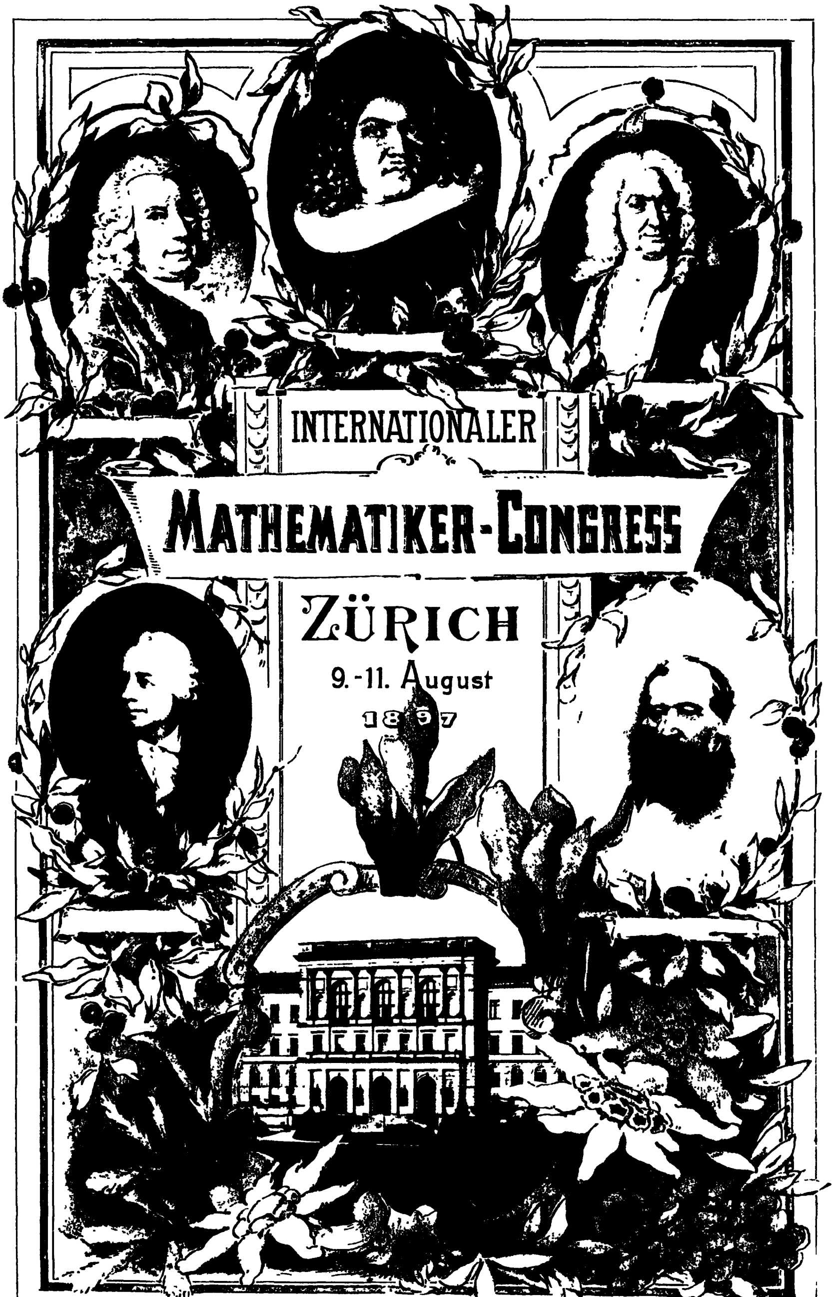

INTERNATIONALER
MATHEMATIKER-CONGRESS
ZÜRICH
9.-11. August
1897

Jakob Bernoulli

Johann Bernoulli

Daniel Bernoulli

Leonhard Euler

Jakob Steiner

VERHANDLUNGEN

DES ERSTEN INTERNATIONALEN

MATHEMATIKER-KONGRESSES

IN ZÜRICH VOM 9. BIS 11. AUGUST 1897.

HERAUSGEGEBEN

VON

DR. FERDINAND RUDIO
PROFESSOR AM EIDGENÖSSISCHEN POLYTECHNIKUM.

MIT EINEM FARBIGEN TITELBILD UND SECHS IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1898.

Vorwort.

Das dem Zürcher Kongresse zu Grunde gelegte Reglement übertrug in Artikel 7 die Veröffentlichung der Verhandlungen einem Komite, bestehend aus dem Präsidenten und den beiden Generalsekretären des Kongresses. Im Auftrage dieses Komites habe ich die Redaktion der Kongreſs-Verhandlungen übernommen und in seinem Namen übergebe ich dieselben hiermit dem mathematischen Publikum.

Das Werk zerfällt in zwei Teile. Der erste berichtet über die Vorgeschichte und den Verlauf des Kongresses auf Grund der geführten Protokolle. Daran schlieſst sich die Liste der dem Kongresse überreichten Schriften und das Verzeichnis der Teilnehmer mit ihren genauen Adressen. Dem letzteren wurde besondere Aufmerksamkeit gewidmet, in der Erwartung, daſs es vielleicht den Anfang zu einem später zu veröffentlichenden internationalen Mathematiker-Adreſsbuche bilden werde. Für die Vervollständigung des Verzeichnisses bin ich mehreren Fachgenossen zu Dank verpflichtet.

Der zweite Teil enthält in 34 Abhandlungen die wissenschaftlichen Vorträge des Kongresses, denen, soweit möglich, auch diejenigen Arbeiten zugezählt wurden, welche zwar angekündigt, aber aus Mangel an Zeit oder anderen Gründen nicht zur Mitteilung gelangt waren. Die Vorträge sind, die einen vollständig die andern im Auszuge, so abgedruckt, wie die Autoren sie dem Redaktionskomite eingereicht haben.

Artikel 7 des oben erwähnten Reglementes hatte ursprünglich eine deutsche und eine französische Ausgabe der Verhandlungen vorgesehen. Da aber in demselben Artikel auch festgesetzt war, daſs die Vorträge in derjenigen Sprache zum Abdrucke gelangen sollten, in welcher sie gehalten worden waren, so wären beide Ausgaben in ihrem weitaus gröſsten Teile völlig identisch ausgefallen. Es war daher, um der geforderten Zweisprachigkeit zu genügen, vollständig ausreichend, wenn in dem ersten Teile alle Mitteilungen von besonderem Interesse deutsch und französisch wiedergegeben wurden.

Zum Schlusse bleibt mir noch übrig, dankbar der Unterstützung zu gedenken, welche verschiedene Fachgenossen, insbesondere die Herren Franel, Geiser und Hurwitz, mir bei der Herausgabe des vorliegenden Werkes haben zu Teil werden lassen. Auch der Verlagsbuchhandlung spreche ich für ihr jederzeit bereitwilliges Eingehen auf meine Wünsche an dieser Stelle meinen Dank aus.

Zürich, im Juni 1898.

Ferdinand Rudio.

Inhaltsverzeichnis.

Erster Teil.

Vorgeschichte und Verlauf des Kongresses.

A. Vorgeschichte des Kongresses.

B. Verlauf des Kongresses.

Sonntag, den 8. August:

Montag, den 9. August:

Dienstag, den 10. August:

Mittwoch, den 11. August:

Zweiter Teil.

Wissenschaftliche Vorträge.

A. Vorträge der ersten Hauptversammlung.

B. Vorträge der Sektionssitzungen.

1. Sektion: Arithmetik und Algebra.

2. Sektion: Analysis und Funktionentheorie.

3. Sektion: Geometrie.

4. Sektion: Mechanik und mathematische Physik.

5. Sektion: Geschichte und Bibliographie.

C. Vorträge der zweiten Hauptversammlung.

Erster Teil.

Vorgeschichte und Verlauf des Kongresses.

A. Vorgeschichte des Kongresses.

Nachdem der Plan eines internationalen Mathematiker-Kongresses vor mehreren Jahren angeregt und seitdem von den Fachgenossen der verschiedensten Nationen eifrig besprochen worden war, wurde zu wiederholten Malen an die Zürcher Mathematiker die Anfrage gerichtet, ob sie nicht bereit seien, einen ersten Versuch zu unternehmen und eine internationale Mathematiker-Zusammenkunft zu veranstalten.

Da der Vorschlag in der Schweiz wie im Auslande allseitige sympathische Zustimmung fand, so übernahm es Prof. C. F. Geiser, durch ein Cirkular vom 16. Juli 1896 die Mathematiker Zürichs auf Dienstag, den 21. Juli, zu einer vorläufigen Besprechung der Angelegenheit einzuladen.

Die Versammlung war sehr zahlreich besucht und alle Anwesenden bekundeten das lebhafteste Interesse an dem Projekte. Nachdem Prof. Geiser in einem ausführlichen Referate auseinandergesetzt hatte, dafs die Mathematiker des Auslandes es gerne sehen würden, wenn die Zürcher die Initiative ergriffen, nachdem er sorgfältig das Für und das Wider eines solchen Unternehmens abgewogen und auf die grofse Bedeutung desselben hingewiesen hatte, beschlofs die Versammlung einstimmig, dem von den Fachgenossen geäufserten Wunsche Folge zu geben und für das Jahr 1897 die Einberufung eines internationalen Mathematiker-Kongresses zu übernehmen. Zugleich wurde ein Komite, bestehend aus den Professoren C. F. Geiser, F. Rudio, A. Hurwitz, J. Franel, F. H. Weber und den Assistenten J. Rebstein und G. Dumas gewählt und mit den erforderlichen Vorbereitungen beauftragt. Der zuerst Gewählte, Prof. Geiser, war damit zugleich als der Präsident des Organisationskomites bezeichnet.

Während der Herbstferien setzte sich nun das Komite mit denjenigen auswärtigen Mathematikern, die sich für das Unternehmen besonders interessierten, in mündliche und schriftliche Korrespondenz, um

1*

ihre Ansichten und Wünsche in Bezug auf die Zeit, die Dauer und die Organisation des zu veranstaltenden Kongresses entgegen zu nehmen. Insbesondere hatte Prof. Rudio bei einem Besuche der Naturforscherversammlung in Frankfurt Gelegenheit, mit den Mitgliedern der deutschen Mathematiker-Vereinigung in Verbindung zu treten und sich mit ihnen über eine Reihe von Fragen persönlich zu besprechen.

Nach solchen Vorbereitungen trat das Komite am 12. November 1896 zu einer ersten Sitzung zusammen. In dieser konnten bereits einige wichtige prinzipielle Beschlüsse gefaſst werden. In Übereinstimmung mit der Mehrheit der dem Komite unterbreiteten Wünsche wurde festgesetzt, daſs der Kongreſs am 9., 10. und 11. August 1897 stattfinden solle. Nach dem Muster der groſsen wissenschaftlichen Wanderversammlungen, z. B. der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft, sollten neben Hauptsitzungen auch Sektionssitzungen stattfinden, in den ersteren aber nur Vorträge von allgemeinerer Bedeutung gehalten werden, zu welchen, namentlich auch mit Rücksicht auf den internationalen Charakter des Kongresses, spezielle Einladungen zu ergehen hätten. Die Beschaffung der erforderlichen Geldmittel wurde als eine interne Angelegenheit bezeichnet. Ferner wurde beschlossen, die Einladungen zu dem Kongresse nicht an die verschiedenen mathematischen Gesellschaften, sondern an die Fachgenossen persönlich zu richten und zu diesem Zwecke das Zürcher Komite durch Adjunktion von Mathematikern anderer Länder zu einem internationalen Komite zu erweitern.

In der folgenden Sitzung vom 8. Dezember 1896, zu welcher wieder alle Mathematiker Zürichs eingeladen waren, verlas zunächst Prof. Rudio das von ihm im Auftrage des Komites verfaſste Einladungscirkular. Die Versammlung genehmigte dasselbe und stimmte auch den übrigen Beschlüssen des Komites zu. Darauf teilte Prof. Geiser die Namen derjenigen auswärtigen Mathematiker mit, welche sich bereit erklärt hatten, dem Zürcher Komite beizutreten und mit diesem die Einladungen zu übernehmen.

Das so gebildete internationale Komite versandte nun im Januar 1897 das erwähnte Einladungscirkular, welches folgendermaſsen lautete·

Internationaler Mathematiker-Kongrefs in Zürich 1897.

Zürich, Januar 1897.

An Herrn ....

Hochgeehrter Herr!

Wie Ihnen bekannt sein wird, ist die Frage eines internationalen Mathematiker-Kongresses seit längerer Zeit Gegenstand lebhafter Verhandlungen seitens der Fachgenossen. Im Hinblick auf die Erfolge, welche durch internationale Verständigung auf anderen Wissensgebieten erzielt worden sind, wurde die Wünschbarkeit einer internationalen Vereinigung auch der Mathematiker von allen, die sich mit der Frage beschäftigten, einmütig betont. Nachdem auf Grund mannigfacher mündlicher und schriftlicher Korrespondenzen das Projekt eine festere Gestalt anzunehmen begonnen hatte und auch die Ortsfrage wiederholt in Erwägung gezogen worden war, wurde es allgemein als zweckmäfsig bezeichnet, dafs der erste Versuch von einem Lande ausgehen möchte, das durch seine Lage, seine Verhältnisse und durch seine Tradition zur Anbahnung internationaler Beziehungen besonders geeignet sei. So richteten sich denn bald die Blicke nach der Schweiz und insbesondere nach Zürich.

Obwohl sich die Zürcher Mathematiker keineswegs die Schwierigkeit des Unternehmens verhehlten, glaubten sie doch, im Interesse der Sache, die Anregungen, die ihnen von den verschiedensten Seiten her zugegangen waren, nicht von der Hand weisen zu dürfen. Sie erklärten sich daher gerne bereit, die erforderlichen Vorbereitungen zur Einberufung eines internationalen Mathematiker-Kongresses zu übernehmen und, soweit es an ihnen liege, das Unternehmen nach Kräften zu fördern. Mathematiker anderer Nationen schlossen sich ihnen an, und so trat das unterzeichnete internationale Komite zusammen, mit der Aufgabe, **für das Jahr 1897 in Zürich eine Zusammenkunft der Mathematiker aller Länder der Erde zu veranstalten.**

Der Kongrefs, an welchem teilzunehmen Sie hiermit, hochgeehrter Herr, von dem Komite ergebenst eingeladen werden, soll in Zürich am 9., 10. und 11. August 1897 in den Räumen des eidgenössischen

Polytechnikums stattfinden. Das Komite wird nicht verfehlen, Ihnen rechtzeitig das genauere Arbeitsprogramm vorzulegen und sich alsdann Ihre Zusage zur Beteiligung am Kongresse zu erbitten. Immerhin darf schon jetzt darauf hingewiesen werden, dafs naturgemäfs die wissenschaftlichen und die geschäftlichen Verhandlungen sich vorzugsweise um solche Fragen gruppieren werden, die ein allgemeineres Interesse besitzen und denen eine prinzipielle Bedeutung innewohnt.

Die Bedeutung wissenschaftlicher Kongresse beruht aber nicht minder auch auf der Pflege persönlicher Beziehungen. Das Lokalkomite wird es sich angelegen sein lassen, auch dieser Seite des zu veranstaltenden Kongresses seine Aufmerksamkeit zuzuwenden und durch Entwerfung eines bescheidenen Festprogrammes Rechnung zu tragen.

Mögen die Erwartungen, welche sich an diese erste internationale Mathematiker-Vereinigung knüpfen, in Erfüllung gehen! Möge eine zahlreiche Beteiligung die wissenschaftlichen und persönlichen Beziehungen der Fachgenossen fördern im Interesse gemeinsamer Arbeit und des Fortschrittes der mathematischen Wissenschaft!

H. Bleuler, Präsident des schweizerischen Schulrates, Zürich. **H. Burkhardt**, Prof. an der Universität, Zürich. **L. Cremona**, Prof. in Rom. **G. Dumas**, Assistent am eidg. Polytechnikum, Zürich. **J. Franel**, Prof. am eidg. Polytechnikum, Zürich. **C. F. Geiser**, Prof. am eidg. Polytechnikum, Zürich. **A. Co. Greenhill**, Prof. in Woolwich. **A. Herzog**, Direktor des eidg. Polytechnikums, Zürich. **G. W. Hill**, Prof. in West-Nyack (U. S. A.). **A. Hurwitz**, Prof. am eidg. Polytechnikum, Zürich. **F. Klein**, Prof. in Göttingen. **A. Markoff**, Prof. in Petersburg. **F. Mertens**, Prof. in Wien. **H. Minkowski**, Prof. am eidg. Polytechnikum, Zürich. **G. Mittag-Leffler**, Prof. in Stockholm. **G. Oltramare**, Prof. in Genf. **H. Poincaré**, Prof. in Paris. **J. Rebstein**, Assistent am eidg. Polytechnikum, Zürich. **F. Rudio**, Prof. am eidg. Polytechnikum, Zürich. **K. VonderMühll**, Prof. in Basel. **F. H. Weber**, Prof. am eidg. Polytechnikum, Zürich.

Korrespondenzen in Angelegenheiten des Kongresses sind an Prof. Geiser, Küsnacht-Zürich, zu richten.

Das Cirkular wurde an 2000 Mathematiker und mathematische Physiker teils in deutscher, teils in französischer Sprache versandt. Die von Prof. Franel besorgte Übersetzung hatte folgenden Wortlaut:

Congrès international des mathématiciens, à Zurich, en 1897.

Zurich, Janvier 1897.

Monsieur......................................

Monsieur,

Vous n'ignorez pas que l'idée d'un congrès international des mathématiciens a été, dans ces derniers temps surtout, l'objet de nombreuses délibérations de la part des savants intéressés à sa réalisation. Il leur a paru, en raison des excellents résultats obtenus dans d'autres domaines scientifiques, par une entente internationale, qu'il y aurait de très sérieux avantages à assurer l'exécution de ce projet.

A la suite d'un échange de vues très actif on tomba d'accord sur un premier point. C'est que la Suisse, par sa situation géographique centrale, par ses traditions et son expérience des congrès internationaux paraissait toute désignée pour tenter un premier essai de réunion des mathématiciens. On voulut bien ensuite choisir Zurich comme siège du congrès.

Les mathématiciens de Zurich ne se font aucune illusion sur les difficultés qu'ils auront à surmonter. Mais, dans l'intérêt même de cette entreprise, ils ont pensé ne pouvoir décliner les ouvertures si honorables qui leur ont été faites de tous côtés. Ils se décidèrent donc à prendre toutes les mesures préparatoires pour le futur congrès et à contribuer à sa réussite dans la mesure de leurs forces. Ainsi se constitua, avec le concours de mathématiciens d'autres nations, le comité d'organisation soussigné, chargé de **réunir à Zurich, en 1897, les mathématiciens du monde entier.**

Le congrès, auquel vous êtes cordialement prié d'assister, aura lieu, à Zurich, les 9, 10 et 11 août 1897, dans les salles de l'Ecole polytechnique fédérale. Le comité ne manquera pas de vous communiquer, en temps opportun, le texte du programme arrêté en vous priant de lui envoyer votre adhésion. Mais, dès à présent, il est permis d'observer que les travaux scientifiques et les questions d'ordre administratif porteront essentiellement sur des sujets d'intérêt général ou d'importance reconnue.

Les congrès scientifiques ont aussi ce précieux avantage de favoriser et d'entretenir les relations personnelles. Le comité local ne manquera pas d'accorder toute sa sollicitude à cette partie de sa tâche et, dans ce but, il élaborera un modeste programme de fêtes et de réunions intimes.

Puissent les espérances fondées sur ce premier congrès se réaliser pleinement! Puissent de nombreux participants contribuer par leur présence à créer, entre collègues, non seulement des rapports scientifiques suivis, mais encore des relations cordiales basées sur une connaissance personnelle! Puisse enfin notre congrès servir à l'avancement et au progrès des sciences mathématiques!

H. Bleuler, Président du Conseil de l'Ecole polyt. fédérale, Zurich. **H. Burkhardt**, Prof. à l'Université de Zurich. **L. Cremona**, Prof. à Rome. **G. Dumas**, Assistant à l'Ecole polyt. fédérale, Zurich. **J. Franel**, Prof. à l'Ecole polyt. fédérale, Zurich. **C. F. Geiser**, Prof. à l'Ecole polyt. fédérale, Zurich. **A. Co. Greenhill**, Prof. à Woolwich. **A. Herzog**, Directeur de l'Ecole polyt. fédérale, Zurich. **G. W. Hill**, Prof. à West-Nyack (U. S. A.). **A. Hurwitz**, Prof. à l'Ecole polyt. fédérale, Zurich. **F. Klein**, Prof. à Gœttingue. **A. Markoff**, Prof. à Pétersbourg. **F. Mertens**, Prof. à Vienne. **H. Minkowski**, Prof. à l'Ecole polyt. fédérale, Zurich. **G. Mittag-Leffler**, Prof. à Stockholm. **G. Oltramare**, Prof. à Genève. **H. Poincaré**, Prof. à Paris. **J. Rebstein**, Assistant à l'Ecole polyt. fédérale, Zurich. **F. Rudio**, Prof. à l'Ecole polyt. fédérale, Zurich. **K. VonderMühll**, Prof. à Bâle. **F. H. Weber**, Prof. à l'Ecole polyt. fédérale, Zurich.

Adresser les correspondances concernant les affaires du congrès à M. le Prof. Geiser, Kusnacht-Zurich.

Der Versand dieser wie auch der nachfolgenden Cirkulare wurde in der Art ausgeführt, dafs in jedem der gröfseren Staaten je ein Vertreter es übernahm, eine geeignete Anzahl der in Zürich gedruckten Exemplare in seinem Lande, oder zugleich auch in den Nachbarländern, zu verteilen. Dieser Aufgabe sich zu unterziehen, hatten die Freundlichkeit die Herren:

Greenhill-Woolwich, Guccia-Palermo, Gutzmer-Halle, Hill-West-Nyack, Klein-Göttingen, Laisant-Paris, Mansion-Gent, Markoff-Petersburg, Mertens-Wien, Mittag-Leffler-Stockholm, Schoute-Groningen, Stéphanos-Athen und Teixeira-Porto.

Aufserdem sorgten die Redaktionen einer grofsen Anzahl mathematischer Journale für geeignete Verbreitung der Einladungscirkulare, indem sie dieselben teils abdruckten, teils beilegten.

In derselben allgemeinen Sitzung vom 8. Dezember 1896, in welcher der Modus der Einladungen festgesetzt worden war, wurden auch die erforderlichen Subkomites gewählt, welche dem bisherigen Komite, als Organisationskomite für die eigentlichen Kongrefsverhandlungen, zur Seite stehen und namentlich für den festlichen Teil des Kongresses besorgt sein sollten. Solcher Komites wurden vier bestellt:

Empfangskomite:	Prof. Hurwitz (Präsident), Prof. Bützberger, Assistent Dumas;
Wirtschaftskomite:	Prof. Rudio (Präsident), Prof. Franel, Prof. Kiefer;
Vergnügungskomite:	Prof. Herzog (Präsident), Prof. Minkowski, Assistent Rebstein;
Finanzkomite:	Prof. Gröbli (Präsident), Prof. Rebstein, Prof. Lacombe.

Dem Empfangskomite traten später noch Prof. Burkhardt, Prof. Hirsch und Seminarlehrer Gubler bei.

Es würde zu weit führen, die Arbeiten dieser verschiedenen Komites im einzelnen zu verfolgen. Die Resultate ihrer Beratungen sind aus dem Verlaufe des Kongresses selbst zu entnehmen. Nur auf einige wenige Punkte möge noch hingewiesen werden.

Vor allem darf hervorgehoben werden, dafs nicht nur die Stadt und der Kanton Zürich, sondern auch die schweizerische Eidgenossenschaft die Ehre zu würdigen wufsten, dafs der erste internationale Mathematiker-Kongrefs auf Schweizerboden stattfinden solle. Die Subventionen, welche das Komite den eidgenössischen, kantonalen und städtischen Behörden, aufserdem aber auch einer grofsen Anzahl von Privaten, namentlich Mitgliedern der kaufmännischen Gesellschaft, zu verdanken hatte, legen Zeugnis ab von dem hohen Interesse, welches dem Kongresse entgegengebracht wurde. Diese Subventionen setzten das Komite nicht nur in den Stand, das Unternehmen in einer ihm angemessen erscheinenden Weise durchzuführen, sie haben es ihm auch nachträglich ermöglicht, die Verhandlungen des Kongresses in derjenigen Form zu veröffentlichen, die ihm von Anfang an als Ziel vorschwebte.

Aber auch in anderer Richtung ward dem Komite Unterstützung zu teil. Im Februar 1897 hatte dasselbe an die Mitglieder des internationalen Komites, sowie an einige weitere Mathematiker ein Cirkular versandt, dessen Wortlaut (deutsch und französisch) hier folgen möge:

Zürich, Februar 1897.

Hochgeehrte Herren!

Das Lokalkomite ist mit der Ausarbeitung eines Programmes für die Verhandlungen des Kongresses beschäftigt. Für Montag, den 9., und Mittwoch, den 11. August, sind Gesamtsitzungen vorgesehen, in welchen Fragen von allgemeinerem Interesse behandelt werden sollen Vorträge speziellerer Natur würden, je nach Bedürfnis in Sektionen, am Dienstag gehalten werden.

Neben rein wissenschaftlichen Fragen soll der Kongreſs seine Aufmerksamkeit auch Angelegenheiten mehr geschäftlicher Natur zuwenden. Wir rechnen hierzu Fragen der Bibliographie, der Lexikographie, der Terminologie, die Inangriffnahme gemeinsamer wissenschaftlicher Unternehmungen (historische Arbeiten, zusammenfassende Referate, Herausgabe von Werken, Veranstaltung von Ausstellungen) u. dergl. Auch Besprechungen, die sich mit den Beziehungen der Mathematik zu anderen Wissensgebieten, zur Technik, zum öffentlichen Leben etc. beschäftigen, könnten in den Bereich der Verhandlungen aufgenommen werden.

Wir ersuchen Sie nun, uns Ihre Ansichten über die Organisation und die Traktanden des Kongresses mitteilen zu wollen und uns womöglich aus der Reihe jener geschäftlichen Fragen bestimmte Themata zu bezeichnen, über welche Sie entweder selbst zu referieren wünschen oder für welche dann andere Referenten zu bestellen wären.

Empfangen Sie zum voraus für Ihre Bemühungen unseren verbindlichsten Dank.

Mit ausgezeichneter Hochachtung

Das Lokalkomite.

Zurich, Février 1897.

Messieurs et très honorés collègues,

Le comité local s'occupe actuellement d'élaborer le programme des délibérations du futur congrès. D'après notre projet on tiendrait deux séances plénières, le lundi 9 et le mercredi 11 août, dans lesquelles on traiterait de questions présentant un intérêt général. Les sujets de nature plus spéciale seraient exposés le mardi dans des assemblées de section.

Le congrès s'occupera aussi de questions d'ordre plutôt administratif concernant la bibliographie, la terminologie, l'histoire des mathématiques, la publication de rapports ou d'œuvres complètes, l'organisation d'expositions, l'entreprise de travaux scientifiques ayant un caractère international, etc. etc. Des communications relatives aux rapports des mathématiques avec d'autres branches du savoir humain, avec les sciences appliquées, etc., trouveraient naturellement place dans ces délibérations.

Nous vous prions de bien vouloir nous faire connaître vos vues à ce sujet et, si possible, de nous désigner parmi les questions énumérées précédemment, celles que vous seriez disposé à traiter personnellement ou pour lesquelles vous pourriez nous recommander un rapporteur.

Veuillez agréer, Messieurs et très honorés collègues, avec nos remerciements anticipés, l'expression de notre très haute considération.

Le comité local.

Auf dieses Cirkular hin gingen dem Komite von verschiedenen Fachgenossen wertvolle Vorschläge zu. Auch schon vorher hatte sich dasselbe verdankenswerter Anregungen, namentlich derjenigen Mathematiker zu erfreuen gehabt, welche den Plan eines internationalen Mathematiker-Kongresses teils begründet, teils befördert hatten. Das Zürcher Komite fühlt sich in dieser Hinsicht insbesondere verpflichtet den Herren G. Eneström, A. Gutzmer, F. Klein, C. A. Laisant, A. Vassilief, H. Weber. Herr Laisant hatte sogar die grofse Freundlichkeit gehabt, einen ausführlichen, bis ins einzelne gehenden Organisationsplan zu entwerfen und dem Komite zur Verfügung zu stellen.

Ende Mai 1897 versandte das Organisationskomite ein drittes Cirkular, welches wieder, wie das erste, an die Mathematiker aller Länder gerichtet war. Es genügt, wenn dasselbe hier im Auszuge mitgeteilt wird:

Zürich, Mai 1897.

An Herrn ....

Hochgeehrter Herr!

Das Organisationskomite beehrt sich, Ihnen hiermit das Programm des vom 9. bis zum 11. August in Zürich tagenden internationalen Mathematiker-Kongresses vorzulegen und Sie zur Teilnahme an den Arbeiten der Versammlung einzuladen. Die lebhafte Zustimmung, die das geplante Unternehmen bei den Mathematikern aller Länder gefunden hat, berechtigt zu der Hoffnung, dafs sich die Fachgenossen zahlreich zur gemeinsamen Arbeit in Zürich einfinden werden.

Für die geordnete Durchführung des ganzen Planes ist es nun aber durchaus notwendig, dafs das Organisationskomite möglichst bald die zu erwartende Teilnehmerzahl abzuschätzen vermöge. Es richtet daher an Sie, hochgeehrter Herr, die dringende Bitte, **Ihre Anmeldung so zeitig als nur möglich** (jedenfalls vor dem 1. August) **durch Benutzung der beiliegenden Karte kundgeben zu wollen.** Das Empfangskomite (Präsident: Herr Prof. Dr. A. Hurwitz, Zürich I, Falkengasse 15) ist gerne bereit, den Teilnehmern zur Beschaffung von Wohnungen mit Rat und That zur Seite zu stehen. . . . .
. . . .

Indem sich das Organisationskomite der Hoffnung hingiebt, Sie bei dem Kongresse begrüfsen zu können, heifst es Sie im voraus aufs herzlichste in Zürich willkommen.

Das Organisationskomite.

Zurich, Mai 1897.

A Monsieur ....

Monsieur et très honoré confrère,

Le comité d'organisation a l'honneur de vous soumettre le programme du congrès international des mathématiciens qui siégera à Zurich du 9 au 11 août et vous invite à bien vouloir prendre part aux travaux de cette assemblée.

L'accueil empressé qu'ont marqué pour cette entreprise les mathématiciens du monde entier nous autorise à compter sur le concours d'un très grand nombre de collègues.

Pour des raisons faciles à comprendre, le comité d'organisation a le plus grand intérêt à connaître, dès à présent, le nombre approximatif des participants au congrès. Nous vous prions donc, Monsieur et cher confrère, **de bien vouloir nous envoyer votre adhésion le plus tôt possible** (avant le 1er août, si faire se peut) **en vous servant de la carte postale ci-jointe.**

Le comité de réception, présidé par M. Hurwitz, Falkengasse 15, Zurich, se met à votre entière disposition pour vous faciliter la recherche d'un logement ou pour tous autres renseignements concernant votre séjour à Zurich. . . . .

. . . .

Nous espérons que vous voudrez bien honorer le congrès de votre présence, et nous vous adressons, d'ores et déjà, nos meilleurs souhaits de bienvenue.

Le comité d'organisation.

Das dem Cirkular beigefügte Programm kann hier übergangen werden, da es nur einen provisorischen Charakter hatte und später durch ein vollständigeres ersetzt wurde.

Die Sitzungen des Organisationskomites und der demselben unterstellten Subkomites wurden begreiflicherweise um so zahlreicher, je näher der Kongreſs heranrückte.

Am Vorabend desselben, Sonntag, den 8. August, versammelte sich nachmittags 5 Uhr das internationale Komite in der Tonhalle zur Besprechung der dem Kongresse vorzulegenden Traktanden. Von dem Komite waren anwesend die Herren Geiser, als Präsident, Bleuler, Dumas, Franel, Hirsch, Klein, Mertens, Minkowski, Mittag-Leffler, Rudio und VonderMühll. Auſserdem waren auf spezielle Einladung noch erschienen die Herren Brioschi, Laisant, Vassilief und Weber.

Gegenstand der Beratung bildeten auſser dem Programme das den Kongreſsverhandlungen zu Grunde zu legende Reglement, sowie eine Anzahl von Resolutionen, die dem Kongresse zur Beschluſsfassung unterbreitet werden sollten. Die Entwürfe für das Reglement und die Resolutionen waren von Prof. Geiser ausgearbeitet worden. Nach einigen Modifikationen des ursprünglichen Entwurfes ging das folgende Reglement aus den Beratungen hervor:

Reglement

für den

vom 9. bis 11. August 1897 in Zürich tagenden

internationalen Mathematiker-Kongrefs.

Art. 1. Der Kongrefs hat den Zweck:

a) Die persönlichen Beziehungen zwischen den Mathematikern der verschiedenen Länder zu fördern;

b) in den Vorträgen der Hauptversammlungen und der Sektionssitzungen einen Überblick über den gegenwärtigen Stand der verschiedenen Gebiete mathematischer Wissenschaften und ihrer Anwendungen, sowie die Behandlung einzelner Probleme von besonderer Bedeutung zu bieten;

c) über die Aufgaben und die Organisation künftiger internationaler mathematischer Kongresse zu beraten und zu beschliefsen;

d) die Lösung von Fragen der Bibliographie, Terminologie etc., die einer internationalen Verständigung bedürfen, vorzubereiten.

Art. 2. Stimmberechtigtes Mitglied des Kongresses ist jeder Teilnehmer, der die Festkarte gelöst hat.

Art. 3. Der Kongrefs wird von einem Vorstande geleitet, der in der ersten Hauptversammlung zu wählen ist. Er wird zusammengesetzt aus:

a) einem Präsidenten;

b) zwei Generalsekretären (der deutschen und französischen Sprache angehörig), zugleich Übersetzern;

c) vier Sekretären, die zugleich als Stimmenzähler amten;

d) acht Mitgliedern.

Die Sektionen bestellen ihre Bureaux selbständig.

Art. 4. Die offiziellen Publikationen des Kongresses erfolgen in deutscher und französischer Sprache. In den Hauptversammlungen und Sektionssitzungen sind auch Voten und Vorträge in italienischer und englischer Sprache zulässig.

Art. 5. In der Hauptversammlung am 9. August werden nur diejenigen Traktanden behandelt, welche das veröffentlichte Programm enthält. Allfällige neue Verhandlungsgegenstände für die Versammlung vom 11. August sind möglichst zeitig schriftlich einzureichen. Dem Vorstande steht das Recht zu, über die Zulassung derselben zur Diskussion und Beschlufsfassung dem Kongresse Antrag zu stellen.

Art. 6. Mit Ausnahme der bestellten Referenten sind keinem Redner über die geschäftlichen Teile der Traktanden mehr als 10 Minuten gestattet.

Anträge sind dem Präsidenten schriftlich einzureichen.

Bei den Wahlen, Abstimmungen und Verhandlungen sind die gebräuchlichen parlamentarischen Vorschriften innezuhalten. Im Zweifelsfalle ist das Reglement des schweizerischen Nationalrates maſsgebend.

Art. 7. Die Verhandlungen des Kongresses werden in einer deutschen und einer französischen Ausgabe erscheinen. (Art. 4.)

Die Leitung der Publikation wird einem Komite übertragen, bestehend aus dem Präsidenten und den beiden Generalsekretären des Kongresses.

Die vom Komite zur Veröffentlichung bestimmten Vorträge werden in derjenigen Sprache gedruckt, in welcher sie gehalten worden sind.

Règlement

du

Congrès international des mathématiciens

siégeant à Zurich du 9 au 11 août 1897.

(Traduit de l'allemand.)

Art. 1. Le congrès a pour but:

a) De provoquer des relations personnelles entre les mathématiciens des différents pays.
b) De donner, dans des rapports ou des conférences, un aperçu de l'état actuel des diverses branches des mathématiques et d'offrir l'occasion de traiter certaines questions d'importance reconnue.
c) De délibérer sur les problèmes et l'organisation des congrès futurs.
d) De traiter les questions de bibliographie, de terminologie etc. au sujet desquelles une entente internationale paraît nécessaire.

Art. 2. La carte de fête confère au porteur la qualité de membre du congrès (électeur et éligible).

Art. 3. Les délibérations du congrès sont dirigées par un comité nommé dans la première séance plénière. Ce comité se compose:

a) D'un président.
b) De deux secrétaires généraux (un de langue allemande et un de langue française) ayant aussi les fonctions de traducteurs.

c) De quatre secrétaires qui sont en même temps scrutateurs.

d) De huit membres.

Les sections constituent elles-mêmes leurs bureaux.

Art. 4. Les publications officielles du congrès paraissent en langue allemande et en langue française. Dans les votes, communications ou conférences des assemblées plénières ou de sections on peut se servir, à volonté, de l'une des quatre langues allemande, anglaise, française ou italienne.

Art. 5. Dans l'assemblée générale du 9 août on ne traitera que des matières prévues à l'ordre du jour. De nouvelles communications relatives à la séance du 11 août doivent être annoncées, par écrit, le plus tôt possible. Le comité se réserve, au sujet de ces communications, le droit de présenter au congrès telle proposition qu'il jugera convenable.

Art. 6. A l'exception des rapporteurs désignés par le comité les orateurs ne pourront garder la parole pendant plus de 10 minutes sur les sujets d'ordre administratif à l'ordre du jour. Les motions doivent être remises par écrit au président.

On observera la procédure parlementaire usuelle lors des élections, des votes et des discussions. En cas de contestation c'est le règlement du conseil national suisse qui fera loi.

Art. 7. Les délibérations du congrès seront publiées en allemand et en français (voir art. 4).

Le comité chargé de la publication se compose du président et des deux secrétaires généraux. Les conférences publiées par le comité paraissent dans la langue de l'auteur.

Wie das Reglement, so wurden auch, von einer kleinen Änderung abgesehen, die Resolutionen von dem internationalen Komite genehmigt. Von einer Mitteilung dieser Resolutionen kann aber hier Umgang genommen werden, da sie unter den Traktanden des Kongresses selbst wiederkehren werden.

Auch das von dem Organisationskomite entworfene Programm wurde in jener Sitzung verlesen und gutgeheißen. Dasselbe hatte folgenden Inhalt:

Programm

des

vom 9. bis zum 11. August 1897 in Zürich tagenden

internationalen Mathematiker-Kongresses.

Sonntag, den 8. August.

Das Bureau des Empfangskomites im Bahnhofe ist während des ganzen Sonntags geöffnet. Bezug der Festkarte, der Abzeichen, des Programms etc. Informationen jeder Art. Es ist auch Sonntag abends in der Tonhalle, sowie Montag vormittags im Auditorium 10° des Polytechnikums (erster Stock) Gelegenheit geboten, die Festkarten zu beziehen.

Das genannte Auditorium ist für die ganze Dauer des Kongresses als Post- und Korrespondenzzimmer eingerichtet.

Abends 8 Uhr: Empfang und Begrüfsung der Gäste in den Übungssälen der Tonhalle (Eingang von der Rückseite). Kollation.

Montag, den 9. August.

Morgens punkt 9 Uhr:

Erste Hauptversammlung

in der Aula des eidg. Polytechnikums.

1. Eröffnung des Kongresses.
2. Wahl des Bureaus.
3. Vortrag von Herrn H. Poincaré: „Sur les rapports de l'analyse pure et de la physique mathématique".
4. Referat von Herrn F. Rudio (im Namen des vorbereitenden Komites): „Über die Aufgaben und die Organisation der internationalen mathematischen Kongresse".
5. Vortrag von Herrn A. Hurwitz: „Entwickelung der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen in neuerer Zeit".

Nachmittags 1 Uhr: Bankett in der Tonhalle.
Nachmittags 4 Uhr: Dampfschiffahrt auf dem See.
Abends 9 Uhr: Venetianische Nacht (bei der Rückkehr von der Seefahrt).

Dienstag, den 10. August.

Sektionssitzungen.

I. Sektion: Arithmetik und Algebra.
Einführender: Prof. *Minkowski.*

II. Sektion: Analysis und Funktionentheorie.
Einführender: Prof. *Hurwitz.*

III. Sektion: Geometrie.
Einführender: Prof. *Lacombe.*

IV. Sektion: Mechanik und mathematische Physik.
Einführender: Prof. *Herzog.*

V. Sektion: Geschichte und Bibliographie.
Einführender: Prof. *Rudio.*

Die Herren Vortragenden werden dringend gebeten, nicht länger als 30 Minuten zu sprechen.

Es wird am Montag beim Bankett eine Liste aufgelegt werden, in welche sich diejenigen Herren einzeichnen wollen, welche am Dienstag in der Tonhalle zu Mittag zu speisen wünschen. Preis 3 Fr. ohne Wein.

Mittwoch, den 11. August.

Morgens punkt 9 Uhr:

Zweite Hauptversammlung

in der Aula des eidg. Polytechnikums.

1. Vortrag von Herrn G. Peano: „Logica matematica“.
2. Beratung und Beschlüsse über die Aufgaben und die Organisation der internationalen mathematischen Kongresse.
3. Bestimmung von Zeit und Ort des nächsten internationalen Kongresses.
4. Vortrag von Herrn F. Klein: „Zur Frage des höheren mathematischen Unterrichtes“.

Nachmittags 1^{35} *und* 1^{40} *Uhr:* Abfahrt mit Extrazügen nach dem Ütliberg.

Nachmittags $2^1/_2$ *Uhr:* Schlufsbankett.

Rückfahrt mit den gewöhnlichen Zügen.

Der Preis der Festkarte ist 25 Fr. Dieselbe berechtigt den Inhaber, an den Verhandlungen des Kongresses als Mitglied teilzunehmen. Sie berechtigt ferner zur Teilnahme an der Kollation vom Sonntag, am Bankett (inkl. Wein), an der Dampfschiffahrt und der venetianischen Nacht vom Montag, an der Fahrt nach dem Ütliberg und dem Schlufsbankett (inkl. Wein) vom Mittwoch und endlich zum Bezug von Damenkarten zum Preise von 15 Fr.

In bezug auf die Toilette findet bei den Versammlungen und Banketten keinerlei Zwang statt.

Programme

du

Congrès international des mathématiciens

siégeant à Zurich du 9 au 11 août 1897.

Dimanche, 8 août.

Le bureau du comité de réception, à la gare, sera ouvert toute la journée. Distribution de la carte de fête, du programme, des insignes etc. Renseignements divers. On pourra aussi se procurer la carte de fête dimanche soir à la Tonhalle et lundi matin au Polytechnicum dans la salle 10ᶜ (1ᵉʳ étage) transformée pour la durée du congrès en bureau de poste.

8 h. du soir: Réception des invités à la Tonhalle (Übungssäle, Porte de derrière). Collation.

Lundi, 9 août.

9 h. précises du matin:

Première assemblée générale

dans l'Aula du Polytechnicum fédéral.

1⁰ Ouverture du congrès.

2⁰ Élection du bureau.

3⁰ Conférence de M. H. Poincaré: „Sur les rapports de l'analyse pure et de la physique mathématique“.

4⁰ Rapport de M. F. Rudio (au nom du comité préparatoire): „Sur le but et l'organisation des congrès internationaux des mathématiciens“.

5⁰ Conférence de M. A. Hurwitz: „Entwickelung der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen in neuerer Zeit“.

1 h.: Banquet à la Tonhalle.
4 h.: Promenade en bateau à vapeur.
9 h.: Fête vénitienne (au retour de la promenade).

Mardi, 10 août.

Séances de sections.

I^re^ Section: Arithmétique et algèbre.
Introducteur: M. *Minkowski.*

II^me^ Section: Analyse et théorie des fonctions.
Introducteur: M. *Hurwitz.*

III^me^ Section: Géométrie.
Introducteur: M. *Lacombe.*

IV^me^ Section: Mécanique et physique mathématique.
Introducteur: M. *Herzog.*

V^me^ Section: Histoire et bibliographie.
Introducteur: M. *Rudio.*

Chaque conférencier est instamment prié de ne pas garder la parole pendant plus d'une demi-heure.

Messieurs les participants au congrès qui désirent prendre part au dîner du mardi (à la Tonhalle, prix 3 fr. vin non-compris) sont priés de s'inscrire sur une liste qui sera mise en circulation dans la journée du lundi.

Mercredi, 11 août.

9 h. précises du matin:

Seconde assemblée générale

dans l'Aula du Polytechnicum fédéral.

1° Conférence de M. G. Peano: „Logica matematica".
2° Discussion et résolutions relatives aux congrès internationaux des mathématiciens.
3° Choix de la date et du siège du futur congrès.
4° Conférence de M. F. Klein: „Zur Frage des höheren mathematischen Unterrichtes".

1^35^ et 1^40^ h Départ pour l'Ütliberg en trains spéciaux.
2½ h Banquet final. Le retour aura lieu par les trains ordinaires.

Le prix de la carte de fête est de 25 fr. Elle confère au porteur la qualité de membre du congrès, lui donne le droit d'assister à toutes les séances, conférences, discussions et délibérations énumérées dans le programme ainsi qu'aux réjouissances suivantes: Collation à la Tonhalle, dimanche 8 août; Banquet à la Tonhalle (vin compris), 9 août; Promenade en bateau à vapeur, 9 août; Soirée vénitienne, 9 août; Course à l'Ütliberg, 11 août; Banquet à l'Ütliberg (vin compris), 11 août.

En outre elle l'autorise à se procurer, au prix de 15 fr. la carte, une ou plusieurs cartes de fête pour dames.

Il n'y a pas de tenue officielle.

Der Beginn der einzelnen Sektionssitzungen und die Themata der für dieselben angekündigten Vorträge waren in dem Programme natürlich ebenfalls mitgeteilt. Da diese Daten aber im Verlaufe des Kongresses noch mancherlei Änderung erfuhren, so kann auf ihre Wiedergabe an dieser Stelle verzichtet werden. Sie werden ihren Platz bei den eigentlichen Kongreſsverhandlungen finden.

Endlich beschloſs das internationale Komite, Mittwoch, den 11 August, vor den Abstimmungen der zweiten Hauptversammlung noch einmal zu einer Sitzung zusammen zu treten.

B. Verlauf des Kongresses.

Sonntag, den 8. August.

Dem Programme entsprechend war während des ganzen Sonntags das Empfangskomite, unter Führung von Prof. Hurwitz, am Bahnhofe damit beschäftigt, die ankommenden Mathematiker, von denen erfreulicherweise viele auch von ihren Damen begleitet waren, zu empfangen, sie mit Festkarten zu versehen und den Ankömmlingen auf Wunsch auch Wohnungen anzuweisen. Die meisten hatten allerdings ihre Wohnungen im voraus bestellt.

Aufser der mit den entsprechenden sechs Koupons versehenen Festkarte — sie dient zugleich dem vorliegenden Bande als Titelbild — erhielt jeder Teilnehmer ein in den Schweizerfarben gehaltenes Festabzeichen, sowie je ein Exemplar des Programmes, des Reglementes, der Resolutionen und des von der offiziellen Verkehrskommission herausgegebenen illustrierten Führers durch Zürich — alle diese Drucksachen je nach Wunsch in deutscher oder französischer Sprache.

Abends 8 Uhr fand in den vereinigten Übungssälen der Tonhalle der offizielle Empfang und die Begrüfsung der Gäste statt. Gleich dieser erste Abend zeigte, dafs die Anregung, die Mathematiker zu einem internationalen Stelldichein zu vereinigen, auf einen günstigen Boden gefallen war und dafs die Frequenz des Kongresses jedenfalls nicht hinter den gehegten Erwartungen zurückbleiben würde. Bei einer einfachen Kollation entwickelte sich bald jene herzliche kollegiale Geselligkeit, die den grofsen wissenschaftlichen Wanderversammlungen ein so interessantes und so sympathisches Gepräge verleiht.

Um 9 Uhr ergriff Prof. Hurwitz, als Präsident des Empfangskomites, das Wort und richtete an die Versammlung die folgende Begrüfsungsrede:

Hochverehrte auswärtige Kolleginnen und Kollegen!

Gestatten Sie, dafs ich Ihnen im Namen der Zürcher Mathematiker mit einigen wenigen Worten einen herzlichen Willkommensgrufs entbiete. Viele von Ihnen sind aus weiter Ferne hierhergeeilt, folgend dem Rufe, den wir hinausgeschickt haben in alle Länder, in denen mathematische Herzen schlagen. Hocherfreut sind wir über den kräftigen Widerhall, den unser Ruf gefunden: nahe an 200 Fachgenossen sind unserer Einladung gefolgt und haben sich hier vereinigt zu gemeinsamer ernster Arbeit und zu frohem gemütlichem Beisammensein.

Es ist ja richtig, dafs die grofsen Gedanken unserer Wissenschaft zumeist in der stillen Gelehrtenstube entstanden und ausgereift sind; keine Wissenschaft, die Philosophie etwa ausgenommen, besitzt einen so grüblerischen und einsiedlerischen Charakter wie die Mathematik. Aber dennoch lebt auch in der Brust des Mathematikers das Bedürfnis nach Mitteilung, nach Aussprache mit Fachgenossen. Und welch anregende Kraft dem persönlichen wissenschaftlichen Verkehre innewohnt, das hat gewifs jeder von uns schon an sich selbst erfahren.

Möge sich diese anregende Kraft persönlichen Verkehrs auch in diesen Tagen bewähren, wo uns in so mannigfaltiger und reicher Weise Gelegenheit zu wissenschaftlicher Aussprache geboten ist.

Möge uns daneben eine heitere, ungezwungene Geselligkeit erfreuen, verschönt durch das Bewufstsein, dafs sich hier Vertreter der verschiedensten Nationen in Friede und Freundschaft durch die idealsten Interessen verbunden fühlen.

Nochmals, verehrte Fachgenossen, rufe ich Ihnen zu:

herzlich willkommen in Zürich!

Bei anregenden Gesprächen und frohem Becherklang blieben die Festteilnehmer noch lange vereinigt. Es war Mitternacht, als die letzten die Tonhalle verliefsen.

Montag, den 9. August.

Erste Hauptversammlung.

Punkt 9 Uhr war die Aula des eidgenössischen Polytechnikums von den Mathematikern und ihren Damen bis auf den letzten Platz gefüllt.

Prof. Geiser, als Präsident des Organisationskomites, eröffnete den Kongreſs mit folgender Rede:

Hochgeehrte Anwesende!

Im Namen der aus Fachgenossen der verschiedensten Länder gebildeten Vereinigung, welche die Einladung zu einem ersten internationalen Mathematiker-Kongresse erlassen hat, heiſse ich Sie alle auf das herzlichste willkommen. Mit besonderer Freude begrüſse ich Sie im Namen der zürcherischen Kollegen, denen Ihr zahlreiches Erscheinen eine Gewähr dafür bietet, daſs Sie die Aufforderung, sich in unserer Stadt zu versammeln, freundlich und zustimmend aufgenommen haben. Wohl hegten wir, als die erste Anregung bei uns gemacht wurde, den Kongreſs zu übernehmen, mannigfache und gewichtige Bedenken. Wir sagten uns aber, daſs die Lage Zürichs im Kreuzungspunkte der groſsen Linien von Paris nach Wien und von Berlin nach Rom das Gelingen des Unternehmens wesentlich begünstigen werde. Zudem legten wir die Festtage in eine Zeit, in welcher die Schweiz ohnedies ein Hauptsammelplatz derjenigen ist, welche Ruhe und Erholung nach gethaner, Mut und Kraft zu neuer Arbeit suchen. So wird auch für Sie die Gelegenheit verlockend sein, nach den Anstrengungen gemeinschaftlicher Arbeit noch einige Tage oder Wochen in der belebenden Nähe unserer stürzenden Bäche und rauschenden Tannen, im stillen Anblicke unserer blauen Seen und grünen Alpen oder mitten unter den wilden Felsen und kalten Gletschern unserer Hochgebirgswelt zu verweilen.

Den einfachen Sitten des Landes und den immerhin noch kleinen Verhältnissen der Stadt entsprechend können wir Ihnen an äufserem Schmuck und Glanz unserer Zusammenkünfte nur wenig bieten, sodafs wir von diesem Gesichtspunkte aus kaum hätten wagen dürfen, den Reigen der internationalen Mathematiker-Kongresse zu eröffnen. Wollen Sie es uns deshalb nicht als Unbescheidenheit auslegen, wenn wir zum Ersatze dafür in der künstlerischen Ausstattung der Festkarte an den Anteil erinnern, den die Schweiz in den letzten Jahrhunderten an der Entwickelung der exakten Wissenschaften genommen hat. Indem wir Ihnen unsere grofsen Mathematiker vor Augen führen, stellen wir gleichsam unsere Versammlung unter den Schutz dieser mächtigen Geister.

Sie sehen die drei gröfsten aus der wunderbaren Familie der Bernoulli. In der Mitte Jakob, auf dessen verschlossenen und energischen Gesichtszügen noch ein ferner, verspäteter Abglanz der eisenstarrenden und pulvergeschwärzten Zeit des dreifsigjährigen Krieges zu liegen scheint. Rechts von ihm Johannes, der in dem stolzen Selbstbewufstsein eines Roi soleil der Wissenschaft sich von dem Bruder und dem Sohne abwendet. Links Daniel, dessen sanfte und sympathische Gesichtszüge alles bestätigen, was uns die Zeitgenossen von seiner Bescheidenheit und Liebenswürdigkeit überliefern. Von Jakob und Johannes ist gesagt worden, dafs sie zur Entwickelung der Differential- und Integralrechnung mehr beigetragen haben als deren Urheber. Die Geschichte der kinetischen Gastheorie, der mechanischen Wärmetheorie, des Prinzips von der Erhaltung der Energie nennt Daniel unter den gröfsten mathematischen Physikern aller Zeiten.

Es folgt Leonhard Euler, der um die Mitte des vorigen Jahrhunderts auf dem Gebiete unserer Wissenschaften eine gleiche universale Stellung einnahm, wie Voltaire auf dem Gebiete der Litteratur. Seine Bedeutung kann nicht besser illustriert werden, als durch die Thatsache, dafs im Jahre 1755 die Pariser Akademie der Wissenschaften ihn ganz aufserordentlicherweise zu einem ihrer auswärtigen Mitglieder erwählte, in einem Zeitpunkte, in welchem die durch das Statut vorgesehenen acht Plätze alle besetzt waren. „L'extrême rareté de ces sortes d'arrangements", so schrieb ihm damals der Minister d'Argenson, „est une distinction trop marquée pour ne pas Vous en faire l'observation." Vergegenwärtigen wir uns, dafs, als im Jahre 1699 zum ersten Male die acht Associés étrangers zu bezeichnen waren, neben Newton und Leibniz auch die beiden Brüder Bernoulli gewählt wurden, und fügen wir hinzu, dafs später Euler mit Daniel Bernoulli und Albrecht von Haller gleichzeitig zu diesen auswärtigen Akademikern zählte, so dürfen wir es als eine tröstliche Fügung des Geschickes ansehen, dafs in den Zeiten unaufhaltsam fortschreitenden politischen Verfalls der alten Eidgenossenschaft die wissenschaftliche Bedeutung des Schweizerlandes auf einer unvergleichlichen Höhe stand — auf einer Höhe, die seither freilich auch nicht von ferne wieder erstiegen worden ist.

Unser Jahrhundert ist durch Jakob Steiner vertreten, den Herrscher im Reiche der synthetischen Geometrie. Ich erblicke in der heutigen Versammlung Männer, die noch zu den Füfsen des Meisters safsen und es gehört auch zu meinen bedeutendsten persönlichen Erinnerungen, in den Zauberkreis des unvergefslichen Mannes getreten zu sein. Aber schon ist seine Gestalt von einem sagenhaften Schimmer umflossen, wie wenn er durch Jahrhunderte von uns getrennt wäre. Er lebt in unserem Gedächtnis als der kühne Hirtenknabe, der erfolgreich mit den Gröfsten der Wissenschaft in die Schranken tritt, und so erscheint er uns als ein würdiger Sprofs des Volkes, von dem es in Tasso's Gerusalemme liberata heifst:

E con la man che guidò rozzi armenti
Par che i regi sfidar nulla paventi.

Eine der edelsten Schöpfungen Gottfried Semper's, der Mittelbau des eidgenössischen Polytechnikums, bildet den architektonischen Abschlufs unserer Porträtreihe. Wir wollen Ihnen damit nicht nur eine Erinnerung an die Stätte bieten, in welcher Ihre wissenschaftlichen und geschäftlichen Verhandlungen stattfinden werden. Wir möchten zugleich Ihre Aufmerksamkeit auf die Bedeutung lenken, welche heute den technischen Hochschulen für die Mathematik und ihre Anwendungen zukommt. In einer Darstellung des Entwickelungsganges der Mathematik auf den deutschen Universitäten, die für die Weltausstellung in Chicago geschrieben worden ist, wird der Einflufs geschildert, den die Gründung der Pariser polytechnischen Schule auf Forschung und Lehrthätigkeit ausgeübt hat. Es wird weiter darauf hingewiesen, wie seit der Mitte unseres Jahrhunderts auch an technische Unterrichtsanstalten deutscher Zunge wissenschaftlich hervorragende Mathematiker berufen wurden. Kundgebungen dieser Art liefsen hoffen, dafs alte unbegründete Vorurteile nach und nach im Schwinden begriffen seien und dafs die volle Gleichberechtigung aller Hochschulen immer mehr anerkannt werde. Neuere Bewegungen zeigen aber, dafs in manchen Kreisen die Aufgaben des höheren technischen Unterrichts noch nicht als völlig abgeklärt und normiert erscheinen. Auf der einen Seite ertönen laute

Stimmen aus der Praxis: den mathematischen Fächern werde eine zu grofse Bedeutung eingeräumt; von der anderen Seite wird nicht minder entschieden verlangt, dafs die letzte und höchste Ausbildung der Techniker den Universitäten vorzubehalten sei.

Wir erkennen es mit voller Dankbarkeit an, dafs der Kongrefs einen Teil seiner Arbeit diesen wichtigen Fragen zuwenden will. Ein ausgezeichneter Techniker wird über den Gegenstand das Wort ergreifen, und ohne Zweifel werden wir den berufensten Theoretiker ebenfalls über diese Dinge sich aussprechen hören. Wie aber auch die Schlufsfolgerungen in Vorträgen und Diskussionen sich gestalten mögen: zustimmend, einschränkend oder ablehnend — sie werden den naturgemäfsen Weg, welchen die technischen Hochschulen zu gehen haben, nicht wesentlich beeinflussen. Für Studierende und Lehrer, für den ausübenden Techniker und den Forscher auf dem Gebiete der reinen Wissenschaft giebt es nur eine Wahl: einen dauernden Erfolg erreicht nur, wer unermüdet, mit ganzer Seele nach dem höchsten Ziele strebt.

Hochgeehrte Versammlung!

Sie werden nicht erwarten, dafs ich in meinem Eröffnungsworte mich über die Aufgaben und über den Nutzen mathematischer Kongresse weitläufiger ausspreche: das wird heute noch von anderer Seite geschehen. Erlauben Sie mir nur eine kurze Schlufsbemerkung.

Gewifs wird niemand unter uns glauben, dafs künftighin die Lösung der grofsen Probleme der Wissenschaft sich als Resultat derartiger Versammlungen ergeben werde. Die höchsten Leistungen in allen geistigen Gebieten, auch wenn sie als ganz objektive Wahrheiten erscheinen, tragen ein durchaus persönliches Gepräge, das durch fremden Eingriff nur verwischt und geschädigt wird. Wer denkt nicht bei den in stiller Einsamkeit entstandenen Schöpfungen Riemann's an die Schätze der Sage, die von unschuldigen Händen schweigend gehoben werden müssen? Und spiegelt sich nicht in den fundamentalen Arbeiten von Weierstrafs die grofsartige Einfachheit, Selbständigkeit und Geschlossenheit des Mannes wieder?

Aber ausgedehnte und reiche Gebiete bleiben noch der gemeinschaftlichen Thätigkeit zugänglich, Arbeitsfelder, die nur durch gleichzeitige Anspannung zahlreicher Kräfte zweckmäfsig und erfolgreich bebaut werden können. Und die Wirkung solcher Vereinigungen bleibt nicht auf den engen Kreis der unmittelbaren Teilnehmer beschränkt. Der edle Wetteifer in der selbstlosen Hingabe an einen idealen Zweck ermutigt auch andere zu gleicher Anstrengung.

Vor allem in unserem Lande sind die Träger des geistigen Lebens für jede Anregung empfänglich und dankbar. Jeder Tag mahnt uns daran, wie räumlich enge gezogen unsere Grenzen sind. Wenn am Morgen die Sonne in die Tiefen der nach Osten gerichteten Thäler Graubündens niedersteigt, erleuchtet sie auch schon die Schluchten des Jura, durch welche sich drängend die Rhone im Westen den genferischen Boden verläſst. Und wenn der letzte Schimmer des Tages von den Gipfeln der Berninagruppe schwindet, so erbleichen auch die Schneekuppen der Bergriesen, welche das Hochthal von Zermatt umschlieſsen. Indem wir mit achtungsvoller Teilnahme uns in Ihre Arbeiten vertiefen und in deren Ergebnisse einzudringen suchen, befreien wir uns von räumlichen und zeitlichen Schranken. Wir erwerben uns ein geistiges Bürgerrecht in einem Reiche von unendlicher Ausdehnung: es ist das Reich der Wissenschaft, von welchem in einem höheren und edleren Sinne als von demjenigen Karls des Fünften gesagt werden kann, daſs in ihm die Sonne niemals untergehe.

Prof. Geiser verlas darauf die folgenden Schreiben, welche von den eidgenössischen, kantonalen und städtischen Behörden an den Kongreſs gerichtet waren:

Bern, den 7. August 1897.

Die schweizerische Bundeskanzlei
an
das Organisationskomite des internationalen Mathematiker-Kongresses (Präsident: Herr Dr. Geiser, Professor am eidgenöss. Polytechnikum) in Zürich.

Hochgeehrte Herren,

Wir sind beauftragt, Ihnen unter bester Verdankung der an den hohen Bundesrat gerichteten Einladung mitzuteilen, daſs die Behörde, infolge der Abwesenheit von dreien ihrer Mitglieder in Urlaub sehr zusammengeschmolzen, zu ihrem Bedauern nicht in der Lage sei, sich bei Ihren Verhandlungen vertreten zu lassen.

Mit vollkommener Hochachtung

Im Namen der schweiz. Bundeskanzlei,
Der Kanzler der Eidgenossenschaft:
Ringier.

Zürich, den 7. August 1897.

Herrn Professor Dr. Geiser in Zürich.

Hochgeachteter Herr,

Ihrer freundlichen Einladung entsprechend hat der Regierungsrat die Herren Regierungsräte Bleuler und Ernst als seine Vertreter an den internationalen Mathematiker-Kongrefs abgeordnet.

Indem wir Ihnen hievon auftraggemäfs Kenntnis geben, versichern wir Sie unserer vollkommenen Hochachtung.

Die Staatskanzlei:
Stüssi.

Der
Stadtrat Zürich
an das
Organisationskomite des internationalen Mathematiker-Kongresses
Zürich.

Auf Ihre Zuschrift vom 30. Juli 1897, worin Sie den Stadtrat einladen, sich durch eine Abordnung auf dem internationalen Mathematiker-Kongrefs, welcher vom 9. bis 11. August in Zürich stattfindet, vertreten zu lassen, teilen wir Ihnen mit, dafs der Stadtrat die Herren Stadträte Grob und Hasler als seine Abgeordneten bezeichnet hat.

Zürich, den 4. August 1897.

Im Namen des Stadtrates
der Stadtpräsident:
H. Pestalozzi.
Der Substitut des Stadtschreibers:
Dr. Th. Usteri.

Nach diesen Mitteilungen legte Prof. Geiser das Reglement vor, wie es aus der Sonntagssitzung des internationalen Komites hervorgegangen war, und machte auf die Abweichungen desselben von dem in den Händen der Teilnehmer befindlichen gedruckten Entwurfe aufmerksam. Das Reglement wurde stillschweigend genehmigt und so konnte die Versammlung sofort zur Wahl des von Art. 3 vorgesehenen Vorstandes schreiten.

Mit Acclamation wurde zum **Präsidenten** des Kongresses Prof. **Geiser** gewählt.

Sodann wurden, gleichfalls mit Acclamation, gewählt:

Als Generalsekretäre: Die Herren J. Franel und F. Rudio;
„ Sekretäre: Die Herren É. Borel, J. P. Pierpont, V. Volterra und E. v. Weber;
„ Mitglieder: Die Herren N. Bougaïev, Fr. Brioschi, F. Klein, J. S. Mackay, G. Mittag-Leffler, F. Mertens, É. Picard, H. Poincaré und H. Weber.

Da Herr Poincaré durch einen Trauerfall verhindert war, am Kongresse persönlich teilzunehmen, so wurden statt der vom Reglemente vorgesehenen acht Mitglieder deren neun gewählt.

Dem Programme gemäfs hätte der Vortrag des Herrn H. Poincaré: „Sur les rapports de l'analyse pure et de la physique mathématique“ folgen sollen. Leider war, wie schon bemerkt, Herr Poincaré verhindert worden, persönlich zu erscheinen. Er hatte aber das Manuskript seines Vortrages eingesandt, und dieses wurde nun von Prof. Franel vorgelesen.

Die Versammlung beschlofs hierauf, Herrn Poincaré telegraphisch ihren Dank auszusprechen.

Der Vorsitzende erteilte jetzt Prof. Rudio das Wort zu dem folgenden Referate:

Über die Aufgaben und die Organisation internationaler mathematischer Kongresse.

Von

Ferdinand Rudio.

Hochgeehrte Versammlung!

Im Namen des vorbereitenden Komites habe ich die Ehre, einige Worte über die Aufgaben und die Organisation der internationalen Mathematiker-Kongresse an Sie zu richten. Sie werden natürlich nicht erwarten, daſs wir schon jetzt mit einem bis ins einzelne ausgearbeiteten Programme vor Sie hintreten. Handelt es sich doch heute nur darum, den Grund zu legen zu einem Werke, dessen Früchte erst die Zukunft zeitigen kann. Dieser Zukunft aber dürfen wir vertrauensvoll entgegenblicken. Dazu berechtigt uns das groſse Interesse, welches der Einberufung eines internationalen Mathematiker-Kongresses von den Fachgenossen aller Länder entgegengebracht wurde, dazu berechtigt uns insbesondere die stattliche Versammlung, die sich heute in der Aula des eidgenössischen Polytechnikums zu gemeinsamer Arbeit zusammengefunden hat.

Wollen Sie mir erlauben, hochgeehrte Anwesende, daſs ich Ihre Aufmerksamkeit zunächst auf einige organisatorische Fragen lenke. In Ihren Händen befinden sich ein von dem Komite ausgearbeitetes „Reglement“, sowie „Resolutionen“, welche Ihrer Beschluſsfassung unterbreitet werden sollen. Die in dem Reglemente befindlichen Artikel organisatorischer Natur betreffen wesentlich die Geschäftsordnung des diesjährigen Kongresses und brauchen an dieser Stelle nicht berührt zu werden. Ich wende mich daher gleich zu den Resolutionen, die ich Ihnen einzeln vorlegen will.

Resolutionen des internationalen Mathematiker-Kongresses in Zürich, 1897.

I. Internationale mathematische Kongresse sollen künftighin in Zwischenräumen von 3—5 Jahren und unter gebührender Berücksichtigung der verschiedenen Länder veranstaltet werden.

II. In der Schlufsversammlung jedes Kongresses werden Zeit und Ort des nächsten Kongresses und die Organe zur Vorbereitung und Einberufung desselben bezeichnet.

III. Sollte durch irgend welche Verhältnisse die Abhaltung eines Kongresses zur vorbestimmten Zeit am vorbestimmten Orte unmöglich sein, so ist der Vorstand des letzten Kongresses ermächtigt, eventuell die nötigen Dispositionen zur Einberufung eines neuen Kongresses zu treffen. Er wird sich zu diesem Zwecke auch mit den in der Resolution II bezeichneten Organen in Verbindung setzen.

IV. Für solche Aufgaben internationaler Natur, deren Lösung eine feste Organisation erfordert, kann jeder Kongrefs ständige Kommissionen ernennen, deren Amtsdauer bis zum nächsten Kongresse geht.

Die Kompetenzen und Verpflichtungen derartiger Kommissionen werden jeweilen bei Bestellung derselben festgesetzt.

V. Der nächste Kongrefs soll im Jahre 1900 in Paris stattfinden. Die Société mathématique de France wird mit der Vorbereitung und Organisation desselben beauftragt.

Dies sind, verehrte Anwesende, im wesentlichen die Normen, nach denen sich die nächsten internationalen Mathematiker-Kongresse gestalten sollten. Sie sind absichtlich möglichst einfach und durchsichtig gehalten und dürften für den Anfang genügen.

Welches sind nun aber die Aufgaben, deren Lösung von diesen internationalen Kongressen zu erwarten ist? Eine Skizze, allerdings nur eine Skizze derselben enthält Artikel 1 des Ihnen vorgelegten Reglementes. Es heifst dort zunächst:

„Der Kongrefs hat den Zweck, die persönlichen Beziehungen zwischen den Mathematikern der verschiedenen Länder zu fördern.“

Verehrte Anwesende! Wer einen Blick wirft auf das Programm, wer Umschau hält in diesem Saale, der wird sich des Eindruckes nicht erwehren können, dafs die internationalen Mathematiker-Kongresse auch dann schon eine Existenzberechtigung hätten, wenn sie keinen anderen

Zweck verfolgten, als die Mathematiker aller Länder der Erde einander näher zu bringen, ihnen Gelegenheit zu bieten zu gegenseitigem Gedankenaustausche, Gelegenheit aber auch, freundschaftlich mit einander zu verkehren, wie es die Verfolgung gemeinsamer Ideale mit sich bringt. Die Pflege der persönlichen Beziehungen und die dadurch bedingte direkte und indirekte Förderung der Wissenschaft wird stets einen wesentlichen Punkt in dem Programme nationaler wie internationaler wissenschaftlicher Vereinigungen bilden.

Aber wir wollen dabei nicht stehen bleiben. In Artikel 1 des Reglementes heifst es weiter:

„Der Kongrefs hat den Zweck, in den Vorträgen der Hauptversammlungen und der Sektionssitzungen einen Überblick über den gegenwärtigen Stand der verschiedenen Gebiete mathematischer Wissenschaften und ihrer Anwendungen, sowie die Behandlung einzelner Probleme von besonderer Bedeutung zu bieten."

Hochgeehrte Damen und Herren! Soll ich ausdrücklich darauf hinweisen, wie so ganz anders das gesprochene Wort wirkt gegenüber dem geschriebenen oder gedruckten, wie erst durch die Persönlichkeit des Vortragenden die Darstellung Gestalt, Farbe, Wärme, mit einem Worte Leben gewinnt? Es dürfte überflüssig sein, an dieser Stelle und vor dieser Versammlung hierbei zu verweilen.

Aber gerade die Vorträge, die für die Hauptversammlungen unserer Kongresse in Aussicht zu nehmen sind, bieten bereits Anlafs zu ganz bestimmten, wohl umschriebenen Aufgaben für internationale Bethätigung. Diese Vorträge werden naturgemäfs in den meisten Fällen übersichtliche Referate über die historische Entwickelung und den gegenwärtigen Stand einzelner Wissensgebiete darstellen. Sollte es nun nicht möglich sein, diese Referate nach bestimmten Gesichtspunkten zu gruppieren und in geeigneter Weise unter die Mathematiker der verschiedensten Nationen zur systematischen Bearbeitung zu verteilen? Wir würden damit nur auf internationalem Gebiete dem Beispiele folgen, welches seit mehreren Jahren von der deutschen Mathematiker-Vereinigung gegeben wird und welches durch die Arbeiten der Herren Brill und Noether, Franz Meyer u. a. repräsentiert ist. Wir würden dadurch in kurzer Zeit zu einer systematischen Folge von geschichtlichen Einzeldarstellungen gelangen und zugleich — ich folge hier einem Gedanken des Herrn Eneström — zu einer planmäfsigen Fortsetzung des grofsen Werkes, welches Herr Moritz Cantor mit dem Jahre 1759 abzuschliefsen im Begriffe ist, und dessen Weiterführung die Kräfte eines Einzelnen weit übersteigen dürfte.

Viribus unitis! sei unsere Losung. Mit vereinten Kräften wird es möglich sein, Aufgaben zu lösen, die wegen mangelnder Vereinigung bisher nicht einmal in Angriff genommen werden konnten. Soll ich ein Beispiel geben, so wollen Sie mir es auf Schweizerboden zu gute halten, wenn ich etwa an eine Herausgabe der Werke Leonhard Euler's denke, eine Ehrenpflicht, die von der mathematischen Welt bis jetzt nicht hat erfüllt werden können. Eine wichtige Vorbedingung für die Inangriffnahme dieser grofsen Aufgabe ist bekanntlich jetzt erfüllt, nachdem vor einem Jahre unser amerikanischer Kollege Hagen zum ersten Male ein vollständiges Verzeichnis der Werke Euler's veröffentlicht hat. Sie wissen auch aus den Mitteilungen des Herrn Hagen, dafs eine Herausgabe dieser Werke heute nicht mehr zu den Utopien zählt, ja vielleicht nur noch einer internationalen moralischen Unterstützung bedarf.

Ich habe hier natürlich nur ein Beispiel für gemeinsame litterarische Unternehmungen nennen wollen. Weitere Beispiele, wenn auch ganz anderer Natur als das genannte, liefsen sich hinzufügen unter Benutzung der mannigfachen Anregungen, die dem Komite von verschiedenen Seiten zugekommen sind. Ich erwähne rein sachlich und ohne persönlich dazu Stellung zu nehmen: die womöglich jährliche Herausgabe eines Adrefsbuches aller Mathematiker der Erde mit Angabe ihrer speziellen Fachrichtung; die Herausgabe eines biographisch-litterarischen Wörterbuches der jetzt lebenden Mathematiker mit ihren Porträts; die Herausgabe einer mathematischen Litteratur-Zeitung.

Sodann wäre an die Veranstaltung internationaler wissenschaftlicher Ausstellungen zu denken, etwa nach dem Muster der schönen Ausstellung, welche im Jahre 1893 unter der Agide des Herrn Dyck in München stattfand.

Unter den litterarischen Unternehmungen ist eine noch besonders hervorzuheben. Artikel 7 des Reglementes spricht von der Drucklegung der Kongrefsverhandlungen. Es ist nicht daran zu zweifeln, dafs diese und die entsprechenden folgenden Publikationen wesentlich dazu beitragen werden, unsere gemeinsame Arbeit zu fördern und das Gefühl der Zusammengehörigkeit unter den Mathematikern zu wecken.

Auch in bezug auf Fragen der Terminologie, sowie der internationalen Verständigung über die Wahl gewisser mathematischer Einheiten sind uns Anregungen zugegangen. Wie man sich bei internationalen Zusammenkünften über die wichtigsten physikalischen Einheiten, wie Volt, Ampère, Ohm, verständigt habe, so sei beispielsweise eine internationale Einigung über die Winkelteilung anzustreben.

Bekanntlich hat man in Frankreich und in Deutschland den Versuch gemacht, zur dezimalen Winkelteilung überzugehen, was für die Rechnung natürlich wesentliche Vorteile darbietet. Nun ist aber dadurch eine Ungleichheit entstanden, dafs die einen die alten Grade beibehalten und nur diese dezimal teilen, andere nur die Quadranten und wiederum andere die ganze Peripherie dezimal und zentesimal teilen wollen. Es wird daher als eine Aufgabe der internationalen Verständigung bezeichnet, die in den neueren Tabellen herrschende Verschiedenheit durch Festsetzung eines einheitlichen Winkelmafses zu beseitigen.

Natürlich kann es nicht die Absicht meines Referates sein, sich in Einzelheiten zu verlieren. Ich werde mich daher darauf beschränken, nur noch einen Punkt besonders zu besprechen, der allerdings gegenwärtig der weitaus wichtigste sein dürfte. Der wichtigste deshalb, weil es sich dabei um eine akut gewordene Frage handelt, die eine energische Inangriffnahme fordert. Ich meine die Frage der mathematischen Bibliographie.

Indem ich fürs erste vollständig bei Seite lasse, was auf diesem Gebiete bis jetzt gearbeitet worden ist und noch gearbeitet wird, auch absichtlich vorläufig unerwähnt lasse, welche Institute sich gegenwärtig mit diesen Arbeiten beschäftigen, will ich nur kurz das Ziel charakterisieren, welches erstrebt werden mufs.

Was bei der heutigen enormen Produktivität und der damit verbundenen litterarischen Zersplitterung für jede Wissenschaft, nicht nur für die mathematische, von der gröfsten Wichtigkeit ist, das ist eine rasch funktionierende und kontinuierlich laufende Bibliographie.

Eine solche Bibliographie hat, neben anderen Zwecken, die Aufgabe, jedem, der sich für ein beliebiges Gebiet — sagen wir Zahlentheorie — interessiert, durch genaue Titelkopieen Kenntnis zu geben von allem dem, was in der ganzen Welt, nicht etwa in den letzten Jahren, sondern in den letzten Monaten und Wochen auf diesem Gebiete veröffentlicht worden ist. Eine derartige Bibliographie einer bestimmten Wissenschaft kann nur von einem internationalen Institute, d. h. durch internationales Zusammenwirken, geliefert werden und von einem solchen mit wirklichem Erfolge auch nur dann, wenn eine allgemein anerkannte Klassifikation der betreffenden Wissenschaft existiert. Nun, verehrte Anwesende, eine solche allgemein und von allen Fachgenossen adoptierte Klassifikation besitzen wir aber auf mathematischem Gebiete leider noch nicht. Wohl haben wir eine Reihe von Klassifikationen, die alle in ihrer Art Vortreffliches leisten. Ich erinnere an die Klassifikation des Pariser bibliographischen Kongresses, der 1889 unter dem Vorsitze des Herrn Poincaré, dessen Abwesenheit wir heute so sehr bedauern, tagte, ich erinnere an die Klassifikation des von Herrn Lampe herausgegebenen Jahrbuches über die Fortschritte der Mathematik, an diejenige des universell angelegten Dewey'schen Dezimalsystems und so manche andere. Aber nur durch eine einheitliche, allgemein anerkannte Klassifikation werden wir das Ideal einer Bibliographie erreichen, welche in gleicher Weise die Bedürfnisse der Gelehrten wie der Bibliotheken der ganzen Welt einheitlich befriedigt.

Hochgeehrte Versammlung! Wenn irgendwo, so liegt hier eine wichtige und dankbare Aufgabe der internationalen Verständigung vor. Diese Aufgabe wird überdies dadurch erleichtert, daſs bereits zwei mächtige und hochangesehene Institute der Frage ihre Aufmerksamkeit zugewendet haben: das Institut international de bibliographie in Brüssel und die Royal Society in London, von welchen das erstgenannte vor kurzem seine zweite internationale Konferenz abgehalten hat. Der internationale Mathematiker-Kongreſs kann und darf den Arbeiten dieser Institute nicht müſsig und gleichgültig zusehen. Noch ist ihm die Möglichkeit gegeben, daran mitzuwirken, und ich füge hinzu, daſs diese Mitwirkung beiden Instituten nur willkommen sein wird. Aber auch wenn die internationalen Mathematiker-Kongresse selbständig vorgehen und ein eigenes bibliographisches Institut ins Leben rufen wollten, was keine groſsen Schwierigkeiten hätte, würden sie damit prinzipiell noch lange nicht in eine Rivalität mit den genannten Instituten treten. Einen Beweis hierfür liefert das hier in Zürich seit zwei Jahren blühende internationale Concilium bibliographicum, welches unter der Leitung des Herrn Field auf zoologischem Gebiete die genannten Ideale verwirklicht.

Ich kann darauf verzichten, verehrte Anwesende, bei diesem Thema länger zu verweilen oder gar in Details einzutreten, da in der Sektion für Geschichte und Bibliographie Herr Eneström einen Vortrag über die neuesten mathematisch-bibliographischen Unternehmungen halten wird. An der Sitzung werden, wie ich in letzter Stunde erfahren habe, auch Vertreter des Institut international de bibliographie und der Royal Society teilnehmen. Es ist daher anzunehmen, daſs aus dieser Sektion ein bestimmter, die mathematische Bibliographie betreffender Antrag hervorgehen wird, der Ihnen in der zweiten Hauptversammlung zu unterbreiten wäre.

Hochgeehrte Versammlung! Ich bin zu Ende mit meinem Referate. Wie ich schon bemerkt habe, kann dasselbe nach keiner Richtung hin

Anspruch auf Vollständigkeit erheben. Ich habe lediglich zeigen wollen, dafs neben dem grofsen Interesse, welches die internationalen Mathematiker-Zusammenkünfte an und für sich haben, auch noch Aufgaben existieren, welche gemeinschaftlicher Anstrengung wert sind. Solcher Aufgaben werden sich naturgemäfs im Laufe der Zeit um so mehr darbieten, je fester das Band geknüpft wird, welches uns von heute an vereinigen soll.

Möge das Werk, dessen Grundstein wir heute hier in Zürich legen, sich würdig den anderen grofsen internationalen Schöpfungen anreihen! Möge es im Verein mit diesen dazu beitragen, nicht nur die Gelehrten aller Nationen, sondern auch diese selbst zu vereinigen zu gemeinsamer Kulturarbeit!

Da von der Versammlung sofort der Wunsch ausgesprochen wurde, das Referat möchte für die zweite Hauptversammlung gedruckt, und zwar deutsch und französisch, vorgelegt werden, so soll jetzt auch hier die französische Übersetzung folgen:

Sur le but et l'organisation des congrès internationaux des mathématiciens.

Par

Ferdinand Rudio.

(Traduit de l'allemand.)

Mesdames et Messieurs!

Au nom du comité d'organisation j'ai l'honneur de vous adresser quelques mots relatifs au but et à l'organisation des congrès internationaux des mathématiciens. Vous n'attendez évidemment pas que nous vous présentions d'ores et déjà un programme arrêté dans tous ses détails. Il ne s'agit, pour le moment, que de poser les fondements d'une œuvre à venir. Nous pouvons d'ailleurs envisager cet avenir avec confiance, comme le démontrent le grand intérêt provoqué dans le monde des mathématiciens par l'annonce d'un congrès et la nombreuse assemblée réunie aujourd'hui dans l'Aula du Polytechnicum.

Permettez-moi, Mesdames et Messieurs, d'attirer tout d'abord votre attention sur certaines questions d'organisation. Vous avez entre les mains un projet de règlement et des résolutions préparés par le comité et qui seront soumis à votre approbation. Les articles du règlement relatifs à l'organisation se rapportent essentiellement à l'ordre du jour du congrès actuel, de sorte qu'il est inutile de les mentionner. Je passe donc aux résolutions que, pour plus de clarté, je rappelle ici.

Résolutions du congrès international des mathématiciens siégeant à Zurich, en 1897.

I. A l'avenir les congrès internationaux des mathématiciens se succèderont à des intervalles de 3 à 5 ans. Il sera tenu compte, dans le choix du siège, des vœux légitimes des différents pays.

II. On choisira, à la fin de chaque congrès, la date et le siège du congrès suivant, ainsi que les organes ou les associations chargés de le préparer et de l'organiser.

III. Si, par suite de circonstances imprévues, un congrès ne pouvait siéger à la date et au lieu choisis, le comité du dernier congrès aurait la faculté de prendre les dispositions nécessaires à la convocation d'un congrès nouveau. A cet effet il s'entendra avec les organes mentionnés à l'article II.

IV. Chaque congrès peut, lorsqu'il le juge utile pour l'étude de certaines questions de nature internationale, nommer des commissions permanentes dont le mandat dure d'un congrès au congrès suivant.

Les compétences et les attributions de ces commissions sont fixées lors de leur nomination.

V. Le prochain congrès siégera à Paris en 1900. La société mathématique de France est chargée de sa préparation et de son organisation.

Ce sont là, Mesdames et Messieurs, les dispositions générales qui devront être observées par les prochains congrès internationaux des mathématiciens. Elles sont à dessein simples et claires et suffiront, du moins au début.

Mais quelles sont les questions que ces congrès pourraient avoir à résoudre? On en trouve une esquisse, mais une esquisse seulement, dans l'article 1er du règlement:

«Le congrès a pour but de provoquer des relations personnelles entre les mathématiciens des différents pays.»

Il suffit, Mesdames et Messieurs, de consulter le programme ou de jeter un coup d'œil dans cette salle pour convenir que les congrès auraient déjà leur raison d'être s'ils n'avaient d'autre but que de procurer aux mathématiciens de tous les pays du monde l'occasion de s'entretenir amicalement et d'échanger leurs idées. Les relations personnelles et les progrès directs ou indirects qu'elles exercent sur l'avancement de la science, sont toujours un des buts principaux de toute réunion scientifique.

Mais il y a plus. L'article 1er dit en outre:

«Le congrès a pour but de donner, par des rapports et des conférences, un aperçu de l'état actuel des diverses branches des mathématiques et d'offrir l'occasion de traiter certaines questions d'importance reconnue.»

Mesdames et Messieurs! Ai-je besoin de vous dire combien le discours parlé diffère du discours écrit ou imprimé; combien l'exposition gagne en forme, en couleur, en chaleur, en vie, par la personnalité de l'orateur?

Or, les conférences destinées aux assemblées plénières de nos congrès offrent justement la matière de questions précises et bien délimitées. Ces conférences, dans la plupart des cas, seront des aperçus généraux sur la marche historique et sur l'état actuel de certains domaines scientifiques. Ne serait-il pas possible de grouper ces aperçus et d'en confier l'exécution aux mathématiciens des différents pays? Nous ne ferions que suivre, au point de vue international, l'exemple donné par la „Deutsche Mathematiker-Vereinigung", qui, dans ces dernières années, a publié les rapports connus de MM. Brill et Nœther, Franz Meyer, etc. On obtiendrait de la sorte, en peu de temps, une suite systématique de travaux historiques et, en outre, d'après l'idée de M. Eneström, une continuation du grand ouvrage de M. Maurice Cantor (Histoire des mathématiques jusqu'en 1759), qu'un seul homme ne saurait avoir l'ambition d'entreprendre.

Viribus unitis! Certaines questions, auxquelles, faute d'accord, on n'a pas encore songé à s'attaquer, pourraient être résolues à la suite d'une entente internationale. Pour en donner un exemple, sans sortir de la Suisse, on pourrait se proposer de publier les œuvres complètes d'Euler, devoir que le monde mathématique n'a pu remplir jusqu'à présent. Une première condition nécessaire pour commencer cette grosse entreprise est actuellement remplie depuis que notre collègue américain, M. Hagen, a publié la liste complète des œuvres d'Euler. Vous n'ignorez pas que, d'après M. Hagen, la publication de ces œuvres n'est plus une utopie; peut-être, qu'un simple appui moral des mathématiciens du monde entier suffirait pour assurer sa réalisation.

On pourrait ajouter d'autres exemples, de nature différente il est vrai, qui nous ont été suggérés de divers côtés. Je me contente de citer, sans prendre position: la publication, si possible annuelle, d'un livre d'adresses des mathématiciens du monde entier avec l'indication des branches qu'ils cultivent spécialement; la publication d'un dictionnaire biographique des mathématiciens contemporains avec leurs portraits; la publication d'un journal de bibliographie mathématique.

Ensuite on pourrait songer à organiser des expositions scientifiques internationales, sur le modèle, par exemple, de la belle exposition dirigée par M. Dyck à Munich en 1893.

Parmi les entreprises scientifiques, il en est une que nous devons mentionner spécialement. Il est question, dans l'article 7 du règlement, de la publication des délibérations du congrès. Il est hors de doute que cette publication et les suivantes contribueront dans une grande mesure à nous inciter à un travail commun et à éveiller les sentiments de solidarité chez les mathématiciens.

Il nous a été fait également certaines propositions relatives à des questions de terminologie et au choix de certaines unités mathématiques qu'il y aurait avantage à adopter après une entente internationale. Un accord au sujet de la division du cercle, par exemple, serait à désirer, accord analogue à celui des physiciens sur les unités essentielles Volt, Ampère, Ohm. Comme vous le savez, on a fait, en France et en Allemagne, l'essai d'une division du cercle en parties décimales; cela présente de sérieux avantages pour les calculs numériques. Seulement les uns conservèrent les anciens degrés qu'ils divisèrent en parties décimales, tandis que d'autres adoptèrent cette division pour la circonférence entière. Il y aurait donc lieu de faire disparaître ces différences par une convention internationale.

Pour ne pas me perdre dans les détails, je me contenterai d'attirer encore votre attention sur un seul point, le plus important de tous, peut-être. Le plus important, car il s'agit d'une question brûlante dont la solution exige une initiative énergique: la question de la bibliographie mathématique.

Laissons de côté ce qui a été fait et ce qui reste à faire dans ce domaine, ne parlons pas des institutions qui s'occupent actuellement de ce genre de travaux et contentons-nous de caractériser en quelques mots le but à poursuivre.

L'essentiel, à notre époque de production énorme où les travaux sont si disséminés, est un répertoire bibliographique fonctionnant rapidement et continuellement.

Un pareil répertoire devra, entre autres, donner le moyen de connaître par les titres, tout ce qui a paru dans un domaine donné non seulement dans les dernières années, mais aussi dans les derniers mois ou même les dernières semaines.

Le répertoire d'une science déterminée ne peut être établi que par une institution internationale. Mais il est avant tout nécessaire, si l'on veut mener à bonne fin une telle entreprise, d'avoir une classification générale de la dite science. Malheureusement, Mesdames et Messieurs, au point de vue de la science mathématique nous ne possédons pas encore de classification générale adoptée par chacun.

Nous avons un grand nombre de classifications excellentes. Telle par exemple celle qui fut élaborée sous la présidence de M. Poincaré par le congrès bibliographique de Paris 1889. Telle aussi celle qui fut adoptée par M. Lampe dans son édition des „Fortschritte der Mathematik"; nous avons aussi les classifications basées sur le système décimal de Dewey et d'autres encore.

Mais je le répète, ce n'est que par une classification présentant un caractère de grande unité et admise universellement, que nous pourrons arriver à créer un répertoire qui satisfasse tous les savants et que les bibliothèques du monde entier puissent utiliser.

Mesdames et Messieurs! Nous avons là à résoudre sur le terrain international une tâche importante et pleine d'avenir. Cette tâche sera facilitée par l'existence de deux instituts puissants et considérés qui s'en sont occupé déjà: l'Institut international de bibliographie à Bruxelles et la Société royale de Londres dont le premier a eu récemment sa seconde séance internationale. Notre congrès ne saurait être indifférent à leurs travaux. Notre collaboration est encore possible et j'ajoute qu'elle ne peut qu'être agréable à ces deux instituts. Mais à supposer que vous préfériez travailler isolément et fonder un institut bibliographique international indépendant, ce qui ne présenterait pas de grandes difficultés, il n'y aurait aucune rivalité à craindre avec les instituts précédents. Je ne citerai d'autre preuve que l'existence florissante du «Concilium bibliographicum international» créé, il y a deux ans, à Zurich, sous la direction de M. Field et qui réalise l'idéal cherché dans le domaine de la zoologie.

Je puis me dispenser de m'étendre plus longuement sur ce chapitre ou d'entrer dans des détails, puisque M. Eneström doit faire, dans la section d'histoire et de bibliographie, une conférence sur les dernières entreprises de bibliographie mathématique. Nous aurons, comme je viens de l'apprendre, l'honneur d'avoir à cette séance des représentants de l'Institut international de bibliographie et de la Société royale de Londres. Il est donc à présumer que cette section prendra l'initiative de certaines propositions relatives à la bibliographie mathématique et qui vous seront soumises dans la seconde assemblée générale.

Mesdames et Messieurs, j'ai terminé mon rapport; il n'a pas la prétention d'être complet dans aucune direction. J'ai simplement voulu démontrer l'existence de certains problèmes importants dont la solution dépend d'un accord international. Ces problèmes deviendront de plus en plus nombreux à mesure que se resserreront les liens nouveaux qui nous unissent à partir d'aujourd'hui. Puisse l'œuvre dont nous jetons les premiers fondements à Zurich prospérer à côté des grandes créations internationales déjà existantes! Puisse-t-elle contribuer à réunir en vue d'un travail commun, non seulement les savants des diverses nations, mais encore ces nations elles-mêmes!

Nach einer kurzen Pause folgte der Vortrag von Prof. **Hurwitz**: „Entwickelung der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen in neuerer Zeit“. Damit schloſs die erste Hauptversammlung.

Um 1 Uhr versammelten sich die Mathematiker mit ihren Damen, die übrigens auch den Verhandlungen der Hauptversammlung sehr zahlreich beigewohnt hatten, zum Bankett im Pavillon der Tonhalle.

Den Reigen der Toaste eröffnete Prof. **Franel** mit einem Hoch auf die Schweiz. Herr Regierungsrat **Ernst** begrüſste die Gäste im Namen der zürcherischen Behörden. Mit besonderer Sympathie wurde eine Rede **Brioschi**'s aufgenommen, der zunächst den Zürchern seinen Dank aussprach und sodann die Aufmerksamkeit der Anwesenden auf die ehrwürdige Erscheinung **Hermite**'s lenkte, der leider dem Kongresse nicht persönlich beiwohnen konnte. Mit Begeisterung stimmte die Versammlung in das Hoch auf den groſsen Mathematiker ein und beschloſs sodann auf Antrag von Herrn **Mittag-Leffler**, das folgende Sympathietelegramm an Herrn Hermite zu richten:

Monsieur Hermite
chez Madame Legrand
à Noisseville, Lorraine.

Les membres du I^er congrès international des mathématiciens prient l'illustre doyen des maîtres de l'analyse de notre époque, d'agréer l'hommage de leur admiration et de leur profond respect.

Geiser.

Mittlerweile war es 4 Uhr geworden und Zeit zur Dampfschifffahrt. Unter den Klängen der Musik, die auch bei der Tafel aufgespielt hatte, wurde die Gesellschaft auf dem Salondampfer **Helvetia** in etwas mehr als einstündiger Fahrt nach dem am entgegengesetzten Ende des Zürcher Sees gelegenen **Rapperswyl** geführt, wo sie sich in zwanglose Gruppen auflöste. Der Himmel, der anfangs etwas regnerisch gelaunt schien, hatte sich während der Fahrt vollständig aufgehellt und entschädigte am späteren Abend sogar durch ungewöhnlich schöne Beleuchtungseffekte. Nachdem sich die Gesellschaft etwa zwei Stunden lang in dem malerisch gelegenen altertümlichen Städtchen aufgehalten und namentlich den aussichtsreichen Lindenhof mit dem das polnische Nationalmuseum bergenden Schlosse besucht hatte, begann die Rückfahrt, bei der auch das Wirtschaftskomite wieder Gelegenheit fand, in Aktion zu treten und die erholungsbedürftigen Mathematiker und Mathematikerinnen mit einfachen Erfrischungen und aus dem Zürcher Staatskeller stammendem Veltheimer und Regensberger zu restaurieren.

Leider konnte der illuminierte Gondelkorso, der nach dem Programme das Dampfschiff bei seiner Rückkehr nach Zürich hatte empfangen sollen, des starken Windes wegen nicht zur Ausführung gelangen. Damit fiel auch die geplante Höhenbeleuchtung zum Teile weg. Immerhin hatten verschiedene Villenbesitzer es sich nicht nehmen lassen, durch Illumination ihrer Villen den fremden Gästen ihre Sympathie zu bezeugen. Auch andere hervorragende Gebäude, wie das Polytechnikum, das Physikgebäude, die Kirche Neumünster, strahlten in bengalischem Lichte.

Und als das Schiff um 9 Uhr langsam der Stadt sich näherte, da wurden auch von der Höhe des Ütliberges leuchtende Grüfse den Festteilnehmern zugesandt.

Dienstag, den 10. August.

Sektionssitzungen.

I. Sektion: Arithmetik und Algebra.

Die Sektion versammelte sich vormittags 8 Uhr im Auditorium 6^d des eidgenössischen Polytechnikums. Der Einführende, Prof. Minkowski, begrüſste die Anwesenden und lud zur Wahl des Bureaus ein. Es wurden gewählt:

Als Präsident:	Herr	F. Mertens,
„ Vicepräsident:	„	G. Peano,
„ Sekretär:	„	E. Amberg.

Vorträge:

1) H. Weber: „Über die Genera in algebraischen Zahlkörpern".
2) C. Reuschle: „Konstituententheorie, eine neue, prinzipielle und genetische Methode zur Invariantentheorie".
3) C. Stéphanos: „Sur les systèmes associatifs de nombres symboliques".

Nach einer einstündigen Pause, welche den Besuch anderer Sektionen ermöglichen sollte, folgte gegen 12 Uhr der Vortrag:

4) P. Gordan: „Resultante ternärer Formen".

In der Nachmittagssitzung, welche um 4 Uhr begann und in welcher Prof. Peano den Vorsitz führte, wurden die Vorträge gehalten:

5) F. Enriques: „Sur les problèmes qui se rapportent à la résolution des équations algébriques renfermant plusieurs inconnues".
6) E. Schröder: „Über Pasigraphie, ihren gegenwärtigen Stand und die pasigraphische Bewegung in Italien".

Der Vortrag war ursprünglich in englischer Sprache vorbereitet und angekündigt, wurde aber bei der numerisch geringen Beteiligung von Mathematikern englischer Zunge auf mehrfachen Wunsch in deutscher Sprache gehalten.

7) G. Rados: „Zur Theorie der adjungierten quadratischen Formen".

8) H. Tarry: a) „Généralisation du problème des reines".
b) „Procédés mécaniques pour résoudre les équations indéterminées".

9) A. Vassilief: Formules pour la détermination approximative des nombres premiers, de leur somme et de leur différence d'après le numéro de ces nombres. Note adressée au Congrès par M. J. Pervouchine et traduite par M. A. Vassilief.

Herr Vassilief schickte dieser Note des Herrn Pervouchine einige Mitteilungen über das Leben und die wissenschaftlichen Arbeiten des Autors voraus. Sie befinden sich, wie die Note selbst, im zweiten Teile der „Verhandlungen".

Die genannten Vorträge sind alle (mit Ausnahme der nicht erhältlich gewesenen Mitteilungen des Herrn Tarry) in dem wissenschaftlichen Teile der vorliegenden Verhandlungen, teils vollständig, teils im Auszuge, abgedruckt.

Drei weitere Vorträge, welche aufserdem angemeldet waren, nämlich:

Franz Meyer: „Die neuere Entwickelung der Algebra und Zahlentheorie",

L. Stickelberger: „Über eine neue Eigenschaft der Diskriminanten algebraischer Zahlkörper",

Ch. de la Vallée Poussin: „Sur la théorie des nombres premiers",

konnten aus Mangel an disponibler Zeit leider nicht mehr gehalten werden. Die genannten Autoren hatten aber die Freundlichkeit, ihre Manuskripte der Redaktion zur Verfügung zu stellen, sodafs dieselben ebenfalls in den wissenschaftlichen Teil der Verhandlungen aufgenommen werden konnten. Von der Abhandlung des Herrn Franz Meyer findet sich allerdings dort nur ein Teil, betitelt: „Über kettenbruchähnliche Algorithmen".

Endlich ist noch mitzuteilen, dafs in der Nachmittagssitzung der Vicepräsident, Herr Peano, der Sektion eine gedruckte Abhandlung des Herrn A. Capelli vorlegte, betitelt: „Saggio sulla introduzione dei numeri irrazionali col metodo delle classe contigue", welche der Autor durch Vermittlung des Herrn C. Stéphanos dem Kongresse zu überreichen die Freundlichkeit hatte. Die genannte Abhandlung ist inzwischen in dem von Herrn Capelli geleiteten „Giornale di Matematiche" erschienen.

Die Sitzung schlofs gegen 7 Uhr abends.

II. Sektion: Analysis und Funktionentheorie.

Die Sektion trat vormittags 10 Uhr im Auditorium 3[b] des Polytechnikums zusammen. Der Einführende, Prof. Hurwitz, hieſs die Anwesenden willkommen und lud zur Wahl des Bureaus ein, welches bestellt wurde, wie folgt:

Präsident:	Herr	E. Picard,
Vicepräsident:	„	Fr. Brioschi,
Sekretär:	„	C. Jaccottet.

Vorträge:

1) Fr. Brioschi: „Sur une classe d'équations du cinquième degré résolubles algébriquement et la transformation du onzième ordre des fonctions elliptiques".

Auf Wunsch von Herrn Brioschi hatte das Komite den Vortrag im Auszuge vorher drucken und unter die Zuhörer verteilen lassen.

2) É. Picard: „Sur les fonctions de plusieurs variables et en particulier les fonctions algébriques".

Nach einer kurzen Pause verlas Herr Picard einen Brief von Herrn Hadamard, der, persönlich zu erscheinen verhindert, dem Kongresse eine Mitteilung hatte zukommen lassen, betitelt:

3) J. Hadamard: „Sur certaines applications possibles de la théorie des ensembles".

An diese Mitteilung knüpften sich zwei Bemerkungen: die eine, von Herrn É. Borel herrührend, wurde von diesem sofort in der Sitzung selbst vorgebracht; die andere, von Herrn S. Pincherle stammend, wurde nachträglich schriftlich eingereicht.

4) N. Bougaïev: „Les mathématiques et la conception du monde au point de vue de la philosophie scientifique".

5) L. Autonne: „Sur les pôles des fonctions uniformes à plusieurs variables indépendantes".

Auſser diesen Vorträgen waren in dem Programme noch ein Vortrag von Herrn A. Markoff: „Sur certaines questions de maxima et minima" und ein Vortrag von Herrn Z. de Galdeano: „L'unification des concepts dans la science mathématique" angekündigt. Beide Herren waren, Herr de Galdeano durch Gesundheitsrücksichten, verhindert, nach Zürich zu kommen; der letztere hatte aber die Freundlichkeit, sein Manuskript einzusenden. Dasselbe gelangt daher ebenfalls mit den obengenannten fünf Vorträgen und den Bemerkungen der Herren Pincherle und Borel im wissenschaftlichen Teile zum Abdruck.

Die Sitzung schloſs $12\frac{1}{2}$ Uhr.

III. Sektion: Geometrie.

Die Mitglieder der Sektion versammelten sich vormittags 9 Uhr im Auditorium 8^{d} des Polytechnikums. Der Einführende, Prof. Lacombe, begrüfste die Anwesenden und lud zur Wahl des Bureaus ein. Dasselbe wurde folgendermafsen zusammengesetzt:

Präsident:	Herr	Th. Reye,
Vicepräsident:	„	C. Segre,
Sekretär:	„	G. Künzler.

Vorträge.

1) Th. Reye: „Einige neue Eigenschaften des quadratischen Strahlenkomplexes“.
2) F. Gerbaldi: „Sul gruppo semplice di 360 collineazioni piane“.
3) C. Burali-Forti: „Les postulats pour la géométrie d'Euclide et de Lobatschewsky“.

An der auf diesen Vortrag folgenden Diskussion beteiligten sich die Herren Schur und Schoenflies.

4) J. Andrade: „Statique non euclidienne“.

Herr Tarry knüpfte an diesen Vortrag einige historische Notizen. Nach demselben — es war 11 Uhr geworden — wurde die Vormittagssitzung geschlossen. Die Sektion trat nachmittags 4 Uhr in dem gleichen Auditorium unter dem Vorsitze von Herrn Segre wieder zusammen.

5) G. Fano: „Über Gruppen, insbesondere kontinuierliche Gruppen von Cremona-Transformationen der Ebene und des Raumes“.
6) H. Brunn: „Über verknotete Kurven“.

Alle diese Vorträge finden sich, teils in extenso, teils im Auszuge, im wissenschaftlichen Teile abgedruckt.

Die Nachmittagssitzung schlofs gegen 6 Uhr.

IV. Sektion: Mechanik und mathematische Physik.

Die Sektion versammelte sich vormittags 11 Uhr, dem Programme entsprechend, im Auditorium 9^{d} des Polytechnikums, siedelte dann aber sofort nach dem geräumigeren Auditorium 6^{d} über. Nachdem der Einführende, Prof. Herzog, die Fachgenossen willkommen geheifsen hatte, wurde folgendes Bureau bestellt:

Präsident: Herr G. Jung,
Vicepräsident: „ N. Joukowsky,
Sekretär: „ R. Flatt.

Vorträge:

1) A. Stodola: „Über die Beziehungen der Technik zur Mathematik“.

Nach dem Vortrage des Herrn Stodola kehrte die Sektion in das Auditorium 9^d zurück, da das Auditorium 6^d wieder von der ersten Sektion in Anspruch genommen wurde.

2) N. Joukowsky: „Ein neuer gyroskopischer Apparat“.

Herr Joukowsky entwickelte die Theorie seines Gyroskopes und wies den Apparat der Versammlung vor.

Infolge eines durch den Wechsel des Lokals hervorgerufenen Irrtums konnte Herr de Saussure seinen Vortrag: „Sur l'homogénéité des équations de la mécanique“ leider nicht halten.

Die beiden gehaltenen Vorträge sind in dem zweiten Teile der Verhandlungen abgedruckt.

Die Sitzung schlofs $12\frac{1}{2}$ Uhr.

V. Sektion: Geschichte und Bibliographie.

Die Sektion versammelte sich nachmittags 3 Uhr im Auditorium 9^b des Polytechnikums. Der Einführende, Prof. Rudio, hiefs die Fachgenossen zur gemeinsamen Arbeit willkommen und machte sodann einige Mitteilungen über Veränderungen der Tagesordnung. Darauf leitete er die Wahl des Bureaus ein, aus welcher hervorgingen:

Als Präsident: Herr M. Cantor,
„ Vicepräsident: „ C. A. Laisant,
„ Sekretär: „ P. H. Schoute.

Vorträge:

1) H. G. Zeuthen: „Isaac Barrow et la méthode inverse des tangentes“.

Nach diesem Vortrag wurde eine kleine Pause gemacht, während welcher die Sektion in das geräumigere Auditorium 25^b übersiedelte.

2) G. Eneström: „Über die neuesten mathematisch-bibliographischen Unternehmungen“.

An diesen Vortrag schlofs sich eine lebhafte Diskussion an. Herr Laisant trat, als Sekretär der Kommission des von der Société mathématique de France gegründete „Répertoire bibliographique des sciences mathématiques", für das dem „Répertoire" zu Grunde gelegte Klassifikations- und Kartensystem ein. Dieses System der Klassifikation sei auch bereits von anderen gelehrten Körperschaften, so z. B. von der mathematischen Gesellschaft von Amsterdam bei der Herausgabe der „Revue semestrielle des publications mathématiques", adoptiert worden. Der Redner verbreitete sich sodann über ein Klassifikationsprojekt des Herrn Lémeray, sowie über die Bedeutung, die Aufgaben und die Ziele des von ihm und Herrn Lemoine gegründeten „Intermédiaire des Mathématiciens". Nachdem er eine von der Direktion des „Intermédiaire" verfafste Note verlesen hatte, formulierte er seine Gedanken in die folgenden drei Anträge:

1re proposition.

Une commission permanente, intitulée

Commission préparatoire des rapports généraux,

sera nommée par le Congrès. Elle se composera de cinq membres et elle aura pour mission de préparer, pour le Congrès de 1900, dans la mesure du possible, l'exécution du paragraphe b) de l'article I du règlement, en ce qui concerne les rapports sur les progrès des diverses branches de la science mathématique dans les différents pays.

Cette Commission pourra s'adjoindre à son gré de nouveaux membres.

Elle se constituera elle-même, désignera son siège central, et se mettra en rapport avec la Société mathématique de France, chargée de la préparation du Congrès de 1900.

2me proposition.

Une

Commission permanente de bibliographie et terminologie

sera nommée par le Congrès. Elle se composera de cinq membres et elle aura pour mission de préparer pour le Congrès de 1900 un rapport général sur la bibliographie mathématique, et sur toutes les tentatives qui pourraient être faites en vue de rendre la terminologie plus rationnelle, plus simple et plus uniforme.

Cette Commission pourra s'adjoindre à son gré de nouveaux membres.

Elle se constituera elle-même, désignera son siège central et se mettra en rapport, autant que de besoin, avec la Société mathématique de France.

3^{me} proposition.

Le Congrès émet le vœu qu'une commission soit nommée en vue d'étudier les moyens de donner à l'institution des congrès internationaux un caractère tout à fait permanent, d'avoir, par exemple, des archives, une bibliothèque, un bureau de correspondance, de préparer des éditions ou des réimpressions d'œuvres importants, etc.

Le temps faisant défaut pour se livrer actuellement à un échange de vues sur un tel objet, le Congrès laisse à la Société mathématique de France le soin de désigner les membres de cette commission internationale et d'en fixer le nombre.

1. Antrag.

Der Kongreſs ernennt eine ständige Kommission mit dem Titel:

Kommission zur Vorbereitung der allgemeinen Berichte.

Dieselbe besteht aus fünf Mitgliedern und hat die Aufgabe, auf den Kongreſs vom Jahr 1900 hin die Ausführung des § b von Artikel 1 des Reglements, betreffend den Bericht über die Fortschritte in den verschiedenen Zweigen der Mathematik in den verschiedenen Ländern, nach Kräften vorzubereiten.

Diese Kommission kann sich nach Gutdünken durch Aufnahme neuer Mitglieder erweitern.

Sie konstituiert sich selbst, bezeichnet ihren Centralsitz und setzt sich in Verbindung mit der Société mathématique de France, welche die Vorbereitungen für den Kongreſs vom Jahr 1900 übernommen hat.

2. Antrag.

Der Kongreſs ernennt eine

ständige bibliographische und terminologische Kommission.

Dieselbe besteht aus fünf Mitgliedern und hat die Aufgabe, auf den Kongreſs vom Jahr 1900 hin einen allgemeinen Bericht vorzubereiten über die mathematische Bibliographie und über alle Versuche, welche angestrengt werden, um die Terminologie rationeller, einfacher und einheitlicher zu gestalten.

Diese Kommission kann sich nach Gutdünken durch Aufnahme neuer Mitglieder erweitern.

Sie konstituiert sich selbst, bezeichnet ihren Centralsitz, und setzt sich, soweit dies nötig ist, in Verbindung mit der Société mathématique de France.

3. Antrag.

Der Kongrefs spricht den Wunsch aus, es möchte eine Kommission ernannt werden, welche darüber zu beraten hätte, wie der Institution der internationalen Kongresse ein ständiger Charakter gegeben werden kann, z. B. durch Archive, Bibliotheken, korrespondierende Centralstelle, durch Herausgabe oder Drucklegung von bedeutenden Werken etc.

Da wegen Mangel an Zeit ein Austausch der Ansichten über die Ausführung eines solchen Projekts jetzt nicht möglich ist, so überläfst es der Kongrefs der Société mathématique de France, die Mitglieder dieser internationalen Kommission zu bezeichnen und ihre Zahl zu bestimmen.

Die drei Anträge waren unterzeichnet von den Herren: A. Vassilief, C. A. Laisant, G. Cantor, G. Oltramare, M. Cantor, P. H. Schoute, S. Dickstein, S. Günther, J. Cardinaal, J. H. Graf, D. Seliwanoff, J. S. Mackay.

Die Zeit war inzwischen schon sehr vorgeschritten. Trotzdem beschlofs die Versammlung nach Einwilligung des Herrn Günther, der den nächsten Vortrag zu halten gehabt hätte, sofort in die Beratung der drei Anträge einzutreten. In der nun folgenden Diskussion wies Herr Dyck auf die Lücken des französischen Systems hin und sprach den Wunsch aus, der Kongrefs möchte mit Vertrauen den Arbeiten der von der Royal Society ins Leben gerufenen internationalen Katalogkonferenz entgegensehen; Herr Brill warnte vor einer übereilten Parteinahme für ein bestimmtes System und Herr Graf lenkte die Aufmerksamkeit der Versammlung auf die schweizerische Landesbibliographie. Nach einigen vermittelnden Worten von Herrn Rudio, der erklärte, es könne nicht Aufgabe des diesjährigen Kongresses sein, sich für ein bestimmtes Klassifikationssystem zu entscheiden, wurde auf seinen Antrag beschlossen, nur den zweiten der drei Laisant'schen Anträge der Hauptversammlung zur Annahme zu empfehlen und es den Antragstellern zu überlassen, den ersten und dritten, die nicht eigentlich in den Bereich der Sektion fielen, von sich aus der Hauptversammlung vorzulegen. Ferner wurde beschlossen, die drei Anträge des Herrn Laisant durch den Druck in deutscher und französischer Sprache vervielfältigen zu lassen und sie in der zweiten Hauptversammlung unter die Mitglieder des Kongresses zu verteilen.

Herr Rudio verlas sodann die folgenden Sätze, welche von den Leitern des Institut international de bibliographie in Brüssel durch

Vermittelung des Herrn Field, des Direktors des internationalen Concilium bibliographicum in Zürich, der Sektion zugegangen waren:

1⁰ Dans l'œuvre d'ensemble qu'a entreprise l'Institut international de bibliographie il faut que les mathématiques soient représentées. Un peu plus tôt, un peu plus tard, ce sera une nécessité absolue. Mieux vaut tôt et avec l'aide du Congrès international.

2⁰ Les mathématiciens ont leur classification. Elle est très compliquée, basée sur des idées très modernes et encore peu connues. Cela a été un obstacle à la diffusion de la bibliographie mathématique. Or, il ne s'agit pas de remplacer ni de modifier cette classification, mais de la compléter par l'emploi d'une autre classification, la classification décimale, qui a sa place dans un cadre encyclopédique des sciences. Les fiches à publier porteraient les deux notations ce qui serait avantageux pour tout le monde et gênant pour personne.

3⁰ Il faudrait créer une Bibliographia mathematica de la littérature courante sur le modèle de la Bibliographia zoologica. Pour cette bibliographie courante la forme des fiches publiées par Gauthier Villars serait défectueuse en ce que plusieurs articles sont mentionnés sur la même fiche rendant impossible d'autres classements particuliers et par nom d'auteur.

4⁰ La classification décimale telle qu'elle est dans l'édition anglaise a besoin de développement. Les essais qui ont été faits permettent de conclure que toutes les divisions créées par le Congrès de Paris pourront y trouver place. La classification Dewey est autre et plus traditionnelle que la classification des mathématiciens. De bons esprits l'ont trouvée bien faite.

En résumé, nous voudrions obtenir du Congrès qu'il sera créé une Bibliographia mathematica, qu'elle portera les symboles de la classification des mathématiciens, mais qu'elle sera faite aussi en concordance avec le Répertoire Bibliographique Universel en ce qu'elle sera publiée sur fiches du format adopté et portera aussi les nombres de la classification décimale.

Auf der ursprünglichen Traktandenliste befanden sich noch vier weitere Vorträge, nämlich:

A. Markoff: „Sur l'édition des travaux de Tschebyschef",
S. Günther: „Das Problem der Erdgestalt in seinen Beziehungen zu Mathematik und Physik",
F. Rudio: Thema noch unbestimmt,
G. Loria: Thema noch unbestimmt.

Die Herren Markoff und Loria waren leider verhindert, zum Kongresse zu erscheinen; Herr Loria hatte aber sein Manuskript: „Aperçu sur le développement historique de la théorie des courbes planes" der Sektion eingesandt. Die Zeit war indessen zu sehr vorgeschritten, als daſs dasselbe, wie ursprünglich beabsichtigt war, noch hätte verlesen werden können. Die Sektion beschloſs aber ausdrücklich, es in extenso in die Verhandlungen aufzunehmen und so findet es sich denn mit den Vorträgen der Herren Zeuthen und Eneström in dem wissenschaftlichen Teile abgedruckt. Mangel an disponibler Zeit veranlaſste leider auch Herrn Günther, auf seinen Vortrag zu verzichten. Herr Rudio endlich hatte die Absicht gehabt, den vom 2. bis 4. August in Brüssel tagenden zweiten internationalen bibliographischen Kongreſs zu besuchen und über denselben zu referieren. Die Vorbereitungen zu dem Zürcher Kongreſs, die ihn gegen Erwarten auch noch in den letzten Tagen ganz in Anspruch genommen hatten, machten ihm aber die Reise nach Brüssel unmöglich, sodaſs das Referat dahin fiel. Inzwischen ist ein ausführlicher Bericht über den Verlauf und die Ergebnisse des Brüsseler Kongresses im „Bulletin de l'Institut international de bibliographie (1897, fasc. 4—6)" erschienen, und es genügt daher, diejenigen, welche sich für Bibliographie interessieren, auf diese Publikation zu verweisen.

Die Sitzung der fünften Sektion schloſs $6\frac{1}{2}$ Uhr. Nach derselben demonstrierte noch Herr Field den naturwissenschaftlichen Zettelkatalog, welcher von dem unter seiner Leitung stehenden Concilium bibliographicum in Zürich herausgegeben wird, und knüpfte daran einige Bemerkungen über das Zettelsystem. Besonders betonte er die Bedeutung der sogenannten Dezimalklassifikation für alle ähnlichen Arbeiten und empfahl wegen seiner groſsen Verbreitung das Dewey'sche System. Einige Anwesende wandten gegen das System ein, daſs die ihm zu grunde liegende Klassifikation den modernen wissenschaftlichen Erfordernissen nicht entspreche, sondern eine durchaus veraltete Einteilung darstelle. Herr Field behauptete dagegen, daſs wenigstens für die Wissenschaften, die vom Concilium bibliographicum bearbeitet werden, dieser anscheinende Mangel in Wirklichkeit ein groſser Vorzug sei, denn das vorhandene litterarische Material gliedere sich nicht nach den letzten wissenschaftlichen Begriffen, sondern gerade nach jetzt veralteten. Die Physiologie z. B. sei eine reine Wissenschaft, allein die physiologische Litteratur gehöre zur Medizin, wie auch die physiologischen Lehrämter immer noch zu den medizinischen Fakultäten gehören.

Eine Trennung wäre dann auch vom bibliographischen Standpunkte aus höchst unzweckmäſsig.

Es erübrigt noch, einige Worte über das gesellschaftliche Leben von dem zweiten Kongreſstage zu sagen. Das Komite hatte absichtlich von offiziellen festlichen Veranstaltungen für den Dienstag Umgang genommen, um den Teilnehmern eine gewisse Freiheit der Bewegung zu ermöglichen. Ein groſser Teil der Gesellschaft fand sich zum Mittagessen in der Tonhalle ein, andere folgten Privateinladungen oder richteten sich sonst nach ihrem Belieben ein. Für den Nachmittag waren die Damen bei Frau Schulratspräsident Bleuler eingeladen. Am Abend fanden sich die meisten in der Tonhalle und im Belvoirpark zusammen; Feuerwerk und Illumination, ursprünglich für den Montag projektiert, aber des Wetters wegen verschoben, bezeichneten den Schluſs des zweiten Kongreſstages.

Mittwoch, den 11. August.

Zweite Hauptversammlung.

Der Präsident, Prof. Geiser, eröffnete die Sitzung um 9 Uhr mit einigen geschäftlichen Mitteilungen. Von Herrn Stadtrat Grob, von Herrn Wunderly-v. Muralt, dem Präsidenten der kaufmännischen Gesellschaft, von Herrn Prof. Koenigs und von Herrn Prof. Cremona waren Begrüfsungs-Schreiben eingegangen; ferner Begrüfsungs-Telegramme von der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft (Präsident: Prof. Forel) und vom Circolo matematico di Palermo (von Prof. Guccia unterzeichnet), vermittelt durch Prof. Gerbaldi; endlich das folgende Telegramm von Herrn Hermite:

Professeur Geiser, Zurich, École polytechnique.

Je remercie avec émotion et du fond du cœur les membres du Congrès international des mathématiciens, j'adresse à mes chers collègues tous mes vœux pour un entier succès de leur réunion dans l'intérêt de notre science.

Hermite.

Der Präsident erteilte darauf Prof. Peano das Wort zu seinem angekündigten Vortrage: „Logica matematica."

Nach diesem Vortrage fand eine kurze Pause statt, welche der Vorstand zur Beratung der von Herrn Laisant in der Sektion für Geschichte und Bibliographie eingereichten Anträge benutzte. In dieser Vorstandssitzung, der auch die Herren Laisant und Vassilief, als Antragsteller, beiwohnten, wurde beschlossen, die drei Laisant'schen Anträge in einen einzigen zusammenzufassen und dem Kongresse die folgende Resolution, deren Redaktion Herr Picard übernommen hatte, vorzulegen:

Le bureau du Congrès de Zurich est constitué en commission permanente, en exécution de la résolution IV, pour étudier les questions qu'il jugera les plus importantes, parmi celles qui sont mentionnées au rapport du Comité préparatoire ou qui pourront lui être soumises. Il pourra s'adjoindre de nouveaux membres. Il fournira à la Société mathématique de France tous les renseignements utiles pour la préparation du Congrès de 1900.

Das Bureau des Zürcher Kongresses wird, gemäfs der vierten Resolution, als permanente Kommission bezeichnet, mit dem Auftrage, diejenigen in dem Referate des vorbereitenden Komites enthaltenen oder von anderer Seite ihm vorgelegten Fragen zu studieren, die es für besonders wichtig erachtet. Es kann sich durch Aufnahme weiterer Mitglieder verstärken. Es wird der Société mathématique de France alle für die Vorbereitung des Kongresses von 1900 dienlichen Mitteilungen zur Verfügung stellen.

Nachdem die Sitzung in der Aula wieder eröffnet war, legte der Präsident dem Kongresse die fünf in dem Referate von Prof. Rudio enthaltenen Resolutionen vor. Ihr Wortlaut ist bereits mitgeteilt worden. Jede Resolution wurde deutsch und französisch verlesen und darauf jede — die dritte nach einer kleinen, von Herrn Georg Cantor vorgeschlagenen redaktionellen Änderung — mit Acclamation angenommen.

Nach Annahme der fünften Resolution, der zufolge der zweite internationale Mathematiker-Kongrefs im Jahre 1900 in Paris stattfinden sollte, erbat sich Herr Felix Klein das Wort zu folgender Mitteilung:

„Als derzeitiger Vorsitzender der deutschen mathematischen Vereinigung wünsche ich eine doppelte Mitteilung zu machen:

zunächst, dafs wir die Einladung zum zweiten internationalen mathematischen Kongresse nach Paris für 1900 mit vielem Danke annehmen,

sodann, dafs wir grofsen Wert darauf legen und es uns zur besonderen Ehre anrechnen werden, den dritten internationalen mathematischen Kongrefs in Deutschland begrüfsen zu dürfen.

Es wäre verfrüht, hierüber jetzt schon nähere Festsetzungen treffen zu wollen; es würde dieses auch dem Art. 2 der soeben von uns gefafsten Beschlüsse widersprechen, dem zufolge jeder einzelne Kongrefs über den ihm folgenden selbständig zu beschliefsen hat. Die deutsche mathematische Vereinigung wird nicht versäumen, seiner Zeit dem Pariser Kongresse eine formelle Einladung zu unterbreiten.“

Der in diesen Worten des Herrn Klein enthaltene Antrag fand allseitige Zustimmung.

Der Präsident legte sodann der Versammlung den oben mitgeteilten Antrag des Vorstandes vor, in welchen dieser die drei Laisant'schen Anträge vereinigt hatte. Der Antrag wurde in deutscher und französischer Fassung verlesen und sodann als sechste Resolution mit Acclamation angenommen. Herr Laisant deponierte hierauf bei dem Bureau seine Anträge, in der Originalfassung, mit folgenden Worten:

„On vous a distribué le texte imprimé de trois propositions; elles ont été rédigées par MM. Vassilief, G. Cantor, Oltramare et par moi.

Nous avons, M. Vassilief et moi, eu l'honneur, d'être appelés tout à l'heure par le bureau, et nous nous sommes empressés d'adhérer cordialement à la résolution que vous venez de voter, et qui évitait toute discussion.

En conséquence, nous nous bornons à déposer officiellement entre les mains du bureau, transformé en commission permanente, le texte des propositions dont il s'agit. Ces propositions seront ainsi étudiées avec toute la maturité et tous les soins nécessaires.“

Es folgte jetzt der Vortrag von Prof. F. Klein: „Zur Frage des höheren mathematischen Unterrichtes.“

Damit war die Traktandenliste erschöpft. Das Wort erbat sich nun Prof. Brill, um an die Versammlung die folgende Ansprache zu richten:

„Die Verhandlungen des Kongresses nahen ihrem Ende, und es ist wohl an der Zeit, dem Zürcher Ausschufs, der sich um das Zustandekommen dieser so wohl gelungenen Versammlung Verdienste erworben hat, ein Wort des Dankes zu sagen.

Etwas anderes ist es, festesfrohe Liederkränze oder Schützen-Verbände zu einer Feier zu vereinigen, etwas anderes, die schwerflüssige Masse einsiedlerischer Mathematiker zur Teilnahme an einem erstmaligen internationalen Kongresse zu bewegen. Zwar durfte bei einem solchen Versuche die Schweiz wegen ihrer centralen Lage, ihrer landschaftlichen Reize am ehesten auf einen Erfolg rechnen. Und was einen anderen Vorzug angeht, so rühmt von seiner Heimat schon Daniel Bernoulli in einem Briefe an Euler — wie R. Wolf's Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz berichten —: „Ich für meinen Teil bin so zu sagen ein anderer Mensch geworden ratione der Gesundheit, seitdem ich unserer guten Schweizer Luft geniefse."

Aber zu den Vorzügen des Landes mufste sich der gastliche Sinn der Bewohner, zu der ehrwürdigen wissenschaftlichen Tradition mufsten sich einsichtige und thatkräftige Vertreter der heutigen Wissenschaft gesellen, wenn ein erster Mathematiker-Kongrefs — eine Art von Sprung ins Dunkle — so gelingen sollte, wie wir dies erlebt haben.

Möchte die pietätvolle Pflege, welche die Schweizer Mathematiker dem Andenken ihrer grofsen Vorgänger widmen, immer weitere Kreise ziehen und unserer Wissenschaft talentvolle Jünger und begeisterte Verehrer zuführen. Wenn hierzu unsere Versammlung in dieser Stadt etwas beigetragen hat, so ist das der beste Dank, den wir unseren Zürcher Kollegen für ihre opferbereite Gastfreundschaft darbringen konnten."

Nach Herrn Brill sprach auch noch Herr Laisant dem Organisationskomite seinen herzlichsten Dank aus. Er versicherte, alle Teilnehmer würden den Zürcher Kongrefs in dem besten Andenken behalten, und fügte sodann hinzu:

„J'ai le droit aujourd'hui non pas de me glorifier mais de me féliciter d'avoir été, avec mon ami M. Émile Lemoine, l'un des ouvriers les plus modestes, dès la première heure, de cette œuvre qui sera utile et féconde, à la condition de conserver le caractère franchement international qu'elle doit avoir et qu'elle a eu à Zurich.

Tous ici, quelle que soit la branche de la science mathématique que nous cultivons de préférence, quelle que soit notre nationalité, nous avons créé entre nous des liens de sympathie d'autant plus solides qu'ils ont pour raison d'être la recherche de la vérité, et que la science doit surtout en profiter.

Veuillez m'excuser de m'être fait spontanément l'interprète des mathématiciens français. Ce rôle appartenait de droit à un autre, ayant pour cela l'autorité nécessaire, à mon ami M. Picard, membre de l'Institut. Mais M. Picard doit prendre un peu plus tard, au banquet final, la parole au nom de tous ses compatriotes, et l'on ne sera pas privé du plaisir de l'entendre."

Nunmehr schloſs der Präsident, Herr Prof. Geiser, den Kongreſs mit folgenden Worten:

Hochgeehrte Versammlung!

Wir haben unsere Traktandenliste erschöpft und weitere Gegenstände zur Behandlung sind nicht angemeldet worden, es bleibt mir also nur noch übrig, im Namen des von Ihnen bestellten Komites die heutige zweite Hauptversammlung und damit den offiziellen Teil unseres Kongresses zu schlieſsen. Zwar werden einige Stunden froher Geselligkeit uns noch mannigfachen Anlaſs zu freundschaftlichem Meinungsaustausch über den Erfolg unserer Arbeit bieten. Erlauben Sie mir aber doch, jetzt schon dem Gedanken freudigen Ausdruck zu geben, der uns alle im gegenwärtigen Momente erfüllt: Die Möglichkeit, die Mathematiker der verschiedensten Länder zu interessanten und fruchtbringenden Verhandlungen, sowie zu lebendigem persönlichem Verkehr zu vereinigen, ist dargethan und damit die Zukunft der internationalen Mathematiker-Kongresse gesichert. Und wenn ich im Auftrage meiner Zürcher Kollegen Ihnen am Schlusse dieser schönen Tage ein herzliches Lebewohl zurufe, so darf ich wohl auch annehmen, ganz im Sinne der so liebenswürdigen Einladung unserer Fachgenossen aus Frankreich zu sprechen, wenn ich hinzufüge:

Auf Wiedersehen in Paris!

Von $1\frac{1}{2}$ bis 2 Uhr führten mehrere auf einander folgende Extrazüge die Mathematiker mit ihren Damen auf die Höhe des Uto, wo $2\frac{1}{2}$ Uhr das Schluſsbankett im renovierten Hotel Ütliberg begann. Den ersten Toast brachte Herr Picard aus, als gegenwärtiger Präsident der Société mathématique de France, welche gemäſs der fünften Resolution mit der Vorbereitung und Organisation des zweiten internationalen Mathematiker-Kongresses betraut worden war. Herr Picard hielt folgende Rede:

Mesdames et Messieurs,

C'est avec un grand regret que nous voyons arriver la fin de ces trois jours de fête. Nous conserverons tous le meilleur souvenir de l'aimable accueil que nous avons reçu à Zurich. On a déjà adressé de chaleureux remercîments aux organisateurs de ce Congrès; c'est du fond du cœur que nous les renouvelons au moment de notre séparation, en y associant tout particulièrement le nom de notre éminent président, le professeur Geiser.

L'assemblée générale de ce matin a fait à la Société mathématique de France l'honneur de la choisir pour préparer le Congrès de 1900. Permettez à son président de l'en remercier vivement. Je ne puis, en cette qualité, faire un meilleur vœu, que de souhaiter à la Société mathématique de réussir aussi bien que les mathématiciens de Zurich dans une tâche qui ne laisse pas que d'être délicate.

Le succès de notre première réunion est un gage de l'avenir de l'institution qui vient d'être fondée. Il témoigne de la cordialité qui s'établit vite entre des hommes désintéressés n'ayant d'autre souci que la recherche de la vérité. Ce sera aussi un des résultats de ces congrès que de voir plus d'éclectisme se répandre entre les diverses méthodes scientifiques. Nous n'avons pas tous, fort heureusement, les mêmes tendances d'esprit. Les uns, par exemple, éclaireurs de la science, préfèrent les régions inexplorées et posent des jalons pour l'avenir; d'autre aiment mieux les études que l'on peut pousser jusqu'à leur dernier terme. Les premiers font sauter les rochers là où les autres traceront plus tard la grande route. Celui-ci aimera à voir les choses sous une forme géométrique, tandis que celui-là préfèrera les formules algébriques. Nous avons aussi nos mathématiciens philosophes, et ce siècle finissant voit, comme en d'autres âges, la mathématique en grande coquetterie avec la philosophie. Cela est pour le mieux, à condition toutefois que cette philosophie soit très tolérante et qu'elle n'étouffe pas l'esprit d'invention.

Gardons nous d'être exclusifs, et ayons pour tous les travailleurs consciencieux la même sympathie. Souvenons-nous aussi que dans les mathématiques, comme dans les toilettes des dames, la mode n'est pas sans exercer une certaine influence.

Je bois, mesdames et messieurs, à la cordialité entre les mathématiciens de tous les pays et à l'union de plus en plus profonde et féconde entre les différentes tendances de l'esprit mathématique.

Nach Herrn Picard sprachen noch Herr Moritz Cantor (auf die Damen), Herr Stéphanos (auf Zürich, als das schweizerische Athen), Herr Gordan (auf Brioschi), Herr Bougaïev und Herr Tarry.

Das Bankett endete um 4 Uhr. Der weitaus gröfste Teil der Gesellschaft aber blieb bis zum späteren Abend auf der aussichtsreichen Höhe vereinigt. Das Wetter war unvergleichlich; kein Wölkchen trübte die strahlende Bläue des Himmels. Die Schneeberge hatten sich zu Ehren der Mathematiker mit ihrem schönsten Hermelin geschmückt, Säntis, Glärnisch und Tödi, die Urner, Engelberger und Berner Oberländer Alpen, vom Finsteraarhorn bis zur Diablerets, wetteiferten in dem Bestreben, den Glanz des Tages zu erhöhen. In vollen, kräftigen Akkorden sollte das Finale der dreitägigen Mathematiker-Symphonie ausklingen.

Verzeichnis der Schriften,

welche von ihren Verfassern, Herausgebern oder Verlegern in einer größeren Anzahl von Exemplaren dem Kongreß überreicht und zur freien Verfügung der Teilnehmer gestellt worden waren.

1) J. H. Graf in Bern: Verzeichnis der gedruckten mathematischen, astronomischen und physikalischen Doktor-Dissertationen der schweizerischen Hochschulen bis zum Jahre 1896.

   (Separat-Abdruck aus den „Mitteilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern, 1897.")

2) W. L. Hertslet: Spiegelungen zwischen Arithmetik und Geometrie. (Druck und Verlag von Drowitzsch u. Sohn in Berlin.)

3) Ulrico Hoepli in Mailand: Die folgende Kollektion seiner Manuali:

   a) F. Aschieri, Geometria analitica del piano,
   b) „ „ „ dello spazio,
   c) „ „ descrittiva,
   d) „ „ projettiva del piano,
   e) „ „ „ dello spazio.
   f) C. Burali-Forti, Logica matematica.
   g) E. Pascal, Calcolo infinitesimale. 3 Teile.
   h) „ Esercizi di calcolo infinitesimale.
   i) „ Determinanti.
   k) „ Funzioni ellittiche.

4) C. A. Laisant und É. Lemoine in Paris: Note betreffend die internationalen Mathematiker-Kongresse und den Intermédiaire des Mathématiciens.

5) G. Peano in Turin: Logique mathématique.

   (Formulaire de mathématiques, T. II, § 1. Turin 1897.)

6) Hermann Scheffler in Braunschweig:

   a) Die Grundfesten der Welt. Braunschweig 1896.
   b) Das Wesen der Mathematik und der Aufbau der Welterkenntnis auf mathematischer Grundlage. 2 Bde. Braunschweig 1896.
   c) Vermischte mathematische Schriften. Braunschweig 1897.

7) P. H. Schoute in Groningen: Revue semestrielle des publications mathématiques rédigée sous les auspices de la Société mathématique d'Amsterdam. Tables des matières contenues dans les cinq volumes 1893—1897 suivies d'une table générale par noms d'auteurs. (Spécimen.)

8) E. Schultz in Duisburg: Vierstellige mathematische Tabellen. Essen 1897. (Probeseiten.)

9) H. Valentiner in Kopenhagen: Remarques sur les mémoires contenus dans le premier fascicule des „Œuvres scientifiques" de L. Lorenz publiées aux frais de la fondation Carlsberg. (Extrait du Bulletin de l'Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark, Copenhague, pour l'année 1896.)

10) A. Vassilief in Kasan: Verschiedene Veröffentlichungen der physikalisch-mathematischen Societät in Kasan (Separatabdrücke), darunter Denkschriften auf Lobatschewsky, Abhandlungen von Hermite u. a.

11) Diverse Prospekte, Kataloge etc. etc.

Das Organisationskomite benutzt gerne die Gelegenheit, auch an dieser Stelle allen jenen Gebern seinen verbindlichsten Dank auszusprechen.

Die erwähnten Schriften — zu denen auch noch die durch das Komite herausgegebenen (siehe Seite 22 und 47) hinzuzuzählen sind — konnten in dem Auditorium 10^c, welches für die ganze Dauer des Kongresses als Post- und Korrespondenzzimmer eingerichtet war, bezogen werden. In diesem Zimmer standen den Kongreſsteilnehmern überdies jeder Zeit die erforderlichen Korrespondenzmaterialien, wie Briefpapier, Couverts, Briefmarken, Postkarten etc. zur freien Verfügung. Zur Besorgung von Briefen und Telegrammen war ein besonderer Postdienst eingerichtet. Das Korrespondenzzimmer wurde während der ganzen Dauer des Kongresses sehr fleiſsig benutzt.

Verzeichnis der Teilnehmer.

Ackermann-Teubner, Alfred, Verlagsbuchhändler, Leipzig, Poststrafse 3. *Deutschland.*

Frau Marie Ackermann.

Aeschlimann, Ulrich, Professor am Gymnasium, Winterthur, Neuwiesenstrafse 7. *Schweiz.*

Affolter, Ferdinand Gabriel, Oberst, Professor am Polytechnikum, Zürich V, Zeltweg 53. *Schweiz.*

Amberg, Ernst, Assistent am Polytechnikum, Zürich. (Seitdem Professor an der Kantonsschule, Frauenfeld, Spannerstrafse.) *Schweiz.*

Andrade, Jules, Professor an der Faculté des sciences, Rennes, Boulevard Sébastopol 16. *Frankreich.*

Astor, Auguste, Professor an der Faculté des sciences, Grenoble, Place Victor-Hugo 11. *Frankreich.*

Autonne, Léon, Ingénieur des ponts et chaussées, Maître de Conférences an der Universität, Lyon, Rue Mont-Bernard 9. *Frankreich.*

Avillez, Jorge F. d', Vicomte de Reguengo, Portalegre. *Portugal.*

Bécard, André, Ingénieur des arts et manufactures, Répétiteur an der Ecole Centrale, Paris, Rue de Miromesnil 2. *Frankreich.*

Beke, Emanuel, Professor am kgl. Übungsgymnasium der Professorenbildungs-Anstalt, Privatdocent an der Universität, Budapest, Damjanichgasse 50. *Ungarn.*

Bendixson, Ivar Otto, Docent an der Hochschule, Stockholm, Holländaregatan 21 A. *Schweden.*

Bertsch, Ferdinand, Direktor des Instituts Concordia, Zürich V, Hofackerstraſse 11. *Schweiz.*

Frau Bertsch.

Besso, Michel Angelo, Ingenieur, Winterthur, Schaffhauserstraſse 5. *Schweiz.*

Beyel, Christian, Privatdocent am Polytechnikum, Zürich I, Leonhardstraſse 1. *Schweiz.*

Bleuler, Hermann, Oberst-Armeekorpskommandant, Präsident des schweizerischen Schulrates, Zürich V, Zolliker Straſse 32. *Schweiz.*

Frau Bleuler.

Bleuler, Konrad, Regierungsrat, Zürich V, Zolliker Straſse 177. *Schweiz.*

Bordiga, Giovanni, Privatdocent an der Universität Padua und Professor am Istituto Tecnico in Venedig, S. Lio. *Italien.*

Frau Bordiga.

Borel, Émile, Maître de Conférences an der École Normale Supérieure, Paris, Rue Toullier 7. *Frankreich.*

Bougaïev, Nikolaus, Professor an der Universität, Moskau, Arbat, Deneschnij Pereylok Haus Rachmanoff. *Ruſsland.*

Bouton, C. L., stud. math. (Leipzig), St. Louis. *U. S. A.*

Bretschneider, Wilhelm, Professor an der Realanstalt und Docent an der Technischen Hochschule, Stuttgart, Reinsburgstraſse 57. *Deutschland.*

Brill, Alexander v., Professor an der Universität, Tübingen, Hechinger Straſse 14. *Deutschland.*

Brioschi, Francesco, Professor, Direktor des Istituto Tecnico Superiore, Mailand, Via Senato 38. *Italien.* Gestorben am 13. Dezember 1897.

Brunn, Hermann, Privatdocent an der Universität und Bibliothekar an der Technischen Hochschule, München, Giselastraſse 27. *Deutschland.*

Bützberger, Fritz, Professor an der Kantonsschule, Zürich IV, Neue Beckenhofstraſse 19. *Schweiz.*

Burali-Forti, Cesare, Professor an der Militär-Akademie, Turin, Via Gioberti 43. *Italien.*

Burgatti, Federico, Ingenieur, Cento, Provinz Ferrara. *Italien.*

Burgatti, Pietro, Assistent an der Universität, Rom, Via Principe Amedeo, 175. *Italien.*

Burkhardt, Heinrich, Professor an der Universität, Zürich V, Kreuzplatz 1. *Schweiz.*

Cahen, Eugène, Professor am Lycée Condorcet, Paris, Rue des Vignes 39. *Frankreich.*

Cailler, Charles, Professor an der Universität, Genf, Rue de l'École de Chimie 4. *Schweiz.*

Cantor, Georg, Professor an der Universität, Halle a. S., Händelstraſse 13. *Deutschland.*

Fräulein E. und G. Cantor.

Cantor, Moritz, Professor an der Universität, Heidelberg, Gaisbergstraſse 15. *Deutschland.*

Cardinaal, Jakob, Professor an der Technischen Hochschule, Delft, Oranjeplantage 35. *Holland.*

Castellano, Filiberto, Professor an der Militär-Akademie, Turin, Corso Vittorio Emanuele 16. *Italien.*

Czuber, Emanuel, Professor an der Technischen Hochschule, Wien III, Neulinggasse 3. *Oesterreich.*

Dantscher, Victor v., Professor an der Universität, Graz, Rechbauerstraſse 29. *Oesterreich.*

Frau v. Dantscher.

Delaunay, Nikolaus, Professor am Agronomischen Institut, Nowo-Alexandria, Gouvernement Lublin. *Ruſsland.*

Dickstein, Samuel, Professor, Warschau, Marzatkowska, 117. *Ruſsland.*

Droz, Auguste, Professor am Gymnasium, Lausanne, Clos du Matin 3. *Schweiz.*

Dumas, Gustave, Assistent am Polytechnikum, Zürich I, Bahnhofstraſse 2. *Schweiz.*

Dyck, Walter, Professor an der Technischen Hochschule, München, Hildegardstraſse $1^1/_2$. *Deutschland.*

Emch, Arnold, Lehrer am Technikum, Biel, Gesellschaftsstraſse 5. *Schweiz.*

Eneström, Gustaf Hjalmar, Bibliothekar an der königl. Bibliothek, Stockholm, Brahegatan 43. *Schweden.*

Enriques, Federigo, Professor an der Universität, Bologna, Vicolo S. Giuliano 6. *Italien.*

Ernst, Heinrich, Regierungsrat, Zürich, Winterthur. *Schweiz.*

Fano, Gino, Professor, Assistent und Privatdocent an der Universität, Rom, Via Nazionale 215. *Italien.*

Fehr, Henri, Privatdocent an der Universität, Genf, Rue Gevray 19. *Schweiz.*

Ferber, Ferdinand, Capitaine, Professor an der École d'application de l'artillerie et du génie, Fontainebleau, Rue d'Avon 17. *Frankreich.*

Fiedler, Ernst, Professor an der Kantonsschule und Privatdocent am Polytechnikum, Zürich V, Englisches Viertel 57. *Schweiz.*

Finger, Joseph, Professor an der Technischen Hochschule, Wien IV, Alleegasse 35. *Oesterreich.*

Flatt, Robert, Lehrer an der Realschule und Privatdocent an der Universität, Basel, Margarethenstrafse 77. *Schweiz.*

Franel, Jérôme, Professor am Polytechnikum, Zürich V, Sophienstrafse 16. *Schweiz.*

Fredholm, Ivar, Dr. phil., Stockholm, Stora Badstugatan 44. *Schweden.*

Friesendorff, Theophil, Oberlehrer an den reformierten und Kirchenschulen, Assistent am Institut für Strafsen- und Wasserbauingenieure, St. Petersburg, Grofse Podjatscheskaja 23. *Rufsland.*

Ganter, Heinrich, Professor an der Kantonsschule, Aarau, Jenseits der Aare 294. *Schweiz.*

Gascó, Luis Gonzaga, Professor an der Universität, Valencia, Hernán Cortés 25. *Spanien.*

Frau Gascó.

Gauthier-Villars, Albert, Imprimeur-Libraire, Paris, Quai des Grands-Augustins 55. *Frankreich.*

Frau Gauthier-Villars.

Geiser, Carl Friedrich, Professor am Polytechnikum, Zürich, Küsnacht. *Schweiz.*

Frau Emma Geiser. Fräulein Ch. und H. Geiser.

Gerbaldi, Francesco, Professor an der Universität, Palermo, Via Gaetano Daita 11. *Italien.*

Gerlach, Rudolf, Lehrer am Seminar, Küsnacht bei Zürich. *Schweiz.*

Girardville, Paul Nicolas, Capitaine d'Artillerie, Montreuil sous bois bei Paris, Rue Michelet 6. *Frankreich.*

Gordan, Paul, Professor an der Universität, Erlangen, Spitalstrafse 35. *Deutschland.*

Graf, Johann Heinrich, Professor an der Universität, Bern, Wylerstrafse 10. *Schweiz.*

Gravé, Demetrius Alexander, Professor am Institut für Strafsen- und Wasserbauingenieure und Privatdocent an der Universität, St. Petersburg, B. O., 14 Linie, 31. *Rufsland.*

Grob, J. Kaspar, Stadtrat, Zürich I, Untere Zäune 17. *Schweiz.*

Gröbli, Walter, Professor an der Kantonsschule, Zürich V, Plattenstrafse 64. *Schweiz.*

Gubler, Eduard, Lehrer an der Töchterschule und Privatdocent an der Universität, Zürich IV, Universitätsstrafse 18. *Schweiz.*

Günther, Siegmund, Professor an der Technischen Hochschule, München, Akademiestrafse 5. *Deutschland.*

Guinand, Ernest, Lehrer am Technikum, Biel, Florastrafse 9. *Schweiz.*

Gutzmer, August, Privatdocent an der Universität, Halle a. S., Gartenstrafse 5. *Deutschland.*

Frau Gutzmer.

Gysel, Julius, Professor am Gymnasium, Schaffhausen, Tannergäfschen 13. *Schweiz.*

Harkness, James, Professor am College, Bryn Mawr, Pennsylvania. *U. S. A.*

Hartogs, Fritz, stud. math., Vertreter des mathematischen Vereins der Universität Berlin, München, Theresienstrafse 34. *Deutschland.*

Hasler, Elias, Stadtrat, Zürich II, Seestrafse 137. *Schweiz.*

Hausdorff, Felix, Privatdocent an der Universität, Leipzig, Nordstrafse 58. *Deutschland.*

Hermes, Oswald, Professor an der Artillerie- und Ingenieurschule, Berlin, Steglitz, Lindenstrafse 35. *Deutschland.*

Herzog, Albin, Professor, Direktor des eidgenössischen Polytechnikums, Zürich V, Neptunstrafse 29. *Schweiz.*

Hirsch, Arthur, Professor, Assistent und Privatdocent am Polytechnikum, Zürich V, Freie Strafse 5. *Schweiz.*

Hobson, E. W., Lecturer am Christ's College, Cambridge. *England.*

Hoepli, Ulrico, Editore-Libraio, Mailand, Galleria de Christoforis 59—63. *Italien.*

Huber, Gottlieb, Professor an der Universität, Bern, Alpeneckstrafse 9. *Schweiz.*

Hurwitz, Adolf, Professor am Polytechnikum, Zürich I, Falkengasse 15. *Schweiz.*

Frau Ida Hurwitz.

Hurwitz, Julius, Privatdocent an der Universität, Basel, Allschwilerstrafse 3. *Schweiz.*

Jaccottet, Charles, Professor an der École industrielle cantonale, Lausanne, Lutry. *Schweiz.*

Jacquet, Pierre Édouard Charles, Professor am Lycée Marceau, Chartres, Rue des Vieux Capucins 21 bis. *Frankreich.*

Frau Jacquet.

Janisch, Eduard, wirklicher Lehrer an der Staatsgewerbeschule, Bielitz, Giselastraſse 23. *Oesterreich.*

Jegher, August, Ingenieur, Präsident der Gesellschaft ehemaliger Studierender der eidgenössischen polytechnischen Schule (G. e. P.), Zürich IV, Sonneggstraſse 16. *Schweiz.*

Frau Jessel, Golfe Juan, Alpes maritimes. *Frankreich.*

Imber, Alexandre, Directeur des études an der École Centrale, Paris, Rue Montgolfier 1. *Frankreich.*

ImHof, Eugen, Professor am Gymnasium, Schaffhausen, Steigstraſse 78. *Schweiz.*

Joukowsky, Nikolaus, Professor an der Universität, Moskau. *Ruſsland.*

Juel, Christian Sophus, Docent an der Polytechnischen Schule, Kopenhagen, Römersgade 9. *Dänemark.*

Jürgens, Enno, Professor an der Technischen Hochschule, Aachen, Ludwigsallee 79. *Deutschland.*

Frau Jürgens.

Jung, Giuseppe, Professor am Istituto Tecnico Superiore, Mailand, Via Borgonuovo 9. *Italien.*

Frau Jung. Fräulein Jung.

Karamata, Konstantin, Professor am Realgymnasium, Mitrovitz, Fruska-Gora Straſse 29, Slavonien. *Oesterreich-Ungarn.*

Kiefer, Adolf, Professor, Lehrer am Institut Concordia, Zürich V, Hegibachstraſse 1. *Schweiz.*

Klein, Felix, Professor an der Universität, Göttingen, Wilhelm Weber-Straſse 3. *Deutschland.*

Kleiner, Alfred, Professor an der Universität, Vertreter der Naturforschenden Gesellschaft, Zürich IV, Sumatrastraſse 24. *Schweiz.*

Kobald, Engelbert, Professor an der Bergakademie, Leoben, Erzherzog Johann-Straſse 148. *Oesterreich.*

Kobb, Gustaf, Docent an der Hochschule, Stockholm, Humlegårdsgatan 4. *Schweden.*

Koch, Helge v., Docent an der Hochschule, Stockholm, Djursholm. *Schweden.*

Kohn, Gustav, Professor an der Universität, Wien I, Schottenring 15. *Oesterreich.*

Korteweg, Diederich Johannes, Professor an der Universität, Amsterdam, Vondelstraat 104 F. *Holland.*

Kraft, Ferdinand, Privatdocent am Polytechnikum und an der Universität, Zürich IV, Bolleystrafse 5. *Schweiz.*

Krause, Martin, Professor an der Technischen Hochschule, Dresden-A., Kaitzerstrafse 12. *Deutschland.*

Krazer, Adolf, Professor an der Universität, Strafsburg, Vogesenstrafse 10. *Deutschland.*

Frau Krazer.

Künzler, Gustav, Assistent am Polytechnikum, Zürich V, Ütliblick. *Schweiz.*

Kürschák, Josef, Professor am Polytechnikum, Budapest II, Erzherzog Albrecht-Strafse 14. *Ungarn.*

Frau Kürschák.

Lacombe, Marius, Professor am Polytechnikum, Zürich V, Kreuzplatz 1. *Schweiz.*

Laisant, Charles Ange, Répétiteur an der École Polytechnique, Paris, Avenue Victor-Hugo 162. *Frankreich.*

Lampe, Emil, Professor an der Technischen Hochschule Charlottenburg, Berlin W., Kurfürstenstrafse 139. *Deutschland.*

Frau Lampe.

Landsberg, Georg, Professor an der Universität, Heidelberg, Sandgasse 5. *Deutschland.*

Larmor, Joseph, Lecturer am St. John's College, Cambridge. *England.*

Laugel, Léonce, Golfe Juan, Chalet des Bruyères, Alpes maritimes. *Frankreich.*

Frau Laugel.

La Vallée Poussin, Charles Jean de, Professor an der Universität, Löwen, Rue de Namur 190. *Belgien.*

Lerch, Mathias, Professor an der Universität, Freiburg, Miséricorde, Villa Bardy. *Schweiz.*

Levi-Civita, Tullio, Professor an der Universität, Padua, Via S. Gaetano 3394. *Italien.*

Lindelöf, Ernst, Docent an der Universität, Helsingfors, Boulevardsgatan 12. *Finland.*

Lindelöf, Lorenz Leonhard, Wirklicher Staatsrat, Direktor der Centralverwaltung der Schulen Finlands, Helsingfors, Boulevardsgatan 12. *Finland.*

Fräulein Lindelöf.

Lombardi, Luigi, Assistent und Privatdocent am Polytechnikum, Zürich V, Freie Straſse 53. *Schweiz.* (Seitdem Professor am Museo industriale, Turin. *Italien.*)

Looser, Friedrich, Ingenieur, Zürich I, Börsenstraſse 16. *Schweiz.*

Mackay, John S., Edinburgh, Northumberland Street 69. *Schottland.*

Mansion, Paul, Professor an der Universität, Gent, Quai des Dominicains 6. *Belgien.*

Massarini, Camillo, Advokat, Rom, Via Nazionale 158. *Italien.*

Massarini, Fräulein Iginia, Dr. phil., Rom, Via Nazionale 158. *Italien.*

Frau Teresa Massarini.

Maurer, Ludwig, Professor an der Universität, Tübingen, Uhlandstraſse 22. *Deutschland.*

Mayer, Adolph, Professor an der Universität, Leipzig, Königstraſse 1. *Deutschland.*

Mehmke, Rudolf, Professor an der Technischen Hochschule, Stuttgart, Immenhoferstraſse 4. *Deutschland.*

Mellin, Hjalmar, Professor an der Universität, Helsingfors, Wladimirsgatan 23. *Finland.*

Mertens, Franz, Professor an der Universität, Wien III, Stammgasse 9. *Oesterreich.*

Meyer, W. Franz, Professor an der Universität, Königsberg i. Pr., Mitteltragheim 39. *Deutschland.*

Mineur, Adolphe, Professor an der Universität, Brüssel, Rue de la Victoire 97. *Belgien.*

Minkowski, Hermann, Professor am Polytechnikum, Zürich V, Mittelstraſse 12. *Schweiz.*

Mittag-Leffler, Magnus Gustaf, Professor an der Hochschule, Stockholm, Djursholm. *Schweden.*

Moser, Christian, Mathematiker des Industrie-Departements und Privatdocent an der Universität, Bern, Oberweg 8. *Schweiz.*

Naetsch, Emil, Privatdocent an der Technischen Hochschule, Dresden-A., Gluckstrafse 6. *Deutschland.*

Niewenglowski, Benjamin, Inspecteur d'Académie, Paris, Rue de l'Arbalète 35. *Frankreich.*

Noether, Max, Professor an der Universität, Erlangen, Nürnberger Strafse 32. *Deutschland.*

Ohlhausen, G. R., stud. math., St. Louis. *U. S. A.*

Oltramare, Gabriel, Professor an der Universität, Genf, Rue des Grottes 21. *Schweiz.*

Onofrio, Georges, Professor an der Université catholique, Lyon, Avenue de Noailles 60. *Frankreich.*

Osgood, William Fogg, Professor an der Universität, Cambridge, Mass. *U. S. A.*

Padé, Henri, Maître de Conférences an der Universität, Lille, Place Richebé 11. *Frankreich.*

Frau Padé.

Papperitz, Erwin, Professor an der Bergakademie, Freiberg i. S., Weifsbachstrafse 5. *Deutschland.*

Peano, Giuseppe, Professor an der Universität und der Militär-Akademie, Turin, Via Barbaroux 4. *Italien.*

Pelletan, André, Professor an der École des Mines, Paris, Quai Debilly 10. *Frankreich.*

Perrin, Élie, Professor, Paris, Rue Lamandé 7. *Frankreich.*

Pfenninger, Arnold, Direktor des Seminars, Küsnacht bei Zürich. *Schweiz.*

Picard, Émile, Professor an der Universität, Paris, Rue Soufflot 13. *Frankreich.*

Pierpont, James, Professor an der Yale University, New Haven, Howard Avenue 357. Conn. *U. S. A.*

Pincherle, Salvatore, Professor an der Universität, Bologna, Via Galliera 62. *Italien.*

Polignac, Prince Camille de, Cannes, Villa Jessie. *Frankreich.*

Pringsheim, Alfred, Professor an der Universität, München, Arcis-Strafse 12. *Deutschland.*

Frau Hedwig Pringsheim.

Ptaszycki, Johann v., Privatdocent an der Universität, St. Petersburg, Nadeschdinskaja 11, log 20. *Rufsland.*

Quiquet, Albert, Actuaire de la C^{ie} d'Assurances sur la Vie La Nationale, Paris, Boulevard St. Germain 92. *Frankreich.*

Rados, Gustav, Professor am Polytechnikum, Budapest VII, Csengery-Gasse 1. *Ungarn.*

Rebstein, Jakob, Professor an der Kantonsschule und am Polytechnikum, Zürich V, Hegibachstrafse 52. *Schweiz.*

Reich, Karl, Privatdocent an der Technischen Hochschule, Wien IX, Míchelbeurengasse 2. *Oesterreich.*

Reuschle, Carl, Professor an der Technischen Hochschule, Stuttgart, Lerchenstrafse 5. *Deutschland.*

Frau Reuschle.

Reye, Theodor, Professor an der Universität, Strafsburg, Brantplatz 3. *Deutschland.*

Ricci, Gregorio, Professor an der Universität, Padua, Piazza Vittorio Emanuele II 2639. *Italien.*

Rudio, Ferdinand, Professor am Polytechnikum, Zürich V, Feldeggstrafse 64. *Schweiz.*

Frau Maria Rudio.

Fräulein Elisabeth Rudio, Wiesbaden. *Deutschland.*

Saussure, René de, Professor an der katholischen Universität, Washington, D. C. *U. S. A.*

Schiff, Peter v., Professor an der Artillerie-Akademie, St. Petersburg, Fontanka 112, log 2. *Rufsland.*

Schiff, Frau Vera v., Professor an der Universität für Damen, St. Petersburg, Fontanka 112, log 2. *Rufsland.*

Schleiermacher, Ludwig, Professor an der Forstlehranstalt, Aschaffenburg, Glattbacher Strafse 2. *Deutschland.*

Schoenflies, Arthur, Professor an der Universität, Göttingen, Nikolausberger Weg. *Deutschland.*

Scholtz, August, Professor an der Universität, Budapest VI, Rózsa-utcza 46. *Ungarn.*

Frau Scholtz.

Schottky, Friedrich, Professor an der Universität, Marburg, Barfüfserthor 14. *Deutschland.*

Schoute, Pieter Hendrik, Professor an der Universität, Groningen, Schoolholm, G. 17. *Holland.*

Schröder, Ernst, Professor an der Technischen Hochschule, Karlsruhe, Gottesauerstrafse 9. *Deutschland.*

Schumacher, Robert, Reallehrer an der Realschule, Augsburg. *Deutschland.*

Schur, Friedrich, Professor an der Technischen Hochschule, Karlsruhe, Westendstrafse 46. *Deutschland.*

Scott, Fräulein Charlotte Angas, Professor am College, Bryn Mawr, Pennsylvania. *U. S. A.*

Segre, Corrado, Professor an der Universität, Turin, Corso Vittorio Emanuele 85. *Italien.*

Seliwanoff, Demetrius, Professor am Technologischen Institut und Privatdocent an der Universität, St. Petersburg, Fontanka 116, log 16. *Rufsland.*

Sidler, Georg, Professor an der Universität, Bern, Christoffelgasse 4. *Schweiz.*

Stéphanos, Cyparissos, Professor an der Universität, Athen, Rue de Solon 20. *Griechenland.*

Sterneck, Robert v., Privatdocent an der Universität, Wien VIII, Josefstädterstrafse 30. *Oesterreich.*

Stickelberger, Ludwig, Professor an der Universität, Freiburg i. B., Baslerstrafse 38. *Deutschland.*

Stodola, Aurel, Professor am Polytechnikum, Zürich V, Freie Strafse 62. *Schweiz.*

Suter, Heinrich, Professor an der Kantonsschule, Zürich, Kilchberg. *Schweiz.*

Tallquist, Hjalmar, Docent an der Universität und am Polytechnikum, Helsingfors, Wladimirsgatan 17. *Finland.*

Tarry, Harold, Ancien Inspecteur des finances, Paris, Rue Descartes 21. *Frankreich.*

Tauber, Alfred, Privatdocent an der Universität, Wien VI, Gumpendorferstrafse 63. *Oesterreich.*

Tichomandritzky, Matthäus, Professor an der Universität, Charkoff. *Rußland.*

Vacca, Giovanni, Genua. (Seitdem Assistent an der Universität, Turin.) *Italien.*

Valentiner, Hermann, Professor an der Militärschule, Kopenhagen, Ceresvei 12. *Dänemark.*

Varićak, Vladimir, Privatdocent an der Universität, Agram, Franz Joseph's Platz 6, Croatien. *Oesterreich-Ungarn.*

Vassilief, Alexander, Professor an der Universität, Kasan. *Rußland.*

Veronese, Giuseppe, Professor an der Universität, Padua. *Italien.*

Vicaire, Eugène, Inspecteur général des Mines, Professor an der École des Mines, Paris, Rue Gay-Lussac 30. *Frankreich.*

Volterra, Vito, Professor an der Universität, Turin, Via S. Quintino 45. *Italien.*

VonderMühll, Karl, Professor an der Universität, Basel, Aschenvorstadt 72. *Schweiz.*

Fräulein Emma Wagner, Mentone. *Frankreich.*

Weber, Eduard v., Privatdocent an der Universität, München, Königinstraße 5. *Deutschland.*

Weber, Heinrich, Professor an der Universität, Straßburg, Goethestraße 27. *Deutschland.*

Weber, Heinrich Friedrich, Professor am Polytechnikum, Zürich V, Fehrenstraße 20. *Schweiz.*

Frau Weber.

Wedell, Fräulein Charlotte v., Dr. phil., z. Z. in Göttingen. *Deutschland.*

Wehner, Hermann, Oberlehrer an der Realschule, Plauen i. V., Kaiserstraße 83. *Deutschland.*

Weiler, Adolf, Privatdocent am Polytechnikum und an der Universität, Zürich V, Neptunstraße 4. *Schweiz.*

Weingarten, Julius, Professor an der Technischen Hochschule Charlottenburg, Berlin W., Regentenstraße 14. *Deutschland.*

Fräulein R. Weingarten.

Wien, Willy, Professor, Docent an der Technischen Hochschule, Aachen, Lousbergstraße 49. *Deutschland.*

Wild, Johannes, Professor an der Kantonsschule, St. Gallen, Rosenbergstraße 70. *Schweiz.*

Woronez, cand. math., Kiew. *Rufsland.*

Wyss, Georg Heinrich v., Privatdocent am Polytechnikum, Zürich I, Bärengasse 19. *Schweiz.*

Wyss, Oskar, Professor, Alt-Rektor der Universität, Zürich V, Seefeldstrafse 23. *Schweiz.*

Zeuthen, Hieronymus Georg, Professor an der Universität, Kopenhagen, Rosenvänge. *Dänemark.*

Zindler, Konrad, Privatdocent an der Universität und an der Technischen Hochschule, Wien IV, Resselgasse 5. *Oesterreich.*

Nach Ländern geordnet ergiebt diese Teilnehmerliste die folgende Gruppierung:

Land.	Herren.	Damen.
Schweiz	60	8
Deutschland	41	12
Frankreich	23	6
Italien	20	5
Oesterreich-Ungarn	17	3
Rufsland	12	1
Nordamerika	6	1
Schweden	6	—
Finland	4	1
Belgien	3	—
Dänemark	3	—
Grofsbritannien	3	—
Holland	3	—
Spanien	1	1
Griechenland	1	—
Portugal	1	—
	204	38

Im ganzen waren also 16 Länder durch 242 Teilnehmer vertreten, worunter 38 Damen.

Zweiter Teil.

Wissenschaftliche Vorträge.

A. Vorträge der ersten Hauptversammlung.

Sur les rapports de l'analyse pure et de la physique mathématique.

Par

H. Poincaré à Paris.

I.

On vous a sans doute souvent demandé à quoi servent les mathématiques et si ces délicates constructions que nous tirons tout entières de notre esprit ne sont pas artificielles et enfantées par notre caprice.

Parmi les personnes qui font cette question, je dois faire une distinction; les gens pratiques réclament seulement de nous le moyen de gagner de l'argent. Ceux-là ne méritent pas qu'on leur réponde; c'est à eux plutôt qu'il conviendrait de demander à quoi bon accumuler tant de richesses et si, pour avoir le temps de les acquérir, il faut négliger l'art et la science qui seuls nous font des âmes capables d'en jouir

et propter vitam vivendi perdere causas.

D'ailleurs une science uniquement faite en vue des applications est impossible; les vérités ne sont fécondes que si elles sont enchaînées les unes aux autres. Si l'on s'attache seulement à celles dont on attend un résultat immédiat, les anneaux intermédiaires manqueront, et il n'y aura plus de chaîne.

Les hommes les plus dédaigneux de la théorie y trouvent sans s'en douter un aliment quotidien; si l'on était privé de cet aliment, le progrès s'arrêterait rapidement et nous nous figerions bientôt dans l'immobilité de la Chine.

Mais c'est assez nous occuper des praticiens intransigeants. A côté d'eux, il y a ceux qui sont seulement curieux de la nature et qui nous demandent si nous sommes en état de la leur mieux faire connaître.

Pour leur répondre, nous n'avons qu'à leur montrer les deux monuments déjà ébauchés de la Mécanique Céleste et de la Physique Mathématique.

Ils nous concéderaient sans doute que ces monuments valent bien la peine qu'ils nous ont coûtée. Mais ce n'est pas assez.

Les mathématiques ont un triple but. Elles doivent fournir un instrument pour l'étude de la nature.

Mais ce n'est pas tout: elles ont un but philosophique et, j'ose le dire, un but esthétique.

Elles doivent aider le philosophe à approfondir les notions de nombre, d'espace, de temps.

Et surtout leurs adeptes y trouvent des jouissances analogues à celles que donnent la peinture et la musique. Ils admirent la délicate harmonie des nombres et des formes; ils s'émerveillent quand une découverte nouvelle leur ouvre une perspective inattendue; et la joie qu'ils éprouvent ainsi n'a-t-elle pas le caractère esthétique, bien que les sens n'y prennent aucune part? Peu de privilégiés sont appelés à la goûter pleinement, cela est vrai, mais n'est-ce pas ce qui arrive pour les arts les plus nobles?

C'est pourquoi je n'hésite pas à dire que les mathématiques méritent d'être cultivées pour elles-mêmes et que les théories qui ne peuvent être appliquées à la physique doivent l'être comme les autres.

Quand même le but physique et le but esthétique ne seraient pas solidaires, nous ne devrions sacrifier ni l'un ni l'autre.

Mais il y a plus: ces deux buts sont inséparables et le meilleur moyen d'atteindre l'un c'est de viser l'autre, ou du moins de ne jamais le perdre de vue. C'est ce que je vais m'efforcer de démontrer en précisant la nature des rapports entre la science pure et ses applications.

Le mathématicien ne doit pas être pour le physicien un simple fournisseur de formules; il faut qu'il y ait entre eux une collaboration plus intime.

La physique mathématique et l'analyse pure ne sont pas seulement des puissances limitrophes, entretenant des rapports de bon voisinage; elles se pénètrent mutuellement et leur esprit est le même.

C'est ce que l'on comprendra mieux quand j'aurai montré ce que la physique reçoit de la mathématique et ce que la mathématique, en retour, emprunte à la physique.

II.

Le physicien ne peut demander à l'analyste de lui révéler une vérité nouvelle; tout au plus celui-ci pourrait-il l'aider à la pressentir.

Il y a longtemps que personne ne songe plus à devancer l'expérience, ou à construire le monde de toutes pièces sur quelques hypothèses hâtives. De toutes ces constructions où l'on se complaisait encore naïvement il y a un siècle, il ne reste plus aujourd'hui que des ruines.

Toutes les lois sont donc tirées de l'expérience; mais pour les énoncer, il faut une langue spéciale; le langage ordinaire est trop pauvre, il est d'ailleurs trop vague, pour exprimer des rapports si délicats, si riches et si précis.

Voilà donc une première raison pour laquelle le physicien ne peut se passer des mathématiques; elles lui fournissent la seule langue qu'il puisse parler.

Et ce n'est pas une chose indifférente qu'une langue bien faite; pour ne pas sortir de la physique, l'homme inconnu qui a inventé le mot *chaleur* a voué bien des générations à l'erreur. On a traité la chaleur comme une substance, simplement parce qu'elle était désignée par un substantif, et on l'a crue indestructible.

En revanche, celui qui a inventé le mot *électricité* a eu le bonheur immérité de doter implicitement la physique d'une loi nouvelle, celle de la conservation de l'électricité, qui, par un pur hasard, s'est trouvée exacte, du moins jusqu'à présent.

Eh bien, pour poursuivre la comparaison, les écrivains qui embellissent une langue, qui la traitent comme un objet d'art, en font en même temps un instrument plus souple, plus apte à rendre les nuances de la pensée.

On comprend alors comment l'analyste, qui poursuit un but purement esthétique, contribue par cela même à créer une langue plus propre à satisfaire le physicien.

Mais ce n'est pas tout; la loi sort de l'expérience, mais elle n'en sort pas immédiatement. L'expérience est individuelle, la loi qu'on en tire est générale, l'expérience n'est qu'approchée, la loi est précise ou du moins prétend l'être. L'expérience se fait dans des conditions toujours complexes, l'énoncé de la loi élimine ces complications. C'est ce qu'on appelle «corriger les erreurs systématiques».

En un mot, pour tirer la loi de l'expérience, il faut généraliser; c'est une nécessité qui s'impose à l'observateur le plus circonspect.

Mais comment généraliser? toute vérité particulière peut évidemment être étendue d'une infinité de manières. Entre ces mille chemins qui s'ouvrent devant nous, il faut faire un choix, au moins provisoire; dans ce choix, qui nous guidera?

Ce ne pourra être que l'analogie. Mais que ce mot est vague! L'homme primitif ne connaît que les analogies grossières, celles qui frappent les sens, celles des couleurs ou des sons. Ce n'est pas lui qui aurait songé à rapprocher par exemple la lumière de la chaleur rayonnante.

Qui nous a appris à connaître les analogies véritables, profondes, celles que les yeux ne voient pas et que la raison devine?

C'est l'esprit mathématique, qui dédaigne la matière pour ne s'attacher qu'à la forme pure. C'est lui qui nous a enseigné à nommer du même nom des êtres qui ne diffèrent que par la matière, à nommer du même nom par exemple la multiplication des quaternions et celle des nombres entiers.

Si les quaternions, dont je viens de parler, n'avaient été si promptement utilisés par les physiciens anglais, bien des personnes n'y verraient sans doute qu'une rêverie oiseuse, et pourtant, en nous apprenant à rapprocher ce que les apparences séparent, ils nous auraient déjà rendus plus aptes à pénétrer les secrets de la nature.

Voilà les services que le physicien doit attendre de l'analyse, mais pour que cette science puisse les lui rendre, il faut qu'elle soit cultivée de la façon la plus large, sans préoccupation immédiate d'utilité, il faut que le mathématicien ait travaillé en artiste.

Ce que nous lui demandons c'est de nous aider à voir, à discerner notre chemin dans le dédale qui s'offre à nous. Or celui qui voit le mieux, c'est celui qui s'est élevé le plus haut.

Les exemples abondent, et je me bornerai aux plus frappants.

Le premier nous montrera comment il suffit de changer de langage pour apercevoir des généralisations qu'on n'avait pas d'abord soupçonnées.

Quand la loi de Newton s'est substituée à celle de Képler, on ne connaissait encore que le mouvement elliptique. Or, en ce qui concerne ce mouvement, les deux lois ne diffèrent que par la forme; on passe de l'une à l'autre par une simple différentiation.

Et cependant de la loi de Newton, on peut déduire, par une généralisation immédiate, tous les effets des perturbations et toute la mécanique céleste. Jamais au contraire, si l'on avait conservé l'énoncé de Képler, on n'aurait regardé les orbites des planètes troublées, ces courbes compliquées dont personne n'a jamais écrit l'équation, comme les généralisations naturelles de l'ellipse. Les progrès des observations n'auraient servi qu'à faire croire au chaos.

Le second exemple mérite également d'être médité.

Quand Maxwell a commencé ses travaux, les lois de l'électrodynamique admises jusqu'à lui rendaient compte de tous les faits connus. Ce n'est pas une expérience nouvelle qui est venue les infirmer.

Mais en les envisageant sous un biais nouveau, Maxwell a reconnu que les équations deviennent plus symétriques quand on y ajoute un terme, et d'autre part ce terme était trop petit pour produire des effets appréciables avec les méthodes anciennes.

On sait que les vues a priori de Maxwell ont attendu vingt ans une confirmation expérimentale; ou si vous aimez mieux, Maxwell a devancé de vingt ans l'expérience.

Comment ce triomphe a-t-il été obtenu?

C'est que Maxwell était profondément imprégné du sentiment de la symétrie mathématique; en aurait-il été de même, si d'autres n'avaient avant lui recherché cette symétrie pour sa beauté propre?

C'est que Maxwell était habitué à «penser en vecteurs» et pourtant si les vecteurs se sont introduits dans l'analyse, c'est par la théorie des imaginaires. Et ceux qui ont inventé les imaginaires ne se doutaient guère du parti qu'on en tirerait pour l'étude du monde réel; le nom qu'ils leur ont donné le prouve suffisamment.

Maxwell en un mot n'était peut-être pas un habile analyste, mais cette habileté n'aurait été pour lui qu'un bagage inutile et gênant. Au contraire il avait au plus haut degré le sens intime des analogies mathématiques. C'est pour cela qu'il a fait de bonne physique mathématique.

L'exemple de Maxwell nous apprend encore autre chose.

Comment faut-il traiter les équations de la physique mathématique? devons-nous simplement en déduire toutes les conséquences, et les regarder comme des réalités intangibles? Loin de là; ce qu'elles doivent nous apprendre surtout, c'est ce qu'on peut et ce qu'on doit y changer. C'est comme cela que nous en tirerons quelque chose d'utile.

Le troisième exemple va nous montrer comment nous pouvons apercevoir des analogies mathématiques entre des phénomènes qui n'ont physiquement aucun rapport ni apparent, ni réel, de telle sorte que les lois de l'un de ces phénomènes nous aident à deviner celles de l'autre.

Une même équation, celle de Laplace, se rencontre dans la théorie de l'attraction newtonienne, dans celle du mouvement des liquides, dans celle du potentiel électrique, dans celle du magnétisme, dans celle de la propagation de la chaleur et dans bien d'autres encore.

Qu'en résulte-t-il? Ces théories semblent des images calquées l'une sur l'autre; elles s'éclairent mutuellement, en s'empruntant leur langage; demandez aux électriciens s'ils ne se félicitent pas d'avoir inventé le mot de flux de force, suggéré par l'hydrodynamique et la théorie de la chaleur.

Ainsi les analogies mathématiques, non seulement peuvent nous faire pressentir les analogies physiques, mais encore ne cessent pas d'être utiles, quand ces dernières font défaut.

En résumé le but de la physique mathématique n'est pas seulement de faciliter au physicien le calcul numérique de certaines constantes ou l'intégration de certaines équations différentielles.

Il est encore, il est surtout de lui faire connaître l'harmonie cachée des choses en les lui faisant voir d'un nouveau biais.

De toutes les parties de l'analyse, ce sont les plus élevées, ce sont les plus pures, pour ainsi dire, qui seront les plus fécondes entre les mains de ceux qui savent s'en servir.

III.

Voyons maintenant ce que l'analyse doit à la physique.

Il faudrait avoir complètement oublié l'histoire de la science pour ne pas se rappeler que le désir de connaître la nature a eu sur le développement des mathématiques l'influence la plus constante et la plus heureuse.

En premier lieu, le physicien nous pose des problèmes dont il attend de nous la solution. Mais en nous les proposant, il nous a payé largement d'avance le service que nous pourrons lui rendre, si nous parvenons à les résoudre.

Si l'on veut me permettre de poursuivre ma comparaison avec les beaux-arts, le mathématicien pur qui oublierait l'existence du monde extérieur, serait semblable à un peintre qui saurait harmonieusement combiner les couleurs et les formes, mais à qui les modèles feraient défaut. Sa puissance créatrice serait bientôt tarie.

Les combinaisons que peuvent former les nombres et les symboles sont une multitude infinie. Dans cette multitude, comment choisirons-nous celles qui sont dignes de retenir notre attention? Nous laisserons-nous uniquement guider par notre caprice? Ce caprice, qui lui-même d'ailleurs ne tarderait pas à se lasser, nous entraînerait sans doute bien loin les uns des autres et nous cesserions promptement de nous entendre entre nous.

Mais ce n'est là que le petit côté de la question.

La physique nous empêchera sans doute de nous égarer, mais elle nous préservera aussi d'un danger bien plus redoutable; elle nous empêchera de tourner sans cesse dans le même cercle.

L'histoire le prouve, la physique ne nous a pas seulement forcés de choisir entre les problèmes qui se présentaient en foule; elle nous en a imposé auxquels nous n'aurions jamais songé sans elle.

Quelque variée que soit l'imagination de l'homme, la nature est mille fois plus riche encore. Pour la suivre, nous devons prendre des chemins que nous avions négligés et ces chemins nous conduisent souvent à des sommets d'où nous découvrons des paysages nouveaux. Quoi de plus utile!

Il en est des symboles mathématiques comme des réalités physiques; c'est en comparant les aspects différents des choses que nous pourrons en comprendre l'harmonie intime, qui seule est belle et par conséquent digne de nos efforts.

Le premier exemple que je citerai est tellement ancien qu'on serait tenté de l'oublier; il n'en est pas moins le plus important de tous.

Le seul objet naturel de la pensée mathématique, c'est le nombre entier. C'est le monde extérieur qui nous a imposé le continu, que nous avons inventé sans doute, mais qu'il nous a forcés à inventer.

Sans lui il n'y aurait pas d'analyse infinitésimale; toute la science mathématique se réduirait à l'arithmétique ou à la théorie des substitutions.

Au contraire nous avons consacré à l'étude du continu presque tout notre temps et toutes nos forces. Qui le regrettera; qui croira que ce temps et ces forces ont été perdus?

L'analyse nous déroule des perspectives infinies que l'arithmétique ne soupçonne pas; elle vous montre d'un coup d'œil un ensemble grandiose, dont l'ordonnance est simple et symétrique; au contraire, dans la théorie des nombres, où règne l'imprévu, la vue est pour ainsi dire arrêtée à chaque pas.

Sans doute on vous dira qu'en dehors du nombre entier, il n'y a pas de rigueur, et par conséquent pas de vérité mathématique; que partout il se cache, et qu'il faut s'efforcer de rendre transparents les voiles qui le dissimulent, dût-on pour cela se résigner à d'interminables redites.

Ne soyons pas si puristes et soyons reconnaissants au continu qui, si *tout* sort du nombre entier, était seul capable d'en faire *tant* sortir.

Ai-je besoin d'ailleurs de rappeler que M. Hermite a tiré un parti surprenant de l'introduction des variables continues dans la théorie des nombres? Ainsi le domaine propre du nombre entier est envahi lui-même et cette invasion a établi l'ordre, là où régnait le désordre.

Voilà ce que nous devons au continu et par conséquent à la nature physique.

La série de Fourier est un instrument précieux dont l'analyste fait un usage continuel; si Fourier l'a inventée, c'est pour résoudre un problème de physique. Si ce problème ne s'était posé naturellement, on n'aurait jamais osé rendre au discontinu ses droits; on aurait longtemps encore regardé les fonctions continues comme les seules fonctions véritables.

La notion de fonction s'est par là considérablement étendue et a reçu de quelques analystes logiciens un développement imprévu. Ces analystes se sont ainsi aventurés dans des régions où règne l'abstraction la plus pure et se sont éloignés autant qu'il est possible du monde réel. C'est cependant un problème de physique qui leur en a fourni l'occasion.

Derrière la série de Fourier, d'autres séries analogues sont entrées dans le domaine de l'analyse; elles y sont entrées par la même porte; elles ont été imaginées en vue des applications. Il me suffira de citer celles qui ont pour éléments les fonctions sphériques, ou les fonctions de Lamé.

La théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre a eu une histoire analogue; elle s'est développée surtout par et pour la physique.

Si les analystes s'étaient abandonnés à leurs tendances naturelles, voici probablement comment ils auraient envisagé ces équations et comment ils auraient choisi les conditions aux limites.

Supposons par exemple une équation entre deux variables x et y et une fonction F de ces deux variables. Ils se seraient donné F et $\frac{dF}{dx}$ pour $x = 0$. C'est ce qu'a fait par exemple M^me^ de Kowalevski dans son célèbre mémoire.

Mais il y a une foule d'autres manières de poser le problème. On peut se donner F tout le long d'un contour fermé, comme dans le problème de Dirichlet, ou se donner le rapport de F à $\frac{dF}{dn}$ comme dans la théorie de la chaleur.

Toutes ces façons de poser le problème, c'est à la physique que nous les devons. On peut donc dire que sans elle, nous ne connaîtrions pas les équations aux dérivées partielles.

Il est inutile de multiplier les exemples. J'en ai dit assez pour pouvoir conclure: quand les physiciens nous demandent la solution d'un problème, ce n'est pas une corvée qu'ils nous imposent, c'est nous au contraire qui leur devons des remercîments.

IV.

Mais ce n'est pas tout; la physique ne nous donne pas seulement l'occasion de résoudre des problèmes; elle nous aide à en trouver les moyens, et cela de deux manières.

Elle nous fait pressentir la solution; elle nous suggère des raisonnements.

J'ai parlé plus haut de l'équation de Laplace que l'on rencontre dans une foule de théories physiques fort éloignées les unes des autres. On la retrouve en géométrie, dans la théorie de la représentation conforme et en analyse pure, dans celle des imaginaires.

De cette façon, dans l'étude des fonctions de variables complexes, l'analyste, à côté de l'image géométrique, qui est son instrument habituel, trouve plusieurs images physiques dont il peut faire usage avec le même succès.

Grâce à ces images, il peut voir d'un coup d'œil ce que la déduction pure ne lui montrerait que successivement. Il rassemble ainsi les éléments épars de la solution, et par une sorte d'intuition, devine avant de pouvoir démontrer.

Deviner avant de démontrer! Ai-je besoin de rappeler que c'est ainsi que se sont faites toutes les découvertes importantes?

Combien de vérités que les analogies physiques nous permettent de pressentir et que nous ne sommes pas encore en état d'établir par un raisonnement rigoureux!

Par exemple, la physique mathématique introduit un grand nombre de développements en séries. Ces développements convergent, personne n'en doute; mais la certitude mathématique fait défaut.

Ce sont autant de conquêtes assurées pour les chercheurs qui viendront après nous.

La physique, d'autre part, ne nous fournit pas seulement des solutions; elle nous fournit encore, dans une certaine mesure, des raisonnements.

Il me suffira de rappeler comment M. Klein, dans une question relative aux surfaces de Riemann, a eu recours aux propriétés des courants électriques.

Il est vrai que les raisonnements de ce genre ne sont pas rigoureux, au sens que l'analyste attache à ce mot.

Et, à ce propos, une question se pose: comment une démonstration, qui n'est pas assez rigoureuse pour l'analyste, peut-elle suffire au physicien? Il semble qu'il ne peut y avoir deux rigueurs, que la rigueur est ou n'est pas, et que, là où elle n'est pas, il ne peut y avoir de raisonnement. On comprendra mieux ce paradoxe apparent, en se rappellant dans quelles conditions le nombre s'applique aux phénomènes naturels.

D'où proviennent en général les difficultés que l'on rencontre quand on recherche la rigueur? On s'y heurte presque toujours en voulant établir que telle quantité tend vers telle limite, ou que telle fonction est continue, ou qu'elle a une dérivée.

Or les nombres que le physicien mesure par l'expérience ne lui sont jamais connus qu'approximativement; et, d'autre part, une fonction quelconque diffère toujours aussi peu que l'on veut d'une fonction discontinue, et en même temps elle diffère aussi peu que l'on veut d'une fonction continue.

Le physicien peut donc supposer à son gré, que la fonction étudiée est continue, ou qu'elle est discontinue; qu'elle a une dérivée, ou qu'elle n'en a pas; et cela sans crainte d'être jamais contredit, ni par l'expérience actuelle, ni par aucune expérience future. On conçoit, qu'avec cette liberté, il se joue des difficultés qui arrêtent l'analyste.

Il peut toujours raisonner comme si toutes les fonctions qui s'introduisent dans ses calculs étaient des polynômes entiers.

Ainsi l'aperçu qui suffit à la physique n'est pas le raisonnement qu'exige l'analyse. Il ne s'en suit pas que l'un ne puisse aider à trouver l'autre.

On a déjà transformé en démonstrations rigoureuses tant d'aperçus physiques que cette transformation est aujourd'hui facile.

Les exemples abonderaient si je ne craignais, en les citant, de fatiguer votre attention et si cette conférence n'était déjà trop longue.

J'espère en avoir assez dit pour montrer que l'analyse pure et la physique mathématique peuvent se servir l'une l'autre sans se faire l'une à l'autre aucun sacrifice et que chacune de ces deux sciences doit se réjouir de tout ce qui élève son associée.

Über die Entwickelung der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen in neuerer Zeit.*)

Von

A. Hurwitz in Zürich.

Die allgemeine Theorie der analytischen Funktionen, über deren Entwickelung in neuerer Zeit ich Ihnen berichten möchte, besitzt in zweifacher Hinsicht ein hohes Interesse. Einerseits giebt sie uns die allgemeinen Gesichtspunkte und Hülfsmittel für die Untersuchung spezieller Funktionen irgend welcher Art. In dieser Hinsicht brauche ich nur zu erinnern an die Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale, ferner an die neueren Untersuchungen von Klein, Poincaré u. a. über die Funktionen mit linearen Transformationen in sich, endlich an die ausgedehnte Theorie der durch algebraische Differentialgleichungen definierten Transcendenten.

Auf der anderen Seite hat die allgemeine Theorie der analytischen Funktionen ein mehr selbständiges, erkenntnistheoretisches Interesse. Sie leitet insbesondere zu den prinzipiellen Grundlagen aller Gröfsen-

*) Der Vortrag erscheint hier im wesentlichen in unveränderter Form. Nur an einigen wenigen Stellen habe ich den ursprünglichen Text des Vortrages verbessert, zumeist auf Grund von Besprechungen mit Fachgenossen, die an dem Kongresse teilnahmen. Wenn sich trotzdem, was mir sehr wahrscheinlich, ja beinahe gewifs erscheint, noch Ungenauigkeiten im Einzelnen finden, dadurch hervorgerufen, dafs mir wichtige Arbeiten entgangen sind, so darf ich wohl in Rücksicht auf die aufserordentliche Ausdehnung der einschlägigen Litteratur auf einige Nachsicht rechnen. Was die Umgrenzung des Stoffes angeht, die ja der Natur der Sache nach bis zu einem gewissen Grade willkürlich blieb, so war für mich der Wunsch mafsgebend, namentlich diejenigen Punkte zur Sprache zu bringen, welche in naher Beziehung zu den Grundlagen der Gröfsenlehre stehen. Übrigens war eine möglichste Beschränkung des Stoffes schon durch den Umstand geboten, dafs für den Vortrag nur eine eng begrenzte Zeit zur Verfügung stand. Dem Texte des Vortrages habe ich hier ein ausführliches Litteraturverzeichnis, sowie einige Anmerkungen angefügt, welche einzelne im Vortrage berührte Punkte weiter ausführen und erläutern.

forschung zurück und vervollkommnet und festigt hier die Fundamente, auf welchen die gesamte Analysis aufgebaut ist.

Bei meinen Ausführungen werde ich vielfach diese letztere Seite der allgemeinen Funktionentheorie in den Vordergrund stellen. Es geschieht dies in der Meinung, daſs die Fragen prinzipieller Natur auch über den engeren Kreis der Funktionentheoretiker hinaus Interesse beanspruchen dürften.

Unter dem Namen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen begreifen wir eigentlich zwei Theorien: die Cauchy-Riemann'sche und die Weierstraſs'sche.

Ihr wesentlicher Unterschied liegt darin, daſs sie von verschiedenen Definitionen des Funktionsbegriffes ausgehen. Da die Definition von Weierstraſs den elementareren Charakter hat, so knüpfe ich an sie an.

Lagrange hatte in seiner „Théorie des Fonctions analytiques" den unrichtigen Satz zu beweisen versucht, daſs jede stetige Funktion in eine Potenzreihe entwickelbar ist. Weierstraſs sagt umgekehrt: ich nenne eine Funktion „analytisch", wenn sie sich in eine Potenzreihe entwickeln läſst. Diese Festsetzung bedarf natürlich noch einer präziseren Fassung. In voller Schärfe hat Weierstraſs seinen Funktionsbegriff nicht sowohl in seinen Abhandlungen als vielmehr in seinen Universitäts-Vorlesungen entwickelt und zwar folgendermaſsen:

Wir stellen die Werte der komplexen Variabeln z in üblicher Weise durch die Punkte einer Ebene dar. Eine nach ganzen positiven Potenzen von $z - a$ fortschreitende Reihe konvergiert dann in einem Kreise, dessen Mittelpunkt der Punkt a ist. Beiläufig bemerkt, hängt der Radius dieses Kreises von den Koeffizienten der Potenzreihe nach einem einfachen Gesetze ab, welches schon Cauchy[1]) angegeben hat, das aber erst in neuerer Zeit durch eine Arbeit von Herrn Hadamard[2]), der es unabhängig von Cauchy wieder entdeckt hat, in weiteren Kreisen bekannt geworden ist.

Weierstraſs betrachtet nun zwei Potenzreihen, deren Konvergenzkreise verschiedene Mittelpunkte besitzen, jedoch ein Flächenstück gemeinsam haben. Wenn in jedem Punkte dieses gemeinsamen Stückes die beiden Potenzreihen denselben Wert annehmen, so heiſst jede der Potenzreihen eine unmittelbare Fortsetzung der anderen. Allgemeiner heiſsen zwei Potenzreihen schlechthin Fortsetzungen von einander, wenn sie Anfangs- und Endglied einer endlichen Reihe von Potenzreihen sind, von denen jede eine unmittelbare Fortsetzung der vorhergehenden ist.

Geht man nun von einer bestimmten Potenzreihe aus und faſst dieselbe mit allen ihren Fortsetzungen zu einem Systeme zusammen, so hat man das vor sich, was Weierstraſs ein monogenes System von Potenzreihen nennt. Ein solches System erzeugt eine bestimmte Funktion der komplexen Variabeln z, d. h. es ordnet den Werten der Variabeln z bestimmte komplexe Zahlenwerte $f(z)$ zu. Man fasse nämlich einen bestimmten Wert von z ins Auge; dann wird jede Potenzreihe des Systemes, deren Konvergenzkreis den Punkt z in seinem Innern enthält, für den betrachteten Wert von z eine bestimmte Summe $f(z)$ besitzen. Sind die den verschiedenen Potenzreihen des Systemes entsprechenden Werte $f(z)$ sämtlich unter einander gleich, so wird die Funktion $f(z)$ für den betrachteten Wert von z eindeutig sein, im anderen Falle mehrdeutig.

Eine Funktion heiſst nun nach Weierstraſs analytisch, wenn sie in der geschilderten Weise durch ein monogenes System von Potenzreihen definiert werden kann.

Wie man sieht, ist der Begriff des monogenen Systemes von Potenzreihen das Primäre; auf ihn baut sich erst der Funktionsbegriff auf. Bemerkt sei übrigens, daſs der französische Mathematiker Méray[3]) unabhängig von Weierstraſs einen im wesentlichen mit dem Weierstraſs'schen übereinstimmenden Begriff der analytischen Funktion aufgestellt hat.

An diese Definition der analytischen Funktion knüpft sich nun sofort eine Reihe von wichtigen Fragen. Ich will zunächst nur eindeutige Funktionen betrachten. Liegt eine eindeutige Funktion vor, definiert durch ein monogenes System von Potenzreihen, so scheiden sich die Punkte der komplexen Zahlenebene in zwei Kategorien. Die eine Kategorie wird von denjenigen Punkten gebildet, die in das Innere des Konvergenzkreises von Potenzreihen des Systemes fallen, die andere Kategorie von allen übrigen Punkten. Die Gesamtheit der ersteren Punkte heiſst nach Weierstraſs der „Stetigkeitsbereich“ der Funktion[4]). Hier erhebt sich nun zunächst die Frage:

Welche Möglichkeiten liegen in bezug auf die Gestaltung des Stetigkeitsbereiches einer eindeutigen analytischen Funktion vor?

Um die Antwort auf diese Frage in präziser Weise aussprechen zu können, muſs ich an einige Begriffe aus der Lehre von den Punktmengen erinnern. Man denke sich irgend eine Punktmenge in der Zahlenebene oder auch auf einer Kugel, die stereographisch auf die Zahlenebene bezogen ist. Ein beliebiger Punkt der Ebene oder der Kugel kann sich dann auf drei verschiedene Arten in bezug auf die Punktmenge verhalten. Entweder läſst sich um den Punkt ein Kreis so legen, daſs alle Punkte im Innern dieses Kreises der Punktmenge angehören. Der betreffende Punkt heifst dann ein innerer Punkt der Menge. Oder es läfst sich um den Punkt ein Kreis so legen, dafs kein Punkt im Innern des Kreises der Menge angehört. Der betreffende Punkt heifst dann ein äufserer Punkt der Menge. Oder endlich kann es sein, dafs jeder um den Punkt abgegrenzte Kreis sowohl mindestens einen Punkt enthält, der zur Menge gehört, als auch mindestens einen, der nicht zur Menge gehört. In diesem Falle sagt man, dafs der betreffende Punkt an der Grenze der Menge liegt.

Der Stetigkeitsbereich einer eindeutigen analytischen Funktion ist nun, wie man leicht einsieht, jedenfalls eine Punktmenge, welche erstens ausschliefslich aus inneren Punkten besteht und zweitens in sich zusammenhängt, womit gemeint ist, dafs man zwischen je zwei Punkten der Menge eine endliche Anzahl von Punkten der Menge einschalten kann, so dafs der Abstand von je zwei auf einander folgenden Punkten unter einer beliebig klein vorgeschriebenen Gröfse liegt.

Nennen wir eine Punktmenge, welche diese beiden Eigenschaften besitzt, zur Abkürzung ein „Kontinuum", so können wir sagen, dafs der Stetigkeitsbereich einer eindeutigen analytischen Funktion stets ein Kontinuum ist. Die Antwort auf die vorhin aufgeworfene Frage lautet nun dahin, dafs hiermit das Charakteristische des Stetigkeitsbereiches bezeichnet ist. Es gilt also der Satz:

Ist ein Kontinuum beliebig gegeben, so giebt es stets eindeutige analytische Funktionen, deren Stetigkeitsbereich mit dem gegebenen Kontinuum identisch ist.

Dieser grundlegende Satz ist zuerst von Herrn Mittag-Leffler[5]) bewiesen worden in einer Abhandlung, welche die analytische Darstellung der eindeutigen Funktionen betrifft. In sehr einfacher und elementarer Weise haben sodann Herr Runge[6]) und später Herr Stäckel[7]) denselben Satz begründet.

Zu weiteren und tiefer liegenden Fragen führt die Betrachtung derjenigen Punkte, welche an der Grenze des Stetigkeitsbereiches liegen. Diese sogenannten singulären Punkte oder Stellen bilden für sich eine Punktmenge, deren Beschaffenheit das wichtigste Einteilungsprinzip für die eindeutigen Funktionen abgiebt.

Nach der klassischen Abhandlung von Weierstrafs aus dem Jahre 1876, „Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen"[4]), in welcher das erwähnte Klassifikationsprinzip wohl zum ersten Male in voller Schärfe ausgesprochen wird, hat sich Herr Guichard[8]) und später in weitgehendster Allgemeinheit Herr Mittag-Leffler in der schon genannten Arbeit mit diesem Gegenstande beschäftigt.

Die Grundlage der ganzen Untersuchung bilden hier die allgemeinen

Sätze von Herrn Cantor[9]) über Punktmengen, welche in Rücksicht auf ihre Anwendung in der Funktionentheorie von den Herren Bendixson[10]) und Phragmèn[11]) in mehreren Punkten ergänzt worden sind.

Bei diesen Sätzen spielen die transfiniten Zahlen Cantor's eine wichtige Rolle. Ich mufs deshalb zunächst auf diese Zahlgebilde, welche eine wesentliche Verallgemeinerung des Begriffes der gewöhnlichen ganzen Zahl darstellen, näher eingehen.

Betrachten wir die Reihe der gewöhnlichen positiven ganzen Zahlen, so vollzieht sich der Übergang von einer Zahl zu der nächstfolgenden durch die Addition einer Einheit. Diese Operation der Addition einer Einheit heifse das erste Erzeugungsprinzip. Durch fortgesetzte Anwendung des ersten Erzeugungsprinzipes entsteht die Reihe der gewöhnlichen ganzen Zahlen aus der am Anfang der Reihe stehenden Zahl 1. Aber mit der Herstellung der gewöhnlichen ganzen Zahlen aus der Zahl 1 ist die Wirksamkeit des ersten Erzeugungsprinzipes zunächst völlig erschöpft. Um eine Zählung über die Reihe der gewöhnlichen ganzen Zahlen hinaus zu ermöglichen, bedarf es daher eines zweiten Erzeugungsprinzipes.

Dieses besteht in Folgendem: Man denke sich eine bestimmte Menge von Objekten, die in einer bestimmten Rangordnung gegeben sind, jedoch so, dafs ein dem Range nach höchstes nicht existiert. Man kann dann den Inbegriff dieser Objekte als einen neuen Begriff in die Betrachtung einführen. Und nun soll dieser neue Begriff, wenn die Objekte der Menge schon als ganze Zahlen bezeichnet worden sind, ebenfalls eine ganze Zahl und zwar die nächst höhere ganze Zahl genannt werden. In diesem Vorgang der Schaffung einer neuen ganzen Zahl aus einer unendlichen Folge schon vorhandener ganzer Zahlen, unter denen sich eine gröfste nicht findet, besteht das zweite Erzeugungsprinzip. So liefert die Zusammenfassung der Reihe der gewöhnlichen ganzen Zahlen zu einem Inbegriff die erste überendliche Zahl ω, die also die nächstgröfsere ganze Zahl zu allen gewöhnlichen ganzen Zahlen ist. Nach der Schaffung dieser ganzen Zahl ω vermöge des zweiten Erzeugungsprinzipes setzt nun das erste Erzeugungsprinzip wieder ein und liefert uns die an ω sich anschliefsende Reihe ganzer Zahlen $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\omega + 3$, u. s. f. Da in der Succession der gewöhnlichen ganzen Zahlen und der sich daranschliefsenden Zahlen ω, $\omega + 1$, $\omega + 2$, u. s. f. eine gröfste sich nicht findet, so tritt aufs neue das zweite Erzeugungsprinzip in Kraft, welches uns die nächstgröfsere, am zweckmäfsigsten mit $\omega . 2$ zu bezeichnende ganze Zahl liefert. An diese legt sich vermöge des ersten Erzeugungsprinzipes die Reihe der Zahlen $\omega . 2 + 1$, $\omega . 2 + 2, \ldots$ an. Auf diese Weise entsteht durch das Ineinandergreifen des ersten und zweiten Erzeugungsprinzipes die ins Schrankenlose sich ausdehnende Reihe der endlichen und überendlichen ganzen Zahlen.

Nun ist es sehr merkwürdig, dafs das System dieser Zahlen natürliche Einschnitte darbietet, durch welche dasselbe in bestimmte Zahlklassen zerfällt.

Zunächst wird man die gewöhnlichen endlichen ganzen Zahlen zu einer ersten Zahlklasse zusammenfassen. Betrachten wir sodann eine überendliche Zahl α, so ist es möglich, dafs diejenigen Zahlen, die kleiner sind als α, durch die Zahlen der ersten Zahlklasse abzählbar sind, d. h. dafs die Zahlen, die kleiner sind als α, sich den gewöhnlichen ganzen Zahlen eindeutig umkehrbar zuordnen lassen. Die überendlichen Zahlen α von dieser Eigenschaft bilden die zweite Zahlklasse. Die Zahlen der zweiten Zahlklasse bilden eine Menge, welche nicht durch die Zahlen der ersten Zahlklasse abzählbar ist. Auf diese Thatsache gründet sich die Definition der dritten Zahlklasse u. s. f.

Diese allgemeinen Begriffsbestimmungen finden nun sofort ihre Anwendung in der Lehre von den Punktmengen. Einfachheit halber beschränke ich mich hier auf den Fall, der zunächst ausschliefslich in Betracht kommt, wo es sich nämlich um Punktmengen auf einer Kugel handelt.

Besteht eine solche Punktmenge P aus unendlich vielen Punkten, so besitzt sie bekanntlich Grenzstellen, d. h. es giebt dann solche Punkte auf der Kugel, in deren noch so kleiner Umgebung sich unendlich viele Punkte der Menge finden.

Der Inbegriff dieser Grenzstellen bildet eine Punktmenge P', welche nach Cantor die Ableitung der Punktmenge P heifst. Besteht die Punktmenge P nur aus einer endlichen Zahl von Punkten, so sind Grenzstellen nicht vorhanden. Man sagt dann, dafs ihre Ableitung P' gleich Null ist.

Wenn alle Punkte der Ableitung P' auch der ursprünglichen Menge P angehören, so heifst die Menge P „abgeschlossen“. Es genügt, weiterhin nur Mengen dieser Art zu betrachten, denn die singulären Punkte einer eindeutigen analytischen Funktion bilden stets eine abgeschlossene Menge. (Mit anderen Worten: jede Grenzstelle von singulären Punkten ist ebenfalls ein singulärer Punkt.)

Man betrachte nun irgend eine abgeschlossene Punktmenge P auf der Kugel. Die Ableitung derselben sei P', die Ableitung von P' sei P'', die von P'' sei P''' u. s. f. Auf diese Weise entspringt aus der Menge P die Reihe von Punktmengen

$$P', P'', P''', \dots .$$

Nun fasse man diejenigen Punkte zusammen, die in jeder einzelnen dieser Punktmengen enthalten sind. Diese bilden wieder eine Punktmenge, die mit $P^{(\omega)}$ bezeichnet wird, wo der Index ω die erste überendliche Zahl bedeutet. Die Ableitung von $P^{(\omega)}$ heifse $P^{(\omega+1)}$, die von $P^{(\omega+1)}$ heifse $P^{(\omega+2)}$ u. s. w. Die gemeinsamen Punkte von $P', P'', P''' \ldots P^{(\omega)}, P^{(\omega+1)}, P^{(\omega+2)}, \ldots$ bilden eine Punktmenge, die mit $P^{(\omega \cdot 2)}$ bezeichnet wird u. s. f. Man sieht, wie man durch Fortsetzung dieses Prozesses zu jeder endlichen oder überendlichen Zahl α eine bestimmte Ableitung $P^{(\alpha)}$ erhält. (Dabei ist es nicht ausgeschlossen, dafs einmal eine dieser Ableitungen, und dann auch jede folgende, gleich Null wird.) Für die Funktionentheorie kommen nun die folgenden beiden Sätze von Cantor in Betracht:

1) Ist die abgeschlossene Punktmenge P abzählbar, so giebt es stets eine Ableitung $P^{(\alpha)}$, die nur aus einer endlichen Zahl von Punkten besteht. Und zwar ist α eine Zahl der ersten oder zweiten Zahlklasse.
2) Ist die abgeschlossene Punktmenge P nicht abzählbar, so giebt es unter den Ableitungen von P keine einzige, die nur aus einer endlichen Zahl von Punkten besteht. Dagegen giebt es eine Zahl α der ersten oder zweiten Zahlklasse, für welche die Ableitung $P^{(\alpha)}$ mit der folgenden $P^{(\alpha+1)}$ identisch ist.

Diese Ableitung $P^{(\alpha)}$ ist eine sogenannte perfekte Punktmenge, nämlich eine solche, die nicht nur alle ihre Grenzstellen enthält, sondern für welche auch jeder ihrer Punkte Grenzstelle ist.

Die Cantor'schen Sätze lehren nun, dafs die eindeutigen analytischen Funktionen in zwei grofse Klassen zerfallen:

Die eine Klasse umfafst die Funktionen, deren singuläre Punkte eine abzählbare Menge bilden, die andere Klasse diejenigen Funktionen, deren singuläre Punkte eine nicht abzählbare Menge bilden.

Durch die Methoden, welche dem Beweise des Mittag-Leffler'schen Satzes zu Grunde liegen, gelingt es, die Funktionen der ersten Klasse durch einfach geordnete Summen darzustellen, deren Glieder je nur einen einzigen singulären Punkt besitzen, welcher zugleich singulärer Punkt der darzustellenden Funktion ist. Für die Funktionen der zweiten Klasse ist dies nicht möglich. Hier kann man nur durch Subtraktion einer Summe der genannten Art gewisse singuläre Punkte zum Fortfallen bringen. Die restierende Differenz ist dann eine Funktion, deren singuläre Punkte eben jene perfekte Menge $P^{(\alpha)}$ bilden, auf welche der Ableitungsprozefs führt.

In bezug auf die analytische Darstellung besitzen hiernach die

Funktionen, deren singuläre Punkte eine perfekte Menge bilden, einen irreducibeln Charakter. Die Funktionen dieser Art lassen sich übrigens noch auf eine andere Weise charakterisieren. Irgend ein singulärer Punkt kann nämlich entweder Grenzstelle von singulären Punkten sein oder nicht. Im letzteren Falle heifst der singuläre Punkt „isoliert“. Und nun sind die in Rede stehenden Funktionen keine anderen als solche, welche isolierte singuläre Punkte überhaupt nicht besitzen.

Bei der analytischen Darstellung der eindeutigen Funktionen tritt ein zuerst von Weierstrafs bemerkter Umstand zu Tage, den ich kurz berühren will, da sich auf ihn eine grofse Zahl neuerer Arbeiten bezieht. Es liegt die Vermutung nahe, dafs eine konvergierende Reihe, deren Glieder rationale Funktionen sind, immer eine einzige analytische Funktion definiert. Dem ist aber nicht so; vielmehr giebt es derartige Reihen, welche in verschiedenen Gebieten gänzlich verschiedene analytische Funktionen darstellen.[12])

Eine andere ebenfalls von Weierstrafs zuerst bemerkte Thatsache folgt unmittelbar aus dem vorhin erwähnten Satze, nach welchem zu jedem Kontinuum eindeutige analytische Funktionen gehören. Ich meine die Thatsache, dafs es Funktionen mit natürlichen Grenzen giebt, d. h. solche Funktionen, deren Stetigkeitsbereich mit den seine Begrenzung bildenden singulären Punkten die Zahlenkugel nicht völlig bedeckt. Aus didaktischen Gründen ist es wünschenswert, einfache Beispiele solcher Funktionen zu besitzen. Diesem Bedürfnisse kommt eine ganze Reihe von Arbeiten nach, die sich zum grofsen Teil auf eine besondere Klasse derartiger Funktionen beziehen.[13]) Man betrachte eine Potenzreihe mit endlichem Konvergenzradius, die eine über ihren Konvergenzkreis hinausreichende Fortsetzung nicht besitzt. Der Stetigkeitsbereich der Funktion, die durch eine solche Potenzreihe definiert ist, wird offenbar durch das Innere des Konvergenzkreises gebildet; die singulären Punkte der Funktion sind die Punkte auf der Peripherie des Konvergenzkreises. Man hat sich übrigens nach den Arbeiten, welche diese Potenzreihen betreffen, die Vorstellung zu bilden, dafs in gewissem Sinne die über den Konvergenzkreis hinaus fortsetzbaren Potenzreihen die Ausnahme, die nicht fortsetzbaren die Regel bilden.[14])

Doch kehren wir zu der Klassifikation der eindeutigen analytischen Funktionen zurück. Nachdem dieselben nach der Beschaffenheit der Punktmenge eingeteilt sind, welche von den singulären Punkten gebildet wird, liegt es nahe, als weiteres Einteilungsprinzip das Verhalten der Funktionen in der Nachbarschaft der singulären Punkte heranzuziehen. Die erste Frage, welche sich hier darbietet, ist die: welches sind die charakteristischen Unterschiede, die sich in bezug auf das Verhalten einer Funktion in der Nähe eines singulären Punktes zeigen können?

Betrachten wir zunächst einen isolierten singulären Punkt, so können die Funktionswerte bei unbegrenzter Annäherung des Argumentes an den singulären Punkt zweifaches Verhalten zeigen: entweder wachsen die Funktionswerte, in welcher Weise auch die Annäherung geschieht, über alle Grenzen oder nicht. Im ersten Falle heifst bekanntlich der singuläre Punkt ein Pol oder „aufserwesentlich“, im letzteren Falle „wesentlich“. Man denke sich nun weiter um einen isolierten wesentlich-singulären Punkt irgend einen Kreis gelegt, welcher in seinem Innern keinen weiteren singulären Punkt enthält und beachte die Werte, welche die Funktion im Innern dieses Kreises annimmt. Nach einem klassischen Theorem von Herrn Picard sind dann nur zwei Fälle möglich: entweder befindet sich unter den betrachteten Funktionswerten jeder beliebige endliche Wert oder aber jeder beliebige endliche Wert mit Ausnahme eines einzigen.

Den Beweis dieses Satzes stützt Herr Picard auf die Eigenschaften der Modulfunktionen. Spezielle Fälle dieses Satzes haben später die Herren Hadamard und Borel mit elementareren Hülfsmitteln bewiesen.[15])

Ein ähnlicher Satz, wie der Picard'sche, ist für nicht isolierte singuläre Punkte nicht bekannt. Überhaupt ist meines Wissens eine eingehende Studie des Verhaltens einer analytischen Funktion in der Nachbarschaft eines nicht isolierten singulären Punktes nicht vorhanden. Indessen ist eine hierhergehörige Thatsache zu erwähnen, die unmittelbar aus einer Arbeit des Herrn Lerch folgt, später von Herrn Fredholm besonders hervorgehoben und von Herrn Pringsheim zum Gegenstand ausführlicher Betrachtung gemacht worden ist.[16]) Wie vorhin bemerkt, definiert eine Potenzreihe mit endlichem Konvergenzradius, die über den Konvergenzkreis hinaus nicht fortsetzbar ist, eine eindeutige analytische Funktion, deren singuläre Punkte die Punkte der Peripherie des Konvergenzkreises sind. Man kann nun Beispiele solcher Potenzreihen bilden, für welche nicht nur die analytische Funktion, sondern auch ihre sämtlichen Ableitungen für den Konvergenzkreis einschliefslich seiner Peripherie stetig sind.

Was die mehrdeutigen analytischen Funktionen angeht, so sind für diese allgemein die charakteristischen Eigenschaften ihres Definitionsbereiches, der die Kugel oder Teile derselben mehrfach, eventuell unendlich vielfach überdeckt, bislang nicht aufgestellt worden. Wir wissen hierüber jedoch wenigstens Folgendes:

Betrachtet man einen bestimmten Wert des Argumentes z, so bilden die zugehörigen Werte einer unendlich vieldeutigen analytischen

Funktion stets eine abzählbare Menge. Mit dem Beweise dieses, von Herrn Cantor aufgestellten Satzes beschäftigen sich Arbeiten der Herren Vivanti, Poincaré und Volterra.[17]) Der Satz zeigt, daſs jedenfalls für die Nachbarschaft eines bestimmten Wertes z eine jede unendlich vieldeutige Funktion in Riemann'scher Weise eindeutig gemacht werden kann durch Verteilung der Funktionswerte auf unendlich viele Blätter, die in bestimmter Weise numeriert sind.

In anderer Ideenverbindung werden die vieldeutigen Funktionen durch einen Satz von Herrn Poincaré auf eindeutige zurückgeführt.[18]) Herr Poincaré zeigt, daſs sich zwei komplexe Veränderliche, von welchen die eine analytische Funktion der anderen ist, unter allen Umständen als eindeutige analytische Funktionen einer Hülfsvariabeln darstellen lassen.

Wenn sich auch in der Funktionentheorie von Weierstraſs die Definition der analytischen Funktion als naturgemäſse Verallgemeinerung des Zahlbegriffes darstellt, so kann man doch gegen diese Definition den Einwand erheben, daſs sie die Funktionen als analytische durch eine spezielle Darstellungsform derselben, nämlich in Gestalt von Potenzreihen, charakterisiert. Diesem Einwande ist die Cauchy'sche Definition, welche Riemann adoptiert hat, nicht unterworfen. Dafür tritt aber bei der Cauchy'schen Definition ein anderer Miſsstand zu Tage: bei ihr bereitet nämlich die einwurfsfreie Begründung der Theorie gleich von Anfang an sehr erhebliche Schwierigkeiten. Der innere Grund hierfür liegt darin, daſs die Heranziehung des Grenzbegriffes in seinen schwierigsten Formen von vornherein notwendig wird. Cauchy und Riemann waren sich freilich dieser Schwierigkeiten nicht voll bewuſst. Erst neuere Autoren sind auf die Frage eingegangen, wie man die Cauchy-Riemann'sche Theorie in strenger Weise zu begründen hat. Dabei zeigte sich zunächst, daſs die Cauchy'sche Definition, nach welcher eine Funktion analytisch — oder, wie Cauchy sagt, synektisch — heiſst, wenn sie einen eindeutigen Differentialquotienten besitzt, durch eine schärfere ersetzt werden muſs. Man hat etwa folgendermaſsen zu definieren:

Eine Funktion, die für ein Kontinuum der Zahlenebene irgendwie definiert ist, heiſst synektisch, wenn sie in jedem Punkte des Kontinuums stetig ist und einen Differentialquotienten, sowohl in der Richtung der wachsenden Abscissen als auch in der Richtung der wachsenden Ordinaten besitzt; wenn ferner diese beiden Differentialquotienten in jedem Punkte denselben Wert haben und dieser gemeinsame Wert ebenfalls eine in dem Kontinuum stetige Funktion ist.

Wenn man mit Cauchy und Riemann die synektischen Funktionen durch die Existenz eines eindeutigen Differentialquotienten charakterisiert, so ist es natürlich, zunächst zu fragen, wie sich diese Funktionen bezüglich der Integration verhalten. Hierauf giebt bekanntlich der Cauchy'sche Integralsatz die Antwort. Man kann diesen Satz kurz, wenn auch etwas ungenau, dahin aussprechen, dafs die synektischen Funktionen nicht nur eine eindeutige Differentiation, sondern auch eine eindeutige Integration zulassen.

Man kann sogar die Forderung der eindeutigen Integrierbarkeit an Stelle derjenigen der eindeutigen Differenzierbarkeit zum Ausgangspunkt der ganzen Theorie nehmen. Dies folgt aus einer interessanten Bemerkung von Morera[19]), nach welcher eine Funktion, die in einem Kontinuum stetig ist und durch jede geschlossene Kurve integriert das Resultat 0 liefert, notwendig im Cauchy'schen Sinne synektisch ist. Der Cauchy'sche Integralsatz ist leicht zu beweisen für den Fall, dafs man als Integrationskurve gewisse einfache Linien, z. B. einen Kreis oder den Umfang eines Rechteckes wählt. Für viele Zwecke, wie z. B. für den Nachweis, dafs der Cauchy'sche und der Weierstrafs'sche Funktionsbegriff sich decken, genügen auch derartige spezielle Fälle. Indessen entfaltet doch der Cauchy'sche Satz seine grofse Fruchtbarkeit erst in seiner allgemeinen Fassung und in dieser ist der Beweis des Satzes nicht ohne Schwierigkeit. Neuere Arbeiten, die sich mit der einwurfsfreien Begründung des Cauchy'schen Satzes beschäftigen, rühren von den Herren Falk, Goursat, Lerch, Jordan und Pringsheim her.[20]) Man kann den Cauchy'schen Satz auf folgende Weise aussprechen:

Ist die Funktion $f(z)$ synektisch in einem Kontinuum, in welchem jede einfach geschlossene Linie die volle Begrenzung eines Flächenstückes bildet, so ist das Integral $\int f(z)dz$ jedesmal dann Null, wenn es durch eine geschlossene Linie erstreckt wird, die ganz im Innern des Kontinuums verläuft.

Hier erheben sich nun zunächst die Fragen: was ist eine einfach geschlossene Linie, was ist eine Linie, insbesondere eine geschlossene Linie überhaupt, und sind alle oder nur gewisse geschlossene Linien in dem Ausspruch des Cauchy'schen Satzes zulässig?

Ich möchte diese Fragen hier um so lieber erörtern, als sie von prinzipiellem Interesse sind. Dabei gehe ich von folgender Betrachtung aus:

Eine abgeschlossene Punktmenge P sei auf eine andere abgeschlossene Punktmenge Q derart bezogen, dafs jedem Punkte der Menge P

ein bestimmter Punkt der Menge Q entspricht. Die Beziehung soll überdies folgendermaßsen beschaffen sein:

Wenn die Punkte A_1, A_2, A_3 u. s. f. der Menge P eine einzige Grenzstelle A besitzen, so sollen die entsprechenden Punkte B_1, B_2, B_3 u. s. f. der Menge Q ebenfalls eine einzige Grenzstelle B besitzen, und der Grenzstelle A soll dann jedesmal die Grenzstelle B entsprechen.

Unter diesen Voraussetzungen heiſse die Punktmenge Q stetig auf die Punktmenge P bezogen oder ein stetiges Bild der Punktmenge P.

Nun kommt die gewöhnliche Definition eines Kurvenbogens, welche diesen als Ort eines Punktes erklärt, dessen Koordinaten stetige Funktionen einer reellen Veränderlichen sind, auf Folgendes hinaus:

Eine abgeschlossene Punktmenge wird ein stetiger Kurvenbogen genannt, wenn sie das stetige Bild einer geradlinigen Strecke ist.

Man darf hierbei nicht vergessen, daſs dieser Begriff eines stetigen Kurvenbogens nicht dem entspricht, was man sich anschauungsmäſsig unter einem stetigen Kurvenbogen vorzustellen pflegt. In der That haben die Herren Peano und Hilbert[21]) gezeigt, daſs z. B. die Punkte eines Quadrates als ein stetiges Bild einer geradlinigen Strecke aufgefaſst werden können. Die Punkte eines Quadrates bilden also in dem festgesetzten Sinne einen stetigen Kurvenbogen. Freilich ist dabei festzuhalten, daſs die Punkte des Quadrates in einer bestimmten Anordnung gedacht werden, insofern sie eben den Punkten einer geradlinigen Strecke zugeordnet sind.

Was nun den Begriff einer einfach geschlossenen stetigen Kurve angeht, so läſst sich derselbe an die folgenden allgemeinen Betrachtungen anknüpfen:

Die abgeschlossene Punktmenge Q sei ein stetiges Bild der abgeschlossenen Punktmenge P, zugleich sei aber die Beziehung zwischen den Punkten der beiden Mengen eindeutig umkehrbar. (Dann ist offenbar auch die Punktmenge P ein stetiges Bild der Punktmenge Q.)

Zwei Punktmengen, die in dieser Weise eindeutig umkehrbar und stetig auf einander bezogen werden können, will ich äquivalent nennen und auf diesen Äquivalenzbegriff eine Einteilung der Punktmengen in Klassen gründen. Zwei abgeschlossene Punktmengen werden hiernach in dieselbe Klasse gerechnet oder nicht, je nachdem sie äquivalent sind oder nicht. Diese Einteilung der Punktmengen in Klassen bildet, beiläufig bemerkt, die allgemeinste Grundlage der Analysis situs. Die Aufgabe der Analysis situs ist es, die Invarianten der einzelnen Klassen von Punktmengen aufzusuchen.

Eine einfach geschlossene stetige Kurve ist nun eine Punktmenge, welche in dieselbe Klasse gehört, wie die von den Punkten auf dem Rande eines Quadrates gebildete Punktmenge.

Hieran knüpft sich nun weiter der grundlegende Satz:

Wenn eine einfach geschlossene stetige Kurve in einer Ebene liegt, so teilt sie dieselbe in zwei Kontinua, deren gemeinsame Begrenzung durch die Kurve gebildet wird.

In etwas anderer Fassung hat Herr C. Jordan in seinem Cours d'Analyse diesen Satz aufgestellt und bewiesen, während für einen speziellen Fall des Satzes neuerdings Herr Schoenflies einen einfachen Beweis geliefert hat.[22])

Sind nun so die Begriffe stetige Kurve und einfach geschlossene stetige Kurve festgelegt, so bedarf es noch der näheren Bestimmung darüber, welche Kurven im Ausspruch des Cauchy'schen Satzes als Integrationskurven zulässig sind. Zu diesem Zwecke müssen wir auf die Definition der Länge eines Kurvenbogens eingehen.

Liegt ein stetiger Kurvenbogen vor, so können wir ihm einen vom Anfangs- bis zum Endpunkte führenden geradlinigen Streckenweg einbeschreiben und dann die Eckpunkte dieses Streckenweges auf dem Kurvenbogen überall dicht werden lassen. Nähert sich dabei stets die Länge des Streckenweges ein und demselben Grenzwert, so heifst dieser die Länge des Kurvenbogens; der Kurvenbogen ist dann „rektifizierbar". Im anderen Falle besitzt der Kurvenbogen keine Länge, er ist nicht „rektifizierbar".

Auf einen etwas beschränkteren Kurvenbegriff bezogen, hat diese Definition der Kurvenlänge der leider so früh verstorbene Scheeffer seinen Untersuchungen über die Bogenlänge zu Grunde gelegt.[23]) Paul du Bois-Reymond hat gegen diese Scheeffer'sche Definition Einwendungen erhoben.[24]) Wie mir scheint, mit Unrecht. Denn im Reiche der mathematischen Ideenbildung hat die Verallgemeinerung nur vor natürlichen, nicht vor künstlich errichteten Schranken Halt zu machen. Und die Thatsache, dafs dem umfassenderen Begriffe Eigenschaften des beschränkteren fehlen, spricht durchaus nicht gegen den ersteren, sondern liegt vielmehr in der Natur der Sache.*)

Der Cauchy'sche Satz gilt nun jedenfalls dann, wenn man das Integral $\int f(z)\,dz$ durch einen stetigen rektifizierbaren Kurvenbogen erstreckt, dessen Anfangs- und Endpunkt zusammenfallen. Dies ist in aller Strenge von Herrn C. Jordan a. a. O. nachgewiesen worden.

*) In ähnlicher Weise äufsert sich, wie ich kürzlich bemerkte, Herr Study am Schlusse seiner Abhandlung „Über eine besondere Klasse von Funktionen einer reellen Veränderlichen", Math. Ann. Bd. 47 (1896).

Einen elementaren Beweis des Cauchy'schen Satzes hat neuerdings Herr Pringsheim veröffentlicht.[25]) Herr Pringsheim legt dabei seinen Betrachtungen aus gewissen Gründen einen anderen, spezieller gefaſsten Kurvenbegriff zu Grunde. Indessen ist doch zu bemerken, daſs die von Herrn Pringsheim zugelassenen Kurven ebenfalls rektifizierbare stetige Kurven im vorhin angegebenen Sinne sind.

Einen Vorzug der Cauchy-Riemann'schen Definition der analytischen Funktion hat man darin zu erblicken, daſs dieselbe zu den wichtigen und interessanten Fragestellungen Anlaſs bietet, die sich auf die konforme Abbildung der Flächen auf einander beziehen. Es ist ja allgemein bekannt, welche Bedeutung für die Funktionentheorie Riemann's der Satz besitzt, daſs es eine und im wesentlichen nur eine analytische Funktion giebt, welche die konforme Abbildung eines einfach zusammenhängenden Stückes der komplexen Zahlenebene auf ein anderes eben solches Stück vermittelt. Riemann hatte den Beweis dieses Satzes bekanntlich auf das nicht einwurfsfreie Dirichlet'sche Prinzip gegründet. Die Arbeiten von Neumann und Schwarz, denen sich solche von Harnack, Poincaré u. a. anschlossen, haben dann, wenigstens für ausgedehnte Klassen von einfach zusammenhängenden Flächen, die Gültigkeit des Riemann'schen Satzes nachgewiesen.[26])

Die allgemeinen Grundlagen für die Theorie der analytischen Funktionen von mehreren Variabeln verdanken wir ebenfalls Weierstraſs und Méray.[27]) Es ist leicht, den Begriff des monogenen Systemes von Potenzreihen auf den Fall zu übertragen, wo es sich um Potenzreihen mit mehreren Variabeln handelt und damit ist dann auch der Begriff der analytischen Funktion mehrerer Variabeln unmittelbar gegeben. Aber die weitere Entwickelung der Theorie bietet gegenüber der Theorie der Funktionen einer Variabeln erhebliche Schwierigkeiten dar. Beschränken wir uns der Einfachheit halber auf die Betrachtung eindeutiger Funktionen. Der Stetigkeitsbereich einer solchen Funktion wird ein Kontinuum von $2n$ Dimensionen sein, wenn n die Zahl der Variabeln bedeutet. Unter Kontinuum ist hierbei wieder ein Punktsystem gemeint, welches nur aus inneren Punkten besteht und in sich zusammenhängt. Die Punkte, welche die Begrenzung dieses Kontinuums bilden, sind die singulären Punkte der Funktion. Hier kann nun aber nicht, wie bei Funktionen einer Variabeln, jedes Kontinuum der Stetigkeitsbereich einer eindeutigen analytischen Funktion sein. Dies folgt schon daraus, daſs eine analytische Funktion von mehreren Variabeln isolierte singuläre Punkte überhaupt nicht besitzen kann, wie man mit Hülfe des verallgemeinerten Laurent'schen Satzes leicht beweist.

Eine weitere Schwierigkeit besteht darin, daſs man bei Funktionen mehrerer Variabeln zwei Arten von aufserwesentlich singulären Punkten unterscheiden mufs. Nach Weierstrafs heifst ein singulärer Punkt bekanntlich aufserwesentlich, wenn in seiner Umgebung die Funktion als Quotient zweier gewöhnlichen Potenzreihen darstellbar ist. Ein solcher Punkt ist dann von der ersten oder zweiten Art, je nachdem er für den reciproken Wert der Funktion regulär oder ebenfalls singulär ist.

Die Frage der Einteilung der analytischen Funktionen mehrerer Variabeln nach der Beschaffenheit ihrer singulären Stellen ist bis heute wenig gefördert. Wir besitzen in dieser Hinsicht Anfänge in den beiden Sätzen:

1) Eine eindeutige Funktion, welche nur aufserwesentlich singuläre Stellen besitzt, ist notwendig eine rationale Funktion[28]), und
2) Eine eindeutige Funktion, welche im Endlichen nur aufserwesentlich singuläre Stellen besitzt, ist als Quotient zweier beständig konvergierender Potenzreihen darstellbar.[29])

Der letztere Satz ist besonders bemerkenswert wegen der grofsen Schwierigkeiten, die sich seinem Beweise entgegenstellten. Erst ganz neuerdings ist es Herrn Pierre Cousin gelungen, einen allgemeinen Beweis des Satzes zu liefern, nachdem Herr Poincaré durch wesentlich höhere Hülfsmittel den besonderen Fall der Funktionen von zwei Variabeln erledigt hatte.

In ähnlichen Ideenrichtungen, wie die Arbeit des Herrn Cousin, bewegen sich übrigens frühere Arbeiten der Herren Biermann und Appell, welche die Ausdehnung des Mittag-Leffler'schen Satzes auf Funktionen mehrerer Variabeln betreffen.[30])

Die Cauchy-Riemann'sche Richtung auf dem Gebiete der allgemeinen Theorie der Funktionen mehrerer Variabeln ist durch Arbeiten von Kronecker, Picard und Poincaré vertreten.[31]) Diese Arbeiten beschäftigen sich mit der Ausdehnung des Cauchy'schen Integralsatzes und seiner Folgerungen auf Funktionen mehrerer Variabeln.

Schliefslich möchte ich noch ganz kurz auf diejenigen neueren Bestrebungen hinweisen, die auf Verallgemeinerungen der Theorie der analytischen Funktionen abzielen. Von der ausgedehnten Theorie des drei- und mehrdimensionalen Potentiales abgesehen, habe ich in dieser Hinsicht zunächst Arbeiten der Herren Picard und Scheffers zu nennen.[32]) Herr Picard verallgemeinert die partiellen Differentialgleichungen, welchen der reelle und imaginäre Teil einer analytischen Funktion genügt, indem er die Gruppeneigenschaft dieser Gleichungen als charakteristisch ansieht. Bei Herrn Scheffers handelt es sich darum, die Begriffe der Funktionentheorie auf Zahlensysteme zu übertragen, welche nicht, wie die gewöhnlichen komplexen Zahlen, aus zwei sondern aus beliebig vielen Einheiten gebildet sind. In anderer Richtung bewegen sich die Arbeiten mehrerer jüngerer italienischer Mathematiker. Von mathematisch-physikalischen Vorstellungen ausgehend, gelangt Herr Volterra dazu, Funktionen von Linien zu untersuchen, d. h. solche Abhängigkeitsgesetze, welche jeder Linie im Raume einen bestimmten komplexen Zahlenwert zuordnen.[33] Eine ähnliche Ideenbildung liegt neueren Untersuchungen von Pincherle, Levi-Civita und Bourlet zu Grunde.[34] Hier werden solche Gesetze betrachtet, die aus einer beliebig angenommenen Funktion eine neue Funktion entstehen lassen. Man hat es, in einem höheren Sinne des Wortes, mit Funktionen von Funktionen zu thun.

Aber ich mufs es mir versagen, auf die in diesen Arbeiten niedergelegten interessanten Untersuchungen näher einzugehen, da sie schon über das eigentliche Gebiet der Theorie der analytischen Funktionen hinausführen.

Litteratur-Nachweise und Anmerkungen.*)

(Die eingeklammerten Jahreszahlen und Seitenzahlen beziehen sich auf den Band des Jahrbuchs über die Fortschritte der Mathematik, in welchem die citierte Arbeit besprochen ist.)

1) Cauchy, Analyse algébrique, p. 151. Résumé analytique p. 17.

2) J. Hadamard, Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor. Journal de mathématiques (4). vol. 8. (1892, 359.)
Vgl. auch O. Biermann, Über Funktionen zweier reeller Variabeln, Math. Ann. Bd. 48, p. 395 Anmerkung.
Das in Rede stehende Gesetz lautet:
Der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ ist der reciproke Wert der oberen Unbestimmtheitsgrenze der Wertemenge

$$|c_1|,\ \sqrt{|c_2|},\ \sqrt[3]{|c_3|},\ \ldots,\ \sqrt[n]{|c_n|},\ \ldots .$$

3) Méray, Nouveau Précis d'Analyse infinitésimale. (Paris 1872.)
" , Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale. (Paris 1894/97.)

*) Das folgende Verzeichnis bezieht sich auf die seit 1880 erschienene Litteratur. Von früheren Publikationen sind nur einzelne ihrer grundlegenden Bedeutung wegen aufgeführt.

4) K. Weierstrafs, Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen, pag. 1. Abhandlungen aus der Funktionenlehre. (Berlin 1886.)

5) G. Mittag-Leffler, Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes d'une variable indépendante. Acta mathem., vol. 4. (1884, 351.)

6) C. Runge, Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen. Acta mathem., vol. 6. (1885. 379.)

7) P. Stäckel, Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen. Crelles Journal, Bd. 112. (1893. 681.)

8) Guichard, Théorie des points singuliers essentiels. Ann. de l'Éc. Norm. (2). vol. 12. (1883. 330.)

9) G. Cantor, Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten. Math. Ann., Bdde. 15, 17, 20, 21, 23. Acta mathem., vol. 2, 4, 7.
   „ , Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. Math. Ann., Bdde. 46, 49.

10) J. Bendixson, Quelques théorèmes de la théorie des ensembles de points. Acta mathem., vol. 2. (1883. 455.)

11) E. Phragmèn, Beweis eines Satzes aus der Mannigfaltigkeitslehre. Acta mathem., vol. 5. (1884. 333.)
   „ , Über die Begrenzungen von Kontinua. Acta mathem., vol. 7. (1885. 505.)

12) Sind $C_1, C_2, \ldots, C_n$ einfach geschlossene Linien, die sich gegenseitig ausschliefsen und bez. $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)$ analytische Funktionen, die innerhalb und auf diesen Linien regulär sind, so ist

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} \frac{f_1(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_2} \frac{f_2(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} + \cdots + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_n} \frac{f_n(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$$

ein analytischer Ausdruck, welcher innerhalb der Contour C_i die Funktion $f_i(z)$ darstellt. Nach der ursprünglichen Bedeutung eines Linien-Integrales sind aber die Integrale auf der rechten Seite nichts anderes, wie die Grenzwerte von rationalen Funktionen von z, die von einem ganzzahligen ins Unendliche wachsenden Index abhängen. Dementsprechend läfst sich die rechte Seite der vorstehenden Gleichung in der Form $\lim\limits_{n=\infty} R_n(z)$ darstellen, so dafs

$$F(z) = R_1(z) + [R_2(z) - R_1(z)] + [R_3(z) - R_2(z)] + \cdots$$

eine unendliche Summe ist, deren einzelne Glieder rationale Funktionen von z sind. Eine solche Summe kann also in den verschiedenen, durch $C_1, C_2, \ldots, C_n$ begrenzten Gebieten beliebig vorgeschriebene analytische Funktionen $f_1(z)$, $f_2(z), \ldots, f_n(z)$ bez. darstellen.

K. Weierstrafs, Zur Funktionenlehre. Sitzungsber. der Berliner Akademie. (1880. 310.)
   „ , Abhandlungen aus der Funktionenlehre.
   „ , Gesammelte Werke, Bd. 2. (Berlin 1895.)

G. Mittag-Leffler, Recherches sur la théorie des fonctions. Darboux Bull. (2), vol. 5. (1881. 307.)
   „ , Verschiedene Noten in den Comptes Rendus de l'Ac. d. Sc. de Paris, vol. 94, 95. (1882. 325.)

Ch. Hermite, Sur quelques points de la théorie des fonctions. Crelles Journal, Bd. 91. (1881. 307.)

12) P. Appell, Développements en série dans une aire limitée par des arcs de cercle. Acta mathem., vol. 1. (1883. 323.)
„ , Développements en série d'une fonction holomorphe dans une aire limitée par des arcs de cercle. Mathem. Ann., Bd. 21. (1883. 324.)
S. Pincherle, Sopra una formula del sign. Hermite. Rom. Acc. L. Rend. (4), vol. 1. (1885. 388.)
M. Lerch, Note sur les expressions qui, dans diverses parties du plan, représentent des fonctions diverses. Darb. Bull. (2), vol. 10. (1886. 345.)
P. Stäckel, siehe unter 7).
J. v. Puzyna, Über eine methodische Bildung der analytischen Ausdrücke $\Sigma f_\nu(x)$, $\Sigma f_\nu(x, y)$ von konstanten Werten. Monatshefte f. Math., Bd. 5. (1894. 711.)
F. d'Arcais, Sulle espressioni analitiche rappresentanti porzioni di funzioni analitiche diverse. Rivista di Mat., vol. 5. (1896. 439.)
13) K. Weierstrafs, siehe unter 12).
E. Goursat, Sur les fonctions uniformes présentant des lacunes. Comptes Rendus, vol. 94. (1882. 336.)
Th. Homén, Analytisk framställning af nagra lakunära funktioner. Soc. sc. Fenn. Acta, vol. 12. (1883. 341.)
H. Poincaré, Sur les fonctions à espaces lacunaires. Comptes Rendus, vol. 96. Soc. sc. Fenn. Acta, vol. 12. (1883. 340/1.)
M. Lerch, Contribution à la théorie des fonctions. Prag. Ber. (1886. 330.)
T. J. Stieltjes, Exemple d'une fonction qui n'existe qu'à l'intérieur d'un cercle. Darboux Bull. (2), vol. 11. (1887. 380.)
E. Goursat, Sur les fonctions à espaces lacunaires. ibid. (1887. 394.)
G. Teixeira, Exemples de fonctions à espaces lacunaires. Nouvelles Ann. (3), vol. 6. (1887. 394.)
M. Lerch, Über Funktionen mit beschränktem Existenzbereiche. Prag. Abh. (7), Bd. 2. (1888. 412.)
„ , Sur une classe de fonctions à espace lacunaire. Teixeira J., vol. 10. (1890. 388.)
A. Pringsheim, Zur Theorie der Taylor'schen Reihe und der analytischen Funktionen mit beschränktem Existenzbereich. Münch. Ber., Bd. 22. (1892. 356.)
J. Hadamard, siehe unter 2).
H. Poincaré, Sur les fonctions à espaces lacunaires. American J., vol. 14. (1892. 388.)
P. Stäckel, siehe unter 7).
E. Goursat, Sur une fonction à espace lacunaire. Darb. Bull. (2), vol. 17. (1893. 715.)
F. G. Teixeira, Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite. ibid. (1893. 716.)
A. Cayley, Note on lacunary functions. Quart. J., vol. 26. (1893. 716.)
J. Gillet, Sur les fonctions à espaces lacunaires. Progresso mat., vol. 3. (1893. 716.)
G. d'Arone, Sur les fonctions à espaces lacunaires. Bull. de la Soc. math. de Fr., vol. 23. (1895. 427.)
E. Borel, Sur les séries de Taylor. Comptes Rendus 1896.
„ , Sur les séries de Taylor admettant leur cercle de convergence comme coupure. Journal de Math. (4), vol. 2. 1896.

13) E. Fabry, Sur les points singuliers d'une fonction donnée par son développement en série et l'impossibilité du prolongement analytique dans des cas très généraux. Ann. de l'Éc. Norm. (3), vol. 13. 1896.

„ , Sur les séries de Taylor. Comptes Rendus 1897.

Eine hinreichende Bedingung von bemerkenswerter Einfachheit für die Unmöglichkeit der analytischen Fortsetzung einer Potenzreihe giebt Herr Fabry, indem er folgenden Satz beweist:

„Die Potenzreihe $a_1 z^{e_1} + a_2 z^{e_2} + \cdots + a_n z^{e_n} + \cdots$, in welcher $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ eine Reihe wachsender ganzen Zahlen bedeuten, gestattet keine analytische Fortsetzung, wenn $e_n - e_{n-1}$ mit wachsendem n über alle Grenzen wächst."

14) Vgl. die unter 13) citierten Arbeiten von Borel und Fabry, sowie

A. Pringsheim, Über Funktionen, welche in gewissen Punkten endliche Differentialquotienten jeder endlichen Ordnung, aber keine Taylor'sche Reihenentwickelung besitzen. Math. Ann., Bd. 44, pag. 49/50. (1894. 389.)

15) E. Picard, Mémoire sur les fonctions entières. Ann. de l'Éc. Norm. (2), vol. 9. (1880. 327.)

J. Farkas, Sur les fonctions uniformes. Comptes Rendus, vol. 96. (1883. 338.)

G. d'Arone, Sur la fonction exponentielle. Bull. de la Soc. math. de Fr., vol. 20. (1892. 399.)

J. Hadamard, Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann. Journ. de Math. (4), vol. 9. (1893. 698.)

E. Borel, Démonstration élémentaire d'un théorème de M. Picard sur les fonctions entières. Comptes Rendus, vol. 122. (1896.)

16) M. Lerch, Über die Nichtdifferenzierbarkeit gewisser Funktionen. Crelles Journal, Bd. 103. (1888. 380.)

G. Mittag-Leffler, Sur une transcendante remarquable trouvée par M. Fredholm. Acta mathem., vol. 15. (1891. 421.)

A. Pringsheim, siehe unter 13).

Die von Herrn Fredholm angegebene Funktion ist

$$f(x) = 1 + ax + a^2x^4 + \cdots + a^n x^{n^2} + \cdots \quad (|a| < 1).$$

Dafs sie über den Einheitskreis hinaus nicht fortsetzbar ist, folgt unmittelbar aus dem unter 13) angeführten Satze von Fabry. In einer Unterhaltung während des Kongresses machte Herr Fredholm darauf aufmerksam, dafs die Umkehrung der Funktion $f(x)$ bei geeigneter Wahl der Konstanten a eine eindeutige Funktion ist. In der That, wenn $|x| < 1$, $|y| < 1$, so findet man leicht

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| = \left|\sum a^n\left[x^{n^2-1} + x^{n^2-2}y + \cdots + xy^{n^2-2} + y^{n^2-1}\right]\right|$$
$$> |a| - 4|a|^2 - 9|a|^3 - \cdots - n^2|a|^n - \cdots,$$

und es kann daher, wenn nur $|a|$ genügend klein ist, niemals $f(x) = f(y)$ werden, aufser für $x = y$.

17) G. Vivanti, Sulle funzioni ad infiniti valori. Palermo Rend., vol. 2. (1888. 393.)

H. Poincaré, Sur une propriété des fonctions analytiques. ibid. (1888. 393.)

V. Volterra, Sulle funzioni analitiche polidrome. Rom. Acc. L. Rend. (4), vol. 4. (1888. 394.)

17) Vgl. auch:
G. Vivanti, Sulle funzioni analitiche. Palermo Rend., vol. 3. (1889. 395.)
„ , Zur Theorie der mehrwertigen Funktionen. Schlömilch Z., Bd. 34. (1889. 395.)

18) H. Poincaré, Sur un théorème de la théorie générale des fonctions. Bull. de la Soc. math. de Fr., vol. 11. (1883. 348.)

19) G. Morera, Un teorema fondamentale nella teorica delle funzioni di una variabile complessa. Lomb. Ist. Rend. (2), vol. 19. (1886. 338.)
W. F. Osgood, Some points in the elements of the theory of functions. Bulletin of the American mathem. Society (2), vol. 2. (1896.)

20) M. Falk, Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite. Darboux Bull. (2), vol. 7. (1883. 317.)
E. Goursat, Démonstration du théorème de Cauchy. Acta mathem., vol. 4. (1884. 236.)
M. Lerch, Sur une démonstration du théorème de Cauchy sur les intégrales prises entre des limites imaginaires. Prag. Ber. (1887. 273.)
C. Jordan, Cours d'Analyse. (Paris 1893.) Bd. I.
A. Pringsheim, Über den Cauchy'schen Integralsatz. Münch. Ber., Bd. 25. (1895. 318.)
„ , Zum Cauchy'schen Integralsatze. ibid. (1895. 318.)

21) G. Peano, Sur une courbe qui remplit toute une aire plane. Math. Ann., Bd. 36. (1890. 405.)
D. Hilbert, Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück. ibid. Bd. 38. (1891. 422.)

22) C. Jordan, siehe unter 20).
A. Schoenflies, Über einen Satz aus der Analysis situs. Göttinger Nachr. 1896.

23) L. Scheeffer, Allgemeine Untersuchungen über Rektifikation der Kurven. Acta mathem., vol. 5. (1884. 338.)

24) P. du Bois-Reymond, Über den Begriff der Länge einer Kurve. ibid. vol. 6. (1885. 270.)

25) A. Pringsheim, siehe unter 20).

26) H. A. Schwarz, Gesammelte mathematische Abhandlungen. (Berlin 1890.) Bd. 2.
C. Neumann, Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential. (Leipzig 1877.)
„ , Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale. (Leipzig 1884.)
„ , Über die Methode des arithmetischen Mittels, I u. II. Leipziger Abhandl., Bd. 13 u. 14. (1887. 1029 u. 1888. 1015.)
A. Harnack, Die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentiales. (Leipzig 1887.)
F. Klein, Über die konforme Abbildung von Flächen. Mathem. Ann., Bd. 19. (1881. 656.)
V. Volterra, Sopra alcune condizioni caratteristiche delle funzioni di una variabile complessa. Brioschi Ann. (2), vol. 11. (1883. 358.)
J. Riemann, Sur le problème de Dirichlet. Ann. de l'Éc. Norm. (3), vol. 5. (1888. 383.)

26) H. Poincaré, Sur les équations aux dérivées partielles de la physique mathématique. American J., vol. 12. (1890. 977.)

P. Painlevé, Sur la théorie de la représentation conforme. Comptes Rendus, vol. 112. (1891. 889.)

E. Phragmén, Remarques sur la théorie de la représentation conforme. Acta mathem., vol. 14. (1891. 890.)

W. Burnside, On functions determined from their discontinuities and a certain form of boundary conditions. London. M. Soc. Proc., vol. 22. (1891. 420.)

A. Paraf, Sur le problème de Dirichlet. Toulouse Ann., vol. 6. (1892. 366.)

F. v. Dalwigk, Über den Ersatz des Dirichlet'schen Prinzips. Göttinger Nachr. (1894. 683.)

A. Tauber, Über die Neumann'sche Methode des arithmetischen Mittels. Monatshefte f. Math., Bd. 5. (1894. 683.)

H. Poincaré, La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet. Acta mathem., vol. 20. (1896.)

A. Noble, Über die Randwertaufgabe für eine ebene Randkurve mit stückweise stetig sich ändernder Tangente und ohne Spitzen. Göttinger Nachr. (1896.)

E. Picard, Traité d'Analyse. (Paris 1891/96.)

27) Ch. Méray, siehe unter 3).

Vgl. auch:

Riquier, Sur les principes de la théorie générale des fonctions. Ann. de l'Éc. Norm. (3), vol. 8. (1891. 422.)

28) A. Hurwitz, Beweis des Satzes, dafs eine einwertige Funktion beliebig vieler Variabeln, welche überall als Quotient zweier Potenzreihen dargestellt werden kann, eine rationale Funktion ihrer Argumente ist. Crelles Journal, Bd. 95. (1883. 321.)

S. Dautheville, Étude sur les séries entières par rapport à plusieurs variables imaginaires indépendantes. Ann. de l'Éc. Norm. (3), vol. 2. (1885. 366.)

29) H. Poincaré, Sur les fonctions de deux variables. Acta math., vol. 2. (1883. 358.)

P. Cousin, Sur les fonctions de n variables complexes. ibid. vol. 19. (1895. 456.)

30) P. Appell, Sur une classe de fonctions de deux variables indépendantes. Acta math., vol. 2. (1883. 357.)

O. Biermann, Beitrag zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen mehrerer Veränderlichen. Wiener Ber., Bd. 89. (1884. 356.)

31) L. Kronecker, Über Systeme von Funktionen mehrerer Variabeln. Berliner Ber. 1869 od. Werke, Bd. 1.

E. Picard, Sur les périodes des intégrales doubles. Comptes Rendus, vol. 102. (1886. 354.)

H. Poincaré, Sur les résidues des intégrales doubles. Acta math., vol. 9. (1887. 275.)

32) E. Picard, Sur une généralisation des équations de la théorie des fonctions d'une variable complexe. Comptes Rendus, vol. 112. (1891. 411.)

„ , Sur certains systèmes d'équations aux dérivées partielles généralisant les équations de la théorie des fonctions d'une variable complexe. Journal de Math. (4), vol. 8. (1892. 331.)

32) G. Scheffers, Verallgemeinerung der Grundlagen der gewöhnlich komplexen Funktionen. Leipziger Ber., Bd. 45 u. 46. (1894. 667.)

33) V. Volterra, Sur une généralisation de la théorie des fonctions d'une variable imaginaire. Acta mathem., vol. 12. (1889. 397.)

„ , eine gröſsere Reihe von Aufsätzen in den Bänden 3, 4, 5, 6 der vierten Serie der Rendiconti della Ac. dei Lincei. (1887—1890.)

C. Arzelà, Funzioni di linee. ibid. vol. 5.

„ , Sulle funzioni di linee. Bologna Mem. (5), vol. 5. (1895. 454.)

Cornelia Fabri, Sopra alcune proprieta generali delle funzioni che dipend~~er~~o on da altre funzioni e da linee. Atti di Torino, vol. 25. (1890. 401.)

34) S. Pincherle, mehrere Abhandlungen in den Bänden 6, 7, 8 der vierten Serie der Memorie dell' Accad. di Bologna, in Band 10 der Acta mathem., ferner in Lomb. Ist. Rend. (4), vol. 20 und Rom. Acc. L. Rend. (5), vol. 4. Eine zusammenfassende Darstellung seiner Untersuchungen veröffentlichte S. Pincherle neuerdings unter dem Titel: Mémoire sur le calcul fonctionnel distributif in Bd. 49 der Mathem. Annalen.

B. Calo, Sulle operazioni funzionali distributive. Rom. Acc. L. Rend. (5), vol. 4. (1895. 434.)

Levi-Civita, Sui gruppi di operazioni funzionali. Lomb. Ist. Rend. (2), vol. 28. (1895. 434/5.)

V. Volterra, Sull' inversione degli integrali definiti. Rom. Acc. L. Rend. (5), vol. 5, Torino Atti, vol. 31. (1896.)

Bourlet, Sur les opérations, en général, et les équations différentielles linéaires d'ordre infini. Ann. de l'Éc. Norm. (1897.)

B. Vorträge der Sektionssitzungen.

1. Sektion: Arithmetik und Algebra.

Über die Genera in algebraischen Zahlkörpern.

Von

H. Weber in Strafsburg.

Indem ich der ehrenvollen Aufforderung des Komites nachkomme, möchte ich Ihnen in kurzen Zügen einen Überblick geben über die Hauptresultate der algebraischen Untersuchungen, die mich in den letzten Jahren beschäftigt haben, von denen ein Teil im 48. und 49. Band der Mathematischen Annalen veröffentlicht ist und deren Schlufs im nächsten Bande erscheinen soll. Ich beschränke mich hier durchaus auf die Mitteilung der Resultate, ohne die Beweise zu berühren, und mufs auch darin minder Wichtiges oder weniger leicht Verständliches übergehen. Auch einige an sich notwendige genauere Präcisierungen werde ich hier nicht erwähnen, um nicht die Grundgedanken zu verhüllen. In dieser Hinsicht mufs ich Sie auf meine gedruckten Abhandlungen verweisen.

1. Ich beginne mit der Erklärung einer Bezeichnungsweise:

Es sei A eine Abel'sche Gruppe und B ein Teiler von A. Ist α_1 ein in B nicht enthaltenes Element von A, so sind alle in dem System $\alpha_1 B$ enthaltenen Elemente von den in B enthaltenen verschieden. Das System $\alpha_1 B = B_1$ heifst eine Nebengruppe zu B. Es kann nun sein, auch wenn die Gruppe A unendlich ist, dafs A in eine endliche Anzahl von verschiedenen Nebengruppen zerfällt:

$$A = B + B_1 + \cdots + B_{h-1}.$$

Die Anzahl dieser Nebengruppen, die ich mit

$$h = (A, B)$$

bezeichne, heifst in der Zahlentheorie die Klassenzahl von A nach B, oder in der Gruppentheorie der Index des Teilers B von A.

2. Mit Ω bezeichne ich einen algebraischen Zahlkörper. Einem solchen Körper adjungiere ich beliebige unabhängige Variable, sodafs ein Körper $\overline{\Omega}$ entsteht, der aus der Gesamtheit aller ganzen und gebrochenen rationalen Funktionen besteht, deren Koeffizienten in Ω enthalten sind. Diesen Körper nenne ich Funktionalkörper, und seine Elemente Funktionale in Ω. Die Funktionale des Körpers $\overline{\Omega}$ werden auch als Ideale des Körpers Ω bezeichnet. Eine ganze rationale Funktion, deren Koeffizienten ganze rationale Zahlen ohne gemeinschaftlichen Teiler sind, heifst primitiv.

Es werden nun folgende Definitionen aufgestellt:

a) Ein Funktional wird ganz genannt, wenn es eine ganze Funktion mit ganzzahligen Koeffizienten in Ω ist.

b) Ein ganzes Funktional, dessen Norm eine primitive Funktion ist, heifst ein Einheitsfunktional oder eine funktionale Einheit.

c) Zu den ganzen Funktionalen werden aufser den in *a*) erwähnten noch solche gebrochene Funktionen gerechnet, die sich so darstellen lassen, dafs der Zähler ein ganzes Funktional im Sinne von *a*) und der Nenner ein Einheitsfunktional ist.

d) Funktionale Einheiten werden auch solche gebrochene Funktionen genannt, die Quotienten von funktionalen Einheiten im Sinne von *b*) sind.

Numerische Einheiten in Ω sind solche ganze Zahlen in Ω, deren Norm $= \pm 1$ ist, oder, was dasselbe besagt, deren reciproker Wert gleichfalls ganz ist. Die numerischen Einheiten in Ω bilden bei der Komposition durch Multiplikation eine Abel'sche Gruppe, die mit E bezeichnet wird. Desgleichen bilden die funktionalen Einheiten eine mit $\overline{E}$ zu bezeichnende Gruppe.

Sind $\alpha, \beta, \ldots$ ganze Zahlen oder ganze Funktionale in Ω, und $x, y, \ldots$ Variable, die in $\alpha, \beta, \ldots$ nicht vorkommen, so ist

$$\delta = \alpha x + \beta y + \cdots$$

der gröfste gemeinschaftliche Teiler von $\alpha, \beta, \ldots$.

3. Die Zahlen des Körpers Ω bilden zwar bei der Komposition durch Addition, nicht aber bei der Multiplikation eine Gruppe, weil eben jede Zahl, mit Null multipliziert, das Produkt Null ergiebt.

Man kann aber aus Ω eine Zahlengruppe O ausscheiden, wenn man einfach die Null wegläfst, oder, etwas allgemeiner, wenn man alle Zahlen wegläfst, die zu irgend einem festen Ideal $\mathfrak{k}$ nicht relativ prim sind.

Desgleichen erhält man aus $\bar{\Omega}$ eine Funktionalgruppe $\bar{O}$, wenn man alle die Funktionale unterdrückt, die zu $\mathfrak{k}$ nicht relativ prim sind.

Die Gruppe O enthält die Gruppe der numerischen Einheiten, E, und ebenso enthält $\bar{O}$ die Gruppe der funktionalen Einheiten, $\bar{E}$.

Das aus den Produkten aller funktionalen Einheiten mit allen Zahlen O gebildete System $\bar{E}O$ ist eine in $\bar{O}$ enthaltene Gruppe, die wir die Gruppe der Hauptideale in $\bar{O}$ nennen.

Zwei Ideale in $\bar{O}$ heifsen äquivalent, wenn ihr Quotient ein Hauptideal, also in $\bar{E}O$ enthalten ist. Die Idealklassen sind die Nebengruppen zu $\bar{E}O$ in $\bar{O}$ und es ist

$$(\bar{O}, \bar{E}O) = h$$

die Anzahl der Idealklassen im Körper Ω, die, wie bekannt, stets eine endliche positive Zahl ist.

4. Ich nehme nun eine in O enthaltene Zahlengruppe O' an, von der ich voraussetze, dafs die Zahl der Nebengruppen (O, O') endlich sei.*)

Das System $\bar{E}O'$ ist dann eine in $\bar{E}O$ enthaltene Gruppe von Hauptidealen, und jede Idealklasse nach $\bar{E}O$ zerfällt wieder weiter nach $\bar{E}O'$. Die Zahl

$$(\bar{O}, \bar{E}O') = h'$$

ist die Anzahl dieser Klassen, und aus allgemeinen Sätzen der Gruppentheorie ergiebt sich

$$(\bar{O}, \bar{E}O') = (\bar{O}, \bar{E}O)\frac{(O, O')}{(E, E')},$$

wenn E' die Gruppe der in O' enthaltenen (numerischen) Einheiten bedeutet. Hierdurch ist die Bestimmung des Verhältnisses der Klassenzahlen, $h' : h$ auf die Indexbestimmung von Zahlengruppen zurückgeführt, nämlich auf $(O, O') : (E, E')$.

Bezeichnen wir die Nebengruppen von $\bar{O}$ zu $\bar{E}O'$, also die durch O' verkleinerten Idealklassen mit $A_0, A_1, \ldots, A_{h'-1}$, sodafs $A_0 = \bar{E}O'$ ist, so können wir setzen

$$\bar{O} = A_0 + A_1 + \cdots + A_{h'-1}.$$

Auf diesen Formeln beruhen unter anderen die von Gaufs und Dirichlet aufgestellten Beziehungen zwischen den Klassenzahlen in den verschiedenen Ordnungen von quadratischen Formen einer bestimmten Determinante.

---

*) Eine weitere Voraussetzung über die Gruppe O', die noch gemacht werden mufs, läfst sich nicht in kurzen Worten klar machen (vgl. Mathematische Annalen Bd. 49, S. 84).

5. Der Gruppenkörper. Es wird nun die Hypothese gemacht, dafs ein zu der Gruppe O' gehöriger Körper K' über Ω existiert, der folgende Eigenschaften hat. Um die an den Körper K' zu stellenden Forderungen kurz ausdrücken zu können, bezeichne ich mit

$\mathfrak{p}_1$ alle in $\overline{E}O'$ vorkommenden Primideale ersten Grades des Körpers Ω,

mit $\mathfrak{p}_2$ alle übrigen Primideale in Ω.

Jedes Primideal $\mathfrak{p}$ des Körpers Ω ist in einem Körper K' über Ω entweder selbst ein Primideal, oder es ist in mehrere Primideale zerlegbar.

Die Voraussetzungen über den Körper K' sind dann die folgenden:

a) Der relative Grad ν von K' in bezug auf Ω soll nicht gröfser sein als h', d. h.

$$\nu \overline{\overline{<}} h'.$$

b) Jedes Ideal $\mathfrak{p}_1$ soll in K' in lauter Primideale ersten Grades zerfallen.

c) Jedes Ideal $\mathfrak{p}_2$ soll bei der Zerlegung im Körper K' kein Primideal ersten Grades enthalten.

d) Bei den Voraussetzungen *b*) und *c*) ist eine beliebige, aber endliche Anzahl von Ausnahmen zulässig.

Ein Körper K', der diesen Forderungen genügt, heifst ein Gruppenkörper zu O'. Ist insbesondere $O' = O$, so kann man ihn auch den Klassenkörper von Ω nennen.

Wenn nun die Existenz eines solchen Körpers K' angenommen werden darf, so kann man aus der Thatsache, dafs in diesem Körper die Klassenzahl eine endliche, von Null verschiedene Zahl ist, durch die von Dirichlet in die Zahlentheorie eingeführten Methoden der Analysis die beiden Folgerungen ziehen:

I. Der Grad des Körpers K' ist nicht kleiner als h', also, nach Voraussetzung *a*), $\nu = h'$.

II. Jede der Nebengruppen $A_0, A_1, \ldots, A_{h'-1}$ enthält unendlich viele Primideale des Körpers Ω.

Die weitere Forschung hat dann den Nachweis solcher Gruppenkörper zum Ziele. Es sind bis jetzt nur wenige Fälle, in denen ihre Existenz festgestellt ist, von denen jetzt noch die hauptsächlichsten angeführt werden sollen.

Beispiel I.

Es sei Ω der Körper der rationalen Zahlen, O der Inbegriff aller der rationalen Zahlen, die zu einer beliebig gegebenen natürlichen

Zahl m relativ prim sind.*) Für O' nehmen wir den Inbegriff aller ganzen und gebrochenen Zahlen n in O, die der Bedingung

$$n \equiv 1 \pmod{m}$$

genügen. Der Index (O, O') ist dann die bekannte zahlentheoretische Funktion $\varphi(m)$, und die Nebengruppen sind die Zahlklassen nach dem Modul m, deren jede nur Zahlen enthält, die mit einer zu m teilerfremden Zahl kongruent sind. In diesem Falle ist $\overline{O} = \overline{E}O$, und die Einführung der Ideale wäre nicht notwendig.

In diesem Fall kann für den Gruppenkörper K' der Kreisteilungskörper der primitiven m^{ten} Einheitswurzeln genommen werden, und die Sätze I. und II. ergeben:

1. Die Gleichung $\varphi(m)^{\text{ten}}$ Grades, deren Wurzeln die primitiven m^{ten} Einheitswurzeln sind, ist irreducibel.
2. In jeder arithmetischen Progression, deren Differenz und Anfangsglied relativ prim sind, kommen unendlich viele Primzahlen vor.

Beispiel II.

Es sei Ω ein imaginärer quadratischer Körper, $(\overline{O}, \overline{E}O) = h$ die Klassenzahl, und für O' werde O selbst genommen. Den Körper K' giebt in diesem Falle die Theorie der komplexen Multiplikation der elliptischen Funktionen. Es ist der Körper der Klasseninvarianten, oder, nach Kronecker's Ausdruck, der singulären Moduln. Wir erhalten die beiden Sätze:

1. Die Klassengleichung der komplexen Multiplikation ist irreducibel.
2. Jede primitive quadratische Form stellt unendlich viele Primzahlen dar.

In der Weise, wie er hier ausgesprochen ist, bezieht sich der Beweis nur auf solche quadratische Formen, deren Diskriminante eine sogenannte Stammdiskriminante ist. Man beweist ihn aber ebenso allgemein, wenn man für O' eine sogenannte Ordnungsgruppe nimmt, d. h. die Gruppe der Zahlen in O, die nach irgend einem numerischen oder idealen Modul $\mathfrak{f}$ mit einer rationalen Zahl kongruent sind, die man symbolisch so bezeichnen kann

$$O' \equiv R \pmod{\mathfrak{f}}.$$

*) Zwei Zahlen heifsen relativ prim, wenn bei der Darstellung durch reduzierte Brüche von den vier als Zähler und Nenner auftretenden Zahlen keine zwei einen gemeinschaftlichen Teiler haben. Unter einer natürlichen Zahl wird eine positive ganze rationale Zahl verstanden, d. h. eine der Zahlen $1, 2, 3, 4, \ldots$.

Beispiel III.

Ω sei wieder ein imaginärer quadratischer Körper. O die Gruppe der Zahlen, die relativ prim zu einem beliebig gegebenen Idealmodul $\mathfrak{k}$ sind. Es sei ferner O' die Gruppe der Zahlen in O, die nach dem Modul $\mathfrak{k}$ mit einer Einheit des Körpers Ω kongruent sind, sodaſs symbolisch

$$O' \equiv E \,(\text{mod. } k)$$

bezeichnet werden kann.

Einen Gruppenkörper K' erhält man hier, wenn man dem Klassenkörper des Körpers Ω noch die Wurzel einer Teilungsgleichung für elliptische Funktionen hinzufügt, z. B. wenn k eine durch $\mathfrak{k}$ teilbare natürliche Zahl und $\wp$ die Weierstraſs'sche Funktion ist, eine der Gröſsen

$$\wp\left(\frac{m_1\omega_1 + m_2\omega_2}{k}\right).$$

Eine solche Teilungsgleichung zerfällt in Faktoren, deren Grad gleich oder kleiner ist als die Anzahl der nach dem Modul $\mathfrak{k}$ inkongruenten Zahlen, geteilt durch die Anzahl der nach dem Modul $\mathfrak{k}$ inkongruenten Einheiten. Die letztere Zahl ist im allgemeinen gleich 2, in gewissen Ausnahmefällen gleich 4 oder gleich 6. Es folgt dann aus unseren Sätzen I. II.:

1. Die Irreducibilität der erwähnten Teilungsgleichung.
2. Die Existenz von unendlich vielen Primidealen in jeder der Nebengruppen von $\bar{O}$ und $\overline{E}O'$.

Greift man hier speziell die Nebengruppen von $\overline{E}O$ heraus, so erhält man eine schöne Verallgemeinerung des Satzes von den unendlich vielen Primzahlen in den arithmetischen Progressionen, die sich so aussprechen läſst.

Ist α eine zu $\mathfrak{k}$ teilerfremde Zahl in Ω, so giebt es unendlich viele Primzahlen π in Ω, die der Bedingung

$$\pi \equiv \alpha \,(\text{mod. } \mathfrak{k})$$

genügen.

Beispiel IV.

Auf dies vierte Beispiel bezieht sich der Titel, den ich dieser Mitteilung gegeben habe; um es darzulegen muſs ich etwas weiter ausholen.

Ich nehme eine beliebige natürliche Zahl m als Modul an und bezeichne mit M die Gruppe der nach dem Modul m genommenen zu m teilerfremden Zahlen. Der Grad dieser Gruppe ist dann

$$\mu \equiv \varphi(m).$$

Wenn nun Ω irgend ein algebraischer Normalkörper*) ist, so ist in M eine Gruppe M' enthalten, die aus allen den Zahlen besteht, die mit Normen von Zahlen ω des Körpers Ω nach dem Modul m kongruent sind; diese Gruppe M' soll symbolisch durch

$$N(\omega) \equiv M' \pmod{m}$$

bezeichnet werden.

Ferner ist in M noch eine zweite Gruppe M'' enthalten, die aus allen den Zahlen besteht, die mit Normen von Idealen in Ω nach dem Modul m kongruent sind, die also das Zeichen hat

$$N(\mathfrak{a}) \equiv M'' \pmod{m}.$$

Die Gruppe M'' enthält ihrerseits M' und mag nach M' in g Nebengruppen zerfallen. Wir setzen:

$$M'' = M' + M_1' + M_2' + \cdots + M_{g-1}',$$

sodafs

$$g = (M'', M') = \frac{(M, M')}{(M, M'')} = \frac{\mu''}{\mu'}$$

ist, wenn mit μ'' und μ' die Grade der Gruppen M'' und M' bezeichnet werden. Ist M_i' eine der angeführten Nebengruppen von M'', so vereinigen wir alle Ideale $\mathfrak{a}_\mathfrak{i}$, deren Norm mit einer der Zahlen von M_i' nach dem Modul m kongruent ist, zu einem Genus oder Geschlecht, sodafs ein solches Genus durch die symbolische Gleichung

$$N(\mathfrak{a}_\mathfrak{i}) \equiv M_i' \pmod{m}$$

definiert werden kann. Äquivalente Ideale gehören dann immer demselben Genus an, sodafs nicht nur die Ideale, sondern die Idealklassen in Genera eingeteilt sind. Jedes Genus enthält gleich viele Idealklassen, und wenn wir diese Zahl mit h_g bezeichnen und h die Klassenzahl des Körpers Ω ist, so ergiebt sich

$$gh_g = h \quad \text{oder} \quad h_g = h\frac{\mu'}{\mu''}.$$

Diese Einteilung nach Geschlechtern ist von dem Modul m abhängig, und wir werden daher von den Geschlechtern nach dem Modul m sprechen.

Ist A_i eine Idealklasse, deren Ideale dem durch die Kongruenz

$$N(\mathfrak{a}_\mathfrak{i}) \equiv M_i' \pmod{m}$$

definierten Geschlecht angehören, so heifsen die Zahlen von M_i' mit den Charakteren der Klasse A_i verträglich.

*) Die folgenden Sätze gelten zum Teil auch für nicht normale Körper.

Das durch die Kongruenz

$$N(\mathfrak{a}) \equiv M' \pmod{m}$$

definierte Geschlecht heifst das Hauptgeschlecht für den Modul m. Dieses Geschlecht, dessen Ideale und Idealklassen eine Gruppe bilden, werde mit $\mathfrak{A}_m$ bezeichnet.

Da in dem Hauptgeschlechte für jeden Modul m die Klasse der Hauptideale enthalten ist, so wird es eine gewisse Gruppe von Idealklassen geben, die in dem Hauptgeschlechte für jeden Modul m enthalten ist, die also der gröfste gemeinschaftliche Teiler oder der Durchschnitt aller Hauptgeschlechter ist. Diese Gruppe, die ich mit $\mathfrak{A}$ bezeichne, heifst das absolute Hauptgeschlecht. Die Gruppe $\mathfrak{A}$ ist in der Gruppe $\mathfrak{G}$ der sämtlichen Idealklassen enthalten, und die Nebengruppen $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$ heifsen die absoluten Geschlechter.

Sind m_1, m_2 zwei relative Primzahlen, so ist $\mathfrak{A}_{m_1 m_2}$ der Durchschnitt von $\mathfrak{A}_{m_1}$ und $\mathfrak{A}_{m_2}$. Daraus ergiebt sich, dafs man das absolute Hauptgeschlecht finden kann, wenn man die Hauptgeschlechter $\mathfrak{A}_m$ unter der Voraussetzung kennt, dafs $m = p^\lambda$ eine Potenz einer Primzahl ist. Auch giebt es immer Moduln m von der Art, dafs $\mathfrak{A}_m$ mit $\mathfrak{A}$ identisch ist.

Ich nenne nun p eine charakteristische Primzahl, wenn für irgend einen Exponenten λ das Hauptgeschlecht $\mathfrak{A}_{p^\lambda}$ von der Gruppe $\mathfrak{G}$ verschieden ist.

Ist λ der gröfste Exponent, für den $\mathfrak{A}_{p^\lambda}$ von $\mathfrak{A}_{p^{\lambda-1}}$ verschieden ist, so nenne ich p^λ die charakteristische Potenz von p. Das Hauptgeschlecht $\mathfrak{A}$ kann dann auch als der Durchschnitt aller Geschlechter $\mathfrak{A}_{p^\lambda}$ für alle charakteristischen Primzahlpotenzen p^λ bestimmt werden.

Es gilt nun der Satz, dafs es für jeden Normalkörper Ω nur eine endliche Anzahl von charakteristischen Primzahlen, und für jede von ihnen eine endliche charakteristische Potenz giebt. Bei ihrer Bestimmung spielt die Körperdiskriminante Δ und der Körpergrad n eine entscheidende Rolle, und zwar gelten die folgenden Sätze:

1. Eine Primzahl, die nicht in Δ aufgeht, kommt nicht unter den charakteristischen Primzahlen vor.
2. Eine Primzahl p, die in Δ, aber nicht in n aufgeht, kommt nur dann unter den charakteristischen Primzahlen vor, wenn $p - 1$ und n einen gemeinschaftlichen Teiler (gröfser als 1) haben.
3. Die charakteristische Potenz einer Primzahl p ist nur dann höher als die erste, wenn p ungleich in Δ und in n aufgeht.

In dem letzteren Falle ergiebt sich noch eine obere Grenze für den Exponenten der charakteristischen Potenz von p, die ich hier nicht angebe. Dies alles aber läfst sich, nebst einer Erweiterung auf die Ordnungen, an dem von Gaufs durchgeführten Fall des quadratischen Körpers sehr schön verifizieren.

Diese Geschlechter-Einteilung benutze ich nun in folgender Weise zur Bildung von Zahlgruppen. Ich nehme einen beliebigen Modul m, etwa so, dafs $\mathfrak{A}_m$ mit $\mathfrak{A}$ schon übereinstimmt, verstehe unter O die Gruppe der Zahlen aus Ω, die relativ prim zu m sind, und unter O' die Gruppe aller der Zahlen ω', deren Norm mit 1 kongruent ist, die also der Bedingung

$$N(\omega') \equiv 1 \ (\text{mod. } m)$$

genügen. Da hier die Gruppe O' alle numerischen Einheiten enthält, so ist in diesem Falle $(E, E') \equiv 1$ und die Formel in Nr. 4 giebt

$$h' = h(O, O').$$

Es ist aber andererseits (O, O') gleich dem Grade $\varphi(m)$ der Gruppe M', also $= \mu'$, sodafs sich

$$h' = h\mu' = h_g \mu''$$

ergiebt.

Wenn nun Ω wieder ein imaginärer quadratischer Körper ist, so erhalten wir für die so definierte Gruppe O' einen Gruppenkörper K', wenn wir dem aus der komplexen Multiplikation stammenden Klassenkörper von Ω die m^{ten} Einheitswurzeln adjungieren.

Nach einem Satze von Kronecker läfst sich die Klassengleichung, deren Grad gleich der Klassenzahl ist, durch Adjunktion der Quadratwurzeln aus den charakteristischen Primzahlen in soviele Faktoren zerlegen, als es Genera giebt. Diese Quadratwurzeln sind Kreisteilungszahlen, die dem Körper der m^{ten} Einheitswurzeln angehören. Unsere beiden allgemeinen Sätze I. und II. können dann hier angewandt werden und ergeben die beiden folgenden Resultate:

1. Die Klassengleichung ist auch in dem Körper, der alle Einheitswurzeln enthält, nicht weiter zerlegbar, als es der Kronecker'sche Satz erlaubt.
2. Jede quadratische Form mit negativer Diskriminante stellt unendlich viele Primzahlen dar, die zugleich in einer mit den Charakteren der Klasse verträglichen Linearform enthalten sind.

Der letzte Satz ist von Dirichlet (für positive und negative Diskriminanten) ausgesprochen, und viel später von dem zu früh verstorbenen A. Meyer, den wir heute in unserem Kreise nicht mehr unter uns haben, auf einem anderen Wege bewiesen worden.

Er trat bisher unvermittelt und, wie mir schien, ziemlich willkürlich in die Theorie ein, und der Wunsch, ihn in seinem Zusammenhang mit der allgemeinen Theorie der algebraischen Zahlen zu verstehen, war für mich der erste Anstofs zu den Untersuchungen, deren Hauptresultate ich hier mitteilen wollte.

Konstituententheorie, eine neue, prinzipielle und genetische Methode zur Invariantentheorie.

Von

C. Reuschle in Stuttgart.

Sylvester hat bekanntlich für sämtliche „invariante Bildungen“ den Namen Konkomitanten vorgeschlagen, das Wort hat aber bisher keinen rechten Eingang gefunden und doch kann dasselbe als sehr zutreffend bezeichnet werden, zumal da es, als tautologisch, sich noch vereinfachen läfst, es genügt, „Komitante“ zu sagen. In der That treten die Komitanten in der Konstituententheorie als „begleitende Funktionen“ der gegebenen Funktionen*) gleichsam ganz von selbst auf, ohne dafs man von der linearen Transformation, bezw. von der Definition des Begriffs Invariante auszugehen braucht:

Die Komitanten ergeben sich samt den zwischen ihnen bestehenden Relationen als unmittelbare Folge, ohne jegliche Rechnung aus den fundamentalen Konstituentenformelsystemen, letztere selbst aber werden aus den Definitionsgleichungen der gegebenen Funktionen und ihrer Konstituenten durch Eliminationen, bezw. durch Eliminationen und Differentiationen in einfacher Weise gewonnen.

Zugleich erhält man eine „natürliche“ Symbolik, die an Kürze und Übersichtlichkeit kaum etwas zu wünschen übrig lassen dürfte.

Aufserdem möchte ich noch die pädagogische Seite der Konstituententheorie betonen, insofern es mit ihrer Hilfe möglich ist, einen der Invariantentheorie ganz Unkundigen in kürzester Zeit derart in diese Theorie einzuführen, dafs er selbst das Gebäude weiter auszubauen im stande ist.

Um das bisher Gesagte nachzuweisen und damit zugleich den besonderen Namen Konstituententheorie zu rechtfertigen, möchte ich mir erlauben, in der ersten Hälfte meines Vortrags die Grundlagen der

*) Unter Funktionen sind im Folgenden stets ganze homogene algebraische Funktionen verstanden.

Konstituententheorie — nur den Euler'schen Homogensatz und die Elemente der Determinanten voraussetzend — für das ternäre Gebiet zuerst vom algebraischen, dann vom geometrischen Standpunkt aus zu entwickeln, im zweiten Teile werde ich, soweit die Zeit reicht, nur noch in Umrissen skizzieren.

Ist f eine Homogenfunktion m^{ter} Ordnung in x_1, x_2, x_3, und setzt man, wie gebräuchlich,

$$\frac{1}{m}\,\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_i, \quad \frac{1}{m(m-1)} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_k} = f_{ik}, \quad \ldots,$$

so mögen die f_i die ersten, die $f_{ik} (= f_{ki})$ die zweiten u. s. w. Konstituenten von f heifsen; alsdann hat man im ternären Gebiet nach dem Euler'schen Homogensatz für die Funktion f

$$(1) \qquad f = f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 = |fx|\,{}^{*)} \qquad [m]$$

als erste oder explicit-lineare Konstituentenform, deren Koeffizienten die ersten Konstituenten $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung sind. Weiter hat man für die ersten Konstituenten:

$$(2) \quad \left\{\begin{array}{l} f_1 = f_{11}x_1 + f_{12}x_2 + f_{13}x_3 = |f_1 x| \\ f_2 = f_{21}x_1 + f_{22}x_2 + f_{23}x_3 = |f_2 x| \\ f_3 = f_{31}x_1 + f_{32}x_2 + f_{33}x_3 = |f_3 x| \end{array}\right\}, \text{ kurz: } \; f_i = |f_i x| \qquad [m-1]$$

als explicit-lineare Formen, deren Koeffizienten die zweiten Konstituenten $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung sind.

Aus diesen Definitionsgleichungen der Funktion f und ihrer ersten Konstituenten ergeben sich nun durch Eliminationen der expliciten x zugehörige Konstituentenformelsysteme, welche erste und zweite Konstituenten enthalten.

Setzt man nämlich zur Abkürzung die aus den zweiten Konstituenten gebildete Determinante der ersten Konstituenten

---

*) Diese Abkürzung möge als Abschleifung der Gaufs'schen Bezeichnung $[ab] = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots$, welche in der Methode der kleinsten Quadrate üblich ist, betrachtet werden. — Die in eckiger Klammer hinter den Gleichungen beigesetzten Zahlen sind die Ordnungszahlen (Grad in den x_i); stehen hinter einer Gleichung zwei durch ein Komma getrennte Zahlen in der eckigen Klammer, so ist die erste die Ordnungszahl, die zweite die Klassenzahl (Grad in den u_i). — Es möge noch bemerkt sein, dafs beim Vortrag in Zürich alle folgenden Gleichungen auf Tableaux geschrieben, und dafs zur gröfseren Übersichtlichkeit diejenigen Gleichungen, deren Nummern den Index D tragen, den gleichnumerierten Gleichungen dualistisch gegenübergestellt waren.

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} = \mathsf{F}^{*)} \qquad [3m - 6]$$

und bezeichnet deren Unterdeterminanten $(2m - 4)^{\text{ter}}$ Ordnung mit F_{ik} $(F_{ik} = F_{ki})$ und nennt dieselben die adjungierten Konstituenten der f_{ik}, so erhält man durch Auflösung der Gleichungen (2) nach den x_i, d. h. indem man immer je zwei der explicit-linearen x eliminiert:

$$(2\text{a}) \quad \left.\begin{cases} \mathsf{F}\cdot x_1 = F_{11}f_1 + F_{12}f_2 + F_{13}f_3 = |F_1 f| \\ \mathsf{F}\cdot x_2 = F_{21}f_1 + F_{22}f_2 + F_{23}f_3 = |F_2 f| \\ \mathsf{F}\cdot x_3 = F_{31}f_1 + F_{32}f_2 + F_{33}f_3 = |F_3 f| \end{cases}\right\}, \text{ kurz: } \mathsf{F}\cdot x_i = |F_i f| \quad [3m-5]$$

als ein erstes Konstituentenformelsystem. Komponiert man dasselbe unter Adjungierung der Funktion I. Ordnung und I. Klasse

$$(4) \qquad u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = |ux| \qquad [1, 1]$$

mit den u_i, so erhält man die Funktion $(3m - 5)^{\text{ter}}$ Ordnung und I. Klasse:

$$(5) \qquad \mathsf{F}\cdot|ux| = \begin{cases} (F_{11}u_1 + F_{12}u_2 + F_{13}u_3)f_1 \\ + (F_{21}u_1 + F_{22}u_2 + F_{23}u_3)f_2 \\ + (F_{31}u_1 + F_{32}u_2 + F_{33}u_3)f_3 \end{cases} \quad [3m - 5, 1],$$

setzt man die hierin auftretenden Klammergrößen nach Analogie mit (2) zur Abkürzung gleich F_i, so erhält man als Seitenstück zu den Funktionen (2) die Funktionen:

$$(2)_{\mathrm{D}} \quad \left.\begin{cases} F_1 = F_{11}u_1 + F_{12}u_2 + F_{13}u_3 = |F_1 u| \\ F_2 = F_{21}u_1 + F_{22}u_2 + F_{23}u_3 = |F_2 u| \\ F_3 = F_{31}u_1 + F_{32}u_2 + F_{33}u_3 = |F_3 u| \end{cases}\right\}, \text{ kurz: } F_i = |F_i u| \quad [2m-4, 1],$$

komponiert man diese nochmals mit den u_i und bezeichnet die entstehende Funktion mit F, so erhält man als Seitenstück zur Funktion f die Funktion:

$$(1)_{\mathrm{D}} \qquad F = F_1 u_1 + F_2 u_2 + F_3 u_3 = |Fu| \qquad [2m - 4, 2].$$

Gemäß $(2)_{\mathrm{D}}$ geht die Funktion (5) über in:

$$\mathsf{F}\cdot|ux| = F_1 f_1 + F_2 f_2 + F_3 f_3 = |Ff|,$$

also:

$$(5') \qquad \mathsf{F}\cdot|ux| = |Ff| \qquad [3m - 5, 1].$$

Durch Auflösung der Gleichungen $(2)_{\mathrm{D}}$ nach den u_i erhält man als Seitenstück zu (2a) das weitere Konstituentenformelsystem:

---

*) Dieser Buchstabe wurde beim Vortrag „Fes“ gesprochen.

$$(2\text{a})_\mathrm{D}\begin{cases} \mathsf{F}\cdot u_1 = f_{11}F_1 + f_{12}F_2 + f_{13}F_3 = |f_1 F| \\ \mathsf{F}\cdot u_2 = f_{21}F_1 + f_{22}F_2 + f_{23}F_3 = |f_2 F| \\ \mathsf{F}\cdot u_3 = f_{31}F_1 + f_{32}F_2 + f_{33}F_3 = |f_3 F| \end{cases}, \text{ kurz: } \mathsf{F}\cdot u_i = |f_i F| \quad [3m-6, 1].$$

Des Weiteren geben die Gleichungen (2), mit den x_i komponiert, gemäfs (1) für die Funktion f

$$(1_2) \qquad \begin{aligned} f &= f_{11}x_1^2 + 2f_{12}x_1x_2 + \cdots \\ &= (\underline{f}_1 x_1 + \underline{f}_2 x_2 + \underline{f}_3 x_3)^{(2)} = |\underline{f}x|^{(2)}, ^{*)} \end{aligned} \qquad [m]$$

als zweite oder explicit-quadratische Form, deren Koeffizienten die zweiten Konstituenten $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung sind; analog geben die Gleichungen $(2)_\mathrm{D}$, mit den u_i komponiert,

$$(1_2)_\mathrm{D} \qquad \begin{aligned} F &= F_{11}u_1^2 + 2F_{12}u_1u_2 + \cdots \\ &= (\underline{F}_1 u_1 + \underline{F}_2 u_2 + \underline{F}_3 u_3)^{(2)} = |\underline{F}u|^{(2)} \end{aligned} \qquad [2m-4, 2].$$

Ferner: die Gleichungen (2a), mit den f_i komponiert, geben:

$$(6) \qquad \mathsf{F}\cdot f = F_{11}f_1^2 + 2F_{12}f_1f_2 + \cdots = |\underline{F}f|^{(2)} \quad [4m-6, 0],$$

und die Gleichung $(2\text{a})_\mathrm{D}$, mit den F_i komponiert, geben:

$$(6)_\mathrm{D} \qquad \mathsf{F}\cdot F = f_{11}F_1^2 + 2f_{12}F_1F_2 + \cdots = |\underline{f}F|^{(2)} \quad [5m-10, 2],$$

während die Formeln $(2\text{a})_\mathrm{D}$, mit den x_i komponiert, wieder die Gleichung (5′) geben, womit ein erster in sich geschlossener Operationskreis angezeigt ist.

Nimmt man nun, als am nächsten liegend, $|fx|$ und $|ux|$ zusammen und eliminiert aus

$$\begin{cases} |fx| = f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 \\ |ux| = u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 \end{cases} \qquad \left|\begin{array}{c|c|c} u_1 & u_2 & u_3 \\ -f_1 & -f_2 & -f_3 \end{array}\right|$$

der Reihe nach je ein explicites x, so erhält man:

$$\left\{\begin{aligned} |fx|\cdot u_1 - f_1\cdot|ux| &= \qquad\qquad\quad -(f_1u_2)x_2 + (f_3u_1)x_3 \\ |fx|\cdot u_2 - f_2\cdot|ux| &= (f_1u_2)x_1 \qquad\qquad\quad -(f_2u_3)x_3 \\ |fx|\cdot u_3 - f_3\cdot|ux| &= -(f_3u_1)x_1 + (f_2u_3)x_2 \end{aligned}\right\} = \left\|\begin{matrix} (f_2u_3) & (f_3u_1) & (f_1u_2) \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix}\right\|, \quad \left|\begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{matrix}\right|$$

wofür man kurz die leicht dem Gedächtnis sich einprägende „Matrixgleichung“ schreiben kann:

$$(\mathrm{I}) \qquad \left\|\begin{array}{c|ccc} |fx| & f_1 & f_2 & f_3 \\ |ux| & u_1 & u_2 & u_3 \end{array}\right\| = \left\|\begin{matrix} (f_2u_3) & (f_3u_1) & (f_1u_2) \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix}\right\| \qquad [m, 1],$$

---

*) Um das symbolische Quadrat anzudeuten, ist der Exponent, wie beim Taylor'schen Satz mit mehreren Veränderlichen gebräuchlich, in Klammern eingeschlossen, überdies sind die symbolisch zu quadrierenden Koeffizienten durch Unterstreichen gekennzeichnet.

wenn man unter dem Symbol $\| \quad \| = \| \quad \|$ das System der drei Gleichungen versteht, die man erhält, wenn man die Determinanten der einen Matrix gleich den entsprechenden der anderen setzt, und wenn das Symbol links, das man eine „geteilte Matrix“ nennen kann, der Reihe nach die drei Determinanten $\begin{vmatrix} |fx| & f_1 \\ |ux| & x_1 \end{vmatrix}$ und „cyklisch weiter“ bedeuten soll.

Komponiert man die, drei Gleichungen repräsentierende, Matrixgleichung mit den F_i, damit links die Funktion F erscheint, so ergiebt sich gemäfs (5′) (vgl. auch das ausführlichere Schema oben):

$$\begin{vmatrix} |fx| & |Ff| \\ |ux| & |Fu| \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f & \mathsf{F}\cdot|ux| \\ |ux| & F \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (f_2u_3) & (f_3u_1) & (f_1u_2) \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \begin{aligned} &= ((fu)\,xF) = (fu\,(xF)) \\ &= (f_2u_3)(x_2F_3) + (f_3u_1)(x_3F_1) + (f_1u_2)(x_1F_2) \\ &= |(fu)\,(xF)|, \end{aligned}$$

also:

$$(7) \qquad |(fu)(xF)| = F\cdot f - \mathsf{F}\cdot|ux|^2 \qquad [3m-4,\ 2];$$

man gewöhnt sich rasch daran, diese letzte Gleichung direkt aus der Matrixgleichung abzulesen. Ganz auf dieselbe Relation würde auch die auf $|Fu|$ und $|xu|$ angewandte Matrixgleichung durch Komponierung mit den f_i führen, womit ein zweiter in sich geschlossener Operationskreis angezeigt ist.

Mit diesen wenigen und einfachen Hilfsmitteln ist also aus den Definitionsgleichungen der Funktion f und ihrer ersten Konstituenten unter Adjungierung der Funktion $|ux|$ und durch Komponierungen der bisherigen drei Konstituentenformelsysteme (2a), $(2\text{a})_\text{D}$ und (I) eine Reihe weiterer Funktionen hervorgegangen; werden alle diese Funktionen, f selbst mitzählend, begleitende Funktionen oder Komitanten genannt, so hat man neben den 4 Komitanten

$$\begin{array}{ccc} & \mathsf{F} & \\ & [3m-6,\ 0] & \\ f & |ux| & F \\ [m,\ 0] & [1,\ 1] & [2m-4,\ 2] \end{array}$$

die vier weiteren nebst zugehörigen Relationen

$$\begin{array}{ccc} |\underline{F}f|^{(2)} = \mathsf{F}\cdot f & |Ff| = \mathsf{F}\cdot|ux| & |f\underline{F}|^{(2)} = \mathsf{F}\cdot F \\ [4m-6,\ 0] & [3m-5,\ 1] & [5m-10,\ 2] \end{array}$$

$$|(fu)(xF)| = F\cdot f - \mathsf{F}\cdot|ux|^2;$$
$$[3m-4,\ 2]$$

die vier letzteren sind ganze rationale Funktionen der vier ersteren und damit als reducible Komitanten gekennzeichnet.*)

Nun zur geometrischen Betrachtung des Bisherigen und zwar für den einfachsten Fall, in welchem zweite Konstituenten existieren, d. h. wenn $m = 2$, also f ein Kegelschnitt**) und daher die f_{ik} und somit auch die F_{ik} und F konstant sind. Die Ordnungs-Klassenzahlen der Komitanten werden jetzt:

$$\begin{array}{c|lll|c}
\mathsf{F} & f & [2,0] & |Ff|^{(2)} = \mathsf{F}\cdot f & |(fu)(xF)| = F\cdot f - \mathsf{F}\cdot|ux|^2. \\
{[0,0]} & |ux| & [1,1] & |Ff| \ \ \, = \mathsf{F}\cdot|ux| & [2,2] \\
 & F & [0,2] & |fF|^{(2)} = \mathsf{F}\cdot F &
\end{array}$$

Die letzte Komitante, für welche man links eine monomische, rechts eine binomische Form hat, ist es, welche die geometrische Deutung vermittelt.

Betrachtet man zunächst die Gerade u_i als gegeben, so ist aufser F auch F eine Konstante, die Komitante $[2, 2]$ ist also eine Kurve II. Ordnung, welche gemäfs der monomischen Form den Punkt mit den Koordinaten F_i als Doppelpunkt***) hat und welche gemäfs der binomischen Form den Kegelschnitt f berührt in seinen Schnittpunkten mit der Geraden $|ux|$; also:

$|(fu)(xF)| = F\cdot f - \mathsf{F}\cdot|ux|^2$ *ist das Tangentenpaar im* f*-Schnittpunktepaar der Geraden* $|ux|$ *und* F_i *ist der Doppelpunkt des Tangentenpaares, der sogenannte Pol der Geraden* u_i.

Ist $\mathsf{F} = 0$, so geht das Tangentenpaar über in

$$|f(u)(xF)| = F\cdot f,$$

d. h. in den Kegelschnitt f selbst, der also von Haus aus ein Geradenpaar sein mufs; also:

$\mathsf{F} = 0$ *besagt, dafs der Kegelschnitt* f *in ein Geradenpaar zerfällt;* ist aber $F = 0$, so geht das Tangentenpaar über in

$$|(fu)(xF)| = -\mathsf{F}\cdot|ux|^2,$$

---

*) Der Zahlenkoeffizient von m in den beigesetzten Ordnungs-Klassenzahlen ist die Gradzahl der Komitante (Grad in den konstanten Koeffizienten von f).

**) Statt „f ist die Funktion eines Kegelschnittes" oder „$f = 0$ ist die Gleichung eines Kegelschnittes" soll der Kürze wegen im Folgenden meist gesagt sein: „f ist ein Kegelschnitt", etc. etc.

***) Denn für $x_i = F_i$ verschwinden nicht allein die Determinanten (xF), sondern auch die Determinanten (fu), da gemäfs (2) und $(2\text{a})_D$

$$f_i)_{x_i = F_i} = |f_i F| = \mathsf{F}\cdot u_i; \quad \text{also} \quad (fu) = \mathsf{F}\cdot(uu) = 0.$$

d. h. in die doppelt zu denkende Gerade $|ux|$, welche also Tangente des Kegelschnittes f ist; also:

F ist der Kegelschnitt in Linienkoordinaten.

Ganz analog erhält man bei gegebenem x_i den zum obigen Satz dualistischen Satz:

$|(fu)(xF)| = f \cdot F - \mathsf{F} \cdot |xu|^2$ *ist das Berührungspunktepaar des F-Tangentenpaares des Punktes $|xu|$ und f_i ist die Doppelgerade des Berührungspunktepaares (die Berührungssehne des Tangentenpaares), die sogenannte Polare des Punktes x_i.*

Die Komitantenrelation $|Ff| = \mathsf{F} \cdot |ux|$ besagt aber: liegen x_i und u_i vereinigt, so liegen auch f_i und F_i vereinigt und umgekehrt, sie spricht also den Fundamentalsatz von Pol und Polare aus; eine kürzere analytische Form für diesen Satz ist wohl nicht denkbar. Ebenso einfach sind die Deutungen der zwei übrigen Komitantenrelationen.

Von hier an werde ich nur noch in Umrissen skizzieren. Während die einzelnen Formeln eines Konstituentenformelsystems natürlich vom Koordinatensystem abhängig sind, sind die daraus durch die obigen Komponierungen erhaltenen Komitanten und Komitantenrelationen, wie geometrisch unmittelbar einleuchtet, vom Koordinatensystem unabhängig, also invariant, was hinterher durch Ausführung der linearen Transformation in bekannter Art leicht analytisch nachzuweisen ist.

In der begonnenen Weise systematisch fortfahrend erhält man als wichtigste Formelsysteme mit zweiten Konstituenten, welche zu f und F gehören, die folgenden vier

$$(\mathrm{II}) \quad \left\{ \begin{matrix} f_{11}f - f_1^2 = (\underline{F_2}x_3)^{(2)} \\ \text{u. cyklisch weiter} \end{matrix} \right\};$$

$$(\mathrm{II})_{\mathrm{D}} \quad \left\{ \begin{matrix} F_{11}F - F_1^2 = \mathsf{F} \cdot (\underline{f_2}u_3)^{(2)} \\ \dots\dots\dots \end{matrix} \right\};$$

$$(\mathrm{IIa}) \quad \left\{ \begin{matrix} F_{11}f - \mathsf{F} \cdot x_1^2 = (\underline{f_2}f_3)^{(2)} \\ \dots\dots\dots \end{matrix} \right\};$$

$$(\mathrm{IIa})_{\mathrm{D}} \quad \left\{ \begin{matrix} \mathsf{F} \cdot (f_{11}F - \mathsf{F} \cdot u_1^2) = (\underline{F_2}F_3)^{(2)} \\ \dots\dots\dots \end{matrix} \right\}.$$

Dieselben können in verschiedener Weise hergeleitet werden, z. B. das System (II), indem man die Matrixgleichung zunächst auf je zwei der Gleichungen (2) und dann auf Gleichung (1) und je eine der Gleichungen (2) anwendet, analog die übrigen.

Jedes der Formelsysteme repräsentiert $3 \cdot 3$, d. h. 9, oder wegen $f_{ik} = f_{ki}$ vielmehr nur 6 Gleichungen; in der Anwendung genügt es aber, immer nur die erste Formel anzuschreiben; z. B. aus dem Schema (IIa) mit dem beigesetzten Komponierungsfaktor u_1^2

$$(\text{IIa})\quad \left\{\begin{matrix} F_{11}f - \mathsf{F}\cdot x_1^2 = (\underline{f_2}f_3)^{(2)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{matrix}\right\} \left|\begin{matrix} u_1^2 \\ \cdot \end{matrix}\right.,$$

d. h. aus dem Formelsystem (IIa), komponiert mit den Quadraten und doppelten Produkten von u_1, u_2, u_3 liest man unmittelbar ab:

$$|\underline{F}u|^{(2)}\cdot f - \mathsf{F}\cdot|ux|^2 = (\underline{f}uf)^{(2)};$$
$$= F\cdot f - \mathsf{F}\cdot|ux|^2$$

man braucht nämlich nur einmal das vollständige System der 6 Formeln samt den komponierenden Faktoren anzuschreiben und man überzeugt sich sofort, dafs man einfach jedem Glied der Konstituentenformel den komponierenden Faktor, hier das u, innerhalb der Vertikalstriche bezw. der Klammern mit Weglassung aller Indices beizusetzen hat; bei Weglassung des Doppelindex, wie beim Koeffizient F_{11} von f hat man $\underline{F}$ zu schreiben und den Exponenten in Klammer zu setzen.

Ganz analog erhält man aus $(\text{IIa})_D$ durch Komponierung mit $x_1^2, \cdots$

$$\mathsf{F}\cdot[|\underline{f}x|^{(2)}\cdot F - \mathsf{F}\cdot|ux|^2] = (\underline{F}xF)^{(2)};$$
$$= \mathsf{F}\,[Ff - \mathsf{F}\cdot|ux|^2]$$

also mit Hinzunahme der bisherigen Resultate:

$$\big|(fu)(xF)\big| = (\underline{f}uf)^{(2)} = \frac{(\underline{F}xF)^{(2)}}{\mathsf{F}} = F\cdot f - \mathsf{F}\cdot|ux|^2,$$

sodafs für diese reducible Komitante drei verschiedene monomische und eine binomische Form, deren jede von Bedeutung ist, gewonnen sind. Gerade in dem Umstand, dafs man in der Konstituententheorie eine ganze Reihe verschiedener Formen für ein und dieselbe Komitante mit so grofser Leichtigkeit erhält, dürfte, abgesehen von der sonstigen Einfachheit, ein besonderer Vorteil dieser Theorie liegen. Neben der theoretischen Bedeutung der verschiedenen Formen für ein und dieselbe Komitante, steht aber auch noch ein praktischer Vorteil: ist nämlich für f irgend eine spezielle Funktion gegeben, so erhält man, da eine in der Konstituentensymbolik geschriebene Komitante für eine spezielle Funktion mit kleiner Mühe sich berechnen läfst, durch Benützung der verschiedenen Formen der Komitante in der Übereinstimmung der ausgerechneten Resultate, sehr gute Proben; an solchen fehlt es überhaupt in der Konstituententheorie nirgends; da dieselbe den ausgiebigsten Gebrauch vom Prinzip der identischen

Transformation macht, weshalb die Konstituententheorie auch Algebra der identischen Transformation genannt werden könnte.

Die Wichtigkeit der vier Formelsysteme (II), denen auch noch andere zusammengesetztere mit zweiten Konstituenten zur Seite stehen, und an welche bei fernerem Aufbau der Theorie natürlich auch Konstituentenformelsysteme mit höheren Konstituenten sich anschliefsen, ergiebt sich daraus, dafs schon mit Hilfe dieser vier Formelsysteme eine aufserordentliche Menge von Folgerungen und Sätzen zu erhalten, zahlreiche Aufgaben in sehr einfacher Weise zu lösen sind, wobei ich noch als ein wesentliches Moment der Konstituententheorie hervorheben möchte, dafs man gar nicht nötig hat, Probleme zu stellen, diese stellen sich von selbst: *man braucht nur die Formelsysteme in allen möglichen Weisen zu komponieren, wobei man algebraische Identitäten und bei geometrischer Deutung geometrische Sätze erhält,* wie das oben ausgeführte Beispiel gezeigt hat (vgl. auch S. 139 unten).

Die hauptsächlichsten Komponierungen (vgl. auch S. 134) sind:

a) Komponierungen mit Veränderlichen, sei es mit kogredienten oder mit kontragredienten, sei es mit einfachen oder mit zusammengesetzten;

b) Komponierungen mit Konstituenten, sei es mit einfachen oder zusammengesetzten, sei es mit Konstituenten der ursprünglichen Funktion oder mit Konstituenten neu hinzugenommener, bezw. neu hinzugetretener Funktionen, wozu natürlich auch Komponierungen mit Konstanten gehören, da eine Konstantenreihe stets als letzte Konstituenten einer Funktion betrachtet werden können;

c) Komponierungen mit Faktoren, die aus Veränderlichen und Konstituenten zusammengesetzt sind;

d) Komponierungen mit Differentialen; etc. etc.

Die Komponierungen zur Gewinnung von Komitanten sind dimensionale.*) Ein weiteres Merkmal für eine Komitante in der Konstituentensymbolik bildet auch die Möglichkeit ihrer Schreibweise ohne Indices.

Nimmt man aber nicht-dimensionale Komponierungen vor,

*) Geht man nämlich auf nicht homogene Funktionen zurück, indem man x, y, 1 an Stelle von x_1, x_2, x_3 gesetzt denkt, und betrachtet man x, y als Gröfsen erster Dimension, eine Funktion m^{ter} Ordnung in x und y, beginnend mit $a_0 x^m + \cdots$ als Gröfse m^{ter} Dimension, somit a_0 als Gröfse nullter Dimension, so kann man leicht eine Dimensionsskala für die verschiedenen Konstituenten und damit auch für die einzelnen Formeln eines Formelsystems anlegen, alsdann sind die Komponierungen so vorzunehmen, dafs jedes einzelne Glied der entstehenden algebraischen Identität von derselben Dimension wird.

oder komponiert man nur einen Teil der Formeln eines Formelsystems, so erhält man Funktionen nebst zugehörigen Relationen, deren geometrische Deutung metrische Sätze liefert; z. B. ist aus den drei ersten Formeln des Systems (II) die Brennpunktstheorie der Kegelschnitte in einfacher Weise zu entwickeln. Auch die geometrische Deutung der einzelnen Formeln eines Formelsystems ist von analytisch-geometrischem Interesse, z. B. giebt die letzte der Formeln (IIa) für Descartes'sche Koordinaten das Asymptotenpaar des Kegelschnitts f in monomischer und binomischer Form.

Nimmt man endlich Komponierungen mit Differentialen u. dergl. vor, sò erhält man in durchaus genetischer Weise Identitäten bezw. Sätze, welche in der Theorie der Abel'schen Integrale, sowie in der Theorie der Berührungstransformationen eine Rolle spielen; etc. etc.

Im Anschlufs an die obigen Formelsysteme (II) möchte ich einen kleinen Exkurs auf das binäre Gebiet machen; aber nur in soweit, als ich es nachher nötig habe. In diesem existieren die Formeln rechts, welche Linienkoordinaten enthalten, natürlich gar nicht, die beiden Formelsysteme links gehen in das eine zusammen:

$$\left\{\begin{aligned} f_{11}f-f_1^2 &= \mathsf{F}\cdot x_2^2 \\ f_{12}f-f_1f_2 &= -\mathsf{F}\cdot x_1x_2 \\ f_{22}f-f_2^2 &= \mathsf{F}\cdot x_1^2 \end{aligned}\right\},\quad \text{wo}\quad \mathsf{F}=\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22}\end{vmatrix}\ \text{das binäre } \mathsf{F} \text{ ist.}$$

Für die quadratische Funktion in der Form

$$\begin{aligned} f = ax^2+2bx+c &= (ax+b)\,x+(bx+c) \\ &= \xi\cdot x+\eta \qquad \text{(zur Abk.)}, \end{aligned}$$

wo ξ, η die ersten und a, b, c die zweiten Konstituenten sind, lautet dieses Formelsystem:

$$\left\{\begin{aligned} af &= \xi^2+\delta \\ bf &= \xi\eta-\delta\cdot x \\ cf &= \eta^2+\delta\cdot x^2 \end{aligned}\right\},\quad \text{wo}\quad \delta = ac-b^2.$$

Dasselbe kann natürlich auch ganz elementar algebraisch hergeleitet werden. Dabei ist mir nur auffallend, dafs dieses Formelsystem als ein System zusammengehöriger Identitäten noch nirgends aufgestellt ist, obwohl die erste Formel eine nicht selten gebrauchte ist und die letzte dieselbe Relation für die Reciprokalfunktion von f ausspricht. Aber gerade in der Hinzufügung der mittleren Formel und in der Zusammenstellung zu einem Konstituentenformelsystem liegt der Schwerpunkt, da durch Komponierungen desselben wieder eine Fülle von Folgerungen fast mühelos gezogen werden können und zwar sowohl auf dem Gebiet der Algebra, wie der Analysis, auf dem Gebiet der projektiven, wie der metrischen Geometrie. Als Beispiel sei nur angeführt, dafs mit Hilfe des Formelsystems $af = \xi^2 + \delta$ etc. die Cayley'schen Syzyganten (s. auch S. 135) für die binäre kubische und biquadratische Funktion ganz elementar algebraisch und zugleich genetisch gefunden werden, sodafs die auf diese Syzyganten sich gründende sog. invariantentheoretische Auflösungen der kubischen und biquadratischen Gleichung rein elementar-algebraische genannt werden können. —

Ich kehre wieder zum ternären Gebiet zurück. Was die Komitanten des simultanen Systems zweier Kegelschnitte f und g anbelangt, so zeigt die Tabelle auf der folgenden Seite, wie man aus den beiden Formelsystemen (II) und (IIa), indem man dieselben der Reihe nach mit den fünf angeschriebenen Faktoren (Faktorenreihen) komponiert, die 14 Simultankomitanten ohne weiteres ablesen und hinschreiben kann, welche mit den zu f und g allein gehörigen 7 Komitanten

$$\begin{array}{ccc} & \mathsf{F} & \\ f & & F \\ & |ux| & \\ g & & G \\ & \mathsf{G} & \end{array}$$

nach dem Gordan'schen Satz das vollständige System der 21 Fundamentalkomitanten zweier Kegelschnitte mit einer Variablenreihe x und einer Variablenreihe u bilden.

Dabei sind die durch das Wort „und“ verbundenen durch Vertauschung von f und g u. s. w. entstanden, während die durch die Worte „und dualistisch“ verbundenen durch Dualisation, d. h. durch Vertauschung der kleinen und grofsen auf die beiden Kegelschnitte bezüglichen Buchstaben und durch Vertauschung von x und u entstanden sind, wie sie auch direkt aus den dualistischen Systemen $(\mathrm{II})_{\mathrm{D}}$ und $(\mathrm{IIa})_{\mathrm{D}}$ zu erhalten wären:

$$\text{(II)} \quad \left\{ f_{11} f - f_1^2 = (\underline{F}_2 x_3)^{(2)} \right\} \qquad G_{11} \qquad G_1^2 \qquad (u_2 g_3)^2 \qquad (u_2 | g_3 F |)^2$$

$$\text{(IIa)} \quad \left\{ F_{11} f - F \cdot x_1^2 = (\underline{f}_2 f_3)^{(2)} \right\} \qquad (|F_2 g| \, |G_3 f|)^2$$

$$(|\underset{\cdot}{F} g| x | \underset{\cdot}{G} f|); \text{ u. dual. } (|\underset{\cdot}{f} G| u | \underset{\cdot}{g} F|)$$

$$(f u | \underset{\cdot}{g} F|) \text{ und } (|\underset{\cdot}{f} G| u g); \text{ u. dual. } (F x | \underset{\cdot}{G} f|) \text{ und } (|\underset{\cdot}{F} g| x G) \text{ *)}$$

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{F} & \\ f & & F \\ & |ux| & \\ g & & G \\ & \mathbf{G} & \end{array}$$

$$(f u g); \text{ und dual. } (F x G)$$

$$|f G| \text{ und } |g F|$$

$$(\underline{F} x \underline{G})^{(2)} \text{ u. zugl. } |\underline{G} \underline{f}|^{(2)} \text{ u. } |\underline{F} \underline{g}|^{(2)}; \text{ und dual. } (\underline{f} u \underline{g})^{(2)}$$

---

*) Es ist z. B.

$$(|\underset{\cdot}{F} g| x G) = \begin{vmatrix} |F_1 g| & |F_2 g| & |F_3 g| \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{vmatrix} \text{ u. s. w.}$$

Zugleich liest man, wie in den obigen Beispielen, zu jeder der Komitanten eine Komitantenrelation ab und gewinnt jedesmal weitere reducible Komitanten, aber gerade solche, welche in direkter und geometrisch wichtiger Beziehung zu den betreffenden Fundamentalkomitanten stehen, und diese reduciblen Komitanten sind es eben, welche, wie im eingangs ausgeführten Beispiel, die geometrische Deutung vermitteln.

Aber auch an sich können reducible Komitanten nebst den zugehörigen Relationen von Bedeutung sein, wenn dieselben wichtige und fundamentale Sätze in einfachster Form aussprechen, wie es z. B. bei der Relation

$$|Ff| = \mathsf{F} \cdot |ux|$$

oben der Fall war; dabei zeigt sich, dafs die am nächsten liegenden Komponierungen, bezw. diejenigen, bei welchen die komponierenden Faktoren die einfachsten sind, im allgemeinen auch die wichtigsten und fundamentalsten Sätze aussprechen, bezw. interessante geometrische Aufgaben lösen, wie das Schlufsbeispiel zeigen soll.

Die Hauptsache aber ist, dafs die reduciblen Komitanten auch die Aufstellung der Syzyganten vermitteln. An der Hand der letzten Tabelle läfst sich aber leicht zeigen, wie dieselben in einfacher Weise zu erhalten sind. Bei Komponierungen mit zusammengesetzten Faktoren, wenn man z. B. mit den Quadraten und doppelten Produkten von zweireihigen Determinanten komponiert, wie in den drei letzten Fällen der Tabelle auf S. 134, tritt sowohl links als Koeffizient von f als auch rechts eine reducible Komitante auf, erstere läfst sich durch bereits schon vorhergehende Komponierungen leicht in Funktion von irreduciblen Komitanten ausdrücken, für die letztere ergiebt sich mit Hilfe der Matrixgleichung sofort eine zweite Darstellung durch andere irreducible Komitanten, damit erhält man also Relationen zwischen irreduciblen Komitanten, d. h. sogenannte Syzyganten.

Und wie die Komitantenrelationen nur Ablesungen aus den Konstituentenformelsystemen sind, so sind die Rechnungen zur Gewinnung von Syzyganten kaum Rechnungen zu nennen, so einfach sind dieselben, wenigstens von vorneherein, später wenn die komponierenden Faktoren zusammengesetzter werden, werden natürlich auch die Rechnungen etwas komplizierter.

Dabei möchte ich noch eines sehr merkwürdigen Umstandes gedenken: *Wenn nämlich die reducible Komitante rechts als homogene quadratische Funktion zweier irreduciblen Komitanten auftritt, so ist die Diskriminante dieser quadratischen Funktion nichts anderes als die links als Koeffizient von f auftretende Komitante*, womit man zugleich einen Einblick in das Wesen solcher Syzyganten gewinnt. Nimmt man nun noch geeignete Umstellungen mit der Syzygante und weitere Umformungen vor, insbesondere mit Hilfe des binären Formelsystems $af = \xi^2 + \delta$ etc., so gewinnt man das eine Mal einen tieferen Einblick in das Wesen einer solchen Syzygante, das andere Mal durch geometrische Deutung eine gröfsere Reihe interessanter geometrischer Sätze.

In betreff der Konstituentensymbolik ist zu bemerken, dafs dieselbe eine Art stenographische Schreibweise für die Komitanten giebt, insofern jede derselben mit dem logisch notwendigen Minimum von Buchstaben bezw. Zeichen sich schreiben läfst; z. B. $|Fg|$ ist das kürzeste Symbol unter den obigen Simultankomitanten; $|Fg| = 0$ besagt (analog wie $|Ff| = 0$ oben): Der F-Pol von u_i und die g-Polare von x_i liegen vereinigt; also stellt diese Gleichung bei konstanten u die g-Polare des F-Pols von u_i, bei konstanten x den F-Pol der g-Polaren von x_i dar. Man kann für das obige System leicht einige wenige Regeln aufstellen, vermittelst deren aus dem analytischen Ausdruck der Komitante ihre geometrische Bedeutung leicht sich merken läfst, bezw. abzulesen ist.

Die Tabelle auf der nächsten Seite giebt eine übersichtliche und systematische Zusammenstellung der 21 Fundamentalkomitanten zweier Kegelschnitte f und g nach den Ordnungsklassenzahlen.*) Bei der Kürze der Zeit kann ich nicht näher darauf eingehen, ich möchte nur erwähnen, dafs diese Zusammenstellung logisch befriedigend ist, oder wenn ich mich so ausdrücken darf, ein philosophisches Gepräge hat:

) Die über den Komitanten in eckiger Klammer stehenden Zahlen sind die allgemeinen Ordnungs-Klassenzahlen, wenn f von der m^{ten}, g von der n^{ten} Ordnung ist, sie involvieren zugleich die Gradzahlen (s. oben S. 128 Anm.)); die unter den Komitanten stehenden Zahlen sind die Ordnungs-Klassenzahlen für $m = n = 2$.

$$\begin{array}{cccc}
[3m-6,0] & [2m+n-6,0] & [m+2n-6,0] & [3n-6,0] \\
\mathsf{F}\ {}^{*)} & |\underline{F}\,\underline{g}|^{(2)} & |\underline{G}\,\underline{f}|^{(2)} & \mathsf{G} \\
[0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0]
\end{array}$$

$$\underbrace{\overset{[m,0]}{f}\quad \overset{[2m+2n-6,0]}{(\underline{F}x\underline{G})^{(2)}}\quad \overset{[n,0]}{g}}_{[2,0]}
\qquad
\underbrace{\overset{[m+2n-5,1]}{|fG|}\quad \overset{[1,1]}{|ux|}\quad \overset{[2m+n-5,1]}{|gF|}}_{[1,1]}
\qquad
\underbrace{\overset{[2m-4,2]}{F}\quad \overset{[m+n-4,2]}{(\underline{f}u\underline{g})^{(2)}}\quad \overset{[2n-4,2]}{G}}_{[0,2]}$$

$$\underset{[3,0]}{\overset{[3m+3n-9,0]}{(|\underset{\cdot}{F}g|x|\underset{\cdot}{G}f|)}}
\qquad
\underbrace{\overset{[2m+3n-8,1]}{(|\underset{\cdot}{F}g|xG)}\quad \overset{[m+n-2,1]}{(fug)}\quad \overset{[3m+2n-8,1]}{(Fx|\underset{\cdot}{G}f|)}}_{[2,1]}
\qquad
\underbrace{\overset{[m+3n-7,2]}{(|\underset{\cdot}{f}G|ug)}\quad \overset{[2m+2n-7,2]}{(FxG)}\quad \overset{[3m+n-7,2]}{(fu|\underset{\cdot}{g}F|)}}_{[1,2]}
\qquad
\underset{[0,3]}{\overset{[3m+3n-12,3]}{(|\underset{\cdot}{f}G|u|\underset{\cdot}{g}F|)}}$$

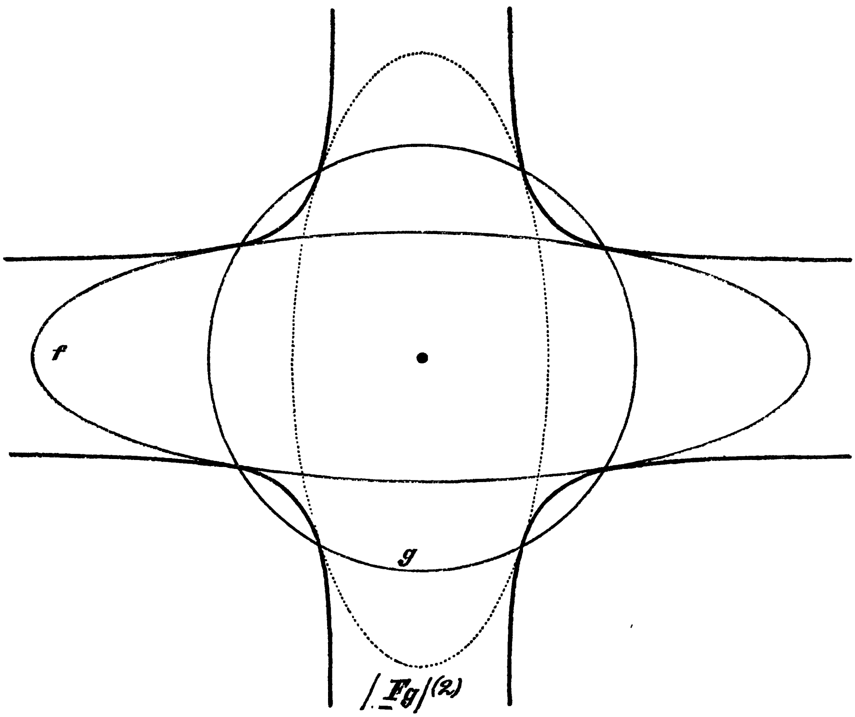
---

*) F läſst sich auch schreiben $\frac{1}{3}|\underline{F}\,\underline{f}|^{(2)}$; ebenso $\mathsf{G} = \frac{1}{3}|\underline{G}\,\underline{g}|^{(2)}$.

Und nun will ich noch ein typisches Beispiel einer reduciblen Komitante vorführen, das zugleich zeigen soll, wie einfach allgemeine analytisch-geometrische Aufgaben nach der Konstituententheorie sich lösen lassen, ich wähle hierzu die Aufgabe:

Ort der Schnittpunkte der f-Polaren und der g-Polaren der f-Punkte,

wobei ich bemerke, daſs die folgende Zusammenstellung die ganze nötige Rechnung ohne jegliche Auslassung enthält.



Ist y_i ein beliebiger f-Punkt, so hat man:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Bedingung für } y_i: & |\underline{f}y|^{(2)} & = 0 \\ f\text{-Polare von } y_i: & |fy| & = 0 \\ g\text{-Polare von } y_i: & |gy| & = 0 \end{array}\right\} \qquad \Big\} \; y_i = (\widehat{fg}) \; *)$$

y_i-Eliminat giebt als gesuchte Kurve:

$$|\underline{f}(fg)|^{(2)} = (\underline{f}fg)^{(2)} = 0\,;$$

*) $y_i = (\widehat{fg})$ bedeutet nach der Bezeichnung von Study: $y_1 = (f_2 g_3)$, $y_2 = (f_3 g_1)$, $y_3 = (f_1 g_2)$.

aber aus:

$$\text{(II a)}\quad \left\{ F_{11} f - \mathsf{F} \cdot x_1^2 = (\underline{f}_2 f_3)^{(2)} \right\} g_1^2$$

folgt:

$$(\underline{f} f g)^{(2)} = |\underline{F} g|^{(2)} \cdot f - \mathsf{F} \cdot g^2$$

$$= \left[|\underline{F} \underline{g}|^{(2)} \cdot g - (\underline{F}\, x\, \underline{G})^{(2)} \right] f - \mathsf{F} \cdot g^2 \qquad \text{(s. Nebenrechnung)}$$

$$= |\underline{F} \underline{g}|^{(2)} \cdot f g - (\underline{F}\, x\, \underline{G})^{(2)} f - \mathsf{F} \cdot g^2$$

[Nebenrechnung: (II) für g $\left\{ g_{11} g - g_1^2 = (\underline{G}_2 x_3)^{(2)} \right\} \; |F_{11}$

ferner: $|\underline{F} g|^{(2)} = |\underline{F} u|^{(2)} \big)_{u_i = g_i}$ *)]

Der Ort ist also eine Kurve IV. O., welche gemäfs der monomischen Form, wie leicht zu zeigen, die Ecken des den Kegelschnitten f und g gemeinsamen Polardreiecks zu Doppelpunkten hat und welche gemäfs der binomischen Form die Kegelschnitte f und $|\underline{F} g|^{(2)}$ je viermal berührt in ihren Schnittpunkten mit dem Kegelschnitt g; die letzte trinomische Form ist die Darstellung des Ortes in den Fundamentalkomitanten von f und g. Dabei möge noch bemerkt sein, dafs in der Figur lediglich der deutlicheren und übersichtlicheren Darstellung halber die beiden Kegelschnitte in der speziellen Lage einer Ellipse und eines konzentrischen Kreises gewählt sind, wobei das gemeinschaftliche Zentrum ein isolierter Punkt der Ortskurve wird.

Umgekehrt führt die Konstituententheorie ganz von selbst auf diese Aufgabe, sobald man unter den verschiedenen Komponierungen des Formelsystems (II a) die Komponierung mit g_1^2 u. s. w. vorgenommen hat, alsdann giebt die dadurch erhaltene monomische Form $(\underline{f} f g)^{(2)}$, als y_i Eliminat aus

$$\left\{ \begin{array}{ll} |\underline{f} y|^{(2)} & = 0 \\ |f y| & = 0 \\ |g y| & = 0 \end{array} \right\}$$

aufgefafst, sofort das obige Erzeugungsgesetz für die Kurve. Übrigens ergiebt sich dasselbe auch noch einfacher gemäfs der S. 136 erwähnten und angedeuteten Regeln und mit Hilfe des Satzes auf S. 128.

---

*) also $|\underline{F} g|^{(2)}$ ist ein Kegelschnitt als Ort eines Punktes, dessen g-Polare F-Tangente ist (Poncelet'scher Kegelschnitt).

Zum Schlufs hätte ich noch den Wunsch, dafs es mir mit diesen wenigen Ausführungen gelungen sein möchte, der Konstituententheorie einige Freunde und Mitarbeiter zum weiteren Ausbau gewonnen zu haben, zumal ich nach meinen bisherigen Erfahrungen der Überzeugung bin, dafs das konsequente und systematisch durchgeführte Konstituentenprinzip sowohl in der Invariantentheorie, wie in der analytischen Geometrie, in der Algebra wie in der Analysis wesentliche Vereinfachungen und sicher auch noch viele weitere neue Gesichtspunkte ergeben wird, wie ich in späteren Veröffentlichungen des Näheren ausführen werde.

Bemerkung: Zu diesem meinem Vortrag möchte ich noch hinzufügen, dafs ich die in der Zahlentheorie, Invariantentheorie u. s. w. allgemein gebräuchliche Benennung „Form“ für „ganze, homogene algebraische Funktion“, obwohl sie durch grofse Kürze sich auszeichnet, nicht angewandt habe, und dafs ich hierfür „Homogenfunktion“ oder kurz blofs „Funktion“ sage, da ich es einerseits nicht für zulässig halte, dafs dem allgemeinen Begriff, den die Sprache mit dem Wort „Form“ verbindet, diese spezielle Bedeutung unterlegt wird, und da anderseits die verschiedenen Formen einer Funktion, einer Komitante in der Konstituententheorie und daher auch in der Invariantentheorie eine Hauptrolle spielen, wie ja das Prinzip der verschiedenen Formen als eines der wichtigsten, wenn nicht als das wichtigste Prinzip in der Mathematik und Philosophie, ja überhaupt in Kunst und Wissenschaft, angesehen werden darf.

Sur les systèmes associatifs de nombres symboliques.

Par

C. Stéphanos à Athènes.

Dans sa communication M. Stéphanos a fait voir que l'étude des systèmes de nombres symboliques de la forme

$$e_x = x_1 e_1 + \cdots + x_m e_m$$

(où les $x_1, x_2, \cdots x_m$ désignent des quantités ordinaires réelles ou imaginaires) et dont la multiplication est définie par une formule telle que

$$e_x e_y = \Sigma a_{ijk} x_i y_j e_k, \quad (i, j, k = 1, 2, \cdots m)$$

revient à l'étude de la forme trilinéaire

$$f(x, y, u) = \Sigma a_{ijk} x_i y_j u_k, \quad (i, j, k = 1, 2, \cdots m)$$

dans laquelle on doit considérer les u comme des variables contragrédientes aux x et aux y.

Pour que la multiplication en question satisfasse à la loi d'association

$$(e_x e_y) e_z = e_x (e_y e_z)$$

il faut et il suffit que la forme $f(x, y, u)$ soit telle que l'on ait l'identité:

$$\sum \frac{\partial f(x, y, u)}{\partial y_i} \frac{\partial f(y, z, u)}{\partial u_i} = \sum \frac{\partial f(x, y, u)}{\partial u_i} \frac{\partial f(y, z, u)}{\partial y_i}.$$

A côté des expressions e_x il convient de considérer aussi d'autres expressions symboliques de la forme:

$$u_\varepsilon = u_1 \varepsilon_1 + \cdots + u_m \varepsilon_m,$$

et définir les produits $e_y u_\varepsilon$ et $u_\varepsilon e_x$ par les formules

$$e_y u_\varepsilon = f(\varepsilon, y, u) = \Sigma a_{ijk} \varepsilon_i y_j u_k,$$
$$u_\varepsilon e_x = f(x, \varepsilon, u) = \Sigma a_{ijk} x_i \varepsilon_j u_k.$$

Dans le cas où l'on a la loi d'association

$$(e_x e_y) e_z = e_x (e_y e_z)$$

il se trouve que l'on a aussi

$$\begin{aligned}(e_y e_z) u_\varepsilon &= e_y (e_z u_\varepsilon), \\ (e_z u_\varepsilon) e_x &= e_z (u_\varepsilon e_x), \\ (u_\varepsilon e_x) e_y &= u_\varepsilon (e_x e_y).\end{aligned}$$

M. Stéphanos a ajouté qu'en partant de ces principes il a été conduit à un grand nombre de résultats relatifs à la théorie des systèmes associatifs de nombres symboliques qu'il publiera prochainement dans un travail étendu.

Resultante ternärer Formen.

Von

P. Gordan in Erlangen.

Die Formen f, f_1, f_2 seien drei ternäre Formen, welche in den Variabeln die Grade m, n, p haben. Die Resultante R ist eine ganze Funktion ihrer Koeffizienten in den Graden np, mp, mn.

Bezeichnet man die Gleichungen der Schnittpunkte von f_1, f_2 mit:

$$u_{\alpha_1} = 0, \quad u_{\alpha_2} = 0, \cdots u_{\alpha_{np}} = 0,$$

so hat man:

$$(1) \qquad R = f(\alpha_1)\, f(\alpha_2) \cdots f(\alpha_{np}).$$

In dieser Formel treten die Koeffizienten von f rational auf; die von f_1 und f_2 sind implicit in den α enthalten. Man mufs sie daher so transformieren, dafs auch die letzteren rational vorkommen. Zu diesem Zwecke entwickle ich R in eine Reihe von Überschiebungen:

$$R = \Sigma(U, V).$$

Die U sind Invarianten etc. von f und die V simultane symmetrische Invarianten etc. der α. Wir bilden nun ein System:

$$P_1, P_2 \cdots P_\mu$$

asyzygetischer Invarianten etc. von f vom Grade np in den Koeffizienten, und wählen für sie symbolische Produkte.

Nach dem Hermite'schen Reciprocitätssatze lassen sich hieraus weitere asyzygetische Formen:

$$Q_1, Q_2 \cdots Q_\mu$$

ableiten, indem man die Symbole von f durch die α ersetzt, diese dann permutiert und addiert. Die U sind linear in den P und die V in den Q.

Man erhält somit die Gleichung:

$$(2) \qquad R = \Sigma c(P, Q),$$

in welcher die c numerische zu berechnende Koeffizienten bedeuten.

Die α kommen in (1) und (2) vor, einerseits in den $f(\alpha)$, andererseits in den Q. Aber es besteht zwischen (1) und (2) der Unterschied, dafs R eine simultane Invariante von drei Formen f, f_1, f_2 ist, während die Q Kombinanten und Semikombinanten von f_1 und f_2 allein sind.

Die Q sind aufserdem rationale Invarianten etc. des Produktes

$$v = u_{\alpha_1} u_{\alpha_2} \cdots u_{\alpha_{np}};$$

man kann daher zwei Arten von Q unterscheiden, deren erste aus den ganzen Invarianten etc. von v besteht.

Um zur zweiten zu gelangen bemerke man, dafs die Bedingung, dafs f in lineare Faktoren zerfällt,

$$V = 0$$

ist, wo V eine gewisse Kovariante oder Invariante von f bedeutet, die in den Koeffizienten den Grad $n + 1$ hat. Nach dem Reciprocitätssatze entspricht V eine simultan symmetrische Invariante etc. Δ der α. Die Überschiebungen über Δ bilden die zweite Art Q.

Für $m \geqq np$ kommen in (2) nur Q der ersten Art vor; R ist dann eine simultane Invariante von f und v. Man kann es unter der Annahme berechnen, dafs f in lineare Faktoren zerfällt.

Sur les problèmes qui se rapportent à la résolution des équations algébriques renfermant plusieurs inconnues.

Par

F. Enriques à Bologne.

Étant donnée une équation algébrique

$$f(x_1, x_2, \cdots x_n) = 0$$

il s'agit de la résoudre en posant $x_1, x_2, \cdots x_n$ fonctions de $n - 1$ paramètres $u_1, \cdots u_{n-1}$.

On peut envisager le problème ou bien au point de vue analytique, en exigeant p. e. que les fonctions $x(u_1, \cdots u_{n-1})$ soient holomorphes (ainsi dans plusieurs recherches de MM. Poincaré, Picard, Painlevé), ou bien au point de vue proprement algébrique. En ce dernier cas les x résulteront des fonctions rationnelles de $u_1, \cdots u_{n-1}$ et d'une fonction algébrique irrationnelle

$$X(u_1, \cdots u_{n-1}).$$

On demande de choisir les paramètres de telle façon que l'irrationalité $X(u_1, \cdots u_{n-1})$ (envisagée au sens de Galois) ait tels ou tels autres caractères donnés d'avance.

A ce problème se rattachent plusieurs questions importantes où l'on considère la dépendance des paramètres u des inconnues x, le degré ou bien le groupe de l'irrationalité X etc.

Les résultats établis sur ce sujet se bornent vraiment à des cas fort particuliers. On y est amené souvent par des problèmes géométriques que j'ai cru bon de transformer au point de vue de l'algèbre.

S'ils ne suffiront pas à éclaircir les difficultés que l'on rencontre, il arrivera peut-être qu'ils en montrent la nature et appellent sur ces difficultés l'attention des mathématiciens. ou

Voilà le but que je me suis proposé par ma conférence. Mais il n'est pas facile de donner un résumé de ces questions. Puisqu'elles sont conçues suivant un esprit de recherche un peu différent de l'ordinaire, on ne saurait se passer de quelques développements sans nuire à la clarté. Ainsi je préfère me borner ici aux mots qui précèdent.

Über Pasigraphie, ihren gegenwärtigen Stand und die pasigraphische Bewegung in Italien.

Von

E. Schröder in Karlsruhe.

Zur Diskussion auf einem internationalen Mathematiker-Kongresse dürfte sich kaum ein Thema in höherem Maſse empfehlen als das der Pasigraphie, und ich bin überzeugt, daſs der Gegenstand von der Tagesordnung künftiger Kongresse nicht mehr verschwinden wird.

Ist doch das Ziel dieser neuen Disziplin kein geringeres als: die endgültige Festlegung einer wissenschaftlichen Universal-Sprache, die völlig frei von nationalen Eigentümlichkeiten und bestimmt ist, durch ihre Konstruktion die Grundlage zur wahren, nämlich exakten Philosophie zu liefern!

Eine solche Sprache kann natürlich nicht für den ganzen Bereich menschlichen Denkens auf einmal geschaffen werden. Ihre wichtigsten und bis jetzt auch am weitesten gediehenen Teile sind wohl diejenigen, welche die Grundbegriffe der reinen Mathematik und insbesondere der Logik, Arithmetik und Geometrie betreffen. Ich werde mich hier in der Hauptsache auf einige von diesen Gebieten beschränken.

Da die Zeit nicht erlaubt eine historische Exposition zu geben, so sei nur kurz daran erinnert, daſs die pasigraphische Disziplin schon von Descartes klar vorhergesehen und postuliert worden und daſs sie ein Ideal bildet, welches Leibniz Zeit seines Lebens vorschwebte. Wie unser gelehrter Freund Sign. Peano unlängst an's Licht gezogen, hat Leibniz dem Gedanken so hohen Wert beigelegt, daſs er sagt: auſser einem Religionsstifter und Staatenlenker — praeter prophetam ac principem — könne niemand der Menschheit einen bessern Dienst erweisen als derjenige, welcher jenes Ideal verwirklichte. Auch Descartes meint, wir dürften nicht hoffen seine Verwirklichung zu erleben, da alsdann die Welt in ein Paradies verwandelt erschiene!

Leibniz klagt auch über das sehr geringe Interesse, das seine Zeitgenossen der Sache entgegenbrächten. Dieselbe Klage würde auch heute noch oftmals am Platze sein. Indessen wage ich zu hoffen, dafs es mir vergönnt sein möge, doch einige Begeisterung für diesen sehr wichtigen Gegenstand zu erwecken, der in der That zur Zeit in ein vielversprechendes Stadium getreten.

Vorweg mufs ich freilich einer Behauptung unseres geehrten Vorsitzenden, Herrn Peano, von 1894 widersprechen, wo er in seiner „Introduction au formulaire de mathématique“ pag. 52 sagt: „Le problème proposé par Leibniz est (donc) résolu.“ Mit diesem sanguinischen Ausspruch ist er, wie wir sehen werden, der bisherigen und noch bevorstehenden Entwickelung der pasigraphischen Disziplin sehr weit vorausgeeilt. Ja, es waren damals, als der Ausspruch fiel, noch nicht einmal die Vorbedingungen zur Erreichung des Zieles gesichert und allgemein zugänglich gemacht, wie sie es nunmehr sind. Selbst heutigentags aber bleibt uns noch viele und schwere Arbeit zu bewältigen.

Die für eine beliebige Spezial-Wissenschaft zu lösende Aufgabe läuft darauf hinaus: sämtliche Begriffe, die sie umfafst oder mit denen sie operiert, völlig angemessen (adäquat) und so knapp (konzis) wie möglich auszudrücken durch eine minimale Menge von fundamentalen oder Urbegriffen, sogenannten „Kategorieen“ — und zwar vermittelst „rein logischer“ Operationen, die von allgemeiner Anwendbarkeit, mithin für alle Wissenszweige die nämlichen sein werden, indem sie den Gesetzen der gewöhnlichen Logik gehorchen, einer Logik jedoch, die in ihrer vollkommensten Gestalt als ein „calculus ratiocinator“ sich darstellen wird. Für die Kategorieen und Operationen dieser „lingua characteristica“ oder „scriptura universalis“ sind handliche Zeichen und einfache Symbole, wie etwa Buchstaben, zu verwenden; diese aber sollen — ungleich den „Wörtern“ einer lebenden Sprache — mit absoluter Konsequenz oder mathematischer Strenge gehandhabt werden.

Es dürfte kaum nötig sein, zu betonen, wie viel höher dieses unser logisches Ziel steht gegenüber den blofs linguistischen Bestrebungen — der Volapükisten, z. B. — denen es nur um die Schaffung eines Verständigungsmittels zwischen verschiedensprachigen Personen zu thun ist, und deren blofse Erwähnung fast auf eine Herabwürdigung unseres Gegenstandes hinausläuft. Doch mag einmal ausdrücklich statuiert werden, dafs die pasigraphische „Sprache“ überhaupt nicht bestimmt ist, jemals gesprochen zu werden. Vielmehr hat sie lediglich den Zwecken der Wissenschaft zu dienen; und diese soll sie fördern weniger zufolge ihrer manchmal an Stenographie oder Tachygraphie gemahnenden Knappheit und Kürze, als vielmehr kraft ihrer logischen Struktur. Allen voran den Zwecken derjenigen Wissenschaft, welche die alten Griechen „die Wissenschaft (katexochen)“ Mathesis nannten, demnächst den Zwecken der Logik und einer exakten Philosophie, die so lange hat auf sich warten lassen und der man jetzt endlich wird entgegensehen dürfen.

Als eine vielleicht noch nicht allgemein geteilte persönliche Ansicht möchte ich beiläufig aussprechen, dafs mir die reine Mathematik blofs als ein Zweig der allgemeinen Logik erscheint: der Zweig, welcher auf die Schöpfung der Zahlen sich gründet, deren wirtschaftlichen Vorzügen die ungeheuere Entwickelung zu verdanken ist, die diesem besondern Zweig zuteil geworden im Vergleich mit den übrigen Zweigen der Logik, die bis in die jüngste Zeit fast stationär geblieben waren. Diese Ansicht findet eine Stütze in der Thatsache, dafs in pasigraphischer Hinsicht die Arithmetik aller besondern Kategorieen, jeglicher eignen Urbegriffe zu entraten vermag, indem diejenigen der allgemeinen Logik schon ausreichen, um ihre sämtlichen Begriffe (wie Vielheit, Anzahl, Endlichkeit, Grenzwert, Funktion, Abbildung, Summe etc.) aufzubauen. Und ebenso kommt sie mit den „Prinzipien“ der allgemeinen Logik aus und bedarf zu ihren Beweisführungen keiner „Axiome“.

Beschränken wir, um hierbei zu bleiben, unsere Betrachtungen solchergestalt auf die allerreinste Mathematik, so tritt in der That — hauptsächlich dank dem Entwickelungsgange, den Charles S. Peirce's Logik der „Relative“ genommen — bereits unverkennbar zutage, dafs ihre sämtlichen Begriffe sowohl, wie die der Logik überhaupt, zurückführbar sind auf nur fünf Urbegriffe oder „Kategorieen“ im Aristotelischen und Kant'schen Sinne.

Bevor ich Ihnen diese vorführe, mufs ich eine Bemerkung vorausschicken.

Die minimale Anzahl der pasigraphisch unentbehrlichen Zeichen wird die angegebene Zahl 5 der Kategorieen ein wenig übersteigen, indem von den letzteren gewisse zwiefältig zu symbolisieren sein werden: etwa so, wie in der arithmetischen Analysis keines der beiden Zeichen

$$+ \text{ und } \Sigma$$

auf die Dauer entbehrt werden kann, obzwar sie beide doch blofs dazu dienen, dem einheitlichen Begriff der „arithmetischen Summe“ Ausdruck zu geben.

Zudem machen unsere Kategorieen dann noch nicht das ganze System der fundamentalen Bezeichnungen aus, sintemal z. B. Klammern ein sehr wichtiges und praktisch unentbehrliches Bezeichnungselement vorstellen, ohne doch überhaupt einen Begriff darzustellen und obwohl sie an sich jeglichen Sinnes bar sind. (Bekanntlich dienen Parenthesen — wie in der Algebra, so auch in unserer Symbolik — lediglich dazu, um einen zusammengesetzten Ausdruck, den sie umschliefsen, als einen einzigen Namen bildend zu kennzeichnen, ihn zu stempeln zu einem Ganzen, auf das sich die äufseren Knüpfungs- und Operationszeichen beziehen sollen.)

Dies vorausgesetzt sind die fünf Kategorieen oder fundamentalen Begriffe der allgemeinen Logik mit Einschlufs der Arithmetik die folgenden:

1) $$\left|\begin{array}{c|c|c|c|c} = & \cdot & {}^{-} & {}^{\smile} & ; \\ 1' & \Pi & & & \end{array}\right|$$

— die beiden ersten, wie man sieht, hier in doppelter Ausfertigung dargestellt, der zweite sogar in dreifacher, insofern der Punkt oder das Malzeichen zwischen Buchstaben auch unterdrückbar sein soll, sodafs deren Knüpfung auf eine blofse Nebeneinanderstellung (Juxtaposition) hinausläuft.

Das erste von diesen unsere Urbegriffe darzustellen habenden Zeichen ist das wohlbekannte Gleichheitszeichen. Dieses wird jedoch in der allgemeinen Logik in einem viel engeren Sinne als wie in der Mathematik gebraucht, nämlich es soll dazu dienen um völlige Einerleiheit, Identität auszudrücken. Sein Äquivalent 1', die apostrophierte Eins, die ich kürzehalber Einsap spreche, stellt dieselbe Kategorie der Identität als einen relativen Begriff hin, dazu bestimmt, auf die Klasse der Dinge hinzuweisen, welche „gleich", nämlich „einerlei" sind „mit -", ein Zeichen, das manchmal geradezu mit dem Wort „selbst" = le même = lo mismo übersetzbar.

Das zweite oder Multiplikationszeichen hat in der allgemeinen Logik — völlig unabhängig von seiner arithmetischen Bedeutung — die Kategorie des Schnittes (intersectio) auszudrücken, indem es stets auf dasjenige hinweisen soll, was den durch dasselbe verknüpften (und zugleich getrennten) Termen gemeinsam ist: $a \cdot b$ oder ab bedeutet uns: was (zugleich) a **und** b ist. Das Π wird sodann, ähnlich wie in der arithmetischen Analysis, gebraucht, um „identische Produkte" zu bezeichnen, wie sie aus der Operation solch begrifflichen Schneidens hervorgehen.

Unsere dritte, durch einen übergesetzten Horizontalstrich darzustellende Kategorie ist die wohlbekannte logische Operation der Negation oder Verneinung. Genauer gesprochen: das Zeichen soll auf deren Ergebnis, das Negat, hinweisen. Wenn a irgend etwas bedeutet, so soll $\bar{a}$ das, was nicht-a ist, vorstellen.

Offenbar ist Negation ein fundamentaler Begriff, dem es unthunlich ist, eine förmliche Definition angedeihen zu lassen. Für die mangelnde Begriffserklärung treten die sogenannten logischen „Prinzipien“ ein, als: der „Satz des Widerspruchs“ und des „ausgeschlossenen Dritten“. Und ähnlich würden, nebenbei gesagt, sämtliche „Prinzipien“ der Logik sowohl, wie der Arithmetik, bei genauerer Prüfung sich als bloſse Stellvertreter, Surrogate für Definitionen erweisen, die nicht regelrecht gegeben werden können — wie denn allgemein zugegeben ist, daſs nicht alles definiert werden kann, indem ja jede Definition sich auf vorgängige andere Begriffe, in letzter Instanz auf bereits vorhandene Kategorieen, stützen muſs.

Unsere vierte, durch einen über irgend einen Buchstaben gesetzten Ringel oder Halbmond auszudrückende Kategorie ist die der Konversion: wenn a „Ursache von-“ bedeutet, so soll $\breve{a}$ (a konvers) uns „Wirkung von-“ ausdrücken. Wenn c „Kind von-“ bezeichnet, so soll $\breve{c}$ „Elter (das ist: Vater oder Mutter) von-“ bedeuten — ein Punkt, auf den ich zurückkomme.

Die fünfte von mir durch einen Strichpunkt (semicolon) dargestellte Kategorie ist die der Beziehung (relatio) überhaupt, wobei die gebräuchliche Übersetzung unseres Strichpunkts in die Wortsprache sein wird: die Präposition „von“ (= of = de), das wohlbekannte Adelsprädikat.

Wenn a = amans Liebender (von-) und b = benefactor Wohlthäter (von-) bedeutet, so soll $a;b$ den Liebenden von einem Wohlthäter (von-) bezeichnen. Die so auf eine Knüpfung durch dies Zeichen hinauslaufende Operation heiſst relative Multiplikation oder Komposition.

Diese fünf Kategorieen nun mit ihren sieben Zeichen genügen imgrunde um alle für die Logik und Arithmetik wesentlichen Begriffe einzukleiden, wie nachher zu sehen ist: ich werde diese anscheinend sehr gewagte Behauptung wenigstens bis zu einem gewissen Umfange hier eingehend zu rechtfertigen haben.

Aber wenn sie auch theoretisch, à la rigueur, sich als ausreichend erweisen, so wird es doch nicht rätlich sein, sich praktisch auf ihren ausschlieſslichen Gebrauch zu beschränken. Um vielmehr Schwülstigkeit zu vermeiden, Knappheit und klare Übersicht zu ermöglichen, auch aus Rücksichten auf die Symmetrie, sehen wir uns dahingedrängt, die obige Liste der fundamentalen Zeichen alsbald zu ergänzen — ähnlich, wie man auch in der Trigonometrie den Cosinus, die Tangente etc. beibehält, obwohl sich zur Not mit dem Sinus allein schon auskommen lieſse.

Die folgenden Zeilen 2) zeigen, in welcher Weise die 18 Symbole der letzten Zeile 3), die das vollständige Bezeichnungssystem der allgemeinen Pasigraphie ausmachen, sich auf unsere fünf Kategorieen reduzieren:

Die 11 Definitionen:

$$2)\quad \begin{cases} 0 = a\cdot\bar{a},\ 1 = \bar{0},\ 0' = \bar{1'},\ a + b = \overline{\bar{a}\cdot\bar{b}},\ \Sigma a = \overline{\Pi\bar{a}},\ a \dagger b = \overline{\bar{a};\bar{b}}, \\ (a \mathrel{=\!\!\!\!\in} b) = (a = a\cdot b),\ (a \mathrel{=\!\!\!\!\notin} b) = \overline{a \mathrel{=\!\!\!\!\in} b},\ (a \subset b) = (a \mathrel{=\!\!\!\!\in} b)\cdot(b \mathrel{=\!\!\!\!\notin} a), \\ \qquad\qquad (a \neq b) = \overline{a = b},\ (a \not\subset b) = \overline{a \subset b}. \end{cases}$$

Die 18 Zeichen:

$$3)\quad 0,\ 1,\ +,\ \cdot,\ \Sigma,\ \Pi,\ 0',\ 1',\ \bar{\ },\ \breve{\ },\ (\breve{\ }),\ \dagger,\ ;\ ,\ \mathrel{=\!\!\!\!\in},\ =,\ \subset,\ \mathrel{=\!\!\!\!\notin},\ \neq,\ \not\subset.$$

Wir müssen jene rasch durchgehen.

Durch die erste von vorstehenden Gleichungen 2) wird der logische Begriff des Nichts eingeführt, den die allgemeine Logik mit dem Zeichen 0 darstellt. So oft wir Anlaſs haben werden, dieses Zeichen für die wohl davon zu unterscheidende Zahl Null ($\dot{0}$) zu gebrauchen, beuge ich einer Verwechselung dadurch vor, daſs ich einen Punkt über sie setze. „Nichts“ ist hier definiert als dasjenige, was zugleich a und nicht - a ist — einerlei, was a bedeuten möge.

Die nächste Gleichung definiert uns „etwas“ als „nicht-nichts“. Dieser Begriff umfaſst alles, wovon überhaupt gesprochen werden kann, das Denkbare, alles Erdenkliche, und so hat das Zeichen 1 in der allgemeinen Logik das Ganze oder Totum, die Gesamtheit, den Begriff des All's, Boole's „universe of discourse“, sagen wir: den „Denkbereich“ darzustellen — den man übrigens zugunsten irgend einer speziellen Untersuchung gelegentlich auch einschränken kann. Um einer Verwechselung seines Zeichens mit der Zahl Eins ($\dot{1}$) vorzubeugen, wie sie übrigens nur selten, nämlich bei elementaren Untersuchungen von gemischter, sowohl logischer als arithmetischer Natur zu besorgen steht, pflege ich im letztern Falle einen Tupfen darüber zu setzen. (Ebenso bediene ich mich in solchen Fällen für die arithmetische Multiplikation und Addition, im Gegensatz zu unserer logischen oder „identischen“, des ausdrücklichen $\times$, resp. eines gröſseren $+$ Zeichens.)

Die dritte Gleichung 2) definiert den relativen Begriff „verschieden von-“ oder „other than-“ (ein andres als-), indem sie ihn hinstellt als „nicht identisch mit-“, und führt sie zu dessen Bezeichnung eine als Nullap zu lesende apostrophierte Null ein. Wenn diese Beziehung zwischen zwei Ausdrücken statuiert werden soll, ist es in deutschen mathematischen Zeitschriften bereits üblich, sie mittelst eines vertikal durchgestrichenen Gleichheitszeichens $\neq$ darzustellen, das als „ungleich“

gelesen wird, und dessen Bedeutung die vorletzte unserer Definitionen 2) zum Ausdruck bringt.

Die vierte und fünfte Gleichung definieren die „identische Summe“ oder das logische Aggregat (den Inbegriff, die Gesamtheit von-), die wir in der allgemeinen Logik mit den der Arithmetik entlehnten $+$ und Σ darstellen. $a + b$ soll hier dasjenige bedeuten, was nicht zugleich nicht-a und nicht-b ist; das heifst aber: was entweder a oder b, vielleicht auch beides, ist.

Die sechste Gleichung 2) führt ein Zeichen $\dagger$ ein, das ich als piu (mit dem italienischen Worte für $+$) lese, um eine Beziehung auszudrücken, die dem gewöhnlichen Denken sehr fern zu liegen scheint und auch in der verbalen Logik keines Namens teilhaftig geworden ist. $a \dagger b$ soll dasjenige vorstellen, was nicht ein nicht-a von einem nicht-b ist, und dies läuft hinaus auf: ein a von jedenfalls allem aufser den b (einerlei, ob es auch ein a von gewissen b ist, oder nicht). Die Operation, deren Ergebnis $a \dagger b$ ist, heifst „relative Addition“. Die Einführung dieses anscheinend etwas gesuchten und ungewohnten Begriffes ist durch die Rücksicht auf die Symmetrie diktiert, die — wo ein Raumteil durch eine Fläche begrenzt wird — das nämliche Interesse wie diesem, dem Innenraume, jeweils auch dem Aufsenraume zuspricht, für die nicht-a die gleiche Beachtung heischt, wie für die a; sodafs die $\dagger$ Beziehung genau in derselben Weise unserer Kategorie von (;) entspricht, wie Produkt und Summe, $\cdot$ und $+$, Π und Σ sowie die Partikeln „und“ und „oder“ einander entsprechen, von denen man sicherlich keine missen möchte. — Um sogleich ein Beispiel zu geben, so wird, falls t uns „Teiler von-“ bedeutet und wir unseren Denkbereich auf die natürlichen Zahlen beschränken, nun $t \dagger 0$ dasjenige vorstellen, was ein Teiler ist von jeder Zahl (schlechtweg, nämlich: aufser keiner, nichts ausgenommen, ohne Ausnahme). Eine solche ist in der That die Zahl 1, und keine andere.

Unsere nächste Definition führt ein: den hochwichtigen Begriff der Einordnung, das Enthaltensein in- als Teil überhaupt (sei es als echter Teil oder als das Ganze selbst). Die „Subsumtion“ $a \mathrel{=\!\!\!<} b$ soll besagen: a ist enthalten in b, ist Teil von b, und dies erscheint hier erklärt mittelst der Aussage: a ist einerlei mit demjenigen, was zugleich a und b ist. Mein im Deutschen als „eingeordnet“ (untergeordnet oder gleich) zu lesendes Subsumtionszeichen $\mathrel{=\!\!\!<}$ übersetzt gemeinhin die Kopula „ist, est“ eines kategorischen Urteils. Beispiel: Gold ist $(\subset)$ Metall, Kochsalz ist $(=)$ Chlornatrium. Zugleich aber stellt es sich (zwischen Aussagen a und b gesetzt) als das Zeichen „ergo“ der Schlufsfolgerung dar; denn obzwar die Prämissen in einem gewissen Sinne die Konklusion „involvieren“, so wird, so oft b aus a folgt, doch umgekehrt die Klasse der Fälle, wo a gilt, enthalten sein in der Klasse der Gelegenheiten, wo b gilt. Die Subsumtion $a \mathrel{=\!\!\!\in} b$ kann sonach (in solchem Falle) übersetzt werden mit dem hypothetischen Urteil: Wenn a gilt, so gilt b.

Die nächste Definition 2) führt bloſs die Verneinung ein der soeben besprochenen Beziehung als: das Nichtenthaltensein in-, etc. (es ist wohl unnötig hierbei zu verweilen), ebenso wie die letzte Definition die Verneinung einführt, der einzigen, die wir nun noch zu besprechen haben.

In der noch übrigen (drittletzten) Definition 2), die ebenfalls eine wichtige ist, wird der Begriff der Unterordnung (subordinatio), nämlich des Enthaltenseins als ein echter Teil erklärt: a ist als ein solcher in b enthalten, so oft a in b enthalten ist, während b nicht in a enthalten ist. —

Hiermit besitzen und beherrschen wir nun das vollständige Bezeichnungssystem der allgemeinen Logik, das aus den 18 Zeichen 3) besteht, die durch ihre in 2) vollzogene Zurückführung auf die 5 Urbegriffe 1) hinfort zur Verwendung in der Pasigraphie legitimiert erscheinen. Damit verfügen wir zugleich über die praktisch unentbehrlichen Grundbegriffe dieser Disziplinen.

Das vorgelegte Bezeichnungssystem ist dasjenige, welches sich naturgemäſs aus den über ein halbes Jahrhundert sich erstreckenden tiefsinnigen und ausdauernden Forschungen von De Morgan, Boole und vor allem Charles S. Peirce bei meiner Überarbeitung von des letzteren Schöpfung herausentwickelt hat. Ich bin dabei verhältnismäſsig nur wenig und nie ohne triftigen Grund von Peirce's Bezeichnungsvorschlägen abgewichen. Stärker differiert es von dem Bezeichnungssysteme der von Herrn Peano geführten italienischen Schule, und mag zugunsten derer, die mit des letzteren Symbolik vertraut sind, sogleich bemerkt sein, daſs unsere Zeichen

$$4)\qquad \left\{\begin{array}{ll} & 0,\ 1,\ +,\ \cdot,\ \Sigma,\ \Pi,\ \bar{a},\ \mathrel{=\!\!\!\in} \\ \text{denen Peano's:} & \\ & \Lambda,\ \mathrm{V},\ \cup,\ \cap,\ \cup',\ \cap',\ -a,\ \varepsilon,\ \supset \end{array}\right.$$

entsprechen.*)

Darauf, daſs in Peano's System unsere fünfte Kategorie — die wichtigste von allen — „von“, noch fehlt, und dasselbe sonach keine

*) Deren Ersatz für die doch als Träger, Stativ für Summationsvariable und Summengrenzen etc. zu dienen habenden Σ, Π scheint, beiläufig gesagt, nicht glücklicher gewählt, als wenn man in der Arithmetik diese beiden Zeichen durch $+'$ und $\times'$ ersetzen wollte.

unseren relativen Operationen ($\dagger$ und ;) entsprechenden Zeichen aufzuweisen hat, komme ich kurz zurück.

Der calculus ratiocinator nun, dessen Gesetzen unsere Kategorieen und fundamentalen Operationen unterworfen sind, ist kein anderer als Peirce's „Algebra der Relative“, eine Disziplin, die das Gebäude der „Algebra der Logik“ krönt und sowohl den Aussagenkalkul wie den Klassenkalkul als einen sehr untergeordneten Teil mitumfaſst.

So ziemlich Alles kann unter dem Gesichtspunkt eines binären Relativs betrachtet und als ein solches dargestellt werden; auch Aussagen lassen sich als binäre Relative ansehen und Klassen, Mengen oder absolute Begriffe können als solche hingestellt werden.

Und da im gemeinen sowohl als im wissenschaftlichen Denken die relativen Begriffe bei weitem die absoluten überwiegen, die sich obendrein den ersteren schlieſslich subsumieren lassen, so leuchtet ein, daſs die Logik der relativen Begriffe, Relative, die unerläſsliche Grundlage bilden muſs für jeden Erfolg verheiſsenden Anlauf zur Pasigraphie. Ebendarin, daſs die traditionelle Logik mit ihren Syllogismen sich so lange auf absolute Begriffe mit den dürftigen Kategorieen von „alle“, „einige“ und „keine“ beschränkte, ist eine wesentliche Ursache für ihre Stagnation zu erblicken, die Kant noch zu dem Ausspruche berechtigte, sie habe in den zweitausend Jahren seit Aristoteles keine wesentlichen Fortschritte gemacht. Dieses trifft jetzt nicht mehr zu.

Um die Tragweite unserer neuen Relativlogik zu illustrieren und zugleich die behauptete Zulänglichkeit unserer 5 Urbegriffe 1) zum Aufbau sämtlicher Grundbegriffe der Arithmetik schon in weitem Umfang zu erhärten, will ich nun in einigen Gruppen die pasigraphische Darstellung und Erklärung von vielen ihrer wesentlichsten Begriffe hinsetzen und daran noch einige Bemerkungen knüpfen.

5) $\left\{\begin{array}{l}(a \text{ ist eine Klasse, absoluter Begriff, System, Gebiet, Menge,} \\ \quad \text{ensemble, insieme}) = (a;1 = a) = 0 \dagger \breve{\bar{a}} \dagger a \dagger 0.\end{array}\right.$

6) $(\text{num. } a = \dot{0}) = (a = 0) = 0 \dagger \bar{a} \dagger 0.$

7) $\left\{\begin{array}{l}(\text{num. } a = \dot{1}) = (a \text{ ist ein Element, Individuum, eine Konstante}) = \\ \qquad = (0';a;1 = \bar{a}) = \\ \qquad = (0';a = \bar{a}) = (a \not\subseteq 0';a) = \breve{a};(1' \dagger \bar{a}).\end{array}\right.$

8) $\left\{\begin{array}{l}(\text{num. } a = 2) = (\text{Die Menge } a \text{ ist ein Paar}) = (0' a \breve{a} \not\subseteq 0';a0') = \\ \qquad = \breve{a};0'\{1' \dagger (\bar{a} + 1')\};a, \\ \text{was aus } \Sigma_{ij}(i \neq j)(i + j \subseteq a)\Pi_h\{(h \neq i)(h \neq j) \subseteq (h \not\subseteq a)\} \\ \text{zusammengezogen ist.}\end{array}\right.$

9) $(\text{num. } a > 3) = (0'a\breve{a} \cdot 0'; a0' \neq 0) = \breve{a}; 0'(0'; a0'); a.$

10) $\left\{\begin{array}{l} (\text{num.}\, a = \text{num.}\, b) = \\ = (\breve{a};a=\breve{b};b)(\breve{a};0';a=\breve{b};0';b)\{\breve{a};0'(0';a0');a=\breve{b};0'(0';b0');b\}\cdots \\ (\breve{a}\dagger a=\breve{b}\dagger b)(\breve{a}\dagger 1'\dagger a=\breve{b}\dagger 1'\dagger b)[\breve{a}\dagger\{1'+1'\dagger(a+1')\}\dagger a= \\ \qquad\qquad = \breve{b}\dagger\{1'+1'\dagger(b+1')\}\dagger b]\cdots \end{array}\right).$

11) $\left\{\begin{array}{l} (a \text{ ist gleichmächtig, in G. Cantor's Ausdrucksweise „äqui-} \\ \text{valent“ } b) = (a \sim b) = \sum\limits_z (z;\breve{z} + \breve{z};z ⋹ 1')(b = z;a)(a = \breve{z};b). \end{array}\right.$

12) $\left\{\begin{array}{l} (a \text{ ist } \overline{\infty}) = (\text{Die Menge } a \text{ ist endlich}) = \\ \qquad = \prod\limits_z\{(z;\breve{z} + \breve{z};z ⋹ 1')(a ⋹ \breve{z};a) ⋹ (a ⋹ z;a)\}, \end{array}\right.$

13) $\left\{\begin{array}{l} (a \text{ ist } \infty) = (\text{Die Menge } a \text{ ist aktual unendlich, transfinit}) = \\ \qquad = \sum\limits_z(z;\breve{z} + \breve{z};z ⋹ 1')(z;a \subset a ⋹ \breve{z};z;a). \end{array}\right.$

14) $(f \text{ ist eine Funktion}) = (f;\breve{f} ⋹ 1' ⋹ \breve{f};f).$

15) $(s \text{ ist eine Substitution, Permutation}) = (s;\breve{s} = 1' = \breve{s};s).$

16) $(i \text{ ist ein } a \text{ von } j) = (i ⋹ a;j) = \breve{i};a;j.$
— wobei i, j Individuen vorstellen, vergleiche 7).

17) $\left\{\begin{array}{l} (\text{Die Menge } a \text{ ist durch das Prinzip } x \text{ „einfach geordnet“}) = \\ = (x;x ⋹ x = 0'a\breve{a}\breve{\bar{x}}), \end{array}\right.$

18) $\left\{\begin{array}{l} (\text{Der ganze Denkbereich ist durch } x \text{ einfach geordnet}) = \\ = (x;x ⋹ x = 0'\breve{\bar{x}}). \end{array}\right.$

Verweilen wir einen Augenblick bei dem Bisherigen. Man sieht hier vermittelst des obigen Bezeichnungskapitals für eine Reihe von für die Arithmetik, und Mathematik überhaupt, fundamentalen Begriffen die pasigraphische Definition gegeben.

Bei 5) bis 9) und 16) habe ich am Schlusse die Definition selbst auch in Gestalt eines binären Relativs angeschrieben; das sind dann „ausgezeichnete“ Relative, die bloſs der beiden „Wahrheitswerte“ (oder „absoluten Moduln“) 0 und 1 fähig.

Nachdem in 5) die „Menge“ definiert war, habe ich, um die Formeln nicht zu überladen, die Voraussetzung, daſs a und eventuell b eine Menge vorstelle, von der letzten Zeile in 7) an in diesen Formeln nicht mehr zum Ausdruck gebracht.

Wir erblicken demnächst die Definition der niedersten natürlichen Zahlen $\dot{0}$, $\dot{1}$, 2. Die verbale Logik vermochte schon die Einzahl nicht zu definieren.

Auf die Begründung dieser Definitionen im einzelnen einzugehen ist natürlich hier nicht angängig. Doch möchte ich als ein leicht verständliches Beispiel die Entstehung der Definition der Zahl 2 erläutern. Die letzte Zeile von 8) bringt wörtlich zum Ausdruck: Es giebt ein Element i und ein, davon verschiedenes, Element j derart, dafs beide in a enthalten sind, jedoch jedes von ihnen verschiedene Element h dann nicht in a enthalten sein wird. Offenbar ist dies nötig und hinreichend, wenn die Menge a aus gerade zwei Elementen bestehen soll. Nach den (in meinem Buch) wohlfundierten Regeln der „Algebra der Relative“ verdichtet sich aber diese Aussage unschwer zu den darüber angegebenen Formen.

In 11) ist aufser dem Begriff der Gleichmächtigkeit auch derjenige der Abbildung oder gegenseitig eindeutigen (eineindeutigen) Zuordnung pasigraphisch dargestellt zu sehen, und zwar dieser hinter dem Σzeichen. Die Mengen a und b sind nämlich gleichmächtig zu nennen, wenn es ein Relativ z giebt, welches die eine auf die andere (in diesem Sinne) „abbildet“.

12) giebt die Definition der Endlichkeit, die nach Peirce selbständig aufgestellt werden kann, indem zum Ausdruck gebracht ist, dafs man beim Durchgehen der Elemente der Menge notwendig zum Ausgangselement zurückkommen müsse.

13) giebt die Definition der Unendlichkeit, ebenfalls selbständig, in der üblichen Weise: als die Eigenschaft der Menge, auf einen echten Teil ihrer selbst „abgebildet“ werden zu können.

Die beiden Definitionen lassen sich als blofse Negationen von einander rein rechnerisch nachweisen.*)

10) giebt die explizite Bedingung für die Gleichzahligkeit, nämlich dafür, dafs zwei [schon als „endliche“ — vergl. 12) — vorausgesetzte] Mengen a und b aus gleichviel Elementen bestehen — in Form einer unbegrenzten Serie von Teilbedingungen, als eine Relation zwischen diesen Mengen. Dieselbe läfst wohl erkennen, wie berechtigt Herrn Dedekind's Bemerkung ist: dafs der „Anzahl“-Begriff fälschlich für einfach gehalten werde.

Zu 17) hat sich der Begriff der „einfachen Ordnung“ pasigraphisch verdichtet aus den Merkmalen, welche Herr Burali-Forti auseinandergesetzt und einzeln einzukleiden versucht hat in die (solchen Aufgaben wohl nicht gewachsene) Symbolik der italienischen Schule. Es gemahnt

*) Vergl. meine in den Verhandlungen der Leopold. Carolinischen Akademie im Druck befindliche Abhandlung: „Über zwei Definitionen der Endlichkeit und G. Cantor'sche Sätze“.

hier an stenographische Kürze, wenn es zur Einkleidung der Aufgabe 18) nur eines Aufwandes von 5 Lettern bedarf. Gleichwohl vermag jeder, der relativen Logik Kundige, hieraus sämtliche Eigenschaften eines „einfach geordneten“ Ganzen denknotwendig abzuleiten, wo nicht einfach herauszulesen. Machte man irgend einen Schnirkel, so wäre solch stenographischer „Schlüssel“ freilich noch kürzer; doch würde das wertvollste — eben letzteres — damit preisgegeben. — Es wäre lohnend näher einzutreten in die pasigraphische Darstellung all der Begriffe, um welche Herr G. Cantor hier die Wissenschaft bereichert hat. Wir könnten zunächst z. B. zeigen, dafs die Forderung: „es giebt in der durch x geordneten Menge a ein Element von niederstem Range“ sich als $a \mathrel{=\!\!\!\in} 0'\bar{x}\,;a$ darstellt, und dafs $a(\breve{\bar{x}} \dagger 0)$ der Ausdruck dieses Anfangselementes ist, u. s. w. Indessen läfst solches die verfügbare Zeit nicht zu. —

Ähnlich wie im Bisherigen könnte nun auch die Forderung

19) $$(\text{num. } a = \text{num. } b + \dot{1})$$

pasigraphisch definiert werden. Man gelangte dadurch für das Zahlenreich zu einem Relative

20) $$g = \text{um } \dot{1} \text{ gröfser als -},$$

durch welches sich, wenn auch nicht sehr einfach, das Relativ

21) $$t = \text{Teiler, Divisor von -},$$

oder auch, falls man dies vorzöge, das $\breve{t} =$ Multiplum, Vielfaches von -, ausdrücken läfst. Dann ist

22) $$\dot{1} = t \dagger 0, \quad \dot{0} = \breve{t} \dagger 0$$

und haben wir beispielsweise noch:

23) $$\begin{cases} r = (\text{relativ prim zu - = teilerfremd mit -}) = \breve{\bar{t}} \dagger (\dot{1} + \bar{t}), \\ (m \text{ ist teilerfremd mit } n) = (m \mathrel{=\!\!\!\in} r\,;n) = \breve{\bar{m}}\,; \{\breve{\bar{t}} \dagger (\dot{1} + \bar{t})\}\,; n, \\ \text{Primzahl} = (1' + \breve{\bar{t}}) \dagger \dot{1} = (t + r) \dagger 0, \\ (\text{Gröfster gemeinsamer Divisor von } m \text{ und } n) = \\ \qquad\qquad = t\,; m \cdot t\,; n \cdot \{\breve{\bar{t}} \dagger \bar{t}\,; (m + n)\}, \\ (\text{Kleinstes gemeinsames Vielfaches von } m \text{ und } n) = \\ \qquad\qquad = \text{idem, } \breve{t} \text{ für } t \text{ gesetzt.} \end{cases}$$

Und anderes mehr. Mit diesen Ausdrücken läfst sich rechnen, und können Schlüsse über sie aus ihnen selbst gezogen werden, was mit einem blofs stenographischen „Schlüssel“, wie es z. B. Peano's $D(m, n)$ für den vorletzten Begriff ist, nicht der Fall wäre.

Von den beiden Darstellungen des Begriffs der absoluten Primzahl (für den Denkbereich der ganzen Zahlen) besagt hier die erste: Primzahl ist eine Zahl, die zu jeder Zahl aufser der 1 in der Beziehung steht, entweder mit ihr identisch, oder kein Vielfaches derselben zu sein; die andere: Primzahl ist, was zu jeder Zahl (ohne Ausnahme) in der Beziehung steht, entweder ein Teiler von ihr, oder mit ihr teilerfremd zu sein. Und, kraft der (hier nicht gegebenen) pasigraphischen Struktur von t selbst, wird die eine in die andere sich auch transformieren lassen. —

Um neben der Arithmetik auch auf andere Gebiete wenigstens einen Seitenblick zu werfen, so sei hier für den Fall, dafs der Denkbereich 1 den Raum bedeutet, die Definition des geometrischen Punktes hergesetzt:

24) $$(z \text{ ist ein Punkt}) = (z \neq 0) \prod_u \{(z \mathrel{=\!\!\!\!\in} u) + (z \mathrel{=\!\!\!\!\in} \bar{u})\},$$

in anderer Form (nach Peirce) $= (z \neq 0) \prod_u \{(u \subset z) \mathrel{=\!\!\!\!\in} (u = 0)\}$

— deren erste Form den Punkt als einen vom Nichts verschiedenen Raumteil hinstellt, der zu jedem Raumteil u in der Beziehung steht, entweder ganz in ihm selbst, oder ganz in seinem Aufsenraume $\bar{u}$ enthalten zu sein. Die Auslegung der zweiten, von mir auch auf die erste zurückgeführten Definitionsform überlasse ich dem Leser. —

Schliefslich ein Wort über die Pasigraphie der menschlichen Verwandtschaftsverhältnisse und zwar sowohl der Blutsverwandtschaft (Consanguinität) als auch der Verschwägerung (Affinität), die ein für Studierende der Jurisprudenz nicht unwichtiges Kapitel im Corpus juris bilden. Aufser wenigen von den vorbesprochenen allgemein logischen Zeichen sind nur zwei spezifische Relativsymbole erforderlich, um alle diese Verhältnisse in knappster Form erschöpfend und unterscheidend darzustellen. Diese beiden sind:

m = männlich (ein absoluter Term)

und

c = Kind von- (= child of-, ein relativer).

Da das Menschengeschlecht ein diöcisches ist, bedeutet dann $\bar{m}$ = nicht männlich = weiblich, und $\breve{c}$, wie schon erwähnt, = Elter von-. Der Denkbereich $1 = m + \bar{m}$ besteht alsdann aus den Personen der menschlichen Gesellschaft in Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft. Nur mufs, um unserer Pasigraphie auch die Verschwägerungsverhältnisse zugänglich zu machen, jedem kinderlosen Ehepaar ein „potentielles Kind“ zugeschrieben werden. Freilich könnte man, damit das Ideal der Pasigraphie völlig verwirklicht werde, verlangen, dafs auch die Begriffe „männlich“ und „Kind von-“ selbst noch auf einfachere

Urbegriffe zurückgeführt würden. Dergleichen stünde erst zu erhoffen, wenn Zoologie und Physiologie eine viel höhere Stufe der Vollkommenheit erreicht hätten. Inzwischen wird schon etwas zu gewinnen sein, wenn wir diese beiden Begriffe m und c schlechtweg als gegeben, als Urbegriffe gelten lassen. Folgendes sind dann die pasigraphischen Darstellungen für einige Verwandtschaften:

$$
25)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\text{(eventuell nur Halb-)Geschwister} = 0' \cdot c\,;\breve{c}, \\
\text{Vollgeschwister (Bruder oder Schwester)} = 0' \cdot c\,; m\breve{c} \cdot c\,; \bar{m}\breve{c}, \\
\text{Vollbruder} = 0' m \cdot c; m\breve{c} \cdot c\,; \bar{m}\breve{c}, \quad \text{Vollschwester} = 0' \bar{m} \cdot c; m\breve{c} \cdot c; \bar{m}\breve{c}, \\
\text{Stiefkind} = \bar{c} \cdot c\,; \breve{c}\,; c, \\
\text{Ehegespons(consort)} = 0' \cdot \breve{c}; c, \quad \text{Gatte} = 0' \cdot m\breve{c}; c, \quad \text{Gattin} = 0' \cdot \bar{m}\breve{c}; c, \\
\text{Neffe oder Nichte} = c\,; 0'(c\,;\breve{c}), \\
\text{Schwiegermutter} = \bar{m}\breve{c}\,; 0'(\breve{c}\,; c).
\end{array}
\right.
$$

All diese Verhältnisse hat am gründlichsten Herr A. Macfarlane studiert und z. B. die Frage beantwortet, welche Verwandtschaften (vom zweiten Grade) durch das englische Gesetz ausgeschlossen werden, das dem Witwer verbietet, die Schwester seiner verstorbenen Frau zu heiraten. Es lassen sich mit diesen Ausdrücken auch irgendwelche Aufgaben rein rechnerisch lösen, wie z. B. diese: Eine Dame, über eine Photographie in ihrem Album befragt, giebt zur Antwort: „Sie wissen, daſs ich keine Töchter habe; nun, ein Tochtersohn dieser Person ist der Vater eines meiner Enkel“; wie war das Original mit der Dame verwandt?

Macfarlane kam jedoch, da er sich gegen Peirce's Algebra der Relative ablehnend verhielt, über eine gewisse Klippe nicht hinaus, insofern er in den von ihm aufgestellten, von den obigen noch etwas differierenden Ausdrücken das von ihm sogenannte „reduced meaning“ derselben nicht auszuscheiden vermochte. Der Sachverhalt kann schon an dem bekannten Rätsel für Kinder deutlich gemacht werden: Mein Vater hat einen Sohn, der ist doch nicht mein Bruder; wer ist es? Die „reduzierte Bedeutung“ des Kindes der Eltern von jemand ist dieser „selbst“ (1'), und ist deshalb der Zusatz 0' (= „ein anderer als“) zu $c\,;\breve{c}$ unerläſslich, um korrekt den Begriff der Geschwister zu bilden. —

Abgesehen von diesen speziellen Untersuchungen englischen Ursprungs und von der grundlegenden Arbeit Peirce's in Amerika haben bis jetzt die Ziele der Pasigraphie nur noch in Italien eifrige Förderer gefunden. Die verdienstvolle, von Herrn Peano seit 5 Jahren herausgegebene Zeitschrift Rivista di Matematica samt dem beigegebenen

Formulario ist hauptsächlich ihren Zwecken gewidmet und durch eine Gruppe von scharfsinnigen italienischen Forschern ist in dieser und anderen Zeitschriften eine Reihe von Spezialgebieten aus der Analysis und Geometrie in pasigraphischer Tendenz mit grofsem Fleifse überarbeitet worden. Was sich mit dem Boole-McColl'schen Aussagenkalkul (calculus of equivalent statements) erreichen läfst — und das ist schon viel — erscheint dabei grofsenteils bereits geleistet, wenn auch leider in einem stark abweichenden Bezeichnungssysteme. Inbezug auf den, die gegenwärtige Phase der italienischen Pasigraphiebewegung noch charakterisierenden, Nichtgebrauch von Peirce's Algebra der Relative aber (für dessen ausgiebige Verwertung das von der italienischen Schule adoptierte Bezeichnungssystem beinahe ein Hindernis bildet) kann ich mich nun kurz fassen, indem ich das Gleichnis unseres Einführenden (in der 1. Sektion, Herrn Minkowski) auf die Schule anwende: von denen, die sich immer noch der Segelboote bedienen, während die Dampfschiffe bereits erfunden sind. Es bieten zahlreich ersonnene stenographische Schlüssel für die dem Bezeichnungskapital der italienischen Schule noch abgehenden Kategorieen, die in der Algebra der Relative bereits vorhanden und nach ihren Gesetzen leidlich erforscht sind, nur einen unzulänglichen Ersatz. —

Wurde oben gezeigt, wie mit denselben Mitteln ebensogut der Begriff der Unendlichkeit und des gröfsten gemeinsamen Divisors, wie z. B. derjenige der Schwiegermutter sich darstellen läfst, so wird man zugeben, dafs die Pasigraphie aus dem status nascendi nun in der That herausgetreten und ihr Ideal wenigstens zu einem guten Teile bereits verwirklicht sein mufs.

In den immerhin seltenen Fällen, wo der Menschheit die Verwirklichung eines Ideales gelang, nimmt dasselbe meistens hinterher sich doch ganz anders aus, als es denen vorschwebte, die es zuerst konzipierten. So auch hier. Soviel können wir jetzt schon sagen, dafs jener Teil von Leibniz'ens Voraussage: „scriptura haec universalis aeque erit facilis quam communis“ schwerlich in Erfüllung gehen und Descartes' Hoffnung, dafs mit ihrer Hilfe dann ein Bauer mehr Einsicht in die Dinge gewinnen werde, als heute ein Philosoph, sich kaum jemals realisieren dürfte.

Die Schwierigkeit liegt in dem calculus ratiocinator! Die höhern Teile der Logik bieten eine solche Fülle von Problemen, die zu den allerschwierigsten gehören, und die Herrschaft über die — blofs ernsten Forschern zugängliche — Algebra der Relative ist so wenig leicht zu erlangen, dafs sie wohl nie Gemeingut werden, sondern voraussichtlich stets das Privilegium von nur wenigen, bevorzugten Denkern bleiben wird. —

Nachschrift. Ich habe mich bei der Auswahl der 5 Kategorieen 1) von Rücksichten der Konvenienz für die Zwecke meines Vortrags leiten lassen, und will damit nicht gesagt haben, dafs ihre Zahl nicht vielleicht noch weiter reduzierbar. In der That scheint unsere „Kategorie" $\smile$ der Konversion mittelst der Definition

$$(i \mathrel{=\!\!\!\in} a\,; j) = (j \mathrel{=\!\!\!\in} \breve{a}\,; i)$$

— wo i und j im Sinne von 7) Individuen vorstellen — noch ihrerseits (bei geeigneter systematischer Anordnung sämtlicher „Definitionen") auf die vier übrig bleibenden Urbegriffe zurückgeführt werden zu können.

Zur Theorie der adjungierten quadratischen Formen.

Von

Gustav Rados in Budapest.

Die Koeffizienten der quadratischen Form

$$f_1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_{ik} x_i x_k$$

können als die Elemente der Matrix

$$c = \| c_{ik} \| \qquad (i, k = 1, 2, \cdots, n)$$

betrachtet werden. Es mögen die aus derselben Matrix gebildeten Subdeterminanten m^{ten} Grades durch

$$C_{ik}^{(m)} \qquad \left(i, k = 1, 2, 3, \cdots, \mu; \quad \mu = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}\right)$$

bezeichnet werden, wobei $C_{ik}^{(m)}$ als abgekürzte Bezeichnung für die Determinante

$$\begin{vmatrix} c_{i_1 k_1} & c_{i_1 k_2} & \cdots & c_{i_1 k_m} \\ c_{i_2 k_1} & c_{i_2 k_2} & \cdots & c_{i_2 k_m} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{i_m k_1} & c_{i_m k_2} & \cdots & c_{i_m k_m} \end{vmatrix}$$

und

$$i = (i_1, i_2, \cdots, i_m), \quad k = (k_1, k_2, \cdots, k_m)$$

als Bezeichnungen von m-gliedrigen Kombinationen der Elemente $1, 2, \cdots, n$ eingeführt wurden.

Vermittelst der soeben charakterisierten Subdeterminanten m^{ten} Grades kann nun abermals eine quadratische Form gebildet werden, die dieselben als Koeffizienten enthält:

$$f_m = \sum_{\alpha=1}^{\mu} \sum_{\beta=1}^{\mu} C_{\alpha\beta}^{(m)} x_\alpha x_\beta;$$

diese Form kann man als die m^{te} adjungierte Form von f_1 bezeichnen. Die hiermit eingeführte Terminologie rechtfertigt der Umstand, dafs sich aus f_m für $m = 1$ die gewöhnliche Gaufs'sche adjungierte Form ergiebt.

Die gleichzeitige Betrachtung der ursprünglichen Form mit ihren sämtlichen adjungierten Formen bietet oft wesentliche Vorteile. Dieser Umstand veranlafste mich vorläufig, die nachfolgenden einfachen Sätze über höhere adjungierte Formen mitzuteilen, während ich auf die charakteristischen Beziehungen zwischen den Elementarteilern der verschiedenen adjungierten Formen in einer anderen Arbeit zurückzukehren hoffe.

Theorem 1. Ist f_1 eine definite positive Form, so sind ihre sämtlichen adjungierten Formen gleichfalls positiv; ist hingegen f_1 definit und negativ, so ist, je nachdem m gerade oder ungerade ist, f_m definit und positiv oder definit und negativ.

Wird nämlich f_1 vermittelst reeller orthogonaler Transformation auf die Form

$$\varrho_1 y_1^2 + \varrho_2 y_2^2 + \cdots + \varrho_n y_n^2$$

gebracht, so sind die Koeffizienten

$$\varrho_1, \varrho_2, \cdots, \varrho_n$$

dieser Quadratsumme bekanntlich die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\Phi_1(\varrho) \equiv \begin{vmatrix} c_{11} - \varrho & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} - \varrho & \cdots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} - \varrho \end{vmatrix} = 0;$$

es kann nun f_m gleichfalls durch reelle orthogonale Substitution als Quadratsumme aufgestellt werden, deren Koeffizienten der Gleichung

$$\Phi_m(\varrho) \equiv \begin{vmatrix} C^{(m)}_{11} - \varrho & C^{(m)}_{12} & \cdots & C^{(m)}_{1\mu} \\ C^{(m)}_{21} & C^{(m)}_{22} - \varrho & \cdots & C^{(m)}_{2\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C^{(m)}_{\mu 1} & C^{(m)}_{\mu 2} & \cdots & C^{(m)}_{\mu\mu} - \varrho \end{vmatrix} = 0$$

genügen. Aus einem Aufsatz*), der im 48. Bande der Math. Annalen (p. 417)

*) Zur Theorie der adjungierten Substitutionen.

erschienen ist, folgt nun, dafs die Wurzeln der letzten Gleichung, falls sie durch $\varrho_{i_1 i_2 \cdots i_m}$ bezeichnet werden, aus der Formel

$$\varrho_{i_1 i_2 \cdots i_m} = \varrho_{i_1} \varrho_{i_2} \cdots \varrho_{i_m}$$

hervorgehen, indem man für $i_1\, i_2 \cdots i_m$ die m-gliedrigen Kombinationen der Elemente $1, 2, 3, \cdots n$ einsetzt.

Ist nun f_1 definit positiv, so sind die Wurzeln

$$\varrho_1, \varrho_2, \cdots, \varrho_n$$

alle positiv, es sind demnach auch sämtliche Koeffizienten $\varrho_{i_1 i_2 \cdots i_m}$ gleichfalls von positivem Vorzeichen und es ist somit f_m für jedes m definit positiv.

Ist hingegen f_1 definit negativ, so sind sämtliche $\varrho_{i_1 i_2 \cdots i_m}$ für gerade m positiv, für ungerade m negativ; daher ist auch f_m für jedes gerade m eine definite positive, für jedes ungerade m eine definite negative Form.

Aus demselben Prinzip ergeben sich noch folgende Theoreme:

Theorem 2. Ist f indefinit, so sind die Formen

$$f_1, f_2, \cdots, f_{n-i}$$

alle indefinit und die Signatur von f_m ist

$$S_m = \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \binom{k}{m-r} \binom{n-k}{r},$$

wo k die Anzahl der positiven Koeffizienten in der Quadratsummen-Darstellung von f_1 bedeutet.

Theorem 3. Ist f_1 semidefinit, so sind es auch alle adjungierten Formen.

Theorem 4. Damit die Formen

$$f_1, f_2, \cdots, f_{n-i}$$

sämtlich definite Formen seien, ist es notwendig und hinreichend, dafs irgend eine dieser Formen definit sei.

In ganz einfacher Weise läfst sich noch das nachfolgende Theorem beweisen:

Theorem 5. Ist die Matrix von f_1 m^{ten} Ranges, so sind die Formen

$$f_{m+1}, f_{m+2}, \cdots, f_{n-i}$$

identisch Null und f_m das Quadrat einer linearen Form.

Formules pour la détermination approximative des nombres premiers, de leur somme et de leur différence d'après le numéro de ces nombres.

Par

J. Pervouchine à Perm.

(Traduit par A. Vassilief.)

M. J. Pervouchine, prêtre au district Chadrinsk (Perm), adresse au Congrès la note suivante, relative à ses travaux sur la détermination approximative des nombres premiers. La note est lue par M. A. Vassilief (Kasan), qui donne à la section préalablement quelques renseignements biographiques sur le vénérable auteur de la note et sur ses travaux dans le domaine de la théorie des nombres. M. Vassilief rappelle que M. Pervouchine (né $\frac{9}{21}$ Janv. 1827) a montré en 1877 que les nombres $2^{2^{12}}+1$ et $2^{2^{23}}+1$ sont des nombres composés. Le premier résultat a été communiqué par lui à l'Académie des Sciences de St. Pétersbourg deux mois avant que M. E. Lucas ait publié (Atti della R. Accademia di Torino. Vol. XIII) le même résultat. En 1883, M. Pervouchine a communiqué à l'Académie de St. Pétersbourg que le nombre

$$2^{61}-1=2\cdot 305\cdot 843\cdot 009\cdot 213\cdot 693\cdot 951$$

est un nombre premier; ce résultat a été vérifié quatre années plus tard par M. Hudelot en suivant une méthode donnée par Lucas et est très intéressant parce qu'il donne le neuvième nombre parfait connu (Mathesis. VII, 45—46).

I. Je propose aux mathématiciens de vérifier les formules suivantes qui ont été publiées par moi dans le Bulletin de la Société Physico-mathématique de Kasan [série 2, vol. IV, fasc. 3].

Désignons par ΣP la somme des nombres premiers de 1 jusqu'à P inclusivement, la somme des numéros de tous ces nombres de 1 jusqu'à N inclusivement par ΣN, la différence entre le nombre premier P et le nombre précédent P_0 c.-à-d. $P-P_0$ par ΔP et la différence des rapports $\frac{P}{N}-\frac{\Sigma P}{\Sigma N}$ par d.

Les tables de la sommation des nombres premiers auxquelles j'ai commencé à travailler en 1891 m'ont donné les résultats suivants:

$$\frac{\Sigma P}{\Sigma N} = \log N + \log_2 N - 1{,}5 - \frac{1}{12 \log N},$$

$$\frac{P}{N} = \log N + \log_2 N - 1 + \frac{5}{12 \log N} + \frac{1}{24 (\log N)^2},$$

$$\varDelta P = \log N + \log_2 N + \frac{17}{12 \log N} - \frac{3}{8 (\log N)^2} - \frac{1}{12 (\log N)^3},$$

$$d = 0{,}5 + \frac{1}{2 \log N} + \frac{1}{24 (\log N)^2}.$$

Pour les sommes multiples on a les formules suivantes:

$$\frac{\Sigma_n P}{\Sigma_n N} = \log N + \log_2 N - \sum_{x=0}^{x=n} \frac{1}{x+1} + \sum_{x=1}^{x=\infty} \frac{M_x}{(\log N)^x},$$

$$\frac{\Sigma_{n-1} P}{\Sigma_{n-1} N} = \log N + \log_2 N - \sum_{x=0}^{x=n-1} \frac{1}{x} + \sum_{x=1}^{x=\infty} \frac{L_x}{(\log N)^x}.$$

Pour N assez grand (> 8000) on a:

$$(N-1)\varDelta \log N = 1, \qquad (N-1)\varDelta \log_2 N = \frac{1}{\log N},$$

$$(N-1)\varDelta (\log N)^2 = 2 \log N, \qquad (N-1)\varDelta \frac{1}{(\log N)^m} = -\frac{m}{(\log N)^{m+1}}.$$

A l'aide de ces formules je trouve les formules suivantes qui lient les nombres L et M et qui peuvent servir au calcul successif de ces nombres:

$$M_1 = L_1 - \frac{1}{n+1}, \qquad M_2 = L_2 + \frac{L_1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \text{ etc. *)}$$

II. Je propose de démontrer que, quand le nombre premier P augmente, la somme multiple $\Sigma_n P$ tend vers la limite $\frac{P^{n+1}}{(\log P)^n \cdot \underline{|n+1}}$, mais reste toujours plus grande que cette limite. [Ici P^{n+1} est la $n+1$-ième puissance du nombre premier P, $\underline{|n+1} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \cdots (n-1)\, n\, (n+1)$.]

*) Dans toutes les formules $\log_i N$ désigne le $\log(\log(\log \cdots N))))$; $(\log N)^i$ la puissance i-ème du logarithme; les logarithmes sont népériens.

Über kettenbruchähnliche Algorithmen.*)

Von

W. Franz Meyer in Königsberg i. Pr.

Euler**) hat, wie es scheint, zuerst versucht, den Algorithmus von Euclid für den gröſsten gemeinsamen Teiler zweier Zahlen auf mehrere Zahlen auszudehnen, und damit zugleich das gewöhnliche Kettenbruchverfahren zu verallgemeinern. Durch Sätze Hermite's***) angeregt, hat bekanntlich Jacobi†) die fragliche Ausdehnung in weiterem Umfange aufgenommen.

Der Verfasser — der die grundlegenden Ideen schon vor einer Reihe von Jahren Freunden mitgeteilt hat — hat im Folgenden die Jacobi'sche Theorie auf Grund zweckmäſsiger Bezeichnungen und Begriffe wesentlich vereinfacht und weitergeführt. In letzterer Hinsicht sei insbesondere auf das von Jacobi beiseite gelassene Annäherungsproblem verwiesen, das in § 6 theoretisch, wie praktisch erledigt wird. In Rücksicht auf den zur Verfügung stehenden Raum konnte die Darstellung des Inhalts nur eine sehr knappe sein. Man vergleiche noch die vorläufige Mitteilung in den Berichten der Königsberger phys. ökon. Ges. Dez. 1897, wo der Fall $d = 2$ explicite durchgeführt ist.

*) Der Inhalt der Abhandlung konnte, aus Mangel an verfügbarer Vortragszeit, ebensowenig zum Vortrag gelangen, wie das ursprünglich angekündigte Thema: „Die neuere Entwickelung der Algebra und Zahlentheorie".

**) Comment. Arithm. coll. 1849 Bd. II p. 99.

***) Journ. f. Math. Bd. 40, vgl. auch Liouville's Journal Bd. 14, sowie die Abhandlung: „Sur la fonction exponentielle". Der von H. ausgesprochene Satz, man könne n (irrationale) Gröſsen so durch n rationale mit demselben Nenner N annähern, daſs die bezw. Abweichungen $< \frac{1}{N^{1+\frac{1}{n}}}$ werden, tritt hier in einer gewissen Modifikation auf (§ 7, XV^c).

†) S. die beiden nachgelassenen Abhandlungen im Journ. f. Math. Bd. 69. Auf die von Bachmann, Hurwitz, Hilbert, Minkowski u. A. gegebenen arithmetischen Fortsetzungen einzugehen, erschien hier nicht erforderlich.

§ 1.

Seien $r_0, r_1, r_2, \cdots r_d$, wo $r_0 > r_1 > r_2 > \cdots > r_d$*), $d+1$ positive ganze Zahlen. Ein erster Quotient q_{11} gebe an, wie oft r_1 in r_0 enthalten ist, ein zweiter Quotient q_{22}, wie oft r_2 im Reste $r_0 - q_{11}r_1$, ein dritter Quotient q_{33}, wie oft r_3 im Reste $r_0 - q_{11}r_1 - q_{22}r_2$ u. s. f.; endlich gebe ein d^{ter} Quotient q_{dd} an, wie oft r_d in

$$r_0 - q_{11}r_1 - q_{22}r_2 - \cdots - q_{d-1,d-1}r_{d-1}$$

enthalten ist, während $r_{d+1} (< r_d)$ den „Schlufsrest"

$$r_0 - q_{11}r_1 - \cdots - q_{dd}r_d$$

bezeichne.

Verfährt man entsprechend mit dem System $(r_1, r_2, \cdots r_{d+1})$, so entstehen d neue Quotienten $q_{2,1}, q_{3,2}, q_{4,3} \cdots q_{d+1,d}$ nebst einem zweiten Schlufsreste $r_{d+2} (< r_{d+1})$, u. s. f. Bezeichnet man noch die negativ genommenen Quotienten $(-q)$ mit v**), so findet die gemeinte Entwickelung ihren Ausdruck in dem Algorithmus:

$$\text{I} \qquad r_n + v_{n+1,1}r_{n+1} + v_{n+2,2}r_{n+2} + \cdots + v_{n+d,d}r_{n+d} = r_{n+d+1}$$
$$(n = 0, 1, 2, \cdots),$$

wo stets $r_n < r_{n-1}$ ist. Der letzte der Schlufsreste $r_n (n > d)$, der nicht verschwindet, sei r_u. Führt man noch d weitere verschwindende Schlufsreste $r_{u+1}, r_{u+2}, \cdots r_{u+d}$ als „überletzte" ein, so endet der Algorithmus I mit den $d+1$ Gleichungen:

$$\text{II} \begin{cases} r_{u-d-1} + v_{u-d,1}r_{u-d} + v_{u-d+1,2}r_{u-d+1} + \cdots + v_{u-1,d}r_{u-1} = r_u, \\ r_{u-d} + v_{u-d+1,1}r_{u-d+1} + v_{u-d+2,2}r_{u-d+2} + \cdots + v_{u,d}r_u = r_{u+1} = 0, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ r_{u-1} + v_{u,1}r_u \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = r_{u+d} = 0. \end{cases}$$

Jeder gemeinsame Teiler von $r_0, r_1, \cdots r_d$ geht in r_u auf, und umgekehrt jeder Teiler von r_u in $r_0, r_1, \cdots r_d$; r_u ist also der gröfste gemeinsame Teiler von $r_0, r_1 \cdots r_d$.

---

*) Diese Anordnung ist nur der Bequemlichkeit halber getroffen.

**) Die $v_{n,1}$ sind von Null verschieden, die $v_{n,2}, v_{n,3} \cdots$ können teilweise oder sämtlich verschwinden. In dem Falle, dafs alle $v_{n,2}, v_{n,3}, \cdots v_{n,d}$ verschwinden, wird die ganze Theorie der der gewöhnlichen Kettenbrüche sehr ähnlich, wenn sie auch durchaus nicht mit ihr koincidiert.

§ 2.

Substituiert man in I succ. die Ausdrücke für $r_{d+1}, r_{d+2}, \cdots$ jeweils in die nächstfolgende Gleichung, so wird jedes r_n $(n > d)$ eine „lineare Kombination" der $r_0, r_1, \cdots r_d$, nämlich:

$$\text{III} \qquad r_n = r_0 P_{0,n} + r_1 P_{1,n} + \cdots + r_d P_{d,n} \; (n > d),$$

wo die $P_{i,n}$ ganze Zahlen sind. Schreibt man r_{n+d} einmal in der Gestalt III, das andere Mal gemäſs I und ersetzt hier wieder die

$$r_{n+d-1}, r_{n+d-2}, \cdots r_n, r_{n-1}$$

durch ihre Werte in III, vergleicht sodann die Koeffizienten von r_i $(i = 0, 1, \cdots d)$, so hat man das Rekursionsgesetz der P:

$$\text{IV} \qquad \begin{aligned} P_{i,n+d} = v_{n+d-1,d} P_{i,n+d-1} &+ v_{n+d-2,d-1} P_{i,n+d-2} + \cdots \\ &+ v_{n,1} P_{i,n} + P_{i,n-1} \qquad \begin{pmatrix} i=0,1,\cdots d \\ n=1,2,\cdots \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Der Beweis bleibt in der That bis zum Anfangswerte $n = 1$ gültig, sobald man auch die $r_0, r_1, \cdots r_d$ in die Gestalt III bringt, d. h. wenn man noch die Gröſsen einführt:

$$\text{III}^{\text{a}} \qquad P_{i,i} = 1, \quad P_{i,k} = 0 \; (i \neq k); \qquad \begin{pmatrix} i=0,1,\cdots d \\ k=0,1,\cdots d \end{pmatrix}.$$

Setzt man zur Abkürzung die Determinante:

$$(1) \quad | P_{i,n}, P_{i,n+1}, \cdots P_{i,n+d} | \; (i = 0, 1, \cdots d) = (n, n+1, \cdots, n+d),$$

so führt die Elimination der v aus IV (bei festgehaltenem Index n) zu:

$$(2) \quad (n-1, n, n+1, \cdots, n+d-1) = (-1)^d \, (n, n+1, n+2, \cdots, n+d),$$

und, da infolge der Festsetzungen III$^{\text{a}}$ $(0, 1, 2, \cdots, d)$ den Wert $+1$ besitzt, zu der Fundamentalrelation:

$$\text{V} \qquad (n, n+1, n+2, \cdots, n+d) = (-1)^{dn}.$$

Es haben also nicht nur die Elemente irgend einer Reihe oder Kolonne von V den gröſsten gemeinsamen Teiler Eins, sondern auch die zugehörigen Unterdeterminanten.

§ 3.

Besitzen im besondern die $r_0, r_1, \cdots, r_d$ den gröſsten gemeinsamen Teiler Eins, so gehen die Formeln III für $n = u, u+1, \cdots, u+d$ über in:

$$\text{II}^{\text{a}} \qquad \begin{cases} r_0 P_{0,u} + r_1 P_{1,u} + \cdots + r_d P_{d,u} = 1, \\ r_0 P_{0,u+1} + r_1 P_{1,u+1} + \cdots + r_d P_{d,u+1} = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ r_0 P_{0,u+d} + r_1 P_{1,u+d} + \cdots + r_d P_{d,u+d} = 0. \end{cases}$$

Bedeuten $\Pi_{0,u}, \Pi_{1,u}, \cdots, \Pi_{d,u}$ die Unterdeterminanten der

$$P_{0,u}, P_{1,u}, \cdots, P_{d,u}$$

in $(u, u+1, \cdots, u+d)$, so ergiebt die Auflösung der Gleichungen II^a nach den $r_0, r_1, \cdots r_d$:

$$\text{VI} \qquad r_i = \Pi_{i,u} (i = 0, 1, \cdots, d).$$

Die Formeln II^a und VI enthalten die „Auflösung" der homogenen linearen diophantischen Gleichung:

$$(3) \qquad r_0 \xi_0 + r_1 \xi_1 + \cdots + r_d \xi_d = 0,$$

d. i. die Aufstellung aller ganzzahligen Lösungen (ξ) von (3) mittelst d ganzzahliger Parameter. Denn nach III^a sind

$$(P_{i,u+1}), (P_{i,u+2}), \cdots (P_{i,u+d}) \quad (i = 0, 1, \cdots d)^{*})$$

d Lösungssysteme von (3), folglich:

$$(4) \quad \xi_i = \lambda_1 P_{i,u+1} + \lambda_2 P_{i,u+2} + \cdots + \lambda_d P_{i,u+d} \quad (i = 0, 1, \cdots d)$$

bei ganzzahligen, arbiträren λ eine ∞^d Schar von Lösungssystemen von (3). Umgekehrt sei (ξ_i') irgend ein Lösungssystem von (3), es sei also simultan (mit Rücksicht auf II^a):

$$(5) \quad \sum_i r_i \xi_i' = 0, \sum_i r_i P_{i,u+1} = 0, \sum_i r_i P_{i,u+2} = 0, \cdots, \sum_i r_i P_{i,u+d} = 0$$
$$(i = 0, 1, \cdots d).$$

Da aber nach Voraussetzung die $r_0, r_1, \cdots r_d$ den gröfsten gemeinsamen Teiler Eins haben, so zeigt die Auflösung von (5) nach den Verhältnissen der r:

„dafs die Unterdeterminanten der

(6) $\qquad P_{0,u+k}, P_{1,u+k}, \cdots, P_{d,u+k} \quad (k = 1, 2, \cdots d) \qquad$ in der aus den ξ_i und den $P_{i,u+k}$ gebildeten Determinante, jeweils gleich sind den mit einem gewissen ganzzahligen Faktor λ_i' multiplizierten Werten der $r_0, r_1, \cdots, r_d$."

Ersetzt man andererseits in (4) die ξ_i durch das beliebig gewählte Lösungssystem der ξ_i', so giebt es sicher zugehörige rationale Werte der λ; die Auflösung von je d der Gleichungen (4) nach den λ liefert aber, wegen VI, für die $\lambda_i r_0, \lambda_i r_1, \cdots, \lambda_i r_d$ gerade die Werte der in (6) aufgeführten Unterdeterminanten, d. h. es ist:

$$(7) \qquad \lambda_i = \lambda_i' \quad (i = 1, 2, \cdots d);$$

somit sind die λ_i ganzzahlige Parameter. Haben die ξ' den gröfsten gemeinsamen Teiler Eins, so auch die λ und umgekehrt.

---

*) Bedeutet d_i den gröfsten gemeinsamen Teiler von $r_0, r_1, \cdots r_{i-1}, r_{i+1}, \cdots r_d$, so ist d_i zugleich der gröfste gemeinsame Teiler von $P_{i,u+1}, P_{i,u+2}, \cdots P_{i,u+d}$.

§ 4.

Hiermit ist man auch im Besitze der „Auflösung“ der linearen, nicht homogenen, diophantischen Gleichung*):

$$r_0 x_0 + r_1 x_1 + \cdots + r_d x_d = R. \tag{8}$$

Eine erste Lösung (x_i') von (8) fließt aus der ersten Gleichung II[a]:

$$x_i' = R P_{i,u} \quad (i = 0, 1, \cdots d). \tag{9}$$

Alle weiteren Lösungen von (8) stimmen überein mit denen der homogenen Gleichung:

$$\sum r_i (x_i - x_i') = 0. \tag{10}$$

Durch Kombinierung von (9) mit (4) erhält man die „Auflösung“ von (8):

$$\text{VII} \qquad x_i = R P_{i,u} + \lambda_1 P_{i,u+1} + \lambda_2 P_{i,u+2} + \cdots + \lambda_d P_{i,u+d}$$
$$(i = 0, 1, 2, \cdots d),$$

wo die λ alle ganzen Zahlen (inkl. 0) zu durchlaufen haben. Umgekehrt lassen sich die, einer beliebigen Lösung (x_i) von (8) korrespondierenden λ aus VII entnehmen. Denn man kann VII als $d + 1$ lineare Gleichungen in den $d + 1$ Unbekannten $R, \lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_d$ auffassen. Wegen VI und VII kommt nämlich für R: $R = \Sigma r_i x_i$, was nach Voraussetzung identisch erfüllt ist, und für die λ_k $(k = 1, 2, \cdots d)$

$$\lambda_k = | P_{i,u}, P_{i,u+1}, \cdots, P_{i,u+k-1}, x_i, P_{i,u+k+1}, \cdots, P_{i,u+d} | \tag{11}$$
$$(i = 0, 1, \cdots d).$$

§ 5.

Ist von den Verhältnissen $r_0 : r_1 : r_2 : \cdots : r_d$ wenigstens eines irrational, so bricht der Algorithmus I nicht ab, während seine Gleichungen im übrigen für einen beliebigen Wert von n ihre Form behalten, und auch die Relationen III, IV, V stets gültig bleiben.

Unter einem „periodischen“ Algorithmus I verstehen wir einen solchen, für den bei einem gewissen**) Werte von $n (> d)$ eine Proportion von der Art

*) In einer diophantischen Gleichung von der Form (8) darf stets angenommen werden, daſs die r positiv, ungleich, und der Gröſse nach geordnet sind, sowie den gröſsten gemeinsamen Teiler Eins besitzen.

**) Sobald nämlich VIII für einen gewissen Wert von n gilt, ist auch — wie aus der in § 8 gegebenen Darstellung von $\frac{r_n}{r_{n+1}}$ hervorgeht — für jeden

VIII $r_n : r_{n+1} : r_{n+2} : \cdots : r_{n+d} = r_{n+p} : r_{n+p+1} : r_{n+p+2} : \cdots : r_{n+p+d}$

existiert, wo p eine positive ganze Zahl (≥ 1) ist.

Man fasse $r_0, r_1, \cdots r_d$ als die homogenen Koordinaten eines Punktes (r) in einem linearen Raume M_d von d Dimensionen auf. Die Forderung VIII, die mit der anderen äquivalent ist, dafs alle Determinanten der Matrix

$$\text{VIII}' \qquad \begin{vmatrix} r_n, & r_{n+1}, & r_{n+2}, & \cdots, & r_{n+d} \\ r_{n+p}, & r_{n+p+1}, & r_{n+p+2}, & \cdots, & r_{n+p+d} \end{vmatrix} = 0$$

sind, sagt, nach Substitution der bezw. Ausdrücke III, aus, dafs der Punkt (r) dem Punkt-$(d+1)$-tupel angehört, in dem sich die „F_2“ der Matrix VIII′ schneiden. Vermöge des Parameters k:

$$(12) \qquad k = \frac{r_n}{r_{n+p}} = \frac{r_{n+1}}{r_{n+p+1}} = \cdots = \frac{r_{n+d}}{r_{n+p+d}}$$

hängt die Bestimmung des $(d+1)$-tupels ab von der ganzzahligen Gleichung $(d+1)^{\text{ten}}$ Grades (deren erster und letzter Koeffizient nach V gleich $(-1)^{dn}$ resp. $(-1)^{d(n+p)}$ ist):

$$\text{IX} \qquad K_{d+1} \equiv$$
$$= | P_{i,n} - kP_{i,n+p}, P_{i,n+1} - kP_{i,n+p+1}, \cdots, P_{i,n+d} - kP_{i,n+p+d} | = 0.$$

Dem Punkte (r) entspricht eine bestimmte Wurzel k' (> 1) der Gleichung; umgekehrt kommt man von k' vermöge (12) zu (r) zurück. Wir sagen kurz:

IX[a] „Ist der Algorithmus I periodisch, so ist (r) eine Irrationale $(d+1)^{\text{ten}}$ Grades.“

Auf die sehr wahrscheinliche Umkehrung des Satzes gehen wir hier nicht ein.

§ 6.

Es soll das durch I involvierte Näherungsverfahren studiert werden. Wie die Formeln VI erwarten lassen, werden die $\Pi_{0,n} : \Pi_{1,n} : \cdots : \Pi_{d,n}$ Näherungsbrüche für die $r_0 : r_1 : \cdots : r_d$ liefern, deren Genauigkeit mit wachsendem n zunimmt.

Bezüglich des Wachstums (und Vorzeichens) der $P_{i,n}$ läfst sich

---

gröfseren Wert von n: $\frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{r_{n+p+1}}{r_{n+p}}$, und die $q_{n,1}, q_{n,2}, \cdots q_{n,d}$ weisen je eine p-gliedrige Periode auf und umgekehrt. Hieraus ist leicht zu erkennen, was eintritt, wenn die gemeinte Periodicität nur eine teilweise resp. eine ungleichmäfsige ist.

aus den Rekursionsformeln IV unmittelbar nichts folgern, da die v negativ sind.

Um die Rekursionsformeln für die $\Pi_{i,n}$ zu finden, müssen wir erst eine geeignete Bezeichnung einführen. Wir denken uns eine Matrix aus d Reihen und $d+1$ Kolonnen gebildet von der Art:

(13) $\quad | P_{0,n_k}, P_{1,n_k}, P_{2,n_k}, \cdots, P_{d,n_k} | \quad (k = 1, 2, \cdots d,\ n_k \neq n_{k'})$

und verstehen unter

(14) $$\Pi_{i;n_1,n_2,\cdots,n_d} \ (i = 0, 1, \cdots d)$$

ihre (sc. mit alternierendem Vorzeichen genommenen) Determinanten, sodafs speziell für $n_1 = n+1,\ n_2 = n+2, \cdots, n_d = n+d$ gemäfs der schon in VI verwandten Bezeichnung:

(15) $$\Pi_{i;n+1,n+2,\cdots,n+d} = \Pi_{i,n}$$

ist, so ergiebt sich auf Grund von IV successive:

(16) $$\begin{cases} (-1)^{d-1}\Pi_{i,n} = -q_{n,1}\Pi_{i,n-1} + \Pi_{i;n-1,n+1,n+2,\cdots,n+d-1}, \\ (-1)^{d-1}\Pi_{i;n-1,n+1,\cdots,n+d-1} = +q_{n,2}\Pi_{i,n-2} \\ \qquad\qquad + \Pi_{i;n-2,n-1,n+1,\cdots,n+d-2}, \\ (-1)^{d-1}\Pi_{i;n-2,n-1,n+1,\cdots,n+d-2} = -q_{n,3}\Pi_{i,n-3} \\ \qquad\qquad + \Pi_{i;n-3,n-2,n-1,n+1,\cdots,n+d-3}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (-1)^{d-1}\Pi_{i;n-d+2,\cdots,n-1,n+1,n+2} = (-1)^{d-1}q_{n,d-1}\Pi_{i,n-d+1} \\ \qquad\qquad + \Pi_{i;n-d+1,\cdots,n-1,n+1}, \\ (-1)^{d-1}\Pi_{i;n-d+1,\cdots,n-1,n+1} = (-1)^d q_{n,d}\Pi_{i,n-d} + \Pi_{i,n-d-1}, \end{cases}$$

mithin durch Zusammenfassung:*)

X $$\Pi_{i,n} = (-1)^d q_{n,1}\Pi_{i,n-1} + (-1)^{2d} q_{n,2}\Pi_{i,n-2} \\ + (-1)^{3d} q_{n,3}\Pi_{i,n-3} + \cdots + (-1)^{dd} q_{n,d}\Pi_{i,n-d} + \Pi_{i,n-d-1}.$$

Um hiermit zu rechnen, sowie um weitere Schlüsse zu ziehen, bedarf es der wirklichen Berechnung der Bildungen Π mit den niedrigsten Indices, d. i. der $(d+1)^2$ Gröfsen

$$\Pi_{i,-1},\ \Pi_{i,0},\ \Pi_{i,1},\ \cdots,\ \Pi_{i,d-1}.$$

Diese Π sind nach III, III^a, IV einer Matrix von $(d+1)$ Kolonnen und d^2 Reihen zu entnehmen. Die $(d+1)$ ersten Reihen bestehen aus Nullen exkl. der Diagonal-Einer; die $(d+2)^{\text{te}}$ Reihe aus $1, v_{11}, v_{22}, v_{33}, \cdots, v_{d,d}$, und die folgenden $(d-2)$ Reihen von Gröfsen

*) Aus X entnimmt man noch die Darstellung der $q_{n,1}, q_{n,2}, \cdots, q_{n,d}$ als $(d+1)$-reihiger Determinanten der Π.

lassen sich, eben wegen ihrer linearen Zusammensetzung III, und da sie nur als Elemente von Determinanten Π betrachtet werden, ersetzen durch resp.

$$(0,\ 1,\ \nu_{21},\ \nu_{3,2},\ \nu_{4,3},\ \cdots,\ \nu_{d,d-1}),\quad (0,\ 0,\ 1,\ \nu_{31},\ \nu_{4,2},\ \cdots,\ \nu_{d,d-2}),\ \cdots,$$
$$(0,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ 1,\ \nu_{d-1,1},\ \nu_{d,2}).$$

Um das Endresultat zu fixieren, bedienen wir uns der Abkürzungen:

$$(17)\begin{cases} N_{i,0} = 1, & N_{i,3} = \begin{vmatrix} \nu_{i,1} & 1 & 0 \\ \nu_{i+1,2} & \nu_{i+1,1} & 1 \\ \nu_{i+2,3} & \nu_{i+2,2} & \nu_{i+2,1} \end{vmatrix}, \\ N_{i,1} = \nu_{i,1}, & \\ N_{i,2} = \begin{vmatrix} \nu_{i,1} & 1 \\ \nu_{i+1,2} & \nu_{i+1,1} \end{vmatrix}, & \\ \qquad N_{i,4} = \begin{vmatrix} \nu_{i,1} & 1 & 0 & 0 \\ \nu_{i+1,2} & \nu_{i+1,1} & 1 & 0 \\ \nu_{i+2,3} & \nu_{i+2,2} & \nu_{i+2,1} & 1 \\ \nu_{i+3,4} & \nu_{i+3,3} & \nu_{i+3,2} & \nu_{i+3,1} \end{vmatrix}, \text{ etc.,} \end{cases}$$

dann kommt für die fraglichen $\Pi_{i,n} \binom{i=0,1,\cdots d}{n=-1,0,\cdots d-1}$:

$$\text{XI}\qquad \begin{cases} \Pi_{i,n}\,(i < n-1) = (-1)^{n(d-1)-i}\,N_{i+1,n+i-2}; \\ \Pi_{i,n}\,(i \geqq n-1) = 0 \text{ exkl. } \Pi_{d-1} = (-1)^{d}. \end{cases}$$

Da $N_{i,n}$ selbst stets das Vorzeichen $(-1)^n$ hat, so kommt die Vorzeichenregel für die $\Pi_{i,n}$ einfach darauf hinaus, dafs die Π bei geradem d niemals negativ sind, bei ungeradem d das Vorzeichen $(-1)^n$ haben. Wegen X gilt diese Regel für sämtliche $\Pi_{i,n}$, d. h. auch wenn $n \geq d$ ist, und es gilt somit der Fundamentalsatz:

XII „Die absoluten Werte der $\Pi_{i,n}$ sind mit n stets wachsende (ganze) Zahlen, die man vermöge (17), X, XI berechnet. Die $\Pi_{i,n}$ selbst haben das Vorzeichen von $(-1)^{dn}$, sind also bei geradem d positiv (abgesehen von einigen verschwindenden Anfangswerten), bei ungeradem d dagegen und festgehaltenem i von konstantem, bei wachsendem n von alternierendem Vorzeichen."

Die einzige Schwierigkeit bei der Herleitung der Formeln XI liegt in der Bestimmung des Vorzeichens der $\Pi_{i,n}$, das aus den Determinanten schwer zu ersehen ist. Man kann aber die von Null verschiedenen $\Pi_{i,n}$ — wenn man entweder den ersten oder aber den zweiten Index festhält — als homogene Unbekannte in linearen Hilfsgleichungen auffassen, die von folgendem Typus sind:

$$(18)\qquad \begin{cases} \nu_{i,1}x_1 + x_2 = 0, \quad \nu_{i+1,2}x_1 + \nu_{i+1,1}x_2 + x_3 = 0, \\ \nu_{i+2,3}x_1 + \nu_{i+2,2}x_2 + \nu_{i+2,1}x_3 + x_4 = 0, \\ \nu_{i+3,4}x_1 + \nu_{i+3,3}x_2 + \nu_{i+3,2}x_3 + \nu_{i+3,1}x_4 = 0, \end{cases}$$

also, wegen der Negativität der ν, sofort erkennen lassen, daſs die Verhältnisse der Unbekannten positiv ausfallen. Dadurch reduziert sich die ganze Vorzeichenbestimmung bezw. der $\Pi_{i,n}$ auf die Feststellung des Vorzeichens einer einzigen Determinante, die auſser Nullen nur Diagonal-Einer aufweist, also positiv ist.

Die Auflösung der für die Indices $n, n+1, \cdots, n+d$ angesetzten Relationen III nach den $r_0, r_1, \cdots, r_d$ gemäſs V und (17) ergiebt:

$$\text{XIII}\begin{cases} (-1)^{dn}r_i = r_n\,\Pi_{i,n} + (-1)^d r_{n+1}\,\Pi_{i;\,n,n+2,\cdots,n+d} \\ \qquad\qquad + (-1)^{2d} r_{n+2}\,\Pi_{i;\,n,n+1,n+3,\cdots,n+d} + \cdots \\ \qquad\qquad + (-1)^{(d-1)d} r_{n+d-1}\,\Pi_{i;\,n,n+1,\cdots,n+d-2,n-d} \\ \qquad\qquad + (-1)^{dd} r_{n+d}\,\Pi_{i,n-1} \qquad (i = 0, 1, \cdots d), \end{cases}$$

wo also alle Π rechterhand das Vorzeichen von $(-1)^{dn}$ besitzen, sodaſs nach dessen Hebung auf beiden Seiten nur positive Zeichen auftreten. Da aber die absoluten Werte aller Π rechts mit n stets wachsende (ganze) Zahlen, und die r_i selbst positiv sind, so folgt:

XIV „r_n wird mindestens unendlich klein wie $\frac{1}{\Pi_{i,n}}$."*)

§ 7.

Wir zeigen jetzt das Gesetz, nach dem sich die $\Pi_{0,n} : \Pi_{1,n} : \cdots : \Pi_{d,n}$ den $r_0 : r_1 : \cdots : r_d$ nähern. Zu dem Behuf betrachten wir gleich $d+1$ konsekutive Wertsysteme der Π, die mit $(n-1), (n), (n+1), \cdots, (n+d-1)$ bezeichnet seien, und interpretieren sie (§ 5) als Punkte — mit den rechtwinkligen Koordinaten**)

$$\frac{\Pi_{0,k}}{\Pi_{d,k}}, \frac{\Pi_{1,k}}{\Pi_{d,k}}, \cdots, \frac{\Pi_{d-1,k}}{\Pi_{d,k}}; \quad (k = n-1, n, \cdots, n+d-1) \text{ —}$$

in einem linearen Raume M_d von d Dimensionen. In M_d bilden die $d+1$ Punkte, vermöge verbindender M_{d-1}, den geschlossenen Raum eines „$(d+1)$-eders", dessen absoluter Inhalt Δ_{n+d}, mit Rücksicht auf V, bestimmt wird durch:

$$(19)\qquad d!\,\Delta_{n+d} = \frac{1}{\Pi_{d,n-1}\Pi_{d,n}\cdots\Pi_{d,n+d-1}}.$$

*) Die Verhältnisse $\Pi_{i,n} : \Pi_{k,n}$ sind, wie aus § 7, XV[a] hervorgeht, in endlichen Grenzen eingeschlossen.

**) Die Bevorzugung des Index d ist selbstredend nur eine äuſserliche.

Der nächstfolgende Punkt $(n+d)$ bildet mit je d Ecken von $\varDelta_{n+d}$ ein „Teil-$(d+1)$-eder", dessen **absoluter** Inhalt mit $\varDelta_{n+d-i}$ $(i=1,2,\cdots,d+1)$ bezeichnet sei, wenn $(n+d-i)$ die ausgeschlossene Ecke war.

Dann ergiebt sich auf Grund von X:

$$(20)\begin{cases} \dfrac{\varDelta_{n+d-1}}{\varDelta_{n+d}}=(-1)^d q_{n+d,1}\dfrac{\Pi_{d,n+d-1}}{\Pi_{d,n+d}}, \quad \dfrac{\varDelta_{n+d-2}}{\varDelta_{n+d}}=(-1)^{2d} q_{n+d,2}\dfrac{\Pi_{d,n+d-2}}{\Pi_{d,n+d}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\varDelta_{n}}{\varDelta_{n+d}}=(-1)^{dd} q_{n+d,d}\dfrac{\Pi_{d,n}}{\Pi_{d,n+d}}, \quad \dfrac{\varDelta_{n-1}}{\varDelta_{n+d}}=\dfrac{\Pi_{d,n-1}}{\Pi_{d,n+d}}, \end{cases}$$

mithin durch Addition, wiederum wegen X:

$$(21)\qquad \varDelta_{n+d}=\varDelta_{n+d-1}+\varDelta_{n+d-2}+\cdots+\varDelta_n+\varDelta_{n-1},$$

d. h. die Summe der absoluten Inhalte der $d+1$ Teil-$(d+1)$-eder ist gleich dem absoluten Inhalte des ursprünglichen $(d+1)$-eders.

Das ist aber nur so möglich, daſs der Punkt $(n+d)$ im **Innern***) von $\varDelta_{n+d}$ liegt.

Nun folgt aus elementargeometrischen Gründen, daſs, wenn ein Punkt P im Innern eines Dreiecks A_1, A_2, A_3 liegt, jede Strecke $\overline{PA_i}$ $(i=1,2,3)$ sicher kleiner ist, als **wenigstens eine** Seite des Dreiecks, — ein Satz, der sich durch vollständige Induktion auf ein $(d+1)$-eder in M_d übertragen läſst.

Andererseits ist aber auch der elementare Satz, daſs irgend eine Seite eines Dreiecks stets kleiner ist, als die Summe der beiden anderen, in dem Sinne auf ein $(d+1)$-eder $(n-1),(n),(n+1),\cdots(n+d-1)$ ausdehnbar (wiederum durch vollständige Induktion), daſs irgend eine Kantenstrecke des $(d+1)$-eders sicher kleiner ist als die Summe der Strecken:

$$\overline{(n-1),(n)}+\overline{(n),(n+1)}+\cdots+\overline{(n+d-2),n+(d-1)}.$$

Bezeichnet man daher unsere Punkte $(n),\cdots$ als „**Näherungspunkte**", das von $(d+1)$ konsekutiven gebildete $(d+1)$-eder als ein „**Näherungs-$(d+1)$-eder**", und sieht die absolute Strecke zwischen zwei Näherungspunkten als Maſs für die **Abweichung** der bezw. Wertsysteme Π von einander an, so lautet das Ergebnis:

XV^a. „**Irgend ein Näherungspunkt $(n+d)$ liegt stets im Innern des von den $d+1$ voraufgehenden gebildeten Nähe-**

*) Daraus geht sofort der bereits in § 6 benützte Satz hervor, daſs die Verhältnisse $\Pi_{0,n}:\Pi_{1,n}:\cdots:\Pi_{d,n}$ in endlichen Grenzen eingeschlossen sind.

rungs-$(d+1)$-eders $\varDelta_{n+d}$. Die Abweichung zwischen $(n+d)$ und $(n+d-1)$ ist kleiner als die Summe der d Abweichungen

$$\overline{(n-1),(n)}+\overline{(n),(n+1)}+\cdots+\overline{(n+d-2),(n+d-1)}.\text{“}$$

Nunmehr ziehen wir den Punkt (r) selbst heraus. Die Ausführung der Formel XIII mit Hilfe der Rekursionsformeln (16) liefert $(i=0,1,\cdots,d)$:

$$\text{XIII}'\begin{cases}(-1)^{d(n-1)}r_i=(-1)^d\Pi_{i,n-d-1}r_n+(-1)^{2d}\Pi_{i,n-d}(r_nq_{n,d}+r_{n+1})\\ \quad+(-1)^{3d}\Pi_{i,n-d+1}(r_nq_{n,d-1}+r_{n+1}q_{n+1,d}+r_{n+2})+\cdots\\ \quad+(-1)^{dd}\Pi_{i,n-2}(r_nq_{n,2}+r_{n+1}q_{n+1,3}+r_{n+2}q_{n+2,4}+\cdots\\ \qquad\qquad+r_{n+d-2}q_{n+d-2,d}+r_{n+d-1})\\ \quad+\Pi_{i,n-1}r_{n-1}.\end{cases}$$

Versteht man unter R_i die mit r_n dividierte rechte Seite von XIII′, sodafs für die Verhältnisse der $r_0, r_1, \cdots, r_d$ gilt:

$$r_0:r_1:\cdots:r_d=R_0:R_1:\cdots:R_d, \tag{22}$$

so bemerke man, dafs, da nach I $r_n<r_{n-1}$, $\left[\frac{r_{n-1}}{r_n}\right]=q_{n,1}\geqq 1$, und kein $q_{n,2}$, $q_{n,3}$, $\cdots$ negativ sein kann, durch Vergleichung mit X folgt:

$$R_i>\Pi_{i,n}\quad(i=0,1,\cdots,d). \tag{23}$$

Auch der Punkt (r) bildet mit je d Ecken von $\varDelta_{n+d}$ ein Teil-$(d+1)$-eder, dessen absoluter Inhalt $\varDelta^{(r)}_{n+d-i}$ sei, wenn $(n+d-i)$ die ausgeschlossene Ecke war.

Eine Rechnung, die der zur Erzielung von (20), (21) ausgegebenen ganz analog — gestützt auf XIII′ — verläuft, liefert:

$$\varDelta_{n+d}=\varDelta^{(r)}_{n+d-1}+\varDelta^{(r)}_{n+d-2}+\cdots+\varDelta^{(r)}_{n}+\varDelta^{(r)}_{n-1}, \tag{21′}$$

also auf Grund der oben benützten geometrischen Hilfssätze:

XV$^{\text{b}}$. „Der Punkt (r) liegt im Innern sämtlicher Näherungs-$(d+1)$-eder. Seine Abweichung von irgend einem Näherungspunkte $(n+d-1)$ ist kleiner als die Summe der d Abweichungen:

$$\overline{(n-1),(n)}+\overline{(n),(n+1)}+\cdots+\overline{(n+d-2),(n+d-1)}.\text{“}$$

Um endlich über die Abweichung zwischen zwei konsekutiven Näherungspunkten $(n-1)$, (n) Genaueres zu erfahren, leiten wir aus V nach einem bekannten Determinantensatze die Formel ab:

$$\text{XVI}\qquad \frac{\Pi_{i,n}}{\Pi_{d,n}}-\frac{\Pi_{i,n-1}}{\Pi_{d,n-1}}=\frac{\Pi^{(i,d)}_{n,n+d}}{\Pi_{d,n}\Pi_{d,n-1}}\quad(i=0,1,\cdots,d-1),$$

wo der Zähler rechts die zu $\begin{vmatrix} P_{i,n} & P_{d,n} \\ P_{i,n+d}, & P_{d,n+d} \end{vmatrix}$ komplementäre Unterdeterminante von V bedeutet. Aus XVI ergiebt sich sofort die „Abweichung" $s_{n-1,n}$ zwischen den beiden Wertsystemen $(n-1)$ und (n) durch:

$$\text{XVI}' \quad s^2_{n-1,n} = \left(\frac{1}{\Pi_{d,n-1}\Pi_{d,n}}\right)^2 \sum_i (\Pi^{i,d}_{n,n+d})^2 \qquad (i=0,1,\cdots,d-1)$$
$$= \left(\frac{1}{\Pi_{d,n-1}\Pi_{d,n}}\right)^2 r^2_{n-1,n}.$$

Über das Wachstum der $\Pi^{(i,d)}_{n,n+d}$ resp. der $r_{n-1,n}$ läfst sich ebensowenig Genaueres eruieren, als über das der $P_{i,n}$ selbst (cf. § 6, Anfang). Wir werden daher über die Abnahme der Abweichung $s_{n-1,n}$ (bei wachsendem n) ein Kriterium zu suchen haben, das nur von den $\Pi_{i,n}$ abhängt, und doch möglichst viel aussagt.

Zu einem solchen Kriterium gelangen wir durch Anleitung der Sätze XV^a, XV^b, indem wir das Produkt gerade der Abweichungen untersuchen, deren Summe dort auftrat, nämlich:

$$(24) \qquad s_{n-1,n}\, s_{n,n+1} \cdots s_{n+d-2,n+d-1} =$$
$$= \left(\frac{1}{\Pi_{d,n-1}\Pi_{d,n} \cdots \Pi_{d,n+d-2}\Pi_{d,n+d-1}}\right)\left(\frac{r_{n-1,n}\, r_{n,n+1} \cdots r_{n+d-2,n+d-1}}{\Pi_{d,n} \cdots \Pi_{d,n+d-2}}\right).$$

Hier läfst sich der zweite Faktor rechterhand in einer bemerkenswerten Art umgestalten. Der Nenner ist nämlich — wie auf Grund des schon bei XVI benützten Determinantensatzes, sowie des Laplace'schen Zerlegungssatzes ohne Schwierigkeit hervorgeht — als eine einzige d-reihige Determinante darstellbar, deren Elemente gerade die in den $r_{n-1,n}, \cdots, r_{n+d-2,n+d-1}$ des Zählers figurierenden $\Pi^{(i,d)}$ sind, in Zeichen:

$$(25) \qquad \Pi_{d,n}\Pi_{d,n+1} \cdots \Pi_{d,n+d-2} =$$
$$= \left| \Pi^{(i,d)}_{n+1,n+d+1},\ \Pi^{(i,d)}_{n+2,n+d+2},\ \cdots,\ \Pi^{(i,d)}_{n+d,n+2d} \right| \quad (i=0,1,\cdots,d-1).$$

Darauf gestützt, ziehe man aus jeder der Quadratwurzeln

$$r_{n-1,n},\ r_{n,n+1},\ \cdots,\ r_{n+d-2,n+d-1}$$

je eine gewisse der Gröfsen

$$\Pi^{(i,d)}_{n+1,n+d+1},\ \Pi^{(k,d)}_{n+2,n+d+2},\ \Pi^{(l,d)}_{n+3,n+d+3} \cdots$$

als Faktor heraus, und setze das Produkt dieser Faktoren als Nenner des Nenners (25) an. Wie auch die Verhältnisse der nunmehr in den r verbleibenden $\Pi^{(i,d)}$ beschaffen sein mögen, stets läfst sich die angegebene Manipulation so vollziehen, dafs der in Rede stehende zweite

Faktor rechts von (24) zu einem Quotienten wird, dessen Zähler eine endliche, angebbare Grenze nicht überschreiten kann, während umgekehrt der Nenner — eben weil jeder Faktor links in (25) mit n jede Grenze übersteigt — nicht unter eine endliche, angebbare Grenze heruntersinken kann, d. h. der zweite Faktor rechts in (24) ist selbst zwischen endlichen Grenzen eingeschlossen.

Damit ist das wichtige Resultat gewonnen:

XV^c. „Das Produkt der Abweichungen

$$\overline{(n-1),(n)},\ \overline{(n),(n+1)},\ \cdots,\ \overline{(n+d-2),(n+d-1)}$$

— deren Summe den Kern der Sätze XV^a, XV^b bildete — wird bei unbegrenzt wachsendem n unendlich klein wie

$$\frac{1}{\Pi_{d,n-1}\,\Pi_{d,n}\cdots\Pi_{d,n+d-2}\,\Pi_{d,n+d-1}}.“$$

§ 8.

Die explicite Darstellung der kettenbruchähnlichen Algorithmen für die Näherungsbrüche $\Pi_{0,n}:\Pi_{1,n}:\cdots:\Pi_{d,n}$ resp. für die $r_0:r_1:\cdots:r_d$ selbst stöfst auf keine prinzipielle Schwierigkeit.

Der blofse Anblick der Formeln X führt zu der Regel:

XVII. „Dadurch, dafs man $q_{n,1}$ vermehrt um $\frac{q_{n+1,2}}{q_{n+1,1}}$, $q_{n,2}$ um $\frac{q_{n+1,3}}{q_{n+1,1}},\cdots,$ $q_{n,d-1}$ um $\frac{q_{n+1,d}}{q_{n+1,1}}$, endlich $q_{n,d}$ um $\frac{1}{q_{n+1,1}}$, gehen die

$$\Pi_{0,n}:\Pi_{1,n}:\cdots:\Pi_{d,n}$$

über in die nächstfolgenden $\Pi_{0,n+1}:\Pi_{1,n+1}:\cdots:\Pi_{d,n+1}$.“

Hieraus fliefst, mit Rücksicht auf die in XI angegebenen Werte der Π mit niedrigsten Indices, die gemeinte Darstellung der

$$\Pi_{0,n}:\Pi_{1,n}:\cdots:\Pi_{d,n}$$

von selbst.

„So erhält man für $d=2$:

$$(26)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{\Pi_{0,1}}{\Pi_{1,1}}=q_{1,1};\quad\frac{\Pi_{0,2}}{\Pi_{1,2}}=q_{1,1}+\frac{q_{2,2}}{q_{2,1}};\quad\frac{\Pi_{0,3}}{\Pi_{1,3}}=q_{1,1}+\cfrac{q_{2,2}+\cfrac{1}{q_{3,1}}}{q_{2,1}+\cfrac{q_{3,2}}{q_{3,1}}}\\&\frac{\Pi_{0,4}}{\Pi_{1,4}}=q_{1,1}+\cfrac{q_{2,2}+\cfrac{1}{q_{3,1}+\cfrac{q_{4,2}}{q_{4,1}}}}{q_{2,1}+\cfrac{q_{3,2}+\cfrac{1}{q_{4,1}}}{q_{3,1}+\cfrac{q_{4,2}}{q_{4,1}}}};\quad\text{etc.,}\end{aligned}\right.$$

während die jeweils unter dem Hauptbruchstrich stehenden Nenner die Werte der $\frac{\Pi_{1,2}}{\Pi_{2,2}}$, $\frac{\Pi_{1,3}}{\Pi_{2,3}}$, $\frac{\Pi_{1,4}}{\Pi_{2,4}}$ etc. repräsentieren."

Die entsprechende Darstellung der $r_0 : r_1 : \cdots : r_d$ ergiebt sich hieraus und durch Vergleich mit XIII', (22). Bei der Ausführung empfiehlt es sich, in den mit r_n dividierten rechten Seiten von XIII' systematisch die Quotienten:

$$\frac{r_{k-1}}{r_k} = x_k (> 1) \tag{27}$$

einzuführen.

XVIII. „Die Darstellung der $r_0 : r_1 : \cdots : r_d$ bricht dann mit den d Quotienten $x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+d-1}$ ab, und umgekehrt gelangt man von ihr zu der der obigen der $\Pi_{0,n} : \Pi_{1,n} : \cdots : \Pi_{d,n}$ zurück, indem man x_n ersetzt durch $[x_n] = q_{n,1}$ und $\frac{1}{x_{n+1}}$ durch $\left[\frac{1}{x_{n+1}}\right] = 0.$"

Selbstredend resultiert die nicht abbrechende Entwickelung der $r_0 : r_1 : \cdots : r_d$, indem man in der für die $\Pi_{0,n} : \Pi_{1,n} : \cdots : \Pi_{d,n}$ den Index n unbegrenzt wachsen läfst.

Über eine neue Eigenschaft der Diskriminanten algebraischer Zahlkörper.*)

Von

L. Stickelberger in Freiburg i. Br.

Seit langer Zeit habe ich mich mit dem Beweise des Satzes über die Primfaktoren der Grundzahl (Diskriminante) eines algebraischen Zahlkörpers beschäftigt, den Herr Dedekind im Jahre 1871 angekündigt und für den er im Jahre 1882 in einer eigenen Abhandlung zwei vollständige Beweise gegeben hat. Auch ist es mir schon vor Jahren gelungen, beide Beweise so zu vereinfachen, dafs sie an Einfachheit kaum hinter dem zurückstehen, den Herr Hensel 1894 gegeben hat und den seither die Herren H. Weber und D. Hilbert in ihre zusammenfassenden Darstellungen aufgenommen haben. Einen dieser Beweise erlaube ich mir hier vorzuführen, weil er fast unmittelbar zu einer neuen Eigenschaft der Grundzahl hinleitet, nämlich zu einem Zusammenhang zwischen ihrem quadratischen Restcharakter in bezug auf irgend eine ungerade Primzahl und der Zerlegung der letzteren in Primideale des gegebenen Körpers. Etwas mühsamer ist nur der Ergänzungssatz bezüglich der Primzahl Zwei zu beweisen. Ich bemerke noch, dafs ich zu dieser Eigenschaft geführt wurde, indem ich einen Satz des Herrn Dedekind über kubische Körper, der mir durch eine briefliche Mitteilung desselben an Herrn Frobenius bekannt geworden war, zu beweisen suchte.

---

*) Dieser Vortrag war erst spät angemeldet und mufste der beschränkten Zeit halber ausfallen. Er erscheint hier in erweiterter Form insofern, als die umständlicheren Erwägungen des § 3, die beim mündlichen Vortrag hätten wegfallen müssen, auf Grund einer Ausarbeitung vom April 1894 vollständig mitgeteilt sind.

§ 1.

Herr Dedekind definiert als Spur einer Zahl des Körpers Ω vom n^{ten} Grade die Summe ihrer n konjugierten Werte und zeigt, wie man diese Spur durch Operationen innerhalb Ω bestimmen kann. An diese Bestimmungsweise anknüpfend definiere ich die Spur einer ganzen Zahl ω des Körpers in bezug auf ein solches Ideal $\mathfrak{a}$ desselben, das in der rationalen Primzahl p aufgeht, in folgender Weise. Ist g der Grad von $\mathfrak{a}$, und sind $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_g$ nach dem Modul $\mathfrak{a}$ unabhängige ganze Zahlen von Ω, bestimmt man ferner g^2 ganze rationale Zahlen x_{rs} durch die Kongruenzen

$$(1) \qquad \omega\alpha_r \equiv x_{r1}\alpha_1 + \cdots + x_{rg}\alpha_g \pmod{\mathfrak{a}},$$

so ist die Summe

$$x_{11} + x_{22} + \cdots + x_{gg}$$

nach dem Modul p bestimmt und unabhängig von der Wahl der Zahlen α_r; sie heifse die Spur von ω in bezug auf $\mathfrak{a}$ und werde durch $A(\omega)$ bezeichnet. Offenbar ist allgemein

$$A(\omega_1 + \omega_2) \equiv A(\omega_1) + A(\omega_2) \pmod{p}$$

und im besondern $A(\omega) \equiv 0 \pmod{p}$ für $\omega \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}}$.

Nimmt man für $\mathfrak{a}$ das Hauptideal $\mathfrak{o}p$, so ist $g = n$ und $A(\omega)$ kongruent der absoluten Spur $S(\omega)$ nach dem Modul p. Nimmt man für $\mathfrak{a}$ verschiedene Divisoren von p, so gelten die folgenden einfachen Gesetze:

I. Sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ theilerfremd und bedeuten $A(\omega)$, $B(\omega)$, $C(\omega)$ die Spuren einer Zahl ω in bezug auf $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$, so ist

$$A(\omega) + B(\omega) \equiv C(\omega) \pmod{p}.$$

II. Ist $\mathfrak{a}$ die k^{te} Potenz eines Primideals $\mathfrak{p}$, so besteht zwischen den zugehörigen Spuren $A(\omega)$, $P(\omega)$ die Relation

$$A(\omega) \equiv kP(\omega) \pmod{p}.$$

Zur Begründung von I. benütze man, wenn noch h den Grad des Ideals $\mathfrak{b}$ bedeutet, g nach $\mathfrak{a}$ unabhängige durch $\mathfrak{b}$ teilbare und h nach $\mathfrak{b}$ unabhängige durch $\mathfrak{a}$ teilbare Basiszahlen. Zur Begründung von II. wähle man zunächst, wenn f der Grad von $\mathfrak{p}$ ist, $\alpha_1, \cdots \alpha_f$ unabhängig nach $\mathfrak{p}$ und leite aus diesen Zahlen $(k-1)f$ weitere ab, indem man sie nach einander mit $\varrho, \varrho^2, \cdots \varrho^{k-1}$ multipliziert, wo ϱ eine durch $\mathfrak{p}$, aber nicht durch $\mathfrak{p}^2$, teilbare Zahl von Ω bedeutet. Aus den f ersten der Kongruenzen (1) ergeben sich dann die übrigen durch Multiplikation mit jenen Potenzen, woraus sogleich Satz II. fliefst.

Aus I. und II. folgt u. a.:

III. Sind $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots \mathfrak{p}_m$ die verschiedenen in p aufgehenden Primideale des Körpers, und ist

(2) $$\mathfrak{o}p = \mathfrak{p}_1^{e_1}\mathfrak{p}_2^{e_2}\cdots\mathfrak{p}_m^{e_m},$$

so ist die absolute Spur

(3) $$S(\omega) \equiv e_1 P_1(\omega) + e_2 P_2(\omega) + \cdots + e_m P_m(\omega) \pmod{p}.$$

Die Summe reduziert sich auf ihr erstes Glied, wenn ω durch $\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3\cdots\mathfrak{p}_m$ teilbar ist, sie wird kongruent Null, wenn aufserdem ω durch $\mathfrak{p}_1$ oder e_1 durch p teilbar ist.

Für den Fall $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}$, $g = f$ erhält man, indem man die Kongruenzen (1) wiederholt auf die p^{te} Potenz erhebt, in bekannter Weise die für unbestimmtes u giltige Kongruenz:

$$(\omega-u)(\omega^p-u)\cdots(\omega^{p^{f-1}}-u) \equiv \begin{vmatrix} x_{11}-u & x_{12} & \cdots & x_{1f} \\ x_{21} & x_{22}-u & & x_{2f} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{f1} & x_{f2} & & x_{ff}-u \end{vmatrix} \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Aus dieser folgt:

IV. Die in bezug auf ein Primideal $\mathfrak{p}$ genommene Spur $P(\omega)$ ist als rationale Zahl durch die Kongruenz

(4) $$P(\omega) \equiv \omega + \omega^p + \omega^{p^2} + \cdots + \omega^{p^{f-1}} \pmod{\mathfrak{p}}$$

bestimmt.

Daher hat die Kongruenz $P(\omega) \equiv 0 \pmod{p}$ nur p^{f-1} Wurzeln (mod. $\mathfrak{p}$); allgemein wird $P(\omega)$ je p^{f-1} mal jeder der Zahlen $0, 1, \cdots p-1$ kongruent, wenn ω ein volles Restsystem nach dem Modul $\mathfrak{p}$ durchläuft.

Sind wieder $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_f$ unabhängig nach dem Modul $\mathfrak{p}$, so ist die Determinante f^{ten} Grades

(5) $$\delta = \left|\alpha_r\,\alpha_r^p \cdots \alpha_r^{p^{f-1}}\right| \quad (r = 1, 2, \cdots f)$$

durch $\mathfrak{p}$ nicht teilbar (vgl. Math. Annalen 37, S. 325). Nach dem polynomischen Satze ist

$$\delta^p \equiv \left|\alpha_r^p\,\alpha_r^{p^2}\cdots\alpha_r^{p^f}\right| \pmod{p};$$

vermöge des Fermat'schen Satzes wird daher

$$\delta^p \equiv (-1)^{f-1}\delta \pmod{\mathfrak{p}}$$

oder

(6) $$\delta^{p-1} \equiv (-1)^{f-1} \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Ferner folgt aus (4) und (5):

(7) $$\delta^2 \equiv |P(\alpha_r\alpha_s)| \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Aus der Vergleichung der beiden letzten Kongruenzen ergiebt sich der Satz:

V. Bilden $\alpha_1, \cdots \alpha_f$ ein vollständiges System unabhängiger Zahlen nach dem Primideal $\mathfrak{p}$ des Körpers Ω, so ist die Determinante f^{ten} Grades aus den nach $\mathfrak{p}$ genommenen Spuren der Produkte $\alpha_r \alpha_s$ quadratischer Rest oder Nichtrest von p, je nachdem f ungerade oder gerade ist.

§ 2.

Der Zerlegung (2) entsprechend wähle man

$$n = e_1 f_1 + \cdots + e_m f_m$$

Zahlen $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$ in folgender Weise aus. Die ersten $e_1 f_1$ seien gewählt wie oben beim Beweise des Satzes II. und aufserdem sämtlich durch $\mathfrak{p}_2^{e_2} \mathfrak{p}_3^{e_3} \cdots$ teilbar, ähnlich die folgenden $e_2 f_2$ Zahlen unter Hervorhebung des Faktors $\mathfrak{p}_2^{e_2}$ u. s. w. Man erkennt leicht, dafs die n Zahlen nach dem Modul p (und um so mehr absolut) unabhängig sind; die Determinante aus den Spuren ihrer Produkte $\alpha_r \alpha_s$ hat also den Wert

$$|S(\alpha_r \alpha_s)| = D \cdot a^2, \tag{8}$$

wo a eine durch p nicht teilbare ganze rationale Zahl bedeutet.

Ist jetzt $e_1 > 1$ und r eine der Zahlen $f_1 + 1, \cdots e_1 f_1$, so sind alle Produkte $\alpha_r \alpha_s$ durch $\mathfrak{p}_1, \cdots \mathfrak{p}_m$, ihre Spuren also durch p teilbar. Ähnliches gilt für $e_2 > 1$ u. s. w. In der Determinante (8) sind also alle Elemente gewisser

$$(e_1 - 1) f_1 + (e_2 - 1) f_2 + \cdots + (e_m - 1) f_m = s \tag{9}$$

Zeilen durch p teilbar; aufserdem sind noch die Elemente z. B. der ersten f_1 Zeilen durch p teilbar, falls e_1 den Faktor p enthält.

VI. Bei der in III. angenommenen Faktorenzerlegung von $\mathfrak{o} p$ ist die Grundzahl D des Körpers jedenfalls durch p^s teilbar, wenn $f_1, f_2, \cdots$ die Grade der Primideale $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots$ bedeuten und s durch die Gleichung (9) gegeben ist; sind einige der Exponenten e durch p teilbar, so erhöht sich der Exponent der in D aufgehenden Potenz von p mindestens um die Summe der entsprechenden Grade f.

Soll $s = 1$ sein, so darf nur einer der Exponenten e gröfser als Eins und zwar gleich Zwei sein; zugleich mufs das entsprechende f den Wert Eins haben. Ist $p = 2$, so tritt dann aber notwendig der Ausnahmefall ein; daher ist immer D durch 4 teilbar, wenn 2 durch das Quadrat eines Ideals in Ω teilbar ist.

Jetzt seien die Exponenten $e_1, e_2, \cdots$ alle gleich Eins. Dann sind alle Produkte $\alpha_r \alpha_s$, für die $r \overline{\gtrless} f_1 < s$ ist, durch p teilbar, ebenso alle, für die $r \overline{\gtrless} f_1 + f_2 < s$ ist, u. s. w. Daher wird nach (8)

$$Da^2 \equiv D_1 D_2 \cdots D_m \pmod{p},$$

wo z. B.

$$D_1 \equiv |S(\alpha_r \alpha_s)| \quad (r,\ s = 1, 2, \cdots f_1)$$

ist. Zugleich ist nach III. für diese Werte von r, s $S(\alpha_r \alpha_s)$ kongruent der in bezug auf $\mathfrak{p}_1$ genommenen Spur $P_1(\alpha_r \alpha_s)$, mithin nach V.

$$\left(\frac{D_1}{p}\right) = (-1)^{f_1 - 1}.$$

Somit wird

$$(10) \qquad \left(\frac{D}{p}\right) = (-1)^{\Sigma(f-1)} = (-1)^{n-m}.$$

VII. Die Diskriminante des Körpers Ω ist durch die Primzahl p nicht teilbar, wenn p ein Produkt von lauter verschiedenen Primidealen in Ω ist; zugleich ist sie, wenn p ungerade, quadratischer Rest oder Nichtrest von p, je nachdem die Anzahl der in p aufgehenden Primideale von geradem Grade eine gerade oder ungerade ist, oder je nachdem die Anzahl aller Primfaktoren von p dem Grade des Körpers kongruent ist nach dem Modul Zwei oder nicht.

Ist z. B. $F(t)$ eine Primfunktion f^{ten} Grades nach dem Modul p, so ist die Diskriminante (das quadrierte Differenzenprodukt der Wurzeln) von $F(t)$ quadratischer Rest oder Nichtrest von p, je nachdem f ungerade oder gerade ist. Wenn man die bekannten singulären Primzahlen wegläſst, die zwar nicht in der Diskriminante des Körpers Ω, wohl aber in derjenigen jeder ganzen Zahl desselben aufgehen, kann man aus diesem speziellen Satze wieder den allgemeinen ableiten. Dieser selbst ist das genaue Analogon zu dem bekannten über das Vorzeichen der Diskriminante einer algebraischen Gleichung, die eine bekannte Anzahl reeller Wurzeln hat; in diesem Falle kommen nur die reellen und reell irreduktiblen Faktoren ersten und zweiten Grades in Betracht.

§ 3.

Um die zweite Hälfte des Satzes VII. durch nähere Angaben über das Verhalten der Grundzahl in bezug auf Potenzen der Zahl Zwei zu vervollständigen, wird man von vornherein Potenzen dieser Zahl und ihrer Primfaktoren als Moduln einführen müssen. Ich entwickle daher in diesem Paragraphen einige Sätze, die sich auf Potenzen eines beliebigen Primideals $\mathfrak{p}$ in Ω beziehen.

Ist p eine rationale Primzahl und $\varphi(u, v, \cdots)$ eine ganze rationale Funktion der Veränderlichen $u, v, \cdots$ mit ganzen rationalen Koeffizienten, so definiert bekanntlich die Gleichung

$$\varphi(u, v, \cdots)^p = \varphi(u^p, v^p, \cdots) + p\psi(u, v, \cdots) \tag{11}$$

eine zweite Funktion derselben Art. Aus dieser Gleichung ziehen wir eine Reihe von Folgerungen, die sich auf die Potenzen eines in p aufgehenden Primideals $\mathfrak{p}$ in Ω beziehen.

VIII. Sind $\alpha, \beta, \cdots$ ganze Zahlen des Körpers Ω, so bleibt jede Kongruenz der Form

$$\varphi(\alpha^{p^k}, \beta^{p^k}, \cdots) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{k+1}}$$

bestehen, wenn man $\alpha, \beta, \cdots$ durch ihre p^{ten} Potenzen ersetzt.

Seien für beliebiges k ϱ_k, σ_k die dem Wertsystem

$$u = \alpha^{p^k}, \quad v = \beta^{p^k}, \cdots$$

entsprechenden Werte der Funktionen φ, ψ, dann gelten nach (11) u. a. die Gleichungen

$$\varrho_{k-1}^p = \varrho_k \quad + p\sigma_{k-1} \quad (k > 0), \tag{12}$$

$$\varrho_k^p \quad = \varrho_{k+1} + p\sigma_k \quad (k \geqq 0). \tag{13}$$

Aus der zweiten von diesen folgt unser Satz unmittelbar, wenn p durch $\mathfrak{p}^{k+1}$ teilbar ist, namentlich also immer für $k = 0$. Ist aber p genau durch $\mathfrak{p}^e$ teilbar und $k \geqq e$, so nehme man den Satz für $k' < k$ als bewiesen an und schliefse wie folgt. Da

$$\alpha^{p^k} = (\alpha^{p^{k-1}})^p$$

ist, kann man die Kongruenz $\varrho_k \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^k}$, die in der angenommenen enthalten ist, als eine solche zwischen den $p^{k-1\,\text{ten}}$ Potenzen von $\alpha, \beta, \cdots$ ansehen und auf diese den Satz anwenden; man erkennt, dafs ϱ_{k+1}, $\varrho_{k+2}, \cdots \varrho_{k+f-1}$ durch $\mathfrak{p}^k$ teilbar sind. Da aber aus bekannten Gründen

$$\alpha^{p^{k+f-1}} \equiv \alpha^{p^{k-1}} \pmod{\mathfrak{p}^k}$$

und folglich

$$\varrho_{k+f-1} \equiv \varrho_{k-1} \pmod{\mathfrak{p}^k}$$

ist, ist auch ϱ_{k-1} durch $\mathfrak{p}^k$ und ϱ_{k-1}^p durch $\mathfrak{p}^{k+1}$ teilbar, σ_{k-1} aber zufolge Gleichung (12) durch $\mathfrak{p}^{k+1-e}$. Nach Annahme ist also auch σ_k durch dieselbe Potenz teilbar und dann zufolge (13) ϱ_{k+1} durch $\mathfrak{p}^{k+1}$, w. z. b. w.

Nun sei f der Grad des Ideals $\mathfrak{p}$ und werde zur Abkürzung

$$(14) \qquad u^{p^f} - u = U, \quad v^{p^f} - v = V, \cdots$$

gesetzt. Nach dem Modulsystem $(U, V, \cdots)$ ist jede ganze rationale Funktion $\varphi(u, v \cdots)$ kongruent einer und nur einer solchen (dem Rest), die in bezug auf jede der Veränderlichen von niedrigerem als dem $p^{f\text{ten}}$ Grade ist. Hat φ ganze rationale Koeffizienten, so hat der Rest ebensolche und man kann auch die Multiplikatoren von $U, V, \cdots$ ebenso wählen. Ist insbesondere

$$\varphi(u^p, v^p, \cdots) - \varphi(u, v, \cdots) \equiv 0 \pmod{U, V, \cdots},$$

so befriedigt, wie man leicht erkennt, zunächst die durch (11) definierte Funktion $p\psi$ und daher auch ψ selbst die nämlichen Bedingungen wie φ.

Sind jetzt $\alpha, \beta, \cdots$ beliebige ganze Zahlen in Ω und giebt man den Zeichen ϱ_k, σ_k dieselbe Bedeutung wie in dem vorigen Beweise, so hat man auf der einen Seite

$$(15) \qquad \begin{cases} \varrho_0^p = \varrho_1 + p\sigma_0 \;, \\ \varrho_1^p = \varrho_2 + p\sigma_1 \;, \\ \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \\ \varrho_{k-1}^p = \varrho_k + p\sigma_{k-1}, \end{cases}$$

auf der andern

$$\varrho_1 \equiv \varrho_0 \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Daher ist ϱ_0 (und aus gleichen Gründen auch σ_0) einer rationalen Zahl kongruent nach $\mathfrak{p}$. Dann sind aber $\varrho_0^p, p\sigma_0$ und somit auch ϱ_1 rationalen Zahlen kongruent nach $\mathfrak{p}^2$, und Gleiches gilt wiederum von σ_1. Indem man so weiter schliefst, erhält man den Satz:

IX. Wenn die ganze rationale Funktion φ mit ganzen rationalen Koeffizienten die Eigenschaft hat, dafs die Differenz

$$\varphi(u^p, v^p, \cdots) - \varphi(u, v, \cdots)$$

in die Form

$$(u^{p^f} - u)\,\varphi_1(u, v, \cdots) + (v^{p^f} - v)\,\varphi_2(u, v, \cdots) + \cdots$$

gesetzt werden kann, wenn ferner $\mathfrak{p}$ ein in der Primzahl p aufgehendes Primideal f^{ten} Grades im Zahlkörper Ω und $\alpha, \beta, \cdots$ ganze Zahlen dieses Körpers bedeuten, so ist stets

$$\varphi(\alpha^{p^k}, \beta^{p^k}, \cdots)$$

einer rationalen Zahl kongruent nach dem Modul $\mathfrak{p}^{k+1}$.

Zur Erläuterung sei daran erinnert, dafs α^{p^k} nach dem Modul $\mathfrak{p}^{k+1}$ bestimmt ist, wenn α selbst nur nach $\mathfrak{p}$ bestimmt ist. Für

Funktionen einer Veränderlichen ist der Satz wesentlich gleichwertig dem Satze II. § 6 meiner Abhandlung „Über eine Verallgemeinerung der Kreisteilung“ (Math. Annalen 37, S. 351).

Für die Determinante f^{ten} Grades

$$\delta(u_1, \cdots u_f) = |u_r u_r^p \cdots u_r^{p^{f-1}}| \quad (r = 1, 2, \cdots f)$$

besteht die Kongruenz

$$\delta(u_1^p, \cdots u_f^p) \equiv (-1)^{f-1} \delta(u_1, \cdots u_f) \quad (\text{modd. } U, V, \cdots),$$

aus der, wenn

$$\text{(16)} \qquad \delta_k = |\alpha_r^{p^k}, \alpha_r^{p^{k+1}} \cdots \alpha_r^{p^{k+f-1}}| \quad (r = 1, \cdots f)$$

gesetzt wird,

$$\text{(17)} \qquad \delta_{k+1} \equiv (-1)^{f-1} \delta_k \quad (\text{mod. } \mathfrak{p}^{k+1})$$

folgt. Ist f ungerade, so folgt aus IX. unmittelbar, dafs δ_k einer rationalen Zahl kongruent ist nach dem Modul $\mathfrak{p}^{k+1}$; derselben Zahl sind dann auch $\delta_{k+1}, \delta_{k+2}, \cdots$ kongruent nach dem nämlichen Modul. Sind $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_f$ unabhängig nach dem Modul $\mathfrak{p}$, so ist keine der Zahlen δ_k durch $\mathfrak{p}$ teilbar.

Wir untersuchen, indem wir die letzte Annahme über die Zahlen α beibehalten, ob auch bei geradem f δ_k einer rationalen Zahl d kongruent sein kann nach $\mathfrak{p}^{k+1}$. Soll dies der Fall sein, so mufs nach VIII. auch $\delta_{k+1} \equiv d$ (mod. $\mathfrak{p}^{k+1}$), somit nach (17)

$$(1 + (-1)^f) \delta_k \equiv 0 \quad (\text{mod. } \mathfrak{p}^{k+1}).$$

Bei geradem f ist dies nur dann möglich, wenn 2 durch $\mathfrak{p}^{k+1}$ teilbar ist, also nur für $p = 2$ und nur so lange k eine bestimmte Grenze nicht übersteigt. Ist diese Bedingung erfüllt, so ist nach (13), (17)

$$\delta_k(\delta_k + 1) \equiv 0 \quad (\text{mod. } \mathfrak{p}^{k+1}),$$

also $\delta_k \equiv 1$ (mod. $\mathfrak{p}^{k+1}$). Ist 2 genau durch $\mathfrak{p}^e$ teilbar, so sind hiernach $\delta_{e-1}, \delta_e, \cdots$ sämtlich $\equiv 1$ (mod. $\mathfrak{p}^e$), dagegen ist keine der Zahlen $\delta_e, \delta_{e+1}, \cdots$ einer rationalen Zahl kongruent nach $\mathfrak{p}^{e+1}$; der Quotient $\frac{1}{2}(\delta_e - 1)$ ist keiner rationalen Zahl kongruent (mod. $\mathfrak{p}$).

X. Bilden $\alpha_1, \cdots \alpha_f$ ein vollständiges System unabhängiger Zahlen in bezug auf den Modul $\mathfrak{p}$ und ist k irgend eine natürliche Zahl, so ist bei ungeradem f die Determinante f^{ten} Grades

$$\delta_k = |\alpha_r^{p^k} \alpha_r^{p^{k+1}} \cdots \alpha_r^{p^{k+f-1}}|$$

immer einer rationalen Zahl kongruent nach dem Modul $\mathfrak{p}^{k+1}$, bei geradem f nur dann, wenn $p = 2$ und durch $\mathfrak{p}^{k+1}$ teilbar ist. Ist $p = 2$ und f gerade und $\mathfrak{p}^e$ die höchste in p aufgehende

Potenz von $\mathfrak{p}$, so sind $\delta_e, \delta_{e+1}, \cdots$ wohl $\equiv 1 \pmod{2}$, dagegen keiner rationalen Zahl kongruent nach $\mathfrak{p}^{e+1}$.

Das Quadrat der Determinante δ_k ist gleich der Determinante aus den f^2 Summen

$$(18) \qquad (\alpha_r \alpha_s)^{p^k} + \cdots + (\alpha_r \alpha_s)^{p^{k+f-1}};$$

auf jede von diesen findet der Satz IX. Anwendung, sodafs in jedem Falle δ_k^2 einer rationalen Zahl $D^{(k)}$ kongruent ist nach dem Modul $\mathfrak{p}^{k+1}$. Bei ungeradem f ist aber nach X. δ_k selbst einer rationalen Zahl kongruent, folglich $D^{(k)}$ quadratischer Rest von p und für hinreichend grofses k von einer beliebig hohen Potenz von p. Für ungerade Primzahlen ist letzteres selbstverständlich, für $p = 2$, $k \geqq 2e$ dagegen erhält man (wenn e dieselbe Bedeutung hat wie vorhin) $D^{(k)} \equiv 1 \pmod{8}$. Soll bei geradem f $D^{(k)} \equiv d^2 \pmod{\mathfrak{p}^{k+1}}$ sein, so mufs

$$(\delta_k - d)(\delta_k + d) = 0 \pmod{\mathfrak{p}^{k+1}}$$

sein. Für ungerades p müfste also der eine oder andere Faktor durch $\mathfrak{p}^{k+1}$ teilbar sein, was nicht angeht. Für $p = 2$, $k \geqq 2e$ müfste zunächst d ungerade sein; dann sind aber beide Faktoren genau durch $\mathfrak{p}^e$ teilbar, ihr Produkt durch $\mathfrak{p}^{2e}$. Also ist $D^{(k)} - 1$ wohl durch 4, aber nicht durch 8 teilbar. Wir haben also den Satz:

XI. Ist $\mathfrak{p}^e$ die höchste Potenz des Primideals $\mathfrak{p}$ vom Grade f, die in der Zahl Zwei aufgeht, und $k \geqq 2e$, so ist die Determinante aus den f^2 rationalen Zahlen, die den Aggregaten (18) kongruent sind nach dem Modul $\mathfrak{p}^{k+1}$, von der Form $8q + 1$ oder $8q + 5$, je nachdem der Grad f ungerade oder gerade ist.

Wenn p durch $\mathfrak{p}^2$ nicht teilbar ist, so kann die der Summe

$$\omega^{p^k} + \omega^{p^{k+1}} + \cdots + \omega^{p^{k+f-1}}$$

nach $\mathfrak{p}^{k+1}$ kongruente rationale Zahl nebst anderen verwandten durch das folgende Verfahren gefunden werden. Der Ausdruck

$$x_1 \alpha_1^{p^k} + \cdots + x_f \alpha_f^{p^k}$$

stellt in diesem Falle ein volles Restsystem nach jenem Modul dar, wenn die Koordinaten $x_1, \cdots x_f$ volle Restsysteme nach p^{k+1} durchlaufen. Setzt man demgemäfs

$$(19) \qquad (\omega \alpha_r)^{p^k} \equiv x_{r1} \alpha_1^{p^k} + \cdots + x_{rf} \alpha_f^{p^k} \pmod{\mathfrak{p}^{k+1}},$$

so ist nach Satz VIII. auch

$$(\omega \alpha_r)^{p^{k+s-1}} \equiv x_{r1} \alpha_1^{p^{k+s-1}} + \cdots + x_{rf} \alpha_f^{p^{k+s-1}} \pmod{\mathfrak{p}^{k+1}}.$$

Subtrahiert man hier, unter u eine Unbestimmte verstehend, beiderseits $u\alpha_r^{p^{k+s-1}}$, und läfst r, s die Werte $1, 2, \cdots f$ annehmen, so erhält man nach bekannten Determinantensätzen, weil δ_k durch $\mathfrak{p}$ nicht teilbar ist, die identische Kongruenz:

$$(20) \qquad (\omega^{p^k} - u)(\omega^{p^{k+1}} - u) \cdots (\omega^{p^{k+f-1}} - u)$$

$$\equiv \begin{vmatrix} x_{11} - u, & x_{12} & \cdots & x_{1f} \\ x_{21}, & x_{22} - u & \cdots & x_{2f} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{f1}, & x_{f2} & \cdots & x_{ff} - u \end{vmatrix} \quad (\text{mod. } \mathfrak{p}^{k+1}).$$

Demnach ist, analog wie in § 1,

$$(21) \; \omega^{p^k} + \omega^{p^{k+1}} + \cdots + \omega^{p^{k+f-1}} \equiv x_{11} + x_{22} + \cdots + x_{ff} \; (\text{mod. } \mathfrak{p}^{k+1}),$$

wenn die Zahlen x_{rs} durch die Kongruenzen (19) bestimmt werden.

Um diese Regel in Worte zu fassen, verfahre man wie in § 1. Man nehme f nach dem Modul $\mathfrak{p}$ unabhängige Zahlen $\beta_1, \cdots \beta_f$ und definiere f^2 rationale Zahlen y_{rs} durch die Kongruenzen

$$\omega\beta_r \equiv y_{rs}\beta_1 + \cdots + y_{rf}\beta_f \quad (\text{mod. } \mathfrak{p}^{k+1}).$$

Die Summe $y_{11} + \cdots + y_{ff}$ ist nach dem Modul p^{k+1} bestimmt und unabhängig von der Wahl der Zahlen β; sie heifse die Spur von ω in bezug auf den Modul $\mathfrak{p}^{k+1}$. Die vorige Regel kann dann so ausgesprochen werden:

XII. Die Summe

$$\omega^{p^k} + \omega^{p^{k+1}} + \cdots + \omega^{p^{k+f-1}}$$

ist nach dem Modul $\mathfrak{p}^{k+1}$ kongruent der Spur von ω^{p^k} in bezug auf denselben Modul, vorausgesetzt, dafs p nicht durch $\mathfrak{p}^2$ teilbar ist.

Hiernach läfst sich Satz XI auch so formulieren:

XI^a^. Wenn 2 nicht durch das Quadrat des Primideals $\mathfrak{p}$ teilbar ist, und $\alpha_1 \cdots \alpha_f$ die oft erwähnte Bedeutung haben, so ist die Determinante aus den in bezug auf $\mathfrak{p}^3$ genommenen Spuren der Produkte $(\alpha_r\alpha_s)^4$ kongruent 1 oder 5 (mod. 8), je nachdem der Grad von $\mathfrak{p}$ ungerade oder gerade ist.

§ 4.

Jetzt sei die Zahl 2 im Körper Ω das Produkt von m verschiedenen Primidealen $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots \mathfrak{p}_m$ der Grade $f_1, f_2, \cdots f_m$. Wählt man dann die Basiszahlen $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ ebenso wie in § 2, so sind zunächst deren $2^{k\text{te}}$ Potenzen unabhängig nach 2; daher ist

$$\Delta(\alpha_1^{2^k}, \cdots \alpha_n^{2^k}) = Da^2, \tag{22}$$

wo D die Grundzahl des Körpers und a eine ungerade Zahl bedeutet. Ferner durchläuft der Ausdruck

$$\omega = x_1 \alpha_1^{2^k} + \cdots + x_n \alpha_n^{2^k}$$

ein volles Restsystem nach 2^{k+1} im Körper Ω, wenn die Koordinaten x solche im gewöhnlichen Sinne durchlaufen. Dabei sind, da

$$2^k \geqq k + 1$$

ist, die ersten f_1 Koordinaten bestimmt, sobald ω nach $\mathfrak{p}_1^{k+1}$ bestimmt ist, die nächstfolgenden f_2, wenn ω nach $\mathfrak{p}_2^{k+1}$ bestimmt ist, u. s. w.

Setzt man nun für $r = 1, 2, \cdots n$

$$\omega \alpha_r^{2^k} \equiv x_{r1} \alpha_1^{2^k} + \cdots x_{rn} \alpha_n^{2^k} \pmod{2^{k+1}},$$

so ist, wie in § 1, die Summe der Zahlen x_{rr} kongruent der absoluten Spur $S(\omega)$. Sie zerfällt aber, den Primfaktoren $\mathfrak{p}_1, \cdots$ entsprechend, in Teilsummen der am Ende des § 3 betrachteten Art; also ist $S(\omega)$ kongruent der Summe der in bezug auf $\mathfrak{p}_1^{k+1}, \mathfrak{p}_2^{k+1} \cdots$ genommenen Spuren von ω. Ist ω durch $(\mathfrak{p}_2, \cdots \mathfrak{p}_m)^{k+1}$ teilbar, so ist $S(\omega)$ kongruent der in bezug auf $\mathfrak{p}_1^{k+1}$ genommenen Spur.

Jetzt sei

$$\omega = (\alpha_r \alpha_s)^{2^k}.$$

Diese Zahl und folglich auch ihre absolute Spur ist durch 2^{k+1} teilbar, wenn von den Zeigern r, s einer $\overline{\overline{<}} f_1$, der andere $> f_1$ ist, u. s. w. Mithin zerfällt die Determinante der absoluten Spuren, nach dem Modul 2^{k+1} genommen, in m den Primfaktoren entsprechende Determinanten:

$$D \equiv D_1 D_2 \cdots D_m \pmod{2^{k+1}}. \tag{23}$$

Nehmen wir nun $k \geqq 2$, so wissen wir von diesen Faktoren, ob sie kongruent 1 oder 5 (mod. 8) sind; da auch $a^2 \equiv 1$ (mod. 8) ist, gewinnen wir den Satz:

XIII. Die Diskriminante des Zahlkörpers Ω, in dem 2 ein Produkt von m verschiedenen Primidealen $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots \mathfrak{p}_m$ der

Grade $f_1, f_2, \cdots f_m$ ist, ist von der Form $8q + 1$ oder $8q + 5$, je nachdem unter jenen Primfaktoren solche geraden Grades in gerader oder ungerader Zahl vorkommen; in Zeichen ist

$$\frac{D-1}{4} \equiv \sum (f-1) = n - m \quad (\text{mod. } 2)$$

oder

$$(-1)^{\frac{D-1}{4}} = (-1)^{n-m}. \tag{24}$$

Z. B. ist die Diskriminante (das Produkt der quadrierten Wurzeldifferenzen) einer Primfunktion nach dem Modul 2, wenn sie ungerade ist, von der Form $8q + 1$ oder $8q + 5$, je nachdem der Grad der Funktion ungerade oder gerade ist.

Sur la théorie des nombres premiers.

Par

Ch. de la Vallée Poussin à Louvain.

M. de la Vallée Poussin s'est occupé de la fréquence des nombres premiers de différentes formes dans un Mémoire étendu, publié dans les Annales de la Société scientifique de Bruxelles (1896) sous le titre: Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers.

Voici quelques conclusions de ce travail, concernant les nombres premiers d'une forme linéaire primitive $Mx + N$:

1° L'expression

$$\frac{\varphi(M)}{y} \sum_{q_N < y} l q_N,$$

dans laquelle la somme est étendue aux nombres premiers $< y$ et de la forme $Mx + N$, a pour limite l'unité quand y tend vers l'infini.

2° La différence

$$\varphi(M) \sum_{q_N < y} \frac{l q_N}{q_N} - l y$$

tend vers une limite finie et déterminée quand y tend vers l'infini.

3° Le nombre des nombres premiers de la forme $Mx + N$ et $< y$ peut se représenter par l'expression

$$\frac{1+\varepsilon}{\varphi(M)} \; \frac{y}{l y}$$

où ε tend vers zéro quand y tend vers l'infini.

On a des conclusions analogues concernant les nombres premiers représentables par une forme quadratique de déterminant négatif $(-\Delta)$.

Soit h le nombre des classes de formes (positives) proprement primitives de ce déterminant:

1° Les expressions

$$\frac{2h}{y} \sum_{q_c < y} l q_c, \quad \text{si } c \text{ est une classe ambiguë;}$$

$$\frac{h}{y} \sum_{q_c < y} l q_c, \quad \text{si } c \text{ n'est pas ambiguë,}$$

expressions où les sommes s'étendent aux nombres premiers $< y$ et représentables par la classe c, ont pour limite l'unité quand y tend vers l'infini.

2° Le nombre des nombres premiers $< y$ et représentables par une classe c proprement primitive a pour expression asymptotique

$$\frac{1+\varepsilon}{2h}\,\frac{y}{ly} \quad \text{ou} \quad \frac{1+\varepsilon}{h}\,\frac{y}{ly}$$

suivant que c est une classe ambiguë ou non, ε ayant pour limite zéro quand y augmente indéfiniment.

Ces conclusions s'étendent aux formes de déterminant positif, mais la démonstration est plus difficile. Cette nouvelle démonstration, dont un résumé seulement a paru dans le Bulletin de la Société scientifique de Bruxelles (1897), sera publiée prochainement dans les Annales de cette même société.

2. Sektion: Analysis und Funktionentheorie.

Sur une classe d'équations du cinquième degré résolubles algébriquement et la transformation du onzième ordre des fonctions elliptiques.

Par

F. Brioschi à Milan. †

1⁰ Dans un mémoire publié dans les Annales de l'École Normale*) j'ai démontré l'existence d'une classe d'équations du cinquième degré résolubles algébriquement. La condition nécessaire et suffisante est déterminée par une relation entre les invariants de l'équation du cinquième degré.

Soient x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 les racines d'une équation du cinquième degré, et:

$$u_\infty = a_0^2 (01)\,(12)\,(23)\,(34)\,(40),\ x_r - x_s = (rs).$$

La substitution $\binom{r}{3r^3 + s}$ donne, comme il est connu, les autres fonctions u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 et l'équation dont les racines sont $u_\infty{}^2, u_0{}^2, \cdots u_4{}^2$ est la suivante:

$$(1)\qquad \varrho^{12} - (l - 3\delta)\varrho^{10} + \frac{1}{4}(l^2 - 2l\delta + 5\delta^2)\varrho^8 - k\varrho^6 + \frac{1}{4}(l^2 + 2l\delta + 5\delta^2)\delta^2\varrho^4 - (l + 3\delta)\delta^4\varrho^2 + \delta^6 = 0,$$

dans laquelle l est l'invariant du quatrième degré, k du douzième degré et δ la racine carrée du discriminant.

La condition est:

$$k = \frac{1}{2}\delta\,[l^2 - 4l\delta + 9\delta^2],$$

*) 3me Série — Tome XII. Novembre 1895.

et l'on voit tout de suite que dans ce cas le premier membre de l'équation (1) a pour facteur $\varrho^2 - \delta$. En posant:

$$l = \delta(2\lambda + 13), \quad \varrho = \delta^{\frac{1}{2}} \xi$$

l'équation (1) divisée par $\xi^2 - 1$ devient:

$$\xi^{10} - (2\lambda + 9)\xi^8 + (\lambda^2 + 10\lambda + 28)\xi^6 - (\lambda^2 + 12\lambda + 35)\xi^4 + \\ + (2\lambda + 15)\xi^2 - 1 = 0,$$

qui résulte du produit des deux suivantes:

(2) $$\xi^5 + \xi^4 - (\lambda + 4)\xi^3 - (\lambda + 3)\xi^2 + 3\xi + 1 = 0,$$
$$\xi^5 - \xi^4 - (\lambda + 4)\xi^3 + (\lambda + 3)\xi^2 + 3\xi - 1 = 0,$$

lesquelles se déduisent l'une de l'autre par le changement de ξ en $-\xi$.

Or ces équations sont résolubles algébriquement.

2⁰ Soient P, Q; L, M les fonctions suivantes de ξ, λ:

$$P = 7\xi^4 + 2\xi^3 - (7\lambda + 3 \cdot 11)\xi^2 - (2\lambda - 5)\xi + 3(\lambda + 9)$$
$$Q = 9\xi^4 + 4\xi^3 - 9(\lambda + 4)\xi^2 - (4\lambda + 5)\xi + (\lambda + 22)$$
$$L = 2\xi^4 + 2\xi^3 - 2(\lambda + 4)\xi^2 - (2\lambda + 5)\xi + 5$$
$$M = -\xi^4 - \xi^3 + (\lambda + 4)\xi^2 + (\lambda + 5)\xi - 2$$

et en conséquence*):

(3) $$5\xi = L + 2M - 1.$$

Ces expressions P, Q; L, M ont des propriétés remarquables. Avant tout on a pour les racines de la première des équations (2):

$$\Sigma P = 0, \ \Sigma Q = 0; \ \Sigma L = 0, \ \Sigma M = 0.$$

En second lieu en posant:

$$P + \omega Q = U, \ Q - \omega P = V; \ L + \omega M = R, \ M - \omega L = S,$$

$$\omega = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

on a:

$$U^2 = t_0 V - \tau_0 S + 2f^2, \quad V^2 = t_1 U + \tau_1 R + 2h^2,$$
$$UV = -hU - fV + gR + (\omega + 1)\tau_1 S,$$
$$R^2 = V + 2h, \quad S^2 = \omega[U + 2f],$$
$$RS = -\omega U + V - (\omega - 3)R + (3\omega + 1)S,$$
$$UR = (3\omega + 2)V - (\omega + 1)hS + g, \ VS = (2\omega - 3)U + \omega f R + \tau_1,$$
$$US = (\omega - 3)U + \omega t_0 R + fS,$$
$$VR = -(3\omega + 1)V + hR - (\omega + 1)t_1 S,$$

*) Ces expressions de P, Q; L, M se déduisent de celles données dans le mémoire cité pag. 340.

ayant posé:

$$f = \lambda\sqrt{5} + 11(\omega + 1), \quad h = \omega\lambda\sqrt{5} + 11(1 - \omega),$$
$$g = (3\omega + 1)f + (3\omega + 2)h,$$
$$t_0 = 3\omega + 2 - \omega f - (\omega + 1)h; \quad t_1 = 2\omega + 3 + \omega f - (\omega + 1)h,$$
$$\tau_0 = (\omega + 1)g; \quad \tau_1 = \omega g + 2(2\omega - 3)f.$$

3⁰ Soit:

$$y = U\alpha + R\beta \tag{4}$$

la formule de transformation; α, β des indéterminées.

En supposant:

$$f^2\alpha^2 + g\alpha\beta + h\beta^2 = 0 \tag{5}$$

on obtient:

$$y^2 = V\alpha_1 + S\beta_1 \tag{6}$$

étant:

$$\alpha_1 = t_0\alpha^2 + 2(3\omega + 2)\alpha\beta + \beta^2; \ \beta_1 = -[\tau_0\alpha + 2(\omega + 1)h\beta]\alpha.$$

Par la multiplication des équations (4) (6) on déduit que:

$$y^3 = V\alpha_2 + S\beta_2 \tag{7}$$

et:

$$\alpha_2 = -f\alpha\alpha_1 - (3\omega + 1)\beta\alpha_1 + \beta\beta_1;$$
$$\beta_2 = (\omega + 1)[\tau_1\alpha - t_1\beta]\alpha_1 + [f\alpha + (3\omega + 1)\beta]\beta_1.$$

Enfin le carré de (6) donne:

$$y^4 = U\alpha_3 + R\beta_3 \tag{8}$$

et:

$$\alpha_3 = -h\alpha\alpha_2 + (\omega - 3)\alpha\beta_2 - \omega\beta\beta_2;$$
$$\beta_3 = (g\alpha + h\beta)\alpha_2 + [\omega t_0\alpha - (\omega - 3)\beta]\beta_2.$$

Pour la transformée seront donc:

$$\Sigma y = 0, \ \Sigma y^2 = 0, \ \Sigma y^3 = 0, \ \Sigma y^4 = 0,$$

pourvu que l'équation (5) soit satisfaite. La transformée se réduit donc à une équation binome. En effet en multipliant les équations (4) (8), vu que:

$$t_0\alpha\alpha_3 + (3\omega + 2)(\alpha\beta_3 + \alpha_3\beta) + \beta\beta_3 = 0,$$
$$\tau_0\alpha\alpha_3 + (\omega + 1)h(\alpha\beta_3 + \alpha_3\beta) = 0,$$

on a:

$$y^5 = 2f^2\alpha\alpha_3 + g(\alpha\beta_3 + \alpha_3\beta) + 2h\beta\beta_3.$$

Si dans l'équation (5) on pose $\beta = -2f^2$ l'on déduit:

$$\alpha = g + \sigma, \quad \sigma^2 = g^2 - 4f^2h$$

ou:

$$\sigma^2 = 5(\omega - 2)[4\lambda^3 + 56\lambda^2 + 20 \cdot 11 \cdot \lambda + 11^2].$$

En conséquence:

$$\alpha\beta_3 - \alpha_3\beta = 2\beta_3\sigma; \quad \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 2(\omega + 1)\beta_3\sigma;$$

$$y^5 = 2\beta_3\sigma^2$$

et:

$$\alpha y^4 - \alpha_3 y = 2\beta_3\sigma \cdot R; \quad \alpha_1 y^3 - \alpha_2 y^2 = 2(\omega + 1)\beta_3\sigma \cdot S.$$

De ces dernières en déduisant les valeurs de L, M, et en se rappellant la relation (3) on aura:

$$2\beta_3\sigma(5\xi + 1) = (\omega + 1)(\alpha y^4 - \alpha_3 y) + \omega(\alpha_1 y^3 - \alpha_2 y^2),$$

équation d'où résultent les valeurs de $\xi_0, \xi_1, \cdots$ exprimées algébriquement en fonction de λ.

4⁰ Dans la transformation du onzième ordre des fonctions elliptiques on a qu'en posant:

$$x_0 = p(m),\ x_1 = p(2m),\ x_2 = p(3m),\ x_3 = p(4m),\ x_4 = p(5m),$$

$$m = \frac{2\omega}{11} \ (2\omega \text{ période})$$

la condition entre invariants est satisfaite.

De plus en posant:

$$\xi = -\frac{p}{p-1}, \quad p = \frac{\xi}{\xi + 1}$$

la première des équations devient:

$$\frac{p^5 - 7p^4 + 13p^3 - 5p^2 - 2p + 1}{p^2(p-1)^2} = \lambda. \tag{9}$$

Or Mr. Greenhill dans son mémoire — Pseudo-Elliptic Integrals etc.*) — a démontré que, dans ce cas:

$$\lambda = \frac{1}{2}[v^4 - 10v^2 + v\sqrt{Q(v)}], \quad \sqrt{Q(v)} = v^6 - 20v^4 + 56v^2 - 44$$

v étant le paramètre de l'équation modulaire.**) On aura en conséquence:

$$\sigma = \sqrt{5(\omega - 2)}\,[v^6 - 15v^4 + 28v^2 - 11 + v(v^2 - 5)\sqrt{Q(v)}]$$

et l'équation (9) sera résoluble algébriquement.

*) Proceedings of the London Mathematical Society. Vol. XXV. pag. 245.

**) Sulla trasformazione dell' undecimo ordine delle funzioni ellittiche. — Annali di Matematica. — Serie II. Vol. 21. pag. 211.

Sur les fonctions de plusieurs variables et en particulier les fonctions algébriques.

Par

É. Picard à Paris.

M. Émile Picard retrace à grands traits l'histoire de la théorie des surfaces algébriques dans ces derniers temps. Il montre les divers points de vue auxquels on peut se placer dans cette étude; la théorie peut se développer d'une part dans le sens de l'algèbre et de la géométrie analytique, de l'autre dans le sens de la géométrie de situation et de la théorie des fonctions. Dans l'une et l'autre direction, les différences sont profondes entre le cas des courbes et celui des surfaces. M. Nœther a été un initiateur dans la première voie, et tous les mathématiciens qui s'occupent aujourd'hui de la théorie des surfaces algébriques sont des disciples de l'illustre géomètre. Au point de vue transcendant, les intégrales de différentielles totales et les intégrales doubles jouent un rôle capital. C'est la considération des intégrales doubles de seconde espèce qui conduit à des rapprochements importants entre la théorie des intégrales simples et celle des intégrales doubles, mais, quoique les liens ainsi établis ne soient pas douteux, c'est un sujet qui demande encore de longues recherches.

Sur certaines applications possibles de la théorie des ensembles.

Par

J. Hadamard à Paris.

Quoique la théorie des ensembles fasse abstraction de la nature des éléments, on a surtout considéré, jusqu'à présent, les ensembles composés de nombres, ou, tout au plus, de points dans l'espace à n dimensions.

Il ne me semble pas inutile de signaler l'intérêt qu'il y aurait à étudier des ensembles composés de fonctions. De tels ensembles peuvent d'ailleurs présenter des propriétés tout autres que les précédents.

C'est ainsi que la question de la convergence des séries conduirait à rechercher un ensemble de fonctions d'une puissance supérieure à la première et bien ordonné, c'est-à-dire tel que l'on puisse non seulement indiquer l'ordre de deux éléments quelconques, mais assigner l'élément qui précède et celui qui suit immédiatement un élément donné.

Mais c'est principalement dans la théorie des équations aux dérivées partielles de la physique mathématique que des études de cette espèce joueraient, sans nul doute, un rôle fondamental. Pour n'en citer qu'un exemple c'est grâce à ces recherches qu'on arriverait à donner un fondement solide aux raisonnements bien connus qui ramènent la définition des intégrales de ces équations à des questions de minimum.

Il est clair, en effet, que de telles questions sont intimement liées à la nature du domaine dans lequel le minimum est recherché. Par exemple, le minimum d'une quantité $f(x, y, z)$ qui dépend continuement des coordonnées d'un point existe toujours sur une surface fermée (ou dont les bords sont considérés comme faisant partie de la surface); il n'existe pas nécessairement si une ligne ou un point donnés sont exclus.

Il faut toutefois remarquer que le problème présente des difficultés spéciales dans le cas du calcul des variations, la solution dépendant à la fois de la nature du domaine et de celle de l'expression dont on étudie la variation. C'est ainsi qu'une intégrale étendue à un arc de courbe assujetti à avoir ses extrémités en deux point donnés, avec des tangentes données en ces points, admet en général un minimum si la fonction sous le signe $\int$ contient des dérivées secondes et n'en admet pas si cette fonction ne contient que des dérivées premières.

Il n'en est pas moins évident qu'il y aurait lieu d'étudier l'ensemble E formé par les fonctions continues d'une variable comprise dans l'intervalle (0, 1) et prenant aux extrémités des valeurs données, ainsi que les ensembles analogues.

Un des premiers problèmes qui se poseraient dans cette étude me paraît être le suivant:

Divisons l'ensemble considéré en ensembles partiels E' tels que deux fonctions intérieures à l'un quelconque d'entre eux aient une distance (au sens de Weierstrass) moindre qu'un nombre déterminé δ. Considérant tous ces E' comme autant d'individus, on peut dire que l'ensemble qui a ces E' pour éléments numère l'ensemble E. C'est cet ensemble numérant dont il conviendrait d'étudier les propriétés et, en premier lieu, la puissance.

Remarque relative à la communication de M. Hadamard.

Par

S. Pincherle à Bologne.

M. Pincherle, à propos de l'intéressante communication de M. Hadamard, fait remarquer que plusieurs géomètres italiens ont, sous divers points de vue, regardé les fonctions comme les points d'un ensemble et même d'un continuum. Il cite à ce sujet un mémoire déjà ancien de feu M. Ascoli, inséré aux Annali di Matematica, intitulé Sulle curve limiti di una varietà di curve, des notes de M. Volterra (R. C. della R. Accad. dei Lincei, 1887), d'autres de M. Arzelà (R. C. et Mem. dell' Accad. di Bologna, 1894—96) et ses propres travaux (p. ex. Annali di Matematica, 1884 etc.).

Remarque relative à la communication de M. Hadamard.

Par

É. Borel à Paris.

M. Borel demande la parole pour présenter de courtes remarques sur quelques questions dans lesquelles interviennent des ensembles de fonctions, mais envisagés à un point de vue qui semble différent de celui de M. Hadamard.

Il rappelle d'abord ce fait bien connu, qu'une fonction arbitraire de nature déterminée (par exemple, une fonction analytique de deux variables), dépendant d'une infinité dénombrable de coefficients, on peut, dans bien des cas, faire correspondre d'une manière univoque une fonction arbitraire à une ou plusieurs fonctions arbitraires. A ce point de vue, il a pu indiquer, en 1895, dans le Bulletin des Sciences Mathématiques, un curieux résultat relatif aux équations linéaires aux dérivées partielles. D'autre part, il est clair que si, pour une équation aux dérivées partielles, on se pose le problème de Cauchy sous une forme précise, l'intégrale générale dépend d'un nombre parfaitement déterminé de fonctions arbitraires de nature déterminée. Comment concilier ces résultats contradictoires? Si nous nous plaçons au point de vue de Cauchy, c'est-à-dire si nous recherchons les intégrales analytiques, l'intégrale générale est donnée par un développement en série dont les coefficients sont des fonctions des coefficients des séries (arbitraires) qui definissent les conditions initiales. Ces derniers coefficients pourraient être rangés en une série simple; mais, si on les regarde comme arbitraires, la série intégrale n'est pas nécessairement convergente. On sait au contraire que cette série est convergente dans le cas et dans le cas seulement où les séries définissant les conditions initiales sont elles-mêmes convergentes. Dire donc que l'intégrale dépend d'un nombre déterminé de fonctions arbitraires de nature déterminée, c'est dire que la convergence de la série intégrale dépend de la convergence d'un certain nombre de séries de nature déterminée. C'est donc dans l'étude approfondie de la convergence des séries que l'on doit rechercher l'origine de la distinction entre les diverses sortes de fonctions arbitraires. M. Borel a indiqué pour la première fois cette idée dans une Note parue aux Comptes Rendus en décembre 1895.

Les mathématiques et la conception du monde au point de vue de la philosophie scientifique.

Par

N. Bougaïev à Moscou.

L'entendement actuel des phénomènes du monde se trouve directement lié avec la science et la philosophie. C'est pourquoi on le qualifie ordinairement de conception scientifique et philosophique du monde. (Philosophisch-wissenschaftliche Weltanschauung.)

En quoi consistent donc l'essence et les caractères fondamentaux de cette façon de considérer le monde?

Il faut répondre à cette question pour évaluer avec justesse certains phénomènes scientifiques, artistiques et sociaux; c'est indispensable pour mieux résoudre plusieurs problèmes de la vie pratique et sociale.

Je n'ai pas la prétention de répondre à cette question dans toute son étendue. J'essaierai seulement d'approcher de la solution en partant d'un point de vue tout à fait particulier.

L'entendement scientifique et philosophique du monde dépend de notre façon de comprendre les phénomènes de la nature. C'est surtout la science qui facilite cet entendement. Or la science tend, dans ses conclusions, à l'exactitude et à la précision. Elle ne se borne pas à des considérations générales. Des généralisations une fois formées, apparaît la question de la mesure et du nombre, capable de caractériser l'objet dans toutes les circonstances. C'est elle qui donne à la science ce caractère positif auquel elle tend de nos jours.

Actuellement cette exigence du nombre et de la mesure paraît constituer la question vitale du jour non seulement de la science, mais aussi de l'art et des relations humaines. Trouver la mesure dans le domaine de la pensée, de la volonté et du sentiment, tel est le problème du philosophe, du politique et de l'artiste contemporains.

Cette exigence constante de l'homme nouveau non seulement ne diminue pas, mais grandit, au contraire, le côté idéal de la civilisation contemporaine. Au moyen du nombre et de la mesure, — l'homme aspire à sortir du domaine des instincts, domaine indéfini et illimité et à s'élever à une situation idéale, capable de lui donner une puissance pleine et entière sur la nature extérieure et intérieure et qui introduise l'harmonie et un sentiment esthétique dans toute manifestation de l'esprit humain.

Le nombre et la mesure apparaissent dans la science actuelle comme le moyen le plus puissant pour évaluer les phénomènes de la nature. Ces exigences de la science la lient directement aux mathématiques, la science du nombre et de la mesure, qu'en toute justice on appelle la mère de toutes les sciences.

Dès qu'une quantité concrète quelconque est capable de devenir une quantité mathématique, les mathématiques entrent aussitôt en action.

C'est pourquoi les mathématiques dans leur développement scientifique, dans leurs procédés et leurs méthodes de recherche, ont une importance essentielle pour l'homme contemporain. C'est ce qui explique pourquoi notre époque se distingue par un tel accroissement des méthodes mathématiques, pourquoi un si grand nombre de savants appliquent tous leurs efforts à augmenter par leurs recherches ces instruments et ces moyens d'investigation: ils ne font que manifester la puissance déductive de l'homme. Avec l'accumulation et la classification des faits, avec le perfectionnement des méthodes, ces instruments et ces moyens renferment la véritable condition du développement progressif de nos connaissances de la nature.

Dans les mathématiques pures, nous devons avant tout chercher les réponses à certaines questions concernant l'essence et les principes fondamentaux de la conception contemporaine du monde au point de vue scientifique et philosophique. Les mathématiques constituent la science qui étudie les similitudes et les différences dans le domaine des phénomènes de changement de la quantité. C'est sa définition la plus générale; toutes les autres en découlent comme ses conséquences naturelles. L'idée de modification de la quantité et de l'ordre, à laquelle se soumettent ces changements, ce sont les idées fontamentales des mathématiques. Une quantité susceptible de modification s'appelle une grandeur variable. Les quantités variables peuvent changer indépendamment de la modification d'autres quantités ou en dépendre. Selon cette modification, on les nomme quantités variables indépendantes ou dépendantes. Les quantités variables dépendantes s'appellent aussi des fonctions. Par conséquent les mathématiques apparaissent comme la théorie des fonctions. On peut également admettre cette seconde définition, découlant de la première comme de la définition principale. Elle suffit pour expliquer plusieurs faits dans le domaine des phénomènes de la modification du nombre.

Les quantités peuvent se modifier d'une façon continue ou discontinue. D'après ces deux moyens de modification des quantités, les fonctions se subdivisent en fonctions continues et discontinues, et les mathématiques pures se divisent, à leur tour, en deux grandes parties: la théorie des fonctions continues et la théorie des fonctions discontinues. On appelle généralement analyse mathématique la théorie des fonctions continues et arithmologie la théorie des fonctions discontinues. Une subdivision aussi naturelle des mathématiques pures n'a pas encore pénétré dans la science, n'est pas encore devenue digne de la conviction scientifique générale. Il en résulte toute une suite de malentendus dans la classification et l'entendement de plusieurs parties des mathématiques pures. Ce défaut de clarté dans les sources de la classification scientifique se reflète d'une façon défavorable sur le caractère que prend la conception scientifique du monde.

La théorie des fonctions continues ou l'analyse emprunte ses méthodes à l'application conséquente de l'idée de continuité à l'étude de ces fonctions. Cette idée, intimement liée à la théorie des limites constitue la matière essentielle du calcul infinitésimal.

La méthode des infiniments petits ou le calcul différentiel et le calcul intégral constituent un des moyens les plus puissants pour l'étude des fonctions analytiques. Sur le terrain de cette méthode s'est établi, développé et définitivement constitué l'édifice grandiose de l'analyse mathématique. Sous son abri viennent, pour ainsi dire, se nicher plusieurs sciences des mathématiques appliquées. Le problème fondamental de l'analyse mathématique aboutit à mettre en relation toutes les fonctions analytiques avec les fonctions entières comme étant les plus simples et les plus accessibles pour nous. Plusieurs grands géomètres ont travaillé à résoudre ce problème. Plus d'un mathématicien de génie y a montré un esprit extraordinaire et perspicace. Les savants contemporains ont atteint au plus haut degré de perfection dans l'élaboration de ce problème.

En face de l'analyse s'élève peu à peu un autre édifice grandiose de mathématiques pures. C'est la théorie des fonctions discontinues ou l'arithmologie. Parue sous le nom modeste de théorie des nombres, elle entre graduellement dans une phase nouvelle de son développement. Actuellement tout donne à penser, que l'arithmologie ne le cédera pas à l'analyse par l'étendue de ses matières, la généralité de ses méthodes, la remarquable beauté de ses résultats. La discontinuité est bien plus variée que la continuité. On peut même dire que la continuité c'est la discontinuité dans laquelle la modification passe par des intervalles infiniment petits et égaux. La diversité des formes, sous lesquelles apparaît la discontinuité, mène à ceci, que les questions scientifiques de l'arithmologie sont souvent plus compliquées et plus difficiles que les questions correspondantes de l'analyse.

L'analyse n'est que le premier degré dans le développement des vérités mathématiques, la forme la plus simple sous laquelle elles apparaissent. Voilà pourquoi l'analyse s'est développée en premier, a arrêté avant tout l'attention des mathématiciens. Pour le développement de l'arithmologie, il ne faut pas seulement tous les procédés de l'analyse, mais encore toute une suite de méthodes et des procédés d'investigation tout à fait nouveaux. Sous ce rapport, l'arithmologie est un véritable arsenal de méthodes mathématiques. Les instruments les plus divers qui servent aux recherches mathématiques s'y concentrent et s'y accumulent.

Entre ces deux divisions, analyse et arithmologie, il y a complète corrélation.

Presque à chaque partie importante de l'analyse correspond une division particulière de l'arithmologie. Cette conscience du rôle important de l'arithmologie se rencontre chez les plus grands géomètres, qui embrassent le sujet de notre science dans toute sa plénitude et son étendue. Lamé, célèbre savant et ingénieur français, qualifie franchement de détracteurs de la science pure les savants qui se comportent sans respects suffisants à l'égard de la théorie des nombres; Gauss s'exprime ainsi sur cette question: „Die Mathematik ist die Königin der Wissenschaft, aber die Arithmetik ist die Königin der Mathematik!" — („La mathématique est la reine des sciences, mais l'arithmétique est la reine des mathématiques!").

Les vérités de l'analyse se distinguent par leur généralité et leur universalité. Les vérités de l'arithmologie portent en elles l'empreinte d'une individualité originale, vous attirent à elles par leur caractère mystérieux et leur beauté frappante. On n'explique que par ce fait pourquoi certains penseurs ont rattaché aux nombres entiers différentes questions de philosophie mystique. Par leur élégance les vérités de l'arithmologie éveillent chez le savant le sentiment de la beauté scientifique, qui le satisfait pleinement, sans compter encore cette question: ont-elles ou n'ont-elles pas une application à une explication immédiate des phénomènes de la vie et de la nature?

Outre l'analyse et l'arithmologie, la géométrie et la théorie des probabilités entrent aussi dans le domaine des mathématiques pures. Dans la géométrie la quantité qu'on examine c'est l'étendue. La théorie des probabilités c'est la science des phénomènes fortuits. La quantité qu'on y étudie c'est la probabilité d'un phénomène de hasard.

Les méthodes de l'analyse et de l'arithmologie s'appliquent parfaitement à la géométrie. En ce sens, on peut la qualifier de science mathématique appliquée. Elle a aussi ses méthodes à elle. Elles résultent de ce que l'étendue est accessible à notre perception sensitive. Cette circonstance prête aux vérités géométriques non seulement une démonstration logique, mais aussi l'évidence qui vient des yeux et une façon de se convaincre par les sens. Cette réunion de la démonstration logique et de persuasion intuitive, communique un charme particulier aux vérités géométriques. Dans la théorie des probabilités on ne rencontre pas des méthodes mathématiques originales. L'analyse, l'arithmologie, la géométrie et la théorie des probabilités offrent tous les éléments pour élaborer les principes fondamentaux de la conception scientifique et philosophique du monde.

Ces vérités et leurs méthodes s'appliquent complètement à l'interprétation des phénomènes de l'univers. La nature de leur objet détermine également nos façons d'envisager le monde.

Il est très important d'examiner à l'heure actuelle l'influence de ces parties des mathématiques sur la conception scientifique et philosophique du monde.

Dans les explications scientifiques des phénomènes de la nature les savants se sont surtout servi de la géométrie et de l'analyse: la géométrie a été particulièrement l'instrument scientifique du monde des anciens et l'analyse celui du monde moderne.

Aussi, on peut appeler géométrique la période de l'astronomie ancienne. Dans la période nouvelle cette étude s'est constituée sous l'influence des notions de la mécanique. L'analyse des infiniments petits a été l'instrument mathématique de l'astronomie. Aussi on peut qualifier cette période d'analytique. Le calcul différentiel et intégral a fait avancer la mécanique et l'astronomie: c'est pourquoi on peut appeler mécanique cette période de l'astronomie.

Sous l'influence de l'analyse nos vues sur la constitution de l'univers ont été totalement transformées. Grâce à l'analyse, l'astronomie a pris un tour tout à fait scientifique, et la mécanique rationnelle s'est changée en une doctrine bien ordonnée et parfaite. L'application de l'analyse devient souvent le moyen indispensable et unique d'établir l'hypothèse scientifique donnée sur les bases inébranlables de l'expérience et de l'observation.

A la suite de la mécanique rationnelle et de la mécanique céleste, la physique est entrée dans une période de développement, dans laquelle elle est devenue aussi une science mathématique. Les sciences physiques ont passé par les mêmes phases d'évolution historique que l'astronomie. Après l'époque des vagues constructions est venue la période où s'est manifesté le besoin absolu de l'observation et de l'expérience. Alors dans la science apparaissent généralement les généralisations premières, on répartit les phénomènes en espèces et en groupes. Grâce au progrès des sciences exactes, ces observations s'accompagnent d'indications précises fournies par les nombres. De ces données numériques on forme aussi les premières lois empiriques et numériques, qui doivent ensuite découler, comme conséquence première, des principes de la science, élaborées par le procédé inductif le plus rigoureux. Les lois de la conservation de la matière et de l'énergie sont ces lois générales, que la physique et la chimie ont élaborées. Actuellement l'analyse mathématique trouve dans la physique les applications les plus variées et les plus étendues. La physique mathématique a atteint un très haut degré de perfection. En général, on peut affirmer avec une grande probabilité qu'on détermine le développement des sciences physiques par l'étendue de la région dans laquelle on applique l'analyse mathématique. Dans la marche du développement successif des sciences physiques nous ne pouvons nous empêcher de remarquer leur marche progressive et ascendante vers la précision et la perfection. Nous ne pouvons expliquer que de cette façon pourquoi la chimie tend à se rapprocher de la physique et la physique de la mécanique. C'est pourquoi plusieurs savants supposent que dans l'avenir tous les phénomènes de la nature extérieure pourront être expliqués par les lois mécaniques de l'équilibre et du mouvement, et seront l'objet de recherches suivies dans leur marche déductive d'opérations mathématiques. De cette façon, la science qui traite des propriétés et des rapports réciproques des grandeurs apparaît comme la condition indispensable qui détermine le degré de précision et de rigueur des déductions dans les sciences physiques, l'unité qui les relie dans un tout harmonieux, la méthode et l'arme puissantes, auxquelles elles ont recours dans l'intérêt de leur développement.

L'application de l'analyse mathématique à l'étude des phénomènes de la nature, application vaste et multiple, ajoute une nuance spéciale à la façon actuelle de concevoir le monde selon la science et la philosophie. Cette nuance dépend du caractère même de l'analyse mathématique, de la propriété de ces fonctions continues, au moyen desquelles on étudie et on formule les lois de la nature. C'est là que nous devons chercher les réponses à la question touchant les principes fondamentaux de la conception du monde actuellement admise au point de vue de la philosophie scientifique.

Pour expliquer mathématiquement les phénomènes de la nature on applique surtout les fonctions analytiques continues. Voilà pourquoi on peut à juste titre donner le nom de conception analytique à la façon actuelle de concevoir le monde.

Les fonctions analytiques ont pour principale propriété la continuité. Elle nous donne la possibilité d'étudier ces fonctions dans toutes leurs manifestations élémentaires. Dans l'étude des phénomènes de la nature nous prenons pour guide cette propriété principale des fonctions. Nous admettons que les phénomènes de la nature varient d'une façon continue. Outre cela, quand nous étudions ces phénomènes nous avons pour but de les comprendre dans toutes leurs manifestations élémentaires. Enfin nous voulons savoir comment les phénomènes compliqués de la nature se forment des phénomènes élémentaires. Le calcul différentiel et intégral nous met à même non seulement de donner une expression mathématique à ces questions, mais encore de les résoudre d'une façon précise, du moment que la loi du phénomène est exprimée par une fonction analytique. Les fonctions analytiques qui expriment les lois de la nature sont surtout des fonctions uniformes. Cela correspond à notre supposition qu'à chaque loi donnée dans telle ou telle circonstance ne correspond dans la nature qu'un seul phénomène déterminé.

Enfin quand nous exprimons les lois de la nature par des fonctions analytiques uniformes nous obtenons la possibilité de définir le phénomène dans tous les moments non seulement du passé mais de l'avenir.

De cette manière les fonctions analytiques continues et uniformes et l'application de l'analyse mathématique nous offrent la possibilité de remarquer dans les phénomènes de la nature et dans les lois qui les régissent les propriétés fondamentales suivantes:

1° La continuité des phénomènes; 2° la constance et l'invariabilité de leurs lois; 3° la possibilité de les comprendre et de les évaluer dans toutes leurs manifestations élémentaires; 4° la possibilité de lier les phénomènes élémentaires en un tout complet, et enfin 5° la possibilité de préciser les phénomènes dans tous les moments du passé et de les prédire dans tous les moments à venir.

Ces particularités caractérisent toutes les exigences multiples de la science contemporaine. On s'en sert pour définir l'état de la conception scientifique et philosophique du monde. Ces particularités correspondent tout à fait aux propriétés des fonctions analytiques continues et uniformes de l'analyse mathématique.

Les progrès remarquables de la science contemporaine sont dus à l'application heureuse de l'analyse mathématique à l'étude des phénomènes primitifs de la nature. Ces progrès ont justifié les espérances que les penseurs avaient fondé sur les mathématiques.

Au moyen de l'analyse mathématique l'homme a clairement compris plusieurs ressorts cachés de l'organisation de l'univers. Les progrès de l'astronomie, de la mécanique céleste et des questions pratiques qui s'y rattachent de géodésie, de géographie et de navigation ont changé toute la constitution de la société actuelle. Les progrès de la mécanique et de la physique mathématique accompagnées de toute une suite d'applications brillantes, ont accru davantage la foi de l'homme en ce que la conception analytique du monde est la conception fondamentale et la plus régulière, que dans l'élaboration à venir de cette conception reposent les conditions du progrès futur de la science humaine.

Sous l'empire de l'analyse les considérations contemporaines sur la nature se distinguent par leur généralité et leur universalité.

L'idée de la continuité des phénomènes de la nature a commencé à pénétrer dans la biologie, la psychologie et la sociologie. Les doctrines de Lamarque et de Darwin ne sont qu'une tentative d'appliquer à la biologie ces conceptions sur la transformation continue des phénomènes, qui règnent dans la géométrie, la mécanique et la physique.

En biologie on est arrivé à se convaincre, que le résultat final des phénomènes biologiques n'est qu'une simple suite de transformations des infiniments petits, que nous remarquons dans les phénomènes de la vie des animaux et des plantes.

Enfin en sociologie également est venue à prédominer l'opinion que le changement dans la marche des phénomènes sociaux s'accomplit sous l'influence de transformations continues dans la façon de vivre, dans les mœurs, les coutumes, les habitudes et les convictions des unités sociales.

L'idée que le développement social s'accomplit au moyen d'un progrès lent et continu de tous les éléments de la société, cette idée s'affirme de plus en plus. Dans les considérations historiques contemporaines les théories évolutionistes prennent le dessus sur les théories révolutionnaires. La science a commencé à remplacer la doctrine. Les doctrinaires ont peu à peu commencé à céder le pas aux vrais savants. La façon même d'envisager le progrès s'est modifiée.

A l'idée de progrès est venue se joindre l'idée d'un perfectionnement continu, et pour ainsi dire, graduel. On s'est mis à reconnaître que cette amélioration dans la société s'accomplit non pas en faisant de brusques sauts, mais en perfectionnant avec suite et par degrés tous les éléments sociaux. Telles sont actuellement les bienfaisantes conséquences de la conception analytique du monde dans le domaine de la science et de la philosophie. Il est fort à désirer pour les progrès à venir de l'humanité de travailler et d'étendre cette conception analytique du monde.

L'esprit de l'homme ne se borne pas cependant au cercle des vérités entièrement expliquées. Il court toujours en avant. Il cherche toujours à gagner du terrain. Il tâche d'appliquer la conception qu'il s'est faite du monde même aux faits qui n'ont pas encore été complètement éclaircis par la science. Sous l'influence d'une conception analytique du monde, il est devenu évident, que certaines lois de la nature sont immuables et constantes, que certains phénomènes s'accomplissent dans un ordre tel qu'on peut fixer leur marche dans le passé et dans l'avenir. La sage modestie ne constitue pas cependant l'apanage de tous les penseurs. Certains philosophes ont hardiment avancé que le point de vue analytique est applicable à l'explication de tous les phénomènes. Ils ont admis en secret, que tous les événements du monde s'assujettissent à des lois analytiques, fixes et continues. Ils ont affirmé, que si nous connaissions ces lois, nous pourrions annoncer d'avance tous les phénomènes aussi exactement que l'on prédit les éclipses du soleil et le mouvement des planètes. Une admission si cachée s'est produite sous l'influence de cette circonstance, que le savant contemporain s'est fait complètement une habitude de la conception analytique du monde. Sous l'action de cette façon de concevoir la nature, dans le milieu des savants est venue s'insinuer de plus en plus fréquemment la pensée que l'idée seule de causalité prévaut dans la marche des phénomènes et que les causes finales n'y jouent aucun rôle. Alors dans le milieu des philosophes se sont fait entendre de plus en plus souvent des voix qui affirmaient avec assurance, que la nature est indifférente aux buts de l'homme, qu'elle ne connaît ni le bien, ni le mal. Le bien et le mal, la beauté, la justice et la liberté, ont-ils dit, ne sont qu'illusions, créées par l'imagination humaine. Dans les considérations de certains philosophes est venue à prédominer le sentiment de la fatalité, de la nécessité absolue et inévitable. Le destin, le sort du monde antique se fait jour dans ces opinions.

Ainsi l'homme, avec sa liberté, ses fins idéales et ses aspirations élevées, se trouvait entraîné dans le remous commun de la contrainte fatale. D'après ces conceptions le destin, suivant des lois invariables qu'on ne peut jamais changer, le destin gouverne sans contredit le monde. Une telle manière d'envisager les choses conduit à un déterminisme complet. Certains ont qualifié ce point de vue de scientifique. Ils sont fiers de s'y maintenir, à l'encontre des faits les plus évidents et des sentiments naturels de l'homme.

Cette conception analytique du monde est très répandue. Voici comment, au hasard de mes lectures, je l'ai trouvée exprimée dans ces vers d'un poète russe, presque littéralement traduits en français: *)

Que m'importe, crois-moi, toutes tes espérances,
Tes aspirations, tes efforts et tes transes.
Du nombre seul je sais l'impitoyable loi.
Jouissance ou tourment, bienfait, vertu, pour moi
Sont tout indifférents: ni bien, ni mal, n'existe.
De ta marche en vainqueur, — athée ou bien déiste, —
Vers un éden caché, j'ai toujours ignoré
Le principe et la fin, dont tu t'es honoré.
Oui, la fatalité: voilà mon seul partage!
Ainsi, depuis longtemps, je marche d'âge en âge.
Et je n'invente pas, n'aime, ni ne construis.
Je ne réfléchis pas. — J'enfante et je détruis,
Sans haine et sans orgueil, foulant à mon passage
L'éléphant et le ver, l'imbécile et le sage . . .
Vis donc comme tout vit! Frêle vague, un instant
Déferle et disparais! . . . Ne t'élève pas tant,
Souverain éphémère, et renonce à la lutte.
N'engage pas en vain une vaine dispute
Avec Celle qui fut, sans joie et sans remords,
De toute éternité Mère de tous les Morts,
Et de tous les Vivants! Va, ne me tiens plus tête. . . .
Ainsi dit la Nature . . . et, bruits de la tempête,
Éclairs, foudre, éléments, déchaînés sans merci,
Grondent comme des voix qui ne sont pas d'ici.

Il n'est pas étonnant qu'une pareille manière d'envisager la marche des phénomènes de l'univers ait rencontré une énergique résistance dans le milieu de beaucoup de penseurs.

*) par M. Sichler, professeur au lycée de Kasan.

Plusieurs ont commencé à entrevoir dans une pareille idée un danger au point de vue de l'Éthique et de l'Esthétique. Il en est résulté des malentendus entre la conception scientifique et philosophique du monde la plus répandue et les tendances naturelles et légitimes de l'homme. Comment écarter ces malentendus?

Il ne faut pour cela, en se pénétrant d'une sage modestie, qu'envisager les manifestations de l'univers à un point de vue plus profondément scientifique. La conception du monde selon la science et la philosophie, se rattache étroitement aux mathématiques. L'explication mathématique des phénomènes constitue une propriété fondamentale de la science contemporaine. Cependant de toutes les divisions des mathématiques jusqu'à présent on n'a appliqué que l'analyse à l'explication des phénomènes de l'univers. Néanmoins cette interprétation qui ne se fait qu'au moyen des fonctions continues analytiques n'est pas suffisante. Outre l'analyse il y a en mathématiques, l'arithmologie; outre les fonctions continues il y a les fonctions discontinues.

En considérant de près les phénomènes de la nature, nous remarquons bientôt des faits qui ne peuvent être expliqués en partant du point de vue de la continuité seule. En examinant, par exemple, le tableau chimique des éléments simples, nous voyons que les nombres qui le caractérisent ne se subordonnent pas à la loi de continuité. Il n'y a pas des corps simples de toute densité. Chaque corps simple est par lui-même un individu chimique particulier. Quand nous examinons les corps chimiques composés, nous découvrons qu'ils se composent d'éléments n'entrant dans des combinaisons chimiques que dans des proportions déterminées. La continuité ne suffit pas pour expliquer tous les phénomènes chimiques. En chimie on rencontre souvent l'usage des lois arithmologiques. Elles interviennent toutes les fois qu'on veut définir les nombres des différentes combinaisons de même composition. Toute combination chimique composée est par elle-même un individu séparé et indépendant. La théorie atomique (de la chimie) indique clairement les particularités individuelles dans la constitution de la matière. Ces particularités se manifestent dans les constructions cristallines des minéraux. On ne peut les expliquer par la continuité seule. L'acoustique nous apprend qu'une combinaison déterminée de sons produit une expression esthétique. Une suite musicale de sons revêt un caractère arithmologique.

En biologie, la construction cellulaire des corps organiques montre le rôle important des individus biologiques dans les phénomènes de la vie. Les phénomènes de la conscience présentent également plusieurs côtés qui ne correspondent pas à la conception analytique de la nature.

En sociologie, l'homme constitue un élément social indépendant et autonome, et beaucoup de phénomènes sociaux ne peuvent être expliqués par la continuité. En un mot, il y a beaucoup de cas, où la discontinuité se fait voir dans la marche et même dans le développement des événements sociaux.

La discontinuité apparaît toujours là où se manifeste l'individualité indépendante et autonome. La discontinuité intervient aussi là où surgissent les questions des causes finales et les problèmes esthétiques et éthiques.

La continuité n'explique donc qu'une partie des phénomènes de l'univers. Les fonctions analytiques sont immédiatement liées avec la continuité. On ne peut employer ces fonctions que pour expliquer les phénomènes les plus simples de la vie et de la nature. La conception analytique du monde est donc insuffisante. Elle ne s'étend pas à tous les faits de la nature, n'explique pas tous ses phénomènes.

Les intérêts les plus chers à l'homme, les plus élevés, sont souvent liés aux problèmes d'arithmologie. Le philosophe ne peut pas les renier au nom de la conception analytique, conception étroite et insuffisante. On ne peut rejeter les causes finales et l'harmonie d'une conception vraiment scientifique et philosophique du monde. Il faut également en tenir compte quand on étudie les phénomènes de la nature. La conception arithmologique du monde indique que les causes finales jouent aussi un rôle dans les manifestations du monde. Elle nous amène à nous convaincre que le bien et le mal, la beauté, la justice, la liberté, ne sont pas rien que des illusions créées par l'imagination de l'homme; elle nous donne aussi la conviction que les racines, pour ainsi dire, de ces tendances reposent dans l'essence même des choses, dans la nature même des phénomènes de l'univers, qu'elles ont une base qui n'est pas fictive, mais réelle. La conception arithmologique ne nous force pas à ne considérer le cours des événements rien que dans leur continuité fatale et d'absolue nécessité. Elle nous délivre du fatalisme. Dans l'économie générale de nos connaissances et de nos sentiments elle acquiert une importante signification et a un droit légal à l'existence. Elle ne contredit pas l'interprétation mathématique du monde et des phénomènes de la nature. Le point de vue arithmologique complète la conception analytique du mondre. L'un et l'autre expliquent les phénomènes qui y correspondent. Ces deux conceptions, l'analytique et l'arithmologique, ne se contredisent pas l'une l'autre, mais ne composent ensemble que les deux aspects d'une seule et même interprétation mathématique des phénomènes de la nature.

Une conception véritablement scientifique du monde n'est donc pas seulement analytique, mais mathématique, c'est-à-dire à la fois analytique et arithmologique.

Avec la conception mathématique du monde on change et on complète le point de vue sur le progrès et sur le rôle de l'homme dans la marche des événements du monde.

Le progrès ne consiste pas seulement rien que dans l'amélioration du milieu ambiant. Il est inséparablement lié à l'amélioration de la nature même de l'homme, au perfectionnement de son entendement, de ses sentiments et de sa volonté. Les éléments éthiques et esthétiques y jouent un rôle important. La nature n'est pas seulement un mécanisme, mais un organisme, dans lequel agissent des individus, qui existent et fonctionnent indépendamment et de toute la tension de leurs forces et de leur puissance. A côté de l'universalisme, l'individualisme a plein droit à l'existence. Ils ne s'excluent pas, mais se complètent l'un l'autre. Dans l'ordre général de l'évolution totale du monde, il doit y avoir place entre eux non pas pour l'autonomie, mais pour l'harmonie. Dans la tendance consciente et inconsciente vers la recherche de cette harmonie nous devons chercher le secret qui explique plusieurs phénomènes de la vie psychique de l'homme et de sa vie historique. L'homme n'est pas seulement nn être passif, un miroir qui réfléchit les phénomènes de la nature qui l'entoure. C'est un agent actif et créateur, un instrument absolument nécessaire, mais indépendant, dans la marche de l'amélioration générale de la nature et de la vie. Comment expliquer que jusqu'à présent le point de vue analytique seul l'a emporté dans les considérations scientifiques et philosophiques sur le monde et la nature?

Cela tient à plusieurs raisons. D'une part, c'est dans les derniers temps seulement que l'arithmologie a commencé à se montrer comme une branche indépendante des mathématiques. D'autre part, les brillantes applications de l'analyse mathématique à l'interprétation des plus simples phénomènes du monde ont accoutumé les savants à cette pensée, que l'analyse est l'unique instrument de recherche mathématique. Cette habitude s'est si profondément enracinée dans la conscience générale, qu'elle a dérobé à l'attention tous les autres procédés mathématiques. Les plus simples lois de la nature s'expriment, en effet, par les fonctions analytiques et la continuité est réellement la propriété essentielle et fondamentale des phénomènes liés à ces lois. Nous n'avons cependant pas le droit d'étendre le domaine de la continuité à tous les phénomènes de la nature. Nous n'avons pour cela aucune raison, ni logique, ni réelle.

On a supposé jusqu'à présent qu'à chaque question scientifique il ne doit exister qu'une seule réponse déterminée; on n'admettait pas de cas où il pourrait y avoir plusieurs solutions différentes. Cependant il se rencontre dans l'arithmologie des fonctions particulières inverses aux fonctions discontinues. On peut les appeler les fonctions de quantités arbitraires. Elles ont la propriété d'avoir un nombre infini de valeurs pour une seule et même valeur d'une quantité variable indépendante. Ces fonctions se rencontrent dans la nature. On peut en présenter plusieurs exemples où leur application a lieu.

On sait que d'après la loi de Weber, il existe une corrélation entre la sensation et l'impression, corrélation qu'on exprime par une fonction logarithmique. On y découvre cependant la particularité suivante. L'impression peut quelquefois se modifier dans de certaines limites, alors que la sensation reste constante. De cette façon la sensation est une fonction discontinue de l'impression. Cette dernière, au contraire, considérée comme fonction de la sensation donnée, est une quantité arbitraire, capable de recevoir toutes les significations dans des limites déterminées de modification. Une pareille dépendance mène à toute une suite de remarquables résultats psychologiques. Elle élargit notre vue sur la nature et sur l'homme. D'après ces lois, à une impression donnée correspond toujours dans un individu donné une sensation définie, mais à une sensation donnée peuvent correspondre beaucoup d'impressions différentes.

Selon cette loi, dès que nous voudrons d'après nos sensations faire telles ou telles conclusions sur les impressions correspondantes, nous ne sommes pas en état de répondre de l'exactitude et de déterminer parfaitement la conclusion. De cette façon, vu l'essence même de notre organisation finale, nous devons écarter la prédominance de la nécessité absolue et fatale dans le domaine de nos sentiments et de nos actions.

Seule une éducation continue peut restreindre et amoindrir les limites de l'incertitude dans nos jugements et nos actions. La nécessité même de l'éducation qu'on peut se donner soi-même chasse déjà le fatalisme de nos vues théoriques sur l'homme et sa nature. Une certaine part de hasard, qui apparaît dans nos actions, introduit un élément d'éventualité dans la nature même. L'éventualité entre ainsi en scène, comme une propriété essentielle de certains phénomènes du monde. Dans le monde il n'y a pas que le règne de la certitude seule. La probabilité y a aussi son empire.

La doctrine des phénomènes fortuits ou théorie des probabilités apparaît comme une science mathématique essentielle dans le système général de nos connaissances. Le philosophe doit compter avec la probabilité autant qu'avec la certitude.

La théorie des probabilités doit donner des réponses là, où l'on ne peut recourir à l'analyse et à l'arithmologie là, où l'on ignore la loi des phénomènes.

En général la probabilité se manifeste dans la sphère des événements très compliqués. On doit y rattacher sans conteste plusieurs phénomènes sociaux. La théorie des probabilités peut s'appliquer à plusieurs phénomènes sociaux. La loi des grands nombres démontre, que l'influence des causes fortuites, qui détruisent la marche régulière des phénomènes, peut être affaiblie par un grand nombre d'observations.

En se fondant sur cette loi, nos conclusions par rapport aux phénomènes fortuits peuvent avoir une certaine autorité; il faut tenir compte de ce que leurs lois et leur lien avec d'autres phénomènes nous sont inconnus.

A quelles considérations devons-nous en venir dans la question sur le rapport des mathématiques avec la conception scientifique et philosophique du monde?

La nature de cette conception découle de l'application de mathématiques dans toute leur étendue à l'étude des phénomènes de la nature. Là où la continuité caractérise les phénomènes dans leurs modifications, on peut appliquer l'analyse mathématique et y employer un entendement analytique. Dans ce cas-là, les phénomènes, se développant selon des lois invariables et constantes, ils offrent la possibilité de les fixer avec une parfaite précision dans leur ensemble et dans leurs manifestations élémentaires. On peut rendre évidente la marche même de pareils phénomènes pour toutes les divisions du temps. On peut les prédire. Ils s'accomplissent comme avec une sorte de fatalité.

Outre les phénomènes subordonnés dans leur développement aux lois de la continuité, il existe dans la nature des phénomènes plus compliqués, qui ne s'y soumettent pas. On peut quelquefois y employer la théorie des fonctions discontinues.

Le point de vue arithmologique complète la conception analytique du monde. L'analyse et l'arithmologie constituent dans leur ensemble un seul et même entendement mathématique des phénomènes. Enfin là où il est impossible de subordonner ces derniers à des lois régulières, il est possible d'appliquer la théorie des probabilités. L'application simultanée de ces différentes branches des mathématiques constitue la véritable façon de concevoir le monde scientifiquement et philosophiquement.

Pour interpréter les phénomènes du monde nous pouvons nous en tenir à différents points de vue. Ce qu'on a appelé le positivisme tend à répondre rien qu'à cette question: „Comment s'accomplissent ces phénomènes?“ Le point de vue analytique, qui prédomine en ce moment dans la science, essaie de réprondre aux questions suivantes: „Comment et pourquoi?“

La véritable conception scientifique et philosophique du monde aspire, dans la mesure du possible, à répondre de son mieux non seulement aux questions précédentes, mais encore à celle-ci: „Dans quel but et pour quelle raison?“ Cette façon de considérer le monde n'introduit pas de désaccord entre nos idées et nos sentiments. Elle ne conduit pas à la collision des causes finales avec les phénomènes de causalité. Elle tâche d'amener nos idées et notre idéal (dans toutes ses formes) à une union harmonieuse.

Leibniz, le fondateur du calcul des infiniments petits, a le premier formulé l'idée de progrès comme une idée de perfectionnement graduel de la société. Ayant posé des bases durables pour le développement de l'analyse mathématique, il a considérablement contribué à fortifier la conception analytique du monde. Il se regardait lui-même comme le créateur du principe de la continuité. Il avouait également son insuffisance à expliquer tous les phénomènes du monde. Par sa monadologie il avait en vue de complèter la conception analytique et de fournir un contrepoids au penchant de certains savants vers le rationalisme et l'universalisme. Il a démontré la signification importante des individualités indivisibles et autonomes dans l'ordre de l'univers. C'est en quoi se révèle, selon nous, le profond entendement philosophique du grand mathématicien.

Je n'ai pas touché, en général, le côté philosophique de la question. La logique, la psychologie, l'histoire de la philosophie confirment en plusieurs cas nos considérations d'une façon encore plus convaincante.

Nous avons vu que, dans le domaine des mathématiques pures, la continuité et la discontinuité sont deux notions qu'il est impossible de rapprocher l'une de l'autre. Elles présentent un exemple d'antinomie mathématique. Un complet entendement de faits mathématiques n'est possible qu'à condition qu'on puisse tenir compte dans une mesure égale de ces deux moyens de modifier les quantités. — Avec une évaluation régulière et la classification scientifique des données des mathématiques pures, on doit établir entre eux non pas le désaccord mais bien l'harmonie.

Nous pouvons également nous convaincre que dans les domaines des sciences comprises dans la logique, la biologie, la psychologie, l'histoire de la philosophie et la sociologie, l'universel et l'individuel, l'abstrait et le concret, la personne et la société se complètent mutuellement. Nous y trouvons l'explication pourquoi la cause et le but, la nécessité et la contingence, l'analyse et la synthèse, l'affirmation de la personnalité et l'abnégation peuvent et doivent se trouver en corrélation entière l'un avec l'autre. Ces conceptions ne doivent ni s'exclure, ni s'opprimer. La vie consiste dans un effort continuel à donner une issue légitime à des tendances différentes et, en apparence, contraires. Dans cette antinomie qui se glisse dans nos conceptions, se dissimule cette impulsion de vie, dont est pénétré tout ce qui vit, souffre et aime. Nous devons en tenir compte dans l'examen et l'évaluation des faits du monde et les amener à l'unité et à l'harmonie.

Je n'ai pas traité en détail cette dernière question parce que ç'aurait été dépasser les limites de ma tâche: J'ai surtout voulu rendre évident qu'en ne restant rien que sur le terrain scientifique et objectif on peut arriver à des considérations plus profondes sur la vie et sur la nature. J'ai voulu défendre la véritable science contre les reproches qu'on lui fait. J'ai voulu montrer que les vérités proposées par les sciences exactes ne nient pas, mais affirment, en s'appuyant sur des bases inébranlables, nos aspirations idéales vers l'unité et l'harmonie.

C'est pourquoi, en nous plaçant sur un terrain complètement objectif, nous pouvons, pour terminer, nous associer à la pensée exprimée dans la seconde partie des vers cités plus haut. C'est une protestation contre la conception partiale du monde qui assujettit la nature aux lois d'une nécessité absolue et fatale. En réponse à cette nature sans pitié, l'homme, sous l'influence d'une conception plus profonde des phénomènes de l'univers, caractérise sa destinée dans les termes suivants:

. . . Mais, portant haut la tête, au cri de: Liberté!
Vers la terre promise où règne la bonté,
Au pays de son rêve, un paradis tranquille,
Un être, à pas lents, va. La route est difficile.
A travers la bourrasque, et la pluie, et l'horreur
De ténèbres, il va, sans morgue et sans fureur.
Il trébuche et chancelle, et la bise fait rage.
Sous la croix de douleurs, mais sans perdre courage,
Il marche, ce Titan: c'est l'Homme. Or, en ses mains,
D'un geste révélant des efforts surhumains,
Il tient un étendard où, sublime sentence,
Brillent ces mots divins en gage d'espérance:
Le Vrai, le Beau, le Bien.

Il dit avec fierté:
Qui que ce soit qui m'ait en ma fragilité
Soufflé le feu sacré, qui m'ait doté d'une âme,
Tu ne peux l'étouffer cette ardeur qui m'enflamme,
Nature aveugle et morte, en ta rude beauté,
De l'esprit immortel j'ai pour moi la clarté.
Législateur nouveau, du Livre de la Vie,
J'effacerai le vice, extirperai l'envie.
A l'Ombre je dirai: Disparais pour toujours!
Aurore allume-toi! Éden, viens, prends ton cours,
Descends dans le désert où je laisse la trace
D'un pénible labeur. Nature, fais-moi place!
Tu seras ma servante en ce lieu consacré,
Ou je cesserai d'être en ce monde effondré.

Sur les pôles des fonctions uniformes à plusieurs variables indépendantes.

Par

L. Autonne à Lyon.

Soit X une fonction uniforme de $r+1$ variables indépendantes $y, x_1, \cdots, x_r$, coordonnées d'un point ζ dans une espace E_{r+1} à $r+1$ dimensions. Si un point ω, par exemple l'origine $y = x_1 = \cdots = x_r = 0$ des coordonnées, est pour X un point singulier non essentiel ou pôle, alors on a, par définition, pour des modules des variables suffisamment petits, $X = P(y, x_1, \cdots, x_r) : P_0(y, x_1, \cdots)$, les deux fonctions P et P_0 étant holomorphes et nulles au pôle; les deux séries P et P_0 sont supposées premières entre elles au sens de Weierstrass.

Aux abords du pôle, X a (Weierstrass) une valeur arbitraire ou même n'a aucune valeur. Je me suis proposé d'étudier l'indétermination de X en ω.

Appelons valeur X_ω de X au pôle la limite vers laquelle tend X, lorsque le point ζ tend vers ω. X_ω dépend évidemment de la loi suivant laquelle décroissent indéfiniment les modules des variables, ou, pour parler un langage géométrique, de l'itinéraire $\mathfrak{W}$ suivant lequel ζ tend vers ω. Il y a d'ailleurs avantage à considérer plusieurs fractions telles que $P : P_0$, affectées d'un même dénominateur P_0. Voici alors une manière plus commode de poser la question.

Prenons dans un espace E_N à N dimensions, $N \geqq r+1$ les $N+1$ coordonnées homogènes ξ_j $[j = 0, 1, \cdots, N]$ d'un point ξ. Les $N+1$ équations

$$(1) \qquad \varrho\, \xi_j = P_j(y, x_1, \cdots, x_r)$$

[ϱ = facteur de proportionnalité, P_j = fonction holomorphe, régulière et nulle en ω] définissent le point ξ comme image du point ζ. Quelle est l'image Ω_{r+1} du pôle ω lui-même? Ω_{r+1} est constituée, par définition, par l'ensemble des points $\bar{\xi}$ vers lesquels tend ξ, quand ζ tend vers ω par tous les itinéraires $\mathfrak{W}$ possibles. J'appelle „problème $[r+1]$" la construction de l'image Ω_{r+1}.

Il est évident que la résolution du problème $[r+1]$ fait connaître les allures de la fonction uniforme

$$X_j = P_j : P_0, \qquad j = 1, 2, \cdots, N$$

dans le voisinage de son pôle ω et répond d'une façon complète à la question que je me suis posée.

Le problème $[r+1]$ est résolu en étant ramené au problème $[r]$ c'est-à-dire, de proche en proche, au problème $[1]$, pour lequel la solution est immédiate. Voici la marche générale du raisonnement. D'abord le théorème fondamental de Weierstrass permet d'écrire

$$P_j = f_j \times \{1 + q_j(y, x_1, \cdots, x_r)\}$$

$$f_j = \sum_{l=0}^{l=m} y^l a_{jl}(x_1, \cdots, x_r),$$

$[a_{jm}$ = constante non nulle; a_{jl}, q_j = fonction holomorphe nulle en $\omega]$, le tout, bien entendu, en effectuant au besoin sur les ξ_j une collinéation convenable.

A la limite, les rapports des P_j et ceux des f_j sont les mêmes; on est ramené à résoudre le problème $[r+1]$ sur le système

$$\rho \xi_j = f_j. \tag{2}$$

Ce système, pour y seule variable, définit dans l'espace E_N une variété unicursale ou courbe Γ_x, qui ne dépend que du point x, ayant les $x_1, x_2, \cdots, x_r$ pour coordonnées dans un espace E_r. Les $N-1$ équations de Γ_x

$$A_k(\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_N;\ x_1, x_2, \cdots, x_r) = 0 \quad \{k = 1, 2, \cdots, N-1\},$$

obtenues par l'élimination de ρ et de y entre les équations du système (2), ont pour coefficients des fonctions uniformes des $x_1, \cdots, x_r$. Si l'on sait résoudre le problème $[r]$ on saura construire toutes les limites $\bar{\Gamma}$ vers lesquelles tend Γ_x, quand x tend vers le point $x_1 = \cdots = x_r = 0$. Une démonstration, qui a ses difficultés, mène alors au théorème suivant: „La figure Ω_{r+1} est exclusivement constituée par l'ensemble des courbes $\bar{\Gamma}$." Quelques-unes des courbes $\bar{\Gamma}$ sont éventuellement des points.

Ainsi le problème $[r+1]$ est ramené au problème $[r]$ c'est-à-dire résolu.

On peut dire que mon procédé permet de lever l'indétermination des symboles $\frac{0}{0}$ à un nombre quelconque de variables.

Voici, pour finir, une autre application. Dans la transformation birationnelle de l'espace $\{X, Y, \cdots, Z' = \text{polynomes}\}$

$$x' = \frac{X(x, y, z)}{T(x, y, z)}, \quad y' = \frac{Y}{T}, \quad z' = \frac{Z}{T}$$

qui a pour inverse la transformation

$$x = \frac{X'(x', y', z')}{T'(x', y', z')}, \quad y = \frac{Y'}{T'}, \quad z = \frac{Z'}{T'},$$

M. Nœther (Eindeutige Raumtransformationen, Mathematische Annalen, tome III) étudie les points fondamentaux, communs par définition aux quatre surfaces

(3) $$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0, \quad T = 0.$$

Il en distingue deux espèces, que je nomme pour abréger zénith et nadir. Par définition, l'image d'un zénith est un système de points, de courbes et de surfaces; celle d'un nadir ne comprend que des points et des courbes. M. Nœther fait la distinction des zéniths et des nadirs pour des singularités simples des surfaces (3).

Mon procédé permet de faire cette distinction dans tous les cas, pour une singularité aussi compliquée que l'on voudra, et de construire effectivement les surfaces, images des zéniths, les courbes, images des nadirs. On établit notamment que le nombre des zéniths est toujours fini.

Ce dernier théorème est un cas particulier d'une proposition plus générale: „Si, pour $r = 2$, les zéros communs aux $N + 1$ fonctions P_j du système (1) forment un ensemble continu E_1 à une dimension, le point courant sur E_1 est un nadir." J'appelle d'ailleurs surface toute variété à deux dimensions dans l'espace E_N.

Je signalerai en terminant l'existence d'itinéraires qui ne fournissent aucun point-limite $\bar{\mathfrak{x}}$ de $\mathfrak{x}$. Voici un exemple très simple de cette circonstance.

Supposons, pour $r = 2$, que les P_j soient des polynomes et que les $N + 1$ surfaces (au sens ordinaire du mot) algébriques $P_j = 0$ aient une courbe commune C, issue du pôle ω. Si l'itinéraire $\mathfrak{W}$ coïncide avec C, $\mathfrak{x}$ ne tend vers aucune limite.

Pour plus de détails, on peut consulter mes autres publications sur la matière: Comptes Rendus (11 Nov., 9 et 30 Déc. 1895); Rendiconti du Cercle Mathématique de Palerme (1896); Acta Mathematica (1897).

L'unification des concepts dans les mathématiques.

Par

Z. de Galdeano à Saragosse.

Ainsi que le 17me siècle peut être considéré comme une période de création pour la Mathématique, notre siècle sera sans doute l'époque de la systématisation des concepts de cette science.

La théorie des quantités imaginaires entra dans le domaine fécond des applications à la théorie des fonctions, quand Cauchy, d'après l'interprétation géométrique due à Argand et Buée, publia son mémoire *Sur les quantités géométriques*, et quand Riemann signala les nouvelles allures qu'a suivies l'école allemande.

D'un autre côté l'Algèbre s'avance appuyée sur la théorie des substitutions sous les puissants efforts de Lagrange, Abel et Galois.

De même les fonctions elliptiques, la théorie des nombres, l'Algèbre de la logique, la Géométrie dans l'école de Monge sous l'influence des Carnot, Poncelet, Chasles et Staudt et les théories créées par Bellavitis, Hamilton et Grassmann, fondateurs de la géométrie vectorielle, sont des branches appartenant à la première moitié du 19me siècle.

L'évènement inauguré par Lobatschewsky et poursuivi par Riemann, qui a mis les géométries non-euclidiennes en face de l'euclidienne et qui a conduit à la nouvelle doctrine de l'hyper-espace, avec le travail d'unification dû à M. Sophus Lie, sous le fécond concept des groupes de substitutions, arrive jusqu'à la considération des familles des mouvements non-euclidiens dans une variété à n dimensions.

Nous pourrons suivre ce travail d'unification dans les ouvrages publiés, ainsi que dans les procédés de notre intelligence, et nous verrons que la Mathématique agit dans ses procédés par une suite de projections.

La catégorie de la raison nommée quantité s'est projetée dans ses variétés, caractérisant, par la prédominance de chacune, les diverses branches de cette science.

Une première projection produit les jugements de subordination, supraordination, égalité, qui donnent le développement de l'Algèbre de la logique, incessamment accrue dès Boole jusqu'à Schrœder.

La combinatoire, développée dans la théorie des substitutions, prédomine aussi dans les modernes traités de la théorie des nombres et de l'Algèbre ordinaire ainsi que dans celle des formes.

L'Arithmétique, dès l'unification produite par l'algorithme de la congruence, compte les travaux de Dedekind, fondés sur le concept de corps fini du degré n, outre sa doctrine des idéaux, modification de celle de Kummer sur les nombres idéaux, les écrits de M. Cantor fondés sur le concept de puissance ou nombre cardinal d'un ensemble, et la relation univoque entre les éléments correspondants de deux ensembles, c'est-à-dire l'image ou projection (Abbildung) $\varphi(s)$, selon M. Dedekind d'un élément s, tout ce qui est développé dans les intéressants ouvrages de MM. Dini et Tannery sur les fonctions et de M. Betazzi sur les grandeurs (grandezze), qui ont donné un nouvel élan à la théorie des nombres irrationnels, dont MM. Hermite et Lindemann ont placé le dernier étage dans les nombres transcendants.

Sous ces vues sont aussi écrits des ouvrages tels que Lehrbuch der Arithmetik und Algebra de M. Schrœder et Elemente der Arithmetik und Algebra de M. Fr. Meyer (Halle).

Nous avons déjà dit que l'Algèbre est fondée sur la théorie combinatoire des substitutions, et dans les ouvrages de Lagrange, Abel et Galois nous trouvons la correspondance continuelle des fonctions qui ont une certaine relation avec les véritables inconnues des. équations et les groupes des substitutions.

Mais une nouvelle branche s'entrelace avec celle-ci, celle qu'on a appelée l'Algèbre des formes, caractérisée par le concept d'invariance.

La liaison de cette branche avec toutes les branches mathématiques est nécessaire au moment où nous voyons que la propriété d'invariance de certaines fonctions a lieu, lorsqu'on a fait des transformations linéaires entre les variables.

Pour abréger, nous dirons que la nouvelle Algèbre a fourni à la Géométrie analytique des principes qui lui manquaient, moyennant les théories des invariants et des covariants.

Nous voyons originairement ces développements dans les excellents traités de MM. Salmon et Clebsch, et plus encore dans les cinquième et sixième mémoires Upon Quantics de Cayley, où l'on fait la traduction des relations anharmoniques, d'homographie et d'involution dans le langage de l'Algèbre des formes, et où l'on établit la Géométrie métrique projective rapportée à l'Absolu, après avoir rapporté les Géométries à une et à deux dimensions aux formes quadriques binaires et ternaires.

Poursuivant l'énumération des analogies qui conduisent à l'unification des concepts, nous trouvons que les propriétés restant invariantes pour une classe quelconque de transformations, dépendent du caractère du groupe de celles-ci, c'est-à-dire, de l'ensemble des transformations, qui se reproduisent, moyennant une quelconque de ses combinaisons, ce que nous avons vu dans d'autres branches.

Les transformations des formes les unes dans les autres, ou le problème de l'équivalence, étendu aussi aux faisceaux de formes, la représentation de ceux-ci à l'aide d'un ensemble de faisceaux élémentaires, la transformation d'une forme en elle-même, la réduction des formes à la forme type, sont des questions qui montrent combien contribue à l'unification de la science le concept de groupe de substitutions.

Le problème de la transformation des formes lié avec l'égalité de certains invariants et covariants conduit à une correspondance entre les groupes finis et les formes et les mouvements dans l'espace, considérations qui ont conduit M. Klein à établir une théorie générale de l'équation du cinquième degré dans ses Vorlesungen über das Ikosaëder und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades.

La recherche d'un domaine fini pour l'ensemble des formes déduites des opérations invariantes de certaines formes, la détermination du système de formes fondamentales, questions mises en lumière par M. Gordan, et les synthèses faites par MM. Salmon, Serret et Weber dans leurs notables traités témoignent combien s'est avancée cette branche de l'Analyse.

Dans la Géométrie nous voyons comment la transformation des figures à l'aide des projections, faite par Monge, est suivie de la tentative de Carnot, pour établir des corrélations entre les figures, et des travaux de Poncelet sur le principe de continuité, confirmé par sa doctrine des cordes supplémentaires et des cordes idéales, et sur les éléments à l'infini qu'il introduit par la méthode de projections.

La théorie de la polarité germe de celles de la dualité et de la corrélation, employées par Gergonne, Steiner et Chasles. L'unification qu'introduit ce dernier géomètre sous le concept du rapport anharmonique qui lia la Géométrie moderne avec la doctrine des porismes d'Euclide; la géométrie de situation exposée par Staudt indépendamment des considérations métriques et unifiée par l'introduction des éléments impropres et les deux procédés de la projection et de la section; l'application de l'imaginaire faite par Plücker dans la définition des foyers, et l'élargissement de la Géométrie par le nouveau concept des complexes;

le concept des droites isotropes dont M. Laguerre a fait des indications intéressantes: tout cela montre combien ces représentations ont fourni à la Géométrie des moyens d'unification et de simplicité dans ses procédés et dans son ensemble.

Un autre ordre d'idées est celui qu'ont importé Cauchy et Riemann par la correspondance entre les fonctions et les points d'un plan, le premier considérant deux points dont les afixes sont la variable et une fonction de celle-ci et le deuxième sa surface, célèbre par ses continuelles applications à l'étude des fonctions, et à cette correspondance nous aurons à ajouter celle de M. Cremona qui conduit à la surface homoloide ou représentable point par point dans un plan, aux relations unidéterminatives qui changent une courbe dans une autre, et nous citerons encore l'important théorème établi par Riemann de la conservation du genre d'une courbe dans toutes les transformations unidéterminatives.

Comme résumé de ces considérations sur l'adjonction de l'imaginaire et de l'infini ainsi que sur l'idée de correspondance, nous pourrons placer à côté de A sixth Memoir upon Quantic de Cayley, qui établit la projectivité de la Géométrie métrique à l'aide de l'adjonction de l'absolu, le mémoire de M. Klein: Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen et les travaux de M. Lie exposés dans ses récentes publications.

Nous ajouterons que cette unification donnée à la Géométrie dans ses branches supérieures peut s'introduire dans la branche élémentaire au bénéfice de l'enseignement, parce que l'admission du postulat permet d'introduire une correspondance univoque qui facilitera les démonstrations. Les éléments pourront de même se compléter par les nouveaux développements de la Géométrie récente ou du triangle, continuant l'initiative de M. Casey dans son intéressant ouvrage: A sequel to Euclid.

Aux travaux de Lobatschewsky, Bolyai, Riemann, Helmholtz qui ont fondé la pangéométrie nous aurons à ajouter ceux des MM. Beltrami, Frischauf, Tilly, Flye St. Marie, Killing, Gérard, Neuberg, Klein qui ont conduit à la classification, due à ce dernier géomètre, des géométries parabolique, hyperbolique et elliptique.

Nous citerons encore le mémoire de Riemann: Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen qui souleva la question des dimensions de l'espace et élargit le champ de la Géométrie et de l'Analyse avec la généralisation qui porta la Géométrie à n dimensions dont la littérature est aujourd'hui si riche; nous rappelons les travaux de M. Schlegel sur les polyèdres quadridimensionels, l'ouvrage classique de M. Killing, le traité sur l'Analyse situs de M. Poincaré, les intéressantes connexions établies par M. Picard dans ses traités sur les Fonctions algébriques et sur l'Analyse, ce dernier en rapport avec les théories de Galois, et s'approchant aux investigations de M. Lie.

Nous terminerons en rappelant les très importants recueils: Bulletin des Sciences mathématiques, Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, Synopsis der höheren Mathematik de M. Johann G. Hagen, les mémoires présentés au Congrès de Chicago et publiés par la Société américaine des mathématiciens et surtout, l'ouvrage international poursuivi par la Commission du Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques dont le but est l'unification de la science mathématique qui jaillira de la classification des travaux publiés pendant ce siècle.

3. Sektion: Geometrie.

Einige neue Eigenschaften des quadratischen Strahlenkomplexes.

Von

Th. Reye in Strafsburg.

Die allgemeinen quadratischen Strahlenkomplexe, meine Herren, haben vor 20—30 Jahren eine Reihe hervorragender Mathematiker lebhaft beschäftigt. Den Anstofs zu ihrem Studium gab bekanntlich seit 1865 Julius Plücker durch seine Linien- oder Strahlenkoordinaten. Plücker selbst hat in seinem nachgelassenen Werke, das 1868/69 von Herrn F. Klein herausgegeben wurde, aufser den schon durch Moebius bekannten linearen die quadratischen Komplexe untersucht und insbesondere die in ihnen enthaltenen Komplexflächen vierten Grades eingehend erörtert. Aber schon war ihm Battaglini zuvorgekommen, welcher, angeregt durch Plücker, 1866 Untersuchungen über einen sehr allgemeinen Komplex zweiten Grades, den sog. harmonischen, veröffentlichte. Im Jahre 1868 erschien dann die wichtige Inaugural-Dissertation des Herrn Klein, worin die Gleichung des allgemeinen quadratischen Komplexes auf eine sehr einfache kanonische Form zurückgeführt wurde. Hieraus ergaben sich ohne weiteres die sechs linearen Fundamental-Komplexe Klein's, nach denen der quadratische Komplex zu sich selbst reciprok-polar ist.

Von 1869 bis 1872 folgten mehrere einschlägige Abhandlungen der Herren Klein und Lie; u. a. entdeckten die beiden Forscher gemeinschaftlich, dafs die asymptotischen oder Haupttangenten-Kurven der Kummer'schen Fläche vierten Grades, die als Singularitätenfläche in der Theorie des quadratischen Komplexes eine wichtige Rolle spielt, algebraische Raumkurven 16. Ordnung sind. 1873/74 lehrte uns Herr Weiler nicht weniger als 49 verschiedene Gattungen quadratischer Komplexe unterscheiden. Caporali zeigte 1878, wie der quadratische

Komplex eindeutig auf den Punktraum abgebildet werden kann, und Herr Frdr. Schur machte 1879 den Komplex durch eine projektive Erzeugung der synthetischen Geometrie zugänglich und wies ∞^4 Flächen zweiten Grades nach, die je eine Schar von Komplexstrahlen enthalten.

Leider gestattet die kurz bemessene Zeit mir nicht, die zahlreichen wichtigen Arbeiten noch hervorzuheben, die von anderen Autoren über die quadratischen Komplexe veröffentlicht worden sind. Diese Strahlenkomplexe sind so eingehend und von so verschiedenen Seiten untersucht worden, dafs man wohl zu der Ansicht gelangen kann, alle ihre wichtigeren Eigenschaften seien nunmehr bekannt, das Thema sei völlig erschöpft. Auch ist es ja von ihnen in den mathematischen Zeitschriften seit mehr als 10 Jahren auffallend still geworden.

Und dennoch halte ich jene Ansicht für unrichtig, glaube vielmehr, dafs hinsichtlich des quadratischen Komplexes noch gar manches zu entdecken übrig bleibt. So war uns bisher von invarianten und sonstigen Beziehungen des Komplexes zu algebraischen Flächen, insbesondere zu Flächen zweiten Grades, so gut wie nichts bekannt, abgesehen von den ∞^4 Flächen des Herrn Schur. Noch auffälliger war mir bei dem Studium des letzten, von diesem Komplexe handelnden Bandes von R. Sturm's „Liniengeometrie" die Wahrnehmung, dafs in der Litteratur die Tetraeder, deren Kanten aus je sechs Strahlen des quadratischen Komplexes bestehen, bisher ganz unbeachtet geblieben sind. Solcher „Komplextetraeder" giebt es, wie leicht einzusehen, sechsfach unendlich viele. Ein beliebiger Punkt ist Eckpunkt von ∞^3 Komplextetraedern; in diesen liegen ihm die Berührungsebenen einer Fläche zweiten Grades gegenüber, und zwar jede der Ebenen in ∞^1 Tetraedern, deren übrige Eckpunkte auf einem Kegelschnitte liegen. Eine beliebige Ebene ist Seitenfläche von ∞^3 Komplextetraedern, in denen ihr die Punkte einer Fläche zweiter Ordnung, jeder Punkt in ∞^1 Tetraedern, gegenüberliegen. Ein beliebiger Komplexstrahl ist Kante von ∞^3 Komplextetraedern; in diesen liegen ihm die Strahlen einer Kongruenz zweiter Ordnung und zweiter Klasse gegenüber, und zwar jeder Strahl in ∞^1 Tetraedern, deren übrige Kanten auf einer Fläche vierten Grades liegen. Ich komme auf die Komplextetraeder hernach noch einmal zurück.

In einer meiner analytisch-geometrischen Publikationen v. J. 1876 (in Crelle's Journal 82 S. 192) ergab sich beiläufig ein merkwürdiger Zusammenhang des quadratischen Strahlenkomplexes mit gewissen quadratischen Mannigfaltigkeiten von ∞^8 Flächen zweiten Grades. Auf diese Flächen, die mit dem Komplexe kovariant sind, und auf die zugehörigen Eigenschaften des quadratischen Komplexes möchte ich Ihre

Aufmerksamkeit zu lenken mir erlauben. Doch schicke ich der leichteren Verständigung halber einige Bemerkungen über apolare Flächen zweiten Grades voraus.

Hat eine veränderliche Ebene ξ in homogenen Punktkoordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 die Gleichung:

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0,$$

so können wir eine Fläche Φ^2 zweiter Klasse und eine Fläche F^2 zweiter Ordnung darstellen durch:

$$a_{11}\xi_1^2 + 2a_{12}\xi_1\xi_2 + \cdots + 2a_{34}\xi_3\xi_4 + a_{44}\xi_4^2 = 0$$

und

$$\alpha_{11}x_1^2 + 2\alpha_{12}x_1x_2 + \cdots + 2\alpha_{34}x_3x_4 + \alpha_{44}x_4^2 = 0.$$

Diese beiden Flächen aber nenne ich apolar zu einander und sage, die Fläche F^2 zweiter Ordnung stützt oder trägt die Fläche Φ^2 zweiter Klasse, und Φ^2 ruht oder stützt sich auf F^2, wenn die Koeffizienten ihrer Gleichungen der bilinearen Gleichung:

$$a_{11}\alpha_{11} + 2a_{12}\alpha_{12} + \cdots + 2a_{34}\alpha_{34} + a_{44}\alpha_{44} = 0$$

genügen (vgl. Crelle 82, S. 1 und 64).

Zu einer Fläche F^2 oder Φ^2 zweiten Grades sind demnach ∞^8 Flächen Φ^2 resp. F^2 apolar, die eine lineare Mannigfaltigkeit bilden. Ein F^2-Büschel enthält nur eine Fläche, die zu einer gegebenen Φ^2 apolar ist, falls nicht alle seine Flächen diese Φ^2 stützen. Ist ein F^2-Büschel projektiv zu einer Φ^2-Schar, so enthält er i. a. zwei Flächen F^2, die ihre homologen Flächen Φ^2 stützen. Eine Fläche F^2 trägt jeden zweifachen Punkt, der auf ihr liegt, und jedes Punktepaar, dessen Punkte konjugiert sind bezüglich der F^2; eine Fläche Φ^2 aber stützt sich auf jede sie berührende zweifache Ebene und auf jedes Ebenenpaar, dessen Ebenen nach Φ^2 konjugiert sind. Dieses alles folgt leicht aus der bilinearen Bedingungsgleichung.

Jede Fläche F^2 zweiter Ordnung, die einem Poltetraeder (tetraèdre conjugué) einer Fläche Φ^2 zweiter Klasse umgeschrieben ist, stützt diese Φ^2 (vgl. Crelle 78, S. 345), und jede Φ^2, die einem Poltetraeder einer F^2 eingeschrieben ist, ruht auf F^2. Einer F^2 aber, die eine Φ^2 stützt, können dreifach unendlich viele Poltetraeder von Φ^2 eingeschrieben, und der Φ^2 können zugleich ∞^3 Poltetraeder von F^2 umgeschrieben werden. Ist Φ^2 eine Kurve zweiter Klasse, so können den zu ihr apolaren Flächen F^2 je ∞^1 Poldreiecke der Kurve eingeschrieben werden, und die Kurve stützt sich auf die in ihrer Ebene liegenden Schnittkurven dieser F^2. Ist F^2 ein Kegel zweiter Ordnung, so können den zu F^2 apolaren Φ^2 je ∞^1 Poldreikante des Kegels umgeschrieben werden, und der Kegel ist zu den mit ihm konzentrischen Tangentenkegeln dieser Φ^2 apolar.

Diese Sätze nun können wir auf die ∞^3 Kegel zweiter Ordnung und die ∞^3 Kurven zweiter Klasse anwenden, die in einem quadratischen Komplexe enthalten sind. Der Komplex braucht nicht der allgemeine zweiten Grades zu sein; er kann vielmehr einzelne und sogar unendlich viele Doppelstrahlen haben und in einem sehr speziellen Falle aus den Tangenten eines Ellipsoides, Paraboloides oder Hyperboloides bestehen. Wir setzen nur voraus, dafs die Kegel des Komplexes nicht alle eine Fläche Φ^2 zweiter Klasse stützen und insbesondere nicht alle durch einen Punkt gehen, und dafs seine ebenen Komplexkurven nicht alle auf einer Fläche F^2 zweiter Ordnung ruhen und insbesondere nicht eine und dieselbe Ebene berühren. Dann gelten für den quadratischen Komplex u. a. folgende Sätze:

Die Mittelpunkte der Komplexkegel, die eine gegebene Fläche Φ^2 zweiter Klasse stützen, d. h. Poltetraedern von Φ^2 umgeschrieben sind, liegen auf einer Fläche F^2 zweiter Ordnung. Und umgekehrt: Die Komplexkegel, deren Mittelpunkte auf einer beliebigen F^2 liegen, stützen eine Φ^2. Von den auf F^2 liegenden ∞^1 singulären Punkten zerfallen die Komplexkegel in je zwei Ebenen, die konjugiert sind in bezug auf Φ^2. Wenn die Fläche F^2 einen Flächenbüschel beschreibt, so beschreibt die entsprechende Fläche Φ^2 eine Flächenschar; diese Schar aber ist zu dem Flächenbüschel projektiv und enthält deshalb i. a. zwei Flächen Φ^2, die auf ihren entsprechenden Flächen F^2 ruhen, d. h. Poltetraedern der entsprechenden F^2 eingeschrieben sind. Überhaupt giebt es demnach ∞^8 Flächen F^2, die ihre entsprechenden Flächen Φ^2 stützen, und zwar bilden sie ein „F^2-System“, die ∞^8 entsprechenden Φ^2 aber ein „Φ^2-Gewebe“ zweiten Grades. Dieses quadratische Φ^2-Gewebe achter Stufe enthält alle ∞^3 zweifachen Punkte des Raumes und die ∞^5 Punktepaare, die auf je einem Strahle des Komplexes liegen; das quadratische F^2-System achter Stufe aber enthält u. a. alle Kegel des Komplexes.

Die ∞^8 Flächen des quadratischen Φ^2-Gewebes stehen zu dem quadratischen Komplexe in der invarianten Beziehung, dafs unter ihren Poltetraedern je ∞^1 Komplextetraeder vorkommen, also solche, deren Kanten aus Komplexstrahlen bestehen. Den ∞^8 Flächen des quadratischen F^2-Systemes aber können je ∞^1 Komplextetraeder eingeschrieben werden. Das quadratische Φ^2-Gewebe enthält alle die ∞^3 Flächen zweiter Klasse, die ein beliebiges der ∞^6 Komplextetraeder zum Poltetraeder haben.

Eine beliebige Fläche F^2 zweiter Ordnung ist bezüglich des quadratischen F^2-Systemes ∞^8 anderen Flächen $F_1{}^2$ konjugiert, d. h. sie ist von ihnen harmonisch getrennt durch je zwei Flächen des Systemes, die mit ihr in einem F^2-Büschel liegen. Ebenso ist eine beliebige Fläche Φ^2 zweiter Klasse ∞^8 anderen $\Phi_1{}^2$, die eine lineare Mannigfaltigkeit bilden, konjugiert bezüglich des quadratischen Φ^2-Gewebes. Sind nun F^2 und Φ^2 zwei homologe, durch den quadratischen Komplex einander zugewiesene Flächen, so stützt F^2 alle diese Flächen $\Phi_1{}^2$, die der Φ^2 konjugiert sind bezüglich des quadratischen Φ^2-Gewebes, und zugleich ruht Φ^2 auf allen den ∞^8 Flächen $F_1{}^2$, die der F^2 konjugiert sind bezüglich des quadratischen F^2-Systemes. Ich nenne F^2 die Polare von Φ^2 bezüglich des Φ^2-Gewebes, und Φ^2 die Polare von F^2 bezüglich des quadratischen F^2-Systemes. Von zwei bezüglich des Systemes konjugierten Flächen F^2, $F_1{}^2$ stützt also jede die Polare der anderen; ihre Polaren Φ^2, $\Phi_1{}^2$ aber sind bezüglich des quadratischen Φ^2-Gewebes konjugiert, und jede von ihnen ruht auf der Polare der anderen bezüglich des Gewebes. Sich selbst konjugiert sind nur die ∞^8 Flächen des quadratischen F^2-Systemes bezw. Φ^2-Gewebes, und nur diese Flächen sind zu ihren entsprechenden apolar. Jede der beiden Flächenmannigfaltigkeiten bestimmt die andere und zugleich den quadratischen Strahlenkomplex.

Um nun diese Eigenschaften des quadratischen Komplexes zu begründen, gehen wir aus von folgenden, a. a. O. (Crelle 82, S. 193) bewiesenen Sätzen:

> *Durch den quadratischen Strahlenkomplex ist ein quadratisches Φ^2-Gewebe achter Stufe nebst dem zugehörigen quadratischen F^2-System achter Stufe bestimmt. Das Φ^2-Gewebe enthält alle zweifachen Punkte des Raumes und alle auf je einem Komplexstrahle liegenden Punktepaare, das F^2-System aber enthält u. a. alle Kegel des Komplexes. Jeder Komplexkegel ist die Polare seines Mittelpunktes bezüglich des Φ^2-Gewebes.**)

---

*) Das quadratische Φ^2-Gewebe hat die Gleichung:

$$(1)\qquad \sum C_{ik,lm} \begin{vmatrix} a_{il} & a_{im} \\ a_{kl} & a_{km} \end{vmatrix} = 0, \qquad (i, k, l, m = 1, 2, 3, 4),$$

wenn der quadratische Strahlenkomplex und eine beliebige Fläche Φ^2 zweiter Klasse dargestellt werden durch:

$$(2)\qquad \sum C_{ik,lm} \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_k & y_k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_l & y_l \\ x_m & y_m \end{vmatrix} = 0$$

und

$$(3)\qquad \sum a_{ik} \xi_i \xi_k = 0.$$

Hierin bezeichnen $a_{ik} = a_{ki}$ und $C_{ik,lm} = C_{lm,ik} = -C_{ki,lm}$ Konstante.

Wenn also eine Fläche Φ^2 zweiter Klasse sich auf einen zweifachen Punkt reduziert, so geht ihre Polare F^2 bezüglich des quadratischen Φ^2-Gewebes über in den Komplexkegel dieses Punktes. Mit anderen Worten: Der zweifache Punkt ist allen auf seinem Komplexkegel ruhenden Flächen $\Phi_1{}^2$ zweiter Klasse konjugiert bezüglich des Φ^2-Gewebes, und durch ihn gehen alle Polaren $F_1{}^2$ dieser Flächen $\Phi_1{}^2$. Die Polare F^2 einer beliebigen Φ^2 bezüglich des Gewebes enthält demnach die Mittelpunkte aller Komplexkegel, auf denen Φ^2 ruht, d. h. denen Poltetraeder von Φ^2 eingeschrieben werden können. Von dieser F^2 aber ist Φ^2 die Polare bezüglich des quadratischen F^2-Systemes (Crelle 82, S. 184); und wenn Φ^2 eine Flächenschar beschreibt, so beschreibt F^2 einen Flächenbüschel, der zu der Schar projektiv ist (Crelle 82, S. 178). Die von uns aufgestellten Eigenschaften des quadratischen Komplexes sind damit bewiesen bis auf seine invarianten Beziehungen zu den ∞^8 Flächen des F^2-Systemes und des Φ^2-Gewebes, auf die ich noch zurückkommen werde.

Lassen Sie mich zunächst die naheliegende Frage beantworten: Wie konstruiert man mit Hilfe des quadratischen Komplexes zu einer beliebigen Fläche Φ^2 zweiter Klasse die entsprechende Fläche F^2 zweiter Ordnung?

Die Kegel des quadratischen Komplexes, bezüglich deren zwei beliebige Punkte P, Q konjugiert sind, stützen das Punktepaar P, Q, und ihre Mittelpunkte liegen demnach auf einer durch P und Q gehenden Fläche zweiter Ordnung F^2, wie schon Battaglini gefunden hat. Diese Polare F^2 des Punktepaares aber enthält die biquadratischen Schnittlinien von je zwei Komplexkegeln, deren Mittelpunkte auf der Geraden PQ liegen und durch P und Q harmonisch getrennt sind; denn die Komplexkegel der Punkte dieser Schnittlinien trennen P

Die Fläche Φ^2 zerfällt in zwei Punkte x, y, wenn:

$$2a_{ik} = x_i y_k + x_k y_i \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4) \tag{4}$$

ist; durch die Substitution (4) aber geht (1) in (2) über, und das Φ^2-Gewebe enthält demnach alle auf je einem Komplexstrahle liegenden Punktepaare und insbesondere alle zweifachen Punkte. Bezüglich des Gewebes (1) sind zwei Flächen zweiter Klasse konjugiert, wenn ihre Koordinaten a_{ik} und b_{ik} der Gleichung:

$$\sum C_{ik,lm} \begin{vmatrix} a_{il} & b_{im} \\ a_{kl} & b_{km} \end{vmatrix} + \sum C_{ik,lm} \begin{vmatrix} b_{il} & a_{im} \\ b_{kl} & a_{km} \end{vmatrix} = 0 \tag{5}$$

genügen. Reduzieren sich die beiden Flächen auf zweifache Punkte x, y, so wird $a_{ik} = x_i x_k$ und $b_{ik} = y_i y_k$; die Gleichung (5) aber geht dann in (2) über, und die Polare des zweifachen Punktes x fällt folglich mit dessen Komplexkegel zusammen. Damit sind die obigen Sätze nochmals bewiesen.

von Q harmonisch. Überhaupt schneiden sich solche Komplexkegel, deren Mittelpunkte in einer geraden Involution einander zugeordnet sind, paarweise in Linien, deren Ort eine F^2 ist, mögen nun die Doppelpunkte P, Q der Involution reell oder imaginär sein. Damit ist von der Polare F^2 eines Punktepaares P, Q eine Konstruktion gegeben.

Wenn das Punktepaar P, Q auf einem Komplexstrahle liegt, so geht seine Polare F^2 durch diesen Strahl, trägt also das Paar und ist in dem quadratischen F^2-System achter Stufe enthalten; denn in diesem Falle bestehen jene auf ihr liegenden biquadratischen Linien aus dem Strahle PQ und je einer kubischen Raumkurve. Dafs das quadratische Φ^2-Gewebe achter Stufe jedes auf einem Komplexstrahle liegende Punktepaar enthält, folgt hieraus wiederum. Ist PQ ein singulärer Komplexstrahl, so ist F^2 ein Kegel des F^2-Systemes; denn alsdann berühren die durch PQ gehenden Komplexkegel sich und die zugehörige singuläre Ebene längs PQ, jene biquadratischen Schnittlinien zerfallen in die zweifache Gerade PQ und je einen Kegelschnitt, und ihr geometrischer Ort F^2 berührt die singuläre Ebene längs PQ. Das quadratische F^2-System enthält demnach einen Bündel von ∞^2 Kegeln, die sich längs PQ berühren, und unter ihnen ∞^1 Ebenenpaare, die aus der singulären und je einer Ebene einer gewissen Geraden bestehen.

Ist Φ^2 eine beliebige Kurve zweiter Klasse, so liegen auf ihrer Polare F^2 die Mittelpunkte aller Komplexkegel, denen Poldreiecke der Kurve eingeschrieben werden können. Insbesondere liegen also auf F^2 die acht Schnittpunkte von je drei Komplexkegeln, deren Mittelpunkte ein Poldreieck von Φ^2 bilden. Wenn die drei nach Φ^2 konjugierten Mittelpunkte oder wenn zwei von ihnen ihre Lage ändern, so beschreiben die Schnittpunkte der drei Komplexkegel die Fläche F^2 bezw. eine biquadratische Raumkurve auf F^2. Eine Konstruktion dieser Polare F^2 ist damit gegeben.*)

Die Fläche F^2 enthält die Schnittpunkte von je zwei Komplexstrahlen, die bezüglich der Kurve Φ^2 konjugiert sind. Sie ist somit einem Poldreieck von Φ^2 umgeschrieben, wenn dessen drei Seiten aus Komplexstrahlen bestehen. In diesem Falle also stützt F^2 die Kurve Φ^2 und ist in dem quadratischen F^2-System achter Stufe enthalten; Φ^2 aber wird eine singuläre Fläche des quadratischen Φ^2-Gewebes. Zugleich stützt der Kegelschnitt Φ^2 die Komplexkurve seiner Ebene, weil

*) Die Mittelpunkte aller gleichseitigen Komplexkegel liegen, beiläufig bemerkt, auf einer Fläche zweiter Ordnung, nämlich auf der Polare des unendlich fernen imaginären Kugelkreises.

dieser Kurve eines seiner Poldreiecke umgeschrieben ist, und weil *ihm* daher Poldreiecke der Komplexkurve eingeschrieben werden können.*) Das quadratische Φ^2-Gewebe achter Stufe enthält also jeden Kegelschnitt, der irgend eine Komplexkurve stützt, d. h. einem Poldreieck der Komplexkurve umgeschrieben ist; und jede nicht zerfallende Kurve des Gewebes stützt die in ihrer Ebene liegende Komplexkurve. Damit sind die ∞^7 singulären Flächen des quadratischen Φ^2-Gewebes bestimmt, in jeder Ebene ∞^4.

Ist Φ^2 eine Komplexkurve, so liegt sie auf ihrer Polare F^2, weil die Komplexkegel ihrer Punkte durch je eine ihrer Tangenten gehen und die Kurve stützen. Von den ∞^3 Komplexkurven sind nur die ∞^2 zerfallenden in dem quadratischen Φ^2-Gewebe enthalten; ihre Polaren sind Kegel des quadratischen F^2-Systemes.

Die Polare einer beliebigen Fläche Φ^2 zweiter Klasse geht durch jeden Schnittpunkt von vier Komplexkegeln, deren Mittelpunkte A, B, C, D ein Poltetraeder von Φ^2 bilden; denn der Komplexkegel eines solchen Schnittpunktes ist dem Poltetraeder umgeschrieben, stützt also die Fläche Φ^2. Allerdings haben vier Komplexkegel i. a. keinen Punkt gemein; aber wir können das Poltetraeder $ABCD$ von Φ^2 so verändern, dafs ihm ein Komplexkegel umgeschrieben werden kann. Wir lassen die nach Φ^2 konjugierten Eckpunkte A, B auf einer Geraden g_1, die Eckpunkte B, D aber auf deren Polare g_2 je eine Involution konjugierter Punkte beschreiben. Dann beschreibt die Schnittlinie der Komplexkegel von A und B (resp. von C und D), wie vorhin bewiesen wurde, eine Fläche $F_1{}^2$ (resp. $F_2{}^2$) zweiter Ordnung, nämlich die Polare des Punktepaares, welches die Gerade g_1 (resp. g_2) mit Φ^2 gemein hat. Die Schnittpunkte von $F_1{}^2$ und $F_2{}^2$ aber sind die Mittelpunkte von Komplexkegeln, denen je ein Poltetraeder $ABCD$ von Φ^2 mit den Gegenkanten g_1, g_2 eingeschrieben ist. Folglich schneiden sich die Polaren der Punktepaare, welche irgend zwei nach Φ^2 polare Gerade mit der Fläche Φ^2 gemein haben, auf der Polare F^2 von Φ^2. Eine Konstruktion der Polare einer beliebigen Fläche zweiter Klasse ist damit gegeben.

Ist A der Pol einer Ebene α in bezug auf Φ^2, so schneiden sich der Komplexkegel von A und die Polare des in α liegenden Kegelschnittes von Φ^2 in einer biquadratischen Raumkurve, die gleichfalls auf der Polare von Φ^2 liegt. Der Beweis ist dem eben geführten analog.

Wenn eine Fläche Φ^2 zweiter Klasse irgend ein Komplextetraeder zum Poltetraeder hat, so ist sie in dem quadratischen Φ^2-Gewebe, und

*) Vgl. Reye, Geometrie der Lage, 3. Aufl. I, S. 223; 4. Aufl. I, Anhang.

ihre Polare F^2 ist in dem quadratischen F^2-System achter Stufe enthalten; denn ihre Polare ist dem Poltetraeder umgeschrieben, weil die Komplexkegel der vier Eckpunkte es sind, und sie stützt demnach die Fläche Φ^2. Das quadratische Φ^2-Gewebe enthält also die lineare Mannigfaltigkeit der ∞^3 Flächen zweiter Klasse, die ein beliebiges Komplextetraeder zum Poltetraeder haben, darunter dessen vier Eckpunkte. Das quadratische F^2-System aber enthält die ∞^3 dem Komplextetraeder umgeschriebenen Polaren dieser Φ^2, und diese Polaren bilden ein F^2-Gebüsch, welches die Komplexkegel der vier Eckpunkte enthält und durch sie linear bestimmt ist.

Nun giebt es ja ∞^6 Komplextetraeder, und diese sind Poltetraeder von je ∞^3 Flächen zweiter Klasse, die alle in dem quadratischen Φ^2-Gewebe enthalten sind. Weil aber das Gewebe nicht aus ∞^9, sondern nur aus ∞^8 Flächen besteht, so erhalten wir jede seiner Flächen ∞^1-mal mittelst der Komplextetraeder. Die Flächen des quadratischen Φ^2-Gewebes haben demnach je ∞^1 Komplextetraeder zu Poltetraedern, und die Flächen des quadratischen F^2-Systemes sind je ∞^1 Komplextetraedern umgeschrieben. Damit sind auch die invarianten Beziehungen des quadratischen Komplexes zu diesen ∞^8 Flächen zweiten Grades bewiesen.

Ihnen, meine Herren, wird ohne weiteres einleuchten, daſs der quadratische Komplex auſser den nunmehr bewiesenen auch die reciproken Eigenschaften besitzt. Es gelten also für ihn auch die folgenden Sätze:

Die Ebenen solcher Komplexkurven, die auf einer beliebig gegebenen Fläche F^2 zweiter Ordnung ruhen, umhüllen eine Fläche Φ^2 zweiter Klasse. Und umgekehrt: Die Komplexkurven, deren Ebenen eine beliebige Fläche Φ^2 zweiter Klasse berühren, ruhen auf einer Fläche F^2 zweiter Ordnung. Wenn die Fläche Φ^2 eine Flächenschar beschreibt, so beschreibt die entsprechende Fläche F^2 einen Flächenbüschel, und umgekehrt; dieser F^2-Büschel aber ist zu der Flächenschar projektiv und enthält i. a. zwei Flächen F^2, die ihre entsprechenden Flächen Φ^2 stützen, d. h. Poltetraedern der entsprechenden Φ^2 umgeschrieben sind. Überhaupt giebt es ∞^8 Flächen F^2, die ihre entsprechenden Flächen Φ^2 stützen, und zwar bilden sie ein System zweiten Grades. Dieses quadratische F^2-System achter Stufe aber enthält alle ∞^3 zweifachen Ebenen des Raumes und die ∞^5 Ebenenpaare, aus deren Doppellinien der quadratische Komplex besteht. Den Flächen des F^2-Systemes entsprechen die Flächen Φ^2 eines quadratischen Φ^2-Gewebes achter Stufe und dieses Gewebe enthält jede Fläche zweiter Klasse, die auf ihrer entsprechenden F^2 ruht, insbesondere jede ebene Komplexkurve.

Von den vorhin besprochenen Flächenmannigfaltigkeiten zweiten Grades sind diese beiden verschieden; doch bestimmen sie einander und den quadratischen Komplex in analoger Weise wie jene, und ihre ∞^8 Flächen sind wiederum mit dem Komplexe kovariant. Die ∞^8 Flächen des quadratischen Φ^2-Gewebes sind nämlich je ∞^1 Komplextetraedern eingeschrieben, und die Flächen des quadratischen F^2-Systemes haben je ∞^1 Komplextetraeder zu Poltetraedern. Die nicht singulären Flächen dieses F^2-Systemes sind mit denen des vorhin besprochenen quadratischen Φ^2-Gewebes identisch; aufser ihnen enthält das System noch ∞^7 Kegel zweiter Ordnung, ∞^5 Ebenenpaare und ∞^3 zweifache Ebenen, das Gewebe dagegen ∞^7 Kurven zweiter Klasse, ∞^5 Punktepaare und ∞^3 zweifache Punkte.

Von den beiden jetzt einander entsprechenden Flächen F^2, Φ^2 ist Φ^2 die Polare von F^2 bezüglich des quadratischen F^2-Systemes, und F^2 die Polare von Φ^2 bezüglich des zugehörigen quadratischen Φ^2-Gewebes in demselben Sinne wie vorhin. Von zwei bezüglich des Gewebes konjugierten Flächen Φ^2, $\Phi_1{}^2$ ruht also jede auf der Polare der anderen, und ihre Polaren F^2, $F_1{}^2$ sind konjugiert bezüglich des F^2-Systemes. Sich selbst konjugiert sind wieder nur die ∞^8 Flächen des F^2-Systemes und des Φ^2-Gewebes.

Das ist es, meine Herren, was ich Ihnen mitteilen wollte.*) Haben Sie Dank für Ihre mir gewährte Aufmerksamkeit.

---

*) Vgl. meinen nach dem Kongrefs erschienenen Aufsatz in den Math. Annalen, Bd. 49, S. 585.

Sul gruppo semplice di 360 collineazioni piane.

Di

F. Gerbaldi a Palermo.

I sistemi di sei coniche due a due armonicamente iscritte e circoscritte (che io chiamo sestuple di coniche in involuzione) hanno notevole importanza, come recentemente ha mostrato il Sig. Wiman*), nello studio del gruppo semplice, G_{360}, di 360 collineazioni piane. Sistemi cosifatti di .coniche furono considerati da me per la prima volta in una Nota pubblicata nel Vol. XVII degli Atti dell' Accademia di Torino. Ivi ho dimostrato varie proprietà della configurazione, cui danno luogo i 45 vertici ed i 45 lati dei triangoli autopolari rispetto alle 15 coppie di coniche, che si possono formare con una sestupla in involuzione; così ad es. ho dimostrato allora, che quei 45 lati concorrono quattro a quattro nei 45 vertici, concorrono inoltre tre a tre nei 60 punti comuni alle coppie di coniche, ed ancora tre a tre in altri 60 punti. Ora, come si deduce dal citato lavoro del Sig. Wiman, i detti 45 vertici e 45 lati sono i centri e gli assi delle omologie armoniche che stanno in G_{360}; ed i due sistemi di 60 punti, in cui concorrono tre a tre i 45 lati, sono i punti uniti dei due sistemi di collineazioni di 3^0 ordine contenuti in G_{360}. Per guisa che la configurazione, che si presenta nel gruppo G_{360}, è precisamente quella di cui io mi sono occupato nel 1882, sette anni prima che il gruppo stesso venisse scoperto dal Sig. Valentiner.**)

Occupandomi ora della teoria algebrica di questo gruppo in connessione coll' equazione generale di 6^0 grado, secondo il metodo del Prof. Klein, sono giunto ad alcuni risultati, che riassumo nelle linee seguenti.

*) Ueber eine einfache Gruppe von 360 ebenen Collineationen; Mathematische Annalen, Bd. 47, 1896.

**) De endelige Transformations-Gruppers Theori; Kjöb. Skrift, (6) V, 1889.

Per il gruppo semplice G_{360} di collineazioni piane esistono (come ha trovato il Sig. Wiman) due sestuple di coniche in involuzione, tali che le collineazioni del gruppo producono in ogni sestupla le permutazioni del gruppo alternante.

Assumendo un sistema di coordinate proiettive qualunque, siano

$$f_k = 0 \quad \text{e} \quad f_k' = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots 6)$$

le equazioni delle coniche dell' una e dell' altra di quelle sestuple. I loro primi membri possono essere normalizzati in maniera che, posto

$$\left.\begin{matrix}\varepsilon \\ \varepsilon^2\end{matrix}\right\} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \qquad \left.\begin{matrix}c \\ c'\end{matrix}\right\} = \frac{1 \pm i\sqrt{15}}{4},$$

i discriminanti delle forme f_k risultino tutti uguali a $-c^2$, quelli delle forme f_k' tutti uguali a $-c'^2$, e inoltre si hanno le relazioni:

$$(1) \qquad \begin{cases} 2(c-1)f_1' = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6, \\ 2(c-1)f_2' = f_1 + f_2 + \varepsilon(f_3 + f_6) + \varepsilon^2(f_4 + f_5), \\ 2(c-1)f_3' = f_1 + f_3 + \varepsilon(f_4 + f_2) + \varepsilon^2(f_5 + f_6), \\ 2(c-1)f_4' = f_1 + f_4 + \varepsilon(f_5 + f_3) + \varepsilon^2(f_6 + f_2), \\ 2(c-1)f_5' = f_1 + f_5 + \varepsilon(f_6 + f_4) + \varepsilon^2(f_2 + f_3), \\ 2(c-1)f_6' = f_1 + f_6 + \varepsilon(f_2 + f_5) + \varepsilon^2(f_3 + f_4). \end{cases}$$

Ciò premesso, pongasi

$$\Sigma f_k^3 = 6(c+1)A, \quad \text{si deduce} \quad \Sigma f_k'^3 = 6(c'+1)A.$$

Pongasi ancora

$$f_1 f_2 f_3 f_4 f_5 f_6 = \frac{1}{2} c\Phi, \qquad f_1' f_2' f_3' f_4' f_5' f_6' = \frac{1}{2} c'\Phi',$$

e si denotino con

$$-\frac{\Psi}{(c+1)^5} \quad \text{e} \quad -\frac{\Psi'}{(c'+1)^5}$$

le somme dei prodotti cinque a cinque delle f_k^3 e delle $f_k'^3$.

Si hanno le identità

$$(2) \qquad \Phi + \Phi' = A^2,$$

$$c^5\Psi + \Psi' + \frac{6}{25}A\left[c^5\Phi^2 - \frac{15}{32}(c+1)^5\Phi\Phi' + \Phi'^2\right] = 0.$$

Come invarianti fondamentali dei gradi 6, 12, 30 per il gruppo G_{360} si possono assumere A, Φ, Ψ.

Ogni gruppo di 360 punti, trasformato in sè da G_{360} e non situato sulla curva $A = 0$, è l' intersezione d' una curva del fascio $\Phi - \lambda A^2 = 0$ con una curva del fascio $\Psi - \mu A^5 = 0$. Si tratta, per risolvere il problema delle forme, di trovare quei 360 punti, dati che siano λ e μ.

A questo scopo, se si prendono come incognite le sei quantità x_i, e le sei x_i', definite da

$$(c+1)x_i = f_i^3, \qquad (c'+1)x_i' = f_i'^3,$$

e si costruiscono le due equazioni di cui esse sono le radici, si trova che la prima è

$$\begin{aligned}
& x^6 - 6Ax^5 + \tfrac{1}{5}\left[63\Phi + 3(c'+22)\Phi'\right]x^4 \\
(3) \qquad & \quad - \tfrac{1}{5}A\left[52\Phi + \tfrac{1}{5}(39c'+314)\Phi'\right]x^3 \\
& \quad + \tfrac{1}{25}\left[63\Phi^2 + 3(7c'+58)\Phi\Phi' + \tfrac{3}{8}(67c'+290)\Phi'^2\right]x^2 \\
& \quad + \Psi x + \tfrac{1}{125}\Phi^3 = 0,
\end{aligned}$$

e la seconda si deduce da questa scambiando c con c', Φ con Φ', Ψ con Ψ'. Se ora, supposto $A \neq 0$, in queste equazioni si pone

$$x = Ay, \qquad x' = Ay',$$

e si tengono presenti le identità (2), i coefficienti si esprimono direttamente nei parametri λ e μ, e si hanno così due risolventi di 6^0 grado per il problema delle forme.

Dalle relazioni (1) si ricava che, scegliendo opportunamente le determinazioni delle radici cubiche, si ha

$$\sqrt[3]{12(1-c)}\,\sqrt[3]{x_k'} = \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2} + \cdots + \sqrt[3]{x_6}.$$

Sono notevoli alcuni casi particolari. Nel fascio di curve di 12^0 grado $\Phi - \lambda A^2 = 0$, oltre alla curva $A = 0$ doppia, si hanno quattro curve dotate di punti doppi. Due di esse $\Phi = 0$, $\Phi' = 0$ sono degenerate nelle due sestuple di coniche ed hanno per punti doppi i due gruppi di 60 punti uniti per le collineazioni di 3^0 ordine; una terza ha per equazione

$$B = \Phi - 2cA^2 = 0$$

ed ha per punti doppi i 45 centri delle omologie armoniche; una quarta ha per equazione

$$C = \Phi + \tfrac{1}{5}(26c - 9)A^2 = 0$$

ed ha per punti doppi il gruppo di 36 punti uniti per le collineazioni di 5^0 ordine. (L'altro gruppo di 72 punti uniti per le collineazioni di 5^0 ordine, ed il gruppo di 90 punti uniti per le collineazioni di

4^0 ordine stanno sulla curva doppia $A = 0$.) In corrispondenza a queste particolari curve del fascio si hanno le seguenti risolventi speciali.

Per un gruppo di 360 punti situato sulle coniche $\Phi' = 0$, una risolvente si può scrivere

$$\left(y^2 - 2y + \frac{1}{5}\right)^3 + \left(\mu + \frac{6}{25}\right) y = 0,$$

e, posto

$$\xi = 5y, \qquad \mu + \frac{6}{25} = \frac{1728}{3125} Z,$$

diventa

$$(\xi^2 - 10\xi + 5)^3 + 1728 Z\xi = 0,$$

che è la più semplice risolvente di 6^0 grado dell' equazione icosaedrica.*) — L'altra risolvente ha una radice nulla, e si riduce ad un' equazione di 5^0 grado, che si può scrivere

$$\left[y' - \frac{1}{5}(c+6)\right]^3 \left[y' + \frac{3}{5}(c-4)\right] y' + \mu' = 0;$$

questa, ponendo

$$y' = -\frac{1}{5} cr + \frac{2}{5}(2c+3)$$

e osservando che ora si ha

$$\mu' = -c^5 \left(\mu + \frac{6}{25}\right),$$

diventa

$$(r-3)^3 (r^2 - 11r + 64) + 1728 Z = 0,$$

che è la risolvente delle r dell' equazione icosaedrica.**) — Tra i valori che competono all' espressione

$$\sqrt[3]{\xi_1} + \sqrt[3]{\xi_2} + \cdots + \sqrt[3]{\xi_6}$$

vi è sempre il valor zero, e vi sono inoltre i valori

$$2(1-c)\sqrt[3]{r_k + 8c'^3} \qquad (k = 1, 2, \cdots 5).$$

Per un gruppo di 360 punti situato sulla curva $B = 0$, si ha la risolvente

$$\left[y - \frac{1}{5}(c'+1)\right]^4 \left[y - \frac{1}{5}(13 - 2c')\right]^2 + \left[\mu + \frac{6}{125}(18c' - 7)\right] y = 0;$$

e questa, se si pone

$$y = \frac{1}{25}(c'+1)\tau,$$

*) F. Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder, S. 102.

**) F. Klein, ibid., S. 110.

coincide coll' equazione di 6° grado, che è stata incontrata dal Sig. Fricke nello studio che egli ha fatto dal punto di vista trascendente dello stesso gruppo.*)

Per un gruppo di 360 punti situato sulla curva $C = 0$, una risolvente si può scrivere

$$\left(y + \tfrac{4}{5}c'^2\right)^5 \left[y - 2(c'+1)\right] + \left[\mu - \tfrac{12}{3125}(1755c' - 718)\right] y = 0,$$

che, posto

$$y = -\tfrac{4}{5}c'^2 \tau,$$

è della forma

$$(\tau - 1)^5 [\tau + (c+1)^3] = Z\tau.$$

Finalmente per il caso, sopra escluso, in cui si considera un gruppo di 360 punti sulla curva $A = 0$, la (3) si può scrivere

$$\left(x^2 - \tfrac{1}{10}c'\Phi\right)^2 \left(x^2 + \tfrac{4}{5}c^2\Phi\right) + \Psi x = 0;$$

a determinare un siffatto gruppo di punti basta tagliare la curva $A = 0$ con una curva del fascio $\Psi^2 - \varrho\,\Phi^5 = 0$; allora, posto

$$x = \sqrt{\Phi}\, z,$$

si ha la risolvente

$$\left(z^2 - \tfrac{1}{10}c'\right)^2 \left(z^2 + \tfrac{4}{5}c^2\right) + \sqrt{\varrho}\, z = 0.$$

*) Ueber eine einfache Gruppe von 360 Operationen. Nachrichten v. d. k. Gesellsch. zu Göttingen, 1896.

Les postulats pour la Géométrie d'Euclide et de Lobatschewsky.

Par

C. Burali-Forti à Turin.

Le développement rapide et l'importance que les études sur les fondements des mathématiques ont acquis, viennent d'agiter, aujourd'hui, la question, pas encore résolue, des postulats pour la Géométrie d'Euclide. Mais dans la plupart des traités de géométrie, même parmi les plus récents, les systèmes des postulats sont bien compliqués; l'analyse des idées géométriques n'est point accomplie; l'idée abstraite de grandeur géométrique y paraît comme un élément primitif, tandis qu'elle peut être déterminée par le moyen des idées concrètes de position et de mouvement. De plus, dans certains périodiques de mathématique, on arrive jusqu'à proposer d'introduire, pour l'équivalence, des relations de grandeur entre les infiniments grands et les infiniments petits, ou, du moins, d'introduire le concept de figure finie et infinie. De telle sorte, si d'un côté l'on perd la simplicité de la Géométrie d'Euclide, de l'autre on introduit des concepts étrangers à la géométrie, et la question des postulats s'éloigne toujours plus de sa solution complète Cela posé, je crois utile montrer, en abrégé, comment avec de légères modifications à des résultats scientifiques déjà connus, et desquels les auteurs des traités de géométrie ne font point usage, on obtient un système complet de postulats pour la Géométrie d'Euclide, et sous une forme tellement simple et intuitive, qu'il suffit d'un travail de développement bien facile, pour obtenir des traités de géométrie qui répondent aux exigences actuelles scientifiques et didactiques dans les différents degrés de l'enseignement.

Classification. — Au moyen des idées exprimées par le mot point, et par la relation le point x est situé entre le point a et le point b, on déduit la signification des mots figure, segment, droite, plan, ...*) et les propriétés de ces éléments forment la Géométrie de position. En ajoutant aux idées que nous venons de considérer celle du mouvement, on obtient un nouvel ensemble de propositions qui donne la Géométrie du mouvement. Enfin, en introduisant l'idée abstraite de grandeur géométrique (longueur, aire, volume, ...), on obtient la Géométrie métrique. L'idée de mouvement des éléments, point, droite, ... ne peut point précéder la connaissance de certaines propriétés fondamentales de ces éléments, et par suite, la Géométrie du mouvement doit reconnaître son fondement sur la Géométrie de position, tandis qu'elle doit admettre des propriétés primitives par l'idée de mouvement, pas encore contenues dans la Géométrie de position. La Géométrie métrique, au contraire, reste complètement déterminée par la Géométrie de position et de mouvement. En effet, en disant par ex. que la «longueur du segment a» est un élément géométrique abstrait commun à tous les segments qui sont superposables au segment a, nous considérons des fonctions des figures géométriques (segments, polygones, polyèdres, ...) qui sont bien déterminées par les idées de position et de mouvement.

Géométrie de position. — Quant à la Géométrie de position — les parallèles exceptées — à l'état présent de la science il n'y a plus rien à faire, des transformations logiques exceptées. Le système de postulats de M. Pasch, ou celui de M. Peano, donnent toute la Géométrie de position, y compris le théorème de Desargues sur les triangles homologiques, et ces postulats expriment les propriétés les plus simples que le topographe vérifie au moyen des jalons ou que le maçon vérifie au moyen du fil à plomb. Pour obtenir la théorie des parallèles, il faut joindre aux postulats précédents celui de la continuité, due à M. Dedekind et qu'on peut exprimer en disant que «Un ensemble convexe de points, contenu sur un segment, est lui-même un segment». Cela fait, on obtient la Géométrie d'Euclide et celle de Lobatschewsky, mais non la Géométrie de Riemann, car, par ex. si le point a est situé entre le point b et le point c, b n'est pas situé entre a et c.

La définition de demi-droites parallèles donnée**), on démontre que deux demi-droites parallèles sont complanaires; qu'un point externe à la demi-droite a est l'origine d'une seule demi-droite parallèle à a; que la relation exprimée par le mot parallèle est réflexive, symétrique et transitive ... Il en résulte aussi que: par un point extérieur à une

*) Pasch, Vorlesungen über neuere Geometrie. — Peano, Principi di Geometria logicamente esposti. 1889. — Sui fondamenti della Geometria (Rivista di matematica. 1894).

**) Peano, Principi di Geometria logicamente esposti. 1889.

droite on peut mener une ou deux droites parallèles à la droite même, et qu'un de ces deux cas doit toujours se vérifier. Pour obtenir la Géométrie d'Euclide il faut poser le postulat suivant: «quelle que soit la droite a, il existe un point b extérieur à la droite a par lequel passe une seule parallèle à la droite a»; car on déduit aisément qu'une seule parallèle à la droite a passe aussi par un point quelconque. Analoguement pour la Géométrie de Lobatschewsky, pour laquelle il faut encore admettre que: «par une droite parallèle à un plan a passe un seul plan parallèle au plan a», et que «il existe une droite parallèle à deux demi-droites, non contenues sur la même droite et qui ont commune leur origine»; car si le mot point signifie «point interne à un polyèdre convexe», les postulats de la Géométrie de position sont vérifiés, mais les deux propositions que nous venons de citer ne sont pas, en général, vérifiés. —

Géométrie du mouvement. — Dans l'axiome VIII^e du I^{er} livre, Euclide introduit explicitement l'idée du mouvement en disant «Les grandeurs qu'on peut faire coïncider l'une sur l'autre sont égales»; mais on peut retenir cette idée sous-entendue aussi dans les premiers axiomes qui sont relatifs à l'égalité des grandeurs. Toutefois l'idée de mouvement n'est point précisée par des postulats et elle est toujours exprimée au moyen de la superposabilité de deux figures. M. Pasch donne un système de postulats qui établit la signification de la relation «la figure a est superposable à la figure b», et la méthode d'Euclide vient d'acquérir une forme scientifique rigoureuse et, en même temps, propre à l'enseignement secondaire. M. Peano, «Sui fondamenti della Geometria» réduit l'idée de mouvement à celle de correspondance entre points et points. Le système de postulats qu'il propose conduit à démontrer que le segment et l'angle sont réversibles, que le postulat d'Archimède est vérifié par les segments et donne encore toute la théorie des perpendiculaires. — Mais il ne donne pas la propriété qu'on exprime habituellement, sous forme non précisée, en disant que «le mouvement des figures géométriques a lieu sans déformation». Cette proposition qui exprime, en substance, que: «si un mouvement transforme deux points distincts d'une droite, ou trois points non collinéaires d'un plan, ou quatre points non complanaires, en eux-mêmes, transforme aussi, en eux-mêmes, chaque point de la droite, ou du plan, ou de l'espace» est une conséquence immédiate du système de postulats que je propose pour le mouvement, et que j'ai obtenu avec la suivante transformation des postulats 6 et 7 du système, de M. Peano, précédemment cité. — (6) Si le point a ne coïncide pas avec les points b et c, alors il existe, au moins, un mouvement qui transforme la demi-droite ab sur la demi-droite ac; et les correspondants en deux de ces mouvements d'un même point de la demi-droite ab coïncident. (7) Si les points a, b, c et les points a, b, d ne sont pas collinéaires, alors il existe, au moins, un mouvement qui transforme le demi-plan a, b, c, sur le demi-plan a, b, d; et les correspondants en deux de ces mouvements d'un même point du demi-plan a, b, c, coïncident. (8) Si a, b, c sont des points non collinéaires et si un mouvement transforme a en a, b en b et c en c, alors le correspondant d'un point p non complanaire avec a, b, c, ne peut pas être en partie opposée de p par rapport au plan abc. — Si nous faisons usage des postulats (1)—(7), on a qu'un tétraèdre peut être superposable a son symétrique: cela n'advient point en admettant aussi le postulat (8). On complète le système (1)—(7) en admettant que: «existent deux mouvements qui transforment en eux-mêmes trois points non collinéaires». Les postulats (7), (8) peuvent être remplacés par le seul postulat (7) de M. Peano.

Géométrie métrique. — Si aux termes longueur, aire, volume nous donnons la signification que nous avons déjà expliquée, on voit aisément que la géométrie métrique se réduit à un petit ensemble de propositions fondamentales par lesquelles on peut déduire que chaque classe de grandeur géométrique peut être mise en correspondance univoque et réciproque avec les nombres réels et positifs. Ce qui revient à traduire le V$^{\text{ème}}$ livre d'Euclide en substituant aux mots ἄριθμος et λόγος les expressions, qui nous sont habituelles aujourd'hui, nombre entier, nombre réel. —

Je démontre, dans ma Théorie des Grandeurs,*) qu'on peut réduire à 8 propositions celles qui doivent être vérifiées par une classe de grandeurs, afin de pouvoir affirmer que la classe que nous considérons peut être mise en correspondance univoque et réciproque avec les nombres réels. Pour les longueurs on démontre aisément ces propriétés; et celle qui exprime qu'une grandeur n'est pas la somme d'elle-même avec une grandeur, est une conséquence immédiate de la rigidité du segment dans le mouvement. Qu'une aire (ou un volume) ne peut jamais être la somme d'elle-même avec une aire (ou un volume) est admis comme postulat dans les traités ordinaires. M. L. Gérard (à Lyon) a récemment démontré**) ces deux propositions en les réduisant à la proposition correspondante pour les longueurs, et par conséquent la question même de l'équivalence reste complètement résolue.

*) Formulaire de Mathématiques t. I. IV.

**) Bulletin de Mathém. spéciales t. I. — Bulletin de Mathém. élémentaires t. I et t. II. — Bulletin de la Société mathématique de France t. XXIII.

Statique non-euclidienne.

Par

J. Andrade à Rennes.

I. En se fondant sur le théorème d'Euler relatif aux rotations finies, on voit aisément que les vecteurs représentatifs des vitesses de rotations possibles sont composables lorsqu'ils sont concourants; et qu'ils sont réductibles à une infinité de systèmes équivalents dans le cas général.

Le mot composable signifie seulement qu'il existe pour les vecteurs concourants une opération de composition (désignons-la pour abréger par $\dotplus$) qui jouit des propriétés suivantes:

a) l'opération est commutative ou $A \dotplus B = B \dotplus A$,

b) l'opération est associative ou $A \dotplus (B \dotplus C) = A \dotplus B \dotplus C$,

c) l'opération est invariante à l'égard des repères de positions,

d) l'opération est continue,

e) l'opération se confond, pour deux vecteurs portés par une même droite, avec l'addition algébrique des segments.

On peut se proposer de rechercher la composition des vecteurs concourants. On trouve alors, en faisant usage de l'équation de Poisson

$$\varphi(x+y) + \varphi(x-y) = 2\varphi(x)\varphi(y)$$

avec les conditions aux limites

$$\varphi(0) = 1 \quad \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \text{ce qui donne} \quad \varphi(x) = \cos x,$$

que la composition des forces*) concourantes et que la trigonométrie sphérique sont indépendantes du postulatum d'Euclide.

Par exemple soient A et B deux vecteurs et C le vecteur résultant; soient a, b, c leurs intensités respectives on aura:

$$\frac{a}{\sin(\widehat{B, C})} = \frac{b}{\sin(\widehat{C, A})} = \frac{c}{\sin(\widehat{A, B})}.$$

*) Vecteur ou force désignent ici la même chose.

L'équivalence de deux systèmes de vecteurs: S et T signifie que l'on peut passer du système S au système T par l'adjonction ou la suppression de deux forces égales et contraires ayant même ligne d'action, et par des compositions ou des décompositions de vecteurs issus d'un même point.

La notion de l'équivalence va nous conduire à la composition des vecteurs d'un plan perpendiculaires à une même droite et agissant d'un même côté de cette droite.

Et d'abord considérons le cas de deux forces égales P agissant aux extrémités d'une perpendiculaire commune de longueur $2p$, la résultante de ces forces passera par le milieu, sera perpendiculaire à la perpendiculaire commune et pourra être représentée en intensité par

$$2P\psi(p).$$

La fonction ψ satisfait encore à l'équation fonctionnelle de Poisson

$$\psi(x+y)+\psi(x-y)=2\psi(x)\psi(y)$$

avec la condition $\psi(0)=1$.

Soit alors x_0 une valeur particulière de x, nous distinguerons trois cas, suivant que l'on aura:

$$\psi(x_0)>1$$

ou $$\psi(x_0)=1$$

ou $$\psi(x_0)<1;$$

on trouvera alors dans ces trois cas respectifs:

$$\left.\begin{array}{ll} & \psi(x)=\dfrac{e^{\frac{x}{k}}+e^{-\frac{x}{k}}}{2}=\operatorname{ch}\dfrac{x}{k} \\ \text{ou} & \psi(x)=1 \\ \text{ou} & \psi(x)=\sin\dfrac{x}{k} \end{array}\right\}\quad (k=\text{constante}).$$

La composition de deux forces P et Q quelconques perpendiculaires à une même droite et agissant d'un même côté de celle-ci en une résultante R de même nature s'en déduit aisément; le point d'application de la résultante sur le segment qui réunit les pieds des composantes partage ce segment en deux parties x et y, telles qu'en faisant:

$$\chi(a)=\int_0^a\psi(x)\,dx$$

l'on aura:

$$\frac{P}{\chi(y)}=\frac{Q}{\chi(x)}=\frac{R}{\chi(x+y)}.$$

La notion d'équivalence montre encore que si dans un triangle rectangle où α et ω sont deux angles autres que l'angle droit, le côté x opposé à l'angle ω sera lié à ces deux angles par la relation:

$$\cos\omega = \sin\alpha\psi(x).$$

Cette relation montre en particulier que dans l'espace de Lobatschewsky on aura:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sin\Pi(x)},$$

$\Pi(x)$ désignant l'angle de parallèlisme à distance x; on a donc en ce cas: $\psi(x) > 1$, on trouve alors:

$$\psi(x) = \frac{e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}}{2} = \operatorname{ch}\frac{x}{k},$$

k désignant un mètre constant.

L'hypothèse $\psi(x) < 1$ donnerait la géométrie de Riemann.

L'hypothèse $\psi(x) = 1$ donne l'espace euclidien.

II. J'ai montré que la réduction de Poinsot était encore applicable en ses traits essentiels et j'en ai déduit le théorème suivant:

La condition nécessaire et suffisante de l'équilibre d'un corps rigide soumis à des forces données est que la somme des travaux virtuels de ces forces lors d'un déplacement infiniment petit quelconque du corps rigide soit égale à zéro.

Dans cet énoncé le travail virtuel d'une force F relatif à un déplacement infiniment petit δs de son point d'application est le produit

$$F\delta s \cos(\widehat{F, \delta s}).$$

Du théorème précédent j'ai déduit le corollaire suivant qui est la généralisation non-euclidienne d'un théorème bien connu:

Une pression normale (constante par unité de surface) uniformément répartie sur les éléments d'une surface fermée rigide constitue un ensemble de forces qui se font équilibre.

Ce corollaire, bien entendu, a son analogue dans une étendue à deux dimensions; j'ai montré que ce théorème peut être regardé comme la source de toutes les propriétés métriques dans toutes les géométries.

III. Les propriétés mécaniques des fils ne sont plus les mêmes dans les trois géométries, comme je le montre dans mes Leçons de Mécanique physique.*)

IV. En résumé, la notion du groupe d'équivalence fournit d'une manière intuitive les propriétés métriques dans les trois géométries.

*) Paris 1898.

Über Gruppen, insbesondere kontinuierliche Gruppen von Cremona-Transformationen der Ebene und des Raumes.

Von

G. Fano in Rom.

Nach einer kurzen historischen Übersicht über die Entwickelung der Theorie der birationalen oder sogen. Cremona- Transformationen der Ebene und des Raumes wurden einerseits Herrn Autonne's Resultate über endliche Gruppen quadratischer und kubischer Transformationen*), andererseits diejenigen der Herren S. Kantor**) und Wiman***) über die Reduktion der endlichen Gruppen birationaler Ebenentransformationen auf bestimmte Typen vorgeführt.

Beim Übergang zu den kontinuierlichen Gruppen wurde zunächst auf Herrn Noether's Mitteilung an die Deutsche Mathematiker-Vereinigung im Jahre 1896†) Bezug genommen; weiter noch, betreffend die Reduktion der kontinuierlichen Gruppen von birationalen Ebenentransformationen auf bestimmte Typen, auf Herrn Enriques' Resultate††) hingewiesen. — Es folgten einige Bemerkungen allgemeiner Natur über den Zusammenhang der Gruppen von Cremona-Transformationen mit gewissen projektiven Gruppen; insbesondere wurde der Satz erläutert: Jede kontinuierliche Gruppe von Cremona-Transformationen eines beliebigen Raumes R_k ist einer Gruppe von projektiven Umformungen einer rationalen, irgend einem Raume R_n angehörigen M_k ($n \geqq k$) äquivalent, und gezeigt, wie die Frage nach allen möglichen Typen von kon-

*) Journ. de Mathém., IV, vol. 1, 2, 4.

**) Preisschrift: „Premiers fondements . . .“ (Naples, 1891); Acta Mathem., Bd. 19; „Theorie der endlichen Gruppen . . .“ (Berlin, 1895).

***) Mathem. Ann., Bd. 48.

†) Vgl. den Jahresbericht 1896, Heft 1, S. 68.

††) Rend. R. Acc. dei Lincei, maggio 1893.

tinuierlichen Gruppen birationaler Transformationen eines R_k sich mit der anderen deckt: Was für rationale M_k irgend eines Raumes R_n $(n \geqq k)$ es giebt, die eine kontinuierliche Gruppe von projektiven Transformationen gestatten.

Zuletzt wurden noch die Resultate mitgeteilt, die Herr Enriques und der Vortragende über kontinuierliche Gruppen von Cremona-Transformationen des Raumes neulich erhalten haben.*)

*) Annali di Matematica, vol. 25.

Über verknotete Kurven.

Von

H. Brunn in München.

Eine besondere Art der Darstellung und Beschreibung eines Knotens scheint mir bisher unbeachtet zu sein und doch den Keim mancher neuen Erkenntnis in sich zu tragen. Für verschlungene Kurven können analoge Betrachtungen angestellt werden. Gewöhnlich bildet man einen Knoten mittels einer ebenen Projektion ab, an deren Doppelpunkten das „Unten“ und „Oben“ der Zweige markiert ist.

Man arrangiere nun den Knoten, ohne sein Wesen zu verändern, so, dafs sämtliche Doppelpunkte der Projektion in einen einzigen vielfachen Punkt a zusammenrücken. Die dem Projektionspunkt a entsprechenden Kurvenpunkte liegen dann auf einer Geraden A. Wir nennen A die Axe, ihre Schnitte mit der Kurve die Axschnitte, die von Axschnitt zu Axschnitt laufenden Kurventeile kurzweg die Bögen.

Die Bögen können eben, und in lauter verschiedenen von A ausgehenden Halbebenen gedacht werden. Denn nach unserem Arrangement kann nirgends eine Überkreuzung zweier Bögen nach Art von Fig. 1 mehr stattfinden; an ihre Stelle mufs eine Gestaltung wie bei Fig. 2 getreten sein, bei welcher der ursprüngliche Bogen C durch zwei andere C' und C'' ersetzt ist.

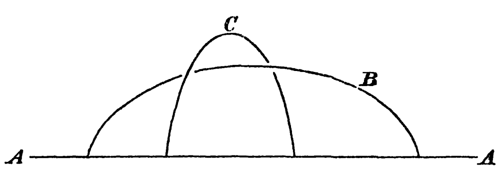


Fig. 1.

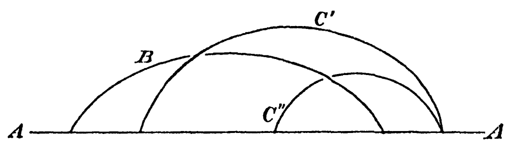


Fig. 2.

Blickt man nun in Richtung der Axe, so folgen sich die Halbebenen der Bögen gleich den Speichen eines Rades in einer gewissen Reihenfolge: „Axfolge“ der Bögen. Als Bestandteile der Kurve haben die Bögen ebenfalls eine gewisse Reihenfolge: „Kurvenfolge“ der Bögen.

Aber auch die Axschnitte haben einerseits eine „Axfolge", andererseits eine „Kurvenfolge". Die jetzt bereits heraustretende Dualität zwischen Axschnitten und Bögen erweist sich als eine durchgreifende und bildet eben das Merkwürdige und zugleich Empfehlende für die gewählte Darstellungsweise.*)

Die Beschreibung des Knotens kann nun in folgender Weise gegeben werden:

Man numeriere, indem man einen bestimmten Anfangsbogen und Fortschreitungssinn wählt, die Bögen erst in ihrer Kurvenfolge, dann in ihrer Axfolge; dasselbe thue man für die Axschnitte. Man kann dabei die Anfangselemente für Kurven- und Axnumerierung identisch wählen. Das Resultat der Numerierung läfst sich in zwei kleinen Tabellen I — für die Bögen — und II — für die Axschnitte — niederlegen. Jede besteht aus zwei Zeilen, in denen die Nummern, die zum nämlichen Bogen, bezw. Axschnitt gehören, unter einander stehen. Wenn man die Nummern der ersten — auf die Kurvenfolge bezüglichen — Zeile stets in der natürlichen Reihenfolge ausgeschrieben denkt, wird diese Zeile selbstverständlich und kann weggelassen werden, sodafs sich jede Tabelle auf Angabe einer Nummerpermutation (Substitution) beschränkt. Z. B. kann der Knoten Fig. 3 beschrieben werden durch

I.	1 4 2 5 3	(Bögen)
II.	1 4 2 5 3	(Axschnitte)

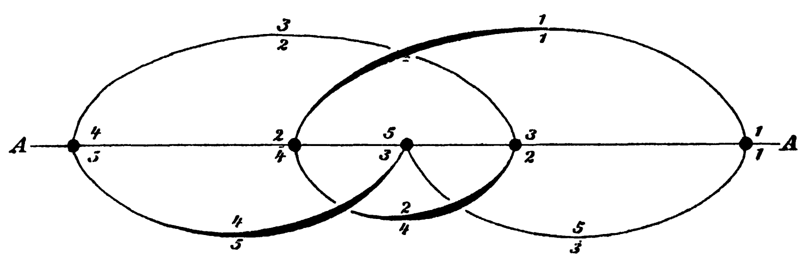


Fig. 3.

Man erkennt leicht, dafs diese Knotenbeschreibung im topologischen Sinne hinreichend ist und auch nichts Überflüssiges enthält.

Wie die gewöhnliche Projektion eines Knotens unwesentliche Doppelpunkte, so kann unsere Darstellung unwesentliche Bögen und Axschnitte enthalten, welche zum Verschwinden gebracht werden können. Wir wollen der Frage der Reduktion eines Knotens auf die einfachste

*) Die Dualität wird eine noch vollkommenere, wenn man die krummen Bögen durch aus zwei geraden Strecken bestehende, gebrochene Linien ersetzt.

Form etwas näher treten; die hervorgehobene Dualität wird dabei recht evident werden.

Satz:

Ein Bogen, für den die Axschnitte, in denen er endet, sowohl Kurven- als Axnachbarn sind, darf verschwinden, indem jene Axschnitte in einen einzigen zusammenrücken.

Ein Axschnitt, für den die Bögen, welche in ihm zusammenstofsen, sowohl Kurven- als Axnachbarn sind, darf verschwinden, indem jene Bögen in einen einzigen übergehen.

Einer näheren Erläuterung bedarf hier noch der Begriff der „Axnachbarn“, der einen engern und einen weitern Sinn hat, und oben im weitern zu verstehen ist.

Man kann nämlich oft die Axfolge zweier Bögen oder Axschnitte umkehren, ohne dafs dabei eine Selbstdurchdringung der Kurve stattfände, und dadurch können Elemente zu Nachbarn werden, welche nicht unmittelbar als solche erscheinen. Welche Elemente sind nun vertauschbar? Man nehme zunächst Kenntnis von dem Begriffe der „Kreuzung“:

Zwei Bögen „kreuzen“ sich, wenn ihre Endpunktpaare auf A sich trennen, zwei Axschnitte, wenn die Ebenenpaare der von ihnen ausgehenden Bögen sich trennen,

leite aus den gegebenen Tabellen die Paare von Bögen (resp. von Axschnitten) ab, welche sich trennen, und stelle diese Paare in einer Tabelle III (resp. IV) zusammen.

Man mache weiter alle Cyklen von Elementen

$$a_1\, a_2\, a_3\, a_4 \ldots a_n\, a_1\, a_2$$

ausfindig, bei welchen:

1) zwei beliebige Folgeelemente als Paar in Tabelle III (resp. IV) vorkommen;
2) der Sinn dreier beliebiger Folgeelemente übereinstimmt mit dem Sinne der Axfolgenumerierung (man könnte auch den entgegengesetzten Sinn wählen);
3) die Einschiebung keines weiteren Elementes ohne Verletzung von Bedingung 1) oder 2) möglich ist.

Dann gilt:

Zwei Elemente, die in ein und demselben Cyklus vorkommen, sind unvertauschbar, zwei, die in keinem Cyklus zusammen vorkommen, sind vertauschbar.

Axnachbarn im engeren Sinne sind die Nachbarn in der Axnumerierung.

Axnachbarn im weiteren Sinne sind zwei Elemente, wenn sie entweder mit einander vertauschbar oder Cyklusnachbarn sind.

Hiermit sind die für die Reduktion eines Knotens nötigen Begriffe erklärt.

Ich mufs hier schliefsen. Es genügt mir, Ihnen wahrscheinlich gemacht zu haben, dafs die neue Darstellungsweise für den Ausbau der Knotentheorie fruchtbar zu werden verspricht. Nur noch eins: Sie sind mir vielleicht ungern von dem anschaulichen Bilde eines Knotens zu seinem unanschaulichen Zahlenschema gefolgt. Ich meine aber: So sehr man einerseits nach Veranschaulichung des Unanschaulichen streben mufs, um Schwieriges übersichtlich und verständlich zu machen und stockende Forschung durch neue Anregung zu beleben, so sehr ist doch auch die andere Richtung berechtigt, welche Anschauliches, so weit es nur möglich ist, in Unanschauliches übersetzt, um zu zeigen, wie weit in geometrischen Problemen das Räumliche nur Nebensache ist und es sich vielmehr um Begriffe allgemeinerer Natur handelt. Schwierige, lang umworbene Rätsel finden oft erst ihre Lösung, wenn die angedeutete Abstraktion erreicht ist.

---

4. Sektion: Mechanik und mathematische Physik.

Über die Beziehungen der Technik zur Mathematik.

Von

A. Stodola in Zürich.

Die Bedeutung des Begriffes „Technik“ ist noch keine vollkommen klar umschriebene, vielleicht wegen des umfassenden Charakters dieses Begriffes. Sind doch unsere gesamten Kulturverhältnisse so sehr von technischen Einwirkungen durchsetzt, daſs man unsere Epoche mit Recht als diejenige der aufblühenden Technik bezeichnen könnte.

Wollte man es versuchen, den Begriff „Technik“ zu definieren, so würde man als solche im allgemeinen die auf eine gewerblich nutzbare Transformation und Verwendung des von der Natur dargebotenen Energievorrates und der Rohstoffe gerichtete Thätigkeit des Menschen verstehen können. Allein in dieser Allgemeinheit umfaſst die Definition sämtliche Gewerbe, sowie das Handwerk; sie muſs mit einer entsprechenden Einschränkung versehen werden.

Das Unterscheidungsmerkmal zwischen Technik und Handwerk bildet nach meiner Auffassung weder der Groſsbetrieb, noch die Einführung der Arbeitsteilung, so wichtig diese beiden Faktoren für die Entwickelung auch sein mögen. Auch der göttliche Funke des erfinderischen Gedankens ist nicht ein Privileg des Technikers; müssen wir doch an Gegenständen des alltäglichen Gebrauches so häufig erfinderische Einfälle höchster Originalität bewundern. Allein der Handwerker schafft rein intuitiv, da wo er schöpferisch ist, und er schafft nach der Schablone, auf Grund rohester Empirie, da wo seine Begabung ihn nicht über den Zwang der Zunftregel emporzuheben vermag. Ich erblicke den wesentlichen Unterschied zwischen ihm und dem Techniker darin, daſs letzterer die Resultate wissenschaftlicher Erkenntnis und wissenschaftlicher Methoden auf die zu lösenden Probleme anwendet.

Es ist bekannt, dafs die Gröfse mancher Industrie auf dem stillen Wirken ihrer wissenschaftlichen Mitarbeiter beruht. Manch' überraschende Erfindung stellt sich bei näherer Prüfung ihrer Genesis als Folge planmäfsig fortgesetzter Forschungsarbeit und keineswegs als unvermittelter Einfall heraus. Jahrelang in Archiven schlummernde wissenschaftliche Arbeiten erlangen plötzlich eminente, praktische Wichtigkeit. Das Wort Dubois-Reymond's, dafs es kaum eine noch so weltabgelegene wissenschaftliche Untersuchung gebe, die nicht im Laufe der Zeit praktischer Anwendung fähig wäre, bewahrheitet sich. Vor allem aber wird die Wissenschaft seitens der Technik geschätzt als kritische Leuchte, die eine klare Sichtung der ungeheuren Zahl von Möglichkeiten und Unmöglichkeiten gestattet. Sie bewahrt uns vor Vergeudung immenser Mittel und geistiger Arbeit an fruchtlose Versuche. Gleiche Fähigkeiten vorausgesetzt, verleiht die wissenschaftliche Ausbildung dem Techniker, rein durch die Schärfung des kritischen Urteiles, eine grofse Überlegenheit über die reinen Praktiker.

Die höchsten Resultate werden erzielt, wenn Genie sich mit wissenschaftlichem Geiste paart. Ja, wo das erstere vorhanden ist, kann auf weitere Attribute füglich verzichtet werden. Wie viel wir auf dem Gebiete der Technik genialen Einfällen verdanken, die von der Wissenschaft nicht vorbereitet, von ihr nicht vorhergesehen worden, ist bekannt, und nie wird uns ein Neidgefühl abhalten, dies vollinhaltlich anzuerkennen.

An Genie und Wissenschaft reiht sich als dritter Faktor der Entwickelung der beharrlich auf ein bestimmtes Ziel hinarbeitende technische Scharfsinn. Nicht mit dem Gedankenfluge des Genius ausgestattet, der uns neue Horizonte eröffnet, auch nicht befähigt, durch gelehrte Forschung den exakten Zusammenhang der nur qualitativ erkannten Erscheinungen festzustellen, waren doch viele Techniker im stande, in unausgesetzter Konzentration auf eine Aufgabe den einen oder den andern Fortschritt anzubahnen. Als Summe der Arbeit von ganzen Generationen entstand so eine Reihe technischer Meisterwerke, im rechten Sinne Gemeingüter der technischen Welt.

Wie sehr Genie, Wissenschaft und beharrliche, zähe Arbeit die Quelle unserer Erfolge bilden, dürfte auch aus einem kurzen Rückblick auf die Hauptstationen des nunmehr zurückgelegten Weges erhellen.

In James Watt, mit dem die moderne Entwickelung anhebt, finden wir die drei vereinigt: den gottbegnadeten Maschinenbauer, den gelehrten Physiker und die eiserne Ausdauer. Es ist bekannt, dafs der Dampfmaschinenbau fast bis auf unsere Tage von den Ideen Watt's gezehrt hat. Die Anwendung auf die Schiffspropulsion und die Lokomotive bedingten mehr nur Thatkraft und technisch praktischen Scharfsinn.

Um die gleiche Zeit entstanden, als summarisches Ergebnis vieler langsam fortschreitender Verbesserungen reiner Praktiker, die Maschinen der Textil-Industrie und vieler anderer. Sehr frühe hingegen stand die Elasticitätstheorie dem Baukonstrukteur beim Entwurfe grofser Bauten, so besonders der Eisenbrücken, als Beraterin zur Seite.

Einen fundamentalen Fortschritt verdanken wir der Wissenschaft in der Aufstellung des Prinzipes von der Konstanz der Energie, welches so recht für die Zwecke der Technik, man möchte sagen „erfunden“ worden zu sein scheint. Mit diesem koordoniert und, wenn eine Steigerung möglich, noch weittragender ist das Prinzip von Carnot-Clausius, welches wie ein heller Strahl das bis dahin verworrene Dunkel der Wärmemotorentheorie erleuchtete und der erfinderischen Denkthätigkeit für alle Zeiten eine bestimmte Richtung wies. Mechaniker waren und sind es ja, die sich am ehesten an die Verfolgung des Irrlichtes von einem Perpetuum mobile machen und deren Illusion nun gründlich zerstört wurde. Mehr noch als das ist im Satze von Clausius gethan, der die beschränkte Verwandelbarkeit der Energie lehrt und dem Nutzeffekt der Maschine einen eisernen Zwang auferlegt, welchen auch der himmelstürmende Erfinder mit Resignation anerkennen mufs. Es ist schwer, sich vorzustellen, dafs die Wissenschaft der Technik je noch ein Geschenk von so überwältigender, universeller Bedeutung darbieten könnte.

Die Technik bemächtigte sich denn sofort des ihr grofsmütig dargebotenen Hilfsmittels. Der geniale Hirn machte als einer der ersten die Nutzanwendung auf die Dampfmaschine und bereicherte, durch Einführung überhitzten Dampfes, den Vorrat ihrer Mittel um einen wichtigen Faktor, dessen Bedeutung erst die neueste Zeit in das richtige Licht zu stellen vermochte.

Reine Intuition hat zur Erfindung der Gasmaschine geführt, die einen neuen Markstein in der Geschichte der Wärmemotoren bedeutet. Nicht als Folge der Clausius'schen Anweisung, das Temperaturintervall der kalorischen Maschine zu vergröfsern, entstand Otto's Schöpfung. Einem unwiderstehlichen Zwange folgend, begab sich der ehemalige Handlungsgehilfe auf das Gebiet des Erfindens, und nach jahrelangem, mühevollem Ringen gelang es ihm, seiner Idee zum glänzenden Durchbruch zu verhelfen. Erst in allerletzter Zeit, da schon Tausende von Motoren der Industrie Dienste leisteten, unternahm es die Wissenschaft, die Vorgänge am Gasmotor zu erklären.

Ganz auf den Lehren der Thermodynamik beruht umgekehrt die Grundidee der neuesten Verbesserung in dieser Richtung, des Motors von Diesel.

Die Wechselbeziehungen der Wissenschaft zur Elektrotechnik zu schildern, hieſse offene Thüren eindrücken. Auch auf die Dienste, die sie dem Bauingenieurwesen geleistet hat, braucht nicht erst besonders hingewiesen zu werden. Es genügt, die Namen Culmann, Maxwell Castigliano, Mohr zu erwähnen. Daſs die chemische Industrie sozusagen ganz auf der chemischen Wissenschaft aufgebaut ist, wird allgemein anerkannt. Bemerkenswert ist die neuerdings vollzogene Abzweigung der Thermochemie und der Elektrochemie zu selbständigen Disziplinen und die fliegende Eile, mit welcher vor wenigen Jahren die chemischen Abteilungen den Unterricht in höherer Mathematik einführten.

Die Beziehungen der Technik zur Mathematik sind in ihren Beziehungen zur Wissenschaft überhaupt schon enthalten, denn für die Technik handelt es sich überall um die Erkenntnis des Gesetzes nicht nur dem quale, sondern der Zahl und dem Maſse nach. Sowie z. B. der Kaufpreis der Maschine auf einen Schilling oder Heller genau ausbedungen wird, so kann sich der Techniker von Tag zu Tag weniger dem Zwange entziehen, den Gütegrad, den Konsum seines Motors etc. etwa auf $1^0/_0$ genau zu garantieren. Wohl kommen für ihn unmittelbar nur die Anwendungen der Mathematik zur Geltung; allein in diesen soll er sicher und selbständig sein. Sicher, wo es sich um Anwendung schon durchgearbeiteter Fälle handelt; selbständig, um die immerfort, auftauchenden, neuen Probleme bewältigen zu können. Deshalb ist eine tüchtige Schulung auch in reiner Mathematik unbedingt erforderlich. Die Anwendung der Mathematik seitens des in der Praxis stehenden Technikers besteht keineswegs im Einsetzen von Zahlenwerten in fertig vorgerechnete Formeln.

Die Überzeugung von der Notwendigkeit und Ersprieſslichkeit einer exakteren mathematischen Behandlung technischer Probleme durch den Ingenieur ist besonders unter der jüngeren Generation viel verbreiteter, als dies manch älterer Fachgenosse zugeben möchte. Anderseits ist auch die Befähigung zu solcher Thätigkeit unter den praktischen Ingenieuren heute in viel gröſserem Maſse vorhanden, als man dies vor einem Decennium vorausgesetzt hätte. Zu dieser Behauptung gelange ich auf Grund aufmerksamer Beobachtung der Praxis; sie führt uns dazu, auch die Frage des mathematischen Unterrichtswesens an den technischen Hochschulen zu erörtern, wobei ich indes vorwiegend die Verhältnisse der Abteilung für Maschineningenieure und

Elektrotechniker im Auge habe. Meine Auffassung in dieser Frage ist die folgende:

1. Die Mathematik ist für den Techniker eine grundlegende Wissenschaft. Eine tüchtige Schulung in reiner Mathematik ist notwendig, um dem Techniker die erforderliche Sicherheit in ihrer selbständigen Anwendung zu verleihen.

2. Der Schwerpunkt des Unterrichtes in angewandter Mathematik falle in die technische Mechanik und technische Physik, welche in vorzüglichster Weise mathematische Schulung mit praktischer Anwendbarkeit verbinden und die wahren Grundpfeiler unserer wissenschaftlichen Ausbildung sind. Vermittelnde Fächer, wie die theoretische Maschinenlehre an den mechanischen Abteilungen, verfallen leicht in den Fehler, den Studierenden entweder auf dem Gebiete auch der einfachsten Anwendung zu bevormunden und ihn so in der Entwickelung eigener Initiative zu beeinträchtigen; oder sie verlieren sich in einer vom rein wissenschaftlichen Standpunkt zwar berechtigten, minutiösen Analyse, deren Formelapparat, um nicht zu sagen Wust, aber den Studierenden verwirrt, und ihm den Überblick des logischen Grundgerippes erschwert. Diese Disziplin sollte deshalb aufgeteilt werden und zwar so, daſs soweit sie noch Festigkeitstheorie einbegreift, diese an die technische Mechanik, die Thermodynamik an die technische Physik, die angewandte Thermodynamik und Maschinenlehre an die betreffenden Fachdisziplinen abgetreten würden.

Es sei gestattet, nebenbei einen individuellen Vorschlag des Vortragenden zu zitieren, der darin besteht, die technische Mechanik durch Aufnahme all der feststehenden Sätze der allgemeinen Physik zu erweitern, die zufolge ungezählter Verifikation nicht eines erneuten experimentellen Beweises für den Hörer bedürfen, vielmehr als allgemeine Sätze an die Spitze eines deduktiven Systemes gestellt werden können, wie etwa die Newton'schen Sätze in der Dynamik. Hiernach könnte der technischen Mechanik neben dem bisher behandelten Stoff zufallen die Thermodynamik mit Einschluſs der Theorie idealer Gase und die Elektrostatik und Dynamik, sowie der Magnetismus idealer Körper. Diese Einteilung würde gestatten, dem Hörer von Anbeginn an den Begriff der Energie in seiner Allgemeinheit zu vermitteln.

Der technischen Physik verblieben dann vorzugsweise die Meſsmethoden und die experimentell-mathematische Erforschung neuer, technisch wichtiger Erscheinungen.

Hier ist nun der Ort, eine wichtige Einschränkung und eine ernste auf folgenden Motiven beruhende Warnung vor Übertreibungen auszusprechen.

1. Die Techniker sind kein homogener Berufsstand wie die Juristen, die Mediziner und andere. Ein groſser Teil der Technikerschaft hört im Laufe der Zeit auf, eigentlich technisch zu arbeiten, und muſs sich, den Anforderungen des Groſsbetriebes entsprechend, entweder der reinen Verwaltung oder der kaufmännischen Thätigkeit widmen. In beiden Fällen hört die wissenschaftliche Arbeit fast ganz auf; die Carrière und der objektive Erfolg der Wirksamkeit auf diesen Gebieten hängen mit der technischen wissenschaftlichen Bildung des Betreffenden nur sehr lose zusammen. Der klare, ungetrübte, praktische Blick, Menschenkenntnis, Energie sind hier allein maſsgebend. Wir können diesen Fachgenossen den Titel Techniker nicht absprechen, ihre Thätigkeit ist für das Gedeihen der Technik ebenso unentbehrlich, wie die des Konstrukteurs, auch können wir den betreffenden Aspiranten den Zutritt zur Hochschule nicht wehren. Der intellektuelle Wert einer tüchtigen mathematischen Schulung wird auch hier unbestritten bleiben, jedoch rein in logischer Beziehung. Wir dürfen uns nicht wundern, wenn diese gröſsere Hälfte der Abiturienten das ihnen an der Hochschule verabreichte Maſs an reiner und angewandter Mathematik für zu hoch findet und statt dessen eher Vorträge über Verwaltungsrecht, Buchhaltung, Kostenberechnung und ähnliches in das Programm aufgenommen zu sehen wünscht. Man könnte glauben, daſs man diesen Wünschen durch entsprechende Verlängerung der Studienzeit gerecht werden könnte, allein mit seltener Einmütigkeit wendet sich eine groſse Mehrheit der Docenten sowohl wie der Praktiker gegen die Tendenz, den Techniker noch länger als bisher auf der Schulbank zurückbehalten zu wollen, mit dem Hinweis auf das bedeutend niedrigere Lebensalter, in welchem unsere englischen und amerikanischen Fachgenossen in die Praxis eintreten. Es sei als Symptom nebenbei erwähnt, daſs eine wiederholte förmliche Abstimmung, die der Vortragende unter seinen eigenen Studierenden veranstaltete, stets den Wunsch hervortreten lieſs: es sei die Mittelschule zu kürzen und das Hochschulstudium zu verlängern.

2. Wenden wir uns nun zur kleineren Hälfte, zu den wirklich ausübenden Technikern. — Abgesehen von dem event. dazwischentretenden Militärdienst, oder einer praktischen Thätigkeit in Maschinenwerkstätten etc. vergehen mehrere Jahre, bevor der junge Mann die Schwierigkeiten des Anfanges überwunden, Beweise seiner Tüchtigkeit erbracht und eine einigermaſsen selbständige Stellung sich errungen hat, in welcher nun die Vorteile seiner allgemeinen Ausbildung zur Geltung kommen sollten. Nichts wäre ihm erwünschter,

als, der Tendenz der Hochschulbildung folgend, die ihm vorgelegten Probleme wissenschaftlich zu analysieren und sich in streng systematischer Weise der Lösung zu nähern. Allein da türmen sich zwei nicht vorhergesehene Schwierigkeiten vor ihm auf. Die erste bildet der Umstand, daſs er nicht nur für den technischen, sondern auch für den kommerziellen Erfolg zu bürgen hat, d. h. daſs er so billig wie möglich produzieren muſs. Und zwar gilt dies nicht bloſs von dem hergestellten Objekt, sondern auch von seiner eigenen Arbeit. Er nimmt mit Schrecken gewahr, daſs die Praxis ihm zu einer systematischen Untersuchung die Zeit zu gewähren durchaus nicht gewillt ist; im wilden Konkurrenzkampf, dem auch seine eigene Leistung unterworfen ist, wird er mit unwiderstehlicher Gewalt der Empirie in die Arme getrieben.

Die zweite Schwierigkeit ist zum Teil subjektiver Art. Auf die Hochschule folgen, wie schon erwähnt, einige strenge Lehrjahre. Wie im Kriege die Künste, so ruht hier das an der Schule erworbene systematische Wissen. Die dem menschlichen Gehirn anvertrauten Eindrücke gleichen leider in so mancher Beziehung der Schrift im Sande. Wo es gilt, mit dem Wissen herauszurücken, findet man in der Regel, es sei dasselbe nicht mehr recht präsentabel und müsse wieder aufgefrischt werden. Wir wollen annehmen, es sei die hierzu nötige Energie vorhanden, und die sehr allgemeine menschliche Schwäche überwunden. — Dann erlebt unser Techniker die zweite, aber nicht die kleinere Enttäuschung. Er macht sich daran, die Erscheinung nach Maſs und Zahl zu untersuchen, er faſst das Problem in eine Anzahl mathematischer Relationen zusammen, die in der Regel die Gestalt von Differentialgleichungen annehmen. Allein er findet, daſs ihm die Fähigkeit abgeht, diese Gleichungen mit den angelernten Mitteln zu integrieren. Er sieht sein Kollegienheft durch, er blättert in den Kompendien und konstatiert, daſs die dort behandelten Probleme in der Regel die einfachsten Spezialfälle darstellen, während die Praxis von ihm, wohin er nur blicken mag, die Lösung der verwickeltsten Komplikationen fordert. Eine weitere Vertiefung zeigt ihm, daſs z. B. fast jedes Problem des Maschinenbaues unvermerkt in das Gebiet der mathematischen Physik hinüberführt; diese zu beherrschen, reicht aber im Durchschnitt weder seine Kapazität, noch weniger die knappe Lehrzeit hin, unser Techniker sieht sich vor den wissenschaftlichen Bankerott gestellt.

Der irrige Glaube an die Allgewalt des mathematischen Apparates kann selbstverständlich nicht den betreffenden Disziplinen zur Last gelegt werden; indessen mögen die Hinweise auf die Grenzen ihres

Wirkungsbereiches spärlicher angebracht werden, als dies die Vorsicht erheischte. Die üblen Erfahrungen, die dem in einer Illusion Befangenen nicht erspart bleiben, haben viele dazu geführt, das Kind mit dem Bade auszuschütten. So mufste sich die letzte Generalversammlung des Vereins deutscher Ingenieure mit dem Antrage befassen: es solle an den technischen Hochschulen eine obligatorische Vorlesung über elementare Ingenieurmathematik und Mechanik eingeführt werden.*) Der Verein lehnte den Antrag, eingedenk der Aufgaben einer Hochschule, ab. In der That mufs man vom Techniker verlangen, dafs er: 1. den Begriff einer Funktion kenne, 2. dafs er im stande sei, Infinitesimalbetrachtungen korrekt durchzuführen. Allein der Antrag gab doch zu einer heftigen Diskussion Veranlassung. Ich kann auf Grund eigener Beobachtungen konstatieren, dafs die übergrofse Mehrheit der Techniker in der Praxis die höheren und vor allem rein analytischen Methoden abstreift, um sich den elementaren oder den geometrisch-synthetischen zuzuwenden. Diese Scheu vor der Analysis wird dem Mathematiker von Beruf unbegreiflich erscheinen, vielleicht um so mehr, wenn wir eingestehen, dafs es so häufig schon das der Aufgabe fremde Koordinaten-System und die bekannte Gruppe von Kosinus-Relationen für Koordinaten-Transformation sind, die uns abschrecken. Die Schwierigkeit liefse sich umgehen, wenn man dem Rat eines bedeutenden Gelehrten folgte, invariant zu denken, ohne deshalb invariant rechnen zu müssen. Allein die Trennung dieser beiden erheischt eine so souveräne Beherrschung des rechnerischen Apparates, wie sie dem Techniker nicht zu Gebote steht. Da wo die technische Litteratur ihre eigenen Pfade wandelt, hat sie sich denn auch ganz den synthetischen Methoden zugewendet. Beispiele hierfür bilden die graphischen Methoden in den Baukonstruktionsfächern, die Geschwindigkeitspläne des Turbinenbaues, die Schieberdiagramme für Dampfmaschinen und die sogenannten Vektordiagramme in der Elektrotechnik.

Ich möchte das Gesagte in folgendem Satz zusammenfassen:

Wenn wir lediglich die Rücksicht auf die praktische Anwendbarkeit walten lassen, so mufs zugegeben werden, dafs die technischen Hochschulen in ihren reglementarischen Studienplänen an mathematischen Disziplinen, insbesondere hinsichtlich der analytischen Methoden für die grofse Mehrheit der Techniker zu viel, umgekehrt, wie oben nachgewiesen, für eine kleine Minderheit zu wenig bieten.

Für den grofsen Durchschnitt kommen diese Disziplinen im Wesen

*) Vgl. Schweiz. Bau-Ztg. Bd. XXIX S. 147, Bd. XXX S. 15.

nur vermöge ihrer allgemein bildenden Eigenschaften in Betracht, und es kann die Folgerung nicht umgangen werden, dafs Kompromisse nicht nur bezüglich ihrer Ausdehnung, sondern auch ihrer Methoden im Interesse einer harmonischen Gesamtausbildung geboten sind. Ein Herabsteigen von der hohen Warte höchster begrifflicher Strenge zu den naiveren Anschauungen der ersten Begründer, ein möglichst früher Übergang zu praktischen Anwendungen, vor allem aber ein langes Verharren bei den Grundprinzipien und eine weitgehende Einschränkung des Umfanges nach oben hin wären etwa die Wünsche, die wir im Interesse jener grofsen Mehrheit der Techniker zu stellen hätten. Dafs bei der Feststellung des Umfanges vor allem die Ratschläge der betreffenden Fachlehrer zu berücksichtigen sind, versteht sich nach Obigem von selbst.

3. Die Opposition der Praxis fufst des weiteren auf folgendem Grunde: Es besteht ein wesentlicher Unterschied auch im wissenschaftlichen Schaffen des Technikers und des Mathematikers oder Physikers. Es wird auf dem Gebiete des Maschinenwesens nie, oder nur in aufserordentlich vereinzelten Fällen gelingen, eine neue Konzeption auf den ersten Wurf in die Praxis umzusetzen; kommen doch hier Einflüsse ins Spiel, die jedem wissenschaftlichen Ansatze spotten. Ein gutes Beispiel hierfür bildet der neueste Wärmemotor. Auf den unantastbaren Grundlagen der Thermodynamik fufsend, entwarf Ingenieur Diesel einen Kreisprozefs und eine Wärmemaschine, die an Wirtschaftlichkeit alle bisher vorhandenen weit übertreffen sollte.*) Ein Konsortium stellte dem Erfinder unbeschränkte Mittel zur Verfügung. Die ersten Autoritäten der technischen Wissenschaft erkannten die Richtigkeit des Grundgedankens an. Es begannen die ersten Versuche, die fehlschlugen; Maschine auf Maschine wurde neu entworfen, Jahr für Jahr verging, und im Verlaufe dieses harten Ringens bröckelte ein Stück des Ideales nach dem anderen ab, eine Konzession um die andere mufste an die harte Wirklichkeit zugestanden werden; eine gewaltige Summe verschwand, bis der erste betriebsfähige Motor dastand. Und warum dies? Weil die Schwierigkeiten des Schmierens zu überwinden waren, weil es so lange ging, einen Verbrennungsprozefs zu erzielen, der theoretisch leicht verwirklichbar erschien. Vier mühevolle Jahre dauerte es, bis die Idee in Stahl und Eisen gekleidet war, und das Verdienst des Maschinenbauers scheint mir hierbei nicht geringer, als das des ursprünglichen Erfinders.

Fälle dieser Art führten den mehr intuitiv arbeitenden Techniker

*) S. Schweiz. Bau-Ztg. Bd. XXIV S. 56.

zum bekannten Ausspruch: Probieren geht vor Studieren. Der Ausspruch übertreibt maſslos, enthält aber ein Körnlein Wahrheit. Der Hinweis auf die Notwendigkeit des Versuches ist das Wahre an ihm; die groſse Bewegung für Ingenieurlaboratorien basiert auf diesem leitenden Prinzip. Die experimentelle Forschung und die Meſskunde, auch wieder in Gestalt technischer, vereinfachter Methoden, erhalten im Unterrichtswesen eine erhöhte Bedeutung, der für sie zu schaffende Platz im Unterrichtsprogramm wird notgedrungen nur auf Kosten aller übrigen, also auch der mathematischen Disziplinen, zu gewinnen sein.

Nachdem im Obigen die Interessen der Majorität besprochen wurden, bleibt uns übrig, auch die Fahne der wissenschaftlich arbeitenden, technischen Minorität hochzuhalten. Man pflegt die Mitglieder derselben als die Stabsoffiziere der Technik zu bezeichnen, welcher Vergleich aber in mehrfacher Beziehung hinkt. Weder ist ihre ökonomische Stellung gegenüber anderen Berufsgenossen eine bessere, noch auch fällt ihnen die Aufgabe ausschlieſslich zu, die leitenden Ideen für den technisch-strategischen Aufmarsch anzugeben; vielmehr wird häufig ihre ganze Vorarbeit durch Seitensprünge kecker Erfinder, die dann, um das Bild fortzusetzen, mit verwegenen Husarengeneralen zu vergleichen wären, zu nichte gemacht. Es ist Thatsache, daſs die wissenschaftliche Arbeit, es sei denn, daſs sie von hervorragenden Erfolgen begleitet ist, in der Praxis schlecht entlohnt wird, und eben darum bildet die Minderheit, die ihr obliegt, gewissermaſsen die Gruppe der technischen Idealisten. Merkwürdigerweise ist an den technischen Hochschulen bis jetzt wenig für sie gethan worden. Vielfach begnügt man sich zu konstatieren, daſs ein junger Mann Talent und ernstes Streben zeige, und überläſst ihn seinem Schicksal mit dem Hindeuten, er werde schon von selbst seinen Weg finden. Gegen diese Auffassung hat der Verein der Ingenieure Stellung genommen in seinem Beschluſs, daſs die technische Hochschule zwar vor allem den Bedürfnissen des groſsen Durchschnittes Rechnung tragen, daſs sie aber auch die Mittel für die höchste wissenschaftliche Ausbildung derer gewähren solle, die eine solche anstreben. Man kann diese Forderung nur aus vollem Herzen unterschreiben. Hier ist ein dankbares Feld für Aufklärung in höherem Sinn. Für diese Minderheit reicht der Umfang unseres normalen Studienplanes nicht hin; sie ist bei Zeiten aufzuklären, daſs mit der Bewältigung der Elemente der höheren Analysis erst die Vorhalle eines herrlichen Gebäudes betreten ist. Für diese Bevorzugten, welchen auch die Güter schaffende Praxis im Dienste der Wissenschaft zu verharren gestattet, ist nichts zu gut, und sie sollten nicht, mit mehr oder weniger gelindem Druck, von der Schule abgedrängt werden, als sei der von vornherein für die Praxis verloren, der wissenschaftliche Ideale hegt. Dafs, nebenbei gesagt, die technischen Hochschulen selbst gesonnen sind, diese Minderheit zu den Höhen der Wissenschaft hinaufzuführen, ist von selbst klar; die vielleicht mifsverständliche Auffassung, als seien die Universitäten gewillt, ihnen hierin Konkurrenz zu machen, mufste eine Opposition hervorrufen.

Die bisherige Darlegung erschöpft auch für unsere Skizze die Beziehungen der Technik zur Mathematik noch nicht. So wenig der Handelsbeflissene die Abstraktion eines nur dem Gesetze von Anfrage und Nachgebot gehorchenden, mit allen Sinnen nur auf den Erwerb gerichteten, organischen Schemens im Sinne der Nationalökonomie ist, ebenso wenig geht der Techniker in der Betrachtung seiner Mefslatten oder Riemscheiben und Stehlager auf. Auch wir fühlen uns als Glieder des Teiles unserer menschlichen Gemeinschaft, welcher ein Bildungsideal besitzt. — Die Frage, wohin die Entwickelung geht, welche Stellung der einzelne als ethisches Wesen einzunehmen hat, welches die letzten Gründe unseres Handelns sein müssen, bewegt uns ebenso tief, wie andere gebildete Stände. Im Ringen nach einer motivierten Weltanschauung werden aber für uns die Aufschlüsse der exakten Wissenschaften vor allem mafsgebend sein, denn mehr als andere kommen wir in die Lage, unser Leben im Glauben an die Konstanz der Naturgesetze aufs Spiel zu setzen, die Sicherheit desselben einer mathematischen Relation, die unserer Konstruktion zu grunde lag, anzuvertrauen. Nur vom Boden der exakten Wissenschaften her, für welche wieder die Mathematik der Lebensnerv ist, entspringt für uns eine einwandfreie Erkenntnis; sie sind nach meiner Auffassung berufen, das letzte Wort in allen Fragen nach dem Wesen der Dinge zu sprechen. Dafs auch hier voreilige Verallgemeinerungen auftreten können, die uns verwirren und deprimieren, mufs zugegeben werden. Die Welt nach dem Bilde Dubois-Reymond's, aufgelöst in ein Wirrsal reinen Centralkräften unterworfener Atome und Moleküle, deren Bewegungsgleichungen auch schon durch einen überlegenen Geist integriert gedacht werden können, ist eine trostlos öde Grundlage für eine ethische Weltanschauung. Allein wir lesen in der Thermodynamik des Herrn Poincaré, dafs diese Annahme unzulässig sei. Er weist nach, dafs schon die Erklärung des Satzes von Clausius auf mechanischem Wege nicht stichhaltig ist. — Hinter dem einfachen Atom, der einfachen Centralkraft ist also noch etwas anderes, vielleicht ein anderes Prinzip, vielleicht eine endlose Mannigfaltigkeit zu vermuten. Wenn sich dies bewahrheitet, dann wäre der unwissenschaftliche Materialismus überwunden. Und die Hoffnung hierzu schöpfen wir nicht aus den Aussagen der Mystiker, oder aus metaphysischen Systemen: sie wird uns vermittelt als Resultat der höchsten, bestkontrollierten, wissenschaftlichen Abstraktion, die wir kennen. An diesen Fragen werden auch wir Techniker immerdar das höchste Interesse nehmen; wir sind dazu durch unsere Vorbildung mehr als andere Stände berechtigt, ich möchte sagen verpflichtet; sie schlingen ein ferneres Band um Sie und die Ihnen schon so nahe stehende Technik.

Ein neuer gyroskopischer Apparat.

Von

N. Joukowsky in Moskau.

Das von mir konstruierte neue Gyroskop ist auf demselben Prinzip begründet, wie das perimetrische Gyroskop von Sire.

Ein schwerer Kreisel A (Fig. 1) stützt sich mit seinem Rande M an eine breite vertikale kupferne Röhre B, wobei an der Peripherie des Kreisels in den Berührungspunkten ein Gummiband MN angebracht ist. Am untern Teile des Kreisels befindet sich eine Rolle D, an welcher ein unendlicher Gummiriemen sich befindet, der dem Kreisel gestattet, sich mit Hilfe des Rades E zu drehen. In der Rolle D ist eine konische Vertiefung angebracht, durch welche der Kreisel sich auf die unbewegliche Spitze O stützt. Der Radius R der Röhre B kommt an Gröfse dem Radius r der Peripherie MN sehr nahe. Auf Fig. 2 ist dargestellt ein durch den Punkt M gehender horizontaler Durchschnitt des Apparates. Der Punkt C liegt hier auf der Axe der Röhre B, dagegen der Punkt A auf der Axe des Kreisels.

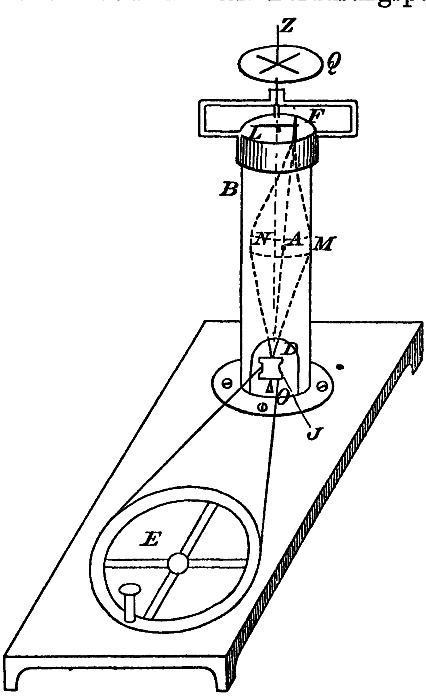


Fig. 1.

Wenn der Kreisel sich in der Röhre B dreht, so beschreibt der Punkt A um C einen kleinen Kreis mit dem Radius $R - r$.

Wenn wir mit ω die Winkelgeschwindigkeit bezeichnen, welche durch den unendlichen Riemen dem Kreisel in der Richtung des Uhrenzeigers mitgeteilt wird, so wird sich der Punkt A in dem oben erwähnten Kreise mit der linearen Geschwindigkeit ωr in einer der Bewegung des Uhrenzeigers entgegengesetzten Richtung bewegen. Die Winkelgeschwindigkeit dieser Drehbewegung ist:

$$\omega' = \frac{r\omega}{R - r}.$$

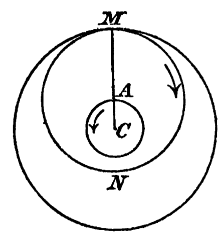


Fig. 2.

Diese Winkelgeschwindigkeit ist sehr grofs, da die Differenz $R - r$ nach der Voraussetzung sehr gering ist. Mit dieser Winkelgeschwindigkeit wird sich auch die obere Spitze F des Kreisels (Fig. 1) um die Vertikallinie oz drehen.

Auf der Axe oz kann man einen Körper Q anhängen, der mit Hilfe einer horizontalen Nadel L von F eine Drehbewegung mit der Winkelgeschwindigkeit ω' empfängt. So erhält man einen sehr einfachen Apparat, welcher eine schnelle Drehbewegung verleiht. Die treibende Kraft dieser Bewegungsübertragung wird erhalten durch die Reibung im Punkte M, welche, dank der centrifugalen Kraft des Kreisels und dem gyroskopischen Effekte desselben, sehr bedeutend ist.

Bezeichnen wir mit K das Trägheitsmoment des Kreisels um seine Axe DF und mit K' das Trägheitsmoment des Kreisels um die Axe DJ, wo $DJ \perp DF$, so wird das Moment der den Kreisel an die Röhre B drückenden Kraft sein:

$$\frac{\omega^2 r}{h}\left[K' \frac{r}{R - r} + K\right],$$

wo $h = OA$.

Die Gröfse der Reibungskraft aber, welche als die treibende Kraft unseres Apparates erscheint, wird sein:

$$P = \frac{\omega^2 r}{h^2}\left[K' \frac{r}{R - r} + K\right] f,$$

wo f der Koeffizient der Reibung ist. Diese Kraft wird, wenn ω grofs und $R - r$ klein ist, sehr bedeutend.

5. Sektion: Geschichte und Bibliographie.

Isaac Barrow et la méthode inverse des tangentes.

Par

H. G. Zeuthen à Copenhague.

Celui qui désire savoir jusqu'à quel point le champ était préparé aux créateurs du calcul infinitésimal, Newton et Leibniz, n'en trouvera aucun meilleur temoin que leur prédécesseur immédiat Isaac Barrow (1630—1677), l'ami et le maître de Newton. Cependant pour connaître l'étendue et la portée de cette préparation, il ne faut pas borner l'étude de ses Lectiones geometricae parues la première fois en 1670 aux améliorations qu'on y trouve de la différentiation de Fermat. Celles-ci semblent être dues en grande partie aux suggestions de Newton, qui possédait alors des règles encore plus développées pour trouver les «fluxions» et qui savait déjà en faire des applications très importantes. Il faut avant tout chercher dans les Leçons de Barrow les applications très étendues qu'il sait faire de considérations et de méthodes en usage avant Newton et Leibniz, les rapports qu'ont ses recherches avec celles de ses propres prédécesseurs, qu'il cite loyalement, et les manières de voir, propres à lui, qui auront servi à préparer celles de son grand élève.

Barrow tient avant tout une place assez remarquable dans le développement de l'idée du caractère inverse des opérations qui servent à résoudre les problèmes des tangentes et les problèmes de quadratures. M. Paul Tannery a fait remarquer que la connaissance de cette relation inverse était alors au moins depuis vingt-cinq ans une idée dans l'air. On le voit par la proposition du problème inverse des tangentes et par les réflexions que Descartes attache aux problèmes de cette nature. Cependant on ne donnait aucune expression précise à cette relation et on ne savait pas en tirer avantage où il y en avait besoin. Les applications de l'intégration par partie de Fermat et Pascal restaient par exemple très limitées parce qu'ils ne savaient pas combiner cette opération avec la différentiation inventée par le premier de ces savants. Barrow au contraire savait exprimer formellement ce caractère inverse, ce qui n'amoindrit pas les mérites de Newton, qui de son côté a donné le premier aux deux opérations leur ordre convenable. La différentiation (formation des fluxions) est depuis ses grandes découvertes l'opération directe, celle qui s'exécute d'après des règles résultant immédiatement de sa définition; la quadrature, appelée plus tard intégration, est l'opération inverse, qui sera facilitée par la connaissance antérieure des résultats d'un certain nombre de différentiations.

Revenons à Barrow. Non seulement il nous énonce formellement le caractère inverse qui nous occupe; il nous fait voir encore comment cette idée s'est développée chez lui par une combinaison de considérations dues à des géomètres antérieurs. Nous sommes renvoyés à cet égard aux idées qui ont donné aux cultivateurs modernes des recherches infinitésimales des avantages essentiels sur leurs modèles dans l'antiquité. Ces avantages étaient dus à deux circonstances. L'une est l'énorme développement du calcul qui avait eu lieu sous l'influence des méthodes des Hindous et sous la pression des demandes croissantes de l'astronomie. La connaissance des quantités négligeables, l'une par rapport à l'autre, dans les calculs numériques, devait développer l'idée de quantités négligeables mêmes dans les recherches exactes. Il n'est donc pas fortuit que ce soit le grand calculateur Kepler qui ait le premier rendu des infiniments petits l'objet direct de ses opérations, et que Briggs l'en ait complimenté dans un temps où la plupart des savants lui ont fait des reproches de cette violation des anciens principes de démonstration.

L'autre avantage sur l'antiquité consistait dans l'introduction immédiate de l'idée de la variation continue, qui à cause de la représentation géométrique devait se présenter sous forme de mouvement. Depuis Zenon d'Elea la géométrie ancienne avait abandonné volontairement cet avantage comme moins exacte. Il était naturel d'y revenir à une époque où l'on commençait à étudier directement le mouvement physique et à y appliquer la géométrie. Les recherches en partie mathématiques de Galilée et de Torricelli sur le mouvement physique ne manquaient pas d'influer réciproquement sur la géométrie infinitésimale. C'est aux travaux de ces deux savants que Barrow, qui les cite expressément, a attaché immédiatement la découverte dont nous venons de parler.

Rappelons à cet égard que Galilée, pour trouver l'espace parcouru d'une vitesse uniformément accélérée, représente le temps t par des abscisses, la vitesse v par les ordonnées correspondantes d'une ligne qui devient dans ce cas particulier une droite; alors l'espace e parcouru pendant le temps t sera représenté par l'aire du triangle limité par cette droite, par l'ordonnée correspondante à ce temps t et par l'axe des abscisses. La trajectoire d'un corps lancé horizontalement, étudiée aussi par Galilée, représente d'une autre manière la relation entre les mêmes trois quantités t, e et v. Pour plus de commodité nous appliquerons cette nouvelle représentation à la même figure, ce qui nous est possible parce qu'on peut égaler à t l'abscisse du point mobile restant proportionnelle à t. L'ordonnée aura la valeur représentée antérieurement, dans le cas d'un corps tombant, par e. C'est à la dernière figure que Torricelli a attaché sa détermination de la tangente d'une parabole, détermination qu'il a ensuite généralisée, lui comme Roberval. Le rapport v des vitesses verticale et horizontale sera égal à celui de l'ordonnée e et de la sous-tangente. Voilà une nouvelle représentation de la relation entre les trois quantités t, e et v, celle que nous écririons $v = \frac{de}{dt}$, tandis que nous écririons la première $e = \int v dt$. En substituant à la vitesse uniformément accélérée une vitesse dépendant d'une manière quelconque du temps, on aura précisément le caractère réciproque, qui nous occupe.

C'est de cette manière que Barrow l'a obtenu. Cependant il ne se borne pas à cette démonstratiou cinématique; mais il en donne plus tard aussi une démonstration géométrique. Cette fois il réunit, lui aussi, les deux courbes dans la même figure. Soient y et v les ordonnées de deux courbes passant par l'origine qui correspondent à la même abscisse x, et soit donné que l'aire limitée par la courbe (v), l'ordonnée v et l'abscisse x, est égale à ay, a étant constante. Alors on aura pour déterminer la sous-tangente:

$$\frac{y}{S_t} = \frac{v}{a}.$$

Barrow montre en effet, par la considération de points placés sur la courbe (y) des deux côtés de M, que la droite déterminée par cette valeur de S_t reste du même côté de la courbe (y).

Il regarde expressément l'une des deux courbes comme arbitraire, ce qui revient à regarder y ou v comme une fonction absolument arbitraire $f(x)$ ou $\varphi(x)$ de x. Il combine d'une manière semblable deux courbes rapportées à des coordonnées polaires.

Nous avons déjà dit que Barrow ne sait pas faire de cette découverte le même usage important que Newton. Il en déduit plusieurs propriétés géométriques et infinitésimales de courbes quelconques ayant l'une avec l'autre des relations données, progrès très considérables alors, mais qui ont perdu leur intérêt particulier depuis que le calcul infinitésimal nous a ouvert des points de vue encore plus généraux. Avant tout, sa découverte était pour lui la clef du problème inverse des tangentes. Pour le voir il suffit de considérer quelques exemples de cette application.

La découverte dont nous nous sommes occupés, réduit immédiatement à une quadrature la détermination d'une fonction y satisfaisant à l'équation

$$\frac{dy}{dx} = f(x),$$

où notre symbole $\frac{dy}{dx}$ remplace simplement le rapport $\frac{y}{S_t}\cdot$ Une série d'autres théorèmes servirait d'une manière semblable à réduire à des quadratures d'autres équations différentielles. Cependant, quoique Barrow signale expressément un tel usage des théorèmes de sa onzième Leçon, nous serions exposés à l'étendre au delà de ses propres intentions. Je préfère donc m'occuper des questions qu'il propose expressément sous forme de problèmes dans le troisième appendice à la 12e Leçon. Les deux premiers de ces problèmes se réduisent immédiatement à l'équation $\frac{y}{S_t} = f(x)$, dont nous venons de parler. Il l'applique par exemple au cas de $\frac{y}{S_t} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, qui est résolu par $y = a \arccos \frac{x}{a}$, toutefois sans cette notation. Vient ensuite l'équation $S_t = f(x)$ résolue par les quadratures que nous exprimerions par

$$\int_0^x \frac{dx}{f(x)} = \int_c^y \frac{dy}{y}.$$

Barrow ne se borne pas ici à représenter le second membre par une aire hyperbolique, mais lui attribue expressément les propriétés logarithmiques et y joint quelques applications de la théorie connue des logarithmes. Dans le problème suivant qui conduit d'une manière semblable aux spirales logarithmiques, il rapporte expressément une aire semblable aux logarithmes. Remarquons encore qu'il désigne expressément comme arbitraire la limite inférieure c de l'aire hyperbolique. Cela ne vient pas du reste d'un sentiment du besoin général d'une constante arbitraire dans l'intégrale d'une équation différentielle. Il l'introduit pour éviter l'aire hyperbolique infinie, qu'on obtiendrait en prenant simplement zéro pour limite inférieure.

Les problèmes IV—VI se rapportent à des coordonnées polaires (que nous désignerons par r et Θ):

$$\text{V.}\quad \frac{S_t}{r} = \frac{1}{f(\Theta)}, \qquad \text{VI.}\quad S_t = f(\Theta).$$

Les théorèmes suivants se rapportent à des combinaisons des deux espèces de coordonnées.

Tous les problèmes se réduisent à des quadratures par une simple séparation des variables. Barrow a fini par voir qu'il existe à cet égard une méthode générale. Le théorème IV du dit appendice réduit l'équation

$$\frac{y}{S_t} = \frac{f(x)}{\varphi(y)}$$

aux quadratures

$$\int \varphi(y)\, dy = \int f(x)\, dx.$$

Dans une note ajoutée il appelle ce théorème faecundissimum et se reproche son aveuglement ($\alpha\beta\lambda\varepsilon\psi\acute{\iota}\alpha$), parce qu'il n'a pas vu qu'il comprend la plupart des autres, à temps pour en commencer.

Citons encore les exemples suivants des problèmes les plus compliqués que Barrow sache réduire à des quadratures:

$$\frac{m}{x^2} = f(y)$$

où m est le segment $x - y\dfrac{dx}{dy}$ intercepté par la tangente sur l'axe des abscisses, et

$$s = f(x) - y$$

où s représente la longueur de la courbe.

La première de ces équations est intégrée dans le théorème XI 27 par

$$\frac{y}{x} = \int f(y)\, dy,$$

la seconde dans le 2e problème des additions faites à la seconde édition de ses Leçons parue en 1674. —

On voit que Barrow avait déjà traité le problème inverse des tangentes d'une manière assez générale pour comprendre toutes les communications que fait Leibniz dans sa célèbre correspondance avec

Newton (1675—1677). Alors Leibniz possédait la première édition des Leçons de Barrow; mais qu'il n'y puise pas ses suggestions, ou qu'il n'a du moins aucune conscience de suggestions de ce côté, devient clair précisément par la circonstance qu'il fait ces communications à Newton, et qu'il conserve jusque dans sa dernière lettre l'illusion de dire quelque chose de nouveau à Newton sur cette matière. Il a même suggéré la même illusion à des lecteurs de notre temps. De l'autre côté Newton possédait alors sur ce point non seulement tout le savoir de Barrow, mais une théorie générale des équations différentielles. On la trouve dans la Methodus fluxionum, rédigée en 1671, où ayant observé que seulement en des cas très particuliers on peut réduire ces équations à des quadratures, il fait du développement en séries la base d'une théorie embrassant toutes ces équations. On voit du reste, un peu plus tard, dans ses Principes que Newton ne néglige nullement de réduire les questions à des quadratures quand cela est possible, et qu'il y possède des moyens beaucoup plus développés que ceux de Barrow.

Ces différents degrés jusqu'auxquels les deux émules étaient arrivés à cette époque, où Newton avait l'avance non seulement de l'âge mais encore plus celle de la préparation particulière dans cette direction, se présentent clairement dans ladite correspondance. Leibniz communique avec empressement à Newton qu'il possède des moyens de résoudre le problème de DeBeaune, qui avait tant intéressé les géomètres français, et d'autres problèmes appartenant à la méthode inverse des tangentes, problèmes qui ne se présentent pas selon lui à la méthode des séries infinies que Newton venait de lui communiquer. Newton lui répond qu'il n'a pas besoin de cette méthode particulière pour un problème aussi simple, ni non plus dans le cas où une relation est donnée entre deux côtés du triangle caractéristique $\left(\text{équation différentielle renfermant } y \text{ et } \frac{dy}{dx}\right)$; mais qu'il en sera autrement, si aussi l'abscisse x y entre. D'après la forme de cette réponse Leibniz n'a pas absolument tort en lui objectant l'équation $S_t = f(y) - x$; mais comme cette équation rentre dans le cadre de celles que Barrow savait résoudre (elle ressemble à celle de XI, 27), cet exemple n'aura pas étonné Newton, qui a voulu dire seulement que les équations contenant toutes les deux variables ne sont pas en général réductibles à des quadratures. Leur solution générale demande l'emploi de ses séries infinies.

Cependant on ferait tort à Leibniz en n'observant pas que précisément cet exemple montre que Leibniz est déjà sur le point de prendre pour ces questions un point de départ différent de celui de Barrow, à savoir celui de faire dépendre les intégrations de résultats connus de différentiations. En effet, l'équation en question s'écrit

$$xdy + ydx = f(y)\,dy,$$

et son intégration est une conséquence immédiate de la formule qu'il vient de donner pour la différentielle d'un produit. C'est la voie où il atteindrait plus tard à d'éminents résultats; mais quant aux principes c'est précisément la méthode inventée déjà par Newton.

[L'auteur a traité plus complètement le même sujet dans un Mémoire inséré au Bulletin de l'Académie des Sciences et des Lettres de Danemark, en 1897.]

Über die neuesten mathematisch-bibliographischen Unternehmungen.

Von

G. Eneström in Stockholm.

Am Anfange dieses Jahrhunderts waren die bibliographischen Hilfsmittel, welche den Mathematikern zu Gebote standen, verhältnismäfsig ziemlich befriedigend. Für Aufsätze in periodischen Schriften und Abhandlungen gelehrter Gesellschaften konnte man das Repertorium commentationum a societatibus literariis editarum (tomus VII, 1808) von Reuss zu Rate ziehen, und ein Verzeichnis der separat herausgegebenen mathematischen Bücher gab Murhard's Litteratur der mathematischen Wissenschaften (I—V, 1797—1805). In der That war die mathematische Litteratur damals wenig umfangreich und leicht zu überblicken, da nur wenige Zeitschriften mathematische Aufsätze enthielten, und die gelehrten Gesellschaften, welche in betracht kamen, das Dutzend nicht beträchtlich überstiegen.

Im Laufe des Jahrhunderts haben sich nun diese Verhältnisse sehr geändert, und zwar auf eine für die mathematischen Forscher wenig günstige Weise. Nicht als ob keine neuen mathematischen Bibliographieen von irgend einem Wert erschienen wären. Im Gegenteil sind deren viele herausgegeben worden, und unter diesen zeugen einige von grofsem Fleifs und Gelehrsamkeit. So z. B. haben wir ja Poggendorff's Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften (1863) und die kürzlich (1896) begonnene Fortsetzung desselben von den Herren Feddersen und Oettingen. Anwendbare Bibliographieen sind auch das Handbuch der mathematischen Literatur von Rogg (1830), die Bibliotheca Mathematica von Sohncke (1854) und die gleichnamige Schrift von Erlecke (1872—1873). Für besondere Länder haben Riccardi (1870—1894), Zebrawski (1873—1886) und Bierens de Haan (1883) vorzügliche Bibliographieen geleistet. Wer speziell die neueste Litteratur zu kennen wünscht, findet in dem Jahrbuche über die Fortschritte der Mathematik und für die letzten Jahre auch in der Revue semestrielle des publications mathématiques gute Führer.

Indes ist es nicht zu leugnen, dafs die bibliographische Arbeit im Verhältnis zur Entwickelung der mathematischen Produktivität zurückgeblieben ist. Diese Produktivität, wesentlich erleichtert durch zahlreiche Fach-Zeitschriften, von welchen die meisten in den letzten 30 Jahren gegründet worden sind, hat jetzt eine Höhe erreicht, von der man vor 50 Jahren nicht träumen konnte. Die Anzahl der jährlich erscheinenden Bücher, Abhandlungen und Aufsätze mathematischen Inhalts beläuft sich jetzt auf etwa 2000, und während des letzten Menschenalters sind beinahe 50,000 neue Schriften hinzugekommen.

Mag es auch wahr sein, dafs nur ein Teil dieser Masse von wirklichem Wert ist, so darf auf der anderen Seite bemerkt werden, dafs schon dieser Teil quantitativ sehr bedeutend ist, und jedenfalls wäre es erwünscht, einen bibliographischen Leitfaden zu besitzen, um erfahren zu können, was auf jedem Gebiete der Mathematik geleistet worden ist. Sonst wird es immer öfter eintreffen, dafs Sätze oder Methoden für neue ausgegeben werden, welche schon früher von anderen Forschern gefunden worden sind, uud auf diese Weise wird manchmal nur aus Unkunde grofse Mühe unnütz aufgewandt. Zwar würde nicht einmal der Zugang zu den vortrefflichsten bibliographischen Führern diesen Übelstand vollständig beseitigen, da ja neue Entdeckungen auch in solchen Schriften niedergelegt werden, welche, sei es aus sprachlichen, sei es aus buchhändlerischen Gründen, fast unzugänglich bleiben, und da es immer Mathematiker geben wird, welche sich nicht die Mühe geben werden, sich nach früheren Untersuchungen genügend in der Litteratur umzusehen. Aber in den meisten Fällen würde doch eine gute mathematische Bibliographie von unschätzbarem Nutzen sein, nicht nur für die Forscher ex professo, sondern auch für alle diejenigen, welche aus irgend einem Grunde die Resultate der wissenschaftlichen Arbeit der letzten Jahrzehnte kennen lernen wollen. In der That hat sich das Bedürfnis einer solchen Bibliographie mehr und mehr erkennbar gemacht, und trotz der grofsen entgegenstehenden Schwierigkeiten sind schon Arbeiten zu ihrer Abhilfe in Angriff genommen, und in erster Linie sind zwei mathematisch-bibliographische Unternehmungen zu besprechen. Die eine, das Répertoire bibliographique des sciences mathématiques, das von einer internationalen Kommission redigiert wird, hat sogar schon einige Resultate ihrer Wirksamkeit publiziert, die andere wird seit vielen Jahren von dem Herrn Oberbibliothekar G. Valentin in Berlin zur Veröffentlichung vorbereitet. Ich werde mir jetzt erlauben, einige Notizen über diese zwei Unternehmungen zu geben.

I. Répertoire bibliographique des sciences mathématiques.

Die Initiative zu dieser Bibliographie ist von der „Société mathématique de France“ ergriffen worden, und der Plan derselben wurde im Anfange des Jahres 1885 entworfen.*) Die Bibliographie sollte die wissenschaftliche Litteratur des 19. Jahrhunderts verzeichnen, und die Titel sollten streng systematisch nach dem Inhalte geordnet werden. Durch eine Kommission liefs die Gesellschaft darum einen sehr detaillierten Entwurf zur Klassifizierung ausarbeiten, welcher nach gebührenden Verbesserungen bei einer Versammlung in Paris 1889 festgestellt wurde.**) Die gesamte Mathematik ist in 23 Klassen eingeteilt worden; jede Klasse hat wieder eine Anzahl Abteilungen, diese meist wieder Unterabteilungen, sodafs die Anzahl aller etwa 2000 beträgt; für jede Abteilung giebt es eine besondere Signatur, die aus Buchstaben und Ziffern zusammengesetzt ist. Die bibliographische Arbeit wird so ausgeführt, dafs die Titel auf Karten geschrieben werden, welche mit der betreffenden Signatur versehen sind, und wenn es nötig ist, werden Übersetzungen oder Erklärungen hinzugefügt. Um diese Arbeit auszuführen, wurde eine Kommission von 17 Personen gewählt; die Anzahl der Mitglieder der Kommission ist später durch Kooptation vermehrt worden.

Um das eingesammelte Material dem gelehrten Publikum schneller zugänglich zu machen, hat die Kommission besondere Mafsregeln ergriffen. Je nachdem die Mitarbeiter die Titelkopieen einsenden, werden diese nach den Signaturen geordnet, und wenn zehn Titel mit derselben Signatur vorhanden sind, werden diese auf eine Karte gedruckt.***) Wenn 100 solcher Karten fertig sind werden sie herausgegeben; sie bilden dann eine sogenannte „Série“ des Répertoire. Vier solcher

*) Siehe Eneström, Sur les bibliographies des sciences mathématiques. Biblioth. Mathem. 1890, S. 39—41.

**) Herausgegeben unter dem Titel: Index du Répertoire bibliographique des sciences mathématiques publié par la Commission permanente du Répertoire (Paris 1893, XIV u. 80 S. 8⁰).

***) Ausnahmsweise enthalten einige Karten nur neun Titel, wenn einige derselben sehr lang sind.

„Séries“ sind jetzt erschienen*) und der Druck der fünften „Série“ ist bald beendet. Aufserdem hat die Kommission im Manuskript noch mehrere tausend Titel bereit. Wenn erst einmal das ganze Material gesammelt ist, hat man die Absicht, das Répertoire in der Form eines Buches herauszugeben.

Der Plan, welcher auf diese Weise entworfen worden und zum Teil auch zur Ausführung gekommen ist, hat ohne Zweifel viele Verdienste. Die Gewinnung von Mitarbeitern in den verschiedenen Ländern erlaubt, dafs die Bibliographie vollständiger werden kann, als wenn sie von einer einzigen Person ausgearbeitet wäre, und durch die allmähliche Veröffentlichung derselben auf Karten kann sie früher als sonst den Forschern zugänglich gemacht werden; auch die ausführliche systematische Klassifizierung, an welcher viele Spezialisten teilgenommen haben, mufs als ein entschiedenes Verdienst des Unternehmens hervorgehoben werden. Jedoch zeigt der Plan der Bibliographie leider auch einige Nachteile. Die vielen Mitarbeiter sind im allgemeinen nicht geübte Bibliographen, es wird ihnen darum zuweilen schwer werden, beim Ausschreiben der Titel die gegebenen Anweisungen genau zu befolgen, und hierdurch entstehen notwendiger Weise gewisse Inkonsequenzen; auch die Klassifizierung dürfte in vielen Fällen von den verschiedenen Mitarbeitern nicht nach einheitlichen Grundsätzen ausgeführt werden können. Die vier schon herausgegebenen „Séries“ zeigen, dafs man die Unvollkommenheiten des eingesammelten Materials bei der Drucklegung der Karten nur schwer verbessern kann; Schreib- oder Druckfehler kommen auch ziemlich häufig vor.

Da ferner der Druck teils von der Einsendung der Titel abhängig ist, teils erst dann besorgt werden kann, wenn zehn zu einer und derselben Abteilung gehörende Titel vorhanden sind, so folgt hieraus, dafs man gar nicht weifs, wie vollständig die herausgegebenen „Séries“ die Litteratur einer gewissen Klasse verzeichnen; es ist ja möglich, dafs sogar die wichtigsten Abhandlungen dieser Klasse noch nicht auf den Karten angezeigt sind.

Was die Anwendung der gedruckten Karten betrifft, so mufs bemerkt werden, dafs diese ziemlich leicht ist, so lange nur wenige „Séries“ herausgegeben sind, dafs sie aber um so unbequemer wird, je zahlreicher die Karten werden. Nun halte ich es für sehr wahrscheinlich, dafs das Répertoire zuletzt etwa 100,000 Titel, also ungefähr 10,000 Karten enthalten wird, und diese Karten würden in einem Bücherschranke eine Länge von ungefähr 2 Metern ausfüllen.

*) Vgl. Biblioth. Mathem. 1895, S. 29; 1896, S. 118.

Aus dieser Masse von Karten diejenigen herauszusuchen, welche man zu sehen wünscht, wird nicht immer leicht sein, und auch nur das Einordnen der neuen Karten unter die alten wird von den Abonnenten zuletzt nicht ohne Mühe ausgeführt werden. Bei Benutzung der Karten wird ferner ein anderer Umstand nicht selten Beschwerde verursachen; die Abbreviaturen der Titel der periodischen Schriften sind nämlich nicht ganz passend gewählt worden, sodafs der Benutzer gezwungen ist, beständig den Schlüssel der Abbreviaturen einzusehen, um nicht irre geführt zu werden.*) Zuletzt mag noch erwähnt werden, dafs, wenn man nach den bisherigen Verhältnissen schliefsen darf, die „Séries“ des Répertoire sehr langsam dem gelehrten Publikum zugänglich werden werden, so dafs die letzte „Série“ wahrscheinlich erst in 20 Jahren fertig ist. Dann ist aber bereits wieder eine ganz neue Litteratur entstanden, welche das Répertoire noch nicht verzeichnet hat.

Die Übelstände, welche hier hervorgehoben worden sind, dürften wenigstens zum Teil vermieden werden können, wenn man sich entschlösse, für die vorläufige Veröffentlichung nicht Karten, sondern Lieferungen zu benutzen, deren jede ein für sich abgeschlossenes Ganze bildete, und den Inhalt einer gewissen Anzahl von Gesellschafts- oder Zeitschriften in systematischer Ordnung verzeichnete. Für die kleineren Länder dürfte es angemessen sein, die ganze Litteratur in eine einzige Lieferung zusammenzufügen; ein Gedanke, welcher schon gewissermafsen in bezug auf Italien und Polen zur Ausführung gelangt ist, und welchen ich auch recht bald für Schweden realisieren zu können hoffe.

II. Die allgemeine mathematische Bibliographie des Herrn G. Valentin.

Um dieselbe Zeit als die „Société mathématique de France“ den Plan zum Répertoire bibliographique des sciences mathématiques entwarf, entschlofs sich Herr Valentin, eine vollständige Bibliographie der Mathematik von der Erfindung der Buchdruckerkunst bis auf unsere Tage herauszugeben;**) nur die elementarsten Lehrbücher des 19. Jahrhunderts sollten ausgeschlossen werden. Er begann seine Arbeit schon im Anfange des Jahres 1885 und ist seitdem fast ohne Unterbrechung damit beschäftigt gewesen. Zuerst beabsichtigte

*) Vgl. Eneström, Biblioth. Mathem. 1895, S. 29.

**) Siehe Eneström, Sur les bibliographies des sciences mathématiques. Biblioth. Mathem. 1890, S. 39.

er die Litteratur nur bis zum Jahre 1868 zu verzeichnen, erweiterte aber etwas später den Plan, sodaſs die Bibliographie jetzt auch die letzten 30 Jahre umfaſst; kritische Besprechungen mathematischer Bücher sind auch darin erwähnt. Um die Titel der separat erschienenen Schriften zu sammeln — Herr Valentin schätzt die Anzahl derselben auf etwa 35,000, wobei er jedoch als eine Einheit ein Buch mit allen Auflagen und Übersetzungen desselben rechnet — hat er teils mehrere der gröſsten Bibliotheken in Deutschland und im Auslande durchforscht, teils eine groſse Anzahl von Bibliographieen und litterarischen Zeitschriften benutzt. Die Titel der in Gesellschafts- und Zeitschriften erschienenen Abhandlungen und Aufsätze hat er aus mehr als 4000 Publikationen mit mehr als 120,000 Bänden excerpiert; die Anzahl der betreffenden Titel schätzt er auf etwa 90,000, sodaſs die ganze Bibliographie ungefähr 125,000 Titel enthalten würde, deren er schon mehr als 100,000 gesammelt hat, und mit den noch übrigen hofft er vor Ende dieses Jahres fertig zu sein. Dann braucht er etwa drei Jahre für die Redaktion seiner Sammlungen und noch ungefähr vier Jahre für den Druck, so daſs die ganze Arbeit voraussichtlich um das Jahr 1904 fertig sein wird. Die Titel sollen teils alphabetisch nach den Verfassernamen, teils systematisch nach dem Inhalte geordnet werden, und Herr Valentin berechnet, daſs die Bibliographie vier Bände à 50 Bogen Lexikon-Oktav doppelspaltig umfassen wird.

Die zwei soeben genannten Unternehmungen beziehen sich nur auf die schon vorhandene Litteratur. Zwar stellt der Plan des Répertoire Supplemente in Aussicht, deren jedes zehn Jahre umfassen soll; wenn aber das Répertoire selbst erst in 20 Jahren fertig ist, so können die jetzt lebenden Forscher kaum hoffen, von den Supplementen irgend einen Nutzen zu haben. Die zwei schon früher erwähnten Publikationen: Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik und Revue semestrielle des publications mathématiques sind ja sehr wertvoll, enthalten aber auch Referate, und können darum nicht so frühzeitig erscheinen, als zu wünschen wäre; das Jahrbuch ist übrigens für rein bibliographische Zwecke etwas unhandlich, und die Revue umfaſst nicht separat herausgegebene Schriften. Daher ist es wünschenswert, für die künftige Litteratur ein neues bibliographisches Hilfsmittel zu bekommen. In der That ist ein solches wirklich in Aussicht gestellt durch den bibliographischen Kongreſs, der auf Veranstaltung der „Royal Society“ im vorigen Jahre in London abgehalten wurde. Dieser Kongrefs beschlofs nämlich eine bibliographische Arbeit vorzubereiten, welche alle vom Jahre 1900 ab erscheinenden wissenschaftlichen Schriften verzeichnen sollte.*) Diese Bibliographie soll in erster Linie systematisch nach dem Inhalte der Schriften geordnet werden. Die Titelkopieen sollen von Mitarbeitern in den verschiedenen Ländern verfertigt und darnach in London auf Karten gedruckt werden; vermutlich hat man die Absicht, jeder solchen Karte eine besondere Signatur zu geben, damit es den Abonnenten möglich sein wird, die Karten unmittelbar zu ordnen. Zuletzt sollen sämtliche Titel in einem Kataloge gedruckt werden, geordnet sowohl nach dem Inhalte, als auch nach dem Namen des Verfassers.

Da noch nichts gethan ist, um die Beschlüsse des Kongresses auszuführen, ist es kaum möglich, den Wert derselben zu beurteilen, es scheint mir aber, als ob deren Realisierung sich nicht allzu leicht wird vollziehen lassen. Zuerst wird es ohne Zweifel sehr schwierig werden, in jedem Lande interessierte, sachkundige und ständige Mitarbeiter zu finden; nicht viel leichter ist es, ein passendes System für die Klassifizierung aufzustellen und bei der bibliographischen Arbeit diese Klassifizierung richtig zu benutzen. Für die Abonnenten wird es mühsam sein, die von Zeit zu Zeit erscheinenden Karten unter die alten einzuordnen. Bemerkt sei auch, dafs die Karten einen beträchtlichen Raum in den Bücherschränken fordern werden; für die Mathematik wird jährlich eine Länge von etwa 30 bis 40 Centimetern, also in 10 Jahren etwa 3 bis 4 Meter in Anspruch genommen werden. Viel besser wäre es darum, meiner Meinung nach, statt Karten gewöhnliche Jahresbibliographieen herauszugeben, geordnet nach den Verfassernamen und mit einem systematischen Register versehen, aber daran scheint man bisher gar nicht gedacht zu haben. Freilich zeigen auch die Verhandlungen des Kongresses, dafs man den Plan des Unternehmens noch nicht näher präcisiert hat.

Ich fürchte also, dafs man von den Beschlüssen des Kongresses wenig Gewinn für die mathematische Bibliographie erwarten darf, und jedenfalls würde es sehr gut sein, wenn man eine besondere mathematische Jahresbibliographie bekommen könnte. Diese würde am leichtesten hergestellt werden, wenn sie alphabetisch nach den Verfassernamen geordnet wäre und dazu ein systematisches Register enthielte, also ganz wie die gewöhnlichen Buchhändlerkataloge. Jede solche

---

*) Siehe Report of the proceedings at the international conference on a catalogue of scientific literature, hold in London July 14—17, 1896 (London 1896, 8°).

Jahresbibliographie würde etwa 200 Oktavseiten umfassen und sollte vor dem Ausgang des folgenden Jahres erscheinen; je 10 Jahresbibliographieen sollten später zu einem systematischen Kataloge bearbeitet werden.

Aus dem, was ich hier angeführt habe, geht hervor, daſs wir hoffen können, in wenigen Jahren ein, soweit möglich, vollständiges Verzeichnis der mathematischen Litteratur bis zum Jahre 1897 zu bekommen, daſs aber noch nichts gethan ist, um diese Bibliographie auf die, meiner Ansicht nach, passendste Weise, nämlich durch Jahreskataloge, unmittelbar fortzusetzen. Die hauptsächlichen Schwierigkeiten dabei sind natürlich teils das nötige Geld herbeizuschaffen, teils einen Redakteur zu finden. Ob der erste internationale Mathematiker-Kongreſs etwas dazu beitragen kann und will, weiſs ich nicht; vielleicht wäre es möglich, durch eine Besprechung innerhalb dieser Sektion etwas hierüber zu erfahren. Ich selbst habe keinen Antrag in dieser Hinsicht zu stellen, sondern beabsichtige nur, die Aufmerksamkeit auf eine, meines Erachtens wichtige, Frage zu lenken.

Aperçu sur le développement historique de la théorie des courbes planes.

Par

G. Loria à Gênes.

Les origines de la théorie des courbes planes se perdent dans la nuit des temps: la contemplation du mouvement des astres et de la chute des corps, l'observation du chemin rectiligne de la lumière et de l'ombre projetée par les corps opaques, et autres phénomènes du même genre font naître en tous ceux qui ont des yeux pour voir et un jugement pour comprendre, l'idée de ligne, soit comme trace laissée par un point en mouvement, soit comme ce quid qui sépare une portion de surface d'une portion contiguë. Et, en effet, tous les anciens monuments, qui sont les débris de civilisations disparues, portent dessinées sur leurs parois des courbes ou présupposent dans leur construction l'emploi de ces figures. N'essayons donc pas d'indiquer la personne ou même le peuple auquel on est redevable de la conception de ligne; le grand livre de l'histoire resterait muet devant quiconque l'interrogerait sur ce point. Bornons-nous pourtant à signaler chez tous les peuples qui ont atteint un certain degré de développement intellectuel, non seulement l'idée de ligne droite et de circonférence, mais encore des essais pour mesurer la longueur de cette ligne et la surface de la portion de plan limitée par elle.

Un terrain plus solide trouve sous ses pieds celui qui désire remonter aux sources de la théorie des sections coniques; car c'est à Ménèchme, maître d'Alexandre le Grand, qu'est dû la découverte de la célèbre triade dont vingt siècles d'étude assidue et presque incessante n'ont suffi à découvrir toutes les propriétés. Ménèchme, parvient-il aux sections coniques en coupant un cône circulaire droit, ou bien les a-t-il tracées par points pour résoudre le problème de la duplication du cube? La réponse est ambiguë. Mais il est important de remarquer que, quel qu'ait été le procédé de Ménèchme, la géométrie se sera par conséquence enrichie au moins d'une méthode qui, convenablement généralisée, mène à un grand nombre de courbes nouvelles; c'est-à-dire ou de celle qui consiste dans l'opération de couper par des plans une surface connue, ou de celle par laquelle on établit une correspondance univoque entre une courbe donnée et sa projection centrale, ou enfin de celle qui revient à démontrer une relation métrique satisfaite par tous les points d'une courbe rapportée à certains éléments fixes. Le premier de ces procédés à été appliqué par un géomètre qui appartient à la même époque qu'Apollonius de Perge, c'est-à-dire Persée, auquel on doit la découverte des courbes *spiriques*; le deuxième inspira à Newton sa célèbre classification des courbes du troisième ordre, et peut se considérer comme le fondement de toute la géométrie projective; enfin dans le dernier on aperçoit le germe le plus reculé de la géométrie analytique.

Toutefois ces méthodes, quoiqu'elles aient été appliquées, développées et aussi transformées par Apollonius dans le grand ouvrage qu'il consacra aux sections coniques, révélèrent leur extraordinaire fécondité seulement plusieurs siècles après Ménèchme; et ce n'est pas d'elles que se servirent les anciens géomètres pour enrichir la collection des courbes planes particulières; ils donnèrent, au contraire, la préférence à la *méthode cinématique*, ce qui ne doit causer aucune surprise, car, en dernière analyse, comment peut-on définir une ligne, sinon en spécifiant la loi qui gouverne le mouvement du point générateur? ... Et c'est précisément par la composition d'un mouvement de rotation d'une droite avec un mouvement progressif d'un point ou d'une droite que naissent la *quadratrice* conçue par un sophiste contemporain de Socrate (Hippias d'Élis)*), la *spirale* imaginée par Archimède et la *conchoïde* de Nicomède.**)

Mais cette dernière courbe, si elle a été définie *par le moyen* de mouvement, a été conçue *dans le but* de résoudre les problèmes de la duplication du cube et de la trisection, qui étaient les fantômes qui hantaient le sommeil des anciens géomètres; dans un but semblable

*) Voilà la première courbe conçue en étudiant le problème de la quadrature du cercle; de la même source découlèrent la quadratrice de Tschirnhausen, les paraboles virtuelles, de G. à Ste Vincentio, etc.; on connaît une quadratrice de l'hyperbole ayant une origine semblable.

**) C'est la première des courbes qui, à cause de leur forme, a reçu le nom de conchoïde.

a été créée la cissoïde de Dioclès, cette courbe remarquable dont Newton découvrit plus tard une si élégante génération organique. Et il est bon de remarquer que par l'invention de la cissoïde, comme par celle de la conchoïde, la géométrie s'enrichit d'une méthode excellente pour déduire d'une courbe quelconque une autre courbe, méthode à laquelle doivent la vie non seulement des courbes particulières importantes, telles que le limaçon d'Étienne Pascal et la cardioïde de Castillon, mais des classes entières, telles que celles des courbes cissoïdales et des conchoïdes en général. En outre, la cissoïde et la conchoïde sont les premiers éléments des longues séries de courbes trisectrices et de courbes duplicatrices.

Transmigrations de peuples, guerres de conquête, luttes religieuses et, après, les études d'érudition empèchent pour un certain temps les tranquilles méditations des mathématiciens et absorbent pour environ quinze siècles toute l'activité du genre humain; en conséquence, les germes jetés par les géomètres de la période d'or de la géométrie grecque restent stériles et le patrimoine de la géométrie non seulement est stationnaire, mais souffre de dilapidations très regrettables; en effet, n'est-ce pas dans cette époque où la force brutale domine sur la raison, où l'humanité semble perdre la prérogative presque divine de comprendre la sublimité de la science abstraite, n'est-ce pas dans cette époque, dis-je, que disparurent les œuvres telles que les Lieux plans d'Apollonius, les Porismes d'Euclide et Dieu sait combien d'autres, dont les titres et les noms des auteurs n'ont pas même survécu? Le transport en Europe, effectué par les Arabes, des débris de la science hellène qui se sauvèrent de l'immense naufrage scientifique, produit par la domination des Romains et par l'invasion des barbares, réveille dans les Occidentaux l'esprit de la recherche de la vérité auparavant assoupi; l'étude des courbes planes est bientôt remise à l'ordre du jour, elle recommence à donner matière aux méditations des mathématiciens et reçoit bientôt une transformation et un développement extraordinaire par Descartes et Fermat. C'est la méthode des coordonnées, la sorcière qui opère cette merveilleuse transfiguration! En effet, cette méthode non seulement fournit un procédé uniforme pour représenter symboliquement une courbe quelconque, mais rendit concevable et possible une théorie générale des courbes planes; elle mit dans les mains de tout le monde un instrument créateur d'innombrables figures géométriques; elle démocratisa la géométrie, car, tandis que l'ancien régime ne concédait que des ressources très bornées, même aux imaginations les plus ardentes, sous le nouveau il fut possible à tous d'étudier des courbes nouvelles, car l'équation d'une courbe est un écrin qui renferme toutes les propriétés d'une courbe et dont chaque géomètre possède la clef. Dès ce moment l'étude d'une courbe devient la même chose que l'étude d'une fonction, tout progrès de l'analyse se reflète dans un progrès de la géométrie, deux fleuves qui s'écoulaient auparavant parallèlement se réunissent pour former une majestueuse rivière: la théorie des variables continues. C'est à cette mémorable union que doivent leur vie un grand nombre de lignes remarquables, telles que le folium Cartesii, les perles de Sluse, les paraboles et les hyperboles d'ordre supérieur, les spirales de degré supérieur, etc., et encore la courbe logarithmique, la sinusoïde, la courbe des tangentes, la courbe hypergéométrique d'Euler, etc.

Cet instant, où la nouvelle théorie des courbes planes se trouve à son état naissant, est extrêmement intéressant pour l'historien qui peut constater, d'un côté la prodigieuse fertilité d'une idée unique très simple, et se trouve d'autre part en mesure de se former une idée des nombreux et importants perfectionnements qu'elle a subi ensuite. Nous qui manions avec une si grande sûreté le nouvel instrument, qui voyons nos élèves même l'employer avec aisance après quelques mois d'étude, nous avons de la peine à concevoir les difficultés qu'offraient aux premiers géomètres de la période cartésienne l'usage des coordonnées, à nous imaginer leur incertitude dans l'emploi des signes de l'abscisse et de l'ordonnée et leur effroi pour les valeurs infinies des x et des y! L'histoire de la géométrie présente plusieurs faits qui témoignent de cet étrange état de choses; il est bon d'en citer ici au moins quelques-uns. Roberval croit mettre parmi ses titres de gloire d'avoir déterminé la forme de la feuille de Descartes et ne s'aperçoit pas qu'il s'est complètement trompé en ajoutant à la boucle fermée trois boucles égales et en supprimant les branches infinies; Descartes, pour confondre ses adversaires, leur fait croire que deux courbes représentées par deux certaines équations qui n'ont pas la même forme sont différentes entre elles; dans la figure qui explique un passage d'une lettre de F. de Verdus à E. Torricelli, on trouve agrégé à la strophoïde sa symétrique, que l'écrivain croyait nécessaire pour compléter la courbe considérée; et même dans la correspondance entre Huygens et des géomètres tels que Leibniz et R. de Sluse, ne trouve-t-on pas des passages qui montrent qu'ils ne connaissaient pas bien la forme de certaines perles et équivoquaient sur le signe de la sous-tangente? ... Ces circonstances, desquelles nous ne pouvons que faire mention en passant, devront être recueillies avec soin et analysées complètement par le futur historien de la méthode des coordonnées. Nous les abandonnons pour remarquer comment à l'époque où régnèrent

Descartes et Fermat commencèrent à germer les semences du calcul infinitésimal qu'Archimède avait jetées et qu'un terrain stérile avait conservées intactes pendant des centaines d'années; et c'est précisément à cette époque que la théorie de certaines courbes particulières accomplit des progrès de la plus haute importance, progrès qui, en langage moderne, peuvent se désigner comme déterminations de la nature analytique de certaines fonctions qu'on rencontre dans la géométrie. En effet, n'est-elle pas de cette espèce la recherche qui conduisit Pascal à conclure que tout arc de parabole est égal en longueur à un arc convenablement choisi de spirale d'Archimède et vice-versa? Quelques lignes de calcul sont aujourd'hui suffisantes pour vérifier l'exactitude de cette proposition; mais quelle pénétration d'esprit était nécessaire pour apercevoir l'identité d'arcs apparemment si différents! d'autant plus que le problème de la rectification d'une courbe est un de ceux qui avaient brisé les armes des anciens géomètres, un problème en présence duquel Archimède lui-même avait dû se déclarer vaincu.

Le résultat inespéré atteint par l'auteur des Pensées encouragea les mathématiciens à essayer de mesurer les lignes qui ne sont pas droites ou du moins à s'efforcer de comparer entre elles des lignes différentes. Nous voyons, en conséquence, immédiatement après Pascal, Fermat généraliser le théorème rapporté ci-dessus, en établissant que tout arc d'une parabole d'ordre supérieur est égal à un arc convenablement choisi d'une de ces spirales qu'il avait obtenues en généralisant la définition de la spirale d'Archimède. Et peu de temps après, presque dans le même temps et indépendamment les uns des autres, le Français Fermat, l'Anglais Neil et le Hollandais van Heurat découvrent la première courbe algébrique exactement rectifiable: la parabole semicubique.*) Cette mémorable découverte conduisit plus tard le comte de Fagnano à la conception d'autres paraboles où se trouvent des couples d'arcs dont la différence est rectifiable, et à ces grandes recherches sur la rectification de l'ellipse et de la lemniscate, qui sont un splendide prélude et une préparation efficace à la théorie des fonctions elliptiques. Il faut ajouter que les nombreuses recherches sur les courbes dont la rectification dépend de fonctions données d'avance sont d'une nature analogue: parmi les fruits qu'elles ont donnés, il suffit de citer la découverte des courbes de Serret et des spirales sinusoïdes.

---

*) Auparavant E. Torricelli avait remarqué que la spirale logarithmique est exactement rectifiable.

Le procédé enseigné par la géométrie cartésienne pour obtenir des nouvelles courbes particulières ne laisse pas apercevoir une liaison directe entre la forme de l'équation et l'aspect de la courbe, et en général ne conduit qu'avec une peine extrême à quelque génération organique de celle-ci. Par conséquence, on ne doit pas s'étonner si un géomètre — Guido Grandi — s'est proposé l'étude de certaines courbes (les rodonnées) dont la forme générale était connue d'avance*), sans être autrement définies; si quelques savants revinrent aux méthodes des anciens pour étudier certaines courbes; si d'autres eurent recours de nouveau à la méthode cinématique. Comme preuves de ce retour nous citons les beaux travaux de Lahire, aujourd'hui trop peu étudiés, en fixant en particulier notre attention sur ceux qui ont pour objet les conchoïdes en général. Comme preuves du rappel en activité de service de la méthode cinématique, nous citons la méthode des tangentes imaginée par Roberval et l'invention d'une innombrable suite de courbes telles que la cycloïde avec toutes les courbes analogues: épicycloïdes, hypocycloïdes, roulettes en général (engendrées par un point invariablement relié à une courbe qui se déroule sur une courbe fixe), et glissettes (engendrées par un point ou enveloppées par une courbe invariablement reliée à une courbe dont deux points glissent sur deux courbes fixes**)); auxquelles on peut ajouter certaines courbes, plus générales que la spirale d'Archimède, conçues par Clairaut, les courbes de poursuite ou courbes du chien, et certaines autres lignes peu connues (reptoires) que Jean Bernoulli engendre par le mouvement d'une courbe qui se déplace en se conservant parallèle à elle-même et toujours tangente à une courbe donnée.

Ces investigations conduisirent indirectement à de nouvelles conclusions et à de nouvelles recherches qui ont aujourd'hui une place marquée dans les fastes de la science géométrique. En passant sous silence les propositions sans nombre que les cultivateurs de l'analyse appliquée à la géométrie établirent sur le tracé des tangentes, le calcul des aires et la mesure de certaines longueurs — propositions qui par leur élégance sont dignes d'être comparées à celles qui ont donné à Archimède une renommée éternelle et qui sont malheureusement

---

*) Quoique cette question soit un peu indéterminée elle n'est pas moins intéressante comme appartenant à un type assez rare d'un problème sur lequel Auguste Comte insiste avec tant de soin dans sa Géométrie analytique. Un cas particulier de cette question a ramené Euler à la découverte de ses courbes triangulaires et orbiformes; un autre au trifolium pratense de M. Brocard et aux courbes botaniques de M. Habenicht.

**) Comme exemple de glissette je choisis la courbe de Watt.

oubliées par les modernes, qui ne savent plus en imaginer d'aussi belles —; en taisant, dis-je, de ces résultats de détail, il faut remarquer une catégorie d'études toute nouvelle. Après avoir découvert le tautochronisme de la cycloïde et remarqué que cette courbe est aussi la brachistochrone dans le vide, on pensa à chercher des courbes qui, au lieu de posséder certaines qualités géométriques (telles sont par exemple celles qui doivent leur existence au célèbre problème de Beaune), sont douées de propriétés mécaniques données d'avance: de cette idée naquirent le problème de la courbe de descensus aequabilis, résolu par la parabole semi-cubique, le problème de la courbe funiculaire, résolu par la chaînette, le problème de la courbe élastique, résolu par la même courbe que le problème de la courbe lintéaire, et le problème leibnizien de l'isocrona paracentrica: il ne faut pas oublier non plus une question qui conduit à la tractrice et une autre très générale proposée par Jean Bernoulli et résolue par ces courbes qu'on appelle aujourd'hui, suivant B. Peirce, tautobarides et baritropes. Et à ces courbes, que j'ai coutume d'appeler physico-mathématiques, on peut joindre les ovales de Descartes, considérées comme lignes aplanatiques, les ovales de Cassini, considérées comme prétendues représentations des trajectoires des astres, la chaînette d'égale résistance de Coriolis, les courbes de Lissajous, la conchospirale, la courbe de M. Cornu que M. Cesàro appelle clothoïde, la cocleoïde, et en général les caustiques par réfraction et réflexion.

C'est ici l'instant de remarquer que la méthode des coordonnées non seulement conduit directement à une infinité de courbes particulières, mais offre un procédé pour transformer chaque courbe dans une autre; c'est un procédé dont Varignon eut le premier une idée complète et claire et qui consiste simplement dans l'échange, dans l'équation cartésienne d'une courbe, des variables dans les coordonnées polaires. C'est à l'application de ce procédé si simple qu'on peut faire remonter l'origine (pour ne citer que les courbes les plus connues) de la spirale logarithmique, de la spirale hyperbolique et de la spirale parabolique.

La méthode de Descartes et de Fermat, quoiqu'elle soit d'une utilité qu'on essayerait en vain de nier, et que d'ailleurs personne ne conteste, offre des inconvénients indiscutables. Le premier consiste dans la nécessité de considérer constamment les axes coordonnés, éléments étrangers et quelquefois embarrassants. Les essais pour remédier à ce défaut remontent au moins à la fin du siècle dernier. En effet Lacroix, dans la préface de son grand Traité du calcul différentiel et du calcul intégral (Paris 1797) écrivait (p. XXV): «En écartant avec soin toutes les constructions géométriques, j'ai voulu faire sentir au lecteur qu'il existoit une manière d'envisager la Géométrie, qu'on pourroit appeler Géométrie analytique, et qui consisteroit à déduire les propriétés de l'étendue du plus petit nombre de principes, par des méthodes purement analytiques, comme Lagrange l'a fait dans sa Mécanique à l'égard des propriétés de l'équilibre et du mouvement.» Cette tendance de la géométrie, poursuivie par des maîtres tels que Hesse et Clebsch, finit par identifier l'étude des courbes planes avec la théorie des formes ternaires algébriques; on doit à elle presque toute la théorie générale moderne des courbes algébriques et même quelques courbes particulières (par exemple les quartiques de Clebsch-Lüroth, de Brioschi et de Caporali), par conséquent, il est tout à fait inutile de s'arrêter à en exposer les qualités hors ligne. Toutefois, cette complète algébrisation de la géométrie ne satisfait pas encore le désir de s'émanciper de la considération continuelle des axes coordonnés, c'est-à-dire le désir de posséder une géométrie analytique qui opère exclusivement sur des éléments inhérents aux courbes étudiées. Leibniz s'efforça de le satisfaire par sa «Caracteristica geometrica», Grassmann y réussit, en développant et perfectionnant les idées vagues du rival de Newton, en créant ainsi son renommé «Calcul géométrique». Le même but se proposèrent ceux qui s'efforcèrent de représenter une courbe par une équation où il n'y a rien d'artificiel, mais seulement des éléments dépendants de la nature même de la courbe, tels que l'arc et le rayon de courbure, ou bien les rayons de courbure d'une courbe et de sa développée. Les origines de cette méthode sont bien anciennes; en effet, Lacroix, dès 1798, après en avoir exposé une application due à Euler, remarque: «Cette manière de présenter l'équation d'une courbe, est remarquable en ce qu'elle n'employe que des quantités absolument inhérentes à la courbe proposée, et qu'elle ne laisse d'arbitraire que le choix du premier point.»*) Cette même manière est employée dans deux ouvrages, parus tous les deux en 1835, dont l'un est de A. Peters et l'autre de C. C. F. Krause, mais qui eurent un si médiocre succès qu'on peut dire qu'ils seraient tombés dans un complet oubli si Plücker ne les eût pas cités incidemment dans sa Theorie der algebraischen Kurven (Bonn 1839, p. 206). A un niveau bien plus élevé se trouvent les recherches analogues de M. H. Onner, auxquelles seulement la publication par des journaux peu répandus empêcha d'exercer toute l'influence dont elles étaient capables. Mais le géomètre à qui la nouvelle méthode de géométrie analytique doit un corps de lois qui en

*) Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral, t. II, p. 392.

assurent le fonctionnement régulier est M. Cesàro, qui consacra à cette branche de la géométrie générale, qu'on appelle aujourd'hui géométrie intrinsèque, un grand nombre d'articles détachés et ensuite un livre excellent. Nous avons cru devoir nous arrêter un instant à signaler les phases de développement de ce nouveau point de vue d'où l'on peut considérer la géométrie analytique, parce qu'il donne un nouveau procédé — qui rappelle celui de Varignon — pour arriver à des courbes nouvelles, et qui consiste simplement dans la substitution des coordonnées intrinsèques aux coordonnées cartésiennes ou polaires dans l'équation d'une courbe. Ajoutons que très fréquemment, après avoir obtenu l'équation intrinsèque d'une courbe, on arriva à concevoir des généralisations dont elle est susceptible, auxquelles on serait parvenu très difficilement par quelque autre voie; c'est précisément ainsi qu'on est arrivé aux cardioïdes étoilées et aux pseudo-cycloïdes, aux pseudo-tractrices et aux pseudo-chaînettes.

Si nous ajoutons à ces procédés créateurs ou généralisateurs, de nature essentiellement analytique, celui qui consiste dans l'application à une courbe donnée d'une transformation géométrique connue*), celui qui a pour base la recherche des courbes qui correspondent à elles-mêmes dans une transformation donnée (courbes triangulaires, courbes autopolaires, courbes W de Klein et Lie, courbes anallagmatiques, etc.) et enfin celui qui dérive de la représentation géométrique des nombres complexes (courbes à centre, courbes rhiziques, stelloïdes, cassinoïdes de degré supérieur, etc.), nous aurons épuisé l'énumération des grandes routes qui ont été parcourues par les savants qui enrichirent la collection des courbes particulières; elles peuvent être aussi battues, même à présent par ceux qui voudront les imiter.

Mais l'extension toujours plus grande que prenait chaque jour ce recueil et la variété de ces éléments, fit naître et rendit chaque jour plus vif le désir d'y mettre un peu de bon ordre, et plus impérieux le besoin de les soumettre à des lois communes. Les classifications, désormais classiques, des courbes du 3e et du 4e ordre sont des preuves de ce désir; et les expositions méthodiques de la théorie des courbes algébriques qu'écrivirent Euler et Cramer, il y a un siècle et demi, montrent combien ancien est ce besoin. A ces expositions le siècle présent en a ajouté trois excellentes: une analytique de Plücker, une

*) Parmi ces transformations je mets aussi celles qui fond correspondre à une courbe sa développée, ou une courbe parallèle, ou une podaire, ou une caustique, etc.; en autres courbes résultantes d'Aoust, les aroïdes de M. Résal, etc.

qu'on peut dire éclectique de M. Salmon, et une semi-synthétique ou pseudo-synthétique de M. Cremona. Les éléments d'une exposition purement géométrique ont déjà été préparés et recueillis par R. de Paolis et E. Kötter: ils n'attendent qu'une élaboration ultérieure pour donner le résultat désiré.

Ce qui manque encore complètement est une théorie des courbes non-algébriques, embrassant, sinon toutes les courbes transcendantes, du moins le plus grand nombre d'elles et d'autres analogues (par exemple toutes les courbes représentées par une équation de la forme $y =$ fonction entière transcendante de x); certains théorèmes que M. Schoute a récemment énoncés*) sont peut-être les premiers essais en ce sens; puisse le XX^{me} siècle ajouter d'autres propositions encore plus importantes, de manière qu'une théorie générale des courbes transcendantes ne soit plus, comme aujourd'hui, une aspiration inassouvie!

*) L'Intermédiaire des mathématiciens, t II, 1896, p. 7.

C. Vorträge der zweiten Hauptversammlung.

Logica matematica.

Di

G. Peano a Torino.

L' autore fa omaggio ai sig. congressisti del suo opusculo «Logique mathématique», che costituisce il § 1 del tomo II del «Formulaire de Mathématiques».

Accenna alla lunga serie di filosofi e matematici, da Aristotele, Leibniz, fino ai nostri giorni (pag. 18 dell' opusculo), cui si deve lo sviluppo di questa nuova scienza.

La via più breve per farsi una chiara idea della Logica matematica, del suo scopo, delle sue applicazioni, e dei suoi confini, è di vederla in azione; il che non è difficile.

Invero lo studio di essa non esige studii precedenti; anzi si incomincia colla t a b u l a r a s a di tutte le idee, eccettuate alcune poche, enumerate alla pag. 3, ed ivi indicate con simboli convenzionali, che l' autore legge.

Questi simboli sono sufficienti ad esprimere ogni idea ed ogni proposizione, senza dover oltre ricorrere al linguaggio ordinario.

Perciò l' autore invita a leggere, e legge, le principali proposizioni contenute nell' opusculo.

Zur Frage des höheren mathematischen Unterrichts.

Von

F. Klein in Göttingen.

Der mathematische Kongrefs neigt sich seinem Ende zu. Wenn es verfrüht ist, von seinen Resultaten zu sprechen, so dürfen wir doch einer Empfindung Ausdruck geben, die einen jeden von uns beherrscht. Es handelt sich um den überwältigenden Eindruck der Mannigfaltigkeit mathematischer Auffassungen und Interessen, die eine Bezugnahme von Mathematiker zu Mathematiker aufserordentlich erschwert. Die Verschiedenheit der Sprache tritt fast zurück hinter der Verschiedenheit der mathematischen Denkweise.

Und doch lebt in uns Allen ebenso deutlich der Wunsch nach Verständigung. Hierfür giebt es keinen besseren Beleg, als die grofse Zahl der Festgenossen, die sich zu diesem ersten internationalen Kongresse zusammengefunden hat. Wir möchten versuchen, unsere Wissenschaft als eine grofse Einheit, als eine Harmonie zu begreifen, und dieses nicht nur um der philosophischen Erkenntnis willen, sondern auch von der praktischen Einsicht aus, dafs wir die Geltung unserer Wissenschaft nach aufsen hin zu sichern und vielfach wiederzugewinnen haben.

Unter diesen Umständen mag es gestattet sein, einige Ideen darüber vorzutragen, wie wir im Sinne des so bezeichneten Bedürfnisses die wissenschaftliche Vorbildung des mathematischen Nachwuchses in geeignete Wege möchten leiten können.

Dabei werde ich das Thema enger fassen, als der von mir angegebene etwas unbestimmte Titel meines Vortrags vielleicht vermuten läfst. Die letzten Jahre haben uns wichtige Diskussionen über die mathematische Vorbildung solcher Kandidaten gebracht, welche die Mathematik als ein Mittel im späteren Berufsleben brauchen wollen, also der späteren Lehrer oder Naturforscher oder Ingenieure. So sehr ich mich für diese Diskussionen interessiere und bis zu einem gewissen Grade selbst daran teilgenommen habe, so mögen dieselben doch heute beiseite bleiben. Es darf dies um so mehr geschehen, als uns gestern der ausgezeichnete Vortrag des Herrn Stodola nach dieser Richtung bereits Vorzügliches gebracht hat. Nicht minder werde ich die allgemeine Frage nach der inneren Beziehung der Mathematik zu den Anwendungen, welche Herr Poincaré zum Gegenstande seines glänzenden Exposés gemacht hat, hier unberührt lassen. Niemand ist von der Wichtigkeit der genannten Beziehungen mehr überzeugt als ich selbst. Aber ich meine, daſs es angezeigt ist, vor dem versammelten mathematischen Kongresse nun auch ein weiteres zu betonen, nämlich, daſs es eine reine Mathematik giebt, welche schlieſslich doch den Kern unserer Wissenschaft ausmacht, und deren Gedeihen die Vorbedingung für alle anderen mathematischen Bethätigungen bildet, falls letztere nicht sofort auf ein niederes Niveau herabsinken sollen. So lassen Sie mich von der Vorbildung der Wenigen sprechen, welche berufen sein sollen, in Zukunft die reine Mathematik weiterzuführen, der eigentlichen mathematischen Forscher. Ich setze voraus, daſs ein Studierender von geeigneter Begabung die gewöhnlichen Anfangsstadien bereits hinter sich hat, vielleicht auch die Examina, welche ihm die landesübliche Ordnung auferlegt, bereits überwunden hat; wie wollen wir ihn in der von uns beabsichtigten Richtung fördern?

Täuschen wir uns nicht, daſs von vorneherein eine auſserordentliche Schwierigkeit vorliegt, welche sich auf dem Gebiete keiner anderen Wissenschaft in gleicher Stärke einstellen dürfte, weil keine andere Wissenschaft so langsam assimiliert wird, wie die Mathematik. Eine wissenschaftliche Persönlichkeit kann sich nicht bilden ohne Konzentration auf ein Einzelnes bis hin zur selbständigen Produktion, also ohne Spezialisierung. Wir aber wollen unseren Kandidaten gerade zu einem allgemeinen Überblicke über das Ganze der Wissenschaft hinleiten!

Es folgt, daſs wir seine Zeit für unseren Zweck nicht vollständig werden in Anspruch nehmen dürfen, daſs wir allerlei Kompromisse werden treffen müssen. Ich weiſs zu sehr aus eigener Erfahrung, wie schwierig es ist, einen richtigen Mittelweg einzuhalten. Aber so ist es schlieſslich mit Allem, was wir in idealem Sinne unternehmen; es ist daraus nur zu schlieſsen, daſs wir immer auf's neue versuchen sollen, das nie völlig Erreichte anzustreben.

Ein Erstes, was ich hier empfehlen will, sind gewisse äuſsere Einrichtungen für das weitergehende mathematische Studium. Vielleicht bedarf es der Entschuldigung, daſs ich hier solche Dinge berühre, aber es scheint mir praktisch nicht unwichtig. Denn ein Wort, vor dem mathematischen Kongresse gesprochen und von ihm aufgenommen, findet vielleicht mehr Beachtung als jede noch so beredte private Meinungsäufserung. Was wir vor allen Dingen verlangen müssen, sind wirklich zugängliche, umfassende mathematische Bibliotheken. In dieser Hinsicht dürften an vielen Plätzen noch recht unentwickelte Verhältnisse herrschen. Ich kenne grofse ausländische Lehranstalten, an denen bis vor kurzem noch keine umfassendere mathematische Zeitschrift gehalten wurde, und auch in Deutschland glaubte man vor noch nicht langer Zeit vielfach, auf der Höhe zu stehen, wenn die Seminarbibliothek ein vollständiges Exemplar eines einzelnen Journals aufwies! Es steht dies in merkwürdigem Gegensatz zu den reichen Mitteln, welche allerorts für naturwissenschaftliche Institute aufgewendet werden. Auf naturwissenschaftlichem Gebiete wird auch Niemand den Grundsatz aufstellen (oder auch vielleicht nur aus Bequemlichkeit thatsächlich befolgen), dafs es genüge, die wissenschaftliche Produktion des eigenen Landes zu kennen.

Mit den genannten Einrichtungen Hand in Hand sollte dann ferner eines gehen: ein naher persönlicher Verkehr der Studierenden nicht nur mit den Professoren, sondern auch unter einander. Dieser Verkehr scheint im Bereiche der Mathematik ein ganz besonders wichtiges Moment. Wo immer ich Gelegenheit hatte, die wissenschaftliche Entwickelung eines hervorragenden Mathematikers näher zu beobachten, da hat sich bestätigt, dafs daran der tägliche, Jahre hindurch fortgesetzte intensive Verkehr mit Gleichstrebenden einen hervorragenden Anteil hatte. Nehmen Sie an, dafs auf dem Gebiete unserer Wissenschaft der persönliche Gedankenaustausch plötzlich gehindert würde: ein Verfall der mathematischen Studien, wie ihn die Welt beim Ausgang des klassischen Altertums erlebt hat, würde die Folge sein. Die mathematische Litteratur unserer Bibliotheken würde nicht mehr gelesen werden, weil das Verständnis mangels geeigneter Anleitung zu schwierig geworden wäre.

Doch nun zu meinem engeren Thema. Es kann sich selbstverständlich nicht darum handeln, dafs wir eine encyklopädische Ausbildung unserer Studierenden anstreben. In dieser Hinsicht werden uns ja zum Glücke, wie nach den Verhandlungen des gestrigen Tages zu hoffen steht, recht bald geeignete Sammelwerke entlasten. Was wir bei unseren Kandidaten erreichen müssen, ist etwas anderes, allgemeineres; es handelt sich darum, denselben ein gewisses prinzipielles Verständnis der in den verschiedenen Teilen unserer Wissenschaft vorwaltenden Ideen und Arbeitsmethoden zu vermitteln.

Ich drücke das absichtlich so unbestimmt aus. Es handelt sich beim Studium der Mathematik, wie ich mir dasselbe hier denke, in erster Linie gar nicht um die schematische Aneignung bestimmter Begriffe und der für sie geltenden Sätze. · Für den Lernenden ist die Mathematik ohnehin keine rein deduktive Wissenschaft. Für ihn ist unter dem hier in Betracht kommenden Gesichtspunkt vor allem wichtig, dafs er dem konkreten Inhalt der einzelnen mathematischen Disziplin gewisse Ideenassoziationen entnimmt, die ihn fortan begleiten und ihm bei anderen Aufgaben, denen er sich zuwenden mag, sofort zur Verfügung stehen. Die logische Durcharbeitung bis in alle Einzelheiten hinein kann schon der Zeit halber nur auf einzelnen Gebieten durchgeführt werden und wird darum passender an das Spezialstudium angeknüpft.

In diesem Sinne wollen Sie es gelten lassen, wenn ich jetzt geradezu eine Reihe mathematischer Disziplinen nenne und zu charakterisieren suche, die für die allgemeine mathematische Bildung, wie ich sie im Auge habe, von besonderer Wichtigkeit sein möchten. Ich knüpfe dabei gern an meine eigene Entwickelung an, nicht weil ich dieselbe irgendwie für typisch halte, sondern weil sich andernfalls die Erläuterung zu leicht in Unbestimmtheiten verliert. Es ist Clebsch gewesen, von dem ich die ersten weitergehenden Anregungen in der hier in Betracht kommenden Richtung erhielt, aber nicht minder wichtig war für mich die Zeit, welche ich im engen Verkehr mit Lie in Paris zubrachte. Als ich bald nachher meine Lehrthätigkeit begann, geschah es im Glauben an eine Trias der mafsgebenden mathematischen Disziplinen: die neuere Geometrie, die Funktionentheorie komplexer Variabler, die Gruppentheorie.

Unter neuerer Geometrie möchte ich dabei nicht nur die Entwickelungen der projektiven Schule verstanden wissen, wie sie von Poncelet beginnend ihre typische Ausbildung gefunden haben, sondern alle die Weiterbildungen der späteren Zeit, die Theorien des Raumes von n Dimensionen nicht minder, als die moderne Transformationsgeometrie, welche sich nicht mehr auf algebraische Gebilde beschränkt, sondern alle Fragen der Differentialgeometrie in sich aufgenommen hat. Der Gegensatz zwischen synthetischer und analytischer Behandlung ist mir dabei gleichgültig. Was ist das Wesen dieser ganzen Disziplin? Dafs wir die einzelne Figur nicht als starr gegeben ansehen, sondern als transformierbar, als veränderlich, dafs wir unseren Gebilden sozusagen organisches Leben erteilen.

Die Funktionentheorie komplexer Veränderlicher, wie ich sie damals verstand, kann in doppelter Weise aufgefafst werden. Indem wir die Riemann'sche Fläche als Substrat der Funktionen nehmen, handelt es sich bei ihr nur erst um einen Spezialfall der vorbezeichneten räumlichen Konstruktionen, den wir uns mehr oder minder anschaulich ausgestalten können. Aber dies ist nur die Einleitung zu einer allgemeineren Auffassung, der zufolge Alles, was in der uns umgebenden gemeinen Realität geschieht, sozusagen als Durchschnitt einer allgemeineren, gesetzmäſsigeren und darum vollkommeneren Welt von der doppelten Dimensionenzahl erscheint; in letzterer machen wir unsere Überlegungen und schlieſsen von da auf die erstere zurück, — eine Art Platonischer Philosophie auf mathematischer Basis.

Die Gruppentheorie endlich liefert das verbindende Prinzip, welches die Menge der Einzelheiten systematisch ordnet, dann aber infolge eines allgemeinen Fortschrittprinzips sehr bald zum Gegenstande selbständiger Forschung wird. Indem sie dazu führt, im Wechsel der Erscheinungen das Bleibende zu erkennen, wird sie von selbst zur Invariantentheorie, dieses Wort in der allgemeinsten Bedeutung genommen. —

An der primären Wichtigkeit der drei so bezeichneten Disziplinen möchte ich auch noch heute festhalten. Insbesondere hat ja in der Zwischenzeit die Gruppentheorie eine immer ausgedehntere Geltung gewonnen. Aber ich bin allerdings seit lange dazu übergegangen, ihnen diejenigen zwei weiteren Gebiete anzureihen, welche im Universitätsunterricht durch Weierstraſs und Kronecker ihre typische Ausgestaltung gefunden haben: die allgemeine Gröſsenlehre und die Zahlentheorie.

Als allgemeine Gröſsenlehre will ich hier den Inbegriff aller derjenigen Überlegungen bezeichnen, welche die logische Grundlegung unserer Wissenschaft betreffen. Dahin gehört vor allen Dingen die genaue Erfassung des Grenzbegriffs bei der allgemeinsten funktionellen Abhängigkeit irgendwelcher Gröſsen. Jedermann empfindet den Wert der hier gebotenen philosophischen Vertiefung, — daneben besteht freilich die Gefahr, der wir entgegentreten müssen, daſs die freie Produktivität und Ideenbildung durch die Kritik gehindert, ja geradezu aufgehoben wird. Es ist hier wie auf anderen geistigen Gebieten: die Kritik ist an sich nicht das Höchste, aber nicht die Zurückschiebung der Kritik, sondern nur ihre innere Überwindung kann das Programm sein.

Die Zahlentheorie nimmt in der Wertschätzung der Mathematiker von früher her eine ganz besondere Stellung ein. Die enthusiastischen Lobsprüche, welche Gauſs ihr widmete, sind bekannt, und es hat nicht an Mathematikern gefehlt, welche dieselben wiederholten.

Auf der anderen Seite steht die Thatsache, daſs viele unserer besten Mathematiker ohne alle zahlentheoretischen Kenntnisse aufgewachsen sind, und daſs beispielsweise unter der groſsen Zahl vorzüglicher mathematischer Lehrbücher, welche wir den Franzosen verdanken, nur verschwindend wenige sind, welche ausschlieſslich der Zahlentheorie gewidmet sind. Die Verbindung der Zahlentheorie mit anderen Teilen der Mathematik war in der That in früheren Jahren eine mehr zufällige. Sie wird aber je länger je mehr zu einer organischen. Nach der einen Seite stellt der Gruppenbegriff die Verbindung her, nach der anderen Seite die Thatsache, daſs man die algebraischen Zahlen genau nach denselben Gesichtspunkten studieren kann, wie die algebraischen Funktionen von Veränderlichen. Man kann sich eine ganze Stufenleiter von Gröſsenarten denken: diskrete Gröſsen, kontinuierlich veränderliche Gröſsen, Funktionen solcher Gröſsen; auf alle finden bis zu einem gewissen Grade dieselben mathematischen Ansätze Anwendung. Ich zweifele nicht, daſs diese Auffassung sich bald noch in weiteren Kreisen Geltung verschaffen wird.

Mit den fünf so aufgezählten Disziplinen sollte es wohl eigentlich genug sein, wenn ich nicht doch noch zum Schlusse einige wenige Worte von der angewandten Mathematik sagen möchte. Gewiſs werden solche Vertreter der reinen Mathematik eben in jetziger Zeit besonders nützlich sein, welche mit den Anwendungen nach der einen oder anderen Seite hin engere Beziehung besitzen. Aber sollen wir eine solche Beziehung darum jedem reinen Mathematiker zur Pflicht machen? Ich glaube, nein, selbst wenn es möglich wäre eine derartige Forderung durchzuführen. Denn einmal sind die Formen der Begabung bei den einzelnen Individuen auſserordentlich verschieden, andererseits aber sind auch die Anforderungen, die an den einzelnen Mathematiker je nach seiner Lebensstellung herantreten können, selbst äuſserst heterogen. Ich halte es am liebsten mit dem Satz, daſs man den richtigen Mann auf den richtigen Platz bringen soll. Dies verschlägt aber nicht, daſs ich auch dem reinen Mathematiker eine gewisse Fühlung mit der angewandten Mathematik empfehlen möchte, soweit, daſs er versteht, um was es sich bei letzterer überhaupt handelt und welches die eigenartigen Bedingungen derselben sind. Ich erwarte davon in mehrfacher Hinsicht einen heilsamen Einfluſs auf den Betrieb der reinen Mathematik selbst, dahingehend, daſs manche Übertreibungen gemildert oder auch Unterlassungen korrigiert werden.

Die Anwendungen entwickeln zunächst, was ich den Sinn für einfache und natürliche Auffassung, für eine ungekünstelte, allgemein verständliche Ausdrucksweise nennen möchte. Einseitige Beschäftigung mit der reinen Mathematik führt leicht dazu, die Methode als solche zu überschätzen. Es entsteht dann jener Subjektivismus, der sich in der Ausgestaltung besonderer Bezeichnungen gefällt und damit diejenigen Gedankenreihen, deren Entwickelung er fördern will, den Aufsenstehenden nur um so schwerer zugänglich macht.

Des Ferneren aber erwarte ich von der Berührung mit den Kreisen der angewandten Mathematik eine Stärkung des Sinnes für mathematische Exekutive. Die Ideen des reinen Theoretikers verflüchtigen sich leicht zu luftigen Gedankengebilden, die mehr postuliert als realisiert werden, — er gleicht dann einem Gesetzgeber, der seine Formulierungen nach systematischen Erwägungen trifft, ohne die Schwierigkeiten oder gar die Unmöglichkeit der Durchführung zu bedenken. Dem ist schon Kronecker nachdrücklich entgegengetreten, indem er geradezu verlangte, dafs nur solche Entwickelungen gelten sollen, welche in einer „endlichen Zahl von Schritten“ zum Ziele führen. In demselben Sinne verstehe ich es, wenn Herr Gordan gestern in seinem Vortrage über die Resultante der ternären Formen sagte, dafs es nicht blofs genügt, allgemeine Eigenschaften der Resultante anzugeben, sondern notwendig ist, das wirkliche Bildungsgesetz des ausgerechneten Ausdrucks zu erforschen. Beidemal handelt es sich um denselben Gedanken, der sich in der Praxis auf Schritt und Tritt aufdrängt. Haben doch alle Rechnungen und Konstruktionen auf angewandtem Gebiet nichts zu bedeuten, wenn sie nicht bis zu einem konkreten Zielpunkte gelangen! — Ich bitte die jüngeren Mathematiker recht sehr, den hiermit angedeuteten Grundsatz zu beherzigen.

Doch es ist Zeit, dafs ich schliefse. Sie haben diese sechs: die neuere Geometrie, die Funktionen von $x + iy$, die Gruppentheorie, die allgemeine Gröfsenlehre und die Zahlentheorie, endlich in etwas unbestimmterer Form die Anwendungen; es liegt an Ihnen zu beurteilen, ob diese Auswahl richtig getroffen ist und den treibenden Kräften unserer modernen Wissenschaft wirklich gerecht wird.

Berichtigungen:

Seite 157 Zeile 21 von oben lies: zu einem statt zum.

In dem Verzeichnis der Teilnehmer (S. 65 und folgende) ist zu lesen:

Amberg, Ernst, Mathematiker an der schweizerischen Rentenanstalt, Zürich I, Limmatquai 50. *Schweiz.*

Hoepli, Ulrico, Editore-Libraio, Mailand, Galleria de Cristoforis 59—63. *Italien.*

Massarini, Fräulein Iginia, Dr. math., Prof. am R. Ginnasio Femminile und an der R. Scuola Tecnica Femminile, Rom, Via Nazionale 158. *Italien.*

Peano, Giuseppe, Professor an der Universität und der Militär-Akademie, Turin, Via Barbaroux 6. *Italien.*