

TAKABEYA
—
RAHMENTAFELN

RAHMEN-TAFELN

Von

鷹 部 屋 福 平

(Dr. Fukuhei Takabeya)

Professor an der Kaiserlichen Hokkaido-Universität Sapporo
Japan

Mit 186 Textabbildungen



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH
1930

ISBN 978-3-662-42724-8 ISBN 978-3-662-43001-9 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-43001-9

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung
in fremde Sprachen, vorbehalten.

Copyright 1930 by Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Ursprünglich erschienen bei Julius Springer in Berlin 1930.

Vorwort.

Die statische Untersuchung moderner Rahmentragwerke in der Form von Rechteckrahmen mit fest verknüpften Knotenpunkten ist, vom Standpunkt des Theoretikers aus, so kompliziert, daß bei mehrstöckigen Rahmen eine Menge Fragen seit Jahren noch der Lösung harren.

Um derlei Schwierigkeiten begegnen zu können, wäre es von Nutzen, wenn eine praktisch durchführbare Methode aufgestellt werden könnte, die, einfach in ihrer theoretischen Analyse, zugleich die mathematischen Schwierigkeiten zu beheben und die langwierige Arbeit der Einzelrechnungen abzukürzen imstande wäre. Die Möglichkeit schneller und genauer Berechnung, welche das im folgenden dargestellte Verfahren der Gleichungstabulierung bietet, möge einen wesentlichen Beitrag auf dem Wege zu diesem lang ersehnten Ziele liefern.

Bei Berechnung statisch unbestimmter Konstruktionen, wie Rahmentragwerken und durchlaufender Träger, muß natürlich die Elastizität des Baumaterials, der Querschnitt der Stäbe u. a. m. in Erwägung gezogen werden. Man muß also zunächst einen Querschnitt annehmen, der für eine gewisse Last auch genügend Widerstand leisten kann. Hierin unterscheidet sich die Berechnung von Rahmentragwerken sehr von derjenigen einfacher Träger und gerader Stäbe.

Die Knotenmoment-Tabellen in der vorliegenden Arbeit stellen eine Zusammenfassung von Berechnungen gegen einhundert verschiedener Rahmen dar, welche mit dem vom Verfasser aufgestellten Verfahren der Gleichungstabulierung durchgeführt worden sind. Sie sollen einmal einen Beitrag zu der erwähnten Querschnittsbestimmung darstellen, zugleich aber auch die in den ersten Kapiteln dargelegte allgemeine Bestimmungsmethode illustrieren.

Die Berechnung von Rahmentragwerken ist ja bislang infolge ihrer statischen Unbestimmbarkeit als ziemlich schwierig und insonderheit diejenige komplizierter Rahmen, wie schon erwähnt, lange als ein unzugängliches Problem angesehen worden; denn die Lösung mit Hilfe des Castiglianoschen Satzes vom Minimum der Formänderungsarbeit herbeizuführen, wäre ein allzu langwieriges Verfahren, um irgendein Problem mehrstöckiger Rahmen ernstlich lösen zu können, während dagegen das Prinzip der virtuellen Verrückungen wieder zu viele Unbekannte im Gefolge hätte.

Versucht man beispielsweise mit einer dieser Methoden die Biegemomente eines nur dreistöckigen Rahmens mit zwei Feldern zu berechnen, so würde eine mühselige Arbeit von zwölf Stunden kaum ausreichen, die Bestimmungsgleichungen der erforderlichen Unbekannten aufzustellen. Gewiß hat die Methode der Stab- und Knotendrehwinkel die beschwerliche Errechnung von Hochrahmenwerken merklich erleichtert, wo indessen große Stockwerks- und Felderzahlen zu bewältigen sind, ist diese Methode nicht weniger ermüdend und für praktische Zwecke schwer durchführbar.

Mit dem Verfahren der Gleichungstabulierung jedoch, welches die Probleme hoher Rahmenwerke mit Hilfe fester Regeln lösen will, ist es in der kurzen Zeit

von ungefähr dreißig Minuten, d. h. in der Zeit, die erforderlich ist, die Beiwerte zu schreiben, gelungen, die Bestimmungsgleichungen für die Unbekannten eines zwanzigstöckigen Rahmens mit zehn Feldern aufzustellen; mit dem Iterationsverfahren waren sodann die Rechenergebnisse in ungefähr zehn Stunden zu erhalten¹⁾.

In diesem ganzen Fragenkreis wird man aller Voraussicht nach mit der Zeit zu noch einfacheren Berechnungsarten kommen, sobald ihm nur einmal größere Beachtung geschenkt wird.

Erstmals in diesem Frühjahr hatte der Verfasser versucht, an Hand der genannten Methode ausgedehnte Untersuchungen über die Beanspruchung der Rahmen anzustellen. Bis zum Sommer waren mit Unterstützung seiner Assistenten mehr als dreihundert Berechnungen von hochkonstruierten Rahmenwerken ausgeführt worden. Das Verfahren an sich war ganz einfach, lediglich die große Zahl der Rechnungen kostete ziemliche Mühe. Aber die Freude des Verfassers, unbebauten Boden zu beackern, ließ ihn trotz aller Anstrengungen nicht ermüden und führte ihn so Schritt für Schritt dem Ziel näher.

Bevor dies jedoch erreicht war, hatten im Verlauf der Arbeit manche Probleme Material beigesteuert. Das Verfahren und die mit ihm neu gewonnenen Ergebnisse brachten weitere Fortschritte durch wechselseitige Vervollkommnung. Gerade als dieses Buch seinem Abschluß entgegen ging, hatte der Verfasser Gelegenheit, zweihundert Unbekannte zu bestimmen, auf diese Weise wurden charakteristische Erscheinungen elastischer Formveränderungen an gewissen Sonderfällen von Blöcken elastischer Stäbe klargestellt²⁾.

Nachdem nunmehr ein solcher Grad von Genauigkeit erreicht ist, sind binnen Jahresfrist die meisten der vom Verfasser untersuchten zahlreichen Hochrahmengebilde einer Lösung zugänglich gemacht worden. Die kleine Zahl besonderer Fälle, die bisher noch unberücksichtigt geblieben sind, werden bald einer solchen entgegengeführt werden. Wahrscheinlich geben ebene Rahmentragwerke die wichtige theoretische Grundlage für Raumrahmenwerke ab.

Ursprünglich bestand überhaupt nicht die Absicht, die Arbeit als Monographie zu veröffentlichen. Aber das wiederholt ausgesprochene Bedürfnis nach solchen Tabellen in interessierten Kreisen hat den Verfasser bewogen, einen Teil seiner Untersuchungen so bald wie möglich der Allgemeinheit zugänglich zu machen. Er ist sich dabei wohl bewußt, daß in dem neuen Boden, der hier erst einmal aufgelockert wird, noch manche Fleckchen und Winkel einer ausgedehnteren Pflege fähig sind und auch bedürfen. Wenn die Anwendung dieser Theorie weiterhin in geeigneter Weise entwickelt und es so ermöglicht wird, das weite Gebiet der verschiedenen Rahmenwerke mit geringerem Aufwand an Zeit und Mühe als bisher zu bearbeiten, so wird der Autor sicherlich nicht der einzige sein, der sich darüber freuen wird.

Zum Schluß möchte der Verfasser nicht verfehlen, den Herren H. Matsusaka und S. Ono, Assistenten an der Technischen Fakultät der Kaiserlichen Hokkaido-Universität für ihre stete freundliche Bereitwilligkeit, bei den Rechenarbeiten zu helfen, auch an dieser Stelle seinen wärmsten Dank auszusprechen.

Berlin, August 1930.

Fukuhei Takabeya.

¹⁾ u. ²⁾ Memoirs of the Faculty of Engineering, Hokkaido Imperial University, Vol. 2, No. 4. 1930.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung	1
Erster Abschnitt.	
I. Rechteckrahmen mit beliebiger vertikaler Belastung auf den Balken und waagerechter Einzellast in jedem Knotenpunkt auf der vertikalen linken Seite	2
§ 1. Grundgleichungen	2
§ 2. Knoten- und Stabbezeichnungsregel	11
§ 3. Knotengleichungen und Stockwerksgleichungen	12
§ 4. Grundtabellen der Bestimmungsgleichungen	16
a) Allgemeine Grundtabellen	16
Grundtabelle I.	16
Grundtabelle II.	18
b) Symmetrische Ausbildung und Belastung	19
c) Gelenkrahmen.	21
d) Symmetrische Ausbildung mit waagerechten Einzellasten	22
§ 5. Eigenschaften der Grundtabellen und deren Aufstellungsregeln	26
a) Bestimmung der Koeffizienten und Festwerte	26
b) Diagonale Linien von ϱ , ξ und andere Eigenschaften der Grundtabellen .	26
§ 6. Auflösung der Elastizitätsgleichungen	28
a) Das Eliminationsverfahren	28
b) Das Iterationsverfahren	31
A. Iterationsverfahren I.	31
B. Iterationsverfahren II.	32
§ 7. Rechnungsbeispiele	34
Beispiel I. Vierfeldiger, zweigeschossiger symmetrischer Rechteckrahmen mit fünf eingespannten Ständern	35
Beispiel II. Fünffeldiger, sechsgeschossiger symmetrischer Rechteckrahmen mit sechs eingespannten Ständern.	41
Beispiel III. Fünffeldiger, sechsgeschossiger symmetrischer Rechteckrahmen mit sechs Gelenkständern	46
Beispiel IV. Dreifeldiger, dreigeschossiger symmetrischer Rechteckrahmen mit vier eingespannten Ständern. Waagerechte Einzellast in jedem Knotenpunkt auf der vertikalen linken Seite	50
Beispiel V. Zweifeldiger, zweigeschossiger Rechteckrahmen mit drei eingespannten Ständern. Beliebige vertikale Belastungssysteme auf den Balken	54
Beispiel VI. Symmetrischer, turmförmiger zehngeschossiger Rahmen mit sieben eingespannten Ständern	57
II. Geschlossene symmetrische Rechteckrahmen mit gleichmäßig verteilter Innen- oder Außenbelastung (Behälter)	62
§ 1. Aufstellung der Bestimmungsgleichungen	62
§ 2. Sonderfälle	63
Sonderfall I.	63
Sonderfall II.	64
Sonderfall III.	64
§ 3. Zahlenbeispiel	66

Zweiter Abschnitt.		Seite
Tabellarische Momentenübersicht für Rahmen mit ξ von demselben Wert . .		68
Vorbemerkungen zur Anwendung der Momententabellen		68
a) Beispiel zu Kapitel I		68
b) Beispiel zu Kapitel II		72
Kapitel I (Momententabelle 1—68). Eingespannter symmetrischer Rahmen mit beliebiger, symmetrischer vertikaler Belastung auf den Balken		75
Kapitel II (Momententabelle 69—95). Eingespannter, symmetrischer Rah- men mit waagerechter Einzellast in dem Knotenpunkt auf der vertikalen, linken Seite des Rahmengebildes		105

Einleitung.

Mit dem glanzvollen Aufblühen des Eisenbeton- und Eisenhochbaues in den letzten Dezennien des vorigen Jahrhunderts entwickelten sich die Theorie und die Berechnungsverfahren von Rahmentragwerken zu ihrem jetzigen hohen Stand.

Bei der Berechnung statisch unbestimmter Systeme ist das Wesentliche die Auswahl der statisch unbestimmten Größen, wobei die Unbequemlichkeiten der Berechnung, welche die Auswertung der Elastizitätsgleichungen bei hochgradiger Unbestimmtheit mit sich bringt, umgangen werden können. Sind verwickeltere Systeme, wie mehrfeldige und mehrstöckige Rechteckrahmen zu berechnen, so verhilft eine systematische Auswahl der statisch unbestimmten Größen und ein systematisch aufgebauter Rechnungsgang zu einer bedeutenden Vereinfachung der Aufgabe, deren Lösung durch Rechenkontrollen jederzeit leicht nachgeprüft werden kann.

Im allgemeinen können wohl bei mehrstöckigen und mehrfeldigen Rechteckrahmen Normal- und Querkräfte unbeachtet bleiben. Wenn nur die Biegemomente berücksichtigt werden, ist es in der Regel am einfachsten, die Knoten- und Stabdrehwinkel als statisch unbestimmbare Größen einzuführen. In diesem Falle besteht unser Verfahren in einer mechanischen Tabellenaufstellung von Bestimmungsgleichungen der statisch unbestimmten Größen.

Die Bestimmungsgleichungen zur Berechnung der Unbekannten werden ganz mechanisch und regelmäßig aufgelöst. Unser Verfahren liefert also eine ebenso schnelle wie genaue praktische Lösung statisch unbestimmter Systeme. Die Bestimmungsgleichungen kann man sofort fertig anschreiben, wobei ein Irrtum in der Rechenarbeit fast ausgeschlossen ist. Ferner steht für die Auflösung dieser Bestimmungsgleichungen unser Iterationsverfahren zur Verfügung, das durch Rechenschieberrechnung ebenso genau wie geschwind von den ersten rohen Näherungswerten den genaueren Werten immer näher kommt und schließlich einen bleibenden Endwert erreicht, der von den Werten der genauen Rechnung nicht mehr unterschieden werden kann.

I. Rechteckrahmen mit beliebiger vertikaler Belastung auf den Balken und waagerechter Einzellast in jedem Knotenpunkt auf der vertikalen linken Seite.

§ 1. Grundgleichungen.

Wie schon von mehreren Fachgelehrten, so werden auch hier die Knotendrehwinkel ϑ und die Stabdrehwinkel ψ als statisch unbestimmte Größen gewählt. Unter Knotendrehwinkel verstehen wir den Winkel, um welchen sich irgend ein Knoten des Rahmenwerkes nach der Belastung in der Rahmenwerksebene gedreht hat. Unter Stabdrehwinkel verstehen wir den Winkel, um welchen sich die

Verbindungsline der Endpunkte eines Stabes gegen die ursprüngliche Stellung nach der Belastung in der Tragwerkebene gedreht hat.

Der Grad der statischen Unbestimmtheit ist durch die Anzahl der beiden Drehwinkel gegeben. Das Vorzeichen der Knotendrehwinkel, der Stabdrehwinkel und auch der Knoteneinspannungsmomente ist im Uhrzeigersinne stets positiv, im umgekehrten Sinne negativ anzunehmen (Abb. 1).

Um die bekannten Grundgleichungen zu entwickeln, beginnen wir mit der Untersuchung eines einzelnen, zu einem mehrstieligen und mehrstöckigen Rechteckrahmen gehörigen Stabes, der durch ein Paar sehr nahe gelegene Schnitte an den Knotenpunkten k und s begrenzt sei.

In Abb. 2 stellt $k-s$ die ursprüngliche Lage des Rahmenstabes dar; die Punkte k und s werden nach k'

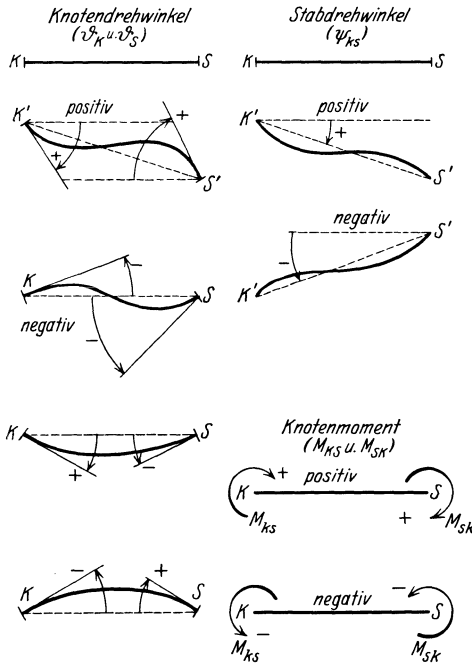


Abb. 1.

und s' durch die Belastung verschoben.

Wenn der Stab $k-s$ mit konstantem Trägheitsmoment J_{ks} und konstantem Elastizitätsmodul E durch irgend eine Belastung rechtwinklig zur Stabachse, außerdem aber auch durch die beiden Einspannungsmomente M_{ks} und M_{sk} belastet wird, dann gelten unter Verwendung des Mohrschen Satzes die folgenden

bekannten Ausdrücke:

$$(I) \quad \begin{cases} M_{ks} = \xi_{ks} \{2\varphi_k + \varphi_s + \mu_{ks}\} - \mathfrak{M}_{ks}, \\ M_{sk} = \xi_{ks} \{2\varphi_s + \varphi_k + \mu_{ks}\} + \mathfrak{M}_{sk}^*, \end{cases}$$

worin

$$(II) \quad \begin{cases} \xi_{ks} = \frac{J_{ks}}{l_{ks}}, & \mu_{ks} = -6E\psi_{ks}, \\ \varphi_k = 2E\vartheta_k, & \varphi_s = 2E\vartheta_s, \\ \mathfrak{M}_{ks} = \frac{2F}{l_{ks}^2} \{3\lambda - l_{ks}\}, & \mathfrak{M}_{sk} = \frac{2F}{l_{ks}^2} \{2l_{ks} - 3\lambda\}. \end{cases}$$

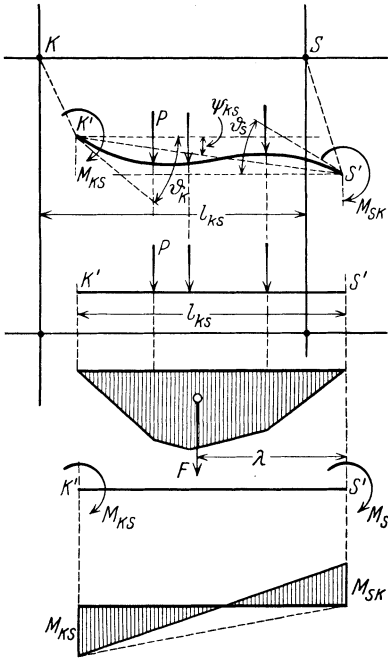


Abb. 2.

\mathfrak{M} stellt dabei den Einfluß der äußeren Belastung des Stabes dar, und F bedeutet den Inhalt der Momentenfläche des freiaufliegenden Trägers (Abb. 2).

Setzt man in Gl. (1)

$$\varphi_k = \varphi_s = \mu_{ks} = 0,$$

so hat man

$$M_{ks} = -\mathfrak{M}_{ks},$$

$$M_{sk} = \mathfrak{M}_{sk}.$$

Also stellt mit anderen Worten \mathfrak{M} die negativen Einspannungsmomente des beiderseits eingespannten Trägers dar.

Für eine Einzellast an beliebiger Stelle (Abb. 3) gilt

$$\mathfrak{M}_{ks} = \frac{Pab^2}{l^2},$$

$$\mathfrak{M}_{sk} = \frac{Pa^2b}{l^2}.$$

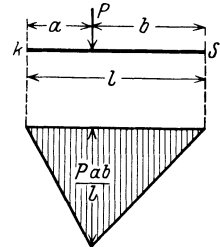


Abb. 3.

Die folgenden Tabellen Ia und Ib können uns dabei für verschiedene Belastungsfälle gute Dienste leisten.

Fällt in der Gl. (I) der Stabdrehwinkel weg, so lautet die Gl. (I) einfach

$$(Ia) \quad \begin{cases} M_{ks} = \xi \{2\varphi_k + \varphi_s\} - \mathfrak{M}_{ks}, \\ M_{sk} = \xi \{2\varphi_s + \varphi_k\} + \mathfrak{M}_{sk}^{**}. \end{cases}$$

Fällt die vertikale Belastung weg, so lautet die Gl. (I)

$$(Ib) \quad \begin{cases} M_{ks} = \xi \{2\varphi_k + \varphi_s + \mu\}, \\ M_{sk} = \xi \{2\varphi_s + \varphi_k + \mu\}. \end{cases}$$

* Ostenfeld, A.: Die Deformationsmethode, S. 11. Gl. (7). Berlin: Julius Springer 1926.

** Gehler, W.: Otto Mohr zum achtzigsten Geburtstage, S. 96, Gl. (III). Berlin: W. Ernst & Sohn 1916.

Tabelle Ia. Beliebige Belastung.

Belastungsfall

(1)

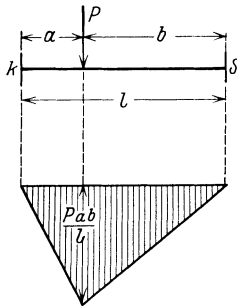


Abb. 4.

$$\mathfrak{M}_{ks} = \frac{Pab^2}{l^2} = Pl\lambda v^2,$$

$$\mathfrak{M}_{sk} = \frac{Pa^2b}{l^2} = Pl\lambda^2 v,$$

$$\lambda = \frac{a}{l}, \quad v = \frac{b}{l}.$$

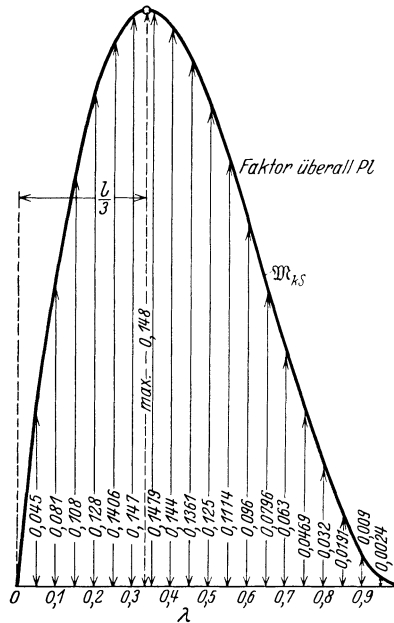


Abb. 5.

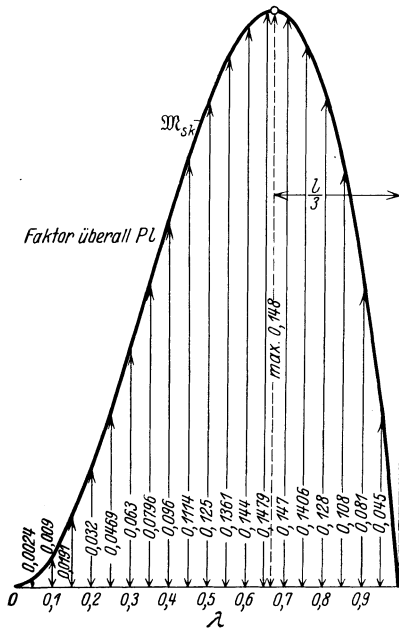


Abb. 6.

Bemerkung:

Für alle vorkommenden speziellen Belastungssysteme, die in den folgenden Tabellen Ia und Ib nicht angegeben sind, kann man die Werte \mathfrak{M}_{ks} und \mathfrak{M}_{sk} aus den Gleichungen

$$\mathfrak{M}_{ks} = \sum \frac{Pab^2}{l^2}$$

$$\mathfrak{M}_{sk} = \sum \frac{Pa^2b}{l^2}$$

und Tabelle Ia (4a) leicht berechnen.

Tabelle Ia (Fortsetzung).

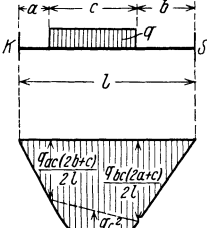
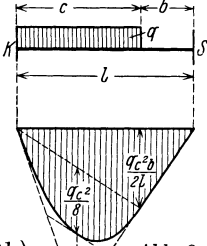
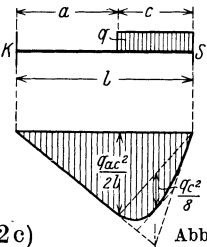
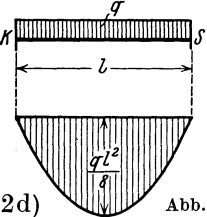
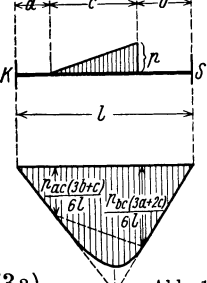
Belastungsfall	\mathfrak{M}_{ks}	\mathfrak{M}_{sk}
 <p>(2a) Abb. 7.</p>	$\mathfrak{M}_{ks} = \frac{qc}{12l^2} \{ 12ab(b+c) + 6b^2c + 4c^2(a+b) + c^3 \}$	$\mathfrak{M}_{sk} = \frac{qc}{12l^2} \{ 12ab(a+c) + 6a^2c + 4c^2(a+b) + c^3 \}$
 <p>(2b) Abb. 8.</p>	$\mathfrak{M}_{ks} = \frac{qc^2}{12l^2} \{ 6b^2 + 4bc + c^2 \}$	$\mathfrak{M}_{sk} = \frac{qc^3}{12l^2} \{ 4b + c \}$
 <p>(2c) Abb. 9.</p>	$\mathfrak{M}_{ks} = \frac{qc^3}{12l^2} \{ 4a + c \}$	$\mathfrak{M}_{sk} = \frac{qc^2}{12l^2} \{ 6a^2 + 4ac + c^2 \}$
 <p>(2d) Abb. 10.</p>	$\mathfrak{M}_{ks} = \frac{ql^2}{12}$	$\mathfrak{M}_{sk} = \frac{ql^2}{12}$
 <p>(3a) Abb. 11.</p>	$\mathfrak{M}_{ks} = \frac{pc}{60l^2} \{ 20bc(a+b) + 5c^2(a+2b) + 30ab^2 + 2c^3 \}$	$\mathfrak{M}_{sk} = \frac{pc}{60l^2} \{ 10ac(a+c) + 15b(2a^2+c^2) + 40abc + 3c^3 \}$

Tabelle Ia (Fortsetzung).

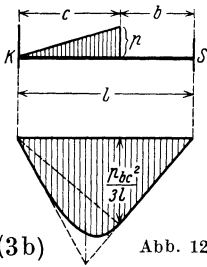
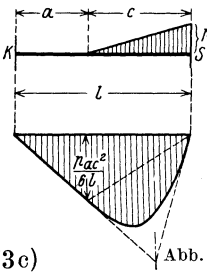
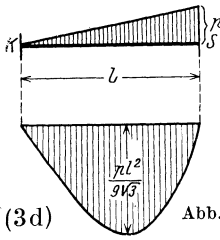
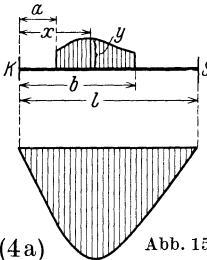
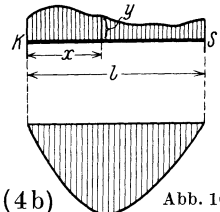
Belastungsfall	\mathfrak{M}_{ks}	\mathfrak{M}_{sk}
 <p>(3b) Abb. 12.</p>	$\mathfrak{M}_{ks} = \frac{p c^2}{30 l^2} \{10 b^2 + 5 b c + c^2\}$	$\mathfrak{M}_{sk} = \frac{p c^3}{20 l^2} \{5 b + c\}$
 <p>(3c) Abb. 13.</p>	$\mathfrak{M}_{ks} = \frac{p c^3}{60 l^2} \{5 a + 2 c\}$	$\mathfrak{M}_{sk} = \frac{p c^2}{60 l^2} \{10 a (a + c) + 3 c^2\}$
 <p>(3d) Abb. 14.</p>	$\mathfrak{M}_{ks} = \frac{p l^2}{30}$	$\mathfrak{M}_{sk} = \frac{p l^2}{20}$
 <p>(4a) Abb. 15.</p>	$\mathfrak{M}_{ks} = \frac{1}{l^2} \int_a^b y x (l-x)^2 dx$	$\mathfrak{M}_{sk} = \frac{1}{l^2} \int_a^b y x^2 (l-x) dx$
 <p>(4b) Abb. 16.</p>	$\mathfrak{M}_{ks} = \frac{1}{l^2} \int_0^l y x (l-x)^2 dx$	$\mathfrak{M}_{sk} = \frac{1}{l^2} \int_0^l y x^2 (l-x) dx$

Tabelle Ib. Symmetrische Belastung.

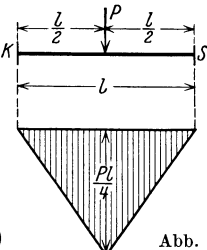
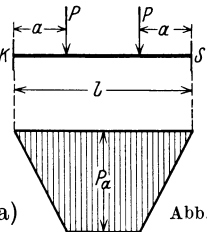
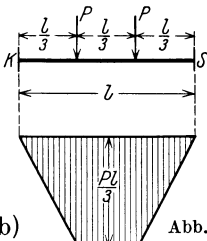
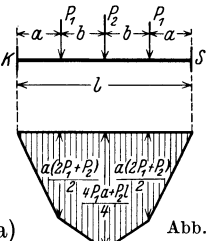
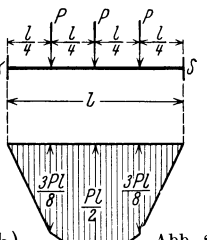
Belastungsfall	$\mathfrak{M}_{k_s} = \mathfrak{M}_{s_k} = \mathfrak{M}$
<p>(1)  Abb. 17.</p>	$\mathfrak{M} = \frac{Pl}{8}$
<p>(2a)  Abb. 18.</p>	$\mathfrak{M} = \frac{Pa(l-a)}{l}$
<p>(2b)  Abb. 19.</p>	$\mathfrak{M} = 2P \frac{l}{9}$
<p>(3a)  Abb. 20.</p>	$\mathfrak{M} = \frac{(a+b)}{l^2} \{2P_1 a(a+2b) + P_2(a+b)^2\}$
<p>(3b)  Abb. 21.</p>	$\mathfrak{M} = \frac{5Pl}{16}$

Tabelle Ib (Fortsetzung).

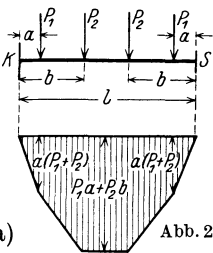
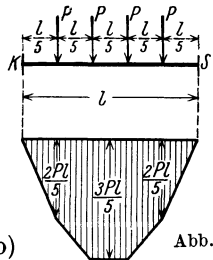
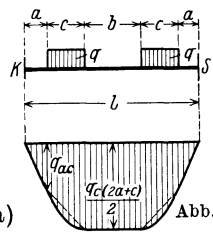
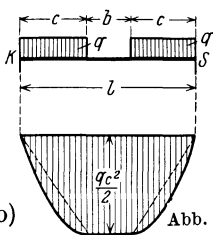
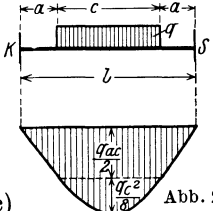
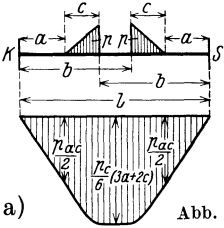
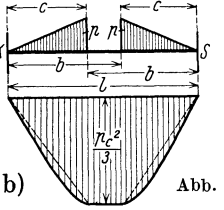
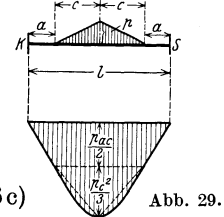
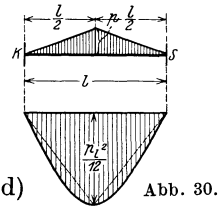
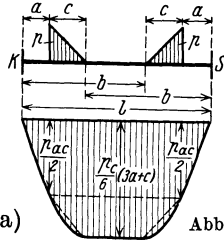
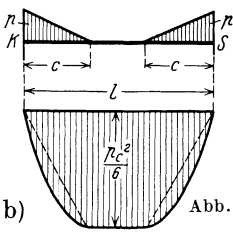
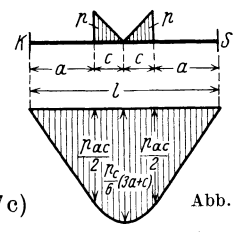
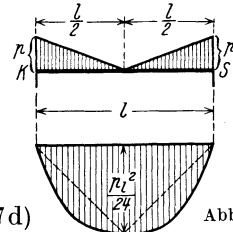
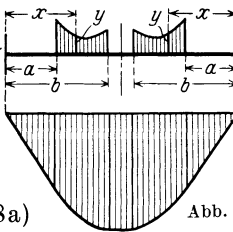
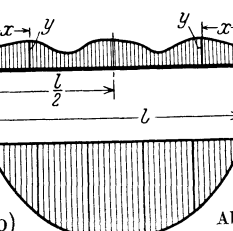
Belastungsfall	$\mathfrak{M}_{ks} = \mathfrak{M}_{sk} = \mathfrak{M}$
 <p>(4a) Abb. 22.</p>	$\mathfrak{M} = \frac{1}{l} \{P_1 a(l-a) + P_2 b(l-b)\}$
 <p>(4b) Abb. 23.</p>	$\mathfrak{M} = \frac{2Pl}{5}$
 <p>(5a) Abb. 24.</p>	$\mathfrak{M} = \frac{qc}{6l} \{6a(l-a) + 3bc + 4c^2\}$
 <p>(5b) Abb. 25.</p>	$\mathfrak{M} = \frac{qc^2}{6l} (3b + 4c)$
 <p>(5c) Abb. 26.</p>	$\mathfrak{M} = \frac{qc}{3l} \{3a(l-a) + 2c^2\}$

Tabelle 1 b (Fortsetzung).

Belastungsfall	$\mathfrak{M}_{ks} = \mathfrak{M}_{sk} = \mathfrak{M}$
 <p>(6a) Abb. 27.</p>	$\mathfrak{M} = \frac{p c}{12 l} \{6 a b + 4 b c + 2 a c + c^2\}$
 <p>(6b) Abb. 28.</p>	$\mathfrak{M} = \frac{p c^2}{12 l} (4 b + c)$
 <p>(6c) Abb. 29.</p>	$\mathfrak{M} = \frac{p c}{12 l} \{6 a^2 + 12 a c + 5 c^2\}$
 <p>(6d) Abb. 30.</p>	$\mathfrak{M} = \frac{5 p l^2}{96}$
 <p>(7a) Abb. 31.</p>	$\mathfrak{M} = \frac{p c}{12 l} \{6 a b + 4 a c + 2 b c + c^2\}$

10 Rechteckrahmen mit vertikaler Balkenbelastung und waagerechter Einzellast.

Tabelle I b (Fortsetzung).

Belastungsfall	$\mathfrak{M}_{ks} = \mathfrak{M}_{sk} = \mathfrak{M}$
 <p>(7b) Abb. 32.</p>	$\mathfrak{M} = \frac{p c^2}{12 l} (2b + c)$
 <p>(7c) Abb. 33.</p>	$\mathfrak{M} = \frac{p c}{4 l} \{2 a^2 + 4 a c + c^2\}$
 <p>(7d) Abb. 34.</p>	$\mathfrak{M} = \frac{p l^2}{32}$
 <p>(8a) Abb. 35.</p>	$\mathfrak{M} = \frac{1}{l} \int_a^b y x (l - x) dx$
 <p>(8b) Abb. 36.</p>	$\mathfrak{M} = \frac{1}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} y x (l - x) dx$

§ 2. Knoten- und Stabbezeichnungsregel.

In diesem Abschnitt werden beliebige vertikale Belastungsgruppen auf den Balken und waagerechte Einzellasten in allen Knotenpunkten der vertikalen linken Seite des Fachwerkes behandelt (Abb. 37).

Die Knoten- und Stabbezeichnungsregeln sollen dabei folgendermaßen angenommen werden:

1. Die Bezeichnung der Rahmenknoten soll nach der in Abb. 38 (A) gezeichneten Richtung, also zickzackförmig, angenommen werden.

2. Die Größe ξ , welche aus Gl. (II) für Balken und Ständer berechnet wird, soll ihre Bezeichnung nach Abb. 38 (A) und Abb. 38 (B) haben: für die Indizes von ξ verfährt man in ganz derselben Weise wie bei der Knotenbezeichnungsregel; für die Indizes von ξ' nimmt man diejenige Bezeichnung, die der darunter liegende Knotenpunkt besitzt.

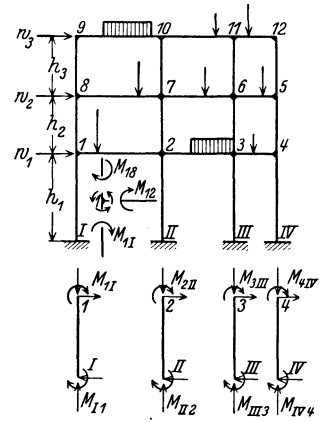


Abb. 37.

Ferner führen wir als Q_r die doppelte Größe der Summe aller ξ ein, die an dem Knoten r sich sammeln.

Z. B. in Abb. 38

$$\begin{aligned} Q_1 &= 2 \{ \xi_1 + \xi'_1 + \xi_{II} \}, \\ Q_2 &= 2 \{ \xi_1 + \xi_2 + \xi'_2 + \xi_{II} \}, \\ Q_3 &= 2 \{ \xi_2 + \xi_3 + \xi'_3 + \xi_{III} \} \quad \text{usw.,} \end{aligned}$$

allgemeiner:

(III) $Q_r = 2 \{ \text{Die Summe aller } \xi, \text{ die sich am Knoten } r \text{ sammeln} \}.$

Als weitere Bezeichnung wählen wir X_r gleich zwei Drittel der Summe aller ξ und ξ' im r -ten Stockwerk:

Z. B. in Abb. 38

$$X_1 = \frac{2}{3} \{ \xi_I + \xi_{II} + \xi_{III} + \xi_{IV} \},$$

$$X_2 = \frac{2}{3} \{ \xi'_1 + \xi'_2 + \xi'_3 + \xi_4 \},$$

$$X_3 = \frac{2}{3} \{ \xi'_5 + \xi'_6 + \xi'_7 + \xi_8 \},$$

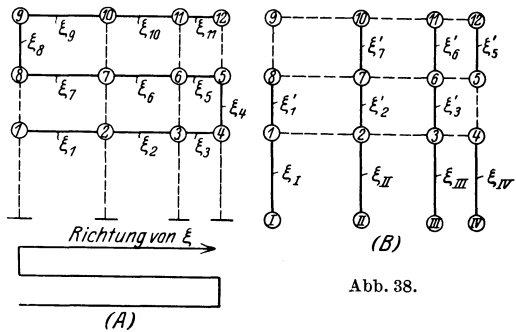


Abb. 38.

allgemein:

(IV) $X_r = \frac{2}{3} \{ \text{Die Summe aller } \xi \text{ und } \xi' \text{ am } r\text{-ten Stockwerk} \}.$

Mit Bezug auf Abb. 37 wird die gesamte Querkraft im ersten Stockwerk mit Q_1 bezeichnet, und zwar:

$$Q_1 = W_1 + W_2 + W_3.$$

In analoger Weise im zweiten Stockwerk:

$$Q_2 = W_2 + W_3$$

und im dritten:

$$Q_3 = W_3.$$

Wir setzen weiter

$$S_1 = -\frac{Q_1 h_1}{3},$$

$$S_2 = -\frac{Q_2 h_2}{3},$$

$$S_3 = -\frac{Q_3 h_3}{3},$$

allgemeiner:

$$(V) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{worin} \\ S_r = -\frac{Q_r h_r}{3} \\ Q_r = \text{die gesamte Querkraft im } r\text{-ten Stockwerk,} \\ h_r = \text{die Höhe des Ständers im } r\text{-ten Stockwerk} \end{array} \right.$$

ist.

§ 3. Knotengleichungen und Stockwerksgleichungen.

Um die Bestimmungsgleichungen der statisch unbestimmten Größen zu entwickeln, schneiden wir aus dem Rahmenwerk einen Knoten heraus.

Aus dem Gleichgewicht der Schnittmomente am herausgeschnittenen Knoten *I* (Abb. 37) ergibt sich:

$$M_{12} + M_{18} + M_{11} = 0$$

oder

$$\sum M_1 = 0.$$

Am Knoten *2* (Abb. 37) ergibt sich:

$$M_{21} + M_{23} + M_{27} + M_{211} = 0$$

oder

$$\sum M_2 = 0.$$

Allgemein stellt sich das Verhältnis am Knoten *k* wie folgt dar:

$$(VI) \quad \sum M_k = 0,$$

Diese Gleichgewichtsbedingungen sind die erste Gruppe unserer Bestimmungsgleichungen, deren Anzahl ebenso groß ist wie die Anzahl der Knoten oder der zu bestimmenden Knotendrehwinkel. Wir nennen diese Gruppe der Bestimmungsgleichungen „Knotengleichungen“.

Um die zweite Gruppe der Bestimmungsgleichungen zu entwickeln, führen wir zwei horizontale Schnitte, den einen sehr nahe unterhalb des Knotens *I*, den anderen ebenso oberhalb der Fundamente aus (Abb. 37).

Aus dem Gleichgewicht der Schnittquerkräfte und Momente an den herausgeschnittenen Ständern des ersten Stockwerks folgt:

$$\sum_{\substack{r=1 \\ R=I}}^{\substack{r=4 \\ R=IV}} \{M_{rR} + M_{Rr}\} + Q_1 h_1 = 0.$$

oder einfach

$$\sum_{\text{(erstes Stockwerk)}} \{M_{\text{oben}} + M_{\text{unten}}\} + Q_1 h_1 = 0.$$

Für das zweite Stockwerk gilt:

$$\sum_{\text{(zweites Stockwerk)}} \{M_{\text{oben}} + M_{\text{unten}}\} + Q_2 h_2 = 0.$$

Im allgemeinen ergibt sich am r -ten Stockwerk:

$$(VII) \quad \sum_{\text{(r-tes Stockwerk)}} \{M_{\text{oben}} + M_{\text{unten}}\} + Q_r h_r = 0.$$

Die Anzahl dieser Gleichungen der zweiten Gruppe ist ebenso groß wie die Anzahl der Stockwerke oder der zu bestimmenden Stabdrehwinkel. Wir nennen diese Gruppe der Bestimmungsgleichungen „Stockwerksgleichungen“.

Fällt die waagerechte Knotenbelastung weg, so lautet die Gleichung einfach:

$$(VIII) \quad \sum \{M_{\text{oben}} + M_{\text{unten}}\} = 0.$$

Die Gl. (VI) und (VII) liefern die Bestimmungsgleichungen als Funktion der Unbekannten φ und μ laut Gl. (I).

Z. B. aus dem Gleichgewicht der Schnittmomente am herausgeschnittenen Knoten k (Abb. 39) ergibt sich:

$$\sum M_k = 0$$

oder auch

$$M_{ka} + M_{kb} + M_{kc} + M_{kd} = 0,$$

wobei

$$M_{ka} = \xi_a \{2\varphi_k + \varphi_a + \mu_a\} + \mathfrak{M}_{ka},$$

$$M_{kb} = \xi_b \{2\varphi_k + \varphi_b + \mu_b\} - \mathfrak{M}_{kb},$$

$$M_{kc} = \xi_c \{2\varphi_k + \varphi_c + \mu_c\} + \mathfrak{M}_{kc},$$

$$M_{kd} = \xi_d \{2\varphi_k + \varphi_d + \mu_d\} - \mathfrak{M}_{kd}$$

ist.

Damit wird:

$$(VIa) \quad \begin{cases} 2\varphi_k \{\xi_a + \xi_b + \xi_c + \xi_d\} + \varphi_a \xi_a + \varphi_b \xi_b + \varphi_c \xi_c + \varphi_d \xi_d \\ + \mu_a \xi_a + \mu_b \xi_b + \mu_c \xi_c + \mu_d \xi_d + (\mathfrak{M}_{ka} - \mathfrak{M}_{kb}) + (\mathfrak{M}_{kc} - \mathfrak{M}_{kd}) = 0. \end{cases}$$

Die Gl. (VIa) ist die allgemeine Knotengleichung in brauchbarer Form zur Berechnung der Unbekannten φ und μ . Diese Gleichungsform kann leicht auswendig gelernt und durch regelmäßige Anordnung der Unbekannten mit den entsprechenden Beiwerten auch leicht angegeben werden.

Fällt die waagerechte Belastung weg, so lautet die Gleichung

$$(VIb) \quad \begin{cases} \varphi_k Q_k + \varphi_a \xi_a + \varphi_b \xi_b + \varphi_c \xi_c + \varphi_d \xi_d \\ + \mu_a \xi_a + \mu_b \xi_b + \mu_c \xi_c + \mu_d \xi_d + \mathfrak{M}_{ka} - \mathfrak{M}_{kb} = 0, \\ \text{wobei} \\ Q_k = 2 \{\xi_a + \xi_b + \xi_c + \xi_d\} \\ = 2 \{\text{Die Summe aller } \xi, \text{ die sich am Knoten } k \text{ sammeln}\}. \end{cases}$$

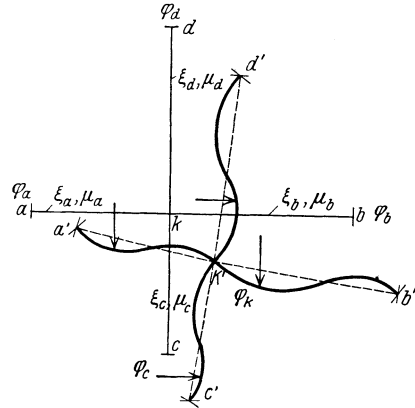


Abb. 39.

Ist außerdem $\mu_c = \mu_d = 0$, so lautet die Gleichung

$$(VIc) \quad \begin{cases} \varphi_k Q_k + \varphi_a \xi_a + \varphi_b \xi_b + \varphi_c \xi_c + \varphi_d \xi_d \\ + \mu_a \xi_a + \mu_b \xi_b = \mathfrak{M}_{k-\text{rechts}} - \mathfrak{M}_{k-\text{links}} . \end{cases}$$

Außerdem haben wir die Knotengleichungen:

in bezug auf Abb. 40:

$$(VIId) \quad \varphi_k Q_k + \varphi_a \xi_a + \varphi_b \xi_b + \varphi_c \xi_c + \varphi_d \xi_d = \mathfrak{M}_{k-\text{rechts}} - \mathfrak{M}_{k-\text{links}} ,$$

in bezug auf Abb. 41:

$$(VIe) \quad \begin{cases} \varphi_k Q_k + \varphi_b \xi_b + \varphi_c \xi_c + \varphi_d \xi_d = \mathfrak{M}_{k-\text{rechts}} , \\ \text{wobei} \\ Q_k = 2 \{ \xi_b + \xi_c + \xi_d \} = 2 \{ \text{Die Summe aller } \xi, \\ \text{die sich am Knoten } k \text{ sammeln} \} , \end{cases}$$

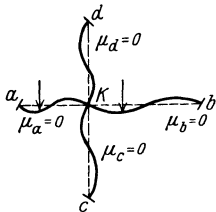


Abb. 40.

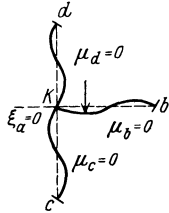


Abb. 41.

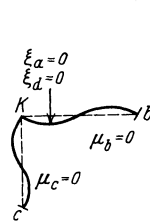


Abb. 42.

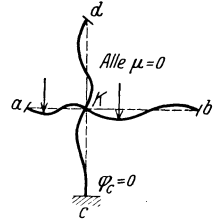


Abb. 43.

in bezug auf Abb. 42:

$$(VIIf) \quad \begin{cases} \varphi_k Q_k + \varphi_b \xi_b + \varphi_c \xi_c = \mathfrak{M}_{k-\text{rechts}} , \\ \text{wobei} \\ Q_k = 2 \{ \xi_b + \xi_c \} = 2 \{ \text{Die Summe aller } \xi, \\ \text{die sich am Knoten } k \text{ sammeln} \} , \end{cases}$$

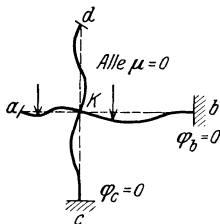


Abb. 44.

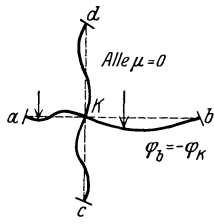


Abb. 45.

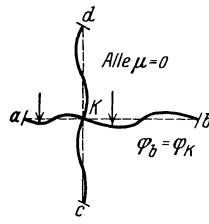


Abb. 46.

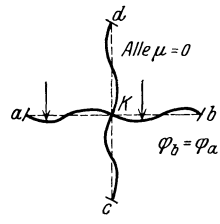


Abb. 47.

in bezug auf Abb. 43:

$$(VIg) \quad \begin{cases} \varphi_k Q_k + \varphi_a \xi_a + \varphi_b \xi_b + \varphi_d \xi_d = \mathfrak{M}_{k-\text{rechts}} - \mathfrak{M}_{k-\text{links}} , \\ \text{wobei} \\ Q_k = 2 \{ \xi_a + \xi_b + \xi_c + \xi_d \} , \end{cases}$$

in bezug auf Abb. 44:

$$(VIh) \quad \begin{cases} \varphi_k \varrho_k + \varphi_a \xi_a + \varphi_d \xi_d = \mathfrak{M}_{k-\text{rechts}} - \mathfrak{M}_{k-\text{links}}, \\ \text{wobei} \\ \varrho_k = 2 \{ \xi_a + \xi_b + \xi_c + \xi_d \}, \end{cases}$$

in bezug auf Abb. 45:

$$(VIi) \quad \begin{cases} \varphi_k (\varrho_k) + \varphi_a \xi_a + \varphi_c \xi_c + \varphi_d \xi_d = \mathfrak{M}_{k-\text{rechts}} - \mathfrak{M}_{k-\text{links}}, \\ \text{wobei} \\ (\varrho_k) = 2 \{ \xi_a + \xi_b + \xi_c + \xi_d \} - \xi_b = \varrho_k - \xi_b, \end{cases}$$

in bezug auf Abb. 46:

$$(VIj) \quad \begin{cases} \varphi_k [\varrho_k] + \varphi_a \xi_a + \varphi_c \xi_c + \varphi_d \xi_d = \mathfrak{M}_{k-\text{rechts}} - \mathfrak{M}_{k-\text{links}}, \\ \text{wobei} \\ [\varrho_k] = 2 \{ \xi_a + \xi_b + \xi_c + \xi_d \} + \xi_b = \varrho_k + \xi_b, \end{cases}$$

in bezug auf Abb. 47:

$$(VIk) \quad \begin{cases} \varphi_k \varrho_k + \varphi_a (\xi_a + \xi_b) + \varphi_c \xi_c + \varphi_d \xi_d = \mathfrak{M}_{k-\text{rechts}} - \mathfrak{M}_{k-\text{links}}, \\ \text{wobei} \\ \varrho_k = 2 \{ \xi_a + \xi_b + \xi_c + \xi_d \}. \end{cases}$$

Wenn in der Gl. (VIk) $\xi_a = \xi_b$ ist, so lautet die Gleichung:

$$(VII) \quad \begin{cases} \varphi_k \varrho_k + \varphi_a (2 \xi_a) + \varphi_c \xi_c + \varphi_d \xi_d = \mathfrak{M}_{k-\text{rechts}} - \mathfrak{M}_{k-\text{links}}, \\ \text{wobei} \\ \varrho_k = 2 \{ 2 \xi_a + \xi_c + \xi_d \} = 2 \{ \text{Die Summe aller } \xi, \\ \text{die sich am Knoten } k \text{ sammeln} \}. \end{cases}$$

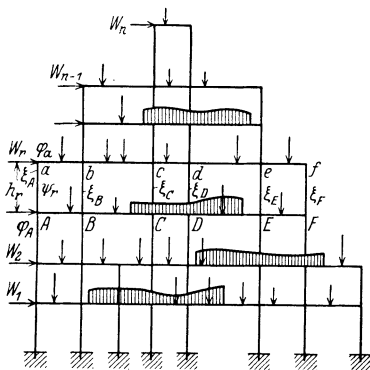


Abb. 48a.

Die Gl. (VIc) ist die allgemeine Knotengleichung in brauchbarer Form in diesem Abschnitt, weil wir dabei nur die Rahmen mit beliebiger vertikaler Belastung und mit waagerechter Einzellast in jedem Knotenpunkt auf einer vertikalen Seite des Rahmengebldes behandeln. Die Gln. (VI d) bis (VI l) können aus Gl. (VI c) leicht abgeleitet werden.

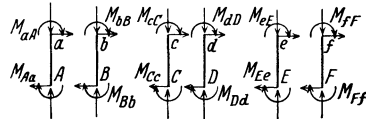


Abb. 48b.

Um die zweite Gruppe der Bestimmungsgleichungen in brauchbarer Form zu entwickeln, führen wir zwei horizontale Schnitte sehr nahe unten am Knoten a und ebenso oberhalb des Knoten A in Abb. 48a aus.

Aus dem Gleichgewicht der Schnittquerkräfte und Momente an den herausgeschnittenen Ständern des r -ten Stockwerks ergibt sich (Abb. 48a, b):

$$\sum_{\substack{r=f \\ R=F \\ r=a \\ R=A}} \{M_{rR} + M_{Rr}\} + Q_r h_r = 0,$$

wobei

$$\begin{aligned} M_{aA} + M_{Aa} &= \xi_A \{3\varphi_a + 3\varphi_A + 2\mu_r\}, \\ M_{bB} + M_{Bb} &= \xi_B \{3\varphi_b + 3\varphi_B + 2\mu_r\}, \\ M_{cC} + M_{Cc} &= \xi_C \{3\varphi_c + 3\varphi_C + 2\mu_r\}, \\ M_{dD} + M_{Dd} &= \xi_D \{3\varphi_d + 3\varphi_D + 2\mu_r\}, \\ M_{eE} + M_{Ee} &= \xi_E \{3\varphi_e + 3\varphi_E + 2\mu_r\}, \\ M_{fF} + M_{Ff} &= \xi_F \{3\varphi_f + 3\varphi_F + 2\mu_r\}. \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$(VIIa) \left\{ \begin{aligned} &\xi_A (\varphi_a + \varphi_A) + \xi_B (\varphi_b + \varphi_B) + \xi_C (\varphi_c + \varphi_C) + \xi_D (\varphi_d + \varphi_D) \\ &\quad + \xi_E (\varphi_e + \varphi_E) + \xi_F (\varphi_f + \varphi_F) + \mu_r X_r = S_r, \\ \text{wobei} \\ &X_r = \frac{2}{3} \{ \xi_A + \xi_B + \xi_C + \xi_D + \xi_E + \xi_F \}, \\ &S_r = -\frac{Q_r h_r}{3} = -\frac{h_r}{3} \{ W_r + W_{r+1} + \dots + W_n \}. \end{aligned} \right.$$

Die Gln. (VIc) und (VIIa) sind die Grundgleichungen zur Aufstellung der Gleichungstabellen.

Der Übersichtlichkeit halber mögen die Koeffizienten der Unbekannten der Gln. (VIc) und (VIIa) folgendermaßen tabellarisch angegeben werden (Tabelle IIa und Tabelle IIb).

Tabelle IIa.

	Linke Seite der Gleichung (VIc)							Rechte Seite der Gleichung
Unbekannte	φ_k	φ_a	φ_b	φ_c	φ_d	μ_a	μ_b	
Koeffizient	ϱ_k	ξ_a	ξ_b	ξ_c	ξ_d	ξ_a	ξ_b	$\mathfrak{M}_{k\text{-rechts}} - \mathfrak{M}_{k\text{-links}}$

Tabelle IIb.

	Linke Seite der Gleichung (VIIa)													Rechte Seite der Gleichung
Unbekannte	φ_a	φ_b	φ_c	φ_d	φ_e	φ_f	φ_F	φ_E	φ_D	φ_C	φ_B	φ_A	μ_r	
Koeffizient	ξ_A	ξ_B	ξ_C	ξ_D	ξ_E	ξ_F	ξ_F	ξ_E	ξ_D	ξ_C	ξ_B	ξ_A	X_r	S_r

§ 4. Grundtabellen der Bestimmungsgleichungen.

a) Allgemeine Grundtabellen.

Grundtabelle I. Der in Abb. 37 bzw. in Abb. 49 dargestellte Rahmen ist fünfzuehnfach statisch unbestimmt. Wegen vollkommener Einspannung in die Fundamente sind als Unbestimmte die zwölf Drehwinkel der Knoten 1 bis 12 und die

drei Stabdrehwinkel der Stockwerke anzusehen; also hat der Rahmen im ganzen fünfzehn Unbekannte.

Die zwölf Knotengleichungen lauten:

Für den Knoten 1:

$$M_{12} + M_{18} + M_{11} = 0$$

oder mit der Formel (I):

$$\varphi_1 (2 \xi_1 + 2 \xi'_1 + 2 \xi_I) + \varphi_2 \xi_1 + \varphi_8 \xi'_1 + \mu_1 \xi_I + \mu_2 \xi'_1 = \mathfrak{M}_{12}$$

oder auch laut Gl. (III):

$$\varphi_1 \varrho_1 + \varphi_2 \xi_1 + \varphi_8 \xi'_1 + \mu_1 \xi_I + \mu_2 \xi'_1 = \mathfrak{M}_{12}.$$

Für den Knoten 2:

$$M_{21} + M_{23} + M_{27} + M_{2II} = 0$$

oder mit den Gln. (I) und (III):

$$\begin{aligned} \varphi_1 \xi_1 + \varphi_2 \varrho_2 + \varphi_3 \xi_2 + \varphi_7 \xi'_2 + \mu_1 \xi_{II} + \mu_2 \xi'_2 \\ = \mathfrak{M}_{23} - \mathfrak{M}_{21}. \end{aligned}$$

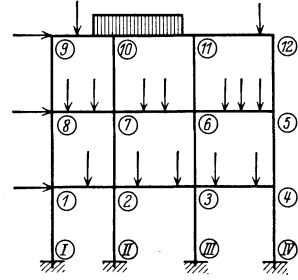


Abb. 49.

Für den Knoten 3:

$$\varphi_2 \xi_2 + \varphi_3 \varrho_3 + \varphi_4 \xi_3 + \varphi_6 \xi'_3 + \mu_1 \xi_{III} + \mu_2 \xi'_3 = \mathfrak{M}_{34} - \mathfrak{M}_{32}.$$

Für den Knoten 4:

$$\varphi_3 \xi_3 + \varphi_4 \varrho_4 + \varphi_5 \xi_4 + \mu_1 \xi_{IV} + \mu_2 \xi_4 = - \mathfrak{M}_{43}.$$

Für den Knoten 5:

$$\varphi_4 \xi_4 + \varphi_5 \varrho_5 + \varphi_6 \xi_5 + \varphi_{12} \xi'_5 + \mu_2 \xi_4 + \mu_3 \xi'_5 = - \mathfrak{M}_{56}.$$

Für den Knoten 6:

$$\varphi_3 \xi'_3 + \varphi_5 \xi_5 + \varphi_6 \varrho_6 + \varphi_7 \xi_6 + \varphi_{11} \xi'_6 + \mu_2 \xi'_3 + \mu_3 \xi'_6 = \mathfrak{M}_{65} - \mathfrak{M}_{67}.$$

Für den Knoten 7:

$$\varphi_2 \xi'_2 + \varphi_6 \xi_6 + \varphi_7 \varrho_7 + \varphi_8 \xi'_7 + \varphi_{10} \xi'_7 + \mu_2 \xi'_2 + \mu_3 \xi'_7 = \mathfrak{M}_{76} - \mathfrak{M}_{78}.$$

Für den Knoten 8:

$$\varphi_1 \xi'_1 + \varphi_7 \xi_7 + \varphi_8 \varrho_8 + \varphi_9 \xi_8 + \mu_2 \xi'_1 + \mu_3 \xi_8 = \mathfrak{M}_{87}.$$

Für den Knoten 9:

$$\varphi_8 \xi_8 + \varphi_9 \varrho_9 + \varphi_{10} \xi_9 + \mu_3 \xi_8 = \mathfrak{M}_{9,10}.$$

Für den Knoten 10:

$$\varphi_7 \xi'_7 + \varphi_9 \xi_9 + \varphi_{10} \varrho_{10} + \varphi_{11} \xi_{10} + \mu_3 \xi'_7 = \mathfrak{M}_{10,11} - \mathfrak{M}_{10,9}.$$

Für den Knoten 11:

$$\varphi_6 \xi'_6 + \varphi_{10} \xi_{10} + \varphi_{11} \varrho_{11} + \varphi_{12} \xi_{11} + \mu_3 \xi'_6 = \mathfrak{M}_{11,12} - \mathfrak{M}_{11,10}.$$

Für den Knoten 12:

$$\varphi_5 \xi'_5 + \varphi_{11} \xi_{11} + \varphi_{12} \varrho_{12} + \mu_3 \xi'_5 = - \mathfrak{M}_{12,11}.$$

Allgemeiner für den Knotenpunkt r :

$$(IX) \quad \text{Rechte Seite der Gleichung} = \mathfrak{M}_{r,\text{rechts}} - \mathfrak{M}_{r,\text{links}}.$$

Die drei Stockwerksgleichungen lauten:

Für das erste Stockwerk:

$$\sum_{\substack{r=4 \\ R=IV}}^{\substack{r=1 \\ R=I}} \{M_{rR} + M_{Rr}\} + Q_1 h_1 = 0$$

oder mit der Gl. (I):

$$\varphi_1 \xi_I + \varphi_2 \xi_{II} + \varphi_3 \xi_{III} + \varphi_4 \xi_{IV} + \mu_1 \frac{2}{3} \{\xi_I + \xi_{II} + \xi_{III} + \xi_{IV}\} = -\frac{Q_1 h_1}{3}$$

oder auch mit den Gln. (IV) und (V):

$$\varphi_1 \xi_I + \varphi_2 \xi_{II} + \varphi_3 \xi_{III} + \varphi_4 \xi_{IV} + \mu_1 X_1 = S_1.$$

Für das zweite Stockwerk:

$$\varphi_1 \xi'_1 + \varphi_2 \xi'_2 + \varphi_3 \xi'_3 + \varphi_4 \xi'_4 + \varphi_5 \xi'_5 + \varphi_6 \xi'_6 + \varphi_7 \xi'_7 + \varphi_8 \xi'_8 + \mu_2 X_2 = S_2.$$

Für das dritte Stockwerk:

$$\varphi_5 \xi'_5 + \varphi_6 \xi'_6 + \varphi_7 \xi'_7 + \varphi_8 \xi'_8 + \varphi_9 \xi'_9 + \varphi_{10} \xi'_{10} + \varphi_{11} \xi'_{11} + \varphi_{12} \xi'_{12} + \mu_3 X_3 = S_3.$$

Der Übersichtlichkeit halber mögen die Koeffizienten der Unbekannten der gewonnenen Bestimmungsgleichungen folgendermaßen tabellenförmig angegeben werden (Tabelle IIIa):

Tabelle IIIa.

Gleichung	Linke Seite der Gleichung (Koeffizienten der Unbekannten)													Rechte Seite der Gleichung				
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}	μ_1	μ_2	μ_3	Vertikale Belastung	Wagerechte Belastung	
(1)	Q_1	ξ_1						ξ'_1						ξ_I	ξ'_1		M_{12}	
(2)	ξ'_1	Q_2	ξ_2					ξ'_2						ξ_{II}	ξ'_2		$M_{23} - M_{21}$	
(3)		ξ'_2	Q_3	ξ_3				ξ'_3						ξ_{III}	ξ'_3		$M_{34} - M_{32}$	
(4)			ξ'_3	Q_4	ξ_4			ξ'_4						ξ_{IV}	ξ'_4		$-M_{43}$	
(5)				ξ_4	Q_5	ξ_5							ξ'_5	ξ'_5		$-M_{56}$		
(6)			ξ'_4	ξ_5	Q_6	ξ_6							ξ'_6	ξ'_6		$M_{65} - M_{67}$		
(7)		ξ'_5	ξ_6	ξ_5	ξ_6	Q_7	ξ_7						ξ'_7	ξ'_7		$M_{76} - M_{78}$		
(8)	ξ'_1				ξ_7	ξ_6	Q_8	ξ_8					ξ'_8	ξ'_8		M_{87}		
(9)							ξ_8	Q_9	ξ_9					ξ'_9	ξ'_9		$M_{9,10}$	
(10)							ξ_9	ξ_9	Q_{10}	ξ_{10}				ξ'_{10}	ξ'_{10}		$M_{10,11} - M_{10,9}$	
(11)							ξ_{10}	ξ_{10}	ξ_{10}	Q_{11}				ξ'_{11}	ξ'_{11}		$M_{11,12} - M_{11,10}$	
(12)					ξ_5	ξ_6			ξ_{11}	Q_{12}				ξ'_{12}	ξ'_{12}		$-M_{12,11}$	
(13)	ξ_I	ξ_{II}	ξ_{III}	ξ_{IV}									X_1					S_1
(14)	ξ'_1	ξ'_2	ξ'_3	ξ'_4	ξ'_5	ξ'_6	ξ'_7	ξ'_8	ξ'_9	ξ'_{10}	ξ'_{11}	ξ'_{12}		X_2				S_2
(15)														X_3				S_3

Die Tabelle IIIa wird mit Vorteil ohne Zwischenrechnungen nach den Tabellen IIa und IIb direkt angegeben.

Sie zeigt vollkommene Spiegelsymmetrie in bezug auf die diagonale ϱ -, X -Linie; ober- und unterhalb dieser Diagonalen findet man die mit derselben rechtwinklig verlaufende ξ' -Linie.

Grundtabelle II. Der in Abb. 50 dargestellte Rechteckrahmen ist vierzehnfach statisch unbestimmt. Infolge vollkommener Einspannung in die Fundamente

sind als Unbestimmte die elf Drehwinkel der Knoten I bis II und die drei Stabdrehwinkel der Stockwerke anzusehen; der Rahmen hat demzufolge im ganzen vierzehn Unbekannte.

Die zwölf Knotengleichungen lauten:

Für den Knoten I laut Tabelle IIa:

$$\varphi_1 \varrho_1 + \varphi_2 \xi_1 + \mu_1 \xi_I = \mathfrak{M}_{12}.$$

Für den Knoten 2 laut Tabelle IIa:

$$\varphi_1 \xi_1 + \varphi_2 \varrho_2 + \varphi_3 \xi_2 + \varphi_9 \xi'_2 + \mu_1 \xi_{II} + \mu_2 \xi'_2 = \mathfrak{M}_{23} - \mathfrak{M}_{21} \text{ usw.}$$

Die drei Stockwerksgleichungen lauten:

Für das erste Stockwerk laut Tabelle IIb:

$$\varphi_1 \xi_I + \varphi_2 \xi_{II} + \varphi_3 \xi_{III} + \varphi_4 \xi_{IV} + \varphi_5 \xi_V + \varphi_6 \xi_{VI} + \mu_1 X_1 = S_1.$$

Für das zweite Stockwerk laut Tabelle IIb:

$$\varphi_2 \xi'_2 + \varphi_3 \xi'_3 + \varphi_5 \xi'_5 + \varphi_7 \xi'_7 + \varphi_8 \xi'_8 + \varphi_9 \xi'_2 + \mu_2 X_2 = S_2 \text{ usw.}$$

Der Übersichtlichkeit halber mögen die Koeffizienten der Unbekannten der gewonnenen Bestimmungsgleichungen folgendermaßen tabellenförmig angegeben werden (Tabelle IIIb):

Tabelle IIIb.

Gleichung	Linke Seite der Gleichung													Rechte Seite der Gleichung	
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	μ_1	μ_2		μ_3
(1)	ϱ_1	ξ_1										ξ_I			\mathfrak{M}_{12}
(2)	ξ'_1	ϱ_2	ξ_2						ξ'_2			ξ_{II}	ξ'_2		$\mathfrak{M}_{23} - \mathfrak{M}_{21}$
(3)		ξ'_2	ϱ_3	ξ_3				ξ_3				ξ_{III}	ξ'_3		$\mathfrak{M}_{34} - \mathfrak{M}_{32}$
(4)			ξ'_3	ϱ_4	ξ_4							ξ_{IV}	ξ'_4		$\mathfrak{M}_{45} - \mathfrak{M}_{43}$
(5)				ξ'_4	ϱ_5	ξ_5	ξ'_5					ξ_V	ξ'_5		$\mathfrak{M}_{56} - \mathfrak{M}_{54}$
(6)					ξ'_5	ϱ_6						ξ_{VI}			$-\mathfrak{M}_{65}$
(7)					ξ'_5		ϱ_7	ξ_7					ξ'_5		$-\mathfrak{M}_{78}$
(8)							ξ'_7	ϱ_8	ξ_8				ξ'_3	ξ_8	$\mathfrak{M}_{87} - \mathfrak{M}_{89}$
(9)		ξ'_2	ξ'_3					ϱ_9	ξ_9	ξ'_9			ξ'_2	ξ_9	\mathfrak{M}_{98}
(10)									ξ_9	ϱ_{10}	ξ_{10}			ξ_9	$\mathfrak{M}_{10,11}$
(11)								ξ'_8		ξ'_{10}	ϱ_{11}			ξ'_8	$-\mathfrak{M}_{11,10}$
(12)	ξ_I	ξ_{II}	ξ_{III}	ξ_{IV}	ξ_V	ξ_{VI}						X_1			S_1
(13)		ξ'_2	ξ'_3		ξ'_5		ξ'_5	ξ'_3	ξ'_2				X_2		S_2
(14)								ξ_9	ξ'_9				X_3		S_3

Die Tabelle IIIb zeigt wiederum vollkommene Spiegelsymmetrie in bezug auf die diagonale ϱ - und X -Linie; rechtwinklig dazu verläuft die ξ' -Linie.

b) Symmetrische Ausbildung und Belastung.

Ein symmetrisch gebautes Rahmentragwerk mit einer symmetrischen Belastung bedingt für sämtliche Stäbe $\psi = 0$ oder auch $\mu = 0$.

Sich entsprechende, symmetrisch gelegene Knotenpunkte weisen dabei gleich große, entgegengesetzte Knotendrehwinkel auf, wodurch der Grad der statischen

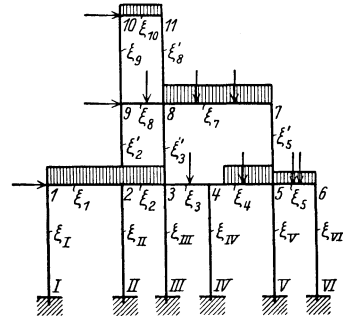


Abb. 50.

Unbestimmtheit des zu behandelnden Rahmentragwerkes um ein beträchtliches sinkt. Um die statisch unbestimmten Größen zu bestimmen, brauchen wir nur die erste Gruppe der Bestimmungsgleichungen. Für die auf einer symmetrischen Bauachse liegenden Knotenpunkte beträgt wegen der Symmetrie der Anordnung und Belastung der Rahmen mit $2n$ Öffnungen $\varphi_m = 0$ (Abb. 51a u. 51b).

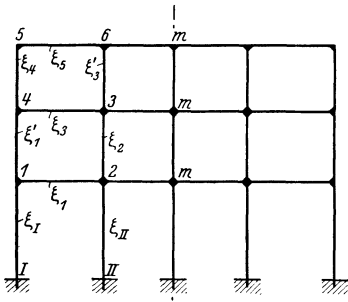


Abb. 51 a.

Bezeichnet man mit k die Anzahl sämtlicher und mit m die Anzahl der auf der symmetrischen Bauachse liegenden Knotenpunkte, so ist ein symmetrisch gebautes Rahmentragwerk, bei symmetrischer Belastung, mit geradzahligem Öffnungen $\frac{1}{2}(k - m)$ -fach statisch unbestimmt, also können $\frac{1}{2}(k - m)$ Bestimmungsgleichungen aus den Knotengleichungen hergeleitet werden.

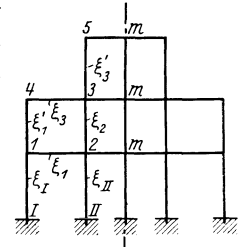


Abb. 51 b.

Bei symmetrischer Ausbildung und Belastung ist auch ein Rahmentragwerk mit ungeradzahligem Öffnungen und k Knotenpunkten $\frac{1}{2}k$ -fach statisch unbestimmt. Diese zwei symmetrischen Fälle sind in Abb. 51 und 52 beispielsweise dargestellt.

Der in Abb. 51a dargestellte mehrstielige Stockwerksrahmen mit vier Öffnungen und drei Stockwerken ist sechsfach statisch unbestimmt, also sind nur sechs Bestimmungsgleichungen erforderlich, welche aus Knotengleichungen folgendermaßen leicht erhalten werden (Tabelle IV a).

Tabelle IVa.

Gleichung	Linke Seite der Gleichung						Rechte Seite der Gleichung
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	
(1)	ϱ_1	ξ_1		ξ'_1			\mathfrak{M}_{12}
(2)	ξ_1	ϱ_2	ξ_2				$\mathfrak{M}_{2m} - \mathfrak{M}_{21}$
(3)		ξ_2	ϱ_3	ξ_3		ξ'_3	$\mathfrak{M}_{3m} - \mathfrak{M}_{34}$
(4)	ξ'_1		ξ_3	ϱ_4	ξ_4		\mathfrak{M}_{43}
(5)			ξ_4	ϱ_5	ξ_5		\mathfrak{M}_{56}
(6)			ξ'_3		ϱ_6		$\mathfrak{M}_{6m} - \mathfrak{M}_{65}$

Tabelle IVb.

Gleichung	Linke Seite der Gleichung					Rechte Seite der Gleichung
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	
(1)	ϱ_1	ξ_1		ξ'_1		\mathfrak{M}_{12}
(2)	ξ_1	ϱ_2	ξ_2			$\mathfrak{M}_{2m} - \mathfrak{M}_{21}$
(3)		ξ_2	ϱ_3	ξ_3	ξ'_3	$\mathfrak{M}_{3m} - \mathfrak{M}_{34}$
(4)	ξ'_1		ξ_3	ϱ_4		\mathfrak{M}_{43}
(5)			ξ'_3		ϱ_5	\mathfrak{M}_{5m}

Der in Abb. 51b dargestellte mehrstielige Stockwerksrahmen mit vier Öffnungen und drei Stockwerken ist fünffach statisch unbestimmt, also sind nur fünf Bestimmungsgleichungen erforderlich, welche aus Knotengleichungen folgendermaßen leicht erhalten werden (Tabelle IV b).

In Abb. 52a haben wir ebenfalls einen sechsfach statisch unbestimmten, mehrstieligen Stockwerksrahmen. Nach unserem Verfahren erhalten wir ähnlich wie zuvor folgende Tabelle Va.

In bezug auf Abb. 52b erhält man Tabelle Vb.

Tabelle Va.

Gleichung	Linke Seite der Gleichung						Rechte Seite der Gleichung
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	
(1)	ϱ_1	ξ_1		ξ'_1			\mathfrak{M}_{12}
(2)	ξ_1	(ϱ_2)	ξ_2				$\mathfrak{M}_{22}' - \mathfrak{M}_{21}$
(3)		ξ_2	(ϱ_3)	ξ_3		ξ'_3	$\mathfrak{M}_{33}' - \mathfrak{M}_{34}$
(4)	ξ'_1		ξ_3	ϱ_4	ξ_4		\mathfrak{M}_{43}
(5)				ξ_4	ϱ_5	ξ_5	\mathfrak{M}_{56}
(6)			ξ'_3		ξ'_5	(ϱ_6)	$\mathfrak{M}_{66}' - \mathfrak{M}_{65}$

Tabelle Vb.

Gleichung	Linke Seite der Gleichung					Rechte Seite der Gleichung
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	
(1)	ϱ_1	ξ_1		ξ_1		\mathfrak{M}_{12}
(2)	ξ_1	(ϱ_2)	ξ_2			$\mathfrak{M}_{22}' - \mathfrak{M}_{21}$
(3)		ξ_2	(ϱ_3)	ξ_3	ξ'_3	$\mathfrak{M}_{33}' - \mathfrak{M}_{34}$
(4)	ξ_1		ξ_3	ϱ_4		\mathfrak{M}_{43}
(5)			ξ'_3		(ϱ_5)	\mathfrak{M}_{55}'

In Tabelle Va und Vb ist:

$$(\varrho_2) = 2 \{ \xi_1 + \xi_2 + \xi_{II} \} + \xi_{2-2'} = \varrho_2 - \xi_{2-2'},$$

$$(\varrho_3) = \varrho_3 - \xi_{3-3'} \quad \text{usw.}$$

Allgemeiner gilt bei symmetrischer Belastung und Rahmenausbildung mit ungeradzahigen Öffnungen:

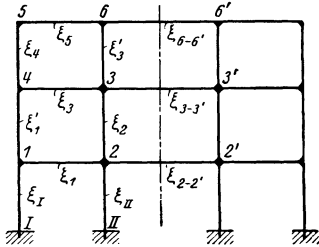


Abb. 52 a.

$$(X) \quad (\varrho_k) = \varrho_k - \xi_{k-k'}.$$

Diese Ausdrücke sind aus der Knotengleichung (VIi) erhalten.

c) Gelenkrahmen.

Für Gelenkrahmen ist im allgemeinen die Unbekannte μ_1 in μ'_1

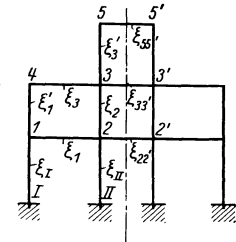


Abb. 52 b.

zu verändern, indem man $\mu'_1 = \frac{\mu_1}{2}$ setzt. Die Größe ϱ , die sich an den Knotenpunkten der untersten Querriegel befindet, ändert sich nach den Knoten-

Tabelle VIa.

Gleichung	Linke Seite der Gleichung (Koeffizienten der Gleichung)															Rechte Seite der Gleichung		
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}	μ'_1	μ_2	μ_3	Vertikale Belastung	Wagerechte Belastung	
(1)	ϱ_1	ξ_1												ξ_I	ξ'_1		\mathfrak{M}_{12}	
(2)	ξ_1	ϱ_2	ξ_2											ξ_{II}	ξ'_2		$\mathfrak{M}_{23} - \mathfrak{M}_{21}$	
(3)		ξ_2	ϱ_3	ξ_3										ξ_{III}	ξ'_3		$\mathfrak{M}_{34} - \mathfrak{M}_{32}$	
(4)			ξ_3	ϱ_4	ξ_4									ξ_{IV}	ξ'_4		$-\mathfrak{M}_{43}$	
(5)				ξ_4	ϱ_5	ξ_5									ξ_5		$-\mathfrak{M}_{56}$	
(6)					ξ_5	ϱ_6	ξ_6								ξ_6		$\mathfrak{M}_{65} - \mathfrak{M}_{67}$	
(7)						ξ_6	ϱ_7	ξ_7							ξ_7		$\mathfrak{M}_{76} - \mathfrak{M}_{78}$	
(8)	ξ'_1	ξ'_2	ξ'_3				ϱ_8	ξ_8							ξ_8		\mathfrak{M}_{87}	
(9)								ϱ_9	ξ_9						ξ_9		$\mathfrak{M}_{9,10}$	
(10)								ξ_9	ϱ_{10}	ξ_{10}					ξ_{10}		$\mathfrak{M}_{10,11} - \mathfrak{M}_{10,9}$	
(11)								ξ_{10}	ϱ_{11}	ξ_{11}					ξ_{11}		$\mathfrak{M}_{11,12} - \mathfrak{M}_{11,10}$	
(12)					ξ'_5			ξ'_6							ξ'_5		$-\mathfrak{M}_{12,11}$	
(13)	ξ_I	ξ_{II}	ξ_{III}	ξ_{IV}										X_1				$2 S_1$
(14)	ξ'_1	ξ'_2	ξ'_3	ξ'_4											X_2			S_2
(15)					ξ_5	ξ_6	ξ_7	ξ_8	ξ_9	ξ_{10}	ξ_{11}	ξ_{12}			X_3			S_3

gleichungen in ϱ' , wenn man hierbei

$$\varrho'_1 = \varrho_1 - 0,5 \xi_I,$$

$$\varrho'_2 = \varrho_2 - 0,5 \xi_{II},$$

$$\varrho'_3 = \varrho_3 - 0,5 \xi_{III} \text{ usw.},$$

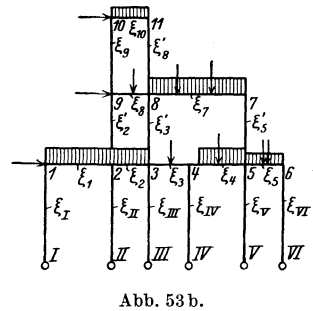
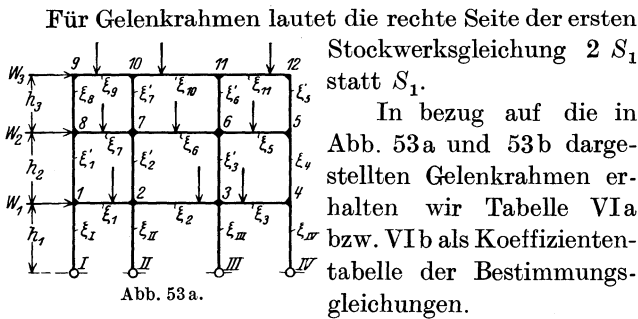
allgemeiner:

$$(XI) \quad \varrho'_r = \varrho_r - 0,5 \xi_R$$

setzt (Abb. 53a und 53b).

Tabelle VIb.

Gleichung	Linke Seite der Gleichung											Rechte Seite der Gleichung			
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	μ'_1	μ_2	μ_3	
(1)	ϱ'_1	ξ_1										ξ_I			\mathfrak{M}_{12}
(2)	ϱ'_2	ξ_2										ξ_{II}	ξ'_2		$\mathfrak{M}_{23} - \mathfrak{M}_{21}$
(3)	ξ_1	ξ_2	ξ_3									ξ_{III}	ξ'_3		$\mathfrak{M}_{34} - \mathfrak{M}_{32}$
(4)			ξ_3	ξ_4				ξ'_3	ξ'_2			ξ_{IV}	ξ'_5		$\mathfrak{M}_{45} - \mathfrak{M}_{43}$
(5)			ξ_4	ξ_5	ξ_6			ξ'_5				ξ_{V}	ξ'_5		$\mathfrak{M}_{56} - \mathfrak{M}_{54}$
(6)			ξ_5	ξ_6	ξ_7	ξ_8	ξ'_6	ξ'_5				ξ_{VI}			$-\mathfrak{M}_{65}$
(7)					ξ_5			ϱ_7	ξ_7				ξ'_5		$-\mathfrak{M}_{78}$
(8)							ξ_7	ϱ_8	ξ_8				ξ'_8		$\mathfrak{M}_{87} - \mathfrak{M}_{89}$
(9)		ξ'_2	ξ'_3				ξ_8	ϱ_9	ξ_9				ξ'_8	ξ'_9	\mathfrak{M}_{98}
(10)								ξ_9	ξ_{10}	ξ_{10}				ξ_9	\mathfrak{M}_{10-11}
(11)							ξ_9	ξ_{10}	ϱ_{11}	ξ_{11}				ξ_9	$-\mathfrak{M}_{11-10}$
(12)	ξ_I	ξ_{II}	ξ_{III}	ξ_{IV}	ξ_V	ξ_{VI}						X_1			$2 S_1$
(13)		ξ'_2	ξ'_3										X_2		S_2
(14)														X_3	S_3



Diese Tabellen wurden ebenso aufgestellt wie die Tabellen IIa und IIb.

d) Symmetrische Ausbildung mit waagerechten Einzellasten.

Bei einem symmetrisch gebauten Rahmentragwerk mit waagerechten Einzellasten in allen Knotenpunkten einer vertikalen Seite des Tragwerkes sind die Knotendrehwinkel und die Stabdrehwinkel der Stockwerke unbekannt. Sich entsprechende, symmetrisch gelegene Knotenpunkte weisen aber gleich große Knotendrehwinkel auf, wodurch der Grad der statischen Unbestimmtheit des zu behandelnden Rahmentragwerkes bedeutend geringer wird.

Tabelle VIIa.

Gleichung	Linke Seite der Gleichung											Rechte Seite der Gleichung	
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	μ_1	μ_2		μ_3
(1)	Q_1	ξ_1								ξ_I	ξ'_1		0
(2)	ξ_1	Q_2	ξ_2		ξ'_2					ξ_{II}	ξ'_2		0
(3)		$2\xi_2$	Q_3	ξ_3						ξ_{III}	ξ'_3		0
(4)			ξ_3	Q_4	$2\xi_4$				ξ'_4		ξ_3	ξ'_4	0
(5)		ξ'_2		ξ_4	Q_5	ξ_5		ξ'_5			ξ'_2	ξ'_5	0
(6)	ξ'_1				ξ_5	Q_6	ξ_6				ξ'_1	ξ'_6	0
(7)						ξ_6	Q_7	ξ_7				ξ_6	0
(8)					ξ'_5		ξ'_7	Q_8	ξ_8			ξ'_5	0
(9)				ξ'_4			$2\xi_8$	Q_9				ξ'_4	0
(10)	ξ_I	ξ_{II}	ξ_{III}							$X_1/2$			$S_1/2$
(11)	ξ'_1	ξ'_2	$\xi_3/2$	$\xi_3/2$	ξ'_5	ξ'_1					$X_2/2$		$S_2/2$
(12)				$\xi'_4/2$	ξ'_5	ξ'_6	ξ_6	ξ'_5	$\xi'_4/2$			$X_3/2$	$S_3/2$

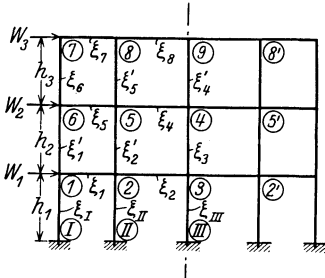


Abb. 54 a.

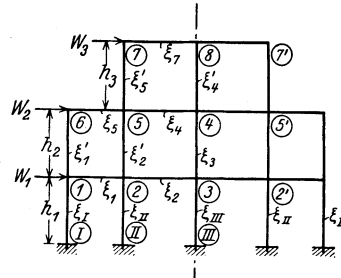


Abb. 54 b.

Tabelle VIIb.

Gleichung	Linke Seite der Gleichung											Rechte Seite der Gleichung	
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	μ_1	μ_2	μ_3		
(1)	Q_1	ξ_1							ξ_I	ξ'_1		0	
(2)	ξ_1	Q_2	ξ_2		ξ'_2				ξ_{II}	ξ'_2		0	
(3)		$2\xi_2$	Q_3	ξ_3					ξ_{III}	ξ'_3		0	
(4)			ξ_3	Q_4	$2\xi_4$			ξ'_4		ξ_3	ξ'_4	0	
(5)		ξ'_2		ξ_4	Q_5	ξ_5		ξ'_5		ξ'_2	ξ'_5	0	
(6)	ξ'_1				ξ_5	Q_6	ξ_6			ξ'_1	ξ'_6	0	
(7)						ξ_6	Q_7	ξ_7				ξ_6	0
(8)				ξ'_4	ξ'_5		$2\xi_7$	Q_8	ξ_8			ξ'_4	0
(9)	ξ_I	ξ_{II}	$\frac{1}{2}\xi_{III}$							$X_1/2$			$S_1/2$
(10)	ξ_1	ξ'_2	$\frac{1}{2}\xi_3$	$\frac{1}{2}\xi_3$	ξ'_5	ξ'_1					$X_2/2$		$S_2/2$
(11)				$\frac{1}{2}\xi'_4$	ξ'_5	ξ'_6	ξ_6	ξ'_5	$\frac{1}{2}\xi'_4$			$X_3/2$	$S_3/2$

Bezeichnet man mit k die Anzahl sämtlicher, mit m die Anzahl der auf der symmetrischen Bauachse liegenden Knotenpunkte und mit n die Anzahl der Stockwerke, so sind, bei einem symmetrisch gebauten Rahmentragwerk mit geradzahigen Öffnungen, unbekannt: $\frac{1}{2}(k + m)$ Knotendrehwinkel und n Stabdrehwinkel der Stockwerke; diese Tragwerke sind also im ganzen $\frac{1}{2}(k + m + 2n)$ -fach statisch unbestimmt (Abb. 54 a und 54 b).

Bei einem Rahmentragwerk mit ungeradzahligen Öffnungen, k Knotenpunkten und n Stockwerken sind unbekannt $k/2$ Knotendrehwinkel und n Stabdrehwinkel der Stockwerke, also ist es im ganzen $\frac{1}{2}(k + 2n)$ -fach statisch unbestimmt (Abb. 56).

Diese zwei symmetrischen Fälle sind in Abb. 54a, 54b und 56 beispielsweise dargestellt.

Der in Abb. 54a dargestellte Rahmen mit vier Öffnungen und drei Stockwerken trägt eine waagerechte, in allen Knotenpunkten seiner linken Seite belastete Einzellast. Unbekannt sind die Knotendrehwinkel φ_1 bis φ_9 und die Winkel μ_1 bis μ_3 der drei Stockwerke.

Die neun Knotengleichungen und drei Stockwerksgleichungen liefern die umstehend aufgestellte Tabelle der Bestimmungsgleichungen, die man nach Tabelle IIa und IIb unter Berücksichtigung der Gl. (VII) entwickeln kann (Tabelle VIIa).

Der in Abb. 54b dargestellte Rahmen trägt waagerechte Einzellasten, die in allen Knotenpunkten seiner linken Seite angreifen.

Unbekannt sind die Knotendrehwinkel φ_1 bis φ_8 und die Winkel μ_1 bis μ_3 .

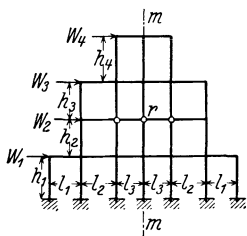


Abb. 55.

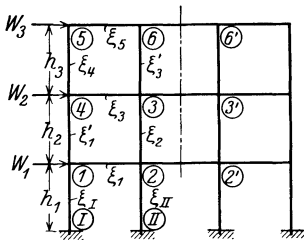


Abb. 56 a.

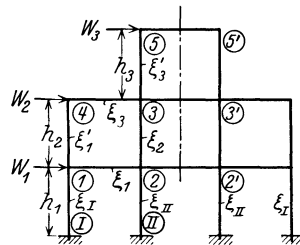


Abb. 56 b.

Die acht Knotengleichungen und drei Stockwerksgleichungen liefert die nachstehend aufgestellte Tabelle der Bestimmungsgleichungen (Tabelle VIIb).

Wir müssen hierbei darauf aufmerksam machen, daß für die Gleichgewichtsgleichung am Knoten r in der Achse $m - m$ (Abb. 55) der Koeffizient desjenigen Knotendrehwinkels, welcher sich am nächsten links vom Knotenpunkt r befindet, verdoppelt wird, weil aus Symmetriegründen sich entsprechende, symmetrisch gelegene Knotenpunkte, am nächsten links und am nächsten rechts vom Knotenpunkt r , Knotendrehwinkel von gleicher Größe und demselben Vorzeichen aufweisen.

Für die Stockwerksgleichungen vermindern sich die Koeffizienten von φ_3 , φ_4 , φ_9 , μ_1 , μ_2 , μ_3 und die rechte Seite der Gleichung auf die Hälfte (s. Abb. 54a und Tabelle VIIa).

Ebenso vermindern sich in bezug auf Abb. 54b die Koeffizienten von φ_3 , φ_4 , φ_8 , μ_1 , μ_2 , μ_3 und die rechte Seite der Gleichung auf die Hälfte (Tabelle VIIIb).

So z. B. sind in Tabelle VIIb für die Gleichgewichtsgleichungen (3), (4) und (8) in bezug auf die Knotenpunkte 3, 4 und 8 (Abb. 54b) die Koeffizienten von φ_2 , φ_5 und φ_7 : $2 \xi_2$, $2 \xi_4$ bzw. $2 \xi_7$; für die Stockwerksgleichungen (9) bis (11) sind die Koeffizienten von φ_3 , φ_4 und φ_8 : $(0,5 \xi_{III}, 0,5 \xi_3)$, $(0,5 \xi_3, 0,5 \xi'_4)$ bzw. $0,5 \xi'_4$; die Koeffizienten von μ_1 , μ_2 und μ_3 : $X_1/2$, $X_2/2$ und $X_3/2$; die rechte Seite der Gleichungen lautet $S_1/2$, $S_2/2$ und $S_3/2$ (s. Tabelle VIIb).

Der in Abb. 56a dargestellte Rahmen mit drei Öffnungen und drei Stock-

werken ist neunfach statisch unbestimmt, weil die Knotendrehwinkel φ_1 bis φ_6 und die Winkel μ_1 bis μ_3 der drei Stockwerke unbekannt sind.

Die sechs Knotengleichungen und drei Stockwerksgleichungen ergeben die folgende Tabelle der Bestimmungsgleichungen (Tabelle VIIIa). Für die Gleichgewichtsgleichungen an denjenigen Knotenpunkten, welche sich am nächsten links der Achse befinden, schreiben wir $[\varrho]$ statt ϱ ; für die Stockwerksgleichungen vermindern sich die Koeffizienten von μ und die rechte Seite der Gleichung auf die Hälfte.

Tabelle VIIIa.

Gleichung	Linke Seite der Gleichung									Rechte Seite der Gleichung
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	μ_1	μ_2	μ_3	
(1)	ϱ_1	ξ_1		ξ'_1			ξ_I	ξ'_1		0
(2)	ξ_1	$[\varrho_2]$	ξ_2				ξ_{II}	ξ_2		0
(3)		ξ_2	$[\varrho_3]$	ξ_3		ξ'_3		ξ_2	ξ'_3	0
(4)	ξ'_1		ξ_3	ϱ_4	ξ_4			ξ_1	ξ_4	0
(5)			ξ'_3	ξ_4	ϱ_5	ξ_5			ξ_4	0
(6)				ξ_4	ξ_5	$[\varrho_6]$			ξ_3	0
(7)	ξ_1	ξ_{II}					$X_1/2$			$S_1/2$
(8)	ξ'_1	ξ_2		ξ'_1				$X_2/2$		$S_2/2$
(9)			ξ_2	ξ_4	ξ_3				$X_3/2$	$S_3/2$

Z. B. setzen wir für die Gleichgewichtsgleichungen (2), (3) und (6) in Tabelle VIIIa in bezug auf die Knotenpunkte 2, 3 und 6 (Abb. 56a): $[\varrho_2]$, $[\varrho_3]$ und $[\varrho_6]$ statt ϱ_2 , ϱ_3 und ϱ_6 ; für die Stockwerksgleichungen (7) bis (9) sind die Koeffizienten von μ_1 , μ_2 und μ_3 : $X_1/2$, $X_2/2$ und $X_3/2$; und die rechte Seite der Gleichungen lautet $S_1/2$, $S_2/2$ und $S_3/2$ (Tabelle VIIIa).

Tabelle VIIIb.

Gleichung	Linke Seite der Gleichung									Rechte Seite der Gleichung
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	μ_1	μ_2	μ_3		
(1)	ϱ_1	ξ_1		ξ'_1		ξ_I	ξ'_1		0	
(2)	ξ_1	$[\varrho_2]$	ξ_2			ξ_{II}	ξ_2		0	
(3)		ξ_2	$[\varrho_3]$	ξ_3		ξ'_3		ξ_2	ξ'_3	0
(4)	ξ'_1		ξ_3	ϱ_4	ξ_4			ξ_1	ξ_4	0
(5)			ξ'_3		$[\varrho_5]$				ξ_3	0
(6)	ξ_I	ξ_{II}				$X_1/2$				$S_1/2$
(7)	ξ'_1	ξ_2		ξ_1			$X_2/2$			$S_2/2$
(8)			ξ_2	ξ_4	ξ_3			$X_3/2$		$S_3/2$

$$[\varrho_2] = \varrho_2 + \xi_{2-2}, \quad [\varrho_3] = \varrho_3 + \xi_{3-3}, \quad \text{usw.}$$

Der in Abb. 56b dargestellte Rahmen ist achtfach statisch unbestimmt, weil die Knotendrehwinkel φ_1 bis φ_5 und die Winkel μ_1 bis μ_3 unbekannt sind.

Die fünf Knotengleichungen und drei Stockwerksgleichungen bestimmen die Tabelle der Bestimmungsgleichungen (Tabelle VIII b).

§ 5. Eigenschaften der Grundtabellen und deren Aufstellungsregeln.

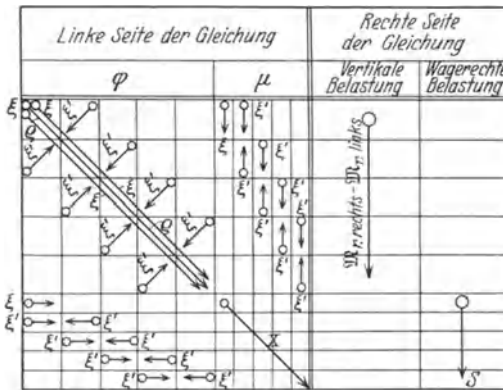
a) Bestimmung der Koeffizienten und Festwerte.

Die Koeffizienten der Unbekannten in den Bestimmungsgleichungen müssen aus ξ , ρ und X oder auch aus den Gln. (II), (III) und (IV) berechnet werden; die Festwerte der rechten Seite der Bestimmungsgleichungen sind aus der Tabelle I und der Gl. (V) oder (VIIa) zu errechnen.

b) Diagonale Linien von ρ , ξ und andere Eigenschaften der Grundtabellen.

Der Koeffizient ρ befindet sich in jeder Tabelle (Tabelle III bis VIII) auf einer geraden Linie, welche als eine Diagonale eines aus der senkrechten Richtung der Bestimmungsgleichungen und waagerechten Richtung der Unbekannten gebildeten Quadrates erscheint, das wir „Großes Quadrat“ nennen.

Tabelle IX.



Die Größe ρ befindet sich immer auf dieser diagonalen Linie des Großen Quadrats, die Indexnummerreihe von ρ verläuft von der oberen linken Ecke des Großen Quadrats nach der unteren rechten desselben.

In den Tabellen finden wir auch eine Linie von ξ zu beiden Seiten der ρ -Linie; die Aufstellungsnummerreihe von ξ ist ganz dieselbe wie von ρ ; dagegen verläuft die Linie von ξ' rechtwinklig zur ρ -Linie; ξ' liegt also in diesem Falle rechtwinklig zur diagonalen Linie des Großen Quadrats, in dem ein Teil links herabkommt und der andere rechts aufsteigt, so daß beide an der diagonalen Linie des Großen

Quadrats zusammentreffen. Diese Linie von ξ' kann auch als Diagonale eines „Kleinen Quadrats“, das ein Teil des Großen ist, betrachtet werden. Für die X -Linie gilt das gleiche wie für ρ .

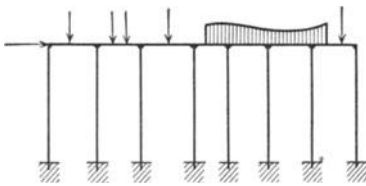
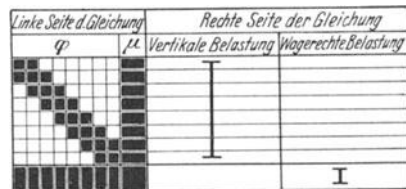


Abb 57.

Tabelle X.



Einstöckiger Rechteckrahmen mit beliebiger senkrechter Belastung auf den Balken und mit einer waagerechten Einzellast am Knotenpunkt auf der senkrechten linken Seite des Rahmengerüsts.

Quadrats zusammentreffen. Diese Linie von ξ' kann auch als Diagonale eines „Kleinen Quadrats“, das ein Teil des Großen ist, betrachtet werden. Für die X -Linie gilt das gleiche wie für ρ .

In den Grundtabellen liegt die linke Seite der Gleichung symmetrisch zur diagonalen Linie von ρ , und die Koeffizienten von μ mögen als senkrechte Pro-

Die allgemeine Grundform der Tabellen unseres Verfahrens ist in Abb. 57 bis 61 angegeben. Abb. 57 zeigt die allgemeine Grundform der Tabellen für den einstöckigen Rechteckrahmen mit beliebiger senkrechter Belastung auf den Balken und mit einer waagerechten Einzellast an den Knotenpunkten auf einer senkrechten Seite des Rahmengebildes. Abb. 58, 59, 60 und 61 zeigen die unter denselben Bedingungen allgemeinen Grundformen der Tabellen für den zwei-, drei-, vier- und fünfstöckigen Rechteckrahmen.

Tabelle XIV.

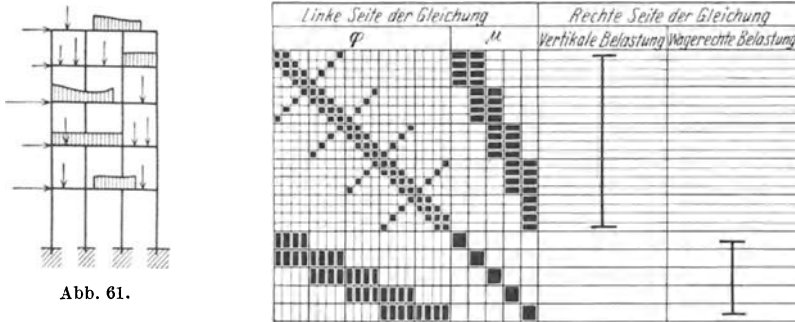


Abb. 61.

Fünfstöckiger Rechteckrahmen mit beliebiger senkrechter Belastung auf den Balken und mit einer waagerechten Einzellast an den Knotenpunkten auf der senkrechten linken Seite des Rahmengebildes.

§ 6. Auflösung der Elastizitätsgleichungen.

Bei der statischen Untersuchung eines mehrstöckigen und mehrfeldigen Rahmens treten gewöhnlich ebensoviel Elastizitätsgleichungen als statisch Unbestimmte auf: sie sind linear nach den Unbekannten.

Im allgemeinen enthalten n Elastizitätsgleichungen mit n Unbekannten insgesamt n^2 Koeffizienten der Unbekannten und n Festwerte, von denen bei manchen Aufgaben mehrere gleich Null sein können, wodurch die Auflösung in hohem Grade vereinfacht wird.

Für die Auflösung einer linearen Gleichungsgruppe steht das Eliminationsverfahren und das Iterationsverfahren zur Verfügung.

Das erstere ist nur mit der Rechenmaschine und das letztere nur mit dem Rechenschieber mit unbedingter Genauigkeit und Sicherheit durchführbar.

a) Das Eliminationsverfahren.

Im folgenden werden die Unbekannten mit $X_1, X_2, X_3 \dots$ und die Koeffizienten mit $A, B, C \dots$ bezeichnet.

Es seien z. B. vier Gleichungen mit vier Unbekannten:

- (1) $A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3 + A_4 X_4 = m_1,$
- (2) $B_1 X_1 + B_2 X_2 + B_3 X_3 + B_4 X_4 = m_2,$
- (3) $C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3 + C_4 X_4 = m_3,$
- (4) $D_1 X_1 + D_2 X_2 + D_3 X_3 + D_4 X_4 = m_4.$

Dieselben Gleichungen können folgendermaßen tabellarisiert werden (Tabelle XV).

Tabelle XV.

Gleichung	Linke Seite der Gleichung				Rechte Seite der Gleichung
	X_1	X_2	X_3	X_4	
(1)	A_1	A_2	A_3	A_4	m_1
(2)	B_1	B_2	B_3	B_4	m_2
(3)	C_1	C_2	C_3	C_4	m_3
(4)	D_1	D_2	D_3	D_4	m_4

Aus Gl. (1) ergibt sich:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 + a_1 X_2 + a_2 X_3 + a_3 X_4 = n_1, \\ \text{wobei} \\ a_1 = \frac{A_2}{A_1}, \quad a_2 = \frac{A_3}{A_1}, \\ a_3 = \frac{A_4}{A_1}, \quad n_1 = \frac{m_1}{A_1}. \end{array} \right.$$

In analoger Weise aus Gl. (2)

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 + b_1 X_2 + b_2 X_3 + b_3 X_4 = n_2, \\ \text{wobei} \\ b_1 = \frac{B_2}{B_1}, \quad b_2 = \frac{B_3}{B_1}, \\ b_3 = \frac{B_4}{B_1}, \quad n_2 = \frac{m_2}{B_1}. \end{array} \right.$$

Aus Gl. (3) folgt:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 + c_1 X_2 + c_2 X_3 + c_3 X_4 = n_3, \\ \text{wobei} \\ c_1 = \frac{C_2}{C_1}, \quad c_2 = \frac{C_3}{C_1}, \\ c_3 = \frac{C_4}{C_1}, \quad n_3 = \frac{m_3}{C_1}. \end{array} \right.$$

Entsprechend aus Gl. (4)

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 + d_1 X_2 + d_2 X_3 + d_3 X_4 = n_4, \\ \text{wobei} \\ d_1 = \frac{D_2}{D_1}, \quad d_2 = \frac{D_3}{D_1}, \\ d_3 = \frac{D_4}{D_1}, \quad n_4 = \frac{m_4}{D_1}. \end{array} \right.$$

Eliminiert man X_1 in Gl. (5) und Gl. (6), so wird

$$(a_1 - b_1) X_2 + (a_2 - b_2) X_3 + (a_3 - b_3) X_4 = n_1 - n_2$$

oder

$$X_2 + \frac{a_2 - b_2}{a_1 - b_1} X_3 + \frac{a_3 - b_3}{a_1 - b_1} X_4 = \frac{n_1 - n_2}{a_1 - b_1}$$

oder auch:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_2 + a'_1 X_3 + a'_2 X_4 = n'_1, \\ \text{wobei} \\ a'_1 = \frac{a_2 - b_2}{a_1 - b_1}, \\ a'_2 = \frac{a_3 - b_3}{a_1 - b_1}, \\ n'_1 = \frac{n_1 - n_2}{a_1 - b_1}. \end{array} \right.$$

In analoger Weise liefert die Elimination von X_1 in Gl. (6) und Gl. (7):

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_2 + b'_1 X_3 + b'_2 X_4 = n'_2, \\ \text{wobei} \\ b'_1 = \frac{b_2 - c_2}{b_1 - c_1}, \\ b'_2 = \frac{b_3 - c_3}{b_1 - c_1}, \\ n'_2 = \frac{n_2 - n_3}{b_1 - c_1}; \end{array} \right.$$

in Gl. (7) und Gl. (8)

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_2 + c'_1 X_3 + c'_2 X_4 = n'_3, \\ \text{wobei} \\ c'_1 = \frac{c_2 - d_2}{c_1 - d_1}, \\ c'_2 = \frac{c_3 - d_3}{c_1 - d_1}, \\ n'_3 = \frac{n_3 - n_4}{c_1 - d_1}. \end{array} \right.$$

Ganz gleichartig können wir danach X_2 und dann X_3 eliminieren und am Ende X_4 erhalten.

Diese Zwischenrechnung und der weitere Fortgang der Rechnung nach dem Eliminationsverfahren ist aus Tabelle XVI sofort ersichtlich.

In Tabelle XVI ist

$$\begin{aligned} a''_1 &= \frac{a'_2 - b'_2}{a'_1 - b'_1}, & b''_1 &= \frac{b'_2 - c'_2}{b'_1 - c'_1}, \\ n''_1 &= \frac{n'_1 - n'_2}{a'_1 - b'_1}, & n''_2 &= \frac{n'_2 - n'_3}{b'_1 - c'_1}. \end{aligned}$$

Die Endrechnung liefert:

$$\begin{aligned} X_4 &= \frac{n''_1 - n''_2}{a''_1 - b''_1} = \Delta_4, \\ X_3 &= n''_1 - a''_1 X_4 = n''_1 - a''_1 \Delta_4 = \Delta_3, \\ X_2 &= n'_1 - a'_1 \Delta_3 - a'_2 \Delta_4 = \Delta_2, \\ X_1 &= n_1 - a_1 \Delta_2 - a_2 \Delta_3 - a_3 \Delta_4 = \Delta_1. \end{aligned}$$

Tabelle XVI. Zwischenrechnung nach dem Eliminationsverfahren.

Gleichung	Linke Seite der Gleichung				Rechte Seite der Gleichung	Bemerkung
	X_1	X_2	X_3	X_4		
(1)	A_1	A_2	A_3	A_4	m_1	
(2)	B_1	B_2	B_3	B_4	m_2	
(3)	C_1	C_2	C_3	C_4	m_3	
(4)	D_1	D_2	D_3	D_4	m_4	
(5)	+1	a_1	a_2	a_3	n_1	(1): A_1
(6)	+1	b_1	b_2	b_3	n_2	(2): B_1
(7)	+1	c_1	c_2	c_3	n_3	(3): C_1
(8)	+1	d_1	d_2	d_3	n_4	(4): D_1
		$a_1 - b_1$	$a_2 - b_2$	$a_3 - b_3$	$n_1 - n_2$	(5) - (6)
		$b_1 - c_1$	$b_2 - c_2$	$b_3 - c_3$	$n_2 - n_3$	(6) - (7)
		$c_1 - d_1$	$c_2 - d_2$	$c_3 - d_3$	$n_3 - n_4$	(7) - (8)
(9)		+1	a'_1	a'_2	n'_1	[(5) - (6)]: ($a_1 - b_1$)
(10)		+1	b'_1	b'_2	n'_2	[(6) - (7)]: ($b_1 - c_1$)
(11)		+1	c'_1	c'_2	n'_3	[(7) - (8)]: ($c_1 - d_1$)
			$a'_1 - b'_1$	$a'_2 - b'_2$	$n'_1 - n'_2$	(9) - (10)
			$b'_1 - c'_1$	$b'_2 - c'_2$	$n'_2 - n'_3$	(10) - (11)
(12)			+1	a''_1	n''_1	[(9) - (10)]: ($a'_1 - b'_1$)
(13)			+1	b''_1	n''_2	[(10) - (11)]: ($b'_1 - c'_1$)
				$a''_1 - b''_1$	$n''_1 - n''_2$	(12) - (13)
(14)				+1	$n''_1 - n''_2$	[(12) - (13)]: ($a''_1 - b''_1$)
					$a''_1 - b''_1$	

b) Das Iterationsverfahren.

Das Iterationsverfahren ist ein angenähertes Rechnungsverfahren zur Auflösung der Elastizitätsgleichungen. Wie schon von Gehler gezeigt worden ist, ist es gleichwohl zu unterscheiden von dem „Annäherungsverfahren“.

Es ist anwendbar auf Gleichungssysteme, deren Diagonalkoeffizienten wesentlich größer sind als die anderen Koeffizienten, wie das in den vorstehenden Gleichungstabellen ersichtlich war, und bei solchen Elastizitätsgleichungen kommen die Lösungen von den ersten rohen Näherungswerten den genauen Werten mit unbedingter Sicherheit immer näher, und zwar um so rascher, je kleiner alle anderen Koeffizienten gegenüber den Diagonalkoeffizienten sind und erreichen schließlich einen bleibenden Endwert, der sich von den Werten der genauen Rechnung nicht mehr unterscheidet¹.

A. Iterationsverfahren I. Symmetrische Anordnung und Belastung. Ein symmetrisch gebautes Rahmentragwerk mit einer symmetrischen Belastung bedingt für sämtliche Stäbe $\mu = 0$. Als Unbekannte treten also nur die Knotendrehwinkel auf; wir bezeichnen mit X die Unbekannten.

In den einzelnen Elastizitätsgleichungen tritt, wie schon dargelegt, jedesmal eine Unbekannte besonders stark auf, d. h. beispielsweise sind in dem System der fünf folgenden Elastizitätsgleichungen:

- (A) $A_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4 + a_5 X_5 = m_1,$
- (B) $b_1 X_1 + B_2 X_2 + b_3 X_3 + b_4 X_4 + b_5 X_5 = m_2,$
- (C) $c_1 X_1 + c_2 X_2 + C_3 X_3 + c_4 X_4 + c_5 X_5 = m_3,$
- (D) $d_1 X_1 + d_2 X_2 + d_3 X_3 + D_4 X_4 + d_5 X_5 = m_4,$
- (E) $e_1 X_1 + e_2 X_2 + e_3 X_3 + e_4 X_4 + E_5 X_5 = m_5$

¹ Gehler, W.: Nebenspannungen eiserner Fachwerksbrücken, S. 27. Berlin 1910.

die großgedruckten Koeffizienten absolut viel größer als die andern kleingedruckten Koeffizienten auf der linken Seite, und die ersten, noch größeren Näherungswerte für die Unbekannten gewinnt man nach den stark auftretenden Unbekannten aus den Ansätzen

$$\begin{aligned} A_1 X'_1 + a_2 X'_1 + a_3 X'_1 + a_4 X'_1 + a_5 X'_1 &= m_1, \\ b_1 X'_2 + B_2 X'_2 + b_3 X'_2 + b_4 X'_2 + b_5 X'_2 &= m_2 \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

zu

$$\begin{aligned} X'_1 &= m_1 : (A_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5), \\ X'_2 &= m_2 : (b_1 + B_2 + b_3 + b_4 + b_5) \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Diese ersten Näherungswerte werden in die Gleichungen eingesetzt. Die erste Gleichung (A) lautet dann:

$$A_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4 + a_5 X_5 = m_1,$$

welche, nach X_1 aufgelöst, den zweiten genaueren Näherungswert X''_1 liefert.

Als zweite Gleichung (B), mit diesem zweiten Näherungswert X''_1 und den andern ersten Näherungswerten, ergibt sich:

$$b_1 X''_1 + B_2 X_2 + b_3 X_3 + b_4 X_4 + b_5 X_5 = m_2,$$

welche, nach X_2 aufgelöst, den zweiten genaueren Näherungswert X''_2 liefert.

Im gewöhnlichen Iterationsverfahren pflegt man dabei den zweiten Näherungswert X''_1 nicht zu benutzen, sondern bloß den ersten Näherungswert X'_1 , aber nach dem Rechnungsverfahren des Verfassers schreitet die Rechnung damit schneller bis zum genaueren Wert vorwärts.

Die dritte Gleichung (C) mit X''_1 , X''_2 und andern X' lautet:

$$c_1 X''_1 + c_2 X''_2 + C_3 X_3 + c_4 X_4 + c_5 X_5 = m_3$$

mit der Lösung X''_3 .

Die weiteren Rechnungen stellen sich dann wie folgt dar:

$$\begin{aligned} d_1 X''_1 + d_2 X''_2 + d_3 X''_3 + D_4 X_4 + d_5 X_5 &= m_4, \\ e_1 X''_1 + e_2 X''_2 + e_3 X''_3 + e_4 X''_4 + E_5 X_5 &= m_5 \end{aligned}$$

mit den Lösungen X''_4 und X''_5 .

Diese zweiten Annäherungen liefern wieder neue Gleichungen von der Form

$$\begin{aligned} A_1 X_1 + a_2 X''_2 + a_3 X''_3 + a_4 X''_4 + a_5 X''_5 &= m_1, \\ b_1 X''_1 + B_2 X_2 + b_3 X''_3 + b_4 X''_4 + b_5 X''_5 &= m_2, \\ c_1 X''_1 + c_2 X''_2 + C_3 X_3 + c_4 X''_4 + c_5 X''_5 &= m_3, \\ d_1 X''_1 + d_2 X''_2 + d_3 X''_3 + D_4 X_4 + d_5 X''_5 &= m_4, \\ e_1 X''_1 + e_2 X''_2 + e_3 X''_3 + e_4 X''_4 + E_5 X_5 &= m_5 \end{aligned}$$

mit den Lösungen X''_1 , X''_2 , X''_3 , X''_4 und X''_5 .

B. Iterationsverfahren II. Unsymmetrische Anordnung und Belastung.

In einem Rahmen unter unsymmetrischen Bedingungen treten als Unbekannte die Knotendrehwinkel und Stabdrehwinkel auf; wir bezeichnen diese statisch Unbestimmten mit X bzw. Y .

Wie im vorstehenden Beispiel tritt eine Unbekannte in den einzelnen Elastizitätsgleichungen besonders stark auf, beispielsweise seien in dem System dieser vier Elastizitätsgleichungen:

$$(a) \quad A_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 Y_1 + a_4 Y_2 = m_1,$$

$$(b) \quad b_1 X_1 + B_2 X_2 + b_3 Y_1 + b_4 Y_2 = m_2,$$

$$(c) \quad c_1 X_1 + c_2 X_2 + C_3 Y_1 + c_4 Y_2 = m_3,$$

$$(d) \quad d_1 X_1 + d_2 X_2 + d_3 Y_1 + D_4 Y_2 = m_4$$

die großgedruckten Koeffizienten absolut viel größer als die andern kleingedruckten Koeffizienten auf der linken Seite, und die ersten, noch größeren Näherungswerte für die Unbekannten X gewinne man als Funktionen von Y nach den stark auftretenden Unbekannten aus den Ansätzen

$$A_1 X'_1 + a_2 X'_1 = m_1 - a_3 Y_1 - a_4 Y_2,$$

$$b_1 X'_2 + B_2 X'_2 = m_2 - b_3 Y_1 - b_4 Y_2$$

zu

$$(e) \quad X'_1 = (m_1 - a_3 Y_1 - a_4 Y_2) : (A_1 + a_2),$$

$$(f) \quad X'_2 = (m_2 - b_3 Y_1 - b_4 Y_2) : (b_1 + B_2).$$

Diese ersten Näherungswerte werden in die Gln. (c) und (d) eingesetzt.

Die Gln. (c) und (d) lauten dann:

$$(g) \quad Y_1(C_3 - c_1 a'_3 - c_2 b'_3) + Y_2(c_4 - c_1 a'_4 - c_2 b'_4) = m_3 - c_1 m'_1 - c_2 m'_2,$$

$$(h) \quad Y_1(d_3 - d_1 a'_3 - d_2 b'_3) + Y_2(D_4 - d_1 a'_4 - d_2 b'_4) = m_4 - d_1 m'_1 - d_2 m'_2,$$

worin

$$a'_3 = \frac{a_3}{A_1 + a_2}, \quad b'_3 = \frac{b_3}{b_1 + B_2},$$

$$a'_4 = \frac{a_4}{A_1 + a_2}, \quad b'_4 = \frac{b_4}{b_1 + B_2},$$

$$m'_1 = \frac{m_1}{A_1 + a_2}, \quad m'_2 = \frac{m_2}{b_1 + B_2}$$

ist.

Die ersten, anfänglich noch größeren Näherungswerte für die Unbekannten Y lassen sich aus den Ansätzen

$$Y'_1(C_3 - c_1 a'_3 - c_2 b'_3) + Y'_1(c_4 - c_1 a'_4 - c_2 b'_4) = m_3 - c_1 m'_1 - c_2 m'_2,$$

$$Y'_2(d_3 - d_1 a'_3 - d_2 b'_3) + Y'_2(D_4 - d_1 a'_4 - d_2 b'_4) = m_4 - d_1 m'_1 - d_2 m'_2$$

gewinnen, so daß man

$$Y'_1 = (m_3 - c_1 m'_1 - c_2 m'_2) : \{C_3 + c_4 - c_1(a'_3 + a'_4) - c_2(b'_3 + b'_4)\},$$

$$Y'_2 = (m_4 - d_1 m'_1 - d_2 m'_2) : \{d_3 + D_4 - d_1(a'_3 + a'_4) - d_2(b'_3 + b'_4)\}$$

erhält.

Mit den ersten Näherungswerten Y'_1 und Y'_2 liefern die Gl. (e) und (f) die ersten Näherungswerte X'_1 und X'_2 .

Diese ersten Näherungswerte werden in die Gleichungen eingesetzt.

Die erste Gleichung (a) lautet dann:

$$A X_1 + a_2 X_2 + a_3 Y'_1 + a_4 Y'_2 = m_1,$$

welche, nach X_1 aufgelöst, den zweiten genaueren Näherungswert X''_1 liefert.

Die zweite Gleichung (b) mit diesem zweiten Näherungswert X_1'' und die andern ersten Näherungswerte lautet:

$$b_1 X_1'' + B_2 X_2 + b_3 Y_1' + b_4 Y_2' = m_2,$$

welche, nach X_2 aufgelöst, den zweiten genaueren Näherungswert X_2'' liefert.

Die weiteren Rechnungen ergeben entsprechend:

$$c_1 X_1'' + c_2 X_2'' + C_3 Y_1 + c_4 Y_2' = m_3,$$

$$d_1 X_1'' + d_2 X_2'' + d_3 Y_1' + D_4 Y_2 = m_4$$

mit den Lösungen Y_1'' und Y_2'' .

Diese zweiten Annäherungen liefern wieder neue Gleichungen von der Form:

$$A_1 X_1 + a_2 X_2'' + a_3 Y_1'' + a_4 Y_2'' = m_1,$$

$$b_1 X_1''' + B_2 X_2 + b_3 Y_1'' + b_4 Y_2'' = m_2,$$

$$c_1 X_1''' + c_2 X_2''' + C_3 Y_1 + c_4 Y_2'' = m_3,$$

$$d_1 X_1''' + d_2 X_2''' + d_3 Y_1''' + D_4 Y_2 = m_4$$

mit den Lösungen X_1''' , X_2''' , Y_1''' und Y_2''' .

Dieses Iterationsverfahren läßt die Rechnung von den ersten gröberen Werten durch derartige Fortführung allmählich, dann rascher zu immer genaueren Werten vorwärts schreiten, so daß es bei einigermaßen günstiger Koeffizientenverteilung viel schneller als das Eliminationsverfahren zum Ziele führt. Mathematisch genaue Resultate z. B., die durch das Eliminationsverfahren nach langwieriger, ermüdender einmonatiger Anstrengung erreicht worden sind, konnte unser Iterationsverfahren in der verhältnismäßig kurzen Zeit von zehn Stunden schon liefern, wobei in Betracht zu ziehen ist, daß es bei komplizierten Aufgaben nach dem Eliminationsverfahren schwer ist, mathematisch genaue Werte zu erhalten, weil die Fehlerwirkungen beim Auflösen mehrerer Gleichungen durch Vernachlässigung hoher Dezimalstellen sehr ins Gewicht fallen.

§ 7. Rechnungsbeispiele.

Als Zahlenbeispiel zur Anwendung des Verfahrens möge im nachfolgenden die Berechnung verschiedener Stockwerkrahmen vorgeführt werden. Gesucht sind die Knotenbiegemomente, und die zur Berechnung erforderliche Arbeit umfaßt:

1. die allgemeinen Vorermittlungen, und zwar:
 - a) die Berechnung der Stabwerte h , l , J für alle Stäbe des Rahmens,
 - b) die Berechnung der Festwerte ξ , ρ , X für alle Stäbe und Knotenpunkte sowie für alle Stockwerke,
 - c) die Berechnung der Festwerte \mathfrak{M} und \mathcal{S} , welche von den gegebenen Belastungen und von der Form des Gebildes abhängig sind,
 - d) die Aufstellung der Gleichungstabellen für das gegebene Rahmengebilde und die gegebene Belastung, sowie
2. die eigentliche Knotenmomentsrechnung, und zwar:
 - e) die Ermittlung der Unbekannten φ und μ durch das Iterations- oder Eliminationsverfahren,

f) die Berechnung der Knotenmomente aus Gl. (I),

g) die Kontrolle der Rechnungsergebnisse, für welche die Gleichgewichtsgleichungen (VI) und (VII) erfüllt sein müssen.

Beispiel I. Vierfeldiger, zweigeschossiger, symmetrischer Rechteckrahmen mit fünf eingespannten Ständern. Als Zahlenbeispiel zur Anwendung des Verfahrens möge im nachfolgenden kurz die Berechnung des vierfeldigen, symmetrischen Rechteckrahmens mit zwei Stockwerken nach Abb. 62 mit in den Einzelstäben unveränderlichen Trägheitsmomenten vorgeführt werden. Er trägt auf den Balken beliebige vertikale, symmetrische Belastungen.

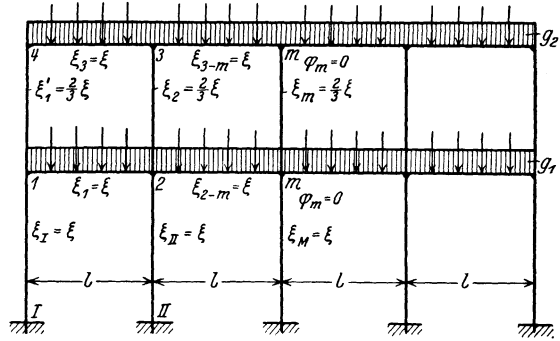


Abb. 62.

Es sollen die Knotenpunktmomente ermittelt werden. Infolge der Symmetrie ist $\varphi_m = 0$ und eine Verschiebung der Knoten im waagerechten Sinne unmöglich, es sind also alle $\mu = 0$. Der Rahmen ist also vierfach statisch unbestimmt. Zufolge dem Grundfall von Tabelle IV a liefert das Verfahren der Gleichungstabulierung die nachstehende Tabelle, welche die vier Unbekannten φ_1 bis φ_4 finden läßt (Tabelle XVII).

Es sei z. B.:

$$\xi_I = \xi_{II} = \xi_{III} = \xi_1 = \xi_3 = \xi_{2-m} = \xi_{3-m} = \xi,$$

$$\xi'_1 = \xi_2 = \xi_m = \frac{2}{3} \xi,$$

dann ergibt sich:

$$\varphi_1 = 2 \{ \xi_I + \xi_1 + \xi'_1 \} = 2 \left\{ \xi + \xi + \frac{2}{3} \xi \right\} = \frac{16}{3} \xi,$$

$$\varphi_2 = 2 \{ \xi_I + \xi_2 + \xi_{2-m} + \xi_{II} \} = 2 \left\{ \xi + \frac{2}{3} \xi + \xi + \xi \right\} = \frac{22}{3} \xi,$$

$$\varphi_3 = 2 \{ \xi_2 + \xi_3 + \xi_{3-m} \} = 2 \left\{ \frac{2}{3} \xi + \xi + \xi \right\} = \frac{16}{3} \xi,$$

$$\varphi_4 = 2 \{ \xi'_1 + \xi_3 \} = 2 \left\{ \frac{2}{3} \xi + \xi \right\} = \frac{10}{3} \xi.$$

In bezug auf die in Abb. 62 dargestellte symmetrische Belastung ist:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{1-2} = \mathfrak{M}_{2-1} = \mathfrak{M}_{2-m} = \mathfrak{M}_{3-4} = \mathfrak{M}_{3-m} = \mathfrak{M}_{4-3}.$$

Setzt man diese Beiwerte und Festwerte in Tabelle XVII ein, so erhält man Tabelle XVIII, welche die vier Unbekannten φ_1 bis φ_4 als Funktion von $\mathfrak{M} : \xi$ bestimmen läßt.

Tabelle XVII.

Gleichung	Linke Seite der Gleichung				Rechte Seite der Gleichung
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	
(1)	φ_1	ξ_1		ξ'_1	\mathfrak{M}_{1-2}
(2)	ξ_1	φ_2	ξ_2		$\mathfrak{M}_{2-m} - \mathfrak{M}_{2-1}$
(3)		ξ_2	φ_3	ξ_3	$\mathfrak{M}_{3-m} - \mathfrak{M}_{3-4}$
(4)	ξ'_1		ξ_3	φ_4	\mathfrak{M}_{4-3}

Tabelle XVIII.

Gleichung	Linke Seite der Gleichung				Rechte Seite der Gleichung (Multiplikator: $\mathfrak{M} : \xi$)
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	
(1)	16	3	0	2	3
(2)	3	22	2	0	0
(3)	0	2	16	3	0
(4)	2	0	3	10	3

Der Rechnungsverlauf durch das Iterationsverfahren ergibt sich aus Folgendem: Aus Gl. (1) in Tabelle XVIII erhält man:

$$16 \varphi_1 + 3 \varphi_2 + 2 \varphi_4 = 3 \quad (\text{Multiplikator: } \mathfrak{M} : \xi)$$

oder

$$16 \varphi'_1 + 3 \varphi'_2 + 2 \varphi'_4 = 3 \mathfrak{M} : \xi.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\varphi'_1 = 0,143 \mathfrak{M} : \xi .$$

In analoger Weise hat man aus den Gln. (2), (3) und (4) in Tabelle XVIII:

$$\varphi'_2 = \varphi'_3 = 0, \quad \varphi'_4 = 0,2 \mathfrak{M} : \xi .$$

Tabelle XIX.

		φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
Näherungswert	φ'	0,143	0	0	0,200
	φ''	0,163	-0,0222	→	→
	φ'''	→	→	→	→

Multiplikator: $\mathfrak{M} : \xi$

Diese ersten Näherungswerte sind übersichtlich in Tabelle XIX angegeben. Sie werden alsdann in die Gleichungen eingesetzt.

Die erste Gleichung (1) in Tabelle XVIII lautet demgemäß:

$$16 \varphi_1 + 3(0) + 2(0,200) = 3 ,$$

(Multiplikator: $\mathfrak{M} : \xi$)

welche, nach φ_1 aufgelöst, den zweiten genaueren Näherungswert $\varphi''_1 = 0,163 \mathfrak{M} : \xi$ liefert. Der Wert wird in Tabelle XIX eingeschrieben.

Die Gleichung (2) in Tabelle XVIII ergibt mit diesem zweiten Näherungswert φ''_1 und anderen ersten Näherungswerten:

$$3(0,163) + 22 \varphi_2 + 2(0) = 0, \quad (\text{Multiplikator: } \mathfrak{M} : \xi)$$

welche, nach φ_2 aufgelöst, den zweiten genaueren Näherungswert $\varphi''_2 = -0,0222 \mathfrak{M} : \xi$ liefert. Der Wert φ''_2 wird in Tabelle XIX eingeschrieben.

Tabelle XX.

		φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
Näherungswert	$\varphi^{(1)}$	0,143	0	0	0,200
	$\varphi^{(2)}$	0,163	-0,0222	-0,0348	0,278
	$\varphi^{(3)}$	0,157	-0,0182	-0,0498	0,284
	$\varphi^{(4)}$	0,155	-0,0166	-0,0512	0,284
	$\varphi^{(5)}$	0,1551	-0,0165	-0,0512	0,2844

Multiplikator: $\mathfrak{M} : \xi$

Tabelle XIX zeigt den Rechnungsvorlauf bis zur Bestimmung von φ''_2 , und die weitere Rechnung ist in Tabelle XX übersichtlich angegeben.

Die Richtigkeit dieser Rechnungsergebnisse kann durch die Gleichgewichtsbildungen kontrolliert und ihre Genauigkeit durch die Zahl der Versuche beliebig erhöht werden. Nun sollen im nachstehenden die Knotenpunktmomente ermittelt und die

Richtigkeit dieses Verfahrens durch die Gleichgewichtsgleichungen kontrolliert werden.

Entsprechend der Grundgleichung (I) erhält man mit den fünften Näherungswerten:

Am Knotenpunkt I:

$$M_{1-2} = \xi \{2 \varphi_1 + \varphi_2\} - \mathfrak{M} = \{2(0,1551) + (-0,0165) - 1\} \mathfrak{M} = -0,706 \mathfrak{M} ,$$

$$M_{1-4} = \frac{2 \xi}{3} \{2 \varphi_1 + \varphi_4\} = \frac{2}{3} \{2(0,1551) + (0,2844)\} \mathfrak{M} = 0,396 \mathfrak{M} ,$$

$$M_{1-I} = \xi \{2 \varphi_1\} = 2(0,1551) \mathfrak{M} = 0,310 \mathfrak{M} .$$

Die Gleichgewichtsbedingung: $\Sigma M_1 = 0$ ist am Knotenpunkt I vollkommen erfüllt.

Für den Knotenpunkt 2 resultieren:

$$M_{2-1} = \xi \{2 \varphi_2 + \varphi_1\} + \mathfrak{M} = \{2(-0,0165) + 0,1551 + 1\} \mathfrak{M} = 1,122 \mathfrak{M} ,$$

$$M_{2-m} = \xi \{2 \varphi_2\} - \mathfrak{M} = \{2(-0,0165) - 1\} \mathfrak{M} = -1,033 \mathfrak{M} ,$$

$$M_{2-3} = \frac{2 \xi}{3} \{2 \varphi_2 + \varphi_3\} = \frac{2}{3} \{2(-0,0165) + (-0,0512)\} \mathfrak{M} = -0,056 \mathfrak{M} ,$$

$$M_{2-II} = \xi \{2 \varphi_2\} = 2(-0,0165) \mathfrak{M} = -0,033 \mathfrak{M} .$$

Die Gleichgewichtsbedingung: $\Sigma M_2 = 0$ ist am Knotenpunkt 2 vollkommen erfüllt.

Ganz in analoger Weise:

Am Knotenpunkt 3:

$$M_{3-4} = \xi \{2 \varphi_3 + \varphi_4\} + \mathfrak{M} = \{2(-0,0512) + 0,2844 + 1\} \mathfrak{M} = 1,182 \mathfrak{M},$$

$$M_{3-m} = \xi \{2 \varphi_3\} - \mathfrak{M} = \{2(-0,0512) - 1\} \mathfrak{M} = -1,102 \mathfrak{M},$$

$$M_{3-2} = \frac{2}{3} \xi \{2 \varphi_3 + \varphi_2\} = \frac{2}{3} \{2(-0,0512) + (-0,0165)\} \mathfrak{M} = -0,079 \mathfrak{M}.$$

Am Knotenpunkt 4:

$$M_{4-3} = \xi \{2 \varphi_4 + \varphi_3\} - \mathfrak{M} = \{2(0,2844) + (-0,0512) - 1\} \mathfrak{M} = -0,482 \mathfrak{M},$$

$$M_{4-1} = \frac{2}{3} \xi \{2 \varphi_4 + \varphi_1\} = \frac{2}{3} \{2(0,2844) + 0,1551\} \mathfrak{M} = 0,482 \mathfrak{M}.$$

Am Knotenpunkt m:

$$M_{m-2} = \xi \{\varphi_2\} + \mathfrak{M} = 0,983 \mathfrak{M}.$$

$$M_{m-3} = \xi \{\varphi_3\} + \mathfrak{M} = 0,949 \mathfrak{M}.$$

An der eingespannten Stelle:

$$M_{I-1} = \xi \{\varphi_1\} = 0,155 \mathfrak{M},$$

$$M_{II-2} = \xi \{\varphi_2\} = -0,017 \mathfrak{M}.$$

In Abb. 63 sind die Knotenpunktmomente sinngemäß eingetragen. Die Momente der Abbildung sind mit \mathfrak{M} zu multiplizieren.

Am Knotenpunkt I ergeben sich M_{1-4} und M_{1-I} positiv, d. h. am herausgeschnittenen Stab drehen die Knotenpunktmomente im Rechtssinne. M_{1-2} ist negativ, dreht also am Stab im entgegengesetzten Uhrzeigersinne.

Für den Multiplikator \mathfrak{M} erhält man aus Tabelle Ib in bezug auf die in Abb. 64 dargestellte Belastung:

$$\mathfrak{M} = \frac{g l^2}{12}.$$

[s. Tabelle Ib (5).]

Z. B. am Knotenpunkt I:

$$M_{1-2} = -0,706 \left(\frac{g l^2}{12}\right) = -0,0588 g l^2,$$

$$M_{1-4} = 0,396 \left(\frac{g l^2}{12}\right) = 0,0330 g l^2,$$

$$M_{1-I} = 0,310 \left(\frac{g l^2}{12}\right) = 0,0258 g l^2.$$

Am Knotenpunkt 2:

$$M_{2-1} = 1,122 \left(\frac{g l^2}{12}\right) = 0,0935 g l^2,$$

$$M_{2-m} = -1,033 \left(\frac{g l^2}{12}\right) = -0,0861 g l^2,$$

$$M_{2-3} = -0,056 \left(\frac{g l^2}{12}\right) = -0,0047 g l^2,$$

$$M_{2-II} = -0,033 \left(\frac{g l^2}{12}\right) = -0,0027 g l^2.$$

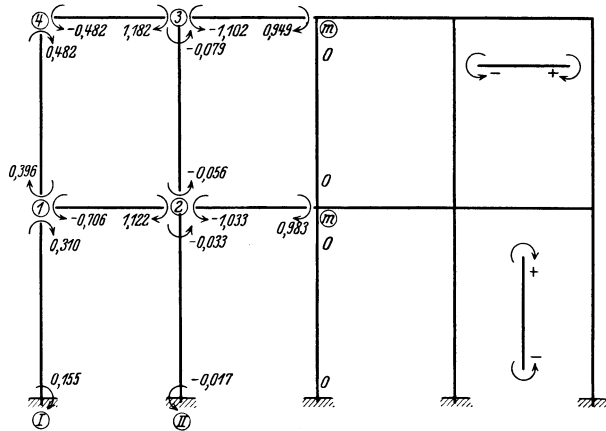


Abb. 63.

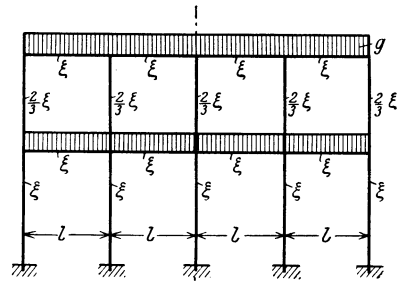


Abb. 64.

Am Knotenpunkt 3:

$$M_{3-4} = 1,182 \left(\frac{g l^2}{12} \right) = 0,0985 g l^2,$$

$$M_{3-m} = -1,102 \left(\frac{g l^2}{12} \right) = -0,0918 g l^2,$$

$$M_{3-2} = -0,079 \left(\frac{g l^2}{12} \right) = -0,0066 g l^2.$$

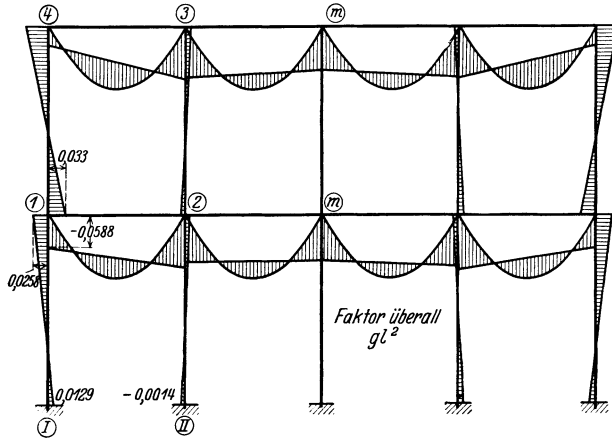


Abb. 65.

Am Knotenpunkt 4:

$$M_{4-3} = -0,482 \left(\frac{g l^2}{12} \right) = -0,0402 g l^2,$$

$$M_{4-1} = 0,482 \left(\frac{g l^2}{12} \right) = 0,0402 g l^2.$$

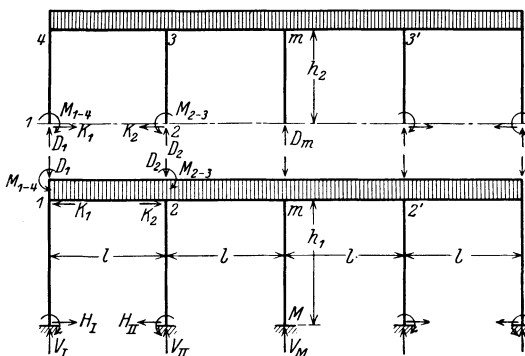


Abb. 66.

Am Knotenpunkte m:

$$M_{m-2} = 0,983 \left(\frac{g l^2}{12} \right) = 0,0819 g l^2,$$

$$M_{m-3} = 0,949 \left(\frac{g l^2}{12} \right) = 0,0791 g l^2.$$

An der eingespannten Stelle:

$$M_{I-1} = 0,155 \left(\frac{g l^2}{12} \right) = 0,0129 g l^2,$$

$$M_{II-2} = -0,017 \left(\frac{g l^2}{12} \right) = -0,0014 g l^2.$$

Mit diesen Werten sind in Abb. 65 die Biegemomente eingetragen.

Die vertikalen und waagerechten

Stützenreaktionen werden durch die Knotenpunktmomente folgendermaßen dargestellt.

Unmittelbar vor den Anschlußstellen der Ober- und Unterrahmen führen wir einen waagerechten Schnitt durch (Abb. 66) und ersetzen die auftretenden Spannkkräfte durch drei an jedem Knotenpunkt angreifende Kraftgrößen M, K, D .

Durch diese Zerlegung erhalten wir zwei durchlaufende Rahmenträger.

Sowohl die virtuellen Stützenwiderstände M, K, D des Oberrahmens als die wirklichen Stützenreaktionen M, H, V des Unterrahmens müssen mit den zugehörigen Belastungen in Gleichgewicht sein.

Am Knotenpunkt 4:

$$M_{1-4} - K_1 h_2 + M_{4-1} = 0$$

oder

$$0,0330 g l^2 - K_1 h_2 + 0,0402 g l^2 = 0.$$

Es folgt daraus:

$$K_1 = 0,0732 \frac{g l^2}{h_2}.$$

Am Knotenpunkt 3:

$$D_1 l + M_{1-4} - K_1 h_2 + M_{3-4} - \frac{g l^2}{2} = 0$$

oder

$$D_1 l + 0,0330 g l^2 - 0,0732 g l^2 + 0,0985 g l^2 - 0,5 g l^2 = 0.$$

Daraus folgt:

$$D_1 = 0,4417 g l.$$

Am Knotenpunkt 3:

$$K_2 h_2 - M_{2-3} + M_{3-2} = 0$$

oder

$$K_2 h_2 - 0,0047 g l^2 - 0,0066 g l^2 = 0.$$

Man erhält daraus:

$$K_2 = 0,0113 \frac{g l^2}{h_2}.$$

Am Knotenpunkt m :

$$D_1(2l) + D_2 l - (K_1 - K_2) h_2 + M_{1-4} - M_{2-3} - 2 g l^2 + M_{m-3} = 0$$

oder

$$0,4417 g l(2l) + D_2 l - (0,0732 - 0,0113) g l^2 + 0,0330 g l^2 - 0,0047 g l^2 - 2 g l^2 + 0,0791 g l^2 = 0.$$

Daraus wird:

$$D_2 = 1,0711 g l.$$

Am Knotenpunkt 3':

$$D_1(3l) + D_2(2l) + D_m l - (K_1 - K_2) h_2 + M_{1-4} - M_{2-3} - 3 g l(1,5l) + M_{3'm} = 0$$

oder

$$(0,4417 g l)(3l) + 1,0711 g l(2l) + D_m l - (0,0732 - 0,0113) g l^2 + 0,0330 g l^2 - 0,0047 g l^2 - 4,5 g l^2 + 0,0918 g l^2 = 0.$$

Man gewinnt folglich:

$$D_m = 0,9745 g l.$$

Am Knotenpunkt 1:

$$M_{1-1} - H_1 h_1 + M_{1-1} = 0$$

oder

$$0,0129 g l^2 - H_1 h_1 + 0,0258 g l^2 = 0.$$

Daraus hat man:

$$H_1 = 0,0387 \frac{g l^2}{h_1}.$$

Am Knotenpunkt 2:

$$H_{II} h_1 - M_{II-2} + M_{2-II} = 0$$

oder

$$H_{II} h_1 - 0,0014 g l^2 - 0,0027 g l^2 = 0.$$

Es folgt:

$$H_{II} = 0,0041 \frac{g l^2}{h_1}.$$

Zufolge der Symmetrie wird für den Ständer $M - m$

$$H_M = 0.$$

40 Rechteckrahmen mit vertikaler Balkenbelastung und waagerechter Einzellast.

Am Knotenpunkt 2 (Abb. 66)

$$(V_I - D_1)l - H_I h_1 - \frac{gl^2}{2} + M_{I-1} - M_{I-4} + M_{2-1} = 0$$

oder

$$(V_I - 0,4417 gl)l - 0,0387 gl^2 - 0,5 gl^2 + 0,0129 gl^2 - 0,0330 gl^2 + 0,0935 gl^2 = 0.$$

Daraus wird:

$$V_I = 0,9070 gl.$$

Am Knotenpunkt m :

$$(V_I - D_1)(2l) + (V_{II} - D_2)l - 2 gl^2 + M_{I-1} - M_{II-2} - (H_I - H_{II})h_1 - M_{1-4} + M_{2-3} + M_{m-2} = 0$$

oder

$$(0,9070 - 0,4417)(2 gl^2) + (V_{II} - 1,0711 gl)l - 2 gl^2 + 0,0129 gl^2 - 0,0014 gl^2 - (0,0387 - 0,0041) gl^2 - 0,0330 gl^2 + 0,0047 gl^2 + 0,0819 gl^2 = 0.$$

Man erhält daraus:

$$V_{II} = 2,1100 gl.$$

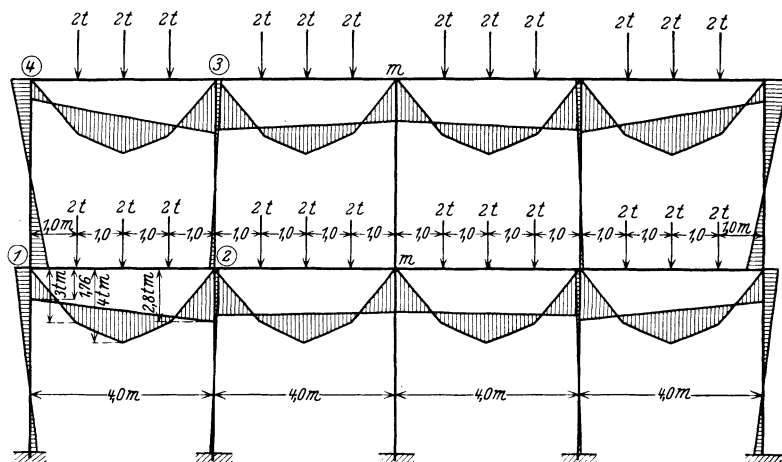


Abb. 67.

Am Knotenpunkt 2':

$$(V_I - D_1)(3l) + (V_{II} - D_2)(2l) + (V_M - D_m)l - 3 gl(1,5l) - (H_I - H_{II})h_1 + M_{I-1} - M_{II-2} - M_{1-4} + M_{2-3} + M_{2'm} = 0$$

oder

$$(0,9070 - 0,4417)(3 gl^2) + (2,1100 - 1,0711)(2 gl^2) + (V_M - 0,9745 gl)l - 4,5 gl^2 - (0,0387 - 0,0041) gl^2 + 0,0129 gl^2 - 0,0014 gl^2 - 0,0330 gl^2 + 0,0047 gl^2 + 0,0861 gl^2 = 0.$$

Daraus wird:

$$V_M = 1,9661 gl.$$

In bezug auf die in Abb. 67 dargestellte Belastung ergibt sich:

$$\mathfrak{M} = \frac{5}{16} Pl = \frac{5}{16} (2)(4) = 2,5 t \cdot m.$$

Als Knotenmomente ergeben sich:

Am Knotenpunkt 1:

$$M_{1-2} = -0,706 (2,5) = -1,76 t \cdot m,$$

$$M_{1-4} = 0,396 (2,5) = 0,99 t \cdot m,$$

$$M_{1-1} = 0,310 (2,5) = 0,77 t \cdot m.$$

Am Knotenpunkt 2:

$$\begin{aligned} M_{2-1} &= 1,122 (2,5) = 2,80 \text{ t} \cdot \text{m}, \\ M_{2-m} &= -1,033 (2,5) = -2,58 \text{ t} \cdot \text{m}, \\ M_{2-3} &= -0,056 (2,5) = -0,14 \text{ t} \cdot \text{m}, \\ M_{II-2} &= -0,033 (2,5) = -0,08 \text{ t} \cdot \text{m}. \end{aligned}$$

Am Knotenpunkt 3:

$$\begin{aligned} M_{3-4} &= 1,182 (2,5) = 2,95 \text{ t} \cdot \text{m}, \\ M_{3-m} &= -1,102 (2,5) = -2,75 \text{ t} \cdot \text{m}, \\ M_{3-2} &= -0,079 (2,5) = -0,20 \text{ t} \cdot \text{m}. \end{aligned}$$

Am Knotenpunkt 4:

$$\begin{aligned} M_{4-3} &= -0,482 (2,5) = -1,21 \text{ t} \cdot \text{m}, \\ M_{4-1} &= 0,482 (2,5) = 1,21 \text{ t} \cdot \text{m}. \end{aligned}$$

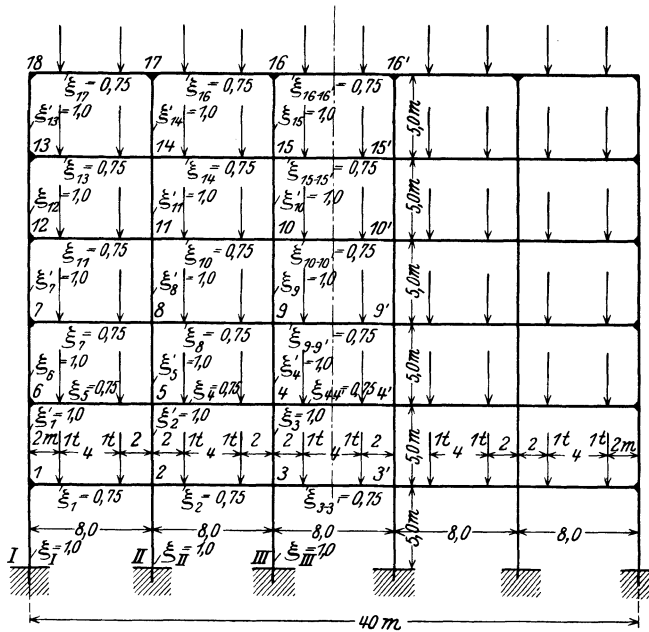


Abb. 68.

Am Knotenpunkt m :

$$\begin{aligned} M_{m-2} &= 0,983 (2,5) = 2,46 \text{ t} \cdot \text{m}, \\ M_{m-3} &= 0,949 (2,5) = 2,37 \text{ t} \cdot \text{m}. \end{aligned}$$

An den Ständerfüßen

$$\begin{aligned} M_{I-1} &= 0,155 (2,5) = 0,39 \text{ t} \cdot \text{m}, \\ M_{II-2} &= -0,017 (2,5) = -0,04 \text{ t} \cdot \text{m}. \end{aligned}$$

In Abb. 67 sind die Biegemomente eingetragen.

Beispiel II. Fünffeldiger, sechsgeschossiger, symmetrischer Rechteckrahmen mit sechs eingespannten Ständern. Der in Abb. 68 dargestellte Rahmen hat fünf gleiche Felder mit gleich beschaffenen Ständern und Riegeln. Gesucht sind die durch die in der Abbildung dargestellte Belastung erzeugten Biegemomente.

Entsprechend der Gl. (VIc) und zufolge dem Grundfall von Tabelle V liefert das Verfahren der Gleichstabulierung die folgende Tabelle, die die Koeffizienten- und Festwertanordnung der Bestimmungsgleichungen zeigt.

Tabelle XXI.

Gleichung	Linke Seite der Gleichung																		Rechte Seite der Gleichung
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}	φ_{13}	φ_{14}	φ_{15}	φ_{16}	φ_{17}	φ_{18}	
(1)	ϱ_1	ξ_1																	$\mathfrak{M}_{1,2}$
(2)	ξ_1	ϱ_2	ξ_2		ξ_2'	ξ_1'													$\mathfrak{M}_{2,3} - \mathfrak{M}_{2,1}$
(3)		ξ_2	(ϱ_3)	ξ_3															$\mathfrak{M}_{3,3'} - \mathfrak{M}_{3,2}$
(4)			ξ_3	(ϱ_4)	ξ_4				ξ_4'										$\mathfrak{M}_{4,4'} - \mathfrak{M}_{4,5}$
(5)		ξ_2'		ξ_4	ϱ_5	ξ_5		ξ_5'											$\mathfrak{M}_{5,4} - \mathfrak{M}_{5,6}$
(6)	ξ_1'			ξ_5	ϱ_6	ξ_6													$\mathfrak{M}_{6,5}$
(7)					ξ_6	ϱ_7	ξ_7				ξ_7'								$\mathfrak{M}_{7,8}$
(8)				ξ_5'		ξ_7	ϱ_8	ξ_8		ξ_8'									$\mathfrak{M}_{8,9} - \mathfrak{M}_{8,7}$
(9)				ξ_4'		ξ_7	(ϱ_9)	ξ_8	ξ_9		ξ_8'								$\mathfrak{M}_{9,9'} - \mathfrak{M}_{9,8}$
(10)								ξ_9	(ϱ_{10})	ξ_{10}					ξ_{10}'				$\mathfrak{M}_{10,10'} - \mathfrak{M}_{10,11}$
(11)								ξ_8	ϱ_{11}	ξ_{11}	ξ_{11}		ξ_{11}'						$\mathfrak{M}_{11,10} - \mathfrak{M}_{11,12}$
(12)								ξ_7'	ξ_{10}	ϱ_{12}	ξ_{12}	ξ_{12}							$\mathfrak{M}_{12,11}$
(13)										ξ_{12}	ϱ_{13}	ξ_{13}	ξ_{13}						$\mathfrak{M}_{13,14}$
(14)										ξ_{11}	ξ_{13}	ϱ_{14}	ξ_{14}	ξ_{14}		ξ_{14}'			$\mathfrak{M}_{14,15} - \mathfrak{M}_{14,13}$
(15)									ξ_{10}'		ξ_{14}	(ϱ_{15})	ξ_{15}	ξ_{15}					$\mathfrak{M}_{15,15'} - \mathfrak{M}_{15,14}$
(16)												ξ_{15}	(ϱ_{16})	ξ_{16}	ξ_{16}	ξ_{16}'			$\mathfrak{M}_{16,16'} - \mathfrak{M}_{16,17}$
(17)													ξ_{16}	ϱ_{17}	ξ_{17}	ξ_{17}			$\mathfrak{M}_{17,16} - \mathfrak{M}_{17,18}$
(18)												ξ_{13}'		ξ_{17}	ϱ_{18}	ξ_{18}			$\mathfrak{M}_{18,17}$

Wie früher dargelegt, rechnen wir zuerst die Stabwerte h, l, J für alle Stäbe und dann die Festwerte $\xi, \varrho, \mathfrak{M}$ für alle Stäbe und Knotenpunkte sowie für die gegebenen Belastungen aus. Die in Abb. 68 an die Stäbe gesetzten Zahlen geben die Festwerte ξ .

Hieraus folgen die Festwerte ϱ :

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= \varrho_6 = \varrho_7 = \varrho_{12} = \varrho_{13} = 2 \{1,0 + 0,75 + 1,0\} = 5,5 \text{ cm}^3, \\ \varrho_2 &= \varrho_5 = \varrho_8 = \varrho_{11} = \varrho_{14} = 2 \{1,0 + 0,75 + 1,0 + 0,75\} = 7,0 \text{ cm}^3, \\ (\varrho_3) &= (\varrho_4) = (\varrho_9) = (\varrho_{10}) = (\varrho_{15}) = 2 \{1,0 + 0,75 + 1,0 + 0,75\} - 0,75 = 6,25 \text{ cm}^3, \\ (\varrho_{16}) &= 2 \{1,0 + 0,75 + 0,75\} - 0,75 = 4,25 \text{ cm}^3, \\ \varrho_{17} &= 2 \{0,75 + 1,0 + 0,75\} = 5,0 \text{ cm}^3, \\ \varrho_{18} &= 2 \{0,75 + 1,0\} = 3,5 \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

Für die Festwerte \mathfrak{M} erhält man aus Tabelle I b (2) in bezug auf die gegebenen Belastungen:

$$\mathfrak{M} = \frac{Pa(l-a)}{l} = \frac{1,0(2)(8-2)}{8} = 150 \text{ t} \cdot \text{cm}.$$

Setzt man die vorliegenden Festwerte in Tabelle XXI ein, so erhält man Tabelle XXII.

Aus Tabelle XXII kann man die achtzehn Unbekannten φ_1 bis φ_{18} durch das Iterationsverfahren bestimmen:

Aus Gl. (1) in Tabelle XXII erhält man:

$$5,5 \varphi_1 + 0,75 \varphi_2 + \varphi_6 = 150$$

oder

$$5,5 \varphi_1' + 0,75 \varphi_1' + \varphi_1' = 150.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\varphi_1' = 20,7 \text{ t/cm}^2.$$

In analoger Weise hat man aus Gln. (2), (3), (4) und (5) in Tabelle XXII

$$\varphi_2' = \varphi_3' = \varphi_4' = \varphi_5' = 0$$

Tabelle XXII.

Gleichung	Linke Seite der Gleichung																		Rechte Seite der Gleichung		
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}	φ_{13}	φ_{14}	φ_{15}	φ_{16}	φ_{17}	φ_{18}			
(1)	5,5	0,75																	150		
(2)	0,75	7,0	0,75		1,0														0		
(3)		0,75	6,25	1,0															0		
(4)		1,0	1,0	6,25	0,75				1,0										0		
(5)				0,75	7,0	0,75													0		
(6)	1,0			0,75	5,5	1,0													150		
(7)					1,0														150		
(8)					0,75	7,0	0,75		1,0										0		
(9)				1,0				0,75	6,25	1,0									0		
(10)																			0		
(11)								1,0	6,25	0,75									0		
(12)								0,75	7,0	0,75	1,0								150		
(13)																			150		
(14)									1,0	1,0									0		
(15)									0,75	7,0	0,75								0		
(16)																			0		
(17)																			0		
(18)																			150		

Takabeya, Rahmentafeln.

Tabelle XXIII.

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}	φ_{13}	φ_{14}	φ_{15}	φ_{16}	φ_{17}	φ_{18}
Erster Näherungswert .	20,7	0	0	0	0	18,2	18,2	0	0	0	0	18,2	18,2	0	0	0	0	28,6
Zweiter Näherungswert .	24,0	- 2,57	0,309	- 0,05	- 1,58	19,8	20,4	- 1,96	0,24	- 0,038	- 1,67	20,5	18,3	- 1,72	0,20	- 0,047	- 3,94	38,6
Dritter Näherungswert .	24,0	- 2,38	0,293	0,105	- 1,51	19,4	20,3	- 1,74	0,198	0,137	- 1,72	20,5	16,74	- 1,00	0,105	0,67	- 5,69	39,4
Vierter Näherungswert .	24,1	- 2,40	0,271	0,106	- 1,50	19,4	20,25	- 1,73	0,168	0,163	- 1,83	20,8	16,5	- 0,705	0,05	1,02	- 5,92	39,4
Fünfter Näherungswert .	24,1	- 2,40	0,271	0,110	- 1,50	19,4	20,2	- 1,72	0,161	0,202	- 1,91	20,9	16,4	- 0,634	- 0,12	1,07	- 5,95	39,5
Sechster Näherungswert .	24,1	- 2,40	0,271	0,111	- 1,50	19,4	20,2	- 1,69	0,150	0,224	- 1,94	20,9	16,4	- 0,616	- 0,133	1,08	- 6,0	39,5

4

und aus Gl. (6):

$$\varphi_1 + 0,75 \varphi_5 + 5,5 \varphi_6 + \varphi_7 = 150$$

oder auch

$$\varphi'_6 + 0,75 \varphi'_6 + 5,5 \varphi'_6 + \varphi'_6 = 150.$$

Daraus folgt:

$$\varphi'_6 = 18,2 \text{ t/cm}^2.$$

Ganz gleichartig erhält man aus den übrigen Gleichungen in Tabelle XXII:

$$\begin{aligned} \varphi'_7 &= 18,2 \text{ t/cm}^2, & \varphi'_8 &= \varphi'_9 = \varphi'_{10} = \varphi'_{11} = 0, \\ \varphi'_{12} &= \varphi'_{13} = 18,2 \text{ t/cm}^2, & \varphi'_{14} &= \varphi'_{15} = \varphi'_{16} = \varphi'_{17} = 0, \\ \varphi'_{18} &= 28,6 \text{ t/cm}^2. \end{aligned}$$

Diese ersten Näherungswerte sind übersichtlich in Tabelle XXIII angegeben.

Sie werden in die Gleichungen eingesetzt. Die erste Gleichung (1) in Tabelle XXII lautet dann:

$$5,5 \varphi_1 + 0,75 (0) + 18,2 = 150,$$

welche, nach φ_1 aufgelöst, den zweiten genaueren Näherungswert $\varphi''_1 = 24,0$ liefert.

Die zweite Gleichung (2) in Tabelle XXII, mit diesem zweiten Näherungswert φ''_1 und anderen ersten Näherungswerte, ergibt:

$$0,75 (24,0) + 7,0 \varphi_2 + 0,75 (0) = 0$$

welche, nach φ_2 aufgelöst, den zweiten genaueren Näherungswert $\varphi''_2 = -2,57$ liefert.

Die dritte Gleichung (3), mit φ''_2 und anderen φ' , lautet:

$$0,75 (-2,57) + 6,25 \varphi_3 = 0$$

mit der Lösung

$$\varphi''_3 = 0,309.$$

Gleichartig liefern die weiteren Rechnungen mit dem Rechenschieber die zweiten Näherungswerte:

$$\begin{aligned} \varphi''_4 &= -0,05, & \varphi''_5 &= -1,58, & \varphi''_6 &= 19,8, & \varphi''_7 &= 20,4, \\ \varphi''_8 &= -1,96, & \varphi''_9 &= 0,24, & \varphi''_{10} &= -0,038, & \varphi''_{11} &= -1,67, \\ \varphi''_{12} &= 20,5, & \varphi''_{13} &= 18,3, & \varphi''_{14} &= -1,72, & \varphi''_{15} &= 0,20, \\ \varphi''_{16} &= -0,047, & \varphi''_{17} &= -3,94, & \varphi''_{18} &= 38,6. \end{aligned}$$

Dieses Iterationsverfahren läßt die Rechnung von den ersten gröberen Werten durch derartige Fortführung rascher zu genaueren Werten vorwärts schreiten. Nach meinen Erfahrungen sind die Unbekannten für die vorliegende Aufgabe mit dem gewöhnlichen Eliminationsverfahren erst nach langwieriger, ermüdender, etwa drei Wochen dauernder Anstrengung zu berechnen, während unser Iterationsverfahren schon in der verhältnismäßig kurzen Zeit von sieben Stunden die mathematisch genauen Werte lieferte.

In Tabelle XXIII sind die ersten bis fünften Näherungswerte übersichtlich angegeben.

Die Richtigkeit dieser Rechnungsergebnisse kann durch die Gleichgewichtsbedingungen kontrolliert und ihre Genauigkeit durch Versuche beliebig erhöht werden.

Entsprechend der Grundgleichung (I) und mit den sechsten Näherungswerten erhält man:

Am Knotenpunkt I:

$$M_{1-2} = \xi_1 \{2 \varphi_1 + \varphi_2\} - \mathfrak{M}_{1-2} = 0,75 \{2 (24,1) - 2,40\} - 150 = -115,7 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

$$M_{1-6} = \xi'_1 \{2 \varphi_1 + \varphi_6\} = 1,0 \{2 (24,1) + 19,4\} = 67,6 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

$$M_{1-I} = \xi_I \{2 \varphi_1\} = 1,0 \cdot 2 \cdot 24,1 = 48,2 \text{ t} \cdot \text{cm}.$$

Am Knotenpunkt 2:

$$M_{2-1} = \xi_1 \{2 \varphi_2 + \varphi_1\} + \mathfrak{M}_{2-1} = 0,75 \{2 (-2,40) + 24,1\} + 150 = 164,5 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

$$M_{2-3} = \xi_2 \{2 \varphi_2 + \varphi_3\} - \mathfrak{M}_{2-3} = 0,75 \{2 (-2,40) + 0,271\} - 150 = -153,4 \text{ t} \cdot \text{cm}.$$

$$M_{2-5} = \xi'_2 \{2 \varphi_2 + \varphi_5\} = 1,0 \{2 (-2,40) - 1,50\} = -6,3 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

$$M_{2-II} = \xi_{II} \{2 \varphi_2\} = 1,0 \cdot 2 (-2,40) = -4,8 \text{ t} \cdot \text{cm}.$$

Ganz in analoger Weise:

Am Knotenpunkt 3:

$$\begin{aligned} M_{3-3'} &= -149,8 \text{ t} \cdot \text{cm}, & M_{3-2} &= 148,6 \text{ t} \cdot \text{cm}, \\ M_{3-4} &= 0,7 \text{ t} \cdot \text{cm}, & M_{3-\text{III}} &= 0,5 \text{ t} \cdot \text{cm}. \end{aligned}$$

Am Knotenpunkt 4:

$$\begin{aligned} M_{4-4'} &= -149,9 \text{ t} \cdot \text{cm}, & M_{4-5} &= 149,0 \text{ t} \cdot \text{cm}, \\ M_{4-9} &= 0,4 \text{ t} \cdot \text{cm}, & M_{4-3} &= 0,5 \text{ t} \cdot \text{cm}. \end{aligned}$$

Am Knotenpunkt 5:

$$\begin{aligned} M_{5-4} &= -152,2 \text{ t} \cdot \text{cm}, & M_{5-6} &= 162,3 \text{ t} \cdot \text{cm}, \\ M_{5-8} &= -4,7 \text{ t} \cdot \text{cm}, & M_{5-2} &= -5,4 \text{ t} \cdot \text{cm}. \end{aligned}$$

Am Knotenpunkt 6:

$$\begin{aligned} M_{6-5} &= -122,0 \text{ t} \cdot \text{cm}, & M_{6-7} &= 59,0 \text{ t} \cdot \text{cm}, \\ M_{6-1} &= 62,9 \text{ t} \cdot \text{cm}. \end{aligned}$$

Am Knotenpunkt 7:

$$\begin{aligned} M_{7-8} &= -121,0 \text{ t} \cdot \text{cm}, & M_{7-12} &= 61,3 \text{ t} \cdot \text{cm}, \\ M_{7-6} &= 59,8 \text{ t} \cdot \text{cm}. \end{aligned}$$

Am Knotenpunkt 8:

$$\begin{aligned} M_{8-9} &= -152,4 \text{ t} \cdot \text{cm}, & M_{8-7} &= 162,6 \text{ t} \cdot \text{cm}, \\ M_{8-11} &= -5,3 \text{ t} \cdot \text{cm}, & M_{8-5} &= -4,9 \text{ t} \cdot \text{cm}. \end{aligned}$$

Am Knotenpunkt 9:

$$\begin{aligned} M_{9-9'} &= -149,9 \text{ t} \cdot \text{cm}, & M_{9-8} &= 149,0 \text{ t} \cdot \text{cm}, \\ M_{9-10} &= 0,5 \text{ t} \cdot \text{cm}, & M_{9-4} &= 0,4 \text{ t} \cdot \text{cm}. \end{aligned}$$

Am Knotenpunkt 10:

$$\begin{aligned} M_{10-10'} &= -149,8 \text{ t} \cdot \text{cm}, & M_{10-11} &= 148,9 \text{ t} \cdot \text{cm}, \\ M_{10-15} &= 0,3 \text{ t} \cdot \text{cm}, & M_{10-9} &= 0,6 \text{ t} \cdot \text{cm}. \end{aligned}$$

Am Knotenpunkt 11:

$$\begin{aligned} M_{11-10} &= -152,7 \text{ t} \cdot \text{cm}, & M_{11-12} &= 162,8 \text{ t} \cdot \text{cm}, \\ M_{11-14} &= -4,5 \text{ t} \cdot \text{cm}, & M_{11-8} &= -5,6 \text{ t} \cdot \text{cm}. \end{aligned}$$

Am Knotenpunkt 12:

$$\begin{aligned} M_{12-11} &= -120,1 \text{ t} \cdot \text{cm}, & M_{12-13} &= 58,2 \text{ t} \cdot \text{cm}, \\ M_{12-7} &= 62,0 \text{ t} \cdot \text{cm}. \end{aligned}$$

Am Knotenpunkt 13:

$$\begin{aligned} M_{13-14} &= -125,9 \text{ t} \cdot \text{cm}, & M_{13-18} &= 72,3 \text{ t} \cdot \text{cm}, \\ M_{13-12} &= 53,7 \text{ t} \cdot \text{cm}. \end{aligned}$$

Am Knotenpunkt 14:

$$\begin{aligned} M_{14-15} &= -151,0 \text{ t} \cdot \text{cm}, & M_{14-18} &= 161,4 \text{ t} \cdot \text{cm}, \\ M_{14-17} &= -7,2 \text{ t} \cdot \text{cm}, & M_{14-11} &= -3,2 \text{ t} \cdot \text{cm}. \end{aligned}$$

Am Knotenpunkt 15:

$$\begin{aligned} M_{15-15'} &= -150,10 \text{ t} \cdot \text{cm}, & M_{15-14} &= 149,34 \text{ t} \cdot \text{cm}, \\ M_{15-16} &= 0,81 \text{ t} \cdot \text{cm}, & M_{15-10} &= -0,04 \text{ t} \cdot \text{cm}. \end{aligned}$$

Am Knotenpunkt 16:

$$\begin{aligned} M_{16-16'} &= -149,2 \text{ t} \cdot \text{cm}, & M_{16-17} &= 147,1 \text{ t} \cdot \text{cm}, \\ M_{16-15} &= 2,0 \text{ t} \cdot \text{cm}. \end{aligned}$$

Am Knotenpunkt 17:

$$M_{17-16} = -158 \text{ t}\cdot\text{cm}, \quad M_{17-18} = 171 \text{ t}\cdot\text{cm},$$

$$M_{17-14} = -13 \text{ t}\cdot\text{cm}.$$

Am Knotenpunkt 18:

$$M_{18-17} = -95 \text{ t}\cdot\text{cm}, \quad M_{18-13} = 95 \text{ t}\cdot\text{cm}.$$

An der eingespannten Stelle:

$$M_{I-1} = 24,1 \text{ t}\cdot\text{cm}, \quad M_{II-2} = -2,4 \text{ t}\cdot\text{cm},$$

$$M_{III-3} = 0,27 \text{ t}\cdot\text{cm}.$$

In Abb. 69 sind die Knotenpunktmomente sinngemäß eingetragen.

Die Gleichgewichtsgleichungen $\sum M_r = 0$ sind in den einzelnen Knoten bis auf geringfügige Abweichungen erfüllt.

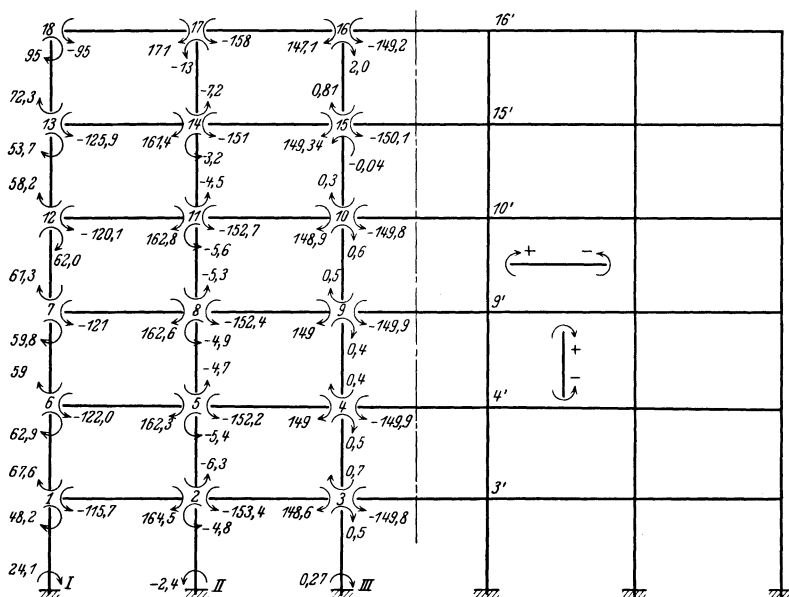


Abb. 69.

Mit diesen Werten der Knotenpunktmomente ist in Abb. 70 die Biegemomentenverteilung eingetragen.

Beispiel III. Fünffeldiger, sechsgeschossiger, symmetrischer Rechteckrahmen mit sechs Gelenkständern. Gesucht sind die Knotenpunktmomente bei dem in Abb. 71 dargestellten Gelenkrahmen. Zufolge dem Grundfall von Tabelle V und entsprechend der Gl. (XI) liefert das Verfahren der Gleichgewichtstabulierung die nachstehende Tabelle, welche die achtzehn Unbekannten finden läßt (Tabelle XXIV).

In dem in Abb. 71 dargestellten Gelenkrahmen seien die Stabwerte h, l, J für alle Stäbe ganz dieselben wie im Rahmen von Abb. 68; außerdem aber soll der Rahmen in diesem Fall Gelenkfüße statt der eingespannten Ständer haben. Man schreibt hierbei an den Knotenpunkten der Gelenkstäbekenöpfe ϱ' statt ϱ ; d. h.

$$\varrho'_1 = \varrho_1 - 0,5 \xi_I = 2(1,0 + 0,75 + 1,0) - 0,5(1,0) = 5,0 \text{ cm}^3,$$

$$\varrho'_2 = \varrho_2 - 0,5 \xi_{II} = 2(1,0 + 0,75 + 1,0 + 0,75) - 0,5(1,0) = 6,5 \text{ cm}^3,$$

$$(\varrho'_3) = (\varrho_3) - 0,5 \xi_{III} = 2(1,0 + 0,75 + 1,0 + 0,75) - 0,75 - 0,5(1,0) = 5,75 \text{ cm}^3.$$

Tabelle XXV

Gleichung	Linke Seite der Gleichung																	Rechte Seite der Gleichung		
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}	φ_{13}	φ_{14}	φ_{15}	φ_{16}	φ_{17}	φ_1		
(1)	5,0	0,75				1,0													150	
(2)	0,75	6,5	0,75																0	
(3)	0,75	0,75	5,75	1,0															0	
(4)		1,0	1,0	6,25	0,75	0,75		1,0											0	
(5)				0,75	7,0	0,75													0	
(6)	1,0				0,75	5,5	1,0												150	
(7)					1,0							1,0							150	
(8)						1,0	5,5	0,75		1,0									0	
(9)				1,0			0,75	7,0	0,75	0,75	0,75	5,5							0	
(10)								1,0	6,25	0,75				1,0					0	
(11)							1,0		0,75	7,0				1,0					0	
(12)									0,75	0,75			1,0						150	
(13)												1,0	5,5	0,75				1,0	150	
(14)										1,0			0,75	7,0					0	
(15)													0,75	6,25	1,0		1,0		0	
(16)																4,25			0	
(17)																0,75			0	
(18)																0,75			150	

Näherungswert:

$$\varphi_1'' = 26,54.$$

Die zweite Gleichung(2), mit diesem zweiten Näherungswert φ_1'' und den anderen ersten Näherungswerten, lautet:

$$0,75 (26,54) + 6,5 \varphi_2 + 0,75 (0,45) - 1,50 = 0,$$

welche, nach φ_2 aufgelöst, den zweiten genaueren Näherungswert $\varphi_2'' = -2,88$ liefert.

Die weiteren Rechnungen ergeben dann:

- $\varphi_3'' = 0,36,$
- $\varphi_4'' = 0,098,$
- $\varphi_5'' = -1,43,$
- $\varphi_6'' = 19,0,$
- $\varphi_7'' = 20,25,$
- $\varphi_8'' = -1,71,$
- $\varphi_9'' = 0,153,$
- $\varphi_{10}'' = 0,229,$
- $\varphi_{11}'' = -1,93,$
- $\varphi_{12}'' = 20,9$
- $\varphi_{13}'' = 16,4,$
- $\varphi_{14}'' = -0,611,$
- $\varphi_{15}'' = -0,139,$
- $\varphi_{16}'' = 1,03,$
- $\varphi_{17}'' = -5,95,$
- $\varphi_{18}'' = 39,5.$

In Tabelle XXVI sind die ersten, zweiten und dritten Näherungswerte übersichtlich angegeben.

Der Richtigkeitsgrad dieser Rechnungsergebnisse kann durch die Gleichgewichtsbedingungen kontrolliert werden.

Entsprechend der Gl. (I) und mit den dritten Näherungswerten erhält man:

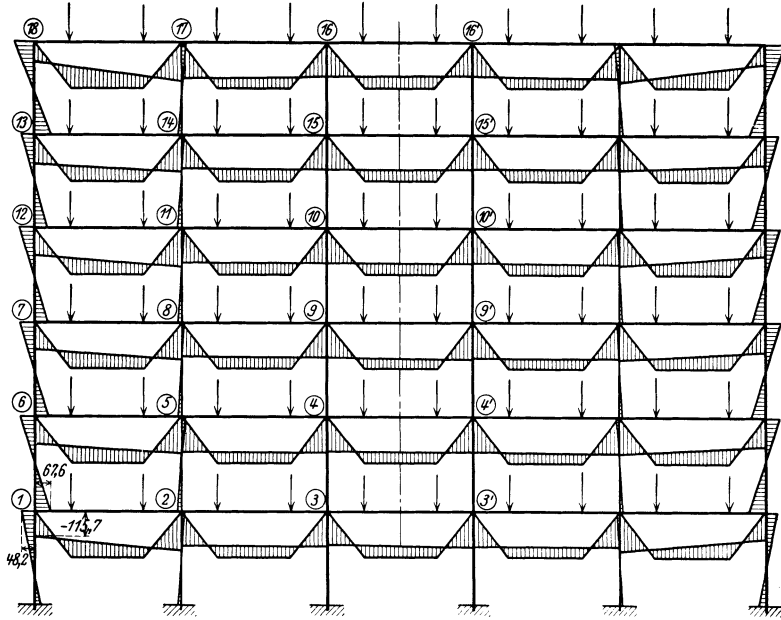


Abb. 70.

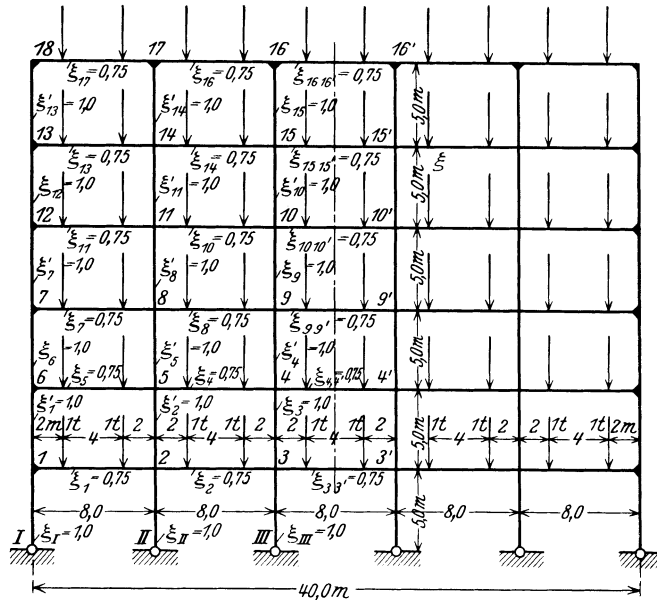


Abb. 71.

Am Knotenpunkt I:

$$M_{1-2} = \xi_1 \{2 \varphi_1 + \varphi_2\} - \mathfrak{M} = 0,75 \{2 (26,63) - 2,89\} - 150 = -112,2 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

$$M_{1-6} = \xi'_1 \{2 \varphi_1 + \varphi_6\} = 1,0 \{2 (26,63) + 18,9\} = 72,2 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

$$M_{1-1} = \xi_1 (1,5 \varphi_1) = 1,0 (1,5) (26,63) = 40 \text{ t} \cdot \text{cm}.$$

Tabelle XXVI.

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9
Erste Näherungswerte	26,5	- 2,8	0,45	0,111	- 1,50	19,4	20,2	- 1,69	0,15
Zweite Näherungswerte	26,54	- 2,88	0,36	0,098	- 1,43	19,0	20,25	- 1,71	0,153
Dritte Näherungswerte	26,63	- 2,89	0,36	0,09	- 1,38	18,9	20,3	- 1,71	0,155

	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}	φ_{13}	φ_{14}	φ_{15}	φ_{16}	φ_{17}	φ_{18}
Erste Näherungswerte	0,224	- 1,94	20,9	16,4	- 0,616	- 0,133	1,08	- 6,0	39,5
Zweite Näherungswerte	0,229	- 1,93	20,9	16,4	- 0,611	- 0,136	1,03	- 5,95	39,5
Dritte Näherungswerte	0,229	- 1,93	20,8	16,4	- 0,616	- 0,128	1,08	- 5,99	39,5

Am Knotenpunkt 2:

$$M_{2-1} = \xi_1 \{2 \varphi_2 + \varphi_1\} + \mathfrak{M} = 0,75 \{2(-2,89) + 26,63\} + 150 = 165,6 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

$$M_{2-3} = \xi_2 \{2 \varphi_2 + \varphi_3\} - \mathfrak{M} = 0,75 \{2(-2,89) + 0,36\} - 150 = - 154,1 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

$$M_{2-5} = \xi'_2 \{2 \varphi_2 + \varphi_5\} = 1,0 \{2(-2,89) - 1,38\} = - 7,2 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

$$M_{2-II} = \xi_{II} \{1,5 \varphi_2\} = 1,0 (1,5) (-2,89) = - 4,3 \text{ t} \cdot \text{cm} \quad \text{usw.}$$

In Tabelle XXVII sind die Knotenpunktmomente übersichtlich zusammengestellt.

Tabelle XXVII.

Knotenmomente in t·cm					
M_{1-2}	- 112,2	M_{6-1}	64,4	M_{12-13}	58
M_{1-6}	72,2	M_{7-8}	- 120,8	M_{12-7}	62
M_{1-I}	40,0	M_{7-12}	61,4	M_{13-14}	- 125,9
M_{2-1}	165,6	M_{7-6}	59,5	M_{13-18}	72,3
M_{2-3}	- 154,1	M_{8-9}	- 152,5	M_{13-12}	53,6
M_{2-5}	- 7,2	M_{8-7}	162,7	M_{14-15}	- 151,0
M_{2-II}	- 4,3	M_{8-11}	- 5,4	M_{14-13}	161,4
M_{3-2}	148,4	M_{8-5}	- 4,8	M_{14-17}	- 7,2
$M_{3-3'}$	- 149,7	$M_{9-9'}$	- 149,9	M_{14-11}	- 3,2
M_{3-4}	0,8	M_{9-8}	149,0	$M_{15-15'}$	- 150,10
M_{3-III}	0,5	M_{9-10}	0,5	M_{15-14}	149,35
$M_{4-4'}$	- 149,9	M_{9-4}	0,4	M_{15-16}	0,80
M_{4-5}	149,1	$M_{10-10'}$	149,8	M_{15-10}	- 0,03
M_{4-9}	0,3	M_{10-11}	148,9	$M_{16-16'}$	- 149,2
M_{4-3}	0,5	M_{10-15}	0,3	M_{16-17}	147,1
M_{5-4}	- 152,0	M_{10-9}	0,6	M_{16-15}	2,0
M_{5-6}	162,1	M_{11-10}	- 152,7	M_{17-16}	- 158,2
M_{5-8}	- 4,5	M_{11-12}	162,7	M_{17-18}	170,6
M_{5-2}	- 5,7	M_{11-14}	- 4,5	M_{17-14}	- 12,6
M_{6-5}	- 122,7	M_{11-8}	- 5,6	M_{18-17}	- 95,3
M_{6-7}	58,1	M_{12-11}	- 120	M_{18-13}	95,4

Die Gleichgewichtsgleichungen $\Sigma M_r = 0$ sind in den einzelnen Knoten bis auf geringfügige Abweichungen erfüllt.

Die Biegemomenteverteilung ist in Abb. 72 eingetragen.

Die vorstehenden drei Beispiele sind mit Hilfe des Iterationsverfahrens I sehr leicht durchführbar. Die nachstehenden Beispiele IV und V sind nach dem Iterationsverfahren II aufgelöst.

Beispiel IV. Dreifeldiger, dreigeschossiger, symmetrischer Rechteckrahmen mit vier eingespannten Ständern. Waagerechte Einzellast in jedem Knotenpunkt auf der vertikalen linken Seite. Gesucht sind die durch die waagerechte Belastung erzeugten Biegemomente bei dem in Abb. 73 dargestellten eingespannten Rahmen. Gemäß dem Grundfall von Tabelle VIIIa liefert das Verfahren der Gleichungstabulierung die nachstehende Tabelle, welche die neun Unbekannten finden läßt. (Tabelle XXVIII).

Tabelle XXVIII.

Gleichung	Linke Seite der Gleichung									Rechte Seite der Gleichung
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	μ_1	μ_2	μ_3	
(1)	Q_1	ξ_1		ξ'_1			ξ_I	ξ'_1		0
(2)	ξ_1	$[Q_2]$					ξ_{II}	ξ'_2		0
(3)		ξ_2	$[Q_3]$	ξ_3		ξ'_3		ξ'_2	ξ'_3	0
(4)	ξ'_1		ξ_3	Q_4	ξ_4			ξ'_1	ξ'_4	0
(5)			ξ_3	ξ_4	Q_5	ξ_5			ξ'_4	0
(6)			ξ'_3	ξ_4	ξ_5	$[Q_6]$			ξ'_4	0
(7)	ξ_I	ξ_{II}					$\frac{1}{2} X_1$			$\frac{1}{2} S_1$
(8)	ξ'_1	ξ_2	ξ'_2	ξ'_1				$\frac{1}{2} X_2$		$\frac{1}{2} S_2$
(9)			ξ'_3	ξ_4	ξ_5			$\frac{1}{2} X_3$		$\frac{1}{2} S_3$

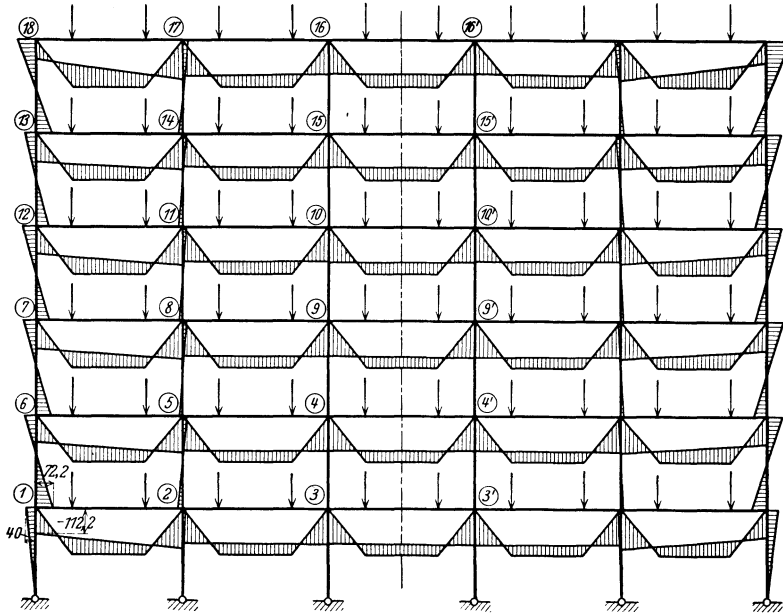


Abb. 72.

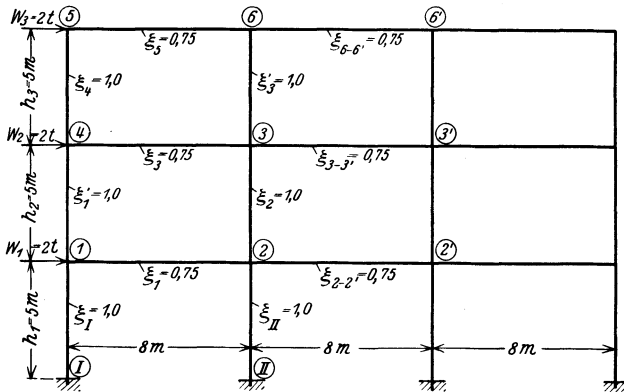


Abb. 73.

Die in Abb. 73 an die Stabe gesetzten Zahlen zeigen die Festwerte ξ an. Daraus ergeben sich die Festwerte ϱ und X :

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= \varrho_4 = 2 \{1,0 + 0,75 + 1,0\} = 5,5 \text{ cm}^3, \\ [\varrho_2] &= [\varrho_3] = 2 \{1,0 + 0,75 + 1,0 + 0,75\} + 0,75 = 7,75 \text{ cm}^3, \\ \varrho_5 &= 2 \{1,0 + 0,75\} = 3,5 \text{ cm}^3, \\ [\varrho_6] &= 2 \{0,75 + 1,0 + 0,75\} + 0,75 = 5,75 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{2}{3} \{\xi_I + \xi_{II} + \xi_{II} + \xi_I\} = \frac{2}{3} \{1,0 + 1,0 + 1,0 + 1,0\} = \frac{8}{3} \text{ cm}^3, \\ X_2 &= \frac{2}{3} \{\xi'_1 + \xi_2 + \xi_2 + \xi'_1\} = \frac{2}{3} \{1,0 + 1,0 + 1,0 + 1,0\} = \frac{8}{3} \text{ cm}^3, \\ X_3 &= \frac{2}{3} \{\xi'_3 + \xi_4 + \xi_4 + \xi'_3\} = \frac{2}{3} \{1,0 + 1,0 + 1,0 + 1,0\} = \frac{8}{3} \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

Für die Festwerte S erhält man aus Gl. (V) in bezug auf die gegebenen Belastungen:

$$\begin{aligned} S_1 &= -\frac{Q_1 h_1}{3} = -\frac{(W_1 + W_2 + W_3) h_1}{3} = -\frac{(2 + 2 + 2) \cdot 500}{3} = 1000 \text{ t} \cdot \text{cm}, \\ S_2 &= -\frac{Q_2 h_2}{3} = -\frac{(W_2 + W_3) h_2}{3} = -\frac{(2 + 2) \cdot 500}{3} = -666,6 \text{ t} \cdot \text{cm}, \\ S_3 &= -\frac{Q_3 h_3}{1} = -\frac{W_3 h_3}{3} = -\frac{2 \cdot 500}{3} = -333,3 \text{ t} \cdot \text{cm}. \end{aligned}$$

Setzt man die vorliegenden Festwerte in Tabelle XXVIII ein, so erhält man Tabelle XXIX.

Tabelle XXIX.

Gleichung	Linke Seite der Gleichung									Rechte Seite der Gleichung
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	μ_1	μ_2	μ_3	
(1)	5,5	0,75		1,0			1,0	1,0		0
(2)	0,75	7,75	1,0				1,0	1,0		0
(3)		1,0	7,75	0,75		1,0		1,0	1,0	0
(4)	1,0		0,75	5,5	1,0			1,0	1,0	0
(5)				1,0	3,5	0,75			1,0	0
(6)			1,0		0,75	5,75			1,0	0
(7)	1,0	1,0					4/3			-500
(8)	1,0	1,0	1,0	1,0				4/3		-333,3
(9)			1,0	1,0	1,0	1,0			4/3	-166,6

Aus Tabelle XXIX kann man die neun Unbekannten φ_1 bis φ_6 und μ_1 bis μ_3 durch das Iterationsverfahren II bestimmen.

Aus Gl. (1) in Tabelle XXIX bekommt man:

$$5,5 \varphi_1 + 0,75 \varphi_2 + \varphi_4 + \mu_1 + \mu_2 = 0$$

oder

$$5,5 \varphi'_1 + 0,75 \varphi'_1 + \varphi'_1 = -\mu_1 - \mu_2.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\varphi'_1 = -0,138 \mu_1 - 0,138 \mu_2.$$

Aus Gl. (2) in Tabelle XXIX erhält man:

$$0,75 \varphi_1 + 7,75 \varphi_2 + \varphi_3 + \mu_1 + \mu_2 = 0$$

oder

$$0,75 \varphi'_2 + 7,75 \varphi'_2 + \varphi'_2 = -\mu_1 - \mu_2.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\varphi'_2 = -0,105 \mu_1 - 0,105 \mu_2.$$

In analoger Weise hat man aus Gln. (3) bis (6):

$$\begin{aligned}\varphi'_3 &= -0,095 \mu_2 - 0,095 \mu_3, \\ \varphi'_4 &= -0,121 \mu_2 - 0,121 \mu_3, \\ \varphi'_5 &= -0,19 \mu_3, \\ \varphi'_6 &= -0,133 \mu_3.\end{aligned}$$

Setzt man diese Gleichungen in Gl. (7) ein, so erhält man:

$$(-0,138 \mu_1 - 0,138 \mu_2) + (-0,105 \mu_1 - 0,105 \mu_2) + \frac{4}{3} \mu_1 = -500$$

oder

$$1,09 \mu_1 - 0,243 \mu_2 = -500$$

oder auch:

$$1,09 \mu'_1 - 0,243 \mu'_1 = -500.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\mu'_1 = -590.$$

Aus Gl. (8) erhält man:

$$\begin{aligned}(-0,138 \mu_1 - 0,138 \mu_2) + (-0,105 \mu_1 - 0,105 \mu_2) + (-0,095 \mu_2 - 0,095 \mu_3) \\ + (-0,121 \mu_2 - 0,121 \mu_3) + \frac{4}{3} \mu_2 = -333,3\end{aligned}$$

oder

$$-0,243 \mu_1 + 0,874 \mu_2 - 0,216 \mu_3 = -333,3$$

oder auch

$$-0,243 \mu'_2 + 0,874 \mu'_2 - 0,216 \mu'_2 = -333,3.$$

Hieraus folgt für

$$\mu'_2 = -803.$$

Ganz analog hat man aus Gl. (9):

$$\mu'_3 = -288.$$

Damit wird:

$$\begin{aligned}\varphi'_1 &= -0,138 \mu_1 - 0,138 \mu_2 \\ &= -0,138 (\mu_1 + \mu_2) \\ &= -0,138 \{-590 - 803\} = 192. \\ \varphi'_2 &= -0,105 (\mu_1 + \mu_2) \\ &= -0,105 \{-590 - 803\} = 146. \\ \varphi'_3 &= -0,095 (\mu_2 + \mu_3) \\ &= -0,095 \{-803 - 288\} = 104. \\ \varphi'_4 &= -0,121 (\mu_2 + \mu_3), \\ &= -0,121 \{-803 - 288\} = 132. \\ \varphi'_5 &= -0,19 \mu_3 = -0,19 \cdot (-288) = 55, \\ \varphi'_6 &= -0,133 \mu_3 = -0,133 (-288) = 38.\end{aligned}$$

In Tabelle XXX sind die ersten Näherungswerte der Unbekannten eingeschrieben.

Tabelle XXX.

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	μ_1	μ_2	μ_3
Erster Näherungswert	192	146	104	132	55	38	-590	-803	-288
Zweiter Näherungswert	209	146	104,5	136	35,3	27,4	-644	-697	-352
Dritter Näherungswert	199,5	140,4	100,5	134	56,4	36,4	-630	-680	-371
Vierter Näherungswert	195	137	100	132	60,5	39,2	-624	-672	-374
Fünfter Näherungswert	193	135,6	99,5	130,5	61,2	39,8	-620	-669	-375
Sechster Näherungswert	192	135	99,5	130,5	61,4	40	-620	-669	-374
Siebenter Näherungswert	192,5	135	99,5	130	61,2	39,8	-620	-667	-373

Diese ersten Näherungswerte werden in die Gleichungen eingesetzt.
Die erste Gleichung (1) in Tabelle XXIX lautet dann:

$$5,5 \varphi_1 + 0,75 (146) + 132 - 590 - 803 = 0,$$

welche, nach φ_1 aufgelöst, den zweiten genaueren Näherungswert

$$\varphi_1'' = 209$$

liefert.

Mit diesem zweiten Näherungswert φ_1'' und anderen ersten Näherungswerten in Tabelle XXX lautet die Gleichung (2) in Tabelle XXIX:

$$0,75 (209) + 7,75 \varphi_2 + 104 - 590 - 803 = 0,$$

aus der, nachdem sie nach φ_2 aufgelöst ist, der zweite genauere Näherungswert

$$\varphi_2'' = 146$$

hervorgeht.

Gleichartig liefern weitere Rechnungen mit dem Rechenschieber die zweiten bis siebenten Näherungswerte, welche in Tabelle XXX übersichtlich angegeben sind.

Die Richtigkeit dieser Rechnungsergebnisse kann durch die Gleichgewichtsbedingungen kontrolliert und ihre Genauigkeit durch Versuche beliebig erhöht werden.

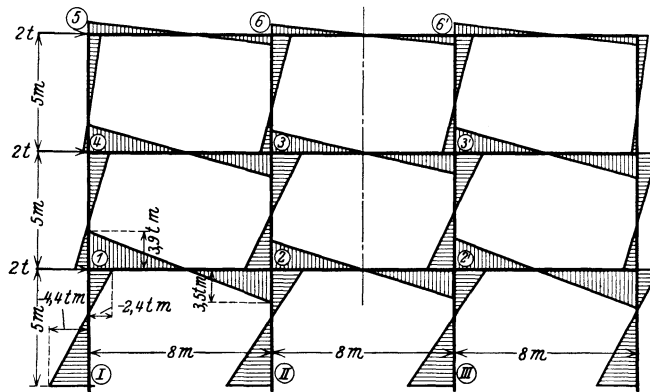


Abb. 74.

Entsprechend der Grundgleichung (I) erhält man mit den siebenten Näherungswerten:

Am Knotenpunkt I:

$$M_{1-2} = \xi_1 \{2 \varphi_1 + \varphi_2\} = 0,75 \{2 (192,5) + 135\} = 3,9 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{1-4} = \xi_1' \{2 \varphi_1 + \varphi_4 + \mu_2\} = 1,0 \cdot \{2 (192,5) + 130 - 667\} = -1,5 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{1-I} = \xi_1 \{2 \varphi_1 + \mu_1\} = 1,0 \cdot \{2 (192,5) - 620\} = -2,4 \text{ t} \cdot \text{m}.$$

Am Knotenpunkt 2:

$$M_{2-2'} = 3,0 \text{ t} \cdot \text{m}, \quad M_{2-I} = 3,5 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{2-3} = -3,0 \text{ t} \cdot \text{m}, \quad M_{2-II} = -3,5 \text{ t} \cdot \text{m}.$$

In Tabelle XXXI sind die Knotenpunktmomente zusammengestellt, und in Abb. 74 ist die Biegemomentenverteilung eingetragen.

Beispiel V. Zweifeldiger, zweigeschossiger Rechteckrahmen mit drei eingespannten Ständern. Beliebige vertikale Belastungssysteme auf den Balken. Der in Abb. 75 dargestellte Rahmen hat zwei Felder mit ungleich beschaffenen Ständern

Tabelle XXXI.

Knotenpunktmomente in t·m.			
M_{1-2}	3,9	M_{4-3}	2,7
M_{1-4}	-1,5	M_{4-5}	-0,5
M_{1-I}	-2,4	M_{4-1}	-2,2
$M_{2-2'}$	3,0	M_{5-6}	1,2
M_{2-I}	3,5	M_{5-4}	-1,2
M_{2-3}	-3,0	$M_{6-6'}$	0,9
M_{2-II}	-3,5	M_{6-5}	1,1
$M_{3-3'}$	2,2	M_{6-3}	-2,0
M_{3-4}	2,5	M_{I-1}	-4,4
M_{3-6}	-1,4	M_{II-2}	-4,9
M_{3-2}	-3,3		

und Riegeln. Gesucht sind die durch die in der Abbildung dargestellten Belastung erzeugten Biegemomente.

* Entsprechend den Gln. (VIc) und (VIIa) und nach dem Grundfall von Tabelle IIIa liefert das Verfahren der Gleichungstabulierung die folgende Tabelle, welche die Koeffizienten und Festwerteanordnung von Bestimmungsgleichungen zeigt und die acht Unbekannten finden läßt (Tabelle XXXII).

Tabelle XXXII.

Gleichung	Linke Seite der Gleichung								Rechte Seite der Gleichung
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	μ_1	μ_2	
(1)	Q_1	ξ_1				ξ'_1	ξ_I	ξ'_1	\mathfrak{M}_{12}
(2)	ξ_1	Q_2			ξ'_2		ξ_{II}	ξ'_2	$\mathfrak{M}_{23} - \mathfrak{M}_{21}$
(3)		ξ_2	Q_3	ξ_3			ξ_{III}	ξ'_3	$-\mathfrak{M}_{32}$
(4)			ξ_3	Q_4	ξ_4			ξ_3	$-\mathfrak{M}_{45}$
(5)		ξ'_2		ξ_4	Q_5	ξ_5		ξ'_2	$\mathfrak{M}_{54} - \mathfrak{M}_{56}$
(6)	ξ'_1				ξ_5	Q_6		ξ'_1	\mathfrak{M}_{65}
(7)	ξ_I	ξ_{II}	ξ_{III}				X_1		0
(8)	ξ'_1	ξ'_2	ξ_3	ξ_3	ξ'_2	ξ'_1		X_2	0

Die in Abb. 75 an die Stäbe gesetzten Zahlen geben die Festwerte ξ in cm^3 .

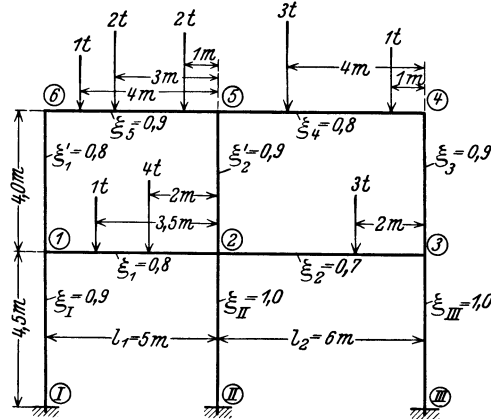


Abb. 75.

Daraus ergeben sich die Festwerte Q und X :

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= 2 \{ \xi_I + \xi_1 + \xi'_1 \} = 2 \{ 0,9 + 0,8 + 0,8 \} = 5,0 \text{ cm}^3, \\
 Q_2 &= 2 \{ \xi_{II} + \xi_1 + \xi_2 + \xi'_2 \} = 2 \{ 1,0 + 0,8 + 0,7 + 0,9 \} = 6,8 \text{ cm}^3, \\
 Q_3 &= 2 \{ \xi_{III} + \xi_2 + \xi_3 \} = 2 \{ 1,0 + 0,7 + 0,9 \} = 5,2 \text{ cm}^3, \\
 Q_4 &= 2 \{ \xi_3 + \xi_4 \} = 2 \{ 0,9 + 0,8 \} = 3,4 \text{ cm}^3, \\
 Q_5 &= 2 \{ \xi_4 + \xi_5 + \xi'_2 \} = 2 \{ 0,8 + 0,9 + 0,9 \} = 5,2 \text{ cm}^3, \\
 Q_6 &= 2 \{ \xi'_1 + \xi_3 \} = 2 \{ 0,8 + 0,9 \} = 3,4 \text{ cm}^3.
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \frac{2}{3} \{ \xi_I + \xi_{II} + \xi_{III} \} = \frac{2}{3} \{ 0,9 + 1,0 + 1,0 \} = 1,93 \text{ cm}^3, \\
 X_2 &= \frac{2}{3} \{ \xi'_1 + \xi'_2 + \xi_3 \} = \frac{2}{3} \{ 0,8 + 0,9 + 0,9 \} = 1,73 \text{ cm}^3.
 \end{aligned}$$

Für die Festwertem erhält man aus Tabelle Ia (1) in bezug auf die gegebenen Belastungen:

$$\mathfrak{M}_{12} = \frac{1}{l^2} \sum P a b^2 = \frac{1}{5^2} \{1 \cdot (1,5) (3,5)^2 + 4(3)2^2\} = 2,655 \text{ t} \cdot \text{m} = 265,5 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

$$\mathfrak{M}_{21} = \frac{1}{l^2} \sum P a^2 b = \frac{1}{5^2} \{1 \cdot (1,5)^2 (3,5) + 4(3^2)2\} = 319,5 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

$$\mathfrak{M}_{23} = \frac{P a b^2}{l^2} = \frac{1}{6^2} \{3(4)2^2\} = 133,3 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

$$\mathfrak{M}_{32} = \frac{P a^2 b}{l^2} = \frac{1}{6^2} \{3(4^2)2\} = 266,7 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

$$\mathfrak{M}_{45} = \frac{1}{l^2} \sum P a^2 b = \frac{1}{6^2} \{3(2^2)4 + 1(5^2)1\} = 202,8 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

$$\mathfrak{M}_{54} = \frac{1}{l^2} \sum P a b^2 = \frac{1}{6^2} \{3(2)4^2 + 1(5)1^2\} = 280,6 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

$$\mathfrak{M}_{56} = \frac{1}{l^2} \sum P a^2 b = \frac{1}{5^2} \{1(1^2)4 + 2(2^2)3 + 2(4^2)1\} = 240 \text{ t} \cdot \text{cm}.$$

$$\mathfrak{M}_{65} = \frac{1}{l^2} \sum P a b^2 = \frac{1}{5^2} \{1(1)4^2 + 2(2)3^2 + 2(4)1^2\} = 240 \text{ t} \cdot \text{cm}.$$

Setzt man diese Beiwerte und Festwerte in Tabelle XXXII ein, so erhält man Tabelle XXXIII, welche die acht Unbekannten φ_1 bis φ_6 und μ_1, μ_2 bestimmen läßt.

Tabelle XXXIII

Gleichung	Linke Seite der Gleichung								Rechte Seite der Gleichung
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	μ_1	μ_2	
(1)	5,0	0,8				0,8	0,9	0,8	265,5
(2)	0,8	6,8	0,7		0,9		1,0	0,9	- 186,2
(3)		0,7	5,2				1,0	0,9	- 266,7
(4)			0,9	3,4	0,8			0,9	- 202,8
(5)		0,9		0,8	5,2	0,9		0,9	40,6
(6)	0,8				0,9	3,4		0,8	240
(7)	0,9	1,0	1,0				1,93		0
(8)	0,8	0,9	0,9	0,9	0,9	0,8		1,73	0

Durch das Iterationsverfahren II erhält man aus Tabelle XXXIII die Unbekannten:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 43,05, & \varphi_5 &= 9,63, \\ \varphi_2 &= - 35,02, & \varphi_6 &= 52,97, \\ \varphi_3 &= - 44,65, & \mu_1 &= 21,2, \\ \varphi_4 &= - 55,64, & \mu_2 &= 21. \end{aligned}$$

Entsprechend der Grundgleichung (I) erhält man mit den vorliegenden Werten von φ und μ :

Am Knotenpunkt 1:

$$M_{1-2} = \xi_1 \{2 \varphi_1 + \varphi_2\} - \mathfrak{M}_{12} = 0,8 \{2(43,05) - 35,02\} - 265,5 = - 225 \text{ t} \cdot \text{cm} = - 2,25 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{1-6} = \xi_1 \{2 \varphi_1 + \varphi_6 + \mu_2\} = 0,8 \{2(43,05) + 52,97 + 21\} = 128 \text{ t} \cdot \text{cm} = 1,28 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{1-1} = \xi_1 \{2 \varphi_1 + \mu_1\} = 0,9 \{2(43,05) + 21,2\} = 97 \text{ t} \cdot \text{cm} = 0,97 \text{ t} \cdot \text{m}.$$

Die Gleichgewichtsbedingung $\Sigma M_1 = 0$ ist am Knotenpunkt 1 vollkommen erfüllt.

Am Knotenpunkt 2:

$$M_{2-1} = \xi_1 \{2 \varphi_2 + \varphi_1\} + \mathfrak{M}_{21} = 0,8 \{2(-35,02) + 43,05\} + 319,5 = 2,98 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{2-3} = \xi_2 \{2 \varphi_2 + \varphi_3\} - \mathfrak{M}_{23} = 0,7 \{2(-35,02) - 44,65\} - 133,3 = -2,14 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{2-5} = \xi'_2 \{2 \varphi_2 + \varphi_5 + \mu_2\} = 0,9 \{2(-35,02) + 9,63 + 21\} = -0,35 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{2-II} = \xi_{II} \{2 \varphi_2 + \mu_1\} = 1,0 \{2(-35,02) + 21,2\} = -0,49 \text{ t} \cdot \text{m}.$$

Die Gleichgewichtsbedingung $\Sigma M_2 = 0$ ist am Knotenpunkt 2 vollkommen erfüllt.

Am Knotenpunkt 3:

$$M_{3-2} = 1,8 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{3-4} = -1,12 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{3-III} = -0,68 \text{ t} \cdot \text{m}.$$

Am Knotenpunkt 4:

$$M_{4-5} = 1,21 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{4-3} = -1,21 \text{ t} \cdot \text{m}.$$

Am Knotenpunkt 5:

$$M_{5-4} = -3,1 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{5-6} = 3,05 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{5-2} = 0,05 \text{ t} \cdot \text{m}.$$

Am Knotenpunkt 6:

$$M_{6-5} = -1,36 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{6-1} = 1,36 \text{ t} \cdot \text{m}.$$

An jedem Knotenpunkt ist die Gleichgewichtsbedingung $\Sigma M = 0$ vollkommen erfüllt.

An den eingespannten Füßen:

$$M_{I-1} = 0,58 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{II-2} = -0,14 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{III-3} = -0,23 \text{ t} \cdot \text{m}.$$

Die Gleichgewichtsbedingung für das erste Stockwerk lautet:

$$M_{1-I} + M_{I-1} + M_{2-II} + M_{II-2} + M_{3-III} + M_{III-3} = 0,$$

worin

$$M_{1-I} = 0,97 \text{ t} \cdot \text{m}, \quad M_{II-2} = -0,14 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{I-1} = 0,58 \text{ t} \cdot \text{m}, \quad M_{3-III} = -0,68 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{2-II} = -0,49 \text{ t} \cdot \text{m}, \quad M_{III-3} = -0,23 \text{ t} \cdot \text{m}.$$

Für das zweite Stockwerk:

$$M_{1-6} + M_{6-1} + M_{2-5} + M_{5-2} + M_{3-4} + M_{4-3} = 0,$$

worin

$$M_{1-6} = 1,28 \text{ t} \cdot \text{m}, \quad M_{5-2} = 0,05 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{6-1} = 1,36 \text{ t} \cdot \text{m}, \quad M_{3-4} = -1,12 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{2-5} = -0,35 \text{ t} \cdot \text{m}, \quad M_{4-3} = -1,21 \text{ t} \cdot \text{m}.$$

Diese zwei Stockwerksgleichungen sind bis auf geringfügige Abweichungen erfüllt. In Abb. 76 ist die Biegemomenteverteilung eingetragen.

Beispiel VI. Symmetrischer, turmförmiger, zehngeschossiger Rahmen mit sieben eingespannten Ständern. Es sollen die Knotenpunktsmomente nach dem in Abb. 77 dargestellten turmförmigen, zehngeschossigen Rahmen ermittelt werden.

Er trägt auf den Balken vertikale, symmetrische Belastungen. Infolge der Symmetrie ist $\varphi_m = 0$, und eine Verschiebung der Knoten im waagerechten Sinne unmöglich, es sind also alle $\mu = 0$.

Der Rahmen ist daher zwanzigfach statisch unbestimmt.

Nach Tabelle IIa liefert das Verfahren der Gleichungstabulierung die umstehende Tabelle, aus der sich die Unbekannten φ_1 bis φ_{20} ermitteln lassen (Tabelle XXXIV).

Tabelle XXXIV.

Gleichung	Linke Seite der Gleichung																				Rechte Seite der Gleichung
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}	φ_{13}	φ_{14}	φ_{15}	φ_{16}	φ_{17}	φ_{18}	φ_{19}	φ_{20}	
(1)	Q_1	ξ_1																			M
(2)	ξ_1	Q_2	ξ_2																		0
(3)	ξ_1	ξ_2	Q_3	ξ_3																	0
(4)		ξ_2	ξ_3	Q_4	ξ_4			ξ_4													0
(5)		ξ_2	ξ_3	ξ_4	Q_5	ξ_5		ξ_5													0
(6)	ξ_1			ξ_4	ξ_5	Q_6	ξ_6														M
(7)						ξ_6															M
(8)					ξ_5	Q_7	ξ_7	ξ_8	ξ_8												0
(9)				ξ_4		ξ_7	Q_8	ξ_8	Q_9	ξ_9											0
(10)									ξ_9	Q_{10}	ξ_{10}										0
(11)								ξ_8	ξ_9	ξ_{10}	Q_{11}	ξ_{11}									$\frac{2}{3} M$
(12)									ξ_{10}	Q_{12}	ξ_{12}	Q_{13}	ξ_{13}								$\frac{2}{3} M$
(13)									ξ_{10}	ξ_{11}	Q_{12}	ξ_{13}	Q_{13}	ξ_{13}	ξ_{12}						0
(14)									ξ_{10}	ξ_{11}	ξ_{12}	Q_{13}	ξ_{13}	Q_{14}	ξ_{14}	ξ_{15}	ξ_{14}				$\frac{2}{3} M$
(15)									ξ_{10}	ξ_{11}	ξ_{12}	Q_{13}	ξ_{13}	Q_{14}	Q_{15}	ξ_{15}	ξ_{14}				$\frac{2}{3} M$
(16)																Q_{16}	ξ_{16}	ξ_{16}			0
(17)																ξ_{16}	Q_{17}	ξ_{17}			0
(18)																ξ_{17}	Q_{18}	ξ_{18}			$\frac{1}{2} M$
(19)																	ξ_{18}	Q_{19}	ξ_{19}		$\frac{1}{2} M$
(20)																	ξ_{18}	ξ_{18}	Q_{20}		$\frac{1}{2} M$

Wie vorher dargelegt, so errechnen wir zuerst die Stabwerte h, l, J für alle Stäbe und dann die Festwerte $\xi, \varrho, \mathfrak{M}$ für alle Stäbe und Knotenpunkte sowie für die gegebenen Belastungen.

Der Einfachheit halber bezeichnen wir mit konstantem ξ die Steifigkeitsgrade aller Stäbe; hieraus ergeben sich die Festwerte ϱ :

$$\varrho_1 = \varrho_6 = \varrho_{11} = \varrho_{12} = \varrho_{15} = \varrho_{18} = \varrho_{19} = 2(\xi + \xi + \xi) = 6\xi,$$

$$\varrho_2 = \varrho_3 = \varrho_4 = \varrho_5 = \varrho_8 = \varrho_9 = \varrho_{10} = \varrho_{13} = \varrho_{14} = \varrho_{17} = 2(\xi + \xi + \xi + \xi) = 8\xi,$$

$$\varrho_7 = \varrho_{16} = \varrho_{20} = 2(\xi + \xi) = 4\xi.$$

Die Festwerte \mathfrak{M} bezüglich der gegebenen Belastungen kann man aus Tabelle I erhalten; um die Aufgabe allgemeiner zu lösen, behalten wir die Festwerte \mathfrak{M} , wie in Abb. 77, bei; die Rechnungsergebnisse sind daher für verschiedene symmetrische Belastungssysteme verwendbar.

Setzt man die vorliegenden Festwerte in Tabelle XXXIV ein, so erhält man Tabelle XXXV. (Siehe S. 60.)

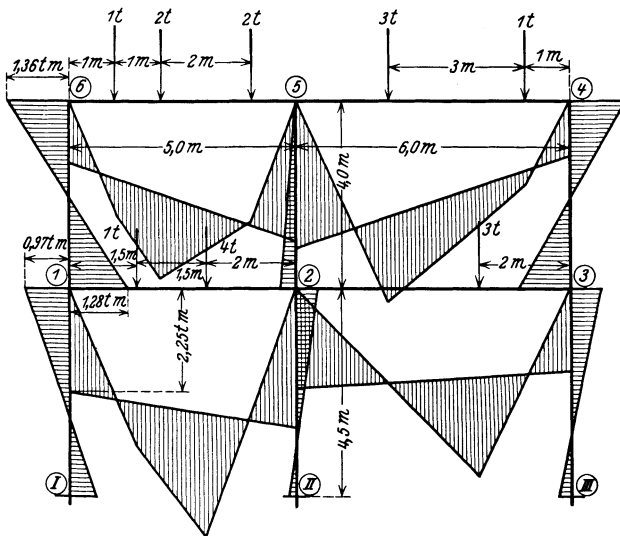


Abb. 76.

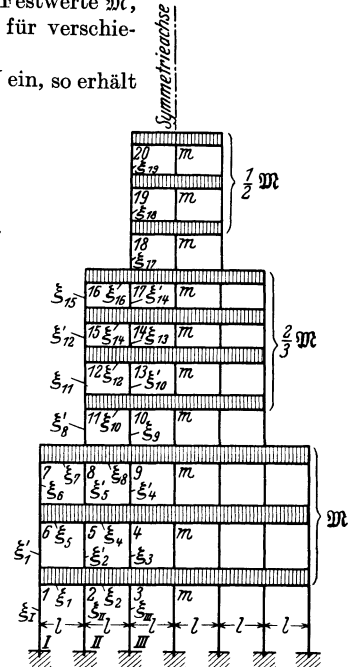


Abb. 77.

Aus Tabelle XXXV lassen sich die zwanzig Unbekannten φ_1 bis φ_{20} durch das Iterationsverfahren leicht bestimmen; die folgende Zwischenrechnung der Unbekannten φ kann ohne Anstrengung in drei Stunden bewerkstelligt werden.

Der Rechnungsverlauf ist folgender:

Aus Gl. (1) in Tabelle XXXV erhält man:

$$6\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_6 = 1, \quad (\text{Multiplikator: } \mathfrak{M} : \xi)$$

oder

$$6\varphi'_1 + \varphi'_1 + \varphi'_1 = 1.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\varphi'_1 = 0,125 \mathfrak{M} : \xi.$$

In analoger Weise hat man aus Gln. (2) bis (20) in Tabelle XXXV:

$$\varphi'_2 = \varphi'_3 = \varphi'_4 = \varphi'_5 = \varphi'_8 = \varphi'_9 = \varphi'_{10} = \varphi'_{13} = \varphi'_{14} = \varphi'_{17} = 0,$$

$$\varphi'_6 = \varphi'_{16} = 0,111 \mathfrak{M} : \xi,$$

$$\varphi'_7 = 0,167 \mathfrak{M} : \xi,$$

$$\varphi'_{11} = \varphi'_{12} = \varphi'_{15} = 0,074 \mathfrak{M} : \xi,$$

$$\varphi'_{18} = \varphi'_{19} = 0,063 \mathfrak{M} : \xi.$$

$$\varphi'_{20} = 0,1 \mathfrak{M} : \xi.$$

Tabelle XXXV.

Gleichung	Linke Seite der Gleichung																				Rechte Seite der Gleichung (M: ξ)	
	φ ₁	φ ₂	φ ₃	φ ₄	φ ₅	φ ₆	φ ₇	φ ₈	φ ₉	φ ₁₀	φ ₁₁	φ ₁₂	φ ₁₃	φ ₁₄	φ ₁₅	φ ₁₆	φ ₁₇	φ ₁₈	φ ₁₉	φ ₂₀		
(1)	6	1				1																1
(2)	1	8	1		1																	0
(3)		1	8	1																		0
(4)			1	8	1				1													0
(5)		1		1	8	1		1														0
(6)	1			1	1	6	1															1
(7)					1	4	1	1														1
(8)				1	1	1	8	1	1		1											0
(9)			1				1	8	1													0
(10)								1	8	1		1										0
(11)								1	1	6	1											0,666 666
(12)									1	1	6	1	1									0,666 666
(13)									1	1	8	1										0
(14)											1	8	1	1								0
(15)											1	1	6	1								0,666 666
(16)												1	4	1	1							0,666 666
(17)												1	1	8	1							0
(18)															1	6	1					0,5
(19)																1	6	1				0,5
(20)																	1	4				0,5

Diese ersten Näherungswerte von φ sind in Tabelle XXXVI angegeben:

Tabelle XXXVI

		φ ₁	φ ₂	φ ₃	φ ₄	φ ₅	φ ₆	φ ₇	φ ₈	φ ₉	φ ₁₀
Näherungswert	φ ^(I)	0,125	0	0	0	0	0,111	0,167	0	0	0
	φ ^(II)	0,148	-0,019	0,0024	-0,0003	-0,0115	0,116	0,221	-0,035	0,0044	-0,0098
	φ ^(III)	0,150	-0,0174	0,0022	0,0006	-0,008	0,106	0,232	-0,040	0,0062	-0,013
	φ ^(IV)	0,152	-0,0183	0,0022	-0,00005	-0,0059	0,1036	0,2341	-0,0427	0,0070	-0,0134
	φ ^(V)	0,1525	-0,0186	0,0023	-0,00042	-0,0052	0,1031	0,2349	-0,0430	0,0071	-0,0133
	φ ^(VI)	0,1526	-0,0187	0,0024	-0,00054	-0,0050	0,1029	0,2350	-0,0430	0,0071	-0,0132
	φ ^(VII)	0,1526	-0,01875	0,0024	-0,00056	-0,00507	0,1029	0,2350	-0,0430	0,0071	-0,0132
	φ ^(VIII)	0,1526	-0,01874	0,0024	-0,00055	-0,00507	0,1029	0,2350	-0,0430	0,0071	-0,0132
		φ ₁₁	φ ₁₂	φ ₁₃	φ ₁₄	φ ₁₅	φ ₁₆	φ ₁₇	φ ₁₈	φ ₁₉	φ ₂₀
Näherungswert	φ ^(I)	0,074	0,074	0	0	0,074	0,111	0	0,063	0,063	0,1
	φ ^(II)	0,106	0,081	-0,009	-0,008	0,080	0,147	-0,025	0,077	0,054	0,112
	φ ^(III)	0,107	0,081	-0,007	-0,006	0,074	0,154	-0,028	0,079	0,051	0,112
	φ ^(IV)	0,107	0,082	-0,0078	-0,0048	0,0726	0,1555	-0,0287	0,0796	0,0514	0,1121
	φ ^(V)	0,1068	0,0825	-0,0081	-0,0045	0,0722	0,1558	-0,0289	0,0796	0,0514	0,11215
	φ ^(VI)	0,1067	0,0826	-0,0081	-0,0044	0,0721	0,1559	-0,0289	0,0796	0,0514	0,11215
	φ ^(VII)	0,1067	0,0827	-0,00813	-0,00438	0,07207	0,1559	-0,0289	0,0796	0,0514	0,11215
	φ ^(VIII)	0,1067	0,0827	-0,00813	-0,00438	0,07207	0,1559	-0,0289	0,0796	0,0514	0,11215

Sie werden in die Gleichungen eingesetzt; die erste Gleichung (1) in Tabelle XXXV lautet dann:

$$6 \varphi_1 + (0) + 0,111 = 1, \quad (\text{Multiplikator } \mathfrak{M}: \xi)$$

welche, nach φ₁ aufgelöst, den zweiten genaueren Näherungswert liefert

$$\varphi_1' = 0,148 \mathfrak{M}: \xi.$$

Die zweite Gleichung (2) in Tabelle XXXV liefert mit diesem zweiten Näherungswert φ_1'' und anderen ersten Näherungswerten, nach φ_2 aufgelöst, den zweiten genaueren Näherungswert

$$\varphi_2'' = -0,019 \mathfrak{M} : \xi .$$

Ebenso geben die weiteren Rechnungen die zweiten Näherungswerte an; die Rechnung ist bis zur Bestimmung der achten Näherungswerte durchgeführt, welche in Tabelle XXXVI vereinigt sind.

Tabelle XXXVII

Knotenmomente (Multiplikator: \mathfrak{M})							
M_{1-2}	-0,713	M_{6-7}	0,441	M_{12-15}	0,237	M_{18-19}	0,211
M_{1-6}	0,408	M_{6-1}	0,358	M_{12-11}	0,272	M_{18-17}	0,130
M_{1-1}	0,305	M_{7-8}	-0,573	M_{13-12}	0,733	M_{19-m}	-0,397
M_{2-1}	1,115	M_{7-6}	0,573	M_{13-m}	-0,683	M_{19-20}	0,215
M_{2-3}	-1,035	M_{8-7}	1,149	M_{13-14}	-0,021	M_{19-18}	0,182
M_{2-5}	-0,043	M_{8-9}	-1,079	M_{13-10}	-0,029	M_{20-m}	-0,276
M_{2-II}	-0,037	M_{8-11}	0,021	M_{14-15}	0,730	M_{20-19}	0,276
M_{3-2}	0,986	M_{8-5}	-0,091	M_{14-m}	-0,675	M_{m-3}	1,002
M_{3-m}	-0,995	M_{9-8}	0,971	M_{14-17}	-0,038	M_{m-4}	1,00
M_{3-4}	0,004	M_{9-m}	-0,986	M_{14-13}	-0,017	M_{m-9}	1,007
M_{3-III}	0,005	M_{9-10}	0,001	M_{15-14}	-0,527	M_{m-10}	0,654
M_{4-5}	0,994	M_{9-4}	0,014	M_{15-16}	0,300	M_{m-13}	0,659
M_{4-m}	-1,001	M_{10-11}	0,747	M_{15-12}	0,227	M_{m-14}	0,662
M_{4-9}	0,006	M_{10-m}	-0,693	M_{16-17}	-0,384	M_{m-17}	0,638
M_{4-3}	0,001	M_{10-13}	-0,035	M_{16-15}	0,384	M_{m-18}	0,580
M_{5-6}	1,093	M_{10-9}	-0,019	M_{17-16}	0,765	M_{m-19}	0,551
M_{5-4}	-1,011	M_{11-10}	-0,466	M_{17-m}	-0,725	M_{m-20}	0,612
M_{5-8}	-0,053	M_{11-12}	0,296	M_{17-18}	0,022	M_{I-1}	0,153
M_{5-2}	-0,029	M_{11-8}	0,170	M_{17-14}	-0,062	M_{II-2}	-0,019
M_{6-5}	-0,799	M_{12-13}	-0,509	M_{18-m}	-0,341	M_{III-3}	0,002

Die Richtigkeit dieser Rechnungsergebnisse kann durch die Gleichgewichtsbedingungen kontrolliert und ihre Genauigkeit durch Versuche beliebig erhöht werden. Nun sollen im nachstehenden die Knotenpunktsmomente ermittelt und die Richtigkeit dieses Verfahrens durch die Gleichgewichtsgleichungen kontrolliert werden.

Entsprechend der Grundgleichung (I) erhält man mit den achten Näherungswerten:

Am Knotenpunkt 1:

$$M_{1-2} = \xi \{2 \varphi_1 + \varphi_2\} - \mathfrak{M} = \mathfrak{M} \{2 (0,1526) - 0,0187 - 1\} = -0,713 \mathfrak{M},$$

$$M_{1-6} = \xi \{2 \varphi_1 + \varphi_6\} = \mathfrak{M} \{2 (0,1526) + 0,1029\} = 0,408 \mathfrak{M},$$

$$M_{1-1} = \xi \{2 \varphi_1\} = \mathfrak{M} \{2 (0,1526)\} = 0,305 \mathfrak{M}.$$

Am Knotenpunkt 2:

$$M_{2-3} = \xi \{2 \varphi_2 + \varphi_3\} - \mathfrak{M} = \mathfrak{M} \{2 (-0,0187) + 0,0024 - 1\} = -1,035 \mathfrak{M},$$

$$M_{2-1} = \xi \{2 \varphi_2 + \varphi_1\} + \mathfrak{M} = \mathfrak{M} \{2 (-0,0187) + 0,1526 + 1\} = 1,115 \mathfrak{M},$$

$$M_{2-5} = \xi \{2 \varphi_2 + \varphi_5\} = \mathfrak{M} \{2 (-0,0187) - 0,0051\} = -0,043 \mathfrak{M},$$

$$M_{2-II} = \xi \{2 \varphi_2\} = \mathfrak{M} \{2 (-0,0187)\} = -0,037 \mathfrak{M} \text{ usw.}$$

In Tabelle XXXVII sind die Knotenpunktsmomente namhaft gemacht; die Gleichgewichtsbedingungen $\sum M_r = 0$ sind in den einzelnen Knoten erfüllt.

II. Geschlossene symmetrische Rechteckrahmen mit gleichmäßig verteilter Innen- oder Außenbelastung (Behälter).

§ 1. Aufstellung der Bestimmungsgleichungen.

Der in Abb. 78 dargestellte Rahmen ist n -fach statisch unbestimmt. Infolge der symmetrischen Lagerung sind alle $\mu = 0$.

Für den ersten Behälter lauten die Gleichungen:

$$\mathfrak{M}_{1-1'} = \frac{\omega_1 b^2}{12},$$

$$\mathfrak{M}_{1-2} = \mathfrak{M}_{2-1} = \frac{\omega_1 l_1^2}{12}.$$

Setzt man darin:

$$\frac{\omega_1 b^2}{12} = \mathfrak{M}'_1, \quad \frac{\omega_1 l_1^2}{12} = \mathfrak{M}_1$$

und

$$\mathfrak{M}'_1 - \mathfrak{M}_1 = \tau_1,$$

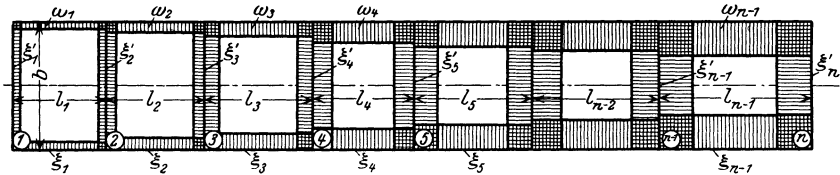


Abb. 78.

so erhält man analog für den zweiten Behälter:

$$\frac{\omega_2 b^2}{12} = \mathfrak{M}'_2, \quad \frac{\omega_2 l_2^2}{12} = \mathfrak{M}_2$$

und

$$\mathfrak{M}'_2 - \mathfrak{M}_2 = \tau_2.$$

Allgemeiner:

$$(A) \quad \mathfrak{M}'_r - \mathfrak{M}_r = \tau_r.$$

Die Momentengleichungen am Knotenpunkt I lauten:

$$\mathfrak{M}_{1-1'} = \xi'_1 \{2\varphi_1 - \varphi_1\} + \mathfrak{M}'_1,$$

$$\mathfrak{M}_{1-2} = \xi_1 \{2\varphi_1 + \varphi_2\} - \mathfrak{M}_1.$$

Die Gleichgewichtsbedingung $\Sigma M_1 = 0$ liefert:

$$(1) \quad \begin{cases} \varphi_1(\varrho_1) + \varphi_2 \xi_1 = -\tau_1, \\ \text{worin} \\ \varrho_1 = \varrho_1 - \xi'_1, \\ \tau_1 = \mathfrak{M}'_1 - \mathfrak{M}_1. \end{cases}$$

In analoger Weise lauten die Knotengleichungen:

am Knotenpunkt 2:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 \xi_1 + \varphi_2 (\varrho_2) + \varphi_3 \xi_2 + \tau_1 - \tau_2, \\ \text{worin} \\ (\varrho_2) = \varrho_2 - \xi'_2, \\ \tau_1 = \mathfrak{M}'_1 - \mathfrak{M}_1, \quad \tau_2 = \mathfrak{M}'_2 - \mathfrak{M}_2, \end{array} \right.$$

am Knotenpunkt 3:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_2 \xi_2 + \varphi_3 (\varrho_3) + \varphi_4 \xi_3 = \tau_2 - \tau_3, \\ \text{worin} \\ (\varrho_3) = \varrho_3 - \xi'_3, \\ \tau_2 = \mathfrak{M}'_2 - \mathfrak{M}_2, \quad \tau_3 = \mathfrak{M}'_3 - \mathfrak{M}_3, \end{array} \right.$$

am Knotenpunkt n:

$$(n) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_{n-1} \xi_{n-1} + \varphi_n (\varrho_n) = \tau_{n-1}, \\ \text{worin} \\ (\varrho_n) = \varrho_n - \xi'_n, \\ \tau_{n-1} = \mathfrak{M}'_{n-1} - \mathfrak{M}_{n-1}, \end{array} \right.$$

allgemeiner:

am Knotenpunkt r:

$$(B) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_{r-1} \xi_{r-1} + \varphi_r (\varrho_r) + \varphi_{r+1} \xi_r = \tau_{r-1} - \tau_r, \\ \text{worin} \\ (\varrho_r) = \varrho_r - \xi'_r, \\ \tau_{r-1} = \mathfrak{M}'_{r-1} - \mathfrak{M}_{r-1}, \quad \tau_r = \mathfrak{M}'_r - \mathfrak{M}_r. \end{array} \right.$$

In Tabelle XXXVIII sind die vorliegenden Bestimmungsgleichungen übersichtlich angegeben und man bemerkt darin vollkommene Spiegelsymmetrie in bezug auf die diagonale (ϱ)-Linie und regelmäßige Anordnung von τ .

Tabelle XXXVIII.

Gleichung	Linke Seite der Gleichung								Rechte Seite der Gleichung
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	\rightarrow	φ_{n-1}	φ_n	
(1)	(ϱ_1)	ξ_1							$-\tau_1$
(2)	ξ_1	(ϱ_2)							$\tau_1 - \tau_2$
(3)		ξ_2	(ϱ_3)						$\tau_2 - \tau_3$
(4)		ξ_2	ξ_3	(ϱ_4)					$\tau_3 - \tau_4$
			ξ_3	ξ_4					\downarrow
				ξ_4					
(n-1)						ξ_{n-2}	(ϱ_{n-1})	ξ_{n-1}	$\tau_{n-2} - \tau_{n-1}$
(n)						ξ_{n-1}	(ϱ_n)	ξ_n	τ_{n-1}

§ 2. Sonderfälle.

Sonderfall I. Gesucht sind die Knotenpunktsmomente an dem in Abb. 79 dargestellten Behälter.

Es sind dabei:

$$\tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = \dots = \tau_{n-1} = 0.$$

Damit erhält man aus Tabelle XXXVIII die folgende Tabelle XXXIX.

Tabelle XXXIX.

Gleichung	Linke Seite der Gleichung								Rechte Seite der Gleichung	
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	\rightarrow	φ_{n-1}	φ_n		
(1)	(Q_1)	ξ_1								$-\tau_1$
(2)	ξ_1	(Q_2)	ξ_2							τ_1
(3)		ξ_2	(Q_3)	ξ_3						0
(4)			ξ_3	(Q_4)	ξ_4					0
\downarrow						\downarrow				\downarrow
(n-1)						ξ_{n-2}	(Q_{n-1})	ξ_{n-1}		0
(n)						ξ_{n-1}	(Q_n)			0

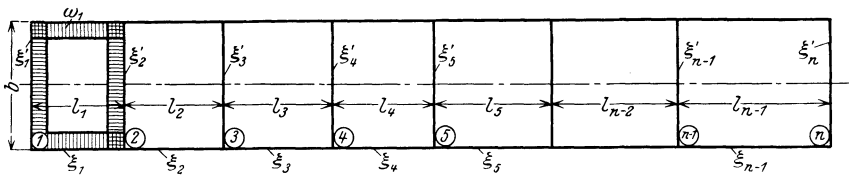


Abb. 79.

Aus Tabelle XXXIX kann man die n Unbekannten φ_1 bis φ_n durch das Iterationsverfahren I bestimmen.

Sonderfall II. Der in Abb. 80 dargestellte Rahmen ist ebenfalls n -fach statisch unbestimmt; die Unbekannten können aus Tabelle XL durch das Iterationsverfahren I bestimmt werden.

Tabelle XL.

Gleichung	Linke Seite der Gleichung								Rechte Seite der Gleichung	
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	\rightarrow	φ_{n-1}	φ_n		
(1)	(Q_1)	ξ_1								0
(2)	ξ_1	(Q_2)	ξ_2							$-\tau_2$
(3)		ξ_2	(Q_3)	ξ_3						τ_2
(4)			ξ_3	(Q_4)	ξ_4					0
\downarrow						\downarrow				\downarrow
(n-1)						ξ_{n-2}	(Q_{n-1})	ξ_{n-1}		0
(n)						ξ_{n-1}	(Q_n)			0

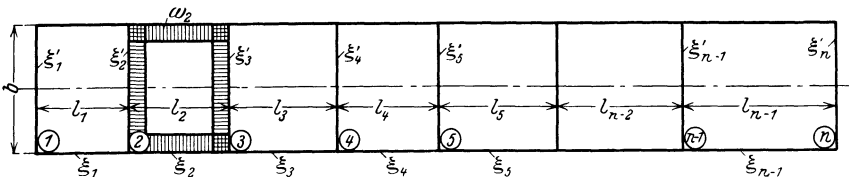


Abb. 80.

Sonderfall III. Es sollen die Knotenpunktmomente nach dem in Abb. 81 dargestellten Behälter ermittelt werden.

Die rechte Seite der Gleichungen von Tabelle XXXVIII möge, wie folgt, umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned}
 -\tau_1 &= -(\mathfrak{M}'_1 - \mathfrak{M}_1), \\
 \tau_1 - \tau_2 &= \mathfrak{M}'_1 - \mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}'_2 + \mathfrak{M}_2, \\
 \tau_2 - \tau_3 &= \mathfrak{M}'_2 - \mathfrak{M}_2 - \mathfrak{M}'_3 + \mathfrak{M}_3, \\
 &\vdots \\
 \tau_{n-2} - \tau_{n-1} &= \mathfrak{M}'_{n-2} - \mathfrak{M}_{n-2} = \mathfrak{M}'_{n-1} + \mathfrak{M}_{n-1}, \\
 \tau_{n-1} &= \mathfrak{M}'_{n-1} - \mathfrak{M}_{n-1}.
 \end{aligned}$$

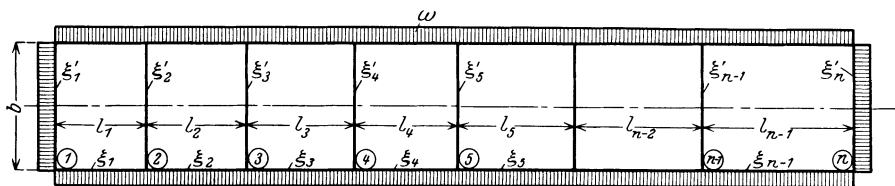


Abb. 81.

Da aber die Belastung hierbei von außen wirkt und gleichmäßig verteilt ist, so kann man den gegebenen Rahmen durch Einsetzung in Tabelle XXXVIII auf folgende Weise berechnen:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{M}'_1 &= \mathfrak{M}'_2 = \mathfrak{M}'_3 = \dots = \mathfrak{M}'_{n-1} = -\mathfrak{M}_{(b)} = -\frac{\omega b^2}{12}, \\
 \mathfrak{M}_1 &= -\mathfrak{M}_{(1)} = -\frac{\omega l_1^2}{12}, & \mathfrak{M}_2 &= -\mathfrak{M}_{(2)} = -\frac{\omega l_2^2}{12}, \\
 \mathfrak{M}_3 &= -\mathfrak{M}_{(3)} = -\frac{\omega l_3^2}{12}, \\
 &\vdots \\
 \mathfrak{M}_{n-1} &= -\mathfrak{M}_{(n-1)} = -\frac{\omega l_{n-1}^2}{12}.
 \end{aligned}$$

Damit erhält man aus Tabelle XXXVIII die folgende Tabelle, die die n Unbekannten φ_1 bis φ_n bestimmen läßt (Tabelle XLI).

Tabelle XLI.

Gleichung	Linke Seite der Gleichung							Rechte Seite der Gleichung	
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	\rightarrow	φ_{n-1}		φ_n
(1)	(ϱ_1)	ξ_1							$\mathfrak{M}_{(b)} - \mathfrak{M}_{(1)}$
(2)	ξ_1	(ϱ_2)	ξ_2						$\mathfrak{M}_{(1)} - \mathfrak{M}_{(2)}$
(3)		ξ_2	(ϱ_3)	ξ_3					$\mathfrak{M}_{(2)} - \mathfrak{M}_{(3)}$
(4)		ξ_3	ξ_3	(ϱ_4)	ξ_4				$\mathfrak{M}_{(3)} - \mathfrak{M}_{(4)}$
\downarrow				\downarrow	\downarrow	\downarrow			\downarrow
(n-1)					ξ_{n-2}	(ϱ_{n-1})	ξ_{n-1}		$\mathfrak{M}_{(n-2)} - \mathfrak{M}_{(n-1)}$
(n)					ξ_{n-1}	ξ_{n-1}	(ϱ_n)		$\mathfrak{M}_{(n-1)} - \mathfrak{M}_{(b)}$

§ 3. Zahlenbeispiel.

Gesucht sind die Knotenpunktmomente an dem in Abb. 82 skizzierten Behälter. Aus den in Abb. 82 eingesetzten Zahlen berechnen sich:

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \dots = \xi_7 = \frac{280}{280} = 1,0 \text{ cm}^3,$$

$$\xi'_1 = \xi'_2 = \xi'_3 = \dots = \xi'_8 = \frac{400}{400} = 1,0 \text{ cm}^3,$$

somit ergeben sich:

$$(\varrho_1) = (\varrho_8) = 2(1,0 + 1,0) - 1,0 = 3,0 \text{ cm}^3,$$

$$(\varrho_2) = (\varrho_3) = (\varrho_4) = \dots = (\varrho_7) = 2(1,0 + 1,0 + 1,0) - 1,0 = 5,0 \text{ cm}^3.$$

Mit diesen Werten erhält man aus Tabelle XXXIX die Tabelle XLII, welche die acht Unbekannten φ_1 bis φ_8 bestimmen läßt.

Tabelle XLII.

Gleichung	Linke Seite der Gleichung								Rechte Seite der Gleichung
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	Multiplikator: τ_1
(1)	3	1							-1
(2)	1	5							+1
(3)		1	5						0
(4)			1	5					0
(5)				1	5				0
(6)					1	5			0
(7)						1	5	1	0
(8)							1	3	0

Aus Tabelle XLII ergeben sich durch das Iterationsverfahren I:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -0,433, \\ \varphi_2 &= 0,299, \\ \varphi_3 &= -0,062, \\ \varphi_4 &= 0,013, \\ \varphi_5 &= -0,0027, \\ \varphi_6 &= 0,00056, \\ \varphi_7 &= -0,00012, \\ \varphi_8 &= 0,00003. \end{aligned}$$

(Multiplikator: τ_1)

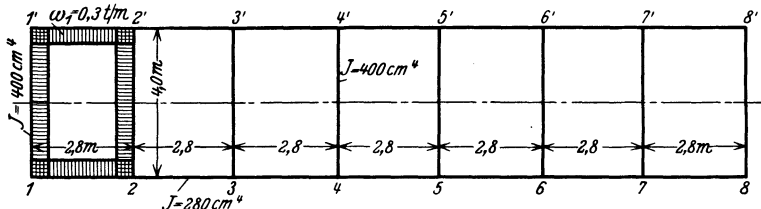


Abb. 82.

Mit den Näherungswerten erhält man:

am Knotenpunkt 1:

$$M_{1-2} = 1,0 \{2(-0,433) + 0,299\} \tau_1 - \mathfrak{M}_1,$$

worin

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{\omega_1 l^2}{12} = \frac{0,3(2,8)^2}{12} = 0,196 \text{ t} \cdot \text{m} = 19,6 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

$$\tau_1 = \mathfrak{M}'_1 - \mathfrak{M}_1 = \frac{0,3(4,0)^2}{12} - 0,196 = 0,204 \text{ t} \cdot \text{m} = 20,4 \text{ t} \cdot \text{cm}.$$

Damit folgt:

$$M_{1-2} = 1,0 \{2(-0,433) + 0,299\} (20,4) - 19,6 = -31,2 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

$$M_{1-1'} = 1,0 \{2(-0,433) + 0,433\} (20,4) + 40 = 31,2 \text{ t} \cdot \text{cm}.$$

Am Knotenpunkt 2 ergibt sich:

$$M_{2-3} = 1,0 \{2(0,299) - 0,062\} (20,4) = 10,9 \text{ t} \cdot \text{cm} ,$$

$$M_{2-1} = 1,0 \{2(0,299) - 0,433\} (20,4) + 19,6 = 23,0 \text{ t} \cdot \text{cm} ,$$

$$M_{2-2'} = 1,0 \{2(0,299) - 0,299\} (20,4) - 40,0 = 33,9 \text{ t} \cdot \text{cm} ,$$

am Knotenpunkt 3:

$$M_{3-4} = 1,0 \{2(-0,062) + 0,013\} (20,4) = -2,3 \text{ t} \cdot \text{cm} ,$$

$$M_{3-2} = 1,0 \{2(-0,062) + 0,299\} (20,4) = 3,6 \text{ t} \cdot \text{cm} ,$$

$$M_{3-3'} = 1,0 \{2(-0,062) + 0,062\} (20,4) = -1,3 \text{ t} \cdot \text{cm} ,$$

am Knotenpunkt 4:

$$M_{4-5} = 1,0 \{2(0,013) - 0,0027\} (20,4) = 0,47 \text{ t} \cdot \text{cm} ,$$

$$M_{4-3} = 1,0 \{2(0,013) - 0,062\} (20,4) = -0,73 \text{ t} \cdot \text{cm} ,$$

$$M_{4-4'} = 1,0 \{2(0,013) - 0,013\} (20,4) = 0,26 \text{ t} \cdot \text{cm} ,$$

am Knotenpunkt 5:

$$M_{5-6} = 1,0 \{2(-0,0027) + 0,00056\} (20,4) = -0,10 \text{ t} \cdot \text{cm} ,$$

$$M_{5-4} = 1,0 \{2(-0,0027) + 0,013\} (20,4) = 0,16 \text{ t} \cdot \text{cm} ,$$

$$M_{5-5'} = 1,0 \{2(-0,0027) + 0,0027\} (20,4) = -0,06 \text{ t} \cdot \text{cm} ,$$

am Knotenpunkt 6:

$$M_{6-7} = 1,0 \{2(0,00056) - 0,00012\} (20,4) = 0,02 \text{ t} \cdot \text{cm} ,$$

$$M_{6-5} = 1,0 \{2(0,00056) - 0,0027\} (20,4) = -0,03 \text{ t} \cdot \text{cm} ,$$

$$M_{6-6'} = 1,0 \{2(0,00056) - 0,00056\} (20,4) = 0,01 \text{ t} \cdot \text{cm} ,$$

am Knotenpunkt 7:

$$M_{7-8} = 1,0 \{2(-0,00012) + 0,00004\} (20,4) = -0,0041 \text{ t} \cdot \text{cm} ,$$

$$M_{7-6} = 1,0 \{2(-0,00012) + 0,00056\} (20,4) = 0,0065 \text{ t} \cdot \text{cm} ,$$

$$M_{7-7'} = 1,0 \{2(-0,00012) + 0,00012\} (20,4) = -0,0024 \text{ t} \cdot \text{cm} ,$$

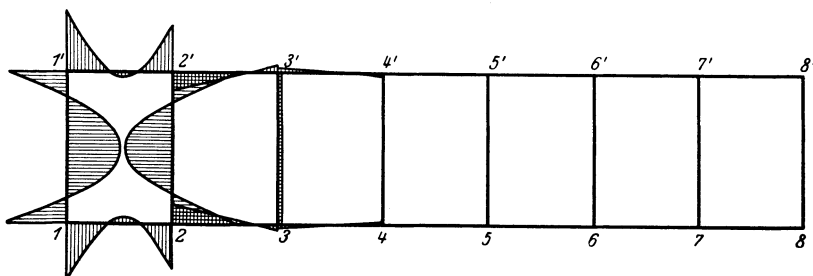


Abb. 83.

am Knotenpunkt 8:

$$M_{8-7} = 1,0 \{2(0,00004) - 0,00012\} (20,4) = -0,0008 \text{ t} \cdot \text{cm} ,$$

$$M_{8-8'} = 1,0 \{2(0,00004) - 0,00004\} (20,4) = 0,0008 \text{ t} \cdot \text{cm} .$$

Mit diesen Rechnungsergebnissen sind die Biegemomente in Abb. 83 eingetragen.

Zweiter Abschnitt.

Tabellarische Momentenübersicht für Rahmen mit ξ von demselben Wert.

Vorbemerkungen zur Anwendung der Momententabellen.

In diesem Abschnitt werden die Rechnungsergebnisse von Knotenmomenten für Rahmen mit ξ von demselben Wert tabellenförmig angegeben.

Die Arbeit umfaßt:

in Kapitel I die symmetrischen Rahmen mit beliebigen symmetrischen bzw. vertikalen Belastungssystemen auf den Balken¹,

in Kapitel II die symmetrischen Rahmen mit waagerechter Einzellast in dem Knotenpunkt auf der vertikalen linken Seite des Rahmengebildes.

Als Zahlenbeispiel zur Anwendung der Momententabellen möge im nachfolgenden die Berechnung verschiedener Stockwerkrahmen mit verschiedenen Belastungssystemen vorgeführt werden.

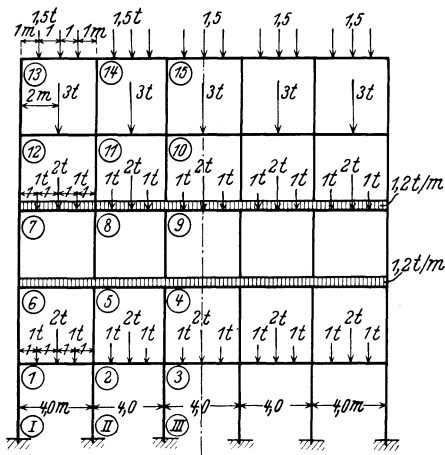


Abb. 84.

a) Beispiel zu Kapitel I.

Gesucht sind die Knotenpunktsmomente nach dem in Abb. 84 skizzierten Rahmen, der auf den Balken vertikale, symmetrische, wie in Abb. 84 dargestellte Belastungen trägt.

Das Beispiel kann durch Zusammenlegung der in Abb. 85 bis 89 skizzierten fünf Rahmenbeispiele berechnet werden.

Mit Bezug auf Abb. 85 erhält man aus Tabelle Ib

$$\mathfrak{M} = \frac{5}{16} Pl = \frac{5}{16} (1,5) (4,0) = 1,875 \text{ t} \cdot \text{m}$$

¹ Für Rahmen mit ξ von demselben Wert können folgende Ausdrücke als Grundgleichungen für Knotenpunktsmomente sich als nutzbringend erweisen:

$$M_{ks} = 2 \varphi_k + \varphi_s + \mu_{ks} - \mathfrak{M}_{ks},$$

$$M_{sk} = 2 \varphi_s + \varphi_k + \mu_{ks} + \mathfrak{M}_{sk},$$

worin

$$\varphi_k = 2 E \xi \vartheta_k, \quad \varphi_s = 2 E \xi \vartheta_s,$$

$$\mu_{ks} = - 6 E \xi \Psi_{ks}.$$

Im allgemeinen ist es das letzte Erfordernis, die Knotenpunktsmomente zu finden, und dafür können statt φ und μ in Gl. (I) im ersten Abschnitt die vorstehenden Unbekannten φ und μ gute Dienste leisten.

und aus der Momententabelle 54 ergibt sich:

am Knotenpunkt I:

$$\begin{aligned} M_{1-2}^{(a)} &= 0,0005 \mathfrak{M} = 0,0005 (1,875) = 0,00094 \text{ t} \cdot \text{m}, \\ M_{1-6}^{(a)} &= -0,0011 \mathfrak{M} = -0,0011 (1,875) = -0,00206 \text{ t} \cdot \text{m}, \\ M_{1-I}^{(a)} &= 0,0006 \mathfrak{M} = 0,0006 (1,875) = 0,00113 \text{ t} \cdot \text{m}, \end{aligned}$$

am Knotenpunkt 2:

$$\begin{aligned} M_{2-1}^{(a)} &= 0,00005 \mathfrak{M} = 0,00005 (1,875) = 0,00009 \text{ t} \cdot \text{m}, \\ M_{2-3}^{(a)} &= -0,00019 \mathfrak{M} = -0,00019 (1,875) = -0,00036 \text{ t} \cdot \text{m}, \\ M_{2-5}^{(a)} &= 0,00038 \mathfrak{M} = 0,00038 (1,875) = 0,00071 \text{ t} \cdot \text{m}, \\ M_{2-II}^{(a)} &= -0,00025 \mathfrak{M} = -0,00025 (1,875) = -0,00047 \text{ t} \cdot \text{m} \text{ usw.} \end{aligned}$$

Mit Bezug auf Abb. 86 erhält man aus Tabelle I b

$$\mathfrak{M} = \frac{Pl}{8} = \frac{3(4,0)}{8} = 1,5 \text{ t} \cdot \text{m};$$

die Momententabelle 55 zeigt, daß

am Knotenpunkt I:

$$\begin{aligned} M_{1-2}^{(b)} &= -0,0018 \mathfrak{M} = -0,0018 (1,5) = -0,00270 \text{ t} \cdot \text{m}, \\ M_{1-6}^{(b)} &= 0,0039 \mathfrak{M} = 0,0039 (1,5) = 0,00585 \text{ t} \cdot \text{m}, \\ M_{1-I}^{(b)} &= -0,0021 \mathfrak{M} = -0,0021 (1,5) = -0,00315 \text{ t} \cdot \text{m}, \end{aligned}$$

am Knotenpunkt 2:

$$\begin{aligned} M_{2-1}^{(b)} &= -0,0003 \mathfrak{M} = -0,0003 (1,5) = -0,00045 \text{ t} \cdot \text{m}, \\ M_{2-3}^{(b)} &= 0,0006 \mathfrak{M} = 0,0006 (1,5) = 0,00090 \text{ t} \cdot \text{m}, \\ M_{2-5}^{(b)} &= -0,0011 \mathfrak{M} = -0,0011 (1,5) = -0,00165 \text{ t} \cdot \text{m}, \\ M_{2-II}^{(b)} &= 0,0008 \mathfrak{M} = 0,0008 (1,5) = 0,00120 \text{ t} \cdot \text{m} \text{ usw.} \end{aligned}$$

Mit Bezug auf Abb. 87 erhält man aus Tabelle I b:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \frac{gl^2}{12} + \frac{(a+b)}{l^2} \{2P_1 a(a+2b) + P_2(a+b)^2\} \\ &= \frac{1,2(4,0)^2}{12} + \frac{2}{(4,0)^2} \{2(3) + 2(2)^2\} = 3,35 \text{ t} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

und aus der Momententabelle 56 läßt sich ablesen

am Knotenpunkt I:

$$\begin{aligned} M_{1-2}^{(c)} &= 0,0097 \mathfrak{M} = 0,0097 (3,35) = 0,03250 \text{ t} \cdot \text{m}, \\ M_{1-6}^{(c)} &= -0,0211 \mathfrak{M} = -0,0211 (3,35) = -0,07069 \text{ t} \cdot \text{m}, \\ M_{1-I}^{(c)} &= 0,0114 \mathfrak{M} = 0,0114 (3,35) = 0,03819 \text{ t} \cdot \text{m}, \end{aligned}$$

am Knotenpunkt 2:

$$\begin{aligned} M_{2-1}^{(c)} &= 0,0023 \mathfrak{M} = 0,0023 (3,35) = 0,00771 \text{ t} \cdot \text{m}, \\ M_{2-3}^{(c)} &= -0,0030 \mathfrak{M} = -0,0030 (3,35) = -0,01005 \text{ t} \cdot \text{m}, \\ M_{2-5}^{(c)} &= 0,0042 \mathfrak{M} = 0,0042 (3,35) = 0,01407 \text{ t} \cdot \text{m}, \\ M_{2-II}^{(c)} &= -0,0035 \mathfrak{M} = -0,0035 (3,35) = -0,01173 \text{ t} \cdot \text{m} \text{ usw.} \end{aligned}$$

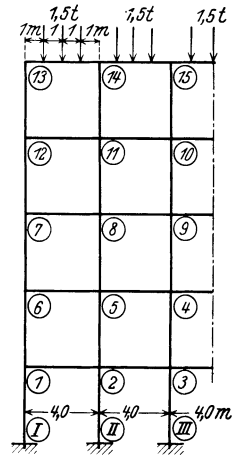


Abb. 85.

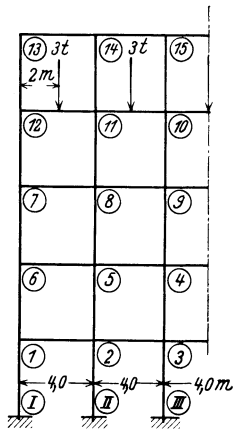


Abb. 86.

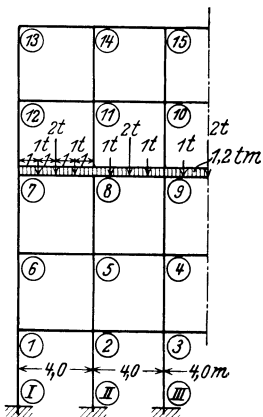


Abb. 87.

Nach Abb. 88 erhält man aus Tabelle Ib:

$$M = \frac{q l^2}{12} = \frac{1,2(4,0)^2}{12} = 1,6 \text{ t} \cdot \text{m}$$

und aus der Momententabelle 57:

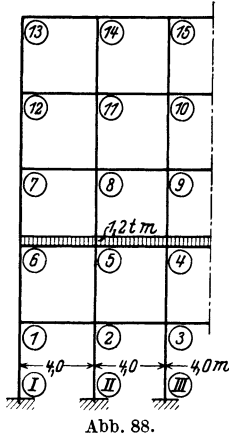


Abb. 88.

am Knotenpunkt I:

$$M_{1-2}^{(d)} = -0,0557 \mathfrak{M} = -0,0557 (1,6) = -0,08912 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{1-6}^{(d)} = 0,1186 \mathfrak{M} = 0,1186 (1,6) = 0,18976 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{1-1}^{(d)} = -0,0629 \mathfrak{M} = -0,0629 (1,6) = -0,10064 \text{ t} \cdot \text{m}$$

am Knotenpunkt 2:

$$M_{2-1}^{(d)} = -0,0169 \mathfrak{M} = -0,0169 (1,6) = -0,02704 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{2-3}^{(d)} = 0,0129 \mathfrak{M} = 0,0129 (1,6) = 0,02064 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{2-5}^{(d)} = -0,0105 \mathfrak{M} = -0,0105 (1,6) = -0,01680 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{2-II}^{(d)} = 0,0145 \mathfrak{M} = 0,0145 (1,6) = 0,02320 \text{ t} \cdot \text{m} \text{ usw.}$$

Gemäß Abb. 89 erhält man aus Tabelle Ib:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \frac{(a+b)}{l^2} \{2P_1 a(a+2b) + P_2 (a+b)^2\} \\ &= \frac{2}{(4)^2} \{2(3) + 2(2)^2\} = 1,75 \text{ t} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

und aus der Momententabelle 58 ergibt sich:

am Knotenpunkt I:

$$M_{1-2}^{(e)} = -0,6717 \mathfrak{M} = -0,6717 (1,75) = -1,17548 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{1-6}^{(e)} = 0,3201 \mathfrak{M} = 0,3201 (1,75) = 0,56018 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{1-1}^{(e)} = 0,3516 \mathfrak{M} = 0,3516 (1,75) = 0,61530 \text{ t} \cdot \text{m},$$

am Knotenpunkt 2:

$$M_{2-1}^{(e)} = 1,1291 \mathfrak{M} = 1,1291 (1,75) = 1,97593 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{2-3}^{(e)} = -1,0431 \mathfrak{M} = -1,0431 (1,75) = -1,82543 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{2-5}^{(e)} = -0,0394 \mathfrak{M} = -0,0394 (1,75) = -0,06895 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{2-II}^{(e)} = -0,0467 \mathfrak{M} = -0,0467 (1,75) = -0,08173 \text{ t} \cdot \text{m} \text{ usw.}$$

Damit wird durch die Zusammenlegung der vorliegenden fünf einzelnen Fälle:

am Knotenpunkt I (Abb. 84):

$$M_{1-2} = M_{1-2}^{(a)} + M_{1-2}^{(b)} + M_{1-2}^{(c)} + M_{1-2}^{(d)} + M_{1-2}^{(e)} = \sum_{n=a}^e M_{1-2}^{(n)}$$

$$= 0,00094 - 0,00270 + 0,03250 - 0,08912 - 1,17548 = -1,23 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{1-6} = \sum_{n=a}^e M_{1-6}^{(n)} = -0,00206 + 0,00585 - 0,07069 + 0,18976 + 0,56018 = 0,68 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{1-1} = \sum_{n=a}^e M_{1-1}^{(n)} = 0,00113 - 0,00315 + 0,03819 - 0,10064 + 0,61530 = 0,55 \text{ t} \cdot \text{m},$$

am Knotenpunkt 2 (Abb. 84):

$$M_{2-1} = \sum_{n=a}^e M_{2-1}^{(n)} = 0,00009 - 0,00045 + 0,00771 - 0,02704 + 1,97593 = 1,95 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{2-3} = \sum_{n=a}^e M_{2-3}^{(n)} = -0,00036 + 0,00090 - 0,01005 + 0,02064 - 1,82543 = -1,81 \text{ t} \cdot \text{m},$$

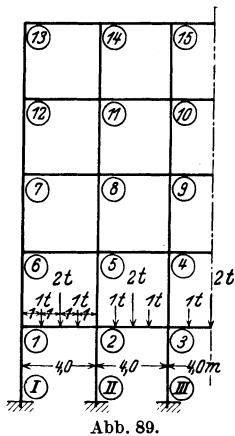


Abb. 89.

$$M_{2-5} = \sum_{n=a}^e M_{2-5}^{(n)} = 0,00071 - 0,00165 + 0,01407 - 0,01680 - 0,06895 = -0,07 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{2-II} = \sum_{n=a}^e M_{2-II}^{(n)} = -0,00047 + 0,00120 - 0,01173 + 0,02320 - 0,08173 = -0,07 \text{ t} \cdot \text{m}.$$

In analoger Weise wird

am Knotenpunkt 3:

$$\begin{aligned} M_{3-3'} &= -1,74 \text{ t} \cdot \text{m}, & M_{3-2} &= 1,7 \text{ t} \cdot \text{m}, \\ M_{3-4} &= 0,02 \text{ t} \cdot \text{m}, & M_{3-III} &= 0,01 \text{ t} \cdot \text{m}, \end{aligned}$$

am Knotenpunkt 4:

$$\begin{aligned} M_{4-4'} &= -1,60 \text{ t} \cdot \text{m}, & M_{4-5} &= 1,59 \text{ t} \cdot \text{m}, \\ M_{4-9} &= 0,01 \text{ t} \cdot \text{m}, & M_{4-3} &= 0,002 \text{ t} \cdot \text{m}. \end{aligned}$$

am Knotenpunkt 5:

$$\begin{aligned} M_{5-4} &= -1,61 \text{ t} \cdot \text{m}, & M_{5-6} &= 1,73 \text{ t} \cdot \text{m}, \\ M_{5-8} &= -0,08 \text{ t} \cdot \text{m}, & M_{5-2} &= -0,04 \text{ t} \cdot \text{m}, \end{aligned}$$

am Knotenpunkt 6:

$$\begin{aligned} M_{6-5} &= -1,34 \text{ t} \cdot \text{m}, & M_{6-7} &= 0,80 \text{ t} \cdot \text{m}, \\ M_{6-1} &= 0,54 \text{ t} \cdot \text{m}, & & \end{aligned}$$

am Knotenpunkt 7:

$$\begin{aligned} M_{7-8} &= -2,4 \text{ t} \cdot \text{m}, & M_{7-12} &= 1,2 \text{ t} \cdot \text{m}, \\ M_{7-6} &= 1,2 \text{ t} \cdot \text{m}, & & \end{aligned}$$

am Knotenpunkt 8:

$$\begin{aligned} M_{8-9} &= -3,48 \text{ t} \cdot \text{m}, & M_{8-7} &= 3,75 \text{ t} \cdot \text{m}, \\ M_{8-11} &= -0,13 \text{ t} \cdot \text{m}, & M_{8-5} &= -0,14 \text{ t} \cdot \text{m}, \end{aligned}$$

am Knotenpunkt 9:

$$\begin{aligned} M_{9-9'} &= -3,3 \text{ t} \cdot \text{m}, & M_{9-8} &= 3,28 \text{ t} \cdot \text{m}, \\ M_{9-10} &= 0,02 \text{ t} \cdot \text{m}, & M_{9-4} &= 0,01 \text{ t} \cdot \text{m}, \end{aligned}$$

am Knotenpunkt 10:

$$\begin{aligned} M_{10-10'} &= -1,51 \text{ t} \cdot \text{m}, & M_{10-11} &= 1,50 \text{ t} \cdot \text{m}, \\ M_{10-15} &= 0,01 \text{ t} \cdot \text{m}, & M_{10-9} &= 0,00 \text{ t} \cdot \text{m}, \end{aligned}$$

am Knotenpunkt 11:

$$\begin{aligned} M_{11-10} &= -1,49 \text{ t} \cdot \text{m}, & M_{11-12} &= 1,60 \text{ t} \cdot \text{m}, \\ M_{11-14} &= -0,06 \text{ t} \cdot \text{m}, & M_{11-8} &= -0,05 \text{ t} \cdot \text{m}, \end{aligned}$$

am Knotenpunkt 12:

$$\begin{aligned} M_{12-11} &= -1,33 \text{ t} \cdot \text{m}, & M_{12-13} &= 0,63 \text{ t} \cdot \text{m}, \\ M_{12-7} &= 0,69 \text{ t} \cdot \text{m}, & & \end{aligned}$$

am Knotenpunkt 13:

$$M_{13-14} = -1,02 \text{ t} \cdot \text{m}, \quad M_{13-12} = 1,02 \text{ t} \cdot \text{m},$$

am Knotenpunkt 14:

$$\begin{aligned} M_{14-15} &= -2,02 \text{ t} \cdot \text{m}, & M_{14-13} &= 2,18 \text{ t} \cdot \text{m}, \\ M_{14-11} &= -0,16 \text{ t} \cdot \text{m}, & & \end{aligned}$$

am Knotenpunkt 15:

$$\begin{aligned} M_{15-15'} &= -1,86 \text{ t} \cdot \text{m}, & M_{15-14} &= 1,83 \text{ t} \cdot \text{m}, \\ M_{15-10} &= 0,03 \text{ t} \cdot \text{m}, & & \end{aligned}$$

am eingespannten Punkt:

$$\begin{aligned} M_{I-1} &= 0,28 \text{ t} \cdot \text{m}, & M_{II-2} &= -0,06 \text{ t} \cdot \text{m}, \\ M_{III-3} &= 0,005 \text{ t} \cdot \text{m}. & & \end{aligned}$$

Die Gleichgewichtsbedingungen $\Sigma M_i = 0$ sind in den einzelnen Knoten bis auf geringfügige Abweichungen erfüllt.

Mit diesen Werten sind in Abb. 90 die Biegemomente eingetragen.

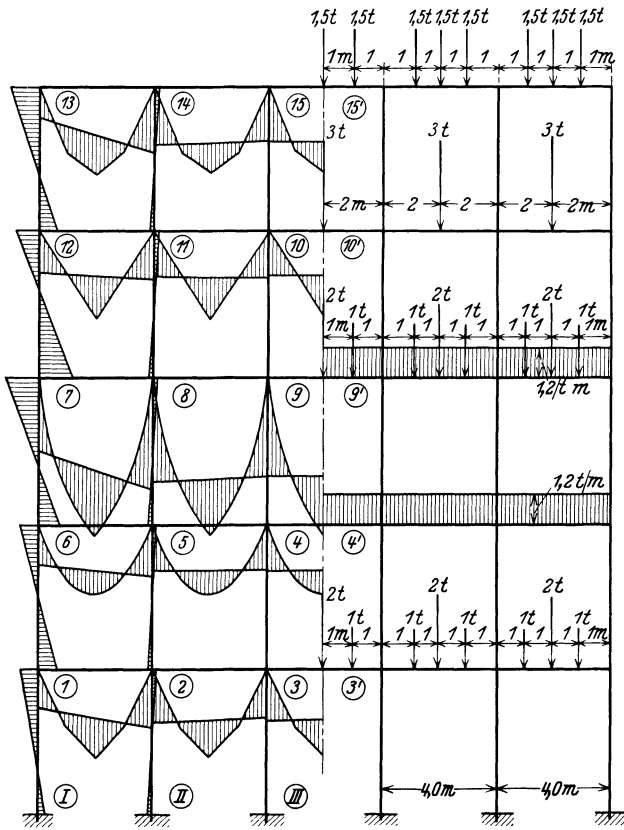


Abb. 90.

Damit sind auch die verschiedenen symmetrischen, vertikalen Belastungssysteme fünfgeschossiger Rahmen mit fünf gleichen Feldweiten durch die Anwendung der Momententabellen bei verhältnismäßig geringem Rechenaufwand erledigt.

b) Beispiel zu Kapitel II.

Als Zahlenbeispiel zur Anwendung der Momententabellen in Kapitel II möge im folgenden die Berechnung des in Abb. 91 dargestellten Rahmens vorgeführt werden. Er trägt eine waagerechte Einzellast in jedem Knotenpunkt auf seiner linken, vertikalen Seite.

Das Beispiel wird aus der

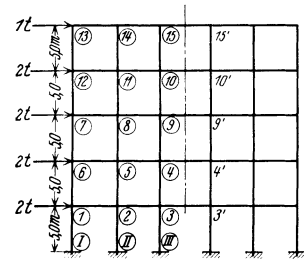


Abb. 91.

Momententabelle 95 sehr leicht berechnet. Mit Bezug auf Abb. 91 ergibt sich:

$$\frac{W \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot (5,0)}{2} = 5,0 \text{ t} \cdot \text{m}$$

und aus der Momententabelle 95 erhält man am Knotenpunkt I:

$$M_{1-2} = 0,85 \frac{W \cdot h}{2} = 0,85 (5,0) = 4,25 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{1-6} = -0,37 \frac{W \cdot h}{2} = -0,37 (5,0) = -1,85 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{1-1} = -0,48 \frac{W \cdot h}{2} = -0,48 (5,0) = -2,40 \text{ t} \cdot \text{m},$$

am Knotenpunkt 2:

$$M_{2-1} = 0,74 \frac{W \cdot h}{2} = 0,74 (5,0) = 3,70 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{2-3} = 0,64 \frac{W \cdot h}{2} = 0,64 (5,0) = 3,20 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{2-5} = -0,67 \frac{W \cdot h}{2} = -0,67 (5,0) = -3,35 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{2-II} = -0,71 \frac{W \cdot h}{2} = -0,71 (5,0) = -3,55 \text{ t} \cdot \text{m},$$

am Knotenpunkt 3:

$$M_{3-2} = 0,65 \frac{W \cdot h}{2} = 0,65 (5,0) = 3,25 \text{ t} \cdot \text{m} ,$$

$$M_{3-3'} = 0,67 \frac{W \cdot h}{2} = 0,67 (5,0) = 3,35 \text{ t} \cdot \text{m} ,$$

$$M_{3-4} = -0,64 \frac{W \cdot h}{2} = -0,64 (5,0) = -3,20 \text{ t} \cdot \text{m} ,$$

$$M_{3-\text{III}} = -0,68 \frac{W \cdot h}{2} = -0,68 (5,0) = -3,40 \text{ t} \cdot \text{m} ,$$

am Knotenpunkt 4:

$$M_{4-4'} = 0,56 \frac{W \cdot h}{2} = 0,56 (5,0) = 2,80 \text{ t} \cdot \text{m} ,$$

$$M_{4-5} = 0,56 \frac{W \cdot h}{2} = 0,56 (5,0) = 2,80 \text{ t} \cdot \text{m} ,$$

$$M_{4-3} = -0,68 \frac{W \cdot h}{2} = -0,68 (5,0) = -3,40 \text{ t} \cdot \text{m} ,$$

$$M_{4-9} = -0,44 \frac{W \cdot h}{2} = -0,44 (5,0) = -2,20 \text{ t} \cdot \text{m} ,$$

am Knotenpunkt 5:

$$M_{5-4} = 0,55 \frac{W \cdot h}{2} = 0,55 (5,0) = 2,75 \text{ t} \cdot \text{m} ,$$

$$M_{5-6} = 0,62 \frac{W \cdot h}{2} = 0,62 (5,0) = 3,10 \text{ t} \cdot \text{m} ,$$

$$M_{5-8} = -0,46 \frac{W \cdot h}{2} = -0,46 (5,0) = -2,30 \text{ t} \cdot \text{m} ,$$

$$M_{5-2} = -0,70 \frac{W \cdot h}{2} = -0,70 (5,0) = -3,50 \text{ t} \cdot \text{m} ,$$

am Knotenpunkt 6:

$$M_{6-5} = 0,69 \frac{W \cdot h}{2} = 0,69 (5,0) = 3,45 \text{ t} \cdot \text{m} ,$$

$$M_{6-7} = -0,25 \frac{W \cdot h}{2} = -0,25 (5,0) = -1,25 \text{ t} \cdot \text{m} ,$$

$$M_{6-1} = -0,44 \frac{W \cdot h}{2} = -0,44 (5,0) = -2,20 \text{ t} \cdot \text{m} ,$$

am Knotenpunkt 7:

$$M_{7-8} = 0,47 \frac{W \cdot h}{2} = 0,47 (5,0) = 2,35 \text{ t} \cdot \text{m} ,$$

$$M_{7-12} = -0,13 \frac{W \cdot h}{2} = -0,13 (5,0) = -0,65 \text{ t} \cdot \text{m} ,$$

$$M_{7-6} = -0,34 \frac{W \cdot h}{2} = -0,34 (5,0) = -1,70 \text{ t} \cdot \text{m} ,$$

am Knotenpunkt 8:

$$M_{8-9} = 0,37 \frac{W \cdot h}{2} = 0,37 (5,0) = 1,85 \text{ t} \cdot \text{m} ,$$

$$M_{8-7} = 0,42 \frac{W \cdot h}{2} = 0,42 (5,0) = 2,10 \text{ t} \cdot \text{m} ,$$

$$M_{8-11} = -0,27 \frac{W \cdot h}{2} = -0,27 (5,0) = -1,35 \text{ t} \cdot \text{m} ,$$

$$M_{8-5} = -0,52 \frac{W \cdot h}{2} = -0,52 (5,0) = -2,60 \text{ t} \cdot \text{m} ,$$

am Knotenpunkt 9:

$$M_{9-9'} = 0,38 \frac{W \cdot h}{2} = 0,38 (5,0) = 1,90 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{9-8} = 0,37 \frac{W \cdot h}{2} = 0,37 (5,0) = 1,85 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{9-10} = -0,25 \frac{W \cdot h}{2} = -0,25 (5,0) = -1,25 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{9-4} = -0,50 \frac{W \cdot h}{2} = -0,50 (5,0) = -2,50 \text{ t} \cdot \text{m},$$

am Knotenpunkt 10:

$$M_{10-10'} = 0,20 \frac{W \cdot h}{2} = 0,20 (5,0) = 1,0 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{10-11} = 0,19 \frac{W \cdot h}{2} = 0,19 (5,0) = 0,95 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{10-15} = -0,08 \frac{W \cdot h}{2} = -0,08 (5,0) = -0,40 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{10-9} = -0,31 \frac{W \cdot h}{2} = -0,31 (5,0) = -1,55 \text{ t} \cdot \text{m},$$

am Knotenpunkt 11:

$$M_{11-10} = 0,19 \frac{W \cdot h}{2} = 0,19 (5,0) = 0,95 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{11-12} = 0,21 \frac{W \cdot h}{2} = 0,21 (5,0) = 1,05 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{11-14} = -0,08 \frac{W \cdot h}{2} = -0,08 (5,0) = -0,40 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{11-8} = -0,32 \frac{W \cdot h}{2} = -0,32 (5,0) = -1,60 \text{ t} \cdot \text{m},$$

am Knotenpunkt 12:

$$M_{12-11} = 0,24 \frac{W \cdot h}{2} = 0,24 (5,0) = 1,20 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{12-13} = -0,02 \frac{W \cdot h}{2} = -0,02 (5,0) = -0,10 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{12-7} = -0,22 \frac{W \cdot h}{2} = -0,22 (5,0) = -1,10 \text{ t} \cdot \text{m},$$

am Knotenpunkt 13:

$$M_{13-14} = 0,08 \frac{W \cdot h}{2} = 0,08 (5,0) = 0,40 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{13-12} = -0,08 \frac{W \cdot h}{2} = -0,08 (5,0) = -0,40 \text{ t} \cdot \text{m},$$

am Knotenpunkt 14:

$$M_{14-15} = 0,06 \frac{W \cdot h}{2} = 0,06 (5,0) = 0,30 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{14-13} = 0,07 \frac{W \cdot h}{2} = 0,07 (5,0) = 0,35 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{14-11} = -0,13 \frac{W \cdot h}{2} = -0,13 (5,0) = -0,65 \text{ t} \cdot \text{m},$$

am Knotenpunkt 15:

$$M_{15-15'} = 0,06 \frac{W \cdot h}{2} = 0,06 (5,0) = 0,30 \text{ t} \cdot \text{m},$$

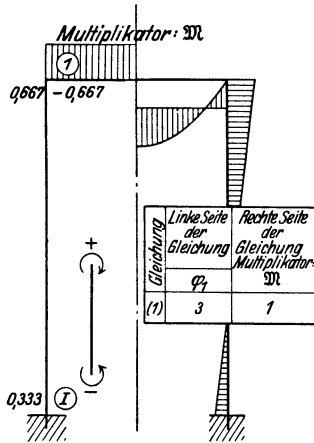
$$M_{15-14} = 0,06 \frac{W \cdot h}{2} = 0,06 (5,0) = 0,30 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{15-10} = -0,12 \frac{W \cdot h}{2} = -0,12 (5,0) = -0,60 \text{ t} \cdot \text{m}.$$

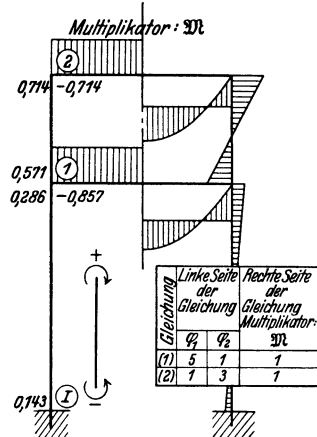
In der Momententabelle 95 sind die Biegemomente übersichtlich eingetragen.

Erstes Kapitel.

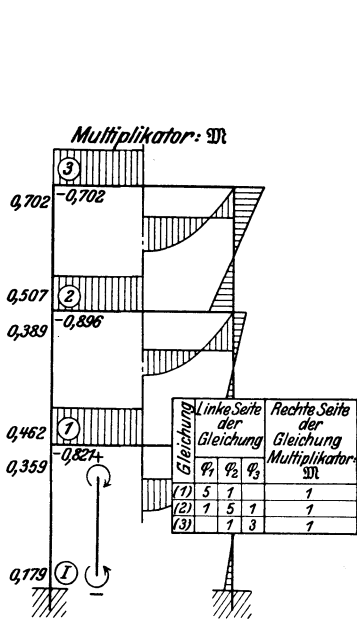
Eingespannter, symmetrischer Rahmen mit beliebiger, symmetrischer vertikaler Belastung auf den Balken.



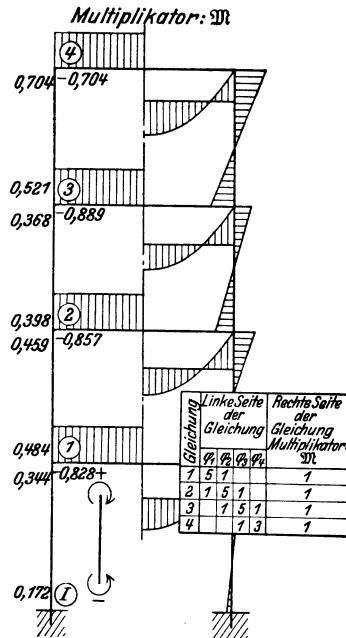
Momententabelle 1.



Momententabelle 2.

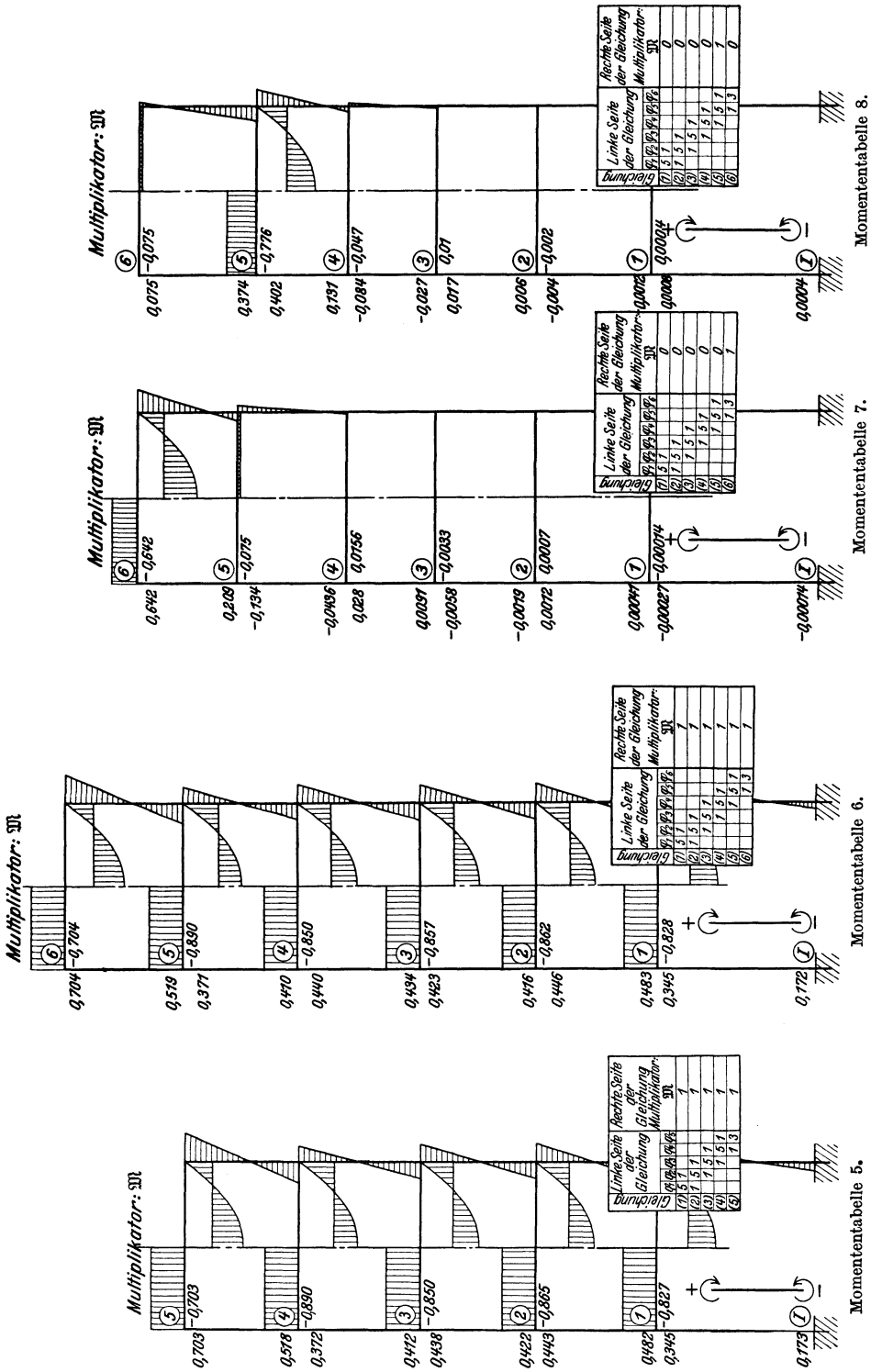


Momententabelle 3.



Momententabelle 4.

Bemerkung: Multiplikator \mathfrak{M} für beliebige Belastungen s. Tabelle Ib.
Takabeya, Rahmentafeln.



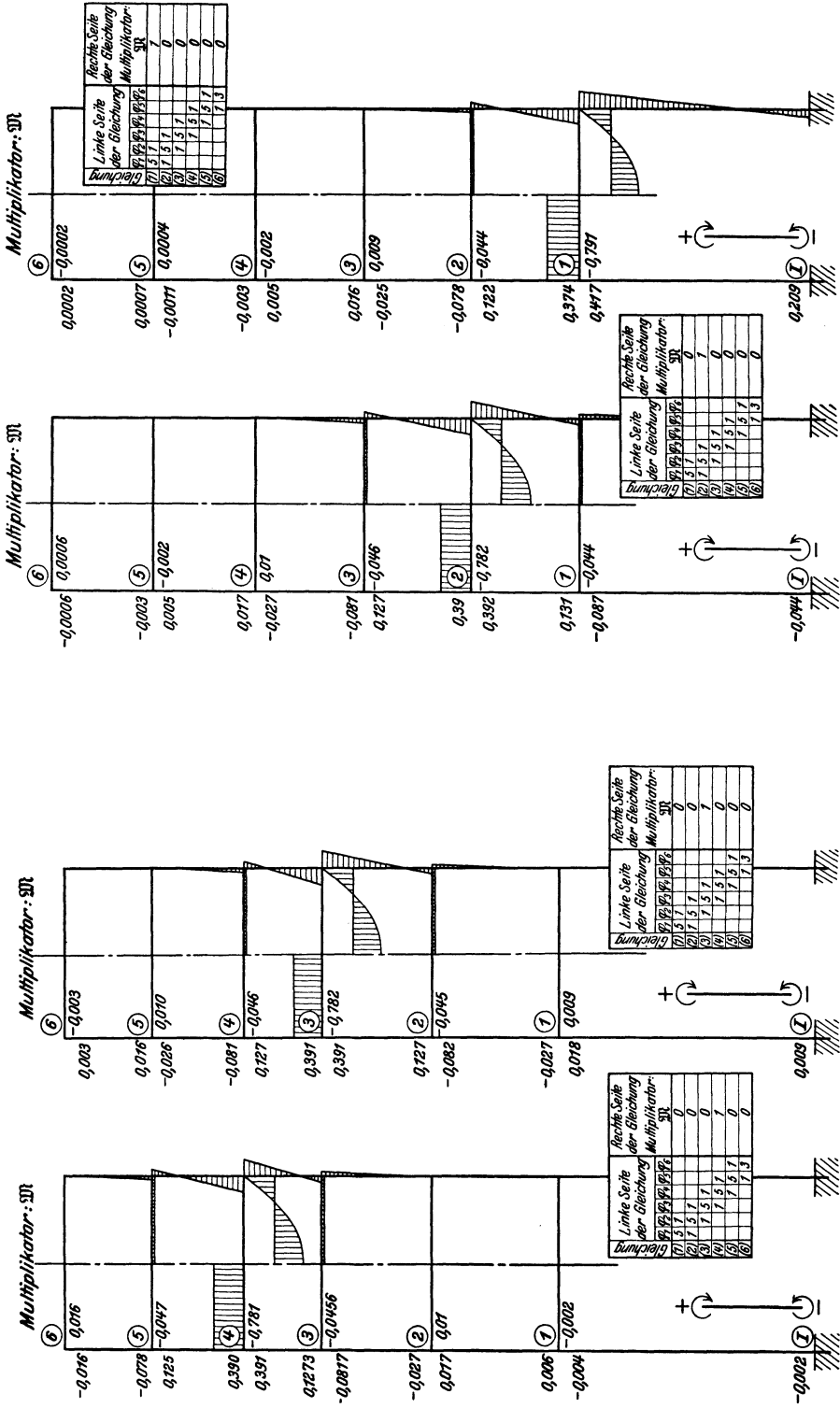
Momententabelle 5.

Momententabelle 6.

Momententabelle 7.

Momententabelle 8.

Bemerkung: Multiplikator M für beliebige Belastungen s. Tabelle Ib.



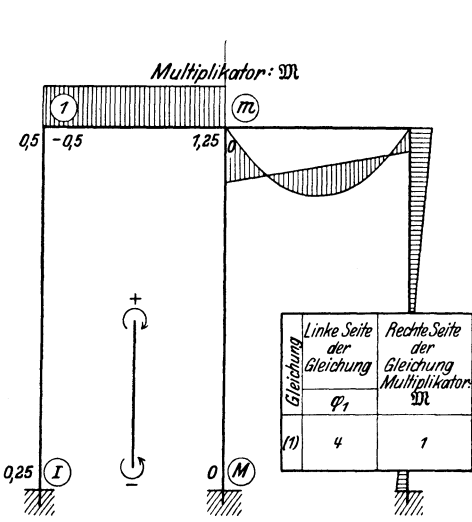
Momententabelle 12.

Momententabelle 11.

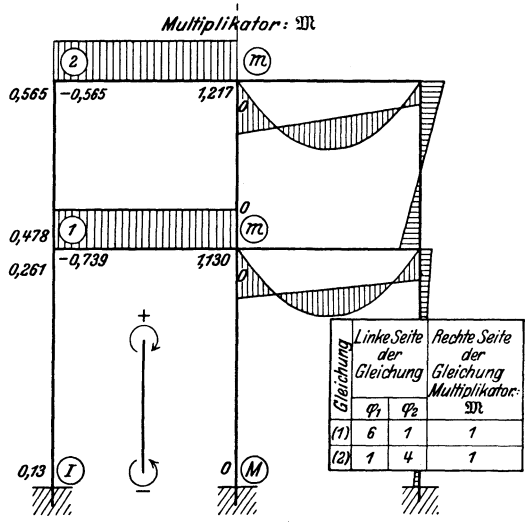
Momententabelle 10.

Momententabelle 9.

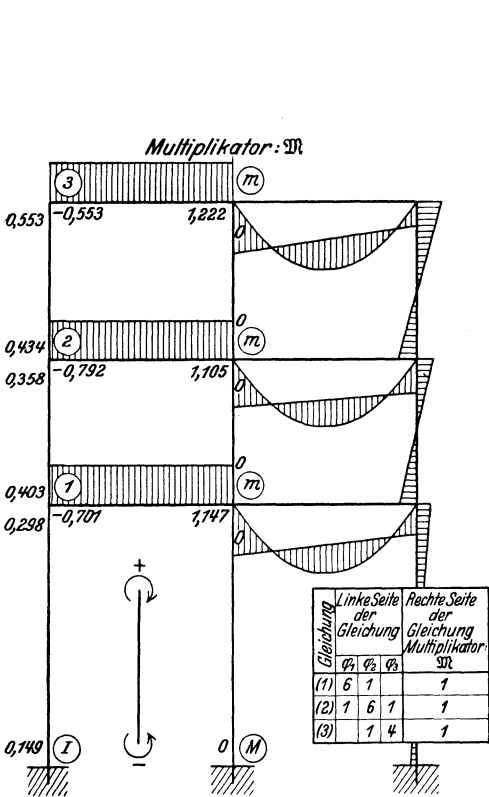
Bemerkung: Multiplikator \mathfrak{M} für beliebige Belastungen s. Tabelle Ib.



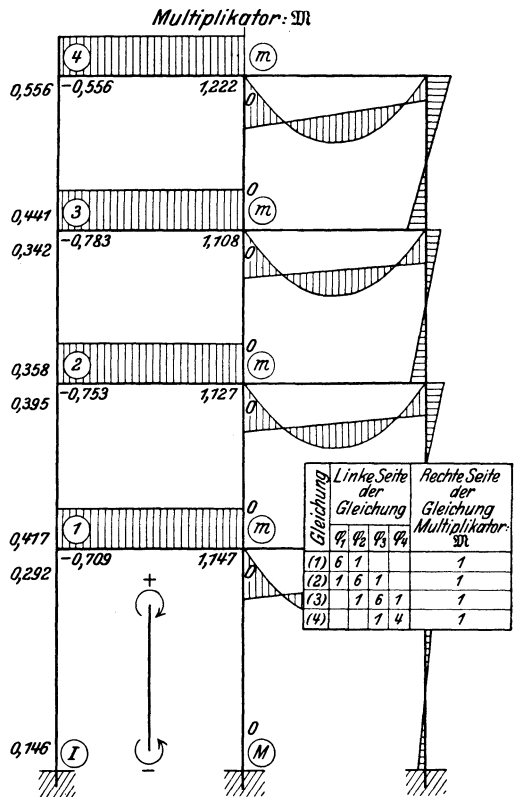
Momententabelle 13.



Momententabelle 14.

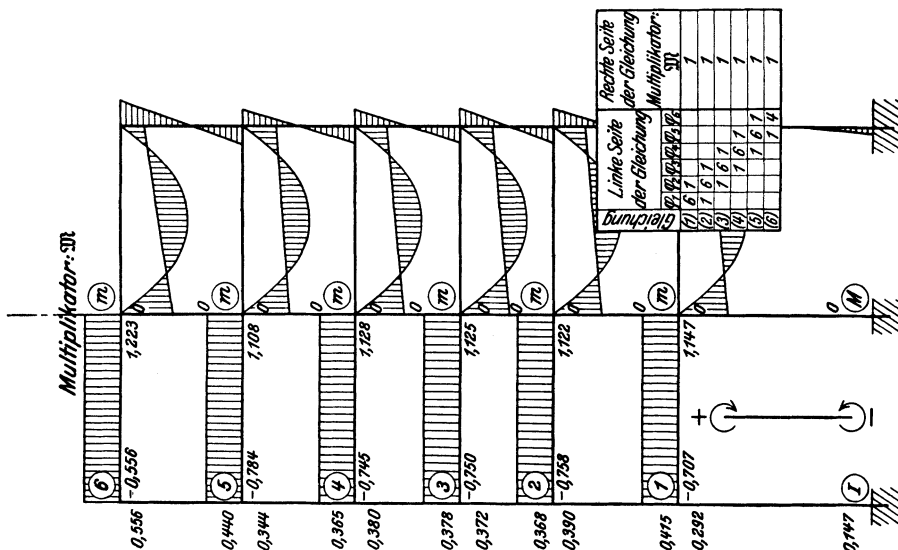


Momententabelle 15.



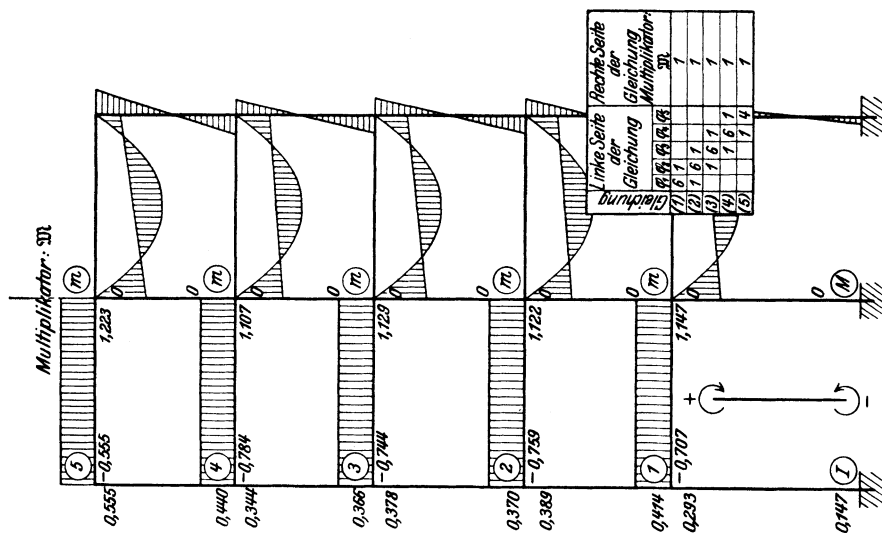
Momententabelle 16.

Bemerkung: Multiplikator \mathfrak{M} für beliebige Belastungen s. Tabelle Ib.

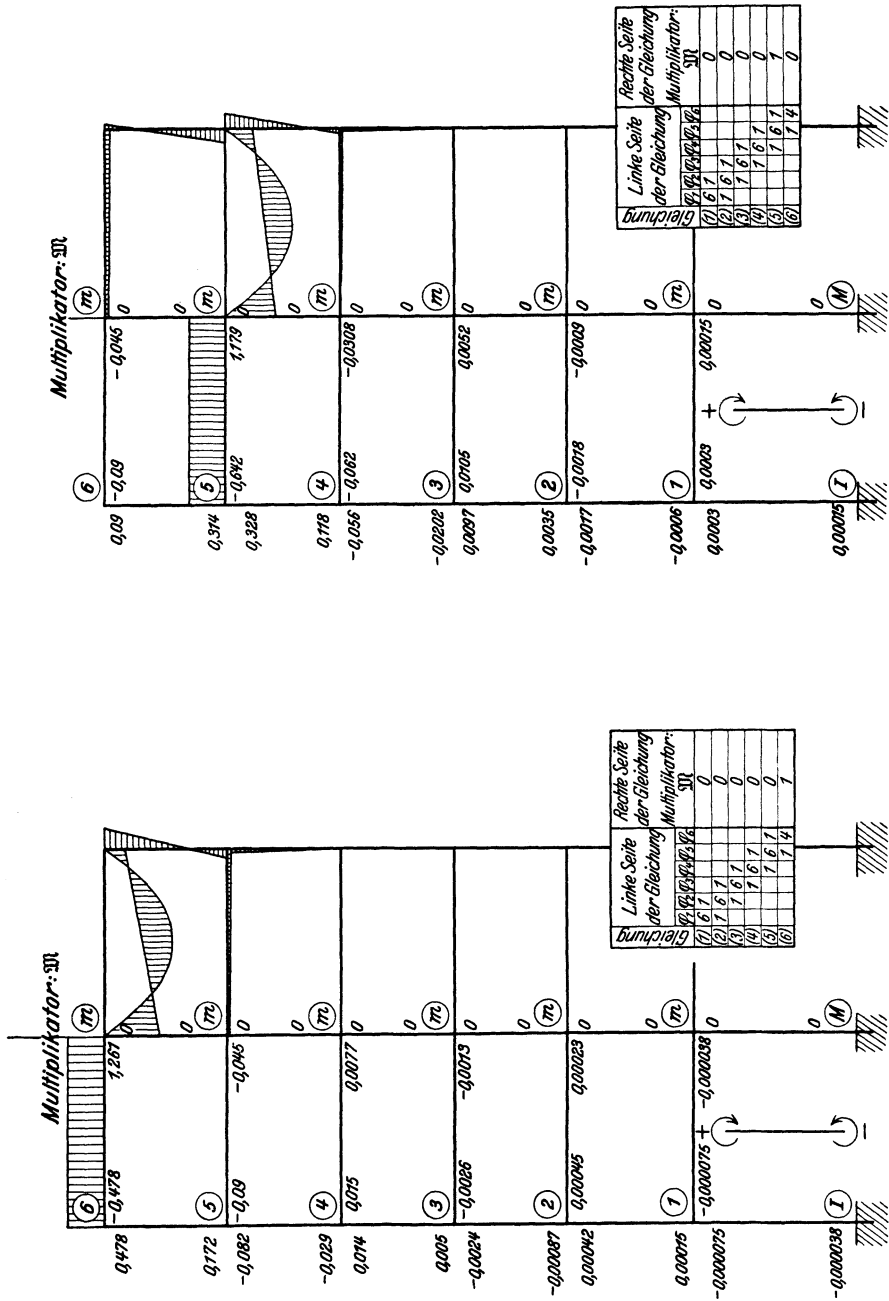


Momententabelle 18.

Bemerkung: Multiplikator M für beliebige Belastungen s. Tabelle Ib.



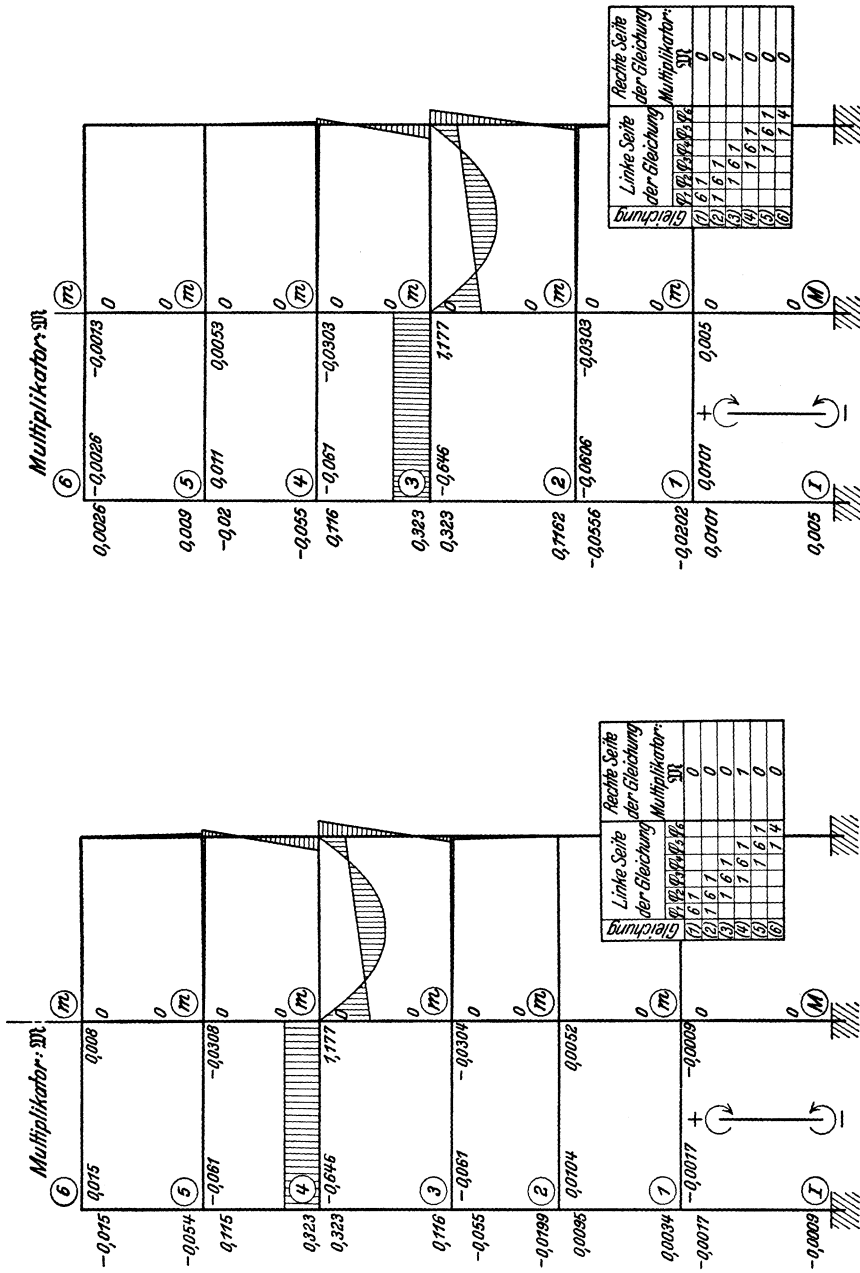
Momententabelle 17.



Momententabelle 20.

Momententabelle 19.

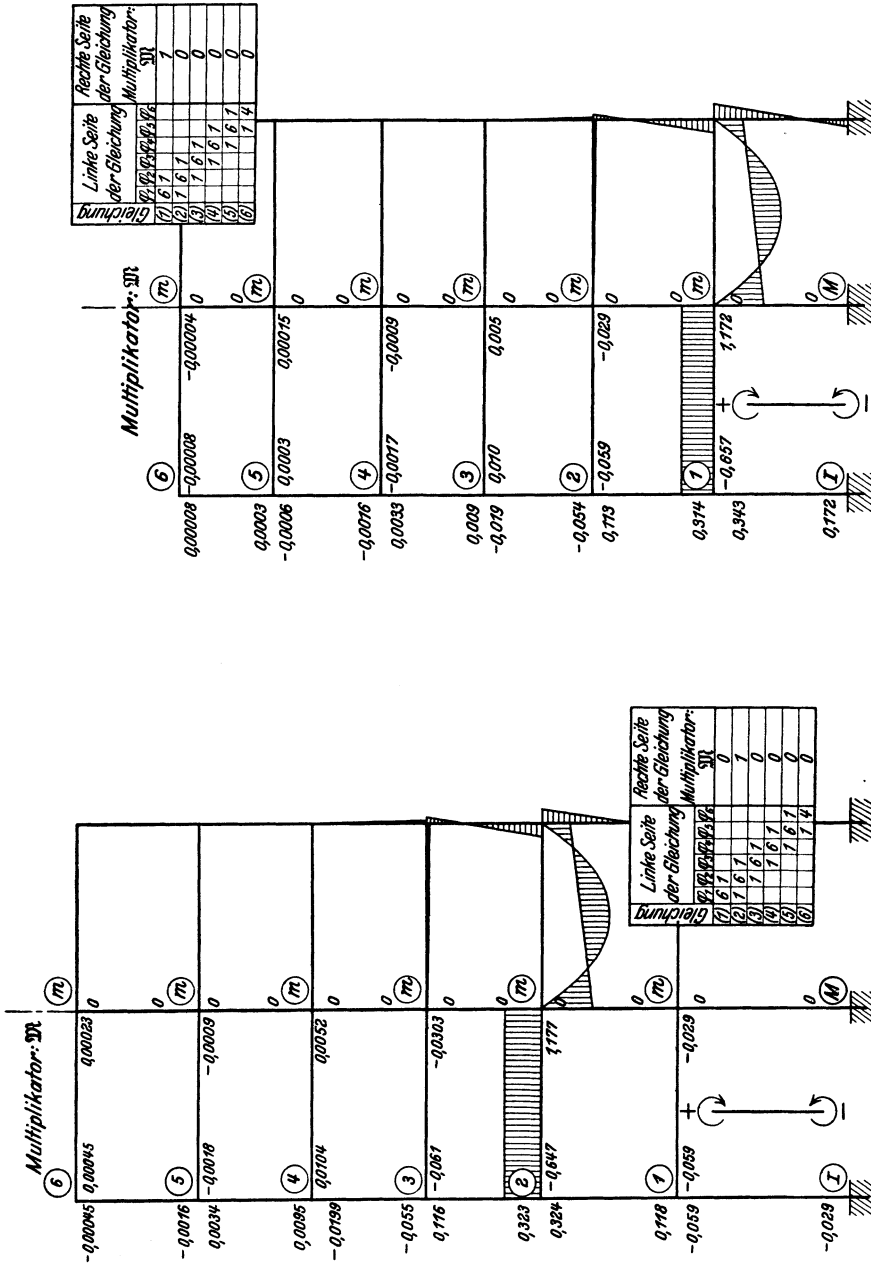
Bemerkung: Multiplikator \mathfrak{M} für beliebige Belastungen s. Tabelle I b.



Momententabelle 22.

Momententabelle 21.

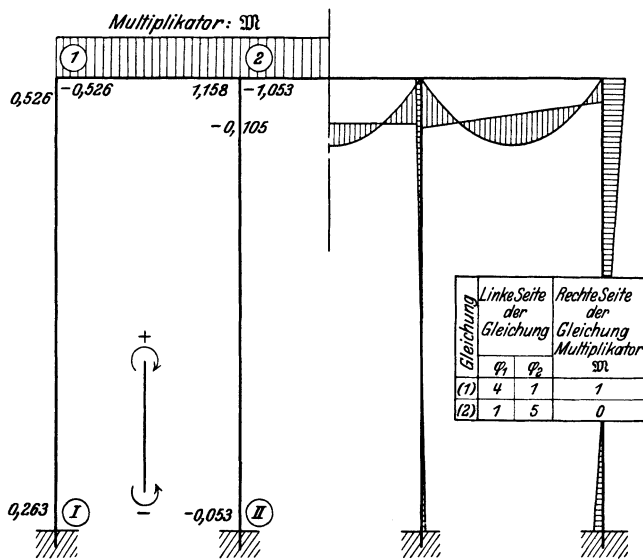
Bemerkung: Multiplikator M für beliebige Belastungen s. Tabelle I b.



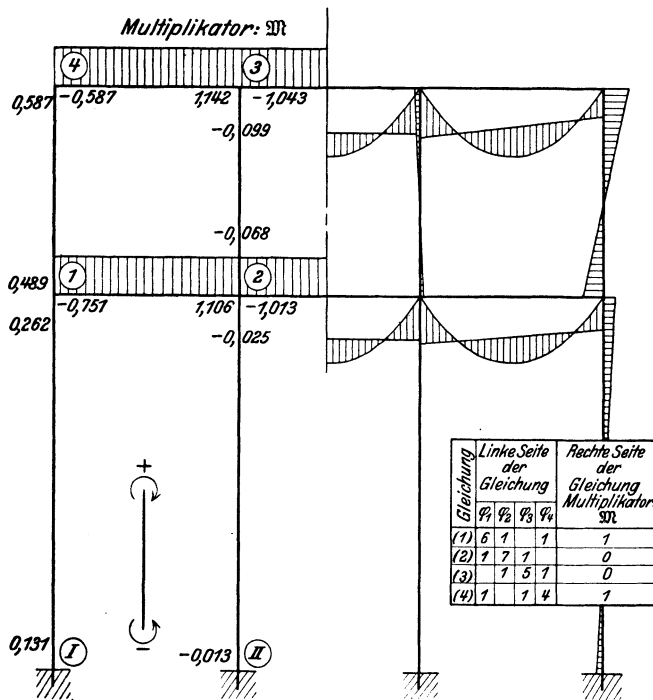
Momententabelle 24.

Momententabelle 23.

Bemerkung: Multiplikator \mathfrak{M} für beliebige Belastungen s. Tabelle Ib.

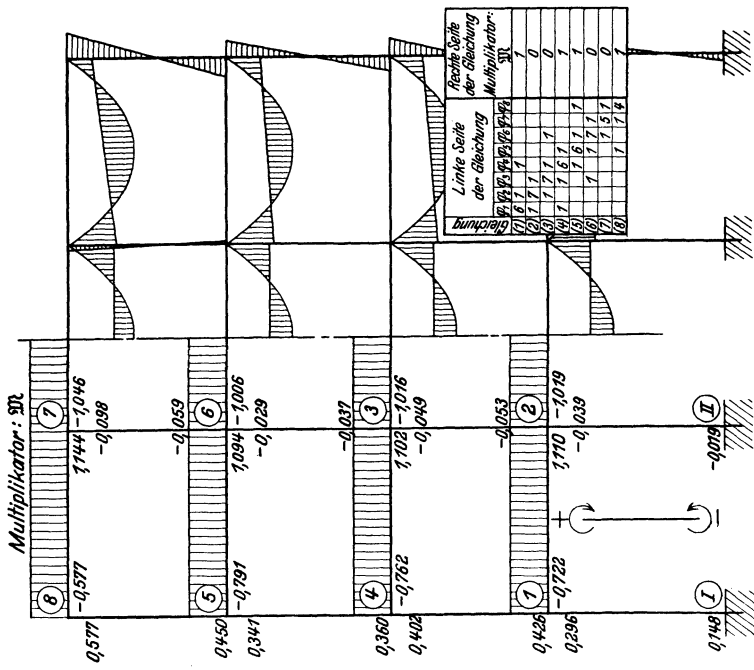


Momententabelle 25.

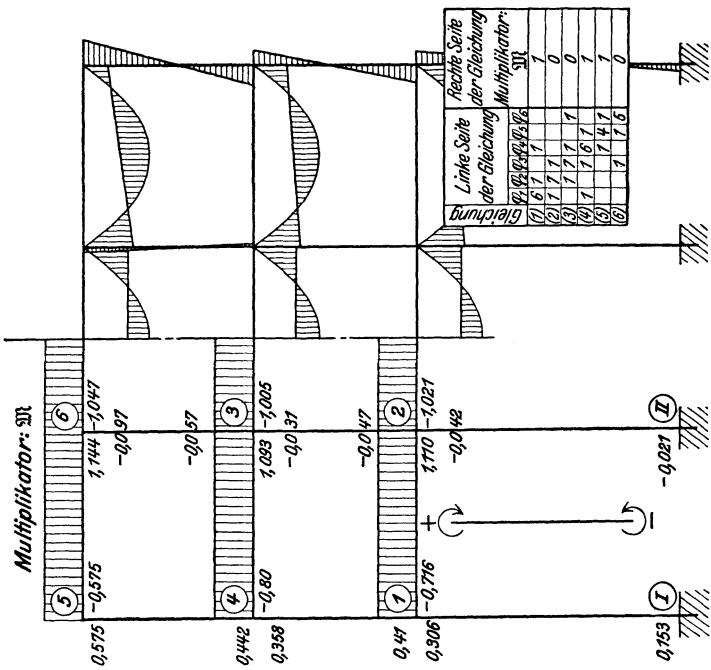


Momententabelle 26.

Bemerkung: Multiplikator \mathfrak{M} für beliebige Belastungen s. Tabelle Ib.

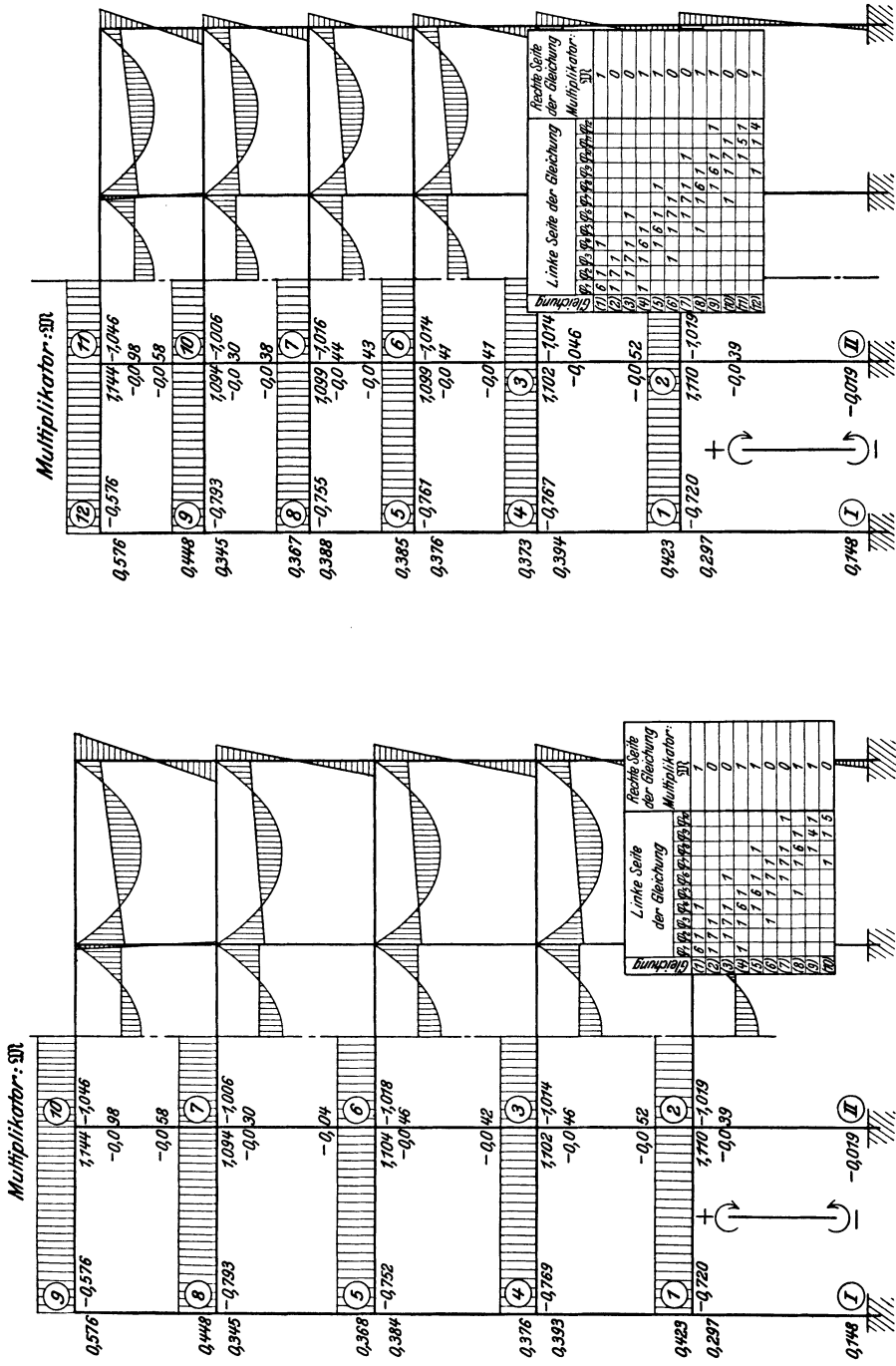


Momententabelle 28.

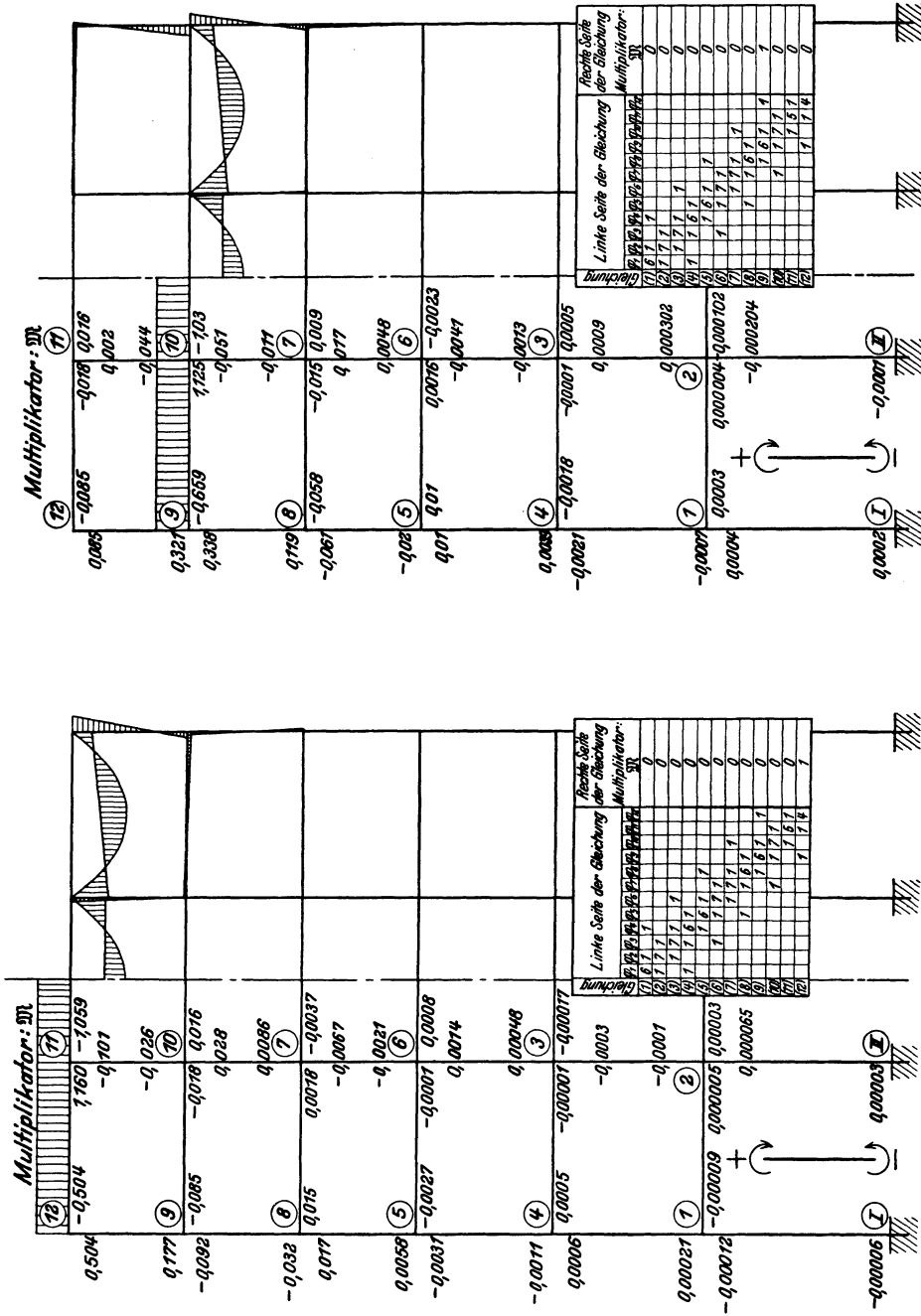


Momententabelle 27.

Bemerkung: Multiplikator \mathfrak{M} für beliebige Belastungen s. Tabelle I b.



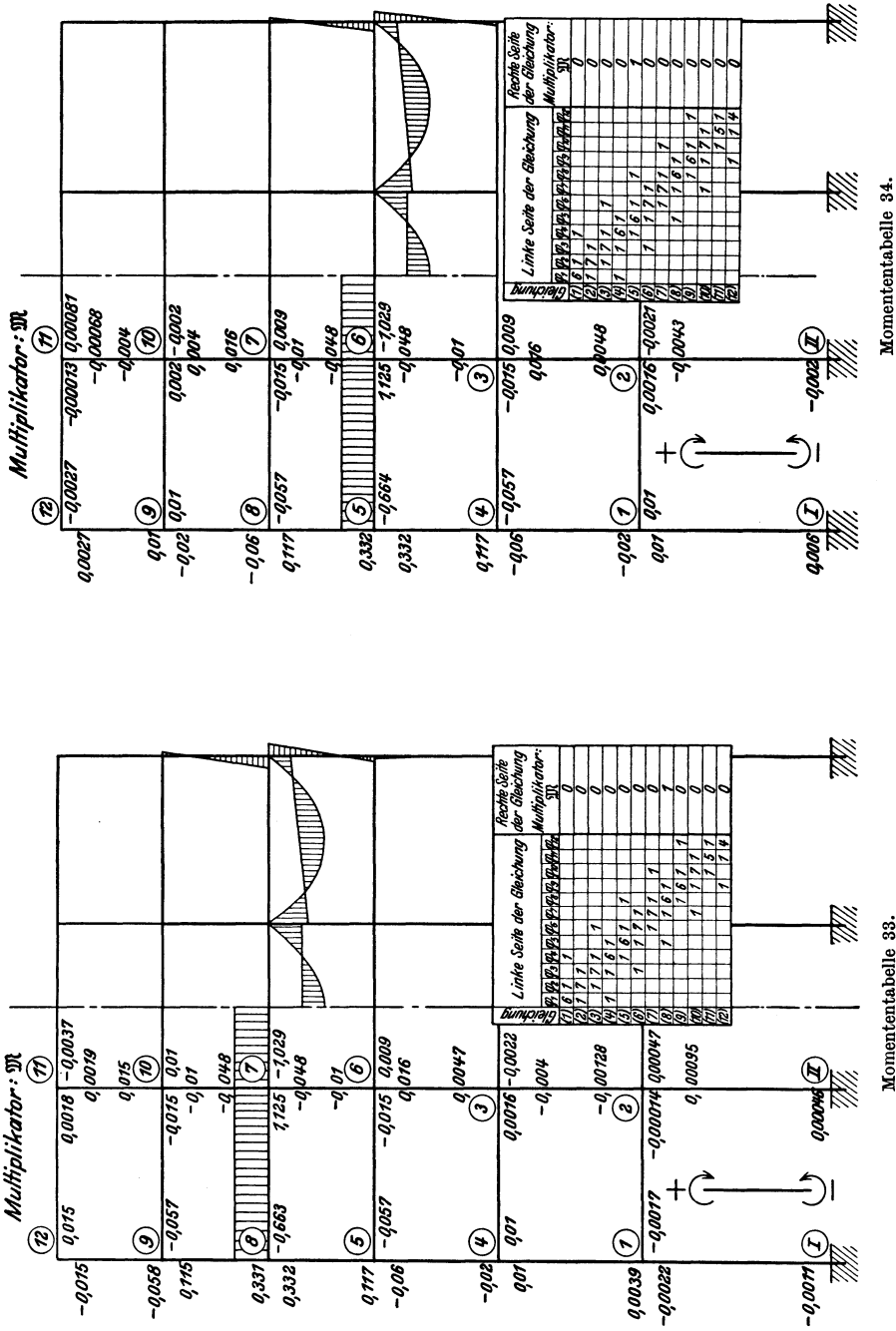
Momententabelle 29. Momententabelle 30. Bemerkung: Multiplikator M für beliebige Belastungen s. Tabelle Ib.



Momententabelle 31.

Momententabelle 32.

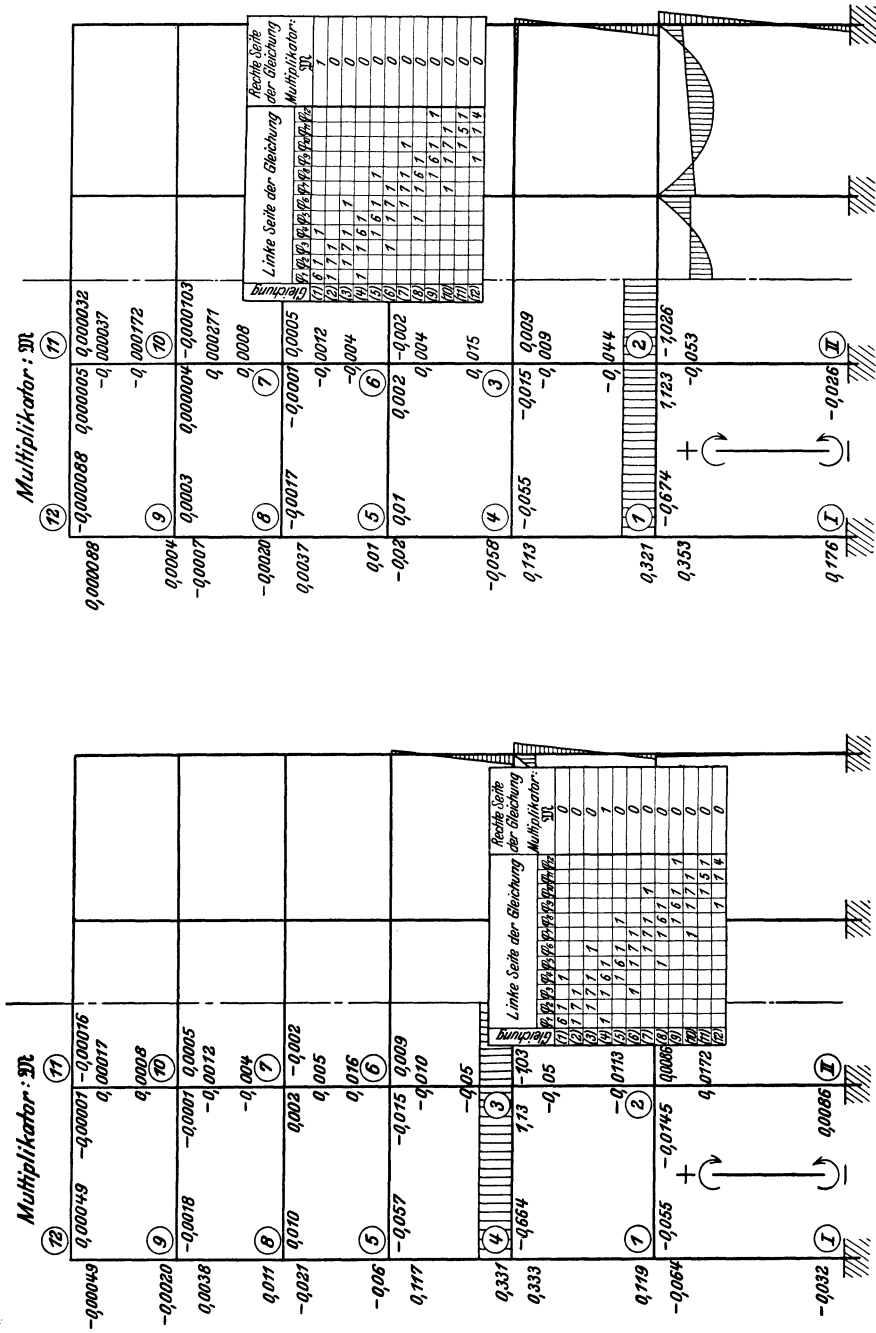
Bemerkung: Multiplikator \mathfrak{M} für beliebige Belastungen s. Tabelle Ib.



Momententabelle 34.

Momententabelle 33.

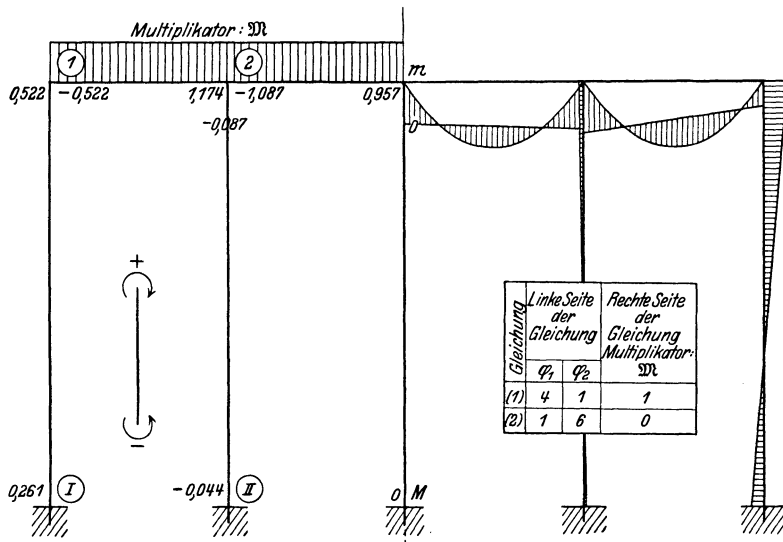
Bemerkung: Multiplikator \mathfrak{M} für beliebige Belastungen s. Tabelle I b.



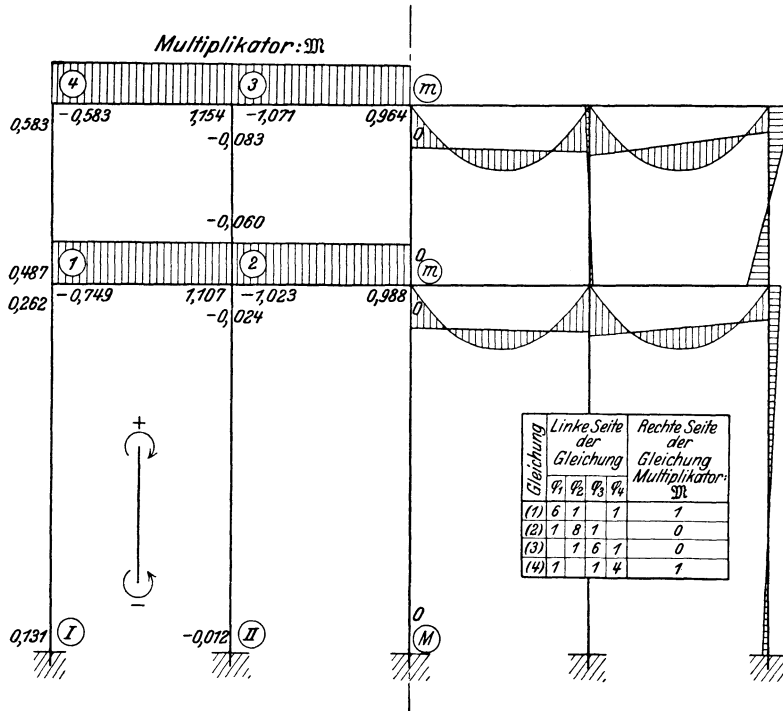
Momententabelle 36.

Momententabelle 35.

Bemerkung: Multiplikator M für beliebige Belastungen s. Tabelle Ib.



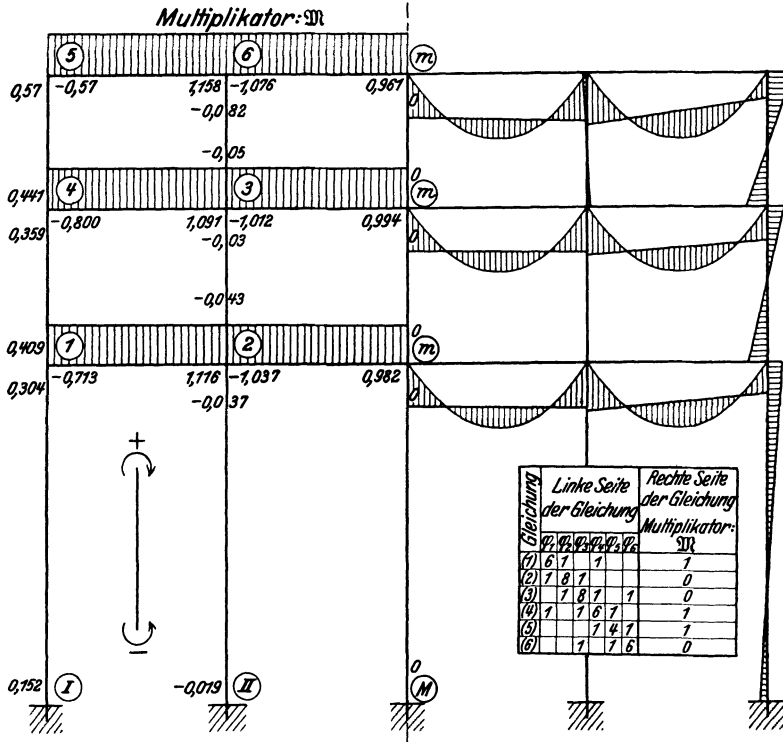
Momententabelle 37.



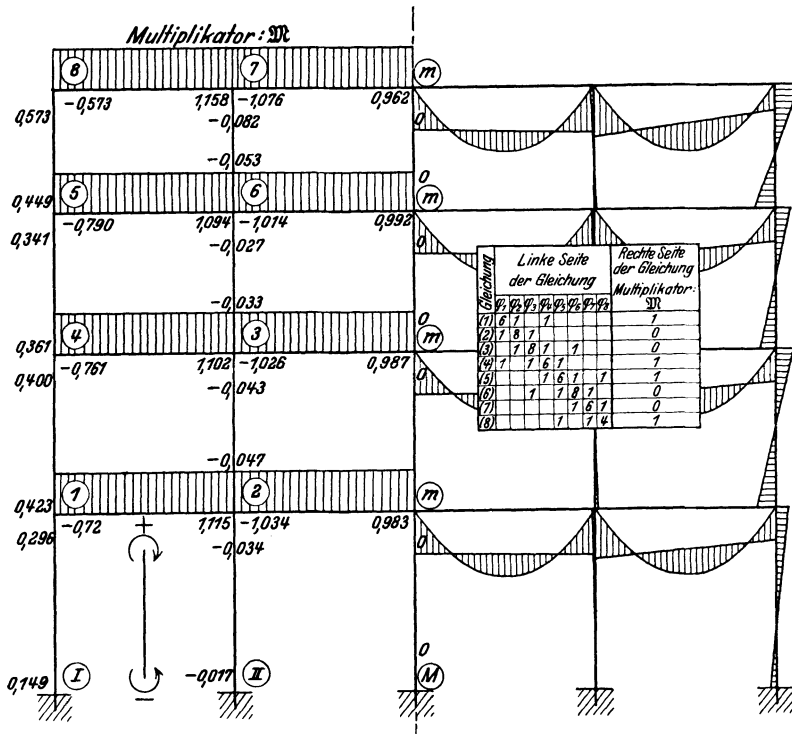
Momententabelle 38.

Bemerkung: Multiplikator \mathfrak{M} für beliebige Belastungen s. Tabelle Ib.

90 Eingespannter, symmetrischer Rahmen m. symmetr. vertikaler Belastung auf den Balken.

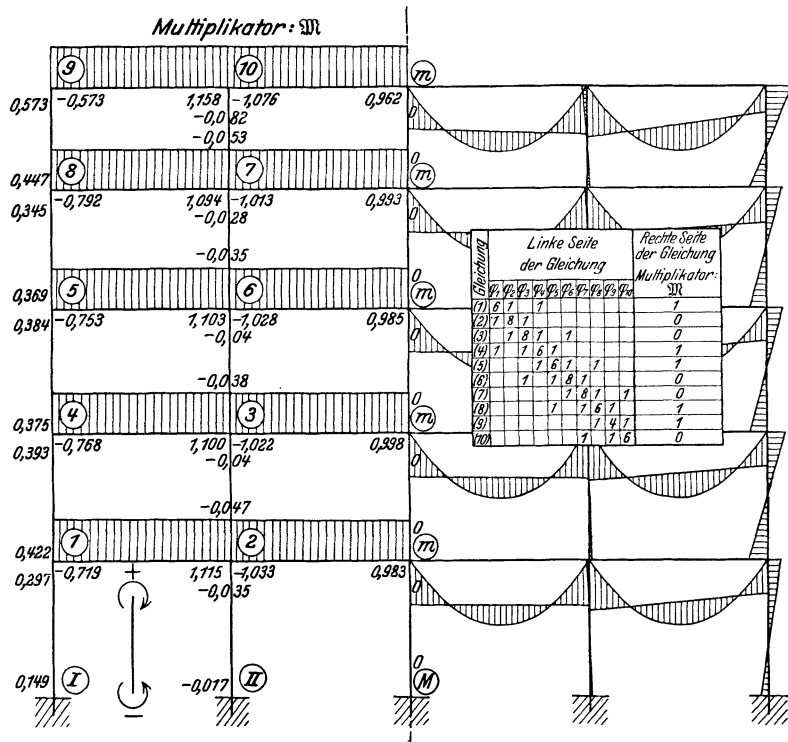


Momententabelle 39.

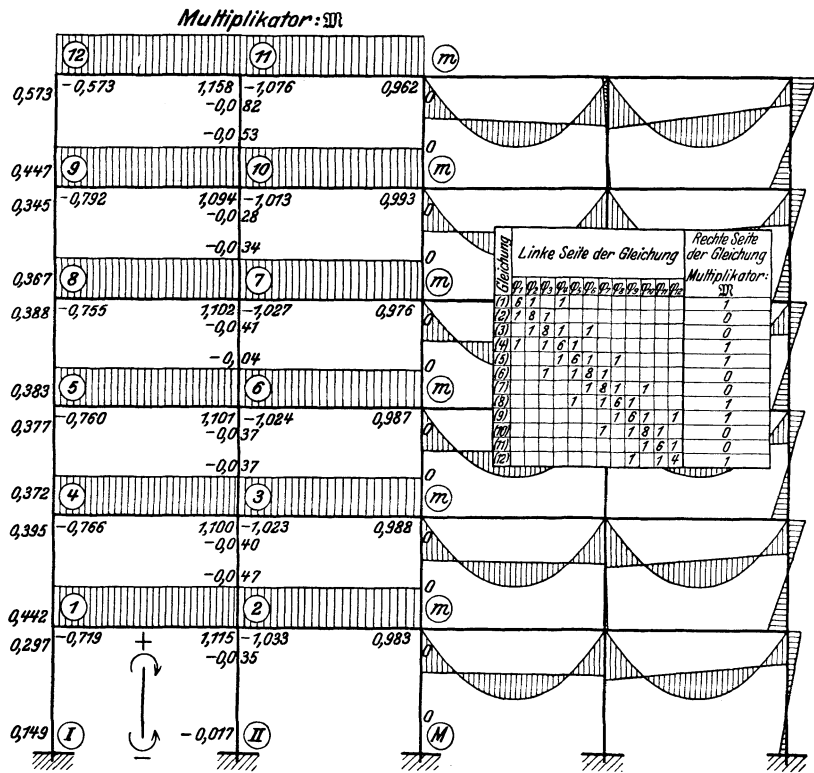


Momententabelle 40.

Bemerkung: Multiplikator \mathfrak{M} für beliebige Belastungen s. Tabelle Ib.

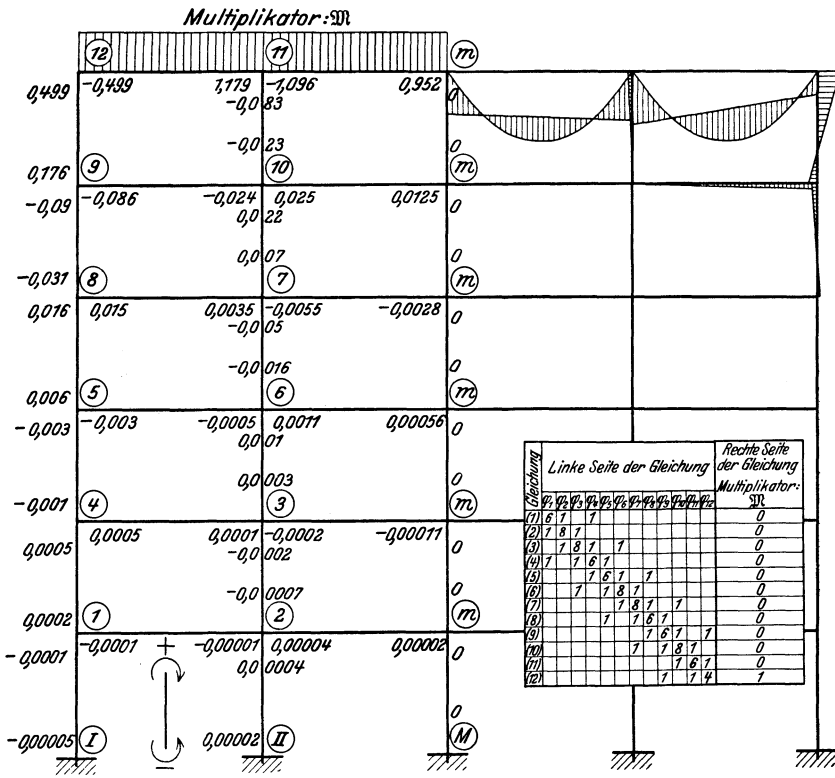


Momententabelle 41.

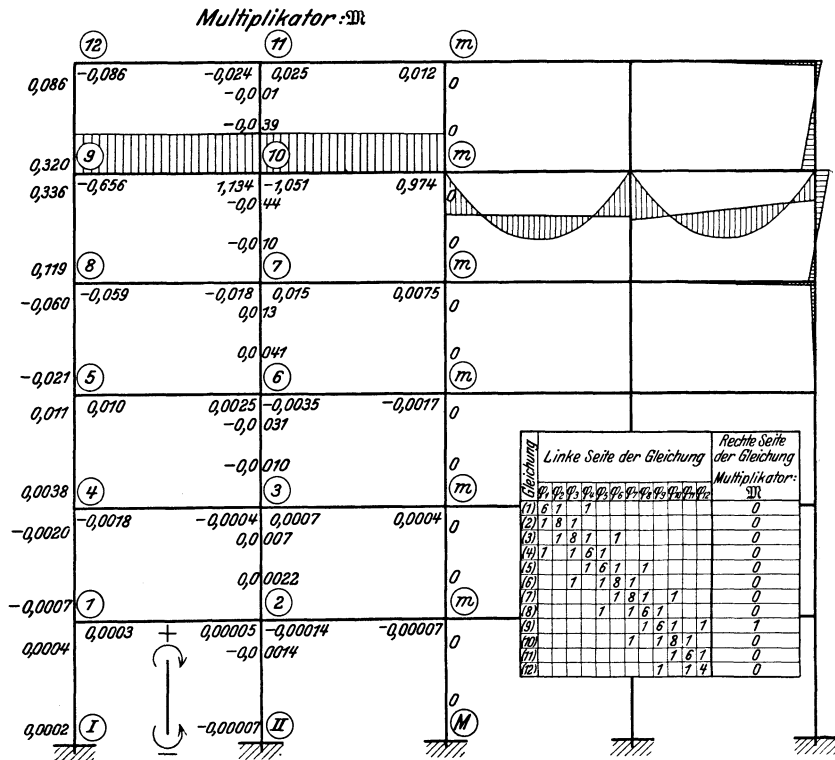


Momententabelle 42.

Bemerkung: Multiplikator \mathfrak{M} für beliebige Belastungen s. Tabelle Ib.
Takabaya, Rahmentafeln.

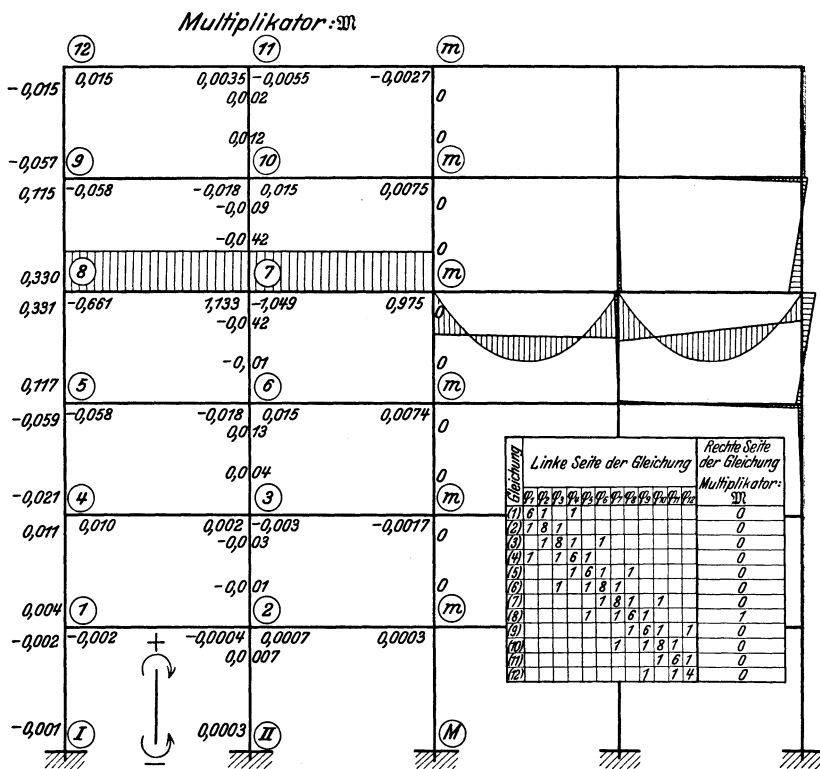


Momententabelle 43.

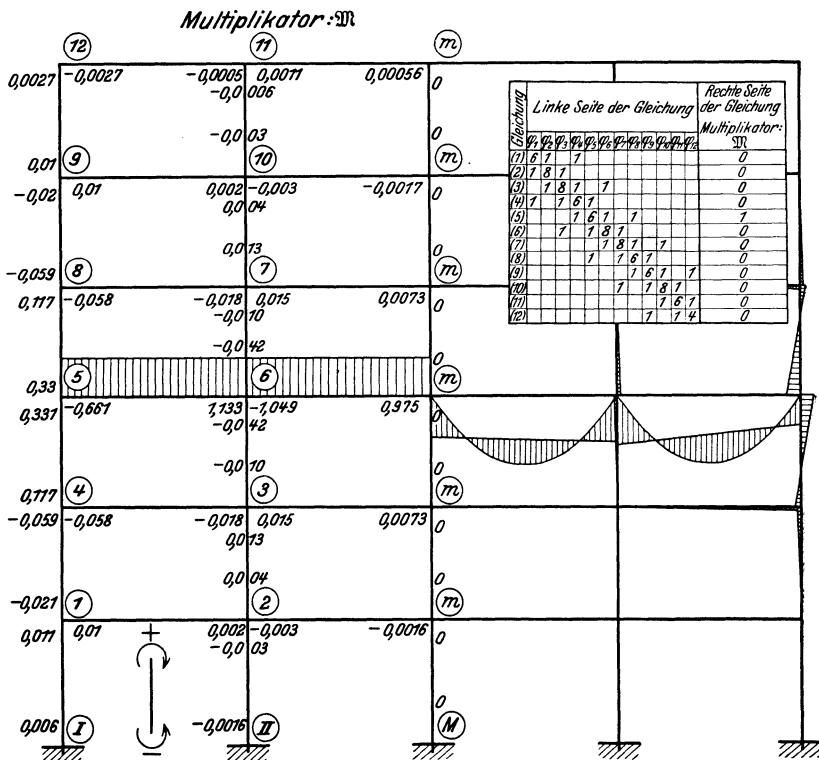


Momententabelle 44.

Bemerkung: Multiplikator \mathfrak{M} für beliebige Belastungen s. Tabelle Ib.

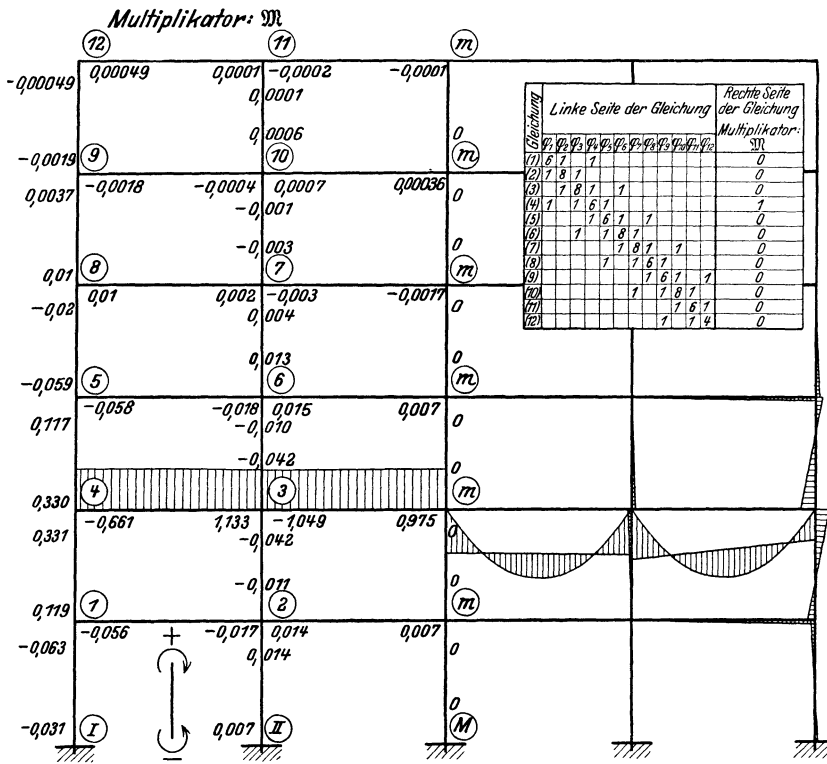


Momententabelle 45.

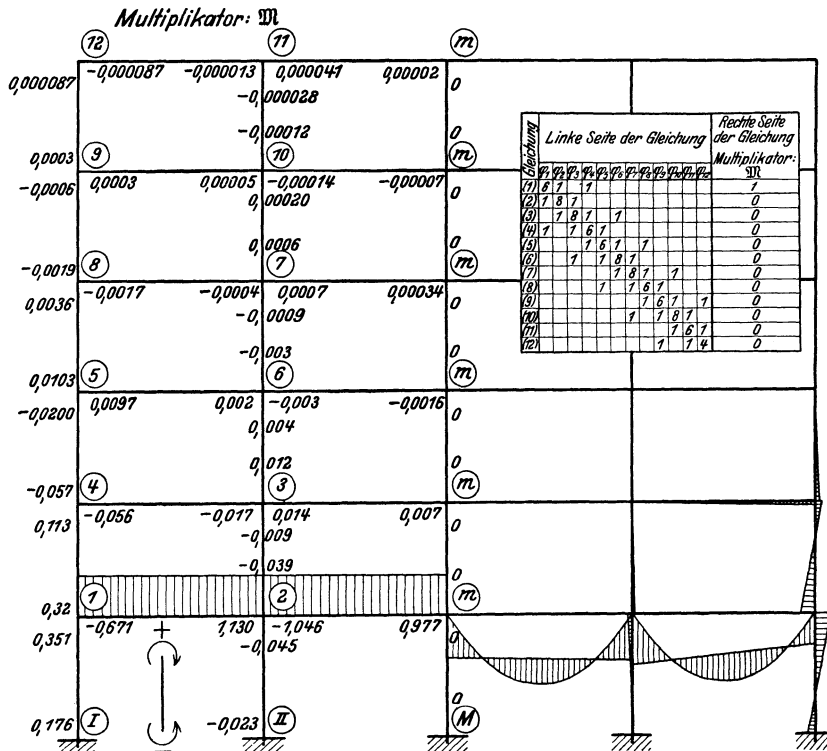


Momententabelle 46.

Bemerkung: Multiplikator \mathfrak{M} für beliebige Belastungen s. Tabelle 1b.

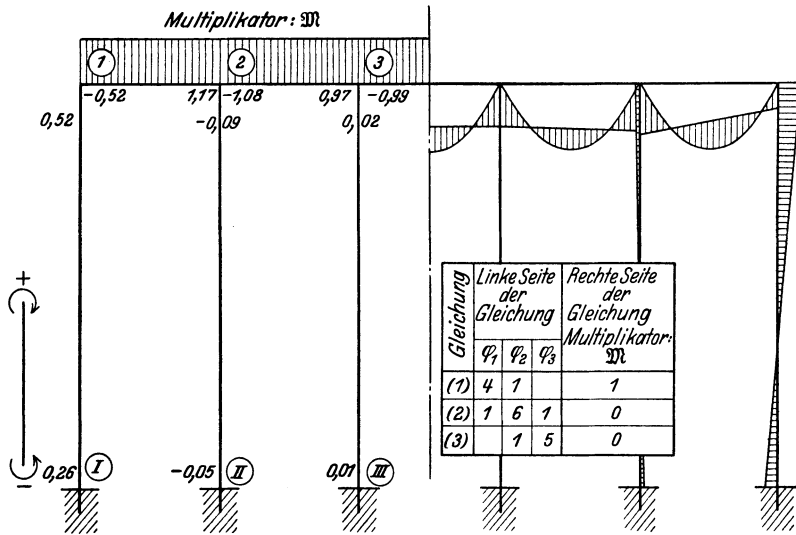


Momententabelle 47.

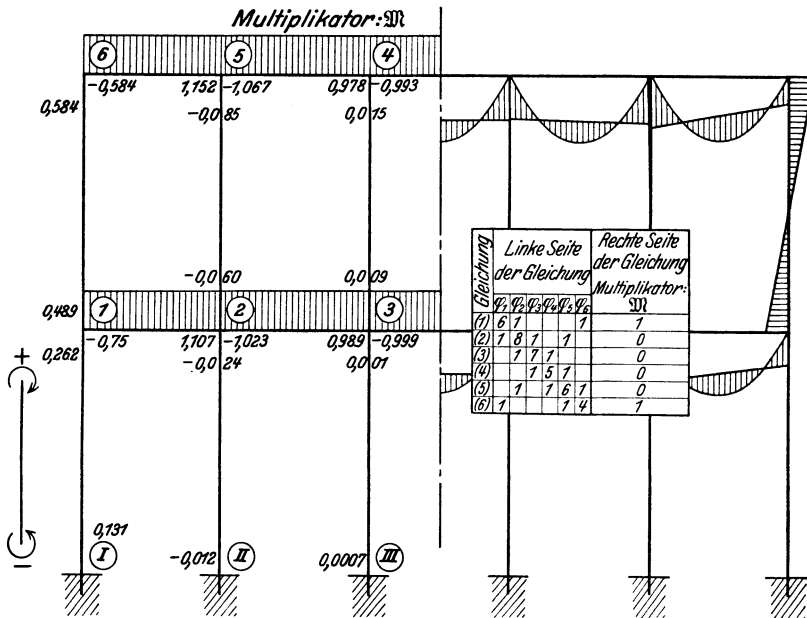


Momententabelle 48.

Bemerkung: Multiplikator \mathfrak{M} für beliebige Belastungen s. Tabelle I b.

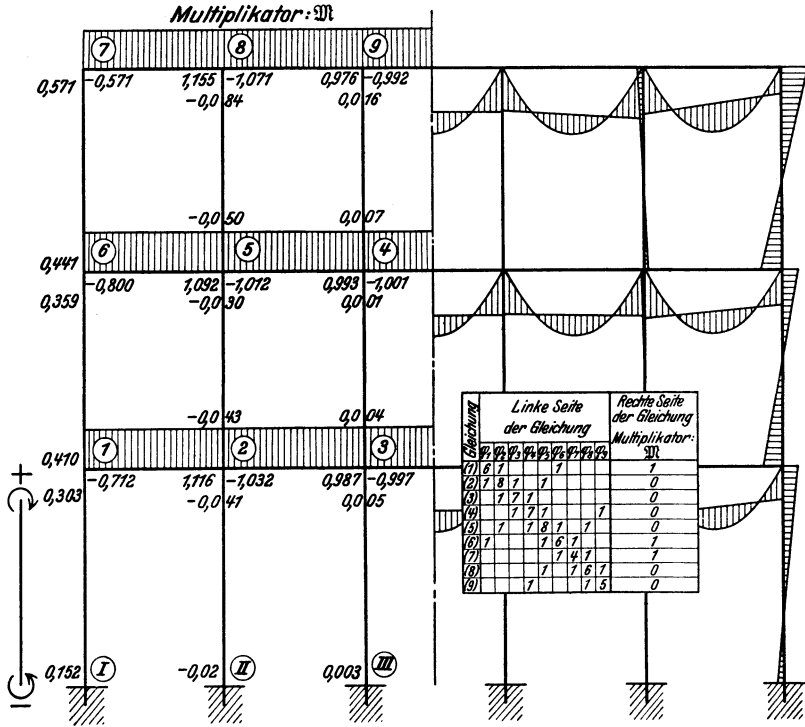


Momententabelle 49.

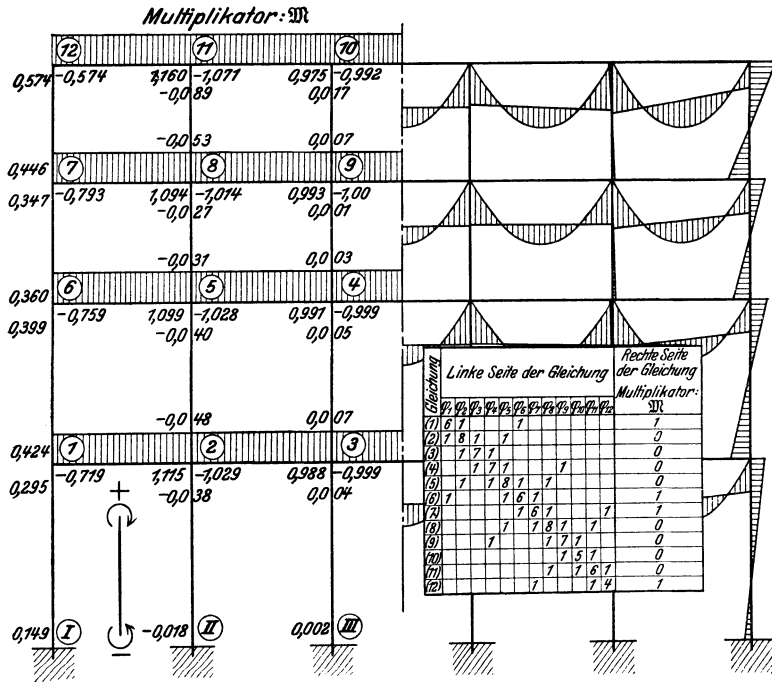


Momententabelle 50.

Bemerkung: Multiplikator \mathfrak{M} für beliebige Belastungen s. Tabelle Ib.

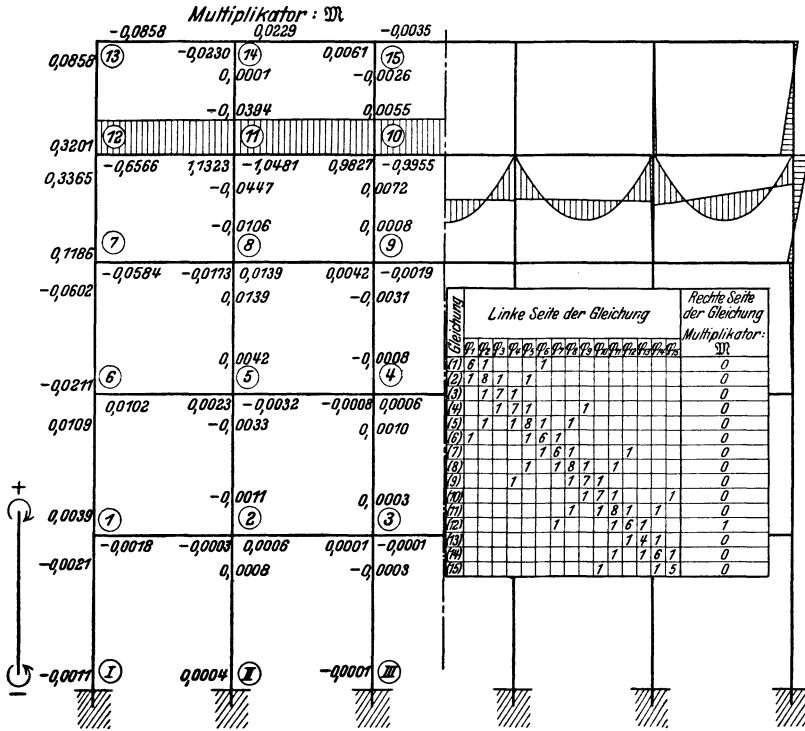


Momententabelle 51.

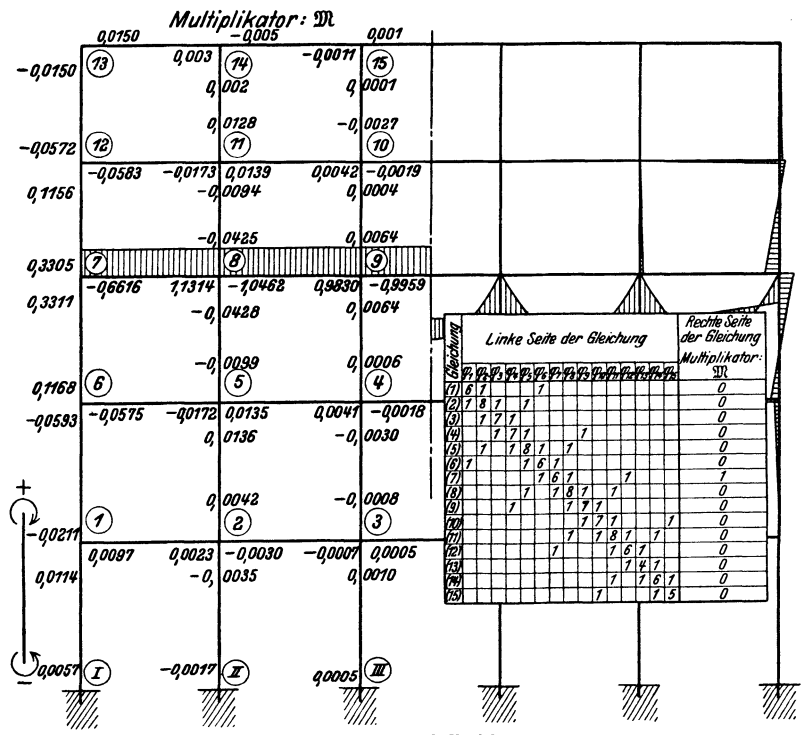


Momententabelle 52.

Bemerkung: Multiplikator \mathfrak{M} für beliebige Belastungen s. Tabelle Ib.

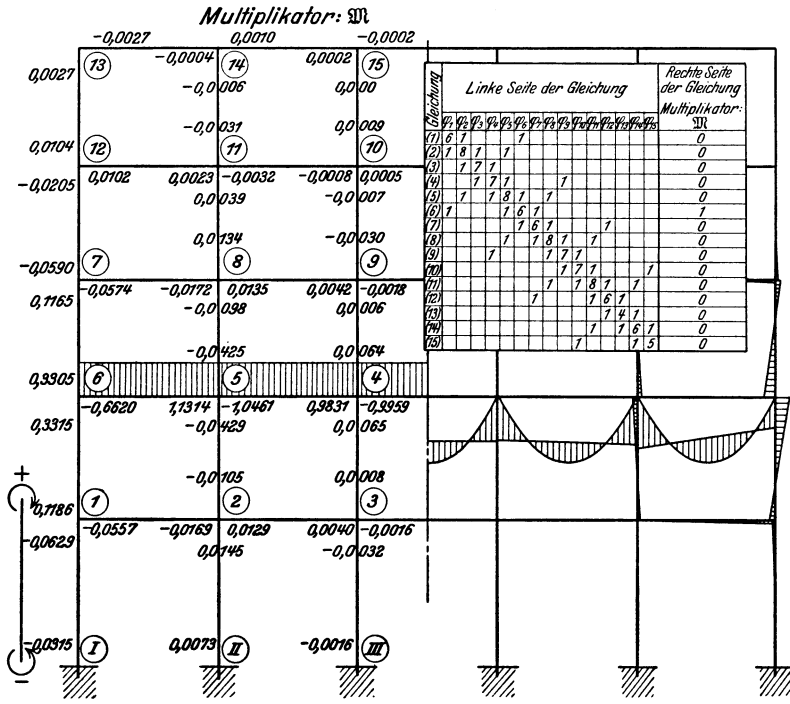


Momententabelle 55.

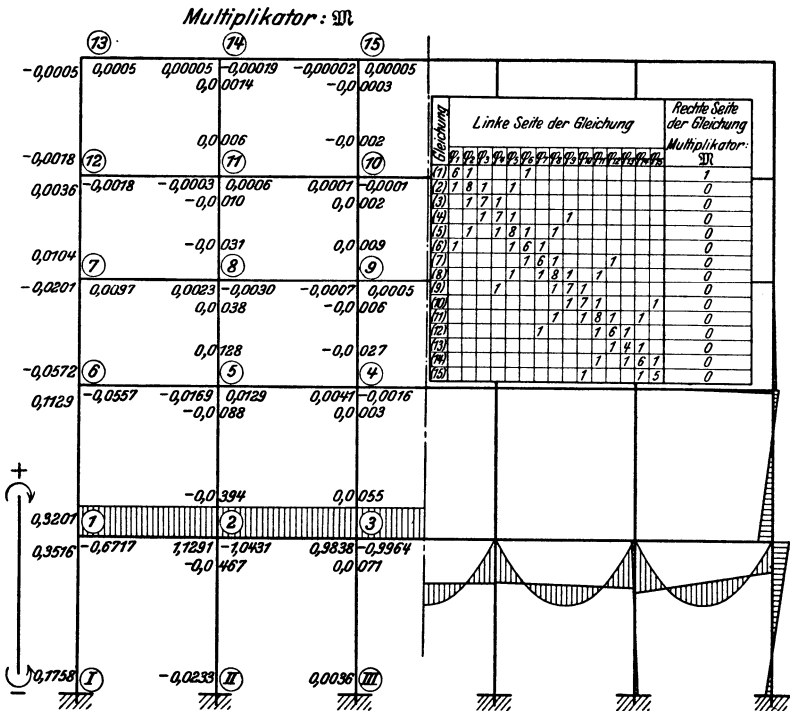


Momententabelle 56.

Bemerkung: Multiplikator \mathfrak{M} für beliebige Belastungen s. Tabelle Ib.



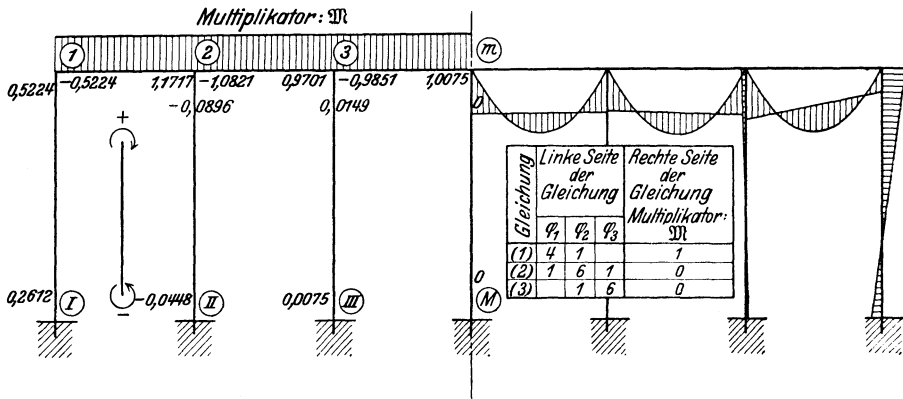
Momententabelle 57.



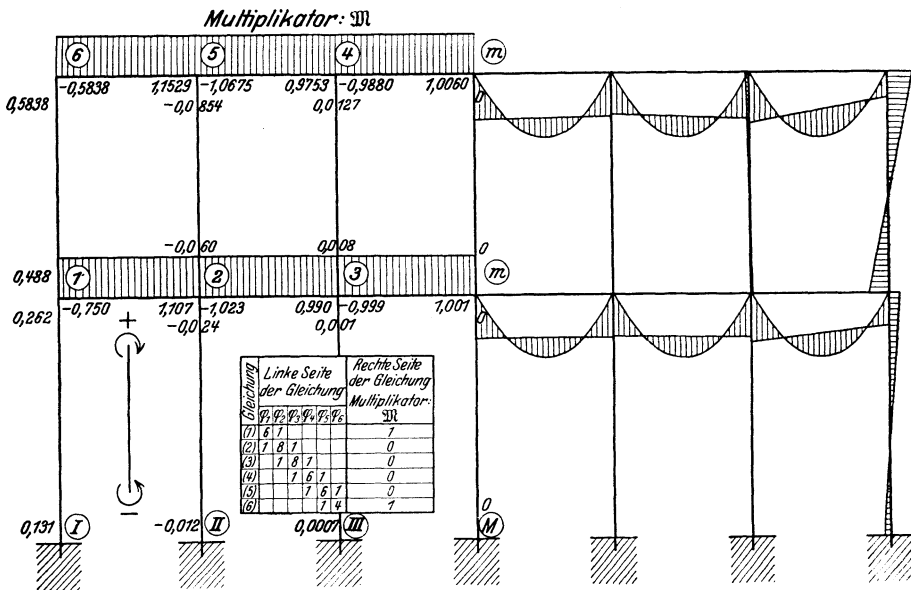
Momententabelle 58.

Bemerkung: Multiplikator \mathfrak{M} für beliebige Belastungen s. Tabelle Ib.

100 Eingespannter, symmetrischer Rahmen m. symmetr. vertikaler Belastung auf den Balken.

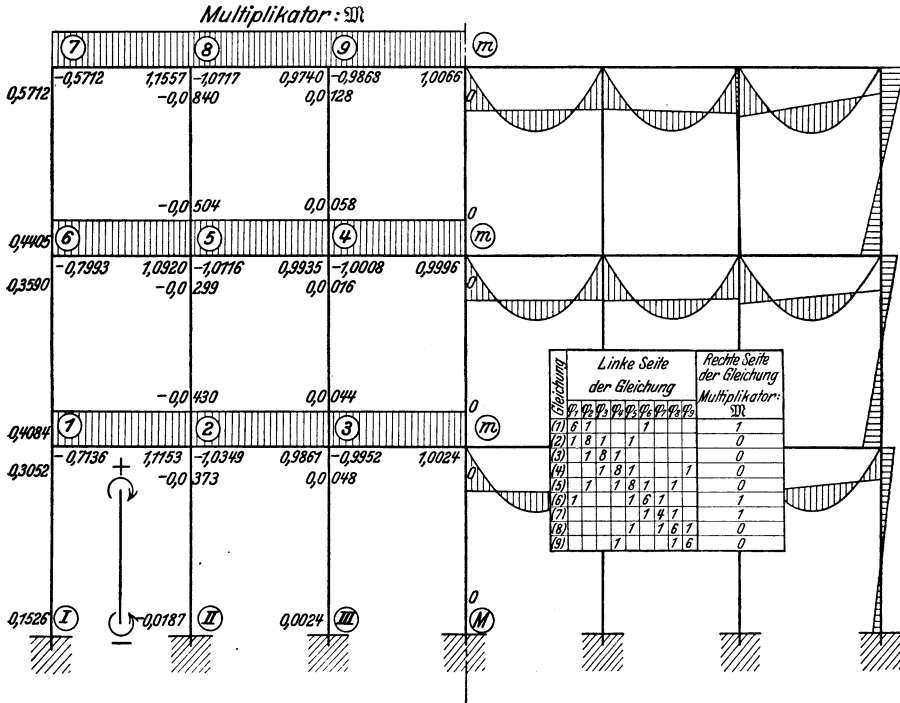


Momententabelle 59.

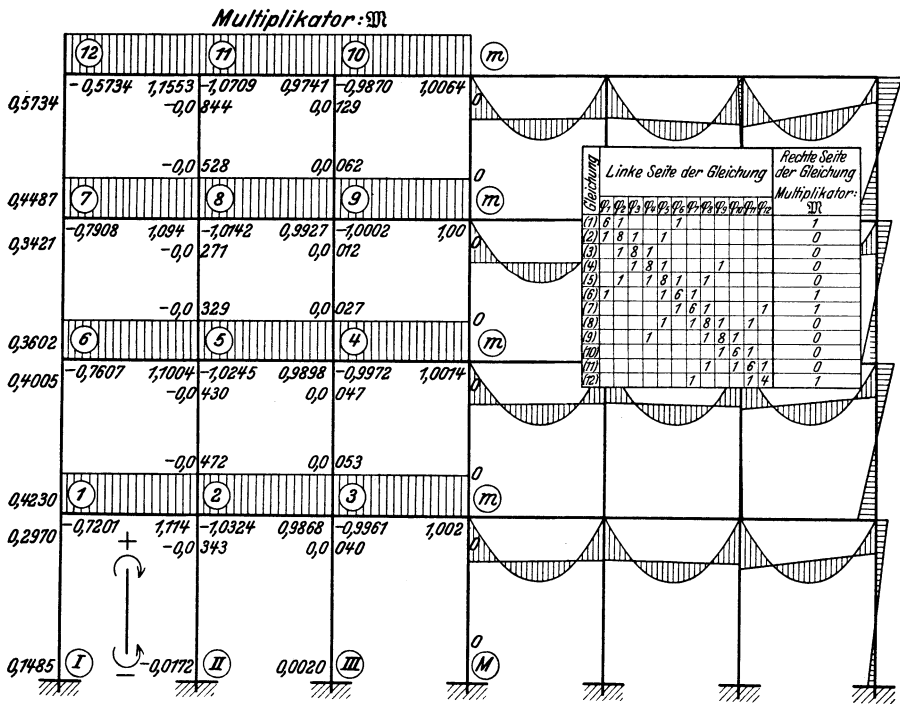


Momententabelle 60.

Bemerkung: Multiplikator \mathfrak{M} für beliebige Belastungen s. Tabelle Ib.

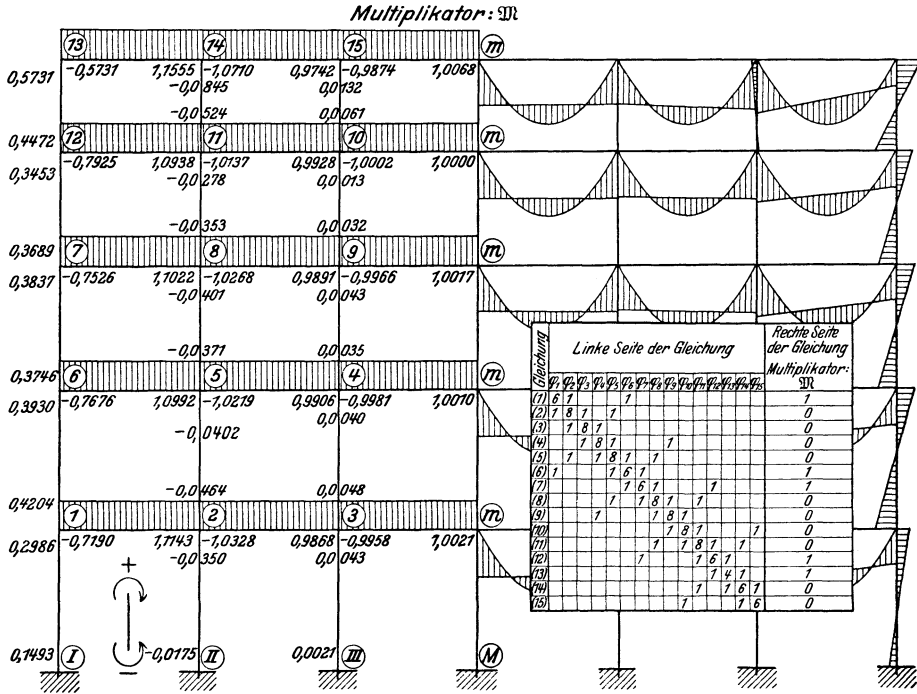


Momententabelle 61.

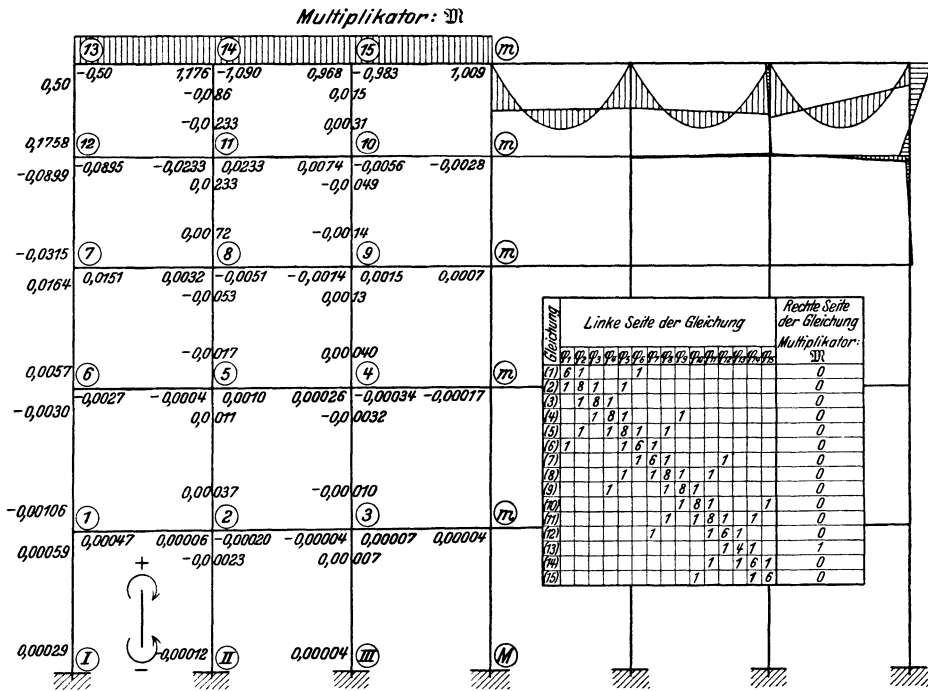


Momententabelle 62.

Bemerkung: Multiplikator \mathfrak{M} für beliebige Belastungen s. Tabelle Ib.

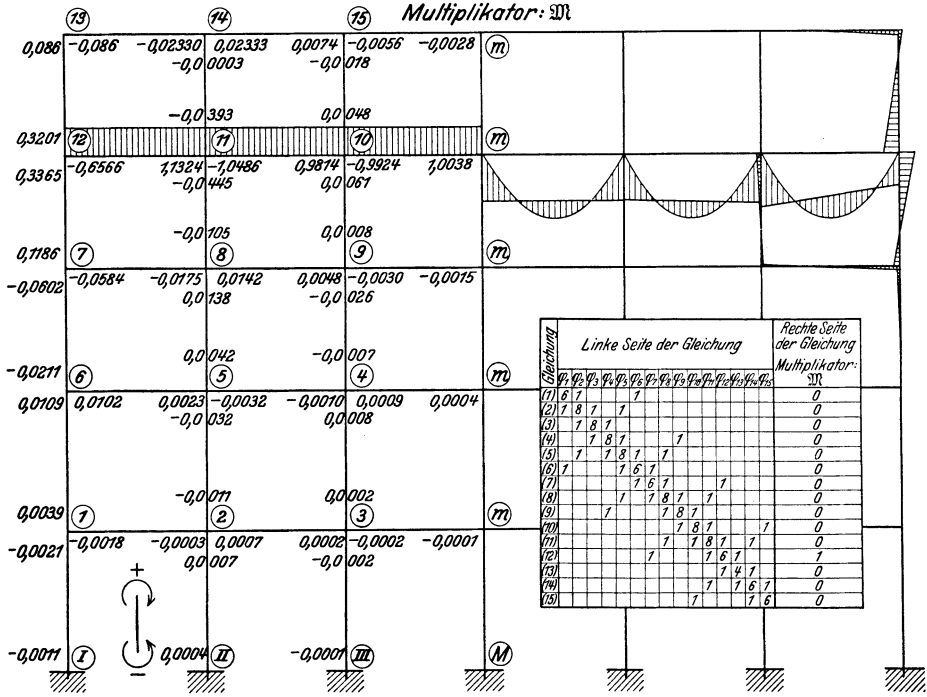


Momententabelle 63.

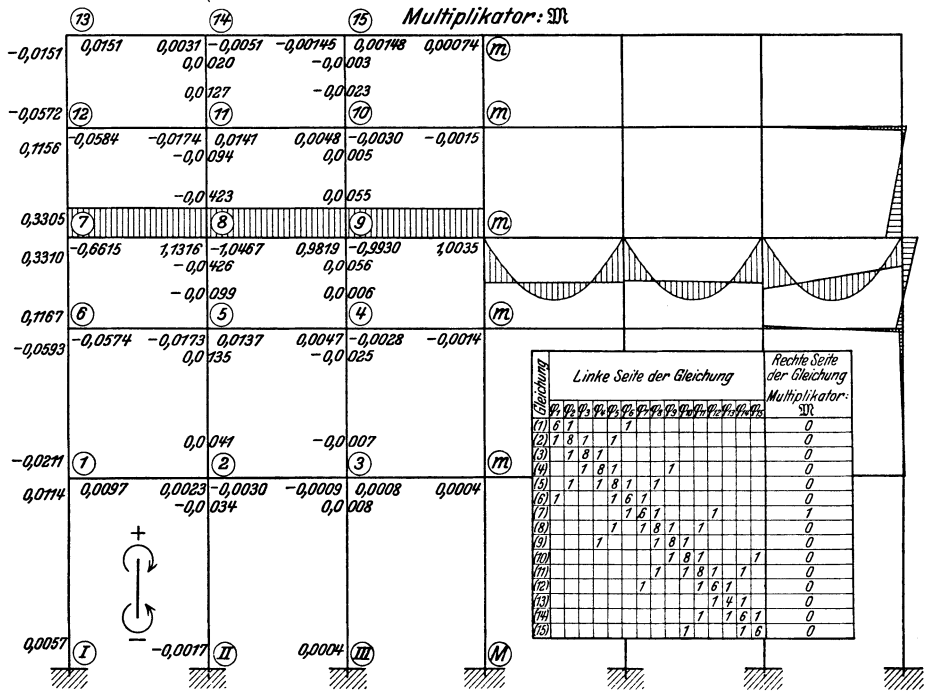


Momententabelle 64.

Bemerkung: Multiplikator \mathfrak{M} für beliebige Belastungen s. Tabelle Ib.



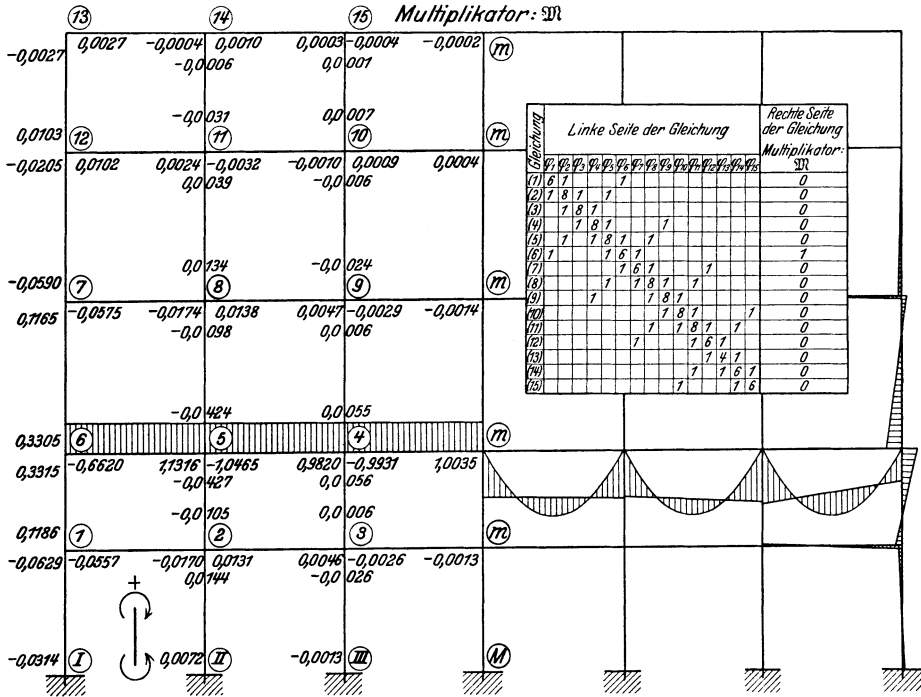
Momententabelle 65.



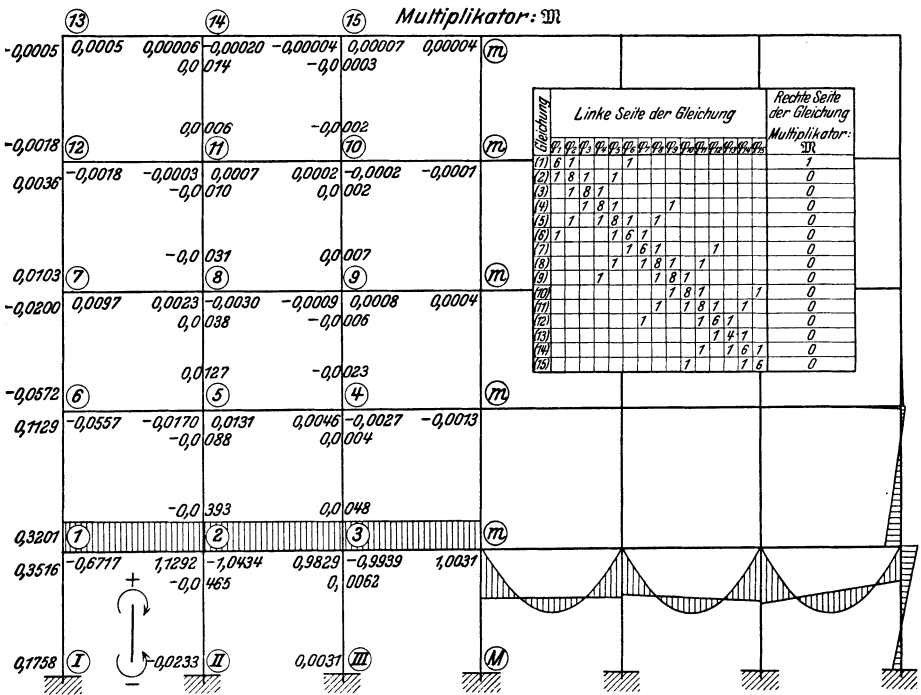
Momententabelle 66.

Bemerkung: Multiplikator \mathfrak{M} für beliebige Belastungen s. Tabelle Ib.

104 Eingespannter, symmetrischer Rahmen m. symmetr. vertikaler Belastung auf den Balken.



Momententabelle 67.

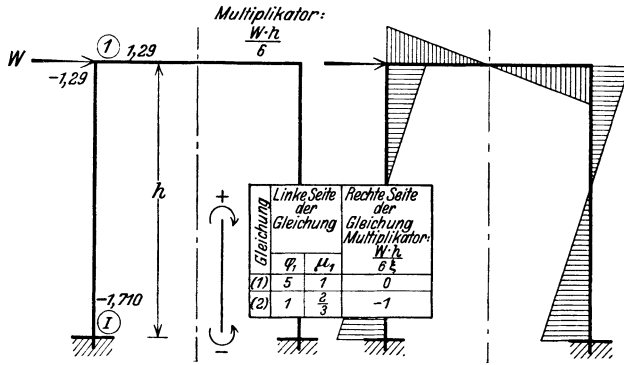


Momententabelle 68.

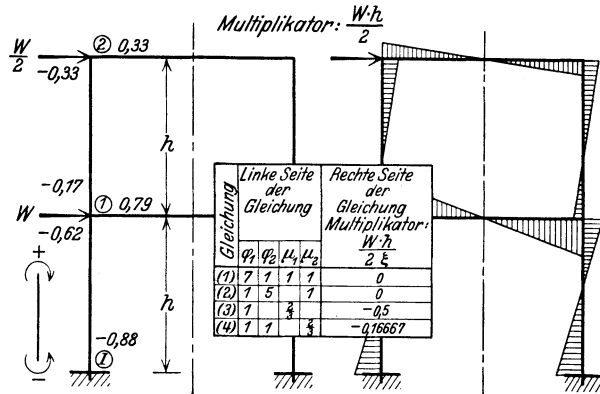
Bemerkung: Multiplikator \mathfrak{M} für beliebige Belastungen s. Tabelle Ib.

Zweites Kapitel.

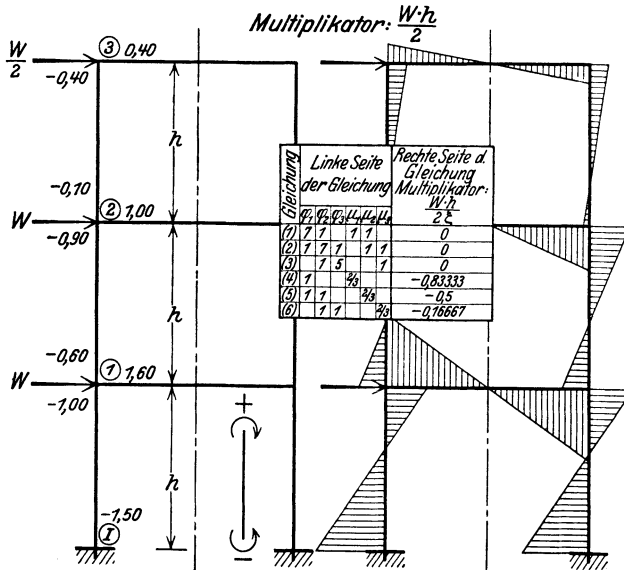
Eingespannter, symmetrischer Rahmen mit waagerechter Einzellast in dem Knotenpunkt auf der vertikalen linken Seite des Rahmengebildes.



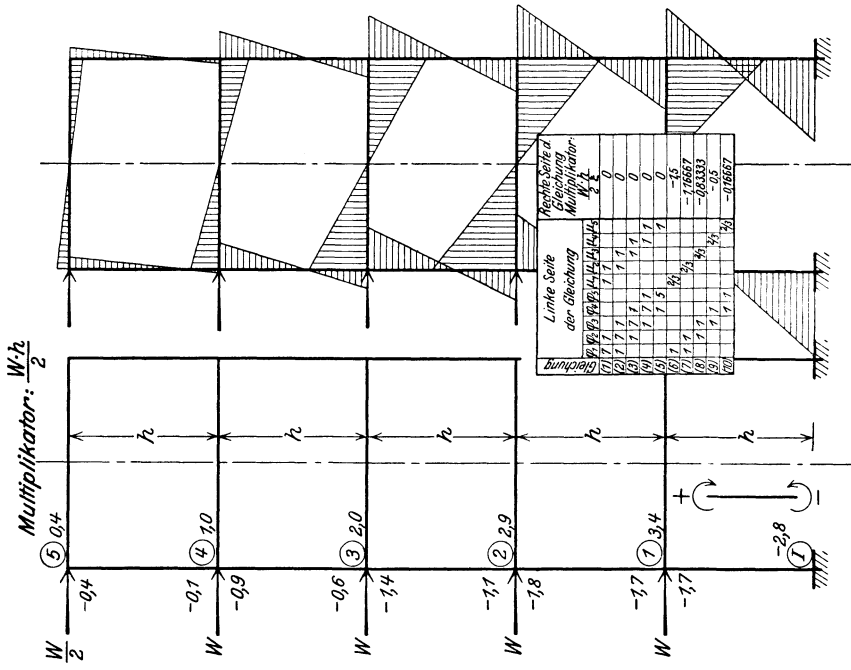
Momententabelle 69.



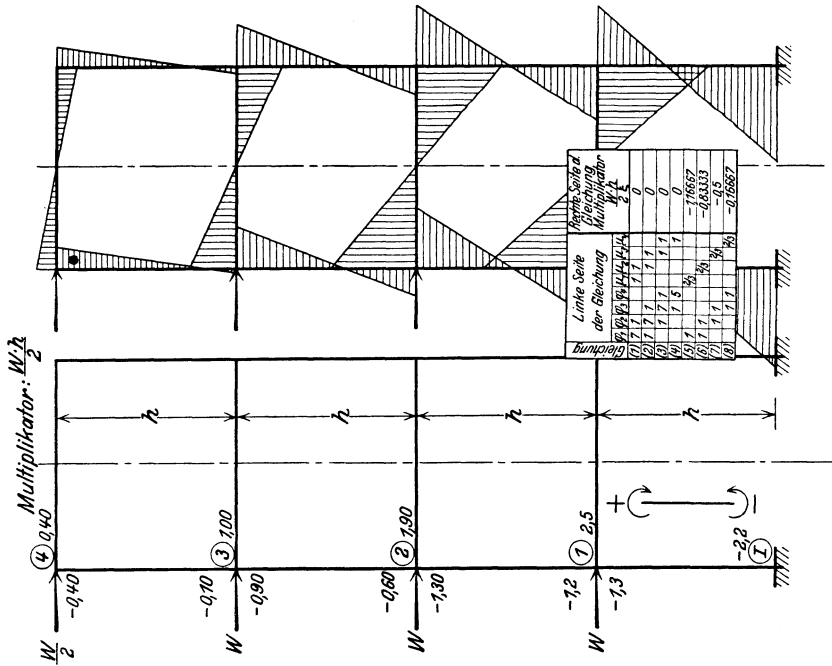
Momententabelle 70.



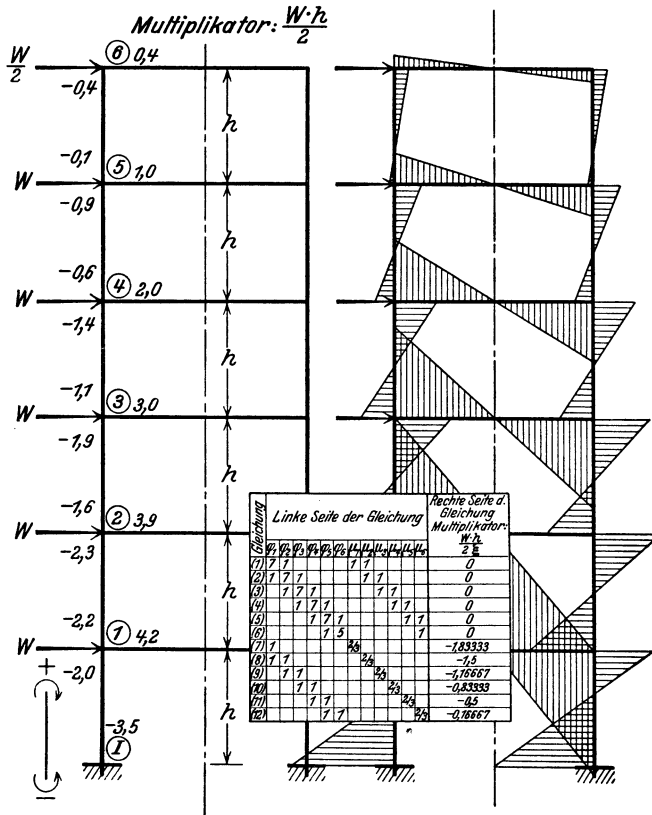
Momententabelle 71.



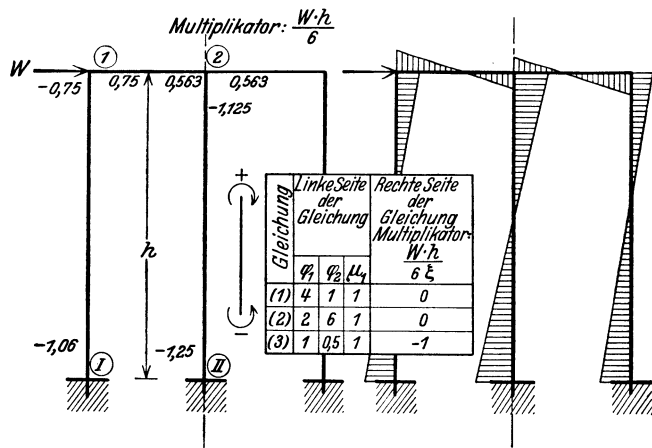
Momententabelle 78.



Momententabelle 72.

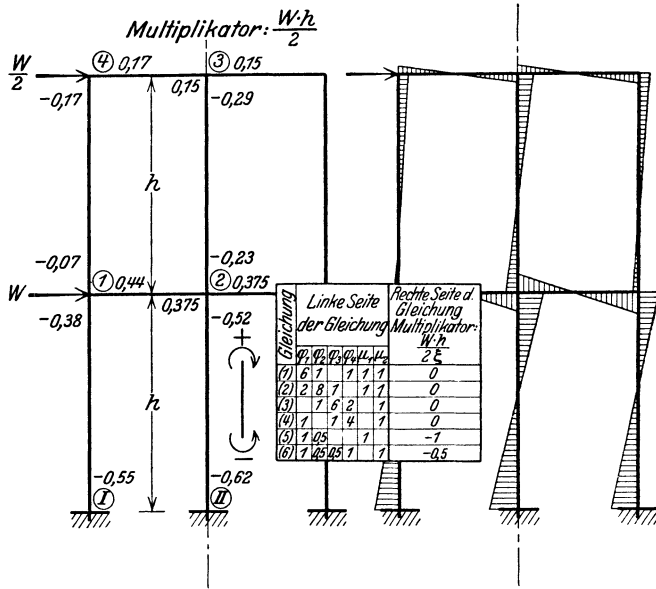


Momententabelle 74.

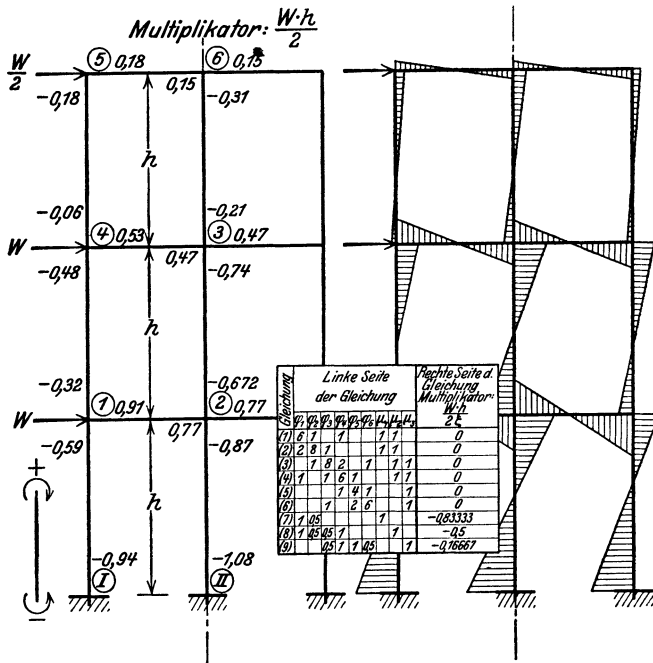


Momententabelle 75.

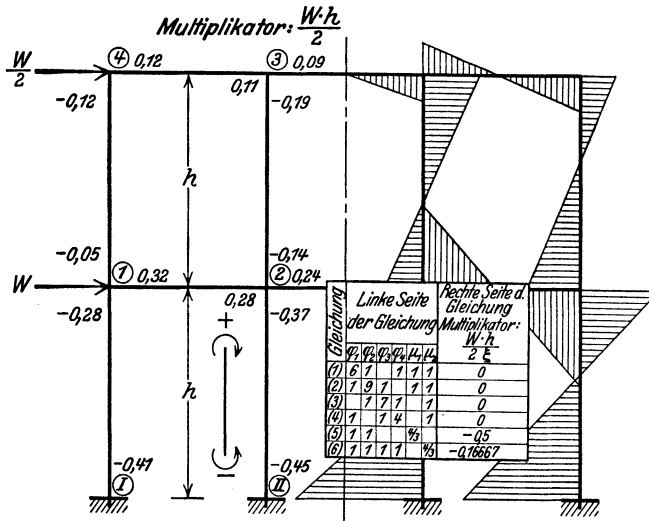
108 Eingespannter, symmetr. Rahmen mit waagerechter Einzellast im linken Knotenpunkt.



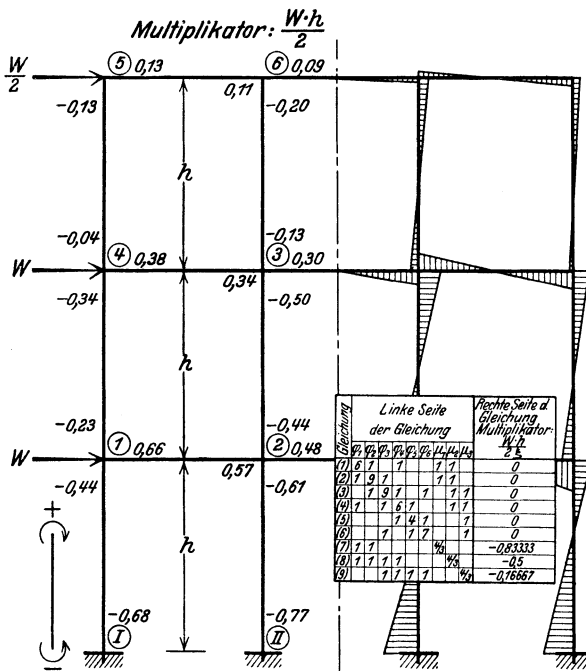
Momententabelle 76.



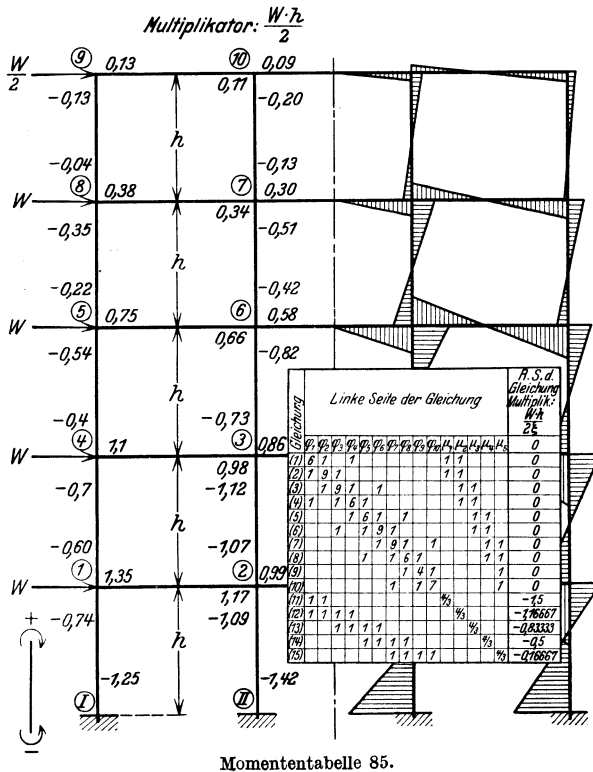
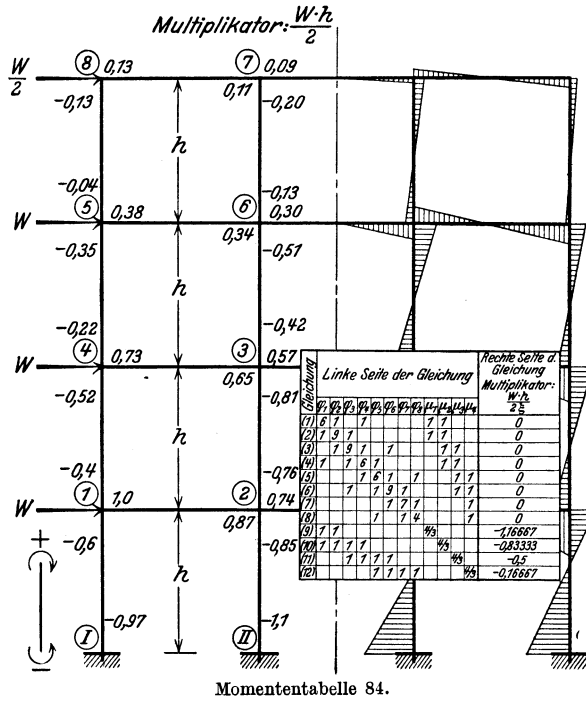
Momententabelle 77.

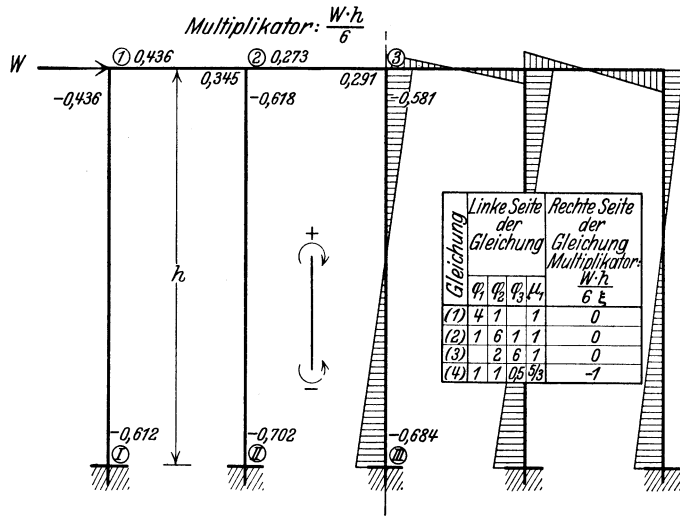


Momententabelle 82.

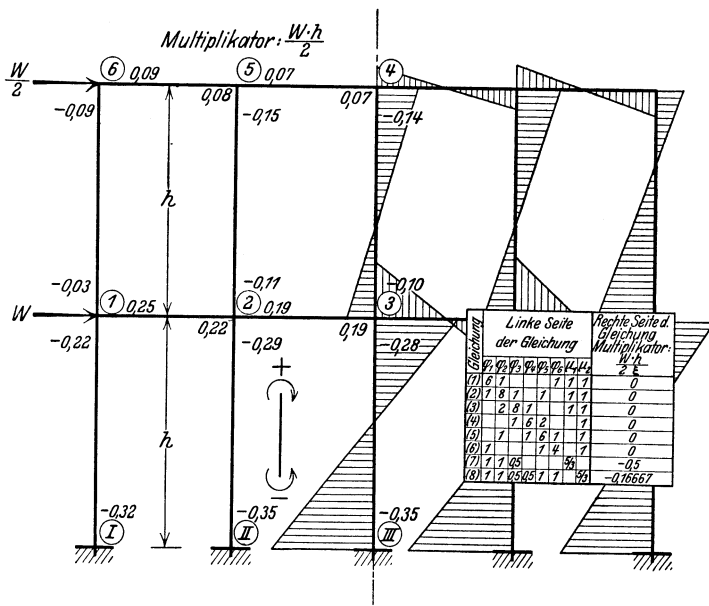


Momententabelle 83.

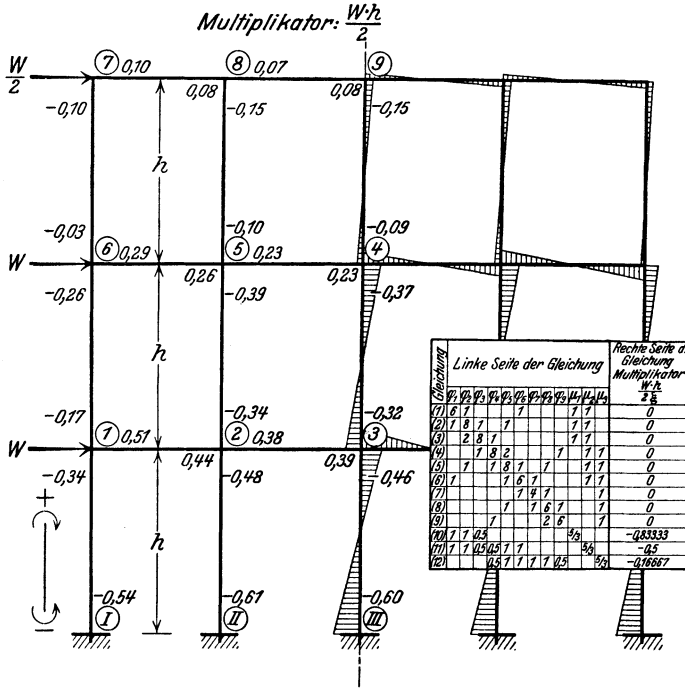




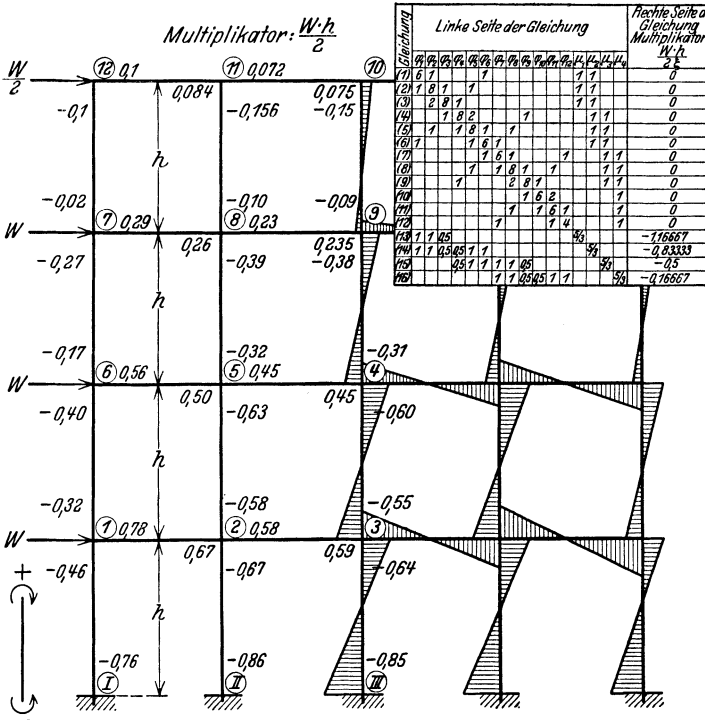
Momententabelle 86.



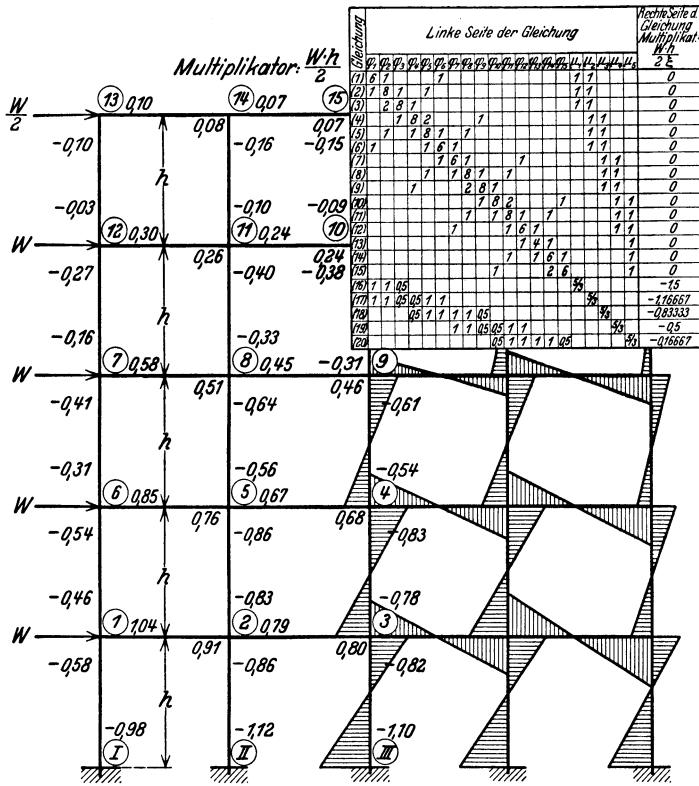
Momententabelle 87.



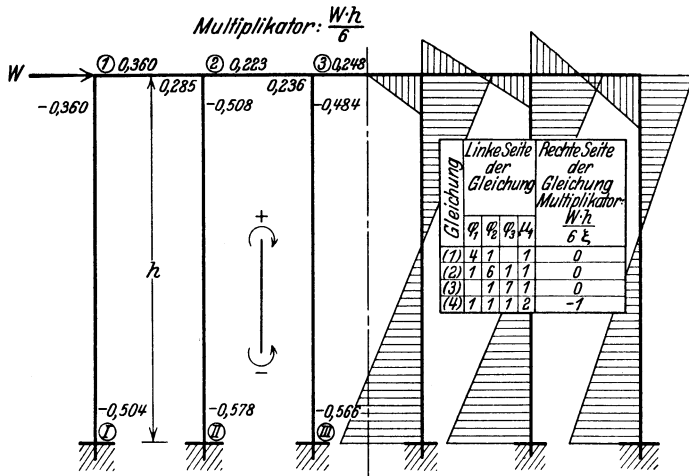
Momententabelle 88.



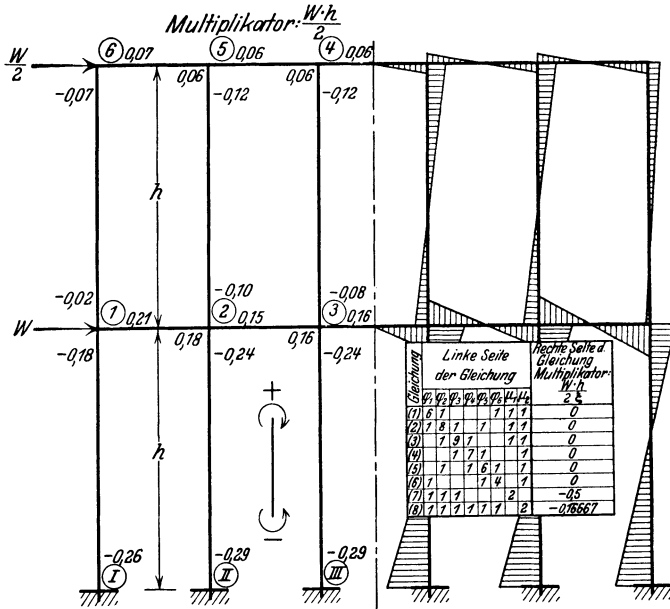
Momententabelle 89.



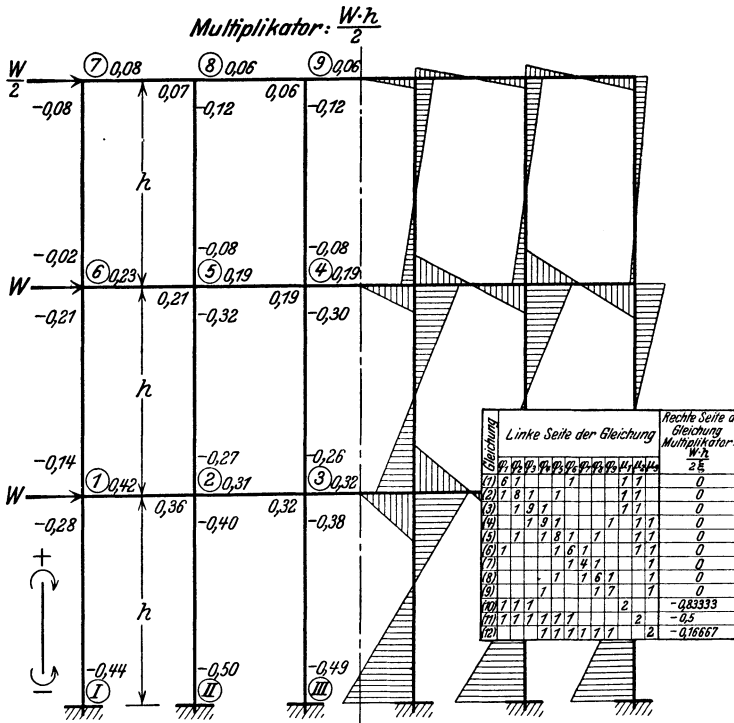
Momententabelle 90.



Momententabelle 91.



Momententabelle 92.



Momententabelle 93.

