnung zugrunde gelegt werden. Das Biegungsmoment am Auflager ist

$$\left(P + \frac{G}{2}\right) l = k_b \cdot \frac{J}{e_1},$$

die Querschnittsfläche ist $F = 25\ x^2$, das Gewicht des Trägers $G = \gamma F l = 0{,}0075 \cdot F \cdot 300 = 56{,}25\ x^2$ (wenn x in cm angegeben ist).

Das Trägheitsmoment des Querschnitts in bezug auf die obere Kante ergibt sich mit $J_1 = 844{,}33\ x^4$, in bezug auf die horizontale Schwerlinie $J = J_1 - F\,e_1{}^2 = 440{,}32\ x^4$. Dies in die Gleichung des Biegungsmomentes gesetzt, gibt mit $l = 300$ cm, $k_b = 300$ at für x die Gleichung

$$x^3 = 0{,}257\ x^2 + 27{,}389,$$

woraus als brauchbare Wurzel

$$x = 3{,}1\ \mathrm{cm}.$$

192. Nennt man y die Höhe des Trägers an der Stelle x, so ist

$$x = \frac{l}{h - h_1}(h - y).$$

Das Biegungsmoment an dieser Stelle ist (vom Vorzeichen abgesehen) $M = P\,(l - x)$, das Widerstandsmoment des rechteckigen Querschnitts $W = \frac{1}{6}\,b\,y^2$, wenn b die Breite ist. Im Bruchquerschnitt muß die Spannung am Rande oder $\frac{M}{W}$ ihren größten Wert erreichen, oder

$$\frac{l - x}{y^2}\ \text{ein Maximum sein.}$$

Dies führt auf

$$\frac{1}{y} - \frac{h_1}{y^2} = \max.$$

Die Nullsetzung des ersten Differentialquotienten nach y liefert $y = 2h_1$, der zweite Differentialquotient wird mit diesem Wert

$$\frac{2}{y^3} - \frac{6h_1}{y^4} = -\frac{1}{8{h_1}^3} < 0.$$

Man erhält also für den Bruchquerschnitt

$$x = l\frac{h - 2h_1}{h - h_1} \text{ und } M = \frac{Plh_1}{h - h_1}.$$

193. Ist $\frac{F}{2}$ die Querschnittsfläche, $\frac{J}{2}$ ihr Trägheitsmoment in bezug auf ihre maßgebende Schwerlinie, so ist das Widerstandsmoment für den Querschnitt in der Entfernung x vom Ende:

$$W = \frac{J + F(z - e)^2}{z}$$

und die äußerste Spannung in diesem Querschnitt:

$$\max \sigma = \frac{Px}{W} = \frac{Pl}{b - a}\frac{z(z - a)}{J + F(z - e)^2}.$$

Sucht man das Maximum des von z abhängigen Bruches, so findet man die Bedingungsgleichung

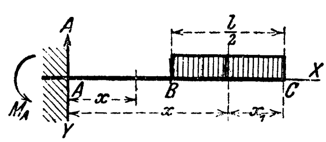
$$F(2e - a){z_1}^2 - 2(J + Fe^2)z_1 + a(J + Fe^2) = 0,$$

woraus die halbe Breite im gefährlichen Querschnitt:

$$z_1 = \frac{\sqrt{J + Fe^2}}{F(2e - a)}\left[\sqrt{J + Fe^2} + \sqrt{J + F(a - e)^2}\right].$$

Da weder b noch l in diesem Resultat vorkommen, so wird zweckmäßig $b = z_1$ gemacht, hierdurch also die gefährliche Stelle in den Einspannungsquerschnitt gerückt. Vorausgesetzt ist $2e > a$.

194.



Auflagermoment $M_A = \frac{3}{8}ql^2$,

Auflagerdruck $A = \frac{1}{2}ql$.

Feld AB: Biegungsmoment: $M = -M_A + Ax$.

Gleichung der elastischen Linie:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EJ} = -iM = -i(-M_A + Ax).$$

Erste Integration: $\frac{dy}{dx} = -i\left(-M_A x + A\frac{x^2}{2}\right) + C;$

wegen $x = 0,\ \frac{dy}{dx} = 0 : C = 0.$

Zweite Integration: $y = -i\left(-M_A\frac{x^2}{2} + A\frac{x^3}{6}\right) + D;$

wegen $x = 0,\ y = 0 : D = 0.$

Feld BC: Biegungsmoment: $M = -M_A + Ax - \frac{q}{2}\left(x - \frac{l}{2}\right)^2$

und mit $l - x = x_1$: $M = -\frac{1}{2} q x_1^2.$

Gleichung der elastischen Linie:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2} i q x_1^2.$$

Erste Integration: $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{6} i q x_1^3 + C_1.$

Zweite Integration: $y = \frac{1}{24} i q x_1^4 + C_1 x + D_1.$

An der Stelle B müssen y und $\frac{dy}{dx}$ in beiden Feldern die gleichen Werte annehmen, daher:

$$x = x_1 = \frac{l}{2} : -i\left(-\frac{1}{8} M_A l^2 + \frac{1}{48} A l^3\right) = \frac{1}{384} i q l^4 + C_1 \cdot \frac{l}{2} + D,$$

$$-i\left(-\frac{1}{2} M_A l + \frac{1}{8} A l^2\right) = -\frac{1}{48} i q l^3 + C_1,$$

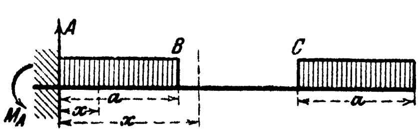
woraus $C_1 = \frac{7}{48} i q l^3,\ D_1 = -\frac{5}{128} i q l^4.$

Dann ergibt sich die Neigung γ des Trägers in C

$$\operatorname{tg}\gamma = C_1 = \frac{7}{48}\frac{q l^3}{EJ}$$

und die Durchbiegung in C:

$$f = C_1 l + D_1 = \frac{41}{384}\frac{q l^4}{EJ}.$$



195. Die Durchführung der Rechnung ist ähnlich jener in voriger Aufgabe.

Auflagermoment: $M_A = a\,q\,l$,
Auflagerdruck: $A = 2\,a\,q$.

Feld AB: Biegungsmoment: $M = -M_A + A\,x - \frac{1}{2}\,q\,x^2$.

Gleichung der elastischen Linie: $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EJ} = -i\,M$.

Erste Integration: $\frac{dy}{dx} = -i\left[M_A\,x + \frac{1}{2}\,A\,x^2 - \frac{1}{6}\,q\,x^3\right]$.

Zweite Integration: $y = -i\left[-\frac{1}{2}\,M_A\,x^2 + \frac{1}{6}\,A\,x^3 - \frac{1}{24}\,q\,x^4\right]$.

Feld BC: Biegungsmoment: $M = -M_A + A\,x - q\,a\left(x - \frac{a}{2}\right)$.

Erste Integration: $\frac{dy}{dx} = -i\left[\left(-M_A + \frac{q\,a^2}{2}\right)x + \frac{1}{2}\,a\,q\,x^2\right] + C_1$.

Zweite Integration: $y = -i\left[\left(-M_A + \frac{q\,a^2}{2}\right)\frac{x^2}{2} + \frac{1}{6}\,a\,q\,x^3\right] + C_1\,x + D_1$.

An der Grenze B der beiden Felder, d. h. für $x = a$ müssen y und $\frac{dy}{dx}$ in beiden Feldern dieselben Werte annehmen; daraus ergibt sich

$$C_1 = \frac{1}{6}\,i\,q\,a^3, \qquad D_1 = -\frac{1}{24}\,i\,q\,a^4$$

und die Durchbiegung in der Mitte des Trägers, wenn man in der Gleichung für y des Feldes BC: $x = \frac{l}{2}$ setzt:

$$f = \frac{q\,a}{48\,E\,J}\,(5\,l^3 - 3\,a\,l^2 + 4\,a^2\,l - 2\,a^3).$$

196. Die Rechnung ist ähnlich jener in Aufgabe 194 durchzuführen.

Auflagermoment: $M_A = P_2\,a + P_1\,l$,
Auflagerdruck: $A = P_1 + P_2$.

Feld AB wie in Aufgabe 194:

$$\frac{dy}{dx} = -i\left(-M_A\,x + A\,\frac{x^2}{2}\right),$$

$$y = -i\left(-M_A\,\frac{x^2}{2} + A\,\frac{x^3}{6}\right).$$

Feld BC: Biegungsmoment

$$M = -M_A + A\,x - P_2\,(x - a) = -P_1\,(l - x),$$

$$\frac{dy}{dx} = i P_1 \left(l x - \frac{x^2}{2}\right) + C_1,$$

$$y = i P_1 \left(l \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + C_1 x + D_1.$$

An der Stelle B müssen y und $\frac{dy}{dx}$ in beiden Feldern die gleichen Werte annehmen, woraus für $x = a$:

$$C_1 = \frac{1}{2} i P_2 a^2, \qquad D_1 = -\frac{1}{6} i P_2 a^3$$

und aus der Gleichung des zweiten Feldes BC für $x = l$:

$$f = \frac{1}{6EJ}\left[2 P_1 l^3 + P_2 a^2 (3l - a)\right].$$

197. Die Last P_2 allein würde an der Stelle B die Durchbiegung hervorrufen (vergl. Gleichung 43)

$$f_2 = \frac{i}{3} P_2 a^3,$$

und der Träger würde dort die Neigung α_2 gegen die Horizontale

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{i}{2} P_2 a^2$$

annehmen (vergl. Gleichung 44).

Das Stück BC des Trägers neigt sich, ohne sich zu biegen, wenn P_2 allein vorhanden ist, und das Ende C zeigt infolgedessen die Durchbiegung

$$f' = f_2 + (l - a) \operatorname{tg} \alpha_2.$$

Kommt noch die Last P_1 in C hinzu, so entsteht hier überdies noch die Durchbiegung

$$\frac{i}{3} P_1 l^3.$$

Es ist also die ganze Durchbiegung in C:

$$f = \frac{i}{3} P_1 l^3 + f_2 + (l - a) \operatorname{tg} \alpha_2$$

oder

$$f = \frac{1}{6EJ}[2 P_1 l^3 + P_2 a^2 (3l - a)].$$

198. Nach Gleichung 45 erzeugt das Eigengewicht in A die Durchbiegung $f_1 = \frac{81}{40} i G a^3$ und in B: $f_2 = \frac{2}{5} i G a^3$.

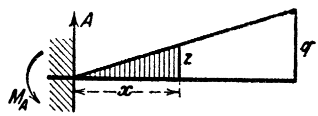
Nach den Gleichungen 43 und 44 erzeugt die Last P in B die Durchbiegung

$$f_3 = \frac{i}{3} P a^3 + a \operatorname{tg} \alpha, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{i}{2} P a^2.$$

Setzt man $f_1 = f_2 + f_3$, so folgt

$$P = 1{,}95\ G.$$

199.



Auflagermoment: $M_A = \frac{1}{3} q l^2$.

Auflagerdruck: $A = \frac{1}{2} q l$.

Biegungsmoment an der Stelle x:

$$M = -M_A + A x - \frac{1}{2} z x \cdot \frac{x}{3} = -M_A + A x - \frac{q x^3}{6 l}.$$

Gleichung der elastischen Linie: $\frac{d^2 y}{d x^2} = -\frac{M}{E J} = -i M$;

erste Integration:

$$\frac{dy}{dx} = -i\left[-M_A x + \frac{1}{2} A x^2 - \frac{q x^4}{24 l}\right],$$

zweite Integration:

$$y = -i\left[-\frac{1}{2} M_A x^2 + \frac{1}{6} A x^3 - \frac{q x^5}{120 l}\right];$$

für $x = l$:

$$f = \frac{11}{120} \frac{q l^4}{E J}.$$

200. Der Abstand der Last P von der Fläche ABD ist $p = a \sin \varphi$, wenn a die Breite des Balkens ist. Das Biegungsmoment in bezug auf diese Fläche ist $P p$, das Widerstandsmoment der Fläche $\frac{1}{6} BD \cdot h^2 = \frac{1}{6} \frac{a}{\cos \varphi} h^2$.

Die größte in der Fläche ABD entstehende Spannung ist

$$\sigma = \frac{P p}{W} = \frac{3 P}{h^2} \sin 2\varphi;$$

für $\varphi = 45^0$ ist die Spannung am größten, und zwar

$$\max \sigma = \frac{3 P}{h^2}.$$

201. Der Durchmesser z an der Stelle x ist

$$z = h - x \frac{h - h_1}{l}.$$

Setzt man in die Gleichung 40 der elastischen Linie

$$M = -P(l - x),\ J = \frac{\pi}{64} z^4, \text{ so erhält man}$$

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = k \frac{z - h_1}{z^4}, \text{ wenn } k = \frac{64 P l}{E \pi (h - h_1)} \text{ bedeutet,}$$

oder auch
$$\frac{d^2 y}{d z^2} = \frac{k l^2}{(h - h_1)^2} \cdot \frac{z - h_1}{z^4}.$$

Die erste Integration liefert:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{k l^2}{(h - h_1)^2} \left[\frac{h_1}{3 z^3} - \frac{1}{2 z^2}\right] + C,$$

und da für $x = 0 : z = h,\ \frac{dy}{dx} = -\frac{h - h_1}{l} \cdot \frac{dy}{dz} = 0$ ist:

$$C = \frac{k l^2 (3h - 2h_1)}{6 h^3 (h - h_1)^2}.$$

Die zweite Integration gibt:

$$y = \frac{k l^2}{(h - h_1)^2} \left[\frac{1}{2z} - \frac{h_1}{6 z^2}\right] + Cz + D \quad . \quad . \quad . \quad a)$$

und da für $x = 0 : z = h,\ y = 0$ ist:

$$D = -\frac{k l^2 (2h - h_1)}{2 h^2 (h - h_1)^2}.$$

Die Durchbiegung am Ende erhält man jetzt aus der Gleichung a), wenn man $z = h_1$ setzt, nämlich

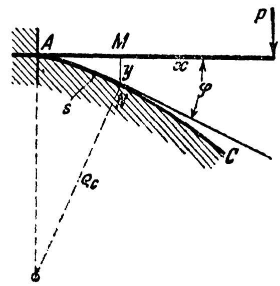
$$f = \frac{k l^2}{(h - h_1)^2} \left[\frac{1}{2 h_1} - \frac{1}{6 h_1}\right] + C h_1 + D,$$

oder
$$f = \frac{64}{3\pi} \frac{P l^3}{E h^3 h_1}.$$

202. Lösung ähnlich wie in voriger Aufgabe. $f = \frac{2}{3} \frac{\gamma l^4}{h^2 E}$, wenn γ das Einheitsgewicht bezeichnet.

203. In der Entfernung x von der Last wird die Krümmung der elastischen Linie der Feder nach Gleichung 39: $\frac{M}{EJ} = \frac{Px}{EJ}$ sein.

So lange diese Krümmung größer ist als jene der Kurve C, schmiegt sich die Feder an diese an; sie verläßt sie an der Stelle, wo



$$\frac{1}{\varrho_c} = \frac{P\,x}{E\,J}, \ x = l - s, \ s = AN$$

wird. Dann ist die gesamte Durchbiegung der Feder unter der Last P mit Benützung von Gleichung 43:

$$f = y + x \sin\varphi + \frac{1}{3}\,\frac{P\,x^3}{E\,J}\cos^2\varphi,$$

worin x, y und φ durch die vorhergehende Gleichung und die gegebene Gleichung der Kurve C bestimmt sind.

204. Es wird $y = r(1 - \cos\varphi)$, $s = r\varphi$ und

$$f = r\left[1 - \cos\varphi + k\sin\varphi + \frac{k^2}{3}\cdot\cos^2\varphi\right],$$

worin $$k = \frac{E\,J}{P\,r^2} \ \text{und} \ \varphi = \frac{l}{r} - k.$$

205. Setzt man in der Schlußgleichung der Aufgabe 203: $\cos\varphi \doteq 1$, $y \doteq 0$, so wird

$$f = x\sin\varphi + \frac{1}{3}\,\frac{P\,x^3}{E\,J} = a\sqrt{P}.$$

Durch Verbindung mit $\frac{1}{\varrho_c} = \frac{P\,x}{E\,J}$ (vergl. Aufgabe 203) wird hieraus

$$\varrho_c \sin\varphi\, x^{3/2} + \frac{1}{3}\,x^{5/2} = a\sqrt{E\,J}\cdot\varrho_c^{1/2}.$$

Setzt man noch $\varrho_c = \frac{d\,s}{d\,\varphi} = -\frac{d\,x}{d\,\varphi}$, $x^2 = z$, so erhält man

$$z\left(\frac{2\,z}{3} - \frac{d\,z}{d\,\varphi}\sin\varphi\right)^2 = -\,2\,a^2\,E\,J\,\frac{d\,z}{d\,\varphi}$$

als Differenzialgleichung der Kurve C.

206. Nennt man z den veränderlichen Durchmesser, so ist nach Gleichung 40

$$E\cdot\frac{\pi\,z^4}{64}\cdot\frac{d^2\,y}{d\,x^2} = P\,x$$

und
$$\frac{E\pi}{64P}\cdot\frac{dy}{dx}=\int_l^x\frac{x\,dx}{z^4};$$

eine zweite Integration liefert

$$\frac{E\pi}{64P}\cdot y=\int_l^x\left[dx\int_l^x\frac{x}{z^4}\,dx\right].$$

Die Durchbiegung für $x=0$ ist also

$$f=\frac{64P}{E\pi}\int_l^o\left[dx\int_l^x\frac{x}{z^4}\,dx\right].$$

Durch partielle Integration wird das Integral:

$$\int_l^o\left[dx\int_l^x\frac{x}{z^4}\,dx\right]=\left[x\int_l^x\frac{x}{z^4}\,dx\right]_l^o-\int_l^o\frac{x^2}{z^4}\,dx=\int_o^l\frac{x^2}{z^4}\,dx.$$

Dieses Integral muß ein Minimum werden bei kleinster Durchbiegung f; verändert man z, ohne x zu ändern, so wird

$$\delta f=0 \quad\text{oder}\quad \int_l^o\frac{4x^2\,dx}{z^5}\,\delta z=0\,. \quad .\quad .\quad .\quad .\quad \text{a)}$$

Anderseits soll die Materialmenge oder das Volumen des Trägers

$$V=\frac{\pi}{4}\int_o^l z^2\,dx$$

unveränderlich sein, also bei einer Änderung von z

$$\delta V=0 \quad\text{oder}\quad \int_o^l 2z\,dx\cdot\delta z=0\,. \quad .\quad .\quad .\quad .\quad \text{b)}$$

sein. Die Gleichungen a) und b) stimmen überein, wenn

$$z=c\sqrt[3]{x}$$

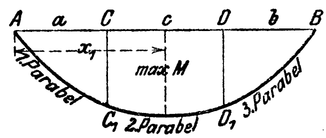
ist.

207. In C_1 und D_1 findet tangentieller Anschluß statt.
Auflagerdrücke:

$$A = Q_1\left(1 - \frac{a}{2l}\right) + Q_2\frac{b}{2l} + Q_3\frac{2b + c}{2l},$$

$$B = Q_1\frac{a}{2l} + Q_2\left(1 - \frac{b}{2l}\right) + Q_3\frac{2a + c}{2l},$$

$$_{\max}M = \left(A - \frac{Q_1}{2}\right)a + \frac{(A - Q_1)^2}{2Q_3}c,$$



$$x_1 = a + \frac{A - Q_1}{Q_3}c.$$

Hierbei müssen die Bedingungen erfüllt sein:

$$x_1 > a \text{ und } x_1 < a + c,$$

oder

$$Q_1 a - Q_2 b \begin{array}{l} < Q_3(2b + c) \\ > - Q_3(2a + c). \end{array}$$

Ist die erste Bedingung nicht erfüllt, so liegt $_{\max}M$ im Feld AC, und zwar

$$_{\max}M = \frac{A^2 a}{2Q_1}, \quad x_1 = \frac{Aa}{Q_1}.$$

Ist hingegen die zweite Bedingung nicht erfüllt, so liegt $_{\max}M$ im Feld DB, und zwar

$$_{\max}M = \frac{B^2 b}{2Q_2}, \quad l - x_1 = \frac{Bb}{Q_2}.$$

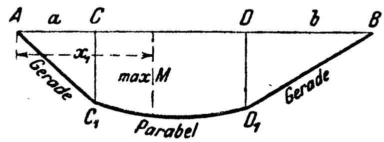
208. $C_1 D_1$ . . . Bruchpunkte.
Auflagerdrücke:

$$A = P_1\left(1 - \frac{a}{l}\right) + P_2\frac{b}{l} + Q\frac{l - a + b}{2l},$$

$$B = P_1\frac{a}{l} + P_2\left(1 - \frac{b}{l}\right) + Q\frac{l + a - b}{2l},$$

$$_{\max}M = Aa + \frac{(A - P_1)^2}{2Q}(l - a - b),$$

$$x_1 = a + \frac{A - P_1}{Q}(l - a - b).$$



Bedingung:

$$x_1 > a \text{ und } x_1 < l - b$$

oder

$$\frac{P_1 a - P_2 b}{Q} + \frac{a - b}{2} \begin{matrix} < +l \\ > -l \end{matrix}.$$

Ist eine dieser Bedingungen nicht erfüllt, so ist entweder

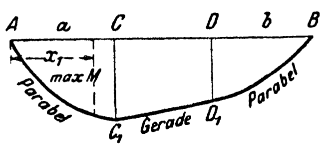
$$_{\max}M = A a \text{ in } C \text{ oder } _{\max}M = B b \text{ in } D.$$

209. C_1 . . . Bruchpunkt,
D_1 . . . tangentieller Anschluß.

Auflagerdrücke:

$$A = P\left(1 - \frac{a}{l}\right) + Q_1\left(1 - \frac{a}{2l}\right) + Q_2 \frac{b}{2l},$$

$$B = P\frac{a}{l} + Q_1 \frac{a}{2l} + Q_2\left(1 - \frac{b}{2l}\right).$$



Das $_{\max}M$ liegt entweder im Feld AC, und zwar:

$$_{\max}M = \frac{A^2 a}{2 Q_1}, \quad x = \frac{A a}{Q_1},$$

wenn die Bedingung erfüllt ist:

$$x_1 < a \text{ oder } Q_1 a - Q_2 b > 2 P (l - a).$$

Oder das $_{\max}M$ liegt im Feld DB, und zwar:

$$_{\max}M = \frac{B^2 b}{2 Q_2}, \quad l - x_1 = \frac{B b}{Q_2},$$

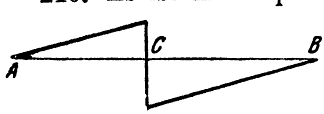
wenn die Bedingung erfüllt ist:

$$x_1 > l - b \text{ oder } Q_2 b - Q_1 a > 2 P a.$$

Ist keine dieser beiden Bedingungen erfüllt, so ist

$$_{\max}M = \left(A - \frac{Q_1}{2}\right) a \text{ in } C.$$

210. Es ist $A = B_1 = \frac{P p}{l}$, $B_2 = P$, $B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$, und

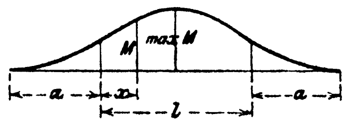


zwar ist A nach abwärts, B_1 nach aufwärts gerichtet. Die Momentenschaulinien in beiden Feldern AC und CB sind parallele Linien; ihre Gleichung im Felde AC ist

$$M = -\frac{P p}{l} x.$$

An der Stelle C springt das Biegungsmoment aus $-\frac{P\,p}{l}a$ plötzlich in $+\frac{P\,p}{l}b$ über.

211. Da keine Auflager vorhanden sind, gibt es auch keine Auflagerdrücke.



Es ist

$$M = \frac{1}{2}Q\left(\frac{x^2}{l} - x - \frac{a}{2}\right)$$

für das Mittelfeld und

$$_{\max}M = -\left(\frac{a}{2} + \frac{l}{4}\right)\frac{Q}{2}.$$

212. Der Querschnitt des Rohres ist $F = 59{,}69$ cm², das Eisengewicht 0,448 kg für 1 cm Länge, das Wassergewicht 0,254 kg für 1 cm Länge, zusammen $q = 0{,}702$ kg für 1 cm Länge. Das größte Biegungsmoment ist in der Mitte des Rohres nach Gleichung 55:

$$_{\max}M = \frac{1}{8}q\,x^2 = k_b \cdot W = k_b \cdot \frac{J}{e},$$

worin das Trägheitsmoment des Querschnitts $J = 2701$ cm⁴, $e = 10$ cm ist; ferner $k_b = 300$ at.

Man erhält $$x = 9{,}61 \text{ m}.$$

213. Setzt man in Gleichung 46: $_{\max}M = P \cdot \frac{a\,b}{l}$,

$$a = 100 \text{ cm},\ b = 300 \text{ cm},\ l = 400 \text{ cm},\ P = 1000 \text{ kg},$$

so wird $$_{\max}M = 75\,000 \text{ cmkg} = k_b \cdot \frac{J}{e},$$

worin $$J = \frac{1}{12}s^4,\quad e = \frac{s}{2},\quad k_b = 70 \text{ at};$$

man erhält $$s = 18{,}6 \text{ cm}.$$

Die Auflagerdrücke sind:

$$A = P \cdot \frac{3\text{ m}}{4\text{ m}} = 750 \text{ kg},\quad B = P \cdot \frac{1\text{ m}}{4\text{ m}} = 250 \text{ kg}.$$

Setzt man: $$A = k_z \cdot \frac{\pi d_1^2}{4},\quad B = k_z \cdot \frac{\pi d_2^2}{4},$$

so wird $$d_1 = 1{,}2 \text{ cm und } d_2 = 0{,}7 \text{ cm}.$$

214. Querschnittsfläche: $F = 224\ \text{cm}^2$.
Gewicht für 1 cm Länge:

$$q = F \cdot \gamma = 224 \cdot 0{,}0078 = 1{,}7472\ \frac{\text{kg}}{\text{cm}}.$$

Der Träger ist zu rechnen nach Gleichung 55:

$$_{\max} M = \frac{1}{8}\, q\, l^2 = K_b \cdot W.$$

Im ersten Falle (Flansch 20 cm horizontal) ist

$$J_1 = \frac{1}{12}\left[20 \cdot \overline{40}^3 - 16 \cdot \overline{36}^3\right] = 44\,459\ \text{cm}^4,$$

$$W = \frac{J_1}{20\ \text{cm}} = 2222{,}95\ \text{cm}^3,$$

$$l = 71{,}338\ \text{m}.$$

Im zweiten Falle (Höhe 40 cm horizontal) ist

$$J_2 = \frac{1}{12}\left[4 \cdot \overline{20}^3 + 36 \cdot 4^3\right] = 2859\ \text{cm}^4,$$

$$W = \frac{J_2}{10\ \text{cm}} = 285{,}9\ \text{cm}^3,$$

$$l = 25{,}584\ \text{m}.$$

215. Das Trägheitsmoment des Querschnitts in bezug auf seine horizontale Schwerlinie ist

$$J = \frac{4}{3}\, a\, r\,(a^2 + 2\,r^2) + \pi\, r^2\left(a^2 + \frac{r^2}{4}\right) = 163\,540\ \text{cm}^4.$$

Die Gleichung für das größte Biegungsmoment (unter der Last) wird

$$P \cdot \frac{100\ \text{cm} \cdot 150\ \text{cm}}{250\ \text{cm}} = k_b \cdot \frac{J}{e}.$$

Mit $k_b = 80$ at, $e = 25$ cm wird $P = 8722{,}1$ kg.

216. Um das Trägheitsmoment des Querschnitts rasch zu berechnen, nehme man zunächst das Trägheitsmoment des umschließenden Rechtecks und bringe sodann die Trägheitsmomente der fehlenden Rechtecke in Abzug. Es ist in bezug auf die horizontale Schwerlinie

$$J = \frac{1}{12}\left[30 \cdot \overline{50}^3 - 7 \cdot \overline{44}^3 - 17 \cdot \overline{41}^3 - 3 \cdot \overline{24}^3\right] = 161\,715\ \text{cm}^4.$$

Die Gleichung für das in der Mitte des Trägers stattfindende größte Biegungsmoment lautet

$$\frac{1}{8} q l^2 + P a = k_b \cdot \frac{J}{e}.$$

Setzt man q = 40 kg für 1 cm Länge, l = 800 cm, a = 200 cm, e = 25 cm, so wird

$$P = 27\,986{,}5 \text{ kg}.$$

217. Aus Gleichung 55 und 57 mit $\max M = \frac{2J}{h} \cdot \max \sigma$:

$$\max \sigma = \frac{24}{5} \cdot \frac{E h}{l^2} \cdot f.$$

218. Die Last P_1 des einen Balkens habe die Entfernungen a_1, b_1 von den Auflagern, die Last P_2 des anderen Balkens die Entfernungen a_2, b_2, dann ist

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2.$$

Nennt man f_1, f_2 die größten Durchbiegungen der beiden Balken, so ist nach Gleichung 50:

$$f_1 : f_2 = \frac{P_1 l_1^3}{J_1} : \frac{P_2 l_2^3}{J_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad a)$$

Das größte Biegungsmoment des einen Balkens ist

$$M = \frac{P_1 a_1 b_1}{l_1} = 2\sigma \cdot \frac{J_1}{h_1},$$

wenn σ die größte Spannung, h_1 die Höhe des Balkens ist.

Für beide Balken gilt also das Verhältnis:

$$M_1 : M_2 = P_1 l_1 : P_2 l_2 = \frac{J_1}{h_1} : \frac{J_2}{h_2} \quad \ldots\ldots \quad b)$$

Verbindet man die Gleichungen a) und b), so bleibt

$$f_1 : f_2 = \frac{l_1^2}{h_1} : \frac{l_2^2}{h_2}.$$

219. Die zulässige Biegungsspannung ist

$$k_b = \frac{1}{11} 670 \text{ at} = 61 \text{ at}.$$

Nach Gleichung 46 ist das größte Biegungsmoment des Balkens

$$800 \text{ kg} \cdot \frac{100 \text{ cm} \cdot 300 \text{ cm}}{400 \text{ cm}} = k_b \cdot W$$

und mit

$$W = \frac{1}{6} b h^2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{7} h \cdot h^2 = \frac{5}{42} h^3$$

folgt: $h = 20{,}3$ cm, $b = 14{,}5$ cm.

Hieraus: $J = \frac{1}{12} b h^3 = 10\,108 \text{ cm}^4.$

Dann ergeben die Gleichungen 54, 49, 50: die Auflagerwinkel in A und B:

$$\alpha = 0^0 18' 36'', \ \beta = 0^0 13' 17'',$$

die Durchbiegung unter der Last:

$$f = 0{,}464 \text{ cm}$$

und die größte Durchbiegung:

$$_{\max} f = 0{,}576 \text{ cm}$$

in der Entfernung $l - x' = 1{,}764$ m vom Auflager A.

220. Die Auflagerdrücke sind:

$$A = 920 \text{ kg}, \ B = 880 \text{ kg}.$$

Die Biegungsmomente in C, D, E:

$$M_c = 920 \text{ mkg}, \ M_D = 1400 \text{ mkg}, \ M_E = 440 \text{ mkg}.$$

Das größte Biegungsmoment M_D ist der weiteren Rechnung zugrunde zu legen:

$$M_D = 140\,000 \text{ cmkg} = k_b \cdot \frac{J}{e_1} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad a)$$

Hierin ist das Trägheitsmoment des Querschnitts

$$J = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4) = \frac{\pi}{64} D^4 (1 - \alpha^4),$$

wenn $\alpha = \frac{d}{D} = 0{,}6; \ e_1 = \frac{D}{2}.$

Die zulässige Biegungsspannung für Gußeisen ist nach Aufgabe 165:

$$k_b = \frac{4}{3} k_z \sqrt{\frac{e_1}{z_0}}, \quad z_0 = 0{,}26\, D$$

und mit $k_z = 300$ at: $k_b = 556$ at.

Sodann liefert Gleichung a) oben

$$D = 14{,}4 \text{ cm}, \ d = 8{,}6 \text{ cm}.$$

221. Das Trägheitsmoment des Querschnitts in bezug auf die horizontale Schwerlinie ist

$$J = i_2 + 2\,[i_1 + 42{,}53\,(6{,}73 + 12)^2] = 36\,201 \text{ cm}^4.$$

Die Belastung durch Eigengewicht ist 102,5 kg für den Meter, somit die ganze Belastung $q = 400$ kg für den Meter.

Benützt man nun Gleichung 57:

$$_{\max} f = 0{,}5 \text{ cm} = \frac{5}{384} \cdot \frac{q\,l^4}{E\,J},$$

so folgt $$l = 9{,}13 \text{ m}.$$

222. Das größte Biegungsmoment ist in der Mitte des Trägers

$$_{\max} M = \frac{q}{2} z(l - z).$$

Das Trägheitsmoment des Querschnitts in bezug auf jede Schwerlinie ist nach Aufgabe 113:

$$J = \frac{5\sqrt{3}}{16} s^4,$$

das Widerstandsmoment $W = \frac{5}{8} s^3.$

Setzt man $_{\max} M = k_b \cdot W$, so folgt

$$z = \frac{l}{2}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{5\,s^3\,k_b}{q\,l^2}}\right];$$

die andere Wurzel ist unbrauchbar, weil $z < \frac{l}{2}$ sein muß.

223. Das Maximalmoment der drei Dreieckslasten in der Mitte des Trägers ist $\frac{7}{18} Q\,l$; daraus ergibt sich $P = \frac{7}{6} Q$.

224. Das Biegungsmoment unter P ist

$$M = \frac{x}{l}\Big[P(l - x) + Q(l - x - a)\Big].$$

Setzt man $\frac{dM}{dx} = 0$, so erhält man die gewünschte Stelle:

$$x = \frac{l}{2} - \frac{Q\,a}{2(P + Q)}$$

und das größte Biegungsmoment

$$_{\max} M = \frac{[P\,l + Q(l - a)]^2}{4\,l(P + Q)}.$$

225. Die Gleichung der elastischen Linie des Feldes AC ist:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = -\frac{M}{E\,J} = -\frac{P\,x}{E\,J} = -i\,P\,x,$$

woraus durch Integration:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2} i P x^2 + C_1,$$

$$y = -\frac{1}{6} i P x^3 + C_1 x.$$

Die zweite Integrationskonstante ist Null, weil für $x = 0$ auch $y = 0$ wird.

Die Gleichung der elastischen Linie des Feldes CD ist:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -i P a$$

und nach Integration

$$\frac{dy}{dx} = -i P a x + C_2,$$

$$y = -\frac{1}{2} i P a x^2 + C_2 x + D.$$

Führt man nun die Bedingung ein, daß für $x = \frac{l}{2}$: $\frac{dy}{dx} = 0$ ist, so erhält man $C_2 = \frac{1}{2} i P a l$ und beachtet man, daß in C beide elastische Linien tangentiellen Anschluß haben müssen, so ist für $x = a$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2} i P a^2 + C_1 = -i P a^2 + C_2,$$

$$y = -\frac{1}{6} i P a^3 + C_1 a = -\frac{1}{2} i P a^3 + C_2 a + D,$$

woraus sich $C_1 = \frac{1}{2} i P a (l - a)$ und $D = -\frac{1}{6} i P a^3$ ergeben. Endlich wird mit diesen Werten die Durchbiegung in der Mitte:

$$f = \frac{P a}{24 E J}(3 l^2 - 4 a^2).$$

Eigentlich sollte die elastische Linie zwischen C und D als Kreisbogen behandelt werden, und nicht, wie oben angenähert, als Parabelbogen. Denn zwischen C und D ist das Biegungsmoment $M = P a$, also unveränderlich, die elastische Linie also nach Gleichung 39 ein Kreisbogen.

226. Man findet die Durchbiegungen entweder direkt, indem man die Gleichungen der elastischen Linien der drei Felder AC, CD und DB aufstellt; oder einfacher mit Hilfe der Gleichungen 49, 47, 48, indem man zuerst die Durchbiegungen ermittelt, welche die Last P_1 allein in C und D hervorruft und hierzu die Durchbiegungen addiert, welche die Last P_2 allein an den gleichen Stellen erzeugt. So findet man mit Hilfe der Gleichung 49 und, da die Stelle C im linken Felde der Last P_2 liegt, mit Hilfe der Gleichung 47:

$$f_1 = \frac{P_1}{3EJl} a_1^2 (l - a_1)^2 + \frac{P_2}{6EJl} a_1 b_2 (l^2 - a_1^2 - b_2^2)$$

und analog für die Stelle D:

$$f_2 = \frac{P_2}{3EJl} b_2^2 (l - b_2)^2 + \frac{P_1}{6EJl} a_1 b_2 (l^2 - a_1^2 - b_2^2).$$

227. Zur Lösung dieser Aufgabe benützt man am besten die Gleichungen 52 und 53, indem man den Wert von $\frac{dy}{dx}$ für das zweite Feld der Last P_1 und jenen für das erste Feld der Last P_2 addiert und gleich Null setzt, d. h. die Stelle der horizontalen Tangente an die resultierende elastische Linie sucht:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{P_1} + \left(\frac{dy}{dx}\right)_{P_2} = 0.$$

Dies liefert für die fragliche Stelle x die Gleichung

$$3x^2 (P_1 a_1 - P_2 b_2) - 6 P_1 l a_1 x + P_1 a_1 (2l^2 + a_1^2) + P_2 b_2 (l^2 - b_2^2) = 0$$

und mit den besonderen Werten:

$$x = 1{,}621 \text{ m}.$$

228. Setzt man in der Auflösung der vorigen Aufgabe: $x = \frac{l}{2}$, so erhält man das gewünschte Verhältnis:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{b_2 (l^2 - 4 b_2^2)}{a_1 (l^2 - 4 a_1^2)}.$$

Die Durchbiegung in der Mitte des Balkens erhält man, wenn man in Gleichung 48: P durch P_1, a durch a_1 ersetzt, und in Gleichung 47: P durch P_2, b durch b_2 ersetzt, in beiden Gleichungen $x = \frac{l}{2}$ einführt und die Gleichungen addiert; dann wird mit Berücksichtigung des obigen Verhältnisses

$$_{\max} f = \frac{P_1 a_1}{24 EJ} \cdot \frac{4 (l^2 - 2 a_1^2)(l^2 - 2 b_2^2) - l^4}{l^2 - 4 b_2^2}.$$

Bei Einführung der besonderen Werte wird

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{112}{125} \quad \text{und} \quad {}_{\max}f = \frac{37}{1344} \cdot \frac{P_1 l^3}{EJ}.$$

229. Die Auflagerdrücke sind:

$$A = \frac{4}{9} q l, \quad B = \frac{2}{9} q l.$$

Das Biegungsmoment im Felde AC in der Entfernung x von A ist:

$$M = Ax - \frac{1}{2} q x^2.$$

Setzt man $\frac{dM}{dx} = 0$, so wird für die Stelle des größten Biegungsmomentes (Bruchquerschnitt):

$$x = \frac{4}{9} l, \quad {}_{\max}M = \frac{8}{81} q l^2.$$

Die Gleichung der elastischen Linie des Feldes AC ist:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EJ} = -i\left(Ax - \frac{1}{2} q x^2\right)$$

und nach Integration

$$\frac{dy}{dx} = -i\left(\frac{1}{2} A x^2 - \frac{1}{6} q x^3\right) + C \quad \ldots \ldots \text{a)}$$

$$y = -i\left(\frac{1}{6} A x^3 - \frac{1}{24} q x^4\right) + Cx \quad \ldots \ldots \text{b)}$$

Die Gleichung der elastischen Linie des Feldes CB ist:

$$\frac{d^2y_1}{dx_1^2} = -\frac{M_1}{EJ} = -iBx_1,$$

wenn die Koordinate x_1 vom Auflager B aus gezählt wird; nach Integration ist:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{i}{2} B x_1^2 + C_1 \quad \ldots \ldots \text{c)}$$

$$y_1 = -\frac{i}{6} B x_1^3 + C_1 x_1 \quad \ldots \ldots \text{d)}$$

An der Grenze C der beiden Felder ist:

$$x = \frac{2}{3} l, \quad x_1 = \frac{1}{3} l, \quad y = y_1, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{dy_1}{dx_1}.$$

Setzt man diese Werte ein, so wird $C = \frac{8}{243} i q l^3$ und sodann aus der Gleichung für y mit $x = \frac{l}{2}$:

$$f = \frac{305}{31104} \frac{q l^4}{E J}.$$

230. Die Auflagerdrücke sind

$$A = \frac{1}{3} a l, \quad B = \frac{1}{6} a l.$$

Die Belastung der Längeneinheit für eine beliebige Stelle ξ ist

$$q = a\left(1 - \frac{\xi}{l}\right)$$

und das Biegungsmoment für einen Querschnitt in der Entfernung x von A:

$$M = A x - \int_0^x q \, d\xi (x - \xi) = \frac{a x}{6 l}(2 l^2 - 3 x l + x^2).$$

Für den Bruchquerschnitt setze $\frac{dM}{dx} = 0$, woraus

$$2 l^2 - 6 x_1 l + 3 x_1^2 = 0$$

und

$$x_1 = l\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0{,}4226\, l,$$

$$_{\max} M = \frac{\sqrt{3}}{27} a l^2 = 0{,}0641\, a l^2.$$

231. Es ist zunächst die veränderliche Höhe

$$h = h_1 - (h_1 - h_2) \frac{x}{l},$$

sodann das Biegungsmoment an der Stelle x

$$M = \frac{q x}{2}(l - x)$$

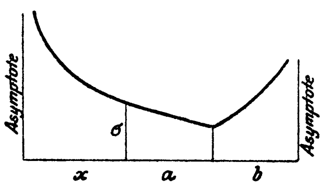
und die obere oder untere Randspannung im Querschnitt

$$\sigma = \frac{M h}{2 J} = \frac{3 q}{b} \cdot \frac{x (l - x)}{h^2}.$$

Untersucht man den Faktor $\frac{x(l-x)}{h^2}$ auf sein Maximum, so wird für den Bruchquerschnitt

$$x_1 = l\frac{h_1}{h_1+h_2},\quad h = \frac{2h_1h_2}{h_1+h_2},\quad \max\sigma = \frac{3ql^2}{4bh_1h_2}.$$

232. Der Auflagerdruck in A ist:



$$A = \frac{1}{48}\frac{\pi\gamma d^2}{a+b}(a^2+4ab+3b^2),$$

das Biegungsmoment in x ist

$$M = Ax - \frac{1}{48}\pi\gamma x^2 y^2,$$

wenn $y = \frac{xd}{a}$ der Durchmesser bei x ist.

Dann wird die größte Spannung im Querschnitt x:

$$\max\sigma = \frac{Me}{J} = \frac{32\,M}{\pi\,y^3} = \frac{2\gamma a}{3d}\left[\frac{a^2(a+3b)}{x^2} - x\right].$$

233. Nennt man z den Halbmesser des Querschnitts unter P, so ist

$$z = r\left(1+\frac{x}{l}\right).$$

Das Biegungsmoment unter der Last ist $M = P\frac{x(l-x)}{l}$, das Widerstandsmoment $W = \frac{\pi}{4}z^3$, somit die Randspannung des Querschnitts

$$\sigma = \frac{4Pl^2}{\pi r^3}\cdot\frac{x(l-x)}{(l+x)^3}.$$

Setzt man $\frac{d\sigma}{dx} = 0$, so wird für die Stelle der größten Spannung

$$x_1 = l(2-\sqrt{3}) = 0{,}2679\,l$$

und die größte Spannung selbst

$$\max\sigma = \frac{2}{3\sqrt{3}\,\pi}\frac{Pl}{r^3} = 0{,}1225\frac{Pl}{r^3}.$$

234. Der Auflagerdruck in A ist $\frac{2}{9}$ q l.

Nennt man y die Ordinate der Belastungslinie des ersten Feldes in der Entfernung x von A, so ist $y = \frac{3q}{2l}$ x und das Biegungsmoment an der Stelle x:

$$M = Ax - \frac{1}{2} x y \cdot \frac{x}{3} = Ax - \frac{q}{4l} x^3.$$

Setzt man $\frac{dM}{dx} = 0$, so wird $x_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} l = 0{,}5443\ l$,

damit: $$_{\max} M = \frac{8\sqrt{2}}{81\sqrt{3}} q l^2 = 0{,}0806\, q l^2.$$

235. Der Auflagerdruck in A ist $\frac{Q}{2}$.

Nennt man a und q die Ordinaten der Belastungslinie in A und in der Entfernung ξ von A, so ist

$$a = \frac{2Q}{l}, \quad q = a\left(1 - \frac{2\xi}{l}\right)$$

und das Biegungsmoment an der Stelle x

$$M = Ax - \int_{\xi=0}^{\xi=x} q(x - \xi)\, d\xi = \frac{Q}{6l^2}(3xl^2 - 6x^2l + 4x^3).$$

Die Gleichung der elastischen Linie

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EJ} = -iM$$

gibt integriert:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{iQ}{12l^2}(3l^2x^2 - 4lx^3 + 2x^4) + C,$$

$$y = -\frac{iQ}{60l^2}(5l^2x^3 - 5lx^4 + 2x^5) + Cx.$$

Die Konstante C bestimmt man aus der Bedingung, daß für

$$x = \frac{l}{2}: \ \frac{dy}{dx} = 0 \ \text{ ist, mit } C = \frac{iQl^2}{32}.$$

Für $x = \frac{l}{2}$ erhält man die Durchbiegung:

$$f = \frac{3}{320}\frac{Ql^3}{EJ}.$$

236. Auflagerdrücke:

$$A = \frac{aq}{2l}(2l - a), \qquad B = \frac{a^2 q}{2l}.$$

Gleichungen der elastischen Linien der Felder AC und CB wie in Aufgabe 229: a) b) c) d).

An der Grenze C, d. h. für $x = a$, $x_1 = l - a$ wird sein müssen:

$$\frac{dy}{dx} \text{ aus Gleichung a)} = -\frac{dy_1}{dx_1} \text{ aus Gleichung c)}$$

$$y \text{ aus Gleichung b)} = y_1 \quad \text{ aus Gleichung d).}$$

Hieraus erhält man zunächst die Konstante der Gleichung a):

$$C = \frac{i a^2 q}{24 l}(2l - a)^2$$

und für die größte Durchbiegung aus derselben Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = -i\left(\frac{1}{2}Ax^2 - \frac{1}{6}qx^3\right) + C = 0,$$

woraus, wenn man $\frac{x}{l} = \xi$, $\frac{a}{l} = \alpha$ setzt, für ξ die Gleichung folgt:

$$4\xi^3 - 6\alpha(2-\alpha)\xi^2 + \alpha^2(2-\alpha)^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad \text{e)}$$

Der brauchbare Wurzelwert ξ_1 dieser Gleichung gibt die Stelle $x_1 = l\xi_1$ der größten Durchbiegung.

Dann folgt diese selbst aus Gleichung b):

$$_{\max}f = Cx_1 - i\left(\frac{1}{6}Ax_1^3 - \frac{1}{24}qx^4\right) \text{ oder}$$

$$_{\max}f = \frac{q l^4 \xi_1}{24EJ}\left[\alpha^2(2-\alpha)^2 - 2\alpha(2-\alpha)\xi_1^2 + \xi_1^3\right]$$

$$= \frac{q l^4 \xi_1^3}{24EJ}[4\alpha(2-\alpha) - 3\xi_1].$$

237. Die Voraussetzung verliert ihre Richtigkeit, sobald die größte Durchbiegung an die Belastungsgrenze C fällt, d. h. wenn in voriger Aufgabe $x = a$ oder $\xi = \alpha$ wird. Dann übergeht Gleichung e) in

$$7\alpha^2 - 12\alpha + 4 = 0$$

und

$$a = 0{,}4531\ l.$$

238. Solange $AC = a$ noch klein ist (und zwar kleiner als 0,4531 l nach der vorhergehenden Aufgabe), wird die größte Durchbiegung im Felde CB liegen.

Benützt man für die elastischen Linien der beiden Felder wieder die Gleichungen a) b) c) d) aus Aufgabe 229 und bestimmt die darin vorkommende Konstante C_1 in derselben Weise, wie in Aufgabe 236 die Konstante C ermittelt wurde, so erhält man

$$C_1 = \frac{i a^2 q}{24 l}(2 l^2 - a^2).$$

Setzt man nun im Felde CB: $\frac{d y_1}{d x_1} = 0$, so wird nach Gleichung c) Aufgabe 229:

$$x_1 = \sqrt{\frac{2 l^2 - a^2}{6}}$$

für die Stelle der größten Durchbiegung (von B aus gezählt) und die Durchbieguug selbst aus Gleichung d)

$$\max f = \frac{i a^2 q (2 l^2 - a^2)}{36 l} \sqrt{\frac{2 l^2 - a^2}{6}}.$$

Wird $a = 0$, so ist $x_1 = \frac{l}{\sqrt{3}} = l - x$ und somit

$$x = 0{,}4226\, l,$$

d. i. die äußerste linke Stelle der größten Durchbiegung.

Wird $a = x = 0{,}4531\, l$, so liegt nach Aufgabe 237 die größte Durchbiegung unter C.

Wird $a = l$, so wird $x = \frac{l}{2}$, d. i. die äußerste rechte Stelle. Die größte Durchbiegung des Trägers bewegt sich also in den Grenzen

$$x = 0{,}4226\, l \text{ bis } x = 0{,}5\, l.$$

239. Setzt man in Gleichung 51: ξ statt a und $l - \xi$ statt b, so wird die Entfernung der größten Durchbiegung vom Auflager B:

$$x' = \sqrt{\frac{l^2 - \xi^2}{3}}.$$

Wenn ξ alle Werte von 0 bis $\frac{l}{2}$ durchläuft, so ändort sich x' von $\frac{l}{\sqrt{3}}$ bis $\frac{l}{2}$. Die größten Durchbiegungon liegen demnach alle in jenom mittleren Teilo des Trägers, dessen Grenzen 0,077 l von der Trägermitte entfernt sind.

240. Der Auflagerdruck in A ist

$$A = \frac{q}{l}\left(l^2 - l\xi + \frac{\xi^2}{2}\right) + P\left(1 - \frac{\xi}{l}\right).$$

Das Moment in C ist:

$$M = A\xi - \frac{1}{2} q \xi^2.$$

Sotzt man $\frac{dM}{d\xi} = 0$, so erhält man für die Stelle, an welcher M am größten wird, die Gleichung:

$$\xi = l + \frac{2}{3} m - \frac{1}{3} \sqrt{3l^2 + 6lm + 4m^2},$$

worin $m = \frac{P}{q}$ ist. Der zweite Wurzelwert ist unbrauchbar, weil $\xi < l$ sein muß.

241. Nennt man f_1 die Durchbiegung in der Mitte des größeren Stabes, so ist, wenn der kleinere Stab $2b$ unter dem größeren $2a$ liegt und diesen somit mit D nach aufwärts drückt, nach den Gleichungen 49 und 57:

$$f_1 = \frac{5}{24} \frac{qa^4}{EJ} - \frac{1}{6} \frac{Da^3}{EJ}.$$

Ebenso findet man für die Durchbiegung in der Mitte des kleineren Stabes

$$f_2 = \frac{5}{24} \frac{qb^4}{EJ} + \frac{1}{6} \frac{Db^3}{EJ}.$$

Setzt man $f_1 = f_2$, so wird

$$D = \frac{5}{4} q \frac{a^4 - b^4}{a^3 + b^3}.$$

Ferner ist

$$A = qa - \frac{D}{2}, \quad B = qb + \frac{D}{2},$$

woraus

$$\frac{A}{B} = \frac{3a^4 + 8ab^3 + 5b^4}{5a^4 + 8a^3b + 3b^4}.$$

242. Die Differenzial-Gleichung der gebogenen Achse des Stabes wird in diesem Falle mit Benützung der Aufgabe 176:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\varrho} = -\frac{M^5}{CK^5},$$

worin

$$K = \int z^{6/5} dF \text{ ist.}$$

Boachtot man, daß für $x = 0 : y = 0$, und für $x = \frac{l}{2} : \frac{dy}{dx} = 0$ wird, so erhält man nach zweimaliger Integration dio Gloichung der gobogenen Achse

$$y = \frac{P^5}{3 \cdot 2^6 \cdot CK^5} \left[\left(\frac{l}{2}\right)^6 x - \frac{1}{7} x^7 \right].$$

243. Setzt man in voriger Aufgabe $x = \frac{l}{2}$, ferner

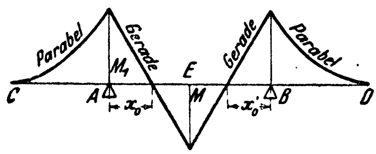
$$K = b\int_{-h/2}^{+h/2} z^{6/5}\,dz = \frac{5}{22}\,b\,h^2\,\sqrt[5]{\frac{h}{2}},$$

so wird die Durchbiegung in der Mitte:

$$p = \frac{1{,}1^5}{14}\,\frac{P^5 l^7}{C b^5 h^{11}}.$$

244. Auflagerdrücke: $A = B = Q + \frac{P}{2}$.

Größtes Biegungsmoment: entweder



$M_1 = -\frac{1}{2}\,Q\,a$ in A und B

oder

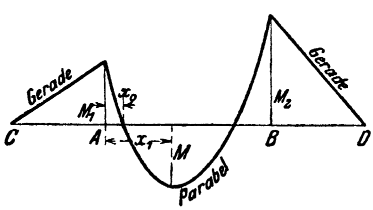
$$M = \frac{1}{4}\,P\,l - \frac{1}{2}\,Q\,a \text{ in E, je nachdem } \frac{P}{Q} \lessgtr \frac{4a}{l}.$$

Wendepunkte: $x_0 = \frac{Q}{P}\cdot a = x'_0$.

245. Auflagerdrücke:

$A = P_1\left(1 + \frac{a}{l}\right) - P_2\,\frac{a}{l} + \frac{Q}{2}$,

$B = P_2\left(1 + \frac{a}{l}\right) - P_1\,\frac{a}{l} + \frac{Q}{2}$.



Größtes Biegungsmoment: entweder $M_1 = -P_1 a$ in A oder $M_2 = -P_2 a$ in B oder

$$M = \frac{(P_1 - P_2)^2 a^2}{2\,Q\,l} - (P_1 + P_2)\,\frac{a}{2} + Q\,\frac{l}{8}$$

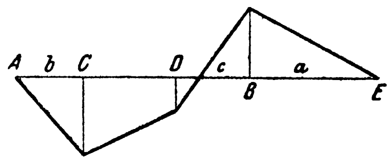
in der Entfernung $x_1 = \frac{l}{2} + \frac{P_1 - P_2}{Q}\,a$ von A.

Wendepunkte: ihre Abstände x_0 von A sind die Wurzeln der Gleichung

$$x^2 - x\left(l + 2\,\frac{P_1 - P_2}{Q}\,a\right) + 2\,a\,l\,\frac{P_1}{Q} = 0.$$

246. Auflagerdrücke: $A = -P_1\frac{a}{l} + P_2\left(1 - \frac{b}{l}\right) + P_3\,\frac{c}{l}$,

$$B = P_1\left(1 + \frac{a}{l}\right) + P_2\,\frac{b}{l} + P_3\left(1 - \frac{c}{l}\right).$$



Größtes Biegungsmoment: entweder in B:

$$M_B = -P_1 a,$$

oder in C:

$$M_C = A b,$$

oder in D:

$$M_D = A(l-c) - P_2(l-b-c).$$

Ist $M_D = 0$ oder:

$$P_3 = P_1 \frac{a}{c} - P_2 \frac{b}{l-c},$$

so liegt der Wendepunkt in D. Ist P_3 kleiner als dieser Wert, so liegt der Wendepunkt zwischen C und D im Abstand

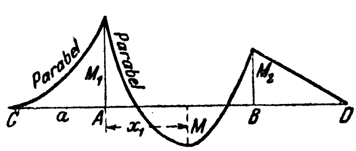
$$x_0 = \frac{P_2 b l}{P_1 a + P_2 b - P_3 c} \text{ von A.}$$

Ist P_3 größer als obiger Wert, so liegt der Wendepunkt zwischen D und B im Abstand

$$x_0 = \frac{P_2 b + P_3(l-c)}{P_1 a + P_2 b + P_3(l-c)} l \text{ von A.}$$

247. Auflagerdrücke: $A = Q\frac{l+a}{2l} - P\frac{a}{l}$,

$$B = Q\frac{l-a}{2l} + P\left(1 + \frac{a}{l}\right).$$



Größtes Biegungsmoment: entweder

$$M_1 = -\frac{Q}{2}\frac{a^2}{l+a} \text{ in A,}$$

oder $M_2 = -Pa$ in B,

oder

$$M = \frac{Q}{8l^2(l+a)}\left\{\left[l^2 + a^2 - 2a(l+a)\frac{P}{Q}\right]^2 - 4l^2a^2\right\}$$

in der Entfernung

$$x_1 = \frac{l}{2} + \frac{a^2}{2l} - \frac{P}{Q}\frac{a(l+a)}{l} \text{ von A.}$$

Wendepunkte: ihre Abstände x_0 von A sind die Wurzeln der Gleichung:

$$x^2 - 2x\left[\frac{l^2+a^2}{2l} - \frac{P}{Q}\frac{a(l+a)}{l}\right] + a^2 = 0$$

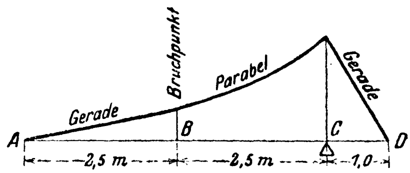
248.

$P = 25{,}625$ t,

Druck in $C = 32{,}125$ t,

$M_B = 10$ mt,

$M_C = 25{,}625$ mt.

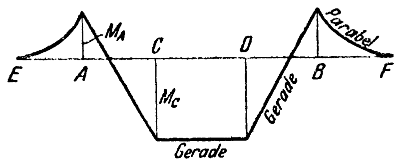


249. Auflagerdrücke: $A = B = 4{,}8$ t.

Biegungsmomente:

$M_A = -1{,}35$ mt,

$M_C = +3{,}15$ mt.



Für einen Querschnitt in der Entfernung x von A ist das Biegungsmoment:

$$M = -q \cdot 1{,}5 \text{ m} (0{,}75 \text{ m} + x) + A \cdot x$$

und für $M = 0$: $\qquad x_1 = 0{,}45$ m.

Setzt man das größte Biegungsmoment

$$_{\max} M = M_C = 315\,000 \text{ cmkg} = k_b \cdot \frac{1}{6} b h^2 = k_b \cdot \frac{5}{42} h^3,$$

so folgt $\qquad h = 35{,}4$ cm, $b = 25{,}3$ cm.

250. $P = 7{,}8$ t, $D = 33{,}8$ t. Das größte Biegungsmoment ist 64 mt, der Bruchquerschnitt über B.

Das Trägheitsmoment des Querschnitts für die horizontale Schwerlinie ist:

$$J = \frac{1}{12}[20x^3 - 17{,}2(x - 2{,}8)^3 - 2{,}8(x - 30)^3]$$
$$= 33{,}04x^2 - 663{,}7x + 6331{,}46.$$

Setzt man

$$6\,400\,000 \text{ cmkg} = 800 \text{ at} \cdot \frac{J}{x/_2},$$

so erhält man für x die Gleichung

$$x^2 - 141{,}15x + 191{,}63 = 0$$

und $\qquad x = 139{,}8$ cm.

Der zweite Wurzelwert ist unbrauchbar.

251. Die Auflagerdrücke sind allgemein:

$$A = P\frac{b}{l} + q l_1\left(1 + \frac{l_1}{2l}\right), \quad B = P\frac{a}{l} - \frac{1}{2} q \frac{l_1^2}{l}.$$

Die Biegungsmomente in A und D sind:

$$M_A = -\frac{1}{2} q l_1^2, \quad M_D = \frac{P a b}{l} - \frac{1}{2} q b \frac{l_1^2}{l}.$$

Setzt man $-M_A = M_D$, so wird

$$l_1 = \sqrt{\frac{2\,P\,a\,b}{q\,(l+b)}},$$

ferner

$$M_D = \frac{P\,a\,b}{l+b} = -M_A,$$

$$A = \frac{2\,P\,b}{l+b} + q\,l_1, \quad B = \frac{P\,a}{l+b}.$$

252. Der Auflagerdruck in A ist $q\left(\frac{l}{2} - x\right)$, das Biegungsmoment in C: $M_C = A\,x$, jenes in B: $M_B = -\frac{1}{2}\,q\,x^2$. Setzt man $M_C = -M_B$, so folgt $x = \frac{l}{3}$ und $\frac{1}{18}\,q\,l^2$ der absolute Wert beider Biegungsmomente.

253. z muß derart gewählt werden, daß die auftretenden Biegungsmomente möglichst klein sind. Dies wird, da die Biegungsmomente in A, B und in der Mitte des Trägers die größten sein werden, zutreffen, wenn diese drei Momente, vom Vorzeichen abgesehen, einander gleich sind. Das Biegungsmoment in A und B ist $\frac{q}{8}(l-z)^2$, in der Mitte $\frac{q\,l}{4}\left(z - \frac{l}{2}\right)$; die Gleichsetzung ergibt

$$z = l\,(2 - \sqrt{2}) = 0{,}586\ l.$$

254. Ist $A = \frac{1}{2}\,q\,l$ der Auflagerdruck, so ist in der Entfernung x vom Ende des Trägers das Biegungsmoment des Mittelfeldes

$$M = A\left(x - \frac{l-z}{2}\right) - \frac{1}{2}\,q\,x^2.$$

Durch Integration der Gleichung der elastischen Linie

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{E\,J}$$

erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{q}{E\,J}\left[\frac{1}{4}\,l\,x^2 - \frac{1}{4}\,l\,x\,(l-z) - \frac{1}{6}\,x^3\right] + C.$$

Da sowohl für $x = \frac{l}{2}$ als auch für $x = \frac{l-z}{2}$ die Tangente der elastischen Linie horizontal sein soll, also $\frac{dy}{dx} = 0$ ist, so folgt für z die Gleichung: $z^3 - 6\,l\,z^2 + 3\,l^2\,z = 0$,

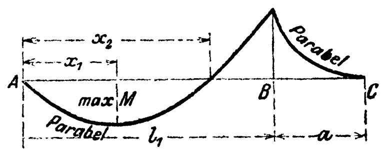
woraus $z = 0$ und $z = l\,(3 - \sqrt{6}) = 0{,}550\ l.$

255. Auflagerdrücke: $A = q\,l\left(1 - \frac{l}{2\,l_1}\right)$,

$$B = \frac{1}{2}\frac{q\,l^2}{l_1}.$$

Im Felde AB ist das Biegungsmoment:

$$M = A\,x - \frac{1}{2}\,q\,x^2.$$



Setzt man

$\frac{dM}{dx} = 0$, so wird

$$x_1 = l\left(1 - \frac{l}{2\,l_1}\right)$$

und
$$+\max M = \frac{1}{2}\,q\,l^2\left(1 - \frac{l}{2\,l_1}\right).$$

Ein anderer Größtwert des Biegungsmomentes findet in B statt; dort ist

$$-\max M = -\frac{1}{2}\,q\,l^2\left(1 - \frac{l_1}{l}\right)^2.$$

(Kein analytisches Maximum, daher $\frac{dM}{dx}$ nicht gleich Null.)

Das Biegungsmoment wird Null für

$$x_2 = 2\,x_1 = l\left(2 - \frac{l}{l_1}\right).$$

Gleichung der elastischen Linie:

Feld AB, x von A nach rechts gezählt:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = -\frac{M}{EJ} = -i\left(A\,x - \frac{1}{2}\,q\,x^2\right).$$

Integrationen:

$$\frac{dy}{dx} = -i\left(\frac{1}{2}\,A\,x^2 - \frac{1}{6}\,q\,x^3\right) + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{a)}$$

$$y = -i\left(\frac{1}{6}\,A\,x^3 - \frac{1}{24}\,q\,x^4\right) + C\,x + D.$$

Für $x = 0$ und $x = l_1$ ist $y = 0$, daraus folgt

$$C = i\left(\frac{1}{6}\,A\,l_1{}^2 - \frac{1}{24}\,q\,l_1{}^3\right),\ D = 0$$

und die Gleichung der elastischen Linie des Feldes AB:

$$y = \frac{x}{6\,EJ}\left[A\,(l_1{}^2 - x^2) - \frac{q}{4}\,(l_1{}^3 - x^3)\right] \quad . \quad . \quad . \quad \text{b)}$$

Für das Feld BC ist, wenn x_1 von C nach links gezählt wird, zunächst das Biegungsmoment

$$M = -\frac{1}{2} q x_1^2$$

und die Gleichung der elastischen Linie

$$\frac{d^2 y}{d x_1^2} = i \frac{q}{2} x_1^2,$$

nach deren Integration:

$$\frac{dy}{dx_1} = i \frac{q}{6} x_1^3 + C_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad c)$$

$$y = i \frac{q}{24} x_1^4 + C_1 x_1 + D_1;$$

für $\quad x_1 = a$ ist $y = 0$,

woraus $\quad y = -\frac{iq}{24}(a^4 - x_1^4) - C_1(a_1 - x_1).$

Um die Konstante C_1 zu bestimmen, setze man an der Stelle B für

$$x = l_1, \; x_1 = a: \; \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d(l - x_1)} = -\frac{dy}{dx_1},$$

wodurch die Gleichungen a) und c) die Beziehungen liefern:

$$-i\left(\frac{1}{2} A l_1^2 - \frac{1}{6} q l_1^3\right) + C = -i \frac{q}{6} a^3 - C_1,$$

woraus $\quad C_1 = i\left(\frac{1}{3} A l_1^2 - \frac{1}{8} q l_1^3 - \frac{1}{6} q a^3\right)$

und die Gleichung der elastischen Linie des Feldes BC:

$$y = -\frac{q}{24 EJ}(a^4 - x_1^4) + \frac{1}{EJ}(a - x_1)\left[q\left(\frac{l_1^3}{8} + \frac{a^3}{6}\right) - \frac{1}{3} A l_1^2\right] \quad d)$$

256. Die größte Tragfähigkeit des Trägers wird erzielt, wenn man die Anordnung derart trifft, daß das Maximum des Biegungsmomentes im Felde AB ebenso groß ist wie das Biegungsmoment am Auflager B, d. h. nach den Resultaten der vorhergehenden Aufgabe

$$\frac{1}{2} q l^2 \left(1 - \frac{l}{2 l_1}\right)^2 = \frac{1}{2} q l^2 \left(1 - \frac{l_1}{l}\right)^2,$$

woraus die Stützweite des Feldes AB folgt:

$$l_1 = \frac{l}{\sqrt{2}} = 0{,}7071\, l = 4{,}243 \text{ m}.$$

Dann wird jedes der beiden größten Biegungsmomente

$$_{\max} M = \frac{1}{2} q l^2 \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right) = 0{,}0429\, q l^2.$$

Das Trägheitsmoment des Querschnitts in bezug auf die horizontale Schwerlinie ist

$$J = \frac{1}{12}\left[20 \cdot \overline{100}^3 - 4 \cdot \overline{94}^3 - 14 \cdot \overline{92}^3 - 2 \cdot \overline{78}^3\right] = 402244 \text{ cm}^4$$

und das Widerstandsmoment mit $e = 50$ cm:

$$W = \frac{J}{e} = 8044{,}88 \text{ cm}^3.$$

Dann ist aus $\max M = k_b \cdot W$:

$$0{,}0429 \cdot q \cdot \overline{600}^2 = 700 \cdot 8044{,}88$$

und $$q = 364{,}63 \text{ kg f. d. cm}$$

oder $$q = 36463 \text{ kg f. d. m.}$$

Damit sind die Auflagerdrücke (siehe vorige Aufgabe)

$$A = q\,l\left(1 - \frac{l}{2\,l_1}\right) = 0{,}2929\, q\,l = 64080 \text{ kg},$$

$$B = \frac{1}{2}\,\frac{q\,l^2}{l_1} = 0{,}7071\, q\,l = 154798 \text{ kg}.$$

Das Aufsteigen des Trägers am Ende C rechnet man aus der Gleichung d) der elastischen Linie in der vorhergehenden Aufgabe, wenn man $x_1 = 0$ setzt. Man erhält mit $a = l - l_1 = l\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ die Durchbiegung des Trägers in C:

$$f = -\frac{17\sqrt{2} - 24}{96}\,\frac{q\,l^4}{E\,J} = -0{,}000431\,\frac{q\,l^4}{E\,J}$$

und mit den bekannten Werten:

$$f = -0{,}025 \text{ cm}.$$

257. Auflagerdrücke: $A = \frac{1}{2}\,a\,l^2\left(1 - \frac{2\,l}{3\,l_1}\right)$,

$$B = \frac{1}{3}\,\frac{a\,l^3}{l_1}.$$

Das Biegungsmoment an der Stelle x ist

$$M = A\,x - \frac{1}{2}\,q\,x \cdot \frac{x}{3} = A\,x - \frac{1}{6}\,a\,x^3 \quad . \quad . \quad . \quad a)$$

Setzt man $\frac{dM}{dx} = 0$, so wird für die Stelle des größten positiven Biegungsmomentes

$$x_1 = l\sqrt{1 - \frac{2\,l}{3\,l_1}}$$

und das Biegungsmoment selbst:

$$+_{\max} M = \frac{1}{3} a l^3 \sqrt{\left(1 - \frac{2 l}{3 l_1}\right)^3}.$$

Den größten negativen Wert erreicht das Biegungsmoment über dem Auflager B, nämlich für $x = l_1$ in Gleichung a):

$$-_{\max} M = -\frac{a}{6}(2 l^3 + l_1^3 - 3 l^2 l_1).$$

(Kein analytisches Maximum!)

Setzt man in Gleichung a): $M = 0$, so wird für die gesuchte Stelle:

$$x_2 = x_1 \sqrt{3} = l \sqrt{3 - 2 \frac{l}{l_1}}.$$

Die Tragfähigkeit des Trägers wird am größten, wenn die beiden größten Biegungsmomente gleichen absoluten Wert haben, d. h.

$$\frac{1}{3} a l^3 \sqrt{\left(1 - \frac{2 l}{3 l_1}\right)^3} = \frac{a}{6}(2 l^3 + l_1^3 - 3 l^2 l_1),$$

woraus mit $\frac{l}{l_1} = z$ die Gleichung folgt:

$$4 z^6 (3 - 2 z)^3 = 27 (2 z^3 - 3 z^2 + 1)^2.$$

258. An einer Stelle des Mittelfeldes in der Entfernung x von A ist das Biegungsmoment

$$M = -P a,$$

also unveränderlich; die Gleichung der elastischen Linie:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = -\frac{M}{E J} = i P a$$

und nach Integration:

$$\frac{dy}{dx} = -i P a \left(\frac{l}{2} - x\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad a),$$

wenn die Integrationskonstante aus der Bedingung bestimmt wird, daß die Mitte des Trägers horizontal bleibt.

Nach der zweiten Integration wird:

$$y = -\frac{i P a}{2}(l x - x^2)$$

und für $x = \frac{l}{2}$ die Durchbiegung in der Mitte:

$$f = -\frac{1}{8} i P a l^2.$$

Die Neigung des Trägers in A wird, vom Vorzeichen abgesehen, aus Gleichung a) für $x = 0$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2} i P a l$$

und somit die Durchbiegung in C nach Gleichung 43:

$$f_1 = \frac{1}{3} i P a^3 + a \operatorname{tg}\alpha.$$

Setzt man $$f_1 = -f,$$

so folgt für $\frac{a}{l} = z$ die Gleichung

$$8 z^2 + 12 z = 3,$$

woraus $$a = 0{,}218\, l.$$

259. Das Biegungsmoment im Mittelfelde AB ist, vom Vorzeichen abgesehen, $P a$; der Krümmungshalbmesser der elastischen Linie ist also $\varrho = \frac{EJ}{Pa}$ ebenfalls konstant, d. h. die elastische Linie ist ein Kreisbogen. Dann gilt für die Durchbiegung in der Mitte, vom Vorzeichen abgesehen:

$$f(2\varrho - f) = \frac{l^2}{4},$$

woraus $$f = \varrho - \sqrt{\varrho^2 - \frac{l^2}{4}}$$

oder, wenn man die ersten drei Glieder der Entwicklung nach dem binomischen Lehrsatz beibehält:

$$f = \varrho - \varrho\left(1 - \frac{l^2}{8\varrho^2} - \frac{l^4}{128\varrho^4}\right)$$

oder $$f = \frac{1}{8} i P a l^2 \left[1 + \frac{1}{16} i^2 P^2 a^2 l^2\right]$$

gegen $f = \frac{1}{8} i P a l^2$ in voriger Aufgabe.

260. Der Auflagerdruck in A ist $A = \frac{Q}{2} - P$, das Biegungsmoment in der Entfernung x von A:

$$M = A x - \frac{1}{2}\frac{Q}{l} x^2.$$

Die Gleichung der elastischen Linie

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = -\frac{M}{EJ} = -i\left(A x - \frac{1}{2}\frac{Q}{l} x^2\right)$$

gibt integriert:

$$\frac{dy}{dx} = -i\left(\frac{1}{2}Ax^2 - \frac{1}{6}\frac{Q}{l}x^3\right) + C,$$

$$y = -i\left(\frac{1}{6}Ax^3 - \frac{1}{24}\frac{Q}{l}x^4\right) + Cx.$$

Für $x = l$ ist $y = 0$, woraus C zu rechnen ist. Dann wird die Neigung des Trägers in B

$$\operatorname{tg}\alpha = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l} = i l^2\left(\frac{P}{3} - \frac{Q}{24}\right).$$

Die Durchbiegung in C ist nach Gleichung 43:

$$f = \frac{1}{3} i P l^3 + l \operatorname{tg}\alpha = 0,$$

wenn das fragliche Verhältnis

$$\frac{Q}{P} = 16.$$

261. Nach Gleichung 63 ist das Auflagermoment $M_A = \frac{1}{l^2}\Sigma P a b^2$ $= 425$ mkg, das Biegungsmoment in der Mitte D des Balkens:

$$M_D = -M_A + A \cdot 2\text{ m} - 300\text{ kg} \cdot 1\text{ m} = 275\text{ mkg},$$

da der Auflagerdruck A wegen symmetrischer Belastung die Hälfte der Gesamtbelastung ist.

Setzt man $\qquad {}_{\max}M = k_b \cdot W,$

so wird $\qquad 42\,500\text{ cmkg} = 50\text{ at} \cdot \frac{1}{12}h^3,$

woraus $\qquad h = 21{,}7\text{ cm}, \quad b = 10{,}9\text{ cm}.$

262. Gewicht des Rohres: 84,8 kg für den m.
Gewicht des Wassers: 20,1 kg für den m.
Belastung für den m.: $q = 104{,}9$ kg.

Widerstandsmoment des Querschnitts:

$$W = \frac{\pi}{32}\frac{D^4 - d^4}{D} = 463{,}7\text{ cm}^3.$$

Das größte Biegungsmoment ist jenes an den Auflagern; nach Gleichung 64 ist

$$M_A = \frac{1}{12} q l^2.$$

Setzt man $\qquad M_A = k_b \cdot W,$

so wird die gesuchte Länge

$$l = 12{,}615\text{ m}.$$

263. Das größte Biegungsmoment ist jenes am Auflager oder in der Mitte des Trägers und zwar

$$_{\max}M = \frac{1}{8} P\,l.$$

Am Auflager liegt die Zugseite des Trägers oben, die am meisten gespannten Stellen haben den Abstand $e_1 = 17{,}17$ cm vom Schwerpunkt des Querschnitts; in der Mitte des Trägers liegt die Zugseite unten und es ist $e_1 = 12{,}83$ cm. Es ist also die oberste Stelle des Querschnitts am Auflager die Bruchstelle des Trägers, für welche die Berechnung der Bruchlast vorzunehmen ist, und zwar nach der Gleichung

$$\frac{1}{8} P l = K_b \cdot \frac{J}{e_1}.$$

Das Trägheitsmoment des Querschnitts in bezug auf die horizontale Schwerlinie ist $J = 24\,824$ cm^4. Für die Biegungsfestigkeit des Gußeisens setze man analog der Gleichung 41

$$K_b = \mu_0 K_z \sqrt{\frac{e_1}{z_0}},$$

worin $\mu_0 = 1{,}2, \quad z_0 = \frac{e_1}{2}.$

Dies gibt mit $K_z = 1250$ at: $K_b = 2121$ at.

Man erhält schließlich die Bruchlast:

$$P = 61\,330 \text{ kg}.$$

264. Das größte Biegungsmoment ist an dem der Last näheren Auflager nach den Gleichungen 59 und 64:

$$_{\max}M = P \cdot \frac{a b^2}{l^2} + \frac{1}{12} q l^2.$$

Hierin ist die durch das Eigengewicht hervorgerufene Belastung:

$$q = F \cdot 1 \cdot \gamma = 46{,}37 \text{ cm}^2 \cdot 1 \text{ cm} \cdot 0{,}0078 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3},$$

$$q = 0{,}3617 \frac{\text{kg}}{\text{cm}}.$$

Man erhält demnach:

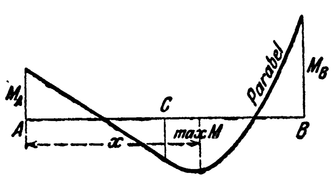
$$_{\max}M = 36{,}992 \text{ cm} \cdot P \text{ kg} + 1883{,}85 \text{ cmkg}.$$

Das Trägheitsmoment des Querschnitts in bezug auf die horizontale Schwerlinie ist

$$J = 4288 \text{ cm}^4.$$

Aus
$$_{\max}M = k_b \cdot \frac{J}{e}$$
erhält man mit $e = 12$ cm:
$$P = 9608{,}8 \text{ kg}.$$
Die Durchbiegung infolge der Last P ist nach Gleichung 61:
$$f_1 = \frac{1}{3}\frac{P}{EJ}\frac{a^3 b^3}{l^3} = 0{,}0601 \text{ cm};$$
die Durchbiegung unter der Last P infolge des Eigengewichtes ist nach Gleichung 65:
$$f_2 = \frac{q}{24EJ}a^2 b^2 = 0{,}0003 \text{ cm};$$
es ist also die ganze Durchbiegung
$$f = f_1 + f_2 = 0{,}0604 \text{ cm}.$$

265. Das größte Biegungsmoment ist jenes am Auflager, welches der Last näher liegt und zwar nach Gleichung 59 und 64:
$$_{\max}M = P\frac{ab^2}{l^2} + \frac{1}{12}ql^2.$$
Das Gewicht des Trägers ist $q = 0{,}3063$ kg f. d. cm,
ferner $a = 150$ cm, $b = 250$ cm, $l = 400$ cm,
also $_{\max}M = P\,\text{kg} \cdot 58{,}59$ cm $+ 4084$ cmkg.
Das Trägheitsmoment J ist $68{,}61 \text{ cm}^4$, die Entfernung e_2 des Schwerpunkts des Halbkreises von der unteren (Druck-) Seite 2,878 cm; somit aus
$$_{\max}M = k_b \cdot \frac{J}{e_2}: \quad P = 337{,}2 \text{ kg}.$$



266. Die Auflagerdrücke und Auflagermomente ergeben sich aus den Gleichungen 62 und 63, wenn man P, a, b durch $q\,d\xi$, ξ und $1-\xi$ ersetzt. Es ist
$$A = \frac{q}{l^3}\int_{\frac{l}{2}}^{l} d\xi(l-\xi)^2(2\xi+l) = \frac{3}{32}ql,$$
$$B = \frac{q}{l^3}\int_{\frac{l}{2}}^{l} d\xi \cdot \xi^2(3l-2\xi) = \frac{13}{32}ql,$$

$$M_A = \frac{q}{l^2}\int_{\frac{l}{2}}^{l} d\xi \cdot \xi (l-\xi)^2 = \frac{5}{192} q l^2,$$

$$M_B = \frac{q}{l^2}\int_{\frac{l}{2}}^{l} d\xi \cdot \xi^2 (l-\xi) = \frac{11}{192} q l^2.$$

Wendepunkte: Setzt man im Felde AC das Biegungsmoment

$$M = -M_A + A x = 0,$$

so wird der Abstand des Wendepunktes von A:

$$x_0 = \frac{M_A}{A} = \frac{5}{18} l = 0{,}278\ l.$$

Setzt man ebenso im Felde CB das Biegungsmoment

$$M = -M_A + A x - \frac{q}{2}\left(x - \frac{l}{2}\right)^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad a)$$

so erhält man für x_0 die Gleichung

$$x_0^2 - \frac{19}{16} l x_0 + \frac{29}{96} l^2 = 0,$$

von der nur die eine Wurzel brauchbar ist:

$$x_0 = 0{,}818\ l.$$

Wenn man Gleichung a) nach x differenziert:

$$\frac{dM}{dx} = A - q\left(x - \frac{l}{2}\right) = 0,$$

so erhält man für die Stelle des größten Biegungsmomentes innerhalb der freien Länge des Trägers:

$$x = \frac{l}{2} + \frac{A}{q} = \frac{19}{32} l = 0{,}594\ l$$

und das größte Biegungsmoment selbst

$$_{\max}M = -M_A + \frac{A l}{2} + \frac{A^2}{2q} = \frac{155}{6144} q l^2.$$

267. Der Schwerpunkt des Querschnitts hat die Entfernung 17,95 cm von der Oberkante, 22,05 cm von der Unterkante; das Trägheitsmoment in bezug auf die horizontale Schwerlinie ist

$$J = 66\,964\ \text{cm}^4.$$

Die zulässige Biegungsspannung ist nach der Bachschen Gleichung 41:

$$k_b = 1{,}2\ k_z \sqrt{\frac{e_1}{z_0}}.$$

Nimmt man die Zugseite des Querschnitts oben an, wie dies an den Auflagern zutrifft, so ist $e_1 = 17{,}95$ cm, $z_0 = 11{,}85$ cm,

$$k_b = 443 \text{ at}.$$

Nimmt man hingegen die Zugseite des Querschnitts unten an, wie dies für die Stelle des größten Biegungsmomentes in der freien Länge zutreffen wird, so ist $e_1 = 22{,}05$ cm, $z_0 = 12{,}21$ cm,

$$k_b = 484 \text{ at}.$$

Benützt man die Resultate der vorhergehenden Aufgabe, so ist also die Ansatzgleichung für das gefährlichere rechte Auflager:

$$M_B = \frac{11}{192}\,q\,l^2 = k_b\,\frac{J}{e_1} = 443 \text{ at} \frac{66\,964 \text{ cm}^4}{17{,}95 \text{ cm}},$$

woraus mit $l = 500$ cm:

$$q = 11\,540 \frac{\text{kg}}{\text{m}}.$$

Hingegen wäre für die Stelle des größten Biegungsmomentes in der freien Länge:

$$_{\max}M = \frac{155}{6144}\,q\,l^2 = 484 \text{ at} \frac{66\,964 \text{ cm}^4}{22{,}05 \text{ cm}},$$

woraus $$q = 23\,296 \frac{\text{kg}}{\text{m}}.$$

Das frühere, kleinere Resultat für q ist also das maßgebende.

268. Das Biegungsmoment des Balkens ist an allen Stellen das gleiche, nämlich das Auflagermoment M. Der Krümmungshalbmesser der elastischen Linie ist nach Gleichung 39:

$$\frac{1}{\varrho} = \pm \frac{M}{EJ} = \text{konstant},$$

die elastische Linie ist also ein Kreisbogen.

Die Sehne dieses Bogens ist die Spannweite l des Balkens und die Durchbiegung f in der Mitte nach der Gleichung

$$\left(\frac{l}{2}\right)^2 = f(2\varrho - f)$$

genau genug $$f = \frac{l^2}{8\varrho} = \frac{1}{8}\frac{M l^2}{EJ}.$$

Ebenso wird der Winkel α, um den sich der Balken an den Auflagern senkt, die Größe besitzen

$$\alpha \doteq \sin\alpha = \frac{l}{2\varrho} = \frac{M l}{2EJ}.$$

269. Das Stück $O\,O_1$ des dünnen Stabes wird an seinen Enden durch zwei gleiche und entgegengesetzte Momente $M = P\,l$ in Anspruch genommen. Es verdreht sich in O und O_1 infolgedessen nach vorhergehender Aufgabe um

$$\alpha = \frac{P\,l\,a}{2\,E\,J}.$$

Das Ende des Stückes l bewegt sich also um

$$l\,\alpha + \frac{1}{3}\,\frac{P\,l^3}{E\,J}.$$

Setzt man diesen Ausdruck gleich $\frac{a}{2}$, so wird die gesuchte Kraft

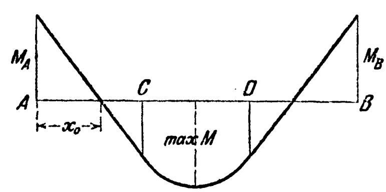
$$P = \frac{a\,E\,J}{l^2\left(a + \frac{2}{3}\,l\right)}.$$

270. Ähnlich wie in Aufgabe 266 ist

$$M_A = M_B = \frac{q}{l^2}\int_{l/3}^{2l/3} d\,\xi \cdot \xi^2\,(l - \xi) = \frac{13}{324}\,q\,l^2$$

und aus Gründen der Symmetrie ohne weiteres

$$A = B = \frac{1}{6}\,q\,l.$$



In der Mitte des Trägers ist das Biegungsmoment

$$\max M = -M_A + A \cdot \frac{l}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{q\,l}{6} \cdot \frac{l}{6} = \frac{19}{648}\,q\,l^2.$$

Die Auflagermomente sind dem absoluten Werte nach größer; nach ihnen ist der Träger zu rechnen.

Für die Stellen des Trägers, an denen keine Normalspannungen auftreten (Wendepunkte), ist

$$M = 0,$$

also für das Feld $A\,C$:

$$-M_A + A\,x_0 = 0$$

und somit

$$x_0 = \frac{M_A}{A} = \frac{13}{54}\,l = 0{,}241\ l.$$

Der andere Wendepunkt liegt symmetrisch.

271. Die Ordinate q der Belastungslinie in der Entfernuug ξ von A ist: $\frac{2Q}{l}\xi$. In gleicher Weise, wie in Aufgabe 266 erhält man:

$$A = \frac{1}{l^3}\int_0^l q\,d\xi\,(l-\xi)^2\,(2\xi+l) = \frac{3}{10}Q,$$

$$B = \frac{1}{l^3}\int_0^l q\,d\xi \cdot \xi^2(3l-2\xi) = \frac{7}{10}Q,$$

$$M_A = \frac{1}{l^2}\int_0^l q\,d\xi \cdot \xi\,(l-\xi)^2 = \frac{1}{15}Ql,$$

$$M_B = \frac{1}{l^2}\int_0^l q\,d\xi \cdot \xi^2\,(l-\xi) = \frac{1}{10}Ql.$$

Für irgendeine Stelle in der Entfernung x von A ist das Biegungsmoment:

$$M = -M_A + Ax - Q\frac{x^3}{3l^2}.$$

Setzt man $M = 0$, so erhält man für die Lage der Wendepunkte die Gleichung

$$x_0^3 - 0{,}9\,x_0 l^2 + 0{,}2\,l^3 = 0,$$

woraus die beiden brauchbaren (positiven) Wurzeln:

$$x_0 = 0{,}237\ l,\quad x_0 = 0{,}808\ l.$$

Setzt man hingegen $\frac{dM}{dx} = 0$, so folgt für die Stelle des größten Biegungsmomentes zwischen den Auflagern:

$$x^2 = \frac{A}{Q}l^2,\quad x = \sqrt{0{,}3}\,l = 0{,}5477\ l$$

und das größte Biegungsmoment selbst

$$_{\max}M = -M_A + \frac{2}{3}Ax = 0{,}0429\ Ql.$$

Der Träger ist also nach dem gefährlichsten Moment $M_B = \frac{1}{10}Ql$ am Auflager B zu rechnen.

272. Angenommen, es sei $a > b$. Dann liegt die größte Durchbiegung zwischen dem Auflager A und der Last. Der Auflagerdruck in A ist nach Gleichung 58:

$$A = P\frac{b^2(3a+b)}{l^3} + \frac{1}{2}ql$$

und das Auflagermoment in A nach den Gleichungen 59 und 64:

$$M_A = P\frac{ab^2}{l^2} + \frac{1}{12}ql^2.$$

An irgendeiner Stelle in der Entfernung x von A ist das Biegungsmoment des oben bezeichneten Feldes:

$$M = -M_A + Ax - \frac{1}{2}qx^2.$$

Die Gleichung der elastischen Linie ist

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EJ} = -i\left(-M_A + Ax - \frac{1}{2}qx^2\right)$$

und nach Integration:

$$\frac{dy}{dx} = -i\left(-M_A x + \frac{1}{2}Ax^2 - \frac{1}{6}qx^3\right) + C.$$

Die Integrationskonstante C verschwindet, weil für $x = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$ ist (kleinste Durchbiegung).

Für die Stelle der größten Durchbiegung ist dann mit $\frac{dy}{dx} = 0$:

$$-M_A + \frac{1}{2}Ax - \frac{1}{6}qx^2 = 0,$$

woraus

$$x^2 - 3x\left[\frac{l}{2} + \frac{P}{q}\frac{b^2(3a+b)}{l^3}\right] + \frac{l^2}{2} + \frac{6P}{q}\frac{ab^2}{l^2} = 0.$$

273. Der Auflagerdruck ist $A = B = \frac{qx}{2}$; das Auflagermoment erhält man aus Gleichung 63, wenn statt P, a, b: $q\,d\xi$, ξ und $l - \xi$ gesetzt wird. Dies gibt

$$M_A = \frac{q}{l^2}\int_{\frac{l-x}{2}}^{\frac{l+x}{2}} \xi(l-\xi)^2\,d\xi = \frac{qx}{24l}(3l^2 - x^2).$$

Das Moment in der Mitte des Trägers ist:

$$M = -M_A + A\frac{l}{2} - \frac{qx^2}{8} = \frac{qx}{24l}(3l^2 - 3lx + x^2).$$

Setzt man $M_A = n M$, so wird

$$x = \frac{l}{2(n+1)}\left[3n - \sqrt{12 - 3n^2}\right].$$

n schwankt zwischen 1 und 2 (für $x = 0$ und $x = l$).

274. Nach den Gleichungen 62 und 63 ist der linke Auflagerdruck

$$A = \frac{P_1}{l^3}(l - a)^2(2a + l) + \frac{P_2}{l^3}a^2(3l - 2a)$$

und das Auflagermoment in A

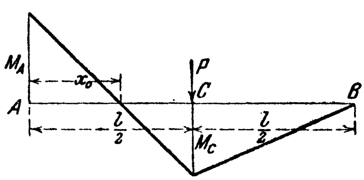
$$M_A = \frac{P_1}{l^2}a(l - a)^2 + \frac{P_2}{l^2}a^2(l - a).$$

Setzt man nun das Biegungsmoment unter P_1

$$-M_A + A a = 0,$$

so folgt:

$$P_2 = P_1 \frac{2(l - a)^2}{l^2 - 4al + 2a^2}.$$



275. Nach den Gleichungen 67 und 68 ist für $a = b = \frac{l}{2}$:

$$M_A = \frac{3}{16}Pl, \quad M_C = \frac{5}{32}Pl;$$

das erste ist also für die Bee chnung des Halbmessers r der Welle maßgebend. Es ist

$$_{\max}M = \frac{3}{16}Pl = k_b \cdot W = k_b \cdot \frac{\pi}{4}r^3,$$

woraus mit $P = 8000$ kg, $l = 1000$ cm, $k_b = 700$ at:

$$r = 14 \text{ cm}.$$

Die Auflagerdrücke sind nach Gleichung 66

$$A = \frac{11}{16}P = 5{,}5 \text{ t}, \quad B = \frac{5}{16}P = 2{,}5 \text{ t};$$

der Neigungswinkel β am freien Auflager B nach Gleichung 70:

$$\beta = 0^0\,14'\,21'';$$

für die Stelle, an der keine Normalspannungen auftreten, ist $M = 0$ oder

$$x_0 = \frac{3}{11}l.$$

276. Soll der Träger als ein in B eingespannter angesehen werden, so muß dort sein Auflagermoment nach Gleichung 72 gleich $\frac{1}{8}$ Q l sein; setzt man dies gleich P a, so findet man

$$a = \frac{Q\,l}{8\,P} = 0{,}39 \text{ m};$$

das größte Biegungsmoment des Trägers ist jenes in B:

$$_{\max}M = \frac{1}{8}\,Q\,l = 703{,}13 \text{ mkg}.$$

Die Auflagerdrücke sind:

$$A = \frac{Q}{2} + P\left(1 + \frac{a}{l}\right) = 3205{,}8 \text{ kg},$$

$$B = \frac{Q}{2} - P\,\frac{a}{l} = 844{,}2 \text{ kg}.$$

277. Nach den Gleichungen 67 und 68 ist

$$M_A = \frac{3}{16}\,P\,l, \quad M_C = \frac{5}{32}\,P\,l,$$

ersteres ist also das maßgebende Moment. Aus

$$\frac{3}{16}\,P\,l = k_b \cdot \frac{J}{e}$$

folgt mit $J = \frac{5\sqrt{3}}{16}\,s^4$ (vergl. Aufgabe 113)

$$e = \frac{\sqrt{3}}{2}\,s,$$

$$s = 5{,}77 \text{ cm}.$$

278. Das Stangenende würde sich um a_1 senken, die Mitte des Trägers um a_2 heben; dann ist $a = a_1 + a_2$. Nach den Gleichungen 18 und 49 ist:

$$a_1 = \frac{S\,l_1}{E_1 F_1}, \quad a_2 = \frac{1}{48}\,\frac{S\,l_2^3}{E_2 J_2},$$

woraus

$$S = \frac{a}{\frac{l_1}{E_1 F_1} + \frac{1}{48}\,\frac{l_2^3}{E_2 J_2}}.$$

279. Nach Gleichung 18 ist die Verlängerung der Stange

$$f_1 = \frac{P_1 l_1}{E_1 F_1}$$

und nach Gleichung 49 die Durchbiegung des Trägers

$$f_2 = \frac{1}{48} \frac{P_2 l_2^3}{E_2 J_2},$$

wenn F_1 der Querschnitt der Stange, J_2 das Trägheitsmoment des Träger-Querschnitts, E_1 und E_2 die Elastizitätszahlen sind. Aus

$$f = f_1 = f_2, \quad P = P_1 + P_2$$

erhält man

$$P_1 = \frac{P}{1+\alpha}, \quad P_2 = \frac{\alpha P}{1+\alpha}, \quad \alpha = 48 \frac{E_2}{E_1} \frac{J_2 l_1}{F_1 l_2^3},$$

$$f = \frac{P}{\frac{E_1 F_1}{l_1} + 48 \frac{E_2 J_2}{l_2^3}}.$$

280. Zu f_1 und f_2 in voriger Aufgabe kommt noch hinzu:

$$f_3 = \frac{1}{48} \frac{P_3 l_3^3}{E_3 J_3}$$

und es ist $P = P_1 + P_2 + P_3, \quad f = f_1 = f_2 = f_3,$
woraus die Durchbiegung in der Mitte:

$$f = \frac{P}{\frac{E_1 F_1}{l_1} + 48 \frac{E_2 J_2}{l_2^3} + 48 \frac{E_3 J_3}{l_3^3}}$$

und die Verteilung der Last:

$$P_1 = \frac{E_1 F_1}{l_1} \cdot f, \quad P_2 = 48 \frac{E_2 J_2}{l_2^3} f, \quad P_3 = 48 \frac{E_3 J_3}{l_3^3} f.$$

281. Nach Gleichung 65 ist die Gleichung der elastischen Linie des Rohres

$$y = \frac{q}{24 E J} x^2 (l - x)^2$$

und daraus

$$y' = \frac{dy}{dx} = \alpha x (l - x)(l - 2x)$$

worin $\alpha = \frac{q}{12 E J}.$

Die Achse des Rohres nimmt durch die Biegung die Länge an

$$s = \int_0^l \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx,$$

wofür, weil α sehr klein ist, gesetzt werden darf

$$s = \int_0^l \left(1 + \frac{1}{2} y'^2\right) dx = l + \frac{\alpha^2 l^7}{420}.$$

Die Dehnung des Rohres ist $\varepsilon = \frac{s - l}{l}$ und die Spannung

$$\sigma = E \varepsilon = \frac{1}{60480} \cdot \frac{q^2 l^6}{E J^2}.$$

282. Der Wasserdruck $p \cdot r^2 \pi$ im Innern wird vom Querschnitt des Rohres $2 r \pi \cdot \delta$ aufgenommen; dies verursacht die Spannung

$$\sigma_1 = \frac{p r}{2 \delta}.$$

Dazu kommt die Spannung wie in voriger Aufgabe, wobei q durch $q \cos \alpha$ und J durch $\pi r^3 \delta$ zu ersetzen ist. Es bleibt

$$\sigma = \frac{\cos^2 \alpha}{60\,480\, \pi^2} \cdot \frac{q^2 l^6}{E r^6 \delta^2} + \frac{p r}{2 \delta}.$$

283. Zählt man die Abstände x vom freien Ende des Trägers, so ist

$$M = \frac{1}{2} \frac{Q}{l} x^2, \quad e = \frac{z}{2}, \quad J = \frac{1}{12} b z^3.$$

Daraus gibt Gleichung 73:

$$z = \frac{h}{l} x \quad \text{und} \quad h = \sqrt{\frac{3 Q l}{b k_b}}.$$

284. Rechnung ähnlich wie vorher. Es ergibt sich:

$$y = \frac{b}{l^2} x^2, \quad \text{worin} \quad b = \frac{3 Q l}{h^2 k_b}.$$

285. Rechnung ähnlich wie in Aufgabe 283:

$$M = P x, \quad e = \frac{z}{2}, \quad J = \frac{1}{12} y z^3,$$

worin

$$y : z = b : h.$$

Man erhält $y^3 = \frac{b^3}{l} x, \quad z^3 = \frac{h^3}{l} x.$

286. Nennt man P die Last am Ende, z die veränderliche Trägerhöhe in der Entfernung x von der Einspannung, so ist zunächst für die Form gleichen Widerstandes gegen Biegung:

$$z^2 = h^2 \frac{l - x}{l},$$

wenn h die Trägerhöhe an der Einspannungsstelle ist.

Die Gleichung der elastischen Linie ist

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EJ}, \text{ worin}$$

$$M = -P(l - x), \quad J = \frac{1}{12} b z^3 = \frac{b h^3}{12} \sqrt{\left(\frac{l-x}{l}\right)^3}.$$

Setzt man $l - x = u$, $\frac{12 P l^{3/2}}{E b h^3} = a$, so wird die Differenzialgleichung die Form annehmen

$$\frac{d^2 y}{du^2} = \frac{a}{\sqrt{u}}.$$

Die erste Integration liefert

$$\frac{dy}{du} = 2a(\sqrt{u} - \sqrt{l}),$$

wenn berücksichtigt wird, daß für $x = 0$, $u = l$, $\frac{dy}{du} = 0$ wird; die zweite Integration gibt die gewünschte Gleichung

$$y = \frac{2}{3} a \left(l^{3/2} - 3\sqrt{l}\, u + 2 u^{3/2}\right),$$

wenn wieder beachtet wird, daß für $x = 0$, $u = l$, $y = 0$ ist.

Endlich findet man

$$y = \frac{8 P l^3}{E b h^3} \left[\frac{3x}{l} + 2\sqrt{\left(1 - \frac{x}{l}\right)^3} - 2\right]$$

für die Gleichung der elastischen Linie.

287. Die Form gleichen Widerstandes muß für jedes Feld des Trägers gesondert untersucht werden.

Feld AC: Einspannungsmoment $M_A = \frac{1}{2} P l + \frac{3}{4} Q l,$

Auflagerdruck $A = P + Q,$

Biegungsmoment in der Entfernung x von A:

$$M = -M_A + A x.$$

Setzt man nach Gleichung 73: $M e = k_b \cdot J$

mit $$e = \frac{h}{2}, \quad J = \frac{1}{12} z h^3,$$

so folgt: $$z = \frac{6}{k_b h^2}(-M_A + A x),$$

und für die Einspannungsstelle

$$b = \frac{6}{k_b h^2}(-M_A),$$

woraus die Form gleichen Widerstandes für das Feld AC:

$$z = b\left[1 - \frac{4P + 4Q}{2P + 3Q}\,\frac{x}{l}\right].$$

In der Trägermitte ist somit die erforderliche Breite:

$$b_1 = b\,\frac{Q}{2P + 3Q}.$$

Feld CB: hier ist das Biegungsmoment (vom Vorzeichen abgesehen)

$$M = \frac{Q}{l}(l - x)^2,$$

woraus in ähnlicher Weise wie für das erste Feld die Form gleichen Widerstandes gefunden wird:

$$z = \frac{6Q}{k_b l h^2}(l - x)^2;$$

für die Mitte des Trägers:

$$b_1 = \frac{6Q}{k_b l h^2}\,\frac{l^2}{4},$$

und mit Benützung des Wertes von b_1:

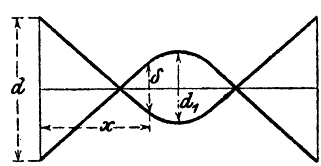
$$z = 4b\,\frac{Q}{2P + 3Q}\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2.$$

288. Ist q die Belastung der Längeneinheit, so ist das Biegungsmoment an der Stelle x:

$$M = \frac{q}{12}(-l^2 + 6lx - 6x^2);$$

ferner

$$e = \frac{\delta}{2}, \quad J = \frac{\pi \delta^4}{64}.$$



Hieraus wird nach Gleichung 73 für die Form des Trägers:

$$\delta^3 = d^3\left(1 - 6\,\frac{x}{l} + 6\,\frac{x^2}{l^2}\right)$$

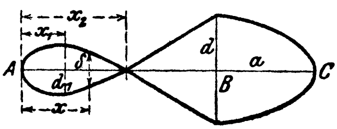
und für $$x = \frac{l}{2}: \quad d_1 = \frac{d}{\sqrt[3]{2}} = 0{,}794\ d.$$

An den beiden Stellen, die von der Mitte des Trägers den Abstand $\frac{l}{\sqrt{12}}$ haben, ist $\delta = 0$.

289. q sei die Belastung der Längeneinheit.

Feld AB: Auflagerdruck $A = \frac{q}{2\,l}(l^2 - a^2)$,

$$\text{Biegungsmoment } M = A\,x - \frac{1}{2}\,q\,x^2;$$



ferner $e = \frac{\delta}{2}$, $J = \frac{\pi}{64}\,\delta^4$.

Gleichung 73 liefert dann für die Form gleichen Widerstandes:

$$\delta^3 = \frac{16\,q}{\pi\,l\,k_b}\,x\,(l^2 - a^2 - l\,x).$$

Für das Auflager B ist dann:

$$x = l,\quad d^3 = \frac{16\,q\,a^2}{\pi\,k_b} \quad \text{(vom Vorzeichen abgesehen).}$$

Setzt man $\frac{d\,\delta}{d\,x} = 0$, so wird

$$x_1 = \frac{l^2 - a^2}{2\,l} \quad \text{und} \quad d_1^{\,3} = \frac{4\,q}{\pi\,k_b}\left(\frac{l^2 - a^2}{l}\right)^2.$$

$$\text{An der Stelle } x_2 = \frac{l^2 - a^2}{l} = 2\,x_1 \text{ wird } \delta = 0.$$

Feld BC: Zählt man x vom Ende C aus, so ist hier

$$M = \frac{1}{2}\,q\,x^2,$$

und die Form gleichen Widerstandes:

$$\delta^3 = \frac{16\,q}{\pi\,k_b}\,x^2.$$

290. Nennt man q die Ordinate der Belastungslinie in der Entfernung ξ von A, so ist

$$q = \frac{2\,Q}{l^2}\,(l - \xi),$$

und das Biegungsmoment an der Stelle x

$$M = A\,x - \int_0^x q\,d\,\xi\,(x - \xi),$$

und mit $A = \frac{2}{3}\,Q$: $\quad M = \frac{Q\,x}{3}\left[2 - 3\,\frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2}\right].$

Setzt man ferner in Gleichung 73

$$e = \frac{y}{2}, \quad J = \frac{1}{12} y^4,$$

so bleibt für die veränderliche Quadratseite y

$$y^3 = \frac{2Q}{k_b} x \left(2 - 3 \frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2}\right).$$

Für die Bruchstelle des Trägers ist $\max y = h$.

Setzt man $\frac{dy}{dx} = 0$, so wird für die Bruchstelle:

$$x_1 = l\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

und nach Einsetzen in die obere Gleichung:

$$h^3 = \frac{4}{3\sqrt{3}} \frac{Ql}{k_b},$$

woraus endlich

$$\left(\frac{y}{h}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{x}{l} \left(2 - 3 \frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2}\right).$$

291. Nach Aufgabe 235 ist das Biegungsmoment an beliebiger Stelle:

$$M = \frac{Q}{6l^2}(3xl^2 - 6x^2l + 4x^3).$$

Die Form gleichen Widerstandes ist dann nach Gleichung 73:

$$z^2 = \frac{4Q}{k_b b l^2}\left(\frac{l^3}{8} - \xi^3\right),$$

wenn z die veränderliche Höhe und ξ den Abstand des Querschnitts von der Mitte des Trägers bedeutet.

292. Man rechne zunächst den veränderlichen Durchmesser δ als Funktion von x, der Entfernung vom Auflager, und erhält nach Gleichung 73

$$\delta^3 = \frac{16P}{\pi k_b} \cdot x = ax.$$

Die Gleichung gilt von $x = 0$ bis $x = \frac{l}{2}$; die andere Trägerhälfte ist symmetrisch. Für die Mitte des Trägers ist der Durchmesser

$$\delta_1{}^3 = \frac{8Pl}{\pi k_b}.$$

Die Gleichung der elastischen Linie ist

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = -\frac{M}{E J} = -\frac{32 P}{\pi E}\,\frac{x}{\delta^4} = -\frac{b x}{\delta^4}$$

oder

$$d\left(\frac{d y}{d x}\right) = -\frac{3 b}{a^2}\,\delta \cdot d\,\delta.$$

Integriert, folgt: $\dfrac{d y}{d x} = \dfrac{3 b}{2 a^2}(\delta_1{}^2 - \delta^2)$,

und nochmals integriert:

$$y = \frac{9 b}{2 a^3}\left(\frac{1}{3}\delta_1{}^2\delta^3 - \frac{1}{5}\delta^5\right).$$

Hieraus wird die gewünschte Durchbiegung in der Mitte

$$f = \frac{3 b}{5 a^3}\,\delta_1{}^5,$$

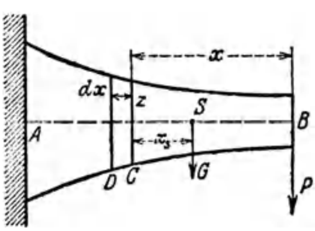
und nach Einsetzen der Werte der Konstanten a und b:

$$f = \frac{3}{80}\,\frac{P l^3}{E J_1},$$

worin $J_1 = \frac{\pi}{64}\delta_1{}^4$ das Trägheitsmoment des Querschnitts in der Mitte ist.

293. Ist G das Gewicht des Trägerteiles CB, so gilt für die Sicherheit des Querschnitts C die Biegungsgleichung

$$P x + G x_s = \frac{1}{6}\,b z^2 \cdot k_b,$$



für den um dx entfernten Querschnitt D:

$$P(x + d x) + G(x_s + d x) + d G \cdot \frac{d x}{2} = \frac{1}{6}\,b(z + d z)^2 \cdot k_b.$$

Die Differenz beider Gleichungen ist mit erlaubter Vernachlässigung kleiner Glieder

$$(P + G) \cdot d x = \frac{1}{3}\,b z\,d z \cdot k_b = \frac{1}{6}\,b k_b \cdot d z^2$$

oder

$$\frac{d z^2}{d x} = \frac{6}{b k_b}(P + G)$$

nnd nach nochmaliger Differenzierung

$$\frac{d^2 z^2}{d x^2} = \frac{6}{b k_b} \cdot \frac{d G}{d x}.$$

Nun ist aber $dG = \gamma b z d x$, daher

$$\frac{d^2 z^2}{d x^2} = \frac{6\gamma}{k_b} \cdot z$$

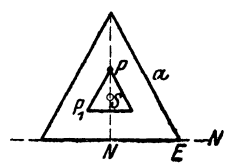
die gewünschte Differenzialgleichung.

294. Nimmt man die Null-Linie NN in einer Seite des Dreiecks an, so ist (vergl. Abbildung zu Gleichung 75)

$$n = SN = \frac{\sqrt{3}}{6} a;$$

ferner ist das Trägheitsmoment für jede durch S gehende Gerade:

$$J = \frac{\sqrt{3}}{96} a^4,$$



woraus für den Trägheitshalbmesser

$$i^2 = \frac{a^2}{24},$$

und

$$p = SP = \frac{\sqrt{3}}{12} a \text{ (vom Vorzeichen abgesehen).}$$

Dreht sich die Null-Linie um die Ecke E, so beschreibt die Angriffsstelle P die Strecke PP_1, parallel zur Dreieckseite.

Der Kern ist ein gleichseitiges Dreieck, dessen Fläche $\frac{1}{16}$ der Querschnittsfläche ist.

295. Nennt man D den äußeren, d den inneren Durchmesser des Kreisringes, so ist der Halbmesser der Kerngrenze:

$$p = \frac{D^2 + d^2}{8D}.$$

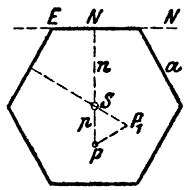
Setzt man dies gleich $\frac{d}{2}$, so wird

$$D^2 + d^2 = 4Dd,$$

woraus der brauchbare Wurzelwert

$$\frac{d}{D} = 2 - \sqrt{3} = 0{,}27.$$

296. Nimmt man die Null-Linie NN in einer Seite des Sechsecks an, so ist $n = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; ferner das Trägheitsmoment der Fläche in bezug auf jede durch S gehende Gerade (vergl. Aufgabe 113)



$$J = \frac{5\sqrt{3}}{16} a^4,$$

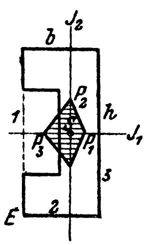
die Fläche selbst: $F = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$,

und der Trägheitshalbmesser $i^2 = \frac{5}{24} a^2$,

woraus $p = \frac{5\sqrt{3}}{36} a$ (vom Vorzeichen abgesehen).

Dreht sich die Null-Linie um den Eckpunkt E, so beschreibt die Angriffsstelle P der Kraft die Strecke PP_1. Der Kern ist ein regelmäßiges Sechseck mit S als Mittelpunkt; P und P_1 sind zwei Eckpunkte der Kerngrenze.

297. Der Schwerpunkt liegt auf der Symmetrale J_1 und hat den Abstand $\frac{5}{12}$b von der rechten Seite h.



Die Trägheitsmomente der Fläche sind:

$$J_1 = \frac{5}{64} b h^3, \quad J_2 = \frac{11}{192} h b^3.$$

Die Umhüllung des Querschnitts ist das Rechteck bh. Die Eckpunkte der Kerngrenze haben nach den Gleichungen 75 folgende Abstände von S (vom Vorzeichen abgesehen):

$$\text{Null-Linie } 1: \; n_1 = \frac{7}{12} b, \quad p_1 = P_1 S = \frac{J_2}{F n_1} = \frac{11}{84} b,$$

$$\text{Null-Linie } 2: \; n_2 = \frac{1}{2} h, \quad p_2 = P_2 S = \frac{J_1}{F n_2} = \frac{5}{24} h,$$

$$\text{Null-Linie } 3: \; n_3 = \frac{5}{12} b, \quad p_3 = P_3 S = \frac{J_2}{F n_3} = \frac{11}{60} b.$$

Wenn sich die Null-Linie um den Eckpunkt E aus 1 nach 2 dreht, beschreibt die Angriffsstelle der Last die Strecke $P_1 P_2$.

298. Nimmt man die Null-Linie in der Unterkante b des Rechtecks an, so ist in Gleichung 75: $p_2 n_2 = - i_1^2$:

$$p_2 = z, \quad n_2 = \frac{h}{2}, \quad i_1^2 = \frac{J_1}{F},$$

$J_1 = \frac{1}{12} b h^3 - \frac{1}{3} y z^3$ in bezug auf die horizontale Schwerlinie;

$$F = bh - 2yz;$$

woraus, wenn man das Vorzeichen unterdrückt und

$$\frac{y}{b} = \eta, \quad \frac{z}{h} = \zeta$$

setzt: $$6\zeta - 12\eta\zeta^2 = 1 - 4\eta\zeta^3,$$

und analog für die Lage der Null-Linie in h:

$$6\eta - 12\eta^2\zeta = 1 - 4\eta^3\zeta.$$

Eine brauchbare Lösung dieser Gleichungen ist:

$$\eta = \zeta, \quad 4\eta^4 - 12\eta^3 + 6\eta - 1 = 0,$$

woraus $$y = 0{,}177\,b, \quad z = 0{,}177\,h.$$

299. Das fragliche Gebiet ist der Kern des Querschnitts. Es ist hier

$$J = \frac{67}{192}a^4, \quad F = \frac{7}{4}a^2, \quad i^2 = \frac{J}{F} = \frac{67}{336}a^2.$$

Nimmt man die Null-Linie in AB an, so ist ihr Abstand von S: $n = a$ und nach den Gleichungen 75 der Abstand des Kernpunktes

$$p = \frac{67}{336}a \text{ rechts von S.}$$

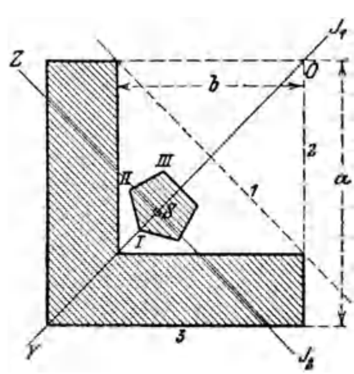
Nimmt man die Null-Linie in BC an, so ist ihr Abstand von S: $n' = \frac{5a}{4\sqrt{2}}$ und der Abstand des Kernpunktes:

$$p' = \frac{67\sqrt{2}}{420}a \text{ in SD.}$$

Der Kern ist also ein Achteck, dessen Ecken abwechselnd die Entfernungen p und p' von S besitzen.

300. Schwerpunkt auf der Symmetrale:

$$OS = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}.$$



Hauptträgheitsmomente:

$$J_1 = \frac{1}{12}(a^4 - b^4),$$

$$J_2 = \frac{7}{12}(a^4 - b^4) - \frac{1}{2}\frac{(a^3 - b^3)^2}{a^2 - b^2}.$$

Koordinaten der Kern-Eckpunkte:

I, entsprechend der Null-Linie 1:

$$IS = y_1 = \frac{\sqrt{2}}{12} \frac{a^4 + 2a^3b - 4a^2b^2 + 2ab^3 + b^4}{a^2(a+b)};$$

II, entsprechend der Null-Linie 2:

$$y_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{7}{6}\frac{a^4 - b^4}{a^3 - b^3} + \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}\right],$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{2}}{12}\frac{a^4 - b^4}{a^3 - b^3};$$

III, entsprechend der Null-Linie 3:

$$y_3 = \frac{\sqrt{2}}{12}\frac{a^4 + 2a^3b - 4a^2b^2 + 2ab^3 + b^4}{(a^2 + ab - b^2)(a+b)};$$

$$z_3 = \frac{\sqrt{2}}{12}\frac{(a^2 + b^2)(a+b)}{a^2 + ab - b^2}.$$

301. Führt man die Rechnung für ein Mauerstück von 1 m Länge durch, so ist

$$P = \text{Gewicht der Mauer} = \gamma_1 h x, \quad F = x;$$

der horizontale Wasserdruck auf die Mauer ist

$$D = \frac{1}{2}\gamma h^2, \text{ sein Moment um } B:$$

$$M = D\frac{h}{3}.$$

Endlich ist das Widerstandsmoment der Mauergrundfläche AB:

$$W = \frac{1}{6}x^2.$$

Gleichung 76 liefert dann, sinngemäß angewendet:

$$k_z = -\frac{P}{F} + \frac{M}{W} = -\gamma_1 h + \gamma\frac{h^3}{x^2},$$

woraus

$$x = h\sqrt{\frac{\gamma h}{k_z + \gamma_1 h}}.$$

302. Da der Bolzen AB nur kurz ist, können die Gleichungen 77 benützt werden. Es ist die

$$\text{größte Druckspannung} = \frac{4P}{\pi d^2}\left(\frac{8a}{d} + 1\right),$$

$$\text{größte Zugspannung} = \frac{4P}{\pi d^2}\left(\frac{8a}{d} - 1\right).$$

Die Biegung des Bolzens geschieht durch das Moment P a, das an allen Stellen gleich groß ist. Nach Gleichung 39 ist also die elastische Linie ein Kreisbogen, dessen Halbmesser $\varrho = \frac{E\,J}{P\,a}$ ist und die Ausbiegung des Bolzens ist der Pfeil f dieses Bogens, für welchen die Beziehung gilt

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2 = f(2\varrho - f),$$

oder genau genug $$s^2 = 8 f \varrho,$$

woraus $$f = \frac{8 P a s^2}{\pi E d^4}.$$

303. Setzt man in Gleichung 77

$$\sigma = k_z, \quad W \text{ (Widerstandsmoment)} = \frac{\pi}{32} D^3 (1 - \delta^4),$$

so folgt $$p = \frac{D}{8}(1 + \delta^2)\left(\frac{k_z F}{P} - 1\right).$$

304. Nimmt man an, daß die Resultante aus P_1 und P_2 rechts von der Achse des Stabes liegt, so wird die größte im Stabe vorkommende Spannung jene an der rechten Seite sein, und zwar nach Gleichung 77

$$\sigma = k_z = \frac{P_2}{m^2}\left(1 + \frac{6\,b}{m}\right) + \frac{P_1}{m^2}\left(1 - \frac{6\,a}{m}\right).$$

Mit $P = P_1 + P_2$ erhält man hieraus:

$$P_1 = \frac{P(6\,b + m) - k_z m^3}{6(a + b)},$$

$$P_2 = \frac{P(6\,a - m) + k_z m^3}{6(a + b)}.$$

Der größte Wert von P ist jener für zentrale Lage dieser Last, also $k_z m^2$; dann ist

$$P_1 : P_2 = b : a.$$

305. Nach der Spaltung wird der Stab vom Querschnitt A B C in der Mitte von A B durch die Last $\frac{P_2}{2}$ exzentrisch beansprucht. Man benütze Gleichung 77. Es ist $P = \frac{P_2}{2}$, $F = \frac{a^2}{2}$, $p = \frac{h}{3}$, $W = \frac{h^3}{6}$, wenn a die Quadratseite und $h = \frac{a}{\sqrt{2}}$ die Höhe des

Dreiecks ABC ist. Man erhält $\sigma = \frac{3\,P_2}{a^2}$. Anderseits ist bei gleicher Sicherheit $\sigma = \frac{P_1}{a^2}$. Es bleibt also $P_2 = \frac{1}{3} P_1$.

306. Wenn fünffache Bruchsicherheit verlangt wird, ist die Bruchlast $B = 5 \cdot 800 \text{ kg} = 4000 \text{ kg}$.

Der Trägheitshalbmesser des Querschnitts ist

$$i = \frac{20 \text{ cm}}{\sqrt{12}} = 5{,}78 \text{ cm und } n = \frac{l}{i} = 69{,}28.$$

Damit wird für Bauholz nach den Gleichungen 83

$$\mu = 0{,}70 + 0{,}03\,n = 2{,}78.$$

Ferner nach Gleichung 82:

$$\omega l = l \sqrt{\frac{B}{EJ}} = 0{,}683,$$

und

$$\frac{1}{\cos \omega l} = 1{,}278.$$

Sodann liefert Gleichung 81:

$$p = 29{,}76 \text{ cm},$$

woraus

$$x = 19{,}76 \text{ cm}.$$

Ohne Berücksichtigung der Tetmajerschen Zahl μ erhielte man

$$x = 77{,}37 \text{ cm}.$$

307. Zur Berechnung der Bruchlast B der Säule dient die Gleichung 81.

Es ist der Trägheitshalbmesser des quadratischen Querschnitts:

$$i = \frac{s}{\sqrt{12}} = 8{,}66 \text{ cm},$$

ferner

$$n = \frac{l}{i} = 46{,}2,$$

und die Tetmajersche Erfahrungszahl nach den Gleichungen 83:

$$\mu = 0{,}70 + 0{,}03\,n = 2{,}086;$$

ferner wird

$$\frac{pF}{W} = 20, \quad FK = 252\,000 \text{ kg},$$

und somit

$$B = \frac{FK}{\mu\left[1 + \frac{pF}{W \cos \omega l}\right]} = \frac{120\,805 \text{ kg}}{1 + \frac{20}{\cos \omega l}} \text{ mit } \omega = \sqrt{\frac{B}{EJ}}.$$

1. Annäherung:

$$\frac{1}{\cos \omega l} = 1, \quad B_1 = 5752 \text{ kg};$$

2. Annäherung mit Gleichung 82:

$$(\omega l)^2 = 0{,}126, \quad \frac{1}{\cos \omega l} = 1{,}066, \quad B_2 = 5412 \text{ kg};$$

3. Annäherung:

$$(\omega l)^2 = 0{,}119, \quad \frac{1}{\cos \omega l} = 1{,}062, \quad B_3 = 5432 \text{ kg}.$$

Bricht man hier die Rechnung ab, so ist die gesuchte Tragfähigkeit der Säule

$$P = \frac{1}{4} B_3 = 1358 \text{ kg}.$$

Mit dieser Belastung wird $(\omega l)^2 = \frac{P l^2}{E J} = 0{,}030$,

$$\frac{1}{\cos \omega l} = 1{,}015,$$

und nach Gleichung 80 die Ausbiegung am oberen Ende:

$$f = 0{,}015 \text{ m}.$$

Die größten Randspannungen werden am unteren Ende der Säule nach den Gleichungen 79:

rechts: $\frac{P}{F}\left(1 + \frac{p F}{W \cos \omega l}\right) = 32$ at Druck,

links: $\frac{P}{F}\left(1 - \frac{p F}{W \cos \omega l}\right) = 29$ at Zug.

308. Anwendung von Gleichung 79. Es ist

$$F = 628{,}32 \text{ cm}^2, \quad J = \frac{\pi}{4}(20 \cdot \overline{15}^3 - 10^4) = 45\,160 \text{ cm}^4,$$

$$W = \frac{J}{15 \text{ cm}} = 3011 \text{ cm}^3;$$

$$\omega l = l \sqrt{\frac{P}{E J}} = 0{,}368, \quad \frac{1}{\cos \omega l} = 1{,}071 \text{ (nach Gleichung 82).}$$

Mit $\max \sigma = 125$ at folgt hieraus: $p = 2{,}6$ cm.

309. Die Null-Linie geht durch B, senkrecht zur Symmetrale durch A. Man benütze Gleichung 75. Es ist

$$p_1 = \frac{h}{2}, \quad n_1 = -\frac{h}{4}, \quad i_2{}^2 = \frac{J_2}{F};$$

J_2 = Trägheitsmoment für die horizontale Schwerlinie

$$= \frac{1}{12}\left[b h^3 - (b - x)\left(\frac{h}{2}\right)^3\right],$$

$$F = b h - (b - x)\frac{h}{2}.$$

Es wird
$$x = \frac{b}{5}.$$

310. Man rechne zuerst die Bruchlast der Säule nach Gleichung 81:

$$B = \frac{F K}{\mu\left[1 + \frac{p F}{W \cos \omega l}\right]}.$$

Hierin ist: F (Fläche des Querschnitts) $= 224 \text{ cm}^2$,

J (Trägheitsmoment des Querschnitts) $= 9138{,}67 \text{ cm}^4$,

$$e_1 = e_2 = e = \frac{15}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = 12{,}02 \text{ cm},$$

$$W \text{ (Widerstandsmoment)} = \frac{J}{e} = 760{,}29 \text{ cm}^3,$$

$$p \text{ (Exzentrizität der Last)} = 15\sqrt{2} = 21{,}21 \text{ cm},$$

μ (Tetmajersche Zahl für Schweißeisen, gespreizter Querschnitt) $= 1{,}08$ (Gleichung 83).

Statt K ist bei Schweißeisen die Fließgrenze 2200 at zu setzen.

Hierdurch wird obige Gleichung:

$$B = \frac{456\,297 \text{ kg}}{1 + \frac{6{,}25}{\cos \omega l}} \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{B}{E J}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{a)}$$

Zur Berechnung von B wird folgender Näherungsweg einzuschlagen sein:

1. Annäherung. Man setze $\frac{1}{\cos \omega l}$ versuchsweise gleich Eins. Damit wird

$$B_1 = 62\,938 \text{ kg}.$$

2. Annäherung. Mit diesem Wert von B erhält man aus den Gleichungen a)

$$\omega l = 0{,}742, \text{ ferner aus Gleichung 82:}$$

$$\frac{1}{\cos \omega l} = 1 + \frac{(\omega l)^2}{2} + \frac{5(\omega l)^4}{24} = 1{,}338,$$

und
$$B_2 = 48\,737 \text{ kg}.$$

3. Annäherung. Die Wiederholung dieses Vorganges liefert:

$$\omega l = 0{,}653, \quad \frac{1}{\cos \omega l} = 1{,}251, \quad B_3 = 51\,741 \text{ kg.}$$

4. Annäherung:

$$\omega l = 0{,}673, \quad \frac{1}{\cos \omega l} = 1{,}269, \quad B_4 = 51\,090 \text{ kg.}$$

5. Annäherung:

$$\omega l = 0{,}669, \quad \frac{1}{\cos \omega l} = 1{,}266, \quad B_5 = 51\,215 \text{ kg.}$$

Bricht man hier die Rechnung ab, so ist die gesuchte Tragfähigkeit der Säule

$$P = \frac{B_5}{4} = 12\,804 \text{ kg.}$$

311. Nach den Resultaten der Aufgabe 64 ist für Flußeisen mit $n = {}^1/_2$ die Arbeitsfestigkeit:

$$A = 2400 + 1440\,n + 360\,n^2 = 3210 \text{ at}$$

und die zulässige Zugspannung

$$k_z = \frac{2}{7} A = 917 \text{ at.}$$

Die Kraft P hat man sich im Schwerpunkt jedes Querschnitts angreifend zu denken; der Schwerpunkt hat die Entfernung $e = 1{,}22$ cm von der horizontalen Mittellinie; die Exzentrizität des Kraftangriffes ist also $p = 2\,e = 2{,}44$ cm.

Benützt man Gleichung 77:

$$\sigma = \frac{P}{F}\left[1 + \frac{p\,F}{W}\right]$$

und setzt $\sigma = k_z = 917$ at, $F = 8{,}88$ cm^2, $W = \frac{J}{e}$, worin $J = 12{,}895$ cm^4 in bezug auf die horizontale Schwerlinie eines der Stabquerschnitte ist, so bleibt für die Traglast

$$P = 2669 \text{ kg.}$$

312. Man setze in Gleichung 77: $\sigma = 0$, woraus

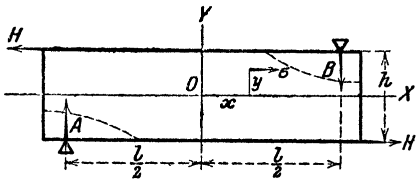
$$p\,F = W.$$

Nun ist: $\quad W = \frac{J}{e}, \quad p = \frac{a}{2}, \quad F = a\,x + 4\,a^2,$

$J = \frac{1}{12}(a x^3 + 4 a^4)$ in bezug auf die vertikale Schwerlinie des Querschnitts; $e = \frac{x}{2}$. Dies gibt mit $\frac{x}{a} = z$ die Gleichung:

$$z^3 - 3 z^2 - 12 z + 4 = 0$$

mit der brauchbaren Wurzel $z = 5{,}17$.



313. Zunächst ist

$$A = B = H \frac{h}{l}.$$

Die Normalspannung σ in einem Punkt x, y rührt her von der exzentrischen Zugkraft H und von der Biegung durch die Auflagerdrücke; es ist also

$$\sigma = \frac{H}{F} - \frac{H \frac{h}{2} \cdot y}{J} + \frac{B\left(\frac{l}{2} - x\right) \cdot y}{J}.$$

Setzt man $\sigma = 0$, $J = \frac{1}{12} b h^3$, so wird

$$x y = \frac{1}{12} h l$$

der Ort der Punkte ohne Spannung σ. (Gleichseitige Hyperbel mit den Asymptoten OX, OY; strichlierte Linie in der Abbildung.)

314. Benützt man Gleichung 77, so ist

$$s_1 : - s_2 = 1 + \frac{pF}{W} : -\left(1 - \frac{pF}{W}\right) = 5 : 2,$$

woraus

$$7 W = 3 p F.$$

Setzt man hier: $W = \frac{J}{e}$, $J = \frac{\pi}{4}(r^4 - x^4)$, $e = r$,

$$p = \frac{r + x}{2}, \quad F = \pi (r^2 - x^2),$$

so bleibt

$$x = r \frac{3 \pm \sqrt{2}}{7}.$$

315. Die Last P zerfällt in den achsial wirkenden Teil $P \sin \alpha$ und in den biegenden Teil $P \cos \alpha$; dieser ruft eine Ausweichung des Träger-Endes B hervor:

$$f = \frac{1}{3} \frac{P \cos \alpha \cdot l^3}{E J} = 3{,}068 \text{ cm} \quad \text{(vergl. Gleichung 43).}$$

Hierdurch wird der achsiale Druck P sin α exzentrisch gegen das Auflager A. Hier treten auch die größten Spannungen auf, und zwar nach Gleichung 79 an der Außenseite:

$$s_1 = -\frac{P \sin\alpha}{F}\left[1 - \frac{fF}{W \cos\omega l}\right] + \frac{P \cos\alpha \cdot l}{W},$$

an der Innenseite:

$$s_2 = -\frac{P \sin\alpha}{F}\left[1 + \frac{fF}{W \cos\omega l}\right] - \frac{P \cos\alpha \cdot l}{W},$$

worin $\omega = \sqrt{\frac{P \sin\alpha}{EJ}}$, $W = \frac{J}{e} = \frac{16\,052}{15} = 1070 \text{ cm}^3$.

Die ersten Teile dieser beiden Spannungen sind die Einflüsse der exzentrischen Druckkraft P sin α, die zweiten Teile die Einflüsse des Biegungsmomentes $P l \cos\alpha$. Man erhält:
$\omega l = 0{,}2053$ im Bogenmaß, das ist $11^0\,45'\,36''$ im Gradmaß und daraus:

$$s_1 = +745 \text{ at}, \quad s_2 = -811 \text{ at}.$$

316. Nach den Gleichungen 79 und 82 ist

$$\omega = \sqrt{\frac{P}{EJ}} = 0{,}00261, \quad \omega l = 1{,}175,$$

$$\frac{1}{\cos\omega l} = 2{,}086,$$

$${}_{\max}\sigma = -1000 \text{ at} = -\frac{10\,000 \text{ kg}}{20{,}4 \text{ cm}^2}\left[1 + \frac{p \cdot 20{,}4 \text{ cm}^2 \cdot 7{,}5 \text{ cm}}{734 \text{ cm}^4} \cdot 2{,}086\right],$$

woraus $p = 2{,}4$ cm.

Die größte Spannung tritt in A auf. Die Spannung in B ist:

$${}_{\min}\sigma = 19{,}6 \text{ at Zug.}$$

317. Die am meisten gespannten Punkte des Querschnitts sind jedenfalls unter A, B, C, D zu suchen. Führt man ihre Koordinaten mit Berücksichtigung ihres Vorzeichens in die Gleichung 78

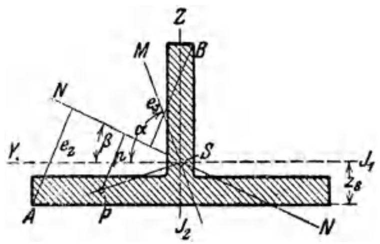
$$\sigma = P\left[\frac{1}{F} + \frac{by}{J_2} + \frac{cz}{J_1}\right]$$

ein, ferner $b = 15$ cm, $c = -50$ cm (Richtung von $-Z$), so erhält man die vier Spannungen

$$\sigma_A = 0{,}03387\,P, \quad \sigma_B = -0{,}05\,219\,P,$$
$$\sigma_C = 0{,}06163\,P, \quad \sigma_D = -0{,}02\,443\,P.$$

σ_C ist demnach die größte Spannung. Setzt man sie gleich 1000 at, so wird die erlaubte größte Last $P = 16\,226$ kg.

318. Querschnittsfläche: $F = 45{,}44\ \text{cm}^2$.



Schwerpunktsabstand:

$z_s = 2{,}28$ cm.

Hauptträgheitsmomente:

$J_1 = 322\ \text{cm}^4$,

$J_2 = 1070\ \text{cm}^4$.

Die Achse des Biegungsmomentes M S steht senkrecht zu P S, daraus: $\alpha = 73^0\,30'\,40''$.

Nach Gleichung 35 ist $\text{tg}\,\beta = \frac{J_1}{J_2}\,\text{tg}\,\alpha$, daraus $\beta = 45^0\,28'\,25''$.

N N ist die Biegungsachse; die Angriffsstelle der Last hat von ihr den Abstand $p = 5 \sin\beta + (2{,}28 - 0{,}8)\cos\beta = 4{,}60$ cm. A ist die Stelle größter Druckspannung; ihr Abstand von N N ist:

$$e_2 = 10 \sin\beta + 2{,}28 \cos\beta = 8{,}72\ \text{cm}.$$

Das Trägheitsmoment für N N ist: $J = J_1 \cos^2\beta + J_2 \sin^2\beta = 703\ \text{cm}^4$ und das Widerstandsmoment $W_2 = \frac{J}{e_2}$.

Die Bruchlast des **T**-Eisens ist dann nach Gleichung 81:

$$B = \frac{F\,K}{\mu\left[1 + \frac{p\,F}{W_2 \cos\omega l}\right]} = \frac{92\,563\ \text{kg}}{1 + \frac{2{,}59}{\cos\omega l}},$$

worin für K die Fließgrenze, für μ die Tetmajersche Angabe 1,08 (vergl. Gleichung 83) gesetzt wurde. Ferner ist $\omega = \sqrt{\frac{B}{E\,J}}$, $l = 1000$ cm. Die Ermittlung von B nach dieser Gleichung erfolgt ähnlich wie in Aufgabe 310. Man erhält $B = 5492$ kg und daraus die Tragfähigkeit

$$P = \frac{1}{4} B = 1373\ \text{kg}.$$

Unter Annahme dieser Last ist die größte Druckspannung des Querschnitts nach Gleichung 79

$$\max\sigma = -\frac{P}{F}\left[1 + \frac{p\,F}{W_2 \cos\omega l}\right] = -163\ \text{at in A},$$

worin $\omega = \sqrt{\frac{P}{E\,J}}$ zu setzen ist.

Die größte Zugspannung tritt in B auf; man findet zunächst dessen Abstand von NN:

$$e_1 = (10 - 2{,}28)\cos\beta + 0{,}8\sin\beta = 5{,}98 \text{ cm},$$

daraus das Widerstandsmoment

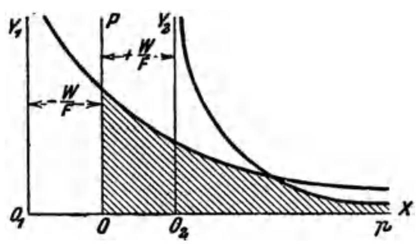
$$W_1 = \frac{J}{e_1}$$

und endlich nach Gleichung 79:

$$\sigma = \frac{P}{F}\left[-1 + \frac{pF}{W_1 \cos \omega l}\right] = 60 \text{ at.}$$

319. Nach Gleichung 77 sind die größten vorkommenden Spannungen

$$k_z = \frac{P}{F} + \frac{Pp}{W}, \quad -k = \frac{P}{F} - \frac{Pp}{W}.$$



Setzt man $P = y$, $p = x$ und bezieht die beiden Gleichungen auf das Achsenkreuz $Y_1 O_1 X$, bzw. $Y_2 O_2 X$, so nehmen obige zwei Gleichungen die Form an:

$$xy = k_z W, \quad xy = kW,$$

stellen also Hyperbeln dar, deren Asymptoten Y_1 und X, bzw. Y_2 und X sind. Der schraffierte Raum zwischen den Hyperbeln ist das Gebiet, innerhalb dessen die Werte von P und p gewählt werden dürfen.

320. Das Biegungsmoment an beliebiger Stelle x, y des gebogenen Stabes ist

$$M = Ry + \frac{q}{2}x(l - x),$$

und die Gleichung der elastischen Linie nach Gleichung 40:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EJ} = -iM,$$

oder

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -(q + iRM).$$

Setzt man $q + iRM = u$, so erhält man die Differenzialgleichung in einfachster Form:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\omega^2 u, \text{ wenn } \omega = \sqrt{\frac{R}{EJ}}.$$

Die Auflösung lautet: $u = A \sin \omega x + B \cos \omega x$,
oder:

$$R y = -\frac{q x}{2}(l - x) + \frac{1}{\omega^2}(A \sin \omega x + B \cos \omega x - q).$$

Die Konstanten ergeben sich aus der Bedingung, daß für $x = 0$, $y = 0$ und für $x = \frac{l}{2}$, $\frac{dy}{dx} = 0$ sein muß. Daraus wird:

$$A = q \operatorname{tg} \frac{\omega l}{2}, \quad B = q,$$

die Gleichung der elastischen Linie:

$$y = \frac{q}{R}\left\{\frac{1}{\omega^2}\left[\frac{\cos\left(\frac{\omega l}{2} - \omega x\right)}{\cos \frac{\omega l}{2}} - 1\right] - \frac{1}{2} x (l - x)\right\},$$

und die Durchbiegung in der Mitte:

$$f = \frac{q}{R}\left\{\frac{1}{\omega^2}\left[\frac{1}{\cos \frac{\omega l}{2}} - 1\right] - \frac{l^2}{8}\right\}.$$

321. Das Biegungsmoment an beliebiger Stelle x, y des Feldes a ist: $M = R(r + y_1) + \left(P \frac{b}{l} + \frac{q l}{2}\right) x_1 - \frac{1}{2} q x_1^2$. Die Gleichung der elastischen Linie wird wie in Aufgabe 320 in der Form aufzustellen sein:

$$\frac{d^2 u}{d x_1^2} = -\omega^2 u,$$

worin wie dort $u = q + \omega^2 M$, $\omega = \sqrt{\frac{R}{E J}}$ ist. Die Lösung dieser Differenzialgleichung lautet:

$$u = A_1 \sin \omega x_1 + B_1 \cos \omega x_1,$$

oder

$$i R\left[R(r + y_1) + \left(P \frac{b}{l} + \frac{q l}{2}\right) x_1 - \frac{1}{2} q x_1^2\right] + q$$
$$= A_1 \sin \omega x_1 + B_1 \cos \omega x_1 \quad \ldots\ldots \quad a)$$

Differenziert man diese Gleichung, so erhält man:

$$i R\left[R \frac{d y_1}{d x_1} + P \frac{b}{l} + \frac{q l}{2} - q x_1\right] = A_1 \omega \cos \omega x - B_1 \omega \sin \omega x_1.$$

Zwei analoge Gleichungen erhält man für das Feld b; man hat nur x_1, y_1, b, A_1, B_1 durch x_2, y_2, a, A_2, B_2 zu ersetzen.

Die Integrationskonstanten A_1, A_2, B_1, B_2 erhält man aus der Bemerkung, daß für $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ auch $y_1 = 0$ und $y_2 = 0$ ist; daß ferner an der Stelle, wo P steht ($x_1 = a$, $x_2 = b$) die Bedingungen: $y_1 = y_2 = f$, $\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{dy_2}{dx_2}$ erfüllt sein müssen. Man erhält so

$$B_1 = B_2 = iR^2 r + q,$$

$$A_1 = (iR^2 r + q)\frac{1 - \cos\omega l}{\sin\omega l} + \frac{iRP}{\omega}\,\frac{\sin\omega b}{\sin\omega l}.$$

Durch Einsetzen dieser Werte in Gleichung a) erhält man mit $x_1 = a$, $y_1 = f$ die gesuchte Durchbiegung:

$$f = \frac{P}{\omega R}\,\frac{\sin\omega a \cdot \sin\omega b}{\sin\omega l} + \left(r + \frac{q}{R\omega^2}\right)\left(\frac{\sin\omega a + \sin\omega b}{\sin\omega l} - 1\right)$$
$$- \frac{ab}{R}\left(\frac{P}{l} + \frac{q}{2}\right).$$

322. Die Ordinate der Belastungslinie q ist an der Stelle ξ:

$$q = q_1 - \frac{q_1 - q_2}{l}\,\xi = q_1 - a\,\xi.$$

Der Auflagerdruck in A wird:

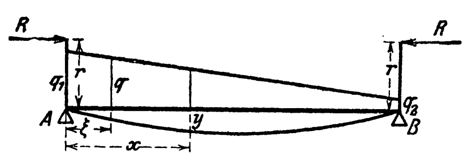
$$A = \frac{1}{l}\int_0^l q(l - \xi)\,d\xi = \frac{1}{6}(2q_1 + q_2).$$

Das Biegungsmoment an der Stelle x ist:

$$M = R(r + y) + Ax - \int_0^x q\,d\xi\,(x - \xi)$$
$$= R(r + y) + Ax - \frac{1}{2}q_1 x^2 + \frac{1}{6}a x^3.$$

Es ist nach Gleichung 40:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EJ} = -iM \quad a)$$



Differenziert man diese Gleichung, so erhält man

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -i\left[R\frac{d^2y}{dx^2} - q_1 + ax\right] \quad . \; . \; . \; . \quad b)$$

$$\frac{d^6y}{dx^6} = -iR\,\frac{d^4y}{dx^4}.$$

Setzt man $\frac{d^4 y}{d x^4} = u$, $i R = \omega^2$, so erhält man wie in Aufgabe 320 die Differenzialgleichung

$$\frac{d^2 u}{d x^2} = -\omega^2 u,$$

deren Auflösung lautet:

$$u = A \sin \omega x + B \cos \omega x.$$

Dann liefert Gleichung b) die Beziehung:

$$A \sin \omega x + B \cos \omega x = -i\left[R \frac{d^2 y}{d x^2} - q_1 + a x\right].$$

Setzt man hier für $\frac{d^2 y}{d x^2}$ den Wert aus Gleichung a) ein, so wird

$$y = -r - \frac{q_1 - a x}{R^2 i} + \frac{1}{R^2 i^2}(A \sin \omega x + B \cos \omega x)$$
$$- \frac{1}{R}\left[A x - \frac{1}{2} q_1 x^2 + \frac{1}{6} a x^3\right].$$

Die Integrationskonstanten A und B werden aus der Bedingung ermittelt, daß für $x = 0$ und für $x = l$: $y = 0$ werden muß. Es bleibt schließlich für die Gleichung der elastischen Linie:

$$y = \frac{\sin \omega x}{\sin \omega l}\left[r + \frac{q_2}{R \omega^2}\right] + \frac{\sin \omega (l - x)}{\sin \omega l}\left[r + \frac{q_1}{R \omega^2}\right] - r$$
$$- \frac{q_1 (l - x) + q_2 x}{R \omega^2 l} - \frac{x (l - x)}{6 R l}[l(2 q_1 + q_2) - x(q_1 - q_2)].$$

323. Die reduzierte Länge des Holzes ist nach Gleichung 86 $l_r = 0{,}7\ l = 2{,}1$ m und somit $n = \frac{l_r}{i} = 42$ mit $i = \frac{d}{4} = 5$ cm. Gleichung 87 liefert dann die Knickfestigkeit:

$$K_k = 293 - 1{,}94\ n = 211 \text{ at},$$

und somit ist die Knicklast:

$$P_k = \frac{\pi d^2}{4} \cdot K_k = 66\,287 \text{ kg}.$$

324. Man nehme vorläufig an, daß zur Berechnung der Knicklast die Gleichung 90 angewendet werden darf. Es ist das kleinste Trägheitsmoment des Querschnitts:

$$J = \frac{\pi}{4}(14 \cdot 10^3 - 10 \cdot 6^3) = \pi \cdot 2960 \text{ cm}^4,$$

die Fläche $F = \pi \cdot 80\ \mathrm{cm}^2$,

woraus $i^2 = \frac{J}{F} = 37\ \mathrm{cm}^2$.

Für die Knickfestigkeit ergibt sich zunächst

$$K_k = \frac{92\,991\ \mathrm{kg}}{F} = 379\ \mathrm{at},$$

und hieraus nach Gleichung 90

$$l = 982\ \mathrm{cm}$$

die Länge, bei der die Säule knicken würde.

Da nun $n = \frac{l}{i} = 161$, also größer als 80, so war die Benützung der Gleichung 90 gestattet.

325. Nach Gleichung 88 muß für Holz $n = \frac{l}{i} > 100$ sein.

Es ist $i^2 = \frac{4}{3}\ \mathrm{cm}^2$, woraus

$$l > 1{,}15\ \mathrm{m}$$

für die Anwendung der Eulerschen Gleichung folgt.

326. Für Flußeisen verlangt Gleichung 94: $n = \frac{l}{i} > 105$.

Für ein regelmäßiges Sechseck ist nach Aufgabe 113:

$J = \frac{5\sqrt{3}}{16} a^4$, ferner die Fläche des Querschnitts

$F = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$, also $i^2 = \frac{J}{F} = \frac{5}{24} a^2$, und $i = 2{,}739\ \mathrm{cm}$;

endlich die reduzierte Länge des Stabes nach Gleichung 86, Befestigungsart d): $l_r = 0{,}7\ l$, woraus

$$\frac{0{,}7\ l}{2{,}739} > 105 \text{ und } l > 4{,}11\ \mathrm{m}$$

für die Anwendung der Eulerschen Gleichung folgt.

327. Nach Gleichung 95 und 96 ist die zulässige Knickspannung für Holz

$$k_k = \frac{k}{1 + 0{,}00023 n^2}.$$

Hierin ist: $n = \frac{l_r}{i} = 2\frac{l}{i}$ nach Gleichung 86

und $i = 2{,}5\ \mathrm{cm}$, $n = 160$, $k_k = 13\ \mathrm{at}$.

328. Die ungünstigste Stellung der Kolbenstange ist die äußerste Lage rechts; ihr linkes Ende ist dann durch die Stopfbüchse B eingespannt, ihr rechtes Ende A, das gerade geführt wird, ist als drehbar anzusehen; es liegt also die Befestigungsart d) vor (Gleichung 86), und es ist

$$n = \frac{l_r}{i} = \frac{0{,}7\,l}{i},$$

und da $i = \frac{d}{4}$: $n = \frac{2{,}8\,l}{d}$.

Da bei Kolbenstangen jedenfalls $l < 40\,d$ sein wird, also $n < 112$, so ist für Schweißeisen Gleichung 91 zu verwenden; die Kolbenkraft, d. h. die Tragfähigkeit der Kolbenstange wird also sein können:

$$P = \frac{1}{20}\,F\,K_k = \frac{1}{20} \cdot \frac{\pi d^2}{4}\,(3030 - 12{,}9\,n),$$

woraus sich für den Durchmesser die Gleichung ergibt:

$$d^2 - 0{,}01192\,l\,d = 0{,}0084\,P.$$

Gewöhnlich wird der Durchmesser der Kolbenstange nach der Eulerschen Gleichung, also nach Gleichung 92 gerechnet, obwohl diese hier nicht anwendbar ist. Es wird dann

$$P = \frac{1}{20}\,F\,K_k = \frac{1}{20} \cdot \frac{\pi d^2}{4}\,\frac{19740000}{n^2},$$

woraus

$$d = 0{,}056\,\sqrt[4]{P}\,\sqrt{l}.$$

329. Man muß zunächst entscheiden, ob man nach Gleichung 87 oder 88 zu rechnen hat. Beginnt man versuchsweise mit Gleichung 87, so ist für die Tragfähigkeit der Strebe

$$P = 5000\text{ kg} = \frac{1}{11} \cdot F\,K_k = \frac{a^2}{11}\,(293 - 1{,}94\,n),$$

worin

$$n = \frac{l}{i} = \frac{l\sqrt{12}}{a} = \frac{1384}{a}.$$

Dies liefert die Gleichung:

$$a^2 - 9{,}18\,a = 187{,}71,$$

woraus

$$a = 19\text{ cm}.$$

Nun ist $n = 72{,}8$, womit die Benützung der Gleichung 87 gerechtfertigt erscheint.

330. Versucht man zunächst nach Gleichung 90 zu rechnen, so ist die Tragfähigkeit der Säule:

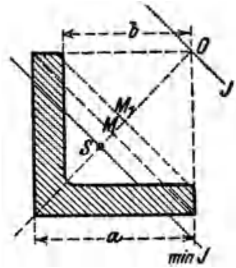
$$P = 3325\text{ kg} = \frac{1}{20} \cdot F\,K_k = \frac{1}{20} \cdot \frac{\pi}{4}\,(D^2 - d^2)\,\frac{987\,0000}{n^2},$$

worin $$n = \frac{l}{i}, \qquad i^2 = \frac{D^2 + d^2}{16};$$
mit $d = 0{,}6\,D$ ergibt sich daraus
$$D = 14{,}4 \text{ cm}, \quad d = 8{,}6 \text{ cm}.$$
Mit diesen Werten wird $i = 4{,}19$ cm und $n = 124$; die Benützung der Gleichung 90 war also gestattet.

331. Querschnittsfläche: $F = 210$ cm²; Schwerpunktsabstand von oben: $e = 4{,}64$ cm; Trägheitsmoment in bezug auf die obere Kante: 7750 cm⁴, in bezug auf die horizontale Schwerlinie:
$$J = 3228{,}78 \text{ cm}^4.$$
Trägheitshalbmesser: $$i = \sqrt{\frac{J}{F}} = 3{,}92 \text{ cm}.$$
Nach den Gleichungen 96, 97 wird
$$P = \frac{F\,k}{1 + 0{,}00014\,n^2}$$
mit $P = 45\,000$ kg, $k = 1230$ at, und nach Gleichung 86:
$$n = \frac{l_r}{i} = 2\,\frac{l}{i},$$
woraus $$l = 3{,}61 \text{ m}.$$

332. Nach den Gleichungen 95 und 96 ist die zulässige Knickspannung für Gußeisen
$$k_k = \frac{k}{1 + 0{,}0007\,n^2}.$$
Hierin ist $$n = \frac{l}{i}, \quad i = \frac{1}{4}\sqrt{D^2 + d^2} = 9{,}775 \text{ cm},$$
$$n = 51{,}15 \text{ und } k_k = 282 \text{ at}.$$

333. Das kleinste Trägheitsmoment des Querschnitts $_{\min}J$ wird am besten aus J gerechnet. Man betrachte die Fläche des Winkeleisens als Differenz zweier Quadrate a^2 und b^2, worin $a = 8$ cm, $b = 6{,}8$ cm ist. Dann ist



$$J = \left[\frac{a^4}{12} + a^2 \cdot \overline{MO}^2\right] - \left[\frac{b^4}{12} + b^2 \cdot \overline{M_1 O}^2\right],$$
worin
$$MO = 4\sqrt{2} \text{ cm}, \quad M_1 O = 3{,}4\sqrt{2} \text{ cm sind.}$$
Man erhält $$J = 1142{,}24 \text{ cm}^4.$$

Dann ist $\min J = J - (a^2 - b^2) \cdot \overline{SO}^2$, worin $SO = 7{,}87$ cm, S der Schwerpunkt des Querschnitts ist. Man findet $\min J = 43{,}3\ \text{cm}^4$ und $i = \sqrt{\frac{\min J}{a^2 - b^2}} = 1{,}56$ cm. Dann wird nach Gleichung 86

$$n = \frac{l_r}{i} = \frac{l}{2i} = 192$$

und endlich nach den Gleichungen 95 und 96

$$k_k = \frac{700\ \text{at}}{1 + 0{,}00014\ n^2} = 114\ \text{at}.$$

334. Mit Rücksicht auf Gleichung 86 ist $l_r = \frac{l}{2}$ und $n = \frac{l_r}{i} = \frac{l}{2i}$; mit $i^2 = \frac{1}{12} b^2$ für das Rechteck folgt $n = \frac{l\sqrt{3}}{b}$.

Versucht man zuerst nach Gleichung 92 zu rechnen, so wird, da 20 t die größte zu tragende Last und $\mathfrak{S} = 5$ der Sicherheitsgrad ist:

$$20\,000\ \text{kg} = \frac{1}{5} \cdot b h K_k = \frac{1}{5} \cdot 2b^2 \cdot \frac{19\,740\,000}{\left(\frac{300\sqrt{3}}{b}\right)^2},$$

woraus $\qquad b = 5{,}11$ cm und $n = 102$.

Da letzter Wert jedoch der Bedingung $n > 112$ nicht genügt, muß zu Gleichung 91 gegriffen werden; es ist dann

$$20\,000\ \text{kg} = \frac{1}{5} \cdot b h \cdot K_k = \frac{1}{5} \cdot 2\, b^2 \cdot \left(3030 - 12{,}9\, \frac{300\sqrt{3}}{b}\right),$$

woraus die Gleichung folgt:

$$b^2 - 2{,}21\, b = 16{,}5$$

und daraus die brauchbare Wurzel:

$$b = 5{,}3\ \text{cm und } h = 10{,}6\ \text{cm}.$$

Nun macht man die Probe auf die Tragfähigkeit des Stabes. Nach Aufgabe 64 ist für ein Spannungsverhältnis von

$$\frac{-5\ \text{t}}{-20\ \text{t}} = \frac{1}{4}$$

bei Schweißeisen die Arbeitsfestigkeit desselben

$$A = 2160 + 1230 \cdot \frac{1}{4} + 250 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 2182\ \text{at}$$

und somit die zulässige Druckspannung

$$k = \frac{2}{7} A = 709 \text{ at};$$

ferner wird $$n = \frac{l\sqrt{3}}{b} = \frac{300\sqrt{3}}{5{,}3} = 98$$

und somit aus den Gleichungen 96 und 97 die Tragfähigkeit

$$P = \frac{b\,h\,k}{1 + 0{,}00016\, n^2} = 15\,674 \text{ kg}.$$

Da jedoch die größte zu ertragende Last 20 t beträgt, so genügen die ermittelten Abmessungen des Stabes nicht.

335. Der Trägheitshalbmesser ist $i = \frac{a}{\sqrt{12}} = 6{,}93$ cm. Da das obere Ende der Säule seitlich nicht ausweichen kann, ist Gleichung 86, Befestigungsart d) zu benützen, also

$$n = \frac{l_r}{i} = \frac{0{,}7\, l}{i} = 60{,}62;$$

ferner nach Gleichung 87 die Knickfestigkeit:

$$K_k = 293 - 1{,}94\, n = 175 \text{ at}$$

und die Tragfähigkeit:

$$P = \frac{1}{4} F K_k = 25{,}2 \text{ t}, \quad F = a^2.$$

336. Nach dem Resultat der Aufgabe 64 ist die Arbeitsfestigkeit für Flußeisen im vorliegenden Falle:

$$A = 2400 + 1440\left(-\frac{1}{2}\right) + 360\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1770 \text{ at}$$

und die zulässige Zug- und Druckspannung

$$k_z = k = \frac{2}{7} A = 505 \text{ at}.$$

Aus $$\frac{P}{2 \cos 30^0} = \frac{P}{\sqrt{3}} = a^2 \cdot k_z$$

folgt zunächst mit $P = 20$ t: $a = 5$ cm.

Sodann wird aus Gleichung 95 und 96 für Knickung:

$$\frac{P_1}{\sqrt{3}} = \frac{F \cdot k}{1 + 0{,}00014\, n^2} = \frac{\frac{P}{\sqrt{3}}}{1 + 0{,}00014\, n^2}$$

und mit $P = 20$ t, $P_1 = 10$ t: $1 + 0{,}00014\, n^2 = 2$, woraus $$n = 84{,}5 = \frac{l}{i}$$

und mit $i = \frac{a}{\sqrt{12}}$: $l = 122$ cm.

337. Die Fläche des Querschnitts ist $F = 244{,}45$ cm², das Trägheitsmoment in bezug auf die Schwerlinie $J = 32\,293$ cm⁴, woraus

$$i = \sqrt{\frac{J}{F}} = 11{,}49 \text{ cm und } n = \frac{l_r}{i} = \frac{2l}{i} = 78{,}3$$

nach Gleichung 86, Befestigungsart b); dann ist nach Gleichung 93 die Knickfestigkeit

$$K_k = 3100 - 11{,}4\,n = 2207 \text{ at}$$

und die Tragfähigkeit

$$P = \frac{1}{\mathfrak{S}} \cdot F K_k = 107\,900 \text{ kg}.$$

338. Querschnittsfläche: $F = 304$ cm²; kleinstes Trägheitsmoment: $J = 27\,285{,}33$ cm⁴; Trägheitshalbmesser: $i = \sqrt{\frac{J}{F}} = 9{,}47$ cm; nach Gleichung 86, Befestigungsart c) ist sodann

$$n = \frac{i_r}{i} = \frac{l}{2\,i} = 42{,}22$$

und nach den Gleichungen 96 und 97 die Tragfähigkeit der Strebe:

$$P = \frac{F \cdot k}{1 + 0{,}00014\,n^2} = 145\,972 \text{ kg}.$$

Nun wäre nach Gleichung 93 die Knickfestigkeit:

$$K_k = 3100 - 11{,}4\,n = 2619 \text{ kg}$$

und die Knicklast der Strebe:

$$P_k = F K_k = 796\,176 \text{ kg},$$

woraus der gefragte Sicherheitsgrad

$$\mathfrak{S} = \frac{P_k}{P} = 5{,}4.$$

339. Querschnittsfläche: $F = 270$ cm². Abstand des Schwerpunkts von der oberen Kante:

$$e = 12{,}80 \text{ cm}.$$

Trägheitsmoment des Querschnitts in bezug auf die obere Kante:

$$J = \frac{1}{3}\left[4 \cdot \overline{40}^3 + 2 \cdot \overline{12}^3 + 18 \cdot 3^3 + 16 \cdot 2^3\right] = 86\,690 \text{ cm}^4;$$

Trägheitsmoment in bezug auf die horizontale Schwerlinie:

$$J_1 = J - F e^2 = 43\,274{,}73 \text{ cm}^4,$$

Trägheitsmoment in bezug auf die vertikale Schwerlinie:

$$J_2 = \frac{1}{12}\left[3 \cdot \overline{40}^3 + 9 \cdot \overline{22}^3 + 28 \cdot \overline{20}^3 - 38 \cdot \overline{16}^3\right] = 29\,682 \text{ cm}^4;$$

da $J_2 < J_1$, ist ersteres für die Knickung maßgebend. Es ist

$$i = \sqrt{\frac{J_2}{F}} = 10{,}485 \text{ cm}$$

und nach Gleichung 93 die Tragfähigkeit der Säule:

$$P = \frac{1}{\mathfrak{S}} \cdot F K_k = \frac{1}{\mathfrak{S}} F\,(3100 - 11{,}4\, n),$$

woraus mit $P = 163\,000$ kg, $\mathfrak{S} = 4$:

$$n = \frac{l}{i} = 60{,}1$$

und die verlangte Länge: $l = 6{,}30$ m.

340. Querschnittsfläche: $F = 14 x^2$; Entfernung des Schwerpunkts von der linken Kante: $e = \frac{19}{14} x$; Trägheitsmoment des Querschnitts in bezug auf die linke Kante: $\frac{134}{3} x^4$; in bezug auf die vertikale Schwerlinie: $J = \frac{793}{42} x^4$. Trägheitshalbmesser:

$$i = \sqrt{\frac{J}{F}} = 1{,}161\ x.$$

Nach den Gleichungen 96 und 97 ist:

$$P = 14000 \text{ kg} = \frac{14 x^2 \cdot 800 \text{ at}}{1 + 0{,}0007 \cdot n^2},$$

worin

$$n = \frac{l}{i} = \frac{500}{1{,}161\, x}.$$

Man erhält die Gleichung

$$x^4 - 1{,}25 x^2 = 162{,}3,$$

deren brauchbare Wurzel: $x = 3{,}65$ cm.

341. Querschnittsfläche: $F = 75{,}10 \text{ cm}^2$; die Tragfähigkeit der Säule ist

$$P = \frac{1}{\mathfrak{S}} \cdot K_k F$$

oder nach Gleichung 92:

$$12615 \text{ kg} = \frac{1}{4} \cdot \frac{19\,740\,000}{n^2} \cdot 75{,}10,$$

woraus

$$n = 171{,}4,$$

also die Benützung von Gleichung 92 gerechtfertigt erscheint. Aus

$$n = \frac{1}{i}$$

folgt:

$$i = 3{,}73 \text{ cm}$$

und das kleinste Trägheitsmoment

$$J = F\,i^2 = 1047{,}0 \text{ cm}^4.$$

Nennt man J_0 das Trägheitsmoment eines U-Eisens in bezug auf die vertikale Schwerlinie desselben (der Schwerpunkt ist $e = 2{,}34$ cm von der langen Kante entfernt), so ergibt die Rechnung $J_0 = 225{,}65 \text{ cm}^4$. Es ist dann für beide U-Eisen zusammengenommen:

$$J = 2\left[J_0 + \frac{F}{2}\left(e + \frac{x}{2}\right)^2\right] = 1047{,}0 \text{ cm}^4,$$

woraus

$$x = 0{,}96 \text{ cm}.$$

Die Tragfähigkeit mit Rücksicht auf die zulässige Knickspannung wird dann nach den Gleichungen 96 und 97:

$$P_1 = \frac{F\,k}{1 + 0{,}00016\,n^2} = 11\,857 \text{ kg}$$

mit

$$k = 900 \text{ at}.$$

342. Sind beide Hälften des Querschnitts fest verschraubt miteinander, so sind:

die Querschnittsfläche: $F = 139{,}9 \text{ cm}^2$,

die Trägheitsmomente: $J_x = 17\,870 \text{ cm}^4$,

$J_y = 7301 \text{ cm}^4$,

also letzteres das für die Knickung maßgebende. Es ist der Trägheitshalbmesser

$$i = \sqrt{\frac{J_y}{F}} = 7{,}22 \text{ cm},$$

ferner nach Gleichung 86, Befestigungsart b):

$$n = \frac{l_r}{i} = \frac{2l}{i} = 69{,}2$$

und nach Gleichung 93 die Knickfestigkeit:

$$K_k = 3100 - 11{,}4\,n = 2311 \text{ at}.$$

Sind die beiden Hälften des Querschnitts unabhängig voneinander, so ist die Querschnittsfläche einer Hälfte:

$$\frac{1}{2} F = 69{,}95 \text{ cm}^2,$$

die Entfernung ihres Schwerpunkts von der XX-Linie:

$$y_s = 9{,}74 \text{ cm},$$

ihr Trägheitsmoment für die XX-Linie (wie oben):

$$\frac{J_x}{2} = 8935 \text{ cm}^4,$$

ihr Trägheitsmoment für die horizontale Schwerlinie:

$$J_1 = \frac{J_x}{2} - \frac{F}{2} y_s^2 = 2299 \text{ cm}^4,$$

ihr Trägheitsmoment für die vertikale Schwerlinie:

$$J_2 = \frac{J_y}{2} = 3650{,}5 \text{ cm}^4.$$

Hier ist also J_1 für die Knickung maßgebend. Es ist

$$i = \sqrt{\frac{J_1}{\frac{1}{2} F}} = 5{,}73 \text{ cm},$$

ferner wie oben $\quad n = \frac{2l}{i} = 87{,}2,$

$$K_k = 3100 - 11{,}4\, n = 2106 \text{ at}.$$

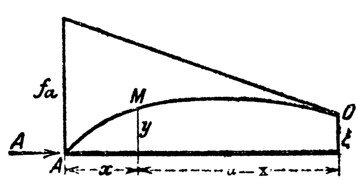
Das Verhältnis der beiden Tragfähigkeiten ist jenes der beiden Knickfestigkeiten, also $\quad 2311 : 2106$ oder $1{,}10 : 1$.

343. Es seien F, F_a, F_b, F_c die Flächen der Dreiecke ABC, OBC, OCA, OAB; ferner J_a, J_b, J_c die maßgebenden Trägheitsmomente der Querschnitte der Stäbe.

Nehmen wir an, O wäre um ξ aus der Ebene herausgetreten; die drei Stäbe behalten in O eine gemeinsame Berührungsebene, deren vertikale Abstände von A, B, C: f_a, f_b, f_c heißen sollen.

Zunächst kann gezeigt werden, daß

$$\xi = \frac{f_a F_a + f_b F_b + f_c F_c}{F} \quad . \quad . \quad a)$$



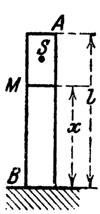
Nebenstehende Abbildung ist der Querschnitt durch OA. Für die Stelle M ist das Biegungsmoment: $M = Ay$ und die Gleichung der elastischen Linie $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{Ay}{EJ_a} = -\omega_1^2 y$,

deren Lösung die Form hat

$$y = S \sin \omega_1 x + T \cos \omega_1 x.$$

Für $$x = 0,\ y = 0$$
ergibt sich $$T = 0;$$
ferner ist: $$\frac{dy}{dx} = S\,\omega_1 \cos \omega_1 x$$
und für $$x = a,\ y = \xi:$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_a - \xi}{a} = S\,\omega_1 \cos \omega_1 a;$$
nach Entfernung von S aus dieser Gleichung und
$$\xi = S \sin \omega_1 a$$
folgt $$f_a = \xi\left(1 - \frac{\omega_1 a}{\operatorname{tg} \omega_1 a}\right).$$
Ähnliche Ausdrücke erhält man für f_b und f_c. Setzt man diese in Gleichung a) ein, so bleibt
$$\frac{\omega_1 a}{\operatorname{tg} \omega_1 a} F_a + \frac{\omega_2 b}{\operatorname{tg} \omega_2 b} F_b + \frac{\omega_3 c}{\operatorname{tg} \omega_3 c} F_c = 0$$
als die gesuchte Bedingung für das Eintreten der Knickung. Hierin bedeuten:
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{A}{E J_a}},\quad \omega_2 = \sqrt{\frac{B}{E J_b}},\quad \omega_3 = \sqrt{\frac{C}{E J_c}}.$$

344. Das Eigengewicht $q(l - x)$ des Stückes AM wird wie eine im Schwerpunkt S wirkende achsiale Last den Stab SB von der Länge $x + \frac{l - x}{2}$ auf Knickung beanspruchen. Wendet man



die Eulersche Gleichung 84, 85 an, so wird
$$q(l - x) = \frac{\pi^2}{4} \frac{E J}{\left[x + \frac{l - x}{2}\right]^2}$$
oder es ist $$q = \pi^2 \frac{E J}{(l - x)(l + x)^2}.$$
Jedem Werte von x entspricht ein Einheitsgewicht q, für welches die Eulersche Gleichung erfüllt ist. Das kleinste Einheitsgewicht wird das maßgebende sein. Sucht man von $(l - x)(l + x)^2$ den Größtwert, so tritt dieser ein für $x = \frac{l}{3}$; mit Hilfe dieses Wertes wird $$q = \frac{27}{32} \pi^2 \frac{E J}{l^3}.$$

345. Für eine Stelle des Stabes in der Entfernung x von A sei y die Ausbiegung und somit das Biegungsmoment $M = Py$; dann wird die Gleichung der elastischen Linie nach Gleichung 40

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{P}{EJ} y = -\omega^2 y$$

mit

$$\omega = \sqrt{\frac{P}{EJ}}.$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$y = f \sin \omega x \qquad \text{a)}$$

wenn man zur Bestimmung der Integrationskonstanten die Bemerkung benützt, daß für $x = 0$, $y = 0$ und für $x = \frac{x_0}{2}$, $y = f$, $\frac{dy}{dx} = 0$ ist. Hierbei erhält man

$$\omega x_0 = \pi \qquad \text{b)}$$

Die Länge des Stabes ist

$$l = \int_0^{x_0} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx$$

und mit erlaubter Näherung

$$l = \int_0^{x_0} \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] dx.$$

Bildet man aus Gleichung a)

$$\frac{dy}{dx} = f\omega \cos \omega x,$$

so wird

$$l = \int_0^{x_0} \left[1 + \frac{1}{2} f^2 \omega^2 \cos^2 \omega x\right] dx = x_0 + \frac{1}{2} f^2 \omega^2 \int_0^{x_0} \cos^2 \omega x \cdot dx,$$

woraus

$$l = x_0 \left(1 + \frac{1}{4} f^2 \omega^2\right)$$

oder mit erlaubter Näherung

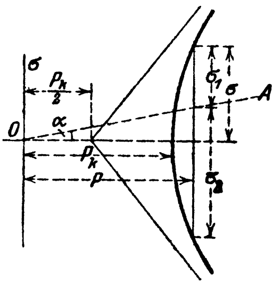
$$l^2 = x_0^2 \left(1 + \frac{1}{2} f^2 \omega^2\right) = x_0^2 \left(1 + \frac{P f^2}{2 E J}\right),$$

woraus mit Benützung von Gleichung b)

$$f^2 = 2 E J \left(\frac{1}{P_k} - \frac{1}{P}\right).$$

Hierin bedeutet $P_k = \frac{\pi^2 E J}{l^2}$ die Knicklast des Stabes. (Vergleiche Gleichung 84 und 85.)

346. Die größten Spannungen finden an der Innen- und Außenseite der Mitte des Stabes statt; sie sind nach Gleichung 76:



$$-\frac{P}{F} \pm \frac{P f}{W}, \quad W = \frac{J}{e}$$

und mit Benützung der vorigen Aufgabe:

$$-P\left[\frac{1}{F} \mp e\sqrt{\frac{2E}{J}\left(\frac{1}{P_k} - \frac{1}{P}\right)}\right]$$

oder $\sigma_1 = -\frac{P}{F} + \sigma$ an der Außenseite,

$\sigma_2 = -\frac{P}{F} - \sigma$ an der Innenseite.

Hierin ist $\sigma = P e \sqrt{\frac{2E}{J}\left(\frac{1}{P_k} - \frac{1}{P}\right)}$.

Dieser Gleichung entspricht eine Hyperbel mit den Koordinaten P und σ; ihr Mittelpunkt hat die Entfernung $\frac{P_k}{2}$ von O, ihr Scheitel die Entfernung P_k.

Zieht man die Gerade OA unter dem Neigungswinkel

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{F},$$

so gibt die Schaulinie die Spannungen σ_1 und σ_2 als Abschnitte von 2σ.

347. Man nehme in beliebiger Entfernung a von A eine zum Stabe senkrechte Last P an und suche die Durchbiegung unter dieser Last, wie dies in Aufgabe 321 gezeigt wurde. Man erhält einen Ausdruck von der Form:

$$f = \frac{P}{\omega R} \cdot \frac{M}{N},$$

worin R die achsiale Last, $\omega = \sqrt{\frac{R}{E J}}$,

M eine Funktion von a und

$$N = \omega^2 l_1 l_2 \sin \omega l - \omega l \sin \omega l_1 \sin \omega l_2$$

ist. Setzt man $N = 0$, so wird f unbestimmt groß, wenn auch P so klein wie möglich (z. B. kleine seitliche Erschütterung) angenommen wird. Die Auflösung der Gleichung $N = 0$ liefert die verlangte Knicklast $R = P_k$.

348. Lösung wie in voriger Aufgabe. Die Gleichung $N = 0$ wird hier:

$$\sin \omega l_2 [3 \omega l_2 - 4 \omega l_2 \sin^2 \omega l_2 - 3 \sin \omega l_2 \cos \omega l_2] = 0,$$

zerfällt also in:
$$\sin \omega l_2 = 0$$

und
$$\omega l_2 = \frac{3 \operatorname{tg} \omega l_2}{3 - \operatorname{tg}^2 \omega l_2}.$$

Die kleinste Wurzel ist (außer $\omega l_2 = 0$) $\omega l_2 = 110^0\,29'$ oder im Bogenmaß $\omega l_2 = 1,928$, woraus

$$\omega l = 3 \omega l_2 = 5,784$$

und mit
$$\omega = \sqrt{\frac{R}{EJ}}:$$

$$R = P_k = 33,46 \frac{EJ}{l^2}.$$

349. Lösung wie in Aufgabe 347. Man kann die willkürlich angenommene Last P an einer Stelle des Feldes l_1 oder l_2 angreifen lassen. Die Bedingung $N = 0$ zerfällt in die beiden Gleichungen:

$$\lambda_1 \cos\left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2}\right) = \cos \frac{\lambda_2}{2} \sin \lambda_1$$

und
$$\lambda_1 \lambda_2 \sin\left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2}\right) = (2 \lambda_1 + \lambda_2) \sin \lambda_1 \sin \frac{\lambda_2}{2},$$

worin
$$\lambda_1 = \omega l_1, \quad \lambda_2 = \omega l_2,$$

$$\omega = \sqrt{\frac{R}{EJ}}$$

bedeuten.

Der kleinste Wert von ω, der diesen beiden Gleichungen genügt, ist maßgebend für die Berechnung der Knicklast $R = P_k$.

350. Setzt man $l_1 = l_2$, so wird $\lambda_1 = \lambda_2 = 2\alpha$ und die beiden Bedingungsgleichungen der vorigen Aufgabe nehmen die Form an:

$$\cos \alpha (4 \alpha \cos^2 \alpha - 3 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha) = 0,$$
$$\sin \alpha (4 \alpha \sin^2 \alpha - 3 \alpha + 3 \sin \alpha \cos \alpha) = 0,$$

zerfallen also in folgende vier Gleichungen:

$$\cos \alpha = 0, \quad \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha};$$

$$\sin \alpha = 0, \quad \alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha}{3 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Die kleinsten Wurzeln dieser Gleichungen sind:

$$\alpha = 90^0, \quad \alpha = 147^0\,9'; \quad \alpha = 180^0, \quad \alpha = 110^0\,29'.$$

Maßgebend ist demnach $\alpha = \frac{\pi}{2}$

oder $\lambda_1 = \lambda_2 = \pi.$

Es ist deshalb die Knicklast genau dieselbe, wie wenn jedes der drei Felder ein an den Enden gelenkig gelagerter Stab wäre, oder

$$P_k = R = \pi^2 \frac{EJ}{l_1{}^2} = 9\pi^2 \frac{EJ}{l^2}.$$

351. Setzt man $l_2 = 2l_1$, $\lambda_2 = 2\lambda_1 = 2\alpha$, so nehmen die Bedingungsgleichungen der Aufgabe 349 die Form an:

$$\alpha \cos 2\alpha = \cos\alpha \sin\alpha,$$
$$\alpha \sin\alpha \cos\alpha = \sin^2\alpha,$$

sie zerfallen also in die drei Gleichungen:

$$2\alpha = \operatorname{tg} 2\alpha; \quad \sin\alpha = 0, \quad \alpha = \operatorname{tg}\alpha.$$

Die kleinsten brauchbaren Wurzeln dieser Gleichungen sind:

$$\alpha = 128^0\,44'; \quad \alpha = 180^0, \quad \alpha = 257^0\,27'.$$

Maßgebend ist die erste, also im Bogenmaß

$$\alpha = 2{,}2467,$$

woraus $\lambda_1 = 2{,}2467 = \omega l_1 = \sqrt{\frac{R}{EJ}} \cdot \frac{1}{4}$

und die Knicklast

$$P_k = R = 80{,}7626 \frac{EJ}{l^2} = 8{,}184\pi^2 \frac{EJ}{l^2}.$$

352. Lösung ähnlich wie in Aufgabe 347. Man erhält als Knickbedingung $N = 0$ die Gleichung:

$$(R_1 + R_2)\,\omega_1 \operatorname{cotg} \omega_1 l_1 + R_1 \omega_2 \operatorname{cotg} \omega_2 l_2 = \frac{R_2{}^2}{R_1 l + R_2 l_1},$$

worin $\omega_1{}^2 = \frac{R_1}{EJ_1}, \quad \omega_2{}^2 = \frac{R_1 + R_2}{EJ_2}$

und $J_1\,J_2$ die Trägheitsmomente der Querschnitte von l_1 und l_2 sind.

353. Der Fall ist auf den vorigen zurückzuführen, indem man $J_1 = J$, $J_2 = \infty$ und $R_1 = R$, $R_2 = 0$ setzt.

Es wird dann

$$\omega_2 = 0, \quad l_2 \omega_2 \operatorname{cotg} \omega_2 l_2 = \frac{\omega_2 l_2}{\operatorname{tg} \omega_2 l_2} = 1$$

und die in der vorigen Aufgabe aufgestellte Gleichung geht über in

$$\omega l_2 + \operatorname{tg} \omega l_1 = 0$$

mit $\omega^2 = \frac{R}{EJ},$

woraus sich die Knicklast $P_k = R$ berechnen läßt.

354. Es ist $$Q = \frac{3}{4} F \cdot {}_{\max}\tau$$
nach Gleichung 102 oder
$$Q = \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi d^2}{4} K_s = 32\,987 \text{ kg}.$$

355. Nach dem Resultat der Aufgabe 64 ist für Flußstahl und das Spannungsverhältnis $n = -1$ die Arbeitsfestigkeit: $A = 1540$ at und die zulässige Zugspannung:
$$k_z = \frac{2}{7} A = 440 \text{ at},$$
woraus nach Gleichung 104 die zulässige Schubspannung:
$$k_s \leqq k_z \cdot \frac{m}{m+1}$$
oder $$k_s \leqq 340 \text{ at}.$$

356. In dem Resultat der Aufgabe 64 ist für Schweißeisen mit ruhender Last das Spannungsverhältnis $n = 1$ und die Arbeitsfestigkeit: $A = 3640$ at, woraus die zulässige Zugspannung
$$k_z = \frac{2}{7} A = 1040 \text{ at}$$
und die zulässige Schubspannung nach Gleichung 105
$$k_s = \frac{10}{13} k_z = 800 \text{ at}.$$
Setzt man nun nach Gleichung 102:
$$k_s = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{F}, \quad F = \frac{\pi d^2}{4}, \quad Q = 40\,000 \text{ kg},$$
so folgt $$d = 9{,}2 \text{ cm}.$$

357. Nach Gleichung 101: ${}_{\max}\tau = K_s = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{F}$,
mit $$F = 20 \cdot 30 = 600 \text{ cm}^2,$$
woraus $$Q = 30 \text{ t}.$$

358. Die zulässige Zugspannung des Gußeisens ist hier $k_z = \frac{1}{8} 1250 \text{ at} = 156$ at, die zulässige Schubspannung $k_s = \frac{10}{13} k_z = 120$ at (nach Gleichung 105). Benützt man Gleichung 101,
so ist $${}_{\max}\tau = k_s = \frac{3}{2} \cdot \frac{80\,000 \text{ kg}}{b \cdot 40 \text{ cm}},$$
woraus $$b = 25 \text{ cm}.$$

359. Abzuscheren werden gesucht die beiden Flächen $a x$ und die Grundfläche $b x$ am Ende des horizontalen Balkens; die abscherende Kraft ist $Q = P \cos \alpha$.
Es ist also nach Gleichung 101:

$$k_s = \frac{3}{2} \frac{P \cos \alpha}{x(2a+b)},$$

woraus
$$x = \frac{3}{2} \frac{P \cos \alpha}{k_s(2a+b)} = 31 \text{ cm}.$$

360. Die Beanspruchung des Ankerbolzens auf Zug gibt zunächst die Gleichung für den durch den Schlitz geschwächten Querschnitt
$$P = \left(\frac{\pi d^2}{4} - d\delta\right) k_z = 13\,635 \text{ kg}.$$

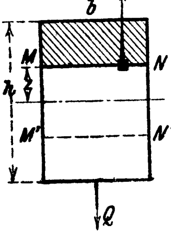
Der Keil wird an seinen beiden Endflächen auf Abscheren beansprucht. Diese Endflächen sind zwar etwas verschieden, sollen aber beide mit $x \cdot \delta$ in Rechnung gesetzt werden. Mit Rücksicht auf Gleichung 101 ist:
$$k_s = \frac{3}{2} \cdot \frac{P}{2x\delta},$$

woraus
$$x = \frac{3P}{4\delta k_s} = 11 \text{ cm}.$$

Endlich wird auch der Ankerbolzen an seinem Ende auf Abscheren beansprucht, und zwar in zwei Querschnitten $ABCD$; es ist ebenso wie früher
$$k_s = \frac{3}{2} \cdot \frac{P}{2yd},$$

wenn das Trapez $ABCD$ angenähert durch das Rechteck $y d$ ersetzt wird. Hieraus wird
$$y = \frac{3P}{4dk_s} = 2{,}6 \text{ cm}.$$

361. Benützt man die Gleichungen 98 und 100, so ist für das Rechteck:



$$\varphi = 0,\ S = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right),\ J = \frac{1}{12} b h^3,\ 2y_1 = b,$$

und
$$\tau = \frac{6Q}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right).$$

Setzt man dies gleich $\frac{Q}{bh}$, so folgt
$$z = \frac{\pm h}{\sqrt{12}}.$$

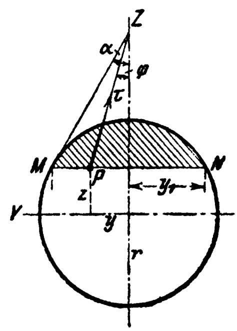
In allen Punkten dieser Schichte MN oder M'N' hat die Schubspannung wirklich den Wert $\frac{Q}{F}$.

362. $_{max}\tau$ bleibt für jedes Achsenverhältnis das gleiche, nämlich $\frac{4}{3}\frac{Q}{F}$.

363. Man benütze die Gleichungen 98 und 100.

Für den Kreis ist: $S = \frac{1}{12}\overline{MN}^3 = \frac{2}{3}y_1^3$,

$$\tau_z = \frac{1}{3}\frac{Q}{J}y_1^2,$$



ferner $\operatorname{tg}\varphi : \operatorname{tg}\alpha = y : y_1$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{z}{y_1}$,

woraus $\operatorname{tg}\varphi = \frac{yz}{y_1^2}$,

und $\tau = \frac{\tau_z}{\cos\varphi} = \frac{Q}{3J}\sqrt{y_1^4 + y^2z^2}$.

Setzt man diesen Ausdruck gleich

$\frac{1}{n}\cdot{}_{max}\tau = \frac{1}{n}\cdot\frac{4}{3}\frac{Q}{F}$ (nach Gleichung 102),

so bleibt für den Ort der Punkte P die Gleichung:

$$z^2(2r^2 - z^2 - y^2) = r^4\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

364. Benütze Gleichung 98 für die horizontale Schwerlinie als Schichte MN. Es ist für diese:

$$S = 12\cdot 14{,}7 - 11\cdot 12{,}5\cdot 6{,}25 = 316{,}625\ \text{cm}^3,$$

ferner $J = 7629\ \text{cm}^4$, $2y_1 = 1$ cm.

Die zulässige Schubspannung ist nach Gleichung 105:

$$k_s = \frac{10}{13}1000\ \text{at} = 770\ \text{at}.$$

Dann ist $_{max}\tau = k_s = \frac{QS}{J\cdot 2y_1}$ und $Q = 18\,553$ kg.

365. Nimmt man im oberen oder unteren Rechteck eine Schichte MN im Abstande z von der Y-Achse an, so ist die Schubspannung in dieser Schichte nach Gleichung 98

$$\tau = \frac{QS}{2y_1\cdot J},$$

worin $S = \frac{b}{2}(4h^2 - z^2)$, $2y_1 = b$

und somit $\tau = \frac{Q}{2J}(4h^2 - z^2)$.

Diese Spannung wird für $z = h$, also an den inneren horizontalen Kanten der beiden Rechtecke am größten, und zwar

$$\max\tau = \frac{3}{2}\frac{Qh^2}{J} = \frac{9}{28}\frac{Q}{bh}.$$

366. Man verwende Gleichung 98.

Es ist $S = 8r^2 \cdot r - \frac{1}{2}r^2\pi \cdot \frac{4r}{3\pi} = \frac{22}{3}r^3$,

$$J = \left(\frac{64}{3} - \frac{\pi}{4}\right)r^4 = 20{,}5479\, r^4.$$

Statt $2y_1$ ist in Gleichung 98: $2 \cdot AB = 2r$ zu setzen.

Man erhält

$$\tau = 0{,}1784\,\frac{Q}{r^2}.$$

367. Die größten Schubspannungen kommen in der zu Q senkrechten Schwerlinie des Querschnitts vor. Für diese ist:

$$S = \frac{1}{8}(BH^2 - bh^2) = \frac{1}{8}BH^2(1 - n^3),$$

$$2y_1 = B - b = B(1 - n),$$

ferner: $J = \frac{1}{12}(BH^3 - bh^3) = \frac{1}{12}BH^3(1 - n^4)$,

dann wird $\max\tau = \frac{QS}{2y_1 \cdot J} = \frac{3}{2}\,\frac{Q(1 - n^3)}{BH(1 - n)(1 - n^4)}$.

Der Querschnitt ist $F = BH - bh = BH(1 - n^2)$, somit nach Gleichung 103 der reduzierte Querschnitt:

$$F_0 = \frac{2}{3}\,\frac{1 + n^2}{1 + n + n^2}\,F.$$

368. Die Schubspannung in der Schichte AB ist nach Gleichung 101: $\tau = \frac{3}{2}\frac{Q}{F}$; nun ist aber Q mit dem Abstande x von der Einmauerung veränderlich, und zwar $Q = G\left(1 - \frac{x}{l}\right)$. Die gesamte Scherkraft in der Schichte AB von A bis C ist demnach

$$\int_0^a \tau \, b \, dx = \frac{3}{4} G \frac{a(2l - a)}{hl}.$$

Die Schraubenspindel kann nach den Gleichungen 102 und 105 die Scherkraft ertragen

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot k_s = \frac{3\pi}{16} d^2 \cdot \frac{10}{13} k_z.$$

Setzt man beide Scherkräfte gleich, so bleibt

$$d^2 = \frac{26}{5\pi} \cdot \frac{G}{k_z} \cdot \frac{a(2l - a)}{hl}.$$

369. Die Randspannung in irgendeiner Schichte MN ist nach den Gleichungen 98 und 99:

$$\tau_1 = \frac{QS}{2y_1 \cdot \cos\alpha \cdot J}, \quad \text{worin:}$$

$S = \frac{a}{9h}\left(\frac{2}{3}h - z\right)^2 (h + 3z)$, wenn h die Höhe des Dreiecks ist;

ferner: $2y_1 = MN = \frac{a}{h}\left(\frac{2}{3}h - z\right)$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $J = \frac{1}{36} a h^3$,

woraus die Randspannung:

$$\tau_1 = \frac{2}{9\sqrt{3}} \frac{Q}{J} \left(\frac{2}{3} h^2 + hz - 3z^2\right).$$

Für $z = 0$ ist $\quad \tau_1 = \frac{32}{9} \frac{Q}{a^2}, \quad h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

die Randspannung in A und B.

Bildet man $\frac{d\tau_1}{dz} = 0$, so wird $z = \frac{h}{6}$ und $_{\max}\tau_1 = 4 \frac{Q}{a^2}$ die größte Randspannung in halber Höhe des Dreiecks.

370. Es ist wie in voriger Aufgabe die Randspannung:

$$\tau_1 = \frac{QS}{2y_1 \cdot \cos\alpha \cdot J}.$$

Hier ist:

$$S = \frac{1}{3}(e - z)^2 (2z + e),$$

$$2y_1 = MN = 2(e - z),$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad J = \frac{1}{12} a^4, \quad e = \frac{a}{\sqrt{2}},$$

woraus die Randspannung an beliebiger Stelle:

$$\tau_1 = \frac{\sqrt{2}}{6} \frac{Q}{J} (e - z)(2z + e).$$

Setzt man $\frac{d\tau_1}{dz} = 0$, so wird $z = \frac{e}{4}$ und $_{\max}\tau_1 = \frac{9\sqrt{2}}{8} \frac{Q}{a^2}$.

An den Stellen A und B wird $z = 0$ und die Randspannung:

$$\tau_1 = \sqrt{2} \cdot \frac{Q}{a^2}.$$

371. Anwendung der Gleichungen 98 und 99. Es ist

$$\tau_1 = \frac{QS}{2y_1 \cos\alpha \cdot J}.$$

Nennt man f die Fläche des Kreisabschnittes über MN, z_s den Abstand ihres Schwerpunkts s vom Schwerpunkt S der Halbkreisfläche, so ist das Flächenmoment

$$S = f \cdot z_s = f \cdot \overline{sO} - f \cdot \overline{SO}.$$

Hierin ist

$$f \cdot \overline{sO} = \frac{1}{12} \overline{MN}^3,$$

$$f = \frac{1}{2}\left[r^2(\pi - 2\alpha) - \overline{MN} \cdot r \sin\alpha\right],$$

$$\overline{MN} = 2r\cos\alpha.$$

Man erhält

$$S = \frac{2r^3}{3}\left[\cos^3\alpha + \frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{\pi} - 1\right],$$

und

$$\tau_1 = \frac{Qr^2}{3J}\left[\cos\alpha + \frac{2}{\pi}\operatorname{tg}\alpha - \frac{\pi - 2\alpha}{\pi\cos^2\alpha}\right].$$

Setzt man $\frac{d\tau_1}{d\alpha} = 0$, so erhält man für α die Gleichung

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \operatorname{cotg}\alpha + \frac{\pi}{4}\cos^3\alpha,$$

woraus als beiläufige Lösung: $\alpha = 37^0\,10'$ für den größten Wert der Randspannung τ_1.

Mit

$$J = 2r^4\left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right) = 0{,}10974\, r^4$$

(vergl. Aufgabe 123) wird endlich

$$_{\max}\tau_1 = 1{,}0786\,\frac{Q}{r^2}.$$

372. Die Spannung in M oder N, die größte der Schichte MN, wird ein Maximum werden, wenn in Gleichung 98 der Quotient $\frac{S}{y_1}$ am größten wird, da Q und J in allen Punkten dieselbe Bedeutung und Größe haben. Es ist

$$\frac{S}{y_1} = \frac{2}{3} \frac{2e^3 - 3z^2e + z^3}{2e - z},$$

wenn z der Abstand der Schichte MN von der Y-Achse ist. Setzt man $\frac{d}{dz}\left(\frac{S}{y_1}\right) = 0$ und sodann $z = e - u$, so erhält man für u die Gleichung

$$2u^3 + 3eu^2 = 3e^3.$$

Das Verhältnis $\frac{u}{e}$ nimmt hiernach den Wert 0,806 an; es ist also $z = 0{,}194\,e$ für den Abstand der meistgespannten Schichte MN von der Y-Achse. Mit diesem Wert wird nach den Gleichungen 98 und 99 die Randspannung in M und N:

$$_{\max}\tau = 0{,}4196\frac{Q}{e^2},$$

wobei für das Trägheitsmoment der Fläche der Wert

$$J = \frac{5\sqrt{3}}{16}s^4 = \frac{5\sqrt{3}}{9}e^4$$

(vergl. Aufgabe 113) benützt wurde.

373. Nennt man $\sphericalangle ACP = \alpha$, so ist der Sticheldruck

$$R = \frac{P}{\sin(\alpha + \varrho)}.$$

Verlängert man DC über C und teilt R in zwei Teilkräfte, so ist die

Teilkraft in der Gleitfläche: $S = R \sin(\alpha + \varrho + \gamma)$,

Teilkraft senkrecht zur Gleitfläche: $N = -R\cos(\alpha + \varrho + \gamma)$,
somit die in der Gleitfläche wirkende Schubkraft:

$$S - N\,\mathrm{tg}\,\varrho_1$$

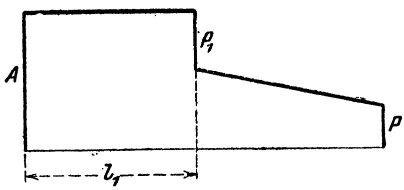
und die Spannung in der Gleitfläche:

$$\tau = (S - N\,\mathrm{tg}\,\varrho_1)\frac{\sin\gamma}{ab},$$

wenn b die Breite des Spanes ist.

Macht man τ zu einem Maximum, setzt $\frac{d\tau}{d\gamma} = 0$, so wird

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha + \varrho + \varrho_1}{2}.$$

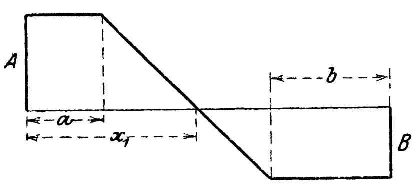


374. Auflagerdruck:

$$A = P + P_1 + q(l - l_1).$$

Die zweite Stufe der Schaulinie hat die Neigung:

$$\operatorname{tg} \alpha = q.$$



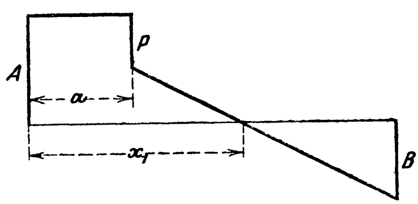
375. Auflagerdrücke:

$$A = Q_1 \frac{l - a + b}{2l},$$

$$B = Q_1 \frac{l + a - b}{2l}.$$

Die Stelle, wo $Q = 0$ ist:

$$x_1 = \frac{l^2 + a^2 - b^2}{2l}.$$



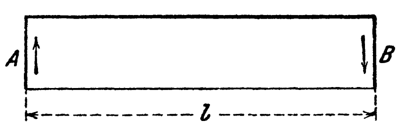
376. Auflagerdrücke:

$$A = P\frac{l - a}{l} + Q_1 \frac{l - a}{2l},$$

$$B = P\frac{a}{l} + Q_1 \frac{l + a}{2l}.$$

Die Stelle, wo $Q = 0$ ist:

$$x_1 = a + \frac{A - P}{Q}(l - a).$$

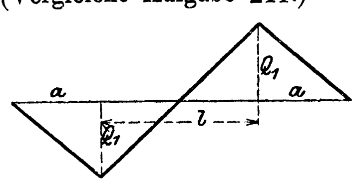


377. Auflagerdrücke:

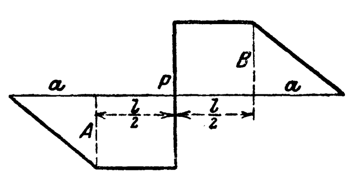
$$A = B = \frac{1}{l}(P_1 p_1 + P_2 p_2).$$

(Vergleiche Aufgabe 210.)

378. Die Stelle für $Q = 0$ ist in der Mitte des Trägers. (Vergleiche Aufgabe 211.)



Aufg. 378.



Aufg. 379.

379. Abbildung auf voriger Seite. Auflagerdrücke:

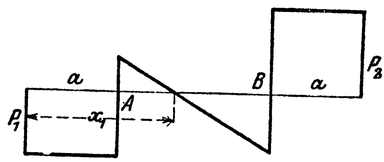
$$A = B = Q_1 + \frac{P}{2}.$$

(Vergleiche Aufgabe 244.)

380. Auflagerdrücke:

$$A = P_1\left(1 + \frac{a}{l}\right) - P_2\frac{a}{l} + \frac{Q_1}{2},$$

$$B = P_2\left(1 + \frac{a}{l}\right) - P_1\frac{a}{l} + \frac{Q_1}{2}.$$



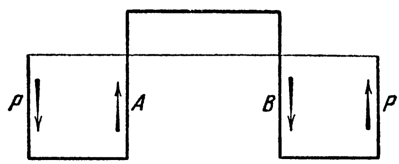
Die Stelle für $Q = 0$ ist:

$$x_1 = \frac{l}{2} + \frac{P_1 - P_2}{Q_1}a.$$

(Vergleiche Aufgabe 245.)

381. Auflagerdrücke:

$$A = B = P\left(1 + \frac{2a}{l}\right).$$



382. Rechnet man den Nietbolzen für Schubfestigkeit, so ist nach Gleichung 102

$$\max\tau = k_s = \frac{4}{3}\frac{Q}{F} \quad . \quad . \quad , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad a)$$

worin bei der zweischnittigen Niete $F = 2 \cdot \frac{\pi d^2}{4}$ zu setzen ist.

Rechnet man den Nietbolzen für Biegungsfestigkeit und betrachtet ihn als gleichförmig belasteten Träger ohne Auflager (vergleiche Aufgabe 211), so ist das größte Biegungsmoment in der Mitte des Bolzens:

$$\max M = \frac{Q}{2} \cdot \frac{3}{4}b - \frac{Q}{2} \cdot \frac{b}{4} = \frac{1}{4}Q\,b.$$

Setzt man nun

$$\max M = k_b \cdot W = k_b \cdot \frac{\pi d^3}{32} = \frac{1}{4}Q\,b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad b)$$

und entfernt aus den Gleichungen a) und b) die Querkraft Q, so bleibt

$$d = 2{,}25\,b.$$

383. Anwendung von Gleichung 106. Es ist das größte Biegungsmoment $\frac{3}{16}P\,l$ unter der Last, die größte Querkraft $\frac{3}{4}P$ im kleineren Felde des Trägers; ferner

$$W = \frac{1}{6} B H^2 (1 - n^4),$$

$$F_0 = \frac{2}{3} B H \frac{1 - n^4}{1 + n + n^2} \quad \text{(vergleiche Aufgabe 367).}$$

Somit das verlangte Grenzverhältnis

$$\frac{1}{H} < \frac{4}{3}(1 + n + n^2).$$

384. Das Biegungsmoment in der Mitte des Trägers ist $\frac{1}{8} P l$, die Biegungsspannung nach Gleichung 38

$$\sigma = \frac{1}{8} P l \cdot \frac{h}{4 J} = \frac{3}{2} \frac{P}{b h}.$$

Die Querkraft an der Stelle M ist $\frac{P}{2}$, die Schubspannung nach Gleichung 98

$$\tau = \frac{Q S}{b J} = \frac{9}{16} \cdot \frac{P}{b h},$$

mit

$$S = \frac{3}{32} b h^2.$$

Nach der Gleichung 107 werden hiermit die beiden Hauptspannungen

$$\sigma_1 = \frac{27}{16} \frac{P}{b h}, \quad \sigma_2 = -\frac{3}{16} \frac{P}{b h},$$

und nach Gleichung 108

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{3}{4},$$

woraus $\alpha = 71^\circ 33' 54''$ und $-18^\circ 26' 6''$

für die Neigungen der Hauptspannungen σ_2 und σ_1 gegen die Trägerachse.

Die Hauptspannung σ_3 ist Null.

385. Nach Gleichung 101 ist mit $Q = P$:

$$\tau = \frac{3}{2} \cdot \frac{P}{F} = \frac{3}{4} \frac{P}{b h}.$$

Die Schubkraft zwischen den beiden Balken ist:

$$S = b l \tau = \frac{3}{4} \frac{P l}{h},$$

und nach Gleichung 102 mit $Q = S$:

$$d = 2 \sqrt{\frac{P l}{\pi h k_s}}.$$

386. Die Durchbiegung am Ende des Brettes muß auf beiden Seiten nach Gleichung 43 sein

$$h = \frac{1}{3}\frac{P l^3}{E J}, \text{ woraus } P = \frac{3 h E J}{l^3}.$$

Diese Kraft P tritt an beiden Seiten des Klotzes als Querkraft auf, welche die beiden Flächen $a x$ im Holz abzuscheren trachten.

Nach Gleichung 101 muß also sein: $k_s = \frac{3}{2}\frac{2P}{2ax}$,

woraus mit $J = \frac{1}{12} b d^3$ folgt:

$$x = \frac{3}{8}\frac{b h d^3 E}{a l^3 k_s}.$$

387. Ist q die Belastung der Längeneinheit, so ist die Querkraft in der Entfernung x vom Auflager: $Q = q\left(\frac{l}{2} - x\right)$ und nach Gleichung 102 die größte Schubspannung eines Querschnitts:

$$_{\max}\tau = k_s = \frac{4}{3}\frac{q\left(\frac{l}{2} - x\right)}{\frac{\pi}{4} y^2},$$

woraus

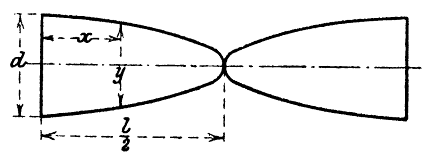
$$y^2 = \frac{8q}{3\pi k_s}(l - 2x).$$

Für das Auflager ist:

$$d^2 = \frac{8q}{3\pi k_s} l,$$

woraus die Gleichung des Umrisses:

$$y^2 = d^2\left(1 - \frac{2x}{l}\right).$$



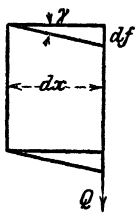
388. Der linke Auflagerdruck ist $\frac{1}{6} q l$, das Biegungsmoment in der Mitte des Trägers $\frac{1}{16} q l^2$, die größte Biegungsspannung an dieser Stelle $_{\max}\sigma = \frac{2}{\pi}\frac{q l^2}{d^3}$.

Die Querkraft in der Mitte des Trägers ist $\frac{1}{24} q l$, die größte Schubspannung nach Gleichung 102 $_{\max}\tau = \frac{2}{9\pi} \cdot \frac{q l}{d^2}$.

Setzt man $_{\max}\sigma = 9\,_{\max}\tau$, so bleibt

$$l = d.$$

389. Betrachtet man zwei um dx entfernte Querschnitte des Trägers, so ist ihre gegenseitige Verschiebung infolge der Querkraft



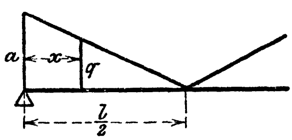
$$df = \gamma \cdot dx = \frac{\tau}{G}\,dx,$$

worin τ die Schubspannung, γ die Schiebung und G die Elastizitätszahl für Schub ist. (Vergleiche Gleichung 9.)

Setzt man, wie vorausgesetzt wurde, $\tau = \frac{Q}{F}$,

so wird
$$f = \frac{1}{FG}\int Q\,dx.$$

Nun ist hier
$$a = \frac{2K}{l},\quad q = a\left(1 - \frac{2x}{l}\right),$$



der Auflagerdruck

$$A = \frac{K}{2}$$

und die Querkraft Q in der Entfernung x vom Auflager

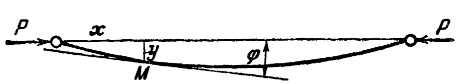
$$Q = A - \int_0^x q\,dx = \frac{K}{2}\left(1 - 4\frac{x}{l} + 4\frac{x^2}{l^2}\right),$$

$$\int_0^{\frac{l}{2}} Q\,dx = \frac{1}{12}Kl$$

und die fragliche Durchbiegung

$$f = \frac{1}{12}\frac{Kl}{FG}.$$

390. Der Winkel $d\varphi$, um den sich ein Element ds des Stabes bei M gegen das Nachbarelement verdreht, besteht aus den beiden Teilen $d\varphi_1$ und $d\varphi_2$, von denen der erste eine Folge des Biegungsmomentes M, nämlich



$$d\varphi_1 = -\frac{M}{EJ} \cdot ds$$

ist (vergl. Gleichung 39), während der zweite eine Folge der Formänderung durch die Querkraft Q ist. Wenn dQ deren Zunahme bezeichnet, F der Querschnitt des Stabes ist, so wird die Schiebung infolge der Querkraft nach Gleichung 9

$$\gamma = \frac{\tau}{G}.$$

Ersetzt man γ durch $d\varphi_2$, τ durch $\frac{dQ}{\beta F}$, worin β eine von der Querschnittsform abhängige Zahl ist, so wird

$$d\varphi_2 = \frac{dQ}{\beta F G},$$

und da $Q = \frac{dM}{dx}$ ist:

$$d\varphi = d\varphi_1 + d\varphi_2 = -\frac{M}{EJ} \cdot ds + \frac{d^2M}{dx} \cdot \frac{1}{\beta F G}.$$

Ist ϱ der Krümmungshalbmesser des Stabes an der Stelle M, so ist $ds = \varrho \cdot d\varphi$; ferner wird $M = Py$ und wenn man die Vertauschung von dx mit ds gestattet:

$$\frac{1}{\varrho} = -\frac{M}{EJ} + \frac{d^2M}{dx^2} \frac{1}{\beta F G} = P\left[-\frac{y}{EJ} + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{1}{\beta F G}\right].$$

Es ist üblich, angenähert

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

zu setzen; damit erhält man

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\omega^2 y,$$

worin

$$\omega^2 = \frac{P}{EJ\left[1 - \frac{P}{\beta F G}\right]}.$$

Die Lösung dieser Differenzialgleichung führt wie in Aufgabe 345, Gleichung b, zu

$$\omega l = \pi,$$

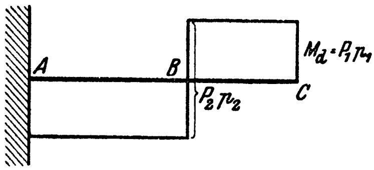
wenn die Sehne x_0 des Stabes mit dessen Länge l vertauscht wird. Nennt man jene Kraft P, welche diese Gleichung erfüllt, Knicklast, so wird

17*

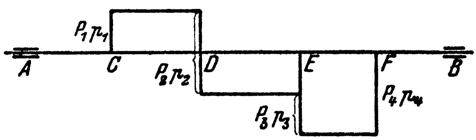
$$P_k = \frac{1}{\frac{l^2}{\pi^2 E J} + \frac{1}{\beta F G}}.$$

Unterdrückt man das vom Schub herrührende zweite Glied im Nenner, so bleibt die Eulersche Gleichung zurück.

391.



392.



393. Nach Gleichung 110:

$$d = 10{,}8 \text{ cm}.$$

Drehungsmoment

$$M_d = 1860 \text{ kg} \cdot 0{,}6 \text{ m} = 111\,600 \text{ cmkg}.$$

394. Nach den Gleichungen 109, 110, 111 ist der ganze Verdrehungswinkel:

$$\vartheta^0 = \frac{180^0}{\pi} \cdot \frac{2 l k_d}{G d}.$$

395. Nach den Gleichungen 109 und 119 ist

$$3^0 = l\vartheta^0 = \frac{180^0}{\pi} l\vartheta = \frac{180^0}{\pi} \cdot 3{,}6 \frac{M_d}{G b^3 h^3}(b^2 + h^2) \cdot l,$$

woraus $l = 3{,}12$ m.

(Elastizitätszahl für Schub $G = 850\,000$ at.)

396. Nach Gleichung 111 ist der Verdrehungsbogen einer Kreiswelle für die Längeneinheit

$$\vartheta = \frac{\max \tau}{G r} = \frac{k_d}{G r}.$$

Setzt man $\vartheta l = \frac{\pi}{2}$, so wird das gewünschte Verhältnis

$$\frac{l}{d} = \frac{\pi}{4} \frac{G}{k_d} = 742.$$

397. Nach den Gleichungen 109 und 111 ist der gesamte Verdrehungswinkel

$$\varphi^0 = \frac{180^0}{\pi} \vartheta l = \frac{180^0}{\pi} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{M_d}{G r^4} \cdot l,$$

worin
$$M_d = W a.$$

Es wird
$$d = 4{,}92 \sqrt[4]{\frac{W a l}{G \varphi}} = 7{,}8 \text{ cm}.$$

398. Nach Gleichung 110:

$$M_d = P \cdot a = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^3 \cdot k_d,$$

woraus
$$P = 153{,}4 \text{ kg}.$$

399. Nach Gleichung 110 ist:

$$M_d = P\left(a + \frac{d}{2}\right) = \frac{\pi}{2} r^3 \cdot K_d,$$

woraus
$$P = 183{,}26 \text{ kg}.$$

Ferner ist für die Biegung des Eisenstabes:

$$M = P a = \frac{1}{6} d_1^3 \cdot K_b, \text{ woraus } P = 166{,}67 \text{ kg}.$$

Der Bruch des Eisenstabes tritt also früher ein als das Abdrehen des Holzes.

400. Nach Gleichung 114:

$$M_d = \frac{\pi}{2} b^2 c \cdot K_d = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot \frac{8}{2} \cdot 4000,$$

$$M_d = 1570{,}8 \text{ mkg}.$$

401. Nach Gleichung 112 ist:

$$M_d = P p = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{R^4 - r^4}{R} \cdot k_d,$$

woraus
$$P = 69{,}55 \text{ kg}.$$

Ferner ist der Verdrehungsbogen am Ende der Röhre nach Gleichung 113:

$$\vartheta l = \frac{k_d l}{G R}$$

und nach Gleichung 109 der ganze Verdrehungswinkel

$$\vartheta^0 l = \frac{180^0}{\pi} \cdot \frac{k_d l}{G R} = 6^0\, 53'.$$

402. Nach Gleichung 117 ist bei dem elliptischen Ringe

$$M_d = \frac{\pi}{2} b^2 c (1 - \alpha^4) \cdot {}_{max}\tau.$$

Setzt man hier $M_d = 2Pc$, ${}_{max}\tau = k_d$ ein, so bleibt

$$b = 2{,}8 \text{ cm}.$$

403. Der Verdrehungswinkel der Längeneinheit ϑ ist, wie die Gleichungen 111, 113, 115, 119 zeigen, dem Drehungsmoment M_d proportional. Nimmt man an, $M_{d,a}$ wäre der auf den Teil a des Stabes entfallende Betrag des Drehungsmomentes, $M_{d,b}$ der auf den Teil b entfallende, so ist zunächst

$$M_d = M_{d,a} + M_{d,b}.$$

Nennt man $\vartheta_a \vartheta_b$ die verhältnismäßigen Verdrehungswinkel der beiden Stabteile a und b, so wäre

$$\vartheta_a = k M_{d,a} \text{ und } \vartheta_b = k M_{d,b}.$$

Ferner, da an der gemeinsamen Stelle von a und b der ganze Verdrehungswinkel der gleiche sein muß:

$$\vartheta_a \cdot a = \vartheta_b \cdot b,$$

woraus die beiden Teile sich ergeben:

$$M_{d,a} = \frac{b}{a+b} M_d, \quad M_{d,b} = \frac{a}{a+b} \cdot M_d.$$

404. Auf jede Hälfte des Stabes entfällt das halbe Drehungsmoment. Es ist also für eine Stabhälfte nach Gleichung 118 für

$$b = h = x:$$

$$M_d = \frac{1}{2} \cdot P \cdot 2p = \frac{2}{9} x^3 \cdot k_d,$$

woraus $x = 7{,}21$ cm.

Sodann ist nach den Gleichungen 109 und 119 der Verdrehungswinkel in der Mitte:

$$\vartheta^0 \cdot \frac{l}{2} = 0{,}8 \frac{{}_{max}\tau}{G} \cdot \frac{2}{x} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{180^0}{\pi} = 0^0\, 18'.$$

405. Nach den Gleichungen 119 und 111 ist:

$$\vartheta_{quadrat} = 7{,}2 \frac{M_d}{Gs^4}, \quad \vartheta_{kreis} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{M_d}{Gr^4},$$

wenn s die Quadratseite ist. Wegen gleichem Rauminhalt der Stäbe ist $s^2 = r^2 \pi$. Daraus folgt

$$\vartheta_{quadrat} : \vartheta_{kreis} = 3{,}6 : \pi = 1{,}146.$$

406. Anwendung der Gleichung 116.

An den Enden der großen Achse $2c$ ist die Drehungsspannung $\frac{2}{\pi}\cdot\frac{M_d}{bc^2}$. Setzt man dies gleich τ in Gleichung 116, so erhält man den Ort aller jener Punkte mit gleicher Spannung durch die Gleichung

$$\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}=\frac{1}{c^2},$$

d. i. eine Ellipse mit den Halbachsen $\frac{b^2}{c}$ und c.

407. Die größte Spannung am Umfang der Ellipse ist nach Gleichung 114

$$_{\max}\tau=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{M_d}{b^2c},$$

die kleinste

$$_{\min}\tau=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{M_d}{bc^2}, \text{ wenn } b<c \text{ ist.}$$

Es wird also das Verhältnis bestehen müssen

$$b:c=1:n.$$

408. Nennt man P die Umfangskraft der Welle, v ihre Umfangsgeschwindigkeit, so ist die Leistung der Kraft P:

$$Pv=75\cdot N \text{ mkg oder } P\cdot\frac{rn\pi}{30}=7500\,N \text{ cmkg},$$

woraus das Drehungsmoment der Welle

$$M_d=Pr=\frac{225000}{\pi}\cdot\frac{N}{n}\text{ cmkg}=71\,620\,\frac{N}{n}\text{ cmkg}$$

und mit Hilfe von Gleichung 110

$$r^3=\frac{450000}{\pi^2}\cdot\frac{N}{nk_d}, \text{ woraus } r=35{,}72\sqrt[3]{\frac{N}{nk_d}}.$$

409. Nach Gleichung 114 ist für die innere Ellipse

$$M_d=\frac{\pi}{2}b_1^2c_1\cdot{}_{\max}\tau$$

und nach Gleichung 117 für den elliptischen Ring

$$M_d=\frac{\pi}{2}b^2c\,(1-\alpha^4)\cdot{}_{\max}\tau.$$

Mit $\alpha=\frac{b_1}{b}=\frac{c_1}{c}$ folgt nach Gleichsetzung:

$$\alpha^4+\alpha^3=1$$

mit dem brauchbaren Wert

$$\alpha = 0{,}819.$$

410. Nach Gleichung 112 ist

$$M_d = \frac{\pi}{2} \frac{R^4 - r^4}{R} \cdot k_d = \frac{\pi}{2} R^3 (1 - \alpha^4) \cdot k_d,$$

wenn $\alpha = \frac{r}{R}$ bezeichnet wird; ferner das Gewicht des Rohres

$$G = \pi l \gamma (R^2 - r^2) = \pi l \gamma R^2 (1 - \alpha^2).$$

Setzt man

$$\frac{4 M_d{}^2 \pi l^3 \gamma^3}{G^3 k_d{}^2} = a,$$

so wird

$$(1 + \alpha^2)^2 = a(1 - \alpha^2),$$

woraus für α der brauchbare Wert folgt:

$$\alpha^2 = \frac{1}{2} \sqrt{8a + a^2} - \frac{a}{2} - 1,$$

sodann

$$R = \sqrt{\frac{G}{\pi l \gamma (1 - \alpha^2)}} \quad \text{und} \quad r = \alpha R.$$

411. Bei Lösung der Aufgabe 408 wurde die Gleichung gefunden

$$M_d = \frac{225000}{\pi} \cdot \frac{N}{n} \text{ cmkg}.$$

Setzt man ferner in Gleichung 118: $b = h = s$, da das Quadrat die günstigste Form des Rechtecks für Verdrehung sein wird, so ist

$$M_d = \frac{2}{9} s^3 \cdot {}_{\max}\tau.$$

Mit $s = \frac{d}{\sqrt{2}}$ und ${}_{\max}\tau = k_d$ erhält man hieraus die Anzahl der Pferdestärken

$$N = \frac{\pi n d^3 k_d}{9\sqrt{2} \cdot 225000} = 2{,}67 \text{ PS}.$$

412. Nennt man das gesuchte Verhältnis α, so ist zunächst aus Gleichung 112

$$M_d = \frac{\pi}{2} R^3 (1 - \alpha^4) \cdot {}_{\max}\tau$$

und aus Gleichung 118 mit $b = h = s$:

$$M_d = \frac{2}{9} s^3 \cdot {}_{\max}\tau.$$

Setzt man $s = r\sqrt{2}$ und $\frac{r}{R} = \alpha$, entfernt M_d und ${}_{\max}\tau$, so bleibt

$$\alpha^4 + 0{,}4\,\alpha^3 = 1$$

mit dem brauchbaren Wurzelwert $\alpha = 0{,}915$.

413. Für die volle Welle ist nach Gleichung 110

$$M_d = \frac{\pi}{2} r^3 \cdot {}_{\max}\tau.$$

Ein Punkt im Innern, der den Abstand ϱ vom Mittelpunkt hat, erleidet die Spannung

$$\tau = \frac{\varrho}{r} \cdot {}_{\max}\tau.$$

Das Drehungsmoment, das der innere Teil der Welle vom Halbmesser r_1 aufnimmt, ist

$$\int_0^{r_1} 2\pi\varrho \cdot d\varrho \cdot \tau \cdot \varrho.$$

Setzt man dies gleich $\frac{1}{n} M_d$, so bleibt:

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{\pi}{2} r^3 {}_{\max}\tau = 2\pi \cdot \frac{{}_{\max}\tau}{r} \int_0^{r_1} \varrho^3\, d\varrho,$$

woraus

$$r_1 = \frac{r}{\sqrt[4]{n}}.$$

414. Infolge der Biegung des Stabes s_1^2 senkt sich die Stelle A um

$$f = \frac{1}{3} \frac{P\left(a - \frac{s}{2}\right)^3}{EJ}, \quad J = \frac{1}{12} s_1^4$$

nach Gleichung 43.

Infolge Verdrehung des Stabes s^2 senkt sich die Stelle A um $\vartheta l a$, worin nach Gleichung 119

$$\vartheta = 7{,}2 \frac{M_d}{G s^4} \text{ mit } M_d = Pa.$$

Hieraus folgt der gesuchte Winkel

$$a\varphi = \vartheta l a + f$$

und

$$\varphi = \frac{2P}{s^4 E}\left[9al + \frac{1250}{a}\left(a - \frac{s}{2}\right)^3\right],$$

worin

$$G = \frac{m}{2(m+1)} E = 0{,}4\,E \text{ (siehe Gleichung 13)}$$

gesetzt wurde. Auf die Einsenkung des Stabes s^2 wurde keine Rücksicht genommen.

415. Setzt man in Gleichung 120

$$y = x \cdot \frac{b}{d}, \quad z = -x \cdot \frac{h}{d},$$

so wird die Drehungsspannung

$$\tau = \frac{9\,M_d}{b^2 h^2 d^2} x(d^2 - 4x^2).$$

Setzt man nun $\frac{d\tau}{dx} = 0$, so wird

$$x = \frac{d}{\sqrt{12}} \text{ und } {}_{\max}\tau = \frac{\sqrt{3}\,d\,M_d}{b^2 h^2},$$

416. Das Drehungsmoment $M_d = P a \sqrt{2}$ erzeugt in A die Schubspannung $\tau = \frac{9}{2}\frac{M_d}{a^3} = \frac{9}{2}\frac{P\sqrt{2}}{a^2}$ (nach Gleichung 118).

Diese Spannung wirkt auf ein Element des quadratischen Querschnitts in A und hat die Richtung AB. Eine gleich große Schubspannung entsteht in A in der Ebene XZ; sie hat die Richtung von X. Dadurch ist der Spannungszustand des Punktes A gegeben; zwei gleich große Schubspannungen in senkrechten Ebenen erzeugen zwei Hauptspannungen, die beide in der Seitenwand AB, parallel zu X, liegen, also in der Ebene der beiden Schubspannungen; sie schließen mit ihnen die Winkel $\pm 45^0$ ein und haben die Größen

$$\sigma_1 = +\tau, \quad \sigma_2 = -\tau.$$

417. Die Kraft P erzeugt in A eine Normalspannung

$$\sigma = \frac{P}{\pi r^2} = -397{,}88 \text{ at (Druck).}$$

Durch das Drehungsmoment M_d entsteht nach Gleichung 110 am Umfang des Zapfens die Schubspannung $\frac{2}{\pi} \cdot \frac{M_d}{r^3}$, somit an der Stelle A die Schubspannung

$$\tau = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{M_d}{r^3} \cdot \frac{\varrho}{r} = 397{,}88 \text{ at.}$$

Die Hauptspannungen in A werden dann nach den Gleichungen 107:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2} = 245{,}90 \text{ at (Zug)},$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2} = -\,643{,}79 \text{ at (Druck)}$$

und ihre Richtungen nach Gleichung 108:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau}{\sigma}, \quad \alpha_1 = 58^0\,16'\,57'' \text{ und}$$

$$\alpha_2 = 90 - \alpha_1 = 31^0\,43'\,3''.$$

Die Ebene der beiden Hauptspannungen steht in A normal zu $AB = \varrho$; die größere Hauptspannung σ_2 schließt mit der Vertikalen in A den Winkel α_2 ein.

418. Die achsiale Kraft P erzeugt zunächst eine achsiale Druckspannung

$$\sigma = \frac{P}{\pi r^2};$$

um P hervorzurufen, ist ein Drehungsmoment an der Schraube erforderlich, welches diese auf Verdrehung beansprucht; es ist

$$M_d = P r \operatorname{tg}(\alpha + \varrho)$$

und die größte entstehende Schubspannung nach Gleichung 110:

$$\tau = \frac{2}{\pi} \frac{M_d}{r^3} = 2\sigma \operatorname{tg}(\alpha + \varrho).$$

Nach Gleichung 123 ist dann die reduzierte Spannung

$$0{,}35\,\sigma + 0{,}65\sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0 \tau)^2} = 3000 \text{ at}$$

zu setzen;
hierin ist nach Gleichung 124 mit $k_n = k = 900$ at, $k_d = 560$ at:

$$\alpha_0 = \frac{10}{13} \cdot \frac{900}{560} = 1{,}23.$$

Durch Einsetzen der Werte erhält man:

$$P = 139\,987 \text{ kg}.$$

419. Wenn eine Welle N Pferdestärken mit n Umdrehungen in der Minute überträgt, so ist nach Aufgabe 408 ihr Drehungsmoment

$$M_d = \frac{225\,000}{\pi} \cdot \frac{N}{n} \text{ cmkg}.$$

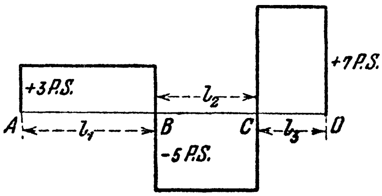
Nach Gleichung 119 ist der Verdrehungsbogen einer quadratischen Welle für deren Längeneinheit

$$\vartheta = 7{,}2 \frac{M_d}{G a^4}.$$

Denkt man sich das Ende D der Welle festgehalten, so ist der Verdrehungsbogen zufolge der N_1 Pferdestärken in A:

$$7{,}2 \cdot \frac{225\,000}{\pi} \cdot \frac{N_1}{n\,G\,a^4}(l_1+l_2+l_3) = 515\,662\,\frac{N_1}{n\,G\,a^4}(l_1+l_2+l_3);$$

ebenso ist der Verdrehungsbogen zufolge der N_2 PS in B:



$$-\,515\,662\,\frac{N_2}{n\,G\,a^4}(l_2+l_3)$$

und endlich der Verdrehungsbogen zufolge der N_3 PS in C:

$$515\,662\,\frac{N_3}{n\,G\,a^4}\,l_3;$$

der ganze Verdrehungsbogen ist also

$$\varphi = \frac{515\,662}{n\,G\,a^4}[N_1 l_1 + (N_1 - N_2)l_2 + (N_1 - N_2 + N_3)l_3],$$

$$\varphi = \frac{567\,228\,200}{n\,G\,a^4}.$$

Es ist

$$N_1 = 3\,\text{PS}, \quad N_1 - N_2 = -\,5\,\text{PS}, \quad N_1 - N_2 + N_3 = 7\,\text{PS}.$$

420. Nach Gleichung 111 ist der Verdrehungsbogen des Drahtes für dessen Längeneinheit

$$\vartheta = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{M_d}{G\,r^4}.$$

Ist also φ der ganze Verdrehungsbogen des Drahtes von der Länge l, so ist $\varphi = l\vartheta$ und das hierzu nötige Drehungsmoment

$$M_d = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{G\,r^4}{l} \cdot \varphi.$$

Dann ist die Winkelbeschleunigung des Drahtes

$$\lambda = \frac{M_d}{T} = k^2\varphi, \quad \text{wenn } k^2 = \frac{\pi}{2}\,\frac{G\,r^4}{T\,l}$$

und wenn ω die Winkelgeschwindigkeit des Drahtes bezeichnet:

$$\omega \cdot d\omega = \lambda\,(-\,d\varphi) = -\,k^2\varphi\,d\varphi;$$

integriert: $$\omega^2 = k^2(\alpha^2 - \varphi^2),$$

mit Rücksicht auf den Anfangszustand:

$$\omega = 0, \quad \varphi = \alpha.$$

Aus $\omega = -\,\dfrac{d\varphi}{dt}$ folgt: $k\,dt = -\,\dfrac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}}$

und nach Integration $k\,t = \arccos\dfrac{\varphi}{\alpha}$, mit Rücksicht auf den Anfangszustand:

$$t = 0, \quad \varphi = \alpha.$$

Setzt man $\varphi = -\alpha$, so erhält man die Dauer einer einfachen Schwingung:

$$\mathsf{T} = \frac{\pi}{k} = \frac{1}{r^2}\sqrt{\frac{2\,T\,l\,\pi}{G}}.$$

421. Zunächst ist $Q = 600$ kg und das Drehungsmoment zwischen C und D:

$$M_d = 300 \text{ kg} \cdot 1{,}0 \text{ m} = 300 \text{ mkg}.$$

Die Auflagerdrücke sind:

$$A = 343 \text{ kg}, \quad B = 557 \text{ kg},$$

die Biegungsmomente in C und D:

$$137{,}2 \text{ mkg und } 222{,}8 \text{ mkg}.$$

Die Rechnung der Welle wird also für die Stelle D durchzuführen sein. Setzt man in Gleichung 125:

$$M = 22\,280 \text{ cmkg}, \quad M_d = 30\,000 \text{ cmkg},$$

ferner für $\alpha_0 = \frac{k_b}{1{,}3\,k_d} = 1{,}92$ (vergleiche Gleichung 124), so wird

$$d = 9{,}33 \text{ cm}.$$

422. Nach Aufgabe 408 ist hier das Drehungsmoment zwischen C und D:

$$M_d = 71\,620\,\frac{N}{n} = 7162 \text{ cmkg}.$$

Die Auflagerdrücke sind:

$$A = 135 \text{ kg}, \quad B = 415 \text{ kg},$$

die Biegungsmomente:

$$6750 \text{ cmkg in C}, \quad 4000 \text{ cmkg in B}.$$

Die Rechnung der Welle ist also für die Stelle C durchzuführen. Nach Gleichung 41 ist die zulässige Biegungsspannung für Gußeisen

$$k_b = \frac{4}{3}\,k_z\sqrt{\frac{e_1}{z_0}}, \quad \text{worin } e_1 = r; \quad z_0 = \frac{4\,r}{3\,\pi},$$

wenn r der Halbmesser der Welle ist; also

$$k_b = 410 \text{ at}.$$

Nach Gleichung 124 ist dann das Anstrengungsverhältnis

$$\alpha_0 = \frac{k_b}{1{,}3\,k_z} = 1{,}58$$

und nach Gleichung 125 mit

$$M = 6750 \text{ cmkg}, \quad M_d = 7162 \text{ cmkg}:$$

$$d = 6{,}48 \text{ cm}.$$

423. Angenommen, die größere Halbachse c sei vertikal gelagert, die kleinere b horizontal.

Nach Gleichung 121 ist die Maximaldehnung

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\frac{m-1}{2m}\sigma + \frac{m+1}{2m}\sqrt{\sigma^2 + 4\alpha_0^2\tau^2}\right].$$

Am Ende der Halbachse c ist die Biegungsspannung

$$\sigma = \frac{M}{W}, \quad W = \frac{\pi}{4} b c^2$$

und die Drehungsspannung (analog zu Gleichung 114)

$$\tau = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{M_d}{b c^2},$$

somit die Maximaldehnung:

$$\frac{2}{\pi b c^2 m E}\left[(m-1)M + (m+1)\sqrt{M^2 + \alpha_0^2 M_d^2}\right].$$

Am Ende der Halbachse b ist die Biegungsspannung Null, die Drehungsspannung (siehe Gleichung 114)

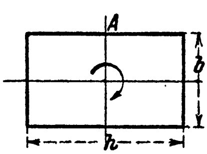
$$\tau = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{M_d}{b^2 c},$$

somit die Maximaldehnung:

$$\frac{2}{\pi b^2 c m E}(m+1)\alpha_0 M_d.$$

Setzt man die Maximaldehnungen einander gleich, überdies $m = 3$, so bleibt

$$\frac{M}{M_d} = \frac{2}{3}\alpha_0\left[\sqrt{4n^2 - 3} - n\right].$$



424. An der Stelle A wird sowohl durch die Biegung als auch durch die Drehung die Maximalspannung entstehen, und zwar die Biegungsspannung

$$\sigma = \frac{M}{W}, \quad \text{worin } W = \frac{1}{6} h b^2$$

und die Drehungsspannung (nach Gleichung 118)

$$\tau = \frac{9}{2} \cdot \frac{M_d}{h b^2}.$$

Setzt man dies und $h = \frac{b}{n}$, $m = \frac{10}{3}$ in Gleichung 121 ein, so bleibt

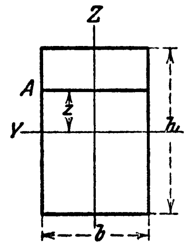
$$b^3 = \frac{n}{k_b}\left[2{,}1\,M + 1{,}95\sqrt{4\,M^2 + 9\,\alpha_0^2\,M_d^2}\right],$$

worin

$$\alpha_0 = \frac{k_b}{1{,}3\,k_d} \text{ nach Gleichung 124.}$$

425. Die größte Dehnung an einer Stelle y, z des Querschnitts ist nach Gleichung 123:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[0{,}35\,\sigma + 0{,}65\sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0\tau)^2}\right].$$



Für irgendeine Stelle A des Randes (denn nur hier wird ε_1 am größten werden können) ist die Biegungsspannung

$$\sigma = \frac{M\,z}{J}, \quad J = \frac{1}{12}\,b\,h^3$$

und die Drehungsspannung nach Gleichung 120 für $y = \frac{b}{2}$:

$$\tau = \frac{9}{2}\,\frac{M_d}{b^2\,h^3}\,(h^2 - 4\,z^2).$$

Setzt man dies in die Gleichung für ε_1 ein, so wird

$$\varepsilon_1 = F(z)$$

und macht man nun $\quad \frac{d\,F(z)}{d\,z} = 0,$

so erhält man für die gefährliche Stelle die Gleichung

$$z^6 + C_4\,z^4 + C_2\,z^2 + C_0 = 0,$$

worin:

$$C_4 = \frac{0{,}4637}{a} - \frac{h^2}{2},$$

$$C_2 = \frac{1}{16\,a^2}\,(a\,h^2 - 1)\,(a\,h^2 - 0{,}710),$$

$$C_0 = -\,0{,}00226\,\frac{h^4}{a}.$$

Die Bedeutung der Konstante ist:

$$a = \frac{9}{2}\,\frac{\alpha_0^2\,M_d^2}{b^2\,M^2}.$$

426. Anwendung der vorigen Aufgabe. Es wird mit

$$M = M_d, \quad b = \frac{h}{2}, \quad \alpha_0 = 1:$$

$$a = \frac{18}{h^2}, \quad C_4 = -0{,}4742\,h^2, \quad C_2 = 0{,}0567\,h^4,$$
$$C_0 = -0{,}000\,126\,h^6$$
und somit die Gleichung für die gefährliche Stelle mit
$$x = \frac{z^2}{h^2}:$$
$$x^3 - 0{,}4742\,x^2 + 0{,}0567\,x - 0{,}000\,126 = 0.$$
Die Wurzeln dieser Gleichung sind:
$$x_1 = 0{,}0022, \quad x_2 = 0{,}2292, \quad x_3 = 0{,}2428$$
und entsprechend
$$z_1 = 0{,}047\,h, \quad z_2 = 0{,}479\,h, \quad z_3 = 0{,}493\,h.$$
Von diesen Werten liefert nur der erste ein Maximum der Dehnung ε; mit
$$\sigma = \frac{M z_1}{J} = 1{,}126\,\frac{M}{h^3},$$
$$\tau = \frac{9}{2}\,\frac{M_d}{b^2 h^3}(h^2 - 4\,z_1^2) = 17{,}842\,\frac{M_d}{h^3}$$
wird nach Gleichung 123:
$$\max \varepsilon = \frac{1}{E}\left[0{,}35\,\sigma + 0{,}65\sqrt{\sigma^2 + 4\,\alpha_0^2\,\tau^2}\right]$$
$$= 23{,}60\,\frac{M}{E\,h^3}.$$
Hingegen liefern die beiden anderen Werte von z für die Dehnung:
$$11{,}55\,\frac{M}{E\,h^3} \text{ und } 11{,}87\,\frac{M}{E\,h^3}.$$

427. Es ist $P = F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2$. Da die Dehnung beider Stäbe dieselbe ist, so folgt $\frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\sigma_2}{E_2}$, wenn E_1, E_2 die Elastizitätszahlen sind. Daraus folgt:
$$\sigma_1 = \frac{P E_1}{F_1 E_1 + F_2 E_2}, \quad \sigma_2 = \frac{P E_2}{F_1 E_1 + F_2 E_2}.$$

428. Nennt man σ_1 und σ_2 die erst durch P entstehenden Spannungen, so gelten für diese zunächst die Gleichungen der vorigen Aufgabe. Dann ist aber
$$F_1\sigma_{01} + F_2\sigma_{02} = 0$$
für den Anfangszustand und überdies das vorgeschriebene Spannungsverhältnis:

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_{01}}{\sigma_2 + \sigma_{02}} = \alpha.$$

Man erhält hieraus:

$$\sigma_{01} = -\frac{P F_2}{F_1 E_1 + F_2 E_2} \cdot \frac{E_1 - \alpha E_2}{\alpha F_1 + F_2},$$

$$\sigma_{02} = \frac{P F_1}{F_1 E_1 + F_2 E_2} \cdot \frac{E_1 - \alpha E_2}{\alpha F_1 + F_2}.$$

429. Es ist $\alpha = \dfrac{\text{Eisenspannung}}{\text{Betonspannung}} = 20 = \dfrac{E_1}{E_2}$, daher $\sigma_{01} = \sigma_{02} = 0$ nach voriger Aufgabe, d. h. es sind keine Anfangsspannungen nötig.

430. Setzt man in den Resultaten der Aufgabe 428: $\alpha = 100$, $F_1 = 1{,}5$ cm², $F_2 = 60$ cm², $E_1 = 2 \cdot 10^6$ at, $E_2 = 10^5$ at, so werden die Anfangsspannungen:

$$\sigma_{01} = 635 \text{ at im Eisen}, \quad \sigma_{02} = -15{,}9 \text{ im Beton}$$

und nach Aufgabe 427 die nach dem Auftreten der Zugkraft entstehenden Spannungen:

$$\sigma_1 = 555 \text{ at im Eisen}, \quad \sigma_2 = 27{,}8 \text{ at im Beton};$$

somit die Gesamtspannungen:

$$\sigma_1 + \sigma_{01} = 1190 \text{ at im Eisen}, \quad \sigma_2 + \sigma_{02} \doteq 11{,}9 \text{ at im Beton}.$$

431. Man denke sich den Vorgang verkehrt, d. h. Eisen und Beton haben anfangs die zu suchenden Spannungen σ_{01} und σ_{02}; nun belaste man den ganzen Körper mit P, wodurch die neuen Spannungen σ_1 und σ_2 hinzukommen. Schließlich muß

$$\sigma_{02} + \sigma_2 = 0$$

sein und

$$\sigma_{01} + \sigma_1 = \frac{P}{F_1}.$$

Verbindet man diese Gleichungen mit:

$$F_1 \sigma_{01} + F_2 \sigma_{02} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\sigma_2}{E_2},$$

so erhält man die gesuchten Spannungen

$$\sigma_{01} = \frac{P}{F_1} \cdot \frac{F_2 E_2}{F_1 E_1 + F_2 E_2}, \quad \sigma_{02} = -\frac{P E_2}{F_1 E_1 + F_2 E_2}.$$

432. Aus $F_1 \sigma_{01} + F_2 \sigma_{02} = 0$ folgt zunächst die Anfangsspannung im Beton: $\sigma_{02} = -9$ at.

Sind σ_1 und σ_2 die durch P neu hinzukommenden Spannungen, so ist

$$P = F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 \text{ und } \frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\sigma_2}{E_2},$$

woraus
$$P = \frac{\sigma_1}{E_1}(F_1 E_1 + F_2 E_2)$$

und mit $\sigma_1 = -270$ at: $P = -2700$ kg.

433. Es sei Δl die gesuchte Verkürzung ohne Eiseneinlage. Dann wurde $\Delta l - \delta l$ durch das Eisen verhindert. Die Eiseneinlage entwickelt eine Zugkraft

$$F_1 E_1 \frac{\delta l}{l},$$

der Beton eine Druckkraft

$$F_2 E_2 \frac{\Delta l - \delta l}{l}.$$

Setzt man beide gleich, so bleibt

$$\Delta l = \delta l \left(1 + \frac{F_1 E_1}{F_2 E_2}\right).$$

434. Nennt man ε die Dehnung der Säule und σ ihre durchschnittliche Spannung, so ist

$$\sigma = E \varepsilon \text{ und auch } \sigma(F_1 + F_2) = \varepsilon(F_1 E_1 + F_2 E_2),$$

woraus
$$E = E_2\left(1 + \frac{F_1 E_1}{F_2 E_2}\right),$$

wenn in der Summe $F_1 + F_2$ das erste Glied als geringfügig vernachlässigt wird.

435. Nennt man ϱ den Abstand eines Punktes vom Mittelpunkt des Querschnitts, so ist das lineare Gesetz für die Veränderung der Elastizitätszahl:

$$E = E_1 + (E_2 - E_1)\frac{\varrho}{r} = a + b\varrho.$$

Für $\varrho = 0$ wird $E = E_1$; für $\varrho = r$ wird $E = E_2$. Die Dehnung ε durch die Kraft P ist an allen Stellen die gleiche, somit die Spannung $\sigma = E\varepsilon$ veränderlich.

Setzt man
$$P = \int^{r} \sigma \, dF,$$

$$dF = 2\pi\varrho \cdot d\varrho \text{ (ringförmiges Flächenelement)},$$

$$\sigma = \varepsilon(a + b\varrho),$$

so wird
$$P = \pi r^2 \cdot \varepsilon\left(a + \frac{2}{3} b r\right)$$
und da die zulässige Spannung zuerst am Rande erreicht wird:
$$\varepsilon = \frac{k_z}{E_2},$$
woraus
$$P = \frac{F k_z}{3}\left(2 + \frac{E_1}{E_2}\right),$$
wenn F der Querschnitt des Drahtes ist.

436. Nennt man M_d', M_d'' die von Holz und Eisen aufgenommenen Teile des Drehungsmoments M_d, G' und G'' die zugehörigen Elastizitätszahlen für Schub, so ist zunächst der auf die Längeneinheit des Balkens bezogene Verdrehungswinkel nach Gleichung 119
$$\vartheta = 3{,}6 \frac{M_d'}{G'}\left(\frac{1}{b h^3} + \frac{1}{b^3 h}\right).$$
Für ein kurzes Stück des Eisens dx ist dessen Verdrehung
$$r\, d\varphi = dx \cdot \gamma = dx \cdot \frac{\tau}{G''},$$
wenn τ die Schubspannung, γ die Schiebung ist.

Da $d\varphi : dx = \vartheta : 1$ ist, so folgt
$$\tau = G'' r \vartheta,$$
und das Drehungsmoment der beiden Eisenstäbe:
$$M_d'' = 2 f \tau r = 2 f r^2 G'' \vartheta.$$
Setzt man beide Werte von ϑ gleich, so ist
$$\frac{M_d''}{2 f r^2 G''} = 3{,}6 \frac{M_d'}{G'}\left(\frac{1}{b h^3} + \frac{1}{b^3 h}\right),$$
und hieraus:
$$\frac{M_d''}{M_d'} = \frac{G''}{G'} \cdot \frac{r^2}{5}\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{b^2}\right),$$
wozu noch die Gleichung kommt:
$$M_d = M_d' + M_d''.$$
Hieraus ist das Verhältnis $\frac{M_d''}{M_d}$ leicht zu ermitteln.

437. Man suche zuerst das polare Trägheitsmoment für den Mittelpunkt und halbiere es.
$$J = \frac{1}{4}\pi R^4 + \frac{7}{8}\pi \nu r^2 \delta^2.$$

438. Wie oben. $J = \frac{5}{16} a^4 \sqrt{3} + \frac{3}{4} \pi \nu r^2 \delta^2.$

439. $J_1 = \frac{1}{12} B H^3 + \pi \nu a^2 \delta^2, \quad J_2 = \frac{1}{12} B^3 H + \frac{3}{8} \pi \nu b^2 \delta^2.$

440. Für das Achsenkreuz a a sind Trägheitsmoment und Zentrifugalmoment:

$$J_x' = J_y' = \frac{b}{3}(a^3 + a b^2 - b^3) + \frac{1}{8} \pi \nu \delta^2 \left[5 a^2 - 8 e (a + b) + 4 b^2 + 14 e^2\right],$$

$$J_{xy}' = \frac{b^2}{4}(2 a^2 - b^2) + \frac{1}{4} \pi \nu \delta^2 (3 a b - 2 b e + e^2).$$

Die Hauptachsen des Punktes O liegen unter 45^0 gegen das Achsenkreuz a a; die Hauptträgheitsmomente sind nach Gleichung 34:

$$J_1' = J_x' + J_{xy}', \quad J_2' = J_x' - J_{xy}'.$$

Um den ideellen Schwerpunkt der Fläche zu finden, benütze man die Gleichungen:

$$F = b(2a - b) + \frac{9}{4} \pi \nu \delta^2,$$

$$F x_s = F y_s = \frac{b}{2}(a^2 + a b - b^2) + \frac{1}{4} \pi \nu \delta^2 (3 a + 2 b - e).$$

Die gesuchten Hauptträgheitsmomente für den Schwerpunkt sind dann:

$$J_1 = J_2', \quad J_2 = J_1' - 2 F x_s^2.$$

441. Ist y_0 der Abstand der Null-Linie von der oberen oder Druckkante, so ist die in Rechnung zu stellende Querschnittsfläche

$$F = B y_0 + \nu (f_1 + f_2)$$

und

$$F y_0 = \frac{1}{2} B y_0^2 + \nu (f_1 h_1 + f_2 h_2).$$

Das Trägheitsmoment für die Druckkante ist

$$J = \frac{1}{3} B y_0^3 + \nu (f_1 h_1^2 + f_2 h_2^2).$$

Sollte sich jedoch aus den beiden ersten Gleichungen $y_0 > h$ herausstellen, so gelten die Gleichungen

$$F = (B - b) h + b y_0 + \nu (f_1 + f_2),$$

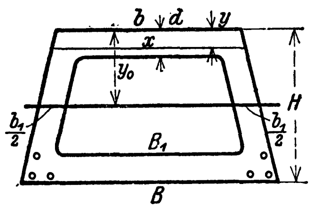
$$F y_0 = \frac{1}{2}(B - b) h^2 + \frac{1}{2} b y_0^2 + \nu (f_1 h_1 + f_2 h_2),$$

$$J = \frac{1}{3}(B - b)\,h^3 + \frac{1}{3}\,b\,y_0{}^3 + \nu\,(f_1 h_1{}^2 + f_2 h_2{}^2).$$

Schließlich wird das Trägheitsmoment für die Null-Linie:

$$J_0 = J - F y_0{}^2.$$

442. Nennt man f den Querschnitt der Eiseneinlage und h ihren mittleren Abstand von der oberen Seite des Querschnitts, läßt man ferner die Abrundung der Ecken unberücksichtigt, so wird der nutzbare Querschnitt:



$$F = \int_0^d x\,dy + b_1(y_0 - d) + \nu f$$

$$= \frac{B - b}{H}\cdot\frac{d^2}{2} + b\,d + b_1(y_0 - d) + \nu f.$$

Ebenso ergibt sich

$$F y_0 = \int_0^d x\,y\,dy + b_1\int_d^{y_0} y\,dy + \nu f h$$

$$= \frac{B - b}{H}\cdot\frac{d^3}{3} + b\,\frac{d^2}{2} + \frac{b_1}{2}(y_0{}^2 - d^2) + \nu f h$$

und analog das Trägheitsmoment für die obere Seite des Querschnitts:

$$J = \frac{B - b}{H}\cdot\frac{d^4}{4} + b\,\frac{d^3}{3} + \frac{b_1}{3}(y_0{}^3 - d^3) + \nu f h^2.$$

Hierin ist $\qquad b_1 = B - B_1 - \frac{(B - b)\,d}{H}.$

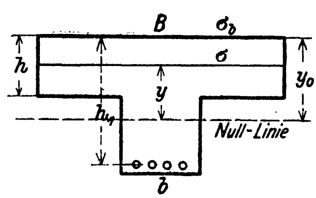
443. Ist f der Querschnitt der Eiseneinlage, J_e sein Trägheitsmoment für seine horizontale Schwerlinie, so wird

$$F = B y_0 + \nu f,$$

$$F y_0 = \frac{1}{2} B y_0{}^2 + \nu f h,$$

$$J = \frac{1}{3} B y_0{}^3 + \nu (f h^2 + J_e).$$

444. Zunächst rechnet man die Lage der Null-Linie wie in Aufgabe 441, wenn $f_2 = 0$ gesetzt wird.



Der ganze Druck auf den Querschnitt ist:

$$D = \int_{y_0 - h}^{y_0} \sigma \cdot dF_1 + \int_0^{y_0 - h} \sigma \cdot dF_2,$$

worin $\sigma = \sigma_b \cdot \frac{y}{y_0}$, $dF_1 = B \cdot dy$, $dF_2 = b \cdot dy$ und σ_b die Betonspannung am Rande ist.

Nennt man η den Abstand des Druckmittelpunkts von der Null-Linie, so gilt:

$$D\eta = \int_{y_0-h}^{y_0} \sigma y \cdot dF_1 + \int_{0}^{y_0-h} \sigma y \cdot dF_2.$$

Man erhält: $$\eta = \frac{2}{3}\,\frac{B y_0^3 - (B - b)(y_0 - h)^3}{B y_0^2 - (B - b)(y_0 - h)^2}$$

und für den gesuchten Abstand: $h_1 - y_0 + \eta$.

445. Ist dF ein gedrücktes Flächenelement, z sein Abstand von der Null-Linie, σ seine Druckspannung, so gelten die Gleichungen

$$P = \int_0^e \sigma\, dF, \quad P(e - a) = \int_0^e \sigma\, dF \cdot z,$$

$$\sigma = \frac{z}{e} \cdot {}_{\max}\sigma.$$

Da die Integrale sich nur auf den gedrückten, also unterhalb der Null-Linie NN liegenden Teil des Querschnitts beziehen, so ist

$$\int_0^e z\, dF = \frac{1}{2} b e^2, \quad \int_0^e z^2\, dF = \frac{1}{3} b e^3,$$

woraus

$$e = 3a \text{ und } {}_{\max}\sigma = \frac{2P}{3ab}.$$

446. Lösung wie in voriger Aufgabe. Es ist

$$\int_0^e z\, dF = 2s^2(e - s) + \frac{1}{3}(2s - e)^3,$$

$$\int_0^e z^2\, dF = \frac{s^4}{3} + 2s^2(e - s)^2 - \frac{1}{6}(2s - e)^4.$$

Man benütze hiefür die Differenz aus dem ganzen Quadrat und dem über der Null-Linie liegenden Dreieck.

Mit $z = \frac{e}{s}$ erhält man die Gleichung:

$$z^3 - 5z^2 + 6z - 2 = 0,$$

woraus die brauchbare Wurzel: $z = 1, \quad e = s,$

und $$\max \sigma = 3 \frac{P}{s^2}.$$

447. Lösung wie in den beiden vorigen Aufgaben. Es ist

$$P = \int_0^e \sigma \, dF \text{ und } P(p + r \cos \alpha) = \int_0^e \sigma z \, dF,$$

und mit

$$\sigma = \frac{z}{e} \cdot \max \sigma,$$

$$P = \frac{\max \sigma}{e} \int_0^e z \, dF \text{ und } P(p + r \cos \alpha) = \frac{\max \sigma}{e} \int_0^e z^2 dF,$$

woraus: $$p + r \cos \alpha = \frac{\int_0^e z^2 dF}{\int_0^e z \, dF}.$$

Nach Aufgabe 133 ist

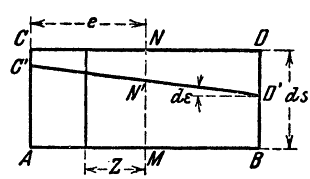
$$\int_0^e z^2 dF = r^4 \left[(\pi - \alpha)\left(\cos^2 \alpha + \frac{1}{4}\right) + \sin \alpha \cos \alpha \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{6} \sin^2 \alpha\right)\right],$$

ferner ist $$\int_0^e z \, dF = r^3 \left[(\pi - \alpha) \cos \alpha + \sin \alpha \left(1 - \frac{1}{3} \sin^2 \alpha\right)\right],$$

woraus sich schließlich ergibt:

$$p = \frac{r}{4} \frac{3(\pi - \alpha) + \sin \alpha \cos \alpha \, (3 + 2 \sin^2 \alpha)}{3(\pi - \alpha) \cos \alpha + \sin \alpha \, (3 - \sin^2 \alpha)}.$$

448. Betrachtet man zwei Querschnitte AB und CD des Stabes, welche die Entfernung ds voneinander haben, und beachtet, daß CD nach der Zusammendrückung nach C′D′ gelangen wird (bei festgehaltenem AB), so findet man die Drehung $d\varepsilon$ der Querschnitte gegeneinander



$$d\varepsilon = \frac{AC' - BD'}{2e}.$$

Nun sind $CC' = \dfrac{\sigma_0}{E_0(1 + a)} ds, \quad DD' = \dfrac{\sigma_0}{E_0(1 - a)} ds$ die Zusammenpressungen der äußersten Fasern für $z = +e$ und $z = -e$,

woraus $$d\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E_0} \cdot \frac{ds}{e} \cdot \frac{a}{1-a^2};$$

ferner ist $ds' = MN' = MN - N'N = ds\left(1 - \frac{\sigma_0}{E_0}\right)$,

und der Krümmungshalbmesser der elastischen Linie in M:

$$\varrho = \frac{ds'}{d\varepsilon} = \left(\frac{E_0}{\sigma_0} - 1\right)\frac{e(1-a^2)}{a}.$$

Da dieser Ausdruck für alle Querschnitte denselben Wert hat, ist die elastische Linie ein Kreisbogen vom Halbmesser ϱ.

449. Nennt man σ die Spannung in irgendeinem Flächenelement dF, so müssen die Gleichungen erfüllt sein:

$$\int \sigma \, dF = 0 \quad \text{und} \quad \int \sigma z \, dF = M.$$

Ist ε die Dehnung an der Stelle dF, ε_0 jene im Schwerpunkt des Querschnitts, ϱ der Krümmungshalbmesser der elastischen Linie, so ist

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{z}{\varrho}, \quad \sigma = E\varepsilon = E_0\left(1 + a\frac{z}{e}\right)\left(\varepsilon_0 + \frac{z}{\varrho}\right) \quad . \quad a)$$

und nach Einsetzen in obige Integrale:

$$\varepsilon_0 F + \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{a\varepsilon_0}{e}\right)\int z\,dF + \frac{a}{e\varrho}\int z^2\,dF = 0,$$

$$\varepsilon_0 \int z\,dF + \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{a\varepsilon_0}{e}\right)\int z^2\,dF + \frac{a}{e\varrho}\int z^3\,dF = \frac{M}{E_0}.$$

Nun ist $\int z\,dF = 0$, $\int z^2\,dF = J$ und für den symmetrischen Querschnitt $\int z^3\,dF = 0$, also bleibt

$$\varepsilon_0 F + \frac{aJ}{e\varrho} = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{a\varepsilon_0}{e}\right)J = \frac{M}{E_0} \quad . \quad . \quad b)$$

Setzt man $J = Fi^2$, so wird die Dehnung im Schwerpunkt

$$\varepsilon_0 = -\frac{ai^2}{e\varrho},$$

und nach Einsetzen dieses Ausdrucks in Gleichung b)

$$\frac{E_0}{\varrho} = \frac{M}{J}\,\frac{e^2}{e^2 - a^2 i^2}.$$

Es wird somit die Spannung im Schwerpunkt mit $z = 0$:

$$s_0 = E_0\varepsilon_0 = -\frac{M}{J} \cdot \frac{aei^2}{e^2 - a^2 i^2},$$

ferner der Ort der Punkte ohne Spannung mit $\sigma = 0$:

$$\varepsilon_0 + \frac{z_1}{\varrho} = 0 \quad \text{oder} \quad z_1 = \frac{a\, i^2}{e},$$

d. i. eine Gerade über dem Schwerpunkt im Abstand z_1. Endlich die Spannungen in den äußersten Fasern:

$$\text{für } z = +e: \qquad s_1 = \frac{M}{J} \cdot \frac{(1+a)(e^2 - a\, i^2)}{e^2 - a^2 i^2},$$

$$\text{für } z = -e: \qquad -s_2 = -\frac{M}{J} \cdot \frac{(1-a)(e^2 + a\, i^2)}{e^2 - a^2 i^2}.$$

450. Für das Gleichgewicht zwischen den Druck- und Zugspannungen des Balkens von der Breite B gilt die Gleichung

$$\frac{1}{2} B\, y_0\, \sigma_d = \frac{1}{2} B (H - y_0)\, \sigma_z,$$

worin $\qquad \sigma_d = E_{b\,d}\, \varepsilon_d, \quad \sigma_z = E_{b\,z}\, \varepsilon_z$

die äußersten Druck- und Zugspannungen sind.

Setzt man $\frac{E_{b\,z}}{E_{b\,d}} = \mu$ und beachtet, daß

$$\varepsilon_z : \varepsilon_d = H - y_0 : y_0$$

ist, so bleibt

$$y_0 = H \frac{\sqrt{\mu}}{1 + \sqrt{\mu}}.$$

451. Das Gleichgewicht zwischen Zug- und Druckspannungen gibt den Ansatz

$$\int_0^{y_0} B \cdot d y_1 \cdot \sigma_1 = \int_0^{H - y_0} B \cdot d y \cdot \sigma.$$

Mit Hilfe der beiden gegebenen Bachschen Gleichungen und der Beziehungen

$$\varepsilon_1 : \varepsilon_b = y_1 : y_0, \quad \varepsilon : \varepsilon_b = y : y_0,$$
$$\sigma_b^{m_1} = E_{b\,d}\, \varepsilon_b$$

erhält man schließlich den Ausdruck

$$\frac{H}{y_0} - 1 = \sqrt[m+1]{\frac{E_{b\,d}}{E_{b\,z}} \left[\frac{m_1 (1+m)}{m (1+m_1)}\right]^m \sigma_b^{\,m - m_1}}$$

452. Mit den Bezeichnungen $\nu = \frac{E_e}{E_{b\,d}}$, $\mu = \frac{E_{b\,z}}{E_{b\,d}}$ wird die ideelle Querschnittsfläche

$$F = B\, y_0 + \mu B (H - y_0) + \nu f$$

und $$F y_0 = \frac{1}{2} B y_0^2 + \frac{\mu}{2} B (H^2 - y_0^2) + \nu f h,$$

worin y_0 der Abstand der Null-Linie von der oberen oder Druckseite ist.

Das Trägheitsmoment des ideellen Querschnitts für die Null-Linie ist

$$J_0 = \frac{1}{3} B y_0^3 + \frac{\mu}{3} B (H - y_0)^3 + \nu f (h - y_0)^2,$$

und die größte Druckspannung im Beton

$$\sigma_{bd} = \frac{M y_0}{J_0}.$$

453. Bezeichnungen wie in vorhergehender Aufgabe.

$$F = (B - b) h + b y_0 + \mu b (H - y_0) + \nu (f_1 + f_2),$$

$$F y_0 = \frac{1}{2} (B - b) h^2 + \frac{1}{2} b y_0^2 + \frac{1}{2} \mu b (H^2 - y_0^2) + \nu (f_1 h_1 + f_2 h_2),$$

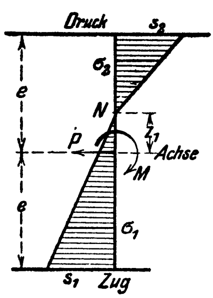
$$J_0 = \frac{1}{3} B y_0^3 - \frac{1}{3} (B - b) (y_0 - h)^3 + \frac{1}{3} \mu b (H - y_0)^3$$
$$+ \nu [f_1 (h_1 - y_0)^2 + f_2 (y_0 - h_2)^2].$$

Größte Druckspannung $\sigma_{bd} = \frac{M y_0}{J_0}$.

Größte Zugspannung $\sigma_{bz} = \mu \frac{M (H - y_0)}{J_0}$.

Größte Eisenspannung $\sigma_e = \nu \frac{M (h_1 - y_0)}{J_0}$.

454. Die Abbildung zeigt den Verlauf der Zug- und Druckspannungen eines Querschnitts; N sei die Null-Linie, z_1 ihr gesuchter Abstand von der Achse des Trägers; s_1 und s_2 seien die größten Spannungen auf der Zug- und Druckseite des Trägers.



Ist b die Breite des Rechtecks, b d z ein Flächenelement im Abstande z von der Null-Linie, σ_1 die dort auftretende Zugspannung, σ_2 die Druckspannung, so bestehen folgende Gleichungen:

$$P = \int_0^{e+z_1} b\, dz \cdot \sigma_1 - \int_0^{e-z_1} b\, dz \cdot \sigma_2,$$

$$M + P z_1 = \int_0^{e+z_1} b\,z\,dz \cdot \sigma_1 + \int_0^{e-z_1} b\,z\,dz \cdot \sigma_2.$$

Setzt man $\sigma_1 = s_1 \frac{z}{e+z_1}$, $\sigma_2 = s_2 \frac{z}{e-z_1}$,

so werden obige Gleichungen:

$$\frac{2P}{b} = s_1(e+z_1) - s_2(e-z_1),$$

$$3\frac{M+Pz_1}{b} = s_1(e+z_1)^2 + s_2(e-z_1)^2.$$

Dazu kommt noch die Beziehung:

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{E_1}{E_2} \cdot \frac{e+z_1}{e-z_1}.$$

Aus diesen drei Gleichungen erhält man zunächst die Bestimmungsgleichung für z_1:

$$\frac{3M - P(2e - z_1)}{3M + P(2e + z_1)} = \frac{E_2}{E_1} \cdot \left(\frac{e - z_1}{e + z_1}\right)^2,$$

sodann die größten Spannungen:

$$s_1 = \frac{3M + P(2e + z_1)}{bh(e + z_1)},$$

$$-s_2 = -\frac{3M - P(2e - z_1)}{bh(e - z_1)}.$$

455. Nennt man df ein Element der Eisenfläche, σ_1 seine Spannung, y_1 seinen Abstand von der Null-Linie, so ist das Biegungsmoment M im Gleichgewicht mit den Spannungen, wenn

$$M = \int_0^{y_0} B\,dy \cdot \sigma y + \int^{f} df \cdot \sigma_1 y_1.$$

Nun ist $\sigma = \frac{\sigma_b}{y_0} y$, $\sigma_1 = \nu \frac{\sigma_b}{y_0} y_1$,

woraus $M = \frac{\sigma_b}{y_0}\left[\frac{1}{3} B y_0^3 + \nu J_e + \nu f (h - y_0)^2\right].$

Da überdies $\frac{\sigma_e}{\nu} : \sigma_b = h_1 - y_0 : y_0$, worin h_1 die Entfernung der oberen Betonkante von der Unterkante der Eiseneinlage ist, so folgt für die gefragte Zunahme des Biegungsmoments durch die Steifheit der Eiseneinlage:

$$\frac{\sigma_e}{h_1 - y_0} J_e.$$

456. Die ideelle Querschnittsfläche ist

$$F = BH + \nu(f_1 + f_2)$$

und für den Abstand y_s ihres ideellen Schwerpunkts von der linken Kante gilt die Beziehung

$$F y_s = \frac{1}{2} B H^2 + \nu(f_1 h_1 + f_2 h_2).$$

Das Trägheitsmoment für die linke Kante ist

$$J = \frac{1}{3} B H^3 + \nu(f_1 h_1^2 + f_2 h_2^2)$$

und für die parallele Schwerlinie

$$J_s = J - F y_s^2.$$

Die Null-Linie muß in der linken Kante liegen; nach Gleichung 75 ist somit $n = y_s$, $np = \frac{J_s}{F}$ (vom Vorzeichen abgesehen) und

$$x = \frac{J}{F y_s}.$$

457. Die Null-Linie muß den äußeren Kreis berühren. Nach Gleichung 75 ist also

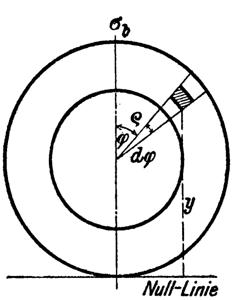
$$p = -\frac{i^2}{n},$$

worin

$$n = R_2, \quad i^2 = \frac{J}{F},$$

$$J = \frac{\pi}{4}(R_2^4 - R_1^4) + \frac{1}{2}\nu f R^2,$$

$$F = \pi(R_2^2 - R_1^2) + \nu f.$$



458. In einem Flächenstück $dF = \varrho\, d\varrho\, d\varphi$ der Betonfläche sei σ die Spannung; dann ist

$$\sigma : \sigma_b = y : 2R_2$$

und $y = R_2 + \varrho \cos\varphi$.

Die Druckkraft, welche der Beton aufnehmen muß, ist

$$P_b = \int \sigma \cdot dF = \frac{\sigma_b}{2R_2} \int_{R_1}^{R_2}\int_0^{2\pi} (R_2 + \varrho \cos\varphi)\, \varrho\, d\varrho\, d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{2}(R_2^2 - R_1^2)\,\sigma_b = \frac{\sigma_b F}{2}.$$

Ebenso findet man für die Druckkraft, welche das Eisen aufnehmen wird, wenn $df = \frac{f}{2\pi} d\varphi$ gesetzt wird:

$$P_e = \int \sigma \cdot df = \frac{\sigma_b f}{4\pi R_2} \nu \int_0^{2\pi} (R_2 + R \cos\varphi)\, d\varphi$$

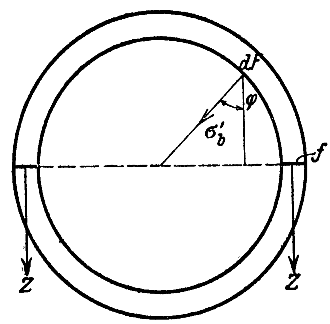
$$= \nu \frac{\sigma_b f}{2} \text{ mit } \nu = \frac{E_e}{E_b}.$$

Es wird also die größte Betonspannung

$$\sigma_b = \frac{2P}{F + \nu f}.$$

459. Ist ε die Zusammendrückung des Betons in Richtung der Achse der Säule, so ist

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{m}$$



seine Querdehnung, so lange die Säule nicht umschnürt wird. Durch den eisernen Ring wird diese Querdehnung kleiner sein, z. B. ε_1', während der Rest ε_2' durch das Eisen verhindert wird.

Der erste Teil ε_1' wird eine Ausweitung des Ringes erfordern, und da sich der Umfang ebenso dehnt wie der Halbmesser, wird die im Eisen entstehende Spannung $\sigma_e = E_e \cdot \varepsilon_1'$ sein. Nennt man f den Querschnitt des Ringes, so wird für den Widerstand Z des Ringes die Gleichung bestehen

$$2Z = 2f\sigma_e.$$

Der zweite Teil $\varepsilon_2' = \varepsilon' - \varepsilon_1'$ wird durch den Druck des Ringes verhindert, der in einem Flächenelemente dF des Umfangs der Säule mit der Größe σ_b' auftreten möge; für Gleichgewicht wird $2Z = \int \sigma_b' \cos\varphi\, dF = \sigma_b' l d$ sein. Setzt man

$$\sigma_b = E_b \cdot \varepsilon, \qquad \sigma_b' = E_b \varepsilon_2',$$

so erhält man
$$\sigma_e = \frac{\sigma_b}{m} \cdot \frac{1}{\frac{2f}{ld} \cdot \frac{E_b}{E_b'} + \frac{E_b}{E_e}}$$

und analog
$$\sigma_b' = \frac{\sigma_b}{m} \frac{1}{\frac{ld}{2f} \cdot \frac{E_b}{E_e} + \frac{E_b}{E_b'}}.$$
(R. Saliger, Der Eisenbeton.)

460. Die rechten Seiten der Ringe werden durch P in das Lager gedrückt. Es muß dann die Gleichung erfüllt sein:

$$P = k' \cdot \frac{\pi}{4} [(d + 2a)^2 - d^2] \cdot n,$$

woraus
$$d = \frac{8}{3} \sqrt{\frac{P}{\pi k n}}.$$

Die Innenflächen der Ringe werden durch P auf Schubfestigkeit beansprucht. Es ist also

$$P = k_s \cdot d \pi b \cdot n,$$

und somit
$$b = \frac{P}{\pi k_s n d}.$$

461. DE ist ein beiderseitig eingespannter Träger, dessen Last in der Mitte steht; das größte Biegungsmoment ist $\frac{1}{8} Pl = 100$ mkg.

Aus $\max M = k_b \cdot W$, $W = \frac{\pi}{4} r^3$ folgt $r = 2{,}2$ cm. Das Einspannungsmoment in D und E beansprucht die kurzen Endstücke auf Verdrehung; nach Gleichung 110 ist die größte hier entstehende Spannung $\frac{2}{\pi} \cdot \frac{M_d}{r^3} = \frac{k_b}{2} = 660$ at, da $M_d = \max M = k_b \cdot \frac{\pi}{4} r^3$ ist.

462. Die Bruchstelle des Schachtgestänges ist die oberste. Dort hängt die Last P und das ganze Gewicht

$$G = 10 \cdot (8x \cdot 500)\ \text{cm}^3 \cdot 0{,}0076 = 304x\ \text{kg}.$$

Der durch die Niete geschwächte Querschnitt

$$F = x(b - 2y)$$

ist am meisten gefährdet; man hat also die Gleichung

$$G + P = F \cdot k_z.$$

Nach Aufgabe 382, b ist der notwendige Durchmesser des Nietbolzens

$$y = 2 \sqrt[3]{\frac{Qx}{\pi k_b}},$$

wenn $Q = \frac{1}{2}(P + G)$ die Scherkraft der doppelschnittigen Niete ist. Man erhält also folgende Gleichungen:

$$(3000 + 304x)x = \frac{1}{4} \pi y^3 \cdot 1176$$

und
$$3000 + 304x = 600x(8 - 2y),$$

woraus:
$$x = 1{,}18\ \text{cm}, \quad y = 1{,}63\ \text{cm}.$$

463. Die Zerlegung der Last P nach den drei Beinen ergibt für die Beanspruchung der Stange DC: $Z = 3773$ kg Zug, für jede der beiden Säulen: $D = 2631$ kg Druck. Die Länge der letzteren ist $l = 658$ cm.
Der Durchmesser der Zugstange ergibt sich aus

$$Z = \frac{\pi d^2}{4} \cdot k_z \text{ mit } d = 2{,}9 \text{ cm.}$$

Nennt man a die Stärke der Säule, so ist (versuchsweise) nach Gleichung 88

$$D = \frac{1}{11} F K_k = \frac{a^2}{11} \cdot \frac{987\,000}{n^2},$$

$$\text{worin } n = \frac{l}{i} = \frac{l\sqrt{12}}{a} = \frac{2279}{a}.$$

Daraus ergibt sich die Gleichung

$$a^4 = \frac{11\,D}{987\,000} \cdot \overline{2279}^2,$$

und

$$a = 19{,}8 \text{ cm.}$$

Nachträglich findet man $n = 115$, also > 100, welche Bedingung der Gleichung 88 zugrunde gelegt wurde.

464. a) Die Last in B erzeugt den Auflagerdruck $C = 12$ t in C. Dieser teilt sich in die Zugkraft $P = 9$ t im oberen Balken und in die Druckkraft $D = 15$ t in der Strebe. Der obere Balken wird außerdem auf Biegung beansprucht; das größte Biegungsmoment tritt in C auf, und zwar $_{\max}M = 9000$ mkg. Die größte in AB auftretende Spannung ist demnach

$$\frac{_{\max}M}{W} + \frac{P}{F} = 69{,}8 + 5{,}5 = 75{,}3 \text{ at,}$$

mit

$$W = \frac{1}{6} \cdot 35 \cdot \overline{47}^2 = 12\,883 \text{ cm}^3.$$

b) Die Strebe DC hat das Verhältnis $n = \frac{l}{i} = 49{,}4$; es ist also nach den Gleichungen 95, 96, 97 ihre Tragfähigkeit

$$\frac{F k}{1 + \mu n^2} = 62{,}77 \text{ t,}$$

während nach früher die Druckkraft nur 15 t beträgt.

c) Beide Bolzen haben 9 t Schubkraft aufzunehmen; nach Gleichung 102 ist demnach

$$_{\max}\tau = 480 \text{ at} = \frac{4}{3} \cdot \frac{9000 \text{ kg}}{F},$$

woraus der Durchmesser $d = 5{,}7$ cm.

465. a) Rechnung für Schub: $P = 2 \cdot \frac{3}{4} \frac{\pi d^2}{4} \cdot k_s'$ (vergleiche Gleichung 102), woraus $d = 2{,}8$ cm.

b) Rechnung für Zug: $P = b(b_1 - d) k_z''$; $b_1 = 8{,}3$ cm.

c) Rechnung für Zug: $P = 2(\beta - d) \cdot \delta \cdot k_z'$ für die durch den Schraubenbolzen geschwächte Stelle des eisernen Bandes; $\beta = 5{,}3$ cm. Oder für Schub: $P = 2 \cdot \frac{2}{3} \beta \delta \cdot k_s'$ für die beiden Ecken des Bandes; $\beta = 4{,}6$ cm.

d) Rechnung für Schub: $P = 2 \cdot \frac{2}{3} z b \cdot k_s''$ (vergleiche Gleichung 101), woraus $z = 41$ cm; ebenso $P = 4 \cdot \frac{2}{3} z_1 \delta \cdot k'_s$, $z_1 = 2{,}3$ cm.

466. a) Aus $P = \frac{\pi d^2}{4} \cdot k_z$ folgt $d = 3$ cm.

b) $a = 1{,}25\, d = 3{,}75$ cm,
$b = 1$ cm aus $P = 2ab \cdot k_z$.

c) Rechnet man den Durchmesser D nach den Regeln der Schubfestigkeit, so ist mit Benützung der Gleichung 102:

$$P = 2 \cdot \frac{3}{4} \frac{\pi D^2}{4} \cdot k_s,$$

wenn $Q = P$, $F = 2 \frac{\pi D^2}{4}$, $_{\max}\tau = k_s$ gesetzt wird. Es folgt hieraus $D = 2{,}8$ cm.

Die Berechnung des Durchmessers D nach den Regeln der Biegungsfestigkeit erfolgt wie in Aufgabe 382.

Es ist nach Gleichung b):

$$_{\max}M = k_b \cdot \frac{\pi D^3}{32};$$

benützt man das Resultat von Aufgabe 211:

$$_{\max}M = \left(\frac{b}{2} + \frac{\delta}{4}\right) \frac{P}{2},$$

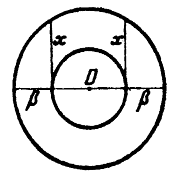
wenn vom Vorzeichen abgesehen wird, so ist

$$D = 2\sqrt[3]{\frac{P\left(b + \frac{\delta}{2}\right)}{\pi k_b}} = 3{,}2 \text{ cm},$$

welche Abmessung als maßgebend anzusehen sein wird.

d) Rechnet man die Ringbreite β nach den Regeln der Zugfestigkeit, so ist $\beta = \frac{a}{2} = 1{,}9$ cm.

Beachtet man jedoch, daß der Kreisring von der Breite β auch längs der Flächen x abgeschert werden könnte, so folgt mit Benützung von Gleichung 101:



$$P = 4 \cdot \frac{2}{3} b x \cdot k_s,$$

wenn $Q = P$, $F = 4bx$, ${}_{\max}\tau = k_s$ gesetzt wird.

Hieraus folgt $x = 3{,}5$ cm

und sodann aus $\beta : x = x : \beta + D$:

$\beta = 1{,}2$ cm. Der frühere Wert 1,9 cm ist also der maßgebende.

e) Aus $P = 2 \cdot \frac{2}{3} \delta z \cdot k_s$ (Benützung der Gleichung 101) folgt: $z = 5$ cm.

467. Aus Aufgabe 64 folgt die Arbeitsfestigkeit von Schweißeisen bei dem gegebenen Belastungswechsel

$$A = 2160 - 1230 \cdot \frac{2}{5} + 250 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 1708 \text{ at}.$$

Die zulässige Zugspannung kann dann gewählt werden

$$k_z = \frac{2}{7} A = 488 \text{ at}$$

und die zulässige Schubspannung

$$k_s = \frac{10}{13} k_z = 375 \text{ at}.$$

Aus $P = 20\,000 \text{ kg} = a d \cdot 488$ at folgt

$$a = 10{,}2 \text{ cm}.$$

Aus $\frac{P\sqrt{3}}{3} = 11\,547 \text{ kg} = b d \cdot 488$ at folgt

$$b = 5{,}9 \text{ cm}.$$

Vom Schraubenbolzen werden zwei Querschnitte auf Schub beansprucht; es ist also nach Gleichung 102:

$$_{\max}\tau = k_s = 375 \text{ at} = \frac{4}{3} \cdot \frac{20000 \text{ kg}}{2 \cdot \frac{\pi D^2}{4}},$$

woraus $$D = 6{,}7 \text{ cm}.$$

Die Ringbreite β kann wie in voriger Aufgabe unter d) gerechnet werden. Die Berechnung für Zugbeanspruchung geschieht nach der Gleichung

$$P = 20000 \text{ kg} = 2\beta d k_z, \text{ woraus}$$

$$\beta = 5{,}2 \text{ cm}.$$

Die Berechnung für Schubbeanspruchung (siehe obige Abbildung) gibt zunächst mit Gleichung 101:

$$P = 2 \cdot \frac{2}{3} x d \cdot k_s, \text{ woraus } x = 10 \text{ cm};$$

dann folgt aus $$\beta : x = x : \beta + D:$$

$$\beta = 7{,}3 \text{ cm}.$$

468. a) Die Auflagerdrücke in A und B sind $\frac{1}{2}$ q l $= 250$ kg, die Zugkraft im Rundeisen CB:

$$S = \frac{A}{\sin\alpha}, \text{ wenn } \sphericalangle ABC = \alpha \text{ ist.}$$

Im Schranken AB entsteht eine Druckkraft $R = A \operatorname{cotg} \alpha = 625$ kg, die vereint mit dem Eigengewicht $q = 100$ kg/m den Balken AB wie in Aufgabe 320 in Anspruch nimmt. Dort wurde die größte Durchbiegung in der Mitte des Balkens gefunden:

$$f = \frac{q}{R}\left\{\frac{1}{\omega^2}\left(\frac{1}{\cos\frac{1}{2}\omega l} - 1\right) - \frac{l^2}{8}\right\}, \quad \omega = \sqrt{\frac{R}{EJ}}.$$

Das Trägheitsmoment des gezeichneten Querschnitts in bezug auf die horizontale Schwerlinie ist $J = 284 \text{ cm}^4$, der Schwerpunkt hat die Entfernung $e_2 = 3{,}71$ cm von der obersten Kante. Man erhält:

$$\omega = 0{,}00105 \text{ und } f = 1{,}47 \text{ cm}.$$

Das größte Biegungsmoment ist dann in der Mitte

$$M = Rf + \frac{1}{8} q l^2 = 32169 \text{ cmkg}$$

und die durch dasselbe erzeugten Randspannungen und zwar

im oberen Rande: $$-\frac{M e_2}{J} = -420 \text{ at},$$

im unteren Rande: $+\frac{M e_1}{J} = +713$ at.

Dazu kommt die durch R hervorgerufene Druckspannung:

$$-\frac{R}{F} = -22 \text{ at},$$

also ist die größte Druckspannung: — 442 at im oberen Rande, die größte Zugspannung: + 691 at im unteren Rande.

b) Der Balken AB könnte seitlich knicken. Das kleinste Trägheitsmoment des Querschnitts (in bezug auf die Symmetrale) ist 130 cm^4, woraus der Trägheitshalbmesser $i = 2{,}15$ cm und $n = \frac{l}{i} = 232$. Dann wird nach Gleichung 92 die Knickfestigkeit:

$$K_k = \frac{19\,740\,000}{n^2} = 366 \text{ at},$$

die Knicklast: $K_k F = 10\,248$ kg

und die Knicksicherheit: $\mathfrak{S} = \frac{R}{K_k F} = 16{,}4$.

469. a) Aus Aufgabe 64 folgt die Arbeitsfestigkeit von Schweißeisen bei dem angegebenen Belastungswechsel

$$A = 2160 + 1230 \cdot \frac{2}{5} + 250 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 2692 \text{ at}.$$

Die zulässige Spannung kann dann genommen werden

$$k_z = \frac{2}{7} A = 769 \text{ at}$$

und für Schub

$$k_s = \frac{10}{13} k_z = 591 \text{ at}.$$

b) Aus $P = \frac{\pi d^2}{4} \cdot k_z$ folgt: $d = 2{,}9$ cm;

ebenso aus $P\sqrt{2} = \frac{\pi d_1^2}{4} \cdot k_z$: $d_1 = 3{,}5$ cm (abgerundet).

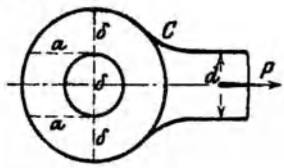
Die Kraft $P\sqrt{2}$ in der Stange d_1 beansprucht den Schraubenbolzen δ bei C und A auf Schub; es ist nach Gleichung 102:

$$P\sqrt{2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi \delta^2}{4} \cdot k_s, \text{ woraus } \delta = 4{,}5 \text{ cm}.$$

Ebenso ist für die Stelle B, da jeder Schenkel des Kunstwinkels die Druckkraft P auf die Welle D überträgt:

$$P\sqrt{2} = 2 \cdot \frac{3}{4}\,\frac{\pi D^2}{4} \cdot k_s \text{ (doppelschnittig)},$$

woraus $\quad D = 3{,}2$ cm.



c) Rechnung für Zug: $P = 2\,b\,\delta \cdot k_z$,

woraus $\quad b = 0{,}72$ cm.

Rechnung für Schub: $\quad P = 2 \cdot \frac{2}{3}\,b\,a \cdot k_s$

(vergleiche Gleichung 101),

woraus $\quad b = 1{,}0$ cm.

Ebenso: $P\sqrt{2} = 2 \cdot \frac{2}{3}\,b_1\,a \cdot k_s, \qquad b_1 = 1{,}4$ cm.

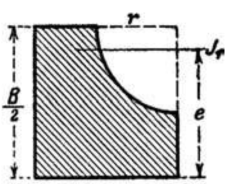
d) $$\min J = \frac{B^4}{12} - 4\left(J_1 + f \cdot e^2\right),$$

worin $$J_1 = r^4\left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right)$$

das Trägheitsmoment eines Viertelkreises in bezug auf die Schwerlinie ist (vergleiche Aufgabe 123),

$$f = \frac{1}{4}\,r^2\pi, \qquad e = \frac{B}{2} - \frac{4r}{3\pi}$$

die Entfernung des Schwerpunkts des Viertelkreises von der Achse.



Setzt man $r = mB$, so wird

$$J = \frac{B^4}{12}\left[1 + 16\,m^3 - 3\pi\left(m^4 + m^2\right)\right]$$

und für $\quad m = 0{,}4$: $\; J = 0{,}023\ B^4$.

e) Der Schenkel AB des Kunstwinkels ist in A drehbar, in B eingespannt; seine reduzierte Länge ist nach Gleichung 86

$$l_r = 0{,}7\,l = 28 \text{ cm}.$$

Die Fläche des Querschnitts ist $F = B^2\left(1 - \pi m^2\right) = 0{,}5\,B^2$, der

Trägheitshalbmesser $i = \sqrt{\frac{J}{F}} = 0{,}215\,B$

und $$n = \frac{l_r}{i} = \frac{130}{B}.$$

Rechnet man nach Gleichung 89, indem man vorläufig annimmt, daß $n < 80$ ist, so wird

$$\frac{1}{10}\,F \cdot K_k = \frac{1}{10}\,F\left(7760 - 120\,n + 0{,}53\,n^2\right) = P.$$

Wenn man $P = 5000$ kg (Druck auf den Schenkel des Kunstwinkels) und für F und n obenstehende Werte einsetzt, so bleibt die Gleichung

$$7760\ B^2 - 15\,600\ B = 91\,043,$$

woraus

$$B = 4{,}6 \text{ cm}.$$

Da nun wirklich $n = \frac{130}{4{,}6} < 80$ ist, so kann die Rechnung abgebrochen werden.

470. Der halbkreisförmige Querschnitt, der nach der Durchsägung noch tragen kann, wird auf Biegung und Druck beansprucht. Nimmt man an, daß die Druckkraft $R \sin \alpha$ zentral wirkt, obwohl hierüber nichts Bestimmtes gesagt werden kann, so ist die ganze entstehende Druckspannung am rechten Rande

$$R\left[\frac{a \cos \alpha}{W} + \frac{\sin \alpha}{F}\right],$$

worin $F = 157{,}08$ cm², das Trägheitsmoment des Halbkreises in bezug auf die Biegungsachse $J = 2\,r^4\left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right) = 1097{,}4$ cm⁴ (vergleiche Aufgabe 123), ferner

$$e = r\left(1 - \frac{4}{3\pi}\right) = 5{,}76 \text{ cm}, \qquad W = \frac{J}{e} = 190{,}5 \text{ cm}^3 \text{ ist.}$$

Setzt man diese Spannung gleich 600 at, so wird

$$R = 582{,}7 \text{ kg}.$$

Würde man annehmen, daß die Druckkraft $R \sin \alpha$ nicht zentral, sondern am Rande in B wirkt, so hätte man mit Benützung der Gleichung 77 zu setzen

$$R\left[\frac{a \cos \alpha + p \sin \alpha}{W} + \frac{\sin \alpha}{F}\right] = 600 \text{ at},$$

worin

$$p = e = 5{,}76 \text{ cm}.$$

Man erhält ein unwesentlich anderes Resultat:

$$R = 578{,}8 \text{ kg}.$$

471. a) Im Felde AB ist das größte Biegungsmoment $_{\max}M = 2000$ mkg in 2 m Entfernung von A und überdies $_{\max}M = 6000$ mkg in B; letzteres ist das maßgebende.

b) Aus $_{\max}M = \frac{J}{e} \cdot k_b$; für den Halbkreisring ist (vergleiche Aufgabe 132):

$$J = \frac{\pi}{8}(R^4 - r^4) - F e^2,$$

worin die Fläche des Querschnitts

$$F = \frac{\pi}{2}(R^2 - r^2)$$

und die Entfernung des Schwerpunkts vom Mittelpunkt

$$e = \frac{4}{3\pi} \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}.$$

Mit $\frac{r}{R} = 0{,}75$ erhält man: $e = 0{,}561\ R$, $J = 0{,}0521\ R^4$ und hieraus:

$$600\,000 \text{ cmkg} = \frac{0{,}0521}{0{,}561} R^3 \cdot 700 \text{ at},$$

$$R = 21 \text{ cm}, \qquad r = 15{,}8 \text{ cm}.$$

c) Der Querschnitt der Säule hat das Trägheitsmoment

$$J = \frac{4}{3} m\, s^4 [1 + m^2 - m^3] = \frac{173}{1024} s^4,$$

die Fläche $$F = 4\, m\, s^2 (2 - m) = \frac{15}{16} s^2,$$

woraus $$i = \sqrt{\frac{J}{F}} = 0{,}424 \text{ s}.$$

Wenn die Säule den Auflagerdruck $B = 7000$ kg mit fünffacher Sicherheit gegen Zerknicken tragen soll, so ist nach Gleichung 92

$$5 \cdot B = F \cdot K_k = \frac{15}{16} s^2 \cdot \frac{19\,740\,000}{n^2},$$

worin $$n = \frac{1}{i} = \frac{400}{0{,}424\ s}.$$

Man erhält $$s = 6{,}4 \text{ cm}, \quad \delta = \frac{s}{8} = 0{,}8 \text{ cm}.$$

472. a) Es ist $\alpha = 60^0$.

b) Die Tragfähigkeit der Strebe ist nach den Gleichungen 96 und 97: $$P = \frac{F k}{1 + \mu n^2}, \quad \mu = 0{,}00016.$$

Der Querschnitt der vier Winkeleisen ist $F = 22{,}56$ cm², das kleinste Trägheitsmoment $J = 1694$ cm⁴, woraus $i = \sqrt{\frac{J}{F}} = 8{,}67$ cm; ferner die Länge $l_1 = AD = 427{,}24$ cm, woraus $n = \frac{l_1}{i} = 49{,}3$ und $P = 16220$ kg. Daraus wird der Auflagerdruck $A = P \sin\alpha = 14046$ kg.

c) Aus $A = \frac{1}{2}\, q\, l$ wird die Last für die Längeneinheit $q = 7023$ kg/m.

d) Der Balken wird auf Biegung und Zug beansprucht. Die Zugspannung ist $\frac{P \cos\alpha}{b\,x}$, die durch das größte Biegungsmoment in der Mitte $M = \frac{1}{8}\, q\, l^2$ hervorgerufene Biegungsspannung ist $\frac{M}{W} = \frac{3\, q\, l^2}{4\, b\, x^2}$; setzt man ihre Summe gleich 100 at, so wird mit $b = 20$ cm, $x = 67$ cm.

e) Aus $P = k_z \cdot \frac{\pi d^2}{4}$ folgt mit $k_z = 617$ at: $d = 5{,}8$ cm (vergleiche Aufgabe 64, Arbeitsfestigkeit A für Schweißeisen; in diesem Falle ist $A = 2160$ at, $k_z = \frac{2}{7} A$).

473. a) Berechnung von y. Der Querschnitt des Ansatzrohres BC hat die Fläche 118,72 cm^2; sein Schwerpunkt hat die Entfernung $e = 11{,}14$ cm von der Oberkante, das Trägheitsmoment J in bezug auf die horizontale Schwerlinie ist 4197 cm^4. Das Eisengewicht ist 89,04 kg, das Wassergewicht 23,83 kg, auf ein Meter Länge bezogen, somit $q = 1{,}128$ kg für 1 cm Länge.

Setzt man $${}_{\max}M = \frac{1}{2}\, q\, y^2 = k_b \cdot \frac{J}{e},$$

so wird mit $k_b = 300$ at: $y = 4{,}475$ m.

b) Berechnung von x. Das Rohr AB wird auf Biegung und Drehung beansprucht. Wir verwenden Gleichung 126:

$$D^3 = \frac{32}{\pi k_b (1 - \alpha^4)} \left[0{,}35\, M + 0{,}65 \sqrt{M^2 + (\alpha_0\, M_d)^2}\right].$$

Hierin ist $\alpha = \frac{d}{D} = 0{,}75$, ferner nach Aufgabe 165:

$$k_b = \frac{2}{3} k_z \sqrt{\frac{3\pi(1 - \alpha^2)}{1 - \alpha^3}} = 1{,}78\, k_z = 445 \text{ at},$$

nach Gleichung 124:

$$\alpha_0 = \frac{k_b}{1{,}3\, k_d} = 1{,}71.$$

Das Drehungsmoment ist

$$M_d = q\,y\left(\frac{y+D}{2}\right) = 117\,992 \text{ cmkg.}$$

Setzt man diese Werte ein, so erhält man das Biegungsmoment

$$M = 180\,214 \text{ cmkg.}$$

Nennt man G das Gewicht des Ansatzes BC, so ist

$$G = q\,(y+D) = 527{,}3 \text{ kg};$$

ferner ist $q_1 = 1{,}207$ kg das Gewicht des Rohres AB (samt Wasser) für 1 cm Länge; es ist also das größte Biegungsmoment des Rohres AB:

$$M = \frac{1}{2}\,q_1 x^2 + G\left(x + \frac{D}{2}\right) = 180\,214 \text{ cmkg,}$$

woraus nach Einsetzen der Werte: $x = 2{,}56$ m.

474. a) Die Auflagerdrücke des Balkens sind:

$$A = 1750 \text{ kg}, \quad B = 1250 \text{ kg}.$$

Das Biegungsmoment in beliebiger Entfernung x von A ist

$$M_x = A\,x - 1000 \text{ kg } (x - 1 \text{ m}) - \frac{1}{2}\,500\,x^2.$$

Setzt man $\frac{d\,M_x}{d\,x} = 0$, so erhält man

$$\max M = 1562{,}5 \text{ mkg an der Stelle } x = 1{,}5 \text{ m.}$$

Aus $\max M = k_b \cdot \frac{1}{6}\,b\,h^2$, $b = \frac{5}{7}\,h$ erhält man die Abmessungen des Balkens: $b = 19$ cm, $h = 26{,}6$ cm.

b) Das kleinste Trägheitsmoment des Querschnitts der Säule ist $J = 172\,d^4$, die Fläche $F = 36\,d^2$, der Trägheitshalbmesser $i = \frac{d}{3}\sqrt{43}$. Benützt man Gleichung 92 und setzt die Tragfähigkeit der Säule gleich dem rechten Auflagerdruck, so wird

$$B = 1250 \text{ kg} = \frac{1}{6}\,F\,K_k = \frac{1}{6}\,F\;19\,740\,000\,\frac{i^2}{l_1^2},$$

worin $l_1 = 100$ cm die Länge der Säule ist.
Man erhält für d eine quadratische Gleichung, aus der sich ergibt:

$$d = 0{,}38 \text{ cm und } a = 1{,}90 \text{ cm.}$$

Nun ergibt sich nachträglich $i = 0{,}83$ cm und $n = \frac{l_1}{i} = 120$, also größer als 112, womit die Benützung der Gleichung 92 gerechtfertigt erscheint.

475. Nach Gleichung 129 ist die Formänderungsarbeit eines prismatischen Stabes

$$\mathsf{A} = \frac{1}{2}\frac{P^2 l}{F E}.$$

Setzt man die Spannung im Innern des Stabes $\sigma = \frac{P}{F}$ und $V = Fl$ für den Rauminhalt des Stabes, so ist

$$\mathsf{A} = \frac{\sigma^2}{2E} V,$$

und somit die Formänderungsarbeit für die Einheit des Rauminhaltes

$$\frac{\mathsf{A}}{V} = \frac{\sigma^2}{2E}.$$

Nun ist $\sigma = \frac{P}{F} = 1000$ at, also $\frac{\mathsf{A}}{V} = \frac{1}{4}$ cmkg für den cm^3.

476. Es ist die Längenänderung des Stabes

$$\Delta l = \frac{Pl}{FE},$$

wenn P die Kraft, $F = bc\pi$ der Querschnitt ist. Daraus folgt nach Gleichung 129

$$\mathsf{A} = \frac{1}{2} P \cdot \Delta l = \frac{1}{2}\frac{FE}{l} \cdot \overline{\Delta l}^2 = 3{,}77 \text{ mkg}.$$

477. In der Entfernung x vom untern Ende ist die Spannung durch das Gewicht γx, wenn γ das Einheitsgewicht ist. Dann wird mit $G = \gamma F l$ nach Gleichung 127

$$\mathsf{A} = \frac{F}{2E}\int_0^l \sigma^2 \, dx = \frac{1}{6}\frac{G^2 l}{FE}.$$

478. Die Form des Körpers gleicher Zugfestigkeit ist: Querschnitt $F = F_0 e^{ax}$, worin $a = \frac{\gamma}{\sigma}$; σ, die Spannung, ist in allen Punkten des Körpers die gleiche, also $\sigma = \frac{P}{F_0}$ und $a = \frac{F_0 \gamma}{P}$. Nach Gleichung 127 ist dann:

$$\mathsf{A} = \frac{\sigma^2}{2E}\int_0^l dV = \frac{P^2}{2EF_0^2} \cdot V,$$

worin V der Rauminhalt des Körpers ist und zwar

$$V = \int_0^l F\,dx = \frac{P}{\gamma}\,[e^{al} - 1].$$

479. Formänderungsarbeit des Stabes G_1: 1. das Eigengewicht gibt die Arbeit (nach Aufgabe 477) $\frac{1}{6}\frac{G_1^2 l}{F_1 E}$; 2. die Last am Ende P (nach Gleichung 129) $\frac{1}{2}\frac{P^2 l}{F_1 E}$; 3. wenn $\varDelta l = \frac{P l}{F_1 E}$ die Verlängerung des Stabes durch P ist, so leistet das Eigengewicht G_1 noch überdies die Arbeit $G_1 \cdot \frac{\varDelta l}{2}$ (weil G_1 den halben Weg von jenem zurücklegt, den das Ende des Stabes beschreibt). Die ganze Formänderungsarbeit des Stabes G_1 ist also

$$\mathsf{A}_1 = \frac{1}{6}\frac{G_1^2 l}{F_1 E} + \frac{1}{2}\frac{P^2 l}{F_1 E} + \frac{1}{2} G_1 \frac{P l}{F_1 E}.$$

Man hätte dieses Resultat auch aus Gleichung 127 finden können, wenn man $\sigma = \frac{P}{F_1} + \gamma x$ einsetzt.

Ebenso ist für den Stab G_2:

$$\mathsf{A}_2 = \frac{1}{6}\frac{G_2^2 l}{F_2 E} + \frac{1}{2}\frac{(P + G_1)^2 l}{F_2 E} + \frac{1}{2} G_2 \frac{(P + G_1) l}{F_2 E}.$$

Setzt man nun die auf die Raumeinheiten bezogenen Arbeiten gleich, d. h.

$$\frac{\mathsf{A}_1}{F_1 l} = \frac{\mathsf{A}_2}{F_2 l}$$

und beachtet, daß $F_1 : F_2 = G_1 : G_2$, so bleibt für P die Gleichung:

$$P^2 (G_2 - G_1) + P (G_2 - 2 G_1) = G_1^3.$$

Für $G_2 = 2 G_1$ ist $P = G_1$.

480. In der Entfernung x von der Spitze des Kegels hat dieser den Querschnitt $y^2 \pi = F$, worin $y = x \frac{r}{h}$. An der Fläche dieses Querschnitts hängt das Gewicht des Kegels von der Höhe x, es ist also hier die Spannung $\sigma = \gamma \frac{x}{3}$, wenn γ das Einheitsgewicht ist und

$$G = \gamma \cdot r^2 \pi \cdot \frac{h}{3}.$$

Benützt man nun Gleichung 127, so ist

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2E}\int_0^h F\sigma^2 dx = \frac{G^2 h}{10 r^2 \pi E}.$$

481. Nennt man a die Höhe des Ergänzungskegels des Stutzes und führt in der Entfernung x von der oberen Endfläche einen Schnitt senkrecht zur Kegelachse, so ist dessen Fläche

$$F = F_0\left(\frac{a + x}{a}\right)^2.$$

Setzt man in Gleichung 127 $\sigma = \frac{P}{F}$ ein, so wird

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2E}\int F\sigma^2 dx = \frac{P^2 a^2}{2F_0 E}\int_0^h \frac{dx}{(a+x)^2} = \frac{P^2 h}{2E\sqrt{F_0 F_1}}.$$

482. Für eine Stelle des Stabes in der Entfernung x von **A** ist das Biegungsmoment $\frac{Q}{2}x$ und die Gleichung der elastischen Linie nach Gleichung 40:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{Q}{2EJ}x,$$

woraus nach Integration

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{16EJ}(x_0^2 - 4x^2),$$

worin x_0 die durch die Biegung verkleinerte Spannweite ist (vergleiche damit Gleichung 52).

Die Länge des gekrümmten Stabes ist wie in Aufgabe 345:

$$l = 2\int_0^{\frac{x_0}{2}}\left[1 + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\cdot dx,$$

woraus

$$l = x_0 + \frac{1}{960}\,\frac{Q^2 x_0^5}{E^2 J^2}.$$

Die Formänderungsarbeit des Stabes, wenn er von Q belastet wird, ist

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} Q f$$

und mit Benützung von Gleichung 49:

$$f = \frac{1}{48} \frac{Q x_0^3}{E J};$$

wird der Stab der achsialen Kraft P ausgesetzt, so ist seine Formänderungsarbeit

$$\mathbf{A}_1 = P(l - x_0).$$

Setzt man $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1$, so bleibt

$$P = 10 \frac{E J}{x_0^2} \text{ oder nahezu } P = 10 \frac{E J}{l^2}$$

(vergleiche damit Gleichung 84 und 85a). Die Kraft P ist also größer als die Knicklast.

483. Nach Gleichung 49 ist die Durchbiegung in der Mitte für $a = b = \frac{l}{2}$: $f = \frac{1}{48} \frac{P l^3}{E J}$, somit

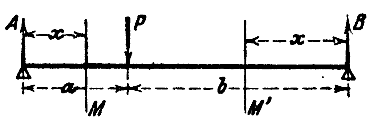
$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} P f = \frac{24 E J}{l^3} f^2.$$

484. Die Formänderungsarbeit ist

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} P f,$$

worin nach Gleichung 69: $f = \frac{7}{768} \cdot \frac{P l^3}{E J}$,

also $$\mathbf{A} = \frac{7}{1536} \frac{P^2 l^3}{E J} = 30{,}78 \text{ mkg.}$$



485. Für das Feld AP ist das Biegungsmoment $M = A x$, für das Feld PB: $M' = B x'$.

Nach Gleichung 130 ist dann die Formänderungsarbeit:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2 E J} \left\{ \int_0^a M^2 d x + \int_0^b M'^2 d x' \right\} = \frac{P^2 a^2 b^2}{6 E J l},$$

wenn $A = P \cdot \frac{b}{l}$, $B = P \cdot \frac{a}{l}$ eingesetzt wird.

Zu demselben Resultat gelangt man, wenn man $\mathbf{A} = \frac{1}{2} P f$ und für die Durchbiegung f den Wert aus Gleichung 49 einsetzt.

486. Ist δ der Durchmesser in der Entfernung x von der Belastungsstelle, l die Länge der Welle und d ihr Durchmesser an der Einspannungsstelle, so ist die Form gleichen Widerstandes nach Gleichung 73:

$$\delta^3 = d^3 \frac{x}{l}.$$

Setzt man in Gleichung 130: $M = P x$, $J = \frac{\pi}{64} \delta^4$, so folgt für die Formänderungsarbeit

$$\mathbf{A} = \frac{3}{10} \frac{P^2 l^3}{E J_1},$$

wenn $J_1 = \frac{\pi}{64} d^4$ für die Einspannungsstelle gesetzt wird.

487. Ist nach Gleichung 127 zu rechnen, wenn

$$\sigma = \frac{P \cos \alpha}{F} + \frac{x z P \sin \alpha}{J}$$

gesetzt wird, worin x die Koordinate in Richtung der Stabachse, z die Koordinate senkrecht zu x, in der Zeichenebene liegend, bedeutet.

Man erhält

$$\mathbf{A} = \frac{P^2 l}{2 E F} \left(\cos^2 \alpha + \frac{1}{3} \sin^2 \alpha \frac{l^2}{i^2} \right).$$

488. Zählt man die Abstände x von P_2 nach links, so ist für das Feld a das Biegungsmoment

$$M_1 = P_2 x$$

und für das Feld z:

$$M_2 = P_2 x - P_1 (x - a).$$

Nach Gleichung 130 ist dann die Formänderungsarbeit

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2 E J} \left\{ \int_0^a M_1^2 \, dx + \int_a^{a+z} M_2^2 \, dx \right\}.$$

Die Ausführung liefert:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2 E J} \left\{ \frac{P_2^2 a^3}{3} + z a^2 P_2^2 - a z^2 P_2 (P_1 - P_2) + \frac{1}{3} (P_1 - P_2)^2 z^3 \right\}.$$

Setzt man $\frac{d\mathbf{A}}{dz} = 0$, so wird

$$z_1 = a \frac{P_2}{P_1 - P_2}.$$

Es muß also $P_1 > P_2$ sein. Damit wird aber $\frac{d^2\mathbf{A}}{dz^2} < 0$, das Kennzeichen für das Maximum von $\mathbf{A}$.

Es wird nach Einsetzung von z_1 in $\mathbf{A}$:

$$_{\max}\mathbf{A} = \frac{a^3}{6EJ} \frac{P_1 P_2^2}{P_1 - P_2}.$$

489. Das Biegungsmoment in der Entfernung x vom Auflager ist

$$M = \frac{q}{2}(lx - x^2),$$

somit nach Gleichung 130

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2EJ}\int_0^l M^2 dx = \frac{q^2 l^5}{240 EJ}.$$

490. Die Durchbiegung in der Mitte ist nach Gleichung 57

$$f = \frac{5}{384} \frac{q l^4}{EJ},$$

somit nach dem Resultat der vorigen Aufgabe:

$$\mathbf{A} = \frac{3072}{125} \frac{EJf^2}{l^3}.$$

491. Die Aufgabe ist nicht etwa so zu behandeln, daß man die Formänderungsarbeit für jede Belastungsart gesondert aufstellt (vergleiche die Aufgaben 485 und 489) und sodann addiert.

Die Rechnung ist ähnlich wie in Aufgabe 485; nur muß

$$A = P\frac{b}{l} + \frac{ql}{2}, \quad M = Ax - \frac{1}{2}qx^2,$$

$$B = P\frac{a}{l} + \frac{ql}{2}, \quad M' = Bx' - \frac{1}{2}qx'^2$$

gesetzt werden. Man erhält nach Ausführung der Integration:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{6EJ}\left[\frac{P^2a^2b^2}{l} + \frac{Pqab}{4}(l^2 + ab) + \frac{q^2 l^5}{40}\right].$$

492. Die Belastung teilt den Träger in zwei Felder. In dem Felde a ist das Biegungsmoment

$$M = A x - \frac{1}{2} q x^2,$$

im Felde $l - a$: $\quad M' = B x'$.

Hierin ist nach Aufgabe 236:

$$A = \frac{a q}{2 l}(2 l - a),$$

$$B = \frac{a^2 q}{2 l}.$$

Nach Gleichung 130 ist dann die Formänderungsarbeit

$$\mathsf{A} = \frac{1}{2 E J}\left\{\int_0^a M^2 dx + \int_0^{l-a} M'^2 dx'\right\} = \frac{q^2 a^4}{240 E J l}(10 l^2 - 14 a l + 5 a^2).$$

493. Die Rechnung ist ähnlich wie in Aufgabe 485, nur muß gesetzt werden:

Biegungsmoment im Felde a: $M = -M_A + A x$,

Biegungsmoment im Felde b: $M' = -M_B + B x'$,

hierin nach Gleichung 58 und 59:

$$M_A = P\frac{a b^2}{l^2}, \qquad A = P\frac{b^2(3 a + b)}{l^3}$$

und analoge Ausdrücke für M_B und B. Nach Ausführung der Integrationen erhält man:

$$\mathsf{A} = \frac{1}{6}\frac{P^2 a^3 b^3}{E J l^3}.$$

494. Nennt man x die Entfernung eines Querschnitts vom Ende B, so ist das Biegungsmoment im Felde CB: $M_1 = \frac{1}{2} q x^2$ und im Felde AC: $M_2 = q a\left(x - \frac{a}{2}\right)$, somit die Formänderungsarbeit nach Gleichung 130:

$$\mathsf{A} = \frac{1}{2 E J}\left\{\int_0^a M_1^2 dx + \int_a^l M_2^2 dx\right\},$$

woraus

$$\mathsf{A} = \frac{q^2 a^2}{120 E J}(20 l^3 - 30 l^2 a + 15 l a^2 - 2 a^3).$$

495. Hier wird sich zwar M_1 nicht ändern, aber es wird:

$$M_2 = q a \left(x - \frac{a}{2}\right) + P(x - a);$$

im übrigen bleibt die Rechnung dieselbe.

Es ergibt sich:

$$\mathsf{A} = \frac{q^2 a^5}{40 E J} + \frac{l - a}{12 E J} [2 A^2 (l - a)^2 + 3 a^2 q M_A],$$

worin $A = P + a q$

den Auflagerdruck, $M_A = P(l - a) + a q \left(l - \frac{a}{2}\right)$

das Auflagermoment bedeutet.

496. Nach Aufgabe 235 ist das Biegungsmoment an beliebiger Stelle:

$$M = \frac{Q}{6 l^2} (3 x l^2 - 6 x^2 l + 4 x^3).$$

Nach Gleichung 130 ist dann die Formänderungsarbeit

$$\mathsf{A} = 2 \cdot \frac{1}{2 E J} \int_0^{l/2} M^2 dx = \frac{Q^2 l^3}{448 E J}.$$

497. Das Biegungsmoment im Felde AB ist $M_1 = A x_1$, wenn $A = -P\left(\frac{l}{l_1} - 1\right)$ der Auflagerdruck ist; im zweiten Felde BC: $M_2 = P x_2$; hierbei werden die x_1 von A nach rechts, die x_2 von C nach links gezählt. Es wird die Formänderungsarbeit nach Gleichung 130

$$\mathsf{A} = \frac{1}{2 E J} \left\{ \int_0^{l_1} M_1^2 \, dx_1 + \int_0^{l - l_1} M_2^2 dx_2 \right\} = \frac{P^2 l (l - l_1)^2}{6 E J}.$$

498. Nach Aufgabe 257 sind die Auflagerdrücke:

$$A = \frac{1}{2} a l^2 \left(1 - \frac{2 l}{3 l_1}\right), \quad B = \frac{1}{3} \frac{a l^3}{l_1}.$$

Das Biegungsmoment im Felde AB ist:

$$M_1 = A x - \frac{1}{6} a x^3$$

und im Felde BC:

$$M_2 = A x - \frac{1}{6} a x^3 + B (x - l_1).$$

Hierbei wird x in beiden Feldern von A gezählt. Die Formänderungsarbeit ist dann nach Gleichung 130

$$\mathsf{A} = \frac{1}{2EJ}\left\{\int_0^{l_1} M_1^2\,dx + \int_{l_1}^{l} M_2^2\,dx\right\}$$

$$= \frac{a^2 l^3}{7560\,EJ}\{99\,l^4 - 280\,l^3 l_1 + 210\,l^2 l_1^2 - 21\,l_1^4\}.$$

499. Nach Aufgabe 361 sind die in einem rechteckigen Querschnitt entstehenden Schubspannungen

$$\tau = \frac{6Q}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)$$

und somit nach Gleichung 128 mit $dV = b \cdot dx \cdot dz$ die Formänderungsarbeit

$$\mathsf{A} = \frac{1}{2G}\int \tau^2 \cdot dV = \frac{18}{G\,b\,h^6}\int_0^l Q^2\,dx \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)^2 dz,$$

$$\mathsf{A} = \frac{3}{5\,G\,b\,h}\int_0^l Q^2\,dx.$$

Teilt die Last P die Trägerlänge in die Felder a_1 und a_2, so ist im ersten Felde $Q_1 = P \cdot \frac{a_2}{l}$, im zweiten $Q_2 = P \cdot \frac{a_1}{l}$, somit

$$\mathsf{A} = \frac{3}{5\,G\,b\,h}\left\{\int_0^{a_1} Q_1^2\,dx + \int_0^{a_2} Q_2^2\,dx\right\} = \frac{3}{5}\,\frac{P^2 a_1 a_2}{G\,b\,h\,l}.$$

500. Nach Aufgabe 363 sind die in einem Kreisquerschnitt entstehenden Schubspannungen

$$\tau = \frac{Q}{3J}\sqrt{y_1^4 + y^2 z^2},$$

worin $y_1^2 = r^2 - z^2$ (vergleiche die Abbildung bei Lösung der Aufgabe 363).

Benützt man nun Gleichung 128 und setzt $dV = dx\,dy\,dz$, so ist die Formänderungsarbeit

$$\mathsf{A} = \frac{1}{2G}\int \tau^2 \cdot dV = \frac{1}{18\,G\,J^2}\int_0^l Q^2\,dx \cdot \int_{-r}^{+r} dz \int_{-y_1}^{+y_1} (y_1^4 + y^2 z^2)\,dy.$$

Das zweite Integral gibt

$$\int_{-r}^{+r} dz \cdot 2\left(y_1^5 + \frac{1}{3} z^2 y_1^3\right) = {}^{16}/_9\, r^2 \int_{-r}^{+r} dz \left(r^2 - z^2\right)^{3/2} = {}^2/_3\, \pi r^6.$$

Das erste Integral wird, wenn die Querkraft

$$Q = q\left(\frac{l}{2} - x\right)$$

gesetzt wird:

$$\int_0^l Q^2 dx = \frac{q^2 l^3}{12}.$$

Mit $J = \frac{\pi}{4} r^4$ wird endlich:

$$\mathbf{A} = \frac{4}{81} \frac{q^2 l^3}{G \pi r^2}.$$

501. Nach Gleichung 131 ist die Formänderungsarbeit durch ein Drehungsmoment

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} M_d \vartheta l,$$

worin nach Gleichung 111

$$M_d = \frac{\pi}{2} \vartheta G r^4$$

und der ganze Verdrehungswinkel der Welle

$$\varphi^0 = l \vartheta^0 = l \frac{180}{\pi} \vartheta.$$

Hieraus erhält man:

$$\mathbf{A} = \frac{\pi^3}{129600} \varphi^2 \frac{G r^4}{l}.$$

502. Die Spindel AC wird bei der Prägung auf Druck beansprucht und hat nach Gleichung 129 die Formänderungsarbeit aufzunehmen

$$\mathbf{A}_1 = \frac{P^2 (l_1 + l_3)}{2 F_1 E_1},$$

wenn F_1 der Querschnitt der Spindel ist.

Das Stück AB der Spindel wird überdies auf Drehung beansprucht und hat infolgedessen nach den Gleichungen 131 und 111 die Arbeit aufzunehmen:

$$\mathbf{A}_3 = \frac{1}{2} M_d \vartheta l_3 = \frac{1}{\pi} \frac{M_d^2 l_3}{G r^4},$$

wenn r der Spindelhalbmesser ist.

Ist P_1 die Umfangskraft an der Spindel, α und ϱ der Steigungswinkel und Reibungswinkel der Schraube bei B, so ist

$$P_1 = P \cdot \mathrm{tg}(\alpha + \varrho), \quad M_d = P_1 r.$$

Es wird also
$$\mathbf{A}_3 = \frac{P^2 l_3 \, \mathrm{tg}^2(\alpha + \varrho)}{F_1 G}.$$

Der Rahmen, dessen Länge l_2 und dessen Querschnitt $2F_2$ ist, wird von der Druckkraft P und überdies bei B auf Biegung beansprucht; auf jeden der beiden Teile des Rahmens wirkt die biegende Kraft $\frac{P_1}{2}$, welche nach Gleichung 43 die seitliche Verschiebung

$$f = \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{P_1}{2} \cdot l_2^3}{E_2 J_2}$$

hervorruft. Hierin ist J_2 das maßgebende Trägheitsmoment von F_2. Infolgedessen nimmt der Rahmen die Arbeit auf:

$$\mathbf{A}_2 = \frac{P^2 l_2}{4F_2E_2} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{P_1}{2} \cdot f = \frac{P^2 l_2}{4F_2E_2} + \frac{P^2 l_2^3 \, \mathrm{tg}^2(\alpha + \varrho)}{12 E_2 J_2}.$$

Die ganze von der Presse aufzunehmende Formänderungsarbeit ist mit Berücksichtigung der Bewegungsenergie L der Presse:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 + L = P^2 \left\{ \frac{l_1 + l_3}{2F_1E_1} + \frac{l_2}{4F_2E_2} + \mathrm{tg}^2(\alpha + \varrho) \left[\frac{l_3}{F_1 G} + \frac{l_2^3}{12 E_2 J_2} \right] \right\} + L.$$

503. Aus dem parabolischen Verlauf der Schaulinie folgt zunächst:

$$\left(\frac{\sigma - \sigma_p}{K_z - \sigma_p} \right)^2 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_b}.$$

Die Fläche der Schaulinie ist die von der Raumeinheit des Stabes aufgenommene Arbeit.

Es ist also
$$\mathbf{A} = F l \varepsilon \left[\sigma_p + \frac{2}{3}(\sigma - \sigma_p) \right]$$

und mit
$$P = F\sigma \text{ folgt:}$$

$$\mathbf{A} = \frac{l \varepsilon_b}{3F^2(K_z - \sigma_p)^2} (2P + F\sigma_p)(P - F\sigma_p)^2.$$

504. Ist dF ein Element des Querschnitts, dx ein Element der Stabachse, so ist σdF die auf dF ausgeübte innere Kraft, $d\varepsilon \cdot dx$ das Element der Verschiebung durch die Formänderung und

$$d\mathbf{A} = \sigma dF \cdot d\varepsilon dx$$

das Element der Formänderungsarbeit.

Es ist also $\mathbf{A} = \int\int\int \sigma\, d\varepsilon \cdot dF \cdot dx.$

Setzt man $\sigma^5 = C\varepsilon, \quad d\varepsilon = \frac{5}{C}\sigma^4 d\sigma$

und aus Aufgabe 176:

$$\sigma = -\frac{M}{K} z^{1/5}, \quad \text{worin } K = \int z^{6/5} dF,$$

so wird

$$\mathbf{A} = \frac{5}{C}\int\int\frac{\sigma^6}{6} \cdot dF \cdot dx = \frac{5}{6C}\int\left[\frac{M^6 dx}{K^6}\int z^{6/5} dF\right],$$

$$\mathbf{A} = \frac{5}{6CK^5}\int M^6 dx.$$

505. Mit $M = \frac{P}{2}x$ folgt:

$$\mathbf{A} = \frac{5P^6}{3 \cdot 2^6 CK^5}\int_0^{l/2} x^6 dx,$$

$$\mathbf{A} = \frac{5}{3 \cdot 2^{13} \cdot 7}\frac{P^6 l^7}{CK^5}.$$

Nach Aufgabe 242 ist die Durchbiegung in der Mitte des Stabes

$$p = \frac{1}{2^{12} \cdot 7}\frac{P^5 l^7}{CK^5}.$$

Es ist also $\mathbf{A} = \frac{5}{6}Pp.$

506. Sind A und B die Auflagerdrücke, so ist

$$A + B = P.$$

Die Formänderungsarbeit des Stabes ist nach Gleichung 129:

$$\mathbf{A} = \frac{A^2 a}{2EF} + \frac{B^2 b}{2EF}.$$

Bildet man $\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta A}$ und setzt es gleich Null, so wird

$$Aa + B \cdot \frac{\delta B}{\delta A} b = 0.$$

Nun folgt aus der ersten Gleichung

$$\frac{\delta B}{\delta A} = -1,$$

somit wird $A = P\frac{b}{l}, \quad B = P\frac{a}{l}.$

507. Zunächst ist $A + B = \frac{P}{2}$.

Die Formänderungsarbeit der Biegungsspannungen ist

$$\mathbf{A} = 2 \cdot \frac{1}{2EJ}\left\{\int_0^a M_1^2\,dx + \int_a^{3/2 a} M_2^2\,dx\right\},$$

wenn die Abstände x von A gezählt werden.

Die Biegungsmomente sind:

im Felde AB: $M_1 = Ax$,

im Felde BP: $M_2 = Ax + B(x - a)$.

Man bilde $\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta A}$ und setze es gleich Null; das gibt

$$\int_0^a M_1 \frac{\delta M_1}{\delta A}\,dx + \int_a^{3/2 a} M_2 \frac{\delta M_2}{\delta A}\,dx = 0.$$

Mit $\frac{\delta M_1}{\delta A} = x$, $\frac{\delta M_2}{\delta A} = x + \frac{\delta B}{\delta A}(x - a)$ und $\frac{\delta B}{\delta A} = -1$ (aus der ersten Gleichung) erhält man nach Ausführung der Integration

$$A = -\frac{3}{40}P, \quad B = \frac{23}{40}P.$$

508. $A = -\frac{1}{20}P$, $B = \frac{11}{20}P$. Lösung wie in voriger Aufgabe.

509. Zählt man die x von A nach rechts, so ist das Biegungsmoment im Felde AP:

$$M_1 = Ax$$

und im Felde PB: $M_2 = (A - P)x + Pa$.

Die Formänderungsarbeit der Biegungsspannungen ist dann für den ganzen Träger

$$\mathbf{A} = 2 \cdot \frac{1}{2EJ}\left\{\int_0^a M_1^2\,dx + \int_a^l M_2^2\,dx\right\}.$$

Für das Minimum dieses Ausdruckes ist $\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta A} = 0$,

oder: $$\int_0^a M_1 \frac{\delta M_1}{\delta A}\,dx + \int_a^l M_2 \frac{\delta M_2}{\delta A}\,dx = 0,$$

worin $$\frac{\delta M_1}{\delta A} = \frac{\delta M_2}{\delta A} = x.$$

Die Ausführung der Integration liefert

$$A = P\left(1 - \frac{a(3l^2 - a^2)}{2l^3}\right),$$

woraus

$$B = 2(P - A) = P\frac{a(3l^2 - a^2)}{l^3},$$

und das Auflagermoment in B:

$$M_B = Al - P(l - a) = -P\frac{a(l^2 - a^2)}{2l^2}.$$

510. Die Resultate sind die gleichen wie in der vorigen Aufgabe.

511. Es ist zunächst $2(A + B) = P$.
Die Formänderungsarbeit der vier Stangen ist nach Gleichung 129

$$\mathbf{A} = \frac{A^2 l}{F_1 E} + \frac{B^2 l}{F_2 E}.$$

Setzt man $\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta A} = 0$, so wird wegen $\frac{\delta B}{\delta A} = -1$:

$$A = \frac{F_1}{F_1 + F_2} \cdot \frac{P}{2}, \quad B = \frac{F_2}{F_1 + F_2} \cdot \frac{P}{2};$$

das gleiche Resultat könnte man auch finden, wenn man nach Gleichung 18 die Längenänderungen der beiden Stangen, nämlich $\frac{Al}{F_1 E}$ und $\frac{Bl}{F_2 E}$, einander gleich setzt.

512. Das Biegungsmoment im Felde AB ist $M_1 = Ax$, im Felde BP: $M_2 = Ax + B(x - a) = \frac{P}{2}x - Ba$.

Die Formänderungsarbeit durch die Biegungsspannungen des elastischen Trägers ist dann $\frac{1}{EJ}\left\{\int_0^a M_1^2\,dx + \int_a^{3/2\,a} M_2^2\,dx\right\}$; hierzu kommt die in der vorigen Aufgabe gerechnete Formänderungsarbeit: $\frac{A^2 l}{F_1 E} + \frac{B^2 l}{F_2 E}$. Setzt man nun $\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta A} = 0$, so wird

$$\frac{Al}{F_1} + \frac{Bl}{F_2} \cdot \frac{\delta B}{\delta A} + \frac{1}{J}\left[\int_0^a M_1 \frac{\delta M_1}{\delta A}\,dx + \int_a^{3/2\,a} M_2 \frac{\delta M_2}{\delta A}\,dx\right] = 0.$$

Darin ist $\frac{\delta B}{\delta A} = -1$ wie in voriger Aufgabe, ferner $\frac{\delta M_1}{\delta A} = x$, $\frac{\delta M_2}{\delta A} = a$; nach Ausführung der Integrationen erhält man

$$A = \frac{P}{2} \cdot \frac{F_1 (J l - \frac{1}{8} a^3 F_2)}{J l (F_1 + F_2) + \frac{5}{6} a^3 F_1 F_2},$$

$$B = \frac{P}{2} \cdot \frac{F_2 (J l + \frac{23}{24} a^3 F_1)}{J l (F_1 + F_2) + \frac{5}{6} a^3 F_1 F_2}.$$

513. Aus den Regeln der Statik folgt zunächst

$$C = 2(a q - A), \quad A = B.$$

Die Formänderungsarbeit (Zug und Biegung) ist nach den Gleichungen 129 und 130

$$\mathbf{A} = 2 \cdot \frac{A^2 l}{2 E F} + \frac{C^2 l}{2 E F} + 2 \cdot \frac{1}{2 E J} \int_0^a M^2 \, dx,$$

wenn F der Querschnitt der Stangen, J das maßgebende Trägheitsmoment des Trägerquerschnitts ist.

Setzt man $\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta A} = 0$, so wird

$$\frac{2 A l}{F} + \frac{C l}{F} \cdot \frac{\delta C}{\delta A} + \frac{2}{J} \int_0^a M \frac{\delta M}{\delta A} \, dx = 0.$$

Das Biegungsmoment ist $M = A x - \frac{1}{2} q x^2$, woraus $\frac{\delta M}{\delta A} = x$; ferner $\frac{\delta C}{\delta A} = -2$. Nach Ausführung der Integration wird

$$A = q a \cdot \frac{48 J l + 3 a^3 F}{72 J l + 8 a^3 F} = B,$$

$$C = 2 q a \cdot \frac{24 J l + 5 a^3 F}{72 J l + 8 a^3 F}.$$

514. Es ist $A + B = q l$, das Biegungsmoment $M = B x - \frac{1}{2} q x^2$, wenn die x von B an gezählt werden, und die Formänderungsarbeit nach Gleichung 130:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2EJ}\int_0^l M^2\,dx.$$

Setzt man nach Gleichung 133: $\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta A} = 0$, so wird

$$\int_0^l M\frac{\delta M}{\delta A}\,dx = 0,$$

und mit $\frac{\delta M}{\delta A} = x\frac{\delta B}{\delta A} = -x$ erhält man nach Ausführung der Integration:

$$B = \frac{3}{8}ql, \quad A = \frac{5}{8}ql.$$

Das Einspannungsmoment ist

$$M_A = -Al + \frac{1}{2}ql^2 = -\frac{1}{8}ql^2.$$

515. Die Formänderungsarbeit des Trägers ist nach Gleichung 127:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2E}\int \sigma^2\,dV.$$

Die durch die Gelenkkraft H und durch das Biegungsmoment M entstehende Normalspannung ist

$$\sigma = \frac{H}{F} + \frac{Mz}{J}.$$

Hierin ist J das Trägheitsmoment des beliebigen Querschnitts für die Biegungsachse, z deren Abstand vom Flächenelement dF, dessen Spannung σ ist und

$$M = \frac{ql}{2}x - \frac{1}{2}qx^2 - Hh,$$

wenn h der Abstand der Trägerachse von H ist.

Mit $dV = dF \cdot dx$ wird wegen $\int z\,dF = 0$, $\int z^2\,dF = J$:

$$\mathbf{A} = \frac{H^2 l}{2EF} + \frac{1}{2EJ}\int_0^l M^2\,dx,$$

und mit $\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta H} = 0$:.

$$H \cdot \frac{1}{F} + \frac{1}{J}\int_0^l M \frac{\delta M}{\delta H} dx = 0, \quad \frac{\delta M}{\delta H} = -h,$$

woraus nach Integration: $H = \frac{1}{12} \frac{q l^2}{\frac{J}{h F} + h}$.

516. Man erhält für die Spannungen die drei Gleichungen:

$$S_1 \sin \alpha_1 + S_2 \sin \alpha_2 + S_3 \sin \alpha_3 = P,$$
$$S_1 \cos \alpha_1 + S_2 \cos \alpha_2 + S_3 \cos \alpha_3 = 0,$$
$$\frac{S_1 l_1}{F_1} \sin(\alpha_3 - \alpha_2) + \frac{S_2 l_2}{F_2} \sin(\alpha_1 - \alpha_3) + \frac{S_3 l_3}{F_3} \sin(\alpha_2 - \alpha_1) = 0.$$

517. Das Gleichgewicht einer Ecke verlangt die Beziehung:

$$P = S_1 + 2 S \cos 30^0 = S_1 + S\sqrt{3}.$$

Die Formänderungsarbeit des Stabwerkes ist nach Gleichung 129

$$\mathbf{A} = 3 \frac{S^2 l}{2EF} + 3 \frac{S_1^2 l_1}{2EF}.$$

Nach Gleichung 133: $\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta S} = 0$

wird $S l + S_1 \frac{\delta S_1}{\delta S} l_1 = 0$;

aus der ersten Gleichung folgt $\frac{\delta S_1}{\delta S} = -\sqrt{3}$; beachtet man noch, daß $l = l_1\sqrt{3}$, so bleibt

$$S = S_1 = \frac{P}{1 + \sqrt{3}}.$$

518. Das Gleichgewicht der Knotenpunkte liefert zunächst die Gleichungen

$$Q + S_1 + 2 S \cos 45^0 = 0,$$
$$P - S_2 - 2 S \cos 45^0 = 0.$$

Die Formänderungsarbeit des Fachwerks ist nach Gleichung 129

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2EF} [4 S^2 l + S_1^2 l_1 + S_2^2 l_1],$$

wenn l die Länge der Quadratseite, l_1 jene der Diagonale ist. Bildet man $\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta S} = 0$, so folgt

$$4 S l + S_1 l_1 \frac{\delta S_1}{\delta S} + S_2 l_1 \frac{d S_2}{\delta S} = 0,$$

und da aus den ersten Gleichungen folgt:

$$\frac{\delta S_1}{\delta S} = -\sqrt{2}, \quad \frac{\delta S_2}{\delta S} = -\sqrt{2},$$

so bleibt $$2 S - S_1 - S_2 = 0.$$

Durch Verbindung dieser Gleichung mit den beiden ersten wird:

$$S = \frac{P - Q}{2 + 2\sqrt{2}}, \quad S_1 = -\frac{P + Q(1 + \sqrt{2})}{2 + \sqrt{2}}, \quad S_2 = \frac{P(1 + \sqrt{2}) + Q}{2 + \sqrt{2}}.$$

519. Die Auflagerdrücke sind:

$$A = \frac{1}{3}(2P + Q),$$

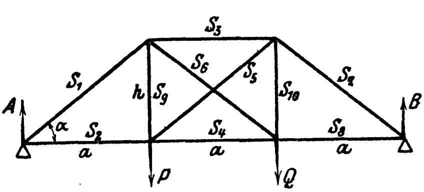
$$B = \frac{1}{3}(P + 2Q).$$

Statisch bestimmbar sind die Spannungen:

$$S_1 = -\frac{A}{\sin\alpha}, \quad S_2 = A \operatorname{cotg}\alpha,$$

$$S_7 = -\frac{B}{\sin\alpha}, \quad S_8 = B \operatorname{cotg}\alpha.$$

Ferner ergeben sich aus den Gleichgewichtsbedingungen der Knotenpunkte folgende Beziehungen:



$$S_4 = (P + Q) \operatorname{cotg}\alpha + S_3,$$

$$S_5 = -\frac{B}{\sin\alpha} - \frac{S_8}{\cos\alpha},$$

$$S_6 = -\frac{A}{\sin\alpha} - \frac{S_8}{\cos\alpha},$$

$$S_9 = 2A + S_3 \operatorname{tg}\alpha,$$

$$S_{10} = 2B + S_8 \operatorname{tg}\alpha.$$

Die Formänderungsarbeit des statisch unbestimmten Rechtecks ist nach Gleichung 129:

$$\mathsf{A} = \Sigma \frac{S_n{}^2 l_n}{2 E F_n},$$

worin n über die sechs Stäbe des Rechtecks zu erstrecken ist.

Setzt man hier nach Gleichung 133: $\frac{\delta A}{\delta S_3} = 0$, so wird

$$\Sigma \frac{S_n l_n}{F_n} \cdot \frac{\delta S_n}{\delta S_3} = 0,$$

und da aus den fünf statischen Gleichungen folgt:

$$\frac{\delta S_4}{\delta S_3} = 1, \quad \frac{\delta S_5}{\delta S_3} = -\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\delta S_6}{\delta S_3},$$

$$\frac{\delta S_9}{\delta S_3} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\delta S_{10}}{\delta S_3},$$

ferner $l_3 = l_4 = a$, $l_9 = l_{10} = a \operatorname{tg}\alpha = h$, $l_5 = l_6 = \frac{a}{\cos\alpha} = l$ ist, so bleibt für S_3 folgende Gleichung übrig:

$$S_3\left[\left(\frac{1}{F_3} + \frac{1}{F_4}\right)a^3 + \left(\frac{1}{F_5} + \frac{1}{F_6}\right)l^3 + \left(\frac{1}{F_9} + \frac{1}{F_{10}}\right)h^3\right] =$$

$$= -\frac{a}{h}\left[\frac{1}{F_4}(P+Q)a^3 + \left(\frac{B}{F_5} + \frac{A}{F_6}\right)l^3 + 2\left(\frac{A}{F_9} + \frac{B}{F_{10}}\right)h^3\right].$$

Sobald S_3 bekannt ist, können aus den statischen Gleichungen die Spannungen S_4, S_5, S_6, S_9, S_{10} gerechnet werden.

520. Zunächst können folgende sechs statische Gleichungen aufgestellt werden:

Horizontaler Schnitt durch S_2, Moment um C:

$$M_A = A\,l;$$

Moment um D:

$$M_B = B\,l_1;$$

ferner:

$$A = P + S_2 \sin\alpha,$$

$$B = Q - S_2 \sin\alpha.$$

Endlich aus dem Gleichgewicht der Knotenpunkte C und D:

$$S + S_2 \cos\alpha = 0,$$

$$S_1 - S_2 \cos\alpha = 0.$$

Die Formänderungsarbeit des Stabes AC ist nach den Gleichungen 129 und 130:

$$\frac{S^2 l}{2EF} + \frac{1}{2EJ}\int_0^l (Px + S_2 \sin\alpha \cdot x)^2 dx;$$

die Formänderungsarbeit des Stabes BD:

$$\frac{S_1^2 l_1}{2EF_1} + \frac{1}{2EJ_1}\int_0^l (Qx - S_2 \sin\alpha \cdot x)^2 \cdot dx;$$

endlich jene des Stabes CD:

$$\frac{S_2{}^2 l_2}{2\,E\,F_2}.$$

Bildet man die Summe **A** dieser drei Arbeiten und setzt $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial S_2} = 0$, so wird

$$\frac{S\,l}{F} \cdot \frac{\partial S}{\partial S_2} + \frac{1}{J}\int_0^l (P\,x + S_2 \sin\alpha \cdot x) \cdot x \sin\alpha \cdot d\,x$$

$$+ \frac{S_1 l_1}{F_1} \cdot \frac{\partial S_1}{\partial S_2} - \frac{1}{J_1}\int_0^{l_1} (Q\,x - S_2 \sin\alpha \cdot x)\,x \sin\alpha \cdot d\,x + \frac{S_2 l_2}{F_2} = 0.$$

Beachtet man, daß $\frac{\partial S'}{\partial S_2} = -\cos\alpha$, $\frac{\partial S_1}{\partial S_2} = \cos\alpha$ und führt die Integration aus, so bleibt

$$S_2 = \frac{\sin\alpha\left(\frac{Q\,l_1{}^3}{J_1} - \frac{P\,l^3}{J}\right)}{\sin^2\alpha\left(\frac{l^3}{J} + \frac{l_1{}^3}{J_1}\right) + 3\cos^2\alpha\left(\frac{l}{F} + \frac{l_1}{F_1}\right) + 3\,\frac{l_2}{F_2}}.$$

Nun können die übrigen Spannungen S und S_1, sowie die Auflagerdrücke A und B, und die Auflagermomente aus den zuerst angeführten sechs statischen Gleichungen gerechnet werden.

521. Die Formänderungsarbeit des Stabwerkes ist nach Gleichung 129:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2\,E\,F}\,[S^2 l + S_1{}^2 l_1 + 2\,S_2{}^2 l_2 + 2\,S_3{}^2 l_3],$$

wenn l, l_1, l_2, l_3 die Längen der zu den Spannungen gehörenden Stäbe sind. Setzt man $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial S_3} = 0$, so wird

$$S\,l\,\frac{\partial S}{\partial S_3} + S_1 l_1 \frac{\partial S_1}{\partial S_3} + 2\,S_2 l_2 \frac{\partial S_2}{\partial S_3} + 2\,S_3 l_3 = 0 \quad . \quad . \quad \text{a)}$$

Aus den Gleichgewichtsbedingungen der Knotenpunkte ergeben sich die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} S &= -P \operatorname{cotg} \alpha - S_3 \cdot \frac{l_1}{l_3} \\ S_1 &= P \operatorname{cotg} \alpha - S_3 \cdot \frac{l}{l_3} \\ S_2 &= -\frac{P}{\sin \alpha} - S_3 \cdot \frac{l_2}{l_3} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{b)}$$

wenn die Beziehungen zwischen den Winkeln α, β und den Stablängen benützt werden.

Hieraus erhält man zunächst:

$$\frac{\delta S}{\delta S_3} = -\frac{l_1}{l_3}, \quad \frac{\delta S_1}{\delta S_3} = -\frac{l}{l_3}, \quad \frac{\delta S_2}{\delta S_3} = -\frac{l_2}{l_3},$$

und die Gleichung a) liefert dann:

$$S_3 = -\frac{P}{\sin \alpha} \cdot \frac{2 l_2^2 l_3}{l l_1^2 + l^2 l_1 + 2 l_2^3 + 2 l_3^3}.$$

Die übrigen Spannungen können dann aus den Gleichungen b) genommen werden.

522. Der Stab AB ist aufzufassen als in der Mitte belasteter Träger, der an den Enden mit unbekannten Momenten eingespannt ist. Der Auflagerdruck dieses Stabes in A und B ist P, das Biegungsmoment zwischen A und der Last ist $M = M_0 - P x$, somit die Formänderungsarbeit des halben Stabes AB nach Gleichung 130:

$$\frac{1}{2 E J} \int_0^a M^2 \, dx.$$

Der Stab AC wird von der Zugkraft P und an den Enden von einem Einspannungsmoment M_0 beansprucht; seine Formänderungsarbeit ist nach den Gleichungen 129 und 130:

$$\frac{2 P^2 a_1}{2 E_1 F_1} + \frac{1}{2 E_1 J_1} \int_0^{2 a_1} M_0^2 \, dx.$$

Schreibt man nun die Formänderungsarbeit $\mathbf{A}$ des ganzen Rahmens an und setzt $\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta M_0} = 0$, so wird

$$\frac{2}{E J} \int_0^a (M_0 - P x) \, dx + \frac{1}{E_1 J_1} \int_0^{2 a_1} M_0 \, dx = 0,$$

woraus
$$M_0 = \frac{P}{2} \frac{a^2}{a + a_1 \frac{E J}{E_1 J_1}}.$$

523. Der Querträger AB erleidet an den Enden die Druckkraft H, das Einspannungsmoment $M_0 = H l_2$ und überdies die Belastung $2P$.

Sein Biegungsmoment zwischen A und P ist $M_1 = - M_0 + P x$, zwischen den beiden Lasten $M_2 = - M_0 + P a$; seine Formänderungsarbeit ist also nach den Gleichungen 129 und 130:
$$\mathbf{A}_1 = \frac{H^2 \cdot 2 l_1}{2 E F_1} + \frac{1}{E J_1} \left[\int_0^a M_1^2 \, d x + \int_a^{l_1} M_2^2 \, d x \right].$$
Der vertikale Ständer AD wird in A von dem Einspannungsmoment M_0, in D von der Kraft H beansprucht; sein Biegungsmoment in der Entfernung x von D ist $H x$, also seine Formänderungsarbeit nach Gleichung 130:
$$\mathbf{A}_2 = \frac{1}{2 E J_2} \int_0^{l_2} (H x)^2 \, d x.$$
Die Formänderungsarbeit von CD ist endlich nach Gleichung 129:
$$\mathbf{A}_3 = \frac{H^2 \cdot 2 l_1}{2 E F_3}.$$
Die ganze Formänderungsarbeit des Rahmens ist
$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + 2 \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3.$$
Setzt man $\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta H} = 0$, so findet man nach Ausführung der Integrationen:
$$H = \frac{P}{2} \frac{a l_2 (2 l_1 - a)}{l_1 l_2^2 + J_1 \left[\frac{l_1}{F_1} + \frac{l_1}{F_3} + \frac{l_2^3}{3 J_2} \right]}.$$

524. Lösung ähnlich wie in den beiden vorhergehenden Aufgaben.

Formänderungsarbeit von AB:
$$\mathbf{A}_1 = 2 \cdot \frac{1}{2 E J_1} \int_0^a (- H l + P x)^2 \, d x + \frac{H^2 \cdot 2 a}{2 E F_1}.$$

Formänderungsarbeit von AC:

$$\mathbf{A}_2 = \frac{1}{2EJ_2}\int_0^l H^2 x^2 dx + \frac{P^2 l}{2EF_2},$$

worin $F_1 F_2$, $J_1 J_2$ die zugehörigen Querschnittsflächen und Trägheitsmomente sind. Die ganze Formänderungsarbeit ist

$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + 2\mathbf{A}_2$; setzt man $\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta H} = 0$, so bleibt

$$H = \frac{P}{2}\,\frac{a^2 l}{a l^2 + a\frac{J_1}{F_1} + \frac{l^3}{3}\frac{J_1}{J_2}}.$$

525. Lösung ähnlich wie in voriger Aufgabe.
Statische Gleichungen: $M_o = Hl$,

$$A + \frac{C}{2} = a q,$$

$$M_o + \frac{C}{2} a = \frac{1}{2} q a^2.$$

Der Rahmen ist einfach statisch unbestimmt. Die Formänderungsarbeit von AC ist:

$$\mathbf{A}_1 = \frac{1}{2EJ_1}\int_0^a \left(-\frac{C}{2}x + \frac{1}{2}q x^2\right)^2 dx + \frac{H^2 a}{2EF_1},$$

jene des Ständers A:

$$\mathbf{A}_2 = \frac{1}{2EJ_2}\int_0^l H^2 x^2 dx + \frac{A^2 l}{2EF_2},$$

jene des Ständers C:

$$\mathbf{A}_3 = \frac{C^2 l}{2EF_3}.$$

Hierin bedeuten $F_1 F_2 F_3$ die Querschnitte des Stabes AC und der Ständer A und C, $J_1 J_2$ die zugehörigen Trägheitsmomente. Die ganze Formänderungsarbeit des Rahmens ist

$$\mathbf{A} = 2\mathbf{A}_1 + 2\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3.$$

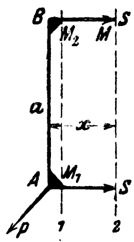
Setzt man $\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta H} = 0$ und beachtet, daß

$$\frac{\delta A}{\delta H} = \frac{1}{a},\quad \frac{\delta C}{\delta H} = -2\frac{1}{a},$$

so erhält man mit Benützung der statischen Gleichungen für den Horizontalschub:

$$H\left[\frac{1}{F_2}+\frac{2}{F_3}+\frac{a^3}{F_1 l^3}+\frac{a^3}{3J_1 l}+\frac{a^2}{3J_2}\right]=\frac{q a^2}{2 l}\left[\frac{2}{F_3}-\frac{1}{F_2}+\frac{a^3}{12 J_1 l}\right].$$

Sodann ergeben sich M_0, A und C aus den statischen Gleichungen.



526. Schnitt 1, nahe an a, Momente um A:

$$M_1+M_2+S a=0 \quad \ldots \ldots \quad a)$$

$$S=\frac{P}{2\sqrt{2}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad b)$$

Schnitt 2, Biegungsmoment in M:

$$M=M_2+S x,$$

worin S der Auflagerdruck in B in Richtung AB ist. Formänderungsarbeit des ganzen Quadrates:

$$\mathbf{A}=4\cdot\frac{S^2 a}{2EF}+4\cdot\frac{1}{2EJ}\int_0^a M^2\,dx.$$

Setzt man $\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta M_2}=0$, so wird $\int_0^a M\frac{\delta M}{\delta M_2}dx=0$,

oder $\int_0^a (M_2+S x)\,dx=0$, $\quad M_2 a+\frac{1}{2}S a^2=0$

und mit Rücksicht auf die Gleichungen a) und b)

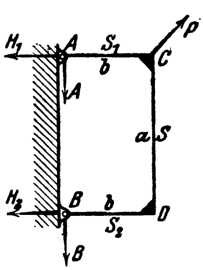
$$M_1=M_2=\frac{-P a}{4\sqrt{2}}.$$

527. Statische Gleichungen:

$$A+B=P\cos\alpha,$$

$$S=B=P\cos\alpha-A,$$

$$\left.\begin{aligned}S_1=H_1&=P\left(\sin\alpha-\frac{b}{a}\cos\alpha\right),\\ S_2=H_2&=P\frac{b}{a}\cos\alpha.\end{aligned}\right\}\ a)$$



$$M_C=-A b,\quad M_D=-B b \quad . \; . \quad b)$$

Biegungsmoment in AC: $M_1=-A x$,

in BD: $M_2=-B x$,

in CD: $M=-B b+H_2 x$.

x ist die Entfernung der Stelle von A, bezw. von B, bezw. von D. Formänderungsarbeit:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2EF}(S_1^2 b + S_2^2 b + S^2 a) + \frac{1}{2EJ}\left(\int_0^b M_1^2 dx + \int_0^b M_2^2 dx + \int_0^a M^2 dx\right).$$

Bildet man $\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta B}$ und setzt es gleich Null, so erhält man:

$$\frac{Ba}{F} + \frac{1}{J}\left\{\int_0^b M_1 \frac{\delta M_1}{\delta B} dx + \int_0^b M_2 \frac{\delta M_2}{\delta B} dx + \int_0^a M \frac{\delta M}{\delta B} dx\right\} = 0.$$

Nun ist: $\frac{\delta M_1}{\delta B} = -\frac{\delta A}{\delta B} x = x,$

$\frac{\delta M_2}{\delta B} = -x,$

$\frac{\delta M}{\delta B} = -b.$

Man erhält durch Ausführung der Integrationen:

$$S = B = P\cos\alpha \frac{Fb^2(3a+2b)}{6aJ + 2Fb^2(3a+2b)},$$

$$A = P\cos\alpha \frac{6aJ + Fb^2(3a+2b)}{6aJ + 2Fb^2(3a+2b)},$$

während M_C und M_D durch die Gleichungen b) bekannt sind.

528. Statische Gleichungen:

$$R = P + Q, \quad P(a+b) = Hc;$$

Knoten C: $Q + S_1 + (S_2 + S_3)\cos\varphi = 0,$

$H + (S_2 - S_3)\sin\varphi = 0;$

Knoten A: $H + S_2 \sin\varphi + S_4 = 0.$

(Da der Stab AB auf Biegung beansprucht wird, ist beim Knotenschnitt um A außer S_4 auch die senkrecht zu AB auftretende Querkraft der Biegung einzuführen; daher vermeidet man die Projektion der Knotenkräfte auf die Vertikale.)

Hieraus:

$$\left.\begin{aligned} S_2 &= -\frac{1}{2}\left[\frac{Q+S_1}{\cos\varphi}+\frac{H}{\sin\varphi}\right], \\ S_3 &= -\frac{1}{2}\left[\frac{Q+S_1}{\cos\varphi}-\frac{H}{\sin\varphi}\right], \\ S_4 &= \frac{1}{2}\left[(Q+S_1)\operatorname{tg}\varphi - H\right]. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{a)}$$

Biegungsmoment in AD im Abstande x von A:

$$M_1 = S_2 x \cos\varphi.$$

Biegungsmoment in BD im Abstande x von B:

$$M_2 = P(b+x) - S_3 x \cos\varphi.$$

Biegungsmoment in BE im Abstande x von E:

$$M_3 = P x.$$

Formänderungsarbeit:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2E}\left(\frac{S_1^2 c}{F_1}+\frac{S_2^2 d}{F_2}+\frac{S_3^2 d}{F_3}+\frac{2 S_4^2 a}{F_4}\right)+ \\ +\frac{1}{2EJ}\left(\int_0^a M_1^2\,dx+\int_0^a M_2^2\,dx+\int_0^b M_3^2\,dx\right).$$

Setzt man $\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta S_1} = 0$, so wird

$$\frac{S_1 c}{F_1}+\frac{S_2 d}{F_2}\cdot\frac{\delta S_2}{\delta S_1}+\frac{S_3 d}{F_3}\cdot\frac{\delta S_3}{\delta S_1}+\frac{2 S_4 a}{F_4}\cdot\frac{\delta S_4}{\delta S_1}+ \\ +\frac{1}{J}\left\{\int_0^a M_1\cdot\frac{\delta M_1}{\delta S_1}\,dx+\int_0^a M_2\cdot\frac{\delta M_2}{\delta S_1}\cdot dx+\int_0^b M_3\cdot\frac{\delta M_3}{\delta S_1}\,dx\right\} = 0.$$

Es ist:

$$\frac{\delta S_2}{\delta S_1} = -\frac{1}{2\cos\varphi}, \quad \frac{\delta S_3}{\delta S_1} = -\frac{1}{2\cos\varphi}, \quad \frac{\delta S_4}{\delta S_1} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi,$$

$$\frac{\delta M_1}{\delta S_1} = \frac{\delta S_2}{\delta S_1}\cdot x\cos\varphi, \quad \frac{\delta M_2}{\delta S_1} = -\frac{\delta S_3}{\delta S_1}\cdot x\cos\varphi, \quad \frac{\delta M_3}{\delta S_1} = 0.$$

Daraus erhält man folgende Gleichung:

$$\frac{S_1 c}{F_1} - \frac{d}{2\cos\varphi}\left(\frac{S_2}{F_2}+\frac{S_3}{F_3}\right)+\frac{S_4 a}{F_4}\operatorname{tg}\varphi+\frac{P b a^2}{4J}+ \\ +\frac{(R+S_1)a^3}{6J} = 0.$$

Sie gibt in Verbindung mit den Gleichungen a) die vier Spannungen S_1, S_2, S_3, S_4.

Das Biegungsmoment in D ist dann bestimmt durch $S_2 a \cos \varphi$.

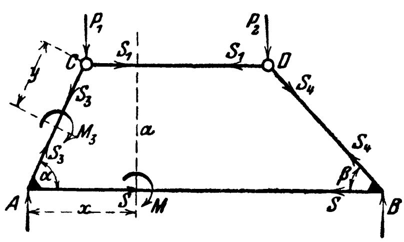
529. Statische Gleichungen:
$$P_1 \sin \alpha + S_3 = S_1 \cos \alpha,$$
$$P_2 \sin \beta + S_4 = S_1 \cos \beta,$$
$$S + S_1 = 0.$$

Alle Stäbe bis auf CD werden auf Biegung beansprucht. Die Biegungsmomente sind:

in AB: $M = A x - P_1 (x - l_3 \cos \alpha) + S_1 a$,
in AC: $M_3 = (S_1 \sin \alpha + P_1 \cos \alpha) y$ und analog
in BD: $M_4 = (S_1 \sin \beta + P_2 \cos \beta) z$.

Die Formänderungsarbeit ist:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2EF} [S^2 l + S_1^2 l_1 + S_3^2 l_3 + S_4^2 l_4]$$
$$+ \frac{1}{2EJ} \left[\int_0^l M^2 dx + \int_0^{l_3} M_3^2 dy + \int_0^{l_4} M_4^2 dz\right].$$



Hierin sind F und J der Querschnitt der Stäbe und sein maßgebendes Trägheitsmoment. Das Gerüst ist einfach statisch unbestimmt.

Setzt man $\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta S} = 0$ und entnimmt aus den ersten drei Gleichungen:

$$\frac{\delta S_1}{\delta S} = -1, \quad \frac{\delta S_3}{\delta S} = -\cos \alpha, \quad \frac{\delta S_4}{\delta S} = -\cos \beta,$$

ferner

$$\frac{\delta M}{\delta S} = -a, \quad \frac{\delta M_3}{\delta S} = -y \sin \alpha, \quad \frac{\delta M_4}{\delta S} = -z \sin \beta,$$

so erhält man zunächst:

$$\frac{J}{F} [S l - S_1 l_1 - S_3 l_3 \cos \alpha - S_4 l_4 \cos \beta] - a \int_0^l M dx$$
$$- \sin \alpha \int_0^{l_3} M_3 y\, dy - \sin \beta \int_0^{l_4} M_4 z\, dz = 0.$$

Führt man die Integrationen aus, beachtet daß

$$A\,l = P_1(l - l_3 \cos\alpha) + P_2 l_4 \cos\beta$$

und drückt mit Hilfe der ersten drei Gleichungen S, S_3, S_4 durch S_1 aus, so erhält man für letzte Spannung die Gleichung:

$$S_1\left\{\frac{J}{F}(l + l_1 + l_3\cos^2\alpha + l_4\cos^2\beta) + a^2\left(l + \frac{l_3+l_4}{3}\right)\right\}$$

$$= P_1 a \cos\alpha\left(\frac{J}{F} - \frac{l l_3}{2} - \frac{l_3^2}{3}\right) + P_2 a \cos\beta\left(\frac{J}{F} - \frac{l l_4}{2} - \frac{l_4^2}{3}\right).$$

Damit sind auch S, S_3 und S_4 sowie die Momente

$$M_A = P_1 l_3 \cos\alpha + S_1 a,$$
$$M_B = P_2 l_4 \cos\beta + S_1 a$$

bekannt.

530. Lösung ähnlich, wie in Aufgabe 524, nur ist der Rahmen zweifach statisch unbestimmt. Die statische Gleichung lautet

$$M_0 + M_1 = H\,l \quad \dots\dots\dots \quad a)$$

Nennt man $F_1 J_1$, $F_2 J_2$ Querschnittsfläche und Trägheitsmoment derselben für die Stäbe AB und AC, so ist die Formänderungsarbeit von AB:

$$\mathbf{A}_1 = 2\cdot\frac{1}{2EJ_1}\int_0^a\left(-M_0 + q a x - \frac{1}{2} q x^2\right)^2 dx + \frac{H^2\cdot 2a}{2EF_1}$$

und von AC:

$$\mathbf{A}_2 = \frac{1}{2EJ_2}\int_0^l (M_1 - Hx)^2 dx + \frac{q^2 a^2 l}{2EF_2}.$$

Hierin ist $q a$ der Auflagerdruck in A und C. Die ganze Formänderungsarbeit des Rahmens ist

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + 2\mathbf{A}_2.$$

Setzt man $$\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta H} = 0, \quad \frac{\delta \mathbf{A}}{\delta M_0} = 0,$$

so erhält man die Gleichungen:

$$3 M_0 l^2 = H\left(2 l^3 + 6 a \frac{J_2}{F_1}\right) \quad \dots\dots \quad b),$$

$$M_0\left(\frac{a}{J_1} + \frac{l}{J_2}\right) = \frac{H l^2}{2 J_2} + \frac{q a^3}{3 J_1} \quad \dots\dots \quad c),$$

wobei berücksichtigt wurde, daß

$$\frac{\delta M_1}{\delta H} = 1, \quad \frac{\delta M_1}{\delta M_0} = -1.$$

Man erhält für den Horizontalschub aus den Gleichungen b) und c):

$$H\left[1 + \frac{1}{4a}\frac{J_1}{J_2} + \frac{3}{F_1 l^2}\left(J_1 + \frac{a}{l}J_2\right)\right] = \frac{q a^2}{2 l}$$

und sodann M_0 und M_1 aus den Gleichungen a) und b).

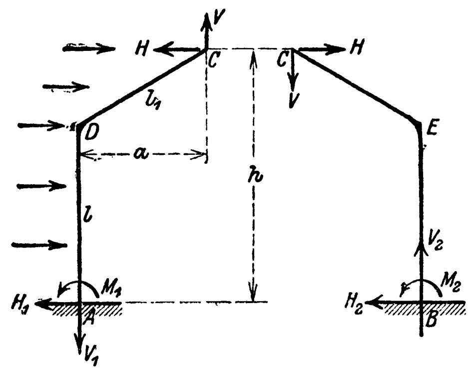
531. Statische Gleichungen: $V_1 = V_2 = V$, $H_1 + H_2 = q h$,

$$H = H_2, \quad \text{und} \quad -M_1 - Hh - Va + \frac{q h^2}{2} = 0,$$

$$-M_2 + Hh - Va = 0.$$

Das Portal ist zweifach statisch unbestimmt.

Bezeichnet man mit F und J den Querschnitt und dessen Trägheitsmoment, so sind die Formänderungsarbeiten der Stäbe AD, DC, CE, EB:



$$A_1 = \frac{1}{2EJ}\int_0^l\left(-M_1 + H_1 x - \frac{q x^2}{2}\right)^2 dx + \frac{V_1^2 l}{2EF},$$

$$A_2 = \frac{1}{2EJ}\int_0^{l_1}\left[-x(H\sin\alpha + V\cos\alpha) + \frac{1}{2}q x^2 \sin^2\alpha\right]^2 dx$$

$$+ \frac{1}{2EF}\int_0^{l_1}[-H\cos\alpha + V\sin\alpha + q x \sin\alpha\cos\alpha]^2 dx,$$

$$A_3 = \frac{1}{2EJ}\int_0^{l_1} x^2 (H\sin\alpha - V\cos\alpha)^2 dx + \frac{1}{2EF}\int_0^{l_1}(H\cos\alpha + V\sin\alpha)^2 dx,$$

$$\mathsf{A}_4 = \frac{1}{2EJ}\int_0^l (-M_2 + H_2 x)^2 dx + \frac{V_2^2 l}{2EF}.$$

Setzt man
$$\frac{\delta \mathsf{A}}{\delta H} = 0, \quad \frac{\delta \mathsf{A}}{\delta V} = 0,$$
worin
$$\mathsf{A} = \mathsf{A}_1 + \mathsf{A}_2 + \mathsf{A}_3 + \mathsf{A}_4$$
und benützt die statischen Gleichungen, so erhält man folgende Resultate für H und V:

$$H\left\{\frac{l_1 \cos^2\alpha}{F} + \frac{1}{3J}[h^3 + l_1^3 \sin^2\alpha(1 - \sin\alpha)]\right\} =$$
$$= \frac{q}{16}\left\{\frac{4a^2 \sin\alpha}{F} + \frac{h^4 + l_1^4 \sin^3\alpha(1 - \sin\alpha)}{J}\right\},$$

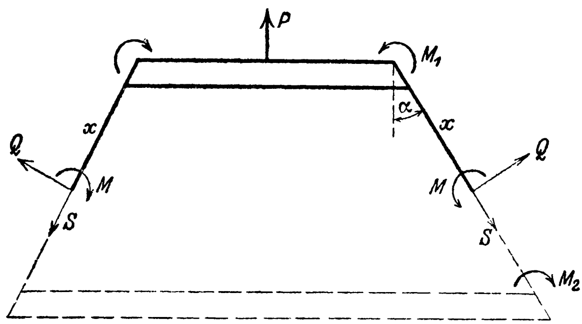
$$V\left\{\frac{l + l_1 \sin^2\alpha}{F} + \frac{a^2}{3J}(3l + l_1)\right\} =$$
$$= \frac{qa}{48}\left\{-\frac{12 l_1 \sin\alpha}{F} + \frac{4l(3h^2 - 3hl + l^2) + 3l_1^3 \sin^2\alpha}{J}\right\}.$$

Die statischen Gleichungen liefern dann $H_1 V_1 M_1$, $H_2 V_2 M_2$. Die Einspannungsmomente in D und E sind:

$$M_3 = \frac{1}{2} q l_1^2 \sin^2\alpha - l_1 (H \sin\alpha + V \cos\alpha),$$
$$M_4 = l_1 (H \sin\alpha - V \cos\alpha).$$

Der Gelenkdruck in C ist die Mittelkraft aus H und V.

532. Schneidet man das Gestell horizontal und bringt an den Schnittflächen die Spannungen S und die Querkräfte Q an, so besteht die Beziehung
$$P - 2S\cos\alpha + 2Q\sin\alpha = 0 \quad \ldots\ldots \quad a).$$
Anderseits ist das Moment an der Schnittstelle
$$M = Qx + M_1,$$
somit
$$M_2 = Ql + M_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad b).$$
Die Gleichungen a) und b) sind die einzigen, welche die Statik liefert. Das Gestell ist zweifach statisch unbestimmt. Seine Formänderungsarbeit ist



$$\mathbf{A} = \frac{S^2 l}{E F} + \frac{1}{E J}\int_0^l M^2 \, d x,$$

worin F und J der Querschnitt und dessen Trägheitsmoment für die Seitenteile bezeichnen.

Setzt man $$\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta Q} = 0, \quad \frac{\delta \mathbf{A}}{\delta M_1} = 0,$$

so erhält man wegen

$$\frac{\delta S}{\delta Q} = \operatorname{tg} \alpha, \quad \frac{\delta M}{\delta Q} = x, \quad \frac{\delta S}{\delta M_1} = 0, \quad \frac{\delta M}{\delta M_1} = 1:$$

$$S = \frac{P}{2} \cdot \frac{F l^2 \cos \alpha}{12 J \sin^2 \alpha + F l^2 \cos^2 \alpha},$$

$$M_1 = - M_2 = - \frac{Q l}{2} = P l \frac{3 J \sin \alpha}{12 J \sin^2 \alpha + F l^2 \cos^2 \alpha}.$$

533. Es ist nach Gleichung 128:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2 G}\int_0^l \tau^2 \, d V.$$

Für rechteckigen Querschnitt des Balkens (b, h) ist nach Gleichung 98 und 100 mit $\varphi = 0$, $2 y_1 = b$:

$$\tau = \tau_z = \frac{S Q}{b J}, \quad S = f z_0 = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right),$$

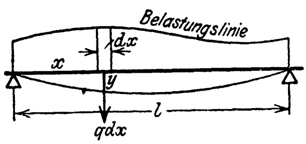
$$d V = b \cdot d z \cdot d x, \quad J = \frac{1}{12} b h^3,$$

woraus

$$\mathbf{A} = \frac{b}{8\,G\,J^2}\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)^2 dz \cdot \int Q^2\,dx$$

oder
$$\mathbf{A} = \frac{3}{5\,F\,G}\int\limits_0^l Q^2\,dx.$$

534. Ist q die Ordinate der beliebigen Belastungslinie, so leisten die äußeren Kräfte bei der Biegung des Trägers die Arbeit



$$\mathbf{A}_1 = \frac{1}{2}\int\limits_0^l q\,dx \cdot y;$$

die Formänderungsarbeit der Normalspannungen ist nach Gleichung 130:

$$\mathbf{A}_2 = \frac{1}{2\,E\,J}\int\limits_0^l M^2\,dx.$$

Setzt man $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2$, so wird

$$\int\limits_0^l\left(\frac{M^2}{E\,J} - q\,y\right)dx = 0.$$

Nennt man Q die Querkraft an der Stelle x, so ist

$$Q = \frac{dM}{dx} = M', \quad q = -\frac{dQ}{dx} = -M''$$

und obige Gleichung wird

$$\int\limits_0^l\left(\frac{M^2}{E\,J} + M''y\right)dx = 0 \quad \ldots\ldots \quad a).$$

Nun ist

$$\int M''y\,dx = \int y \cdot dM' = y\,M' - \int y'\,dM$$

und somit
$$\int\limits_0^l M''y\,dx = -\int\limits_0^l y'\,dM,$$

weil für $x = 0$ und $x = l : y = 0$ wird.

Ferner ist

$$\int y' \, dM = M y' - \int M y'' \, dx$$

und

$$\int_0^l y' \, dM = -\int_0^l M y'' \, dx,$$

weil für $x = 0$ und $x = l$: $M = 0$ wird.

Es bleibt somit

$$\int_0^l M'' y \, dx = \int_0^l M y'' \, dx$$

und Gleichung a) wird

$$\int_0^l \left(\frac{M^2}{EJ} + M y'' \right) dx = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad b).$$

Diese Gleichung wird erfüllt, wenn

$$y'' = -\frac{M}{EJ}$$

ist, die bekannte Gleichung der elastischen Linie.

535. Die Formänderungsarbeit $\mathbf{A}_2$ in voriger Aufgabe geht mit Benützung von Aufgabe 533 über in

$$\mathbf{A}_2 = \frac{1}{2EJ} \int_0^l M^2 \, dx + \frac{\beta}{2FG} \int_0^l Q^2 \, dx,$$

worin β eine Querschnittszahl ist (beim Rechteck $\beta = \frac{6}{5}$, wie in Aufgabe 533 gezeigt wurde). Man hat also wie in voriger Aufgabe, Gleichung b):

$$\int_0^l \left(\frac{M^2}{EJ} + \beta \frac{Q^2}{FG} + M y'' \right) dx = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad c).$$

Wird wieder $Q = \frac{dM}{dx} = M'$ gesetzt, so ist

$$\int Q^2 \, dx = \int M' \cdot dM = M M' - \int M M'' \cdot dx$$

und

$$\int_0^l Q^2 \cdot dx = -\int_0^l M M'' \cdot dx,$$

da für $x = 0$ und $x = l : M = 0$ wird.

Gleichung c) wird dann

$$\int_0^l \left(\frac{M^2}{EJ} - \beta \cdot \frac{M M''}{FG} + M y''\right) \cdot dx = 0,$$

welcher Bedingung durch die Gleichung

$$y'' = -\frac{M}{EJ} + \beta \cdot \frac{M''}{FG} \quad \ldots \ldots \text{d)}$$

genügt wird; dies ist die geänderte Gleichung der elastischen Linie.

536. Man kann die Schlußgleichung der vorigen Aufgabe benützen, wenn $M = Py$ gesetzt wird; hier ist P die achsiale Belastung des Stabes, y seine Ausbiegung an der Stelle x.

Gleichung d) wird dann

$$y'' = -\frac{Py}{EJ} + \beta \cdot \frac{Py''}{FG}$$

oder

$$y'' = -\omega^2 y,$$

wenn

$$\omega^2 = \frac{\frac{P}{EJ}}{1 - \beta \frac{P}{FG}}$$

gesetzt wird. Vergleiche dieselbe Differenzialgleichung in Aufgabe 345, wo auch die Lösung mitgeteilt ist:

$$y = f \cdot \sin \omega x.$$

Ferner ist $$y' = f\omega \cos \omega x$$

und da für $x = \frac{x_0}{2}$ (Mitte des Stabes): $y' = 0$ ist,

$$\omega x_0 = \pi,$$

also

$$\frac{\frac{P}{EJ}}{1 - \beta \cdot \frac{P}{FG}} x_0^2 = \pi^2$$

und wenn man angenähert die Länge x_0 der Sehne des gebogenen Stabes mit der Länge l des Stabes vertauscht:

$$P = \pi^2 \frac{EJ}{l^2 + \pi^2 \beta \frac{EJ}{FG}}$$

die geänderte Eulersche Gleichung für die Knicklast. Für rechteckigen Querschnitt ist $\beta = \frac{6}{5}$ (Aufgabe 533), $J = \frac{1}{12} F h^2$; setzt man $G = 0{,}4 E$, $\pi^2 \cdot 10$, so wird

$$P = 10 \frac{E J}{l^2 + 2{,}5 h^2}.$$

537. Die Formänderungsarbeit des Trägers ist nach Gleichung 130:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2EJ}\left[\int_0^{l-a} M^2 dx + \int_{l-a}^{l} M_1{}^2 dx\right],$$

worin die Biegungsmomente:

im Felde BC: $M = P x$;

im Felde CA: $M_1 = (P + P_1) x - P_1 (l - a)$.

Die Ausführung der Integration liefert:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{6EJ}[P^2 l^3 + P P_1 a^2 (3l - a) + P_1{}^2 a^3]$$

und somit die Durchbiegungen:

$$f = \frac{\delta \mathbf{A}}{\delta P} = \frac{1}{6EJ}[2 P l^3 + P_1 a^2 (3l - a)],$$

$$f_1 = \frac{\delta \mathbf{A}}{\delta P_1} = \frac{1}{6EJ}[P a^2 (3l - a) + 2 P_1 a^3].$$

538. Die Formänderungsarbeit des Trägers wurde in Aufgabe 485 gefunden:

$$\mathbf{A} = \frac{P^2 a^2 b^2}{6EJl}.$$

Bildet man nach Gleichung 132: $\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta P} = f$, so bleibt

$$f = \frac{1}{3} \frac{P a^2 b^2}{EJl}.$$

539. Nach Aufgabe 491 ist die Formänderungsarbeit für $a = b = \frac{l}{2}$:

$$\mathbf{A} = \frac{l^3}{48EJ}\left[\frac{P^2}{2} + \frac{5 P q l}{8} + \frac{q^2 l^2}{5}\right],$$

somit nach Gleichung 132:

$$f = \frac{\delta \mathbf{A}}{\delta P} = \frac{l^3}{48EJ}\left[P + \frac{5}{8} q l\right].$$

540. Mit Benützung des Resultates in Aufgabe 493 ist die Durchbiegung

$$f = \frac{\delta \mathsf{A}}{\delta P} = \frac{1}{3} \frac{P a^3 b^3}{E J l^3} \text{ (vergleiche Gleichung 61).}$$

541. Die Formänderungsarbeit des Trägers ist nach Gleichung 130:

$$\mathsf{A} = \frac{1}{2EJ}\left[\int_0^l M^2 dx + \int_0^a M'^2 dx'\right];$$

x und x' werden von A nach rechts bezw. von C nach links gezählt. Die Biegungsmomente sind:

im Felde AB: $M = Ax = -\frac{Pa}{l} \cdot x,$

im Felde CB: $M' = Px'.$

Durch Ausführung der Integrationen erhält man:

$$\mathsf{A} = \frac{1}{6} \frac{P^2 a^2 (l + a)}{EJ}$$

und die Durchbiegung

$$f = \frac{\delta \mathsf{A}}{\delta P} = \frac{1}{3} \frac{P a^2 (l + a)}{EJ}.$$

542. Die Formänderungsarbeit ist für veränderliches Trägheitsmoment nach Gleichung 130:

$$\mathsf{A} = \frac{1}{2E}\int \frac{M^2}{J} dx.$$

Setzt man hier: $M = Px,\ J = \frac{1}{12} y h^3,\ y = \frac{bx}{l}$ und integriert von $x = 0$ bis $x = l$, so wird

$$\mathsf{A} = \frac{3 P^2 l^3}{b h^3 E}$$

und

$$f = \frac{\delta \mathsf{A}}{\delta P} = \frac{6 P l^3}{b h^3 E}.$$

543. Mit Benützung der Resultate in Aufgabe 509 ist hier die Formänderungsarbeit

$$\mathsf{A} = \frac{1}{2EJ}\left\{\int_0^a M_1^2 dx + \int_a^l M_2^2 dx\right\},$$

worin $M_1 = Ax,\quad M_2 = (A - P)x + Pa$

und der Auflagerdruck

$$A = P\,\frac{2\,l^3 - 3\,l^2 a + a^3}{2\,l^3}.$$

Durch Ausführen der Integrationen erhält man

$$\mathbf{A} = \frac{P^2 a^2 (l - a)^3 (3\,l + a)}{24\,E\,J\,l^3},$$

woraus die Durchbiegung unter der Last

$$f = \frac{\delta \mathbf{A}}{\delta P} = \frac{P\,a^2 (l - a)^3 (3\,l + a)}{12\,E\,J\,l^3}.$$

544. Man denke sich an der Stelle, für welche die Durchbiegung gerechnet werden soll, eine Hilfskraft K. Die Formänderungsarbeit ist dann nach Aufgabe 491:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{6\,E\,J}\left[\frac{K^2 a^2 b^2}{l} + \frac{K q a b}{4}(l^2 + a\,b) + \frac{q^2 l^5}{40}\right].$$

Bildet man $f = \frac{\delta \mathbf{A}}{\delta K}$ und setzt hierauf die Hilfskraft $K = 0$, so wird

$$f = \frac{q\,a\,b\,(l^2 + a\,b)}{24\,E\,J}.$$

545. Nennt man ϱ den Krümmungshalbmesser des Stabes an einer beliebigen Stelle x, y (die x von A aus in Richtung der Achse, die y senkrecht dazu gemessen), so ist (vergl. Gleichung 39)

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_0} + \frac{M}{E\,J} = \frac{1}{\varrho_0} + \frac{P\,y}{E\,J},$$

worin E die Elastizitätszahl, J das Trägheitsmoment des Stabquerschnitts für eine zur Bildebene senkrechte Schwerlinie, M das Biegungsmoment bedeuten.

Die Differenzialgleichung der elastischen Linie (Gleichung 40)

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = -\frac{1}{\varrho_0} - \frac{P\,y}{E\,J} \quad \ldots\ldots\ldots \quad a)$$

hat die Lösung: $y = A \sin \omega x + B \cos \omega x + C$ . . . . . . b)

worin $\omega^2 = \frac{P}{E\,J}$ ist. Um die Konstanten A, B, C zu suchen, bilde man:

$$\frac{d y}{d x} = A\,\omega \cos \omega x - B\,\omega \sin \omega x \quad \ldots\ldots\ldots \quad c)$$

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = -A\,\omega^2 \sin \omega x - B\,\omega^2 \cos \omega x = -\omega^2 (y - C). \quad . \quad d)$$

und setze die entsprechenden Wertpaare $x = 0$, $y = 0$ in Gleichung b) und $x = \frac{l}{2}$, $\frac{dy}{dx} = 0$ in c) ein; man findet

$$B + C = 0 \quad \text{und} \quad A \cos \frac{\omega l}{2} - B \sin \frac{\omega l}{2} = 0.$$

Vergleicht man noch a) mit d), so wird

$$C = -\frac{1}{\omega^2 \varrho_0}, \quad B = \frac{1}{\omega^2 \varrho_0}, \quad A = \frac{1}{\omega^2 \varrho_0} \cdot \operatorname{tg} \frac{\omega l}{2},$$

und damit die Gleichung der elastischen Linie

$$y = \frac{1}{\omega^2 \varrho_0} \left[\frac{\cos \omega \left(\frac{l}{2} - x \right)}{\cos \omega \frac{l}{2}} - 1 \right],$$

und mit $x = \frac{l}{2}$ die Durchbiegung in der Mitte des Stabes

$$f = \frac{1}{\omega^2 \varrho_0} \left[\frac{1}{\cos \omega \frac{l}{2}} - 1 \right] \text{ mit } \omega = \sqrt{\frac{P}{EJ}}.$$

546. Wenn man von den Querkräften absieht und nur das Biegungsmoment an der Stelle M:

$$M = P(r + x) = Pr(1 + \cos \varphi)$$

und die Achsialkraft

$$N = P \cos \varphi$$

berücksichtigt, dann kann für die Normalspannung im Abstand z von der Biegungsachse gesetzt werden:

$$\sigma = \frac{N}{F} - \frac{Mz}{J},$$

worin F die Querschnittsfläche der Feder, J deren Trägheitsmoment in bezug auf die Biegungsachse bedeutet (vergl. Gleichung 38).

Dann wird die Formänderungsarbeit nach Gleichung 127:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2E} \int \sigma^2 dV = \frac{P^2}{2E} \iint \left[\frac{\cos \varphi}{F} - \frac{r(1 + \cos \varphi) z}{J} \right]^2 dF \cdot ds.$$

Setzt man $ds = (r + z) d\varphi$ und beachtet, daß

$$\int z\, dF = 0, \quad \int z^2 dF = J, \quad \int z^3 dF = 0,$$

so wird:

$$\mathbf{A} = \frac{P^2 r}{2E} \left\{ \frac{1}{F} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi + \frac{r^2}{J} \int_{-\pi}^{+\pi} (1 + \cos \varphi)^2 \, d\varphi \right.$$

$$\left. - \frac{2}{F} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos \varphi (1 + \cos \varphi) \, d\varphi \right\}$$

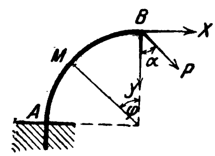
und
$$\mathbf{A} = \frac{\pi}{2} \frac{P^2 r}{E} \left(\frac{3 r^2}{J} - \frac{1}{F} \right).$$

Setzt man dies gleich $\frac{1}{2} P f$, so erhält man

$$P = f \cdot \frac{E}{\pi r \left(\frac{3 r^2}{J} - \frac{1}{F} \right)}.$$

547. Zerlegt man P in $X = P \sin \alpha$ und $Y = P \cos \alpha$, so ist das Biegungsmoment an der Stelle φ:

$$M = X r (1 - \cos \varphi) + Y r \sin \varphi,$$



die Formänderungsarbeit:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2EJ} \int_0^{\pi/2} M^2 \, ds, \quad ds = r \, d\varphi$$

und die gewünschten Verschiebungen:

in horizontaler Richtung: $$\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta X} = \frac{r}{EJ} \int_0^{\pi/2} M \frac{\delta M}{\delta X} d\varphi,$$

in vertikaler Richtung: $$\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta Y} = \frac{r}{EJ} \int_0^{\pi/2} M \frac{\delta M}{\delta Y} d\varphi.$$

Die Ausführung der Integrale liefert:

$$\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta X} = \frac{P r^3}{EJ} \left[\left(\frac{3\pi}{4} - 2 \right) \sin \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha \right],$$

$$\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta Y} = \frac{P r^3}{2EJ} \left[\sin \alpha + \frac{\pi}{2} \cos \alpha \right].$$

548. Lösung mit Hilfe der Resultate der vorigen Aufgabe. Angenommen, ξ und η seien die Verschiebungen von B in horizontaler und vertikaler Richtung. Um diese hervorzubringen, seien an der Feder AB die Kräfte X_1 und Y_1 notwendig, an der Feder CB die Kräfte X_2 und Y_2. Die Schlußgleichungen der vorigen Aufgabe liefern dann folgende Beziehungen:

$$\xi = \frac{r^3}{2EJ}\left[\left(\frac{3\pi}{2} - 4\right)X_1 + Y_1\right],$$

$$\eta = \frac{r^3}{2EJ}\left[X_1 + \frac{\pi}{2}Y_1\right].$$

Auf gleichem Wege erhält man für die Feder CB die Gleichungen:

$$\xi = \frac{r^3}{2EJ}\left[X_2\frac{\pi}{2} - Y_2\right],$$

$$\eta = \frac{r^3}{2EJ}\left[-X_2 + Y_2\left(\frac{3\pi}{2} - 4\right)\right].$$

Bestimmt man aus diesen vier Gleichungen X_1, Y_1, X_2, Y_2, so erhält man

$$X = X_1 + X_2 = \frac{16EJ}{r^3}\,\frac{\xi(\pi - 2)}{3\pi^2 - 8\pi - 4},$$

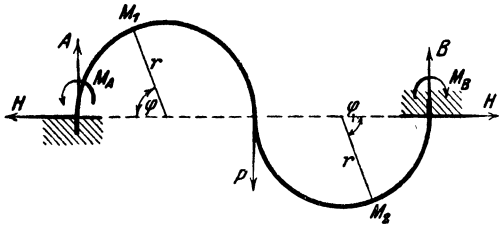
$$Y = Y_1 + Y_2 = \frac{16EJ}{r^3}\,\frac{\eta(\pi - 2)}{3\pi^2 - 8\pi - 4},$$

d. h. es ist $X : Y = \xi : \eta$ oder die Richtung der Verschiebung ist jene der Kraft P selbst.. Für die Größe der Verschiebung findet man

$$\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$$

oder

$$\frac{3\pi^2 - 8\pi - 4}{\pi - 2}\cdot\frac{Pr^3}{16EJ}.$$



549. Von den Auflagerkräften kann ausgesagt werden:

$$A = B = \frac{P}{2},$$

$$M_A = M_B.$$

Die Biegungsmomente an beliebigen Stellen des Stabes sind:

$$M_1 = -M_A + \frac{Pr}{2}(1 - \cos\varphi) + Hr\sin\varphi,$$

$$M_2 = M_B - \frac{Pr}{2}(1 - \cos\varphi) + Hr\sin\varphi.$$

Bildet man die Formänderungsarbeit des Stabes nach Gleichung 134:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2EJ}\left\{\int_0^\pi M_1^2 ds + \int_0^\pi M_2^2 ds\right\}$$

und setzt $$\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta M_A} = 0, \quad \frac{\delta \mathbf{A}}{\delta H} = 0,$$

worin

$$\frac{\delta M_1}{\delta M_A} = -1, \quad \frac{\delta M_2}{\delta M_A} = +1, \quad \frac{\delta M_1}{\delta H} = \frac{\delta M_2}{\delta H} = r\sin\varphi,$$

so erhält man:

$$M_A = \frac{Pr}{2}, \quad H = 0.$$

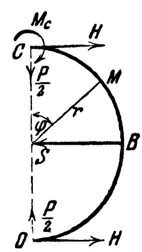
Mit diesen Werten wird die gesuchte Senkung der Last nach Gleichung 132:

$$f = \frac{\delta \mathbf{A}}{\delta P} = \frac{1}{EJ}\left\{\int_0^\pi M_1 \frac{\delta M_1}{\delta P} ds + \int_0^\pi M_2 \frac{\delta M_2}{\delta P} ds\right\} = \frac{\pi}{4}\,\frac{Pr^3}{EJ}.$$

550. Führt man den Schnitt CD, so ist

$$S = 2H,$$

wenn H die unbekannte Achsialkraft in C ist.



Das Biegungsmoment an beliebiger Stelle φ ist:

$$M = M_C - \frac{P}{2} r\sin\varphi + Hr(1 - \cos\varphi),$$

und die Formänderungsarbeit des Ringes nach den Gleichungen 129 und 134:

$$\mathbf{A} = 4 \cdot \frac{1}{2EJ}\int_0^{\pi/2} M^2 ds + \frac{S^2 \cdot 2r}{2EF},$$

worin F der Querschnitt des Zugbandes, J das Trägheitsmoment des Ringquerschnitts ist.

Setzt man $$\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta M_C} = 0, \quad \frac{\delta \mathbf{A}}{\delta H} = 0,$$

worin $\frac{\delta M}{\delta M_C} = 1$, $\frac{\delta S}{\delta M_C} = 0$; $\frac{\delta M}{\delta H} = r(1 - \cos\varphi)$, $\frac{\delta S}{\delta H} = 2$

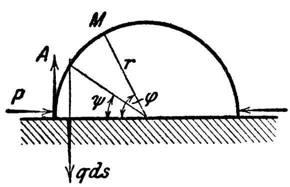
ist, so erhält man zwei Gleichungen, aus denen sich ergibt:

$$M_C = 2 P r \frac{\pi - 3 + \frac{4 J}{F r^2}}{\pi^2 - 8 + \frac{8 \pi J}{F r^2}},$$

$$H = P \frac{4 - \pi}{\pi^2 - 8 + \frac{8 \pi J}{F r^2}}, \quad S = 2 H$$

und hieraus:
$$M_B = M_C - \frac{P r}{2} + H r$$

$$= -\frac{P r}{2}\left[1 - 2\frac{\pi - 2 + \frac{8 J}{F r^2}}{\pi^2 - 8 + \frac{8 \pi J}{F r^2}}\right]$$



551. Der Auflagerdruck ist $A = \frac{G}{2}$, wenn G das Gewicht des Halbzylinders ist.

Nennt man q das Gewicht für die Längeneinheit des Bogens, so ist $q = \frac{G}{r\pi}$. Das Biegungsmoment an der Stelle φ ist:

$$M = -P r \sin\varphi + A r (1 - \cos\varphi) - \int_0^{\varphi} q\, d s \cdot r (\cos\psi - \cos\varphi)$$

$$= -P r \sin\varphi + \frac{G r}{2}(1 - \cos\varphi) - q r^2 (\sin\varphi - \varphi\cos\varphi),$$

und die Formänderungsarbeit nach Gleichung 134:

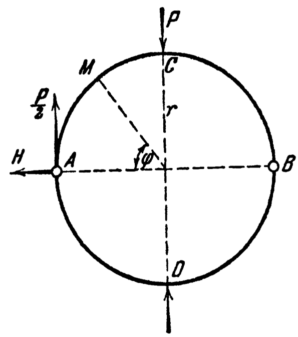
$$\mathbf{A} = 2 \cdot \frac{1}{2 E J}\int_0^{\pi/2} M^2 d s, \quad d s = r\, d\varphi.$$

Setzt man die Verschiebung von P gleich Null, so wird nach Gleichung 132:

$$f = \frac{\delta \mathbf{A}}{\delta P} = 0 \quad \text{oder} \quad \int_0^{\pi/2} M \frac{\delta M}{\delta P} d\varphi = 0,$$

und nach Ausführung der Integration:

$$P = \frac{G}{2\pi}.$$



552. Man untersuche den Quadranten AC. Die Gelenkdrücke in A sind:

$$A = \frac{P}{2} \quad \text{und} \quad H = 0,$$

das Biegungsmoment an einer Stelle M:

$$M = \frac{P}{2} r (1 - \cos\varphi) + H r \sin\varphi,$$

und die Formänderungsarbeit des Quadranten nach Gleichung 134:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2EJ} \int_0^{\pi/2} M^2 ds, \quad ds = r\,d\varphi.$$

Die gewünschten Veränderungen der Durchmesser werden nun nach Gleichung 132:

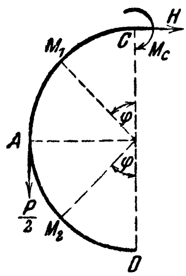
$$\text{von AB:} \quad 2 \cdot \frac{\delta \mathbf{A}}{\delta H} = \frac{2r}{EJ} \int_0^{\pi/2} M \frac{\delta M}{\delta H} d\varphi \text{ mit } H = 0,$$

oder $= \dfrac{P r^3}{2EJ}$ in Richtung von H, also Vergrößerung;

$$\text{von CD:} \quad 2 \cdot \frac{\delta \mathbf{A}}{\delta P} = \frac{2r}{EJ} \int_0^{\pi/2} M \frac{\delta M}{\delta P} d\varphi \text{ mit } H = 0,$$

oder $= \left(\dfrac{3}{8}\pi - 1\right) \dfrac{P r^3}{EJ}$ in Richtung von P, also Verkleinerung.

553. Man schneide den Ring nach CD, bringe die horizontale Schnittkraft H und das Schnittmoment M_c in C an. Dann ist das Biegungsmoment im oberen Quadranten:



$$M_1 = M_C + Hr(1 - \cos\varphi),$$

im unteren Quadranten:

$$M_2 = M_C + Hr(1 + \cos\varphi) - \frac{Pr}{2}(1 - \sin\varphi).$$

Die Formänderungsarbeit des halben Ringes ist nach Gleichung 134:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2EJ}\left\{\int_0^{\pi/2} M_1^2\,ds + \int_0^{\pi/2} M_2^2\,ds\right\}.$$

Bildet man $\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta M_C} = 0$ und $\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta H} = 0$ mit Benützung von

$$\frac{\delta M_1}{\delta M_C} = 1, \quad \frac{\delta M_2}{\delta M_C} = 1; \quad \frac{\delta M_1}{\delta H} = r(1 - \cos\varphi),$$

$$\frac{\delta M_2}{\delta H} = r(1 + \cos\varphi),$$

so erhält man die beiden Gleichungen:

$$M_C + Hr = Pr\frac{\pi - 2}{4\pi},$$

$$M_C + \frac{3}{2}Hr = Pr\frac{\pi - 1}{4\pi},$$

woraus: $H = \frac{P}{2\pi}$ und $M_C = -Pr\frac{4 - \pi}{4\pi} = -0{,}0683\,Pr.$

Das größte Biegungsmoment des Ringes tritt in D auf, nämlich

$$M_D = M_C + H \cdot 2r - \frac{Pr}{2} = -\frac{Pr}{4}.$$

Um die Einsenkung in C zu berechnen, bedient man sich des Kunstgriffes, in C eine abwärts gerichtete Kraft V anzunehmen, die man später wieder gleich Null setzt. Unter dieser Annahme ist:

$$M_1 = M_C + Hr(1 - \cos\varphi) + Vr\sin\varphi,$$

$$M_2 = M_C + Hr(1 + \cos\varphi) + Vr\sin\varphi - \frac{Pr}{2}(1 - \sin\varphi).$$

Bildet man jetzt

$$\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta V} = \frac{1}{EJ}\left\{\int_0^{\pi/2} M_1\frac{\delta M_1}{\delta V}\,ds + \int_0^{\pi/2} M_2\frac{\delta M_2}{\delta V}\,ds\right\}$$

mit $\frac{\delta M_1}{\delta V} = r\sin\varphi, \quad \frac{\delta M_2}{\delta V} = r\sin\varphi,$

und setzt hierin nachträglich $V = 0$, so erhält man die Einsenkung von C, also die Verkleinerung des Durchmessers CD:

$$\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta V} = \frac{\pi^2 - 8}{8\pi} \cdot \frac{P r^3}{E J} = 0{,}0744 \frac{P r^3}{E J}.$$

Ebenso geht man vor, um die seitliche Verrückung von A zu rechnen. Man bringe in A eine nach links gerichtete horizontale Kraft K an; dann ist $M_1 = M_C + \left(H + \frac{K}{2}\right) r (1 - \cos\varphi)$,

$$M_2 = M_C + \left(H + \frac{K}{2}\right) r (1 + \cos\varphi) - K r \cos\varphi - \frac{P r}{2} (1 - \sin\varphi).$$

Bildet man jetzt

$$\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta K} = \frac{1}{E J} \left\{ \int_0^{\pi/2} M_1 \frac{\delta M_1}{\delta K} d s + \int_0^{\pi/2} M_2 \frac{\delta M_2}{\delta K} d s \right\}$$

mit $\quad \frac{\delta M_1}{d K} = \frac{r}{2} (1 - \cos\varphi), \quad \frac{\delta M_2}{\delta K} = \frac{r}{2} (1 - \cos\varphi)$

und setzt nachträglich $K = 0$, so wird

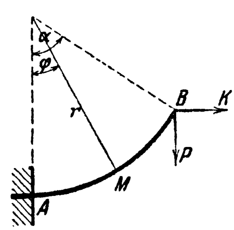
$$\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta K} = \frac{4 - \pi}{8\pi} \cdot \frac{P r^3}{E J} = 0{,}0341 \frac{P r^3}{E J}.$$

Doppelt so groß ist die Vergrößerung des Durchmessers AB.

554. Da die seitliche Ausweichung von B gerechnet werden soll, bringe man in B eine Hilfskraft K an, die später Null gesetzt wird. Das Biegungsmoment an einer beliebigen Stelle φ ist

$$M = P r (\sin\alpha - \sin\varphi) + K r (\cos\varphi - \cos\alpha),$$

und die Formänderungsarbeit des Stabes AB, wenn von Achsial- und Schubkräften abgesehen wird, nach Gleichung 134:



$$\mathbf{A} = \frac{1}{2 E J} \int_0^{\alpha} M^2 d s, \quad d s = r d\varphi.$$

Die Senkung von B ist dann nach Gleichung 132:

$$f = \frac{\delta \mathbf{A}}{\delta P} = \frac{r}{E J} \int_0^{\alpha} M \frac{\delta M}{\delta P} d\varphi,$$

worin $\quad \frac{\delta M}{\delta P} = r (\sin\alpha - \sin\varphi),$

und mit $K = 0$:

$$f = \frac{\delta \mathbf{A}}{\delta P} = \frac{P r^3}{E J} \left[\alpha \sin^2 \alpha + \frac{\alpha}{2} + \frac{3}{4} \sin 2\alpha - 2 \sin \alpha\right].$$

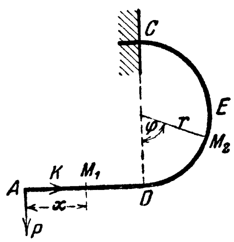
Die seitliche Ausweichung von B ist ebenso:

$$\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta K} = \frac{r}{E J} \int_0^\alpha M \frac{\delta M}{\delta K} d\varphi,$$

worin
$$\frac{\delta M}{\delta K} = r(\cos\varphi - \cos\alpha),$$

und mit $K = 0$:

$$\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta K} = \frac{P r^3}{E J} \left[-1 + \frac{3}{2} \sin^2 \alpha + \cos \alpha - \alpha \sin \alpha \cos \alpha\right].$$



555. Der Draht bleibt der Symmetrie wegen in C horizontal; das Stück ADEC kann also wie in C eingespannt betrachtet werden. Das Biegungsmoment einer Stelle zwischen A und D ist: $M_1 = -Px$; jenes einer Stelle des Halbkreises ist

$$M_2 = -P(l + r \sin \varphi) - K r (1 - \cos \varphi),$$

wenn man in A eine Hilfskraft K horizontal anbringt. Die Formänderungsarbeit ist dann (ohne Berücksichtigung der Achsial- und Querkräfte) nach Gleichung 134:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2 E J} \left\{ \int_0^\pi M_2^2 ds + \int_0^l M_1^2 dx \right\}.$$

Zunächst wird nach Gleichung 132 die seitliche Verschiebung von A:

$$\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta K} = \frac{P r^2}{E J}(l\pi + 2r),$$

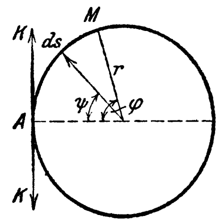
wenn vor Ausführung der Integration $K = 0$ gesetzt wird. Die Annäherung von A und B ist doppelt so groß.

Die Senkung von A wird

$$\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta \mathbf{P}} = \frac{P}{E J} \left\{ \frac{l^3}{2} + l^2 r \pi + 4 l r^2 + \frac{\pi}{2} r^3 \right\}.$$

556. Man bringe in A zwei Hilfskräfte K an; dann ist das Biegungsmoment in M:

$$M = K r (1 - \cos \varphi) + l \int_{\psi=0}^{\varphi} p\, ds \cdot r \sin(\varphi - \psi).$$



Setzt man $ds = r\,d\psi$ und führt die Integration aus, so wird

$$M = K r (1 - \cos\varphi) + p r^2 l (1 - \cos\varphi).$$

Die Formänderungsarbeit des ganzen Gefäßes ist nach Gleichung 134:

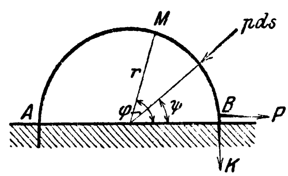
$$\mathbf{A} = 2 \cdot \frac{1}{2EJ} \int_0^\pi M^2\,ds$$

und die Öffnung der Fuge bei A nach Gleichung 132:

$$f = \frac{\delta \mathbf{A}}{\delta K} = \frac{2r}{EJ} \int_0^\pi M \frac{\delta M}{\delta K}\,d\varphi.$$

Setzt man in M wieder $K = 0$, so bleibt

$$f = \frac{\delta \mathbf{A}}{\delta K} = \frac{3 p \pi r^4 l}{EJ}.$$



557. Bringt man in B die Hilfskraft K an, so ist das Biegungsmoment an einer beliebigen Stelle M:

$$M = K r (1 - \cos\varphi) - P r \sin\varphi + \int_{\psi=0}^{\varphi} p\,ds \cdot r \sin(\varphi - \psi), \quad ds = r\,d\psi,$$

$$M = K r (1 - \cos\varphi) - P r \sin\varphi + p r^2 (1 - \cos\varphi).$$

Die Formänderungsarbeit der Feder ist nach Gleichung 134:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2EJ} \int_0^\pi M^2\,ds, \quad ds = r\,d\varphi.$$

Bildet man $$\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta K} = \frac{r}{EJ} \int_0^\pi M \frac{\delta M}{\delta K}\,d\varphi,$$

so wird mit $\dfrac{\delta M}{\delta K} = r(1 - \cos\varphi)$ und wenn man bei Ausführung der Integration wieder $K = 0$ setzt:

$$\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta K} = \frac{r^3}{EJ}\left(\frac{3\pi}{2} p r - 2P\right).$$

Wenn B in der Fläche AB bleiben soll, so muß dieser Ausdruck verschwinden, d. h. es ist

$$p = \frac{4P}{3\pi r}.$$

Für die Verschiebung von B in der Fläche AB erhält man nach Gleichung 132:

$$f = \frac{\delta A}{\delta P} = \frac{r}{EJ}\int_0^\pi M \frac{\delta M}{\delta P}\, d\varphi = \frac{r^3}{EJ}\left(\frac{P\pi}{2} - 2pr\right),$$

wenn wieder $K = 0$ gesetzt wird. Mit obigem Wert von p wird die Verschiebung von B:

$$f = \frac{Pr^3}{EJ}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{8}{3\pi}\right) = 0{,}7220\,\frac{Pr^3}{EJ}.$$

Das Biegungsmoment der Feder ist in B Null, wird ein negatives Maximum erreichen für

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{3\pi}{4}, \text{ u. zw. } -{}_{\max}M = \frac{Pr}{3\pi}\left[4 - \sqrt{16 + 9\pi^2}\right] = -0{,}6619\,Pr;$$

es wird für $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{3\pi}{4}$ wieder Null und erhält seinen größten Wert in A, nämlich

$$_{\max}M = \frac{8}{3\pi}\,Pr = 0{,}8488\,Pr.$$

558. Da die Verschiebungen in A und B gerechnet werden sollen, bringe man zwei Hilfskräfte A und B an, die dann später wieder Null gesetzt werden. In den Schnitten A und B wirken ferner die durch den Innendruck p hervorgerufenen Kräfte $p(r + l)$ und pr.

In der Entfernung x von B ist das Biegungsmoment

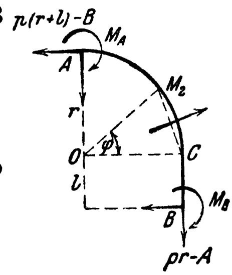
$$M_1 = M_B + Bx - \frac{px^2}{2}, \text{ gültig von } x = 0 \text{ bis } x = l;$$

an der Stelle M_2 ist das Biegungsmoment

$$M_2 = M_B + B(l + r\sin\varphi) + (pr - A)r(1 - \cos\varphi) - pl\left(\frac{l}{2} + r\sin\varphi\right) - \frac{1}{2}p\cdot\overline{M_2C}^2;$$

die beiden letzten Glieder rühren vom Innendruck auf BC und M_2C her. Da $M_2C = 2r\sin\frac{\varphi}{2}$, so bleibt

$$M_2 = M_B + B(l + r\sin\varphi) - Ar(1 - \cos\varphi) - pl\left(\frac{l}{2} + r\sin\varphi\right).$$



Die Formänderungsarbeit des Quadranten AB ist nun

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2EJ}\left\{\int_0^l M_1^2\,dx + \int_0^{\pi/2} M_2^2 \cdot r\,d\varphi\right\}.$$

Setzt man $\dfrac{\delta \mathbf{A}}{\delta M_B} = 0$ mit $A = 0$, $B = 0$, so bleibt

$$\int_0^l M_1\,dx + \int_0^{\pi/2} M_2\,r\,d\varphi = 0,$$

woraus
$$M_B = \frac{pl}{2} \cdot \frac{rl\pi + 4r^2 + \frac{2}{3}l^2}{2l + r\pi}.$$

Hingegen ist $M_A = -M_B + prl + \dfrac{pl^2}{2}$, wie man findet, wenn man die Momentensumme um O gleich Null setzt.

Die Verschiebung von B ist:

$$\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta B} = \frac{1}{EJ}\left[\int_0^l M_1 \frac{\delta M_1}{\delta B}\,dx + \int_0^{\pi/2} M_2 \frac{\delta M_2}{\delta B}\,r\,d\varphi\right].$$

Führt man die Integrationen aus und setzt nachträglich $A = 0$, $B = 0$, so bleibt für die Verschiebung von B:

$$-\frac{pl}{24EJ(2l + r\pi)}\left[r\pi(5l^3 + 12r^2l + 6r^3\pi) + 2(l^4 - 24r^4 + 20r^2l^2)\right].$$

Die Verschiebung von A ist:

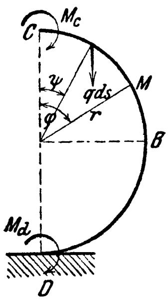
$$\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta A} = \frac{1}{EJ}\int_0^{\pi/2} M_2 \frac{\delta M_2}{\delta A}\,r\,d\varphi.$$

Führt man die Integration aus und setzt nachträglich $A = 0$, $B = 0$, so bleibt für die Verschiebung von A:

$$\frac{plr^2}{6EJ(2l + r\pi)}\left[\pi(2l^2 - 3r^2) + 2(6r^2 + 3rl - 2l^2)\right].$$

559. Man führe einen Vertikalschnitt CD durch den schweren Hohlzylinder; der Halbkreis CBD ist dann der halbe Querschnitt. Bringt man in C und D die Schnittmomente M_C und M_D an, so ist für eine beliebige Stelle M das Biegungsmoment

$$M = M_C - \int_{\psi=0}^{\varphi} q\,d\,s \cdot r\,(\sin\varphi - \sin\psi) = M_C - q\,r^2(\varphi\sin\varphi + \cos\varphi - 1).$$



Hierin ist q das Eigengewicht der Längeneinheit des Bogens, also
$$q = \frac{G}{2\,r\,\pi},$$
wenn G das Gewicht des Zylinders ist.

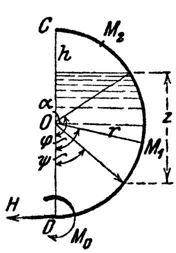
Bildet man die Formänderungsarbeit des Zylinders nach Gleichung 134:
$$\mathbf{A} = 2 \cdot \frac{1}{2\,E\,J}\int_0^{\pi} M^2\,d\,s$$

und setzt
$$\frac{\delta\mathbf{A}}{\delta M_C} = 0 \quad \text{oder} \quad \int_0^{\pi} M\frac{\delta M}{\delta M_C}\,d\varphi = 0,$$ δA

so erhält man nach Ausführung der Integration:
$$M_C = 0.$$

Nun kann der Verlauf von $M = -q\,r^2(\varphi\sin\varphi + \cos\varphi - 1)$ leicht untersucht werden. In B wird $M = -G\,r\,\frac{\pi - 2}{4\pi}$ ein negatives Maximum; in $\varphi = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, d. i. beiläufig $\varphi = 133^0\,40'$ wird $M = 0$. Den größten positiven Wert erreicht M in D, nämlich
$$M = \frac{G\,r}{\pi}.$$

560. Man führe den Schnitt CD, bringe in D die Achsialkraft H und das Biegungsmoment M_D an. Der Druck der Flüssigkeit an der Stelle ψ ist
$$\gamma\,z \cdot r\,d\psi \cdot l,$$



wenn γ das Einheitsgewicht ist. An der Stelle M_1 ist dann das Biegungsmoment:
$$M_1 = M_D + H\,r\,(1 - \cos\varphi) - \gamma\,l\,r\int_{\psi=0}^{\varphi} z\,d\psi \cdot r\sin(\varphi - \psi),$$
worin
$$z = r - h + r\cos\psi$$
oder nach Ausführung der Integration

Verbesserungen.

Lösung zu 555, Seite 342, Zeile 4 von unten:

$$\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta P} \text{ statt } \frac{\delta \mathbf{A}}{\delta A}.$$

Lösung zu 559, Seite 346, Zeile 1 soll lauten:

$$M = M_C - \int_{\psi=0}^{\varphi} q\,d\,s \cdot r\,(\sin\varphi - \sin\psi) - H\,r\,(1 - \cos\varphi)$$

$$= M_C - q\,r^2\,(\varphi \sin\varphi + \cos\varphi - 1) - H\,r\,(1 - \cos\varphi),$$

worin H die Schnittkraft in C ist.

Zeile 10 ist zu ergänzen durch:

$$\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta H} = 0.$$

Zeile 12 bis 17 soll lauten:

$$M_C = \frac{1}{2}\,q\,r^2, \quad H = \frac{1}{2}\,q\,r \quad \text{oder}$$

$$M_C = \frac{G\,r}{4\pi}, \quad H = \frac{G}{4\pi}; \quad M_B = -\frac{G\,r}{4\pi}(\pi - 2), \quad M_D = \frac{3\,G\,r}{4\pi}.$$

M wird null für $2 - \cos\varphi - 2\,\varphi \sin\varphi = 0$.

$$M_1 = M_D + Hr(1 - \cos\varphi)$$
$$- \gamma l r^2 \left[(r - h)(1 - \cos\varphi) + \frac{1}{2} r\varphi \sin\varphi\right]$$

gültig von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \alpha$.

Ebenso ist das Biegungsmoment im unbenetzten Teil des Kreises:

$$M_2 = M_D + Hr(1 - \cos\varphi) - \gamma l r \int_{\psi=0}^{\alpha} z\,d\psi \cdot r \sin(\varphi - \psi)$$
$$= M_D + Hr(1 - \cos\varphi) - \gamma l r^2 \Big\{(r - h)[\cos(\varphi - \alpha) - \cos\varphi]$$
$$+ \frac{r}{2}[\sin\alpha \sin(\varphi - \alpha) + \alpha \sin\varphi]\Big\}$$

gültig von $\varphi = \alpha$ bis $\varphi = \pi$.

Die Formänderungsarbeit des halben Gefäßes ist

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2EJ}\left\{\int_0^\alpha M_1^2\,ds + \int_\alpha^\pi M_2^2\,ds\right\}.$$

Setzt man $\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta M_D} = 0, \quad \frac{\delta \mathbf{A}}{\delta H} = 0$

oder

$$\int_0^\alpha M_1\,d\varphi + \int_\alpha^\pi M_2\,d\varphi = 0,$$
$$\int_0^\alpha M_1(1 - \cos\varphi)\,d\varphi + \int_\alpha^\pi M_2(1 - \cos\varphi)\,d\varphi = 0,$$

so erhält man nach Ausführung der Integrationen mit Beachtung von $h = r(1 + \cos\alpha)$ die Gleichungen

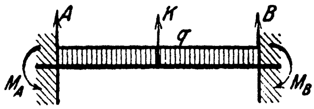
$$M_D + Hr = \frac{\gamma l r^3}{2\pi}[\alpha + 2\sin\alpha - 2\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\cos\alpha],$$
$$M_D + \frac{3}{2}Hr = \frac{\gamma l r^3}{2\pi}\left[\frac{\alpha}{4} + 2\sin\alpha - 2\alpha\cos\alpha - \frac{1}{4}\sin\alpha\cos\alpha + \pi - \pi\cos\alpha - \frac{\pi - \alpha}{2}\sin^2\alpha\right],$$

woraus M_D und H gerechnet werden können.

Nennt man H_1 die Achsialkraft und M_C das Biegungsmoment in C, so gelten die aus der Statik zu nehmenden Beziehungen

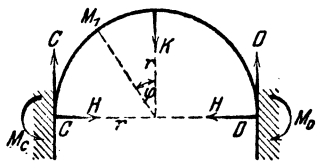
$$H + H_1 = \gamma \int_0^\alpha z l\,ds \sin\psi = \frac{\gamma l r^2}{2}(1 - \cos\alpha)^2$$

und, wenn man die Momente um O bildet:



$$M_C + M_D + Hr - H_1 r = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen können schließlich M_C und H_1 bestimmt werden.



561. Durch Anbringung der unbekannten Hilfskraft K trenne man die Konstruktion in nebenan gezeichneter Art. Es ist dann nach den Gleichungen 59 und 64:

$$A = B = qr - \frac{K}{2}, \quad M_A = M_B = \frac{1}{3} qr^2 - \frac{Kr}{4},$$

ferner

$$C = D = \frac{K}{2}.$$

In der Entfernung x von A ist das Biegungsmoment

$$M = -M_A + Ax - \frac{1}{2} qx^2$$

und an einer Stelle M_1 des Bogens:

$$M_1 = -M_C + Cr(1 - \sin\varphi) - Hr\cos\varphi.$$

Die gesamte Formänderungsarbeit ist (abgesehen von Achsial- und Schubkräften) nach den Gleichungen 130 und 134:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{EJ}\int_0^r M^2 dx + \frac{r}{EJ_1}\int_0^{\pi/2} M_1^2 d\varphi,$$

worin J und J_1 die Trägheitsmomente der Querschnitte des Balkens und des Bogens sind.

Setzt man

$$\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta K} = 0, \quad \frac{\delta \mathbf{A}}{\delta M_C} = 0, \quad \frac{\delta \mathbf{A}}{\delta H} = 0,$$

so erhält man

$$\frac{1}{J}\int_0^r M \frac{\delta M}{\delta K} dx + \frac{r}{J_1}\int_0^{\pi/2} M_1 \frac{\delta M_1}{\delta K} d\varphi = 0$$

mit

$$\frac{\delta M}{\delta K} = -\frac{\delta M_A}{\delta K} + \frac{\delta A}{\delta K} x = \frac{r}{4} - \frac{x}{2}, \quad \frac{\delta M_1}{\delta K} = \frac{\delta C}{\delta K} r(1 - \sin\varphi)$$

$$= \frac{r}{2}(1 - \sin\varphi),$$

$$\int_0^{\pi/2} M_1 \, d\varphi = 0, \quad \int_0^{\pi/2} M_1 \cos\varphi \, d\varphi = 0,$$

woraus sich nach Ausführung der Integrationen die Gleichungen ergeben:

$$M_C(\pi - 2) + Hr - Kr\left(\frac{3\pi}{4} - 2 + \frac{J_1}{12J}\right) + \frac{J_1}{12J} q r^2 = 0,$$

$$M_C \pi - 2Hr + Kr\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 0,$$

$$M_C - \frac{\pi}{4} Hr + \frac{1}{4} Kr = 0,$$

aus denen K, M_C, H und somit auch A, C und M_A gerechnet werden können.

562. Nach Gleichung 134 ist die Formänderungsarbeit des Bogens

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2E}\int \frac{M^2}{J} ds$$

oder da $\quad J = J_0 \sec\alpha, \quad ds \cos\alpha = dx$:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2EJ_0}\int M^2 dx.$$

Nennt man M_1 und M_2 die Biegungsmomente in den Feldern AP und PB, so ist

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2EJ_0}\left[\int_0^a M_1^2 dx_1 + \int_0^b M_2^2 dx_2\right],$$

worin $\quad M_1 = Ax_1 - Hy, \quad M_2 = Bx_2 - Hy,$

wenn die x_1 von A, die x_2 von B gezählt werden. Bildet man nun $\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta H} = 0$, so ist:

$$\int_0^a (Ax_1 - Hy) y \, dx_1 + \int_0^b (Bx_2 - Hy) y \, dx_2 = 0,$$

woraus nach Ausführung der Integrationen mit $a + b = 2l$:

$$H = \frac{5}{64} \cdot \frac{Pab(a^2 + 3ab + b^2)}{hl^3}.$$

Bei den Integrationen ist die Beziehung zu benützen:

$$h - y : h = (l - x)^2 : l^2$$

oder $\quad y = \frac{h}{l^2}(2lx - x^2),$

ferner $\quad A = P\frac{b}{l}, \quad B = P\frac{a}{l}.$

563. Lösung ähnlich wie in der vorigen Aufgabe. Es ist hier $A = B = P$, ferner die Biegungsmomente $M_1 = P x_1 - H y$ im Felde AP, $M_3 = P b - H y$ im Felde zwischen den beiden Lasten und die Formänderungsarbeit des Bogens samt Zugstange

$$\mathbf{A} = 2 \cdot \frac{1}{2 E J_0}\left[\int_0^b M_1{}^2 d x_1 + \int_b^l M_3{}^2 d x_1\right] + \frac{H^2 \cdot 2 l}{2 E F}.$$

Bildet man $\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta H} = 0$, so ist

$$\int_0^b (P x_1 - H y) y \, d x_1 + \int_b^l (P b - H y) y \, d x_1 = \frac{H l J_0}{F},$$

wobei $\frac{\delta M_1}{\delta H} = -y$, $\frac{\delta M_3}{\delta H} = -y$ gesetzt wurde.

Benützt man wieder wie in der vorigen Aufgabe die Beziehung $y = \frac{h}{l^2}(2 l x - x^2)$, so bleibt nach Ausführung der Integrationen

$$H = \frac{P b h}{12 l^3} \cdot \frac{8 l^3 - 4 l b^2 + b^3}{\frac{J_0}{F} + \frac{8}{15} h^2}.$$

564. Setzt man $a = b = l$, so wird in der Lösung der Aufgabe 562:

$$\mathbf{A} = \frac{2}{2 E J_0}\int_0^l M^2 d x,$$

worin $M = A x - H y$, $y = \frac{h}{l^2}(2 l x - x^2)$ wie dort.

Mit $A = \frac{P}{2}$, $H = \frac{25}{64}\frac{P l}{h}$ (aus Aufgabe 562)

wird $$\mathbf{A} = \frac{1}{512}\frac{P^2 l^3}{E J_0}$$

und nach Gleichung 132:

$$f = \frac{\delta \mathbf{A}}{\delta P} = \frac{1}{256}\frac{P l^3}{E J_0}.$$

565. Die vertikalen Auflagerdrücke sind

$$A = B = q l,$$

und das Biegungsmoment in M:

$$M = -M_A + A x - H y - \frac{1}{2} q x^2.$$

Nach Gleichung 134 ist die Formänderungsarbeit durch die Biegungsmomente:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2EJ}\int_{x=0}^{x=2l} M^2 ds.$$

Der Bogen ist zweifach statisch unbestimmt. Setzt man

$$\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta H} = 0, \quad \frac{\delta \mathbf{A}}{\delta M_A} = 0,$$

so wird

$$\int M \frac{\delta M}{\delta H} ds = -\int M y ds = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad a)$$

$$\int M \frac{\delta M}{\delta M_A} ds = -\int M ds = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad b)$$

Verschiebt man das Koordinatenkreuz von A nach C und nennt die neuen Koordinaten von M: ξ und η, so ist

$$x = l - \xi, \quad y = h - \eta,$$

$$\xi^2 = \frac{l^2}{h}\eta$$

und

$$M = M_0 + H\eta - \frac{1}{2} q \xi^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad c)$$

worin $M_0 = -M_A + \frac{1}{2} q l^2 - Hh$ bedeutet.

Die Gleichungen a) und b) werden dann:

$$\int M ds = 0, \quad \int M \eta ds = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad d)$$

oder

$$M_0 \int ds + \left(H - \frac{q l^2}{2h}\right)\int \eta ds = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad e)$$

$$M_0 \int \eta ds + \left(H - \frac{q l^2}{2h}\right)\int \eta^2 ds = 0 \quad . \quad . \quad . \quad f)$$

Da die in den Gleichungen e) und f) auftretenden drei Integrale bestimmte Werte besitzen, so können diese Gleichungen nur bestehen, wenn

$$M_0 = 0 \quad \text{und} \quad H - \frac{q l^2}{2h} = 0$$

ist. Daraus ergibt sich für die beiden gesuchten Größen:

$$H = \frac{q l^2}{2h} \quad \text{und} \quad M_A = M_B = 0.$$

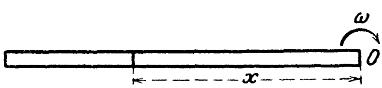
566. Die Gleichungen d) der vorigen Aufgabe werden mit Beachtung von c)

$$M_0 \int ds + H \int \eta\, ds = \frac{1}{2} q \int \xi^2\, ds,$$

$$M_0 \int \eta\, ds + H \int \eta^2\, ds = \frac{1}{2} q \int \xi^2 \eta\, ds.$$

Da die Beziehung $F(\xi^2, \eta) = 0$ gegeben ist, können diese fünf Integrale ermittelt und hieraus M_0 und H, somit auch M_A berechnet werden.

567. Ist O der Mittelpunkt der Drehung, F der Querschnitt des Stabes, dann hat die Trägheitskraft (Fliehkraft) im Querschnitt x die Größe



$$\frac{F\gamma}{g} \int_x^l \omega^2 \cdot \xi\, d\xi = \frac{F\gamma\omega^2}{2g}(l^2 - x^2).$$

Für $x = 0$ ist sie am größten: $\frac{F\gamma\omega^2}{2g} l^2$; setzt man dies gleich Fs, so wird die Umdrehungszahl

$$n = \frac{30}{\pi}\omega = \frac{30}{\pi l}\sqrt{\frac{2gs}{\gamma}}.$$

Die Dehnung des Stabes an der Stelle x ist

$$\varepsilon = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\text{Fliehkraft}}{FE},$$

woraus
$$\Delta dx = \frac{\gamma\omega^2}{2gE}(l^2 - x^2)\, dx,$$

und nach Integration:

$$\Delta x = \frac{\gamma\omega^2}{2gE}\left(l^2 x - \frac{x^3}{3}\right).$$

Für $x = l$ wird die gesuchte Längenänderung

$$\Delta l = \frac{2ls}{3E}.$$

568. Läßt man x um dx abnehmen, so wird F um dF größer. Dieser Zuwachs an Fläche kann um $s \cdot dF$ mehr tragen; tatsächlich hat der neue Querschnitt $F + dF$ etwas mehr Fliehkraft zu tragen, nämlich die Fliehkraft des Körperteilchens $F \cdot (-dx)$;

sie ist $\frac{\gamma}{g} F(-dx) \cdot x\omega^2$, worin γ das Einheitsgewicht ist. Setzt man sie gleich $s \cdot dF$, so wird

$$\frac{dF}{F} = -\frac{\gamma\omega^2}{sg} x\,dx = -a \cdot 2x\,dx,$$

woraus nach Integration das gewünschte Gesetz folgt

$$F = F_0 e^{a(l^2 - x^2)}.$$

Hierin ist $a = \frac{\gamma\omega^2}{2sg}$. Die Endfläche F_0 ist aus

$$F_0 \cdot s = \text{Fliehkraft in } l = \frac{G}{g} r\omega^2$$

zu entnehmen.

569. Man führe den Schnitt CD und bringe in C die Achsialkraft H (ebenso groß wie in D) und das Biegungsmoment M_C an. Statische Gleichung:

$$H = \int_{\psi=0}^{\psi=\frac{\pi}{2}} dm \cdot \omega^2 \varrho, \quad dm = \frac{G}{2r\pi g} r\,d\psi = \frac{G}{2\pi g} d\psi,$$

$$\varrho = r \sin\psi.$$

Man erhält:
$$H = \frac{Gr\omega^2}{2\pi g}.$$

Das Biegungsmoment an der Stelle M ist:

$$M = M_C - Hr(1 - \cos\varphi) + \frac{Gr^2\omega^2}{2\pi g}\int_{\psi=0}^{\psi=\varphi} \sin\psi(\cos\psi - \cos\varphi) \cdot d\psi$$

$$= M_C - Hr(1 - \cos\varphi) + \frac{Gr^2\omega^2}{2\pi g}\left(1 - \cos\varphi - \frac{1}{2}\sin^2\varphi\right)$$

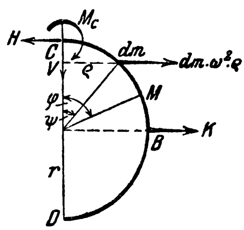
$$= M_C - \frac{Gr^2\omega^2}{4\pi g}\sin^2\varphi.$$

Die Formänderungsarbeit des halben Ringes ist nach Gleichung 134:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2EJ}\int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} M^2\,ds.$$

Setzt man $\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta M_C} = 0$, so erhält man

$$\int_0^\pi M \frac{\delta M}{\delta M_C} d\varphi = \int_0^\pi M\, d\varphi = 0,$$



und daraus:

$$M_C = \frac{G r^2 \omega^2}{8 \pi g}.$$

Die Biegungsmomente in B und D sind:

$$M_B = - M_C, \quad M_D = M_C.$$

Die Achsialkraft in B ist Null.

Um die Veränderungen der Durchmesser AB und CD zu finden, bringe man in C die Hilfskraft V an, die man später wieder gleich Null setzt. Das Biegungsmoment in M wird dann:

$$M = M_C - \frac{G r^2 \omega^2}{4 \pi g} \sin^2 \varphi - V r \sin \varphi.$$

Bildet man nun

$$\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta V} = \frac{1}{E J} \int_0^\pi M \frac{\delta M}{\delta V} d s = - \frac{r^2}{E J} \int_0^\pi M \sin \varphi\, d \varphi,$$

und setzt in M wieder $V = 0$, so bleibt

$$\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta V} = \frac{G r^4 \omega^2}{12 \pi g E J},$$

d. i. die Einsenkung von C oder die Verkürzung des Durchmessers CD.

Bringt man ebenso die Hilfskraft K in B an, so wird das Biegungsmoment in M:

$$M = M_C - \frac{G r^2 \omega^2}{4 \pi g} \sin^2 \varphi - \frac{K}{2} r (1 - \cos \varphi),$$

weil sich die Achsialkraft in C um $\frac{K}{2}$ vergrößert, und die Formänderungsarbeit

$$\mathbf{A} = 2 \frac{1}{2 E J} \int_0^{\pi/2} M^2 d s.$$

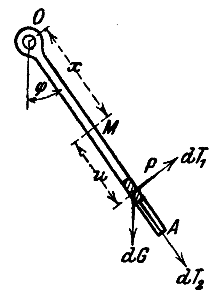
Bildet man $\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta K}$ und setzt nachträglich $K = 0$, so wird

$$\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta K} = \frac{G r^4 \omega^2}{24 \pi g E J}.$$

Die Vergrößerung des Durchmessers AB wird doppelt so groß, also

$$\frac{G r^4 \omega^2}{12 \pi g E J}.$$

570. Ein Massenelement bei P von der Länge du in der Entfernung u von M hat die Masse



$$dm = \frac{G}{gl} \cdot du,$$

und das Gewicht

$$dG = \frac{G}{l} du.$$

Wendet man das d'Alembertsche Prinzip an, so sind die Trägheitskräfte dieses Massenelementes:

$$dT_1 = (x + u) \lambda \, dm, \quad dT_2 = (x + u) \omega^2 \, dm,$$

worin $\omega = -\frac{d\varphi}{dt}$ die Winkelgeschwindigkeit,

$\lambda = -\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ die Winkelbeschleunigung des Stabes sind.

Bildet man die Momente dieser drei Kräfte dG, dT_1, dT_2 um die Stelle M für alle Massenelemente zwischen M und A, so erhält man das Biegungsmoment in M:

$$M = \int_{u=0}^{l-x} dG \cdot u \sin\varphi - \int_{u=0}^{l-x} dT_1 \cdot u$$

$$= \frac{G}{2l} \sin\varphi \, (l - x)^2 - \frac{G\lambda}{6gl} (l - x)(2l^2 - lx - x^2).$$

Um λ zu bestimmen, beachte man, daß das Biegungsmoment im Gelenke O den Wert Null annehmen muß, also wird mit $x = 0$:

$$\lambda = \frac{3g}{2l} \sin\varphi,$$

und somit $M = -\frac{G \sin\varphi}{4l^2} x (l - x)^2.$

Es wird am größten für die Stelle $x = \frac{l}{3}$; das Biegungsmoment an der Bruchstelle ist demnach:

$$_{\max}M = \frac{1}{27} G l \sin\varphi.$$

571. Die Querkraft an der Stelle M ist

$$Q = \int_{u=0}^{l-x} dG \cdot \sin\varphi - \int_{u=0}^{l-x} dT_1$$

$$= \frac{G}{l}\sin\varphi\,(l-x) - \frac{G\lambda}{2gl}(l^2 - x^2),$$

und wenn der oben gegebene Wert von λ eingesetzt wird:

$$Q = \frac{G\sin\varphi}{4l^2}(l-x)(l-3x).$$

Das mathematische Maximum der Querkraft tritt ein für $x = \frac{2}{3}l$,

nämlich $${}_{\max}Q = -\frac{G\sin\varphi}{12}.$$

Der größte Wert ist jedoch $Q = \frac{G\sin\varphi}{4}$ in O.

572. Die achsiale Zugkraft an der Stelle M ist:

$$P = \int_{u=0}^{l-x} dG \cdot \cos\varphi + \int_{u=0}^{l-x} dT_2$$

$$= \frac{G}{l}\cos\varphi\,(l-x) + \frac{G\omega^2}{2gl}(l^2 - x^2).$$

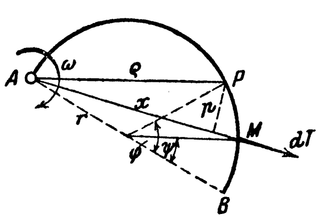
Beachtet man, daß für die Drehung des Stabes die Gleichung gilt:

$$\omega\,d\omega = \lambda\cdot(-d\varphi),\quad \lambda = \frac{3g}{2l}\sin\varphi,$$

so folgt mit Rücksicht auf den Anfangszustand $\omega = 0$, $\varphi = \alpha$:

$$\omega^2 = \frac{3g}{l}(\cos\varphi - \cos\alpha),$$

und $$P = \frac{G}{2l^2}(l-x)\,[2l\cos\varphi + 3(l+x)(\cos\varphi - \cos\alpha)].$$



573. Es sei P die Stelle des Drahtes, für welche wir das Biegungsmoment suchen wollen, M ein Element des Drahtes zwischen P und B, seine Masse

$$dm = \mu\cdot r\,d\psi,$$

seine Trägheitskraft

$$dT = dm\cdot x\,\omega^2,$$

worin $$x = 2r\cos\frac{\psi}{2}.$$

Das Biegungsmoment in P wird durch die Trägheitskräfte d T hervorgerufen; es ist $M = \int p \cdot dT$

und mit $\quad p = \varrho \sin(PAM) = 2r \cos\frac{\varphi}{2} \sin\frac{\varphi - \psi}{2}$

folgt $$M = 4\mu r^3 \omega^2 \cos\frac{\varphi}{2} \int\limits_{\psi=0}^{\psi=\varphi} \cos\frac{\psi}{2} \sin\frac{\varphi-\psi}{2}\, d\psi,$$

$$M = \mu r^3 \omega^2 \varphi \sin\varphi.$$

Den größten Wert erreicht dieses Biegungsmoment an der Stelle, wo

$$\operatorname{tg}\varphi = -\varphi \quad \text{ist.}$$

574. Durch das plötzliche Festhalten des Stabes wird die ganze Bewegungsenergie L in Formänderungsarbeit umgewandelt. Gestattet man die Annahme, daß die Stützpunkte A und B nichts von dieser aufnehmen (was jedenfalls nicht zutreffen wird), so wird in diesem ungünstigsten Falle die ganze Formänderungsarbeit vom Stabe allein aufzunehmen sein.

In Aufgabe 497 wurde für einen ähnlichen Fall bei ruhender Last P die Formänderungsarbeit gefunden:

$$A = \frac{P^2 l (l - l_1)^2}{6EJ}.$$

Setzt man diese gleich der Bewegungsenergie

$$L = \frac{1}{2} \frac{G}{g} l^2 \omega^2,$$

so erhält man in P jene statisch wirkende Kraft, welche die gleiche Formänderung hervorrufen würde, wie das plötzliche Festhalten. Hieraus erhält man das größte Biegungsmoment, das in B auftritt:

$$_{\max}M = P(l - l_1) = \omega \sqrt{\frac{3EJGl}{g}}.$$

575. Lösung übereinstimmend mit voriger Aufgabe, wenn G das Gewicht des Schwungringes, l dessen Halbmesser, l_1 die Entfernung der Stelle B von der Achse des Schwungrades und

$$\omega = \frac{n\pi}{30}.$$

576. Lösung ähnlich wie in Aufgabe 574. Ein Massenteilchen dm des Stabes in der Entfernung x von A besitzt die Bewegungsgröße (oder Stoßkraft) $x\omega\, dm$; die Belastung des plötzlich festgehaltenen Stabes ist also dem Abstande x proportional, wie in Aufgabe 498.

Setzt man in dem dort gefundenen Resultat $l_1 = \frac{2}{3} l$, so erhält man die Formänderungsarbeit:

$$A = \frac{41}{204120} \frac{a^2 l^7}{E J}.$$

Setzt man dies gleich der Bewegungsenergie des Stabes:

$$L = \frac{G l^2 \omega^2}{6 g},$$

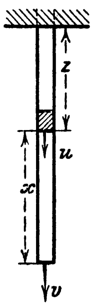
so erhält man $a^2 = \frac{34020}{41} \frac{G E J \omega^2}{g l^5}$ für jene statische Dreiecksbelastung, welche gleiche Formänderungsarbeit hervorruft wie das plötzliche Festhalten.

Das größte Biegungsmoment tritt nach Aufgabe 257 an der festgehaltenen Stelle B auf; es ist, wie dort gezeigt wurde,

$$_{\max}M = \frac{a}{6}(2 l^3 + l_1^3 - 3 l^2 l_1) = \frac{4}{81} a l^3$$

oder

$$_{\max}M = 0{,}4542\, \omega \sqrt{G E J l}.$$



577. Nennt man u die Geschwindigkeit des Seiles in der Entfernung z von oben, so darf angenommen werden, daß

$$u : v = \Delta z : \Delta l$$

und da die Längenänderungen Δz und Δl der Gleichung genügen:

$$\Delta z : \Delta l = z : l,$$

so darf $u = v \cdot \frac{z}{l}$ gesetzt werden.

Ein kleines Stück des Seiles ist folgenden Kräften ausgesetzt, wenn F sein Querschnitt ist: Eigengewicht $\gamma F dz$, Spannung $\sigma \cdot F$ nach abwärts, Spannung $(\sigma - d\sigma) \cdot F$ nach aufwärts, Trägheitskraft $\frac{\gamma F dz}{g} \cdot \frac{du}{dt}$ nach aufwärts. Die Summe dieser Kräfte Null gesetzt, gibt:

$$d\sigma = \frac{\gamma}{g} \cdot dz \cdot \frac{du}{dt} - \gamma \cdot dz$$

und da $\frac{dz}{dt} = u$ ist:

$$d\sigma = \frac{\gamma}{g}[u\,du - g\,dz],$$

woraus: $$\sigma = \sigma_1 + \frac{\gamma}{g}\left[\frac{u^2}{2} - g z\right].$$

Hierin ist σ_1 die Spannung für $z = 0$, $u = 0$, also für die höchste Stelle des Seiles.

Mit $z = l$, $\sigma = 0$ folgt
$$\sigma_1 = \gamma\left(l - \frac{v^2}{2g}\right)$$
und für die beliebige Stelle $x = l - z$
$$\sigma = \gamma x\left[1 - \frac{v^2}{2gl^2}(2l - x)\right].$$

578. Die Beschleunigung des Stabes ist
$$\gamma = g\left(\frac{P}{G} - f\right),$$
wenn f die Reibungszahl ist.

Würden alle Kräfte in der Achse des Stabes wirken, so würde im Querschnitt x eine gleichmäßige Spannung σ_s entstehen, deren Größe man aus der Gleichung erhält:
$$a^2 \sigma_s = M_x \cdot \gamma \text{ (Trägheitskraft)} + f \cdot G_x \text{ (Reibung)},$$
worin das Gewicht $G_x = G \cdot \frac{x}{l}$ und die Masse $M_x = \frac{G_x}{g}$ ist.

Man erhält: $$\sigma_s = \frac{P}{a^2} \cdot \frac{x}{l}.$$

Nun wirkt aber die Reibung exzentrisch am Arm $\frac{a}{2}$, sie erzeugt also am Boden überdies die Zugspannung
$$\frac{f \cdot G_x \frac{a}{2}}{W},$$
worin das Widerstandsmoment des Querschnitts $W = \frac{1}{6} a^3$ ist.

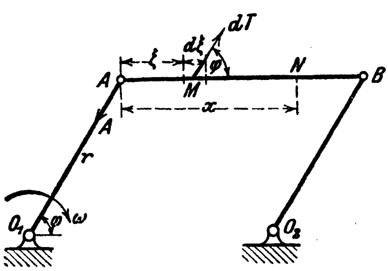
Die Gesamtspannung an der Unterseite des Stabes ist also
$$\frac{P}{a^2} \cdot \frac{x}{l} + \frac{3 f G_x}{a^2} = \frac{x}{l} \cdot \frac{P + 3fG}{a^2}.$$

Ebenso ist die Spannung an der Oberseite des Stabes
$$\frac{x}{l} \cdot \frac{P - 3fG}{a^2}.$$

Die größte Spannung erleidet der Stab am rechten unteren Ende, und zwar
$$\frac{P + 3fG}{a^2}.$$

579. Das Stück x der Kolbenstange hat die Masse $\frac{Gx}{gl}$. Die nach links gerichteten Trägheitskräfte $\frac{G_1}{g}\gamma$ des Kolbens und $\frac{Gx}{gl}\gamma$ des Stückes x geben mit K die Achsialkraft:
$$N = -K + \left(G_1 + \frac{G}{l}x\right)\frac{\gamma}{g}.$$

Für $x = 0$, also an der Verbindungsstelle von Kolben und Kolbenstange ist deren Beanspruchung am größten. Wenn jedoch die Beschleunigung γ sehr hohe Werte erreicht, wird das andere Ende der Kolbenstange $x = l$ am meisten beansprucht.



580. Da die Stange AB eine krummlinige Translationsbewegung ausführt, so hat jeder ihrer Punkte M dieselbe Beschleunigung wie A, also $\gamma = r\omega^2$ unter dem Winkel $180^0 - \varphi$ gegen AB geneigt. Die Trägheitskraft des Massenelementes in M ist also
$$dT = dm \cdot r\omega^2 \text{ und } dm = \frac{G}{gl}d\xi.$$

Um den Auflagerdruck in A (in Richtung der Kurbel) zu finden, bilde man die Momente von A und allen dT um B; dann ist:
$$-Al\sin\varphi + \int_0^l dT \cdot (l - \xi)\sin\varphi = 0,$$
woraus
$$A = \frac{Gr\omega^2}{2g}.$$

Das Biegungsmoment in N ist dann
$$M = -Ax\sin\varphi + \int_{\xi=0}^{x} dT(x - \xi)\sin\varphi,$$
$$M = -\frac{Gr\omega^2}{2gl}\sin\varphi \cdot x(l - x).$$

Es wird am größten in der Mitte der Stange, Null an deren Enden.

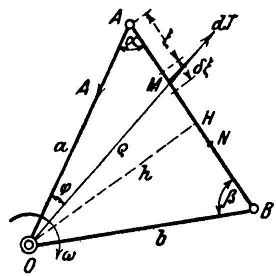
Die Achsialkraft in N ist:

$$N = A \cos \varphi - \int_{\xi=0}^{x} dT \cos \varphi = \frac{G r \omega^2}{2g} \cos \varphi \left(1 - \frac{2x}{l}\right)$$

und ebenso die Querkraft:

$$Q = A \sin \varphi - \int_{\xi=0}^{x} dT \sin \varphi = \frac{G r \omega^2}{2g} \sin \varphi \left(1 - \frac{2x}{l}\right).$$

Beide werden Null in der Mitte der Stange und am größten an deren Enden.



581. Das Massenelement der Stange

$$dm = \frac{G}{gl} \cdot d\xi$$

besitzt die Trägheitskraft

$$dT = dm \cdot \varrho \omega^2.$$

Um den Auflagerdruck in A zu finden (Richtung nach O), bilde man die Momente aller Trägheitskräfte um B; es ist

$$A\, l \sin \alpha = \int_0^l dT \cdot (l - \xi) \sin (\alpha + \varphi).$$

Da $\varrho \sin (\alpha + \varphi) = h$ (Höhe des Dreiecks), so folgt

$$A = \frac{G \omega^2 a}{2g}.$$

Das Biegungsmoment in N ist mit $AN = x$:

$$M = - A x \sin \alpha + \int_{\xi=0}^{\xi=x} dT \cdot (x - \xi) \sin (\alpha + \varphi),$$

woraus
$$M = - \frac{G \omega^2 h}{2gl} x (l - x).$$

Es ist am größten in der Mitte des Stabes, und zwar

$$_{\max} M = - \frac{G \omega^2 h l}{8g}.$$

Die Achsialkraft in N ist:

$$N = - A \cos \alpha + \int_{\xi=0}^{\xi=x} dT \cdot \cos (\alpha + \varphi),$$

Mit $\varrho \cos(\alpha + \varphi) = a \cos\alpha - \xi$ folgt:

$$N = -\frac{G\omega^2}{2gl}\left[a \cos\alpha (l - 2x) + x^2\right].$$

Sie wird am kleinsten für $x = a \cos\alpha$, d. h. für den Fußpunkt H der Höhe, und zwar

$$_{\min}N = -\frac{G\omega^2}{2g} \cdot \frac{ab}{l} \cos\alpha \cos\beta.$$

Die Querkraft in N ist endlich:

$$Q = A \sin\alpha - \int_{\xi=0}^{\xi=x} dT \cdot \sin(\alpha + \varphi)$$

und mit $\varrho \sin(\alpha + \varphi) = h$:

$$Q = \frac{G\omega^2 h}{2gl}(l - 2x).$$

Sie wird Null in der Mitte des Stabes.

582. Nennt man φ die veränderliche Neigung der Glocke zur Vertikalen, T ihr Trägheitsmoment für die durch O gehende, zur Bildfläche senkrechte Gerade, so ist die Winkelbeschleunigung um O:

$$\lambda = \frac{G r \sin\varphi}{T}, \quad OS = r$$

und mit Benützung der Gleichung

$$\omega \cdot d\omega = \lambda \cdot (-d\varphi)$$

die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega^2 = \frac{2Gr}{T}(\cos\varphi - \cos\alpha).$$

Sind die in O entstehenden Auflagerdrücke der Glocke: X (horizontal nach rechts), Y (nach aufwärts), so ist:

$$X = \frac{Gr}{g}(\omega^2 \sin\varphi + \lambda \cos\varphi),$$

$$Y = G + \frac{Gr}{g}(\omega^2 \cos\varphi - \lambda \sin\varphi),$$

welche Gleichungen durch Anbringen der Trägheitskräfte der Masse $\frac{G}{g}$ in S entstehen. Man erhält

$$X = G\frac{r^2}{\varrho^2 + r^2}\sin\varphi\,(3\cos\varphi - 2\cos\alpha),$$

$$Y = G\frac{r^2}{\varrho^2 + r^2}(2\cos^2\varphi - 2\cos\varphi\cos\alpha - \sin^2\varphi) + G,$$

wenn ϱ der Trägheitshalbmesser der Glocke in bezug auf die horizontale Schwerlinie, senkrecht zur Bildfläche, ist.

Der Druck X überträgt sich auf die Auflager A und B und erzeugt dort (nach Aufgabe 506) gleiche Auflagerdrücke (Achsialdrücke)

$$A = B = \frac{X}{2};$$

abwechselnd wirkt A ziehend, B drückend und umgekehrt.

Das durch Y entstehende Biegungsmoment in O ist

$$M = \frac{1}{4} Y l, \text{ wenn } AB = l.$$

Die größte Spannung im Querschnitt O ist, wenn von den Querkräften abgesehen wird:

$$\sigma = \frac{1}{4} \frac{Yl}{W} + \frac{X}{2F},$$

wenn W das Widerstandsmoment und F die Fläche des Querschnitts ist.

Bildet man $\frac{d\sigma}{d\varphi} = 0$, so erhält man für diejenige Stellung der Glocke, welche die größte Spannung hervorruft:

$$\frac{a \cos 2\varphi - \sin 2\varphi}{a \cos \varphi - \sin \varphi} = \frac{2}{3} \cos \alpha$$

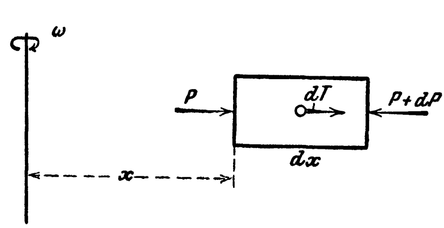
mit

$$a = \frac{2W}{Fl}.$$

583. Man untersuche die Kräfte an einem Stücke dx der Feder, dessen Länge sich um $d\xi$ ändert, während f die Längenänderung der ganzen Länge l sei.

Es ist $P = P_0 - k\frac{d\xi}{dx}$, worin $\frac{d\xi}{dx}$ die Dehnung, d. i. die Längenänderung der Längeneinheit vorstellt. Da die Dehnung der ganzen Feder $\frac{f}{l}$ und die Zusammendrückung einer zylindrischen Schraubenfeder unter der Kraft P: $f = \frac{64 n r^3}{G d^4} P$ ist, worin n die Anzahl der Windungen bezeichnet, so folgt

$$k = \frac{G d^4 l}{64 n r^3}.$$



Ist ferner m die Masse der ganzen Feder, $dm = \frac{m}{l} dx$ jene des kleinen Stückes, ξ die Änderung von x durch die Fliehkraft, so ist diese: $dm \cdot (x + \xi)\omega^2 = dT$ und aus $-dP + dT = 0$:

$$k \frac{d^2 \xi}{dx^2} = -\frac{m}{l}(x + \xi)\omega^2,$$

oder
$$\frac{d^2 \xi}{dx^2} = -\lambda^2 (x + \xi) \quad \text{mit} \quad \lambda^2 = \frac{m\omega^2}{kl}.$$

Die Lösung dieser Differenzialgleichung ist:

$$\xi = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x - x,$$

wie man sich durch zweimaliges Differenzieren überzeugen kann.

Die Konstanten C_1 und C_2 ergeben sich aus der Bemerkung, daß für $x = a$ und $x = b$: $\xi = 0$ ist, mit:

$$C_1 = \frac{a \sin \lambda b - b \sin \lambda a}{\sin \lambda l}, \quad C_2 = \frac{b \cos \lambda a - a \cos \lambda b}{\sin \lambda l}.$$

Bildet man nun $\frac{d\xi}{dx} = -C_1 \lambda \sin \lambda x + C_2 \lambda \cos \lambda x - 1$ und setzt die Konstanten ein, so erhält man den Federdruck an beliebiger Stelle x:

$$P = P_0 - k\frac{d\xi}{dx} = P_0 - \frac{k\lambda}{\sin \lambda l}[b \cos \lambda (x - a) - a \cos \lambda (b - x)] + k,$$

und für $x = a$ und $x = b$ die Federdrücke in A und B:

$$P_A = P_0 - \frac{G d^4}{64 n r^3}\left[b\left(\frac{\varphi}{\sin \varphi} - 1\right) + a\left(1 - \frac{\varphi}{\operatorname{tg} \varphi}\right)\right],$$

$$P_B = P_0 + \frac{G d^4}{64 n r^3}\left[b\left(1 - \frac{\varphi}{\operatorname{tg} \varphi}\right) + a\left(\frac{\varphi}{\sin \varphi} - 1\right)\right],$$

mit
$$\varphi = \lambda l = \frac{8 r \omega}{d^2}\sqrt{\frac{mnr}{G}}.$$

584. Nach voriger Aufgabe ist mit $P_0 = 0$:

$$P = -k\frac{d\xi}{dx} = -k(-C_1 \lambda \sin \lambda x + C_2 \lambda \cos \lambda x - 1)$$

und
$$\xi = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x - x.$$

Um hier die Konstanten zu ermitteln, setze man für $x = a$: $P = 0$ und für $x = b$: $\xi = 0$, woraus:

$$C_1 = \frac{b \cos \lambda a - \frac{1}{\lambda} \sin \lambda b}{\cos \lambda l}, \quad C_2 = \frac{b \sin \lambda a + \frac{1}{\lambda} \cos \lambda b}{\cos \lambda l}.$$

Hiermit ergibt sich die Verrückung des Punktes A

$$\xi_A = \frac{b}{\cos \lambda l} - \frac{\operatorname{tg} \lambda l}{\lambda} - a$$

und der Federdruck in B:

$$P_B = \frac{G d^4}{64 n r^3}\left[b \varphi \operatorname{tg} \varphi - l\left(\frac{1}{\cos \varphi} - 1\right)\right] \text{ mit } \varphi = \lambda l.$$

585. Da hier $v_0 = 0$, also auch $L_0 = 0$ ist, wird $n = 2$, d. h. die plötzlich auftretende Last Q ruft die gleiche Formänderung hervor wie die ruhende Last 2 Q. Vergl. Gleichung 140.

586. Nennt man f die statische Durchbiegung durch eine ruhende Last P, so wird beim plötzlichen Verschwinden von P zunächst f in entgegengesetzter Richtung auftreten; hiezu kommt dann noch 2f von der ebenfalls in entgegengesetzter Richtung auftretenden Last P (nach voriger Aufgabe); somit ist die ganze Durchbiegung $f + 2f$.

587. Nach Aufgabe 585 ist der dynamische Faktor bei plötzlich auftretender Belastung ohne Stoß: $n = 2$. Die Durchbiegung f in A ist also die gleiche, wie wenn die Last 2 P auf dem Ende des Trägers ruhen würde. Es ist demnach

$$f = \frac{2}{3} \frac{P l^3}{E J}.$$

588. Wenn der Draht reißt, bleibt von den beiden sich tilgenden Spannungen zu beiden Seiten des Ständers nur die eine übrig. Da sie plötzlich ohne Stoß auftritt, ist nach Aufgabe 585 der dynamische Faktor $n = 2$; die biegende Kraft des Ständers ist also 2 S.

589. Da die Entlastung plötzlich eintritt, ist der Fall so zu behandeln, wie wenn das Seil von unten nach oben mit $2 q_1$ für die Längeneinheit belastet würde; dynamischer Faktor $n = 2$.

Während also das Seil bei Schneebelastung den Durchhang h_1 hat, der mit Hilfe der Gleichung

$$4 h_1^3 F E = (q + q_1)(3 l^2 + 4 h_1^2) \cdot l^3$$

(vergl. Aufgabe 105) gerechnet werden kann, ist die Durchbiegung h_2 aus der Gleichung zu bestimmen:

$$4 h_2^3 F E = (q - q_1)(3 l^2 + 4 h_2^2) l^3.$$

590. Bei einem Bruch der Stange AC hat der Arm AB die Last P plötzlich allein zu tragen; der dynamische Faktor ist dann nach Aufgabe 585: $n = 2$ und die Berechnung der Last, die den Bruch des Armes AB herbeiführen wird, hat nach der Gleichung zu erfolgen:

$$\text{Biegungsmoment} = 2\,P\,l = K_b \cdot \frac{J}{e}.$$

Nach dem Resultat der Aufgabe 469, d) ist

$$J = 0{,}023\,B^4,$$

ferner $e = \frac{B}{2}$; mit $B = 4{,}6$ cm, $l = 40$ cm folgt hieraus

$$P = 144{,}5 \text{ kg}.$$

591. Nach Gleichung 18 ist die Verlängerung der prismatischen Stange in der Entfernung x vom höchsten Querschnitt unter einer Last Q

$$\varDelta x = \frac{Q\,x}{E\,F},$$

wenn vom Eigengewicht abgesehen wird, und die Verlängerung der ganzen Stange

$$\varDelta l = \frac{Q\,l}{E\,F}.$$

Somit wird nach den Gleichungen 136 und 138, wenn y und f durch $\varDelta x$ und $\varDelta l$ ersetzt werden:

$$G_1 = \Sigma \varDelta G \cdot \frac{\varDelta x}{\varDelta l} = \int_0^l \frac{G}{l}\,dx \cdot \frac{x}{l} = \frac{G}{2},$$

$$G_2 = \Sigma \varDelta G \cdot \left(\frac{\varDelta x}{\varDelta l}\right)^2 = \int_0^l \frac{G}{l}\,dx \cdot \left(\frac{x}{l}\right)^2 = \frac{G}{3}.$$

Die Formänderungsarbeit des am Ende ruhend hängenden Gewichtes Q wäre nach Gleichung 129:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\,\frac{Q^2\,l}{E\,F},$$

somit nach den Gleichungen 139 und 140 der dynamische Faktor:

$$n = 1 + \sqrt{1 + \frac{Q + G/_3}{(Q + G/_2)^2} \cdot \frac{2\,E\,F\,h}{l}}.$$

592. Dehnungsgeschwindigkeit der ruhenden Belastung: $0{,}0004 \frac{1}{\text{sek}}$; jene der dynamischen Belastung: $100 \frac{1}{\text{sek}}$.

593. Nach den Resultaten der Aufgabe 101 ist hier, wenn x der Abstand eines Querschnitts von F_0 und a die Höhe der Ergänzungspyramide ist:

$$\varDelta x = \frac{Q\,a\,x}{E\,F_0\,(a+x)}$$

und

$$\varDelta l = \frac{Q\,a\,l}{E\,F_0\,(a+l)}.$$

Setzt man in den Gleichungen 136 und 138: $\varDelta x$ und $\varDelta l$ statt y und f ein, ferner $\gamma F\,dx = \gamma F_0 \left(\frac{a+x}{a}\right)^2 dx$ statt $\varDelta G$, so wird

$$G_1 = \Sigma \varDelta G \cdot \frac{\varDelta x}{\varDelta l} = \frac{\gamma F_0 (a+l)}{a^2 l} \int_0^l x(a+x)\,dx = \frac{1}{6} \gamma F_1 l \frac{2l+3a}{l+a},$$

$$G_2 = \Sigma \varDelta G \cdot \left(\frac{\varDelta x}{\varDelta l}\right)^2 = \frac{\gamma F_0 (a+l)^2}{a^2 l^2} \int_0^l x^2\,dx = \frac{1}{3} \gamma F_1 l.$$

Ferner ist nach Aufgabe 481 die Formänderungsarbeit der ruhenden Last Q:

$$\mathsf{A} = \frac{Q^2 l}{2E\sqrt{F_0 F_1}}.$$

Mit Benützung der Gleichungen 139 und 140 wird dann der dynamische Faktor:

$$n = 1 + \sqrt{1 + \frac{Q + \frac{1}{3}\gamma F_1 l}{\left[Q + \frac{1}{6}\gamma F_1 l\left(\sqrt{\frac{F_0}{F_1}} + 2\right)\right]^2} \cdot 2E\sqrt{F_0 F_1} \cdot \frac{h}{l}}.$$

594. Man kann hier die Resultate der Aufgabe 591 benützen. Es ist

$$G_1 = \frac{G}{2}, \quad G_2 = \frac{G}{3},$$

wenn $G = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)l \cdot \gamma = 188{,}5$ kg das Gewicht des Hohlzylinders ist; der dynamische Faktor ist

$$n = 1 + \sqrt{1 + \frac{Q + G/_3}{(Q + G/_2)^2} \frac{2EFh}{l}} = 788,$$

wenn $Q = \frac{\pi}{4}\delta^2 l\gamma = 58{,}9$ kg, $F = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = 62{,}83$ cm^2, $l = 400$ cm, $h = 380$ cm eingesetzt wird.

Die statische Last, welche die Stoßlast ersetzt, ist also

$$nQ = 46\,421 \text{ kg},$$

und die größte im Hohlzylinder auftretende Spannung

$$\frac{nQ + G}{F} = 742 \text{ at.}$$

595. Die Bewegungsenergie im Augenblicke des Stoßes ist hier Gh; die Formänderungsarbeit eines nur seinem Gewicht ausgesetzten Stabes ist nach Aufgabe 477:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{6}\frac{G^2 l}{FE}.$$

Sodann gibt Gleichung 140 den dynamischen Faktor

$$n = 1 + \sqrt{1 + \frac{6FE}{G} \cdot \frac{h}{l}}.$$

Setzt man nun

$$nG = kF \quad \text{und} \quad G = Fl\gamma,$$

so bleibt schließlich

$$h = \frac{k}{6E}\left(\frac{k}{\gamma} - 2l\right).$$

596. Die elastische Linie dieses Trägers hat bei der Belastung Q am Ende die Gleichung 42:

$$y = \frac{1}{6}\frac{Q}{EJ}x^2(3l - x),$$

und die Durchbiegung am Ende

$$f = \frac{1}{3}\frac{Ql^3}{EJ}.$$

Setzt man nun in den Gleichungen 136 und 138: $\frac{G}{l}\,dx$ statt ΔG ein, so wird

$$G_1 = \Sigma \Delta G \cdot \frac{y}{f} = \frac{G}{2\,l^4}\int_0^l x^2 (3l - x) \cdot dx = \frac{3}{8}\,G,$$

$$G_2 = \Sigma \Delta G \cdot \left(\frac{y}{f}\right)^2 = \frac{G}{4\,l^7}\int_0^l x^4 (3l - x)^2 \cdot dx = \frac{33}{140}\,G.$$

Ferner ist die Formänderungsarbeit, welche eine ruhende Last Q am Ende des Trägers leistet:

$$\mathsf{A} = \frac{1}{2}\,Q f = \frac{1}{6}\,\frac{Q^2 l^3}{E J}.$$

Führt man diese Ausdrücke in die Gleichungen 139 und 140 ein, so bleibt für den dynamischen Faktor:

$$n = 1 + \sqrt{1 + \frac{Q + \frac{33}{140}\,G}{\left(Q + \frac{3}{8}\,G\right)^2} \cdot \frac{6 E J h}{l^3}}.$$

597. Man wende die Resultate der vorigen Aufgabe an. Es ist hier $Q = 100$ kg, $G = 30$ kg, $J = 10\,000$ cm^4, somit wird

$$n = 1 + \sqrt{1 + 7{,}81\,h}.$$

Das größte Biegungsmoment an der Einspannungsstelle ist, wenn $n\,Q$ die Last am Ende bedeutet, $n\,Q\,l + G\,\frac{l}{2} = k_b \cdot \frac{J}{e}$, worin $k_b = 265$ at, $e = 10$ cm gegeben ist. Man erhält hieraus $n = 13{,}1$; vergleicht man dies mit dem obenstehenden Ausdruck für n, so bleibt

$$h = 18{,}6 \text{ cm}.$$

598. Der Fall liegt genau so, wie wenn ein gleichförmig verteiltes Gewicht Q auf einen Balken vom Gewicht $G = 0$ fallen würde. Es ist also nach Gleichung 139: $L = Q h$; ferner nach Aufgabe 489 die Formänderungsarbeit eines gleichförmig belasteten Balkens: $\mathsf{A} = \frac{q^2 l^5}{240\,E J}$, somit mit $q\,l = Q$ der dynamische Faktor:

$$n = 1 + \sqrt{1 + \frac{240\,E J h}{Q\,l^3}}.$$

599. Nach Gleichung 47 ist die Gleichung der elastischen Linie eines in der Mitte mit Q belasteten Trägers für $a = b = \frac{l}{2}$:

$$y = \frac{Q}{48\,E\,J}\,x\,(3\,l^2 - 4\,x^2),$$

und die Durchbiegung in der Mitte

$$f = \frac{Q\,l^3}{48\,E\,J},$$

somit nach den Gleichungen 136 und 138:

$$G_1 = \Sigma \varDelta G \cdot \frac{y}{f} = 2\int\limits_0^{l/2} \frac{G}{l}\,dx \cdot \frac{x\,(3\,l^2 - 4\,x^2)}{l^3} = \frac{5}{8}\,G,$$

$$G_2 = \Sigma \varDelta G \cdot \left(\frac{y}{l}\right)^2 = 2\int\limits_0^{l/2} \frac{G}{l}\,dx \cdot \frac{x^2\,(3\,l^2 - 4\,x^2)^2}{l^6} = \frac{17}{35}\,G.$$

Die Formänderungsarbeit des ruhenden Gewichtes Q ist nach Aufgabe 485 für $a = b = \frac{l}{2}$:

$$\mathsf{A} = \frac{Q^2\,l^3}{96\,E\,J}.$$

Dann wird nach den Gleichungen 139 und 140:

$$n = 1 + \sqrt{1 + \frac{Q + 17/35\,G}{(Q + 5/8\,G)^2} \cdot \frac{96\,E\,J\,h}{l^3}}.$$

600. Nach voriger Aufgabe wird der dynamische Faktor

$$n = 1 + \sqrt{1 + 3{,}267\,h},$$

wenn die bekannten Werte eingesetzt werden. ($G = 217{,}2$ kg.)

Wenn der Träger unter der ruhenden Last $n\,Q$ in der Mitte brechen soll, so ist für das Biegungsmoment in der Mitte:

$$n\,Q \cdot \frac{l}{4} + \frac{1}{8}\,G\,l = K_b\,\frac{J}{e},$$

worin $e = 12$ cm. Man erhält hieraus $n = 11{,}8$ und durch Vergleich mit dem zuerst gefundenen Ausdruck für n:

$$h = 35{,}4 \text{ cm}.$$

601. Die elastische Linie des Trägers hat im Felde a die Gleichung 60:

$$y = \frac{1}{6}\,\frac{Q}{EJ}\,\frac{b^2 x^2}{l^3}\,[3al - (3a+b)x],$$

und die Durchbiegung unter der Last Q ist für $x = a$:

$$f = \frac{1}{3}\,\frac{Q}{EJ}\,\frac{a^3 b^3}{l^3}.$$

Die Gleichungen 136 und 138 geben dann mit $\frac{G}{l}dx$ statt ΔG:

$$G_1 = \Sigma\Delta G\cdot\frac{y}{f} = \frac{G}{2a^3bl}\int\limits_0^a dx\,[3al - (3a+b)x]\,x^2$$

$$+ \frac{G}{2ab^3l}\int\limits_0^b dx'\,[3bl - (3b+a)x']\,x'^2 = \frac{Gl^2}{8ab}.$$

$$G_2 = \Sigma\Delta G\cdot\left(\frac{y}{f}\right)^2 = \frac{G}{4a^6b^2l}\int\limits_0^a dx\,[3al - (3a+b)x]^2 x^4$$

$$+ \frac{G}{4a^2b^6l}\int\limits_0^b dx'\,[3bl - (3b+a)x']^2\cdot x'^4 =$$

$$= \frac{Gl^2}{140\,ab}\left(1 + \frac{3l^2}{ab}\right).$$

Ferner ist nach Aufgabe 493 die Formänderungsarbeit durch eine ruhende Last Q:

$$A = \frac{1}{6}\,\frac{Q^2 a^3 b^3}{EJl^3}.$$

Somit ist mit Hilfe der Gleichungen 139 und 140 der dynamische Faktor:

$$n = 1 + \sqrt{1 + \frac{Qa^2b^2 + \frac{1}{140}Gl^2(ab + 3l^2)}{\left(Qab + \frac{1}{8}Gl^2\right)^2}\cdot\frac{6EJl^3}{a^3b^3}\cdot h}.$$

602. Nach voriger Aufgabe wird der dynamische Faktor

$$n = 1 + \sqrt{1 + 260{,}2\,h},$$

wenn die gegebenen Werte: $Q = 400$ kg, $G = 954$ kg, $a = 100$ cm,

24*

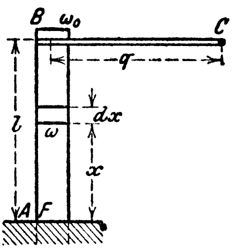
$b = 400$ cm, $J = \frac{\pi}{4}(15^4 - 12^4) = 23\,463$ cm^4 eingeführt werden. Das größte Biegungsmoment ist nach den Gleichungen 59 und 64 mit der Einzellast nQ und dem Eigengewicht G:

$$nQ \cdot \frac{a b^2}{l^2} + \frac{1}{12} G l = k_b \cdot \frac{J}{e},$$

woraus mit $k_b = 700$ at, $e = 15$ cm: $n = 41{,}2$. Durch Vergleich mit dem zuerst gefundenen Werte von n ergibt sich schließlich:

$$h = 6{,}2 \text{ cm}.$$

603. Setzt man in den Gleichungen 136 und 138 P statt G, $x\vartheta$ statt y und $l\vartheta$ statt f, worin ϑ der Verdrehungsbogen der Welle für die Längeneinheit ist, so werden mit $\Delta G = \gamma F dx$ die nach B reduzierten Gewichte der Welle in Scheibenform:



$$P_1 = \frac{P}{2} \text{ und } P_2 = \frac{P}{3}$$

(vergleiche Aufgabe 591).

Die Geschwindigkeit der Stoßstelle nach dem Stoße ist dann nach Gleichung 137:

$$v_0 = \frac{Q}{Q + G_1} \sqrt{2gh},$$

worin $G_1 = \frac{P_1 r^2}{2q^2} = \frac{P r^2}{4 q^2}$ das an die Stoßstelle C reduzierte Gewicht P_1 der Scheibe in B oder das reduzierte Gewicht der Welle ist. Nennt man ferner ω und ω_0 die Winkelgeschwindigkeiten, die der Welle an den Stellen x und l durch den Stoß erteilt werden, so ist

$$\omega : \omega_0 = x : l$$

und die Bewegungsenergie durch den Stoß

$$L_0 = \frac{1}{2}\int dT \cdot \omega^2 = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma F dx}{g} \cdot r^2 \cdot \frac{\omega_0^2}{l^2} x^2$$

oder
$$L_0 = \frac{1}{4} \frac{P_2}{g} r^2 \omega_0^2 = \frac{1}{12} \frac{P r^2 \omega_0^2}{g}.$$

Nun ist $v_0 = q\omega_0$, somit bleibt

$$L_0 = \frac{8}{3} \frac{P Q^2 r^2 q^2 h}{(4Qq^2 + Pr^2)^2}.$$

Die durch die ruhende Last Q erzeugte Formänderungsarbeit ist nach den Gleichungen 131 und 111:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} M_d l \vartheta = \frac{1}{\pi} \frac{M_d^2 l}{G r^4},$$

worin $M_d = Q q$ ist. Für die Berechnung des dynamischen Faktors kann auch hier die Gleichung 140 benützt werden; mit obigen Werten von L_0 und $\mathbf{A}$ wird er

$$n = 1 + \sqrt{1 + \frac{8\pi}{3} \frac{P G r^6 h}{(4 Q q^2 + P r^2)^2 l}}.$$

Die größte in der Welle auftretende Spannung ist dann nach Gleichung 110:

$$\max \tau = \frac{2}{\pi} \frac{\text{Dynamisches Moment}}{r^3} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{n Q q}{r^3},$$

worin n obigen Wert hat.

604. Nach dem Arbeitsprinzip ist die Änderung der Bewegungsenergie gleich der Summe der äußeren und der inneren Arbeit, also

$$L - L_0 = \frac{1}{2} \frac{Q + G_2}{g} (v^2 - v_0^2) = Q y - \mathbf{A},$$

wenn G_2 das an die Stoßstelle reduzierte Gewicht des Balkens (vergl. Gleichung 138), v_0 die Anfangsgeschwindigkeit der Stoßstelle, v ihre Geschwindigkeit nach der Zeit t, y die dynamische Durchbiegung der Stoßstelle und $\mathbf{A}$ die der Durchbiegung y entsprechende Formänderungsarbeit ist. Letztere ist nach Aufgabe 483, wenn dort f durch y ersetzt wird:

$$\mathbf{A} = \frac{24 E J}{l^3} \cdot y^2 = \frac{k}{2} y^2,$$

somit $$\frac{Q + G_2}{g} (v^2 - v_0^2) = 2 Q y - k y^2$$

und differenziert:

$$\frac{Q + G_2}{g} v\,dv = (Q - k y)\,dy.$$

Nun gilt für die Bewegung des Balkenmittelpunktes:

$$v\,dv = \frac{d^2 y}{d t^2} \cdot dy,$$

woraus $$\frac{Q + G_2}{g} \frac{d^2 y}{d t^2} = Q - k y.$$

Die Durchbiegung des Balkens bei ruhender Last Q ist nach Gleichung 49

$$f = \frac{Q l^3}{48 E J} = \frac{Q}{k};$$

es ist also $\frac{d^2 y}{d t^2} = \lambda^2 (f - y)$, wenn $\lambda = \sqrt{\frac{k g}{Q + G_2}}$.

Die Integration dieser Gleichung liefert

$$y = A \sin \lambda t + B \cos \lambda t + f.$$

Um die Konstanten A und B zu bestimmen, bilde man

$$v = \frac{d y}{d t} = A \lambda \cos \lambda t - B \lambda \sin \lambda t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad a)$$

und setze für den Beginn der Bewegung:

$$t = 0, \quad y = 0, \quad v = v_0,$$

so wird $A = \frac{v_0}{\lambda}, \quad B = -f$

und somit die gesuchte Bewegungsgleichung:

$$y = \frac{v_0}{\lambda} \sin \lambda t + f (1 - \cos \lambda t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad b)$$

worin $\lambda^2 = \frac{g}{f} \cdot \frac{Q}{Q + G_2}$

und nach Aufgabe 599:

$$G_2 = \frac{17}{35} G \text{ ist.}$$

Um die größte Durchbiegung zu erhalten, setze man in Gleichung a):

$$v = \frac{d y}{d t} = 0,$$

woraus $\operatorname{tg} \lambda t = -\frac{v_0}{f \lambda} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad c)$

Gleichung b) liefert dann:

$$f_1 = f \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{v_0}{f \lambda}\right)^2}\right].$$

Der Ausdruck in der Klammer ist der „dynamische Faktor“ (vergl. Gleichung 135). Die Anfangsgeschwindigkeit ist

$$v_0 = \frac{Q}{Q + G_1} \sqrt{2 g h},$$

worin h die Fallhöhe des Gewichtes Q und nach Aufgabe 599:

$$G_1 = \frac{5}{8} G$$

ist.

605. Die Gleichung c) der vorigen Aufgabe wird erfüllt von λt, $\lambda t + \pi$, $\lambda t + 2\pi$ u. s. f. Die Dauer einer Schwingung ist also

$$T = \frac{\pi}{\lambda}$$

und die Anzahl der Schwingungen in einer Sekunde

$$z = \frac{1}{T} = \frac{\lambda}{\pi} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{g}{f} \cdot \frac{Q}{Q + G_2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad a)$$

Für den gegebenen Träger wird

$$z = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{48\,E\,J}{l^3} \cdot \frac{g}{Q + \frac{17}{35} G}}.$$

606. Verwende die Gleichung a) der vorigen Aufgabe. Es ist nach Gleichung 43: $f = \frac{1}{3}\,\frac{Q\,l^3}{E\,J}$ und nach Aufgabe 596:

$$G_2 = \frac{33}{140} G, \text{ somit die Schwingungszahl}$$

$$z = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{3\,E\,J}{l^3} \cdot \frac{g}{Q + \frac{33}{140} G}}.$$

607. Mit Hilfe des Resultates der Aufgabe 605 folgt:

$$J = \frac{\pi^2 m^2 x^2 l^3}{48\,E\,g}\left(Q + \frac{17}{35} G\right).$$

608. Die Aufgabe ist auf Aufgabe 598 zurückzuführen, wenn die Fallhöhe h Null gesetzt wird. Der dynamische Faktor ist dann $n = 2$, d. h. die größte Durchbiegung wird so groß, wie wenn der Träger das doppelte Gewicht hätte, also nach Gleichung 57:

$$\max y = \frac{5}{384}\,\frac{2\,q\,l^4}{E\,J} = \frac{5}{192}\,\frac{q\,l^4}{E\,J}.$$

Um die Schwingungsdauer zu bestimmen, gehen wir ähnlich wie in Aufgabe 604 von der Gleichung aus:

$$L - L_0 = \frac{1}{2}\,\frac{G_2}{g}\,v^2 = G_1 y - \mathbf{A}.$$

Die Anfangsgeschwindigkeit ist Null, die nach der Mitte reduzierten Gewichte G_1 und G_2 des Trägers sind nach den Gleichungen 136 und 138:

$$G_1 = \Sigma \Delta G \frac{y}{f} = \frac{16}{5} \frac{G}{l^5} \int_0^l (l^3 x - 2 l x^3 + x^4)\, dx = \frac{16}{25} G,$$

$$G_2 = \Sigma \Delta G \left(\frac{y}{f}\right)^2 = \left(\frac{16}{5}\right)^2 \frac{G}{l^9} \int_0^l (l^3 x - 2 l x^3 + x^4)^2\, dx$$

$$= \frac{3968}{7875} G,$$

mit Benützung der Gleichung 56:

$$y = \frac{q}{24 E J} (l^3 x - 2 l x^3 + x^4)$$

für die elastische Linie. Ferner ist nach Aufgabe 490:

$$\mathbf{A} = \frac{3072}{125} \frac{E J y^2}{l^3},$$

wenn dort y statt f gesetzt wird. Wie in Aufgabe 604 erhält man

$$\frac{G_2}{g} v^2 = 2 G_1 y - k y^2$$

und
$$\frac{d^2 y}{d t^2} = \lambda^2 (f - y),$$

wenn
$$k = \frac{6144}{125} \frac{E J}{l^3}, \quad f = \frac{5}{384} \frac{q l^4}{E J},$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{k g}{G_2}}$$

bezeichnet wird. Durch Integration erhält man hieraus, da die Konstanten $A = 0$, $B = -f$ werden

$$y = f (1 - \cos \lambda t).$$

Die Schwingungsdauer T des Balkens erhält man sodann aus

$$\lambda T = \pi$$

mit
$$T = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{12} \sqrt{\frac{31}{21} \frac{G l^3}{E J g}}.$$

609. Lösung wie in Aufgabe 604. Man findet die Bewegungsgleichung

$$\frac{1}{2}\frac{Q+G_2}{g}(v^2-v_0^2)=Qy-\frac{EF}{2l}y^2$$

und

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\lambda^2(f-y),$$

worin: $f=\frac{Ql}{EF}$ die Verlängerung des Stabes bei ruhendem Gewicht Q, $\lambda=\sqrt{\frac{EFg}{(Q+G_2)l}}$ und nach Aufgabe 591: $G_2=\frac{G}{3}$ ist. Man erhält wie in Aufgabe 604:

$$y=\frac{v_0}{\lambda}\sin\lambda t+f(1-\cos\lambda t),$$

worin v_0, die Geschwindigkeit, aus

$$v_0(Q+G_1)=Q\sqrt{2gh}$$

zu entnehmen ist. Nach Aufgabe 591 ist $G_1=\frac{G}{2}$. Die größte Längenänderung des Stabes erhält man aus $\frac{dy}{dt}=0$ wie in Aufgabe 604 mit

$$_{\max}y=f\left[1+\sqrt{1+\left(\frac{v_0}{f\lambda}\right)^2}\right]$$

oder

$$_{\max}y=f\left[1+\sqrt{1+\frac{Q+G/_3}{(Q+G/_2)^2}\cdot\frac{2EFh}{l}}\right].$$

Der Faktor von f ist der „dynamische Faktor“, der schon in Aufgabe 591 gefunden wurde.

Die größte Geschwindigkeit besitzt das Ende des Stabes, wenn $\frac{d^2y}{dt^2}=0$ oder $y=f$ ist. Es wird

$$_{\max}v^2=Q^2g\left[\frac{2h}{(Q+G_1)^2}+\frac{l}{EF(Q+G_2)}\right].$$

610. Der plötzlichen Belastung wegen ist der dynamische Faktor $n=2$ (vergl. Aufgabe 585), somit die größte Längenänderung des Stabes

$$_{\max}y=2f=\frac{Gl}{EF}$$

(auch aus dem Resultat der vorigen Aufgabe mit $h=0$).

Die Schwingungsgleichung des unteren Endes des Stabes wird

$$y = f(1 - \cos \lambda t)$$

mit $\lambda = \sqrt{\frac{E F g}{G_2 l}} = \sqrt{\frac{3 E F g}{G l}}$ (vergl. vorige Aufgabe).

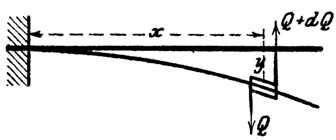
Die Schwingungsdauer ist

$$T = \frac{\pi}{\lambda} = \pi \sqrt{\frac{G l}{3 E F g}}.$$

Die größte Geschwindigkeit besitzt das Ende des Stabes für $\frac{d^2 y}{d t^2} = 0$, woraus $y = f = \frac{G l}{2 E F}$ und

$$\max v^2 = \frac{3}{4} \frac{G l g}{E F}.$$

611. Es sei m die Masse des Stabes, $dm = \frac{m}{l} \cdot dx$ die Masse eines Teilchens, an dessen Endquerschnitten die Querkräfte Q und $Q + dQ$ wirken; dann bleibt dQ übrig für die Beschleunigung der Bewegung und es ist



$$dm \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = dQ.$$

Nennt man M das Biegungsmoment, so ist bekanntlich

$$Q = \frac{dM}{dx} \text{ und nach Gleichung 40: } \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{M}{E J},$$

woraus sich ergibt:

$$\frac{m}{l} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + E J \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \quad \dots\dots \quad a)$$

die verlangte Schwingungsgleichung.

Die Auflösung derselben lautet:

$$y = \sin \lambda t [a \cos \omega x + b \sin \omega x + A e^{\omega x} + B e^{-\omega x}] \quad . \quad b),$$

wie man sich durch zweimaliges Differenzieren nach t und viermaliges Differenzieren nach x überzeugen kann.

Um die vier Integrations-Konstanten a, b, A, B zu ermitteln, benütze man die Bemerkung, daß für $x = 0$: $y = 0$ und $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ sein muß.

Man erhält dadurch die Beziehungen:

$$a + A + B = 0 \quad \text{und} \quad b + A - B = 0 \quad . \quad . \quad . \quad c).$$

Am Ende des Trägers ist sowohl das Biegungsmoment M als auch die Querkraft Q gleich Null oder es ist für $x = l$:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0.$$

Hieraus erhält man die weiteren Beziehungen:

$$\left.\begin{array}{l} -a \cos \omega l - b \sin \omega l + A e^{\omega l} + B e^{-\omega l} = 0 \\ a \sin \omega l - b \cos \omega l + A e^{\omega l} - B e^{-\omega l} = 0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad d).$$

Entfernt man aus den vier Gleichungen c) und d) die Konstanten a, b, A, B, so bleibt

$$\cos \omega l (e^{\omega l} + e^{-\omega l}) + 2 = 0;$$

der kleinste Wert, der dieser Gleichung genügt (Grundschwingung), ist

$$\omega l = 1{,}87.$$

Setzt man die Werte von $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ und $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$, wie man sie aus Gleichung b) erhält, in a) ein, so bleibt

$$-\frac{m}{l} \cdot \lambda^2 y + E J \cdot y \omega^4 = 0,$$

woraus

$$\lambda = \omega^2 \sqrt{\frac{E J l}{m}}$$

und für die Grundschwingung

$$\lambda = 3{,}50 \sqrt{\frac{E J}{l^3 m}}.$$

Nennt man T die Dauer einer Schwingung, so ist aus Gleichung b):

$$\lambda T = \pi$$

und die Anzahl der Grundschwingungen in einer Sekunde

$$z = \frac{\lambda}{\pi} = 1{,}113 \sqrt{\frac{E J}{l^3 m}}.$$

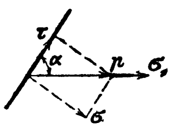
Setzt man in dem Resultat der Aufgabe 606: $Q = 0$, so erhält man als angenäherte Lösung der vorliegenden Aufgabe:

$$z = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{3 E J g}{l^3 G} \cdot \frac{140}{33}} = 1{,}135 \sqrt{\frac{E J}{l^3 m}}.$$

Formelsammlung.

Diese Sammlung enthält nur jene Formeln, die bei Lösung der Aufgaben benötigt werden und erhebt deshalb keinen Anspruch auf Vollständigkeit.

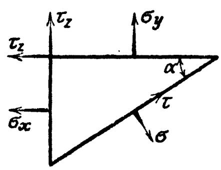
Der lineare Spannungszustand.



Ist σ_1 die Hauptspannung, so ist

$$\left.\begin{array}{l} \sigma = \sigma_1 \sin^2 \alpha \text{ die Normalspannung,} \\ \tau = \sigma_1 \sin \alpha \cos \alpha \text{ die Schubspannung,} \\ p = \sigma_1 \sin \alpha \text{ die Gesamtspannung} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad 1$$

einer Ebene, die unter α gegen σ_1 geneigt ist.



Der ebene Spannungszustand.

Sind σ_x, σ_y, τ_z die Spannungen zweier zu einander senkrechten Ebenen, so ist für eine beliebige dritte Ebene:

$$\left.\begin{array}{l} \sigma = \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha + \tau_z \sin 2\alpha \\ \tau = (\sigma_x - \sigma_y) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_z \cos 2\alpha \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2$$

Sind σ_1 und σ_2 die Hauptspannungen eines Punktes, α die Neigung einer Ebene gegen σ_1, so erleidet diese die Spannungen:

$$\left.\begin{array}{l} \sigma = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha \\ \tau = (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \cos \alpha \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3$$

Der räumliche Spannungszustand.

Sind σ_1, σ_2, σ_3 die drei Hauptspannungen eines Punktes, p die Spannung einer Ebene, deren Normale die Richtungskonstanten a, b, c im Achsenkreuz der Hauptspannungen besitzt, so sind die Projektionen von p auf die Achsen:

$$\left.\begin{array}{ll} & p_x = a\sigma_1, \quad p_y = b\sigma_2, \quad p_z = c\sigma_3 \\ \text{und} & p^2 = a^2\sigma_1{}^2 + b^2\sigma_2{}^2 + c^2\sigma_3{}^2 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4$$

während die Normalspannung dieser Ebene:

$$\sigma = a^2\sigma_1 + b^2\sigma_2 + c^2\sigma_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5$$

und ihre Schubspannung:

$$\tau^2 = p^2 - \sigma^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6$$

Ist der Spannungszustand eines Punktes durch Angabe der drei Normalspannungen σ_x σ_y σ_z und der drei Schubspannungen τ_x τ_y τ_z von drei senkrechten Ebenen gegeben, so sind die drei

Hauptspannungen σ und ihre Richtungskonstanten a b c aus folgenden Gleichungen zu entnehmen:

$$\left.\begin{aligned} a(\sigma_x - \sigma) + b\tau_z + c\tau_y &= 0 \\ b(\sigma_y - \sigma) + c\tau_x + a\tau_z &= 0 \\ c(\sigma_z - \sigma) + a\tau_y + b\tau_x &= 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 7$$

Formänderungen.

ε = Dehnung = Verhältnis der Änderung der Entfernung zweier Punkte zur ursprünglichen Entfernung.

γ = Schiebung = Änderung des rechten Winkels, den zwei Ebenen vor der Formänderung miteinander einschlossen.

Hookesches Gesetz für Normalspannungen:

$$\sigma = E\varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots \quad 8$$

für Schubspannungen:

$$\tau = G\gamma \quad \ldots\ldots\ldots \quad 9$$

E, G: Elastizitätszahlen für Zug (Druck) bezw. Schub.

Sind ε_x ε_y ε_z die Dehnungen in drei senkrechten Richtungen XYZ, γ_x γ_y γ_z die Schiebungen der drei senkrechten Ebenen YZ, ZX, XY, so ist die Dehnung in der Richtung a, b, c:

$$\varepsilon = a^2\varepsilon_x + b^2\varepsilon_y + c^2\varepsilon_z + bc\gamma_x + ca\gamma_y + ab\gamma_z \quad \ldots \quad 10$$

Sind X, Y, Z die Richtungen der Hauptdehnungen ε_1 ε_2 ε_3, so ist

$$\varepsilon = a^2\varepsilon_1 + b^2\varepsilon_2 + c^2\varepsilon_3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 11$$

Ferner ist

e = Raumdehnung = Verhältnis der Änderung eines Rauminhaltes zum ursprünglichen Rauminhalt

$$= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad \ldots\ldots \quad 12$$

Isotrope Körper.

$$G = \frac{m}{2(m+1)} E \quad \ldots\ldots\ldots \quad 13$$

worin m das Verhältnis der Längsdehnung zur Quer-Zusammenziehung ist. (Poissonsche Konstante.)

Hauptspannungen:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{m}{m+1} E\left(\varepsilon_1 + \frac{e}{m-2}\right) \\ \sigma_2 &= \frac{m}{m+1} E\left(\varepsilon_2 + \frac{e}{m-2}\right) \\ \sigma_3 &= \frac{m}{m+1} E\left(\varepsilon_3 + \frac{e}{m-2}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 14$$

Hauptdehnungen:

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E}\left(\sigma_1 - \frac{\sigma_2+\sigma_3}{m}\right)\\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}\left(\sigma_2 - \frac{\sigma_3+\sigma_1}{m}\right)\\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E}\left(\sigma_3 - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{m}\right)\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 15$$

Festigkeitszahlen.

A = Arbeitsfestigkeit ist die Spannung, bei der das Material erst nach sehr oft wiederholtem Wechsel der Belastung zwischen $_{\max}\sigma$ und $_{\min}\sigma$ reißt.

U = Ursprungsfestigkeit, wenn $_{\min}\sigma = 0$.

S = Schwingungsfestigkeit, wenn $_{\min}\sigma = - {}_{\max}\sigma$.

K_z = Zugfestigkeit, statische Festigkeit, wenn $_{\min}\sigma = {}_{\max}\sigma$.

Mittelwerte nach Versuchen von Wöhler und Bauschinger:

$$\left.\begin{array}{llll}\text{Schweißeisen:} & K_z = 3640 \text{ at}, & U = 2160 \text{ at}, & S = 1180 \text{ at},\\ \text{Flußeisen:} & K_z = 4200 \text{ at}, & U = 2400 \text{ at}, & S = 1320 \text{ at},\\ \text{Flußstahl:} & K_z = 6040 \text{ at}, & U = 2900 \text{ at}, & S = 1540 \text{ at}.\end{array}\right\} \quad 16$$

Zulässige Spannung dieser drei Materialien:

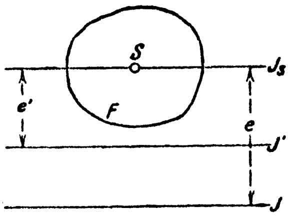
$$k_z \text{ (Zug)} = k \text{ (Druck)} = \frac{2}{7} A \text{ (Arbeitsfestigkeit)} \quad . \ . \quad 17$$

Zugfestigkeit.

Längenänderung eines prismatischen Stabes von der Länge l, dem Querschnitt F und dem Gewicht G:

$$\Delta l = \frac{\left(P + \frac{G}{2}\right)}{E F} l \quad \ldots\ldots \quad 18$$

wenn P die Belastung am Ende des Stabes ist.



Trägheitsmomente und Zentrifugalmomente von Flächen.

$$J = J_s + F e^2 \quad \ldots \quad 19$$

$$J = J' + F(e^2 - e'^2) \quad . \quad 20$$

Rechteck in bezug auf die Kante b:

$$J = \frac{1}{3} b h^3 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 21$$

in bezug auf die Schwerlinie parallel zu b:

$$J = \frac{1}{12} b h^3 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 22$$

Dreieck in bezug auf die Grundlinie b:

$$J = \frac{1}{12} b h^3 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 23$$

in bezug auf eine Gerade durch die Spitze, parallel zu b:

$$J = \frac{1}{4} b h^3 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 24$$

Kreis in bezug auf den Durchmesser 2r:

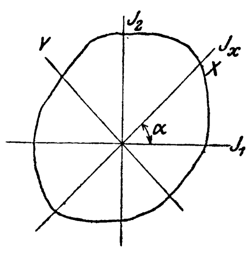
$$J = \frac{\pi}{4} r^4 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 25$$

Ellipse mit den Halbachsen a und b in bezug auf die Achse 2a:

$$J = \frac{\pi}{4} a b^3 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 26$$

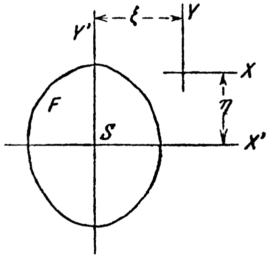
Trägheitshalbmesser:

$$i = \sqrt{\frac{J}{F}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 27$$



$$\left.\begin{aligned} J_x &= J_1 \cos^2 \alpha + J_2 \sin^2 \alpha \\ J_{xy} &= (J_1 - J_2) \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned}\right\} \quad . \quad 28$$

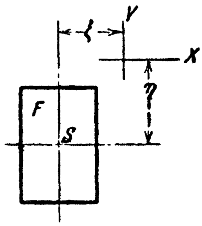
wenn J_1 und J_2 die Hauptträgheitsmomente sind.



Zentrifugalmoment:

$$J_{xy} = J'_{xy} + F \xi \eta \quad . \quad . \quad . \quad 29$$

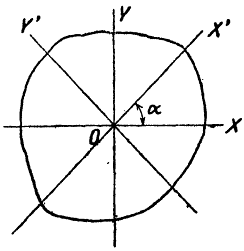
wenn S der Schwerpunkt der Fläche F ist.



$$J_{xy} = F\,\xi\,\eta \quad \ldots\ldots\ldots \quad 30$$

$$J'_x = J_x \cos^2\alpha + J_y \sin^2\alpha - J_{xy} \sin 2\alpha \quad \ldots \quad 31$$

$$J'_{xy} = (J_x - J_y) \sin\alpha \cos\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha \quad \ldots \quad 32$$



Sind X'Y' die Hauptachsen, so gilt:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 J_{xy}}{J_y - J_x} \quad \ldots \quad 33$$

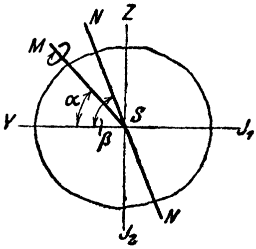
Hauptträgheitsmomente:

$$\left.\begin{aligned} J_1 &= \frac{J_x + J_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_y - J_x}{2}\right)^2 + J^2_{xy}} \\ J_2 &= \frac{J_x + J_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_y - J_x}{2}\right)^2 + J^2_{xy}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 34$$

Für je zwei zugeordnete Achsen der Trägheitsellipse ist

$$J_{xy} = 0.$$

Biegungsspannung und Biegungsachse (Null-Linie).



M = Biegungsmoment,

NN = Null-Linie.

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{J_1}{J_2} \cdot \operatorname{tg}\alpha \quad \ldots \quad 35$$

Krümmung der elastischen Linie:

$$\frac{1}{\varrho} = \pm \frac{M}{E} \sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{J_1^2} + \frac{\sin^2\alpha}{J_2^2}} \quad \ldots\ldots \quad 36$$

Spannung an der Stelle y, z:

$$\sigma = M\left(\frac{y \sin\alpha}{J_2} - \frac{z \cos\alpha}{J_1}\right) \quad \ldots\ldots \quad 37$$

Speziell:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \sigma = -\frac{M_z}{J} \quad \ldots\ldots \quad 38$$

$$\frac{1}{\varrho} = \pm \frac{M}{E J} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 39$$

Angenäherte Gleichung der elastischen Linie:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = -\frac{M}{E J} = -iM \quad \ldots\ldots\ldots \quad 40$$

Zulässige Biegungsspannung für Gußeisen nach Bach:

$$k_b = \mu_0 k_z \sqrt{\frac{e_1}{z_0}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 41$$

worin: k_z = zulässige Zugspannung,
e_1 = Abstand der Stelle größter Zugspannung von der Y-Achse,
z_0 = Koordinate des Schwerpunkts des auf Zug beanspruchten Teiles des Querschnitts,
μ_0 = 1,2, wenn dieser Teil von einer zur Y-Achse parallelen Geraden begrenzt ist;
$= \frac{4}{3}$ in allen anderen Fällen.

Der einseitig eingespannte Träger.

Last P am Ende.

Gleichung der elastischen Linie:

$$y = \frac{1}{6}\,\frac{P}{E J}\,x^2(3l - x) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 42$$

wobei die x von der Einspannung aus gezählt sind.

Durchbiegung unter der Last:

$$f = \frac{1}{3}\,\frac{P l^3}{E J} = \frac{i}{3} P l^3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 43$$

Neigung der elastischen Linie unter der Last:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}\,\frac{P l^2}{E J} = \frac{i}{2} P l^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 44$$

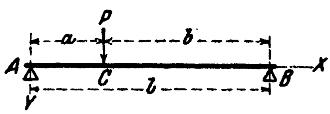
Gleichförmige Belastung q für die Längeneinheit.

Durchbiegung am Ende des Trägers:

$$f = \frac{1}{8}\,\frac{q\,l^4}{E\,J} = \frac{i}{8}\,q\,l^4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 45$$

Der frei aufliegende Träger.

Last P an beliebiger Stelle.



Größtes Biegungsmoment in C:

$$_{\max}M = P \cdot \frac{a\,b}{l} \quad . \quad . \qquad 46$$

Gleichung der elastischen Linien in bezug auf XAY:

Feld AC: $$y = \frac{P}{6\,E\,J} \cdot \frac{b}{l}\,x\,(l^2 - b^2 - x^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 47$$

Feld CB: $$y = \frac{P}{6\,E\,J} \cdot \frac{a}{l}\,(l - x)\,(2\,l\,x - a^2 - x^2) \quad . \quad . \quad . \qquad 48$$

Durchbiegung unter der Last P:

$$f = \frac{1}{3}\,\frac{P}{E\,J} \cdot \frac{a^2\,b^2}{l} = \frac{i}{3}\,\frac{P\,a^2\,b^2}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 49$$

Größte Durchbiegung, wenn $a < b$:

$$_{\max}f = \frac{1}{27}\,\frac{P}{E\,J\,l}\,a\,b\,(2\,a + b)\,\sqrt{3\,b\,(2\,a + b)} \quad . \quad . \quad . \qquad 50$$

Stelle der größten Durchbiegung:

Entfernung von B: $$x' = \sqrt{\frac{b\,(2\,a + b)}{3}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 51$$

Neigung der elastischen Linie gegen die Gerade AX:

Feld AC: $$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{P}{6\,E\,J}\,\frac{b}{l}\,(l^2 - b^2 - 3\,x^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 52$$

Feld CB: $$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{P}{6\,E\,J}\,\frac{a}{l}\,(2\,l^2 + a^2 - 6\,l\,x + 3\,x^2) \quad . \quad . \qquad 53$$

Neigung der elastischen Linie am Auflager A:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{6}\,\frac{P}{E\,J}\,\frac{b\,(l^2 - b^2)}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 54$$

Gleichförmige Belastung q für die Längeneinheit.

Größtes Biegungsmoment in der Mitte:

$$_{\max}M = \frac{1}{8} q l^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 55$$

Gleichung der elastischen Linie:

$$y = \frac{q}{24EJ}(l^3 x - 2 l x^3 + x^4) \quad . \; . \; . \; . \; 56$$

Größte Durchbiegung in der Mitte:

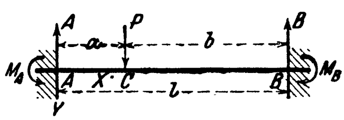
$$_{\max}f = \frac{5}{384} \frac{q l^4}{EJ} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 57$$

Statisch unbestimmte Träger.

Der an beiden Enden eingespannte Träger.

Last P an beliebiger Stelle.

Auflagerdrücke: $A = P\frac{b^2(3a+b)}{l^3}$, $B = P\frac{a^2(3b+a)}{l^3}$ . . 58



Auflagermomente: $M_A = P\frac{ab^2}{l^2}$, $M_B = P\frac{a^2 b}{l^2}$. 59

Gleichung der elastischen Linie für das Feld AC, bezogen auf das Achsenkreuz XAY:

$$y = \frac{1}{6} \frac{P}{EJ} \frac{b^2}{l^3} x^2 [3al - (3a+b)x] \quad . \; . \; . \; . \; 60$$

Durchbiegung unter der Last P:

$$f = \frac{1}{3} \frac{P}{EJ} \frac{a^3 b^3}{l^3} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 61$$

Mehrere Lasten.

Auflagerdruck: $A = \frac{1}{l^3} \Sigma P b^2 (3a+b)$ 62

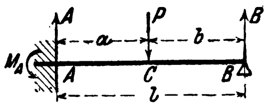
Auflagermoment: $M_A = \frac{1}{l^2} \Sigma P a b^2$ 63

Gleichförmige Belastung q für die Längeneinheit.

Auflagermomente: $M_A = M_B = \frac{1}{12} q l^2$ 64

Gleichung der elastischen Linie:

$$y = \frac{q}{24 E J} x^2 (l - x)^2 . \quad 65$$



Träger mit Einspannung und freiem Auflager.

Last P an beliebiger Stelle.

Auflagerdrücke: $A = P \frac{b(3l^2 - b^2)}{2 l^3}$, $B = P \frac{a^2 (3l - a)}{2 l^3}$ . . 66

Auflagermoment: $M_A = P \frac{a b (l + b)}{2 l^2}$ 67

Moment unter der Last: $M_C = P \frac{a^2 b (3l - a)}{2 l^3}$ 68

Durchbiegung unter der Last: $f = \frac{1}{12} \frac{P}{EJ} \frac{a^3 b^2 (3l + b)}{l^3}$. 69

Neigung des Trägers am Auflager B:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{4} \frac{P}{EJ} \frac{a^2 b}{l} \quad 70$$

Gleichförmige Belastung q für die Längeneinheit.

Auflagerdrücke: $A = \frac{5}{8} q l$, $B = \frac{3}{8} q l$ 71

Auflagermoment: $M_A = \frac{1}{8} q l^2$ 72

Träger gleichen Widerstandes gegen Biegung.

Ist $e = e_1 = e_2$ der Abstand der Null-Linie von der meist gezogenen oder gedrückten Stelle im Querschnitt, so ist

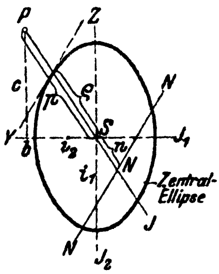
$$\frac{M e}{J} = k_b \quad 73$$

worin M das Biegungsmoment, J das Trägheitsmoment des Querschnitts ist.

Null-Linie und Kern.

Sind J_1, J_2 die Hauptträgheitsmomente, $i_1 = \sqrt{\frac{J_1}{F}}$,

$i_2 = \sqrt{\frac{J_2}{F}}$ die zugehörigen Trägheitshalbmesser, P der Angriff der Kraft senkrecht zum Querschnitt, NN die zugehörige Null-Linie, so ist:



$$p\,n = -\frac{i_1^2\, i_2^2}{i^2} = -\varrho^2 \quad . \; . \; . \quad 74$$

Ist J das Trägheitsmoment des Querschnitts für die Linie PS, so ist $i = \sqrt{\frac{J}{F}}$ der zugehörige Trägheitshalbmesser. Für die Hauptachsen J_1 und J_2 ist:

$$p_1 n_1 = -i_2^2, \quad p_2 n_2 = -i_1^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 75$$

Zug, Druck und Biegung.

Ist P die Zug- oder Druckkraft, M das Biegungsmoment, so erleiden die Stellen, die von der Null-Linie die äußersten Entfernungen besitzen, die Spannung:

$$\sigma = \frac{P}{F} \pm \frac{M}{W} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 76$$

worin F die Fläche des Querschnitts, W sein Widerstandsmoment ist.

Ist p der Abstand der Zug- oder Druckkraft vom Schwerpunkt des Querschnitts, so kann obige Gleichung auch in der Form angeschrieben werden:

$$\sigma = \frac{P}{F}\left[1 \pm \frac{p\,F}{W}\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 77$$

Hat die Angriffsstelle der Kraft P die Koordinaten b und c in bezug auf das Achsenkreuz der Hauptträgheitsmomente, so erleidet der Punkt mit den Koordinaten y und z die Spannung:

$$\sigma = P\left[\frac{1}{F} + \frac{b\,y}{J_2} + \frac{c\,z}{J_1}\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 78$$

Ist P eine Druckkraft, so dürfen diese Gleichungen nur verwendet werden, wenn der Körper eine kurze, gedrungene Gestalt besitzt.

Hat der Körper eine stabförmige Gestalt und ist l seine Länge, J das Trägheitsmoment für die Biegungsachse des Querschnitts, so müssen zur Ermittlung der äußersten Spannungen die Gleichungen benützt werden:

$$\left.\begin{aligned} \max\sigma &= -\frac{P}{F}\left[1+\frac{p\,F}{W_2\cos\omega l}\right] \\ \sigma &= -\frac{P}{F}\left[1-\frac{p\,F}{W_1\cos\omega l}\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \; 79$$

worin $\omega = \sqrt{\frac{P}{E\,J}}$.

Die Ausbiegung am oberen Ende ist:

$$f = p\left(\frac{1}{\cos\omega l} - 1\right) \quad \ldots\ldots\ldots \; 80$$

Die Bruchlast bei dieser exzentrischen Druckbelastung ist:

$$B = \frac{F\,K}{\mu\left[1+\frac{p\,F}{W_2\cos\omega l}\right]} \quad \ldots\ldots \; 81$$

Angenähert darf gesetzt werden:

$$\frac{1}{\cos\omega l} = 1 + \frac{1}{2}(\omega l)^2 + \frac{5}{24}(\omega l)^4 \quad \ldots\ldots \; 82$$

μ ist eine Erfahrungszahl, für die v. Tetmajer folgende Angaben gemacht hat:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Bauholz:} & \mu = 0{,}70 + 0{,}03\,n & \\ \text{Schweißeisen:} & \mu = 1{,}20 & \text{für gedrungene Querschnittsform;} \\ & = 1{,}08 & \text{für gespreizte Querschnittsform;} \\ \text{Flußeisen:} & \mu = 1{,}37 & \text{für gedrungene Querschnittsform;} \\ & = 1{,}23 & \text{für gespreizte Querschnittsform.} \end{array}\right\} \; 83$$

Hierin ist $n = \frac{l}{i}$, i = Trägheitshalbmesser für die Biegungsachse.

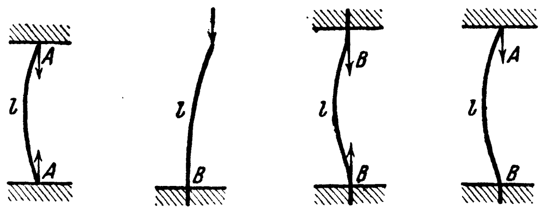
Knickfestigkeit.

Eulersche Gleichung für die Knicklast:

$$P_k = \alpha \cdot \frac{E\,J}{l^2} \quad \ldots\ldots\ldots \; 84$$

worin l die freie Länge, J das kleinste Trägheitsmoment des Querschnitts, α die Befestigungszahl ist.

Arten der Befestigung des Stabes:



A = Spitzenlagerung, B = Einspannung.

Befestigungszahl:

$$\alpha = \pi^2 \qquad \alpha = \frac{\pi^2}{4} \qquad \alpha = 4\pi^2 \qquad \alpha = 20{,}19 \quad . \quad . \quad 85$$

Reduzierte Länge:

$$l_r = l \qquad l_r = 2l \qquad l_r = \frac{l}{2} \qquad l_r = 0{,}7\,l \quad . \quad . \quad 86$$

v. Tetmajers Angaben für die Knickfestigkeit K_k in at.

Es ist $n = \frac{l_r}{i}$, $i = \sqrt{\frac{\min J}{F}}$.

Holz:	$n = 1{,}8 - 100$,	$K_k = 293 - 1{,}94\,n$	87
	$n > 100$,	$K_k = \frac{987\,000}{n^2}$	88
Gußeisen:	$n < 80$,	$K_k = 7760 - 120\,n + 0{,}53\,n^2$	89
	$n > 80$,	$K_k = \frac{9\,870\,000}{n^2}$	90
Schweißeisen:	$n = 10 - 112$,	$K_k = 3030 - 12{,}9\,n$ . . .	91
	$n > 112$,	$K_k = \frac{19\,740\,000}{n^2}$	92
Flußeisen:	$n = 10 - 105$,	$K_k = 3100 - 11{,}4\,n$ . . .	93
	$n > 105$,	$K_k = \frac{21\,220\,000}{n^2}$	94

Zulässige Knickspannung:

$$k_k = \frac{k}{1 + \mu n^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 95$$

worin k die zulässige Druckspannung, $n = \frac{l_r}{i}$ ist.

Nach Angaben v. Tetmajers ist für:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Holz } \mu = 0{,}00023, \quad \text{Gußeisen } \mu = 0{,}00070 \\ \text{Schweißeisen } \mu = 0{,}00016, \text{ Flußeisen } \mu = 0{,}00014\end{array}\right\} \quad 96$$

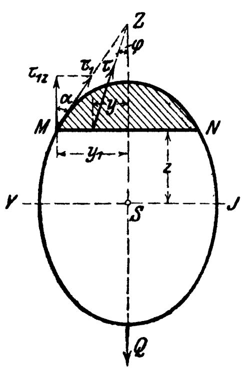
Tragfähigkeit eines auf Knickung beanspruchten Stabes:

$$P = F k_k = \frac{F k}{1 + \mu n^2} \quad 97$$

Schubfestigkeit.

Die Schubspannung, die durch die Querkraft Q entsteht, hat parallel zur Symmetrale SZ den Teil:

$$\tau_z = \tau_{1z} = \frac{S Q}{2 y_1 J} \quad 98$$



Hierin ist J das Trägheitsmoment des Querschnitts für die Schwerlinie SY, $S = f z_0$ das Flächenmoment des über MN liegenden Abschnittes f bezüglich derselben Linie SY.

Randspannung: $\tau_1 = \frac{\tau_{1z}}{\cos \alpha}$ . . . 99

Schubspannung an beliebiger Stelle y, z:

$$\tau = \frac{\tau_z}{\cos \varphi} \quad 100$$

Größte Schubspannung im Rechteck:

$$\max \tau = \frac{3}{2} \frac{Q}{F} \quad 101$$

Größte Schubspannung im Kreis:

$$\max \tau = \frac{4}{3} \frac{Q}{F} \quad 102$$

Ist F die Querschnittsfläche, so nennt man

$$F_0 = \frac{Q}{\max \tau} \quad 103$$

die reduzierte Querschnittsfläche.

Zulässige Schubspannung:

$$k_s \leqq k_z \frac{m}{m+1} \quad 104$$

Für Eisen mit $m = \frac{10}{3}$ ist $k_s \leqq \frac{10}{13} k_z$ 105

Schub und Biegung.

Kennzeichen, ob ein Stab für Schub oder Biegung zu rechnen ist:

$$\begin{matrix}\text{Schub}\\ \text{Biegung}\end{matrix}\left\{\frac{\text{max Biegungsmoment}}{\text{max Querkraft}}\begin{matrix}<\\>\end{matrix}\frac{m+1}{m}\,\frac{\text{Widerstandsmoment}}{F_0}\right. \qquad 106$$

Bezüglich F_0 vergleiche Gleichung 103.

$$\text{Hauptspannungen:}\quad \left.\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{\sigma}{2}+\sqrt{\frac{\sigma^2}{4}+\tau^2}\\ \sigma_2 &= \frac{\sigma}{2}-\sqrt{\frac{\sigma^2}{4}+\tau^2}\end{aligned}\right\} \quad \dots\dots \quad 107$$

Neigung α der Hauptspannung gegen die Achse des Trägers:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau}{\sigma} \quad \dots\dots\dots \quad 108$$

Hierin ist σ die durch die Biegung entstehende Normalspannung, τ die durch den Schub entstehende Schubspannung.

Drehungsfestigkeit.

Es bedeutet M_d das Drehungsmoment der äußeren Kräfte, ϑ den Verdrehungswinkel für die Längeneinheit im Bogenmaß, G die Elastizitätszahl für Schub.

$$\vartheta^0 = \vartheta \cdot \frac{180^0}{\pi} \quad \dots\dots\dots \quad 109$$

Kreisquerschnitt vom Halbmesser r:

$$M_d = \frac{\pi}{2} r^3 \cdot {}_{\max}\tau \quad \dots\dots\dots \quad 110$$

$$\vartheta = \frac{2}{\pi}\,\frac{M_d}{G r^4} = \frac{{}_{\max}\tau}{G r} \quad \dots\dots\dots \quad 111$$

Kreisring-Querschnitt, Halbmesser R und r:

$$M_d = \frac{\pi}{2}\,\frac{R^4 - r^4}{R} \cdot {}_{\max}\tau \quad \dots\dots\dots \quad 112$$

$$\vartheta = \frac{2}{\pi}\,\frac{M_d}{G(R^4 - r^4)} = \frac{{}_{\max}\tau}{G R} \quad \dots\dots \quad 113$$

Elliptischer Querschnitt mit den Halbachsen $b < c$:

$$M_d = \frac{\pi}{2} b^2 c \cdot {}_{\max}\tau \quad \dots\dots\dots \quad 114$$

$$\vartheta = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{b^2 + c^2}{b^3 c^3} \cdot \frac{M_d}{G} = \frac{1}{2}\,\frac{b^2 + c^2}{b c^2}\,\frac{{}_{\max}\tau}{G}, \quad 115$$

Spannung an beliebiger Stelle y, z:

$$\tau = \frac{2}{\pi}\frac{M_d}{b\,c}\sqrt{\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 116$$

Elliptischer Ring, äußere Halbachsen $b < c$, innere Halbachsen $b_1 < c_1$, $b_1 : b = c_1 : c = \alpha$:

$$M_d = \frac{\pi}{2} b^2 c (1 - \alpha^4) \cdot {}_{\max}\tau \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 117$$

Rechteckiger Querschnitt mit den Abmessungen $b < h$:

$$M_d = \frac{2}{9} b^2 h \cdot {}_{\max}\tau \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 118$$

$$\vartheta = 3{,}6\,\frac{b^2+h^2}{b^3 h^3}\,\frac{M_d}{G} = 0{,}8\,\frac{b^2+h^2}{b\,h^2}\,\frac{{}_{\max}\tau}{G} \quad . \quad 119$$

Spannung an beliebiger Stelle y, z:

$$\tau = 9\,\frac{M_d}{b^3 h^3}\sqrt{y^2 (h^2 - 4 z^2)^2 + z^2 (b^2 - 4 y^2)^2} \quad 120$$

Drehung und Biegung.

Ist ε_1 die größte vorkommende Dehnung, so ist die reduzierte Hauptspannung:

$$E\varepsilon_1 = \frac{m-1}{2m}\sigma + \frac{m+1}{2m}\sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0 \tau)^2} \leqq k_b \quad . \; . \quad 121$$

Hierin ist m das Verhältnis der Längsdehnung zur Querzusammenziehung, σ die durch die Biegung entstehende Normalspannung, τ die durch Drehung entstehende Schubspannung, k_b die zulässige Biegungsspannung und

$$\alpha_0 = \frac{m}{m+1}\,\frac{k_n}{k_d} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 122$$

das von Bach angegebene Anstrengungsverhältnis, worin $k_n = k_z$, k oder k_b und k_d die zulässige Drehungsspannung ist.

Für Eisen mit $m = \frac{10}{3}$ ist:

$$E\,\varepsilon_1 = 0{,}35\,\sigma + 0{,}65\sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0 \tau)^2} \, . \; . \; . \; . \; . \quad 123$$

$$\alpha_0 = \frac{k_n}{1{,}3\,k_d} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 124$$

Ist M das Biegungsmoment, M_d das Drehungsmoment, so wird für den Durchmesser d eines Kreisquerschnitts:

$$d^3 = \frac{32}{\pi k_b}\left[0{,}35\,M + 0{,}65\sqrt{M^2 + (\alpha_0 M_d)^2}\right] \quad . \; . \quad 125$$

und für einen Kreisring-Querschnitt mit dem Durchmesser-Verhältnis $d:D=\alpha$:

$$D^3 = \frac{32}{\pi k_b (1-\alpha^4)} \left[0{,}35\,M + 0{,}65\sqrt{M^2 + (\alpha_0 M_d)^2}\right] \quad . \quad \mathbf{126}$$

Formänderungsarbeit

der Normalspannungen: $$\mathbf{A} = \frac{1}{2E}\int \sigma^2\, dV \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{127}$$

der Schubspannungen: $$\mathbf{A} = \frac{1}{2G}\int \tau^2\, dV \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{128}$$

worin dV das Raumelement ist.

Formänderungsarbeit eines prismatischen Stabes vom Querschnitt F zufolge der Achsialkraft P:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\,\frac{P^2 l}{EF} = \frac{1}{2} P \cdot \Delta l \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{129}$$

Formänderungsarbeit eines gebogenen Stabes, dessen Querschnitt das Trägheitsmoment J in bezug auf die Biegungsachse besitzt:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2E}\int \frac{M^2}{J}\, dx \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{130}$$

Formänderungsarbeit eines vom Drehungsmoment M_d beanspruchten Stabes:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} M_d\, \vartheta\, l \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{131}$$

wenn ϑ der Verdrehungsbogen für die Längeneinheit ist.

Die Abgeleitete der Formänderungsarbeit.

Ist **A** die Formänderungsarbeit, P eine äußere Kraft (Last), so ist der Weg ihres Angriffspunktes (Durchbiegung)

$$f = \frac{\delta \mathbf{A}}{\delta P} \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{132}$$

Das Prinzip der kleinsten Formänderungsarbeit.

Ist S eine statisch unbestimmte innere Kraft (Spannung) oder der Druck eines unnachgiebigen Auflagers, so ist

$$\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta S} = 0 \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{133}$$

Gekrümmte dünne Stäbe.

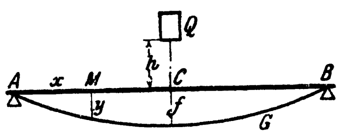
Formänderungsarbeit ohne Berücksichtigung der Achsial- und Querkräfte:

$$\mathsf{A} = \frac{1}{2\,E} \int_0^l \frac{M^2}{J}\, d\,s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 134$$

worin $d\,s$ das Bogenelement, l die Länge des Bogens, J das Trägheitsmoment des Querschnitts ist.

Stoßfestigkeit.

Das Gewicht G des gestoßenen Trägers ist an die Stelle C zu reduzieren, an welcher der Stoß durch das aus der Höhe h herabfallende Gewicht Q stattfindet.



Nennt man f_1 die dynamische Durchbiegung von C, f die statische (bei ruhendem Gewicht Q), ebenso y_1 und y die dynamische und statische Durchbiegung einer beliebigen anderen Stelle M, so darf gesetzt werden

$$\frac{f_1}{f} = \frac{y_1}{y} = n = \text{dynamischer Faktor} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 135$$

Um die Anfangsgeschwindigkeit v_0 von C nach dem Stoße zu bestimmen, ist das Trägergewicht G nach dem Gesetze zu reduzieren

$$G_1 = \Sigma\left(\varDelta G \cdot \frac{y_1}{f_1}\right) = \Sigma\left(\varDelta G \cdot \frac{y}{f}\right) \quad . \quad . \quad . \quad 136$$

worin $\varDelta G$ ein Teilchen des Trägergewichtes ist. Es wird dann:

$$v_0 = \frac{Q}{Q + G_1} \sqrt{2\,g\,h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 137$$

Um hingegen die Bewegungs-Energie L_0 nach dem Stoße zu ermitteln, ist das Trägergewicht G nach dem Gesetze zu reduzieren:

$$G_2 = \Sigma\left(\varDelta G \cdot \frac{{y_1}^2}{{f_1}^2}\right) = \Sigma\left(\varDelta G \cdot \frac{y^2}{f^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad 138$$

Es wird dann:

$$L_0 = \frac{1}{2}\,\frac{Q + G_2}{g}\,{v_0}^2 = Q\,h\,\frac{Q\,(Q + G_2)}{(Q + G_1)^2} \quad . \quad . \quad . \quad 139$$

Hat der Träger samt dem Gewicht Q nach dem Stoße seine äußerste Durchbiegung erreicht, so ist seine Bewegungs-Energie für einen Augenblick Null geworden und es gilt das Arbeitsgesetz:

Anfangs-Energie + Arbeit der äußeren Kräfte = Formänderungsarbeit oder nach Gleichung 127:

$$L_0 + Q f_1 = \frac{1}{2E} \int \sigma_1^2 \, dV,$$

wenn σ_1 die durch den Stoß entstehenden Spannungen sind. (Die Arbeiten der Gewichte ΔG tilgen sich mit der Formänderungsarbeit der Gewichtsspannungen.)

Bei ruhender Last Q würde diese Gleichung lauten:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} Q f = \frac{1}{2E} \int \sigma^2 \, dV,$$

worin **A** die statische Formänderungsarbeit, σ die statischen Spannungen bedeuten. Setzt man nun

$$f_1 = n f, \quad \sigma_1 = n \sigma,$$

so wird

$$L_0 + 2 n \mathbf{A} = n^2 \mathbf{A},$$

oder

$$n = 1 + \sqrt{1 + \frac{L_0}{\mathbf{A}}} \quad \text{. . . . . . . } \mathbf{140}$$

Die ruhende Last n Q würde also die gleichen Spannungen im Träger erzeugen wie die dynamische Last Q.

(Zschetzsche, Zeitschrift d. Ver. deutsch. Ing. 1894; Grashof, Theorie d. Elastizität u. Festigkeit.)

Piererache Hofbuchdruckerei Stephan Geibel & Co. in Altenburg.