H. Boegehold

Zur Vorgeschichte der Monochromate

ISBN 978-3-662-37060-5 ISBN 978-3-662-37759-8 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-37759-8

Sonderabdruck aus „Zeitschrift für Instrumentenkunde“, 59. Jahrg. 1939, 5. Heft.
Verlag von Julius Springer, Berlin W 9.
Printed in Germany.

Zur Vorgeschichte der Monochromate.

Von
H. Boegehold in Jena.

I. Die drei ersten Kapitel der Eulerschen Dioptrik.

H. Schulz bemerkt (*diese Zeitschr.* **58.** *S. 167. 1938*), nach der Darstellung des Czapskischen Lehrbuches (*3. Aufl. 244,* nach meiner Art anzuführen *Cz 244*) könne man durch eine Folge von 4 Linsen mit gleichen Vorzeichen der Brennweite den Öffnungsfehler nur für $n \geqq 1{,}55$ heben. Schulz gibt die Formeln an und zeigt, daß es schon für $n = 1{,}50$ geht.

Herr Schulz hat die von mir verfaßte Stelle mißverstanden. Es heißt dort: „L. Euler [*4*; *6, I § 156*] fand, daß es bei vier Sammellinsen für $n = 1{,}55$ möglich ist, die „sphärische Abweichung völlig zu heben. Die Entdeckung ... wurde Anfang dieses Jahr-„hunderts durch M. v. Rohr und A. König zum zweiten Male gemacht. Es wurde fest-„gestellt, daß für $n = 1{,}75$ der gleiche Zweck schon durch drei Linsen, für $n = 2{,}5$ schon durch zwei Linsen erreicht werden könne [M. v. Rohr *9, 233*][1].“ Ich hatte also rein geschichtlich auf Eulers Bearbeitung verwiesen, nicht aber gemeint, der Wert, mit dem er gerechnet hatte, sei der kleinste zulässige; das Gegenteil war mir bekannt (vgl. S. [24], *233*).

Ich benutze aber diese Gelegenheit, hier einmal den Eulerschen Gedankengang ein wenig ausführlicher wiederzugeben, und zwar, indem ich gleichzeitig einen Überblick über die ersten Abschnitte des ersten Buches der Eulerschen Dioptrik biete. So sehr ich F. Rudios [[25] *556*] Bewunderung für die „geradezu klassische Schönheit“ dieses Werkes teile, so wenig habe ich etwas davon gemerkt, daß sich in den seitdem verstrichenen 27 Jahren Rudios Hoffnung erfüllt hätte, das Werk werde in der neuen Ausgabe „eine wahre Auferstehung“ feiern. Da ist ein ausführlicher Hinweis vielleicht am Platze.

Die Dioptrik (1769—1771 in St. Petersburg erschienen) gibt eine ausführliche Darstellung von dem, was man damals von geometrischer Optik wußte, und dann die Anwendung auf optische Instrumente; namentlich faßt sie aber die eigenen Arbeiten Eulers zusammen; vieles einzelne hatte er in den letzten 15 Jahren veröffentlicht. Sie verdient unsere Bewunderung um so mehr, als sie das Werk eines Blinden war, Euler hatte 1735 das rechte, 1766 das linke Auge verloren.

Das erste Kapitel (*§ 1—67*) behandelt die einzelne Linse; Bildort, Bildgröße, bildseitige Öffnung, vor allem aber den Öffnungsfehler (die sphärische Abweichung im engeren Sinne). Dieser Fehler ist der einzige von den Seidelschen Fehlern, den Euler besprochen hat, freilich ausführlicher als seine Vorgänger und Zeitgenossen. Über die Abweichungen von Punkten außer der Achse schreibt er (*§ 11,* die Übersetzung ist, wie überall, von mir):

„Wie es mit der Brechung der Strahlen steht, wenn der Lichtpunkt außer der Achse „liegt, ist nicht nur eine sehr schwierige Frage, sondern auch mit so umständlichen Rech-„nungen verbunden, daß man kaum etwas schließen kann. Bei der Benutzung der Linsen „kommt es aber nie auf Punkte an, die weit von der Achse entfernt sind, daher muß man „zufrieden sein, wenn Dinge in der Achse genau wiedergegeben werden; die Undeutlich-„keit achsennaher Punkte kann dann nicht merklich sein: Weicht nämlich die Wiedergabe „eines Achsenpunktes E durch Randstrahlen nicht ab, so kann sich schwerlich eine merk-„liche Undeutlichkeit einschleichen, wenn der Punkt ein wenig von der Achse entfernt ist.“

Hier irrt Euler bekanntlich.

---

[1] Die kursiven Zahlen verweisen auf *Cz 676* und *717* (das Quellenverzeichnis des Lehrbuchs).

Euler leitet zunächst Formeln für die Brechung an einer Fläche ab, die fast genau unsere Durchrechnungsformeln sind, gebraucht sie aber nur zur Reihenentwicklung (*§ 20*). Allerdings gibt er (*§ 25*) außerdem eine Formel, die s' abhängig von s, r, σ, n darstellt. Er benutzt sie auch, um für das zweite Glied der Reihenentwicklung, das erste Zonenglied, einen Ausdruck herzuleiten. Leider sind hier beim Druck mehrere Buchstaben und Zahlen fortgefallen oder ganz unleserlich geworden. 1911 hat der Herausgeber, E. Cherbuliez, den richtigen Ausdruck wieder herzustellen versucht, scheint sich aber versehen zu haben[1].

Euler benutzt weiterhin nur das erste Glied der Entwicklung. Ich gebe nach *§ 20*, aber in unserer Bezeichnung (DIN 1335):

$$\tilde{s}' = s' + \Delta s' = \frac{n\,r\,s}{(n-1)\,s + r} - \frac{(n-1)\,s\,(s-r)^2\,(s-(n+1)\,r)}{2\,n\,r\,[(n-1)\,s+r]^2}\,\sigma^2. \tag{1}$$

Euler schließt (*§ 26*) die zweite Linsenfläche an und bestimmt die Gesamtabweichung, indem er selbstverständlich die Änderung des Winkels σ berücksichtigt, die Dicke nicht vernachlässigt. Er gibt dem Ausdruck verschiedene Formen; ich beschränke mich darauf, die letzte anzugeben (*§ 41*). Bei ihr ist die Abweichung nicht durch den Dingabstand und die Halbmesser ausgedrückt, sondern durch Ding- und Bildabstand und einen Ausdruck, der beide Halbmesser (also in unserer Sprache die Durchbiegung) bestimmt:

$$-\Delta s' = \frac{n\,s'^2\,h^2}{2\,(n-1)^2}\left\{-\left(\frac{k+d}{k-d}\right)^2\left(\frac{n}{s}-\frac{2}{k+d}\right)\left(\frac{1}{s}-\frac{2}{k+d}\right)^2 + \left(\frac{k-d}{k+d}\right)^2\left(\frac{n}{s'}-\frac{2}{k-d}\right)\left(\frac{1}{s'}-\frac{2}{k+d}\right)^2\right\}. \tag{2}$$

Hier ist k eine von Euler rein formal eingeführte Länge, die beiden Halbmesser bestimmen sich durch

$$\left.\begin{aligned} &\frac{n-1}{r} = -\frac{1}{s} + \frac{2n}{k+d}, \qquad &&\frac{n-1}{r'} = -\frac{1}{s'} + \frac{2n}{k-d},\\ &\text{oder}\quad r = -\frac{(n-1)\,s\,(k+d)}{k+d-2\,n\,s}, \qquad &&r' = -\frac{(n-1)\,s'(k-d)}{k-d-2\,n\,s'}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Euler hat schon eine ganz folgerichtige Bezeichnungsweise, doch sind die Formeln durch unsere Vorzeichenbestimmung noch ein wenig gleichmäßiger geworden.

Für den Winkel mit der Achse (Euler gebraucht nur das Hauptglied, bestimmt freilich auch das nächste Glied) ist zu setzen

$$\sigma' = \frac{k-d}{k+d}\cdot\frac{h}{s'}, \qquad \sigma = \frac{h}{s}, \tag{4}$$

für den Maßstab (*§ 64*):

$$\beta' = \frac{s'(k+d)}{s\,(k-d)}, \tag{5}$$

für die Verschiebung des Bildes, wenn der Gegenstand um ds verschoben wird (*§ 60*)

$$ds' = \alpha' ds = \frac{s'^2}{s^2}\left(\frac{k+d}{k-d}\right)^2. \tag{6}$$

Die Größe k hat übrigens einfache geometrische Bedeutung; die Bildschnittweite nach der ersten Fläche ist $\frac{k+d}{2}$, die Dingschnittweite vor der zweiten Fläche ist $\frac{k-d}{2}$, k also deren Summe. (Dies scheint Euler nicht erwähnt zu haben.)

---

[1] Für die Besitzer des Werks bemerke ich, daß der Ausdruck in Eulers Bezeichnung wohl so lauten muß:

$$\frac{(n-1)\,c\,(c-f)\,[3\,(n^2+n+1)\,c^3 + 3\,n^2\,(n+2)\,c^2\,f + n^2\,(3\,n-4)\,c\,f^2 - n^3\,f^3]}{24\,n^3\,f^4}\,\Phi^4.$$

Euler kommt nun (*§ 44*) zu einer Linse, deren Dicke zu vernachlässigen ist, hier hat man natürlich:

$$-\Delta s' = \frac{n s'^2 h^2}{2(n-1)^2}\left\{-\left(\frac{n}{s}-\frac{2}{k}\right)\left(\frac{1}{s}-\frac{2}{k}\right)^2+\left(\frac{n}{s'}-\frac{2}{k}\right)\left(\frac{1}{s'}-\frac{2}{k}\right)^2\right\}. \qquad 2a)$$

„*§ 46/51. Aufgabe 6.* Bei Vernachlässigung der Linsendicke, wenn Ding- und Bild„abstand, s und s', gegeben sind, die Linsenform festzustellen, die bei gegebener Öffnung „die geringste Abweichung hat."

Differenziert[1] man 2a) nach $2/k$ und setzt in 3) ein, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{2}{k} = \frac{2n+1}{2(n+2)}\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}\right); \\ &r = \frac{2(n-1)(n+2)\, s s'}{n(2n+1)\, s-(4+n-2n^2)\, s'}, \qquad r' = \frac{2(n-1)(n+2)\, s s'}{n(2n+1)\, s'-(4+n-2n^2)\, s} \end{aligned}\right\} \qquad 7)$$

und für die Abweichung nach einigen Umformungen:

$$-\Delta s' = \frac{n(4n-1)\, s'^2 h^2}{8(n-1)^2(n+2)}\left(\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}\right)\left[\left(\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}\right)^2-\frac{4(n-1)^2}{(4n-1)\, s s'}\right]. \qquad 7a)$$

$\left(\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}\right)$ ist natürlich der Kehrwert der Brennweite, was Euler auch gelegentlich verwendet.

§ 52. Aufgabe 7. „Bei Vernachlässigung der Linsendicke, wenn Ding- und Bild„abstand, s und s', gegeben sind, die Linsenform festzustellen, die bei gegebener Öffnung „nicht die geringste, sondern eine vorgeschriebene Abweichung hat."

Euler nimmt also an:

$$-\Delta s' = \frac{n(4n-1)\, s'^2 h^2}{8(n-1)^2(n+2)}\left(\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}\right)\left[\left(\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}\right)^2-\frac{4(n-1)^2}{(4n-1)\, s s'}+S\right] \qquad 7b)$$

und setzt den Ausdruck für die Abweichung 2a) diesem Werte gleich. Er erhält für k eine Gleichung zweiter Ordnung, die Lösung ist:

$$\frac{2}{k} = \frac{2n+1}{2(n+2)}\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}\right) \pm \frac{\sqrt{(4n-1)\, S}}{2(n+2)}. \qquad 7c)$$

Der bequemeren Schreibweise halber setzt Euler $S = (\lambda - 1)\left(\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}\right)^2$ und führt außerdem (§ *55*) Abkürzungen ein[2]:

$$\left.\begin{aligned} &\mu = \frac{n(4n-1)}{8(n-1)^2(n+2)} = 0{,}938191, \qquad \nu = \frac{4(n-1)^2}{4n-1} = 0{,}232692, \\ &\varrho = \frac{4+n-2n^2}{2(n-1)(n+2)} = 0{,}190781, \qquad \omega = \frac{n(2n+1)}{2(n-1)(n+2)} = 1{,}627401, \\ &\tau = \frac{n\sqrt{4n-1}}{2(n-1)(n+2)} = 0{,}905133. \end{aligned}\right\} \qquad 8)$$

Die Zahlenwerte gelten für $n = 1{,}55$, an zwei späteren Stellen finden sich Tafeln von $n = 1{,}50$ bis $n = 1{,}60$ (*Lib. II § 15, Lib. III § 36*).

[1] Euler hat hier die Bezeichnung etwas geändert, ich habe dies nicht angenommen.

[2] Hier habe ich die meisten Bezeichnungen beibehalten, da eine Verwechslung mit den von uns λ und ν genannten Größen wohl nicht zu fürchten ist.

Hiermit wird

$$r = -\frac{s\,s'}{\varrho\, s' - \omega\, s \pm \tau\,(s'-s)\sqrt{\lambda - 1}}, \qquad r' = -\frac{s\,s'}{\varrho\, s - \omega\, s' \pm \tau\,(s'-s)\sqrt{\lambda - 1}}, \tag{9}$$

$$-\Delta s' = \mu\, s'^2 h^2 \left(\frac{1}{s'} - \frac{1}{s}\right)\left[\lambda\left(\frac{1}{s'} - \frac{1}{s}\right)^2 - \frac{\nu}{s\,s'}\right]. \tag{10}$$

Es muß also $\lambda \geqq 1$ sein. Für jeden Wert $\lambda > 1$ gibt es zwei Umbiegungen. Für $s = \infty$ oder $s' = \infty$ ist λ ein Maß der Abweichung (den Fall $s' = \infty$, wobei natürlich auch der Betrachtungsabstand ∞ ist, betrachtet Euler beispielsweise beim einfachen Mikroskop als gegeben), andernfalls kommt noch ein Zusatzglied hinzu.

§ 56/8 gibt Euler noch an:

Gleichseitige Linse, $r = -r'$, also $(\omega - \varrho)\,(s + s') = \pm 2\,\tau\,(s' - s)\sqrt{\lambda - 1}$, für $n = 1{,}55$ wird $\lambda = 1 + \dfrac{0{,}629795\, s'^2 + 1{,}259589\, s\,s' + 0{,}629795\, s^2}{(s'-s)^2}$.

Plankonvexe Linse, ebene Fläche dingseitig, $r = \infty$, also $\varrho\, s' - \omega\, s = \mp\tau\,(s' - s)\sqrt{\lambda - 1}$, für $n = 1{,}55$ wird $\lambda = 1 + \dfrac{0{,}044427\, s'^2 - 0{,}757940\, s\,s' + 3{,}232692\, s^2}{(s'-s)^2}$.

Dieselbe Linse, ebene Fläche bildseitig, $r' = \infty$, also $\omega\, s' - \varrho\, s = \pm\tau\,(s' - s)\sqrt{\lambda - 1}$, für $n = 1{,}55$ wird $\lambda = 1 + \dfrac{3{,}232692\, s'^2 - 0{,}757940\, s\,s' + 0{,}044427\, s^2}{(s'-s)^2}$.

Im zweiten Kapitel (*§ 68/95*) entwickelt Euler die Formeln für den Durchgang durch mehrere aufeinanderfolgende Linsen, deren Dicken und Abstände endlich sein können. Die Formeln für das Zusammenwirken der Öffnungsfehler werden mit Hilfe der Gleichungen 4) und 6) abgeleitet. Das allgemeine Ergebnis steht in *§ 86*, ich fasse es so zusammen: Die Linsen seien mit arabischen Ziffern bezeichnet, die Fehler der einzelnen $-\Delta s_1' = P_1\, s_1'^2 h_1^2$, $-\Delta s_2' = P_2\, s_2'^2 h_2^2$ usf.; dann kann man, wenn die Öffnung durch die erste Linse bestimmt wird, die Gesamtabweichung so erhalten:

$$\left.\begin{aligned} -\Delta s' = s'^2 h^2 \Bigg\{ & \frac{1}{\delta_2^2\,\delta_3^2 \cdots \delta_\varkappa^2}\,\frac{s_1'^2\, s_2'^2 \cdots s_{\varkappa-1}'^2}{s_2^2\, s_3^2 \cdots s_\varkappa^2}\,P_1 + \frac{\delta_1^2}{\delta_3^2 \cdots \delta_\varkappa^2}\cdot\frac{s_2^2\, s_2'^2 \cdots s_{\varkappa-1}'^2}{s_1'^2\, s_3^2 \cdots s_\varkappa^2}\,P_2 \\ & + \cdots \delta_1^2\,\delta_2^2 \cdots \delta_{\varkappa-1}^2 \cdot \frac{s_2^2\, s_3^2 \cdots s_\varkappa^2}{s_1'^2\, s_2'^2 \cdots s_{\varkappa-1}'^2}\,P_\varkappa \Bigg\}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

δ_1, δ_2 usf. sind hier die Faktoren $\dfrac{k_1 + d_1}{k_1 - d_1}$ usf.

Das dritte Kapitel (*§ 96/158*) behandelt genauer den Sonderfall, daß die Linsendicken und -abstände zu vernachlässigen sind. Solche dünnen Linsenfolgen heißen bei Euler lentes compositae seu multiplicatae, zusammengesetzte oder mehrfache Linsen.

In diesem Falle werden in 11) die Koeffizienten von P, usf. 1, d. h. es addieren sich die Abweichungen einfach zusammen.

§ 96/103. Euler stellt fest, daß bei zwei Linsen, wenn Ding- und Bildabstand s_1 und s_2' gegeben sind, man noch den Bildabstand für die erste oder den Dingabstand für die zweite Linse zur Verfügung habe ($s_1' = s_2$), weiter aber auch die Zahlen λ_1 und λ_2, die beide Linsen kennzeichnen. Man hat dann für die vier Halbmesser:

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= -\frac{s_1\, s_1'}{\varrho\, s_1' - \omega\, s_1 \pm \tau\,(s_1' - s_1)\sqrt{\lambda_1 - 1}}, & r_1' &= -\frac{s_1\, s_1'}{\varrho\, s_1 - \omega\, s_1' \pm \tau\,(s_1' - s_1)\sqrt{\lambda_1 - 1}}, \\ r_2 &= -\frac{s_2\, s_2'}{\varrho\, s_2' - \omega\, s_2 \pm \tau\,(s_2' - s_2)\sqrt{\lambda_2 - 1}}, & r_2' &= -\frac{s_2\, s_2'}{\varrho\, s_2 - \omega\, s_2' \pm \tau\,(s_2' - s_2)\sqrt{\lambda_2 - 1}}, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

für die Abweichung aber:

$$-\Delta s' = \mu s_2'^2 h^2 \left\{\left(\frac{1}{s_1'} - \frac{1}{s_1}\right)\left[\lambda_1\left(\frac{1}{s_1'} - \frac{1}{s_1}\right)^2 - \frac{\nu}{s_1 s_1'}\right] + \left(\frac{1}{s_2'} - \frac{1}{s_2}\right)\left[\lambda_2\left(\frac{1}{s_2'} - \frac{1}{s_2}\right)^2 - \frac{\nu}{s_2 s_2'}\right]\right\}. \qquad 13)$$

§ 104/6. Euler denkt sich die Doppellinse durch eine einfache ersetzt, die die gleiche Längsabweichung habe; also nach 10):

$$-\Delta s' = \mu s_2'^2 h^2 \left\{\left(\frac{1}{s_2'} - \frac{1}{s_1}\right)\left[\lambda^{(2)}\left(\frac{1}{s_1'} - \frac{1}{s_1}\right)^2 - \frac{\nu}{s_1 s_2'}\right]\right\}. \qquad 13\text{a})$$

„Wenn $\lambda^{(2)} > 1$, so kann offenbar eine einfache Linse dieselbe Wirkung haben „wie die Doppellinse, daher wird man lieber die einfache anwenden, wird aber $\lambda^{(2)} < 1$, „so wäre die einfache Linse imaginär; dann geben Doppellinsen einen Erfolg, der von ein„fachen nicht zu erwarten ist, mit dem wichtigen Vorteil, daß die Abweichung geringer „ist. Man wird solche Linsen mit großem Erfolge verwenden, sie werden den einfachen „um so mehr vorzuziehen sein, je kleiner $\lambda^{(2)}$ ist."

§ *107/10.* „Aufgabe 2. Zu einer gegebenen Doppellinse die einfache mit gleicher „Längsabweichung zu bestimmen."

Euler setzt:

$$\frac{1}{s_1'} - \frac{1}{s_1} = \varphi\left(\frac{1}{s_2'} - \frac{1}{s_1}\right); \qquad \frac{1}{s_2'} - \frac{1}{s_2} = (1-\varphi)\left(\frac{1}{s_2'} - \frac{1}{s_1}\right).$$

Setzt man dann die Ausdrücke für $-\Delta s'$ 13) und 13a) einander gleich, so wird:

$$\lambda^{(2)} = \lambda_1 \varphi^3 + \lambda_2 (1-\varphi)^3 - \nu\varphi(1-\varphi). \qquad 14)$$

§ 111/2. „Da λ_1 und λ_2 nicht kleiner als 1 sein können und $\nu = 0{,}232692$ ist, kann „man offenbar keinen Wert von φ zwischen 0 und 1 annehmen, daß $\lambda^{(2)} = 0$ wird. Nimmt „man φ außerhalb dieser Grenzen, so kann man λ_1 und λ_2 Werte geben, die größer als 1 „sind, so daß $\lambda^{(2)} = 0$ ist." (Offenbar sind für $0 < \varphi < 1$ die beiden Brennweiten von gleichem Vorzeichen.)

§ 114. „Aufgabe 3. Die Doppellinse festzustellen, wo φ zwischen 0 und 1 liegt und „$\lambda^{(2)}$ den kleinsten Wert hat."

Da hier die beiden ersten Ausdrücke positiv sind, ist $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ zu setzen, dies führt auf

$$\lambda^{(2)} = 1 - (3+\nu)\,\varphi\,(1-\varphi), \qquad 15)$$

und dieser Ausdruck ist am kleinsten für $\varphi = \frac{1}{2}$, das führt auf

$$\lambda^{(2)} = \frac{1-\nu}{4} = 0{,}191827. \qquad 15\text{a})$$

Die Halbmesser werden aus 12) so erhalten:

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= -\frac{2 s_1 s_2'}{(2\varrho - \omega) s_2' - \omega s_1}, & r_1' &= \frac{2 s_1 s_2'}{(2\omega - \varrho) s_2' - \varrho s_1}, \\ r_2 &= \frac{2 s_1 s_2'}{(2\omega - \varrho) s_1 - \varrho s_2'}, & r_2' &= -\frac{2 s_1 s_2'}{(2\varrho - \omega) s_1 - \omega s_2'}, \end{aligned}\right\} \qquad 16)$$

für die Abweichung hat man:

$$-\Delta s' = \mu s_2'^2 h^2 \left(\frac{1}{s_2'} - \frac{1}{s_1}\right)\left[0{,}191827\left(\frac{1}{s_2'} - \frac{1}{s_1}\right) - \frac{\nu}{s_1 s_2'}\right]. \qquad 17)$$

„Wollten wir aber eine Glasart verwenden, für die $n = 1{,}60 = \frac{8}{5}$ wäre, so wäre „$\nu = \frac{4}{15}$, $\lambda^{(2)} = 0{,}183333$; diese Glasart lieferte also eine noch geringere Abweichung[1]."

[1] *Lib. II § 65* ist erwähnt: Für $n = 1{,}53$ wäre $\lambda^{(2)} = 0{,}1951$, für $n = 1{,}58$ wäre $\lambda^{(2)} = 0{,}1868$.

§ 118. „Diese Art Doppellinsen sind also sehr bemerkenswert, da sie an Stelle von „Einzellinsen angewandt, eine viel geringere Abweichung hervorbringen, und deshalb „bei Anfertigung von Fernrohren und Mikroskopen eine weite Benutzungsmöglichkeit „sein wird. Aber außerdem ist ihre Anfertigung mit den geringsten Schwierigkeiten ver- „bunden; wenn auch ein wenig von der Vorschrift abgewichen wird, so wird der Erfolg „sich kaum ändern.“

Dies folgt aus der Minimumseigenschaft, s. auch *§ 113*, Euler führt noch ein Beispiel an.

§ 119. „Aufgabe 4. Für gegebene Abstände s und s' die Doppellinsen zu finden, „bei denen $\lambda^{(2)} = 0$ ist.“

Hier haben die Brennweiten ungleiches Vorzeichen, es gibt unendlich viele Formen, Euler stellt das Gesetz fest.

§ 120. „Anmerkung. Könnte man Linsen dieser Art ganz genau anfertigen, so „wären sie zweifellos den früheren vorzuziehen, da die Abweichung noch kleiner ist. „Leider zerstört der kleinste Ausführungsfehler fast die ganze Brauchbarkeit.“

Euler führt als Beispiel die Form $\varphi = 5$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2{,}025841$ an; nehme man bei richtigem λ_1 und λ_2 nun $\varphi = 5\frac{1}{10}$, so werde durch diesen kaum zu vermeidenden Irrtum nicht $\lambda^{(2)} = 0$, sondern $\lambda^{(2)} = -2{,}011$, also ungünstiger als bei der besten Einzellinse[1].

§ 121. Zusammenfassung. In mehreren Zusätzen wird untersucht, wie sich die Formeln ändern, wenn beide Linsen verschiedenes Brechungsverhältnis haben und außerdem der Abstand nicht vernachlässigt werden kann.

§ 122/32. Dreifache Linsen. Euler gibt ein doppeltes Verfahren an. Er setzt zunächst drei Linsen ebenso zusammen, wie zwei in 13) und führt ein:

$$\frac{1}{s_1'} - \frac{1}{s_1} = \varphi\left(\frac{1}{s_3'} - \frac{1}{s_1}\right), \quad \frac{1}{s_2'} - \frac{1}{s_2} = \chi\left(\frac{1}{s_3'} - \frac{1}{s_1}\right), \quad \frac{1}{s_3'} - \frac{1}{s_3} = \psi\left(\frac{1}{s_3'} - \frac{1}{s_1}\right); \quad \varphi + \chi + \psi = 1.$$

Er bekommt dann die 14) entsprechende Gleichung:

$$\lambda^{(3)} = \lambda_1 \cdot \varphi^3 + \lambda_2 \chi^3 + \lambda_3 \psi^3 - \nu (1-\varphi)(1-\chi)(1-\psi). \tag{18}$$

Andererseits denkt er sich die ersten beiden Linsen zusammengesetzt und behandelt dann diese Zusammensetzung als eine Linse, zu der die dritte hinzukommt. Schreibt man jetzt — in anderer Bezeichnung als eben:

$$\frac{1}{s_1'} - \frac{1}{s_1} = \varphi\left(\frac{1}{s_2'} - \frac{1}{s_1}\right), \qquad \frac{1}{s_2'} - \frac{1}{s_1} = \chi\left(\frac{1}{s_3'} - \frac{1}{s_1}\right),$$

so wird wie in 14)

$$\left.\begin{aligned} \lambda^{(2)} &= \lambda_1 \varphi^3 + \lambda_2 (1-\varphi)^3 - \nu \varphi (1-\varphi), \\ \lambda^{(3)} &= \lambda^{(2)} \chi^3 + \lambda_3 (1-\chi)^3 - \nu \chi (1-\chi). \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

§ 133/43. „Aufgabe 6. Bei gegebenen Abständen s_1 und s_3' die dreifache Linse zu „bestimmen, die die geringste Abweichung hat.“ (Bei gleichen Zeichen der Brennweiten.)

Ich beschränke mich auf die zweite Eulersche Ableitung, weil er diese auch auf mehrere Linsen anwendet.

Euler bestimmt zunächst bei beliebigen Werten von λ_1, λ_2 und λ_3 die Zahlen φ und χ, also die Einzelbrennweiten, so daß $\lambda^{(3)}$ möglichst klein wird (dazu muß auch $\lambda^{(2)}$ möglichst klein sein). Differentiation der zweiten Gleichung 19) und Auflösung der entstehenden quadratischen Gleichung gibt:

$$\chi = \frac{-3\lambda_3 - \nu + \sqrt{(3\lambda^{(2)} + \nu)(3\lambda_3 + \nu)}}{3(\lambda^{(2)} - \lambda_3)} = \frac{\sqrt{3\lambda_3 + \nu}}{\sqrt{3\lambda^{(2)} + \nu} + \sqrt{3\lambda_3 + \nu}}. \tag{20}$$

[1] Eine Nachrechnung ergab $\lambda^{(2)} = -2{,}106$.

(Die andere Wurzel wird, wenigstens bei den in Frage kommenden Werten von $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ keinen Wert $0 < \chi < 1$ liefern.)

Setzt man in 19) ein, so läßt sich der entstehende Wert von $\lambda^{(3)}$ auf die Form bringen:

$$\lambda^{(3)} = \frac{1}{3\left(\frac{1}{\sqrt{3\,\lambda^{(2)} + \nu}} + \frac{1}{\sqrt{3\,\lambda_3 + \nu}}\right)^2} - \frac{1}{3}\nu,$$

woraus

$$\frac{1}{\sqrt{3\,\lambda^{(3)} + \nu}} = \frac{1}{\sqrt{3\,\lambda^{(2)} + \nu}} + \frac{1}{\sqrt{3\,\lambda_3 + \nu}}.$$

Ähnlich folgt aus der ersten Gleichung 19)

$$\varphi = \frac{\sqrt{3\,\lambda_2 + \nu}}{\sqrt{3\,\lambda_1 + \nu} + \sqrt{3\,\lambda_2 + \nu}}, \tag{20b}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3\,\lambda^{(2)} + \nu}} = \frac{1}{\sqrt{3\,\lambda_1 + \nu}} + \frac{1}{\sqrt{3\,\lambda_2 + \nu}}, \tag{20c}$$

also

$$\frac{1}{\sqrt{3\,\lambda^{(3)} + \nu}} = \frac{1}{\sqrt{3\,\lambda_1 + \nu}} + \frac{1}{\sqrt{3\,\lambda_2 + \nu}} + \frac{1}{\sqrt{3\,\lambda_3 + \nu}}. \tag{20d}$$

Mit Hilfe der Werte von φ, χ erhält man s_1', s_2', mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ dann die Halbmesser der Linsen nach 9).

Offenbar ist für $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$:

$$\varphi = \frac{1}{2}, \quad \sqrt{3\lambda^{(2)} + \nu} = \frac{1}{2}\sqrt{3\lambda_1 + \nu} = \frac{1}{2}\sqrt{3\lambda_3 + \nu}, \quad \chi = \frac{2}{3}, \quad \sqrt{3\lambda_3 + \nu} = \frac{1}{3}\sqrt{3\lambda_1 + \nu}, \tag{20e}$$

was bedeutet, daß die drei Brennweiten gleich sein müssen; setzt man aber $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, so kommt man auf den Mindestwert

$$\sqrt{3\,\lambda^{(3)} + \nu} = \frac{1}{3}\sqrt{3 + \nu}, \qquad \lambda^{(3)} = \frac{3 - 8\nu}{27} = 0{,}042165. \tag{20f}$$

Lib. II § 65 stehen für $n = 1{,}53$ und $1{,}58$ die Werte 0,0461 und 0,0362.

§ 145/51. „Aufgabe 7. Bei gegebenen Abständen s und s' die dreifachen Linsen „festzustellen, für die $\lambda^{(3)}$ vollkommen verschwindet.“

Linsen mit verschiedenem Vorzeichen der Brennweite. Euler meint auch hier, *§ 144,* die Anfertigung sei bedenklich (lubrica), die Gefahr eines Fehlers freilich nicht so groß wie bei Doppellinsen. Anhangsweise wird wieder der Fall behandelt, daß die Einzellinsen verschiedenes n haben.

§ 152/4. „Aufgabe 8. Bei gegebenen Abständen s und s' die vierfache Linse fest-„zustellen, die die geringste Abweichung hat.“

Das Verfahren bei drei Linsen läßt sich ohne weiteres übertragen. Bei beliebiger Annahme der λ werden die Brechkräfte ähnlich wie in 20) und 20d) bestimmt, es folgen Gleichungen wie 20a) und 20d). Schließlich wird:

$$\frac{1}{\sqrt{3\,\lambda^{(4)} + \nu}} = \frac{1}{\sqrt{3\,\lambda_1 + \nu}} + \frac{1}{\sqrt{3\,\lambda_2 + \nu}} + \frac{1}{\sqrt{3\,\lambda_3 + \nu}} + \frac{1}{\sqrt{3\,\lambda_4 + \nu}}. \tag{20g}$$

Für $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$ werden die Brechkräfte gleich und

$$\sqrt{3\,\lambda^{(4)} + \nu} = \frac{1}{4}\sqrt{3\,\lambda_1 + \nu}; \tag{20h}$$

endlich, wenn $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$ ist,

$$\sqrt{3\,\lambda^{(4)} + \nu} = \frac{1}{4}\sqrt{3 + \nu}\,; \qquad \lambda^{(4)} = \frac{3 - 15\,\nu}{48} = -0{,}010216\,. \tag{20i}$$

§ 156. „Durch größere Werte von λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 kann man also $\lambda^{(4)}$ genau „zu Null machen, nämlich durch $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 5\,\nu = 1{,}163460$. Daraus folgt „$\lambda_1 - 1 = 0{,}163460$, $\tau\sqrt{\lambda_1 - 1} = 0{,}365947$; es sind also solche Linsen auf zweifache „Weise herzustellen."

§ 157 setzt auseinander, daß bei diesen Linsen Ausführungsfehler sehr wenig ausmachen.

§ 158. Zusammensetzung von 5 und mehr Linsen. Euler stellt die (negativen) Mindestwerte für λ zusammen.

$$\lambda^{(1)} = \quad = 1{,}00000\,, \qquad \lambda^{(7)} = \frac{3 - 48\,\nu}{3 \times 49} = -0{,}055573\,,$$

$$\lambda^{(2)} = \frac{3 - 3\,\nu}{3 \times 4} = 0{,}191827\,. \qquad \lambda^{(8)} = \frac{3 - 63\,\nu}{3 \times 64} = -0{,}060727\,,$$

$$\lambda^{(3)} = \frac{3 - 8\,\nu}{3 \times 9} = 0{,}042165\,, \qquad \lambda^{(9)} = \frac{3 - 80\,\nu}{3 \times 81} = -0{,}064261\,,$$

$$\lambda^{(4)} = \frac{3 - 15\,\nu}{3 \times 16} = -0{,}010216\,, \qquad \lambda^{(10)} = \frac{3 - 99\,\nu}{3 \times 100} = -0{,}066788\,.$$

$$\lambda^{(5)} = \frac{3 - 24\,\nu}{3 \times 25} = -0{,}034461\,, \qquad \left[\lambda^{(\varkappa)} = \frac{3 - (\varkappa^2 - 1)\,\nu}{3\,\varkappa^2}\,. \quad (20\text{k})\right]$$

$$\lambda^{(6)} = \frac{3 - 35\,\nu}{3 \times 36} = -0{,}047632\,, \qquad \lambda^{\infty} = -\frac{\nu}{3} = -0{,}077564\,.$$

20k) habe ich hinzugefügt, Euler überläßt es dem Leser, die allgemeine Formel abzulesen oder abzuleiten, was freilich nicht schwierig ist.

Erst in einem späteren Abschnitte (*Cap. VI, § 287/328*) bespricht Euler die Farbenabweichung, und in einem Anhang zum ersten Buche werden die vollkommenen Linsen (lentes perfectae) behandelt, bei denen beide Abweichungen gehoben sind. Wir würden sie wegen der Nichtberücksichtigung für Fehler von Dingpunkten außer der Achse (besonders der Asymmetrie) nicht allgemein als vollkommen bezeichnen. A. C. Clairaut und J. d'Alembert (4) waren hier weiter als Euler.

Euler hat sich nie ganz von seiner Auffassung freigemacht, daß es nicht sowohl auf die Hebung des Farbenfehlers in der Achse als auf die Hebung des Vergrößerungsunterschiedes ankomme (1 *31*). Auch bei Abfassung der Dioptrik hat er wohl noch geglaubt, daß die vollkommenen Linsen nur in Ausnahmefällen nötig seien; er empfiehlt daher immer wieder zuerst seine zusammengesetzten, dann erst die vollkommenen Linsen. Ich stelle zusammen:

Lib. I, Cap. VII, § 343/5 (Allgemeines über optische Instrumente).

Lib. II, § 65/9, § 202/1? (Fernrohre).

Lib. III, § 56/75 (einfache Mikroskope), *§ 175/88* (zusammengesetzte Mikroskope).

Gelegentlich finden sich noch kleine Änderungen, z. B. wird ein Abstand zwischen den Linsen eingeführt oder es werden die Fehler des Okulars mit berücksichtigt.

(Schluß folgt.)

Sonderabdruck aus „Zeitschrift für Instrumentenkunde“, 59. Jahrg. 1939, 6. Heft.
Verlag von Julius Springer, Berlin W 9.
Printed in Germany.

Zur Vorgeschichte der Monochromate.

Von
H. Boegehold in Jena.

(Schluß von S. 207.)

Eulers Dioptrik ist mit Recht bewundert worden und wohl auch viele Jahrzehnte die Grundlage gewesen, doch hat sie meist durch Vermittlung des Auszuges gewirkt, den G. S. Klügel ([21]) 1778 veröffentlichte. Klügel führt als Hauptgrund den hohen Preis an, der durch die Ausführlichkeit des Eulerschen Werkes entstanden sei; nach dem Bücherverzeichnis von Heinsius waren es 9 Reichstaler (etwa 27 RM.), während der Klügelsche Auszug für 1 Reichstaler 12 Groschen (etwa 4,50 RM.) zu haben war[1]. Der Kürzung mußte vor allem zum Opfer fallen, was nicht praktisch anwendbar schien. Für die Fernrohrobjektive war man einig, daß der Farbenfehler zu heben war; daher gibt Klügel nur (*§ 209/15*) allgemeine Formeln für die Zusammensetzung von Linsen und *§ 332/9* die Eulersche Lehre von den vollkommenen Linsen.

Bei Mikroskopobjektiven war es damals noch gar nicht üblich, den Farbenfehler zu heben. Wohl geben Euler (*Lib. III*) und Klügel *§ 572/6, § 628/41* Anweisungen dazu. Aber hier hat es Klügel doch für nötig gehalten zu zeigen, wie man durch Spaltung des Objektivs (bei einfachen Mikroskopen durch Spaltung der einzigen Linse) in mehrere Sammellinsen den Öffnungsfehler verringern könne (*§ 569/71, 616/27*), und ganz versteckt (*§ 570*) findet man die Bemerkung, bei vier Linsen sei er sogar ganz zu heben. Das wird wenig beachtet und wenig verstanden worden sein.

Als fast anderthalb Jahrhunderte später A. König und M. v. Rohr an dieselbe mathematische Aufgabe herangingen wie Euler, waren die Gründe für die eingehendere Beschäftigung mit diesem Gegenstande ganz andere. Es war jetzt möglich, einfarbiges Licht herzustellen, so daß Mikroskopobjektive ohne Hebung des Farbenfehlers wieder anwendbar waren. Die Eulersche Rücksicht auf das Ungeschick des ausführenden Künstlers spielte keine Rolle mehr[2]. Wohl aber war man zu der Erkenntnis gelangt, daß die schwächeren Flächenkrümmungen die Zwischenfehler herabsetzen. So konnte die Untersuchung eine wichtige Anwendung finden: den Monochromat.

Die Abhängigkeit vom Brechungsverhältnis hatte Euler mehrfach angedeutet, er hatte aber nicht geprüft, wie sich die Zahl der notwendigen Linsen mit dem Brechungsverhältnis ändert[3]. Dies haben A. König und M. v. Rohr durchgeführt; da die Tafel ([24] *233*) vielleicht nicht allgemein bekannt ist, setze ich sie verkürzt hierher und überlasse es dem Leser, sich von der Übereinstimmung mit Euler zu überzeugen.

---

[1] Der Reichstaler wurde in 24 Groschen geteilt, die Teilung in 30 Groschen kam erst im 19. Jahrhundert auf (Artikel „Taler“ im Meyerschen Konversationslexikon). — Ich habe den Taler = 3 RM. gesetzt (preußischer Taler), werde jedoch auf Schröttersche Forschungen aufmerksam gemacht, nach denen man für den Reichstaler der damaligen Zeit vielleicht $1/3$ mehr rechnen müsse.

[2] Man vgl. ([4] *S. 107*). Die Rücksicht war in Deutschland (Euler weilte seit 1766 wieder in St. Petersburg, hat aber vor allem in Deutschland gewirkt) ebenso unzeitgemäß wie in Frankreich. Nur fand sich bei uns einige Jahrzehnte später der Künstler, der sie unnötig machte und das Pröbeln überhaupt verbannte.

[3] Natürlich kann man es aus Gleichung 20k) ableiten, wenn man die rechte Seite Null setzt.

Mindestabweichung (Seitenabweichung) für eine Linse $A_\infty = \frac{(4n-1)\,n}{4\,(n-1)^2\,(n+2)} \cdot \frac{1}{f'^3}$,

$\left(\text{in Eulers Bezeichnung } A_\infty = \frac{2\,\mu\,\lambda}{f'^3}\right)$.

	Eine Linse	Zwei Linsen	Drei Linsen	Vier Linsen
	A	$\frac{(2n-5)(3-6n)}{2^2(4n-1)} \cdot \frac{A}{3}$	$\frac{(4n-7)(5-8n)}{3^2(4n-1)} \cdot \frac{A}{3}$	$\frac{(6n-9)(7-10n)}{4^2(4n-1)} \cdot \frac{A}{3}$
$n = 1{,}5$	$2{,}143/f'^3$	$0{,}429/f'^3$	$0{,}111/f'^3$	0
$n = 1{,}75$	$1{,}245/f'^3$	$0{,}194/f'^3$	0	negativ $\times\ 1/f'^3$
$n = 2{,}5$	$0{,}555/f'^3$	0	negativ $\times\ 1/f'^3$	negativ $\times\ 1/f'^3$

II. Euler und Klingenstjerna.

Euler muß die besprochene Entdeckung mit einem anderen teilen. Doch werde ich etwas weiter ausholen.

Nach Feststellung des Brechungsgesetzes begann man die durch Brechung entstehenden Bildörter und ihre Fehler mathematisch zu untersuchen. Meine Bemerkung *Cz 283δ* berichtige ich; Newton hat den Öffnungsfehler nur für unendlichen Dingabstand bestimmt, für diesen Fall aber nicht nur das erste Glied, sondern auch zwei Zonenglieder. Für unendlichen Dingabstand, $n = 1{,}50$, stellte Chr. Huygens die Abweichung einer dünnen Linse und ihre günstigste Form fest ([18] *Prop. 27*), außerdem erwähnte er die aplanatischen Punkte ([18] *Prop. 12, Pars. 8*). Das erste Glied für eine brechende Fläche, sowie für eine dünne Linse bei beliebigem Dingabstand ist in A. G. Kästners Bearbeitung der Smithischen Optik ([26] *101 und 122*) angegeben (1755).

Von Eulers optischen Arbeiten habe ich schon vor 10 Jahren gesprochen ([1] *14, 32/5, 38/9*), besonders mit Rücksicht auf den Farbenfehler. Ich mache hier auf die Listen ([5] und [27]) aufmerksam; damals hatte ich sie nicht beachtet.

Euler legte ([6]), wahrscheinlich am 1. Juli 1756 ([5] *57*), das reichhaltige Ergebnis optischer Untersuchungen der Berliner Akademie vor, freilich nicht immer auch die Ableitungen. Veröffentlicht ist die Arbeit 1759. Vom Öffnungsfehler heißt es, dieser Fehler habe für eine dünne Linse den kleinsten Wert, wenn die Halbmesser so bestimmt seien:

$$r = \frac{s\,s'}{1{,}62740\,s - 0{,}19078\,s'} = \frac{(1-\beta')\,f'}{1{,}62740 - 0{,}19078\,\beta'},$$

$$r' = \frac{s\,s'}{1{,}62740\,s' - 0{,}19078\,s} = \frac{(1-\beta')\,f'}{1{,}62740\,\beta' - 0{,}19078},$$

und zwar sei die Abweichung:

$$-\Delta s' = \frac{0{,}93819\,(s-s')\,h^2}{s^3\,s'}\,[(s'-s)^2 - 0{,}23269\,s\,s'] = \frac{\mu\,h^2}{f'}\,[(1-\beta')^2 - \nu\,\beta'] .$$

Allgemein könne man setzen:

$$r = \frac{(1-\beta')\,f'}{1{,}62740 - 0{,}19078\,\beta' \pm 0{,}90513\,\sqrt{\lambda - 1}\,(1-\beta')},$$

$$r' = \frac{(1-\beta')\,f'}{1{,}62740\,\beta' - 0{,}19078 \pm 0{,}90513\,\sqrt{\lambda - 1}\,(1-\beta')},$$

$$-\Delta s' = \frac{\mu\,h^2}{f'^2}\,[\lambda\,(1-\beta')^2 - \nu\,\beta'] .$$

λ kennzeichne die Form der Linsen und ihre Abweichung.

Man vergleiche diese Formeln mit denen der Dioptrik [s. 9) und 10) auf S. 203].

Euler gibt noch Regeln für die Wirkung mehrerer Linsen. Ein Beispiel für die Zusammensetzung von drei Linsen (eine zerstreuend) steht in einer am 15. Juli 1756 vorgelegten, ebenfalls 1759 veröffentlichten Arbeit ([7]). Zwei Vorträge von 1756 und 1758 ([8, 9], 1768 veröffentlicht) enthalten ebenfalls Beispiele der Rechnung mit der Größe λ, die Euler auch schon für zusammengesetzte Linsen bestimmt. Es findet sich ([9] *215*): für eine gleichseitige Linse, $s = \infty$ ist $\lambda = 1{,}62979$, für zwei hintereinander stehende $\lambda = 0{,}979076$, für drei $\lambda = 0{,}858571$.

Wichtiger sind drei Arbeiten ([10/12]), die in demselben Bande der Akademieschriften erschienen sind (für 1761, aber 1768 herausgegeben), leider muß G. Eneström mitteilen ([5] *96*), „das Exhibitionsdatum ist unbekannt". Die erste gibt schon den größten Teil des Inhalts der beiden ersten Kapitel der Dioptrik, die beiden anderen beschäftigen sich mit unserm Gegenstande. Euler setzt hier Linsen zusammen, für die $\lambda = 1$ ist. Zunächst nimmt er zwei, drei oder vier Linsen gleicher Stärke an und bekommt für vier Linsen ein negatives λ, s. Gleichung 20i). Er fragt, ob man die Abweichung auch zu Null machen kann. (Zwei Linsen $\lambda = 1$ müßten entgegengesetzt gleich sein.) Für drei Linsen erhält man nach Gleichung 18) die Bedingung:

$$\lambda^{(3)} = \varphi^3 + \chi^3 + \psi^3 - \nu(1-\varphi)(1-\chi)(1-\psi) = 0\,.$$
$$\varphi + \chi + \psi = 1\,,$$

oder auch:

$$1 - (\nu + 3)(1-\varphi)(1-\psi)(\varphi+\psi) = 0\,.$$

Reelle Zahlen erhält man nur, wenn eine der Zahlen φ, χ, ψ negativ ist, Euler gibt Beispiele. Für vier Linsen kann man aber die Aufgaben mit lauter positiven, allerdings ungleichen Brennweiten lösen. Euler gibt also hier schon eine Lösung unserer Aufgabe, wenn auch eine andere als in der Dioptrik[1].

Die Arbeiten sind auch wegen des schon in den Titeln der beiden ersten gebrauchten Ausdrucks „confusion des verres dioptriques causée par leur ouverture" bemerkenswert. Die Bezeichnung „Öffnungsfehler" kann also auf Euler zurückgeführt werden. An anderen Stellen spricht er freilich auch von der Abweichung infolge der Kugelgestalt.

Für 1762 stellte die Petersburger Akademie ([22] *456*, [20] *6*) die Aufgabe, zu untersuchen, „bis wieweit die Unvollkommenheiten der Fernrohre und Mikroskope, entstehend aus „der verschiedenen Brechbarkeit und der Kugelform der Gläser, durch Zusammensetzung „mehrerer Linsen gehoben oder vermindert werden können".

Eulers Arbeit ([13]) wurde der Akademie am 17. Mai 1762[2] vorgelegt, am 12. März 1761 hatte er der Berliner Akademie eine Schrift mit fast demselben Titel übergeben ([5] *63/4*). Ob er sich um den Preis beworben hat, ist mir nicht klar, jedenfalls ist die Arbeit auf Kosten der Petersburger Akademie gedruckt worden.

Euler löst die gestellte Aufgabe, da er aber noch seine Meinung über einen Zusammenhang zwischen Brechwert und Zerstreuungsvermögen ([1] *14ff*) aufrechterhält,

---

[1] Die Zahlen Eulers scheinen mir aber infolge eines falschen Analogieschlusses nicht ganz richtig zu sein. Der Gleichung 18) entspricht für vier Linsen ($\varphi + \chi + \psi + v = 1$)

$$\lambda^{(4)} = \lambda_1\varphi^3 + \lambda_2\chi^3 + \lambda_3\psi^3 + \lambda_4 v^3 - \nu(1-\varphi)(1-\chi)(1-\psi)(1-v) + \varphi\chi\psi v\,.$$

Für $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$ ergibt die Forderung $\lambda^{(4)} = 0$.

$$1 - (\nu+3)(1-\varphi)(1-\chi)(1-\psi)(1-v) + (\nu+3)\varphi\chi\psi v = 0.$$

(Bei Euler fehlen in beiden Gleichungen die letzten Glieder.)

Eine Lösung ist beispielsweise $\varphi = \psi = 0{,}30622$, $\chi = \nu = 0{,}19378$; Euler gibt 0,32962 und 0,17038.

[2] Also sofort nach Beendigung des Kriegszustandes zwischen Preußen und Rußland (5. V. 1762).

sind wohl die meisten Formeln, nicht aber die Beispiele richtig[1]. Ein Anhang behandelt die Hebung des Öffnungsfehlers durch zwei Linsen aus demselben Glase, natürlich von verschiedenem Vorzeichen der Brennweite. In der Einleitung zum Anhang (S. 26) heißt es: „Schon früher versuchte ich durch Vervielfältigung der Linsen den Öffnungsfehler zu „vermindern und selbst auf Null zu bringen, nahm damals aber an, daß die Einzellinsen „die kleinstmögliche Abweichung hervorbringen; das schien mir der Ausführung am besten „angepaßt, doch ließ sich das Ziel mit zwei Linsen nicht erreichen."

Das geht doch wohl auf die Aufsätze ($^{10/2}$), diese sind also vor dem 17. Mai 1762 eingereicht, wahrscheinlich vor dem 12. März 1761.

S. Klingenstjerna (* 18. VIII. 1698, † 26. X. 1765, seit 1728 über 20 Jahre Professor in Stockholm, später „Informator" des Kronprinzen) hatte ebenso wie Euler bei der theoretischen Prüfung der Möglichkeit einer Farbenhebung eine wichtige Anregung gegeben ([1] *15ff*). 1760 veröffentlichte er einen Aufsatz ([19]), wo in den letzten Abschnitten die Farbenabweichung, in der Hauptsache aber der Öffnungsfehler behandelt wird. Er leitet zunächst in eigentümlicher Weise[2] Bildort und Abweichung für eine einzelne brechende Fläche ab und setzt sodann zwei Flächen zu einer dünnen Linse zusammen. Die Gleichung *§ 5* [*6*][3] ist einfach eine Summenformel (vgl. *Cz 241/2*):

$$\tilde{s}' = s' - \frac{(n-1)\,s'^2 h^2}{2\,n^2}\left\{\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{s}\right)^2\left(\frac{1}{r}-\frac{n+1}{s}\right)-\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{s'}\right)^2\left(\frac{1}{r'}-\frac{n+1}{s'}\right)\right\}, \qquad 21)$$

Klingenstjerna löst die Klammern auf und gibt der Gleichung *§ 6* [*7*] die Form:

$$\tilde{s}' = s' - \frac{s'^2 h^2}{2\,n\,f'^2}\left\{\frac{n^3}{(n-1)^2 f'} - \frac{3\,n+2}{s'-s} + \frac{2\,(n+1)}{s'-s}\left(\frac{s}{r}+\frac{s'}{r'}\right) + \frac{n+2}{(n-1)\,(r'-r)}\right\}. \qquad 21\,a)$$

Er untersucht darauf *§ 7* [*8*] die Linse mit der geringsten Abweichung. Das Ergebnis ist dasselbe wie bei Euler (7 und 7a auf S. 202). Klingenstjerna schreibt es auch

$$\frac{1}{r} = \frac{n(2n+1)}{2(n-1)(n+2)}\cdot\frac{1}{s'} - \frac{4+n-2n^2}{2(n-1)(n+2)}\cdot\frac{1}{s}; \qquad \frac{1}{r'} = -\frac{4+n-2n^2}{2(n-1)(n+2)}\cdot\frac{1}{s'} + \frac{n(2n+1)}{2(n-1)(n+2)}\cdot\frac{1}{s}.$$

$$-\Delta\,s' = \frac{n\,s'^2 h^2}{2\,(n+2)\,f'^3}\left\{\frac{f'}{s'-s} + \frac{4\,n-1}{4\,(n-1)^2}\right\} \qquad 22)$$

oder auch:

$$\frac{1}{r} = \frac{\omega}{s'} - \frac{\varrho}{s}, \qquad \frac{1}{r'} = \frac{\omega}{s} - \frac{\varrho}{s'}. \qquad 22\,a)$$

Klingenstjerna bezieht nun (*§ 8* [*9*]) alle Linsen auf diese günstigste:

$$\frac{1}{r} = \frac{\omega}{s'} - \frac{\varrho}{s} + \frac{\eta}{f'}, \qquad \frac{1}{r'} = \frac{\omega}{s} - \frac{\varrho}{s'} + \frac{\eta}{f'}. \qquad 22\,b)$$

Er setzt dies in die Gleichung 21a) ein und hat dann

$$-\Delta\,s' = \frac{n\,s'^2 h^2}{2\,(n+2)\,f'^3}\left(\frac{f'}{s'-s} + \frac{4\,n-1}{4\,(n-1)^2} + \frac{(n+2)^2}{n^2}\eta^2\right) = \frac{s'^2 h^2}{2\,\varepsilon\,f'^3}\left(\frac{f'}{s'-s} + N + \varepsilon^2\eta^2\right). \qquad 23)$$

In Eulers Bezeichnung ist $\mu = \frac{N}{2\,\varepsilon}$, $\nu = \frac{1}{N}$, $\tau = \frac{\sqrt{N}}{\varepsilon}$, $\lambda = \frac{\varepsilon^2\eta^2}{N} + 1$.

---

[1] Wohl aber in zwei Vorträgen von 1764 und 1766 ([14, 15]), veröffentlicht 1768.

[2] Euler kennt das Verfahren auch, es findet sich ([16, 17]) in zwei Bruchstücken zur Bearbeitung der Dioptrik, die erst 1862 veröffentlicht sind, nach [5] *844/5* stammt das erste wahrscheinlich aus dem Jahre 1765, das zweite ist nach 1759 verfaßt.

[3] In eckigen Klammern habe ich die entsprechenden Paragraphen der Preisschrift ([20]) hinzugefügt. Klingenstjernas Buchstabenbezeichnung weicht von Eulers wie von unserer völlig ab. Ich habe die Formeln einfach übertragen.

Klingenstjerna bemerkt *§ 9 [10]*, daß zwei entgegengesetzte Werte von η dieselbe Abweichung geben: *§ 10 [16]* behandelt die Wirkung mehrerer Linsen. In *§ 11* heißt es, eine Hebung des Öffnungsfehlers sei nur durch Zusammensetzung mehrerer Linsen von verschiedenen Vorzeichen möglich.

Die Ähnlichkeit mit der Eulerschen Darstellung ist auffällig, damals war nur die Arbeit ([6]), und zwar im Jahre vorher, veröffentlicht. Klingenstjerna schreibt 1762 ([20] *4*) von ihr, da sie keine Beweise gäbe, schiene sie weniger zur Belehrung der Leser geschrieben zu sein, als um die Mathematiker zu eignem Herangehen aufzufordern. Auch wenn Klingenstjerna sie 1760 kannte[1], enthält seine Behandlung doch eine selbständige Leistung, um so mehr, als Euler nur die Zahlenwerte der Hilfsgrößen, nicht ihre Beziehungen zum Brechungsverhältnis angegeben hatte (s. S. 235).

1762 sandte Klingenstjerna auf die Preisfrage der Petersburger Akademie (S. 236) eine Schrift ([20]) ein; am 23. September wurde ihm der Preis zuerkannt. Die Arbeit enthält die frühere vollständig in sich, bringt aber doch mehr Neues, als ich vor 10 Jahren bei einer etwas flüchtigen Durchsicht fand.

§ 2 wird für eine einzelne Fläche außer dem ersten Gliede auch das erste Zonenglied angeführt. Ich teile den Ausdruck mit, indem ich beim Zonenglied einen Druckfehler im Vorzeichen eines Gliedes beseitige:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{s}' &= s' - \frac{(n-1)\,r\,s'^2}{n^3}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{s}\right)^2\left(\frac{1}{r}-\frac{n+1}{s}\right)z + \\ &+ \frac{(n-1)\,r\,s'^2}{n^5}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{s}\right)^3\left(\frac{1}{r}-\frac{n+1}{s}\right)\left[(n-1)\,s'\left(\frac{1}{r}-\frac{n+1}{s}\right)-\frac{n+1}{2}\,r\left(\frac{1}{r}+\frac{n-1}{s}\right)\right]z^2, \end{aligned}\right\} \quad 23\,\text{a)}$$

wo z die Pfeilhöhe ist.

Um zu zeigen, wie schon damals die äußere Form des Zonengliedes sehr verschieden war, gebe ich es auch nach Euler (s. S. 201, Anm. 1) an:

$$\left.\begin{aligned} \frac{(s-r)\,r}{s'-r} &= \frac{(s-r)^2\sin^2\sigma}{r} - (s-r)\cos\sigma\sqrt{1-\frac{(s-r)^2}{r^2}\sin^2\sigma} + \left[(s-r)\cos\sigma + \sqrt{\left(r^2-(s-r)^2\sin^2\sigma\right)\left(n^2-\frac{(s-r)^2}{r^2}\sin^2\sigma\right)}\right] = \\ &= r + (n-1)\,s + \frac{(n-1)\,s\,(s-r)\,[s-(n+1)\,r]}{2\,n\,r^2}\,\sigma^2 + \\ &+ \frac{(n-1)\,s\,(s-r)\,[3\,(n^2+n+1)\,s^3 - 3\,(n^3+5n^2+3n+3)\,r\,s^2 + (9n^3+17n^2+9n+9)\,r^2 s - (5n^3+5n^2+3n+3)\,r^3]}{24\,n^3\,r^4}\,\sigma^4. \end{aligned}\right\} \quad 23\,\text{b)}$$

Auch bei Euler [16] *573* findet sich eine Angabe, sonderbarerweise ist auch sie nicht in Ordnung, und ich kann sie nicht aufklären.

Das Zonenglied für eine einzelne Fläche ist also fast 70 Jahre früher abgeleitet worden, als ich 1935 glaubte ([3] *277*). Doch sehe ich nicht, daß vor Schleiermacher jemand an die Summierung über mehrere Flächen gedacht hätte.

Klingenstjerna untersucht ferner, für welchen Dingabstand die Abweichung einer einzelnen Linse verschwinden kann, sowohl für eine einzelne Fläche (*§ 4*, wo er auf Huygens verweist) wie für eine dünne Linse (*§ 12/4*). Er bemerkt, daß die Abweichung der ausgezeichneten Linse nicht immer ein Minimum zu sein braucht, sondern auch ein Maximum sein kann (*§ 11*).

Klingenstjerna geht dann an die Aufgabe, Linsen zu berechnen, bei denen Farben- und Öffnungsfehler gehoben sind (*§ 26/32*). Da er sich der Angaben Dollonds für die

[1] Das ist schwer zu entscheiden. Der Krieg mag auch hinderlich gewesen sein, Schweden gehörte zu den Gegnern Friedrichs des Großen.

Brechzahlen und das Zerstreuungsvermögen des Kron- und des Flintglases bedient[1], ist die Grundlage für seine Beispiele einwandfreier als die der gleichzeitigen Rechnungen Eulers (S. 236/7). Es handelt sich hier um die ersten Berechnungen achromatischer Objektive überhaupt, zusammen mit denen A. C. Clairauts ([4]).

§ 33 (Symmetrisches Glas-Wasser-Objektiv) mag wegen der vermuteten Verbesserung in Newtons Optik erwähnt werden[2].

Weitere Untersuchungen beziehen sich auf den Farbenunterschied der Vergrößerung.

Um endlich auf unsern Gegenstand zu kommen:

Die Bemerkung *§ 11* der früheren Abhandlung ist fortgefallen, dagegen findet sich:

§ 19. „Man soll die Form einer Doppellinse untersuchen, die — beide Teile unmittel- „bar hintereinander gesetzt — parallel einfallende Strahlen in gegebener Entfernung ohne „Öffnungsfehler vereinigt."

Die Formel 23) gibt bei der Zusammensetzung beider Linsen, wenn $f_2' = \xi f_1'$ ist:

$$\xi^3 \eta_1^2 + \eta_2^2 + \frac{(1+\xi)N}{\varepsilon^2}\left[\xi^2 - \left(1 + \frac{1}{N}\right)\xi + 1\right] = 0\,. \tag{24}$$

„Diese Gleichung hat für positives ξ immer imaginäre Wurzeln, wenn nicht „$N = \dfrac{4n-1}{4(n-1)^2} < 1$ ist, d. h. wenn nicht $n > \frac{5}{2}$ oder $n < \frac{1}{2}$ ist."

Für $n = 1{,}55$ muß man also ξ negativ nehmen. Es folgen darauf die Untersuchungen über Zusammensetzung von Sammel- und Zerstreuungslinsen einschließlich achromatischer Linsen.

§ 46 erwähnt, daß manche Nebenfehler, so die höheren Glieder, die Wirkungen der Linsendicken, nicht berücksichtigt seien. Dann folgt zum Schluß *§ 47.*

„Wären jedoch in einer mathematischen Frage Vermutungen zulässig, so könnte „es nicht gerade unwahrscheinlich aussehen, daß diese unbekannten, von der Kugelform „der Linsen herrührenden Teile der Abweichung, obgleich man sie, wie gesagt, schwer „feststellen kann, doch verringert werden können, wenn man eine Linse durch zwei oder „mehrere ersetzt, die vereinigt denselben Brennpunktsabstand haben wie die ersetzte, „und untereinander gleiche Brennpunktsabstände, was man die Zerspaltung der Linsen „nennen mag (quam substitutionem multisectionum lentium dicere liceat). Mindestens „kann man die oben definierten Hauptteile der Abweichung durch eine solche Zerspaltung „nicht nur vermindern, sondern ganz beseitigen, so daß, wenn nicht die aus verschiedener „Brechbarkeit entstehenden Abweichungen zu heben wären, was notwendig eine Zer- „streuungslinse verlangt, die ganze Aufgabe der Fernrohrverbesserung mit bloßen Sammel- „linsen zu lösen wäre. In P befinde sich eine Folge von $\varkappa$ Linsen mit gleichen Brenn- „punktsabständen; die Formen der Einzellinsen seien so gewählt, daß jede Linse, wie „sie benutzt wird, die von einem Punkte A durch die Folge gehenden Strahlen mit der

[1] Er hat auch ([20] *5/6*) ein Lehrprisma ([1], *35/7*; [2]) besessen, es aber anscheinend nicht zu Messungen benutzt.

[2] Es heißt dort ([23] 1. Buch, 1. T., Prop. VII; S. 68 der Ausgabe von Abendroth), man würde den Öffnungsfehler durch ein symmetrisches Glas-Wasser-Objektiv (zwei Glasmenisken, die eine bikonvexe Wasserlinse einschließen) sehr verringern können. Sind die Brechzahlen von Glas und Wasser $R:I$ und $R:K$ (n_1 und n_2), so müsse sich der hohle Halbmesser zum erhabenen verhalten wie $\sqrt[3]{KK-KI} : \sqrt[3]{RK-RI}$ $\left(\text{oder } \sqrt[3]{n_1-n_2} : \sqrt[3]{n_1 n_2 - n_2^2}\right)$. Hier ist offenbar ein Versehen, man könnte $\sqrt[3]{K-I}$ $\left(\text{oder } \sqrt[3]{n_1-n_2}\right)$ herausheben und das Verhältnis wäre von der Brechzahl des Glases ganz unabhängig. Klingenstjerna vermutet $\sqrt[3]{KK-KI} : \sqrt[3]{RR-RI}$ $\left(\text{oder } \sqrt[3]{n_1-n_2} : \sqrt[3]{n_2^2(n_1-1)}\right)$ und erhält damit einen Wert, der nicht weit von dem seinigen abweicht; allerdings muß er zugeben, daß er nicht erklären kann, wie Newton zu seiner Näherung gekommen ist.

„Mindestabweichung breche; die Brennweite der Folge sei f', B das Bild von A; $PA = s$, „$PB = s'$, die halbe Linsenöffnung h. Unter diesen Annahmen ist die Abweichung des „Randstrahls durch die ganze Folge:"

$$-\Delta s' = \frac{s'^2 h^2}{2 \varepsilon \varkappa^2 f'^3} \left\{ \frac{\varkappa^2 f'}{s' - s} + N - \frac{(\varkappa + 1)(\varkappa - 1)}{3} \right\}. \tag{25}$$

„Die Formen der Einzellinsen werden:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{r_1} &= \frac{\omega - \varrho}{s} + \frac{\omega}{\varkappa f'}, & \frac{1}{r_1'} &= \frac{\omega - \varrho}{s} - \frac{\varrho}{\varkappa f'},\\
\frac{1}{r_2} &= \frac{\omega - \varrho}{s} + \frac{2\omega - \varrho}{\varkappa f'}, & \frac{1}{r_2'} &= \frac{\omega - \varrho}{s} - \frac{2\varrho - \omega}{\varkappa f'},\\
\frac{1}{r_3} &= \frac{\omega - \varrho}{s} + \frac{3\omega - 2\varrho}{\varkappa f'}, & \frac{1}{r_3'} &= \frac{\omega - \varrho}{s} - \frac{3\varrho - 2\omega}{\varkappa f'},\\
\frac{1}{r_4} &= \frac{\omega - \varrho}{s} + \frac{4\omega - 3\varrho}{\varkappa f'}, & \frac{1}{r_4'} &= \frac{\omega - \varrho}{s} - \frac{4\varrho - 3\omega}{\varkappa f'}
\end{aligned}\right\} \tag{25a}$$

„usf., wenn noch mehr Linsen vorhanden. Dies kann alles leicht abgeleitet werden, durch „Anwendung der allgemeinen Formeln 22a) auf den vorliegenden Fall.

„Sind die einfallenden Strahlen parallel oder $s = \infty$, $s' = f'$, so wird der Ausdruck „für die Abweichung

$$\frac{h^2}{2 \varepsilon \varkappa^2 f'} \left(N - \frac{(\varkappa + 1)(\varkappa - 1)}{3} \right). \tag{25b}$$

„Setzt man für $\varkappa$ der Reihe nach 1, 2, 3, 4, so hat man für die einfache, zweigeteilte, „dreigeteilte, viergeteilte Linse usf.:

$$\frac{h^2}{2\varepsilon f'} \cdot N, \quad \frac{h^2}{8\varepsilon f'}(N - 1), \quad \frac{h^2}{18\varepsilon f'}\left(N - \frac{8}{3}\right), \quad \frac{h^2}{32\varepsilon f'}(N - 5) \quad \text{usf.}$$

„Werte, die sich verhalten wie $\frac{3N+1}{1} - 1$, $\frac{3N+1}{4} - 1$, $\frac{3N+1}{9} - 1$, $\frac{3N+1}{16} - 1$ usf., „sie nehmen ab, bis sie negativ werden, worauf sie unendlich langsam auf $-\frac{h^2}{6\varepsilon f'}$ zugehen, „die Abweichung der unendlich zerspaltenen Linse. Setzt man das Brechungsverhältnis „$n = \frac{3}{2}$, also $N = \frac{4n - 1}{4(n-1)^2} = 5$, so sind die obigen Werte:

$$15,\ 3,\ \tfrac{7}{9},\ 0,\ -\tfrac{9}{25} \text{ usf.,}$$

„also geht die Abweichung durch Zweiteilung wie $5:1$ herunter, durch Dreiteilung wie „$19\frac{2}{7}:1$, durch Vierteilung verschwindet sie, bei weiterer Teilung wird sie negativ und „wächst beständig bis zu $-\frac{1}{15}$ der einfachen Linse.

„Hieraus kann man sehen, wieweit man die Zerspaltung der Linsen als Mittel zur „Hebung der Hauptfehler benutzen kann, und welche Grenzen von der Natur diesem „Kunstgriff gesetzt sind. Ob er auch von Nutzen ist, die Nebenabweichungen zu verringern, „maße ich mir nicht an zu bestimmen; ich empfehle aber, daß es durch den Geist scharf- „sichtigerer Leute oder durch Versuche der Künstler festgestellt wird."

Es scheint, als hätte Euler zuerst eine Lösung der Aufgabe gefunden, den Öffnungsfehler durch Spaltung in Linsen mit gleichem Vorzeichen der Brennweite zu heben (s. S. 236), Klingenstjerna hat zuerst veröffentlicht. Der Leser wird erkannt haben, daß jeder von beiden Einzelheiten bemerkt hat, die beim andern fehlen.

Schrifttum.

Mit E habe ich auf das Verzeichnis (5), mit Cz auf das Czapskische Lehrbuch, mit B auf meinen Aufsatz (1) verwiesen. Bei den Eulerschen Arbeiten habe ich aber Ort und Zeit der Veröffentlichung angegeben.

1. H. Boegehold, Der Glas-Wasser-Versuch von Newton und Dollond. *Forsch. Gesch. Opt.* **1.** *7/40.* 4+. *1928.*
2. H. Boegehold, Ein Dollondsches Lehrprisma. Ebenda *86/9.* +. *1929.*
3. H. Boegehold, Ludwig Schleiermacher und seine optischen Arbeiten (1. Teil). Ebenda *243/301. 1935.*
4. H. Boegehold, Die Leistungen von Euler und d'Alembert für die Theorie des Fernrohrobjektivs und die französischen Wettbewerbsversuche gegen England in den letzten Jahrzehnten des 18. Jahrhunderts. *Diese Zeitschr.* **55.** *S. 97—111. 1935.*
5. G. Eneström, Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers. *Jahresber. Deutsche Math. Vereinig. 1910/3.* Ergbd. **4.** *1/388.*
6. L. Euler, *E 239 = Cz 2 = B 18. Mém. de l'acad. de Berlin* **13.** *S. 283/322. 1757,* veröffentlicht *1759.*
7. L. Euler, *E 240.* Ebenda *S. 323/72.*
8. L. Euler, *E 357.* Ebenda **17.** *S. 201/11. 1761;* veröffentlicht *1768.*
9. L. Euler, *E 358.* Ebenda *S. 212/30.*
10. L. Euler, *E 353.* Ebenda *S. 107/46.*
11. L. Euler, *E 354 = Cz 4* (nicht ganz richtig angeführt). Ebenda *S. 147/80.*
12. L. Euler, *E 355.* Ebenda *S. 181/90.*
13. L. Euler, *E 266 = Cz 3 = B 19.* St. Petersburg *1762.*
14. L. Euler, *E 359. Mém. de l'acad. de Berlin* **22.** *S. 119/70. 1766*; veröffentlicht *1768.*
15. L. Euler, *E 360.* Ebenda *S. 171/201.*
16. L. Euler, *E 844. Opera post. II, S. 567/604.*
17. L. Euler, *E 845. Opera post. II, S. 605/67.*
18. Chr. Huygens, = *Cz 2.*
19. S. Klingenstjerna, = *B 33.* Nach [22] *456* und *475* hat A. C. Clairaut die Abhandlung ins Französische übersetzt. *Journ. des Sav. 1762.* Größtenteils wiedergegeben [22] *475/83.*
20. S. Klingenstjerna, = *B 33a* (Petersburger Preisschrift *1762*).
21. G. S. Klügel, = *Cz 1.*
22. J. F. Montucla, Histoire des mathematiques. Tome III. *Ach. et publ. par* J. de la Lande. H. Agasse, Paris 1802. 4°. VIII, 832 S., 17 Tfln.
23. I. Newton, (Optik) = *Cz 4 = B 36.*
24. M. v. Rohr, = *Cz 9 = B 46.*
25. F. Rudio und C. Schröter, Die Eulerausgabe. (Fortsetzung.) *Vjschr. Naturf. Ges. Zürich* **56.** *S. 552/7. 1911.*
26. R. Smith, (A. G. Kästner), = *Cz 2.*
27. P. Stäckel und W. Ahrens, Der Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und P. H. v. Fuss über die Herausgabe der Werke Leonhard Eulers. Herausgegeben, erläutert und durch einen Abdruck der Fussschen Liste der Eulerschen Werke ergänzt. 8°. 184 S. B. G. Teubner, Leipzig 1908.