ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1937

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

Н. А. АРТЕМЬЕВ

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

(*Представлено академиком С. Н. Бернштейном*)

Исследуется существование периодических решений одного класса нелинейных уравнений в частных производных гиперболического типа. При определенных условиях доказывается теорема существования периодических решений. Метод заключается в приведении задачи к бесконечной системе интегральных уравнений Фредгольма. В случае, названном автором «квазирезонансом», доказывается теорема несуществования периодических решений. Дается пример нелинейного уравнения, показывающий, что теорию периодических решений Пуанкаре в некоторых случаях нельзя распространить на уравнения в частных производных.

§ 1. Введение и постановка задачи

Целый ряд задач теории колебаний приводит к вопросу об отыскании периодических решений нелинейных уравнений в частных производных. Нелинейная задача о колебаниях струны представляет задачу подобного типа, которую можно сформулировать следующим образом:

Найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F\left(\mu, x, t, u, \frac{\partial u}{\partial t}\right) \tag{1}$$

(a—постоянная, μ—малый параметр, F—периодическая функция времени t с периодом 1, нелинейно содержащая u и $\frac{\partial u}{\partial t}$ и при $\mu = 0$ обращающаяся в функцию, зависящую только от x и t), граничным условиям

$$u(0, t) = 0, \qquad u(1, t) = 0, \tag{2}$$

условиям периодичности

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= u(x, 1) \\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} &= \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=1} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

и непрерывную вместе со своими частными производными[1] до 2-го порядка включительно в замкнутой области

[1] Мы будем подразумевать под «частными производными 2-го порядка» лишь те производные, которые входят в уравнение (1), т. е. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, не оговаривая этого каждый раз.

$$\overline{\Omega} = \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Не ограничивая общности, мы можем сразу считать, что краевые условия (2) по x заданы в точках $x = 0$ и $x = 1$, так как с помощью линейной замены переменных вида $y = \frac{x}{l}$ задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F\left(\mu, x, t, u, \frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

$$u\Big|_{x=0} = 0, \qquad u\Big|_{x=l} = 0$$

сводится к задаче типа (1), (2). По той же причине в условиях (3) мы требуем периодичности с периодом 1.

Здесь, как и в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, мы будем различать два случая:

1) когда правая часть уравнения (1) содержит время t явно,

2) когда правая часть уравнения (1) времени t явно не содержит, т. е. требуется найти периодическое решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F_1\left(\mu, x, u, \frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

$$u\Big|_{x=0} = 0 \qquad u\Big|_{x=1} = 0$$

$$u\Big|_{t=0} = u\Big|_{t=T} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=T},$$

период которого T заранее не известен.

Для задачи 1-го типа естественно исследовать в первую очередь периодические решения с периодом, равным периоду вынуждающей силы, т. е. функции F. В этой работе мы исследуем простейший частный случай задачи 1-го типа, а именно, когда правая часть уравнения (1) имеет вид

$$F\left(\mu, x, t, u, \frac{\partial u}{\partial t}\right) = \Phi(x, t) + \mu f(u),$$

и доказываем, что в зависимости от ряда условий задача может иметь или не иметь решения.

Окончательно мы можем сформулировать нашу задачу следующим образом:

Исследовать, при каких значениях чисел a и μ и при каких свойствах функций $\Phi(x, t)$ и $f(u)$ задача (4), (5), (6)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Phi(x, t) + \mu f(u), \tag{4}$$

$$u\Big|_{x=0} = 0 \qquad u\Big|_{x=1} = 0 \tag{5}$$

$$u\Big|_{t=0} = u\Big|_{t=1} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=1}, \tag{6}$$

допускает решение $u(x, t)$, непрерывное вместе со своими частными производными до 2-го порядка включительно[1] в области $\overline{\Omega}$.

Для исследования задачи (4), (5), (6) мы пользуемся в этой работе двумя методами, тесно связанными между собой. Первый метод заключается в сведении задачи к бесконечной системе интегральных уравнений[2], для которой затем доказывается теорема существования методом последовательных приближений. Второй метод заключается в эффективном построении некоторой функции Грина, с помощью которой задачу можно привести к решению одного интегрального уравнения.

Наконец, из доказываемой нами теоремы несуществования видно, что метод Пуанкаре, построенный им для исследования периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений, в некоторых случаях нельзя распространить на уравнения в частных производных[3].

I МЕТОД

§ 2. Основные понятия и обозначения

Мы будем рассматривать различного рода вещественные пространства, точками которых z являются последовательности вещественных чисел

$$z = \{ z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots \},$$

подчиненных тем или иным условиям.

Вид этих условий будет указан в одном из следующих параграфов. Пусть f точка с координатами

$$\{ f_1, f_2, \ldots, f_k, \ldots \}$$

и пусть ее координаты f_k $(k = 1, 2 \ldots)$ зависят от координат точки z, так что

$$f_k = f_k(z_1, z_2, \ldots, z_j, \ldots) \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

что мы условимся кратко записывать в виде

$$f_k = f_k(z) \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

или

$$f = f(z).$$

Функции f_k будут у нас степенными рядами от бесконечного числа аргументов $z_1, z_2, \ldots$, поэтому мы приводим здесь определение сходимости подобного ряда, взятое нами из работы A. Wintner'a [3].

Степенной ряд от бесконечного числа аргументов $z_1, z_2, \ldots z_k, \ldots$, вещественных или комплексных, формально можно записать в виде[4]

---

[1] См. сноску на стр. 15.

[2] E. Hölder [1] применял для доказательства существования периодических решений интегральные уравнения.

[3] А. Витт применял метод Пуанкаре к нелинейным уравнениям в частных производных [2].

[4] В этой работе нам понадобятся исключительно вещественные ряды, т. е. ряды, в которых все коэффициенты $c_{\nu_1 \ldots \nu_n}$, а также переменные $z_1, z_2, \ldots$ будут вещественными.

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{\nu_1=1 \\ \nu_1 \leqslant \nu_2 \leqslant \ldots \leqslant \nu_n}}^{\infty} \cdots \sum_{\nu_n=1}^{\infty} c_{\nu_1 \ldots \nu_n} z_{\nu_1} \ldots z_{\nu_n}, \tag{7}$$

где коэффициенты $c_{\nu_1 \ldots \nu_n}$ могут быть также вещественными или комплексными.

Для того чтобы установить понятие сходимости ряда вида (7), введем предварительно следующие определения:

Определение I. Ряд, получающийся из (7), если все z_k, кроме первых m, положить равными нулю, мы будем называть m-ым сечением ряда (7) и обозначать символом $f^{(m)}(z_1, z_2, \ldots, z_m)$, так что

$$f^{(m)}(z_1, z_2, \ldots, z_m) = f(z_1, \ldots, z_m, 0, 0, \ldots) =$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\nu_1=1}^{m} \cdots \sum_{\nu_n=1}^{m} c_{\nu_1 \ldots \nu_n} z_{\nu_1} \ldots z_{\nu_n}.$$

Определение II. Степенной ряд от бесконечного числа переменных

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots) = c_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{\nu_n=1}^{\infty} c_{\nu_1 \ldots \nu_n} z_{\nu_1} \ldots z_{\nu_n}$$

называется сходящимся в точке $z = \{z_1, z_2, \ldots\}$, если соблюдаются следующие условия:

1) m-ое сечение ряда

$$f^{(m)} = f(z_1, \ldots, z_m, 0, 0, \ldots)$$

при любом значении m сходится в обычном смысле теории функций;

2) существует предел

$$\lim_{m \to \infty} f^{(m)} = f.$$

§ 3. Подстановка ряда Фурье в полином

ЛЕММА I. *Пусть* $f(u)$[1] *полином n-ой степени с постоянными коэффициентами и не содержащий свободного члена*

$$f(u) = a_1 u + a_2 u^2 + \ldots + a_n u^n$$

и пусть $u(x, t)$ функция, равная сумме ряда Фурье

$$u(x, t) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin k\pi x, \tag{8}$$

коэффициенты которого $u_k(t)$ удовлетворяют условиям:

1) *все* $u_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *непрерывны при* $0 \leqslant t \leqslant 1$;

[1] Мы считаем функцию $f(u)$ полиномом единственно для большей простоты доказательства. Все дальнейшие рассуждения можно было бы также провести для голоморфной функции.

2) $|u_k(t)| \leqslant \frac{b}{k^2}$ $(k=1, 2, \ldots)$ *при* $0 \leqslant t \leqslant 1$, b—*постоянная*;

3) $u_k(t) = u_k(t+1)$.

Тогда коэффициенты Фурье f_k *функции* $f[u(x, t)]$, *разложенной в промежутке* $0 \leqslant x \leqslant 1$ *по* $\sin k\pi x$, *будут непрерывными функциями* t *и могут быть представлены в явном виде степенными рядами от бесконечного числа аргументов* $u_1(t)$, $u_2(t), \ldots$

$$f_k(t) = \sum_{m=1}^{n} \sum_{\nu_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{\nu_m=1}^{\infty} c_{\nu_1 \ldots \nu_m}^{(k)} u_{\nu_1}(t) \ \ldots \ u_{\nu_m}(t),$$

сходящимися при любом значении t.

Доказательство. В силу абсолютной и равномерной сходимости ряда (8) в области $\overline{\Omega}$, его можно возводить в любую степень и интегрировать почленно по x в интервале (0, 1). Поэтому ряды (9)

$$\beta_k^{(m)} = \sqrt{2} \int_0^1 a_m u^m \sin k\pi x \, dx = \sqrt{2}\, a_m \int_0^1 \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu(t) \sin \nu\pi x \right\}^m \sin k\pi x \, dx =$$

$$= \sum_{\nu_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{\nu_m=1}^{\infty} c_{\nu_1 \ldots \nu_m}^{(k)} u_{\nu_1}(t) \ \ldots \ u_{\nu_m}(t) \quad (m = 1, \ldots, n; \quad k = 1, \ldots, \infty) \tag{9}$$

будут сходиться абсолютно и равномерно при любом t.

Суммируя ряды (9) по m от 1 до n, получим опять абсолютно и равномерно сходящийся ряд при любом t для коэффициента f_k

$$f_k[u_1(t), \ u_2(t), \ldots] = \sum_{m=1}^{n} \beta_k^{(m)} =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \sum_{\nu_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{\nu_m=1}^{\infty} c_{\nu_1 \ldots \nu_m}^{(k)} u_{\nu_1}(t) \ \ldots \ u_{\nu_m}(t) \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{9'}$$

Очевидно функции

$$f_k[u_1(t), u_2(t), \ldots] \qquad (k = 1, \ 2, \ldots)$$

будут непрерывными функциями t при $0 \leqslant t \leqslant 1$.

§ 4. Приведение задачи к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

В уравнении (4) мы будем считать функцию $\Phi(x, t)$ представимой в виде ряда Фурье

$$\Phi(x, t) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Phi_k(t)}{k^2} \sin k\pi x, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k^2(t) = C^2(t) \leqslant c^2, \tag{10}$$

коэффициенты которого $\Phi_k(t)$ суть периодические функции t с периодом 1, непрерывные в интервале $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Соответственно этому мы будем искать решение задачи (4), (5), (6) в виде ряда Фурье

$$u(x, t) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t) \sin k\pi x, \tag{11}$$

где $z_k(t)$—неизвестные функции.

Подставляя формально ряды (10) и (11) в уравнения (4), (5), (6), разлагая правую часть (4) опять в ряд Фурье по $\sin k\pi x$ и сравнивая коэффициенты при $\sin k\pi x$, получим бесконечную систему дифференциальных уравнений вида

$$\ddot{z}_k(t) + \pi^2 a^2 k^2 z_k(t) = \Phi_k(t) + \mu f_k[z_1(t), z_2(t), \ldots] \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned} z_k(0) &= z_k(1), \\ \dot{z}_k(0) &= \dot{z}_k(1), \end{aligned}\right\} \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{12'}$$

в которой функции f_k будут степенными рядами от бесконечного числа аргументов $z_1, z_2, \ldots$ вида (9′).

Рассмотрим еще отдельно частный случай, когда $f(u)$ полином, содержащий только нечетные степени u, и когда ряд (10) содержит только синусы нечетных кратностей.

В этом случае будем искать решение задачи в виде ряда

$$u(x, t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} z_{2k+1}(t) \sin(2k+1)\pi x. \tag{13}$$

Соответствующая бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений в этом случае будет иметь вид:

$$\begin{aligned} &\ddot{z}_{2k+1}(t) + \pi^2 a^2 (2k+1)^2 z_{2k+1}(t) = \\ &= \Phi_{2k+1}(t) + \mu f_{2k+1}[z_1, z_3, \ldots] \quad (k = 0, 1, \ldots) \end{aligned} \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned} z_{2k+1}(0) &= z_{2k+1}(1) \\ \dot{z}_{2k+1}(0) &= \dot{z}_{2k+1}(1) \end{aligned}\right\} \quad (k = 0, 1, \ldots) \tag{14'}$$

§ 5. Приведение задачи к бесконечной системе интегральных уравнений

Систему уравнений (12) с граничными условиями (12′) легко свести к бесконечной системе интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода.

В самом деле, линейному уравнению

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0, \tag{15}$$

где ω — постоянная ($\omega \neq 2m\pi$), m — целое число ($m > 0$) с граничными условиями периодичности

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= y(1) \\ \dot{y}(0) &= \dot{y}(1) \end{aligned}\right\} \tag{15'}$$

соответствует функция Грина

$$G(t, \tau) = \frac{\cos \omega \left(|t - \tau| - \frac{1}{2}\right)}{2\omega \sin \frac{\omega}{2}} \quad (0 \leqslant t, \tau \leqslant 1). \tag{16}$$

Если число a в уравнениях (12) таково, что $\omega_k = \pi a k \neq 2m\pi$, где m целое число > 0, то каждому линейному уравнению

$$\ddot{z}_k + \omega_k^2 z_k = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

с граничными условиями

$$\left.\begin{aligned} z_k(0) &= z_k(1) \\ \dot{z}_k(0) &= \dot{z}_k(1) \end{aligned}\right\} \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

будет соответствовать функция Грина

$$G_k(t, \tau) = \frac{\cos \omega_k \left(|t - \tau| - \frac{1}{2}\right)}{2\omega_k \sin \frac{\omega_k}{2}} \quad (0 \leqslant t, \tau \leqslant 1). \tag{17}$$

С помощью формулы Грина

$$I_k = \int_0^1 \left\{[\ddot{z}_k(\tau) + \omega_k^2 z_k(\tau)]\, G_k(t, \tau) - \left[\frac{\partial^2 G_k}{\partial \tau^2} + \omega_k^2 G_k\right] z_k(\tau)\right\} d\tau$$

система (12) будет таким образом сведена к бесконечной системе интегральных уравнений [1]:

$$z_k(t) = \int_0^1 G_k(t, \tau)\, [\Phi_k(\tau) + \mu f_k(z_1(\tau), z_2(\tau), \ldots)]\, d\tau \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{18}$$

Таким образом всякое непрерывное решение системы дифференциальных уравнений (12) с граничными условиями (12′), удовлетворяющее условию

$$|z_k(\tau)| \leqslant \frac{c}{k^2}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

где c—постоянная, является также решением системы интегральных уравнений (18).

---

[1] Интеграл $\int_0^1 G_k(t, \tau)\, [\Phi_k(\tau) + \mu f_k(z_1(\tau), z_2(\tau), \ldots)]\, d\tau$ имеет наверное смысл, если функция $f_k(z_1(\tau), z_2(\tau), \ldots)$ есть непрерывная функция τ при $0 \leqslant \tau \leqslant 1$. Из леммы I мы знаем, что достаточными для этого условиями являются следующие:

1) все $z_k(\tau)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ непрерывны при $0 \leqslant \tau \leqslant 1$;

2) $|z_k(\tau)| \leqslant \frac{c}{k^2}$, $k = 1, 2, \ldots,$ $0 \leqslant \tau \leqslant 1$,

где c — постоянная.

В дальнейшем мы докажем существование такого решения для системы (27), чем и будет оправдана законность операции интегрирования.

Наконец, напомним для дальнейшего, что если $f(t)=f(t+1)$ есть произвольная непрерывная периодическая функция, то функция

$$y(t)=\int_0^1 G(t,\tau)f(\tau)\,d\tau$$

будет периодическим решением уравнения

$$\ddot{y}(t)+(2m+1)^2\pi^2 y(t)=f(t)$$

с граничными условиями

$$\left.\begin{aligned} y(0)&=y(1)\\ \dot{y}(0)&=\dot{y}(1)\end{aligned}\right\}$$

§ 6. Функциональное пространство A_m

Доказательство теоремы существования будет основано на свойствах некоторого метрического пространства, которое мы обозначим символом A_m, а также на свойствах пространства Гильберта. В этом параграфе мы исследуем нужные нам свойства пространства A_m.

Определение III. Функция $\Phi(x)$, обладающая рядом Фурье

$$\Phi(x)\sim\sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{y_k}{k^m}\sin k\pi x, \tag{19}$$

где m — целое число $\geqslant 0$, есть точка функционального пространства A_m, если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2=c^2<+\infty \tag{20}$$

сходится.

ЛЕММА II. *Пусть*

$$\Phi(x)=\sqrt{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y_{2k+1}}{(2k+1)^3}\sin(2k+1)\pi x, \tag{21}$$

причем

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_{2k+1}^2=c^2<+\infty \tag{22}$$

и пусть $f(u)$ нечетный полином[1]*; тогда функция $f(\Phi(x))\in A_3$.*

Доказательство. В силу (21) и (22) функции $\Phi'(x)$ и $\Phi''(x)$ непрерывны при любом значении x и получаются дифференцированием (21).

[1] или нечетная голоморфная функция; для голоморфной функции лемма справедлива при условии, что $|\Phi(x)|<R$, где R — радиус сходимости ряда

$$f(u)=\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}u^{2k+1}.$$

Функция $\varphi(x)$, ряд Фурье которой $-\sum_{k=0}^{\infty} y_{2k+1}\cos(2k+1)\pi x$ получается формальным дифференцированием ряда (21), представляет собою в силу (22) функцию с суммируемым квадратом. Функция $\varphi(x)$ почти для всех x равна $\Phi'''(x)$. Из формул дифференцирования сложной функции заключаем, что функции $\frac{df(\Phi)}{dx}$, $\frac{d^2f(\Phi)}{dx^2}$ непрерывны.

Наконец из формулы

$$\left(\frac{d^3f(\Phi)}{dx^3}\right)^2 = \left[f'''(\Phi)\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^3 + 3f''(\Phi)\frac{d\Phi}{dx}\cdot\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right]^2 +$$
$$+2\left[f'''(\Phi)\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^3 + 3f''(\Phi)\frac{d\Phi}{dx}\cdot\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right]f'(\Phi)\frac{d^3\Phi}{dx^3} + \left[f'(\Phi)\frac{d^3\Phi}{dx^3}\right]^2 \tag{23}$$

заключаем: первое слагаемое в квадратных скобках в правой части (23) есть непрерывная функция x; второе и третье слагаемое суть произведения ограниченных и непрерывных функций на суммируемые функции, следовательно $\frac{d^3f(\Phi)}{dx^3}$ есть функция с суммируемым квадратом.

Ряд Фурье, который мы получим, подставляя формально в выражение для $\frac{d^3f(\Phi)}{dx^3}$ соответствующие ряды Фурье для Φ, Φ', Φ'', Φ''', на основании теоремы о единственности ряда Фурье для функций с суммируемым квадратом, будет рядом Фурье функции $\frac{d^3f(\Phi)}{dx^3}$. Этот ряд будет иметь вид:

$$\frac{d^3f(\Phi)}{dx^3} = \sqrt{2}\sum_{k=0}^{\infty}\psi_{2k+1}(\Phi_1,\ \Phi_3,\ \ldots)\cos(2k+1)\pi x, \tag{24}$$

причем имеет место равенство Парсеваля

$$\sum_{k=0}^{\infty}\psi_{2k+1}^2 = \int_0^1\left[\frac{d^3f(\Phi)}{dx^3}\right]^2 dx. \tag{25}$$

Обозначим теперь коэффициенты Фурье функции $f(\Phi(x))$ через f_{2k+1}, т. е. положим

$$f(\Phi(x)) = \sqrt{2}\sum_{k=0}^{\infty} f_{2k+1}(\Phi_1,\ \Phi_3,\ \ldots)\sin(2k+1)\pi x.$$

Интегрируя (24) последовательно три раза, в соответствующих пределах, и принимая во внимание, что $\Phi'\left(\frac{1}{2}\right)=0$, $\Phi''(0)=0$, найдем

$$f(\Phi(x)) = \int_0^x dx\int_{\frac{1}{2}}^x dx\int_0^x \frac{d^3f(\Phi)}{dx^3}dx = -\frac{\sqrt{2}}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\psi_{2k+1}}{(2k+1)^3}\sin(2k+1)\pi x \equiv$$
$$\equiv \sqrt{2}\sum_{k=0}^{\infty} f_{2k+1}(\Phi_1,\ \Phi_3,\ \ldots)\sin(2k+1)\pi x. \tag{26}$$

Из (25) и (26) вытекает справедливость леммы.

Введем теперь следующие понятия и обозначения:

Пусть

$$\Phi_1(x) \in A_3 \quad \text{и} \quad \Phi_2(x) \in A_3$$

и пусть

$$\Phi_1(x) = \sqrt{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y'_{2k+1}}{(2k+1)^3} \sin(2k+1)\pi x \equiv \sqrt{2}\sum_{k=0}^{\infty} \Phi'_{2k+1} \sin(2k+1)\pi x,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} y'^2_{2k+1} = c_1^2 < +\infty;$$

$$\Phi_2(x) = \sqrt{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y''_{2k+1}}{(2k+1)^3} \sin(2k+1)\pi x \equiv \sqrt{2}\sum_{k=0}^{\infty} \Phi''_{2k+1} \sin(2k+1)\pi x,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} y''^2_{2k+1} = c_2^2 < +\infty$$

(верхние индексы у букв y и Φ не смешивать с символами производных).

Тогда величину

$$\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} (y''_{2k+1} - y'_{2k+1})^2}$$

мы назовем расстоянием между точками $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ пространства A_3 и будем обозначать символом $w[\Phi_1(x), \Phi_2(x)]$ или также $w[y', y'']$, т. е.

$$w[y', y''] = w[\Phi_1(x), \Phi_2(x)] = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} (y''_{2k+1} - y'_{2k+1})^2}.$$

Величина $\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} (\Phi''_{2k+1} - \Phi'_{2k+1})^2}$ есть расстояние между точками $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ в Гильбертовом пространстве [1]; ее мы условимся обозначать символом $r[\Phi_1(x), \Phi_2(x)]$ или $r[\Phi', \Phi'']$, так что

$$r[\Phi_1(x), \Phi_2(x)] = r[\Phi', \Phi''] = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} (\Phi''_{2k+1} - \Phi'_{2k+1})^2}.$$

Наконец, мы введем еще аналогичное понятие расстояния для точек пространства A_2, т. е. если

$$\Phi_1(x) = \sqrt{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y'_{2k+1}}{(2k+1)^2} \sin(2k+1)\pi x, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} y'^2_{2k+1} = c_1^2 < +\infty;$$

[1] Очевидно, всякая точка $\Phi(x) \in A_m$ $(m \geqslant 1)$ принадлежит также пространству Гильберта.

$$\Phi_2(x) = \sqrt{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y''_{2k+1}}{(2k+1)^2}\sin(2k+1)\pi x, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} y''^2_{2k+1} = c_2^2 < +\infty,$$

то положим

$$\rho[\Phi_1(x),\ \Phi_2(x)] = \rho[y',\ y''] = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty}(y'_{2k+1} - y''_{2k+1})^2}.$$

Очевидно для любых точек $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, $\Phi_3(x)$, принадлежащих пространству A_3 (A_2 или пространству Гильберта), соблюдаются три основные аксиомы метрического пространства, в частности аксиома треугольника, т. е. например

$$w[\Phi_1(x),\ \Phi_3(x)] \leqslant w[\Phi_1(x),\ \Phi_2(x)] + w[\Phi_2(x),\ \Phi_3(x)].$$

Теперь мы докажем следующую лемму:

ЛЕММА III. *Пусть*

$$\Phi(x) = \sqrt{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y_{2k+1}}{(2k+1)^3}\sin(2k+1)\pi x, \quad w^2[\Phi(x), 0] = \sum_{k=0}^{\infty} y^2_{2k+1} = c^2 < +\infty,$$

тогда, если

$$|\Phi(x)| \leqslant R \quad \textit{и} \quad w[\Phi(x),\ 0] < 1 \quad \textit{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 2,$$

$$f(u) = a_1 u + a_3 u^3 + \ldots + a_{2n+1} u^{2n+1},$$

то имеет место неравенство

$$\rho^2[f(\Phi(x)),\ 0] \leqslant 16\beta^2\gamma_2^4 w^2[\Phi(x),\ 0], \quad 0 \leqslant x \leqslant 2, \tag{27}$$

где

$$\beta = \max(\beta_1,\ \beta_2), \quad \gamma_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\beta_1 = \max|f'(u)| \\ \beta_2 = \max|f''(u)|\end{array}\right\} \quad \textit{при} \quad |u| \leqslant R. \tag{28}$$

Доказательство. Из предыдущей леммы мы уже знаем, что точка $f[\Phi(x)] \in A_3$ и тем более $\in A_2$. Согласно определению расстояния в пространстве A_2

$$\rho^2[f(\Phi(x)),\ 0] = \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)^4 f^2_{2k+1}(\Phi_1,\ \Phi_3,\ \ldots)$$

или на основании равенства Парсеваля

$$\rho^2[f(\Phi(x)),\ 0] = \frac{1}{\pi^4}\int_0^1\left\{\frac{d^2 f(\Phi)}{dx^2}\right\}^2 dx. \tag{29}$$

Из (29) получаем:

$$\rho^2[f(\Phi(x)),\ 0] \leqslant \frac{2}{\pi^4}\int_0^1\left\{[f''(\Phi)]^2\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^4 + [f'(\Phi)]^2\left(\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right)^2\right\}dx. \tag{30}$$

Далее имеем:

$$|\Phi(x)| \leqslant \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|y_{2k+1}|}{(2k+1)^3} \leqslant \sqrt{2}\, c\gamma_6, \quad \text{где } \gamma_6^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^6},$$

$$|\Phi'(x)| \leqslant \pi\sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|y_{2k+1}|}{(2k+1)^4} \leqslant \pi\sqrt{2}\, c\gamma_4, \quad \gamma_4^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4},$$

$$|\Phi''(x)| \leqslant \pi^2\sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|y_{2k+1}|}{2k+1} \leqslant \pi^2\sqrt{2}\, c\gamma_2, \quad \gamma_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Полагая $|\Phi(x)| \leqslant R$, на основании этих оценок и формул (28) и (29), находим:

$$\rho^2[f(\Phi(x)),\ 0] \leqslant 8\beta^2\gamma_2^4(c^4+c^2)$$

и наконец в силу предположения, что $w[\Phi(x),\ 0] = c < 1$, получаем окончательно

$$\rho^2[f(\Phi(x)),\ 0] \leqslant 16\beta^2\gamma_2^4 c^2 = 16\beta^2\gamma_2^4 w^2[\Phi(x),\ 0],$$

что и требовалось доказать.

Условие Липшица. Пусть $f(u)$ полином[1], тогда при $|u_1| \leqslant b$ и $|u_2| \leqslant b$, где b произвольно, но фиксировано, имеет место неравенство

$$[f(u_2) - f(u_1)]^2 \leqslant \alpha^2(u_2 - u_1)^2, \tag{31}$$

где α — некоторое постоянное число.

Положим[2],

$$\left.\begin{aligned} u_1(x) &= \sqrt{2}\sum_{k=0}^{\infty} u'_{2k+1} \sin(2k+1)\pi x \\ u_2(x) &= \sqrt{2}\sum_{k=0}^{\infty} u''_{2k+1} \sin(2k+1)\pi x \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

и будем считать, что функции $u_1(x)$ и $u_2(x) \in A_3$ и что при всяком x

$$|u_1(x)| \leqslant b, \quad |u_2(x)| \leqslant b.$$

Коэффициенты Фурье функций $f(u_1(x))$ и $f(u_2(x))$ выражаются формулами:

$$f_{2k+1}(u'_1,\ u'_3,\ \ldots) = \sqrt{2}\int_0^1 f(u_1(x)) \sin(2k+1)\pi x\, dx,$$

[1] Мы считаем полином нечетным.

[2] Нас интересует специально случай «нечетных рядов Фурье», хотя вывод условия Липшица сохраняет силу и в том случае, если

$$u_1(x) = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty} u'_k \sin k\pi x,$$

$$u_2(x) = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty} u''_k \sin k\pi x.$$

$$f_{2k+1}(u_1'', u_3'', \ldots) = \sqrt{2}\int_0^1 f(u_2(x))\sin(2k+1)\pi x\,dx$$

и в силу леммы I

$$\left.\begin{aligned} f(u_1(x)) &= \sqrt{2}\sum_{k=0}^{\infty} f_{2k+1}(u_1', u_3', \ldots)\sin(2k+1)\pi x,\\ f(u_2(x)) &= \sqrt{2}\sum_{k=0}^{\infty} f_{2k+1}(u_1'', u_3'', \ldots)\sin(2k+1)\pi x,\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

причем эти ряды сходятся абсолютно и равномерно при всяком x. Подставляя (32) и (33) в (31), интегрируя затем по x от 0 до 1 и принимая во внимание ортогональность и нормированность функций

$$\sqrt{2}\sin(2k+1)\pi x,$$

получим

$$\sum_{k=0}^{\infty}[f_{2k+1}(u_1', u_3', \ldots) - f_{2k+1}(u_1'', u_3'', \ldots)]^2 \leqslant \alpha^2\sum_{k=0}^{\infty}(u_{2k+1}' - u_{2k+1}'')^2,$$

или, пользуясь символом расстояния в пространстве Гильберта,

$$r[f(u_1(x)), f(u_2(x))] \leqslant \alpha r[u_1(x), u_2(x)]. \tag{34}$$

Неравенство (34) мы будем называть условием Липшица.

§ 7. Теоремы существования

В §§ 4 и 5 мы показали, что задачу отыскания периодических решений уравнения (4) с граничными условиями (5), (6) § 1 можно свести к решению бесконечной системы интегральных уравнений. Пусть в уравнении (4) § 1 [1]

$$a = 2m + 1 \quad (m \text{ целое число} > 0)$$

$$f(u) = a_1 u + a_3 u^3 + \ldots + a_{2n+1} u^{2n+1},$$

$$\Phi(x, t) = \sqrt{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y_{2k+1}(t)}{(2k+1)^2}\sin(2k+1)\pi x, \quad \sum_{k=0}^{\infty} y_{2k+1}^2(t) = C^2(t),$$

причем все $y_{2k+1}(t)$ суть периодические функции t с периодом 1, непрерывные в интервале $0 \leqslant t \leqslant 1$. Тогда соответствующая бесконечная система интегральных уравнений будет иметь вид

$$z_{2k+1}(t) = B_{2k+1}(t) + \mu\int_0^1 G_{2k+1}(t, \tau) f_{2k+1}[z_1(\tau), z_3(\tau), \ldots]\,d\tau, \tag{35}$$

[1] Число a здесь можно выбрать также равным $\frac{2m+1}{q}$, где q целое число $\neq 0$; в дальнейшем доказательстве от этого изменятся при оценках только соответствующие постоянные.

где

$$G_{2k+1}(t, \tau) = \frac{\cos\left[(2m+1)(2k+1)\left(|t-\tau|-\frac{1}{2}\right)\right]}{2\pi(2m+1)(2k+1)(-1)^{m+k}}, \tag{36}$$

$$B_{2k+1}(t) = \int_0^1 G_{2k+1}(t, \tau)\,\Phi_{2k+1}(\tau)\,d\tau, \tag{37}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)^4\,\Phi_{2k+1}^2(t) = C^2(t) \leqslant c^2. \tag{38}$$

Неравенство (38) вытекает из теоремы Dini.

Мы начнем с того, что докажем теорему существования для системы (35):

I ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ. *Система интегральных уравнений (35), при условии, что*[1]

$$\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)^4\,\Phi_{2k+1}^2(t) = C^2(t) \leqslant c^2 < \frac{(1-\mu\lambda M)^2}{M^2} \quad (0 \leqslant t \leqslant 1), \tag{39}$$

$$\mu < \min\left(\frac{1}{\lambda M}, \frac{1}{\alpha M\gamma_2}\right), \tag{40}$$

где

$$M = \frac{1}{2\pi(2m+1)} \tag{40'}$$

(α коэффициент в условии Липшица), имеет решение $z_{2k+1}(t) = \varphi_{2k+1}(t)$, принадлежащее пространству A_3, причем все функции $\varphi_{2k+1}(t)$ будут непрерывными в интервале $0 \leqslant t \leqslant 1$ и периодическими с периодом 1, если этими же свойствами обладают функции $\Phi_{2k+1}(t)$.

Доказательство. Для доказательства теоремы мы воспользуемся методом последовательных приближений. Условимся p-ое приближение к функциям $z_{2k+1}(t)$ обозначать индексом вверху $z_{2k+1}^{(p)}(t)$. Символ $z^{(p)}(t)$ будет сокращенным обозначением p-ого приближения к точке $z(t)$. Доказательство мы разобьем на две части. В первой части мы покажем, что каждое приближение $z^{(p)}(t)$ является точкой пространства A_3, причем

$$w^2[z^{(p)}(t), 0] < \frac{1-(\mu\lambda M)^p}{1-\mu\lambda M}c^2M^2 \text{ при любом } p = 0, 1, 2, \ldots$$

Отсюда непосредственно будет следовать, что и предел $\lim\limits_{p\to\infty} z^{(p)}(t)$, если он существует, также принадлежит A_3, причем

$$w^2[z(t), 0] \leqslant 1.$$

Во второй части мы покажем, что предел $\lim\limits_{p\to\infty} z^{(p)}(t) = z(t)$ действительно существует.

[1] В формуле (39) величину C^2 мы будем считать равной $c^2 = \sup C^2(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Значение постоянной λ будет указано ниже.

1. Из (36) и (40′) имеем:

$$|G_{2k+1}(t, \tau)| \leqslant \frac{M}{2k+1}. \tag{41}$$

Положим в нулевом приближении

$$z_{2k+1}^{(0)}(t) = B_{2k+1}(t);$$

тогда из (37), (39) и (41) имеем:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)^6[z_{2k+1}^{(0)}(t)]^2 = \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)^6\left\{\int_0^1 G_{2k+1}(t, \tau)\,\Phi_{2k+1}(\tau)\,d\tau\right\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant M^2\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)^4\int_0^1 \Phi_{2k+1}^2(\tau)\,d\tau =$$

$$= M^2\int_0^1\left\{\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)^4\,\Phi_{2k+1}^2(\tau)\right\}d\tau \leqslant c^2M^2. \tag{42}$$

Из (39) и (42) вытекает, что точка $z^{(0)}(t) = [z_1^{(0)}(t), z_3^{(0)}(t), \ldots]$ принадлежит A_3, причем

$$w^2[z^{(0)}(t), 0] \leqslant c^2M^2 = q^2 < 1 \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{43}$$

Положим

$$u_0(x, t) = \sqrt{2}\sum_{k=0}^{\infty} z_{2k+1}^{(0)}(t)\sin(2k+1)\pi x,$$

тогда, пользуясь неравенством Шварца и (43), найдем

$$|u_0(x, t)| \leqslant \sqrt{2}\sum_{k=0}^{\infty}|z_{2k+1}^{(0)}(t)| = \sqrt{2}\sqrt{\left\{\sum_{k=0}^{\infty} z_{2k+1}^{(0)}(t)(2k+1)^3\cdot\frac{1}{(2k+1)^3}\right\}^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{2}\,w[z^{(0)}(t), 0]\gamma_6 < \sqrt{2}\,\gamma_6 \text{ при всяком } x \text{ и при } 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Выберем теперь число $R = \sqrt{2}\gamma_6$, тогда на основании леммы III получим

$$\rho^2[f(u_0(x, t)), 0] = \rho^2[f(z^{(0)}(t)), 0] \leqslant \lambda^2 w^2[z^{(0)}(t), 0], \tag{44}$$

где

$$\lambda^2 = 16\,\beta_2\gamma_2^4, \quad \beta = \max(\beta_1, \beta_2)$$

$$\left.\begin{aligned}\beta_1 &= \max|f'(u)|\\ \beta_2 &= \max|f''(u)|\end{aligned}\right\} \text{ при } |u| \leqslant R. \tag{45}$$

Теперь для первого приближения находим

$$z_{2k+1}^{(1)}(t) - z_{2k+1}^{(0)}(t) = \mu\int_0^1 G_{2k+1}(t, \tau) f_{2k+1}[z_1^{(0)}(\tau), z_3^{(0)}(\tau), \ldots]\,d\tau. \tag{46}$$

Из (41), (44), (46) выводим [1]:

---

[1] Законность интегрирования в неравенствах (47) следует из леммы I.

$$\sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)^6 [z^{(1)}_{2k+1}(t) - z^{(0)}_{2k+1}(t)]^2 = w^2 [z^{(1)}(t),\ z^{(0)}(t)] =$$

$$= \mu^2 \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)^6 \left\{ \int_0^1 G_{2k+1}(t,\ \tau) f_{2k+1}(z^{(0)}) d\tau \right\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \mu^2 \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)^6 \int_0^1 G^2_{2k+1}(t,\ \tau) f^2_{2k+1}(z^{(0)}) d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \mu^2 M^2 \int_0^1 \rho^2 [f(z^{(0)}),\ 0] d\tau \leqslant \mu^2 \lambda^2 M^2 q^2. \tag{47}$$

Пользуясь теоремой треугольника, находим:

$$w [z^{(1)}(t),\ 0] \leqslant w [z^{(1)}(t),\ z^{(0)}(t)] + w [z^{(0)}(t),\ 0]$$

или на основании (43) и (47)

$$w [z^{(1)}(t),\ 0] \leqslant (1 + \lambda\mu M) q^2 \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1). \tag{48}$$

Аналогичными рассуждениями докажем, что если

$$w [z^{(p)}(t),\ 0] \leqslant \frac{1 - (\mu\lambda M)^p}{1 - \mu\lambda M} \cdot q \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1),$$

то

$$w [z^{(p+1)}(t), 0] \leqslant \frac{1 - (\mu\lambda M)^{p+1}}{1 - \mu\lambda M} \cdot q \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1). \tag{49}$$

Из неравенства (49) вытекает, что каждое приближение $z^{(p)}(t)$ принадлежит пространству A_3 и притом при всяком $0 \leqslant t \leqslant 1$. Если существует предел

$$\lim_{p \to \infty} z^{(p)}(t) = z(t),$$

то очевидно

$$w [z(t),\ 0] \leqslant \frac{1}{1 - \mu\lambda M} \cdot q < 1 \quad (0 \leqslant t \leqslant 1) \tag{50}$$

и, следовательно, точка $z(t)$ будет обязательно принадлежать пространству A_3 при любом $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Проверим, удовлетворяет ли точка $z(t)$ (если предел существует, что мы пока предположим) условиям (44) и (45).

Из (50) и неравенства Шварца легко найдем

$$|u(x,\ t)| \leqslant \sqrt{2}\gamma_6 w [z(t),\ 0] < \sqrt{2}\gamma_6$$

при всяком x и при $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Таким образом, полагая $R = \sqrt{2}\gamma_6$, находим по уравнениям (45) число λ и по (31) число α, затем по (40) выбираем μ и наконец из (39) выбираем c; тогда каждое приближение будет удовлетворять (45) и условию

$$w [z^{(p)}(t),\ 0] < 1,$$

и все операции, которые мы производили, оправданы.

2. Теперь остается доказать существование предела

$$\lim_{p\to\infty} z_{2k+1}^{(p)}(t) = z_{2k+1}(t) \qquad (k=0,\ 1,\dots).$$

Полагая, как и раньше,

$$z_{2k+1}^{(0)}(t) = \int_0^1 G_{2k+1}(t,\ \tau)\ \Phi_{2k+1}(\tau)\,d\tau,$$

оцениваем расстояние точки $z^{(0)}$ от начала координат в Гильбертовом пространстве

$$r^2[z^{(0)}(t),\ 0] = \sum_{k=0}^{\infty}[z_{2k+1}^{(0)}(t)]^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\left\{\int_0^1 G_{2k+1}(t,\ \tau)\,\Phi_{2k+1}(\tau)\,d\tau\right\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant M^2\int_0^1\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Phi_{2k+1}^2(\tau)}{(2k+1)^2}\right\}d\tau \leqslant M^2\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^6}\right]\cdot\int_0^1\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)^4\Phi_{2k+1}^2(\tau)\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant M^2\gamma_6^2c^2 \qquad (0\leqslant t\leqslant 1). \tag{51}$$

Предположим теперь, что полином $f(u)$ удовлетворяет неравенству (31), если $|u_1|$ и $|u_2|\leqslant\sqrt{2}\,\gamma_6$. Тогда для каждого приближения $z^{(p)}$ будет справедливо условие Липшица (34).

Применяя на этом основании условие Липшица к точкам $z^{(0)}$ и 0 Гильбертова пространства, получим:

$$r[f(z^{(0)}(t)),\ 0]\leqslant\alpha r[z^{(0)}(t),\ 0]\leqslant\alpha Mc\gamma_6. \tag{52}$$

Оцениваем теперь расстояние $r[z^{(1)}(t),\ z^{(0)}(t)]$. Имеем [1]:

$$r[z^{(1)}(t),\ z^{(0)}(t)] = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty}[z_{2k+1}^{(1)}(t)-z_{2k+1}^{(0)}(t)]^2} =$$

$$=\mu\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\int_0^1 G_{2k+1}(t,\tau)\,f_{2k+1}(z^{(0)})\,d\tau\right\}^2}\leqslant$$

$$\leqslant\mu\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 G_{2k+1}^2(t,\tau)\,f_{2k+1}^2(z^{(0)})\,d\tau}\leqslant\mu M^2\alpha c\gamma_2\gamma_6 \quad (0\leqslant t\leqslant 1). \tag{53}$$

Точно так же находим:

$$r[z^{(2)}(t),\ z^{(1)}(t)] = \mu\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\int_0^1 G_{2k+1}(t,\tau)\,[f_{2k+1}(z^{(1)})-f_{2k+1}(z^{(0)})]d\tau\right\}^2}\leqslant$$

$$\leqslant(\mu\alpha M\gamma_2)^2 Mc\gamma_6.$$

Применяя метод индукции, получим неравенство

$$r[z^{(p+1)}(t),\ z^{(p)}(t)]\leqslant(\mu\alpha M\gamma_2)^{p+1}Mc\gamma_6 \qquad (0\leqslant t\leqslant 1). \tag{54}$$

[1] Непрерывность функций $z_{2k+1}^{(p)}(t)$ каждого приближения была доказана выше, так же как непрерывность функций $f_{2k+1}[z_1^{(p)}(t),\ z_3^{(p)}(t),\dots]$, а следовательно, операция интегрирования законна.

Пусть теперь $z^{(j)}$, $z^{(j+1)}, \ldots, z^{(j+p)}$ — точки Гильбертова пространства, определяемые последовательными приближениями из системы (35).

Из теоремы треугольника имеем:

$$r(z^{(j+p)}, z^{(j)}) \leqslant r(z^{(j)}, z^{(j+1)}) + \ldots + r(z^{(j+p)}, z^{(j+p-1)})$$

Подставляя в правую часть этого неравенства формулу (54), получим

$$r(z^{(j+p)}, z^{(j)}) \leqslant Mc\gamma_6 \delta^{j+1} \frac{1-\delta^p}{1-\delta}, \tag{55}$$

где $\delta = \mu\alpha M\gamma_2$.

Если теперь μ удовлетворяет неравенству (40), т. е.

$$\mu < \frac{1}{\alpha M\gamma_2},$$

тогда $\delta < 1$ и из (55) находим:

$$r(z^{(j+p)}, z^{(j)}) \leqslant Mc\gamma_6 \frac{\delta^{j+1}}{1-\delta}.$$

Отсюда следует, что, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, можно, выбрав j достаточно большим, сделать

$$r(z^{(j+p)}, z^{(j)}) < \varepsilon \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{56}$$

каково бы ни было число p. Для этого должно быть

$$j + 1 > \frac{\lg \varepsilon + \lg(1-\delta) - \lg(Mc\gamma_6)}{\lg \delta}.$$

Теперь мы можем утверждать, что последовательность точек $z^{(0)}$, $z^{(1)}, \ldots, z^{(p)}, \ldots$ есть фундаментальная последовательность. Вследствие полноты Гильбертова пространства всякая фундаментальная последовательность есть в то же время сходящаяся последовательность. Таким образом доказано существование предела последовательности точек $z^{(0)}$, $z^{(1)}, \ldots$, т. е.

$$\lim_{p\to\infty} z^{(p)}(t) = z(t),$$

причем каждая функция $z^{(p)}_{2k+1}(t)$ стремится к своему пределу $z_{2k+1}(t)$ равномерно в промежутке $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Остается показать, что функции $z^{(p)}_{2k+1}(t)$ удовлетворяют в пределе, т. е. когда $p \to \infty$, системе (35). Имеем:

$$z^{(p)}_{2k+1}(t) = B_{2k+1}(t) + \mu \int_0^1 G_{2k+1}(t, \tau) f_{2k+1}(z_1^{(p-1)}, z_3^{(p-1)}, \ldots)\, d\tau \qquad (k=0, 1, \ldots).$$

Переходя в обеих частях этого равенства к пределу при $p \to \infty$, что законно в силу равномерного стремления функций $z^{(p)}_{2k+1}(t)$ к пределу, получим:

$$z_{2k+1}(t) = B_{2k+1}(t) + \mu \int_0^1 G_{2k+1}(t, \tau) f_{2k+1}[z_1, z_3, \ldots]\, d\tau \quad (k = 0, 1, \ldots),$$

причем все функции $z_{2k+1}(t)$ будут непрерывны при $0 \leqslant t \leqslant 1$ и периодичны с периодом 1[1].

Таким образом теорема существования доказана.

Из только что доказанной теоремы существования непосредственно вытекает теорема существования для уравнения в частных производных (4) с условиями (5), (6) § 1, которую можно формулировать следующим образом:

II ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ. *Если*[2] $a = 2m+1$ *(m — целое число),*

$$f(u) = a_1 u + a_3 u^3 + \ldots + a_{2n+1} u^{2n+1},$$

$$|f(u_1) - f(u_2)| \leqslant \alpha |u_1 - u_2| \quad при \quad |u| \leqslant R,$$

$$\Phi(x, t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y_{2k+1}(t)}{(2k+1)^2} \sin(2k+1)\pi x, \quad \sum_{k=0}^{\infty} y_{2k+1}^2(t) = C^2(t) \leqslant c^2$$

(постоянная c достаточно мала), причем функция $\Phi(x, t)$ непрерывна относительно t при $0 \leqslant t \leqslant 1$ и $\Phi(x, t) = \Phi(x, t+1)$, то уравнение (4) с условиями (5), (6) § 1, при μ достаточно малом, имеет решение $u(x, t)$ периодическое в t с периодом 1, непрерывное вместе со своими производными до 2-го порядка включительно в области $\bar{\Omega}$[3].

В первой части доказательства I теоремы существования мы показали, что $u(x, t) \in A_3$, а следовательно, как $u(x, t)$, так и производная $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ непрерывны при любом x и t и $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ может быть вычислена дифференцированием ряда Фурье для $u(x, t)$.

Из уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{dx^2} + \Phi(x, t) + \mu f(u)$$

теперь следует, что и $\frac{\partial^2 u}{dt^2}$ непрерывна также при любом x и t, так как мы можем ряд Фурье для $u(x, t)$ подставить в правую часть уравнения, которая будет непрерывной функцией x и t в области $\bar{\Omega}$.

§ 8. Теоремы единственности

I ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ. *При соблюдении условий I теоремы существования система интегральных уравнений (35) допускает только одно непрерывное решение $z(t)$, принадлежащее A_3, для которого расстояние*

$$\omega[z(t), 0] < 1.$$

[1] Периодичность функций $z_{2k+1}(t)$ вытекает из свойства функций Грина $G_{2k+1}(t, \tau)$, отмеченного в конце § 5. Непрерывность функций $z_{2k+1}(t)$ следует из свойств рядов $f_{2k+1}(z_1, z_3, \ldots)$ и функций $G_{2k+1}(t, \tau)$, благодаря которым каждое p-ое приближение $z_{2k+1}^{(p)}(t)$ непрерывно, а следовательно, и предел $\lim\limits_{p \to \infty} z_{2k+1}^{(p)}$ в силу равномерного стремления к нему.

[2] См. сноску на стр. 27.

[3] См. сноску на стр. 15.

Действительно, предположим противное, т. е. что кроме непрерывного решения $z(t)=\{z_1(t), z_3(t), \dots\}$, найденного выше, существует другое непрерывное решение системы (35) $Z(t)=\{Z_1(t), Z_3(t), \dots\}$ тоже $\in A_3$ и для которого расстояние $w[Z(t), 0]<1$.

Так как $Z(t)\not\equiv z(t)$ по предположению, то

$$r[Z(t),\ z(t)]=\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty}[Z_{2k+1}(t)-z_{2k+1}(t)]^2}\neq 0 \tag{57}$$

по крайней мере в некоторой части ω интервала $0\leqslant t\leqslant 1$.

Расстояние $r[Z, z]$ есть непрерывная функция t во всем интервале $0\leqslant t\leqslant 1$, так как обе точки $\in A_3$ и все $z_{2k+1}(t)$, $Z_{2k+1}(t)$ $(k=0, 1, \dots)$ суть непрерывные функции t. На этом основании мы можем утверждать, что существует верхняя грань η для расстояния $r[Z, z]$ при $0\leqslant t\leqslant 1$, т. е. что

$$r[Z(t),\ z(t)]\leqslant\eta, \text{ когда } t\in\omega,$$

причем

$$r[Z(t_1),\ z(t_1)]=\eta \tag{58}$$

по крайней мере в одной точке $t_1\in\omega$.

Имеем:

$$Z_{2k+1}(t)-z_{2k+1}(t)=\mu\int_0^1 G_{2k+1}(t,\ \tau)[f_{2k+1}(Z_1,\ Z_3,\dots)-$$
$$-f_{2k+1}(z_1,\ z_3,\dots)]\,d\tau \quad (k=0,\ 1,\dots). \tag{59}$$

В силу того, что $w[Z(t),\ 0]<1$, а следовательно,

$$|U(x,\ t)|\leqslant\sqrt{2}\,\gamma_6, \text{ где } U(x,\ t)=\sqrt{2}\sum_{k=0}^{\infty}Z_{2k+1}(t)\sin(2k+1)\pi x,$$

мы можем применить к точкам Z и z условие Липшица (34); получим:

$$r[f(Z),\ f(z)]\leqslant\alpha\, r(Z,\ z).$$

Далее, из (59) находим:

$$r(Z,\ z)\leqslant\mu M\gamma_2\alpha\eta. \tag{60}$$

Выбрав теперь опять

$$\mu=\frac{\theta}{M\gamma_2\alpha}\quad(0<\theta<1),$$

сейчас же из (60) получим:

$$r(Z,\ z)\leqslant\theta\eta<\eta,$$

что противоречит (58), и следовательно, теорема доказана.

Из этой теоремы вытекает теорема единственности для уравнения в частных производных, которую можно формулировать следующим образом:

II ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ. *Если соблюдаются условия II теоремы существования, то задача (4), (5), (6) § 1 допускает при* μ

достаточно малом только одно непрерывное решение $u(x, t)$ вида (13) § 4, принадлежащее A_3, и для которого удовлетворялось бы неравенство $|u(x, t)| \leqslant \sqrt{2}\gamma_6$ [1].

II МЕТОД [2]

§ 9. Приведение задачи к одному интегральному уравнению

В этом параграфе мы покажем, каким образом можно свести задачу к одному нелинейному интегральному уравнению. Для этой цели мы укажем эффективный метод построения некоторой функции $K(x, \xi; t, \tau)$, которую будем называть функцией Грина.

Теорема существования II говорит нам, что уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (2m+1)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Phi(x, t) + \mu f(u)$$

при соблюдении соответствующих условий имеет периодическое решение $u(x, t)$, разлагающееся в ряд только по

$$\sin(2k+1)\pi x.$$

Мы докажем теперь, что это решение является также решением нелинейного интегрального уравнения для $u(x, t)$:

$$u(x, t) = \iint_{\Omega} K(x, \xi; t, \tau)[\Phi(\xi, \tau) + \mu f(u(\xi, \tau))]\, d\xi\, d\tau, \tag{61}$$

где

$$K(x, \xi; t, \tau) =$$

$$= \frac{2}{(-1)^m \pi (2m+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\pi x \sin(2k+1)\pi\xi \cos\left[\pi(2m+1)(2k+1)\left(|t-\tau| - \frac{1}{2}\right)\right]}{(-1)^k (2k+1)}.$$

Это утверждение эквивалентно следующей теореме:

ТЕОРЕМА. *Пусть условия I теоремы существования выполнены и пусть $z_{2k+1}(t)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ есть решение системы интегральных уравнений (35)*

$$z_{2k+1}(t) = B_{2k+1}(t) + \mu \int_0^1 G_{2k+1}(t, \tau) f_{2k+1}[z_1(\tau), z_3(\tau), \ldots]\, d\tau \quad (k = 0, 1, \ldots),$$

принадлежащее пространству A_3.

Тогда функция

$$u(x, t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} z_{2k+1}(t) \sin(2k+1)\pi x$$

удовлетворяет интегральному уравнению (61).

---

[1] Это следует непосредственно из выражения функции $u(x, t)$ через коэффициенты $z_{2k+1}(t)$.

[2] Этот метод мы называем вторым, так как можно было бы получить теоремы существования и единственности § 8, исходя непосредственно из свойств функции $K(x, \xi; t, \tau)$, которую мы дальше вводим, и не прибегая к предыдущим теоремам о бесконечной системе (35).

Доказательство. Умножаем каждое уравнение системы (35) соответственно на $\sqrt{2}\sin(2k+1)\pi x$ и суммируем по k

$$\sqrt{2}\sum_{k=0}^{\infty} z_{2k+1}(t)\sin(2k+1)\pi x \equiv u(x, t) =$$

$$=\sqrt{2}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 G_{2k+1}(t, \tau)\sin(2k+1)\pi x[\Phi_{2k+1}(\tau)+\mu f_{2k+1}(z_1, z_3, \ldots)]\,d\tau. \quad (62)$$

Так как

$$|G_{2k+1}(t, \tau)| \leqslant \frac{M}{2k+1},$$

$$|\Phi_{2k+1}(\tau)+\mu f_{2k+1}(z_1, z_3, \ldots)| \leqslant \frac{c_1}{(2k+1)^2} \quad (0 \leqslant t, \ \tau \leqslant 1),$$

то ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sin(2k+1)\pi x\, G_{2k+1}(t, \tau)[\Phi_{2k+1}(\tau)+\mu f_{2k+1}(z_1, z_3, \ldots)]$$

сходится абсолютно и равномерно в области $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant t$, $\tau \leqslant 1$. Вследствие равномерной сходимости этого ряда мы можем проинтегрировать его почленно по τ, т. е., иными словами, в (62) мы можем переменить порядок суммирования и интегрирования, после чего получим

$$u(x, t)=\sqrt{2}\int_0^1 d\tau\sum_{k=0}^{\infty}\sin(2k+1)\pi x\, G_{2k+1}(t, \tau)[\Phi_{2k+1}(\tau)+$$
$$+\mu f_{2k+1}(z_1, z_3, \ldots)]. \quad (63)$$

Заменяя в (63) величины $\Phi_{2k+1}(\tau)$ и $f_{2k+1}(z_1, z_3, \ldots)$ их значениями

$$\Phi_{2k+1}(\tau)=\sqrt{2}\int_0^1 \Phi(\xi, \tau)\sin(2k+1)\pi\xi\, d\xi;$$

$$f_{2k+1}(z_1\, z_3, \ldots)=\sqrt{2}\int_0^1 f(u(\xi, \tau))\sin(2k+1)\pi\xi\, d\xi,$$

находим

$$u(x, t)=2\int_0^1 d\tau\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1[\Phi(\xi, \tau)+$$
$$+\mu f(u)]\,G_{2k+1}(t, \tau)\sin(2k+1)\pi x\sin(2k+1)\pi\xi\, d\xi. \quad (63')$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)\pi x\sin(2k+1)\pi\xi\cos\left[\pi(2m+1)(2k+1)\left(|t-\tau|-\frac{1}{2}\right)\right]}{(-1)^k(2k+1)}, \quad (64)$$

который мы обозначим через $\pi(2m+1)(-1)^m K(x, \xi; \ t, \tau)$. Ряд (64) сходится при любых значениях x, ξ, t, τ, так как он может быть представлен в виде суммы четырех сходящихся рядов:

$$\pi(2m+1)(-1)^m K(x, \xi;\ t, \tau) = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)\omega_j}{(-1)^k(2k+1)} - \\ -\frac{1}{4}\sum_{j=3}^{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)\omega_j}{(-1)^k(2k+1)}, \tag{65}$$

где

$$\omega_1 = \pi(x-\xi-T), \quad \omega_2 = \pi(x-\xi+T),$$
$$\omega_3 = \pi(x+\xi+T), \quad \omega_4 = \pi(x+\xi-T),$$
$$T = (2m+1)\left(|t-\tau| - \frac{1}{2}\right).$$

Функция $K(x, \xi;\ t, \tau)$, рассматриваемая как функция от ξ, абсолютно интегрируема по ξ в любом конечном промежутке и при всяких значениях x, t, τ, так как сумма ряда (65) выражается формулой

$$\left.\begin{aligned} &(2m+1)(-1)^m K(x, \xi;\ t, \tau) = \frac{1}{16}\sum_{j=1}^{2} y(\omega_j) - \frac{1}{16}\sum_{j=3}^{4} y(\omega_j), \\ &\text{где} \\ &y(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{если } 2n\pi - \frac{\pi}{2} < \omega < (2n+1)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{»} \quad \omega = n\pi - \frac{\pi}{2} \\ -1 & \text{»} \quad (2n+1)\pi - \frac{\pi}{2} < \omega < (2n+2)\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

n — целое число.

На этом основании [4] мы можем интегрировать почленно, по ξ, ряд Фурье этой функции, т. е. ряд (64).

По этой же причине мы имеем право интегрировать почленно по ξ ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sin(2k+1)\pi x \sin(2k+1)\pi\xi\, G_{2k+1}(t, \tau)\Big[\Phi(\xi, \tau) + \mu f\big(u(\xi, \tau)\big)\Big].$$

Меняя порядок суммирования и интегрирования в (63′), получим:

$$u(x, t) = \int_0^1\int_0^1 K(x, \xi;\ t, \tau)[\Phi(\xi, \tau) + \mu f(u)]\,d\xi\,d\tau,$$

что и требовалось доказать [1].

Ядро $K(x, \xi;\ t, \tau)$ при фиксированных x, t, рассматриваемое как функция ξ, τ, состоит из кусков плоскостей, параллельных плоскости

[1] В случае $a = \frac{2m+1}{q}$ задача также может быть сведена к одному интегральному уравнению аналогичным приемом. Соответствующее ядро будет уже, конечно, другое.

$\xi\tau$. Оно имеет конечные разрывы вдоль параллельных прямых, совпадающих с некоторыми из характеристик:

$$\xi-(2m+1)\tau=\text{const},$$
$$\xi+(2m+1)\tau=\text{const}.$$

Эти прямые определяются уравнениями:

$$\omega_j=n\pi-\frac{\pi}{2}\quad (j=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

n — целое число или нуль.

§ 10. Явление квазирезонанса

В этом параграфе мы укажем характерные особенности изучаемой задачи, а также ее физический смысл.

Возможность доказать теорему существования по методу последовательных приближений была основана на свойствах пространства A_3, а для этого в свою очередь необходимо, чтобы функции Грина удовлетворяли оценке вида $|G_k(t,\ \tau)|\leqslant\frac{M}{k}$. Если a иррациональное число, то оценка функций G_k имеет вид:

$$|G_k(t,\ \tau)|\leqslant\frac{M}{k\left|\sin\frac{ak\pi}{2}\right|},$$

при этом $\left|\sin\frac{ak\pi}{2}\right|\neq 0$, каково бы ни было $k=1,\ 2\ \ldots$

Пусть у нас имеется система n уравнений с n функциями:

$$z_k(t)=\int_0^1 G_k(t,\ \tau)\left[\Phi_k(\tau)+\mu f_k(z_1,\ \ldots,\ z_n)\right]d\tau\quad (k=1\ \ldots\ n).\tag{67}$$

Выбирая из n чисел

$$\left|\sin\frac{ak\pi}{2}\right|\quad (k=1\ \ldots\ n)$$

наименьшее и обозначая его через ε, получим следующую оценку функций G_k:

$$|G_k(t,\ \tau)|\leqslant\frac{M}{k\varepsilon}=\frac{M_1}{k}\quad (k=1\ \ldots\ n).$$

Поэтому любая конечная система интегральных уравнений (67) имеет [1] при μ достаточно малом решение, во всяком случае при произвольном a, не равном целому или рациональному числу, и при известных условиях относительно функций f_k, что легко доказывается методом последовательных приближений.

Таким образом существенным затруднением при иррациональном a является предельный переход $n\to\infty$. При этом мы видим, что каждая функция G_k в отдельности ограничена, но совокупность всех функ-

[1] Если $\Phi_k(\tau)$ обладают достаточно хорошими свойствами.

ций G_k не ограничена. Это явление мы условимся называть «квазирезонансом».

Основываясь на этих соображениях, еще нельзя сделать, однако, заключения, что при иррациональном a периодических решений не существует, хотя такое предположение не лишено оснований.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Phi(x, t), \tag{68}$$

где

$$\Phi(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} c_{kj} \sin k\pi x \, e^{j2\pi i t} \tag{69}$$

есть сходящийся абсолютно и равномерно в $\overline{\Omega}$ ряд Фурье.

Пусть требуется найти непрерывное, вместе с производными

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

в области $\overline{\Omega}$, решение уравнения (68), удовлетворяющее граничному условию

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \tag{70}$$

и условию периодичности

$$\left.\begin{aligned} &u(x, 0) = u(x, 1) \\ &\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=1} \end{aligned}\right\}. \tag{71}$$

Очевидно, если такое решение существует, то его можно разложить в сходящийся ряд Фурье вида:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \gamma_{kj} \sin k\pi x \, e^{j2\pi i t}. \tag{72}$$

Умножим обе части уравнения (68) на $e^{j2\pi i t} \sin k\pi x$ и затем проинтегрируем по области Ω

$$\iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) e^{j2\pi i t} \sin k\pi x \, dx \, dt = c_{kj}. \tag{73}$$

Производя в (73) интегрирование по частям и принимая во внимание граничные условия (70) и (71), получим:

$$\pi^2 \gamma_{kj} = \frac{c_{kj}}{k^2 a^2 - 4j^2},$$

или, полагая $a = 2b$,

$$4\pi^2 \gamma_{kj} = \frac{c_{kj}}{k^2 b^2 - j^2}. \tag{74}$$

Из формулы (74) заключаем:

I. Если

$$b = \frac{p}{q} \qquad \big((p, q) = 1 \big),$$

причем все

$$|c_{kj}| \neq 0 \quad (k=1 \ldots \infty;\ j=0,\ \pm 1,\ \ldots),$$

то задача (68), (70), (71) не имеет решения, так как

$$k^2 \frac{p^2}{q^2} - j^2 = 0,$$

если

$$kp = \pm jq,$$

т. е. имеет место резонанс.

Очевидно резонанса не будет, если все коэффициенты c_{kj}, у которых индекс k делится на q, равны нулю, или если все коэффициенты c_{kj}, у которых индекс j делится на p, равны нулю. В частности, если $b = \frac{2m+1}{2}$ (m — целое число) и если все коэффициенты $|c_{2k,j}| = 0$, то резонанса не будет. Именно для этого случая нами была доказана теорема существования в § 7.

II. Если b иррациональное число, причем $|c_{kj}| \neq 0$ ($k=1, 2, \ldots = 0, \pm 1, \ldots$), то знаменатель в формуле (74) не может обратиться в нуль. Тем не менее оказывается, что при некоторых иррациональных значениях b, образующих множество мощности континуума, имеет место квазирезонанс и задача (68), (70), (71) не имеет решения. Случаю II соответствует:

ТЕОРЕМА НЕСУЩЕСТВОВАНИЯ. *Уравнение (68) с граничными условиями (70), (71), при условии*

$$|c_{kj}| \neq 0 \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots;\ j=0,\ \pm 1, \ldots)$$

при некоторых иррациональных значениях a, образующих множество мощности континуума, не имеет решения, непрерывного вместе с производными $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ *в области* $\overline{\Omega}$.

Доказательство. Для того чтобы ряд (72) был сходящимся, необходимо, чтобы

$$\lim_{\substack{k \to +\infty \\ j \to \pm\infty}} |\gamma_{kj}| = 0.$$

Поэтому для доказательства теоремы несуществования достаточно показать, что среди коэффициентов γ_{kj} существует счетное множество коэффициентов, удовлетворяющих неравенству

$$|\gamma_{kj}| > N,$$

где N — произвольное положительное число.

Рассмотрим множество функций

$$f_{kj}(\nu) = k^2\nu^2 - j^2 \quad (k=1,\ 2,\ \ldots;\ j=0,\ \pm 1,\ \ldots).$$

Рассмотрим также множество нулей всех функций f_{kj}, которое обозначим через S. Множество S есть, очевидно, множество всех рациональных чисел. Следовательно, точки множества S повсюду плотно заполняют прямую.

Везде в дальнейшем, для простоты, будем считать $\varrho > 1$.

Возьмем произвольное иррациональное число $\alpha > 1$. Пусть этому числу соответствует бесконечная непрерывная дробь

$$\alpha = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \dots}}$$

Выберем какие-либо два индекса k_1, j_1, удовлетворяющие условиям

$$k_1 > 0, \quad \frac{j_1}{k_1} = q_1.$$

Дадим теперь ϱ такое иррациональное значение, чтобы дробь[1]

$$|\gamma_{k_1 j_1}| = \frac{|c_{k_1 j_1}|}{|k_1^2 \varrho^2 - j_1^2|} > N.$$

Полагая

$$\frac{|c_{k_1 j_1}|}{k_1 + j_1} = \eta_1,$$

имеем

$$|\gamma_{k_1 j_1}| > \frac{\eta_1}{|k_1 \varrho - j_1|}.$$

Выбираем теперь ϱ так, чтобы

$$\frac{\eta_1}{|k_1 \varrho - j_1|} > N,$$

откуда

$$\frac{j_1}{k_1} < \varrho < \frac{j_1}{k_1} + \varepsilon_1,$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{\eta_1}{N k_1}.$$

Выбираем теперь какое-либо целое положительное число p_1, удовлетворяющее единственному условию

$$q_1 + \frac{1}{p_1} < \frac{j_1}{k_1} + \varepsilon_1, \quad \text{или} \quad p_1 > \frac{1}{\varepsilon_1}$$

и строим интервал (A_1, B_1), где

$$A_1 = \frac{j_1}{k_1}, \qquad B_1 = \frac{j_2}{k_2} = q_1 + \frac{1}{p_1}.$$

Выбирая за $\varrho = \varrho_1$ любую иррациональную точку интервала (A_1, B_1), будем иметь

$$|\gamma_{k_1 j_1}| > N. \tag{75}$$

Берем теперь какие-либо два индекса k_3, j_3, удовлетворяющие условиям:

$$k_2 > 0, \quad \frac{j_3}{k_3} = q_1 + \cfrac{1}{p_1 + \cfrac{1}{q_2}}.$$

[1] Множитель $4\pi^2$ при γ_{kj} в формуле (74) мы опускаем.

По свойству подходящих дробей

$$\frac{j_3}{k_3} \in (A_1,\ B_1).$$

Дадим теперь φ такое иррациональное значение, чтобы неравенство (75) сохранялось и чтобы $|\gamma_{k_3 j_3}| > N$.

Полагая

$$\frac{|c_{k_3 j_3}|}{k_3 + j_3} = \eta_3$$

и повторяя те же рассуждения, найдем, что при любом иррациональном числе

$$\varphi_3 \in (A_1,\ B_1) \cdot (A_3,\ B_3),$$

где

$$A_3 = \frac{j_3}{k_3},\ \ B_3 = q_1 + \cfrac{1}{p_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{p_2}}} \qquad \left(p_2 > \frac{1}{\varepsilon_3}\right),$$

будут соблюдаться неравенства:

$$|\gamma_{k_1 j_1}| > N,\ \ |\gamma_{k_3 j_3}| > N.$$

Отсюда по индукции вытекает, что можно построить последовательность иррациональных точек $\{\varphi_{2i+1}\}$ и интервалов $\left(\frac{j_{2i+1}}{k_{2i+1}},\ \frac{j_{2i+2}}{k_{2i+2}}\right)$ такую, что

$$|\gamma_{k_{2n+1} j_{2n+1}}| = \frac{|c_{k_{2n+1} j_{2n+1}}|}{|k_{2n+1}^2 \varphi_{2i+1}^2 - j_{2n+1}^2|} > N \ \text{ при } \ n = 1,\ \ldots\ i.$$

В силу выбора индексов k_{2n+1}, j_{2n+1} последовательность точек $\{\varphi_{2i+1}\}$ будет иметь точку сгущения φ, принадлежащую одновременно всем интервалам $(A_{2i+1},\ B_{2i+1})$, т. е.

$$\varphi \in \prod_{m=0}^{\infty} (A_{2m+1},\ B_{2m+1})$$

и для которой все

$$|\gamma_{k_{2n+1} j_{2n+1}}| > N \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Эта точка сгущения будет иррациональным числом

$$\varphi = q_1 + \cfrac{1}{p_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ldots}}$$

Каждому иррациональному числу $\alpha > 1$ мы можем одно-однозначно сопоставить иррациональное число φ.

Отсюда вытекает, что множество иррациональных чисел a, при которых задача (68), (70), (71) не имеет решения, имеет мощность континуума, что и требовалось доказать.

§ 11. Пример несуществования периодических решений

Основываясь на теореме несуществования периодических решений, доказанной в предыдущем параграфе, легко построить сколько угодно примеров нелинейных уравнений, содержащих малый параметр μ, которые заведомо не имеют периодических решений, являющихся голоморфными функциями от μ, несмотря на то что соответствующие линейные уравнения имеют периодическое решение. В этом параграфе мы рассмотрим пример, из которого вместе с тем будет виден и общий путь для построения подобных примеров.

Теорема несуществования сохраняет свою силу и в том случае, если модули некоторых из коэффициентов c_{kj} равны нулю. Существенным является лишь следующее: множество нулей всех функций $f_{kj}(\nu) = k^2\nu^2 - j^2$, у которых индексы k, j принимают такие значения, при которых $|c_{kj}| \neq 0$, должно содержать точки, повсюду плотно заполняющие прямую или по крайней мере какой-нибудь отрезок прямой. Тогда на этом отрезке всегда найдутся иррациональные значения a, при которых сколь угодно большое число коэффициентов γ_{kj} (исчислимое множество) будет по модулю больше, чем произвольное число N.

Пусть дано уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Phi(x, t) + \mu u^2 \tag{76}$$

с граничными условиями

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0 \tag{70}$$

$$\left.\begin{aligned} &u(x, 0) = u(x, 1) \\ &\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=1}. \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

Будем искать решение задачи (76), (70), (71) в виде ряда

$$U(x, t, \mu) = u_0(x, t) + \mu u_1(x, t) + \ldots \tag{77}$$

Функции u_0 и u_1 должны удовлетворять уравнениям

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = \Phi(x, t) \\ &u_0(0, t) = 0, \quad u_0(1, t) = 0; \qquad u_0(x, 0) = u_0(x, 1) \\ &\qquad\qquad \left.\frac{\partial u_0}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial u_0}{\partial t}\right|_{t=1} \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = u_0^2(x, t) \\ &u_1(0, t) = 0, \quad u_1(1, t) = 0; \qquad u_1(x, 0) = u_1(x, 1) \\ &\qquad\qquad \left.\frac{\partial u_1}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial u_1}{\partial t}\right|_{t=0} \end{aligned}\right\} \tag{79}$$

Пусть теперь $\theta(t)$ будет функция, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\theta(t) = \theta(t+1)$;

2) $\theta(t)$ непрерывна вместе с производными не ниже 2-го порядка;

3) пусть $\theta^2(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} q_k e^{k 2\pi i t}$ и пусть все коэффициенты q_k вещественны

и отличны от нуля:

$$q_k \neq 0 \quad (k = 0, \pm 1, \dots).$$

Положим теперь:

$$\Phi(x, t) = \sin \pi x \left(\frac{d^2\theta}{dt^2} + a^2 \pi^2 \theta \right).$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что при таком выборе функции $\Phi(x, t)$ линейное уравнение (78) имеет при любом a периодическое решение

$$u_0(x, t) = \theta(t) \sin \pi x. \tag{80}$$

Докажем теперь, что уравнение для $u_1(x, t)$, т. е. (79), не имеет решения, разлагающегося в сходящийся ряд Фурье вида

$$u_1(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_{kj} \sin j \pi x \, e^{k 2\pi i t}. \tag{81}$$

Действительно, разложение функции $u_0^2(x, t)$ имеет вид:

$$u_0^2(x, t) = \sin^2 \pi x \, \theta^2(t) =$$

$$= -\frac{8}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{q_k}{(2j-1)(2j+1)(2j+3)} \sin(2j+1) \pi x \, e^{k 2\pi i t}. \tag{82}$$

Подставляя (81) и (82) в уравнение (79) и сравнивая коэффициенты, находим:

$$\gamma_{2j+1, k} = \frac{p_j q_k}{(2j+1)^2 a^2 - k^2} \qquad (\gamma_{2j, k} = 0),$$

где

$$p_j = -\frac{8}{\pi} \frac{1}{(2j-1)(2j+1)(2j+3)}.$$

Покажем теперь, что надлежащим выбором числа a можно сколь-угодно большое число коэффициентов (бесконечное множество) сделать большими произвольного числа N. Множество нулей всех функций

$$f_{2j+1, k}(\nu) = (2j+1)^2 \nu^2 - k^2 \quad (j = 0, 1, \dots; k = 0, \pm 1, \dots)$$

есть множество всех целых чисел и всех дробей с нечетными знаменателями. Точки этого множества повсюду плотно лежат на прямой. Этого обстоятельства уже достаточно, чтобы теорема несуществования, доказанная в предыдущем параграфе, была применима к этому случаю.

Таким образом из этого примера мы видим, что теорию периодических решений, построенную Пуанкаре для обыкновенных дифференциальных уравнений, в некоторых случаях нельзя распространить на уравнения в частных производных.

Научно-исслед. институт
математики и механики
Ленинградск. гос. университета
им. А. С. Бубнова.

ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Hölder, Mathematische Untersuchungen des Himmelsmechanik, Math. Zeit., Bd. 30, Heft 2—3, 1929.

[2] А. Витт, Распределенные автоколебательные системы, Журн. техн. физики, т. IV, вып. 1, 1934.

[3] A. Wintner, Upon a theory of infinite systems of non linear implicit and differential equations, Amer. Journal Math. 53, pp. 241—257 (1931).

[4] Валле-Пуссен, Курс анализа бесконечно-малых, том II, гл. 4, стр. 142, ГТТИ, 1933.

N. ARTEMIEV. ÜBER DIE PERIODISCHEN LÖSUNGEN DER NICHTLINEAREN PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

ZUSAMMENFASSUNG

Viele Aufgaben der Schwingungstheorie führen zur Untersuchung der periodischen Lösungen der nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen. Die nichtlineare Aufgabe über die Schwingungen der Saite ist eine Aufgabe solcher Art, welche man in folgender Weise formulieren kann:

Man finde eine Funktion $u(x, t)$ welche der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Phi(x, t) + \mu f(u) \qquad (1)$$

[a ist eine Konstante, μ ein kleiner Parameter, $f(u)$ ein Polynom, Φ eine periodische Funktion der Zeit t, d. h. $\Phi(x, t) = \Phi(x, t+1)$], den Randbedingungen

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0 \qquad (2)$$

und den Bedingungen der Periodizität

$$\left. \begin{aligned} & u(x, 0) = u(x, 1) \\ & \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=1} \end{aligned} \right\} \qquad (3)$$

genügt, und die nebst ihren Ableitungen bis zur 2-ten Ordnung[1] im geschlossenen Gebiete $\overline{\Omega} \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$ stetig ist.

Für die Lösung unserer Aufgabe benutzen wir zwei Methoden, die miteinander eng verbunden sind. Die erste Methode besteht in der Zurückführung der Aufgabe auf ein unendliches System von Integralgleichungen, für welches wir den Existenzsatz vermittels sukzessiver Annäherung beweisen. Die zweite Methode besteht darin, dass man eine Greensche Funktion in effektiver Weise construiert. Vermittels dieser Greenschen Funktion wird das Problem auf die Lösung einer nichtlinearen Integralgleichung zurückgeführt.

[1] Unter partiellen Ableitungen 2-ter Ordnung werden wir nur diejenigen verstehen, welche in die Gleichung (1) eingehen, d. h. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

I Methode

Wir suchen die Gleichungen (1), (2), (3) durch Fourierreihe von der Form

$$u(x, t) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t) \sin k\pi x \tag{4}$$

zu befriedigen. Durch Einsetzung der Reihe (4) in die Gleichungen (1), (2), (3) und Vergleichung der Koeffizienten von $\sin k\pi x$ erhält man das unendliche System von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\ddot{z}_k + \pi^2 a^2 k^2 z_k = \Phi_k(t) + \mu f_k(z_1, z_2, \ldots) \tag{5}$$

mit den Randbedingungen der Periodizität

$$\left.\begin{array}{l} z(0) = z(1) \\ \dot{z}(0) = \dot{z}(1) \end{array}\right\} \tag{6}$$

Hier sind Φ_k die Fourierkoeffizienten der Funktion $\Phi(x, t)$, $f_k(z_1, z_2, \ldots)$ die Fourierkoeffizienten der Funktion $f[u(x, t)]$, die Potenzreihen von unendlich vielen Veränderlichen $z_1, z_2, \ldots$ darstellen[1]. Vermittels der Greenschen Funktionen

$$G_k(t, \tau) = \frac{\cos \omega_k\left(|t-\tau| - \frac{1}{2}\right)}{2\omega_k \sin \frac{\omega_k}{2}}, \quad 0 \leqslant t, \quad \tau \leqslant 1, \quad \omega_k = \pi a k$$

führen wir das System von Differentialgleichungen (5), mit den Randbedingungen (6) auf ein unendliches System von nichtlinearen Integralgleichungen

$$z_k(t) = B_k(t) + \mu \int_0^1 G_k(t, \tau) f_k[z_1(\tau), z_2(\tau), \ldots]\, d\tau \qquad (k = 1 \ldots \infty) \tag{7}$$

zurück, wo

$$B_k(t) = \int_0^1 G_k(t, \tau) \Phi_k(\tau)\, d\tau \quad (k = 1 \ldots \infty). \tag{7'}$$

Die Funktionen G_k erfüllen die Ungleichungen

$$|G_k(t, \tau)| \leqslant \frac{M}{k\left|\sin \frac{ak\pi}{2}\right|} \quad (k = 1 \ldots \infty). \tag{8}$$

Wenn a irrazional ist, so ist jede Funktion G_k beschränkt, aber die Gesamtheit der Funktionen G_k ist nicht beschränkt. Wir sagen in diesem Falle, dass Quasiresonanz eintritt. Ist a eine ganze oder rationale Zahl, so wird der Nenner mancher Funktionen G_k zu Null. In diesem Falle

[1] Wir beweisen (siehe Hilfsatz I in Arbeit), dass die Einsetzung der Fourierreihe in Gleichung (1), (2), (3) erlaubt ist.

tritt reine Resonanz ein. Sei $a = 2m+1$ (m ganze Zahl)[1] und sei $f(u)$ ein ungerades Polynom. Dann suchen wir die Gleichungen (1), (2), (3) durch eine Fourierreihe von der Form

$$u(x, t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} z_{2k+1}(t) \sin(2k+1)\pi x, \tag{9}$$

welche nur ungerade Koeffizienten enthält, zu befriedigen. In diesem Falle nimmt das entsprechende System von unendlichen Integralgleichungen die Form

$$z_{2k+1}(t) = B_{2k+1}(t) + \mu \int_0^1 G_{2k+1}(t, \tau) f_{2k+1}[z_1(\tau), z_3(\tau), \ldots] d\tau \tag{10}$$

an. Sämtliche Greenschen Funktionen G_{2k+1} erfüllen die Ungleichungen

$$|G_{2k+1}(t, \tau)| \leqslant \frac{M}{2k+1} \quad (k = 0, 1, \ldots, \infty; \quad M = \text{Const.}) \tag{11}$$

Wir haben bewiesen, dass in diesem Falle das System (10) bei genügend kleinem μ (und anderen Bedingungen) eine im Intervalle $0 \leqslant t \leqslant 1$ stetige (nebst ihren ersten und zweiten Ableitungen) Lösung hat, die periodisch ist.

Für den Beweis des Existenzsatzes führen wir den Begriff des Funktionalraumes A_m ein.

D e f i n i t i o n. Die Funktion $\Phi(x)$, welche der Summe der Fourierreihe

$$\Phi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{k^m} \sin k\pi x \tag{12}$$

gleich ist (wo m eine ganze Zahl $\geqslant 0$), ist ein Punkt des Funktionalraumes A_m, wenn die Reihe (12′)

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2 = c^2 < +\infty \tag{12′}$$

konvergiert.

Es sei $\Phi_1(x) \in A_3$ und $\Phi_2(x) \in A_3$ und seien

$$\Phi_1(x) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{k^3} \sin k\pi x, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} y_k^2 = c^2$$

$$\Phi_2(x) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k'}{k^3} \sin k\pi x, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} y_k'^2 = c_1^2.$$

---

[1] Der Existenzsatz bleibt auch für $a = \frac{2m+1}{q}$ gültig, worin $q > 0$ eine ganze Zahl ist.

Dann werden wir die Grösse

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(y_k - y'_k)^2},$$

Abstand der Punkte $\Phi_1(x)$ und $\Phi_2(x)$ des Raumes A_3 nennen und werden sie mit dem Symbol

$$w[\Phi_1(x), \Phi_2(x)]$$

bezeichnen. Für beliebige Punkte, die dem Raum A_3 angehören, werden die drei Grundaxiome des metrischen Raumes erfüllt, z. B. das Dreieckaxiom

$$w[\Phi_1(x), \Phi_3(x)] \leqslant w[\Phi_1(x), \Phi_2(x)] + w[\Phi_2(x), \Phi_3(x)].$$

Ist $f(u)$ ein Polynom, so besteht bei $|u_1| \leqslant b$ und $|u_2| \leqslant b$, wo b beliebig aber fest ist, die Ungleichung

$$[f(u_1) - f(u_2)]^2 \leqslant \alpha^2 (u_1 - u_2)^2$$

wo α eine Konstante ist. Setzen wir

$$u_1(x) = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty} u'_k \sin k\pi x$$

$$u_2(x) = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty} u''_k \sin k\pi x$$

und nehmen an, dass die Funktionen u_1 und $u_2 \in A_3$ und dass für jedes x

$$|u_1(x)| \leqslant b, \quad |u_2(x)| \leqslant b.$$

Dann gilt die Lipschitz'sche Bedingung

$$r[f(u_1(x)), f(u_2(x))] \leqslant \alpha\, r[u_1(x), u_2(x)],$$

wo r das Symbol für den Abstand im Hilbert'schen Raum ist. Unter Benutzung des Begriffes des Raumes A_m und der Lipschitz'schen Bedingung lässt sich, mittels der Methode der sukzessiven Annäherungen, leicht der folgende Existenzsatz beweisen:

I Existenzsatz. Das System von Integralgleichungen (10) hat unter der Bedingung, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)^4 \Phi_{2k+1}^2(t) = C^2(t) \leqslant c^2 < \frac{(1-\mu\lambda M)^2}{M^2} \quad (0 \leqslant t \leqslant 1),$$

$$\mu < \min\left(\frac{1}{\lambda M}, \frac{1}{\alpha M \gamma_2}\right), \quad M = \frac{1}{2\pi(2m+1)}, \quad \gamma_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2(k+1)^2}}$$

$$\lambda = 4\beta\gamma_2, \quad \beta = \max(\beta_1, \beta_2) \qquad \gamma_6 = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^6}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\beta_1 = \max|f'(u)| \\ \beta_2 = \max|f''(u)|\end{array}\right\} \text{ bei } |u| \leqslant \sqrt{2}\gamma_6$$

eine Lösung $z_{2k+1}(t) = \varphi_{2k+1}(t)$, die dem Raum A_3 angehört, wobei alle Funktionen $\varphi_{2k+1}(t)\,(k = 0, 1, \ldots)$ stetig im Intervalle $0 \leqslant t \leqslant 1$ und periodisch mit der Periode 1 sind, falls die Funktionen $\Phi_{2k+1}(t)$ dieselbe Eigenschaft haben.

Aus diesem Existenzsatz erhält man den folgenden Existenzsatz für die partielle Differentialgleichung (1) mit den Randbedingungen (2), (3):

II Existenzsatz. Ist $a = 2m + 1$ (m ganze Zahl)

$$f(u) = a_1 u + a_3 u^3 + \ldots + a_{2n+1} u^{2n+1},$$

$$|f(u_1) - f(u_2)| \leqslant \alpha |u_1 - u_2| \quad \text{bei} \quad |u| \leqslant \sqrt{2}\gamma_6$$

$$\Phi(x, t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y_{2k+1}(t)}{(2k+1)^2} \sin(2k+1)\pi x$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_{2k+1}^2(t) = C^2(t) \leqslant c^2$$

(wo die Konstante c genügend klein ist), wobei die Funktion $\Phi(x, t)$ stetig in t ist bei $0 \leqslant t \leqslant 1$ und $\Phi(x, t) = \Phi(x, t + 1)$, so hat die Gleichung (1) mit den Bedingungen (2), (3), bei genügend kleinem μ, die Lösung $u(x, t)$, welche periodisch in t mit der Periode 1 und nebst ihren Ableitungen zweiter Ordnung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ stetig im Gebiete Ω ist.

Ferner beweisen wir, dass die Lösung von der Form (9) bei Erfüllung der Bedingungen des Existenzsatzes einzig ist. Im Falle der Quasi-Resonanz kann man den Existenzsatz mit dieser Methode nicht beweisen. Die Frage, ob in diesem Fall eine periodische Lösung existiert, bleibt vorläufig offen. Wir beweisen, dass unter gewissen Bedingungen die Aufgabe (1), (2), (3) bei $\mu = 0$ keine Lösung besitzt, die in eine konvergente Fourierreihe zerlegbar ist. Wir formulieren hier den Nichtexistenzsatz:

Nichtexistenzsatz. Die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Phi(x, t),$$

wo

$$\Phi(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} c_{kj} \sin k\pi x\, e^{j 2\pi i t}$$

eine absolut und in $\bar{\Omega}$ gleichmässig konvergente Fourierreihe ist, wobei $|c_{kj}| \neq 0$ ($k = 1, \ldots \infty$; $j = 0, \pm 1, \ldots \pm \infty$) hat bei gewissen irrationalen Werten von a[1] keine Lösungen $u(x, t)$, die den Randbedingungen (2), (3) genügen und welche nebst ihren Ableitungen $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ im Gebiete $\bar{\Omega}$ stetig sind.

Endlich beweisen wir, dass die nichtlineare Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Phi(x, t) + \mu u^2,$$

[1] Die Menge dieser Werte a hat übrigens die Mächtigkeit des Kontinuums.

wo

$$\Phi(x, t) = \sin \pi x\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} + a^2\pi^2\theta\right), \quad \theta^2(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q_k e^{k2\pi i t}, \; q_k \neq 0 \quad (k = 0, \pm 1, \ldots)$$

($\theta(t)$ nebst ihren Ableitungen bis zur zweiten Ordnung bei $0 \leqslant t \leqslant 1$ stetig ist), welche bei $\mu = 0$ eine periodische Lösung besitzt

$$u_0(x, t) = \theta(t) \sin \pi x$$

bei $\mu \neq 0$ keine Lösung hat, die in eine konvergente Reihe nach Potenzen von μ zerlegbar ist.

Bemerkung. Wenn man jede k-te Gleichung des Systems (10) mit $\sqrt{2}\sin(2k+1)\pi x$ multipliziert und dann nach k addiert, so erhält man

$$\sqrt{2}\sum_{k=0}^{\infty} z_{2k+1}(t) \sin(2k+1)\pi x \equiv u(x, t) =$$

$$= \sqrt{2}\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 G_{2k+1}(t,\tau) \sin(2k+1)\pi x [\Phi_{2k+1}(\tau) + \mu f_{2k+1}(z_1, z_3, \ldots)]\, d\tau. \quad (13)$$

Ersetzt man in Formel (13) die Fourierkoeffizienten Φ_{2k+1} und f_{2k+1} durch ihre Ausdrücke

$$\Phi_{2k+1}(\tau) = \sqrt{2}\int_0^1 \Phi(\xi, \tau) \sin(2k+1)\pi\xi\, d\xi$$

$$f_{2k+1}(z_1, z_3, \ldots) = \sqrt{2}\int_0^1 f(u(\xi, \tau)) \sin(2k+1)\pi\xi\, d\xi$$

und vertauscht die Zeichen der Summe und des Integrals, so erhält man die Integralgleichung für $u(x, t)$

$$u(x, t) = \iint_\Omega K(x, \xi;\; t, \tau)[\Phi(\xi, \tau) + \mu f(u(\xi, \tau))]\, d\xi\, d\tau, \quad (14)$$

wo

$$(2m+1)(-1)^m K(x, \xi;\; t, \tau) = \frac{1}{16}\sum_{j=1}^{2} y(\omega_j) - \frac{1}{16}\sum_{j=3}^{4} y(\omega_j)$$

$$\left.\begin{array}{l} \omega_1 = \pi(x - \xi - T), \quad \omega_2 = \pi(x - \xi + T) \\ \omega_3 = \pi(x + \xi + T), \quad \omega_4 = \pi(x + \xi - T) \\ T = (2m+1)\left(|t - \tau| - \frac{1}{2}\right) \end{array}\right\}$$

$$y(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } 2k\pi - \frac{\pi}{2} < \omega < (2k+1)\pi - \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{»} \quad \omega = k\pi - \frac{\pi}{2} \\ -1 & \text{»} \quad (2k+1)\pi - \frac{\pi}{2} < \omega < (2k+2)\pi - \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Dieser Gleichung (14) genügt jede Lösung, die dem Existenzsatz I entspricht.