Н. М. ГЮНТЕР

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ЧАСТЬ 1:

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ЛЕНИНГРАД 1931

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ТИПОГРАФИЯ
НАРКОМВОЕНМОРА
ЛЕНИНГРАД
Тучкова набер., 26
Ленинградский Областлит № 7330
Тираж 2100—11 п. л.
Заказ №6799.

СКЛАД ИЗДАНИЙ
ЛЕНИНГРАД, Мойка 53
Издательство КУБУЧ

ОГЛАВЛЕНИЕ

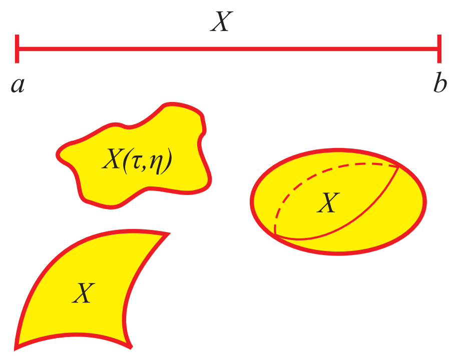
ГЛАВА ПЕРВАЯ
ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Занимаясь некоторой областью, мы будем обозначать буквой (x) точку этой области, а знаком

$$f(x) \tag{1}$$

функцию точки (x), конечно выбирая вместо x иногда и иные буквы. Таким образом, если область — отрезок (a, b), то (x) точка на отрезке, а функция (1) — функция одного независимого переменного; если область — площадка, плоская или на поверхности, то так как положение точки на ней определяется двумя координатами, то функция (1) — функция двух переменных независимых; если область тело в пространстве, то функция (1) есть функция 3-х переменных независимых и т.д.



Черт. 1

Под знаком

$$\int\limits_{(\omega)} f(x)\, d\omega \tag{2}$$

мы будем понимать интеграл от функции $f(x)$, взятый по области (ω). Если область (ω) — отрезок, то знак (2) соответствует простому интегралу и $d\omega$ ничто иное как dx; если область — площадка, интеграл (2) есть интеграл двукратный, а $d\omega$ элемент площади $dxdy$ или элемент поверхности; если область — тело, то интеграл (2) — трехкратный, а $d\omega$ — элемент объема и т.д. В виду того, что интегралы простые, двукратные, трехкратные и т.д. обладают общими свойствами, можно, занимаясь интегралом (2) и трактуя его как интеграл простой, а область (ω) как отрезок, высказывать заключения относящиеся и к интегралам, взятым по площадкам и объемам. Мы будем, главным образом, заниматься уравнениями вида

$$\varphi(x) = \int\limits_{(\omega)} K(x,y)\varphi(y)\,d\omega + F(x), \tag{3}$$

в которых $K(x,y)$ — данная функция двух точек области (x) и (y), $F(x)$ — данная функция точки (x) области, а $\varphi(x)$ — неизвестная функция.

Уравнения (3) называются *уравнениями 2-го рода.* Задача нахождения $\varphi(x)$ составляет задачу решения этого уравнения.

Уравнениями первого рода называются уравнения вида

$$\int\limits_{(\omega)} K(x,y)\varphi(y)\,d\omega = F(x); \tag{4}$$

в этом курсе мы ими заниматься не будем.

В виду указанной общности свойств у интегралов простых, двукратных и т.д. в этой первой части курса, мы, чтобы лучше сосредоточить внимание, займемся случаем, когда область (ω) [есть] отрезок (a,b). В этом случае уравнению (3) можно дать вид:

$$\varphi(x) = \int\limits_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy + F(x). \tag{3'}$$

Но доказанное об уравнении $(3')$ все окажется применимым и к уравнению (3), в котором область (ω) какого угодно измерения, и будет в следующих частях прилагаться к случаям областей из двух и трех измерений.

Уравнению $(3')$ мы будем давать вид

$$\varphi(x) = \lambda\int\limits_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy + F(x),$$

вводя параметр λ, другими словами, заменяя функцию $K(x,y)$ через $\lambda K(x,y)$.

§ 2. РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Положим дано уравнение

$$\varphi(x) = \lambda\int\limits_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy + F(x), \tag{5}$$

в котором $K(x,y)$ и $F(x)$ данные функции.

Функцию $K(x,y)$ называют *ядром* уравнения (5). Не делая о $K(x,y)$ никаких предположений и считая ее только интегрируемой, ограниченной или нет, ищем решение $\varphi(x)$ уравнения (5) в виде ряда, расположенного по возрастающим степеням λ. Положим

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x) + \ldots + \lambda^n\varphi_n(x) + \ldots. \tag{6}$$

Если ряд (6) *равномерно сходящийся* при некоторых значениях λ, то его можно подставить в правую часть равенства (5) заменив, конечно, (x) через (y), и выполнить интегрирование почленно. После этой подстановки правая часть равенства (5) обратится в

$$F(x) + \lambda\left(\int\limits_a^b K(x,y)\varphi_0(y)\,dy + \lambda\int\limits_a^b K(x,y)\varphi_1(y)\,dy + \ldots + \lambda^n\int\limits_a^b K(x,y)\varphi_n(y)\,dy + \ldots\right).$$

Заменив в левой части уравнения (5) $\varphi(x)$ рядом (6) и отождествляя коэффициент при одинаковых степенях λ в левой и правой частях полученного равенства, получаем:

$$\varphi_0(x) = F(x),\ \varphi_1(x) = \int\limits_a^b K(x,y)\varphi_0(y)\,dy, \ldots, \varphi_n(x) = \int\limits_a^b K(x,y)\varphi_{n-1}(y)\,dy,\ \ldots. \tag{7}$$

Эти формулы позволяют последовательно вычислять коэффициенты ряда (6) и таким образом составить ряд, формально удовлетворяющий уравнению (5).

Для того, чтобы сумма ряда (6) действительно давала решению уравнения (5), надо, чтобы ряд был равномерно сходящимся.

Переходя к установлению некоторых случаев, когда ряд (6) равномерно сходящийся, предположим, что $K(x,y)$ ограничена. Если

$$|K(x,y)| \le A \tag{8}$$

и если мы положим, что функция $F(x)$ тоже ограничена и абсолютно меньше M, то из равенств (7) последовательно получим:

$$|\varphi_0(x)| = |F(x)| \le M,$$

$$|\varphi_1(x)| \le \int\limits_a^b |K(x,y)||\varphi_0(y)|\,dy \le AM\int\limits_a^b dy = AM(b-a),$$

$$|\varphi_2(x)| \le \int\limits_a^b |K(x,y)||\varphi_1(y)|\,dy \le AAM(b-a)\int\limits_a^b dy = A^2(b-a)^2M, \ldots,$$

$$|\varphi_n(x)| \le \int\limits_a^b |K(x,y)||\varphi_{n-1}(y)|\,dy \le AA^{n-1}M(b-a)^{n-1}\int\limits_a^b dy = A^n(b-a)^nM, \ldots.$$

Из этого ясно, что члены ряда при условии (8) меньше членов ряда

$$M + MA(b-a)|\lambda| + MA^2(b-a)^2|\lambda|^2 + \ldots + MA^n(b-a)^n|\lambda|^n + \ldots.$$

Последний ряд, как геометрическая прогрессия, знаменатель которой $A(b-a)\lambda$, сходится, пока этот знаменатель меньше единицы. Следовательно, ряд (6) сходится, если

$$|\lambda| < \frac{1}{A(b-a)}. \tag{9}$$

Итак мы получили: *если ядро уравнения* (5) *ограничено, то уравнение* (5) *наверное имеет решение, если* λ *достаточно мало по абсолютной величине.*

§ 3. ПОВТОРНЫЕ ЯДРА И РЕЗОЛЬВЕНТА

Формулы (7) дают возможность последовательно вычислить коэффициенты ряда (6); для вычисления по ним, однако, какого нибудь коэффициента, надо последовательно вычислить все предыдущие.

Преобразуем формулы (7) так, чтобы каждый из этих коэффициентов был выражен непосредственно через данные элементы уравнения (5), т.е. через функции $K(x,y)$ и $F(x)$. Первая из формул (7) дает непосредственно такое выражение. Из второй мы сразу получаем

$$\varphi_1(x) = \int\limits_a^b K(x,y)F(y)\,dy. \tag{10_1}$$

Чтобы лучше выполнить подстановку найденного значения $\varphi_1(x)$ в третью из формул (7), заменим в ней знак y переменной интегрирования на t, из (10_1) имеем:

$$\varphi_1(t) = \int\limits_a^b K(t,y)F(y)\,dy.$$

После этого выполняя изменение порядка интегрирования, получаем,

$$\varphi_2(x) = \int\limits_a^b K(x,t)\varphi_1(t)\,dt = \int\limits_a^b K(x,t)\left(\int\limits_a^b K(t,y)F(y)\,dy\right)dt = \tag{11_1}$$

$$\int\limits_a^b F(y)\left(\int\limits_a^b K(x,t)K(t,y)\,dt\right)dy = \int\limits_a^b K_{(2)}(x,y)F(y)\,dy,$$

где

$$(11_2) \qquad K_{(2)}(x,y) = \int\limits_a^b K(x,t)K(t,y)\,dt.$$

Вычисляя $\varphi_3(x)$, заменим опять в соответственной формуле (7) y через t, вычислим по (11_1) $\varphi_2(x)$ и получим

$$\varphi_3(x) = \int\limits_a^b K(x,t)\varphi_2(t)\,dt = \int\limits_a^b K(x,t)\left(\int\limits_a^b K_{(2)}(t,y)F(y)\,dy\right)dt =$$

$$\int\limits_a^b F(y)\left(\int\limits_a^b K(x,t)K_{(2)}(t,y)\,dt\right)dy = \int\limits_a^b K_{(3)}(x,y)F(y)\,dy,$$

где

$$(11_3) \qquad K_{(3)}(x,y) = \int\limits_a^b K(x,t)K_{(2)}(t,y)\,dt.$$

Продолжая так далее и вводя последовательно функции

$$(12) \qquad K_{(2)}(x,y),\ K_{(3)}(x,y),\ldots,\ K_{(n)}(x,y),\ \ldots$$

по формуле

$$(11_n) \qquad K_{(n)}(x,y) = \int\limits_a^b K(x,t)K_{(n-1)}(t,y)\,dt,$$

мы получим для $\varphi_n(x)$ новое выражение

$$(10_n) \qquad \varphi_n(x) = \int\limits_a^b K_{(n)}(x,y)F(y)\,dy.$$

Функции (12) мы будем называть *повторными ядрами*, в частности $K_{(n)}(x,y)$ — ядром со значком n или n-ым ядром. Ядро $K(x,y)$ можно называть первым, не отмечая этого значком 1.

Подставляя найденное значение $\varphi_n(x)$ в ряд (6), мы получим:

$$(6^*) \qquad \varphi(x) = F(x) + \lambda\left(\int\limits_a^b K(x,y)F(y)\,dy + \lambda\int\limits_a^b K_{(2)}(x,y)F(y)\,dy + \ldots + \lambda^{n-1}\int\limits_a^b K_{(n)}(x,y)F(y)\,dy + \ldots\right).$$

Если ряд

$$(13) \qquad K(x,y) + \lambda K_{(2)}(x,y) + \lambda^2 K_{(3)}(x,y) + \ldots + \lambda^{n-1} K_{(n)}(x,y) + \ldots$$

сходится равномерно, то можно сумму в фигурной скобке в (6), заменить интегралом суммы и написать

$$(14) \qquad \varphi(x) = F(x) + \lambda \int\limits_a^b \Gamma(x,y,\lambda) F(y)\, dy,$$

обозначая через

$$(15) \qquad \Gamma(x,y,\lambda)$$

сумму ряда (13).

До сих пор мы в этом параграфе не делали никаких предположений об ядре $K(x,y)$, считая его только интегрируемым. Чтобы выяснить условия, когда ряд (15) сходящийся, предположим снова, что $K(x,y)$ ограничено и что соблюдено неравенство (8). Из формул (11_2), (11_3), ... , (11_n), ... последовательно получаем:

$$|K_{(2)}(x,y)| \leq \int\limits_a^b |K(x,t)|\,|K(t,y)|\, dt \leq A^2(b-a),$$

$$|K_{(3)}(x,y)| \leq \int\limits_a^b |K(x,t)|\,|K_{(2)}(t,y)|\, dt \leq A^3(b-a)^2, \ldots,$$

$$|K_{(n)}(x,y)| \leq A^n(b-a)^{n-1}, \ldots$$

откуда вытекает, что члены ряда (13) абсолютно меньше членов ряда

$$A + A^2(b-a)|\lambda| + A^3(b-a)^2|\lambda|^2 + \ldots + A^n(b-a)^{n-1}|\lambda|^{n-1} + \ldots$$

и что он сходится, если λ удовлетворяет неравенству (9).

Итак, если соблюдено неравенство (8), то для значений λ, удовлетворяющих неравенству (9), можно найти функцию (15), что решение уравнения (5) будет дано формулой (14).

Функция

$$(15) \qquad \Gamma(x,y,\lambda) = K(x,y) + \lambda K_{(2)}(x,y) + \lambda^2 K_{(3)}(x,y) + \ldots + \lambda^{n-1} K_{(n)}(x,y) + \ldots$$

называется *резольвентой* уравнения (5).

Значение резольвенты вполне определено ядром $K(x,y)$ уравнения (5); найдя резольвенту, мы получаем возможность решения уравнения (5) при всякой функции $F(x)$, правда, пока λ достаточно мало по абсолютной величине.

§ 4. ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ПОВТОРНЫХ ЯДЕР

Откидываем снова неравенство (8) и считаем опять, что $K(x,y)$ только интегрируема. Неравенство (8) нам нужно только в вопросах связанных с изучением сходимости встречающихся рядов; при установлении формальных свойств коэффициентов этих рядов оно не нужна.

Выразим, прежде всего, все ядра (12) через первое $K(x,y)$.

Для ядра $K_{(2)}(x,y)$ такое выражение дано формулой (11_2), которую для аналогии с последующими мы перепишем так:

$$K_{(2)}(x,y)=\int\limits_a^b K(x,t_1)K(t_1,y)\,dt_1,$$

выбирая для обозначения переменного интегрирования букву t_1 вместо буквы t.

Выбирая для обозначения переменной интегрирования в формуле (11_3) букву t_2 вместо t, имеем:

$$K_{(3)}(x,y)=\int\limits_a^b K(x,t_2)K_{(2)}(t_2,y)\,dt_2=\int\limits_a^b K(x,t_2)\left(\int\limits_a^b K(t_2,t_1)K(t_1,y)\,dt_1\right)\,dt_2=$$

$$\int\limits_a^b\int\limits_a^b K(x,t_2)K(t_2,t_1)K(t_1,y)\ dt_2dt_1.$$

Продолжая так далее, мы очевидно получим:

$$(16)\quad K_{(n)}(x,y)=\underbrace{\int\limits_a^b\ldots\int\limits_a^b}_{n-1\text{ раз}}K(x,t_{n-1})K(t_{n-1},t_{n-2})\ldots K(t_{m+1},t_m)\times$$

$$\times K(t_m,t_{m-1})\ldots K(t_2,t_1)K(t_1,y)\,dt_{n-1}\ldots dt_1.$$

Выполним в формуле (16) сначала интегрирование по $t_1,t_2,\ldots,t_{m-1}$ Мы дадим ей вид

$$K_{(n)}(x,y)=\underbrace{\int\limits_a^b\ldots\int\limits_a^b}_{n-m\text{ раз}}K(x,t_{n-1})K(t_{n-1},t_{n-2})\ldots K(t_{m+1},t_m)\times$$

$$\times\Bigg(\underbrace{\int\limits_a^b\ldots\int\limits_a^b}_{m-1\text{ раз}}K(t_m,t_{m-1})\ldots K(t_2,t_1)K(t_1,y)\,dt_{m-1}\ldots dt_1\Bigg)dt_{n-1}\ldots dt_m.$$

Сравнение интеграла

$$\Big(\underbrace{\int_a^b \ldots \int_a^b}_{m-1 \text{ раз}} K(t_m, t_{m-1}) \ldots K(t_2, t_1) K(t_1, y)\, dt_{m-1} \ldots dt_1\Big) dt_{n-1} \ldots dt_m$$

с интегралом (16) дает, что он равен $K_{(m)}(x, y)$. Следовательно имеем:

$$K_{(n)}(x, y) =$$

$$\underbrace{\int_a^b \ldots \int_a^b}_{n-m \text{ раз}} K(x, t_{n-1}) K(t_{n-1}, t_{n-2}) \ldots K(t_{m+1}, t_m) K_{(m)}(t_m, y)\, dt_{n-1} \ldots dt_{m+1} dt_m.$$

Оставляя в последнем равенстве интегрирование по t_m на конец, мы дадим ему вид

$$K_{(n)}(x, y) =$$

$$\int_a^b \Big(\underbrace{\int_a^b \ldots \int_a^b}_{n-m-1 \text{ раз}} K(x, t_{n-1}) K(t_{n-1}, t_{n-2}) \ldots K(t_{m+1}, t_m)\, dt_{n-1} \ldots dt_{m+1}\Big) K_{(m)}(t_m, y)\, dt_m.$$

Сравнение интеграла

$$\underbrace{\int_a^b \ldots \int_a^b}_{n-m-1 \text{ раз}} K(x, t_{n-1}) K(t_{n-1}, t_{n-2}) \ldots K(t_{m+1}, t_m)\, dt_{n-1} \ldots dt_{m+1}$$

с интегралом (16) указывает что он равен $K_{(n-m)}(x, y)$. Следовательно мы имеем окончательно, упрощая обозначение переменной интегрирования

$$(17) \qquad K_{(n)}(x, y) = \int_a^b K_{(n-m)}(x, t_m) K_{(m)}(t_m, y)\, dt_m = \int_a^b K_{(n-m)}(x, t) K_{(m)}(t, y)\, dt.$$

Формула (17) и есть та, вывод которой мы имеем в виду.

Отметим что пользуясь формулой (17), мы можем написать

$$(11_n) \qquad K_{(n)}(x, y) = \int_a^b K(x, t) K_{(n-1)}(t, y)\, dt = \int_a^b K_{(n-1)}(x, t) K(t, y)\, dt.$$

§ 5. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ РЕЗОЛЬВЕНТЫ

Полагаем снова, что соблюдено условие

$$|K(x,y)| \le A \tag{8}$$

и что

$$|\lambda| < \frac{1}{A(b-a)}; \tag{9}$$

тогда ряд

$$\Gamma(x,y,\lambda) = K(x,y) + \lambda K_{(2)}(x,y) + \lambda^2 K_{(3)}(x,y) + \ldots + \lambda^{n-1} K_{(n)}(x,y) + \ldots \tag{15}$$

сходится равномерно. Заменяя в нем $K_{(n)}(x,y)$ их выражениями (11_n) получаем сначала

$$\Gamma(x,y,\lambda) = K(x,y) + \lambda \int_a^b K(x,t)K(t,y)\,dt + \tag{18}$$

$$\lambda^2 \int_a^b K(x,t)K_{(2)}(t,y)\,dt + \ldots + \lambda^{n-1} \int_a^b K(x,t)K_{(n-1)}(t,y)\,dt + \ldots =$$

$$K(x,y) + \lambda \int_a^b K(x,t)\Big(K(t,y) + \lambda K_{(2)}(t,y) + \ldots + \lambda^{n-2}K_{(n-1)}(t,y) + \ldots\Big)\,dt =$$

$$K(x,y) + \lambda \int_a^b K(x,t)\Gamma(t,y,\lambda)\,dt.$$

Применяя второе из выражений (11_n) для $K_{(n)}(x,y)$ и снова заменяя сумму интегралов интегралом от суммы основываясь на равномерной сходимости ряда получаем далее

$$\Gamma(x,y,\lambda) = K(x,y) + \lambda \int_a^b K(x,t)K(t,y)\,dt + \tag{18*}$$

$$\lambda^2 \int_a^b K_{(2)}(x,t)K(t,y)\,dt + \ldots + \lambda^{n-1} \int_a^b K_{(n-1)}(x,t)K(t,y)\,dt + \ldots =$$

$$K(x,y) + \lambda \int_a^b K(t,y)\Big(K(x,t) + \lambda K_{(2)}(x,t) + \ldots + \lambda^{n-2}K_{(n-1)}(x,t) + \ldots\Big)\,dt =$$

$$K(x,y) + \lambda \int_a^b K(t,y)\Gamma(x,t,\lambda)\,dt.$$

Итак мы получили, что $\Gamma(x,y,\lambda)$ удовлетворяет двум уравнениям

$$(19) \qquad \begin{cases} \Gamma(x,y,\lambda) = K(x,y) + \lambda \int\limits_a^b K(x,t)\Gamma(t,y,\lambda)\,dt, \\ \Gamma(x,y,\lambda) = K(x,y) + \lambda \int\limits_a^b K(t,y)\Gamma(x,t,\lambda)\,dt. \end{cases}$$

Отметим, что при соблюдении условия (8) $\Gamma(x,y,\lambda)$ аналитическая функция от λ, элемент которой дан рядом (15^*) сходящимся пока λ удовлетворяет неравенству (9). Продолжая ее аналитически, мы можем найти ее значение во всякой точке комплексного переменного λ, не являющейся особой точкой этой аналитической функции; отсюда вытекает, что если в уравнении (19) λ не удовлетворяет неравенству (9), но не является особой точкой функции $\Gamma(x,y,\lambda)$, то при этом λ $\Gamma(x,y,\lambda)$ удовлетворяет уравнениям (19).

Действительно, вместе с $\Gamma(x,y,\lambda)$ также и

$$\lambda \int\limits_a^b K(x,t)\Gamma(t,y,\lambda)\,dt, \qquad \lambda \int\limits_a^b K(t,y)\Gamma(x,t,\lambda)\,dt$$

аналитические функции от λ и если две аналитические функций равны в некоторой области, то они равны и на всей плоскости комплексного переменного.

§ 6. СОЮЗНОЕ УРАВНЕНИЕ

Первое из уравнений (19) говорит, что резольвента $\Gamma(x,y,\lambda)$ удовлетворяет уравнению того же типа, как и предложенное уравнение

$$(5) \qquad \varphi(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy + F(x)$$

т.е. уравнению с тем же ядром $K(x,y)$, и отличающимся от него, только свободным членом.

Чтобы объяснить существование второго из уравнений (19), рассмотрим вместе с уравнением (15) — уравнение

$$(5^*) \qquad \psi(y) = \lambda \int\limits_a^b K(x,y)\psi(x)\,dx + \Phi(y).$$

Уравнения (5) и (5^*) отличаются друг от друга лишь тем, что в одном из них отдано предпочтение первому из двух аргументов x и y, от которых, зависит ядро $K(x,y)$, а в другом второму.

Уравнение (5^*), называется *союзным* с уравнением (5); ясно, что уравнение (5) в свою очереди союзное с (5^*).

Сопоставляя по правилам параграфа 3-го повторные ядра уравнения (5^*) видим, что если $\overline{K}_{(n)}(x,y)$ его повторное ядро с нумером n, то

$$\overline{K}_{(n)}(x,y) = \int\limits_a^b K(t,y)\overline{K}_{(n-1)}(x,t)\,dt, \tag{20_n}$$

причем

$$\overline{K}_{(2)}(x,y) = \int\limits_a^b K(t,y)K(x,t)\,dt = K_{(2)}(x,y). \tag{20_2}$$

Уравнение (20_n) вследствие (20_2) говорит на основании формул параграфа 4-го, что

$$\overline{K}_{(n)}(x,y) = \int\limits_a^b K(t,y)\overline{K}_{(n-1)}(x,t)\,dt = \int\limits_a^b K(t,y)K_{(n-1)}(x,y)dt = K_{(n)}(x,y). \tag{21}$$

Из (20_1) именно ясно, что (21) справедливо при $n = 3$; отсюда можно заключить последовательно, что это равенство справедливо при $n = 4, 5$ и т.д.

Итак союзные уравнения имеют одинаковые повторные ядра вследствие-же того, что их повторные ядра одинаковы, их резольвенты, когда соблюдено неравенство (8) тоже одинаковы.

Из этого заключаем, что решением уравнения (5^*) пока соблюдено неравенство (9) будет

$$\psi(y) = \lambda \int\limits_a^b \Gamma(x,y,\lambda)\Phi(x)\,dx \tag{14}$$

и что второе из уравнений (19) определяет $\Gamma(x,y,\lambda)$ как резольвенту уравнения (5^*).

§ 7. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О РЕЗОЛЬВЕНТЕ

Теорема. *Если функция $J(x,y)$ удовлетворяет при некотором λ уравнению*

$$J(x,y) = \lambda \int\limits_a^b K(t,y)J(x,t)\,dt + K(x,y) \tag{22}$$

и если при этом λ функция $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy + F(x) \tag{5}$$

то

$$\varphi(x) = F(x) + \lambda \int_a^b J(x,y)F(y)\,dy. \tag{23}$$

Отметим, что при этой формулировке мы не считаем, что $K(x,y)$ ограничена.

Если $K(x,y)$ ограничена и $\Gamma(x,y,\lambda)$ резольвента уравнения, существование которой для этого случая установлено, то уравнению (22) удовлетворяет $\Gamma(x,y,\lambda)$, если предположить, что взятое λ не особенная точка функции $\Gamma(x,y,\lambda)$, что в действительности имеет место, как мы увидим в главе 2-ой и можно положить

$$J(x,y) = \Gamma(x,y,\lambda). \tag{24}$$

В этом случае уравнение (23) не отлично от (14).

Подчеркнем еще, что уравнение (22) аналогично уравнению (19_2), соответствующему уравнению союзному с (5).

Заменим в равенстве (5) для удобства x на y, обозначая, конечно, переменную интегрирования новой буквой, отличной от y. Получим равенство

$$\varphi(y) = \lambda \int_a^b K(y,t)\varphi(t)\,dt + F(y).$$

Умножим обе части его на $J(x,y)$ и интегрируем по y в пределах, от a до b. Переменив при выполнении преобразований один раз порядок интегрирования пишем:

$$\int_a^b J(x,y)\varphi(y)\,dy = \lambda \int_a^b J(x,y)\left(\int_a^b K(y,t)\varphi(t)\,dt\right)dy + \int_a^b J(x,y)F(y)\,dy =$$

$$\lambda \int_a^b \varphi(t)\left(\int_a^b K(y,t)J(x,y)\,dy\right)dt + \int_a^b J(x,y)F(y)\,dy.$$

Но в силу уравнения (22)

$$\lambda \int_a^b K(y,t)J(x,y)\,dy = J(x,t) - K(x,t).$$

Значит

$$\int_a^b J(x,y)\varphi(y)\,dy = \int_a^b J(x,t)\varphi(t)\,dt - \int_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt + \int_a^b J(x,y)F(y)\,dy. \tag{25}$$

Замечая, что первый интеграл в правой части (25) не отличен от интеграла в левой части этого равенства и что на основании уравнения (5)

$$\lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt = \varphi(x) - F(x),$$

сократив в (25) равные интегралы, умножив оставшееся равенство на λ, получаем

$$0 = -\lambda \int\limits_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt + \lambda \int\limits_a^b J(x,y)F(y)\,dy = -\varphi(x) + F(x) + \lambda \int\limits_a^b J(x,y)F(y)\,dy,$$

откуда

$$\varphi(x) = F(x) + \lambda \int\limits_a^b J(x,y)F(y)\,dy. \tag{23}$$

Из выведенной формулы ясно, что если при некотором λ есть функция $J(x,y)$, удовлетворяющая уравнению (22) и если

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy,$$

то

$$\varphi(x) \equiv 0,$$

если, именно $F(x) = 0$, то формула (23) дает для $\varphi(x)$ значение тождественно равное нулю.

Из сказанного заключаем как следствие теоремы: *Если при некотором λ уравнение* (22) *имеет решение, то уравнение* (5) *может иметь только одно решение.*

Действительно, положим, что уравнению (5) кроме функции $\varphi(x)$ удовлетворяет функция $\psi(x)$:

$$\psi(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,y)\psi(y)\,dy + F(x).$$

Положив

$$\varphi(x) - \psi(x) = \omega(x),$$

получим, вычитая последнее уравнение из (5)

$$\omega(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,y)\omega(y)\,dy,$$

откуда на основании замечания заключаем

$$\omega(x) = \varphi(x) - \psi(x) \equiv 0, \qquad \varphi(x) = \psi(x).$$

Из всего сказанного, между прочим заключаем для случая ограниченного $K(x,y)$, что если λ не особенная точка резольвенты, то уравнение (5) может иметь только одно решение.

Переходя к вопросу о действительном существовании указанного единственного решения отметим сначала, что если уравнение

$$J_0(x,y) = \lambda \int\limits_a^b K(x,t)J_0(t,y)\,dt + K(x,y) \tag{26}$$

при соблюдении условий теоремы имеет решение, то это решение равно $J(x,y)$.

Действительно, по теореме оно вычисляется по формуле

$$J_0(x,y) = K(x,y) + \lambda \int_a^b K(t,y)J(x,t)\,dt,$$

правая-же часть ее на основании (22) равна $J(x,y)$.

Отметим далее, что когда $K(x,y)$ ограничено и λ не особенная точка резольвенты, это уравнение наверное имеет решение равное $\Gamma(x,y,\lambda)$.

Обратная теорема. *Если существует функция $J(x,y)$, удовлетворяющая уравнениям*

(22) $$J(x,y) = \lambda \int_a^b K(t,y)J(x,t)\,dt + K(x,y),$$

(26) $$J(x,y) = \lambda \int_a^b K(x,t)J(t,y)\,dt + K(x,y),$$

то уравнение

(5) $$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy + F(x)$$

имеет решение.

Умножая уравнение (26) на -1 и дав ему вид

$$(-J(x,y)) = -\lambda \int_a^b (-K(x,t)(-J(t,y))\,dt + (-K(x,y)),$$

получаем из него уравнение

$$(-K(x,y)) = \lambda \int_a^b (-J(t,y))(-K(x,t)(dt + (-J(x,y)),$$

вполне аналогичное (22) и получаемое из него заменою $J(x,y)$ на $-K(x,y)$ и $K(x,y)$ на $-J(x,y)$.

Из этого заключаем, что если уравнение

(27) $$\theta(x) = \lambda \int_a^b (-J(x,y))\theta(y)\,dy + \vartheta(x)$$

имеет решение, то

(28) $$\theta(x) = \vartheta(x) + \lambda \int_a^b \vartheta(y)(-K(x,y))\,dy.$$

Полагая, что $\varphi(x)$ дано формулой (23)

$$\varphi(x) = F(x) + \lambda \int\limits_a^b J(x,y)F(y)\,dy \tag{23}$$

и докажем, что это $\varphi(x)$ есть решение уравнения (5).

Если

$$\varphi(x) - \lambda \int\limits_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy - F(x) = \omega(x),$$

то $\varphi(x)$ есть решение уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy + F(x) + \omega(x);$$

значит

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_a^b (F(y) + \omega(y))J(x,y)\,dy + F(x) + \omega(x) =$$

$$\lambda \int\limits_a^b J(x,y)F(y)\,dy + \lambda \int\limits_a^b J(x,y)\omega(y)\,dy + F(x) + \omega(x).$$

Вычитая из последнего равенства (25), получим

$$\omega(x) + \lambda \int\limits_a^b J(x,y)\omega(y)\,dy = 0,$$

или

$$\omega(x) = \lambda \int\limits_a^b (-J(x,y))\omega(y)\,dy.$$

Значит $\omega(x)$ удовлетворяет уравнению (27) при $\vartheta(x) \equiv 0$, откуда вытекает на основании (28), что

$$\omega(x) = 0,$$

т.е. что

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy + F(x),$$

что и требовалось доказать.

§ 8. УРАВНЕНИЯ С ПОВТОРНЫМИ ЯДРАМИ

Не делаем снова предположения об ограниченности $K(x,y)$.

Заменим в правой части уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy + F(x) \tag{5}$$

$\varphi(y)$ его значением, найденным по уравнению (5). Так как

$$\varphi(y) = \lambda \int_a^b K(y,t)\varphi(t)\,dt + F(y)$$

имеем

$$\varphi(x) = F(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)F(y)\,dy + \lambda^2 \int_a^b K(x,y)\left(\int_a^b K(y,t)\varphi(t)\,dt\right)dy =$$

$$F(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)F(y)\,dy + \lambda^2 \int_a^b \varphi(t)\left(\int_a^b K(x,y)K(y,t)\,dy\right)dt =$$

$$F(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)F(y)\,dy + \lambda^2 \int_a^b K_{(2)}(x,t)\varphi(t)\,dt.$$

Вспоминая, что по сказанному в § 2-ом,

$$F(x) \ \text{ и } \ \int_a^b K(x,y)F(y)\,dy$$

коэффициенты в первых двух членах разложения

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x) + \dots$$

в ряд по возрастающим степеням λ, из доказанного заключаем, что $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi(x) = \lambda^2 \int_a^b K_{(2)}(x,y)\varphi(y)\,dy + \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x).$$

Заменяя в последнем уравнении $\varphi(y)$ снова его значением получаем:

$$\varphi(x) = \lambda^3 \int_a^b K_{(2)}(x,y)\left(\int_a^b K(y,t)\varphi(t)\,dt\right)dy + \lambda^2 \int_a^b K_{(2)}(x,y)F(y)\,dy + \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) =$$

$$\lambda^3 \int_a^b \varphi(t)\left(\int_a^b K_{(2)}(x,y)K(y,t)\,dy\right)dt + \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x) =$$

$$\lambda^3 \int\limits_a^b K_{(3)}(x,t)\varphi(t)\,dt + \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x),$$

т.к. по формуле (10_n)

$$\int\limits_a^b K_{(2)}(x,y)F(y)\,dy$$

равен коэффициенту в третьем члене разложения $\varphi(y)$ по степеням λ. Значит, $\varphi(x)$ удовлетворяет также уравнению

$$\varphi(x) = \lambda^3 \int\limits_a^b K_{(3)}(x,y)\varphi(y)\,dy + \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x).$$

Продолжая эти рассуждения очевидно придем к выводу который легко подтвердить применяя метод полной индукции, что $\varphi(x)$ удовлетворяя уравнению (5), удовлетворяет также и уравнению

$$\varphi(x) = \lambda^n \int\limits_a^b K_{(n)}(x,y)\varphi(y)\,dy + S_n(x), \tag{29}$$

где $S_n(x)$ равно сумме n первых членов в разложении $\varphi(x)$ по степеням λ:

$$S_n(x) = \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x) + \ldots + \lambda^{n-1}\varphi_{n-1}(x). \tag{30}$$

Уравнение (29) того же типа, как уравнение (5), и отличается от него только тем, что его ядро $K_{(n)}(x,y)$ и вместо λ стоит параметр равный λ^n.

Применяя, формулу (17) убеждаемся, что его повторные ядра

$$\int\limits_a^b K_{(n)}(x,t)K_{(n)}(t,y)\,dt = K_{(2n)}(x,y), \quad \int\limits_a^b K_{(n)}(x,t)K_{(2n)}(t,y)\,dt = K_{(3n)}(x,y), \quad \ldots$$

и что если $K_{(n)}(x,y)$ ограничена, то его резольвента, при малых по модулю λ дана рядом

$$\Gamma_{(n)}(x,y,\lambda^n) = K_{(n)}(x,y) + \lambda^n K_{(2n)}(x,y) + \lambda^{2n} K_{(3n)}(x,y) + \ldots.$$

При малых λ эта резольвента удовлетворяет уравнениям аналогичным (19):

$$\left\{\begin{aligned} \Gamma_{(n)}(x,y,\lambda^n) &= \lambda^n \int\limits_a^b K_{(n)}(x,t)\Gamma_{(n)}(t,y,\lambda^n)\,dt + K_{(n)}(x,y),\\ \Gamma_{(n)}(x,y,\lambda^n) &= \lambda^n \int\limits_a^b K_{(n)}(t,y)\Gamma_{(n)}(x,t,\lambda^n)\,dt + K_{(n)}(x,y). \end{aligned}\right. \tag{31}$$

Из доказанного до сих пор вытекает, что всякое решение уравнения (5) удовлетворяет уравнению (19). Но можно установить и обратное: *если существует* *функция* $\Gamma_{(n)}(x, y, \lambda^n)$, *удовлетворяющая при некотором* λ *уравнениям* (31), *что всегда имеет место, если* $K_{(n)}(x, y)$ *ограничено и* λ *достаточно мал, то решение уравнения* (29) *с этим* λ *удовлетворяет уравнению* (5).

Положим это $\varphi(x)$ решение уравнения (29), где $S_n(x)$, дано формулой (30).

Положим

$$\omega(x) = \varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\varphi(y)\, dy - F(x) \tag{32}$$

и докажем, что $\omega(x) = 0$.

Найдем прежде всего чему равен

$$\lambda \int_a^b K(x, y) S_n(y)\, dy.$$

Подставляя вместе $S_n(x)$ его значение по формуле (30) и пользуясь непосредственно Формулами (7) параграфа 2-го, имеем

$$\lambda \int_a^b K(x, y) S_n(y)\, dy = \tag{33}$$

$$\lambda \int_a^b K(x, y)\varphi_0(y)\, dy + \lambda^2 \int_a^b K(x, y)\varphi_1(y)\, dy + \ldots + \lambda^n \int_a^b K(x, y)\varphi_{n-1}(y)\, dy =$$

$$\lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x) + \lambda^3\varphi_3(x) + \ldots + \lambda^n\varphi_n(x) =$$

$$S_{n+1}(x) - \varphi_0(x) = S_n(x) + \lambda^n \int_a^b K_{(n)}(x, y) F(y)\, dy - F(x).$$

Заметив это, заменим в (32) под знаком интеграла $\varphi(y)$ его значением из (29), которому можно дать вид

$$\varphi(y) = \lambda^n \int_a^b K_{(n)}(y, t)\varphi(t)\, dt + S_n(y).$$

Получаем пользуясь (33)

$$\omega(x) = \varphi(x) - F(x) - \lambda \int_a^b K(x, y) S_n(y)\, dy - \lambda^{n+1} \int_a^b K(x, y) \left(\int_a^b K_{(n)}(y, t)\varphi(t)\, dt \right) dy =$$

$$\varphi(x) - F(x) - S_n(x) - \lambda^n \int_a^b K_{(n)}(x, y) F(y)\, dy +$$

$$F(x) - \lambda^{n+1} \int\limits_a^b \varphi(t) \left(\int\limits_a^b K(x,y) K_{(n)}(y,t)\, dy \right) dt.$$

Но

$$\int\limits_a^b K(x,y) K_{(n)}(y,t)\, dy = \int\limits_a^b K_{(n)}(x,y) K(y,t)\, dy.$$

Заменяя $\varphi(x) - S_n(x)$ его выражением по формуле (29) и снова меняя порядок интегрирования последнем интеграле получаем:

$$\omega(x) = \lambda^n \int\limits_a^b K_{(n)}(x,y) \varphi(y)\, dy - \lambda^n \int\limits_a^b K_{(n)}(x,y) F(y)\, dy -$$

$$\lambda^n \int\limits_a^b K_{(n)}(x,y) \left(\lambda \int\limits_a^b K(y,t) \varphi(t)\, dt \right) dy =$$

$$= \lambda^n \int\limits_a^b K_{(n)}(x,y) \left(\varphi(y) - F(y) - \lambda \int\limits_a^b K(y,t) \varphi(t)\, dt \right) dy.$$

Значит, $\omega(x)$ — решение однородного уравнения

$$\omega(x) = \lambda^n \int\limits_a^b K_{(n)}(x,y) \omega(y)\, dy,$$

вследствие чего, так как уравнения (31) имеют решение,

$$\omega(x) \equiv 0,$$

что и требовалось доказать.

§ 9. СВЯЗЬ МЕЖДУ РЕЗОЛЬВЕНТАМИ УРАВНЕНИЙ (5) и (29)

Положим, что ядро $K(x,y)$ уравнения (5) ограничено.

В таком случае, при малых значениях λ резольвента уравнения (6) дана рядом;

$$(15) \quad \Gamma(x,y,\lambda) = K(x,y) + \lambda K_{(2)}(x,y) + \lambda^2 K_{(3)}(x,y) + \ldots + \lambda^{n-1} K_{(n)}(x,y) + \ldots.$$

Предложим себе, пользуясь (15) найти резольвенту уравнения (29)

$$(54) \qquad \Gamma_{(n)}(x,y,\lambda^n) = K_{(n)}(x,y) + \lambda^2 K_{(2n)}(x,y) + \lambda^{2n} K_{(3n)}(x,y) + \ldots.$$

Положим ε какой нибудь первообразный корень уравнения

$$z^n = 1.$$

Если ε первообразный корень этого уравнения, то корни его $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равны

$$x_1 = \varepsilon,\ x_2 = \varepsilon^2,\ \ldots\ ,\ x_{n-1} = \varepsilon^{n-1},\ x_n = \varepsilon^n = 1$$

и

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & +\ldots+ & x_n & = & 0, \\ x_1^2 & + & x_2^2 & +\ldots+ & x_n^2 & = & 0, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} & + & x_2^{n-1} & +\ldots+ & x_n^{n-1} & = & 0, \\ x_1^n & + & x_2^n & +\ldots+ & x_n^n & = & n, \end{array}$$

и вообще

$$(35) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \sum\limits_{s=1}^{n} x_s^l = 0 & \text{если целое число } l \text{ не делится на } n \text{ и} \\ \sum\limits_{s=1}^{n} x_s^l = n & \qquad\qquad \text{в противном случае.} \end{array} \right.$$

Умножая (34) на λ, заменяя в полученном равенстве λ последовательно через

$$\lambda,\ \varepsilon\lambda,\ \varepsilon^2\lambda,\ \ldots,\ \varepsilon^{n-1}\lambda$$

и складываем. Получаем

$$\lambda\Gamma(x,y,\lambda) = \lambda K(x,y) + \lambda^2 K_{(2)}(x,y) + \ldots + \\ \lambda^{n-1}K_{(n-1)}(x,y) + \lambda^n K_{(n)}(x,y) + \lambda^{n+1}K_{(n+1)}(x,y) + \ldots,$$
$$\varepsilon\lambda\Gamma(x,y,\lambda) = x_1\lambda K(x,y) + x_1^2\lambda^2 K_{(2)}(x,y) + \ldots + \\ x_1^{n-1}\lambda^{n-1}K_{(n-1)}(x,y) + \lambda^n K_{(n)}(x,y) + x_1\lambda^{n+1}K_{(n+1)}(x,y) + \ldots,$$
$$\varepsilon^2\lambda\Gamma(x,y,\lambda) = x_2\lambda K(x,y) + x_2^2\lambda^2 K_{(2)}(x,y) + \ldots + \\ x_2^{n-1}\lambda^{n-1}K_{(n-1)}(x,y) + \lambda^n K_{(n)}(x,y) + x_2\lambda^{n+1}K_{(n+1)}(x,y) + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varepsilon^{n-1}\lambda\Gamma(x,y,\lambda) = x_{n-1}\lambda K(x,y) + x_{n-1}^2\lambda^2 K_{(2)}(x,y) + \ldots + \\ x_{n-1}^{n-1}\lambda^{n-1}K_{(n-1)}(x,y) + \lambda^n K_{(n)}(x,y) + x_{n-1}\lambda^{n+1}K_{(n+1)}(x,y) + \ldots,$$

что после сложения дает вследствие равенств (35):

$$\lambda\Gamma(x,y,\lambda) + \varepsilon\lambda\Gamma(x,y,\varepsilon\lambda) + \varepsilon^2\lambda\Gamma(x,y,\varepsilon^2\lambda) + \ldots + \varepsilon^{n-1}\lambda\Gamma(x,y,\varepsilon^{n-1}\lambda) =$$

$$n\lambda K_{(n)}(x,y) + n\lambda^{2n}K_{(2n)}(x,y) + n\lambda^{3n}K_{(3n)}(x,y) + \ldots = n\lambda^n\Gamma_{(n)}(x,y,\lambda^n).$$

Следовательно

$$(36) \qquad \Gamma_{(n)}(x,y,\lambda^n) =$$

$$\frac{\lambda\Gamma(x,y,\lambda) + \varepsilon\lambda\Gamma(x,y,\varepsilon\lambda) + \varepsilon^2\lambda\Gamma(x,y,\varepsilon^2\lambda) + \ldots + \varepsilon^{n-1}\lambda\Gamma(x,y,\varepsilon^{n-1}\lambda)}{n\lambda^n}.$$

Нетрудно решить и обратную задачу и составить резольвенту уравнения (5). Мы решим эту задачу установив результат несколько более общий, опять не предполагая более, что $K(x, y)$ ограничена и именно установим теорему.

Теорема. *Если есть функция $J_n(x, y)$ удовлетворяющая при некотором λ уравнениям:*

$$
\left\{
\begin{aligned}
J_n(x,y) &= \lambda^n \int\limits_a^b K_{(n)}(x,t) J_n(t,y)\, dt + K_{(n)}(x,y), \\
J_n(x,y) &= \lambda^n \int\limits_a^b K_{(n)}(t,y) J_n(x,t)\, dt + K_{(n)}(x,y).
\end{aligned}
\right. \tag{31}
$$

то функция

$$
J(x,y) = \Sigma_n(x,y) + \lambda^n \int\limits_a^b J_n(x,t) \Sigma_n(t,y)\, dt, \tag{37}
$$

где

$$
\Sigma_n(x,y) = K(x,y) + \lambda K_{(2)}(x,y) + \lambda^2 K_{(3)}(x,y) + \ldots \lambda^{n-1} K_{(n)}(x,y) \tag{38}
$$

удовлетворяем уравнениям

$$
J(x,y) = \lambda \int\limits_a^b K(t,y) J(x,t)\, dt + K(x,y), \tag{32}
$$

$$
J(x,y) = \lambda \int\limits_a^b K(x,t) J(t,y)\, dt + K(x,y). \tag{26}
$$

В виду полной аналогии уравнений (26) и (22), докажем теорему для уравнения (26).

По сказанному в прошлом параграфе, если $J(x, y)$ удовлетворяет уравнению (26), то оно удовлетворяет и уравнению

$$
J(x,y) = \lambda^n \int\limits_a^b K_{(n)}(x,t) J(t,y)\, dt + \Sigma_n(x,y), \tag{39}
$$

где $\Sigma_n(x, y)$ дана формулой (38) и равна сумме первых n членов формального разложения функции $J(x, y)$ по степеням λ.

Так как второе из уравнений (31) имеет решение $J_n(x, y)$, то по теореме параграфа 7-го

$$
J(x,y) = \Sigma_n(x,y) + \lambda^n \int\limits_a^b J_n(x,t) \Sigma_n(t,y)\, dt; \tag{37}
$$

последнее равенство устанавливает вид решения уравнения (26).

На основании следствия теоремы параграфа 7-го иных решении кроме (37) уравнение (39) иметь не может; так как $J_n(x,y)$ удовлетворяет первому из уравнений (31), на основании обратной теоремы параграфа 7-го функция (37) действительно удовлетворяет уравнению (39) и, значит, на основании доказанного в прошлом параграфе, функция (37) действительно удовлетворяет уравнению (26).

Из доказанной теоремы можно заключить: Если ядро $K(x,y)$ не ограничено, но одно из его повторных ядер $K_{(n)}(x,y)$ ограничено, то ряд

$$K(x,y) + \lambda K_{(2)}(x,y) + \lambda^2 K_{(3)}(x,y) + \dots$$

сходящийся при достаточно малых значениях λ и дает резольвенту уравнения (5).

Последний ряд непосредственно получается из (37) заменою $J(x,y)$ резольвентой уравнения (29), данной сходящимся рядом (34). Резольвента уравнения (5) очевидно перестает быть ограниченной при тех значениях x и y, при которых $K(x,y)$ не ограничена.

ГЛАВА ВТОРАЯ
ТЕОРИЯ ФРЕДГОДЬМА

§ 1. ТЕОРЕМА АДАМАРА

Положим, что в определителе

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1}$$

даны суммы квадратов элементов его строк

$$a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \ldots + a_{in}^2 = H_i \qquad (i = 1, 3, \ldots, n). \tag{2}$$

Найти при соблюдении условий (2) наибольшее значение определителя Δ.

Решая задачу, как обыкновенную задачу на относительные maxima и minima составляем функцию

$$\Delta - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \ldots + a_{in}^2 - H_i) \tag{3}$$

и приравниваем нулю производные от (3) по всем элементам a_{ik}, трактуя множители λ_i как постоянные.

Положив для удобства

$$A_{ik} = \frac{\partial \Delta}{\partial a_{ik}},$$

получаем; дифференцируя по a_{ik}

$$A_{ik} - 2\lambda_i a_{ik} = 0, \tag{4}$$

откуда вытекает

$$\frac{A_{i1}}{a_{i1}} = \frac{A_{i2}}{a_{i2}} = \ldots = \frac{A_{in}}{a_{in}} = 2\lambda_i.$$

Применяя теорему о равных отношениях и тождество:

$$A_{i1}a_{i1} + A_{i2}a_{i2} + \ldots + A_{in}a_{in} = \Delta, \tag{5}$$

заключаем, что

$$\frac{A_{i1}}{a_{i1}} = \frac{A_{i2}}{a_{i2}} = \ldots = \frac{A_{in}}{a_{in}} = \frac{\Delta}{H_i} = 2\lambda_i,$$

откуда вследствие (4) следует

$$A_{ik} = \frac{\Delta}{H_i} a_{ik}. \tag{6}$$

Пользуясь тождествами (5) и тождествами

$$A_{i1}a_{j1} + A_{i2}a_{j2} + \ldots + A_{in}a_{jn} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j,$$

имеем с одной стороны

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix} \Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \Delta & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \Delta & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \Delta \end{vmatrix} = \Delta^n.$$

С другой стороны вследствие (6)

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix} \Delta = \begin{vmatrix} \frac{\Delta}{H_1} a_{11} & \frac{\Delta}{H_1} a_{12} & \ldots & \frac{\Delta}{H_1} a_{1n} \\ \frac{\Delta}{H_2} a_{21} & \frac{\Delta}{H_2} a_{22} & \ldots & \frac{\Delta}{H_2} a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\Delta}{H_n} a_{n1} & \frac{\Delta}{H_n} a_{n2} & \ldots & \frac{\Delta}{H_n} a_{nn} \end{vmatrix} \Delta =$$

$$\frac{\Delta^{n+1}}{H_1 H_2 \ldots H_n} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{\Delta^{n+2}}{H_1 H_2 \ldots H_n}.$$

Следовательно

$$\Delta^n = \frac{\Delta^{n+2}}{H_1 H_2 \ldots H_n}, \qquad \Delta^2 = H_1 H_2 \ldots H_n$$

и наибольшее возможное значение Δ равно

$$\sqrt{H_1 H_2 \ldots H_n}.$$

Последнее заключение мы будем называть *теоремой Адамара.*

Если вместо равенства (2) мы имеем неравенства

$$a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \ldots + a_{in}^2 \leq G_i, \tag{2^*}$$

то очевидно

$$|\Delta| \leq \sqrt{G_1 G_2 \ldots G_n}. \tag{7}$$

§ 2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ "K"

Условимся считать во всей этой главе, что

$$|K(x,y)|$$

ограничено числом A.

Введем в рассмотрение определитель

$$K\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \dots, & x_n \\ y_1, & y_2, & \dots, & y_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K(x_1,y_1) & K(x_1,y_2) & \dots & K(x_1,y_n) \\ K(x_2,y_1) & K(x_2,y_2) & \dots & K(x_2,y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(x_n,y_1) & K(x_n,y_2) & \dots & K(x_n,y_n) \end{vmatrix}.$$

Аргументы $x_1, x_2, \dots, x_n$ характеризуют строки определителя; аргументы $y_1, y_2, \dots, y_n$ — его столбцы.

Отметим следующие очевидные свойства этих определителей K.

(1) от перестановки двух аргументов x_i и x_j или y_i и y_j, определиtель K меняет знак; такая перестановка, именно, имеет следствием, перестановку двух строк или двух столбцов в определителе;

(2) если два элемента x или y делаются равными, то определитель обращается в нуль; в определителе, именно, делаются равными две строки или два столбца;

(3) перестановка пары, аргументов x_i, y_i с парой аргументов x_j, y_j не меняет определителя K, от такой перестановки, именно, знак определителя меняется два раза;

(4) определитель

$$K\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \dots, & x_n \\ x_1, & x_2, & \dots, & x_n \end{pmatrix}$$

— симметрическая функция аргументов $x_1, x_2, \dots, x_n$: перестановка x_i и x_j равносильна перестановке двух пар x_i, x_i и x_j, x_j.

(5) так как каждый член определителя абсолютно меньше A, сумма квадратов элементов одной и той же строки не превосходит

$$nA^2.$$

Вследствие этого по теореме Адамара

$$\left|K\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \dots, & x_n \\ y_1, & y_2, & \dots, & y_n \end{pmatrix}\right| \leq \sqrt{n^n A^{2n}} = n^{\frac{n}{2}} A^n. \tag{9}$$

§ 3. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ФРЕДГОЛЬМА

Положим дано уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy + f(x); \tag{10}$$

положим

$$D(\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{1}\int\limits_a^b K(t_1,t_1)\,dt_1 + \frac{\lambda^2}{1\cdot 2}\int\limits_a^b\int\limits_a^b K\begin{pmatrix} t_1, & t_2 \\ t_1, & t_2 \end{pmatrix} dt_1dt_2 + \ldots + \tag{11}$$

$$(-1)^n\frac{\lambda^n}{1\cdot 2\cdots n}\int\limits_a^b \ldots \int\limits_a^b K\begin{pmatrix} t_1, & t_2, & \ldots, & t_n \\ t_1, & t_2, & \ldots, & t_n \end{pmatrix} dt_1dt_2\ldots dt_n + \ldots$$

Пользуясь неравенством (9) заключаем, что члены [этого ряда ограничены:]

$$\left|K\begin{pmatrix} t_1, & t_2, & \ldots, & t_n \\ t_1, & t_2, & \ldots, & t_n \end{pmatrix}\right| \le n^{\frac{n}{2}}A^n\int\limits_a^b \ldots \int\limits_a^b dt_1dt_2\ldots dt_n = n^{\frac{n}{2}}A^n(b-a)^n.$$

Вследствие этого члены ряда (11) абсолютно меньше членов ряда

$$1 + \frac{|\lambda|}{1}A(b-a) + \frac{|\lambda|^2}{1\cdot 2}A^2(b-a)^2 + \ldots + \frac{|\lambda|^n}{1\cdot 2\cdots n}A^n n^{\frac{n}{2}}(b-a)^n + \ldots.$$

Применяя признак Даламбера к отыскивая предел отношения последующего члена к предыдущему находим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|\lambda|^{n+1}}{1\cdot 2\cdots n\cdot(n+1)}\cdot\frac{A^{n+1}(b-a)^{n+1}(n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{A^n(b-a)^n n^{\frac{n}{2}}}\cdot\frac{1\cdot 2\cdots n}{|\lambda|^n} =$$

$$\lim_{n\to\infty}|\lambda|A(b-a)\,\frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n+1}} = 0,$$

так как $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$ имеет предел $e^{\frac{1}{2}}$, а знаменатель дроби бесконечно велик при $n\to\infty$. Следовательно, ряд (11) сходится при всех значениях λ и сумма его целая функция.

Функцию $D(\lambda)$ называют *определителем Фредгольма* ядра $K(x,y)$.

§4. НАХОЖДЕНИЕ РЕЗОЛЬВЕНТЫ. ПЕРВЫЙ МИНОР ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ФРЕДГОЛЬМА

Мы свели в § 7 главы 1-ой нахождение решения уравнения (10) к нахождению решения уравнения

$$J(x,y) = \lambda \int\limits_a^b K(x,t)J(t,y)\,dt + K(x,y), \tag{12}$$

причем решение этого уравнения называли резольвентой уравнения (10).

Введем в уравнение (12) вместо $J(x,y)$ новую неизвестную функцию, положив

$$J(x,y) = \frac{D\left(\begin{array}{c|c} x & \lambda \\ y & \end{array}\right)}{D(\lambda)}. \tag{13}$$

Подставив в (12) вместо $J(x,y)$ его в выражение (13), получаем после умножения обеих частей полученного уравнения на $D(\lambda)$ для нахождения $D\left(\begin{array}{c|c} x & \lambda \\ y & \end{array}\right)$ уравнение

$$D\left(\begin{array}{c|c} x & \lambda \\ y & \end{array}\right) = \lambda \int\limits_a^b K(x,t) D\left(\begin{array}{c|c} t & \lambda \\ y & \end{array}\right) dt + D(\lambda)K(x,y). \tag{14}$$

Ищем, как мы уже делали в § 2 главы первой решение последнего уравнения в виде ряда расположенного по возрастающим степеням λ.

Положим для сокращения

$$D(\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{1}\,c_1 + \frac{\lambda^2}{1\cdot 2}\,c_2 - \ldots + (-1)^n \frac{\lambda^n}{1\cdot 2\cdots n}\,c_n + \ldots, \tag{15}$$

$$c_n = \int\limits_a^b \ldots \int\limits_a^b K\begin{pmatrix} t_1, & t_2, & \ldots, & t_n \\ t_1, & t_2, & \ldots, & t_n \end{pmatrix} dt_1 dt_2 \ldots dt_n.$$

Отыскивая $D\left(\begin{array}{c|c} x & \lambda \\ y & \end{array}\right)$ в виде ряда, мы для удобства дадим ему вид

$$D\left(\begin{array}{c|c} x & \lambda \\ y & \end{array}\right) = q_0(x,y) - \frac{\lambda}{1}\,q_1(x,y) + \frac{\lambda^2}{1\cdot 2}\,q_2(x,y) - \ldots + \tag{16}$$

$$(-1)^n \frac{\lambda^n}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}\,q_n(x,y) + \ldots,$$

снабжая неизвестные коэффициенты ряда множителями вида

$$(-1)^n \frac{\lambda^n}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n},$$

чтобы сделать операции над рядом (16) аналогичными операциям над рядом (15).

Подставляя в (14) вместо $D(\lambda)$ и $D\left(\begin{array}{c|c} x & \lambda \\ y & \end{array}\right)$ их значения (15) и (16) и отождествляя коэффициенты при одинаковых степенях λ, мы прежде всего получим, приравнивая коэффициенты при λ, что

$$q_0(x,y) = K(x,y). \tag{17_0}$$

Отождествление коэффициетов при λ^n приведет сначала к равенству

$$(-1)^n \frac{\lambda^n}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}\, q_n(x,y) = (-1)^n \frac{\lambda^n}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}\, c_n K(x,y) + \tag{17_n}$$

$$(-1)^{n-1} \frac{\lambda^n}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-1)} \int_a^b K(x,t) q_{n-1}(t,y)\, dt.$$

Равенства (17_0), (17_n), $n = 1, 2, \ldots$, позволяют последовательно вычислить коэффициенты

$$q_1(x,y),\ q_2(x,y),\ \ldots,\ q_n(x,y), \ldots.$$

Мы, однако, в данном случае можем угадать общее выражение коэффициента $q_n(x,y)$.

Положим

$$J_n(x,y) = \int_a^b \ldots \int_a^b K\left(\begin{array}{ccccc} x, & t_1, & t_2 & \ldots, & t_n \\ y, & t_1, & t_2 & \ldots, & t_n \end{array}\right) dt_1 dt_2 \ldots dt_n, \tag{18}$$

считая, что

$$J_0(x,y) = K(x,y), \tag{18_0}$$

и докажем, что

$$J_n(x,y) = q_n(x,y).$$

Для доказательства в качестве, вспомогательной теоремы, которою нам неоднократно придется пользоваться впоследствии, найдем разложение определителя

$$K\left(\begin{array}{cccc} x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \\ y_1, & y_2, & \ldots, & y_n \end{array}\right)$$

по элементам его первой строки.

Мы имеем, применяя известные правила и выделяя особенно первый член разложения

$$K\left(\begin{array}{cccc} x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \\ y_1, & y_2, & \ldots, & y_n \end{array}\right) = \begin{vmatrix} K(x_1,y_1) & K(x_1,y_2) & \ldots & K(x_1,y_n) \\ K(x_2,y_1) & K(x_2,y_2) & \ldots & K(x_2,y_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K(x_n,y_1) & K(x_n,y_2) & \ldots & K(x_n,y_n) \end{vmatrix} =$$

$$K(x_1,y_1)\cdot K\left(\begin{array}{cccc} x_2, & x_3, & \ldots, & x_n \\ y_2, & y_3, & \ldots, & y_n \end{array}\right) +$$

$$\sum_{s=2}^{n} K(x_1, y_s) \cdot (-1)^s K \begin{pmatrix} x_2, & \dots & x_{s-1}, & x_s, & x_{s+1}, & \dots, & x_n \\ y_1, & \dots, & y_{s-2}, & y_{s-1}, & y_{s+1}, & \dots, & y_n \end{pmatrix}.$$

При зачеркивании, именно, первой строки и столбца с нумером s получается определитель K, строки которого характеризуются элементами $x_2, x_3, \dots, x_n$, а столбцы элементами $y_1, y_2, \dots, y_{s-1}, y_{s+1}, \dots, y_n$.

Переведя в миноре

$$(19) \qquad (-1)^{s+1} K \begin{pmatrix} x_2, & \dots & x_{s-1}, & x_s, & x_{s+1}, & \dots, & x_n \\ y_1, & \dots, & y_{s-2}, & y_{s-1}, & y_{s+1}, & \dots, & y_n \end{pmatrix}$$

элемент x_s на первое место; его придётся переставить с $s-2$ элементами $x_2, \dots, x_{s-1}$, что вызовет появление множителя $(-1)^{s-2}$ и после этого переноса во всех столбцах кроме первого значки у верхнего и нижнего аргументов станут одинаковыми. Минор (19) обратится в

$$-K \begin{pmatrix} x_s, & x_2, & \dots, & x_{s-1}, & x_{s+1}, & \dots, & x_n \\ y_1, & y_2, & \dots, & y_{s-1}, & y_{s+1}, & \dots, & y_n \end{pmatrix}.$$

Значит

$$(20) \qquad K \begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \dots, & x_n \\ y_1, & y_2, & \dots, & y_n \end{pmatrix} = K(x_1, y_1) \cdot K \begin{pmatrix} x_2, & x_3, & \dots, & x_n \\ y_2, & y_3, & \dots, & y_n \end{pmatrix} -$$

$$\sum_{s=2}^{n} K(x_1, y_s) \cdot K \begin{pmatrix} x_s, & x_2, & \dots, & x_{s-1}, & x_{s+1}, & \dots, & x_n \\ y_1, & y_2, & \dots, & y_{s-1}, & y_{s+1}, & \dots, & y_n \end{pmatrix}.$$

Пользуясь формулой (20) пишем

$$K \begin{pmatrix} x, & t_1, & t_2, & \dots, & t_n \\ y, & t_1, & t_2, & \dots, & t_n \end{pmatrix} = K(x, y) \cdot K \begin{pmatrix} t_1, & t_2, & \dots, & t_n \\ t_1, & t_2, & \dots, & t_n \end{pmatrix} -$$

$$\sum_{s=1}^{n} K(x, t_s) \cdot K \begin{pmatrix} t_s, & t_1, & \dots, & t_{s-1}, & t_{s+1}, & \dots, & t_n \\ y, & t_1, & \dots, & t_{s-1}, & t_{s+1}, & \dots, & t_n \end{pmatrix}.$$

Умножая обе части равенства на $dt_1 dt_2 \dots dt_n$ и выполняя n-кратное интегрирование, получаем

$$J_n(x, y) = K(x, y) \int_a^b \dots \int_a^b K \begin{pmatrix} t_1, & t_2, & \dots, & t_n \\ t_1, & t_2, & \dots, & t_n \end{pmatrix} -$$

$$\sum_{s-1}^{n} \int_a^b \dots \int_a^b K(x, t_s) \cdot K \begin{pmatrix} t_s, & t_1, & \dots, & t_{s-1}, & t_{s+1}, & \dots, & t_n \\ y, & t_1, & \dots, & t_{s-1}, & t_{s+1}, & \dots, & t_n \end{pmatrix} dt_1 \dots dt_n.$$

Нетрудно убедиться, что каждый из n интегралов, встречающихся под знаком суммы равен интегралу

$$(21) \qquad \int_a^b \dots \int_a^b K(x, t_1) \cdot K \begin{pmatrix} t_1, & t_1, & t_2, & \dots, & t_n \\ y, & t_2, & t_3, & \dots, & t_n \end{pmatrix} dt_1 \dots dt_n.$$

Действительно, выписанный под знаком суммы интеграл отличается от (21) только тем, что в нём знаками $t_s, t_1, \ldots, t_{s-1}, t_{s+1}, \ldots, t_n$ обозначены те переменные интегрирования, которые в (21) обозначены соответственно знаками $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

Значит, вспоминая выражение коэффициента c_n, имеем

$$J_n(x,y) = K(x,y)\cdot c_n - n\int\limits_a^b \ldots \int\limits_a^b K\begin{pmatrix} t_1, & t_2, & \ldots, & t_n \\ y, & t_2, & \ldots, & t_n \end{pmatrix} dt_1 \ldots dt_n.$$

Выделяя в последнем интеграле интегрирование по t_1, получаем, однако,

$$\int\limits_a^b \int\limits_a^b \ldots \int\limits_a^b K(x,t_1)\cdot K\begin{pmatrix} t_1, & t_2, & \ldots, & t_n \\ y, & t_2, & \ldots, & t_n \end{pmatrix} dt_1 dt_2 \ldots dt_n =$$

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_a^b \ldots \int\limits_a^b K\begin{pmatrix} t_1, & t_2, & \ldots, & t_n \\ y, & t_2, & \ldots, & t_n \end{pmatrix} dt_2 \ldots dt_n\right) dt_1 = \int\limits_a^b K(x,t_1) J_{n-1}(t_1,y)\, dt_1.$$

Значит окончательно имеем

$$J_n(x,y) = K(x,y)\cdot c_n - n\int\limits_a^b K(x,t) J_{n-1}(t,y)\, dt. \tag{22_n}$$

Уравнения (18_0) и (22_n) позволяют последовательно вычислять

$$J_1(x,y), J_2(x,y), \ldots, J_n(x,y), \ldots.$$

Сравнение уравнении (18_n) и (22_n), дающих $J_n(x,y)$, с уравнениями (17_0) и (17_n), дающих $q_n(x,y)$ убеждает, что

$$q_n(x,y) = J_n(x,y).$$

Мы, следовательно, имеем:

(23)

$$D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\,\middle|\,\lambda\right) = K(x,y) - \frac{\lambda}{1}\int\limits_a^b K\begin{pmatrix} x_1, & t_1 \\ y, & t_1 \end{pmatrix} dt_1 + \frac{\lambda^2}{1\cdot 2}\int\limits_a^b \int\limits_a^b K\begin{pmatrix} x, & t_1, & t_2 \\ y, & t_1, & t_2 \end{pmatrix} dt_1 dt_2 +$$

$$+ \ldots + \frac{(-1)^n \lambda^n}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}\int\limits_a^b \ldots \int\limits_a^b K\begin{pmatrix} x, & t_1, & \ldots, & t_n \\ y, & t_1, & \ldots & t_n \end{pmatrix} dt_1 \ldots dt_n + \ldots.$$

Общий член ряда (23) абсолютно меньше

$$\frac{|\lambda|^n}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}\int\limits_a^b \ldots \int\limits_a^b \left| K\begin{pmatrix} x, & t_1, & \ldots, & t_n \\ y, & t_1, & \ldots & t_n \end{pmatrix}\right| dt_1 \ldots dt_n \le$$

$$\frac{|\lambda|^n}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n} A^{n+1}(n+1)^{\frac{n+1}{2}}(b-a)^n,$$

а отношение абсолютного значения члена с нумером n к абсолютному значению члена е нумером $n-1$ равно

$$\frac{|\lambda|A(b-a)}{\sqrt{n+1}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

и значит бесконечно мало.

Отсюда вытекает, что ряд (23) сходится абсолютно при всех значениях λ.

Итак мы нашли для резольвенты $\Gamma(x,y,\lambda)$ выражение

$$\Gamma(x,y,\lambda)=\frac{D\left(\begin{array}{c|c} x & \lambda\\ y & \end{array}\right)}{D(\lambda)}, \tag{13*}$$

в котором и числитель и знаменатель — целые функции от λ.

§ 5. ПОЛЮСЫ РЕЗОЛЬВЕНТЫ. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ЧИСЛА

Из формулы (13*) ясно, что нами найдено решение уравнения (12) при всех значениях λ, при которых дробь (13*) остается, ограниченной.

Ясно, что числа λ_0, при которых она перестает быть ограниченной — ее полюса, так как, это мероморфная функция — надо искать среди корней уравнения

$$D(\lambda)=0. \tag{24}$$

Теорема. *Каждый корень уравнения* (24) *полюс функции* (13*).

Положим, λ_0 — корень кратности n уравнения (24); положим, что при произвольннх x и y функция $D\left(\begin{array}{c|c} x & \lambda\\ y & \end{array}\right)$ имеет λ_0 корнем кратности m. Мы докажем, что

$$m\le n-1.$$

Из этого будет уже ясно, что хотя в дроби (13) могут происходить, при произвольных x и y сокращения за счет множителя $\lambda-\lambda_0$, но что такой множитель бесследно исчезнуть из знаменателя не может.

Заменим в (24) x и y через t. Мы получим функцию от λ

$$D\left(\begin{array}{c|c} t & \lambda\\ t & \end{array}\right)=K(t,t)-\frac{\lambda}{1}\int\limits_a^b K\begin{pmatrix} t, & t_1,\\ t, & t_1\end{pmatrix}dt_1+ \tag{25}$$

$$+\frac{\lambda^2}{1\cdot 2}\int\limits_a^b\int\limits_a^b K\begin{pmatrix} t, & t_1, & t_2\\ t, & t_1, & t_2\end{pmatrix}dt_1dt_2+\ldots+$$

$$+\frac{(-1)^n\lambda^n}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\int\limits_a^b\ldots\int\limits_a^b K\begin{pmatrix} t, & t_1, & \ldots, & t_n\\ t, & t_1, & \ldots, & t_n\end{pmatrix}dt_1\ldots dt_n+\ldots,$$

которая имеет λ_0 корнем кратности m_1 не меньшей m, так как имея λ_0 корнем кратности m_1 при произвольных x и y, эта функция имеет λ_0 корнем кратности не ниже m при частном значении x и y.

Умножая обе части равенства (25) на dt и проинтегрировав от a до b, получим

$$\int_a^b D\left(\begin{array}{c} t \\ t \end{array} \middle| \lambda\right) dt = \int_a^b K(t,t)\,dt - \frac{\lambda}{1}\int_a^b\int_a^b K\left(\begin{array}{cc} t, & t_1 \\ t, & t_1 \end{array}\right) dtdt_1 +$$

$$+\frac{\lambda^2}{1\cdot 2}\int_a^b\int_a^b\int_a^b K\left(\begin{array}{ccc} t, & t_1, & t_2 \\ t, & t_1, & t_2 \end{array}\right) dtdt_1dt_2 + \ldots +$$

$$+\frac{(-1)^n\lambda^n}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}\int_a^b\int_a^b \ldots \int_a^b K\left(\begin{array}{cccc} t, & t_1, & \ldots, & t_n \\ t, & t_1, & \ldots, & t_n \end{array}\right) dtdt_1\ldots dt_n + \ldots .$$

Вспоминая разложение $D(\lambda)$ видим, что нами получено равенство

$$\int_a^b D\left(\begin{array}{c} t \\ t \end{array} \middle| \lambda\right) dt = c_1 - \frac{\lambda}{1}c_2 + \frac{\lambda^2}{1\cdot 2}c_3 - \ldots + (-1)^n\frac{(-1)^n\lambda^n}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}c_{n+1} + \ldots =$$

$$-D'(\lambda) = -\frac{d}{d\lambda}\,D(\lambda).$$

Так как производная от интеграла

$$\int_a^b D\left(\begin{array}{c} t \\ t \end{array} \middle| \lambda\right) dt \tag{26}$$

по λ равна интегралу от соответствующей производной от $D\left(\begin{array}{c} t \\ t \end{array} \middle| \lambda\right)$, ясно что λ_0 корень функции (26) кратность которого m_2 по крайней мере m_1.

Но равенство

$$\int_a^b D\left(\begin{array}{c} t \\ t \end{array} \middle| \lambda\right) dt = -D'(\lambda) \tag{26}$$

говорит, что функция (26) имеет λ_0 корнем той же кратности, как и $D'(\lambda)$, т.е. кратности $n-1$.

Итак, мы имеем:

$$m \leq m_1 \leq m_2 = n-1.$$

Отсюда вытекает как указано справедливость теоремы.

Из теоремы вытекает, что дробь (13^*) не имеет тогда и только тогда определенного значения, когда λ корень уравнения (24).

Корни уравнения (14) называются *характеристическими числами* ядра $K(x,y)$.

§ 6. СВОДКА ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Вспоминая теоремы, доказанные в параграфе 7-ом прошлой главы, мы можем высказать следующие заключения:

Если λ не характеристическое число, то каждое из уравнений

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy + f(x), \qquad \psi(y) = \lambda \int\limits_a^b K(x,y)\psi(x)\,dx + F(y)$$

имеет одно и только одно решение. Решения этих уравнений даны соответственными равенствами:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^b f(y) \frac{D\left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \middle| \lambda \right)}{D(\lambda)}\, dy,$$

$$\psi(y) = F(y) + \lambda \int\limits_a^b F(x) \frac{D\left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \middle| \lambda \right)}{D(\lambda)}\, dx.$$

Как следствие этого, заключаем: *если λ не характеристическое число, то каждое из уравнений*

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy,$$

$$\psi(y) = \lambda \int\limits_a^b K(x,y)\psi(x)\,dx$$

имеет единственное решение, равное тождественно нулю.

§ 7. ЗАМЕЧАНИЕ О РЕЗОЛЬВЕНТЕ УРАВНЕНИЯ С ПОВТОРНЫМ ЯДРОМ

Мы показали в параграфе 8-м главы первой, что всякое решение $\varphi(x)$ уравнения (10) удовлетворяет уравнению

$$\varphi(x) = \lambda^n \int\limits_a^b K_{(n)}(x,y)\varphi(y)\,dy + S_n(x), \tag{27}$$

где $S_n(x)$ есть сумма первых n членов разложения $\varphi(x)$ в ряд по степеням λ. Пользуясь сказанным в параграфе 4-м мы можем составить резольвенту уравнения (27) и найти характеристические числа этого уравнения.

Но составляя резольвенту уравнения (27) мы можем также использовать формулы параграфа 9-го прошлой главы.

Вспоминая эти формулы, если $\Gamma_n(x, y, \lambda^n)$ резольвента уравнения (27), имеем:

$$\Gamma_n(x, y, \lambda^n) = \frac{\lambda\Gamma(x, y, \lambda) + \varepsilon\lambda\Gamma(x, y, \varepsilon\lambda) + \ldots + \varepsilon^{n-1}\lambda\Gamma(x, y, \varepsilon^{n-1}\lambda)}{n\lambda^n},$$

где ε — корень степени n из единицы.

Пользуясь формулой (13*) мы можем представить $\Gamma_n(x, y, \lambda^n)$ в виде сумма дробей, знаменатели которых

$$D(\lambda),\ D(\varepsilon\lambda),\ D(\varepsilon^2\lambda),\ \ldots,\ D(\varepsilon^{n-1}\lambda).$$

После приведения этих дробей к общему знаменателю, мы получим для выражения вида

$$\Gamma_n(x, y, \lambda^n) = \frac{\omega(x, y, \lambda)}{D(\lambda) \cdot D(\varepsilon\lambda) \cdot D(\varepsilon^2\lambda) \cdot \ldots \cdot D(\varepsilon^{n-1}\lambda)}. \tag{28}$$

Множитель λ из знаменателя должен, именно, сократиться, так как нуль не есть характеристическое число резольвенты с ограниченным ядром, как вытекает из формул, например, § 5 первой главы.

Так как знаменатель в (28) симметрическая функция от корней уравнения

$$z^n = 1,$$

он равен функции от λ^n.

Из формулы (28) ясно, что полюсами функции $\Gamma_n(x, y, \lambda^n)$ могут быть только числа вида λ_0^n, где λ_0 характеристическое число уравнения (10).

Не трудно, однако, убедиться, что каждое число такого вида есть действительно полюс резольвенты (28).

Действительно, из формул § 9-го первой главы вытекает, что если $\Gamma_n(x, y, \lambda^n)$ резольвента уравнения (27), то

$$\Gamma(x, y, \lambda) = \Sigma_n(x, y, \lambda) + \lambda^n \int_a^b \Gamma_n(x, t, \lambda^n)\Sigma_n(t, y, \lambda)\, dt,$$

где $\Sigma_n(x, y, \lambda)$ сумма n первых членов в разложении $\Gamma(x, y, \lambda)$ по степеням λ резольвенты уравнения (10).

Если бы при некотором λ_0, $\Gamma_n(x, y, \lambda^n)$ осталась бы ограниченною при $\lambda^n = \lambda_0^n$, то при этом λ_0 оставалось бы ограниченною и $\Gamma(x, y, \lambda)$ и λ_0 не было-бы характеристическим числом уравнения (10).

§ 8. МИНОРЫ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ФРЕДГОЛЬМА

Положим

$$D\left(\begin{matrix} x_1, & \ldots, & x_m \\ y_1, & \ldots, & y_m \end{matrix}\,\middle|\,\lambda\right) =$$

$$= K\left(\begin{matrix} x_1, & \ldots, & x_m \\ y_1, & \ldots, & y_m \end{matrix}\right) - \frac{\lambda}{1}\int_a^b K\left(\begin{matrix} x_1, & \ldots, & x_m, & t_1 \\ y_1, & \ldots, & y_m, & t_1 \end{matrix}\right) dt_1 + \tag{29}$$

$$+\frac{\lambda^2}{1\cdot 2}\int\limits_a^b\int\limits_a^b K\begin{pmatrix} x_1, & \ldots, & x_m, & t_1 & t_2 \\ x_1, & \ldots, & x_m, & t_1 & t_2 \end{pmatrix} dt_1 dt_2 - \ldots .$$

Ряд (29) сходится при всех значениях λ, так как его член с нумером n

$$\frac{(-1)^n\lambda^n}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\int\limits_a^b\ldots\int\limits_a^b K\begin{pmatrix} x_1, & \ldots, & x_m, & t_1, & \ldots, & t_n \\ x_1, & \ldots, & x_m, & t_1, & \ldots, & t_n \end{pmatrix} dt_1\ldots dt_n$$

по теореме Адамара абсолютно меньше

$$\frac{|\lambda|^n}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\,(n+m)^{\frac{n+m}{2}}\,(b-a)^n\,A^{n+m},$$

а отношение этого числа к предшествующему ему равно

$$\frac{|\lambda|A(b-a)}{\sqrt{n}}\,\left(1+\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\,\left(1+\frac{1}{n+m-1}\right)^{\frac{n+m-1}{2}}$$

и бесконечно мало, если $n\to\infty$.

Функцию

$$D\left(\begin{matrix} x_1, & \ldots, & x_m \\ y_1, & \ldots, & y_m \end{matrix}\,\middle|\,\lambda\right) \tag{30}$$

называют *определителем Фредгольма порядка m.*

Теорема. *Определитель* (30) *порядка m удовлетворяет уравнениям*

$$\begin{aligned} D\left(\begin{matrix} x_1, & \ldots, & x_m \\ y_1, & \ldots, & y_m \end{matrix}\,\middle|\,\lambda\right) &= \lambda\int\limits_a^b K(x_1,t)D\left(\begin{matrix} t, & \ldots, & x_m \\ y_1, & \ldots, & y_m \end{matrix}\,\middle|\,\lambda\right)dt + M, \\ D\left(\begin{matrix} x_1, & \ldots, & x_m \\ y_1, & \ldots, & y_m \end{matrix}\,\middle|\,\lambda\right) &= \lambda\int\limits_a^b K(t,y_1)D\left(\begin{matrix} x_1, & \ldots, & x_m \\ t, & \ldots, & y_m \end{matrix}\,\middle|\,\lambda\right)dt + N, \end{aligned} \tag{31}$$

в которых M и N — линейные функции миноров порядка $m-1$.

Разложив определитель

$$K\begin{pmatrix} x_1, & \ldots, & x_m, & t_1, & \ldots, & t_n \\ y_1, & \ldots, & y_m, & t_1, & \ldots, & t_n \end{pmatrix}$$

по элементам первой отроки по формуле § 4:

$$K\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_m, & t_1, & \ldots, & t_n \\ y_1, & y_2, & \ldots, & y_m, & t_1, & \ldots, & t_n \end{pmatrix} =$$

$$= K(x_1,y_1)\;K\begin{pmatrix} x_2, & \ldots, & x_m, & t_1, & \ldots, & t_n \\ y_2, & \ldots, & y_m, & t_1, & \ldots, & t_n \end{pmatrix} -$$

$$-K(x_1,y_2)\;K\begin{pmatrix} x_2, & x_3, & \ldots, & x_{m-1}, & t_1, & \ldots, & t_n \\ y_1, & y_3, & \ldots, & y_{m-1}, & t_1, & \ldots, & t_n \end{pmatrix} - \ldots -$$

$$-K(x_1,y_m)\ K\begin{pmatrix} x_m, & x_2, & \dots, & x_{m-1}, & t_1, & \dots, & t_n \\ y_1, & y_2, & \dots, & y_{m-1}, & t_1, & \dots, & t_n \end{pmatrix}-$$

$$-K(x_1,t_1)\ K\begin{pmatrix} t_1, & x_2, & \dots, & x_m, & t_2, & \dots, & t_n \\ y_1, & y_2, & \dots, & y_m, & t_2, & \dots, & t_n \end{pmatrix}-\dots-$$

$$-K(x_1,t_n)\ K\begin{pmatrix} t_n, & x_2, & \dots, & x_m, & t_1, & \dots, & t_{n-1} \\ y_1, & y_2, & \dots, & y_m, & t_1, & \dots, & t_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Умножим полученное равенство на $dt_1 dt_2 \dots dt_n$ и интегрируем по $t_1, t_2, \dots, t_n$ в пределах от a до b. Получаем

$$(32)\qquad \int\limits_a^b \dots \int\limits_a^b K\begin{pmatrix} x_1, & \dots, & x_m, & t_1, & \dots, & t_n \\ y_1, & \dots, & y_m, & t_1, & \dots, & t_n \end{pmatrix} dt_1 \dots dt_n =$$

$$= K(x_1,y_1) \int\limits_a^b \dots \int\limits_a^b K\begin{pmatrix} x_2, & \dots, & x_m, & t_1, & \dots, & t_n \\ y_2, & \dots, & y_m, & t_1, & \dots, & t_n \end{pmatrix} dt_1 \dots dt_n -$$

$$-K(x_1,y_2) \int\limits_a^b \dots \int\limits_a^b K\begin{pmatrix} x_2, & x_3, & \dots, & x_{m-1}, & t_1, & \dots, & t_n \\ y_1, & y_3, & \dots, & y_{m-1}, & t_1, & \dots, & t_n \end{pmatrix} dt_1 \dots dt_n - \dots -$$

$$K(x_1,y_m) \int\limits_a^b \dots \int\limits_a^b K\begin{pmatrix} x_m, & x_2, & \dots, & x_{m-1}, & t_1, & \dots, & t_n \\ y_1, & y_2, & \dots, & y_{m-1}, & t_1, & \dots, & t_n \end{pmatrix} dt_1 \dots dt_n -$$

$$-n \int\limits_a^b \dots \int\limits_a^b K(x_1,t_1) K\begin{pmatrix} t_1, & x_2, & \dots, & x_m, & t_2, & \dots, & t_n \\ y_1, & y_2, & \dots, & y_m, & t_2, & \dots, & t_n \end{pmatrix} dt_1 \dots dt_n.$$

Последние, именно, n интегралов все равны между собою, так как отличаются один от другого только наименованием переменных интегрирования; например, переменные интегрирования $t_1, t_2, \dots, t_n$ в первом из них соответственно названы через $t_n, t_1, \dots, t_{n-1}$ в последнем.

Умножив равенство (32) на

$$\frac{(-1)^n \lambda^n}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}$$

давая n все значения от 1 до ∞ и складывая полученные равенства, получаем, обращая внимание на (29), что

$$(33)\qquad D\left(\begin{matrix} x_1, & \dots, & x_m \\ y_1, & \dots, & y_m \end{matrix}\,\middle|\,\lambda\right) - K\begin{pmatrix} x_1, & \dots, & x_m \\ y_1, & \dots, & y_m \end{pmatrix} =$$

$$= K(x_1,y_1)\left(D\left(\begin{matrix} x_2, & \dots, & x_m \\ y_2, & \dots, & y_m \end{matrix}\,\middle|\,\lambda\right) - K\begin{pmatrix} x_2, & \dots, & x_m \\ y_2, & \dots, & y_m \end{pmatrix}\right) -$$

$$-K(x_1,y_2)\left(D\left(\begin{matrix} x_2, & x_3, & \dots, & x_m \\ y_2, & y_2, & \dots, & y_m \end{matrix}\,\middle|\,\lambda\right) - K\begin{pmatrix} x_2, & x_3, & \dots, & x_m \\ y_1, & y_3, & \dots, & y_m \end{pmatrix}\right) - \dots -$$

$$-K(x_1,y_m)\left(D\left(\begin{array}{cccc} x_m, & x_2, & \ldots, & x_{m-1} \\ y_1, & y_2, & \ldots, & y_{m-1} \end{array}\middle|\,\lambda\right)-K\left(\begin{array}{cccc} x_m, & x_2, & \ldots, & x_{m-1} \\ y_1, & y_3, & \ldots, & y_{m-1} \end{array}\right)\right)+$$

$$+\lambda\int\limits_a^b K(x_1,t_1)K(x_1,t_1)D\left(\begin{array}{cccc} t_1, & x_2, & \ldots, & x_m \\ y_1, & y_2, & \ldots, & y_m \end{array}\middle|\,\lambda\right)dt_1.$$

Имеем, именно, например

$$\sum_{n=1}^{\infty}K(x_1,y_2)\,\frac{(-1)^n\lambda^n}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\int\limits_a^b\ldots\int\limits_a^b K\left(\begin{array}{ccccccc} x_2, & x_3, & \ldots, & x_{m-1}, & t_1, & \ldots, & t_n \\ y_1, & y_3, & \ldots, & y_{m-1}, & t_1, & \ldots, & t_n \end{array}\right)dt_1\ldots dt_n=$$

$$K(x_1,y_2)\left(D\left(\begin{array}{cccc} x_2, & x_3, & \ldots, & x_m \\ y_2, & y_2, & \ldots, & y_m \end{array}\middle|\,\lambda\right)-K\left(\begin{array}{cccc} x_2, & x_3, & \ldots, & x_m \\ y_1, & y_3, & \ldots, & y_m \end{array}\right)\right);$$

далее

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\lambda^n}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\int\limits_a^b\ldots\int\limits_a^b K(x,t_1)K\left(\begin{array}{ccccccc} t_1, & x_2, & \ldots, & x_{m-1}, & t_2, & \ldots, & t_n \\ y_1, & y_3, & \ldots, & y_{m-1}, & t_2, & \ldots, & t_n \end{array}\right)dt_1\ldots dt_n=$$

$$=\lambda\int\limits_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\lambda^n}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\int\limits_a^b\ldots\int\limits_a^b K\left(\begin{array}{ccccccc} t_1, & x_2, & \ldots, & x_m, & t_2, & \ldots, & t_n \\ y_1, & y_2, & \ldots, & y_m, & t_2, & \ldots, & t_n \end{array}\right)dt_2\ldots dt_n\right)dt_1=$$

$$\lambda\int\limits_a^b K(x_1,t_1)D\left(\begin{array}{cccc} t_1, & x_2, & \ldots, & x_m \\ y_1, & y_2, & \ldots, & y_m \end{array}\middle|\,\lambda\right)dt_1.$$

Так как по формуле параграфа 4-го:

$$K\left(\begin{array}{cccc} x_1, & x_2, & \ldots, & x_m \\ y_1, & y_2, & \ldots, & y_m \end{array}\right)=K(x_1,y_1)K\left(\begin{array}{ccc} x_2, & \ldots, & x_m \\ y_2, & \ldots, & y_m \end{array}\right)-$$

$$-K(x_1,y_2)K\left(\begin{array}{cccc} x_2, & x_3, & \ldots, & x_m \\ y_1, & y_3, & \ldots, & y_m \end{array}\right)-\ldots-K(x_1,y_m)K\left(\begin{array}{cccc} x_m, & x_2, & \ldots, & x_{m-1} \\ y_1, & y_2, & \ldots, & y_{m-1} \end{array}\right),$$

из (33) получаем:

$$D\left(\begin{array}{ccc} {}_1, & \ldots, & x_m \\ y_1, & \ldots, & y_m \end{array}\middle|\,\lambda\right)=\lambda\int\limits_a^b K(x_1,t)D\left(\begin{array}{cccc} t, & x_2, & \ldots, & x_m \\ y_1, & y_2, & \ldots, & y_m \end{array}\middle|\,\lambda\right)dt+M,$$

где
(34)
$$M=K(x_1,y_1)D\left(\begin{array}{ccc} x_2, & \ldots, & x_m \\ y_2, & \ldots, & y_m \end{array}\middle|\,\lambda\right)-K(x_1,y_2)D\left(\begin{array}{cccc} x_2, & x_3, & \ldots, & x_m \\ y_1, & y_3, & \ldots, & y_m \end{array}\middle|\,\lambda\right)-\ldots-$$

$$-K(x_1,y_m)D\left(\begin{array}{cccc} x_m, & x_2, & \ldots, & x_{m-1} \\ y_1, & y_2, & \ldots, & y_{m-1} \end{array}\middle|\,\lambda\right).$$

Таким образом первая из формул (31) нами восстановлена; отметим, что по выбору значков, первая часть формулы (34) аналогична формуле дающей разложение

$$K\begin{pmatrix} x_1, & \dots, & x_m \\ y_1, & \dots, & y_m \end{pmatrix}$$

по элементам первой строки.

Вторую из формул (31) мы получим перефразировав первое равенство (31) применив, его к союзному уравнению. В ней

(35)

$$N = K(x_1, y_1)D\left(\begin{array}{ccc|c} x_2, & \dots, & x_m & \\ y_2, & \dots, & y_m & \end{array}\lambda\right) - K(x_2, y_1)D\left(\begin{array}{cccc|c} x_1, & x_3, & \dots, & x_m & \\ y_2, & y_3, & \dots, & y_m & \end{array}\lambda\right) - \dots -$$

$$-K(x_m, y_1)D\left(\begin{array}{cccc|c} x_1, & x_2, & \dots, & x_{m-1} & \\ y_m, & y_2, & \dots, & y_{m-1} & \end{array}\lambda\right).$$

Замечание. При выводе формул (31) мы могли-бы пару (x_i, y_i) поставить на место пары (x_i, y_1) и вывести, формулы (31), отдавая предпочтение аргументу x_i перед аргументом x_1.

Ставя пару (x_i, y_i) на первое место, выводя формулы (31) в этом предположении и возвращая затем пару (x_i, y_i) на ее место, получаем:

(36)

$$D\left(\begin{array}{ccc|c} x_1, & \dots, & x_m & \\ y_1, & \dots, & y_m & \end{array}\lambda\right) = \lambda\int_a^b K(x_i, t)D\left(\begin{array}{ccccccc|c} x_1, & \dots, & x_{i-1}, & t, & x_{i+1}, & \dots, & x_m & \\ y_1, & \dots, & y_{i-1}, & y_i, & y_{i+1}, & \dots, & y_m & \end{array}\lambda\right) dt + M_i,$$

и

(37)

$$D\left(\begin{array}{ccc|c} x_1, & \dots, & x_m & \\ y_1, & \dots, & y_m & \end{array}\lambda\right) = \lambda\int_a^b K(t, y_i)D\left(\begin{array}{ccccccc|c} x_1, & \dots, & x_{i-1}, & x_i, & x_{i+1}, & \dots, & x_m & \\ y_1, & \dots, & y_{i-1}, & t, & y_{i+1}, & \dots, & y_m & \end{array}\lambda\right) dt + N_i,$$

В этих формулах, например,

$$N_i = K(x_i, y_i)D\left(\begin{array}{cccccc|c} x_1, & \dots, & x_{i-1}, & x_{i+1}, & \dots, & x_m & \\ y_1, & \dots, & y_{i-1}, & y_{i+1}, & \dots, & y_m & \end{array}\lambda\right) -$$

$$-K(x_1, y_i)D\left(\begin{array}{cccccc|c} x_2, \dots, & x_{i-1}, & x_i, & x_{i+1}, & \dots, & x_m & \\ y_2, \dots, & y_{i-1}, & y_1, & y_{i+1}, & \dots, & y_m & \end{array}\lambda\right) - \dots -$$

$$-K(x_m, y_i)D\left(\begin{array}{ccccccc|c} x_1, & \dots, & x_{i-1}, & x_i, & x_{i+1}, & \dots, & x_{m-1} & \\ y_1, & \dots, & y_{i-1}, & y_m, & y_{i+1}, & \dots, & y_{m-1} & \end{array}\lambda\right).$$

§ 9. ТЕОРЕМА О КОРНЯХ МИНОРА ПОРЯДКА m

Теорема. *Если λ_0 корень кратности n определителя $D(\lambda)$ и если $m \le n$, то λ_0 корень*

(30)
$$D\left(\begin{array}{ccc|c} x_1, & \dots, & x_m & \\ y_1, & \dots, & y_m & \end{array}\lambda\right)$$

кратности не выше $n - m$.

Положим, что λ_0 корень (30) кратности μ заменяя $x_1, \ldots, x_m$, $y_1, \ldots, y_m$ частными значениями $t_1, \ldots, t_m$, мы получим функцию

$$D\left(\begin{array}{ccc} t_1, & \ldots, & t_m \\ t_1, & \ldots, & t_m \end{array}\middle| \lambda\right), \tag{38}$$

имеющую λ_0 корнем кратности μ_1, не меньшей μ. Умножая (38) на $dt_1, \ldots, dt_m$ и интегрируя в пределах от a до b мы получаем функцию

$$\int\limits_a^b \ldots \int\limits_a^b D\left(\begin{array}{ccc} t_1, & \ldots, & t_m \\ t_1, & \ldots, & t_m \end{array}\middle| \lambda\right) dt_1 \ldots dt_m \tag{39}$$

кратности μ_2, которая не ниже μ_1. Но по формуле (29):

$$D\left(\begin{array}{ccc} t_1, & \ldots, & t_m \\ t_1, & \ldots, & t_m \end{array}\middle| \lambda\right) = K\left(\begin{array}{ccc} t_1, & \ldots, & t_m \\ t_1, & \ldots, & t_m \end{array}\right) - \frac{\lambda}{1}\int\limits_a^b K\left(\begin{array}{cccc} t_1, & \ldots, & t_m, & t_{m+1} \\ t_1, & \ldots, & t_m, & t_{m+1} \end{array}\right) dt_{m+1} +$$

$$+\frac{\lambda^2}{1\cdot 2}\int\limits_a^b \ldots \int\limits_a^b K\left(\begin{array}{ccccc} t_1, & \ldots, & t_m, & t_{m+1}, & t_{m+2} \\ t_1, & \ldots, & t_m, & t_{m+1}, & t_{m+2} \end{array}\right) dt_{m+1} dt_{m+2} - \ldots,$$

откуда

$$\int\limits_a^b \ldots \int\limits_a^b D\left(\begin{array}{ccc} t_1, & \ldots, & t_m \\ t_1, & \ldots, & t_m \end{array}\middle| \lambda\right) dt_1 \ldots dt_m = \int\limits_a^b \ldots \int\limits_a^b K\left(\begin{array}{ccc} t_1, & \ldots, & t_m \\ t_1, & \ldots, & t_m \end{array}\right) dt_1 \ldots dt_m -$$

$$-\frac{\lambda}{1}\int\limits_a^b \ldots \int\limits_a^b K\left(\begin{array}{cccc} t_1, & \ldots, & t_m, & t_{m+1} \\ t_1, & \ldots, & t_m, & t_{m+1} \end{array}\right) dt_1 \ldots dt_{m+1} +$$

$$\frac{\lambda^2}{1\cdot 2}\int\limits_a^b \ldots \int\limits_a^b K\left(\begin{array}{ccccc} t_1, & \ldots, & t_m, & t_{m+1}, & t_{m+2} \\ t_1, & \ldots, & t_m, & t_{m+1}, & t_{m+2} \end{array}\right) dt_1 \ldots dt_{m+2} - \ldots =$$

$$= c_m - \frac{\lambda}{1} c_{m+1} + \frac{\lambda^2}{1\cdot 2} c_{m+2} - \ldots,$$

где c коэффициенты в разложение $D(\lambda)$:

$$D(\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{1} c_1 + \frac{\lambda^2}{1\cdot 2} c_2 - \ldots$$

по степеням λ. Вследствие этого

$$\int\limits_a^b \ldots \int\limits_a^b D\left(\begin{array}{ccc} t_1, & \ldots, & t_m \\ t_1, & \ldots, & t_m \end{array}\middle| \lambda\right) dt_1 \ldots dt_m = (-1)^m D^{(m)}(\lambda).$$

Так как λ_0, корень кратности $n-m$ для $D^{(m)}(\lambda)$, из последнего равенства заключаем:

$$\mu \le \mu_1 \le \mu_2 = n-m,$$

т.е. μ не больше $n-m$, что и требовалось доказать.

Отметим, что из доказанного вытекает в качестве частного случая, что

$$D\left(\begin{array}{ccc|c} x_1, & \dots, & x_n & \multirow{2}{*}{λ} \\ y_1, & \dots, & y_n & \end{array}\right)$$

наверное λ_0 корнем не имеет.

§ 10. РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Мы указали в § 6-м, что однородное уравнение может только тогда иметь решение, отличное от нуля, когда в нем λ характеристическое число.

Положим, λ_0 корень кратности n функции $D(\lambda)$ покажем, что уравнение

$$\varphi(x) = \lambda_0 \int\limits_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt \tag{40}$$

действительно имеет решение, причем найдем все его линейно независимые решения.

Составим миноры

$$D\left(\begin{array}{c|c} x_1 & \lambda \\ y_1 & \end{array}\right),\ D\left(\begin{array}{cc|c} x_1, & x_2 & \lambda \\ y_1, & y_2 & \end{array}\right),\ \dots,\ D\left(\begin{array}{ccc|c} x_1, & \dots, & x_n & \lambda \\ y_1, & \dots, & y_n & \end{array}\right).$$

Последний их них, по только-что сделанному замечанию не имеет корнем число λ_0. Следовательно, перебирая миноры в возрастающем порядке, мы найдем первый из них, необращающийся в нуль при $\lambda = \lambda_0$. Положим, что это минор порядка m:

$$D\left(\begin{array}{ccc|c} x_1, & \dots, & x_m & \lambda \\ y_1, & \dots, & y_m & \end{array}\right). \tag{30}$$

По условию

$$D\left(\begin{array}{ccc|c} x_1, & \dots, & x_m & \lambda_0 \\ y_1, & \dots, & y_m & \end{array}\right) \ne 0, \qquad D\left(\begin{array}{ccc|c} x_1, & \dots, & x_\mu & \lambda_0 \\ y_1, & \dots, & y_\mu & \end{array}\right) = 0 \ \ (\mu < m). \tag{41}$$

Положим, что числа $x_1^{(0)}, \dots, x^{(0)}, y_1^{(0)}, \dots, y^{(0)}$ выбраны произвольно, но так что

$$\Delta = D\left(\begin{array}{ccc|c} x_1^{(0)}, & \dots, & x_m^{(0)} & \lambda_0 \\ y_1^{(0)}, & \dots, & y_m^{(0)} & \end{array}\right) \ne 0$$

— такой выбор чисел возможен вследствие первого неравенства (41).

Заменим в (30) аргументы $y_1, y_2, \ldots, y_m$ числами $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_m^{(0)}$, аргументы $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m$ числами $x_1^{(0)}, \ldots, x_{i-1}^{(0)}, x_{i+1}^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}$, а аргумент x_i, через x. Положим

$$\frac{D\left(\begin{array}{ccccccc|c} x_1^{(0)}, & \ldots, & x_{i-1}^{(0)}, & x, & x_{i+1}^{(0)}, & \ldots, & x_m^{(0)} & \lambda_0 \\ y_1^{(0)}, & \ldots, & y_{i-1}^{(0)}, & y_i^{(0)}, & y_{i+1}^{(0)}, & \ldots, & y_m^{(0)} & \end{array}\right)}{\Delta} = \Phi_i(x) \tag{43}$$

и докажем, что $\Phi_i(x)$ решение уравнения (40).

Для этого достаточно проделать указанную замену аргументов в уравнении (36) и заметить, что оно обратится в

$$\frac{D\left(\begin{array}{ccccccc|c} x_1^{(0)}, & \ldots, & x_{i-1}^{(0)}, & x, & x_{i+1}^{(0)}, & \ldots, & x_m^{(0)} & \lambda_0 \\ y_1^{(0)}, & \ldots, & y_{i-1}^{(0)}, & y_i^{(0)}, & y_{i+1}^{(0)}, & \ldots, & y_m^{(0)} & \end{array}\right)}{\Delta} =$$

$$= \lambda_0 \int\limits_a^b K(x,t) \frac{D\left(\begin{array}{ccccccc|c} x_2^{(0)}, & \ldots, & x_{i-1}^{(0)}, & t, & x_{i+1}^{(0)}, & \ldots, & x_m^{(0)} & \lambda_0 \\ y_1^{(0)}, & \ldots, & y_{i-1}^{(0)}, & y_i^{(0)}, & y_{i+1}^{(0)}, & \ldots, & y_m^{(0)} & \end{array}\right)}{\Delta}\, dt,$$

так как после подстановки λ_0 на место λ функция M_i, как зависящая только от миноров порядка ниже m, обратится тождественно в нуль.

Итак, нами найдены функции

$$\Phi_1(x),\ \Phi_2(x),\ \ldots,\ \Phi_i(x),\ \ldots,\ \Phi_m(x), \tag{43}$$

каждая из которых есть решение уравнения (40). Нетрудно убедиться, что функции (43) линейно независимы.

Для этого заметим, что

$$\Phi_i(x_i^{(0)}) = 1, \qquad \Phi_i(x_j^{(0)}) = 0 \text{ при } j \neq i.$$

Ясно, именно, из (42), что после замени x через $x_i^{(0)}$, $i \neq j$, два аргумента в числителе между собою равны.

Положим теперь, что функции (43) связаны линейной зависимостью.

Пусть

$$\alpha_1\Phi_1(x) + \ldots + \alpha_i\Phi_i(x) + \ldots + \alpha_m\Phi_m(x) = 0; \tag{44}$$

подставив в последнее неравенство $x_i^{(0)}$ вместо x и замечая, что в нем все слагаемые, кроме содержащегося $\Phi_i(x)$ обратятся после этого в нуль, видим, что

$$\alpha_i = 0.$$

Итак, все коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ равны нулю и равенство (44) невозможно. Мы докажем, что нами найдены все линейно независимые решения уравнения (40). Наше доказательство будет основано на вспомогательной теореме, которой мы посвятим следующий параграф.

Решения однородного уравнения (40) называются *фундаментальными* функциями ядра $K(x,y)$, соответствующими характеристическому числу λ_0. По этому определению, функции (43) образуют собрание некоторых m линейно независимых фундаментальных функций, отвечающих числу λ_0.

§ 11. ЛЕММА ФРЕДГОЛЬМА

Положим, что функция $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi(x) = \lambda_0 \int_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy. \tag{40}$$

Заменяя в (40) x через t:

$$\varphi(t) = \lambda_0 \int_a^b K(t,y)\varphi(y)\,dy,$$

умножим обе части на произвольную функцию $H(x,t)$ и выполним интегрирование по t в пределах от a до b. Мы получим:

$$\int_a^b H(x,t)\varphi(t)\,dt = \lambda_0 \int_a^b H(x,t)\left(\int_a^b K(t,y)\varphi(y)\,dy\right)dt = \tag{45}$$

$$= \lambda_0 \int_a^b \varphi(y)\left(\int_a^b H(x,t)K(t,y)\,dt\right)dy.$$

Обозначая в левой части (45) переменную интегрирования через y вместо t, умножая равенство (45) на λ_0 и складывая с (40) получаем по перенесении второго слагаемого из левой части, в правую:

$$\varphi(x) = \lambda_0 \int_a^b \left(K(x,y) - H(x,y) + \lambda_0 \int_a^b H(x,t)K(t,y)\,dt\right)\varphi(y)\,dy. \tag{46}$$

Итак, *если $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению (40), то она удовлетворяет и уравнению (46) в котором ядро*

$$K(x,y) - H(x,y) + \lambda_0 \int_a^b H(x,t)K(t,y)\,dt$$

зависит от произвольной функции $H(x,y)$.

В этом утверждении и заключается теорема, названная нами леммой Фредгольма.

§ 12. ВИД САМОГО ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Вводя в рассмотрение минор порядка $m+1$:

$$D\left(\begin{array}{ccc} x, & x_1, & \ldots, x_m \\ y, & y_1, & \ldots, y_m \end{array}\middle| \lambda\right),$$

запишем, прежде всего уравнение, которому он удовлетворяет, при этом запишем это уравнение исходя от уравнения союзного с данным. Исключая вторую из формул (31), имеем:

$$D\left(\begin{array}{ccc} x, & x_1, & \ldots, x_m \\ y, & y_1, & \ldots, y_m \end{array}\middle| \lambda\right) = \lambda_0 \int\limits_a^b K(t,y) D\left(\begin{array}{ccc} x, & x_1, & \ldots, x_m \\ t, & y_1, & \ldots, y_m \end{array}\middle| \lambda\right) dt +$$

$$K(x,y) D\left(\begin{array}{ccc} x_1, & x_2, & \ldots, x_m \\ y_1, & y_2, & \ldots, y_m \end{array}\middle| \lambda\right) - K(x_1,y) D\left(\begin{array}{ccc} x, & x_2, & \ldots, x_m \\ y_1, & y_2, & \ldots, y_m \end{array}\middle| \lambda\right) -$$

$$-K(x_2,y) D\left(\begin{array}{ccccc} x, & x_1, & x_3, & \ldots, & x_m \\ y_2, & y_1, & y_2, & \ldots, & y_m \end{array}\middle| \lambda\right) - \ldots -$$

$$-K(x_m,y) D\left(\begin{array}{cccc} x, & x_1, & \ldots, & x_{m-1} \\ y_m, & y_1, & \ldots, & y_{m-1} \end{array}\middle| \lambda\right).$$

Заменяя в последнем равенстве $x_1, x_2, \ldots, x_m$, $y_1, y_2, \ldots, y_m$ соответственно через $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}$, $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_m^{(0)}$, где $x_i^{(0)}$, $y_i^{(0)}$ числа, использованные нами в параграфе 10-м при составлении фундаментальных функций характеристического числа λ_0, деля обе части равенства на Δ и замечая, что

$$\frac{D\left(\begin{array}{cccccc} x, & x_1^{(0)}, & \ldots, & x_{i-1}^{(0)}, & x_{i+1}^{(0)}, & \ldots, & x_m^{(0)} \\ y_i, & y_1^{(0)}, & \ldots, & y_{i-1}^{(0)}, & y_{i+1}^{(0)}, & \ldots, & y_m^{(0)} \end{array}\middle| \lambda\right)}{\Delta} =$$

$$\frac{D\left(\begin{array}{ccccccc} x_1^{(0)}, & \ldots, & x_{i-1}^{(0)}, & x, & x_{i+1}^{(0)}, & \ldots, & x_m^{(0)} \\ y_1^{(0)}, & \ldots, & y_{i-1}^{(0)}, & y_i & y_{i+1}^{(0)}, & \ldots, & y_m^{(0)} \end{array}\middle| \lambda\right)}{\Delta} = \Phi_i(x),$$

получаем, заменив λ на λ_0:

$$\frac{D\left(\begin{array}{ccccccc} x, & x_1^{(0)}, & \ldots, & x_{i-1}^{(0)}, & x_{i+1}^{(0)}, & \ldots, & x_m^{(0)} \\ y_i, & y_1^{(0)}, & \ldots, & y_{i-1}^{(0)}, & y_{i+1}^{(0)}, & \ldots, & y_m^{(0)} \end{array}\middle| \lambda\right)}{\Delta} = \tag{48}$$

$$\lambda_0 \int\limits_a^b K(t,y) \frac{D\left(\begin{array}{ccccccc} t, & x_1^{(0)}, & \ldots, & x_{i-1}^{(0)}, & x_{i+1}^{(0)}, & \ldots, & x_m^{(0)} \\ y_i, & y_1^{(0)}, & \ldots, & y_{i-1}^{(0)}, & y_{i+1}^{(0)}, & \ldots, & y_m^{(0)} \end{array}\middle| \lambda\right)}{\Delta} dt +$$

$$+K(x,y) - K(x_1^{(0)},y)\Phi_1(x) - K(x_2^{(0)},y)\Phi_2(x) - \ldots - K(x_m^{(0)},y)\Phi_m(x).$$

Положим далее:

$$\frac{D\begin{pmatrix} x, & x_1^{(0)}, & \ldots, & x_{i-1}^{(0)}, & x_{i+1}^{(0)}, & \ldots, & x_m^{(0)} \\ y_i, & y_1^{(0)}, & \ldots, & y_{i-1}^{(0)}, & y_{i+1}^{(0)}, & \ldots, & y_m^{(0)} \end{pmatrix}\lambda\Bigg)}{\Delta} = H(x,y).$$

Равенство (48) дает

$$K(x,y) - H(x,y) + \lambda_0 \int_a^b K(t,y)H(x,t)\,dt =$$

$$= K(x_1^{(0)},y)\Phi_1(x) + K(x_2^{(0)},y)\Phi_2(x) + \ldots + K(x_m^{(0)},y)\Phi_m(x).$$

Положим теперь, что $\varphi(x)$ какое-нибудь решение уравнения

$$\varphi(x) = \lambda_0 \int_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy.$$

По лемме Фредгольма, $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi(x) = \lambda_0 \int_a^b \left(K(x,y) - H(x,y) + \lambda_0 \int_a^b H(x,t)K(t,y)\,dt \right) \varphi(y)\,dy -$$

$$= \lambda_0 \int_a^b \Big(K(x_1^{(0)},y)\Phi_1(x) + K(x_2^{(0)},y)\Phi_2(x) + \ldots + K(x_m^{(0)},y)\Phi_m(x) \Big) \varphi(y)\,dy =$$

$$= \Phi_1(x)\lambda_0 \int_a^b K(x_1^{(0)},y)\varphi(y)\,dy + \Phi_2(x)\lambda_0 \int_a^b K(x_2^{(0)},y)\varphi(y)\,dy +$$

$$+ \ldots + \Phi_m(x)\lambda_0 \int_a^b K(x_m^{(0)},y)\varphi(y)\,dy.$$

Последнее же равенство говорит, что $\varphi(x)$ линейная функция от (43), что и требовалось доказать.

Присоединяя к доказанному полученное в § 10-м, приходим к теореме:

Теорема. *Если λ_0 корень определителя Фредгольма кратности n и если первый из миноров, необращающийся тождественно в нуль при $\lambda = \lambda_0$ имеет порядок m, то*

$$1 \le m \le n$$

и уравнение (10) *имеет m линейно независимых фундаментальных функций, соответствующих числу λ_0.*

§ 13. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ ЯДРА $K(x, y)$ СОЮЗНОГО УРАВНЕНИЯ

Применяя сказанное в § 10-м к союзному уравнению

$$\psi(y) = \lambda \int_a^b K(t, y)\lambda(t)\, dt + F(y) \tag{49}$$

отмечаем прежде всего, что так как у уравнений данного и союзного общий определитель Фредгольма и общие миноры, число λ_0 — корень кратности n определителя Фредгольма и для союзного уравнения и минор порядка m первый не обращающийся в нуль. Вследствии этого, если $x_i^{(0)}$ и $y_i^{(0)}$ числа введенные в § 10, то функции

$$\Psi_i(y) = \frac{D\left(\begin{array}{ccccccc} x_1^{(0)}, & \ldots, & x_{i-1}^{(0)}, & x_i^{(0)}, & x_{i+1}^{(0)}, & \ldots, & x_m^{(0)} \\ y_1^{(0)}, & \ldots, & y_{i-1}^{(0)}, & y, & y_{i+1}^{(0)}, & \ldots, & y_m^{(0)} \end{array}\middle| \lambda\right)}{\Delta} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

— линейно независимые решения уравнения

$$\Psi(y) = \lambda_0 \int_a^b K(t, y)\Psi(t)\, dt,$$

причем, по сказанному в § 12-м, всякое решение последнего уравнения равно линейной функции от решения (49).

Теорема. *Если* $\Phi_1(x)$ *фундаментальная функция уравнения* (10), *отвечающая числу* λ_1, *а* $\Psi_2(x)$ *фундаментальная функция уравнения* (49), *союзного с ним, отвечающая числу* λ_2, *то, если*

$$\lambda_1 \neq \lambda_2,$$

справедливо равенство:

$$\int_a^b \Phi_1(x)\Psi_2(x)\, dx = 0. \tag{51}$$

Если две функции $\Phi_1(x)$ и $\Psi_2(x)$ удовлетворяют равенству (51), то говорят, что они взаимно *ортогональны.*

По условию имеем:

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) &= \lambda_1 \int_a^b K(x, t)\Phi(t)\, dt, \\ \Psi_2(x) &= \lambda_2 \int_a^b K(t, x)\Psi(x)\, dt. \end{aligned} \tag{52}$$

Умножая первое из этих равенств на $\Psi_2(x)$ и интегрируя в пределах от a до b, получаем

$$\int\limits_a^b \Phi_1(x)\Psi_2(x)\,dx = \int\limits_a^b \Psi_2(x)\left(\lambda_1\int\limits_a^b K(x,t)\Phi_1(t)\,dt\right)\,dx =$$

$$= \lambda_1\int\limits_a^b \Phi_1(t)\left(\int\limits_a^b K(x,t)\Psi_2(x)\right)\,dt.$$

Но вследствие второго из равенств (52):

$$\int\limits_a^b K(x,t)\Psi_2(x)\,dx = \frac{1}{\lambda_2}\,\Psi_2(t).$$

Значит

$$\int\limits_a^b \Phi_1(x)\Psi_2(x)\,dx = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\int\limits_a^b \Phi_1(t)\Psi_2(t)\,dt,$$

откуда, так как интегралы в правой и левой части отличаются только обозначением переменной

$$\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)\int\limits_a^b \Phi_1(x)\Psi_2(x)\,dx = 0.$$

Так как

$$1-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\neq 0,$$

то справедливо равенство (51), что и требовалось доказать.

§ 14. НЕОДНОРОДНОЕ УРАВНЕНИЕ В СЛУЧАЕ, КОГДА λ ЧИСЛО ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ

Если в уравнении

$$\varphi(x) = \lambda_0\int\limits_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy + f(x) \tag{53}$$

λ_0 число характеристическое, то формула § 6-го не дает его решения: резольвента

$$\frac{D\left(\begin{array}{c|c} x & \lambda \\ y & \end{array}\right)}{D(\lambda)},$$

стоящая в ней под знаком интеграла, перестает быть конечной, когда $\lambda=\lambda_0$. Мы установим, что уравнение (53) может иметь решение в этом случае только когда функция $f(x)$ в нем удовлетворяет некоторым условиям и что при соблюдении этих условий оно имеет бесчисленное множество решений.

Покажем сначала, что если уравнение (53) имеет одно решение, то оно имеет их бесчисленное множество. Положим, что λ_0 характеристическое число и что из миноров первый не обращающийся в нуль при $\lambda = \lambda_0$ имеет порядок n. Положим, $\varphi_0(x)$ решение уравнения (53)

$$\varphi_0(x) = \lambda_0 \int\limits_a^b K(x,t)\varphi_0(t)\,dt + f(x).$$

Положим

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \Psi(x)$$

и подставляя в (53), получаем для новой неизвестной $\Psi(x)$ уравнение

$$\Psi(x) = \lambda_0 \int\limits_a^b K(x,t)\Psi(t)\,dt.$$

Так как λ_0 характеристическое число, самое общее решение этого уравнения

$$\Psi(x) = c_1\Phi_1(x) + c_2\Phi_2(x) + \ldots + c_m\Phi_m(x),$$

если $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \ldots, \Phi_m(x)$ фундаментальные функции для данного уравнения, отвечающие, характеристическому числу λ_0, а $c_1, c_2, \ldots, c_m$ произвольно выбранные постоянные.

Следовательно самое общее решение уравнения (53)

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + c_1\Phi_1(x) + c_2\Phi_2(x) + \ldots + c_m\Phi_m(x).$$

Для нахождения всех решений уравнения (53) достаточно, значит, найти одно его какое нибудь решение $\varphi_0(x)$.

Положим

$$\Psi_1(x), \Psi_2(x), \ldots, \Psi_m(x)$$

— фундаментальные функции ядра уравнения, союзного с уравнением (55) отвечающие числу λ_0; положим, именно, что

$$\Psi_i(y) = \frac{D\left(\begin{array}{ccccccc|c} x_1^{(0)}, & \ldots, & x_{i-1}^{(0)}, & x_i^{(0)}, & x_{i+1}^{(0)}, & \ldots, & x_m^{(0)} & \lambda \\ y_1^{(0)}, & \ldots, & y_{i-1}^{(0)}, & y & y_{i+1}^{(0)}, & \ldots, & y_m^{(0)} & \end{array}\right)}{\Delta}.$$

Мы имеем

$$\Psi_i(x) = \lambda_0 \int\limits_a^b K(t,x)\Psi_i(t)\,dt. \tag{55}$$

Умножаем обе части уравнения (53) на $\Psi_i(x)$ и интегрируем в пределах от a до b.

Получаем, пользуясь уравнением (55):

$$\int_a^b \varphi(x)\Psi_i(x)\,dx = \lambda_0 \int_a^b \Psi_i(x)\left(\int_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt\right)dx + \int_a^b f(x)\Psi_i(x)\,dx =$$

$$= \lambda_0 \int_a^b \varphi(t)\left(\int_a^b K(x,t)\Psi_i(x)\,dx\right)dt + \int_a^b f(x)\Psi_i(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b \varphi(t)\Psi_i(t)\,dt + \int_a^b f(x)\Psi_i(x)\,dx,$$

откуда

$$\int_a^b f(x)\Psi_i(x)\,dx = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{56}$$

Условия (56) и есть те условия, о которых мы упоминали.

Итак уравнение (55) может иметь решение только тогда, когда соблюдены m условий (56); остается доказать что при соблюдении этих условий оно действительно имеет решение.

Для доказательства этого, примем во внимание снова минор (47) порядка $m+1$ и напишем то интегральное уравнение, которому он удовлетворяет этот раз исходя от уравнения (10). Применяя первую формулу (31), пишем

$$D\left(\begin{array}{cccc|c} x, & x_1, & \ldots, & x_m & \\ y, & y_1, & \ldots, & y_m & \end{array}\lambda\right) = \lambda_0 \int_a^b K(x,t) D\left(\begin{array}{cccc|c} t, & x_1, & \ldots, & x_m & \\ y, & y_1, & \ldots, & y_m & \end{array}\lambda\right) dt +$$

$$+ K(x,y) D\left(\begin{array}{ccc|c} x_1, & \ldots, & x_m & \\ y_1, & \ldots, & y_m & \end{array}\lambda\right) - K(x,y_1) D\left(\begin{array}{cccc|c} x_1, & x_2, & \ldots, & x_m & \\ y, & y_2, & \ldots, & y_m & \end{array}\lambda\right) -$$

$$- K(x,y_2) D\left(\begin{array}{cccc|c} x_2, & x_1, & \ldots, & x_m & \\ y_2, & y_1, & \ldots, & y_m & \end{array}\lambda\right) - \ldots - K(x,y_m) D\left(\begin{array}{cccc|c} x_m, & x_1, & \ldots, & x_{m-1} & \\ y, & y_1, & \ldots, & y_{m-1} & \end{array}\lambda\right).$$

Заменяя x_i, y_i снова числами $x_i^{(0)}$, $y_i^{(0)}$ § 10 и деля обе части равенства на Δ, получаем пользуясь равенствами (50):

$$\frac{D\left(\begin{array}{cccc|c} x, & x_1^{(0)}, & \ldots, & x_m^{(0)} & \\ y, & y_1^{(0)}, & \ldots, & y_m^{(0)} & \end{array}\lambda_0\right)}{\Delta} = \lambda_0 \int_a^b K(x,t) \frac{D\left(\begin{array}{cccc|c} t, & x_1^{(0)}, & \ldots, & x_m^{(0)} & \\ y, & y_1^{(0)}, & \ldots, & y_m^{(0)} & \end{array}\lambda_0\right)}{\Delta} dt +$$

$$+ K(x,y) - K(x,y_1^{(0)})\Psi_1(y) - K(x,y_2^{(0)})\Psi_2(y) - \ldots - K(x,y_m^{(0)})\Psi_m(y). \tag{57}$$

Положим теперь

$$\varphi_0(x) = f(x) + \lambda_0 \int_a^b f(y) \frac{D\left(\begin{array}{cccc|c} x, & x_1^{(0)}, & \ldots, & x_m^{(0)} & \\ y, & y_1^{(0)}, & \ldots, & y_m^{(0)} & \end{array}\lambda_0\right)}{\Delta} dy \tag{58}$$

и докажем, что $\varphi_0(x)$ есть решение уравнения (53).

Подставляя в (53) вместо $\varphi(x)$ его значение (58), имеем в левой части равенства

$$f(x)+\lambda_0\int_a^b f(y)\frac{D\left(\begin{array}{cccc|c} x, & x_1^{(0)}, & \ldots, & x_m^{(0)} & \lambda_0 \\ y, & y_1^{(0)}, & \ldots, & y_m^{(0)} & \end{array}\right)}{\Delta}\,dy.$$

В правой же части равенства оказывается, как нетрудно убедиться, заменяя в (58) x на t:

$$f(x)+\lambda_0\int_a^b K(x,t)f(t)\,dt+$$

$$+\lambda_0^2\int_a^b K(x,t)\left(\int_a^b f(y)\frac{D\left(\begin{array}{cccc|c} t, & x_1^{(0)}, & \ldots, & x_m^{(0)} & \lambda_0 \\ y, & y_1^{(0)}, & \ldots, & y_m^{(0)} & \end{array}\right)}{\Delta}\,dy\right)dt=$$

$$=f(x)+\lambda_0\int_a^b K(x,t)f(t)\,dt+$$

$$+\lambda_0^2\int_a^b f(y)\left(\int_a^b K(x,t)\frac{D\left(\begin{array}{cccc|c} t, & x_1^{(0)}, & \ldots, & x_m^{(0)} & \lambda_0 \\ y, & y_1^{(0)}, & \ldots, & y_m^{(0)} & \end{array}\right)}{\Delta}\,dt\right)dy=$$

$$=f(x)+\lambda_0\int_a^b K(x,t)f(t)\,dt+\lambda_0\int_a^b f(y)\frac{D\left(\begin{array}{cccc|c} x, & x_1^{(0)}, & \ldots, & x_m^{(0)} & \lambda_0 \\ y, & y_1^{(0)}, & \ldots, & y_m^{(0)} & \end{array}\right)}{\Delta}\,dy-$$

$$-\lambda_0\int_a^b K(x,y)f(y)\,dy+\lambda_0\,K(x,y_1^{(0)})\int_a^b f(y)\Psi_1(y)\,dy+$$

$$+K(x,y_2^{(0)})\int_a^b f(y)\Psi_2(y)\,dy+\ldots+K(x,y_m^{(0)})\int_a^b f(y)\Psi_m(y)\,dy.$$

В полученном выражении второе и четвёртое слагаемые сокращаются; последние m слагаемых равны нулю на основании условий (56); оставшиеся же первое и третье слагаемые не отличны от суммы (59), стоящей в левой части равенства. Итак $\varphi_0(x)$ есть действительно решение уравнения (53).

Полученное мы соберем в теореме: *Для того, чтобы уравнение*

$$\varphi(x)=\lambda_0\int_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy+f(x) \tag{53}$$

в котором λ_0 *характеристическое число, не обращающее в нуль первый минор порядка* n *имело решение, необходимо и достаточно, чтобы были соблюдены* n *условий* (56), *в которых* Ψ_i *фундаментальные функции союзного уравнения. Если эти условия соблюдены, то одно из решений уравнения дается равенством* (58).

ГЛАВА ТРЕТЬЯ
УРАВНЕНИЯ С СИММЕТРИЧНЫМ ЯДРОМ

§ 1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ ОБ УРАВНЕНИЯХ С СИММЕТРИЧНЫМ ЯДРОМ

Положим, что в уравнении

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy + f(x) \tag{1}$$

ядро $K(x,y)$ — симметрическая функция от x и y:

$$K(x,y) = K(y,x). \tag{2}$$

Мы будем считать $K(x,y)$ непрерывной (или состоящей из кусков непрерывных функций). В этом случае

I. *Все повторные ядра симметрические функции от x и y.* Действительно:

$$K_{(2)}(x,y) = \int_a^b K(x,t)K(t,y)\,dt = \int_a^b K(t,y)K(x,t)\,dt =$$

$$= \int_a^b K(y,t)K(t,x)\,dt = K_{(2)}(y,x),$$

$$K_{(3)}(x,y) = \int_a^b K(x,t)K_{(2)}(t,y)\,dt = \int_a^b K_{(2)}(t,y)K(x,t)\,dt =$$

$$= \int_a^b K_{(2)}(y,t)K(t,x)\,dt = K_{(3)}(y,x)$$

и т. д.

II. *Все определители*

$$K\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \dots, & x_m \\ y_1, & y_2, & \dots, & y_m \end{pmatrix} \tag{3}$$

не меняются от перестановки аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *с аргументами* $y_1, y_2,$ $\ldots, y_m$. Действительно:

$$K\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_m \\ y_1, & y_2, & \ldots, & y_m \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K(x_1,y_1) & K(x_1,y_2) & \ldots & K(x_1,y_m) \\ K(x_2,y_1) & K(x_2,y_2) & \ldots & K(x_2,y_m) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K(x_m,y_1) & K(x_m,y_2) & \ldots & K(x_m,y_m) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} K(x_1,y_1) & K(x_2,y_1) & \ldots & K(x_m,y_1) \\ K(x_1,y_2) & K(x_2,y_2) & \ldots & K(x_m,y_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K(x_m,y_1) & K(x_m,y_2) & \ldots & K(x_m,y_m) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} K(y_1,x_1) & K(y_1,x_2) & \ldots & K(y_1,x_m) \\ K(y_2,x_1) & K(y_2,x_2) & \ldots & K(y_2,x_m) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K(y_m,x_1) & K(y_m,x_2) & \ldots & K(y_m,x_m) \end{vmatrix} = K\begin{pmatrix} y_1, & y_2, & \ldots, & y_m \\ x_1, & x_2, & \ldots, & x_m \end{pmatrix}.$$

III. *Все миноры определителя Фредгольма не меняются от перестановки аргументов* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *с аргументами* $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Действительно:

$$D\left(\begin{matrix} x_1, & \ldots, & x_m \\ y_1, & \ldots, & y_m \end{matrix}\,\middle|\,\lambda\right) = K\begin{pmatrix} x_1, & \ldots, & x_m \\ y_1, & \ldots, & y_m \end{pmatrix} - \frac{\lambda}{1}\int\limits_a^b K\begin{pmatrix} x_1, & \ldots, & x_m, & t_1 \\ y_1, & \ldots, & y_m, & t_1 \end{pmatrix} dt_1 +$$

$$+\frac{\lambda^2}{1\cdot 2}\int\limits_a^b\int\limits_a^b K\begin{pmatrix} x_1, & \ldots, & x_m, & t_1, & t_2 \\ y_1, & \ldots, & y_m, & t_1, & t_2 \end{pmatrix} dt_1 dt_2 - \ldots$$

и от указанной перестановки не меняются определители (3).

IV. *Уравнение, союзное с уравнением* (1), *не отлично от уравнения* (1). Действительно имеем:

$$\varphi(x) = \lambda\int\limits_a^b K(y,x)\varphi(y)\,dy + f(x) = \lambda\int\limits_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy.$$

Из (IV) мы получаем как следствие: *фундаментальные функции ядра уравнения (1) есть также и фундаментальные функции ядра уравнения союзного с ним.*

Последнее-же заключение вследствие теоремы § 13 приводит к следствию, которое мы выскажем в виде теоремы:

Теорема. *Фундаментальные функции симметрического ядра, соответствующие различным характеристическим числам, взаимно ортогональны.*

Действительно, если $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ фундаментальные функции ядра уравнения (1), отвечающие числам λ_1 и λ_2, то так как $\Phi_2(x)$ есть фундаментальная функция ядра уравнения союзного с (1), отвечающая числу λ_2, на основании теоремы параграфа 13-го

$$\int\limits_a^b \Phi_1(x)\Phi_2(x)\,dx = 0.$$

§ 2. ОСОБЕННОСТИ УРАВНЕНИЙ С СИММЕТРИЧЕСКИМ ЯДРОМ

Одна из особенностей таких уравнений указана в параграфе 1-м.

1) *Фундаментальные функции ядра такого уравнения, отвечающие различным характеристическим числам, взаимно ортогональные.*

В следующих параграфах мы укажем еще на следующее:

2) *Симметрическое ядро имеет по крайней мере одно характеристическое число,* т.е. определитель Фредгольма имеет по крайней мере один корень. Это свойство может не принадлежать уравнению с несимметричным ядром.

Для простого примера положим, $a = 0$, $b = 2\pi$ и

$$K(x, y) = \sin x \cdot \cos y.$$

Нетрудно убедиться, что все определители K равны нулю, кроме самого ядра и что

$$\int\limits_a^b \sin t \, \cos t \, dt = 0.$$

Следовательно

$$D(\lambda) = 1.$$

3) *Все характеристические числа симметрического ядра вещественны.*

4) *Полюсы резольвенты уравнения с симметрическим ядром простые.*

5) *Если кратность корня λ_0 определителя Фредгольма $D(\lambda)$ равна n, то характеристическому числу λ_0 отвечает n линейно независимых фундаментальных функций.*

В случае несимметрического ядра число фундаментальных функций равно порядку первого не обращающегося в нуль минора и как мы видим в параграфе 11-м, про него можно сказать только, что оно между 1 и n.

§ 3. НЕРАВЕНСТВА ШВАРЦА И КОШИ

Считая, что (ω) какая нибудь область, докажем, что

$$\left(\int\limits_{(\omega)} \varphi\psi \, d\omega\right)^2 \leq \int\limits_{(\omega)} \varphi^2 \, d\omega \int\limits_{(\omega)} \psi^2 \, d\omega. \tag{4}$$

Также докажем, что

$$\left(\sum ab\right)^2 \leq \sum a^2 \sum b^2. \tag{5}$$

Под знаком $\sum ab$ мы понимаем или сумму ограниченного числа слагаемых или абсолютно сходящийся ряд.

Для установления неравенства (4) замечаем, что каковы бы ни были числа λ и μ
$$\int\limits_{(\omega)} (\lambda\varphi + \mu\psi)^2\, d\omega \geq 0.$$
Но
$$\int\limits_{(\omega)} (\lambda\varphi + \mu\psi)^2\, d\omega = \lambda^2 \int\limits_{(\omega)} \varphi^2\, d\omega + 2\lambda\mu \int\limits_{(\omega)} \varphi\psi\, d\omega + \mu^2 \int\limits_{(\omega)} \psi^2\, d\omega.$$
Так как в правой части последнего равенства стоит форма 2-ой степени, все значения которой неотрицательны, то ее дискриминант не положителен и, значит
$$\left(\int\limits_{(\omega)} \varphi\psi\, d\omega\right)^2 \leq \int\limits_{(\omega)} \varphi^2\, d\omega \int\limits_{(\omega)} \psi^2\, d\omega,$$
что и требовалось доказать.

Аналогичным образом можно доказать и неравенство (5), так как
$$\sum (\lambda a + \mu b)^2 = \lambda^2 \sum a^2 + 2\lambda\mu \sum ab + \mu^2 \sum b^2$$
при всех значениях λ и μ не отрицательна, справедливо неравенство (5).

§ 4. ТЕОРЕМА О СУЩЕСТВОВАНИИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ЧИСЛА У СИММЕТРИЧНОГО ЯДРА

Теорема. *Если ядро симметрично, то определитель Фредгольма имеет по крайней мере один корень.*

Предположим противное. Если определитель $D(\lambda)$ не имеет корней, то резольвента
$$\frac{D\left(\begin{array}{c|c} x & \lambda \\ y & \end{array}\right)}{D(\lambda)},$$
числитель и знаменатель которой целые функции от λ, разложима в ряд по степеням λ, сходящийся при всех значениях λ.

Для малых значений λ мы нашли в § 3-м главы первой разложение
$$\Gamma(x, y, \lambda) = \frac{D\left(\begin{array}{c|c} x & \lambda \\ y & \end{array}\right)}{D(\lambda)} = K(x, y) + \lambda K_{(2)}(x, y) + \lambda^2 K_{(3)}(x, y) + \dots. \tag{6}$$
Это разложение, следовательно, при нашем предположении действительно при всех значениях λ. Заметим, что в рассматриваемом нами случае (6) действительно ряд, а не многочлен.

Не трудно убедиться, именно, что при сделанных предположениях ни одно из повторных ядер не равно тождественно нулю.

Положим противное. Пусть ядро $K_{(n)}(x,y)$ равно нулю. Тогда следующее за ним ядро тоне нуль так как

$$K_{(n+1)}(x,y) = \int\limits_a^b K_{(2)}(x,t)K(t,y)\,dt.$$

Следовательно, можно считать, что в равном нулю ядре значок n равен четному числу $2l$ и что ядро $K_{(2l)}(x,y)$ или первое или второе из обращающихся в нуль.

Но, вследствие симметричности ядра,

$$K_{(2l)}(x,y) = \int\limits_a^b K_{(2)}(x,t)K_{(2)}(t,y)\,dt = \int\limits_a^b K_{(2)}(x,t)K_{(2)}(y,t)\,dt$$

и значит

$$K_{(2l)}(x,y) = \int\limits_a^b K^2_{(l)}(x,t)\,dt = 0. \tag{7}$$

Последнее же равенство при непрерывности $K_{(l)}(x,y)$ (или когда $K(x,y)$ состоит из ограниченного числа непрерывных кусков) возможно только тогда, когда

$$K_{(l)}(x,y) = 0.$$

Но $l = \dfrac{n}{2}$ меньше $n-1$, если $n > 2$ и равно единице, если $n = 2$. Значит полученный результат противоречит предположению, что $K_{(n)}(x,y)$ первое или второе ядро не обращающееся в нуль, что и требовалось доказать.

Заметим что мы доказали более, чем предполагали. Желая доказать, что ни одно из чисел $K_{(n)}(x,y)$ не нуль при произвольных x и y, мы установили что отличны от нуля числа $K_{(2)}(x,x)$.

Возвращаемся к доказательству теоремы.

Если ряд (7) сходится при всех λ, то и ряд

$$\frac{D\left(\begin{array}{c|c} t & \lambda \\ t & \end{array}\right)}{D(\lambda)} = K(t,t) + \lambda K_{(2)}(t,t) + \lambda^2 K_{(3)}(t,t) + \ldots$$

сходится при всех λ. Интегрируя его по t в пределах от a до b и вспоминая доказанное в § 5-м главы второй, получаем положив

$$U_n = \int\limits_a^b K_{(n)}(t,t), \tag{8}$$

что

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = \int\limits_a^b \frac{D\left(\begin{array}{c|c} t & \lambda \\ t & \end{array}\right)}{D(\lambda)}\,dt = U_1 + \lambda U_2 + \lambda^2 U_3 + \ldots,$$

причем ряд сходится при всех значениях λ. Заменив в этом ряде λ на $-\lambda$, получаем ряд

$$U_1 - \lambda U_2 + \lambda^2 U_3 - \lambda^3 U_4 + \dots,$$

сходящийся при всех λ; вычитая его из предыдущего, деля на 2λ, получаем ряд

$$U_2 + \lambda^2 U_4 + \lambda^4 U_6 + \dots,$$

также сходящийся при всех λ; в последнем ряде все члены положительны и не равны нулю. Применяя к нему признак Даламбера, заключаем, что предел отношения

$$\frac{\lambda^2 U_{2l+2}}{U_{2l}} \tag{9}$$

должен быть нулем. Иначе точная высшая граница отношения

$$\frac{U_{2l}}{U_{2l+2}}$$

была-бы ограничена и радиус сходимости ряда не превышал бы числа q_0.

Изучим ближе отношение (9). Имеем, пользуясь симметричностью ядра

$$U_{2l} = \int_a^b K_{(2l)}(t,t)\,dt = \int_a^b \left(\int_a^b K_{(l+1)}(t,z) K_{(l-1)}(z,t)\,dz \right) dt =$$

$$= \int_a^b \left(\int_a^b K_{(l+1)}(t,z) K_{(l-1)}(t,z)\,dz \right) dt.$$

Итак

$$U_{2l} = \int_a^b \int_a^b K_{(l+1)}(t,z) K_{(l-1)}(t,z)\,dzdt.$$

Применяя, неравенство Шварца и пользуясь формулой (7) и определением (8) числа U_n, имеем:

$$U_{2l} \le \int_a^b \int_a^b K^2_{(l+1)}(t,z)\,dzdt \ \int_a^b \int_a^b K^2_{(l-1)}(t,z)\,dzdt =$$

$$= \int_a^b \left(\int_a^b K^2_{(l+1)}(t,z)\,dz \right) dt \ \int_a^b \left(\int_a^b K^2_{(l-1)}(t,z)\,dz \right) dt =$$

$$= \int_a^b K_{(2l+2)}(t,t)\,dt \ \int_a^b K_{(2l-2)}(t,t)\,dt = U_{2l+2} U_{2l-2}.$$

Из полученного неравенства

$$U_{2l}^2 \le U_{2l+2} U_{2l-2}$$

заключаем
$$\frac{U_{2l+2}}{U_{2l}} \geq \frac{U_{2l}}{U_{2l-2}}.$$
Из полученного ясно, что отношение (9) возрастает и значит пределом числа нуль не имеет. Придя к противоречию, заключаем, что высказанная теорема справедлива.

§ 5. ТЕОРЕМА О ВЕЩЕСТВЕННОСТИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

Теорема. *Характеристические числа симметрического ядра вещественны.*

Положим противное. Пусть имеется мнимое характеристическое число

$$\lambda = a + bi; \tag{10}$$

положим, что

$$\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2 \tag{11}$$

соответствующая ему фундаментальная функция, которая тоже может не быть вещественной. Так как (11) фундаментальная функция числа (10), то

$$\varphi_1 + i\varphi_2 = (a + bi) \int_a^b K(x, y)(\varphi_1(y) + i\varphi_2(y))\, dy. \tag{12}$$

Так как коэффициенты определителя Фредгольма вещественны, число $a - bi$ так же его корень. Изменяя в (12) знак i получаем:

$$\varphi_1 - i\varphi_2 = (a - bi) \int_a^b K(x, y)(\varphi_1(y) - i\varphi_2(y))\, dy, \tag{12}$$

откуда ясно, что $\varphi_1 - i\varphi_2$ фундаментальная функция числа $a - bi$. Так как числа $a + bi$ и $a - bi$ различны, их фундаментальные функции ортогональны. Значит

$$\int_a^b (\varphi_1 + i\varphi_2)(\varphi_1 - i\varphi_2)\, dx = \int_a^b (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)\, dx = 0,$$

откуда
$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0 \ \text{ и } \ \varphi = 0,$$
чего быть не может.

§ 6. ТЕОРЕМА О ПОЛЮСЕ РЕЗОЛЬВЕНТЫ

Теорема. *Если ядро симметрично, то полюсы резольвенты простые.*

Положим, что некоторый полюс резольвенты, характеристическое число λ_0, имеет порядок выше первого. Разложение вблизи полюса λ_0 имеет тогда вид

$$\Gamma(x, y, \lambda) = \frac{\varphi_0(x)}{(\lambda - \lambda_0)^k} + \frac{\varphi_1(x)}{(\lambda - \lambda_0)^{k-1}} + \dots, \tag{13}$$

где

$$k > 1, \qquad \varphi_0(x) \neq 0.$$

Для удобства мы не отмечаем, что коэффициенты разложения (13) зависят от y.

Подставляя (13) в уравнение

$$\Gamma(x, y, \lambda) = \lambda \int_a^b K(x, t)\Gamma(t, y, \lambda)\, dt + K(x, y)$$

и приравнивая коэффициенты, при одинаковых степенях $\lambda - \lambda_0$, получаем обращая особое внимание на то, что $K(x, y)$ голоморфно вблизи λ_0:

$$\varphi_0(x) = \lambda_0 \int_a^b K(x, t)\varphi_0(t)\, dt, \tag{14}$$

$$\varphi_1(x) = \lambda_0 \int_a^b K(x, t)\varphi_1(t)\, dt + \int_a^b K(x, t)\varphi_0(t)\, dt.$$

Умножаем второе уравнение (14) на $\varphi_0(x)$ и интегрируем в пределах от a до b.

Пользуясь симметричностью ядра и первым уравнением (14) получаем:

$$\int_a^b \varphi_1(x)\varphi_0(x)\, dx = \lambda_0 \int_a^b \varphi_0(x) \left(\int_a^b K(x, t)\varphi_1(t)\, dt \right) dx +$$

$$+ \int_a^b \varphi_0(x) \left(\int_a^b K(x, t)\varphi_0(t)\, dt \right) dx =$$

$$= \lambda_0 \int_a^b \varphi_1(t) \left(\int_a^b K(x, t)\varphi_0(x)\, dx \right) + \int_a^b \varphi_0(t) \left(\int_a^b K(x, t)\varphi_0(x)\, dx \right) dt =$$

$$= \lambda_0 \int_a^b \varphi_1(t) \left(\int_a^b K(t, x)\varphi_0(x)\, dx \right) dt + \int_a^b \varphi_0(t) \left(\int_a^b K(t, x)\varphi 0(x)\, dx \right) dt =$$

$$= \int_a^b \varphi_0(t)\varphi_1(t)\, dt + \frac{1}{\lambda_0} \int_a^b \varphi_0^2(t)\, dt.$$

Сокращая левую часть с первых слагаемым правой, получаем:

$$\int_a^b \varphi_0^2(t)\, dt = 0,$$

откуда $\varphi_0(t) = 0$, что противоречит условию.

§ 7. ТЕОРЕМА О ЧИСЛЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Теорема. *Если ядро симметрично и λ_0 корень определителя Фредгольма кратности n, то ему соответствует n фундаментальных функций.*

Так как по, доказанному в прошлом параграфе

$$\frac{D\left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \middle| \lambda\right)}{D(\lambda)}$$

имеем λ_0 простым полюсом, то если λ_0 корень кратности $n-1$ для знаменателя $D(\lambda)$, то λ_0 корень кратности $n-1$ для числителя $D\left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \middle| \lambda\right)$.

Установив, что λ_0 корень кратности $n-1$ для первого минора $D\left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \middle| \lambda\right)$, мы укажем, что λ_0 корень кратности $n-2$ для второго минора

$$D\left(\begin{array}{cc} x_1, & x_2 \\ y_1, & y_2 \end{array} \middle| \lambda\right),$$

…, корень кратности $n-m$ для минора порядка m:

$$D\left(\begin{array}{ccc} x_1, & \dots, & x_m \\ y_1, & \dots, & y_m \end{array} \middle| \lambda\right). \tag{15}$$

Напомним, что в параграфе 9-м главы второй было установлено, что кратности выше $n-m$ он быть не может. Так как для первого минора он корень кратности $n-1$, можно предположить, что для второго минора он кратности $n-2, \dots,$ для m-ного корень кратности $n-m$, доказав, что для следующего он корень кратности $n-m-1$.

Мы докажем, что если λ_0 корень миноров порядка m кратности не ниже $n-k$, то для миноров порядка $m+1$ он кратности не ниже $n-k-1$.

Минор порядка $m+1$ удовлетворяет уравнению

$$D\left(\begin{array}{cccc} x, & x_1, & \dots, & x_m \\ y, & y_1, & \dots, & y_m \end{array} \middle| \lambda\right) = \lambda \int\limits_a^b K(x,t) D\left(\begin{array}{cccc} x, & x_1, & \dots, & x_m \\ y, & y_1, & \dots, & y_m \end{array} \middle| \lambda\right) dt + \tag{16}$$

$$+K(x,y)D\left(\begin{array}{ccc} x_1, & \dots, & x_m \\ y_1, & \dots, & y_m \end{array} \middle| \lambda\right) - K(x,y_1)D\left(\begin{array}{cccc} x_1, & x_2, & \dots, & x_m \\ y_1, & y_2, & \dots, & y_m \end{array} \middle| \lambda\right) - \dots -$$

$$-K(x,y_m)D\left(\begin{array}{cccc} x_m, & x_1, & \dots, & x_{m-1} \\ y, & y_1, & \dots, & y_{m-1} \end{array} \middle| \lambda\right).$$

Делим обе части последнего равенства на $D^{(k)}(\lambda)$ имеющую λ_0 корнем кратности $n-k$. Так как каждое слагаемое свободного члена правой части (16) делится по предположению на $(\lambda - \lambda_0)^{n-k}$, то после деления свободный член останется функцией голоморфной вблизи λ_0. Мы получим

$$
(17)\quad \frac{D\left(\begin{array}{cccc} x, & x_1, & \ldots, & x_m \\ y, & y_1, & \ldots, & y_m \end{array}\middle| \lambda\right)}{D^{(k)}(\lambda)} = \lambda \int\limits_a^b K(x,t) \frac{D\left(\begin{array}{cccc} t, & x_1, & \ldots, & x_m \\ y, & y_1, & \ldots, & y_m \end{array}\middle| \lambda\right)}{D^{(k)}(\lambda)}\, dt + A.
$$

Если кратность корня λ_0 для минора порядка $m+1$ ниже $n-k-1$, то левая часть последнего равенства имеет λ_0 полюсом по крайней мере второго порядка.

Положим

$$
\frac{D\left(\begin{array}{cccc} x, & x_1, & \ldots, & x_m \\ y, & y_1, & \ldots, & y_m \end{array}\middle| \lambda\right)}{D^{(k)}(\lambda)} = \frac{\varphi_0(x)}{(\lambda-\lambda_0)^n} + \frac{\varphi_1(x)}{(\lambda-\lambda_0)^{n-1}} + \ldots,
$$

где

$$
n > 1, \qquad \varphi_0(x) \neq 0
$$

и подставляя в (17), получаем, обратив внимание на то, что A голоморфно вблизи λ_0, снова систему уравнений (14), из которых заключаем, как и в прошлом параграфе, что $\varphi_0(x) = 0$.

Итак, кратность, корня λ_0 для минора порядка $m+1$ не ниже $n-k-1$.

Итак, корень λ_0 для второго минора кратности не ниже $n-2$, так как по теореме § 9-го прошлой главы кратности выше $n-2$ он быть не может, то кратность его равна $n-2$; продолжая так далее, увидим, что кратность минора порядка m равна $n-m$, кратность минора порядка $n-1$ равна 1 и что первый минор не имеющий корнем λ_0 есть минор порядка n, про который мы знаем раньше, что он корнем λ_0 не имеет.

Отсюда же вытекает, что число фундаментальных функций числа λ_0 равно n.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ
РАЗЛОЖЕНИЕ ПО ФУНДАМЕНТАЛЬНЫМ ФУНКЦИЯМ

§ 1. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ И НОРМАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ФУНКЦИЙ

Последовательность функций, заданных в промежутке (a, b)

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots \tag{1}$$

мы будем называть *ортогональной* и *нормальной*, если для любых двух функций $\varphi_i(x)$ и $\varphi_j(x)$ справедливо соотношение

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx = 0, \quad \text{если} \quad i \neq j, \quad \text{и} \quad \int_a^b \varphi_i^2(x)\,dx = 1. \tag{2}$$

Если система функций (1) ортогональна и нормальна, то первые n из них, при всяком n, линейно независимы.

Предположим, что некоторые n функций связаны такой зависимостью:

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \ldots + \alpha_i\varphi_i(x) + \ldots + \alpha_n\varphi_n(x) = 0. \tag{3}$$

Выбирая одну из них $\varphi_i(x)$, умножая обе части равенства на $\varphi_i(x)$ и интегрируя, получаем вследствие (2)

$$\alpha_i = 0.$$

Отсюда ясно, что в соотношении (3) все коэффициенты α_i равны нулю.

Лемма. *Если имеется последовательность функций*

$$\psi_1(x),\ \psi_2(x),\ \ldots,\ \psi_n(x),\ \ldots \tag{4}$$

первые n которых, при всяком n, линейно-независимы, то заменяя функции (4) их линейными комбинациями мы можем образовать систему функций ортогональную и нормальную так, что каждая функция $\varphi_n(x)$ будет выражаться линейно через первые n функций (4) и каждая функция $\psi_n(x)$ будет линейно выражаться через первые n функций (1).

Положим

$$\varphi_1(x) = \alpha_1\psi_1(x) \tag{5_1}$$

и выбираем α_1 так, чтобы было

$$\alpha_1^2 \int\limits_a^b \psi_1(x)^2\, dx = 1;$$

$\varphi_1(x)$ удовлетворяет второму условию (2). Число α_1 очевидно не нуль. Получаем затем

$$\varphi_2(x) = \alpha_2\varphi_1(x) + \beta_2\psi_2(x) \tag{5_2}$$

и выбирая α_2, β_2, так, чтобы $\varphi_2(x)$ была ортогональна к $\varphi_1(x)$ и удовлетворяла 2-му условию (2).

Условие ортогональности требует

$$\int\limits_a^b \varphi_1(x)\varphi_2(x)\, dx = \alpha_2 + \beta_2 \int\limits_a^b \varphi_1(x)\psi_2(x)\, dx = 0,$$

$$\alpha_2 = -\beta_2 \int\limits_a^b \varphi_1(x)\psi_2(x)\, dx.$$

После подстановки этого значения в (5_2) получим $\varphi_2(x)$ в виде $\beta_2\omega_2(x)$, где $\omega_2(x)$ не нуль; иначе функции $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ были связаны линейной зависимостью. Подобрав затем β_2 так, чтобы было

$$\beta_2^2 \int\limits_a^b \omega_2^2(x)\, dx = 1,$$

найдем для β_2 значение, отличное от нуля. Затем полагаем

$$\varphi_3(x)\alpha_3\varphi_1(x) + \beta_3\varphi_2(x) + \gamma_3\psi_3(x) \tag{5_3}$$

и подбираем α_3 и β_3 так, чтобы $\varphi_3(x)$ была ортогональна к $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$. Получим уравнения

$$\int\limits_a^b \varphi_1(x)\varphi_3(x)\, dx = \alpha_3 + \gamma_3 \int\limits_a^b \varphi_1(x)\psi_3(x)\, dx = 0,$$

$$\int\limits_a^b \varphi_2(x)\varphi_3(x)\, dx = \beta_3 + \gamma_3 \int\limits_a^b \varphi_2(x)\psi_3(x)\, dx = 0,$$

найдя из которых α_3 и β_3 и подставив их в (5) дадим $\varphi_3(x)$ вид $\gamma_3\omega_3(x)$, где $\omega_3(x)$ не нуль; иначе $\psi_3(x)$ выражалась-бы линейно через $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ и, значит, через $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$; число γ_3 подбираем опять так, чтобы было соблюдено условие

$$\gamma_3^2 \int\limits_a^b \omega_3^2(x)\, dx = 1;$$

так как γ_3 не нуль, $\psi_3(x)$ выражается линейно через $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)$. Положив затем

$$\varphi_4(x) = \alpha_4\varphi_1(x) + \beta_4\varphi_2(x) + \gamma_4\varphi_3(x) + \delta_4\psi_4(x), \tag{5}$$

возобновляем рассуждения, которые, очевидно, можем продолжать беспрепятственно далее.

Положим теперь, что дано уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy + f(x) \tag{5}$$

с симметричным ядром. Найдем его характеристические числа и фундаментальные функции им соответствующие.

Если некоторое число λ_i корень кратности n_i определителя Фредгольма, то ему соответствует n_i, фундаментальных функций.

Выписывая теперь различные корни определителя Фредгольма в возрастающем порядке их абсолютных значений и подписывая под каждым его фундаментальные функции, мы получим таблицу

$$\overbrace{\varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}, \ldots, \varphi_{n_1}^{(1)}}^{\lambda_1}, \overbrace{\varphi_1^{(2)}, \varphi_2^{(2)}, \ldots, \varphi_{n_2}^{(2)}}^{\lambda_2}, \ldots, \overbrace{\varphi_1^{(i)}, \varphi_2^{(i)}, \ldots, \varphi_{n_i}^{(i)}}^{\lambda_i}, , \ldots. \tag{7}$$

Функции φ, принадлежащие различным группам ортогональны. Каждую-же группу функций можно преобразовать по лемме так, чтобы группа стала ортогональной и нормальной. Так как функция, ортогональная к каждой из функций $\varphi^{(i)}$ группы (i) ортогональна к любой линейной комбинации, после преобразования функции разных групп останутся ортогональными.

Значит таблица (7) может быть путем подобающего выбора фундаментальных функций отдельных характеристических чисел заменена другой, в нижней строке которой стоит ортогональная и нормальная последовательность.

Записывая теперь таблицу (7) мы будем в первой строке повторять характеристическое число столько раз, какова его кратность; изменив обозначение фундаментальных функций мы будем их нумеровать значками от 1 до ∞, и будем характеристическому числу приписывать нумер, стоящий у его функции; так что несколько равных характеристических чисел, в числе равном кратности числа, будут снабжены различными смежными нумерами. Таблица (7) примет вид

$$\begin{array}{ccccccc} \lambda_1, & \lambda_2, & \lambda_3, & \ldots, & \lambda_i, & \lambda_{i+1}, & \ldots \\ \varphi_1(x), & \varphi_2(x), & \varphi_3(x), & \ldots, & \varphi_i(x), & \varphi_{i+1}(x) & \ldots, \end{array} \tag{8}$$

причем

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3| \leq \ldots \leq |\lambda_i| \leq |\lambda_{i+1}| \leq \ldots.$$

Говоря в дальнейшем о последовательности фундаментальных функций, мы всегда будем предполагать, что она указанным образом нормирована и выписана в таблице (7).

§ 2. НЕРАВЕНСТВО БЕССЕЛЯ

Положим дана ортогональная и нормальная система функций (8).

Желая оценить значение некоторой функции $f(x)$, про которую мы предположим только, что квадрат ее интегрируем — при помощи суммы вида

$$a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \ldots + a_n\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k, \tag{9}$$

условимся подбирать коэффициенты a_k так, чтобы интеграл

$$J = \int_a^b \left(f - \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k\right)^2 dx, \tag{10}$$

называемый *квадратичной погрешностью*, был наименьшим.

Трактуя $a_1, a_2, \ldots, a_n$ как переменные независимые, а J как их функцию из теории maxima и minima функций многих переменных знаем, что для того, чтобы J была minimum прежде всего необходимо, чтобы

$$\frac{\partial J}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial a_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial J}{\partial a_i} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial J}{\partial a_n} = 0.$$

Составляя эти уравнения, находим, пользуясь нормальностью и ортогональностью функций

$$\frac{\partial J}{\partial a_i} == -2\int_a^b \left(f - \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k\right)\varphi_i\,dx = -2\left(\int_a^b f\varphi_i\,dx - \sum_{k=1}^{n} a_k\int_a^b \varphi_k\varphi_i\,dx\right) =$$

$$= -2\left(\int_a^b f\varphi_i\,dx - a_i\right) = 0,$$

откуда

$$a_i = \int_a^b f\varphi_i\,dx. \tag{11}$$

Действительно под знаком суммы интегралов, только один, в котором $k = i$, не равен нулю и равен единице.

Правило вычисления коэффициентов, данное равенством (11), называется *правилом Фурье.*

Вычисляя коэффициенты по правилу Фурье приведем в соответствие функции $f(x)$ ряд:

$$f(x) \sim a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \ldots + a_i\varphi_i(x) + \ldots, \tag{12}$$

где a_i дано равенством (11).

Мы не утверждаем, что ряд (12) сходится и даже, если он сходится, что сумма его равна $f(x)$. Ряд (12) мы будем называть *рядом Фурье*.

Вычислим теперь квадратичную погрешность суммы n первых членов ряда (12). Имеем:

$$\int_a^b \left(f(x) - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x)\right)^2 dx = \int_a^b f^2(x)\,dx - 2\sum_{k=1}^n a_k \int_a^b f(x)\varphi_k(x)\,dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^n a_k^2 \int_a^b \varphi_k^2(x)\,dx + 2\sum_{k}^{n}\sum_{<\,l}^{n} a_k a_l \int_a^b \varphi_k(x)\varphi_l(x)\,dx.$$

В сумме в последнем слагаемом суммирование распространено по значкам k и l отличным друг от друга; вследствие этого каждое из этих слагаемых нуль; в предпоследнем слагаемом все коэффициенты вследствие нормальности функций (1) равны единице; наконец во втором слагаемом вследствие (11) коэффициент при a_k равен a_k. Значит

$$\int_a^b \left(f(x) - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x)\right)^2 dx = \int_a^b f^2(x)\,dx - \sum_{k=1}^n a_k^2 \geq 0.$$

Из полученного неравенства прежде всего заключаем, квадратичная погрешность суммы первых членов ряда (18) убывает с возрастанием n; затем, что справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 \leq \int_a^b f^2(x)\,dx. \tag{13}$$

Последнее неравенство называется *неравенством Бесселя.*

Из неравенства (13) заключаем, что ряд

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + \ldots$$

сходящийся; сумма n первых членов его возрастает, так как это ряд с положительными членами и остается меньше

$$\int_a^b f^2(x)\,dx. \tag{14}$$

Теорема. *Ряд из квадратов коэффициентов ряда Фурье, соответствующего любой функции с интегрируемым квадратом, всегда сходится и сумма его не больше интеграла от квадрата функции $f(x)$.*

§ 3. ЗАМКНУТЫЕ И ПОЛНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Последовательность (1) мы назовем *замкнутой по отношению к некоторому классу функции* (например, к классу полиномов, к классу непрерывных функций и т.д.), если для каждой функции этого класса справедливо равенство

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + \ldots = \int\limits_a^b f^2(x)\,dx. \tag{15}$$

Если равенство (15) справедливо для всех функций с интегрируемым квадратом, то последовательность (1) мы назовем *замкнутой.*

Примечание. Говоря о функциях $f(x)$ с интегрируемым квадратом мы исключаем такие, для которых интеграл (14) равен нулю. Для такой функции все коэффициенты Фурье были-бы нулями.

Мы назовем последовательность (1) *полной*, если не существует функции с интегрируемым квадратом $f(x)$, не связанной с (1) линейной зависимостью такой, что

$$\int\limits_a^b \varphi_i(x)\psi(x)\,dx = 0$$

при всяком i.

Теорема. *Если последовательность* (1) *замкнутая, то она и полная.*

Положим противное. Пусть последовательность (1) замкнутая, но не полная. Тогда существует функция $\psi(x)$ такая, что справедливо равенство (16). Все коэффициенты Фурье a_i для функции $\psi(x)$ нули; между тем вследствие замкнутости должно быть

$$\int\limits_a^b \psi^2(x)\,dx = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + \ldots = 0,$$

что является противоречием. Значит утверждение теоремы справедливо.

Если число функций в (1) ограничено, то последовательность его не полная и значит не замкнутая.

Действительно, положим, что число их n:

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x). \tag{17}$$

Возьмем какую-нибудь функцию $\varphi(x)$, не связанную с ними линейной зависимостью; положим

$$\psi(x) = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \ldots + a_n\varphi_n + b\varphi$$

и подберем $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ так, чтобы $\psi(x)$ была ортогональна к функциям (17).

Последнее всегда возможно: условие ортогональности ψ и φ_i:

$$\int\limits_a^b \psi(x)\varphi_i(x)\,dx = a_i + b\int\limits_a^b \varphi(x)\varphi_i(x)\,dx = 0, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Из написанных n уравнений всегда можно найти $a_1, a_2, \dots, a_n$, оставляя b произвольным.

Функция $\psi(x)$ с функциями (17) линейной зависимостью не связана; иначе $\varphi(x)$ выражалась бы линейно через функции (17), чего нет по предположению.

§ 4. ТЕОРЕМА СТЕКЛОВА

Теорема. *Если ортргональная и нормальная система функций*

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \dots,\ \varphi_n(x),\ \dots$$

замкнутая, если функция $f(x)$ непрерывна и если ряд Фурье

$$a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x) + \ldots \tag{12}$$

$$a_n = \int\limits_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx$$

ей соответствующий сводится равномерно, то сумма его равна $f(x)$:

$$f(x) = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \ldots + a_i\varphi_i(x) + \ldots. \tag{18}$$

Так как ряд (12) *сходится равномерно, сумма его непрерывная функция от x.*

Обозначим через, $R(x)$ разность между $f(x)$ и суммой ряда (12):

$$R(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x).$$

Как разность непрерывных функций, $R(x)$ непрерывна. Но в силу замкнутости

$$\int\limits_a^b R^2(x)\,dx = \int\limits_a^b f^2(x)\,dx - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = 0,$$

так как $R(x)$ непрерывна, последнее равенство возможно только тогда, когда $R(x) = 0$ и равенство (18) справедливо.

Положим теперь, что $f(x)$ какая нибудь функция с интегрируемым квадратом и приведем в соответствие ей ряд Фурье

$$f(x) \sim a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x) + \ldots. \tag{12}$$

Напомним, что ряд (12) может быть расходящимся.

Положим

$$f(x) = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x) + R_n(x). \tag{19}$$

Имеем

$$\int\limits_a^b R_n^2(x)\,dx = \int\limits_a^b f^2(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

Если система (1) замкнута, то

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b R_n^2(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f^2(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right) = 0.$$

Значит каково-бы ни было ε, есть такое N, что при $n \geq N$

$$\int_a^b R_n^2(x)\,dx < \varepsilon.$$

Положим теперь, что $F(x)$ какая нибудь функция с интегрируемым квадратом.

Умножим (19) на $F(x)$ и возьмем интеграл в каком нибудь промежутке (α, β) внутри (a, b). Получим

$$\int_\alpha^\beta f(x)F(x)\,dx = a_1 \int_\alpha^\beta \varphi_1(x)F(x)\,dx + a_2 \int_\alpha^\beta \varphi_2(x)F(x)\,dx + \ldots +$$

$$+a_n \int_\alpha^\beta \varphi_n(x)F(x)\,dx + \int_\alpha^\beta R_n(x)F(x)\,dx.$$

По неравенству Шварца имеем

$$\left| \int_\alpha^\beta R_n(x)F(x)\,dx \right|^2 \leq \int_\alpha^\beta R_n^2(x)\,dx \int_\alpha^\beta F^2(x)\,dx \leq \int_a^b R_n^2(x)\,dx \int_a^b F^2(x)\,dx.$$

Значит, если $n \geq N$, то

$$\left| \int_\alpha^\beta R_n(x)F(x)\,dx \right|^2 < A\varepsilon,$$

если мы обозначим через A интеграл от квадрата $F(x)$.

Но то, что оценено нами, есть дополнительный член ряда, получаемого умножением (18) на $F(x)$ и интегрированием между α и β.

Значит указанный ряд всегда сходится и мы имеем:

$$\int_\alpha^\beta f(x)F(x)\,dx = a_1 \int_\alpha^\beta \varphi_1 F\,dx + a_2 \int_\alpha^\beta \varphi_2 F\,dx + \ldots + a_n \int_\alpha^\beta \varphi_n F\,dx + \ldots. \tag{20}$$

Равенство (20) образует важную теорему, которую Стеклов называет важным следствием условия замкнутости.

Условимся называть отношение

$$\frac{1}{\beta - \alpha} \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

средним значением $f(x)$ з промежутке (α, β). Положив в (20) $F(x) = 1$ и разделив обе части равенства на $\beta - \alpha$, получаем:

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = a_1\left(\frac{1}{\beta-\alpha}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\varphi_1(x)\,dx\right) + a_2\left(\frac{1}{\beta-\alpha}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\varphi_2(x)\,dx\right) + \ldots +$$

$$+a_n\left(\frac{1}{\beta-\alpha}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\varphi_n(x)\,dx\right) + \ldots.$$

Последнее равенство можно проформулировать в виде теоремы:

Если система функций (1) *замкнута, то любое среднее значение функции с интегрируемым квадратом разложимо в сходящийся ряд с коэффициентами Фурье по средним значениям фундаментальных функций.*

§ 5. ЗАМЕЧАНИЯ ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ РЯДОВ

В дальнейшем нам придется иметь дело с рядами вида

$$\omega_1(x)\omega_1(y) + \omega_2(x)\omega_2(y) + \ldots + \omega_n(x)\omega_n(y) + \ldots. \tag{21}$$

При этом мы будем различать следующие случаи.

I) ряд равномерно сходится как функция от x, что значит если $R_n(x, y)$ его дополнительный член, то

$$|R_n(x, y)| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad n \geq N_y, \tag{α}$$

где N_y число, зависящее от y.

В этом случае сумма ряда непрерывная функция от x и его можно почленно интегрировать по x.

II) ряд равномерно сходится как функция от y, что значит

$$|R_n(x, y)| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad n \geq N_x, \tag{β}$$

где N_x число зависящее от x.

В этом случае сумма ряда непрерывная функция от y и его можно почленно интегрировать по y.

III) Ряд равномерно сходится как функция от x и y, что значит

$$|R_n(x, y)| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad n \geq N, \tag{γ}$$

где N число не зависящее ни от x, ни от y, но только от ε.

Сумма ряда непрерывная функция от двух переменных x и y и его можно почленно интегрировать последовательно по x и по y.

Если соблюдать оба условия (I) и (II), то после интегрирования ряда (21) например, по y получится ряд,

$$\omega_1(x)\int\limits_{a}^{y}\omega_1(y)\,dy + \omega_2(x)\int\limits_{a}^{y}\omega_2(y)\,dy + \ldots, \tag{22}$$

про который еще неизвестно удовлетворяет ли он условию (1).

Но в случае соблюдения условия (III), в виду независимости N от y из (γ) имеем:

$$\left|\int_a^b R_n(x,y)\,dy\right| < \varepsilon(b-a),$$

откуда ясно, что ряд (21) подходит под случай (I).

§ 6. РАЗЛОЖЕНИЕ ЯДРА $K(x,y)$

Положим, что функции (1) образуют нормальную и ортогональную систему фундаментальных функций уравнения

$$\varphi(x) = \lambda\int_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy + f(x) \tag{6}$$

с симметричным ядром.

Имеем ряд Фурье, соответствующий ядру $K(x,y)$. Так как

$$\varphi_k(x) = \lambda_k\int_a^b K(x,y)\varphi_k(y)\,dy,$$

имеем для коэффициента a_k:

$$a_k = \int_a^b K(x,y)\varphi_k(y)\,dx = \int_a^b K(y,x)\varphi_k(x)\,dx = \frac{1}{\lambda_k}\,\varphi_k(y),$$

значит

$$K(x,y) \sim \frac{\varphi_1(x)\varphi_1(y)}{\lambda_1} + \frac{\varphi_2(x)\varphi_2(y)}{\lambda_2} + \ldots + \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(y)}{\lambda_k} + \ldots. \tag{22}$$

Отметим, что даже в случае расходимости ряда (22) по неравенству Бесселя ряд

$$\frac{\varphi_1^2(y)}{\lambda_1^2} + \frac{\varphi_2^2(y)}{\lambda_2^2} + \ldots + \frac{\varphi_k^2(y)}{\lambda_1^2} + \ldots \tag{23}$$

сходится и сумма его меньше интеграла от квадрата $K(x,y)$.

Далее, так как

$$\frac{\varphi_1^2(y)}{\lambda_1^2} + \frac{\varphi_2^2(y)}{\lambda_2^2} + \ldots + \frac{\varphi_n^2(y)}{\lambda_n^2} \le \int_a^b K^2(x,y)\,dx,$$

умножив неравенство на dy и проинтегрировав по y в пределах от a до b, получаем

$$\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \ldots + \frac{1}{\lambda_n^2} \le \int_a^b\int_a^b K^2(x,y)\,dxdy.$$

Следовательно, для всякого уравнения с симметрическим ядром ряд

$$\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{\lambda_2^2}+\ldots+\frac{1}{\lambda_n^2}+\ldots$$

сходится.

Теорема. *Если ряд Фурье* (22), *соответствующий симметрическому ядру $K(x,y)$, сходится, как функция от x и y, то сумма его равна $K(x,y)$:*

$$K(x,y)=\frac{\varphi_1(x)\varphi_1(y)}{\lambda_1}+\frac{\varphi_2(x)\varphi_2(y)}{\lambda_2}+\frac{\varphi_3(x)\varphi_3(y)}{\lambda_3}+\ldots \tag{24}$$

Если число фундаментальных функций ограничено, то теорема остается справедливой и равенство (24) справедливо без всяких оговорок; в оговорках о сходимости ряда, именно, нет надобности в этом случае.

Примечание. Напомним, что излагая теорию уравнений с симметричным ядром, мы считали $K(x,y)$ непрерывной функцией (или состоящей из отдельных кусков непрерывных функций). Мы пользовались этим условием в § 5-м прошлой главы,

Положим

$$K(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)\varphi_k(y)}{\lambda_k}+R(x,y). \tag{25}$$

Так как ряд (22) сходится как функция от x и y, сумма его непрерывная функция от x и y, и значит $R(x,y)$ как и $K(x,y)$ непрерывная функция от x и y (или состоит из кусков непрерывных функций). При этом $R(x,y)$, очевидно, симметрическая функция от x и y. Вследствие этого по теореме § 5-го главы третьей уравнение, ядро которого $R(x,y)$ имеет характеристическое число и фундаментальную функцию. Пусть c это число и $\psi(x)$ эта фундаментальная функция. Тогда по (25)

$$\psi(x)=c\int_a^b R(x,y)\psi(y)\,dy=c\int_a^b K(x,y)\psi(y)\,dy-c\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}\int_a^b\varphi_k(y)\psi(y)\,dy. \tag{26}$$

Покажем, что $\psi(x)$ ортогональна ко всем функциям $\varphi_i(x)$.

Умножив (26) на $\varphi_i(x)$ и интегрируя имеем:

$$\int_a^b\psi(x)\varphi_i(x)\,dx=c\int_a^b\varphi_i(x)\left(\int_a^b R(x,y)\psi(y)\,dy\right)dx=$$

$$=c\int_a^b\psi(y)\left(\int_a^b R(y,x)\varphi_i(x)\,dx\right)dy.$$

Но

$$\int_a^b R(y,x)\varphi_i(x)\,dx=\int_a^b K(y,x)\varphi_i(x)\,dx-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(y)}{\lambda_k}\int_a^b\varphi_k(x)\varphi_i(x)dx=$$

$$= \frac{\varphi_i(y)}{\lambda_i} - \frac{\varphi_i(y)}{\lambda_i} = 0.$$

Значит действительно,

$$\int_a^b \psi(x)\varphi_i(x)\,dx = 0$$

при всех i и равенство (26) имеет вид

$$\psi(x) = c\int_a^b K(x,y)\psi(y)\,dy;$$

оно говорит, что c одно из характеристических чисел уравнения (6), и $\psi(x)$ его фундаментальная функция. Если c корень определителя Фредгольма кратности m и ему отвечают функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, то, значит,

$$\psi(x) = \alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \ldots + \alpha_m\varphi_m(x),$$

но, в этом равенстве все коэффициенты равны нулю; именно

$$\alpha_i = \int_a^b \psi(x)\varphi_i(x)\,dx = 0.$$

Итак $\psi(x)$ тождественно нуль, что противоречит условию § 5 главы третьей, если $R(x,y)$ не нуль и равенство (24) справедливо.

§ 7. ЯДРА, ЧИСЛО ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ КОТОРЫХ ОГРАНИЧЕНО

Из доказанной теоремы вытекает, что когда число характеристических чисел ограничено, то ядро $K(x,y)$ имеет вид

$$K(x,y) = \frac{\varphi_1(x)\varphi_1(y)}{\lambda_1} + \frac{\varphi_2(x)\varphi_2(y)}{\lambda_2} + \ldots + \frac{\varphi_m(x)\varphi_m(y)}{\lambda_m}$$

Докажем обратное. Если ядро $K(x,y)$ имеет вид

$$K(x,y) = \omega_1(x)\omega_1(y) + \omega_2(x)\omega_2(y) + \ldots \omega_m(x)\omega_m(y),$$

то число его характеристических чисел ограничено.

Для доказательства вычисляем определитель K порядка n. Имеем:

$$K\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \\ y_1, & y_2, & \ldots, & y_n \end{pmatrix} =$$

$$
= \begin{vmatrix} \sum\limits_{l=1}^{m} \omega_l(x_1)\omega_l(y_1) & \sum\limits_{l=1}^{m} \omega_l(x_1)\omega_l(y_2) & \dots & \sum\limits_{l=1}^{m} \omega_l(x_1)\omega_l(y_n) \\ \sum\limits_{l=1}^{m} \omega_l(x_2)\omega_l(y_1) & \sum\limits_{l=1}^{m} \omega_l(x_2)\omega_l(y_2) & \dots & \sum\limits_{l=1}^{m} \omega_l(x_2)\omega_l(y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{l=1}^{m} \omega_l(x_n)\omega_l(y_1) & \sum\limits_{l=1}^{m} \omega_l(x_n)\omega_l(y_2) & \dots & \sum\limits_{l=1}^{m} \omega_l(x_n)\omega_l(y_n) \end{vmatrix}
$$

Разбивая определитель на слагаемые, получаем

$$
K\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \dots, & x_n \\ y_1, & y_2, & \dots, & y_n \end{pmatrix} =
$$

$$
= \sum \omega_{l_1}(y_1)\omega_{l_2}(y_2)\dots\omega_{l_n}(y_n) \begin{vmatrix} \omega_{l1}(x_1) & \omega_{l2}(x_1) & \dots & \omega_{ln}(x_1) \\ \omega_{l1}(x_2) & \omega_{l2}(x_2) & \dots & \omega_{ln}(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{l1}(x_n) & \omega_{l2}(x_n) & \dots & \omega_{ln}(x_n) \end{vmatrix}.
$$

Если $n > m$, то в определителях правой части, имеющих n столбцов, некоторые два столбца неизбежно составлены из равных элементов. Значит, если $n > m$, то

$$
K\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \dots, & x_n \\ y_1, & y_2, & \dots, & y_n \end{pmatrix} = 0.
$$

Составляя определитель Фредгольма, видим, что все коэффициенты при степенях λ с показателями большими m нули и, что

$$
D(\lambda) = 1 - \lambda \int\limits_a^b K(t_1, t_1)\, dt_1 + \frac{\lambda^2}{1 \cdot 2} \int\limits_a^b \int\limits_a^b K\begin{pmatrix} t_1, & t_2 \\ t_1, & t_2 \end{pmatrix} dt_1 dt_2 - \dots +
$$

$$
+ \frac{(-1)^m \lambda^m}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m} \int\limits_a^b \dots \int\limits_a^b K\begin{pmatrix} t_1, & \dots, & t_m \\ t_1, & \dots, & t_m \end{pmatrix} dt_1 \dots dt_m.
$$

Определитель Фредгольма, следовательно, полином и ядру $K(x, y)$ отвечает ограниченное число характеристических чисел.

§ 8. РАЗЛОЖЕНИЕ ПОВТОРНЫХ ЯДЕР

В параграфе 7-м главы 2-ой мы установили, что если λ_0 полюс резольвенты ядра $K(x, y)$, то λ_0^n полюс резольвенты ядра $K_{(n)}(x, y)$ и что все полюсы этой резольвенты находятся среди чисел λ_0^n.

Так как, если $\varphi(x)$ фундаментальная функция числа λ_0, то $\varphi(x)$ также и фундаментальная функция числа λ_0^n для ядра $K_{(n)}(x, y)$, ясно что числу λ^n соответствует столько фундаментальных функций, сколько их соответствует числам $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, удовлетворяющим условию

$$
\lambda_1^n = \lambda_2^n = \ldots = \lambda_k^n = \lambda^n;
$$

кратность числа λ^n для ядра $K_{(n)}(x,y)$ равна, следовательно, сумме кратностей чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ для ядра $K(x,y)$.

Из всего сказанного вытекает,что ядру $K_{(l)}(x,y)$ отвечает ряд Фурье

$$K_{(l)}(x,y) \sim \frac{\varphi_1(x)\varphi_1(y)}{\lambda_1^l} + \frac{\varphi_2(x)\varphi_2(y)}{\lambda_2^l} + \ldots + \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{\lambda_n^l} + \ldots \tag{27}$$

Рассматриваем сначала случай $l = 2$.

Если число фундаментальных функций ограничено и равно m, то

$$K_{(2)}(x,y) \sim \frac{\varphi_1(x)\varphi_1(y)}{\lambda_1^2} + \frac{\varphi_2(x)\varphi_2(y)}{\lambda_2^2} + \ldots + \frac{\varphi_m(x)\varphi_m(y)}{\lambda_m^2}.$$

Если их число неограниченно, то из соответствия

$$K_{(2)}(x,y) \sim \frac{\varphi_1(x)\varphi_1(y)}{\lambda_1^2} + \frac{\varphi_2(x)\varphi_2(y)}{\lambda_2^2} + \ldots + \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{\lambda_n^2} + \ldots \tag{27*}$$

мы не можем даже сделать заключение о сходимости ряда (27*).

Покажем, что (27*) сходится, как функция от x и как функция от y.

Имеем, пользуясь неравенством Коши,

$$\left|\sum_{k=n}^{n+m} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(y)}{\lambda_k^2}\right| \leq \sum_{k=n}^{n+m} \frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k^2} \cdot \sum_{k=n}^{n+m} \frac{\varphi_k^2(y)}{\lambda_k^2} \leq \varepsilon^2 \int\limits_a^b K^2(x,y)\,dy, \tag{28}$$

если $n \geq N_y$, так как по неравенству Бесселя

$$\sum_{k=n}^{n+m} \frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k^2} \leq \sum_{k=1}^{n+m} \frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k^2} \leq \int\limits_a^b K^2(x,y)\,dy$$

и

$$\sum_{k=n}^{n+m} \frac{\varphi_k^2(y)}{\lambda_k^2} \leq \varepsilon^2$$

при $n \geq N_y$ вследствие сходимости ряда из квадратов коэффициентов Фурье, а $\dfrac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}$ коэффициент Фурье для функции $K(x,y)$. Мы указываем значком N_y, что теорема о сходимости ряда из коэффициентов ряда Фурье установлена в предположении, что y не меняется, не исключая таким образом возможности, что N_y меняется вместе с y.

Если высший предел $K(x,y)$ равен A, из неравенства (23) заключаем

$$\left|\sum_{k=n}^{n+m} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(y)}{\lambda_k^2}\right| \leq A\,\sqrt{b-a}\,\varepsilon$$

при $n \geq N_y$, откуда вытекает;, что ряд (27) сходится равномерно как функция от x.

Таким образом, можно установить, что

$$\left|\sum_{k=n}^{n+m} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(y)}{\lambda_k^2}\right| \leq A\,\sqrt{b-a}\;\varepsilon$$

при $n \geq N_x$, т.е. сходится равномерно как функция от y.

Если число фундаментальных функции ограничено, то

$$K_{(l)}(x,y) = \frac{\varphi_1(x)\varphi_1(y)}{\lambda_1^l} + \frac{\varphi_2(x)\varphi_2(y)}{\lambda_2^l} + \ldots + \frac{\varphi_m(x)\varphi_m(y)}{\lambda_m^l}.$$

Покажем, что если число фундаментальных функций неограниченно велико, то при $l \geq 3$ ряд (27) сходится равномерно, как функция от x и y. Имеем:

$$\left|\sum_{k=n}^{n+m} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(y)}{\lambda_k^l}\right| \leq \frac{1}{|\lambda_n|^{l-2}}\left|\sum_{k=n}^{n+m} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(y)}{\lambda_k^2}\right|,$$

так как

$$|\lambda_k|^l = |\lambda_k|^2 \cdot |\lambda_k|^{l-2} \geq \lambda_k^2 \cdot |\lambda_n|^{l-2}, \quad \text{ибо} \quad |\lambda_k| \geq |\lambda_n|.$$

Значит замечая, что при $n \to \infty$ и $|\lambda_n| \to \infty$ имеем при $l \geq 3$

$$\left|\sum_{k=n}^{n+m} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(y)}{\lambda_k^l}\right| \leq \frac{1}{|\lambda_n|^{l-2}}\;\sum_{k=n}^{n+m} \frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k^2} \cdot \sum_{k=n}^{n+m} \frac{\varphi_k^2(y)}{\lambda_k^2} \leq \varepsilon^2 \int_a^b K^2(x,y)\,dy \cdot \int_a^b K^2(x,y)\,dx$$

при $n \geq N$, считая, что N таково, чтобы было

$$\frac{1}{|\lambda_N|^{l-2}} < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\left|\sum_{k=n}^{n+m} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(y)}{\lambda_k^l}\right| \leq \varepsilon A^2(b-a)$$

при $n \geq N$ и, значит по теореме § 6-го

$$K_{(l)}(x,y) = \frac{\varphi_1(x)\varphi_1(y)}{\lambda_1^l} + \frac{\varphi_2(x)\varphi_2(y)}{\lambda_2^l} + \ldots + \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{\lambda_n^l} + \ldots, \tag{29}$$

если $l \geq 3$.

Отметим, имея ввиду дальнейшее, что

$$K_{(4)}(x,y) = \frac{\varphi_1(x)\varphi_1(y)}{\lambda_1^4} + \frac{\varphi_2(x)\varphi_2(y)}{\lambda_2^4} + \ldots + \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{\lambda_n^4} + \ldots. \tag{30}$$

Последний ряд также как и (29), сходится равномерно.

§ 9. РАЗЛОЖЕНИЕ ВТОРОГО ЯДРА

Мы доказали в прошлом параграфе, что ряд (27) равномерно сходится, как функция от x, а также и как функция от y. Положим

$$K_{(2)}(x,y) = \frac{\varphi_1(x)\varphi_1(y)}{\lambda_1^2} + \frac{\varphi_2(x)\varphi_2(y)}{\lambda_2^2} + \ldots + \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{\lambda_n^2} + \ldots + g(x,y).$$

0тмечаем, что $g(x,y)$ как разность двух функций, непрерывных относительно x, непрерывная функция от x (или состоит из кусков непрерывных функций). Имеем, вследствие равномерной сходимости ряда (27^1) как функции от x:

$$\int\limits_a^b g^2(x,y)\,dx = \int\limits_a^b \left(K_{(2)}(x,y) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(y)}{\lambda_k^2}\right)^2 dx = \tag{39}$$

$$= \int\limits_a^b K_{(2)}^2(x,y)\,dx - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(y)}{\lambda_k^2} \int\limits_a^b K_{(2)}(x,y)\varphi_k(x)\,dx + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k^2(y)}{\lambda_k^4} \int\limits_a^b \varphi_k^2(x)\,dx +$$

$$+2\sum_{k\ <\ l}^{\infty}\sum^{\infty} \frac{\varphi_k(y)}{\lambda_k^2}\frac{\varphi_l(y)}{\lambda_l^2} \int\limits_a^b \varphi_k(x)\varphi_l(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_a^b K_{(2)}^2(x,y)\,dx - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k^2(y)}{\lambda_k^4},$$

так как

$$\int\limits_a^b K_{(2)}(x,y)\varphi_k(x)\,dx = \int\limits_a^b K_{(2)}(y,x)\varphi_k(x)\,dx = \frac{\varphi_k(y)}{\lambda_k^2},$$

$$\int\limits_a^b \varphi_k^2(x)\,dx = 1 \quad \text{и} \quad \int\limits_a^b \varphi_k(x)\varphi_l(x)\,dx = 0, \quad k \le l.$$

Но так как

$$K_{(4)}(x,y) = \int\limits_a^b K_{(2)}(x,t)K_{(2)}(t,y)\,dt = \int\limits_a^b K_{(2)}(t,x)K_{(2)}(t,y)\,dt,$$

то

$$K_{(4)}(x,y) = \int\limits_a^b K_{(2)}(t,y)K_{(2)}(t,y)\,dt = \int\limits_a^b K_{(2)}^2(x,y)\,dx$$

и, значит из (31), вследствие (30):

$$\int\limits_a^b g^2(x,y)\,dx = 0, \quad g(x,y) = 0.$$

Значит

$$K_{(2)}(x,y)=\frac{\varphi_1(x)\varphi_1(y)}{\lambda_1^2}+\frac{\varphi_2(x)\varphi_2(y)}{\lambda_2^2}+\ldots+\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{\lambda_n^2}+\ldots. \tag{32}$$

Напомним, что, при этих выкладках мы считали y постоянным, следовательно, если

$$R_n(x,y)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)\varphi_k(y)}{\lambda_k^2}$$

— дополнительный член ряда (32), мы можем только утверждать, что

$$|R_n(x,y)|<\varepsilon, \tag{33}$$

если $n\geq N_y$ или вследствие симметрии, что

$$|R_n(x,y)|<\varepsilon, \tag{33^1}$$

если $n\geq N_x$. Заменив в ряде (32) y на x имеем

$$K_{(2)}(x,x)=\frac{\varphi_1^2(x)}{\lambda_1^2}+\frac{\varphi_2^2(x)}{\lambda_2^2}+\ldots. \tag{54}$$

Если $\rho_n(x)$ дополнительный член последнего ряда, то на основании неравенств (33) мы можем только писать

$$|\rho_n(x)|<\varepsilon \tag{35}$$

при $n\geq N_x$, т.е. не можем утверждать, что ряд (34) сходится равномерно.

Примечание. Последнее заключение может быть отброшено, если воспользоваться теоремой Dini, которую мы не доказываем.

Теорема. *Если ряд, члены которого зависят от x, удовлетворяет трем условиям:*

1) *он сходится при всяком x некоторого промежутка $a\leq x\leq b$,*
2) *члены его положительны и*
3) *сумма его непрерывная функция,*

то он сходится равномерно в промежутке $a\leq x\leq b$.

Ряд (34) удовлетворяет всем трем условиям теоремы Dini и мы можем неравенство (35) заменить неравенством

$$|\rho_n(x)|<\varepsilon \tag{35*}$$

при $n\geq N$. Мы однако, будем пользоваться неравенством (35), так как теоремы Dini не доказываем, ибо ее доказательство требует знаний не предполагаемых у читателя.

§ 10. РАЗЛОЖЕНИЯ СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ ЯДРА $K(x,y)$

Положим

$$K(x,y)=\frac{\varphi_1(x)\varphi_1(y)}{\lambda_1}+\frac{\varphi_2(x)\varphi_2(y)}{\lambda_2}+\ldots+\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{\lambda_n}+R_n(x,y).$$

Беря интеграл в пределах от α до β от полученного равенства имеем:

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} K(x,y)\,dx = \frac{\varphi_1(y)}{\lambda_1}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\phi_1(x)\,dx + \ldots + \frac{\varphi_n(y)}{\lambda_n}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\phi_n(x)\,dx + \int\limits_{\alpha}^{\beta} R_n(x,y)\,dx. \tag{36}$$

Но

$$\left|\int\limits_{\alpha}^{\beta} R_n(x,y)\,dx\right|^2 \le \int\limits_{\alpha}^{\beta} R_n^2(x,y)\,dx\ \int\limits_{\alpha}^{\beta} dx \le (b-a)\int\limits_{\alpha}^{\beta} R_n^2(x,y)\,dx.$$

С другой стороны, как мы уже видели

$$\int\limits_{a}^{b} R_n^2(x,y)\,dx = \int\limits_{a}^{b}\left(K(x,y) - \sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_k(x)\varphi_k(y)}{\lambda_k}\right)^2 dx =$$

$$= \int\limits_{a}^{b} K^2(x,y)\,dx - \sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_k^{(}y)}{\lambda_k^2} = K_{(2)}(y,y) - \sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_k^{(}y)}{\lambda_k^2},$$

так как

$$K_{(2)}(x,y) = \int\limits_{a}^{b} K(x,t)K(t,y)\,dt = \int\limits_{a}^{b} K(t,x)K(t,y)\,dt$$

и

$$K_{(2)}(y,y) = \int\limits_{a}^{b} K^2(t,y)\,dt.$$

Значит вследствие (34):

$$\int\limits_{a}^{b} R_n^2(x,y)\,dx = \rho_n(y) < \varepsilon^2$$

при $n \ge N_y$ и

$$\left|\int\limits_{\alpha}^{\beta} R_n(x,y)\,dx\right| \le \sqrt{b-a}\;\varepsilon$$

при $n \ge N_y$.

Итак ряд (36) всегда сходится и мы имеем

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\int\limits_{\alpha}^{\beta} K(x,y)\,dx = \tag{37}$$

$$= \frac{\varphi_1(y)}{\lambda_1}\left(\frac{1}{\beta-\alpha}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\varphi_1(x)\,dx\right) + \frac{\varphi_2(y)}{\lambda_2}\left(\frac{1}{\beta-\alpha}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\varphi_2(x)\,dx\right) + \ldots.$$

Примечание. Если воспользоваться примечанием прошлого параграфа, то можно утверждать, что ряд (37) сходится равномерно как функция от y.

§ 11. ТЕОРЕМА ГИЛЬБЕРТА – ШМИДТА

Теорема. *Если непрерывная функция $f(x)$ может быть представлена в виде*

$$f(x) = \int_a^b K(x,y)h(y)\,dy, \tag{38}$$

где $h(y)$ функция с интегрируемым квадратом, то $f(x)$ разложима в ряд Фурье по фундаментальным функциям ядра $K(x,y)$:

$$f(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) + \ldots, \tag{39}$$

$$c_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx,$$

причем этот ряд сходится равномерно.

Положив

$$K(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(y)}{\lambda_k} + R_n(x,y), \tag{40}$$

умножаем равенство (40) на $h(y)$ и интегрируем в пределах от a до b.

Получаем по (38)

$$f(x) = \int_a^b K(x,y)h(y)\,dy = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} \int_a^b \varphi_k(y)h(y)\,dy + \int_a^b R_n(x,y)h(y)\,dy.$$

Но, по сказанному в параграфе 10-м

$$\left|\int_a^b R_n(x,y)h(y)\,dy\right|^2 \leq \int_a^b R_n^2(x,y)\,dy \cdot \int_a^b h^2(y)\,dy \leq B^2\varepsilon^2,$$

если $n \geq N_x$, где B^2 заменяет второй множитель последнего равенства. Значит

$$\left|\int_a^b R_n(x,y)h(y)\,dy\right| \leq B\varepsilon,$$

если $n \geq N_x$ и мы имеем:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}\,h_k, \tag{39^1}$$

где

$$h_k = \int\limits_a^b \varphi_k(y)h(y)\,dy.$$

Ряды (39) и (39^1) не отличны. Действительно

$$c_n = \int\limits_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx = \int\limits_a^b \varphi_n(x)\left(\int\limits_a^b K(x,y)h(y)\,dy\right)dx =$$

$$= \int\limits_a^b h(y)\left(\int\limits_a^b K(x,y)\varphi_n(x)\,dx\right)dy = \frac{1}{\lambda_n}\int\limits_a^b h(y)\varphi_n(y)\,dy = \frac{h_n}{\lambda_n}.$$

Итак, сходимость ряда (39) установлена. Остается доказать ее равномерную сходимость.

Пользуясь сказанным о ряде (39^1) имеем

$$\left|\sum_{k=n}^{n+m} c_k\varphi_k(x)\right|^2 = \left|\sum_{k=n}^{n+m} \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}\,h_k\right|^2 \leq$$

$$\leq \sum_{k=n}^{n+m}\frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k^2}\cdot\sum_{k=n}^{n+m} h_k^2 \leq \int\limits_a^b K^2(x,y)\,dy\cdot\varepsilon^2 \leq A^2(b-a)\varepsilon^2,$$

так как вследствие того, что h_k коэффициенты Фурье для функции $h(y)$:

$$\sum_{k=n}^{n+m} h_k^2 < \varepsilon^2$$

при $n \geq N$. Итак

$$\left|\sum_{k=n}^{n+m} c_k\varphi_k(x)\right| \leq A\sqrt{b-a}\,\varepsilon$$

при $n \geq N$, откуда вытекает, что ряд (39) сходится равномерно.

Примечание. Если-бы мы могли пользоваться теоремой Dini, то мы не имели бы надобности отдельно доказывать сходимость ряда (39).

§ 12. ДРУГОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ГИЛЬБЕРТА – ШМИДТА

Лемма. *Если ядро $K(x,y)$ симметрично и функция $u(x)$ ортогональна к ядру $K(x,y)$, то она ортогональна ко всем его фундаментальным функциям и обратно, если функция $u(x)$ ортогональна ко всем фундаментальным функциям ядра $K(x,y)$, то она ортогональна и к самому ядру.*

Положим, что дано, что

$$\int\limits_a^b K(x,y)u(x)\,dx = \int\limits_a^b K(y,x)u(x)\,dx = 0 \tag{41}$$

положим $\varphi_n(x)$ фундаментальная функция ядра $K(x,y)$, отвечающая числу λ_n. Тогда:

$$\varphi_n(x) = \lambda_n \int\limits_a^b K(x,y)\varphi_n(y)\,dy.$$

Умножая последнее равенство на $u(x)$ и интегрируя в пределах от a до b, получаем, что

$$\int\limits_a^b \varphi_n(x)u(x)\,dx = \lambda_n \int\limits_a^b u(x)\left(\int\limits_a^b K(x,y)\varphi_n(y)\,dy\right)\,dx =$$
$$= \lambda_n \int\limits_a^b \varphi_n(y)\left(\int\limits_a^b K(x,y)u(x)\,dx\right)\,dy = 0$$

на основании (41). Итак, прямое утверждение леммы доказано.

Переходим к доказательству обратного утверждения.

Положим, что

$$\int\limits_a^b \varphi_n(x)u(x)\,dx = 0 \tag{42}$$

при всех n. Положим

$$\int\limits_a^b K(x,y)u(x)\,dx = \omega(y); \tag{43}$$

вспомним, что по доказанному в § 9-м

$$K_{(2)}(x,y) = \frac{\varphi_1(x)\varphi_1(y)}{\lambda_1^2} + \frac{\varphi_2(x)\varphi_2(y)}{\lambda_2^2} + \ldots + \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{\lambda_n^2} + \ldots \tag{32}$$

причем ряд правой части сходится равномерно при постоянном y, умножив (32) на $u(x)$ и выполнив интегрирование, получим на основании (42)

$$\int\limits_a^b K_{(2)}(x,y)u(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(y)}{\lambda_k^2} \int\limits_a^b \varphi_k(x)u(x)\,dx = 0.$$

Умножим последнее равенство на $u(y)$, — выполним интегрирование по y в пределах от a до b, и заменим ядро $K_{(2)}(x,y)$ его выражением через $K(x,y)$. Получим

$$0 = \int\limits_a^b u(y)\left(\int\limits_a^b K_{(2)}(x,y)u(x)\,dx\right)\,dy = \int\limits_a^b u(y)\left(\int\limits_a^b \left(\int\limits_a^b K(x,t)K(t,y)\,dt\right)u(x)\right)\,dx =$$
$$= \int\limits_a^b \left(\int\limits_a^b K(x,t)u(x)\,dx \cdot \int\limits_a^b K(t,y)u(y)\,dy\right)\,dt = \int\limits_a^b \omega^2(t)\,dt,$$

так как на основании (45):

$$\int_a^b K(x,t)u(x)\,dx = \int_a^b K(t,y)u(y)\,dy = \omega(t).$$

Итак

$$\int_a^b \omega^2(t)\,dt = 0,$$

откуда так как $\omega(t)$ непрерывна /или состоит из кусков непрерывных функций/, заключаем

$$\omega(t) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Переходим теперь к доказательству теоремы Гильберта – Шмидта.

Положим, что

$$f(x) = \int_a^b h(y)\,dy, \tag{38}$$

где $h(y)$ функция с интегрируемым квадратом. Ищем ряд Фурье соответствующей $f(x)$. Пусть

$$f(x) \sim c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_k\varphi_k(x) + \ldots, \tag{44}$$

$$c_k = \int_a^b f(x)\varphi_k(x)\,dx.$$

Заимствуем из параграфа 11-го следующее утверждение, установленное в конце параграфа независимо от остальных утверждений того параграфа; ряд (44) сходится равномерно в промежутке (a, b). Если это так и мы положим

$$f(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_k\varphi_k(x) + \ldots + R(x), \tag{45}$$

то $R(x)$ будет непрерывной функцией от x. Теперь нетрудно установить последовательно следующие утверждения:

I. $R(x)$ *ортогональна ко всем фундаментальным функциям* $\varphi_k(x)$. Действительно из (45)

$$\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx = c_n = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_a^b \varphi_k(x)\varphi_n(x)\,dx + \int_a^b R(x)\varphi_n(x)\,dx =$$

$$= c_n + \int_a^b R(x)\varphi_n(x)\,dx,$$

откуда

$$
\int_a^b R(x)\varphi_n(x)\,dx = 0. \tag{46}
$$

II. $R(x)$ *ортогональна к ядру* $K(x,y)$*;* последнее есть простое следствие леммы.

III. $R(x)$ *ортогональна к функции* $f(x)$. Действительно, вследствие (38):

$$
\int_a^b f(x)R(x)\,dx = \int_a^b R(x)\left(\int_a^b K(x,y)h(y)\,dy\right)dx = \tag{47}
$$

$$
= \int_a^b h(y)\left(\int_a^b K(x,y)R(x)\,dx\right)dy = 0.
$$

IV. $R(x)$ *ортогональна к самой себе.* Действительно, умножив обе части (45) на $R(x)$ и выполнив интегрирование в пределах от a до b, получаем на основании (46) и (47):

$$
\int_a^b f(x)R(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_a^b \varphi_k(x)R(x)\,dx + \int_a^b R^2(x)\,dx,
$$

$$
0 = \int_a^b R^2(x)\,dx.
$$

Из последнего равенства ясно, что $R(x) = 0$ и что следовательно

$$
f(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_k\varphi_k(x) + \ldots.
$$

§ 13. РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПО ФУНДА1Ш1АЛЬНЫМ ФУНКЦИЯМ

Положим, требуется решить уравнение

$$
\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy + f(x). \tag{48}
$$

Так как если $\varphi(x)$ решение уравнений (48):

$$
\varphi(x) - f(x) = \lambda \int_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy, \tag{48*}
$$

к функции $\varphi_i(x) - f(x)$ приложима теорема Гильберта – Шмидта. Пусть

$$\varphi(x) - f(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) + \ldots. \tag{49}$$

Ищем коэффициенты разложения (49) методой неопределенных коэффициентов.

Подставляя (49) и (48*)) имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(x) = \lambda \int_a^b K(x,y)f(y)\,dy + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_a^b K(x,y)\varphi_k(y)\,dy = \tag{50}$$

$$= \lambda \int_a^b K(x,y)f(y)\,dy + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{\lambda}{\lambda_k}\,\varphi_k(x).$$

Прилагаем к первому слагаемому в последнем равенстве теорему Гильберта – Шмидта, причем пользуемся формулой (39^1), в которрй коэффициенты Фурье найдены при помощи функции стоящей под знаком интеграла. Получаем:

$$\int_a^b K(x,y)f(y)\,dy = \frac{f_1}{\lambda_1}\varphi_1(x) + \frac{f_2}{\lambda_2}\varphi_2(x) + \ldots + \frac{f_n}{\lambda_n}\varphi_n(x) + \ldots,$$

$$f_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx.$$

Значит равенство (50) имеет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda_k}\,f_k\varphi_k(x) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{\lambda}{\lambda_k}\,\varphi_k(x)$$

или

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right) \varphi_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda_k}\,f_k\varphi_k(x), \tag{51}$$

так как, все ряды встречающиеся при выводе последней формулы, были равномерно сходящиеся, ряды в разных частях равенства (51) сходятся равномерно. Умножая обе части на $\varphi_k(x)$ и интегрируя от a до b, получаем вследствие нормальности и ортогональности

$$c_k \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right) = \frac{\lambda}{\lambda_k}\,f_k. \tag{52}$$

Теперь надо различать два случая.

Случай (А): число λ не равно ни одному из характеристических чисел. В этом случае ни в одном из равенств (52) коэффициент при c_k не нуль и при всяком k:

$$c_k = \frac{\lambda}{\lambda_k - \lambda}\,f_k.$$

Случай (В): число λ равно одному из характеристических чисел.

Положим, $\lambda = \lambda_n$ и λ_n корень кратности m определителя Фредгольма. Тогда среди чисел λ_k имеется m равных λ_n:

$$\lambda_n = \lambda_{n+1} = \ldots = \lambda_{n+m-1}$$

с соответствующими им фундаментальными функциями $\varphi_n, \varphi_{n+1}, \ldots, \varphi_{n+m-1}$. Если $k = m+1$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$, то равенство (52) принимает вид

$$0 = \frac{\lambda_n f_{n+i}}{\lambda_n}$$

и не противоречие только тогда, когда

$$f_{n+i} = \int\limits_a^b f(x)\varphi_{n+i}(x)\,dx = 0, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, m-1. \tag{53}$$

Если же m условий (53) соблюдены, то равенство (52) при $k = n, n+1, \ldots, n+m-1$, удовлетворяются произвольными значениями c_k.

Итак мы имеем разложение

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda f_k}{\lambda_k - \lambda}\,\varphi_k(x), \qquad f_k = \int\limits_a^b f(x)\varphi_k(x)\,dx,$$

в котором если λ равно характеристическому числу λ_k множитель

$$\frac{\lambda f_k}{\lambda_k - \lambda}$$

должен быть заменен произвольным числом c_k.

Мы, между прочим, восстановили доказанное в главы второй.

Прилагая найденную формулу к уравнению

$$\Gamma(x, y, \lambda) = \lambda \int\limits_a^b K(x,t)\Gamma(t, y, \lambda)\,dt + K(x, y),$$

которому удовлетворяет резольвента

$$\Gamma(x, y, \lambda) = \frac{D\left(\begin{array}{c|c} x & \lambda \\ y & \end{array}\right)}{D(\lambda)},$$

и замечая, что в этом случае

$$f_n = \int\limits_a^b K(x, y)\varphi_n(x)\,dx = \frac{1}{\lambda_n}\,\varphi_n(y),$$

получаем для резольвенты следующее выражение

$$\frac{D\left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \middle| \lambda\right)}{D(\lambda)} = K(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda}{(\lambda_n - \lambda)\lambda_n}\, \varphi_n(x)\varphi_n(y).$$

§ 14. ОПРЕДЕЛЕННОЕ И ПОЛУОПРЕДЕЛЕННОЕ ЯДРО

Если ядро $K(x,y)$ симметрично и для всякой функции с интегрируемым квадратом $g(x)$

$$\int_a^b \int_a^b K(x,y)g(x)g(y)\,dxdy > 0, \tag{54}$$

то ядро называется *определенным*; если

$$\int_a^b \int_a^b g9x)g(y)\,dxdy \geq 0, \tag{54_1}$$

ядро называется *полуопределенным.* Не определенное и не полуопределенное ядро называется *неопределенным.*

Пример. Второе ядро $K_{(2)}(x,y)$ не неопределенно. Действительно,

$$\int_a^b \int_a^b K(x,y)g(x)g(y)\,dxdy = \int_a^b \int_a^b \left(\int_a^b K(x,t)K(t,y)\,dt\right) K(x,y)g(x)g(y)\,dxdy =$$

$$= \int_a^b \left(\int_a^b K(x,t)g(x)\,dx \int_a^b K(t,y)g(y)\,dy\right)\,dt = \int_a^b \left(\int_a^b K(x,t)g(x)\,dx\right)^2\,dt \geq 0.$$

Теорема. *Если ядро не неопределенно, то его характеристические числа положительны.*

Положим λ_k характеристическое число такого ядра. Тогда, если $\varphi_k(x)$ его фундаментальная функция,

$$\varphi_k(x) = \lambda_k \int_a^b K(x,y)\varphi_k(y)\,dy.$$

Умножая последнее равенство на $\varphi_k(x)$ и интегрируя, имеем, если система функций $\varphi_k(x)$ нормальна:

$$\int_a^b \varphi_k^2(x)\,dx = 1 = \lambda_k \int_a^b \varphi_k(x)\left(\int_a^b K(x,y)\varphi_k(y)\,dy\right)\,dx =$$

$$= \lambda_k \int\limits_a^b \int\limits_a^b K(x, y)\varphi_k(x)\varphi_k(y)\, dxdy,$$

откуда непосредственно ясно, что λ_k не отрицательно.

Если ядро определенно, то система фундаментальных функций полная.

Предположение, что она не полная и что есть функция $u(x)$ ортогональная ко всем $\varphi_n(x)$ на основании леммы § 12-го дает, что есть функция $u(x)$ ортогональная с ядром $K(x, y)$. Но тогда

$$\int\limits_a^b K(x, y)u(x)\, dx = 0, \qquad \int\limits_a^b u(y) \left(\int\limits_a^b K(x, y)u(x)\, dx \right) dy = 0$$

и, значит,

$$\int\limits_a^b \int\limits_a^b K(x, y)u(x)u(y)\, dxdy = 0,$$

что противоречит предположению об определенности ядра.

§ 15. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ ШМИДТА

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \lambda \int\limits_a^b K(x, y)\psi(y)\, dy, \\ \psi(x) &= \lambda \int\limits_a^b K(x, y)\varphi(y)\, dy \end{aligned} , \tag{55}$$

не предполагая, что ядро $K(x, y)$ симметрично. Нетрудно составить уравнения, которым удовлетворяют $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Подставляя в первое уравнение (55) значение $\psi(x)$ из второго, имеем:

$$\varphi(x) = \lambda 62 \int\limits_a^b K(x, t) \left(\int\limits_a^b K(y, t)\varphi(y)\, dy \right) dt =$$

$$= \lambda^2 \int\limits_a^b \varphi(y) \left(\int\limits_a^b K(x, t)K(y, t)\, dt \right) dy,$$

то есть $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi(x) = \lambda^2 \int\limits_a^b \overline{K(x, y)|}\varphi(y)\, dy, \tag{56}$$

в котором

$$\overline{K(x,y)}| = \int\limits_a^b K(x,t)K(y,t)\,dt. \tag{57_1}$$

Ядро $\overline{K(x,y)}|$ очевидно симметрично.

Таким-же образом получаем:

$$\psi(x) = \lambda^2 \int\limits_a^b K(t,x) \left(\int\limits_a^b K(t,y)\psi(y)\,dy \right) dt =$$

$$= \lambda^2 \int\limits_a^b \psi(y) \left(\int\limits_a^b K(t,x)K(t,y)\,dt \right) dy,$$

т.е., что $\psi(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\psi(x) = \lambda^2 \int\limits_a \, |\underline{K(x,y)}\psi(y)\,dy, \tag{56}$$

в котором

$$|\underline{K(x,y)} = \int\limits_a^b K(t,x)K(t,y)\,dt \tag{57_2}$$

и ядро $|\underline{K(x,y)}$ симметрично.

Не трудно убедиться, что ядра $\overline{K(x,y)}|$ и $|\underline{K(x,y)}$ не неопределенны. Докажем это для ядра $\overline{K(x,y)}|$. Имеем:

$$\int\limits_a^b \int\limits_a^b \overline{K(x,y)}| g(x)g(y)\,dxdy = \int\limits_a^b \int\limits_a^b \left(\int\limits_a^b K(x,t)K(y,t)\,dt \right) g(x)g(y)\,dxdy =$$

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_a^b K(x,t)g(x)\,dx \cdot \int\limits_a^b K(y,t)g(y)\,dy \right) dt = \int\limits_a^b \left(\int\limits_a^b K(x,t(g(x)\,dx \right)^2 dt,$$

откуда ясно, что

$$\int\limits_a^b \int\limits_a^b \overline{K(x,y)}| g(x)g(y)\,dxdy$$

не отрицательно.

Рассмотрим теперь уравнение (56_1) с симметричным ядром $\overline{K(x,y)}|$.

Все характеристические числа ядра $\overline{K(x,y)}|$ вещественны, так как оно симметрично; так как оно не неопределенно, то эти характеристические числа положительны.

Положим,

$$\lambda_1^2,\ \lambda_2^2,\ \ldots,\ \lambda_n^2,\ldots \tag{58}$$

характеристические числа ядра $\overline{K(x,y)|}$, обозначая через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ положительные их корни. Приводя всякому числу (58) его фундаментальную функцию, расположим фундаментальные функции ядра $\overline{K(x,y)|}$ по правилу § 1 в таблицу:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \lambda_1 & \leq & \lambda_2 & \leq & \ldots & \leq & \lambda_k & \leq & \lambda_{k+1} & \leq & \ldots \\ \varphi_1(x), & & \varphi_2(x), & & \ldots, & & \varphi_k(x), & & \varphi_{k+1}(x), & & \ldots. \end{array} \tag{59}$$

Условимся считать, что фундаментальные функции таблицы (59) образуют нормальную и ортогональную систему.

Проведем теперь в соответствие каждой функции $\varphi_k(x)$ функцию

$$\psi_k(x) = \lambda_k \int\limits_a^b K(y,x)\varphi_k(y)\,dy \tag{60_1}$$

и докажем следующие утверждения:

I. *Если справедливо равенство* (60_1)*, то*

$$\varphi(x) = \lambda_k \int\limits_a^b K(x,y)\psi_k(y)\,dy. \tag{60_2}$$

Действительно, на основании (60_1):

$$\varphi_k(x) - \lambda_k \int\limits_a^b K(x,y)\psi_k(y)\,dy = \varphi_k(x) - \lambda_k^2 \int\limits_a^b K(x,t)\left(\int\limits_a^b K(y,t)\varphi_k(y)\,dy\right)dt =$$

$$= \varphi_k(x) - \lambda_k^2 \int\limits_a^b \varphi_k(y)\left(\int\limits_a^b K(x,t)K(y,t)\,dt\right)dy = \varphi_k(x) - \lambda_k^2 \int\limits_a^b \overline{K(x,y)|}\varphi_k(y)\,dy.$$

Правая же часть последнего равенства равна нулю, так как $\varphi_k(x)$ фундаментальная функция отвечающая характеристическому числу λ_k^2.

II. $\psi_k(x)$ *фундаментальная функция ядра* $\underline{|K(x,y)}$*, отвечающая числу* λ_k^2.

Действительно, на основании (60_2):

$$\psi_k(x) = \lambda_k \int\limits_a^b K(y,x)\varphi_k(y)\,dy = \lambda_k^2 \int\limits_a^b K(t,x)\left(\int\limits_a^b K(t,y)\psi_k(y)\,dy\right)dt =$$

$$= \lambda_k^2 \int\limits_a^b \psi_k(y)\left(\int\limits_a^b K(t,x)K(t,y)\,dt\right)dy,$$

$$\psi_k(x) = \lambda_k^2 \int\limits_a^b \underline{|K(x,y)}\psi_k(y)\,dy.$$

Итак

$$\psi_1(x),\ \psi_2(x),\ \ldots,\ \psi_k(x),\ \ldots \tag{61}$$

фундаментальные функции ядра $\underline{K(x,y)}$; вследствие того, что функции $\varphi_k(x)$ образуют полную систему фундаментальных функций ядра $\overline{K(x,y)}$ и вследствие того, что доказанное в пунктах (I) и (II) для $\psi_k(x)$ можно отнести и к $\varphi_i(x)$ ясно, что в (61) выписаны все фундаментальные функции ядра $\underline{K(x,y)}$.

III. *Если система функций* (59) *ортогональна и нормальна, то система функций* (61) *также ортогональна и нормальна.* Действительно, на основании (60_2):

$$\int\limits_a^b \psi_m(x)\psi_k(x)\,dx = \lambda_k \int\limits_a^b \psi_m(x) \left(\int\limits_a^b K(y,x)\varphi_k(y)\,dy \right) dx =$$

$$= \lambda_k \int\limits_a^b \varphi_k(y) \left(\int\limits_a^b K(y,x)\psi_m(x)\,dx \right) dy =$$

$$= \frac{\lambda_k}{\lambda_m} \int\limits_a^b \varphi_k(y)\varphi_m(y)\,dy = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad k \neq m, \\ 1, & \text{если} \quad k = m, \end{cases}$$

что и требовалось доказать.

Функции (59) и (61) мы будем называть *фундаментальными функциями Шмидта* ядра $K(x,y)$.

§ 16. ТЕОРЕМА РАЗЛОЖЕНИЯ ШМИДТА

Теорема. *Если ядро $K(x,y)$ не симметрично и*

$$f(x) = \int\limits_a^b K(x,y)h(y)\,dy, \tag{38}$$

где $h(y)$ функция с интегрируемым квадратом, то $f(x)$ разложима в равномерно сходящийся ряд по фундаментальным функциям Шмидта ядра $K(x,y)$, т.е. как по функциям (59) *так и по функциям* (61).

Докажем разложимость $f(x)$ по функциям (59).

Приводим в соответствие функции $f(x)$ ряд Фурье:

$$f(x) \sim c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_k\varphi_k(x) + \ldots, \tag{62}$$

$$c_k = \int\limits_a^b f(x)\varphi_k(x)\,dx,$$

и докажем прежде всего, что ряд (62) сходится равномерно. Имеем:

$$c_k = \int\limits_a^b f(x)\varphi_k(x)\,dx = \int\limits_a^b \varphi_k(x) \left(\int\limits_a^b K(x,y)h(y)\,dy \right) dx =$$

$$= \int\limits_a^b h(y) \left(\int\limits_a^b K(x,y)\varphi_k(x)\,dx \right) dy = \frac{1}{\lambda_k} \int\limits_a^b h(y)\psi_k(y)\,dy.$$

Значит ряду (68) можно дать вид

$$\frac{h_1}{\lambda_1}\,\varphi_1(x) + \frac{h_2}{\lambda_2}\,\varphi_2(x) + \dots,$$

положив

$$h_k = \int\limits_a^b h(y)\psi_k(y)\,dy.$$

Изучая дополнительный член последнего ряда, имеем

$$\left| \sum_{k=n}^{n+m} \frac{h_k}{\lambda_k}\,\varphi_k(x) \right| \leq \sum_{k=n}^{n+m} \frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k^2} \cdot \sum_{k=n}^{n+m} h_k^2.$$

Но

$$\sum_{k=n}^{n+m} h_k^2 < \varepsilon,$$

если $n \geq N$, так как h_k коэффициенты Фурье функций $h(y)$ при разложении ее по функциям $\psi_k(x)$ симметричного ядра $\underline{K(x,y)}$.

Далее, $\dfrac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}$ коэффициенты Фурье при разложении функций $K(y,x)$ по темже функциям, так как

$$\int\limits_a^b K(y,x)\psi_k(x)\,dx = \frac{1}{\lambda_k}\,\varphi_k(y);$$

вследствие этого

$$\sum_{k=n}^{n+m} \frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k^2} \leq \int\limits_a^b (\underline{K(x,y)})^2\,dy \leq A,$$

где A определенное число. Итак

$$\left| \sum_{k=n}^{n+m} \frac{h_k}{\lambda_k}\,\varphi_k(x) \right|^2 < A\varepsilon,$$

при $n \geq N$, откуда вытекает, что ряд (62) сходится равномерно.

Положим теперь, что

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(x) + R(x); \tag{63}$$

$R(x)$ непрерывная Функция от x. Нетрудно убедиться, что

1. *$R(x)$ ортогональна ко всем функциям $\varphi_k(x)$.*

Действительно

$$\int\limits_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx = c_n = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int\limits_a^b \varphi_k(x)\varphi_n(x)\,dx +$$

$$+\int\limits_a^b R(x)\varphi_n(x)\,dx = c_n + \int\limits_a^b R(x)\varphi_n(x)\,dx,$$

откуда

$$\int\limits_a^b R(x)\varphi_n(x)\,dx = 0.$$

2. *$R(x)$ ортогональна к ядру $\overline{K(x,y)}$, как непосредственно следует из леммы § 12-го.*

3. *$R(x)$ ортогональна к $K(x,y)$, считая $K(x,y)$ функцией первого аргумента.*

Действительно из

$$0 = \int\limits_a^b \overline{K(x,y)} R(x)\,dx = \int\limits_a^b \left(\int\limits_a^b K(x,t)K(y,t)\,dt \right) R(x)\,dx$$

имеем

$$0 = \int\limits_a^b R(y) \left(\int\limits_a^b \left(\int\limits_a^b K(x,t)K(y,t)\,dt \right) R(x)\,dx \right) dy =$$

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_a^b K(x,t)R(x)\,dx \cdot \int\limits_a^b K(y,t)R(y)\,dy \right) dt,$$

откуда

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_a^b K(x,t)R(x)\,dx \right)^2 dt = 0, \quad \int\limits_a^b K(x,t)R(x)\,dt = 0.$$

4. *$R(x)$ ортогональна к $f(x)$.* Действительно

$$\int\limits_a^b f(x)R(x)\,dx = \int\limits_a^b R(x) \left(\int\limits_a^b K(x,y)h(y)\,dy \right) dx =$$

$$= \int\limits_a^b h(y) \left(\int\limits_a^b K(x,y)R(x)\,dx \right) dy = 0.$$

5. *$R(x)$ ортогональна к $R(x)$.*

Умножая, именно, равенство (63) на $R(x)$ и пользуясь (1) и (4) имеем:

$$\int_a^b f(x)R(x)\,dx = 0 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_a^b \varphi_k(x)R(x)\,dx + \int_a^b R^2(x)\,dx = \int_a^b R^2(x)\,dx.$$

Из последнего заключения ясно, что $R(x) = 0$ и что высказанная теорема справедлива.

§ 17. ЯДРА ШМИДТА

Положим дано уравнение, ядро которого

$$K(x,y) = p(y)L(x,y), \tag{64}$$

где $L(x,y)$ симметричная функция от x и y и все значения $p(y)$ не отрицательны

$$p(y) \geq 0.$$

К уравнению с таким ядром приложимы все выводы, сделанные об уравнениях с симметричным ядром.

Действительно, умножив обе части уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b p(y)L(x,y)\varphi(y)\,dy + f(x) \tag{66}$$

на $\sqrt{p(x)}$ и заменив в полученном уравнении

$$\sqrt{p(x)}\varphi(x) = \lambda \int_a^b \sqrt{p(x)}p(y)L(x,y)\varphi(y)\,dy + \sqrt{p(x)}f(x) =$$

$$= \lambda \int_a^b \sqrt{p(x)p(y)}L(x,y)\sqrt{p(y)}\varphi(y)\,dy + \sqrt{p(x)}f(x)$$

$\sqrt{p(x)}\varphi(x)$ через $\psi(x)$ получаем уравнение

$$\psi(x) = \lambda \int_a^b \sqrt{p(x)p(y)}L(x,y)\psi(y)\,dy + \sqrt{p(x)}f(x), \tag{66}$$

ядро которого, симметрично.

Об уравнении (66) мы можем, следовательно, высказать следующие заключения:

I. *все его характеристические числа вещественны*

II. *число фундаментальных функций его, отвечающих некоторому числу* λ_k, *равно кратности корня* λ_k *в определителе Фредгольма.*

Положим, $\psi_k(x)$ некоторая фундаментальная функция уравнения (66) отвечающая числу λ_k и положим

$$\psi_k(x) = \sqrt{p(x)}\varphi_k(x). \tag{67}$$

Из соотношения

$$\psi_k(x) = \lambda_k \int_a^b \sqrt{p(x)p(y)}L(x,y)\psi_k(y)\,dy$$

подставляя вместо $\psi_k(x)$ его значение (67) выводим

$$\varphi_k(x) = \lambda_k \int_a^b p(y)L(x,y)\varphi_k(y)\,dy, \tag{68}$$

откуда вытекает, что λ_k характеристическое число уравнения (65), а $\varphi_k(x)$ фундаментальная функция этого числа, причем $\varphi_k(x)$ даже в случае, когда $p(x)$ обращается в нуль между a и b непрерывна.

Ясно, что всякое характеристическое число уравнения (65) есть вместе с тем характеристическое число уравнения (66); в последнем можно убедиться переходя от уравнения (68) к ему соответствующему, так, как мы перешли от уравнения (65) к уравнению (66).

Положим что функции

$$\psi_1(x),\ \psi_2(x),\ \ldots,\ \psi_n(x),\ \ldots \tag{69}$$

образуют систему фундаментальных функций для уравнения (66); положим, что система (69) нормальна и ортогональна, то есть что

$$\int_a^b \psi_m(x)\psi_n(x)\,dx = 0, \quad m \neq n \quad \text{и} \quad \int_a^b \psi_m^2(x)\,dx = 1; \tag{70}$$

вводя функции

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_k(x),\ \ldots \tag{71}$$

по соотношению (67) мы получим систему фундаментальных функций для уравнения (65); при этом соотношения (70) обратятся в

$$\int_a^b p(x)\varphi_m(x)\varphi_n(x)\,dx = 0, \quad m \neq n \quad \text{и} \quad \int_a^b p(x)\varphi_m^2(x)\,dx = 1. \tag{72}$$

Мы будем говорить, что система (70) нормальна и ортогональна по отношению к функции $p(x)$.

Теорема Гильберта – Шмидта может быть распространена на системы (71).

Теорема. *Если*

$$f(x) = \int\limits_a^b p(y)L(x,y)h(y)\,dy, \tag{73}$$

то функция $f(x)$ *разложима в равномерно сходящийся ряд по функциям* (71):

$$f(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) + \ldots, \tag{74}$$

где

$$c_n = \int\limits_a^b p(x)f(x)\phi_n(x)\,dx. \tag{75}$$

Умножив обе части (73) на $\sqrt{p(x)}$, получаем:

$$\sqrt{p(x)}(x) = \int\limits_a^b \sqrt{p(x)p(y)}L(x,y)\sqrt{p(y)}h(y)\,dy.$$

Из этого равенства ясно, что к функциям $\sqrt{p(x)}f(x)$ приложима теорема Гильберта – Шмидта и что

$$\sqrt{p(x)}f(x) = c_1\psi_1(x) + c_2\psi_2(x) + \ldots + c_n\psi_n(x) + \ldots, \tag{76}$$

где

$$c_n = \int\limits_a^b \sqrt{p(x)}f(x)\psi_n(x)\,dx. \tag{77}$$

Заменяя в (76) и (77) функции $\psi_n(x)$ их выражениями через функции $\varphi_n(x)$ и сокращая в полученном равенстве (76) на $\sqrt{p(x)}$, мы получим ряд (74) и соотношение (75).

ГЛАВА ПЯТАЯ
НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

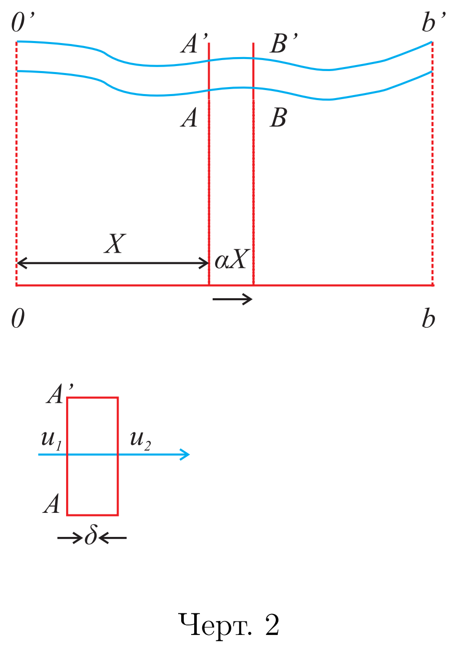
§ 1. ЗАДАЧА О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕПЛА В БРУСЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Положим имеется брус, погруженный в среду с постоянной температурой U. [См. черт. 2]

Положим, что брус настолько тонок, что можно считать, что температура во всякой точке некоторого сечения его $A'A$ определяется расстоянием этого сечения, от конца бруса в сечении $O'O$.

Положим, что в некоторый начальный момент времени известно распределение температуры в брусе

(1) $$u = U + \varphi(x) \quad \text{при} \quad t = 0.$$



Черт. 2

Требуется найти распределение температуры в некоторый момент t.

Распределение температуры обуславливается а) движением тепла внутри бруса, б) потерею (или приобретением) тепла в окружающее пространство вследствие лучеиспускания через боковую поверхность бруса и его крайние сечения $O'O$ и $b'b$.

Чтобы определить влияние каждого из этих явлений, выясним сначала, каково движение тепла через некоторое сечение $A'A$. Для этого заменим временно сечение $A'A$ слоем очень малой толщины δ.

Положим u_1 и u_2 температуры по разные стороны слоя; K коэффициент теплопроводности, S площадь сечения $A'A$.

Количество тепла, проходящее через взятый слой в течение промежутка dt, в направлении от O к b, отвечающим возрастающим x, пропорционально разности температур $u_1 - u_2$, обратно пропорционально толщине слоя δ, пропорционально промежутку времени dt, площади сечения S, и коэффициенту теплопроводности K, т.е. равно

$$SK\frac{u_1 - u_2}{\delta}\,dt. \tag{2}$$

Так как

$$\lim_{\delta\to 0}\,\frac{u_1 - u_2}{\delta} = -\lim_{\delta\to 0}\,\frac{u_2 - u_1}{\delta} = -\frac{\partial u}{\partial x},$$

то имея в виду считать dt бесконечно малым, а температуру u имеющей первую производную, мы можем, откидывая бесконечно малые высших порядков заменить (2) через

$$-SK\frac{\partial u}{\partial x}\,dt. \tag{3}$$

Если расстояние между сечениями $A'A$ и $B'B$ равно dx, то количество тепла, проходящее через сечение $B'B$ в том же направлении равно

$$-SK\frac{\partial u}{\partial x}\,dt - \frac{\partial\left(SK\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x}\,dxdt, \tag{4}$$

если снова, откидывая бесконечно малые высших порядков заменить приращение от (3) произведением его производной по x на dx.

Количество тепла, остающееся между сечениями $A'A$ и $B'B$ равно разности между (4) и (5), т.е. равно

$$\frac{\partial\left(SK\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x}\,dxdt. \tag{5}$$

Положим λ, коэффициент лучеиспускания, $\sigma\,dx$ боковая поверхность бруса между сечениями $A'A$ и $B'B$.

Количество тепла, потерянного здесь через лучеиспускание, пропорционально разности температур $u-U$ бруса и окружающей среды, пропорционально времени dt, поверхности $\sigma\,dx$ и коэффициенту лучеиспускания λ, т.е. равно

$$\lambda\sigma(u - U)\,dxdt. \tag{8}$$

Следовательно количество тепла dQ приобретенное частью бруса между $A'A$ и $B'B$ равно

$$dQ = \frac{\partial\left(SK\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x}\,dxdt - \lambda\sigma(u - U)\,dxdt. \tag{7}$$

Положим теперь, что ρ плотность бруса, c — его теплоемкость и заметим, что откидывая бесконечно малые высших порядков, можно считать объем слоя между сечениями $A'A$ и $B'B$ равным $S\,dx$, и повышение температуры за промежуток времени dt равным $\dfrac{\partial u}{\partial t}\,dt$. Количество тепла приобретенное слоем пропорционально повышению температуры $\dfrac{\partial u}{\partial t}\,dt$, массе слоя $\rho S\,dx$ и теплоемкости c, т.е. равно

$$dQ = \rho Sc\frac{\partial u}{\partial t}\,dxdt. \tag{8}$$

Следовательно

$$\rho Sc\frac{\partial u}{\partial t}\,dxdt = \frac{\partial\left(SK\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x}\,dxdt - \lambda\sigma(u-U)\,dxdt. \tag{9}$$

Заметим, что мы считаем, что в самом брусе нет источников тепла и не происходит процессов поглощающих тепло.

Введенные нами коэффициенты ρ, S, σ, c, K, λ все положительны; мы считаем каждый из них функцией от x; последние три могли-бы зависеть еще от температуры, но мы будем считать их функциями одного x, что допустимо, конечно, только при относительно незначительных колебаниях температуры.

Положим:

$$\rho Sc = g(x), \quad SK = \tau(x), \quad \lambda\sigma = r(x). \tag{10}$$

Все три функции $g(x)$, $\tau(x)$, $r(x)$ положительны. Вводя функции (10) мы можем уравнение (9) заменить через

$$g(x)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial\left(\tau(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x} - r(x)(u-U). \tag{11}$$

Остается принять во внимание течение тепла через границы бруса.

Через границу $O'O$ тепло движется в направлении обратном направлению x и, значит, по (3) в промежуток dt проходит

$$S_0K_0\frac{\partial u}{\partial x}\,dt; \tag{5}$$

где S_0 и K_0 размеры сечения $O'O$ и теплопроводность в нем; причиной этого течения является потеря тепла лучеиспусканием и потому по (6) число (3) равно

$$\lambda_0S_0(u-U)\,dt; \tag{6}$$

здесь λ_0 коэффициент лучеиспускания в $O'O$ и S_0 заменяет $\sigma\,dx$. Следовательно

$$S_0K_0\frac{\partial u}{\partial x}\,dt = \lambda_0S_0(u-U)\,dt$$

или

$$\text{при} \quad x = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = h(u-U), \tag{12}$$

где $h = \dfrac{\lambda_0}{K_0}$ и существенно положительно.

Таким-же образом мы найдем, что через сечение $b'b$ в промежуток dt проходит

$$-S_1 K_1 \frac{\partial u}{\partial x}\, dt$$

единиц тепла равное потере через лучеиспускание,

$$\lambda_1 S_1 (u - U)\, dt,$$

где S_1, K_1, λ_1 значение коэффициентов S, K, λ на $b'b$ и что значит

$$\text{(13)} \qquad \text{при} \quad x = b \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = -H(u - U),$$

где $H = \dfrac{\lambda_1}{K_1}$ и существенно положительно.

Отметим два частных случая, в которых приведенные рассуждения должны быть несколько изменены.

Случай (α). На концах бруса поддерживается температура U. В этом случае

$$\text{(14)} \qquad \text{при} \quad x = 0: \quad u - U = 0; \qquad \text{при} \quad x = b: \quad u - U = 0.$$

Формулы (14) получаются из (18) и (13) предположением

$$h = \infty, \qquad H = \infty.$$

Случай (β). Концы бруса абсолютно нетеплопроводны. В этом случае нет течения через концы и

$$\text{(14} \qquad \text{при} \quad x = 0: \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0; \qquad \text{при} \quad x = b: \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Формулы (14) получаются из (12) и (13) предположением

$$h = 0, \qquad H = 0.$$

Итак, движение тепла в теле регулируется уравнениями: уравнением

$$\text{(11)} \qquad g(x)\, \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \left(\tau(x) \dfrac{\partial u}{\partial x} \right)}{\partial x} - r(x)(u - U)$$

и условиями:

$$\text{при} \quad t = 0: \quad u = U + \varphi(x),$$

в котором $\varphi(x)$ данная функция, называемая *начальным*, и двумя условиями

$$\text{(12)} \qquad \text{при} \quad x = 0: \quad \frac{\partial u}{\partial x} = h(u - U)$$

$$\text{(13)} \qquad \text{при} \quad x = b: \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -H(u - U),$$

называемыми *граничными*, условиями.

Вводя новое неизвестное положив

$$u - U = v, \tag{15}$$

мы переделаем условия задачи, пользуясь тем, что U постоянно, в

$$g(x)\,\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial\left(\tau(x)\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial x} - r(x)v, \tag{I}$$

$$\text{при}\quad t=0:\quad v=\varphi(x), \tag{II}$$

$$\text{при}\quad x=0:\quad \frac{\partial v}{\partial x}=hv;\qquad \text{при}\quad x=b:\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-Hv. \tag{III}$$

§ 2. ЗАМЕНА ЗАДАЧИ ДРУГОЮ

Отыскивая решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (II) и (III), мы предложим себе сначала найти решение частного вида

$$T(t)y(x), \tag{16}$$

имеющее вид произведения функции одного t на функцию одного x, удовлетворяющее только условиям (III). Обнаружив при этом, что таких решений множество и замечая, что вследствие линейности уравнения (1) и условий (III) сумма нескольких решений (16) есть тоже решение, так-же как и произведение каждого решения на постоянное, мы будем пробовать нельзя-ли удовлетворить условию (II) положив

$$v = \sum a_n T_n(t) y_n(x)$$

подобающим выбором постоянных a_n.

Итак ищем решения вида (16), удовлетворяющие условиям (III).

Подставляя в (I) вместо v его значение (16) получаем:

$$g(x)T'(t)y(x) = \frac{\partial\left(\tau(x)\dfrac{dy}{dx}\right)}{\partial x}\,T(t) - r(x)T(t)y(x)$$

или

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{(\tau(x)y')' - r(x)y}{g(x)y}.$$

Левая часть последнего равенства зависит только от t; правая часть только от x; при таком положении левая и правая часть последнего равенства могут быть только постоянным числом. Обозначая это постоянное через λ, получаем:

$$T'(t) = -\lambda T(t), \qquad (\tau(x)y')' - r(x)y = -\lambda g(x)y. \tag{18}$$

Первое из уравнений (18) дает непосредственно

$$T(t) = ae^{\lambda t},$$

где a постоянное. Второе говорит, что для нахождения y надо найти решение уравнения

$$(\tau(x)y')' + (\lambda g(x) - r(x))y = 0, \tag{19}$$

удовлетворяющее условиям:

$$\text{при} \quad x = 0: \quad y' = hy; \qquad \text{при} \quad x = b: \quad y' = -Hy. \tag{20}$$

В условиях (20) числа h и H положительны, но не исключена возможность, что $h = H = 0$ или $h = H = \infty$ или, даже смешанного задания.

§ 3. РЕШЕНИЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Приступая к нахождению функции y мы не будем предполагать, что функция $\tau(x)$ имеет производную, мы можем даже не предполагать, что она непрерывна; положим, что она терпит ограниченное число разрывов. Мы, однако, предположим, что она не обращается в нуль и что соблюдено неравенство

$$\tau(x) > \alpha_0 > 0, \quad \alpha_0 \ \text{некоторое число.}$$

Заметим,однако, что не считая $\tau(x)$ непрерывной, мы обязаны считать, что $\tau(x)y'$ непрерывна и имеет производную; такое предположение, например, уже использовано при выводе равенства (4).

Мы, предположим еще, что

$$\tau(0) = 1, \tag{21^1}$$

что не уменьшает общности, так как обе части уравнения (19) можно разделить на $\tau(0)$. Раньше чем решать уравнение (19) при поставленных условиях, мы покажем, как найти решение уравнения,

$$(\tau(x)y')' - r(x)y = f(x), \tag{22}$$

удовлетворяющее условиям (20), считая $f(x)$ данной функцией.

Введем в рассмотрение однородное уравнение

$$(\tau(x)y')' - r(x)y = 0 \tag{23}$$

и положим, что $y_1(x)$ и $y_2(x)$ его линейно независимые решения, удовлетворяющие условиям:

$$y_0(0) = 1, \quad y_1'(0) = 0; \qquad y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = 1.^1 \tag{24}$$

[1]Возможность найти решение уравнения

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0, \tag{$*$}$$

Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ непрерывны в промежутке $(0, b)$ так как

$$(\tau(x)y_1')' - r(x)y_1 = 0, \qquad (\tau(x)y_2')' - r(x)y_2 = 0,$$

имеем

$$y_1(\tau(x)y_2')' - y_2(\tau(x)y_1')' = 0.$$

удовлетворяющего условиям $y(0) = \alpha$, $y'(0) = \beta$, где α, β произвольные постоянные и непрерывность их в промежутке $(0, b)$, в котором $a(x)$ не обращается в нуль, устанавливается во всех курсах дифференциального исчисления.

Мы, однако, не можем привести уравнение (22) к виду (*), так как функция $\tau(x)$ может быть не иметь производной. Но не трудно установить существование такого решения непосредственно методой последовательных приближений.

Полагаем $y = \alpha$ и ищем

$$\tau(x)y_1' = \beta + \int\limits_0^x \alpha r(x)\,dx, \quad y_1 = \alpha + \int\limits_0^x \frac{\beta + \int\limits_0^x \alpha r(x)\,dx}{\tau(x)}\,dx$$

и вообще

$$\tau(x)y_n' = \beta + \int\limits_0^x r(x)y_{n-1}\,dx, \quad y_n = \alpha + \int\limits_0^x \frac{\beta + \int\limits_0^x r(x)y_{n-1}\,dx}{\tau(x)}\,dx.$$

Если положить

$$z_n = y_n - y_{n-1}, \quad z_1 = y_1 - \alpha,$$

будем иметь

$$z_n = \int\limits_0^x \frac{1}{\tau(x)} \left(\int\limits_0^x r(x) z_{n-1}\,dx \right) dx.$$

Отсюда, если

$$|r(x)| \le M, \quad |\tau(x)| > a, \quad |z_n| \le A_n(x), \quad |z_1| \le C = A_1(x),$$

то

$$A_n(x) \le \frac{M}{a} \int\limits_0^x \int\limits_0^x A_{n-1}(x)\,dx^2 \le \left(\frac{M}{a}\right)^{n-1} \cdot C \cdot \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}. \tag{**}$$

Последнее равенство говорит, что ряд

$$y = y_0 + (y_1 - y_0) + \ldots + (y_n - y_{n-1}) + \ldots \tag{***}$$

сходится равномерно пока соблюдены условия (**). Так как

$$|z_n'| = \left| \frac{1}{\tau(x)} \int\limits_0^x r(x) z_{n-1}\,dx \right| \le \frac{M}{a} \int\limits_0^x A_{n-1}(x)\,dx \le \left(\frac{M}{a}\right)^{n-1} \cdot C \cdot \frac{x^{2n-3}}{(2n-3)!},$$

$$|(\tau(x)z_n')| = \left| \int\limits_0^x r(x) z_{n-1}\,dx \right| \le M \left(\frac{M}{a}\right)^{n-2} \cdot C \cdot \frac{x^{2n-4}}{(2n-4)!},$$

ясно, что сумма ряда (**) удовлетворяет уравнению (23).

Интегрируя последнее равенство в пределах от 0 до x и пользуясь (21^1), получаем:

$$0 = \int\limits_0^x \left(y_1(\tau(x)y_2')' - y_2(\tau(x)y_1')'\right) dx = y_1(\tau(x)y_2')'\Big|_0^x - y_2(\tau(x)y_1')'\Big|_0^x -$$

$$- \int\limits_0^x \left(y_1'(\tau(x)y_2') - y_2'(\tau(x)y_1')\right) dx = (y_1y_2' - y_1'y_2)\tau(x) - 1.$$[2]

Значит,

$$y_1y_2' - y_1'y_2 = \frac{1}{\tau(x)}. \tag{25}$$

Ищем решение уравнения (22) методой вариации произвольных постоянных. Положим

$$y = c_1y_1 + c_2y_2; \tag{26}$$

находим

$$y' = c_1y_1' + c_2y_2', \tag{27}$$

положив

$$c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0. \tag{28}$$

Умножив (27) на $\tau(x)$ и выполнив дифференцирование, получаем

$$(\tau(x)y') = c_1(\tau(x)y_1') + c_2(\tau(x)y_2') + (c_1'y_1' + c_2'y_2')\tau(x).$$

После чего подстановка найденных значении y и $(\tau(x)y_1')'$ в уравнение (22) дает

$$c_1'y_1' + c_2'y_2' = \frac{f(x)}{\tau(x)}. \tag{28^1}$$

Решая уравнения (28) и (28^1) относительно c_1' и c_2' получаем вследствие (25):

$$c_1' = -f(x)y_2(x), \qquad c_2' = f(x)y_1(x); \tag{29}$$

определитель системы уравнений (28) и (28^1) равен, именно, $\dfrac{1}{\tau(x)}$.

Интегрируя (29) получаем:

$$c_1 = -\int\limits_0^x f(\xi)y_2(\xi)\,d\xi + A_1, \qquad c_2 = \int\limits_0^x f(\xi)y_1(\xi)\,d\xi + A_2, \tag{30}$$

где A_1 и A_2 произвольные постоянные. Итак, самое общее решение уравнения (22):

$$y = A_1y_1(x) + A_2y_2(x) + \int\limits_0^x f(\xi)\left(y_1(\xi)y_2(x) - y_1(x)y_2(\xi)\right) d\xi. \tag{31}$$

[2]Указанные выкладки выполнимы, так как $\tau(x)y_1$ и $\tau(x)y_2$ непрерывны.

Остается в (31) определить постоянные, A_1 и A_2 так, чтобы удовлетворялись условия (20). Отыскивая производную от (31), находим, заметив, что подинтегральная функция равна нулю при $\xi = x$, что

$$y' = A_1 y_1'(x) + A_2 y_2'(x) + \int\limits_0^x f(\xi)\left(y_1'(\xi) y_2'(x) - y_1'(x) y_2(\xi)\right) d\xi. \tag{32}$$

Подставляя вместо x последовательно 0 и b, получаем, пользуясь (24):

$$y(0) = A_1, \qquad y'(0) = A_2,$$

$$y(b) = A_1 y_1(b) + A_2 y(b) + \int\limits_0^b f(\xi)\left(y_1(\xi) y_2(b) - y_1(b) y_2(\xi)\right) d\xi,$$

$$y'(b) = A_1 y_1'(b) + A_2 y_2'(b) + \int\limits_0^b f(\xi)\left(y_1(\xi) y_2'(b) - y_1'(b) y_2(\xi)\right) d\xi.$$

Подставив найденное решение в первое условие (20), получаем

$$A_2 = hA_1.$$

Пользуясь найденным значением A_2 и подставляя во второе условие (20), находим положив

$$y_1'(b) + Hy_1(b) = K,$$
$$y_2'(b) + Hy_2'(b) = L,$$

что

$$A_1(K + hL) + \int\limits_a^b f(\xi)\left(y_1(\xi)L - y_2(\xi)K\right) d\xi = 0,$$

откуда, окончательно,

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{\int\limits_a^b f(\xi)\left(y_1(\xi)L - y_2(\xi)K\right) d\xi}{K + hL}, \\ A_2 &= -\frac{\int\limits_a^b f(\xi)\left(y_1(\xi)L - y_2(\xi)K\right) d\xi}{K + hL}. \end{aligned} \tag{33}$$

Формулы (33) остаются действительными и в отмеченных особо в параграфе 1-м случаях (α) и (β).

В случае (α) подстановка в формулы (33) $h = \infty$, $H = \infty$ дает

$$A_1 = 0, \qquad A_2 = -\frac{\int\limits_a^b f(\xi)\left(y_1(\xi) y_2(b) - y_1(b) y_2(\xi)\right) d\xi}{y_2(b)},$$

что можно получить и непосредственно из соответственным образом измененных условий (20).

В случае (β) подстановка в формулы (33) $h = 0$, $H = 0$ дает

$$A_1 = -\frac{\int\limits_a^b f(\xi)\left(y_1(\xi)y_2'(b) - y_1'(b)y_2(\xi)\right)\,d\xi}{y_1'(b)}, \qquad A_2 = 0,$$

что также может быть получено из формул (20) непосредственно.

Примечание. При этих выкладках мы предполагали, что $K + hL$ не равен нулю. Ниже мы докажем, что равенство

$$K + hL = 0$$

невозможно и что, следовательно, нами рассмотрены все возможные случаи.

Здесь-же, чтобы потом не возвращаться назад, отметим, что указанное равенство равносильно равенствам

$$y_1'(b) + Hy_1(b) + h\left(y_2(b) + Hy_2(b)\right) = y_1'(b) + hy_2'(b0 + H\left(y_1(b) = hy_2(b)\right) = 0.$$

Так как

$$y_1(0) + hy_2(0) = 0, \qquad y_1(0) + hy_2'(0) = h,$$

ясно, что функция

$$y_1(x) + hy_2(x)$$

удовлетворяет в предположенном случае условиям на границах, другими словами, что уравнение (19) имеет решение, удовлетворяющее условиям на границе при $\lambda = 0$.

§ 4. ФУНКЦИЯ ГРИНА

Подстановка значений, (35) в (31) неудобна в том отношении, что из трех интегралов, которые в нее войдут, два взяты в пределах от 0 до b, а третий в пределах от 0 до x. Введем в рассмотрение функцию $\omega(x, \xi)$, заданную условиями

$$(34) \qquad \begin{array}{rcll} \omega(x,\xi) & = & y_1(\xi)y_2(x) - y_1(x)y_2(\xi), & \text{если} \quad \xi \le x \\ \omega(x,\xi) & = & 0, & \text{если} \quad \xi \ge x. \end{array}$$

Функция $\omega(x, \xi)$ непрерывна в промежутке $(0, b)$, как функция от ξ и как функция от x; производная ее по x не непрерывна.

Пользуясь функцией (34) мы можем писать:

$$(35) \qquad \int\limits_a^x f(\xi)(y_1(\xi)y_2(x) - y_1(x)y_2(\xi))\,d\xi =$$

$$= \int\limits_a^x f(\xi)\omega(x,\xi)\,d\xi + \int\limits_x^b f(\xi)\omega(x,\xi)\,d\xi = \int\limits_a^b f(\xi)\omega(x,\xi)\,d\xi,$$

прибавленный, именно, интеграл

$$\int_x^b f(\xi)\omega(x,\xi)\,d\xi$$

равен нулю, так как в нем $\xi \geq x$ и $\omega(x,\xi) = 0$. Подставляя (35) в (31) и заменяя там A_1 и A_2 их значениями (33), мы можем (31) дать вид

$$y = -\int_a^b f(\xi)G(x,\xi)\,d\xi, \tag{36}$$

вводя в рассмотрение новую функцию $G(x,\xi)$ теперь, именно, все интегралы взяты в пределах от 0 до b.

Для вычисления функции $G(x,\xi)$ надо отдельно рассматривать случаи:

$$\xi \leq x, \qquad \xi \geq x.$$

Начнем со второго. Так как пока $\xi \geq x$, $\omega(x,\xi) = 0$, на состав функции $G(x,\xi)$ влияют только члены, происшедшие от членов с A_1 и A_2. Сумма их

$$\frac{(y_1(\xi)L - y_2(\xi)K)y_1(x)}{K+hL} + \frac{(y_1(\xi)hL - y_2(\xi)hK)y_2(x)}{K+hL} =$$

$$= \frac{(y_1(\xi)L - y_2(\xi)K)(y_1(x) + y_2(x))}{K+hL}.$$

Итак

$$\text{если } \ \xi \geq x, \quad \text{то} \quad G(x,\xi) = \frac{(y_1(\xi)L - y_2(\xi)K)(y_1(x) + hy_2(x))}{K+hL}. \tag{37}$$

Для нахождения $G(x,\xi)$ при $\xi \leq x$, надо к найденному значению (37) прибавить $-\omega(x,\xi)$. Выполняя выкладки, легко получаем:

$$\frac{(y_1(\xi)L - y_2(\xi)K)(y_1(x) + y_2(x) - (K+hL)(y_1(\xi)y_2(x) - y_1(x)y_2(\xi))}{K+hL} =$$

$$= \frac{(y_1(x)L - y_2(x)K)(y_1(\xi) + y_2(\xi))}{K+hL}.$$

Итак

$$\text{если } \ \xi \leq x, \quad \text{то} \quad G(x,\xi) = \frac{(y_1(x)L - y_2(x)K)(y_1(\xi) + hy_2(\xi))}{K+hL}. \tag{37*}$$

Функция $G(x,\xi)$ называется *функцией Грина*, отвечающей нашей задаче; ясно, что это непрерывная функция от x и от ξ; при этом, это функция симметричная.

При перестановке ξ и x меньшее из них делается большим и одно из значений (37), (37*) заменяется другим.

Производная по x от функции Грина не непрерывна, а испытывает скачек при переходе x через ξ; ясно, что скачек производной функции Грина одинаков со скачком производной от функции $\omega(x,\xi)$, производная которой из

$$y_1(\xi)y_2'(\xi) - y_1'(\xi)y_2(\xi) = \frac{1}{\tau(\xi)}$$

при возрастании x делается равной нулю. Следовательно, при возрастании x произведение производной по x от функции Грина на $\tau(\xi)$ испытывает скачек равный -1.

§ 5. НАХОЖДЕНИЕ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ § 2-ГО

Переходим теперь к нахождению решений уравнения

$$(\tau(x)y')' + (\lambda g(x) - r(x))y = 0, \tag{19}$$

удовлетворяющих условиям

$$\text{при} \quad x = 0: \quad y' = hy; \qquad \text{при} \quad x = b: \quad y' = -Hy, \tag{20}$$

мы делаем его похожим на уравнение (22); [если положим] в нем

$$f(x) = -\lambda g(x)y(x).$$

Если, значит, $y(x)$ есть его решение, удовлетворяющее условиям (20), то оно должно быть связано равенством (36). Значит,

$$y(x) = \lambda \int_a^b g(\xi)G(x,\xi)y(\xi)\,d\xi. \tag{38}$$

Итак, $y(x)$ удовлетворяет однородному интегральному уравнению (39), ядро которого

$$g(\xi)G(x,\xi) \tag{39}$$

есть ядро Шмидта, которому посвящен § 17-ый прошлой главы; множитель $g(\xi)$, именно, положителен, а функция $G(x,\xi)$ непрерывна и симметрична. Из этого ясно, что уравнение (19) также как и (58) может иметь требуемое решение, отличное от нуля только тогда, когда λ равно одному из характеристических чисел ядра (59); если λ равно одному из этих характеристических чисел, то $y(x)$ соответственная фундаментальная функция.

Выписывая характеристические числа в возрастающем порядке из модулей и соответствующие им фундаментальные функции:

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_k,\ \ldots, \tag{40}$$

$$V_1(x),\ V_2(x),\ \ldots,\ V_k(x),\ \ldots, \tag{41}$$

заключаем, что уравнение (19) имеет решение отличное от нуля и удовлетворяющие условиям (20) тогда и только тогда, когда λ одно из чисел (40); что решение это фундаментальная функция (41), подписанная под этим λ (или линейная функция тех, которые подписаны под числами (40) равными этому λ, если таковые имеются).

Мы можем считать с самого начала, что функции (41) образуют нормальную и ортогональную систему функций, т.е. что

$$\int_a^b g(x)V_n(x)V_m(x)\,dx = 0, \quad \text{если} \quad m \neq n \quad \text{и} \quad \int_a^b g(x)V_m^2(x)\,dx = 1. \tag{42}$$

Из сказанного в § 17-м прошлой главы мы можем утверждать только, что числа (40) все вещественны. Из сказанного там нельзя заключить, что они положительны, что они все различны, или даже того, что число их неограничено.

§ 6. СВОЙСТВА НАЙДЕННОЙ СИСТЕМЫ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Теорема. *Характеристические числа ядра* (39) *все положительны, все различны и число их неограничено.*

1) Положим, λ одно из чисел (40) и V его фундаментальная функция. Тогда

$$(\tau(x)V')' + (\lambda g(x) - r(x))V = 0. \tag{19}$$

Дав последнему равенству вид

$$\lambda g(x)V = r(x))V - (\tau(x)V')',$$

умножив обе его части на $V\,dx$ и интегрируя в пределах от 0 до b получаем

$$\lambda \int_0^b g(x)V^2\,dx = \int_0^b r(x)V^2\,dx - \int_a^b (\tau(x)V')'V\,dx = \tag{43}$$

$$= \int_a^b \int_0^b r(x)V^2\,dx - V(x)\tau(x)V'(x)\Big|_0^b + \int_a^b \tau(x)(V'(x))^2\,dx.$$

Но вследствие условий (20), которым $V(x)$ удовлетворяет:

$$V(x)\tau(x)V'(x)\Big|_0^b = -V(b)\tau(b)V'(b) + V(0)\tau(0)V'(0) = H\tau(b)V^2(b) + hV^2(0).$$

Итак, равенство (43) имеет вид

$$\lambda \int_0^b g(x)V^2\,dx = \int_0^b r(x)V^2\,dx + H\tau(b)V^2(b) + hV^2(0) + \int_a^b \tau(x)(V'(x))^2\,dx.$$

Так как $g(x), r(x), \tau(x)$ не отрицательны, H и h неотрицательны, из последнего равенства ясно, что $\lambda > 0$.

Примечание. Из сказанного ясно, что обстоятельство, отмеченное в примечании к § 3-му, действительно имеет место и равенство

$$K + hL = 0$$

действительно невозможно для всякого решения уравнения (19), удовлетворяющего на границах поставленным условиям $\lambda > 0$ и, значит, нет решения при

$$\lambda = 0.$$

2). Покажем теперь, что все λ различны. Если

$$\lambda_k = \lambda_{k+1},$$

то соответетвующие им функции $V_k(x)$ и $V_{k+1}(x)$ обе удовлетворяют тому же уравнению

$$(\tau(x)y')' + (\lambda g(x) - r(x))y = 0. \tag{44}$$

Составим функцию

$$\psi(x) = aV_k(x) + bV_{k+1}(x). \tag{45}$$

Положим сначала, что $h \neq \infty$.

Можно определить a и b, чтобы они не равнялись нулю одновременно и было:

$$\psi(0) = aV_k(0) + bV_{k+1}(0) = 0.$$

Но вследствие условий (20)

$$\psi'(0) = aV_k'(0) + bV_{k+1}'(0) = h(aV_k(0) + bV_{k+1}(0)) = 0.$$

Итак имеем

$$\psi(0) = 0, \qquad \psi'(0) = 0.$$

Но функция (45) есть решение уравнения (44), как линейная функция его решений и так как она равна нулю вместе со своей производной при $x = 0$, она нуль тождественно.

Значит

$$aV_k(x) + bV_{k+1}(x) \equiv 0, \tag{46}$$

чего быть не может, так как $V_k(x)$ и $V_{k+1}(x)$ линейно независимы.

Если $h = \infty$, первое из условий (20) имеет вид

$$y(0) = 0.$$

Значит, в этом случае при всех a и b:

$$V_k(0), \quad V_{k+1}(0) = 0, \quad \psi(0) = 0.$$

Но можно найти не равные нулю одновременно a и b так, чтобы было

$$aV'_k(0) + bV'_{k+1}(0) = 0;$$

при таких a и b опять тождественно $\psi(x) = 0$ и справедливо тождество (40), чего быть не может.

3) Остается доказать, что число чисел (40) бесконечно велико. Положим, что их n и что

$$V_1,\ V_2,\ \ldots,\ V_n \tag{47}$$

соответствующие им фундаментальные функции. Можно найти функцию ψ, ортогональную ко всем функциям (47).

Положим φ какая нибудь функция, не связанная с функциями (47) линейной зависимостью и положим

$$\psi = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \ldots + \alpha_n V_n - \varphi. \tag{48}$$

Записывая условия, что ψ ортогональна к функциям (47), получаем уравнения:

$$\alpha_1 - \int\limits_a^b g\varphi V_1\,dx = 0,\ \ldots,\ \alpha_n - \int\limits_a^b g\varphi V_1\,dx = 0;$$

из последних уравнений, однако, могут быть найдены все коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Так как функция ψ ортогональна ко всем фундаментальным функциям ядра (39), то она по лемме § 12 прошлой главы ортогональна и к ядру:

$$\int\limits_a^b g(\xi)G(x,\xi)\psi(\xi)\,d\xi = 0. \tag{49}$$

Указанная лемма доказана для симметрического ядра, Но из теории ядер Шмидта в § 17-м вытекает, что

$$\sqrt{g(x)}\,V_1, \sqrt{g(x)}\,V_2, \ldots, \sqrt{g(x)}\,V_n \tag{47}$$

фундаментальные функции симметричного ядра

$$\sqrt{g(x)g(\xi)}\,G(x,\xi),$$

откуда ясно, что так как $\sqrt{g(x)}\,\psi(x)$ ортогональна к функциям (47^1), то

$$\int\limits_a^b \sqrt{g(x)}\,\sqrt{g(\xi)}\,G(x,\xi)\sqrt{g(\xi)}\psi(\xi)\,d\xi = 0,$$

что равносильно равенству (49).

Рассмотрим теперь уравнение

$$(\tau(x)y')' - r(x)y = \lambda g(x)y. \tag{50}$$

Оно по сказанному в §§ 3 и 4 имеет решение

$$y = -\int_a^b g(\xi)G(x,\xi)\psi(\xi)\,d\xi = 0,$$

чего быть не может, так как правая часть уравнения (50) не нуль.

Итак теорема полностью установлена.

Функции (41) называются *фундаментальными функциями Штурма – Лиувилля.*

§ 7. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ § 2 ПРИ НЕКОТОРЫХ УСЛОВИЯХ

Возвращаясь к сказанному в § 5 мы видим, что уравнение (18), к которому нами сведена задача в § 2, имеет решение удовлетворяющее граничным условиям (20) только тогда, когда λ равно некоторому характеристическому числу λ_n из высказанных в строке (40) и что в этом случае, y равно функции Штурма – Лиувилля V_n, соответствующей этому числу. Отсюда вытекает, что одним из решений уравнения

$$\text{(I)} \qquad g(x)\,\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial\left(\tau(x)\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial x} - r(x)v,$$

удовлетворяющих условию

$$\text{(III)} \qquad \text{при} \quad x=0: \quad \frac{\partial v}{\partial x} = hv; \qquad \text{при} \quad x=b: \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -Hv.$$

будет функция

$$\text{(51)} \qquad e^{-\lambda_n t}\,V_n(x).$$

Так как произведение решения (51) на произвольную постоянную будет также решением и сумма двух решений вида (51) есть также решение уравнения (1), сумма ряда

$$\text{(52)} \qquad v = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n t}\,V_n(x),$$

если он сходящийся, и сумма его v имеет требуемые производные, будет также решением, причем решением удовлетворяющим условиям (III). Но нами ищется решение, удовлетворяющее сверх того условию

$$\text{(II)} \qquad \text{при} \quad t=0: \quad v=\varphi(x).$$

При $t=0$ ряд (52) обращается в

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\,V_n(x).$$

Для соблюдения условий (52), значит, надо, чтобы было справедливо равенство

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n V_n(x), \tag{53}$$

т.е. чтобы функция $\varphi(x)$ была разложима в ряд по функциям Штурма – Лиувилля. Отметим, что если функция $\varphi(x)$ разложена в такой абсолютно и равномерно сходящийся ряд, то этим самым определены все коэффициенты a_n, как коэффициенты Фурье этого ряда и вследствие этого самого ряд (52) равномерно сходящийся.

Действительно, так как числа λ_n, все положительны,

$$e^{-\lambda_n t} \leq 1$$

и, значит, члены ряда (52) абсолютно меньше членов ряда (53). Чтобы указать частный случай, в котором функция $\varphi(x)$ разложима в требуемый ряд Фурье, положим, что функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям:

$$\begin{array}{c} \text{1) можно найти выражение} \quad (\tau(x)\varphi'(x))' \\ \text{2) при} \;\; x = 0: \quad \varphi'(0) = h\varphi(0); \qquad \text{при} \;\; x = b: \quad \varphi'(b) = -H\varphi(b). \end{array} \tag{54}$$

Примечание. Если-бы функция $\tau(x)$ была непрерывна и имела-бы непрерывную производную, то условие (1) было-бы равносильно условию: функция $\varphi(x)$ имеет первые две производные; действительно, в этом случае выражение (54) равнялось бы

$$\tau(x)\varphi''(x) + \tau'(x)\varphi'(x)$$

и его можно было-бы вычислить при наличии у $\varphi(x)$ второй производной.

Положим, что функция $\varphi(x)$ указанным двум условиям удовлетворяет. Вычислим

$$(\tau(x)\varphi'(x))' - r(x)\varphi(x)$$

и обозначим полученное выражение через $h(x)$. Функция $\varphi(x)$ есть решение уравнения

$$(\tau(x)\varphi'(x))' - r(x)\varphi(x) = h(x),$$

причем, вследствие соблюдения условия (II), решение, удовлетворяющее граничным условиям (III).

Положим, что $g(x)$ не обращается в нуль, но остается больше некоторого числа α_0:

$$g(x) \geq \alpha_0 > 0.$$

Дав последнему уравнению вид

$$(\tau(x)\varphi'(x))' - r(x)\varphi(x) = g(x)\,\frac{h(x)}{g(x)}$$

и, пользуясь сказанным в § 4, именно, формулой (36) мы видим, что

$$\varphi(x) = -\int_a^b g(\xi)G(x,\xi)\,\frac{h(\xi)}{g(\xi)}\,d\xi,$$

причем функция
$$\frac{h(x)}{g(x)}$$
ограничена. Следовательно, функция $\varphi(x)$ подходит под теорему Гильберта – Шмидта и разложима в ряд (53).

Чтобы быть уверенным, что ряд (52) действительно дает решение уравнения (1), надо убедиться еще, что его сумма имеет нужные производные.

Мы это докажем предполагая абсолютную и равномерную сходимость ряда (52) без каких-либо ограничений [на] функцию $\varphi(x)$.

§ 8. СУЩЕСТВОВАНИЕ НУЖНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ У РЯДА (52)

Итак предполагаем, что ряд (52) абсолютно и равномерно сходится.

Составляем сначала ряд из производных по t от членов ряда (52) соответствующий $\dfrac{\partial v}{\partial t}$:

$$\frac{\partial v}{\partial t} \sim -\sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda_k \, e^{-\lambda_k t} \, V_k(x). \tag{55}$$

Положим, что η положительное число, взятое сколь угодно малым и положим, что

$$\eta \leq t < +\infty. \tag{56}$$

Мы докажем, что ряд (55) сходится в промежутке (56). Действительно, имеем, если t в промежутке (56):
$$\lambda_k \, e^{-\lambda_k t} \leq \lambda_k \, e^{-\lambda_k \eta}$$
и ясно, что если λ_k достаточно велико, то число в правой части неравенства меньше любого числа: $e^{-\lambda_k \eta}$ убывает, именно, быстрее, чем возрастает λ_k. Итак

$$\text{при} \quad n \geq N: \quad e^{-\lambda_k t} < 1;$$

отсюда-же вытекает, что все члены ряда (55) начиная с некоторого абсолютно меньше членов ряда (53) и что, значит, ряд (55) сходящийся.

Установив сходимость ряда (55) мы можем утверждать, что v имеет производную по t и что
$$\frac{\partial v}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} -\lambda_k a_k e^{-\lambda_k t} \, V_k(x).$$

Чтобы доказать существование у v производной по x, вспомним формулу (32) § 3.

Заменяя в ней $f(x)$ через $-\lambda_k g(x) V_k(x)$ мы обратим y в $V_k(x)$. Значит при всяком x, при котором у $V_k(x)$ есть производная

$$V_k'(x) = A_1 y_1' + A_2 y_2' - \lambda_k \int_a^b g(\xi) V_k(\xi) \left(y_1(\xi) y_2'(x) - y_1'(x) y_2(\xi) \right) d\xi,$$

где

$$A_1 = \frac{\int\limits_a^b \lambda_k g(\xi) V_k(\xi) \left(y_1(\xi) L - y_2(\xi) K\right)}{K + hL}, \quad A_2 = hA_1.$$

Из сказанного ясно, что при указанных x мы имеем:

$$V_k'(x) = \int\limits_a^b \lambda_k V_k(\xi) A(\xi, x)\, d\xi + \int\limits_a^b \lambda_k V_k(\xi) B(\xi, x)\, d\xi,$$

где $A(\xi, x)$ и $B(\xi, x)$ функции от ξ и x, которые легко составить.

Но

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k t}\, V_k'(x) = \tag{57}$$

$$= \int\limits_a^b \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k t}\, V_k(x) A(\xi, x)\, d\xi + \int\limits_a^b \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k t}\, V_k(x) B(\xi, x)\, d\xi,$$

где в правой части стоят ряды равномерно сходящиеся в промежутке (56) на основании доказанного о ряде (55). Вследствие этого сумма ряда (55) имеет производную при всех значениях x, при которых $V_k(x)$ имеют производные (при которых $\tau(x)$) непрерывно) и эти производные равны сумме ряда (57).[3]

Отметим, что так как

$$\tau(x) A(\xi, x), \qquad \tau(x) B(\xi, x)$$

непрерывные функции от x, то

$$\tau(x) \frac{\partial v}{\partial x} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k t}\, \tau(x) V_k'(x)$$

непрерывная функция от x.

Наконец, так как

$$(\tau(x) V_k'(x))' = r(x) V_k(x) - \lambda_k g(x) V_k(x),$$

имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k t}\, (\tau(x) V_k'(x))' = r(x) \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k t}\, V_k(x) - g(x) \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k e^{-\lambda_k t}\, V_k(x).$$

Так как ряды в правой части последнего равенства сходятся абсолютно и равномерно в промежутке (56), первый их них даже в промежутке $(0, \infty)$, то ряд левой

[3]См. книгу "Дифференциальное исчисление" А. Дженокки, § 94 (стр. 106 перевода К.А. Поссе, изд. 1922 года).

части этого равенства сходится также равномерно в промежутке (56), откуда, заключаем, что пока t в этом промежутке

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau(x)\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k t}\left(\tau(x)V_k'(x)\right)'$$

и что все требуемые производные у v существуют.

§ 9. ЗАМКНУТОСТЬ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ

Рассмотрим класс функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих двум условиям § 7.

$$(54)\qquad \begin{array}{c} 1)\ \text{можно найти выражение}\quad (\tau(x)\varphi'(x))' \\ 2)\ \text{при}\ \ x=0:\quad \varphi'(0)=h\varphi(0);\qquad \text{при}\ \ x=b:\quad \varphi'(b)=-H\varphi(b). \end{array}$$

Такие функция, как мы установили, разложимы в ряд Фурье по функциям Штурма – Лиувилля. Положим

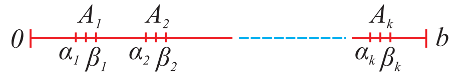
$$(53)\qquad \varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty} a_n V_n(x), \quad a_n=\int_a^b g(x)\varphi(x)V_n(x)\,dx.$$

Возводя $\varphi(x)$ в квадрат, легко находим, пользуясь равномерной сходимостью ряда

$$(58)\qquad \int_a^b g(x)\varphi^2(x)\,dx=\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2\int_a^b g(x)V_k^2(x)\,dx+$$

$$+\sum_{k\,<\,l}^{n}\sum^{n} a_k a_l\int_a^b g(x)V_k(x)V_l(x)\,dx=\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2,$$

[что] система функций Штурма – Лиувилля, именно нормальна и ортогональна. Равенство (68) говорит, что система функций Штурма – Лиувилля замкнута относительно функций $\varphi(x)$ удовлетворяющих указанным двум условиям. Докажем теперь, что система функций Штурма – Лиувилля замкнута относительно собрания функций $f(x)$ непрерывных и имеющих производную во всех точках промежутка $(0, b)$, исключая ограниченного числа точек. Доказательство мы разобьем на две части. В первой из них мы установим, что можно построить функцию $\psi(x)$ удовлетворяющую указанным выше двум требованиям и отличающуюся от $f(x)$ при всяком x внутри промежутка $(0, b)$ меньше, чем на ε.



Черт. 3

Приступая к первой части положим, что число разрывов производной $f(x)$ и функции $\tau(x)$ равно K. Отметив на отрезке $(0,b)$ точки этих разрывов, мы разобьем его на более мелкие, в которых $\tau(x)$ и $f'(x)$ непрерывны. Если x' и x'' две точки на одном из этих отрезков, то каково-бы ни было число ε', можно найти такое h, что,

$$|\tau(x')f'(x') - \tau(x'')f'(x'')| < \varepsilon', \quad \text{если} \quad |x'-x''| < 2h.$$

Так как h можно произвольно уменьшать, мы будем считать, что $2h < \dfrac{\varepsilon'}{2}$.

Поместим теперь каждую из точек разрыва $A_1, A_2, \ldots, A_k$ в середину отрезка длины ε' и вынем из $(0,b)$, построенные таким образом K отрезков

$$(\alpha_1,\beta_1),\ (\alpha_2,\beta_2),\ \ldots.$$

Положим далее

$$\tau(x)\psi'(x) = \frac{1}{h^2}\int\limits_x^{x+h}\left(\int\limits_t^{t+h}\tau(\xi)f'(\xi)\,d\xi\right)dt. \tag{59}$$

Отметим, что

$$x<t<x+h, \quad t<\xi<t+h, \quad x<\xi<x+2h$$

и что

$$\frac{1}{h^2}\int\limits_x^{x+h}\left(\int\limits_t^{t+h}d\xi\right)dt = 1$$

Функция (59) очевидно непрерывна и имеет непрерывную производную. Действительно

$$(\tau(x)\psi'(x))' = \frac{1}{h^2}\left(\int\limits_{x+h}^{x+2h}\tau(\xi)f'(\xi)\,d\xi - \int\limits_x^{x+h}\tau(\xi)f'(\xi)\,d\xi\right).$$

Далее, если точка x внутри одного из отрезков $0,\alpha_1$, (β_1,α_2), $\ldots$, то точки ξ внутри соответственного отрезка $(0,A_1)$, (A_1,A_2), $\ldots$, так как

$$\xi < x+2h < x+\frac{\varepsilon'}{2},$$

откуда

$$|\tau(\xi)f'(\xi) - \tau(x)f'(x)| < \varepsilon'.$$

Значит

$$|\tau(x)(\psi'(x)-f'(x))| =$$

$$\frac{1}{h^2}\left|\int\limits_x^{x+h}\left(\int\limits_t^{t+h}(\tau(\xi)f'(\xi)-\tau(x0f'(x))\,d\xi\right)dt\right| \le \frac{1}{h^2}\int\limits_x^{x+h}\left(\int\limits_t^{t+h}\varepsilon'\,d\xi\right)dt = \varepsilon'.$$

Итак для каждой тючки внутри отрезков $0, \alpha_1$, (β_1, α_2), ...

$$|\psi'(x) - f'(x)| < \frac{\varepsilon'}{\tau(x)} < \frac{\varepsilon'}{\alpha_0}.$$

Если M высший предел $f(x)$ и $\psi(x)$, то пока точка x между 0 и α_1, если положить, что $\psi(0) = f(0)$:

$$|\psi(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon'}{\alpha_0} < \frac{\varepsilon'}{\alpha_0} a_1,$$

где $a_1 =$ длина прямой $0A_1$, пока точка x между α_1 и β_1,

$$|\psi(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon'}{\alpha_0} a_1 + 2M \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} dx = \frac{\varepsilon'}{\alpha_0} a_1 + 2M\varepsilon',$$

пока точка x между β_1 и α_1,

$$|\psi(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon'}{\alpha_0} a_1 + 2M\varepsilon' + \frac{\varepsilon'}{\alpha_0} a_2,$$

где a_2 длина прямой A_1A_2 и т.д. Во всяком случае

$$|\psi(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon'}{\alpha_0} b + 2MK\varepsilon,$$

где b — длина всей прямой $0b$.

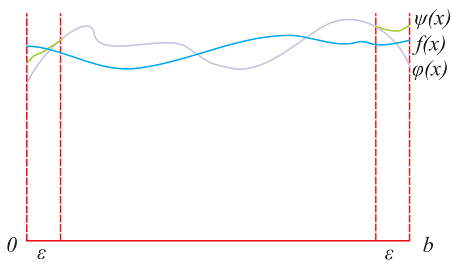
Положив

$$\frac{\varepsilon'}{\alpha_0} b + 2MK\varepsilon' = \varepsilon,$$

имеем

$$|\psi(x) - f(x)| < \varepsilon'.$$

Отложим теперь от концов 0 и b отрезки длины ε и сохранив от функции $\psi(x)$ только ту часть, которая отвечает точкам внутри, построим новую функцию $\varphi(x)$, равную $\psi(x)$ в промежутке $(\varepsilon, b - \varepsilon)$ и выбранную так, чтобы на границах она удовлетворяла условию (2).



Черт. 4

Мы получим таким образом функцию $\varphi(x)$, удовлетворяющую условиям (1) и (2) и такую, что

$$|\varphi(x) = f(x)| < \varepsilon$$

на промежутке $(\varepsilon, b-\varepsilon)$. Так как функция $\varphi(x)$ принадлежит классу, в котором система функций Штурма – Лиувилля замкнута, имеем, если

$$\varphi(x) = a_1 V(x) + \ldots + a_n V_n(x) + \rho_n(x), \tag{60}$$

$$a_k = \int\limits_a^b g(x)\varphi(x)V_k(x)\,dx,$$

то

$$\int\limits_a^b g(x)\rho_n^2(x)\,dx = \int\limits_a^b g(x)\varphi(x)\,dx - \sum_{k=1}^n a_k^2 < \varepsilon, \tag{61}$$

при $n \geq N$.

Положим

$$f(x) = b_1 V_1(x) + \ldots + b_n V_n(x) + R_n(x), \tag{62}$$

$$b_k = \int\limits_a^b g(x)f(x)V_k(x)\,dx.$$

Из (62) и (66) имеем:

$$R_n(x) = \rho_n(x) + f(x) - \varphi(x) + \sum_{k=1}^n (a_k - b_k)V_k(x)$$

и

$$\int\limits_a^b g(x)R_n^2(x)\,dx = \int\limits_a^b g(x)R_n(x)\rho_n(x)\,dx + \tag{63}$$

$$+\int\limits_a^b g(x)(f(x)-\varphi(x))R_n(x)\,dx + \sum_{k=1}^n (a_k - b_k)\ \int\limits_a^b g(x)R_n(x)V_n(x)\,dx.$$

Прежде всего заметим, что по (62)

$$\int\limits_a^b g(x)R_n(x)V_k(x)\,dx = \tag{63^1}$$

$$= \int\limits_a^b g(x)f(x)V_k(x)\,dx - \int\limits_a^b g(x)\sum_{l=1}^n b_l V_l(x)V_k(x)\,dx = b_k - b_k = 0. \tag{63^1}$$

Далее,

$$(ab)^2 \leq 2a^2 + 2b^2.$$

Пользуясь этим, из (63) заключаем, что

$$\frac{1}{2}\left(\int\limits_a^b g(x)R_n^2(x)\,dx\right)^2 \le \left(\int\limits_a^b g(x)R_n(x)\rho_n(x)\,dx\right)^2 +$$

$$+\left(\int\limits_a^b g(x)(f(x)-\varphi(x))R_n(x)\,dx\right)^2,$$

откуда, пользуясь неравенством Шварца заключаем:

$$\frac{1}{2}\left(\int\limits_a^b g(x)R_n^2(x)\,dx\right)^2 \le \int\limits_a^b g(x)R_n^2(x)\,dx\cdot\int\limits_a^b g(x)\rho_n^2(x)\,dx+$$

$$+\int\limits_a^b g(x)R_n^2(x)\,dx\cdot\int\limits_a^b g(x)(f(x)-\varphi(x))^2\,dx$$

или

$$\frac{1}{2}\int\limits_a^b g(x)R_n^2(x)\,dx \le \int\limits_a^b g(x)\rho_n^2(x)\,dx+\int\limits_a^b g(x)(f(x)-\varphi(x))^2\,dx.$$

Первый интеграл в правой части меньше ε; занимаясь вторым, видим, что

$$\int\limits_a^b g(x)(f(x)-\varphi(x))^2\,dx = \int\limits_a^\varepsilon g(x)(f(x)-\varphi(x))^2\,dx+$$

$$+\int\limits_\varepsilon^{b-\varepsilon} g(x)(f(x)-\varphi(x))^2\,dx+\int\limits_{b-\varepsilon}^b g(x)(f(x)-\varphi(x))^2\,dx \le$$

$$\le g\cdot 4M^2\varepsilon\cdot\varepsilon^2+g_1\varepsilon^2\cdot b+g_1 4M^2\cdot\varepsilon^2\varepsilon=\frac{1}{2}B\varepsilon,$$

где B некоторое число, а g_1 верхняя граница $g(x)$.

Значит

$$\int\limits_a^b g(x)R_n^2(x)\,dx<\varepsilon, \tag{64}$$

если $n \ge N$, т.е. система функций Штурма – Лиувилля замкнута для класса непрерывных функций, первые производные которых испытывают ограниченное число разрывов.

Примечание. Доказанная теорема может быть значительно обобщена и можно показать замкнутость для всякой непрерывной функции $f(x)$, удовлетворяющей условию

$$|f(x')-f(x'')| \le A|x'-x''|.$$

Для нашей цели доказанного достаточно.

§ 10. РАЗЛОЖИМОСТЬ ПО ФУНКЦИЯМ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ ФУНКЦИЙ С НЕПРЕРЫВНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Положим, что функция $f(x)$ непрерывна и имеет производную, терпящую ограниченное число разрывов. Положим

$$f(x) = b_1 V_1(x) + b_2 V_2(x) + \ldots + b_n V_n(x) + R_n(x). \tag{65}$$

Мы доказали, что

$$\int\limits_a^b g(x) R_n^2(x)\, dx < \varepsilon, \tag{64}$$

если $n \geq N$. Положим, что ξ какое нибудь число из промежутка $(0, b)$ и рассмотрим интеграл

$$\int\limits_\xi^x (R_n^2(x))'\, dx = 2\int\limits_\xi^x R_n(x) R_n'(x)\, dx = R_n^2(x) - R_n^2(\xi).$$

Из последнего равенства имеем:

$$R_n^2(\xi) = R_n^2(x) - 2\int\limits_\xi^x R_n(x) R_n'(x)\, dx,$$

$$R_n^2(\xi) \leq R_n^2(x) + 2\int\limits_\xi^x |R_n(x)|\, |R_n'(x)|\, dx \leq R_n^2(x) + 2\int\limits_0^b |R_n(x)|\, |R_n'(x)|\, dx$$

или после применения неравенства Шварца

$$R_n^2(\xi) \leq R_n^2(x) + 2\sqrt{\int\limits_0^b R_n^2(x)\, dx \cdot \int\limits_0^b {R_n'}^2(x)\, dx} =$$

$$= R_n^2(x) + 2\sqrt{\int\limits_0^b g(x)\, \frac{R_n^2(x)}{g(x)}\, dx \cdot \int\limits_0^b {R_n'}^2(x)\, dx}.$$

Умножая обе части последнего равенства на $g(x)$ и интегрируя получаем

$$R_n^2(\xi) \int\limits_a^b gx)\, dx \leq \int\limits_a^b g(x) R_n^2(x)\, dx +$$

$$2\sqrt{\frac{1}{\alpha_0}\int\limits_a^b g(x)R_n^2(x)\,dx}\cdot\sqrt{\int\limits_a^b {R'_n}^2(x)\,dx}\cdot\sqrt{\int\limits_a^b g(x)\,dx}.$$

Из последнего неравенства, пользуясь (64) заключаем

$$R_n^2(\xi)\le\frac{1}{\alpha_0 b}\,\varepsilon+d\sqrt{\frac{\varepsilon}{\alpha_0}}\sqrt{\int\limits_a^b {R'_n}^2(x)\,dx}, \tag{66}$$

если $n\ge N$.

Неравенство (66) говорит, что

$$R_n^2(\xi)$$

стремится к нулю при $n\to\infty$ и что, следовательно, ряд (65) сходящийся, если

$$\int\limits_a^b {R'_n}^2(x)\,dx \tag{67}$$

ограничен.

Мы имеем из (65):

$$f'(x)=b_1V'_1(x)+b_2V'_2(x)+\ldots+b_nV'_n(x)+R'_n(x). \tag{68}$$

Замечаем, что

$$\int\limits_a^b {R'_n}^2(\xi)\,dx=\int\limits_a^b \tau(x)\,\frac{{R'_n}^2(x)}{\tau(x)}\,dx\le\frac{1}{\alpha_0 b}\int\limits_a^b \tau(x){R'_n}^2(x)\,dx.$$

Следовательно, если мы вместо ограниченности (67) установим ограниченность

$$\int\limits_a^b \tau(x){R'_n}^2(x)\,dx,$$

то наше утверждение будет доказано.

Пользуясь (68) имеем:

$$\int\limits_a^b \tau(x){R'_n}^2(x)\,dx=\int\limits_a^b \tau(x)f'(x)R'_n(x)\,dx-\sum_{k=1}^n b_k\int\limits_a^b \tau(x)V'_k(x)R'_n(x)\,dx. \tag{69}$$

Займемся сначала последним слагаемым в (69). Вследствие того, что $\tau(x)V'_k(x)$ непрерывны, имеем интегрируя по-частям:

$$\int\limits_a^b \tau(x)V'_k(x)R'_n(x)\,dx=\tau(x)V'_k(x)R'_n(x)\Big|_0^b-\int\limits_a^b (\tau(x)V'_k(x))'R_n(x)\,dx=$$

$$\tau(b)V_k'(b)R_n'(b) - V_k'(0)R_n'(0) + \lambda_k \int\limits_a^b g(x)V_k(x)R_n(x)\,dx - \int\limits_a^b r(x)V_k(x)R_n(x)\,dx,$$

так как

$$(\tau(x)V_k'(x))' = -\lambda_k g(x)V_k(x) + r(x)V_k(x).$$

Пользуясь условиями на границах, которым удовлетворяют функции Штурма – Лиувилля, мы можем последнему равенству дать вид пользуясь еще (63^1):

$$\int\limits_a^b \tau(x)V_k'(x)R_n'(x)\,dx == -H\tau(b)V_k(b)R_n(b) - hV_k(0)R_n(0) - \int\limits_a^b r(x)V_k(x)R_n(x)\,dx.$$

Подставляя найденное значение интеграла в последние слагаемые (69) и пользуясь (65) получаем:

$$-\sum_{k=1}^{\infty} b_k \int\limits_a^b \tau(x)V_k'(x)R_n'(x)\,dx = H\tau(b)R_n(b)\sum_{k=1}^{n} V_k(b)\cdot b_k +$$

$$+hR_n(0)\sum_{k=1}^{n} b_kV_k(0) + \int\limits_a^b r(x)R_n(x)\sum_{k=1}^{n} b_kV_k(x)\,dx =$$

$$= H\tau(b)R_n(b)(f(b) - R_n(b)) + hR_n(0)(f(0) - R_n(0)) + \int\limits_a^b r(x)R_n(x)(f(x) - R_n(x))\,dx.$$

Подставив найденное значение в (69), раскрыв все скобки и перенося все члены, оказавшиеся со знаком $-$ из правой части в левую, получаем:

$$\int\limits_a^b \tau(x)(R_n'(x))^2\,dx + H\tau(b)R_n(b) + hR_n^2(0) + \int\limits_a^b \tau(x)R_n^2(x)\,dx = \tag{70}$$

$$= \int\limits_a^b \tau(x)f'(x)R_n'(x)\,dx + H\tau(b)R_n(b)f(b) + hR_n(0)f(0) = \int\limits_a^b \tau(x)R_n(x)f(x)\,dx.$$

Займемся первым слагаемым в правой части (70). Пользуясь (68) имеем:

$$\int\limits_a^b \tau(x)f'(x)R_n'(x)\,dx = \int\limits_a^b \tau(x)f'(x)\left(f'(x) - \sum_{k=1}^{n} b_kV_k'(x)\right)\,dx = \tag{71}$$

$$= \int\limits_a^b \tau(x)(f'(x))^2\,dx - \sum_{k=1}^{n} b_k \int\limits_a^b \tau(x)f'(x)V_k'(x)\,dx.$$

Но

$$\int\limits_a^b \tau(x)V_k'(x)f'(x)\,dx = \tau(x)V_k'(x)f(x)\Big|_0^b - \int\limits_a^b (\tau(x)V_k'(x))^2 f(x)\,dx =$$

$$= \tau(b)V_k'(b)f(b) - V_k'(0)f(0) + \lambda_k \int\limits_a^b g(x)V_k(x)f(x)\,dx - \int\limits_a^b r(x)V_k(x)f(x)\,dx =$$

$$= -H\tau(b)V_k(b)f(b) - hV_k(0)f(0) + \lambda_k b_k \int\limits_a^b r(x)f(x)V_k(x)\,dx.$$

Значит

$$-\sum_{k=1}^n b_k \int\limits_a^b \tau(x)f'(x)V_k'(x)\,dx =$$

$$= H\tau(b)f(b)\sum_{k=1}^n b_k V_k(b) + hf(0)\sum_{k=1}^n b_k V_k(0) - \sum_{k=1}^n \lambda_k b_k^2 + \int\limits_a^b r(x)f(x)\sum_{k=1}^n b_k V_k(x)\,dx =$$

$$= H\tau(b)f(b)(f(b)-R_n(b)) + hf(0)(f(0)-R_n(0)) + \int\limits_a^b r(x)f(x)(f(x)-R_n(x))\,dx - \sum_{k=1}^n \lambda_k b_k^2.$$

Вследствие этого

$$\int\limits_a^b \tau(x)R_n'(x)f(x)\,dx = \int\limits_a^b \tau(x)(f'(x))^2\,dx + H\tau(b)f^2(b) - \tag{72}$$

$$-H\tau(b)f(b)R_n(b) + hf^2(0) - hf(0)R_n(0) +$$

$$\int\limits_a^b r(x)f^2(x)\,dx - \int\limits_a^b r(x)f(x)R_n(x)\,dx - \sum_{k=1}^n \lambda_k b_k^2.$$

Подстановка найденного интеграла в (70) дает окончательно после сокращении:

$$\int\limits_a^b \tau(x)(R_n'(x))^2\,dx + H\tau(b)R_n^2(b) + hR_n^2(0) + \int\limits_0^b \tau(x)R_n^2(x)\,dx = \tag{73}$$

$$= \int\limits_a^b \tau(x)(f'(x))^2\,dx + H\tau(b)f^2(b) + hf^2(0) + \int\limits_a^b \tau(x)f^2(x)\,dx - \sum_{k=1}^n \lambda_k b_k^2.$$

Так как левая часть последнего равенства положительна, правая часть также положительна и

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k b_k^2 \le \int\limits_a^b \tau(x)(f'(x))^2\,dx + H\tau(b)f^2(b) + hf^2(0) + \int\limits_a^b r(x)f^2(x)\,dx = C,$$

обозначая через C правую часть последнего равенства. Число C не зависит от n.

Вследствие этого

$$\int_a^b \tau(x)(R_n'(x))^2\,dx + H\tau(b)R_n^2(b) + hR_n^2(0) + \int_a^b \tau(x)R_n^2(x)\,dx \leq$$

$$\leq \int_a^b \tau(x)f^2(x)\,dx + H\tau(b)f^2(b) + hf^2(0) + \int_a^b \tau(x)f^2(x)\,dx + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_k^2 \leq 2C$$

и подавно

$$\int_a^b \tau(x)(R_n'(x))^2\,dx \leq 2C,$$

что и требовалось доказать.

Итак разложимость функции $f(x)$ в ряд по функциям Штурма – Лиувилля установлена.

Примечание. Установленная теорема может быть значительно обобщена. Можно, именно, установить, что функция $f(x)$ разложима в ряд по функциям Штурма – Лиувилля если соблюдено условие

$$|f(x') - f(x'')| \leq A|x' - x''|.$$

Про такую функцию можно, именно, установить, что она имеет вид

$$f(x) = \int_a^x \psi(x)\,dx + c_1,$$

где в правой части интеграл есть интегрдл Лебега и провести доказательство оперируя с функцией $\psi(x)$, так как мы оперировали с производной от $f(x)$.

§ 11. НЕКОТОРЫЕ ДРУГИЕ СЛУЧАЙ ТЕПЛОВОЙ ЗАДАЧИ

Аналогичным образом могут быть рассмотрены и некоторые другие случаи тепловой задачи. Возьмем например случай распределения тепла в кольце. При выводе уравнения (11) в § 1, регулирующего течение тепла внутри бруса, нами не было сделано никаких существенных условий о форме бруса.

Следовательно уравнение

$$g(x)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial\left(\tau(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x} - r(x)(u - U), \tag{11}$$

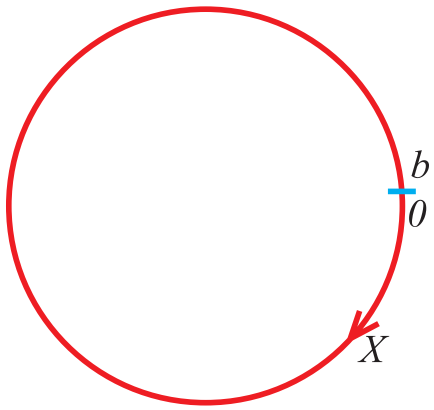
попрежнему управляет движением тепла, если в нем подразумевать под x длину дуги кольца, отсчитанную от произвольно выбранной точки 0 в нем, Попрежнему следует считать данным распределение тепла в кольце в начальный момент.

$$\text{при} \quad t = 0: \quad u = U + \varphi(x),$$

однако, естественно, считать теперь, обозначая через b длину бруса, что

$$\varphi(0) = \varphi(b) \tag{74}$$

точки 0 и b бруса, именно, неотличны.



Черт. 5

Также устанавливая условия на границах, в точках 0 и b следует считать по той же причине

$$u(0,t) = u(b,t); \quad u'_x(0,t) = u'_x(b,t). \tag{75}$$

Положив $v = u - U$ и $v = T(t)y(x)$, мы сводим задачу снова к интегрированию уравнения

$$(\tau(x)y')' + (\lambda g(x) - r(x))y = 0 \tag{19}$$

при условиях на границе

$$y(0) = y(b), \quad y'(0) = y'(b) \tag{75}$$

и при начальном условии

$$\text{при} \quad t = 0: \quad v = \varphi(x).$$

Функция $T(t)$ по прежнему равна $e^{-\lambda t}$.

Изменились только условия на границе и, значит, функция Грина; все-же остальные выкладки остались в силе.

Отметим, однако, что в виду изменившихся условий на границах теперь уже может оказаться невозможным, иногда, составление функции Грина.

Положим, например, $\tau(x) = 1$, $r(x) = 0$, $b = 1$. Уравнение (23) обращается в $y'' = 0$. За y_1 и y_2 следует брать 1 и x. Отыскивая решения уравнения

$$y'' = f(x)$$

методой вариации производных постоянных, находим

$$y = A_1 + A_2 x + \int\limits_0^x f(\xi)(x-\xi)\,d\xi.$$

Попытка удовлетворить граничным условиям приводит к уравнениям:

$$A_1 = A_1 + A_2 + \int\limits_0^1 f(\xi)(x-\xi)\,d\xi, \qquad A_2 = A_2 + \int\limits_0^1 f(\xi)\,d\xi,$$

которые несовместимы.

Мы покажем в дальнейшем, как надо видоизменить методу в подобном случае.

Положим, далее, что брус согнут и соединен краями. В этом случае, точки 0 и b следует трактовать как различные, точки. Уравнения, (I) и (II) остаются в силе, последнее без ограничения (74). Но условия на границе должны быть видоизменены. В этом случае потеря тепла через сечения 0 и b обуславливается разностью температур в точках 0 и b и, значит, по формулам (12) и (13) 1-го параграфа мы имеем теперь

$$\begin{gathered} u'_x(0,t) = h(u(0,t) - u(b,t)), \\ u'_x(b,t) = -H(u(b,t) - u(0,t)) = H(u(0,t) - u(b,t)). \end{gathered} \tag{76}$$

Если поставить требование, что на концах температура одинакова, восстановив ограничение (74), условия (76) следует заменить через

$$u(0,t) = u(b,t), \qquad u'_x(0,t) = K u'_x(b,t). \tag{76^1}$$

Условия (75) являются частным случаем условий (76^1). Задача отличается в этом случае от рассмотренной только выбором граничных условий, что вызывает, конечно, изменение вида функции Грина.

Занимаясь уравнением (11) независимо от его физического значения, можно, конечно, было-бы выбирать граничные условия произвольно, заменяя, например, условия (76) условиями вида

$$v'_x(0) = \alpha v(0) + \beta v(b), \qquad v'_x(b) = \gamma v(0) + \delta v(b). \tag{77}$$

Заметим, однако, что помимо, требований практической задачи, выбор условий (77) еще ограничивается тем обстоятельством, что соответствующая этому выбору функция Грина должна быть симметричной, иначе окажется неприложимой вся теория главы 4-ой.

Обозначим в самом общем случае условия на границе, которым подчинены решения уравнения

$$\frac{\partial\left(\tau(x)\dfrac{\partial v(x)}{\partial x}\right)}{\partial x} + (\lambda g(x) - r(x))v(x) = 0$$

знаками

$$U_0(v) = 0, \qquad U_1(v) = 0, \tag{78}$$

например, считая,

$$U_0(v) = v'_x(0,t) - hv(0,t), \qquad U_1(v) = v'_x(b,t) + Hv(b,t)$$

или

$$U_0(v) = v(0,t) - v(b,t), \qquad U_1(v) = v'_x(0,t) - kv'_x(b,t)$$

или

$$U_0(v) = v'_x(0,t) - \alpha v(0,t) - \beta v(b,t), \qquad U_1(v) = v'_x(b,t) - \gamma v(0,t) - \delta v(b,t)$$

или выбирая другие более общие предположения, в которых, однако, $U_0(v)$ и $U_1(v)$ однородные линейные функции значений v и v', мы покажем в дальнейшем каковы условия, ограничивающие выбор операторов U_0 и U_1 при симметричности функций Грина.

§ 12. НЕКОТОРЫЕ ДРУГИЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Выполненное решение тепловой задачи состояло из трех различных частей. Во первых, из нахождения решения некоторого линейного уравнения при данных условиях на границах области.

Во вторых из нахождения разложения данной функции по фундаментальным функциям определенным изученным линейным уравнением.

В третьих, из разложения данного решения в ряд по частным решениям задачи и в изучении условий сходимости этого ряда. Эти три шага в исследовании встречаются во всех остальных задачах математической физики, причем первые два одинаковы для всех задач и отличаются только видом дифференциального уравнения или его порядком, что мало существенно. Так что выполненное исследование в первом и во втором шаге может служить образцом и для всех остальных задач.

Что-же касается третьей части задачи, то в задачах, связанных с распространением колебаний, эта часть носит несколько отличный характер.

Например, задача малых колебаний струны связана с решением уравнения вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{79}$$

в котором u отклонение от положения равновесия в момент t и в точке x.

Искомая функция подчиняется начальным условиям

$$\text{при} \quad t = 0: \quad u = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x), \tag{80}$$

говорящим, что в начальный момент дано положение струны и известна скорость движения ее частиц, и граничным условиям, за которые обыкновенно выбираются говорящие, что на концах струна прикреплена:

$$u(0,t) = 0, \qquad u(b,t) = 0, \tag{81}$$

считая, что b длина струны.

Отыскивая частные решения полагаем

$$u = T(t)y(x)$$

и получаем, что

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{y''(x)}{a^2 y(x)} = -\lambda,$$

откуда

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0, \qquad y''(x) + \lambda a^2 y(x) = 0. \tag{82}$$

Второе уравнение — частный случая уравнения (19). Мы получили-бы уравнение (19) заменив уравнение (79) уравнением

$$g(x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial\left(\tau(x)\dfrac{\partial u(x)}{\partial x}\right)}{\partial x} - r(x)u(x),$$

отсюда ясно, что первая часть исследования тождественна с выполненным. Но решение первого из уравнений (82) имеет вид

$$T(t) = a\cos\sqrt{\lambda}t + b\sin\sqrt{\lambda}t$$

и ряд (52) приходится заменить рядом вида

$$u = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos\sqrt{\lambda}t + b_k\sin\sqrt{\lambda}t)V_k(x). \tag{83}$$

То обстоятельство, что условий (80) два представляется мало существенными Они приводят только к изучению разложения двух функций в ряды вида

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k V_k(x), \qquad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k c_k V_k(x),$$

в которых a_k и $\lambda_k c_k$ являются соответственными коэффициентами Фурье. Но исследование сходимости ряда (85) значительно усложняется. Тогда, как множители $e^{-\lambda_k t}$ ряда (52) при t отличном от нуля стремились к нулю при $k \to \infty$, этого нельзя сказать о соответственных множителях ряда (83). В дальнейшем мы будем иметь случай заняться исследованием вопроса о сходимости рядов вида (85).

Подобным образом, задача о колебаниях бруса связана с решением уравнения

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{84}$$

Искомая функция в нем подчинена начальным условиям (80). Для определения функции u теперь необходимо указание 4-х условий на границе. За эти условия берут, обыкновенно, для одного из концов, например, конца 0 следующие: если этот конец закреплен, то $u(0,t) = 0$, $u'_x(0,t) = 0$, если этот конец подперт, то

$u(0,t)=0$, $u''_{x^2}(0,t)=0$, если этот конец свободен, то $u''_{x^2}(0,t)=0$, $u'''_{x^3}(0,t)=0$ и аналогичные два условия для другого гонца.

Отыскивая частные решения снова выполняют подстановку

$$u=T(t)y(x),$$

которая приводит к уравнениям

$$T''(t)+\lambda T(t)=0, \qquad y^{\text{iv}}(x)+\lambda a^2 y(x)=0. \tag{85}$$

Первое из уравнений (85) говорит, что в этой задаче обнаруживаются те-же обстоятельства, отличающее ее от тепловой, о которых мы говорили, упоминая о задаче колебания струны.

Второе уравнение частный случай уравнения

$$(\tau(x)y'')''+(\lambda g(x)-r(x))y=0, \tag{86}$$

совершенно аналогично уравнению (19). В дальнейших параграфах мы в виде примера покажем, как составлять функцию Грина для этого уравнения, что, впрочем, не представляет принципиальных особенностей по сравнению с изученным уже случаем.

Число граничных условий для уравнения (86) равно четырем; мы их символически зададим в виде

$$U_0(y)=0, \quad U_1(y)=0, \quad U_2(y)=0, \quad U_3(y)=0. \tag{87}$$

§ 13. ФОРМУЛА ГРИНА

Для выяснения различных обстоятельств, связанных с изучением уравнений вида (19) и (86), восстановим некоторые теоремы, доказанные выше, исходя от свойств самой функции Грина.

Положим, что

$$L(y)=(\tau(x)y')'-r(x))y \quad \text{или} \quad L(y)=(\tau(x)y'')''-r(x))y; \tag{88}$$

положим, что u и v две непрерывные функции и рассмотрим интеграл

$$\int_a^b (uL(v)-vL(u))\,dx. \tag{89}$$

Выбирая первое выражение (88) для $L(y)$), имеем, выполняя интегрирование по частям:

$$\int_a^b (uL(v)-vL(u))\,dx=\int_a^b (u(\tau(x)v')'-v(\tau(x)u')')\,dx= \tag{90}$$

$$= (u(\tau(x)v')' - v(\tau(x)u')')\Big|_0^b - \int\limits_a^b (u'\tau(x)v' - v'\tau(x)u')\,dx =$$

$$= \tau(b)(u(b)v'(b) - u'(b)v(b)) - \tau(0)(u(0)v'(0) - u'(0)v(0)) = Q_0^b.$$

При этих выкладках мы предполагали, что $\tau(x)u'$ и $\tau(x)v'$ непрерывны.

Если-бы $\tau(x)u'$ и $\tau(x)v'$ терпели разрыв непрерывности, формулу (90) пришлось бы видоизменить. Положим, что $\tau(x)u'$ испытывает разрыв при $x = \eta$, а $\tau(x)v'$ при $x = \xi$ и что

$$\tau(\eta+0)u'(\eta+0) - \tau(\eta-0)u'(\eta-0) = c_1,$$

$$\tau(\eta+0)v'(\eta+0) - \tau(\eta-0)v'(\eta-0) = c_2.$$

Считая. что $\eta < \xi$ и замечая, что

$$\int\limits_a^b (uL(v) - vL(u))\,dx =$$

$$= \int\limits_a^\eta (uL(v) - vL(u))\,dx + \int\limits_\eta^\xi (uL(v) - vL(u))\,dx + \int\limits_\xi^b (uL(v) - vL(u))\,dx,$$

вместо формулы (90) имеем:

$$\int\limits_a^b (uL(v) - vL(u))\,dx =$$

$$= (u\tau(x)v' - v\tau(x)u')\Big|_0^\eta + (u\tau(x)v' - v\tau(x)u')\Big|_\eta^\xi + (u\tau(x)v' - v\tau(x)u')\Big|_\xi^b$$

и так как, например, вследствие непрерывности $v(x)$

$$-v(\eta-0)\tau(\eta-0)u'(\eta-0) + v(\eta+0)\tau(\eta+0)u'(\eta+0) = v(\eta)c_1,$$

легко получаем, что

$$\int\limits_a^b (uL(v) - vL(u))\,dx = Q_0^b + c_1 v(\eta) + c_2 u(\xi). \tag{91}$$

Ту-же формулу (91) мы получим и для оператора

$$L(y) = (\tau(x)y'')'' - r(x))y,$$

в котором мы для удобства $\tau(x)$ считаем непрерывной и с непрерывной производной, если u и v функции, имеющие две первые производные непрерывными, когда

$$\tau(\eta+0)u'''(\eta+0) - \tau(\eta-0)u'''(\eta-0) = c_1,$$

$$\tau(\eta+0)v'''(\eta+0)-\tau(\eta-0)v'''(\eta-0)=c_2,$$

выражение Q_0^b имеет в этом случае, конечно, другое значение.

В этом случае, если третьи производные от u и v непрерывны:

$$(92)\qquad \int\limits_a^b (uL(v)-vL(u))\,dx=\int\limits_a^b (u(\tau(x)u'')''-v(\tau(x)u'')''\,dx=$$

$$=((u(\tau(x)u'')'-v(\tau(x)u'')'-(u'(\tau(x)v''-v'\tau(x)u'')\Big|_0^b=Q_0^b.$$

Если-же третьи производные терпят указанные выше разрывы, то члены терпящие в (98) эти разрывы

$$u(x)\tau(x)v'''(x)-v(x)\tau(x)u'''(x),$$

откуда вытекает, что сказанное о формуле (91) справедливо. В рассматриваемом случае:

$$Q_0^b=(u(b)\cdot(\tau(x)v'')'\Big|_{x=b}-v(b)\cdot(\tau(x)u'')'\Big|_{x=b}-(\tau(b)(u'(b)v''(b)-v'(b)u''(b))-$$

$$-(u(0)\cdot(\tau(x)v'')'\Big|_{x=0}-v(0)\cdot(\tau(x)u'')'\Big|_{x=0}+\tau(0)(u'(0)v''(0)-v'(0)u''(0)).$$

§ 14. О ФУНКЦИИ ГРИНА

Положим, дано уравнение

$$(93_1)\qquad L(y)=(\tau(x)y')'-r(x))y=0$$

и условия на границах:

$$(94_1)\qquad U_0(y)=0,\qquad U_1(y)=0$$

или уравнение

$$(93_2)\qquad L(y)=(\tau(x)y'')''-r(x))y=0$$

и условия на границах

$$(94_2)\qquad U_0(y)=0,\quad U_1(y)=0,\quad U_2(y)=0,\quad U_3(y)=0.$$

Положим, $n=2$ в случае уравнения (93_1) и $n=4$ в случае уравнения (94_2).

Функцией Грина называется Функция $G(x,\xi)$ от двух аргументов x и ξ, если она удовлетворяет следующим четырем условиям:

1) если как функция от x, она непрерывна со своими производными порядка ниже $n-1$; (т.е. только она в случае $n=2$; сама с производными первого и второго порядка в случае $n=4$).

2) если она удовлетворяет уравнению (95), т.е., если

$$L(G) = 0. \tag{95}$$

3) если она удовлетворяет граничным условиям (94_1) или (94_2) и [???]

4) если при переходе x через значение $x = \xi$ произведение $\tau(x)G'_x(x,\xi)$ испытывает скачек равный -1, т.е., если

$$\tau(\xi+0)G'_x(\xi+0,\xi) - \tau(\xi-0)G'_x(\xi-0,\xi) = -1 \tag{96_1}$$

соответственно

$$\tau(\xi+0)G'''_{xxx}(\xi+0,\xi) - \tau(\xi-0)G'''_{xxx}(\xi-0,\xi) = -1. \tag{96_2}$$

Функция $G(x,\xi)$, рассмотренная нами при решении тепловой задачи, обладала указанными свойствами; кроме того, она была симметричной функцией от x и ξ, и мы выяснили, какое важное значение имеет эта симметрия: без этой симметрии было-бы невозможно использование установленных в главе четвертой теорем о разложимости.

Выясним, при каких добавочных условиях функция $G(x,\xi)$ симметрична относительно x и ξ. Положим, прилагая тождество (91):

$$u = G(x,\eta), \qquad v = G(x,\xi).$$

В рассматриваемом случае $c_1 = c_2 = -1$ и так как

$$L(G(x,\eta)) = 0, \qquad L(G(x,\xi)) = 0,$$

формула (91) имеет вид

$$Q_0^b - G(\eta,\xi) + G(\xi,\eta) = 0.$$

Значит,

$$G(\eta,\xi) = G(\xi,\eta),$$

и функция $G(x,\xi)$ симметрична тогда и только тогда, когда граничные условия таковы, что на основании их

$$Q_0^b = 0. \tag{97}$$

В равенстве (97) мы имеем необходимое условие, ограничивающее выбор условий на границах. Не трудно проверить пользуясь данными выше выражениями Q_0^b, в каких задачах, указанных параграфах 11 и 12 условие (97) соблюдено.

Беря условия (77):

$$U_0(y) = y'(0) - \alpha y(0) - \beta y(b) = 0, \qquad U_1 y'(b) - \gamma y(0) - \delta y(b)$$

и вычисляя Q_0^b по формуле (90), без труда получаем:

$$Q_0^b = (u(b)v(0) - v(b)u(0))(\gamma\tau(b) + \beta\tau(0)),$$

откуда вытекает, что должно быть соблюдено равенство

$$\gamma\tau(b) + \beta\tau(0) = 0.$$

Так как в условиях (76) случай согнутого бруса:

$$\alpha = h, \qquad \beta = -h, \qquad \gamma = H, \qquad \delta = -H,$$

то задача возможна, если

$$H\tau(b) - h\tau(0) = 0.$$

В случае условий (76_1), отвечающих особому случаю задачи согнутого бруса имеем:

$$Q_0^b = (u(b)v'(b) - v(b)u'(b))(\tau(b) - k\tau(0)) = 0$$

и условия, при которых функция Грина симметрична:

$$k\tau(0) = \tau(b).$$

Значит, задача об охлаждении кольца возможна при добавочном условии

$$\tau(0) = \tau(b),$$

которое согласно с физическим смыслом задачи.

В остальных случаях перечисляемые параграфах 11 и 12 условия (97) выполняются без дальнейших ограничений.

Покажем еще, как можно найти функцию Грина.

Замечаем, что если w какая нибудь функция, удовлетворяющая условиям (1), (2) и (4) и y_1, y_2, соответственно y_1, y_2, y_3 y_4 линейно независимые решения уравнения (93_1), соответственно (93_2), то

$$G(x,\xi) = A_1y_1 + A_2y_2 + w, \tag{98}$$

соответственно

$$G(x,\xi) = A_1y_1 + A_2y_2 + A_3y_3 + A_4y_4 + w,$$

где постоянные A_1, A_2 или A_1, A_2, A_3, A_4 должны быть выбраны так, чтобы соблюдались граничные условия. Задача нахождения функции Грина, следовательно, распадается на две: на задачу нахождения какой-нибудь функции w, удовлетворяющей условиям (1), (2) и (4) и на задачу, нахождения коэффициентов A так, чтобы соблюдать условие (5).

Рассмотрим порознь уравнения (93_1) и (93_2). В случае уравнения (93_1) полагаем:

$$\text{при} \quad x < \xi: \quad w = -\alpha_1 y_1 - \beta_1 y_2; \qquad \text{при} \quad x > \xi: \quad w = \alpha y_1 + \beta y_2,$$

понимая под y_1 и y_2 линейно независимые решения, удовлетворяющие условиям:

$$y_1(0) = 1, \quad y_1'(0) = 0; \qquad y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = 1.$$

Условие (2) соблюдено, так как y_1 и y_2 решения уравнения (93_1).

Условие (1) требует, чтобы было:

$$-\alpha y_1(\xi) - \beta y_2(\xi) = \alpha y_1(\xi) + \beta y_2(\xi),$$

т.е.

$$\alpha y_1(\xi) + \beta y_2(\xi).$$

Условие (4) требует так как $\tau(x)y_1'$ и $\tau(x)y_2'$ непрерывны, чтобы было:

$$\alpha\tau(\xi)y_1'(\xi) + \beta\tau(\xi)y_2'(\xi) - (-\alpha\tau(\xi)y_1'(\xi) - \beta\tau(\xi)y_2'(\xi)) = -1,$$

т.е.

$$\alpha\tau(\xi)y_1'(\xi) + \beta\tau(\xi)y_2'(\xi) = -\frac{1}{2}.$$

Решая последние уравнения и вспоминая, что

$$\tau(x)(y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)) = +1,$$

заключаем:

$$\alpha = \frac{1}{2}\,y_2(\xi), \qquad \beta = -\frac{1}{2}\,y_1(\xi)$$

и

$$\text{при} \quad x < \xi: \quad w = +\frac{1}{2}\,(y_1(\xi)y_2(x) - y_1(x)y_2(\xi)),$$

$$\text{при} \quad x > \xi: \quad w = -\frac{1}{2}\,(y_1(\xi)y_2(x) - y_1(x)y_2(\xi)).$$

После подстановки w в (94), остается приступить к нахождения A_1 и A_2.

Пользуясь условиями (94_1), получаем:

$$\begin{aligned} &A_1U_0(y_1) + A_2U_0(y_2) + U_0(w) = 0, \\ &A_1U_1(y_1) + A_2U_1(y_2) + U_1(w) = 0. \end{aligned} \tag{99}$$

Последние уравнения, вообще говоря, имеют решение, но может случиться, что они несовместимы, последнее имеет место если

$$\frac{U_0(y_1)}{U_1(y_1)} = \frac{U_0(y_2)}{U_1(y_2)} \neq \frac{U_0(w)}{U_1(w)}. \tag{100}$$

В этой случае функции Грина составить нельзя. Мы посвятим § 16 исследованию этого случая, пока-же заметим, что при соблюдении условий (100) система уравнений

$$A_1U_0(y_1) + A_2U_0(y_2) = 0, \quad A_1U_1(y_1) + A_2U_1(y_2) = 0$$

допускает решение, в котором A_1 и A_2 не равны одновременно нулю. Если $A_1^{(0)}$ и $A_2^{(0)}$ образуют это решение, то функция

$$v = A_1^{(0)}y_1 + A_2^{(0)}y_2$$

есть функция удовлетворяющая условиям (1), (2) и (3) и такая, что $\tau(x)v'(x)$ непрерывна в промежутке $(0, b)$.

Займемся теперь уравнением (93_2). Положим, y_1, y_2, y_3, y_4 его решения, удовлетворяющие условиям:

$$
\begin{array}{llll}
y_1(0)=1, & y_1'(0)=0, & y_1''(0)=0, & y_1'''(0)=0; \\
y_2(0)=0, & y_1'(0)=1, & y_2''(0)=0, & y_2'''(0)=0; \\
y_3(0)=0, & y_3'(0)=0, & y_3''(0)=1, & y_4'''(0)=0; \\
y_4(0)=0, & y_4'(0)=0, & y_4''(0)=0, & y_4'''(0)=1.
\end{array}
$$

Условимся обозначать определители вида

$$
\Delta = \left| \begin{array}{cccc}
y_1 & y_2 & y_3 & y_4) \\
y_1' & y_2' & y_3' & y_4') \\
y_1'' & y_2'' & y_3'' & y_4'') \\
y_1''' & y_2''' & y_3''' & y_4''')
\end{array} \right|
$$

знаком $|y_1, y_2', y_3'', y_4'''|$, выписывая, только элементы главной диагонали.

Составляя производную от Δ без труда получаем:

$$
\Delta' = |y_1, y_2', y_3'', y_4^{\mathrm{iv}}|,
$$

откуда, так как на основании уравнения (93_2):

$$
\tau(x)y^{\mathrm{iv}} + 2\tau'(x)y''' + \tau''(x)y'' - r(x)y = 0
$$

имеем:

$$
\tau(x)\Delta' = |y_1, y_2', y_3''', -2\tau(x)y_4'''| = -2\tau'(x)\Delta
$$

и значит,

$$
\log\,\Delta(x) = -2\log\,\tau(x), \quad \Delta(x) = \frac{1}{\tau^2(x)},
$$

так как $\Delta(0)=1$, если считать $\tau(0)=1$.

Заметив это, полагаем:

$$
\text{при} \quad x<\xi: \quad w = -(\alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3 + \delta y_4);
$$

$$
\text{при} \quad x>\xi: \quad w = +(\alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3 + \delta y_4).
$$

Функция w удовлетворяет условию (2). Пользуясь условиями (1) и (4) получаем, как выше:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\alpha y_1(\xi) & + & \beta y_2(\xi) & + & \gamma y_3(\xi) & + & \delta y_4(\xi) & = & 0, \\
\alpha y_1'(\xi) & + & \beta y_2'(\xi) & + & \gamma y_3'(\xi) & + & \delta y_4'(\xi) & = & 0, \\
\alpha y_1''(\xi) & + & \beta y_2''(\xi) & + & \gamma y_3''(\xi) & + & \delta y_4''(\xi) & = & 0, \\
\alpha y_1'''(\xi) & + & \beta y_2'''(\xi) & + & \gamma y_3'''(\xi) & + & \delta y_4'''(\xi) & = & -\dfrac{1}{2\tau(\xi)}.
\end{array}
$$

Присоединяя к написанным уравнениям уравнение

$$
\text{при} \quad x>\xi: \quad \alpha y_1(x) + \beta y_2(x) + \gamma y_3(x) + \delta y_4(x) = 0,
$$

заключаем, что

$$\begin{vmatrix} y_1(\xi) & y_2(\xi) & y_3(\xi) & y_4(\xi) & 0 \\ y_1'(\xi) & y_2'(\xi) & y_3'(\xi) & y_4'(\xi) & 0 \\ y_1''(\xi) & y_2''(\xi) & y_3''(\xi) & y_4''(\xi) & 0 \\ y_1'''(\xi) & y_2'''(\xi) & y_3'''(\xi) & y_4'''(\xi) & -\dfrac{1}{2\tau(\xi)} \\ y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) & y_4(x) & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Из последнего уравнения заключаем:

$$w \cdot \Delta(\xi) + \frac{1}{2\tau(\xi)} \cdot |y_1(\xi), y_2'(\xi), y_3''(\xi), y_4(x)| = 0,$$

т.е.

$$\text{при} \quad x > \xi: \quad w = -\frac{\tau(\xi)}{2} \cdot |y_1(\xi), y_2'(\xi), y_3''(\xi), y_4(x)|.$$

При $x < \xi$, w получается из последнего выражения изменением знака.

После, нахождения w остается находить A_1, A_2, A_3, A_4 из уравнений

$$A_1U_i(y_1) + A_2U_i(y_2) + A_3U_i(y_3) + A_4U_i(y_4) + U_i(w) = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3. \tag{101}$$

Эта система, вообще говоря, имеет решение, но может и быть несовместной, если

$$|U_0(y_1), U_1(y_2), U_2(y_3), U_3(y_4)| = 0.$$

В этом случае может не быть функции Грина; этому случаю мы посвятим § 16. Пока-же заметим, что в этом случае система, получаемая из (101) отбрасыванием свободных членов имеет решение, в котором не все A_1, A_2, A_3, A_4 равны нулю, а, значит, существует функция

$$v = A_1^{(0)}y_1 + A_2^{(0)}y_2 + A_3^{(0)}y_3 + A_4^{(0)}y_4,$$

удовлетворяющая условиям (1), (2) и (3) и такая, что $\tau(x)v''$ непрерывна в $(0, b)$.

§ 15. СВЯЗЬ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

Положим, $G(x,\xi)$ функция Грина, отвечающая оператору $L(y)$ и граничным условиям (94).

Теорема. *Если*

$$\varphi(x) = \int_a^b f(\xi)G(x,\xi)\,d\xi, \tag{102}$$

то $\varphi(x)$ *удовлетворяет граничным условиям* (94) *и уравнению*

$$L(\varphi(x)) = f(x).$$

Докажем теорему, ограничиваясь случаем оператора (93_1); в случае оператора (93_2) теорема доказывается также, требуя только лишних двух дифференцирований.

Дифференцируя (108) имеем:

$$\varphi'(x) = \int_a^b f(\xi) G'_x(x,\xi)\,d\xi.$$

Отсюда ясно, что

$$U_i(\varphi) = -\int_a^b f(\xi) U_i(0)\,d\xi = 0, \quad i = 1, 2,$$

т.е., что $\varphi(x)$ удовлетворяет граничным условиям.

Так как $G'_x(x,\xi)$ не непрерывна, дальнейшие дифференцирования требуют осторожности. Имеем

$$\tau(x)\varphi'(x) = -\int_a^x f(\xi)\tau(x) G'_x(x,\xi)\,d\xi - \int_x^b f(\xi)\tau(x) G'_x(x,\xi)\,d\xi,$$

откуда:

$$(\tau(x)\varphi'(x))' = -f(x)\tau(x-0)G'_x(x,x-0) + f(x)\tau(x+0)G'_x(x,x+0) -$$

$$-\int_a^x f(\xi)(\tau(x)G'_x(x,\xi))'_x\,d\xi - \int_x^b f(\xi)(\tau(x)G'_x(x,\xi))'_x\,d\xi,$$

так как коэффициент при $f(\xi)$ в последнем равенстве

$$-\tau(x)G'_x(x,\xi)G(x,x-0) + \tau(x)G'_x(x,x+0) =$$

$$= \tau(x)G'_x(x+0,x) + \tau(x)G'_x(x-0,x) = 1.$$

Значит

$$L(\varphi) = f(x) - \int_a^b f(\xi) L(G(x,\xi))\,d\xi = f(x),$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что если

$$\varphi(x) = -\int_a^b f(\xi)G(x,\xi)\,d\xi + F(x),$$

то

$$L(\varphi(x)) = f(x) + L(F(x)),$$

причем $\varphi(x) - F(x)$ удовлетворяет граничным условиям; значит если $F(x)$ удовлетворяет граничным условиям, $\varphi(x)$ также им удовлетворяет.

Заметим еще, что функция $\varphi(x)$, данная равенством (102) непрерывна и что $\tau(x)\varphi'(x)$ тоже непрерывна в промежутке $(0, b)$. Пользуясь ограниченностью $\tau(x)G'_x(x, \xi)$, мы можем выбрать число h так, чтобы интеграл

$$\int\limits_{x-2h}^{x+2h} f(\xi)\tau(x)G'_x(x,\xi)\,d\xi$$

был абсолютно меньше ε. Далее, если A высший предел $|f(x)|$ и $|h| < h_0$, то при $\xi < x + 2h$ и при $\xi > x - 2h$

$$\tau(x+h)G'_x(x+h,\xi) - \tau(x)G'_x(x,\xi)$$

меньше $\dfrac{\varepsilon}{Ab}$ при достаточно малом $|h|$. Значит разность $\tau(x+h)\varphi'(x+h) - \tau(x)\varphi'(x)$ меньше 3ε.

Ясно, что справедливо и обратное утверждение. Если функция $\varphi(x)$ удовлетворяет граничным условиям и

$$L(\varphi(x)) = f(x),$$

то справедливо равенство (102). Применяя формулу Грина, положив

$$u = \varphi(x), \qquad v = G(x,\xi),$$

имеем, так как $\varphi(x)$ и $G(x,\xi)$ обе удовлетворяют граничным условиям:

$$\int\limits_a^b (\varphi(x)\cdot L(G(x,\xi)) - G(x,\xi)\cdot L(\varphi(x))\,d\xi = -\int\limits_a^b f(x)G(x,\xi)\,dx = \varphi(\xi),$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_a^b g(t)G(x,t)\varphi(t)\,dt + f(x). \tag{103}$$

Если λ_n характеристическое число, а $V_n(x)$ соответствующая ему фундаментальная функция, то

$$V_n(x) = \lambda_n \int\limits_a^b g(\xi)G(x,\xi)V_n(\xi)\,d\xi. \tag{104}$$

Отсюда $V_n(x)$ удовлетворяет граничным условиям (94) и

$$L(V_n(x)) = -\lambda_n\, g(x)V_n(x),$$

то есть

$$(\tau(x)V_n'(x))' + (\lambda_n g(x) - r(x))V_n(x) = 0. \tag{105}$$

Обратно, соблюдение равенства (105) при наличии граничных условий (94) влечет за собою равенство (104).

Значит, характеристические числа уравнения (103) суть те значения λ, при которых уравнение

$$(\tau(x)y')' + (\lambda g(x) - r(x))y = 0 \tag{106}$$

имеет решение, в котором y и $\tau(x)y'$ непрерывны и которые удовлетворяют граничным условием (94). Положим $y_1(x, \lambda)$, $y_2(x, \lambda)$ линейно независимые решения уравнения (106). Чтобы

$$y = A_1 y_1(x, \lambda) + A_2 y_2(x, \lambda)$$

было решением, удовлетворяющим граничным условиям, надо, чтобы система

$$A_1 U_0(y_1(x, \lambda)) + A_2 U_0(y_2(x, \lambda)) = 0,$$

$$A_1 U_1(y_1(x, \lambda)) + A_2 U_1(y_2(x, \lambda)) = 0$$

допускала решение, в котором A_1 и A_2 одновременно не нуль. Следовательно λ_k корни уравнения

$$U_0(y_1(x, \lambda)) \cdot U_1(y_2(x, \lambda)) - U_0(y_2(x, \lambda)) \cdot U_1(y_1(x, \lambda)) = 0.$$

Положим, что $\Gamma(x, y, \lambda)$ резольвента уравнения (103). Мы имеем:

$$\Gamma(x, y, \lambda) = \lambda \int_a^b g(t) G(x, t) \Gamma(t, y, \lambda)\, dt + g(y) G(x, y). \tag{107}$$

Из последнего равенства ясно, что резольвента удовлетворяет условиям:

$$U_0(\Gamma(x, y, \lambda)) = 0, \qquad U_1(\Gamma(x, y, \lambda)) = 0, \tag{94}$$

так как $G(x, y)$ удовлетворяет этим условием. Далее так как интеграл в (107) непрерывен и произведение его производной на $\tau(x)$ непрерывно, то

$$\tau(y+0)\Gamma_x'(y+0, y, \lambda) - \tau(y-0)\Gamma_x'(y-0, y, \lambda) =$$

$$= g(y)(\tau(y+0)G_x'(y+0, y) - \tau(y-0)G_x'(y-0, y)) = -g(y).$$

Кроме того по сказанному выше

$$L(\Gamma(x, y, \lambda)) = -\lambda g(x)\Gamma(x, y, \lambda).$$

Следовательно резольвента уравнения (105) есть такое решение уравнения (106), которое удовлетворяет граничным условиям (94) и для которого разрыв

$\tau(x)\Gamma'_x(x,y,\lambda)$ при переходе через $x = y$ равен $g(y)$; т.е. резольвента есть функция Грина уравнения (106) обобщенная в том смысле, что скачек при разрыве $\tau(x)\Gamma'_x(x,y,\lambda)$ для нее равен $g(y)$, а не 1.

Замечания этого параграфа полезны при исследовании уравнения (103) в случае, когда решение уравнения (106) находится просто, что имеет место при простейших приложениях теории, в которых коэффициенты $\tau(x)$, $g(x)$, $r(x)$ считаются постоянными.

§ 16. "РАСПРОСТРАНЕННАЯ" (ERWEITERTE) ФУНКЦИЯ ГРИНА

Вернемся к указанном в § 14 случаю, когда составление функции Грина невозможно.

Мы указали, что в этом случае уравнение

$$L(y) = 0 \tag{108}$$

имеет непрерывное решение $v(x)$, удовлетворяющее граничным условиям $U_i(v) = 0$.

Пользуясь тем, что $\alpha v(x)$ также удовлетворяет и уравнению и граничным условиям, положим

$$V_0(x) = \alpha v(x),$$

выбирая α так, чтобы было соблюдено равенство

$$\int\limits_a^b g(x)V_0^2(x)\,dx = 1. \tag{109}$$

Положим $\theta(x)$ решение уравнения

$$L(y) = \delta(x). \tag{110}$$

Тогда $c\theta(x)$, где c постоянное, решение уравнения

$$L(y) = c\delta(x) \tag{110^1}$$

и если y_1 и y_2 независимые решения уравнения (108), а $w(x)$ разрывная функция, составленная в § 14, то

$$G(x,\xi) = A_1y_1 + A_2y_2 + w(x) + c\delta(x) \tag{111}$$

будет решением уравнения (110^1).

Если составление функции Грина невозможно, то считая, что $n = 2$,

$$\frac{U_0(y_1)}{U_1(y_1)} = \frac{U_0(y_2)}{U_1(y_2)} \neq \frac{U_0(w)}{U_1(w)}$$

и, вообще говоря, можно найти c так, чтобы было соблюдено соотношение

$$\frac{U_0(y_1)}{U_1(y_1)} = \frac{U_0(w) + cU_0(\theta)}{U_1(w) + cU_1(\theta)}. \tag{112}$$

Тогда функция (111) удовлетворяет условиям $U_i(G) = 0$, причем разрыв $\tau(x)G'_x(x, \xi)$ будет равен разрыву $\tau(x)w'(x)$, т.е. функция $G(x, \xi)$ будет функцией Грина для уравнения (110^1).

Подобное-же, заключение можно сделать и в случае, когда $n = 4$, отыскивая c из условия

$$|U_0(y_1), U_1(y_2), U_2(y_3), U_3(w) + cU_3(\theta)| = 0. \tag{112^1}$$

Положим, что функция $\delta(x)$ равна $g(x)V_0(x)$ и составим функцию Грина для уравнения

$$L(y) = cg(x)V_0(x), \tag{113}$$

выбрав в нем c указанным образом.

Отметим, между прочим, что если $G_1(x, \xi)$ какая-нибудь функция Грина уравнения (113), то функция

$$G(x, \xi) = G_1(x, \xi) + \alpha V_0(x) \tag{114}$$

также обладает ее свойствами, т.е. определенная нами до сих пор функция $G(x, \xi)$ зависит еще от некоторого параметра, которым мы можем распоряжаться; последнее ясно из того, что в рассматриваемом случае число уравнений, определяющих $A_1, A_2, \ldots$ меньше числа этих коэффициентов. Условимся выбирать, параметр α так, чтобы было соблюдено равенство

$$\int_a^b g(x)V_0(x)G(x, \xi)\, d\xi = 0, \tag{115}$$

что всегда возможно, так как после подстановки в (115) вместо $G(x, \xi)$ его значение (114) мы получим уравнение, в котором коэффициент при α равен единице. Нетрудно найти явно значение c из уравнения (112). Положив в формуле Грина

$$u = V_0(x), \qquad v = G(x, \xi),$$

имеем, так как $V_0(x)$ и $G(x, \xi)$ удовлетворяют граничным условиям:

$$\int_a^b (V_0(x)L(G(x, \xi)) - G(x, \xi)L(V_0(x)))\, dx = V_0(\xi),$$

т.е. вследствие (109):

$$V_0(\xi) = \int_a^b V_0(x) \cdot cg(x)V_0(x)\, dx = c.$$

Значит уравнение (110) имеет вид

$$L(y) = g(x) \cdot V_0(\xi)V_0(x). \tag{116}$$

Не трудно убедиться, что при соблюдении условий (115) функция $G(x,\xi)$ симметрична. Действительно, положив в формуле Грина

$$u = G(x,\eta), \qquad v = G(x,\xi),$$

имеем

$$G(\xi,\eta) - G(\eta,\xi) = \int\limits_a^b (G(x,\eta)L(G(x,\xi)) - G(x,\xi)L(G(x,\eta)))\,dx =$$

$$V_0(\xi)\int\limits_a^b g(x)V_0(x)G(x,\eta)\,dx - V_0(\eta)\int\limits_a^b g(x)V_0(x)G(x,\xi)\,dx = 0.$$

Пересматривал теоремы § 15 об уравнении

$$\varphi(x) = \lambda\int\limits_a^b g(t)G(x,t)\varphi(t)\,dt + f(x), \tag{103}$$

убедимся, что они справедливы с незначительными добавлениями.

Положим

$$\varphi(x) = -\int\limits_a^b f(\xi)G(x,\xi)\,d\xi. \tag{102}$$

Как в параграфе 15 мы убедимся, что функция $\varphi(x)$ удовлетворяет граничным условиям и что она непрерывна, также как и $\tau(x)\varphi'(x)$. Но теперь

$$L(\varphi(x)) = f(x) - \int\limits_a^b f(\xi)L(G(x,\xi))\,d\xi =$$

$$= f(x) - g(x)V_0(x)\int\limits_a^b f(\xi)V_0(\xi)\,d\xi.$$

Значит, функция (102) только тогда удовлетворяет уравнению

$$L(\varphi(x)) = f(x),$$

когда соблюдено условие

$$\int\limits_a^b f(x)V_0(x)\,dx = 0. \tag{117}$$

Заметим, что из (102) мы имеем вследствие (115)

$$\int\limits_a^b g(x)V_0(x)\varphi(x)\,dx = -\int\limits_a^b f(\xi)\left(\int\limits_a^b g(x)V_0(x)G(x,\xi)\,dx\right)d\xi = 0.$$

Значит, функция (102) удовлетворяет условию

$$\int\limits_a^b g(x)V_0(x)\varphi(x)\,dx = 0. \tag{118}$$

Также, если функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию (118) и если

$$L(\varphi(x)) = f(x),$$

то справедливо равенство (102). Положив, именно, в формуле Грина

$$u = \varphi(x), \qquad v = G(x,\xi),$$

легко получаем

$$\varphi(\xi) = \int\limits_a^b (\varphi(x)(L(G(x,\xi)) - G(x,\xi)L(\varphi(x)))\,dx =$$

$$= \int\limits_a^b \underbrace{g(x)V_0(x)\varphi(x)}_{=0}\,dx \cdot V_0(\xi) - \int\limits_a^b f(\xi)G(x,\xi)\,d\xi.$$

Если λ_0 характеристическое число уравнения (102) и $V_n(x)$ соответствующая, ему фундаментальная функция, то

$$V_n(x) = \lambda_n \int\limits_a^b g(t)G(x,t)V_n(t)\,dt$$

и, значит,

$$L(V_n(x)) = -\lambda_n g(x)V_n(x).$$

Следовательно фундаментальная функция уравнения (102) снова удовлетворяет уравнениям вида (105). Вследствие равенства (118), каждая фундаментальная функция $V_n(x)$ уравнения (103) удовлетворяет условию

$$\int\limits_a^b g(x)V_0(x)V_n(x)\,dx = 0.$$

Напомним, что при $n \neq m$ мы имеем:

$$\int\limits_a^b g(x)V_m(x)V_n(x)\,dx = 0.$$

Если $\Gamma(x,y,\lambda)$ резольвента уравнения (103), то

$$\Gamma(x,y,\lambda) = \lambda \int\limits_a^b g(t)G(x,t)\Gamma(t,y,\lambda)\,dt + g(y)G(x,y).$$

Отсюда заключаем, во первых, что $\Gamma(x,y,\lambda)$ удовлетворяет граничным условиям $U_i(\Gamma(x,y,\lambda))=0$, так как $G(x,y)$ этим условиям удовлетворяет; далее, что при переходе x через y $\tau(x)\Gamma'_x(x,y,\lambda)$ испытывает скачек равный $g(x)$ и что, наконец,

$$L(\Gamma(x,y,\lambda)) = -\lambda g(x)\Gamma(x,y,\lambda) + g(y)L(G(x,y)) =$$

$$= -\lambda g(x)\Gamma(x,y,\lambda) + g(y)g(x)V_0(y)V_0(x).$$

Следовательно резольвента уравнения (103) есть обобщенная функция Грина (т.е. функция, для которой разрыв $\tau(x)\Gamma'_x(x,y,\lambda)$ при переходе x через y равен $g(y)$, а не 1 для уравнения

$$(\tau(x)V')' + (\lambda g(x) - r(x))V = g(y)g(x)V_0(y)V_0(x).$$

Вводя теперь новое ограничение, положим, что

$$g(x) \geq a_0, \tag{119}$$

где a_0 некоторое число, положим, что функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям на границах $U_i(\varphi(x))=0$ и что

$$\int\limits_a^b g(x)V_0(x)\varphi(x)\,dx = 0. \tag{118}$$

Тогда по сказанному выше, если

$$L(\varphi(x)) = f(x),$$

то

$$\varphi(x) = -\int\limits_a^b f(\xi)G(x,\xi)\,d\xi = \int\limits_a^b g(\xi)G(x,\xi)\,\left(-\frac{f(\xi)}{g(\xi)}\right)\,d\xi.$$

Из последнего равенства на основании теоремы Гильберта – Шмидта[4] вытекает, что функция $\varphi(x)$ разложима в равномерно сходящийся ряд Фурье по фундаментальным функциям уравнения (103), т.е., что

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k V_k(x), \qquad c_k = \int\limits_a^b g(x)\varphi(x)V_k(x)\,dx, \tag{120}$$

где ряд (120) сходится равномерно; мы, конечно, считаем, что функции нормированы.

Откинем теперь предположение, что функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию (118), сохраним только предположение, что она удовлетворяет граничным условиям $U_i(\varphi(x))=0$.

[4]Условие (119) слишком даже строго; достаточно, чтобы функция $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ была-бы функцией с интегрируемым квадратом.

Положим

$$\varphi_1(x) = \varphi(x) - c_0 V_0(x). \tag{121}$$

Выбирая c_0 так, чтобы $\varphi_1(x)$ удовлетворяла условию (118). Так как

$$\int_a^b g(x)\varphi_1(x)V_0(x)\,dx = \int_a^b g(x)\varphi(x)V_0(x)\,dx - c_0\int_a^b g(x)V_0^2(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b g(x)\varphi(x)V_0(x)\,dx - c_0,$$

то c_0 ничто иное, как коэффициент Фурье функции $\varphi(x)$, отвечающий функции $V_0(x)$.

Так как функция $\varphi_1(x)$ удовлетворяет условию (118), то

$$\varphi(x)c_0V_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n V_n(x),$$

где

$$c_n = \int_a^b g(x)(\varphi(x) - c_0V_0(x))V_n(x)\,dx = \int_a^b g(x)\varphi(x)V_n(x)\,dx.$$

Итак, если функция $\varphi(x)$ удовлетворяет граничным условиям $U_i(\varphi(x)) = 0$, то она разложима в равномерно сходящийся ряд Фурье по фундаментальный функциям уравнения (103), к числу которых надо причислить условно и функцию $V_0(x)$:

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k V_k(x), \qquad c_k = \int_a^b g(x)\varphi(x)V_k(x)\,dx.$$