Die erste Randwertaufgabe der allgemeinen selbstadjungierten elliptischen Differentialgleichung zweiter Ordnung im Raum für beliebige Gebiete

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Werner Püschel
aus Köthen

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH / 1932

Die erste Randwertaufgabe der allgemeinen selbstadjungierten elliptischen Differentialgleichung zweiter Ordnung im Raum für beliebige Gebiete

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Werner Püschel
aus Köthen

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH / 1932

Referent: Professor Dr. R. Courant

Tag der Prüfung: 23. Juli 1930

ISBN 978-3-662-40929-9 ISBN 978-3-662-41413-2 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-41413-2

Sonderabdruck
aus „Mathematische Zeitschrift", Band 34, Heft 4

Einleitung.

Bekanntlich ist die erste Randwertaufgabe der Potentialtheorie im Raume nicht immer in dem strengen Sinne lösbar, der von der Lösung die Stetigkeit bis in den Rand hinein fordert[1]). Mildert man diese Bedingung jedoch, so läßt sich jedem beliebigen Gebiet und jeder stetigen Randwertvorgabe eine Lösung im erweiterten Sinne zuordnen[2]). Sie ist eindeutig bestimmt durch die Forderung, Grenzfunktion von Folgen gewisser benachbarter Lösungen zu sein. In mehreren Arbeiten wurde die wichtige Frage behandelt, inwieweit die Lösung im erweiterten Sinne die vorgegebenen Randwerte annimmt[3]).

Im folgenden werden die entsprechenden Verhältnisse bei der allgemeinen selbstadjungierten elliptischen Differentialgleichung

$$\Delta_2 u + a(x_1, x_2, x_3)\, u + b(x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{1}$$

untersucht; hierbei bezeichnet $\Delta_2 u$ einen elliptischen Differentialausdruck der Form

$$\sum_{i,k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,k}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) \qquad (a_{i,k} = a_{k,i}).$$

[1]) H. Lebesgue, C. R. séances Soc. math. France **41** (1912), S. 17.

[2]) N. Wiener, a) Certain Notions in Potential Theory, Journ. math. phys. Mass. Institut **3** (1924), S. 24—51; b) The Dirichlet Problem, ebenda, S. 127—146.

[3]) Aus ihrer großen Zahl seien folgende hervorgehoben: N. Wiener, vorige Anmerkung. O. D. Kellog, a) On the Classical Dirichlet Problem for General Domains, Proc. Nat. Acad. **12** (1926), S. 397—406; b) Foundations of Potential Theory, Berlin 1929, S. 315—338. Daselbst auch Angaben über weitere Literatur. Ferner F. Vasilesco, Sur les singularités des fonctions harmoniques, Journ. math. pures et appl. **9** (9) (1930), S. 81—111.

Das Hauptergebnis ist folgendes: Die erste Randwertaufgabe für beliebige beschränkte Gebiete und stetige Randwerte besitzt stets eine Lösung im erweiterten Sinne[4]). Dabei zerfallen die Randpunkte unabhängig von der speziellen Wahl der Differentialgleichung (1) und der Randwertvorgabe in drei Klassen: die eine Klasse A wird von den *regulären Punkten* gebildet, d. h. von solchen Randpunkten, in denen bei beliebiger Annäherung von innen her die Lösung stets gegen den vorgegebenen Randwert konvergiert. Die zweite Klasse B besteht aus denjenigen nichtregulären Punkten, in denen bei Annäherung auf einer passenden Teilfolge von innen her die Lösung gegen den vorgegebenen Randwert konvergiert. Dagegen haben die auf den Punkten der dritten Klassen C vorgegebenen Randwerte keinerlei Einfluß auf die Lösung, die in diesen Punkten stetig definiert werden kann und dann sogar regulär, d. h. zweimal stetig differenzierbar in ihnen ist. Die Zugehörigkeit eines Randpunktes p zu einer der drei Klassen wird durch das Konvergenzverhalten gewisser von N. Wiener eingeführter Reihen bestimmt, die den einzelnen Randpunkten zugeordnet werden; p gehört zu A, B oder C, je nachdem die zugehörige Reihe divergiert, konvergiert ohne abzubrechen oder aber abbricht.

Der Gang der Untersuchung ist in kurzem folgender: Zunächst wird die Lösung im erweiterten Sinne konstruiert, wonach in den Paragraphen 2 und 3 einige Hilfsmittel für die Untersuchung des Randes bereitgestellt werden. Die Klasse C läßt sich dann sehr einfach erledigen (§ 4). Hierbei ergibt sich insbesondere eine Charakterisierung derjenigen Mengen, welche nur hebbare Singularitäten tragen können. Im nächsten Paragraphen wird der übrige Rand behandelt. Während wir uns in den Paragraphen 1 bis 5 auf Differentialgleichungen der Form $\Delta_2 u = 0$ beschränken, erfolgt die Übertragung der Ergebnisse auf die allgemeine Differentialgleichung im letzten Paragraphen. Dies gelingt ohne Schwierigkeit unter Benutzung einer Integralgleichung. An vielen Stellen lassen sich die Überlegungen aus der Potentialtheorie fast wörtlich übertragen; dort werden wir uns dementsprechend kurz fassen.

Für die Anregung zu dieser Arbeit habe ich Herrn R. Courant zu danken.

§ 1.

Existenz und Eindeutigkeit der Lösung im erweiterten Sinne von $\Delta_2 u = 0$ für beliebige Gebiete.

1. Vorbemerkungen.

Von den Koeffizienten des Differentialausdruckes $\Delta_2 u$ setzen wir zweimalige stetige Differenzierbarkeit voraus, wobei die zweiten Ableitungen

[4]) Falls a und b nicht auftreten, lassen wir auch unbeschränkte Gebiete zu, deren Rand im Endlichen liegt.

einer Hölder-Bedingung genügen sollen. Unter Wahrung dieser Forderungen denken wir uns die Koeffizienten-Matrix ein für allemal in den ganzen Raum derartig fortgesetzt, daß sie außerhalb einer hinreichend großen Kugel in die Einheitsmatrix übergeht. Die zweimal stetig differenzierbaren Lösungen einer Differentialgleichung $\Delta_2 u = 0$ mögen kurz „reguläre Potentialfunktionen" heißen, während wir die entsprechenden Lösungen der Laplaceschen Differentialgleichung $\Delta u = 0$ als „reguläre *spezielle* Potentialfunktionen" bezeichnen. Unter einem *Gebiet* verstehen wir stets eine beliebige zusammenhängende und dreidimensional offene Punktmenge, deren sämtliche Randpunkte eine beschränkte Menge bilden. Ist das Gebiet nicht beschränkt, so nehmen wir den unendlich fernen Punkt P_∞ zum Rand hinzu. Die Randwerte dürfen von irgendeiner auf der abgeschlossenen Randpunktmenge stetigen Funktion $f(p)$ [5]) gebildet werden. Für „glatte Gebiete", das heißt solche, deren Rand (nötigenfalls von P_∞ abgesehen) aus endlich vielen stetig gekrümmten Flächen besteht, ist die erste Randwertaufgabe im strengen Sinne lösbar; z. B. läßt sich die von W. Sternberg[6]) für einfach zusammenhängende glatte Gebiete entwickelte Methode auf beliebige glatte Gebiete genau so wie in der speziellen Potentialtheorie übertragen. Ehe wir zu beliebigen Gebieten übergehen, seien einige Bemerkungen über *potentialkonvexe* Funktionen vorausgeschickt, wobei wir unter einer solchen eine stetige Funktion $\varphi(P)$ verstehen, die mit einer jeden regulären Potentialfunktion $u(P)$ im Innern eines glatten Gebietes die Ungleichung $\varphi \geqq u$ erfüllt, sofern sie auf dem Rande erfüllt ist. Beispielsweise ist $\varphi(P)$ potentialkonvex, falls es dreimal stetig differenzierbar ist und der Differentialausdruck $\Delta_2\varphi$ nicht positiv ausfällt. Diese Bemerkung führt sofort zu der Möglichkeit[7]), in jedem beschränkten abgeschlossenen Bereich B ein beliebiges Polynom $F(P)$ als Differenz zweier potentialkonvexer Funktionen φ und ψ darzustellen. Man braucht dazu nur das Maximum des Betrages von $\Delta_2 F(P)$ in diesem Bereich mit $4\pi M$ zu bezeichnen, und hat in $F(P) = \varphi(P) - \psi(P)$ die gewünschte Darstellung, falls

$$\varphi(P) = F(P) + M \iiint\limits_B K(P, Q)\, d\tau_Q,$$

$$\psi(P) = \varphi(P) - F(P)$$

gesetzt wird; hierbei ist $K(P, Q)$ die von W. Sternberg betrachtete im Unendlichen verschwindende symmetrische Grundlösung[6]).

---

[5]) Wir werden *Randpunkte* vielfach mit kleinen Buchstaben bezeichnen, während große Buchstaben beliebige, meist innere Punkte bedeuten.

[6]) W. Sternberg, Über die linearen elliptischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in drei unabhängigen Veränderlichen, Math. Zeitschr. 21 (1924), S. 286—311.

[7]) Hierauf machte mich Herr W. Feller aufmerksam.

2. *Existenz- und Eindeutigkeitssatz für beschränkte Gebiete.*

Als Lösung im erweiterten Sinne der zum beliebigen Gebiet $\mathfrak{G}$ und der stetigen Randfunktion $f(p)$ gehörigen Randwertaufgabe suchen wir eine solche Funktion, die gleich der klassischen Lösung ist, falls diese existiert und sich sonst als Limes von gewissen klassischen Lösungen $u_i(P)$ darstellen läßt, wobei wir die $u_i(P)$ folgendermaßen definieren: wir approximieren $\mathfrak{G}$ durch eine Folge von glatten Gebieten $\mathfrak{G}_i$, die mit ihrem Rand Γ_i im Innern von $\mathfrak{G}$ liegen. Solche Folgen mögen „zulässige Approximationsfolgen" heißen. Sodann setzen wir die Funktion $f(p)$ zu einer im ganzen Raum stetigen Funktion $F(P)$ fort und lösen die durch die auf Γ_i von $F(P)$ gebildeten Randwerte gegebene Randwertaufgabe für die glatten Gebiete $\mathfrak{G}_i$. Die $u_i(P)$ sind die auf diese Weise erhaltenen in $\mathfrak{G}_i$ regulären Potentialfunktionen, die wir in $\mathfrak{G} - \mathfrak{G}_i$ durch die Gleichung $u_i(P) = F(P)$ fortgesetzt denken. Dann gilt der folgende

Existenzsatz. *Bilden die $\mathfrak{G}_i$ eine zulässige Approximationsfolge für das Gebiet $\mathfrak{G}$ und ist $F(P)$ eine stetige Fortsetzung der gegebenen Randwerte $f(p)$, so konvergieren die zugehörigen Funktionen $u_i(P)$ gegen eine in $\mathfrak{G}$ reguläre Potentialfunktion $u(P)$, die eine Lösung der zu $\mathfrak{G}$ und $f(p)$ gehörigen Randwertaufgabe heißt. Ferner konvergieren die Ableitungen erster Ordnung von $u_i(P)$ gegen die entsprechenden Ableitungen von $u(P)$. Die Konvergenz der Funktionen und der ersten Ableitungen ist gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilbereich $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{G}$.*

Wir führen den Beweis zunächst für den Spezialfall, daß $F(P)$ potentialkonvex ist, und machen für einen Augenblick über die Folge $\mathfrak{G}_i$ die zusätzliche Voraussetzung, daß sie monoton sei, d. h. daß $\mathfrak{G}_i + \Gamma_i$ in $\mathfrak{G}_{i+1}$ enthalten ist. Wie man ohne weiteres sieht, bilden dann die Funktionen $u_i(P)$ eine abnehmende Folge, und die Behauptung folgt sofort aus dem zweiten Harnackschen Satz[8]). Es liegt auf der Hand, wie man sich von der Monotonitätsvoraussetzung über die Folge $\mathfrak{G}_i$ befreien kann, so daß die Behauptung allgemein für potentialkonvexes $F(P)$ bewiesen ist. Da aber jedes Polynom als Differenz zweier potentialkonvexer Funktionen dargestellt werden kann, ist zugleich der Fall mit erledigt, daß $F(P)$ ein Polynom ist. Wenn nunmehr $F(P)$ eine beliebige stetige Funktion ist, so approximiere man sie gleichmäßig in $\mathfrak{G} + \Gamma$ durch eine Folge von Polynomen $F_n(P)$. Die zu $F_n(P)$ und $\mathfrak{G}_i$ gehörigen Lösungen seien $u_i^{(n)}(P)$; sie konvergieren bei wachsendem i gegen die zu F_n und $\mathfrak{G}$ gehörigen Lösungen im erweiterten Sinne $u^{(n)}(P)$; diese wieder konvergieren nach dem

[8]) Vgl. W. Feller, Über die Lösungen der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typ, Math. Annalen **102** (1930), S. 633—649.

ersten Harnackschen Satz gleichmäßig gegen eine in $\mathfrak{G}$ reguläre Potentialfunktion $u(P)$. Mit Rücksicht darauf, daß die Polynome $F_n(P)$ die Funktion $F(P)$ gleichmäßig in $\mathfrak{G}$ approximieren, ergibt sich mühelos, daß auch die in der Behauptung auftretende Folge $u_i(P)$ gegen $u(P)$ konvergiert mitsamt den Ableitungen erster Ordnung, und zwar gleichmäßig im Sinne der Behauptung, womit der Existenzsatz bewiesen ist.

Der Relation $u_i(P) \to u(P)$ entnimmt man sofort die wichtige Ungleichung

$$\text{(1)} \qquad \underset{p \subset \Gamma}{\operatorname{Min}} f(p) \leqq u(P) \leqq \underset{p \subset \Gamma}{\operatorname{Max}} f(p),$$

wobei das Gleichheitszeichen wegen der Nichtexistenz eines Extremums im Innern des Regularitätsbereiches ausgeschlossen ist, falls $f(p)$ nicht konstant ist.

Eindeutigkeitssatz. *Die Lösung $u(P)$ hängt nur vom Gebiet $\mathfrak{G}$ und von den Randwerten $f(p)$ ab, nicht von der speziellen Wahl der Gebietsfolge $\mathfrak{G}_i$ und der Fortsetzungsfunktion $F(P)$.*

Beweis. Um die Unabhängigkeit der Lösung von der Wahl der approximierenden Gebietsfolge zu zeigen, betrachten wir zwei verschiedene zulässige Folgen $\mathfrak{G}_i$ und $\mathfrak{G}'_l$. Die Funktion $F(P)$ sei beidemal die gleiche; $u = \lim_{i\to\infty} u_i$, $u' = \lim_{l\to\infty} u'_l$ seien die beiden zugehörigen Lösungen. Wir bilden eine dritte Folge $\mathfrak{G}''_k \to \mathfrak{G}$, die unendlich viele $\mathfrak{G}_i$ und unendlich viele $\mathfrak{G}'_l$ enthält; dieses ist stets möglich. Weil $u'' = \lim_{k\to\infty} u''_k$ existiert, ist $u'' = u$, $u'' = u'$, also $u = u'$.

Jetzt seien $F(P)$ und $F'(P)$ zwei stetige Fortsetzungen der gleichen Randfunktion $f(p)$. Wieder werde $u = \lim_{i\to\infty} u_i$, $u' = \lim_{i\to\infty} u'_i$ gesetzt, wobei beidemal die gleiche Gebietsfolge $\mathfrak{G}_i$ benutzt werde. Bezeichnen wir die Differenz $u_i(P) - u'_i(P)$ mit $w_i(P)$, so haben wir wegen $|F - F'| \leqq \varepsilon$ auf Γ_i für $i > i_\varepsilon$ und $w_i = F - F'$ auf Γ_i in $\mathfrak{G}_i + \Gamma_i$ die Ungleichung $|w_i(P)| \leqq \varepsilon$. Daraus folgt $w_i(P) \to 0$ für alle P in $\mathfrak{G}$; es ist also $u(P) = u'(P)$. Da man den allgemeinen Fall, daß gleichzeitig die Gebietsfolge $\mathfrak{G}_i$ und die Funktion $F(P)$ geändert wird, auf die beiden behandelten Spezialfälle zurückführen kann, so ist der Eindeutigkeitssatz bewiesen.

Aus ihm folgt insbesondere, daß die Lösung $u(P)$ im erweiterten Sinne mit der klassischen Lösung $U(P)$ übereinstimmt, falls diese existiert; man braucht ja nur $F(P) = U(P)$ zu setzen und hat $U(P) = u_i(P) = u(P)$.

3. *Unbeschränkte Gebiete.*

Ist $\mathfrak{G}$ ein beliebiges unbeschränktes Gebiet, Γ der im Endlichen gelegene Teil des Randes, $f(p)$ eine stetige auf Γ definierte Randwertfunktion und c der Wert in P_∞, so gelangen wir ähnlich wie im Fall beschränkter Gebiete auf folgende Weise zur Lösung im erweiterten Sinne: wir approximieren $\mathfrak{G}$ von innen durch eine Folge unbeschränkter glatter Gebiete $\mathfrak{G}_i$. Sodann setzen wir $f(p)$ in eine Umgebung von Γ stetig fort zu einer Funktion $F(P)$. Mit den von $F(P)$ auf Γ_i gebildeten Werten und dem Werte c im Unendlichen lösen wir durch die Funktionen $u_i(P)$ die Randwertaufgabe für $\mathfrak{G}_i$. Dann gilt wieder der

Existenz- und Eindeutigkeitssatz. *Die Folge $u_i(P)$ konvergiert gegen eine in $\mathfrak{G}$ reguläre Potentialfunktion $u(P)$. Diese Grenzfunktion hängt nur vom Gebiet $\mathfrak{G}$, den Randwerten $f(p)$ und c ab und heißt die Lösung im erweiterten Sinne der zugehörigen Randwertaufgabe. Die Konvergenz der Funktionen und ihrer ersten Ableitungen ist gleichmäßig in jedem abgeschlossenen beschränkten Teilbereich.*

Der Beweis ergibt sich fast wörtlich wie bei beschränkten Gebieten, wenn man beachtet, daß es auch dort genügt hätte, $F(P)$ nur in einer Umgebung von Γ zu definieren, und daß die Majorisierung durch die Randwerte für die Funktionen $u_i(P)$ gilt. Diese letztere Eigenschaft erlaubt, wiederum im wesentlichen alles auf monotone Folgen hinauszuspielen.

Entsprechend (1) gilt hier

(2) $$m \leqq u(P) \leqq M,$$

wo m und M das Minimum und Maximum der Randwerte $f(p)$ und c ist. Ferner überzeugt man sich mühelos davon, daß $u(P)$ in P_∞ stets den vorgeschriebenen Wert c stetig annimmt.

§ 2.

Die Greensche Funktion im erweiterten Sinne.

1. *Definition und einfache Eigenschaften.*

Ist $K(P, Q)$ die zu $\Delta_2 u = 0$ und dem Pol Q gehörige symmetrische Grundlösung[9]), und $h(P, Q)$ die zum Gebiet $\mathfrak{G}$ und den von $K(p, Q)$ auf seinem Rand gebildeten Werten gehörige Lösung im erweiterten Sinne, so nennen wir die Funktion

(1) $$G(P, Q) = K(P, Q) - h(P, Q)$$

die zum Gebiet $\mathfrak{G}$ gehörige *Greensche Funktion im erweiterten Sinne.* Ohne Schwierigkeit bestätigt man die folgenden Hilfssätze, in denen wir stets $P \neq Q$ voraussetzen.

a) In jedem beschränkten Gebiet gilt

(2) $$K(P, Q) < C\frac{1}{\overline{PQ}},$$

wo C unabhängig von P und Q ist.

[9]) Vgl. Anm. [6]).

b) $G(P, Q) \leqq K(P, Q)$.

c) Wenn P und Q im Innern von $\mathfrak{G}$ liegen, so gilt

$$G(P, Q) > 0. \tag{3}$$

d) Ist $\mathfrak{G}_1$ ein Teilgebiet von $\mathfrak{G}$, so ist $G_1(P, Q) \leqq G(P, Q)$ für P und Q in $\mathfrak{G}_1$.

e) Sind $\mathfrak{G}_i$ irgendwelche Gebiete, die $\mathfrak{G}$ von innen approximieren, so gilt für die zugehörigen Greenschen Funktionen im erweiterten Sinne die Relation

$$G_i(P, Q) \to G(P, Q). \tag{4}$$

Die Konvergenz ist in jedem abgeschlossenen Teilbereich gleichmäßig. (Stetige Abhängigkeit vom Gebiet.)

f) Sind Q und Q' zwei feste Punkte in $\mathfrak{G}$, während p ein Randpunkt ist, so gilt $G(P, Q') \to 0$ für $P \to p$ falls $G(P, Q) \to 0$; gilt nur für eine passende Folge $P_k \to p$ die Relation $G(P_k, Q) \to 0$, so gilt für die gleiche Folge

$$G(P_k, Q') \to 0. \tag{5}$$

Überdies gelten diese Konvergenzeigenschaften gleichmäßig für alle Q' eines jeden abgeschlossenen Teilbereiches von $\mathfrak{G}$.

(Beweis wie in der speziellen Potentialtheorie bei O. D. Kellog[10].)

2. *Zusammenhang zwischen Greenscher Funktion und Lösung der ersten Randwertaufgabe.*

$\mathfrak{G}$ sei ein beschränktes Gebiet, $f(p)$ seien die vorgegebenen Randwerte und $u(P)$ die zugehörige Lösung. Dann gilt der folgende

Satz 1. *Falls die stetige Fortsetzung der Randwerte $f(p)$ als dreimal stetig differenzierbare Funktion $F(P)$ gewählt werden kann, so gilt die Darstellung*

$$u(P) = F(P) + \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{\mathfrak{G}} G(P, Q)\, \Delta_2 F(Q)\, d\tau_Q. \tag{6}$$

Hierbei ist das Integral nötigenfalls im Lebesgueschen Sinne zu nehmen.

Beweis. Zunächst ist $\Delta_2 u = 0$. Daß ferner $u(P)$ im Falle eines glatten Gebietes die Randwerte $f(p)$ annimmt, folgt sofort aus den Hilfssätzen a), b) und f). Daß die Integraldarstellung aber auch bei beliebigem Gebiet gilt, erkennt man wie in der speziellen Potentialtheorie[10]), indem man $\mathfrak{G}$ durch glatte Gebiete $\mathfrak{G}_i$ und $u(P)$ durch die zu $F(P)$ und $\mathfrak{G}_i$ gehörigen Lösungen approximiert. Wendet man nämlich auf diese Lösungen die Dar-

[10]) Vgl. Anm. [3]).

stellung (6) an, so ergibt sich die Behauptung unter Benutzung der Hilfssätze a), b) und e).

Gestattet jetzt $f(p)$ keine dreimal stetig differenzierbare Funktion als stetige Fortsetzung $F(P)$, so bezeichne $F_n(P)$ eine Polynomfolge, die $F(P)$ in $\mathfrak{G} + \Gamma$ gleichmäßig approximiert. Für die Lösung $u^{(n)}(P)$, die zu den Randwerten $F_n(P)$ gehört, gilt die Darstellung (6), indem man u und F durch $u^{(n)}$ und F_n ersetzt. Nun ist aber $u = \lim\limits_{n \to \infty} u^{(n)}$. Mithin gilt unter Benutzung von $F_n(P) \to F(P)$

$$u(P) = F(P) + \lim_{n \to \infty} \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{\mathfrak{G}} G(P, Q)\, \Delta_2 F_n(Q)\, d\tau_Q. \tag{7}$$

Mit Rücksicht auf den Hilfssatz e) schließt man nunmehr leicht aus (6) mit Hilfe einfacher Überlegungen auf den folgenden

Satz 2. *Sind $\mathfrak{G}_i$ beliebige, nicht notwendig glatte Gebiete, die das beschränkte Gebiet $\mathfrak{G}$ von innen approximieren, und sind $u_i(P)$ und $u(P)$ die zugehörigen Lösungen im erweiterten Sinne, dann besteht die Relation $u_i(P) \to u(P)$. In jedem abgeschlossenen Teilbereich ist die Konvergenz gleichmäßig.*

Als weitere Anwendung der Integraldarstellung ergibt sich unter Benutzung der Hilfssätze a), b) und f) ähnlich wie in der speziellen Potentialtheorie [10]) der für das Studium der Randwertannahme grundlegende

Satz 3. *Wenn die Greensche Funktion $G(P, Q)$ für einen festen Punkt Q aus $\mathfrak{G}$ gegen Null konvergiert, falls sich P dem Randpunkt p auf einer bestimmten Folge P_k nähert, so strebt $u(P_k)$ gegen den Randwert $f(p)$; nimmt also speziell die Greensche Funktion in p den Wert Null stetig an, so nimmt $u(P)$ den Wert $f(p)$ in p stetig an.*

Durch diesen Satz ist die Frage der Randwertannahme der Lösung $u(P)$ auf die entsprechende Frage bei der Greenschen Funktion zurückgeführt. Wir werden in dieser Richtung noch einen Schritt weitergehen und führen zu diesem Zwecke im nächsten Paragraphen zwei Hilfsbegriffe ein.

§ 3.

Das normierte Potential und die Kapazität einer beliebigen beschränkten Punktmenge.

1. *Definitionen und einfache Eigenschaften.*

Es liege eine beliebige beschränkte Punktmenge B vor, B' sei ihre abgeschlossene Hülle. Die Komplementärmenge von B' enthält ein Gebiet Ω, das sich ins Unendliche erstreckt. Sein Rand Σ ist in der Randmenge von B enthalten. Indem wir einen in der speziellen Potentialtheorie neuerdings benutzten Begriff verallgemeinern, verstehen wir unter dem „*normierten Po-*

tential" $v(P)$ von B die Lösung im erweiterten Sinne der ersten Randwertaufgabe für das Gebiet Ω mit den Randwerten Eins auf Σ und Null im Unendlichen. Ist $\mathfrak{F}$ irgendeine glatte geschlossene Fläche ohne Doppelpunkte, die B' umschließt, n die gegen B' weisende Flächennormale, und wird

$$\sum_{i,k=1}^{3} a_{i,k} \cos(x_i, n) \frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{\delta}{\delta l} \tag{1}$$

gesetzt, so definieren wir die *Kapazität* c von B durch das von $\mathfrak{F}$ unabhängige Integral

$$c = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\mathfrak{F}} \frac{\delta}{\delta l} v(Q)\, do. \tag{2}$$

Wie man sieht, hängt $v(P)$ und c nur von dem Teil Σ der Randmenge von B ab, der zugleich Rand von Ω ist. Speziell ist $c(B) = c(B') = c(\Sigma)$. Im übrigen hängt c noch von der Wahl des Differentialausdruckes $\Delta_2 u$ ab.

Falls Ω glatt ist, kann man für $v(P)$ und c explizite Darstellungen geben. Zunächst ist wie in der speziellen Potentialtheorie

$$v(P) = \iint\limits_{\Sigma} \varrho(p) K(p, P)\, do_p, \tag{3}$$

wo sich die Belegung $\varrho(p)$ als nicht-triviale Lösung einer homogenen Integralgleichung gewinnen läßt. Da, wie man sich leicht überzeugt, die von W. Sternberg[6]) bewiesene Sprungrelation für Potentialfunktionen der Form (3) gleichmäßig in p gelten, erhält man für glattes Ω aus (2) und (3) für die Kapazität die Darstellung

$$c = \iint\limits_{\Sigma} \varrho(p)\, do. \tag{4}$$

Da ferner, wie man ebenfalls bestätigt, die benutzte Sprungrelation auch bei Randannäherung längs der durch $\frac{\delta}{\delta l}$ bestimmten Richtung gültig bleibt, stellt man leicht mit Rücksicht darauf, daß $v(P) < 1$ in Ω ist, fest, daß $\varrho(p) \geqq 0$ gilt. Demnach erhält man, falls Ω glatt ist, aus (3) und (4) die die für später wichtige Ungleichung

$$c \cdot \operatorname*{Min}_{p \subset \Gamma} K(p, P) \leqq v(P) \leqq c \cdot \operatorname*{Max}_{p \subset \Gamma} K(p, P). \tag{5}$$

Um diese Ungleichung auszudehnen auf den Fall einer beliebigen beschränkten Punktmenge B mit dem Potential $v(P)$, schließen wir B durch glatte Flächen Σ_i ein; das außerhalb Σ_i liegende unendliche Gebiet heiße Ω_i; das zugehörige normierte Potential $v_i(P)$. Ist Σ_i eine solche Folge, daß die zugehörigen Ω_i das Gebiet Ω ausschöpfen, und zwar in monotoner Weise, so sind die $v_i(P)$ monoton bezüglich i und konvergieren nach § 1 gegen $v(P)$.

Da auch die ersten Ableitungen in jedem abgeschlossenen Teilbereich gleichmäßig gegen die zugehörigen Ableitungen konvergieren, so haben wir wegen (2) sofort die Relation

$$c_i \to c, \tag{6}$$

wo c_i die Kapazität von Σ_i ist. Nunmehr ergibt sich ohne weiteres die Allgemeingültigkeit von (5).

Wie man dieser Ungleichung entnimmt, folgt $v(P) \equiv 0$ aus $c = 0$ und umgekehrt.

Ferner erwähnen wir noch eine weitere wichtige Ungleichung: Sind B und E zwei Punktmengen, so gilt

$$c(B) \leqq c(B + E) \leqq c(B) + c(E). \tag{7}$$

Man beweist diese Ungleichung ähnlich wie in der speziellen Potentialtheorie [3]) [a)] unter Benutzung von (2).

2. *Vergleich der Kapazitäten einer Punktmenge bezüglich verschiedener Differentialausdrücke.*

Zunächst geben wir für das normierte Potential und die Kapazität einer Punktmenge B mit glattem Ω eine Charakterisierung durch ein Minimumproblem [11]). Wir behaupten, daß das Potential $v(P)$ die Lösung des folgenden Variationsproblems ist:

$$\mathfrak{D}[\varphi] = \iiint\limits_{\Omega} \left\{ \sum_{i,k=1}^{3} a_{i,k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right\} d\tau = \text{Min}, \tag{8}$$

und daß dieses Minimum $\mathfrak{D}[v]$ die Gleichung erfüllt

$$\mathfrak{D}[v] = 4\pi c. \tag{9}$$

Hierbei sind alle Funktionen φ zulässig, die in Ω stetig sind, auf Σ den Wert 1, in P_∞ den Wert 0 annehmen; die ersten Ableitungen von φ sollen in Ω stückweise stetig sein und dem Ausdruck $\mathfrak{D}[\varphi]$ einen endlichen Wert erteilen.

Man überzeugt sich hiervon, indem man Σ durch Parallelflächen im Abstande h approximiert und auf die so entstehenden Teilgebiete Ω_h von Ω die Greensche Formel anwendet. Läßt man h gegen Null streben und beachtet, daß dabei $\frac{\delta v}{\delta l}$ gleichmäßig gegen $4\pi\varrho(p)$ konvergiert, so ergibt sich die Behauptung.

Nunmehr sind wir in der Lage, eine Ungleichung herzuleiten, die die Grundlage dafür bildet, daß die Einteilung der Randpunkte eines Gebietes

---

[11]) Vgl. G. Bouligand, Ensembles impropres et nombre dimensionel, Bull. des Sciences math. **52** (12. sér.) (1928), S. 320—344 und S. 361—376. Insbesondere S. 373.

in drei Klassen gemäß dem Randwertverhalten der Lösung im erweiterten Sinne unabhängig ist von der speziellen jeweiligen Differentialgleichung. Die fragliche Ungleichung lautet

$$m c_{\Delta} \leqq c_{\Delta_2} \leqq M c_{\Delta}, \tag{10}$$

wo c_{Δ} und c_{Δ_2} die zu den Differentialausdrücken Δu und $\Delta_2 u$ gehörigen Kapazitäten einer Punktmenge B sind, während m und M positive Konstanten bezeichnen, die nur vom Differentialausdruck $\Delta_2 u$, nicht aber von B abhängen.

Beim Beweise genügt es, sich auf glatte B zu beschränken. Setzen wir zur Abkürzung

$$D[\varphi] = \iiint_{\Omega} \{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2\}\, dx\, dy\, dz,$$

wo x, y, z statt x_1, x_2, x_3 geschrieben ist, so folgt mit Rücksicht darauf, daß die $a_{i,k}(P)$ des elliptischen Differentialausdruckes $\Delta_2 u$ im ganzen Raum stetig und außerhalb einer gewissen Kugel konstant sind, die Ungleichung

$$m D[\varphi] \leqq \mathfrak{D}[\varphi] \leqq M D[\varphi]$$

für alle φ, die für das Variationsproblem (8) zulässig sind; hierbei sind m und M positive von φ und Ω unabhängige Konstanten. Ferner ist nach (9)

$$4\pi c_{\Delta} = D[w], \qquad 4\pi c_{\Delta_2} = \mathfrak{D}[v],$$

wo w und v die zu B gehörigen normierten Potentiale bezüglich Δu und $\Delta_2 u$ sind. Wegen $\mathfrak{D}[v] \leqq \mathfrak{D}[w]$ ist $\mathfrak{D}[v] \leqq M D[w]$, also auch $c_{\Delta_2} \leqq M c_{\Delta}$; ähnlich folgt $m c_{\Delta} \leqq c_{\Delta_2}$. Damit ist (10) bewiesen. Entsprechende Ungleichungen gelten natürlich für die Kapazitäten bezüglich zweier beliebiger Differentialausdrücke $\Delta_2 u$ und $\Delta_2^* u$.

§ 4.

Das Verhalten der Lösung am kapazitätslosen Bestandteil des Randes.

Wir sagen, daß die Menge B in einem ihrer Punkte P die *lokale Kapazität Null* besitzt, wenn es eine hinreichend kleine Kugel K um P gibt, derart, daß die in und auf ihr liegende Teilmenge von B die Kapazität Null besitzt. Jede abgeschlossene Menge von solchen Punkten verschwindender lokaler Kapazität hat mit Rücksicht auf § 3 (7) nach dem Heine-Borelschen Satze gleichfalls die Kapazität Null. Ferner nennen wir eine Menge kapazitätslos, wenn jede abgeschlossene Teilmenge von ihr die Kapazität Null besitzt. Insbesondere ist die Gesamtheit der Punkte von B, in denen B die lokale Kapazität Null besitzt, eine solche. Sie heiße der *kapazitätslose Bestandteil* von B und werde mit Λ bezeichnet. Nach § 3 (10) hängt Λ nicht von der speziellen Wahl der Differentialgleichung $\Delta_2 u$ ab.

Über das Verhalten der Lösung im erweiterten Sinne am kapazitätslosen Bestandteil des Randes gelten die gleichen Sätze, wie sie O. D. Kellog und F. Vasilesco[3]) gefunden haben. Da sich auch die von dem letzteren benutzten Beweise ohne Schwierigkeit übertragen lassen, genügt es, das Resultat anzugeben:

$\mathfrak{G}$ sei irgendein Gebiet, γ ein Teil seines Randes mit der Eigenschaft, daß $\mathfrak{G} + \gamma$ wieder ein Gebiet ist. Falls γ kapazitätslos ist, so kann jede Potentialfunktion $u(P)$, die in der Umgebung von γ beschränkt und regulär ist, auf γ so definiert werden, daß sie in γ regulär wird. Umgekehrt, falls dies stets möglich ist, so ist γ kapazitätslos. Insbesondere erfüllt der kapazitätslose Bestandteil Λ des Randes die über γ gemachten Voraussetzungen.

Die Punktmenge $\mathfrak{G}' = \mathfrak{G} + \Lambda$, die hiernach wieder ein Gebiet ist, heißt *reduziert.* Ihr Rand $\Gamma - \Lambda$ enthält keinen kapazitätslosen Bestandteil mehr und heißt gleichfalls reduziert.

§ 5.

Das Verhalten der Lösung in einem beliebigen Randpunkt.

1. Gedankengang der folgenden Untersuchung.

Die Methode, mit der wir das Verhalten der Lösung in einem Punkte des reduzierten Randes untersuchen, besteht darin, daß wir diese Frage zurückführen auf das Verhalten der Greenschen Funktion sowie der normierten Potentiale gewisser Punktmengen, die nur von der Umgebung des betrachteten Randpunktes abhängen. Dadurch werden wir zu einem notwendigen und hinreichenden Kriterium für die Regularität[12]) eines Randpunktes geführt, das die Unabhängigkeit der in der Einleitung ausgesprochenen Einteilung der Randpunkte in drei Klassen von der speziellen Wahl der Differentialgleichung $\Delta_2 u = 0$ in Evidenz setzt, womit der Anschluß an die für die speziellen Potentialfunktionen entwickelte Theorie gewonnen ist.

2. Die Zurückführung auf gewisse spezielle Randwertaufgaben.

Aus der Definition der Greenschen Funktion im erweiterten Sinne, sowie aus Satz 3 § 2 ergibt sich sofort der folgende

Satz 1. *Notwendig und hinreichend für die Regularität des Randpunktes p ist es, daß die Greensche Funktion des Gebietes $\mathfrak{G}$ für irgendeinen Aufpunkt Q in p den Wert Null stetig annimmt, daß also die folgende Relation gilt*

$$G(P, Q) \to 0 \quad \text{für} \quad P \to p. \tag{1}$$

[12]) Definition in der Einleitung.

Satz 2. *Sind $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ zwei Gebiete mit dem gemeinsamen Randpunkt p, und ist $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{H}$, so ist der Randpunkt p bezüglich $\mathfrak{G}$ regulär, falls er es bezüglich $\mathfrak{H}$ ist.*

Sind nämlich $G(P, Q)$ und $H(P, Q)$ die zu $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ gehörigen Greenschen Funktionen im erweiterten Sinne, so gilt $0 < G(P, Q) \leqq H(P, Q)$ für P und Q in $\mathfrak{G}$, also $G(P, Q) \to 0$ für $P \to p$, falls das Entsprechende für $H(P, Q)$ gilt.

Um zu zeigen, daß für die Regularität von p ebenso wie das Verhalten der Greenschen Funktion auch das Verhalten gewisser normierter Potentiale maßgebend ist, brauchen wir eine Ungleichung zwischen dem normierten Potential $v(P)$ einer beliebigen Punktmenge B und der Greenschen Funktion $H(P, Q)$ des zu B gehörigen Außengebietes Ω. Es sei Q ein Punkt aus Ω, K eine beliebige in Ω enthaltene Kugel um Q, auf welcher das Maximum von $v(P)$ mit m, das Maximum von $H(P, Q)$ mit M bezeichnet werde $(0 \leqq m < 1)$. Dann gilt in dem ganzen außerhalb K liegenden Teile von Ω die Ungleichung

$$H(P, Q) \leqq \frac{M}{1-m}(1 - v(P)). \tag{2}$$

Man beweist sie genau so wie die entsprechende für spezielle Potentialfunktionen, die O. D. Kellog [3][a] angegeben hat. Nunmehr sei $\mathfrak{K}_\alpha$ die Kugel um p mit dem Radius α; die Menge derjenigen in ihr enthaltenen Punkte, die nicht zu $\mathfrak{G}$ gehören, heiße E_α, während $v_\alpha(P)$ das normierte Potential von E_α sei. Sobald α hinreichend klein ist, gehört $\mathfrak{G}$ dem unendlichen Außengebiet Ω_α von E_α an und p ist ein Punkt seines Randes Σ_α. Dann gilt folgender

Satz 3. *Für die Regularität von p ist es notwendig und hinreichend, daß für einen genügend kleinen Wert α das Potential $v_\alpha(P)$ den richtigen Randwert annimmt, d. h. daß $v_\alpha(P) \to 1$ für $P \to p$ ist.*

Ist nämlich $v_\alpha(P) \to 1$, so gilt nach (2) für die Greensche Funktion $H(P, Q)$ von Ω_α die Beziehung $H(P, Q) \to 0$ für $P \to p$, so daß p nach Satz 1 bezüglich Ω_α, also nach Satz 2 auch bezüglich $\mathfrak{G}$ regulär ist. Die Umkehrung wird genau so bewiesen wie in der speziellen Potentialtheorie [13].

Bei diesem Kriterium kommt nur eine beliebig kleine Umgebung $\mathfrak{G}_\alpha$ des Gebietes $\mathfrak{G}$ ins Spiel, wodurch der *rein lokale Charakter der Regularität* eines Randpunktes in Evidenz gesetzt wird. Sagen wir kurz, ein Gebiet $\mathfrak{G}$ sei in einer Umgebung von p Teilgebiet eines Gebietes $\mathfrak{H}$, falls für ein passendes $\alpha > 0$ die in einer Kugel $\mathfrak{K}_\alpha$ enthaltene Teilmenge $\mathfrak{G}_\alpha$ von $\mathfrak{G}$ Teilmenge der entsprechenden Menge $\mathfrak{H}_\alpha$ ist, so ergibt sich aus dem lokalen Charakter der Regularität und dem Satz 2 sofort das folgende

[13]) Vgl. N. Wiener unter Anm. [2][b], S. 135.

Majorantenprinzip. *Ist p gemeinsamer Randpunkt der beiden Gebiete $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$, ist ferner $\mathfrak{G}$ in einer Umgebung von p Teilmenge von $\mathfrak{H}$, so ist der Randpunkt p für $\mathfrak{G}$ regulär, falls er es für $\mathfrak{H}$ ist, dagegen singulär für $\mathfrak{H}$, falls er es für $\mathfrak{G}$ ist.*

3. Das Wienersche Reihenkriterium und seine Übertragung auf die Differentialgleichungen der Form $\Delta_2 u = 0$.

Nach Ungleichung (5) des § 3 besteht zwischen dem Potential einer Punktmenge und ihrer Kapazität ein Zusammenhang, der es erwarten läßt, daß sich auch mit Hilfe der Kapazitäten der Mengen E_α ein Kriterium für die Regularität eines Randpunktes finden läßt. Ein solches notwendiges und hinreichendes Kriterium wurde in der Tat für die spezielle Potentialtheorie von N. Wiener [2] [b] hergeleitet; man kann es nach einer Bemerkung von O. D. Kellog und F. Vasilesco [14] in folgender Form aussprechen: λ sei eine positive Zahl mit $0 < \lambda < 1$; k_i die Menge der nicht zu $\mathfrak{G}$ gehörigen Punkte in und auf der Kugel $\mathfrak{K}_{\lambda^i}$ um p mit dem Radius λ^i; (k_i) die Kapazität von k_i genommen in bezug auf die Laplacesche Differentialgleichung $\Delta u = 0$. Der Randpunkt p ist dann regulär oder singulär bezüglich $\Delta u = 0$, je nachdem die Reihe

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(k_i)}{\lambda^i}, \qquad (S = S(p)), \tag{3}$$

für irgendein zulässiges λ divergiert oder konvergiert.

Ehe wir zeigen, daß dies Kriterium auch für die Differentialgleichungen $\Delta_2 u = 0$ gilt, schicken wir einige Bemerkungen voraus, die sich in der Hauptsache auf das Konvergenzverhalten von S und ähnlichen Reihen beziehen.

a) Bezeichnen wir mit $(k_i)_{\Delta_2}$ die Kapazität von k_i bezüglich $\Delta_2 u = 0$ und mit $S_2 = S_2(p)$ die Reihe

$$S_2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(k_i)_{\Delta_2}}{\lambda^i}, \tag{4}$$

so haben nach § 3 (10) die Reihen S_2 und S das gleiche Konvergenzverhalten. Wir schreiben dafür kurz

$$S_2 \sim S. \tag{5}$$

Hiernach können wir bei Konvergenzbetrachtungen einfach (k_i) statt $(k_i)_{\Delta_2}$ schreiben.

[14] O. D. Kellog und V. Vasilesco, A Contribution to the Theory of Capacity, Journ. of Math. **51** (1929), S. 515—526, insbes. S. 518.

b)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(k_i - k_{i+1})_{\Delta_2}}{\lambda^i} \sim \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(k_i)_{\Delta_2}}{\lambda^i}. \tag{6}$$

(Zu dem einfachen Beweis vergleiche Anm. [14].)

c) Der Bereich B möge durch eine nicht-singuläre lineare Transformation $P = \mathfrak{T}\,\bar{P}$ aus einem Bereich $\bar{B}$ hervorgehen, kurz $B = \mathfrak{T}\,\bar{B}$, wobei der Differentialausdruck $\bar{\Delta}_2\,\bar{u}(\bar{P})$ in $\Delta_2\,u(P)$ übergehen möge. Dann gilt für die Kapazitäten von B und $\bar{B}$

$$(B)_{\Delta_2} = |\mathfrak{T}|\,(\bar{B})_{\bar{\Delta}_2}, \tag{7}$$

wo $|\mathfrak{T}|$ die Determinante von $\mathfrak{T}$ ist. Für glatte B sieht man das sofort aus der Darstellung (9) § 3:

$$4\pi(B)_{\Delta_2} = \mathfrak{D}_{\Omega}[v], \qquad 4\pi(\bar{B})_{\bar{\Delta}_2} = \bar{\mathfrak{D}}_{\bar{\Omega}}[\bar{v}]. \tag{8}$$

Da nämlich durch die Transformation das auf $\Delta_2 u$ bezügliche normierte Potential $v(P)$ von B in das auf $\bar{\Delta}_2\bar{u}$ bezügliche Potential $\bar{v}(\bar{P})$ von $\bar{B}$ übergeht, folgt aus (8) für glatte B sofort wegen

$$\mathfrak{D}_{\Omega}[v] = |\mathfrak{T}|\,\bar{\mathfrak{D}}_{\bar{\Omega}}[\bar{v}]$$

die behauptete Gleichung (7). Durch eine Approximationsbetrachtung ergibt sich ihre Richtigkeit für beliebige Punktmengen B.

Aus (7) und den vorhergehenden Bemerkungen folgt, daß sich das Konvergenzverhalten von S durch eine lineare Transformation nicht ändert, (λ wird dabei festgehalten). Kurz:

$$S_2 \sim \bar{S}_2. \tag{9}$$

d) Ferner machen wir eine Feststellung bezüglich der symmetrischen Grundlösung $K(P, Q)$ in der Umgebung eines solchen Punktes p, in dem die Koeffizientenmatrix $a_{i,k}(P)$, die zum Differentialausdruck $\Delta_2 u$ gehört, gleich der Einheitsmatrix ist, ohne daß sie in der Umgebung von p konstant zu sein braucht. Wir sagen dann, $\Delta_2 u = 0$ besitzt in P die *Normalform.* Schreiben wir die Grundlösung in der Form [15])

$$K(P, Q) = \frac{1}{E(Q)}\left\{\frac{1}{\sqrt{\sum\limits_{i,k=1}^{3} A_{i,k}(P)\,(\xi_i - x_i)\,(\xi_k - x_k)}} + W(P, Q)\right\}, \tag{10}$$

wobei sich x_i auf P, ξ_i auf Q bezieht und $A_{i,k}(P)$ die durch die Determinante $|a_{i,k}(P)|$ dividierte und mit Vorzeichen versehene Unterdeterminante von $a_{i,k}(P)$ ist, wo ferner $E(Q)$ eine stetige positive Funktion ist mit $E(p) = 1$ und $\overline{PQ}\,W(P, Q) \to 0$ für $\overline{PQ} \to 0$, gleichmäßig für

[15]) Vgl. Anm. [6]).

alle voneinander verschiedenen Punkte P und Q aus $\mathfrak{G}+\Gamma$, so ergibt sich in unserm Fall, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\alpha_\varepsilon > 0$ gibt, derart, daß die Ungleichung

$$(11) \qquad |r K(P, Q) - 1| < \varepsilon \quad \text{mit} \quad r = \overline{PQ}$$

für $\overline{Pp} < \alpha_\varepsilon$, $\overline{Qp} < \alpha_\varepsilon$, d. h. in $\mathfrak{K}_{\alpha_\varepsilon}$ gilt. In $\mathfrak{K}_{\alpha_\varepsilon}$ ist also

$$(12) \qquad \frac{1-\varepsilon}{K(P, Q)} \leqq \overline{PQ} \leqq \frac{1+\varepsilon}{K(P, Q)}.$$

e) Schließlich erinnern wir an die Ungleichung (5) § 3. Sie nimmt, wenn P und die Punktmenge B, um deren Kapazität und Potentiale es sich handelt, in $\mathfrak{K}_{\alpha_\varepsilon}$ liegt, wegen (12) die Gestalt an

$$(13) \qquad (1-\varepsilon)\, c \cdot \operatorname*{Min}_{Q \subset \Gamma} \frac{1}{\overline{PQ}} \leqq v(P) \leqq (1+\varepsilon)\, c \cdot \operatorname*{Max}_{Q \subset \Gamma} \frac{1}{\overline{PQ}}.$$

Nunmehr kommen wir zu dem Reihenkriterium für die Differentialgleichung $\Delta_2 u = 0$. Es lautet:

Der Randpunkt p ist regulär oder singulär in bezug auf die Differentialgleichung $\Delta_2 u = 0$, je nachdem die Reihe (3) für irgendein λ mit $0 < \lambda < 1$ divergiert oder konvergiert, p ist also regulär für alle Differentialgleichungen $\Delta_2 u = 0$ oder für keine.

Nach den Vorbemerkungen können wir uns beim Beweis sehr kurz fassen.

S, also auch S_2, sei divergent. Zunächst ist es klar, daß p bezüglich $\Delta_2 u$ und $\mathfrak{G}$ regulär ist oder nicht, je nachdem $\bar{p}$ bezüglich $\overline{\Delta}_2 \bar{u}$ und $\overline{\mathfrak{G}}$ es ist, wobei die überstrichenen Symbole mit den unüberstrichenen durch eine lineare Transformation $P = \mathfrak{T}\bar{P}$ verbunden sind. Da sich nach (9) auch das Konvergenzverhalten der Reihe (4) durch eine solche Transformation nicht ändert, dürfen wir annehmen, daß $\Delta_2 u = 0$ im Punkte p die Normalform besitzt. Nach der Bemerkung b) ist mit (4) auch die Reihe

$$(16) \qquad S_2^* = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(k_i - k_{i+1})_{\Delta_2}}{\lambda^i}$$

divergent. Nunmehr ist zum Beweis der Regularität von p nach Satz 3 nur zu zeigen, daß für einen geeigneten Wert α das Potential $v_\alpha(P)$ in p den Wert 1 annimmt. Dies läßt sich aber unter Benutzung von (13) aus der Divergenz von S_2^* ebenso beweisen, wie es O. D. Kellog in der speziellen Potentialtheorie getan hat[16]).

Jetzt sei (3), also auch S_2^* konvergent. Nach c) dürfen wir annehmen, daß $\Delta_2 u = 0$ in p die Normalform besitzt. Wir bestimmen dann eine positive ganze Zahl m derart, daß erstens $\lambda^m < \alpha_\varepsilon$ wird, wo α_ε der Unglei-

[16]) Vgl. O. D. Kellog unter Anm. [3])[b)], S. 332 ff.

chung (11) gemäß mit $\varepsilon = 1$ bestimmt ist, und daß zweitens

$$\sum_{i=m}^{\infty} \frac{\gamma_i}{\lambda^i} < \frac{\lambda}{8},$$

wo $\gamma_i = (k_i - k_{i+1})_{\Delta_2}$ ist, wird. Zum Beweis der Singularität von p genügt es zu zeigen, daß das Potential $v_\alpha(P)$ der Menge E_α, $\alpha = \lambda^m$, im Punkte p den Wert 1 nicht stetig annimmt. Dies aber stellt man wieder unter Benutzung von (7) § 3 und (13) genau durch die gleichen Überlegungen fest, mit denen O. D. Kellog die entsprechende Tatsache in der speziellen Potentialtheorie bewiesen hat[16]).

4. *Endgültige Ergebnisse.*

Wir vervollständigen die bisher gewonnenen Resultate durch einige Aussagen, die sich auf die singulären Randpunkte beziehen. Zunächst gilt für die singulären Punkte des reduzierten Randes folgender

Satz 4. *Jeder singuläre Punkt p des reduzierten Randes läßt sich durch eine solche Punktfolge P_k aus $\mathfrak{G}$ approximieren, daß $u(P_k) \to f(p)$ gilt.*

Der Beweis erledigt sich durch die Bemerkung, daß er genau der gleiche ist wie der von F. Vasilesco[3]) für den entsprechenden Satz bei harmonischen Funktionen benutzte.

Die weiteren Aussagen beziehen sich auf den kapazitätslosen Bestandteil des Randes.

Satz 5. *Die Punkte p des kapazitätslosen Bestandteils Λ des Randes sind singulär und dadurch charakterisiert, daß die zugehörigen Reihen $S(p)$ abbrechen.*

Die Singularität von p folgt sogleich aus Satz 3. Daß $S(p)$ abbricht, ergibt sich sofort aus dem Satz von § 4. Umgekehrt ist klar, daß ein Randpunkt, für den $S(p)$ abbricht, die lokale Kapazität Null besitzt, also zu Λ gehört.

Ehe wir zu dem nächsten auf Λ bezüglichen Satz übergehen, ist eine Bemerkung über kubische Gebiete, d. h. solche, deren Rand aus endlich vielen achsenparallelen Ebenenstücken besteht, einzuschieben. Offenbar kann man mit kubischen Gebieten jedes beliebige Gebiet $\mathfrak{G}$ im Sinn von § 1 approximieren. Man weiß ferner, daß die sämtlichen Punkte eines kubischen Gebietes für die spezielle Potentialgleichung regulär sind[17]). Mithin ist auch die Randwertaufgabe der Differentialgleichung $\Delta_2 u = 0$ für kubische Gebiete stets im strengen Sinn lösbar. Daher können wir an Stelle der in § 1 zur Konstruktion der Lösung im erweiterten Sinne benutzten Approximation durch glatte Gebiete eine solche durch kubische Gebiete verwenden.

[17]) Vgl. z. B. N. Wiener. loc. cit. [2])[b]).

Mit Hilfe dieser Bemerkung läßt sich der folgende Eindeutigkeitssatz ganz ähnlich beweisen, wie es F. Vasilesco mit dem entsprechenden Satz in der speziellen Potentialtheorie getan hat[3]). Es genügt daher das Ergebnis anzugeben.

Satz 6. *Zwei Lösungen im erweiterten Sinne der ersten Randwertaufgabe sind identisch, wenn nur ihre Randwertvorgaben auf dem reduzierten Teil des Randes übereinstimmen.*

Wendet man die Integraldarstellung von § 2 auf die zu $\mathfrak{G}$ und seinem reduzierten Gebiet $\mathfrak{G}'$ gehörigen Lösungen $u(P)$ und $u'(P)$ bei auf $\Gamma - \Lambda$ gleichen Randwertvorgaben an, so ergibt sich sofort der folgende

Satz 7. *Der kapazitätslose Bestandteil des Randes besitzt stets das dreidimensionale Maß Null.*

Abschließend erkennt man, daß für die Differentialgleichungen der Form $\Delta_2 u = 0$ die Resultate dieses und des vorangehenden Paragraphen das in der Einleitung zusammengefaßte Hauptergebnis in sich enthalten.

§ 6.

Die allgemeine selbstadjungierte elliptische Differentialgleichung $\Delta_2 u + au + b = 0$.

$\mathfrak{G}$ sei ein beliebiges beschränktes Gebiet; die Funktionen $a(P)$ und $b(P)$ seien mit ihren Ableitungen erster Ordnung in $\mathfrak{G}$ stetig. Um die im vorangehenden für die Lösungen von $\Delta_2 u = 0$ entwickelte Theorie auf den allgemeinen Fall zu übertragen, bezeichnen wir mit $w(P)$ die zu $\mathfrak{G}$ und den stetigen Randwerten $f(p)$ gehörige Lösung im erweiterten Sinne von $\Delta_2 w = 0$, setzen zur Abkürzung $aw + b = h$ und machen für $u(P)$ den Ansatz $u = v + w$, der für $v(P)$ die Differentialgleichung

$$\Delta_2 v + av + h = 0 \tag{1}$$

mit den Randwerten Null ergibt. Setzen wir noch

$$H(P) = \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{\mathfrak{G}} G(P, Q)\, h(Q)\, d\tau_Q, \tag{2}$$

wo $G(P, Q)$ die zum Gebiet $\mathfrak{G}$ gehörige Greensche Funktion im erweiterten Sinne bezüglich der Differentialgleichung $\Delta_2 w = 0$ ist, so definieren wir allgemein $v(P)$ durch die Integralgleichung

$$v(P) = \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{\mathfrak{G}} G(P, Q)\, a(Q)\, v(Q)\, d\tau_Q + H(P) \tag{3}$$

bzw., falls $a(P) \equiv 0$, durch

$$v(P) = H(P). \tag{4}$$

Auf die Integralgleichung (3) läßt sich die übliche Theorie anwenden; insbesondere folgt aus der bekannten Alternative, daß entweder das zu den Randwerten Null gehörige Eigenwertproblem

$$\Delta_2 v + \lambda a(P) v = 0 \tag{5}$$

mit dem Eigenwert $\lambda = 1$ oder aber die Differentialgleichung

$$\Delta_2 u + a(P) u + b(P) = 0 \tag{6}$$

mit beliebigen Randwerten und beliebiger Funktion $b(P)$ eine Lösung im erweiterten Sinne besitzt. Ferner folgt die Existenz von abzählbar vielen, sich im Endlichen nicht häufenden Eigenwerten mit je endlich vielen Eigenfunktionen im erweiterten Sinne. Die Frage nach der Annahme der Randwerte für die Lösung von (6). und für die Eigenfunktionen läßt sich sehr einfach erledigen. Wir behaupten:

Die durch das Konvergenzverhalten der in § 5 *eingeführten Reihe* $S(p)$ *bestimmte Einteilung eines beliebigen beschränkten Gebietes in drei Klassen besitzt auch für die Lösungen im erweiterten Sinne der Randwertaufgabe der Differentialgleichung* (6) *wie auch für die Eigenfunktionen von* (5) *die in der Einleitung ausgesprochene Bedeutung.*

Wendet man nämlich die Ergebnisse von § 4 und § 5 auf $w(P)$ und $H(P)$, auf letzteres ferner die Überlegungen von § 2 an, so erkennt man zunächst, daß die fragliche Klasseneinteilung für die Funktionen $w(P)$ und $H(P)$ gültig ist. Also wegen $u(P) = v(P) + w(P)$ und (4) auch für $u(P)$, falls $a(P) = 0$. Sie bleibt aber auch bei nicht identisch verschwindenden $a(P)$ gültig, wie man ohne Schwierigkeit erkennt, wenn man die für die Greensche Funktion im erweiterten Sinne gefundenen Eigenschaften auf den Integralausdruck auf der rechten Seite von (3) anwendet und beachtet, daß $\mathfrak{G}$ eine Nullmenge ist.

Aus dem universellen Charakter der Klasseneinteilung folgt insbesondere, daß die von F. Vasilesco[3]) für die speziellen Potentialfunktionen hergeleiteten Sätze über die Verteilung der regulären und singulären Randpunkte auch für die allgemeine Differentialgleichung gelten.

Lebenslauf.

Am 10. Februar 1906 wurde ich, Werner Püschel, als Sohn des Studiendirektors Bruno Püschel in Bernburg a. d. Saale geboren, bin evangelischer Konfession und besitze die anhaltische Staatsangehörigkeit. Ostern 1924 legte ich die Reifeprüfung am Ludwigsgymnasium in Köthen ab und wandte mich dem Studium der Mathematik und Physik zu. Sommersemester 1924 bis Wintersemester 1925/26 studierte ich in München, danach in Göttingen, wo ich im Sommer 1929 das Staatsexamen ablegte.

Während meines Studiums nahm ich hauptsächlich an Vorlesungen und Übungen der folgenden Professoren und Dozenten teil, und zwar in München: Carathéodory, Hartogs, Perron, Tietze; Wien, Willstätter; Becher, Kerschensteiner; und in Göttingen: Bernays, H. Bohr, Courant, Grandjot, Herglotz, Hilbert, Landau, Lewy, Ostrowski, v. d. Waerden, Walther; Born, Franck, Hund, Pohl; Ach, Geiger, Misch, Nohl.

Ihnen allen bin ich zu Dank verpflichtet; besonders Herrn Professor Dr. R. Courant, dem ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für manchen Rat bei ihrer Durchführung zu danken habe.