

ELEKTRICITÄT UND OPTIK

ERSTER BAND

BAND I

H. Poincaré

 Springer

Elektricität und Optik.

Vorlesungen,

gehalten von

H. Poincaré

Professor und Mitglied der Akademie.

*Redigirt von Bernard Brunhes, Privatdocent an der Universität
zu Paris.*

Autorisirte deutsche Ausgabe

von

Dr. W. Jaeger

und

Dr. E. Gumlich

Assistenten an der Phys.-Techn. Reichsanstalt.

ZWEITER BAND.

**Die Theorien von Ampère und Weber — Die Theorie von Helmholtz
und
Die Versuche von Hertz.**

Mit 15 in den Text gedruckten Figuren.



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH
1892

ISBN 978-3-642-51308-4 ISBN 978-3-642-51427-2 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-642-51427-2

Softcover reprint of the hardcover 1st edition

Vorwort der Uebersetzer.

Da in neuerer Zeit besonders durch die Versuche von Hertz die Beziehung zwischen Elektrizität und Optik ein hervorragendes Interesse für die gesammte physikalische Welt gewonnen hat, ein deutsches Originalwerk aber, das die hauptsächlichsten einschlägigen Theorien und Versuche zusammenfasst, bisher nicht existirt, so wird eine deutsche Ausgabe der vorzüglichen Vorlesungen von Poincaré über dies Thema gewiss in weiteren Kreisen mit Befriedigung aufgenommen werden.

Im ersten Theile ist die Maxwell'sche Theorie der Elektrizität und im Anschlusse daran seine elektromagnetische Lichttheorie unter Berücksichtigung der neueren Versuchsergebnisse in übersichtlicher Form kritisch behandelt, so dass einerseits dem Leser das eingehende Studium des Maxwell'schen Originalwerkes bedeutend erleichtert werden dürfte, andererseits auch alle diejenigen, welchen die Zeit zu diesem Studium fehlt, wenigstens einen genügenden Ueberblick über die Hauptresultate und den Gedankengang der betreffenden Untersuchungen gewinnen.

Im zweiten Theile, dessen deutsche Ausgabe noch im Laufe dieses Jahres erscheinen soll, finden die Theorien von Ampère und Weber, namentlich aber diejenigen von Helmholtz, welche die Theorien von Neumann, Weber und Maxwell als Specialfälle enthalten, sowie die Experimente von Hertz eingehende Berücksichtigung.

Der Verfasser bezieht sich in diesen Vorlesungen öfters auf sein früheres Werk: *Théorie mathématique de la lumière*; im Laufe des nächsten Jahres wird auch hiervon eine deutsche Ausgabe in demselben Verlage erscheinen.

Die Uebersetzer hatten keine Veranlassung, an den meist recht übersichtlichen Ableitungen grössere Aenderungen vorzunehmen; nur an einigen Stellen wurden des leichteren Verständnisses halber kleinere, erläuternde Zusätze gemacht.

Charlottenburg, September 1891.

Inhaltsverzeichniss.

	Seite
Vorwort der Uebersetzer	III—IV
Einleitung des Verfassers	1—8

Kapitel I.

Formeln der Elektrostatik.

Theorie von den zwei Fluida	9
Theorie von einem einzigen Fluidum	9
Der Ausdruck für die elektrische Kraft in der Theorie von einem einzigen Fluidum	10
Elektrostatische Einheit der Elektrizitätsmenge	11
Potential, Komponenten der elektrischen Kraft	12
Kräftestrom	12
Theorem von Gauss	13
Satz von Poisson	13
Induktionsstrom	14
Potential einer elektrischen Kugel in einem ausserhalb derselben gelegenen Punkte	15
Erweiterung des Satzes von Poisson	16

Kapitel II.

Hypothesen von Maxwell.

Induktionsfluidum	19
Elektrische Verschiebung	19
Inkompressibilität des Induktionsfluidum und der Elektrizität	20
Bild für die Elasticität des Induktionsfluidum	22
Jeder Strom ist ein geschlossener Strom	23
Leistungsströme und Verschiebungsströme	25
Potentielle Energie eines elektrischen Systems	25
Elasticität des Induktionsfluidum	31
Elektrische Vertheilung	32

Kapitel III.

Theorie der Dielektrika von Poisson.

Wie lässt sich dieselbe auf die Maxwell'sche Theorie zurückführen?

Hypothesen von Poisson über die Zusammensetzung der Dielektrika	38
Kugel in einem gleichförmigen Felde	40
Polarisation der Dielektrika	43

	Seite
Modifikation der Theorie von Poisson. Zellen	53
Ausbreitung der Wärme in einem homogenen Medium	53
Analogien mit der Verschiebung der Elektrizität in den Zellen	57
Uebereinstimmung der Ausdrücke für die potentielle Energie	62
Anisotrope Körper	66
Diskussion	68

Kapitel IV.

**Bewegung von Leitern unter der Einwirkung elektrischer Kräfte.
Besondere Theorie von Maxwell.**

Kräfte, welche zwischen elektrisirten Leitern auftreten	69
Theorie von Maxwell	71
Diskussion	75

Kapitel V.

Elektrokinematik.

Lineare Leiter	80
Neuer analytischer Ausdruck für das Ohm'sche Gesetz	81
Leiter von beliebiger Gestalt	81
Unterschied zwischen Leiterströmen und Verschiebungsströmen	82
Gesetz von Joule	85

Kapitel VI.

Magnetismus.

Magnetische Fluida. Gesetze der magnetischen Wirkungen	87
Summe der magnetischen Masse eines Magneten	87
Zusammensetzung der Magnete	88
Potential eines magnetischen Elements. Komponenten der Magnetisirung	88
Potential eines Magneten	90
Potential eines magnetischen Blattes	91
Magnetische Kraft in einem äusseren Punkt	92
Magnetische Kraft im Innern eines Magneten	93
Magnetische Induktion	94
Inducirter Magnetismus	96

Kapitel VII.

Elektromagnetismus.

Grundgesetze	98
Hypothese	98
Theorem I	99
Theorem II	99
Theorem III	101
Theorem IV	101
Potential eines geschlossenen Stromes	103
Unendlich kleiner Stromkreis	104
Gleichwerthigkeit eines geschlossenen Stroms und eines magnetischen Blattes	105
Arbeit der elektromagnetischen Kräfte für eine geschlossene, den Stromkreis umschlingende Kurve	106
Mehrere Ströme	108
Anderer Ausdruck der elektromagnetischen Arbeit für eine geschlossene Kurve	108
Umformung des Kurvenintegrals	109
Gleichungen von Maxwell	111
Wirkung eines Pols auf ein Stromelement	111

Kapitel VIII.

Elektrodynamik.

	Seite
Elektrodynamische Arbeit	115
Solenoid	115
Solenoid und Ströme	116
Elektrodynamisches Potential eines unendlich kleinen Stromes	118
Elektrodynamisches Potential eines geschlossenen Stromes	119
Anderer Ausdruck für das Potential eines Stromes	119
Verschiebung eines Stromes in einem magnetischen Medium	120
Bestimmung der Komponenten des elektromagnetischen Moments	122
Werthe von F, G, H für einen linearen Strom	125
Formel von Neumann	126
Anderer Ausdruck des elektrodynamischen Potentials eines Stromes	126
Elektrodynamisches Potential eines Stromes auf sich selbst (Selbstpotential)	127
Verschiedene Formen des Selbstpotentials eines Systems von Strömen	128
System von linearen Leitern	131
System von zwei linearen Stromkreisen	131

Kapitel IX.

Induktion.

Elektromotorische Induktionskräfte	134
Bestimmung der Coefficienten A, B, C	136
Theorie von Maxwell	138
Anwendung auf zwei Stromkreise	140
Ausdruck für die elektromotorischen Induktionskräfte	142
Arbeit der elektrodynamischen Kräfte	143
Ausdruck für die elektrodynamischen Kräfte	145
Ströme in beliebiger Anzahl. — Elektrodynamische Kräfte	146
Elektromotorische Induktionskräfte	147
Bedeutung von ψ	151

Kapitel X.

Allgemeine Gleichungen des magnetischen Feldes.

Gleichungen des magnetischen Feldes	153
Gleichungen der Leiterströme	154
Gleichungen der Verschiebungsströme	155
Gleichungen für die Ströme in einem unvollkommen isolirenden Medium	156

Kapitel XI.

Elektromagnetische Theorie des Lichtes.

Folgerungen aus den Maxwell'schen Theorien	159
Gleichungen für die Fortpflanzung einer magnetischen Störung in einem Dielektrikum	160
Ebene Wellen	164
Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer ebenen periodischen Welle	165
Grösse dieser Geschwindigkeit im luftleeren Raum	165
Beziehung zwischen dem Brechungsquotient und dem Induktionsvermögen einer isolirenden Substanz	168
Richtung der elektrischen Verschiebung	172
Fortpflanzung in einem anisotropen Medium. — Doppelbrechung	174
Fortpflanzung in einem unvollkommen isolirenden Medium. Absorption des Lichts	181

	Seite
Reflexion der Wellen	185
Energie der Strahlung	186
Druck und Zug in einem vom Licht durchstrahlten Medium	188
Bedeutung des elektrodynamischen Druckes	193

Kapitel XII.

Magnetische Drehung der Polarisationsenebene.

Gesetz der Erscheinung	195
Erklärungsversuche der magnetischen Drehung der Polarisationsenebene	197
Theorie von Maxwell	200
Erklärung des Zusatzgliedes zum Ausdrucke für die kinetische Energie	209
Schwierigkeiten, welche durch die Maxwell'sche Theorie entstehen	215
Theorie von Potier	220
Theorie von Rowland	225
Kerr'sches Phänomen	229

Kapitel XIII.

Experimentelle Bestätigungen der Maxwell'schen Hypothesen.

Elektrische Gestaltsänderung der Dielektrika	232
Versuch von Duter	233
Versuche von Righi	234
Versuche von Quincke	234
Versuche von Boltzmann	236
Diskussion der Resultate der oben beschriebenen Experimente	239
Elektrische Doppelbrechung	241
Drucke in einem magnetischen Felde	243
Elektromagnetische Wirkungen der Verschiebungsströme	245
Induktionswirkungen der Verschiebungsströme	248



Vorwort.

Dieser zweite Band enthält die Vorlesungen, welche ich vom März bis zum Juni 1890 an der Sorbonne gehalten habe. Gesammelt und redigirt wurden dieselben von Herrn Brunhes, dem ich hiermit meinen besten Dank ausspreche.

Der erste Theil ist den Theorien von Ampère und von Weber gewidmet, der zweite derjenigen von Helmholtz, welche die Theorien von Neumann, Weber und Maxwell als Specialfälle einbegreift. Ich musste ziemlich weitgehende Aenderungen in der Darstellungsweise von Helmholtz eintreten lassen, da dieser Gelehrte neue Bezeichnungen gebraucht, welche von denjenigen Maxwell's vollständig abweichen. Dadurch wird die Identität der in beiden Theorien übereinstimmenden Schlussgleichungen unnötig verdunkelt und das Verständniss des Zusammenhanges erschwert. Ferner wendet Helmholtz elektrostatische Einheiten an, welche dadurch definirt sind, dass die Anziehung zweier Elektrizitätseinheiten in der Einheit des Abstandes gleich der Krafterinheit ist. Diese Anziehung hängt aber von dem Induktionsvermögen K des Dielektrikum ab, in dem sich die beiden elektrischen Massen befinden, die elektrostatische Einheit hat also verschiedene Werthe, ob man sie, wie gewöhnlich, für Luft definirt oder für ein anderes Medium. Die Helmholtz'sche Einheit gilt nun nicht für Luft, sondern für ein ideales, nicht polarisirbares Medium, dessen Beschaffenheit von der Annahme abhängt, welche man in Betreff des einen der beiden numerischen, die Theorie charakterisirenden Koefficienten macht. Diese Einheit variirt also mit jenem Koefficienten, und dieser ist in dem besonderen Fall, dass die Helmholtz'sche Theorie mit der Maxwell'schen übereinstimmt, Null. Aus diesen Umständen entstehen

leicht Unklarheiten, die den Leser verwirren; doch sind diese Schwierigkeiten rein künstliche. Ich habe dieselben zu vermeiden gesucht, indem ich mit Maxwell die elektromagnetischen Einheiten wählte.

Der dritte Theil des Bandes beschäftigt sich mit der Theorie der Hertz'schen Experimente. Viele werden diesen Versuch für sehr verfrüht halten und haben damit nicht Unrecht; ich konnte in der That noch zu keinem definitiven Schlusse gelangen, die experimentellen Resultate gestatten es noch nicht. Dieser Theil des Werks wird deshalb rasch veralten und muss in einigen Jahren neu bearbeitet werden, aber bei der Wichtigkeit der Frage ist es immerhin der Mühe werth, eine solche Arbeit mehrmals vorzunehmen. Gleichwohl dürften vielleicht einige meiner theoretischen Untersuchungen, sowie auch die Zweifel, die ich ausdrücken musste, nicht ohne Nutzen für diejenigen sein, welche das endgültige Gebäude errichten werden.

Ich glaubte, den von Herrn Brunhes redigirten Vorlesungen zwei Ergänzungskapitel hinzufügen zu sollen. Das erste, welches eine gedrängte Beschreibung der Hertz'schen Versuche enthält, ist das specielle Werk von Herrn Blondin. Er hatte dasselbe zuerst ausgearbeitet, um es mit dem ersten Bande zu vereinigen, der die Vorlesungen vom März bis zum Juni 1888 enthält (*nicht 1889, wie auf dem (französischen) Titelblatte des ersten Bandes irrthümlicher Weise angegeben ist*). Dies Kapitel findet aber besser seinen Platz bei der ausführlichen Besprechung der Theorie dieser Experimente.

Andererseits habe ich am Ende noch ein Ergänzungskapitel angefügt, das durch die raschen Fortschritte in diesem Zweige der Wissenschaft nöthig wurde. Zwischen dem Schlusse der Vorlesungen und der Uebergabe des Manuscriptes zum Druck, d. h. also zwischen Juni und November 1890, sind nämlich meine Ansichten durch verschiedene Veröffentlichungen, besonders durch die neuen Experimente von Sarasin und de la Rive in einigen Punkten geändert worden.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Vorwort des Verfassers	III—IV
Einleitung	1
Kapitel I.	
Formel von Ampère.	
Wirkung zweier Stromelemente aufeinander	3
Arbeit bei der relativen Verschiebung zweier Stromkreise	9
Bestimmung der Funktion U	10
Beziehung zwischen der elektromagnetischen Kraft und dem Vektorpotential	16
Elektrodynamisches Potential eines aus zwei Stromkreisen gebildeten Systems	19
Kapitel II.	
Theorie der Induktion.	
Theorie der Induktion	23
Kapitel III.	
Theorie von Weber.	
Erklärung der elektrodynamischen Anziehungen	30
Die Induktion in der Weber'schen Theorie	36
Kapitel IV.	
Theorie von Helmholtz.	
Theorie von Helmholtz	42
Fundamentalgleichungen	46
Gleichungen des Ohm'schen Gesetzes	51
Definition der magnetischen Kraft	52
Erhaltung der Energie und des Gleichgewichts	57
Ausdruck für die elektrokinetische Energie T und die elektrostatische Energie U	57
Erhaltung der Energie	59
Stabilität des Gleichgewichts	64
Untersuchung der magnetischen Medien	65
Kapitel V.	
Uebergang von der Helmholtz'schen Theorie zur Maxwell'schen Theorie.	
Uebergang von der Helmholtz'schen Theorie zur Maxwell'schen Theorie . .	72
Magnetische Induktion	73

	Seite
Dielektrische Polarisation	75
Ausdruck für die elektrostatische Energie bei den Dielektrika	82
Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der elektromagnetischen Störungen	91

Kapitel VI.

Die Einheit der elektrischen Kraft.

Die Einheit der elektrischen Kraft	97
--	----

Kapitel VII.

Kurze Beschreibung der Hertz'schen Versuche.

Kurze Beschreibung der Hertz'schen Versuche	108
Beschreibung der Apparate	109
Untersuchung des von dem Erreger erzeugten Feldes	111
Änderung des Feldes durch Dielektrika	113
Fortpflanzung in metallischen Drähten	115
Fortpflanzungsgeschwindigkeit in der Luft	116
Reflexion der Wellen	118
Strahlen der elektrischen Kraft	119
Untersuchungen von Sarasin und de la Rive	121

Kapitel VIII.

Der Erreger von Hertz.

Der Erreger von Hertz	123
Die Funktion des Unterbrechers	130
Einwürfe gegen die Rechnung von Hertz	131
Die elektrische Kraft steht senkrecht zu den Leitern	135

Kapitel IX.

Untersuchung des durch den Erreger hervorgebrachten Feldes.

Untersuchung des durch den Erreger hervorgebrachten Feldes	141
Der Kugelerreger von Lodge	145
Anwendung auf den Erreger von Hertz	149
Strahlung der Energie	151
Fortpflanzung der elektromagnetischen Störung in einem geradlinigen Metalldrahte	158
Versuche von Lecher	162

Kapitel X.

Der Resonator von Hertz.

Der Resonator von Hertz	161
-----------------------------------	-----

Kapitel XI.

Reflexion der elektromagnetischen Wellen.

Reflexion der elektromagnetischen Wellen	170
--	-----

Kapitel XII.

Zusätze und Ergänzungen.

	Seite
Zusatz I: Die Theorie von Helmholtz und das Princip von Newton . . .	180
- II: Ueber den Beweis der Thatsache, dass die elektrische Kraft senkrecht zu den Leitern steht	186
- III: Ueber die Berechnung der Periode	191
- IV: Ueber einige neue Versuche	199
- V: Ueber die multiple Resonanz	201
- VI: Ueber die Fortpflanzung der Wellen in krummlinigen Drähten .	205
- VII: Ueber die Reflexion der Wellen	206
Schluss	206

Neuere Versuche (Zusatz der Herausgeber).

Die Theorie von Poynting und Heaviside	207
Bestätigung der Poynting'schen Theorie durch Versuche von Hertz . . .	211
Quantitative Bestimmung der elektrischen Schwingungen . . .	212
Messung der mechanischen Wirkungen der elektrostatischen und mag- netischen Kräfte im freien Raume durch Hertz	212
Bestimmung der Energie der Schwingungen auf bolometrischem Wege durch Rubens und Ritter	213
Versuche von Klemencic, Franke, Bjerknæs	214
Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektro- magnetischer Wellen in der Luft (durch Blondlot und durch Lecher)	215
Bestätigung der Maxwell'schen Theorie von der Beziehung zwischen Dielektricitätskonstante und Brechungs- exponent ($K = n^2$).	217
Neuere Bestimmungen der Dielektricitätskonstanten (durch Thomson, Winkelmann, Elsas, Lecher, Blondlot und Donle)	217
Bestimmung der Brechungsexponenten für lange Wellen (durch Waitz, Arons und Rubens, Cohn)	220
Experimentelle Prüfung der Mosotti-Clausius'schen Theorie betr. die Konstitution der Dielektrika (durch Lebedew) . . .	222

Einleitung.

Wenn ein Nicht-Engländer zum ersten Male das Werk von Maxwell aufschlägt, so mischt sich in seine Bewunderung ein Gefühl des Unbehagens, ja oft sogar des Misstrauens, das nur bei eingehendem und angestrengtem Studium zu weichen pflegt; einige ganz hervorragende Männer der Wissenschaft werden sogar andauernd von demselben beherrscht.

Warum können sich die Gedanken des englischen Gelehrten so schwer bei uns einbürgern? Ohne Zweifel deshalb, weil bei dem grössten Theile der gebildeten Deutschen, Franzosen etc. in Folge ihrer Erziehung der Sinn für Präcision und Logik mehr als jeder andere entwickelt ist.

Die alten mathematischen Theorien konnten uns nach dieser Richtung hin vollkommen befriedigen. Alle unsere Lehrer, von Huyghens und Laplace bis auf Cauchy und Helmholtz haben denselben Weg eingeschlagen: Sie gingen aus von genau formulirten Hypothesen, zogen daraus mit mathematischer Schärfe alle Folgerungen und verglichen dieselben dann mit den beobachteten Thatsachen. Ihr Bestreben ist offenbar darauf gerichtet, jedem Zweige der Physik dieselbe Sicherheit zu verleihen, wie sie z. B. in der Mechanik des Himmels herrscht.

Einen Geist, der von jeher bewundernd zu solchen Vorbildern emporgeblickt hat, vermag eine blossе Theorie nur schwer zu befriedigen. Denn abgesehen davon, dass er innerhalb derselben auch nicht den geringsten Anschein eines Widerspruches dulden wird, verlangt er auch noch, dass die verschiedenen Theile der Theorie in einem logischen Zusammenhange unter einander stehen, und dass die Anzahl der verschiedenen Hypothesen eine möglichst geringe sei.

Doch das ist nicht alles! Er stellt noch andere Forderungen, die mir weniger vernünftig scheinen: Hinter der Materie, die wir mit unseren Sinnen erfassen und auf dem Wege des Experimentes kennen zu lernen vermögen, sucht er noch eine andere, in seinen Augen die einzig wirkliche Materie, die nur noch rein geometrische Eigenschaften besitzt und deren Atome rein geometrische Punkte sind,

welche einzig und allein durch die Gesetze der Dynamik beherrscht werden. Und trotzdem diese Atome weder Ausdehnung noch Farbe besitzen, sucht er sich doch, in Folge eines unbewussten Widerspruches, ein Bild von ihnen zu machen und sie in seiner Vorstellung dem Wesen der gewöhnlichen Materie möglichst nahe zu bringen.

Erst wenn er dies erreicht hat, wird er vollkommen befriedigt sein und glauben, das Geheimniss des Weltalls vollständig ergründet zu haben. Ist auch diese Befriedigung nur eine trügerische, so ist es deshalb doch nicht leicht, darauf zu verzichten.

So erwartet denn derjenige, welcher das Werk von Maxwell aufschlägt, eine Theorie zu finden, die ebenso logisch und präzise ist, wie die auf der Hypothese vom Lichtäther beruhende physikalische Optik; er geht auf diese Weise einer Enttäuschung entgegen, vor welcher ich den Leser gerne bewahren möchte, indem ich ihn gleich von vorne herein darauf vorbereite, was er im Maxwell suchen darf und was er nicht dort finden wird.

Maxwell gibt nicht eine mechanische Erklärung der Elektrizität und des Magnetismus; er beschränkt sich vielmehr darauf, nachzuweisen, dass solch' eine Erklärung möglich ist.

Ebenso zeigt er, dass die optischen Erscheinungen nur ein specieller Fall der elektromagnetischen Erscheinungen sind. Aus jeder Theorie der Elektrizität wird man also unmittelbar eine Theorie des Lichtes ableiten können.

Das Umgekehrte ist leider nicht der Fall; es ist nicht immer möglich, aus einer vollständigen Erklärung des Lichtes eine vollständige Erklärung der elektrischen Erscheinungen herzuleiten. Insbesondere ist dies nicht leicht, wenn man von der Fresnel'schen Theorie ausgeht; unmöglich wäre es freilich sicherlich nicht, aber man würde doch vor die Frage gestellt werden, ob man dann nicht auf wunderbare Resultate verzichten müsste, die man längst für gesichert hielt. Dies würde einen Schritt zurück bedeuten, und so mancher hervorragende Geist könnte sich dazu nicht entschliessen.

Wenn nun der Leser sich auch zur Einschränkung seiner Erwartungen in diesen Beziehungen verstanden hat, wird er immerhin noch anderen Schwierigkeiten begegnen: Der englische Gelehrte sucht nicht ein einheitliches, wohl geordnetes und endgültiges Gebäude zu errichten, es scheint vielmehr, als wolle er eine ganze Anzahl von vorläufigen und unzusammenhängenden Konstruktionen geben, zwischen denen die Verbindung schwierig, ja bisweilen unmöglich ist.

Greifen wir beispielsweise das Kapitel heraus, in welchem die elektrostatischen Anziehungen erklärt werden durch Druck- und Spannungsverhältnisse, die in dem dielektrischen Medium herrschen sollen. Dies Kapitel könnte fortgelassen werden, ohne dass der Rest des Buches an Klarheit und Vollständigkeit einbüßen würde, und andererseits enthält es eine in sich abgeschlossene Theorie, die man verstehen könnte, ohne auch nur eine einzige Zeile von dem, was vorhergeht oder folgt, gelesen zu haben. Aber es steht nicht allein ausser Zusammenhang mit dem Reste des Werkes, sondern es ist sogar schwer, es mit den grundlegenden Ideen des Buches in Einklang zu bringen, wie wir später durch eine eingehende Diskussion nachweisen werden. Maxwell versucht es auch nicht, diese Uebereinstimmung herzustellen, er beschränkt sich vielmehr auf die Bemerkung: „I have not been able to make the next step, namely, to account by mechanical considerations for these stresses in the dielectric.“ (2. Aufl. Bd. I. pg. 154.)

Dies Beispiel wird genügen, um meine Ansicht klarzulegen; ich könnte deren noch viele andere anführen. Wer würde beispielsweise beim Lesen der von der magnetischen Drehung der Polarisationssebene handelnden Stellen vermuthen, dass zwischen den optischen und magnetischen Erscheinungen Identität herrscht?

Man darf sich also nicht einbilden, jeden Widerspruch gelöst zu sehen. In der That kann von zwei sich widersprechenden Theorien, vorausgesetzt, dass man sie nicht durcheinander wirft und dass man darin nicht nach dem Ursprunge der Erscheinungen sucht, eine jede für sich betrachtet als nützliches Hilfsmittel für Untersuchungen dienen, und vielleicht wäre die Lectüre von Maxwell weniger anregend, wenn sie uns nicht so viele neue und verschiedenartige Ausblicke eröffnet hätte.

Die zu Grunde liegende Idee ist demgemäss verschleiert und zwar in so hohem Grade, dass dies in der Mehrzahl der populären Darstellungen der einzige Punkt ist, welcher vollkommen unberücksichtigt blieb.

Ich glaube deshalb in meiner Einleitung auseinandersetzen zu sollen, worin dieser Grundgedanke eigentlich besteht, um die Wichtigkeit desselben besser hervorheben zu können.

Bei jeder physikalischen Erscheinung gibt es eine Anzahl von Parametern, welche direkt der Untersuchung zugänglich sind und gemessen werden können.

Ich nenne sie:

$$q_1, q_2, \dots, q_n.$$

Durch die Beobachtung lernen wir nun die Gesetze von den Veränderungen dieser Parameter kennen, und diese Gesetze können im Allgemeinen in der Form von Differentialgleichungen dargestellt werden, durch welche die q mit der Zeit verbunden sind. Was hat man also zu thun, um eine mechanische Erklärung einer derartigen Erscheinung zu geben?

Man wird sie zu erklären suchen als Bewegungserscheinungen entweder der gewöhnlichen Materie oder von einem oder mehreren hypothetischen Fluida.

Diese Fluida sollen, wie wir annehmen, aus einer sehr grossen Anzahl isolirter Moleküle bestehen; $m_1, m_2 \dots m_p$ seien die Massen dieser Moleküle; x_i, y_i, z_i die Koordinaten des Moleküls m_i .

Weiter wird man voraussetzen haben, dass der Satz von der Erhaltung der Energie gilt, und dass demnach eine gewisse Funktion ($-U$) der $3p$ Koordinaten x_i, y_i, z_i existirt, welche die Rolle einer Kräftefunktion spielt. Die $3p$ Bewegungsgleichungen lassen sich dann schreiben:

$$(1) \quad \begin{aligned} m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= - \frac{\partial U}{\partial x_i}, \\ m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= - \frac{\partial U}{\partial y_i}, \\ m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} &= - \frac{\partial U}{\partial z_i}. \end{aligned}$$

Die kinetische Energie des Systems ist:

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2).$$

Die potentielle Energie ist gleich U , und die Gleichung, welche die Erhaltung der Energie ausdrückt, lässt sich schreiben in der Form

$$T + U = \text{const.}$$

Man wird also zu einer vollständigen mechanischen Erklärung der Erscheinungen gelangen, wenn man einerseits die Kräftefunktion ($-U$) kennt, und andererseits die $3p$ Koordinaten x_i, y_i, z_i mit Hilfe von n Parametern q auszudrücken vermag.

Ersetzen wir diese Koordinaten durch ihre Ausdrücke als Funktionen der q , so werden die Gleichungen (1) eine andere Form annehmen. Die potentielle Energie U wird eine Funktion der q werden; die kinetische Energie T aber wird nicht nur von den q abhängen, sondern auch von deren Differentialquotienten q' , und sie

wird homogen und vom zweiten Grade in Bezug auf diese Differentialquotienten sein. Die Bewegungsgesetze lassen sich dann durch die Gleichungen von Lagrange wiedergeben:

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial q_k} = 0.$$

Ist die Theorie richtig, dann müssen diese Gleichungen (2) identisch sein mit den direkt beobachteten experimentellen Gesetzen.

Damit also eine mechanische Erklärung einer Erscheinung möglich sei, muss man zwei Funktionen U und T finden können, von denen die erste nur von den Parametern q abhängt, die zweite von eben diesen Parametern und deren Differentialquotienten. Ausserdem muss T homogen und vom zweiten Grade sein in Bezug auf diese Differentialquotienten, und endlich müssen sich die aus dem Experimente hergeleiteten Differentialgleichungen unter der Form (2) darstellen lassen.

Auch das Umgekehrte ist gültig: Immer, wenn man diese zwei Funktionen T und U finden kann, darf man sicher sein, dass die Erscheinung eine mechanische Erklärung zulässt.

Es seien $U(q_1, q_2, \dots, q_n)$ und $T(q'_1, q'_2, \dots, q'_n; q_1, q_2, \dots, q_n)$ oder einfacher $U(q_k); T(q'_k; q_k)$ diese beiden Funktionen. Was hat man noch zu thun, um die vollständige Erklärung zu erhalten?

Man hat noch p Konstanten zu finden, m_1, m_2, \dots, m_p ; und $\exists p$ Funktionen der q :

$$\varphi_i(q_1, q_2, \dots, q_n); \psi_i(q_1, q_2, \dots, q_n); \vartheta_i(q_1, q_2, \dots, q_n),$$

wo $i = 1, 2, \dots, p$, oder kürzer:

$$\varphi_i(q_k); \psi_i(q_k); \vartheta_i(q_k),$$

diese kann man ansehen als die Massen, und als die Koordinaten $x_i = \varphi_i; y_i = \psi_i; z_i = \vartheta_i$ der p Moleküle des Systems.

Hierzu haben diese Funktionen folgender Bedingung zu genügen: Es muss nämlich identisch sein:

$$T(q'_k, q_k) = \frac{1}{2} \sum m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) = \frac{1}{2} \sum m_i (\varphi_i'^2 + \psi_i'^2 + \vartheta_i'^2)$$

wo

$$\varphi_i' = q'_1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_1} + q'_2 \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_2} + \dots + q'_n \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_n} \text{ etc.}$$

Da die Zahl p beliebig gross gewählt werden kann, so ist es immer möglich, dieser Bedingung zu genügen, und zwar auf unendlich viele Arten.

Vorausgesetzt also, dass die Funktionen $U(q_k)$, $T(q_k, \dot{q}_k)$ existiren, kann man eine unendlich grosse Zahl von mechanischen Erklärungen der Erscheinung finden.

Wenn also eine Erscheinung eine vollständige mechanische Erklärung zulässt, so wird sie auch noch eine unbeschränkte Anzahl anderer Erklärungen zulassen, welche ebensogut von allen durch das Experiment enthüllten Einzelheiten Rechenschaft ablegen.

Das Obige wird durch die Geschichte aller Zweige der Physik bestätigt: In der Optik nimmt beispielsweise Fresnel an, dass die Schwingungen senkrecht zur Polarisationssebene vor sich gehen, Neumann dagegen hält sie für parallel der Polarisationssebene. Lange Zeit suchte man nach einem „experimentum crucis“, das die Entscheidung für die eine der beiden Theorien liefern sollte, und konnte es nicht finden.

Ebenso sehen wir, ohne das Gebiet der Elektrizität zu verlassen, dass die Theorie von den beiden Fluida und dem einen Fluidum in gleicher Weise vollkommen befriedigend den in der Elektrostatik beobachteten Gesetzen Rechnung tragen.

Alle diese Thatsachen lassen sich mit Hülfe der Eigenschaften der oben erwähnten Gleichungen von Lagrange ohne Schwierigkeit erklären.

Es ist nun leicht, den Grundgedanken von Maxwell zu verstehen:

Um die Möglichkeit einer mechanischen Erklärung der Elektrizität nachzuweisen, brauchen wir uns nicht damit abzugeben, diese Erklärung selbst zu finden, sondern es genügt uns, zwei Funktionen T und U kennen zu lernen, welche die beiden Theile der Energie bilden, mit diesen Funktionen die Gleichungen von Lagrange aufzustellen und diese alsdann mit den experimentellen Gesetzen zu vergleichen.

Wie aber unter all diesen möglichen Erklärungen eine Wahl treffen, wenn das Experiment uns dabei seine Hülfe versagt? Vielleicht wird einmal eine Zeit kommen, wo die Physiker an der Lösung derartiger, den exakten Methoden nicht zugänglicher Fragen kein Interesse mehr empfinden und sie den Metaphysikern überlassen. Noch aber ist diese Zeit nicht da; der Mensch beruhigt sich nicht so leicht dabei, über den Urgrund der Dinge ewig im Dunkel zu bleiben.

Unsere Wahl kann also nur noch durch Betrachtungen geleitet werden, bei denen die persönliche Ansicht eine grosse Rolle spielt;

indessen gibt es Lösungen, welche Jedermann wegen ihrer Seltsamkeit verwerfen und andere, denen Jeder wegen ihrer Einfachheit den Vorzug geben wird.

Was die Elektrizität und den Magnetismus anbelangt, so verzichtet Maxwell darauf, eine Entscheidung zu treffen. Nicht, als ob er grundsätzlich Alles verwürfe, was der exakten Wissenschaft nicht zugänglich ist, — das beweist zur Genüge die Zeit, die er auf den Ausbau der kinetischen Gastheorie verwendet hat. Und wenn er auch in seinem grossen Werke keine vollständige Erklärung gibt, so hat er doch früher eine solche in einem Artikel des *Philosophical Magazine* zu geben versucht. Aber die Seltsamkeit und Verwickelung der Hypothesen, zu denen er seine Zuflucht nehmen musste, hatten ihn später dazu veranlasst, vollständig darauf zu verzichten.

Im ganzen Werke finden wir das Wesentliche, d. h. das, was allen Theorien gemeinsam bleiben muss, besonders hervorgehoben; was sich dagegen nur mit einer speciellen Theorie vereinigen liesse, darüber geht er fast stets mit Stillschweigen hinweg. Der Leser sieht sich also einer von Materie fast leeren Form gegenüber, die er anfänglich für einen flüchtigen, wesenlosen Schatten zu halten geneigt ist. Aber die Anstrengungen, die er zu machen gezwungen ist, veranlassen ihn zum Nachdenken und er erkennt schliesslich, was bei den gesammten Theorien, die er früher bewundert hatte, einigermassen erkünstelt ist.

In der Elektrostatik wurde mir meine Aufgabe am schwersten, denn gerade hier lässt die Genauigkeit zu wünschen übrig. Einer der französischen Gelehrten, die sich am meisten in das Werk von Maxwell vertieft hatten, sagte mir eines Tages: „Ich begreife Alles in seinem Buche bis auf das, was er unter einer elektrisirten Kugel versteht“. So glaubte ich denn, reichlich lange bei diesem Abschnitte verweilen zu sollen, denn ich wollte bei der Definition der elektrischen Vertheilung diese Unbestimmtheit nicht bestehen lassen, in welcher die Ursache für diese ganze Unverständlichkeit zu suchen ist; ich wollte aber ebensowenig den Gedanken des Verfassers schärfer fassen und dabei vielleicht über das Ziel hinausschiessen.

Ich habe mich also dafür entschieden, zwei vollständige, aber gänzlich verschiedene Theorien auseinanderzusetzen, und hoffe, dass der Leser auf diese Weise ohne Mühe finden wird, was beiden Theorien gemeinsam ist, und was demnach ihren wesentlichen Bestandtheil bildet. Er wird ausserdem vor der Täuschung bewahrt bleiben, als ob eine der beiden Theorien der Sache vollkommen auf den Grund ginge. In der ersten setze ich die Existenz zweier Fluida voraus, der Elektrizität und des Induktionsfluidum, die ebenso nütz-

lich sein können, wie die beiden Fluida von Coulomb, die aber ebensowenig Realität besitzen. Ebenso ist die Hypothese, wonach die dielektrischen Substanzen aus Zellen bestehen, nur dazu bestimmt, uns die Idee von Maxwell durch die Beziehung zu Vorstellungen, die uns bereits geläufiger geworden sind, geistig näher zu bringen. Hierdurch füge ich zu den Gedanken des englischen Gelehrten nichts hinzu und nehme nichts davon hinweg, denn es ist wohl zu beachten, dass Maxwell dasjenige, „what we may call an electric displacement“, niemals als wirkliche Bewegung eines wirklichen Fluidum aufgefasst hat.

Ich bin Herrn Blondin zu grossem Danke verpflichtet, dass er diese Vorlesungen, die ich während des Sommersemesters 1888 hielt, gesammelt und herausgegeben hat, wie er es bereits mit meinen Vorlesungen über die physikalische Optik gethan hatte.

Seine Aufgabe war diesmal weit schwieriger, denn die Wissenschaft ist mit einer solchen Geschwindigkeit fortgeschritten, wie man es beim Beginne dieser Vorlesungen durchaus nicht ahnen konnte. Die Theorie von Maxwell hat seitdem in wahrhaft überraschender Weise die experimentelle Bestätigung gefunden, die ihr bis dahin noch fehlte. Ich konnte in meinen Vorlesungen nur die ersten Versuche von Röntgen und Hertz auseinandersetzen, die seitdem durch die neueren und vollständigeren Untersuchungen dieses letzteren Gelehrten viel an Interesse verloren haben. Herr Blondin musste also diesen Theil der Vorlesungen umarbeiten und beträchtlich erweitern.

Das Kap. XIII, in welchem diese verschiedenen Versuche zur experimentellen Bestätigung der Theorie besprochen werden, ist sein eigenes Werk.

Indessen glaubte ich, dass es richtiger sein würde, die wenigen Seiten, welche er den Versuchen von Hertz widmete, bis zur Herausgabe eines anderen Werkes aufzusparen. Dies Werk, welches die im Jahre 1890 gehaltenen Vorlesungen umfassen soll, wird nicht allein die elektrodynamischen Theorien von Helmholtz zum Gegenstande haben, sondern auch die mathematische Diskussion der Hertz'schen Versuche, und wird demnächst erscheinen. Es ist deshalb besser, erst dort eine vollständige Beschreibung dieser Versuche zu bringen¹⁾.

¹⁾ Dieser zweite Theil ist mittlerweile bereits erschienen, und die deutsche Ausgabe desselben wird bis gegen Ende d. J. folgen.

Kapitel I.

Formeln der Elektrostatik.

1. Bevor wir Clerk Maxwell's Gedankengang wiedergeben, wollen wir kurz die fundamentalen Hypothesen der augenblicklich herrschenden Theorien zusammenfassen und uns die hauptsächlichsten Grundsätze der statischen Elektrizität vergegenwärtigen, wobei wir in die Formeln die Bezeichnungen von Maxwell einführen.

2. **Theorie von den zwei Fluida.** Bei der Theorie von den zwei Fluida nimmt man an, dass sich auf den nicht elektrisirten oder mit anderen Worten den in neutralem Zustande befindlichen Körpern gleiche Mengen positiver und negativer Elektrizität befinden. Man setzt ausserdem voraus, diese Quantitäten seien hinreichend gross, dass kein Elektrisirungsvorgang einem Körper die ganze Elektrizität der einen oder anderen Art entziehen kann.

3. Aus den Versuchen von Coulomb und der Definition der Elektrizitätsmenge folgt, dass zwei mit den Quantitäten m und m' geladene Körper auf einander eine Kraft ausüben, die gegeben ist durch den Ausdruck

$$(1) \quad F = -f \frac{m m'}{r^2},$$

wobei r die Entfernung der beiden elektrisirten Körper von einander bezeichnet, die im Vergleiche zu den Dimensionen dieser Körper sehr gross sein soll. Ein negativer Werth von F bedeutet eine Abstossung zwischen den Körpern, einem positiven Werthe entspricht eine Anziehung. f ist ein numerischer Coefficient, dessen Werth von der für die Messung der Elektrizitätsmenge gewählten Einheit abhängt.

4. **Theorie von einem einzigen Fluidum.** Nach der Theorie von einem einzigen Fluidum, an welche die Theorie von

Maxwell wieder anknüpft, setzt man voraus, dass sich auf jedem Körper im neutralen Zustande eine gewisse Menge positiver Elektrizität befindet. Einen Körper, der eine grössere Menge positiver Elektrizität enthält, als er normaler Weise enthalten sollte, nennt man positiv geladen, im entgegengesetzten Falle ist er negativ geladen.

Zur Erklärung der elektrischen Anziehung und Abstossung in dieser Theorie nimmt man an, dass die elektrischen Moleküle untereinander ebenso wie die materiellen Moleküle untereinander sich abstossen, während umgekehrt zwischen den elektrischen und den materiellen Molekülen Anziehung herrscht. Diese Anziehung und Abstossung soll ausserdem in der Richtung der Verbindungslinie der Moleküle vor sich gehen und zwar umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung.

Unter diesen Bedingungen muss die in einem neutralen Körper enthaltene Menge positiver Elektrizität so gross sein, dass die Abstossung, welche sie auf ein elektrisches Molekül ausserhalb des Körpers ausübt, gleich ist der Anziehung, welche von der Materie des Körpers auf dies Molekül ausgeübt wird.

5. Der Ausdruck für die elektrische Kraft in der Theorie von einem einzigen Fluidum. Zwischen zwei elektrisirten Körpern treten dann vier Kräfte in Thätigkeit: Die Kraft, welche zwischen den beiden elektrischen Ladungen wirksam ist, die Abstossung der Materie, aus welcher die Körper bestehen, endlich die beiden Anziehungen, welche je zwischen der elektrischen Ladung des einen und der Materie des anderen Körpers stattfinden. Bezeichnen wir mit r die Entfernung zwischen beiden Körpern, mit μ und μ' ihre resp. elektrischen Ladungen, mit ν und ν' ihre materiellen Massen, so haben wir:

Für die Kraft zwischen den materiellen Massen:

$$- \alpha \frac{\nu \nu'}{r^2},$$

für die Anziehung zwischen der Elektrizität und der Materie

$$\beta \frac{\nu \mu'}{r^2} \quad \text{und} \quad \beta \frac{\nu' \mu}{r^2},$$

für die Abstossung zwischen den elektrischen Ladungen

$$- \gamma \frac{\mu \mu'}{r^2}.$$

Die Resultante dieser Kräfte wird sein

$$F = \frac{1}{r^2} [-\alpha \nu \nu' + \beta (\nu \mu' + \nu' \mu) - \gamma \mu \mu']$$

oder

$$(2) \quad F = -\frac{1}{r^2} \left[\gamma \left(\mu - \frac{\nu \beta}{\gamma} \right) \left(\mu' - \frac{\nu' \beta}{\gamma} \right) + \nu \nu' \left(\alpha - \frac{\beta^2}{\gamma} \right) \right].$$

Dieser allgemeine Ausdruck für die Kraft, welche zwischen zwei elektrisirten Körpern herrscht, muss sich auf die Newton'sche Anziehung reduciren, wenn sich die betrachteten Körper im neutralen Zustande befinden. Es wird dies aber der Fall sein, wenn die normale Elektrisirung eines Körpers im neutralen Zustande den Werth $\frac{\nu \beta}{\gamma}$ besitzt, und wenn $\alpha < \frac{\beta^2}{\gamma}$, da ja dann die Kraft in einer Anziehung bestehen muss.

6. Bezeichnen wir mit m den Ladungs-Ueberschuss eines elektrisirten Leiters über seine normale Ladung im neutralen Zustande, so wird die Formel (2)

$$F = -\gamma \frac{m m'}{r^2} + \left(\frac{\beta^2}{\gamma} - \alpha \right) \frac{\nu \nu'}{r^2}.$$

Sie reducirt sich auf die Formel (1), wenn man die Newton'sche Anziehung bei Seite lässt. Die Theorie von einem einzigen Fluidum führt also für die elektrischen Anziehungen und Abstossungen auf denselben Ausdruck, wie die Theorie der zwei Fluida. Demnach haben auch alle Folgerungen, die man aus Formel (1) ziehen kann, in der Theorie von einem einzigen Fluidum Geltung.

7. **Elektrostatistische Einheit der Elektrizitätsmenge.** Durch passende Wahl einer Einheit der Elektrizitätsmenge kann man bewirken, dass der numerische Koeffizient der Formel (1) = 1 wird. Die so bestimmte elektrostatistische Einheit ist diejenige Elektrizitätsmenge, welche auf eine ihr gleiche Elektrizitätsmenge, die in der Luft um die Längeneinheit von ihr entfernt ist, mit der Einheit der Kraft wirkt.

Es ist demnach der Ausdruck für die Grösse der Kraft zwischen zwei elektrischen Massen m und m' , die in der Luft in einer Entfernung r sich befinden:

$$(3) \quad F = -\frac{m m'}{r^2}.$$

8. Potential, Komponenten der elektrischen Kraft. Das Potential in einem Punkte nennt man die *Arbeit einer elektrischen Kraft, welche auf die Einheit positiver Elektrizität wirkt, wenn sich die letztere von dem betreffenden Punkte bis ins Unendliche entfernt.*

In dem speciellen Falle, wo die elektrischen Massen in der Luft vertheilt sind, hat das Potential den Werth $\sum \frac{m_i}{r_i}$, wobei r_i die Entfernung des betr. Punktes von der Masse m_i bedeutet und die Summation sich auf alle elektrischen Massen des Feldes erstreckt.

Wir bezeichnen in Uebereinstimmung mit den Benennungen von Maxwell mit ψ das Potential in einem Punkte P.

Befindet sich in P eine elektrische Masse m' , so sind die Komponenten der elektrostatischen Wirkungen auf P nach den drei Koordinatenachsen resp.

$$-m' \frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad -m' \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad -m' \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

9. Denkt man sich den Punkt P im Innern eines homogenen und im elektrischen Gleichgewichte befindlichen Körpers, so muss die Resultante der elektrostatischen Kräfte, welche auf diesen Punkt ausgeübt werden, gleich Null sein, denn sonst wäre ja das Gleichgewicht gestört. Die partiellen Differentialquotienten des Potentials $\frac{\partial \psi}{\partial x}$, $\frac{\partial \psi}{\partial y}$, $\frac{\partial \psi}{\partial z}$ sind also = 0, das Potential selbst ist demnach im Innern des Leiters konstant.

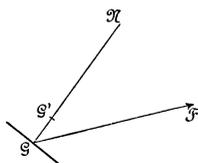


Fig. 1.

10. Kräftestrom. Wir fassen ein Oberflächen-Element $d\omega$ ins Auge und denken uns in dessen Schwerpunkt G (Fig. 1) die Normale GN nach einer Richtung hin gezogen, die wir als positiv betrachten. In G befinde sich ein elektrisches Molekül von der Masse m' und stehe unter dem Einflusse einer Kraft $G\Gamma$, deren Komponenten nach den drei

Koordinatenachsen sind:

$$-m' \frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad -m' \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad -m' \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

wenn ψ den Werth des Potentials in G bezeichnet. Nennen wir α , β , γ die Richtungscosinus der Normale GN, so wird die Projektion der Kraft $G\Gamma$ auf GN =

$$-m' \left(\alpha \frac{\partial \psi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \psi}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = -m' \frac{\partial \psi}{\partial n},$$

wobei dn eine unendlich kleine Grösse GG' bedeutet, die auf der Normalen in positiver Richtung abgetragen ist, und $d\psi$ die Aenderung des Potentials, wenn man vom Punkte G zum Punkte G' übergeht.

Ist die im Punkte G' befindliche Elektrizitätsmenge gleich der Einheit, so ist die normale Komponente der auf diese Elektrizitätsmenge ausgeübten Kraft $= -\frac{\partial \psi}{\partial n}$. Das mit dem umgekehrten Vorzeichen versehene Produkt

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} d\omega$$

aus dieser Kraft in das Flächen-Element $d\omega$ werden wir als Kräftestrom durch das Element $d\omega$ bezeichnen. Der Kräftestrom durch eine begrenzte Oberfläche wird gegeben durch den Werth des Integrals

$$\int \frac{\partial \psi}{\partial n} d\omega$$

ausgedehnt über alle Elemente der Oberfläche.

11. Theorem von Gauss. Für eine geschlossene Oberfläche ist der absolute Werth dieses Integrals gleich $4\pi M$, wobei M die gesammte Menge freier Elektrizität bedeutet, die sich im Innern des von der Oberfläche umschlossenen Raumes befindet; das Vorzeichen hängt davon ab, welche Richtung der Normalen man als positiv betrachtet. Man kann auch für den Kräftestrom den Werth $-4\pi M$ wählen, was darauf hinauskommt, dass man als positiv die Richtung der in einem Punkte der Oberfläche nach Aussen gezogenen Normale annimmt, und man sagt alsdann, der Kräftestrom „trete in die Oberfläche ein“. Demnach lässt sich das Theorem folgendermassen formuliren:

Der Kräftestrom, der in eine eingeschlossene Oberfläche eintritt, in deren Inneren sich eine Quantität M von freier Elektrizität befindet, ist gleich $-4\pi M$.

12. Satz von Poisson. Zwischen der kubischen Dichtigkeit ρ der Elektrizität in einem Punkte eines elektrisirten Körpers und den zweiten Differentialquotienten des Potentials in diesem Punkte besteht eine wichtige Beziehung, deren Kenntniss wir Poisson verdanken. Man erhält sie auf einfache Weise aus dem vorigen

Theorem, wenn man bedenkt, dass der Kräftestrom, welcher durch ein unendlich kleines rechtwinkeliges Parallelepipeton eintritt, in dessen Innern sich der betrachtete Punkt befindet, gleich $-4\pi q \cdot dx \, dy \, dz$ ist, wobei dx , dy , dz die Längen der Seiten des Parallelepipedons bedeuten. Dann gilt:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -4\pi q.$$

Maxwell bezeichnet die linke Seite dieser Gleichung mit $-\Delta^2 \psi$, und zwar im Anschlusse an die Theorie der Quaternionen, deren er sich beständig bedient. Wir wollen diese Summe von Differentialquotienten, dem allgemeinen Gebrauche entsprechend, $\Delta \psi$ nennen.

Da das Potential im Innern eines Leiters konstant ist, so hat man in diesem Falle $\Delta \psi = 0$, und deshalb, nach dem Satze von Poisson, $q = 0$. Im Innern eines Leiters ist also keine freie Elektrizität vorhanden.

Als weitere Folge des Satzes von Poisson ergibt sich, dass für jeden Punkt eines Dielektrikum, der keine freie Elektrizität besitzt, $\Delta \psi = 0$ ist. Das Potential ist also eine im Innern eines Leiters konstante Funktion, die sich ausserhalb desselben im Unendlichen der Null nähert, und für welche in jedem nicht elektrisirten Punkte eines Dielektrikum $\Delta \psi = 0$ ist.

13. Induktionsstrom. Wenn das die Leiter trennende Dielektrikum nicht aus Luft besteht, so können die der Messung zugänglichen elektrischen Erscheinungen je nach der Natur des Dielektrikum verschiedene Werthe besitzen. Dies war die Veranlassung dafür, in die Formeln einen Faktor einzuführen, den man das spezifische Induktionsvermögen des Dielektrikum nennt. Maxwell bezeichnet dasselbe mit dem Buchstaben K .

Das Produkt aus dem Kräftestrom eines Flächenelements in diesen Faktor heisst: Induktionsstrom.

Der Induktionsstrom durch eine begrenzte Oberfläche wird gegeben durch das Integral'

$$\int K \frac{\partial \psi}{\partial n} d\omega,$$

das sich über alle Elemente der Oberfläche erstreckt. Ist die Oberfläche geschlossen, so können wir annehmen — das Experiment bestätigt es! — dass der Werth dieses Integrals $= -4\pi M$ beträgt, wobei man die Richtung der Normale nach Aussen als positiv vor-

aussetzt. In dem Falle, wo das specifische Induktionsvermögen konstant ist, hat man

$$K \int \frac{\partial \psi}{\partial n} d\omega = -4\pi M.$$

14. Potential einer elektrischen Kugel in einem ausserhalb derselben gelegenen Punkt. Die Betrachtung des Kräftestromes gestattet leicht, den Werth des Potentials einer leitenden, elektrisirten Kugel S , die sich in der Luft befindet, in einem Punkte P (Fig. 2) zu ermitteln. Man findet hierfür $\frac{M}{r}$, wobei M die Ladung der Kugel bezeichnet und r die Entfernung des Punktes vom Kugelmittelpunkte. Ebenso gibt die Betrachtung des Induktionsstromes den Werth des Potentials in P , wenn sich die Kugel in einem homogenen Dielektrikum befindet, dessen specifisches Induktionsvermögen gleich K ist.

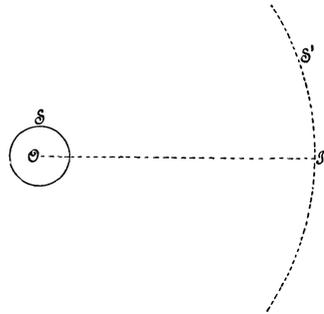


Fig. 2.

Wir beschreiben um O , den Mittelpunkt der Kugel, mit einem Radius $= OP$ eine Kugel S' . Aus Gründen der Symmetrie hat das Potential in jedem Punkte von S' denselben Werth, in Folge dessen ist

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{\partial \psi}{\partial r} = \text{const.}$$

auf der ganzen Oberfläche. Für den Induktionsstrom durch S' gilt also:

$$\int K \frac{\partial \psi}{\partial n} d\omega = K \frac{\partial \psi}{\partial r} \int d\omega = K \frac{\partial \psi}{\partial r} 4\pi r^2.$$

Da die Oberfläche geschlossen ist, so hat der Induktionsstrom den Werth $-4\pi M$, folglich:

$$K \frac{\partial \psi}{\partial r} 4\pi r^2 = -4\pi M$$

oder

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{1}{K} \cdot \frac{M}{r^2}$$

und

$$\psi = \frac{1}{K} \cdot \frac{M}{r}.$$

Die Integrationskonstante ist Null, da das Integral für $r = \infty$ den Werth Null erhält.

Das Potential in einem Punkte eines Dielektrikum, dessen spezifisches Induktionsvermögen $= K$ ist, wird also bei einer Kugel gleich $\frac{1}{K}$ von dem Werthe, den das Potential in dem betr. Punkte haben würde, wenn das Dielektrikum die Luft gewesen wäre. Dasselbe gilt auch noch für den Fall, dass das elektrische Feld, statt aus einer leitenden elektrisirten Kugel, aus irgend welchen elektrischen Massen besteht.

15. Anmerkung. Der letztere Schluss gestattet uns auch, den Ausdruck für die Kraft aufzustellen, mit der sich zwei elektrische Moleküle m und m' anziehen werden, die sich in den Punkten A und A' eines homogenen Dielektrikums befinden. Der Werth des Potentials in dem Punkte, wo sich die Masse m' befindet, sei ψ ; dann ist die elektrische Kraft, welche auf diese Masse ausgeübt wird $= -m' \frac{\partial \psi}{\partial r}$, wobei r die Entfernung der beiden Moleküle bedeutet, die wir als allein in dem Felde befindlich betrachten. Bestände das Dielektrikum aus Luft, so wäre das Potential in A' $= \frac{m}{r}$; der Werth dieses Potentials in einem Dielektrikum von dem spezifischen Induktionsvermögen K ist also, nach dem Vorhergehenden, $= \frac{1}{K} \cdot \frac{m}{r}$ und der Differentialquotient dieser Grösse: $-\frac{1}{K} \cdot \frac{m}{r^2}$. Demnach erhalten wir für die elektrische Kraft:

$$-m' \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{K} \cdot \frac{mm'}{r^2},$$

sie ist also der K^{te} Theil der Kraft, welche zwischen denselben elektrischen Massen herrschen würde, wenn sich dieselben in der Luft befänden.

Die Beziehung zwischen den Werthen, welche das Potential in einem Punkte erhält, je nachdem das Dielektrikum aus Luft oder einer anderen Substanz besteht, lässt uns erkennen, wie die elektrischen Ladungen sich je nach der Beschaffenheit des Dielektrikum ändern müssen, damit das Potential in einem Punkte immer den-

selben Werth behält. In der That ist klar, dass, um in einem Punkte stets dasselbe Potential zu erhalten, die in dem Dielektrikum mit dem Induktionsvermögen K befindlichen Ladungen direkt proportional K sein müssen, da ja für die Ladungen gleicher Grösse das Potential umgekehrt proportional K ist.

Betrachten wir also zwei kleine elektrisirte Kugeln und setzen wir voraus, dass die Potentialdifferenz zwischen den beiden Kugeln konstant bleiben soll, dann wird die zwischen ihnen herrschende Anziehung proportional sein dem Induktionsvermögen des Dielektrikum, das sie trennt. In der That werden sich bei konstanten Potentialen die Ladungen m und m' der Kugeln direkt proportional K verhalten, und die Anziehung muss proportional $\frac{mm'}{K}$ sein.

Sollen also die Potentiale konstant bleiben, so ändert sich die Anziehung direkt proportional K , und sollen die Ladungen gleich bleiben, so ist die Anziehung umgekehrt proportional K .

16. Erweiterung des Satzes von Poisson. Wie oben erwähnt, erhält man den Satz von Poisson, wenn man erwägt, dass der durch die Seitenflächen eines rechtwinkligen Parallelepipeds eintretende Kräftestrom $= -4\pi q dx dy dz$ ist. Da nun auch der Induktionsstrom durch eine geschlossene Oberfläche den Werth $-4\pi M$ hat, so werden wir eine dem Poisson'schen Satze analoge Beziehung erhalten, wenn wir berücksichtigen, dass der durch die Seiten eines Elementar-Parallelepipeds eintretende Induktionsstrom $= -4\pi q dx dy dz$ ist.

Uebrigens können wir auf sehr einfache Weise zu dieser Beziehung gelangen mittelst eines Hilfssatzes, der gewöhnlich zum Beweis des Green'schen Satzes dient, und der analytisch durch folgende Gleichung wiedergegeben wird:

$$\int \alpha F d\omega = \int \frac{\partial F}{\partial x} d\tau.$$

Hierbei erstreckt sich die erste Integration über eine geschlossene Oberfläche, die zweite über das durch diese Oberfläche begrenzte Volumen; α bezeichnet den cos. des Winkels zwischen der X-Achse und der Normalen des Elements $d\omega$, und F eine beliebige, aber stetige Funktion der Koordinaten.

Wenden wir diesen Satz auf das Integral an, welches den Induktionsstrom durch eine geschlossene Oberfläche darstellt, so erhalten wir

$$\int K \frac{\partial \psi}{\partial n} d\omega = \int K \left(\alpha \frac{\partial \psi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \psi}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) d\omega = -4\pi M.$$

Nun haben wir:

$$\int \alpha K \frac{\partial \psi}{\partial x} d\omega = \int \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) d\tau,$$

$$\int \beta K \frac{\partial \psi}{\partial y} d\omega = \int \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) d\tau,$$

$$\int \gamma K \frac{\partial \psi}{\partial z} d\omega = \int \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) d\tau$$

und durch Einsetzen in die obige Gleichung:

$$\int \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] d\tau = -4\pi M.$$

Bezeichnen wir durch ϱ die kubische Dichtigkeit in jedem Punkte, so ist $M = \int \varrho d\tau$, folglich:

$$\int \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] d\tau = -4\pi \int \varrho d\tau.$$

Diese Gleichung gilt für jedes beliebige Volumen, also auch für ein unendlich kleines, und wir erhalten deshalb:

$$\sum \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = -4\pi \varrho.$$

In dem speciellen Falle, wo das Dielektrikum homogen ist, d. h. wo K keine Funktion der Koordinaten ist, reducirt sich diese Gleichung auf:

$$\sum K \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} = K \Delta \psi = -4\pi \varrho.$$

Kapitel II.

Hypothesen von Maxwell.

17. Induktionsfluidum. Das Charakteristische an der Maxwell'schen Theorie ist die hervorragende Rolle, welche die Dielektrika spielen. Maxwell nimmt an, dass die ganze Materie der Dielektrika von einem hypothetischen, elastischen Fluidum erfüllt sei, ebenso wie wir in der Optik voraussetzen, dass der Aether die durchsichtigen Körper durchdringe. Maxwell nennt dies Fluidum Elektrizität, und wir werden in der Folge auch den Grund für diese Benennung kennen lernen; da dieselbe jedoch leicht eine für die Klarheit der Darstellung bedauerliche Verwirrung nach sich ziehen könnte, so wollen wir ihm den Namen „Induktionsfluidum“ beilegen und das Wort „Elektrizität“ in seiner gewöhnlichen Bedeutung gebrauchen.

Befinden sich alle im Dielektrikum liegenden Leiter im neutralen Zustande, so ist das Induktionsfluidum im normalen Gleichgewichte. Sind dagegen die Leiter elektrisirt und befindet sich ihr System in einem Zustande, den man in der gewöhnlichen Theorie als elektrisches Gleichgewicht zu bezeichnen pflegt, so nimmt das Induktionsfluidum einen neuen Gleichgewichtszustand an, den Maxwell „Spannungs-Gleichgewicht“ nennt.

18. Elektrische Verschiebung. Wenn ein Molekül des Induktionsfluidum aus seiner normalen Gleichgewichtslage entfernt wird, so sagt Maxwell, es finde eine „elektrische Verschiebung“ statt. Die Komponenten dieser Verschiebung sind die Zuwachse, welche die Koordinaten des Moleküls erfahren; er bezeichnet dieselben mit den Buchstaben f , g , h und setzt voraus, dass sie resp. die Werthe

$$(1) \quad f = -\frac{K}{4\pi} \frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad g = -\frac{K}{4\pi} \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad h = -\frac{K}{4\pi} \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

besitzen.

Aus dieser Hypothese, deren Begründung wir später geben werden, folgen Beziehungen einerseits zwischen den Komponenten der Verschiebung und der Masse freier Elektrizität innerhalb einer geschlossenen Oberfläche, andererseits zwischen den Differentialquotienten dieser Komponenten und der elektrischen Dichtigkeit in einem Punkte.

Setzen wir nämlich die Werthe der partiellen Differentialquotienten von ψ , die sich aus Gleichung (1) ergeben, in den Ausdruck für den Induktionsstrom durch eine geschlossene Oberfläche ein, so erhalten wir aus:

$$\int K \frac{\partial \psi}{\partial n} d\omega = \int K \left(\alpha \frac{\partial \psi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \psi}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) d\omega = -4\pi M,$$

$$(2) \quad \int (\alpha f + \beta g + \gamma h) d\omega = M.$$

Führen wir ferner diese Werthe in die Poisson'sche Gleichung ein, die sich auf irgend ein beliebiges Dielektrikum bezieht, so haben wir

$$(3) \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = \rho.$$

19. Inkompressibilität des Induktionsfluidum und der Elektrizität. Das Studium der Folgerungen der oben angegebenen Beziehungen veranlasst uns, das Induktionsfluidum und die Elektrizität als zwei inkompressibele Fluida anzusehen.

Zunächst ergibt sich aus der Hypothese von Maxwell über die Grösse der Komponenten der Verschiebung in einem Punkte unmittelbar, dass, wenn die Elektrizität in Bewegung ist, auch das Induktionsfluidum nicht in Ruhe sein kann. Aendern wir nämlich die elektrischen Ladungen der im Innern eines Dielektrikum befindlichen Leiter, so bringen wir gleichzeitig eine Veränderung des in irgend einem Punkte des Dielektrikum vorhandenen Potentials ψ hervor und demnach auch eine Aenderung der Werthe f, g, h der Komponenten der elektrischen Verschiebung, welche durch die Gleichungen (1) gegeben sind.

20. Wir betrachten nun eine geschlossene Oberfläche, deren Innenraum durch ein homogenes Dielektrikum und durch Leiter angefüllt ist, welche sich im elektrischen Gleichgewichte befinden und eine totale Ladung $= M$ besitzen. Wir nehmen an, dass dieser Ladung ein Zuwachs dM ertheilt werde und dass auch hiernach das System der Leiter im elektrischen Gleichgewichte bleiben möge.

Hierbei geht das Induktionsfluidum von einem Gleichgewichtszustand zu einem anderen über, und während dieses Ueberganges findet eine Verschiebung eines jeden seiner Moleküle statt, da ja eine Bewegung der Elektrizität stattgefunden hat. Wir bestimmen nun die Menge des Fluidum, die hierbei durch die geschlossene Oberfläche gewandert ist. Bedeutet dt die unendlich kurze Zeit, während welcher der Uebergang von dem anfänglichen Zustande des Systems zum Endzustande sich abgespielt hat, so ist die Quantität des Induktionsfluidum, welche durch ein Element $d\omega$ der Oberfläche entwichen ist,

$$dq = d\omega dt V_n,$$

wobei V_n die Projektion der Geschwindigkeit der Verschiebung auf die äussere Normale der geschlossenen Oberfläche bedeutet. Die Menge des Induktionsfluidum, welche während dieser Zeit durch die ganze Oberfläche hindurchgeht, ist also

$$dQ = dt \int V_n d\omega.$$

Da nun f, g, h die Komponenten der Verschiebung bezeichnen, so sind $\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial g}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial t}$ die Komponenten der Geschwindigkeit, und in Folge dessen ist die normale Komponente V_n gegeben durch

$$V_n = \alpha \frac{\partial f}{\partial t} + \beta \frac{\partial g}{\partial t} + \gamma \frac{\partial h}{\partial t}.$$

Durch Einführung dieses Ausdruckes in dQ erhalten wir:

$$dQ = dt \int \left(\alpha \frac{\partial f}{\partial t} + \beta \frac{\partial g}{\partial t} + \gamma \frac{\partial h}{\partial t} \right) d\omega.$$

Das Integral auf der rechten Seite ist aber nichts anderes als der nach t genommene Differentialquotient des auf der linken Seite der Gleichung (2) stehenden Werthes. Wir erhalten also:

$$dQ = dt \frac{\partial M}{\partial t} = dM,$$

d. h.: Die Quantität des Induktionsfluidum, die durch die Oberfläche austritt, ist gleich der Quantität von Elektrizität, welche dort eintritt. Der ganze Vorgang spielt sich also ab, wie wenn die Elektrizität das Induktionsfluidum verdrängte, oder, in anderen Worten, als ob Induktionsfluidum und Elektrizität zwei inkompressibele Fluida wären.

21. Uebrigens kann die Inkompressibilität des Induktionsfluidum auch unmittelbar aus der Gleichung (3) abgeleitet werden. Nehmen wir nämlich an, das Dielektrikum, welches einen zu betrachtenden Punkt des Induktionsfluidum enthält, befinde sich im neutralen Zustande, so geht die betr. Gleichung über in:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0.$$

Die linke Seite derselben ist nichts anderes, als die Quantität, die wir in einem anderen Werke¹⁾ mit θ bezeichneten, und wir wiesen nach, dass die Gleichung $\theta = 0$ die Inkompressibilität des Fluidum ausdrückte.

22. Bild für die Elasticität des Induktionsfluidum. Betrachten wir einerseits zwei Leiter A und B (Fig. 3), welche unter einander

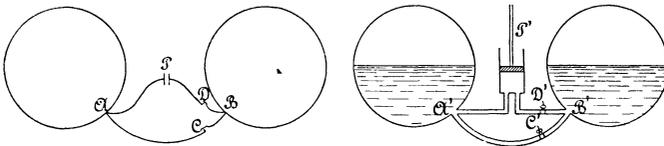


Fig. 3.

durch 2 Drähte verbunden sind, von denen der eine nur den Kommutator C trägt, der andere ausser dem Kommutator D noch die Säule P. Andererseits denken wir uns zwei geschlossene, mit Luft und Wasser gefüllte Gefässe A' und B', die durch zwei Kanäle verbunden sind, von denen der erste den Hahn C' enthält, der zweite ausser dem Hahne D' noch das Pumpwerk P'.

Die Konduktoren A und B mögen sich zunächst im neutralen Zustande befinden. Oeffnet man nun den Kommutator C und schliesst den Kommutator D, dann entsteht in dem Drahte A D B ein Strom von kurzer Dauer, und bald haben wir einen Zustand elektrischen Gleichgewichts, bei welchem die Konduktoren mit Elektrizität von verschiedenem Vorzeichen geladen sind, z. B. A positiv und B negativ. Oeffnen wir dann den Kommutator D und schliessen C, so vereinigen sich die Elektrizitäten der Konduktoren durch den Draht A C B und die Konduktoren gelangen wieder zum neutralen Zustande.

¹⁾ cf. Théorie mathématique de la Lumière pg. 25–26.

23. Um die Rolle zu verstehen, welche das Induktionsfluidum bei diesem Experimente spielt, sehen wir zu, was in dem System der beiden Gefässe A' und B' vor sich geht, wenn man die Pumpe in Gang setzt und mit den Hähnen C' und D' die Verbindungen herstellt, die wir soeben durch die Kommutatoren C und D erreicht hatten. Wir nehmen an, dass die Oberfläche des Wassers in beiden Gefässen in derselben Horizontalebene liege, schliessen den Hahn C', öffnen D' und setzen die Pumpe in Gang; dann wird das Wasser z. B. vom Gefäss B' nach A' übergehen können. Hierdurch wird die elastische Kraft der Luft in B' vermindert, in A' vermehrt. Schliessen wir den Hahn D' und öffnen C', so bewirkt die Verschiedenheit der elastischen Kräfte der Luft in beiden Gefässen, dass das Wasser aus A' nach B' zurücksteigt, bis die Niveaus wieder gleich geworden sind. Das System ist also wie bei dem elektrischen Experiment zum Anfangszustande zurückgekehrt, und wir können das Wasser als materiellen Repräsentanten des elektrischen Fluidum betrachten. Die Volumenzunahme des Wassers in A' und die Verminderung in B', das Resultat der ersten Phase des hydrostatischen Versuches, können die positive und negative Ladung der Konduktoren A und B in der korrespondirenden Phase des elektrischen Versuchs versinnbildlichen. Die Rolle, welche die Luft in Folge ihrer elastischen Kraft spielt, lässt sich mit der Rolle des Induktionsfluidum beim elektrischen Experimente vergleichen. Die Elasticität des Induktionsfluidum also, welches in der die Konduktoren trennenden Luft vorhanden und durch die Ladungen der Konduktoren verschoben ist, wird die Ursache zur Vereinigung der Ladungen.

Allerdings müssen wir gleich hinzufügen, dass dies hydrostatische Bild, wenn es auch leicht begreiflich macht, wie sich in der Maxwell'schen Theorie das Induktionsfluidum verhält, doch nicht zu weit verfolgt werden darf, denn das Induktionsfluidum ist inkompressibel, nicht aber die Luft, mit der wir es verglichen haben. Das Bild dient also nur dazu, die eine der Eigenschaften dieses Fluidum verständlich zu machen, nämlich seine Elasticität.

24. Jeder Strom ist ein geschlossener Strom. Die hervorragende Rolle, welche Maxwell den Dielektrika zuertheilte, die in der gewöhnlichen Theorie nur eine passive Rolle spielen, bildet nicht den einzigen Unterschied zwischen beiden Theorien, — ein anderer Unterschied liegt in der Natur der Ströme.

In der gewöhnlichen Theorie nimmt man die Existenz zweier Arten von Strömen an: Geschlossene, im Allgemeinen dauernde, und im Gegensatze dazu offene Ströme, welche aufhören, wenn in

Folge der Ladung eine Potentialdifferenz auftritt, welche gleich ist der elektromotorischen Kraft der elektrischen Quelle. Diese offenen Ströme kommen beispielsweise zu Stande, wenn man die Pole einer Säule mit zwei Leitern oder den beiden Belegungen eines Kondensators in Verbindung setzt.

In der neuen Theorie kann es nur geschlossene Ströme geben. Betrachten wir nämlich den offenen Strom, der entsteht, wenn wir die Pole einer Säule mit zwei isolirten Leitern A und B verbinden: Der Leiter, welcher sich nach gewöhnlicher Ausdrucksweise positiv ladet, muss nach Maxwell'scher Theorie eine grössere Menge des elektrischen Fluidum aufnehmen, als er im neutralen Zustande besitzt, im anderen Leiter muss sich im Gegentheile die Menge des elektrischen Fluidum vermindern. Da jedoch das elektrische Fluidum inkompressibel sein soll, so bleibt die Dichte desselben konstant, und man kann also nicht annehmen, dass in einem Punkte eine Verdichtung desselben stattfindet, im anderen dagegen eine Verdünnung. Um diese Folgerung der Inkompressibilität des elektrischen Fluidum mit der experimentellen Thatsache des Vorhandenseins von Strömen in Uebereinstimmung zu bringen, führt Maxwell das Induktionsfluidum ein, welches das beide Leitern isolirende Dielektrikum erfüllt: Das elektrische Fluidum wandert von dem einen Leiter fort, verdrängt im anderen einen Theil des Induktionsfluidum und bewirkt, dass in den ersten Leiter ebenso viel Induktionsfluidum eintritt, als elektrisches Fluidum ausgetreten war. Wir erhalten also einen geschlossenen Strom durch das Dielektrikum hindurch, und da die Moleküle des Induktionsfluidum sich längs der Kraftlinien verschieben, wie sich auch unmittelbar aus den die Komponenten der Verschiebung darstellenden Gleichungen (1) ergibt, so können wir sagen, dass die offenen Ströme der gewöhnlichen Theorie sich in der Maxwell'schen Theorie längs der Kraftlinien des Dielektrikum schliessen.

Die momentanen Ströme, welche durch die Ladung oder Entladung eines Kondensators entstehen, können ebenso als geschlossene betrachtet werden, und zwar vollzieht sich der Schluss durch das die Belegungen trennende Dielektrikum. In der Maxwell'schen Theorie haben wir es also einzig und allein mit geschlossenen Strömen zu thun.

25. Die Verschiebungen des elektrischen Fluidum und des Induktionsfluidum im Falle eines momentanen Stromes lassen sich ebenfalls durch ein aus der Hydrostatik entnommenes Bild veranschaulichen. Es genügt zu diesem Zwecke, Luft und Wasser in unserem früheren Bilde durch Wasser und Quecksilber zu ersetzen

Haben wir dann (Fig. 3) den Hahn C' geschlossen und D' geöffnet und setzen die Pumpe in Gang, so können wir nicht das Quecksilber aus einem Gefässe in das andere übertreten lassen, da diese beiden Gefässe durch inkompressibele Flüssigkeiten angefüllt sind. Der Uebertritt des Quecksilbers kann nur unter der Bedingung stattfinden, dass beide Gefässe oben durch einen Kanal verbunden sind, welcher dem Wasser gestattet, im umgekehrten Sinne zu wandern. Das Quecksilber ist dann ein Bild des elektrischen Fluidum, das Wasser dasjenige des Induktionsfluidum, und der verbindende Kanal repräsentirt ein Kraftlinienbündel im Dielektrikum.

26. Leitungsströme und Verschiebungsströme. Die geschlossenen Ströme, welche durch einen Leiter verlaufen, heissen **Leitungsströme**, diejenigen, welche durch die Verschiebung des Induktionsfluidum entstehen, **Verschiebungsströme**. Wenn in einem und demselben Kreise gleichzeitig Leitungs- und Verschiebungsströme stattfinden, so wird der Kreis nichts anderes sein, als ein offener Kreis der gewöhnlichen Theorie. Aber ausser diesen Kreisen und denjenigen, welche nur Leitungsströme enthalten, — den einzigen, die man in der gewöhnlichen Theorie behandelt —, begegnen wir in der Maxwell'schen Theorie geschlossenen Strömen, welche nur Verschiebungsströme sind; diese letzteren spielen bei der Erklärung der Lichterscheinungen eine wesentliche Rolle.

Da man unter **Leitungsströmen** diejenigen versteht, welche in gut leitenden Stromkreisen verlaufen, so müssen sie, um mit dem Experiment im Einklang zu stehen, nothwendiger Weise den Gesetzen von Ohm, Joule und denjenigen von Ampère über die gegenseitige Wirkung zweier Stromelemente, sowie den Gesetzen der Induktion gehorchen. Ueber die Gesetze, welchen die Verschiebungsströme unterworfen sind, wissen wir nichts, dies Gebiet ist also den Hypothesen weit geöffnet. Maxwell nimmt an, dass sie dem Ampère'schen Gesetze und den Induktionsgesetzen folgen, dass aber das Ohm'sche und das Joule'sche Gesetz auf sie nicht anwendbar sind, da diese Ströme bei ihrem Entstehen nur den Widerstand zu überwinden haben, welcher aus der Elasticität des Induktionsfluidum hervorgeht, — ein Widerstand, dessen Art und Weise gänzlich von der Art des Widerstandes der Leiter abweicht.

27. Potentielle Energie eines elektrischen Systems. Wir fassen ein System von Leitern in's Auge, welche mit positiver und negativer Elektrizität geladen sind. Diese Ladungen repräsentiren eine gewisse potentielle Energie. In der gewöhnlichen Theorie ist diese **potentielle Energie** zurückzuführen auf die Arbeit, welche durch die Anziehung und Abstossung der verschiedenen elektrischen

Massen unter einander geleistet wird; in der Maxwell'schen Theorie wird sie durch die Elasticität des Induktionsfluidum geliefert, welches in seiner normalen Gleichgewichtslage gestört worden ist. Diese Energie von messbarer Grösse muss nach beiden Theorien denselben Werth besitzen, und demnach müssen die Ausdrücke, welche ihren Werth zu bestimmen gestatten, identisch sein. Die Betrachtung dieser Identität wird uns neue Eigenschaften des Induktionsfluidum enthüllen.

28. Wir wollen zuerst einen Ausdruck für die potentielle Energie suchen, wie er sich aus der Arbeit der anziehenden und abstossenden Kräfte ergibt.

Es sei $d\tau$ irgend ein Volumenelement des Raumes, x, y, z seine Koordinaten und ρ die Dichtigkeit der dort befindlichen freien Elektrizität; dann wird die Menge der in dem Elemente vorhandenen Elektrizität $= \rho d\tau$ sein, und die Komponenten der auf diese Elektrizitätsmenge ausgeübten elektrischen Kraft:

$$-\rho d\tau \frac{\partial\psi}{\partial x}; \quad -\rho d\tau \frac{\partial\psi}{\partial y}; \quad -\rho d\tau \frac{\partial\psi}{\partial z}.$$

Wir nehmen an, die im Elemente $d\tau$ enthaltene Elektrizitätsmenge erleide eine solche Verschiebung, dass die Koordinaten um $\delta x, \delta y, \delta z$ wachsen. Dann wird die Arbeit der auf diese elektrische Masse wirkenden Kraft

$$= -\rho d\tau \left[\frac{\partial\psi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial\psi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial\psi}{\partial z} \delta z \right]$$

sein.

Die gesammte Arbeit der Kräfte, welche auf die verschiedenen, im ganzen Raume vertheilten elektrischen Massen wirken, wird demnach wiedergegeben durch das Integral

$$-\int \rho d\tau \left[\frac{\partial\psi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial\psi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial\psi}{\partial z} \delta z \right],$$

das über den ganzen Raum auszudehnen ist.

Nennen wir W die gesuchte potentielle Energie, so wird der Zuwachs dieser Energie dargestellt durch die Formel:

$$(4) \quad \delta W = \int \rho d\tau \left[\frac{\partial\psi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial\psi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial\psi}{\partial z} \delta z \right].$$

29. Wir wollen nun den Zuwachs $\delta\rho$ der elektrischen Dichtigkeit ρ im Innern des Elementes $d\tau$ bestimmen:

Das zu betrachtende Raumelement sei ein rechtwinkeliges Parallelepipedon, dessen drei den Koordinatenachsen parallele Kanten die Länge α , β , γ besitzen mögen; dann ist $d\tau = \alpha\beta\gamma$.

Die Menge Elektrizität, welche in dies Parallelepipedon durch eine der auf der X-Axe senkrecht stehenden Seitenflächen eintritt, wird gegeben durch das Produkt aus der Dichtigkeit des Fluidum ϱ in die Projektion der Verschiebung des Fluidum auf die X-Axe, δx , und den Flächeninhalt $\beta\gamma$ der Parallelepipedonseite; sie ist also

$$= \varrho \delta x \beta \gamma.$$

Durch einen analogen Ausdruck erhalten wir die Elektrizitätsmenge, welche in das Parallelepipedon durch die entgegengesetzte Seitenfläche eintritt. Nur $\varrho \delta x$ wird dort nicht denselben Werth besitzen, da beide Grössen, sowohl ϱ wie δx , Funktionen von x , y , z sind; wenn man nämlich von einer Seitenfläche zur entgegengesetzten übergeht, so wächst x um die sehr kleine Grösse α und $\varrho \delta x$ geht über in

$$\varrho \delta x + \frac{\partial (\varrho \delta x)}{\partial x} \alpha.$$

Die durch diese zweite Fläche eintretende Elektrizitätsmenge wird also sein:

$$- \left[\varrho \delta x + \frac{\partial (\varrho \delta x)}{\partial x} \alpha \right]$$

und zwar ist hierfür das negative Zeichen zu wählen, weil die nach innen gerichtete Normale die Richtung der negativen x hat. Es wird somit die algebraische Summe der elektrischen Massen, welche durch die beiden senkrecht zur X-Axe stehenden Seitenflächen in das Parallelepipedon eintreten:

$$- \frac{\partial (\varrho \delta x)}{\partial x} \alpha \cdot \beta \gamma = - \frac{\partial (\varrho \delta x)}{\partial x} d\tau.$$

In gleicher Weise werden die elektrischen Massen, welche durch die beiden auf der Y- resp. der Z-Axe senkrechten Flächenpaare eintreten, dargestellt durch

$$- \frac{\partial (\varrho \delta y)}{\partial y} d\tau \quad \text{und} \quad - \frac{\partial (\varrho \delta z)}{\partial z} d\tau.$$

Nun ist aber $d\tau \delta \varrho$ nichts anderes als die Summe der elektrischen Massen, welche durch die 6 Flächen in das Parallelepiped eintreten, wir erhalten also:

$$(5) \quad \delta \rho = -\frac{\partial(\rho \delta x)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho \delta y)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho \delta z)}{\partial z}.$$

Dies ist genau dieselbe Gleichung, welche in der Hydrodynamik unter dem Namen „Kontinuitätsgleichung“ bekannt ist.

30. Wir erinnern uns, dass nach einem Hilfssatz, von dem wir bereits Gebrauch machten,

$$\int \alpha F d\omega = \int \frac{\partial F}{\partial x} d\tau,$$

wobei F eine Funktion von x, y, z ist, während das erste der Integrale über alle Elemente $d\omega$ einer geschlossenen Oberfläche, das zweite über alle Elemente des durch diese Oberfläche begrenzten Raumes sich erstreckt. Wird diese Funktion F auf der Oberfläche Null, indem man z. B. als geschlossene Oberfläche eine Kugel mit unendlich grossem Radius wählt, so ist das erste Integral Null, da jedes seiner Elemente wegen des Verschwindens von F im Unendlichen = Null wird. Für eine derartige Funktion erhält man also:

$$\int \frac{\partial F}{\partial x} d\tau = 0.$$

Besteht F aus einem Produkt von zwei Funktionen u und v , so geht obige Gleichung über in

$$\int u \frac{\partial v}{\partial x} d\tau + \int v \frac{\partial u}{\partial x} d\tau = 0,$$

und hieraus erhalten wir:

$$\int u \frac{\partial v}{\partial x} d\tau = - \int v \frac{\partial u}{\partial x} d\tau,$$

eine neue Gleichung, die uns bei der Umformung von δW gute Dienste leisten wird.

31. Durch Anwendung dieser Gleichung erhält man:

$$\begin{aligned} \int \rho \delta x \frac{\partial \psi}{\partial x} d\tau &= - \int \psi \frac{\partial}{\partial x} (\rho \delta x) d\tau, \\ \int \rho \delta y \frac{\partial \psi}{\partial y} d\tau &= - \int \psi \frac{\partial}{\partial y} (\rho \delta y) d\tau, \\ \int \rho \delta z \frac{\partial \psi}{\partial z} d\tau &= - \int \psi \frac{\partial}{\partial z} (\rho \delta z) d\tau, \end{aligned}$$

Addirt man diese Gleichungen und berücksichtigt dabei die Gleichungen (4) und (5), so folgt

$$\delta W = \int \psi \delta q \, d\tau,$$

oder mit Rücksicht auf die allgemeine Gleichung von Poisson (cf. pg. 18):

$$\delta W = -\frac{1}{4\pi} \int \psi \delta \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] d\tau.$$

Durch Anwendung des oben erwähnten Hilfssatzes ergibt sich ferner:

$$\begin{aligned} \int \psi \delta \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right] d\tau &= \int \psi \, d\tau \frac{\partial}{\partial x} \left[\delta \left(K \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right] \\ &= - \int d\tau \frac{\partial \psi}{\partial x} \delta \left(K \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

oder unter Berücksichtigung des Umstandes, dass das Induktionsvermögen K durch die Verschiebung der elektrischen Massen nicht geändert wird und δK deshalb $= 0$ ist,

$$\begin{aligned} \int \psi \delta \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right] d\tau &= - \int K \, d\tau \frac{\partial \psi}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \\ &= - \int \frac{K \, d\tau}{2} \delta \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Ganz analog erhält man noch zwei andere Gleichungen und findet schliesslich durch Addition und Division mit 4π :

$$\delta W = \delta \int \frac{K}{8\pi} \sum \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 d\tau.$$

Die potentielle Energie des Systems wird also:

$$(6) \quad W = \int \frac{K}{8\pi} \sum \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 d\tau.$$

Die Integrationskonstante ist Null, da die potentielle Energie verschwindet, wenn sich der ganze Raum im neutralen Zustande befindet, und da in diesem Falle das Potential in jedem Punkte denselben Werth hat, nämlich Null.

32. Das Integral auf der rechten Seite der Gleichung (6) muss auf den gesammten Raum ausgedehnt werden, es kommt jedoch auf dasselbe hinaus, wenn man es nur auf den durch das

Dielektrikum eingenommenen Raum sich erstrecken lässt, denn die Elemente des Integrals, welche den im Innern der Leiter liegenden Punkten entsprechen, sind = Null. In der That hat das Potential in jedem Punkte eines Leiters denselben Werth, und in Folge dessen sind die partiellen Derivirten $\frac{\partial\psi}{\partial x}$, $\frac{\partial\psi}{\partial y}$, $\frac{\partial\psi}{\partial z}$ sämmtlich Null.

Diese Bemerkung gestattet, den Ausdruck (6) umzuformen; es gilt nämlich für jeden Punkt eines Dielektrikum nach den Hypothesen von Maxwell (cf. § 18):

$$f = -\frac{K}{4\pi} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x}; \quad g = -\frac{K}{4\pi} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial y}; \quad h = -\frac{K}{4\pi} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial z}.$$

Führt man nun die hieraus gewonnenen Werthe der partiellen Differentialquotienten von ψ in die Gleichung (6) ein, so folgt:

$$(7) \quad W = \int \frac{2\pi}{K} (f^2 + g^2 + h^2) d\tau.$$

Dies ist der Ausdruck für die potentielle Energie eines elektrisirten Systems mit Hülfe der Maxwell'schen Bezeichnungen.

33. Wir suchen nunmehr den Ausdruck für diese Energie, wenn man dieselbe als Folge der Gestaltänderung des Induktionsfluidum betrachtet.

Es seien $X d\tau$, $Y d\tau$, $Z d\tau$ die drei Komponenten der Kraft, welche auf ein Element $d\tau$ des Induktionsfluidum wirkt, wenn sich dies Fluidum in Folge der Ladung der im Dielektrikum lagernden Leiter im Spannungsgleichgewichte befindet. Erfahren die das System zusammensetzenden elektrischen Moleküle eine unendlich kleine Verschiebung, so wachsen die Verschiebungs-Komponenten f , g , h des Elementes $d\tau$ des Induktionsfluidum um δf , δg , δh . Die Arbeit der auf das Element ausgeübten Kraft wird demnach

$$[X \delta f + Y \delta g + Z \delta h] d\tau,$$

und die gesammte, bei allen Elementen des Induktionsfluidum auftretende Arbeit ist

$$\int [X \delta f + Y \delta g + Z \delta h] d\tau,$$

wobei das Integral sich über den ganzen, vom Dielektrikum eingenommenen Raum erstreckt. Die Variation der potentiellen Energie des Systems, die sich nur durch das Vorzeichen von der Variation der Arbeit unterscheidet, ist demnach

$$\delta W = - \int [X \delta f + Y \delta g + Z \delta h] d\tau.$$

34. Elasticität des Induktionsfluidum. Die Vergleichung dieses Ausdruckes mit dem folgenden:

$$\delta W = \int \frac{4\pi}{K} [f\delta f + g\delta g + h\delta h] dr,$$

der aus der Gleichung (7) abgeleitet ist, gibt uns also für die Komponenten X , Y , Z die Werthe:

$$X = -\frac{4\pi}{K} f; \quad Y = -\frac{4\pi}{K} g; \quad Z = -\frac{4\pi}{K} h.$$

Diese Gleichungen zeigen, dass die Komponenten der auf ein Element $d\tau$ des Induktionsfluidum ausgeübten Kraft proportional sind den Komponenten der elektrischen Verschiebung. Die elastische Kraft des Induktionsfluidum hat also die Richtung der Verschiebung, und das Verhältniss zwischen ihrer Grösse und derjenigen der Verschiebung ist gleich $\frac{4\pi}{K}$. Wir werden später sehen, dass die Richtung der elastischen Kraft nicht mehr mit der Richtung der Verschiebung zusammenfällt, wenn das Dielektrikum aus einem krystalinischen Mittel besteht; die soeben durchgeführten Entwickelungen gelten nur für isotrope dielektrische Medien.

35. Es ist kaum nöthig, darauf hinzuweisen, wie weit sich die Elasticität des Induktionsfluidum von der Elasticität der Gase oder des Lichtäthers unterscheidet. Bei den Gasen und dem Aether hängt die potentielle Energie nur von der relativen Lage der Moleküle ab und nicht von ihrer absoluten Lage im Raum; in Folge dessen tritt keine elastische Reaktion ein, wenn eines dieser Fluida sich verschiebt, ohne sich zu deformiren. Ganz anders bei dem Induktionsfluidum: hier verläuft der Vorgang so, als ob jedes der Moleküle des letzteren proportional zur Entfernung von seiner normalen Gleichgewichtslage durch diese angezogen würde. Hieraus würde folgern, dass, wenn man alle diese Moleküle um dieselbe Strecke verschöbe, ohne jedoch dabei ihre relative Lage zu verändern, die Elasticität nichtsdestoweniger zur Wirkung gelangen würde. Die Annahme einer so ganz besonderen Elasticität für das Induktionsfluidum scheint nur schwer zulässig zu sein. Man begreift nämlich nicht, wie der mathematische Punkt, in welchem sich im Zustande des normalen Gleichgewichts ein Molekül des Induktionsfluidum befindet, auf dies Molekül wirken kann, um es in seine Gleichgewichtslage zurückzuführen, wenn eine elektrische Ursache dasselbe daraus ent-

fernt hat. Man würde es viel leichter verstehen, dass die materiellen Moleküle des Dielektrikum auf die Moleküle des Induktionsfluidum einwirkten, welche das ponderabele Medium durchsetzen. Aber diese Annahme würde nicht alle Schwierigkeiten beseitigen, denn sie würde nicht die Elasticität des in dem luftleeren Raum ausgebreiteten Induktionsfluidum erklären. Ausserdem würde die Wirkung der Materie auf dieses Induktionsfluidum nothwendiger Weise auch umgekehrt eine Gegenwirkung des Fluidum auf die Materie nach sich ziehen, hiervon aber kann man nicht die geringste Spur nachweisen.

36. Man könnte noch das Vorhandensein zweier sich durchdringenden Induktionsfluida annehmen und voraussetzen, dass die Moleküle des einen auf diejenigen des anderen wirkten, wenn sie aus ihren normalen Gleichgewichtslagen entfernt sind. Aber wenn auch diese Hypothese den Vortheil bietet, dass sie die dem Induktionsfluidum eigenthümliche Elasticität auf die unseren gewöhnlichen Begriffen geläufige Elasticität zurückführt, so hat sie doch den Nachtheil, complicirter zu sein, als die Hypothese von einem einzigen Fluidum. Auch glauben wir, dass die Annahme von dem Maxwell'schen Induktionsfluidum nur eine vorübergehende ist, und dass sie durch eine verständlichere ersetzt werden wird, sobald die Fortschritte der Wissenschaft dies gestatten. Man kann uns einwerfen, dass Maxwell diese Annahme eines Induktionsfluidum gar nicht gemacht hat; aber wenn auch diese Bezeichnung, wie wir bereits im Anfange des Kapitels zugegeben haben, in dem Werke des Gelehrten nirgends vorkommt, die Sache selbst findet sich dort, nur dass er das, was wir Induktionsfluidum genannt haben, mit dem Ausdrücke Elektrizität bezeichnet. In der Maxwell'schen Ausdrucksweise wird die Elektrizität der Dielektrika als elastisch, diejenige der Leiter als unelastisch vorausgesetzt. Diese verschiedenen Eigenschaften, welche den zwei mit demselben Namen bezeichneten Fluida zugeschrieben werden, sind die Ursachen für den Mangel an Klarheit, unter dem gewisse Stellen des Maxwell'schen Werkes leiden. Nur um diese Unklarheit zu beseitigen, haben wir die Bezeichnung „Induktionsfluidum“ in die Darstellung der Maxwell'schen Ideen eingeführt.

37. Elektrische Vertheilung. Um die Berechtigung der Maxwell'schen Hypothesen vollständig nachzuweisen, müssen wir nun noch zeigen, dass die experimentellen Gesetze der elektrischen Vertheilung nothwendiger Weise aus derselben folgen.

Beginnen wir damit, diese Gesetze aufzuführen: Wir wissen, dass diese Vertheilung nur von einer gewissen Funktion ψ abhängt, welche verschiedenen Bedingungen unterworfen ist: Sie selbst,

ebenso wie ihre Differentialquotienten, ist in der ganzen Ausdehnung des Dielektrikum stetig und genügt der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = 0$$

(verallgemeinerte Poisson'sche Gleichung für $\rho = 0$).

In jedem Punkte eines Leiters hat sie einen konstanten Werth, aber in einem Punkte der Oberfläche sind ihre Differentialquotienten nicht mehr stetig. Endlich wird diese Funktion für im Unendlichen gelegene Punkte = Null.

Das Studium der elektrischen Vertheilung auf einem Leiter veranlasst die Einführung einer neuen Grösse, nämlich der elektrischen Oberflächendichtigkeit. Bezeichnen wir mit q die Menge der auf einem Oberflächenelemente $d\omega$ ausgebreiteten Elektrizität, so gibt die Poisson'sche Gleichung, wenn wir sie auf den Fall anwenden, wo das Dielektrikum nicht aus Luft besteht,

$$K \frac{\partial \psi}{\partial n} d\omega = - 4 \pi q .$$

Die Dichtigkeit der Oberflächenbelegung $\frac{q}{d\omega}$ wird also

$$\sigma = - \frac{K}{4 \pi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n} .$$

Man kann jedoch annehmen, dass die auf der Oberfläche ausgebreitete Lage der elektrischen Schicht eine konstante Dichtigkeit besitzt und dass ihre Dicke proportional σ ist; dieser letzten Erklärung wollen wir uns anschliessen.

38. Wir kommen nun wieder auf die Maxwell'sche Theorie: In dieser haben wir es mit zwei inkompressibeln Fluida zu thun, dem Induktionsfluidum und dem elektrischen Fluidum, auf welche man, wie wir annehmen, die Gesetze der Hydrostatik anwenden kann. Nun haben bekanntlich, wenn p den Druck in einem Punkte x, y, z eines solchen Fluidum bedeutet, die Komponenten X, Y, Z der aus der Verschiebung des Punktes entstehenden elastischen Kraft die Werthe:

$$X = \frac{\partial p}{\partial x}; \quad Y = \frac{\partial p}{\partial y}; \quad Z = \frac{\partial p}{\partial z} .$$

Bezeichnen wir mit ψ den Druck in einem Punkte des Induktionsfluidum, so erhalten wir

$$X = \frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad Y = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad Z = \frac{\partial \psi}{\partial z} .$$

Nun fanden wir aber früher, § 34, dass die Komponenten der elastischen Kraft gleich den Produkten aus den Komponenten der Verschiebung in $-\frac{4\pi}{K}$ sind.

Wir erhalten also:

$$(8) \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{4\pi}{K}f; \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = -\frac{4\pi}{K}g; \quad \frac{\partial\psi}{\partial z} = -\frac{4\pi}{K}h.$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$f = -\frac{K}{4\pi} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x}; \quad g = -\frac{K}{4\pi} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial y}; \quad h = -\frac{K}{4\pi} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial z}.$$

Diese neuen Gleichungen aber stimmen vollkommen mit denjenigen überein, welche die Komponenten der Verschiebung definiren, wobei dann ψ das Potential bedeutet. Es bleibt uns nun noch übrig, nachzuweisen, dass der Druck ψ in einem Punkte des Induktionsfluidum nichts anderes ist als das Potential.

39. Da das Induktionsfluidum inkompressibel ist, so haben wir die Beziehung:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0,$$

welche mit Berücksichtigung der Gleichung (8) in die folgende übergeht:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial\psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial\psi}{\partial z} \right) = 0;$$

die Funktion ψ genügt also einer der für das Potential gültigen Bedingungen. Sie ist auch, wie das Potential, im Innern eines Leiters konstant, denn die Elektrizität, welche die Leiter erfüllt, ist nicht elastisch, also sind $X, Y, Z = \text{Null}$ und dasselbe muss bei den Differentialquotienten von ψ stattfinden. Geht man von einem Punkte des Dielektrikum zu einem Punkte im Innern eines Leiters über, dann bleiben die Differentialquotienten der Funktion ψ nicht stetig, da sie von einem endlichen Werthe bis zu Null abnehmen; die Funktion selbst jedoch bleibt stetig. Wäre nämlich der Druck auf beiden Seiten der den Leiter begrenzenden Oberfläche nicht derselbe, so würde kein Gleichgewicht stattfinden können, da bei der unelastischen Natur des elektrischen Fluidum jeder Druckunterschied eine Bewegung dieses Fluidum zur Folge haben würde.

Die Funktion ψ besitzt also alle Eigenthümlichkeiten des Potentials; demnach ist der Druck des Induktionsfluidum in einem Punkte gerade das Potential in diesem Punkte.

40. Wir wollen nun noch nachweisen, dass die Maxwell'sche Theorie in Bezug auf die Dicke der auf der Oberfläche eines Leiters gelegenen Schicht zu demselben Ausdrucke gelangt, wie die gewöhnliche Theorie.

Es sei S (cf. Fig. 4) die Oberfläche, welche die Elektrizität von dem Induktionsfluidum im Zustande des normalen Gleichgewichts trennt, und S' die trennende Oberfläche für den Fall des Spannungsgleichgewichtes. Da die freie Elektrizität den Ueberschuss der Quantität des elektrischen Fluidum bedeutet, den der Konduktor im Zustande des Spannungsgleichgewichtes enthält, über die Quantität, welche er im normalen Gleichgewichtszustande aufweist, so ist unter der Ladung des Leiters die Menge des Fluidum zu verstehen, welche zwischen den beiden Oberflächen S und S' enthalten ist.

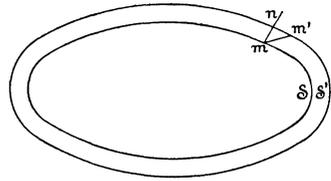


Fig. 4.

Weil dieses Fluidum inkompressibel ist, so ist die Ladung in jedem Punkte proportional dem senkrechten Abstände zwischen den beiden Oberflächen. Wir fassen ein Molekül des Induktionsfluidum in's Auge, das im normalen Gleichgewichtszustande in einem Punkte m der Oberfläche S liegt; im Zustande des Spannungsgleichgewichtes ist dieses Molekül nach m' auf der Oberfläche S' gelangt. Das Dreieck mnm' , dessen Seite mn die senkrechte Entfernung zwischen beiden Oberflächen darstellt, kann im Punkte n als rechtwinkelig aufgefasst werden. Die Dicke der elektrischen Schicht ist also gleich der Projektion der Verschiebung auf die Normale der Fläche (in Wirklichkeit geht die Verschiebung senkrecht zur Oberfläche vor sich, wir brauchen aber hier diese Eigenschaft des Induktionsfluidum gar nicht zu Hülfe zu rufen). Die Projektion hat die Grösse

$$\alpha f + \beta g + \gamma h = -\frac{K}{4\pi} \left(\alpha \frac{\partial \psi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \psi}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = -\frac{K}{4\pi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n}.$$

Dies ist aber gerade der Werth, den die gewöhnliche Theorie für die Dicke der elektrischen Schicht angibt.

41. In dem Vorhergehenden wurden wir zu der Annahme geführt, dass der Druck in dem Induktionsfluidum $= \psi$ ist. Wir finden uns dabei jedoch im Gegensatze mit einer anderen Theorie von Maxwell, nach welcher der Druck in einem Punkte des Dielek-

trikum nicht gleich dem Potential, sondern proportional $\sum \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2$ ist. Wir werden später auf diesen Widerspruch zurückkommen.

42. Die oben angegebene Methode ist nicht die einzige, welche man anwenden kann, um aus der Maxwell'schen Theorie die Gesetze der elektrischen Vertheilung herzuleiten. Sie hat ausserdem den Uebelstand, dass sie nicht bestehen kann, wenn das Induktionsfluidum nicht existirt, oder wenn in dem Fluidum kein Druck stattfindet. Nachdem wir bereits darauf hingewiesen haben, dass die Hypothese von einem Induktionsfluidum nur als vorübergehend zu betrachten sei, ist es nicht ohne Nutzen, noch eine andere Methode anzugeben, nach welcher man die Gesetze von der elektrischen Vertheilung erhält, ohne die Existenz dieses Fluidum voraussetzen zu müssen. Wir wollen dieselbe im Folgenden erörtern:

Damit ein System im Gleichgewichte sei, ist es nothwendig und hinreichend, dass seine potentielle Energie ein Minimum ist. Wir werden also die Bedingungen für das elektrische Gleichgewicht erhalten, indem wir ausdrücken, dass die potentielle Energie W ein Minimum ist, oder, was auf dasselbe hinauskommt, dass die Variation von W Null wird, wenn wir die f, g, h um irgend welche, mit den Bedingungsgleichungen verträgliche Grössen wachsen lassen. Was nun auch die gewählte Theorie sein möge, immer müssen f, g, h der Bedingung

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0$$

genügen, welche die Inkompressibilität des Mediums ausdrückt.

Andrerseits betrachten wir einen beliebigen Leiter des Systems. Die Ladung M desselben muss bekannt sein; dann aber wird (cf. § 18)

$$\int (\alpha f + \beta g + \gamma h) d\omega = M,$$

wobei das Integral über alle Elemente $d\omega$ der Oberfläche des Leiters auszudehnen ist; α, β, γ bezeichnen die Richtungskosinus der Normalen auf diesem Elemente und M eine gegebene Konstante.

Da die Variation der potentiellen Energie Null sein muss, so gilt (cf. § 34):

$$\delta W = \int \frac{4\pi}{K} (f\delta f + g\delta g + h\delta h) d\tau = 0,$$

wobei das Integral über alle Volumenelemente $d\tau$ des Dielektrikum auszudehnen ist.

Aus den Bedingungsgleichungen folgt weiter:

$$\frac{\partial}{\partial x} \delta f + \frac{\partial}{\partial y} \delta g + \frac{\partial}{\partial z} \delta h = 0,$$

$$\int [\alpha \delta f + \beta \delta g + \gamma \delta h] d\omega = 0.$$

Die Variationsrechnung lehrt uns, dass eine Funktion ψ existirt, welche der Bedingung genügt, dass:

$$\int \left[\frac{4\pi}{K} \sum f \delta f - \psi \sum \frac{\partial}{\partial x} \delta f \right] d\tau = 0.$$

Durch partielle Integration des zweiten Terms in der Klammer erhalten wir:

$$\int \left[\frac{4\pi}{K} \sum f \delta f + \sum \frac{\partial \psi}{\partial x} \delta f \right] d\tau - \int (\alpha \psi \delta f + \beta \psi \delta g + \gamma \psi \delta h) d\omega = 0.$$

Soll diese Gleichung identisch erfüllt werden, so müssen alle Elemente des ersten Integrals Null sein, also:

$$\frac{4\pi}{K} f + \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0.$$

Dies ist aber genau die von Maxwell aufgestellte Beziehung. So bleibt schliesslich noch:

$$\int \psi (\alpha \delta f + \beta \delta g + \gamma \delta h) d\omega = 0,$$

wobei das Integral sich auf alle Elemente der Oberfläche von allen Leitern erstreckt.

Diese Gleichung muss für alle Werthe δf , δg , δh erfüllt werden, welche den Bedingungsgleichungen genügen, d. h. es muss für jeden der Leiter gelten:

$$\int (\alpha \delta f + \beta \delta g + \gamma \delta h) d\omega = 0.$$

Die Regeln der Variationsrechnung sagen aber aus, dass dies nur dann stattfinden kann, wenn ψ auf der Oberfläche eines jeden der Leiter konstant ist.

So besitzt denn das Potential ψ in allen Punkten der Oberfläche jedes Leiters einen konstanten Werth, dieser Werth aber kann von einem zum andern Konduktor schwanken.

Kapitel III.

Theorie der Dielektrika von Poisson.

Wie lässt sich dieselbe auf die Maxwell'sche Theorie zurückführen?

43. Hypothesen von Poisson über die Zusammensetzung der Dielektrika. In der Poisson'schen Theorie spielen die Dielektrika eine weit weniger wichtige Rolle als bei Maxwell. Nach Poisson hat nämlich das Dielektrikum nur die Bewegung der Elektrizität zu hindern. Aber um die Zunahme der Kapazität eines Kondensators zu erklären, wenn man in ihm die Luft durch eine andere, nicht leitende Substanz ersetzt, ist eine Hypothese nothwendig. Eine analoge Schwierigkeit, welche in der Theorie des Magnetismus entsteht, wurde von Poisson auf folgende Weise beseitigt.

Es handelte sich um die Erklärung des inducirten Magnetismus. Poisson nimmt an, dass ein durch Induktion magnetisirtes Stück weichen Eisens aus einer Menge magnetischer Elemente bestehe, welche von einander durch sehr kleine Zwischenräume getrennt seien, die dem Magnetismus „nicht zugänglich sind“. In jedem dieser Elemente, denen Poisson der Einfachheit halber kugelige Gestalt zuschreibt, können die beiden magnetischen Fluida sich trennen und frei cirkuliren.

Mosotti hatte nur diese Theorie auf die Elektrostatik zu übertragen, um die in einem Dielektrikum beobachteten Erscheinungen zu erklären. In dieser Hypothese ist die Luft das einzige, homogene Dielektrikum; die anderen Dielektrika denkt er sich aus kleinen, leitenden Kugeln zusammengesetzt, die in einer nicht leitenden Substanz zerstreut liegen; die letztere hat dieselben Eigenschaften, wie die Luft. Die dem specifischen Induktionsvermögen zugeschriebenen Erscheinungen lassen sich dann durch die anziehenden und abstossenden Wirkungen der Elektrizität erklären, welche durch Influenz in den leitenden Kugeln erzeugt wird.

44. In dieser Theorie wie in der Maxwell'schen gibt es Verschiebungsströme: Wir nehmen an, es befinde sich in der Umgebung der elektrisirten Leiter ein anderes Dielektrikum als Luft; dann wird die neutrale Elektrizität der leitenden Kugeln im Dielektrikum vertheilt, und zwar wird eine Halbkugel positiv, die andere negativ geladen. Setzt man nun die Leiter in Verbindung mit dem Boden, so hört der Einfluss auf die Kugeln im Dielektrikum auf zu wirken, und diese Kugeln erlangen wiederum den neutralen Zustand. Die Elektrizität verschiebt sich also von einer Halbkugel zur andern und es treten somit Verschiebungsströme auf.

Es ist wahrscheinlich, dass Maxwell durch die Ansicht von Poisson und Mosotti über die Natur der Dielektrika zu seiner Theorie geführt wurde. Er sagt zwar, er habe dieselbe aus den Arbeiten von Faraday geschöpft und die Gesichtspunkte dieses berühmten Physikers nur in ein mathematisches Gewand gekleidet; Faraday selbst aber hatte die Ideen von Mosotti übernommen (cf. *Experimental Researches*, Faraday serie XIV, § 1679)¹⁾. Wir müssen hierbei noch bemerken, dass, wie sich bald zeigen wird, die Intensität der Verschiebungsströme nach der Theorie von Poisson und derjenigen von Maxwell nicht denselben Werth besitzt. Jedoch werden wir nachweisen, wie man beide Theorien zur Uebereinstimmung zu bringen vermag.

45. Man hat unglücklicher Weise gegen die Theorie des Magnetismus von Poisson schwerwiegende Einwände erhoben, und es ist allerdings sicher, dass die Ableitungen des gelehrten Mathematikers an Strenge zu wünschen übrig lassen. Die Einwürfe richten sich natürlich auch gegen die Theorie von Mosotti, welche sich von der ersteren, was den mathematischen Gesichtspunkt anbelangt, nicht unterscheidet.

Dieser Umstand bestimmt mich, Poisson's Ableitungen hier nicht wiederzugeben, ich beschränke mich vielmehr darauf, den Leser, welcher sich eingehender damit zu beschäftigen wünscht, auf folgende Quellen zu verweisen: Der Originalaufsatz von Poisson über die Theorie des Magnetismus ist im V. Bande der *Mémoires de l'Académie des Sciences* (1821—1822) erschienen. Eine mehr elementare Theorie, welche aber denselben Einwürfen unterliegt, enthält der erste Band der „*Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*“ von Mascart und Joubert (pag. 162—177)²⁾. Es ist dies dieselbe, die ich in meinen Vorlesungen entwickelt hatte.

¹⁾ Deutsche Ausgabe von Kalischer. Berlin, Jul. Springer.

²⁾ Deutsche Ausgabe von Levy. Berlin, Jul. Springer.

Ebenso verweise ich auf den Artikel 314 der zweiten Ausgabe des Maxwell¹⁾, in dem der englische Gelehrte in einer höchst originellen Weise eine Theorie entwickelt, welche dem mathematischen Gesichtspunkte nach mit derjenigen von Poisson und Mosotti übereinstimmt, die sich aber auf ein ganz anderes physikalisches Problem bezieht, nämlich auf das eines elektrischen Stromes durch einen anisotropen Leiter.

Endlich möchte ich noch ganz besonders die Lektüre des Aufsatzes von Duhem über die Magnetisirung durch Induktion empfehlen (Paris, Gauthier-Villars 1888 und Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse), in welcher die Berechnungen von Poisson und die Einwände, welche man dagegen erheben kann, mit der grössten Klarheit auseinandergesetzt werden.

Ich gehe nunmehr dazu über, die Theorie zu entwickeln, wobei ich mich von diesen Einwürfen frei zu machen suchen will. Zu diesem Zwecke muss ich die Vertheilung der inducirten Elektrizität durch eine in einem gleichförmigen Felde befindliche Kugel kennen.

46. Kugel in einem gleichförmigen Felde. Wir betrachten eine in einem gleichförmigen elektrischen Felde befindliche leitende Kugel und bezeichnen mit ψ den Werth des Potentials, das von den ausserhalb befindlichen elektrischen Massen in einem Punkte dieses Feldes hervorgerufen wird. Die elektrische Kraft, welche auf die Einheit der in irgend welchem Punkte befindlichen elektrischen Masse wirkt, hat zu Komponenten:

$$-\frac{\partial\psi}{\partial x}; \quad -\frac{\partial\psi}{\partial y}; \quad -\frac{\partial\psi}{\partial z}.$$

Legt man die X-Axe parallel zu den Kraftlinien des Feldes, so ist diese elektrostatische Kraft, welche wir mit φ bezeichnen wollen

$$\varphi = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Die in dem Felde befindliche leitende Kugel wird durch Influenz elektrisirt, und das elektrische Gleichgewicht ist erreicht, wenn die durch die Vertheilung auf der Kugeloberfläche hervorgerufene elektrostatische Kraft in jedem Punkte des Innern φ gleich und entgegengesetzt gerichtet ist. Wir suchen nun den Ausdruck für diese Kraft.

¹⁾ Deutsche Ausgabe von Weinstein. Berlin, Jul. Springer.

47. Befindet sich die leitende Kugel im neutralen Zustande, so können wir uns vorstellen, dass sie aus zwei gleichen Kugeln mit demselben Mittelpunkte besteht, von denen die eine mit positiver, die andere mit einer gleichen Menge negativer Elektrizität geladen ist; jede dieser Ladungen befinde sich nicht nur auf der Oberfläche, sondern sei auch im ganzen Innern der Kugel gleichförmig verbreitet. Die Resultante der durch diese Kugeln auf einen äusseren Punkt ausgeübten Wirkungen ist offenbar gleich Null. Verschieben wir die negative Kugel so, dass ihr Mittelpunkt in O' zu liegen kommt (Fig. 5), während der Mittelpunkt der positiven Kugel in O

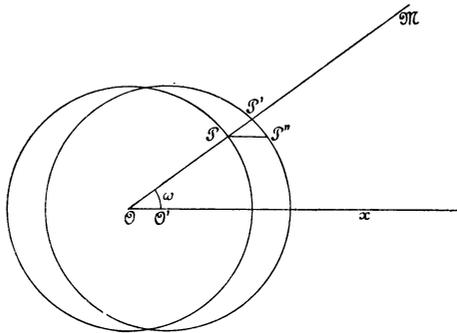


Fig. 5.

bleibt, so heben sich die Wirkungen dieser Kugeln nicht mehr auf. Wir können also die der Influenz unterworfenen leitenden Kugel als aus zwei Kugeln bestehend auffassen, die im entgegengesetzten Sinne elektrisirt sind und deren Centra nicht mehr zusammenfallen.

48. Bekanntlich ist die Anziehung einer homogenen Kugel auf einen in ihrem Innern in der Entfernung r vom Mittelpunkte befindlichen Punkt dieselbe, als wenn die in der Kugel vom Radius r vorhandene Masse im Mittelpunkte derselben vereinigt wäre. Nennt man ρ die elektrische Dichtigkeit in jedem Punkte der Kugel, so erhält man für die elektrostatische Kraft, welche auf den betrachteten Punkt ausgeübt wird

$$F = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{4}{3} r^3 \pi \rho = \frac{4}{3} r \pi \rho.$$

Bezeichnet man mit x_0, y_0, z_0 die Koordinaten des Kugelmittelpunktes, mit x, y, z die Koordinaten des betrachteten Punktes, so sind die Komponenten der Anziehung, welche von der Kugel auf die in einem

Punkte ihres Innern befindliche elektrische Masseneinheit ausgeübt wird, resp.:

$$\frac{4}{3} \pi (x - x_0) \rho; \quad \frac{4}{3} \pi (y - y_0) \rho; \quad \frac{4}{3} \pi (z - z_0) \rho.$$

49. Wir wollen diese Formeln auf zwei Kugeln anwenden, welche die durch Influenz elektrisirte leitende Kugel ersetzen. Wählen wir als Koordinatenanfang den Mittelpunkt O der positiven Kugel und als X-Axe die Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte O—O', dann erhalten wir für die X-Komponenten des Zusammenwirkens der Kräfte, welche die beiden Kugeln auf die in einem Punkte des Innern x, y, z befindliche Einheit elektrischer Masse ausüben,

$$\frac{4}{3} \pi \rho x - \frac{4}{3} \pi \rho (x - x_0) = \frac{4}{3} \pi \rho x_0,$$

wobei x_0 die Abscisse von O' bezeichnet. Die Komponenten nach den Y- und Z-Axen sind, wie man leicht sieht, gleich Null. Damit also ein im Innern der Kugel befindliches elektrisches Molekül unter der Wirkung des gleichförmigen Feldes q und der durch Influenz auf der Kugel hervorgerufenen Elektrizität im Gleichgewicht sei, muss die Verbindungslinie der Mittelpunkte der positiven und negativen Kugel dem Felde parallel sein und die Entfernung dieser Mittelpunkte der Gleichung

$$q = -\frac{4}{3} \pi \rho x_0$$

genügen.

Da ausserdem die Dichtigkeiten der Kugeln nur der Bedingung unterliegen, dass sie absolut genommen gleich sein müssen, so können wir annehmen, dass diese Dichtigkeiten +1 und -1 sind; dann erhalten wir:

$$(1) \quad q = -\frac{4}{3} \pi x_0,$$

eine Gleichung, welche uns die Entfernung der Mittelpunkte beider Kugeln liefert.

50. Wir können leicht den Werth des Potentials finden, das von einer influenzirten Kugel herrührt und in einem Punkte M ausserhalb dieser Kugel gilt. Da die Anziehung einer homogenen Kugel auf einen Aussenpunkt dieselbe ist, als wenn die ganze elek-

trische Masse im Mittelpunkte vereinigt wäre, so erhalten wir für das Potential in M den Ausdruck:

$$\frac{4}{3} \pi R^3 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) = \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{r' - r}{r r'},$$

worin R den Radius jeder der Kugeln bedeutet, r und r' die Entfernung des Punktes M von den Mittelpunkten O und O' . Wir nennen den Winkel zwischen der Richtung OM und der X -Axe $= \omega$ und vernachlässigen die unendlich kleinen Grössen zweiter Ordnung, indem wir x_0 als Grösse erster Ordnung betrachten. Dann lässt sich der vorhergehende Ausdruck folgendermaassen schreiben:

$$- \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{x_0 \cos \omega}{r^2}$$

oder mit Berücksichtigung der Gleichung (1)

$$(2) \quad q R^3 \frac{\cos \omega}{r^2}.$$

51. Die elektrische Vertheilung auf der inducirten Kugel erhält man auf ebenso einfache Weise. Die Dicke der negativen Schicht in einem Punkte P ist

$$PP' = PP'' \cos \omega = x_0 \cos \omega = - \frac{3 q \cos \omega}{4 \pi};$$

demnach ist die Dicke der elektrischen Oberflächenschicht der Grösse und dem Vorzeichen nach durch den Ausdruck $\frac{3 q \cos \omega}{4 \pi}$ gegeben.

Man nennt eine leitende Kugel, auf welcher die elektrische Vertheilung dieselbe ist, als wenn sie sich innerhalb eines gleichförmigen Feldes befände, polarisirt.

52. Polarisation der Dielektrika. Wir betrachten nun ein Dielektrikum, das nach der Theorie von Mosotti zusammengesetzt sein soll und der Einwirkung von ausserhalb gelegenen elektrisirten Körpern unterworfen ist. Jede der Kugeln, die es enthält, wird sich polarisiren. In der That kann, da die Dimensionen der Kugeln sehr gering sind, das elektrische Feld in der Nachbarschaft einer jeden als gleichförmig betrachtet werden.

Es ist wahr, dass die elektrische Vertheilung auf der Oberfläche von einer dieser Kugeln durch den Einfluss der benachbarten Kugeln gestört werden kann; wir brauchen jedoch diese Störungen nicht in Rechnung zu ziehen, denn

1. haben bei der unregelmässigen Vertheilung der Kugeln diese Einwirkungen das Bestreben, sich gegenseitig zu neutralisiren.

2. Wenn man auch annimmt, dass die Vertheilung auf der Oberfläche einer Kugel nicht ebenso stattfindet, wie es in einem gleichförmigen Felde der Fall wäre, so werden doch diese Unregelmässigkeiten wiedergegeben durch Kugelfunktionen höherer Ordnung. Betrachtet man demnach das Potential in einem Punkte, welcher in einer Entfernung r vom Mittelpunkte der Kugel liegt, dann werden die Terme, welche von diesen Unregelmässigkeiten abhängen, eine höhere Potenz von $\frac{1}{r}$ enthalten, und zu vernachlässigen sein, wenn r im Verhältnisse zum Radius der Kugel sehr gross ist.

Wir können also sagen: Ein Dielektrikum, dessen sämmtliche Kugeln polarisirt sind, ist selbst polarisirt.

53. Wir haben jetzt die Komponenten der elektrischen Polarisation zu definiren, welche demjenigen entsprechen, was man in der Theorie des Magnetismus als Komponenten der Magnetisirung bezeichnet.

Weiter oben fanden wir, dass das Potential der Kugel auf einen äusseren Punkt war:

$$g R^3 \frac{\cos \omega}{r^2} \quad \text{oder} \quad = -\frac{3}{4\pi} u g \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x},$$

wenn wir mit u das Volumen der Kugel bezeichnen.

Hätte man beliebige Koordinatenachsen gewählt, so würden wir für das Potential der polarisirten Kugel, deren Mittelpunkt die Koordinaten x, y, z besitzt, gefunden haben:

$$-\frac{3u}{4\pi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right).$$

Wir denken uns nun ein Volumenelement $d\tau$ des Dielektrikum, das eine sehr grosse Anzahl n von Kugeln enthält, die jedoch immerhin klein genug ist, um das Feld als gleichförmig ansehen zu können. Das Potential der n in diesem Elemente enthaltenen Kugeln wird dann sein:

$$-\frac{3nu}{4\pi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right).$$

Setzen wir $nu = h d\tau$, wobei h das Verhältniss zwischen dem Volumen der Kugeln und dem totalen Volumen des Dielektrikum bezeichnet, und führen ausserdem ein:

$$A = -\frac{3h}{4\pi} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x}; \quad B = -\frac{3h}{4\pi} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial y}; \quad C = -\frac{3h}{4\pi} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial z},$$

dann erhalten wir für das Potential, das von dem polarisirten Elemente $d\tau$ herührt:

$$d\tau \left(A \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + B \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + C \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right).$$

Die drei Grössen A, B, C sind die Komponenten der Polarisation, und das von dem gesammten Dielektrikum herrührende Potential lässt sich schreiben in der Form:

$$V = \int d\tau \left(A \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + B \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + C \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right),$$

wobei das Integral über das ganze Dielektrikum ausgedehnt werden muss; oder durch theilweise Integration:

$$(3) \quad V = \int \frac{d\omega}{r} (lA + mB + nC) - \int \frac{d\tau}{r} \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right).$$

Das erste Integral erstreckt sich über alle Elemente $d\omega$ der Oberfläche, welche das Dielektrikum begrenzt; l , m und n bezeichnen die Richtungskosinus der Normalen auf dieser Oberfläche. Das zweite Integral ist über das ganze Volumen des Dielektrikum auszudehnen.

54. Es sei nun V_1 das von den ausserhalb befindlichen elektrisirten Körpern herrührende Potential und s eine der kleinen leitenden Kugeln, deren Mittelpunkt in einem beliebigen Punkte O liegen möge. Um die Bedingungen des elektrischen Gleichgewichts auf dieser Kugel zu finden, theilen wir das Volumen des Dielektrikum in zwei Theilvolumina v' und v'' ; das zweite dieser Volumina soll sehr klein sein und die Kugel s enthalten.

Ein in O befindliches elektrisches Molekül muss im Gleichgewichte sein unter dem Einflusse:

1. der äusseren, elektrisirten Körper,
2. des Volumen v' des Dielektrikum,
3. der übrigen, im Innern von v'' gelegenen Kugeln, abgesehen von s ,
4. der Kugel s .

Wir setzen voraus, dass das Volumen v'' , wenn es auch eine sehr grosse Anzahl von Kugeln enthält, doch genügend klein ist, um die Komponenten A, B, C als konstant betrachten zu dürfen, und wir wählen die Lage der Koordinatenachsen so, dass B und C, demnach auch $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ und $\frac{\partial\psi}{\partial z}$ Null werden.

Es müssen sich nun die Komponenten aller dieser Wirkungen nach der X-Axe zerstören.

Um jede Verwirrung zu vermeiden, wollen wir für den Augenblick die Koordinaten des anziehenden Punktes x, y, z nennen, diejenigen des angezogenen Punktes ξ, η, ζ , so dass

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2.$$

Wir bezeichnen mit ψ das Potential des gleichförmigen Feldes, welches auf jeder der leitenden Kugeln die augenblicklich herrschende Polarisation hervorbringen würde, und das gesammte vorhandene Potential mit $V + V_1 = U$. Die Komponenten der Wirkungen des gleichförmigen Feldes bezeichnen wir auch fernerhin mit $-\frac{\partial\psi}{\partial x}$; $-\frac{\partial\psi}{\partial y}$; $-\frac{\partial\psi}{\partial z}$.

Die von den äusseren Körpern herrührende Komponente wird $-\frac{\partial V_1}{\partial \xi}$ sein, die von der Kugel s herrührende: $+\frac{\partial\psi}{\partial x}$, da die Kugel nach unserer Voraussetzung so polarisirt ist, wie sie es unter der Wirkung eines gleichförmigen Feldes von der Intensität $-\frac{\partial\psi}{\partial x}$ sein würde.

55. Wenn die Oberfläche σ , welche die beiden Theilvolumina v' und v'' trennt, passend gewählt wird, so wird die Wirkung der Kugeln ausser s , welche noch innerhalb v'' liegen, Null.

Es seien a, b, c die Koordinaten des Mittelpunkts einer dieser Kugeln, während der Punkt O als Koordinatenanfang gewählt werden soll. Dann hat die elektrostatische Kraft, welche durch diese Kugel im Punkte O ausgeübt wird, als Komponente in der Richtung der X-Axe:

$$-\frac{3u}{4\pi} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} = \frac{3u}{4\pi} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 3a^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Hieraus ergibt sich, dass die Wirkungen der drei Kugeln, deren Mittelpunkte durch die Koordinaten

$$(a, b, c); (b, c, a); (c, a, b)$$

bestimmt sind, sich gegenseitig zerstören.

Besitzt also die Oberfläche σ kubische Symmetrie und ändert sich dieselbe nicht, wenn man die drei Koordinatenachsen vertauscht, dann werden sich die Wirkungen der verschiedenen im Innern dieser Oberfläche enthaltenen Kugeln aufheben. *Nur weil Poisson diese Annahme nicht gemacht hatte, ist seine Ableitung nicht streng richtig.*

Wir wollen nun zur Fixirung der Vorstellung voraussetzen, dass die Oberfläche σ eine Kugel ist, deren Mittelpunkt in O liegt.

56. Es bleibt dann noch die Wirkung des Volumens v' zu bestimmen. Diese ist gleich

$$-\frac{\partial V'}{\partial \xi},$$

wenn wir unter V' das Integral:

$$\int dr \left(A \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + B \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + C \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right),$$

ausgedehnt über das Volumen v' , verstehen, und wir erhalten

$$V' = V - V'',$$

wobei V'' dasselbe Integral bedeutet, das über das Volumen v'' zu erstrecken ist. Hieraus folgt:

$$\frac{\partial V'}{\partial \xi} = \frac{\partial V}{\partial \xi} - \frac{\partial V''}{\partial \xi}.$$

Ausserdem aber gilt, wie wir weiter oben gesehen haben

$$V'' = \int \frac{d\omega}{r} (lA + mB + nC) - \int \frac{dr}{r} \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right),$$

wobei sich das erste Integral auf die Oberfläche σ und das zweite auf das Volumen v'' bezieht.

Hieraus ergibt sich:

$$\frac{\partial V''}{\partial \xi} = \int \frac{d\omega}{r^3} x (lA + mB + nC) - \int \frac{d\tau}{r^3} x \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right).$$

Ist der Radius der Kugel unendlich klein, so ist dasselbe auch für den Werth des zweiten Integrals der Fall, nicht aber für denjenigen des ersten Integrals.

Ausserdem aber sind unter dieser Voraussetzung A, B und C als Konstante zu betrachten, und wir haben bereits angenommen, dass B und C Null sein sollen. Dann ergibt sich:

$$\frac{\partial V''}{\partial \xi} = A \int \frac{x l}{r^3} d\omega.$$

Nun ist aber l der Richtungskosinus der Normalen auf der Kugeloberfläche, $= \frac{x}{r}$, und somit:

$$\frac{\partial V''}{\partial \xi} = A \int \frac{x^2}{r^4} d\omega = \frac{4}{3} \pi A.$$

57. Die Gleichgewichtsbedingung lässt sich nun schreiben:

$$-\frac{\partial V_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{4}{3} \pi A = 0$$

oder:

$$\frac{\partial (V + V_1)}{\partial \xi} = \frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{4}{3} \pi \left(1 - \frac{1}{h} \right) A.$$

Hätte man, anstatt die Polarisationsrichtung im betrachteten Punkte als Axe zu nehmen, ganz beliebige Axen gewählt, so würde man an Stelle der einzigen Gleichung, die wir soeben abgeleitet haben, folgende Gleichungen erhalten haben:

$$(1 - K) \frac{\partial U}{\partial x} = 4 \pi A,$$

$$(1 - K) \frac{\partial U}{\partial y} = 4 \pi B,$$

$$(1 - K) \frac{\partial U}{\partial z} = 4 \pi C,$$

worin zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(K - 1) = \frac{3h}{1 - h},$$

also:

$$h = \frac{K - 1}{K + 2}.$$

Wir schreiben ausserdem den gewöhnlichen Bezeichnungen gemäss $\frac{\partial U}{\partial x}$ für $\frac{\partial U}{\partial \xi}$, was keine Unzuträglichkeiten mit sich bringt, da eine Verwechslung nicht mehr zu befürchten ist.

58. Differentiirt man diese drei Gleichungen resp. nach x , y und z und addirt sie, so folgt:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial U}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial U}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \Delta U \\ = 4\pi \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Nun ist V_1 das von den ausserhalb befindlichen Körpern herführende Potential, es ist deshalb $\Delta V_1 = 0$.

Andrerseits zeigt die Gleichung (3), dass V als Potential einer Oberflächenschicht von der Dichtigkeit

$$(lA + mB + nC)$$

angesehen werden kann, welche auf der Oberfläche des Dielektrikum ausgebreitet ist, weniger dem Potential einer in diesem ganzen Volumen verbreiteten Elektrizitätsmenge von der Dichtigkeit

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right).$$

Hieraus folgt, dass

$$\Delta U = \Delta V = 4\pi \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right)$$

und demnach:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial U}{\partial z} \right) = 0.$$

Nun bedeutet $U = V + V_1$ das Potential; die Vergleichung der

eben abgeleiteten Gleichung mit den Fundamentalgleichungen der Elektrostatik zeigt demnach, dass K nichts anderes ist, als das Induktionsvermögen.

59. Es ist also in einem nach der Ansicht von Mossotti zusammengesetzten Dielektrikum, welches das Induktionsvermögen K besitzt, das Verhältniss des durch die Kugeln angefüllten Raumes zum Gesamtvolumen gegeben durch

$$h = \frac{K - 1}{K + 2}.$$

Ausserdem findet man:

$$(1 - K) \frac{\partial U}{\partial x} = 4\pi A = -3h \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Die elektrische Verschiebung nach der Maxwell'schen Theorie lässt sich dann folgendermaassen ausdrücken:

$$f = -\frac{K}{4\pi} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{3h}{4\pi} \cdot \frac{K}{K-1} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{3}{4\pi} \cdot \frac{K}{K+2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Die beiden anderen Komponenten der Verschiebung sind Null, wenn wir unserer Voraussetzung gemäss als X-Axe die Polarisationsrichtung im betrachteten Punkte wählen. Nennen wir gleichzeitig mit Bezug auf unsere Bemerkungen im § 46 φ die Intensität des gleichförmigen Feldes, welches unsere kleinen Kugeln in einen eben solchen Zustand der Polarisation versetzen würde, in dem sie sich thatsächlich befinden, so erhalten wir:

$$\varphi = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

und

$$(4) \quad f = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{K}{K+2} \varphi.$$

60. Wir haben gesehen, dass in der Theorie von Poisson und Mossotti die Polarisation der kleinen, leitenden Kugeln sich ändert, wenn man das elektrische Feld verändert, in welchem sie sich befinden, und dass die Ströme, welche in diesen kleinen Kugeln entstehen und eine Folge dieser Veränderung sind, mit den Verschiebungsströmen von Maxwell identificirt werden dürfen. Es ist

wichtig, die Intensität dieser Verschiebungsströme in den beiden Theorien vergleichen zu können.

Zu diesem Zwecke werde ich den Werth f' der elektrischen Verschiebung in der Mossotti'schen Theorie berechnen und denselben mit dem soeben gefundenen Werthe f vergleichen.

Jede unserer Kugeln ist polarisirt, als ob sie der Wirkung eines gleichförmigen Feldes von der Intensität φ unterworfen wäre.

Nun ist nach dem, was wir in § 49 gefunden haben, der ganze Vorgang so beschaffen, als ob zwei Kugeln von demselben Radius vorhanden wären, deren eine mit positivem Fluidum von der Dichtigkeit 1, die andere mit negativem Fluidum von derselben Dichtigkeit erfüllt ist, und als ob die negative Kugel, welche im normalen Gleichgewichtszustande mit der positiven Kugel zusammenfiel, unter dem Einflusse eines gleichförmigen Feldes von der Intensität φ eine Verschiebung x_0 erlitt, welche durch die Formel

$$\varphi = -\frac{4}{3}\pi x_0$$

gegeben ist.

Alles wird also so vor sich gehen, als ob eine gemeinsame Verschiebung der elektrischen Fluida in sämmtlichen kleinen Kugeln stattfände. Aber die leitenden Kugeln nehmen nicht den gesammten Raum des Dielektrikum ein, sie sind vielmehr durch ein isolirendes Medium von einander getrennt, das dieselben Eigenschaften, wie die Luft besitzt, und die Summe ihrer Volumina steht zum gesammten Volumen des Dielektrikum im Verhältnisse von $h:1$. Die Summe der positiven Ladungen, welche sich auf diesen Kugeln befinden, ist also h mal kleiner, als die Summe dieser Ladungen in der Hypothese, nach welcher das ganze Volumen des Dielektrikum durch leitende Kugeln gebildet würde. Da das gleiche für die negativen Ladungen stattfindet, so kommt es auf dasselbe hinaus, als wenn man annimmt, dass jedes der Fluida im ganzen Dielektrikum ausgebreitet ist, jedoch nur die Dichtigkeit h besitzt, oder dass jedes von ihnen nur einen Bruchtheil h vom Volumen des Dielektrikum, aber mit einer Dichtigkeit = 1, erfüllt. Die Grösse der mittleren Verschiebung wird offenbar in beiden Fällen dieselbe sein. Nehmen wir die erste Hypothese an, so können wir auf die dielektrische Kugel die Formeln des § 49 anwenden, wenn wir darin nur x_0 durch hx_0 ersetzen, da in diesen Formeln die Dichtigkeit 1 vorausgesetzt wurde und dieselbe in unserem Falle nur = h ist. Diese Grösse hx_0 gibt also die mittlere Verschiebung an, welche das negative Fluidum in dem Dielektrikum unter der Einwirkung des Feldes erleidet. Er-

setzen wir x_0 durch seinen aus der Gleichung (1) entnommenen Werth, so erhalten wir für diese Verschiebung $-h \frac{3\varphi}{4\pi}$, und demnach für die Verschiebung des positiven Fluidum im Verhältniss zum negativen Fluidum, die sich nur durch das Vorzeichen von der vorhergehenden unterscheidet

$$f' = h \frac{3\varphi}{4\pi}.$$

Nun hat man:

$$(5) \quad h = \frac{K-1}{K+2}.$$

Wenn nun auch nach dieser Gleichung die äusseren Verhältnisse dieser Dielektrika in den beiden Theorien dieselben sind, so haben doch die Intensitäten der Verschiebungsströme in beiden nicht denselben Werth. Führen wir nämlich diesen Werth h in den Ausdruck für f' ein, so erhalten wir für die Grösse der Verschiebung nach der Poisson'schen Theorie:

$$(6) \quad f' = \frac{3\varphi}{4\pi} \cdot \frac{K-1}{K+2},$$

welche von der durch die Formel (4) gegebenen Verschiebung nach der Maxwell'schen Theorie wesentlich abweicht. Das Verhältniss dieser Grössen wird:

$$(7) \quad \frac{f'}{f} = \frac{K-1}{K}.$$

Dies ist auch das Verhältniss der Intensitäten der Verschiebungsströme in den beiden Theorien. In der Luft ist die Intensität des Verschiebungsstromes = Null, wenn man die Annahmen von Poisson zu Grunde legt, da die Formel (6) für $K=1$: $f'=0$ gibt, und da das spezifische Induktionsvermögen der Luft gleich 1 ist. In der Maxwell'schen Theorie hat die Verschiebung in der Luft nach der Formel (4) den Werth $f = \frac{\varphi}{4\pi}$, und in Folge dessen ist, entgegen dem Ergebnisse der Poisson'schen Theorie, die Intensität des Verschiebungsstromes in diesem Medium nicht gleich Null. Hierin besteht der wichtigste Unterschied zwischen den beiden Theorien, deren Konsequenzen wir soeben verglichen haben.

61. Modification der Theorie von Poisson. Zellen. Es ist jedoch möglich, wie wir schon im Anfange dieses Kapitels bemerkten, durch Einführung einiger sekundärer Abänderungen die Resultate der Poisson'schen Theorie mit denjenigen der Maxwell'schen in Uebereinstimmung zu bringen. Dies wollen wir nun nachweisen.

Zunächst ist zu bemerken, dass die Formeln (5) und (7), welche h und das Verhältniss der Verschiebungen geben, nicht homogen sind, was daher kommt, dass wir das spezifische Induktionsvermögen der Substanz, welche nach der Poisson'schen Theorie die leitenden Kugeln trennt, gleich 1 gesetzt haben.

Es ist leicht nachzuweisen, dass, wenn wir mit K_1 das Induktionsvermögen dieser Substanz bezeichnen, die Formeln (5) und (7) übergehen in:

$$h = \frac{K - K_1}{K + 2K_1}; \quad \frac{f'}{f} = \frac{K - K_1}{K}.$$

Diese letzte Formel zeigt, dass für ein sehr kleines K_1 das Verhältniss der Verschiebungen nahezu $= 1$ ist. Die Intensitäten der Verschiebungsströme würden also in beiden Theorien nahezu denselben Werth erhalten, wenn K_1 unendlich klein wäre, was erfordert, dass h sich sehr wenig von der Einheit unterscheidet, d. h., dass der nicht leitende Raum, welcher die leitenden Kugeln trennt, unendlich klein ist. Wir haben nun die Hypothese von der Kugelgestalt der Leiter, welche im Dielektrikum eingebettet liegen, nur eingeführt, um die Rechnungen zu vereinfachen; da aber die daraus gezogenen Schlüsse für eine ganz beliebige Gestalt der Leiter wahr bleiben, so können wir uns das Dielektrikum aus leitenden Zellen bestehend denken, die durch nicht leitende Zwischenwände geschieden sind. Um die Theorie von Poisson mit der von Maxwell zur Uebereinstimmung zu bringen, genügt es, anzunehmen, dass die Zwischenwände eine unendlich geringe Dicke besitzen, da sich dann h nur unendlich wenig von der Einheit unterscheidet, und dass dieselben aus einer isolirenden Substanz bestehen, deren spezifisches Induktionsvermögen K_1 unendlich klein ist. Wir wollen nun nachweisen, dass sich diese Uebereinstimmung in allen aus der Maxwell'schen Theorie hergeleiteten Schlüssen wiederfindet, und dass die letztere, vom mathematischen Gesichtspunkte aus betrachtet, mit der so modificirten Poisson'schen Theorie identisch ist.

62. Ausbreitung der Wärme in einem homogenen Medium. Die Durchführung der nothwendigen Rechnungen wird uns Gleich-

chungen liefern, welche den von Fourier bei der Untersuchung der Wärmeleitung aufgestellten vollkommen entsprechen. Um nun die mathematische Analogie zwischen den Erscheinungen der Elektrizität und der Wärme besser hervorheben zu können, wollen wir kurz die Fourier'sche Theorie auseinandersetzen.

Dieselbe beruht auf folgenden Annahmen: Wenn sich zwei Moleküle eines Körpers auf verschiedener Temperatur befinden, so findet eine Wärmeabgabe vom wärmeren an das kältere Molekül statt. Die Wärmemenge, welche während einer bestimmten Zeit übergeht, ist eine Funktion der Entfernung; sie nimmt bei wachsender Entfernung sehr rasch gegen Null ab und hängt nicht von der Temperatur ab; endlich ist diese Wärmemenge proportional der Temperatur-Differenz ($V_1 - V_2$) der beiden Moleküle. Aus dieser Hypothese geht hervor, dass die Wärmemenge, welche während einer Zeit dt von einem Molekül zu einem anderen übergeht, gegeben wird durch

$$(1) \quad dq = - C dt \Delta V,$$

wobei ΔV die Aenderung der Temperatur bezeichnet, wenn man in der Richtung des Wärmestromes weitergeht, und C eine von der Temperatur unabhängige Grösse.

63. Wir fassen ein unendlich kleines, rechtwinkeliges Parallele-

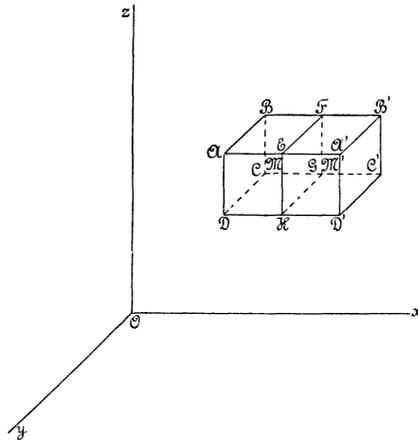


Fig. 6.

pipeton ABCD A'B'C'D' (Fig. 6) in's Auge, das innerhalb des Körpers liegt, und wählen die Koordinatenachsen parallel zu den drei Axen

des Parallelepipedon. Bezeichnen wir mit $d\tau$ das Volumen desselben, mit $d\omega$ die Oberfläche eines zur X-Axe senkrechten Schnittes, mit a und b die Koordinaten der Endpunkte A und A' einer zur Axe parallelen Kante, dann gilt die Beziehung:

$$d\tau = d\omega (b-a).$$

Wir suchen die Wärmemenge $Q d\omega dt$, welche den Schnitt $d\omega$ während des Zeitintervalls dt durchströmt. Zu diesem Zwecke bestimmen wir auf zwei verschiedene Weisen das Integral

$$(2) \quad \int_a^b (Q d\omega dt) dx,$$

das die Summe der Wärmemengen gibt, welche alle senkrecht zu OX geführten Schnitte des Parallelepipedon während der Zeit dt durchfliessen.

Sieht man die Wärmemenge, welche durch jeden Schnitt $d\omega$ des unendlich kleinen Parallelepipedon fliesst, als konstant an, so gibt die Integration unmittelbar:

$$Q d\omega dt (b-a) = Q d\tau dt.$$

64. Um einen anderen Ausdruck für diese Grösse zu gewinnen, legen wir durch das Parallelepipedon senkrecht zu OX irgend einen Schnitt EFGH (Fig. 6) und nehmen rechts und links davon die Moleküle M und M' an. Nach den Fourier'schen Annahmen ist die Wärmemenge, welche während der Zeit dt vom einen zum anderen übergeht:

$$(3) \quad q dt = -C dt \Delta V,$$

und die Summe der Wärmemengen, welche durch alle Schnitte des Parallelepipedes fließen, ist:

$$\int_a^b (q dt) dx.$$

Aber für die Schnitte, welche nicht zwischen den Molekülen liegen, gibt es keine Wärmebewegung, und die Elemente des Integrals, welche diesen Schnitten entsprechen, sind Null. Es genügt also, als Integralgrenzen die Koordinaten x und $x + \Delta x$ der Punkte M und M' zu wählen; man erhält dann:

$$\int_x^{x+\Delta x} (q dt) dx = q \Delta x dt.$$

Die anderen Molekülpaare des Parallelepipedon geben analoge Werthe; ihre Summe ist genau der Werth des Integrals (2) und wir erhalten demnach:

$$(4) \quad Q d\tau dt = \Sigma q \Delta x dt.$$

Nun liefert aber die Gleichung (3) für q den Ausdruck:

$$q = -C \left(\frac{\partial V}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial V}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial V}{\partial z} \Delta z \right),$$

wobei in der Entwicklung die zweiten und höheren Potenzen von Δx , Δy , Δz vernachlässigt worden sind, was erlaubt ist, da wir vorausgesetzt haben, dass der Wärmeaustausch nur unter sehr nahen Molekülen vor sich gehen soll, und die vernachlässigten Termen dann im Verhältniss zu den ersten Termen der Entwicklung sehr kleine Grössen sind. Führen wir diesen Werth von q in die Gleichung (4) ein, so folgt:

$$(5) \quad Q d\tau = -\frac{\partial V}{\partial x} \Sigma C \Delta x^2 - \frac{\partial V}{\partial y} \Sigma C \Delta x \Delta y - \frac{\partial V}{\partial z} \Sigma C \Delta x \Delta z.$$

Da C nach Voraussetzung unabhängig von der Temperatur sein sollte, hängen auch die partiellen Differentialquotienten von V nicht mehr davon ab; Q ist also eine lineare und homogene Funktion dieser Differentialquotienten.

65. Ist der betrachtete Körper isotrop, so reducirt sich diese Funktion auf ein einziges Glied. In der That darf sich in diesem Falle der Ausdruck für Q nicht verändern, wenn man x durch $-x$ ersetzt, und zu diesem Zwecke müssen die partiellen Differentialquotienten von V nach y und z auf der rechten Seite der Gleichung verschwinden. Wir erhalten also einfach:

$$Q d\tau = -\frac{\partial V}{\partial x} \Sigma C \Delta x^2$$

und, wenn wir

$$A = \frac{\Sigma C \Delta x^2}{d\tau}$$

setzen, so folgt:

$$Q = -A \frac{\partial V}{\partial x}.$$

Die Konstante A ist der Koeffizient des Wärmeleitungsvermögens.

Ist das Medium isotrop, so bleibt der Werth des Koeffizienten für alle Richtungen derselbe; wir finden also für die Wärmemenge, welche durch die Einheit der zu den anderen Koordinatenaxen senkrechten Oberflächen in der Zeiteinheit hindurchgeht

$$Q = -A \frac{\partial V}{\partial y},$$

$$Q = -A \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Im Allgemeinen werden wir also für ein irgendwie gerichtetes Element erhalten:

$$(6) \quad Q = -A \frac{\partial V}{\partial n},$$

wobei dn eine unendlich kleine, auf der Normalen des Elementes abgetragene Grösse bedeutet.

66. Analogieen mit der Verschiebung der Elektrizität in den Zellen. Im Innern einer jeden dieser leitenden Zellen ist das Potential ψ konstant, dasselbe ändert sich jedoch plötzlich, wenn man die die Zellen begrenzenden isolirenden Wände durchsetzt; ψ ist also eine unstetige Funktion der Koordinaten. Wir würden diese Funktion in unsere Rechnungen nicht einführen können, ohne Annahmen über ihre Form zu machen, und es ist einfacher, statt dessen eine stetige Funktion zu betrachten, deren Werth sich in jedem Punkte nur wenig von demjenigen von ψ unterscheidet. Wir setzen voraus, dass beide Funktionen in den Schwerpunkten $G_1, G_2, G_3 \dots$ der verschiedenen Zellen einander gleich sind, dann wird der Fehler, den man begeht, wenn man für ψ eine stetige Funktion setzt, von derselben Grössenordnung sein, wie die Dimensionen der Zellen, und letztere können wir immer als sehr klein voraussetzen.

Wir wollen nun eine dieser Zellen (Fig. 7) näher in's Auge fassen. Wenn das Dielektrikum nicht der Wirkung eines Feldes unterworfen ist, so bleibt die Zelle im neutralen Zustande; im entgegengesetzten Falle würden auf ihren Oberflächen S_1, S_2, S_3, S_4 gewisse Mengen q_1, q_2, q_3, q_4 von Elektrizität auftreten; da jedoch die leitende Zelle stets isolirt bleibt, so ist die Summe dieser Elektrizitätsmengen $= 0$,

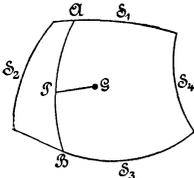


Fig. 7.

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 0.$$

Verändert sich die Stärke des Feldes, dann ändern sich auch die Ladungen der Oberflächen der Zelle, da aber ihre Summe Null bleibt, so hat man stets

$$dq_1 + dq_2 + dq_3 + dq_4 = 0,$$

wenn man unter dq_1, dq_2, \dots die Aenderung versteht, welche die q während des Zeittheilchens dt erfahren haben.

Die Ladung einer dieser Flächen kann also nur unter der Bedingung wachsen, dass diejenige einer anderen Fläche abnimmt. Setzen wir beispielsweise voraus, dass die Ladung von S_3 zunehme, diejenige von S_1 aber abnehme, dann wird eine gewisse Menge Elektrizität von S_1 nach S_3 wandern, und zwar auf einem Wege, den wir uns durch APB dargestellt denken können. Augenscheinlich aber kommt es auf dasselbe hinaus, wenn man annimmt, dass die Elektrizität den Weg APGPB benutzt, da das Stück PG, welches einen beliebigen Punkt P des wirklichen Weges mit dem Schwerpunkte der Zelle verbindet, nach einander in zwei entgegengesetzten Richtungen durchlaufen wird. Man kann also den Uebergang einer gewissen Menge von Elektrizität von S_1 nach S_3 auffassen als entstanden aus dem Uebergange eben dieser Quantität von G nach S_3 und aus dem Uebergange einer absolut gleichen, aber dem Vorzeichen nach entgegengesetzten Quantität von G nach S_1 . Alles geht demnach so vor sich, als ob in Folge der Veränderung des Feldes die Quantitäten dq_1, dq_2, dq_3, dq_4 vom Schwerpunkte G nach den verschiedenen Oberflächen der Zelle wanderten.

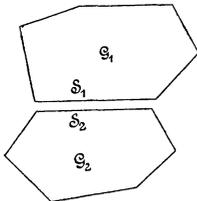


Fig. 8.

67. Wir betrachten nun zwei benachbarte Zellen mit den Schwerpunkten G_1 und G_2 (Fig. 8), deren angrenzende Flächen S_1 und S_2 sein mögen.

Diese beiden Flächen können als die Belegungen eines Kondensators betrachtet werden, welche einander parallel und unendlich nahe

sind, und wenn wir annehmen, dass sich die Ladung von S_1 um dq vermehrt, so folgt nothwendiger Weise daraus auch eine Vermehrung der auf der gegenüberliegenden Fläche S_2 befindlichen Ladung um $-dq$. Nach dem oben Auseinandergesetzten kann man annehmen, dass die Zunahme dq der Ladung der Fläche S_1 durch den Uebergang von dq aus dem Schwerpunkte G_1 nach S_1 und ebenso die Vermehrung der Ladung von S_2 durch einen Uebergang der Quantität $-dq$ von G_2 nach S_2 bewirkt wird oder, was auf dasselbe hinausläuft, durch den Uebergang der Menge dq von S_2 nach G_2 . Dies ist aber nichts anderes, als wenn die Menge dq von G_1 nach G_2 gewandert wäre. Man kann also sagen, es finde ein Austausch der Elektrizität zwischen den Molekülen G_1 und G_2 statt, und die Analogie mit den Erscheinungen der Wärme tritt bereits deutlich hervor.

68. Nennen wir C die Kapazität des durch die Oberflächen S_1 und S_2 gebildeten Kondensators, ψ_1 und ψ_2 die Werthe des Potentials in jeder der Zellen, dann haben wir als absoluten Werth der auf S_1 und S_2 befindlichen Elektrizitätsmenge:

$$q = C (\psi_1 - \psi_2).$$

Da die Fläche derjenigen Zelle, deren Potential am höchsten ist, sich mit positiver Elektrizität ladet, so wandert die positive Elektrizität bei der Verschiebung, die nach unserer Vorstellung zwischen den Schwerpunkten vor sich gehen sollte, von einem Schwerpunkte mit höherem zu einem anderen mit niedrigerem Potential. Nennen wir also $\Delta\psi$ die Aenderung des Potentials im Sinne der Verschiebung, so erhalten wir für die Elektrizitätsmenge, welche von einem Schwerpunkte zum andern übergeht:

$$q = -C \Delta\psi.$$

Während eines Zeittheilchens dt wird die Aenderung des Potentialunterschiedes $\Delta\psi$ zwischen den betrachteten Punkten: $dt \frac{\partial}{\partial t} \Delta\psi$ oder $dt \Delta \frac{\partial \psi}{\partial t}$ sein; in Folge dessen ist die Elektrizitätsmenge, welche während derselben Zeit von einem dieser Punkte zum andern übergeht:

$$dq = -C dt \Delta \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Diese Formel ist identisch mit der Formel (1) des § 62, welche die von einem Molekül zum anderen übergehende Wärmemenge

angibt; hierbei ist C in beiden Formeln unabhängig von der Menge, deren Veränderung durch Δ angegeben wird.

69. Da das Gesetz von dem Ausgleiche der Elektrizität dasselbe ist, wie dasjenige von dem Ausgleiche der Wärme in der Fourier'schen Theorie, so werden wir die auf die Oberflächeneinheit bezogene Elektrizitätsmenge, welche durch ein Element hindurchgeht, erhalten, wenn wir in der Formel (6) § 65 die Temperatur V durch die Grösse $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ ersetzen. Nennen wir, wie Maxwell dies thut:

$$u \, d\omega dt; \quad v \, d\omega dt; \quad w \, d\omega dt$$

die Elektrizitätsmengen, welche während der Zeit dt die auf den Koordinatenaxen senkrechten Elemente $d\omega$ durchfliessen, so erhalten wir (cf. § 65):

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = -A \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x}, \\ v = -A \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y}, \\ w = -A \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial z}. \end{array} \right.$$

Nun sind u, v, w in der Maxwell'schen Theorie die Geschwindigkeitskomponenten der elektrischen Verschiebung, und in Folge dessen, da f, g, h die Komponenten dieser Verschiebung darstellen,

$$u = \frac{\partial f}{\partial t}, \quad v = \frac{\partial g}{\partial t}, \quad w = \frac{\partial h}{\partial t}.$$

Setzt man für u, v, w die eben gefundenen Werthe, so erhält man für f :

$$(8) \quad f = -A \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Da in der Maxwell'schen Theorie

$$f = -\frac{K}{4\pi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

ist, so erkennt man, dass die Zellentheorie mit der Maxwell'schen übereinstimmen wird, wenn wir setzen:

$$A = \frac{K}{4\pi}.$$

70. Wir wollen nun die Gleichung wieder zu erhalten suchen, welche nach der Maxwell'schen Theorie die Inkompressibilität des Induktionsfluidum ausdrückt.

Da die gesammte Elektrizitätsmenge, welche in jeder Zelle enthalten ist, immer gleich Null sein muss, so wird auch die Elektrizitätsmenge, welche während eines beliebigen Zeitintervalls durch die ein Volumen begrenzende Oberfläche geht, gleich Null sein. Wenn nun u , v , w die Komponenten der Geschwindigkeit sind, mit welcher die Bewegung der Elektrizität vor sich geht, so ist die Komponente dieser Geschwindigkeit längs der Normale eines Elementes $d\omega$ der Oberfläche:

$$\alpha u + \beta v + \gamma w,$$

wobei α , β , γ die Richtungskosinus der Normalen bezeichnen. In Folge dessen ist die in der Zeiteinheit durch $d\omega$ hindurchgehende Elektrizitätsmenge

$$(\alpha u + \beta v + \gamma w) d\omega$$

und die Menge, welche während derselben Zeit durch die geschlossene Oberfläche hindurchgeht, gleich dem Integral

$$\int (\alpha u + \beta v + \gamma w) d\omega$$

ausgedehnt über alle Elemente dieser Oberfläche. Für ein Zeitintervall dt ist die durch die geschlossene Oberfläche fließende Elektrizitätsmenge gleich dem Produkte aus dem vorhergehenden Integrale in dt . Durch Integration nach der Zeit erhält man die Elektrizitätsmenge, welche die Oberfläche während einer gewissen Zeit durchsetzt, und da diese Menge gleich Null ist, so muss auch das so erhaltene Integral Null sein. Nun sind aber u , v , w die nach der Zeit genommenen Differentialquotienten der Komponenten der Verschiebung f , g , h , wir erhalten also für unser Integral:

$$(9) \quad \int (\alpha f + \beta g + \gamma h) d\omega = 0.$$

Ferner ist bekanntlich

$$\int \alpha f d\omega = \int \frac{\partial f}{\partial x} d\tau,$$

wobei sich das erste Integral auf eine geschlossene Oberfläche, das andere auf das durch diese Oberfläche begrenzte Volumen bezieht. Durch Umformung auch der beiden anderen Terme des Integrals (9) auf dieselbe Weise erhalten wir:

$$\int \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \right) d\tau = 0.$$

Da dies Integral Gültigkeit haben muss, welches auch das betrachtete Volumen sein möge, so ziehen wir daraus den Schluss, dass

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \right) = 0.$$

Dies ist aber genau die Gleichung, durch welche in der Maxwell'schen Theorie die Differentialquotienten der Komponenten der Verschiebung des in einem Dielektrikum vorhandenen Induktionsfluidum unter einander verbunden sind.

71. Uebereinstimmung der Ausdrücke für die potentielle Energie. Wir wollen endlich zeigen, dass die Zellentheorie zu demselben Ausdruck für die potentielle Energie führt, wie die Maxwell'sche Theorie.

Bekanntlich ist die potentielle Energie eines Systems von elektrisirten Leitern gleich der halben Summe der Produkte aus der Ladung eines jeden Leiters in dessen Potential. Die Ladungen der einander gegenüberliegenden Flächen der beiden benachbarten Zellen sind gleich, haben aber entgegengesetztes Vorzeichen; bedeuten also ψ_1 und ψ_2 die Potentiale dieser Zellen, so ist die durch diese Ladungen erzeugte potentielle Energie gleich

$$\frac{1}{2} (q\psi_1 - q\psi_2) = -\frac{1}{2} q \Delta\psi.$$

Ausserdem aber hat man, wenn C die Kapazität des durch die betreffenden Oberflächen gebildeten Kondensators bedeutet,

$$q = -C \Delta\psi,$$

und der vorhergehende Ausdruck wird also

$$\frac{1}{2} C (\Delta \psi)^2.$$

Entwickelt man $\Delta \psi$ nach wachsenden Potenzen von Δx , Δy , Δz , indem man die höheren Glieder vernachlässigt, so erhält man:

$$\Delta \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \psi}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \psi}{\partial z} \Delta z$$

Wir betrachten nun ein Volumenelement $d\tau$, das zwar klein genug ist, um annehmen zu dürfen, dass die partiellen Differentialquotienten von ψ in jedem Punkte dieses Elements denselben Werth besitzen, aber gleichwohl gross genug, um eine sehr grosse Anzahl von Zellen und damit auch von kleinen Kondensatoren zu enthalten.

Die potentielle Energie dW dieses Elements wird die Summe der potentiellen Energien der verschiedenen kleinen Kondensatoren sein, welche darin enthalten sind, und wir erhalten demnach:

$$(10) \quad dW = \frac{1}{2} \sum C (\Delta \psi)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \sum C \Delta x^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \sum C \Delta y^2 \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \sum C \Delta z^2 + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} \sum C \Delta x \Delta y + \dots$$

Nun fanden wir bereits bei Gelegenheit der Besprechung der Wärmeleitung, dass die Summen:

$$\sum C \Delta x \Delta y, \quad \sum C \Delta y \Delta z, \quad \sum C \Delta z \Delta x$$

gleich Null sind. Wir setzten damals

$$A = \frac{\sum C \Delta x^2}{d\tau} = \frac{\sum C \Delta y^2}{d\tau} = \frac{\sum C \Delta z^2}{d\tau}.$$

Demnach erhalten wir für die potentielle Energie des Elements $d\tau$:

$$dW = \frac{A d\tau}{2} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right].$$

Ersetzen wir in diesem Ausdrucke die partiellen Differentialquotienten durch ihre aus Gleichung (8) § 69 entnommenen Werthe

$$f = -A \frac{\partial \psi}{\partial x} \text{ etc.}$$

und geben wir der Grösse A den Werth $\frac{K}{4\pi}$, auf den wir geführt wurden, als es sich darum handelte, die Zellentheorie mit der Maxwell'schen zur Uebereinstimmung zu bringen, dann erhalten wir:

$$dW = \frac{2\pi}{K} (f^2 + g^2 + h^2) dx.$$

Die potentielle Energie des begrenzten Volumens wird also durch das Integral:

$$W = \int \frac{2\pi}{K} (f^2 + g^2 + h^2) dx$$

gegeben sein.

Dieser Ausdruck ist identisch mit demjenigen, welchen wir (§ 32) aus der Maxwell'schen Theorie abgeleitet haben, und, wie bei dieser letzteren Theorie, befindet sich der Sitz für die potentielle Energie eines elektrisirten Leiters in dem dielektrischen Medium, welches die Leiter trennt.

72. Anmerkung. Bei den vorhergegangenen Entwicklungen haben wir angenommen, dass in jedem Punkte des Dielektrikum die elektrische Kraft nur von dem elektrostatischen Zustande des elektrisirten Systems abhängt. Wäre dies nicht der Fall, würde also beispielsweise ausser der auf die elektrostatischen Wirkungen zurückzuführenden elektromotorischen Kraft auch noch eine elektromotorische Induktionskraft wirksam sein, so müssten die Formeln, zu denen wir gelangt sind, modificirt werden.

Im Speciellen würde die Komponente f der Verschiebung nicht mehr durch die Formel:

$$f = -\frac{K}{4\pi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

gegeben sein, sondern durch die Formel:

$$f = -\frac{K}{4\pi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - X \right),$$

wo X die nach der X -Axe gerichtete Komponente der elektromotorischen Induktionskraft bedeutet.

Zum Beweise hierfür bestimmen wir die Veränderung $\Delta\psi$ des Potentials, wenn man vom Schwerpunkte G_1 einer Zelle zum Schwerpunkte G_2 einer benachbarten Zelle übergeht. Sie ist gleich der plötzlichen Veränderung H , welche vor sich geht, wenn man die isolirende Wand durchsetzt, vermehrt um die Arbeit, welche zur Ueberwindung der Induktionskräfte aufgewendet werden muss, wenn die Einheit positiver Elektrizität von G_1 nach G_2 übergeführt werden soll. Sind also $-X$, $-Y$, $-Z$ die Komponenten der elektromotorischen Induktionskraft, wenn man von G_1 nach G_2 übergeht, so erhält man für $\Delta\psi$.

$$\Delta\psi = H + X \Delta x + Y \Delta y + Z \Delta z.$$

Die elektrische Ladung eines unserer kleinen Kondensatoren wird also gleich sein: dem Produkte aus der Kapazität des Kondensators in die Potentialdifferenz H seiner beiden Belegungen; es kommt also:

$$q = -CH = -C \Delta\psi + C(X \Delta x + Y \Delta y + Z \Delta z),$$

und, statt dass wir wie vorher einfach:

$$q = -C \Delta\psi = -C \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial\psi}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial\psi}{\partial z} \Delta z \right)$$

erhalten, finden wir nun:

$$q = -C \left[\Delta x \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - X \right) + \Delta y \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} - Y \right) + \Delta z \left(\frac{\partial\psi}{\partial z} - Z \right) \right].$$

In allen unsern Formeln müssen wir also:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial z}$$

durch

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - X \right); \quad \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} - Y \right); \quad \left(\frac{\partial\psi}{\partial z} - Z \right)$$

ersetzen.

Die Formel:

$$f = -\frac{K}{4\pi} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x}$$

wird demnach

$$f = -\frac{K}{4\pi} \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - X \right)$$

oder

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = X - \frac{4\pi}{K} f.$$

73. Anisotrope Körper. Um die elektromagnetische Theorie der Doppelbrechung aufstellen zu können, ist es wichtig, zu sehen, was aus diesen Formeln wird, wenn die Körper nicht mehr isotrop sind.

Fassen wir die Formel (10) von § 71 in's Auge: Würde man in derselben $\frac{\partial\psi}{\partial x}$, $\frac{\partial\psi}{\partial y}$, $\frac{\partial\psi}{\partial z}$ als die Koordinaten eines Punktes im Raume betrachten und dW als konstant, so erhielte man die Gleichung eines Ellipsoids.

Bei einer Transformation der Koordinaten wird dies fingirte Ellipsoid die gleiche Gestalt behalten, aber seine Lage in Bezug auf die Axen wird sich ändern.

Wählen wir nun zu Koordinatenaxen die Axen des Ellipsoids selbst, so wird dessen Gleichung:

$$dW = \frac{A}{2} d\tau \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} \right)^2 + \frac{A'}{2} d\tau \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} \right)^2 + \frac{A''}{2} d\tau \left(\frac{\partial\psi}{\partial z} \right)^2$$

und man hat:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{\sum C \Delta x^2}{d\tau}; \quad A' = \frac{\sum C \Delta y^2}{d\tau}; \quad A'' = \frac{\sum C \Delta z^2}{d\tau} \\ \sum C \Delta x \Delta y = \sum C \Delta x \Delta z = \sum C \Delta y \Delta z = 0. \end{array} \right.$$

Die Formel (5) in der Fourier'schen Theorie (§ 64) wird vermöge der Gleichungen (11)

$$Q = -A \frac{\partial V}{\partial x}.$$

Nun haben wir aber im § 69 gesehen, dass es genügt, um von der Fourier'schen Theorie auf diejenige von der Wanderung der Elektrizität zwischen zwei Zellen überzugehen, wenn man V mit $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ vertauscht. Wir finden somit:

$$u = -A \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x}; \quad v = -A' \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y}; \quad w = -A'' \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial z}.$$

Die einzige Abweichung von den Gleichungen (7) besteht darin, dass die Koeffizienten von $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x}$, $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y}$, $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial z}$ unter einander nicht mehr gleich sind.

Man erhält hieraus:

$$f = -A \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{K}{4\pi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

$$g = -A' \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{K'}{4\pi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y},$$

$$h = -A'' \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{K''}{4\pi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

indem man

$$K = 4\pi A; \quad K' = 4\pi A'; \quad K'' = 4\pi A''$$

setzt.

Sind auch noch elektromotorische Induktionskräfte wirksam, deren Komponenten resp. X , Y , Z sein mögen, so werden diese Formeln:

$$(12) \quad \begin{aligned} f &= -\frac{K}{4\pi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - X \right), \\ g &= -\frac{K'}{4\pi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - Y \right), \\ h &= -\frac{K''}{4\pi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} - Z \right). \end{aligned}$$

Ferner findet man

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0,$$

und

$$W = \int dW = \int 2\pi dr \left(\frac{f^2}{K} + \frac{g^2}{K'} + \frac{h^2}{K''} \right).$$

74. Diskussion. Die Zellentheorie kann ebensowenig definitiv angenommen werden, wie diejenige von dem Induktionsfluidum. Diese heterogene Zusammensetzung lässt sich nur schwer für die flüssigen oder gasförmigen Dielektrika annehmen, ganz besonders aber für den leeren Weltraum. Nichtsdestoweniger hielt ich eine Erörterung dieser beiden Theorien für sehr wichtig. Sie würden unvereinbar mit einander sein, wollte man annehmen, dass sie die objektive Wirklichkeit wiedergeben, dagegen sind sie beide zu gebrauchen, wenn man sie nur als provisorisch betrachtet. Hätte ich mich darauf beschränkt, nur eine derselben zu entwickeln, so hätte ich die Ansicht erwecken können (die allerdings Viele theilen, die mir jedoch unrichtig erscheint), als wenn Maxwell die elektrische Verschiebung als wirkliche Verschiebung einer wirklichen Materie betrachtete.

Im letzten Grunde ist seine Ansicht jedoch eine ganz andere, wie wir später erkennen werden.

Kapitel IV.

Bewegung von Leitern unter der Einwirkung elektrischer Kräfte. Besondere Theorie von Maxwell.

75. Kräfte, welche zwischen elektrisirten Leitern auftreten. Bisher haben wir bei unseren Betrachtungen angenommen, dass die elektrisirten Leiter in Ruhe bleiben. Nun wissen wir aber, dass z. B. zwei elektrisirte Leiter sich anziehen oder abstossen, je nachdem sie mit ungleichnamiger oder gleichnamiger Elektrizität geladen sind. Die Elektrizität wirkt also auf die Materie. Welches ist nun die Natur dieser Wirkung? Wir können das nicht genau angeben, da wir die Natur der Ursache dieser Wirkung, die Natur der Elektrizität, nicht kennen. Allerdings haben wir die Kenntniss derselben nicht nöthig, um die Grösse der Kraft anzugeben, welche zwischen zwei Leitern wirkt; es genügt, das Prinzip von der Erhaltung der Energie anzuwenden.

Betrachten wir beispielsweise zwei Leiter C und C' mit den elektrischen Ladungen M und M' und setzen voraus, dass der Leiter C sich bewegen kann, aber ohne sich um seinen Schwerpunkt zu drehen; die Kenntniss der Koordinaten ξ, η, ζ dieses Punkts wird dann zur Definition der Lage von C im Raume genügen. Die potentielle Energie des Systems der beiden Leiter hängt augenscheinlich ab von der Lage des Leiters C in Beziehung zum Leiter C' und ausserdem von den Ladungen der beiden Leiter. Da die Lage von C nach unserer Annahme durch die Koordinaten seines Schwerpunkts gegeben ist, so stellt demnach die potentielle Energie W des Systems eine Funktion seiner Koordinaten und der Ladungen M und M' dar; wir können setzen

$$W = F(\xi, \eta, \zeta, M, M').$$

Damit das System im Gleichgewicht ist, muss man auf den beweglichen Leiter C eine Kraft wirken lassen, gleich und entgegengesetzt der, welche der Leiter C' auf ihn ausübt; wir bezeichnen mit $-X$, $-Y$, $-Z$ die Komponenten dieser an C angreifenden Kraft. Dann soll die Summe der virtuellen Arbeit aller auf das System wirkenden Kräfte, innerer sowohl wie äusserer, gleich Null sein. Für eine Verrückung $\delta\xi$ des Schwerpunkts von C ist die Arbeit der äusseren Kraft $-X \delta\xi$, die der inneren Kräfte $\frac{\partial W}{\partial \xi} \delta\xi$; wir haben also

$$-X \delta\xi + \frac{\partial W}{\partial \xi} \delta\xi = 0.$$

Wir leiten aus dieser Gleichung für den Werth der Komponente X der von C' auf C ausgeübten Kraft ab

$$X = \frac{\partial W}{\partial \xi}.$$

76. Die einfachste und natürlichste Hypothese, die man für die Erklärung der Anziehung und Abstossung zwischen elektrisirten Leitern machen kann, ist die, jene Wirkungen der Elasticität des zwischen den Leitern ausgebreiteten Fluidum zuzuschreiben, und die gewöhnlichen Prinzipien der Elasticitätstheorie auf dieses Fluidum anzuwenden. Unglücklicherweise zeigen die Folgerungen aus dieser Hypothese keine Uebereinstimmung mit den Versuchsergebnissen. In der That sind in einem elastischen Fluidum die Kräfte, welche von sehr kleinen Verrückungen herrühren, lineare Funktionen dieser Verrückungen. Die angeführte Hypothese würde also zu der Folgerung führen, dass die zwischen zwei elektrisirten Leitern auftretende Kraft eine lineare Funktion der elektrischen Ladung derselben ist. Bei Verdoppelung der Ladung jedes Leiters müsste man daher die doppelte Kraft erhalten; man weiss aber, dass bei Verdoppelung der Ladungen zweier Leiter die unter ihnen wirkende Kraft vervierfacht wird.

Viele andere Hypothesen wurden noch zur Erklärung dieser Wirkung elektrisirter Leiter aufgestellt. Einige derselben führen zwar zu Folgerungen, welche mit der Erfahrung im Einklang stehen, sind aber zu complicirt, und es lässt sich kein Grund finden, aus dem man einer dieser Theorien vor den anderen den Vorzug geben sollte. Wir wollen uns daher auch nicht weiter mit dieser Frage befassen, sondern uns nur darauf beschränken, die von Maxwell aufgestellte Theorie auseinanderzusetzen.

77. Theorie von Maxwell. Fassen wir ein Volumelement $d\tau$ eines Leiters in's Auge und bezeichnen mit ρ die Dichte der freien Elektrizität im Schwerpunkt dieses Elements. Unter freier Elektrizität verstehen wir in der Theorie zweier Fluida den Ueberschuss der positiven Elektrizität über die negative; und in der Theorie von einem einzigen Fluidum den Ueberschuss der in dem Element enthaltenen Elektrizität über die Menge, welche das Element im neutralen Zustand enthalten würde. Die beiden Theorien sind übrigens vollständig gleichwerthig.

Die elektrische Masse des Elements ist also $\rho d\tau$, und wenn ψ den Werth des Potentials im Schwerpunkt bezeichnet, so sind die Komponenten der auf diese elektrische Masse ausgeübten Kraft:

$$-\rho d\tau \frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad -\rho d\tau \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad -\rho d\tau \frac{\partial\psi}{\partial z}.$$

Der Versuch lehrt, dass die auf ein materielles Theilchen selbst wirkende Kraft gleich derjenigen ist, welche auf die darin enthaltene Elektrizität wirkt, und folglich, dass dieses Element sich nur im Gleichgewicht befinden kann, wenn man auf dasselbe eine Kraft wirken lässt, welche der elektrostatischen Anziehung das Gleichgewicht zu halten vermag.

Nennt man die Komponenten dieser Kraft $X d\tau$, $Y d\tau$, $Z d\tau$, so erhält man

$$(1) \quad X = \rho \frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad Y = \rho \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad Z = \rho \frac{\partial\psi}{\partial z}.$$

Nach der Vorstellung von Maxwell, der in allen seinen Theorien die Hypothese der elektrischen Fernwirkung zu vermeiden sucht, hat man die Anziehung und Abstossung der Leiter den durch die dielektrische Materie sich fortpflanzenden Drucken auf die ponderablen Massen zuzuschreiben. Wir wollen die Resultante dieser Drucke bestimmen.

78. Der auf ein Oberflächenelement ausgeübte Druck steht nicht nothwendig senkrecht auf demselben. Bezeichnen wir mit

$$P_{xx} d\omega, \quad P_{xy} d\omega, \quad P_{xz} d\omega$$

die Komponenten nach x, y, z des Drucks, der auf ein zur X -Axe senkrecht Element ausgeübt wird; durch

$$P_{yz} d\omega, \quad P_{yy} d\omega, \quad P_{yz} d\omega$$

72 Bewegung von Leitern unter der Einwirkung elektr. Kräfte.

die Druckkomponenten auf ein Element senkrecht zu OY; endlich mit

$$P_{zx} d\omega, \quad P_{zy} d\omega, \quad P_{zz} d\omega$$

die Komponenten für ein zu OZ senkrechtes Element. Diese neun Grössen genügen zur Bestimmung des Druckes auf ein beliebiges Oberflächenelement. Uebrigens reduciren sich die Grössen auf sechs, denn die Elasticitätstheorie lehrt uns, dass

$$(2) \quad P_{xy} = P_{yx}, \quad P_{yz} = P_{zy}, \quad P_{xz} = P_{zx}.$$

79. Betrachten wir jetzt ein rechtwinkliges Parallelepiped (Fig. 9), dessen zu den Koordinatenaxen parallele Kanten die Längen dx, dy, dz

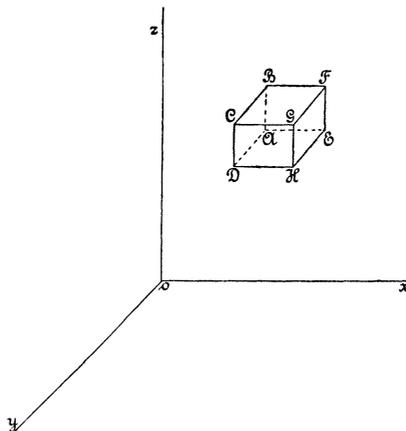


Fig. 9.

besitzen und stellen die Bedingung dafür auf, dass dies Parallelepiped unter dem Einfluss der auf seine Flächen wirkenden Drucke und der äusseren Kraftkomponenten $X d\tau, Y d\tau, Z d\tau$ sich im Gleichgewicht befindet.

Die Gleichungen, welche ausdrücken, dass die Summe der Kraftmomente in Bezug auf jede der drei Koordinatenaxen Null ist, führen genau auf die Beziehungen (2). Es ist daher nur noch der Ausdruck dafür aufzustellen, dass die Summe der in Richtung der Axen auf das Parallelepiped wirkenden Kraftkomponenten gleich Null ist.

Der auf der Fläche ABCD lastende Druck hat zur Kom-

ponente parallel OX: $P_{xx} dy dz$; der auf die entgegengesetzte Fläche EFGH in derselben Richtung wirkende Druck

$$\left(P_{xx} + \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} dx \right) dy dz.$$

Wir wollen die Schreibweise von Maxwell annehmen, welcher den Zug als positiv und den Druck als negativ betrachtet; die Resultante dieser beiden Kräfte wird dann ihre algebraische Summe

$$\frac{\partial P_{xx}}{\partial x} dx dy dz = \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} d\tau.$$

Auf dieselbe Weise finden wir für die algebraische Summe der zu OX parallelen Druckkomponenten, die von den anderen Flächen des Parallelepipeds stammen

$$\frac{\partial P_{yx}}{\partial y} d\tau, \quad \frac{\partial P_{zx}}{\partial z} d\tau.$$

Die Summe dieser Grössen muss gleich $-X d\tau$ sein; wir erhalten somit

$$\frac{\partial P_{xx}}{\partial x} d\tau + \frac{\partial P_{yx}}{\partial y} d\tau + \frac{\partial P_{zx}}{\partial z} d\tau = -X d\tau = -\rho d\tau \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Setzen wir ferner die Summen der Druckkomponenten nach den Axen der y und der z gleich den Komponenten der äusseren Kraft nach denselben Axen, so entstehen zwei analoge Gleichungen. Dividiren wir die beiden Glieder jeder dieser Gleichungen durch $d\tau$, so haben wir unter Berücksichtigung der Beziehungen (2):

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zx}}{\partial z} = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ \frac{\partial P_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zy}}{\partial z} = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ \frac{\partial P_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zz}}{\partial z} = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial z}. \end{array} \right.$$

80. Dieses System von drei Gleichungen enthält sechs Unbekannte; es lässt also unendlich viele Lösungen zu. Maxwell wählt die folgende:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_{xx} = \frac{K}{8\pi} \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial\psi}{\partial z} \right)^2 \right] \\ P_{yy} = \frac{K}{8\pi} \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial\psi}{\partial z} \right)^2 - \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} \right)^2 \right] \\ P_{zz} = \frac{K}{8\pi} \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial z} \right)^2 - \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} \right)^2 \right] \\ P_{yx} = P_{xy} = \frac{K}{4\pi} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial y}, \\ P_{zy} = P_{yz} = \frac{K}{4\pi} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial z}, \\ P_{zx} = P_{xz} = \frac{K}{4\pi} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial z}. \end{array} \right.$$

Wir wollen zeigen, dass dieses System von Lösungen den Gleichungen (3) vollständig genügt. Man hat

$$\frac{\partial P_{xx}}{\partial x} = \frac{K}{4\pi} \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial\psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z} \right),$$

$$\frac{\partial P_{xy}}{\partial y} = \frac{K}{4\pi} \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} \right),$$

$$\frac{\partial P_{xz}}{\partial z} = \frac{K}{4\pi} \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{\partial\psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z} \right),$$

und die linke Seite der ersten Gleichung (3) wird nach der Reduktion

$$\frac{K}{4\pi} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x} \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \right) = \frac{K}{4\pi} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x} \Delta\psi.$$

Wir haben nun gesehen (§ 16), dass in einem homogenen dielektrischen Medium zu setzen ist

$$K \Delta\psi = -4\pi \rho.$$

Folglich kann man die linke Seite der betrachteten Gleichung schreiben

$$- e \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

wodurch bewiesen ist, dass diese Gleichung erfüllt wird. Auf dieselbe Weise kann man sich überzeugen, dass die beiden anderen Gleichungen (3) durch die von Maxwell angenommene Lösung befriedigt werden.

81. Wir wählen als X-Axe die Richtung der elektrischen Kraft in einem Punkte und als Axen der Y und Z zwei zu dieser Richtung senkrechte Geraden. Wenn wir mit F den absoluten Werth der elektrischen Kraft bezeichnen, so erhalten wir für dieses neue Axensystem:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -F, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0.$$

Durch Einsetzen dieser Werthe in die Gleichungen (4), findet man:

$$P_{xx} = \frac{K F^2}{8 \pi},$$

$$P_{yy} = P_{zz} = -\frac{K F^2}{8 \pi},$$

$$P_{xy} = P_{yx} = P_{yz} = P_{zy} = P_{zx} = P_{xz} = 0.$$

Es geht aus diesen Beziehungen hervor, dass der Druck auf ein Oberflächenelement, das senkrecht zu der Richtung der elektrischen Kraft oder parallel zu derselben steht, senkrecht zu diesem Element wirkt; auf ein zu dieser Richtung schräges Element wird der Druck schräg ausgeübt. Da die Komponente in Richtung der elektrischen Kraft positiv ist, so besteht eine Spannung in derselben; für eine hierzu senkrechte Richtung ist der Druck negativ, so dass nach der von Maxwell angenommenen Schreibweise in dieser Richtung ein Druck im eigentlichen Sinn des Wortes besteht. Ausserdem besitzt der Zug, welcher auf ein zur elektrischen Kraft senkrecht Element wirkt, und der Druck auf ein zu dieser Richtung paralleles Element denselben absoluten Werth.

82. **Diskussion.** Für sich allein betrachtet, trägt die vorangehende Theorie den bekannten Gesetzen der elektrostatischen Anziehungen hinreichend Rechnung. Man hat dabei die Annahme zu machen, dass diese Anziehungen den Drucken und Spannungen zuzuschreiben sind, welche in einem besonderen elastischen, die Dielektrika erfüllenden Medium auftreten.

Aber man muss gleichzeitig annehmen, dass die Elasticitätsgesetze dieses Fluidum sich vollständig von denjenigen der uns bekannten materiellen Körper unterscheiden, sowie von den für den Lichtäther angenommenen Gesetzen, und endlich von denjenigen, zu deren Annahme wir bei der Betrachtung des Induktionsfluidum geführt worden sind.

Für diese beiden hypothetischen Fluida, wie für die ponderablen Flüssigkeiten selbst, sind die elastischen Kräfte in der That proportional den Verrückungen, durch welche sie hervorgebracht werden, und dasselbe würde auch bei den Druckveränderungen der Fall sein, welche der Einwirkung dieser Kräfte zuzuschreiben sind. Welche ergänzenden Hypothesen man im Uebrigen auch macht, so müsste sich der Druck durch das Potential und seine Differentialquotienten linear ausdrücken lassen. Dagegen haben wir gefunden, dass die Drucke in Bezug auf die Derivirten des Potentials vom zweiten Grad sind.

Wenn wir einmal mit den eingewurzelten Gewohnheiten brechen und diese paradoxen Eigenschaften dem hypothetischen, die Dielektrika erfüllenden Medium zuertheilen wollen, so können wir auch gegen die vorhergehende Theorie, für sich betrachtet, keinen Einwand mehr erheben. Indessen darf man sich, auch wenn kein innerer Widerspruch besteht, wohl fragen, ob dieselbe mit den anderen Theorien von Maxwell, z. B. mit der Theorie der elektrischen Verschiebung, die wir früher unter dem Namen der Theorie des Induktionsfluidum auseinandersetzen, im Einklang steht.

Augenscheinlich ist eine Vereinigung dieser beiden Theorien unmöglich. Denn wir wurden darauf geführt, für das Induktionsfluidum einen Druck gleich ψ anzunehmen; bei der neuen Theorie dagegen erhalten wir für den Druck des die Dielektrika erfüllenden Fluidum einen ganz anderen Werth.

Man darf aber auf diesen Widerspruch kein zu grosses Gewicht legen. Ich habe in der That früher auseinandergesetzt, aus welchem Grunde ich glaube, dass Maxwell die Theorie der elektrischen Bewegung und des Induktionsfluidum nur als vorläufige betrachtete, und dass dies Induktionsfluidum, für welches er den Namen der Elektrizität beibehielt, in seinen Augen nicht mehr thatsächliche Realität besass, als die beiden Fluida von Coulomb.

83. Unglücklicherweise besteht eine noch grössere Schwierigkeit. Ein Punkt, auf den Maxwell offenbar viel Gewicht legt, ist der, dass die potentielle Energie

$$W = \int \frac{2\pi}{K} (f^2 + g^2 + h^2) d\tau$$

in den verschiedenen Volumelementen des Dielektrikum lokalisiert ist, derart dass die in dem Element $d\tau$ enthaltene Energie den Werth

$$\frac{2\pi}{K} (f^2 + g^2 + h^2) d\tau$$

besitzt oder, bei der vereinfachenden Annahme $K=1$ und bei Bezeichnung der elektrischen Kraft mit F (cf. § 38)

$$\frac{F^2 d\tau}{8\pi}.$$

Wenn also F einen sehr kleinen Zuwachs dF erfährt, so muss diese Energie zunehmen um:

$$dW = \frac{2F dF}{8\pi} d\tau.$$

Wir wollen nun als Volumelement $d\tau$ ein unendlich kleines rechtwinkliges Parallelepiped annehmen, dessen eine Kante parallel der elektrischen Kraft F sein soll und dessen drei Kanten die Längen α , β , γ besitzen mögen, so dass:

$$\alpha \beta \gamma = d\tau$$

ist.

Suchen wir nun einen anderen Ausdruck für diese Energie.

Es ist natürlich anzunehmen, dass der in diesem Element $d\tau$ lokalisierte Energiezuwachs dW der Arbeit zugeschrieben werden muss, welche die auf die Flächen des Parallelepipeds wirkenden Drucke leisten. Die Kanten des Parallelepipeds, die bei dem Druck Null die Längen α , β , γ haben, erhalten unter dem Einfluss der Drucke die Längen:

$$\alpha(1 + \epsilon_1), \quad \beta(1 + \epsilon_2), \quad \gamma(1 + \epsilon_3).$$

Nehmen wir an, dass diese Grössen ϵ_1 , ϵ_2 , ϵ_3 den Zuwachs $d\epsilon_1$, $d\epsilon_2$, $d\epsilon_3$ erfahren, so werden die Arbeiten der auf die verschiedenen Flächen des Parallelepipeds wirkenden Drucke P_{xx} , P_{yy} , P_{zz} dargestellt durch (cf. § 81)

$$\begin{aligned}
 + \frac{F^2}{8\pi} \beta \gamma \alpha d\epsilon_1 &= + \frac{F^2}{8\pi} d\tau d\epsilon_1, \\
 - \frac{F^2}{8\pi} \gamma \alpha \beta d\epsilon_2 &= - \frac{F^2}{8\pi} d\tau d\epsilon_2, \\
 - \frac{F^2}{8\pi} \alpha \beta \gamma d\epsilon_3 &= - \frac{F^2}{8\pi} d\tau d\epsilon_3
 \end{aligned}$$

Die Summe dieser Arbeiten ist:

$$\frac{F^2}{8\pi} d\tau (d\epsilon_1 - d\epsilon_2 - d\epsilon_3).$$

Wenn wir die potentielle Energie der Druckarbeit zuschreiben, so muss zwischen dieser Arbeit und der Variation dW der Energie Gleichheit bestehen, d. h. es muss sein

$$\frac{F^2}{8\pi} d\tau (d\epsilon_1 - d\epsilon_2 - d\epsilon_3) = \frac{2F dF}{8\pi} d\tau,$$

oder

$$d\epsilon_1 - d\epsilon_2 - d\epsilon_3 = \frac{2 dF}{F}.$$

Durch Integration erhalten wir

$$\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 = 2 \log F + \text{Const.}$$

Dies Resultat ist aber unzulässig, denn im Gleichgewichtszustand haben wir $F=0$ zu setzen, und die vorhergehende Gleichung könnte nur bestehen, wenn ϵ_2 oder ϵ_3 unendlich würde, eine vollständig widersinnige Folgerung.

84. Die Theorie des § 77 ist also unvereinbar mit der Grundhypothese, dass die Energie in dem Dielektrikum ihren Sitz hat, wenn man dieselbe als potentiell betrachtet. Sie würde es hingegen nicht mehr sein, wenn man diese Energie als kinetische betrachten würde, d. h. wenn man annähme, dass das Dielektrikum der Sitz von Wirbelbewegungen ist und dass W die lebendige Kraft dieser Bewegungen darstellt. Aber man kann diese Auslegung des Maxwell'schen Gedankens auch nicht annehmen, ohne auf grosse Schwierigkeiten zu stossen.

Wenn der englische Gelehrte die Lagrange'schen Gleichungen auf die Theorie der elektrodynamischen Erscheinungen anwendet,

so nimmt er, wie wir später sehen werden, ausdrücklich an, dass die elektrostatische Energie

$$W = \int \frac{2\pi}{K} (f^2 + g^2 + h^2) dr$$

eine potentielle Energie darstellt, dagegen die elektrodynamische Energie eine kinetische.

Auch spart er sich die Erklärung durch Wirbelbewegungen für die magnetischen und elektrodynamischen Anziehungen auf und sucht sie nicht auf die elektrostatischen Erscheinungen anzuwenden.

Hiermit beendige ich diese lange Auseinandersetzung, durch die mir der Beweis erbracht zu sein scheint, dass die vorhergehende Theorie, obgleich für sich vollkommen annehmbar, nicht in den allgemeinen Rahmen der Maxwell'schen Ideen passt.

Kapitel V.

Elektrokinematik.

85. Lineare Leiter. Die Fortpflanzung der Elektrizität in Leitern wird im stationären Zustand durch zwei Gesetze beherrscht, das Gesetz von Ohm und das von Kirchhoff.

Nach dem ersten Gesetz ist die zwischen den Enden eines Leiters auftretende elektromotorische Kraft proportional der Menge Elektrizität, welche in der Zeiteinheit die Querschnittseinheit des Leiters durchfließt. In dem Fall, dass der Querschnitt des Leiters überall der gleiche ist, wie bei einem cylindrischen Draht, ist die elektromotorische Kraft der Elektrizitätsmenge proportional, welche während der Zeiteinheit durch diesen Querschnitt fließt. Diese Menge heisst die Intensität des den Leiter durchfließenden Stroms; wir wollen sie mit i bezeichnen. Wenn der Leiter homogen ist und an keinem seiner Punkte eine elektromotorische Kraft besteht, so ist die elektromotorische Kraft zwischen seinen Enden gleich dem Unterschied $\psi_1 - \psi_2$ der Werthe des Potentials in diesen Punkten und das Ohm'sche Gesetz führt zu der Relation:

$$Ri = \psi_1 - \psi_2.$$

In dem allgemeinsten Fall dagegen treten an verschiedenen Punkten des Leiters elektromotorische Kräfte auf, die entweder von mangelhafter Homogenität herrühren, oder von thermischen oder chemischen Erscheinungen, oder endlich von Induktionsvorgängen. Bezeichnen wir mit ΣE die Summe der elektromotorischen Kräfte dieser Art, welche an verschiedenen Punkten des linearen Leiters wirken, so erhalten wir

$$(1) \quad Ri = \psi_1 - \psi_2 + \Sigma E.$$

In diesen beiden Formeln stellt R dasjenige dar, was man den Widerstand des Leiters nennt. Dieser Widerstand ist mit der Länge l und dem Querschnitt $d\omega$ des Leiters durch die Beziehung:

$$(2) \quad R = \frac{l}{C d\omega}$$

verbunden, wo C einen nur von der Natur des Leiters abhängigen Faktor darstellt, den man mit dem Namen „Koeffizient des spezifischen Leitungsvermögens“ belegt.

Das Kirchhoff'sche Gesetz ist nichts anderes, als die Anwendung des Prinzips der Kontinuität. Wenn mehrere lineare Leiter in demselben Punkt zusammenstossen, so ist nach diesem Gesetz die Summe der Intensitäten aller sie durchfliessenden Ströme gleich Null.

86. Neuer analytischer Ausdruck für das Ohm'sche Gesetz.

Wenn wir in die Formel (1) den durch die Relation (2) gegebenen Werth des Widerstands einsetzen, so erhalten wir

$$\frac{l i}{C d\omega} = \psi_1 - \psi_2 + \Sigma E.$$

Betrachten wir nun ein unendlich kleines Element des Leiters von der Länge dx und bezeichnen wir mit $-d\psi$ die Potentialdifferenz zwischen den beiden Enden desselben, wenn man sich im Sinn des elektrischen Stroms bewegt, und mit $X dx$ die Veränderung der elektromotorischen Kräfte jeder anderen Art, dann wird die vorhergehende Gleichung

$$\frac{i dx}{C d\omega} = -d\psi + X dx$$

oder

$$\frac{i}{C d\omega} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} + X.$$

Da aber i die Elektrizitätsmenge darstellt, welche in der Zeiteinheit durch den Querschnitt des Leiters fliesst, so bedeutet der Quotient $\frac{i}{d\omega}$ die Geschwindigkeit der Elektrizitätsbewegung; nennen wir dieselbe u , so erhalten wir

$$(3) \quad \frac{u}{C} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} + X$$

eine Gleichung, die das Ohm'sche Gesetz für den Fall eines linearen Leiters darstellt.

87. Leiter von beliebiger Gestalt. Die Analogie zwischen der elektrischen und der thermischen Leitungsfähigkeit führt dazu, das

Ohm'sche Gesetz auch auf Leiter mit drei Dimensionen auszudehnen. Uebrigens wird dies Verfahren auch durch die Uebereinstimmung der theoretisch gefundenen Resultate mit den beobachteten experimentellen Thatsachen in einigen besonderen Fällen gerechtfertigt.

Führen wir also diese Verallgemeinerung des Ohm'schen Gesetzes durch. Wenn wir mit ψ das Potential in irgend einem Punkt eines Elements $d\tau$ des Leiters bezeichnen, mit X, Y, Z die Komponenten der elektromotorischen Kraft irgend welchen Ursprungs, die in diesem Punkte herrscht, und endlich mit u, v, w die Komponenten der Geschwindigkeit in diesem Punkte, so erhalten wir für jede der zu den Koordinatenachsen parallelen Richtungen eine Gleichung analog (3). Diese drei Gleichungen sind

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{u}{C} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} + X, \\ \frac{v}{C} = -\frac{\partial\psi}{\partial y} + Y, \\ \frac{w}{C} = -\frac{\partial\psi}{\partial z} + Z. \end{cases}$$

u, v, w bezeichnen hier dieselben Grössen, wie bei der statischen Elektrizität: die Geschwindigkeitskomponenten der elektrischen Verschiebung. Es sind dies also die nach der Zeit genommenen Derivirten der Verschiebungskomponenten f, g, h in der Maxwell'schen Theorie.

Was das Kirchhoff'sche Gesetz anbelangt, so ist es klar, dass dasselbe auch auf Leiter mit drei Dimensionen ausgedehnt werden kann, denn es stellt nur eine Folgerung aus dem Prinzip der Kontinuität dar. Da die Intensitäten proportional u, v, w sind, so führt dies Gesetz zu der Beziehung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

In der Theorie von Maxwell, bei der die Elektrizität als inkompressibel angenommen wird, ist diese Gleichung, welche die Bedingung der Inkompressibilität der Flüssigkeit ausdrückt, immer erfüllt, ob ein stationärer Zustand erreicht ist oder nicht.

88. Unterschied zwischen Leiterströmen und Verschiebungsströmen. Nach Maxwell sucht sich das Induktionsfluidum, welches ein dielektrisches Medium erfüllt, unter dem Einfluss der elektrischen Kräfte zu bewegen, ebenso wie die ein leitendes Medium erfüllende

Elektricität. Nur hört im ersteren Fall die Bewegung in Folge der elastischen Gegenkraft des Induktionsfluidum bald auf, nicht aber im zweiten Fall, da das im Innern des leitenden Medium ausgebreitete Fluidum keine elastischen Kräfte besitzt. Es folgt daraus, dass die Verschiebungsströme nur während der sehr kurzen Zeit andauern können, die zur Herstellung des Gleichgewichts nöthig ist. Dagegen können die Leiterströme so lange unterhalten werden, als durch eine äussere Einwirkung zwischen beiden Enden eines Leiters eine elektromotorische Kraft hervorgebracht wird. Dies ist ein erster Unterschied zwischen den Leiterströmen und Verschiebungsströmen.

Ein zweiter ergibt sich aus den Gleichungen für die Gesetze, welche diese Ströme befolgen. Die für Leiterströme aufgestellten Gleichungen (4) kann man schreiben

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial x} = X - \frac{u}{C}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} = Y - \frac{v}{C}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} = Z - \frac{w}{C}. \end{cases}$$

Andererseits haben wir (72.) gezeigt, dass im Innern eines Dielektrikum elektromotorische Kräfte auftreten, von denen wir annehmen, dass sie durch Induktion entstehen, die man aber auch eventuell einer anderen Ursache zuschreiben könnte. Die Gleichungen der Verschiebungsströme lauten:

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial x} = X - \frac{4\pi}{K} f, \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} = Y - \frac{4\pi}{K} g, \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} = Z - \frac{4\pi}{K} h. \end{cases}$$

Eine Vergleichung der Beziehungen (5) und (6) zeigt unmittelbar, dass die Leiterströme von der Geschwindigkeit der Verschiebung abhängen, die anderen dagegen von der Grösse dieser Verschiebung.

89. Um uns den Unterschied, der für beide Arten von Strömen hieraus entsteht, klar zu machen, wollen wir folgende Beispiele zum Vergleich heranziehen. Einerseits nehmen wir an, man hebe einen schweren Körper längs einer schiefen Ebene, bei

der die Reibung Null ist; man verrichtet dann eine Arbeit, welche sich unter der Form potentieller Energie widerfindet. Andererseits möge eine Bewegung auf einer horizontalen Ebene vor sich gehen, auf der die Reibung beträchtlich ist. Wenn die treibende Kraft aufhört, wird auch der Körper in Ruhe bleiben; die angewandte Arbeit findet sich nicht in der Form potentieller Energie wieder, sondern in der Form von Wärme. Im ersteren Fall hängt die Arbeit von der Verschiebung des Körpers ab, im zweiten von ihrer Geschwindigkeit. Wir finden eine gewisse Analogie in den beiden Arten von Strömen: die Erzeugung der Verschiebungsströme ruft eine Veränderung der potentiellen Energie des Systems hervor, die von dem Quadrat der Verschiebung abhängt; die Leiterströme aber bedingen eine Wärmeentwicklung.

Ein anderes, der Hydrodynamik entnommenes Bild gestattet ebenfalls, sich von der Verschiedenheit zwischen beiden Arten von Strömen Rechenschaft zu geben. Wir denken uns eine Pumpe P (Fig. 10) mit zwei seitlichen Röhren A B und E F G, welche unter

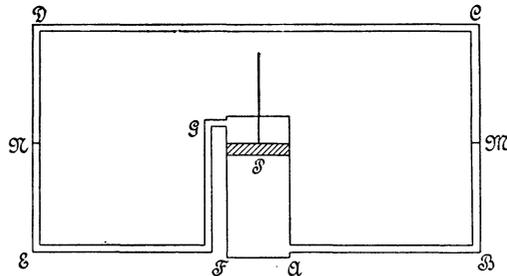


Fig. 10.

sich durch zwei senkrechte Röhren B C und D E, sowie durch eine horizontale Röhre C D in Verbindung stehen. Diese Pumpe sei, ebenso wie ein Theil der Röhren, mit Quecksilber gefüllt; M und N mögen das Niveau des Quecksilbers bezeichnen, das anfangs in den vertikalen Röhren in derselben horizontalen Ebene stehen soll. Ferner mögen die Röhre C D und die nicht durch das Quecksilber eingenommenen Theile der vertikalen Röhren mit Wasser gefüllt sein. Drücken wir den Stempel herunter, so entsteht ein Flüssigkeitsstrom in dem Apparat und zwar in einem bestimmten Sinne, z. B. in der Richtung A B C D E F G; in Folge dessen hebt sich das Quecksilberniveau in M und fällt in N, bis der Höhenunterschied einen genügenden Druck hervorruft, um der Wirkung des Stempels das

Gleichgewicht zu halten. Die aufgewandte Arbeit wurde also benutzt, um einen Niveauunterschied zu erzeugen; sie findet sich als eine Vermehrung der potentiellen Energie des Systems [wieder und diese Energie hängt von der Stellung der Quecksilberkuppen ab. Wir haben so ein treues Bild eines Verschiebungsstroms. Aendern wir jetzt den obigen Apparat etwas ab. Wir geben den Röhren einen sehr engen Querschnitt und nehmen an, dass sie und die Pumpe [vollständig mit Quecksilber gefüllt seien. Setzt man nun die Pumpe in Bewegung, so verschiebt sich das Quecksilber und setzt in Folge seiner Kohäsion der Bewegung des Stempels einen gewissen Widerstand entgegen. Wenn der letztere gleich der Kraft ist, welche auf den Stempel wirkt, so bewegt sich das Quecksilber mit konstanter Geschwindigkeit, und die Bewegung geht vor sich, so lange der Druck auf den Stempel wirkt. Die Arbeit findet sich in der Form von Wärme wieder, die durch die Reibung der flüssigen Moleküle entwickelt wird, und die Menge der entwickelten Wärme hängt von der Geschwindigkeit ab. Wir finden in diesem Beispiel das vollkommene Bild eines Leiterstroms: ein veränderlicher Zustand in der Anfangsperiode, hierauf ein stationärer Zustand und eine Umwandlung der Arbeit in Wärme.

90. Gesetz von Joule. Die Menge der Wärme, welche in dem von einem Strom durchflossenen Leiter entwickelt wird, ist nach dem Joule'schen Gesetz proportional dem Quadrat der Stromintensität. In der Maxwell'schen Theorie wird die Arbeit, welche zur Ueberwindung des Widerstands im Volumelement $d\tau$ nöthig ist, gegeben durch den Ausdruck

$$\left(\frac{u}{C} df + \frac{v}{C} dg + \frac{w}{C} dh \right) d\tau,$$

wo df , dg , dh die Komponenten der Verrückung darstellen, welche während des Zeitintervalls dt stattfindet. Diesen Ausdruck kann man schreiben:

$$\left(u \frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial g}{\partial t} + w \frac{\partial h}{\partial t} \right) \frac{d\tau}{C} dt$$

oder

$$\frac{u^2 + v^2 + w^2}{C} d\tau dt.$$

Für den gesammten Leiter ist diese Arbeit

$$\frac{1}{C} dt \int (u^2 + v^2 + w^2) d\tau.$$

Sie ist proportional dem Quadrate der Intensität; ebenso ist es also auch die aus ihrer Umwandlung entstehende Wärmemenge, wie es das Joule'sche Gesetz verlangt.

Maxwell widmet in seinem Werke dem Studium der Leitung mehrere interessante Kapitel. Wir wollen ihm nicht in allen Entwicklungen, die er über diesen Gegenstand liefert, folgen, sondern uns auf das beschränken, was wir hier über die Elektrokinematik auseinandergesetzt haben.

Kapitel VI.

Magnetismus.

91. Magnetische Fluida. Gesetze der magnetischen Wirkungen.

Wir wollen die Hauptpunkte der Lehre vom Magnetismus hier rekapituliren.

Es ist uns bekannt, dass bei den magnetischen Erscheinungen Alles so vor sich geht, als wenn zwei magnetische Fluida beständen, die, wie die elektrischen Fluida, in ihren wechselseitigen Wirkungen entgegengesetzte Eigenschaften besitzen: die Fluida derselben Art stossen sich ab, die entgegengesetzten ziehen sich an.

Die Gesetze dieser Anziehung und Abstossung sind analog denen der Wirkung der elektrischen Fluida; die zwischen zwei magnetischen Massen ausgeübte Kraft ändert sich umgekehrt mit dem Quadrat des Abstandes und proportional mit den wirksamen Massen. Wählt man als Einheit der magnetischen Masse diejenige, welche in der Einheit der Entfernung auf eine gleich grosse Masse die Einheit der Kraft ausübt, und setzt fest, dass magnetische Massen verschiedener Art mit dem entgegengesetzten Zeichen versehen werden, so erhält man für den Werth der zwischen zwei Massen m und m' in der Entfernung r ausgeübten Kraft

$$f = - \frac{m m'}{r^2},$$

wenn eine abstossende Kraft negativ, eine anziehende positiv bezeichnet wird. Die vorstehende Beziehung wurde von Coulomb experimentell festgestellt und ihre Genauigkeit ist durch die Uebereinstimmung der daraus abgeleiteten Folgerungen mit den Versuchsergebnissen bewiesen.

92. Summe der magnetischen Masse eines Magneten. Das zweite Grundgesetz des Magnetismus sagt aus, dass bei einem be-

liebigen Magneten die algebraische Summe der soeben definirten magnetischen Massen gleich Null ist. Dies Gesetz folgt aus der Thatsache, dass ein Magnet, der sich in einem gleichmässigen magnetischen Feld, wie das von der Erde erzeugte, befindet, keine Verschiebung erfährt. Wenn nämlich die gesammte magnetische Masse des Magnets nicht Null wäre, so würde auf ihn eine Kraft wirken und nicht ein Kräftepaar und der betreffende Magnet würde sich unter der Einwirkung des Felds fortbewegen.

93. Zusammensetzung der Magnete. Wird ein Magnet in eine grosse Anzahl kleiner Stücke zerbrochen, so entstehen ebensoviele kleine Magnete und jeder derselben weist zwei Pole von gleicher Intensität und entgegengesetztem Zeichen auf. Durch Wiedervereinigung dieser kleinen Magnete kann man den ursprünglichen Magnet mit allen seinen Eigenschaften wieder herstellen. Man darf demnach annehmen, dass ein Magnet aus lauter kleinen Theilchen besteht, von denen jedes zwei gleiche magnetische Massen von entgegengesetztem Zeichen enthält. Die algebraische Summe der Massen jedes Theilchens ist Null und folglich die Gesammtmasse des Magnets ebenfalls, wie es das vorhergehende Gesetz verlangt. Diese Hypothese über den Bau der Magnete steht also mit der Erfahrung nicht im Widerspruch.

94. Potential eines magnetischen Elements. Komponenten der Magnetisirung. Wir nehmen eines der elementaren Theilchen vom

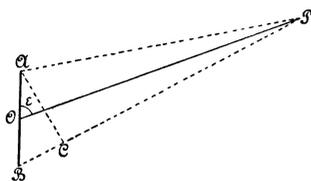


Fig. 11.

Volumen $d\tau$, aus denen ein Magnet besteht, und suchen den Werth des Potentials in einem Punkt P (Fig. 11). m und $-m$ seien die in unendlich nahen Punkten A und B dieses Elements befindlichen magnetischen Massen; r_1 und r_2 die Abstände derselben vom Punkt P. Das Potential in P ist

$$d\Omega = \frac{m}{r_1} - \frac{m}{r_2} = m \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = m \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}.$$

Fällen wir von A das Perpendikel AC auf die Gerade BP, dann ist $r_2 - r_1$ bis auf unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung gleich BC. Mit derselben Annäherung haben wir, wenn mit da der Abstand AB und mit ϵ der Winkel von OP mit der Richtung von BA bezeichnet wird,

$$r_1 - r_2 = da \cos \epsilon,$$

und ebenso

$$r_1 r_2 = r^2,$$

wo r den Abstand des Punktes P von O bedeutet.

Folglich ist der Werth des Potentials in P

$$(1) \quad d\Omega = \frac{mda \cos \varepsilon}{r^2}.$$

Wir formen diesen Ausdruck um, indem wir die Komponenten A, B, C der Magnetisirung I in denselben einführen.

Diese Komponenten sind durch folgende Beziehungen defnirt:

$$mdx = A dx, \quad mdy = B dx, \quad mdz = C dx,$$

in denen dx , dy , dz die Projektionen der Geraden BA nach den drei Koordinatenachsen darstellen.

Wenn ξ , η , ζ die Koordinaten des Punktes P und x , y , z die von O bedeuten, so haben wir

$$\cos \varepsilon = \frac{dx}{da} \cdot \frac{\xi - x}{r} + \frac{dy}{da} \cdot \frac{\eta - y}{r} + \frac{dz}{da} \cdot \frac{\zeta - z}{r},$$

und folglich für den Werth von $d\Omega$

$$d\Omega = m \frac{da \cos \varepsilon}{r^2} = m \left(\frac{\xi - x}{r^3} dx + \frac{\eta - y}{r^3} dy + \frac{\zeta - z}{r^3} dz \right).$$

Das Quadrat des Abstands zwischen O und P ist aber

$$r^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2;$$

woraus folgt

$$\xi - x = -r \frac{\partial r}{\partial x},$$

und

$$\frac{\xi - x}{r^3} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r}.$$

Auf dieselbe Weise erhalten wir

$$\frac{\eta - y}{r^3} = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}, \quad \text{und} \quad \frac{\zeta - z}{r^3} = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}.$$

Wir können also schreiben:

$$d\Omega = m dx \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + m dy \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + m dz \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z},$$

oder unter Berücksichtigung der Beziehungen, durch welche die Komponenten der Magnetisirung defnirt werden

$$d\Omega = \left(A \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + B \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + C \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) d\tau.$$

95. Potential eines Magneten. Das Potential eines Magneten erhält man durch Summirung der Potentiale aller seiner Elemente; sein Werth ist daher

$$\Omega = \int \left(A \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + B \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + C \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) d\tau.$$

Ist ein Magnet durch eine geschlossene Fläche begrenzt, so können wir diesen Ausdruck umformen. Bezeichnen wir nämlich mit l, m, n die Richtungskosinus der Normale zu einem Element $d\omega$ der Magnetoberfläche, so erhalten wir

$$\int l A \frac{1}{r} d\omega = \int \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A}{r} \right) d\tau = \int A \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d\tau + \int \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \frac{1}{r} d\tau,$$

oder

$$\int A \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d\tau = \int l A \frac{1}{r} d\omega - \int \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \frac{1}{r} d\tau.$$

Wenn wir auf dieselbe Weise die beiden anderen Glieder des Integrals Ω transformiren, so finden wir für diese Grösse

$$\Omega = \int \frac{lA + mB + nC}{r} d\omega - \int \frac{\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}}{r} dr.$$

Man kann also das Potential in einem Punkt als die Resultante betrachten aus einer auf der Fläche des Magneten ausgebreiteten magnetischen Belegung von der Dichte

$$\sigma = lA + mB + nC,$$

und aus einer, das ganze Volum des Magneten einnehmenden, magnetischen Masse von der Dichte

$$\rho = - \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right).$$

96. Wir bemerken, dass das Gesetz von Poisson für einen ausserhalb des Magneten gelegenen Punkt ergibt

$$\Delta \Omega = 0,$$

und für einen inneren Punkt

$$\Delta \Omega = -4\pi\rho = 4\pi \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right).$$

97. Potential eines magnetischen Blattes. Wir denken uns einen durch zwei unendlich nahe Flächen begrenzten Magneten, der auf beiden Seiten gleiche magnetische Belegungen von entgegengesetzten Zeichen besitzt. Wenn in jedem Punkt der Fläche die Magnetisirung senkrecht zu derselben steht und das Produkt Ie der Intensität der Magnetisirung I in die Dicke e des Magneten konstant ist, so erhält der Magnet den Namen Magnetisches Blatt. Das konstante Produkt Ie heisst die Stärke Φ des Blattes.

Betrachten wir ein Flächenelement $d\omega$ im Punkt A, so ist die Ladung desselben $\sigma d\omega$, wenn σ die Dichte der magnetischen Belegung S im Punkt A bedeutet. Der Theil AB des Blattes, der diesem Oberflächenelement entspricht, kann als ein

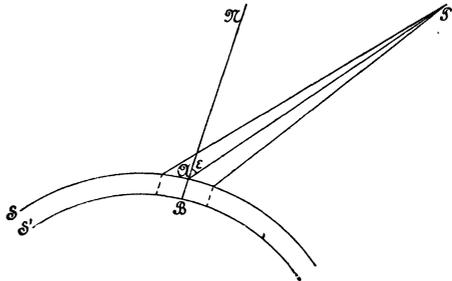


Fig. 12.

unendlich kleiner Magnet mit den Ladungen $\sigma d\omega$ und $-\sigma d\omega$ in den um e von einander entfernten Punkten A und B angesehen werden. Die Formel (1) des § 94 gibt für das Potential P dieses Elements

$$d\Omega = \sigma d\omega \frac{e \cos \varepsilon}{r^2}.$$

Dieser Ausdruck lässt sich noch umformen. Da nämlich die magnetische Axe in der Richtung BA verläuft, welche man zu einer der Koordinatenachsen wählt, so hat man

$$\sigma d\omega e = I d\tau = I d\omega e = \Phi d\omega,$$

und folglich

$$d\Omega = \frac{\Phi d\omega \cos \varepsilon}{r^2}.$$

Nun ist $\frac{d\omega \cos \varepsilon}{r^2}$ der Gesichtswinkel $d\varphi$, unter welchem das Element des Blattes vom Punkt P aus erscheint; man kann also schreiben

$$d\Omega = \Phi d\varphi.$$

Für ein Blatt von endlichen Dimensionen wird man erhalten

$$\Omega = \Phi \varphi,$$

das heisst:

Das Potential eines magnetisches Blattes in einem äusseren Punkt ist gleich dem Produkt aus seiner Stärke in den Winkel, unter dem das Blatt von dem betrachteten Punkt aus erscheint; dies Produkt ist positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem die betrachtete Fläche positiv oder negativ ist.

98. Magnetische Kraft in einem äusseren Punkt. Die Komponenten der Kraft, welche auf die Einheit der in einem äusseren Punkt befindlichen, positiven magnetischen Masse ausgeübt wird, sind die partiellen Derivirten des Potentials an diesem Punkt, mit dem negativen Zeichen genommen. Nennen wir dieselben α , β , γ , so erhalten wir

$$\alpha = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad \beta = -\frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad \gamma = -\frac{\partial \Omega}{\partial z}.$$

99. Magnetische Kraft im Innern eines Magnets. Wir können die Kraft, welche auf die Einheit der im Innern des Magneten befindlichen magnetischen Masse ausgeübt wird, nicht kennen lernen, ohne eine kleine Höhlung zu bohren, so dass man einen kleinen Probemagneten hineinstecken kann; aber das Vorhandensein dieser Höhlung verändert die Wirkung des Magneten, und diese Aenderung hängt von der Form ab, welche man der Höhlung gegeben hat. Um die Kraft in einem Punkte der Höhlung zu berechnen, muss man also die Gestalt der letzteren kennen.

Maxwell betrachtet nur zwei besondere Fälle, bei denen die Höhlung aus einem sehr kleinen Cylinder besteht, dessen Erzeugende der Magnetisierungsrichtung parallel laufen. Im ersten Fall ist die Länge des Cylinders unendlich gross im Verhältniss zum Querschnitt; im zweiten ist sie unendlich klein.

Nennen wir Ω das Potential des vollständigen Magneten an einem inneren Punkt und Ω_1 das Potential der cylindrischen Masse, die zur Bildung der Höhlung an demselben Punkt fortgenommen ist, dann ergibt die Differenz $\Omega - \Omega_1$ den Werth des Potentials des Magneten in P, wenn die Höhlung gebohrt ist. Die Kraft auf die Einheit der magnetischen Masse hat dann die Komponenten

$$-\frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial \Omega_1}{\partial x}, \quad -\frac{\partial \Omega}{\partial y} + \frac{\partial \Omega_1}{\partial y}, \quad -\frac{\partial \Omega}{\partial z} + \frac{\partial \Omega_1}{\partial z}.$$

100. Suchen wir nun den Werth von Ω_1 , wenn die Länge des Cylinders gross ist im Verhältniss zum Querschnitt. Ω_1 ist die Summe zweier Integrale, von denen das eine sich über die Oberfläche, das andere über das Volumen erstreckt. Dies letztere ist unendlich klein von der dritten Ordnung und kann gegen das erste vernachlässigt werden. Aber auch bei diesem können die den Grundflächen des Cylinders entsprechenden Elemente unberücksichtigt bleiben, da diese Grundflächen im Verhältniss zu der Höhe unendlich klein sind; man braucht also nur die Seitenfläche zu berücksichtigen. Nun steht in jedem Punkt dieser Fläche die Normale senkrecht zur Kraft der Magnetisirung, daher ist die Projektion $lA + mB + nC$ der Magnetisirung auf diese Normale gleich Null und die Elemente des der Seitenfläche entsprechenden Integrals sind ebenfalls Null. Es folgt also daraus, dass man die Grösse Ω_1 vernachlässigen kann. Die Komponenten der magnetischen Kraft sind also

$$\alpha = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad \beta = -\frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad \gamma = -\frac{\partial \Omega}{\partial z};$$

dies sind aber dieselben Grössen, welche die Komponenten in einem äusseren Punkt darstellen.

101. Magnetische Induktion. Gehen wir jetzt zu dem Fall über, dass die Länge der cylindrischen Höhlung sehr klein ist im Verhältniss zur Grundfläche. Wie im vorhergehenden Fall, können wir bei dem Werth von Ω_1 das über das Volumen ausgedehnte Integral vernachlässigen. In dem Flächenintegral sind die von der Seitenfläche herrührenden Elemente Null, da die Normale jedes Oberflächenelements senkrecht zur Magnetisierungsrichtung steht; es genügt also, das zweifache Integral über die Grundflächen des Cylinders auszudehnen.

Um den Werth dieses Integrals zu finden, wählen wir als X-Axe eine Parallele zur Magnetisierungsrichtung; dieselbe steht demnach senkrecht auf beiden Cylindergrundflächen. Für jedes Element einer derselben erhalten wir $l=1$, $m=0$, $n=0$; und für jedes Element der anderen $l=-1$, $m=0$, $n=0$. In diesem speciellen Axensystem haben wir also für den Werth von Ω_1 ,

$$\Omega_1 = \int \frac{A}{r} d\omega - \int \frac{A}{r} d\omega,$$

wobei sich jedes Integral über eine der Grundflächen erstreckt. Dieser Werth ist derselbe, als wenn man angenommen hätte, dass jede Cylinderfläche mit einer magnetischen Belegung versehen ist, welche bezw. die Dichte $+A$ und $-A$ besitzen. Da die Ausdehnung dieser Lagen sehr gross ist im Verhältniss zu ihrem Abstand (der Höhe des Cylinders), so ist die Wirkung, welche sie auf die Einheit einer zwischen ihnen befindlichen magnetischen Masse ausüben, gleich $4\pi A$. Diese Kraft ist nach der Seite der negativen Belegung gerichtet, das heisst entgegengesetzt der Magnetisierungsrichtung.

Die Höhlung, welche eine entgegengesetzte Wirkung besitzt, als ein magnetisirter Cylinder von demselben Volumen, bringt also eine Vermehrung der Kraft in der Richtung der Magnetisierung hervor, und diese Vermehrung beträgt $4\pi A$. Folglich ist die nach X genommene Komponente der Kraft, welche vom Magneten auf die Einheit der im Innern der Höhlung befindlichen Masse ausgeübt wird

$$a = -\frac{\partial \Omega}{\partial x} + 4\pi A = a + 4\pi A.$$

Es ist klar, dass, wenn an Stelle des von uns benutzten besonderen Axensystems, beliebige Axen gewählt werden, wir analoge Ausdrücke für die anderen Komponenten der Kraft erhalten.

Diese Komponenten sind also

$$\begin{cases} a = \alpha + 4\pi A, \\ b = \beta + 4\pi B, \\ c = \gamma + 4\pi C. \end{cases}$$

Maxwell nennt sie die Komponenten der Magnetischen Induktion im Innern des Magneten.

102. Wir bemerken, dass die Grösse

$$\alpha dx + \beta dy + \gamma dz$$

ein vollständiges Differential darstellt, da sie gleich $-d\Omega$ ist, während dies bei der Grösse

$$a dx + b dy + c dz$$

nicht der Fall ist.

Ein anderer Unterschied zwischen der magnetischen Kraft und der magnetischen Induktion besteht in dem Werth der Summe aus den partiellen Derivirten ihrer Komponenten; dieselbe ist Null für die magnetische Induktion, dagegen für die magnetische Kraft von Null verschieden.

Wir wollen nachweisen, dass in der That die Beziehung gilt:

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} = 0.$$

Man hat

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} + 4\pi \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right),$$

oder

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} = -\Delta\Omega + 4\pi \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right).$$

Nun ist (cf. § 95)

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = -\varrho,$$

und die Poisson'sche Gleichung gibt andererseits für einen inneren Punkt

$$\Delta \Omega = -4\pi \varrho,$$

daher ist die betrachtete Summe Null.

103. Inducirter Magnetismus. Gewisse Körper magnetisiren sich durch Influenz, wenn sie in ein magnetisches Feld gebracht werden. Poisson nimmt an, dass die Komponenten des inducirten Magnetismus an einem Punkt eines derartigen Körpers proportional den Komponenten der magnetischen Kraft in diesem Punkt sind. Setzen wir also

$$A = z\alpha, \quad B = z\beta, \quad C = z\gamma,$$

so werden nach den vorhergehenden Formeln die Komponenten der Induktion an demselben Punkt

$$\begin{cases} a = \alpha + 4\pi A = (1 + 4\pi z)\alpha, \\ b = \beta + 4\pi B = (1 + 4\pi z)\beta, \\ c = \gamma + 4\pi C = (1 + 4\pi z)\gamma. \end{cases}$$

Durch Einführung von

$$\mu = (1 + 4\pi z)$$

gehen diese Formeln über in:

$$\begin{cases} a = \mu\alpha, \\ b = \mu\beta, \\ c = \mu\gamma. \end{cases}$$

Maxwell nennt μ das Magnetische Induktionsvermögen. Diese Grösse ist analog dem specifischen Induktionsvermögen K in der Elektrostatik; sie ist grösser als Eins für magnetische Körper, gleich Eins für das Vakuum, und kleiner als Eins für diamagnetische Körper.

104. Die Einfachheit der vorangehenden Formeln könnte uns täuschen über die Schwierigkeit, welche die Bestimmung der Induktion an einem Punkt eines Körpers besitzt. Worauf wir nämlich keine Rücksicht genommen haben, ist der Umstand, dass z und μ keine Konstanten sind; zweitens setzten wir voraus, dass wir es nur mit permanenten Magneten zu thun haben, bei denen die Koerzitivkraft unendlich ist, und mit inducirten Magneten, bei denen die Koerzitivkraft Null ist.

Die natürlichen Körper genügen diesen Bedingungen nicht, denn die Koerzitivkraft kann niemals streng Null sein, ebenso wenig unendlich werden; ferner ist der Koeffizient κ keine Konstante, sondern eine Funktion der Intensität des Magnetismus

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$

der man den Namen „Magnetisierungsfunktion“ gegeben hat. Man kann nur dann κ und μ mit Recht als Konstanten betrachten, wenn die Magnetisierung sehr schwach ist.

Dies wollen wir im Folgenden immer voraussetzen, wozu wir um so mehr berechtigt sind, als für die Mehrzahl der Körper μ sehr wenig von 1 verschieden ist.

Kapitel VII.

Elektromagnetismus.

105. Grundgesetze. Man kann mehrere Wege einschlagen, um die von einem geschlossenen Strom auf einen magnetischen Pol ausgeübte Wirkung zu finden, und um nachzuweisen, dass diese Wirkung derjenigen eines magnetischen Blattes gleich ist, welches den Stromkreis zur Begrenzung hat. Wir wollen nicht der Erklärungsweise von Maxwell folgen, der von der Gleichwerthigkeit eines unendlich kleinen Stromes und eines Magneten ausgeht, sondern wollen uns, um zu den Maxwell'schen Formeln zu gelangen, auf drei durch die Erfahrung bewiesene Gesetze und auf eine Hypothese stützen.

Diese drei experimentellen Gesetze sind die folgenden:

1. Zwei parallele Ströme gleicher Intensität und entgegengesetzter Richtung üben auf einen Magnetpol gleich grosse, aber dem Zeichen nach entgegengesetzte Wirkungen aus.

2. Ein gekrümmter Strom hat die gleiche Wirkung, wie ein geradliniger mit denselben Endpunkten.

3. Die von einem Strom auf einen Magnetpol ausgeübte Kraft ist proportional der Stromintensität, d. h. der Quantität Elektrizität, welche in der Zeiteinheit durch einen Querschnitt des Leiters strömt.

Die beiden ersten Gesetze wurden von Ampère bewiesen; das dritte ist durch zahlreiche Experimente geprüft worden. Theilweise wurden die letzteren, wie diejenigen von Colladon und Faraday, mittels Entladung von Batterien ausgeführt, die eine bekannte Elektrizitätsmenge enthielten; die anderen, genaueren, mit dem Voltameter.

106. Hypothese. Die Hypothese, welche wir den vorhergehenden Gesetzen hinzufügen, besteht darin, dass die Komponenten der auf einen Magnetpol wirkenden Kraft die partiellen Derivirten ein

und derselben Funktion sind, welche nur von der Lage des Pols in Bezug auf den Stromkreis abhängt.

Diese Hypothese erscheint als sehr natürlich, wenn man bedenkt, dass in dem System das Gesetz von der Erhaltung der Energie gewahrt bleiben muss. Aber man hat zu beachten, dass dies nicht die einzige Hypothese ist, welche mit dem Prinzip von der Erhaltung der Energie vereinbar erscheint; die angenommene Hypothese könnte sich also als falsch herausstellen, ohne dass das Prinzip von der Erhaltung der Energie aufhörte, seine Richtigkeit zu behalten.

Nach dieser Annahme dürfen wir für die Werthe α , β , γ der Komponenten der auf die Einheit des Pols wirkenden Kraft setzen

$$\alpha = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad \beta = -\frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad \gamma = -\frac{\partial \Omega}{\partial z}.$$

Die Funktion Ω heisst das Potential des von dem Strom durchflossenen Leiters; zur Bestimmung ihres Werthes müssen wir einige Theoreme benutzen, welche wir zunächst aufstellen wollen. Hierbei vernachlässigen wir übrigens zur grösseren Bequemlichkeit die Integrationskonstante der Funktion Ω .

107. Theorem I. *Das einem Stromkreise zukommende Potential ist gleich der Summe der Potentiale für die verschiedenen Stromkreise, in welche man den ersteren zerlegen kann.*

Diese Eigenschaft folgt unmittelbar aus dem Grundgesetz für die Wirkungen, welche von zwei parallelen, aber entgegengesetzt gerichteten Strömen ausgeübt werden.

Es sei beispielsweise ABCD (Fig. 13) ein geschlossener Stromkreis; wir können denselben in zwei Ströme ABCA und ACDA zerlegen, die in der Richtung der Pfeile verlaufen. Das Leiterstück AC wird dann von zwei Strömen gleicher Intensität, aber entgegengesetzter Richtung durchflossen, und übt deshalb keine Wirkung auf einen Magnetpol aus; folglich muss das Potential des gesammten Stroms gleich der Summe der Potentiale beider Partialströme ABCA und ACDA sein.

Die Verallgemeinerung dieses Theorems auf eine beliebige Zahl partieller Ströme liegt auf der Hand.

108. Theorem II. *Das Potential eines geschlossenen ebenen Stromkreises an einem äusseren, in seiner Ebene gelegenen Punkt ist Null.*

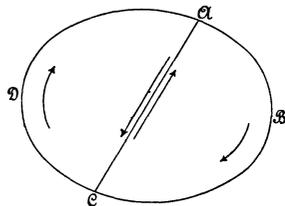


Fig. 13.

a. Wir nehmen zunächst an, dass der Strom eine Symmetrie-axe OA (Fig. 14) besitzt, und verlegen den Magnetpol in einen beliebigen Punkt O dieser Axe.

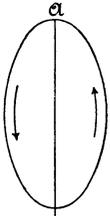


Fig. 14.

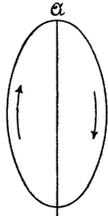


Fig. 15.

und verlegen den Magnetpol in einen beliebigen Punkt O dieser Axe. Wenn wir den Stromkreis um seine Symmetrieaxe drehen, so behält der Magnetpol immer dieselbe Lage zu dem Strom bei, weshalb das Potential in O sich nicht verändert. Ist aber der Stromkreis um einen Winkel von 180° gedreht worden, so kommt er in seine ursprüngliche Ebene zurück und die Richtung des in der Anfangsstellung durch die Pfeile in Fig. 14 dargestellten Stroms wird nach dieser Drehung durch die Pfeile in Fig. 15 bezeichnet. Der Strom hat also in Bezug auf den Punkt O sein Zeichen gewechselt und nach dem Gesetz über Ströme entgegengesetzter Richtung

besitzt auch die auf den Pol ausgeübte Kraft das entgegengesetzte Zeichen. Aus diesem Zeichenwechsel der Kraft folgt ein Zeichenwechsel des Potentials Ω ; da andererseits dies Potential denselben Werth behalten soll, so muss es Null sein.

b. Wenn der Stromkreis die Form eines krummlinigen Rechtecks BCED (Fig. 16) hat, das durch Kreisbogen BC und DE

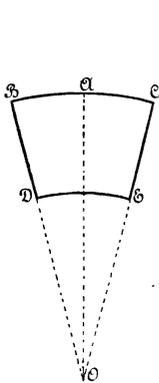


Fig. 16.

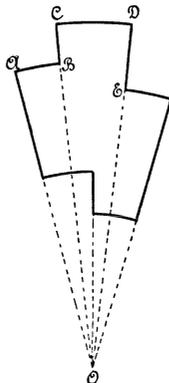


Fig. 17.

und durch Strecken BD und CE der Radien BO und CO gebildet wird, so besitzt das Potential in O den Werth Null, da dieser Punkt auf der Symmetrieaxe OA der Figur liegt.

c. Wenn der geschlossene Stromkreis aus einer Reihe konzentrischer Kreisbogen AB, CD, ... (Fig. 17) zusammengesetzt ist, die durch gerade, m gemeinsamen Mittelpunkt sich schneidende Strecken verbunden sind, so ist das Potential in diesem Punkt offenbar nach dem Vorangehenden und nach Theorem I gleichfalls Null.

d. Gehen wir endlich zu dem allgemeinen Fall eines ebenen Stromkreises von beliebiger Form (Fig. 18) über. Wir nehmen auf dem Stromkreis sehr nahegelegene Punkte A, B, C, ... an und

legen Kreisbogen durch dieselben, die einen beliebigen Punkt O der Stromebene zum Mittelpunkt haben. Indem wir durch O eine gleiche Zahl passend gewählter Radien ziehen, können wir einen geschlossenen Stromkreis $Aa\ b\ b'\ c\ c' \dots$ herstellen, dessen verschiedene Elemente sehr nahe gleich denen des gegebenen Stromkreises sind. Nach dem Prinzip von den gekrümmten Strömen ist die Wirkung dieser beiden Stromkreise auf einen Magnetpol die gleiche. Wir haben nun eben nachgewiesen, dass das Potential eines gekrümmten Stromes, der aus konzentrischen Kreisbogen und geraden, durch den Mittelpunkt gehenden Stücken besteht, Null ist. Folglich verhält es sich ebenso bei einem Stromkreis von beliebiger Form.

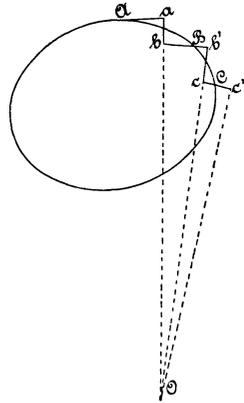


Fig. 18.

109. Theorem III. *Wenn ein geschlossener Stromkreis auf einem Kegelmantel liegt und zwar so, dass jede Erzeugende des Kegels den Stromkreis eine gerade Zahl von Malen trifft (wobei auch Null eine dieser Zahlen sein kann), so ist das Potential in der Kegelspitze gleich Null, vorausgesetzt, dass die letztere nicht von dem Stromkreis eingeschlossen wird.*

Ziehen wir zum Beweise auf dem Kegelmantel (Fig. 19) unendlich nahe erzeugende Gerade, so können wir den Stromkreis in

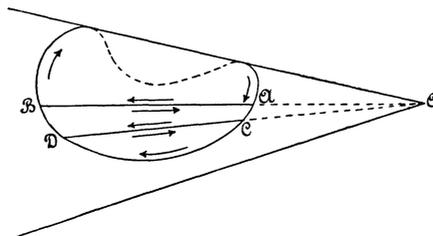


Fig. 19.

ebene Elemente, wie z. B. $A\ C\ D\ B\ A$ zerlegen. Da der Punkt O in der Ebene jedes der partiellen Stromkreise gelegen ist, so muss das Potential eines jeden derselben an diesem Punkte Null sein; die Summe dieser Potentiale, d. h. das zu dem Gesamtstrom gehörige Potential ist demnach ebenfalls Null.

110. Theorem IV. *Wenn zwei geschlossene Stromkreise, die auf einem Kegelmantel liegen und alle Erzeugenden wenigstens ein Mal schneiden,*

von Strömen gleicher Intensität und gleicher Richtung für einen an der Kegelspitze befindlichen Beobachter durchlaufen werden, so besitzt das Potential in diesem Punkt denselben Werth für jeden der beiden Stromkreise.

A C E und B D F (Fig. 20) mögen die beiden Leiter sein, welche von Strömen durchflossen werden, deren Richtung durch die ausserhalb angebrachten Pfeile angedeutet ist. Nehmen wir an, dass diese Leiter gleichzeitig von Strömen gleicher Intensität durchlaufen werden, deren (durch die inneren Pfeile angedeutete) Richtung aber derjenigen des wirklich stattfindenden Stromes entgegengesetzt ist, so

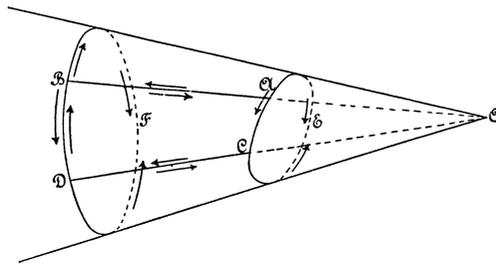


Fig. 20.

wird das den vier Strömen zukommende Potential in O Null sein. Es muss auch dann noch Null bleiben, wenn wir zu diesen Strömen solche gleicher Intensität, aber entgegengesetzter Richtung hinzufügen, welche zwei beliebige Erzeugende des Kegels A B und C D durchfliessen. Da nun die Intensität für alle Ströme dieselbe ist, so können wir das System als zusammengesetzt betrachten:

1. aus dem geschlossenen Leiter A C D B, der in der Richtung der angegebenen Buchstaben durchflossen wird;
2. dem geschlossenen Stromkreis A B F D C E A;
3. dem Stromkreis B D F;
4. dem Stromkreis A E C.

Das Potential jeder der beiden ersten Stromkreise in O ist Null, da jeder derselben den Bedingungen des vorigen Theorems genügt. Das Potential des dritten und vierten Stromkreises zusammengenommen ist also ebenfalls Null, und folglich ist das Potential des von dem wirklichen Strom durchlaufenen Stromkreises B D F gleich und entgegengesetzt dem Potential des Leiters A E C, der von einem, dem wirklichen Strom entgegengesetzt gerichteten, fingirten Strom durchflossen wird. Das Potential des wirklichen, den Leiter A C E durchfliessenden Stromes ist gleich und entgegengesetzt dem Potential des fingirten Stromes, der diesen selben Leiter im entgegengesetzten Sinne durchfließt; es ist also gleich dem Potential des wirklichen durch B D F fließenden Stromes.

Uebrigens ist noch zu bemerken, dass die beiden betrachteten Leiter, anstatt nach unsrer Annahme auf derselben Kegelfläche zu liegen, auch zwei verschieden gelegenen, aber kongruenten Kegelflächen angehören könnten.

III. Potential eines geschlossenen Stromes. Wir nehmen nun einen beliebigen geschlossenen, von einem Strom durchlaufenen Leiter an, und suchen das Potential für einen ausserhalb desselben gelegenen Punkt O.

Wenn wir durch den Punkt O als Spitze eine Kegelfläche legen, welche den Leiter dem ganzen Umfang nach berührt, so wird aus einer um O beschriebenen Einheitskugel (Kugel mit dem Radius = 1) eine Fläche ausgeschnitten, deren Grösse φ ein Maass abgibt für den Winkel, unter dem der Leiter von dem Punkt O aus erscheint. Wir können diesen Kegel in eine unendliche Anzahl kleiner Kegel von gleichem Oeffnungswinkel theilen und annehmen, dass der gegebene Leiter auf diese Weise in eine unendliche Zahl kleiner geschlossener Leiter zerlegt wird, die auf den Kegelflächen liegen. Da diese Kegel denselben Winkel besitzen und ausserdem unendlich klein sind, so darf man annehmen, dass sie kongruent sind und demnach das Potential in O für jeden auf einer solchen Kegelfläche befindlichen Stromkreis das gleiche ist. Nun aber setzt sich das Potential des gesammten Leiters aus der Summe dieser Potentiale zusammen, es ist also proportional der Zahl der Elementarkegel und folglich auch proportional dem Gesichtswinkel φ .

Ausserdem ist nach dem dritten von uns aufgestellten Grundgesetze die von einem geschlossenen Strom auf einen Magnetpol ausgeübte Wirkung proportional der Stromintensität; folglich muss, unter Vernachlässigung der Integrationskonstante, die Potentialfunktion ebenfalls proportional der Stromintensität sein. Wir können also schreiben

$$\Omega = \varphi i,$$

wobei die Intensität in einer solchen Einheit gemessen wird, dass der Proportionalitätsfaktor gleich 1 wird; diese Einheit nennt man die Elektro-magnetische Einheit der Intensität.

Da die Wirkung eines Stromkreises auf einen Magnetpol mit der Richtung des Stromes das Zeichen wechselt, so muss das Zeichen von φi von der Stromrichtung abhängen. Nennen wir positive Seite des Stromkreises diejenige, welche sich zur Linken eines in dem Stromkreis mit dem Strom schwimmenden und nach dem Innern desselben blickenden Beobachters befindet, so wollen wir

dem Winkel das Zeichen + oder — geben, je nachdem die positive oder negative Seite von dem betreffenden Punkt aus gesehen wird. Nehmen wir ferner noch an, dass eine Anziehungskraft als positiv, eine Abstossungskraft als negativ zu betrachten sei, so sind die Komponenten der von einem geschlossenen Stromkreis auf die Pol-einheit ausgeübten Kraft durch die bereits angeführten Beziehungen gegeben:

$$\alpha = -\frac{\partial\Omega}{\partial x}, \quad \beta = -\frac{\partial\Omega}{\partial y}, \quad \gamma = -\frac{\partial\Omega}{\partial z}.$$

112. Unendlich kleiner Stromkreis. Es sei AA' (Fig. 21) die Projektion eines unendlich kleinen Stromkreises, und AOA' der

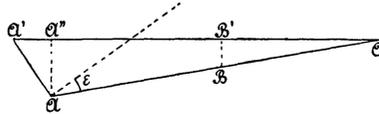


Fig. 21.

Elementarkegel mit dem Winkel $d\varphi$, welcher durch den Stromkreis gelegt ist. Das Potential im Punkt O besitzt den Werth

$$d\Omega = id\varphi.$$

Da nun $d\varphi$ der Inhalt des von dem Kegel auf der Einheitskugel ausgeschnittenen Sektors ist, so beträgt der Inhalt des von demselben Kegel auf der Kugel von dem Radius $OA = r$ ausgeschnittenen Sektors, $r^2 d\varphi$. Ausserdem kann man unter Vernachlässigung unendlich kleiner Glieder höherer Ordnung diese Fläche AA' als Projektion der Fläche $d\omega$ des Stromkreises AA' auf eine zu OA senkrechte Ebene betrachten. Wir haben also

$$r^2 d\varphi = d\omega \cos \varepsilon$$

und folglich

$$(1) \quad d\Omega = \frac{id\omega \cos \varepsilon}{r^2}.$$

Dieser Ausdruck ist analog der Formel

$$(2) \quad d\Omega = \frac{\Phi d\omega \cos \varepsilon}{r^2},$$

welche wir für das Potential eines magnetischen Blattelements von der Stärke Φ erhielten (97).

Folglich besitzt ein Element eines geschlossenen Stromes dasselbe Potential wie ein Blattelement von derselben Fläche und von einer Stärke, die der Stromintensität gleich ist.

113. Gleichwerthigkeit eines geschlossenen Stroms und eines magnetischen Blattes. Von den über eine gleiche Oberfläche erstreckten Integralen der Formeln (1) und (2) gibt das erste das Potential eines geschlossenen Stroms beliebiger Form, das zweite das Potential eines Blattes mit derselben Begrenzung. Nimmt man $\Phi = i$ an, so haben diese Integrale bis auf eine Konstante denselben Werth. Folglich sind die Komponenten α , β , γ der von einem geschlossenen Strom auf die Einheit der magnetischen Masse ausgeübten Kraft gleich denjenigen einer Kraft, welche ein magnetisches Blatt von derselben Begrenzung hervorbringen würde, dessen Stärke Φ gleich der elektromagnetischen Stromintensität i ist.

Man muss jedoch beachten, dass die Potentialfunktionen nicht in beiden Fällen identische Eigenschaften besitzen. Wir wollen in der That nachweisen, dass das Potential eines Magneten eine gleichmässige Funktion darstellt, während dasjenige eines geschlossenen Stromes an jedem Punkte des Raumes unendlich viele Werthe annehmen kann.

Die Veränderung des Potentials eines Stromes oder eines Blattes beim Uebergang von einem Punkt zum anderen auf einem beliebigen Weg ist von gleicher Grösse, aber entgegengesetztem Zeichen, als das Integral

$$\int \alpha dx + \beta dy + \gamma dz,$$

welches sich über den ganzen durchlaufenen Weg erstreckt, da α , β , γ die partiellen Derivirten des Potentials, aber mit negativem Zeichen darstellen.

Wenn die Bedingungen der Integrirbarkeit

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial \beta}{\partial x}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial z} = \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \quad \frac{\partial \beta}{\partial z} = \frac{\partial \gamma}{\partial y}$$

erfüllt sind, so wird das über eine beliebige geschlossene Kurve erstreckte Integral Null. Hierbei muss allerdings eine Bedingung erfüllt sein. Legen wir nämlich durch diese Kurve C eine beliebige Fläche und bedeutet A den durch die geschlossene Kurve C begrenzten Theil dieser Fläche, so müssen, damit das Integral Null

ist, die Kräfte α , β , γ und ihre ersten Derivirten in allen Punkten der Fläche Λ endlich sein.

Wenn aber die geschlossene (Integrations-)Kurve mit dem Strom verschlungen ist, so wird der letztere die Fläche Λ wenigstens in einem Punkt schneiden und in diesem Schnittpunkt werden die magnetischen Kräfte α , β , γ unendlich. Das Integral über eine geschlossene, den Stromkreis umschlingende Kurve ist also nicht Null, und die Funktion Ω kann in ein und demselben Punkt zwei verschiedene Werthe annehmen.

114. Arbeit der elektromagnetischen Kräfte für eine geschlossene, den Stromkreis umschlingende Kurve. Die Differenz zwischen diesen beiden Werthen, welche gleich dem längs der Kurve C erstreckten Integral

$$\int \alpha dx + \beta dy + \gamma dz$$

ist, stellt die Arbeit der elektromagnetischen Kraft für diesen Integrationsweg dar. Um diese Arbeit zu erhalten, betrachten wir das dem Strom gleichwerthige Blatt F (Fig. 22).

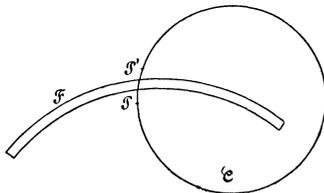


Fig. 22.

dieses Blattes eine gleichmässige Funktion ist, so wird es denselben Werth erhalten, wenn man nach dem Durchlaufen der geschlossenen Kurve C zu dem Punkt P' zurückkommt. Nun ist die Veränderung, welche das Potential erleidet, gleich dem längs der Kurve C erstreckten Integral

$$\int \alpha dx + \beta dy + \gamma dz,$$

vermehrt um den plötzlichen Zuwachs H des Potentials, welcher eintritt, wenn man von dem Punkt P' zu dem unendlich nahen Punkt P übergehend, das Blatt passirt. Wir erhalten also:

$$H + \int_C (\alpha dx + \beta dy + \gamma dz) = 0.$$

Es erübrigt noch, diesen plötzlichen Zuwachs H zu berechnen.

Wir erhalten denselben leicht für den besonderen Fall, wo das Blatt eine geschlossene Fläche bildet. In einem äusseren Punkt ist das Potential Null, da der Winkel, unter dem das Blatt von diesem Punkt erscheint, Null ist. In einem inneren Punkt hat es die Grösse

$\pm 4 \pi \Phi$, je nachdem die positive oder negative Seite des Blattes nach dem Inneren der geschlossenen Fläche gerichtet ist. Die Potentialänderung beträgt also, wenn man von der negativen Seite nach einem Punkt der positiven Seite übergeht, $4 \pi \Phi$.

Auch in dem Fall, wo das Blatt keine geschlossene Fläche bildet, besitzt die Potentialänderung dieselbe Grösse. Es sei beispielsweise ABC (Fig. 23) ein Blatt, von dem wir annehmen, dass seine positive Seite auf der convexen Fläche liegt. Mittels eines zweiten Blattes ADC von derselben Begrenzung und derselben Stärke wie das erste, dessen positive Seite ebenfalls auf der convexen Fläche gelegen ist, können wir ein geschlossenes Blatt ABCD bilden. Wenn man nun von einem Punkt P zu einem unendlich nahen und auf der anderen Seite des Blattes gelegenen Punkt P' übergeht, so vergrössert sich der Winkel, unter dem das geschlossene Blatt erscheint, um 4π . Da der Winkel, unter welchem das Blatt ADC erscheint, derselbe bleibt, so muss sich die dem Blatt ABC entsprechende Kegelöffnung um 4π vermehren. Folglich beträgt die Potentialänderung immer noch $4 \pi \Phi$.

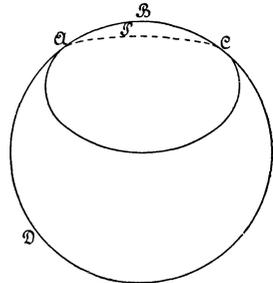


Fig. 23.

Setzen wir in der Fig. 22 voraus, dass die negative Fläche des dem Strom gleichwerthigen Blattes auf der Seite des Punktes P liegt, so wird das Potential um $4 \pi i$ wachsen, wenn man von P nach P' übergeht und nach dem, was wir angeführt haben, wird die elektromagnetische Arbeit $-4 \pi i$ betragen, wenn ein Einheitspol die geschlossene Kurve PCP'P in der durch die Buchstabenfolge angegebenen Richtung beschreibt, d. h. von der positiven Seite in das Blatt eintritt.

Wir können also, wenn das Integral längs einer geschlossenen Kurve genommen ist, schreiben

$$\int a dx + \beta dy + \gamma dz = \pm 4 \pi i,$$

wobei das + Zeichen gilt, wenn der Integrationsweg den Stromkreis umschlingt und man von der negativen Seite in die Fläche eintritt, das - Zeichen im entgegengesetzten Fall.

Wir wollen noch bemerken, dass der Integrationsweg den Stromkreis auch mehrere Male umschlingen kann; dann ist die elektromagnetische Arbeit ebenso viel Mal gleich $\pm 4 \pi i$, als Umschlingungen stattfinden.

115. Mehrere Ströme. Wenn mehrere Ströme vorhanden sind, so ist die Kraft, welche auf die in einem Punkt des Raumes befindliche Poleinheit ausgeübt wird, gleich der Resultante der von einem jeden der Ströme ausgeübten Kraft, und die elektromagnetische Arbeit für den Fall, dass der Pol eine geschlossene Kurve beschreibt, gleich der Summe aus den Arbeiten der Komponenten, d. h. gleich $\sum \pm 4 \pi i$, wo die Summation über alle von der Kurve umschlungenen Ströme zu erstrecken ist. Man erhält also

$$(1) \int \alpha dx + \beta dy + \gamma dz = 4 \pi \sum \pm i.$$

Diese Gleichung kann übrigens noch anders interpretirt werden. Fassen wir nämlich eine die Kurve C durchschneidende Fläche S in's Auge (Fig. 22), so gehen alle Ströme, für welche die Intensität in Formel (1) mit demselben Zeichen, z. B. + genommen ist, in derselben Richtung durch diese Fläche; die Ströme, für welche die Intensität das entgegengesetzte Zeichen — besitzt, durchsetzen die Fläche dagegen im umgekehrten Sinn. Da die Stromintensität die Elektrizitätsmenge darstellt, welche durch einen Querschnitt des Leiters in der Zeiteinheit fließt, so können wir $\sum \pm i$ als gleichwerthig mit der Elektrizitätsmenge betrachten, welche während der Zeiteinheit in bestimmter Richtung durch die Fläche geht. Folglich ist die elektromagnetische Arbeit bei dem Durchlaufen einer geschlossenen Kurve C, welche mehrere Ströme umschlingt, gleich dem Produkt von 4π in die Elektrizitätsmenge, welche während der Zeiteinheit durch eine von der Kurve C begrenzte Fläche S hindurchgeht.

116. Anderer Ausdruck für die elektromagnetische Arbeit einer geschlossenen Kurve. Bezeichnen wir mit u, v, w die Geschwindigkeitskomponenten der Elektrizität in einem der Stromkreise, mit $d\omega$ den Querschnitt des Leiters in der Fläche S und endlich mit l, m, n die Richtungskosinus der in passender Richtung gezogenen Normalen zu diesem Element, so haben wir für die Elektrizitätsmenge, welche durch die Fläche S geht, den Ausdruck

$$\sum i = \sum (lu + mv + nw) d\omega.$$

Wir können aber das \sum -Zeichen des zweiten Gliedes durch das Zeichen \int ersetzen und die Integration über die ganze Fläche S

erstrecken, da die Elemente dieser Fläche, welche nicht von einem Strom durchsetzt werden, in dem Integral Null geben. Folglich kann man die Formel (1) auch schreiben

$$(2) \quad \int \alpha dx + \beta dy + \gamma dz = 4\pi \int (lu + mv + nw) d\omega,$$

wo sich das erste Integral über die Kurve C, das zweite über die Fläche S erstreckt.

117. Umformung des Kurvenintegrals. Das Kurvenintegral auf der linken Seite der Gleichung lässt sich umformen, und zwar kann diese Umformung sehr leicht bewerkstelligt werden, wenn die Kurve C eben ist. Wählen wir nämlich die Ebene derselben zur XY-Ebene, so reducirt sich das betrachtete Integral auf

$$\int \alpha dx + \beta dy,$$

wo α und β kontinuierliche und eindeutige Funktionen der Koordinaten x und y sind. Bekanntlich ist nun der Werth des vorangehenden Integrals, wenn der Integrationsweg so gewählt wird, dass der unbegrenzte Raum sich zur Linken befindet, gleich dem des Integrals

$$\int \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) dx dy,$$

welches über die von der Kurve C begrenzte ebene Fläche ausgedehnt werden muss.

Führen wir nun dieselbe Umformung für den Fall aus, dass das Kurvenintegral über eine Dreiecksbegrenzung ABC erstreckt wird, deren Ecken auf den Koordinatenachsen (Fig. 24) gelegen sind. Wir können den Werth des Integrals erhalten, indem wir nacheinander als Integrationsweg OAB, OBC, OCA wählen und die drei erhaltenen Resultate addiren. Denn auf diese Weise wird jede der drei Geraden OA, OB, OC zwei Mal im entgegengesetzten Sinn durchlaufen, die Seiten des Dreiecks aber in der Richtung ABC. Wir haben also

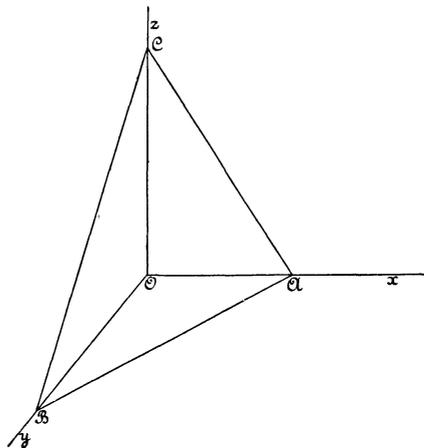


Fig. 24.

$$\int_{\text{ABC}} (\alpha dx + \beta dy + \gamma dz) = \int_{\text{BC}} (\beta dy + \gamma dz) + \int_{\text{CA}} (\gamma dz + \alpha dx) + \int_{\text{AB}} (\alpha dx + \beta dy),$$

oder durch Transformation der Kurvenintegrale der rechten Seite, für welche der Integrationsweg in einer der Koordinatenebenen liegt,

$$\begin{aligned} \int_{\text{ABC}} (\alpha dx + \beta dy + \gamma dz) &= \int \left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \right) dy dz + \int \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) dz dx \\ &+ \int \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned}$$

Nehmen wir das Tetraëder O A B C unendlich klein an und bezeichnen mit $d\omega$ die Dreiecksfläche A B C, mit l, m, n die Richtungskosinus der Normalen auf dieser Dreiecksebene, dann sind die Projektionen des Dreiecks auf die Koordinatenebenen resp.

$$\text{O B C} = l d\omega, \quad \text{O C A} = m d\omega, \quad \text{O A B} = n d\omega.$$

Die Integrale der rechten Seite in der vorhergehenden Gleichung müssen nun über eine dieser unendlich kleinen Flächen ausgedehnt werden, so dass die unter dem Integrationszeichen stehenden Grössen sehr nahe konstant bleiben und vor das Integral gesetzt werden können; wir erhalten somit für den Werth des längs einer unendlich kleinen Dreiecksbegrenzung genommenen Kurvenintegrals

$$\begin{aligned} \int_{\text{ABC}} (\alpha dx + \beta dy + \gamma dz) &= l \left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \right) d\omega + m \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) d\omega \\ &+ n \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) d\omega. \end{aligned}$$

Soll das Kurvenintegral längs einer beliebigen Kurve C erstreckt werden, welche eine endliche Fläche begrenzt, so können wir immer diese Fläche in unendlich kleine Dreiecke zerlegen. Wir erhalten dann das Kurvenintegral, indem wir die Summe aus den über die Dreiecksbegrenzungen dieser Elemente erstreckten Integralen bilden. Da aber jedes Dreiecksintegral durch die vorhergehende Gleichung gegeben ist, so finden wir für das über die Begrenzung C erstreckte Integral den Ausdruck

$$\int_C (\alpha dx + \beta dy + \gamma dz) = \int \left[l \left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \right) + m \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) + n \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) \right] d\omega,$$

in welchem das Integral auf der rechten Seite über die von der Kurve C begrenzte Fläche ausgedehnt ist.

118. Gleichungen von Maxwell. Ersetzen wir in den Gleichungen (2) das Kurvenintegral durch seinen eben abgeleiteten Werth, so erhalten wir

$$\int \left[l \left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \right) + m \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) + n \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) \right] d\omega = 4\pi \int (lu + mv + nw) d\omega.$$

Da diese Gleichung für jede beliebige Integrationsfläche und folglich auch für jeden Werth von l , m , n gelten muss, so folgt hieraus

$$u = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \right),$$

$$v = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right),$$

$$w = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right).$$

Diese von Maxwell aufgestellten Formeln geben eine Beziehung zwischen den Komponenten u , v , w der Stromintensität und den Komponenten α , β , γ der elektromagnetischen Kraft. Wir machen übrigens noch darauf aufmerksam, dass sie sowohl für die Verschiebungsströme, als auch für die Leiterströme Anwendung finden, da wir von den Verschiebungsströmen voraussetzen, dass sie dem Ampère'schen Gesetz folgen.

119. Wirkung eines Pols auf ein Stromelement. Da in der Maxwell'schen Theorie jeder Strom geschlossen ist und in seiner Wirkung durch ein fingirtes magnetisches Blatt ersetzt werden kann, so lassen sich die von einem beliebigen System von Strömen auf

ein System von Magneten ausgeübten Kräfte stets bestimmen. Durch Anwendung des Prinzips von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung (actio et reactio) leitet man hieraus auch umgekehrt leicht die Wirkung ab, welche ein System von Magneten auf ein System von Strömen ausübt. Unsere Aufgabe, die gegenseitige Einwirkung zwischen Strömen und Magneten zu bestimmen, ist dann vollständig gelöst. Aber wir können auch die von einem Magnetpol auf einen geschlossenen Strom ausgeübte Kraft als die Resultante der Kräfte betrachten, mit welchen der Pol auf die verschiedenen Elemente des von dem Strom durchlaufenen Leiters wirkt. Wir werden also dahin geführt, zunächst den Ausdruck für diese elementaren Wirkungen zu suchen.

120. Betrachten wir ein System, welches aus einem Magnetpol von der Einheit des Magnetismus und einem Leiter mit der Stromintensität = 1 gebildet wird. Wenn der Stromkreis von dem Punkt P aus, in dem sich der Pol befindet, dem Beobachter unter dem Winkel φ erscheint, so sind die Komponenten der von dem Strom auf den Pol ausgeübten Kraft

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad -\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

(cf. **111**; $\Omega = \varphi i$; $i = 1$).

Die Komponenten der von dem Pol auf den Strom ausgeübten Kraft haben dieselbe Grösse, aber entgegengesetztes Zeichen, und die Arbeit dieser Kraft für eine unendlich kleine Verschiebung des Stromkreises ist daher = $d\varphi$, d. h. gleich der Variation des Winkels, unter dem der Stromkreis von P aus erscheint.

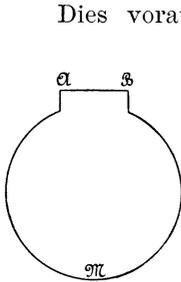


Fig. 25.

Dies vorausgesetzt, wollen wir einen Stromkreis A M B in's Auge fassen, von dem sich ein Element AB (Fig. 25) in seiner eigenen Richtung verschieben kann. Wenn wir nun AB eine Verschiebung in dieser Richtung ertheilen, so wird der Winkel, unter dem der Stromkreis vom Punkt P aus erscheint, nicht geändert. Die Arbeit der elektromagnetischen Kraft ist also bei dieser Verschiebung Null, folglich besitzt diese Kraft keine Komponente in der Richtung von A B d. h.: *die Elementarwirkung steht senkrecht auf dem Element.*

121. Um den Ausdruck für diese Kraft zu erhalten und seine Richtung vollständig zu bestimmen, wollen wir auf zwei verschiedene Arten die Arbeit berechnen, welche beim Uebergang des

zum Stromkreis AMB gehörigen Elements AB (Fig. 26) in die Stellung A'B' geleistet wird. Man muss hierbei annehmen, dass ein in die Richtung von BB' und deren Verlängerung fallender Metalldraht vorhanden ist, auf welchem der bewegliche Theil AB des Stromkreises gleitet und den er beständig berührt.

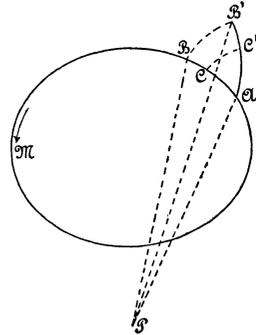


Fig. 26.

Diese Arbeit ist gleich dem Winkel $d\varphi$, unter dem das Dreieck ABB' von dem Pol P aus erscheint. Da die Dimensionen dieses Dreiecks unendlich klein sind gegenüber der Länge der Geraden PA, PB, PB', so können wir die letzteren als einander gleich betrachten; mit anderen Worten, wir dürfen die Dreiecksfläche mit der Fläche vertauschen, welche durch den dreikantigen Winkel P auf der Kugel vom Radius $PA = r$ ausgeschnitten wird. Die Fläche des Dreiecks ist also $d\varphi r^2$ und das Volumen des Tetraeders PABB'

$$\frac{d\varphi r^3}{3}.$$

Aber man kann dieses Volumen auch auf eine andere Weise ermitteln, indem man das Dreieck PAB als Basis nimmt. Wenn wir mit P den Winkel BPA bezeichnen, unter dem das Stromelement vom Punkt P aus erscheint, und mit h die Projektion von BB' auf eine Normale zur Ebene PAB, so erhalten wir für das Volumen des Tetraeders

$$P r \frac{r}{2} \cdot \frac{h}{3},$$

und durch Vergleichung der beiden für dies Volumen gefundenen Ausdrücke

$$(1) \quad d\varphi = \frac{P}{r} \cdot \frac{h}{2}.$$

Dies ist die Arbeit der auf ein Element AB wirkenden Kraft.

Wir erhalten dafür noch einen anderen Ausdruck, indem wir bedenken, dass die Arbeit gleich ist dem Produkt aus der Kraft in die Projektion des von ihrem Angriffspunkt durchlaufenen Weges auf die Richtung derselben. Wenn wir annehmen, dass die Kraft in der Mitte C des Elements angreift, so beträgt der von diesem Punkt beschriebene Weg CC' die Hälfte von BB'. Nennen wir h'

die Projektion von BB' auf die Richtung der Kraft f , so erhalten wir für die Arbeit dieser Kraft

$$f \frac{h'}{2}$$

und da sie auch durch die Gleichung (1) bereits gegeben ist, folgt

$$fh' = \frac{P}{r} h.$$

Dieser Gleichung wird genügt, wenn $h = h'$ und $f = \frac{P}{r}$ ist; $h = h'$ bedeutet aber, dass die Kraft senkrecht zur Ebene PAB gerichtet ist. *Folglich steht die von einem Magnetpol auf ein Stromelement ausgeübte Kraft senkrecht auf der durch den Pol und das Element gelegten Ebene.* Ihr Werth für einen Magnetpol von der Masse m und für eine Stromintensität i des Elements beträgt

$$f = \frac{miP}{r}.$$

Da der Winkel P sich umgekehrt proportional zu r ändert, so steht die Elementarwirkung f im umgekehrten Verhältniss zu dem Quadrate des Abstandes von Pol und Element.

Kapitel VIII.

Elektrodynamik.

122. Elektrodynamische Arbeit. Gegeben seien zwei Stromkreise, welche von Strömen mit der Intensität i und i' durchflossen werden. Dann wird die Arbeit der zwischen beiden wirksamen Kräfte für den Fall, dass sich der eine Stromkreis gegen den anderen verschiebt, durch ein gewisses Potential T dargestellt, welches den Intensitäten i und i' proportional ist und, bei konstantem i und i' , nur von der Form und gegenseitigen Lage der beiden Stromkreise abhängt. Diese Hypothese lässt sich an der Hand der daraus abgeleiteten Folgerungen experimentell beweisen.

123. Solenoid. Wir theilen eine Kurve AB (Fig. 27) in unendlich viele gleich grosse Bogen von unendlich kleiner Länge δ , und legen durch die Mitten derselben die zu der Kurve senkrechten Ebenen C . In jeder dieser Ebenen ziehen wir gleich grosse geschlossene Kurven vom Inhalt $d\omega$, welche den Schnittpunkt ihrer Ebene mit der Kurve AB einschliessen. Wenn wir annehmen, dass alle diese Kurven in derselben Richtung von Strömen gleicher Intensität i durchlaufen werden, so trägt dies System den Namen Solenoid.

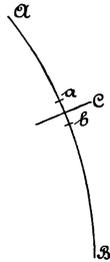


Fig. 27.

Jeder dieser Ströme, welche das Solenoid bilden, ist hinsichtlich der Wirkung auf einen Magnetpol gleichwerthig mit einem magnetischen Blatt von derselben Begrenzung und der Stärke i . Wenn wir als Dicke dieser Blätter die Länge δ der Elementarbogen annehmen, so sind die Mengen von Magnetismus, welche jede ihrer Flächen enthält, $+\frac{i}{\delta} d\omega$ und $-\frac{i}{\delta} d\omega$; die sich berührenden Flächen zweier auf einander folgenden Blätter enthalten also gleiche magnetische Massen von entgegengesetztem Zeichen, und beide zusammen üben somit keine Wirkung auf einen

äusseren Punkt aus. Folglich beschränkt sich die Wirkung des Solenoids auf diejenige zweier magnetischer Massen $+\frac{i}{\rho}d\omega$ und $-\frac{i}{\rho}d\omega$, die an den Enden von A B liegen. Dies sind die Pole des Solenoids.

Wenn die Kurve A B begrenzt ist, so besitzt das Solenoid zwei gleiche Pole von entgegengesetzten Zeichen; liegt das eine Ende derselben dagegen in der Unendlichkeit, so beschränkt sich die Wirkung des Solenoids auf die des anderen Pols; wenn endlich die Kurve A B geschlossen ist, so hat das Solenoid keine Pole.

124. Solenoide und Ströme. Der Versuch lehrt, dass die Wirkung eines geschlossenen Solenoids auf einen Strom gleich Null ist. Aus dieser experimentellen Thatsache ist leicht zu folgern, dass die Wirkung eines offenen Solenoids nur von der Lage seiner Pole abhängt.

Es sei z. B. T das Potential der von einem Solenoid A C B (Fig. 28) auf einen Stromkreis ausgeübten Wirkung, wenn derselbe in seiner Nähe verschoben wird, und T' das Potential der Wirkung eines zweiten Solenoids B D A, das so gewählt ist, dass es mit dem ersten einen geschlossenen Strom bildet. Wir erhalten also für das gesammte Potential beider Solenoide

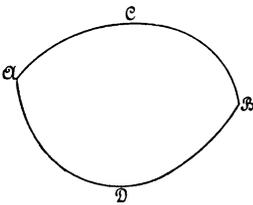


Fig. 28.

$$T + T' = 0.$$

Diese Gleichung bleibt bestehen, so lange das Solenoid A C B D A geschlossen ist, welcher Art auch sonst die Veränderungen sind, die wir mit seinen Bestandtheilen vornehmen. Wenn wir speciell nur das Solenoid A C B verändern, so besitzt das Potential von B D A noch denselben Werth T', und in Folge der vorhergehenden Gleichung verändert sich auch T nicht. Das Potential eines Solenoids A C B behält also denselben Werth, wenn seine Pole A und B in derselben Lage bleiben; mit anderen Worten, das Potential hängt nur von der Lage der Solenoidpole ab.

125. Die vorhergehende Ueberlegung bleibt noch bestehen, wenn einer der Pole des Solenoids A C B z. B. B in die Unendlichkeit rückt, denn es genügt zur Erhaltung eines geschlossenen Solenoids, ein zweites mit demselben zu verbinden, dessen entgegengesetzter Pol B ebenfalls im Unendlichen liegt. Aber unter diesen Bedingungen beschränkt sich die Wirkung des Solenoids A C B auf diejenige des Pols A; das Potential eines Solenoidpols hängt also

nur ab von seiner relativen Lage zu den auf ihn wirkenden Stromkreisen.

126. Wir wollen ferner daran erinnern, dass wir im Anfang des Abschnitts vom Elektromagnetismus annahmen, das Potential eines der Einwirkung geschlossener Ströme unterworfenen Magnetpols sei nur durch die relative Lage des Pols zu den Strömen bedingt, und allein auf diese Hypothese gründeten sich alle unsere Ueberlegungen. Da es sich mit dem Potential eines Solenoïdpols, welcher der Einwirkung geschlossener Ströme ausgesetzt ist, ebenso verhält, so wollen wir auf dieselbe Weise darthun, dass in unserem neuen Falle das Potential die nämliche Form besitzt. Das elektrodynamische Potential eines Solenoïdpols wird also dem Winkel proportional sein, unter dem von diesem Pol aus die positiven Flächen der auf ihn wirkenden Ströme erscheinen, und ferner proportional der magnetischen Masse $\pm \frac{i d\omega}{\rho}$, welche dem Solenoïdpol in den elektromagnetischen Wirkungen gleichwerthig ist. Da wir andererseits (**121**) angenommen haben, dass das Potential eines Stromes, der sich in Gegenwart eines anderen Stromes von der Intensität i' verschiebt, proportional mit i' ist, so erhalten wir für das Potential des der Wirkung eines einzigen Stromes unterworfenen Solenoïdpols

$$T = \pm a \frac{i i' d\omega}{\rho} \varphi.$$

Genauere Versuche haben gezeigt, dass der Koeffizient a gleich der Einheit ist, wenn die Intensitäten in elektromagnetischen Einheiten ausgedrückt werden; wir erhalten also

$$T = \pm \frac{i d\omega}{\rho} i' \varphi,$$

d. h. die elektrodynamische Wirkung, welche zwischen einem Solenoïdpol und einem Strom auftritt, ist gleich der elektromagnetischen Wirkung zwischen diesem Strom und einer magnetischen Masse $\pm \frac{i d\omega}{\rho}$, deren Zeichen durch die Stromrichtung in dem Solenoïdpol bestimmt ist.

127. Wenn das Solenoid zwei Pole A und B besitzt (Fig. 29), so kann man ohne Aenderung der Wirkung ein Solenoïd BC anfügen, welches sich nach der Richtung C in's Unendliche erstreckt und von zwei gleich starken Strömen in entgegengesetzter Richtung durchlaufen wird. Haben diese die gleiche Intensität, wie der in AB verlaufende Strom, so kann das ganze System so aufgefasst werden,

als bestände es aus zwei unendlich grossen Solenoiden, von denen das eine seinen Pol in A, das andere in B hat und in denen Ströme gleicher Intensität und entgegengesetzter Richtung cirkuliren. Diese beiden Pole sind gleichwerthig mit zwei gleichen magnetischen Massen von entgegengesetztem Zeichen, so dass das endliche Solenoid A B sich verhält wie ein idealer Magnet von derselben Länge.

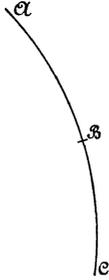


Fig. 29.

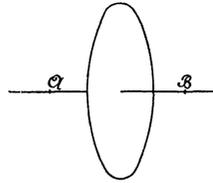


Fig. 30.

128. Elektrodynamisches Potential eines unendlich kleinen Stromes. Ein unendlich kleiner Stromkreis kann als ein Solenoid-Element von der Länge δ betrachtet werden. Wenn nämlich die Fläche desselben $d\omega$ ist und seine Intensität i , so kann er durch zwei magnetische Massen $+\frac{i d\omega}{\delta}$ und $-\frac{i d\omega}{\delta}$ ersetzt werden, die sich in A und B in einem Abstand δ von einander befinden.

Nennen wir Ω das Potential der Wirkung, welche das System der festen Ströme auf die Einheit des in A befindlichen (Fig. 30) positiven Magnetismus ausübt, so wird im unendlich nahen Punkt B das Potential die Grösse $\Omega + d\Omega$ haben. Folglich erhält man für das Potential der beiden, den unendlich kleinen Strom ersetzenden magnetischen Massen den Ausdruck

$$\Omega \frac{i d\omega}{\delta} - (\Omega + d\Omega) \frac{i d\omega}{\delta} = -d\Omega \frac{i d\omega}{\delta}.$$

Bezeichnen wir mit x, y, z die Koordinaten des Punktes A, so ist

$$d\Omega = \frac{\partial \Omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \Omega}{\partial y} dy + \frac{\partial \Omega}{\partial z} dz$$

oder auch

$$d\Omega = -(\alpha dx + \beta dy + \gamma dz),$$

wo α , β , γ die Komponenten der Kraft bedeuten, welche das System der festen Ströme auf die in A befindliche Einheit des Magnetpols ausübt.

Wenn wir l , m , n die Richtungskosinus der Normalen AB auf der unendlich kleinen Stromebene nennen, so haben die Grössen dx , dy , dz die Werthe

$$dx = l\delta, \quad dy = m\delta, \quad dz = n\delta,$$

und der Ausdruck von $d\Omega$ kann in die Form gebracht werden

$$d\Omega = -(\alpha l + \beta m + \gamma n) \delta.$$

Man erhält dann für das Potential des unendlich kleinen Stroms

$$-d\Omega \frac{i d\omega}{j} = i(\alpha l + \beta m + \gamma n) d\omega,$$

d. h. *das Potential eines Elementarstromes ist gleich dem Produkt aus seiner Intensität in den Kräftestrom, der durch seine positive Seite eintritt.*

129. Elektrodynamisches Potential eines geschlossenen Stromes.

Hat man ein System fester Ströme, die auf einen endlichen beweglichen Stromkreis einwirken, so kann man den letzteren in eine unendliche Zahl von Elementarströmen gleicher Intensität und gleicher Richtung zerlegen. Das Potential des so zerlegten Stromes ist gleich der Summe aus den Potentialen der Elementarströme; es ist also

$$(1) \quad T = i \int (\alpha l + \beta m + \gamma n) d\omega,$$

worin man das Integral über den ganzen Inhalt einer beliebigen gekrümmten oder ebenen, durch den beweglichen Strom begrenzten Fläche zu erstrecken hat.

130. Anderer Ausdruck für das Potential eines Stromes. Das vorhergehende, über eine Fläche ausgedehnte Potential kann ersetzt werden durch ein Kurvenintegral, welches über den Stromkreis erstreckt wird. Es ist dies die entgegengesetzte Umformung, wie die in § 117 angewandte. Nach dem, was wir an dieser Stelle anführten, ist leicht einzusehen, dass das über den beweglichen Stromkreis erstreckte Integral

$$(2) \quad T = i \int_{\mathcal{C}} (F dx + G dy + H dz)$$

gleich ist dem Ausdruck

$$i \int \left[l \left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} \right) + m \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x} \right) + n \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) \right] d\omega,$$

welchen man über die von demselben Stromkreis begrenzte Fläche auszudehnen hat. Wenn also das Integral (2) das in (1) gegebene Integral eines geschlossenen Stromes darstellen soll, so muss gelten

$$(3) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}, \\ \beta = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}, \\ \gamma = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}. \end{cases}$$

Die so definirten Grössen nennt Maxwell die Komponenten des elektromagnetischen Moments.

131. Verschiebung eines Stroms in einem magnetischen Medium. Bis jetzt haben wir stillschweigend vorausgesetzt, dass beim Vorhandensein von Magneten in Gegenwart eines beweglichen Stromes dieser die Magnete nicht durchdringt. Untersuchen wir jetzt den Fall, wo der bewegliche Strom in einem magnetischen Medium verschoben wird.

Man kann unschlüssig sein, welche Grössen man für die Komponenten α , β , γ der auf die Poleinheit ausgeübten Kraft zu wählen hat. Wir haben im Kapitel über den Magnetismus den Fall betrachtet, wo sich ein Magnetpol im Innern einer in eine magnetische Masse gebohrten Höhlung befindet, und gesehen, dass die Kraft, welche auf denselben wirkt, von der Gestalt dieser Höhlung abhängt. Unter den Werthen, welche diese Kraft annehmen kann, haben wir zwei näher betrachtet: die eine (die magnetische Kraft) hat zu Komponenten

$$\alpha = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad \beta = -\frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad \gamma = -\frac{\partial \Omega}{\partial z};$$

die andere (die magnetische Induktion):

$$a = \alpha + 4\pi A; \quad b = \beta + 4\pi B; \quad c = \gamma + 4\pi C,$$

worin Ω das Potential des Magneten und A, B, C die Komponenten der Magnetisirung an dem betrachteten Punkt bedeuten.

Aber die Form der Gleichungen (3) gestattet leicht, die Unbestimmtheit zu heben, und zeigt, dass man die Komponenten der magnetischen Induktion hier einführen muss. Bildet man nämlich die Derivierten derselben resp. nach x , y und z , so erhält man

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0.$$

Nun haben wir aber gesehen, dass diese Bedingung nicht für die Komponenten der magnetischen Kraft erfüllt ist, wenn es sich um einen inneren Punkt handelt, wohl aber für die Komponenten der Induktion. Man muss also diese letzteren in die Formeln einsetzen. Diese werden dann

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}, \\ b = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}, \\ c = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}. \end{array} \right.$$

132. Eine Unbestimmtheit derselben Art greift für die Formeln des § 118 Platz, welche die Komponenten u , v , w der Stromgeschwindigkeit als Funktionen von α , β , γ angeben, aber man kann dieselbe leicht durch den Nachweis heben, dass man in diesem Fall nicht die Komponenten der Induktion wählen darf.

Nehmen wir z. B. den besonderen Fall an, wo der bewegliche Leiter von keinem Strom durchflossen ist; wir haben dann $u = v = w = 0$. Wenn man die Komponenten der magnetischen Induktion wählen würde, so folgte

$$\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} = 0.$$

Diese Bedingungen sind aber nicht allgemein gültig. Wir dürfen also hier nicht die Komponenten der magnetischen Induktion nehmen, sondern die Komponenten α , β , γ der magnetischen Kraft (bei diesen ist nämlich $\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} = 0$, da $\gamma = -\frac{\partial \Omega}{\partial z}$ ist etc.). Wir begnügen uns mit diesen beiden Betrachtungen in Ermangelung einer befriedigenderen Theorie.

133. Bestimmung der Komponenten des elektromagnetischen Moments. Verlassen wir nun den Fall, wo sich ein beweglicher Strom in einem magnetischen Medium verschiebt, und ermitteln die Komponenten F , G , H des magnetischen Moments.

Die drei Differentialgleichungen (3) genügen nicht zur Bestimmung dieser Grössen, denn es ist leicht einzusehen, dass, wenn F , G , H eine Lösung dieser Gleichungen ist, die Gruppe der Werthe

$$F + \frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad G + \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad H + \frac{\partial \chi}{\partial z},$$

wo χ eine beliebige Funktion der Koordinaten darstellt, ebenfalls diese Gleichungen befriedigen. In der That wird die rechte Seite der ersten Gleichung durch Einsetzung der vorhergehenden Werthe an Stelle von F , G , H

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(H + \frac{\partial \chi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(G + \frac{\partial \chi}{\partial y} \right) &= \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial y \partial z} \\ &= \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}. \end{aligned}$$

Das letzte Glied dieser Folge von Gleichungen ist gleich α , da nach der Voraussetzung F , G , H eine Lösung des Systems bilden. Durch eine ähnliche Ueberlegung findet man, dass die beiden anderen Gleichungen ebenfalls befriedigt werden.

134. Damit die Komponenten F , G , H vollständig bestimmt werden können, müssen sie noch einer Bedingungsgleichung genügen. Maxwell wählt als solche

$$(5) \quad J = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0.$$

Tragen wir dieser Beziehung Rechnung, so ist es möglich, zwischen den Komponenten u , v , w der Stromgeschwindigkeit und den Komponenten F , G , H des magnetischen Moments drei Gleichungen zu finden, welche gestatten, die Werthe dieser letzteren Grössen abzuleiten. Wir haben nach den Formeln des § 118 und den Formeln (3) des § 130

$$4 \pi u = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} = \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial z},$$

oder, indem wir $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ auf der rechten Seite positiv und negativ zufügen und die Glieder passend gruppieren

$$4 \pi u = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial z^2},$$

oder endlich

$$(6) \quad 4 \pi u = \frac{\partial J}{\partial x} - \Delta F.$$

Wenn man annimmt, dass die Gleichung (5) immer erfüllt ist, d. h. dass es eine identische Gleichung ist, so sind die partiellen Derivirten von J Null und die Gleichung (6) reduziert sich auf

$$\Delta F + 4 \pi u = 0.$$

Da diese Gleichung der Poisson'schen analog ist, so kann F als das Potential einer anziehenden Masse von der Dichte u betrachtet werden. Nach unserer Kenntniss über die Form des Potentials, welches einer derartigen Gleichung genügt, dürfen wir unmittelbar schreiben

$$F = \int \frac{u}{r} d\tau,$$

wobei das Integral auf alle Elemente $d\tau$ des ganzen Raums auszu dehnen ist; u stellt die Geschwindigkeitskomponente des Stroms nach der X-Axe im Schwerpunkt des Elements $d\tau$ dar und r den Abstand dieses Elements vom Punkt x, y, z .

Durch analoge Rechnung erhält man

$$G = \int \frac{v}{r} d\tau, \quad H = \int \frac{w}{r} d\tau.$$

Diese Werthe von F, G, H genügen nothwendiger Weise den Differentialgleichungen (3); wir wollen nachweisen, dass die Bedingungsgleichung (5) ebenso erfüllt ist und bilden hierzu die partiellen Derivirten von F, G, H.

135. Geben wir einem Punkte mit den Koordinaten x, y, z eine Verschiebung von der Grösse dx parallel zur x -Axe, so wächst der Abstand dieses Punktes von den verschiedenen Elementen der fingirten anziehenden Materie von der Dichte u um dr , und das Potential F im betrachteten Punkt wird um $\frac{\partial F}{\partial x} dx$ vergrössert. Nehmen wir aber an, dass wir, anstatt den angezogenen Punkt x, y, z , wie es eben geschah, zu verschieben und die anziehende Materie fest zu lassen, nun den verschiedenen Punkten der anziehenden Materie eine Verschiebung gleich $-dx$ ertheilen und den Punkt x, y, z in Ruhe lassen, denn wird genau dasselbe stattfinden. Dies kommt auf die Annahme hinaus, dass die Dichte u im Schwerpunkt des Elements nach der Verschiebung den Werth $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ annimmt. Wir haben also

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx = \int \frac{u + \frac{\partial u}{\partial x} dx}{r} d\tau - \int \frac{u}{r} d\tau,$$

wobei das erste Integral über das ganze von der anziehenden Materie nach der Verschiebung eingenommene Volumen, das zweite auf dasjenige vor der Verschiebung auszudehnen ist. Diese beiden Integrationsgebiete sind nun dieselben, da beide den ganzen Raum umfassen; wir erhalten demnach einfach

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx = \int \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx}{r} d\tau,$$

woraus folgt

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} d\tau.$$

Analoge Ausdrücke finden wir für die partiellen Differentialquotienten von G nach y und von H nach z ; ihre Summe gibt

$$J = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = \int \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) d\tau.$$

Das letzte Integral ist Null, da nach Maxwell's Annahme die Elektrizität inkompressibel ist und der Ausdruck hierfür durch

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

gegeben wird.

Die Bedingungsgleichungen (5) sind demnach befriedigt.

136. Kehren wir zu dem Fall eines magnetischen Medium zurück, so sind die Komponenten F , G , H des elektromagnetischen Moments mit denen der Induktion durch die Gleichungen (4) verknüpft. Man kann sich leicht überzeugen, dass diese Gleichungen und die Bedingungsgleichungen (5) befriedigt werden, wenn man für F , G , H das Produkt der gefundenen Werthe in den Koeffizient μ des magnetischen Induktionsvermögens des Medium wählt; wir erhalten also

$$F = \mu \int \frac{u}{r} d\tau; \quad G = \mu \int \frac{v}{r} d\tau; \quad H = \mu \int \frac{w}{r} d\tau.$$

137. Werthe von F , G , H für einen linearen Strom. Wir betrachten nun den speciellen Fall, dass ausser dem beweglichen Leiter nur ein Stromkreis vorhanden ist, der aus einem Draht von geringem Querschnitt $d\sigma$ besteht. Nennt man die Intensität dieses letzteren Stromes i , so ist die Geschwindigkeit der Elektrizität $\frac{i}{d\sigma}$, und die Richtung derselben fällt mit der an den Stromkreis gelegten Tangente zusammen. Die Richtungskosinus dieser Tangente sind $\frac{\partial x}{\partial s}$, $\frac{\partial y}{\partial s}$, $\frac{\partial z}{\partial s}$ (wenn man mit ds das Bogenelement des Stromkreises bezeichnet), so dass man für die Geschwindigkeitskomponenten u , v , w der Elektrizität die Werthe erhält

$$u = \frac{i}{d\sigma} \cdot \frac{\partial x}{\partial s}, \quad v = \frac{i}{d\sigma} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}, \quad w = \frac{i}{d\sigma} \cdot \frac{\partial z}{\partial s}$$

oder da $d\sigma ds = d\tau$ ist

$$(7) \quad u = i \frac{\partial x}{\partial \tau}, \quad v = i \frac{\partial y}{\partial \tau}, \quad w = i \frac{\partial z}{\partial \tau}.$$

Demnach kann man für die Komponente F des magnetischen Moments in einem Punkt des Raumes schreiben

$$F = \int \frac{u}{r} d\tau = \int \frac{i dx}{r} = i \int \frac{dx}{r}$$

und wir erhalten für die drei Komponenten

$$(8) \quad F = i \int \frac{dx}{r}, \quad G = i \int \frac{dy}{r}, \quad H = i \int \frac{dz}{r}.$$

138. Formel von Neumann. Es sei C (Fig. 31) ein fester Stromkreis, der von einem Strom mit der Intensität i durchlaufen wird und C' ein beweglicher Stromkreis mit der Intensität i' . Das elektrodynamische Potential T des Stromes C' in Bezug auf den Strom C hat zum Werth

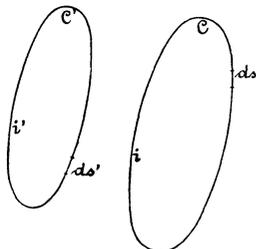


Fig. 31.

$$T = i' \int_C (F dx' + G dy' + H dz').$$

In diesem Ausdruck beziehen sich F, G, H auf den Stromkreis C, da ausser diesem nur noch der bewegliche Stromkreis vorhanden ist. Wenn wir also voraussetzen, dass dieser Stromkreis aus einem Draht von sehr kleinem Querschnitt gebildet wird, so sind F, G, H durch die eben gefundenen Ausdrücke (8) gegeben, worin r den Abstand der Mitte des Elements ds von der Mitte des Elements ds' bedeutet. Setzen wir diese Werthe in den Ausdruck von T ein, so erhalten wir

$$T = i i' \iint \frac{dx dx' + dy dy' + dz dz'}{r}$$

und wenn wir mit ϵ den Winkel zwischen den beiden Elementen ds und ds' bezeichnen

$$(9) \quad T = i i' \iint \frac{ds ds' \cos \epsilon}{r}.$$

Dies ist die von Neumann angegebene Formel für das elektrodynamische Potential eines Stromes auf einen anderen.

Die Symmetrie dieser Formel für i und i' , wie für ds und ds' zeigt, dass das elektrodynamische Potential von C' auf C gleich ist demjenigen von C auf C'.

139. Anderer Ausdruck des elektrodynamischen Potentials eines Stromes. Die Formel

$$T = i \int (F dx + G dy + H dz)$$

kann leicht in eine andere Form gebracht werden, die uns im Folgenden nützlich sein wird.

Aus den im § 137 aufgestellten Werthen (7) folgt unmittelbar

$$i dx = u dr, \quad i dy = v dr, \quad i dz = w dr,$$

und durch Einsetzen dieser Ausdrücke in T erhält man

$$(10) \quad T = \int (Fu + Gv + Hw) dr;$$

dies Integral ist über den Raum auszudehnen, welcher von der den beweglichen Stromkreis bildenden Materie erfüllt wird.

140. Elektrodynamisches Potential eines Stromes auf sich selbst (Selbstopotential). Man kann sich einen Stromkreis in unendlich viele Stromkreise von unendlich kleinen Querschnitten zerlegt denken. Jeder der so erhaltenen Ströme besitzt ein elektrodynamisches Potential auf den anderen; die Summe dieser Potentiale ist das, was man Selbstpotential eines Stromes nennt; wir wollen den Ausdruck hierfür suchen.

Es seien u, v, w die Geschwindigkeitskomponenten der Elektrizität in einem Punkt des Stromkreises, F, G, H die Komponenten des elektromagnetischen Moments in demselben Punkt und T das Selbstpotential des Stromes. Geben wir u, v, w die Zuwächse du, dv, dw , so werden die Grössen F, G, H und T resp. die Zuwächse dF, dG, dH und dT erfahren. Der in dem Leiter fließende Strom kann dann angesehen werden als Ergebniss des gleichzeitigen Vorhandenseins des ursprünglichen Stromes und desjenigen, welcher von dem der Elektrizität ertheilten Geschwindigkeitszuwächse herührt; wir wollen diesem letzteren den Namen Extrastrom geben. Der Zuwachs dT des Potentials kann also betrachtet werden als die Summe des Potentials des anfänglichen Stromes auf den Extrastrom und des Potentials des letzteren auf sich selbst. Das Potential des ursprünglichen Stromes auf den Extrastrom ist nach (10)

$$\int (u dF + v dG + w dH) dr.$$

Was das Potential des Extrastroms auf sich selbst betrifft, so wird dies eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung sein und darf vernachlässigt werden; man erhält also

$$dT = \int (u dF + v dG + w dH) dr.$$

Aber man kann auch dT gleich setzen dem Potential des Extrastromes auf den ursprünglichen Strom, vermehrt um das Potential des Extrastromes auf sich selbst. Unter Vernachlässigung dieses letzteren folgt

$$dT = \int (F du + G dv + H dw) d\tau,$$

Addirt man diese beiden Ausdrücke für dT und dividirt dann durch 2, so erhält man

$$dT = \frac{1}{2} \int (F du + u dF + G dv + v dG + H dw + w dH) d\tau,$$

oder

$$dT = \frac{1}{2} d \int (Fu + Gv + Hw) d\tau.$$

Die Integration liefert für den Werth des Selbstpotentials eines Stromes

$$(11) \quad T = \frac{1}{2} \int (Fu + Gv + Hw) d\tau.$$

141. Wir bemerken noch, dass die Ueberlegung, welche uns auf diesen Ausdruck geführt hat, ebenso gut auf den Fall eines Systems von mehreren Strömen ihre Anwendung findet, wie auf den eines einzigen Stromes. Dieser Ausdruck stellt also allgemein das elektrodynamische Potential eines Systems von Strömen auf sich selbst dar. Man muss dann die Integration auf den ganzen von den materiellen Leitern des Systems eingenommenen Raum ausdehnen, oder besser noch auf den gesammten Raum, was auf dasselbe herauskommt, da neben diesem System unsrer Annahme nach nicht gleichzeitig noch irgend ein anderes System von Strömen besteht.

142. Verschiedene Formen des Selbstpotentials eines Systems von Strömen. Wir haben im § 134 gefunden, dass die Komponente F des elektromagnetischen Moments an einem Punkt des Raumes durch die Formel

$$F = \int \frac{u' d\tau'}{r}$$

dargestellt wird, in welcher r den Abstand des betrachteten Punktes von dem Volumelement $d\tau'$, und u' die Geschwindigkeitskomponente des letzteren bedeutet. In einem Punkt des Raumes also, der von einem Volumelement $d\tau$ eines Stromsystems eingenommen wird, sind die Komponenten des elektromagnetischen Moments in Bezug auf das System selbst

$$F = \int \frac{u' d\tau'}{r}, \quad G = \int \frac{v' d\tau'}{r}, \quad H = \int \frac{w' d\tau'}{r}.$$

Setzt man diese Werthe in den Ausdruck (10) des elektrodynamischen Potentials des Systems auf sich selbst ein, so folgt

$$T = \frac{1}{2} \int \left(u \int \frac{u' d\tau'}{r} + v \int \frac{v' d\tau'}{r} + w \int \frac{w' d\tau'}{r} \right) d\tau.$$

Jedes Doppelintegral der rechten Seite dieser Gleichung muss über alle möglichen Kombinationen der beiden Elemente $d\tau$ und $d\tau'$ erstreckt werden. Da diese aber demselben System von Strömen angehören, so spielt ein und dasselbe Element die Rolle von $d\tau$ und von $d\tau'$ und jedes Integral enthält zweimal dasselbe Glied. Berücksichtigt man jedes Element nur einmal, so muss man in der vorhergehenden Gleichung das Doppelte des durch eine solche Integration erhaltenen Resultats nehmen. Der Faktor $\frac{1}{2}$ verschwindet dann und man erhält die Formel

$$(12) \quad T = \int \int \frac{uu' + vv' + ww'}{r} d\tau d\tau'.$$

143. In dem Ausdruck (11) der elektrodynamischen Arbeit können wir u , v , w durch ihre Werthe:

$$u = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \right),$$

$$v = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right),$$

$$w = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right)$$

(§ 118) ersetzen; wir erhalten dann

$$T = \frac{1}{8\pi} \int \left[F \left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \right) + G \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) + H \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) \right] d\tau.$$

Aus dem Integral

$$\int F \frac{\partial \gamma}{\partial y} d\tau$$

folgt durch partielle Integration

$$\int F \frac{\partial \gamma}{\partial y} d\tau = \int F \gamma m d\omega - \int \gamma \frac{\partial F}{\partial y} d\tau,$$

wobei m den Cosinus des Winkels zwischen der Y-Axe und der Normalen zu dem Element $d\omega$ der Fläche bedeutet, welche das Integrationsgebiet begrenzt. Dehnen wir, was erlaubt ist, die dreifachen Integrale über den ganzen unendlichen Raum aus, so sind die Komponenten α , β , γ der Kraft, welche auf einen Punkt der das Volumelement begrenzenden Fläche ausgeübt wird, gleich Null, da dieser Punkt in die Unendlichkeit rückt. Die Elemente des zweifachen Integrals werden also Null, und damit auch das ganze Integral selbst. Wir haben demnach einfach

$$\int F \frac{\partial \gamma}{\partial y} d\tau = - \int \gamma \frac{\partial F}{\partial y} d\tau.$$

Durch Ausführung einer analogen Umformung für alle anderen Integrale des vorhergehenden Ausdrucks von T und durch Einsetzen der erhaltenen Werthe in denselben findet man

$$(13) \quad T = \frac{1}{8\pi} \int \left[\alpha \left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} \right) + \beta \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \gamma \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) \right] d\tau.$$

144. Diese neue Form des Potentials kann durch Berücksichtigung der Gleichungen (3) und (4) (§§ 130 und 131) vereinfacht werden. Dieselben geben die Werthe der Differenzen der partiellen Derivirten von F , G , H für den Fall, dass sich das System von Strömen in einem nicht magnetischen Medium resp. in einem magnetischen Medium befindet. Wir haben in dem ersten Falle

$$T = \frac{1}{8\pi} \int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) d\tau$$

und in dem zweiten

$$T = \frac{1}{8\pi} \int (\alpha a + \beta b + \gamma c) d\tau.$$

145. System von linearen Leitern. Wenn die das System bildenden Ströme linear sind, so kann das elektrodynamische Selbstpotential des Systems in die Form gebracht werden, welche Neumann dem Potential von zwei Systemen linearer Ströme auf einander gegeben hat. Nach den in § 137 aufgestellten Formeln (7) und (8) sind nämlich die Geschwindigkeitskomponenten der Elektrizität in einem Punkt

$$u = \frac{i \partial x}{\partial \tau}, \quad v = \frac{i \partial y}{\partial \tau}, \quad w = \frac{i \partial z}{\partial \tau},$$

und die Komponenten des elektromagnetischen Moments in demselben Punkt

$$F = i' \int \frac{dx'}{r}, \quad G = i' \int \frac{dy'}{r}, \quad H = i' \int \frac{dz'}{r}.$$

Durch Einsetzen dieser verschiedenen Werthe in den Ausdruck (11) folgt

$$T = \frac{1}{2} i i' \iint \frac{dx dx' + dy dy' + dz dz'}{r},$$

oder, wenn wir mit ε den von zwei beliebigen Elementen des Stromsystems gebildeten Winkel bezeichnen,

$$T = \frac{1}{2} i i' \iint \frac{ds ds' \cos \varepsilon}{r}.$$

146. System von zwei linearen Stromkreisen. Wir nennen diese beiden Ströme C_1 und C_2 und bezeichnen die in unsere Formeln eintretenden Grössen mit den Indices 1 und 2, je nachdem sie sich auf C_1 oder C_2 beziehen. Die Komponenten des elektromagnetischen Moments in einem Punkte sind dann

$$F = i_1 \int \frac{dx_1}{r} + i_2 \int \frac{dx_2}{r},$$

$$G = i_1 \int \frac{dy_1}{r} + i_2 \int \frac{dy_2}{r},$$

$$H = i_1 \int \frac{dz_1}{r} + i_2 \int \frac{dz_2}{r};$$

sie sind also lineare, homogene Funktionen der Intensitäten i_1 und i_2 der beiden Ströme.

Das elektrodynamische Selbstpotential dieses Systems von Strömen ist durch die Formel (11) gegeben

$$T = \frac{1}{2} \int (Fu + Gv + Hw) d\tau.$$

Nun ist in einem Punkt des ersten Stroms

$$u d\tau = i_1 dx_1, \quad v d\tau = i_1 dy_1, \quad w d\tau = i_1 dz_1,$$

und in einem Punkt des zweiten

$$u d\tau = i_2 dx_2, \quad v d\tau = i_2 dy_2, \quad w d\tau = i_2 dz_2.$$

Das Integral (11) wird demnach

$$T = \frac{i_1}{2} \int_{C_1} (F dx_1 + G dy_1 + H dz_1) + \frac{i_2}{2} \int_{C_2} (F dx_2 + G dy_2 + H dz_2).$$

T ist also eine lineare, homogene Funktion von i_1 und i_2 , sowie von F, G, H. Aber wir haben soeben gesehen, dass diese Größen homogen und vom ersten Grad sind in Bezug auf i_1 und i_2 ; folglich ist T eine homogene Funktion zweiten Grades von i_1 und i_2 , und wir können schreiben

$$T = \frac{1}{2} (L i_1^2 + 2 M i_1 i_2 + N i_2^2).$$

Die Grössen L , M , N hängen offenbar nur von der Form und der gegenseitigen Lage der beiden Ströme C_1 und C_2 ab. Man kann übrigens leicht ihre Bedeutung einsehen; der Koeffizient M von $i_1 i_2$ in dem Werth von T ist nämlich gleich dem Integral

$$\int \frac{dx_1 dx_2 + dy_1 dy_2 + dz_1 dz_2}{r},$$

das man längs des ganzen Leiters zu erstrecken hat; demnach ist dies das elektrodynamische Potential eines Stroms auf den anderen. Man kann ebenso einfach einsehen, dass L das Selbstpotential des Stromes C_1 ist, wenn er als allein vorhanden angenommen wird, und analog N dasjenige von C_2 .

Kapitel IX.

Induktion.

147. Elektromotorische Induktionskräfte. Bei der Betrachtung der elektromagnetischen und elektrodynamischen Erscheinungen haben wir stillschweigend vorausgesetzt, dass die Stromintensität konstant bleibt. Es ist aber bekannt, dass bei einer relativen Bewegung von Stromkreisen oder von Stromkreisen und Magneten besondere Phänomene auftreten, die man mit dem Namen Induktionsströme bezeichnet und deren Entdeckung man Faraday verdankt. Dieselben bestehen aus temporären Strömen in den Leitern, deren Intensitäten zu den ursprünglichen Strömen sich addiren und die man elektromotorischen Induktionskräften zuschreiben kann.

Aus den Beobachtungen über Induktion ergibt sich, dass bei einem Anwachsen der Intensitäten i_1 und i_2 zweier unbewegter Stromkreise C_1 und C_2 um die Grössen di_1 und di_2 in dem Zeitintervall dt die in C_1 erzeugte elektromotorische Induktionskraft den Werth

$$A \frac{di_1}{dt} + B \frac{di_2}{dt}$$

besitzt, und die in C_2 hervorgebrachte Kraft die Grösse

$$B \frac{di_1}{dt} + C \frac{di_2}{dt} \text{)}.$$

148. Wir wollen ferner den Ausdruck für die elektromotorische Kraft bei einer Bewegung von Leitern suchen, welche von Strömen mit konstanter Intensität durchflossen werden.

Betrachten wir zuerst den Fall, dass nur einer der Stromkreise

¹⁾ Die Bestimmung der Konstanten A, B, C erfolgt in § 149.

sich bewegt, etwa von C nach C', dann lehrt der Versuch, dass alles so vor sich geht, als wenn in C kein Strom vorhanden wäre, in C' dagegen ein neuer Strom von derselben Intensität entstände. Nach den Auseinandersetzungen des vorhergehenden Paragraphen entspricht aber einer Veränderung di der Intensität i des Stromes C eine elektromotorische Induktionskraft $A \frac{di}{dt}$ in diesem Stromkreise. Folglich bringt das Aufhören des Stromes C, das einer Verminderung i der Intensität desselben entspricht, eine elektromotorische Kraft $-\frac{Ai}{dt}$ hervor; und das Entstehen des Stromes C' eine elektromotorische Kraft $(A + dA) \frac{i}{dt}$, wobei dA die Veränderung des Koeffizienten A beim Uebergang von C nach C' bedeutet. Wir erhalten also für die aus der Bewegung herrührende Kraft

$$(A + dA) \frac{i}{dt} - A \frac{i}{dt} = i \frac{dA}{dt}.$$

Es ist leicht einzusehen, dass beim Vorhandensein zweier Ströme C_1 und C_2 die durch ihre relative Bewegung erzeugte elektromotorische Kraft für den Stromkreis C_1 den Werth hat:

$$i_1 \frac{dA}{dt} + i_2 \frac{dB}{dt},$$

ebenso für C_2

$$i_1 \frac{dB}{dt} + i_2 \frac{dC}{dt}.$$

Wenn sich die Intensität beider Ströme ändert, und gleichzeitig auch eine Bewegung derselben stattfindet, so sind die elektromotorischen Induktionskräfte für jeden der beiden Stromkreise gleich der Summe der elektromotorischen Kräfte, welche aus beiden Arten von Veränderungen, jede für sich allein genommen, entstehen; man erhält dann für den Stromkreis C_1

$$A \frac{di_1}{dt} + B \frac{di_2}{dt} + i_1 \frac{dA}{dt} + i_2 \frac{dB}{dt} = \frac{d}{dt} (Ai_1 + Bi_2)$$

und für C_2

$$B \frac{di_1}{dt} + C \frac{di_2}{dt} + i_1 \frac{dB}{dt} + i_2 \frac{dC}{dt} = \frac{d}{dt} (Bi_1 + Ci_2).$$

149. Bestimmung der Koeffizienten A, B, C. Die in den Ausdruck für die elektromotorischen Induktionskräfte eingehenden Koeffizienten können mit Hülfe des Prinzips von der Erhaltung der Energie bestimmt werden.

Wir betrachten zwei Stromkreise, deren Intensitäten i_1 und i_2 von galvanischen Elementen mit den elektromotorischen Kräften E_1 und E_2 hervorgebracht werden. Die Menge der in dem Element verbrauchten chemischen Energie setzt sich theilweise in diesem selbst in Wärme um, während sich ein anderer Theil in der Form von Stromenergie wiederfindet. Durch den Versuch ergibt sich, dass die in der Zeit dt erzeugte Stromenergie den Werth besitzt

$$E_1 i_1 dt + E_2 i_2 dt.$$

Dieselbe tritt in den Leitern zum Theil in der Form von Wärme auf, deren Menge durch das Joule'sche Gesetz bestimmt wird, zum Theil als mechanische Arbeit, die durch die Bewegungen der Leiter geleistet wird. Bezeichnet man mit R_1 und R_2 die Widerstände der beiden Stromkreise, so sind die Mengen der frei werdenden Wärme $R_1 i_1^2 dt$ und $R_2 i_2^2 dt$. Die von dem System geleistete mechanische Arbeit ist gleich der Veränderung dT des elektrodynamischen Potentials des Systems auf sich selbst, oder genauer gleich dem Theil dieser Veränderung, der von der Verschiebung der Leiter herrührt, wobei man von dem Theil absieht, der durch eine Vergrößerung der Intensitäten hervorgerufen wird. Dies Potential hat, wenn zwei Ströme in Betracht kommen, den Werth (§ 146)

$$T = \frac{1}{2} [L i_1^2 + 2 M i_1 i_2 + N i_2^2].$$

Hieraus folgt

$$dT = \frac{1}{2} [i_1^2 dL + 2 i_1 i_2 dM + i_2^2 dN].$$

Der Ueberschuss von Stromenergie während der Zeit dt über die in der Form von Wärme und mechanischer Arbeit in derselben Zeit angesammelte Energie des Systems ist also

$$(1) \quad E_1 i_1 dt + E_2 i_2 dt - R_1 i_1^2 dt - R_2 i_2^2 dt - dT.$$

Nach dem Prinzip von der Erhaltung der Energie muss dieser Ausdruck für einen vollkommenen Kreisprozess Null sein; andernfalls muss er ein vollständiges Differential darstellen. Hierdurch können die Werthe A, B, C bestimmt werden.

150. Zur Umformung des Ausdruckes (1) benutzen wir das Ohm'sche Gesetz für jeden der Ströme, unter Berücksichtigung des Umstandes, dass durch die Verschiebung der Ströme Induktionskräfte auftreten; wir haben dann

$$E_1 + \frac{d}{dt} (A i_1 + B i_2) = R_1 i_1,$$

und

$$E_2 + \frac{d}{dt} (B i_1 + C i_2) = R_2 i_2.$$

Multipliciren wir die beiden Seiten dieser Gleichungen resp. mit $i_1 dt$ und $i_2 dt$, so erhalten wir:

$$E_1 i_1 dt - R_1 i_1^2 dt = -i_1 d(A i_1 + B i_2)$$

und

$$E_2 i_2 dt - R_2 i_2^2 dt = -i_2 d(B i_1 + C i_2).$$

Wenn wir die vier ersten Glieder der Gleichung (1) durch die Summe der rechten Seiten der vorhergehenden Gleichungen ausdrücken, so finden wir

$$(2) \quad -i_1 d(A i_1 + B i_2) - i_2 d(B i_1 + C i_2) - \frac{1}{2} [i_1^2 dL + 2 i_1 i_2 dM + i_2^2 dN].$$

Für den Fall, dass weder eine Verschiebung noch eine Formveränderung der Stromkreise stattfindet, vereinfacht sich dieser Ausdruck zu

$$-A i_1 di_1 - B i_1 di_2 - B i_2 di_1 - C i_2 di_2$$

oder

$$-\frac{1}{2} d(A i_1^2 + 2 B i_1 i_2 + C i_2^2);$$

er würde also das vollständige Differential der Grösse

$$(3) \quad -\frac{1}{2} (A i_1^2 + 2 B i_1 i_2 + C i_2^2)$$

darstellen.

Findet auch eine Verschiebung der Stromkreise statt, so wird das Differential dieser Grösse

$$-Ai_1 di_1 - Bi_1 di_2 - Bi_2 di_1 - Ci_2 di_2 - \frac{1}{2} i_1^2 dA - i_1 i_2 dB - \frac{1}{2} i_2^2 dC;$$

damit nun der Ausdruck (2) das Differential derselben Grösse (3) bleibt, muss dieses Differential gleich sein dem entwickelten Ausdruck (2):

$$\begin{aligned} & -Ai_1 di_1 - Bi_1 di_2 - Bi_2 di_1 - Ci_2 di_2 - i_1^2 dA \\ & - 2i_1 i_2 dB - i_2^2 dC - \frac{1}{2} i_1^2 dL - i_1 i_2 dM - \frac{1}{2} i_2^2 dN. \end{aligned}$$

Durch Vergleichung beider Formeln erhält man die Beziehungen

$$\frac{1}{2} dA = dA + \frac{1}{2} dL,$$

$$dB = 2dB + dM,$$

$$\frac{1}{2} dC = dC + \frac{1}{2} dN,$$

die sich reduciren auf

$$dA = -dL, \quad dB = -dM, \quad dC = -dN.$$

Durch Integration folgt hieraus, wenn man die Integrationskonstante Null setzt:

$$A = -L, \quad B = -M, \quad C = -N.$$

Hiernach sind die Koefficienten, die in dem Ausdruck für die elektromotorische Induktionskraft auftreten, bis auf das Vorzeichen identisch mit den Koefficienten des elektrodynamischen Potentials des Stromsystems. Man nennt diese letzteren auch oft die Induktionskoefficienten, L und N die *Koefficienten der Selbstinduktion* und M den *Koefficient der wechselseitigen Induktion* beider Ströme.

151. Theorie von Maxwell. Die Theorie der Induktion wurde in der Form, die wir eben mitgetheilt haben, zuerst von Helmholtz in seiner Schrift über die Erhaltung der Kraft entwickelt, und kurze Zeit darauf von Sir W. Thomson; die Maxwell'sche Theorie ist anders und in vieler Beziehung vollständiger. Wendet man näm-

lich die Lagrange'schen Gleichungen auf die Bewegung der Moleküle des von Maxwell für die elektrischen Erscheinungen angenommenen imponderablen Fluidum an, so lassen sich sowohl die Gesetze der Induktion als auch die der Elektrodynamik ableiten.

152. In den vorhergehenden Kapiteln wurden wir zu dem Schluss geführt, dass die von dem englischen Gelehrten angenommenen Hypothesen nur vorläufige waren, und dass sie selbst in den Augen ihres Urhebers nicht mehr objektive Wirklichkeit besaßen, als die Hypothese von den zwei Fluida, wenn sie uns auch besser befriedigte. *Hier jedoch begegnen wir, wie ich glaube, der wirklichen Vorstellung von Maxwell.*

Im Anfang seiner Theorie stellt Maxwell folgende beiden Hypothesen auf:

1. Die Koordinaten der Moleküle des imponderablen Fluidum hängen von den Koordinaten der materiellen, an den elektrischen Erscheinungen beteiligten Körpermoleküle ab, ebenso von den Koordinaten der Moleküle der hypothetischen Fluida (positive und negative Elektrizität) nach der gewöhnlichen Elektrizitätstheorie; aber das Gesetz dieser Abhängigkeit ist uns vollständig unbekannt.

2. Das elektrodynamische Potential eines Stromsystems ist nichts anderes, als die halbe lebendige Kraft des Maxwell'schen Fluidum; es ist also eine kinetische Energie.

153. Um in die Lagrange'schen Gleichungen die Parameter einzuführen, durch welche die Lage eines Moleküls des Maxwell'schen Fluidum definiert ist, muss man nach der ersten Hypothese die Parameter kennen, welche die Lage eines Moleküls unsrer hypothetischen Fluida bestimmen. Nun ist die Lage eines elektrischen Moleküls A, das einen linearen Stromkreis C durchfließt, vollständig bestimmt, wenn man einerseits die Lage des Stromkreises im Raume kennt, andererseits die Länge s des Leiters OA, die von einem bestimmten Ausgangspunkt O aus gerechnet ist. Bedeuten also $x_1, x_2, x_3 \dots$ die Parameter, welche die Lage der materiellen, den Stromkreis bildenden Moleküle bezeichnen, so hängt die Lage eines Moleküls des Maxwell'schen imponderablen Fluidum von den Parametern s, x_1, x_2, x_3 ab.

An Stelle von s kann man aber auch eine Funktion dieses Bogens setzen, denn die Kenntniss dieser Funktion würde gestatten, s zu bestimmen, und damit auch die Lage eines elektrischen Moleküls auf dem Stromkreis C; Maxwell wählt die Grösse

$$y = \int_0^t i dt,$$

welche, wie wir jetzt zeigen wollen, in der That eine Funktion von s darstellt. Der Querschnitt des Leiters nämlich, der von einem zum anderen Punkt veränderlich sein kann, ist eine Funktion $\varphi(s)$ des Bogens s ; die Geschwindigkeit der Elektrizität kann aber einerseits dargestellt werden als Quotient der Intensität durch den Querschnitt des Leiters $\frac{i}{\varphi(s)}$, andererseits durch die Grösse $\frac{ds}{dt}$; demnach muss gelten

$$\frac{ds}{dt} = \frac{i}{\varphi(s)}.$$

Hieraus folgt

$$\int i dt = \int \varphi(s) ds = \psi(s)$$

und

$$\int_0^t i dt = \psi(s) - \psi(s_0),$$

wo s_0 die Lage des elektrischen Moleküls am Anfang der Zeit bedeutet. Somit ist y eine Funktion von s allein, und wir können in der That als Parameter, von denen die Lage eines Moleküls des Maxwell'schen imponderablen Fluidum abhängt, die Grössen y, x_1, x_2, \dots, x_n wählen.

154. Anwendung auf zwei Stromkreise. Wenn wir mit i_1 und i_2 die Intensitäten der Stromkreise bezeichnen und setzen

$$y_1 = \int_0^t i_1 dt \quad \text{und} \quad y_2 = \int_0^t i_2 dt,$$

so wird die Lage eines Moleküls des Maxwell'schen imponderablen Fluidum abhängen von den Parametern y_1 und y_2 , sowie von den n Parametern x_1, x_2, \dots, x_n , welche die Lage der materiellen Moleküle der Leiter bestimmen. Folglich wird die Bewegung des von den zwei Strömen gebildeten Systems gegeben durch ein System von $n + 2$ Lagrange'schen Gleichungen (cf. Einleitung S. 5)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_i'} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i,$$

wo q_i einen der Parameter bedeutet und Q_i den Koeffizient von δq_i in dem Ausdruck

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots Q_i \delta q_i + \dots Q_n \delta q_n$$

für diejenige Arbeit, welche einer virtuellen Verrückung des Systems entspricht.

155. Die kinetische Energie T , welche in diesen Gleichungen auftritt, ist die Summe der halben lebendigen Kraft T_1 der materiellen Moleküle des Systems und der kinetischen Energie der Moleküle des Maxwell'schen imponderablen Fluidum. Diese letztere stellt aber, nach der zweiten Hypothese, das elektrodynamische Selbstpotential des Systems dar, so dass wir in dem betrachteten Fall, wo nur zwei Ströme vorhanden sind, erhalten:

$$T = T_1 + \frac{1}{2} (L i_1^2 + 2 M i_1 i_2 + N i_2^2).$$

Hierbei hängt das erste Glied T_1 dieser Summe nur von den Differentialquotienten $x_1', x_2', \dots x_n'$ der Parameter $x_1, x_2, \dots x_n$ der materiellen Moleküle ab.

Da die Lage der Moleküle des imponderablen Fluidum eine Funktion der Parameter $y_1, y_2, x_1, x_2, \dots x_n$ ist, so könnten die drei letzten Glieder der vorhergehenden Summe von diesen $n + 2$ Parametern und ihren Differentialquotienten abhängen. Nun aber sind L, M, N nur durch die Form und die gegenseitige Lage der Stromkreise bestimmt und sind daher nur Funktionen von $x_1, x_2, \dots x_n$; ebenso stellen i_1 und i_2 , nach den Definitionsgleichungen für y_1 und y_2 , die Differentialquotienten y_1' und y_2' dieser Grössen nach der Zeit dar. Folglich hängt die kinetische Energie der Moleküle des imponderablen Fluidum nur von $x_1, x_2, \dots x_n$ und von y_1' und y_2' ab.

156. Fassen wir jetzt die rechte Seite der Gleichungen näher in's Auge. Wenn wir annehmen, dass der den Stromkreis C_1 durchfließende Strom durch eine Säule von der elektromotorischen Kraft E_1 unterhalten wird, so ist die während der Zeit dt in demselben entwickelte Energie $E_1 i_1 dt$ oder $E_1 \delta y_1$. Da nun nach der Maxwell'schen Vorstellung die elektromotorische Kraft auf die Moleküle

des imponderablen Fluidum wirkt, so ist $E_1 \delta y_1$ eine von der Verschiebung der Moleküle dieses Fluidum herrührende Arbeit.

Aber die elektromotorische Kraft ist nicht die einzige, welche auf die Moleküle des imponderablen Fluidum einwirkt; man muss auch noch den Widerstand in Betracht ziehen, den das Medium der Bewegung dieser Moleküle entgegensetzt; die hierbei geleistete Arbeit findet sich unter der Form von Wärme in dem Leiter wieder. Die so hervorgebrachte Wärmemenge wird nach dem Joule'schen Gesetze durch $R_1 i_1^2 dt$ gegeben, so dass diese von dem imponderablen Fluidum stammende Arbeit $- R_1 i_1^2 dt$ oder $- R_1 i_1 \delta y_1$ ist.

Wir erhalten also für die gesammte Arbeit des imponderablen Fluidum in dem Stromkreis C_1

$$(E_1 - R_1 i_1) \delta y_1,$$

und für die gesammte Arbeit beider Stromkreise

$$(E_1 - R_1 i_1) \delta y_1 + (E_2 - R_2 i_2) \delta y_2.$$

Die Arbeit der materiellen Moleküle hängt nur von den Parametern x_1, x_2, \dots, x_n ab; wir wollen sie darstellen durch

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_n dx_n,$$

so dass wir für die Arbeit, welche durch eine virtuelle Verrückung sowohl des imponderablen Fluidum, wie der materiellen Moleküle hervorgebracht wird, erhalten

$$(E_1 - R_1 i_1) \delta y_1 + (E_2 - R_2 i_2) \delta y_2 + X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_n dx_n.$$

Dann müssen wir in jeder der Lagrange'schen Gleichungen für die rechte Seite denjenigen Koeffizienten des vorhergehenden Ausdrucks wählen, der sich auf den betreffenden Parameter bezieht.

157. Ausdruck für die elektromotorischen Induktionskräfte.

Die Lagrange'sche Gleichung für den Parameter y_1 lautet

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_1}{\partial y_1'} + \frac{1}{2} \frac{\partial [L i_1^2 + 2 M i_1 i_2 + N i_2^2]}{\partial y_1'} \right) - \frac{\partial T}{\partial y_1} = E_1 - R_1 i_1.$$

T hängt aber nicht von y_1 ab, da dies bei keinem seiner Glieder der Fall ist; folglich ist $\frac{\partial T}{\partial y_1} = 0$. Ebenso gilt $\frac{\partial T_1}{\partial y_1'} = 0$, denn T_1 repräsentirt die kinetische Energie der materiellen Moleküle und ist

deshalb unabhängig von y_1' . Die vorhergehende Gleichung reducirt sich also auf

$$\frac{d}{dt} (Li_1 + Mi_2) = E_1 - R_1 i_1$$

oder

$$E_1 - \frac{d}{dt} (Li_1 + Mi_2) = R_1 i_1.$$

Die elektromotorische Induktionskraft ist also der Differentialquotient von $Li_1 + Mi_2$ nach der Zeit, aber mit dem negativen Zeichen; wir erhalten somit denselben Ausdruck, auf den wir durch die Helmholtz'sche Methode gekommen waren (cf. § 150).

Wenn wir die Lagrange'sche Gleichung für den zweiten Parameter y_2 aufstellen, so finden wir für die in dem zweiten Stromkreis entwickelte elektromotorische Kraft

$$- \frac{d}{dt} (Mi_1 + Ni_2).$$

158. Arbeit der elektrodynamischen Kräfte. Nehmen wir eine der zu den Parametern x_1, x_2, \dots, x_n gehörigen Lagrange'schen Gleichungen, so erhalten wir die Arbeit der elektrodynamischen Kräfte für eine Verrückung, die dem Anwachsen des betrachteten Parameters um δx_i entspricht. Bedenken wir nämlich, dass $Li_1^2 + 2Mi_1i_2 + Ni_2^2$ nicht von dem Differentialquotient x_i' abhängt, ebenso T_1 nicht von x_i , und i_1 wie i_2 weder von x_i' , noch von x_i , so finden wir

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_1}{\partial x_i'} \right) - \frac{1}{2} \left(i_1^2 \frac{\partial L}{\partial x_i} + 2i_1i_2 \frac{\partial M}{\partial x_i} + i_2^2 \frac{\partial N}{\partial x_i} \right) = X_i.$$

Setzen wir ausserdem voraus, das System sei in dem betrachteten Augenblick in Ruhe, so wird T_1 Null und wir erhalten für die von einer virtuellen Verrückung herrührende Arbeit

$$X_i \delta x_i = - \frac{1}{2} (i_1^2 \delta L + 2i_1i_2 \delta M + i_2^2 \delta N).$$

¹⁾ Da $y_1 = \int_0^t i_1 dt$ und daher $y_1' = i_1$ ist.

Dies ist aber die Arbeit der äusseren, auf die materiellen Moleküle des Systems wirkenden Kräfte, die Arbeit der elektrodynamischen Kräfte hat also das entgegengesetzte Vorzeichen. Sie ist demnach gleich der Variation der Funktion

$$\frac{1}{2} (Li_1^2 + 2 Mi_1 i_2 + Ni_2^2),$$

und stellt, wie es auch sein muss, das elektrodynamische Selbstpotential des Systems dar.

159. Wir wollen jetzt die Arbeit der elektrodynamischen Kräfte bestimmen, welche von dem als fest vorausgesetzten Strom C_2 auf C_1 ausgeübt werden.

Da der Stromkreis C_2 sich nicht deformirt, ist δN Null und die Arbeit der elektrodynamischen Kräfte reducirt sich auf

$$\frac{1}{2} (i_1^2 \delta L + 2 i_1 i_2 \delta M).$$

Das erste Glied dieser Summe bezieht sich aber auf die Wirkung, welche der Strom C_1 auf sich selbst ausübt. Demnach hat diejenige Arbeit der elektrodynamischen Kräfte, welche der Wirkung des Stromes C_2 auf C_1 zuzuschreiben ist, die Grösse $i_1 i_2 \delta M$. Nun besitzt $M i_1 i_2$, das elektrodynamische Potential von C_1 auf C_2 , den Werth (§ 129)

$$M i_1 i_2 = i_1 \int (la + m\beta + n\gamma) d\omega,$$

wenn C_1 sich in einem nicht magnetischen Medium verrückt, oder allgemeiner

$$M i_1 i_2 = i_1 \int (la + mb + nc) d\omega,$$

wenn C_1 sich in einem magnetischen Medium verschiebt, und zwar an einem Punkte, für welchen die Komponenten der magnetischen Induktion a, b, c sind; wir erhalten also für die Arbeit der elektrodynamischen Kräfte, welche zwischen C_1 und C_2 auftreten,

$$i_1 \delta \int (la + mb + nc) d\omega.$$

160. Ausdruck für die elektrodynamischen Kräfte. Wenn wir mit $Xd\tau$, $Yd\tau$, $Zd\tau$ die Komponenten der elektrodynamischen Kraft bezeichnen, die von der Wirkung des Stromes C_2 auf ein Element x , y , z des Stromes C_1 herrührt, so wird die Arbeit dieser Kräfte bei einer Verrückung des Elements um δx , δy , δz

$$(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) d\tau,$$

und folglich die Arbeit der elektrodynamischen auf C_1 wirkenden Kräfte, wenn der ganze Stromkreis verschoben wird oder seine Form ändert,

$$\int d\tau (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z),$$

wobei die Integration über den Stromkreis C_1 auszudehnen ist. Durch Vergleichung dieses Ausdrucks für die Arbeit mit dem vorhin gefundenen erhalten wir die Beziehung

$$(1) \quad \int d\tau (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = i_1 \oint (la + mb + nc) d\omega,$$

deren rechte Seite wir jetzt berechnen wollen.

Sei C_1 (Fig. 32) die Anfangslage des Stromkreises C_1 , und C_1' seine Endlage, so können wir durch C_1 und C_1' eine Fläche A legen und als Integrationsgebiet von

$$\int (la + mb + nc) d\omega$$

das von der Kurve C_1 auf dieser Fläche begrenzte Stück nehmen.

Die Veränderung dieses Integrals bei der Verschiebung des Stromkreises von C_1 nach C_1' ist dann gegeben durch den Werth desselben Integrals, welches sich über das von beiden Kurven begrenzte Flächenstück erstreckt. Um diesen Werth zu finden, betrachten wir ein Element mn des Stromes C_1 , dessen Lage nach der Verschiebung $m'n'$ ist. Die Fläche $mnn'm'$ kann als ein Parallelogramm betrachtet werden, dessen Seite mn die Projektionen dx , dy , dz besitzt, während die Projektionen des Stücks mm' , welches die Grösse der Verschiebung darstellt, δx , δy , δz sein mögen. Wir erhalten somit als Projektionsflächen dieses Parallelogramms auf die

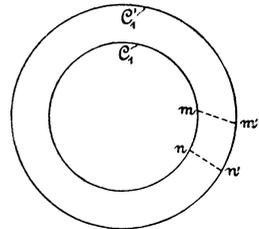


Fig. 32.

Koordinatenebenen

$$l d\omega = \delta y dz - \delta z dy,$$

$$m d\omega = \delta z dx - \delta x dz,$$

$$n d\omega = \delta x dy - \delta y dx,$$

und folglich

$$\begin{aligned} \delta \int (la + mb + nc) d\omega &= \int a (\delta y dz - \delta z dy) \\ &+ b (\delta z dx - \delta x dz) + c (\delta x dy - \delta y dx). \end{aligned}$$

Durch Einsetzen dieses Werthes in die Gleichung (1) findet man:

$$\begin{aligned} \int d\tau (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) &= i_1 \int (c dy - b dz) \delta x \\ &+ (adz - cdx) \delta y + (bdx - ady) \delta z; \end{aligned}$$

woraus dann folgt

$$Xd\tau = i_1 (c dy - b dz),$$

$$Yd\tau = i_1 (adz - cdx),$$

$$Zd\tau = i_1 (bdx - ady).$$

Da aber bekanntlich die Geschwindigkeiten u , v , w der Elektrizität ausgedrückt werden durch (cf. § 137):

$$u d\tau = i_1 dx, \quad v d\tau = i_1 dy, \quad w d\tau = i_1 dz,$$

so lassen sich die drei vorhergehenden Gleichungen schreiben:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = cv - bw, \\ Y = aw - cu, \\ Z = bu - av. \end{array} \right.$$

161. Ströme in beliebiger Anzahl. — Elektrodynamische Kräfte. Die vorhergehenden Formeln lassen sich auch auf den Fall

anwenden, wo eine beliebige Anzahl von Strömen $C_2, C_3, \dots C_n$ auf ein bestimmtes Element des Stromkreises C_1 einwirkt. Nennen wir nämlich $a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3, \dots c_n$ die Komponenten der von den verschiedenen Strömen herrührenden magnetischen Induktion an dem Punkte, in dem sich das Element von C_1 befindet, so ist die von der Gesamtheit der Ströme hervorgebrachte elektrodynamische Kraft die Resultante aus den von jedem einzelnen derselben erzeugten Kräften. Ihre Komponente nach der X-Achse ist demnach

$$X = c_2 v - b_2 w + c_3 v - b_3 w + \dots + c_n v - b_n w$$

oder

$$X = (c_2 + c_3 + \dots c_n) v - (b_2 + b_3 + \dots b_n) w,$$

oder endlich, wenn man mit a, b, c die Komponenten der Resultante aus den durch die Ströme $C_2, C_3, \dots C_n$ hervorgebrachten magnetischen Induktionen bezeichnet

$$X = cv - bw.$$

In gleicher Weise kann man der elektrodynamischen Kraft Rechnung tragen, die von dem Stromkreis C_1 selbst herrührt. Hierzu zerlegen wir den Strom in zwei Theile, von denen der eine nur das betrachtete Element enthält, der andere den übrigen Theil des Stromkreises. Da die Wirkung des ersteren Theils auf sich selbst vernachlässigt werden darf, so hat man insgesamt die elektrodynamische Kraft zu bestimmen, welche dem System der n Ströme $c_1, c_2, \dots c_n$ entspricht. Nennt man also a, b, c die Komponenten der magnetischen Induktion aller dieser Ströme, so erhält man als Komponente nach der X-Achse

$$X = cv - bw.$$

Die Formeln (2) gelten somit allgemein.

162. Elektromotorische Induktionskräfte. Wenn ausser C_1 nur noch ein einziger Stromkreis C_2 vorhanden ist, so wird, wie wir fanden, die gesammte, in C_1 entwickelte, elektromotorische Induktionskraft dargestellt durch

$$E = - \frac{d}{dt} (Li_1 + Mi_2).$$

Das Glied $\frac{d}{dt}(Li_1)$ hängt allein von der Wirkung des Stromes C_1 auf sich selbst ab, so dass die elektromotorische Induktionskraft, welche nur von dem Strom C_2 herrührt, gleich $\frac{dMi_2}{dt}$ ist. Diesen Differentialquotienten wollen wir etwas umformen.

Die Variation δMi_2 der Grösse Mi_2 , welche einer Verschiebung des Stromkreises C_1 und einer gleichzeitigen Veränderung der Stromintensitäten entspricht, kann betrachtet werden als die Summe der von der Verschiebung herrührenden Veränderung bei konstant bleibenden Intensitäten und der durch die Intensitätsschwankungen bewirkten Veränderung in den als fest vorausgesetzten Leitern. Wir haben nun gezeigt (§ 159 etc.), dass die Variation von Mi_1i_2 , welche von einer relativen Verschiebung der beiden Stromkreise herrührt, in denen die Intensitäten dieselben Werthe behalten, gleich ist

$$\delta Mi_1i_2 = i_1 \int a (\delta y dz - \delta z dy) + b (\delta z dx - \delta x dz) + c (\delta x dy - \delta y dx).$$

Wir erhalten demnach für die Variation von Mi_2 das auf der rechten Seite stehende Integral.

Um ferner diejenige Variation von Mi_2 zu erhalten, welche von einer Schwankung der Intensitäten herrührt, wählen wir für Mi_1i_2 die Form (cf. § 139)

$$Mi_1i_2 = i_1 \int_{C_1} Fdx + Gdy + Hdz.$$

Da die Stromkreise weder ihre Form verändern, noch sich verschieben, so bleibt der Integrationsweg derselbe und die Variation von Mi_2 beschränkt sich auf

$$\int_{C_1} \delta Fdx + \delta Gdy + \delta Hdz.$$

Wir finden somit als vollständige Variation von Mi_2

$$\int a (\delta y dz - \delta z dy) + b (\delta z dx - \delta x dz) + c (\delta x dy - \delta y dx) \\ + \int \delta Fdx + \delta Gdy + \delta Hdz$$

und folglich für die elektromotorische Induktionskraft

$$-\frac{dMi_2}{dt} = - \int a (y' dz - z' dy) + b (z' dx - x' dz) + c (x' dy - y' dx) \\ - \int \frac{dF}{dt} dx + \frac{dG}{dt} dy + \frac{dH}{dt} dz$$

oder auch

$$-\frac{dMi_2}{dt} = \int \left(cy' - bz' - \frac{dF}{dt} \right) dx + \left(az' - cx' - \frac{dG}{dt} \right) dy \\ + \left(bx' - ay' - \frac{dH}{dt} \right) dz.$$

163. Wenn wir mit P, Q, R die drei Komponenten der elektromotorischen Induktionskraft für die Einheit der Länge bezeichnen, so wird die elektromotorische Kraft in dem Stromkreis C_1 durch das Integral

$$\int_{C_1} P dx + Q dy + R dz$$

gegeben.

Durch Vergleichung mit dem vorhergehenden Ausdruck für die elektromotorische Kraft erhalten wir drei Gleichungen, deren erste lautet:

$$\int P dx = \int \left(cy' - bz' - \frac{dF}{dt} \right) dx.$$

Wir leiten daraus durch Differentiation ab:

$$(1) \quad P = cy' - bz' - \frac{dF}{dt};$$

aber es ist klar, dass wir der rechten Seite dieser letzten Gleichung den partiellen Differentialquotienten $-\frac{\partial \psi}{\partial x}$ einer homogenen Funktion $-\psi$ hinzufügen können, denn bei der Integration über eine geschlossene Kurve (C_1) wird das Integral dieses Gliedes Null. Wir finden somit als Komponenten der elektromotorischen Induktionskraft für die Längeneinheit:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} P = cy' - bz' - \frac{dF}{dt} - \frac{\partial\psi}{\partial x}, \\ Q = az' - cx' - \frac{dG}{dt} - \frac{\partial\psi}{\partial y}, \\ R = bx' - ay' - \frac{dH}{dt} - \frac{\partial\psi}{\partial z}. \end{array} \right.$$

164. Wir wollen nun zeigen, dass diese Gleichungen auch gelten, wenn ausser C_1 noch eine beliebige Zahl von Strömen C_2, C_3, \dots, C_n vorhanden ist.

Die in C_1 durch die Gesammtheit der $n - 1$ anderen Ströme erzeugte elektromotorische Induktionskraft ist gleich der Summe der von jedem derselben herrührenden elektromotorischen Kräfte; man hat also für die Komponente P,

$$\begin{aligned} P &= c_2 y' - b_2 z' - \frac{dF_2}{dt} - \frac{\partial\psi_2}{\partial x} \\ &+ c_3 y' - b_3 z' - \frac{dF_3}{dt} - \frac{\partial\psi_3}{\partial x} \\ &+ \dots \dots \dots \\ &+ c_n y' - b_n z' - \frac{dF_n}{dt} - \frac{\partial\psi_n}{\partial x}, \end{aligned}$$

oder

$$P = y' \sum c - z' \sum b - \frac{d\Sigma F}{dt} - \frac{\partial\Sigma\psi}{\partial x}.$$

Nun sind $\sum c$ und $\sum b$ zwei der Komponenten der magnetischen Induktion in einem bestimmten Punkt von C_1 ; $\sum F$ ist die Komponente des elektromagnetischen Moments in demselben Punkt, $\sum\psi$ eine homogene Funktion der Koordinaten. Demnach kann die erste der Gleichungen (2) auf eine beliebige Zahl von Strömen angewandt werden, wenn man nur für b, c und F diejenigen Werthe wählt, die der Gesammtheit der in Betracht kommenden Ströme entsprechen. In derselben Weise findet man, dass auch die beiden anderen Gleichungen ihre Gültigkeit behalten.

165. Auch die Einwirkung des Stromes C_1 auf sich selbst lässt sich berechnen: Der Stromkreis C_1 kann nämlich als aus zwei Theilen zusammengesetzt betrachtet werden, deren einer nur aus dem Stromelement besteht, für das man die Komponenten der elektromotorischen Kraft sucht, während der andere den ganzen Rest des Stromkreises umfasst. Für diesen letzteren Theil darf man den Stromkreis C_1 selbst einführen, so dass, bei Vernachlässigung der Selbstinduktion des kleinen Elements, die Induktion von den n Stromkreisen C_1, C_2, \dots, C_n herrührt. Die Komponenten der elektromotorischen Kraft werden also wieder durch die Formeln (2) gegeben und a, b, c, F, G, H sind dann die Werthe für alle Ströme zusammengenommen.

166. Bedeutung von ψ . Die Funktion ψ stellt eine beliebige Funktion der Koordinaten dar, welche nur der Bedingung zu genügen hat, dass sie homogen ist. Maxwell nimmt an, dass sie das elektrostatische Potential repräsentirt, welches von den in dem Feld etwa vorhandenen elektrischen Massen herrührt.

Diese Hypothese müsste experimentell geprüft werden durch die Uebereinstimmung der gemessenen Werthe der elektromotorischen Induktionskräfte mit den aus den Gleichungen (2) abgeleiteten, wobei dann ψ durch den Versuch zu bestimmen wäre, während die Grössen a, b, c, F, G, H gegeben sind durch die Formeln (§ 131)

$$a = \alpha + 4\pi A,$$

$$b = \beta + 4\pi B,$$

$$c = \gamma + 4\pi C,$$

und (§ 134)

$$F = \int \frac{u d\tau}{r}, \quad G = \int \frac{v d\tau}{r}, \quad H = \int \frac{w d\tau}{r}.$$

Immerhin ist es stets gestattet, ψ als elektrostatisches Potential aufzufassen. Die Grössen F, G, H lassen sich nämlich nur unter der Bedingung bestimmen, dass man voraussetzt, sie seien durch die Differentialgleichung

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0$$

verbunden (cf. § 134).

Nun haben wir für F, G, H Ausdrücke von der allgemeinen Form

$$F = \int \frac{u}{r} d\tau + \frac{\partial \chi}{\partial r}$$

gefunden (cf. § 133), wo χ eine beliebige Funktion der Koordinaten bedeutet, so dass wir als Werthe der Komponenten P, Q, R der elektromotorischen Kraft für die Längeneinheit erhalten:

$$P = cy' - bz' - \int \frac{du}{dt} \cdot \frac{d\tau}{r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

$$Q = az' - cx' - \int \frac{dv}{dt} \cdot \frac{d\tau}{r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \chi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y},$$

$$R = bx' - ay' - \int \frac{dw}{dt} \cdot \frac{d\tau}{r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \chi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

Es lässt sich also stets durch passende Wahl der willkürlichen Funktion χ erreichen, dass die in diese Gleichungen und die Gleichungen (2) eingehende Funktion ψ das elektrostatische Potential darstellt.

Kapitel X.

Allgemeine Gleichungen des magnetischen Feldes.

167. Gleichungen des magnetischen Feldes. Wir wollen uns die Gleichungen wieder vergegenwärtigen, die bestehen zwischen den Komponenten der magnetischen Induktion an einem Punkt, der elektromagnetischen Kraft und ihres Moments, der elektromotorischen Induktionskraft und der Geschwindigkeit der Elektrizität.

Im § 103 fanden wir: Wenn a, β, γ die Komponenten der magnetischen Kraft an einem Punkt eines magnetischen Medium bedeuten, dessen magnetisches Induktionsvermögen (Permeabilitätskoeffizient) μ ist, dann werden die Komponenten der magnetischen Induktion an demselben Punkt gegeben durch die Gleichungen

$$(I) \quad \begin{cases} a = \mu \alpha, \\ b = \mu \beta, \\ c = \mu \gamma. \end{cases}$$

Die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w der Elektrizität an einem Punkte sind mit den Komponenten der magnetischen Kraft α, β, γ durch die im § 118 aufgestellten Gleichungen verbunden:

$$(II) \quad \begin{cases} 4 \pi u = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}, \\ 4 \pi v = \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \\ 4 \pi w = \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}. \end{cases}$$

Die Komponenten F , G , H des elektromagnetischen Momentes ferner sind mit denen der magnetischen Induktion durch die folgenden Differentialgleichungen verknüpft (§ 131):

$$(III) \quad \begin{cases} a = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}, \\ b = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}, \\ c = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}. \end{cases}$$

Da aber a , b , c die Produkte von α , β , γ in einen konstanten Faktor μ sind, und da ausserdem α , β , γ von u , v , w abhängen, so sind die Komponenten F , G , H des elektromagnetischen Moments selbst Funktionen von u , v , w . Nach dem in den §§ 137 und 166 Gesagten werden diese Funktionen dargestellt durch:

$$(IV) \quad \begin{cases} F = \mu \int \frac{u}{r} d\mathbf{r} + \frac{\partial \chi}{\partial x}, \\ G = \mu \int \frac{v}{r} d\mathbf{r} + \frac{\partial \chi}{\partial y}, \\ H = \mu \int \frac{w}{r} d\mathbf{r} + \frac{\partial \chi}{\partial z}. \end{cases}$$

Die von der elektromagnetischen Induktion und den elektrischen Massen im statischen Zustand herrührende elektromotorische Kraft hat, wie wir im § 163 gezeigt haben, zu Komponenten:

$$(V) \quad \begin{cases} P = cy' - bz' - \frac{dF}{dt} - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ Q = az' - cx' - \frac{dG}{dt} - \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ R = bx' - ay' - \frac{dH}{dt} - \frac{\partial \psi}{\partial z}. \end{cases}$$

168. Gleichungen der Leiterströme. In den Formeln (II) bezeichnen u , v , w die Geschwindigkeitskomponenten der Elektrizität ohne Unterschied der Bewegungsart: Leitung oder Verschiebung. Handelt es sich um einen Leiterstrom, dann müssen diese Kompo-

nenten ausserdem dem Ohm'schen Gesetze genügen. Wenn wir mit C die elektrische Leitungsfähigkeit des Mittels bezeichnen und mit X die Komponenten aller elektromotorischen Kräfte pro Längeneinheit, soweit sie nicht von einer statischen Potentialdifferenz herrühren, so erhalten wir nach § 87 Gleichungen von der Form:

$$\frac{u}{C} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} + X.$$

Wenn man annimmt, dass diese elektromotorischen Kräfte nur Induktionskräfte sind, die durch Veränderung oder Verschiebung von Strömen oder magnetischen und elektrischen Massen hervorgebracht werden, so ist die rechte Seite dieser letzten Gleichung gleich P . Folglich finden wir dann für die drei Geschwindigkeitskomponenten der Elektrizität bei einem Leiterstrom:

$$(VI) \quad \begin{cases} u = CP, \\ v = CQ, \\ w = CR. \end{cases}$$

169. Gleichungen der Verschiebungsströme. Die vorhergehenden Gleichungen können auf die Verschiebungsströme nicht angewendet werden, da diese nach unserer Annahme dem Ohm'schen Gesetz nicht folgen. Die Gleichungen (III) dagegen müssen befriedigt werden, da Maxwell, wie wir schon oben (§ 118) erwähnt haben, annimmt, dass die Verschiebungsströme den elektromagnetischen und elektrodynamischen Gesetzen von Ampère unterworfen sind. Aber ausser diesen letzteren Gleichungen giebt es noch drei andere, welche eine Beziehung zwischen den Geschwindigkeitskomponenten der Elektrizität in einem Strome dieser Art und den Komponenten der elektromotorischen Kraft aufstellen.

Wir fanden nämlich (§ 72), dass die Komponenten der elektrischen Verschiebung durch drei Gleichungen gegeben werden, deren erste lautet:

$$f = -\frac{K}{4\pi} \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - X \right),$$

wobei X dieselbe Bedeutung besitzt, wie in dem vorigen Paragraphen. Wenn wir also annehmen, dass die elektromotorischen Kräfte nur durch eine Differenz des statischen Potentials sowie

durch die Induktion von Magneten und von den in dem Feld befindlichen Strömen hervorgebracht werden, so ist der Klammerfaktor in dem Ausdruck für f gleich $-P$; folglich erhalten wir dafür

$$(VII) \quad \left\{ \begin{array}{l} f = \frac{K}{4\pi} P, \\ g = \frac{K}{4\pi} Q, \\ h = \frac{K}{4\pi} R. \end{array} \right.$$

Durch Differentiation dieser Gleichungen nach der Zeit folgt für die Geschwindigkeitskomponenten u , v , w der elektrischen Verschiebung:

$$(VIII) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{K}{4\pi} \cdot \frac{dP}{dt}, \\ v = \frac{K}{4\pi} \cdot \frac{dQ}{dt}, \\ w = \frac{K}{4\pi} \cdot \frac{dR}{dt}. \end{array} \right.$$

170. Gleichungen für die Ströme in einem unvollkommen isolirenden Medium. Die Gruppe der Gleichungen (VI) gilt für leitende Medien, z. B. für Metalle; die Gleichungen (VIII) dagegen für vollkommene Isolatoren. Wenn der Körper unvollkommen isolirt, so nimmt Maxwell an, dass die Komponenten des wirklichen elektrischen Stromes, durch den die elektromagnetischen Erscheinungen bedingt sind, aus der Summe der Komponenten des Leitungs- und des Verschiebungsstroms bestehen; wir erhalten also in diesem Fall

$$(IX) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = CP + \frac{K}{4\pi} \cdot \frac{dP}{dt}, \\ v = CQ + \frac{K}{4\pi} \cdot \frac{dQ}{dt}, \\ w = CR + \frac{K}{4\pi} \cdot \frac{dR}{dt}. \end{array} \right.$$

Wir müssen hierbei darauf hinweisen, dass die Maxwell'sche Hypothese eine Schwierigkeit mit sich bringt. Da nämlich das Medium Eigenschaften besitzt, die zwischen denen der Leiter und der Isolatoren liegen, so muss die den Strom erzeugende elektromotorische Kraft zwei Arten von Widerständen überwinden, einen analog dem Widerstand der Metalle $\frac{1}{C}$, den anderen von der Art, wie ihn die Isolatoren aufweisen. Hieraus würde also folgen, dass entgegen den obigen Gleichungen von Maxwell die Stromintensität und folglich auch die Grössen u , v , w dann kleiner sein müssten, als in einem Leiter oder in einem vollständigen Isolator.

171. Potier stellte statt der Maxwell'schen Hypothese eine rationellere auf. Er nimmt an, dass die elektromotorische Kraft an einem Punkt gleich ist der Summe aus derjenigen Kraft, die den Leiterstrom erzeugt, und derjenigen, welche die Verschiebung hervorbringt. Wir erhalten also durch Addition der aus den Gleichungen (VI) und (VII) abgeleiteten Werthe der Komponenten der elektromotorischen Kraft:

$$(X) \quad \left\{ \begin{array}{l} P = \frac{u}{C} + \frac{4\pi}{K} f, \\ Q = \frac{v}{C} + \frac{4\pi}{K} g, \\ R = \frac{w}{C} + \frac{4\pi}{K} h. \end{array} \right.$$

172. Die Formeln (IX) und (X) reduciren sich auf die der Leiterströme, wenn man $K=0$, resp. $K=\infty$ setzt. Ein Leiter muss also nach Maxwell betrachtet werden als ein Dielektrikum von dem Induktionsvermögen Null, und nach Potier als ein solches von unbegrenztem Induktionsvermögen. Die Folgerung aus der Potier'schen Hypothese lässt sich bei der Zellentheorie leicht einsehen.

In dieser Theorie nämlich stellt man sich vor, dass ein vollkommenes Dielektrikum von vollkommen leitenden Zellen gebildet wird, welche von einander durch vollkommen isolirende Zwischenwände getrennt sind.

Wie gestaltet sich nun die Sache für einen Körper, der die Mitte zwischen einem Dielektrikum und einem Leiter hält, d. h. für ein unvollständiges Dielektrikum? Die Formeln von Maxwell und die von Potier geben verschiedene Lösungen dieser Frage.

Wenn wir die Formeln von Maxwell annehmen, so setzen wir damit voraus, dass die die Zellen trennenden Zwischenwände nicht vollkommen isoliren, dass also ihr spezifisches Leitungsvermögen C nicht ganz Null ist.

173. Mit Potier dagegen würden wir annehmen, dass die leitenden Zellen nicht vollkommene Leiter sind, d. h. dass ihre Leitungsfähigkeit C nicht mehr unbegrenzt ist.

Allerdings dürften die Verhältnisse in Wirklichkeit schwerlich so einfach liegen, wie es Maxwell und Potier voraussetzen. Vielleicht müsste man beide Hypothesen verbinden: unvollkommen leitende Zellen, die durch unvollkommen isolirende Zwischenräume getrennt sind.

Alles dies besitzt übrigens geringe Wichtigkeit, denn diese sämtlichen Hypothesen können nur als erste Annäherung betrachtet werden, die dem gegenwärtigen Stande der Wissenschaft entspricht; hiernach haben wir nur ein Interesse daran, einerseits gewöhnliche Leiter zu betrachten, andererseits vollkommene Dielektrika.

Kapitel XI.

Elektromagnetische Theorie des Lichtes.

174. Folgerungen aus den Maxwell'schen Theorien. Aus den verschiedenen, in den vorhergehenden Kapiteln auseinandergesetzten Theorien ergibt sich unzweifelhaft, dass Maxwell fortwährend bestrebt ist, eine Erklärung der elektrischen und elektromagnetischen Erscheinungen, welche gewöhnlich auf Fernwirkung zurückgeführt werden, durch die Bewegung eines hypothetischen, den Raum erfüllenden Fluidum zu finden. Wir konnten feststellen, dass Maxwell seinen Zweck nur unvollkommen erreicht hat, besonders sahen wir in Kapitel IV, dass, wenn es möglich ist, den elektrostatischen Anziehungen und Abstossungen durch die Drucke und Spannungen eines die Dielektrika erfüllenden Fluidum Rechnung zu tragen, die Eigenschaften, welche man dann diesem Fluidum zuertheilen muss, unvereinbar sind mit denjenigen, welche ihm Maxwell in anderen Theilen seines Werkes zuschreibt. Trotz der Bemühungen Maxwell's haben wir also noch keine vollständige mechanische Erklärung dieser Erscheinungen; nichtsdestoweniger besitzen die Arbeiten dieses Physikers eine grundlegende Bedeutung: sie zeigen nämlich, dass eine solche Erklärung überhaupt möglich ist.

175. Wir wollen aber jetzt von den wenigen Widersprüchen absehen, die wir in dem Werke von Maxwell fanden, und uns eingehender mit der Theorie beschäftigen, welche er zur Erklärung des Elektromagnetismus und der Induktion aufgestellt hat und die wir in Kapitel IX auseinandersetzen. Eine der wichtigsten Ergebnisse aus dieser Theorie, welche an sich schon unsere ganze Bewunderung verdient, ist die Uebereinstimmung der wesentlichen Eigenschaften des Aethers, der nach Fresnel die Lichtschwingungen übermittelt, mit denjenigen des Fluidum, welches nach der Voraussetzung von Maxwell den elektromagnetischen Wirkungen zu Grunde liegt. Diese Uebereinstimmung der Eigenschaften ist in der That eine Be-

stätigung der Ansicht von dem Vorhandensein eines Fluidum, das als Träger der Energie dient.

„Es wäre philosophisch nicht zu rechtfertigen, wollte man, so oft es eine neue Erscheinung zu erklären giebt, den ganzen Raum auch mit einem neuen Medium füllen; hat aber das Studium zweier verschiedener Wissenszweige unabhängig zu der Conception eines Mediums geführt, und ist man zudem gezwungen, dem Medium, wenn es zur Erklärung der einen Erscheinungsklasse — der des Elektromagnetismus — dienen soll, dieselben Eigenschaften, wie wenn es zum Verständniss der anderen Erscheinungsklasse — der des Lichtes — benutzt wird, zuzusprechen, dann dürfte die Wahrscheinlichkeit für die physikalische Existenz eines solchen Mediums erheblich verstärkt werden.“ (Maxwell, Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus. Deutsche Uebersetzung von Weinstein. II, § 781.)

176. Da der Aether und das Maxwell'sche Fluidum dieselben Eigenschaften besitzen, so lässt sich das Licht als ein elektromagnetischer Vorgang betrachten, und die Schwingungsbewegung, welche auf unserer Netzhaut den Eindruck einer Lichterscheinung hervorruft, muss von periodischen Störungen des magnetischen Feldes herühren. Wenn dem so ist, so wird man aus den allgemeinen Gleichungen dieses Feldes die Erklärung der Lichterscheinungen ableiten können. Dieser Erklärungsweise hat man den Namen der „Elektromagnetischen Theorie des Lichtes“ gegeben.

Diese Theorie führt nothwendiger Weise zu Beziehungen zwischen den Werthen der optischen und elektrischen Konstanten eines Körpers. Wenn dieselben numerisch durch die Versuchsergebnisse bestätigt werden, so liefert dieser Umstand ebenso viele zwar indirekte, aber nichts desto weniger sehr triftige Beweise für die Richtigkeit der Theorie. Eine der besten Bestätigungen ist die befriedigende Uebereinstimmung zwischen den von Foucault, Fizeau und Cornu etc. gefundenen Werthen für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes und denjenigen, welche aus der elektromagnetischen Theorie abgeleitet werden können. Wir wollen jetzt die Formel aufstellen, vermöge deren diese Geschwindigkeit als Funktion der messbaren elektrischen Konstanten des Medium, in welchem die Fortpflanzung vor sich geht, ausgedrückt werden kann.

177. **Gleichungen für die Fortpflanzung einer magnetischen Störung in einem Dielektrikum.** Da alle durchsichtigen Körper mehr oder weniger vollkommene Isolatoren sind, wobei man allerdings von elektrolytischen Lösungen absehen muss, so beschränken wir unsere Untersuchung zunächst auf die Betrachtung der Dielektrika.

Wir nehmen ferner an, dass die materiellen Moleküle des Medium, welches die magnetischen Störungen fortpflanzt, zunächst in Ruhe bleiben.

Nach dieser letzten Annahme sind die Komponenten x' , y' , z' der Geschwindigkeit eines materiellen Punktes Null, und die Gleichungen (V) des § 167 reduciren sich auf die folgenden:

$$P = -\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

$$Q = -\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial y},$$

$$R = -\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

Da das elektrostatische Potential ψ von elektrischen Massen herrührt, die weder ihren Werth, noch ihre Lage ändern, so ist diese Grösse, ebenso wie ihre partiellen Differentialquotienten nach x , y , z , unabhängig von der Zeit; durch Differentiation der vorhergehenden Gleichungen nach t erhalten wir demnach

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial Q}{\partial t} = -\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}. \end{array} \right.$$

In Folge der Annahme, dass die magnetische Störung in einem dielektrischen Medium vor sich geht, sind die Geschwindigkeitskomponenten u , v , w der Elektrizität mit den Komponenten der elektromotorischen Kraft durch die Gleichungen (VIII) verknüpft, aus denen wir die Differentialquotienten von P , Q , R nach t finden können. Setzen wir die Werthe dieser Differentialquotienten in die vorhergehenden Gleichungen ein, so ergibt sich:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} 4\pi u = -K \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}, \\ 4\pi v = -K \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}, \\ 4\pi w = -K \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}. \end{array} \right.$$

Um die Differentialgleichungen zu erhalten, welche F, G, H als Funktion der Zeit liefern, müssen wir u, v, w als Funktionen von F, G, H und deren Differentialquotienten ausdrücken. Hierzu benützen wir die Gleichungen (I), (II) und (III).

Die Gleichungen (I) und (III) geben uns:

$$\mu \alpha = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z},$$

$$\mu \beta = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x},$$

$$\mu \gamma = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Hieraus berechnen wir die Differentialquotienten von α, β, γ nach x, y, z und setzen die so gefundenen Werthe in die Gleichungen (II) ein; wir erhalten dann:

$$4 \pi \mu u = \frac{\partial J}{\partial x} - \Delta F,$$

$$4 \pi \mu v = \frac{\partial J}{\partial y} - \Delta G,$$

$$4 \pi \mu w = \frac{\partial J}{\partial z} - \Delta H,$$

worin J die Summe der partiellen Differentialquotienten

$$J = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}$$

bezeichnet.

Eliminiren wir aus diesen Gleichungen u, v, w mit Hülfe der Gleichungen (2), so finden wir die gesuchten Differentialgleichungen:

$$(A) \quad \left\{ \begin{array}{l} K_1 \mu \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \Delta F - \frac{\partial J}{\partial x}, \\ K_2 \mu \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = \Delta G - \frac{\partial J}{\partial y}, \\ K_3 \mu \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \Delta H - \frac{\partial J}{\partial z}. \end{array} \right.$$

In dieser Form sind die Gleichungen den Bewegungsgleichungen eines Moleküls in einem elastischen Medium¹⁾ ähnlich, und folglich auch denjenigen der Bewegung eines Aethermoleküls; hierin liegt eine erste Bestätigung der Annahme von der elektromagnetischen Natur der Lichtschwingungen.

178. Da diese linearen Gleichungen konstante Koeffizienten besitzen, so stellen auch die nach einer beliebigen Variablen genommenen Differentialquotienten der Funktionen F, G, H , welche denselben Gleichungen genügen, eine Lösung der letzteren dar; ausserdem ist auch noch eine lineare Verbindung dieser Differentialquotienten anwendbar. Folglich genügen die Komponenten a, b, c der magnetischen Induktion, welche mit denen des elektromagnetischen Moments durch die Beziehungen (III) verknüpft sind, den Gleichungen (A). Uebrigens vereinfachen sich in diesem Fall die letzteren, denn die Grösse J wird dann

$$J = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z},$$

und wir wissen, dass die Summe dieser partiellen Differentialquotienten Null ist (§ 102). Wir haben also:

$$K_{\mu} \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = \Delta a,$$

$$K_{\mu} \frac{\partial^2 b}{\partial t^2} = \Delta b,$$

$$K_{\mu} \frac{\partial^2 c}{\partial t^2} = \Delta c.$$

Die Komponenten α, β, γ der magnetischen Kraft müssen ebenfalls den Gleichungen (A) genügen, da sie sich von a, b, c nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden; die Summe J der partiellen Differentialquotienten bleibt aber dann in den Gleichungen stehen.

Endlich sind die Komponenten u, v, w der Verschiebungsgeschwindigkeit, welche lineare und homogene Funktionen der Differentialquotienten von α, β, γ darstellen, ebenfalls Lösungen der Gleichungen (A). Da nun die Inkompressibilität der Elektrizität

¹⁾ Siehe *Théorie mathématique de la lumière* § 33.

durch die Bedingungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

dargestellt wird, so verschwindet auch hierbei J aus den Gleichungen.

179. Wenn übrigens, wie Maxwell annimmt (§ 134), die Komponenten F , G , H des elektromagnetischen Moments der Bedingung

$$J = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0$$

unterworfen sind, so enthalten die Gleichungen (A) und diejenigen, welche die Komponenten der magnetischen Kraft geben, nicht mehr die Grösse J . Aber der Verzicht auf diese Hypothese ändert in keiner Weise die Resultate, zu denen die elektromagnetische Lichttheorie führt, denn J verschwindet trotzdem, wenn man annimmt, dass die Störungen des magnetischen Felds periodisch verlaufen.

Differentiiren wir nämlich die Gleichungen (A) nach x , y , z und addiren dieselben, so erhalten wir

$$K\mu \frac{\partial^2 J}{\partial t^2} = 0.$$

J muss also eine lineare Funktion der Zeit sein, oder eine Konstante, oder Null; dasselbe gilt gleichzeitig für die Differentialquotienten von J nach x , y , z . Wenn nun F , G , H periodische Funktionen der Zeit darstellen, so sind J und seine Differentialquotienten ebenfalls periodische Funktionen; folglich können diese Grössen weder Funktionen ersten Grades von t sein, noch Konstanten; sie müssen also Null sein.

180. Ebene Wellen. Wir wollen annehmen, dass die elektromagnetischen Erscheinungen, die im Dielektrikum auftreten, nur von der Zeit und von der Z -Koordinate des betrachteten Punktes abhängen. In diesem Falle sind die Vorgänge im selben Augenblick die gleichen für alle Punkte einer zur XY -Ebene parallelen Ebene, das heisst, die magnetischen Störungen bilden ebene Wellen.

Die Komponenten F , G , H des elektromagnetischen Moments hängen dann nicht von x und y ab, so dass die Differentialquotienten

dieser Grössen nach x und y Null sind, und die Gleichungen (A) sich (mit Hülfe der Gleichung $\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} = 0$) reduciren auf:

$$(B) \quad \begin{cases} \mathbf{K} \mu \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial z^2}, \\ \mathbf{K} \mu \frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial z^2}, \\ \mathbf{K} \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0. \end{cases}$$

Diese letzte Gleichung zeigt, dass in dem Falle, wo die Störungen periodisch verlaufen, die Komponente \mathbf{H} Null ist. Folglich liegt das elektromagnetische Moment in der Wellenebene. Dasselbe gilt von den anderen Grössen: der Geschwindigkeit der Elektrizität, der elektromagnetischen Kraft etc., deren Komponenten analogen Gleichungen genügen. Man kann also, wie bei den Aetherschwingungen in der gewöhnlichen Lichttheorie, sagen, dass die periodischen elektromagnetischen Störungen transversaler Natur sind.

181. Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer ebenen periodischen Welle. Wenn wir setzen

$$V = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{K} \mu}},$$

so werden die beiden ersten Gleichungen (B)

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial z^2}.$$

In dieser Form sind die Gleichungen identisch mit denen, welche die Verschiebungskomponenten eines Moleküls in einem elastischen Medium für den Fall angeben, dass die Bewegung in transversalen ebenen Wellen vor sich geht. Wir können also annehmen, dass die elektromagnetischen Störungen sich mit einer Geschwindigkeit von $\frac{1}{\sqrt{\mathbf{K} \mu}}$ fortpflanzen.

182. Grösse dieser Geschwindigkeit im luftleeren Raum. Da der Permeabilitäts-Koeffizient μ für den luftleeren Raum im elektro-

magnetischen Maasssystem gleich 1 ist, so hat die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der ebenen Wellen in diesem Medium den Werth $\frac{1}{\sqrt{K}}$, wobei K in demselben System ausgedrückt sein muss. Diese Grösse wollen wir nun bestimmen.

Die X-Komponente der elektrischen Verschiebung ist gegeben durch die Formel:

$$f = -\frac{K}{4\pi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Das spezifische Induktionsvermögen hat in dem elektrostatischen System keine Dimensionen, deshalb sind die Dimensionen der Verschiebung in diesem System diejenigen des Quotienten eines Potentials durch eine Länge und folglich einer Elektrizitätsmenge durch das Quadrat einer Länge. Es folgt daraus, dass beim Uebergang aus einem Maasssystem zu einem anderen, wenn hierbei die Längeneinheit dieselbe bleibt, die Zahlen, welche die Verschiebung in beiden Systemen messen, in demselben Verhältnisse stehen, wie die, welche dieselbe Elektrizitätsmenge ausdrücken. Wenn wir also mit v das Verhältniss der elektrostatischen Einheit einer Elektrizitätsmenge zur elektromagnetischen Einheit bezeichnen, so ist die Zahl, welche eine Elektrizitätsmenge oder eine Verschiebung im letzteren System angibt, gleich dem Produkt von $\frac{1}{v}$ in die Zahl, welche dieselbe Grösse im elektrostatischen Maasssystem ausdrückt. Andererseits verhalten sich bekanntlich die Einheiten der elektromotorischen Kraft in beiden elektrischen Maasssystemen umgekehrt wie die Dimensionen der Elektrizitätsmenge; folglich ist die Zahl, welche $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ im elektromagnetischen System ausdrückt, das Produkt von v in das Maass dieser Grösse nach der elektrostatischen Einheit. Hieraus folgt, dass der Werth des Quotienten von $f: \frac{\partial \psi}{\partial x}$ und demnach auch der Werth von K mit $\frac{1}{v^2}$ zu multipliciren ist, wenn man vom elektrostatischen zum elektromagnetischen System übergeht. Da das spezifische Induktionsvermögen des leeren Raumes im elektrostatischen System 1 ist, so beträgt sein Werth im elektromagnetischen System $\frac{1}{v^2}$, und wir erhalten demnach für die Geschwindigkeit

$$V = \frac{1}{\sqrt{K}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{v^2}}} = v;$$

die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer elektromagnetischen Störung ist also gleich dem Verhältniss v der Einheiten der Elektrizitätsmenge in den beiden elektrischen Maasssystemen.

183. Diese Grösse ist von zahlreichen Beobachtern nach verschiedenen Methoden bestimmt worden, die man in drei Klassen theilen kann, je nachdem v durch das Verhältniss der Einheiten der Elektrizitätsmenge gegeben ist, oder durch das der elektromotorischen Kräfte, oder endlich durch Vergleichung der Kapacitäten. Die Resultate von einigen dieser Bestimmungen des Werthes von v im C. G. S, multiplicirt mit 10^{-10} , mögen hier folgen:

		$v \cdot 10^{-10}$	
1. Gruppe.	Weber und Kohlrausch	3,1074	
2. Gruppe.	{	Maxwell	2,8800
		Thomson	2,8250
		Kichan und King	2,8920
		Shida	2,9580
		Exner	2,9200
3. Gruppe.	{	Ayrton und Perry	2,9410
		J. J. Thomson	2,9630
		Klemencic	{ 3,0180
			{ 3,0140
		Himstedt	{ 3,0074
			{ 3,0081
		E. B. Rosa	{ 2,9993
	{ 3,0004		

Für die Lichtgeschwindigkeit im luftleeren Raum fand Cornu $3,004 \times 10^{10}$ cm mit einem wahrscheinlichen Fehler von unter $1/1000$. Man sieht, dass diese Zahl bis auf eine sehr kleine Grösse, von der Ordnung der Beobachtungsfehler, mit den von Klemencic, Himstedt und Rosa angegebenen Werthen übereinstimmt, deren Methoden die grösste Genauigkeit zu besitzen scheinen. Die Maxwell'sche Theorie erfährt also eine so ausreichende Bestätigung, als man nur wünschen kann.

Wir wollen hinzufügen, dass es in neuerer Zeit Hertz gelang, elektromagnetische Wellen in der Luft hervorzubringen und ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit zu messen; er fand hierbei eine Zahl

von derselben Grössenordnung, wie die Lichtgeschwindigkeit. Es ist dies noch eine weitere, sehr befriedigende Bestätigung der elektromagnetischen Lichttheorie, zumal wenn man die Schwierigkeiten berücksichtigt, welche sich der Messung der in die Hertz'sche Berechnung eingehenden Grössen entgegenstellen. Wir werden später auf diese Versuche zurückkommen.

184. Beziehung zwischen dem Brechungsquotient und dem Induktionsvermögen einer isolirenden Substanz. Da die magnetische Permeabilität der durchsichtigen Medien sehr nahe gleich der des luftleeren Raumes ist, so ergibt sich für das Verhältniss der Fortpflanzungsgeschwindigkeit V_1 der elektromagnetischen Wellen im Vakuum zur Geschwindigkeit V dieser Wellen in einem durchsichtigen Medium

$$\frac{V_1}{V} = \sqrt{K};$$

hierbei bedeutet K das spezifische Induktionsvermögen dieses letzteren Medium, ausgedrückt im elektrostatischen System.

Nach der gewöhnlichen Lichttheorie ist dies Verhältniss gleich dem absoluten Brechungsquotient n ; es folgt deshalb

$$K = n^2.$$

Da aber n mit der Wellenlänge veränderlich ist, so kann diese Gleichung offenbar nur dann erfüllt werden, wenn die Grössen K und n sich auf Erscheinungen derselben Periode beziehen. Wir müssen also einen Brechungsquotienten wählen, der Wellen von sehr langer Periode entspricht, da diese allein vergleichbar sind mit den verhältnissmässig langsamen Vorgängen, mit deren Hülfe das spezifische Induktionsvermögen bestimmt wird. Der Werth dieses Quotienten kann annähernd erhalten werden, indem man in der Cauchy'schen Formel

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4}$$

$\lambda = \infty$ setzt; man erhält dann $n = A$.

Aus Versuchen über das Wärmespektrum folgt indessen, dass die Formel von Cauchy nicht zur Darstellung der Brechungsquotienten für lange Wellen genügt; am besten eignet sich hierzu die Formel

$$n = A \lambda^2 + B + \frac{C}{\lambda^2}.$$

Man würde also für $\lambda = \infty$ die unzulässige Folgerung $n = \infty$ erhalten; jedenfalls sieht man hieraus deutlich, dass eine Extrapolation dieser Art wenig Vertrauen verdient. Zweifellos ist dies auch die Hauptursache für die Abweichungen, auf die wir später zurückkommen werden.

185. Zu der Zeit, als Maxwell seine Abhandlungen schrieb, war Paraffin das einzige Dielektrikum, für dessen Induktionsvermögen eine hinreichende genaue Bestimmung vorlag. An dieser Substanz allein liess sich also die Richtigkeit der Beziehung $K = n^2$ prüfen, doch fiel diese Prüfung noch wenig zufriedenstellend aus. Gibson und Barclay hatten für das Induktionsvermögen des festen Paraffins 1,975 gefunden. Die Quadratwurzel davon: 1,405 unterscheidet sich bedeutend von dem Werth 1,422 des Brechungsquotienten für eine unendlich grosse Wellenlänge, der sich aus den Versuchen von Gladstone mit geschmolzenem Paraffin ergibt. Allerdings beziehen sich die verglichenen Zahlen auf zwei verschiedene Aggregatzustände des Paraffins, so dass dies Resultat die Theorie nicht beeinträchtigen kann. So schliesst denn auch Maxwell nur daraus, dass die Quadratwurzel von K , wenn sie auch nicht vollständig den Brechungsquotienten darstellt, doch jedenfalls das wesentlichste Glied desselben bildet.

186. Seitdem sind zahlreiche Bestimmungen des spezifischen Induktionsvermögens durchsichtiger Körper vorgenommen worden, deren Resultate wir hier von dem uns interessirenden Gesichtspunkt aus mittheilen.

Für die festen Körper unterscheidet sich die Quadratwurzel von K mitunter beträchtlich von dem Brechungsquotient. Nach Hopkinson sind die Brechungsquotienten der verschiedenen Glasarten immer kleiner als die Quadratwurzeln aus ihrem Induktionsvermögen; für gewisse Gläser betragen sie nur die Hälfte.

Etwas besser wird die Relation $K = n^2$ bei den Flüssigkeiten erfüllt; für gewisse flüssige Kohlenwasserstoffe ergeben die Versuche von Hopkinson, Negreano und Palaz eine hinreichende Uebereinstimmung. Von den beiden folgenden Tabellen enthält die erste die Resultate von Negreano, die zweite die von Palaz; der Brechungsquotient bezieht sich auf die Natriumlinie D.

I.

	K	\sqrt{K}	n_D
Reines Benzin	2,2921	1,5139	1,5062
Toluol	2,2420	1,4949	1,4912
Xylol (Gemisch mehrerer Isomere) . .	2,2679	1,5059	1,4897
Metaxylyl	2,3781	1,5421	1,4977
Pseudocumol	2,4310	1,5591	1,4837
Cumol	2,4706	1,5716	1,4837
Terpentinöl	2,2618	1,5039	1,4726

II.

Benzin	2,3377	1,517	1,4997
Toluol No. 1	2,3646	1,537	1,4949
„ No. 2	2,3649	1,537	1,4848
Gewöhnliches Petroleum No. 1 .	2,1234	1,457	1,4487
„ „ No. 2 .	2,0897	1,445	1,4477
Rektificirtes Petroleum	2,1950	1,481	1,4766.

Die Uebereinstimmung ist viel weniger gut bei Pflanzen- oder Thierölen. Für diejenigen, welche Hopkinson untersuchte, fand er durchweg $n > \sqrt{K}$. Palaz kommt für Rüböl und Ricinusöl zum umgekehrten Resultat:

Rüböl	$\sqrt{K} = 1,737$	$n_D = 1,4706$
Ricinusöl	„ = 2,147	„ = 1,4772.

Kürzlich hat Gouy¹⁾ das spezifische Induktionsvermögen des Wassers durch Anziehung zweier elektrisirter Platten gemessen, zwischen denen sich eine Schicht dieser Flüssigkeit befand; er erhielt $K = 80$. Es würde hieraus nach der Maxwell'schen Gleichung ungefähr $n = 9$ folgen, eine Zahl, die fast sieben Mal grösser ist, als der wirkliche Brechungsquotient. Unsere Gleichung lässt uns also in diesem Fall vollständig im Stich. Allerdings wurde dieselbe nur für isolirende Körper aufgestellt, eine Bedingung, die für das Wasser bei Weitem nicht erfüllt ist, da es immer wegen der darin enthaltenen Salze mehr oder weniger leitet. Aber man sollte wenigstens für K Werthe finden, die immer kleiner werden, je reineres Wasser angewandt wird; in Wirklichkeit scheint aber gerade das Umgekehrte der Fall zu sein.

Bei den Gasen endlich finden wir eine sehr gute Ueberein-

¹⁾ C. R. CVI. S. 540, 1888.

stimmung zwischen den Grössen \sqrt{K} und n . Die folgende Tabelle enthält einige dieser Werthe, und zwar rühren die Zahlen für das spezifische Induktionsvermögen aus Versuchen von Boltzmann her.

	K	\sqrt{K}	n
Luft	1,000590	1,000295	1,000294
Kohlensäure . .	1,000946	1,000473	1,000449
Wasserstoff . .	1,000264	1,000132	1,000138
Kohlenoxyd . .	1,000690	1,000345	1,000340
Stickoxydul . .	1,000984	1,000492	1,000503
Oelbildendes Gas	1,001312	1,000656	1,000678
Sumpfgas . . .	1,000944	1,000472	1,000443.

187. Fassen wir das Vorhergehende zusammen, so können wir sagen, dass die Gleichung $K = n^2$ für alle Gase und einige Flüssigkeiten erfüllt wird; sie gilt dagegen nicht für die meisten Flüssigkeiten und festen Körper, besonders schlecht aber für Wasser. Trotz der grossen Zahl von Untersuchungen sind wir also nicht besser als Maxwell über den Genauigkeitsgrad dieser Gleichung unterrichtet.

Sieht man aber vom Wasser ab, das vermöge seiner elektrolytischen Natur bei dem geringsten Salzgehalt vollständig aus der Zahl der Dielektrika auszuscheiden ist, so sind die zwischen n und der Quadratwurzel von K festgestellten Unterschiede nicht derart, dass man diese Beziehung aufgeben müsste, zumal wenn man die mangelhaften Bedingungen in Erwägung zieht, unter denen man ihre Gültigkeit prüfte. Zunächst sind die zum Zweck der Bestätigung des Gesetzes untersuchten Substanzen oft durchaus nicht vollkommene Isolatoren, wie man es verlangen müsste. Die meisten festen Körper isoliren weit weniger gut als die Gase und einige Flüssigkeiten, wie z. B. Petroleum und gut gereinigtes Benzin; und gerade die letzteren Substanzen bestätigen das Maxwell'sche Gesetz am besten. In zweiter Linie sind sowohl das Induktionsvermögen wie auch der Brechungsquotient mit der Temperatur veränderlich, und im Allgemeinen wurden die Messungen der beiden zu vergleichenden Grössen bei verschiedenen Temperaturen angestellt. Endlich hängen die Resultate bekanntlich bei allen zur Bestimmung von K angewandten Methoden von der Geschwindigkeit der Aenderung des Feldes ab, in dem sich die betreffende Substanz befindet; vielleicht würden also die beiden Seiten der Gleichung besser erfüllt sein, wenn die Aenderungen des Feldes ebenso schnell erfolgten, als die Lichtschwingungen. Aus all diesen Gründen darf man sich nicht wundern, wenn die Uebereinstimmung nicht so be-

friedigend ausfällt, als die Vergleichung der Grösse v mit der Lichtgeschwindigkeit im luftleeren Raum.

188. Richtung der elektrischen Verschiebung. Wir betrachten eine ebene elektromagnetische Welle, die parallel zu der XY-Ebene liegen soll, und wählen zur X-Axe eine Parallele zum elektromagnetischen Moment; dann ist $G = H = 0$. Der Ausdruck für F hängt von der Natur der Störung ab; wir wollen annehmen, es sei

$$F = A \cos \frac{2\pi}{\lambda} (z - Vt).$$

Nach den Gleichungen (III) des vorhergehenden Kapitels erhalten wir dann für die Komponenten der magnetischen Induktion:

$$a = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} = 0,$$

$$b = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x} = -A \frac{2\pi}{\lambda} \sin \frac{2\pi}{\lambda} (z - Vt),$$

$$c = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Die magnetische Induktion fällt also in die Richtung der Y-Axe, d. h. sie steht senkrecht zur Richtung des elektromagnetischen Moments. Dasselbe gilt für die magnetische Kraft, welche dieselbe Richtung wie die Induktion besitzt, da die Komponenten dieser beiden Grössen sich nur durch einen konstanten Faktor μ unterscheiden.

Wenn die Komponenten der Induktion bekannt sind, gestatten die Gleichungen (II) diejenigen der Verschiebungsgeschwindigkeit zu berechnen; wir finden hierfür

$$4\pi u = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} = \frac{A}{\mu} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \cos \frac{2\pi}{\lambda} (z - Vt),$$

$$4\pi v = \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} = 0,$$

$$4\pi w = \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0.$$

Diese Gleichungen zeigen, dass die Verschiebungsgeschwindigkeit, ebenso wie das elektromagnetische Moment, parallel zur X-Axe gerichtet ist. Offenbar gilt dies dann auch für die Richtung der

Verschiebung selbst, und nach den Gleichungen (VII) auch für die Richtung der sie erzeugenden elektromotorischen Kraft.

Somit haben an einem Punkt einer ebenen Welle die elektrische Verschiebung, die elektromotorische Kraft und das elektromagnetische Moment dieselbe Richtung; die elektromagnetische Kraft und die Induktion stehen senkrecht dazu; alle diese Richtungen liegen übrigens in der Wellenebene.

189. Es fragt sich nun, wie die elektrische Verschiebung zu der Polarisationssebene des Lichtes gerichtet ist, wenn die elektromagnetischen Störungen rasch genug verlaufen, um zu Lichterscheinungen Veranlassung zu geben. Die Hypothese von Maxwell für den Ausdruck der kinetischen Energie des Medium, in dem die Wellen erzeugt werden, und das Studium der verschiedenen Theorien, die zur Erklärung der Reflexion an durchsichtigen Medien aufgestellt wurden, gestatten eine leichte Lösung dieser Frage.

Bekanntlich lassen sich in der gewöhnlichen Lichttheorie die bei isotropen Medien beobachteten Erscheinungen ebensogut durch die Fresnel'sche Annahme erklären, nach der die Aetherschwingungen rechtwinkelig zur Polarisationssebene vor sich gehen, wie nach der Neumann'schen, bei der sie in der Polarisationssebene liegen. Wir haben ausserdem bei der Glasreflexion gezeigt¹⁾, dass diese beiden Hypothesen für die Dichte des Aethers zu entgegengesetzten Resultaten führen; wenn man die Hypothese von Fresnel annimmt, so muss die Dichte als variabel betrachtet werden; entscheidet man sich dagegen für die Neumann'sche Theorie, so ist die Dichte konstant zu setzen.

In der einen aber wie in der anderen Theorie besitzt die kinetische Energie den Werth

$$\frac{1}{2} \int \rho (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) d\tau,$$

wo ρ die Dichte bezeichnet, und ξ' , η' , ζ' die Geschwindigkeitskomponenten des Aethermoleküls. Nach Maxwell ist die kinetische Energie dasselbe, wie das elektrodynamische Potential des in dem Medium befindlichen Stromsystems; der Ausdruck für diese Energie lautet also, wenn das Medium als magnetisch angenommen wird (§§ 143 und 144)

$$\frac{1}{8\pi} \int (\alpha a + \beta b + \gamma c) d\tau,$$

¹⁾ Théorie mathématique de la Lumière, §§ 199 p. p.

oder wenn man die Komponenten der Induktion durch die Komponenten der elektromagnetischen Kraft ausdrückt,

$$\frac{1}{8\pi} \mu \int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) dr.$$

Um eine Uebereinstimmung der Maxwell'schen Theorie mit der gewöhnlichen Lichttheorie zu ermöglichen, die doch bis jetzt den Thatsachen Rechnung trägt, müssen wir annehmen, dass in diesen beiden Theorien die Ausdrücke für die kinetische Energie dieselben sind. Wir müssen also setzen

$$\rho = \frac{\mu}{4\pi},$$

$$\xi' = \alpha, \quad \eta' = \beta, \quad \zeta' = \gamma.$$

Da nun μ für ein isotropes Medium konstant ist, so zeigt uns die erste dieser Gleichungen, dass die Dichte ρ des Aethers ebenfalls konstant sein muss; hierdurch werden wir also auf die Neumann'sche Hypothese geführt. Dann liegt aber die Richtung der elektromagnetischen Kraft, welche nach den drei letzten Gleichungen mit derjenigen der Schwingungen des Aethermoleküls zusammenfällt, in der Polarisationsebene. Wir kommen also nach dem im vorhergehenden Paragraphen Gesagten zu dem Schluss, dass die elektrische Verschiebung senkrecht zur Polarisationsebene steht, wenigstens wenn man die Hypothese von Maxwell annimmt.

190. Fortpflanzung in einem anisotropen Medium. — Doppelbrechung. Bis jetzt haben wir immer stillschweigend vorausgesetzt, dass das isolirende Medium, welches die elektromagnetischen Störungen fortpflanzt, isotrop sei; wir wollen jetzt zusehen, welche Gestalt die Gleichungen für ein anisotropes Medium annehmen.

In § 73 fanden wir, dass die Analogie der Elektrizitätsbewegung innerhalb der Zellen eines Dielektrikum mit dem Gesetz von der Wärmebewegung nach der Fourier'schen Theorie, bei passender Wahl der Koordinaten, zu folgenden Werthen für die Komponenten der Verschiebung in einem anisotropen Medium führt:

$$f = -\frac{K}{4\pi} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - X \right),$$

$$g = -\frac{K'}{4\pi} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - Y \right),$$

$$h = -\frac{K''}{4\pi} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - Z \right);$$

hierin bezeichnet ψ das elektrostatische Potential, X, Y, Z die Komponenten der elektromotorischen Kraft, die von einer beliebigen anderen Ursache herrühren. Nimmt man an, dass diese elektromotorische Kraft nur der Induktion durch Ströme und Magnete des Feldes zuzuschreiben ist, so werden unsere Gleichungen:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} f = \frac{K}{4\pi} P, \\ g = \frac{K'}{4\pi} Q, \\ h = \frac{K''}{4\pi} R. \end{array} \right.$$

191. Es ist indessen zur Aufstellung dieser Formeln nicht nöthig, auf die Hypothese von der Zellenanordnung des Dielektrikum zurückzugreifen.

Nach den Formeln (VII) des vorhergehenden Kapitels sind die Komponenten der elektrischen Verschiebung in einem isotropen Medium denjenigen der elektromotorischen Kraft proportional; die einfachste Hypothese ist also die, anzunehmen, dass f, g, h für ein anisotropes Medium lineare, homogene Funktionen von P, Q, R darstellen:

$$\begin{aligned} f &= A P + B Q + C R, \\ g &= A' P + B' Q + C' R, \\ h &= A'' P + B'' Q + C'' R. \end{aligned}$$

Die neun Koeffizienten A, B, C, \dots sind übrigens nicht vollkommen willkürlich; wir können vielmehr nachweisen, dass sie eine symmetrische Determinante bilden.

Wenn wir den Verschiebungskomponenten die Zuwachse df, dg, dh ertheilen, so wird der Ausdruck für die Arbeit der elektromotorischen Kraft

$$P df + Q dg + R dh,$$

oder, nach den vorhergehenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} &P (A dP + B dQ + C dR) + Q (A' dP + B' dQ + C' dR) \\ &+ R (A'' dP + B'' dQ + C'' dR), \end{aligned}$$

oder endlich

$$(A P + A' Q + A'' R) dP + (B P + B' Q + B'' R) dQ + (C P + C' Q + C'' R) dR.$$

Damit der Satz von der Erhaltung der Energie gilt, muss diese letztere Grösse ein vollständiges Differential sein. Diese Bedingung wird durch drei Gleichungen ausgedrückt, deren erste lautet:

$$\frac{\partial (A P + A' Q + A'' R)}{\partial R} = \frac{\partial (C P + C' Q + C'' R)}{\partial P}.$$

Es folgt hieraus

$$A'' = C.$$

Die beiden anderen Gleichungen liefern

$$B = A', \quad C' = B''.$$

Hieraus geht hervor, dass die Determinante der Koeffizienten symmetrisch ist; damit vermindert sich die Zahl derselben auf 6.

Durch die Wahl der Koordinatenaxen verfügen wir über die Werthe von drei derselben, wir können also die Richtung der Axen so wählen, dass die nicht auf der Diagonale der Determinante stehenden Grössen Null werden. Die Werthe von f, g, h reduciren sich dann auf die Ausdrücke (1).

192. Für die Gleichungen, welche die Komponenten a, b, c der magnetischen Induktion als Funktion der Komponenten α, β, γ der elektromagnetischen Kraft angeben, müssten wir, um sie als Funktionen von P, Q, R darzustellen, dieselbe Annahme machen, wie für die Grössen f, g, h . Wir hätten dann die Gleichungen (I) des vorhergehenden Kapitels durch drei Gleichungen derselben Form zu ersetzen, die sich nur dadurch unterscheiden, dass der Koeffizient μ bei jeder von ihnen einen verschiedenen Werth μ, μ', μ'' besässe. Da indessen die magnetische Permeabilität der durchsichtigen Körper immer sehr nahe gleich 1 ist, so besitzt dieser Koeffizient keinen Einfluss auf das Resultat der Rechnungen. Um die Darstellung nicht unnöthig zu compliciren, nehmen wir μ als konstant und $= 1$ an.

193. Differentiiren wir die Gleichungen (1) nach t , so erhalten wir nach Einsetzen der § 177 gefundenen Werthe von

$$\frac{\partial P}{\partial t}, \quad \frac{\partial Q}{\partial t}, \quad \frac{\partial R}{\partial t}$$

in die rechte Seite folgende Relationen:

$$C) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = -\frac{1}{K} 4\pi u, \\ \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = -\frac{1}{K'} 4\pi v, \\ \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = -\frac{1}{K''} 4\pi w. \end{array} \right.$$

Andrerseits besteht die Beziehung (§ 167)

$$D) \quad \left\{ \begin{array}{l} 4\pi u = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}, \\ 4\pi v = \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \\ 4\pi w = \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}. \end{array} \right.$$

Die Gleichungen (III) des § 167 endlich werden, da wir $\mu = 1$ angenommen haben:

$$E) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}, \\ \beta = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}, \\ \gamma = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}. \end{array} \right.$$

Dies sind die drei Gruppen von Gleichungen, welche es ermöglichen, für jeden beliebigen Augenblick den Verlauf einer magnetischen Störung an sämtlichen Punkten eines anisotropen Medium zu bestimmen, vorausgesetzt, dass man ihre Anfangswerthe kennt.

194. Wenn das Licht wirklich einer Störung dieser Art zuzuschreiben ist, so müssen uns diese Gleichungen zur Erklärung der Doppelbrechung führen, die das Licht beim Durchgang durch ein anisotropes Medium aufweist. Das Studium, welches wir bereits diesem Gegenstande gewidmet haben¹⁾, gestattet uns, ohne lange Entwicklungen nachzuweisen, dass dies in der That der Fall ist.

¹⁾ Théorie mathématique de la Lumière § 144—198.

Bezeichnet man die Komponenten der Verrückung des Aethermoleküls in der Theorie von Sarrau mit ξ , η , ζ , in derjenigen von Neumann mit X , Y , Z und in der von Fresnel mit u , v , w , so bestehen bekanntlich die neun Beziehungen¹⁾

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -a u,$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -b v,$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -c w;$$

$$u = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z},$$

$$v = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x},$$

$$w = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y};$$

$$X = \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z},$$

$$Y = \frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x},$$

$$Z = \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y}.$$

Diese Gleichungen werden identisch mit den Gruppen (C), (D) und (E) des vorhergehenden Paragraphen, wenn wir setzen

$$a = \frac{1}{K}, \quad b = \frac{1}{K'}, \quad c = \frac{1}{K''},$$

$$u = 4\pi u, \quad \dots, \quad X = a, \quad \dots, \quad \xi = F, \quad \dots$$

Die drei optischen Theorien von Fresnel, Neumann und Sarrau erklären nun alle Beobachtungen gleich gut, da bis jetzt kein Versuch die eine oder andere Theorie als richtiger erwiesen hat; wir dürfen also sicher sein, dass auch die Gruppen der aus der Maxwell-

¹⁾ Loc. cit. § 178.

schen Theorie abgeleiteten Gleichungen (C), (D), (E) allen bekannten Erscheinungen genügen und mit keiner derselben im Widerspruch stehen.

195. Im Besonderen muss die Gleichung für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit zweier ebenen Wellen, die von derselben einfallenden Welle ausgehen, in der elektromagnetischen Theorie und den optischen Theorien übereinstimmen. In diesen letzteren hat sie den Ausdruck

$$\frac{l^2}{V^2 - a} + \frac{m^2}{V^2 - b} + \frac{n^2}{V^2 - c} = 0,$$

wenn l, m, n die Richtungskosinus der Normale zur Wellenebene bedeuten; mit den Bezeichnungen der elektromagnetischen Theorie erhalten wir demnach

$$\frac{l^2}{V^2 - \frac{1}{K}} + \frac{m^2}{V^2 - \frac{1}{K'}} + \frac{n^2}{V^2 - \frac{1}{K''}} = 0.$$

Es folgt hieraus, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in Richtung der Koordinatenaxen sich umgekehrt verhalten, wie die Quadratwurzeln aus den Induktionsvermögen in Richtung der nämlichen Axen oder, was dasselbe ist, dass diese Quadratwurzeln proportional sind den Brechungsindices nach den Elasticitätsaxen des Medium.

196. Diese Beziehung findet sich bei krystallisirtem Schwefel recht gut bestätigt. Die Induktionsvermögen nach den drei Elasticitätsaxen eines Krystalls aus dieser Substanz haben nach Boltzmann die Werthe¹⁾: 4,773, — 3,970, — 3,811. Die Quadratwurzeln dieser Zahlen: 2,184, — 1,99, — 1,95 sind wenig verschieden von den Brechungsquotienten für dieselben Richtungen: 2,143, — 1,96, — 1,89.

Die anderen untersuchten anisotropen Substanzen geben viel weniger zufriedenstellende Resultate.

Nach den Beobachtungen von J. Curie²⁾ über den Quarz, den Kalkspath, den Turmalin, den Beryll etc. ist die Quadratwurzel von K immer viel grösser als der Brechungsquotient; allerdings besitzen die positiven Krystalle, wie der Quarz, in Uebereinstimmung mit der Theorie ein grösseres Induktionsvermögen in Richtung der

¹⁾ Wiener Sitzungsberichte LXX, (II) p. 342, 1874.

²⁾ Lumière électrique XXIX, p. 127, 1888.

male $O n$ zur Wellenebene, und die elektromotorische Kraft hat dann dieselbe Richtung, wie die Verschiebung, was uns ja schon bekannt war.

Für die Richtungen dieser Grössen zu der Polarisationssebene folgt aus dem, was wir von der Lage dieser Ebene zu den Aetherschwingungen wissen, dass die elektromotorische Kraft und die Verschiebung fast senkrecht zur Polarisationssebene stehen, während die elektromagnetische Kraft ihr nahezu parallel ist. Bei einem isotropen Medium werden diese Grössen genau rechtwinkelig resp. parallel zur Polarisationssebene.

198. Fortpflanzung in einem unvollkommen isolirenden Medium. Absorption des Lichts. Wir haben hier die Wahl zwischen den Formeln (IX) von Maxwell und (X) von Potier (§§ 170 und 171). Da diese beiden zu denselben Resultaten führen, so wählen wir die Maxwell'schen und untersuchen die Art der Fortpflanzung einer ebenen elektromagnetischen Welle.

Wenn wir die $X Y$ -Ebene parallel zur Wellenebene annehmen und die X -Axe parallel zur Richtung des elektromagnetischen Moments, so ist $G = H = 0$ und die Gleichungen (1) des § 177 beschränken sich auf die erste

$$\frac{\partial P}{\partial t} = - \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}.$$

Hieraus folgt bei Vernachlässigung der Integrationskonstante, welche für periodische Störungen Null sein muss,

$$P = - \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Durch Einsetzen dieser Werthe in die erste der Gleichungen (IX) von Maxwell

$$u = C P + \frac{K}{4\pi} \cdot \frac{\partial P}{\partial t}$$

erhalten wir:

$$(1) \quad u = - C \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{K}{4\pi} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}.$$

Die Gruppen der Gleichungen (I), (II), (III) des § 167 ergeben aber

$$4\pi u = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} = \frac{1}{\mu} \left(- \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right),$$

oder, da F in Folge der Wahl der Koordinatenaxen nicht von y abhängt

$$4\pi u = -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}.$$

Wir erhalten also durch Elimination von u aus Gleichung (1) und dieser letzteren

$$(2) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \mu K \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + 4\pi\mu C \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Dieser Gleichung genügt eine nach der Zeit periodische Funktion von der Form

$$F = e^{i(nt - mz)},$$

wobei die Koeffizienten n und m verbunden sind durch die Gleichung:

$$m^2 = \mu K n^2 - 4\pi\mu C n i.$$

Da aber n den Werth $\frac{2\pi}{T}$ hat, wo T die Periode der Funktion bedeutet, so ist diese Grösse reell; folglich ist m^2 eine komplexe Grösse, ebenso auch m , und wir können setzen

$$m = q - pi.$$

Führen wir diesen Werth von m in die vorhergehende Gleichung ein, so erhalten wir durch Vergleichung der reellen und imaginären Theile

$$(3) \quad \begin{cases} q^2 - p^2 = \mu K n^2 \\ 2pq = 4\pi\mu C n. \end{cases}$$

Die der Gleichung (2) genügende periodische Funktion lässt sich dann schreiben

$$F = e^{-pz} e^{i(nt - qz)};$$

der reelle Theil derselben, welcher uns hinsichtlich der experimentellen Folgerungen allein interessirt, lautet

$$F = e^{-pz} \cos(nt - qz).$$

199. Sieht man von den Veränderungen von F ab, soweit sie von dem Faktor $\cos(nt - qz)$ herrühren, so zeigt dieser Ausdruck, dass der Werth des elektromagnetischen Momentes sich verändert, wie die Exponentialgrösse e^{-pz} . Nach der zweiten Bedingungs-gleichung (3) haben nun p und q dasselbe Zeichen; wenn demnach die Fortpflanzung der betrachteten ebenen Welle in Richtung der positiven z vor sich geht, so sind p und q positiv und e^{-pz} nimmt mit wachsendem z ab. Der Werth des elektromagnetischen Moments wird also in demselben Maasse kleiner, als die Welle tiefer in das betreffende Medium eindringt.

Ebenso verhält es sich mit der elektrischen Verschiebung und der elektromagnetischen Kraft; da nämlich die Werthe dieser Grössen mit denen des elektromagnetischen Moments durch eine Reihe linearer Differentialgleichungen der ersten Ordnung zusammenhängen, so enthalten sie sämmtlich in ihren Ausdrücken den Faktor e^{-pz} .

Auch für die Verschiebungsgeschwindigkeit eines leuchtenden Aethermoleküls gilt dasselbe, da wir (§ 189) gesehen haben, dass diese Geschwindigkeit der elektromagnetischen Kraft proportional ist.

Wenn demnach die magnetischen Störungen schnell genug vor sich gehen, um Lichterscheinungen hervorzurufen, so wird die Intensität des Lichtes, die proportional dem Quadrat der mittleren Geschwindigkeit eines Aethermoleküls ist, wie e^{-2pz} abnehmen.

200. In dem Fall, wo die betrachtete Substanz ein sehr geringes spezifisches Induktionsvermögen besitzt und eine magnetische Permeabilität nahe gleich 1, gehen die Gleichungen (3) über in

$$q^2 - p^2 = 0 \quad \text{oder} \quad q = p$$

und

$$2p^2 = 4\pi Cn;$$

p ist also nahezu proportional der Quadratwurzel von C . Es folgt hieraus, dass die Intensität des durch einen solchen Körper hindurchgehenden Lichtes um so schwächer wird, je grösser C ist; mit anderen Worten: *je besser der Körper die Elektrizität leitet, desto undurchsichtiger ist derselbe.*

Allerdings giebt es eine grosse Anzahl Ausnahmen von dieser Regel. Im Allgemeinen erweisen sich jedoch die durchsichtigen festen Körper als gute Isolatoren, während die Leiter sehr undurchsichtig sind. Ausserdem folgt aus den Untersuchungen von J. Curie¹⁾

¹⁾ Lumière électrique XXIX, p. 322, 1888.

über die Dielektrika, dass die nach wachsender Leitungsfähigkeit geordnete Tabelle dieser Körper fast identisch ist mit einer nach abnehmender Diathermanität geordneten. Es mögen hier diese beiden Tabellen folgen; diejenige der Diathermanität ist den Arbeiten von Melloni entnommen.

Elektrische Leitungsfähigkeit,
nach dem Ende zu wachsend.

Schwefel.
Steinsalz.
Flussspath.
Isländischer Spath.
Quarz.
Baryt.
Alaun.
Glas.
Turmalin.

Diathermanität,
nach dem Ende abnehmend.

Steinsalz.
Schwefel.
Flussspath.
Isländischer Spath.
Quarz.
Glas.
Baryt.
Turmalin.
Alaun.

Man könnte noch Ebonit anführen, das für dunkle Strahlen durchlässig ist.

201. Im Widerspruch zu dem vorhergehenden Gesetze sind die Elektrolyte gute Leiter für die Elektrizität und trotzdem im Allgemeinen durchsichtig. Maxwell erklärt diese Thatsache durch den Hinweis darauf, dass die Leitungsfähigkeit der Elektrolyte nicht von derselben Art ist, wie bei den Metallen. Bei diesen sind die materiellen Moleküle in Ruhe und die Elektrizität allein bewegt sich; bei den Elektrolyten dagegen bewegen sich die Ionen von einer Elektrode zur anderen, und der Uebergang der Elektrizität wird durch die Ionen vermittelt, welche die Elektrizität mit sich führen (Convectionsströme).

Man kann auch eine andere Erklärung hierfür finden, die ebenfalls von Maxwell gegeben wurde. Die beim Durchgang der Welle durch die Substanz absorbirte Energie muss sich nothwendiger Weise unter irgend einer Form wiederfinden. Bei den Metallen verwandelt sie sich in Wärme, bei den Elektrolyten dient sie zur Trennung der Ionen. Aber der Sinn der Bewegung der Ionen hängt von dem der elektrischen Bewegung ab; demnach wird der Effekt, welcher durch den Uebergang einer gewissen Elektrizitätsmenge im einen Sinn hervorgebracht würde, durch den Uebergang einer gleichen Menge im entgegengesetzten Sinn aufgehoben, und eine Aufeinanderfolge von Wechselströmen, wie sie aus den das Licht erzeugenden Störungen herrühren, kann keine Zersetzung her-

vorrufen. Es wird also gar keine Energie absorbiert und die Lichtintensität muss beim Austritt aus dem Elektrolyt nahe die gleiche sein, wie die Intensität des einfallenden Lichtes.

202. Maxwell hat einige Versuche angestellt, um quantitativ zu prüfen, ob die Lichtintensität in der That wie die Exponentialgrösse e^{-2pz} abnimmt, und zwar untersuchte er Platin, Gold und Silber, welche in sehr dünnen Schichten das Licht hindurchlassen. Es scheint danach, dass die Durchsichtigkeit der Körper viel grösser ist, als es die Theorie fordert. Aber dies Resultat lässt sich leicht erklären; die Dicke der Lamellen ist nämlich nicht gleichmässig, und ein grosser Theil des Lichtes geht durch eine viel geringere Dicke hindurch, als dem in der Berechnung der Exponentialgrösse angenommenen Werthe von z entspricht.

203. Reflexion der Wellen. Die Gesetze der Lichtreflexion können aus den Gleichungen des magnetischen Feldes abgeleitet werden. In einer Anmerkung der französischen Uebersetzung des Maxwell'schen Werkes (II. S. 507) hat Potier gezeigt, dass man auf diese Weise die Formeln wiederfindet, die Fresnel für die Reflexion an durchsichtigen Medien aufgestellt hat, sowie diejenigen von Cauchy und Lamé für die Reflexion an Metall. Da diese Formeln mit den Versuchsergebnissen übereinstimmen, so ist ihre Ableitung aus der Theorie von Maxwell eine neue Bestätigung für die letztere. Indessen weichen die numerischen Werthe der durch die optischen und elektrischen Methoden ermittelten Konstanten von einander ab; die für durchsichtige Dielektrika schon merkliche Verschiedenheit ist bei den Metallen noch ausgesprochener. Speciell müsste sich die Reflexion des Lichts beim Eisen nach der Theorie von Maxwell von derjenigen der anderen Metalle wesentlich unterscheiden, da der Koeffizient der magnetischen Permeabilität des Eisens ungefähr 30 Mal so gross ist, als bei den anderen Metallen. Nach den Versuchen hat sich aber bis jetzt für das Eisen keine Ausnahme in den Gesetzen der Lichtreflexion herausgestellt.

Dieser Umstand kann durch die Annahme erklärt werden, dass die magnetische Induktion keine Erscheinung ist, die augenblicklich eintritt; bei den ungeheuer raschen Schwingungen würde dann die Zeit zum Zustandekommen des Phänomens zu kurz sein.

Man könnte zur Unterstützung dieser Ansicht noch als Argument die Versuche von Fizeau über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Elektrizität in einem Draht anführen, welche gezeigt haben, dass diese Geschwindigkeit im Eisen geringer ist, als im Kupfer. Ein Grund hierfür ist leicht zu finden: In Folge der transversalen Magnetisirung, die in dem von einem Strom durchflossenen Eisen-

drahte zu Stande kommt, ist nämlich die Selbstinduktion des Eisens grösser, als die des Kupfers.

Die Versuche von Hertz dagegen ergeben für die Geschwindigkeit im Eisen denselben Werth, wie für das Kupfer, da bei diesen ungeheuer raschen Schwingungen, wie sie der berühmte Karlsruher Physiker hervorgebracht hat, das Eisen keine Zeit hatte, sich durch Induktion zu magnetisiren. „Auch Eisendrähte machen keine Ausnahme von der allgemeinen Regel; die Magnetisirbarkeit des Eisens kommt also bei so schnellen Bewegungen nicht in Betracht.“ (Hertz, Wiedemann's Annalen XXXIV, S. 558.)

204. Energie der Strahlung. Bei den gewöhnlichen Theorien des Lichts enthält das durchstrahlte Medium Energie in potentieller und kinetischer Form; die erstere rührt von der Deformation des als elastisch vorausgesetzten Medium her, die kinetische von der Schwingungsbewegung. Die Gesamtenergie eines Volumenelements bleibt konstant und folglich ändert sich die kinetische Energie um denselben Betrag wie die potentielle, aber im entgegengesetzten Sinne.

In der elektromagnetischen Theorie setzt man gleichfalls voraus, dass die Energie des Medium theilweise potentieller, theilweise kinetischer Natur ist. Die den elektrostatischen Vorgängen zuzuschreibende potentielle Energie hat den Ausdruck (32)

$$W = \int \frac{2\pi}{K} (f^2 + g^2 + h^2) dr;$$

die kinetische Energie ist das elektrodynamische Potential des in dem Medium befindlichen Stromsystems, d. h. (§ 144),

$$T = \int \frac{1}{8\pi} (\alpha a + \beta b + \gamma c) d\tau. .$$

Wir wollen den Werth dieser beiden Grössen für eine ebene, zur XY-Ebene parallele Welle bestimmen, deren elektromagnetisches Moment parallel zur X-Axe gerichtet ist. Nach § 188 erhalten wir dann:

$$\begin{aligned} G = H = 0, & \quad Q = R = 0, & \quad g = h = 0, \\ \alpha = \gamma = 0, & \quad a = c = 0, \end{aligned}$$

und die Ausdrücke der beiden Energieformen lauten

$$W = \int \frac{2\pi}{K} f^2,$$

$$T = \int \frac{1}{8\pi\mu} b^2.$$

Aus den Gleichungen (VII) und (III) des elektromagnetischen Feldes folgt aber

$$f = \frac{K}{4\pi} P = -\frac{K}{4\pi} \cdot \frac{\partial F}{\partial t},$$

$$b = \frac{\partial F}{\partial z};$$

so dass wir für die auf die Volumeneinheit bezogenen Werthe der potentiellen und kinetischen Energie erhalten

$$(1) \quad W = \frac{K}{8\pi} \left[\frac{\partial F}{\partial t} \right]^2,$$

$$(2) \quad T = \frac{1}{8\pi\mu} \left[\frac{\partial F}{\partial z} \right]^2.$$

Die Funktion F muss aber der Differentialgleichung genügen (§ 180)

$$K\mu \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2},$$

und ist deshalb von der Form

$$F = f(z - Vt),$$

worin

$$V = \frac{1}{\sqrt{K\mu}};$$

wir haben also

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -V f'(z - Vt),$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = f'(z - Vt),$$

und folglich

$$K \left[\frac{\partial F}{\partial t} \right]^2 = \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial F}{\partial z} \right]^2.$$

Die Werthe (1) und (2) der beiden Energieformen sind demnach untereinander gleich; wenn einer derselben sich verändert, so geschieht dies auch beim anderen im selben Sinn und um denselben Betrag. Da jedoch das Princip von der Erhaltung der Energie in dem ganzen System gewahrt bleiben soll, so muss sich die in einem Volumenelement verlorene Energie nothwendiger Weise in einem anderen wieder finden. Diese Folgerungen stimmen nicht mit denen der gewöhnlichen Lichttheorien, die wir anfänglich erwähnten, überein.

205. Druck und Zug in einem vom Licht durchstrahlten Medium. Wir sahen (§ 81), dass bei einem im Spannungsgleichgewicht befindlichen, dielektrischen Medium das zu den Kraftlinien senkrechte Oberflächenelement einen Zug erleidet, dessen Werth pro Flächeneinheit gleich ist dem Produkt von $\frac{K}{8\pi}$ in das Quadrat der elektromotorischen Kraft, während auf die Elemente parallel zu den Kraftlinien Drucke ausgeübt werden, die pro Flächeneinheit denselben Werth wie diese Spannung besitzen. Wenn wir also die X-Axe parallel zu den Kraftlinien annehmen und mit Maxwell die Drucke durch negative Grössen darstellen, so erhalten wir für den Zug und Druck, welcher auf die Flächeneinheit der rechtwinklig zu den Koordinatenaxen stehenden Elemente ausgeübt wird, die Werthe

$$P_{xx} = \frac{K}{8\pi} P^2, \quad P_{yy} = -\frac{K}{8\pi} P^2, \quad P_{zz} = -\frac{K}{8\pi} P^2.$$

Bei dem gewählten Axensystem aber besitzt die auf die Volumeneinheit bezogene elektrostatische Energie den Werth

$$W = \frac{2\pi}{K} j^2 = \frac{K}{8\pi} P^2;$$

demnach ist der Zug und Druck auf die Flächeneinheit der betrachteten Elemente gleich der elektrostatischen Energie pro Volumeneinheit.

206. Da die Gesetze der Anziehung und Abstossung für die elektrischen und die magnetischen Massen die gleichen sind, so

dürfen wir erwarten, für das magnetische Feld analoge Werthe für den Zug und den Druck zu finden. Maxwell behandelt den allgemeinen Fall, dass in dem Feld gleichzeitig Magnete und Ströme vorhanden sind. Die von ihm benutzte Methode ist allerdings nicht einwurfsfrei; aber es ist auch unnöthig, den allgemeinen Fall zu betrachten, da sich nach der Ampère'schen Hypothese der permanente Magnetismus durch Elementarströme erklären lässt. Man kann also annehmen, dass in dem Medium von der magnetischen Permeabilität = 1 nur Ströme vorhanden sind; die Folgerungen gewinnen dadurch wesentlich an Präcision.

Wir betrachten ein Volumenelement $d\tau$, und nennen die Geschwindigkeitskomponenten der Elektrizität an dem betreffenden Punkt u, v, w ; dann ist nach unserer Hypothese ($\mu = 1$) die magnetische Induktion an diesem Punkt gleich der elektromagnetischen Kraft, und die Formeln (2) des § 160, welche die Komponenten der auf die Volumeneinheit bezogenen elektrodynamischen Kraft angeben, lauten

$$X = \gamma v - \beta w,$$

$$Y = \alpha w - \gamma u,$$

$$Z = \beta u - \alpha v.$$

Die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w der Elektrizität sind mit denen der elektromagnetischen Kraft durch die Gleichungen (II) (§ 167) verbunden, so dass man die erste der vorhergehenden Gleichungen schreiben kann

$$4 \pi X = \gamma \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) - \beta \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right),$$

oder, nach Addition und Subtraktion des Produktes

$$\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x}$$

auf der rechten Seite,

$$4 \pi X = \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \beta \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \beta \frac{\partial \beta}{\partial x} - \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial x}.$$

Da aber die elektromagnetische Kraft denselben Werth, wie die magnetische Induktion besitzt, so wird die Beziehung (§ 102)

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} = 0,$$

welche die Komponenten dieser letzteren Grösse verbindet, zu

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0.$$

Wir dürfen also das Produkt $\alpha \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right)$ auf der rechten Seite der Gleichung für $4 \pi X$ hinzufügen, ohne damit an der Richtigkeit derselben etwas zu ändern, und erhalten dann

$$\begin{aligned} 4 \pi X = & \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \beta \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \beta \frac{\partial \beta}{\partial x} - \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\ & + \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \alpha \frac{\partial \beta}{\partial y} + \alpha \frac{\partial \gamma}{\partial z}. \end{aligned}$$

Dies lässt sich aber auch schreiben:

$$4 \pi X = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (\alpha \beta) + \frac{\partial}{\partial z} (\alpha \gamma),$$

und analog

$$4 \pi Y = \frac{\partial}{\partial x} (\beta \alpha) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\beta^2 - \gamma^2 - \alpha^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} (\beta \gamma),$$

$$4 \pi Z = \frac{\partial}{\partial x} (\alpha \gamma) + \frac{\partial}{\partial y} (\gamma \beta) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2}{2} \right).$$

207. Wir wollen jetzt annehmen, dass die elektrodynamischen Kräfte mit dem Zug und Druck zusammenhängen, der von der Elasticität des Medium herrührt, und bezeichnen die Komponenten des Zugs durch

$P_{xx} d\omega$, $P_{xy} d\omega$, $P_{xz} d\omega$, für ein Element senkrecht zur X-Axe,

$P_{yx} d\omega$, $P_{yy} d\omega$, $P_{yz} d\omega$, für ein Element senkrecht zur Y-Axe,

$P_{zx} d\omega$, $P_{zy} d\omega$, $P_{zz} d\omega$, für ein Element senkrecht zur Z-Axe.

Ein elementares Parallelepiped vom Volumen $d\tau$, dessen Flächen parallel zu den Koordinatenebenen stehen, muss unter der Wirkung

dieser neun Kräfte und der drei Komponenten $X d\tau$, $Y d\tau$, $Z d\tau$ der elektrodynamischen Kraft im Gleichgewicht sein. Da das Parallelepiped keine Drehung um eine der Koordinatenachsen ausführen soll, so gelten die Beziehungen

$$P_{xy} = P_{yx}, \quad P_{yz} = P_{zy}, \quad P_{zx} = P_{xz};$$

und da auch ferner keine Verschiebung längs der Axen stattfinden darf:

$$\begin{aligned} X &= \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zx}}{\partial z}, \\ Y &= \frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zy}}{\partial z}, \\ Z &= \frac{\partial P_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zz}}{\partial z}. \end{aligned}$$

Die Vergleichung dieser Werthe von X , Y , Z mit den aus den Gleichungen des vorhergehenden Paragraphen abgeleiteten, ergibt

$$P_{xx} = \frac{1}{8\pi} (\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2),$$

$$P_{yy} = \frac{1}{8\pi} (\beta^2 - \gamma^2 - \alpha^2),$$

$$P_{zz} = \frac{1}{8\pi} (\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2),$$

$$P_{xy} = P_{yx} = \frac{\alpha\beta}{4\pi},$$

$$P_{yz} = P_{zy} = \frac{\beta\gamma}{4\pi},$$

$$P_{zx} = P_{xz} = \frac{\gamma\alpha}{4\pi}.$$

Wenn man die Koordinatenachsen so wählt, dass die X-Axe parallel zur magnetischen Kraft verläuft, so wird $\beta = \gamma = 0$, folglich sind die sechs letzten Komponenten des Zugs Null. Die drei ersten lauten dann

$$P_{xx} = \frac{\alpha^2}{8\pi}, \quad P_{yy} = -\frac{\alpha^2}{8\pi}, \quad P_{zz} = -\frac{\alpha^2}{8\pi}.$$

Ein zu den magnetischen Kraftlinien senkrecht Element erleidet also einen normal gerichteten Zug, und die zu den Kraftlinien parallelen Elemente einen normalen Druck. Die Werthe dieses Zuges und Druckes, auf die Flächeneinheit bezogen, sind unter einander gleich; sie sind auch gleich der elektrodynamischen Energie pro Volumeneinheit, da diese Energie in Folge der Wahl der Koordinatenachsen den Werth besitzt

$$T = \frac{\alpha^2}{8\pi}.$$

208. Wir wollen diese Resultate auf den Fall anwenden, dass sich ebene Wellen durch ein Medium fortpflanzen, und wollen die XY-Ebene parallel zur Welle annehmen, ferner die X-Axe parallel zum elektromagnetischen Moment.

Da die elektromotorische Kraft dieselbe Richtung, wie das elektromagnetische Moment besitzt, so verlaufen die elektrischen Kraftlinien parallel zur X-Axe; ein senkrecht zu der letzteren stehendes Element erleidet demnach einen normalen Zug, dessen Werth pro Flächeneinheit gleich ist der auf die Volumeneinheit bezogenen elektrostatischen Energie W . Die magnetischen Kraftlinien ferner stehen senkrecht zu den elektrischen Kraftlinien, da die magnetische und die elektromotorische Kraft normal zu einander gerichtet sind; folglich liegt das betrachtete Element parallel zu den magnetischen Kraftlinien und erleidet deshalb einen normalen Druck, dessen Werth pro Flächeneinheit gleich ist der auf die Volumeneinheit bezogenen elektrodynamischen Energie T . Da diese beiden Grössen W und T immer den nämlichen Werth haben (204), so heben sich Zug und Druck für das betreffende Element auf.

Ebenso verhält es sich für ein zur Y-Axe senkrecht Element.

Für ein zur Z-Axe senkrecht Element dagegen, das also parallel zur Wellenebene liegt, kommt der elektrostatische Druck zu dem elektromagnetischen hinzu, so dass der auf die Flächeneinheit wirkende Gesamtdruck gleich ist der Gesamtenergie pro Flächeneinheit.

209. Maxwell berechnete den Druck, der auf eine von der Sonne bestrahlten Fläche ausgeübt wird. Nimmt man an, dass die Lichtenergie, die von einem starken Sonnenstrahl auf einen Quadratmeter ausgestrahlt wird, 124,1 kgm in der Sekunde beträgt, so ist die in einem Kubikmeter des durchstrahlten Raumes enthaltene Energie ungefähr $41,36 \times 10^{-8}$ kgm; also der mittlere Druck auf den Quadratmeter $41,36 \times 10^{-8}$ kg oder 0,0004136 g.

Da die Hälfte dieses Drucks gleich der elektrostatischen und elektrodynamischen Energie ist, so kann man leicht die Werthe der auf die Längeneinheit bezogenen elektromotorischen Kraft und der elektromagnetischen Kraft erhalten. Maxwell fand, dass die elektromotorische Kraft ungefähr 600 Volt für den Meter und die elektromagnetische Kraft 0,193 in elektromagnetischem Maass beträgt, also etwas mehr als den zehnten Theil der Horizontalkomponente der erdmagnetischen Kraft in England.

210. Bedeutung des elektrodynamischen Drucks. Wir wiesen darauf hin (§ 84), dass das Vorhandensein elektrostatischer Drucke schlecht mit der Grundhypothese stimmt, dass die Energie in dem dielektrischen Medium lokalisiert ist. Der elektrodynamische Druck lässt sich leichter verstehen, und Maxwell gab in einer im *Philosophical Magazine*¹⁾ veröffentlichten Abhandlung eine Erklärung für denselben, die ein gewisses Interesse darbietet. Da die elektrodynamische Energie $\int \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{8\pi} d\tau$ als kinetisch betrachtet wird, so können wir annehmen, dass das Medium, in welchem die elektrodynamischen Erscheinungen zu Stande kommen, aus Molekülen zusammengesetzt ist, die Rotationsbewegungen ausführen. Wenn α' , β' , γ' die Komponenten der Rotation eines als frei angenommenen Moleküls darstellen, so ist die von dieser Bewegung herrührende kinetische Energie proportional $\frac{\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2}{2}$. Man kann also den Ausdruck für die elektrodynamische Energie mit demjenigen der Energie des wirbelnden Medium in Uebereinstimmung bringen, wenn man die Rotationskomponenten proportional denen der elektromagnetischen Kraft annimmt. Die Richtung dieser Kraft wird dann dieselbe, wie diejenige der Rotationsaxe des Moleküls.

Vorausgesetzt, dass dieses Molekül die Gestalt einer Kugel besitzt, so sucht es sich an den Polen abzuflachen und am Aequator auszudehnen. Auf jedes zur Drehungsaxe senkrecht stehende Element wirkt eine nach dem Mittelpunkt des Moleküls gerichtete Kraft; auf ein am Aequator parallel zur Axe gelegenes Element dagegen eine nach Aussen ziehende Kraft. Da die Drehungsaxe dieselbe Richtung wie die magnetische Kraft besitzt, so wird auf ein zu dieser Kraft senkrecht stehendes Element ein Zug ausgeübt, auf ein dazu paralleles Element dagegen ein Druck. Der algebraische Unterschied zwischen den Werthen dieses Zugs und Drucks rührt

¹⁾ Phil. Mag. 1861 und 1862.

von der Centrifugalkraft her; diese Grösse ist gleich $\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2$, d. h. dem Doppelten der kinetischen Energie. Wir erhalten also vollkommen die Resultate des § 207.

Maxwell nimmt in seiner Abhandlung an, dass sich die Drehung der magnetischen Moleküle von einem zum anderen durch gewisse Zwischenglieder überträgt; diese bestehen aus kleinen Kugelmolekülen, welche nach der Art von Zahnrädern wirken. Die magnetische Induktion muss dann der Trägheit der drehenden Moleküle zugeschrieben werden, die elektromotorische Kraft ist die auf den Verbindungsmechanismus ausgeübte Wirkung, die Verschiebung der Elektrizität endlich die von den Formveränderungen dieses Mechanismus herrührende Verrückung.

Kapitel XII.

Magnetische Drehung der Polarisationsebene.

211. Gesetz der Erscheinung. Die Drehung der Polarisations-ebene des Lichtes unter der Wirkung eines magnetischen Feldes, das durch Magnete oder Ströme hervorgebracht wird, ist die bemerkenswertheste aller Erscheinungen, welche die Wechselwirkung von Licht und Elektrizität veranschaulichen.

Das von Faraday im Jahre 1845 entdeckte Phänomen wurde später von Verdet genau studirt, welcher folgende Gesetze fand:

1. Die Drehung der Polarisations-ebene eines monochromatischen Lichtes ist proportional der Dicke des von dem Strahle durchsetzten Medium, und nahezu umgekehrt proportional dem Quadrate der Wellenlänge des betreffenden Lichtes.

2. Sie ist proportional der in die Richtung des Lichtstrahles fallenden Komponente der Intensität des magnetischen Feldes; die Drehung ist also am grössten, wenn die Richtung des Strahles mit derjenigen des Feldes übereinstimmt, und sie verändert sich mit dem $\cos.$ des Winkels zwischen den beiden Richtungen, wenn letztere nicht zusammenfallen.

3. Ihre Grösse und Richtung hängen von der Natur des Medium ab. Die diamagnetischen Körper zeigen eine Drehung der Polarisations-ebene in dem Sinne des Stromes, welcher bei seinem Umlaufe um den Lichtstrahl dem Felde seine thatsächlich vorhandene Richtung geben würde; die magnetischen Körper, wie die Lösungen von Eisenchlorid in Alkohol oder Aether, weisen die entgegengesetzte Drehung auf. Allerdings erleidet dies letztere Gesetz einige Ausnahmen; so zeigt das neutrale chromsaure Kali, obwohl es diamagnetisch ist, ebenso wie das Eisenchlorid eine der Richtung des Stromes entgegengesetzte Drehung.

212. Zwischen der magnetischen Drehung der Polarisations-ebene und derjenigen, welche gewisse Krystalle, wie der Quarz, und

mehrere Flüssigkeiten, wie das Terpentinöl etc., von Natur zeigen, existirt ein wesentlicher Unterschied.

Bei dieser letzteren Erscheinung ist die Drehung der Polarisationssebene ebenfalls proportional der Dicke der durchsetzten Substanz, aber der Sinn der Drehung wechselt gleichzeitig mit der Fortpflanzungsrichtung des Strahles; mit anderen Worten: der Sinn der Drehung bleibt stets derselbe für einen Beobachter, der so steht, dass der Lichtstrahl zu ihm hingelangt. In Folge dessen werden die Polarisationssebenen zweier Strahlen, welche in entgegengesetzter Richtung eine gleich dicke Schicht aktiver Substanz durchsetzen, gleiche Drehungen, aber im entgegengesetzten Sinne, erleiden. Wenn demnach ein geradlinig polarisirter Strahl, nachdem er solch eine Substanz durchsetzt hat, in seiner Einfallrichtung reflektirt wird, so dass er dieselbe zum zweiten Male im entgegengesetzten Sinne durchheilt, dann fällt die Polarisationssebene des austretenden Lichtes mit derjenigen des eintretenden wieder zusammen.

Bei der magnetischen Drehung der Polarisationssebene ist der Sinn der Drehung unabhängig von der Richtung des Strahles; er hängt für eine bestimmte Substanz nur von der Richtung des magnetischen Feldes ab. Ein Lichtstrahl, den man durch Reflexion zweimal in der entgegengesetzten Richtung durch dieselbe Substanz sendet, erleidet also eine doppelt so grosse Drehung, als wenn er nur ein einziges Mal hindurchgegangen wäre.

Diese Eigenschaft benützte man, um die beobachtete Drehung beträchtlich zu vergrössern, indem man denselben Strahl S mehrmals

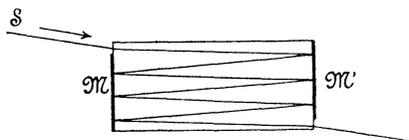


Fig. 34.

die Substanz passiren liess, und zwar mit Hülfe zweier ebener Spiegel M und M' , welche fast senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung des Strahles aufgestellt waren. Dieser Kunstgriff, sowie die Anwendung eines sehr starken magnetischen Feldes ermöglichten es Becquerel und Bichat, fast gleichzeitig das Drehungsvermögen der Gase zu entdecken, das den Beobachtungen von Faraday und von Verdet entgangen war.

213. Erklärungsversuche der magnetischen Drehung der Polarisationssebene. Schon vor Maxwell waren mehrfache Versuche gemacht worden, die Drehung der Polarisationssebene unter dem Einflusse eines magnetischen Feldes zu erklären.

In dem der Entdeckung von Faraday folgenden Jahre gab Airy¹⁾ mehrere Formeln an, welche diese Drehung als Funktion der Wellenlänge des zur Anwendung gelangten Lichtes im leeren Raume und des Brechungsquotienten der Substanz für diese Lichtart ausdrückte, und zwar wurde Airy durch die früheren Arbeiten von MacCullagh über die Drehung des Quarzes auf diese Formeln geführt. Wie wir in einem anderen Werke²⁾ gesehen haben, lässt sich die Drehung der Polarisationssebene eines Lichtstrahles, der sich längs der Axe des Krystalls fortpflanzt, dadurch erklären, dass man auf der rechten Seite der Bewegungsgleichungen für ein Aethermolekül noch gewisse Differentialquotienten dritter Ordnung den Verschiebungskomponenten des Aethermoleküls hinzufügt.

Diese Gleichungen werden dann, wenn man als Z-Axe die Richtung des Lichtstrahles wählt:

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + a \frac{\partial^3 \eta}{\partial z^3},$$

$$\rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} - a \frac{\partial^3 \xi}{\partial z^3}.$$

Ersetzt man die Differentialquotienten dritter Ordnung nach z durch die Differentialquotienten derselben Ordnung nach z und t , nämlich

$$+ \frac{\partial^3 \eta}{\partial z^2 \partial t} \quad \text{und} \quad - \frac{\partial^3 \xi}{\partial z^2 \partial t},$$

so erhält man nach Airy:

$$(I) \quad \theta = m \frac{i^2}{\lambda^2} \left(i - \lambda \frac{\partial i}{\partial t} \right),$$

worin der Koeffizient m von der Intensität des magnetischen Feldes abhängt, λ die Wellenlänge im luftleeren Raume und i den Brechungsquotient bedeutet.

¹⁾ Phil. Mag. Juni 1846.

²⁾ Théorie mathématique de la lumière § 125.

Die Einführung der Differentialquotienten dritter Ordnung nach der Zeit allein,

$$+ \frac{\partial^3 \eta}{\partial t^3} \quad \text{und} \quad - \frac{\partial^3 \xi}{\partial t^3},$$

fürte Airy auf eine andere Formel

$$(II) \quad \theta = m \frac{1}{\lambda^2} \left(i - \lambda \frac{\partial i}{\partial t} \right).$$

Indem er endlich nur die ersten Differentialquotienten nach der Zeit

$$+ \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad \text{und} \quad - \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

einsetzte, gelangte er zu einer dritten Formel:

$$(III) \quad \theta = m \left(i - \lambda \frac{\partial i}{\partial t} \right).$$

214. Obleich unter einander sehr verschieden, konnten doch diese Formeln sämtlich den von Faraday beobachteten Erscheinungen Rechnung tragen, da derselbe keine einzige quantitative Bestimmung vorgenommen hatte. Er hatte nur gezeigt, dass die Drehung von der Beschaffenheit der Strahlen abhängt, da das durch den Analysator hervorgebrachte Bild bei Anwendung von weissem Lichte mit der Stellung des Hauptschnittes des Analysators ungemein rasch die Farbe wechselt; demnach musste jede Formel, welche überhaupt die Wellenlänge enthielt, genügen. Im Jahre 1847 verglich Ed. Becquerel¹⁾ die von Faraday beobachtete Erscheinung mit der Drehung der Polarisationssebene von Zuckerkörsung und fand beide Phänomene durchaus analog. Demnach schien das Biot'sche Gesetz auch auf die magnetische Drehung anwendbar zu sein, d. h. die Drehung musste umgekehrt proportional dem Quadrate der Wellenlänge sein. Die Formel (III), welche diese Bedingung nicht erfüllt, war also zu verwerfen.

Im Jahre 1863 stellte Verdet mit der grössten Sorgfalt Beobachtungen an, um bei einfarbigen Strahlen mit bekannten Wellenlängen die Drehung der Polarisationssebene unter dem Einfluss eines magnetischen Feldes zu messen. Die gefundenen Resultate wurden

¹⁾ Comptes rendues de l'Académie des sciences. Bd. XXI S. 952.

mit den Werthen verglichen, welche jede der oben angeführten Formeln lieferte, nachdem der Koefficient m mit Hülfe einer besonderen experimentellen Untersuchung bestimmt worden war. Wie sich nach den Resultaten von Becquerel bereits erwarten liess, ergab die Formel (III) Werthe, welche weit von den durch das Experiment gefundenen abwichen; die Gleichung (II) stimmte schon besser überein, aber der Formel (I) gebührte der Vorzug. Speciell beim Schwefelkohlenstoff unterscheiden sich die durch diese letztere Formel gelieferten Werthe von den Resultaten der Beobachtung nur um Grössen von der Ordnung der Beobachtungsfehler. Von den drei durch Airy vorgeschlagenen Gleichungen ist also nur die erste beizubehalten.

215. Aber wenn auch die Uebereinstimmung der Formel (I) mit der Beobachtung die Einführung der Differentialquotienten

$$\frac{\partial^3 \eta}{\partial z^2 \partial t} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^3 \xi}{\partial z^2 \partial t}$$

auf den rechten Seiten der Bewegungsgleichungen eines Aethermoleküls rechtfertigte, so forderte doch keine theoretische Ueberlegung die Wahl gerade dieser Derivirten mit Ausschluss der anderen; man besass deshalb also doch noch nicht eine Theorie der magnetischen Drehung. In der That hatte auch Airy seine Formeln nicht vorgeschlagen, um damit eine mechanische Erklärung der Drehung der Polarisationssebene zu liefern, sondern nur, wie er sagte, „um zu zeigen, dass sich diese Drehung durch Gleichungen erklären lässt, welche offenbar aus irgend einer wahrscheinlichen mechanischen Hypothese abgeleitet werden können, wenn man auch diese Hypothese noch nicht formulirt hat.“

Einige Jahre, bevor Verdet seine Untersuchungen anstellte, hatte C. Neumann¹⁾ versucht, diese Lücke auszufüllen. Er setzt voraus, dass die Moleküle des elektrischen Fluidum der Elementarströme, welche nach Ampère im Innern eines magnetischen Körpers entstehen, auf die Aethermoleküle einwirken; ausserdem nimmt er an, dass diese gegenseitigen Einwirkungen, ebenso wie diejenigen der elektrischen Moleküle in der Weber'schen Theorie, von der relativen Geschwindigkeit dieser Moleküle abhängen. Aus diesen Annahmen ergibt sich, dass ein Aethermolekül nicht nur den Kräften

¹⁾ Die magnetische Drehung der Polarisationssebene des Lichtes. Halle 1863.

unterworfen ist, welche aus der Elasticität des Aethers entspringen, sondern auch noch Kräften, welche von der Zeit abhängen und auf die Wirkung der benachbarten elektrischen Moleküle zurückzuführen sind. Neumann weist nach, dass die Resultante dieser letzteren Kräfte in jedem Augenblicke der Geschwindigkeit der Aethermoleküle und der magnetischen Kraft proportional ist, und dass dieselbe zur Ebene dieser beiden Richtungen senkrecht steht. Betrachten wir also eine ebene Welle, die sich in der Richtung des magnetischen Feldes fortpflanzt und wählen wir die X Y-Ebene parallel zu der Ebene der Welle, dann werden die nach X und Y genommenen Komponenten dieser Resultante die Werthe

$$+ a \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad \text{und} \quad - a \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

erhalten, wobei der Koeffizient a der Intensität des Feldes proportional ist.

Wir finden demnach als Bewegungsgleichungen für ein Aethermolekül:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + a \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ \rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} - a \frac{\partial \xi}{\partial t} \end{aligned}$$

Die Gleichungen unterscheiden sich von denjenigen von Airy (§ 213) nur dadurch, dass an Stelle der Differentialquotienten dritter Ordnung von η und ξ nach z die Derivirten eben dieser Grössen nach t treten; sie werden also für die Grösse der Drehung der Polarisationssebene eine Formel liefern, welche mit der Formel (III) von Airy übereinstimmt, mit dem Experimente jedoch im vollsten Widerspruch steht. Die Neumann'sche Theorie, die sich durch die Einfachheit der Hypothesen auszeichnet, muss demnach ebenfalls aufgegeben werden.

216. Theorie von Maxwell. Dieser Umstand war damals, als Maxwell seine Abhandlung schrieb, bereits anerkannt, und ebenso die Thatsache, dass von den durch Airy vorgeschlagenen Formeln die erste am besten mit den Resultaten des Experiments im Einklange stand. Es genügte also, zur Aufstellung einer annehmbaren Theorie der magnetischen Drehung eine befriedigende Hypothese für die Einführung der Differentialquotienten

$$+ \frac{\partial^3 \eta}{\partial z^2 \partial t} \quad \text{und} \quad - \frac{\partial^3 \xi}{\partial z^2 \partial t}$$

in die Bewegungsgleichungen für das Aethermolekül zu finden.

Dies kann, unabhängig von jeder theoretischen Ueberlegung, auf zwei verschiedene Arten geschehen.

Hierzu rufen wir uns mit einigen Worten in's Gedächtniss zurück, wie man zu den Bewegungsgleichungen eines Aethermoleküls in einem isotropen Medium gelangt¹⁾. Nennen wir U die Funktion der Kräfte, welche aus der Elasticität des Aethers entspringen, wenn sich eine Erschütterung in diesem Medium fortpflanzt, dann wird die Bewegung eines Moleküls von der Masse m , das eine Verschiebung ξ in Richtung der X-Axe erleidet, gegeben durch die Gleichung:

$$(1) \quad m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial U}{\partial \xi}.$$

Wenn wir mit η und ζ die beiden anderen Verschiebungskomponenten bezeichnen, so erhalten wir ausserdem noch zwei analoge Gleichungen. Nimmt man an, dass die Kräfte, welche zwischen den Molekülen auftreten, nur auf sehr kleine Entfernungen hin wirken, so lässt sich die Funktion U schreiben

$$U = \int W \, d\tau,$$

wobei W den auf die Volumeneinheit bezogenen Werth der Kräftefunktion in dem Punkte bedeutet, wo sich das Element $d\tau$ befindet, und das Integral sich über den ganzen vom Aether eingenommenen Raum erstreckt. Eine genauere Untersuchung von W ergibt, dass dies eine Funktion der partiellen Differentialquotienten verschiedener Ordnung von ξ , η , ζ nach den Koordinaten x , y , z ist, und die Bewegungsgleichungen (1) nehmen nach mehreren Umformungen folgende Gestalt an:

$$e \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \sum \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial \xi'} + \sum \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{\partial W}{\partial \xi''} \dots;$$

hierbei ist ξ' eine der Derivirten von ξ nach x , y , z , ξ'' eine der zweiten Derivirten von ξ nach denselben Variablen. Diese Glei-

¹⁾ Théorie mathématique de la lumière §§ 1—39 und §§ 121—124.

chungen zeigen, dass die Glieder von W , welche diese Derivirten nur in der ersten Potenz enthalten, verschwinden müssen, wenn man voraussetzt, dass die Verschiebungen periodisch vor sich gehen. Vernachlässigen wir nun die Glieder dritter Ordnung in Bezug auf diese Derivirten und bezeichnen mit W_2 die Gesamtheit der Glieder zweiten Grades, dann lässt sich die vorhergehende Gleichung schreiben:

$$(2) \quad \varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \sum \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial W_2}{\partial \xi'} + \sum \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{\partial W_2}{\partial \xi''}.$$

Im Allgemeinen enthält die rechte Seite dieser Gleichung Differentialquotienten von ξ , η , ζ nach x , y , z jeder Ordnung von der zweiten an gerechnet, aber für die isotropen Medien verschwinden die Derivirten ungerader Ordnung. Die Gleichung vereinfacht sich noch für den Fall, dass man eine ebene Welle betrachtet, die auf der Z -Axe senkrecht steht; dann bleiben nämlich nur noch die Differentialquotienten gerader Ordnung von ξ nach z bestehen, und die obige Gleichung erhält die Form:

$$(3) \quad \varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = A_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + A_1 \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} + \dots$$

Die beiden anderen Bewegungsgleichungen findet man, wenn man in der letzten ξ resp. durch η und ζ ersetzt.

Nun lassen sich die allgemeinen Gleichungen von der Art der Gleichung (2) in der von Lagrange angegebenen Form schreiben

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial \xi'} - \frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{\partial U}{\partial \xi},$$

in der U dieselbe Bedeutung hat, wie bisher, und T die kinetische Energie

$$T = \frac{\varrho}{2} \int (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) dt$$

bezeichnet; ξ' , η' , ζ' sind aber hier die Derivirten in Bezug auf die Zeit. Da diese letzte Gleichung nur eine Umformung der Gleichung (2) bedeutet, so ist es klar, dass auch sie nur Differentialquotienten gerader Ordnung enthalten kann, wenn es sich um ein isotropes Medium handelt. Damit also die Bewegungsgleichungen auch Derivirte ungerader Ordnung aufweisen, muss man Zusatz-

glieder einführen, und zwar entweder in den Ausdruck der Funktion U , der sich auf isotrope Körper bezieht, oder in den Ausdruck für die kinetische Energie T . Man hat somit zwei verschiedene Wege, um zu den Formeln von Airy zu gelangen.

217. In den gewöhnlichen Theorien des Lichtes ändert man immer, wenn es sich darum handelt, die bei den anisotropen Medien auftretenden Erscheinungen zu erklären, die Funktion U , welche, mit entgegengesetztem Vorzeichen genommen, die potentielle Energie des Medium darstellt. Bei Maxwell's Theorie der magnetischen Drehung der Polarisationssebene wird umgekehrt gerade die kinetische Energie T geändert, während U dieselbe Form behält, wie bei einem isotropen Medium. Die Gründe, welche Maxwell anführt, um diese Aenderung zu rechtfertigen und namentlich, um die Zusatzglieder zu erhalten, durch deren Einführung in T er zur Formel (I) gelangt, lassen an Präcision und Klarheit viel zu wünschen übrig. Wir werden später darauf zurückkommen; für den Augenblick wollen wir ohne Erklärung das Ergebniss der Spekulationen von Maxwell annehmen und nachweisen, wie die Gleichung (4) und die beiden anderen, welche sich durch die Substitution von η und ζ für eine ebene Welle aus dieser ergeben, zu der Formel (I) führen.

Setzen wir

$$\frac{d\varphi}{d\nu} = \alpha \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \beta \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \gamma \frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

wobei φ irgend welche Funktion bedeutet, und α , β , γ die Komponenten der magnetischen Kraft, so ist das Zusatzglied, welches Maxwell in den Ausdruck für die kinetische Energie einführt, gegeben durch:

$$(5) \quad C \int \left[\xi' \frac{d}{d\nu} \left(\frac{\partial\zeta}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial z} \right) + \eta' \frac{d}{d\nu} \left(\frac{\partial\xi}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial x} \right) + \zeta' \frac{d}{d\nu} \left(\frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\xi}{\partial y} \right) \right] d\tau.$$

In dem Falle, wo wir es mit einer ebenen, zur XY-Ebene parallelen Welle zu thun haben, hängen die Komponenten ξ , η , ζ weder von x , noch von y ab; in Folge dessen erhalten wir:

$$\frac{d\varphi}{d\nu} = \gamma \frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

und das Zusatzglied reducirt sich auf:

$$C \int \gamma \left(\eta' \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \xi' \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right) d\tau.$$

Die kinetische Energie ist also dann gleich

$$T = \frac{\rho}{2} \int (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) d\tau + C \int \gamma \left(\eta' \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \xi' \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right) d\tau.$$

218. Wir wollen nun zusehen, was aus der Gleichung (4) wird, wenn wir diesen Werth von T einführen.

Setzen wir λ als konstant voraus, so haben wir

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial \xi'} = \int \left(\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - C\gamma \frac{\partial^3 \eta}{\partial z^2 \partial t} \right) d\tau$$

Das Hauptglied liefert für $\frac{\partial T}{\partial \xi'}$ keinen Beitrag; das Zusatzglied haben wir umzuformen, um dessen Differentialquotient nach ξ zu berechnen. Nun kann man schreiben:

$$\int \eta' \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} d\tau = \int \lambda \eta' \frac{\partial \xi}{\partial z} d\omega - \int \frac{\partial \eta'}{\partial z} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial z} d\tau,$$

wobei das erste Integral rechter Hand über die Oberfläche des betrachteten Volumens auszudehnen ist und λ den cos. des Winkels zwischen der Normale des Oberflächenelements $d\omega$ und der X-Axe bedeutet. Setzen wir voraus, dass die Volumenintegrale sich über den ganzen, unendlichen Raum erstrecken, so beziehen sich die Elemente des Flächenintegrals auf Punkte, die im Unendlichen liegen. Da man aber annehmen darf, dass ξ , η , ζ im Unendlichen Null sind, so sind auch die Elemente dieses Integrals Null und wir können setzen:

$$\int \eta' \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} d\tau = - \int \frac{\partial \eta'}{\partial z} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial z} d\tau.$$

Führen wir für das Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung eine analoge Umformung durch, so erhalten wir

$$- \int \frac{\partial \eta'}{\partial z} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial z} d\tau = \int \xi \frac{\partial^2 \eta'}{\partial z^2} d\tau.$$

Der nach ξ genommene Differentialquotient dieses letzten Integrals ist

$$\int \frac{\partial^2 \eta'}{\partial z^2} dr.$$

Das Zusatzglied von T liefert also für Gleichung (4)

$$- C \gamma \int \frac{\partial^3 \eta}{\partial z^2 \partial t} dr$$

und man kann die letztere schreiben:

$$\varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - 2 C \gamma \frac{\partial^3 \eta}{\partial z^2 \partial t} = \frac{\partial W}{\partial \xi}.$$

Nach Cauchy gilt für $\frac{\partial W}{\partial \xi}$ in einem isotropen Medium der Ausdruck:

$$A_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + A_1 \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} + \dots$$

Dies ist genau derselbe Ausdruck, der auf der rechten Seite der Gleichung (3) stand. Unsere Gleichung (4) und diejenige, welche daraus hervorgeht, wenn man ξ durch η ersetzt, werden also

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - 2 C \gamma \frac{\partial^3 \eta}{\partial z^2 \partial t} = A_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + A_1 \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} + \dots \\ \varrho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - 2 C \gamma \frac{\partial^3 \xi}{\partial z^2 \partial t} = A_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + A_1 \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} + \dots \end{array} \right.$$

219. Wir wollen diesen Gleichungen zu genügen suchen, indem wir einführen:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = r \cos (nt - qz) \\ \eta = r \sin (nt - qz); \end{array} \right.$$

dies bedeutet, dass das betrachtete Molekül einen Kreis vom Radius r beschreibt. Setzen wir diese Werthe von ξ und η ein, so finden wir nach Streichung der gemeinschaftlichen Faktoren die Bedingungsgleichung:

$$(8) \quad \varrho n^2 - 2 C \gamma q^2 n = A_0 q^2 + A_1 q^4 + \dots$$

Dividirt man beide Seiten durch q^2 , dann erhält man eine Gleichung zweiten Grades für $\left(\frac{n}{q}\right)$. Dieser Bruch bedeutet aber die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Bewegung, wir finden demnach für die letztere zwei Werthe. Da nun der Koeffizient A_0 positiv ist und die Koeffizienten $A_1 \dots$ sehr klein sind, so wird die eine Wurzel negativ und man braucht sie nicht zu berücksichtigen, wenn man sich nur mit den Erscheinungen befasst, welche sich oberhalb der XY-Ebene abspielen.

Geben wir dem n zwei Werthe, welche sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, was darauf hinausläuft, dass zwei Moleküle den Kreis mit dem Radius r in entgegengesetzter Richtung durchlaufen, so sind die positiven Werthe von $\frac{n}{q}$ verschieden, vorausgesetzt, dass γ nicht gleich Null ist. Ein rechts rotirender Strahl pflanzt sich also nicht mit derselben Geschwindigkeit fort, wie ein links rotirender, in Folge dessen erhält der eine vor dem anderen einen Vorsprung, und wenn diese beiden Strahlen von einem und demselben geradlinig polarisirten Strahle herrühren, so setzen sie sich beim Austritte aus dem Medium zusammen, um wiederum einen geradlinig polarisirten Strahl zu geben, dessen Polarisationssebene jedoch nicht dasselbe Azimuth besitzt, wie das einfallende Licht; es hat also eine Drehung der Polarisationssebene stattgefunden.

220. Wir wollen diese Drehung bestimmen. Wie wir wissen, ist sie gleich der Hälfte der Phasendifferenz, welche die rechts- und linksrotirenden Strahlen beim Durchgange durch das Medium gegen einander gewinnen, und zwar ist der Sinn der Drehung gegeben durch die Bewegungsrichtung der Moleküle des Strahles, der die grössere Fortpflanzungsgeschwindigkeit besitzt. Bezeichnen wir also mit q' und q'' die Werthe von q für einen rechtsrotirenden und einen linksrotirenden Strahl, und mit c die Dicke des durchlaufenden Medium, so wird sich die Polarisationssebene im Sinne der Uhrzeiger um einen Winkel drehen, der gegeben ist durch

$$\theta = \frac{c}{2} (q'' - q').$$

Nun hängt nach Gleichung (8) q von γ ab. Da ausserdem die auf die magnetische Wirkung zurückzuführende Aenderung von q stets nur einen ganz geringen Bruchtheil seines Werthes ausmacht, so können wir setzen:

$$q = q_0 + \frac{\partial q}{\partial \gamma} \gamma,$$

wobei q_0 den Werth von q bezeichnet, welcher der magnetischen Kraft Null entspricht. Diese Grösse q_0 muss dann der Gleichung (8) genügen, wenn man darin $\gamma = 0$ setzt; man erhält also:

$$q n^2 = A_0 q_0^2 + A_1 q_0^4 + \dots$$

Auch die Grössen q' und q'' müssen dieser Gleichung (8) Genüge leisten, wenn man dem n Werthe beilegt, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Hierbei wird dem positiven Werthe von n der Werth q' entsprechen, da man nach Gleichung (7) einen linksrotirenden Strahl erhält, welcher sich in der Richtung der positiven Z-Axe fortpflanzt, wenn n positiv ist; dem negativen Werthe von n wird dagegen die Grösse q'' entsprechen. Demnach finden wir:

$$q n^2 + 2 C \gamma q'^2 n = A_0 q'^2 + A_1 q'^4 + \dots$$

$$q n^2 - 2 C \gamma q''^2 n = A_0 q''^2 + A_1 q''^4 + \dots$$

Eine Vergleichung der drei letzten Beziehungen ergibt unmittelbar, dass $q' > q_0$ und $q'' < q_0$; wir müssen also setzen:

$$q' = q_0 + \frac{\partial q'}{\partial \gamma} \gamma; \quad q'' = q_0 - \frac{\partial q''}{\partial \gamma} \gamma.$$

Führen wir diese Werthe von q' und q'' in den Ausdruck für die Drehung ein, dann erhalten wir

$$\theta = -\frac{c\gamma}{2} \left(\frac{\partial q'}{\partial \gamma} + \frac{\partial q''}{\partial \gamma} \right),$$

oder, wenn man die Werthe der Differentialquotienten von q' und q'' nach γ einander gleich setzt,

$$(9) \quad \theta = -c\gamma \frac{\partial q}{\partial \gamma}.$$

221. Durch Differentiation der Gleichung (8) nach γ erhalten wir, wenn wir n als konstant betrachten:

$$-2 C q^2 n - 4 C \gamma q n \frac{\partial q}{\partial \gamma} = (2 A_0 q + 4 A_1 q^3 + \dots) \frac{\partial q}{\partial \gamma} = \frac{\partial Q}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial \gamma}.$$

Nun bedeutet die von uns gemachte Annahme, dass die Grösse q unter der Wirkung eines magnetischen Feldes sich nur sehr wenig ändert, nichts anderes, als dass der Koeffizient C sehr klein ist. Wir dürfen also das Glied $4 C \gamma q n \frac{\partial q}{\partial \gamma}$ gegenüber den Gliedern auf der rechten Seite vernachlässigen, und erhalten damit

$$(10) \quad \frac{\partial q}{\partial \gamma} = -2 C \gamma^2 n \frac{1}{\frac{\partial Q}{\partial q}}.$$

Betrachten wir weiter in der Gleichung (8) γ als konstant und differentiieren nach n , so ergibt sich:

$$2 \varrho n - 2 C \gamma q^2 - 4 C \gamma q n \frac{\partial q}{\partial n} = (2 A_0 q + 4 A_1 q^3 + \dots) \frac{\partial q}{\partial n} = \frac{\partial Q}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial n}.$$

Aus demselben Grunde, wie oben, kann das Glied $2 C \gamma q^2$ gegenüber dem Glied $2 \varrho n$ vernachlässigt werden, und ebenso der Ausdruck $4 C \gamma q n \frac{\partial q}{\partial n}$ gegenüber den Gliedern auf der rechten Seite der Gleichung; wir erhalten also:

$$2 \varrho n = \frac{\partial Q}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial n}.$$

Setzen wir den aus dieser Gleichung für $\frac{\partial Q}{\partial q}$ sich ergebenden Werth in die Gleichung (10) ein, dann finden wir:

$$(11) \quad \frac{\partial q}{\partial \gamma} = - \frac{C \gamma^2}{\varrho} \cdot \frac{\partial q}{\partial n}.$$

Um diesen Differentialquotient als Funktion der Wellenlänge λ der betrachteten Lichtart im leeren Raume und des Brechungsquotienten i des Medium auszudrücken, bedenken wir, dass

$$q \lambda = 2 \pi i \quad \text{und} \quad n \lambda = 2 \pi V,$$

wobei V die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im leeren Raume bedeutet. Aus diesen beiden Gleichungen finden wir:

$$q = \frac{i n}{V}$$

und demnach

$$\frac{\partial q}{\partial n} = \frac{1}{V} \left(i + n \frac{\partial i}{\partial n} \right).$$

Durch Differentiation der zweiten der obigen Gleichungen erhält man ausserdem:

$$\lambda \, d n + n \, d \lambda = 0$$

oder

$$\frac{n}{d n} = - \frac{\lambda}{d \lambda} \quad \text{und} \quad n \frac{d i}{d n} = - \lambda \frac{d i}{d \lambda}.$$

Obige Gleichung lässt sich demnach schreiben:

$$\frac{\partial q}{\partial n} = \frac{1}{V} \left(i - \lambda \frac{\partial i}{\partial \lambda} \right).$$

Führen wir diesen Werth in die Gleichung (11) ein und ersetzen darin noch q durch $\frac{2 \pi i}{\lambda}$, dann erhalten wir:

$$\frac{\partial q}{\partial \gamma} = - \frac{4 \pi^2 C}{e V} \cdot \frac{i^2}{\lambda^2} \left(i - \lambda \frac{\partial i}{\partial \lambda} \right).$$

Demnach wird, wenn wir endlich setzen:

$$\frac{4 \pi^2 C}{e V} = m$$

der Werth für die durch Gleichung (9) gegebene Drehung der Polarisationssebene

$$\theta = m c \gamma \frac{i^2}{\lambda^2} \left(i - \lambda \frac{\partial i}{\partial \lambda} \right).$$

Damit haben wir also die Formel (I) von Airy gewonnen.

222. Erklärung des Zusatzgliedes zum Ausdrucke für die kinetische Energie. Es handelt sich jetzt darum, die Einführung des Zusatzgliedes (5) in den Ausdruck für die kinetische Energie des Medium zu erklären. Wie wir schon erwähnt haben, besitzen die Ausführungen von Maxwell nicht ganz die Strenge, welche man hierbei wohl wünschen möchte; immerhin wollen wir sie wiederzugeben versuchen.

Maxwell stellt folgende Ueberlegung an: Die Erfahrung lehrt, dass ein isotropes Medium unter der Wirkung eines magnetischen Feldes die Polarisationssebene des Lichtes dreht; in Folge dessen pflanzt sich ein rechts cirkular polarisirter Strahl nicht mit derselben Geschwindigkeit fort, wie ein links polarisirter. Wenn nun die Verschiebungskomponenten eines Aethermoleküls durch die Gleichungen (7) dargestellt werden, so erhalten wir einen rechts oder links rotirenden Strahl, je nachdem n negativ oder positiv ist.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nach der Z-Axe ist $= \frac{n}{q}$; da diese nun für die beiden Arten von Strahlen einen verschiedenen Werth hat, so müssen zwei Werthen von n , welche sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, zwei verschieden grosse und mit entgegengesetzten Vorzeichen behaftete Werthe von q entsprechen, oder, was auf dasselbe hinauskommt, zu einem einzigen Werthe von q gehören zwei Werthe von n , die dem absoluten Betrage und dem Vorzeichen nach verschieden sind. Nun aber stellt das betreffende Medium ein dynamisches System dar, dessen jeweiliger Zustand durch eine gewisse Anzahl von Gleichungen charakterisirt ist. Wir haben also von der Thatsache Rechenschaft abzulegen, dass es für einen bestimmten Werth von q und r zwei verschiedene Werthe von n gibt, welche diesen Gleichungen Genüge leisten.

Wir wollen die Gleichung von Lagrange in Bezug auf den Parameter r aufstellen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial r'} - \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial U}{\partial r}.$$

Da dieser Parameter r einen bestimmten Werth besitzt, der sich mit der Zeit nicht ändert, so ist $r' = \text{Null}$, und somit verschwindet das erste Glied der obigen Gleichung, welche dadurch übergeht in die Form

$$\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial r} = 0.$$

Nun ist T , die kinetische Energie des-Systems, eine homogene Funktion zweiten Grades der Geschwindigkeiten, sie enthält also n^2 , da n die Winkelgeschwindigkeit eines Aethermoleküls bedeutet. T kann ausserdem noch Glieder enthalten, in welchen die Produkte von n mit anderen Geschwindigkeiten vorkommen, und endlich auch noch solche, in denen nur diese anderen Geschwindigkeiten in der zweiten Potenz auftreten, n aber gar nicht. Was U anbetrifft, so nimmt Maxwell an, dass es den Werth beibehält, den es in einem

der Wirkung des magnetischen Feldes nicht unterworfenen Medium besitzt; demnach enthält U nur Differentialquotienten von ξ und η nach z , nicht aber n . Der allgemeinste Ausdruck der Gleichung von Lagrange, die wir soeben betrachtet haben, wird also

$$An^2 + Bn + C = 0.$$

Da diese Gleichung nach dem Vorgegangenen durch zwei Werthe von n erfüllt sein muss, die ihrer absoluten Grösse nach verschieden sein sollen, so darf B nothwendiger Weise nicht Null sein. Nun stammen die Glieder Bn einzig aus der kinetischen Energie, diese letztere enthält also wenigstens zwei Reihen von Ausdrücken. Die eine, An^2 , ist homogen und vom zweiten Grade in Bezug auf n ; es ist dies der Ausdruck für die kinetische Energie eines Medium, das der Wirkung des Magnetismus nicht unterworfen ist. Die andere enthält die erste Potenz von n ; sie rührt von dem magnetischen Felde her und repräsentirt also das Zusatzglied, um dessen Erklärung es sich handelt, oder wenigstens einen Theil dieses Zusatzgliedes.

223. Maxwell zog aus dem Vorgegangenen folgende Schlüsse:

„Alle Glieder von T sind in Bezug auf die Geschwindigkeiten von der zweiten Dimension; die Glieder, welche n zum Faktor haben, werden also noch von anderen Geschwindigkeiten abhängen. Da wir r und q in Bezug auf die Zeit als konstant anzusehen haben, können r' und q' nicht zu diesen anderen Geschwindigkeiten gehören. Es muss also in dem Medium noch eine Geschwindigkeit vorhanden sein, die von der als Licht aufgefassten Erscheinung nicht hervorgebracht wird.

Weiter ist T eine skalare Grösse, daher muss die noch erforderliche Geschwindigkeit so beschaffen sein, dass ihr Produkt mit n eine skalare Grösse liefert, d. h. diese Geschwindigkeit muss die direkte oder die entgegengesetzte Richtung der Geschwindigkeit n haben. Sie ist also eine Winkelgeschwindigkeit einer um die Z-Axe vor sich gehenden Rotation.

Dreht man ferner das Medium herum, so ändert sich, wie die Erfahrung lehrt, nichts an der Erscheinung der elektromagnetischen Rotation der Polarisationssebene; die besagte Geschwindigkeit kann also nicht etwas dem Medium für sich Zukommendes bilden, sie muss direkt von der magnetischen Kraft abhängen.

Aus alle dem ziehen wir den Schluss, dass diese Geschwindigkeit ein steter Begleiter der magnetischen Kraft ist, wenn sie in Medien wirkt, in denen sie die Polarisationssebene eines Lichtstrahls

zu drehen vermag (Maxwell, Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus. Deutsch von B. Weinstein, II, § 820).

Etwas später (§ 822) fügt Maxwell hinzu:

„Die nähere Untersuchung der Wirkung des Magnetismus auf polarisiertes Licht führt, wie wir gesehen haben, zu dem Schlusse, dass in einem Medium, welches unter dem Einflusse einer magnetischen Kraft steht, nebenbei noch etwas vorgeht, was mathematisch derselben Klasse wie eine Winkelgeschwindigkeit angehört, deren Axe in die Richtung der magnetischen Kraft fällt. Diese Winkelgeschwindigkeit kann nicht einem Theile des Medium als Ganzes angehören. Es rotiren also im Medium nicht etwa Theile von endlichen Dimensionen, vielmehr muss man annehmen, dass die magnetische Rotation von den kleinsten Theilchen des Medium dadurch, dass diese sich um ihre eigenen Axen drehen, ausgeführt wird. Diese Annahme bildet die Hypothese von den molekularen Wirbeln.“

224. So muss sich, nach Maxwell, die magnetische Drehung der Polarisationssebene aus dem Vorhandensein von Wirbeln in dem Medium ergeben, das der Wirkung eines magnetischen Feldes unterworfen ist, und schon bei Gelegenheit der Erklärung der elektrodynamischen Drucke (§ 210) wurden wir ja auf solche Wirbel geführt. Welches aber sind die Gesetze, die diese Wirbelbewegungen befolgen? Maxwell gesteht ein, dass wir hierüber absolut nichts wissen, und nimmt deshalb an, dass die Wirbelbewegungen eines magnetischen Medium denselben Bedingungen unterworfen sind, wie diejenigen, welche Helmholtz¹⁾ in die Hydrodynamik einführte, und dass die Komponenten der Wirbelbewegung in einem Punkte denselben der magnetischen Kraft in demselben Punkte gleich sind.

Eine der Eigenschaften der Helmholtz'schen Wirbel lässt sich folgendermaassen aussprechen: Wenn vermöge der Bewegung des Medium zwei auf der Axe des Wirbels befindliche benachbarte Moleküle P und Q nach P' und Q' wandern, so stellt die Gerade P'Q' die Richtung der neuen Wirbelaxe dar, und die Grösse der Wirbel hat sich geändert im Verhältniss von P'Q':PQ.

Wir wollen diese Eigenschaft auf die Wirbel eines Medium anwenden, das unter der Einwirkung des Magnetismus steht. Bezeichnen wir mit α , β , γ die Komponenten der magnetischen Kraft in P und mit α' , β' , γ' die Komponenten derselben Kraft für den

¹⁾ v. Helmholtz, Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen. Crelle Bd. 55, p. 25 ff. (1858) oder gesammelte Abh. 101 ff.

Fall, dass der Punkt P nach P' gekommen ist, endlich mit ξ , η , ζ die Verschiebungskomponenten des Punktes P, dann erhalten wir:

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha' = \alpha + \alpha \frac{\partial \xi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \xi}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \xi}{\partial z}, \\ \beta' = \beta + \alpha \frac{\partial \eta}{\partial x} + \beta \frac{\partial \eta}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \eta}{\partial z}, \\ \gamma' = \gamma + \alpha \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \beta \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \zeta}{\partial z}. \end{array} \right.$$

225. Die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit eines Punktes des Medium haben den Werth

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z} \right), \\ \omega_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right), \\ \omega_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \right). \end{array} \right.$$

Da nun nach den Ausführungen des § 223 die kinetische Energie diese Geschwindigkeit enthalten soll, so muss das betreffende Glied für den Fall, dass die Koordinatenachsen in Bezug auf die Richtung der magnetischen Kraft eine beliebige Lage haben, von folgender Form sein

$$2 C (\omega_1 \alpha' + \omega_2 \beta' + \omega_3 \gamma'),$$

und das Zusatzglied zur kinetischen Energie für ein bestimmtes Volumen des Medium wird:

$$2 C \int (\omega_1 \alpha' + \omega_2 \beta' + \omega_3 \gamma') d\tau.$$

Ersetzen wir in diesem Ausdrucke α' , β' , γ' und ω_1 , ω_2 , ω_3 durch ihre in (12) und (13) gegebenen Werthe, so erhalten wir:

$$14) \left\{ \begin{aligned} & C \int \left[\alpha \left(\frac{\partial \zeta'}{\partial y} - \frac{\partial \eta'}{\partial z} \right) + \beta \left(\frac{\partial \xi'}{\partial z} - \frac{\partial \zeta'}{\partial x} \right) + \gamma \left(\frac{\partial \eta'}{\partial x} - \frac{\partial \xi'}{\partial y} \right) \right] d\tau, \\ & + C \int \left[\alpha \frac{\partial \xi}{\partial x} \left(\frac{\partial \zeta'}{\partial y} - \frac{\partial \eta'}{\partial z} \right) + \beta \frac{\partial \xi}{\partial y} \left(\frac{\partial \zeta'}{\partial y} - \frac{\partial \eta'}{\partial z} \right) + \gamma \frac{\partial \xi}{\partial z} \left(\frac{\partial \zeta'}{\partial y} - \frac{\partial \eta'}{\partial z} \right) \right] d\tau, \\ & + C \int \left[\alpha \frac{\partial \eta}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi'}{\partial z} - \frac{\partial \zeta'}{\partial x} \right) + \beta \frac{\partial \eta}{\partial y} \left(\frac{\partial \xi'}{\partial z} - \frac{\partial \zeta'}{\partial x} \right) + \gamma \frac{\partial \eta}{\partial z} \left(\frac{\partial \xi'}{\partial z} - \frac{\partial \zeta'}{\partial x} \right) \right] d\tau, \\ & + C \int \left[\alpha \frac{\partial \zeta}{\partial x} \left(\frac{\partial \eta'}{\partial x} - \frac{\partial \xi'}{\partial y} \right) + \beta \frac{\partial \zeta}{\partial y} \left(\frac{\partial \eta'}{\partial x} - \frac{\partial \xi'}{\partial y} \right) + \gamma \frac{\partial \zeta}{\partial z} \left(\frac{\partial \eta'}{\partial x} - \frac{\partial \xi'}{\partial y} \right) \right] d\tau. \end{aligned} \right.$$

(Hierbei bedeuten ξ' , η' , ζ' die Derivirten nach der Zeit.)

Nun lässt sich nachweisen, dass bei Ausdehnung der Integration auf den gesammten Raum das erste Integral für den vorliegenden Fall den Werth Null gibt. Das erste Glied dieses Integrals liefert nämlich bei partieller Integration:

$$\int \alpha \frac{\partial \zeta'}{\partial y} d\tau = \int \alpha \zeta' dx dy - \int \zeta' \frac{\partial \alpha}{\partial y} d\tau.$$

Da das Oberflächenintegral sich auf eine Grenzfläche erstreckt, welche nach unserer Annahme im Unendlichen liegt, so sind ζ' und α Null, also auch das ganze Integral. In dem dreifachen Integrale auf der rechten Seite tritt die Derivirte $\frac{\partial \alpha}{\partial y}$ auf; wenn nun das magnetische Feld ein gleichförmiges ist, wie das bei den Untersuchungen über die magnetische Drehung der Polarisationssebene meistens zu sein pflegt, so wird dieser Differentialquotient Null und damit auch das dreifache Integral. Dasselbe lässt sich für die sämtlichen Glieder des ersten, zum Zusatzgliede gehörigen Ausdruckes nachweisen, — sie sind alle gleich Null. Wir haben also nur noch die drei übrigen Integrale dieses Ausdruckes zu discutiren.

Diese lassen sich in eine andere Form bringen. Durch theilweise Integration wird beispielsweise das erste Glied des zweiten Integraleausdruckes:

$$\int \alpha \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \zeta'}{\partial y} d\tau = \int \alpha \zeta' \frac{\partial \xi}{\partial x} dx dz - \int \alpha \zeta' \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} d\tau$$

oder, da das Oberflächenintegral aus den schon oben angeführten Gründen Null wird:

$$\int \alpha \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi'}{\partial y} d\tau = - \int \alpha \zeta' \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} d\tau.$$

Das zweite Glied des dritten Integrals in dem Zusatzgliede liefert uns aber, wenn wir es ebenso behandeln:

$$- \int \alpha \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \zeta'}{\partial x} d\tau = + \int \alpha \zeta' \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} d\tau$$

und wir erhalten also für die Summe beider

$$\int \alpha \zeta' \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) d\tau.$$

Führen wir bei allen Gliedern eine analoge Umformung durch und vereinigen sie in passender Weise, so reducirt sich die Gleichung (14) auf den Ausdruck (5), den wir als Zusatzglied für die kinetische Energie des unter der Wirkung eines magnetischen Feldes stehenden Medium eingeführt haben.

226. Schwierigkeiten, welche durch die Maxwell'sche Theorie entstehen. In der Theorie, welche wir soeben auseinandersetzen, scheint Maxwell die elektromagnetische Lichttheorie vollkommen verlassen zu haben. Wir hatten nämlich mit Maxwell implicite vorausgesetzt, dass bei der Fortpflanzung einer Welle unter der Einwirkung eines magnetischen Feldes die Verschiebungskomponenten ξ , η , ζ eines Aethermoleküls nicht direkt von der magnetischen Kraft abhängen. Nun sahen wir (cf. § 189), dass die Uebereinstimmung der elektromagnetischen Lichttheorie mit den für die Erklärung der optischen Erscheinung thatsächlich bereits angenommenen Theorien erforderte, dass die nach der Zeit genommenen Differentialquotienten von ξ , η , ζ gleich sind den Komponenten α , β , γ der magnetischen Kraft. Dies müsste auch der Fall sein, wenn sich die Maxwell'sche Theorie der magnetischen Drehung mit der elektromagnetischen Lichttheorie in Einklang bringen lassen sollte, es scheint aber nicht so zu sein.

Andrerseits dürften sich die Formeln von Helmholtz nur schwer auf unsern Fall anwenden lassen, denn sie stützen sich auf die Principien der Hydrodynamik, die man schwerlich auf den Aether ausdehnen kann, da man sonst auch hier einen gleich-

förmigen Druck nach allen Richtungen annehmen müsste. Sie setzen ausserdem voraus, dass zwischen den Komponenten der Verschiebung und denjenigen der Wirbel gewisse Beziehungen bestehen, die sich folgendermaassen ausdrücken lassen:

$$\alpha = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y \partial t} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial z \partial t},$$

$$\beta = \frac{\partial^2 \xi}{\partial z \partial t} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial t},$$

$$\gamma = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial t}.$$

Dies berücksichtigt Maxwell jedoch nicht.

227. Nehmen wir für den Augenblick einmal an, dass die Differentialquotienten ξ' , η' , ζ' gleich seien α , β , γ , und sehen zu, was sich aus dieser Hypothese ergibt.

Das Hauptglied der kinetischen Energie wird:

$$\frac{\mu}{8\pi} \int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) d\tau.$$

Die Binomialglieder aus der Gleichung (14) für das Zusatzglied, oder die nach der Zeit genommenen Derivirten der Glieder, welche sich in der Formel (5) für denselben Ausdruck finden, erhalten dann die Werthe

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial y} - \frac{\partial \eta'}{\partial z} = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z},$$

$$\frac{\partial \xi'}{\partial z} - \frac{\partial \zeta'}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \eta'}{\partial x} - \frac{\partial \xi'}{\partial y} = \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}.$$

Nun sind nach den Formeln (II) des § 167 die rechten Seiten dieser Gleichungen gleich $4\pi u$, $4\pi v$, $4\pi w$. Da aber u , v , w die nach der Zeit genommenen Differentialquotienten der elektrischen Verschiebungskomponenten f , g , h bedeuten, so erhalten wir durch Integration:

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z} = 4 \pi f, \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 4 \pi g, \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} = 4 \pi h. \end{cases}$$

In Folge dessen lässt sich der Ausdruck (5) für das Zusatzglied schreiben:

$$(16) \quad 4 \pi C \int \left(\alpha \frac{df}{dv} + \beta \frac{dg}{dv} + \gamma \frac{dh}{dv} \right) d\tau.$$

Die durch die Symbole $\frac{df}{dv} \dots$ dargestellten Grössen enthalten die Produkte aus den Komponenten der magnetischen Kraft in die nach x, y, z genommenen Differentialquotienten der elektrischen Verschiebung; in Folge dessen ist das Zusatzglied in Bezug auf diese Grössen vom dritten Grade. Im Hauptgliede von T treten α, β, γ in der zweiten Potenz auf, aber die Differentialquotienten der elektrischen Verschiebung kommen darin überhaupt nicht vor. Deshalb werden die Bewegungsgleichungen im Allgemeinen linear sein, wie dies auch in den gewöhnlichen Theorien des Lichtes der Fall ist; bei der Drehung der Polarisationssebene hören sie jedoch in Folge der Einführung des Zusatzgliedes auf, linear zu sein. Hieraus ergibt sich, dass im letzteren Falle die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Störungen, welche das Licht repräsentiren, von α, β, γ abhängt und damit auch von der Intensität des Lichtes, denn diese ist eine Funktion von α, β, γ . Diese Folgerung steht aber im direkten Widerspruche zu den Thatsachen, welche sich bei allen anderen optischen Erscheinungen auf experimentellem Wege ergeben haben. Man darf also wohl mit Recht bezweifeln, dass zwischen der elektromagnetischen Lichttheorie und der Theorie von der magnetischen Drehung Uebereinstimmung herrscht.

228. Immerhin braucht man wegen dieses Schlusses die letztere Theorie noch nicht sogleich zu verwerfen. Man befindet sich nämlich bei den Bedingungen, unter welchen die Experimente angestellt werden, in einem der besonderen Fälle, dass die Bewegungsgleichungen linear sind, obgleich das Zusatzglied vom dritten Grade ist.

Um dies nachzuweisen, fassen wir eine ebene, polarisirte Welle in's Auge und wählen als XY-Ebene eine zur Welle parallele

Ebene. Da die elektrische Verschiebung in der Wellenebene vor sich geht (§ 180), so ist die Komponente h gleich Null; ausserdem hängen f und g weder von x noch von y ab. In Folge dessen reducirt sich das Zusatzglied (16) auf:

$$4 \pi C \int \gamma \left(\alpha \frac{\partial f}{\partial z} + \beta \frac{\partial g}{\partial z} \right) d\tau.$$

Die Komponenten α , β , γ der magnetischen Kraft können betrachtet werden als die Summe aus den Komponenten der magnetischen Kraft des konstanten Feldes, in welchem sich das vom Lichtstrahl durchsetzte Medium befindet, und aus den Komponenten der magnetischen Kraft des Feldes, dessen periodische Störungen die Lichterscheinungen verursachen. Diese letzteren Komponenten sind veränderlich mit der Zeit. Aber wir wissen, dass die magnetische Kraft des periodischen Feldes parallel der Wellenebene gerichtet ist, die Komponente nach der Z-Axe ist also im vorliegenden Falle Null. Demnach wird die Grösse γ , welche in dem obigen Ausdrucke für das Zusatzglied vorkommt, dargestellt durch die Z-Komponente des konstanten Feldes, das durch die Magnete oder die Ströme hervorgebracht ist. Da diese konstant ist, so wird das Zusatzglied nur noch vom zweiten Grade in Bezug auf α , β , $\frac{\partial f}{\partial z}$ und $\frac{\partial g}{\partial z}$ sein, und die Bewegungsgleichungen werden wieder linear.

Es lässt sich auch noch auf einem anderen Wege nachweisen, dass γ konstant ist. Stellen wir nämlich die Lagrange'sche Gleichung für diese Grösse auf, so erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial \gamma'} + \frac{\partial T}{\partial \gamma} = \frac{\partial U}{\partial \gamma}.$$

Nun hängt nach Cauchy U nicht von ζ ab, es ist also auch unabhängig von γ und die rechte Seite dieser Gleichung wird Null. Das erste Glied der linken Seite ist gleichfalls Null, da T , das hier den Werth

$$T = \frac{\mu}{8 \pi} \int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) d\tau + 4 \pi C \int \gamma \left(\alpha \frac{\partial f}{\partial z} + \beta \frac{\partial g}{\partial z} \right) d\tau$$

besitzt, γ' nicht enthält. Daher reducirt sich die vorhergehende Gleichung auf

$$\frac{\partial T}{\partial \gamma} = 0,$$

oder, indem man T durch den obigen Werth ersetzt und die Differentiation ausführt,

$$\frac{\mu}{4\pi} \gamma + 4\pi C \left(\alpha \frac{\partial f}{\partial z} + \beta \frac{\partial g}{\partial z} \right) = 0.$$

Die Grösse γ wird konstant sein, wenn das zweite Glied der Gleichung konstant ist. Bei Berücksichtigung der Gleichungen (15) für die Verschiebungskomponenten erhalten wir aber für diesen Ausdruck:

$$C \left[\alpha \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right) + \beta \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial z} \right) \right]$$

oder, da die Wellenoberfläche senkrecht zur Z-Axe liegt

$$C \left(\beta \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \alpha \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right),$$

oder endlich

$$C \left(\eta' \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \xi' \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right).$$

Nun genügen ξ und η als Verschiebungskomponenten eines Aethermoleküls den Gleichungen:

$$\xi = r \cos(nt - qz)$$

$$\eta = r \sin(nt - qz).$$

Berechnen wir hieraus die ersten Differentialquotienten von ξ und η nach t , und die zweiten Differentialquotienten nach z , und setzen die so gefundenen Werthe in den vorhergehenden Ausdruck ein, so erhalten wir:

$$C r^2 n q^2 [- \cos(nt - qz) \cos(nt - qz) - \sin(nt - qz) \sin(nt - qz)] = - C r^2 n q^2.$$

Dies ist aber eine von t unabhängige Grösse, somit ist γ konstant.

229. Noch eine andere Schwierigkeit erwächst aus der Anwendung der Eigenschaften der Helmholtz'schen Wirbel auf die Mole-

kularwirbel eines im magnetischen Felde befindlichen Medium. Nothwendiger Weise muss nämlich die Energie dieses Medium den Werth besitzen:

$$\frac{\mu}{8\pi} \int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) d\tau.$$

Wenn aber, wie Maxwell annimmt, α , β , γ die Komponenten eines Helmholtz'schen Wirbels sind, dann erhält die kinetische Energie des Systems einen ganz anderen Werth.

Es dürfte nicht leicht sein, diese Schwierigkeit zu beseitigen, und es würde dies überhaupt nur gelingen, wenn man die Maxwell'sche Theorie von Grund aus änderte; eine solche Aenderung aber würde sie der von Potier aufgestellten Theorie nähern.

230. Theorie von Potier. Diese Theorie beruht auf folgenden beiden Hypothesen:

1. Die ponderabele Materie nimmt in einem gewissen, von der Wellenlänge abhängigen Maasse an der Aetherbewegung Theil.

2. Die Moleküle eines ponderabelen Körpers werden unter der Einwirkung eines magnetischen Feldes zu wirklichen Magneten.

Die erste, bereits von Fresnel aufgestellte Hypothese scheint durch die Versuche von Fizeau über das Mitwandern des Aethers bestätigt worden zu sein; die zweite steht in Uebereinstimmung mit der gewöhnlichen Erklärungsweise für die magnetischen oder diamagnetischen Eigenschaften der ponderabelen Medien.

Aus diesen beiden Hypothesen folgt, dass jedes magnetisirte Molekül des Medium eine periodische Lagenveränderung erleidet, wenn ein Lichtstrahl das Medium durchsetzt. Im Allgemeinen besteht diese Lagenveränderung nicht nur aus einer Fortbewegung, da die beiden Pole des Magneten sich um ungleich grosse Strecken verschieben; vielmehr ändert sich die Richtung der magnetischen Axe eines Moleküls periodisch, ebenso, wie die Komponenten seines magnetischen Moments, und in Folge dessen entstehen elektromotorische Induktionskräfte in dem Medium. Diese Kräfte kommen noch zu denjenigen hinzu, welche aus den magnetischen, das Wesen des Lichtes bildenden Störungen entspringen; hierdurch wird das Gesetz, welches diese Störungen mit der Zeit verknüpft, geändert, und man begreift, dass die Polarisationssebene eine Drehung erfahren muss.

231. Wir wollen nun nachweisen, dass die Hypothesen von Potier gestatten, das Maxwell'sche Zusatzglied in den Ausdruck für die kinetische Energie einzuführen, und in Folge dessen die Formel (I) von Airy zu erhalten.

Es seien x, y, z und $x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z$ die Koordinaten der Pole eines in der normalen Stellung befindlichen magnetischen Moleküls und $+m, -m$ resp. die magnetischen Massen dieser Pole, dann erhalten wir für die Komponenten des magnetischen Moments dieses Moleküls die Werthe

$$m \delta x, \quad m \delta y, \quad m \delta z.$$

Um die neuen Werthe für diese Komponenten zu finden, wenn das Molekül durch die Lichtbewegung aus seiner Gleichgewichtslage entfernt ist, müssen wir die Richtung kennen, in welcher die ponderable Materie durch diese Störung mitgeführt wird. Wir wollen, was das Natürlichste ist, annehmen, dass diese Richtung mit derjenigen der elektrischen Verschiebung zusammenfällt. Da nun ausserdem in der elektromagnetischen Lichttheorie die elektrische Verschiebung auf der Polarisationssebene senkrecht steht (cf. § 189), so kommt diese Hypothese auf die Annahme hinaus, dass die Verschiebung der ponderablen Materie nach der Richtung der von Fresnel angenommenen Lichtschwingung vor sich geht. Bezeichnen nun f, g, h die Komponenten der elektrischen Verschiebung im Punkte x, y, z , und ε einen Proportionalitätsfaktor, so erhalten wir für die Koordinaten eines der Pole des verschobenen Moleküls:

$$x + \varepsilon f; \quad y + \varepsilon g; \quad z + \varepsilon h$$

und für die Koordinaten des anderen Pols

$$x + \delta x + \varepsilon f + \varepsilon \delta f; \quad y + \delta y + \varepsilon g + \varepsilon \delta g; \quad z + \delta z + \varepsilon h + \varepsilon \delta h.$$

Die Aenderung δf der Verschiebungskomponente f bei den Aenderungen $\delta x, \delta y, \delta z$ der Koordinaten lässt sich nach wachsenden Potenzen dieser letzteren Grössen entwickeln; bei Vernachlässigung der Glieder zweiter und höherer Ordnung finden wir

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z.$$

Folglich sind die Komponenten für das magnetische Moment des Moleküls nach dessen Verschiebung gegeben durch

$$m (\delta x + \varepsilon \delta f) = m \delta x + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial x} m \delta x + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial y} m \delta y + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial z} m \delta z$$

und zwei andere, analoge Ausdrücke.

232. Wir wollen nun die Komponenten der Magnetisirung einführen. Es mögen A, B, C diese Komponenten im Punkte x, y, z sein, A', B', C' deren neue Werthe, wenn dieser Punkt sich um $\varepsilon f, \varepsilon g, \varepsilon h$ verschoben hat; dann gilt:

$$\begin{aligned} A \, d\tau &= m \, dx; & B \, d\tau &= m \, dy; & C \, d\tau &= m \, dz \\ A' \, d\tau &= m \, (dx + \varepsilon \, df); & B' \, d\tau &= m \, (dy + \varepsilon \, dg); & C' \, d\tau &= m \, (dz + \varepsilon \, dh), \end{aligned}$$

wobei $d\tau$ das Volumen des magnetisirten Moleküls bedeutet. Hiernach lässt sich die letzte Gleichung des vorhergehenden Paragraphen schreiben:

$$A' = A + \varepsilon \left(A \frac{\partial f}{\partial x} + B \frac{\partial f}{\partial y} + C \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

Nun sind aber die Komponenten der Magnetisirung mit den Komponenten der magnetischen Kraft durch die Beziehungen (cf. § 103)

$$A = \alpha; \quad B = \beta; \quad C = \gamma$$

verknüpft, wobei α die Magnetisirungsfunktion bedeutet; hierdurch geht die obige Gleichung über in:

$$A' = \alpha + \varepsilon \alpha \left(\alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

oder (cf. § 217)

$$(1) \quad A' = \alpha + \varepsilon \alpha \frac{df}{dv}.$$

233. Andererseits sind die Komponenten der magnetischen Induktion

$$a = \alpha + 4\pi A; \quad b = \beta + 4\pi B; \quad c = \gamma + 4\pi C,$$

und nach der Verschiebung des Moleküls gehen dieselben über in:

$$a' = \alpha' + 4\pi A'; \quad b' = \beta' + 4\pi B'; \quad c' = \gamma' + 4\pi C'.$$

Wir wollen nun nachweisen, dass die in diesen Gleichungen auftretenden Komponenten der magnetischen Kraft α', β', γ' gleich α, β, γ sind.

Durch Differentiation nach x geht die Gleichung (1) über in

$$\frac{\partial A'}{\partial x} = \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \epsilon z \frac{d}{dv} \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Differentiiren wir die analogen Ausdrücke für B' nach y und für C' nach z und addiren die so erhaltenen Werthe, so folgt:

$$\frac{\partial A'}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y} + \frac{\partial C'}{\partial z} = \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \alpha \frac{\partial \beta}{\partial y} + \alpha \frac{\partial \gamma}{\partial z} + \epsilon z \frac{d}{dv} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \right).$$

Nun ist aber wegen der Inkompressibilität der Elektrizität der Klammerausdruck $\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \right)$ gleich Null, demnach reducirt sich die obige Gleichung auf:

$$\frac{\partial A'}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y} + \frac{\partial C'}{\partial z} = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung bedeutet bis auf das Vorzeichen die im Punkte $x + \epsilon f$, $y + \epsilon g$, $z + \epsilon h$ vorhandene Dichtigkeit der fingirten magnetischen Vertheilung, welche ihrer Wirkung nach den unter dem Einflusse des magnetischen Feldes stehenden Körper ersetzen kann; die rechte Seite repräsentirt dieselbe Grösse für den Punkt x , y , z .

Es ergibt sich also, dass diese fingirte Vertheilung durch die Verschiebung der magnetisirten Moleküle nicht geändert wird. Die magnetische Kraft in einem Punkte muss also denselben Werth behalten, ob sich diese Moleküle im Gleichgewichtszustande befinden, oder nicht.

234. Da wir haben

$$a' = \alpha + 4 \pi A',$$

so erhalten wir, wenn wir darin A' durch seinen Werth (1) ersetzen:

$$a' = \alpha (1 + 4 \pi z) + 4 \pi z \epsilon \frac{df}{dv}.$$

Nun ist bekanntlich (§ 103)

$$1 + 4 \pi z = \mu$$

setzen wir noch

$$z \varepsilon = 8 \pi C,$$

(wobei C nicht die Komponente der Magnetisirung nach der Z-Axe bedeutet), so erhalten wir für die Komponenten der Induktion:

$$a' = \mu \alpha + 32 \pi^2 C \frac{df}{dv},$$

$$b' = \mu \beta + 32 \pi^2 C \frac{dg}{dv},$$

$$c' = \mu \gamma + 32 \pi^2 C \frac{dh}{dv}.$$

Die kinetische Energie des Medium

$$T = \int \frac{a' \alpha + b' \beta + c' \gamma}{8 \pi} d\tau$$

erhält also den Werth

$$T = \frac{\mu}{8 \pi} \int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) d\tau + 4 \pi C \int \left(\alpha \frac{df}{dv} + \beta \frac{dg}{dv} + \gamma \frac{dh}{dv} \right) d\tau.$$

Wir finden also ganz denselben Werth wieder, den wir in der Maxwell'schen Theorie erhielten, da auch hier das Zusatzglied in der Gestalt des Ausdrucks (16) auftritt¹⁾.

¹⁾ Zu spät erst, nämlich zur Zeit, wo diese Vorlesungen nach mündlichen Andeutungen von Potier bereits gehalten waren, hat dieser Gelehrte seine Theorie der magnetischen Drehung der Polarisationssebene in zwei Aufsätzen auseinandergesetzt, deren einer in der französischen Uebersetzung des Maxwell'schen Werkes (Bd. II, p. 534), der andere in den Comptes rendues de l'Académie des Sciences (Bd. CVIII, p. 510) veröffentlicht ist. In diesen beiden Abhandlungen bestimmt Potier die Komponenten der elektromotorischen Kraft, welche durch die Verschiebung der magnetisirten Moleküle inducirt wird, und weist nach, dass diese elektromotorische Kraft in jedem Punkte des Medium auf der Richtung des Stromes, welcher durch das Element fließt, senkrecht steht, dass sie in der Richtung der Wellenebene auftritt, und dass sie proportional dem Strome selbst und der Komponente der magnetischen Kraft nach der Richtung des Strahles ist. Indem er sodann die Komponenten dieser elektromotorischen

235. Theorie von Rowland¹⁾. Schon vor Potier hatte Rowland den Versuch gemacht, die Theorie der magnetischen Drehung mit der elektromagnetischen Lichttheorie in Uebereinstimmung zu bringen, und zwar durch Einführung einer Hypothese, welche der Erklärung einer kurz vorher durch Hall²⁾ entdeckten Erscheinung ihr Entstehen verdankt.

Wir wollen zunächst kurz rekapitulieren, worin das Hall'sche Phänomen besteht.

Es sei A B C D (Fig. 35) ein sehr dünner metallischer Leiter, der in Form eines Kreuzes geschnitten ist. Der Strom einer galvanischen Säule fließt von A nach B, während die Enden C und D des Querstückes mit einem Galvanometer in Verbindung stehen.

Kraft in die Gleichungen des magnetischen Feldes einführt, erhält er die Differentialgleichungen, welche für jeden Augenblick die Komponenten der Störung liefern. Er gelangt so für eine Welle, deren Ebene parallel der XY-Ebene ist, sowohl zu den Gleichungen

$$\begin{aligned} K \mu \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + 2 K \mu C \gamma \frac{\partial^2 G}{\partial z^2 \partial t} &= \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}, \\ K \mu \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - 2 K \mu C \gamma \frac{\partial^2 F}{\partial z^2 \partial t} &= \frac{\partial^2 G}{\partial z^2}, \end{aligned}$$

welche die Komponenten der elektromagnetischen Kraft liefern, als auch zu den Gleichungen:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + 2 C \gamma \frac{\partial^3 \eta}{\partial z^2 \partial t} &= A_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}, \\ \rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - 2 C \gamma \frac{\partial^3 \xi}{\partial z^2 \partial t} &= A_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2}, \end{aligned}$$

welche die Bewegung eines Aethermoleküls bestimmen. Da diese beiden Gruppen von Gleichungen Derivate der dritten Ordnung enthalten, so führen sie, wie wir gesehen haben, auf die Drehung der Polarisationssebene.

Die Darstellungsart von Potier, die übrigens in beiden Aufsätzen auch nicht die gleiche ist, weicht stark von der hier gewählten ab; sie nähert sich dagegen derjenigen, welche wir in der Auseinandersetzung der Rowland'schen Theorie befolgen werden.

¹⁾ Philosophical Magazine, April 1881; Mascart und Joubert, Lehrbuch der Elektrizität, Deutsch von Levy, Bd. I.

²⁾ American Journal of Mathematics Bd. II, 1879.

Durch Verschiebung der Berührungspunkte der Galvanometerdrähte lässt es sich leicht erreichen, dass kein Zweigstrom das Galvanometer durchfließt. Bringt man den derartig vorbereiteten Apparat in ein sehr starkes magnetisches Feld, und zwar so, dass die Ebene desselben zur Richtung des Feldes senkrecht steht, so sieht man die Galvanometernadel ausschlagen. Für die Mehrzahl der Metalle und bei einem magnetischen Felde, das die Ebene der Figur von vorn nach hinten durchsetzt, zeigt der Galvanometerausschlag an, dass der Strom, welcher hindurchgeht, in dem Querstücke des Leiters von C nach D verläuft: der Strom AB scheint also nach der Richtung der elektromagnetischen Kraft, welche auf den Leiter ausgeübt

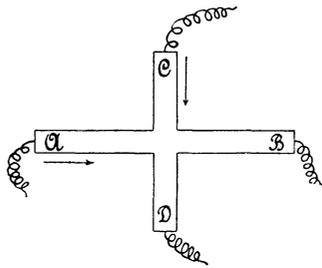


Fig. 35.

wird, mitgerissen zu werden. Ist der Leiter von Eisen, so hat die Abweichung der Galvanometernadel und somit auch die Richtung des Zweigstromes das entgegengesetzte Vorzeichen; nichts destoweniger kann man immer noch sagen, dass der Strom in der Richtung der magnetischen Kraft mitgerissen wird, da in Folge der Magnetisirung durch ein äusseres Feld die Richtung der Stromlinien und damit auch die der magnetischen Kraft im Innern einer Eisenplatte ihr Vorzeichen ändern.

Diese Thatsachen lassen sich übersichtlich erklären, wenn man annimmt, dass unter der Einwirkung eines magnetischen Feldes eine elektromotorische Kraft entsteht, welche dieselbe Richtung hat, wie die magnetische Kraft, die auf die ponderabele Materie des Leiters wirkt. Da die entstehende Kraft immer nur sehr gering ist, so darf man annehmen, dass sie in Bezug auf ihre Grösse der Stärke der magnetischen Kraft proportional sei. Immerhin ist diese Erklärung wenig befriedigend, denn sie sollte sich auf alle Leiter anwenden lassen, ganz abgesehen von deren Dimensionen, das Hall'sche Phänomen jedoch tritt nicht mehr auf, wenn die Dicke der Platte einige Zehntel Millimeter übersteigt. Ausserdem wurde sie durch die

neueren Experimente, besonders von Righi und Ledue, wieder erschüttert, da diese Beobachter zeigten, dass eine unter der Wirkung des Feldes auftretende Inhomogenität des Leiters die beste Erklärung der Thatsachen liefern würde.

236. Wie dem auch sei, Rowland schliesst sich der Hypothese von dem Entstehen einer elektromotorischen Kraft an; er nimmt an, dass eine ebensolche in einem nichtleitenden Medium auftritt, welches sich in einem magnetischen Felde befindet, vorausgesetzt, dass dies Medium von Verschiebungsströmen durchflossen wird, die bei der Fortpflanzung des Lichtes entstehen. Es ist also dieselbe elektromotorische Kraft, wie sie Potier an der Hand von Hypothesen einführt, die jedenfalls einleuchtender sind, als diejenigen von Rowland.

Da diese elektromotorische Kraft der elektromagnetischen Kraft gleichgerichtet und ihr proportional ist, so erhalten wir als Komponenten derselben

$$(1) \quad \begin{cases} P_1 = \varepsilon (cv - bw), \\ Q_1 = \varepsilon (aw - cu), \\ R_1 = \varepsilon (bu - av). \end{cases}$$

Die magnetische Induktion setzt sich zusammen aus der Induktion des konstanten Feldes, welchem das Medium ausgesetzt ist, und der Induktion des periodischen Feldes, welche das Licht hervorbringt. Die Komponenten der ersteren sind $\mu\alpha_1, \mu\beta_1, \mu\gamma_1$, da die Komponenten der Intensität des Feldes konstant und $= \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ sind. Die Komponenten der zweiten Art liefert die Gleichung III des § 167. Wir erhalten also:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} + \mu\alpha_1, \\ b &= \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x} + \mu\beta_1, \\ c &= \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} + \mu\gamma_1. \end{aligned}$$

237. Fasst man eine ebene, zur XY-Ebene parallele Welle in's Auge, so hängen die Variablen weder von x noch von y ab, und die vorhergehenden Gleichungen reduciren sich auf

$$(2) \quad \begin{cases} a = -\frac{\partial G}{\partial z} + \mu\alpha_1, \\ b = +\frac{\partial F}{\partial z} + \mu\beta_1, \\ c = \mu\gamma_1. \end{cases}$$

Die Gleichungen II des § 167, welche die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w der elektrischen Verschiebung geben, werden zu

$$\begin{aligned} 4\pi u &= -\frac{\partial\beta}{\partial z} = -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial b}{\partial z}, \\ 4\pi v &= +\frac{\partial\alpha}{\partial z} = +\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial a}{\partial z}, \\ 4\pi w &= 0. \end{aligned}$$

Ersetzt man hierin die Differentialquotienten von a und b nach z durch ihre den Gleichungen (2) entnommenen Werthe, so erhalten wir, da $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ konstant sind:

$$(3) \quad \begin{cases} 4\pi u = -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}, \\ 4\pi v = -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial z^2}, \\ 4\pi w = 0. \end{cases}$$

Wir können also mit Hülfe der Beziehungen (2) und (3) die durch die Gleichungen (1) gegebenen Komponenten der elektromotorischen Kraft als Funktion des elektromagnetischen Moments ausdrücken; für die zur Wellenebene parallelen Komponenten finden wir:

$$\begin{aligned} P_1 &= -\frac{\epsilon\gamma_1}{4\pi} \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial z^2}, \\ Q_1 &= +\frac{\epsilon\gamma_1}{4\pi} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Die dritte Komponente braucht nicht berücksichtigt zu werden, denn sie steht senkrecht auf der Wellenebene und kann keinen

Einfluss auf die das Licht repräsentirende Störung haben. Da die aus dieser letzteren herrührenden Komponenten der elektromotorischen Kraft (cf. § 177) gegeben sind durch

$$P = -\frac{\partial F}{\partial t}, \quad Q = -\frac{\partial G}{\partial t},$$

so finden wir für die der Wellenebene parallelen Komponenten der gesammten elektromotorischen Kraft:

$$P = -\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\epsilon\gamma_1}{4\pi} \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial z^2},$$

$$Q = -\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\epsilon\gamma_1}{4\pi} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial z^2},$$

und in Folge der Gleichungen VIII des § 169

$$4\pi u = -K \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \frac{K \epsilon\gamma_1}{4\pi} \cdot \frac{\partial^3 G}{\partial z^2 \partial t},$$

$$4\pi v = -K \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + \frac{K \epsilon\gamma_1}{4\pi} \cdot \frac{\partial^3 F}{\partial z^2 \partial t}.$$

Ersetzt man die linken Seiten dieser Gleichungen durch ihre Werthe (3), so erhält man schliesslich:

$$K \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + K \frac{\epsilon\gamma_1}{4\pi} \cdot \frac{\partial^3 G}{\partial z^2 \partial t} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial z^2},$$

$$K \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - K \frac{\epsilon\gamma_1}{4\pi} \cdot \frac{\partial^3 F}{\partial z^2 \partial t} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial z^2}.$$

Nach der Bemerkung im § 178 genügen α , β , γ ganz analogen Gleichungen; dasselbe gilt demnach für die Verschiebungskomponenten ξ , η , ζ eines Aethermoleküls. Wir finden also wieder dieselben Bewegungsgleichungen, welche Airy zu einem Ausdrucke für den Drehungswinkel θ der Polarisationssebene führten, der mit der Erfahrung im Einklange steht.

238. Kerr'sches Phänomen. Mit der magnetischen Drehung der Polarisationssebene berührt sich die im Jahre 1876 von Kerr¹⁾ entdeckte Thatsache, dass die Polarisationssebene eines polarisirten

¹⁾ Philosophical Magazine, 5. Serie Bd. III S. 321 (1877), Bd. V S. 161 (1878).

Strahles, welcher von einem Magnetpole reflektirt wird, eine Drehung erleidet.

Das durch einen Nicol polarisirte Licht einer Lampe wird von einer unter 45° geneigten Glasplatte reflektirt und fällt dann senkrecht auf den Magnetpol; von dort zurückgeworfen, durchsetzt es die Glasplatte und einen analysirenden Nicol und gelangt sodann in das Auge des Beobachters. Eine Eisenmasse, welche konisch durchbohrt ist, um die Lichtstrahlen durchzulassen, wird sehr nahe an der reflektirenden Oberfläche angebracht, damit die Magnetisirung dieser letzteren möglichst stark ausfällt.

Als Kerr den Polarisator so stellte, dass die auf die Pole fallenden Schwingungen parallel oder normal zur Einfallsebene gerichtet waren, und den Analysator drehte, bis die Helligkeit verschwand, sah er das Licht, wenn auch schwach, wieder aufleuchten, sobald der reflektirende Pol durch einen Strom magnetisirt wurde. Da nun Kerr nur über eine schwache magnetische Kraft verfügte, so drehte er, um die Erscheinung deutlicher zu machen, den Polarisator oder Analysator vorher so weit, bis die Dunkelheit nicht mehr vollkommen war. In dem Augenblick, wo er den Strom in einem bestimmten Sinne schloss, vermehrte sich die in's Auge gelangende Lichtmenge; floss der Strom in der entgegengesetzten Richtung, so verminderte sich dieselbe und es trat oft vollständige Dunkelheit ein. Dies letztere fand dann statt, wenn er, bevor der Strom geschlossen wurde, den Analysator in einem dem Magnetisirungsstrom entgegengesetzten Sinne drehte; hieraus schloss Kerr, dass in Folge der Magnetisirung eine Drehung der Polarisationssebene stattfand, welche den Ampère'schen Strömen entgegengesetzt gerichtet war.

Kerr beobachtete auch noch eine Drehung, wenn der Lichtstrahl schräg auffiel, doch compliciren sich in diesem Falle die Erscheinungen wegen der elliptischen Polarisation, die in Folge der Reflexion an der Metalloberfläche auftritt, wenigstens wenn die Schwingungen des einfallenden Strahles entweder parallel oder normal zur Einfallsebene gerichtet sind.

239. Gordon¹⁾ und Fitzgerald²⁾ wiederholten bald darauf diese Versuche mit sehr kräftigen magnetischen Feldern und bestätigten die Resultate von Kerr. Neuerdings ist die Untersuchung der Erscheinung von Righi³⁾ wieder aufgenommen worden, der eine grössere Wirkung dadurch erzielte, dass er den Lichtstrahl von zwei

¹⁾ Philosophical Magazine, 5. Serie, Bd. IV, S. 104 (1877).

²⁾ Philosophical Magazine, 5. Serie, Bd. III, S. 529 (1877).

³⁾ Abhandlung der Königl. Akademie dei Lincei vom December 1884.

passend aufgestellten Magnetpolen mehrfach nach einander reflektiren liess und auf diese Weise die Drehung vergrösserte. Endlich beschäftigte sich auch Kundt¹⁾ mit dieser Frage und zeigte, dass auch die Reflexion an Nickel und Cobalt die Kerr'sche Erscheinung hervorbringt; weiter fand derselbe, dass bei senkrechter Incidenz die Drehung der Polarisationssebene, welche von der Farbe des Lichtes abhängt, grösser für die rothen Strahlen ist, als für die violetten; die Dispersion ist also anomal.

Aber trotz dieser zahlreichen Arbeiten und der theoretischen Untersuchungen von Righi²⁾ fehlt noch immer eine vollständige Erklärung der Kerr'schen Erscheinung. Man kann nämlich noch nicht sagen, ob es sich hier um ein neues Phänomen handelt, oder ob dasselbe lediglich dem magnetischen Drehungsvermögen der Luft zuzuschreiben ist, welche die Pole umgibt. So wollen auch wir nicht länger bei diesem Gegenstande verweilen.

¹⁾ Wied. Ann. Oktober 1884.

²⁾ Loco cit. und Annales de chimie et de physique Sept. 1886.

Kapitel XIII¹⁾.

Experimentelle Bestätigungen der Maxwell'schen Hypothesen.

240. Wir haben bis jetzt nur zwei Bestätigungen der Maxwell'schen Theorien angegeben: die Gleichheit der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Lichts und der elektromagnetischen Störungen, und die Gültigkeit der Beziehung $K = n^2$. Aber abgesehen davon, dass diese Bestätigungen nur indirekte sind, wissen wir auch, dass die zweite derselben sehr viel zu wünschen übrig lässt. Es waren also neue Versuche nothwendig, um sich von der Richtigkeit der Maxwell'schen Hypothesen zu überzeugen.

Diese letzteren reduciren sich, im Grunde genommen, auf die beiden folgenden:

1. Die Verschiebungsströme üben, ebenso wie die Leiterströme, elektrodynamische oder elektromagnetische und Induktionswirkungen aus.

2. In einem elektrischen und in einem magnetischen Felde existiren Spannungen in der Richtung der Kraftlinien und Drucke in den zu diesen Richtungen senkrechten Linien.

Die Bestätigung der ersten Hypothese ist ganz neu, diejenige der zweiten um einige Jahre älter.

241. Elektrische Gestaltänderung der Dielektrika. Das Vorhandensein von Spannungen und Drucken in einem im elektrischen Felde befindlichen Dielektrikum hat nothwendig eine Gestaltänderung dieses Dielektrikum zur Folge.

Die Deformation des Glases einer Leydener Flasche scheint schon zur Zeit Volta's entdeckt worden zu sein. Nach einem Briefe dieses Physikers beobachtete der Abbé Fontanet, dass die Flüssigkeit im Innern einer Leydener Flasche, welche deren innere Be-

¹⁾ Dies ganze Kapitel ist das eigenste Werk von Herrn Blondin.

legung bildete, während des Ladens eine deutliche Volumenverminderung erfuhr. Volta schrieb diese Erscheinung der Volumenvergrößerung des Glases unter dem Einflusse des Druckes zu, welchen die den Belegungen mitgetheilten Ladungen ausüben.

Dies Phänomen und seine Erklärung waren völlig in Vergessenheit gerathen, bis Govi¹⁾ im Jahre 1877 von Neuem darauf hinwies. Er fand es bei verschiedenen Flüssigkeiten bestätigt, konnte es aber beim Quecksilber nicht beobachten; seine Entstehung schrieb er einer Volumenverringerng der Flüssigkeit zu.

242. Versuch von Dutèr. Zwei Jahre später zeigte Dutèr²⁾, dass die Erscheinung bei jeder Flüssigkeit zu Stande kommt, und dass dieselbe nicht auf eine Zusammenziehung der Flüssigkeit zurückzuführen ist.

Der Apparat von Dutèr besteht aus zwei Cylindern A B und C D (Fig. 36), welche mit den Kapillarröhren *ab* und *cd* versehen

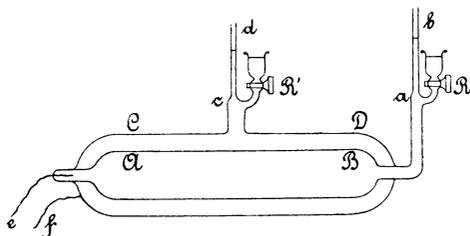


Fig. 36.

sind; zwei durch die Hähne R und R' verschliessbare Trichter gestatten, beide Cylinder zu füllen. Man erhält auf diese Weise eine Leydener Flasche, deren durch die Flüssigkeiten gebildeten Belegungen mittels einer Elektrisirmaschine geladen werden können, indem man die Pole dieser Maschine mit den Platindrähten *e* und *f* in Verbindung setzt. Beim Laden der Flasche senkt sich das Niveau langsam im Rohre *ab* und steigt in *cd*, beim Entladen nehmen die Niveaus sehr nahezu ihre alte Lage wieder an. Die Hebung des Niveaus im Rohre *cd* während der Ladung zeigt deutlich, dass die Erscheinung auf eine Deformation des Cylinders A B zurückzuführen ist, welcher sein inneres Volumen vergrößert, und nicht auf eine Zusammenziehung der Flüssigkeit.

¹⁾ Nuovo Cimento XXI und XXII; Comptes rendus Bd. LXXVII, S. 857; 1878.

²⁾ Comptes rendus 1879; Journ. de physique I. Serie, Bd. VIII, S. 82.

Duter fand, dass die Volumenänderungen proportional sind dem Quadrate der Potentialdifferenz der Belegungen und umgekehrt proportional der Dicke des Glascylinders A B.

243. Versuche von Righi. Righi¹⁾ wendet eine Glasröhre von 1 Meter Länge an, die auf der Innen- und Aussenseite mit Stanniol belegt ist. Ladet man diesen Kondensator, so verlängert sich die Glasröhre, und zwar wird die Verlängerung dadurch noch deutlicher sichtbar gemacht, dass der kurze Arm eines Hebels gegen das Ende der Röhre angedrückt ist, während der längere Arm einen Spiegel trägt. Die Verschiebung eines von diesem Spiegel reflektirten Lichtstrahles auf einer Skala gestattet, die Verlängerung der Röhre zu messen.

Righi fand, dass diese Verlängerung proportional dem Quadrate der Potentialdifferenz und umgekehrt proportional der Dicke der Glasröhre ist.

244. Versuche von Quincke. Quincke²⁾ stellte nach beiden oben angegebenen Richtungen hin zahlreiche Versuche an. Wie Duter und Righi ermittelte er, dass die Volumen- und Längenänderungen proportional dem Quadrate der Potentialdifferenz waren, aber entgegen den Ergebnissen dieser Physiker glaubt er aus seinen Versuchen schliessen zu sollen, dass diese Aenderungen umgekehrt proportional dem Quadrate der Glasdicke seien.

Indem er die bei einem und demselben Glase auftretende Volumen- und Längenänderung verglich, fand er, dass die auf die Volumeneinheit bezogene Volumenveränderung das Dreifache der Aenderung der Längeneinheit beträgt.

245. Quincke zog auch flüssige Dielektrika in den Bereich seiner Untersuchungen³⁾; es gelang ihm hierbei, die Grösse des Druckes zu messen, der normal zu den Kraftlinien ausgeübt wird.

Sein Apparat besteht aus einem ebenen Kondensator, dessen Belegungen A und B (Fig. 37) in einem Gefässe mit dielektrischer Flüssigkeit, beispielsweise Terpentinöl, aufgestellt sind. Die untere Platte ist auf einem isolirenden Fuss befestigt; vom Mittelpunkte der oberen Platte aus erhebt sich eine vertikale Röhre, welche einerseits mit einem Manometer M kommuniziert, das eine Flüssigkeit von ge-

¹⁾ Comptes rendus Bd. LXXXVIII, S. 1262, 1879. Journal de physique I. Serie, Bd. IX.

²⁾ Sitzungsberichte der Königl. Preuss. Akad. der Wissenschaften zu Berlin 1880.

³⁾ Wiedemann, Annalen Bd. XIX S. 705, 1883; Bd. XXVIII S. 529, 1886; Bd. XXXII S. 529, 1887.

ringem specifischem Gewicht enthält, andererseits mit einer Trockenröhre, welche mit Chlorcalcium gefüllt und mit einem Hahne R versehen ist.

Während die beiden Platten mit der Erde in Verbindung stehen, führt man durch R mittels eines Gummiballes trockene Luft in den Zwischenraum zwischen beiden Platten ein, so dass dort eine ebene Blase von 2—5 cm Durchmesser entsteht. Der Luftdruck in der Blase ist höher, als der Atmosphärendruck, und zwar hängt er sowohl von der Höhe des Niveaus F H über A, wie von der Kapillarkonstante der Flüssigkeit ab.

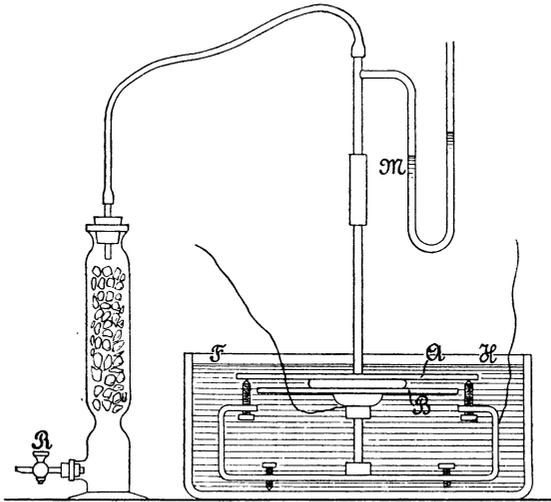


Fig. 37.

Ladet man hierauf den Kondensator, so überwiegt der senkrecht zu den Kraftlinien gerichtete Druck P der Flüssigkeit über den entsprechenden elektrischen Druck P' der Luftblase, und die letztere zieht sich zusammen. Es muss also in dem Rohre eine Vergrößerung des Druckes um $P'' = P - P'$ entstehen, und dies wird in der That durch das Manometer angezeigt.

246. Nach Maxwell haben die Drucke P und P' die Werthe (cf. § 81)

$$P = -\frac{K F^2}{8 \pi}, \quad P' = -\frac{K' F^2}{8 \pi},$$

wobei K das Induktionsvermögen der Flüssigkeit, K' dasjenige der Luft und F die Intensität des Feldes zwischen den Belegungen des Kondensators bedeutet. Da K' nahezu = Eins ist, dürfen wir schreiben:

$$P'' = P - P' = -\frac{K-1}{8\pi} F^2.$$

Bezeichnen wir ferner mit e den Abstand der Belegungen und mit ψ_1 und ψ_2 ihre Potentiale, so hat man

$$F = \frac{\psi_1 - \psi_2}{e}$$

und demnach

$$P'' = -\frac{K-1}{8\pi} \cdot \frac{(\psi_1 - \psi_2)^2}{e^2}.$$

Diese Formel gibt an, dass die Aenderung des durch das Manometer angegebenen Druckes dem Quadrate der Potentialdifferenz der Belegungen direkt und dem Quadrate ihrer Entfernung umgekehrt proportional sein muss, und dies hat Quincke in der That bestätigt gefunden.

247. Versuche von Boltzmann. Aus den Untersuchungen von Boltzmann über das spezifische Induktionsvermögen der Gase¹⁾ lässt sich, wie es Lippmann²⁾ gethan hat, ableiten, dass ein Gas unter der Einwirkung eines elektrischen Feldes Volumenveränderungen erleidet, auch wenn der Druck konstant bleibt.

Der Apparat von Boltzmann besteht aus zwei Metallplatten A und B; dieselben befinden sich unter einer Glocke, welche man luftleer pumpen kann, und werden durch Metallschirme gegen jeden Einfluss von aussen her geschützt. Die Platte A wird dauernd mit dem positiven Pole einer aus dreihundert Daniell'schen Elementen bestehenden Batterie verbunden, deren anderer Pol zur Erde abgeleitet ist. Die Platte B steht mit dem einen Quadrantenpaare eines Mascart'schen Elektrometers in Verbindung, dessen Nadel elektrisirt ist und dessen anderes Quadrantenpaar mit der Erde kommuniziert.

Wenn der Apparat mit Gas gefüllt ist, verbindet man die Platte B für einen Augenblick mit dem Erdboden; die beiden Quadranten-

¹⁾ Wiener Sitzungsberichte Bd. XLIX, S. 795, 1874.

²⁾ Annales de Chimie et de Physique, 5. Serie Bd. XXIV S. 45.

paare haben dann das Potential des Erdbodens und die Nadel stellt sich auf Null ein. Pumpst man sodann den Apparat luftleer, so ist die Wirkung der Platte A auf B nicht mehr die gleiche und die Nadel des Elektrometers gibt einen Ausschlag. Aus diesem Ausschlage lässt sich die Beziehung zwischen der Kapazität C_0 des Kondensators im leeren Raume und seine Kapazität C in einem Gase vom Drucke p berechnen. Boltzmann fand hierfür die Gleichung:

$$C = C_0(1 + \gamma p),$$

wobei γ eine Konstante bedeutet, welche von der Natur des Gases abhängt.

248. Bezeichnen wir mit m die Ladung einer der Kondensatorplatten und mit ψ die Potentialdifferenz dieser Platten, dann erhalten wir:

$$(1) \quad m = C \psi = C_0(1 + \gamma p) \psi.$$

Bei einer Zunahme der Potentialdifferenz und des Druckes um $d\psi$ resp. dp wird diese Ladung wachsen um:

$$dm = \frac{\partial m}{\partial \psi} d\psi + \frac{\partial m}{\partial p} dp$$

oder

$$(2) \quad dm = c d\psi + h dp,$$

wenn man unter c und h die partiellen Derivirten von m nach ψ resp. p versteht, deren Werthe sich aus (1) ergeben.

Nun muss nach dem Princip von der Erhaltung der Electricitätsmenge der Ausdruck (2) ein vollständiges Differential vorstellen, wir finden also:

$$(3) \quad \frac{\partial c}{\partial p} = \frac{\partial h}{\partial \psi}.$$

Ferner wollen wir das Princip von der Erhaltung der Energie anwenden. Wenn dv die aus der Vermehrung des Druckes um dp sich ergebende Volumenzunahme bedeutet, dann erhöht sich die potentielle Energie des Systems in Folge dieser Volumenänderung um $-p dv$. Die Aenderung der elektrischen Energie des Kondensators, welche aus der Zunahme dm der Ladung der Belegungen folgt, ist ψdm . In Folge dessen wird die gesammte Aenderung der potentiellen

Energie des Systems für eine gleichzeitige Zunahme von Druck und Potentialdifferenz:

$$dU = -p dv + \psi dm.$$

Ersetzt man in diesem Ausdrucke dm durch seinen aus (2) abgeleiteten Werth und berücksichtigt sodann, dass dU ein totales Differential ist, und dass $-p dv = +v dp$ ist, so muss zwischen den Koeffizienten von dp und $d\psi$ folgende Beziehung gelten:

$$h + \frac{\partial v}{\partial \psi} = \psi \left(\frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial h}{\partial \psi} \right),$$

oder, unter Berücksichtigung der Gleichung (3)

$$\frac{\partial v}{\partial \psi} = -h.$$

249. Die Volumenänderung, welche bei einer Zunahme der Potentialdifferenz um $d\psi$ erfolgt, während der Druck konstant gehalten wird, ist also:

$$dv = -h d\psi,$$

oder, wenn man h durch seinen aus Gleichung (1) berechneten Werth ersetzt:

$$dv = -C_0 \gamma \psi d\psi.$$

Wächst also die Potentialdifferenz plötzlich von Null bis ψ , so nimmt das Volumen zu um

$$\Delta v = -\frac{C_0 \gamma}{2} \psi^2.$$

Bezeichnen wir mit S die Oberfläche der Platten, und mit e ihre Entfernung, so ist das Volumen des der elektrischen Einwirkung unterworfenen Gases gegeben durch

$$v = S e,$$

und die Kapazität C_0 des Kondensators im luftleeren Raume hat den Werth

$$C_0 = \frac{S}{4\pi e}.$$

Wenn wir diesen Ausdruck in die vorhergehende Gleichung für Δv setzen und durch v dividiren, dann erhalten wir für die Veränderung der Volumeneinheit

$$\frac{\Delta v}{v} = - \frac{\gamma}{8\pi} \cdot \frac{\psi^2}{e^2}.$$

Dieselbe ist also direkt proportional dem Quadrate der Potentialdifferenz und umgekehrt proportional dem Quadrate der Dicke der Gasschicht, welche der Wirkung des Feldes unterworfen ist.

Die von Boltzmann angegebenen Zahlen für den Werth des Produktes γp gestatten, diese Volumenänderung zu berechnen. Dieselbe ist ungemein gering, gleichwohl wurde sie von Quincke direkt experimentell nachgewiesen.

250. Diskussion der Resultate der oben beschriebenen Experimente. In allen oben erwähnten Experimenten waren die Aenderungen des Volumens oder der Länge stets proportional dem Quadrate der Potentialdifferenz. Bei den Gasen und Flüssigkeiten ergeben sie sich ausserdem als umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung zwischen den Belegungen der angewendeten Kondensatoren; bei den festen Körpern ist diese letztere Eigenschaft noch nicht zweifellos nachgewiesen, scheint sich aber ebenfalls aus den Versuchen von Quincke zu ergeben. Nehmen wir auch dies als erwiesen an, dann stimmen die Ergebnisse der verschiedenen Versuche mit der Theorie der Dielektrika von Maxwell überein. Da nämlich nach dieser Theorie die Spannungen und Drucke dem Quadrate der Intensität F des Feldes proportional sind, so müssen auch die Volumen- und Längenänderungen eines Körpers, der diesen Drucken unterworfen ist, proportional F^2 sein, d. h. proportional $\frac{\psi^2}{e^2}$, da unter den Bedingungen des Experimentes die Intensität des Feldes den Werth $\frac{\psi}{e}$ besitzt.

Ausserdem zeigen die Versuche, welche Righi und Quincke mit Flüssigkeiten anstellten, deutlich, dass in den auf den Kraftlinien des Feldes senkrecht stehenden Richtungen Drucke auftreten, welche auf die Dielektrika wirken. Aber welche Schlüsse lassen sich in Betreff der Kräfte ziehen, welche in Richtung der Kraftlinien selbst wirken?

251. Aus seinen Versuchen über das Glas glaubte Quincke ableiten zu können, dass die Dielektrika, wenigstens die festen, Drucken nach jeder Richtung hin unterworfen seien.

Wie wir wissen, besteht eines seiner Versuchsergebnisse darin,

dass für ein und dasselbe Glas die Aenderung der Volumeneinheit drei Mal so gross ist, als die Aenderung der Längeneinheit, d. h., wenn wir mit v das Volumen und mit l die Länge bezeichnen, so gilt

$$\frac{\Delta v}{v} = 3 \frac{\Delta l}{l}.$$

Die Analogie dieser Beziehung mit derjenigen, welcher die linearen und kubischen Koeffizienten der thermischen Ausdehnung verknüpft, veranlasste Quincke zu der Annahme, dass sich das Glas unter der Wirkung eines elektrischen Feldes gleichmässig nach allen Richtungen ausdehnt, und dass in Folge dessen ebensowohl in Richtung der Kraftlinien Drucke auftreten, wie senkrecht hierzu.

Aber wie J. Curie bemerkt, lässt sich diese Beziehung a priori aufstellen, und ihre Bestätigung durch das Experiment beweist keineswegs das Vorhandensein von Drucken in Richtung der Kraftlinien.

Wir nehmen an, ein Glasgefäss habe das Volumen v , und auf einer Seitenwand sei eine Länge l abgemessen. Nun möge das Gefäss, ohne seine Wanddicke zu ändern, eine gleichförmige Ausdehnung erleiden; dann bleibt die Oberfläche sich selbst ähnlich, und wir erhalten:

$$\frac{v + \Delta v}{v} = \left(\frac{l + \Delta l}{l} \right)^3$$

oder, mit Vernachlässigung der kleinen Grössen zweiter Ordnung,

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{3 \Delta l}{l}.$$

Wir hatten vorausgesetzt, die Gefässdicke e bleibe konstant; aber auch in dem Falle, wo sich dieselbe unter dem Einflusse von Spannungen oder Drucken um Δe änderte, würde die vorhergehende Gleichung doch immer noch mit den Ergebnissen des Experiments übereinstimmen. Die aus dieser Dickenänderung sich ergebende Volumenänderung ist nämlich gleich dem Produkte $\frac{\Delta e}{e}$ in das Glasvolumen des Gefässes, während die aus der seitlichen Ausdehnung herrührende Volumenänderung gleich dem Produkte aus $\frac{3 \Delta l}{l}$ in das innere Volumen des Gefässes ist. Wenn nun $\frac{\Delta e}{e}$ und $\frac{\Delta l}{l}$ von derselben Grössenordnung sind, wie dies bei den Werthen, welche die

Drucke und Spannungen besitzen, der Fall sein wird, so ist der durch die Aenderung der Wandstärke bedingte Betrag der Volumenänderung dem anderen Gliede gegenüber zu vernachlässigen, da natürlicher Weise das Volumen der Glaswände sehr viel kleiner ist, als das innere Volumen.

Kurz zusammengefasst beweist also das Experiment zweifellos das Vorhandensein von Drucken, welche normal zu den Kraftlinien gerichtet sind und bis jetzt hat es noch nicht das Vorhandensein von Zugkräften in der Richtung der Kraftlinien zu widerlegen vermocht; um diesen letzten Punkt völlig klar zu legen, würden noch neue Untersuchungen nöthig sein.

252. Elektrische Doppelbrechung. An die Erscheinungen der elektrischen Deformation reihen sich unmittelbar diejenigen der Doppelbrechung an, welche die homogenen Dielektrika unter der Einwirkung eines elektrischen Feldes aufweisen. Wir wissen ja, dass ein homogener, fester Körper, wie das Glas, doppelbrechend wird, wenn man ihn einem Zug oder Druck nach einer einzigen Richtung hin unterwirft.

Die elektrische Doppelbrechung wurde 1875 von Kerr¹⁾ entdeckt. Eine rechtwinkelige Glasplatte ist in Richtung ihrer grösseren Dicke mit zwei Bohrlöchern versehen, derart, dass die Axe des einen in der Verlängerung des anderen liegt, während ihre Endflächen einige Millimeter von einander entfernt sind. In diese Bohrungen bringt man zwei Kupferstäbe, welche mit den Polen eines Ruhmkorff'schen Induktionsapparates in Verbindung stehen; die Pole sind ausserdem mit den Armen eines Entladners verbunden, an dem die Funken überspringen.

Die so vorgerichtete Platte wird zwischen einen Polarisator und Analysator gebracht, so dass der Lichtstrahl dieselbe in der Richtung der geringeren Dicke durchsetzt. Man regulirt dann die Stellung des Polarisators so, dass die Polarisationsenebene des auf die Platte fallenden Lichtes die Axe der beiden Bohrungen unter einem Winkel von 45° schneidet; hierauf dreht man den Analysator, bis Dunkelheit herrscht, wenn der Induktionsapparat nicht funktioniert.

Setzt man denselben dann in Thätigkeit, so erscheint das Licht langsam im Gesichtsfelde des Analysators wieder und erreicht ungefähr nach Verlauf einer halben Minute sein Maximum; durch Drehen des Analysators kann es nicht zum Verschwinden gebracht

¹⁾ Philosophical Magazine, 4. Serie, Bd. L, S. 337 und 446, 1875; 5. Serie, Bd. VIII, S. 85, 1879, Bd. IX, S. 157, 1880.

werden, wohl aber dadurch, dass man eine Glasplatte dazwischen setzt, welche man einem Zuge senkrecht zur Richtung der Konduktoren unterwirft. Die Glasplatte, welche der Wirkung der elektrischen Entladungen ausgesetzt ist, verhält sich also ebenso, als wenn sie einem Zuge in Richtung der Kraftlinien unterworfen wäre.

Beim Harze tritt eine ganz ähnliche Erscheinung auf.

253. Ebenso untersuchte Kerr verschiedene Flüssigkeiten. Ein kleiner, rechtwinkliger Trog enthielt die Flüssigkeit, während die Konduktoren durch zwei in den gegenüberliegenden Wänden angebrachte Löcher eingeführt waren und sich innerhalb der Flüssigkeit bis auf einige Millimeter Entfernung gegenüberstanden. Den Abstand der Arme des Ausladers regelt man so, dass die Entladungen nicht durch die Flüssigkeit vor sich gehen. Die Erscheinungen unterscheiden sich von denen beim Glase nur dadurch, dass sie momentan eintreten und in dem Augenblicke verschwinden, wo die Entladungen zwischen den Armen des Ausladers vor sich gehen.

Durch Messung der Gangdifferenz beider Lichtstrahlen, welche sich durch Schwefelkohlenstoff fortpflanzen, mit einem Jamin'schen Kompensator, und durch Messung der entsprechenden Potentialdifferenz ψ mittels eines Thomson'schen Elektrometers mit langer Skala fand Kerr, dass die Gangdifferenz proportional $\frac{\psi^2}{c^2}$ ist, wobei e die Entfernung der Elektroden bezeichnet.

Die Untersuchungen von Kerr wurden von verschiedenen Physikern wiederholt, besonders von Quincke und Blondlot¹⁾. Ersterer bemühte sich, die Proportionalität zwischen der Gangdifferenz und dem Quadrate der Potentialdifferenz zu bestätigen, der zweite suchte nochmals nachzuweisen, dass bei flüssigen Dielektrika die Erscheinung der Doppelbrechung in dem gleichen Augenblicke mit der elektrischen Wirkung entsteht und vergeht²⁾.

¹⁾ Comptes rendus Bd. CVI, S. 349, 1888.

²⁾ Alle diese Bestätigungen, so interessant sie von gewissen Gesichtspunkten aus sind, scheinen mir doch keineswegs beweisend zu sein. Die beobachteten Drucke sind wohl, wie es die Theorie fordert, proportional dem Quadrate der Potentialdifferenz, aber der beobachtete Proportionalitätskoeffizient, der mit dem Dielektrikum veränderlich ist, stimmt mit dem berechneten keineswegs überein. Vaschy (Comptes rendus Bd. CIV) suchte diese Thatsache auf folgende Weise zu erklären: Nennen wir F die elektrostatische Kraft, K das Induktionsvermögen des betreffenden Dielektrikum, K_1 dasjenige des leeren Raumes, dann ist der Druck im Dielektrikum $p = K \frac{F^2}{8\pi}$, während er im leeren Raume $p_1 = K_1 \frac{F^2}{8\pi}$

254. Drucke in einem magnetischen Felde. Wir sahen (§ 207), dass in einem unmagnetischen Medium die Spannungen in Richtung der Kraftlinien des Feldes und die hierzu senkrechten Drucke die Grösse $\frac{\alpha^2}{8\pi}$ haben. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass in einem Medium von dem magnetischen Induktionsvermögen μ diese Drucke und Spannungen durch den Ausdruck $\frac{\mu\alpha^2}{8\pi}$ dargestellt werden.

Es gelang Quinke¹⁾, die Drucke senkrecht zur Richtung der Kraftlinien mit Hülfe einer Anordnung zu messen, welche analog derjenigen war, die wir früher bereits beschrieben, als wir die Wirkung eines elektrischen Feldes auf dielektrische Flüssigkeiten besprachen.

Zwei cylindrische Polstücke sind an den Enden der Drahtspulen A und B (Fig. 38) eines senkrecht stehenden Ruhmkorff'schen Elektromagneten angeschraubt. Auf dem unteren Polstücke wird eine Eisenscheibe angebracht, auf welchem man mittels Siegelacks einen breiten Glasring von mehreren Centimetern Höhe festkittet. In diesen Glastrog bringt man eine mit Luft gefüllte Blase, welche mittels eines die obere Spule durchsetzenden Kupferrohres mit einem Schwefelkohlenstoffmanometer M und ausserdem mit einer bauchigen Chlorkalciumröhre communicirt, die durch einen Hahn R geschlossen ist. Man füllt nun den Trog mit einer magnetischen oder diamagnetischen Flüssigkeit, z. B. mit Manganchlorür, und nähert die Polstücke bis zu einer passenden Entfernung. Endlich

sein würde. Vaschy nimmt an, dass der Aether den Druck p_1 erleidet, die ponderable Materie dagegen den Druck $p - p_1$; dieser letztere wird beobachtet. So lange direkte Messungen diese Annahme von Vaschy nicht bestätigt haben, bleibt dieselbe sehr zweifelhaft. Die Vergleichung mit der optischen Erscheinung der Mitführung des Aethers (cf. Théorie mathématique de la lumière § 234) genügt nicht zum Beweise.

Ferner hat Helmholtz gezeigt, dass, welcher Theorie wir uns auch anschliessen mögen, das Princip von der Erhaltung der Energie die Existenz von Spannungen und Drucken im Innern der Dielektrika fordert; dieselben müssen proportional sein dem Quadrate der Potentialdifferenz, und ausserdem von dem specifischen Induktionsvermögen sowie von dessen Differentialquotienten nach der Dichtigkeit des Dielektrikum abhängen.

Was die Doppelbrechung betrifft, so ist es nichts weniger als sicher, dass sie sich durch eine einfache, mechanische Deformation erklären lässt. Sie ist wahrscheinlich viel beträchtlicher, als diejenige, welche von mechanischen Drucken hervorgebracht werden könnte, die den beobachteten elektrostatischen Drucken gleich sind.

H. P.

¹⁾ Wiedemann, Annalen Bd. XXIV, S. 347, 1885.

führt man mit Hilfe eines Gummiballes Luft durch den Hahn R ein, so dass die Wände der Blase sich an die Polflächen anlegen; sodann schliesst man den Hahn R und liest das Manometer ab.

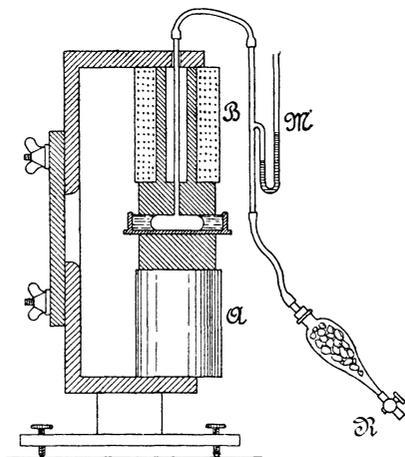


Fig. 38.

Lässt man nun einen Strom durch die Windungen des Elektromagneten fließen, so erleidet die Flüssigkeit einen transversal gerichteten Druck

$$P = \frac{\mu \alpha^2}{8\pi},$$

die Luft in der Blase dagegen den Druck

$$P' = \frac{\alpha^2}{8\pi}.$$

Die Differenz beider Drucke

$$P'' = P - P' = \frac{\mu - 1}{8\pi} \alpha^2$$

wird durch die Niveauänderung der Flüssigkeit im Manometer angegeben.

Quincke mass die Intensität des Feldes durch die Elektrizitätsmenge, welche in einer Spirale inducirt wurde, wenn er dieselbe sehr rasch aus dem Felde entfernte, und fand, dass das Gesetz

von der Proportionalität (cf. oben) hinreichend bestätigt wurde. Da übrigens die Messungen des Druckes und der Intensität des Feldes nicht gleichzeitig vorgenommen werden können, so ist man nicht sicher, ob die letztere zu der Zeit, wo man den Druck beobachtet, auch wirklich den vorher gemessenen Werth besitzt; es ist nämlich bekannt, dass im Allgemeinen das Feld eines Elektromagneten bei zwei Versuchen verschiedene Werthe haben kann, trotzdem die Entfernung der Pole sowie die Stärke des erregenden Stromes ungeändert geblieben sind.

Ausserdem fand Quincke, dass die Pole in Folge der Magnetisirung ihre Gestalt ändern und sich einander nähern; hieraus aber folgt eine beträchtliche Volumenveränderung der Blase und in Folge dessen eine Aenderung des Druckes der in ihrem Innern befindlichen Luft. Aus diesen beiden Ursachen kann keine völlige Uebereinstimmung zwischen der theoretisch gefundenen Formel und dem Experimente herrschen.

255. Um die magnetischen Drucke nachzuweisen, kann man statt eines Manometers auch eine mit Flüssigkeit gefüllte U-Röhre verwenden. Man stellt dann den Elektromagnet so auf, dass seine Polflächen vertikal gerichtet sind und bringt zwischen die letzteren den einen Schenkel der Röhre. Der andere Schenkel, der sehr viel breiter ist, befindet sich ausserhalb des magnetischen Feldes. Wenn man den Elektromagnet in Thätigkeit setzt, steigt die Flüssigkeit in dem im elektrischen Felde befindlichen Schenkel, im anderen ist diese Veränderung in Folge der Grösse des Durchmessers unmerklich. Die auf diese Weise erhaltenen Resultate stimmen mit denjenigen überein, welche das Manometer liefert.

Mittels derselben Methode konnte Quincke untersuchen, ob in Richtung der Kraftlinien des Feldes Zug- oder Druckkräfte herrschten. Zu diesem Zwecke stellte er den Elektromagnet senkrecht und führte den dünnen Schenkel des U-Rohres in den Kanal der oberen Spule ein, so dass das Niveau der Flüssigkeit sich in der Mitte des magnetischen Feldes befand. Quincke fand auf diese Weise, dass die Flüssigkeit nach der Richtung der Kraftlinien einem Druck unterworfen ist. Dies der Theorie widersprechende Resultat müsste noch bestätigt werden.

256. Elektromagnetische Wirkungen der Verschiebungsströme. Die elektromagnetischen Wirkungen der Verschiebungsströme sind schwer sichtbar zu machen, denn abgesehen davon, dass diese Ströme nur einen Moment dauern, gestattet auch keinerlei Anordnung, ihre Wirkung auf die Magnetnadel zu vermehren, wie dies beim Galvanometer mit den Leiterströmen geschieht. Weiterhin

kann man auch nicht die aus Verschiebungs- und Leiterströmen gemischten Ströme verwenden, denn die stets vorherrschende elektromagnetische Wirkung der letzteren würde diejenige der Verschiebungsströme vollständig verdecken. Im Jahre 1885 versuchte Roentgen¹⁾ das Vorhandensein der elektromagnetischen Wirkung von Verschiebungsströmen experimentell nachzuweisen.

Der Apparat von Roentgen besteht aus einer Ebonitscheibe A (Fig. 39) von 0,5 cm Dicke und 16 cm Durchmesser, die sich mit

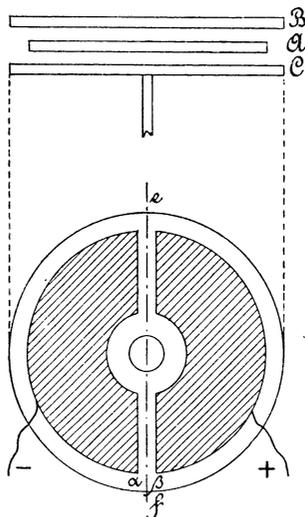


Fig. 39.

einer Geschwindigkeit von 120–150 Touren pro Sekunde um eine vertikale Achse drehen lässt; zwei Glasplatten B und C sind parallel zu dieser Scheibe ober- und unterhalb derselben in einer Entfernung von ca. 1 Millimeter angebracht und an ihren Innenseiten mit Stanniol überzogen. Die Belegung der unteren Platte besteht aus zwei Halbkreisen, die durch einen Zwischenraum von 1,4 cm getrennt sind, und zwar steht der eine Halbkreis mit der inneren, der andere mit der äusseren Belegung einer geladenen Batterie in Verbindung. Der metallische Theil der oberen Platte ist mit der Erde verbunden, in Folge dessen besitzt das elektrische Feld zwischen den Platten B

¹⁾ Sitzungsberichte der Berliner Akademie der Wissenschaften, 26. Febr. 1885; und Philosophical Magazine, Mai 1885.

und C auf beiden Seiten des Durchmessers $e f$ der unteren Platte entgegengesetzte Richtung. Demnach gehen an den Stellen, welche der durch diesen Durchmesser gelegten Vertikalebene benachbart sind, die Kraftlinien sehr rasch von einer Richtung zur entgegengesetzten über. Hier also entstehen, wenn man die Ebonitscheibe in Rotation versetzt, Verschiebungsströme, und zwar haben dieselben auf beiden Seiten vom Mittelpunkte dieser Scheibe verschiedene Richtung.

257. Es ist nun möglich, die Intensität dieser Ströme zu bestimmen. Bekanntlich wird die Verschiebung dargestellt durch

$$f = \frac{K}{4\pi} P,$$

wobei P die elektromotorische Kraft, bezogen auf die Längeneinheit, bedeutet. Wir erhalten also für die Intensität:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{K}{4\pi} \cdot \frac{\partial P}{\partial t}.$$

Während die bewegliche Scheibe einen Bogen $\alpha \beta$ beschreibt, welcher die Enden der metallischen Halbkreise der unteren Platte trennt, geht P von einem gewissen Werthe F zum Werthe $-F$ über, wir können also $dP = 2F$ setzen. Die Zeit, welche dieser Aenderung entspricht, ist

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{\alpha \beta}{2\pi r},$$

wobei n die Anzahl der Umdrehungen der Scheibe pro Sekunde bedeutet, und r den äusseren Radius der Halbkreise. Hieraus finden wir:

$$dt = \frac{1}{150} \cdot \frac{1,5}{2\pi \times 7} = \text{ca.} \frac{1}{4400}.$$

Wir erhalten also für die Intensität des Verschiebungsstromes

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 4400 \frac{K}{4\pi} 2F.$$

oder, wenn wir $K = 2$ annehmen:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 1400 F.$$

Setzen wir nun für F die elektrostatische Einheit des Potentials = 300 Volt, so finden wir für die Intensität des Stromes in elektrostatischen Einheiten

$$1 \times 1400.$$

Da ein Ampère gleich 3×10^9 elektrostatischen Einheiten ist, so wird diese Intensität geringer als $\frac{1}{106}$ Ampère.

Trotz der geringen Grösse dieser Intensität gelang es Roentgen doch, eine Ablenkung eines astatischen Nadelpaares zu erhalten, das über der Rotationsaxe der Scheibe aufgehängt war. Eine der Nadeln befand sich in sehr geringer Entfernung von der Scheibe, die andere stand um 22 cm von derselben ab, so dass diese letztere durch die Verschiebungsströme gar nicht mehr beeinflusst wurde, sondern einzig und allein die erstere.

Wie sich erwarten liess, änderte der Ausschlag des astatischen Systems das Vorzeichen, wenn man die Zeichen der Ladungen auf den halbkreisförmigen Belegungen vertauschte.

258. Induktionswirkungen der Verschiebungsströme. Den experimentellen Beweis von dem Vorhandensein dieser Wirkungen verdanken wir Hertz. Da diese Experimente in einem anderen, demnächst erscheinenden Bande besprochen werden sollen, wollen wir sie hier nur ankündigen.

Die Bemerkungen von Poincaré in den §§ 170—171 wurden durch eine gewisse Unvollständigkeit der Theorie von Maxwell veranlasst, welcher nur vollkommene Leiter und vollkommene Isolatoren in Betracht zog. Die neueren Untersuchungen von Hertz¹⁾, Cohn²⁾, Heaviside³⁾ etc. haben jedoch inzwischen den Beweis geliefert, dass für jeden Körper zwei unabhängige, bestimmbare Konstanten neben einander existiren, die Dielektricitätskonstante und das Leitungsvermögen.

Anm. der Uebersetzer.

¹⁾ Hertz, Göttinger Ber. 19. März 1890 S. 107.

²⁾ Cohn, Sitzungsber. d. Berl. Akad. Bd. XXVI S. 405.

³⁾ Heaviside, Phil. Mag. Febr. 1888.

Einleitung.

Zunächst möchte ich einige Worte über die in diesem Werke angewandten Bezeichnungen sagen. Ich habe gewöhnlich die Koordinaten des angezogenen Punktes mit x, y, z , die des anziehenden mit x', y', z' , und den Abstand beider Punkte mit r bezeichnet. Ein Volumelement nenne ich $d\tau$ oder $d\tau'$, je nachdem der Schwerpunkt dieses Elements mit x, y, z oder mit x', y', z' zusammenfällt; ebenso ein Oberflächenelement $d\omega$ und seine Richtungskosinus l, m, n , wenn es zu x, y, z gehört; $d\omega'$ und l', m', n' dagegen im anderen Falle. Dieselbe Bezeichnungsweise werde ich für jede beliebige Funktion befolgen; wenn z. B. ρ die elektrische Dichte im Punkt x, y, z genannt wird, so soll sie ρ' im Punkte x', y', z' heissen.

Ich werde häufig die Maxwell'sche Formel anwenden, welche die Umformung eines Linienintegrals in ein Kurvenintegral und umgekehrt gestattet (siehe I. Band dieses Werkes § 117 S. 109).

Auch die Methode der partiellen Integration, auf mehrfache Integrale angewandt, werde ich öfters benutzen.

So erhält man z. B.:

$$\int u \frac{\partial v}{\partial x} d\tau = \int l u v d\omega - \int v \frac{\partial u}{\partial x} d\tau.$$

Die Raumintegrale sind über ein beliebiges Volumen zu erstrecken, und das erste Integral rechter Seite über alle Elemente $d\omega$ der Oberfläche, welche dies Volumen begrenzt und die Richtungskosinus l, m, n besitzt.

Häufig wird der Fall eintreten, dass die betrachteten Funktionen u, v im Unendlichen Null werden. Dann kann man schreiben

$$\int u \frac{\partial v}{\partial x} d\tau = - \int v \frac{\partial u}{\partial x} d\tau,$$

wobei die Integration über den ganzen unendlichen Raum ausgedehnt ist.

Dies werde ich „*Partielle Integration über den ganzen Raum*“ nennen.

Solche Umformungen setzen indessen kontinuierliche Funktionen voraus, was nicht immer der Fall ist. Es wird vielmehr häufig vorkommen, dass an der Trennungsfläche zweier Medien, z. B. eines Leiters und eines Dielektrikum, gewisse betrachtete Funktionen einen Sprung erleiden. Man könnte die Rechnung dann vollständig unter Berücksichtigung dieser Diskontinuitäten durchführen, und würde sehen, dass die Resultate keine Aenderung erfahren.

Aber es ist einfacher, die Schwierigkeit zu umgehen. Es genügt hierzu die Annahme, dass die Medien nicht durch eine geometrische Fläche getrennt sind, sondern durch eine sehr dünne Uebergangsschicht, in welcher sich die Eigenschaften der Materie ungemein rasch, aber stetig ändern. Wahrscheinlich wird es sich auch in Wirklichkeit so verhalten; aber wie dem auch sei, so viel ist klar, dass man die Hypothese der Uebergangsschicht ohne Aenderung des Resultats an die Stelle derjenigen einer plötzlichen Trennung setzen kann, da die Dicke dieser Schicht immer als äusserst gering anzunehmen ist.

Kapitel I.

Formel von Ampère.

1. **Wirkung zweier Stromelemente auf einander.** Ampère hatte das Bestreben, Alles aus dem Experiment abzuleiten¹⁾; doch ist diese Absicht nicht vollständig gerechtfertigt, da das Experiment sich nicht auf zwei Stromelemente beziehen kann. Es lässt sich zwar die Wirkung eines geschlossenen Stromes auf einen bestimmten Theil eines zweiten Stromes beobachten, nicht aber diejenige eines Stromelementes auf ein anderes.

Wenn z. B. die Entladung eines Kondensators einen Strom zu Stande bringt, der nach der Ansicht von Maxwell's Vorgängern nicht geschlossen ist, so besitzt derselbe doch eine zu kurze Dauer, als dass er sich für den Versuch verwenden liesse. Man kann also nur mit geschlossenen Strömen operiren. Durch verschiedene Kunstgriffe ist es allerdings möglich, einen Theil eines der Ströme beweglich zu machen, so dass man die Wirkung eines geschlossenen Stromes auf einen Stromtheil zu untersuchen vermag²⁾ (vgl. später § 19); aber dieser bewegliche Theil bleibt immer der gleichzeitigen Wirkung aller Elemente des zweiten geschlossenen Stromkreises unterworfen.

Um also ein auf zwei Stromelemente anwendbares Gesetz aussprechen zu können, musste Ampère Hypothesen aufstellen. Dieselben lauten:

1. Um die Wirkung eines geschlossenen Stromkreises auf ein Stromelement zu erhalten, muss man die Wirkungen der einzelnen

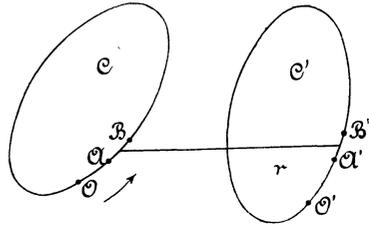


Fig. 1.

¹⁾ Der Titel seines Werkes lautet: *Théorie mathématique des phénomènes électro-dynamiques uniquement déduite de l'expérience*, 1826.

Elemente des geschlossenen Stromkreises auf das betreffende Element summiren.

2. Die Wirkung zweier Stromelemente auf einander ist eine nach der Verbindungslinie derselben gerichtete Kraft.

C und C' seien zwei Ströme, und A ein Punkt auf C, dessen Lage durch die Länge s des von einem festen Ausgangspunkt O aus gerechneten Bogens OA defnirt ist.

Ebenso bezeichnen wir mit O' den Ausgangspunkt für C', und ferner mit AB und A'B' zwei Elemente, die auf C resp. C' liegen.

Wir setzen

$$\begin{aligned} OA &= s; & OB &= s + ds; \\ O'A' &= s'; & O'B' &= s' + ds'. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$AB = ds \text{ und } A'B' = ds'.$$

Sind ferner

$$\begin{aligned} x, y, z &\text{ die Koordinaten von A,} \\ x + dx, y + dy, z + dz &\text{ die von B,} \\ x', y', z' &\text{ von A',} \\ x' + dx', y' + dy', z' + dz' &\text{ von B',} \end{aligned}$$

so ist der Abstand der beiden Elemente AB und A'B' gegeben durch

$$(1) \quad r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2,$$

r ist also eine Funktion von s und s' .

Die Richtungskosinus von AB haben den Werth

$$\frac{\partial x}{\partial s}, \quad \frac{\partial y}{\partial s}, \quad \frac{\partial z}{\partial s},$$

die von A'B'

$$\frac{\partial x'}{\partial s'}, \quad \frac{\partial y'}{\partial s'}, \quad \frac{\partial z'}{\partial s'},$$

und diejenigen von AA'

$$\frac{x' - x}{r}, \quad \frac{y' - y}{r}, \quad \frac{z' - z}{r}.$$

Bedeutet nun θ den Winkel zwischen AB und AA' ,
 θ' den zwischen $A'B'$ und AA' ,
 und ε den der beiden Elemente AB und $A'B'$,

so gilt

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \theta = \frac{\partial x}{\partial s} \cdot \frac{x' - x}{r} + \frac{\partial y}{\partial s} \cdot \frac{y' - y}{r} + \frac{\partial z}{\partial s} \cdot \frac{z' - z}{r}, \\ \cos \theta' = \frac{\partial x'}{\partial s'} \cdot \frac{x' - x}{r} + \frac{\partial y'}{\partial s'} \cdot \frac{y' - y}{r} + \frac{\partial z'}{\partial s'} \cdot \frac{z' - z}{r}, \\ \cos \varepsilon = \frac{\partial x}{\partial s} \cdot \frac{\partial x'}{\partial s'} + \frac{\partial y}{\partial s} \cdot \frac{\partial y'}{\partial s'} + \frac{\partial z}{\partial s} \cdot \frac{\partial z'}{\partial s'}. \end{array} \right.$$

Zwischen diesen drei Gleichungen und den Differentialquotienten der Funktion r bestehen gewisse Beziehungen.

Man findet nämlich durch Differentiation aus (1):

$$(3) \quad r \frac{\partial r}{\partial s} = \sum (x - x') \frac{\partial x}{\partial s},$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial r}{\partial s} = \sum \frac{x - x'}{r} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} = -\cos \theta, \\ \frac{\partial r}{\partial s'} = \sum \frac{x' - x}{r} \cdot \frac{\partial x'}{\partial s'} = \cos \theta'. \end{array} \right.$$

Differentiiren wir ferner (3) nach s' , so folgt

$$(5) \quad \frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial r}{\partial s'} + r \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} = - \sum \frac{\partial x'}{\partial s'} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} = -\cos \varepsilon,$$

und hieraus:

$$r \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} = \cos \theta \cos \theta' - \cos \varepsilon.$$

Die Wirkung von ds auf ds' ist offenbar proportional den Längen ds und ds' der beiden Elemente und den Intensitäten i und i' der beiden Ströme; sie hängt ausserdem von dem Abstände r der beiden Elemente und von den Winkeln θ , θ' und ε ab; mit irgend einer anderen Grösse kann sie augenscheinlich nicht mehr zusammen-

hängen. Diese Wirkung lässt sich demnach darstellen durch die Formel:

$$ii' ds ds' f(r, \theta, \theta', \epsilon),$$

und wir haben nur noch die Funktion f zu bestimmen.

Um die Formeln abzukürzen, nehmen wir vorläufig an

$$i = i' = 1,$$

und setzen den Faktor ii' am Schluss der Rechnung wieder ein.

Ampère leitet aus den Versuchen folgende drei Principien ab, welche als Ausgangspunkt der nachher angegebenen Analyse dienen:

1. Das Princip der krummlinigen Ströme.
2. Die Wirkung eines geschlossenen Stromes auf irgend ein Element steht senkrecht zu dem letzteren.
3. Die Wirkung eines geschlossenen Solenoids auf ein Element ist Null.

Es sei $A dx ds'$ die Wirkung, welche auf ds' durch die Projektion dx eines Stromelements ds ausgeübt wird, und analog $B dy ds'$ und $C dz ds'$. Das experimentelle Princip der krummlinigen Ströme, welches als erstes von Ampère aus den Versuchen gefolgert wurde, lehrt uns dann, dass die Wirkung von ds die Resultante aus den Wirkungen seiner Projektionen darstellt, und da alle Kräfte nach derselben Geraden AA' gerichtet sind, erhält man

$$f(r, \theta, \theta', \epsilon) ds ds' = A dx ds' + B dy ds' + C dz ds',$$

$$f = A \frac{\partial x}{\partial s} + B \frac{\partial y}{\partial s} + C \frac{\partial z}{\partial s}.$$

Die Funktion f ist also linear in Bezug auf die Richtungskosinus von AB .

Nun hängt f von den Grössen r, θ, θ' und ϵ ab; r und θ' sind aber unabhängig von den Richtungskosinus $\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial s}, \cos \theta$ und $\cos \epsilon$ dagegen sind linear und homogen in Bezug auf diese Kosinus. Somit kann f nur dann linear und homogen in Bezug auf diese betreffenden Richtungskosinus sein, wenn es linear und homogen in Bezug auf $\cos \theta$ und $\cos \epsilon$ ist, oder, was auf dasselbe hinauskommt, in Bezug auf $\frac{\partial r}{\partial s}$ und $\frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'}$; dasselbe gilt für

$$\frac{\partial r}{\partial s'} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'}.$$

Es muss also f linear und homogen sein in Bezug auf $\frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial r}{\partial s'}$ einerseits und auf $\frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'}$ andererseits.

Demnach finden wir

$$\begin{aligned} f \, ds \, ds' &= \left(A_1 \frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial r}{\partial s'} + B_1 \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} \right) ds \, ds' \\ (6) \qquad &= \left[\psi(r) \frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial r}{\partial s'} + 2 \varphi(r) \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} \right] ds \, ds'. \end{aligned}$$

A_1 und B_1 sind nämlich Funktionen von r allein und man kann setzen:

$$A_1 = \psi(r), \qquad B_1 = 2 \varphi(r).$$

2. Zur Bestimmung dieser Funktionen sind zwei Versuche nöthig. Ampère zeigte, dass ein beliebiger, um seinen Mittelpunkt beweglicher Kreisbogen sich nicht verschiebt; die auf ein beliebiges Element dieses Kreisbogens tangentiell wirkende Kraft ist also Null. Demnach steht die Wirkung eines geschlossenen Stromes auf ein Element senkrecht zu diesem letzteren; dies ist das zweite oben angeführte Princip von Ampère.

Wir erhalten also:

$$ds' \int \left[\psi(r) \frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial r}{\partial s'} + 2 \varphi(r) \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} \right] \frac{\partial r}{\partial s'} ds = 0,$$

wobei das Integral über den beliebigen Stromkreis C zu erstrecken ist.

Setzen wir:

$$q = \frac{\partial r}{\partial s'},$$

so folgt

$$\int [\psi(r) q^2 dr + 2 \varphi(r) q \, d q] = 0;$$

die unter dem Integral stehende Grösse ist demnach das vollständige

Differential einer Funktion von zwei unabhängigen Variablen r und q ; d. h. es gilt daher

$$2 q \psi(r) = 2 q \varphi'(r)$$

oder

$$\psi(r) = \varphi'(r).$$

Wir müssen nun noch die Funktion φ bestimmen, was uns durch das dritte experimentelle Princip von Ampère ermöglicht wird; zunächst wollen wir aber alle Folgerungen aus den beiden ersten Principien ziehen und zeigen, dass die Elementarwirkung

$$f ds ds' = \left[\varphi'(r) \frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial r}{\partial s'} + 2 \varphi(r) \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} \right] ds ds'$$

in die Form $V \frac{\partial^2 U}{\partial s \partial s'}$ gebracht werden kann, worin V und U nur Funktionen von r darstellen.

Es ist $\frac{\partial U}{\partial s} = U' \frac{\partial r}{\partial s}$, wenn wir U' schreiben für $\frac{\partial U}{\partial r}$, ferner

$$\frac{\partial^2 U}{\partial s \partial s'} = U' \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} + U'' \frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial r}{\partial s'}.$$

Wir setzen weiter fest

$$V U'' = \varphi',$$

$$V U' = 2 \varphi,$$

also

$$\frac{U''}{U'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\varphi'}{\varphi},$$

ferner

$$\log U' = \frac{1}{2} \log \varphi,$$

oder

$$U' = \sqrt{\varphi},$$

somit

$$V = 2 \sqrt{\varphi} = 2 U'.$$

Durch Einführung dieser Grössen in $f ds ds'$ erhält man dann in der That die Form

$$f ds ds' = 2 ds ds' U' \frac{\partial^2 U}{\partial s \partial s'}.$$

3. Arbeit bei der relativen Verrückung zweier Stromkreise.

Wenn wir r einen gewissen Zuwachs δr ertheilen, so wird die Wirkung des Elements AB auf A'B' eine gewisse Arbeit hervorbringen. Wir wählen nach dem gewöhnlichen Uebereinkommen in der Elektrodynamik die Zeichen derart, dass die anziehende Kraft positiv wird; dann ist die einer Veränderung δr zukommende Elementararbeit:

$$-2 ds ds' U' \delta r \frac{\partial^2 U}{\partial s \partial s'} = -2 ds ds' \delta U \frac{\partial^2 U}{\partial s \partial s'},$$

und die Arbeit der Gesamtwirkung eines Stromkreises auf einen anderen wird

$$\delta T = -2 \int \delta U \frac{\partial^2 U}{\partial s \partial s'} ds ds'.$$

Durch partielle Integration erhalten wir

$$\int u \frac{\partial v}{\partial s} ds = [uv] - \int v \frac{\partial u}{\partial s} ds = - \int v \frac{\partial u}{\partial s} ds,$$

da der Integrationsweg durch den geschlossenen Stromkreis gebildet wird und daher uv für beide Integrationsgrenzen denselben Werth besitzt. Es ist also

$$- \int \delta U \frac{\partial^2 U}{\partial s \partial s'} ds = \int \frac{\partial U}{\partial s'} \cdot \frac{\partial \delta U}{\partial s} ds = \int \frac{\partial U}{\partial s'} \delta \frac{\partial U}{\partial s} ds,$$

und folglich

$$\delta T = 2 \int \frac{\partial U}{\partial s'} \delta \frac{\partial U}{\partial s} ds ds';$$

ebenso, da zwischen C und C' kein Unterschied besteht,

$$\delta T = 2 \int \frac{\partial U}{\partial s} \delta \frac{\partial U}{\partial s'} ds ds'.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \delta T &= \int \left[\frac{\partial U}{\partial s} \delta \frac{\partial U}{\partial s'} + \frac{\partial U}{\partial s'} \delta \frac{\partial U}{\partial s} \right] ds ds' \\ &= \delta \int \frac{\partial U}{\partial s} \cdot \frac{\partial U}{\partial s'} ds ds'. \end{aligned}$$

Es ist also δT der Zuwachs der Funktion

$$(7) \quad T = \int \frac{\partial U}{\partial s} \cdot \frac{\partial U}{\partial s'} ds ds'.$$

Die Elementararbeit stellt somit das Differential einer Funktion dar, die nur von der relativen Lage beider Stromkreise abhängt. Diese Funktion¹⁾ ist das (gegenseitige) elektrodynamische Potential der beiden Stromkreise. Diese elegante Form für den Ausdruck der Elementararbeit verdanken wir Bertrand²⁾.

4. Wir haben nun die Existenz eines Potentials für die Wirkung zweier Stromkreise nachgewiesen, indem wir uns nur auf die Thatsache stützten, dass die Wirkung eines geschlossenen Stromes auf dem betrachteten Element senkrecht steht.

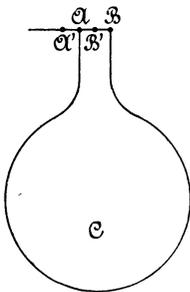


Fig. 2.

Es lässt sich aber auch umgekehrt zeigen, dass diese experimentelle Thatsache eine nothwendige Folge des Vorhandenseins eines Potentials ist.

Wenn ein in seiner eigenen Richtung verschiebbares Element AB nach A'B' gelangt, so behält der Strom dieselbe Lage im Raum bei, er beschreibt denselben Kreis. Das elektrodynamische Potential wird dann nicht geändert, es entsteht also keine Arbeit, was beweist, dass die

Kraft senkrecht zum durchlaufenen Weg steht.

5. **Bestimmung der Funktion U.** Um weiter zu kommen, müssen wir wieder zu dem Experiment zurückkehren. Wir wollen die Thatsache benützen, dass die Wirkung eines geschlossenen Solenoids auf ein Stromelement immer Null ist.

¹⁾ Die Arbeit ist, nach Grösse und Zeichen, der Zuwachs des Potentials, wenn man, wie hier, eine anziehende Kraft als positiv betrachtet.

²⁾ Théorie mathématique de l'électricité (1890) § 131 p. 175.

Wir hatten:

$$T = \int \frac{\partial U}{\partial s} \cdot \frac{\partial U}{\partial s'} ds ds' = \int U^2 \frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial r}{\partial s'} ds ds',$$

oder unter Berücksichtigung der Gleichungen (4):

$$T = \int ds \left[\frac{\partial x}{\partial s} \int U^2 \frac{\partial r}{\partial s'} \cdot \frac{x - x'}{r} ds' \right. \\ \left. + \frac{\partial y}{\partial s} \int U^2 \frac{\partial r}{\partial s'} \cdot \frac{y - y'}{r} ds' + \frac{\partial z}{\partial s} \int U^2 \frac{\partial r}{\partial s'} \cdot \frac{z - z'}{r} ds' \right].$$

Zur Abkürzung kann man schreiben:

$$T = \int (F dx + G dy + H dz),$$

indem man setzt:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} F = \int U^2 \frac{\partial r}{\partial s'} \cdot \frac{x - x'}{r} ds', \\ G = \int U^2 \frac{\partial r}{\partial s'} \cdot \frac{y - y'}{r} ds', \\ H = \int U^2 \frac{\partial r}{\partial s'} \cdot \frac{z - z'}{r} ds'. \end{array} \right.$$

Bei der Integration längs C' erhält man:

$$F = \int (x - x') \frac{U^2}{r} dr = \int (x - x') f'(r) dr,$$

wenn

$$f'(r) = \frac{U^2}{r}$$

gesetzt wird.

Die partielle Integration liefert, da das bestimmte Integral Null ist,

$$F = - \int f(r) \frac{\partial(x-x')}{\partial s'} ds' = + \int f(r) dx',$$

denn man hat:

$$\frac{\partial(x-x')}{\partial s'} = - \frac{\partial x'}{\partial s'}.$$

Bei dieser Form erkennt man leicht, dass:

$$(9) \quad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0.$$

Es ist nämlich

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int \frac{\partial f(r)}{\partial x} dx' = - \int \frac{\partial f(r)}{\partial x'} dx',$$

weil

$$\frac{\partial r}{\partial x} = - \frac{\partial r}{\partial x'};$$

also

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = - \int \left(\frac{\partial f}{\partial x'} dx' + \frac{\partial f}{\partial y'} dy' + \frac{\partial f}{\partial z'} dz' \right) = - \int df = 0.$$

Die weiter oben definirten Grössen F, G, H sind das, was Maxwell die Komponenten des Vektor-Potentials nennt, welches einem von dem Strome mit der Intensität 1 durchlaufenen Stromkreis C' entspricht. Um das Vektor-Potential desselben Stromkreises für die Intensität i zu erhalten, muss man die Integrale (8) noch mit i multipliciren.

6. Wir wollen nun das elektrodynamische Potential eines Solenoids auf einen Strom C' berechnen und ausdrücken, dass dies Potential für ein geschlossenes Solenoid Null ist.

Wir fanden:

$$T = \int (F dx + G dy + H dz),$$

wo F , G , H die Komponenten des zu C' gehörigen Vektorpotentials bedeuten und das Integral über C zu erstrecken ist.

Zunächst können wir T in ein Integral umformen, das über eine durch C gelegte und von C begrenzte Fläche auszudehnen ist, und erhalten dann¹⁾:

$$(10) \quad T = \int \left[l \left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} \right) + m \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x} \right) + n \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) \right] d\omega,$$

worin $d\omega$ das betrachtete Flächenelement bedeutet und l , m , n die Richtungskosinus der Normalen zu diesem Element.

Erinnern wir uns kurz an die Definition eines Solenoids. Ein Solenoid besteht aus einer unendlichen Aufeinanderfolge unendlich kleiner Stromkreise, die auf folgende Art angeordnet sind:

Ein beliebiger Kurvenbogen, den man die *Axe* des Solenoids nennt, sei in eine unendliche Anzahl von unter einander gleichen Elementen $d\sigma$ getheilt.

Jedem dieser Elemente entspricht ein Elementarstrom, der durch nachstehende Eigenschaften defnirt ist:

1. die Intensität dieses Stromes ist i ;
2. der Strom durchläuft einen unendlich kleinen Stromkreis, dessen Ebene normal zu dem Element $d\sigma$ steht;
3. der Stromkreis begrenzt eine unendlich kleine Ebene $d\omega$;
4. der Schwerpunkt dieser Fläche fällt mit der Mitte von $d\sigma$ zusammen;
5. die Werthe von i und $d\omega$ sind dieselben für alle Elementarströme.

Die Gesammtheit dieser Elementarströme bildet das Solenoid. Weiter oben hatten wir bereits zur Abkürzung der Formeln i vorläufig $= 1$ gesetzt.

Wir nehmen nun auf der *Axe* eines Solenoids ein Bogenelement $d\sigma$ mit den Richtungskosinus l , m , n an. In der zu diesem Bogenelement senkrechten Ebene fließt ein Strom, welcher eine unendlich kleine Fläche $d\omega$ umfasst. Das der Wirkung dieser unendlich kleinen Fläche zukommende Potential T lässt sich leicht berechnen, da das Integral (10) sich auf ein einziges Element reducirt, das man schreiben kann:

$$d\omega \sum l \left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} \right) = \frac{\partial \omega}{\partial \sigma} \sum dx \left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial x} \right);$$

¹⁾ Siehe wegen dieser Umformung Bd. I §§ 117 und 130.

denn es ist

$$dx = l d\sigma,$$

$$dy = m d\sigma,$$

$$dz = n d\sigma.$$

$d\omega$ und $d\sigma$ sind Konstanten, wenn man von einem Elemente des Solenoids zu einem anderen übergeht. Um das Potential für das ganze Solenoid zu erhalten, muss man in Bezug auf dx , dy , dz längs der Axe integrieren und erhält:

$$\Gamma = \frac{\partial\omega}{\partial\sigma} \left[dx \left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} \right) + dy \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x} \right) + dz \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) \right].$$

7. Die Wirkung eines geschlossenen Solenoids ist Null, die unter dem Integralzeichen stehende Grösse demnach ein vollständiges Differential. Es besteht also die Beziehung:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right),$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt:

$$\Delta F - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \right) = 0, \text{ u. s. f.}$$

Nun ist nach Gleichung (9)

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0,$$

also

$$\Delta F = 0.$$

Da aber (§ 5) $\Delta F = \int \Delta f(r) dx'$ ist, so muss $\Delta f(r)$ eine Konstante sein, damit das vorhergehende Integral, über eine geschlossene Kurve erstreckt, Null wird. Dies Integral kann nämlich nur dann verschwinden, wenn $\Delta f(r)$ nur eine Funktion von x' darstellt, tatsächlich ist es dagegen eine Funktion von r allein; es kann also nur eine Konstante sein. Wir setzen demnach

$$\Delta f(r) = h.$$

Hieraus folgt

$$f(r) = \frac{hr^2}{6} + k + \frac{k'}{r}.$$

Da die Funktion $f(r)$ im Unendlichen verschwinden muss, so sind h und k nothwendiger Weise Null, so dass wir erhalten

$$f(r) = \frac{k'}{r}.$$

Aus dem Experiment, auf welches man hier zurückgehen muss, folgt $k' = 1$ in absolutem Maass.

Wir konnten nämlich, nach einer willkürlichen Uebereinkunft, die Einheit des Magnetismus, und dann die der Intensität derart wählen, dass der in den Ausdruck für die gegenseitige Wirkung zweier Magnete eintretende Koeffizient $= 1$ ist, ebenso wie der bei der Wirkung eines Stromes auf einen Magneten auftretende Koeffizient. Hier ist dem nicht mehr so; wir verfügen nicht mehr über die Wahl der Einheit, die durch die frühere Uebereinkunft bereits völlig festgelegt ist; demnach können wir einzig aus dem Experiment folgern, dass k' gleich 1 ist.

Ferner müssen wir das positive Zeichen wählen,

$$f(r) = + \frac{1}{r};$$

auch dies folgt aus dem Experiment, wenn die Uebereinkunft in Betreff des Zeichens, wie früher angegeben, bereits getroffen ist. Bis jetzt hatten wir nur Versuche, bei denen die Wirkung Null war, betrachtet; ein neuer Versuch konnte allein entscheiden, ob zwischen zwei parallelen Elementen bei der gleichen Stromrichtung eine Anziehung oder Abstossung stattfindet.

Es ist also (§ 5)

$$f'(r) = - \frac{1}{r^2} = \frac{U'^2}{r},$$

woraus folgt

$$U' = \pm \sqrt{\frac{-1}{r}}.$$

Wir haben nun

$$U' \frac{\partial^2 U}{\partial s \partial s'} = U' \frac{\partial}{\partial s} \left(U' \frac{\partial r}{\partial s'} \right) = U' U'' \frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial r}{\partial s'} \\ + U'^2 \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} = \frac{1}{2 r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial r}{\partial s'} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'},$$

und für die zwischen zwei Elementen ausgeübte Anziehungskraft finden wir

$$2 i i' ds ds' U' \frac{\partial^2 U}{\partial s \partial s'} = \frac{i i' ds ds'}{r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial r}{\partial s'} - 2 r \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} \right).$$

Man kann diesen Ausdruck noch in die Form bringen, cf. (4) und (5)

$$(11) \quad \frac{2 i i' ds ds'}{r^2} \left(\cos \varepsilon - \frac{3}{2} \cos \theta \cos \theta' \right).$$

8. Beziehung zwischen der elektromagnetischen Kraft und dem Vektorpotential. Wir sahen im ersten Band (§ 111 bis 113), dass die von C' auf einen Magnetpol von dem Magnetismus = 1¹⁾ ausgeübte Wirkung eine Kraft darstellt, welche das Differential eines Potentials ist und deren Komponenten gegeben sind durch

$$\alpha = - \frac{\partial \Omega}{\partial x},$$

$$\beta = - \frac{\partial \Omega}{\partial y},$$

$$\gamma = - \frac{\partial \Omega}{\partial z}.$$

Ω ist das magnetische Potential für ein durch den Stromkreis begrenztes Blatt von einer Stärke gleich der Stromintensität. Bezeichnen wir mit $d\omega'$ ein Element der durch C' begrenzten Fläche

¹⁾ Man kann einen isolirten Magnetpol verwirklichen, indem man einen Magnet oder ein Solenoid von sehr grosser Länge anwendet, dessen einer Pol in endlicher Entfernung liegt.

und mit l' , m' , n' die Richtungskosinus der Normalen, so erhalten wir¹⁾

$$\Omega = \int \left(l' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + m' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} + n' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \right) d\omega'.$$

Da $\frac{1}{r}$ eine Funktion von $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$ ist, so hat man zu setzen

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'}, \text{ etc.},$$

und

$$\begin{aligned} \Omega &= - \int \left(l' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + m' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + n' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) d\omega', \\ \alpha &= + \int \left(l' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + m' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} + n' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z} \right) d\omega'. \end{aligned}$$

Wir wollen nun $F = \int f(r) dx = \int \frac{1}{r} dx$ in ein Integral umformen, das über die durch den Stromkreis C' begrenzte Fläche $\int d\omega'$ zu erstrecken ist.

Dann wird:

$$F = \int d\omega' \left(m' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} - n' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} \right) = \int d\omega' \left(n' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - m' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right),$$

¹⁾ Vergl. Bd. I § 112 Gleichung (1), in welcher man $\cos \varepsilon$ durch die Richtungskosinus l' , m' , n' der Normalen und diejenigen der Verbindungslinie r auszudrücken hat. Durch Berücksichtigung von

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} = \frac{x-x'}{r^3} \text{ etc.}$$

folgt dann obige Gleichung.

ebenso

$$\mathbf{G} = \int d\omega' \left(l' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - n' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \right),$$

$$\mathbf{H} = \int d\omega' \left(m' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - l' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \right).$$

Hieraus berechnet sich

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial z} = \int d\omega' \left(m' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} - l' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} \right)$$

$$+ \int d\omega' \left(n' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z} - l' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right).$$

Durch Zufügen von

$$0 = \int d\omega' \left(l' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial x} - l' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} \right)$$

erhält man:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial z} = \alpha - \int d\omega' \cdot l' \Delta \frac{1}{r} = \alpha,$$

da $\Delta \frac{1}{r} = 0$ ist.

Es bestehen nun ganz allgemein zwischen der magnetischen Kraft und der magnetischen Induktion die Beziehungen (cf. Bd. I § 101)

$$(12) \quad \begin{cases} a = \alpha + 4\pi A, \\ b = \beta + 4\pi B, \\ c = \gamma + 4\pi C. \end{cases}$$

In einem unmagnetischen Mittel sind A, B und C Null, und a, b, c fallen mit α, β, γ zusammen.

Die vorhergehenden Formeln können wir dann also schreiben:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}, \\ b = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}, \\ c = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}. \end{array} \right.$$

9. Diese Formeln sind für ein unmagnetisches Medium bewiesen, denn man hat bei den Rechnungen immer vorausgesetzt, dass $\frac{1}{r}$ und seine Differentialquotienten endlich bleiben, was bedingt, dass der Punkt, an dem der Einheitspol sich befindet, ausserhalb der anziehenden Massen liegt; in unserem Falle sind auch keine solche Massen ausser dem Blatt C' vorhanden.

Wir werden jedoch sehen, dass die Formeln (13) auch noch für ein magnetisches Medium gültig bleiben. Maxwell nimmt dies letztere ohne Beweis an; oder vielmehr, er definiert bei Betrachtung des Magnetismus die Grössen F, G, H durch die Gleichungen (13) und nennt sie die Komponenten des „Vektorpotentials der magnetischen Induktion“; zweihundert Seiten weiter führt er die Grössen F, G, H beim Elektromagnetismus ein, wie wir es vorhin thaten, und sagt: „Diese Funktionen F, G, H sind nichts anderes, als die Komponenten des Vektorpotentials, dem wir schon begegnet sind“. Endlich, etwas später, bemerkt er: „Wir haben gezeigt, dass die Komponenten der Induktion durch die Gleichungen (13) mit denen des Vektorpotentials verknüpft sind“. Wir werden später diesen Beweis liefern, den Maxwell nicht gegeben hat (§ 36 und 37).

Das elektrodynamische Potential T (vgl. § 6 (10)) lässt sich nach den Gleichungen (13) in die Form bringen:

$$T = \int (la + mb + nc) d\omega.$$

10. Elektrodynamisches Potential eines aus zwei Stromkreisen gebildeten Systems. Das (gegenseitige) Potential zweier Stromkreise kann einen sehr einfachen Ausdruck erhalten (§ 5)

$$T = \int_{(C)} (F dx + G dy + H dz),$$

wobei

$$F = \int_{(C)} \frac{dx'}{r} \text{ ist.}$$

Es folgt hieraus:

$$T = \int \frac{dx dx' + dy dy' + dz dz'}{r} = \int \frac{ds ds' \cos \varepsilon}{r}.$$

Wenn die bisher gleich 1 angenommenen Intensitäten die Werthe i und i' besitzen, so erhält man

$$(14) \quad T = i i' \int \frac{ds ds' \cos \varepsilon}{r} = i i' M,$$

indem man setzt

$$M = \int \frac{ds ds' \cos \varepsilon}{r}.$$

M ist der *Induktionskoeffizient der Stromkreise C und C' auf einander*.

11. Es sei $L = \int \frac{ds ds' \cos \varepsilon}{r}$ der Koeffizient der Induktion des Stromkreises C auf einen anderen, mit ihm zusammenfallenden Stromkreis. Dann nennt man L den Koeffizienten der Selbstinduktion des Stromkreises C .

Die verschiedenen Elemente von C üben nämlich offenbar eine gewisse Wirkung auf einander aus; verändert der Stromkreis seine Gestalt, so wird diese Wirkung eine gewisse Arbeit δT hervorbringen, die wir jetzt berechnen wollen. Wir haben oben gesehen, welche Arbeit durch die Wirkung eines Stromes auf einen anderen geleistet wird. Wenn man daraus den Ausdruck für die Arbeit ableiten will, die der Wirkung eines Stromkreises auf sich selbst entspricht, so begegnet man einer kleinen Schwierigkeit, die durch folgenden Kunstgriff umgangen werden kann.

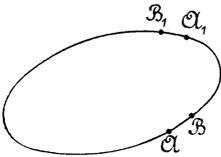


Fig. 3.

Nehmen wir an, dass zwei verschiedene Ströme C und C' mit den Intensitäten i und i' denselben Stromkreis durchfließen, so können wir auf diese beiden verschiedenen Ströme die Formel (14) anwenden und für die Arbeit δT_1 ihrer gegenseitigen Einwirkung schreiben:

$$\delta T_1 = \delta L i i'.$$

Wir müssen nun noch δT mit δT_1 vergleichen.

Es sei $d\sigma$ ein Element des Stromes C von der Intensität i ; $d\sigma'$ ein Element des Stromes C' von der Intensität i' , das mit $d\sigma$ zusammenfällt; ferner sei $d\sigma_1$ ein anderes Element von C, und $d\sigma'_1$ das mit $d\sigma_1$ zusammenfallende Element von C'.

Bezeichnet nun μ die Arbeit der Wirkung von $d\sigma$ auf $d\sigma'_1$,
 μ' von $d\sigma'$ auf $d\sigma_1$,
 λ von $d\sigma$ auf $d\sigma_1$;
 ausserdem δT_1 die gesammte Elementararbeit der Wirkung des Stromes C auf C', und δT die Arbeit der Wirkung von C auf sich selbst, so gilt

$$\delta T_1 = \delta(L i i') = \int (\mu + \mu')$$

$$\delta T = \int \lambda.$$

Da nun die Beziehung besteht

$$\frac{\mu}{\lambda} = \frac{i'}{i} \quad \text{und} \quad \frac{\mu'}{\lambda} = \frac{i'}{i},$$

so ist

$$\mu = \mu' = \frac{i'}{i} \lambda, \quad \text{und}$$

$$\delta T_1 = \int 2 \frac{i'}{i} \lambda = 2 \frac{i'}{i} \delta T,$$

$$\delta T = \frac{1}{2} \delta(L i^2).$$

Das gesammte elektrodynamische Potential des aus den beiden Stromkreisen C und C' gebildeten Systems auf sich selbst hat also den Ausdruck:

$$(15) \quad T = \frac{L i^2}{2} + M i i' + \frac{N i'^2}{2},$$

wobei N den Koeffizienten der Selbstinduktion von C' bedeutet.

Die den elektrodynamischen Wirkungen zukommende Arbeit wird demnach dargestellt durch

$$\frac{i^2 \delta L + 2 i i' \delta M + i'^2 \delta N}{2}.$$

Sie setzt sich nämlich zusammen:

1. Aus der Arbeit der Wirkung von C auf sich selbst:

$$\frac{i^2}{2} \delta L.$$

2. Aus der Arbeit der Wirkung von C auf C':

$$i i' \delta M.$$

3. Aus der Arbeit der Wirkung von C' auf sich selbst:

$$\frac{i'^2}{2} \delta N.$$

Kapitel II.

Theorie der Induktion.

12. Allgemein ist man der Ansicht, dass, wenn einmal die Gesetze der Elektrodynamik bekannt sind, die Anwendung des Princips von der Erhaltung der Energie ausreicht, um die Gesetze der Induktion zu finden. Bertrand suchte diese Meinung zu widerlegen¹⁾ und ich will hier seine Einwürfe im Einzelnen besprechen.

Es seien zwei Stromkreise vorhanden, deren jeder von einem Elemente gespeist wird, wobei sich die Leiter erwärmen. Wenn dieselben beweglich sind und sich nähern, so entsteht eine mechanische Arbeit, die von irgend etwas herkommen muss: man ist also genöthigt anzunehmen, dass eine bisher unbekannte Erscheinung ein neues Glied in die Gleichungen einführt. Ist nun das Gesetz $dQ = Ri^2 dt$ noch anwendbar? Warum, sagt Bertrand, sollte die Elektrizität nicht eine analoge Wirkung besitzen wie der Dampf, welcher das ihn enthaltende Gefäss abkühlt, wenn er Arbeit verrichtet? Man könnte glauben, dass die Leiter sich weniger erwärmen, wenn der Strom Arbeit leistet; würde dies nicht ebenso wahrscheinlich sein, als die Annahme, dass die Intensitäten sich ändern?

Man kann antworten: nein, diese Hypothese würde nicht a priori ebenso wahrscheinlich sein, wie diejenige, welche durch den Versuch bestätigt wird. Nehmen wir an, dass das Joule'sche Gesetz keine Anwendung mehr finde. Da sich dann die Leiter weniger erwärmen, so hat man $dQ = R i^2 dt - H dt$, wo H eine positive, von der Geschwindigkeit der Leiter abhängige Grösse bedeutet. H wird man sehr gross machen können, indem man die Geschwindigkeit bedeutend steigert, und es wäre dann sogar möglich,

¹⁾ Théorie mathématique de l'électricité, Kap. XI p. 208.

dass dQ negativ würde. Man könnte also dem Stromkreis Wärme entziehen, wobei er sich abkühlt; diese würde sich in mechanische Arbeit verwandeln lassen, die man ihrerseits wieder durch Reibung in Wärme von einer beliebig hohen Temperatur umzusetzen vermöchte; dieser Vorgang würde jedoch dem Satz von Clausius widersprechen.

Auch eine andere Hypothese ist möglich: das Gesetz von Joule könnte anwendbar sein, aber das Element würde mehr beansprucht werden, um denselben Strom zu liefern. Mit anderen Worten, das Gesetz von Faraday würde sich nicht auf Stromkreise anwenden lassen, die eine mechanische Arbeit verrichten. Diese Hypothese ist ebenfalls sehr unwahrscheinlich; wenn ich ein Element in Paris durch Drähte mit einer in Creil befindlichen Maschine verbinde, so wäre es sonderbar, wenn das Gesetz von Faraday bei immer gleichbleibender Intensität seine Anwendung in Paris verlöre, weil der Strom in Creil Arbeit verrichtet.

Trotz der Unwahrscheinlichkeit dieser beiden Hypothesen war es vielleicht unberechtigt, ihre Unrichtigkeit von vornherein als erwiesen zu betrachten; indessen möchte ich hauptsächlich die Aufmerksamkeit auf zwei Einwürfe von Bertrand lenken, die mir viel schwerwiegender zu sein scheinen. Es handelt sich nämlich nicht mehr um Hypothesen, die der Versuch als falsch erweist und die man dennoch nicht von vornherein verwerfen dürfte, sondern um tatsächliche Verhältnisse, denen man oft Rechnung zu tragen vergass, so dass man sich grossen Irrthümern aussetzte.

Wenn zwei Ströme sich anziehen, so bilden sie ein zusammengehöriges System, und man hat kein Recht, obgleich dies beständig geschieht, das Princip von der Erhaltung der Energie nur auf einen von ihnen anzuwenden: man muss vielmehr das System beider Ströme betrachten.

Das ist aber nicht Alles: der Aether besitzt eine veränderliche, lebendige Kraft, die man bei den Rechnungen berücksichtigen muss, ebenso wie die lebendige Kraft der Luft, die eine Windmühle* in Bewegung setzt. Es ist hier ein doppelter Einwurf möglich: man kann annehmen, dass ein permanenter Strom lebendige Kraft ausstrahlt, wie eine konstante Lampe das Licht; man kann aber auch im Gegentheil voraussetzen, dass die lebendige Kraft des Aethers konstant bleibt, sobald der endgültige Zustand erreicht ist und kein Verbrauch des Stromes mehr stattfindet, und dass nur während der veränderlichen Periode die lebendige Kraft des Aethers variirt; wenn der Strom wächst, absorbiert der Aether lebendige Kraft, die er wieder im Augenblick der Abnahme des Stromes hergibt.

Die erstere Hypothese, diejenige der unbegrenzten Ausstrahlung, widerspricht dem Experiment, da bei einem permanenten Strom die in den Leitern hervorgebrachte Wärme gleich der Energie des galvanischen Elements ist. Man darf sagen, dass das Experiment allein uns dies gelehrt hat.

Was die zweite Hypothese anbetrifft, so ist dieselbe nicht nur nicht zu verwerfen, sondern man hat sicherlich der dem Aether mitgetheilten lebendigen Kraft Rechnung zu tragen, wenn man mit den Thatsachen in Uebereinstimmung bleiben will; vernachlässigt man dies, so begeht man Fehler.

Man könnte die Einwürfe in's Unbegrenzte vermehren und würde dann zu Vermuthungen geführt, die mehr oder weniger unwahrscheinlich wären, so dass man eine nach der anderen wieder verwerfen müsste. Deshalb hat Bertrand Recht, wenn er sagt, einzig und allein der Versuch könne zeigen, dass die Gesetze von Joule, Faraday und Ohm noch auf Ströme anwendbar seien, welche Arbeit verrichten.

13. Diese experimentelle Thatsache wollen wir als Ausgangspunkt wählen und weiter annehmen, dass der Aether eine konstante elektrokinetische Energie besitzt, wenn der Strom konstant ist, dass sie dagegen mit der Stromintensität veränderlich sei. Wir müssen aber noch mehr Versuche hinzuziehen.

Sind zwei geschlossene Stromkreise C und C' vorhanden, welche von Strömen mit der Intensität i und i' durchflossen werden, so lehrt der Versuch, dass bei einer Aenderung von i' in C eine elektromotorische

Kraft $A \frac{di'}{dt}$ entsteht, wobei A einen

Koeffizienten der Induktion von C' auf C bedeutet, welcher unabhängig von den Intensitäten ist. Wenn sich C' bei konstantem Strom i' verschiebt und dabei am Ende der Zeit dt eine unendlich nahe Lage C'' erreicht, so bringt diese Verschiebung

des Stromkreises C' nach C'' während der Zeit dt eine elektromotorische Kraft $i' \frac{dB}{dt}$ hervor. Hierin ist auch $\frac{dB}{dt}$ ein Koeffizient, der nur von den geometrischen Bedingungen der beiden Stromkreise abhängt.

Allerdings bietet sich hier eine ganz natürliche Hypothese dar, die indess einer experimentellen Bestätigung bedarf. Der

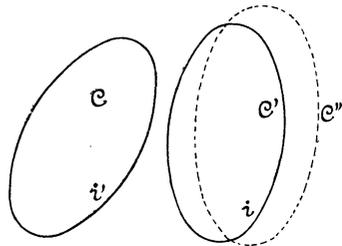


Fig. 4.

Induktionskoeffizient von C' auf C sei A , der von C'' auf C ebenso $A + dA$. Nehmen wir an, dass zur Zeit t in C' ein Strom di' vorhanden sei, in C'' dagegen ein Strom 0 , und verschiebt sich der Strom di' bei gleichbleibender Intensität derart, dass er zur Zeit $t + dt$ nach C'' gelangt, so befindet sich dann ein Strom 0 in C' und ein Strom di' in C'' .

Man kann sich nun vorstellen, dass man von demselben Anfangszustand ausgehend zu demselben Endzustand durch einen anderen Vorgang gelangt sei, nämlich durch Veränderung der Intensitäten. Die Intensität in C' , welche ursprünglich gleich di' war, hat bis zum Nullwerth abgenommen, und während dieser Zeit ist die Intensität in C'' von ihrem ursprünglichen Werthe Null zu di' angewachsen; dabei sind die Stromkreise C' und C'' fest im Raum geblieben. Es ist natürlich, anzunehmen, dass die Wirkung auf C in beiden Fällen die gleiche ist.

Im ersteren Fall ist die in C entstehende elektromotorische Kraft gleich $di' \frac{dB}{dt}$; im zweiten dagegen gleich dem Unterschied zwischen

$$A \frac{di'}{dt} \quad \text{und} \quad (A + dA) \frac{di'}{dt},$$

also gleich $\frac{dA di'}{dt}$; daraus folgt

$$dA = dB.$$

Wenn sich der Strom verschiebt und dabei gleichzeitig verändert, so ist die elektromotorische Kraft gleich der Summe

$$A \frac{di'}{dt} + i' \frac{dA}{dt} = \frac{d(Ai')}{dt}.$$

Wir nehmen diese Gleichung, welche eine Folgerung von $dA = dB$ ist, als experimentelle Thatsache an.

14. Das Princip von der Erhaltung der Energie gestattet uns, die oben definirten Induktionskoeffizienten zu bestimmen.

Es sei A der Induktionskoeffizient von C auf sich selbst.

B - - - C' - C.

B' - - - C - C'.

D - - - C' - sich selbst.

Das auf die beiden Stromkreise angewandte Ohm'sche Gesetz ergibt:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} R i = E - \frac{d(Ai)}{dt} - \frac{d(Bi')}{dt} \\ R' i' = E' - \frac{d(B'i)}{dt} - \frac{d(Di')}{dt} \end{array} \right.$$

Wir wollen nun die Gleichungen für die Erhaltung der Energie aufstellen. Die in der Zeit dt verbrauchte Stromenergie

$$(E i + E' i') dt$$

findet sich in drei Formen wieder:

1. als Joule'sche Wärme;
2. als elektrodynamische Arbeit;
3. als Zuwachs der elektrokinetischen Energie des Aethers.

Wird diese Energie mit U bezeichnet, so lautet die Gleichung

$$(2) \quad (E i + E' i') dt = R i^2 dt + R' i'^2 dt \\ + \frac{1}{2} (i^2 dL + 2 i i' dM + i'^2 dN) + dU.$$

Wir wissen nichts über die Funktion U ; wir wollen nur den Umstand benutzen, dass dU ein vollständiges Differential ist. Ersetzen wir nun in dem Ausdruck für dU die Grösse $E - R i$ durch ihren aus (1) abgeleiteten Werth, so erhalten wir

$$(3) \quad dU = i d(Ai) + i d(Bi') + i' d(B'i) + i' d(Di') \\ - \frac{1}{2} (i^2 dL + 2 i i' dM + i'^2 dN).$$

Nehmen wir an, dass die Intensitäten allein sich verändern, so verschwindet das letzte Glied und dU reducirt sich auf:

$$dU = A i di + B i di' + B' i' di + D i' di';$$

da dU ein vollständiges Differential ist, so muss gelten

$$\frac{\partial}{\partial i'} (A i + B' i') = \frac{\partial}{\partial i} (B i + D i').$$

Hieraus folgt

$$B = B'.$$

Durch Integration findet man

$$U = \frac{A i^2}{2} + B i i' + \frac{D i'^2}{2} + \text{Const.},$$

worin die Konstante [nicht von den Intensitäten abhängt. Da U Null wird, wenn kein Strom vorhanden ist, also wenn $i = i' = 0$, so ergibt sich $\text{Const.} = 0$.

Bleiben dagegen die Intensitäten konstant und die Leiter verschoben sich, so reducirt sich nach dem Vorhergehenden dU auf

$$dU = \frac{1}{2} (i^2 dA + 2 i i' dB + i'^2 dD),$$

welcher Ausdruck mit der rechten Seite von (3) für $di = di' = 0$ identisch sein muss, das heisst gleich

$$i^2 dA + 2 i i' dB + i'^2 dD = \frac{1}{2} (i^2 dL + 2 i i' dM + i'^2 dN).$$

Wir erhalten hieraus

$$\frac{1}{2} dA = dA - \frac{1}{2} dL,$$

$$dA = dL,$$

endlich

$$A = L,$$

denn A und L werden Null, wenn die Leiter in einer unendlich grossen Entfernung sich befinden.

Ebenso gilt

$$D = N$$

$$B = M$$

und nach § 11

$$T = U.$$

Das elektrodynamische Potential repräsentirt also die kinetische Energie des Aethers.

Man kann hiernach das Ohm'sche Gesetz in der Form schreiben:

$$E - R i = \frac{d(Li + Mi')}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial i}.$$

$$E' - R' i' = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial i'}.$$

Diese Form erinnert an die der Lagrange'schen Gleichungen.

Maxwell hat gezeigt — und es ist dies einer der originellsten Theile seines Werkes —, dass die Gesetze der elektrodynamischen Wirkungen und der Induktion in die Form der Lagrange'schen Gleichungen gebracht werden können; die elektromotorischen Induktionskräfte würden also Trägheitskräften entsprechen¹⁾.

¹⁾ Siehe Bd. I § 151 ff.

Kapitel III.

Theorie von Weber¹⁾.

15. Erklärung der elektrodynamischen Anziehungen. Weber versuchte, den elektrodynamischen Kräften durch die Annahme Rechnung zu tragen, dass die Ströme durch elektrische Massen hervorgerufen werden, die sich in den Leitern verschieben, und dass zwischen zwei elektrischen Massen eine Anziehung ausgeübt wird, die von ihrer relativen Bewegung abhängt und welche im Ruhezustand in die durch das Coulomb'sche Gesetz bestimmte Wirkung übergeht.

Wenn zwei Massen e und e' in Ruhe sind, so ist die abstossende Kraft, welche sie auf einander ausüben, gleich $+\frac{ee'}{r^2}$ in elektrostatischen Einheiten. Weber nimmt an, dass diese Abstossung für bewegte Massen den Ausdruck erhält:

$$(1) \quad \frac{ee'}{r^2} + ee' \left[A \frac{d^2r}{dt^2} + B \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right],$$

worin A und B nur Funktionen von r allein sind (cf. § 17).

Es handelt sich nun darum, A und B so zu bestimmen, dass man auf die Formel von Ampère gelangt, nach welcher die Abstossung zwischen zwei Stromelementen in elektromagnetischen Einheiten die Grösse besitzt (§ 7)

$$(2) \quad + \frac{i i' ds ds'}{r^2} \left(2r \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} - \frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial r}{\partial s'} \right).$$

Die Elektrizitätsmengen sollen nach der Annahme die beiden Stromkreise mit den konstanten Geschwindigkeiten v und v' durch-

¹⁾ Weber, Elektrodynamische Maassbestimmung S. 305.

laufen. Der Abstand r ist eine Funktion von s und s' , wenn die Leiter zunächst als ruhend betrachtet werden; man hat demnach

$$v = \frac{\partial r}{\partial t}; \quad v' = \frac{\partial r'}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{\partial r}{\partial s} v + \frac{\partial r}{\partial s'} v',$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 r}{\partial s^2} v^2 + 2 \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} v v' + \frac{\partial^2 r}{\partial s'^2} v'^2,$$

$$\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 = \left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2 v^2 + 2 \frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial r}{\partial s'} v v' + \left(\frac{\partial r}{\partial s'}\right)^2 v'^2.$$

Die elektrodynamische Abstossung [das zweite Glied des Ausdrucks (1)] wird also:

$$\lambda e e' v^2 + 2 \mu e e' v v' + \nu e e' v'^2,$$

wenn wir zur Abkürzung setzen:

$$\lambda = A \frac{\partial^2 r}{\partial s^2} + B \left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2,$$

$$\mu = A \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} + B \frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial r}{\partial s'},$$

$$\nu = A \frac{\partial^2 r}{\partial s'^2} + B \left(\frac{\partial r}{\partial s'}\right)^2.$$

Nehmen wir an, dass sich in ds eine Menge e positiver Elektrizität befinde, und ebenso eine Menge e_1 negativer Elektrizität (e_1 ist eine negative Zahl, da der Körper im neutralen Zustande $e + e_1 = 0$ enthält). Die Geschwindigkeit von e sei v , die von e_1 sei v_1 . In ds' befinden sich ebenso die Mengen e' und e'_1 positiver, resp. negativer Elektrizität, die sich mit den Geschwindigkeiten v' resp. v'_1 bewegen mögen.

Die gesammte Abstossung zwischen ds und ds' erhält man durch Zusammensetzen der Abstossung zwischen den in ds enthaltenen Elektrizitätsmengen e und e_1 und den in ds' enthaltenen Mengen e' und e'_1 .

Man findet also:

$$R = \lambda \sum e e' v^2 + 2 \mu \sum e e' v v' + \nu \sum e e' v'^2,$$

wenn man setzt:

$$\begin{aligned}\sum e e' v^2 &= e e' v^2 + e e_1' v^2 + e_1 e' v_1^2 + e_1 e_1' v_1^2 \\ &= (e v^2 + e_1 v_1^2) (e' + e_1'),\end{aligned}$$

ebenso

$$\begin{aligned}\sum e e' v v' &= (e v + e_1 v_1) (e' v' + e_1' v_1'), \\ \sum e e' v'^2 &= (e + e') (e' v'^2 + e_1' v_1'^2).\end{aligned}$$

Die in der Zeiteinheit durch den Leiter fließende Elektrizitätsmenge beträgt:

$$\frac{e}{ds} = \frac{ev}{ds}$$

für die positive Elektrizität; ebenso $\frac{e_1 v_1}{ds}$ für die negative Elektrizität. Der Gesamtbetrag ist demnach gleich $\frac{ev + e_1 v_1}{ds}$.

Andrerseits ist nach der Definition i' die Gesamtmenge in elektromagnetischen Einheiten. In elektrostatischen Einheiten ausgedrückt, beträgt dieselbe demnach $c i$, worin c das Verhältniss der Einheiten bedeutet. Somit ist zu setzen:

$$\frac{ev + e_1 v_1}{ds} = c i,$$

also

$$\sum e e' r r' = c^2 i i' ds ds'.$$

Die elektrodynamische Anziehung ist Null zwischen einem stromlosen Leiter, der mit Elektrizität geladen ist, und einem anderen, durch den ein Strom fließt, der aber keine elektrische Ladung enthält.

R muss also Null sein, wenn der Leiter C nicht geladen ist, aber von einem Strom durchflossen wird, das heisst, wenn $e + e_1 = 0$, und wenn andererseits der Leiter C' zwar geladen, aber stromlos ist, d. h. $v' = v_1' = 0$.

Durch $v' = v_1' = 0$ aber verschwinden die beiden letzten Glieder von R; da das erste dann ebenfalls Null werden muss, erhält man

$$\lambda (e' + e_1') (e v^2 + e_1 v_1^2) = 0.$$

λ ist im Allgemeinen nicht Null, ebenso ist $e' + e_1' \geq 0$, wenn der Leiter C', wie wir annehmen, eine Ladung enthält.

Es muss also gelten:

$$e v^2 + e_1 v_1^2 = 0$$

und ebenso

$$e' v'^2 + e_1' v_1'^2 = 0.$$

Dies sind sehr eigenthümliche und gekünstelte Bedingungen. Ausserdem nöthigen sie zu der Annahme, dass wirklich zwei Fluida vorhanden sind. Aber nicht genug damit: Rowland hat elektrodynamische Erscheinungen verwirklicht, indem er eine mit Elektrizität geladene Scheibe in sehr schnelle Bewegung setzte; dann ist

$$v = v_1, \text{ woraus folgt } e v^2 + e_1 v_1^2 = (e + e_1) v^2$$

und weder v noch $e + e_1$ ist Null. Allerdings sieht man bei der Berechnung, dass dieser Faktor bei den Versuchen von Rowland vollständig zu vernachlässigen ist.

16. Man kann indessen die Theorie von Weber in einem günstigeren Licht erscheinen lassen. Es liegt mir zwar nichts ferner, als dieselbe zu vertheidigen, aber ich möchte doch zeigen, bei welcher Auffassungsweise dieselbe weniger befremdend wirken würde. Man kann nämlich e und e_1 gesondert als sehr gross annehmen im Verhältniss zu ihrer Summe $e + e_1$; e und e_1 würden von der Ordnung einer sehr bedeutenden Grösse N sein, $e + e_1$ von der Grössenordnung Eins, v und v_1 dagegen von der Ordnung $\frac{1}{N}$. Dies könnte als ziemlich naturgemäss erscheinen in Anbetracht der Geschwindigkeit, welche gewisse Physiker der Elektrizität in den Elektrolyten zuertheilen. Diese Geschwindigkeit würde nach ihrer Annahme nicht einige Millimeter in der Sekunde überschreiten. Es ist übrigens nicht nöthig, dass v und v_1 wirklich so klein sind, um als sehr kleine Grössen betrachtet werden zu können. In der That genügt es, dass v im Verhältniss zu der Lichtgeschwindigkeit c klein bleibt.

$ev + e_1v_1$ wird von der Grössenordnung 1 sein; $ev^2 + e_1v_1^2$ von der Ordnung $\frac{1}{N}$. Das Produkt $(ev^2 + e_1v_1^2)(e' + e_1')$ wird demnach sehr klein von der Ordnung $\frac{1}{N}$, und zwei der Glieder von R, nämlich die mit den Faktoren λ und ν , können vollständig gegen das Glied mit μ vernachlässigt werden. Dann bestehen nicht mehr dieselben Schwierigkeiten, und man hat die Theorie mit den Versuchen von Rowland in Uebereinstimmung gebracht.

17. Man findet schliesslich, wenn man nur das Glied mit μ berücksichtigt und die Grösse

$$\sum e e' v v'$$

durch ihren Werth ersetzt:

$$R = 2 c^2 i i' ds ds' \left(A \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} + B \frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial r}{\partial s'} \right);$$

vergleicht man diesen Ausdruck mit (2), so erhält man

$$A = \frac{1}{c^2 r}, \quad B = -\frac{1}{2 c^2 r^2};$$

und der Ausdruck für die elektrodynamische Abstossung zwischen zwei in Bewegung befindlichen elektrischen Massen lautet:

$$\frac{e e'}{c^2} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} - \frac{1}{2 r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 \right].$$

18. Nun drängt sich noch eine Frage auf: Ist die Weber'sche Hypothese mit dem Princip von der Erhaltung der Energie vereinbar?

Der Ausdruck für die Arbeit der elektrodynamischen Abstossung ist:

$$\frac{e e'}{c^2} \left[\frac{dr}{r} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} - \frac{dr}{2 r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 \right]$$

und muss gleich $-d\psi$ sein, wenn ein Potential besteht und dieses ψ genannt wird. Nun ist aber

$$\frac{dr}{r} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial r}{\partial t} d \frac{\partial r}{\partial t},$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} d\psi &= -\frac{e e'}{c^2} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial r}{\partial t} d \frac{\partial r}{\partial t} - \frac{dr}{r^2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 \right] \\ &= -\frac{e e'}{c^2} d \left[\frac{1}{2 r} \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Das totale Potential (bei gleichzeitiger Berücksichtigung der elektrostatischen und der elektrodynamischen Abstossung) für zwei Massen e und e' lautet

$$\psi = \frac{e e'}{r} \left[1 - \frac{1}{2 c^2} \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 \right].$$

Das Potential zweier Stromelemente auf einander (bei alleiniger Berücksichtigung des elektrodynamischen Potentials) ist hiernach

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2c^2 r} \sum e e' \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 \\
 = & -\frac{1}{2c^2 r} \left[\left(\frac{\partial r}{\partial s} \right)^2 \sum e e' v^2 + 2 \frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial r}{\partial s'} \sum e e' v v' + \left(\frac{\partial r}{\partial s'} \right)^2 \sum e e' v'^2 \right].
 \end{aligned}$$

Da das erste und letzte Glied verschwinden (cf. § 15), so bleibt nur das mittlere Glied $2c^2 i i' ds ds' \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial r}{\partial s'}$; das Potential also lautet:

$$-i i' ds ds' \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial r}{\partial s'}.$$

19. Es zeigt sich hier ein Unterschied gegenüber der Ampère'schen Theorie, nach welcher die Wirkung zweier geschlossenen Stromkreise auf einander wohl ein Potential besitzt, nicht aber die gegenseitige Wirkung zweier Elemente, ebenso wenig diejenige eines geschlossenen Stromes auf ein Element. Sei nämlich AB ein solches Element, welches sich unter der Wirkung eines geschlossenen Stromes verschiebt und nach A'B' gelangt, so können wir AA' so wählen, dass die bei dieser Verschiebung hervorgebrachte Arbeit nicht Null ist. Wir werden aber das Element immer wieder nach AB ohne Arbeit zurückbringen können, wenn das Gesetz von Ampère richtig ist. Lassen wir nämlich A'B' eine Drehung um A' ausführen, bis seine Richtung mit AA' zusammenfällt, so ist die hierbei ausgeübte Arbeit unendlich klein von höherer Ordnung. Wird ferner das Element in seiner eigenen Richtung verschoben, so dass es nach AB''' kommt, so ist auch hierzu keine Arbeit nöthig, da die Wirkung eines geschlossenen Stromes senkrecht zum Element steht. Eine Drehung um A bringt es sodann wieder nach AB und auch jetzt ist erst eine unendlich kleine Arbeit ausgeführt worden. Demnach gibt es kein Potential, da es möglich war, das Element wieder in die Anfangslage zurückzuführen, ohne dass die hierzu verwandte Gesamtarbeit Null wurde. Diese Arbeit reducirt sich auf die, welche nöthig war, um AB nach A'B' zu bringen.

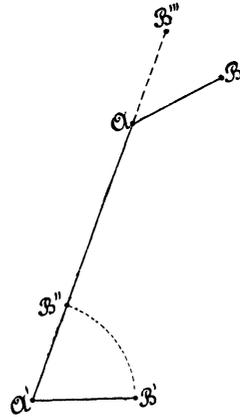


Fig. 5.

Der Widerspruch mit der Theorie von Weber ist jedoch nur ein scheinbarer. Man nahm in dieser Theorie an, dass die elektrischen Moleküle mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit behaftet sind; dies ist aber nur möglich für einen geschlossenen Strom, nicht für einen offenen. Am Ende eines offenen Stromkreises halten nämlich die elektrischen Moleküle in ihrer Bewegung inne; ihre Beschleunigung ist also nicht Null. Die den Enden benachbarten Elemente gehorchen nicht dem Ampère'schen Gesetz, da man der Beschleunigung der elektrischen Moleküle Rechnung tragen müsste, welche nicht mehr Null ist. Es bestände also hier eine Verschiedenheit zwischen beiden Theorien, wenn man es z. B. mit einem geschlossenen Strom und einem vollständig freien Stück eines Stromes zu thun hätte.

Aber dies ist nicht der Fall, den man gewöhnlich betrachtet, wenn man die Wirkung eines geschlossenen Stromkreises auf ein Stromelement experimentell prüfen will.

Untersucht man nämlich die Wirkung eines geschlossenen Stromkreises auf ein bewegliches Element AMB , so ist dieses Element thatsächlich selbst ein Theil eines geschlossenen Stromkreises und seine Enden A und B sind längs zweier festen Leiter beweglich. Es tritt hierbei keine Beschleunigung für ein in A oder A' ankommendes Molekül auf, und in diesem Falle führt uns die Theorie von Weber auf das Gesetz von Ampère. Man findet dann in der That, dass die Kräfte, welche nach den beiden Gesetzen ausgeübt werden, alle beide ein Potential besitzen und zwar dasselbe Potential. Indessen gibt es nach der Theorie von Ampère ein Potential nur vermöge der besonderen Verbindungen des Systems. Wollte man dagegen kurz andauernde, offene Ströme betrachten, so würde das Gesetz von Ampère und die

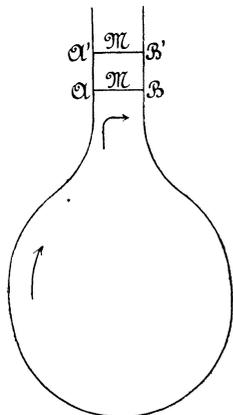


Fig. 6.

Weber'sche Hypothese zu verschiedenen Resultaten führen; aber dieser Fall dürfte dem Experiment überhaupt nicht zugänglich sein.

20. Die Induktion in der Weber'schen Theorie. Das Gesetz von Weber genügt dem Princip von der Erhaltung der Energie. Nach Maxwell müssen sich also die Induktionsgesetze daraus ableiten lassen. In dieser Allgemeinheit gilt dies aber nicht; man würde die gewöhnlichen Induktionsgesetze, wenn man von der Weber'schen Hypothese ausgeht, nur finden, falls man geschlossene Ströme voraussetzt, nicht aber für offene Stromkreise. Maxwell hat sich näm-

lich in seiner Rechnung geirrt¹⁾, aber derart, dass zwei Fehler sich aufheben.

Wir wollen nun die Induktion von C auf C' bestimmen. Die beiden Stromkreise sollen beweglich sein; der Abstand r der beiden Elemente ds und ds' ist dann nicht allein eine Funktion von s und s' , sondern auch von der Zeit t .

Es ist

$$\frac{\partial s}{\partial t} = v, \text{ worin } v \text{ eine Funktion von } s \text{ und } t$$

$$\frac{\partial s'}{\partial t} = v', \quad - \quad v' \quad - \quad - \quad - \quad s' \quad - \quad t.$$

Die Gleichung für die elektrodynamische Wirkung lautet:

$$\frac{e e'}{c^2 r^2} \left[r \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right].$$

Wir haben nun zu schreiben:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial s} v + \frac{\partial r}{\partial s'} v' + \frac{\partial r}{\partial t},$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{\partial^2 r}{\partial s^2} v^2 + 2 \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} v v' + \frac{\partial^2 r}{\partial s'^2} v'^2$$

$$+ 2 \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial t} v + 2 \frac{\partial^2 r}{\partial s' \partial t} v' + \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} + \frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$+ \frac{\partial r}{\partial s'} \cdot \frac{\partial v'}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial v}{\partial s} v + \frac{\partial r}{\partial s'} \cdot \frac{\partial v'}{\partial s'} v'.$$

Maxwell vergisst die beiden unterstrichenen Glieder.

In ds haben wir nun eine Quantität e positiver Elektrizität, welche die Geschwindigkeit v besitzt, und eine Quantität e_1 negativer Elektrizität mit der Geschwindigkeit v_1 ; in ds' sind die Mengen e' und e'_1 mit den Geschwindigkeiten v' und v'_1 vorhanden.

Wenn nun R_1 die Abstossung zwischen e und e' bedeutet,

$$\begin{array}{ccccccc} R_2 & - & - & - & e_1 & - & e' & - \\ R_3 & - & - & - & e & - & e'_1 & - \\ R_4 & - & - & - & e_1 & - & e'_1 & - \end{array}$$

so ist die früher gefundene Gesamtabstossung gleich der Summe

$$R_1 + R_2 + R_3 + R_4.$$

¹⁾ Maxwell, Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus, deutsch von Weinstein § 856—860; siehe C. R. CX S. 825, 1890.

Die elektromotorische Induktionskraft ist aber offenbar der Kraft proportional, welche die positive und die negative Elektrizität in dem Element ds' zu trennen sucht; diese wird sein $R_1 + R_2 - R_3 - R_4$; man muss dieselbe noch mit $\cos \theta' = \frac{\partial r}{\partial s'}$ multipliciren, um die Komponente der Kraft für die Richtung des Drahtes zu erhalten. Die gesuchte elektromotorische Kraft ist also gleich

$$k \cos \theta' (R_1 + R_2 - R_3 - R_4),$$

worin k einen konstanten Koeffizienten bedeutet, der von der Einheit abhängt, auf welche die elektromotorischen Kräfte bezogen sind.

Um den Koeffizienten k zu definiren, betrachten wir einen speciellen Fall, z. B. denjenigen, bei dem die elektrischen Massen in Ruhe sind und die elektromotorischen Kräfte sich daher auf elektrostatische Kräfte reduciren.

Setzt man zur Abkürzung

$$H = \cos \theta' (R_1 + R_2 - R_3 - R_4),$$

so erhält man für diesen Fall:

$$H = \frac{e + e_1}{r^2} (e' - e_1') \frac{\partial r}{\partial s'} = -c (e' - e_1') \frac{\partial \varphi}{\partial s'},$$

wenn man mit φ das elektrostatische Potential bezeichnet:

$$\varphi = \frac{1}{c} \cdot \frac{e + e_1}{r}.$$

Die elektrostatische Induktionskraft ist übrigens:

$$E = - \frac{\partial \varphi}{\partial s'} ds' = \frac{H ds'}{e' - e_1'} \cdot \frac{1}{c},$$

und da nach Definition $E = kH$, so erhält man

$$k = \frac{1}{c} \cdot \frac{ds'}{(e' - e_1')}.$$

Wir können also allgemein die elektromotorische Kraft E ableiten, wenn wir kennen

$$H = \cos \theta' (R_1 + R_2 - R_3 - R_4).$$

21. Geht man auf die Ausdrücke für $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$ und $\frac{d^2r}{dt^2}$ zurück,

so erkennt man, dass H Glieder enthält mit v^2 , v'^2 , $v v'$, v und v' ; und ferner Glieder mit $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial v'}{\partial t}$, $v \frac{\partial v}{\partial s}$ und $v' \frac{\partial v'}{\partial s}$.

Wenn man einen Koeffizienten vernachlässigt, der nur von der Lage und der relativen Bewegung der beiden Elemente ds und ds' abhängt, welcher aber unabhängig ist von e , e_1 , v und v_1 , sowie von e' , e'_1 , v' und v'_1 ,

$$\begin{aligned} \text{so werden die Glieder mit } v^2 & (e v^2 + e_1 v_1^2) (e' - e'_1), \\ & \text{mit } v v' & (e v + e_1 v_1) (e' v' - e'_1 v'_1), \\ & \text{mit } v'^2 & (e + e_1) (e' v'^2 - e'_1 v'_1{}^2), \\ & \text{mit } v & (e v + e_1 v_1) (e' - e'_1), \\ & \text{mit } v' & (e + e_1) (e' v' - e'_1 v'_1). \end{aligned}$$

Ebenso würde man die Ausdrücke erhalten, welche in den Gliedern mit $\frac{\partial v}{\partial t}$, $v \frac{\partial v}{\partial s}$ etc. enthalten sind.

Bei den gewöhnlichen galvanischen Strömen hat man:

$$e = -e_1, \quad e' = -e'_1, \quad v = -v_1, \quad v' = -v'_1.$$

Dann verschwinden alle Glieder mit Ausnahme des Gliedes mit v und desjenigen mit $\frac{\partial v}{\partial t}$; das Glied $v \frac{\partial v}{\partial s}$ verschwindet aus demselben Grunde, wie das mit v^2 . Die einzigen Glieder, welche in den Ausdruck für $\frac{d^2 r}{dt^2}$ eingehen, sind demnach das Glied $\frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial v}{\partial t}$ und das Glied $2 \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial t} v$; das letztere ist aber gerade eines von denen, die Maxwell vergessen hatte.

In $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$ bleibt $2 \frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial r}{\partial t} v$ bestehen. Wir erhalten hiernach:

$$\begin{aligned} \frac{H}{c - e_1} = \frac{1}{c^2 r^2} & \left[- \frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial r}{\partial t} (e v + e_1 v_1) + r \frac{\partial r}{\partial s} \left(c \frac{\partial v}{\partial t} + e_1 \frac{\partial v_1}{\partial t} \right) \right. \\ & \left. + 2 r \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial t} (e v + e_1 v_1) \right] \frac{\partial r}{\partial s}. \end{aligned}$$

Nun ist

$$e v + e_1 v_1 = c i ds \quad (\S 15)$$

und

$$c \frac{\partial v}{\partial t} + e_1 \frac{\partial v_1}{\partial t} = c \frac{\partial i}{\partial t} ds;$$

also folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = k \mathbf{H} &= \frac{ds ds'}{c^2 r^2} \left[-i \frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial r}{\partial t} + r \frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial i}{\partial t} + \underline{2 i r \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial t}} \right] \frac{\partial r}{\partial s'} \\ &= \frac{ds ds'}{c^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial r}{\partial s'} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{i}{r} \right) + \underline{\frac{2 i ds ds'}{c^2 r} \cdot \frac{\partial r}{\partial s'} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial t}}. \end{aligned}$$

Maxwell hat das zweite Glied vergessen und schreibt das erste

$$\frac{ds ds'}{c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial r}{\partial s'} \cdot \frac{i}{r} \right),$$

was nicht genau richtig ist. Denn es ist

$$\begin{aligned} ds ds' \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial r}{\partial s'} \cdot \frac{i}{r} \right] &= ds ds' \frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial r}{\partial s'} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{i}{r} \right) \\ &+ \frac{i ds ds'}{r} \left[\frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial s' \partial t} + \frac{\partial r}{\partial s'} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial t} \right]. \end{aligned}$$

Die algebraische Summe der vernachlässigten Glieder endlich ist zu schreiben

$$- \frac{i ds ds'}{r} \left[\frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial s' \partial t} - \frac{\partial r}{\partial s'} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial t} \right].$$

Integriert man nach s und s' , so erhält man für die gesammte elektromotorische Kraft nach Maxwell

$$\mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial r}{\partial s'} \cdot \frac{i}{r} ds ds' = - \frac{\partial (\mathbf{M}t)}{\partial t},$$

was aber nur richtig ist, wenn das Integral der vernachlässigten Glieder

$$\int \frac{i ds ds'}{r} \left[\frac{\partial r}{\partial s'} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial t} - \frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial s' \partial t} \right]$$

Null wird. Dies ist indessen nur dann der Fall, wenn die beiden Stromkreise, auf welche das Integral ausgedehnt wird, geschlossen sind.

Wir haben nämlich

$$\int \frac{ds'}{r} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial t} \cdot \frac{\partial r}{\partial s} = \left[\log r \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial t} \right] - \int \log r \cdot \frac{\partial^3 r}{\partial s \partial s' \partial t} ds';$$

das erste Glied verschwindet, da der Werth für beide Grenzen derselbe ist. Durch partielle Integration nach s erhalten wir also:

$$\int \frac{ds ds'}{r} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial t} \cdot \frac{\partial r}{\partial s'} = - \int \log r \frac{\partial^3 r}{\partial s \partial s' \partial t} ds ds',$$

d. h. die linke Seite ist gleich einem Ausdrucke, der sich nicht verändert, wenn man s und s' vertauscht. Folglich ist

$$\int \frac{ds ds'}{r} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial t} \cdot \frac{\partial r}{\partial s'} = \int \frac{ds ds'}{r} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial s' \partial t} \cdot \frac{\partial r}{\partial s}.$$

Aber dies ist nur richtig für zwei geschlossene Ströme.

Kapitel IV.

Theorie von Helmholtz¹⁾.

22. Das Experiment gestattet uns, die Wirkung zweier geschlossenen Ströme auf einander kennen zu lernen; um hieraus die gegenseitige Wirkung zweier Stromelemente abzuleiten, musste Ampère eine Hypothese zu Hülfe nehmen; er setzte nämlich voraus, dass sich diese Wirkung auf diejenige einer Kraft reducirt, welche in Richtung der Verbindungslinie beider Elemente auftritt. Dies ist nicht die einzige Hypothese, welche man aufstellen kann; wir sahen beispielsweise früher schon, dass Weber, gestützt auf eine Theorie, welche für geschlossene Ströme mit der Ampère'schen übereinstimmt, die Annahme gemacht hatte, dass zwei Elemente ein wechselseitiges Potential besitzen von der Form (cf. § 18):

$$- i i' \frac{ds ds'}{r} \cdot \frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial r}{\partial s'}.$$

Andererseits nahm F. Neumann für das wechselseitige Potential zweier Elemente folgenden Ausdruck an:

$$i i' ds ds' \frac{\cos \varepsilon}{r}.$$

Helmholtz stellte eine allgemeine Formel auf, welche diejenige von Weber und von Neumann in sich schliesst, und ging zu diesem Zweck von folgenden beiden Voraussetzungen aus:

1. Es existirt ein Potential zweier Stromelemente auf einander;
2. dasselbe ist umgekehrt proportional der Verbindungslinie r .

¹⁾ Cf. v. Helmholtz: Ueber die Bewegungsgleichungen der Electricität für ruhende leitende Körper. Borch. Journ. Bd. LXXII S. 57 und v. Helmholtz: Wissenschaftliche Abhandlungen Bd. I S. 545 u. s. w.

Da dies Potential nach dem Principe der krummlinigen Ströme linear in Bezug auf $\cos \varepsilon$ und $\cos \vartheta \cos \vartheta'$ sein muss (cf. § 1), so gab ihm Helmholtz folgende Form:

$$i i' ds ds' \left(A \frac{\cos \varepsilon}{r} + B \frac{\cos \vartheta \cos \vartheta'}{r} \right),$$

worin A und B konstante Koeffizienten bedeuten. Dieser Ausdruck lässt sich nach den Formeln (4) und (5) des 1. Kapitels schreiben:

$$i i' ds ds' \left[(A + B) \frac{\cos \varepsilon}{r} + B \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} \right].$$

Hat man zwei geschlossene Ströme, so wird ihr elektrodynamisches Potential durch folgendes Doppelintegral dargestellt:

$$T = \iint i i' ds ds' \left[(A + B) \frac{\cos \varepsilon}{r} + B \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} \right].$$

Das zweite Glied wird dann Null, denn es ist

$$\int ds \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} = 0,$$

wenn das Integral längs eines geschlossenen Stromkreises genommen ist, und T reducirt sich damit auf:

$$(A + B) \iint i i' ds ds' \frac{\cos \varepsilon}{r}.$$

Das Experiment zeigt, dass man $(A + B) = 1$ zu setzen hat (cf. § 10), dagegen lässt es, soweit es sich mit geschlossenen Strömen beschäftigt, eine Bestimmung des Koeffizienten B allein nicht zu. Dies ist der Grund, weshalb in den verschiedenen Hypothesen für diese Grösse B verschiedene Werthe angenommen werden konnten.

Setzt man mit Helmholtz $B = \frac{1-k}{2}$, so wird der Ausdruck für das Potential der Elemente

$$i i' ds ds' \left(\frac{\cos \varepsilon}{r} + \frac{1-k}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} \right).$$

Die Weber'sche Formel ist ein specieller Fall der Helmholtz'schen;

man erhält sie aus der letzteren, wenn man darin $k = -1$ setzt; dann hat nämlich das Potential die Form (cf. § 18):

$$i' ds ds' \left(\frac{\cos \epsilon}{r} + \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} \right) = - \frac{i' ds ds'}{r} \frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial r}{\partial s'}$$

Für $k = 1$ erhält man den von Neumann vorgeschlagenen Ausdruck. Bei $k = 0$ findet man nach Helmholtz's Angabe das elektrodynamische Potential von Maxwell wieder. Diese Behauptung von Helmholtz ist bisweilen missverstanden worden; wir werden später (§ 45) darauf zurückkommen.

23. Kann nun auch die Ampère'sche Formel als specieller Fall der Helmholtz'schen betrachtet werden? Keineswegs! Wir haben nämlich gesehen, dass in der Theorie von Ampère die Wirkung zweier Elemente auf einander kein Potential besitzt; sie ist die einzige, welche die beobachteten Thatsachen auf die Wirkung einer Kraft zurückführt, welche in Richtung der Verbindungslinie der Elemente auftritt. Nähme man nun an, dass diese Wirkung ein Potential besässe, so würden, da ja das Potential ausser von der Lage auch noch von der Richtung der Elemente abhängt, die Differentialquotienten desselben nach den Winkeln, welche diese Richtung bestimmen, nicht identisch Null werden, und ebensowenig die virtuelle Arbeit, welche einer unendlich kleinen Aenderung dieser Winkel entspricht. Mit anderen Worten: Ausser der in Richtung der Verbindungslinie wirkenden Kraft gibt es noch Kräftepaare, welche die Elemente zu drehen suchen und deren Momente von derselben Grössenordnung sind, wie die Kraft selbst. In dieser Beziehung machte Bertrand Einwendungen gegen die Helmholtz'sche Theorie (Comptes rendus Bd. 73, S. 965; Bd. 75 S. 860; Bd. 77 S. 1049; Helmholtz, Abhandlungen Bd. I S. 679 und S. 726); nach seiner Meinung müsste die Gesammtheit dieser Kräftepaare, wenn sie auf alle Elemente eines drahtförmigen Leiters wirken, der von einem Strom durchflossen wird und gleichzeitig der Einwirkung eines anderen Stromes oder der Erde unterworfen ist, den Draht sofort zerreißen und in Staub verwandeln.

Helmholtz antwortete darauf, dass ja auch eine Magnethöhle unter der Einwirkung des Erdmagnetismus nicht zerbreche, obwohl auf jedes Element seiner ganzen Länge ein Kräftepaar wirke, dessen Moment von derselben Grössenordnung sei, wie das Element des Magneten. Hierauf erwiderte Bertrand, dass Niemand heutzutage mehr an das wirkliche Vorhandensein der Coulomb'schen magnetischen Fluida glaube, und dass die Antwort von Helmholtz keinen Sinn habe. Helmholtz hätte wohl entgegen können, dass auch

Niemand mehr an die objektive Existenz eines materiellen Stromes glaube, der in einem Leiter circulire.

Ich will mich in diese Polemik nicht einmischen, sondern nur nachweisen, worin das Missverständniss besteht, das diese beiden hervorragenden Gelehrten trennt.

Nach Bertrand's Ansicht besteht der Stromkreis aus ungemein kleinen Elementen, deren Anzahl ungeheuer gross, wenn auch endlich ist; an jedem derselben greift ein Kräftepaar an, deren Komponenten wirklich existiren und einen völlig bestimmten Angriffspunkt besitzen. Auf nachstehender Figur werden die Elemente durch die vier aneinander stossenden Rechtecke repräsentirt, und die Kräftepaare, welche an denselben angreifen, durch $A_1 F_1, B_1 G_1; A_2 F_2, B_2 G_2; A_3 F_3, B_3 G_3; A_4 F_4, B_4 G_4$.

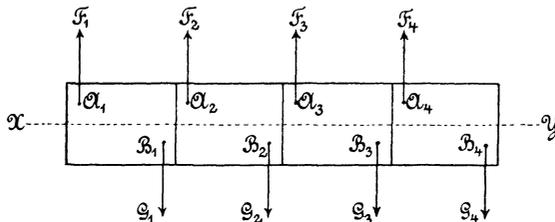


Fig. 7.

Unter diesen Bedingungen ist es klar, dass der Bruch längs der punktirten Linie XY vor sich gehen muss.

Für Helmholtz dagegen repräsentirt das Kräftepaar nur das Bestreben, eine Drehung hervorzubringen. Dasselbe ist vorhanden, ganz abgesehen von seinen beiden Komponenten, und letztere können auch keinen festbestimmten Angriffspunkt haben. Das Kräftepaar existirt immer, wenn die Drehung eine Arbeit leistet.

Mit anderen Worten: Helmholtz nimmt an, dass auch das kleinste Theilchen noch der Wirkung eines Kräftepaares unterworfen bleibt, soweit man auch die Theilung der Materie treiben mag. Bertrand dagegen glaubt, dass ein Augenblick eintritt, wo die letzten Bestandtheile der Materie nur noch einer einzigen Kraft unterworfen sind, und dass jede andere Ansicht auf einer trügerischen mathematischen Fiktion beruht, welche die thatsächlich vorhandenen Verhältnisse verschleiert. Es scheint mir nicht unmöglich, auch bei Annahme der Anschauungsweise von Bertrand eine Vertheilung der Kräfte zu finden, welche einen Bruch der Leiter nicht zur Folge haben würde, doch wäre dieselbe wahrscheinlich complicirt und wenig natürlich.

Ich beschränke mich auf die früher schon gemachte Bemerkung, dass sich durch die Weber'sche Theorie, welche ja nur einen speciellen Fall der Helmholtz'schen darstellt, Alles erklären lässt, wenn man annimmt, dass sich die gegenseitige Wirkung zweier Elemente auf eine einzige Kraft beschränkt, welche längs der Verbindungslinie wirkt. Im § 19 habe ich nachgewiesen, wie sich dies mit der scheinbar damit unvereinbaren Thatsache des Vorhandenseins eines Potentials vereinigen lässt.

24. Fundamentalgleichungen. Wir brachten das elektrodynamische Potential zweier geschlossenen Stromkreise aufeinander in die Form (cf. § 10)

$$(1) \quad T = i \int (F dx + G dy + H dz)$$

Nach der Helmholtz'schen Theorie finden wir für zwei beliebige Stromkreise:

$$(2) \quad T = \iint i i' ds ds' \left[\frac{\cos \varepsilon}{r} + \frac{1-k}{2} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} \right],$$

hierbei ist

$$\begin{aligned} \cos \varepsilon ds ds' &= dx dx' + dy dy' + dz dz', \\ \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} ds &= \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial s'} dx + \frac{\partial^2 r}{\partial y \partial s'} dy + \frac{\partial^2 r}{\partial z \partial s'} dz. \end{aligned}$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die Gleichung (2) ein, so nimmt dieselbe die Form der Gleichung (1) an, wenn wir schreiben:

$$(3) \quad F = \int \frac{i' dx'}{r} + \frac{1-k}{2} \int i' ds' \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial s'},$$

und für G und H zwei analoge Ausdrücke, die sich direkt aus demjenigen für F ergeben; F, G, H wollen wir die Komponenten des Vektorpotentials nennen.

Ferner führen wir ein:

$$(4) \quad \psi = \int i' ds' \frac{\partial r}{\partial s'},$$

wobei das Integral sich über den ganzen Umkreis von C' erstreckt und für einen geschlossenen Strom Null wird.

Damit haben wir

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \int i' \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial s'} ds',$$

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} F = \int \frac{i' dx'}{r} + \frac{1-k}{2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ G = \int \frac{i' dy'}{r} + \frac{1-k}{2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ H = \int \frac{i' dz'}{r} + \frac{1-k}{2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z}. \end{array} \right.$$

Ausserdem kann man setzen:

$$(6) \quad \psi = \int i' \left(\frac{\partial r}{\partial x'} dx' + \frac{\partial r}{\partial y'} dy' + \frac{\partial r}{\partial z'} dz' \right);$$

betrachtet man nämlich x, y, z als konstant, so hat man in der That:

$$dr = \frac{\partial r}{\partial s'} ds' = \frac{\partial r}{\partial x'} dx' + \frac{\partial r}{\partial y'} dy' + \frac{\partial r}{\partial z'} dz'.$$

25. Wir wollen diese Gleichungen so umformen, dass man sie auf Leiter von drei Dimensionen anwenden kann.

Bezeichnet man mit ρ die Dichte der freien Elektrizität, so bedeutet $\rho d\tau$ die Menge Elektrizität, welche im Volumen $d\tau$ enthalten ist; $u d\omega$ ist diejenige Menge, welche in der Zeiteinheit das zu OX normale Oberflächenelement $d\omega$ passirt; $v d\omega$ und $w d\omega$ bedeuten die entsprechenden Quantitäten für die Richtungen OY und OZ.

Dann gilt die sogenannte Continuitätsgleichung (cf. I. Bd. § 29)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Der Leitungsdraht kann als Cylinder vom Querschnitte $d\omega$ aufgefasst werden; wenn wir dessen Längenelement ds nennen, so wird $d\tau = d\omega ds$. Der Flächeninhalt eines zu dx senkrechten Schnittes ist $\frac{d\tau}{dx}$.

Wir haben nun die Gleichungen:

$$i = u \frac{d\tau}{dx},$$

oder

$$\left\{ \begin{array}{l} u \, d\mathbf{r} = i \, dx, \\ v \, d\mathbf{r} = i \, dy, \\ w \, d\mathbf{r} = i \, dz. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} u' \, d\mathbf{r}' = i' \, dx', \\ v' \, d\mathbf{r}' = i' \, dy', \\ w' \, d\mathbf{r}' = i' \, dz'. \end{array} \right.$$

Demnach erhalten wir:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \int (\mathbf{F}u + \mathbf{G}v + \mathbf{H}w) \, d\mathbf{r}. \\ (7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F} = \int \frac{u' \, d\mathbf{r}'}{r} + \frac{1-k}{2} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x}, \\ \mathbf{G} = \int \frac{v' \, d\mathbf{r}'}{r} + \frac{1-k}{2} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial y}, \\ \mathbf{H} = \int \frac{w' \, d\mathbf{r}'}{r} + \frac{1-k}{2} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial z}. \end{array} \right. \\ \psi &= \int \left(u' \frac{\partial r}{\partial x'} + v' \frac{\partial r}{\partial y'} + w' \frac{\partial r}{\partial z'} \right) d\mathbf{r}'. \end{aligned}$$

Wenn wir das gesammte elektrodynamische Potential suchen, so müssen wir als Differential das Element

$$(\mathbf{F}u + \mathbf{G}v + \mathbf{H}w) \, d\mathbf{r}$$

nehmen, in welchem \mathbf{F} , \mathbf{G} , \mathbf{H} Integrale bedeuten, die sich über alle Elemente $d\mathbf{r}'$ der sämtlichen Leiter erstrecken, mit Ausnahme von $d\mathbf{r}$. Auf diese Weise erhält man in dem Doppelintegrale das Potential eines Paares von Elementen $d\mathbf{r}$ und $d\mathbf{r}'$ zwei Mal; man muss also, um \mathbf{T} zu finden, das auf diese Weise berechnete Integral noch durch 2 dividiren, also wird:

$$(8) \quad \mathbf{T} = \frac{1}{2} \int (\mathbf{F}u + \mathbf{G}v + \mathbf{H}w) \, d\mathbf{r}.$$

Hierbei kann man annehmen, dass sich das Integral über den gesammten unendlichen Raum erstreckt, denn ausserhalb der Leiter sind ja die Grössen u , v , w Null.

Weiter lässt sich noch der Green'sche Satz anwenden, und

zwar findet man durch partielle Integration über den gesammten Raum¹⁾:

$$\int d\tau' u' \frac{\partial r}{\partial x'} = - \int d\tau' r \frac{\partial u'}{\partial x'}.$$

Hierdurch wird:

$$(9) \quad \psi = - \int r d\tau' \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} \right) = \int r \frac{\partial \varrho'}{\partial t} d\tau'.$$

26. Wir fassen nun zwei Elektrizitätsmengen e und e' in's Auge; dieselben stoßen sich mit einer Kraft $= \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{e e'}{r^2}$ ab, wobei λ eine Konstante bezeichnet, welche nach den gewöhnlich angenommenen Ansichten im elektrostatischen System $= 1$ ist, und im elektromagnetischen System gleich dem Reciproken des Quadrats der Lichtgeschwindigkeit. Wir wollen den Ausdruck λ beibehalten, weil wir die obigen Ansichten einigermaßen modificiren werden.

Das elektrostatische Potential φ ist demnach gegeben durch:

$$\lambda \varphi = \int \frac{\varrho'}{r} d\tau'.$$

Daraus folgt:

$$\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \int \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varrho'}{\partial t} d\tau'.$$

Nun ist:

$$\Delta \psi = \int \Delta r \frac{\partial \varrho'}{\partial t} d\tau',$$

und da $\Delta r = \frac{2}{r}$:

$$\Delta \psi = \int \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial \varrho'}{\partial t} d\tau' = 2 \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Wir wollen nun auf beide Seiten der Gleichungen (7) die durch das Zeichen Δ angezeigte Operation anwenden.

¹⁾ Wir integriren partiell nach x zwischen den Grenzen $\pm \infty$, und da u' im Unendlichen Null wird, so verschwindet das eine Glied. Cf. Einleitung.

Nach dem Poisson'schen Theorem ist:

$$\Delta \int \frac{u' d\tau'}{r} = -4\pi u.$$

Weiter haben wir:

$$\Delta \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \Delta \psi = 2\lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}.$$

Folglich wird:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta F = -4\pi u + (1-k)\lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}, \\ \Delta G = -4\pi v + (1-k)\lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t}, \\ \Delta H = -4\pi w + (1-k)\lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t}. \end{array} \right.$$

Wir wollen nun bestimmen:

$$J = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}.$$

Es ist

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int u' d\tau' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \frac{(1-k)\lambda}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}.$$

Weiter gilt:

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'},$$

also:

$$\int u' d\tau' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = -\int u' d\tau' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} = \int \frac{d\tau'}{r} \cdot \frac{\partial u'}{\partial x'},$$

also:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} &= \int \frac{dr'}{r} \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} \right) + \frac{1-k}{2} \Delta \psi \\ &= - \int \frac{dr'}{r} \cdot \frac{\partial \varphi'}{\partial t} + \frac{1-k}{2} \Delta \psi = -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (1-k) \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \end{aligned}$$

folglich:

$$(11) \quad J = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = -k \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Man sieht, dass J Null werden würde, wenn man $k=0$ setzte.

27. Gleichungen des Ohm'schen Gesetzes. Die Formel

$$Ri = E - \frac{\partial (Mi')}{\partial t}$$

(cf. Bd. I § 157 etc.) gilt für geschlossene Ströme. Berücksichtigt man nur einen Theil des Stromes, so hat man noch die Potentialdifferenz an den Enden in Rechnung zu ziehen, also:

$$Ri = \varphi_0 - \varphi_1 + E - \frac{\partial (Mi')}{\partial t}.$$

Für ein zu Ox paralleles, geradliniges Element gilt:

$$\varphi_1 - \varphi_0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx;$$

ferner kann man schreiben:

$$E = X dx,$$

$$R = \frac{dx}{C d\omega},$$

wobei C das specifische Leitungsvermögen bedeutet; hieraus folgt:

$$Ri = \frac{i dx}{C d\omega} = \frac{u dx}{C}.$$

Für die elektromotorische Induktionskraft haben wir in diesem Falle zu setzen (cf. § 24, (1)):

$$T = i F dx = M i i',$$

also ist:

$$\frac{\partial (M i')}{\partial t} = dx \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Demnach lassen sich die Gleichungen für das Ohm'sche Gesetz in der Form schreiben:

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{u}{C} = -\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial t} + X, \\ \frac{v}{C} = -\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial t} + Y, \\ \frac{w}{C} = -\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial t} + Z. \end{array} \right.$$

Man kann dies so ausdrücken, dass sich folgende Kräfte das Gleichgewicht halten: Die elektrostatische Kraft, die Induktionskraft, die äussere elektromotorische Kraft (chemischen, thermo-elektrischen etc. Ursprungs) und die elektromotorische Widerstandskraft, deren Komponenten $-\frac{u}{C}$, $-\frac{v}{C}$, $-\frac{w}{C}$ sind.

Die Hypothese, auf welcher die Formeln (12) beruhen, nämlich die Ausdehnung des Ohm'schen Gesetzes auf Leiter von drei Dimensionen, scheint allerdings sehr einleuchtend zu sein, immerhin bleibt es eine Hypothese, und Bertrand erkennt ihre Gültigkeit nicht an. Wir werden noch sehen, dass, wenn wir in Betreff der Verallgemeinerung des Joule'schen Gesetzes bei Leitern von drei Dimensionen eine naheliegende Annahme machen (cf. Formel 18 a § 31), die Formeln (12) mit dem Principe von der Erhaltung der Energie im Einklange stehen. Noch mehr: Man könnte auf die Leiter von drei Dimensionen auch die Lagrange'schen Gleichungen und die Maxwell'sche Induktionstheorie anwenden (cf. Bd. I § 151 etc.); wenn ich diese Rechnungen hier nicht durchführe, so liegt der Grund dafür in dem Umstande, dass wir in diesem Falle eine unendlich grosse Anzahl von Parametern haben würden, und ich deshalb zur Variationsrechnung greifen müsste.

Ich beschränke mich daher auf die Bemerkung, dass man durch die Rechnung auf die Formeln (12) geführt wird, wenn man die Formel (18a) als richtig annimmt.

28. Definition der magnetischen Kraft. Für den Fall, dass sämtliche Ströme geschlossen sind, lassen sich für die magnetische Kraft zwei gleichwerthige Definitionen aufstellen.

1. Man kann sagen, dass die magnetische Kraft, deren Komponenten wir α , β , γ genannt haben, die Resultante aller elektromagnetischen Wirkungen ist, welche an einem magnetischen Einheitspole angreifen. Dass ein Magnetpol als Solenoid von unendlich grosser Länge aufgefasst werden kann, haben wir im I. Bd. § 125 nachgewiesen.

2. Wir fassen ein magnetisches Element in's Auge und nennen $A d\tau$, $B d\tau$, $C d\tau$ die Komponenten seines magnetischen Moments. Die von diesem Elemente ausgeübten Wirkungen lassen sich auf eine Kraft reduciren, welche ihren Sitz im Schwerpunkte des Elementes hat und deren Komponenten gegeben sind durch

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} A + \frac{\partial \alpha}{\partial y} B + \frac{\partial \alpha}{\partial z} C \right) d\tau,$$

$$\left(\frac{\partial \beta}{\partial x} A + \frac{\partial \beta}{\partial y} B + \frac{\partial \beta}{\partial z} C \right) d\tau,$$

$$\left(\frac{\partial \gamma}{\partial x} A + \frac{\partial \gamma}{\partial y} B + \frac{\partial \gamma}{\partial z} C \right) d\tau,$$

sowie auf ein Kräftepaar, dessen Moment die Komponenten

$$(C \beta - B \gamma) d\tau; \quad (A \gamma - C \alpha) d\tau; \quad (B \alpha - A \beta) d\tau$$

besitzt.

Mit anderen Worten: Das Moment dieses Kräftepaares steht senkrecht auf der Ebene der beiden Vektoren, welche das magnetische Moment des Elements und die magnetische Kraft repräsentiren und ist gleich dem Produkte dieser beiden Vektoren in den Sinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

Ändert ein Element seine Richtung, ohne dass sein Schwerpunkt von der Stelle rückt, und ohne dass die Grösse seines Moments sich ändert, so ist die von dem Kräftepaare geleistete Arbeit gleich der Variation des Produktes aus eben diesen Vektoren in den Kosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels, d. h. gleich der Variation des folgenden Ausdruckes:

$$(A \alpha + B \beta + C \gamma) d\tau.$$

Wir betrachten nun einen unendlich kleinen geschlossenen Stromkreis, welcher von einem Strome mit der Intensität i durchflossen wird; $d\omega$ sei der Flächeninhalt dieses Stromkreises, l , m , n die Richtungskosinus seiner Ebene. Der Strom wird einem magnetischen Elemente äquivalent sein, dessen Moment die Komponenten

$$A d\tau = i l d\omega; \quad B d\tau = i m d\omega; \quad C d\tau = i n d\omega$$

besitzt.

Die von diesem Stromkreis ausgeübten Wirkungen werden sich also auf eine Kraft reduciren, die im Schwerpunkte des Stromkreises angreift, und auf ein Kräftepaar, dessen Moment die Komponenten hat:

$$(12a) \quad id\omega (n\beta - m\gamma); \quad id\omega (l\gamma - n\alpha); \quad id\omega (m\alpha - l\beta).$$

Ändert der Stromkreis seine Richtung, ohne sich zu deformiren, ohne dass sein Schwerpunkt sich verschiebt, und ohne dass die Intensität i sich ändert, so wird die Arbeit dieses Kräftepaares gegeben durch die Variation des Ausdruckes:

$$(12b) \quad id\omega (la + m\beta + n\gamma).$$

Wir kommen hiernach zu folgender Definition der magnetischen Kraft:

„*Sie ist ein Vektor mit den Komponenten α , β , γ , dessen Wirkung auf einen unendlich kleinen Stromkreis sich reducirt auf eine im Schwerpunkte desselben angreifende Kraft und auf ein Kräftepaar, dessen Moment als Komponenten die Ausdrücke (12a) besitzt, und dessen Arbeit gleich der Variation des Ausdruckes (12b) ist.*“

Fassen wir nun ein System S von *nicht geschlossenen* Strömen in's Auge, dann hat die erste Definition der magnetischen Kraft keinen Sinn mehr.

Es ist nämlich bei solchen ungeschlossenen Strömen unmöglich, die Wirkung eines einzelnen magnetischen Pols durch diejenige eines unendlich grossen Solenoids zu ersetzen, und zwar aus folgendem Grunde:

Die Wirkung eines *nicht geschlossenen* Stroms auf ein geschlossenes Solenoid ist nicht Null; seine Wirkung auf ein nicht geschlossenes Solenoid hängt also nicht allein von der Lage seiner beiden Endpunkte ab, sondern auch von der Gestalt des Solenoids, und seine Wirkung auf ein unendlich grosses Solenoid reducirt sich nicht auf eine einzige Kraft, welche an dessen freiem Ende angreift.

Wir werden also darauf geführt, die zweite Definition anzunehmen, und wollen nun den Ausdruck für das elektrodynamische Potential T irgend eines geschlossenen Stromes C auf das System S suchen.

Wir nehmen zuerst den Stromkreis C als unendlich klein an, dann wird sich die Wirkung des Systems S auf diesen Stromkreis durch eine in dessen Schwerpunkte angreifende Kraft und durch ein Kräftepaar darstellen lassen. Ändert der Stromkreis seine Lage, ohne dass er sich deformirt, ohne dass seine Intensität sich ändert und ohne dass sein Schwerpunkt x , y , z sich verschiebt, dann wird die von der Kraft geleistete Arbeit Null sein, diejenige des Kräfte-

paares dagegen nach der Definition gleich der Variation des Ausdrucks (12b), d. h. gleich

$$i d\omega (\alpha dl + \beta dm + \gamma dn);$$

unter diesen Umständen, d. h. wenn die Richtungskosinus l, m, n allein sich ändern, erhalten wir also:

$$\delta T = i d\omega (\alpha dl + \beta dm + \gamma dn),$$

folglich:

$$T = i d\omega (\alpha l + \beta m + \gamma n)$$

+ eine willkürliche Funktion von $i, d\omega$ und x, y, z .

Diese willkürliche Funktion, welche die Richtungskosinus l, m, n nicht enthält, ist offenbar Null, denn T muss sein Vorzeichen wechseln, wenn man die Richtung des Stromes umkehrt, oder, was auf dasselbe hinausläuft, wenn man den Stromkreis um 180° um eine in der Ebene desselben liegende Axe dreht, d. h., wenn man l, m, n mit $-l, -m, -n$ vertauscht.

Wir erhalten also schliesslich:

$$T = i d\omega (\alpha l + \beta m + \gamma n).$$

Hat der Stromkreis C eine endliche Grösse, so kann man ihn in eine unendlich grosse Zahl unendlich kleiner Stromkreise zerlegen, wie wir im § 107 des ersten Bandes gezeigt haben, und man erhält dadurch:

$$(13) \quad T = i \int \alpha d\omega (\alpha l + \beta m + \gamma n).$$

Die Integration erstreckt sich hierbei auf alle Elemente $d\omega$ einer im Uebrigen beliebig beschaffenen Oberfläche A , welche durch den Stromkreis C gelegt ist und von diesem begrenzt wird.

l, m, n sind die Richtungskosinus des Elements $d\omega$ oder, was auf dasselbe hinausläuft, der Normalen auf der Oberfläche, zu welcher das Stück A gehört.

29. Wir haben nach Gleichung (1)

$$\begin{aligned} T &= i \int (F dx + G dy + H dz) \\ &= i \int d\omega \left[l \left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} \right) + m \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x} \right) + n \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) \right], \end{aligned}$$

cf. Bd. I § 130.

Nun ist nach der Definition von α , β , γ

$$(13a) \quad T = i \int (l \alpha + m \beta + n \gamma) d\omega,$$

hieraus folgt unmittelbar, dass

$$(14) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}, \\ \beta = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}, \\ \gamma = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}. \end{cases}$$

Ferner fanden wir bereits in Formel (10) und (11)

$$\begin{cases} \Delta F = -4\pi u + (1-k)\lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}, \\ \Delta G = -4\pi v + (1-k)\lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t}, \\ \Delta H = -4\pi w + (1-k)\lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t}, \end{cases}$$

$$J = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = -k\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Wir berechnen nun die Ausdrücke $\left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}\right)$ etc., indem wir addiren:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial \gamma}{\partial y} &= \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \\ -\frac{\partial \beta}{\partial z} &= \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} = \frac{\partial J}{\partial x} - \Delta F = -k\lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + 4\pi u - (1-k)\lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}.$$

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} = 4 \pi u - \lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} = 4 \pi v - \lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t}, \\ \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 4 \pi w - \lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t}. \end{array} \right.$$

Bei Maxwell treten die letzten Glieder nicht auf (cf. Bd. I § 118); wir werden in der That sehen, das Maxwell $\lambda = 0$ annimmt.

Für die Gleichungen (15) finden wir folgende Bestätigung:

Durch Differentiation dieser Gleichungen nach resp. x , y , z und Addition erhalten wir:

$$4 \pi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \lambda \Delta \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

Nun ist

$$\lambda \varphi = \int \frac{\varrho' d\tau'}{r}$$

und demnach

$$\lambda \Delta \varphi = -4 \pi \varrho,$$

folglich:

$$\lambda \Delta \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -4 \pi \frac{\partial \varrho}{\partial t},$$

und endlich:

$$4 \pi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} \right) = 0,$$

hierin haben wir wieder die Continuitätsgleichung.

Erhaltung der Energie und des Gleichgewichts.

30. Ausdruck für die elektrokinetische Energie T und die elektrostatische Energie U. Wir wollen für T einen neuen Ausdruck aufstellen. In der Gleichung (8) ersetzen wir u , v , w durch die Werthe, welche wir aus Formel (15) erhalten, und finden damit:

$$T = \frac{1}{8 \pi} \int \sum \left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \right) F d\tau + \frac{1}{8 \pi} \int \sum \lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} F d\tau.$$

Durch theilweise Integration, die sich über den ganzen unendlichen Raum erstreckt (cf. Einleitung), erhalten wir:

$$\int \frac{\partial \gamma}{\partial y} \mathbf{F} \, d\tau = - \int \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} \gamma \, d\tau.$$

Das erste Glied der rechten Seite liefert also:

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\pi} \int \left[\alpha \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial z} \right) + \beta \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x} \right) + \gamma \left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} \right) \right] d\tau \\ = \frac{1}{8\pi} \int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \, d\tau. \end{aligned}$$

Der zweite Term lässt sich in gleicher Weise umformen:

$$\int \mathbf{F} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} \, d\tau = - \int \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} \, d\tau$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{8\pi} \int \sum \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} \mathbf{F} \, d\tau = - \frac{\lambda}{8\pi} \int \frac{\partial \varphi}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} \right) d\tau \\ = \frac{k\lambda^2}{8\pi} \int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 d\tau. \end{aligned}$$

Demnach finden wir im Ganzen:

$$(16) \quad \mathbf{T} = \frac{1}{8\pi} \int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \, d\tau + \frac{k\lambda^2}{8\pi} \int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 d\tau.$$

Ist k positiv oder Null, so sind alle Terme auf der rechten Seite der Gleichung positiv, und wenn dann \mathbf{T} Null ist, so müssen auch alle seine Bestandtheile Null sein. Ist dagegen k negativ, dann kann man nicht mehr behaupten, dass für $\mathbf{T} = \text{Null}$ auch die einzelnen Elemente auf der rechten Seite Null sind und also kein Strom vorhanden ist.

Die elektrokinetische Energie \mathbf{T} stellt nur einen Theil der Energie dar; der andere ist die elektrostatische Energie:

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2} \int \varrho \varphi \, d\tau.$$

Nun ist

$$\lambda \Delta \varphi = -4\pi \varrho,$$

also:

$$U = -\frac{\lambda}{8\pi} \int \varphi \Delta \varphi \, d\tau.$$

Nach dem Green'schen Satze aber gilt:

$$\int \varphi \Delta \varphi \, d\tau = - \int \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau.$$

Folglich erhalten wir für:

$$(17) \quad U = \frac{\lambda}{8\pi} \int \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau.$$

U ist somit eine positive Grösse.

Die totale Energie T + U ist also positiv, wenn $k \geq 0$; für $k < 0$ kann T + U positives wie negatives Vorzeichen erhalten. Nehmen wir an, dass F, G, H durch die Gleichungen

$$F = \frac{\partial \chi}{\partial x}; \quad G = \frac{\partial \chi}{\partial y}; \quad H = \frac{\partial \chi}{\partial z}$$

charakterisirt seien, wobei χ eine beliebige Funktion von x, y, z bedeuten möge, dann sind die Binomialausdrücke (14) Null und das erste Glied von T verschwindet, das zweite Glied aber nicht. Setzen wir für den Anfang der Zeit $\varphi = 0$ voraus, dann ist zuerst keine freie Elektrizität vorhanden, wohl aber gleich darauf, denn $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ ist nicht Null.

31. Erhaltung der Energie. Wir wollen nachweisen, dass die Gesamtheit der Energie erhalten bleibt, d. h., dass die Variation von (T + U) gleich der Arbeit ist, welche von den äusseren elektromotorischen Kräften (chemischen, thermoelektrischen etc.) geleistet wird, vermindert um die nach dem Joule'schen Gesetze in den Widerständen entwickelte Wärme. Es soll also sein:

$$(18) \quad d(T + U) = -dt \int \frac{u^2 + v^2 + w^2}{C} \, d\tau + dt \int (Xu + Yv + Zw) \, d\tau.$$

Wir gehen zurück auf die Gleichungen (12), multipliciren die erste derselben mit $-u d\tau$, die zweite mit $-v d\tau$, die dritte mit $-w d\tau$, integriren über den ganzen unendlichen Raum und addiren dieselben; dann erhalten wir:

$$(18') \quad - \int \frac{u^2 + v^2 + w^2}{C} d\tau + \int (Xu + Yv + Zw) d\tau \\ = \int \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} + w \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) d\tau + \int \left(u \frac{\partial F}{\partial t} + v \frac{\partial G}{\partial t} + w \frac{\partial H}{\partial t} \right) d\tau.$$

Das Integral

$$\int \frac{u^2 + v^2 + w^2}{C} d\tau$$

bedeutet die nach dem Joule'schen Gesetze entwickelte Wärmemenge.

Ein Leiter von drei Dimensionen lässt sich als zusammengesetzt betrachten aus einer unendlichen Anzahl unendlich kleiner linearer Elementarleiter von cylindrischer Form, deren Höhe ds , deren normal gerichteter Querschnitt $d\omega$ und deren Volumen also $ds d\omega$ ist; ihre Höhe soll parallel zu den Stromlinien gerichtet sein.

Eine Stromlinie ist dadurch charakterisirt, dass sie den Differentialgleichungen $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$ genügt, d. h., sie hat in jedem Punkte die Geschwindigkeit der Elektrizität als Tangente.

Wir machen nun die Voraussetzung, dass das Joule'sche Gesetz sich auch auf diese linearen elementaren Stromleiter anwenden lasse.

Fassen wir einen derselben in's Auge, so ist die Wärmemenge, welche in ihm vermöge seines Widerstandes entwickelt wird $= R i^2 dt$. Nun aber ist:

$$R = \frac{ds}{C d\omega}$$

und

$$i^2 = (u^2 + v^2 + w^2) d\omega^2,$$

also

$$(18a) \quad R i^2 dt = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{C} ds d\omega dt = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{C} d\tau dt.$$

32. Wir wollen nun nachweisen, dass das erste Integral der rechten Seite von Gleichung (18') $= \frac{\partial U}{\partial t}$ ist.

Wir sahen, dass

$$U = \frac{1}{2} \int \varrho \varphi \, d\tau.$$

Hieraus ergibt sich nun:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \int \frac{\partial \varrho}{\partial t} \varphi \, d\tau,$$

denn es ist:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{2} \int \frac{\partial \varrho}{\partial t} \varphi \, d\tau + \frac{1}{2} \int \frac{\partial \varphi}{\partial t} \varrho \, d\tau.$$

Nun aber gilt:

$$\int \frac{\partial \varrho}{\partial t} \varphi \, d\tau = \int \varrho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \, d\tau$$

Wir haben nämlich:

$$\varphi = \int \frac{\varrho' \, d\tau'}{\lambda r}$$

und

$$(18b) \quad \int \frac{\partial \varrho}{\partial t} \varrho' \frac{d\tau \, d\tau'}{\lambda r} = \int \varrho \frac{\partial \varrho'}{\partial t} \frac{d\tau \, d\tau'}{\lambda r},$$

denn das erste Integral ändert sich nicht, wenn man ϱ mit ϱ' und gleichzeitig auch $d\tau$ mit $d\tau'$ vertauscht, da die beiden Integrationen nach $d\tau$ und $d\tau'$ sich über den ganzen unendlichen Raum erstrecken.

Hieraus folgt also in der That, dass

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{2} \int \frac{\partial \varrho}{\partial t} \varphi \, d\tau + \frac{1}{2} \int \frac{\partial \varrho}{\partial t} \varphi \, d\tau = \int \frac{\partial \varrho}{\partial t} \varphi \, d\tau.$$

Andererseits ist

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right),$$

demnach

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \int \frac{\partial \varrho}{\partial t} \varphi \, d\tau = - \int \varphi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) d\tau$$

und hieraus durch partielle Integration über den ganzen Raum:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \int \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} + w \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) d\tau.$$

33. Wir kommen nun zum Integral

$$\int \left(u \frac{\partial F}{\partial t} + v \frac{\partial G}{\partial t} + w \frac{\partial H}{\partial t} \right) d\tau.$$

Wir sahen (cf. § 25), dass

$$T = \frac{1}{2} \int (Fu + Gv + Hw) \, d\tau$$

ist, also

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{2} \int \sum F \frac{\partial u}{\partial t} \, d\tau + \frac{1}{2} \int \sum u \frac{\partial F}{\partial t} \, d\tau;$$

diese beiden Integrale sind einander gleich. Um dies nachzuweisen, setzen wir (cf. § 25 (7))

$$F = F' + \frac{1-k}{2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad F' = \int \frac{u' \, d\tau'}{r}.$$

Hiernach soll sein:

$$\begin{aligned} & \int \sum F' \frac{\partial u}{\partial t} \, d\tau + \frac{1-k}{2} \int \sum \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \, d\tau \\ &= \int \sum \frac{\partial F'}{\partial t} u \, d\tau + \frac{1-k}{2} \int \sum u \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} \, d\tau. \end{aligned}$$

Erstens gilt nun:

$$\int F' \frac{\partial u}{\partial t} \, d\tau = \int u \frac{\partial F'}{\partial t} \, d\tau,$$

denn es ist:

$$\int u' \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{d\tau d\tau'}{r} = \int u \frac{\partial u'}{\partial t} \cdot \frac{d\tau d\tau'}{r}.$$

Diese Identität lässt sich auf dieselbe Art nachweisen, wie (18b).
Ferner ist:

$$\int \sum \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} d\tau = \int \sum u \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} d\tau,$$

denn durch partielle Integration über den unendlichen Raum erhält man:

$$\int \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} d\tau = - \int \psi \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} d\tau$$

und

$$\int \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} u d\tau = - \int \frac{\partial \psi}{\partial t} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} d\tau$$

und wir haben also nur noch nachzuweisen, dass:

$$\int \sum \psi \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} d\tau = \int \sum \frac{\partial \psi}{\partial t} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} d\tau.$$

Nun aber ist

$$\sum \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\partial \varrho}{\partial t},$$

also

$$\sum \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = - \frac{\partial^2 \varrho}{\partial t^2}$$

und

$$\psi = \int \frac{\partial \varrho'}{\partial t} r d\tau',$$

(cf. (9) § 25). Damit geht unsere zu beweisende Identität über in:

$$\int \frac{\partial \varrho'}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 \varrho}{\partial t^2} r d\tau d\tau' = \int \frac{\partial \varrho}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 \varrho'}{\partial t^2} r d\tau d\tau',$$

eine Gleichung, deren Richtigkeit sich auf dieselbe Weise nachweisen lässt, wie diejenige der Gleichung (18b).

Ersetzt man die beiden Integrale auf der rechten Seite von (18') durch die so gefundenen Werthe, dann erhält man:

$$\frac{\partial (T + U)}{\partial t} = - \int \frac{u^2 + v^2 + w^2}{C} d\tau + \int (Xu + Yv + Zw) d\tau.$$

Wenn man diese Gleichung mit dt multiplicirt, so bedeutet die linke Seite derselben den elektrodynamischen wie elektrostatischen Energiezuwachs; das zweite Integral auf der rechten Seite stellt die Arbeit der äusseren, elektromotorischen Kräfte chemischer, thermoelektrischer etc. Natur dar; das erste Integral auf der rechten Seite endlich repräsentirt die in Form von Wärme verlorene Energie.

Diese Gleichung drückt also in der That die Erhaltung der Energie aus.

34. Stabilität des Gleichgewichts. In dem Falle, wo in dem Systeme keine äussere elektromotorische Kraft vorhanden ist, wird

$$\frac{\partial (T + U)}{\partial t} = - \int \frac{u^2 + v^2 + w^2}{C} d\tau,$$

d. h., der Differentialquotient von $(T + U)$ nach der Zeit ist negativ.

Ist die Helmholtz'sche Konstante $k \geq 0$, so ist das Gleichgewicht stabil. $(T + U)$ ist nämlich positiv und wird nur Null, wenn weder freie Elektrizität noch Ströme in dem Raume vorhanden sind; ist $(T + U)$ sehr klein, so heisst das soviel, als: die Ströme und die Dichtigkeit der freien Elektrizität sind überall sehr klein. Gehen wir vom Gleichgewichtszustande $(T + U) = 0$ aus und lassen eine kleine Störung eintreten, dann wird $(T + U)$ einen sehr kleinen positiven Werth annehmen; überlassen wir aber das System sich selbst, dann wird $(T + U)$ abnehmen, aber immer positiv bleiben. $(T + U)$ bleibt also sehr klein, und dies kann nur unter der Bedingung der Fall sein, dass die Ströme selbst sehr klein bleiben. Es herrscht demnach stabiles Gleichgewicht.

Ist dagegen k negativ, dann können wir ebenfalls noch vom absoluten Gleichgewichte ausgehen und dem Systeme eine sehr kleine Störung zufügen. Aber wir dürfen diese Störung immer derartig annehmen, dass der sehr kleine Anfangswerth, den $(T + U)$ annimmt, negativ ist. Von diesem Anfangswerthe ab gerechnet nimmt $(T + U)$ ab, d. h. der absolute Werth wächst, und wir entfernen uns immer mehr und mehr von dem ursprünglichen Gleichgewichtszustande. Das Gleichgewicht ist also labil (cf. § 30).

Wir müssen demnach jede Theorie verwerfen, welche k einen negativen Werth gibt, und speciell diejenige von Weber, die sich aus der Helmholtz'schen Theorie ergibt, wenn wir in letzterer $k = -1$ setzen.

Untersuchung der magnetischen Medien.

35. Was wird aus den Gleichungen (14) und (15), wenn es sich um ein magnetisches Medium handelt?

Wir wollen zunächst die magnetische Kraft und die magnetische Induktion in einem Punkte erklären. Die magnetische Kraft wird die Summe aus zwei Vektoren sein, nämlich

1. der elektromagnetischen Kraft, welche von geschlossenen oder nicht geschlossenen Strömen herrührt, und welche defnirt wird, wie es im § 28 geschah; es ist dieselbe Kraft, welche in dem betreffenden Punkte herrschen würde, wenn das Medium ein unmagnetisches wäre. Diese Kraft besitzt in den Punkten kein Potential, in welchen ein elektrischer Strom vorhanden ist;

2. aus der magnetischen Kraft, welche von permanenten oder nicht permanenten Magneten herrührt. Diese wird sich zurückführen lassen auf die Wirkung des Magnetismus, welcher durch die Ströme in dem den betreffenden Punkt umgebenden Medium inducirt wird; sie besitzt immer ein Potential, nämlich

$$\Omega = - \int \left(\frac{\partial A'}{\partial x'} + \frac{\partial B'}{\partial y'} + \frac{\partial C'}{\partial z'} \right) \frac{1}{r} dr'$$

(cf. Bd. I § 95 und 102). Hieraus folgt:

$$\alpha = \int \left(\frac{\partial A'}{\partial x'} + \frac{\partial B'}{\partial y'} + \frac{\partial C'}{\partial z'} \right) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dr'.$$

Die magnetische Induktion ist die geometrische Summe aus der magnetischen Kraft und der Magnetisirung in dem betreffenden Punkte, multiplicirt mit 4π (cf. Bd. I § 101).

36. In einem magnetischen Medium müssen die Gleichungen (14) durch folgende Gleichungen ersetzt werden:

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}, \\ b = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}, \\ c = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}. \end{array} \right.$$

Die Gleichungen (15) sind auch dann noch gültig.

37. Wir fassen einen Magnet in's Auge und nehmen an, dass ausserhalb desselben kein Strom vorhanden sei. Nach der Vorstellung von Ampère kann man dann den Magnet als aus einem System von Partialströmen bestehend betrachten.

Die einem dieser Partialströme zugehörige Komponente F des Vektorpotentials ist nun:

$$F = i' \int \frac{dx'}{r} + \frac{1-k}{2} \frac{\partial \psi}{\partial x};$$

(cf. § 24 (5)). Da sämtliche Partialströme geschlossen sind, so verschwindet der Differentialquotient $\frac{\partial \psi}{\partial x}$, und es bleibt:

$$F = i' \int \frac{dx'}{r}.$$

Durch Umformung dieses Curvenintegrals in ein Flächenintegral erhalten wir:

$$F = i' \int \left(m' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} - n' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} \right) d\omega',$$

wobei $d\omega'$ das von dem Strom umschlossene Flächenelement bedeutet. Dies Element ist aber unendlich klein; das Integral reducirt sich demnach auf

$$i' d\omega' \left(m' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} - n' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} \right).$$

Der Strom ist einem magnetischen Elemente äquivalent, dessen Moment die Komponenten $A'dz'$, $B'dy'$, $C'dx'$ besitzt, also (cf. § 28)

$$\left\{ \begin{array}{l} A' d\tau' = i' l' d\omega', \\ B' d\tau' = i' m' d\omega', \\ C' d\tau' = i' n' d\omega'. \end{array} \right.$$

Demnach wird die Komponente F des zu diesem Elemente gehörigen Vektorpotentials:

$$F = \left(B' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} - C' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} \right) d\tau'.$$

Um die Komponente für den ganzen Magnet zu erhalten, muss man über alle Elemente $d\tau'$ seines Volumens integrieren, oder, was auf dasselbe hinauskommt, da für den äusseren Raum $A' = B' = C' = 0$ sind, über den ganzen unendlichen Raum. Es folgt also:

$$F = \int \left(B' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} - C' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} \right) d\tau'.$$

Hier kommen wir nun zu einem bedenklichen Punkte in der Berechnung: Es bedeutet nämlich r die Entfernung zweier Elemente $d\tau$ und $d\tau'$, und zwar befindet sich das Element $d\tau$ im Innern der Masse, r kann also unendlich klein werden. Dann aber ist $\frac{1}{r}$ un-

endlich gross von der ersten, $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'}$ unendlich gross von der zweiten, $\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x'^2}$ unendlich gross von der dritten Ordnung u. s. f.

Nun haben wir eine dreifache Integration auszuführen. Wenn unter dem Integralzeichen Glieder mit $\frac{1}{r}$ stehen, so ist das Integral

endlich und bestimmt; dasselbe gilt für die Terme mit $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'}$, nicht mehr aber für die zweiten Differentialquotienten. Berücksichtigte man diesen Umstand nicht, so würde man leicht nachweisen können, dass ΔV selbst im Innern des anziehenden Körpers Null ist, und dies würde falsch sein.

Um nicht, wie in den §§ 8 und 9 die zweiten Differentialquotienten nach den Koordinaten einführen zu müssen, schlagen wir einen anderen Weg ein.

Durch theilweise Integration über den ganzen unendlichen Raum erhalten wir:

$$\int B' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} d\tau' = - \int \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial B'}{\partial z'} d\tau'.$$

Formen wir den oben gefundenen Werth für F um, so finden wir also:

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} F = \int \left(\frac{\partial C'}{\partial y'} - \frac{\partial B'}{\partial z'} \right) \frac{1}{r} d\tau', \text{ und analog} \\ G = \int \left(\frac{\partial A'}{\partial z'} - \frac{\partial C'}{\partial x'} \right) \frac{1}{r} d\tau', \\ H = \int \left(\frac{\partial B'}{\partial x'} - \frac{\partial A'}{\partial y'} \right) \frac{1}{r} d\tau'. \end{array} \right.$$

Wir wollen nun berechnen:

$$\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z},$$

dann gilt:

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial y} = \int \frac{\partial B'}{\partial x'} \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} d\tau' - \int \frac{\partial A'}{\partial y'} \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} d\tau', \\ - \frac{\partial G}{\partial z} = \int \frac{\partial C'}{\partial x'} \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} d\tau' - \int \frac{\partial A'}{\partial z'} \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} d\tau', \\ 0 = \int \frac{\partial A'}{\partial x'} \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d\tau' - \int \frac{\partial A'}{\partial x'} \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d\tau'. \end{array} \right.$$

Nun ist

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} = - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'},$$

denn r ist eine Funktion von $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$. Berücksichtigt man dies und integriert theilweise nach y' , so erhält man:

$$\int \frac{\partial B'}{\partial x'} \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} d\tau' = - \int \frac{\partial B'}{\partial x'} \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} d\tau' = \int \frac{\partial^2 B'}{\partial x' \partial y'} \cdot \frac{1}{r} d\tau'$$

und durch erneute theilweise Integration nach x'

$$= - \int \frac{\partial B'}{\partial y'} \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} d\tau' = \int \frac{\partial B'}{\partial y'} \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d\tau'.$$

In gleicher Weise ist

$$\int \frac{\partial C'}{\partial x'} \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} d\tau' = \int \frac{\partial C'}{\partial z'} \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d\tau'.$$

Setzen wir andererseits

$$V = \int \frac{A' d\tau'}{r},$$

so gibt uns die Poisson'sche Gleichung:

$$\Delta V = -4\pi A.$$

Ferner ist

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int A' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d\tau' = - \int A' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} d\tau' = \int \frac{\partial A'}{\partial x'} \cdot \frac{1}{r} d\tau'$$

und

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \int \frac{\partial A'}{\partial x'} \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d\tau'.$$

Die Gleichungen (21) lassen sich demnach schreiben:

$$0 = \int \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial x'} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} d\tau' - \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial y} = \int \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial y'} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} d\tau' - \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial y^2},$$

$$- \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial z} = \int \frac{\partial \mathbf{C}'}{\partial z'} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} d\tau' - \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial z^2}.$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial z} = \int \left(\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial x'} + \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial y'} + \frac{\partial \mathbf{C}'}{\partial z'} \right) \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} d\tau' - \Delta \mathbf{V}$$

$$= \alpha + 4\pi \mathbf{A} = \alpha.$$

38. Nun beschäftigen wir uns ja mit einem magnetischen Medium, das von endlichen Strömen durchflossen ist. Hierbei bedeuten u, v, w die Stromkomponenten, $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ die von den endlichen Strömen herrührenden Komponenten der elektromagnetischen Kraft, F_1, G_1, H_1 die Komponenten ihres Vektorpotentials. Ebenso stellen $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ die von den Partialströmen herrührenden Komponenten der magnetischen Kraft dar, a_2, b_2, c_2 die denselben zugehörigen Induktionskomponenten, F_2, G_2, H_2 die Komponenten ihres Vektorpotentials. Dann finden wir für die Komponenten der gesamten magnetischen Kraft, der gesamten Induktion und des gesamten Vektorpotentials:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \text{ etc.}$$

$$a = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2.$$

Nun ist für endliche Ströme nach § 29

$$\alpha_1 = \frac{\partial H_1}{\partial y} - \frac{\partial G_1}{\partial z} \text{ und}$$

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial y} - \frac{\partial \beta_1}{\partial z} = 4\pi u - \lambda \frac{\partial^2 q}{\partial x \partial t}.$$

Für die Partialströme gilt

$$a_2 = \frac{\partial H_2}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z}, \text{ und}$$

$$\frac{\partial \gamma_2}{\partial y} - \frac{\partial \beta_2}{\partial z} = 0.$$

Setzen wir dies ein, so folgt:

$$a = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} \text{ und}$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} = 4 \pi u - i \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial t},$$

und dies sollte nachgewiesen werden.

Kapitel V.

Uebergang von der Helmholtz'schen Theorie zur Maxwell'schen Theorie.

39. Um sich Rechenschaft abzulegen von der Art und Weise, wie man von der Helmholtz'schen Theorie zu derjenigen von Maxwell übergehen kann, die nur einen speciellen Fall, oder genauer gesagt, einen Grenzfall der ersteren darstellt, muss man die verschiedenen Hypothesen über den inducirten Magnetismus und die dielektrische Polarisation kennen. Das vorliegende Kapitel schliesst sich eng an das III. Kapitel des ersten Bandes an, in dem ich Ideen auseinandergesetzt habe, welche denen von Helmholtz analog waren, aber in der Form von diesen abwichen.

Bevor wir an die Frage von der dielektrischen Polarisation herantreten, wollen wir uns die Theorien vom inducirten Magnetismus wieder in's Gedächtniss zurückrufen. Wir werden mit derjenigen von Poisson beginnen, da diese in Bezug auf unsere zu besprechende Materie von der grössten Wichtigkeit ist. Da jedoch die Rechnungen in den §§ 52—59 des ersten Bandes im Einzelnen durchgeführt worden sind, beschränken wir uns darauf, nochmals kurz die Resultate anzugeben. Ich muss übrigens darauf aufmerksam machen, dass die in den oben erwähnten Paragraphen 52—59 behandelte Theorie sich eigentlich auf die Dielektrika bezieht, und dass man, um daraus die Theorie des Magnetismus abzuleiten, welche in mathematischer Hinsicht mit derselben übereinstimmt, doch einige der Bezeichnungen ändern muss.

Beispielsweise will ich das, was ich früher mit $-\frac{\partial U}{\partial \xi}$ und h bezeichnet habe, hier α und ε nennen. Unter U verstanden wir nämlich das elektrische Potential; an dessen Stelle hat hier das magnetische Potential zu treten, dessen Differentialquotienten mit dem umgekehrten Zeichen genommen nichts anderes sind, als die

Komponenten der magnetischen Kraft. Ebenso bezeichnen wir das, was wir früher K nannten, hier mit μ .

Magnetische Induktion. Poisson schreibt die magnetischen Erscheinungen der Wirkung zweier verschiedenen Fluida zu. Ein magnetischer Körper besteht aus kleinen, leitenden, magnetischen Kugeln, die unregelmässig in einem isolirenden Medium vertheilt sind. Man kann sich hierbei vorstellen, dass jede solche Kugel durch die Uebereinanderlagerung zweier anderen Kugeln gebildet werde, von denen die eine aus nordmagnetischem, die andere aus süd-magnetischem Fluidum besteht. Die Magnetisirung bewirkt nun, dass beide Kugeln um eine mehr oder minder grosse Strecke auseinandergerückt werden, und man erhält auf diese Weise Oberflächenschichten¹⁾.

Poisson nimmt an, dass die gegenseitigen Wirkungen aller übrigen Kugeln auf eine unter ihnen sich aufheben. Bezeichnet m die Masse einer jeden nordmagnetischen resp. süd-magnetischen Kugel, und ξ , η , ζ die Verschiebungskomponenten des Mittelpunktes der Kugel, welche ihre Lage geändert hat, so gilt

$$m\xi = A d\tau,$$

$$m\eta = B d\tau,$$

$$m\zeta = C d\tau;$$

hierbei bedeuten $A d\tau$, $B d\tau$, $C d\tau$ die Komponenten des magnetischen Moments dieses kugelförmigen Elements.

Um die magnetische Kraft in einem Punkte des Inneren bestimmen zu können, muss man sich um den betreffenden Punkt eine Höhlung denken; dann hängt die Kraft — entgegen der Ansicht Poisson's — von der Gestalt der Höhlung ab. Die Komponenten der Kraft sind im Innern eines im Verhältniss zu seiner Basis unendlich langen Cylinders, dessen Axe in der Magnetisirungsrichtung liegt, gleich α , β , γ , im Innern eines unendlich niedrigen, aber ebenfalls zur Magnetisirungsrichtung parallelen Cylinders: $\alpha + 4\pi A$, $\beta + 4\pi B$, $\gamma + 4\pi C$; im Innern einer Kugel endlich

$$\alpha + \frac{4}{3}\pi A; \quad \beta + \frac{4}{3}\pi B; \quad \gamma + \frac{4}{3}\pi C.$$

Wir beschreiben um den Koordinatenanfangspunkt eine Kugel σ von dem Volumen $d\tau$, das absolut genommen zwar sehr klein, in

¹⁾ In Betreff dieser Oberflächenschichten vergl. I. Bd. § 47.

Bezug auf die kugelförmigen Elemente jedoch sehr gross sein möge, und nehmen an, dass im Innern eines dieser Elemente s Gleichgewicht herrschen soll. Dann ist die zu OX parallele Komponente der Wirkung der äusseren Körper auf die Kugel σ gegeben durch $\alpha + \frac{4}{3} \pi A$, wenn A, B, C die Magnetisirungskomponenten bedeuten. Bezeichnet man mit ε das Verhältniss der Volumina der kleinen Kugeln s zum Volumen $d\tau$ von σ , so hat die Magnetisirung jedes einzelnen dieser Elemente s zu Komponenten $\frac{A}{\varepsilon}$, $\frac{B}{\varepsilon}$, $\frac{C}{\varepsilon}$. Die Wirkung der Kugeln, welche innerhalb von σ , aber ausserhalb eines Elementes s liegen, auf einen Punkt innerhalb von s ist unserer Voraussetzung nach Null (cf. Bd. I § 55). Die X-Komponente der Wirkung des Elementes s auf sich selbst ist

$$= -\frac{4}{3} \pi \frac{A}{\varepsilon}.$$

Die Gleichgewichtsbedingung lässt sich also schreiben:

$$(1) \quad \alpha + \frac{4}{3} \pi A - \frac{4}{3} \pi \frac{A}{\varepsilon} = 0.$$

Hieraus folgt:

$$\alpha = \frac{4}{3} \pi A \cdot \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon},$$

oder

$$4 \pi A = \frac{3 \varepsilon \alpha}{1 - \varepsilon};$$

dennach ist

$$\alpha = \alpha + 4 \pi A = \frac{1 + 2 \varepsilon}{1 - \varepsilon} \alpha = \mu \alpha.$$

Die Grösse

$$\mu = \frac{1 + 2 \varepsilon}{1 - \varepsilon}$$

nennt man die magnetische Permeabilität.

Wir verweilen noch einen Augenblick bei der Gleichung (1).

Ein magnetisches Molekül im Innern der magnetischen Kugel s muss sich unter der Wirkung sämtlicher Kräfte, welche an demselben angreifen, im Gleichgewichte befinden. Fasst man nur die zur X-Axe parallelen Komponenten in's Auge, so muss ihre Summe Null sein, also:

(Wirkung der äusseren Magnete und der ausserhalb σ gelegenen magnetischen Elemente $= a + \frac{4}{3} \pi A$) + (Wirkung der magnetischen Elemente innerhalb σ , abgesehen von $s=0$) + (Wirkung von s allein $= -\frac{4}{3} \pi \frac{A}{\epsilon}$) $= 0$.

Die Theorie bietet mancherlei Schwierigkeiten dar: ϵ muss kleiner sein als $\frac{\pi}{6}$ (sonst würden die Kugeln s nicht mehr durch unmagnetisches Medium von einander getrennt sein); dies erfordert für μ eine obere Grenze, welche beim Eisen überschritten ist. Man kann allerdings sagen, dass ja keine Nothwendigkeit vorliegt, die Elemente als kugelförmig aufzufassen; man kann, mit Mathieu, Elemente von anderer Form wählen und entgeht auf solche Weise dieser Schwierigkeit. Eine andere Schwierigkeit liegt darin, dass μ nicht eine Konstante ist, sondern sich mit der Kraft

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$$

ändert.

Weber nimmt an, dass die Elemente bereits polarisirt, aber beliebig gerichtet seien; die magnetische Kraft gibt ihnen eine gemeinsame Richtung, — eine Ansicht, welche sich mit den Ampère'schen Ideen berührt.

Will man sich in der Poisson'schen Vorstellungsweise vom Diamagnetismus Rechenschaft ablegen, so muss man annehmen, dass auch der leere Raum einer magnetischen Polarisation fähig ist, und dass die diamagnetischen Körper nur noch weniger magnetisch sind, als der leere Raum. Im leeren Raume müsste also $\mu > 1$ sein. Nun war die Einheit des Magnetismus so definirt worden, dass man festsetzte, zwei Einheitspole ziehen sich in der Einheit der Entfernung mit der Einheit der Kraft an; wäre also für den leeren Raum $\mu = 1$, dann würde gerade die im leeren Raume auftretende Anziehung mit der obigen Definition übereinstimmen; ist jedoch $\mu > 1$, dann findet dies nicht mehr statt.

40. Dielektrische Polarisation. Mosotti gelang es, die Erscheinungen zu erklären, welche nach den Coulomb'schen Ideen die Dielektrika zeigen, indem er die Poisson'schen Theorien auf die Elektrizität übertrug, und diese Theorien, welche für den Magnetismus eigentlich nur noch historische Bedeutung haben, können beim Studium der Dielektrika noch gute Dienste leisten, ohne wahrscheinlich den Thatsachen irgendwie zu entsprechen.

Die Dielektrika würden nach dieser Theorie aus leitenden Kugeln bestehen, welche in einem isolirenden Medium eingebettet liegen. Die Rolle der Magnetisirung spielt hierbei die dielektrische Polarisation, welche Maxwell mit elektrischer Verschiebung: f, g, h bezeichnet, also:

$$m \xi = f d\tau,$$

$$m \eta = g d\tau,$$

$$m \zeta = h d\tau.$$

Ein derart zusammengesetztes Dielektrikum lässt sich durchaus mit einem Magneten vergleichen; das elektrische Fluidum ist nämlich darin genau ebenso vertheilt, wie das magnetische Fluidum in einem Magnet, der nach der Poisson'schen Ansicht zusammengesetzt ist.

Das Potential einer magnetischen Masse m auf einen äusseren Punkt ist $\frac{m}{r}$; das Potential einer elektrischen Masse m ist nach der von uns gewählten Bezeichnungsweise $= \frac{m}{\lambda r}$.

Das Potential einer Poisson'schen Kugel auf einen äusseren Punkt, wenn man unter $A d\tau, B d\tau, C d\tau$ die Komponenten des magnetischen Moments dieser Kugel versteht, ist

$$d\tau' \left(A \frac{\partial}{\partial x'} \frac{1}{r} + B \frac{\partial}{\partial y'} \frac{1}{r} + C \frac{\partial}{\partial z'} \frac{1}{r} \right).$$

Ebenso wird das Potential einer Mosotti'schen Kugel auf einen äusseren Punkt gegeben sein durch:

$$\frac{d\tau'}{\lambda} \left(f \frac{\partial}{\partial x'} \frac{1}{r} + g \frac{\partial}{\partial y'} \frac{1}{r} + h \frac{\partial}{\partial z'} \frac{1}{r} \right).$$

Wir erhalten also für das Potential eines Magneten das Integral:

$$\Omega = \int d\tau' \left(A \frac{\partial}{\partial x'} \frac{1}{r} + B \frac{\partial}{\partial y'} \frac{1}{r} + C \frac{\partial}{\partial z'} \frac{1}{r} \right),$$

während dasjenige einer dielektrischen Masse dargestellt wird durch:

$$q = \int \frac{d\tau'}{\lambda} \left(f \frac{\partial}{\partial x'} \frac{1}{r} + g \frac{\partial}{\partial y'} \frac{1}{r} + h \frac{\partial}{\partial z'} \frac{1}{r} \right).$$

Die X-Komponente der magnetischen Kraft eines Körpers in einem äusseren Punkte ist $\alpha = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}$, diejenige der elektrostatischen Kraft, welche von einem Dielektrikum herrührt, entsprechend $-\frac{\partial \varphi}{\partial x}$.

Berechnet man diese Kraft für einen Punkt im Innern, so ergibt sich wiederum die Analogie mit den Magneten. Um dieselbe zu definiren, muss man annehmen, dass der betrachtete Punkt innerhalb einer kleinen Höhlung liege, welche in das Dielektrikum gebohrt ist; man findet dann, dass die zur X-Axe parallele Komponente ist

$$\begin{aligned} &= -\frac{\partial f}{\partial x}, \text{ wenn die Höhlung aus einem sehr langen Cylinder besteht;} \\ &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{4\pi f}{\lambda}, \text{ wenn dieselbe einen sehr kurzen Cylinder bildet;} \\ &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{4\pi f}{3\lambda}, \text{ wenn sie eine kugelförmige Gestalt hat.} \end{aligned}$$

Stellen wir, wie früher, die Gleichgewichtsbedingungen auf, so müssen wir hier einerseits die elektromotorischen Induktionskräfte hinzufügen, andererseits die elektromotorischen Kräfte irgend welchen Ursprungs, z. B. die chemischen oder thermoelektrischen Kräfte, deren Komponenten wir mit X, Y, Z bezeichnen. An Stelle von α tritt $-\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, wobei φ das elektrostatische Potential bedeutet.

Soll ein im Innern einer Mosotti'schen Kugel befindliches elektrisches Molekül im Gleichgewicht sein, so muss die Summe der Komponenten der elektromotorischen Kräfte verschiedenen Ursprungs, denen das Molekül unterworfen ist, Null sein; hierdurch erhalten wir eine Gleichung, welche der Gleichung (1) analog ist. Wir wollen wie oben annehmen, dass wir in das Dielektrikum eine Höhlung gebohrt hätten, deren Begrenzung eine mit s concentrische Kugel-
fläche σ bildet, und finden:

$$\begin{aligned} &\left(\text{Wirkung der äusseren Leiter und des ausserhalb von } \sigma \text{ ge-} \right. \\ &\text{legenen Theiles des Dielektrikum} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{4}{3}\pi \frac{f}{\lambda} \left. \right) + \left(\text{Wirkung} \right. \\ &\text{der Mosotti'schen Kugeln innerhalb von } \sigma, \text{ abgesehen von } s=0 \left. \right) + \\ &\left(\text{Wirkung von } s = -\frac{4}{3}\pi \frac{f}{\lambda \epsilon} \right) + \left(\text{Wirkung der Induktionskräfte} \right. \\ &= -\frac{\partial F}{\partial x} \left. \right) + \left(\text{äussere elektromotorische Kräfte verschiedenen Ursprungs} \right. \\ &= X \left. \right) = 0, \text{ also:} \end{aligned}$$

$$-\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial t} + X + \frac{4}{3} \pi \frac{f}{\lambda} - \frac{4}{3} \pi \frac{f}{\epsilon \lambda} = 0,$$

oder:

$$\frac{4}{3} \pi \frac{f}{\lambda} \frac{(1-\epsilon)}{\epsilon} = -\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial t} + X,$$

oder, wenn man setzt:

$$K = \frac{\lambda(1+2\epsilon)}{1-\epsilon}.$$

$$(2) \quad \frac{4\pi f}{K-\lambda} = -\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial t} + X.$$

K bedeutet das spezifische Induktionsvermögen des Medium.

Wir wollen nun den Verschiebungsstrom bestimmen, welcher in einem Dielektrikum entsteht, wenn dessen Polarisationszustand sich ändert. Früher definirten wir die Komponenten u , v , w des Stromes folgendermaassen: $u d\tau$ ist die X -Komponente der Bewegungsgrösse aller elektrischen Moleküle, welche in dem Volumenelemente $d\tau$ vorhanden sind. Wir fassen nun ein Element $d\tau$ in's Auge, das eine Mosotti'sche Kugel enthalten möge; ist diese Kugel polarisirt, so kann man annehmen, dass sie aus zwei Kugeln von positivem resp. negativem Fluidum gebildet werde, deren elektrische Massen gleich, aber von entgegengesetztem Vorzeichen sind, und welche ausserdem dasselbe Volumen, nicht aber den gleichen Mittelpunkt besitzen (cf. Bd. I § 47). Wir bezeichnen mit $+m$ und $-m$ die Massen der beiden Kugeln; mit x_1 , y_1 , z_1 die Koordinaten des Mittelpunkts der positiven Kugel, mit $x_2 = x_1 - \xi$; $y_2 = y_1 - \eta$; $z_2 = z_1 - \zeta$ diejenige des Mittelpunkts der negativen Kugel; dann haben ξ , η , ζ dieselbe Bedeutung, wie im Anfange des Paragraphen.

Für die X -Komponente des Stromes, welcher von der relativen Verschiebung der beiden Kugeln herrührt, finden wir:

$$u d\tau = m \frac{\partial x_1}{\partial t} - m \frac{\partial x_2}{\partial t} = m \frac{\partial \xi}{\partial t} = d\tau \frac{\partial f}{\partial t},$$

und analog:

$$v = \frac{\partial g}{\partial t},$$

$$w = \frac{\partial h}{\partial t}.$$

41. Das elektrostatische Potential φ rührt von der Electricität her, welche sich in den Leitern befindet und von derjenigen, welche die Dielektrika polarisirt; die letzteren verhalten sich wie Magnete. Wir erhalten also:

$$\varphi = \frac{1}{\lambda} \int \frac{\sigma' dr'}{r} + \frac{1}{\lambda} \int \left(f' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + g' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} + h' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \right) dr',$$

wenn wir mit σ' die Dichte im Punkte x, y, z des Leiters bezeichnen.

In dieser Gleichung stellt das erste Integral das von der freien Electricität der Leiter herrührende Potential dar, das zweite Integral das Potential der in den Dielektrika polarisirten Electricität.

Für gewöhnlich findet sich die freie Electricität nur auf der Oberfläche der Leiter. Wir bezeichnen mit $[\sigma]$ die Oberflächendichtigkeit im Punkte x, y, z der betreffenden Oberfläche, mit $[\sigma']$ die Oberflächendichtigkeit im Punkte x', y', z' ; ist aber Electricität nicht nur auf der Oberfläche, sondern auch im Innern der Leiter vorhanden, so soll σ die Volumendichtigkeit derselben im Punkte x, y, z des Leiters bedeuten. Dann finden wir:

$$\lambda \varphi = \int \frac{\sigma' dr'}{r} + \int \frac{[\sigma'] d\omega'}{r} + \int \left(f' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + g' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} + h' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \right) dr';$$

hierbei ist das erste Integral über alle Volumenelemente $d\tau'$ der Leiter zu erstrecken, das dritte über alle Elemente $d\tau'$ der Dielektrika, und das zweite über alle Elemente $d\omega'$ der Oberfläche, welche die Leiter von den Dielektrika trennt.

Das dritte Integral lässt sich durch theilweise Integration umformen und gibt:

$$(3) \quad \int \left(f' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + g' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} + h' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \right) d\tau' = \frac{1}{r} \int (l' f' + m' g' + n' h') d\omega' \\ - \frac{1}{r} \int \left(\frac{\partial f'}{\partial x'} + \frac{\partial g'}{\partial y'} + \frac{\partial h'}{\partial z'} \right) d\tau'.$$

Hierbei muss auf der rechten Seite das erste Integral über alle Elemente $d\omega'$ der Oberfläche ausgedehnt werden, welche die Dielektrika begrenzt, und das zweite über alle Volumelemente der Dielektrika.

Um die Schreibweise in der Gleichung (3) nicht zu compliciren, habe ich angenommen, dass die Eigenschaften des Dielektrikum sich stetig ändern, so dass f , g , h stetige Funktionen sind. Handelt es sich also um mehrere verschiedene Dielektrika, so nehme ich an, wie ich dies in der Vorrede bereits auseinandergesetzt habe, dass dieselben durch eine sehr dünne Uebergangsschicht von einander getrennt sind. Dagegen würden die Dielektrika von den Leitern durch eine geometrische Oberflächenschicht getrennt sein, so dass die Eigenschaften des Medium sich sehr rasch ändern, wenn man diese Schicht durchsetzt.

Wir schreiben nun

$$\rho = \sigma \text{ für die Leiter,}$$

$$\rho = -\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial z} \text{ für die Dielektrika,}$$

$$[\rho] = [\sigma] + lf + mg + nh \text{ an der Trennungsfläche der Leiter} \\ \text{und der Dielektrika;}$$

dann kommt:

$$\lambda q = \int \rho' \frac{dr'}{r} + \int \frac{[\rho'] d\omega'}{r}.$$

Es wird mit anderen Worten alles so vor sich gehen, als ob man einerseits Elektrizität mit der Dichtigkeit ρ über den ganzen Raum vertheilt hätte, und andererseits solche mit der Oberflächendichtigkeit $[\rho]$ auf der Oberfläche der Leiter.

Es ist leicht, sich von diesem Resultate Rechenschaft zu geben.

Man weiss, dass bei einem Magneten sich alles so verhält, als ob die magnetische Dichtigkeit im Innern $= -\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial C}{\partial z}$ wäre, und die Oberflächendichtigkeit auf der Oberfläche des Magneten $= Al + Bm + Cn$. Da die Dielektrika den Magneten analog sind, so spielt sich alles so ab, als ob man im Innern derselben eine Dichtigkeit der Elektrizität $= \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial z}$ und auf der Oberfläche eine Dichtigkeit $lf + mg + nh$ besässe.

Fasst man also die Trennungsfläche eines Leiters und eines Dielektrikum in's Auge, welches beispielsweise ausserhalb dieser Trennungsfläche liegen möge, so haben wir im Innern dieser Oberfläche eine unendlich dünne elektrische Schicht von der Dichtigkeit $[\sigma]$, welche von der freien Elektrizität des Leiters herrührt, und

andererseits ausserhalb dieser Oberfläche eine unendlich dünne Schicht von der Dichtigkeit $(lf + mg + nh)$, die von der Polarisation des Dielektrikum herrührt.

Der ganze Vorgang wird also schliesslich so verlaufen, als ob wir es mit einer einzigen Schicht von der Dichte $[q]$ zu thun hätten.

Es ist wesentlich, dass man diese beiden Oberflächendichtigkeiten $[q]$ und $[\sigma]$, deren Definition sehr verschieden ist, nicht wechselt.

In einem Dielektrikum hat man:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = -e$$

und man kommt, durch Differentiation nach der Zeit, wieder zu der Continuitätsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial q}{\partial t}$$

42. Hier müssen wir noch eine Bemerkung einfügen. Ein elektrisches Molekül im Innern einer Mosotti'schen Kugel ist einer elektrostatischen Kraft unterworfen, deren X-Komponente die Grösse besitzt:

$$(4) \quad X = -\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{4\pi f}{K-1}$$

Man könnte sich wundern, dass diese Kraft nicht bloß die Derivirte des Potentials mit dem entgegengesetzten Vorzeichen ist. Dies kommt jedoch daher, dass das Dielektrikum kein homogenes Medium ist, und das Potential sich in Folge dessen unregelmässig verändert; im statischen Zustande z. B. ist es im Innern einer jeden Mosotti'schen Kugel konstant, dagegen ausserhalb derselben variabel. Ein Beobachter, welcher das Dielektrikum in gerader Linie durchschritte, würde bemerken, dass das Potential sich etwa wie die Kurve M'N' der Fig. 8 ändert; diese Kurve enthält Windungen.

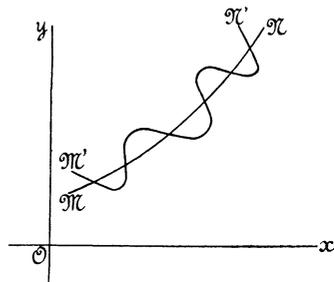


Fig. 8.

Die durch die Gleichungen von § 37 definirte Funktion φ ist im Gegensatze dazu stetig, wie alle ihre Derivirten, und nur unter dieser Bedingung kann sie mit Vortheil in die Rechnungen eingeführt werden. Diese Funktion φ , welche man als mittleres Potential

bezeichnen könnte, ist also streng genommen nicht gleich dem wirklichen Potential, aber der Unterschied ist sehr gering und von derselben Grössenordnung wie der Zwischenraum zwischen zwei Mosotti'schen Kugeln¹⁾.

Dies wahre Potential schwankt um einen mittleren Werth φ ; die beiden Kurven, welche das wahre Potential (M'N') und das mittlere Potential MN darstellen, sind sich äusserst nahe, *aber die dazugehörigen Tangenten sind sehr verschieden*, und daher kommt es auch, dass die Kraft, welche bis auf das Vorzeichen mit der Derivirten des wahren Potentials übereinstimmt, von der Derivirten des mittleren Potentials stark abweicht.

43. Ausdruck für die elektrostatische Energie bei den Dielektrika. Eine elektromotorische Kraft (X, Y, Z), welche an der im Punkte (x, y, z) gelegenen elektrischen Masse m angreift, leistet in der Zeit dt die Arbeit

$$m \left(X \frac{\partial x}{\partial t} + Y \frac{\partial y}{\partial t} + Z \frac{\partial z}{\partial t} \right) dt.$$

Für die sämtlichen Massen des Elements $d\tau$ ist die X-Komponente der auf die Zeiteinheit bezogenen Arbeit

¹⁾ Fasst man beispielsweise einen ausserhalb dieser Kugeln gelegenen Punkt in's Auge, so ist das mittlere Potential gleich dem Integral

$$\int \left(f' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + g' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} + h' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \right) d\tau$$

und das wahre Integral gleich der Summe

$$\sum \left(f' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + g' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} + h' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \right) \Delta\tau,$$

die man erhält, wenn man das Volumen des Dielektrikum in Elemente $\Delta\tau'$ zerlegt, von denen jedes eine einzige Mosotti'sche Kugel enthält und in Folge dessen eine endliche, wenn auch nur sehr geringe Grösse besitzt.

Hieraus lässt sich ersehen, bis zu welchem Grade der Annäherung das „mittlere Potential“ mit dem „wahren Potential“ übereinstimmt. Die Unterschiede zwischen beiden sind ohne Belang, denn einerseits hindert nichts, die Kugeln so klein anzunehmen, als man will, und andererseits dürfen die Hypothesen nur als bequeme Hilfsmittel zur Erklärung der Verhältnisse aufgefasst werden; an sich werden sie wahrscheinlich den Thatsachen keineswegs entsprechen. Nichtsdestoweniger glaubte ich alle diese Details berühren zu sollen, um damit einen scheinbaren Widerspruch zu beseitigen.

$$X \sum m \frac{\partial x}{\partial t} = X u \, d\tau,$$

und für das ganze Volumen

$$\int (Xu + Yv + Zw) \, d\tau.$$

Nun gilt, nach Gleichung (4), § 42

$$X = -\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{4\pi f(1-\epsilon)}{3\lambda\epsilon} = -\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{4\pi f}{K-\lambda},$$

$$Y = -\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{4\pi g}{K-\lambda},$$

$$Z = -\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{4\pi h}{K-\lambda}.$$

Die mit dem umgekehrten Vorzeichen versehene Arbeit wird, wenn man mit U die elektrostatische Energie bezeichnet, $\frac{\partial U}{\partial t}$; wir erhalten also:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \int \left(u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} \right) d\tau + \frac{4\pi}{K-\lambda} \int (uf + vg + wh) \, d\tau.$$

Das erste Integral ist gleich:

$$-\int f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) d\tau = \int f \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\tau.$$

Nun ist aber

$$\lambda \Delta f = -4\pi \rho,$$

folglich wird das Integral

$$\begin{aligned} \int f \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\tau &= -\frac{1}{4\pi} \int \lambda f \frac{\partial \Delta f}{\partial t} \, d\tau = -\frac{\lambda}{4\pi} \int f \Delta \frac{\partial f}{\partial t} \, d\tau \\ &= \frac{\lambda}{4\pi} \int \sum \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \, d\tau = \frac{\lambda}{8\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau. \end{aligned}$$

Das zweite Integral ist

$$\int \sum u f d\tau = \int \sum f \frac{\partial f}{\partial t} d\tau = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int (f^2 + g^2 + h^2) d\tau,$$

folglich erhalten wir im Ganzen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{\lambda}{8\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau \\ &+ \frac{2\pi}{K-\lambda} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int (f^2 + g^2 + h^2) d\tau. \end{aligned}$$

Wir nehmen an, dass sich im Anfange alle Leiter im neutralen Zustande befinden, und dass dann weder freie Electricität noch Strom vorhanden ist; es gilt somit für $t=0$:

$$U = 0$$

und für irgend welchen späteren Augenblick:

$$U = \frac{\lambda}{8\pi} \int \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau + \frac{2\pi}{K-\lambda} \int (f^2 + g^2 + h^2) d\tau.$$

44. Dies ist der allgemeine Ausdruck für die elektrostatische Energie. Hat man es nur mit elektrostatischen Erscheinungen zu thun, so vereinfacht sich der Ausdruck; es ist dann nämlich (cf. (2) § 40)

$$f = - \frac{K-\lambda}{4\pi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \text{ u. s. w.,}$$

also:

$$\frac{2\pi}{K-\lambda} f^2 = \frac{K-\lambda}{8\pi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2,$$

demnach:

$$U = \int d\tau \left[\frac{\lambda}{8\pi} \sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{K-\lambda}{8\pi} \sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right],$$

und endlich

$$(5) \quad U = \frac{K}{8\pi} \int \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau.$$

Andererseits gilt für das Innere der Leiter

$$(6) \quad \varphi = \text{Const.},$$

während für das Innere der Dielektrika die Poisson'sche Gleichung liefert:

$$\lambda \Delta \varphi = -4 \pi \varrho = 4 \pi \sum \frac{\partial f}{\partial x},$$

hieraus folgt:

$$\lambda \sum \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = - \sum \frac{\partial}{\partial x} \left[(K - \lambda) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right],$$

oder:

$$(7) \quad \sum \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = 0.$$

Wir fassen nun einen Punkt der Trennungsfläche zwischen Leiter und Dielektrikum in's Auge, und setzen der allgemein angenommenen Bezeichnungsweise gemäss:

$$(8) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = l \frac{\partial \varphi}{\partial x} + m \frac{\partial \varphi}{\partial y} + n \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Bedenken wir hierbei, dass φ im Innern der Leiter konstant ist, so erhalten wir für einen im Dielektrikum, aber unendlich nahe an der Trennungsfläche gelegenen Punkt

$$\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial n} = -4 \pi [\varrho].$$

Für $[\varrho]$ hatten wir gesetzt:

$$[\varrho] = [\sigma] + l f + m g + n h,$$

wobei wir unter l, m, n die Richtungskosinus der nach dem Leiter gerichteten Normalen verstanden; nehmen wir dagegen wie in (8) an, dass l, m, n die Richtungskosinus der nach dem Dielektrikum hin gerichteten Normalen bezeichnen, so haben wir zu setzen:

$$[\varrho] = [\sigma] - \sum l f.$$

Demnach erhalten wir:

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial n} &= -4 \pi [\sigma] + 4 \pi \sum l f = -4 \pi [\sigma] - (K - \lambda) \sum l \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ &= -4 \pi [\sigma] - (K - \lambda) \frac{\partial \varphi}{\partial n}, \end{aligned}$$

oder endlich:

$$(9) \quad K \frac{\partial r}{\partial n} = -4\pi [\sigma].$$

Ausserdem ist noch zu bemerken, dass die

$$(10) \quad \text{Ladung eines beliebigen Leiters} = \int [\sigma] d\omega$$

ist, wobei sich die Integration über alle Oberflächenelemente $d\omega$ dieses Leiters zu erstrecken hat.

Die Gleichungen (6), (7), (9) und (10) genügen, um die Funktion φ kennen zu lernen, wenn man die Ladung eines jeden Leiters kennt.

Die Gleichung (5) bestimmt ferner die Energie U , und da wir wissen, dass die virtuelle Arbeit der elektrostatischen Anziehungen dem virtuellen Zuwachse dieser Energie entspricht, so können wir hieraus den Werth dieser Anziehungen berechnen.

Demnach lehren uns, wenn wir die Ladung und die Stellung eines jeden Leiters kennen, die Gleichungen (5), (6), (7), (9) und (10) die elektrostatischen Anziehungen kennen. Aber in diesen Gleichungen kommt λ nicht vor, sondern nur das Induktionsvermögen K .

Bei gegebenen Ladungen und Stellungen der Leiter, *welche allein den elektrostatischen Untersuchungen zugänglich sind*, hängen also die elektrostatischen Anziehungen nicht von λ ab; durch diese Untersuchungen können wir also die Grösse λ nicht kennen lernen, sondern nur das Induktionsvermögen K , das gleichzeitig eine Funktion von λ und von ϵ ist.

Wir wollen mit K_0 das Induktionsvermögen des leeren Raumes und mit ϵ_0 den Werth von ϵ für den leeren Raum bezeichnen.

Bei den alten Theorien setzt man voraus, dass der leere Raum keine Mosotti'schen Kugeln enthält, dass darin also eine elektrische Polarisation nicht stattfindet, d. h., dass $\epsilon_0 = 0$ ist.

Hieraus folgt aber (cf. § 40)

$$\lambda = K_0$$

und für ein beliebiges Dielektrikum:

$$\epsilon = \frac{K - K_0}{K + 2K_0}.$$

Es nöthigt uns aber nichts zu der Annahme, dass $\epsilon_0 = 0$ ist. So war man ebenfalls bei der Theorie vom inducirten Magnetismus, nachdem man ursprünglich für den leeren Raum $\mu = 0$. $\mu = 1$ vor-

ausgesetzt hatte, schliesslich genöthigt worden, zur Erklärung des Diamagnetismus anzunehmen, dass im leeren Raume μ grösser als 1, mit anderen Worten, dass der leere Raum schwach magnetisch ist (cf. § 39). Hier lässt sich eine analoge Annahme machen.

Da die elektrostatischen Untersuchungen uns nur über K und K_0 Aufschluss geben, so lassen sich die elektrostatischen Erscheinungen für jeden Werth von λ erklären, der kleiner ist als K_0 , vorausgesetzt, dass gleichzeitig gilt:

$$\epsilon_0 = \frac{K_0 - \lambda}{K_0 + 2\lambda}$$

und für ein beliebiges Dielektrikum¹⁾:

$$\epsilon = \frac{K - \lambda}{K + 2\lambda}.$$

Hierbei ist K eine Funktion von λ und von ϵ , aber weder λ noch ϵ treten getrennt in dem Ausdrucke für die elektrostatische Energie auf. Verändert man gleichzeitig λ und ϵ in der Weise, dass K sich nicht ändert, so wird die dem Experimente zugängliche Grösse doch ungeändert bleiben; die elektrostatischen Erscheinungen werden uns also über den Werth von λ keinen Aufschluss geben können.

45. Nach den gebräuchlichen Theorien von Mosotti ist $\epsilon_0 = 0$, also $K_0 = \frac{\lambda(1 + 2\epsilon_0)}{1 - \epsilon_0} = \lambda$; zwei in der Einheit der Entfernung befindliche elektrische Einheiten stossen sich demnach mit der Kraft $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{K_0}$ ab. Man kann aber die Erscheinungen auch unter der Annahme erklären, dass ϵ_0 für Luft und den leeren Raum nicht Null ist. Dann ist $K_0 > \lambda$ und $\frac{1}{\lambda} > \frac{1}{K_0}$. Die thatsächliche Ab-

¹⁾ Diese Formeln setzen voraus, dass man mit Poisson und Mosotti die leitenden Theile des Dielektrikum als kugelförmig annimmt. Jedoch hat diese Hypothese keine wesentliche Bedeutung, sie dient vielmehr nur zur Vereinfachung der Rechnungen. Würde man für die leitenden Theile eine ganz beliebige Form voraussetzen, so gelangte man zu vollständig analogen Resultaten und fände

$$K = \lambda \varphi(\epsilon),$$

wobei $\varphi(\epsilon)$ eine Funktion bedeutet, welche sich verhält wie $\frac{1 + 2\epsilon}{1 - \epsilon}$, welche also mit wachsendem ϵ zunimmt, für $\epsilon = 0$ den Werth Eins und für $\epsilon = 1$ den Werth Unendlich annimmt.

stossung zwischen zwei elektrischen Einheiten in diesem Falle ist zwar grösser als $\frac{1}{K_0}$, aber die beobachtete Abstossung im leeren Raum ist immer $= \frac{1}{K_0}$, sie bleibt ungeändert, und ist nur kleiner als die thatsächliche Abstossung wegen der entgegengesetzten Wirkung der polarisirten Kugeln. *Die Maxwell'sche Theorie beruht auf der Annahme, dass $\lambda = 0$ ist.* Damit dann K endlich bleibt, muss $\varepsilon = 1$ sein, d. h., die leitenden Theile nehmen das gesammte Volumen des Dielektrikum ein. Dies kommt auf die Vorstellung hinaus, dass die Dielektrika aus leitenden Zellen bestehen, welche durch isolirende Zwischenwände von einander getrennt sind, deren Dicke im Vergleiche zu den Dimensionen dieser Zellen unendlich gering ist¹⁾ (cf. I. Band § 61 u. s. w.). Die thatsächliche Abstossung zwischen zwei Einheitsmolekülen würde für $\lambda = 0$ unendlich gross werden, die beobachtete Abstossung zwischen zwei solchen Molekülen, die sich in einem Dielektrikum befinden, ist aber endlich.

Die gewöhnlichen elektrodynamischen Erscheinungen hängen von λ nicht ab, sie können also auch nicht dazu dienen, uns zur Kenntniss von λ zu verhelfen. Für konstante Ströme ist nämlich $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$, und die Gleichung (2) des § 40 lässt sich demnach schreiben:

$$\frac{4 \pi f}{K - \lambda} = - \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

(da nämlich die von uns mit X bezeichneten elektromotorischen Kräfte verschiedenen Ursprungs im Allgemeinen Null sind).

Hat man es mit veränderlichen Strömen gewöhnlicher Art zu thun, so ist $\frac{\partial F}{\partial t}$ meist zu vernachlässigen, und man muss schon zu sehr rasch verlaufenden Wechselströmen greifen, wie sie beispielsweise bei den Hertz'schen Versuchen vorkommen, wenn $\frac{\partial F}{\partial t}$ eine solche Grösse erhalten soll, dass der Einfluss dieses Terms auf λ merklich wird.

Die Maxwell'sche Theorie ist also im Grunde genommen eher ein Grenzfall der Helmholtz'schen Theorie zu nennen, als ein specieller Fall. Um von der einen zur anderen Theorie

¹⁾ Dies darf nicht wörtlich genommen werden, denn es wäre schwierig, sich vorzustellen, dass der leere Raum wirklich eine ähnliche Beschaffenheit zeigte. Wir haben in dieser Annahme vielmehr nur eine Ausdrucksweise für die Thatsache zu sehen, dass in einem Dielektrikum die Elektrizität nicht strömt, dass vielmehr nur eine Polarisation auftritt.

überzugehen, hat man der Grösse λ einen unendlich kleinen Werth zu geben.

Wir wollen nun zusehen, was in diesem Falle aus den verschiedenen früher betrachteten Grössen wird:

1. Das elektrostatische Potential, ebenso wie die Dichtigkeiten σ und $[\sigma]$, welche nach § 41 von dem Werthe von λ nicht abhängen, bleiben endlich.

2. Im Gegensatze dazu sind die Dichtigkeiten, welche wir q und $[q]$ genannt haben, unendlich klein von derselben Ordnung wie λ .

Man kann sich wundern, dass das Potential φ und die elektrostatischen Anziehungen endlich bleiben, auch wenn die elektrischen Dichtigkeiten q und $[q]$ unendlich klein sind; aber ich erinnere an Folgendes.

1. Wir haben gefunden:

$$\varphi = \int \frac{[q'] d\omega'}{\lambda r} + \int \frac{q' dr'}{\lambda r},$$

woraus folgt, dass φ endlich ist, wenn q , $[q]$ und λ unendlich klein von derselben Ordnung sind.

2. Die Arbeit der elektrostatischen Kräfte, welche gleich der Variation der durch die Gleichung (5) des § 44 definirten Funktion U ist, bleibt ebenfalls endlich.

Man kann sich übrigens die Sache auch noch auf eine andere Weise erklären.

Wir bedenken, wie ich es bereits im ersten Bande auseinandergesetzt habe, dass nach der von uns adoptirten Ansicht die Dielektrika aus leitenden Zellen bestehen, welche durch unendlich dünne Zwischenschichten getrennt sind, und dass jede dieser isolirenden Schichten einen Kondensator darstellt, dessen Belegungen durch die benachbarten Zellen gebildet werden. Diese beiden Belegungen enthalten gleiche Ladungen von entgegengesetztem Vorzeichen q und $-q$; da die Zwischenschicht unendlich dünn ist, so ist die Wirkung der beiden Ladungen auf einen äusseren Punkt von derselben Grössenordnung wie die Dicke δ der Schicht, dividirt durch λ und multiplicirt mit q . Sind also, wie wir es voraussetzen, δ und λ von derselben Grössenordnung, so wird diese Wirkung von der Ordnung von q sein.

Was die Berechnung der elektrostatischen Wirkungen betrifft, so haben wir hier zwei Bemerkungen zu machen.

1. Wir gingen bei dieser Berechnung vom Ausdrücke U aus. Man gebraucht aber in der Elektrostatik häufig eine andere Methode,

welche auf einen freien Leiter anwendbar ist, der sich in einem nicht polarisirbaren Dielektrikum befindet ($\epsilon = 0$). Man betrachtet nämlich die verschiedenen auf der Oberfläche der Leiter ausgebreiteten elektrischen Moleküle, sowie die Kräfte, denen dieselben unterworfen sind, und setzt diese letzteren nach den Gesetzen der Statik zusammen. Wollte man diese Methode auf einen Leiter anwenden, der sich in einem nach der Ansicht von Mosotti zusammengesetzten polarisirbaren Dielektrikum befindet, so würde man zu falschen Resultaten gelangen, und bezöge man dieselbe auf den Fall, wo das Dielektrikum nach der Theorie von Maxwell und nach den Ideen zusammengesetzt ist, wie sie in diesem Paragraphen besprochen wurden, so fände man eine unendlich grosse Anziehungskraft. Der betreffende Leiter könnte sich nämlich nicht verschieben, ohne die Mosotti'schen Kugeln oder die leitenden Zellen zu zerstören, dies aber würde eine negative elektrostatiche Arbeit und demnach einen Widerstand zur Folge haben, der berücksichtigt werden muss.

2. Man darf zur Berechnung von U nicht ausgehen von der Formel:

$$U = \frac{1}{2} \int \varrho \varphi \, dx,$$

denn, da $\varrho = 0$ ist, so würden wir $U = 0$ erhalten.

Die Funktion ist nämlich nicht stetig, da sie sich plötzlich ändert, wenn man von einer Zelle zur nächsten übergeht. Kommen wir nochmals auf die kleinen Kondensatoren zurück, von denen ich soeben sprach, und nennen q und q' die Ladungen der beiden Belegungen, φ und φ' ihr Potential, dann wird $q + q'$ von der Ordnung von λ sein, es liegt aber kein Grund vor, warum dies auch bei $q\varphi + q'\varphi'$ der Fall sein sollte, da $\varphi - \varphi'$ nicht unendlich klein von der Ordnung von λ ist.

Wir haben weiter:

$$\int \varrho \, dx = \sum (q + q'),$$

$$\int \varrho \varphi \, dx = \sum (q\varphi + q'\varphi'),$$

wobei die Integrale auf ein beliebiges Volumen zu erstrecken sind, und die Summationen auf die sämtlichen in diesem Volumen enthaltenen kleinen Kondensatoren.

Man erkennt also, wie das erste Integral Null werden kann, ohne dass das zweite es zu sein braucht.

46. Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der elektromagnetischen Störungen. Wir sehen nun zu, wie sich nach den verschiedenen elektromagnetischen Theorien die elektrodynamischen Störungen fortpflanzen müssen. Wenn sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, welche Funktionen der Grössen λ , k und K sind, experimentell bestimmen lassen, so werden wir dadurch in den Stand gesetzt, eine dieser Grössen zu ermitteln.

Es bestehen zehn Gleichungen zwischen den partiellen Differentialquotienten, welche die zehn Grössen u , v , w , α , β , γ , F , G , H und φ definiren. Für ein Dielektrikum mit dem specifischen Induktionsvermögen K gilt nämlich:

$$\frac{4\pi f'}{K-\lambda} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial t},$$

oder durch Differentiation nach t :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{4\pi u}{K-\lambda} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}, \\ \frac{4\pi v}{K-\lambda} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial y \partial t} - \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}, \\ \frac{4\pi w}{K-\lambda} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial z \partial t} - \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}. \end{array} \right.$$

Andererseits fanden wir nach Formel (15) § 29:

$$4\pi u = \frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z} + \lambda \frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial t},$$

sowie nach Formel (19) § 36:

$$a = \mu \alpha = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}$$

und endlich nach § 26 (11):

$$J = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = -k\lambda \frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

Wir nehmen nun das Vorhandensein einer elektromagnetischen Störung in dem Dielektrikum an, und zwar möge sich eine zu OX senkrechte, ebene Welle in dem Medium fortpflanzen; dann hängen die in den Gleichungen vorkommenden Grössen nur von x und von t ab; die Gleichungen gehen also über in:

$$\begin{aligned}
 \text{(I)} \quad & \frac{4 \pi u}{K - \lambda} = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}, \\
 \text{(II)} \quad & \frac{4 \pi v}{K - \lambda} = - \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}, \\
 \text{(III)} \quad & \frac{4 \pi w}{K - \lambda} = - \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}, \\
 \text{(IV)} \quad & 4 \pi u = \lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}, \\
 \text{(V)} \quad & 4 \pi v = - \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \\
 \text{(VI)} \quad & 4 \pi w = \frac{\partial \beta}{\partial x}, \\
 \text{(VII)} \quad & \mu \alpha = 0, \\
 \text{(VIII)} \quad & \mu \beta = - \frac{\partial H}{\partial x}, \\
 \text{(IX)} \quad & \mu \gamma = \frac{\partial G}{\partial x}, \\
 \text{(X)} \quad & \frac{\partial F}{\partial x} = - k \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial t}.
 \end{aligned}$$

1. Wir untersuchen zuerst Longitudinalwellen, und setzen voraus, dass

$$G = H = v = w = \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Dann bleibt nur noch F , φ und u zu bestimmen, und zwar müssen diese den drei Gleichungen (I), (IV) und (X) genügen; die anderen Gleichungen werden von selbst erfüllt.

Aus (I) und (IV) erhalten wir:

$$\frac{\lambda}{K - \lambda} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}$$

und hieraus wieder:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = - \frac{K}{K - \lambda} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}.$$

Ausserdem liefert die Gleichung (X)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = - k \lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{K}{(K-\lambda)k\lambda} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Longitudinalwellen ist demnach:

$$V_1 = \sqrt{\frac{K}{(K-\lambda)k\lambda}}.$$

2. Transversalwellen. Man kann den Bedingungen genügen, wenn man setzt:

$$F = H = u = v = \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Dann bleiben noch G , γ und v und die drei Gleichungen (II), (V) und (IX) übrig.

Durch Vergleichung von (II) und (V) kommt:

$$\frac{1}{K-\lambda} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial x} = \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}.$$

Durch Differentiation von (IX) nach x finden wir aber:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial x^2},$$

und somit erhalten wir:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu(K-\lambda)} \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist also:

$$V_2 = \sqrt{\frac{1}{\mu(K-\lambda)}}.$$

47. In bestimmten Fällen kann sich die Longitudinalwelle nicht fortpflanzen, und zwar, wenn $k=0$, $\lambda=0$, $K=\lambda$ ist; die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist nämlich dann unendlich gross. Dies ist die Annahme von Maxwell; nach ihr sind die Schwingungen transversal gerichtet.

Bei den Transversalwellen wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit unendlich gross für $\lambda=K$. Dies stimmt überein mit der alten Theorie von Mosotti, nach welcher λ gleich dem Werthe K_0 für das Induktionsvermögen des leeren Raumes, und $\mu_0=1$ ist. Nach dieser

Theorie findet im leeren Raume oder in der Luft weder eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Transversal- noch der Longitudinalwellen statt.

Nach der Maxwell'schen Theorie kommen nur Transversal-schwingungen vor, und zwar ist ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit V_2 gleich derjenigen des Lichtes v . Für ein elektromagnetisches System ist erfahrungsgemäss K_0 der reciproke Werth des Quadrates der Lichtgeschwindigkeit, $\mu_0 = 1$. Gibt man λ den Werth 0, so folgt $V_2 = v$; für $\lambda > 0$ erhält man einen Werth von V_2 , der grösser ist, als die Lichtgeschwindigkeit. Die Maxwell'sche Theorie ergibt sich also aus der Helmholtz'schen, wenn man in letzterer $\lambda = 0$ setzt.

48. Wir wollen die Gleichungen mit diesem Werthe von λ wieder aufnehmen. Es ist dann

$$\begin{aligned} \frac{4\pi f}{K} &= -\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial t}, \\ 4\pi u &= \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}, \\ a = \mu \alpha &= \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}, \\ J &= \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0. \end{aligned}$$

Differentiiren wir die zweite dieser Gleichungen und die beiden entsprechenden für v und w nach resp. x , y , z und addiren, so erhalten wir

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

d. h. $\frac{\partial q}{\partial t} = 0$. Dies bedeutet aber: Die Elektrizität ist inkompressibel, die Ströme sind geschlossen. q ändert sich nicht mit der Zeit; ist also q im Anfang $= 0$, so ist die wirkliche Dichtigkeit der Elektrizität immer Null.

Man erkennt, dass bei $\lambda = 0$ das Helmholtz'sche k in die Gleichungen überhaupt nicht eingeht; demnach gelangt man zur Maxwell'schen Theorie, wenn man $\lambda = \text{Null}$ setzt und k beliebig lässt.

Helmholtz sagt in seiner Vorrede, dass man von seiner zur Maxwell'schen Theorie gelange, wenn man $k = 0$ setze. Dies ist nicht genau; man erhält wohl unter dieser Bedingung die Gleichung $J = 0$ (§ 26), aber um aus der Formel für V_2 die Geschwindigkeit der Transversalwellen in der Maxwell'schen Form abzuleiten, muss

man nothwendigerweise Hülfsypothesen anwenden. Dies führt auch Helmholtz im Verlaufe seiner Arbeit aus und vervollständigt auf diese Weise die in der Vorrede ausgesprochene Behauptung; trotzdem ist Mancher dadurch irre geleitet worden¹⁾.

Nimmt man dagegen $\lambda=0$ an, so genügt dies allein schon. Es ist übrigens keineswegs verwunderlich, dass man k nicht einen ganz speciellen Werth ertheilen muss, um die Maxwell'sche Theorie mit der Helmholtz'schen in Einklang zu bringen: Maxwell betrachtet nämlich nur geschlossene Ströme, k muss also immer aus den Gleichungen herausfallen.

Wir haben bis jetzt nur gezeigt, worin die Maxwell'sche Theorie besteht, und wie man sie mit der Helmholtz'schen in Uebereinstimmung bringen kann. Wir müssen nun noch die Gründe angeben, weshalb sie vor allen anderen den Vorzug verdient.

49. Wir kommen nochmals auf die Transversalwellen zurück: Der Strom ist nach OY gerichtet, die magnetische Kraft nach OZ. Diese beiden Störungen, die elektrische und die magnetische, verlaufen in der Wellenebene, stehen aber senkrecht auf einander.

Das Licht ist nach Maxwell eine elektromagnetische Störung; man kann jedoch annehmen, dass die Polarisationssebene des Lichtes auf der Richtung der elektrischen Schwingungen senkrecht steht und die magnetischen Schwingungen enthält, oder auch umgekehrt. Die Frage nach der Richtung der Schwingungen in Bezug auf die Lage der Polarisationssebene scheint im Gebiete der Elektrizität der experimentellen Untersuchung besser zugänglich zu sein, als im Gebiete der Optik, und wir dürfen von elektromagnetischen Experimenten Beweise zu Gunsten der einen oder der anderen Hypothese erwarten. Nach Maxwell's Ansicht ist die Richtung der Lichtschwingungen parallel zur Richtung der magnetischen Kraft, diese aber liegt in der Polarisationssebene — entsprechend der Neumann'schen und entgegen der Fresnel'schen Hypothese; der Strom ist senkrecht zur Polarisationssebene gerichtet.

¹⁾ Helmholtz sagt nämlich, um von seiner Theorie zur Maxwell'schen zu gelangen, habe man

$$k=0, \quad \epsilon=\infty, \quad \theta=\infty$$

zu setzen, was nach unserer Bezeichnungsweise heisst

$$k=0, \quad \lambda=0, \quad z=\infty.$$

Es ist nun gar keine Veranlassung dazu vorhanden, $k=0$ und $z=\infty$ zu setzen; führt man $\lambda=0$ ein, so kommt man unmittelbar zur Maxwell'schen Theorie, welches auch die Werthe von k und z sein mögen.

Eine Bemerkung über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Longitudinalwellen möge hier noch Platz finden. Ist λ von Null verschieden, so könnte man sich von diesen frei machen, indem man $k=0$ setzte; zu demselben Resultate würde man gelangen für ein negatives k . Man käme dann zu den Ideen von Cauchy¹⁾ zurück, in diesem Falle ist jedoch das Gleichgewicht labil, wie wir im § 34 nachgewiesen haben.

Ich habe übrigens auch in der „mathematischen Theorie des Lichtes“ auseinandergesetzt, dass der Aether sich im labilen Gleichgewichte befände, wenn die Cauchy'schen Ansichten gültig wären.

¹⁾ Mathematische Theorie des Lichtes § 47.

Kapitel VI.

Die Einheit der elektrischen Kraft.

50. Wir fanden, dass man, abgesehen von den neuen Hertz'schen Untersuchungen, kein Mittel besass, um die Grösse λ experimentell zu bestimmen. Welche Gründe hatte man dann dafür, der Maxwell'schen Elektrodynamik den Vorzug zu geben? Zunächst lässt sich die Thatsache, dass die Grösse v , das Verhältniss der Einheiten, gleich der Lichtgeschwindigkeit ist, ganz natürlich in dieser Theorie erklären; dies würde im Allgemeinen nicht mehr der Fall sein, wenn λ von Null verschieden wäre.

Aber es gibt noch einen anderen Grund; dieser ist in einer Abhandlung von Hertz¹⁾ ausgeführt, der die Maxwell'schen Gleichungen in eine symmetrische und sehr elegante Form brachte.

Von den Gleichungen des § 48, welche die Komponenten der elektrischen Verschiebung geben:

$$\begin{cases} \frac{4\pi f}{K} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial t}, \\ \frac{4\pi g}{K} = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial t}, \\ \frac{4\pi h}{K} = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial t}, \end{cases}$$

differentiiren wir die zweite nach z , die dritte nach y und subtrahiren, dann erhalten wir:

$$(1) \quad \frac{4\pi}{K} \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) = -\frac{\partial^2 H}{\partial y \partial t} + \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial t} = -\frac{\partial a}{\partial t}$$

und zwei analoge Gleichungen.

¹⁾ Ueber die Beziehungen zwischen den Maxwell'schen elektrodynamischen Grundgleichungen und den Grundgleichungen der gegnerischen Elektrodynamik. Wied. Ann. XXIII S. 84 (1884).

Andrerseits lassen sich die Gleichungen für die Stromkomponenten als Funktion der magnetischen Induktion in der Form schreiben (cf. Bd. I § 167):

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} 4\pi \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z} \right), \\ 4\pi \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x} \right), \\ 4\pi \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right). \end{array} \right.$$

Aus der Gleichung (1) und der ersten der Gleichungen (2) folgt nun:

$$(3) \quad \left\{ \frac{\partial a}{\partial t} = - \frac{4\pi}{K} \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \right), \right.$$

$$(4) \quad \left. \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} = + \frac{1}{4\pi\mu} \left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z} \right). \right. \right.$$

Andrerseits hat man:

$$(5) \quad \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0 \quad (\text{cf. Bd. I § 21}) \right.$$

$$(6) \quad \left. \left\{ \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} = 0 \quad (\text{cf. Bd. I § 102}). \right. \right.$$

Die Gleichungen (4) und (6) ergeben sich aus den Gleichungen (3) und (5), wenn man f, g, h mit a, b, c vertauscht und gleichzeitig $-\frac{4\pi}{K}$ mit $\frac{1}{4\pi\mu}$. Hierin besteht eine bemerkenswerthe Analogie zwischen der elektrischen Verschiebung und der magnetischen Kraft¹⁾.

¹⁾ Die Symmetrie tritt noch deutlicher hervor, wenn man mit Hertz die magnetische Kraft und die elektrische Kraft in's Auge fasst, und wenn man das System der Hertz'schen Einheiten annimmt, welches in der Mitte zwischen den beiden gebräuchlichen Systemen steht, dem elektrostatischen und dem elektromagnetischen. Die Gleichungen (3) und (4) lassen sich dann schreiben:

$$\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial t} = - \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right),$$

$$\frac{1}{v} \cdot \frac{\partial X}{\partial t} = \left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \right).$$

51. Diese von Hertz nachgewiesene Reciprocität lässt sich in einer von Blondlot¹⁾ gefundenen Form wiedergeben.

Eine elektrische Masse möge sich verschieben; dann zeigen die Untersuchungen von Rowland, dass eine solche Verschiebung die elektrodynamischen Wirkungen eines Stromes hervorbringt; man erhält also ein magnetisches Feld. Verschiebt sich andererseits ein beweglicher Magnetpol in der Nähe von Leitern, so gibt er zu Induktionswirkungen Veranlassung. Nach der Ansicht von Maxwell lässt die Verschiebung dieses Poles in einem Dielektrikum auch in letzterem elektromotorische Induktionskräfte entstehen, mit dem einzigen Unterschiede, dass diese Induktionskräfte im Dielektrikum eine elektrische Verschiebung anstatt eines Leiterstromes hervorbringen; die Bewegung des Magnetpoles erzeugt also ein elektrisches Feld. Man kann die Wechselbeziehung zwischen den elektrischen und den magnetischen Erscheinungen folgendermaassen aussprechen: Wenn zwei Pole, ein elektrischer und ein magnetischer, dieselbe Verschiebung erleiden, so bringen sie das gleiche Feld hervor.

Ein elektrischer Strom verursacht dieselben elektromagnetischen Wirkungen, wie ein elektrischer Konvektionsstrom; ebenso lassen sich magnetische Ströme herstellen, welche dieselbe Wirkung haben, wie die Bewegung eines magnetischen Pols. Nimmt nämlich der Magnetismus eines Magnets AB ab, so wirkt das ebenso, wie wenn eine gewisse Quantität des südlichen Fluidum vom Südpole A nach dem Nordpole B übergeführt worden wäre. Nun waren die Komponenten des elektrischen Stromes gegeben durch die Derivirten der Komponenten der dielektrischen Polarisation

$$u = \frac{\partial f}{\partial t}; \quad v = \frac{\partial g}{\partial t}; \quad w = \frac{\partial h}{\partial t};$$

ebenso werden hier die Komponenten des magnetischen Stromes als die Derivirten der Komponenten der magnetischen Polarisation A, B, C dargestellt werden; sie sind also

$$\frac{\partial A}{\partial t}, \quad \frac{\partial B}{\partial t}, \quad \frac{\partial C}{\partial t}.$$

Dieser Magnet, dessen Magnetismus sich vermindert, lässt sich auffassen als ein nicht geschlossenes Solenoid, das von einem elektrischen Strom mit abnehmender Intensität durchflossen wird.

52. Ein geschlossenes Solenoid mit abnehmendem Strome ist also gleichwerthig mit einem geschlossenen magnetischen Strome; anderer-

¹⁾ Journal de physique (2) IX p. 177.

seits wird ein geschlossener elektrischer Strom dieselbe Wirkung haben wie ein magnetisches Blatt; ein geschlossener magnetischer Strom kann endlich eine Doppelschicht von Elektrizität repräsentiren, welche auf einer ringsum begrenzten Oberfläche vertheilt ist, d. h. ein elektrisches Blatt.

So wird ein von einem veränderlichen Strome durchlaufenes geschlossenes Solenoid dasselbe elektrostatische Feld erzeugen, wie ein geschlossener magnetischer Strom oder ein elektrisches Blatt; wir wollen dies durch eine direkte Rechnung bestätigen. Das von einem System elektrischer Elemente herrührende Potential, von denen jedes aus zwei absolut genommen gleichen positiven und negativen Elektrizitätsmengen besteht, ist gegeben durch die Formel

$$\int \frac{\mu}{\lambda} d\tau \left(l' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + m' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} + n' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \right);$$

hierbei ist $\mu d\tau$ das elektrische Moment des Elements und l' , m' , n' die Richtungskosinus der Polarisationsrichtung im Punkte x' , y' , z' . Nun ist nach der Definition ein elektrisches Blatt nichts anderes, als ein System von elektrischen Elementen, welche normal zur Oberfläche des Blattes gelagert sind; auf diese Weise entspricht jedem Oberflächenelemente ein elektrisches Element. Auf einem Blatte gibt es eine unendlich grosse Anzahl von Oberflächenelementen; das Moment eines Elements ist $H d\omega'$, wenn man unter $d\omega'$ die Fläche des Elementes versteht und unter H eine Konstante, welche die Stärke des Blattes definiert. Demnach ist

$$(7) \quad q = \frac{H}{\lambda} \int \left(l' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + m' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} + n' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \right) d\omega',$$

wobei l' , m' , n' die Richtungskosinus der Normalen auf $d\omega'$ bedeuten.

53. Hat man andererseits ein geschlossenes Solenoid, dessen Leitlinie mit der Umgrenzung des Blattes zusammenfällt, so ist die Komponente dF des Vektorpotentials, welches von einem der Partial-elemente mit der Oberfläche $d\omega_1$ herrührt, nach § 37

$$dF = i d\omega_1 \left(m_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} - n_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} \right),$$

wobei l_1 , m_1 , n_1 die Richtungskosinus der zum Elemente $d\omega_1$ gehörigen Normalen, d. h. die Richtungskosinus der Tangente an die Leitlinie des Solenoids im Punkte (x', y', z') bedeuten.

Es gilt also

$$l_1 = \frac{dx'}{\varepsilon}; \quad m_1 = \frac{dy'}{\varepsilon}; \quad n_1 = \frac{dz'}{\varepsilon},$$

wenn man unter ε die Entfernung zwischen zwei Elementarströmen des Solenoids versteht. Bezeichnet man mit η die von einem Elementarstrom umschlossene Oberfläche $d\omega_1$, so hat man also:

$$dF = \frac{i\eta}{\varepsilon} \left[\frac{\partial}{\partial z'} \frac{1}{r} dy' - \frac{\partial}{\partial y'} \frac{1}{r} dz' \right].$$

$\frac{\eta}{\varepsilon}$ ist hierbei eine Konstante, denn nach der gewöhnlichen Definition von den Solenoiden nimmt man sowohl η als auch ε als konstant an. Durch Integration erhält man für das gesammte Solenoid:

$$F = \frac{i\eta}{\varepsilon} \int \left[\frac{\partial}{\partial z'} \frac{1}{r} dy' - \frac{\partial}{\partial y'} \frac{1}{r} dz' \right],$$

wobei das Integral längs des geschlossenen Umfanges zu nehmen ist.

Man kann dasselbe in ein Oberflächenintegral umformen, das über die Fläche auszudehnen ist, welche durch die geschlossene Kurve begrenzt wird, und erhält dann:

$$F = \frac{i\eta}{\varepsilon} \int d\omega' \left[l' \left(-\frac{\partial^2}{\partial y'^2} \frac{1}{r} - \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \frac{1}{r} \right) + m' \frac{\partial^2}{\partial y' \partial x'} \frac{1}{r} + n' \frac{\partial^2}{\partial x' \partial z'} \frac{1}{r} \right]$$

und, da $\frac{\partial^2}{\partial y'^2} \frac{1}{r} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{1}{r}$, weil r eine Funktion von $y - y'$ ist:

$$F = \frac{i\eta}{\varepsilon} \int d\omega' \left[l' \left(-\frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{1}{r} - \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \frac{1}{r} \right) + m' \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \frac{1}{r} + n' \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \frac{1}{r} \right]$$

oder

$$(8) \quad F = \frac{i\eta}{\varepsilon} \int d\omega' \left[l' \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{r} + m' \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{1}{r} + n' \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \frac{1}{r} \right],$$

denn $\nabla \frac{1}{r} = 0$. Die X-Komponente der elektromotorischen Induktionskraft, welche von den Intensitätsschwankungen des Solenoids

herrührt, ist $-\frac{\partial F}{\partial t}$; wenn nur die Intensität sich ändert und das Solenoid sich nicht bewegt, so ist das Integral auf der rechten Seite eine Konstante, und wir haben

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{\frac{\partial i}{\partial t}} = \frac{F}{i}.$$

54. Wenn das Blatt ein Potential φ besitzt, so ist die parallel zu OX gerichtete Komponente der elektrischen Kraft bis auf das Vorzeichen (cf. (7) § 52)

$$(9) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\Pi}{\lambda} \int \left[l' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + m' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} + n' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z} \right] d\omega'.$$

Das Integral stimmt mit dem Integrale der Gleichung (8) überein. Aus (8) und (9) erhält man:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\Pi \epsilon}{\lambda \eta} \cdot \frac{F}{i} = \frac{\Pi \epsilon}{\lambda \eta} \left(\frac{\partial F}{\partial t} : \frac{\partial i}{\partial t} \right),$$

oder

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial i}{\partial t} \cdot \frac{\lambda \eta}{\Pi \epsilon} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Das elektrische Blatt bringt eine elektromotorische Kraft

$$\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x}, -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$$

hervor, das geschlossene Solenoid mit veränderlichem Strome eine Kraft

$$\left(-\frac{\partial F}{\partial t}, -\frac{\partial G}{\partial t}, -\frac{\partial H}{\partial t} \right).$$

Die hierdurch erzeugten elektrostatischen Felder unterscheiden sich nur durch einen konstanten Faktor; ist dieser gleich 1, dann sind die Felder identisch; in diesem Falle muss die Stärke Π des Blattes der Gleichung genügen:

$$\Pi = \frac{\lambda \eta}{\epsilon} \cdot \frac{\partial i}{\partial t}.$$

Wir wollen voraussetzen, dass i variabel ist, aber $\frac{\partial i}{\partial t}$ konstant; dann wird sich das erzeugte Feld nicht mit der Zeit verändern; es wird $\frac{\partial F}{\partial t}$ konstant sein, und ebenso

$$f = -\frac{4\pi}{K-\lambda} \cdot \frac{\partial F}{\partial t}.$$

In diesem Falle ist $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, und es treten keine Verschiebungsströme auf; ist im Gegensatze dazu $\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$ nicht Null, so würde ein Verschiebungsstrom entstehen und die Erscheinungen wären wesentlich complicirter.

Für ein geschlossenes Solenoid ist $Fdx + Gdy + Hdz$ ein vollständiges Differential; die magnetische Wirkung muss also Null sein, denn wir haben:

$$\alpha = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} \text{ etc.}$$

Da die elektromotorische Kraft der nach der Zeit genommene Differentialquotient von

$$\int (F dx + G dy + H dz)$$

ist, so ist dieselbe für einen geschlossenen Strom ebenfalls Null.

Die Induktionswirkung eines veränderlichen geschlossene Solenoids auf einen geschlossenen Strom ist also Null, aber es ist kein Grund vorhanden, dass diese Wirkung auf einen offenen Strom ebenfalls Null sein sollte und dass demnach das Solenoid kein elektrisches Feld erzeugt.

55. Die Betrachtung ähnlicher geschlossener, veränderlicher Solenoide, welche Blättern gleichwerthig sind, gestattet uns, eine Entscheidung zwischen den verschiedenen elektrodynamischen Theorien zu treffen, indem wir uns auf eine Hypothese stützen, welcher Hertz den Namen „Princip von der Einheit der elektrischen Kraft“ gegeben hat.

Dies Princip lässt sich an ein anderes anschliessen, das allgemeine Gültigkeit erlangt hat, und welches man das „Princip von der Einheit der magnetischen Kraft“ nennen kann. Ist die magnetische Kraft in einem Punkte ihrer Grösse und Richtung nach gegeben, so kümmert uns ihr Ursprung wenig. Die Kenntniss des magnetischen Feldes genügt zur Bestimmung der Vorgänge daselbst,

ohne Rücksicht auf die Ursache, welche das Feld erzeugte. Nun wissen wir, dass sich die Wirkung eines geschlossenen elektrischen Stromes durch diejenige eines gleichwerthigen magnetischen Blattes ersetzen lässt; ersetzt man nun zwei Blätter durch zwei Ströme, welche diesen hinsichtlich ihrer Wirkung äquivalent sind, so wird diese Gleichwerthigkeit auch in einem magnetischen Felde gültig bleiben, und demnach werden die beiden Ströme auf einander genau dieselben Wirkungen ausüben, wie die beiden Blätter.

Dies Princip könnte zu selbstverständlich erscheinen, als dass man noch nöthig hätte, es besonders zu betonen. Man wird nämlich sagen: „Da doch jeder Strom wie eines dieser Blätter auf das andere Blatt wirkt, ist es dann nicht ganz ausser Zweifel, dass auch ihre gegenseitige Wirkung dieselbe sein wird wie diejenige der beiden Blätter?“ Alle, die zu solchen Schlussfolgerungen geneigt sind, möchte ich nur an die Anekdote von den Arago'schen Schlüsseln erinnern, welche Bertrand in der Vorrede zu seiner Thermodynamik so geistvoll erzählt¹⁾.

Wir wollen nun für die Elektrizität dies Princip anwenden, welches für den Magnetismus allgemein im Gebrauch ist. Ein ringförmiger Magnet, dessen Magnetismus sich verändert, oder was auf dasselbe hinauskommt, ein geschlossenes Solenoid, das von einem veränderlichen Strome durchlaufen wird, hat hinsichtlich des von ihm hervorgebrachten elektrischen Feldes die gleiche Wirkung wie ein elektrisches Blatt von bestimmter Stärke. Es wird also ebenso wie das Blatt auf ein anderes elektrisches Blatt einwirken, und nach dem Principe von der Actio und Reactio auch von dem zweiten Blatte eine gleich grosse, aber entgegengesetzte Einwirkung erfahren. So erleidet also ein geschlossenes veränderliches Solenoid in einem elektrischen Felde eine mechanische Wirkung; und, da ein ähnliches Solenoid ein elektrisches Feld hervorbringt, so wirken auch zwei geschlossene, veränderliche Solenoide mechanisch ebenso auf einander ein, wie zwei gleichwerthige elektrische Blätter. Dies ist das Princip von der „Einheit der elektrischen Kraft“.

¹⁾ Als Ampère die gegenseitige Anziehung der Ströme entdeckt hatte, erntete er verdienstermaassen die allseitigste Bewunderung, es fehlte aber natürlich auch nicht an Missgünstigen, die sein Verdienst zu schmälern suchten. „Da man wusste“, äusserte einer der Letzteren, „dass zwei Ströme auf ein und denselben Magneten eine Einwirkung ausüben, war es doch wohl von vornherein klar, dass sie auch eine Einwirkung auf einander äussern würden.“ Da zog Arago, der dies hörte, zwei Schlüssel aus der Tasche und sagte: „Jeder von diesen Schlüsseln zieht einen Magnet an; glauben Sie wohl, dass sie sich deshalb auch gegenseitig anziehen werden?“

Nun ist von allen elektrodynamischen Theorien, — derjenigen, bei welcher $\lambda = K_0$ ist, d. h. gleich dem specifischen Induktionsvermögen des leeren Raumes oder der Luft, ferner der Maxwell'schen, wo $\lambda = 0$ ist, und den neueren, nach welchen λ einen zwischen diesen beiden liegenden Werth besitzen soll, — die Maxwell'sche Theorie die einzige, welche mit dem Principe von der Einheit der elektrischen Kraft übereinstimmt. Nach der alten elektrodynamischen Theorie würde nämlich die Wirkung zweier geschlossenen Solenoide auf einander thatsächlich immer Null sein, ob nun die Ströme, welche die Solenoide durchfliessen, konstant oder veränderlich sein mögen. In den neueren Theorien aber, wo λ einen zwischen 0 und K_0 liegenden Werth hat, erhält man für die gegenseitige Wirkung zweier geschlossenen veränderlichen Solenoide einen Koeffizient, der von demjenigen abweicht, welcher die Wirkung zweier den Solenoiden gleichwerthiger elektrischer Blätter auf einander charakterisirt.

56. Wir wollen jetzt die Arbeit τ berechnen, welche bei der relativen Lagenveränderung der beiden Blätter geleistet wird; sie ist gleich der Variation dU der elektrostatischen Energie. In gleicher Weise bestimmen wir die bei der Verschiebung der beiden Solenoide geleistete Arbeit; dieselben werden von Strömen i und i' durchflossen, welche von Elementen mit den elektromotorischen Kräften E und E' unterhalten werden; die Widerstände seien R und R' . Die Variation der Energie setzt sich zusammen aus der Variation dT der elektromotorischen Energie, vermehrt um die Variation dU' der elektrostatischen Energie. Wir haben also:

$$\tau' + E i dt + E' i' dt - R i^2 dt - R' i'^2 dt = dT + dU';$$

ferner

$$T = \frac{1}{2} (L i^2 + 2 M i i' + N i'^2) \quad \text{und hier} \quad = \frac{1}{2} (L i^2 + N i'^2),$$

denn $M = 0$, da ein geschlossenes Solenoid auf einen ausserhalb befindlichen geschlossenen Strom keine Wirkung ausübt.

Das Ohm'sche Gesetz liefert die Beziehungen (cf. Bd. I § 157):

$$\left\{ \begin{array}{l} E - Ri = \frac{\partial(Li)}{\partial t}, \\ E' - R'i' = \frac{\partial(Ni')}{\partial t}. \end{array} \right.$$

Wir setzen voraus, dass die Solenoide *sich verschieben, ohne gleichzeitig eine Gestaltsänderung zu erleiden*. Dann ist $dT = Lidi + N'i'di'$ und somit

$$\tau' + Lidi + N'i'di' = Lidi + N'i'di' + dU',$$

also

$$\tau' = dU',$$

d. h. die geleistete Arbeit ist gleich der Variation der elektrostatischen Energie.

Wir vergleichen nun U und U' . Im Allgemeinen haben wir (§ 43)

$$U = \frac{\lambda}{8\pi} \int \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau + \frac{2\pi}{K - \lambda} \int (f^2 + g^2 + h^2) d\tau.$$

Andrerseits ist

$$f = - \frac{K - \lambda}{4\pi} \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \right).$$

Es wird also:

$$U = \frac{\lambda}{8\pi} \int \varepsilon^2 d\tau + \frac{K - \lambda}{8\pi} \int \zeta^2 d\tau,$$

indem wir setzen

$$\varepsilon^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2,$$

wobei ε die elektrostatische elektromotorische Kraft bezeichnet, und

$$\zeta^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial t} \right)^2,$$

wobei ζ die gesammte elektromotorische Kraft bedeutet, nämlich die elektrostatische elektromotorische Kraft, vermehrt um die Induktionskraft.

Im ersteren Falle, wo es sich um zwei Blätter handelt, ist $\varepsilon = \zeta$, und

$$U = \frac{K}{8\pi} \int \zeta^2 d\tau.$$

Im anderen Falle tritt ausser der Induktionskraft keine elektromotorische Kraft auf; es ist also

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0; \quad \varepsilon = 0.$$

Die Solenoide sollen nun unserer Annahme nach den Blättern gleichwerthig sein, d. h. der Werth der gesammten elektromotorischen Kraft ζ in einem Punkte ist in beiden Fällen der gleiche. Demnach wird:

$$U' = \frac{K - \lambda}{8\pi} \int \zeta^2 dt;$$

es folgt also

$$\frac{U}{U'} = \frac{K}{K - \lambda}; \quad \frac{\tau}{\tau'} = \frac{dU}{dU'} = \frac{K}{K - \lambda}.$$

Ist das angenommene Princip richtig, d. h. üben die beiden Solenoide auf einander die gleiche Wirkung aus, wie die beiden ihnen gleichwerthigen Blätter, dann muss $\tau = \tau'$ sein, d. h. auch $dU = dU'$ und somit $\lambda = 0$. *Die Maxwell'sche Theorie ist also die einzige, welche sich mit dem Principe von der Einheit der elektrischen Kraft verträgt.*

Ein anderer, interessanter, aber complicirterer Fall ist derjenige, wo man es mit einem veränderlichen Solenoid und einem Blatte zu thun hat.

Um die Arbeit zu berechnen, welche durch die gegenseitige Wirkung dieses Solenoids und des Blattes geleistet wird, kann man ebenfalls das Princip von der Erhaltung der Energie anwenden; aber die Rechnung wird weit schwieriger, als in den beiden oben behandelten Fällen. Man muss dann nämlich auch noch die elektrodynamische Wirkung der Konvektionsströme berücksichtigen, welche von der Verschiebung der das Blatt bildenden elektrischen Massen herrühren (cf. Kap. XII Zusatz I).

Nach der Ansicht von Hertz findet ausser der elektrodynamischen Wirkung, welche zwischen zwei Strömen auftritt, auch noch eine elektrostatische Wirkung statt, vorausgesetzt, dass die Ströme veränderliche Stärke haben. Es ist nicht unmöglich, dass es gelingt, diese Wirkung auch experimentell nachzuweisen. Kann man nicht auf diese Weise die von Elihu Thomson gefundenen eigenthümlichen Erscheinungen erklären? In der leitenden Masse entstehen Induktionsströme unter dem Einflusse des wechselnden Feldes, in welchem sie sich befindet; man kann nun mit Hertz annehmen, dass eine direkte elektrostatische Wirkung des inducirenden Wechselstromes auf die geschlossenen oder offenen veränderlichen Ströme auftritt, welche durch Induktion in der leitenden Masse entstehen.

Kapitel VII.

Kurze Beschreibung der Hertz'schen Versuche¹⁾.

57. Die weite Ausbreitung der Maxwell'schen Ideen hatte auf den Fortschritt unserer Wissenschaft den glücklichsten Einfluss. Sie rief eine grosse Anzahl von Untersuchungen hervor, welche darauf hinzielten, die Theorien des englischen Gelehrten und speciell die elektromagnetische Lichttheorie, eine der kühnsten Schöpfungen seines gewaltigen Geistes, experimentell zu bestätigen.

Aber bis in die letzten Jahre bezogen sich diese Bestätigungen auf Punkte, welche den fundamentalen Hypothesen ziemlich fern lagen, und es wäre vermessen gewesen, auf Grund derselben die Möglichkeit der Entstehung des Lichtes aus elektrischen Störungen behaupten zu wollen. Erst als im Jahre 1888 Hertz Störungen hervorrief, deren Periode nur einige Hundertmillionstel der Sekunde betrug, trat diese Entstehungsweise in das Stadium der Wahrscheinlichkeit. So eröffnete Hertz den Forschern ein neues Gebiet für ihre Untersuchungen, das ihnen gestattete, einer direkten Bestätigung der elektromagnetischen Lichttheorie näher zu kommen. Man kann nun zwar noch nicht entscheiden, ob die jüngsten nach dieser Richtung hin angestellten Versuche die Theorie in allen ihren Einzelheiten beweisen oder nicht, da die Genauigkeit der Messungen noch viel zu wünschen übrig lässt, jedenfalls aber liefern die Untersuchungen von Hertz, durch welche er die Uebereinstimmung zwischen der

¹⁾ Dies Kapitel ist vollständig von Herrn Blondin verfasst. Vergleiche: Hertz, Wiedem. Ann. XXXI S. 421: „Ueber sehr schnelle elektrische Schwingungen“. XXXIV S. 155: „Ueber die Einwirkung einer geradlinigen elektrischen Schwingung auf eine benachbarte Strombahn“. XXXIV S. 273: „Ueber Induktionserscheinungen, hervorgerufen durch die elektrischen Vorgänge in Isolatoren“, XXXIV S. 551: „Ueber die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektrodynamischen Wirkungen“. XXXIV S. 609: „Ueber elektrodynamische Wellen im Luftraume und deren Reflexion“. XXXVI S. 1: „Die Kräfte elektrischer Schwingungen, behandelt nach der Maxwell'schen Theorie“. XXXVI S. 769: „Ueber Strahlen elektrischer Kraft“.

Fortpflanzungsart von Licht und von elektrischen Störungen nachwies, eine glänzende Bestätigung für die Hypothese, welche der Theorie zur Grundlage dient.

58. Beschreibung der Apparate. Der von Hertz zum Hervorbringen von sehr kurzen Störungen verwendete Apparat erhielt den Namen Erreger (primärer Leiter). Er besteht aus einer starken Ruhmkorff'schen Spule, deren Pole P und P' (Fig. 9) mit zwei horizontalen kupfernen Drähten l und l' von etwa 0,5 cm Durchmesser verbunden sind. Die zwei einander gegenüberstehenden Enden dieser Drähte laufen in zwei Kugeln b und b' von vollkommen polirtem Messing aus, deren Durchmesser ca. 3 cm und deren Abstand von einander ungefähr 0,75 cm beträgt. An den beiden anderen Enden

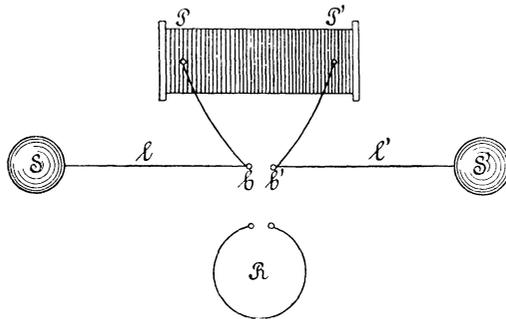


Fig. 9.

befinden sich zwei Zinkkugeln S und S' von 30 cm Durchmesser; die Entfernung ihrer Mittelpunkte, welche man willkürlich variiren kann, beträgt ungefähr einen Meter.

Aus Bequemlichkeitsrücksichten änderte Hertz bei bestimmten Experimenten diese Anordnung einigermaßen ab. Bei einigen derselben ersetzte er die beiden Kugeln durch quadratische Messingplatten von 40 cm Seitenlänge, welche bald horizontal, bald senkrecht zur Axe der Drähte l und l' aufgestellt waren; die Entfernung der Mitten dieser Platten betrug etwa einen Meter. Bei anderen Versuchen endlich wurden die Pole der Spule einfach mit zwei Messingcylindern von 13 cm Länge und 3 cm Durchmesser verbunden; an den beiden einander gegenüberliegenden Enden waren dann Kugelflächen von 2 cm Krümmungsradius angeschliffen.

59. Die Art der Thätigkeit des Erregers ist eine recht verwickelte.

Wir nehmen zunächst an, die Kugeln seien von der Spule getrennt und auf verschieden hohe Potentiale gebracht; ist diese

Potentialdifferenz genügend, um zu einem Funken zwischen den Kugeln b und b' Veranlassung zu geben, dann entladen sich die letzteren, und wenn die Werthe für den Widerstand R , die Selbstinduktion L und die Kapazität C der Ungleichung

$$R^2 < \frac{4L}{C}$$

genügen¹⁾, dann ist diese Entladung oscillatorisch. Da nun die letztere Bedingung in Folge der Dimensionen des Apparates erfüllt ist, so entsteht eine Reihe von Oscillationen und damit auch von elektrischen Störungen, deren Periode nach der Formel von Sir W. Thomson durch den Ausdruck

$$2\pi\sqrt{LC}$$

gegeben ist.

Die Werthe von L und C in elektromagnetischen Einheiten sind sehr gering; daher ist die Periode von der Ordnung des Hundertmillionstel der Sekunde. Bei der zuletzt beschriebenen Modifikation ist sie sogar noch ungefähr zehn Mal kleiner.

Nun ist aber die Dauer dieser oscillatorischen Entladung eine ungeheuer kurze, man muss also, um die Erscheinungen der Beobachtung zugänglich zu machen, die Kugeln ungemein oft laden; diese Aufgabe erfüllt die Spule. Der von diesem Apparate gelieferte Induktionsstrom ist selbst oscillatorisch, und zwar ist die Periode desselben nach den Untersuchungen von Bernstein und Mouton von der Ordnung des Hunderttausendstel der Sekunde. Verbindet man also die Kugeln mit den Polen der Spule, so werden dieselben ungefähr hunderttausend Mal in der Sekunde geladen.

60. Bringt man nun in die Nähe des Erregers einen fast geschlossenen Stromkreis, dessen Enden etwa um Bruchtheile eines Millimeters von einander abstehen, dann sieht man im Allgemeinen an der Unterbrechungsstelle eine Reihe von Funken überspringen. Aber für eine und dieselbe Stellung des Kreises wechselt die Länge und der Glanz der Funken mit der Form und den Dimensionen des Kreises. Für jede Gestalt, z. B. die kreisförmige, gibt es eine Grösse, bei welcher der Funken ein sehr deutliches Maximum zeigt. In der Akustik begegnet man einer ähnlichen Erscheinung: Ein kugelförmiger Resonator geräth unter dem Einflusse eines Tones von gegebener Periode nur dann in Schwingungen, wenn der Radius desselben eine passende Grösse besitzt. Auf Grund dieser Analogie hat

¹⁾ Die Ableitung siehe § 69.

man dem sekundären Stromkreise, in welchem der Erreger Entladungen hervorruft, den Namen Resonator gegeben; man sagt, er sei auf den Erreger gestimmt, wenn er nach Form und Grösse so beschaffen ist, dass er das Maximum der Funken zeigt.

Bei den ersten Untersuchungen von Hertz bestand der Resonator aus einem Drahte von 2 mm Durchmesser, der in ein Quadrat von 60 cm Seitenlänge gebogen war; ein an der Unterbrechungsstelle angebrachtes Funkenmikrometer (Funkenstrecke) gestattete, die Funkenlänge mit äusserster Genauigkeit zu messen. In Folge der glücklichen Wahl der Dimensionen war der Resonator fast vollkommen auf den Erreger gestimmt; man vollendete die Justirung des Apparates mittels zweier kleinen Metallblätter, welche an den Enden des Resonators angelöthet waren und die Oberfläche zu vergrössern und verringern gestatteten, so dass man die Kapazität verändern konnte, bis man ein Funkenmaximum erhielt.

Bei den meisten späteren Versuchen wandte Hertz die Kreisform an. Für den mit Kugeln oder Platten versehenen Erreger besteht der darauf abgestimmte Resonator R (Fig. 10) aus einem 2 mm dicken Drahte, der zu einem Kreise von 35 cm Radius zusammengebogen war. Bei der letzten Modifikation des Erregers, für welche die Vibrationen eine kürzere Dauer besitzen, ist der Resonatordraht nur 1 mm dick und bildet einen Kreis von nur 7,5 cm Radius. Für diesen selben Erreger wandte Hertz auch noch einen Resonator an, der folgendermaassen hergestellt war: Zwei gerade Drähte von 5 mm Durchmesser und 50 cm Länge waren so aufgestellt, dass der eine die Verlängerung des anderen bildete und zwischen beiden nur ein Zwischenraum von 5 cm blieb; von den einander gegenüberliegenden Endpunkten gingen zwei Drähte von 1 mm Durchmesser und 15 cm Länge ab, welche zu den ersteren senkrecht und unter einander parallel gerichtet waren und in ein Funkenmikrometer ausliefen.

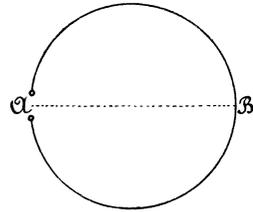


Fig. 10.

61. Untersuchung des von dem Erreger erzeugten Feldes. In Folge der Symmetrie des Erregers in Bezug auf die Gerade, welche die Mittelpunkte der beiden Kugeln verbindet, müssen die Erscheinungen in allen Ebenen, welche durch diese Axe gehen, die gleichen sein. Es genügt also, eine dieser Ebenen zu untersuchen; am bequemsten ist die Horizontalebene. Aber die durch die Mitte des Erregers gelegte Vertikalebene ist ebenfalls eine Symmetrieebene für

diesen Apparat; der Schnitt dieser Ebene mit der Horizontalebene liefert also eine Symmetrieaxe, welche Hertz die Grundlinie für die Erscheinungen nennt, welche in der letzteren Ebene hervorgebracht werden. In Folge dessen hat sich die Untersuchung auf den Quadranten der Horizontalebene zu beschränken, welcher zwischen der Axe des Erregers und der Grundlinie liegt.

Hertz verwendete zu diesem Zwecke den kreisförmigen Resonator von 35 cm Radius; vermittelt eines passend gewählten Trägers konnte er demselben jede beliebige Lage geben, wobei der Mittelpunkt des Kreises immer in der durch die Axe des Erregers gehenden Horizontalebene liegen musste. Die hierbei erhaltenen Resultate lassen sich folgendermaassen zusammenfassen:

1. Ist die Resonatorebene vertikal, und man dreht den Apparat um seinen Mittelpunkt, so dass der durch die Unterbrechungsstelle gehende Durchmesser, den wir Symmetrieaxe des Resonators nennen wollen, einen vollständigen Kreisbogen beschreibt, dann ändern die Funken ihre Länge. In den beiden Stellungen, bei denen die Symmetrieaxe vertikal gerichtet ist, zeigen die Funken das Maximum der Länge; sie verschwinden dagegen, wenn die Axe horizontal liegt. In den Zwischenstellungen ist die Funkenlänge um so grösser, je mehr sich die Symmetrieaxe der Vertikalen nähert.

2. Die Länge der Funken hängt in dem Augenblicke, wo dieselben ihr Maximum erreichen, für ein und dieselbe Stellung des Resonatormittelpunktes von dem Azimut der Resonatorebene ab. Dies lässt sich dadurch nachweisen, dass man den Resonator um seine vertikal gehaltene Symmetrieaxe dreht; während einer ganzen Umdrehung zeigen dann die Funken zwei Maxima und zwei Minima. Die Azimute, bei denen die Maxima auftreten, liegen um 180° von einander entfernt, dasselbe gilt für die Minima; der Unterschied des Azimuts für ein Maximum und ein Minimum beträgt 90° .

3. In welcher Lage des Resonators die Funkenentladungen ein Maximum oder ein Minimum zeigen, hängt von der Stellung des Resonatormittelpunktes in Bezug auf den Erreger ab.

Bezeichnen wir mit α den Winkel zwischen der Axe SS' (Fig. 11) des Erregers und der Geraden OC , welche die Mitte dieser Axe mit dem Mittelpunkte des Resonators verbindet, und mit β den Neigungswinkel der Resonatorebene und der Geraden OC für den Fall, dass ein Minimum stattfindet, dann wächst der Werth von β von 90° bis zu 180° , wenn der $\sphericalangle \alpha$ von 0° bis zu 90° zunimmt, vorausgesetzt, dass die Entfernung OC weniger als 3 Meter beträgt. Bei grösseren Entfernungen sind die Stellungen des Resonators einander nahezu parallel und senkrecht zu SS' . In jeder Entfernung aber werden die

Minima Null, wenn sich das Centrum des Resonators auf der Grundlinie Oy befindet und seine Ebene mit dieser Grundlinie zusammenfällt.

4. Wenn die Ebene des Resonators horizontal ist, dann hängt die Länge der Funken auch von der Stellung der Symmetrieaxe ab. Die Fig. 12 zeigt in $a_1, a_1', a_2, a_2' \dots$ die Lagen der Unterbrechungsstelle, welchen die Funkenmaxima entsprechen, in $b_1, b_1', b_2, b_2' \dots$ diejenigen, bei welchen Funkenminima stattfinden. Geht man von der Stellung I zur Stellung II des Resonators über, so nähern sich diejenigen Lagen der Unterbrechungsstelle einander, welche den Funkenminima entsprechen, wobei sie die einem Maximum entsprechende Lage einschliessen. In der Stellung III fallen diese drei Lagen der Unterbrechungsstelle zusammen und man bemerkt nur noch ein Maximum in a_3' .

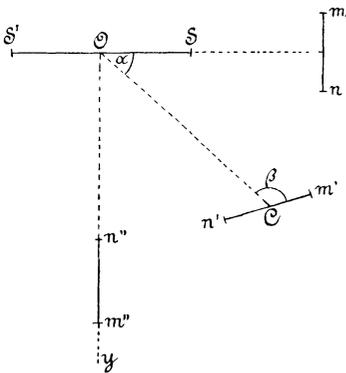


Fig. 11.

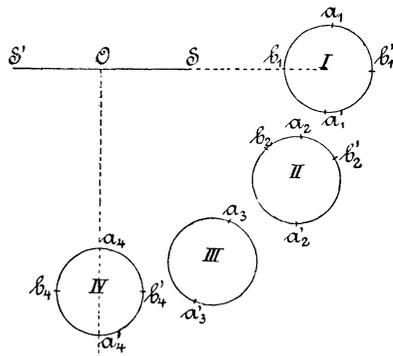


Fig. 12.

5. In einer Entfernung von ungefähr 3 Metern vom Erreger gibt es eine Reihe von Punkten, welche eine geschlossene Zone bilden; in dieser kann man weder Maximum noch Minimum der Funkenlänge konstatiren, wie auch die Stellungen der Ebene des Resonators und seiner Symmetrieaxe beschaffen sein mögen.

Dies letztere Resultat hat eine grosse theoretische Wichtigkeit; Hertz zeigte nämlich auf Grund dieser Erscheinung, dass die elektrischen Wirkungen sich in der Luft mit einer endlichen Geschwindigkeit fortpflanzen.

62. Aenderung des Feldes durch Dielektrika. Damit aber die eben erörterten Resultate zu Stande kommen, muss der Erreger sich in einem unendlich grossen Raume befinden, oder wenigstens, wie

dies bei den Untersuchungen von Hertz der Fall war, in einem vollständig leeren Saale von sehr grossen Dimensionen. Das Feld wird nämlich durch das Vorhandensein von Leitern in der Nähe des Erregers wesentlich beeinflusst.

Dieser störende Einfluss von leitenden Körpern, den Hertz gleich beim Beginne seiner Untersuchungen beobachtete, muss zweifelsohne der Einwirkung zugeschrieben werden, welche die in diesen Leitern durch den Erreger erzeugten Induktionsströme auf den Resonator ausüben. Nun werden nach Maxwell auch die Verschiebungsströme, welche in den Dielektrika entstehen, ebenso wie die Leitungsströme, durch Induktionswirkungen beeinflusst. Um diese Annahme zu bestätigen, genügte es also, zu untersuchen, ob auch ein in der Nähe des Erregers befindliches Dielektrikum eine störende Wirkung auszuüben vermag, wie es bei den Leitern der Fall ist.

Die einzige Schwierigkeit bei diesen Untersuchungen ergab sich aus der Nothwendigkeit, eine beträchtliche Masse der dielektrischen Materie zu verwenden. Hertz wählte zuerst Papier, und zwar setzte er ein rechtwinkeliges Parallelepipedon von 1,5 m Länge, 0,5 m Breite und 1 m Höhe aus Büchern zusammen, auf welches er einen Erreger mit horizontalen Platten legte. Er fand hierbei, dass die Maxima und Minima der Funken nicht mehr bei den gleichen Stellungen der Ebene des Resonators und seiner Symmetrieaxe eintraten, wie bei den vorhergehenden Untersuchungen. Stellt man beispielsweise die Ebene des Resonators vertikal, so erhält man Funken, wenn die Symmetrieaxe horizontal liegt. Sie erreichen ein Minimum, wenn man die Oeffnung um einen Winkel gegen die Grundlinie verschiebt, welcher bei bestimmten Stellungen des Resonators 23° beträgt; aber die Funken hören nicht vollständig auf. Die beiden Maxima treten noch bei der vertikalen Stellung der Symmetrieaxe auf, aber sie sind nicht mehr gleich gross; liegt die Unterbrechungsstelle unten, dann sind die Funken weniger lang, als wenn sie sich oben befindet.

Wurde das Papier durch ein Parallelepipedon von Asphalt oder Pech von den gleichen Dimensionen ersetzt, so blieben die Resultate ebenso unzweifelhaft.

Da man nun hätte behaupten können, dass die beobachteten Einwirkungen von leitenden Materien herrührten, welche in den verwendeten unreinen Substanzen vertheilt waren, so wiederholte Hertz dieselben Versuche mit Dielektrika, welche vollständig rein hergestellt werden konnten, wie Schwefel, Paraffin, Petroleum. Um jedoch die Verwendung zu grosser Massen dieser Substanzen zu umgehen, bediente er sich eines Erregers und eines Resonators, welche um die Hälfte kleiner waren, als die bei den vorhergehenden Unter-

suchungen angewandten Apparate. Die Beobachtung der Funken wurde viel schwieriger, aber die Resultate blieben ebenso beweiskräftig. Die Induktionswirkung der Verschiebungsströme war damit vollständig nachgewiesen.

63. Fortpflanzung in metallischen Drähten. Durch eine neue Serie von Untersuchungen gelang es Hertz, einen anderen wichtigen Beweis zu führen, nämlich den, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Störungen in einem Metalldrahte endlich ist.

Bei diesen Untersuchungen verwandte Hertz einen Erreger mit vertikalen Platten (cf. Fig. 13); hinter einer dieser Platten war eine weitere Platte P von den gleichen Dimensionen aufgestellt, welche durch einen Draht *mm* mit einem 12 m langen, isolirten Drahte verbunden wurde, der 40 cm weit von der Grundlinie entfernt horizontal in der vertikalen Symmetrieebene des Erregers aufgespannt war.

Der Resonator B möge nun so aufgestellt sein, dass sich sein Centrum auf der Grundlinie und seine Unterbrechungsstelle am höchsten Punkte befinde, während seine vertikal gestellte Ebene durch den Draht geht, dann würde unter diesen Bedingungen kein Funken entstehen, wenn der Draht nicht vorhanden wäre. Hier jedoch findet man, dass im Allgemeinen lebhaftere Funken an der Oeffnung überspringen; sie sind also einzig auf die Wirkung des Drahtes zurückzuführen.

Verschiebt man den Resonator immer in derselben Ebene vom freien Ende des Drahtes an bis zum Erreger hin, dann beobachtet man, dass Funken nicht entstehen am Ende des Drahtes und an allen Punkten, welche um Vielfache von 2,8 m von diesem Ende entfernt sind. Bei allen anderen Stellungen springen Funken über, und zwar nimmt die Länge derselben zu, je mehr man sich den Mitten der durch die vorhergenannten Punkte bestimmten Intervalle nähert. Diese letzteren entsprechen also den Knotenpunkten einer schwingenden Saite und haben daher auch denselben Namen erhalten. Uebrigens lässt sich diese Analogie noch weiter verfolgen, denn wenn man den Draht in einem Knotenpunkte durchschneidet, dann bleiben die Erscheinungen auf der ganzen Länge zwischen dem Erreger und dem Schnittpunkte die gleichen; auch über den letzteren Punkt hinaus, in dem abgeschnittenen Stücke, treten

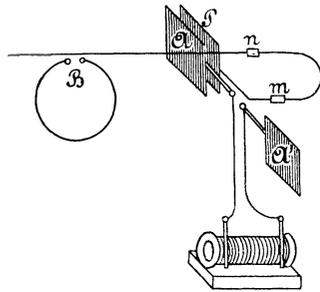


Fig. 13.

noch dieselben Erscheinungen auf, wenn auch mit verminderter Intensität.

Aber diese Analogie ist nicht nur eine scheinbare, sie ist vielmehr thatsächlich vorhanden, wenn man annimmt, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Störungen endlich ist. Die Knoten entstehen aus der Interferenz der direkt durch den Draht fortgepflanzten, mit den an seinem Ende reflektirten Wellen; die Einfachheit der Erklärung ist ein Beweis für das Vorhandensein einer endlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

Auch die Grösse dieser letzteren lässt sich berechnen, wenn man die Periode der Störung kennt. Hertz nahm eine Periode von $1,4 \cdot 10^{-8}$ Sekunden an; dann würde einer halben Wellenlänge von 2,8 m eine Geschwindigkeit von 200,000 Kilometern entsprechen. Dieser Werth ist von derselben Grössenordnung wie diejenigen, welche von Fizeau und Gounelle und von W. v. Siemens für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in Eisen- und Kupferdrähten gefunden wurden.

Ausserdem muss die Geschwindigkeit unabhängig von der Natur des Drahtes sein, denn Hertz zeigte, dass die Entfernung zwischen zwei auf einander folgenden Knotenpunkten die gleiche bleibt, wenn man den Draht durch einen anderen von verschiedenem Durchmesser oder anderem Materiale ersetzt.

64. Fortpflanzungsgeschwindigkeit in der Luft. Im Verlaufe dieser Experimente untersuchte Hertz auch die bei einem unendlich langen Drahte auftretenden Erscheinungen, bei dem natürlich die Reflexion der Wellen fortfällt. Dieser unendlich lange Draht wurde praktisch dadurch hergestellt, dass man den bei den vorher beschriebenen Untersuchungen verwendeten Draht um 60 m verlängerte und das Ende desselben ausserhalb des Saales in die Erde versenkte.

Bringen wir die Resonatoren in die durch den Draht gehende Vertikalebene, so, dass die Oeffnung am höchsten Punkte, und das Centrum auf der Grundlinie des Apparates liegt, dann wird die Wirkung des Drahtes allein bemerkbar. Dreht man nun den Resonator aus dieser Lage um 90° um seine vertikale Axe, so muss aus Gründen der Symmetrie die Einwirkung des Drahtes verschwinden, da der Resonator dann senkrecht zum Drahte gerichtet ist; in dieser Stellung werden die Funken also nur vom Erreger hervorgerufen. Die Wirkung des Drahtes und des Erregers auf die Mitte des Resonators werden demnach gleich sein, wenn die Funken in beiden senkrecht auf einander gerichteten Lagen, die wir soeben betrachtet haben, die gleiche Länge besitzen. Diese Bedingung lässt sich leicht dadurch realisiren, dass man die Platte P der Platte A nähert oder

sie von ihr entfernt. Wir wollen diese Bedingung als erfüllt annehmen.

Für jede dazwischen liegende Stellung des Resonators setzen sich beide Wirkungen zusammen, und die Länge der Funken muss für eine bestimmte Stelle ein Maximum, für eine andere ein Minimum zeigen. Dies Maximum und Minimum sucht man auf; das Maximum möge stattfinden, wenn die Normale zur Resonatorebene auf einer bestimmten Seite der Vertikalebene liegt, welche den Draht enthält, z. B. auf der Seite der Platte A; das Minimum dagegen, wenn die Normale nach der entgegengesetzten Seite gerichtet ist, z. B. nach der Seite von A'. Da nun die auf den Erreger allein zurückzuführenden Erscheinungen symmetrisch in Bezug auf die durch den Draht gehende Vertikalebene sind, so zeigen diese Resultate, dass die Erscheinungen, welche vom Drahte allein herrühren, nicht dieselbe Symmetrie besitzen.

Ausserdem wechseln die Erscheinungen mit der Lage des betrachteten Punktes. Verschiebt man nämlich den Resonator längs des Drahtes, so beobachtet man, dass die Maxima ihre Grösse ändern und nicht mehr einem und demselben Winkel zwischen Normale und Grundlinie entsprechen. Bei bestimmten Theilen des Drahtes treten die Maxima auf, wenn die Normale gegen A hin gerichtet ist; bei den dazwischen liegenden Theilen finden sie sich, wenn die Normale nach A' gerichtet ist. Unter einander gleich werden die Maxima nur für Punkte, deren Entfernung 7,5 m beträgt.

So nimmt also alle 7,5 m die Erscheinung wieder dieselbe Intensität an, aber bei einer verschiedenen Lage der Normale gegenüber der Grundlinie. Was ist der Grund hierfür?

Wie wir wissen, beträgt die halbe Wellenlänge in dem Drahte 2,8 m; zwei um 2,8 m von einander entfernte Punkte des Drahtes üben also verschiedene Wirkungen aus. Wäre die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wirkungen des Erregers unendlich gross, dann würde die Aenderung der Richtung der Normalen bei den Stellungen, welche den Maxima entsprechen, einzig und allein durch den Draht bedingt sein, und zwar müsste diese Aenderung alle 2,8 m eintreten. Das Gleiche würde stattfinden, wenn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in der Luft dieselbe wäre, wie im Drahte. Da nun das Experiment ein von diesen Schlüssen abweichendes Resultat liefert, so müssen wir annehmen, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in der Luft endlich ist und von derjenigen in den Metallen abweicht. Der Interferenz der direkt durch die Luft und der durch den Draht übertragenen Wellen müssen wir das Zustandekommen der beobachteten Erscheinungen zuschreiben.

Hieraus lässt sich die Grösse der Fortpflanzungsgeschwindigkeit in der Luft berechnen; man hat dabei nur zu berücksichtigen, dass die Interferenzen stets ihr Vorzeichen wechseln, wenn eine der Bewegungen einen Vorsprung von einer halben Wellenlänge vor der anderen gewonnen hat. Nennt man λ die halbe Wellenlänge in der Luft, λ' dieselbe Grösse im Drahte, und d die gefundene Entfernung, dann muss gelten

$$n\lambda = (n + 1)\lambda' = d.$$

Hierbei ist $\lambda' = 2,8$ m und $d = 7,5$ m; wir finden also daraus $\lambda = 4,5$ m, und, indem man immer den gleichen Werth für die Periode der Schwingungen annimmt, erhält man für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in der Luft 320,000 Kilometer. Wie man erkennt, ist diese Geschwindigkeit ungefähr gleich derjenigen des Lichtes; jedenfalls ist sie von derselben Grössenordnung¹⁾.

65. Reflexion der Wellen. Da die vorangehenden Betrachtungen Veranlassung zur Kritik geben konnten, suchte Hertz nach einer experimentellen Anordnung, welche unmittelbar erkennen liess, dass die Fortpflanzung in der Luft mit einer endlichen Geschwindigkeit erfolgt. Dies erreichte er dadurch, dass er die Wellen reflektiren liess und die direkten und reflektirten Wellen zur Interferenz brachte.

Die Reflexion gelang an einem Zinkblech von sehr grosser Ausdehnung, das an einer der Wände des Untersuchungsraumes befestigt und mit der Erde in leitende Verbindung gebracht war. Der Erreger, dessen Axe vertikal gerichtet war, stand in einer Entfernung von 13 m vom Metallspiegel.

Bringt man den Mittelpunkt des Resonators auf diejenige Normale zur Spiegelfläche, welche durch die Mitte des Erregers geht, eine Linie, die wir das Einfallslotz nennen wollen, und stellt die Resonatorebene senkrecht zu diesem Loth, dann sieht man, dass in unmittelbarer Nähe des Spiegels keine oder doch nur äusserst schwache Funken auftreten, welches auch die Richtung der Symmetrieaxe sein mag; dasselbe ist der Fall in Entfernungen von

¹⁾ Nach einem Briefe, den Herr Hertz an mich zu richten die Liebenswürdigkeit hatte, hält dieser hervorragende Gelehrte die in obigem Paragraphen beschriebenen Untersuchungen nicht mehr für absolut beweisfähig. Er betrachtete nämlich die beobachteten Knoten als das Produkt aus der Interferenz der durch den Draht und der direkt durch die Luft übertragenen Wellen. Man müsste aber noch den Einfluss der von den Wänden des Saales reflektirten Wellen berücksichtigen, und dass solche reflektirte Wellen existiren, zeigten ihm seine neuesten Untersuchungen. H. P.

4,1 und 8,5 m. Bei den dazwischen liegenden Entfernungen erreicht die Funkenlänge ein Maximum, wenn die Symmetrieaxe horizontal liegt.

Behalten wir diese Stellung der Symmetrieaxe bei und verschieben vom Spiegel anfangend den Resonator parallel zu sich, während sein Mittelpunkt stets auf dem Einfallslot bleibt, dann beobachtet man, dass die zuerst sehr kleinen Funken an Länge zunehmen und in einer Entfernung von 1,72 m ein Maximum erreichen; sodann nehmen sie ab, werden bei 4,10 m Null, wachsen wieder und zeigen von Neuem ein Maximum bei ungefähr 6,30 m; bei Punkten, die um ca. 4,5 m von einander entfernt sind, treten also die gleichen Erscheinungen auf.

Wir bringen nun den Resonator in die durch das Einfallslot gehende Vertikalebene und stellen die Symmetrieaxe parallel zum Einfallslot; im Allgemeinen haben dann die Funken nicht die gleiche Länge, wenn die Unterbrechungsstelle nach dem Spiegel zu gerichtet ist, wie wenn sie nach dem Erreger zu liegt. Verschiebt man den Resonator parallel zu sich selbst, dann entstehen die längsten Funken, wenn die Oeffnung nach dem Spiegel zu liegt, während der Abstand von diesem geringer ist als 1,72 m. Für einen Abstand zwischen 1,72 und 4,10 findet das Maximum auf der vom Spiegel abgewendeten Seite statt; ein neuer Wechsel tritt ungefähr in der Entfernung von 6,30 ein; die Erscheinungen wiederholen sich ungefähr alle 4,5 m.

Es scheint also nach diesen Resultaten, dass die Wellenlänge in der Luft 4,50 m beträgt. Hertz gelangte nun durch verschiedene Ueberlegungen, denen wir nicht folgen wollen, zu dem Schlusse, dass diese Grösse einer halben Wellenlänge entspricht; die oben gefundene Zahl wäre also auf diese Weise bestätigt. Immerhin muss man bemerken, dass die Entfernungen des Resonators von der Wand im Augenblicke, wo die Erscheinung ihr Zeichen wechselt, sehr ungenügend bestimmt sind, und dass man also zu den numerischen Werthen, welche Hertz daraus ableitet, kein besonderes Zutrauen haben kann. So viel aber ist sicher, dass die Wellenlänge von einer Grössenordnung ist, welche der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes entspricht.

66. Strahlen der elektrischen Kraft. Ob nun aber Gleichheit zwischen beiden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten herrscht oder nicht, ein Zweifel über die wellenförmige Fortpflanzungsweise der elektrischen Störungen kann nicht bestehen. Man darf also mit demselben Rechte von Strahlen elektrischer Kraft sprechen, wie von Lichtstrahlen, und darf erwarten, dass diese Strahlen elektrischer

Kraft denselben Reflexions- und Brechungsgesetzen folgen, wie die letzteren. Hertz hat diese Uebereinstimmung nachgewiesen.

Die Störungen wurden mit dem früher von uns als dritte Form erwähnten Erreger hervorgerufen; die beiden Cylinder standen vertikal in der Brennpunktlinie eines parabolischen Zinkspiegels von 2 m Höhe und 1,2 m Oeffnung. Die Erscheinungen wurden mit Hilfe des kreisförmigen Resonators von 7,5 cm Durchmesser oder besser noch mit Hilfe des geradlinigen Resonators untersucht. Die beiden vertikalen Drähte dieses Resonators standen in der Brennebene eines parabolischen Spiegels von den gleichen Dimensionen, wie der vorhergehende, und die beiden horizontalen Drähte, die daran befestigt sind, durchsetzten den Spiegel; auf diese Weise kam das Funkenmikrometer hinter den Spiegel zu stehen und liess sich bequem beobachten.

Geradlinige Fortpflanzung. Die von dem parabolischen Spiegel reflektirten Strahlen des Erregers pflanzen sich geradlinig fort; dies beweisen verschiedene Experimente.

In erster Linie findet man, dass der Funke des Resonators sehr schwach wird, wenn die Symmetrieebene des zu ihm gehörigen Spiegels mit der Symmetrieebene des anderen Spiegels nicht zusammenfällt.

Lässt man beide Ebenen zusammenfallen und setzt zwischen die Spiegel eine Zinkplatte von 2 m Höhe und 1 m Breite, dann verschwindet der Funke; das Gleiche findet statt, wenn sich ein Mensch zwischen die Spiegel stellt. Die Einschaltung einer isolirenden Materie, eines Brettes beispielsweise, bringt dagegen keinerlei Störung hervor.

Polarisation. In Folge der Gestalt des Erregers gehen die Schwingungen des Strahles elektrischer Kraft in einer Ebene vor sich, welche den Strahl enthält. Dieser Strahl ist also analog einem geradlinig polarisirten Lichtstrahl und zeigt ähnliche Eigenthümlichkeiten.

Dreht man den Aufnahmespiegel um eine horizontale Axe, dann werden die Funken allmählich kürzer und verschwinden, wenn die Symmetrieebenen senkrecht auf einander stehen. Eine ähnliche Erscheinung tritt ein, wenn ein durch Reflexion an einem Spiegel vollständig polarisirter Lichtstrahl auf einen zweiten Spiegel fällt; stehen die beiden Einfallsebenen senkrecht auf einander, dann tritt Dunkelheit ein.

Wir denken uns nun wieder die Symmetrieebene der Spiegel zum Zusammenfallen gebracht und setzen zwischen beide Spiegel einen Holzrahmen, auf welchem parallele, metallische Drähte gespannt

sind. Wenn diese senkrecht zu den Brennlinsen stehen, ändern die Funken ihre Länge nicht; sind sie ihnen dagegen parallel, dann verschwinden die Funken. Bei einer Zwischenstellung erscheinen zwar die Funken wieder, jedoch sind sie kürzer, als wenn der Rahmen ganz weggenommen wäre. Der Rahmen wirkt also auf den elektrischen Strahl ebenso, wie ein Turmalin auf einen geradlinig polarisirten Strahl.

Reflexion. Nachdem Hertz die beiden Spiegel Seite an Seite so aufgestellt hatte, dass ihre Symmetrieebenen sich in einer Entfernung von ungefähr 3 m schnitten, stellte er in der Durchschnittslinie einen Zinkspiegel vertikal auf, dessen Ebene auf der Halbierungslinie des Winkels zwischen beiden Symmetrieebenen senkrecht stand. Dann entstanden in dem Resonator Funken, sie verschwanden jedoch wieder, wenn man die reflektirende Ebene um einen Winkel von ungefähr 15 Grad um eine vertikale Axe drehte. Die Reflexionsgesetze des Lichtes lassen sich also auch auf die elektrischen Wellen anwenden. Verschiedene andere Experimente, welche unter abweichenden Bedingungen angestellt wurden, bestätigen diese Uebereinstimmung.

Brechung. Um nachzuweisen, dass die elektrischen Wellen auch eine Brechung erleiden, bediente sich Hertz eines grossen Asphaltprisma von 1,50 m Höhe mit einem brechenden Winkel von 30° ; dies Prisma stand in einer Entfernung von 2,6 m vom Erreger. Der auf der anderen Seite befindliche Resonator gab das Maximum der Funkenlänge, wenn der Winkel, den seine Symmetrieebene mit derjenigen des Erregers bildete, 22° betrug. Die Funken verschwanden, wenn man einen Metallschirm entweder vor oder hinter dem Prisma in den Weg des Strahles brachte; die Uebertragung erfolgte also in der That durch das Prisma hindurch.

67. Untersuchungen von Sarasin und de la Rive. Während Hertz neue Experimente unternahm, wurden die soeben auseinandergesetzten Fundamentaluntersuchungen von einer grossen Zahl von Gelehrten wiederholt.

Diese zahlreichen Untersuchungen führten zur Entdeckung interessanter Thatsachen; so erkannte man beispielsweise, dass man Geissler'sche Röhren als Resonatoren verwenden kann, und Lodge gelang es, die elektrischen Wirkungen in der Brennlinie einer abgeplatteten Cylinderlinse zu vereinigen. Aber diese Resultate sind weniger wesentlicher Art; anders verhält es sich mit demjenigen, welches im Januar 1890 von Sarasin und de la Rive veröffentlicht wurde.

Bei der Wiederholung der Hertz'schen Experimente mit den an ihren Enden nicht isolirten Leitungsdrähten fanden diese Physiker,

dass die Lage der Knoten mit Resonatoren von verschiedenen Dimensionen bestimmt werden kann. Für jeden Resonator bleibt die Entfernung der Knoten längs des ganzen Drahtes dieselbe, abgesehen vom Ende, wo man auf eine Störung trifft, die derjenigen entspricht, welche tönende Röhren zeigen; aber diese Entfernung der Knoten von einander ist eine verschiedene, je nach dem angewendeten Resonator, sie wächst mit den Dimensionen dieses Apparates.

Die Wichtigkeit dieses Resultates liegt auf der Hand. Hängt die Wellenlänge $\lambda = V \cdot T$ von dem verwendeten Resonator ab, so muss einer der beiden Faktoren V oder T variiren. Die Annahme, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit V von der Art der Beobachtung abhängt, wäre offenbar unsinnig; es bleibt also nur die Annahme, dass die Schwingungsperiode T variirt. Diese Hypothese machen auch Sarasin und de la Rive. Sie glauben, dass das von dem Erreger hervorgebrachte Wellensystem alle zwischen bestimmten Grenzen möglichen Wellenlängen enthält, und dass jeder Resonator aus dieser Vereinigung diejenige Schwingung herausgreift, deren Periode mit seiner eigenen übereinstimmt.

Aus diesem Schlusse folgt unmittelbar, dass die numerischen Werthe, welche Hertz für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Störungen in der Luft und in Drähten abgeleitet hat, keinerlei Bedeutung besitzen, da diese Werthe von der Lage der Knoten und demnach auch von dem verwendeten Resonator abhängen. Gleichwohl bleibt immerhin der Nachweis bestehen, dass die Fortpflanzung durch Wellenbewegung erfolgt und zwar nothwendiger Weise mit einer endlichen Geschwindigkeit, welche von derselben Grössenordnung ist, wie die Lichtgeschwindigkeit. Die Experimente von Hertz behalten also eine bedeutende Wichtigkeit und verdienen vollauf das ungeheure Aufsehen, das sie erregten. Wir werden übrigens später auf die oben angekündigten Abweichungen in einzelnen Punkten sowie auf die Schwierigkeiten zurückkommen, welche in Folge der unerwarteten Resultate von Sarasin und de la Rive auftreten¹⁾.

¹⁾ cf. die Besprechung dieser Experimente im Kapitel XII.

Kapitel VIII.

Der Erreger von Hertz.

68. Geleitet von theoretischen Ueberlegungen, die wir oben wiedergegeben haben¹⁾, stellte Hertz Untersuchungen an, welche eine Entscheidung zwischen der alten Elektrodynamik und derjenigen von Maxwell herbeiführen sollten, und es gelang ihm in der That, die Fortpflanzung der elektromagnetischen Wellen sichtbar zu machen. Diese Experimente sind im Kapitel VII beschrieben; wir haben jetzt die Schlüsse zu besprechen, welche Hertz daraus zog, ebenso wie die Einwürfe, welche man gegen seine Methode erheben kann.

69. Zunächst untersuchen wir den Apparat, vermittelt dessen Hertz sehr rasche elektromagnetische Schwingungen hervorrief, seinen Erreger. Derselbe besteht aus einem 5 Millimeter starken Kupferdrahte, an dessen Enden zwei Zinkkugeln von 15 cm Radius angelöthet sind; die Entfernung ihrer Mittelpunkte betrug bei dem ersten Apparate von Hertz 1,50 m. In der Mitte ist der Draht auf einige Millimeter unterbrochen, und es können daher zwischen diesen Enden Funken überspringen; beide Enden stehen mit den Polen einer Ruhmkorff'schen Spule in Verbindung.

Wir wollen nun mit Hertz die Dauer der elektrischen Schwingung in diesem Systeme berechnen.

Vereinigt man bei einem Kondensator, dessen Belegungen auf die Potentiale V_1 und V_2 gebracht sind, dessen Ladung q und dessen Capacität C ist, die beiden Belegungen durch einen Leiter vom Widerstande R , dann erhält man in diesem Leiter einen Strom i ; bedeutet ferner L den Koeffizient der Selbstinduktion des Systems, dann gilt für jeden Augenblick:

$$R i = -L \frac{\partial i}{\partial t} + V_1 - V_2,$$

¹⁾ Kap. VI § 50—56.

gleichzeitig ist:

$$(1) \quad V_1 - V_2 = -\frac{q}{C}$$

und

$$i = \frac{\partial q}{\partial t}.$$

Eliminirt man hieraus i und $(V_1 - V_2)$, so erhält man die Differentialgleichung

$$(2) \quad LC \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + RC \frac{\partial q}{\partial t} + q = 0.$$

Setzen wir das unbestimmte Integral dieser Differentialgleichung $= A \cdot e^{ht}$, so erhält man für h aus der Gleichung

$$LC h^2 + RC h + 1 = 0$$

die Werthe

$$h = -\frac{R}{2L} \pm \frac{\sqrt{R^2 C^2 - 4LC}}{2LC}.$$

Die Wurzeln sind reell, wenn

$$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Dann wird das allgemeine Integral von (2)

$$q = A_1 e^{h_1 t} + A_2 e^{h_2 t}$$

und es finden keine Schwingungen statt.

Ist dagegen $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, dann sind die Wurzeln imaginär. Setzen wir

$$h = -\alpha \pm i\beta,$$

wobei also:

$$-\alpha = -\frac{R}{2L}, \quad \beta = \frac{\sqrt{4LC - R^2 C^2}}{2LC},$$

dann ist das allgemeine Integral:

$$q = A e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \gamma);$$

hierbei sind A und γ zwei willkürliche Konstanten.

Die Schwingungsperiode T ist gegeben durch

$$\beta T = 2\pi$$

oder

$$T = \frac{2\pi}{\beta};$$

für den Fall, dass man R vernachlässigen kann, wird

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

und

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Für das logarithmische Dekrement erhalten wir

$$\alpha T = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

70. Wir wollen nun den Erreger mit einem Kondensator vergleichen und, um die Kapazität desselben zu finden, die Kapazität des Drahtes vernachlässigen. Die gegenseitige Wirkung der beiden Kugeln kann gleichfalls vernachlässigt werden; Hertz beschränkt sich auf die Angabe, dass dann die Kapazität des Kondensators derjenigen einer jeden der beiden Kugeln gleich ist; diese wird im elektrostatischen Maasse durch den in Centimetern gemessenen Kugelradius ausgedrückt; hier würde also $C = 15$ sein¹⁾.

Dieser Werth ist indessen nicht richtig; betrachtet man nämlich das System der beiden Kugeln als einen Kondensator, so ist nach der Definition die Kapazität dieses Kondensators das Verhältniss der Ladung einer der Kugeln zur Potentialdifferenz der beiden Kugeln. Nennt man q und $-q$ die Ladungen der beiden Kugeln, V und $-V$ ihre Potentiale, dann erhält man für die Ladung q einer Kugel in elektrostatischem Maasse:

$$q = V \cdot 15 \text{ cm}.$$

Da nun die Potentialdifferenz beider Kugeln $2V$ ist, so wird die Kapazität des Kondensators gegeben durch

$$\frac{q}{2V} = \frac{V \cdot 15 \text{ cm}}{2V} = 7,5 \text{ cm}.$$

71. Bei der Berechnung der Selbstinduktion L kann man die beiden Kugeln ausser Acht lassen, die ja nur einen geringen Theil

¹⁾ Wied. Ann. XXXI S. 444.

der Länge des Apparates repräsentiren; die Dichtigkeit des elektrischen Stromes ist dort ausserdem viel geringer, als in dem Drahte. Wir haben also die Selbstinduktion eines Cylinders von einem halben Centimeter Durchmesser und 150 Centimeter Länge zu bestimmen.

Es ist (Bd. I § 140—146)

$$T = L \frac{i^2}{2} = \frac{1}{2} \int (Fu + Gv + Hw) d\tau.$$

Wählen wir die Cylinderaxe als X-Axe, so ist

$$v = w = 0$$

und

$$L i^2 = \int Fu d\tau.$$

Der Strom fliesst nicht gleichmässig in dem Querschnitt des Drahtes, wir haben also:

$$i = \int u d\omega,$$

wobei das Integral sich über alle Oberflächenelemente eines normalen Querschnittes des Drahtes erstreckt.

Nun ist (cf. § 25 (7) und (9))

$$F = \int \frac{u' d\tau'}{r} + \frac{1-k}{2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} = F' + \frac{1-k}{2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

$$\psi = \int \frac{\partial \varrho'}{\partial t} r d\tau';$$

hierbei bedeutet ϱ die Dichtigkeit der freien Elektrizität. In unserem Falle tritt freie Elektrizität im Wesentlichen nur an den beiden Enden auf, demnach ist

$$\psi = \frac{\partial q_1}{\partial t} r_1 + \frac{\partial q_2}{\partial t} r_2,$$

wobei r_1 und r_2 die Entfernungen des betrachteten Punktes des Drahtes von den beiden Kugeln bedeuten, und q_1 und q_2 die Ladungen der beiden Kugeln. Nun ist

$$\frac{\partial q_1}{\partial t} = - \frac{\partial q_2}{\partial t},$$

da die Elektrizität sich von einer Kugel zur anderen bewegt.

Wählen wir als Koordinatenanfang das eine Ende und nennen l die Länge des Drahtes, dann ist

$$\begin{aligned} r_1 &= x; & r_2 &= l - x; \\ r_1 - r_2 &= 2x - l \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{\partial q_1}{\partial t} (2x - l) = -i(2x - l), \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} &= -2i. \end{aligned}$$

72. Wir berechnen nun $F' = \int \frac{u' dr}{r}$.

Es sei (x', y', z') der Schwerpunkt des Elementes $d\tau'$, r seine Entfernung vom Punkte (x, y, z) , δ der Abstand des Punktes (x, y, z) von der durch (x', y', z') zur X-Axe parallel gezogenen Geraden, so dass (cf. Fig. 14)

$$\delta^2 = (y - y')^2 + (z - z')^2.$$

Wir denken uns nun den cylindrischen Leiter in eine unendlich grosse Anzahl von Elementarcylindern zerlegt, und zwar so, dass das Element $d\tau'$ einen Cylinder darstellt, dessen Erzeugenden parallel zur X-Axe verlaufen, dessen normaler Querschnitt $d\omega'$ und dessen Höhe dx' ist; dann haben wir

$$d\tau' = d\omega' dx'$$

und

$$F' = \int \frac{u' d\omega' dx'}{r} = \int u' d\omega' \int \frac{dx'}{r},$$

denn, da u' nicht von x' abhängt, kann man bei der Integration nach x' die Grösse u' vor das Integral setzen. Weiter ist

$$r^2 = \delta^2 + (x - x')^2,$$

also

$$\begin{aligned} \int_0^l \frac{dx'}{\sqrt{\delta^2 + (x' - x)^2}} &= \left[\ln(x' - x + \sqrt{\delta^2 + (x' - x)^2}) \right]_0^l \\ &= \ln \frac{l - x + \sqrt{\delta^2 + (l - x)^2}}{-x + \sqrt{\delta^2 + x^2}} \\ &= \ln \frac{(l - x + \sqrt{\delta^2 + (l - x)^2})(x + \sqrt{\delta^2 + x^2})}{\delta^2} \end{aligned}$$

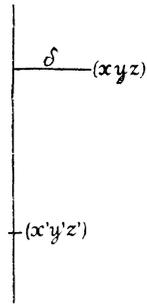


Fig. 14.

und, wenn man δ gegen x und l vernachlässigt:

$$= \ln \frac{4x(l-x)}{j^2}.$$

Es ist also

$$F' = \int u' d\omega' \ln \frac{4(xl-x^2)}{j^2}.$$

Wir können nun annehmen, dass die Dichtigkeit des Stromes u' im Querschnitte $d\omega'$ nur von der Entfernung von der Axe abhängt.

Legen wir durch den Punkt x, y, z eine Ebene normal zur X-Axe, dann wird dieselbe den Draht in einem Kreise schneiden. Diesen Kreis C wollen wir in eine unendliche Anzahl von Elementen zerlegen und zwar möge das Element $d\omega'$ zu den Koordinaten x', y', z' gehören; seine Entfernung von (x, y, z) wird dann $= \delta$ sein. Wir denken uns nun über die Oberfläche dieses Kreises C eine anziehende Masse so vertheilt, dass ihre Dichtigkeit in x', y', z' , dem Schwerpunkte von $d\omega'$, gerade $= u'$ ist; diese Materie wird dann in concentrischen, kreisförmigen Lagen vertheilt sein. Ferner nehmen wir an, dass diese fingirte Materie den Punkt x, y, z nach einem passenden Gesetze anziehe, das noch defnirt werden muss.

F' wird offenbar das Potential der von der Materie im Punkte x, y, z herrührenden Anziehung sein, wenn man das Anziehungsgesetz derartig annimmt, dass das von der Masse 1 in der Entfernung δ herrührende Potential $= \ln \frac{4(xl-x^2)}{j^2}$ ist; dies ist also ein logarithmisches Potential, und bekanntlich ist das logarithmische Potential einer in ringförmigen, homogenen Schichten vertheilten Materie auf einen äusseren Punkt dasselbe, als wenn die ganze Materie im Mittelpunkte vereinigt wäre. Man hat also für einen äusseren Punkt

$$F' = \int u' d\omega' \ln \frac{4(xl-x^2)}{j_0^2},$$

wenn man mit δ_0 die Entfernung dieses äusseren Punktes x, y, z vom Mittelpunkte des Kreises, d. h. vom Punkte $(x, 0, 0)$ bezeichnet.

Für einen Punkt auf der Oberfläche, also für $\delta_0 = \frac{d}{2}$, wird

$$F' = i \ln \frac{16(xl-x^2)}{d^2}.$$

Dieser Werth gilt für einen Punkt der Oberfläche; ist das auch noch für einen inneren Punkt der Fall? Wenn es sich um einen über den ganzen Querschnitt des Drahtes verbreiteten Strom handelt, nicht; aber ein rascher Wechselstrom verläuft fast vollständig auf der Oberfläche. Man kann in diesem Falle annehmen, dass der ganze Strom sich auf der Oberfläche befindet und im Innern $u' = 0$ ist; F' hat dann einen konstanten Werth, der gleich demjenigen ist, welcher für einen Punkt der Oberfläche gegeben wurde. Folglich wird

$$F = i \left[\ln \frac{16(xl - x^2)}{d^2} + k - 1 \right],$$

und

$$\int Fu \, dx = \int d\omega u F \, dx = \int d\omega u \int_0^l F \, dx = i \int_0^l F \, dx,$$

also

$$L i^2 = i^2 \int_0^l \left[\ln \frac{16(xl - x^2)}{d^2} + k - 1 \right] dx.$$

Das unbestimmte Integral ist:

$$x \left[\ln \frac{16}{d^2} + k - 1 \right] + x [\ln x - 1] - (l - x) [\ln(l - x) - 1],$$

folglich

$$L = 2l \left[\ln \frac{4}{d} + \frac{k-1}{2} \right] + 2l(\ln l - 1) = 2l \left[\ln \frac{4l}{d} - 1 + \frac{k-1}{2} \right].$$

Hertz gibt an:

$$2l \left[\ln \frac{4l}{d} - 0,75 + \frac{1-k}{2} \right].$$

Der Grund für diese Abweichung ist meines Erachtens darin zu suchen, dass Hertz die Rechnung unter der Voraussetzung durchführt, dass die Dichtigkeit des Stromes im Innern des Leiters konstant ist. Aus diesem Grunde wenigstens erhält Hertz als zweites Glied $-0,75$ statt -1 ; wenn er als drittes Glied $\frac{1-k}{2}$ statt $\frac{k-1}{2}$ findet, so ist dies wahrscheinlich auf einen Zeichenfehler bei der Berechnung von ψ zurückzuführen. Diese Abweichungen betreffen übrigens nur Grössen, die zu vernachlässigen sind.

Ersetzt man l und d durch ihre Werthe und macht nach der Neumann'schen Annahme $k = 1$, so erhält man

$$L = 1902 \text{ cm}.$$

Würde man $k = 0$ setzen, so erhielte man für L einen um 150 cm grösseren Werth.

Diese Werthe von L und C führen wir in den für T in elektromagnetischen Einheiten berechneten Ausdruck

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

ein; bedeutet C' die Kapazität in elektrostatischem Maasse, dann ist

$$C = \frac{C'}{V^2}$$

oder

$$VT = 2\pi\sqrt{LC'} = 2\pi\sqrt{1902 \cdot 7,5} = 7,51 \text{ m,}$$

wobei V das Verhältniss der Einheiten bedeutet. Hertz findet eine davon abweichende Zahl 5,31 m, weil er nur die einfache Schwingung berücksichtigt und weil er andererseits in der Berechnung der Kapazität den oben erwähnten Fehler beging. Für die Grösse T gibt er 1,77 in Zehnmillionstel der Sekunde an; für eine vollständige Schwingung würde man statt dessen, unter Berücksichtigung des oben Erwähnten, 2,51 erhalten.

Alles dies setzt voraus, dass R zu vernachlässigen ist. Sollen überhaupt Schwingungen auftreten, dann muss $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ sein, d. h. < 969 Ohm. Damit also die vorhergehende Formel gültig bleibt, muss nur R^2 im Verhältniss zu 969^2 Ohm zu vernachlässigen sein; das logarithmische Dekrement wird $\frac{R}{308 \text{ Ohm}}$ betragen¹⁾.

73. Die Funktion des Unterbrechers. Vergleicht man den Erreger mit einem schwingenden Pendel, dann würde die Rolle des Unterbrechers nur darin bestehen, das Pendel aus seiner Gleichgewichtslage zu entfernen, und zwar mittels einer Kraft, welche während einer im Verhältnisse zur Dauer der Schwingung sehr kurzen Zeit verschwindet. Eine solche Kraft, die in einer selbst gegen eine hundertmillionstel Sekunde noch sehr kurzen Zeit verschwindet, kann durch keine mechanische Vorrichtung hervorgerufen werden, wohl aber leistet dies eine Ruhmkorff'sche Spirale. Hier laden sich die beiden Pole mit entgegengesetzter Elektrizität, und zwar sehr langsam im Vergleich mit der Schwingungsdauer des Erregers. Dann kommt ein Augenblick, wo die Potentialdifferenz

¹⁾ Hertz gibt 686 und 213 anstatt 969 und 308 in Folge des bei der Berechnung der Kapazität begangenen Fehlers.

einen bestimmten Werth von ungefähr 100 elektrostatischen Einheiten erreicht, und ein Funke überspringt. Die elektromotorische Gegenkraft, welche sich dem kontinuierlichen Uebergang der Elektrizität von dem einen Theile des Drahtes zum anderen entgegengesetzte, verschwindet plötzlich, alles geht so vor sich, als ob man eine Art von Reibung beim Anfange der Bewegung aufhobe, und die Schwingungen beginnen.

Die kurze Dauer bis zum Verschwinden hängt von einer Menge nur ungenügend bekannter Umstände ab, von der Beleuchtung des Unterbrechers durch ultraviolette Strahlen, vom Grade der Politur der Poloberflächen u. s. w. In einem neuerdings erschienenen Artikel, der viel Aufsehen erregt hat¹⁾, stellt sich Brillouin auf einen anderen Standpunkt als Hertz. Er vergleicht den Unterbrecher mit der Zunge einer Pfeife, und danach würde der Apparat nur gut funktionieren, wenn die Periode des Unterbrechers mit derjenigen des Erregers übereinstimmte.

Um den Unterschied zwischen den beiderseitigen Gesichtspunkten klar hervortreten zu lassen, kann ich mich auf die Bemerkung beschränken, dass nach der Ansicht von Brillouin ein für einen gegebenen Erreger justirter Funkengeber nicht bei einem Erreger von längerer oder kürzerer Periode funktionieren würde, während derselbe nach Hertz's Ansicht bei allen Erregern funktionieren muss, welche eine längere Periode besitzen, als er selbst.

Es ist schwierig, diese Frage endgiltig zu entscheiden; immerhin scheint es wenig wahrscheinlich zu sein, dass Brillouin Recht hat, und es ist natürlicher, sich der Ansicht von Hertz anzuschliessen. In jedem Falle hat man den Unterbrecher bei der Berechnung der Periode nicht mit zu berücksichtigen; es genügt, dass der gesammte Widerstand des Drahtes, einschliesslich des Unterbrechers, immer gegenüber der Grösse $2\sqrt{\frac{L}{C}}$ zu vernachlässigen ist.

74. Einwürfe gegen die Rechnung von Hertz. Die vorhergegangene Berechnung fordert mancherlei Einwürfe heraus. Bei der Berechnung von L wurde die Ruhmkorff'sche Spirale überhaupt nicht berücksichtigt, und doch besitzt dieselbe eine ungeheuer grosse Selbstinduktion. Der Strom kann ferner nicht von einem Ende des Drahtes zum anderen fließen; endlich wurden die in dem Dielektrikum erzeugten Verschiebungsströme ausser Acht gelassen: Es findet nämlich eine elektrische Strahlung statt, und die Energie verschwindet nicht nur durch Umsetzung in Wärme im Drahte, sondern auch

¹⁾ Revue générale des sciences pures et appliquées I pag. 141.

durch elektrische Strahlung; so wurde auch bei der Bestimmung des logarithmischen Dekrements nur der Wärmeverlust in Rechnung gezogen, das Dekrement ist jedoch thatsächlich viel grösser.

75. Hertz berücksichtigt die Ruhmkorff'sche Spirale bei der Bestimmung der Periode gar nicht, und in der That ist der störende Einfluss, der von der Spirale auf die Schwingungsdauer des Erregers ausgeübt wird, vollständig zu vernachlässigen. Wir wollen den in DE unterbrochenen Erreger AB näher in's Auge fassen; i möge den

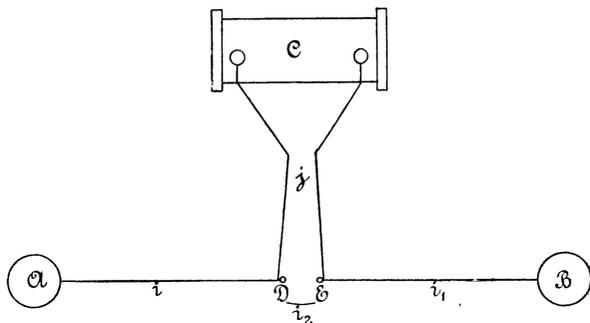


Fig. 15.

Strom bedeuten, welcher den Arm AD durchfliesst, i_1 den entsprechenden in EB, i_2 den Strom zwischen D und E und j den Strom, welcher die sekundäre Spirale ECD der Spule C durchläuft; dann liefern die Kirchhoff'schen Gesetze:

$$i_2 = i + j,$$

$$i_1 = i_2 - j,$$

folglich

$$i_1 = i.$$

Wir haben demnach zwei Ströme: den einen, i , der von A nach B geht, den anderen, von der Intensität j , welcher dem geschlossenen Stromkreise DECD folgt; beide Stromkreise haben also ein gemeinsames Stück, DE.

Wir wenden nun das Ohm'sche Gesetz an: Bezeichnet L die Selbstinduktion von AB, N diejenige der Spule und M die gegenseitige Induktion der beiden Stromkreise, ferner C die Capacität der Kugeln, R den Widerstand von AB und S denjenigen des Stromkreises DECD, endlich q die Ladung der einen der beiden Kugeln, dann gilt:

$$\begin{cases} R i = -L \frac{\partial i}{\partial t} - M \frac{\partial j}{\partial t} - \frac{q}{C}, \\ S j = -M \frac{\partial i}{\partial t} - N \frac{\partial j}{\partial t}. \end{cases}$$

Bekanntlich ist $i = \frac{\partial q}{\partial t}$, folglich erhalten wir

$$\begin{cases} C L \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + C R \frac{\partial q}{\partial t} + C M \frac{\partial j}{\partial t} + q = 0, \\ N \frac{\partial j}{\partial t} + S j + M \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = 0. \end{cases}$$

Als Integrale finden wir:

$$\begin{cases} q = e^{\alpha t}, \\ j = \lambda e^{\alpha t}. \end{cases}$$

Setzen wir diese Werthe ein, so folgt:

$$\begin{cases} C L \alpha^2 + C R \alpha + C M \lambda \alpha + 1 = 0, \\ \lambda (N \alpha + S) + M \alpha^2 = 0. \end{cases}$$

Durch Elimination von λ ergibt sich:

$$(C L \alpha^2 + C R \alpha + 1) (N \alpha + S) - C M^2 \alpha^3 = 0.$$

L , C und R sind kleine Grössen, N und S dagegen gross; M ist sehr klein, selbst im Vergleich mit L . In erster Annäherung darf man also den zweiten Term vernachlässigen; setzt man dann den ersten Faktor des ersten Gliedes Null, dann erhält man:

$$(1) \quad L C \alpha^2 + C R \alpha + 1 = 0.$$

Dies ist die früher untersuchte Gleichung, die sich ergibt, wenn man die Selbstinduktion der Spule vernachlässigt. Man hat also angenähert

$$\alpha = \frac{\pm \sqrt{-1}}{\sqrt{C L}}.$$

Führen wir diesen Werth von α ein, dann erhalten wir eine zweite Annäherung; wir können schreiben:

$$(2) \quad C L \alpha^2 + C R \alpha + 1 = \frac{C M^2 \alpha^3}{N \alpha + S}.$$

Ersetzen wir hierin auf der rechten Seite α durch den soeben gefundenen Werth $\frac{\pm \sqrt{-1}}{\sqrt{LC}}$, dann ergibt sich eine Gleichung, bei der das absolute Glied 1 beträgt, weniger einer gewissen Konstanten, und der Fehler, den wir dadurch begingen, dass wir als Wurzeln unserer ursprünglichen Gleichung diejenigen der Gleichung (1) wählten, ist von der Grössenordnung des Gliedes auf der rechten Seite. Dies Glied wird, da α sehr gross ist, näherungsweise $= \frac{CM^2 \alpha^2}{N}$, d. h. $-\frac{M^2}{NL}$, und die Vernachlässigung desselben ist ganz ohne Belang, gerade weil die Selbstinduktion der Spirale so ungemein gross ist.

Der ganze Vorgang lässt sich damit vergleichen, dass man an die Linse eines Pendels ein zweites Pendel anheftet. Haben die Linsen beider Pendel nahezu die gleiche Masse, dann werden die Schwingungsperioden wesentlich beeinflusst; ist aber das erste Pendel sehr lang und die Masse seiner Linse sehr beträchtlich, das zweite dagegen kurz und leicht, dann wird die Schwingungsperiode des letzteren durch die Bewegung des ersten Pendels nur wenig gestört werden.

Die vorhergehende Rechnung ist ungemein oberflächlich, da wir die bedeutenden Wirkungen der Kapazität, welche in der Spule auftreten, gar nicht berücksichtigten. Aber das Resultat würde auch gar nicht davon beeinflusst werden, denn die Kapazität würde dieselbe Rolle spielen, wie die Selbstinduktion, und die Dauer der Periode nicht verändern, gerade, weil sie sehr gross ist.

Wir sahen, dass in Folge eines Fehlers, den Hertz bei der Bestimmung der Kapazität beging, der Werth, den er für die Periode T erhielt, durch $\sqrt{2}$ zu dividiren ist, und, da die Wellenlänge in der Luft der Zahl gleich bleibt, welche Hertz experimentell bestimmte, so muss die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, welche er daraus herleitete, mit $\sqrt{2}$ multiplicirt werden. Nun fand er eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit in der Luft, welche derjenigen des Lichtes sehr nahekommt, nämlich 300,000 Kilometer in der Sekunde. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, welche aus diesen Experimenten hergeleitet werden kann, wenn sie richtig interpretirt werden, würde also nicht mehr 300,000 betragen, sondern $300,000 \cdot \sqrt{2}$. Wir werden später noch auf diesen Punkt zurückkommen.

Darf man nun nicht wenigstens die Hoffnung hegen, dass eine andere Korrektion diese kompensiren wird? Das ist wenig wahrscheinlich. Bei der Berechnung der Selbstinduktion sind allerdings

die Verschiebungsströme unberücksichtigt geblieben, die durch das Dielektrikum von einer Kugel zu anderen gehen; aber J. J. Thomson hat gezeigt, dass die Periode hiervon wenig beeinflusst wird. Der Term nämlich, welcher sich in dem Ausdrücke von F ändert, wird F' sein, während $\frac{\partial \psi'}{\partial x}$ unverändert bleibt. F' aber ist das Integral $\int \frac{u' dr'}{r}$, das sich über alle Verschiebungsströme und Leiterströme erstreckt; wir haben es jedoch nur auf die Leiterströme ausgedehnt. Aber es scheint in der That, dass das den letzteren entsprechende Glied weitaus das wichtigere ist. Der Draht hat nämlich nur einen geringen Durchmesser; irgend ein Punkt der Oberfläche oder des Innern liegt daher viel mehr in der Nähe der Leiterströme, als der Verschiebungsströme, die sich über den ganzen Raum verbreiten; und was diejenigen betrifft, welche sich sehr nahe an dem Punkte befinden, so ist ihre Intensität viel schwächer, als diejenige der entsprechenden Leiterströme. Dies ist ohne Zweifel nur ein ziemlich roher Ueberschlag, aber er genügt wohl zum Beweise dafür, dass man die Periode nicht mehr mit einem Faktor von der Grösse $\sqrt{2}$ zu multipliciren haben wird.

76. Eine andere Korrektion kann vielleicht nöthig sein, wie dies J. J. Thomson gezeigt hat. Der Strom geht nicht vollständig von einer Kugel zur anderen, sondern ein Bruchtheil des Stromes geht durch die Oberfläche des Drahtes nach Aussen. Thomson nimmt willkürlich an, dass die Aenderung des Stromes längs des Drahtes durch eine Sinusfunktion dargestellt wird. Die Periode würde dann grösser sein, als diejenige, welche Hertz angibt, und zwar würde dies eine Korrektion im richtigen Sinne bedeuten, um die Uebereinstimmung zwischen der Geschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen in der Luft und derjenigen des Lichtes wiederherzustellen; nur ist der Faktor, mit welchem man die Periode zu multipliciren hat, nicht grösser, als 1,05, und dies genügt also noch keineswegs, um eine Uebereinstimmung herbeizuführen.

So ist also eines der Resultate von Hertz, welche allgemein für die wichtigsten gehalten werden, nur auf einen Rechenfehler zurückzuführen. Wir werden jedoch späterhin noch sehen, dass, selbst wenn man dasselbe gänzlich verwerfen müsste, die Hertz'schen Versuche nichtsdestoweniger ein sehr grosses Interesse behalten, und dass die Schlüsse, welche man in Bezug auf die elektrodynamischen Theorien daraus ziehen kann, darum nicht minder streng sind.

77. Die elektrische Kraft steht senkrecht zu den Leitern. Eine wichtige Frage ist auch noch in Betreff des Erregers zu beant-

worten: Wie ist der Strom im Querschnitte des Drahtes vertheilt? Wir wollen nachweisen, dass, wenn in einem Leiter ungemein rasch wechselnde Ströme verlaufen, diese Leitungsströme fast vollständig auf der Oberfläche des Leiters bleiben. Ich werde bei der Diskussion der linearen Differentialgleichungen, welche bei diesen Fragen auftreten und deren Integrale periodische Funktionen sind, stets die Methode der Einführung von imaginären Exponentialgrössen anwenden¹⁾.

Diese Methode beruht darauf, dass man den Gleichungen des elektromagnetischen Feldes durch imaginäre Funktionen zu genügen sucht, welche als Faktor eine imaginäre Exponentialgrösse enthalten. Da die Gleichungen linear sind und reelle Koeffizienten besitzen, so werden sie von den reellen Theilen dieser Funktionen stets erfüllt. Es wird also nach Ausführung der Rechnungen genügen, die reellen Theile der Funktionen, zu denen man gelangt ist, beizubehalten. Diese Methode vereinfacht überall da, wo man es mit einer periodischen Erscheinung zu thun hat, die Schreibweise ungemein.

Die Komponente F des Vektorpotentials beispielsweise ist eine periodische Funktion der Zeit mit einer Periode $= \frac{2\pi}{p}$. Wir setzen also:

$$F = F_0 e^{ipt};$$

dann ist

$$\frac{\partial F}{\partial t} = ip F,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = -p^2 F.$$

Da die Periode sehr klein ist, so ist p eine sehr grosse Zahl, ein Umstand, der die Rechnung sehr vereinfachen wird.

Wir wollen μ stets $= 1$ voraussetzen. In der That ist für fast alle Körper μ sehr nahezu gleich 1, und auch beim Eisen geht alles, wie Hertz experimentell nachgewiesen hat²⁾, ebenso vor sich, wie bei einem beliebigen sonstigen Leiter; offenbar erfolgt die Magnetisirung durch Induktion nicht momentan, und die Zeit, welche zu ihrem Entstehen erforderlich sein würde, genügt nicht bei so rasch verlaufenden Induktionsströmen.

¹⁾ cf. Théorie mathématique de la Lumière § 50 etc.

²⁾ Wied. Ann. XXXIV S. 558.

X, Y, Z seien nun die Komponenten der elektrischen Kraft, also

$$\mathbf{X} = -\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x};$$

bei einem Leiter ist $\mathbf{X} = \frac{u}{C}$; für die Integration längs einer geschlossenen Linie gilt

$$(1) \quad \int (\mathbf{X} dx + \mathbf{Y} dy + \mathbf{Z} dz) = \frac{1}{C} \int (u dx + v dy + w dz),$$

und ferner

$$\int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \right) = 0.$$

Demnach wird die linke Seite:

$$-\int \left(\frac{\partial F}{\partial t} dx + \frac{\partial G}{\partial t} dy + \frac{\partial H}{\partial t} dz \right) = -i p \int (F dx + G dy + H dz).$$

Hieraus folgt in Verbindung mit (1)

$$\int (F dx + G dy + H dz) = \frac{i}{p C} \int (u dx + v dy + w dz).$$

p ist sehr gross, in Folge dessen wird die rechte Seite sehr klein. Wäre sie Null, dann erhielte man

$$\int (F dx + G dy + H dz) = 0,$$

d. h. im Innern eines Leiters wäre dann $F dx + G dy + H dz$ ein vollständiges Differential.

Ausserdem haben wir nach den Theorien von Maxwell

$$\alpha = \frac{a}{\mu} = a = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} = 0;$$

α, β, γ sind also Null, und ebenso u, v, w , da

$$4 \pi u = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \text{ u. s. w.}$$

Im Innern eines Leiters verlaufen also keine Ströme; dieselben treten nur im Dielektrikum und auf der Oberfläche der Leiter auf.

Zu demselben Resultate würde man gelangen, wenn man C unendlich gross annähme, d. h. voraussetzte, dass man es mit einem vollkommenen Leiter zu thun hätte. Aus diesem Grunde also kann man sagen, dass sich die Leiter in diesem Falle verhalten wie vollkommene Leiter.

78. Es lässt sich hiergegen allerdings der Einwurf erheben, dass ja $\int (u dx + v dy + w dz)$ sehr gross sein könnte; dann würde in der That die rechte Seite der Gleichung (1) nicht mehr sehr klein bleiben. Dieser Einwurf wird jedoch hinfällig, wenn man bedenkt, dass dann auch $\int \frac{u^2 + v^2 + w^2}{C}$, der Ausdruck, der die Joule'sche Wärme repräsentirt, sehr gross werden müsste. Dies ist aber unmöglich, denn dann würde ein derartiger Energieverlust eintreten, dass ein solcher Zustand sich nur während einer sehr kurzen Zeit halten könnte.

Ausserdem bestätigt das Experiment unser Resultat vollständig, da man einen Leiter durch einen anderen von abweichender Beschaffenheit und folglich auch abweichender Leitungsfähigkeit ersetzen kann, ohne die Erscheinungen irgendwie zu verändern.

Lässt sich nun die Ueberlegung, die wir soeben anstellten, um nachzuweisen, dass die linke Seite der Gleichung (1) sehr klein ist, nicht auch auf die Dielektrika anwenden? In diesem Falle haben wir

$$\int (F dx + G dy + H dz) = \frac{4 \pi i}{p K} \int (f dx + g dy + h dz),$$

und durch Differentiation nach der Zeit (da $\frac{\partial F}{\partial t} = ipF$ cf. § 77)

$$\int (F dx + G dy + H dz) = \frac{4 \pi}{p^2 K} \int (u dx + v dy + w dz).$$

Ist p sehr gross, dann würde auch $p^2 K$ sehr gross sein. Es könnte also scheinen, als ob auch in dem Dielektrikum kein Strom aufträte. Hier aber ist diese Ueberlegung nicht mehr stichhaltig; denn einmal ist $p^2 K$ nicht ebenso gross, wie es pC war. Bei hundert Millionen Schwingungen in der Sekunde ist nämlich

$$p = 2 \pi \cdot 10^8.$$

C ist für ein Metall, wie das Kupfer, von der Ordnung $\frac{1}{10^4}$, und K bedeutet im C. G. S.-Systeme das Reciproke des Quadrats der Lichtgeschwindigkeit.

Demnach ist

$$\frac{p^2 K}{4 \pi} = \frac{\pi}{9} \cdot 10^{-4}$$

dagegen

$$p C = 2 \pi \cdot 10^4.$$

Ausserdem würde auch, wenn $p^2 K$ sehr gross wäre, nichts gegen die Annahme sprechen, dass auch $\int (u dx + v dy + w dz)$ sehr gross sein könnte, denn in diesem Falle hat man nicht, wie bei Leitern, zu befürchten, dass die Joule'sche Wärme unendlich gross würde.

79. So tritt also im Innern eines Leiters weder ein Strom, noch eine elektromotorische Kraft auf. Die Funktion φ ist stetig, wenn man durch die Oberfläche hindurchgeht; und, falls man die Normale zur Z-Axe wählt, gilt dies auch für die Differentialquotienten $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ und deren Derivirten nach der Zeit; $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ dagegen ist unstetig.

Die Komponenten F, G, H sind stetig, denn $F = \int \frac{u' dr}{r}$ ist das Potential einer anziehenden Masse von der Dichtigkeit u , und dies Potential ist selbst dann noch stetig, wenn die Materie nur auf der Oberfläche vertheilt ist; aber dies gilt nicht mehr für die nach den Koordinaten genommenen Differentialquotienten dieser Grössen; ihre Derivirten nach der Zeit dagegen sind stetig.

Die Induktionskraft ist also stetig, wenn man die Oberfläche durchschreitet, die elektrostatische Kraft dagegen unstetig in demselben Sinne, in dem ihre normale Komponente unstetig ist. Dies gilt in Folge dessen auch für die gesammte elektromotorische Kraft; da nun in einem Punkte im Innern diese totale Kraft Null ist und die tangentialen Komponenten stetig sind, so folgt daraus, dass im äusseren Raume die elektrische Kraft auf der Oberfläche des Leiters senkrecht steht. In dem Falle, wo wir es mit ungeheuer raschen Schwingungen zu thun haben, müssen wir also für die Enden der elektrischen Kraftlinien die Bedingung aufstellen, dass dieselben normal zu den Leitern gerichtet sind; dies ist eine nothwendige und zwar sehr wichtige Folge der Thatsache, dass der Leitungsstrom auf die Oberfläche der Leiter beschränkt bleibt. Das Experiment hat dies übrigens nicht vollständig bestätigt oder lässt wenigstens noch Zweifel darüber aufkommen; wir werden späterhin Gelegenheit haben, diesen Punkt nochmals zu berühren.

Die magnetischen Kraftlinien dagegen sind tangentiell zur Oberfläche des Leiters gerichtet. Um dies zu zeigen, genügt der Nach-

weis, dass der Strom der magnetischen Kraft, welcher durch einen beliebigen Theil der Leiteroberfläche geht, Null ist. Dieser Strom ist gleich dem Integrale

$$\int (F dx + G dy + H dz) = \frac{1}{ip} \int \left(\frac{\partial F}{\partial t} dx + \frac{\partial G}{\partial t} dy + \frac{\partial H}{\partial t} dz \right)$$

genommen längs der Peripherie dieses Oberflächentheiles.

Nun ist

$$X = -\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \text{und} \quad \int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \right) = 0.$$

Der gesuchte Strom ist also gleich

$$-\frac{1}{ip} \int (X dx + Y dy + Z dz).$$

Da nun die elektrische Kraft normal zum Leiter gerichtet war, so hat man

$$(X dx + Y dy + Z dz) = 0,$$

der gesuchte Strom ist also in der That Null.

Kapitel IX.

Untersuchung des durch den Erreger hervor- gebrachten Feldes.

80. Wir wollen nach Hertz die Berechnung des durch den Erreger hervorgebrachten elektromagnetischen Feldes durchführen.

Nehmen wir einen durch Rotation um die Z-Axe entstandenen Erreger an, so wird das Feld eine dementsprechende Symmetrie aufweisen; die elektrischen und magnetischen Kraftlinien, die von einem gegebenen Punkt ausgehen, verlaufen symmetrisch zu einer diesen Punkt enthaltenden Meridianebene; es folgt daraus, dass alle Kraftlinien entweder in Meridianebenen liegen, oder senkrecht zu allen Meridianebenen sind, die sie schneiden, d. h. dass sie Parallele sind.

Die elektrischen Kraftlinien stehen nach der vorhergehenden Theorie senkrecht zu den Leitern und können also nicht parallel zu einander sein. Demnach sind dieselben in Meridianebenen enthalten und die Parallelen müssen magnetische Kraftlinien darstellen.

Man hat also

$$\gamma = 0$$

und danach reducirt sich die Gleichung (6) § 50 auf

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} = 0.$$

Diese Gleichung drückt aus, dass $\alpha dy - \beta dx$ ein vollständiges Differential darstellt, wenn x und y allein als veränderlich betrachtet werden. Bezeichnen wir mit $\frac{\partial \mathbf{II}}{\partial t}$ die Integralfunktion, so ist:

$$\alpha dy - \beta dx = d \frac{\partial \mathbf{II}}{\partial t},$$

folglich

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial t}, \\ \beta = -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial t}, \\ \gamma = 0. \end{cases}$$

Für die Komponenten der elektrischen Verschiebung erhält man aus den Gleichungen (2) § 50:

$$(2) \quad \begin{cases} 4\pi \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} = \frac{\partial^3 \Pi}{\partial x \partial z \partial t}, \\ 4\pi \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} = \frac{\partial^3 \Pi}{\partial y \partial z \partial t}, \\ 4\pi \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} = -\frac{\partial^3 \Pi}{\partial x^2 \partial t} - \frac{\partial^3 \Pi}{\partial y^2 \partial t}. \end{cases}$$

Die erste der Gleichungen (2) zeigt, dass

$$4\pi f - \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial z}$$

eine von der Zeit unabhängige Funktion ist; sie spielt also bei der zu untersuchenden periodischen Erscheinung keine Rolle und man kann sie als Null annehmen, ebenso die beiden anderen.

Wir erhalten demnach:

$$(3) \quad \begin{cases} 4\pi f = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial z}, \\ 4\pi g = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial z}, \\ 4\pi h = -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2}. \end{cases}$$

81. Ersetzen wir in den Gleichungen (3) des § 50 α, g, h durch ihre Werthe als Funktion von Π , so liefert uns die Gleichung

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = -\frac{4\pi}{K} \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \right);$$

$$K \frac{\partial^3 \Pi}{\partial y \partial t^2} = \frac{\partial^3 \Pi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \Pi}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \Pi}{\partial z^2 \partial y} = \frac{\partial \Delta \Pi}{\partial y},$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\mathbb{K} \frac{\partial^2 \mathbb{H}}{\partial t^2} - \Delta \mathbb{H} \right) = 0.$$

Ebenso ist

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\mathbb{K} \frac{\partial^2 \mathbb{H}}{\partial t^2} - \Delta \mathbb{H} \right) = 0.$$

Hieraus folgt

$$\mathbb{K} \frac{\partial^2 \mathbb{H}}{\partial t^2} - \Delta \mathbb{H} = f(z, t);$$

es ist also dieser Ausdruck unabhängig von x und von y . Man kann die Funktion f als Null annehmen, denn wenn man zu \mathbb{H} eine beliebige Funktion von z und t hinzufügt, so wird dadurch das Feld in keiner Weise geändert; alle Komponenten $\alpha, \beta, \gamma, f, g, h$ enthalten nämlich die wenigstens einmal nach x oder y genommenen Differentialquotienten von \mathbb{H} als Faktor.

Demnach wird

$$(4) \quad \mathbb{K} \frac{\partial^2 \mathbb{H}}{\partial t^2} = \Delta \mathbb{H}.$$

Hierbei ist zu bemerken, dass \mathbb{H} keine beliebige Funktion von x, y, z darstellt, da das Feld durch eine Drehung um OZ hervorgebracht wird. \mathbb{H} ist eine Funktion von z und von

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

oder wenn man will, von z und

$$r = \sqrt{\varrho^2 + z^2}.$$

82. Wir wollen nun die Gleichungen der elektrischen Kraftlinien aufstellen; die Differentialgleichungen lauten:

$$(5) \quad \frac{dx}{f} = \frac{dy}{g} = \frac{dz}{h}.$$

Für die in der ZX-Ebene liegende Linie ist $y = 0, x = \varrho$, so dass die Gleichungen (5) werden:

$$y = 0, \\ h dx - f dz = 0,$$

oder

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial z} dz + \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} \right) dx = 0.$$

Nehmen wir z und q zu Koordinaten, so wird diese Gleichung

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q \partial z} dz + \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} + \frac{1}{q} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial q} \right) dq = 0.$$

Durch Multiplikation mit q erhalten wir das vollständige Differential

$$q \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q \partial z} dz + \left(q \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} + \frac{\partial \Pi}{\partial q} \right) dq = 0,$$

und durch Integration

$$q \frac{\partial \Pi}{\partial q} = \text{Const.}$$

Bei Anwendung der Koordinaten x und y erhält man also für eine in einer Meridianebene liegende Kraftlinie

$$(6) \quad x \frac{\partial \Pi}{\partial x} + y \frac{\partial \Pi}{\partial y} = \text{Const.}$$

83. Ein besonders interessanter Fall ist derjenige, bei dem Π nur eine Funktion des Abstands r vom Anfangspunkt ist; eine bekannte Umformung ergibt:

$$\Delta \Pi = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial r}.$$

Π ist dann durch die Gleichung definiert (cf. 4):

$$K \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \ell^2} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial r};$$

dieselbe nimmt eine einfachere Form an, wenn man setzt

$$\Pi = \frac{\theta}{r};$$

es folgt dann

$$(7) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} = K \frac{\partial^2 \theta}{\partial \ell^2};$$

dies ist aber die Gleichung der schwingenden Saiten, deren Integral lautet:

$$(8) \quad \theta = \theta_1 \left(r + \frac{t}{\sqrt{K}} \right) + \theta_2 \left(r - \frac{t}{\sqrt{K}} \right).$$

84. Kugelerreger von Lodge. Wir wollen eine Anwendung der vorhergehenden Rechnung auf ein Beispiel machen, das sich vollständig behandeln lässt. Nehmen wir an, eine leitende Kugel befinde sich ganz in einem gleichförmigen elektrischen Felde, so ist die positive Elektrizität auf der einen Halbkugel, die negative auf der anderen ausgebreitet; weiter setzen wir voraus, dass im Anfang der Zeit Gleichgewicht vorhanden sei. Zerstört man dann plötzlich das Feld, so entstehen elektrische Schwingungen in dem Leiter und dem umgebenden Dielektrikum. Lodge hat diesen Fall experimentell untersucht.

Die in einem gleichmässigen Felde befindliche Kugel verhält sich wie ein mit Elektrizität geladenes Element, das nach dem Feld orientirt ist, also gilt

$$4 \pi f = -K \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Da nämlich hier kein Strom vorhanden ist, so sind F, G, H Null. Wir haben ferner

$$\varphi = C \frac{1}{\partial z},$$

wo C eine Konstante bedeutet, die wir gleich $-\frac{1}{K}$ setzen können, so dass keine Koeffizienten in den Formeln mehr vorkommen; demnach wird

$$4 \pi f = \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z},$$

$$4 \pi g = \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial z},$$

$$4 \pi h = \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2},$$

denn $\Delta \frac{1}{r}$ ist = 0.

Durch Vergleichung mit (3) sehen wir, dass der Anfangswert von Π gleich $\frac{1}{r}$ ist, der von $\theta = 1$, der Anfangswert von $\frac{\partial \theta}{\partial t}$ ist Null, da anfangs Gleichgewicht herrscht und auch weiter bestehen bleibt.

Zerstört man nun das elektrische Feld, so fängt θ an, sich zu verändern nach der Formel

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} = K \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}.$$

Wir wollen nun die Grenzbedingungen hierfür aufstellen. Im Anfang ist eine Kugel vom Radius a vorhanden; drücken wir aus, dass die elektrischen Kraftlinien senkrecht zur Kugel stehen, so gilt:

$$\frac{f}{x} = \frac{g}{y} = \frac{h}{z}.$$

Betrachten wir nur die beiden äussersten Glieder, so haben wir

$$(9) \quad \frac{4 \pi f}{x} = \frac{4 \pi h}{z}.$$

In der folgenden Entwicklung bezeichnen wir die Differentialquotienten von θ nach r durch gestrichelte Buchstaben.

Aus $\Pi = \frac{\theta}{r}$ folgt

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = \left(\frac{\theta'}{r} - \frac{\theta}{r^2} \right) \frac{x}{r} = \left(\frac{\theta'}{r^2} - \frac{\theta}{r^3} \right) x,$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial z} = \left(\frac{\theta''}{r^2} - \frac{3 \theta'}{r^3} + \frac{3 \theta}{r^4} \right) \frac{x z}{r} = 4 \pi f,$$

$$\frac{4 \pi f}{x} = \frac{z}{r} \left(\frac{\theta''}{r^2} - \frac{3 \theta'}{r^3} + \frac{3 \theta}{r^4} \right).$$

Ebenso

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} = \left(\frac{\theta'}{r^2} - \frac{\theta}{r^3} \right) + \frac{x^2}{r} \left(\frac{\theta''}{r^2} - \frac{3 \theta'}{r^3} + \frac{3 \theta}{r^4} \right).$$

Diesen Ausdruck können wir zur Abkürzung schreiben

$$B + \frac{x^2}{r} A.$$

Auf dieselbe Weise würde man erhalten

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} = B + \frac{y^2}{r} A,$$

und die Gleichung (9) wird (cf. 3)

$$\frac{z}{r} A = -\frac{2}{z} B - \frac{x^2 + y^2}{r z} A = -\frac{2}{z} B - \frac{r}{z} A + \frac{z}{r} A,$$

oder

$$2B + rA = 0.$$

Durch Einsetzen der Werthe A und B und Multiplikation mit r folgt

$$\theta'' - \frac{\theta'}{r} + \frac{\theta}{r^2} = 0.$$

Diese Gleichung muss auch gültig sein für $r = a$, also

$$(10) \quad \theta'' - \frac{\theta'}{a} + \frac{\theta}{a^2} = 0.$$

85. Nach diesen Bedingungen bestimmen wir θ , d. h. die Funktionen θ_1 und θ_2 , welche in Gleichung (8) eingehen. Im Anfang der Zeit ist $t = 0$, $\theta = 1$ und $\frac{\partial \theta}{\partial t} = 0$; folglich

$$\theta_1(r) + \theta_2(r) = 1;$$

aus (8) ergibt sich ferner durch Differentiation nach t

$$\theta_1'(r) - \theta_2'(r) = 0,$$

woraus folgt

$$\theta_1(r) - \theta_2(r) = \text{const.}$$

$\theta_1(r)$ und $\theta_2(r)$ sind also gleich bis auf eine Konstante. Wenn man eine Konstante zu θ_1 hinzufügt und gleichzeitig von θ_2 abzieht, so ändert man nichts an θ ; man kann also am Anfang der Zeit annehmen

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 1.$$

Dies gilt für ein beliebiges r , so lange $r > a$ ist.

Nun lassen wir t von 0 an wachsen; zur Zeit t besitzt die Funktion $\theta_1\left(r + \frac{t}{\sqrt{K}}\right)$ denselben Werth für den Abstand r , den sie zur Zeit 0 für die Entfernung $r' = r + \frac{t}{\sqrt{K}}$ besass. Für $r > a$ wird

erst recht $r' > a$, da t positiv ist; somit bleibt θ_1 für jeden ausserhalb der Kugel gelegenen Punkt Null. θ_2 behält denselben konstanten Werth 1, so lange $r - \frac{t}{\sqrt{K}} > a$. Für die zwischen a und $a + \frac{t}{\sqrt{K}}$ gelegenen Werthe von r reducirt sich θ auf θ_2 , aber θ_2 ist dann nicht mehr gleich 1, sondern wird nun durch die Differentialgleichung (10) bestimmt.

86. Setzen wir nun $r - \frac{t}{\sqrt{K}} = \xi$ und suchen der Gleichung (10) zu genügen durch

$$\theta = e^{\alpha \xi},$$

so erhalten wir:

$$\alpha^2 - \frac{\alpha}{a} + \frac{1}{a^2} = 0,$$

also

$$\alpha = \frac{1}{2a} \pm \frac{i}{2a} \sqrt{3}$$

und

$$\theta = e^{\frac{\xi}{2a} \pm \frac{i\xi}{2a} \sqrt{3}}.$$

Für einen gegebenen Werth von r folgt hieraus, wenn man für ξ seinen obigen Ausdruck und $A = e^{\frac{r}{2a} (1 \pm i\sqrt{3})}$ setzt:

$$\theta = A e^{-\frac{t}{2a\sqrt{K}} \pm \frac{it}{2a\sqrt{K}} \sqrt{3}}$$

Die Schwingungsdauer T ist dann definirt durch

$$\frac{T \sqrt{3}}{2a\sqrt{K}} = 2\pi$$

und die Wellenlänge durch

$$\lambda = \frac{4\pi a}{\sqrt{3}}.$$

Das logarithmische Dekrement wird durch den reellen Theil des Exponenten von e dargestellt; er ist hier $= \frac{1}{2a\sqrt{K}} T = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$, ein sehr beträchtlicher Werth; die Amplitude wird dadurch nach einer Oscillation auf einen kleinen Theil ihres ursprünglichen Betrages

zurückgeführt. Aus diesem Grunde scheinen die kugelförmigen Erreger von Lodge wenig zur Ausführung von Interferenzversuchen geeignet zu sein, da die zweite Vibration zu schwach ist, um mit der vorhergehenden interferiren zu können.

Für die Werthe des Arguments, die kleiner als a sind, reducirt sich also θ auf eine Exponentialfunktion, deren reeller Theil in die Form gebracht werden kann

$$e^{-h\xi} \cos m\xi.$$

Man hat es mit einer schwingenden Bewegung zu thun, deren Amplitude beständig abnimmt, und das Problem ist damit vollständig gelöst. Fassen wir das Vorhergehende zusammen, so besteht ausserhalb einer Kugel, deren Radius fortwährend mit der Zeit wächst, keine Störung. Es existirt also eine Reihe Kugelwellen, die sich mit der Lichtgeschwindigkeit fortpflanzen.

Wir setzen bei unseren Betrachtungen einen bestimmten Anfangszustand voraus; in Wirklichkeit kann der Kugelerreger Schwingungen von verschiedener Periode hervorrufen. Jeder Kugelfunktion H entspricht eine besondere Schwingung von kürzerer Periode, als die vorangehende und gleichzeitig von grösserem logarithmischen Dekrement; diese harmonischen Schwingungen verschwinden also sogleich wieder.

87. Anwendung auf den Erreger von Hertz. Die Rechnung ist der vorigen vollständig analog. Hertz behandelt das folgende Problem: Ein veränderliches elektrisches Element befindet sich im Anfangspunkt und ist nach OZ gerichtet; zwei Massen $+E$ und $-E$ sind um die unendlich kleine Länge l entfernt und das Moment $E.l$ ist eine periodische Funktion der Zeit. Wie ist nun das erzeugte elektromagnetische Feld beschaffen?

Um den Erreger einem solchen Element anpassen zu können, müsste man l als sehr klein betrachten dürfen; nun hat aber l die Grössenordnung von einem Meter; da indessen die Versuche wenig genau sind, so wird man, von dieser Hypothese ausgehend, dennoch eine hinreichende Annäherung erhalten.

Im ganzen Raum wird H ebenso wie seine ersten Differentialquotienten endlich und stetig sein, ausser in der Nähe des Anfangspunktes, wo sich das Element befindet. Wir wollen nun die Vorgänge in dieser Gegend untersuchen; die Gleichungen sind (cf. § 50)

$$(11) \quad \frac{4\pi f'}{K} = -\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$F = \int \frac{u' d\tau'}{r}.$$

Man hat unter u' den Verschiebungsstrom im Dielektrikum und den im Erreger selbst cirkulirenden Strom zu verstehen; der letztere, dessen Intensität $\frac{\partial(E l)}{\partial t}$ ist, verläuft in Richtung der OZ-Axe; er besitzt demnach keine Komponente u' , und F reducirt sich somit auf die Glieder, welche von den Verschiebungsströmen herrühren; F ist also endlich, ebenso wie G .

Dagegen für $H = \int \frac{w' d\tau'}{r}$ ist das Glied $\frac{\partial(E l)}{\partial t}$ des Erregerstroms unendlich; folglich ist auch H im Anfangspunkt unendlich:

$$H = \text{endliche Grösse} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(E l)}{\partial t}.$$

Ebenso gilt für φ :

$$\varphi = C \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} E l,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = C \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial v \partial z} E l;$$

$\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ sind daher im Anfangspunkt unendlich.

Dasselbe gilt also auch für $4\pi f'$, $4\pi g$, $4\pi h$; aber bei diesen Functionen kennt man den Werth der Glieder, die im Anfangspunkt unendlich werden.

88. Nehmen wir also an, dass $E l$ eine periodische Function der Zeit ist, so können wir schreiben:

$$E l = \mu \sin pt,$$

und

$$\varphi = -\frac{\mu \sin pt}{K} \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}.$$

Alle Funktionen \mathbf{H} , f , g , h werden dann auch zu periodischen Funktionen von der Form $A \sin(pt + k)$ und man wird z. B. erhalten

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -p^2 f.$$

Die dritte der Gleichungen (3) kann man unter Beachtung von (4) schreiben:

$$4\pi h = \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} - \mathbf{K} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}.$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -p^2 \mathbf{H},$$

so dass man erhält

$$4\pi h = \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} + \mathbf{K} p^2 \mathbf{H}.$$

Wir müssen nun die folgenden Gleichungen befriedigen cf. (11)

$$\left\{ \begin{array}{l} 4\pi f = -\mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} - \mathbf{K} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ 4\pi g = -\mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} - \mathbf{K} \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ 4\pi h = -\mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \mathbf{K} \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \end{array} \right.$$

\mathbf{F} ist das Potential einer anziehenden Masse von der Dichte u , und da parallel zu OX kein Leiterstrom vorhanden ist, so bestehen nur Verschiebungsströme, also ist $u = \frac{\partial f}{\partial t}$. Wir wollen eine neue Bezeichnung anwenden, indem wir durch

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F} = \mathbf{P} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) \\ \mathbf{G} = \mathbf{P} \left(\frac{\partial g}{\partial t} \right) \end{array} \right.$$

ausdrücken, dass \mathbf{F} das Potential einer anziehenden Masse von der Dichte $u = \frac{\partial f}{\partial t}$ bedeutet.

Für H muss man dagegen den Leiterstrom berücksichtigen; nimmt man an, dass er auf den Anfangspunkt beschränkt ist, so hat derselbe die Masse

$$i l = l \frac{\partial E}{\partial t}.$$

Hieraus folgt

$$(13) \quad H = P \left(\frac{\partial h}{\partial t} \right) + \frac{l}{r} \frac{\partial E}{\partial t}.$$

89. Um diesen Bedingungen zu genügen, setzt Hertz:

$$(14) \quad H = \frac{\mu \sin (pt - pr \sqrt{K})}{r}.$$

Die Funktion H genügt zunächst der Gleichung (4), da sie von der Form $\frac{f\left(r - \frac{t}{\sqrt{K}}\right)}{r}$ ist.

Setzen wir jetzt $H = H_1 + H_2$ und

$$H_2 = \frac{\mu \sin pt}{r},$$

$$H_1 = \frac{\mu}{r} [\sin (pt - pr \sqrt{K}) - \sin pt],$$

so verschwindet der Klammerausdruck für $r=0$, so dass H_1 im Anfangspunkt nicht unendlich wird; man kann es also nach wachsenden Potenzen von r entwickeln.

Wir haben nun

$$q = - \frac{1}{K} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial z},$$

woraus folgt:

$$(15) \quad \begin{cases} -K \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial^2 H_2}{\partial x \partial z}, \\ -K \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2}. \end{cases}$$

Demnach erhalten wir (cf. 3 u. 11)

$$4\pi f = \frac{\partial^2 H}{\partial r \partial z} = -K \frac{\partial F}{\partial t} - K \frac{\partial q}{\partial r} = -K \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial^2 H_2}{\partial r \partial z};$$

hieraus ergibt sich:

$$-K \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{I}_1}{\partial x \partial z}.$$

Ebenso erhält man

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} + K \rho^2 \mathbf{H} = -K \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}_2}{\partial z^2},$$

und hieraus

$$-K \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{H}_1}{\partial z^2} + K \rho^2 \mathbf{H}_1 + K \rho^2 \mathbf{H}_2.$$

Wir wollen zeigen, dass diese Formeln gut mit (12), (13) und (14) übereinstimmen.

Es ist

$$(16) \quad \begin{cases} -K \frac{\partial F}{\partial t} = -K P \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right) = K \rho^2 P(f) \text{ und} \\ -K \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -K P \left(\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \right) - K \frac{l}{r} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = +K \rho^2 P(h) + K \rho^2 \mathbf{H}_2, \end{cases}$$

denn wir haben:

$$\frac{l}{r} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{\rho^2 l \mathbf{E}}{r} = -\frac{\rho^2 \mu \sin \rho t}{r} = -\rho^2 \mathbf{H}_2.$$

Nun müssen folgende Gleichungen erfüllt sein:

$$(17) \quad \begin{cases} K \rho^2 P(f) = \frac{\partial^2 \mathbf{H}_1}{\partial x \partial z}, \\ K \rho^2 P(h) = \frac{\partial^2 \mathbf{H}_1}{\partial z^2} + K \rho^2 \mathbf{H}_1. \end{cases}$$

In der That ist, da $\Delta \frac{1}{r} = 0$:

$$\Delta \mathbf{H}_2 = 0,$$

$$\Delta \mathbf{H}_1 = \Delta \mathbf{H} = K \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -K \rho^2 \mathbf{H}, \quad \text{cf. (4)}$$

$$\Delta \frac{\partial^2 \mathbf{H}_1}{\partial x \partial z} = -K \rho^2 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x \partial z} = -K \rho^2 \cdot 4 \pi f,$$

$$\Delta \frac{\partial^2 \mathbf{H}_1}{\partial z^2} = -K \rho^2 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2},$$

und

$$\Delta \left(\frac{\partial^2 \mathbf{H}_1}{\partial z^2} + \mathbf{K} \rho^2 \mathbf{H}_1 \right) = - \mathbf{K} \rho^2 \left(\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} + \mathbf{K} \rho^2 \mathbf{H} \right) = - \mathbf{K} \rho^2 \cdot 4 \pi h.$$

Nun gilt nach der Poisson'schen Gleichung:

$$\psi = - \frac{1}{4\pi} \mathbf{P} (\Delta \psi),$$

wenn ψ und seine Differentialquotienten im ganzen Raum endlich sind. Somit ist

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}_1}{\partial x \partial z} = - \frac{1}{4\pi} \mathbf{P} \left(\Delta \frac{\partial^2 \mathbf{H}_1}{\partial x \partial z} \right) = - \frac{1}{4\pi} \mathbf{P} (-\rho^2 \mathbf{K} \cdot 4 \pi f) = \mathbf{K} \rho^2 \mathbf{P} (f),$$

und ebenso

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}_1}{\partial z^2} + \mathbf{K} \rho^2 \mathbf{H}_1 = - \frac{1}{4\pi} \mathbf{P} (-\rho^2 \mathbf{K} \cdot 4 \pi h) = \mathbf{K} \rho^2 \mathbf{P} (h),$$

wodurch die Gleichungen (17) befriedigt sind.

Die Vergleichung der Beziehungen (15), (16) und (17) ergibt dann unmittelbar

$$- \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} - \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = \frac{\partial^2 \mathbf{H}_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}_1}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x \partial z} = 4 \pi f,$$

ebenso zwei analoge Gleichungen für g und h .

Die Lösung von Hertz ist also vollständig gerechtfertigt, denn die durch Gleichung (14) definirte Funktion \mathbf{H} genügt vollständig allen Bedingungen des Problems.

Strahlung der Energie.

90. Die elektromagnetische Energie, deren Quelle der Erreger ist, breitet sich in Schwingungen aus, ebenso wie die Energie einer Lichtquelle. Diese Energieverbreitung soll nun näher in's Auge gefasst werden.

Für die Gesamtenergie gilt (Bd. I § 32 und § 144)

$$\mathbf{T} + \mathbf{U} = \int \left(\frac{\Sigma e^2}{8\pi} + \frac{2\pi}{\mathbf{K}} \Sigma_j f^2 \right) dr.$$

Wir wollen zunächst den Vektor betrachten, dessen Komponenten A, B, C durch die Gleichungen definiert sind

$$(1) \quad \begin{cases} \text{K A} = \beta h - \gamma g, \\ \text{K B} = \gamma f - \alpha h, \\ \text{K C} = \alpha g - \beta f. \end{cases}$$

Diesen Vektor wollen wir den Strahlungsvektor nennen; derselbe ist (bis auf den Faktor K) das geometrische Produkt aus der magnetischen Kraft und der elektrischen Verschiebung und steht senkrecht auf zwei Systemen von Kraftlinien, den elektrischen und den magnetischen.

Die Identität folgender Gleichung ist nun leicht einzusehen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{8\pi} + \frac{2\pi}{\text{K}} (f^2 + g^2 + h^2) \right] = \frac{\partial \text{A}}{\partial x} + \frac{\partial \text{B}}{\partial y} + \frac{\partial \text{C}}{\partial z};^1)$$

hieraus folgt

$$\frac{\partial (\text{T} + \text{U})}{\partial t} = \int \left(\frac{\partial \text{A}}{\partial x} + \frac{\partial \text{B}}{\partial y} + \frac{\partial \text{C}}{\partial z} \right) d\tau.$$

Betrachten wir die in einer geschlossenen Oberfläche enthaltene Energiemenge, so lässt sich zunächst das Volumenintegral in ein Flächenintegral über eine geschlossene Oberfläche umformen:

$$\frac{\partial (\text{T} + \text{U})}{\partial t} = \int (\ell \text{A} + m \text{B} + n \text{C}) d\omega = \int \text{A}_n d\omega,$$

wo A_n die zur Fläche normale Komponente des Radiusvektors bedeutet; alles geht also so vor sich, als wenn in der Zeit dt eine Menge $dt \int \text{A}_n d\omega$ durch die Fläche $\int d\omega$ ausstrahlte.

Es ist aber zu bemerken, dass die durch eine Leiterfläche gestrahlte Energie Null ist, da der Radiusvektor fortwährend tangential zur Oberfläche verläuft; derselbe steht nämlich senkrecht zu den Kraftlinien, und diese sind normal zur Fläche gerichtet.

91. Wir wollen nun zur früher bereits untersuchten Funktion // zurückkehren und die durch eine Kugel von sehr grossem Radius gestrahlte Energie bestimmen.

¹⁾ Denn es ist

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{4\pi}{\text{K}} \left(\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial y} \right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \right) \quad \text{cf. (3) und (4) § 50.}$$

Das aus den beiden Vektoren: der magnetischen Kraft und der elektrischen Verschiebung konstruirte Parallelogramm ist rechtwinklig; denn die Linien der magnetischen Kraft sind einander parallel und die der elektrischen Kraft liegen in Meridianebenen. Nehmen wir eine Kugel von sehr grossem Radius, so ist die magnetische Kraft in jedem Punkt der Oberfläche stets tangential gerichtet. Die elektrische Kraft bildet im Allgemeinen keine Tangente, sondern schliesst mit der Tangentialebene einen Winkel ein, der um so kleiner ist, je grösser der Radius, und für einen sehr grossen Radius kann sie als Tangente zur Kugel betrachtet werden, der Radiusvektor steht also senkrecht auf derselben; wir müssen nun auch noch seine Grösse berechnen.

Die Komponenten der magnetischen Kraft sind (cf. (1) § 80)

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y \partial t} \text{ und } -\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial t}.$$

In der Berechnung von H kommen die Glieder $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r^2}$, $\frac{1}{r^3}$ vor; wir vernachlässigen die höheren Potenzen von $\frac{1}{r}$ und erhalten dann als angenäherten Werth für die magnetische Kraft

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r} \rho^2 \sqrt{K} \cdot H.$$

Die elektrische Verschiebung ist im Falle einer ebenen Welle gleich der magnetischen Kraft multiplicirt mit $\frac{K}{4\pi}$. Diese hier nicht mehr streng richtige Beziehung ist bis zu dem Annäherungsgrad der Rechnung genau; denn für einen sehr entfernten Punkt geht die Verschiebung annähernd in der Wellenebene vor sich, und die Welle ist mit einer ebenen Welle vergleichbar.

Der Radiusvektor ist das Produkt aus den beiden anderen Vektoren, dividirt durch K und besitzt demnach die Grösse

$$\frac{K}{4\pi} \cdot \frac{x^2 + y^2}{r^2} \rho^4 H^2.$$

Hertz hat das erhaltene Integral berechnet, indem er mit $d\omega$ multiplicirte und über die Kugelfläche integrierte; er fand auf diese Weise

$$\frac{2\pi}{3} E^2 \rho^2 (\rho \sqrt{K})^3$$

für den elektrostatischen Werth der während einer Halbschwingung ausgestrahlten Energie.

92. Wir wollen nun diese Grösse numerisch berechnen; der Radius der Kugeln ist 15, die Länge $l = 100$; die höchste erreichte Ladung für jeden der beiden Theile des Erregers betrug 60 Einheiten; dies gibt für das Potentialmaximum $E_0 = 60 \times 15 = 900$. Nach diesen Angaben hatte man ungefähr 2400 Einheiten C. G. S.-Energie, welche für jede Halbschwingung ausgestrahlt wurde¹⁾.

Die anfängliche Energie vor jeder Schwingung betrug

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \times 900 \times 60 = 54000 \text{ Einheiten.}$$

Daraus geht hervor, wie ungeheuer schnell die Schwingungen abnehmen; ein Theil der Energie wird durch den Widerstand des Erregerdrahtes in Wärme umgewandelt, und zwar ungefähr 100 Einheiten auf das Ohm, also für einen Widerstand von etwa 3 Ohm 300 Einheiten; im Ganzen gehen 2700 Einheiten Energie bei jeder Halbschwingung verloren, d. h. $\frac{1}{20}$ der anfänglichen potentiellen Energie; man würde also kaum etwa ein Dutzend Schwingungen erhalten. Das logarithmische Dekrement ist trotzdem viel kleiner, als in dem Fall eines Kugelerregers, was uns nicht überraschen darf, da wir bei dem für den Kugelerreger geltenden Dekrement den Faktor p^2 hatten, und die Energiemenge, welche bei einer Halbschwingung verloren geht, um so grösser wird, je kürzer die Periode ist.

Wir haben ferner oben die Zahlen von Hertz mitgetheilt; er erhielt dieselben, indem er von der halben Wellenlänge von 4,80 m ausging. Diese Grösse hatte er einerseits durch eine, wie wir sahen, fehlerhafte Rechnung gefunden, nämlich durch einen Irrthum bei der Kapacitätsbestimmung, andererseits durch direkte Versuche. Wenn es sich herausstellen würde, dass diese Versuche selbst mit Fehlerquellen behaftet sind und die korrigirte Wellenlänge den Werth $4,80 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$ m annähme, so würde die Strahlung während einer Halbschwingung $2400 \times 2\sqrt{2}$ Einheiten betragen und die Zahl der merkbaren Oscillationen, welche Hertz angenähert auf 10 berechnet, würde nicht mehr als ungefähr $\frac{10}{2\sqrt{2}}$ betragen; unter diesen Bedingungen könnte man übrigens das logarithmische Dekrement nicht mehr als klein ansehen und müsste die ganze Rechnung wieder aufnehmen.

¹⁾ Hertz Wied. Ann. XXXV, S. 12.

Fortpflanzung einer elektromagnetischen Störung in einem geradlinigen Metalldrahte.

93. Die Lücken in den Arbeiten von Hertz sind zahlreich und beträchtlich, und man ist noch weit von der Vollendung entfernt, die man dort anzutreffen wünscht. Einer der dunkelsten Punkte bleibt noch die Fortpflanzung der Wellen in einem Metalldraht; ich will die Versuche darüber auseinandersetzen, ohne die Hypothesen noch zu vermehren und ohne aus meiner Verlegenheit in dieser Hinsicht einen Hehl zu machen.

Wir wählen den Metalldraht zur Z-Axe. Die Störung ist nicht in dem Drahte lokalisiert, es bestehen vielmehr auch in dem Dielektrikum Verschiebungsströme, die sich mit derselben Geschwindigkeit fortpflanzen müssen, wie die im Innern des Drahtes. Die Kenntniss der Eigenschaften des Feldes lässt sich zurückführen auf die Bestimmung einer Funktion H , welche der Gleichung genügt (cf. (4) § 80)

$$\Delta H = K \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}.$$

Setzt man eine periodische Störung voraus und eine konstante Fortpflanzungsgeschwindigkeit derselben, so ist H proportional $\cos(mz - pt)$; da aber H nur eine Funktion von z , t und $q = \sqrt{x^2 + y^2}$ ist, so muss H von der Form sein

$$(1) \quad H = \psi(q) \cos(mz - pt).$$

Man hat also:

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = -p^2 H, \\ \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = -m^2 H, \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \Delta H = \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 H}{\partial q^2} + \frac{1}{q} \cdot \frac{\partial H}{\partial q} = (m^2 - K p^2) H,$$

und folglich, da der mit $\psi(q)$ multiplicirte Faktor von q unabhängig ist:

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial q^2} + \frac{1}{q} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial q} = (m^2 - K p^2) \psi.$$

Wir haben ferner zur Bestimmung von ψ die Bedingung, dass ψ für $q = \infty$ Null wird. Diese Funktion gehört zu den Bessel'schen Funktionen.

94. Es sei nun längs OZ eine anziehende Masse derart vertheilt, dass die Menge der zwischen z' und $z' + dz'$ befindlichen Masse $\cos nz' \cdot dz'$ betrage. Das Potential wird dann sein

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos nz' dz'}{r},$$

wo

$$r^2 = x^2 + y^2 + (z - z')^2 = \rho^2 + (z - z')^2.$$

Wir wollen setzen

$$z' = z + \zeta,$$

also

$$r^2 = \rho^2 + \zeta^2$$

und somit

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(nz + n\zeta) d\zeta}{\sqrt{\rho^2 + \zeta^2}} = \cos nz \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos n\zeta d\zeta}{\sqrt{\rho^2 + \zeta^2}} - \sin nz \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin n\zeta d\zeta}{\sqrt{\rho^2 + \zeta^2}}.$$

Das zweite Integral ist Null, da r bei dem Uebergang von ζ zu $-\zeta$ nicht das Zeichen ändert, wohl aber $\sin n\zeta$; deshalb heben sich die Glieder zu zwei und zwei auf.

Das andere Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos n\zeta d\zeta}{\sqrt{\rho^2 + \zeta^2}} = \theta(\rho)$$

ist nur Funktion von ρ .

Da V ein Potential darstellt, erhält man

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial V}{\partial \rho} - n^2 V = 0,$$

oder weil sich θ nur durch einen von ρ unabhängigen Faktor von V unterscheidet, hat man ebenso

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \rho} - n^2 \theta = 0.$$

Diese Gleichung ist identisch mit der, welche für ψ gilt, wenn man setzt

$$n^2 = m^2 - K p^2.$$

Man hat also Gleichung (3) integrirt und muss für ψ das Integral wählen, welches im Unendlichen Null wird: θ genügt dieser Bedingung, also ist $\psi = \theta$,

$$\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos n\zeta d\zeta}{\sqrt{q^2 + \zeta^2}}, \quad \text{wo } n = \sqrt{m^2 - K p^2}.$$

Es ist hierbei zu bemerken, dass ψ , und folglich auch H nicht für kleine Werthe von q Null wird; thatsächlich wird es für keinen endlichen Werth Null, besonders wichtig aber ist gerade der Umstand, dass es für sehr kleine q nicht Null ist; wenn sich der angezogene Punkt der anziehenden Substanz sehr nahe befindet, so ist das Potential sehr gross und zwar von der Ordnung von $2 \delta \log r$, wo δ die Dichte in der Umgebung und r den kürzesten Abstand von der anziehenden Linie bedeutet.

95. Wir wollen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit durch die Bedingung bestimmen, dass die elektrischen Kraftlinien senkrecht zur Fläche des Leitungsdrahtes verlaufen. Auf der Oberfläche muss also $h = 0$ sein.

Nun ist

$$4 \pi h = \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} + K p^2 H = (K p^2 - m^2) H.$$

Da aber H auf der Oberfläche nicht verschwinden kann, so muss nothwendiger Weise gelten

$$K p^2 - m^2 = 0,$$

also

$$V = \frac{p}{m} = \frac{1}{\sqrt{K}} \text{ 1) }.$$

1) Durch Einsetzen von $m = \frac{2 n \pi}{\lambda}$, $p = \frac{2 n \pi V}{\lambda}$ in Gleichung (1) erhält man

$$H = \psi(q) \cdot \cos \frac{2 n \pi}{\lambda} (z - V t),$$

worin V die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und λ die Wellenlänge bedeutet. Es ist demnach

$$V = \frac{\lambda}{T} = \frac{p}{m}.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Draht ist somit gleich der Lichtgeschwindigkeit und gleich der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen in Luft. Eine unmittelbare Folgerung davon ist, dass h konstant Null bleibt, die elektrischen Kraftlinien liegen also in Ebenen, die rechtwinklig zum Draht stehen.

Der Werth von ψ ist in diesem Fall gegeben durch:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \rho} = 0,$$

woraus folgt

$$\psi = \log \rho.$$

Unglücklicher Weise scheinen die über diesen Punkt angestellten Versuche widersprechende Resultate zu geben. Hertz¹⁾ hat die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in einem Draht gemessen, indem er die direkte Welle mit der am Drahtende reflektirten Welle interferiren liess. Während man unter denselben Umständen in Luft den Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Knotenpunkten zu 4,50 m erhalten würde, findet man hier 2,80 m. Das Verhältniss 45 : 28 ist dasjenige, welches nach den Versuchen von Hertz das Verhältniss der Fortpflanzungsgeschwindigkeit in Luft zu der in einem metallischen Leitungsdraht misst.

96. Man kann diese Abweichung nicht durch das Vorhandensein von harmonischen Obertönen erklären, d. h. durch die Annahme, dass man in dem einen der beiden Fälle eine Wellenlänge gemessen hätte, die einem höheren Ton als dem Grundton entspräche. Diese Erklärung ist ungenügend, denn Hertz hat diese beiden Schwingungen gleichzeitig erhalten, die eine in Luft, die andere in dem Leiter, und diese beiden Schwingungen mussten dieselbe Periode haben, da sie zur Interferenz gebracht wurden.

Der Widerstand des Leiters ist ohne Einfluss, da Hertz nachgewiesen hat, dass die Wellenlänge dieselbe bleibt, wenn man den Durchmesser und das Material des Drahtes variirt.

Muss man also annehmen, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Draht und in der Luft verschieden sein kann? Man möchte dies glauben, wenn man beachtet, dass sich nach Anbringung der oben erwähnten Korrektur für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Draht (§ 70 und § 75) für diese Geschwindigkeit die Zahl $200.000 \times \sqrt{2} = 282.000$ ergibt, was der Lichtgeschwindigkeit so nahe kommt, wie diejenige Zahl, welche die ersten Bestimmungen des

¹⁾ Wied. Ann. XXXIV S. 556 und XXXVI S. 17.

Verhältnisses der elektrischen Einheiten geliefert haben. Nun sind nach der Maxwell'schen Theorie die Geschwindigkeiten in dem Leitungsdraht und in der Luft einander gleich und ihr gemeinsamer Werth stimmt mit der Lichtgeschwindigkeit überein; dies ist aber nicht mehr bei den anderen Theorien der Fall. Die Theorien von Weber, Neumann und die anderen analogen, bei denen $\lambda = K_0$, sind durch die Hertz'schen Versuche endgültig widerlegt. Aus letzteren geht zweifellos hervor, dass die elektromagnetischen Wellen sich mit einer endlichen Geschwindigkeit fortpflanzen, während die genannten Theorien für die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in den Dielektrika einen unendlich grossen Werth ergeben. Wird man demnach nicht zu vermittelnden Theorien seine Zuflucht nehmen müssen, indem man der Geschwindigkeit in den Dielektrika einen grösseren Werth als der Lichtgeschwindigkeit zuschreibt, und der Geschwindigkeit in Leitungsdrähten einen der Lichtgeschwindigkeit benachbarten Werth? Man scheint in der That darauf geführt zu werden, sich diesen neuen elektrodynamischen Theorien zuzuwenden.

Eine solche Nothwendigkeit wäre sehr unangenehm und würde einem Verzicht auf jede elektromagnetische Lichttheorie gleichkommen; aber wenn wir diese neuen elektrodynamischen Theorien näher betrachten, werden wir sehen, dass sie den Thatsachen noch weniger Rechnung tragen, als die Maxwell'schen. Wir müssen zunächst berücksichtigen, dass in der Frage über die Fortpflanzung in einem Draht viele unbekannte Umstände vorhanden sind. Der Wiener Gelehrte Lecher¹⁾ hat kürzlich durch eine neue Methode eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit erhalten, welche mit derjenigen des Lichtes übereinstimmt. Derselbe verwendet zwei geradlinige parallele Drähte, an deren Enden sich zwei mit verdünntem Gas gefüllte Recipienten befinden, welche durch die Entladung aufleuchten. Verbindet man die beiden Drähte durch einen beweglichen Draht und lässt diesen darauf gleiten, so kann man Veränderungen in dem Leuchten des verdünnten Gases konstatiren; die Veränderungen gehen periodisch vor sich, wenn der Draht in kontinuierlicher Bewegung längs der rechtwinkligen Drähte gleitet; dies liefert eine Methode zur Messung der Wellenlänge. Lecher fand für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in einem Leiter eine Zahl, welche der Lichtgeschwindigkeit nahe kommt und glaubt sich deshalb in Gegensatz zu Hertz zu befinden. Wie wir gesehen

¹⁾ Sitzungsberichte der K. Academie der Wissenschaften in Wien Bd. XCIX, Abth. II, April 1890. Siehe auch Wied. Ann. XLI, S. 850; La Lumière électrique XXXIX, S. 89.

haben, ist dieser Gegensatz aber nur scheinbar und verschwindet, sobald man den Fehler von Hertz bei Berechnung der Kapazität korrigirt. Andererseits konnte Hertz die Wellenlänge durch Aufrollen des Drahtes zu einer Spirale auf 30 cm verringern. Sarrazin und de la Rive haben mit verschiedenen Resonatoren andere Wellenlängen erhalten; vielleicht besteht eine kontinuierliche Reihe in harmonischer Folge, analog wie bei dem Spektrum. Das natürlichste bei dem gegenwärtigen Stand der Dinge ist es, die Maxwell'sche Theorie beizubehalten und unseren Zweifel auf die Frage zu lenken, ob es erlaubt ist, die Grenzbedingungen für die Leiteroberfläche anzuwenden. Man dürfte dann nicht mehr annehmen, dass die elektrischen Kraftlinien senkrecht zu den Leitern stehen.

Kapitel X.

Der Resonator von Hertz.

97. Der Apparat, mit welchem Hertz das Feld untersucht, ist ein im Allgemeinen kreisförmiger Metalldraht, der an einem Punkt eine Funkenstrecke besitzt. Wie verhält sich derselbe nun in einem veränderlichen Feld?

Für einen Punkt im Innern des Drahtes ist $f = 0$, also

$$(1) \quad \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0.$$

Nehmen wir die Funkenstrecke als Ausgangspunkt und als X-Axe die Tangente in diesem Punkt, so ist $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial s}$, wo s die von der Funkenstrecke aus gerechnete Länge der Drahtaxe bedeutet.

In dem Ausdruck für F muss man mehrere Glieder unterscheiden; eines derselben F' rührt von den im Feld vorhandenen Strömen her, die bestanden, ehe der Resonator durch den primären Erreger in Aktion gesetzt wurde; ein anderes F'' von den sekundären Strömen, die durch die störende Wirkung des Resonators hervorgebracht werden, durch dessen Vorhandensein die benachbarten Kraftlinien abgelenkt werden; ein drittes Glied endlich wird durch die Leiterströme hervorgebracht, die in dem Resonator zu Stande kommen. Von diesen drei Gliedern ist das zweite F'' vollständig zu vernachlässigen.

Das Potential φ wird sich aus zwei Gliedern zusammensetzen: φ' ist der Wirkung des Erregers selbst zuzuschreiben, φ'' der auf der Oberfläche des Resonators vertheilten Elektricität.

Die Gleichung (1) wird also:

$$(2) \quad \frac{\partial F'''}{\partial t} + \frac{\partial \varphi''}{\partial x} = - \frac{\partial F'}{\partial t} - \frac{\partial \varphi'}{\partial x}.$$

Die rechte Seite wollen wir X nennen; dieselbe stellt die dem Erreger zukommende elektrische Kraft dar und besteht in dem Feld bereits vor Einführung des Resonators.

Wir können die Kapazität der die Funkenstrecke begrenzenden Kugelflächen vernachlässigen. Wenn $q ds$ die auf dem Element von der Länge ds des Drahtes ausgebreitete Elektrizität bedeutet, r den als sehr klein vorausgesetzten Radius desselben, so ist das Potential φ'' an einem Punkte seiner Axe $\frac{2q}{K} \log r$; der Werth von F''' , welcher das Potential einer anziehenden Masse von der Dichte u darstellt, ist ebenso $2i \log r^1$), wobei i die Stromintensität bezeichnet. Der Draht kann nämlich mit einem sehr dünnen Cylinder vertauscht werden; das Potential an einem äusseren Punkt ist dann das gleiche, wie wenn die ganze anziehende Masse auf der Axe dieses Cylinders vereinigt wäre. Folglich besitzt das Integral den Ausdruck

$$2 \log r \int u d\omega,$$

wobei das Integral über alle Elemente $d\omega$ des Drahtquerschnitts auszudehnen ist. Wenn man die Tangente in dem betrachteten Punkt für den Augenblick als X -Axe nimmt, hat man $v = w = 0$, also

$$i = \int u d\omega.$$

Ebenso ist an diesem Punkt $G''' = H''' = 0$, so dass man erhält

$$E = F''' \quad \text{und} \quad \frac{\partial E}{\partial s} = \frac{\partial F'''}{\partial x},$$

¹⁾ Wenn nämlich der Durchmesser des Drahtes sehr klein ist im Verhältniss zu seiner Länge, so kann der Theil des Drahtes, der in der Nähe des betrachteten Punktes liegt, mit einem sehr dünnen Cylinder vertauscht werden. Die obigen Formeln sind nicht homogen, denn r , das unter dem Zeichen \log steht, ist eine Länge und keine Zahl. Eine genauere Rechnung würde die homogene Formel ergeben

$$2i \log \frac{r}{L} + \text{Glieder, die mit } r \text{ verschwinden.}$$

Hierin ist L eine konstante, im Verhältniss zu r sehr bedeutende Länge. Durch Vernachlässigung der Glieder, die mit r Null werden, bleibt

$$2i (\log r - \log L)$$

oder da $\log L$ gegen $\log r$ zu vernachlässigen ist

$$2i \log r.$$

wenn man E das Vektorpotential mit den Komponenten F''' , G''' , H''' nennt.

Die Kontinuitätsgleichung, welche sich in diesem Fall reducirt auf

$$\frac{\partial i}{\partial s} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

ergibt zwischen E und φ'' die Relation

$$(3) \quad \frac{\partial E}{\partial s} + K \frac{\partial \varphi''}{\partial t} = 0.$$

Die Gleichung (2) kann man schreiben

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial \varphi''}{\partial s} = X,$$

denn es ist

$$\frac{\partial \varphi''}{\partial s} = \frac{\partial \varphi''}{\partial x}.$$

Wir eliminiren E , indem wir (2) nach t , (3) nach s differenzieren, und diese mit $\frac{1}{K}$ multiplicirte Gleichung (3) abziehen; dann folgt

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{1}{K} \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial s^2} = \frac{\partial X}{\partial t}.$$

Aber E ist bis auf den konstanten Faktor $2 \log r$ gleich i ; setzt man

$$2 \log r = C,$$

so erhält man

$$(4) \quad \frac{\partial^2 i}{\partial s^2} - K \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = -\frac{K}{C} \cdot \frac{\partial X}{\partial t}.$$

98. X ist eine Funktion des Bogens s , der auf dem Draht des Resonators von der Unterbrechungsstelle aus gezählt wird. Nehmen wir ausserdem an, dass X mit einer Sinusfunktion der Zeit variirt, so kann es dargestellt werden durch

$$X = \frac{C}{pK} \varphi(s) \cos pt.$$

Dann ist

$$-\frac{K}{C} \cdot \frac{\partial X}{\partial t} = \varphi(s) \sin pt.$$

$\varphi(s)$ ist offenbar eine periodische Funktion von s , wenn man die Gesamtlänge S des Resonators als Periode annimmt, und wird sich also in eine Fourier'sche Reihe entwickeln lassen:

$$\varphi(s) = A + B \cos ms + C \sin ms + \dots,$$

worin $m = \frac{2\pi}{S}$. Wir wollen nur die drei ersten Glieder beibehalten; allerdings wird man dann nur ein angenähertes Resultat erhalten, aber dies genügt uns vorläufig.

Es wird also

$$\frac{\partial^2 i}{\partial s^2} - K \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = (A + B \cos ms + C \sin ms) \sin pt.$$

Durch Integration erhalten wir

$$(5) \quad i = - \left(\frac{A}{-K p^2} + \frac{B \cos ms + C \sin ms}{m^2 - K p^2} \right) \sin pt.$$

Dies ist die Lösung, welche einem permanenten Zustand entspricht.

99. Wir wollen das Resultat diskutieren: Machen wir $s = 0$, d. h. betrachten wir die Funkenstrecke, so wird der Strom an diesem Punkt P durch den Funken gemessen; er ist gegeben durch

$$(6) \quad i = - \left(\frac{A}{-K p^2} + \frac{B}{m^2 - K p^2} \right) \sin pt.$$

Das Maximum des Funkens ist proportional der Klammergrösse. Für den Punkt P', welcher P gerade gegenüber liegt, ist $\sin ms = 0$, $\cos ms = -1$, also

$$\varphi(s) = A - B.$$

Die elektromotorische Kraft in P' ist also proportional $A - B$. Wenn man annähme, dass $-K p^2$ und $m^2 - K p^2$ gleich wären und entgegengesetztes Zeichen besässen, so würde der Klammerausdruck von (6) proportional $A - B$ sein und die Funkenlänge würde ein gutes Mass darstellen für die elektrische Kraft in dem P gerade gegenüber befindlichen Punkt P'. Thatsächlich gibt es jedoch keinen Grund, warum die Nenner gleich sein sollten, aber sie haben bei den Versuchen von Hertz wenigstens das entgegengesetzte Zeichen, die Klammer der Gleichung (6) ist also proportional $(A - B)$ mal einem bestimmten Koeffizienten.

Ich finde keinen Ausdruck, der allgemein genug wäre, um meinen Gedanken wiederzugeben; ich möchte sagen, dass der Funken

ein Bestreben hat, wie $(A - B)$ zu variiren. Hertz scheint sich in der That mit der Bemerkung zufrieden zu geben: je stärker der Funken in P ist, desto grösser wird die elektrische Kraft in P' sein¹⁾.

Wenn aber die beiden Nenner der Klammer (6) dasselbe Zeichen hätten, so würde man $(A + B)$ mal einem Koeffizienten erhalten und der Funken würde das Bestreben haben, wie $(A + B)$ zu variiren, d. h. wie die elektrische Kraft im Punkt P.

100. Ausser diesem Mangel an Strenge gibt es noch einen anderen Einwurf gegen diese Theorie. Dieselbe beruht auf der Gleichung $F = \int \frac{u dr}{r}$ und setzt folglich voraus, dass in dem Fall sehr rascher Schwingungen die elektrische Kraft senkrecht zu den Leitern verläuft; wir haben gesehen, wie vorsichtig man mit dieser Hypothese sein muss.

Wenn man etwas näher zusieht, findet man, dass die Theorie des Resonators nicht geändert wird, wenn man auf diese Hypothese verzichtet; man würde immer im ersten Glied der Gleichung (5) einen linearen Ausdruck erhalten für die partiellen Differentialquotienten von i nach s und t . Die Form des Integrals würde dieselbe bleiben, nur würde man in den Nennern des Klammersausdrucks (6) komplizirtere Polynome von m und p erhalten, was jedoch die vorher angestellte oberflächliche Diskussion nicht erschweren würde.

101. Hertz beschränkt sich im Wesentlichen darauf, zur Charakterisirung der Rolle, die sein Resonator spielt, ein Bild zu gebrauchen; er vergleicht den Resonator mit einer schwingenden Saite, die an beiden Enden befestigt ist (diese beiden Enden entsprechen den Begrenzungen der Funkenstrecke) und welche unter dem Einfluss periodischer Kräfte oscillirt. Dieser Vergleich ist ganz richtig, er übersetzt die vorangegangene Analyse in die gewöhnliche Sprache; Unrecht hat Hertz jedoch, wenn er glaubt, dass die Schwingungen der Saite immer im selben Sinn erfolgen, wie die sie bestimmende Kraft; sie können vielmehr entgegengesetzten Sinn besitzen. Betrachten wir z. B. ein Pendel, welches einer Kraft proportional $\sin pt$ unterworfen ist und es sei θ der immer sehr kleine Winkel, den das Pendel mit seiner Gleichgewichtslage bildet, so haben wir

¹⁾ Wied. Ann. XXXIV S. 163. — Für gewisse besondere Stellungen des Resonators kann man dies sagen und Hertz leitet es in der That aus genaueren Folgerungen des Studiums des Funkens ab, aber in dem allgemeinen Fall kommt seine Ueberlegung wohl auf das oben Erwähnte hinaus.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + m^2\theta = A \sin pt,$$

wo m nur von der Periode des schwingenden Pendels abhängt.

Das Integral für den endgültigen Zustand lautet

$$\theta = \frac{A \sin pt}{m^2 - p^2}.$$

Um das allgemeine Integral zu erhalten, genügt es, den Ausdruck

$$+ C \cos mt + C' \sin mt$$

zuzufügen.

Hat nun θ immer dasselbe Zeichen, wie $\sin pt$? Dies kommt auf die Frage hinaus, ob $\frac{A}{m^2 - p^2}$ immer dasselbe Zeichen, wie A besitzt. Ist $m < p$, so erfolgt die Verschiebung im umgekehrten Sinne, wie die Kraft; ebenso hängt bei dem Resonator alles von dem Zeichen des Ausdrucks $m^2 - p^2$ ab.

Kapitel XI.

Reflexion der elektromagnetischen Wellen.

102. Die Anwendung der Maxwell'schen Theorie auf die Hertz'schen Versuche bringt einige Schwierigkeiten mit sich; die Vermittlungstheorien zwischen der alten elektrodynamischen und der Maxwell'schen Theorie, bei denen λ einen zwischen 0 und dem Reciproken des Quadrats der Lichtgeschwindigkeit liegenden Werth erhält, tragen jedoch den Thatsachen nicht besser Rechnung.

In einem vollkommenen Leiter oder, was auf dasselbe hinauskommt, in einem gewöhnlichen Leiter bei Annahme ausserordentlich rascher Schwingungen, sind die magnetischen Kräfte und der Strom im Innern Null; die Ströme sind nur auf der Oberfläche vorhanden. Die erste dieser Voraussetzungen — dass die magnetische Kraft im Innern Null ist — verträgt sich mit allen Theorien; anders verhält es sich mit der zweiten; im Allgemeinen hat man nämlich ((15) § 29)

$$4 \pi u = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} + \lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}.$$

Da aber im Innern des betrachteten Leiters $\alpha = \beta = \gamma = 0$ ist, so bleibt

$$4 \pi u = \lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}.$$

Bei Maxwell ist $\lambda = 0$, woraus folgt $u = 0$; aber wenn λ nicht Null ist, verschwindet u im Allgemeinen nicht mehr.

Nun ist eine der am besten bewiesenen experimentellen Thatsachen die Undurchdringlichkeit der Leiter für elektrische Strahlung. Hertz hat dieselbe zur Evidenz dadurch erwiesen, dass er elektromagnetische Wellen an der Fläche einer Metallscheibe reflektiren liess.

103. Betrachten wir eine Metallscheibe, die zwischen den Ebenen $x = 0$ und $x = \varepsilon$ liegt, und stellen uns eine daselbst an-

kommende elektromagnetische Störung vor, die sich in einer ebenen Transversalwelle fortpflanzt: wird dieselbe hindurchgehen?

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Die elektrische Schwingung geht senkrecht zur Einfallsebene vor sich, die magnetische Kraft dagegen liegt in dieser Ebene. Alle Theorien stimmen dann darin überein, dass die Schwingung in diesem Fall nicht hindurchgehen wird und dass das elektrostatische Potential φ jenseits der Ebene $x=0$ verschwindet.

2. Die magnetische Kraft steht senkrecht zur Einfallsebene und die elektrische Verschiebung ist ihr parallel. Dieser Fall bildet das experimentum crucis.

Wählen wir zur Ebene $z=0$ die Einfallsebene, so ist

$$H = h = w = 0,$$

denn die elektrische Verschiebung, der Strom und das Vektorpotential liegen in der Einfallsebene; F, G, f, g, u, v sind im Allgemeinen von Null verschieden; $\alpha = \beta = 0$, da die magnetische Kraft senkrecht zur Einfallsebene steht; die Theorie bietet die grössten Analogien dar mit der optischen Theorie der Reflexion und Refraktion¹⁾.

Wir wollen uns hier imaginärer Exponenten bedienen, deren reelle Theile die in Betracht kommenden physikalischen Grössen darstellen, und wollen annehmen, dass alle Funktionen einer mit $e^{i(by - pt)}$ multiplicirten Funktion von x proportional seien.

Für F erhalten wir so z. B.

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = -i p F, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = i b F.$$

Die Funktion von x ist selbst eine Summe reeller und imaginärer Exponentialgrössen. Man wird dann zwei Arten von Ausdrücken erhalten; die einen von der Form

$$(1) \quad e^{i(ax + by - pt)},$$

die anderen von der Form

$$(2) \quad e^{\alpha x + i(by - pt)}.$$

Die ersten entsprechen einer ebenen Welle (wobei die Gleichung der Ebene $ax + by = \text{const.}$ ist), die sich mit einer Geschwindigkeit

$\frac{p}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ fortpflanzt und zwar nach rechts, wenn $a > 0$, nach links,

¹⁾ Théorie mathématique de la lumière § 208.

wenn $a < 0$; die zweiten Ausdrücke entsprechen einer imaginären Wellenebene, d. h. sie kommen nicht in Betracht.

104. Da unsere leitende Scheibe unabhängig von der Grösse ihrer Leitungsfähigkeit jeden elektrischen Strahl zurückhält, so kann man diese Leitungsfähigkeit als unendlich voraussetzen: der Schirm würde übrigens um so undurchdringlicher sein, je grösser seine Leitungsfähigkeit ist.

Aus dieser Hypothese finden wir, indem alles ausser γ eliminiert wird:

$$(3) \quad \Delta \gamma = (K - \lambda) \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2}.$$

Eigentlich müsste man setzen $\mu(K - \lambda)$; aber wir haben gesehen, dass man im Falle sehr rascher Schwingungen für alle Körper $\mu = 1$ annehmen kann.

Für das elektrostatische Potential φ würde man erhalten

$$(4) \quad \Delta \varphi = \frac{k\lambda(K - \lambda)}{K} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

In der That ist nur der nach der Zeit genommene Differentialquotient der Differenz der beiden Seiten von Gleichung (4) Null; da aber eine derartige Funktion, bis auf einen Faktor $-ip$, ihrem Differentialquotient nach der Zeit gleich ist, so ist auch die Funktion selbst Null und die Gleichung (4) bleibt bestehen.

105. Nun ist

$$4\pi u = 4\pi \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial \gamma}{\partial y} + \lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t},$$

$$4\pi v = 4\pi \frac{\partial g}{\partial t} = -\frac{\partial \gamma}{\partial x} + \lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t},$$

und im Dielektrikum hat man

$$\frac{4\pi f}{K - \lambda} = -\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

woraus folgt

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{K - \lambda} \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}$$

$$= -\frac{1}{K - \lambda} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \left(\frac{\lambda}{K - \lambda} + 1 \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t},$$

¹⁾ Siehe § 46.

oder

$$(5) \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\mathbf{K}-\lambda} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\mathbf{K}}{\mathbf{K}-\lambda} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}.$$

Ebenso:

$$(6) \quad \frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mathbf{K}-\lambda} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial x} - \frac{\mathbf{K}}{\mathbf{K}-\lambda} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t}.$$

Was wird aus diesen Gleichungen in dem Leiter? Man hat für einen inneren Punkt

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0;$$

alles geht so vor sich, als wenn \mathbf{K} unendlich wäre, und die Gleichungen (5) und (6) ergeben demnach

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t},$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t}.$$

106. Wir wollen nun die Werthe von φ und γ in den drei Gebieten bestimmen.

Die Gleichung (3) drückt aus, dass die magnetische Kraft sich mit der Geschwindigkeit der Transversalwellen fortpflanzt, die Gleichung (4), dass das elektrostatische Potential die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Schwingungen besitzt (cf. § 46).

Ersetzen wir in (3) und (4) $\frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2}$ und $\frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2}$, sowie $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$ und $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ durch ihre Werthe in Funktion von γ und von φ , so erhalten wir

$$(7) \quad \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} + [b^2 - \nu^2 (\mathbf{K} - \lambda)] \gamma = 0,$$

$$(8) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \left[b^2 - \nu^2 \frac{k\lambda(\mathbf{K} - \lambda)}{\mathbf{K}} \right] \varphi = 0.$$

Setzen wir

$$b^2 - \nu^2 (\mathbf{K} - \lambda) = a^2,$$

so sind die beiden allgemeinen Integrale von (7) $e^{i a x}$ und $e^{-i a x}$; für $x < 0$ ist

$$\gamma = \mathbf{A} e^{i a x} + \mathbf{B} e^{-i a x},$$

wo A und B nur Funktionen von y und t darstellen von der Form

$$A = A_0 e^{i(by - pt)};$$

A_0 ist eine Konstante.

Für $0 < x < \varepsilon$ hat man $\gamma = 0$.

Auf der anderen Seite der Scheibe für $x > \varepsilon$ wird gelten

$$\gamma = A' e^{i ax} + B' e^{-i ax},$$

wo A' und B' ebensolche Funktionen, wie A und B bedeuten, aber andere Werthe besitzen.

Setzen wir in gleicher Weise in der Gleichung für φ

$$b^2 - p^2 \frac{k \lambda (K - \lambda)}{K} = \pm c^2 1),$$

so wird das allgemeine Integral von (8), wenn wir das positive Zeichen wählen

$$\varphi = C e^{i cx} + D e^{-i cx};$$

für das negative Zeichen dagegen lautet das Integral

$$\varphi = C e^{cx} + D e^{-cx}.$$

In dem Leiter zwischen den Ebenen $x = 0$ und $x = \varepsilon$ ist $K = \infty$ und der Koeffizient von φ in Gleichung (8) reducirt sich auf

$$b^2 - p^2 k \lambda = \pm d^2.$$

Das Integral ist dann

$$\varphi = C' e^{i dx} + D' e^{-i dx},$$

oder

$$\varphi = C' e^{dx} + D' e^{-dx},$$

je nachdem man $+ d^2$ oder $- d^2$ nehmen muss.

Für $x > \varepsilon$ endlich, auf der anderen Seite der Scheibe, wird man, je nachdem, erhalten

$$\varphi = C'' e^{i cx} + D'' e^{-i cx},$$

oder

$$\varphi = C'' e^{cx} + D'' e^{-cx}.$$

¹⁾ Hier kennen wir nicht a priori das Zeichen der linken Seite und sind deshalb genöthigt $\pm c^2$ zu setzen; im Vorhergehenden war immer $b^2 - p^2 (K - \lambda)$ positiv, denn die einfallende Transversalwelle, welche wir betrachten, hat immer eine reelle Geschwindigkeit.

107. Von den beiden Gliedern, welche in den Ausdruck von γ eingehen, entspricht für $x < 0$ das eine $Ae^{i\alpha x}$ dem einfallenden Strahl, das andere $Be^{-i\alpha x}$ dem reflektirten Strahl. Für $x > \epsilon$ hat man auch zwei Glieder; davon entspricht dem einen $A'e^{i\alpha x}$ der gebrochene Strahl, dem anderen $B'e^{-i\alpha x}$ entspricht nichts, folglich muss es Null sein.

Setzen wir ebenso bei φ zunächst den Faktor

$$b^2 - p^2 \frac{k\lambda(K - \lambda)}{K}$$

als positiv voraus, so entspricht das erste Glied $Ce^{i\alpha x}$ dem einfallenden Strahl, das zweite $De^{-i\alpha x}$ dem reflektirten.

Wenn wir eine einfallende Transversalwelle annehmen, so gibt es keine einfallende Longitudinalwelle und das Glied $Ce^{i\alpha x}$ muss Null sein; aber es wird im Allgemeinen eine reflektirte und eine gebrochene Longitudinalwelle bestehen. Im Leiter selbst werden zwei Glieder vorhanden sein, denn es entsteht eine gebrochene und eine an der zweiten Fläche reflektirte Welle. Auf der anderen Seite des Leiters wird nur das Glied $C'e^{i\alpha x}$ vorhanden sein, welches einer gebrochenen Longitudinalwelle entspricht.

In dem Falle, wo der Faktor $b^2 - p^2 \frac{k\lambda(K - \lambda)}{K}$ negativ ist, tritt für $x < 0$ nur das Glied $Ce^{c\alpha x}$ (wobei c positiv zu nehmen ist) auf; denn das Glied $De^{-c\alpha x}$ würde für $x = -\infty$ unendlich werden, es muss also Null sein.

In der Scheibe selbst würden zwei Glieder bestehen bleiben und beim Ausgang würde man nur das Glied $D'e^{-\alpha x}$ behalten, denn $C'e^{c\alpha x}$ würde für $x = +\infty$ unendlich werden.

Fassen wir alles zusammen, so sind also zwei Fälle zu unterscheiden

1.
$$b^2 - p^2 \frac{k\lambda(K - \lambda)}{K} > 0.$$

Man hat dann:

	Transversalwellen	Longitudinalwellen
Links von der Scheibe	$\gamma = Ae^{i\alpha x} + Be^{-i\alpha x}$	$\varphi = D e^{-i\alpha x}$
In der Scheibe selbst	$\gamma = 0$	$\varphi = C' e^{i\alpha x} + D' e^{-i\alpha x}$
		oder
Rechts von der Scheibe	$\gamma = A' e^{i\alpha x}$	$\varphi = C'' e^{i\alpha x}.$

$$2. \quad b^2 - p^2 \frac{k \lambda (K - \lambda)}{K} < 0.$$

Dann ist

	Transversalwellen	Longitudinalwellen
Links von der Scheibe	$\gamma = A e^{i a x} + B e^{-i a x}$	$\varphi = C e^{c x}$
In der Scheibe selbst	$\gamma = 0$	$\varphi = C' e^{d x} + D' e^{-d x}$
Rechts von der Scheibe	$\gamma = A' e^{i a x}$	$\varphi = D'' e^{-d x}$.

Man hat übrigens rechts von der Scheibe, je nachdem,

$$4 \pi u = i b A' e^{i a x} + \lambda C' c p e^{i c x}$$

oder

$$4 \pi u = i b A' e^{i a x} + \lambda D'' c i p e^{-c x} \quad (\text{cf. § 105}).$$

108. Was muss nun stattfinden, damit jenseits der Scheibe kein Strom vorhanden ist? Es müssen die für u und v erhaltenen Werthe identisch Null sein. Wir wollen zeigen, dass, wenn man nicht $\lambda = 0$ annimmt, dieses Resultat nur unter der Voraussetzung erhalten wird, dass die einfallende Welle Null ist.

Damit der Strom jenseits der Scheibe identisch Null ist, müssen die Koeffizienten A' , C'' und D'' Null sein; in der Maxwell'schen Theorie könnte man C'' und D'' von Null verschieden sein lassen, denn der Ausdruck $\lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}$ verschwindet, ohne dass φ nothwendiger Weise Null werden muss. Wir wollen nun beachten, dass F , G und φ kontinuierliche Funktionen sein sollen.

Betrachten wir die Ebene $x = \varepsilon$, so muss in einem rechts von derselben gelegenen Punkt $F = G = 0$ sein; da F und G aber kontinuierlich sind, so haben sie auch in einem der Ebene sehr nahe, aber auf der linken Seite derselben gelegenen Punkt noch den Werth Null.

Wenn F Null ist, so ist auch $\frac{\partial F}{\partial t} = -i p F = 0$, und $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = -p^2 F = 0$, also $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} = 0$; denn im Innern der Scheibe hat man

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0,$$

woraus folgt

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} = 0,$$

und $i p \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$. $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ ist also im Leiter nahe bei der zweiten Oberfläche Null.

Auf dieselbe Weise kann man zeigen, dass $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} = 0$ ist. Also ist auch $p b \varphi = 0$ und folglich $\varphi = 0$. Da φ und $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ an einem Punkt des Leiters Null sind und φ eine Summe zweier Exponentialgrößen darstellt, so sind die beiden Koeffizienten nothwendig Null. Also φ wie γ haben im Innern des Leiters den Werth Null.

109. Wir wollen nun ebenso die erste Fläche $x=0$ betrachten. Für einen dieser Fläche unendlich nahen, aber ausserhalb des Leiters liegenden Punkt sind F und G Null, da sie beim Durchgang durch die Fläche kontinuierlich und im Leiter selbst Null sind.

$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}$ und $\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}$ sind ebenfalls Null und aus demselben Grund muss φ Null sein. Man kann also schliessen, dass $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$, denn es ist $\varphi = C e^{i c x}$ oder $C e^{c x}$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = i c \varphi$ resp. $= c \varphi$.

Hieraus folgt

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} = -p b \varphi = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} = -i p \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0,$$

also

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} = 0.$$

Durch Vergleichung mit (5) und (6) folgt weiter $\frac{\partial \gamma}{\partial x} = \frac{\partial \gamma}{\partial y} = 0$, also auch $\gamma = 0$. Da nun γ eine Summe zweier Exponentialgrößen ist, kann γ und $\frac{\partial \gamma}{\partial x}$ nicht gleichzeitig Null werden, ohne dass die beiden Koeffizienten Null sind; γ ist also identisch Null. Es darf demnach, damit keine gebrochene Welle durch die Scheibe geht, keine einfallende Welle vorhanden sein. Eine beliebige einfallende Transversalwelle durchsetzt immer die Scheibe, wenn nicht $\lambda = 0$ ist.

110. Man könnte vielleicht folgende Vermuthung aufstellen: Im Innern des Leiters haben wir

$$\varphi = C' e^{d x} + D' e^{-d x};$$

wenn nun d sehr gross wäre und C' sehr klein, so würde das Glied $D' e^{-d x}$ in der Nachbarschaft der ersten Fläche ein merkliches Potential liefern, welches aber in der Nähe der zweiten Fläche verschwände. Diese Vermuthung ist jedoch zu verwerfen; K ist nemlich

positiv ebenso wie λ , $d < b$ und b ist von derselben Grössenordnung wie das Reciproke der Wellenlänge. Damit also das Potential an der zweiten Fläche unmerklich wäre, müsste man Scheiben von einer merklich grösseren Dicke, als die Wellenlänge beträgt, anwenden und diese ist von der Ordnung von 10 m; die Versuche wurden dagegen mit Scheiben von kaum einigen Millimetern angestellt.

111. Die Experimente von Hertz verurtheilen also die alte Elektrodynamik, sowie die vermittelnden Theorien, und es bleibt nur die Maxwell'sche Theorie übrig. Es ist wenig wahrscheinlich — obgleich das Gegentheil noch nicht erwiesen ist — dass dieselbe allen Thatsachen Rechnung trägt. Ohne Zweifel wird man sie noch modificiren müssen; wahrscheinlich wird dies aber ohne Aenderung des wesentlichsten Punktes geschehen können, d. h. die beiden Systeme von Gleichungen

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = - \frac{4\pi}{K} \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \right),$$

$$4\pi \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}$$

werden gewahrt bleiben.

Alles Uebrige besteht in der That nur aus sekundären Hypothesen, auf die man verzichten kann. Die eine derselben lässt, wie wir schon erwähnt haben, die elektrischen Kraftlinien senkrecht zur Oberfläche der Leiter auslaufen. Man hat mit einem Wort eine metallische Reflexion der elektromagnetischen Wellen an der Oberfläche der Leiter; Potier wies aber nach, dass die Theorie von Maxwell, auf die Optik angewandt, zur Erklärung der Metallreflexion nicht ausreicht. Jedenfalls ist es schon lange bekannt, dass die Maxwell'sche Theorie nur eine erste Annäherung darstellt, die höchstens für den luftleeren Raum ausreicht, da sie die Dispersion nicht erklärt.

112. Wie kommt es nun, dass wir die Hypothese, die Kraftlinien stehen senkrecht zu den Leitern, so leichtens Kaufs fahren lassen können? Deshalb, weil wir uns darauf gestützt haben, dass

$$F = \int \frac{u' dr'}{r},$$

aber diese letztere Gleichung ist selbst nicht so klar bewiesen.

Setzen wir

$$F' = \int \frac{u' dr'}{r},$$

so erhalten wir

$$\int (F dx + G dy + H dz) = \int (F' dx + G' dy + H' dz),$$

wenn das Integral über eine beliebige geschlossene Kurve ausgedehnt ist. Bei Helmholtz bleibt die Gleichheit auch für eine beliebige, nicht geschlossene Kurve bestehen; dann folgt daraus unmittelbar $F = F'$, $G = G'$, $H = H'$. Aber wenn wir von der Maxwell'schen Hypothese ausgehen, haben wir nur das Recht, diese Gleichung für eine nicht geschlossene Linie aufzustellen, und dieselbe beweist nur, dass die Differenz der beiden Differentiale ein vollständiges Differential darstellt.

Man hat dann

$$F = F' + \frac{\partial \chi}{\partial x},$$

$$G = G' + \frac{\partial \chi}{\partial y},$$

$$H = H' + \frac{\partial \chi}{\partial z},$$

wo χ eine beliebige Funktion bedeutet. Dies sind in der That die Formeln, auf die man geführt wird, wenn man nicht zur Helmholtz'schen Theorie übergeht. Die Funktion χ spielt bei den gewöhnlichen elektrodynamischen Erscheinungen gar keine Rolle, deshalb wählt Maxwell χ willkürlich Null; aber, wie er ausdrücklich sagt, ist diese Annahme nicht unbedingt nothwendig¹⁾.

¹⁾ Siehe Kapitel XII Zusatz 2.

Kapitel XII.

Zusätze und Ergänzungen.

Den vorhergehenden Kapiteln, die meine Vorlesungen des zweiten Semesters 1890 enthalten, glaube ich einige ergänzende Zusätze zufügen zu müssen, die sich auf Punkte beziehen, welche ich in meiner Vorlesung aus Mangel an Zeit nicht entwickeln konnte oder welche durch die Fortschritte der Wissenschaft nöthig geworden sind.

Zusatz I.

Die Theorie von Helmholtz und das Princip von Newton.

Ausgehend von dem Princip der „Einheit der elektrischen Kraft“ haben wir oben gezeigt, dass die gegenseitige Einwirkung zweier veränderlicher geschlossener Solenoide dieselbe sein muss, wie diejenige zweier gleichwerthiger elektrischer Blätter, oder besser, dass sie gleich sein muss der Wirkung eines der Solenoide auf das dem anderen gleichwerthige elektrische Blatt.

Unter Anwendung des Princips von der Erhaltung der Energie berechneten wir die gegenseitige Wirkung zweier geschlossener Solenoide, die in derselben Weise veränderlich sind, wie zwei elektrische Blätter, und zeigten auf diese Weise, dass allein die Theorie von Maxwell mit der Forderung der Einheit der elektrischen Kraft vereinbar ist.

Wollte man in analoger Weise die Wirkung eines elektrischen Blattes auf ein veränderliches Solenoid berechnen, dann würde man bald wahrnehmen, dass das Princip von der Erhaltung der Energie nur mit grosser Vorsicht anzuwenden ist, wenn man dabei nicht wichtige Glieder vergessen will, und dass man besonders den elektrodynamischen Wirkungen der Konvektionsströme Rechnung tragen muss.

Aber selbst unter Anwendung dieser Vorsichtsmassregeln kommt man zu verschiedenen Resultaten, je nachdem man ein festes Blatt und ein bewegliches Solenoid annimmt, oder umgekehrt ein festes Solenoid und ein bewegliches Blatt. Man wird so zu dem Schluss geführt, dass die Grundhypothesen der Helmholtz'schen Theorie mit der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung unvereinbar sind.

Dies ist leicht direkt nachzuweisen.

Die elektrodynamische Energie T ist nämlich durch folgendes Integral gegeben, indem man z. B. $k = 1$ setzt (Theorie von Neumann)

$$T = \frac{1}{2} \int \frac{u u' + v v' + w w'}{r} d\tau d\tau',$$

wobei das Integral über alle Elemente $d\tau$ und $d\tau'$ des von den Strömen durchflossenen Körpervolumens zu erstrecken ist.

Stellen wir uns jetzt vor, dass diese Körper, anstatt unbeweglich zu bleiben, eine fortschreitende (translatorische) Bewegung parallel zur X-Axe mit der Geschwindigkeit ξ erhalten, dann wird an jedem Punkt, ausser dem Leiterstrom (oder Verschiebungsstrom) ein Konvektionsstrom entstehen, dessen Komponenten sind

$$q \xi, 0, 0,$$

derart, dass der Ausdruck für T wird

$$\frac{1}{2} \int \frac{(u + q \xi)(u' + q' \xi) + v v' + w w'}{r} d\tau d\tau'.$$

Das Princip von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung würde erfordern, dass dieser Ausdruck gleich ist der Summe zweier Glieder, von denen das erste unabhängig von ξ ist, während das zweite nur von ξ abhängt; d. h. das Integral

$$\int \frac{u q' + u' q}{r} d\tau d\tau'$$

müsste Null sein.

Da die Funktionen u und q vollständig willkürlich sind, so ist es klar, dass dies im Allgemeinen nicht der Fall sein kann.

Wenn k nicht gleich 1 ist, so muss man zu dem Ausdruck für T das folgende Integral hinzufügen (cf. (9) § 25)

$$\frac{1-k}{2} \int r \frac{dq}{dt} \cdot \frac{dq'}{dt} d\tau d\tau';$$

welches für bewegliche Leiter wird

$$\frac{1-k}{2} \int \int r \left(\frac{dq}{dt} - \frac{\partial q}{\partial x} \xi \right) \left(\frac{dq'}{dt} - \frac{\partial q'}{\partial x} \xi \right) d\tau d\tau'.$$

Wenn also das Princip von Newton anwendbar wäre, so müsste der Koeffizient von ξ in dem Ausdruck von T Null sein, d. h. man müsste haben

$$\int \left[\frac{u q' + u' q}{r} - \frac{r}{2} (1-k) \left(\frac{\partial q}{\partial x} \cdot \frac{dq'}{dt} + \frac{\partial q'}{\partial x} \cdot \frac{dq}{dt} \right) \right] d\tau d\tau' = 0.$$

Offenbar ist aber diese Bedingung nicht erfüllt und *die Theorie von Helmholtz lässt sich mit dem Newton'schen Princip nur vereinigen, wenn man passende Modifikationen anbringt.*

In einem speciellen Fall indessen bietet sich diese Schwierigkeit nicht dar, und dies ist genau derjenige der Maxwell'schen Theorie, wo

$$q = q' = 0.$$

Wir haben früher gezeigt, dass die Theorie von Weber nur einen besonderen Fall der Helmholtz'schen Theorie darstellt und dennoch muss die erstere Theorie mit dem Princip von Newton in Uebereinstimmung sein, da sie auf der Annahme beruht, dass die gegenseitige Wirkung zweier elektrischer Moleküle nur von ihrem Abstand und ihrer relativen Bewegung abhängt.

Wie ist dieser scheinbare Widerspruch nun zu lösen?

Hierfür brauche ich nur an folgende Thatsache erinnern. Um die Theorie von Weber mit der Helmholtz'schen in Einklang zu bringen, mussten wir gewisse Annahmen machen, die wir im § 15 durch die folgenden Gleichungen ausgedrückt haben

$$e v^2 + e_1 v_1^2 = 0, \quad e' v'^2 + e'_1 v_1'^2 = 0.$$

Diese Beziehungen können nicht streng erfüllt sein, besonders wenn Konvektionsströme vorhanden sind; aber, wie schon in § 19 auseinandergesetzt ist, sind die ersten Glieder klein genug, um in den Rechnungen vernachlässigt werden zu können, ohne irgend eine der durch den Versuch nachzuweisenden Folgerungen zu beeinträchtigen.

In diesen vernachlässigten Gliedern besteht also der Unterschied zwischen der Theorie von Helmholtz und Weber; ihnen muss man daher den Widerspruch zwischen der Helmholtz'schen Theorie und dem Princip von Newton zuschreiben.

Die Ergänzungsglieder, die man den Gleichungen von Helmholtz zufügen müsste, um sie mit dem Princip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung in Uebereinstimmung zu bringen, sind also zu klein, als dass man sie durch irgend ein realisirbares Experiment nachweisen könnte.

Es ist klar, dass man dieselben auf unendlich viel verschiedene Weisen wählen kann; eine derselben besteht, wie wir gesehen haben, darin, dass man die zuerst vernachlässigten Glieder wieder in die Weber'sche Theorie einsetzt.

Diese Frage verdient des Näheren geprüft zu werden.

Nehmen wir die Bezeichnungen wieder auf, deren wir uns beim Studium der Weber'schen Theorie bedient haben; es sind dies dieselben, welche Maxwell in der Auseinandersetzung über denselben Gegenstand angewendet hat.

Der Ausdruck für T ist dann:

$$\sum \frac{e e'}{2 c^2 r} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2.$$

Wenn man zwei Elemente beweglicher Ströme betrachtet, so hat man

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial t} + v \frac{\partial r}{\partial s} + v' \frac{\partial r}{\partial s'},$$

so dass das Potential T der zwei Stromelemente geschrieben werden kann:

$$\sum \frac{e e'}{2 c^2 r} \left(\frac{\partial r}{\partial t} + v \frac{\partial r}{\partial s} + v' \frac{\partial r}{\partial s'} \right)^2.$$

Nimmt man wie früher an:

$$e + e_1 = e' + e_1' = e v^2 + e_1 v_1^2 = e' v'^2 + e_1' v_1'^2 = 0,$$

$$e v + e_1 v_1 = c i ds, \quad e' v' + e_1' v_1' = c i' ds',$$

so verschwinden die von v und v' unabhängigen Glieder, sowie diejenigen mit v , v' , v^2 , v'^2 und es bleibt

$$\frac{i i' ds ds'}{r} \cdot \frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial r}{\partial s'},$$

was dem Helmholtz'schen Ausdruck für $k = -1$ gleichkommt.

Betrachten wir jetzt die Wirkung einer beweglichen elektrischen Ladung, die als Konvektionsstrom zu betrachten ist, auf ein bewegliches Stromelement ds .

Es sei v' die Geschwindigkeit des beweglichen Leiters, der die elektrische Ladung e' trägt; ferner bezeichne ds' das Bogenelement der Bahn dieser beweglichen Ladung.

Die Formel

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial t} + v \frac{\partial r}{\partial s} + v' \frac{\partial r}{\partial s'}$$

ist noch anwendbar, unter der Bedingung, dass $\frac{\partial r}{\partial t}$ den Theil der Veränderung von r darstellt, welcher der absoluten Verschiebung des beweglichen Stromes zukommt, nicht aber seiner relativen Verschiebung in Beziehung auf das bewegliche Element, da wir der Verschiebung dieser Ladung bereits durch das Glied $v' \frac{\partial r}{\partial s'}$ Rechnung getragen haben.

Man wird dann noch zu setzen haben

$$e + e_1 = e v^2 + e_1 v_1^2 = 0, \quad e v + e_1 v_1 = c i ds,$$

aber nicht mehr

$$e' + e_1' = e' v'^2 + e_1' v_1'^2 = 0.$$

Die von v und von v' unabhängigen Glieder werden also verschwinden, wie die Glieder mit v' , v^2 und v'^2 , diejenigen mit v aber werden nicht mehr Null, und man erhält

$$T = \frac{e' i}{c r} \cdot \frac{\partial r}{\partial s} \left(\frac{\partial r}{\partial t} + v' \frac{\partial r}{\partial s'} \right).$$

Die Formel von Helmholtz würde ergeben

$$T = \frac{e' i}{c r} \cdot \frac{\partial r}{\partial s} \left(v' \frac{\partial r}{\partial s'} \right).$$

In Wahrheit ist das vernachlässigte Glied sehr klein (in Folge des Nenners c), aber es ist von derselben Ordnung, wie das beibehaltene Glied, da v' dieselbe Grössenordnung wie $\frac{\partial r}{\partial t}$ besitzt.

Nun fordert das Princip von Newton, dass T nur von der relativen Verschiebung des beweglichen Leiters, in dem der Strom circulirt, in Bezug auf den beweglichen Leiter mit der Ladung e' abhängt, d. h. von $\frac{\partial r}{\partial t} + v' \frac{\partial r}{\partial s'}$. Die Formel von Helmholtz ist also mit diesem Princip unvereinbar; die vollständige Weber'sche Formel kann allein damit in Uebereinstimmung gebracht werden.

So muss also die Helmholtz'sche Theorie, welche sein Urheber, wie er es in dem Titel seines Werkes angibt, nur „für die in Ruhe befindlichen Leiter“ aufgestellt hat, beträchtliche Veränderungen erfahren, wenn die Leiter bewegt werden.

Wir wollen jetzt auf die Frage zurückgehen, von der ich am Anfang dieses Zusatzes gesprochen habe, ich meine die Wirkung eines veränderlichen, geschlossenen Solenoids auf ein elektrisches Blatt. Wenn man diese Wirkung mit Hülfe der vollständigen Weber'schen Formel berechnet, so kommt man zu einem Resultat, das mit dem Princip der „Einheit der elektrischen Kraft“ übereinstimmt. Dies ist nicht mehr der Fall, wenn man dieselbe Weber'sche Formel auf die Wirkung zweier veränderlichen, geschlossenen Solenoide anwendet.

Die so berechnete Wirkung ist wie bei Anwendung der Helmholtz'schen Formel Null. Unsere Folgerungen werden also nicht geändert und die Maxwell'sche Theorie ist allein vereinbar mit „der Einheit der elektrischen Kraft“.

Für die vorangehenden Betrachtungen haben wir uns auf den Standpunkt der Weber'schen Theorie gestellt, d. h. wir setzten voraus $k = -1$. Man würde zu analogen Resultaten mit einem beliebigen Werth von k gelangt sein.

Helmholtz hat in der That gezeigt, dass man seinen Ausdruck des elementaren Potentials (wo k beliebig ist) erhalten kann, indem man von einem der Weber'schen Formel analogen Ausdruck für die Anziehung ausgeht, in welchen aber nicht nur r und seine beiden ersten Differentialquotienten nach t , sondern auch noch der dritte Differentialquotient eingehen.

Zusatz II.

Ueber den Beweis der Thatsache, dass die elektrische Kraft senkrecht zu den Leitern steht.

Es entsteht die Frage, ob es eine nothwendige Folgerung der Maxwell'schen Theorie ist, dass die elektrischen Kraftlinien senkrecht auf der Leiteroberfläche endigen, wenn die Leiter vollkommen sind oder die Schwingungen sehr rasch stattfinden. Hierbei hängt alles davon ab, wie die Theorie verstanden wird; im § 112 haben wir uns auf einen bestimmten Standpunkt gestellt und gezeigt, dass diese Folgerung nicht unbedingt nothwendig ist. Nehmen wir aber einen anderen Standpunkt ein, der vielleicht mehr mit den wahren Gedanken von Maxwell übereinstimmt, so werden wir zu dem entgegengesetzten Resultat gelangen.

Wir wollen der Einfachheit halber voraussetzen, dass man es mit einem System vollkommener Leiter zu thun habe, die von einander durch ein einziges Dielektrikum, z. B. durch Luft getrennt sind. Wir sind berechtigt, die Leiter als vollkommen zu betrachten, da wir wissen, dass in dem Fall sehr rascher Schwingungen sich alle Leiter wie vollkommene verhalten.

Die elektrostatische Energie ist gleich

$$U = \int \frac{2\pi}{K} (f^2 + g^2 + h^2) d\tau,$$

und die elektromagnetische

$$T = \int \frac{1}{8\pi} (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) d\tau,$$

wenn man $\mu = 1$ annimmt. Das erste Integral muss über das Volumen des Dielektrikum, das zweite über den ganzen Raum erstreckt werden.

Andererseits hat man

$$4\pi u = 4\pi \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z},$$

$$4\pi v = 4\pi \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x},$$

$$4\pi w = 4\pi \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y},$$

Setzen wir

$$\alpha = \frac{\partial X}{\partial t}, \quad \beta = \frac{\partial Y}{\partial t}, \quad \gamma = \frac{\partial Z}{\partial t},$$

und nehmen an, dass im Zeitanfang alles in Ruhe sei und dass man habe

$$X = Y = Z = f = g = h = 0,$$

so kommt¹⁾

$$4\pi f = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z},$$

$$4\pi g = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x},$$

$$4\pi h = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y},$$

und

$$U = \int \frac{2\pi}{K} \sum f^2 dt = \int \frac{1}{8\pi K} \sum \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right)^2 dt,$$

$$T = \frac{1}{8\pi} \int \sum \alpha^2 dt = \frac{1}{8\pi} \int \sum \left(\frac{\partial X}{\partial t} \right)^2 dt.$$

Sind die Leiter vollkommen, so gibt es keinen Widerstand und keine Wärmeentwicklung und wir können das Princip der kleinsten Wirkung von Hamilton anwenden, ohne die Arbeit der Widerstände berücksichtigen zu müssen, was die Rechnungen sehr verwickeln würde.

Nach der Ansicht von Maxwell stellt die elektromagnetische Energie T die lebendige Kraft, und die elektrostatische Energie U die potentielle Energie des Aethers dar (siehe Bd. I § 152).

¹⁾ Diese Analyse ist nur auf den Fall anzuwenden, wo die totale elektrostatische Ladung aller Leiter Null ist.

Die Hamilton'sche Wirkung wird also durch das Integral

$$\int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt$$

angegeben, das nach der Zeit zwischen zwei beliebigen Grenzen zu nehmen ist.

Die Variation:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T - \delta U) dt$$

muss also Null sein, vorausgesetzt, dass

$$\delta X = \delta Y = \delta Z = 0$$

für $t = t_0$ und für $t = t_1$.

Bekanntlich besteht ja das Hamilton'sche Princip darin, dass die Wirkung ein Minimum wird, wenn die Koordinaten der verschiedenen Punkte des Systems für $t = t_0$ und $t = t_1$ gegebene Werthe besitzen.

Nun hängen nach Maxwell's Ansicht die Koordinaten der verschiedenen Aethermoleküle von X, Y, Z ab; also müssen die Werthe von X, Y, Z für $t = t_0$ und $t = t_1$ als gegeben betrachtet werden und folglich ihre Variationen als Null.

Man erhält dann durch partielle Integration:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \delta T dt &= \int \frac{d\tau}{4\pi} \int_{t_0}^{t_1} \sum \left(\alpha \delta \frac{\partial X}{\partial t} \right) dt \\ &= \int \frac{d\tau}{4\pi} \left[\sum \alpha \delta X \right]_{t=t_0}^{t=t_1} - \int \frac{d\tau}{4\pi} \int_{t_0}^{t_1} \sum \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} \delta X \right) dt. \end{aligned}$$

Da δX für $t = t_0$ und $t = t_1$ Null ist, bleibt

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta T dt = - \int \frac{d\tau}{4\pi} \int_{t_0}^{t_1} \sum \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} \delta X \right) dt.$$

Andererseits haben wir

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta U dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{4\pi dt}{K} \int \sum f \delta f d\tau,$$

wobei die Integration über das Volumen des Dielektrikum auszu-
dehnen ist.

Ferner ist

$$4\pi \int \sum f \delta f d\tau = \int \sum f \left(\frac{\partial \delta Z}{\partial y} - \frac{\partial \delta Y}{\partial z} \right) d\tau.$$

Durch Anwendung der partiellen Integration findet man

$$\int f \frac{\partial \delta Z}{\partial y} d\tau = \int m f \delta Z d\omega - \int \delta Z \frac{\partial f}{\partial y} d\tau.$$

Das Integral der linken Seite und das zweite der rechten Seite
ist über alle Elemente des Volums $d\tau$ des Dielektrikum zu erstrecken.
Das erste Integral der rechten Seite muss über alle Elemente der
Oberfläche genommen werden, welche das Dielektrikum von den
Leitern trennt; l, m, n bezeichnen die Richtungskosinus des Ele-
ments $d\omega$.

Auf dieselbe Weise erhält man:

$$\int f \frac{\partial \delta Y}{\partial z} d\tau = \int n f \delta Y d\omega - \int \delta Y \frac{\partial f}{\partial z} d\tau.$$

Hieraus folgt

$$K \delta U = \int \sum (m f \delta Z - n f \delta Y) d\omega - \int \sum \left(\delta Z \frac{\partial f}{\partial y} - \delta Y \frac{\partial f}{\partial z} \right) d\tau.$$

Hierfür kann man auch setzen

$$K \delta U = \int \sum [\delta X (ng - mh)] d\omega - \int \sum \left[\delta X \left(\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right] d\tau.$$

Die Hamilton'sche Gleichung (welche ausdrückt, dass die
Variation der Wirkung Null ist) kann nach Multiplikation mit
 $4\pi K$ geschrieben werden

$$\int_{t_0}^{t_1} (H_1 + H_2 + H_3) dt = 0,$$

wenn man zur Abkürzung mit H_1 , H_2 , H_3 die drei folgenden Integrale bezeichnet

$$H_1 = K \int dr \sum \left(\delta X \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right),$$

$$H_2 = 4\pi \int d\omega \sum \delta X (ng - mh),$$

$$H_3 = 4\pi \int dr \sum \delta X \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \right).$$

Das Integral H_1 ist dabei über den ganzen Raum zu erstrecken, H_2 über die Oberfläche der Leiter und H_3 über das Dielektrikum.

Da diese Gleichung für alle beliebigen Variationen δX , δY , δZ erfüllt sein muss, so gilt nach den Regeln der Variationsrechnung für alle Zeiten

$$H_1 + H_2 + H_3 = 0,$$

und zwar für jedes beliebige δX , δY , δZ .

Wir wollen nun setzen

$$H_1 = H_1' + H_1'',$$

wo H_1' und H_1'' dasselbe Integral wie H_1 bedeutet und zwar soll sich H_1' über das Volumen der Leiter, H_1'' über das Volumen des Dielektrikum erstrecken.

Da δX , δY , δZ beliebig sind, so wird man nach den Regeln der Variationsrechnung gesondert haben

$$H_1' = 0, \quad H_2 = 0, \quad H_1'' + H_3 = 0.$$

Es werden also nach denselben Regeln immer folgende Bedingungen bestehen:

1. Im Innern der Leiter (da $H_1' = 0$) ist $\frac{\partial \alpha}{\partial t} = 0$, oder da im Zeitanfang alles in Ruhe ist

$$\alpha = \beta = \gamma = 0, \quad u = v = w = 0$$

Es fließt kein Strom im Innern der Leiter.

2. Im Innern des Dielektrikum (da $H_1'' + H_3 = 0$):

$$K \frac{\partial \alpha}{\partial t} = 4\pi \left(\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial y} \right).$$

Dies ist die Gleichung (3) des § 50.

3. Auf der Trennungsoberfläche (da $H_2 = 0$)

$$ng - mh = 0,$$

und ebenso

$$nf - lh = 0,$$

d. h.

$$\frac{f}{l} = \frac{g}{m} = \frac{h}{n};$$

Diese Gleichung drückt aus, dass die elektrischen Kraftlinien senkrecht zur Oberfläche der Leiter stehen.

Zusatz III.

Ueber die Berechnung der Periode.

Die Unsicherheiten, welche hinsichtlich der Berechnung der Periode bestehen und auf die ich am Ende der Vorlesung hinwies, zeigen zur Genüge, welches Interesse es bieten würde, eine Methode zu besitzen, die eine strenge Berechnung der Periode eines gegebenen Erregers zuliesse. Die Wichtigkeit des Gegenstandes veranlasst mich, die von mir in diesem Punkt erhaltenen Resultate zu veröffentlichen, so unvollständig dieselben auch sind.

Das zu lösende Problem kann wie folgt ausgesprochen werden:

Es soll eine Zahl μ gefunden werden, sowie sechs Funktionen X, Y, Z, L, M, N der drei Koordinaten x, y, z , welche den nachstehenden Bedingungen genügen:

1. Diese sechs Funktionen sind in jedem Punkt des von dem Dielektrikum eingenommenen Raumes analytische Funktionen.

2. Würde dieser Raum sich in's Unendliche erstrecken, so müssten die sechs Funktionen daselbst verschwinden.

3. An allen Punkten des Dielektrikum müssen sie den folgenden Gleichungen genügen:

$$(1) \quad \begin{aligned} X &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, & K \mu^2 L &= \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \\ Y &= \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, & K \mu^2 M &= \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \\ Z &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, & K \mu^2 N &= \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}, \end{aligned}$$

woraus folgt

$$(2) \quad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0.$$

4. Auf der Oberfläche der Leiter und im Besonderen auf der des Erregers steht der Vektor, dessen Komponenten X, Y, Z sind, senkrecht.

Die Zahl μ und unsere sechs Funktionen können übrigens reell oder complex sein. Setzen wir

$$\begin{aligned} 4 \pi f &= \text{dem reellen Theil von } e^{i\mu t} X, & \alpha &= \text{dem reellen Theil von } i e^{i\mu t} L, \\ 4 \pi g &= \text{ - - - - } e^{i\mu t} Y, & \beta &= \text{ - - - - } i e^{i\mu t} M, \\ 4 \pi h &= \text{ - - - - } e^{i\mu t} Z, & \gamma &= \text{ - - - - } i e^{i\mu t} N, \end{aligned}$$

so wird die elektrische Verschiebung (f, g, h) und die magnetische Kraft (α, β, γ) den Maxwell'schen Gleichungen genügen. Auf diese Weise ist also eine elektromagnetische Störung definiert, welche mit diesen Gleichungen im Einklang steht.

Die Periode wird gleich 2π sein, dividirt durch den reellen Theil von μ .

Wenn die Zahl μ reell ist, so haben die Schwingungen eine konstante Amplitude.

Ist μ complex, so nimmt diese Amplitude in geometrischer Reihe ab; es besteht dann ein logarithmisches Dekrement, das von dem imaginären Theil von μ abhängt.

Hiernach sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Entweder befindet sich der Erreger in einem vollständig von Leitern umgebenen endlichen Raum, der mit einem Dielektrikum erfüllt ist.

2. Oder der Erreger ist in einem unendlich grossen Raum aufgestellt, der durch das Dielektrikum eingenommen wird.

Der erste Fall lässt sich viel einfacher verfolgen. Unglücklicher Weise ist es aber gerade der zweite Fall, der in den Versuchen verwirklicht wurde; die Säle, in denen Hertz die Versuche anstellte, waren gross genug im Verhältniss zu den Dimensionen des Erregers,

um mit einem unendlichen Raum verglichen zu werden. Ich will auf diesen Punkt sogleich zurückkommen.

Die Unterschiede zwischen beiden Fällen sind sehr bedeutend.

Im ersten Fall kann sich die Energie nicht durch Strahlung nach aussen hin zerstreuen; die Amplitude der Schwingungen ist also konstant und μ ist reell.

Im zweiten Fall hingegen ist Strahlung vorhanden und es besteht folglich ein logarithmisches Dekrement, μ ist complex.

Im ersten Fall, wo μ reell ist, kann man immer voraussetzen, dass die sechs Funktionen ebenfalls reell sind; denn wenn sechs complexe Funktionen den Gleichungen (1) genügten, so würde für ihre reellen Theile dasselbe gelten.

Sind die sechs Funktionen reell, so bedeutet dies, dass die Phase in allen Punkten des Dielektrikum dieselbe ist.

Im zweiten Falle dagegen ist die Phase für verschiedene Punkte des Dielektrikum verschieden und die sechs Funktionen sind complex.

Uebrigens gestattet ein einfaches Beispiel, sich von dieser Thatsache Rechenschaft zu geben. Wenn eine Stimmgabel in einer unbegrenzten Atmosphäre schwingt, so wird sich der Ton nach allen Richtungen mit einer bestimmten Geschwindigkeit fortpflanzen und die Phase wird an verschiedenen Punkten dieser Atmosphäre nicht dieselbe sein, sondern von der Entfernung von der Stimmgabel abhängen.

Wenn dagegen diese Stimmgabel in einem geschlossenen Raum schwingt, z. B. in einem zwischen zwei parallelen Wänden befindlichen Raum, so wird der Ton an diesen beiden Wänden reflektirt werden und die reflektirten Wellen werden unter Bildung von Knoten und Bäuchen interferiren, d. h. es wird ein System stehender Wellen zu Stande kommen; die Phase wird dann an allen Punkten dieselbe sein.

Dieser endgültige Zustand, bei dem die Wellen stationär sind, kann sich erst nach Verlauf einer gewissen Zeit herstellen, denn der von der Stimmgabel ausgehende Ton (oder in unserem Fall die von dem Erreger ausgehende Störung) muss Zeit gehabt haben, um sich bis zu der reflektirenden Wand fortzupflanzen. Damit die stationären Wellen in Erscheinung treten, darf die Störung vor ihrer Reflexion an der Wand nicht durch Strahlung so abgeschwächt sein, dass sie unmerklich wird. Aus diesem Grund geht beim Experimentiren in einem sehr grossen Saal alles so vor sich, als befände man sich in einem unendlich grossen Raum. Demnach ist der zweite Fall derjenige, der bei den Versuchen verwirklicht worden ist und der deshalb das meiste Interesse bieten würde; leider musste ich mich aber auf den ersten Fall beschränken.

Betrachten wir also ein Zimmer, das im Innern durch die Oberfläche des Erregers begrenzt ist, im Aeussern durch die leitenden Wände, die hinsichtlich der analytischen Behandlung dieselbe Rolle wie diese Oberfläche spielen, und denken wir uns den ganzen Zwischenraum von einem Dielektrikum erfüllt.

Es seien nun L , M , N drei beliebige Funktionen, die nur den folgenden Bedingungen unterworfen sein sollen, welche ich die Bedingungen (2) nennen will:

1. Sie sind analytisch und homogen im ganzen Dielektrikum;
2. Man hat im Dielektrikum

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0;$$

3. Der Vektor (L , M , N) steht an allen Punkten der Oberfläche tangential zu derselben;

4. Das Integral

$$T = \int (L^2 + M^2 + N^2) dr,$$

über das ganze Dielektrikum erstreckt, ist gleich 1.

Nach diesen Voraussetzungen untersuchen wir das Integral

$$U = \int \left[\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \right)^2 \right] dr.$$

Dies Integral kann nicht Null werden. Wenn es nämlich Null würde, hätte man:

$$\frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial z}, \quad \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial y},$$

und folglich

$$Ldx + Mdy + Ndz = d\varphi,$$

wo $d\varphi$ das vollständige Differential einer Funktion φ darstellt, die homogen sein muss, da L , M , N homogen sind (dieser letztere Theil des Beweises setzt voraus, dass das Zimmer ein „einfach zusammenhängender Raum“ ist). Es wäre also

$$L = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad M = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad N = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Die Bedingungen (2) besagten dann, dass $\Delta \varphi = 0$ an allen Punkten des Dielektrikum und dass $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ an allen Punkten der

dasselbe begrenzenden Oberfläche. Aber dies kann nur der Fall sein, wenn φ konstant ist, d. h. wenn

$$L = M = N = 0.$$

Es ist indess leicht einzusehen, dass dies nicht stattfinden darf, da $T = 1$ sein soll.

Das Integral U , welches nicht verschwinden kann, weist jedoch ein Minimum auf.

Die Funktionen L, M, N , für welche dies Minimum erreicht wird, müssen derart sein, dass allemal, wenn $\delta T = 0$, auch $\delta U = 0$; also

$$(3) \quad \frac{\partial \delta L}{\partial x} + \frac{\partial \delta M}{\partial y} + \frac{\partial \delta N}{\partial z} = \sum \frac{\partial \delta L}{\partial x} = 0,$$

und dass der Vektor $(\delta L, \delta M, \delta N)$ in allen Punkten der Oberfläche tangential zu derselben verläuft.

Diese letzte Bedingung wird durch die Gleichung ausgedrückt:

$$(4) \quad l\delta L + m\delta M + n\delta N = \sum l\delta L = 0.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$X = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, \quad Y = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, \quad Z = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y},$$

so erhalten wir

$$\delta T = 2 \int (L\delta L + M\delta M + N\delta N) d\tau,$$

$$\delta U = 2 \int (X\delta X + Y\delta Y + Z\delta Z) d\tau.$$

Der Werth von δU kann durch partielle Integration umgeformt werden; man findet

$$\int X\delta X d\tau = \int X (m\delta N - n\delta M) d\omega - \int \left(\delta N \frac{\partial X}{\partial y} - \delta M \frac{\partial X}{\partial z} \right) d\tau,$$

so dass die Bedingung $\delta U = 0$ geschrieben werden kann

$$\frac{\delta U}{2} = \int \left| \begin{array}{ccc} X & Y & Z \\ l & m & n \\ \delta L & \delta M & \delta N \end{array} \right| d\omega - \int \sum \left[\delta L \left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \right) \right] d\tau = 0.$$

Diese Bedingung muss für alle beliebigen Werthe der Variationen $\delta L, \delta M, \delta N$ erfüllt sein, vorausgesetzt, dass die letzteren den Gleichungen (3) und (4) und $\delta T = 0$ genügen.

Die Variationsrechnung lässt danach folgenden Schluss zu:

Man kann eine Zahl $K\mu^2$ und zwei Funktionen φ und ψ finden, derart, dass die Bedingung

$$(5) \quad \frac{\delta U}{2} - \frac{K\mu^2}{2} \delta T + \int \varphi \sum \left(\frac{\partial \delta L}{\partial x} \right) d\tau + \int \psi \sum (l \delta L) d\omega = 0$$

erfüllt ist, wenn die Variationen δL , δM und δN vollständig beliebig sind. Wir wollen noch das eine dieser Integrale durch partielle Integration umformen; es ist

$$\int \varphi \sum \left(\frac{\partial \delta L}{\partial x} \right) d\tau = \int \varphi \sum (l \delta L) d\omega - \int \sum \left(\delta L \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) d\tau.$$

Gleichung (5) kann man dann schreiben

$$\int d\tau \sum \left[\delta L \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} - K\mu^2 L - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right] \\ + \int \sum d\omega [\delta L (Yn - Zm + [\varphi + \psi] l)] = 0.$$

In allen Punkten des Dielektrikum muss also gelten

$$(6) \quad K\mu^2 L = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ K\mu^2 M = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ K\mu^2 N = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

und an allen Punkten der Oberfläche der Leiter:

$$(7) \quad Zm - Yn = l(\varphi + \psi), \\ Xn - Zl = m(\varphi + \psi), \\ Yl - Xm = n(\varphi + \psi).$$

Wenn man die drei Gleichungen nach Multiplikation mit l , m , n addirt, so kommt

$$(l^2 + m^2 + n^2)(\varphi + \psi) = 0.$$

Also ist $\varphi + \psi$ an allen Punkten der Oberfläche der Leiter Null und man hat

$$(8) \quad \frac{X}{l} = \frac{Y}{m} = \frac{Z}{n}.$$

Dies ist eine der Bedingungen, von denen wir ausgegangen waren.

Man kann daraus noch eine weitere Folgerung ziehen.

Wir betrachten das Integral

$$\int (X dx + Y dy + Z dz) = \int \sum X dx,$$

ausgedehnt über eine beliebige geschlossene Kurve, die auf der Oberfläche der Leiter gezogen ist. Dies Integral ist Null, da der Vektor X, Y, Z nach (8) senkrecht auf dem Leiter steht. Formen wir dies einfache Integral auf die bekannte Weise in ein zweifaches um, so folgt

$$\int \sum l \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) d\omega = 0,$$

und da dies für eine beliebige Begrenzung gültig ist:

$$(9) \quad \sum l \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) = 0.$$

Addiren wir die Gleichungen (6), nachdem dieselben resp. nach x, y, z differentiirt worden sind, so ergibt sich:

$$K \mu^2 \sum \frac{\partial L}{\partial x} = -\Delta \varphi.$$

Wir haben aber nach Voraussetzung

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0,$$

so dass wir finden

$$\Delta \varphi = 0.$$

In einem Punkt der Leiteroberfläche erhält man ferner durch Addition der Gleichungen (6) nach vorausgegangener Multiplikation derselben mit resp. l, m, n und unter Beachtung der Beziehung (9):

$$K \mu^2 \sum l L = -\frac{\partial \varphi}{\partial n};$$

nach der Voraussetzung gilt aber an allen Punkten der Oberfläche

$$lL + m M + n N = 0,$$

woraus folgt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0.$$

Hieraus schliessen wir, dass φ konstant ist; demnach findet man:

$$K \mu^2 L = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z},$$

und zwei andere analoge Gleichungen. Unsere sechs Funktionen X, Y, Z, L, M, N genügen also vollkommen den aufgestellten Bedingungen.

Nun war ferner:

$$U = \int (X^2 + Y^2 + Z^2) dr = \int \sum X \left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \right) dr,$$

oder durch partielle Integration nach den oben angegebenen Regeln:

$$U = \int \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ l & m & n \\ L & M & N \end{vmatrix} d\omega - \int \sum L \left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \right) dr.$$

Das erste Integral ist Null, das zweite gleich $-K \mu^2 T$.

Man findet also

$$\frac{U}{T} = K \mu^2.$$

Somit gelangen wir zu folgender Regel: die Zahl $K \mu^2$, von der die Hauptperiode abhängt, ist das Minimum des Ausdrucks $\frac{U}{T}$, der mit Hilfe dreier Funktionen L, M, N gebildet ist, welche den Bedingungen (2) genügen.

Es liesse sich auf eine analoge Weise zeigen, dass eine unendliche Anzahl von möglichen Perioden besteht, welche man die harmonischen Obertöne nennen könnte. Da aber der Versuch nichts ähnliches darbietet, so muss man annehmen, dass diese Obertöne zu schwach sind oder zu schnell abnehmen, um mit den uns zur Verfügung stehenden Mitteln nachgewiesen werden zu können. Ich will deshalb auf diesen Punkt nicht weiter eingehen.

Zusatz IV.

Ueber einige neue Versuche.

Sarasin und de la Rive stellten im Mai 1890 (Archives de Genève, Juni 1890, XXIII, p. 557) Versuche von grosser Wichtigkeit an. Sie liessen, ebenso wie Hertz, die von einem Erreger ausgehende Welle mit derselben, an einer Mauer reflektirten Welle interferiren, verwendeten jedoch verschiedene Erreger und Resonatoren und fanden so, dass die beobachtete Wellenlänge von den Dimensionen des Resonators abhängt, dagegen von denjenigen des Erregers fast unabhängig ist. Dies nennen sie die Erscheinung der multiplen Resonanz, auf die ich in dem nächsten Zusatz zurückkommen werde.

Ich möchte nun auf folgenden Punkt noch die Aufmerksamkeit lenken. Mit dem Erreger von Hertz und einem Resonator von 75 cm Durchmesser, der also fast gleich demjenigen von Hertz war, fanden die Genfer Gelehrten eine Wellenlänge von 3 m; Hertz hatte dagegen 4,80 m gefunden. Das erste dieser Resultate stimmt hinreichend mit der Theorie, nicht dagegen das zweite. Aber abgesehen von jeder theoretischen Betrachtung, muss man sich wundern, dass Versuche, die unter offenbar gleichen Bedingungen ausgeführt wurden, so verschiedene Resultate ergeben. Daher ist es geboten, mit seinen Folgerungen zu warten, bis dieser Punkt aufgeheilt ist.

In einem Briefe, mit dem mich Herr Hertz beehrte, und den er mir an dieser Stelle mitzuthemen gestattete, spricht sich der berühmte Gelehrte folgendermassen über diesen Gegenstand aus:

„Es fällt mir schwer zu glauben, dass ich mich bei der zweiten Methode geirrt habe, bei der ich 4,80 m statt 3 m fand; da aber die ganze theoretische Wahrscheinlichkeit auf Seiten der Herren de la Rive und Sarasin ist, so habe ich eingehend darüber nachgedacht, welche Ursache dies haben könnte, und theile hier zwei Arten mit, auf welche man sich den Unterschied erklären kann. Die Wellen entstehen zwischen zwei parallelen Wänden eines Saales; ich habe nur eine Fläche als reflektirende berücksichtigt. Nehmen wir nun zuerst an, dass die Länge des Saals gleich einem genauen Multiplum der Wellenlänge sei, sagen wir gleich drei Wellenlängen, dann werden wir zwei sehr ausgesprochene Knoten erhalten, welche den genau richtigen

Abstand besitzen. Ist die Länge des Saals gleich vier Wellenlängen, so finden wir drei sehr scharf bestimmte Knoten. Nehmen wir aber an, dass die Länge des Saals einen mittleren Werth besitzt, der näher an dem ersten liegt, so werden zwei weniger ausgesprochene Knoten entstehen, deren Abstand von einander grösser sein wird, als die wirkliche Wellenlänge. Diese Erklärung würde mir ausreichend erscheinen, wenn der Unterschied nicht so gross wäre.“

„Die andere Erklärung ist folgende: Meine reflektirende Zinktafel war in einer Mauernische aufgestellt; es wäre möglich, dass die vorstehenden Punkte der Mauer die Wirkung gehabt haben, die Knoten von der Mauer zu entfernen und die gemessenen Wellenlängen zu gross zu machen. Da jedoch die Nische 5—6 m breit war, schien es mir und scheint mir auch jetzt nicht sehr wahrscheinlich, dass dieser Umstand einen grossen Einfluss gehabt hat.“

„Ich kenne also nicht genau die Ursache meines Irrthums, aber ich glaube, dass ein solcher vorliegt. Ich habe lange vergeblich gesucht, eine vernünftige Ursache für den Unterschied der Geschwindigkeit in Luft und in Drähten zu finden. Dass für kurze Wellen von 30 cm Länge kein Unterschied besteht, fand ich selbst bereits vor den Herren Sarasin und de la Rive; die Versuche dieser Herren ergeben endlich auch für Wellen von grosser Länge dieselbe Geschwindigkeit und widersprechen meinen Versuchen.“

Müssen wir demnach glauben, dass aus dem Grunde, weil die Dimensionen der Nische von derselben Ordnung, wie die Wellenlänge war, Diffraktionserscheinungen zu Stande kommen konnten und dass Hertz Beugungsfranzen und keine eigentlichen Interferenzfranzen beobachtet hat? Es wäre verfrüht, sich über diesen Punkt auszusprechen; vielmehr ist es gerathen, sich der Zurückhaltung von Hertz anzuschliessen und sich jedes Schlusses zu enthalten, bis neue Versuche die Frage aufgeklärt haben.

Ich sprach auch oben von einer Bekanntmachung von Lecher (Sitzungsberichte der Wiener Akademie, April 1890) und theilte mit, dass dieser Gelehrte mit einer neuen Methode die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Störung in einem Leiter gemessen hat und diese Geschwindigkeit gleich der des Lichtes fand. Sehr erstaunt, sich mit Hertz im Widerspruch zu befinden, suchte er vergebens nach der Ursache dieser Abweichung. Dieselbe erklärt sich jetzt sehr leicht. Lecher hatte die richtige Formel von Thomson für die Schwingungsperiode angewandt, worin Hertz den Faktor $\sqrt{2}$ vergass und sein Resultat stimmt genügend mit dem korrigirten Resultat von Hertz überein.

Zusatz V.

Ueber die multiple Resonanz.

Sarasin und de la Rive fanden bei den Interferenzerscheinungen, dass die beobachtete Wellenlänge von den Dimensionen des Resonators und nur sehr wenig von denen des Erregers abhängt. Dies ist das Phänomen, welches sie multiple Resonanz nannten, und für das sie folgende Erklärung gaben:

Der Erreger bringe weder eine einzige Schwingung von vollkommen genau bestimmter Periode hervor, noch eine bestimmte Reihe verschiedener harmonischer Obertöne; sein Spektrum, wie man sich hier etwa ausdrücken könnte, würde weder von einer einzigen, noch von mehreren feinen, getrennten Linien gebildet, vielmehr entsünde ein kontinuierliches Spektrum oder besser ein breites Band, dessen Ränder sehr verwischt seien.

Es ist noch hinzuzufügen, dass dieses Band in den Versuchen, bei denen man in einem metallischen Draht Interferenzen entstehen lässt, viel breiter erscheinen würde, als bei den Versuchen in Luft. Der Resonator würde dann von allen durch den Erreger ausgesandten Schwingungen diejenige verstärken, welche mit seiner Eigenschwingung übereinstimmt.

Diese Auslegung befindet sich offenbar im Widerspruch mit der Theorie; aber es ist kein Beweis gegen dieselbe zu bringen; denn die Theorie ist noch sehr mangelhaft, und selbst, wenn dies nicht der Fall wäre, würde sie nur eine erste Annäherung darstellen.

Nichtsdestoweniger stellte ich eine andere Erklärung auf, die ich brieflich mehreren Gelehrten mittheilte. Obgleich ich dieselbe nur zögernd ausgesprochen habe, glaube ich, sie doch hier anführen zu sollen.

Bei einer von einem Erreger ausgesandten Schwingung sind zwei Dinge zu unterscheiden, die Periode und das logarithmische Dekrement. Verschiedene Gründe veranlassen mich zu der Annahme, dass dieses Dekrement für den Erreger grösser ist, als für den Resonator. Die Intensität der von dem Erreger ausgehenden Schwingungen würde also sehr schnell abnehmen, so dass dieselben von sehr kurzer Dauer und wenig zum Interferiren geeignet wären.

Nicht so würde es sich mit den Schwingungen des Resonators verhalten. Was wird also geschehen? In dem Resonator werden durch den Erreger Schwingungen hervorgebracht werden, sofern die Perioden nicht sehr verschieden sind; dann wird derselbe fortfahren zu schwingen, nachdem der Erreger schon zur Ruhe gekommen ist; aber er wird dann mit seiner eigenen Periode schwingen, und gerade diese letzteren Schwingungen, die von einer viel längeren Dauer sind und die Fähigkeit besitzen, zu interferiren, würde man beobachten.

Hertz, dem ich diesen Standpunkt mittheilte, antwortete mir Folgendes:

„Die Versuche von Sarasin und de la Rive über die Benutzung verschiedener Resonatoren gefallen mir ausgezeichnet und scheinen sehr schön zu sein, aber ihre Erklärung durch ein kontinuierliches Spektrum, das von dem primären Erreger ausgeht, missfällt mir ganz und gar. Mein Standpunkt ist dem Ihren sicher sehr nahe; vielleicht ist es sogar vollständig derselbe. Wenn die primäre Schwingung eine regelmässige und kontinuierliche Schwingung hervorrufen würde, die durch die Sinuskurve A dargestellt wird, so müssten die harmonischen Resonatoren tausendmal mehr als die anderen erregt werden. Würde sie dagegen nur einen einzigen Stoss hervorbringen, so müssten alle Resonatoren gleich gut schwingen. Die Wahrheit liegt zwischen diesen beiden Extremen; die primäre Schwingung wird die Form B haben (eine Kurve, welche eine Reihe Schwingungen mit abnehmender Amplitude darstellt). Sie würde alle Resonatoren erregen, aber die harmonischen mehr, als die anderen.

Dieselbe Sache mathematisch ausgedrückt lautet: Wollen wir die Form A durch eine Summe von Sinus ausdrücken, so werden wir nur ein einziges Glied haben; wollen wir dagegen die Form B in dieser Weise darstellen, so müssen wir ein Fourier'sches Integral anwenden, das eine unendliche Zahl von Sinus von allen Längen enthält. Aber man könnte deshalb doch nicht sagen, dass die Form B keine bestimmte Periode hätte und dass sie einem kontinuierlichen Spektrum gleich sei.“

Ogleich ganz anders ausgedrückt, ist die Ansicht von Hertz doch vollständig mit derjenigen in Uebereinstimmung, die ich oben aufgestellt habe.

Wenn auch die Verwicklung der Erscheinungen eine Rechnung schlecht zulässt, halte ich es dennoch nicht für unnütz, hier eine kleine analytische Auseinandersetzung zu geben, die sich auf einen einfacheren, aber der Wirklichkeit doch analogen Fall bezieht.

Die Gleichung, welche eine beliebige abnehmende Schwingungsbewegung ausdrückt, kann immer in die Form gebracht werden

$$y'' + 2\alpha y' + \beta y = 0,$$

wo y eine passend gewählte Variable bezeichnet, welche die Amplitude der Schwingung definiert; y' und y'' sind ihre Differentialquotienten nach der Zeit, α und β Konstanten. Das Integral dieser Gleichung ist

$$y = e^{-\alpha t} (A \cos mt + B \sin mt); \quad m = \sqrt{\beta - \alpha^2};$$

m definiert also die Periode und α das Dekrement. Ist dasselbe zu vernachlässigen (und wir setzen durch eine grobe Annäherung voraus, dass dies für die Resonatoren der Fall sei), so ist $\alpha = 0$, $\beta = m^2$ und es bleibt

$$y'' + m^2 y = 0.$$

Wenn nun die Bewegung durch eine vom Erreger ausgehende Störung beeinflusst wird und a und n resp. zwei Zahlen bezeichnen, von denen das Dekrement und die Periode des Erregers selbst abhängt, so erhält man

$$y'' + m^2 y = A e^{-at} \cos nt + B e^{-at} \sin nt.$$

Das Integral dieser Gleichung ist

$$y = A_1 e^{-at} \cos nt + B_1 e^{-at} \sin nt + C \cos mt + D \sin mt,$$

mit den Bedingungen

$$A_1 (m^2 + a^2 - n^2) - 2an B_1 = A,$$

$$B_1 (m^2 + a^2 - n^2) + 2an A_1 = B.$$

Setzt man für den Zeitanfang voraus

$$y = y' = 0,$$

so folgt

$$A_1 + C = 0, \quad -A_1 a + B_1 n + D m = 0.$$

Nach einer sehr langen Zeit verschwinden die Glieder mit e^{-at} , so dass bleibt

$$y = C \cos mt + D \sin mt,$$

und die Amplitude der Schwingung wird proportional sein

$$\sqrt{C^2 + D^2}.$$

Wenn a sehr klein und m sehr nahe n ist, so wird sich diese Grösse sehr wenig unterscheiden von

$$\sqrt{A_1^2 + B_1^2} = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{\sqrt{(m^2 + a^2 - n^2)^2 + 4a^2n^2}}.$$

Bleibt die Amplitude der erregenden Schwingung konstant, so steht die der resultirenden Schwingung im umgekehrten Verhältniss zu der Wurzel

$$\sqrt{(m^2 + a^2 - n^2)^2 + 4a^2n^2}.$$

Verändert sich m , so erreicht die Wurzel ein Minimum für $m^2 = n^2 - a^2$. Dies Minimum entspricht einem harmonischen Resonator.

Für $a = \text{Null}$, ist dieses Minimum Null und die entsprechende Amplitude unendlich; der harmonische Resonator schwingt dann, wie Hertz sagt, tausendmal stärker, als alle anderen.

Ist a nicht Null, so ist auch das Minimum von Null verschieden und die Amplitude der Schwingung des harmonischen Resonators ist grösser, als die der anderen, aber von derselben Grössenordnung.

Muss man nun annehmen, dass dem Erreger ein grösseres Dekrement zukommt, wenn man ihn mit zwei sehr langen Leitungsdrähten verbindet, um die Fortpflanzung in demselben zu messen, als wenn er unbelastet ist? Dies würde erklären, warum das entstehende „spektrale Band“ im ersten Fall grösser ist, als im zweiten.

Soll man ferner annehmen, dass ein geradliniger und offener Resonator ein grösseres Dekrement besitzt, als ein runder? Dies würde vielleicht erklären, warum man bei Drähten mit geradlinigen Resonatoren keine Interferenzen hat erhalten können.

Aber alle diese Fragen sind noch sehr verfrüht und erst in einer Reihe von Jahren wird man sie mit Erfolg aufwerfen können. Uebrigens sind auch noch andere Erklärungen möglich.

Zusatz VI.

Ueber die Fortpflanzung der Wellen in krummlinigen Drähten.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Welle in einem Drahte, der kleine Krümmungen zeigt, kann auf zwei verschiedene Weisen berechnet werden. Der von dieser Welle durchlaufene Weg kann nämlich längs aller Krümmungen des Drahtes gerechnet werden, oder längs der Projektion des Wegs auf eine zur mittleren Richtung des Drahtes parallele Gerade. Die auf die zweite Art berechnete Geschwindigkeit wird offenbar viel kleiner sein.

Die Versuche von Hertz haben gezeigt, dass die auf die erste Weise berechnete Geschwindigkeit grösser ist, als die in einem ausgespannten Draht gemessene, während die auf die zweite Art gemessene Geschwindigkeit im Gegentheil kleiner ausfällt, als die bei einem gespannten Draht und oft sogar viel kleiner.

Nennen wir ds das Bogenelement des Drahtes und i die Stromintensität desselben, so wird man durch Wiederholung der bei Gelegenheit des Resonators angestellten Ueberlegung zu der Gleichung kommen

$$\frac{\partial^2 i}{\partial s^2} = K^2 \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}.$$

Diese Gleichung beweist, dass die nach der ersten Art berechnete Geschwindigkeit gleich $\frac{1}{K}$, d. h. gleich der Lichtgeschwindigkeit ist oder auch gleich der Geschwindigkeit in einem gespannten Draht.

Die Ueberlegung, die uns zu dieser Gleichung führte, setzt indess voraus, dass der Drahtdurchmesser sehr klein sei; aber dies ist hier nicht eigentlich der Fall, denn wenn der Draht, wie bei den Hertz'schen Versuchen, in einer Schraubenwindung gewickelt ist, so wird der Gang dieser Schraube zu klein sein, als dass man die Drahtdicke gegen denselben vernachlässigen dürfte.

Wenn der Drahtdurchmesser nahe gleich dem Schraubengang ist, derart, dass sich die Windungen fast berühren, so scheint es, dass der Draht sich der Bedingung eines gespannten Drahtes nähert und dass folglich die nach der zweiten Art berechnete Geschwindigkeit der Grösse $\frac{1}{K}$ nahe kommt. Man könnte sich so die von Hertz erhaltenen Resultate erklären. Aber dies ist nur eine Ansicht und man müsste die Frage mit Sorgfalt studiren.

Zusatz VII.

Ueber die Reflexion der Wellen.

Die Mehrzahl der Beobachter hat gefunden, dass die Wellen an einer noch so dünnen leitenden Oberfläche total reflektirt werden, und dass auf der anderen Seite einer solchen Fläche keinerlei Funken wahrzunehmen sind. Dies gilt selbst für die Elektrolyte, und wenn auch Bichat und Blondlot das Resultat erhielten, dass Flusswasser durchlässig ist, so hört doch diese Durchlässigkeit auf, sobald man eine Spur Säure zufügt.

Dagegen entdeckte Joubert, dass eine Zinkwand von $\frac{1}{2}$ mm Dicke, 4 m Höhe und 8 m Länge die Funken schwächt, ohne sie vollständig zu zerstören und dass man dieselben noch jenseits der Wand beobachten kann; diese Abweichung kommt offenbar von der Anwendung eines geradlinigen Resonators her, der empfindlicher ist, als die gekrümmten. Die erwähnte Erscheinung steht im Widerspruch mit der Maxwell'schen Theorie, wofern man sie nicht etwa durch Diffraktion erklären kann, da die Wand nur eine halbe Wellenlänge hoch ist; aber wir sind noch nicht im Stande, diese Frage zu entscheiden.



Schluss.

Die Theorie ist unvollständig, die Versuche sind noch wenig zahlreich und widersprechen sich theilweise, es ist also unmöglich, zu entscheiden, ob Theorie und Experiment übereinstimmen oder nicht; ich schliesse somit ab, ohne diese Frage erledigen zu wollen. Wenn es mir aber auch nicht möglich ist, eine Entscheidung zu treffen, so darf ich doch von dem Eindruck reden, den mir die neusten Fortschritte der Wissenschaft machen und den der Leser ohne Zweifel theilen wird. Ich meine, dass die Gesammtheit der Resultate heute der Maxwell'schen Theorie noch günstiger ist, als vor einigen Monaten, zu der Zeit, wo ich meine Vorlesungen schloss.



Neuere Versuche.

(Zusatz der Herausgeber.)

Obgleich zwischen der Veröffentlichung des französischen Originalwerkes von Poincaré und der deutschen Ausgabe nur eine kurze Spanne Zeit liegt, ist doch in Folge des allgemeinen Interesses, das die gesammte wissenschaftliche Welt diesem in der Umwandlung begriffenen Gebiete der Physik entgegenbringt, eine solche Fülle von interessanten Untersuchungen durchgeführt worden, dass es wünschenswerth erscheinen dürfte, wenigstens einige der bedeutendsten hier noch kurz anzuführen.

Die Theorie von Poynting und Heaviside. Zu den wichtigsten Arbeiten sind jedenfalls diejenigen von Hertz¹⁾ zu zählen, durch welche die Theorie von Poynting²⁾ und Heaviside³⁾ über die Ausbreitung der elektrischen Energie für den Fall sehr schneller Schwingungen eine unzweifelhafte Bestätigung zu erfahren scheint. Da diese Theorie, welche auf den Maxwell'schen Gleichungen basirt, im Vorhergehenden noch nicht direkt berücksichtigt wurde, so soll hier der wesentlichste Inhalt derselben wiedergegeben werden.

Poynting stellt in der erwähnten Abhandlung für die Uebertragung der elektrischen Energie folgendes allgemeine Gesetz auf: *Die Energie bewegt sich in einem beliebigen Punkte des Raumes senkrecht zu derjenigen Fläche, welche die durch diesen Punkt gehenden elektrischen und magnetischen Kraftlinien enthält, und der Betrag der in einer Sekunde durch die Einheit dieser Fläche hindurchgehenden Energie ist gleich dem durch 4π dividirten Produkte aus den Intensitäten beider (elektrischen und magnetischen) Kräfte und dem Sinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.* Hierbei ist die Richtung des Energiestromes diejenige, in welcher sich eine rechtsdrehende Schraube vorwärts bewegen würde, wenn man sie von der

¹⁾ Hertz, Wied. Ann. XXXVII S. 395 (1889).

²⁾ Poynting, Phil. Transactions II S. 343 (1884) und Physikal. Revue (Graetz) I S. 48 (1892).

³⁾ Heaviside, Phil. Mag. XXV S. 153 und Electrician 1885.

positiven Richtung der elektromotorischen Kraft zur positiven Richtung der magnetischen Kraft herumdreht.

Nach Zusatz II S. 186 lässt sich die totale Energie des Feldes in die Form bringen:

$$(1) \quad T + U = \int \left(\frac{\mu}{8\pi} \sum \alpha^2 + \frac{2\pi}{K} \sum f^2 \right) d\tau,$$

oder, da nach Bd. I § 169: $f = \frac{K}{4\pi} P$

$$(2) \quad T + U = \frac{1}{8\pi} \int \left(\mu \sum \alpha^2 + K \sum P^2 \right) d\tau;$$

wobei P, Q, R die Komponenten der elektromotorischen Kräfte bezeichnen. In dieser Gleichung stellt das erste Glied die elektromagnetische, das zweite die elektrostatische Energie dar. Findet nun irgend eine Veränderung in dem Vorrathe oder der Vertheilung der Energie statt, so wird die Veränderung dieser Grösse pro Sekunde gegeben sein durch:

$$(3) \quad \frac{d(T + U)}{dt} = \frac{1}{4\pi} \int \left(\mu \sum \alpha \frac{d\alpha}{dt} + K \sum P \frac{dP}{dt} \right) d\tau.$$

Das zweite Glied auf der rechten Seite formen wir um. Nach Bd. I § 170 (IX) folgt:

$$\frac{K}{4\pi} \cdot \frac{dP}{dt} = (u - CP) = (u - p),$$

wenn wir CP mit p bezeichnen; ausserdem bedeutet hierbei u die auf die Flächeneinheit bezogene Strömungsgeschwindigkeit in Richtung der X-Axe, C das Leitungsvermögen.

Setzen wir ferner (Bd. I § 167, V):

$$(4) \quad P = \left(cy' - bz' - \frac{dF}{dt} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) = (cy' - bz' + P'),$$

wobei x', y', z' die Differentialquotienten von x, y, z nach t , ferner a, b, c die Kraftkomponenten der magnetischen Induktion, F, G, H die Komponenten des Vektorpotentials und ψ das elektrostatische Potential bezeichnen, so dass die Grössen P' etc. keine Geschwindigkeit mehr enthalten; es folgt dann:

$$(5) \quad \frac{K}{4\pi} \int \sum P \frac{dP}{dt} = \int \left[\sum (cy' - bz') u + \sum P' u - \sum P p \right] d\tau.$$

Durch Umformung des ersten Terms auf der rechten Seite unter Berücksichtigung der Relation $X = (cv - bw)$, cf. Bd. I § 160 (2), wobei X, Y, Z die Komponenten der elektrodynamischen Kraft bezeichnen, erhält man

$$- \int \sum X x' d\tau.$$

Setzt man ferner

$$u = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \right)$$

(cf. Bd. I § 167), so ergibt sich nach einigen Umformungen:

$$\begin{aligned} (6) \quad & \frac{K}{4\pi} \int \sum P \frac{dP}{dt} d\tau + \int \sum X x' d\tau + \int \sum P p d\tau \\ & = \frac{1}{4\pi} \int \sum \left(R' \frac{\partial \beta}{\partial x} - Q' \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) d\tau. \end{aligned}$$

Durch partielle Integration findet man für die rechte Seite

$$(7) \quad \frac{1}{4\pi} \int \sum l (R' \beta - Q' \gamma) d\omega - \frac{1}{4\pi} \int \sum \alpha \left(\frac{\partial Q'}{\partial z} - \frac{\partial R'}{\partial y} \right) d\tau,$$

wobei l, m, n die Richtungskosinus der Normalen auf dem Oberflächenelemente bedeuten.

Nun ist nach (4)

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q'}{\partial z} - \frac{\partial R'}{\partial y} &= - \frac{\partial^2 G}{\partial t \partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} \right) = \mu \frac{d\alpha}{dt}. \quad (\text{Bd. I § 167.}) \end{aligned}$$

Führt man dies ein, so folgt aus (6)

$$\begin{aligned} (8) \quad & \frac{K}{4\pi} \int \sum P \frac{dP}{dt} d\tau + \frac{\mu}{4\pi} \int \sum \alpha \frac{d\alpha}{dt} + \int \sum X x' d\tau + \int \sum P p d\tau \\ & = \frac{1}{4\pi} \int \sum l (R' \beta - Q' \gamma) d\omega. \end{aligned}$$

In dieser Gleichung bedeutet:

- | | |
|-------------------------------|--|
| das 1. Glied der linken Seite | den Zuwachs an elektrostatischer Energie pro Sekunde; |
| - 2. - - - - | den Zuwachs an elektromagnetischer Energie pro Sekunde; |
| - 3. - - - - | die Arbeit der elektrodynamischen Kräfte pro Sekunde (d. h. die in Bewegung verwandelte Energie der Ströme); |
| - 4. - - - - | den Zuwachs der Joule'schen Wärme, der chemischen Energie etc. |

Die linke Seite von (8) repräsentirt also den totalen Energiezuwachs pro Sekunde innerhalb einer geschlossenen Fläche. Diese Energie dringt durch die Oberfläche ein, wobei jedes Element einen Beitrag liefert, dessen Gesammtheit durch die rechte Seite ausgedrückt wird; der letzteren geben wir schliesslich noch eine etwas andere Gestalt.

Nennen wir \mathfrak{E}' die Resultante von P' , Q' , R' und \mathfrak{H} die Resultante von α , β , γ , sowie ϑ den Winkel zwischen \mathfrak{E}' und \mathfrak{H} , so ist die Lage der Ebene, welche \mathfrak{E}' und \mathfrak{H} enthält, definirt durch Gleichungen von der Form:

$$L = \frac{R'\beta - Q'\gamma}{\mathfrak{E}'\mathfrak{H} \sin \vartheta},$$

wobei L , M , N die Richtungskosinus der Normale auf der Ebene bezeichnen. Es wird dann die rechte Seite von (8)

$$\frac{1}{4\pi} \int \mathfrak{E}' \mathfrak{H} \sin \vartheta (Ll + Mm + Nn) d\omega.$$

Diese Grösse wird ein Maximum, wenn der Klammerausdruck Eins ist, d. h. die Energie fliesst senkrecht zur Ebene $\mathfrak{E}'\mathfrak{H}$ und besitzt für das Element $d\omega$ die Grösse $\frac{1}{4\pi} \mathfrak{E}'\mathfrak{H} \sin \vartheta$.

Ueberall also, wo gleichzeitig magnetische und elektromotorische Kräfte auftreten, fliesst ein Strom von Energie in den Schnittkurven der elektromagnetischen und elektromotorischen Niveauflächen.

Nach der Poynting'schen Auffassung dienen somit nicht die Leiter zur Fortführung der elektrischen Energie, wie dies der bisherigen Anschauung entspricht, sondern gerade das umgebende Dielektrikum, die sogenannten Nichtleiter. Die Energie tritt in allen Fällen von Aussen durch die Oberfläche in die Leiter ein, und zwar

mehr oder weniger tief, je nachdem man es mit konstanten oder mit mehr oder weniger rasch alternirenden Strömen zu thun hat, und wird hier in Wärme verwandelt. Bei sehr rasch verlaufenden Wechselströmen (Hertz'schen Schwingungen) bleibt dagegen die Energie ganz auf der Oberfläche, so dass im Innern der Leiter vollständige Ruhe herrscht¹⁾.

Bestätigung der Poynting'schen Theorie durch Versuche von Hertz. Dass diese Anschauung in der That mit dem Experimente in Uebereinstimmung ist, zeigte Hertz²⁾ auf folgende Weise:

Bei der in § 63 beschriebenen Anordnung für die Messung der Fortpflanzung in metallischen Leitern war in dem mehrere Meter langen Fortleitungsdrahte eine Funkenstrecke A eingeschaltet, welche bis zu 6 mm lange Funken lieferte. Wurde dieselbe, statt mit einem vollkommen geschlossenen, metallischen Cylinder, welcher die Beobachtung der Funken nicht gestattet haben würde, mit einem Drahtkäfig nach Art des elektrischen Vogelbauers umgeben, der aus zwei mit dem Drahte verbundenen Metallscheiben und 24 an der Peripherie der Scheiben vertheilten, dem Leitungsdrahte parallel laufenden dünnen Drähten bestand, so traten keine Funken mehr auf, trotzdem der Widerstand der sämtlichen Schutzdrähte zusammen genommen noch wesentlich grösser war, als derjenige des Leitungsdrahtes. Nahm man statt der 24 Drähte deren nur 8, so hatten die Funken nur eine Länge von 0,1 mm, bei einem einzigen Schutzdrahte eine solche von 3 mm.

Um zu prüfen, welche Dicke eine leitende Schutzhülle besitzen muss, um das Eindringen der Elektrizität in das Innere bereits völlig zu verhindern, wurde die vom Erreger entferntere Scheibe des Käfigs durch einen kreisförmigen Ausschnitt vom Drahte isolirt und mit einer 1,5 m langen Glasröhre verbunden, in deren Axe der Leitungsdraht verlief. Diese Röhre wurde mit Metallüberzügen verschiedener Dicke versehen und an ihrem einen Ende mit der durchbrochenen Scheibe, an dem anderen Ende mit dem Drahte in leitende Verbindung gesetzt. Auch dann konnte in der Funkenstrecke kein Funken nachgewiesen werden; hob man dagegen an dem entfernten Ende die Verbindung zwischen dem Drahte und dem Metallbelage auf, so erschienen die Funken sofort, ein Beweis dafür, dass die Energie über das entfernte, offene Ende der Röhre in das Innere des Käfigs eintrat. Erst bei Verminderung der Dicke des Metallbelages bis auf weniger als 0,01 mm

¹⁾ Vergl. auch die für die Technik so wichtigen Versuche von N. Tesla, „Ueber Wechselströme von grosser Schwingungszahl“. La Nat. XIX, S. 162, 1891 und Beibl. XVI S. 234.

²⁾ Hertz, loc. cit.

(für Licht noch durchlässiger Silberniederschlag) traten auch bei geschlossener Röhre Funken auf. Es wird also bei sehr rasch verlaufenden Schwingungen schon bei einer Tiefe von 0,01 mm unter der Oberfläche des Leitungsdrahtes keine Bewegung mehr stattfinden.

Ein weiterer Beweis dafür, dass die Welle durch die entfernte Oeffnung der angesetzten Röhre in das Innere des Käfigs eintrat, war der Umstand, dass die Funken wieder verschwanden, wenn man den Leitungsdraht noch innerhalb dieser Röhre endigen liess, dagegen wieder auftraten, wenn er auch nur 20—30 cm aus derselben herausragte. „Welchen Einfluss“, sagt Hertz, „könnte diese unbedeutende Verlängerung des Drahtes auf den Funken haben, wenn nicht das hervorragende Ende des Drahtes eben das Mittel wäre, durch welches ein Theil der Welle aufgefangen und durch die Oeffnung in das Innere eingeführt wird?“

Wurde noch jenseits der Funkenstrecke A, also nach dem offenen Ende der Röhre zu, eine zweite Funkenstrecke B eingeschaltet, so zeigte es sich, dass in A keine Funken übersprangen, wenn bei B durch Entfernung der Pole die Funkenbildung verhindert wurde, nicht aber umgekehrt. Dies beweist, dass entgegengesetzt der gewöhnlichen Ansicht die elektrische Welle nicht direkt vom Erreger über A nach B fortgepflanzt wurde, sondern auf dem weiten Umwege um den Käfig herum über B nach A gelangte.

Vergrössert man bei der ursprünglichen Anordnung die Funkenstrecke A derart, dass keine Funken mehr überspringen, so muss an dieser Stelle eine Reflexion der Wellen stattfinden, die zu stehenden Wellen Veranlassung gibt. Auch diese konnte Hertz mittelst eines geeigneten Resonators, den er zwischen den Drähten des Käfigs einführte, nachweisen und sogar ihre Länge bestimmen.

Quantitative Bestimmung der elektrischen Schwingungen. Nachdem die ersten, ihrer Natur nach mehr qualitativen Versuche von Hertz und anderen Physikern bereits ein anschauliches Bild von der Natur der elektrischen Wellen geliefert und deren Aehnlichkeit mit den Lichtwellen dargethan hatten, musste das fernere Bestreben darauf gerichtet sein, quantitative Messungen zu ermöglichen. Dazu war es vor Allem nothwendig, die bisher bei den Versuchen allgemein angewandte Funkenstrecke resp. Geissler'sche Röhren durch wirkliche Messapparate zu ersetzen.

Hertz¹⁾ versuchte zunächst, die mechanischen Wirkungen der elektrostatischen und magnetischen Kräfte im freien

¹⁾ Hertz, Wied. Ann. XLII S. 407 (1891).

Raume zu messen, doch gelang ihm dies nur bei den an Drähten fortgeleiteten Wellen. Die Anordnung des Versuchs war im Allgemeinen die von Lecher¹⁾ gewählt: Den Platten des Erregers gegenüber standen zwei andere Platten, von denen zwei parallele Drähte von 6—8 m Länge in 30 cm Abstand ausliefen, die sich am Ende vereinigten. Beide Drähte konnten durch eine verschiebbare Brücke verbunden und dadurch das ganze System in zwei Abschnitte zerlegt werden, in dessen einem, vom Erreger entfernteren, bei passender Stellung der Brücke eine sehr lebhafte Schwingung entstand; dieselbe stellte die halbe Wellenlänge einer stehenden Welle dar und wurde durch Resonanz zwischen dieser Schwingung selbst und der primären Schwingung, die sich in dem Luftraume zwischen beiden Drähten ausbildete, erregt. Zur Bestimmung der mechanischen Wirkung der elektrischen Kraft diente die durch Spiegelablesung gemessene Ablenkung eines kleinen Röhrchens aus Goldpapier, welches an einem Kokonfaden aufgehängt und durch einen kleinen Magnet in einer bestimmten Ruhelage erhalten wurde. Das Ganze war von einem Glaskasten umgeben, der sich zwischen den Drähten verschieben liess. Wurden nun Schwingungen erregt, so suchte sich das Röhrchen in die kürzeste Verbindungslinie der Drähte einzustellen, und zwar waren die Ausschläge am stärksten an der Stelle des Schwingungsbauches und nahmen nach den Knoten zu ab; hierbei ergab sich für die stehenden Wellen eine beträchtliche Abweichung von der Form der einfachen Sinusschwingung.

Zum Nachweise der magnetischen Kraft diente ein kreisförmiger Reif von Aluminiumdraht, der um einen seiner Durchmesser drehbar aufgehängt und wie beim vorhergehenden Versuche mit kleinem Magnet und Spiegel versehen war. Hierbei traten allerdings Komplikationen zwischen der elektrischen und der magnetischen Wirkung auf; wurde die erstere jedoch durch eine passende Anordnung ausgeschlossen, dann zeigte sich, dass die magnetische Kraft ihren grössten Werth im Knoten der elektrischen Schwingung hat und dort senkrecht auf der Ebene der Drahtschleife steht, und dass sie nach dem Bauche der elektrischen Schwingung zu abnimmt. Die mechanischen Wirkungen der elektrischen und magnetischen Kraft erwiesen sich, der Theorie entsprechend, im Allgemeinen von gleicher Grössenordnung.

Schon früher hatten Rubens und Ritter²⁾ die Energie der Schwingungen auf bolometrischem Wege gemessen und dazu das

¹⁾ Lecher, loc. cit.

²⁾ Rubens und Ritter, Wied. Ann. XL S. 55 (1890).

von Paalzow und Rubens¹⁾ konstruirte Dynamo-Bolometer benutzt Das letztere beruht auf folgendem Princip:

Der eine Zweig einer Wheatstone'schen Brücke enthält einen sehr dünnen Draht mit möglichst grossem Temperatur-Koefficienten, dem man die Form eines Rhombus gegeben hat, damit er gleichzeitig von dem zu messenden und dem Hilfsstrom durchflossen werden kann, ohne dass die beiden Ströme einander beeinflussen. Stehen nämlich je zwei einander gegenüberliegende Ecken des Rhombus mit den Zuleitungsdrähten eines Stromes in Verbindung, so können an den beiden anderen Ecken keine Potentialunterschiede auftreten, wohl aber wird eine durch den zu messenden Strom hervorgebrachte Erwärmung des Bolometerdrahtes eine Ablenkung der Galvanometernadel hervorrufen. Auf diese Weise ist es möglich, die Energie von Wechselströmen zu messen, also auch von Hertz'schen Schwingungen, wie sie in einem sekundären Leiter entstehen. Die Enden der Verbindungsdrähte zwischen diesem Leiter und dem Bolometer wurden auf zwei Glasröhren aufgewickelt, die sich auf dem sekundären Leiter verschieben liessen. Diese Glasröhren bildeten also zwei kleine Leydener Flaschen, deren äussere Belegung aus den Verbindungsdrähten, die innere dagegen aus dem Draht des sekundären Leiters bestand.

Mit diesem Apparate gelang es, die polarisirende Wirkung eines Drahtgitters auf eine elektrische Welle quantitativ zu bestimmen (cf. § 66 Polarisation); hiernach lässt sich auch in quantitativer Beziehung der Vergleich zwischen einem solchen Drahtgitter und einem Nicol'schen Prisma bei Anwendung polarisirten Lichtes aufrecht erhalten. Auch der Umstand, dass eng gespannte, dem Erreger parallele Drähte die elektrischen Schwingungen ebenso reflektiren, wie eine feste Metallwand, liess sich hiermit nachweisen. Bildete die Richtung der Drähte mit derjenigen des Erregers einen bestimmten Winkel, so ergab sich die Beziehung, dass die Summe der reflektirten und durchgelassenen Energie konstant blieb.

In einer zweiten Arbeit zeigte Rubens²⁾ mittels derselben Methode, dass, wenn man bei der Lecher'schen Anordnung (cf. oben) die Brücke auf einen Knoten legt, die Form der Welle jenseits der Brücke einer reinen Sinusschwingung entspricht.

Von anderen Methoden, welche quantitative Messungen zulassen, sind noch zu erwähnen diejenige von Klemencic³⁾, welcher

¹⁾ Paalzow und Rubens, Wied. Ann. XXXVII S. 769 (1890).

²⁾ Rubens, Wied. Ann. XLII S. 154 (1891).

³⁾ Klemencic, Wied. Ann. XLII S. 416 (1891).

Thermoelemente aus Platin und Platinnickel verwendete, und diejenige von Franke¹⁾, der mit Hülfe eines Quadranten-Elektrometers für die Form der Schwingung eine ähnliche Kurve erhielt, wie Rubens. Die letztere Methode benutzte auch Bjerknæs²⁾ bei seinen Untersuchungen über den Verlauf der Hertz'schen Schwingungen; seine theoretischen Betrachtungen führen im Wesentlichen zu demselben Resultat, wie die in Zusatz V dieses Bandes wiedergegebenen Ansichten von Poincaré, die er auch experimentell geprüft hat.

Aus allen diesen Untersuchungen über Form und Verlauf der Hertz'schen Schwingungen in primären und sekundären Leitern geht ziemlich zweifellos hervor, dass die Schwingungen des primären Leiters (Erregers) ein starkes logarithmisches Dekrement besitzen und in Folge dessen ungemein rasch verklingen, während diejenigen des sekundären Leiters (Resonators) verhältnissmässig lange bestehen bleiben, vorausgesetzt, dass die Periode des Resonators von der des Erregers nicht zu stark abweicht. Die in diesem Fall mit dem Resonator gefundene Wellenlänge wird dann stets durch die Periode des Resonators und nicht durch die des Erregers bedingt. In Uebereinstimmung mit der von Hertz und Poincaré (cf. Zusatz V) ausgesprochenen Ansicht stehen auch die Experimente von Cohn und Heerwagen (l. c. S. 390), über die sich jene folgendermassen äussern: „Gleicht nach Hertz die primäre Schwingung dem Klang eines mit dem Hammer angeschlagenen Holzstabes, so verhält sich der Hertz'sche Drahtkreis wie die schwach gedämpfte, in der Tonhöhe unnachgiebige Stimmgabel“.

Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen in der Luft. Gestützt auf diese Anschauung unternahm Blondlot³⁾ nochmals die Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen in der Luft, wobei er Resonatoren von möglichst verschiedener Periode verwandte. Er wählte für dieselben eine solche Gestalt, dass sich sowohl ihre Kapazität, als auch ihre Selbstinduktion bestimmen lässt. Hieraus berechnet sich dann die Schwingungsperiode mittels der Formel

$$T = 2\pi\sqrt{CL},$$

worin C die nach der Maxwell'schen Stimmgabelmethode gemessene Kapazität, L die durch Rechnung gefundene Selbstinduktion bedeutet. Wurde nun mit einem solchen Resonator die für ihn

¹⁾ Franke, Wied. Ann. XLIV S. 713 (1891).

²⁾ Bjerknæs, Wied. Ann. XLIV S. 74, 92, 513 (1891).

³⁾ Blondlot, Journ. de phys. (2) X S. 549 (1891); Graetz, Phys. Revue I S. 171 (1892).

charakteristische Wellenlänge bestimmt, so folgt dann aus $V = \lambda/T$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Der zur Verwendung kommende Resonator bestand aus einem rechteckig gebogenen Draht, der in der Mitte der einen Seite geöffnet und mit zwei Kondensatorplatten versehen war, zwischen denen sich ein Funkenmikrometer befand.

Der Erreger war dem von Hertz und von Sarasin und de la Rive benutzten sehr ähnlich und stand mit zwei parallelen, 25 m langen Drähten in Verbindung, deren Abstand so gewählt wurde, dass der Resonator zwischen ihnen eben noch Platz fand. Legte man nun eine Brücke von Kupferdraht über die beiden parallelen Leitungsdrähte, so sprang im Allgemeinen beim Resonator ein Funken über, der nur bei gewissen Stellungen der Brücke verschwand, welche um eine halbe Wellenlänge von einander entfernt waren. Mit Hülfe von vier Resonatoren verschiedener Gestalt, sowie durch gleichzeitige Aenderung des Plattenabstandes des mit dem Resonator verbundenen Kondensators wurden die Versuchsbedingungen möglichst variirt und auf diese Weise elf Messungsreihen durchgeführt, die für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit Werthe zwischen den engen Grenzen 288000 und 304000 Km ergaben, obschon die gemessenen Wellenlängen zwischen 9 und 35 m variirten. Der Mittelwerth der gefundenen Zahlen ist:

$$297\,600 \text{ Km,}$$

also nahezu derselbe Werth, der aus den neuesten Messungen für das Verhältniss zwischen den elektrostatischen und elektromagnetischen Einheiten folgt¹⁾, und ebenso nahezu gleich dem Werth für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichts. Uebrigens fand Blondlot, dass auch die Beschaffenheit des Erregers auf die Resonanz nicht ohne Einfluss ist; dieser Einfluss besteht in der grösseren oder geringeren Schärfe der Maxima und Minima des sekundären Funkens, je nachdem Erreger und Resonator mehr oder weniger gut auf einander abgestimmt sind.

Auch die Versuche von Lecher²⁾ hatten für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ein übereinstimmendes Resultat gegeben; allerdings wiesen Cohn und Heerwagen³⁾ nach, dass bei diesen Experimenten das Resultat nicht unabhängig von den Versuchsbedingungen war, und dass man durch Veränderung derselben auf dem eingeschlagenen

¹⁾ Pellat, Journ. de Phys. (2) X S. 389 (1891). Pellat fand 300900 Km; vergl. auch die Zusammenstellung Bd. I § 183.

²⁾ Lecher, Wien. Ber. (2) IC S. 340 (1890) und Wied. Ann. XLI S. 850 (1890) und Wied. Ann. XLII S. 142 (1891).

³⁾ Cohn und Heerwagen, loc. cit.

Wege zu sehr verschiedenen Werthen für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit gelangen kann.

Bestätigung der Maxwell'schen Theorie von der Beziehung zwischen Dielektricitätskonstante und Brechungsexponent ($K = n^2$). Im ersten Bande § 187 wurde darauf hingewiesen, dass die Beziehung $K = n^2$ zwar für alle Gase und einige Flüssigkeiten erfüllt sei, dass sie dagegen nicht gilt für die meisten Flüssigkeiten und festen Körper, insbesondere nicht für das Wasser. Es wurden auch die Gründe besprochen, welche möglicher Weise diese schlechte Uebereinstimmung verursachen könnten, so dass es noch keineswegs nothwendig sei, die Maxwell'sche Theorie deshalb für ungültig zu erklären. Besonders wurde betont, dass der Werth des Brechungsexponenten für die ungemein kleinen Lichtwellen nicht ohne Weiteres auf die etwa zehn Millionen mal grösseren elektromagnetischen Wellen bei den Hertz'schen Schwingungen übertragen werden dürfe, und dass auch eine Extrapolation der empirischen Formeln für die Abhängigkeit des Brechungsexponenten von der Wellenlänge (Cauchy'sche etc. Dispersionsformeln), die ja nur für Lichtwellen aufgestellt und gültig sind, zu unmöglichen Resultaten führen würde (Bd. I § 184).

Es ist nun aber auf Grund der Poynting'schen Auffassung, dass die Ausbreitung der Energie nicht in dem Drahte, sondern im umgebenden Dielektrikum vor sich geht, die Möglichkeit gegeben, durch Einbetten der Drähte in verschiedene Dielektrika das Verhältniss der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in diesen Substanzen, d. h. die relativen Brechungsexponenten der letzteren für die betreffende Wellenlänge zu ermitteln. Wird andererseits auch der Werth der Dielektricitätskonstanten für dieselben Perioden bestimmt, so sind diese beiden Grössen nunmehr einwurfsfrei vergleichbar. Diesen Zweck verfolgte eine grosse Anzahl von neueren Untersuchungen, und durch sie ist nunmehr auch für die meisten der oben erwähnten Substanzen, welche dem Maxwell'schen Gesetze nicht zu folgen schienen, die Uebereinstimmung bereits nachgewiesen worden.

Neuere Bestimmung der Dielektricitätskonstanten. Wohl die erste Bestimmung der Dielektricitätskonstante mittels sehr rascher Schwingungen wurde von J. J. Thomson¹⁾ ausgeführt, und zwar bezog sich dieselbe auf Glas, da diese Substanz unter den festen Körpern die grösste Abweichung gezeigt hatte. Sein primärer Leiter unterschied sich von dem von Hertz verwendeten hauptsächlich

¹⁾ J. J. Thomson, Proc. Royal Soc. XLVI S. 292 (1889); Graetz, Phys. Revue I S. 117 (1892).

dadurch, dass die grossen Zinkplatten in geringerer Entfernung einander gegenübergestellt waren, so dass sie mit der dazwischen liegenden Luftschicht einen Kondensator bildeten. Der sekundäre Leiter bestand aus zwei etwa 20 m langen parallelen Drähten, auf welchen ein in der Mitte mit einer Funkenstrecke versehener Brückendraht verschoben werden konnte. Befanden sich die beiden Enden dieses Brückendrahtes auf Punkten gleichen Potentials, so sprangen keine Funken über. Wurde nun das eine Ende aus dieser ersten Stellung fortbewegt, bis der auftretende Funke wiederum verschwand, so entsprach die Verschiebung einer halben Wellenlänge. Auf diese Weise liess sich durch successive Verschiebung der beiden Enden des Brückendrahtes ein genauer Mittelwerth für die Wellenlänge finden. Nunmehr wurde zwischen die beiden Kondensatorplatten ein anderes Dielektrikum, z. B. Glas, gebracht; dann änderte sich die Periode des primären Leiters und damit im Zusammenhang auch die Wellenlänge im sekundären Leiter. Es verhalten sich nämlich die gefundenen Wellenlängen direkt wie die Quadratwurzeln aus den Dielektricitätskonstanten und die letzteren lassen sich demnach aus dem Verhältniss der ermittelten Wellenlängen bestimmen, wobei allerdings bei der Berechnung die Gegenwart anderer Kondensatoren im Feld zu berücksichtigen ist. Es ergab sich $K = 2,7 = (1,65)^2$, ein Werth, der mit dem optisch gemessenen Brechungskoeffizienten nahezu übereinstimmt, während bei langsamen Schwingungen nach der Stimmgabelmethode $K = 9$ bis 11 gefunden war.

Eine ganz andere Methode wandte Winkelmann¹⁾ an, der einen aus drei Platten gebildeten Doppelkondensator benutzte, dessen beide äusseren Platten mit den Zuleitungsdrähten eines Telephons in Verbindung stehen, während die mittlere Platte durch die sekundäre Spule eines Induktionsapparates alternirend geladen werden konnte. Befand sich diese mittlere Platte in gleicher Entfernung von den beiden äusseren, so wurde die Tonstärke im Telephon ein Minimum; brachte man sodann in den einen Zwischenraum das zu untersuchende Dielektrikum, so musste der andere Zwischenraum durch Verschieben der dazu gehörigen äusseren Platte verändert werden, damit wieder ein Minimum eintrat. Die messbare Grösse dieser Verschiebung gestattete, das Verhältniss der Dielektricitätskonstanten zu berechnen. Mit einem etwas modifizirten Verfahren ganz ähnlicher Art bestimmte später Elsas²⁾ ebenfalls die Dielektricitätskon-

¹⁾ Winkelmann, Wied. Ann. XXXVIII S. 161 (1889).

²⁾ Elsas, Wied. Ann. XLIV S. 654 (1891).

stante einiger Körper. Die betreffenden Resultate sind in folgender kleinen Tabelle vereinigt.

Dielektrikum	K	
	Winkelmann	Elsas
Glas	6,5—7,4	6,4—7,5
Ebonit	2,7	2,86
Paraffin	2,2	—
Schellack	3,1	—
Benzol	2,4	—
Petroleum	2,1	—
Terpentinöl	2,2	2,23
Aethylalkohol	27,4	—
Glimmer	—	5,7—6,0

Hiernach wird der von Cohn und Arons¹⁾ gefundene sehr grosse Werth für Aethylalkohol (26,5) bestätigt; allerdings nur für langsame Schwingungen, d. h. für sehr bedeutende Wellenlängen.

Im Widerspruch zu dem von Thomson erhaltenen Resultate, dass die Dielektricitätskonstante bei sehr rasch erfolgenden Schwingungen kleiner ist, als bei langsamen Schwingungen, stehen die Versuche von Lecher²⁾, der bei Hertz'schen Schwingungen das Aufleuchten von Geissler'schen Röhren zur Messung benützte, bei langsamen dagegen die Ausschläge eines Quadrantenelektrometers beobachtete. Die Resultate seiner Arbeit sind folgende:

Ladungszeit in Sekunden	K		
	Glas	Hartgummi	Petroleum
$5 \cdot 10^{-1}$	4,64—4,67	2,64	—
$5 \cdot 10^{-4}$	5,09—5,34	2,81	2,35
$3 \cdot 10^{-8}$	6,50—7,31	3,01	2,42

(Für die Dielektricitätskonstante des Wassers gibt Lecher einen unendlichen Werth bei raschen Schwingungen an.)

Dagegen bestätigten die Untersuchungen von Blondlot³⁾ das Resultat von Thomson. Blondlot verglich die Dielektricitätskonstante des Glases bei sehr raschen Schwingungen mit der des Schwefels, welch letztere nach der Methode von Curie ermittelt wurde. Die

¹⁾ Cohn und Arons, Wied. Ann. XXXIII S. 21 (1888).

²⁾ Lecher, Wien. Ber. IC S. 480 (1890) und Wied. Ann. XLII S. 142 (1891).

³⁾ Blondlot, Journ. de Phys. (2) X S. 197 (1891) und Graetz, Phys. Revue I S. 121 (1892).

Anordnung seines Apparats war etwa folgende: Der einen Platte des primären Leiters gegenüber standen in symmetrischer Anordnung zwei zum sekundären Leiter gehörige kleinere Platten, welche also mit der erwähnten Platte des Erregers zwei Kondensatoren bildeten, zwischen die verschiedene Dielektrika eingeschoben werden konnten. An den Enden der beiden gleichlangen Drähte des sekundären Leiters standen sich zwei Kohlenspitzen gegenüber, zwischen welchen unter gewöhnlichen Verhältnissen wegen der Symmetrie des Apparates keine Funken übersprangen. Befand sich dagegen zwischen dem einen Kondensator eine Glasplatte, zwischen dem anderen eine Schwefelplatte, so musste die letztere eine bestimmte Dicke erhalten, damit die entstandenen Funken wieder verschwanden. Aus dem Dickenverhältniss der Platten ergab sich die Dielektricitätskonstante des Glases zu $2,7 = (1,65)^2$.

Donle¹⁾ benutzte die Schwingungen eines Induktionsapparates von ca. 180 Stromwechsellern pro Sekunde zur Ladung eines Kondensators, in welchen verschiedene Dielektrika eingeführt werden konnten. Die Energie der Schwingungen, deren Periode von der Natur des Dielektrikum abhängt, wurde mit einem Bellati-Giltay'schen Elektrodynamometer gemessen. Donle fand folgende Werthe:

	K
Spiegelglas	6,88—7,76
Paraffin	2,31
Schellack	3,67
Aethyläther	4,37
Benzol	1,95
Alkohol	24,29

Bestimmung des Brechungsexponenten für lange Wellen. Zur Bestimmung des Verhältnisses der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen in verschiedenen Dielektriciis benutzte Waitz²⁾ die von Hertz³⁾ angegebene Methode der Abzweigung. Diese beruht darauf, dass in einem Resonator keine Funken auftreten, wenn der sogenannte Indifferenzpunkt desselben mit dem einen Pol des Erregers in Verbindung gesetzt wird. Dieser Indifferenzpunkt befindet sich bei einem rechteckigen Resonator in der Mitte der der Funkenstrecke gegenüberliegenden Seite, vorausgesetzt, dass beide Zweige von einem und demselben Dielektrikum umgeben sind. Führt man dagegen den einen Zweig durch ein anderes Dielektrikum, so verschiebt sich

¹⁾ Donle, Wied. Ann. XL S. 307 (1890).

²⁾ Waitz, Wied. Ann. XLI S. 435 (1890).

³⁾ Hertz, Wied. Ann. XXXI S. 441 (1887).

der Indifferenzpunkt, resp. es muss die andere Seite verlängert oder verkürzt werden.

Aus dieser Längenänderung lässt sich das Verhältniss der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten einfach berechnen. Waitz bestimmte auf diese Weise den Brechungskoeffizient des Petroleums für lange Wellen zu 1,3—1,45.

Eine analoge Methode befolgten Arons und Rubens¹⁾, welche statt der einen Abzweigung zwei ganz gleiche, vertikal übereinander gelagerte Abzweigungen benutzten, die mit den beiden Polen des Erregers in Verbindung standen. Diese Anordnung bot den Vortheil, dass fremde Einflüsse weniger störend wirken konnten. An Stelle des Funkenmikrometers benutzten sie das schon mehrfach erwähnte Dynamo-Bolometer. Sie fanden bei einer Wellenlänge von 6 m folgende Werthe von n und \sqrt{K} .

Dielektrikum	n	\sqrt{K}
Ricinusöl	2,05	2,16
Olivenöl	1,77	1,75
Xylol	1,50	1,53
Petroleum	1,40	1,44
Paraffin*)	1,43—1,48	1,40—1,44
Glas I	2,33	2,32
Glas II	2,49	2,43

*) Je nachdem es fest oder flüssig ist.

Die Bestimmung des Brechungsexponenten von Alkohol und Wasser gelang ihnen auf diesem Wege nicht. Dagegen hat Cohn²⁾ die letztere mit einer etwas abgeänderten Methode durchgeführt und fand bei einer Wellenlänge von 3 m für destillirtes Wasser

$$n = 8,57.$$

Dieser Werth stimmt mit dem früher für die Dielektricitätskonstante des Wassers von Cohn und Arons gefundenen $K=76=(8,72)^2$ sehr befriedigend überein.

Ausserdem war es möglich, auf diesem Wege auch die Brechungsexponenten von schwachen Salzlösungen zu ermitteln, was als Beweis dafür aufgefasst werden darf, dass Dielektricitätskonstante und Leitungsvermögen bei jedem Körper unabhängig von einander existiren. Die Abhängigkeit des Brechungsexponenten vom Leitungsvermögen zeigt folgende Zusammenstellung:

¹⁾ Arons und Rubens, Wied. Ann. XLII S. 580 und XLIV S. 206 (1891).

²⁾ Cohn, Berl. Sitzungsber. Dec. 1891 und Wied. Ann. XLV S. 370 (1892).

	Leitungs- vermögen	n
Destillirtes Wasser . .	$7,4 \cdot 10^{-10}$	8,57
Salzlösungen	$132 \cdot 10^{-10}$	8,65
	$455 \cdot 10^{-10}$	8,86

An dieser Stelle möge auch noch eine Arbeit von Lebedew¹⁾ Erwähnung finden, welcher die Mosotti-Clausius'sche Anschauung über die Konstitution der Dielektrika durch Messung der Dielektricitätskonstante an Gasen und Dämpfen mittels Kondensatoren unter Anwendung rascher Schwingungen einer experimentellen Prüfung unterwarf. Bezeichnet wie früher (Bd. I § 57) h das Verhältniss des von den leitenden Kugeln im Dielektrikum eingenommenen Raumes zum ganzen Raum, so gilt die Beziehung

$$h = \frac{K - 1}{K + 2} \quad \text{resp.} \quad K = \frac{1 + 2h}{1 - h};$$

die Dielektricitätskonstante eines Körpers ist somit durch seine relative Raumerfüllung bedingt. Ist die Mosotti'sche Anschauung richtig, so muss das Verhältniss zwischen der Dichte d des Dampfes und der Grösse h eine Konstante sein. Diese Konstante bedeutet die Maximaldichte des Körpers oder die Dichte seiner Moleküle. Lebedew kommt zu dem Schlusse: „Die Annahme Faraday's, dass die Moleküle elektrisch leitende Körper sind, oder diejenige von Mascart und Joubert, dass dieselben eine ausserordentlich hohe Dielektricitätskonstante besitzen, steht in keinem Widerspruch mit den beobachteten Thatsachen und erklärt diese in einfacher ungezwungener Weise. Die von Lorentz angegebene Beziehung

$$\frac{d}{h} = \text{Const.}$$

kann mit Vortheil als empirische Formel angewendet werden, welche die Dichte eines Körpers und seine Dielektricitätskonstante verbindet.“ (Vgl. auch Adler, Ueber die Konsequenz der Poisson-Mosotti'schen Theorie, Wien. Sitzungsber. Dec. 1890 u. Wied. Ann. XLIV. S. 173; 1891.)

¹⁾ Lebedew, Wied. Ann. XLIV S. 288 (1891).

Verlag von Julius Springer in Berlin N.

N. H. Abel und **E. Galois**:

Abhandlungen über die algebraische Auflösung der Gleichungen. Deutsch herausgegeben von H. Maser. Preis M. 4,—.

Augustin Louis Cauchy:

Algebraische Analysis. Deutsch herausgegeben von Carl Itzigsohn. Preis M. 9,—; geb. M. 10,—.

A. M. Clerke:

Geschichte der Astronomie während des neunzehnten Jahrhunderts. Gemeinfasslich dargestellt. Autorisirte deutsche Ausgabe von H. Maser. Preis M. 10,—; geb. M. 11,20.

Leonhard Euler:

Einleitung in die Analysis des Unendlichen. Erster Theil. Ins Deutsche übertragen von H. Maser. Preis M. 7,—; geb. M. 8,—.

Michael Faraday:

Experimental-Untersuchungen über Elektrizität. Deutsche Uebersetzung von Dr. S. Kalischer, Privatdocenten an der Technischen Hochschule zu Berlin. In 3 Bänden. Mit in den Text gedruckten Abbildungen und Tafeln.
Erster Band. Preis M. 12,—; geb. M. 13,20.
Zweiter Band. Preis M. 8,—; geb. M. 9,20.
Dritter Band. Preis M. 16,—; geb. M. 17,20.

M. Fourier:

Analytische Theorie der Wärme. Deutsche Ausgabe von Dr. B. Weinstein. Mit 21 in den Text gedruckten Holzschnitten. Preis M. 12,—; geb. M. 13,20.

Dr. O. Frölich:

Handbuch der Elektrizität und des Magnetismus. Mit zahlreichen in den Text gedruckten Holzschnitten und 2 Tafeln. Zweite vermehrte und verbesserte Auflage. Preis M. 15,—; geb. M. 16,20.

Carl Friedrich Gauss:

Untersuchungen über höhere Arithmetik. (Disquisitiones arithmeticae. Theorematis arithmetici demonstratio nova. Summatio quarundam serierum singularium. Theorematis fundamentalis in doctrina de residuis quadraticis demonstrationes et ampliaciones novae. Theoria residuorum biquadraticorum, commentatio prima et secunda. Etc.) Deutsch herausgegeben von H. Maser. Preis M. 14,—; geb. M. 15,20.

Allgemeine Untersuchungen über die unendliche Reihe

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3 + \text{u. s. w.}$$

Mit Einschluss der nachgelassenen Fortsetzung aus dem Lateinischen übersetzt von Dr. Heinrich Simon. Preis M. 3,—.

Dr. Heinrich Kayser:

Lehrbuch der Spektralanalyse. Mit zahlreichen in den Text gedruckten Holzschnitten und 9 lithographirten Tafeln. Preis M. 10,—; geb. M. 11,20.

J. L. Lagrange:

Analytische Mechanik. Deutsch herausgegeben von Dr. H. Servus. Preis M. 16,—; geb. M. 17,20.

Dr. M. Paul Mansion:

Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Vom Verfasser durchgesehene und vermehrte deutsche Ausgabe. Mit Anhängen von S. v. Kowalevsky, Imschenetsky und Darboux. Herausgegeben von H. Maser. Preis M. 12,—.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung.

Verlag von Julius Springer in Berlin N.

E. Mascart und J. Joubert:

Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus. Autorisirte deutsche Uebersetzung von Dr. Leopold Levy. In 2 Bänden. Mit zahlreichen in den Text gedruckten Abbildungen. Preis M. 30,—; geb. M. 32,40.

Émile Mathieu:

Theorie des Potentials und ihre Anwendungen auf Elektrostatik und Magnetismus. Autorisirte deutsche Ausgabe von H. Maser. Mit 18 in den Text gedruckten Figuren. Preis M. 10,—.

James Clerk Maxwell:

Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus. Autorisirte deutsche Uebersetzung von Dr. B. Weinstein. In 2 Bänden. Mit zahlreichen Holzschnitten und 21 Tafeln. Preis M. 26,—; geb. M. 28,40.

L. Poinsot:

Elemente der Statik. Autorisirte deutsche Ausgabe. Nach der von Bertrand bearbeiteten zwölften Auflage des französischen Originals herausgegeben von Dr. H. Servus. Mit 4 lithographirten Tafeln. Preis M. 6,—; geb. M. 7,—.

H. A. Schwarz:

Gesammelte Mathematische Abhandlungen. In zwei Bänden. Mit zahlreichen Textfiguren und 4 Tafeln. Preis M. 25,—; geb. M. 28,—.

Werner Siemens:

Wissenschaftliche und technische Arbeiten. I. Band: Wissenschaftliche Abhandlungen und Vorträge. Mit in den Text gedruckten Abbildungen und dem Bildniss des Verfassers. Zweite Auflage. Preis M. 5,—; geb. M. 6,20.
II. Band: Technische Arbeiten. Mit 204 in den Text gedruckten Abbildungen. Zweite Auflage. Preis M. 7,—; geb. 8,20.

Sir William Siemens:

Ueber die Erhaltung der Sonnen-Energie. Eine Sammlung von Schriften und Discussionen. Aus dem Englischen übersetzt von C. E. Worms. Mit 6 Holzschnitten und 1 lithogr. Tafel. Preis M. 4,—.

N. Vandermonde:

Abhandlungen aus der reinen Mathematik. Deutsch herausgegeben von Carl Itzigsohn. Preis M. 3,—.

William Thomson:

Gesammelte Abhandlungen zur Lehre von der Elektrizität und dem Magnetismus. (Reprint of Papers on Electrostatics and Magnetism.) Autorisirte deutsche Ausgabe von Dr. L. Levy und Dr. B. Weinstein. Mit 59 in den Text gedruckten Abbildungen und 3 Tafeln. Preis M. 14,—; geb. M. 15,20.

Karl Weierstrass:

Abhandlungen aus der Functionenlehre. Preis M. 12,—; geb. M. 13,20.

Dr. B. Weinstein:

Handbuch der physikalischen Maassbestimmungen. In 3 Bänden.
Erster Band. Die Beobachtungsfehler, ihre rechnerische Ausgleichung und Untersuchung. Preis M. 14,—; geb. M. 15,20.
Zweiter Band. Einheiten und Dimensionen, Messungen für Längen, Massen, Volumina und Dichtigkeiten. Preis M. 14,—; geb. M. 15,20.
Dritter Band. Messungen für Drucke und Kräfte, thermische, optische, akustische, elektrische und magnetische Maassbestimmungen. (In Vorbereitung.)

Zu beziehen durch jede Buchhandlung.